N° d'ordre : 108 Année 1993

THÈSE

présentée en vue de
l'obtention du titre de

DOCTEUR

de

L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE

SPECIALITE : AUTOMATIQUE

par

Thierry BOURRET

COMMANDE ROBUSTE DES SYSTEMES MULTIVARIABLES DISCRETS SOUMIS A DES PERTURBATIONS PARAMETRIQUES. APPLICATION AU PILOTE AUTOMATIQUE D'UN AVION DE TYPE AIRBUS.

Soutenue le 28 janvier1993 devant la Commission d'Examen :

MM.	J. BERNUSSOU	Président - Rapporteur
	M. GAUVRIT	Directeur de thèse
	P. MENARD	
	P. MOUYON	
	A. OUSTALOUP	Rapporteur

Résumé

Dans cette thèse, nous envisageons la synthèse de commandes robustes aux variations paramétriques pour les systèmes multivariables linéaires discrets. Quatre approches sont proposées pour résoudre ce problème. Le placement de pôles robuste par un choix judicieux de vecteurs propres est d'abord décrit. Une approche, utilisant le formalisme de Lyapunov permettant l'optimisation des marges de stabilité du système, est ensuite développée. La synthèse d'une commande robuste fondée sur l'insensibilité du critère de performance aux incertitudes paramétriques constitue la troisième technique proposée. Enfin nous avons décrit une nouvelle technique utilisant comme mesure de robustesse la plus mauvaise qualité de l'identification en boucle fermée des paramètres incertains. Pour chacune de ces méthodes, nous décrivons un algorithme permettant de déterminer une commande par retour dynamique de sortie, prenant en compte simultanément les contraintes de performance et robustesse. Nous pourrons ainsi choisir un compromis entre ces deux exigences contradictoires. Des liens mathématiques unissant ces différentes techniques sont aussi présentés, permettant de valider chacune des approches. Finalement nous avons appliqué puis comparé tous les algorithmes proposés d'une part sur un exemple mathématique et d'autre part au pilotage automatique d'un avion de type Airbus. Les résultats obtenus sur cette application réaliste, valident les techniques présentées qui permettent d'améliorer les techniques optimales classiques grâce à une robustesse aux incertitudes paramétriques.

Mots clés

Systèmes discrets — Robustesse paramétrique — Robustesse en stabilité — Placement robuste de pôles — Liens identification commande

Abstract

In this thesis, we consider the parameter robust feedback design for multivariable discrete-time systems. Four different approaches are presented to solve this type of problems. Robust pole assignment is developed using eigenvectors to reduce pole sensitivity. Then, we consider a technique based on Lyapunov theory, that allows oneself to improve the stability margins. We also study the possibility to design a feedback that reduces the parameter sensitivity of a quadratic performance index. Finally we describe a new technique based on the poor quality of parametric bayesian identification. For each of these approaches, we describe a computational procedure that generate reduce order output feedback controllers. These procedures take into account simultaneously performance and robustness constraints, so that it is possible to choose a desirable balance between these two opposite objectives. Theoretical links between these techniques are also presented. Finally we apply and compare the results from each of the procedure considered, on two applications. A simple example and a more complex aeronautical application (auto-pilot of an Airbus like plane) is considered. The results given by this application confirm the robustness of several techniques described, and therefore are well suited to improve classical optimal techniques.

Keywords

Discrete-time systems — Parameter robustness — Stability robustness — Robust pole assignment — Identification and control links

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été menés au Centre d'Etudes et de Recherches de Toulouse dans le département d'Automatique (CERT-DERA). Je remercie Monsieur Jean-Marc Peyrard, directeur du CERT lorsque j'ai commencé ma thèse, et Monsieur François Jouaillec, directeur actuel, pour m'avoir accueilli dans leur établissement.

Mes remerciements vont également à Monsieur Labarrère, responsable du département d'automatique, et à Monsieur Fossard responsable de la formation doctorale en Automatique de l'ENSAE, qui m'ont permis de réaliser cette étude au sein du département.

Je tiens à remercier Monsieur Gauvrit, ingénieur de recherches au DERA, qui a encadré ce travail, pour la confiance qu'il m'a accordée et pour l'expérience dans le domaine de l'automatique dont il a su me faire profiter.

Je remercie Messieurs J. Bernussou, directeur de recherche au LAAS/CNRS, et A. Oustaloup, professeur à l'ENSERB, d'avoir bien voulu accepter d'être rapporteur de mon travail.

Je remercie également Monsieur P. Mouyon, ingénieur de recherche au CERT/DERA, pour avoir accepté de participer au jury.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur P. Menard, ingénieur à l'Aérospatiale, pour avoir accepter d'être membre du jury. Je souhaite lui exprimer toute ma reconnaissance, pour sa participation à l'application de mes résultats sur un problème industriel réaliste.

Je tiens également à remercier tous les ingénieurs du DERA, qui par leurs multiples connaissances, ont pu m'apporter leur aide dans des domaines variés : Jean-Luc Boiffier, Alain Bucharles et Pierre Vacher, pour leurs aides et leurs conseils dans le domaine aéronautique, Jean-François Magni et Pierre Apkarian pour leur soutien sur les parties théoriques du travail, et Michel Grau qui, par ses compétences, permet à tous de disposer d'un outil informatique fiable et efficace.

J'exprime également toute ma reconnaissance au service d'édition du CERT pour la réalisation matérielle de ce document, ainsi qu'à Pierre Guilemot, responsable administratif du DERA, pour sa grande disponibilité.

Finalement, je remercie tout particulièrement tous les stagiaires de thèse qui m'ont beaucoup aidé tout au long de mes travaux de rédaction, notamment Patrick Le Page, Caroline Thierry et Gaëlle Lavigne, pour la relecture du document.

Sommaire

Remerciements v

Résumé xiii

Abstract xiii

Notations xv

Présentation générale. 1

Chapitre I **Introduction générale** 3

Chapitre II **Présentation du problème** 7

II.1 Introduction 7

II.2 Incertitudes et variations paramétriques 7

Incertitudes de modélisation 7

Variations paramétriques 8

Lien entre les paramètres 9

II.3 Modèle en boucle ouverte 9

Modèle discret 9

Modélisation des variations paramétriques 10

II.4 Structure de la commande 11

II.5 Boucle ouverte et boucle fermée 12

II.6 Conclusions 13

Synthèse de commande robuste aux variations paramétriques pour les systèmes discrets. 15

Chapitre III **Introduction** 17

Chapitre IV **Placement robuste de pôles** 19

IV.1 Introduction 19

IV.2 Mesure de sensibilité des pôles d'un système 19

IV.3 Synthèse de commande robuste 22

Positionnement du problème 22

Calcul du gain plaçant les n valeurs propres désirées 23

Degrés de liberté 24

Optimisation de la robustesse 24

Réactualisation des vecteurs propres 26

Conclusions 31

IV.4 Observateur robuste 31

Construction d'un observateur d'ordre minimal 31

Optimisation de l'observateur 33
Conclusions 37
IV.5 Commande globale retour d'état et observateur 37
IV.6 Conclusions 38

Chapitre V Robustesse en stabilité des systèmes discrets 41
V.1 Introduction 41
V.2 Borne de stabilité pour les systèmes discrets 41
V.3 Borne de stabilité pour les systèmes discrets soumis à des variations paramétriques 43
V.4 Extensions théoriques des bornes de stabilité 46
Changement de représentation d'état 46
Ensemble des valeurs propres à l'intérieur d'un disque de rayon inférieur à l'unité 46
Conclusions 47
V.5 Synthèse de commande robuste en stabilité 48
Robustesse et performance 48
Critère de performance en boucle fermée 48
Mesure de robustesse en stabilité pour des variations non structurées 50
Cas des variations paramétriques (perturbations structurées) . 51
Synthèse en robustesse et performance 51
V.6 Conclusions 53

Chapitre VI Sensibilité du critère de performance aux variations paramétriques 55
VI.1 Introduction 55
VI.2 Critère de performance 55
VI.3 Sensibilité du critère de performance 56
VI.4 Synthèse de loi de commande performante et insensible aux variations paramétriques 57
VI.5 Conclusions 59

Chapitre VII Analyse comparée des mesures de robustesse et des méthodes de synthèse robuste. 61
VII.1 Introduction 61
VII.2 Exemple du troisième ordre 61
Analyse de la boucle ouverte 62
Spécifications en boucle fermée et performance 64
VII.3 Analyse des mesures de robustesse 65
Sensibilité des pôles en boucle fermée 66
Borne de stabilité dans le cas structuré 68
Variations du critère de performance 69
Complexité comparée des mesures de robustesse 69

Conclusions 70
VII.4 Calcul des commandes robustes et performantes 70
Sensibilité des pôles en boucle fermée 71
Borne de stabilité dans le cas non structuré 73
Sensibilité du critère de performance 75
VII.5 Etude comparée des résultats et des algorithmes de synthèse . . . 76
Positions des pôles en boucle fermée 77
Mesures de robustesse et de performance 78
Domaines de stabilité 78
Temps de calcul des lois de commande 79
Figures 81
VII.6 Conclusions 87

Théorie PRCBI Application à la synthèse de commande robuste pour les systèmes discrets. 89

Chapitre VIII Introduction 91

Chapitre IX Théorie générale PRCBI 93
IX.1 Introduction 93
IX.2 Qualité de l'identification paramétrique en régime permanent . . . 94
IX.3 Etude locale autour du vecteur de paramètres nominaux 96
IX.4 Calcul de ΔM 97
IX.5 Conclusions 100

Chapitre X Mesure de robustesse fondée sur la plus mauvaise qualité de l'identification des paramètres incertains 101
X.1 Mesure de robustesse 101
X.2 Directions de robustesse paramétriques 104
Direction de robustesse minimale et maximale 104
Aspect géométrique 104
Calcul de $G_{\theta_o}^{-1}$ 105
X.3 Conclusions 106

Chapitre XI Synthèse de commande robuste utilisant le PRCBI . . . 107
XI.1 Introduction 107
XI.2 Mesure de robustesse en boucle fermée 107
XI.3 Synthèse de commande robuste aux variations paramétriques . . . 108
Synthèse avec filtre optimal et gain variable 109
Synthèse avec filtre de Kalman robuste 109
Remarque sur ces deux approches de synthèse 110
XI.4 Méthodologie PRCBI simplifiée 111
Introduction 111
Choix des matrices D, Q et R 111

Existence du gain de Kalman . . . 112
Calcul de la matrice K_o . . . 113
Stabilité de la solution obtenue . . . 114
Expression simplifiée des équations de Lyapunov . . . 117
Calcul simplifié de la mesure de robustesse . . . 118
Conclusions . . . 119
XI.5 Nouvelle méthode de synthèse de commande robuste . . . 120
Introduction . . . 120
Mesure de performance . . . 121
Synthèse robustesse et performances . . . 122
XI.6 Conclusions . . . 123

Chapitre XII Comparaison avec les autres approches robustes. Application à l'exemple du troisième ordre. . . . 125
XII.1 Introduction . . . 125
XII.2 Liens théoriques entre PRCBI, la robustesse en stabilité et l'insensibilité des performances . . . 125
Résultats sur les équations de Lyapunov discrètes . . . 126
Lien entre PRCBI et la robustesse en stabilité . . . 127
Amortissement optimal des systèmes discrets . . . 129
Qualité d'identification et sensibilité aux performances . . . 129
Conclusions . . . 130
XII.3 Application à l'exemple du troisième ordre . . . 130
Mesure de robustesse et directions de robustesse minimale et maximale . . . 131
Complexité du calcul de la mesure de robustesse et de l'algorithme de synthèse . . . 133
Synthèse de loi de commande robuste . . . 134
Comparaison avec les autres commandes robustes . . . 136
Figures . . . 139
XII.4 Conclusions . . . 143

Application de la commande robuste au cas du pilote automatique d'un avion de type Airbus. . . . 145

Chapitre XIII Présentation du problème . . . 147
XIII.1 Introduction . . . 147
XIII.2 Point de vol . . . 148
XIII.3 Les modèles dynamiques . . . 149
Modèles linéaires . . . 149
Calcul approché des fonctions de transfert entrées/sorties . . . 150
XIII.4 Spécifications du pilote automatique . . . 152

XIII.5 Structure de la commande 155
Prise en compte des intégrateurs 155
Passage continu-discret 156
XIII.6 Mesure de performance 156
Modèle de référence 157
Mesure de performance 157
Condition initiale 159
Remarques sur la mesure de performance 160
XIII.7 Conclusions 161

Chapitre XIV Synthèse de loi de commande pour le pilote automatique 163
XIV.1 Introduction 163
XIV.2 Choix des modèles 163
Modèle nominal et modèles perturbés 164
Paramètres fictifs 166
Modèle de référence et critère de performance 167
XIV.3 Placement de valeurs et vecteurs propres 168
Description de la méthode 168
Calcul de la commande 169
Evaluation de la robustesse 170
XIV.4 Placement robuste de pôles 171
Placement direct de pôles 171
Optimisation du choix des valeurs propres 172
Robustesse du retour d'état 173
Observateur 174
Conclusions 175
XIV.5 Commande robuste en stabilité 176
Détermination des commandes 176
Commande optimale en performance 177
Amélioration de la robustesse 179
XIV.6 Commande robuste PRCBI 181
Détermination des commandes 182
Evaluation des gains en robustesse 182
XIV.7 Conclusions 185
XIV.8 Planches 186

Conclusions et perspectives. 199
1 Résumé de la contribution 201
2 Perspectives 203

Bibliographie 205

Annexes 211

Annexe A **Propriétés et Dérivation de la Trace d'une matrice** . . . 212
A.1 Définition 212
A.2 Propriétés fondamentales 212
A.3 Dérivation par rapport à une matrice 212

Annexe B **Valeurs singulières d'une matrice** 213
B.1 Décomposition singulière d'une matrice 213
B.2 Valeurs singulières min et max 213
B.3 Propriétés des valeurs singulières 214

Annexe C **Normes matricielles** 215
C.1 Norme spectrale 215
C.2 Norme de Frobenius 215
C.3 Lien entre les normes matricielles 216

Résumé

Dans cette thèse, nous envisageons la synthèse de commandes robustes aux variations paramétriques pour les systèmes multivariables linéaires discrets. Quatre approches sont proposées pour résoudre ce problème. Le placement de pôles robuste par un choix judicieux de vecteurs propres est d'abord décrit. Une approche, utilisant le formalisme de Lyapunov permettant l'optimisation des marges de stabilité du système, est ensuite développée. La synthèse d'une commande robuste fondée sur l'insensibilité du critère de performance aux incertitudes paramétriques constitue la troisième technique proposée. Enfin nous avons décrit une nouvelle technique utilisant comme mesure de robustesse la plus mauvaise qualité de l'identification en boucle fermée des paramètres incertains. Pour chacune de ces méthodes, nous décrivons un algorithme permettant de déterminer une commande par retour dynamique de sortie, prenant en compte simultanément les contraintes de performance et robustesse. Nous pourrons ainsi choisir un compromis entre ces deux exigences contradictoires. Des liens mathématiques unissant ces différentes techniques sont aussi présentés, permettant de valider chacune des approches. Finalement nous avons appliqué puis comparé tous les algorithmes proposés d'une part sur un exemple mathématique et d'autre part au pilotage automatique d'un avion de type Airbus. Les résultats obtenus sur cette application réaliste, valident les techniques présentées qui permettent d'améliorer les techniques optimales classiques grâce à une robustesse aux incertitudes paramétriques.

Abstract

In this thesis, we consider the parameter robust feedback design for multivariable discrete-time systems. Four different approaches are presented to solve this type of problems. Robust pole assignment is developed using eigenvectors to reduce pole sensitivity. Then, we consider a technique based on Lyapunov theory, that allows oneself to improve the stability margins. We also study the possibility to design a feedback that reduces the parameter sensitivity of a quadratic performance index. Finally we describe a new technique based on the poor quality of parametric bayesian identification. For each of these approaches, we describe a computational procedure that generate reduce order output feedback controllers. These procedures take into account simultaneously performance and robustness constraints, so that it is possible to choose a desirable balance between these two opposite objectives. Theoretical links between these techniques are also presented. Finally we apply and compare the results from each of the procedure considered, on two applications. A simple example and a more complex aeronautical application (auto-pilot of an Airbus like plane) is considered. The results given by this application confirm the robustness of several techniques described, and therefore are well suited to improve classical optimal techniques.

Notations

$\mathbf{R}^{n\times m}$: Corps des matrices réelles de dimension $n \times m$.

$\mathbf{C}^{n\times m}$: Corps des matrices complexes de dimension $n \times m$.

$M^\top$: Matrice transposée de la matrice M.

$|M|$: Déterminant de la matrice M.

$(M)_s$: Partie symétrique d'une matrice $(M)_s = \frac{1}{2}(M + M^\top)$.

$\|M\|$: Norme spectrale de la matrice M

$\|M\|_2$: Norme euclidienne de la matrice (ou du vecteur)M

$\|M\|_F$: Norme de Frobenius de la matrice M $\|M\|_F^2 = \mathrm{Tr}(M^\top M)$

$\mathrm{Tr}(M)$: Trace de la matrice M.

$\mathrm{Rang}(M)$: Rang de la matrice M.

$\mathrm{Ker}(M)$: Noyau de la matrice M.

$\mathrm{Imag}(M)$: Espace vectoriel image de la matrice M.

$\lambda_{\max}(M)$ ou $\rho(M)$: Valeur propre maximale de la matrice M.

$\lambda_{\min}(M)$: Valeur propre minimale de le matrice M.

$\sigma_{\max}(M)$: Valeur singulière maximale de la matrice M.

$\sigma_{\min}(M)$: Valeur singulière minimale de le matrice M.

$\{A, B, C(, D)\}$: Système formé par les équations $\begin{cases} X_{k+1} & = AX_k + BU_k \\ Y_k & = CX_k(+DU_k) \end{cases}$

$E[\ .\ ]$: Espérance mathématique.

δ_{ij} : Symbole de Kronecker $\begin{cases} \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

$Y^k = \{Y_o, Y_1, \cdots, Y_k\}$: Ensemble des vecteurs Y_i jusqu'à l'instant k.

$\mathrm{p}(\theta \mid Y^k)$: Densité de probabilité associée à θ connaissant Y^k.

PRCBI : Parameter Robust Control by Bayesian Identification.

Présentation générale.

Chapitre I Introduction générale

Au cours des Journées Nationales sur la Robustesse organisées par le CERT-DERA début septembre 1992, J. M. Maciejowski [31] définit la notion de robustesse de la manière suivante

"Les propriétés du système se conservent dans un ensemble ouvert"

ou, de manière équivalente,

"De petites variations ne perturbent pas les propriétés d'un système"

Cette définition qualitative nécessite quelques développements afin de comprendre ce que ce concept de robustesse contient.

- **Les propriétés du système** caractérisent les performances attendues pour le système. La première d'entr'elles concerne la stabilité et a donc fait l'objet de nombreux développements depuis le début de l'automatique moderne. Mais pour de nombreuses applications pratiques la garantie de stabilité est très insuffisante. Il est souvent indispensable d'avoir d'autres propriétés (temps de réponse, amortissement, faible excitation des commandes...) caractérisées par des critères de performance (critères quadratique de type LQ par exemple).
- **Un ensemble ouvert** décrira l'ensemble dans lequel le système peut évoluer sous l'effet de perturbations, par nature inconnues. Cet ensemble peut être décrit de deux manières. La première est de donner ses "frontières" c'est à dire caractériser les évolutions maximales possibles pour le système. La seconde est de définir un point nominal, puis des directions de variations possibles autour de ce point nominal.
- **Les variations** ou perturbations désignent les changements auxquels un système peut être soumis. Ces variations peuvent être par nature de plusieurs types, représentant divers types d'incertitudes (erreurs de modélisation, non linéarités, variations paramétriques...).

Il y a quarante ans, au début de l'automatique, une des propriétés fondamentales recherchées était de rendre le système en boucle fermée moins sensible aux incertitudes de modélisation qu'en boucle ouverte. Cette propriété fondamentale a retrouvé un regain d'intérêt il y a une dizaine d'années après une longue période d'occultation. Les techniques fréquentielles des années 1950–1960, fondées sur des représentations graphiques, ont conduit aux régulateurs PID. Ces techniques (lieu de Black, de Bode, de Nyquist, d'Evans...) ont introduit les notions de marge de gain et marge de phase et donc les premières exigences de robustesse. A cette époque, les liens théoriques entre l'insensibilité et la structure bouclée n'étaient pas formulés, et ces méthodes ne s'avéraient adaptées qu'au cas monovariable (une entrée, une sortie).

Dans les années 1960–1980, les développements théoriques de l'automatique ont permis de traiter de manière plus générale les systèmes multivariables. En revanche, à l'exception de la "Quantitative Feed-back Theory" d'Horowitz [16][17], tous ont quasiment ignoré l'exigence fondamentale de robustesse aux incertitudes de modélisation. Bien au contraire, les théories

optimales des systèmes multivariables (LQ, LQG, observateur, filtre de Kalman...) supposent une connaissance parfaite du système. Pour résoudre cette exigence, se sont donc parallèlement développées des techniques d'identification paramétrique (une meilleure connaissance des paramètres du système permettant d'atteindre de meilleures performances en commande).

Ces théories ont montré leurs limites lorsque la complexité grandissante des lois de commande rendait le système hypersensible aux incertitudes de modélisation (modes souples ignorés, incertitudes paramétriques...). L'approche auto-adaptative a tenté de résoudre ce conflit en ajustant en temps réel la connaissance que nous pouvions avoir du système, afin de parfaire la commande [14]. Elle en a créé un autre, à savoir qu'une bonne qualité d'identification en temps réel était souvent incompatible avec une bonne commande.

Depuis le début des années 1980, les développements théoriques récents se tournent à nouveau vers les problèmes liés à la robustesse des lois de commandes. Doyle et Stein [7], Safonov [42], Lehtomaki [29], posent les bases fondamentales d'une théorie exigeant d'une commande une robustesse aux incertitudes de modélisation et précisent les compromis entre de bonnes performances et une excellente robustesse. Les approches de type LQG/LTR et H_∞ permettent de traiter le cas des incertitudes fréquentielles (caractérisant bien les erreurs de modélisation telles les dynamiques négligées). La μ théorie permet de traiter les cas des perturbations fréquentielles structurées, voire paramétriques [6]. La complexité de cette méthode réside dans le fait que la mesure proposée, permettant de caractériser les variations paramétriques acceptables, n'est aisément calculable que dans quelques cas simples.

Les travaux de V. L. Kharitonov, repris par B. R. Barmish [2] ont permis de caractériser la stabilité d'un système soumis à des perturbations paramétriques bornées. De récents développements permettent maintenant d'étendre ces résultats au problème de la robustesse aux performances [8]. Ces outils constituent actuellement de bons outils d'analyse de robustesse, mais ne permettent pas une synthèse systématique mariant les performances et la robustesse.

D'autres récents développements théoriques sur la théorie des graphes, envisagent une approche topologique de la robustesse, en définissant un espace topologique permettant de caractériser la distance entre deux systèmes dynamiques [12]. Cette approche semble très prometteuse mais ne permet pas encore d'envisager la synthèse robuste.

De toutes ces approches, essentiellement développées dans le cas des systèmes continus, peu demeurent extrapolables au cas des systèmes discrets. La prise en compte des incertitudes paramétriques au niveau de la modélisation où l'indépendance des paramètres ne peut être contestée, rend caduques beaucoup de techniques de synthèse. Actuellement, il apparaît peu de recherches réalistes conduites sur la synthèse des commandes robustes aux incertitudes paramétriques pour les systèmes multivariables discrets.

Notre travail représente une contribution dans le cadre de la synthèse de correcteurs **robustes aux incertitudes paramétriques** pour les **systèmes multivariables discrets**. Notre étude prolonge les travaux de M. Gauvrit [10] sur la performance des estimateurs bayésiens en boucle fermée et de G. P. Gomes [13] posant les bases théoriques d'une commande robuste liée à la qualité de l'identification bayesienne de paramètres incertains.

L'approche qu'ils proposent, tout en s'opposant radicalement au concept de la commande adaptative, est fondée sur le calcul de la **qualité de l'identification** bayesienne des paramètres

incertains du système, en régime asymptotique. Plus cette qualité sera médiocre, meilleure sera la commande c'est-à-dire plus le système sera robuste aux variations paramétriques. L'identification bayesienne ne sera pas effectivement réalisée en ligne comme dans le cas de la commande adaptative, mais les équations et la structure de l'identification nous serviront de support pour le calcul des propriétés asymptotiques de l'identification.

L'objectif de notre travail est triple :

- ☐ **Développer** une méthodologie simple permettant la synthèse de lois de commande robustes aux variations paramétriques, applicables pour les systèmes multivariables discrets.
- ☐ **Comparer** les performances de cette nouvelle approche à d'autres, apparaissant dans la littérature et parfois adaptées au même type de problèmes.
- ☐ **Appliquer** ces techniques à un exemple pratique réaliste où le problème de robustesse paramétrique est particulièrement pertinent, afin de valider les méthodologies développées.

Notre mémoire se décompose de la manière suivante :

- Nous présenterons, dans un premier temps le problème que nous envisageons. Nous décrirons les choix de modélisation que nous avons faits, ainsi que le cadre du travail de l'étude.
- Dans la première partie, nous présenterons trois approches différentes traitant le problème retenu. Pour chacune de ces approches nous décrirons une mesure de robustesse, basée sur différents critères, ainsi qu'une méthodologie de synthèse adaptée. Chacune de ces méthodes sera ensuite appliquée à un exemple simple.
- Dans une seconde partie, nous décrirons en détail la méthodologie fondée sur la médiocre qualité de l'identification bayesienne des paramètres incertains du système et nous présenterons une approche originale permettant la synthèse robuste aux performances. Nous comparerons ensuite cette méthodologie à celles développées dans la partie précédente.
- Dans une dernière partie, nous appliquerons ces théories à un problème aéronautique réaliste, en considérant le cas du pilote automatique d'un avion de transport type Airbus (la robustesse paramétrique demeurant le souci principal de cette application).
- En conclusion, nous mettrons en avant les apports de notre travail tout en considérant les possibilités de recherches futures.

Chapitre II Présentation du problème

II.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons décrire le problème envisagé dans notre travail. Nous nous sommes intéressés aux systèmes multivariables linéaires discrets soumis à des incertitudes paramétriques.

Dans un premier temps nous allons définir la notion de variation paramétrique en montrant la différence existant avec les incertitudes de modélisation. Nous présenterons ensuite les choix faits pour une modélisation linéaire des variations paramétriques. Nous examinerons la structure de commande retenue, en montrant comment se ramener à une structure de type retour de sortie statique. Nous verrons enfin le lien entre les variations paramétriques en boucle ouverte et en boucle fermée.

II.2 Incertitudes et variations paramétriques

Nous ferons une différence entre les approximations de modélisation et les variations de modèles qui sont deux problèmes bien différents.

II.2.1 Incertitudes de modélisation

Une approximation de modélisation signifie que nous possédons un modèle simplifié ou approché du système réel qu'il est censé représenter. Dans ce cas nous ne pouvons connaître le système réel, et nous ne connaissons les incertitudes que sous la forme d'une borne majorant celles-ci. Les principales causes de ces incertitudes sont dûes à la non modélisation de dynamiques élevées et l'approximation linéaire d'un système non-linéaire (saturations, retards purs, non-linéarités...). Les incertitudes de ce type sont souvent modélisées de manière fréquentielle. En notant $G_s(j\omega)$ la matrice de fonction de transfert du système réel, $G(j\omega)$ la matrice de fonction de transfert du modèle du système, nous pouvons écrire les incertitudes de modélisation sous la forme

$$G_s(j\omega) = [I + L(j\omega)]G(j\omega) \tag{II.1}$$

$L(j\omega)$ représentant les incertitudes, cette matrice de fonction de transfert n'est par nature, pas connue. La seule information que nous pouvons raisonnablement espérer posséder est une majoration de la norme de $L(j\omega)$ par exemple :

$$\sigma_{\max}(L(j\omega)) < l(\omega) \tag{II.2}$$

Généralement $l(\omega)$ sera faible aux basses fréquences et élevée aux hautes fréquences à cause de la méconnaissance des dynamiques élevées. Il est possible de représenter l'allure générale de $l(\omega)$ (Figure II-1).

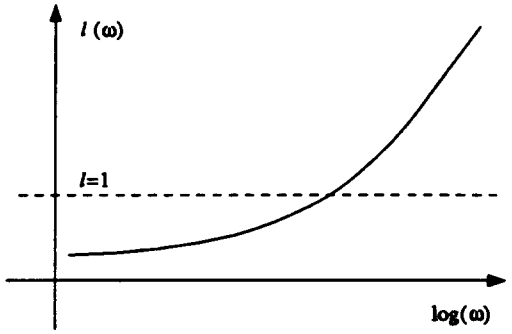


Fig. II-1: Borne sur les incertitudes de modélisation

Notre travail ne concerne pas ce type d'incertitudes mais plutôt les variations de modèle connues a priori, que nous appellerons variations paramétriques.

II.2.2 Variations paramétriques

Nous supposerons que le modèle du système que nous possédons est parfaitement connu mais que ce **modèle est soumis à des variations** d'un type particulier, connues a priori, dont seules les amplitudes ne sont pas déterminées. Prenons, par exemple, le cas d'un système masse-ressort avec un frottement fluide :

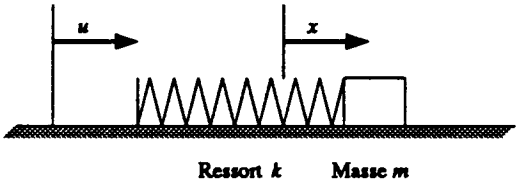


Fig. II-2: Système masse-ressort

Ce système répond à l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \frac{f}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x = ku \tag{II.3}$$

ou encore à la représentation d'état classique de type $\dot{X} = AX + BU$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} u \text{ avec } X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} \tag{II.4}$$

Dans cet exemple le modèle du système est supposé parfaitement connu, mais la masse m peut être incertaine, ainsi que le coefficient de frottement f, et ces grandeurs peuvent prendre des valeurs différentes autour d'une valeur supposée connue a priori.

Nous appellerons ce type de variation de modèle, des *variations paramétriques*, le modèle du système dépendant d'un certain nombre de paramètres (dans notre exemple la masse m et

le coefficient de frottement f). Nous noterons θ le vecteur de paramètres (ici $\theta = [m \quad f]$) et nous supposerons toujours que ce vecteur a une valeur nominale θ_o. Toutes les variations des paramètres autour de cette valeur nominale seront notées $\Delta\theta$.

De par la nature du problème considéré, certains éléments des matrices A et B décrivant la dynamique du système ne subissent pas de variation lorsque les paramètres évoluent. Ces valeurs constantes (les 0 et les 1 des matrices A et B par exemple) sont dûes à la structure particulière du problème. Nous pourrons donc aussi considérer les variations paramétriques comme des perturbations de *type structuré* (agissant sur les matrices selon certaines directions particulières).

II.2.3 Lien entre les paramètres

Dans de nombreux exemples pratiques, le système dépend de plusieurs paramètres différents, mais qui peuvent avoir un lien entre eux. Par exemple, dans le cas de l'aéronautique, les modèles d'avion qui sont utilisés dépendent entre autre de la vitesse de l'avion, de l'altitude et du nombre de Mach. Or nous savons que le nombre Mach dépend explicitement de la vitesse et de l'altitude. Il serait donc aberrant de considérer ici trois paramètres, car cela signifierait que ceux-ci peuvent varier indépendamment.

Dans un cadre plus général, il faudra faire attention à choisir, lors de la modélisation, des paramètres rigoureusement indépendants. En d'autres termes, si le système considéré dépend d'un nombre élevé de paramètres liés par des relations, nous devrons sélectionner,lorsque cela est possible, les **paramètres génériques** du système à partir desquels tous les autres paramètres peuvent êtres reconstruits. Cette étape de modélisation est importante, car elle conditionne la validité du travail de robustesse qui sera entrepris par la suite.

II.3 Modèle en boucle ouverte

II.3.1 Modèle discret

Dans notre travail, nous nous sommes intéressés exclusivement aux systèmes multivariables linéaires discrets. En effet, la technique PRCBI est fondée sur les propriétés asymptotiques des estimées paramétriques en boucle fermée, qui nécessitent par nature une représentation discrète du système. Il va de soi que cette représentation est issue d'une discrétisation du système continu. En outre, afin de pouvoir confronter les résultats obtenus grâce à cette technique aux résultats d'autres approches, nous avons été amenés à ne considérer que les approches concernant ce type de systèmes.

Nous nous sommes donc intéressés aux systèmes linéaires discrets décrits par un système d'équations de type

$$\begin{cases} X_{k+1} &= AX_k + BU_k \\ Y_k &= CX_k \end{cases} \tag{II.5}$$

Les matrices $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n\times m}$ et $C \in \mathbf{R}^{p\times n}$ représentent respectivement la dynamique du système en boucle ouverte, la matrice d'entrée et la matrice de mesures. Pour

obtenir ces matrices à partir d'un système continu, il suffit d'appliquer les transformations classiques permettant de passer d'un système continu à un système discret.

$$\begin{cases} A_d &= \exp(A_c T_e) \\ B_d &= \exp(A_c T_e) B_c \\ C_d &= C_c \end{cases} \tag{II.6}$$

où, $\{A_c, B_c, C_c\}$ représente le système continu, $\{A_d, B_d, C_d\}$ le système discret associé, T_e la période d'échantillonage et exp la fonction exponentielle de matrice.

II.3.2 Modélisation des variations paramétriques

Nous allons supposer que les matrices A et B dépendent de manière linéaire d'un vecteur de paramètres θ à r composantes. Ces matrices s'écrivent donc

$$A = A_o + \sum_{i=1}^{r} A_i \Delta\theta_i \text{ et } B = B_o + \sum_{i=1}^{r} B_i \Delta\theta_i \tag{II.7}$$

Si cette dépendance linéaire n'est pas explicitement vérifiée, le développement limité au premier ordre de A et B par rapport à θ nous donnera le même type de relations. Cette approximation au premier ordre restera bonne car nous ne nous intéressons qu'au comportement local du système autour du point nominal. Nous pouvons donc définir plus généralement les matrices A_i et B_i par

$$A_i = \frac{\partial A}{\partial \theta_i} \text{ et } B_i = \frac{\partial B}{\partial \theta_i} \tag{II.8}$$

Cette modélisation permet d'étudier des variations paramétriques *localement* autour d'un *modèle nominal*. Le modèle décrit par les matrices A_o et B_o sera considéré comme le modèle nominal, avec un vecteur de paramètres θ_o nul (une simple translation permet de se ramener dans ce cas de figure). Lorsque ce vecteur de paramètres ne sera pas nul, nous dirons que le système est perturbé, ou encore soumis à des variations paramétriques. La figure II-3 représente dans l'espace paramétrique ces différentes notions.

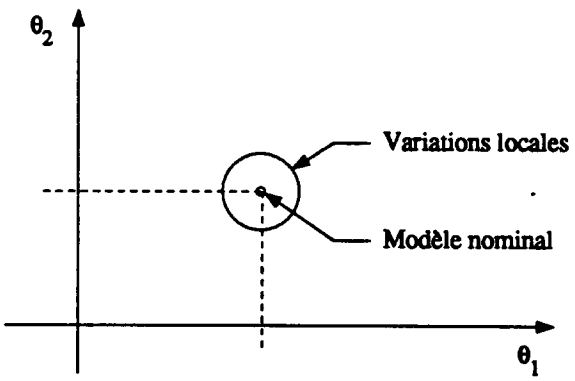


Fig. II-3: Modèle nominal et variations paramétriques locales

Remarque : si une relation linéaire du type (II.7) apparaît naturellement sur un modèle en continu, cette relation n'est pas forcément aussi simple pour le modèle discret associé en appliquant les formules de transformation (II.6). Dans ce cas la dépendance linéaire peut être perdue. En choisissant une période d'échantillonnage suffisamment faible devant la dynamique naturelle du système, les relations (II.6) peuvent être développées au premier ordre et deviennent linéaires, ce qui a pour effet de conserver la dépendance linéaire du modèle discret aux variations paramétriques.

Si la période d'échantillonnage ne peut être modifiée, une différenciation de type (II.8) formelle ou numérique pourra être réalisée, directement à partir des modèles discrets.

II.4 Structure de la commande

Nous avons envisagé le cas très général des retours de sortie de type "retour dynamique". Soit V_k le vecteur d'état du correcteur, et F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}, les matrices décrivant la dynamique du correcteur tel que

$$\begin{cases} U_k & = F_{11}Y_k + F_{12}V_k \\ V_{k+1} & = F_{21}Y_k + F_{22}V_k \end{cases} \tag{II.9}$$

Le système en boucle fermée peut être schématisé par la figure II-4. Ce type de retour permet de prendre en compte tous les types de structures de commande habituellement utilisés (retour de sortie statique, retour dynamique, retour d'état et retour d'état avec observateur).

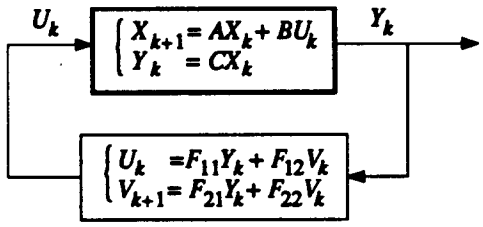


Fig. II-4: Structure de la commande de type retour dynamique

Nous allons voir comment transformer le problème de recherche d'un correcteur dynamique décrit par les équations (II.9) en se ramenant à un problème de recherche de retour de sortie statique. En effet le système en boucle fermée avec un correcteur dynamique, se comporte comme un système avec un vecteur d'état, un nombre de sorties et d'entrées augmenté, muni d'un retour de sortie statique. Pour cela, définissons un vecteur d'état, un vecteur d'entrées et un vecteur de sorties augmentés de manière à inclure la dynamique du compensateur dans le système. Posons donc :

$$\tilde{X}_k = \begin{bmatrix} X_k \\ V_k \end{bmatrix} \quad \tilde{Y}_k = \begin{bmatrix} Y_k \\ V_k \end{bmatrix} \quad \tilde{U}_k = \begin{bmatrix} U_k \\ V_{k+1} \end{bmatrix}$$
$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \tilde{K} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \tag{II.10}$$

Nous voyons donc que le système défini par les matrices $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ et $\widetilde{C}$ muni du retour de sortie statique $\widetilde{K}$, se comporte de manière rigoureusement identique au système schématisé par la figure II-4. Nous avons visualisé cette structure équivalente sur la figure II-5.

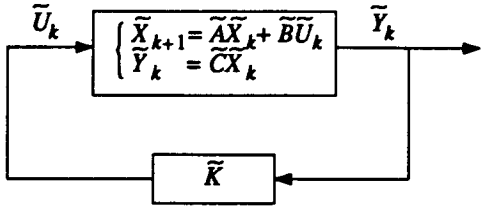


Fig. II-5: Structure de commande équivalente de type retour de sortie statique

Pour ne pas alourdir les écritures, nous allons donc traiter le cas des commandes de type retour de sortie. Nous venons de voir que nous pourrons toujours nous ramener à d'autres types de commande en transformant légèrement le problème. Dans ce cas, le modèle en "boucle ouverte" contiendra éventuellement des états, des sorties et des entrées supplémentaires liés au correcteur.

Remarque : dans la suite de notre thèse, nous ne ferons pas la différence entre le cas du retour statique de sortie (sans augmentation de vecteur d'état) et le cas des retours dynamiques (avec un modèle élargi). Sous les matrices A, B et C, représentant la boucle ouverte, pourront donc se "cacher" des états liés à la commande mais nous le préciserons pour éviter toute ambiguïté.

II.5 Boucle ouverte et boucle fermée

Le système représenté par la figure II-4 a pour équations en boucle fermée

$$\begin{cases} X_{k+1} &= (A + BKC)X_k \\ Y_k &= CX_k \end{cases} \tag{II.11}$$

La boucle fermée aura donc comme dynamique $A_c = A + BKC$. Lorsque le système est soumis aux variations paramétriques décrites par les équations (II.8), la boucle fermée se comporte de la manière suivante

$$A_c = A_o + B_oKC + \sum_{i=1}^{r} (A_i + B_iKC)\Delta\theta_i \tag{II.12}$$

Cette relation, pour tout K fixé, peut s'exprimer sous la forme

$$A_c = A_{c_o} + \sum_{i=1}^{r} A_{c_i}\Delta\theta_i \tag{II.13}$$

avec $A_{c_o} = A_o + B_oKC$ et $A_{c_i} = A_i + B_iKC$. Nous voyons donc que le système décrit par les équations (II.5) soumis à des variations paramétriques linéaires sur les matrices A et B se

comporte en boucle fermée comme un système en boucle ouverte de dynamique A_c, soumis à des variations paramétriques linéaires de cette matrice.

La suite de notre travail se déroulera en deux étapes :

- **Les mesures de robustesse :**
  Nous nous efforcerons de développer une *mesure* nous permettant de *caractériser* le comportement du système lorsque celui-ci est soumis à des variations paramétriques. Ces développements pourront s'appliquer *indifféremment au cas d'un système en boucle ouverte ou en boucle fermée*. En effet il suffit de remplacer les matrices A et A_i par les matrices A_c et A_{c_i} pour retrouver le même problème.

- **La synthèse de loi de commande robuste :**
  Nous décrirons des algorithmes nous permettant d'élaborer une commande minimisant les mesures de robustesse décrites ci-dessus. Ce problème revient donc à trouver une matrice K telle que le système (II.5) en *boucle fermée* possède de bonnes propriétés de robustesse. Nous voulons donc qu'en boucle fermée, les incertitudes, agissant sur le système en boucle ouverte, soient le moins pénalisantes possibles au sens des mesures de robustesse décrites.

II.6 Conclusions

Nous venons de voir que nous allons nous intéresser aux systèmes linéaires discrets décrits par les équations

$$\begin{cases} X_{k+1} &= AX_k + BU_k \\ Y_k &= CX_k \end{cases} \tag{II.14}$$

où les matrices A et B sont soumises localement, autour d'un point nominal, à des variations paramétriques linéaires de type

$$A = A_o + \sum_{i=1}^{r} A_i \Delta\theta_i \text{ et } B = B_o + \sum_{i=1}^{r} B_i \Delta\theta_i \tag{II.15}$$

Notre objectif final est donc de trouver une commande de type $U_k = KY_k$ telle que le système en boucle fermée $A_c = A + BKC$ soit le plus insensible possible aux variations paramétriques $\Delta\theta$.

Ce type de commande (retour de sortie statique) nous permet, comme nous l'avons vu, de prendre en compte les problèmes des retours dynamiques par une augmentation de la dimension du vecteur d'état, du nombre de sorties et d'entrées.

Enfin, nous avons établi qu'en boucle fermée, avec ce type de retour, le système est soumis à des variations paramétriques du même type qu'en boucle ouverte.

Synthèse de commande robuste aux variations paramétriques pour les systèmes discrets.

Chapitre III Introduction

Notre propos est l'élaboration d'une commande robuste aux **variations paramétriques**, pour les systèmes **multivariables discrets**. Nous avons donc cherché dans la littérature les récents développements sur ce sujet. Nous avons remarqué que le cas des systèmes discrets n'a pas fait l'objet de nombreux travaux (comparativement au cas des systèmes continus), tant dans le domaine de la robustesse non structurée, que dans le cas des incertitudes paramétriques. La plupart des résultats récents à propos de la robustesse ne s'appliquent pas dans le cas discret. A l'issue de cette recherche bibliographique, nous avons sélectionné trois méthodes différentes de synthèse de commande robuste rentrant dans le cadre que nous nous sommes fixés. Chacune de ces méthodes, récemment développées, sont basées sur des *mesures de robustesse* différentes. Dans chaque chapitre, nous allons d'abord décrire chaque mesure de robustesse, puis une méthode de synthèse permettant d'obtenir en boucle fermée, une commande robuste, aux variations paramétriques.

Le problème que nous avons très vite rencontré, est qu'en pratique il n'est pas souhaitable de construire une commande fondée uniquement sur des contraintes de robustesse. En effet de telles commandes donnent de médiocres performances, cette contrainte n'étant pas prise en compte lors de la synthèse de la loi. Il faudra donc, en pratique, prendre en considération des contraintes sur les performances, tout en optimisant la robustesse. Cette idée a été suggérée par S. R. Kolla et J. B. Farison dans [24]. Nous avons étendu leur approche de manière à pouvoir intégrer une *pondération* entre les contraintes de performance et de robustesse, souvent incompatibles. Dans leur article, en effet, il n'apparaît pas explicitement de pondération permettant de choisir le compromis souhaitable entre robustesse et performance.

Nous nous sommes donc intéressés aux méthodes pouvant intégrer au mieux ce double objectif de performance et de robustesse. Comme nous l'avons vu, nous nous sommes restreints aux méthodes assurant une robustesse **localement**, autour d'un **modèle nominal**. Nous n'avons donc pas considéré les méthodes permettant la synthèse de commandes robustes lorsque les paramètres évoluent à l'intérieur d'un polytope donné (travaux de S. P. Bhattacharyya [21] par exemple). Cette approche permet d'assurer la stabilité d'un système pour des amplitudes données de variation de paramètres. La contrainte de robustesse étant généralement très forte, elle ne permet pas d'obtenir pour le modèle nominal de bonnes performances. Notre approche est différente, car nous assignons au système nominal, certaines performances, tout en optimisant la robustesse pour les variations locales de paramètres incertains. Nous espérons ainsi pouvoir tolérer de plus importantes variations paramétriques, tout en assurant un certain niveau de performance.

Nous avons finalement retenu les approches suivantes :

- **Placement robuste de pôles :**
  Cette approche, décrite par N. K. Nichols *et al* [20][19], décrit un algorithme assurant la synthèse d'un retour d'état plaçant les pôles du système, tout en

minimisant l'effet des variations paramétriques sur les variations de pôles. Par cette approche, les performances sont assurées par le choix des pôles en boucle fermée et la robustesse est ensuite optimisée par un choix optimal de vecteurs propres.
Après avoir présenté la mesure de robustesse basée sur la variation des pôles liée aux incertitudes paramétriques, nous présenterons l'algorithme de synthèse de retour d'état robuste. Nous verrons ensuite comment synthétiser un observateur d'ordre minimal, robuste aux variations paramétriques, ce qui nous permettra d'étendre l'approche de N. K. Nichols *et al* au cas du retour de sortie.

- **Robustesse par majoration des marges de stabilité :**
  A partir du calcul d'une marge de stabilité utilisant le formalisme de Lyapunov, S. R. Kolla et J. B. Farison [24][25] ont étudié une mesure de robustesse, pour les systèmes discrets, liée aux marges de stabilité. Ils ont ensuite élaboré un algorithme permettant la recherche d'une commande optimisant la somme d'un critère de performance quadratique et d'une mesure de robustesse.

- **Robustesse par insensibilité du critère de performance :**
  Nous avons essayé de nous rapprocher au plus possible de la définition initiale que nous avons fait de la robustesse, en élaborant tout simplement une mesure de robustesse fondée sur les variations d'un critère de performance quadratique dues aux variations paramétriques. La recherche d'une loi de commande optimisant la somme pondérée du critère de performance et de ce nouveau critère de robustesse a ensuite été discutée.

De cette étude nous avons pu mettre en évidence que la notion de **robustesse** peut en fait se décliner de nombreuses manières, chacune ayant une signification physique spécifique :

- insensibilité du lieu des pôles,
- distance paramétrique à l'instabilité,
- invariance d'un critère de performance quadratique.

Nous nous efforcerons finalement de *comparer* ces différentes approches, en mettant en avant leurs points forts et leurs points faibles. Ces méthodes nous serviront ensuite de référence de comparaison pour la suite du travail présenté dans ce mémoire.

Chapitre IV Placement robuste de pôles

IV.1 Introduction

Les méthodes géométriques de placement de pôles sont souvent employées car elles sont simples à mettre en œuvre et permettent par le choix de valeurs propres, de fixer des temps de réponse, des amortissements ou d'autres propriétés souhaitables pour un système en boucle fermée. Le choix des vecteurs propres associés à ces valeurs propres, permet, dans le cas multivariable, d'assurer des propriétés de découplage ou de robustesse. Nous allons voir dans ce chapitre comment utiliser judicieusement ces degrés de liberté liés au choix des vecteurs propres, pour assurer au système de bonnes qualités de robustesse. Nous pourrons de ce fait, donner à un système certaines performances, garanties par les choix des valeurs propres, et optimiser la robustesse grâce à un choix optimal des vecteurs propres associés.

Dans un premier temps, nous allons voir comment les vecteurs propres associés aux valeurs propres d'un système, sont directement liés à la sensibilité des valeurs propres lorsque le système est soumis à des perturbations. Nous en déduirons une mesure de robustesse liée à la variation des valeurs propres d'un système soumis à des variations paramétriques.

Nous établirons ensuite un algorithme nous permettant de choisir au mieux les vecteurs propres, pour optimiser la mesure de robustesse que nous venons de décrire. Cet algorithme original, proposé par J. Kautsky et N. K. Nichols [19], permettant de prendre en compte des perturbations de type structurées, s'applique dans le cas du retour d'état.

Afin de pouvoir appliquer cette commande de type retour d'état dans un problème pratique, nous envisagerons la construction d'un observateur d'ordre minimal. Cet observateur sera choisi de manière à minimiser l'influence des variations paramétriques sur la reconstruction du vecteur d'état. Nous rappellerons finalement brièvement les propriétés de la commande associant retour d'état et observateur.

Nous pouvons remarquer que les développements que nous faisons dans ce chapitre peuvent être transposés directement au cas continu, car nous ne nous intéressons qu'aux valeurs et vecteur propres de la matrice A. Seul le positionnement des valeurs propres choisies devra être différent pour assurer la stabilité et les performances spécifiées.

Cette approche est très différente de celle proposée entre autres par F. Jabbari [18] spécifiant que les pôles restent dans une zone donnée du plan complexe. Notre approche permet de quantifier les déplacements par rapport à un ensemble de pôles donné, et s'avère donc plus fine pour déceler, localement, l'effet des variations paramétriques.

IV.2 Mesure de sensibilité des pôles d'un système

Nous allons étudier une mesure de robustesse liée à la sensibilité des valeurs propres du système lorsque celui-ci est soumis à des variations de type paramétrique. Etudions dans un

premier temps comment les pôles d'un système linéaire discret évoluent lorsque celui-ci est soumis à des perturbations.

Etudions le système linéaire discret décrit par l'équation

$$X_{k+1} = AX_k \tag{IV.1}$$

La matrice $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ pourra représenter indifféremment le système en boucle ouverte ou en boucle fermée. Dans ce dernier cas, il suffira de remplacer, comme nous l'avons vu, A par $A + BKC$.

Soit λ_j avec $j = 1, 2, \ldots, n$ une valeur propre de A. Les variations de cette valeur propre dues à une petite variation ΔA peuvent s'exprimer au premier ordre sous la forme [49]

$$\Delta\lambda_j = u_j^T \Delta A v_j \tag{IV.2}$$

où u_j et v_j sont respectivement les vecteurs propres à gauche et à droite du système nominal, associés à la valeur propre λ_j. Ils vérifient par définition

$$\begin{aligned} Av_j &= \lambda_j v_j \\ u_j^T A &= \lambda_j u_j^T \end{aligned} \tag{IV.3}$$

Ces vecteurs étant définis à une constante multiplicative près, nous nous arrangerons toujours pour normaliser u_j et v_j tels que $u_j^T v_j = 1$. Nous avons choisi d'étudier les variations paramétriques où les perturbations s'expriment sous la forme

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{r} A_i \Delta\theta_i \tag{IV.4}$$

Avec cette formulation des incertitudes, la relation (IV.2) devient

$$\Delta\lambda_j = \sum_{i=1}^{r} u_j^T A_i v_j \Delta\theta_i \tag{IV.5}$$

Nous pouvons décomposer chacune des matrices A_i en deux matrices F_i et G_i de rang plein et de dimension minimale respective $n \times d_i$ et $d_i \times n$ (où $d_i = \text{rang}(A_i)$) telles que

$$A_i = F_i G_i^T \tag{IV.6}$$

Une telle décomposition n'est pas unique, et peut être obtenue par exemple grâce à la décomposition en valeurs singulières de la matrice A_i. Nous pouvons grâce à cette décomposition réécrire la relation (IV.5) sous la forme

$$\Delta\lambda_j = u_j^T [F_1 \quad F_2 \quad \cdots \quad F_r] E \begin{bmatrix} G_1^T \\ G_2^T \\ \vdots \\ G_r^T \end{bmatrix} v_j \text{ avec } E = \begin{bmatrix} \Delta\theta_1 I & & & 0 \\ & \Delta\theta_2 I & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Delta\theta_r I \end{bmatrix} \tag{IV.7}$$

ou encore $\Delta\lambda_j = u_j^T F E G^T v_j$ avec $F = [F_1 \quad F_2 \quad \cdots \quad F_r]$ et $G = [G_1 \quad G_2 \quad \cdots \quad G_r]$. Nous pouvons en déduire une borne sur les variations de la valeur propre λ_j dues aux variations paramétriques

$$|\Delta\lambda_j| \leq \left\|u_j^T F\right\| \|G^T v_j\| \|E\| \tag{IV.8}$$

De cette relation fondamentale, nous pouvons déduire que les variations de chaque valeur propre λ_j sont directement proportionnelles à la grandeur $\left\|u_j^T F\right\| \|G^T v_j\|$. Nous pouvons donc définir une mesure globale de robustesse pour le système décrit par l'équation (IV.1) :

$$J_{\text{rob}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left\|u_j^T F\right\|^2 \|G^T v_j\|^2} \tag{IV.9}$$

Cette mesure de robustesse correspond donc à la somme des mesures de sensibilité de chacune des valeurs propres du système. Nous pouvons simplifier cette écriture en posant $U = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n]$ et $V = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]$. Compte tenu du choix des vecteurs u_j et v_j, nous pouvons noter que $U = (V^{-1})^T$. Nous normaliserons chacun des vecteurs propres à droite v_j tels que pour tout j

$$\|G^T v_j\| = 1 \tag{IV.10}$$

La mesure de robustesse peut maintenant s'écrire

$$\begin{aligned} J_{\text{rob}} &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left\|u_j^T F\right\|^2} \\ &= \|U^T F\|_F \\ &= \|V^{-1} F\|_F \end{aligned} \tag{IV.11}$$

où $\|\ .\ \|_F$ représente la norme de Frobenius ($\|M\|_F^2 = \text{Tr}(M^T M)$).

Pour tout système décrit par les équations (IV.1), nous pouvons donc calculer une mesure de robustesse liée à la sensibilité des valeurs propres du système lorsque celui-ci est soumis à des variations paramétriques du type (IV.4). Ce calcul s'effectue grâce à l'algorithme suivant

Etape 1	Décomposer les matrices A_i en $A_i = F_i G_i^T$ Construire les matrices F et G.
Etape 2	Calculer les n valeurs propres λ_j et vecteurs propres à droite v_j associés.
Etape 3	Normaliser chacun des vecteurs v_j tels que $\|G^T v_j\| = 1$.
Etape 4	Former la matrice $V = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]$.
Etape 5	Calculer la mesure de robustesse

$$J_{\text{rob}} = \|V^{-1}F\|_F \tag{IV.12}$$

Algorithme A: Calcul de mesure de la robustesse liée à la sensibilité des valeurs propres.

IV.3 Synthèse de commande robuste

IV.3.1 Positionnement du problème

Le problème que nous envisageons maintenant consiste en l'élaboration d'un retour d'état K pour le système linéaire discret

$$X_{k+1} = AX_k + BU_k \tag{IV.13}$$

afin qu'en boucle fermée, le système possède un ensemble de n valeurs propres $\{\lambda_j\}$ auto-conjuguées et que celles-ci soient le plus insensible possible aux variations paramétriques. L'extension de cette méthode au cas du retour de sortie sera envisagée par la suite, avec la construction d'un observateur d'ordre minimal.

En d'autres termes, étant donné

- les matrices $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ et $B \in \mathbf{R}^{n\times m}$ représentant la dynamique du système,
- un ensemble de valeurs propres $\{\lambda_j\}$ auto-conjuguées souhaité,
- les matrices F et G issues de la décomposition des incertitudes sur la matrice A en boucle ouverte,

la résolution du problème demande la détermination d'un gain K et d'une matrice V tels que

(1) $(A + BK)V = V\Lambda$ où Λ est la matrice diagonale formée par les valeurs propres λ_j.

(2) pour tout j $\|G^T v_j\| = 1$.

(3) $J_{\text{rob}} = \|V^{-1}F\|_F^2$ soit minimal.

IV.3.2 Calcul du gain plaçant les n valeurs propres désirées

Etudions comment choisir la matrice V et calculer le gain K associé afin que les propositions (1) et (2) soient vérifiées et donc que le système en boucle fermée possède les n valeurs propres désirées.

Effectuons la décomposition QR de B, c'est-à-dire cherchons le changement de base dans lequel B s'écrit

$$B = [B_1 \quad B_2] \begin{bmatrix} Z_B \\ 0 \end{bmatrix} \tag{IV.14}$$

avec la matrice $[B_1 \quad B_2]$ orthonormée et Z_B non singulière (Voir [4] pour plus de détails).

La procédure de calcul du gain K plaçant en boucle fermée les n valeurs propres désirées est la suivante

Etape 1 Choisir n vecteurs v_j dans le noyau de $B_2^T(A - \lambda_j I)$ noté S_j

$$v_j \in S_j = \mathrm{Ker}[B_2^T(A - \lambda_j I)] \tag{IV.15}$$

Etape 2 Former les matrices V et Λ

$$V = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n] \text{ et } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{IV.16}$$

Etape 3 Calculer le gain K

$$K = Z_B^{-1} B_1^T (V \Lambda V^{-1} - A) \tag{IV.17}$$

Algorithme B: Calcul d'un retour d'état K placant n valeurs propres désirées.

La première propriété (IV.15) se vérifie simplement en remarquant que v_j devant être un vecteur propre de $(A + BK)$, associé à la valeur propre λ_j, la relation suivante doit être vérifiée

$$(A + BK)v_j = \lambda_j v_j \tag{IV.18}$$

Comme $B_2^T B = 0$, il vient

$$B_2^T (A - \lambda_j I) v_j = 0 \tag{IV.19}$$

ce qui démontre la propriété (IV.15).

Comme nous avons choisi V tel que

$$(A + BK) = V\Lambda V^{-1} \tag{IV.20}$$

, il vient $BK = V\Lambda V^{-1} - A$ ce qui permet de démontrer la relation (IV.17).

Nous voyons donc que la résolution des propositions (1) et (2) du problème de placement de valeurs propres, se pose en terme de choix de vecteurs propres v_j dans un sous espace S_j. Si le système est commandable et si les valeurs propres sont distinctes, l'ensemble des sous espaces S_j forment une base de dimension n, et donc tout choix "arbitraire" des vecteurs propres v_j dans S_j donne une matrice V non singulière.

IV.3.3 Degrés de liberté

Pour assurer le placement des n valeurs propres choisies, les paramètres libres à notre disposition sont les coefficients du gain K. Le nombre de coefficients de cette matrice est mn. Comme nous devons placer n pôles, nous avons donc a priori $mn - n$ degrés de liberté dans le choix des vecteurs propres, sous réserve que ceux-ci soient dans les sous-espaces caractéristiques S_j.

Si le système est commandable nous savons que les sous-espaces S_j sont tous de dimension m. Nous avons donc $m - 1$ degrés de liberté pour le choix de chaque vecteur propre. Finalement, pour tout ensemble de valeurs propres, nous avons donc

$$n(m-1) = mn - n \tag{IV.21}$$

degrés de liberté pour le choix des vecteurs propres, c'est à dire le maximum que nous pouvions espérer.

Dans le cas où $m = 1$ (une seule entrée), tout choix de valeurs propres impose un correcteur unique. Nous ne disposons pas de degrés de liberté pour agir sur la robustesse du système. Il faudra dans ce cas, choisir les valeurs propres de manière à minimiser la mesure de robustesse. Malheureusement, ce problème d'optimisation devient complexe, car nous ne pouvons établir de lien formel entre le choix de valeurs propres et la mesure de robustesse. Nous sommes donc dans l'incapacité, dans le cas des systèmes à une seule commande, de fournir un algorithme simple permettant le calcul d'un correcteur robuste fondé sur la sensibilité des pôles aux variations paramétriques.

Dans le cas multivariable $m > 1$, nous allons pouvoir utiliser les degrés de liberté restants sur le choix des vecteurs propres pour optimiser la robustesse du système en minimisant la mesure de robustesse (IV.12). Or, comme nous l'avons vu, cette mesure de robustesse est directement liée au choix des vecteurs propres. Nous allons donc expliciter un algorithme nous permettant d'optimiser ce choix pour assurer au système, en boucle fermée, une insensibilité maximale aux variations paramétriques. Ces développements font l'objet des paragraphes suivants.

IV.3.4 Optimisation de la robustesse

L'algorithme proposé dans [19] pour résoudre le problème d'optimisation du choix des vecteurs propres est itératif par nature. A partir d'un jeu initial de vecteurs propres, chaque

vecteur v_j est itérativement remplacé par un vecteur minimisant la mesure de robustesse, en supposant les autres vecteurs propres (v_k avec $k \neq j$) constants. Cette procédure est reproduite jusqu'à ce que la mesure de robustesse cesse de décroître significativement. En pratique cette convergence est très rapide, pouvant être atteinte en moins d'une dizaine de cycles. Le problème de l'actualisation d'un seul vecteur propre peut être résolu analytiquement en se ramenant à un problème de minimisation de type moindres carrés.

Les développements théoriques conduisant à ce résultat sont présentés dans la section suivante. Nous pouvons maintenant formaliser l'algorithme décrit pour le calcul du gain de retour d'état minimisant la sensibilité des valeurs propres aux variations paramétriques.

Etape 1 Calculer une décomposition QR de B (IV.14).
Calculer les sous espaces S_j associés à chaque valeur propre λ_j.

Etape 2 Choisir un ensemble initial de vecteurs propres v_j tel que

$$\text{pour tout } j = 1, 2, \cdots, n : \; v_j \in S_j \text{ et } \|G^T v_j\| = 1 \tag{IV.22}$$

Etape 3 Pour $j = 1, 2, \ldots, n$

Etape 3.a Trouver $\hat{v}_j$ solution de

$$\min_{v_j \in S_j} \|V^{-1} F\|_F \tag{IV.23}$$

avec $\|G^T v_j\| = 1$ et v_k fixé pour tout $k \neq j$

Etape 3.b Former la nouvelle matrice V

$$V = [\, v_1 \quad \cdots \quad v_{j-1} \quad \hat{v}_j \quad v_{j+1} \quad \cdots \quad v_n \,] \tag{IV.24}$$

Etape 4 Recommencer l'Etape 3 jusqu'à convergence de

$$J_{\text{rob}} = \|V^{-1} F\|_F \tag{IV.25}$$

Etape 5 Calculer le gain de retour

$$K = Z_B^{-1} B_1^T (V \Lambda V^{-1} - A) \tag{IV.26}$$

Algorithme C: Calcul d'une commande rendant insensible le placement de pôles

IV.3.5 Réactualisation des vecteurs propres

La phase cruciale de cet algorithme est l'Etape 3.a comportant un problème de minimisation sous contraintes. Nous allons voir comment transformer ce problème de manière à se ramener à un problème de minimisation de type moindres carrés. Pour cela décomposons l'expression $\|V^{-1}F\|_F$ en isolant v_j. Faisons ensuite apparaître explicitement les contraintes sur ce vecteur ($v_j \in S_j$ et $\|G^T v_j\| = 1$).

Deux cas de figure se distinguent, suivant que l'expression $\|V^{-1}F\|_F$ soit sensible ou indifférente au choix de v_j. Si ce choix n'est pas indifférent, en introduisant une nouvelle variable, nous nous ramènerons à un problème de minimisation par moindres carrés. L'ensemble de ces développements sera résumé par l'algorithme D.

1 Décomposition de $\|V^{-1}F\|_F$ La première étape consiste à exprimer la mesure de robustesse dans les bases orthogonales Q et q formées par les vecteurs propres fixés ($v_k, k \neq j$) et leur compléments orthogonaux.

Pour cela définissons la matrice V_j par

$$V_j = [v_1 \quad \cdots \quad v_{j-1} \quad v_{j+1} \quad \cdots \quad v_n] \tag{IV.27}$$

et choisissons w_j tel que $v_j = S_j w_j$. En remarquant que dans l'expression $\|V^{-1}F\|_F$, une permutation des colonnes de V ne change pas cette norme, nous pouvons isoler la $j^{\text{ème}}$ colonne de V et la placer en dernière position. Il vient donc en définissant Z tel que $\|V^{-1}F\|_F = \|Z\|_F$

$$Z = [V_j \quad S_j w_j]^{-1} F \tag{IV.28}$$

La décomposition QR de V_j nous permet de définir Q et q tels que

$$V_j = [Q \quad q] \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \tag{IV.29}$$

où R est non singulière, et $[Q \quad q]$ orthogonale.

Avec ces définitions, la matrice $[V_j \quad S_j w_j]$ peut s'écrire

$$[V_j \quad S_j w_j] = [Q \quad q] \begin{bmatrix} R & Q^T S_j w_j \\ 0 & q^T S_j w_j \end{bmatrix} \tag{IV.30}$$

et l'équation (IV.28) peut s'écrire

$$\begin{aligned} Z &= \begin{bmatrix} R & Q^T S_j w_j \\ 0 & q^T S_j w_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q^T \\ q^T \end{bmatrix} F \\ &= \begin{bmatrix} R^{-1} Q^T F - R^{-1} Q^T S_j w_j \rho q^T F \\ \rho q^T F \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{IV.31}$$

en posant $\rho = (q^T S_j w_j)^{-1}$. Nous pouvons remarquer que ρ est un scalaire nécessairement non nul, vu le choix de q.

2 Cas où $q^\top F = 0$ Nous voyons dans l'expression (IV.31) que si $q^\top F$ est nul (ou très petit), alors la mesure de robustesse est complètement indépendante de w_j, donc du vecteur propre v_j associé. Nous pouvons donc a priori choisir v_j arbitrairement dans S_j. D'autres considérations peuvent nous guider pour déterminer ce choix. Il est possible de montrer que l'optimisation du conditionnement de la matrice V produit des gains faibles, et des réponses transitoires de faibles amplitudes [20]. Nous choisirons donc v_j comme étant le plus perpendiculaire possible aux autres vecteurs propres, c'est dire choisir v_j le plus proche possible de q, espace orthogonal à V_j. Nous prendrons donc pour vecteur optimal $\widehat{v}_j$, la projection de q sur S_j, normalisée de manière à satisfaire la contrainte $\|G^\top v_j\| = 1$, soit

$$\widehat{v}_j = \frac{S_j S_j^\top q}{\left\|G^\top S_j S_j^\top q\right\|} \tag{IV.32}$$

Remarque : si $\left\|G^\top S_j S_j^\top q\right\| = 0$ alors manifestement la contrainte $\|G^\top v_j\| = 1$ ne pourra être satisfaite, nous choisirons donc dans ce cas $\widehat{v}_j$ de longueur unité.

3 Cas où $q^\top F \neq 0$ Si maintenant $q^\top F \neq 0$, il nous faut transformer l'expression (IV.31) de manière à se ramener à un problème classique de type moindres carrés. Pour cela il nous faut écrire le problème sous la forme d'une minimisation de type

$$\min_x \|Mx - N\|_{\mathrm{F}} \tag{IV.33}$$

Pour arriver à un résultat de ce type nous allons utiliser la propriété suivante [19] :

Soit les matrices M_1, M_2 et M_3 et les vecteurs x et y de dimensions compatibles,
Soit $Z_1 = \begin{bmatrix} M_1 - M_2 x y^\top \\ y^\top \end{bmatrix}$ et $Z_2 = y^\top y \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} M_1 y \\ 0 \end{bmatrix}$
Si $\|M_3 x\| = 1$ alors nous avons

$$\|Z_1\|_{\mathrm{F}}^2 = \frac{\|Z_2\|_{\mathrm{F}}^2}{y^\top y} + \mathrm{Tr}\left(M_1 \left[I - \frac{y y^\top}{y^\top y}\right] M_1^\top\right) \tag{IV.34}$$

En remarquant que Z a la même forme que Z_1 et que $\|G^\top S_j w_j\| = 1$, en posant

$$\begin{cases} M_1 &= R^{-1} Q^\top F \\ M_2 &= R^{-1} Q^\top S_j \\ M_3 &= G^\top S_j \\ x &= w_j \\ y &= \rho F^\top q \end{cases} \tag{IV.35}$$

il vient

$$\|Z\|_{\mathrm{F}}^2 = \frac{1}{q^\top F F^\top q} \left\| q^\top F F^\top q \begin{bmatrix} R^{-1} Q^\top S_j \\ G^\top S_j \end{bmatrix} \rho w_j - \begin{bmatrix} R^{-1} Q^\top F F^\top q \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_{\mathrm{F}}^2 + c \tag{IV.36}$$

où $c = \mathrm{Tr}\left(R^{-1}Q^{\top}F\left(I - \frac{F^{\top}qq^{\top}F}{q^{\top}FF^{\top}q}\right)(R^{-1}Q^{\top}F)^{\top}\right)$, indépendant de w_j, sera considéré comme une constante. Grâce à un changement de variable, nous pouvons simplifier le terme $\rho w_j = (q^{\top}S_j w_j)^{-1}w_j$ de l'expression (IV.36) pour nous ramener à une formulation de type (IV.33). La transformation de Householder P nous permet de transformer le vecteur $q^{\top}S_j$ en un vecteur dont seule la dernière composante est non nulle.

En effet, il existe donc une matrice P orthogonale telle que

$$q^{\top}S_jP = \sigma[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \tag{IV.37}$$

Nous pouvons en déduire la relation suivante

$$[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]\sigma P^{\top}(q^{\top}S_j w_j)^{-1}w_j = 1 \tag{IV.38}$$

et donc que la dernière composante du vecteur $\sigma P^{\top}\rho w_j$ vaut 1. Définissons donc la nouvelle variable x_j telle que

$$\sigma P^{\top}\rho w_j = \begin{bmatrix} x_j \\ 1 \end{bmatrix} \tag{IV.39}$$

Avec cette variable, le problème de minimisation initial (IV.23), s'écrit maintenant

$$\min_{v_j \in S_j} \|V^{-1}F\|_{\mathrm{F}} = \min_{x_j} \left\| q^{\top}FF^{\top}q \begin{bmatrix} R^{-1}Q^{\top} \\ G^{\top} \end{bmatrix} S_jP \begin{bmatrix} x_j \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma R^{-1}Q^{\top}FF^{\top}q \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_{\mathrm{F}} \tag{IV.40}$$

Définissons les matrices M et N et le vecteur m tel que

$$[M \quad m] = q^{\top}FF^{\top}q \begin{bmatrix} R^{-1}Q^{\top} \\ G^{\top} \end{bmatrix} S_jP \text{ et } N = \begin{bmatrix} \sigma R^{-1}Q^{\top}FF^{\top}q \\ 0 \end{bmatrix} \tag{IV.41}$$

Le problème (IV.40) devient donc

$$\begin{aligned} \min_{v_j \in S_j} \|V^{-1}F\|_{\mathrm{F}} &= \min_{x_j} \left\| [M \quad m] \begin{bmatrix} x_j \\ 1 \end{bmatrix} - N \right\|_{\mathrm{F}} \\ &= \min_{x_j} \|Mx_j - (N - m)\|_{\mathrm{F}} \end{aligned} \tag{IV.42}$$

ce qui nous ramène à un problème de minimisation de type moindres carrés. La solution optimale $\hat{x}_j$ peut être trouvée numériquement très simplement. Il nous faut maintenant reconstruire le vecteur $\hat{w}_j$ puis le vecteur optimal $\hat{v}_j$, solution du problème de minimisation initial. Nous pouvons exprimer $\hat{w}_j$ grâce à (IV.39)

$$\hat{w}_j = \frac{1}{\sigma}(q^{\top}S_j\hat{w}_j)^{-1}P \begin{bmatrix} \hat{x}_j \\ 1 \end{bmatrix} \tag{IV.43}$$

Comme nous savons que $\|G^T S_j \widehat{w}_j\| = 1$, il vient

$$\left\| G^T S_j \frac{1}{\sigma} (q^T S_j \widehat{w}_j)^{-1} P \begin{bmatrix} \widehat{x}_j \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{\sigma} (q^T S_j \widehat{w}_j)^{-1} \left\| G^T S_j P \begin{bmatrix} \widehat{x}_j \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = 1 \qquad \text{(IV.44)}$$

d'où

$$\frac{1}{\sigma} (q^T S_j \widehat{w}_j)^{-1} = \frac{1}{\left\| G^T S_j P \begin{bmatrix} \widehat{x}_j \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} \qquad \text{(IV.45)}$$

et donc l'expression de $\widehat{v}_j = S_j \widehat{w}_j$ devient

$$\widehat{v}_j = \frac{S_j P \begin{bmatrix} \widehat{x}_j \\ 1 \end{bmatrix}}{\left\| G^T S_j P \begin{bmatrix} \widehat{x}_j \\ 1 \end{bmatrix} \right\|} \qquad \text{(IV.46)}$$

Remarque : si $\left\| G^T S_j P \begin{bmatrix} \widehat{x}_j \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = 0$ alors manifestement la contrainte $\|G^T v_j\| = 1$ ne pourra être satisfaite, nous choisirons donc dans ce cas $\widehat{v}_j$ de longueur unité.

4 Algorithme

Etape 3.a.1 Former la matrice V_j
Calculer sa décomposition QR, pour déterminer Q, q et R.

Etape 3.a.2 Former le vecteur $q^T S_j$ et trouver la matrice P de Householder telle que

$$q^T S_j P = \sigma[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \tag{IV.47}$$

Etape 3.a.3 Calculer $\delta^2 = q^T F F^T q$

Si $\delta^2 = 0$ Alors

Si $\left\| G^T S_j S_j^T q \right\| \neq 0$ Alors

$$\widehat{v}_j = S_j S_j^T q / \left\| G^T S_j S_j^T q \right\| \tag{IV.48}$$

Sinon $\left(\left\| G^T S_j S_j^T q \right\| = 0 \right)$

$$\widehat{v}_j = S_j S_j^T q / \left\| S_j S_j^T q \right\| \tag{IV.49}$$

Fin Si

Sinon $(\delta^2 \neq 0)$

Trouver $\widehat{x}_j$ solution du problème des moindres carrés (IV.42)

Si $\left\| G^T S_j P \begin{bmatrix} \widehat{x}_j \\ 1 \end{bmatrix} \right\| \neq 0$ Alors

$$\widehat{v}_j = S_j P \begin{bmatrix} \widehat{x}_j \\ 1 \end{bmatrix} / \left\| G^T S_j P \begin{bmatrix} \widehat{x}_j \\ 1 \end{bmatrix} \right\| \tag{IV.50}$$

Sinon $\left(\left\| G^T S_j P \begin{bmatrix} \widehat{x}_j \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = 0 \right)$

$$\widehat{v}_j = S_j P \begin{bmatrix} \widehat{x}_j \\ 1 \end{bmatrix} / \left\| S_j P \begin{bmatrix} \widehat{x}_j \\ 1 \end{bmatrix} \right\| \tag{IV.51}$$

Fin Si

Fin Si

Algorithme D: Algorithme de réactualisation des vecteurs propres.

Dans tous les cas, nous sommes maintenant en mesure d'obtenir la solution optimale du problème d'optimisation (IV.23) recherché. Cette solution, disponible analytiquement, peut être calculée numériquement très simplement. Nous résumerons l'Etape 3.a de l'algorithme C par la procédure D.

Lorsque la réactualisation du vecteur v_j correspond à une valeur propre réelle, cette méthode génère un gain de retour réel. En revanche, lorsque la $j^{\text{ème}}$ valeur propre désirée est complexe, le vecteur propre associé est complexe et pour avoir un gain réel, il faudra simultanément affecter le vecteur propre conjugué $\bar{v}_j$ associé à $\bar{\lambda}_j$. L'algorithme appliqué a donc été légèrement modifié de manière à sélectionner simultanément les vecteurs v_j et $\bar{v}_j$, afin de conserver un gain réel. La mise en œuvre pratique de cet algorithme à été réalisée sous la forme d'une procédure utilisant le logiciel Matlab.

IV.3.6 Conclusions

Nous venons donc de décrire un algorithme nous permettant de calculer un retour d'état assurant au système en boucle fermée les propriétés suivantes

- Le système possède les n valeurs propres désirées.
- Ces valeurs propres sont les plus insensibles possibles aux variations paramétriques.

Cette commande possède donc toutes les propriétés initialement souhaitées. Malheureusement, dans de nombreux problèmes pratiques, l'ensemble du vecteur d'état n'est pas accessible. Pour pouvoir appliquer cette commande il faudra donc construire un observateur afin de reconstruire le vecteur d'état à partir des mesures disponibles. Nous allons donc voir comment construire un tel observateur qui, tout en conservant de bonnes propriétés de robustesse, rendra le système le plus insensible possible aux variations paramétriques.

IV.4 Observateur robuste

Dans la plupart des applications concrètes, tous les états du système ne sont pas mesurables, et le nombre de mesures p, supposées indépendantes, est inférieur au nombre d'états n. Nous devrons donc pour appliquer le retour d'état précédemment calculé, construire un observateur reconstruisant l'ensemble du vecteur d'état. Afin de réduire la complexité de la loi de commande, nous avons choisi d'utiliser un observateur de Luenberger [33] d'ordre minimal, c'est à dire d'ordre $n - p$.

Cette approche constitue donc une extention au cas du retour de sortie de la méthodologie proposée par J. Kautsky et N. K. Nichols dans [20] et [19].

IV.4.1 Construction d'un observateur d'ordre minimal

Soit un système linéaire discret décrit en boucle ouverte par les équations suivantes

$$\begin{cases} X_{k+1} &= AX_k + BU_k \\ Y_k &= CX_k \end{cases} \tag{IV.52}$$

avec $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n\times m}$ et $C \in \mathbf{R}^{p\times n}$. Etudions comment construire un observateur d'ordre minimal $(n-p)$, permettant de reconstruire la variable d'état X_k à partir des mesures Y_k et du signal de commande U_k, avec une dynamique $\{\beta_j\}$ (ensemble autoconjugué de $n-p$ valeurs propres désirées pour l'observateur).

Définissons les matrices C_1, C_2 et Z_C issues de la décomposition QR de la matrice C telles que

$$C = [\,Z_C \quad 0\,]\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \tag{IV.53}$$

avec Z_C non singulière, et $[\,C_1^T \quad C_2^T\,]$ orthogonale.

Nous pouvons construire un observateur [33] de la manière suivante :

Etape 1 Choisir $n-p$ vecteurs u_j dans le noyau de $(A-\beta_j I)^{-1}C_2$ noté T_j

$$u_j \in T_j = \mathrm{Ker}\left[(A-\beta_j I)^{-1}C_2\right] \tag{IV.54}$$

Etape 2 Former la matrices U et Π

$$U = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_{n-p}^T \end{bmatrix} \text{ et } \Pi = \begin{bmatrix} \beta_1 & & & 0 \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_{n-p} \end{bmatrix} \tag{IV.55}$$

Etape 3 Calculer T

$$T = (\Pi U - UA)C_1^T Z_C^{-1} \tag{IV.56}$$

Algorithme E: Calcul d'un observateur de Luenberger d'ordre minimal.

L'observateur ainsi déterminé a pour équations

$$\begin{cases} Z_{k+1} &= \Pi Z_k + UBU_k - TY_k \\ \widehat{X}_k &= [\,Q_1 \quad Q_2\,]\begin{bmatrix} Y_k \\ Z_k \end{bmatrix} \end{cases} \tag{IV.57}$$

avec Q_1 et Q_2 vérifiant

$$Q_1 C + Q_2 U = I \text{ ou } [\,Q_1 \quad Q_2\,] = \begin{bmatrix} C \\ U \end{bmatrix}^{-1} \tag{IV.58}$$

La structure de cet observateur peut être représentée par la figure suivante

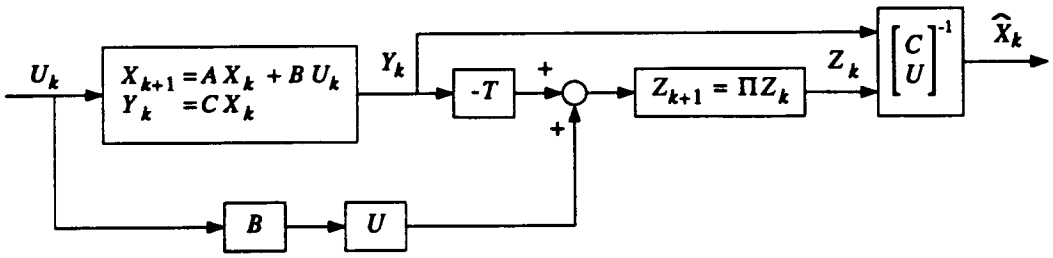


Fig. IV-1: Observateur de Luenberger d'ordre minimal

Nous pouvons vérifier que le système (IV.57) est bien un observateur de la variable X_k, avec la dynamique Π, en développant l'expression de Z_{k+1} et en remarquant que $UA + TC = \Pi U$

$$Z_{k+1} = \Pi(Z_k - UX_k) + U(AX_k + BU_k) \tag{IV.59}$$

soit

$$(Z_{k+1} - UX_{k+1}) = \Pi(Z_k - UX_k) \tag{IV.60}$$

Nous voyons donc que Z_k va tendre asymptotiquement vers UX_k avec la dynamique donnée par Π. Si maintenant $Z_k = UX_k$ alors

$$\hat{X}_k = [Q_1 \quad Q_2] \begin{bmatrix} C \\ U \end{bmatrix} X_k = X_k \tag{IV.61}$$

Il est possible de montrer qu'à la condition de prendre parmi les β_j toutes les valeurs propres non observables du système, tout choix de vecteurs v_j dans T_j garantit l'existence des matrices Q_1 et Q_2 (ou de manière équivalente l'inversibilité de la matrice $\begin{bmatrix} C \\ U \end{bmatrix}$)

Nous venons donc d'établir comment construire un observateur d'ordre $n - p$, ayant une dynamique donnée. Ce problème peut se résoudre en choisissant des vecteurs propres dans un sous-espace. Disposant ainsi de nombreux degrés de liberté pour le choix de ces vecteurs, nous allons voir comment optimiser ce choix pour avoir de bonnes propriétés de robustesse notamment.

IV.4.2 Optimisation de l'observateur

1 Insensibilité et conditionnement de l'observateur L'approche traditionnelle pour optimiser le choix de l'observateur consiste à rendre les estimations les plus indépendantes possibles. Cette propriété est obtenue en minimisant le conditionnement de la matrice $\begin{bmatrix} C \\ U \end{bmatrix}$. Cette procédure revient à rendre les lignes de cette matrice les plus orthogonales possibles entre elles, ce qui revient aussi à minimiser la norme des matrices Q_1 et Q_2. Nous pouvons exprimer ce problème sous la forme suivante :

$$\min_{u_j \in T_j} \left\| \begin{bmatrix} C \\ U \end{bmatrix}^{-1} \right\|_F \tag{IV.62}$$

Ce problème d'optimisation est très proche de celui étudié dans la partie précédente pour la synthèse de commande robuste par insensibilité des pôles. Un algorithme de minimisation analogue à celui développé peut donc être utilisé en remplaçant itérativement chaque vecteur u_j, avec les u_k $(k \neq j)$ fixés, par le vecteur optimisant (IV.62).

2 Robustesse aux variations paramétriques Notre propos étant la recherche d'une commande rendant le système insensible aux variations paramétriques, nous allons voir comment rendre l'observateur le plus insensible à ce type de variation. Pour cela, reprenons l'équation de l'observateur (IV.57) et étudions son comportement lorsque la matrice A est soumise à des variations paramétriques de type

$$A = A_o + \sum_{i=1}^{r} A_i \Delta\theta_i \tag{IV.63}$$

La dynamique de l'observateur devient

$$Z_{k+1} = \Pi(Z_k - UX_k) + U(A_o X_k + BU_k) + \sum_{i=1}^{r} UA_i \Delta\theta_i X_k \tag{IV.64}$$

soit

$$(Z_{k+1} - UX_{k+1}) = \Pi(Z_k - UX_k) + \sum_{i=1}^{r} UA_i \Delta\theta_i X_k \tag{IV.65}$$

Nous voyons donc que la dynamique de l'observateur est perturbée par les variations paramétriques à travers le terme $\sum_{i=1}^{r} UA_i \Delta\theta_i X_k$. L'observateur sera donc rigoureusement insensible aux variations paramétriques si et seulement si

$$\text{pour tout } i = 1, 2, \cdots, r : \quad UA_i = 0 \tag{IV.66}$$

Trois cas de figure peuvent se présenter :

(1) La condition (IV.66) peut être réalisée et il reste des degrés de liberté pour le choix des u_j. Dans ce cas les degrés de liberté restants seront utilisés pour optimiser le conditionnement de la matrice $\begin{bmatrix} C \\ U \end{bmatrix}$.

(2) La condition (IV.66) peut être réalisée mais il ne reste plus de degrés de liberté pour le choix des u_j.

(3) La condition (IV.66) ne peut être réalisée. Dans ce cas, nous minimiserons l'effet des perturbations sur l'observateur en minimisant l'expression

$$\sum_{i=1}^{r} \|UA_i\|_F = \|UF_A\|_F \tag{IV.67}$$

avec F_A défini par : $F_A = [\, A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_r \,]$

Un algorithme permettant d'optimiser la robustesse de l'observateur peut maintenant être proposé en incluant toutes les conditions énoncées ci-dessus. Nous remplacerons itérativement chaque vecteur u_j, par celui, appartenant à l'espace T_j qui minimise $\|UF_A\|_F$ et lorsque cela est possible $\left\|\begin{bmatrix} C \\ U \end{bmatrix}^{-1}\right\|_F$. Les développements conduisant à cette optimisation sont présentés ci-dessous.

Définissons U_j comme

$$U_j^T = [u_1 \quad \cdots \quad u_{j-1} \quad u_{j+1} \quad \cdots \quad u_{n-p}] \tag{IV.68}$$

Nous pouvons réécrire la norme à minimiser comme

$$\begin{aligned} \|UF_A\|_F &= \left\| \begin{bmatrix} U_j \\ u_j^T \end{bmatrix} F_A \right\|_F \\ &= \|U_j F_A\|_F + \|F_A^T u_j\|_F \end{aligned} \tag{IV.69}$$

Chaque vecteur u_j devra donc être choisi de manière à minimiser $\|F_A^T u_j\|_F$ sous les contraintes suivantes

$$u_j \in T_j \text{ et } \|u_j\|_F = 1 \tag{IV.70}$$

Ce problème peut aussi s'écrire avec la variable w_j telle que $u_j = T_j w_j$

$$\min_{\|T_j w_j\|_F = 1} \|F_A^T T_j w_j\|_F \tag{IV.71}$$

La solution de (IV.71) peut numériquement être trouvée en utilisant la décomposition en valeurs singulières de la matrice $F_A^T T_j$. En effet nous pouvons écrire cette matrice sous la forme

$$F_A^T T_j = S_1 \Sigma S_2^T$$

$$\text{avec } \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{\max} & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \sigma_{\min} & & \\ & & & 0 & \\ & 0 & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{IV.72}$$

Avec cette décomposition les dernières colonnes de S_2 représentent une base de l'espace dans lequel $\|F_A^T T_j w_j\|_F$ est nul (colonnes correspondant aux zéros de la matrice) ou minimum (colonnes correspondant à $\sigma_{\min}$). Nous pouvons donc sélectionner une base W_j de l'espace dans lequel l'observateur sera le plus robuste possible aux variations paramétriques. Cette base sera formée par les dernières colonnes de S_2 (le nombre de colonnes sélectionnées sera choisi en fonction de la multiplicité de la valeur singulière minimale, ou de la taille du noyau

de $F_A^T T_j$). Dans ce sous espace W_j, nous allons maintenant optimiser le conditionnement de la matrice $[C^T \quad U^T]^T$ en choisissant le vecteur u_j le plus orthogonal possible aux vecteurs ligne de la matrice $[C^T \quad U_j^T]^T$. Pour cela nous projetterons l'orthogonal de cette matrice dans l'espace W_j. Cette procédure se résume donc comme suit.

Etape 1 Calculer la décomposition QR de C (IV.53).
Calculer les $n-p$ sous espaces T_j associés aux valeurs propres β_j.

Etape 2 Choisir un ensemble initial de vecteur v_j tel que

$$\text{pour tout } j, \quad u_j \in T_j \text{ et } \|u_j\| = 1 \tag{IV.73}$$

Etape 3 Pour $j = 1, 2, \cdots, n$

Etape 3.a Calculer la décomposition en valeurs singulières de la matrice

$$F_A^T T_j = S_1 \Sigma S_2^T \tag{IV.74}$$

Etape 3.b Sélectionner l'espace W_j, formé par les dernières colonnes de S_2, dans lequel $\left\|F_A^T T_j w_j\right\|_F$ est minimum (ou nul).

Etape 3.c Calculer la projection $\widehat{u}_j$ de l'orthogonal de $\begin{bmatrix} C \\ U_j \end{bmatrix}$ dans $T_j W_j$.

Etape 3.d Former la nouvelle matrice U

$$U = [u_1 \quad \cdots \quad u_{j-1} \quad \widehat{u}_j \quad u_{j+1} \quad \cdots \quad u_{n-p}]^T \tag{IV.75}$$

Etape 4 Recommencer l'Etape 3 jusqu'à convergence.

Etape 5 Former la matrice Π

$$\Pi = \begin{bmatrix} \beta_1 & & & 0 \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_{n-p} \end{bmatrix} \tag{IV.76}$$

Etape 6 Calculer T

$$T = (\Pi U - UA) C_1^T Z_C^{-1} \tag{IV.77}$$

Algorithme F: Calcul d'un observateur insensible aux variations paramétriques. (Continued . . .)

Algorithme F: Calcul d'un observateur insensible aux variations paramétriques.

La mise en œuvre pratique de cet algorithme à été réalisée sous la forme d'une procédure utilisant le logiciel Matlab.

IV.4.3 Conclusions

L'algorithme que nous venons de proposer ne garantit pas l'inversibilité de la matrice $\begin{bmatrix} C \\ U \end{bmatrix}$. En effet l'espace W_j, dans le cas général, sera de dimension unité, ne laissant donc plus de degré de liberté pour optimiser le conditionnement de cette matrice. Cet algorithme conduit alors à un très mauvais conditionnement de l'observateur, le rendant non utilisable en pratique.

Lorsque le résultat produit par cet algorithme n'est pas satisfaisant au niveau du conditionnement de l'observateur, nous pouvons le modifier légèrement de manière à relâcher la contrainte sur l'optimisation de la robustesse aux variations paramétriques afin de retrouver suffisamment de degrés de liberté et ainsi rendre possible le calcul de l'observateur. Pour cela il suffit de sélectionner un espace W_j de plus grande dimension (correspondant à des valeurs singulières supérieures à la valeur singulière minimale) et ainsi se doter de degrés de liberté servant à améliorer le conditionnement de l'observateur. Ainsi la norme $\|UF_A\|_F$ ne sera pas exactement minimale, mais elle restera faible tout en améliorant le conditionnement de l'observateur.

Un compromis devra être choisi, en fonction de chaque exemple traité, de manière à trouver une solution acceptable entre l'optimisation de la robustesse (insensibilité de l'observateur aux variations paramétriques) et le bon conditionnement de l'observateur, lorsque celui-ci n'est pas acceptable.

IV.5 Commande globale retour d'état et observateur

Nous allons voir dans cette section comment la commande composée par le retour d'état associé à l'observateur se comporte en boucle fermée. Cet type de commande est représenté par la figure IV-2.

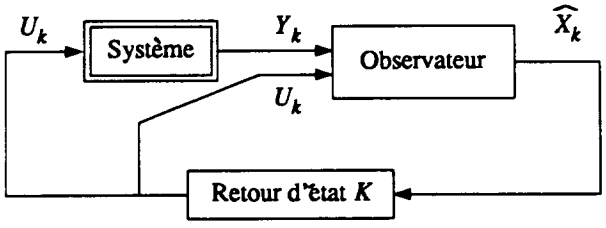


Fig. IV-2: Commande par retour d'état et observateur.

Le principe de séparation établit que le système en boucle fermée composé d'un retour d'état bouclé sur les états reconstruits par un observateur, a les propriétés suivantes :

- Les valeurs propres du système sont composées des valeurs propres de $A+BK$ et des valeurs propres de l'observateur $\{\beta_j\}$.
- Les n premières composantes des vecteurs propres à droite associés aux modes de commande sont les vecteurs v_j de $A+BK$.

- Les n premières composantes des vecteurs propres à gauche associés aux modes d'estimation sont les vecteurs u_j de l'observateur.

Ces propriétés peuvent être vérifiées en calculant la dynamique du système en boucle fermée. Le système décrit par les équations (IV.52) et l'observateur décrit par les équations (IV.57) s'associent en prenant comme commande $U_k = K\widehat{X}_k$ pour former le système suivant

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_{k+1} \\ Z_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A+BKQ_1C & BKQ_2 \\ -Tc+UBKQ_1C & \Pi+UBKQ_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ Z_k \end{bmatrix} \\ Y_k &= [C \quad 0] \begin{bmatrix} X_k \\ Z_k \end{bmatrix} \end{cases} \tag{IV.78}$$

Avec un changement de variable de type $\varepsilon_k = Z_k - UX_k$ le système (IV.78) devient, en utilisant le fait que $UA + TC = \Pi U$ et $Q_1C + Q_2U = I$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_{k+1} \\ \varepsilon_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A+BK & BKQ_2 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ \varepsilon_k \end{bmatrix} \\ Y_k &= [C \quad 0] \begin{bmatrix} X_k \\ \varepsilon_k \end{bmatrix} \end{cases} \tag{IV.79}$$

Cette dernière relation nous montre donc que les propriétés énoncées ci-dessus sont bien vérifiées. Si maintenant le système (IV.52) est soumis à des perturbations de type

$$A = A_o + \sum_{i=1}^{r} A_i\theta_i \tag{IV.80}$$

le système en boucle fermée devient

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_{k+1} \\ \varepsilon_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_o + BK + \sum_{i=1}^{r} A_i\theta_i & BKQ_2 \\ -\sum_{i=1}^{r} UA_i & \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ \varepsilon_k \end{bmatrix} \\ Y_k &= [C \quad 0] \begin{bmatrix} X_k \\ \varepsilon_k \end{bmatrix} \end{cases} \tag{IV.81}$$

Donc, si $\|UF_A\|_F$ est rigoureusement nul, les propriétés de robustesse du retour d'état ne sont pas changées par l'observateur. En revanche si ce terme n'est pas nul, le système peut ne pas conserver les bonnes propriétés de robustesse du retour d'état.

IV.6 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons défini une mesure de robustesse fondée sur les variations des valeurs propres du système. Cette mesure est liée aux vecteurs propres du système. Nous avons ensuite envisagé la synthèse d'un retour d'état robuste par placement de valeurs propres et optimisation du choix des vecteurs propres.

Cette approche semble intellectuellement très satisfaisante car nous pouvons choisir un ensemble de valeurs propres pour le système, en assurant ainsi des performances en boucle fermée, et optimiser la robustesse grâce aux vecteurs propres.

Nous avons ensuite examiné la construction d'un observateur d'ordre minimal robuste aux variations paramétriques afin de pouvoir envisager la possibilité d'un retour de sortie. Cet observateur pourra entraîner des pertes de robustesse dans le cas de systèmes où le nombre de sorties est faible par rapport au nombre d'états (système à structure flexible par exemple). En revanche dans le cadre de l'application aéronautique que nous traiterons par la suite, cela ne représentera pas une limitation significative.

Chapitre V Robustesse en stabilité des systèmes discrets

V.1 Introduction

Les résultats présentés dans ce chapitre prolongent les travaux de S. R. Kolla et J. B. Farison [24] [25] dans le domaine de la stabilité des systèmes linéaires discrets soumis à des perturbations structurées ou non. Grâce à la théorie de Lyapunov [38][30], il est possible de déterminer une borne pour les variations paramétriques admissibles qui assurent la stabilité du système perturbé. A partir de ces développements nous déterminerons une mesure de robustesse fondée sur les marges de stabilité, dans le cas de perturbations non-structurées et dans le cas de variations paramétriques.

Nous présenterons aussi de récents développements sur ce sujet permettant d'étendre le domaine de validité de certains résultats. Nous verrons que les marges de stabilité présentées peuvent s'avérer restrictives et que de nouvelles marges peuvent être exprimées. Nous présenterons pourquoi ces derniers développements ne pourront être directement utilisés pour la synthèse de commande.

Nous verrons ensuite comment utiliser les premiers résultats pour la synthèse de commande robuste. Nous présenterons l'algorithme de synthèse de commande de type retour de sortie présenté dans [24]. Nous élargirons cette technique en utilisant une somme pondérée, de manière à pouvoir choisir le meilleur compromis possible entre des bornes de performance et une robustesse optimale en stabilité.

Nous envisagerons l'extension de cette approche avec l'utilisation de la mesure de robustesse dans le cas de variations paramétriques. Nous verrons que l'extrapolation de la méthode précédente n'est pas possible simplement. Nous utiliserons donc par la suite comme méthode de synthèse celle utilisant la mesure de robustesse non structurée.

V.2 Borne de stabilité pour les systèmes discrets

Etudions sous quelles conditions un système nominal *stable* conserve cette propriété lorsqu'il est soumis à des perturbations. Pour cela nous allons déterminer une borne sur les perturbations admissibles qui assurent la stabilité du système soumis à des perturbations.

Etudions le système linéaire discret dont la dynamique est décrite par l'équation suivante

$$X_{k+1} = [A + \Delta A]X_k \tag{V.1}$$

La matrice $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ représente la dynamique nominale du système et ΔA représente les incertitudes de modélisation ou les variations paramétriques. La matrice A pourra en pratique

représenter indifféremment la boucle ouverte ou la boucle fermée. Dans ce dernier cas, comme nous l'avons vu, nous remplacerons A par $A + BKC$.

Soit l'équation de Lyapunov discrète (V.2) associée au système (V.1) supposé nominalement asymptotiquement stable (lorsque $\Delta A_k = 0$). Cette hypothèse semble réaliste dans le cas de la synthèse de loi de commande robuste en stabilité, car cette hypothèse impliquera simplement la stabilité du système nominal en boucle fermée.

$$A^T P A - P + Q = 0 \tag{V.2}$$

Cette équation admet une solution unique symétrique positive P pour chaque choix d'une matrice $Q > 0$ symétrique. Une borne sur ΔA peut être calculée de manière à assurer la stabilité du système (V.1) qui nous conduit au résultat suivant.

Le système discret (V.1) est stable si

$$\sigma_{\max}(\Delta A) < \mu \tag{V.3}$$

où μ est donné par l'expression suivante

$$\mu = -\sigma_{\max}(A) + \sqrt{[\sigma_{\max}(A)]^2 + \frac{\sigma_{\min}(Q)}{\sigma_{\max}(P)}} \tag{V.4}$$

Il peut être montré [25], que la borne μ ainsi définie est maximale lorsque $Q = I$ et dans ce cas $\sigma_{\min}(Q) = 1$. Dans la suite, afin de simplifier l'écriture, nous choisirons $Q = I$.

La borne μ sera donc considérée comme une mesure de robustesse à la stabilité non structurée pour le système (V.1). La maximisation de cette borne nous permettra d'envisager une commande optimisant le domaine de stabilité d'un système discret.

La démonstration de la propriété (V.3) peut être faite en utilisant la théorie de Lyapunov. Soit $V(X) = X^T P X$ une fonction de Lyapunov candidate pour le système (V.1). La dérivée de cette fonction est donnée par l'expression suivante

$$\Delta V(X) = V(X_{k+1}) - V(X_k) \tag{V.5}$$

En utilisant (V.2) il vient

$$\Delta V(X) = X^T[\Delta A^T P \Delta A + 2(\Delta A P A)_s - Q]X \tag{V.6}$$

Le système soumis à la perturbation ΔA sera stable si

$$\Delta A^T P \Delta A + 2(\Delta A^T P A)_s - Q < 0 \tag{V.7}$$

où la notation $(\ .\ )_s$ représente la partie symétrique d'une matrice $M_s = \frac{1}{2}(M + M^\top)$

Cette condition est réalisée si

$$\sigma_{\max}[\Delta A^\top P \Delta A + 2(\Delta A^\top P A)] < \sigma_{\min}(Q) \tag{V.8}$$

En utilisant les propriétés d'inégalités triangulaires et l'inégalité de Schwartz, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}(M_1 + M_2) &\leq \sigma_{\max}(M_1) + \sigma_{\max}(M_2) \\ \sigma_{\max}(M_1 M_2) &\leq \sigma_{\max}(M_1)\sigma_{\max}(M_2) \end{aligned} \tag{V.9}$$

Nous voyons aisément que l'équation (V.8) est réalisée si

$$\sigma_{\max}(P)\left\{2\sigma_{\max}(\Delta A)\sigma_{\max}(A) + [\sigma_{\max}(\Delta A)]^2\right\} < \sigma_{\min}(Q) \tag{V.10}$$

La solution (V.4) étant une racine de cette équation du second degré, en remarquant que $\sigma_{\max}(\Delta A) > 0$, nous pouvons en déduire que la condition (V.3) implique l'inégalité (V.10) ce qui achève notre démonstration.

Remarque : La démonstration précédente ne suppose pas a priori que la matrice ΔA est indépendante du temps. Le cas des perturbations invariantes dans le temps est donc pris en compte par le résultat présenté, mais la borne obtenue peut alors s'avérer très restrictive.

Dans ce paragraphe nous venons donc d'obtenir une borne μ nous permettant de mesurer la distance à l'instabilité d'un système discret. Cette mesure est fondée sur le calcul d'une borne sur la valeur singulière de la matrice ΔA, représentant les incertitudes. Le calcul de cette borne de robustesse est relativement simple numériquement et se fera en pratique grâce aux toolboxes de Matlab [35].

V.3 Borne de stabilité pour les systèmes discrets soumis à des variations paramétriques

Notre propos étant l'étude des variations de type paramétrique, supposons que la matrice des perturbations ΔA ne dépende que d'un nombre restreint de paramètres physiques $\Delta\theta_i$ (avec $i = 1, 2, \ldots, r$). La modélisation des variations paramétriques retenue nous permet d'écrire la matrice ΔA comme suit

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{r} A_i \Delta\theta_i \tag{V.11}$$

où A_i désignent des matrices constantes et θ_i les paramètres incertains du système pouvant varier indépendamment. Déterminons maintenant une borne sur les variations paramétriques admissibles garantissant la stabilité du système (V.1) soumis à des variations paramétriques de type (V.11).

Définissons d'abord les deux matrices P_θ et P_i de dimensions respectives $rn \times rn$ et $n \times n$ où P est la matrice solution de (V.2)

$$P_\theta = \begin{bmatrix} (A_1^\tau P A_1) & (A_1^\tau P A_2)_s & \cdots & (A_1^\tau P A_r)_s \\ (A_2^\tau P A_1)_s & (A_2^\tau P A_2) & \cdots & (A_2^\tau P A_r)_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_r^\tau P A_1)_s & (A_r^\tau P A_2)_s & \cdots & (A_r^\tau P A_r) \end{bmatrix} \tag{V.12}$$

$$P_i = (A^\tau P A_i)_s \tag{V.13}$$

Nous pouvons maintenant écrire le résultat suivant :

Le système discret (V.1) soumis à des perturbations (V.11) est stable si

$$\text{pour tout } i = 1, 2, \ldots, r \quad |\Delta\theta_i| < \mu \tag{V.14}$$

où μ est formé par l'expression

$$\mu = -\left[\frac{\sigma_{\max}\left(\sum_{i=1}^{r} |P_i|\right)}{r\sigma_{\max}(|P_\theta|)}\right] + \sqrt{\left[\frac{\sigma_{\max}\left(\sum_{i=1}^{r} |P_i|\right)}{r\sigma_{\max}(|P_\theta|)}\right]^2 + \frac{\sigma_{\min}(Q)}{r\sigma_{\max}(|P_\theta|)}} \tag{V.15}$$

Les matrices $|P_i|$ et $|P_\theta|$ sont les matrices formées respectivement par la valeur absolue des éléments de P_i et de P_θ.

Une formulation équivalente à (V.14) et (V.15) peut aussi être établie.

Le système discret (V.1) soumis à des perturbations (V.11) est stable si

$$\sum_{i=1}^{r} |\Delta\theta_i|^2 \sigma_{\max}(P_\theta) + 2\sum_{i=1}^{r} |\Delta\theta_i| \sigma_{\max}(P_i) < \sigma_{\min}(Q) \tag{V.16}$$

Ces résultats se démontrent de manière analogue au résultat présenté dans le paragraphe précédent. En utilisant l'inégalité (V.8) et la formulation particulière de ΔA (V.11), il vient

$$\sigma_{\max}\left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \Delta\theta_i \Delta\theta_j (A_i^\tau P A_j)\right] + 2\sigma_{\max}\left[\sum_{i=1}^{r} \Delta\theta_i (A^\tau P A_i)_s\right] < \sigma_{\min}(Q) \tag{V.17}$$

En posant $\Delta\Theta = [\Delta\theta_1 I \quad \Delta\theta_2 I \quad \cdots \quad \Delta\theta_r I]^\top$ nous avons

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\Delta\theta_i\Delta\theta_j(A_i^\top P A_j) = \Delta\Theta^\top P_\theta \Delta\Theta \tag{V.18}$$

et donc

$$\sigma_{\max}\left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\Delta\theta_i\Delta\theta_j(A_i^\top P A_j)\right] \leq \sigma_{\max}(P_\theta)\sum_{i=1}^{r}|\Delta\theta_i|^2 \tag{V.19}$$

D'autre part

$$\sigma_{\max}\left[\sum_{i=1}^{r}\Delta\theta_i(A^\top P A_i)_s\right] \leq \sum_{i=1}^{r}|\Delta\theta_i|\sigma_{\max}(P_i) \tag{V.20}$$

Grâce aux relations (V.19) et (V.20), il devient clair que (V.17) est vérifiée si l'inégalité (V.16) est réalisée, ce qui démontre la deuxième condition de stabilité.

L'autre formulation (V.15) se démontre en remarquant que

$$\sigma_{\max}\left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\Delta\theta_i\Delta\theta_j(A_i^\top P A_j)\right] \leq r\max_i|\Delta\theta_i|\sigma_{\max}(|P_\theta|) \tag{V.21}$$

et

$$\sigma_{\max}\left[\sum_{i=1}^{r}\Delta\theta_i P_i\right] \leq \sigma_{\max}\left[\sum_{i=1}^{r}|\Delta\theta_i P_i|\right] \leq |\Delta\theta_i|\sigma_{\max}\left[\sum_{i=1}^{r}|P_i|\right] \tag{V.22}$$

La relation suivante est vérifiée si (V.15) est réalisée

$$\max_j|\Delta\theta_j|^2 r\sigma_{\max}(|P_\theta|) + 2\max_j|\Delta\theta_j|^2\sigma_{\max}\left(\sum_{i=1}^{r}|P_i|\right) \leq \sigma_{\min}(Q) \tag{V.23}$$

Les relations (V.21) et (V.22) ainsi que la relation (V.23) entraînent la relation (V.17) ce qui complète notre démonstration.

Nous venons d'obtenir une mesure de robustesse à la stabilité pour un système soumis à des perturbations structurées. Cette mesure représente une borne sur les variations paramétriques admissibles garantissant la stabilité d'un système discret soumis à ce type de perturbations. Le calcul numérique de cette borne ne posera, en pratique, pas de difficultés en utilisant le logiciel Matlab.

V.4 Extensions théoriques des bornes de stabilité

V.4.1 Changement de représentation d'état

De récents développements [23] ont permis de montrer que les bornes de stabilité décrites ci-dessus sont sensibles à un changement de représentation d'état.

Posons $\widehat{A} = M^{-1}AM$ et $\widehat{P}$ solution de l'équation de Lyapunov

$$\widehat{A}^{\mathsf{T}}\widehat{P}\widehat{A} - \widehat{P} + Q = 0 \tag{V.24}$$

Dans le cas non structuré, il est possible de montrer que le système (V.1) est stable si $\sigma_{\max}(\Delta A) < \mu^*$ où la borne μ^* est donnée par

$$\mu^* = \frac{\widehat{\mu}}{\sigma_{\max}(M^{-1})\sigma_{\max}(M)} \tag{V.25}$$

avec $\widehat{\mu}$ vérifiant

$$\widehat{\mu} = -\sigma_{\max}\left(\widehat{A}\right) + \sqrt{\left[\sigma_{\max}\left(\widehat{A}\right)\right]^2 + \frac{\sigma_{\min}(Q)}{\sigma_{\max}\left(\widehat{P}\right)}} \tag{V.26}$$

Nous pouvons donc remarquer que cette relation montre que pour un système donné (décrit par une matrice A), il est possible de déterminer différentes bornes μ^* selon le choix de la matrice M. Ainsi la mesure de robustesse que nous avons décrite n'est pas nécessairement la mesure la plus restrictive. Néanmoins, ne disposant pas de méthode pour déterminer la matrice M optimisant la mesure de robustesse à la stabilité, nous conserverons par la suite la formulation que nous avons décrite (V.4).

Remarque : Des résultats du même type peuvent être établis dans le cas de variations paramétriques, mais n'apportant pas d'intérêts majeurs pour la suite de notre travail, ils ne seront pas présentés ici.

V.4.2 Ensemble des valeurs propres à l'intérieur d'un disque de rayon inférieur à l'unité

De très récents travaux [37], ont permis de déterminer par une formulation très proche de celle utilisée, une borne pour les perturbations tolérables qui maintiennent les pôles dans un disque de rayon inférieur à l'unité. Présentons ici rapidement les résultats démontrés et discutons de leur éventuelle utilisation pour résoudre notre problème.

Soit le système (V.1), dont la dynamique nominale, décrite par matrice A, possède toutes ces valeurs propres à l'intérieur d'un disque de rayon

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \tag{V.27}$$

avec $\alpha > 0$.

Le système perturbé (V.1) est asymptotiquement stable si

$$\sigma_{\max}(\Delta A) < \mu_1 \tag{V.28}$$

où μ_1 donné par

$$\mu_1 = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\frac{1}{\sigma_{\max}(P)}} \tag{V.29}$$

où P est donné par l'équation de Lyapunov

$$(1+\alpha)A^T P A - P + I = 0 \tag{V.30}$$

Dans le cas de variations paramétriques nous pouvons écrire de manière similaire

$$\max|\Delta\theta_i| < \mu_1 \tag{V.31}$$

avec μ_1 est donné par

$$\mu_1 = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\frac{1}{\sigma_{\max}\left(\sum_{ij}\left|A_i^T P A_j\right|\right)}} \tag{V.32}$$

Ces formulations semblent plus simples que celles présentées précédemment mais en fait, elles sont moins bien adaptées au cas général que nous étudions, c'est à dire le cas où $\alpha = 0$. En effet dans ce cas les bornes (V.29) et (V.32) tendent vers 0. Cette nouvelle formulation apparaît donc comme beaucoup plus restrictive que celle que nous avons décrite précédemment. La dépendance des bornes μ à la valeur de α peut en revanche s'expliquer par le fait que plus le système nominal aura des pôles éloignés de la frontière de stabilité (α grand), plus les marges de stabilité auront tendance à être élevées.

Cette nouvelle formulation, présente néanmoins l'avantage d'être simple, ce qui permettrait peut être d'envisager une méthode de synthèse plus simple. Dans le cas de variations paramétriques notamment, la synthèse de commande robuste pourrait devenir possible. Cette voie demanderait une étude plus approfondie.

V.4.3 Conclusions

Les récents développements concernant la stabilité des systèmes discrets soumis à des perturbations structurées ou non structurées nous éclairent sur le domaine de validité des mesures que nous avons décrites.

Il apparaît donc que les mesures décrites peuvent s'avérer restrictives, et que la formulation retenue n'est pas nécessairement la plus simple possible, donc la plus facilement exploitable pour l'élaboration d'une commande robuste en stabilité. En revanche le domaine d'application des bornes (V.29) et (V.32) étant moins facilement utilisable, il faudrait une étude plus approfondie pour pouvoir l'utiliser lors de la synthèse de loi de commande robuste.

V.5 Synthèse de commande robuste en stabilité

Nous venons d'écrire des conditions suffisantes de stabilité pour un système discret soumis à des perturbations structurées et non structurées. Ces conditions s'expriment sous la forme d'une borne sur les perturbations admissibles. Bien que leur formulation soit relativement complexe, ces bornes sont très facilement calculables numériquement et ne demandent que la résolution d'une équation de type Lyapunov discrète. Elle sont donc des candidates idéales pour leur utilisation comme mesures de robustesse à la stabilité.

Néanmoins, pour pouvoir envisager une technique de synthèse de commande robuste, il faut pouvoir expliciter le lien existant, en boucle fermée, entre la mesure de robustesse et le gain de retour de la commande recherchée. La complexité des mesures de robustesse proposées ne nous permettra pas d'écrire ce lien explicitement. Nous allons donc sélectionner un critère de robustesse simplifié de manière à ce que la minimisation de ce critère entraîne une maximisation de la borne de stabilité associée.

Afin de résoudre le problème lié aux médiocres performances dues à une synthèse fondée uniquement sur l'optimisation de la robustesse en stabilité, nous envisagerons un algorithme de synthèse de loi de commande fondée sur l'optimisation de la somme pondérée d'un critère de performance quadratique et du critère de robustesse en stabilité.

V.5.1 Robustesse et performance

L'objectif initialement recherché est d'élaborer une commande prenant en compte des objectifs précis de performances et des contraintes de robustesse. Afin de prendre en compte ces deux objectifs souvent incompatibles, nous avons créé un critère mixte mariant robustesse et performance formalisé par l'expression générale suivante

$$J_{\text{mixte}} = \lambda J_{\text{perf}} + (1 - \lambda) J_{\text{rob}} \tag{V.33}$$

Ainsi pour toute valeur λ comprise entre 0 et 1 nous avons défini un critère pouvant prendre en compte tous les compromis entre le critère de performance et le critère de robustesse. Comme critère de performance, nous utiliserons un critère quadratique classique, et comme critère de robustesse, nous allons maintenant détailler une expression simplifiée qui permettra l'optimisation de la borne μ donnée, dans le cas non-structuré, par la formule (V.4).

V.5.2 Critère de performance en boucle fermée

Soit le modèle nominal du système en boucle ouverte décrit par les équations suivantes

$$\begin{cases} X_{k+1} &= AX_k + BU_k \\ Y_k &= CX_k \end{cases} \tag{V.34}$$

La matrice A, de dimension $n \times n$, représente la dynamique nominale du système en boucle ouverte, la matrice B, de dimension $n \times m$, représente la matrice des commandes du

système, et la matrice C, de dimensions $p \times n$ représente la matrice de mesures. Notre objectif de performance peut être représenté par un critère de performance quadratique de type

$$J_{\text{perf}} = \sum_{k=0}^{\infty} X_k^{\intercal} Q X_k + U_k^{\intercal} R U_k \tag{V.35}$$

où Q et R, matrices réelles symétriques positives, représentent respectivement les pondérations sur le vecteur d'état et le vecteur d'entrée.

Soit K le gain de retour de sortie. En boucle fermée le critère de performance (V.35) peut donc s'écrire

$$J_{\text{perf}} = \sum_{i=0}^{\infty} X_k^{\intercal} Q_p X_k \text{ avec } Q_p = Q + C^{\intercal} K^{\intercal} R K C \tag{V.36}$$

Dans le cas général un tel critère dépend de la condition initiale X_o et s'écrit de la manière suivante

$$J_{\text{perf}} = X_o^{\intercal} L X_o \tag{V.37}$$

où L est solution de l'équation de Lyapunov

$$A_c^{\intercal} L A_c - L + Q_p = 0 \text{ avec } A_c = A + BKC \tag{V.38}$$

La dépendance du critère de performance à la condition initiale pose une difficulté pratique car cette condition initiale provient de perturbations qui, par principe, sont inconnues. Cette difficulté peut être levée [39] en supposant que l'état initial du système est une variable aléatoire de moyenne nulle, uniformément répartie sur une sphère de rayon ψ. Avec de telles hypothèses nous avons

$$\begin{aligned} E[X_o] &= 0 \\ E[X_o X_o^{\intercal}] &= \mathrm{X}_o = \psi^2 I \end{aligned} \tag{V.39}$$

Le critère de performance peut donc, sous les hypothèses (V.39), se réécrire

$$J_{\text{perf}} = \mathrm{Tr}(\mathrm{X}_o L) \tag{V.40}$$

où L est solution de l'équation de Lyapunov

$$A_c^{\intercal} L A_c - L + Q_p = 0 \tag{V.41}$$

Remarque : si le système en boucle ouverte contient des états liés au correcteur (cas d'une commande dynamique), alors la matrice X_o devra être partitionnée de la manière suivante

$$X_o = \psi^2 \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{V.42}$$

En effet seuls les états initiaux du système doivent être considérés comme inconnus, les états initiaux du correcteur étant nuls.

V.5.3 Mesure de robustesse en stabilité pour des variations non structurées

La mesure de robustesse que nous retiendrons est celle proposée par J. B. Farison dans [25]. La borne μ donnée par la formule (V.4) en choisissant $Q = I$

$$\mu = -\sigma_{\max}(A_c) + \sqrt{[\sigma_{\max}(A_c)]^2 + \frac{1}{\sigma_{\max}(P)}} \tag{V.43}$$

Comme le système en boucle fermée est supposé stable, nous avons donc

$$0 \leq \sigma_{\max}(A_c) \leq 1 \tag{V.44}$$

L'expression de la borne μ peut donc être minimisée par

$$\mu \geq -1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\sigma_{\max}(P)}} \tag{V.45}$$

Nous voyons donc que la minimisation de $\sigma_{\max}(P)$ entraînera la maximisation de la borne μ. Comme la norme spectrale de P n'est pas simple à manier nous allons utiliser la norme de Frobenius de P qui est un majorant de la norme spectrale [45]. La matrice P étant symétrique positive nous avons les propriétés suivantes :

$$\begin{gathered} \sigma_{\max}(P) = \sqrt{\lambda_{\max}(P^T P)} = \sqrt{[\lambda_{\max}(P)]^2} \\ \text{donc } \sigma_{\max}(P) = \lambda_{\max}(P) \end{gathered} \tag{V.46}$$

Nous pouvons déduire de cette propriété que si P est symétrique

$$\sigma_{\max}(P) \leq \mathrm{Tr}(P) \tag{V.47}$$

Nous retiendrons donc comme mesure de robustesse en stabilité pour des variations de type non structurées

$$J_{\text{rob}} = \text{Tr}(P) \tag{V.48}$$

où la matrice P est solution de l'équation de Lyapunov

$$A_c^T P A_c - P + I = 0 \tag{V.49}$$

V.5.4 Cas des variations paramétriques (perturbations structurées)

Dans le cas de variations paramétriques, la borne sur les variations paramétriques admissibles est donnée par l'expression (V.15) avec $Q = I$

$$\mu = -\left[\frac{\sigma_{\max}\left(\sum_{i=1}^{r}|P_i|\right)}{r\sigma_{\max}(|P_\theta|)}\right] + \sqrt{\left[\frac{\sigma_{\max}\left(\sum_{i=1}^{r}|P_i|\right)}{r\sigma_{\max}(|P_\theta|)}\right]^2 + \frac{1}{r\sigma_{\max}(|P_\theta|)}} \tag{V.50}$$

Dans ce cas nous ne pouvons pas donner de minorant simple de cette mesure de robustesse. En effet comme $\sigma_{\max}\left(\sum_{i=1}^{r}|P_i|\right)$ dépend de la matrice P, la minimisation de $\sigma_{\max}(|P_\theta|)$ ne conduira pas forcément à la maximisation des marges de stabilité. Nous ne pourrons donc utiliser, pour la synthèse robuste en stabilité, l'information disponible sur la structure des perturbations agissant sur le système.

Nous avons donc considéré la synthèse de commande robuste à la stabilité dans le cas général, sans tenir compte de la structure des perturbations. La nouvelle formulation (V.32) permettra peut être de lever la limitation principale de l'approche que nous proposons, mais des développements théoriques restent à étudier pour préciser le domaine d'applicabilité de cette nouvelle voie.

V.5.5 Synthèse en robustesse et performance

Le problème que nous cherchons donc à résoudre est de trouver un gain K qui minimise le critère mixte performance et robustesse (V.33) dans le cas des variations paramétriques. Ce critère, vu les relations (V.40) et (V.48) peut s'écrire

$$J_{\text{mixte}} = \text{Tr}(\lambda X_o L + (1-\lambda)P) \tag{V.51}$$

où L et P vérifient respectivement

$$\begin{aligned} A_c^T L A_c - L + Q_p &= 0 \\ A_c^T P A_c - P + I &= 0 \end{aligned} \tag{V.52}$$

Ce problème est un problème de minimisation sous contraintes. Pour résoudre ce type de problème nous pouvons le transformer en un problème de minimisation simple en utilisant le formalisme de Lagrange. Nous pourrons, de plus, calculer explicitement les conditions nécessaires d'optimalité de la solution, ce qui nous permettra d'utiliser un algorithme optimisé de recherche de la solution.

Soit Λ_1 et Λ_2 les paramètres de Lagrange. L'hamiltonien du problème s'écrit

$$H = \mathrm{Tr}[\lambda \mathrm{X}_o L + (1-\lambda)P + \Lambda_1(A_c^\tau L A_c - L + Q_p) + \Lambda_2(A_c^\tau P A_c - P + I)] \qquad \text{(V.53)}$$

Les conditions nécessaires d'optimalité au premier ordre s'écrivent [1]

$$\frac{\partial H}{\partial \Lambda_1} = A_c^\tau L A_c - L + Q_p = 0 \qquad \text{(V.54)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \Lambda_2} = A_c^\tau P A_c - P + I = 0 \qquad \text{(V.55)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial L} = A_c \Lambda_1 A_c^\tau - \Lambda_1 + \lambda \mathrm{X}_o = 0 \qquad \text{(V.56)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial P} = A_c \Lambda_2 A_c^\tau - \Lambda_2 + (1-\lambda)I = 0 \qquad \text{(V.57)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial K} = B^\tau (L A_c \Lambda_1 + P A_c \Lambda_2) C^\tau + R K C \Lambda_1 C^\tau = 0 \qquad \text{(V.58)}$$

Le problème d'optimisation du critère mixte envisagé se résume donc à la résolution simultanée de ces cinq équations matricielles. Ce problème peut être résolu numériquement en utilisant un algorithme fondé sur les gradients conjugués. Un programme Matlab, fondé sur une minimisation de type min-max [32], a été écrit pour résoudre ce problème d'optimisation. L'algorithme de recherche de la solution optimale est le suivant.

Etape 1 ***Trouver un retour K satisfaisant :***
Essayer de manière aléatoire différentes matrices K. Parmi toutes les solutions stables trouvées, sélectionner celle qui minimise la mesure de robustesse (V.51).

Etape 2 ***Calculer L, P, Λ_1 et Λ_2 :***
Calculer la boucle fermée $A_c = A + BKC$.
Calculer la matrice $Q_p = Q + C^\tau K^\tau RKC$.
Résoudre les équations

$$\begin{cases} A_c^\tau L A_c - L + Q_p = 0 \\ A_c^\tau P A_c - P + I = 0 \\ A_c \Lambda_1 A_c^\tau - \Lambda_1 + \lambda X_o = 0 \\ A_c \Lambda_2 A_c^\tau - \Lambda_2 + (1-\lambda) I = 0 \end{cases} \tag{V.59}$$

Etape 3 ***Calculer*** $E = B^\tau (L A_c \Lambda_1 + P A_c \Lambda_2) C^\tau + RKC\Lambda_1 C^\tau$

Etape 4 ***Minimiser*** $||E|| = \max_{ij} \left\{ (e_{ij})^2 \right\}$:
Trouver un nouveau K de manière à diminuer la valeur maximale du carré des éléments de E (sous la contrainte d'avoir A_c stable).

Etape 5 Si $||E|| = \max_{ij} \left\{ (e_{ij})^2 \right\} > 10^{-5}$ recommencer à l'étape 2.

Algorithme G: Synthèse d'une commande optimale en performance et stabilité.

La procédure d'optimisation utilisée ne permet pas de certifier que la solution trouvée n'est pas un optimal local. En revanche, si la matrice E est nulle (ou très petite), nous savons que la solution trouvée est une solution optimale, car les conditions d'optimalité sont réalisées, les cinq équations (V.54) à (V.58) étant vérifiées.

Nous pouvons remarquer que la dimension de la matrice E est la même que celle de K. Nous avons donc, lors de l'optimisation, autant de degrés de liberté (éléments de K) que de contraintes à respecter (minimisation des éléments de E). Ceci montre que notre algorithme d'optimisation est numériquement bien conditionné.

V.6 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons décrit des bornes sur les perturbations admissibles, pour un système discret nominal stable, n'entraînant pas l'instabilité. Ces bornes ont été calculées dans le cas de perturbations non structurées, et le cas d'incertitudes paramétriques (perturbations structurées). Ces bornes sont déterminées grâce au formalisme de Lyapunov.

Nous avons vu que ces bornes peuvent s'avérer restrictives, leur valeur dépendant de la base dans laquelle la représentation d'état est écrite. Nous avons aussi présenté une nouvelle

formulation, qui pourrait s'avérer intéressante, dans le cas de variations structurées, sous réserve de lever quelques difficultés liées au domaine d'applicabilité.

Dans un deuxième temps, nous avons envisagé la synthèse d'un retour de sortie robuste au sens d'une stabilité optimale pour le système en boucle fermée. Seul le cas de variations non-structurées a pu être traité, la formulation de la mesure de robustesse étant trop complexe dans le cas de perturbations paramétriques.

Afin de prendre en compte des contraintes de performances sur le système en boucle fermée, nous avons considéré la somme pondérée entre une mesure de performance quadratique et une mesure de robustesse liée à la stabilité du système. Un algorithme à été proposé permettant de déterminer le retour de sortie optimisant ce critère mixte performance/robustesse. Cet algorithme est numériquement bien conditionné car nous avons pu, grâce au formalisme de Lagrange déterminer explicitement des conditions nécessaires d'optimalité de la solution recherchée.

La recherche du retour de sortie optimal passe par la résolution simultanée de cinq équations matricielles couplées. Cette résolution est numériquement envisagée en utilisant un algorithme d'optimisation non-linéaire de type min-max. L'algorithme permettant de calculer la commande satisfaisante est finalement présenté.

Chapitre VI Sensibilité du critère de performance aux variations paramétriques

VI.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, pour prendre en compte simultanément les contraintes de performance et de robustesse, nous avons combiné au critère de robustesse, un critère de performance quadratique. L'idée développée dans ce chapitre est de construire une mesure de robustesse fondée sur la sensibilité du critère de performance aux variations paramétriques perturbant le système. Une approche similaire à été développée dans la littérature dans le cas continu mais avec une mesure de robustesse fondée sur la sensibilité de la trajectoire [46].

Dans un premier temps nous allons préciser cette nouvelle notion de robustesse en dérivant le critère quadratique que nous avons décrit dans la section précédente par rapport à chacun des paramètres dont dépend le système. Nous verrons ensuite comment construire un algorithme de recherche de commande optimisant la somme pondérée du critère de performance et de cette nouvelle mesure de robustesse.

Nous verrons que cet algorithme fait appel à des techniques de programmation non linéaires et que la recherche numérique de la solution optimale peut s'avérer fort complexe car il n'est pas possible de dériver analytiquement les conditions d'optimalité de la solution recherchée, comme dans le chapitre précédent.

VI.2 Critère de performance

Reprenons rapidement les résultats établis dans le chapitre précédent concernant le critère de performance quadratique. Soit le modèle nominal du système en boucle ouverte décrit par les équations suivantes

$$\begin{cases} X_{k+1} &= AX_k + BU_k \\ Y_k &= CX_k \end{cases} \tag{VI.1}$$

La matrice A, de dimension $n \times n$, représente la dynamique du système en boucle ouverte, la matrice B, de dimension $n \times m$, représente la matrice d'entrée des commandes du système, et la matrice C, de dimension $p \times n$ représente la matrice de mesures.

Le critère de performance quadratique

$$J_{\text{perf}} = \sum_{k=0}^{\infty} X_k^T Q X_k + U_k^T R U_k \tag{VI.2}$$

où Q et R représentent les pondérations respectivement sur le vecteur d'état et le vecteur d'entrée, peut également s'écrire en boucle fermée sous la forme

$$J_{\text{perf}} = \text{Tr}(\text{X}_o L) \tag{VI.3}$$

où L est solution de l'équation de Lyapunov

$$A_c^\intercal L A_c - L + Q_p = 0 \tag{VI.4}$$

$$\text{avec} \begin{cases} A_c &= A + BKC \\ Q_p &= Q + C^\intercal K^\intercal R K C \end{cases} \tag{VI.5}$$

Comme nous l'avons vu, X_o représente la matrice de covariance de l'état initial que l'on supposera, si elle n'est pas connue, comme étant uniformément répartie sur une sphère de diamètre ψ (soit $\text{X}_o = \psi^2 I$).

VI.3 Sensibilité du critère de performance

Afin d'expliciter la mesure de robustesse envisagée, déterminons comment évolue le critère de performance lorsque le système est soumis à des variations paramétriques. Calculons pour cela la dérivée du critère de performance par rapport aux paramètres dont dépend le système (VI.1) en boucle fermée. En dérivant l'équation (VI.3) par rapport à θ_i, il vient

$$\frac{\partial J_{\text{perf}}}{\partial \theta_i} = \text{Tr}\left(\text{X}_o \frac{\partial L}{\partial \theta_i}\right) \tag{VI.6}$$

Déterminons $\frac{\partial L}{\partial \theta_i}$ en dérivant l'équation (VI.4) par rapport à θ_i.

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial \theta_i}(A_c^\intercal L A_c) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0 \\ \frac{\partial A_c^\intercal}{\partial \theta_i} L A_c + A_c^\intercal \frac{\partial L}{\partial \theta_i} A_c + A_c^\intercal L \frac{\partial A_c}{\partial \theta_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0 \end{gathered} \tag{VI.7}$$

Comme nous l'avons vu dans le chapitre d'introduction les variations paramétriques en boucle fermée sont de même type que celles en boucle ouverte. Avec les notations choisies dans ce chapitre, nous avons donc

$$\frac{\partial A_c}{\partial \theta_i} = \frac{\partial A}{\partial \theta_i} = A_i \tag{VI.8}$$

En posant $D_i = \frac{\partial L}{\partial \theta_i}$ nous obtenons finalement la relation suivante

$$A_c^\intercal D_i A_c - D_i + (A_i^\intercal L A_c + A_c^\intercal L A_i) = 0 \tag{VI.9}$$

Le calcul de la matrice D_i est donc possible en résolvant les deux équations de Lyapunov (VI.4) et (VI.9). Nous pouvons donc maintenant explicitement calculer la dérivée du critère de performance par rapport aux paramètres dont dépend le système.

Définissons maintenant la nouvelle mesure de robustesse comme étant la somme quadratique des dérivées du critère de performance. Soit

$$J_{\text{rob}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\partial J_{\text{perf}}}{\partial \theta_i} \right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} [\text{Tr}(X_o D_i)]^2} \tag{VI.10}$$

Nous venons donc de définir un critère de robustesse lié à l'insensibilité de ce critère aux variations paramétriques.

$$J_{\text{rob}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} [\text{Tr}(X_o D_i)]^2} \tag{VI.11}$$

où les matrices L et D_i vérifient respectivement

$$A_c^T L A_c - L + Q_p = 0 \tag{VI.12}$$

$$A_c^T D_i A_c - D_i + (A_i^T L A_c + A_c^T L A_i) = 0 \tag{VI.13}$$

L'approche que nous présentons ici semble séduisante, le calcul de la mesure de robustesse étant relativement simple (résolution de deux équations de Lyapunov). En revanche, vu la non linéarité introduite dans l'équation (VI.11), il ne sera pas possible de dériver explicitement le lien existant entre cette mesure de robustesse et le gain K recherché. La synthèse d'une loi de commande optimisant cette mesure de robustesse sera donc numériquement complexe, les conditions d'optimalité ne pouvant être explicitement écrites comme dans le chapitre précédent.

VI.4 Synthèse de loi de commande performante et insensible aux variations paramétriques

Comme dans le chapitre précédent, pour résoudre le problème lié à la prise en compte simultanée de contraintes de performances et de robustesse, définissons un critère mixte, somme pondérée entre le critère de performance et de robustesse.

$$J_{\text{mixte}} = \lambda J_{\text{perf}} + (1 - \lambda) J_{\text{rob}} \tag{VI.14}$$

L'algorithme de recherche de solution optimale sera simplement fondé sur une recherche de solution minimisant le critère (VI.14). Vu les expressions des critères de performance et de robustesse (VI.11), le critère mixte peut s'écrire.

$$J_{\text{mixte}} = \lambda \text{Tr}(X_o L) + (1-\lambda)\sqrt{\sum_{i=1}^{r} [\text{Tr}(X_o D_i)]^2} \tag{VI.15}$$

où L et D_i sont solution de

$$\begin{aligned} A_c^T L A_c - L + Q_p &= 0 \\ A_c^T D_i A_c - D_i + (A_i^T L A_c + A_c^T L A_i) &= 0 \end{aligned} \tag{VI.16}$$

L'algorithme de recherche de la loi de commande de type retour de sortie que nous pouvons proposer est le suivant.

Etape 1 ***Trouver un retour K satisfaisant :***
Essayer de manière aléatoire différentes matrices K. Parmi toutes les solutions stables trouvées, sélectionner celle qui minimise le critère mixte (VI.15).

Etape 2 ***Calculer L et D_i :***
Calculer la boucle fermée $A_c = A + BKC$,
Calculer $Q_p = Q + C^T K^T R K C$.
Résoudre les équations

$$\begin{cases} A_c^T L A_c - L + Q_p = 0 \\ A_c^T D_i A_c - D_i + (A_i^T L A_c + A_c^T L A_i) = 0 \end{cases}$$

Etape 3 ***Calculer le critère mixte :***

$$J_{\text{mixte}} = \lambda \text{Tr}(X_o L) + (1-\lambda)\sqrt{\sum_{i=1}^{r} [\text{Tr}(X_o D_i)]^2} \tag{VI.18}$$

Etape 4 ***Minimiser J_{mixte} :***
Trouver un nouveau K de manière à diminuer la valeur du critère (sous la contrainte d'avoir A_c stable).

Etape 5 Si $\Delta J_{\text{mixte}} > 10^{-5}$ recommencer à l'étape 2.

Algorithme H: Synthèse de commande optimale en performance et sensibilité aux variations paramétriques.

La mise en œuvre pratique de cet algorithme a été réalisée grâce à l'optimisation toolbox de Matlab [35]. La méthode de recherche de minimum est fondée sur une méthode de type

quasi-newton avec calcul numérique de Hessien [43]. A partir d'une solution initiale, le critère est diminué selon la plus grande pente, jusqu'à un optimum, qui souvent n'est que local. Ce type d'algorithme d'optimisation demande souvent de très long temps de calculs, pour obtenir une solution qui n'est optimale que localement. En effet lorsque le système devient de dimension élevée (lorsque la dimension de la matrice K devient grande) nous disposons de nombreux degrés de liberté, mais d'un seul critère numérique scalaire à minimiser, ce qui entraîne une très forte sensibilité du résultat obtenu au choix de la solution initiale.

VI.5 Conclusions

Nous avons dans ce chapitre présenté une nouvelle mesure de robustesse fondée sur la sensibilité d'un critère de performance aux variations paramétriques. Cette nouvelle mesure peut numériquement se calculer relativement simplement. En revanche, la synthèse de loi de commande optimisant cette mesure, ou plus généralement un critère mixte performance/robustesse, s'avère délicate, ne pouvant dériver explicitement les conditions d'optimalité de la solution comme dans le chapitre précédent.

Nous ne pouvons donc qu'utiliser un algorithme d'optimisation "aveugle", qui pose numériquement de nombreux problèmes de convergence, et de sensibilité de la solution trouvée à la valeur initiale utilisée. Ce type d'algorithme, ou plus généralement les méthodes de recherche de solutions fondées sur l'optimisation d'un seul critère numérique, devra donc être, en pratique, réservé aux problèmes simples (de dimensions réduites).

Chapitre VII Analyse comparée des mesures de robustesse et des méthodes de synthèse robuste.

VII.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons analyser et comparer les différents outils de mesure de robustesse et les méthodes de synthèse que nous venons de décrire. Nous examinerons différents aspects afin de mieux saisir les points forts et les points faibles de chacune de ces méthodes. Notre objectif n'est pas de trouver la "meilleure" approche mais de mettre en avant les éléments permettant de choisir, en fonction du problème à traiter, l'approche la plus appropriée. En effet aucune méthode ne pourra être parfaitement adaptée pour tous les types de problèmes, en fonction des contraintes ou des objectifs que l'on s'impose.

Nous orienterons notre analyse selon deux axes

- ☐ Analyse des mesures de robustesse.
- ☐ Analyse des méthodes de synthèse.

Pour étayer notre propos, nous utiliserons un exemple simple multivariable du troisième ordre, dépendant de deux paramètres. Après avoir présenté cet exemple, nous étudierons les performances relatives de chacune des approches que nous avons présentées dans les chapitres précédents.

VII.2 Exemple du troisième ordre

A titre d'exemple, nous avons considéré un système linéaire discret dépendant de deux paramètres réels a et b ayant pour valeur nominale respectives a_o et b_o

$$a_o = 0.5 \text{ et } b_o = -0.3 \tag{VII.1}$$

La dynamique du système envisagé a comme équations

$$\begin{cases} X_{k+1} &= AX_k + BU_k \\ Y_k &= CX_k \end{cases} \tag{VII.2}$$

avec les matrices A, B et C suivantes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ a & 1 & b \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{VII.3}$$

Avec cet exemple l'ordre du système est $n = 3$ le nombre de sorties est $p = 2$ et le nombre de commandes est $m = 2$. La période d'échantillonnage est de $T_e = 1$ seconde.

VII.2.1 Analyse de la boucle ouverte

Le polynôme caractéristique du système (VII.2) est donné par

$$\begin{aligned} p(z) &= |zI - A| \\ p(z) &= z^3 - bz^2 - az - a^2 \end{aligned} \tag{VII.4}$$

En boucle ouverte le système nominal présenté est stable. Les pôles de ce système en boucle ouverte sont les suivants :

Pôles	Amortissement	Fréquence propre (Hz)
-0.5352 ± 0.1952i	0.1976	0.4533
0.7703	1.0000	0.0415

Nous avons donc un pôle réel lent (temps de réponse de l'ordre de 20 secondes) et une paire de pôles complexes mal amortis, relativement rapides (période des oscillations 2.2 secondes). La réponse temporelle naturelle du système nominal est représentée sur la figure VII-1, pour une excitation initiale

$$X_o = [1 \quad 1 \quad 1]^T \tag{VII.5}$$

Les deux sorties sont représentées, notées $Y(1)$ et $Y(2)$.

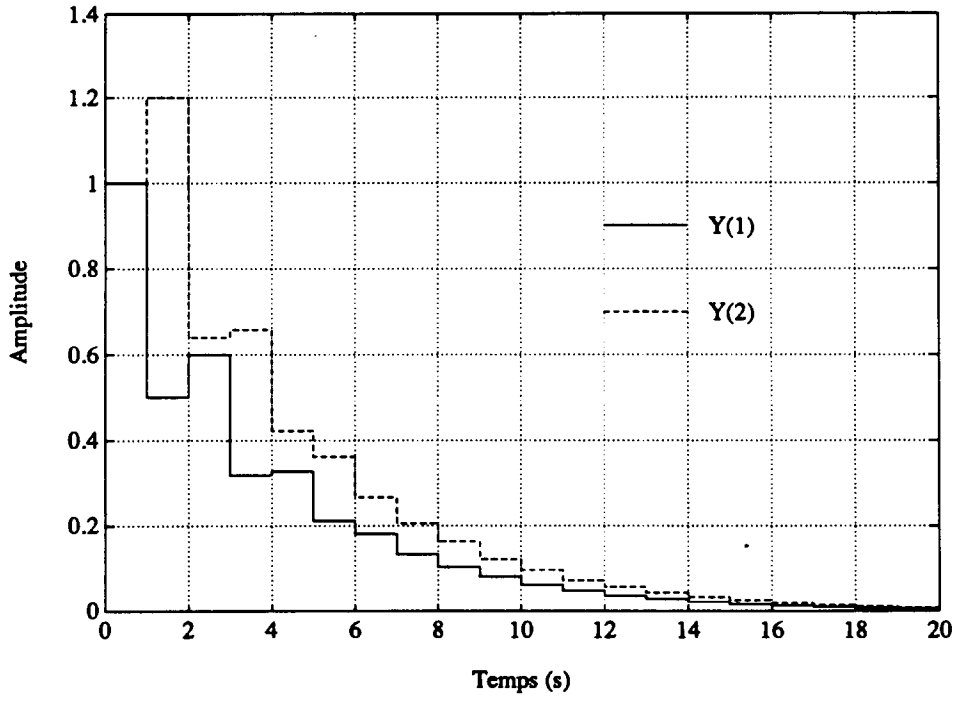


Fig. VII-1: Réponse transitoire en boucle ouverte.

Domaine de stabilité

Nous pouvons déterminer le domaine de stabilité du système considéré en calculant les frontières de ce domaine dans le plan paramétrique. Pour déterminer les frontières de ce domaine, considérons l'ensemble des cas où l'un des pôles au moins est de module unité. Trois cas sont à envisager, selon que $z = 1$, $z = -1$ ou $z = x \pm iy$ (avec $x^2 + y^2 = 1$) sont les racines du polynome caractéristique.

- $p(1) = 0$; en utilisant (VII.4), il vient

$$b = 1 - a - a^2 \tag{VII.6}$$

- $p(-1) = 0$; de même nous en déduisons

$$b = -1 + a - a^2 \tag{VII.7}$$

- $p(x \pm iy) = 0$: le polynome caractéristique s'écrit alors sous la forme

$$p(z) = (z - x - iy)(z - x + iy)(z - a^2) \tag{VII.8}$$

En développant cette expression, et en utilisant le fait que $x^2 + y^2 = 1$, il vient

$$\begin{aligned} p(z) &= (z^2 - 2xz + 1)(z - a^2) \\ &= z^3 - (a^2 + 2x)z^2 + (1 + 2xa^2)z - a^2 \end{aligned} \tag{VII.9}$$

Nous en déduisons donc que

$$\begin{cases} b = & a^2 + 2x \\ a = & -1 - 2xa^2 \end{cases} \tag{VII.10}$$

En éliminant x, nous en déduisons l'équation de la courbe frontière de stabilité

$$ba^2 = -1 - a + a^4 \tag{VII.11}$$

Le domaine de stabilité du système (VII.2) peut donc être représenté graphiquement (figure VII-2) dans le plan des paramètres (a, b). Ce domaine est le domaine délimité par les trois courbes (VII.6), (VII.7) et (VII.11).

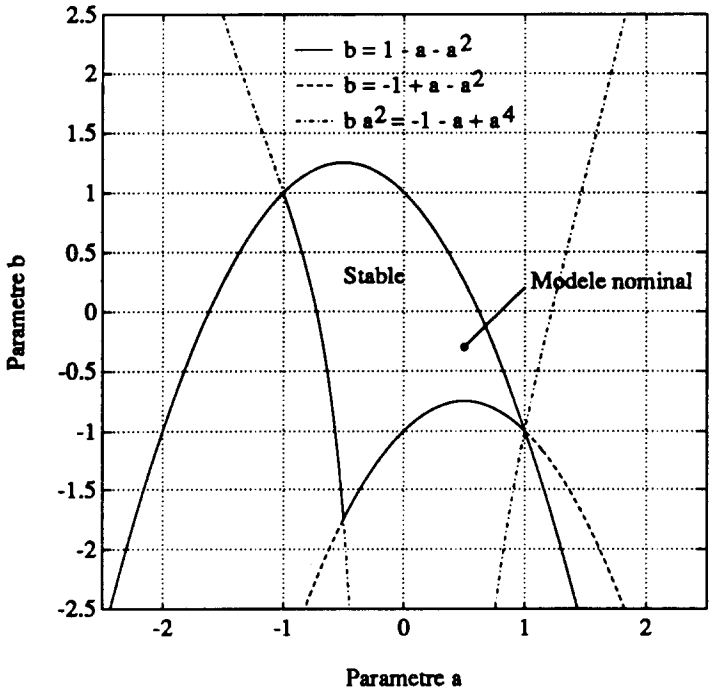


Fig. VII-2: Domaine de stabilité en boucle ouverte.

VII.2.2 Spécifications en boucle fermée et performance

En boucle fermée, nous désirons que le système décrit réagisse légèrement plus rapidement (temps de réponse proche de 10 secondes). Nous désirons également que les sorties du système soient correctement amorties (pas d'oscillations). De plus nous ferons en sorte que la commande ne soit pas trop excitée.

Cet objectif doit être atteint pour le système nominal, et nous souhaitons conserver le plus possible ces performances lorsque les paramètres a et b varient autour de leur valeur nominale. C'est l'objet même des études de robustesse que nous menons. Ces objectifs peuvent se résumer par la formule suivante

> *"avoir de bonnes performances pour le modèle nominal qui soient le plus insensible possible aux variations paramétriques locales autour du point nominal"*

Pour le modèle nominal, ces spécifications peuvent s'exprimer sous la forme d'un critère quadratique à optimiser. Le critère retenu pour représenter les performances est

$$J_{\text{perf}} = \sum_{k=0}^{\infty} X_k^T Q X_k + U_k^T R U_k \qquad \text{(VII.12)}$$

avec

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } R = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \qquad \text{(VII.13)}$$

La commande optimisant ce critère est une commande de type retour d'état [5] que nous pouvons facilement calculer en résolvant une équation de Ricatti. Le retour d'état, noté K_0 optimisant ce critère est le suivant

$$K_0 = \begin{bmatrix} +0.0113 & -0.0209 & -0.1237 \\ -0.0598 & -0.2060 & +0.0254 \end{bmatrix} \qquad \text{(VII.14)}$$

Avec cette commande les pôles du système en boucle fermée sont

Pôles	Amortissement
-0.4715 ± 0.1906i	0.2382
0.5877	1.0000

La réponse temporelle du système nominal en boucle fermée, représentée figure VII-11, nous montre que les spécifications énoncées ci-dessus sont atteintes. La valeur du critère de performance, qui est le minimum atteignable quel que soit le type de commande utilisé [5], est

$$J_{\text{perf}} = 6.2606 \qquad \text{(VII.15)}$$

Nous venons donc, à partir de spécifications temporelles, de définir un critère quadratique permettant de mesurer les performances en boucle fermée de notre système. Nous avons ensuite déterminé la commande optimisant ce critère pour le modèle nominal.

VII.3 Analyse des mesures de robustesse

Les critères de robustesse que nous avons définis doivent nous permettre d'analyser le comportement de notre système en boucle fermée lorsque celui-ci est soumis à des variations paramétriques. Comme commande nous utiliserons le retour d'état K_o minimisant le critère de performance (VII.12). Par leur étude comparée, nous comprendrons leur domaine d'application, leur signification physique ainsi que leur pertinence vis à vis du problème de robustesse que nous avons envisagé.

VII.3.1 Sensibilité des pôles en boucle fermée

La première mesure que nous avons décrite est fondée sur la sensibilité des pôles en boucle fermée. Sur notre exemple la mesure de robustesse vaut

$$J_{\text{rob}} = 2.7024 \qquad \text{(VII.16)}$$

Le problème de cette mesure de robustesse est qu'il est en pratique difficile de faire un lien direct entre des variations de pôles et un changement de réponse temporelle ou de critère quadratique. En effet, lorsque les pôles ne varient pas, dans le cas multivariable, les vecteurs propres associés déterminent les effets de ces modes sur chacune des sorties. Différents choix de vecteurs propres induisent donc des réponses temporelles qui peuvent être très différentes. De plus une variation de pôle peut entraîner, suivant la direction selon laquelle se produit cette variation, de très légères ou de très importantes variations des performances.

Pour illustrer ce propos, nous avons calculé les variations de pôles et les variations du critère de performance en boucle fermée (avec la commande optimale en performance) lorsque les paramètres décrivent un cercle de rayon 0.1 dans le plan paramétrique (Figure VII-3). Ces variations paramétriques entraînent les variations de pôles en boucle fermée représentées figure VII-4.

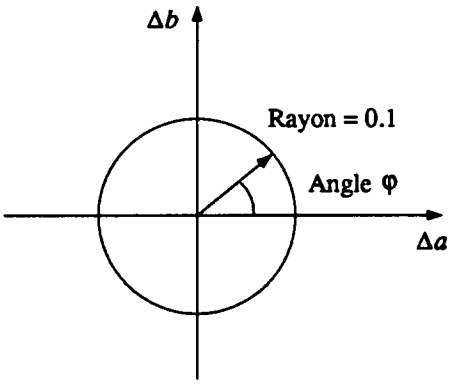


Fig. VII-3: Cercle de variations paramétriques

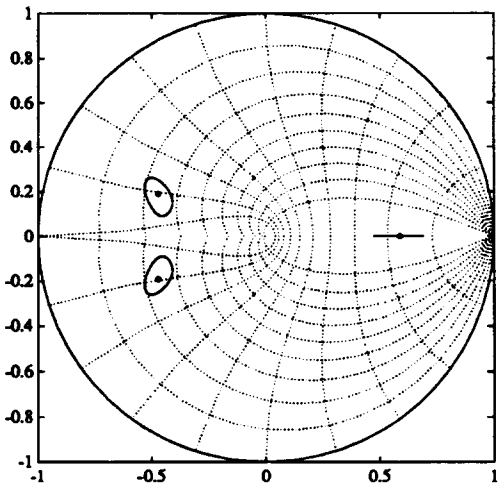


Fig. VII-4: Variations de pôles en boucle fermée

Pour ces variations paramétriques, nous avons calculé en fonction de l'angle φ, les variations des pôles en boucle fermée (par rapport au modèle nominal) et la valeur du critère de performance (VII.12) en boucle fermée. Ces résultats sont représentés figure VII-5 Nous avons déterminé la distance euclidienne des pôles perturbés aux pôles nominaux associés, et la valeur du critère de performance en fonction de l'angle φ.

Pour $\varphi = 250$ deg, le critère de performance est rigoureusement identique dans le cas nominal et dans le cas perturbé. En revanche, nous pouvons observer que pour cet angle, les pôles sont déplacés, par rapport à leur position nominale, de manière significative. De

même, pour $\varphi \simeq 287$ deg, les pôles varient très peu par rapport à leur position nominale, mais les performances sont fortement dégradées. Une mesure de robustesse fondée sur la sensibilité des pôles ne permettra donc pas de prendre en compte parfaitement des contraintes de performance de type temporelles.

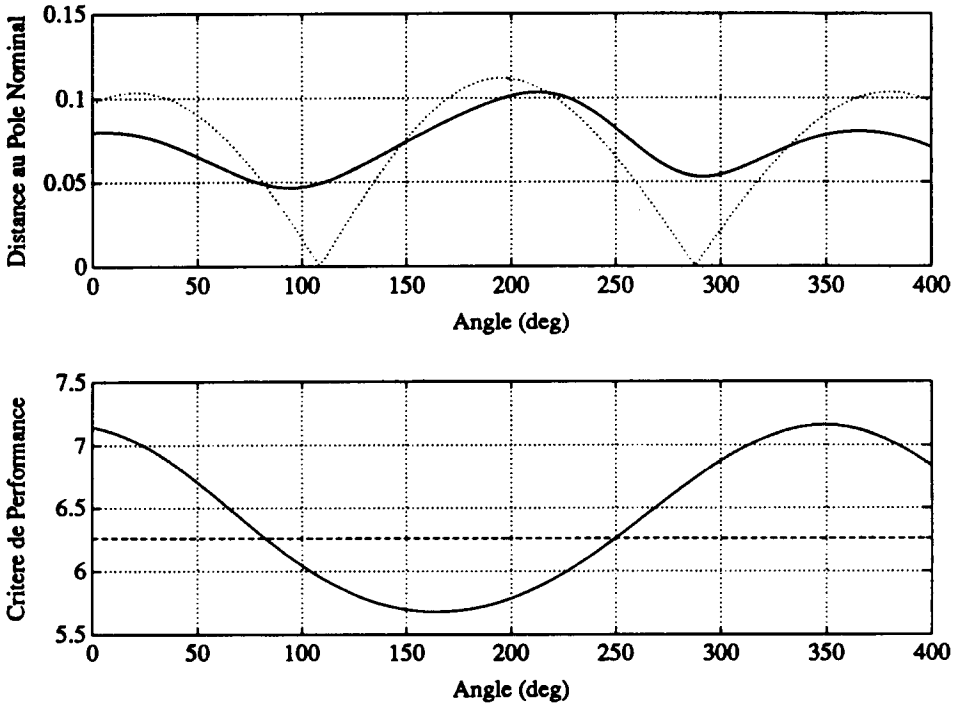


Fig. VII-5: Variations des pôles et variations du critère de performance en boucle fermée

De plus, demander à un système que ses pôles en boucle fermée soient invariants peut s'avérer très restrictif. Certaines variations de pôles peuvent être admissibles car elles n'entraînent pas de pertes de performance significatives. L'inverse est également possible. Si le système est lent, il possédera des pôles proches du cercle unité, et une petite variation pourra rendre un tel système instable (Exemple sur la figure VII-6). Nous voyons donc que de petites variations de pôles n'entraînent pas de façon certaine une bonne "robustesse" du système.

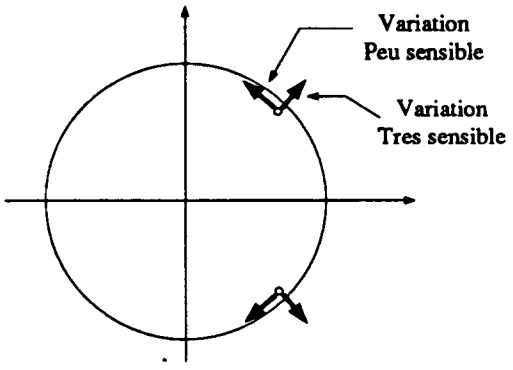


Fig. VII-6: Effet de variations de pôles

Il faudra donc être particulièrement vigilant pour l'utilisation de cette mesure de robustesse, en se rappelant qu'elle mesure des variations de pôles dont les effets sur les performances sont difficilement quantifiables.

VII.3.2 Borne de stabilité dans le cas structuré

La mesure de robustesse que nous avons présentée nous permet de calculer une borne sur les variations paramétriques maximales autorisées de manière à conserver la stabilité du système. Dans le cas présenté, avec la commande optimale en performance, nous pouvons établir que le système est stable si

$$\max\{|\Delta a|, |\Delta b|\} < \mu \text{ avec } \mu = 0.1870 \qquad \text{(VII.17)}$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, la borne donnée par cette mesure est restrictive. Cette borne est issue d'une condition nécessaire de stabilité (et pas suffisante). Rappelons également que cette mesure s'applique dans le cas où les variations paramétriques sont dépendantes du temps.

Dans notre exemple nous avons calculé expérimentalement le domaine de stabilité en boucle fermée dans le plan paramétrique (Figure VII-7). Puis nous avons déterminé le rayon maximal du disque d'incertitudes paramétriques qui maintiennent la stabilité en boucle fermée. Le rayon de ce disque est $R_{\max} = 0.4386$

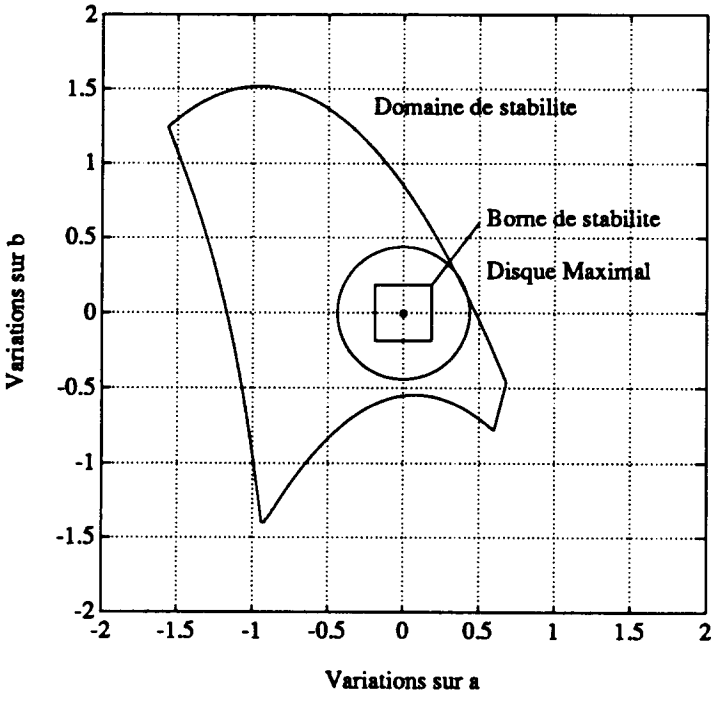


Fig. VII-7: Domaine de stabilité en boucle fermée.

La mesure de robustesse représente donc sur cet exemple 42 % des variations effectivement admissibles. Cela confirme le fait que cette mesure de robustesse est relativement pessimiste. Cependant, cette mesure nous permettra de comparer simplement différentes commandes.

VII.3.3 Variations du critère de performance

La mesure de robustesse fondée sur les variations d'un critère de performance est intéressante car elle est très étroitement liée à la définition de la robustesse que nous avons proposée. Cette mesure permet de mesurer directement les variations du critère de performance liées aux variations paramétriques. Nous avons vu aussi que nous pouvions calculer indépendamment les variations liées à chacun des paramètres, ce qui n'est pas possible avec les autres mesures de robustesse décrites.

Dans notre exemple nous avons

$$\left(\frac{\partial J_{\text{perf}}}{\partial a}\right)_{a_o} = 6.9900 \text{ et } \left(\frac{\partial J_{\text{perf}}}{\partial b}\right)_{b_o} = -1.6807 \qquad \text{(VII.18)}$$

Cela nous montre que les variations du paramètre a modifient plus sensiblement le critère de performance que les variations sur b.

Dans le cas que nous étudions, cette mesure de robustesse est parfaitement adaptée au problème envisagé. Mais dans le cas général, cette mesure de robustesse est trop directement liée au choix du critère de performance. Il peut donc s'avérer délicat d'interpréter la signification physique de cette mesure de robustesse dans le cas où un critère de performance quadratique n'est pas explicitement nécessaire (par exemple pour l'analyse d'un système en boucle ouverte).

VII.3.4 Complexité comparée des mesures de robustesse

Afin d'évaluer la complexité de la mise en œuvre pratique des mesures présentées, nous avons déterminé expérimentalement le temps de calcul nécessaire pour déterminer numériquement chacune de ces mesures. Les valeurs absolues des différentes durées, exprimées en secondes, sont présentées dans le tableau ci-dessous. La durée absolue n'ayant pas de réelle signification physique, car elle dépend de la puissance du calculateur utilisé, nous avons aussi déterminé un temps "relatif" en normalisant les durées par rapport au temps le plus court.

	Durée absolue	Durée relative
Mesure de performance	0.1186	1.4825
Variation des pôles	0.0800	1.0000
Bornes de stabilité	0.3154	3.9425
Bornes de stabilité (mesure simplifiée)	0.1293	1.6162
Variations du critère de performance	0.3426	4.2825

Nous pouvons donc observer qu'il existe de légères différences entre chacune des mesures de robustesse que nous avons envisagées. Ces différences peuvent s'expliquer par la nature très différente des problèmes numériques à résoudre.

- La mesure de robustesse liée à la sensibilité des valeurs propres est simple à calculer. En effet il suffit de calculer les valeurs propres d'une matrice, puis d'effectuer quelques opérations algébriques simples (inversion de matrice).

- ☐ Le calcul de la borne de stabilité dans le cas structuré nécessite la résolution d'une équation de type Lyapunov, puis le calcul de valeurs singulières de matrices.
- ☐ Le calcul de la mesure simplifiée liée aux bornes de stabilité ne nécessite que la résolution d'une équation de Lyapunov.
- ☐ Le calcul de la variation du critère de performance nécessite la résolution de deux équations de type Lyapunov.

Finalement, nous retiendrons que le calcul numérique de chacune des mesures de robustesse est simple, et que les différences entre chacune des mesures ne sont pas très significatives (moins d'un ordre de grandeur). La complexité de la détermination numérique des mesures de robustesse considérées ne posera donc pas de difficultés pour leur utilisation pratique.

VII.3.5 Conclusions

De l'étude comparée des trois mesures de robustesse que nous avons décrites nous retiendrons finalement les éléments suivants

- ☐ Les différentes mesures de robustesse sont d'une complexité (au sens numérique) équivalente.
- ☐ La mesure de robustesse fondée sur la sensibilité des pôles est difficilement interprétable car il n'existe pas de lien direct entre les variations des pôles et les variations de "performance" du système.
- ☐ La borne sur les variations paramétriques admissibles garantissant la stabilité peut donner en pratique des valeurs exagérément pessimistes.
- ☐ La mesure des variations du critère de performance peut ne pas être satisfaisante car elle dépend du critère de performance choisi.

VII.4 Calcul des commandes robustes et performantes

Dans cette section, nous allons calculer les différentes commandes de type retour de sortie, utilisant les algorithmes de synthèse que nous avons présentés. Chaque commande optimisant une mesure de robustesse différente, il va être intéressant de comparer la robustesse et les performances relatives de chacune des lois de commande.

Dans un premier temps nous présenterons les difficultés rencontrées lors de la mise en œuvre pratique des différentes méthodes, ainsi que les choix faits pour chacune des techniques utilisées.

Dans la section suivante, nous essayerons de comparer les résultats, en performance et robustesse de chacune des commandes déterminées. Pour cela nous comparerons les valeurs des mesures de robustesse et performance, les domaines de stabilité en boucle fermée, les variations locales de pôles et du critère de performance, lorsque les paramètres évoluent localement autour des valeurs nominales a_o et b_o.

VII.4.1 Sensibilité des pôles en boucle fermée

Dans un premier temps nous avons calculé un retour d'état minimisant les variations des pôles choisis en boucle fermée. Contrairement à ce que nous attendions, le choix des pôles en boucle fermée n'a pas été simple, car le choix seul de pôles de boucle fermée ne suffit pas à spécifier des performances souhaitables. Nous verrons deux choix de pôles en boucle fermée entraînant finalement des performances très médiocres. Nous envisagerons finalement une approche permettant de trouver un ensemble de pôles en boucle fermée satisfaisant.

Nous avons d'abord choisi des pôles en boucle fermée sur des considérations physiques. Nous avons choisi les pôles suivants

$$[0.5 \quad 0.4 + 0.1i \quad 0.4 - 0.1i] \tag{VII.19}$$

correspondant à un temps de réponse de 10 secondes (pôle réel), de 7 secondes (pôles complexes) et d'un amortissement de $\xi = 0.93$. Avec ce choix de pôles en boucle fermée, le gain calculé vaut

$$K = \begin{bmatrix} +6.7959 & +0.5000 & -5.8955 \\ +3.8483 & -0.9837 & -2.7147 \end{bmatrix} \tag{VII.20}$$

La réponse temporelle correspondant au choix de pôles (VII.19) est présenté figure VII-13. Comme nous pouvons le voir, l'amplitude des commandes est très importante et l'amortissement de la sortie n'est pas optimal. Le critère de performance (VII.12) calculé pour cette commande est $J_{\text{perf}} = 2465$ soit environ 400 fois supérieur à la valeur minimale possible.

Ce choix n'étant pas satisfaisant nous avons envisagé d'utiliser comme ensemble de pôles en boucle fermée l'ensemble des pôles obtenus avec la commande optimale en performance K_0. Nous espérons ainsi obtenir en boucle fermée une commande ayant de bonnes performances. Avec l'ensemble de pôles en boucle fermée

$$[-0.4715 + 0.1906i \quad -0.4715 - 0.1906i \quad 0.5877] \tag{VII.21}$$

le retour d'état déterminé est

$$K_1 = \begin{bmatrix} -8.2409 & +0.4104 & +10.5735 \\ -0.5873 & -0.9659 & +0.1217 \end{bmatrix} \tag{VII.22}$$

Ce choix apparaît encore plus mauvais que le précédent, la mesure de performance en boucle fermée pour le système nominal étant $J_{\text{perf}} = 4251$ (voir figure VII-14). Il apparaît maintenant clairement que le choix seul d'un ensemble de pôles en boucle fermée ne suffit pas, dans les cas multivariables, à spécifier un niveau de performance. Pour obtenir une réponse nominale correcte, nous avons donc envisagé la recherche automatique (par programmation non-linéaire) d'un ensemble de pôles en boucle fermée tel que la mesure de performance (VII.12) soit minimisée pour ce choix. La procédure ainsi mise en œuvre peut se schématiser par la figure VII-8.

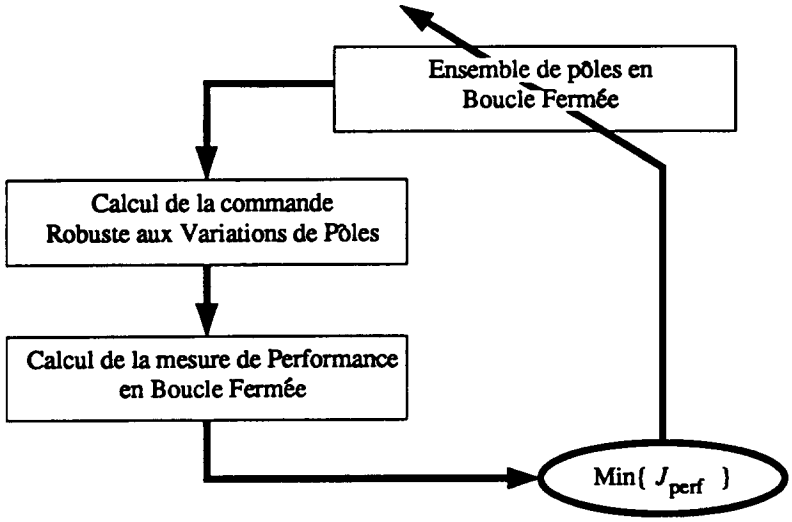


Fig. VII-8: Procédure de recherche d'ensemble de pôles en boucle fermée.

Le résultat produit par cette procédure nous a donné après 175 itérations l'ensemble de pôles suivant

$$[-0.4604 \quad -0.4034 \quad 0.4961] \tag{VII.23}$$

ce qui correspond à une valeur du critère de performance de $J_{\text{perf}} = 27.78$. Avec cette commande, la réponse temporelle a une "allure" satisfaisante (amortissement, temps de réponse et excitation des gouvernes), comme nous le montre la figure VII-15. Le retour d'état, noté K_1, correspondant à ce choix est le suivant

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.1665 & -0.4545 & -0.1192 \\ -0.0567 & -1.0067 & +0.4436 \end{bmatrix} \tag{VII.24}$$

Il apparaît sur les réponses temporelles que, malgré une mesure de performance relativement faible, les réponses temporelles ne sont pas très amorties (le critère de performance est 4.44 fois plus grand que l'optimum possible).

Nous avons ensuite calculé l'observateur nous permettant de transformer le retour d'état calculé précédemment en un retour de sortie. Comme notre système possède deux mesures, l'observateur d'ordre minimal est un observateur du premier ordre. Nous avons choisi pour l'observateur une dynamique relativement rapide, tout en faisant en sorte que la réponse temporelle en boucle fermée ne soit pas trop modifiée par l'utilisation de l'observateur. Après quelques essais, nous avons retenu comme dynamique $\beta = -0.5$ ce qui nous donne l'observateur formé par les matrices T et U suivantes

$$\begin{aligned} T &= [0.0000 \quad 0.1414] \\ U &= [0.7071 \quad 0.0000 \quad -0.7071] \end{aligned} \tag{VII.25}$$

La réponse temporelle avec l'observateur est représenté figure VII-16. Comme nous pouvons le constater, sur le modèle nominal, la présence de l'observateur ne change pratiquement pas l'allure des réponses temporelles.

VII.4.2 Borne de stabilité dans le cas non structuré

L'algorithme que nous avons proposé nous permet de calculer, suivant le choix du paramètre λ, tous les retours de sortie entre celui qui minimise le critère de performance et celui qui minimise une mesure de stabilité établie dans le cas non structuré. Nous avons donc calculé toutes ces commandes tout en observant comment se produit le passage d'un optimum à l'autre. Pour différentes valeurs de λ comprises entre 0 et 1, nous avons donc calculé la commande minimisant le critère mixte que nous avons décrit.

Pour $\lambda = 0$, la commande est celle qui optimise la mesure de robustesse à la stabilité $\mathrm{Tr}(P)$. Le retour de sortie obtenu avec cette commande, noté K_2, est le suivant :

$$K_2 = \begin{bmatrix} +0.0000 & -0.5000 \\ -1.0000 & +0.1408 \end{bmatrix} \tag{VII.26}$$

Pour $\lambda = 1$, la commande est celle qui optimise le critère de performance. Le retour de sortie avec cette commande, noté K_0', est le suivant

$$K_0' = \begin{bmatrix} -0.0207 & -0.1198 \\ -0.2070 & +0.0031 \end{bmatrix} \tag{VII.27}$$

Avec cette commande, la mesure de performance est $J_{\mathrm{perf}} = 6.3308$. Le retour de sortie optimisant le critère de performance permet d'atteindre un niveau de performance presque aussi bon que le retour d'état optimal (qui donne $J_{\mathrm{perf}} = 6.2606$). La simulation temporelle de cette commande est représentée figure VII-12

Nous avons tracé figure VII-9 l'évolution du critère de performance, de la mesure de robustesse à la stabilité $\mathrm{Tr}(P)$ et de la mesure μ établie dans les cas de perturbations de type paramétrique.

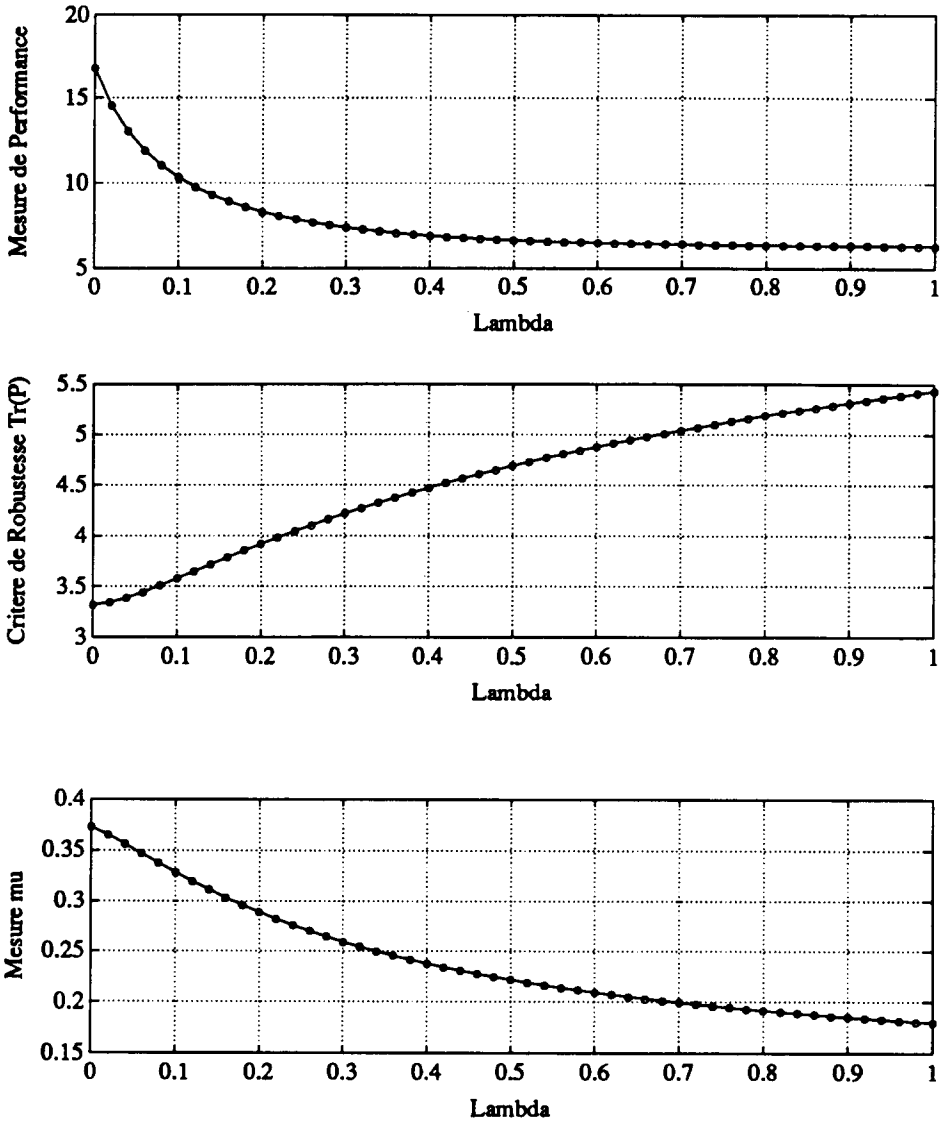


Fig. VII-9: Evolution des mesures de robustesse et performance en fonction de λ.

Nous pouvons maintenant choisir une valeur de λ assurant une bonne robustesse, sans pour autant trop dégrader les performances. Nous avons considéré qu'une perte de performance de 25% était acceptable, ce qui nous donne $\lambda = 0.22$. Avec ce choix, la borne μ, mesurant la plage de variation paramétrique assurant la stabilité, passe de $J_{\text{rob}} = 0.1797$ (cas le plus performant) à $J_{\text{rob}} = 0.2821$, soit un gain de 57% en robustesse. Le gain déterminé avec cette valeur de λ, noté K_2' est le suivant

$$K_2' = \begin{bmatrix} -0.0144 & -0.2560 \\ -0.5182 & +0.0518 \end{bmatrix} \qquad \text{(VII.28)}$$

Nous avons représenté figure VII-17, la simulation temporelle de la commande K_2 (optimisant le critère de robustesse à la stabilité) et sur la figure VII-18, la réponse temporelle en boucle fermée avec la commande K_2', compromis entre bonnes performances et bonne robustesse à la stabilité.

VII.4.3 Sensibilité du critère de performance

Comme nous l'avons déjà remarqué, l'algorithme que nous avons proposé est un algorithme qui pose des difficultés pratiques de mise en œuvre, à cause de l'utilisation d'une minimisation pouvant s'arrêter sur des minima locaux. Nous avons rencontré cette difficulté lors de la mise en œuvre de cette méthode.

Comme pour la méthode précédente, nous avons cherché à calculer pour différentes valeurs de λ le retour de sortie optimisant le critère mixte performance et insensibilité des performances aux variations paramétriques. Les solutions trouvées par la procédure peuvent différer selon le point de départ initial, l'algorithme convergeant vers des minima locaux distincts. Afin d'essayer de trouver la solution optimale, nous avons conduit 100 calculs pour chaque valeur de λ et conservé la solution donnant finalement le critère minimal. Cette approche a donc conduit à de très nombreux calculs, occupant une station de travail pendant plusieurs heures.

Pour $\lambda = 0$, l'algorithme utilisé converge parfois vers une solution donnant un critère de sensibilité des performances très faible $J_{\text{rob}} = 4.70 \times 10^{-7}$. Nous pouvons donc raisonnablement supposer que cette solution est bien la solution optimisant la mesure de robustesse. Ce gain de retour, minimisant la sensibilité aux performances, noté K_3 est

$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.0071 & -0.7677 \\ -1.1223 & +0.2236 \end{bmatrix} \qquad \text{(VII.29)}$$

La réponse temporelle de cette commande est représentée figure VII-19. Cette réponse n'est que moyennement satisfaisante: dépassement de Y_1, amplitudes des commandes élevées mais temps de réponse de 6 secondes.

Pour les autres valeurs de λ, nous avons retenu parmi les 100 essais la commande rendant le critère minimal. Nous avons constaté que, pour chaque valeur de λ, l'algorithme converge vers plusieurs dizaines de minima locaux différents, selon la condition initiale choisie. Ceci explique la difficulté que nous avons eue à pouvoir calculer chacune des solutions "optimales".

Sur la figure VII-10, nous avons représenté le critère de performance et la mesure de robustesse liée aux variations de performance, déterminés pour chaque valeur de λ. La discontinuité de ces courbes nous confirme la réserve que nous avons émise quant à l'optimalité des solutions déterminées pour chacune des valeurs de λ.

Le bon compromis entre performance et robustesse aux variations de performance est obtenu en choisissant $\lambda = 0.3$. Avec ce choix le critère de performance vaut $J_{\text{perf}} = 8.0514$, ce qui représente une perte de 22% par rapport au minimum atteignable. La mesure de sensibilité est $J_{\text{rob}} = 5.0822$, soit un amélioration de 50% par rapport au gain optimal en performance. Le gain de sortie ainsi déterminé, noté K_3' vaut

$$K_3' = \begin{bmatrix} -0.1889 & -0.3567 \\ -0.2973 & -0.0161 \end{bmatrix} \qquad \text{(VII.30)}$$

La simulation temporelle en boucle fermée avec cette commande est représenté sur la figure VII-20.

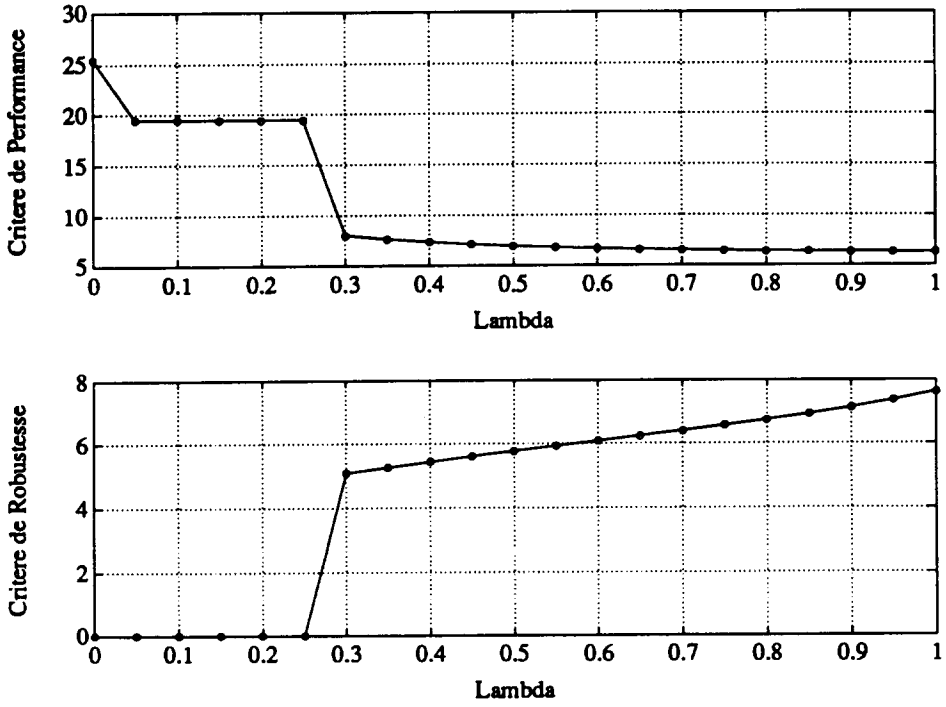


Fig. VII-10: Evolution des critères de performance et robustesse en fonction de λ.

VII.5 Etude comparée des résultats et des algorithmes de synthèse

Nous avons essayé, sur notre exemple, de comparer les résultats obtenus grâce à chacune des méthodes envisagées. Pour cela nous avons d'abord comparé les différentes mesures de performance et robustesse pour le système nominal. Nous avons ensuite déterminé les domaines de stabilité pour chacune de ces commandes. Nous verrons aussi les performances des algorithmes de commande

Nous avons noté les différentes commandes étudiées comme suit :

- K_0 : Retour d'état minimisant le critère de performance.
- K_0' : Retour de sortie minimisant le critère de performance.
- K_1 : Retour d'état minimisant les variations des pôles (performances minimisées)
- K_1' : Retour d'état K_1 avec observateur robuste.

- K_2 : Retour de sortie optimisant les marges de stabilité.
- K_2' : Retour de sortie compromis entre bonnes marges de stabilité et performance.
- K_3 : Retour de sortie minimisant les variations du critère de performance.
- K_3' : Retour de sortie compromis entre performance et faible variation du critère de performance.

Ces différentes commandes se séparent en deux classes. L'une, composée de K_0, K_1, K_2 et K_3, comprend toutes les commandes extrêmes (en performance ou en robustesse) n'étant pas toujours réellement applicables (retour d'états). L'autre, composée de K_0', K_1', K_2' et K_3', constitue l'ensemble des retours de sortie ayant de bonnes propriétés en performance et en robustesse.

VII.5.1 Positions des pôles en boucle fermée

Nous avons déterminé a posteriori le positionnement des pôles en boucle fermée pour chacune des commandes citées ci-dessus. Ces valeurs sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Il est intéressant de rapprocher ces résultats des simulations temporelles des commandes associées. Nous pouvons remarquer que les pôles mal amortis n'entraînent pas forcément un mauvais amortissement de la réponse à un échelon (commande K_0 et K_0'). Il apparaît une fois de plus que les pôles du système seuls ne suffisent pas à décrire complètement le comportement dynamique du système. Cela justifie donc notre approche fondée sur l'utilisation d'une mesure de performance établie dans le domaine temporel.

	Pôles	Amortissement
K_0	0.5877 -0.4515±0.1906i	1.0000 0.2382
K_1	0.4961 -0.4604 -0.4034	0.7009 3.2359 3.2702
K_2	-0.3566 0.1975 0.0000	3.3065 1.6221 1.0000
K_3	0.3934 -0.3535 -0.1234	0.9329 3.3092 3.7747

	Pôles	Amortissement
K_0'	0.5988 -0.4582±0.2046i	1.0000 0.2456
K_1'	-0.5000 0.4961 -0.4604 -0.4034	3.2172 0.7009 3.2359 3.2702
K_2'	0.4158 -0.3392±0.1648i	1.0000 0.3409
K_3'	-0.3888±0.1670i 0.2726	0.2999 1.0000

VII.5.2 Mesures de robustesse et de performance

Dans les deux tableaux suivants nous avons présenté les différentes mesures de robustesse et de performance calculées en boucle fermée, pour chacune de ces commandes

	K_0	K_1	K_2	K_3
Critère de performance	6.2606	27.7859	16.8120	25.4459
Sensibilité des pôles	2.7024	1.6821	1.5567	1.9136
Borne de stabilité (μ structurée)	0.1870	0.2729	0.3732	0.3461
Variations des performances	7.1892	31.3094	4.9620	4.7×10^{-7}

	K_0'	K_1'	K_2'	K_3'
Critère de performance	6.3308	22.8007	8.0840	8.0514
Sensibilité des pôles	2.7075	1.6642	2.4110	2.9594
Borne de stabilité (μ structurée)	0.1797	0.3165	0.2821	0.2345
Variations des performances	7.6430	12.4244	6.4456	5.0822

De ces tableaux nous pouvons déduire les remarques suivantes

- Il n'y a que très peu de différences, tant au point de vue des performances que de la robustesse, entre le retour d'état le plus performant K_0 et le retour de sortie le plus performant K_0'. Dans notre exemple, nous pourrions donc nous passer de la mise en oeuvre d'un observateur pour assurer au système des performances optimales, le retour de sortie étant suffisant.
- Une différence significative apparaît entre la commande K_1 et K_1', tant au niveau des performances, qu'au niveau de la robustesse. Nous voyons donc que la présence d'un observateur n'est pas sans influence sur la robustesse de la loi de commande.
- La commande rendant la plus faible mesure de sensibilité des pôles, n'est pas la commande K_1, mais la commande K_2. Ce resultat peu paraître surprenant, car la commande K_1 est déterminée de manière à minimiser la sensibilité des pôles en boucle fermée. Mais cette minimisation est réalisée *pour un choix de pôles donné*, et non sur l'ensemble des correcteurs possibles. Ainsi un choix de pôles en boucle fermée différent peut donner une mesure de sensibilité des pôles différentes de celle obtenue avec la commande K_1.
- Les commandes K_2' et K_3' sont globalement satisfaisantes tant au niveau de la performance (25% de l'optimal) que de la robustesse (tous critères confondus).

VII.5.3 Domaines de stabilité

Nous avons calculé, pour chacune des six commandes envisagées, le domaine de stabilité du système en boucle fermée, dans le plan paramétrique. Nous avons déterminé, à partir de ces domaines, le rayon maximal du disque centré autour des paramètres nominaux, tel que toute

variation paramétrique à l'intérieur de ce disque conserve la stabilité du système perturbé. Nous avons aussi déterminé l'aire du domaine de stabilité.

Les domaines de stabilité sont présentés sur les figures VII-21 et VII-22. Les résultats numériques sont rassemblés dans le tableau ci dessous.

	K_0	K_1	K_2	K_3
Rayon max de variation	0.4323	0.6282	0.7668	0.7997
Aire du domaine de stabilité	3.3680	9.0880	22.1696	8.5552

	K_0'	K_1'	K_2'	K_3'
Rayon max de variation	0.4323	0.6643	0.6823	0.6421
Aire du domaine de stabilité	3.4208	10.3968	4.6096	3.8704

Nous pouvons constater que la taille et la forme du domaine de stabilité est très influencée par le type de commande utilisé. Le domaine le plus grand est obtenu grâce à la commande K_2, celle précisément qui maximise les marges de stabilité (ce gain en stabilité est très important).

Nous pouvons aussi observer la faible différence existant entre les commandes K_1 et K_1', différence liée à l'introduction d'un observateur dans la boucle d'asservissement.

Nous remarquerons enfin que le gain en stabilité lié à l'utilisation des commandes K_3 et K_3', est surtout sensible sur le rayon maximum de variation paramétrique, plus que sur l'aire du domaine de stabilité. Ce rayon a presque été augmenté de 60% pour une dégradation en performances de seulement 25 %.

VII.5.4 Temps de calcul des lois de commande

Les algorithmes de calcul de chacune des lois sont de types très différents. Les algorithmes d'optimisation de type gradient conjugué (commande robuste en stabilité et en sensibilité de performance) demandent la recherche d'un point de départ satisfaisant. Afin de réduire le temps d'optimisation, nous avons choisi de déterminer parmi 100 solutions aléatoirement sélectionnées, la solution minimisant le critère retenu. Ainsi, le point de départ de l'optimisation n'est pas trop éloigné de celui recherché, et réduit sensiblement le nombre d'itérations nécessaires pour que l'algorithme converge.

L'algorithme minimisant la sensibilité des pôles en revanche ne nécessite pas la recherche de point de départ proche de l'optimal. Nous avons en effet constaté que tout point de départ convenait et n'augmentait pas de manière significative le nombre d'itérations permettant d'obtenir une convergence.

Nous avons rassemblé dans un tableau les temps (exprimés en secondes) expérimentalement déterminés avec notre exemple pour chacune des lois de commande. Nous avons distingué le temps de recherche d'une solution de départ acceptable du temps de convergence de l'algorithme.

	K_0	K_0'	K_1	K_1'	K_2 et K_2'	K_3 et K_3'
Temps de recherche d'une solution initiale	-	5.77	-	-	5.36	4.27
Temps de convergence	0.94	68.72	3.37	3.53	54.84	66.65

Les algorithmes utilisant une procédure de type programmation non-linéaire (Algorithme G et H pour l'optimisation de la robustesse en stabilité et variations de performance) sont donc nettement plus longs que les algorithmes fondés sur une procédure d'optimisation explicite (Algorithme C et F pour la robustesse par insensibilité des pôles). Ce dernier type de calcul est lui-même sensiblement plus lent que le calcul direct d'une loi de commande de type retour d'état quadratique.

Le temps de calcul de la commande K_1 noté dans ce tableau, est le temps de calcul une fois les pôles en boucle fermée fixés. Comme nous l'avons vu, la détermination des pôles en boucle fermée assurant de bonnes performances a conduit à une recherche très longue (plusieurs heures) d'une solution satisfaisante.

La même remarque peut être faite pour la commande K_3. Comme nous l'avons déjà remarqué, l'algorithme ne converge pas tout le temps vers la solution optimale, il faudra donc recommencer plusieurs fois la procédure pour atteindre la solution optimale, ce qui augmentera d'autant le temps de calcul vrai de cette commande.

VII.5.5 Figures

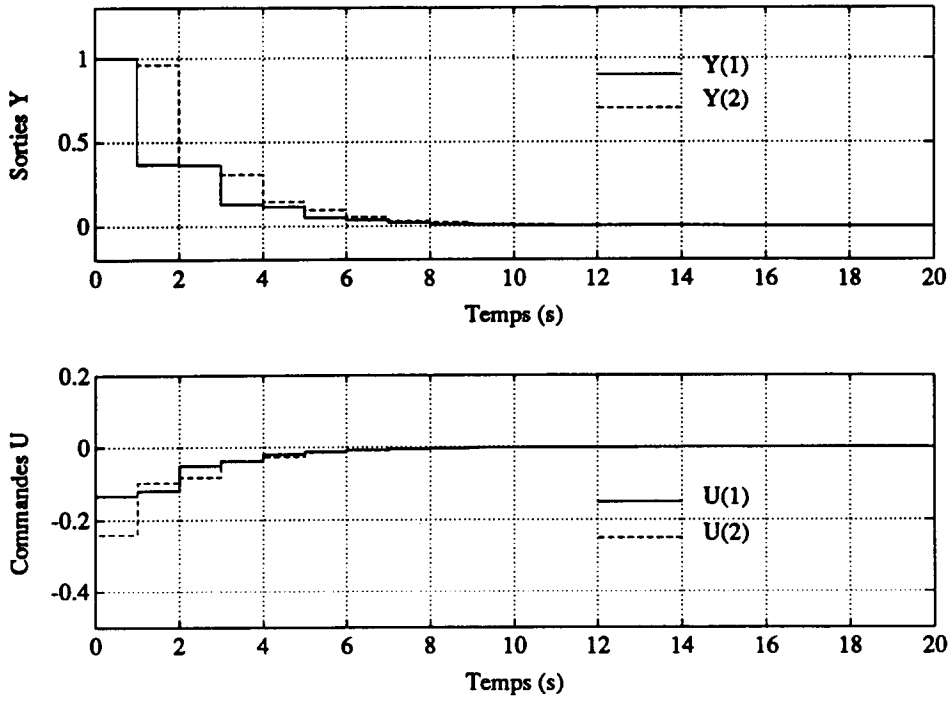


Fig. VII-11: Commande K_0. Retour d'état optimal en performance.

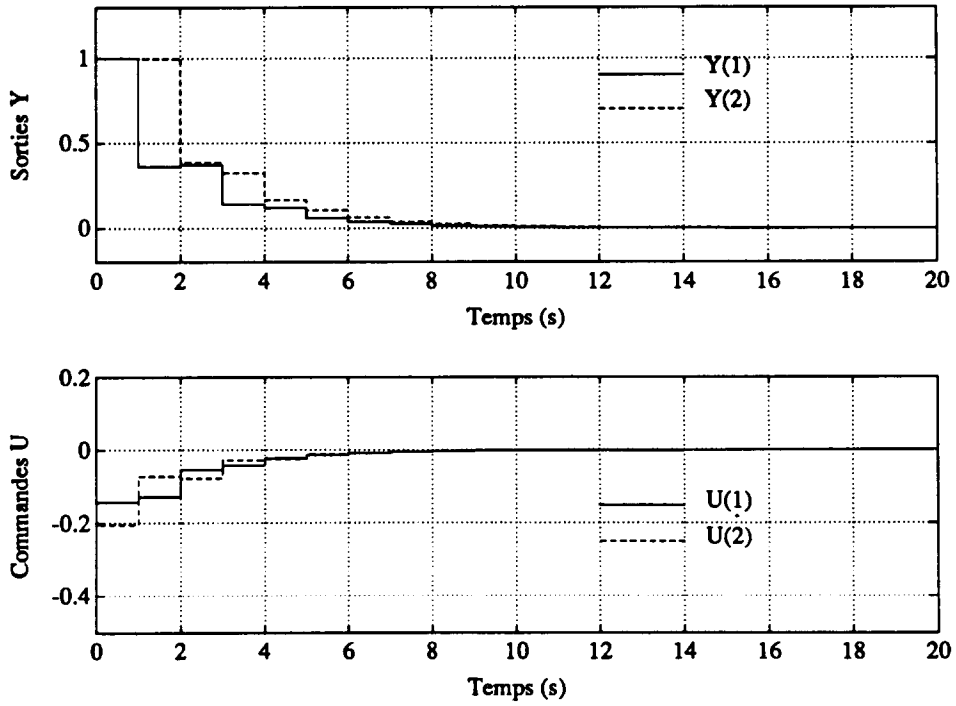


Fig. VII-12: Commande K_0'. Retour de sortie optimal en performances.

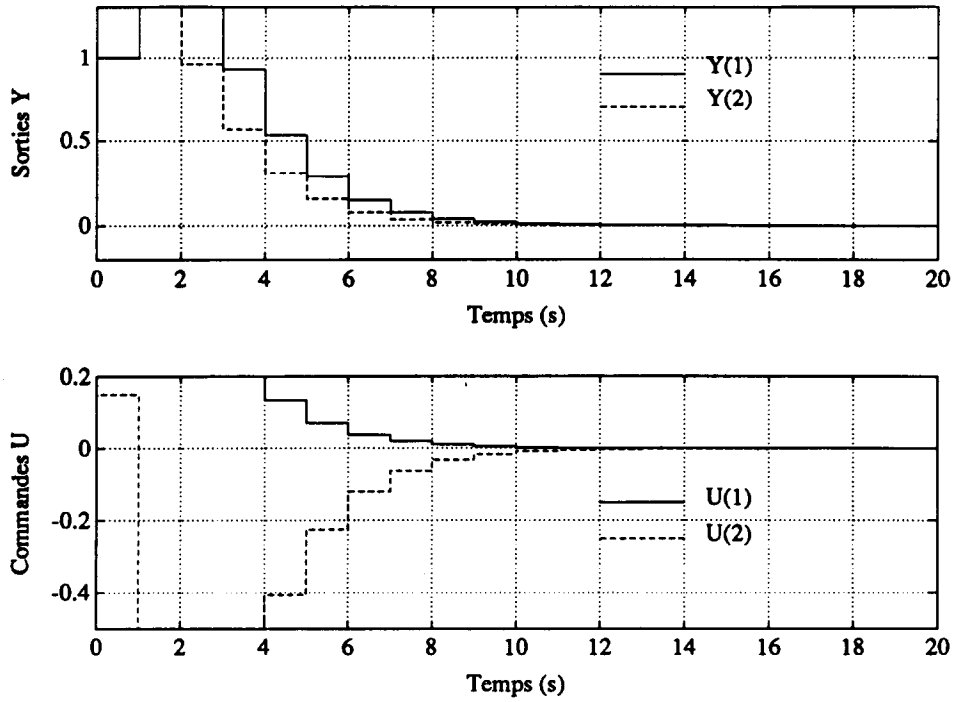


Fig. VII-13: Sensibilité des pôles optimal. Choix de pôles en boucle fermée avec temps de réponse et amortissement.

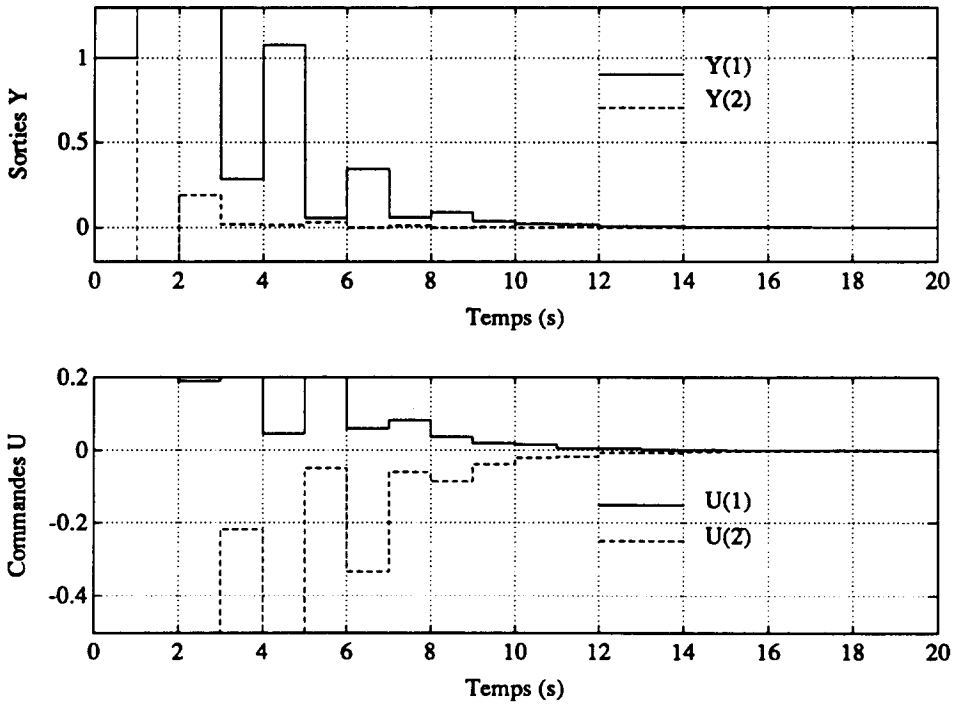


Fig. VII-14: Sensibilité des pôles optimal. Choix de pôles en boucle fermée donnés par le système avec la commande K_0.

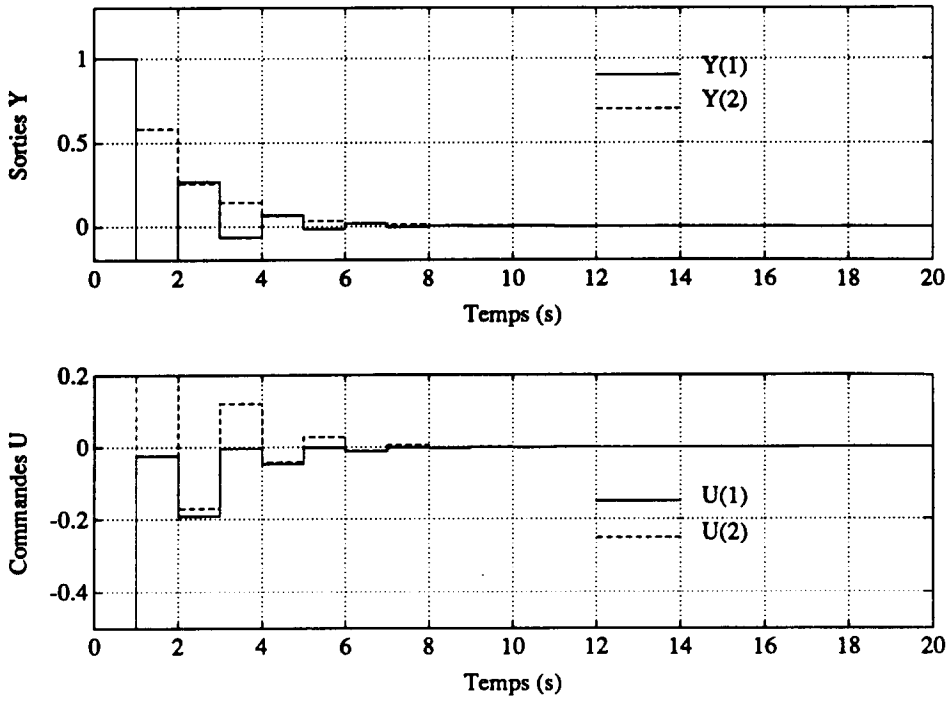


Fig. VII-15: Commande K_1. Retour d'état avec le choix de pôles minimisant le critère de performance.

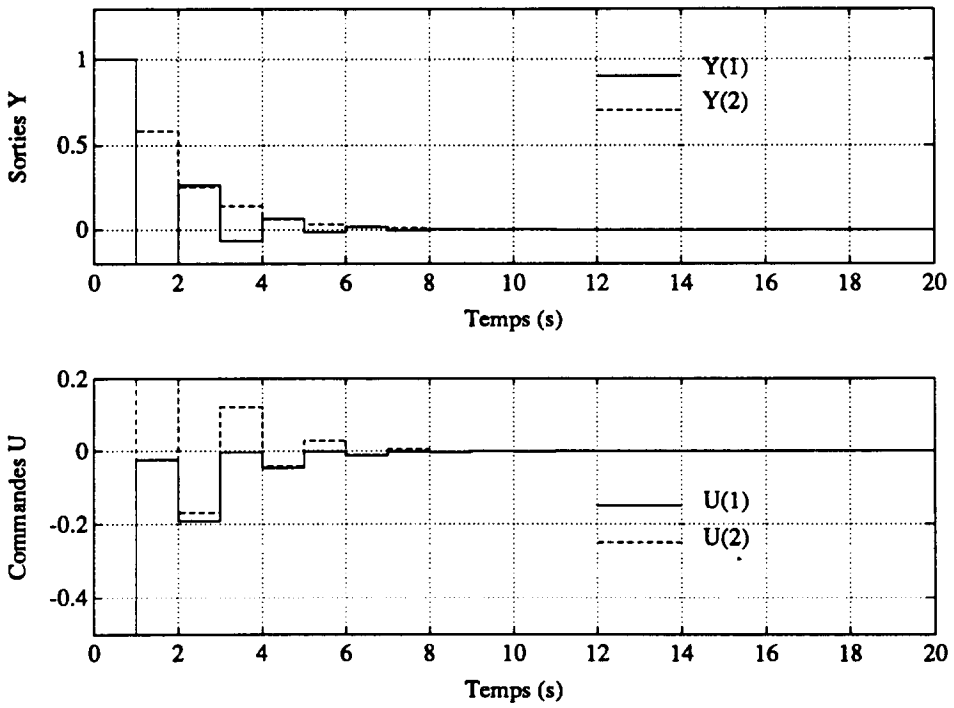


Fig. VII-16: Commande K_1'. Retour d'état K_1 et observateur robuste.

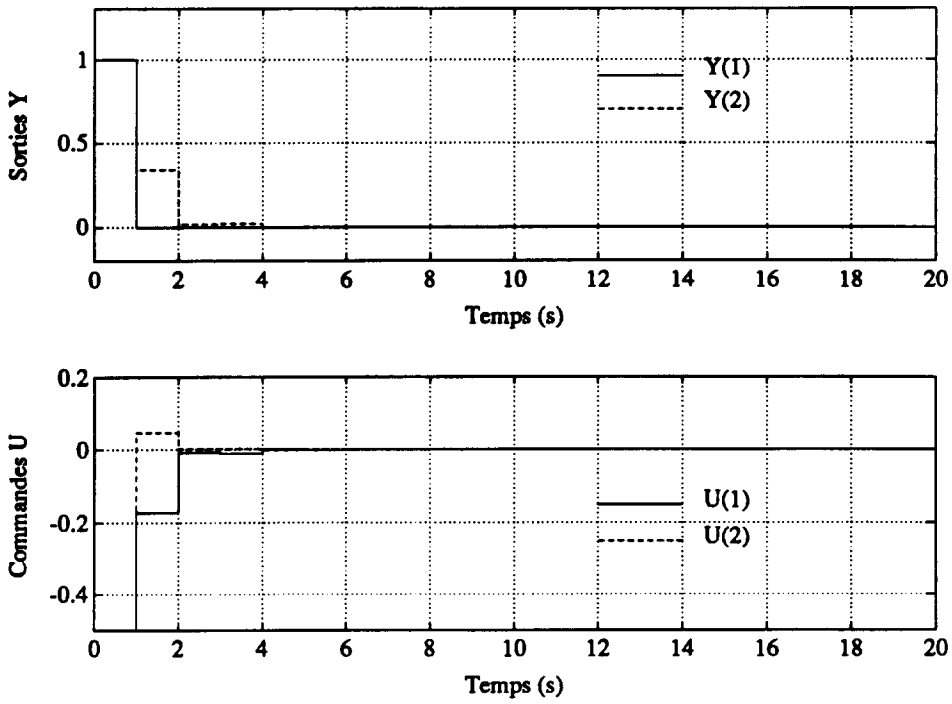


Fig. VII-17: Commande K_2. Retour de sortie optimisant la stabilité.

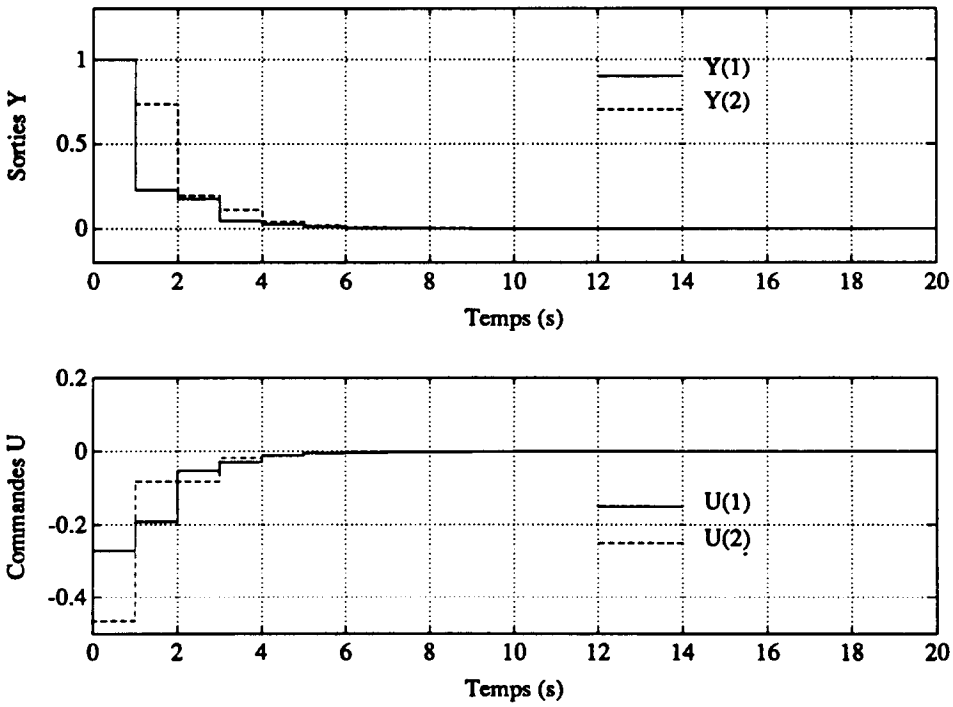


Fig. VII-18: Commande K_2'. Retour de sortie compromis stabilité et performance.

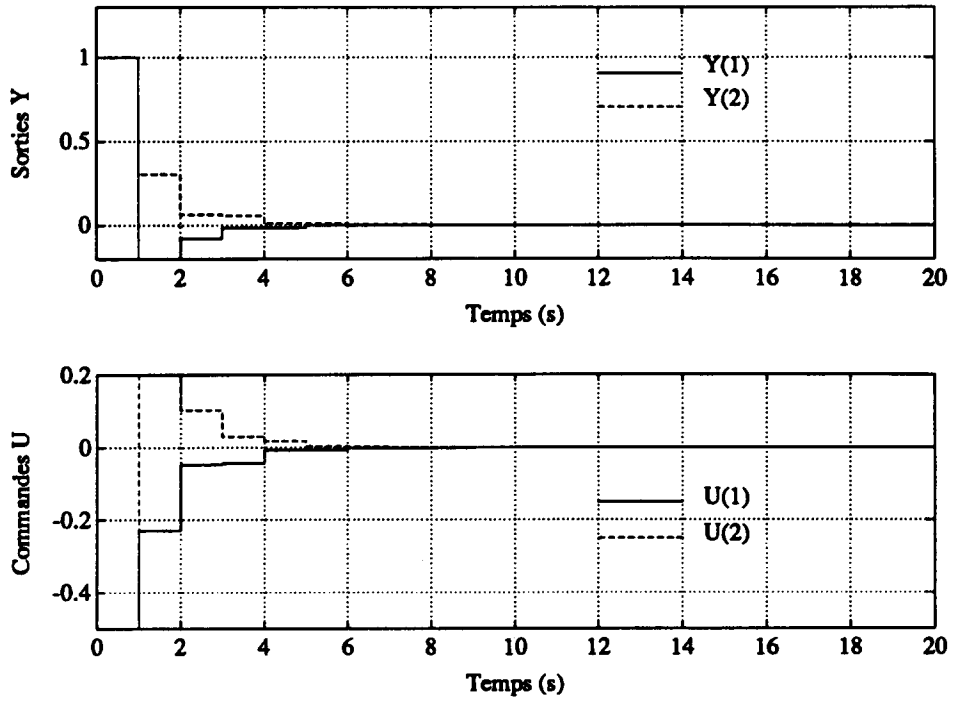


Fig. VII-19: Commande K_3. Retour de sortie minimisant les variations de performance.

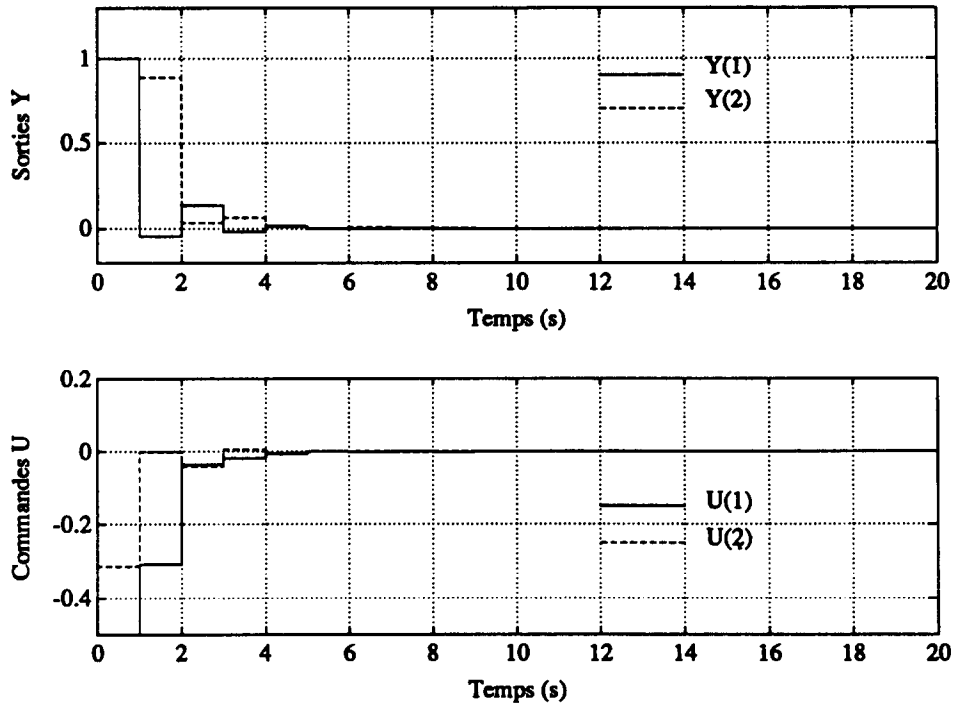
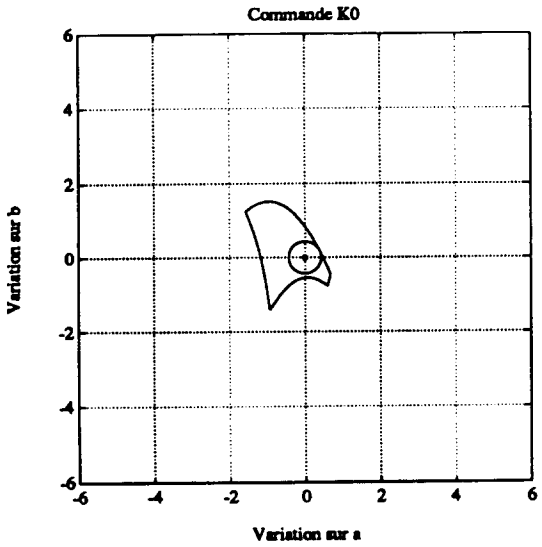
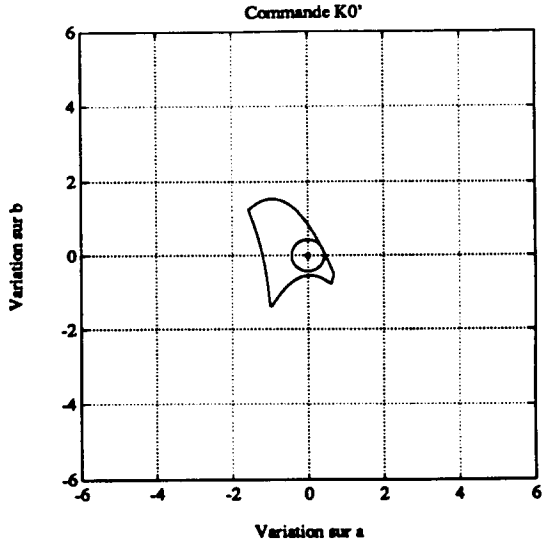
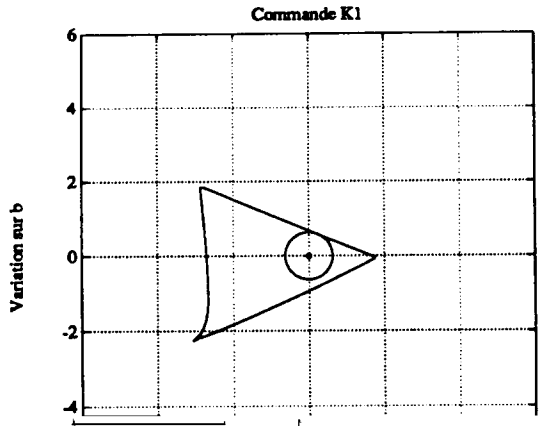
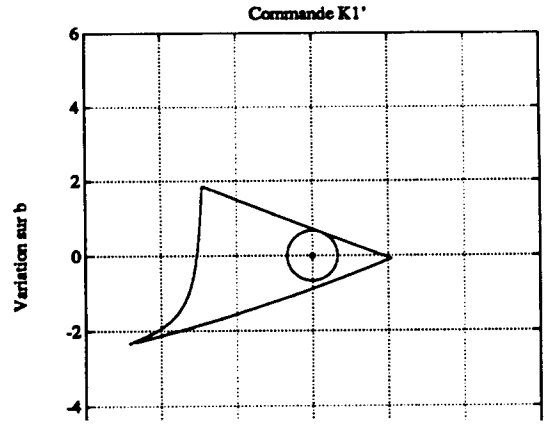


Fig. VII-20: Commande K_3'. Retour de sortie compromis performance et sensibilité des performances.



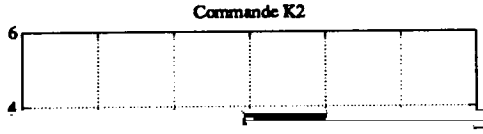


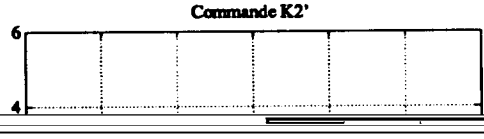




Variation sur a

Variation sur a





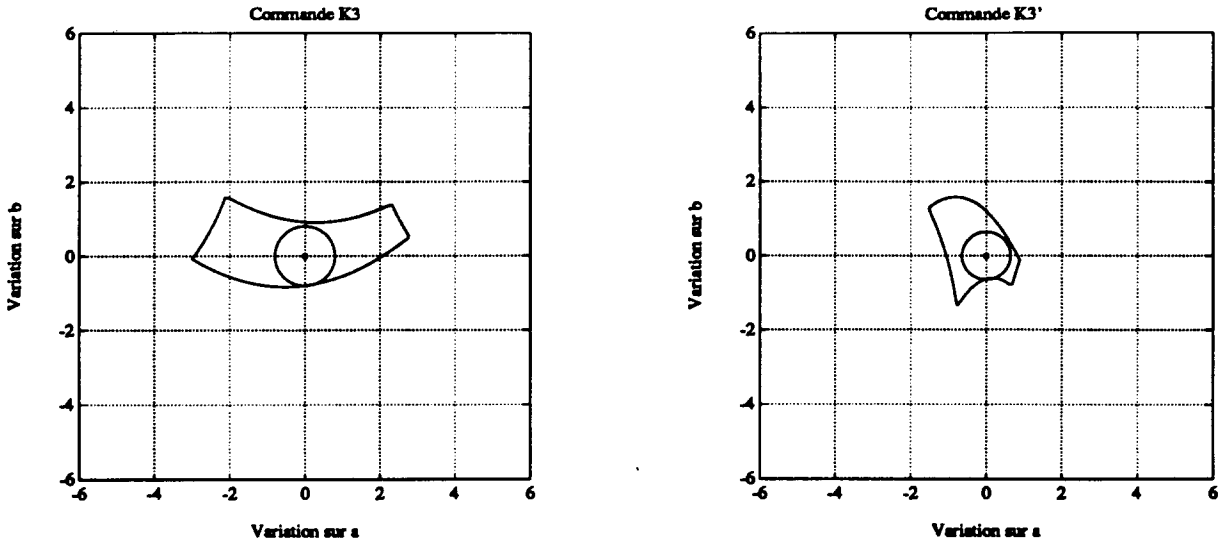


Fig. VII-22: Domaines de stabilité des différentes commandes.

VII.6 Conclusions

Nous pouvons maintenant résumer les résultats que nous venons de présenter, tant au niveau des performances de la loi de commande qu'au niveau de la facilité de mise en œuvre. Nous vérifierons aussi que la méthode proposée permet bien de répondre à l'objectif initialement fixé :

> *"avoir de bonnes performances pour le modèle nominal qui soient le plus insensible possible aux variations paramétriques locales autour du point nominal"*

- *Commande robuste par placement de pôles robuste et observateur :*
  Cette approche semblait très attirante car elle était simple à mettre en œuvre, permettait de découpler la partie performance, assurée par un choix d'ensemble de pôles en boucle fermée, de la partie robustesse, obtenue par optimisation du choix de vecteurs propres. L'application pratique apparaît cependant très décevante, par rapport à ces espérances. En effet le choix seul des pôles en boucle fermée ne suffit pas, dans le cas multivariable, à spécifier un niveau de performance. Il en résulte que l'utilisation de cette technique devient fastidieuse (recherche d'optimum par programmation non-linéaire), et ne donne finalement sur notre exemple qu'un résultat peu satisfaisant (critère de performance trop élevé).

- *Commande robuste par optimisation des marges de stabilité :*
  Le seul défaut de cette approche est qu'elle ne permet pas, pour la synthèse de la loi de commande, de prendre en compte la formulation structurée du problème. En revanche nous avons vu que cette optimisation conduit, sur notre exemple à une très nette augmentation du domaine de stabilité dans l'espace des variations paramétriques. L'approche retenue,

permet donc, sans calculs complexes, de trouver une loi de commande satisfaisante, tant au niveau des performances qu'au niveau de la robustesse, par le choix du compromis souhaitable entre les deux solutions extrêmes.

- *Commande robuste par insensibilité du critère de performance :*
  Cette approche semblait très satisfaisante car elle correspondait le plus à la définition de la robustesse que nous avions formulée. En revanche la mise en œuvre pratique de cette approche est très complexe, même sur notre exemple, choisi volontairement simple. Bien que les résultats finalement obtenus soient satisfaisants, nous ne pourrons retenir cette méthodologie, le calcul d'une loi de commande étant vraiment trop complexe.

Théorie PRCBI
Application à la synthèse de commande robuste pour les systèmes discrets.

Chapitre VIII Introduction

Dans la partie précédente, nous avons présenté trois méthodes nous permettant de traiter le problème de synthèse de commande robuste aux variations paramétriques. Néanmoins comme nous l'avons vu, aucune de ces méthodes n'est globalement satisfaisante pour des raisons diverses que nous avons explicitées, à savoir :

- La mise en œuvre pratique est délicate (Placement robuste de pôles)
- L'algorithme de synthèse est trop complexe (Minimisation des variations du critère de performance)
- Le critère de robustesse est trop limitatif (Maximisation du domaine de stabilité)

Nous avons donc considéré une nouvelle technique, développée au CERT-DERA, permettant de traiter le problème de la synthèse de loi de commande robuste aux variations paramétriques dans le cas discret. Cette méthode, de conception radicalement novatrice, repose sur une nouvelle manière de concevoir la robustesse paramétrique. Nous allons chercher à optimiser un critère fondé sur la qualité de l'identification bayesienne des paramètres incertains (ou variables) du système.

Contrairement aux techniques auto-adaptatives, où les paramètres variables sont effectivement identifiés en temps réel, nous n'utiliserons que le formalisme mathématique de l'identification bayesienne pour déterminer la qualité, en régime asymptotique, de cette identification, si elle était réalisée. Nous en déduirons une nouvelle mesure de robustesse, fondée sur la médiocre qualité de l'identification bayesienne des paramètres inconnus.

Cette approche à été générée par les remarques fondamentales suivantes :

(1) Les techniques auto-adaptatives, essayant de faire cohabiter les méthodes d'identification paramétrique en boucle fermée et de commande optimale, se heurtent au conflit fondamental existant entre une bonne commande et une bonne qualité d'identification. Schématiquement, plus la commande sera bonne, plus l'identification des paramètres sera de médiocre qualité. Ce problème entraîne souvent des contraintes d'excitations persistantes, qui dans la pratique, ne sont pas acceptables. Une médiocre qualité d'identification conduira naturellement à une commande robuste, à l'opposé des techniques adaptatives, cherchant à soulever la difficulté en rendant le système le plus identifiable possible.

(2) L'analyse du système du point de vue entrées-sorties utilisé pour l'identification permet de juger de l'influence des variations paramétriques sur un système de manière globale. Lorsqu'on juge de la robustesse d'un système en analysant les variations des valeurs propres de celui-ci nous ne sommes pas pour autant renseignés sur l'effet global de ces variations sur le système.

(3) Une médiocre qualité de l'identification en boucle ouverte traduit une très bonne stabilité du système [10], a contrario toute instabilité provoque une auto-excitation

du système qui améliore l'identification. A la limite, pour un système purement oscillant, cette qualité est excellente.

Ces remarques nous montrent le lien très étroit existant donc entre une médiocre qualité de l'identification des paramètres incertains, une bonne stabilité et la robustesse du comportement entrées-sorties.

Dans une première partie, nous allons préciser les propriétés en régime asymptotique de la qualité de l'identification bayesienne des paramètres inconnus. Nous étudierons le cas de la boucle ouverte, puis celui de la boucle fermée.

Nous établirons ensuite une nouvelle mesure de robustesse, tout en établissant comment celle-ci peut s'interpréter de manière physique, par les concepts de directions de robustesse maximale et minimale dans l'espace des paramètres.

Dans une troisième partie, nous verrons comment utiliser cette nouvelle mesure de robustesse pour la synthèse de commande robuste aux variations paramétriques. Nous construirons une méthode simplifiée nous permettant d'envisager une synthèse de type retour de sortie associant performances et robustesse.

Enfin, nous appliquerons cette nouvelle technique à l'exemple envisagé dans la partie précédente, de manière à comparer les résultats donnés par cette approche à ceux que nous avons précédemment obtenus.

Chapitre IX Théorie générale PRCBI

IX.1 Introduction

Nous allons ici présenter les développements théoriques qui nous ont permis de déterminer la qualité de l'identification des paramètres inconnus d'un système discret [3][13]. Pour cela nous allons calculer la densité de probabilité $p(\theta \mid Y^k)$ du vecteur de paramètres θ connaissant l'ensemble des mesures jusqu'à l'instant k. Ensuite nous déterminerons la grandeur $p(\theta_o + \Delta\theta \mid Y^k)$ lorsque le processus d'identification n'est plus accordé aux paramètres nominaux θ_o du système.

Lorsque cette dernière densité de probabilité sera proche de $p(\theta_o \mid Y^k)$, nous en déduirons que l'identification des paramètres sera de médiocre qualité. Au contraire, lorsque $p(\theta_o + \Delta\theta \mid Y^k)$ sera très inférieur à $p(\theta_o \mid Y^k)$, la qualité de l'identification du vecteur paramétrique θ_o sera excellente (Figure IX-1 dans le cas scalaire).

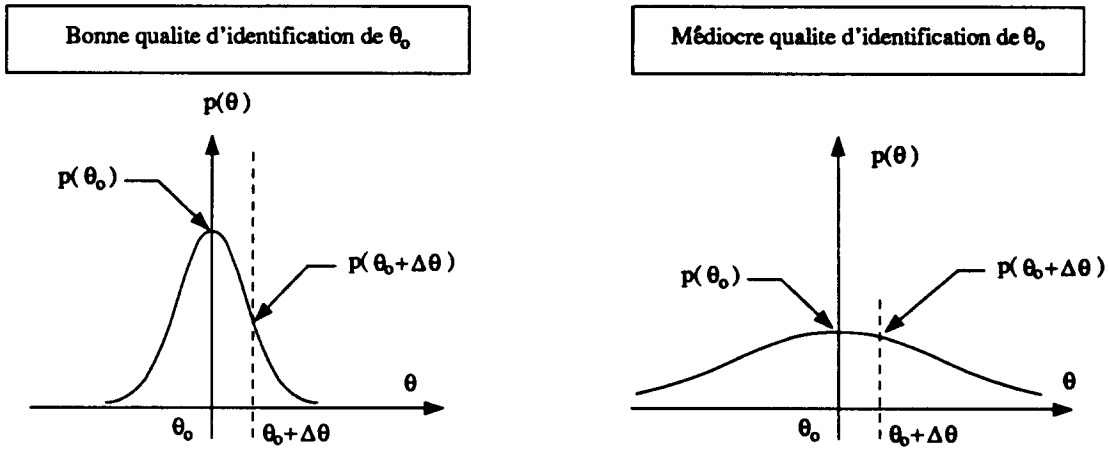


Fig. IX-1: Visualisation de la qualité de l'identification paramétrique.

Nous allons voir que la densité de probabilité $p(\theta_o + \Delta\theta \mid Y^k)$ peut s'écrire sous la forme

$$p\left(\theta_o + \Delta\theta \mid Y^k\right) = \Lambda_c \exp\left\{-\frac{k}{2}\left(\Delta\theta G_{\theta_o}^{-1} \Delta\theta^T\right)\right\} \qquad \text{(IX.1)}$$

où la matrice $G_{\theta_o}^{-1}$ est une matrice nous permettant de quantifier la qualité de l'identification du vecteur paramétrique θ_o. Cette matrice, dont nous expliciterons la méthode de calcul, nous servira de base pour la construction d'une mesure de robustesse fondée sur la médiocre qualité de l'identification bayesienne des paramètres inconnus.

IX.2 Qualité de l'identification paramétrique en régime permanent

Etudions la qualité de l'identification bayesienne du vecteur de paramètres inconnus, noté θ. Pour obtenir une formulation analytique, nous allons dans un premier temps établir une formulation récurrente. Nous examinerons ensuite comment évolue localement cette qualité d'identification lorsque les paramètres varient autour de leur valeur nominale.

Considérons le système en boucle ouverte S1, système linéaire, discret, défini par les équations suivantes :

$$\text{S1} : \begin{cases} X_{k+1} &= AX_k + D\xi_k \\ Y_k &= CX_k + \eta_k \end{cases} \tag{IX.2}$$

Le vecteur X_k représente le vecteur d'état du système à l'instant k. Les matrices A, D et C sont des matrices décrivant la dynamique du système avec

$$A \in \mathbf{R}^{n\times n}, D \in \mathbf{R}^{n\times p} \text{ et } C \in \mathbf{R}^{m\times n}. \tag{IX.3}$$

ξ_k et η_k sont des bruits blancs gaussiens, indépendants ayant pour propriétés statistiques :

$$\forall(j,k) \qquad \begin{aligned} E[\xi_k] = E[\eta_k] &= E\left[\xi_j \eta_k^{\mathrm{T}}\right] = 0 \\ E\left[\xi_j \xi_k^{\mathrm{T}}\right] &= Q\delta_{jk} \\ E\left[\eta_j \eta_k^{\mathrm{T}}\right] &= R\delta_{jk} \end{aligned} \tag{IX.4}$$

Les matrices Q et R sont des matrices symétriques, positives, réelles, représentant respectivement les covariances des bruits d'entrées et des bruits de mesures.

$$Q \in \mathbf{R}^{p\times p} \text{ et } R \in \mathbf{R}^{m\times m} \tag{IX.5}$$

La première étape consiste à calculer de manière analytique la qualité de l'identification bayesienne du vecteur paramétrique θ en régime permanent. Calculons pour cela la densité de probabilité $\mathrm{p}(\theta \mid Y^k)^*$ du vecteur θ connaissant l'ensemble des mesures jusqu'à l'instant k. Grâce à la formule de Bayes nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \mathrm{p}\left(\theta \mid Y^k\right) &= \mathrm{p}\left(\theta \mid Y_k, Y^{k-1}\right) \\ &= \frac{\mathrm{p}(\theta, Y_k \mid Y^{k-1})}{\mathrm{p}(Y_k \mid Y^{k-1})} \end{aligned} \tag{IX.6}$$

Or $\mathrm{p}(\theta, Y_k \mid Y^{k-1}) = \mathrm{p}(\theta \mid Y^{k-1})\mathrm{p}(Y_k \mid \theta, Y^{k-1})$, d'où la relation récurrente suivante

$$\mathrm{p}\left(\theta \mid Y^k\right) = \frac{\mathrm{p}(\theta \mid Y^{k-1})\mathrm{p}(Y_k \mid \theta, Y^{k-1})}{\mathrm{p}(Y_k \mid Y^{k-1})} \tag{IX.7}$$

* Y^k représente l'ensemble des mesures jusqu'à l'instant k, $Y^k = \{Y_0, Y_1, \cdots, Y_k\}$

Grâce à cette formule récurrente, nous allons pouvoir expliciter la densité de probabilité $p(\theta \mid Y^k)$. Pour cela explicitons chacun des termes de la relation (IX.7)

- $p(Y_k \mid \theta, Y^{k-1})$ représente la densité de probabilité de la mesure Y_k connaissant le vecteur paramétrique θ et l'ensemble des mesures jusqu'à l'instant $k-1$. L'identification bayesienne utilise le filtre de Kalman pour déterminer la prédiction optimale $\hat{Y}_k$ connaissant Y^{k-1}. Les équations de ce filtre, largement étudiées dans la littérature [14][26], nous permettent de calculer la matrice de covariance M_k de l'erreur de prédiction définie par

$$M_k = E\left[\left(Y_k - \hat{Y}_k\right)\left(Y_k - \hat{Y}_k\right)^T\right] \tag{IX.8}$$

Il faut noter que M_k dépend du vecteur paramétrique θ. Comme la densité de probabilité $p(Y_k \mid \theta, Y^{k-1})$ est gaussienne, de moyenne $\hat{Y}_k$, de matrice de covariance M_k nous pouvons écrire la relation suivante

$$p\left(Y_k \mid \theta, Y^{k-1}\right) = \frac{\Gamma}{\sqrt{|M_k|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(Y_k - \hat{Y}_k\right)^T M_k^{-1}\left(Y_k - \hat{Y}_k\right)\right\} \tag{IX.9}$$

où Γ est une constante.

- Le dénominateur de (IX.7) ne dépendant pas du vecteur θ, pourra être considéré dans notre calcul comme une constante.

$$p\left(Y_k \mid Y^{k-1}\right) = \Gamma_k' \tag{IX.10}$$

La formule récurrente (IX.7) nous permet maintenant d'écrire la densité de probabilité $p(\theta \mid Y^k)$ en fonction de $\varepsilon_k = Y_k - \hat{Y}_k$

$$p\left(\theta \mid Y^k\right) = \Lambda_o \prod_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{\sqrt{|M_i|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\varepsilon_i^T M_i^{-1}\varepsilon_i\right\}\right] \tag{IX.11}$$

où Λ_o est une constante dépendant de la densité de probabilité initiale du vecteur paramétrique, des constantes Γ_k' et de Γ. Lorsque le régime permanent est atteint, la matrice M_k tend vers une valeur limite notée $M_f(\theta)$

$$\lim_{k \to \infty} M_k = M_f(\theta). \tag{IX.12}$$

En commençant le processus d'identification lorsque le régime stationnaire est atteint, l'expression (IX.11) devient

$$p\left(\theta \mid Y^k\right) = \frac{\Lambda}{|M_f(\theta)|^{\frac{k}{2}}}\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{k} -\frac{1}{2}\varepsilon_i^T M_f(\theta)^{-1}\varepsilon_i\right\}\right]. \tag{IX.13}$$

IX.3 Etude locale autour du vecteur de paramètres nominaux

Etudions maintenant comment évolue la densité de probabilité (IX.13) lorsque le vecteur de paramètres est légèrement décalé de sa valeur nominale. Pour cela, calculons la densité de probabilité $p(\theta_o + \Delta\theta \mid Y^k)$ pour une petite variation $\Delta\theta$ du vecteur de paramètres autour de la valeur nominale notée θ_o. Nous ferons en première approximation l'hypothèse de l'ergodicité de la séquence ϵ_i, la variation $\Delta\theta$ étant supposée suffisamment petite. (Cette condition n'est en général pas réalisée car le filtre de Kalman n'est pas ajusté sur la valeur nominale θ_o).

Avec cette hypothèse il vient

$$\sum_{i=1}^{k} -\frac{1}{2}\epsilon_i^T M_f(\theta)^{-1}\epsilon_i = -\frac{k}{2}E\left[\epsilon_i^T M_f(\theta)^{-1}\epsilon_i\right] \tag{IX.14}$$

et donc l'expression (IX.13) peut s'écrire

$$p\left(\theta_o + \Delta\theta \mid Y^k\right) = \Lambda\left|M_f\right|^{-\frac{k}{2}} \exp\left\{-\frac{k}{2}E\left[\epsilon_i^T M_f^{-1}\epsilon_i\right]\right\} \tag{IX.15}$$

avec

$$M_f = M_f(\theta) = M_o + \Delta M_f \tag{IX.16}$$

Or nous savons que

$$\begin{aligned} E\left[\epsilon_i^T M_f^{-1}\epsilon_i\right] &= E\left[\mathrm{Tr}\left(\epsilon_i^T M_f^{-1}\epsilon_i\right)\right] \\ &= E\left[\mathrm{Tr}\left(M_f^{-1}\epsilon_i\epsilon_i^T\right)\right] \\ &= \mathrm{Tr}\left(M_f^{-1}E[\epsilon_i\epsilon_i^T]\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(M_f^{-1}M\right) \end{aligned} \tag{IX.17}$$

où $M = E[\epsilon_i\epsilon_i^T]$ est la matrice de covariance de l'erreur de sortie lorsque le filtre n'est plus accordé au système nominal ($\theta \neq \theta_o$). Dans le cas général, M est différent de M_f. La figure IX-2 illustre les différences entre M, M_f et M_o.

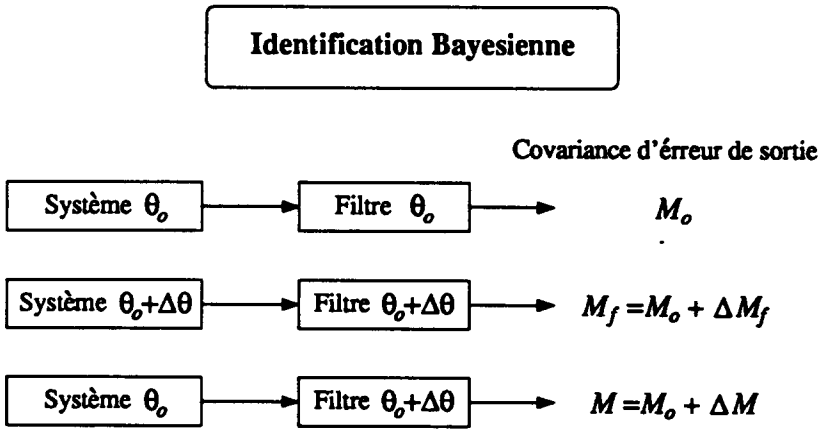


Fig. IX-2: Matrices de covariance d'erreur de sortie

Si M_o^{-1} existe, nous pouvons écrire

$$\mathrm{Tr}\left(M_f^{-1}M\right) = \mathrm{Tr}\left[(I + M_o^{-1}\Delta M_f)^{-1}(I + M_o^{-1}\Delta M)\right] \tag{IX.18}$$

Cette expression peut être développée au premier ordre sous l'hypothèse d'une faible variation paramétrique du vecteur θ ($\Delta\theta$ petit).

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(M_f^{-1}M\right) &= \mathrm{Tr}\left[(I - M_o^{-1}\Delta M_f)(I + M_o^{-1}\Delta M)\right] \\ &= q - \mathrm{Tr}\left(M_o^{-1}\Delta M_f\right) + \mathrm{Tr}(M_o^{-1}\Delta M)\end{aligned} \tag{IX.19}$$

où q est le nombre de mesures (dimension de Y_k)

Nous pouvons donc écrire à partir de (IX.15), compte tenu de (IX.17) et (IX.19)

$$\mathrm{p}\left(\theta_o + \Delta\theta \mid Y^k\right) = \frac{\Lambda \exp\left\{-\frac{qk}{2}\right\} \exp\left\{\frac{k}{2}\mathrm{Tr}\left(M_o^{-1}\Delta M_f\right)\right\} \exp\left\{-\frac{k}{2}\mathrm{Tr}(M_o^{-1}\Delta M)\right\}}{|M_o|^{\frac{k}{2}}\left|I + M_o^{-1}\Delta M_f\right|^{\frac{k}{2}}} \tag{IX.20}$$

Au premier ordre nous avons

$$\left|I + M_o^{-1}\Delta M_f\right|^{\frac{k}{2}} \simeq \left|1 + \mathrm{Tr}\left(M_o^{-1}\Delta M_f\right)\right|^{\frac{k}{2}} \tag{IX.21}$$

et

$$\frac{\exp\left\{\frac{k}{2}\mathrm{Tr}\left(M_o^{-1}\Delta M_f\right)\right\}}{\left|1 + \mathrm{Tr}\left(M_o^{-1}\Delta M_f\right)\right|^{\frac{k}{2}}} \simeq 1 \tag{IX.22}$$

Finalement en tenant compte de (IX.20), (IX.21) et (IX.22) nous obtenons

$$\mathrm{p}\left(\theta_o + \Delta\theta \mid Y^k\right) = \frac{\Lambda \exp\left\{-\frac{qk}{2}\right\}}{|M_o|^{\frac{k}{2}}} \exp\left\{-\frac{k}{2}\mathrm{Tr}(M_o^{-1}\Delta M)\right\} \tag{IX.23}$$

Cette formule est essentielle, car elle nous montre qu'en régime asymptotique, la densité de probabilité $\mathrm{p}\left(\theta_o + \Delta\theta \mid Y^k\right)$ décrit une loi gaussienne, dont la matrice de covariance est connue, fonction de M_o et ΔM. Pour compléter notre calcul il ne reste plus qu'à écrire le lien mathématique entre ΔM et les variations paramétriques liées à $\Delta\theta$.

IX.4 Calcul de ΔM

Le calcul de la matrice ΔM est issu des équations du filtre de Kalman associé au processus d'identification bayésienne des paramètres incertains. Présentons ces relations et déterminons les équations nous permettant de calculer cette matrice.

Pour faciliter les écritures nous utiliserons les notations suivantes

$$\begin{aligned}A_p &= A_o + \Delta A \\ K_p &= K_o + \Delta K \\ M_p &= M_o + \Delta M\end{aligned} \tag{IX.24}$$

Le système S1, accordé aux paramètres θ_o, est décrit par les équations suivantes

$$\text{S1} : \begin{cases} X_{k+1} &= A_o X_k + D\xi_k \\ Y_k &= CX_k + \eta_k \end{cases} \tag{IX.25}$$

et le filtre de Kalman associé au processus d'identification, accordé aux paramètres $\theta_o + \Delta\theta$ est décrit par les équations suivantes

$$\begin{cases} \widehat{X}_{k|k-1} &= A_p \widehat{X}_{k-1|k-1} \\ \widehat{X}_{k|k} &= \widehat{X}_{k|k-1} + K_p \left[Y_k - C\widehat{X}_{k|k-1} \right] \end{cases} \tag{IX.26}$$

où K_p (gain du filtre de Kalman) et P_p (variance de l'erreur d'estimation a priori), sont calculés par les relations suivantes

$$\begin{aligned} K_p &= P_p C^\tau (C P_p C^\tau + R)^{-1} \\ P_p &= A_p (I - K_p C) P_p (I - K_p C)^\tau A_p^\tau + A_p K_p R K_p^\tau A_p^\tau + DQD^\tau \end{aligned} \tag{IX.27}$$

Cherchons maintenant le lien mathématique existant entre ΔM et $\Delta\theta$. Pour cela, calculons la matrice de covariance de l'erreur d'estimation a priori $P_p = P_o + \Delta P$ définie par

$$P_p = E\left[\left(X_k - \widehat{X}_{k|k-1} \right) \left(X_k - \widehat{X}_{k|k-1} \right)^\tau \right] \tag{IX.28}$$

Pour calculer cette expression, écrivons d'abord, à l'aide des relations (IX.25) et (IX.26), les deux relations récurrentes suivantes :

$$\begin{aligned} X_k - \widehat{X}_{k|k-1} =& (A_o - A_p K_p C) \left(X_{k-1} - \widehat{X}_{k-1|k-2} \right) \\ &+ D\xi_{k-1} + A_p K_p \eta_{k-1} - \Delta A \widehat{X}_{k-1|k-2} \end{aligned} \tag{IX.29}$$

$$\widehat{X}_{k|k-1} = A_p \widehat{X}_{k-1|k-2} + A_p K_p C \left(X_{k-1} - \widehat{X}_{k-1|k-2} \right) \tag{IX.30}$$

En utilisant la propriété de stationnarité des espérances mathématiques, et en notant que les grandeurs (ξ_k , η_k et X_k) et $\left(\xi_k$, η_k et $\widehat{X}_k\right)$ sont chacune décorrélées entre elles, la relation (IX.30) nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} P_p =& (A_o - A_p K_p C) P_p (A_o - A_p K_p C)^\tau + A_p K_p R K_p^\tau A_p^\tau + DQD^\tau \\ &+ \Delta A L \Delta A^\tau - (A_o - A_p K_p C) N^\tau \Delta A^\tau - \Delta A N (A_o - A_p K_p C) \end{aligned} \tag{IX.31}$$

où les matrices L et N sont définies par

$$\begin{aligned} L &= E\left[\widehat{X}_{k|k-1} \widehat{X}_{k-1|k-2}^\tau \right] \\ N &= E\left[\widehat{X}_{k|k-1} \left(X_k - \widehat{X}_{k|k-1} \right)^\tau \right] \end{aligned} \tag{IX.32}$$

Nous pouvons donc établir ΔP en utilisant la relation

$$-A_o(I - K_oC)P_oC^\tau + A_oK_oR = 0 \tag{IX.33}$$

issue des relations (IX.27), qui nous permet d'éliminer les termes du premier ordre dans l'expression de ΔP. La relation (IX.31) devient donc

$$\begin{aligned}\Delta P =& A_o(I - K_oC)\Delta P(I - K_oC)^\tau A_o - A_o(I - K_oC)N^\tau \Delta A^\tau \\ &+ (A_o\Delta K + \Delta A K_o)M_o(A_o\Delta K + \Delta A K_o)^\tau \\ &+ \Delta A L \Delta A^\tau - \Delta A N(I - K_oC)^\tau A_o\end{aligned} \tag{IX.34}$$

Calculons maintenant les matrices L et N. En utilisant la relation (IX.30), il vient

$$L = A_pLA_p^\tau + A_pK_pCP_pC^\tau K_p^\tau A_p^\tau + A_pK_pN^\tau C^\tau A_p^\tau \tag{IX.35}$$

En multipliant les relations (IX.30) et (IX.29), nous obtenons l'expression de N

$$\begin{aligned}N =& A_pN(A_o - A_pK_pC)^\tau - A_pK_pCN^\tau \Delta A^\tau \\ &+ A_pK_pCP_p(A_o - A_pK_pC)^\tau - A_pL\Delta A^\tau\end{aligned} \tag{IX.36}$$

Nous pouvons remarquer que dans l'équation (IX.42) la matrice L apparaît dans des termes du deuxième ordre en $\Delta\theta$. Nous allons donc simplifier l'écriture de L en négligeant tous les termes d'ordre supérieur à l'unité. Il vient donc, en remarquant que $M_o = CP_oC^\tau$ et que N est du premier ordre en $\Delta\theta$

$$L = A_oLA_o^\tau + A_oK_oM_oK_o^\tau A_o^\tau \tag{IX.37}$$

De même simplifions l'écriture de N. En utilisant les propriétes du filtre de Kalman, nous pouvons établir que $CP_o - M_oK_o^\tau = 0$ et donc il s'ensuit la relation suivante

$$N = A_oN(I - K_oC)^\tau A_o^\tau + A_oK_oM_o(\Delta AK_o - A_o\Delta K)^\tau - A_oL\Delta A^\tau \tag{IX.38}$$

Les relations (IX.34), (IX.34) et (IX.37) nous permettent donc de calculer la variation ΔM covariance de l'erreur de sortie prédite en remarquant que

$$\Delta M = C\Delta PC^\tau \tag{IX.39}$$

En résumé, nous pouvons donc écrire l'algorithme de calcul de la matrice ΔM, variation de la qualité de l'identification due aux variations paramétriques, comme suit :

Résolution des équations matricielles :

$$L = A_o L A_o^\tau + A_o K_o M_o K_o^\tau A_o^\tau \tag{IX.40}$$

$$N = A_o N (I - K_o C)^\tau A_o^\tau + A_o K_o M_o (\Delta A K_o - A_o \Delta K)^\tau - A_o L \Delta A^\tau \tag{IX.41}$$

$$\begin{aligned} \Delta P =& A_o (I - K_o C) \Delta P (I - K_o C)^\tau A_o - A_o (I - K_o C) N^\tau \Delta A^\tau \\ &+ (A_o \Delta K + \Delta A K_o) M_o (A_o \Delta K + \Delta A K_o)^\tau \\ &+ \Delta A L \Delta A^\tau - \Delta A N (I - K_o C)^\tau A_o \end{aligned} \tag{IX.42}$$

Calcul de ΔM :

$$\Delta M = C \Delta P C^\tau \tag{IX.43}$$

Les trois équations matricielles (IX.40), (IX.41) et (IX.42). sont des équations matricielles linéaires de Lyapunov de type

$$X = FXG + H \tag{IX.44}$$

Ces équations admettent une solution unique [27] si et seulement si les spectres des matrices F et G vérifient $\rho(F)\rho(G) < 1$. Vu les équations (IX.40), (IX.41) et (IX.42), pour que le calcul de ΔP soit possible et admette une solution unique, il faut et il suffit que

$$\begin{gathered} \rho(A_o)\rho(A_o^\tau) < 1 \\ \rho(A_o)\rho\big([I - K_o C]^\tau A_o^\tau\big) < 1 \\ \rho(A_o[I - K_o C])\rho\big([I - K_o C]^\tau A_o^\tau\big) < 1 \end{gathered} \tag{IX.45}$$

Les équations (IX.31), (IX.40) et (IX.41) admettent donc une solution unique si et seulement si les modes du système et les modes du filtre de Kalman sont stables.

IX.5 Conclusions

Dans ce chapitre nous venons de présenter les fondements mathématiques nous permettant de déterminer la qualité de l'identification bayesienne des paramètres inconnus d'un système linéaire discret. L'expression (IX.23) nous montre que la densité de probabilité $\mathrm{p}\big(\theta_o + \Delta\theta \mid Y^k\big)$ décrit une loi gaussienne, dont la matrice de covariance est fonction de M_o et ΔM. La matrice M_o, matrice de covariance de l'erreur de sortie du filtre nominal, se calcule à partir des équations (IX.27) du filtre de Kalman nominal. La matrice ΔM est obtenue en résolvant les trois équations matricielles discrètes de Lyapunov (IX.40) à (IX.42).

Les bases du calcul d'une mesure de robustesse fondée sur la plus mauvaise qualité de l'identification sont donc posées.

Chapitre X Mesure de robustesse fondée sur la plus mauvaise qualité de l'identification des paramètres incertains

Nous allons dans ce chapitre décrire une matrice $G_{\theta_o}^{-1}$ représentant une mesure de la qualité d'identification bayesienne des paramètres inconnus du système. Cette matrice possède d'autres propriétés remarquables, car elle nous permet d'obtenir des directions, dans l'espace paramétrique, de grande et de faible robustesse.

X.1 Mesure de robustesse

La formule (IX.23) nous permet d'établir la densité de probabilité du vecteur $\theta_o + \Delta\theta$ connaissant l'ensemble des mesures Y^k en fonction de M_o et ΔM dont nous venons de décrire la méthode de calcul.

$$\mathrm{p}\left(\theta_o + \Delta\theta \mid Y^k\right) = \Lambda_c \exp\left\{-\frac{k}{2}\mathrm{Tr}(M_o^{-1}\Delta M)\right\} \tag{X.1}$$

L'expression $\mathrm{Tr}(M_o^{-1}\Delta M)$, comme le montrent les équations (IX.40) à (IX.42) est une fonction du deuxième ordre par rapport à $\Delta\theta$. Nous pouvons ainsi introduire la matrice $G_{\theta_o} \in \mathbf{R}^{r\times r}$, matrice définie positive, définie par la relation

$$\mathrm{Tr}(M_o^{-1}\Delta M) = \Delta\theta G_{\theta_o}^{-1}\Delta\theta^{\mathsf{T}} \tag{X.2}$$

La formule (X.1) peut maintenant s'écrire

$$\mathrm{p}\left(\theta_o + \Delta\theta \mid Y^k\right) = \Lambda_c \exp\left\{-\frac{k}{2}\left(\Delta\theta G_{\theta_o}^{-1}\Delta\theta^{\mathsf{T}}\right)\right\} \tag{X.3}$$

Cette formule fondamentale nous servira de base pour établir une mesure de robustesse. En effet, en régime asymptotique, cette expression nous montre que la densité de probabilité décrit une loi gaussienne de moyenne θ_o et de matrice de covariance

$$P_{\theta_o} = \frac{G_{\theta_o}}{k} \tag{X.4}$$

Ceci montre que plus $G_{\theta_o}^{-1}$ sera "petite", plus la qualité de l'identification du vecteur paramétrique θ_o sera médiocre. Au contraire , plus cette matrice sera "grande", plus la matrice de covariance de l'erreur d'estimation sera faible, et donc plus la qualité de l'identification sera bonne. La matrice $G_{\theta_o}^{-1}$ représente donc une mesure de la qualité de l'observation bayesienne des paramètres incertains du système, localement autour d'une valeur nominale θ_o. Le cas scalaire est schématisé sur la figure X-1.

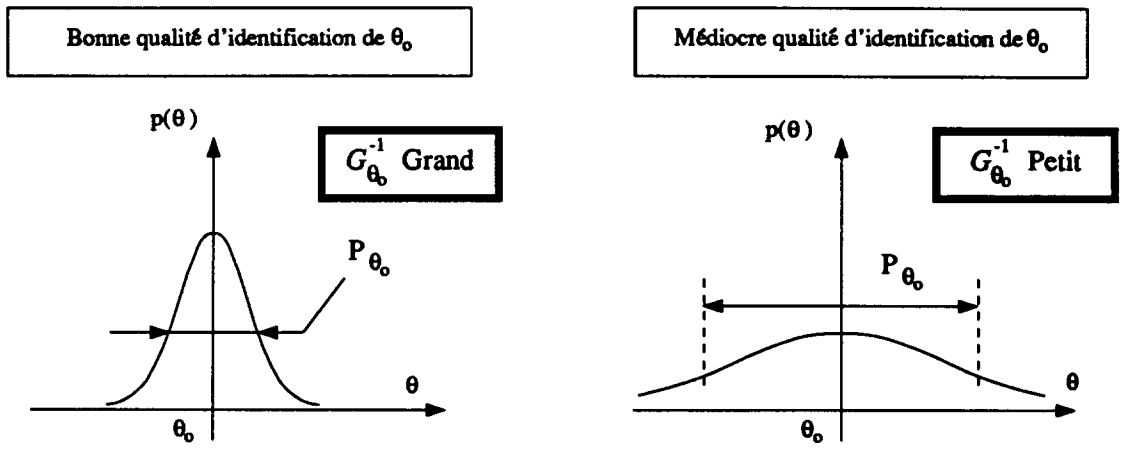


Fig. X-1: Visualisation des deux types de densité de probabilité associées à la grandeur $G_{\theta_o}^{-1}$.

Le comportement entrées-sorties sera d'autant moins sensible aux variations paramétriques que la qualité de l'identification sera mauvaise. Il importe maintenant de quantifier cette mesure de robustesse à partir de la matrice $G_{\theta_o}^{-1}$

Dans le cadre de la synthèse de lois de commande robustes, il est nécessaire d'avoir une mesure de robustesse de type scalaire. La mesure de robustesse proposée — la matrice $G_{\theta_o}^{-1}$ — n'étant pas scalaire dans les cas où plusieurs paramètres sont inconnus, il convient de définir une mesure scalaire liée à cette matrice $G_{\theta_o}^{-1}$. Plusieurs possibilités peuvent être envisagées chacune ayant une signification physique différente :

- $\mathrm{Tr}\left(G_{\theta_o}^{-1}\right)$: liée à la variance moyenne des paramètres.
- $\lambda_{\max}\left(G_{\theta_o}^{-1}\right) = \left\|G_{\theta_o}^{-1}\right\|$: liée à la direction de plus grande sensibilité.
- $\left|G_{\theta_o}^{-1}\right|$: liée au volume de l'ellipsoïde d'incertitude

La grandeur $\lambda_{\max}\left(G_{\theta_o}^{-1}\right)$ correspond ici à la norme spectrale de la matrice $G_{\theta_o}^{-1}$. Considérer $\lambda_{\max}\left(G_{\theta_o}^{-1}\right)$ comme mesure de robustesse serait intéressant car nous disposerions alors d'une mesure de robustesse dans la direction paramétrique la plus défavorable. En revanche, cette mesure serait fortement non linéaire, ce qui compliquerait singulièrement la synthèse de loi de commande.

Le déterminant de $G_{\theta_o}^{-1}$ devient nul si un seul des paramètres devient non identifiable. Par conséquent, cette mesure de robustesse s'annulerait, et empêcherait la minimisation selon les autres directions dans le cadre de la synthèse de commande robuste.

La solution retenue logiquement par [13], consiste à utiliser comme mesure scalaire de robustesse, la trace de $G_{\theta_o}^{-1}$ qui conduit d'ailleurs à une minimisation de type quadratique.

En résumé, nous présentons ci-dessous l'algorithme de calcul de cette mesure de robustesse.

Etape 1 ***Choisir les matrices*** D, Q ***et*** R
Choisir les matrices décrivant les bruits affectant le système.

Etape 2 ***Calculer le filtre de Kalman nominal***
Calculer K_o et M_o.

Etape 3 ***Pour chaque faible variation*** $\Delta\theta_i$ ***des*** r ***paramètres indépendants***

- ☐ Calculer le filtre de Kalman K_p correspondant à cette variation paramétrique.
  En déduire $\Delta K = K_p - K_o$.
- ☐ Résoudre les trois équations matricielles (IX.40), (IX.41) et (IX.42).
- ☐ En déduire $\Delta M = C\Delta P C^\intercal$ et la $i^{\text{ème}}$ composante diagonale de $G_{\theta_o}^{-1}$ grâce à la relation

$$G_{\theta_o}^{-1}(i,i) = \frac{\mathrm{Tr}(M_o^{-1}\Delta M)}{(\Delta\theta_i)^2} \tag{X.5}$$

Etape 4 ***Calculer la mesure de robustesse***

$$J_{\text{rob}} = \mathrm{Tr}\left(G_{\theta_o}^{-1}\right) = \sum_{i=1}^{r} G_{\theta_o}^{-1}(i,i) \tag{X.6}$$

Algorithme I: Algorithme de calcul de la mesure de robustesse

Remarque : La matrice $G_{\theta_o}^{-1}$ dépend a priori du choix des matrices D, Q et R décrivant les bruits agissant sur le système. En pratique, les systèmes que nous étudierons ne seront pas toujours soumis à ces bruits. Dans ce cas les matrices D Q et R seront associées à des bruits fictifs, dont les caractéristiques seront choisies a priori. Ces matrices n'étant pas forcément des données, elles pourront être utilisées, par exemple pour l'optimisation de la robustesse du système (voir plus loin, le chapitre sur la synthèse de commande robuste).

X.2 Directions de robustesse paramétriques

La matrice $G_{\theta_o}^{-1}$, mesurant la qualité de l'identification bayesienne, nous permet donc de définir une mesure de robustesse. Nous pouvons aussi utiliser cette matrice pour déterminer des directions, dans l'espace paramétrique, de robustesse minimale et maximale. Ces directions correspondent aux droites de grande et faible sensibilité aux incertitudes paramétriques.

X.2.1 Direction de robustesse minimale et maximale

Dans l'espace $\Delta\theta = [\Delta\theta_1 \quad \Delta\theta_2 \quad \cdots \quad \Delta\theta r]$, la surface

$$J = \Delta\theta G_{\theta_o}^{-1} \Delta\theta^\top \tag{X.7}$$

représente un hyper-ellipsoïde car la matrice $G_{\theta_o}^{-1}$ est définie positive. Soit Λ la matrice formant une base orthonormée des vecteurs propres de $G_{\theta_o}^{-1}$. Nous pouvons donc écrire

$$\Lambda^\top G_{\theta_o}^{-1} \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_r \end{bmatrix} \tag{X.8}$$

Comme $G_{\theta_o}^{-1}$ est définie positive, toutes ses valeurs propres sont strictement positives. Dans cette nouvelle base, toute variation paramétrique s'écrit

$$\widetilde{\Delta\theta} = \Delta\theta\Lambda^\top \tag{X.9}$$

et la surface J s'écrit

$$J = \lambda_1 \widetilde{\Delta\theta}_1^2 + \lambda_2 \widetilde{\Delta\theta}_2^2 + \cdots \lambda_r \widetilde{\Delta\theta}_r^2 \tag{X.10}$$

Soit λ_m la valeur propre minimale de $G_{\theta_o}^{-1}$. La direction $\widetilde{\Delta\theta}_m$ associée correspondra à une direction où la qualité d'identification sera la plus faible (associée à la plus faible variation du critère J). Nous désignerons cette direction DRMAX ou *droite de robustesse maximale.*

Réciproquement, soit λ_M la valeur propre maximale de $G_{\theta_o}^{-1}$. La direction $\widetilde{\Delta\theta}_M$ associée correspondra à une direction où la qualité d'identification sera la meilleure (associée à la plus forte variation du critère J). Nous appellerons cette direction DRMIN ou *droite de robustesse minimale.*

X.2.2 Aspect géométrique

Pour bien comprendre l'aspect géométrique du problème, considérons le cas à deux paramètres. Le changement d'axe représente une rotation dans la direction des axes principaux de l'ellipsoïde. Le schéma figure X-2 illustre le cas à deux paramètres $\theta = [\theta_1 \quad \theta_2]$. Un ellipsoïde représentant un iso-critère $J = \Delta\theta G_{\theta_o}^{-1} \Delta\theta^\top$ est dessiné dans le plan paramétrique $(\Delta\theta_1, \Delta\theta_2)$ ainsi que les directions DRMIN et DRMAX.

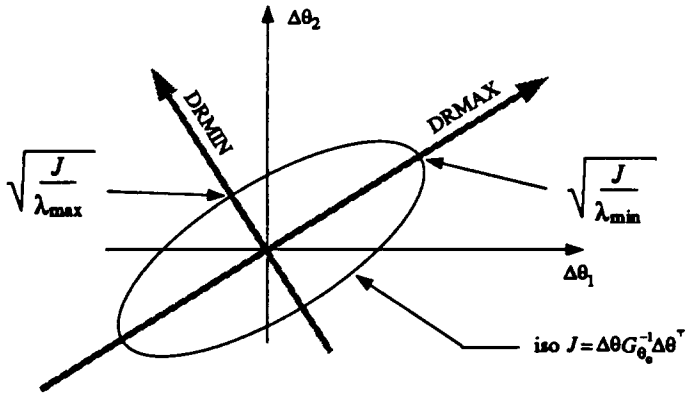


Fig. X-2: Ellipsoïde d'iso-critère, DRMIN et DRMAX dans le cas à deux paramètres.

Dans le cas général les hyper ellipsoïdes peuvent êtres caractérisés par le rapport des valeurs propres maximale et minimale qui représentent "l'allongement" de l'hyper ellipsoïde. Lorsque ce rapport se rapproche de 1

$$\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \approx 1 \tag{X.11}$$

cette surface se rapproche d'une hyper sphère, ce qui caractérise une équivalence entre toutes les directions de variation paramétrique. Au contraire, lorsque ce rapport devient élevé, les axes DRMIN et DRMAX nous indiquent les directions de grande robustesse –DRMAX– ou de grande sensibilité –DRMIN–.

X.2.3 Calcul de $G_{\theta_o}^{-1}$

Pour calculer ces droites de robustesse minimale et maximale, il faut calculer numériquement la matrice $G_{\theta_o}^{-1}$ (Pour la mesure de robustesse, nous n'avons besoin que des éléments diagonaux de cette matrice). Les éléments non diagonaux de $G_{\theta_o}^{-1}$ se calculent en faisant varier simultanément deux composantes du vecteur θ.

Notons ϵ_i la petite variation de la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\Delta\theta$. Définissons $\Delta\theta_i$ et $\Delta\theta_{ij}$ par

$$\begin{aligned} \Delta\theta_i &= [0 \quad \cdots \quad 0 \quad \epsilon_i \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \\ \Delta\theta_{ij} &= [0 \quad \cdots \quad 0 \quad \epsilon_i \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad \epsilon_j \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \end{aligned} \tag{X.12}$$

Notons aussi $\mathrm{Tr}(M_o^{-1}\Delta M)_{\Delta\theta_{ij}}$ la valeur calculée à partir d'une variation paramétrique $\Delta\theta_{ij}$. Chaque élément g_{ij} de la matrice $G_{\theta_o}^{-1}$ se calcule de la manière suivante

Les composantes diagonales sont données par

$$g_{ii} = \frac{\mathrm{Tr}(M_o^{-1}\Delta M)_{\Delta\theta_i}}{\epsilon_i^2} \tag{X.13}$$

les autres composantes s'écrivant

$$g_{ij} = \frac{\mathrm{Tr}(M_o^{-1}\Delta M)_{\Delta\theta_{ij}} - \left(\epsilon_i^2 g_{ii} + \epsilon_j^2 g_{jj}\right)}{2\epsilon_i\epsilon_j} \tag{X.14}$$

X.3 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons défini un matrice $G_{\theta_o}^{-1}$ qui reflète la qualité de l'identification bayesienne, en régime asymptotique, des paramètres inconnus. Nous avons défini, à partir de cette matrice une mesure scalaire de robustesse

$$J_{\text{rob}} = \text{Tr}\left(G_{\theta_o}^{-1}\right) \tag{X.15}$$

Cette matrice $G_{\theta_o}^{-1}$ nous permet aussi de définir des axes (dans l'espace paramétrique) de plus grande et plus faible sensibilité du système aux variations paramétriques. Ces axes se révèlent donc un précieux outil pour l'analyse de robustesse des systèmes soumis à des variations paramétriques.

Nous avons finalement vu comment, à partir des équations présentées, déterminer numériquement chacun des éléments de $G_{\theta_o}^{-1}$, ou directement la mesure scalaire de robustesse $\text{Tr}\left(G_{\theta_o}^{-1}\right)$.

Chapitre XI Synthèse de commande robuste utilisant le PRCBI

XI.1 Introduction

Dans les deux chapitres précédents, nous avons décrit en détail une nouvelle approche pour traiter les problèmes de robustesse aux variations paramétriques. Cette approche s'appuie sur le calcul d'une mesure de robustesse, fondée sur la médiocre qualité de l'identification bayesienne, en régime asymptotique, des paramètres incertains du système.

Nous envisagerons dans ce chapitre, grâce à cette nouvelle mesure de robustesse, la synthèse de commande rendant le système, en boucle fermée, robuste aux variations paramétriques.

Dans un premier temps, nous considèrerons la synthèse de lois de commande utilisant la structure LQG, naturellement adaptée à la méthode développée Nous verrons que cette approche peut s'avérer assez limitée, car la complexité du calcul de la mesure de robustesse ne permet pas de résolution analytique. Il devient alors nécessaire d'utiliser des techniques de programmation non-linéaire très coûteuses en temps calcul.

Nous verrons ensuite qu'en se restreignant à une certaine classe de systèmes, que nous expliciterons, la formulation décrite se simplifie fortement, moyennant un choix particulier des matrices décrivant le bruit agissant sur le système. Nous pourrons alors envisager la synthèse de lois de commande robustes, dans le cas de retour de sortie, en utilisant cette nouvelle expression de la mesure de robustesse. Cette approche nous permettra d'obtenir explicitement les conditions d'optimalité et donc de faciliter la mise en œuvre pratique de l'algorithme de résolution.

XI.2 Mesure de robustesse en boucle fermée

La structure de commande naturellement adaptée à la méthode PRCBI est une structure de type LQG (Retour d'état estimé avec filtre de Kalman reconstructeur d'états). Cette structure est représentée sur la figure XI-1. Le Filtre de Kalman, comme lors de nos calculs, sera ajusté sur la valeur nominale des paramètres θ_o. Nous noterons K_e la matrice gain du retour d'état et K la matrice gain du Filtre de Kalman.

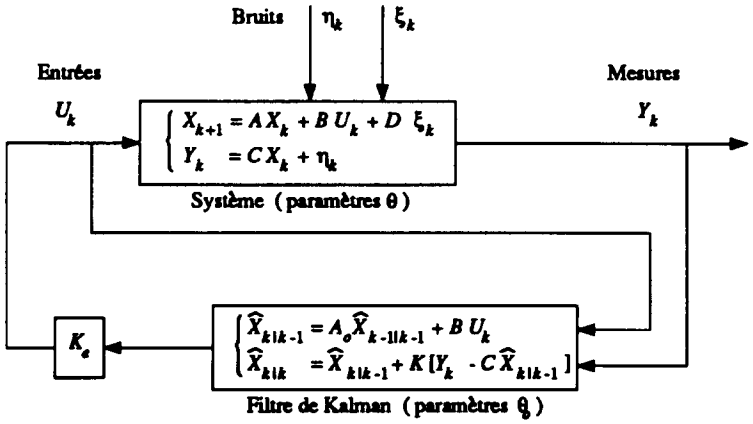


Fig. XI-1: Structure de commande LQG

Pour un tel système, la mesure de robustesse se généralise aisément à la boucle fermée. Seules les trois équations (IX.30) à (IX.42) doivent être modifiées en remplaçant la matrice A_o par $A_c = A_o + BK_e$. Ces équations deviennent donc

$$L = A_c L A_c^\tau + A_c K_o M_o K_o^\tau A_c^\tau \tag{XI.1}$$

$$N = A_c N (I - K_o C)^\tau A_c^\tau + A_c K_o M_o (\Delta A K_o - A_c \Delta K)^\tau - A_c L \Delta A^\tau \tag{XI.2}$$

$$\begin{aligned} \Delta P = & A_c (I - K_o C) \Delta P (I - K_o C)^\tau A_c - A_c (I - K_o C) N^\tau \Delta A^\tau \\ & + (A_c \Delta K + \Delta A K_o) M_o (A_c \Delta K + \Delta A K_o)^\tau \\ & + \Delta A L \Delta A^\tau - \Delta A N (I - K_o C)^\tau A_c \end{aligned} \tag{XI.3}$$

Cette structure de commande est donc naturellement bien adaptée à la méthode PRCBI. Nous allons maintenant voir comment utiliser la mesure de robustesse que nous avons décrite pour synthétiser une loi de commande robuste aux variations paramétriques.

XI.3 Synthèse de commande robuste aux variations paramétriques

Avec cette structure de commande, deux types de synthèse sont envisageables, selon que les caractéristiques des bruits d'état et de mesure sont connues ou non. En effet, la mesure de robustesse fondée sur la médiocre qualité de l'identification bayesienne des paramètres incertains nécessite la connaissance des caractéristiques des bruits affectant le système. Cette connaissance est donnée par les matrices D, Q et R.

(A) Dans le cas stochastique, ces matrices sont en général connues a priori, et peuvent donc êtres considérées comme des données du problème. Nous devons donc agir sur le gain de retour d'état K_e afin de minimiser la mesure de robustesse.

(B) Dans le cas déterministe, ou dans le cas où les caractéristiques des bruits sont mal connues, nous pouvons utiliser les matrices D, Q et R comme grandeurs variables

afin de minimiser la mesure de robustesse en boucle fermée. Dans ce cas, le filtre de Kalman n'est plus le filtre de Kalman optimal, mais un "filtre de robustesse" et les bruits peuvent être considérés comme des bruits fictifs servant au calcul de ce filtre.

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente lors de la synthèse de commande de type "insensibilité du critère de performance", il n'est pas possible, avec la mesure de robustesse que nous avons décrite, de dériver explicitement le lien existant entre les degrés de liberté possibles (matrice K_e ou matrices D, Q et R) et la mesure de robustesse. La méthodologie de synthèse effectuant la minimisation du critère nécessite donc, dans le cas général, des méthodes de programmation non linéaire.

XI.3.1 Synthèse avec filtre optimal et gain variable

Les problèmes de type (A), minimisant la mesure de robustesse, ne permettent pas de prendre en compte des contraintes de performances. Aussi, il sera préférable d'adjoindre au critère à minimiser une mesure de performance de type quadratique par exemple. Dans le cas où seul le gain de retour d'état est variable, il faudra donc chercher la solution du problème suivant

$$\min_{K_e} \left\{ \lambda J_{\text{perf}} + (1-\lambda)\text{Tr}\left(G_{\theta_o}^{-1}\right) \right\} \tag{XI.4}$$

Le paramètre λ représente le poids relatif entre les performances et la robustesse. L'algorithme de synthèse de commande robuste peut se schématiser par la figure XI-2.

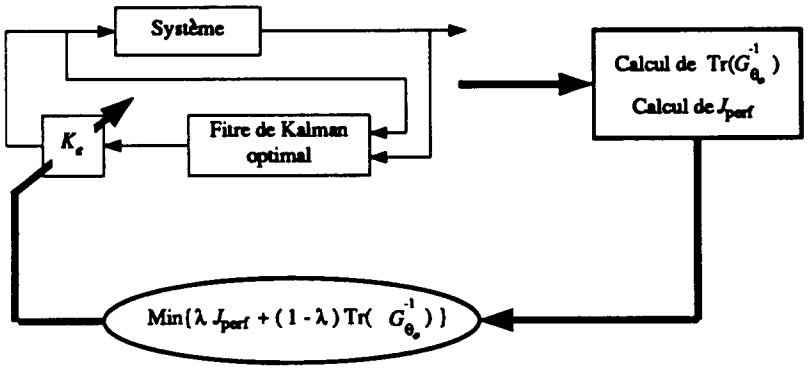


Fig. XI-2: Synthèse de loi de commande robuste avec gain de retour variable

Comme nous l'avons déjà remarqué, le type d'algorithme de recherche de solution optimale est numériquement complexe à mettre en œuvre.

XI.3.2 Synthèse avec filtre de Kalman robuste

La seconde approche proposée consiste à calculer le gain de retour d'état de manière à assurer certaines performances (par exemple en minimisant un critère de performance quadratique), et de jouer sur les degrés de liberté liés au calcul du filtre de Kalman pour

optimiser la robustesse du système en boucle fermée. Le problème d'optimisation se pose donc de la manière suivante

$$\min_{D,Q \text{ et } R} \left\{ \mathrm{Tr}\left(G_{\theta_o}^{-1} \right) \right\} \qquad \text{(XI.5)}$$

Un algorithme de programmation non linéaire doit être utilisé pour trouver une solution optimale. Cet algorithme peut être représenté par la figure XI-3.

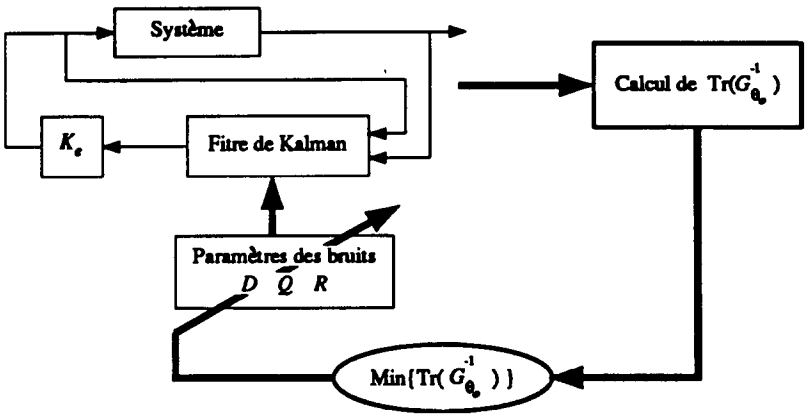


Fig. XI-3: Synthèse de loi de commande robuste avec Filtre de Kalman robustifié

Cette approche semble plus satisfaisante, car elle permet de séparer la partie performances, issue du gain de retour K_e, de la robustesse, assurée par le filtre de Kalman optimisé. Cette méthodologie ressemble à la technique LQG-LTR [45], où le filtre de Kalman de la loi de commande LQG est modifié de manière à retrouver de bonnes propriétés fréquentielles en boucle fermée, assurant ainsi une certaine robustesse. Comme pour cette technique, seule la structure de filtre de Kalman est conservée.

XI.3.3 Remarque sur ces deux approches de synthèse

Les deux approches présentées utilisent les techniques de programmation non linéaire car la complexité du calcul de la mesure de robustesse ne permet pas de déterminer explicitement comment évolue cette mesure quand les paramètres libres du système varient. De ce fait, la mise en œuvre pratique de tels algorithmes devient complexe car très coûteuse en temps calcul.

L'exemple de la synthèse de type "insensibilité du critère de performance" de la première partie nous a montré la complexité de la mise en œuvre pratique de tels algorithmes, d'autant plus que maintenant le calcul de la mesure de robustesse passe par la résolution de trois équations de Lyapunov. De plus il est souvent difficile d'être sûr d'avoir trouvé la solution optimale au problème envisagé, l'algorithme pouvant converger vers des minima locaux.

Toutes ces remarques nous ont donc incité à rechercher une méthode nous permettant de simplifier la formulation de la mesure de robustesse, de manière à pouvoir envisager une méthode de synthèse plus simple, et plus rapide. Nous allons donc présenter dans le chapitre suivant une méthodologie permettant de simplifier la formulation de la mesure de robustesse, puis de synthétiser des lois de commande robustes.

XI.4 Méthodologie PRCBI simplifiée

XI.4.1 Introduction

Dans cette section, nous décrirons une méthodologie qui conduit à une synthèse de lois de commande simplifiée. Cette simplification sera possible, pour une certaine classe de problèmes, par un choix judicieux des matrices décrivant les propriétés des bruits d'état et de mesure affectant le système.

Nous allons montrer, que sous certaines hypothèses que nous détaillerons, il est possible de choisir les matrices D, Q et R telles que le gain de Kalman K du processus d'identification des paramètres incertains, vérifie les relations suivantes

$$\begin{aligned} \Delta K &= 0 \\ (I - K_o C)\Delta A &= 0 \end{aligned} \tag{XI.6}$$

Lorsque ces relations seront réalisées, les équations (XI.1) à (XI.3) se simplifient. Il ne reste alors, pour les calculs de la mesure de robustesse, que la résolution d'une équation de Lyapunov.

XI.4.2 Choix des matrices D, Q et R

Dans un premier temps nous allons voir comment choisir D et Q tels que le filtre de Kalman soit insensible aux variations paramétriques (c'est-à-dire tel que $\Delta K = 0$).

Reprenons les équations du filtre de Kalman associé au processus d'identification bayésien du système

$$\begin{cases} X_{k+1} &= A_o X_k + D\xi_k \\ Y_k &= CX_k + \eta_k \end{cases} \tag{XI.7}$$

Les équations de ce filtre sont

$$\begin{cases} \hat{X}_{k|k-1} &= A_o \hat{X}_{k-1|k-1} \\ \hat{X}_{k|k} &= \hat{X}_{k|k-1} + K_o \left[Y_k - C\hat{X}_{k|k-1} \right] \end{cases} \tag{XI.8}$$

Ces relations, construites autour du modèle nominal (paramètre θ_o), conduisent à la relation suivante

$$P_{k+1} = (I - K_o C)A_o P_k A_o^\tau (I - K_o C)^\tau + (I - K_o C)DQD^\tau (I - K_o C)^\tau + K_o R K_o^\tau \tag{XI.9}$$

où P_k représente la matrice de covariance de l'erreur d'estimation à l'instant k.

Si l'on choisit Q de la forme

$$Q = \alpha^2 I \tag{XI.10}$$

alors la relation (XI.9) peut s'écrire

$$\frac{P_{k+1}}{\alpha^2} = (I - K_o C)A_o \frac{P_k}{\alpha^2} A_o^\tau (I - K_o C)^\tau + (I - K_o C)DQD^\tau (I - K_o C)^\tau + K_o \frac{R}{\alpha^2} K_o^\tau \tag{XI.11}$$

Si la relation suivante est vérifiée

$$(I - K_o C)D = 0 \tag{XI.12}$$

alors, en régime asymptotique (lorsque $k \to \infty$) la matrice P_k tend vers la matrice nulle lorsque α^2 devient grand. Si la relation (XI.12) peut être réalisée, la matrice K_o ne dépend plus de la matrice A_o et sera donc insensible aux variations paramétriques auxquelles le système est soumis (c'est à dire $\Delta K = 0$).

Nous venons donc d'établir que si la relation $(I - K_o C)D$ est réalisée, alors le gain de Kalman K_o est insensible aux variations paramètriques lorsque Q devient grand.

D'autre part, si nous choisissons D sous la forme

$$D = [A_1 \; A_2 \; \cdots \; A_r] \tag{XI.13}$$

alors pour toute variation $\Delta\theta$ des paramètres du système, nous obtenons la propriété :

$$(I - K_o C)\Delta A = 0 \tag{XI.14}$$

Ainsi en choisissant $Q = \alpha^2 I$ et $D = [A_1 \; A_2 \; \cdots \; A_r]$, avec K_o vérifiant $(I - K_o C)D = 0$, nous avons, pour toutes variations $\Delta\theta$ les propriétés souhaitées

$$\begin{aligned} \Delta K &= 0 \\ (I - K_o C)\Delta A &= 0 \end{aligned} \tag{XI.15}$$

Se pose maintenant le problème de l'existence et de la stabilité d'un gain K_o vérifiant la relation (XI.12)

XI.4.3 Existence du gain de Kalman

Etudions maintenant sous quelles conditions il existe une matrice K_o vérifant la relation (XI.12). Déterminons également une expression analytique de cette matrice en fonction des données du problème.

L'équation (XI.12) peut aussi s'écrire

$$K_o C D = D \tag{XI.16}$$

ou encore en transposant

$$D^\top C^\top K_o^\top = D^\top \tag{XI.17}$$

Donc $K_o^\top$ existe si et seulement si

$$D^\top \subset \mathrm{Im}(D^\top C^\top) \tag{XI.18}$$

ou

$$\text{Rang}([D^T C^T \quad D^T]) = \text{Rang}(D^T C^T) \tag{XI.19}$$

ou encore

$$\text{Rang}\left(\begin{bmatrix} CD \\ D \end{bmatrix}\right) = \text{Rang}(CD) \tag{XI.20}$$

La relation (XI.20) est donc la condition nécessaire et suffisante d'existence d'une matrice K_o vérifiant la relation (XI.12). Cette condition amène les remarques suivantes

- si

$$\text{Rang}(CD) = \text{Rang}(D) \tag{XI.21}$$

  alors la relation (XI.20) est vérifiée. La relation (XI.21) est donc une condition suffisante d'existence d'une matrice K_o vérifiant la relation (XI.12).
- Dans le cas ou la matrice C est carrée (autant de mesures que d'état) et inversible (les mesures seront linéairements indépendantes), la condition (XI.12) est toujours réalisée.
- Lorsque cela est possible, si cette condition n'est pas vérifiée, il pourrait aussi être judicieux de vouloir de nouvelles mesures, ce qui aurait pour effet d'augmenter la dimension de la matrice C, et ainsi de réaliser cette condition. Dans tous les cas, lorsque $\text{Rang}(C) = n$, c'est-à-dire pour n mesures indépendantes, la condition (XI.12) sera toujours réalisée.

XI.4.4 Calcul de la matrice K_o

Déterminons maintenant une expression analytique de la matrice K_o, solution de l'équation (XI.16). Pour cela, utilisons la décomposition en valeurs singulières des matrices CD et D. Nous pouvons écrire ces matrices sous la forme

$$\begin{aligned} CD &= [U_1 \quad U_2]\begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U_1 \Sigma_1 V_1^T \\ D &= [U_3 \quad U_4]\begin{bmatrix} \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_3^T \\ V_4^T \end{bmatrix} = U_3 \Sigma_2 V_3^T \end{aligned} \tag{XI.22}$$

Les matrices $[U_1 \quad U_2]$, $[U_3 \quad U_4]$, $[V_1 \quad V_2]$ et $[V_3 \quad V_4]$ sont par définition des matrices orthonormées et leurs transconjuguées sont aussi leurs inverses. Par hypothèse, nous avons les relations suivantes

$$U_1^T U_1 = I \text{ et } V_1^T V_1 = I \tag{XI.23}$$

Comme (XI.21) est supposée vérifiée, Σ_1 et Σ_2 sont de même dimension $(t \times t)$. La relation (XI.16) peut s'écrire maintenant

$$\begin{aligned} [K_o U_1 \quad K_o U_2]\begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= [U_3 \quad U_4]\begin{bmatrix} \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_3^T \\ V_4^T \end{bmatrix}[V_1 \quad V_2] \\ [K_o U_1 \Sigma_1 \quad 0] &= [U_3 \Sigma_2 V_3^T V_1 \quad 0] \end{aligned} \tag{XI.24}$$

Compte tenu des relations (XI.23), nous pouvons vérifier que $K_o = DV_1\Sigma_1^{-1}U_1^T$ est solution de (XI.24) donc de (XI.16).

Nous venons donc d'expliciter sous quelles conditions l'équation $(I - K_oC)D$ admet une solution, et nous avons explicité la solution K_o de ce problème. Ces résultats peuvent se résumer par les conditions suivantes :

Si la condition suivante est réalisée

$$\text{Rang}(CD) = \text{Rang}(D) \tag{XI.25}$$

alors il existe K_o vérifiant :

$$(I - K_oC)D = 0 \tag{XI.26}$$

et l'on peut exprimer cette matrice sous la forme

$$K_o = DV_1\Sigma_1^{-1}U_1^T \tag{XI.27}$$

où V_1, Σ_1 et U_1 sont issus de la décomposition en valeurs singulières de la matrice CD.

La condition (XI.25) exprime une sorte de "condition d'observabilité" des perturbations. En d'autres termes, les perturbations sur la matrice A doivent agir suivant des directions "visibles" sur les mesures. Si cette condition n'est pas remplie, deux alternatives sont possibles :

- Prévoir des mesures supplémentaires afin d'augmenter la dimension de la matrice C, ce qui permettra "d'observer" les perturbations considérées.
- Ne pas considérer les perturbations agissant selon des directions incompatibles avec les mesures.

Nous pouvons remarquer que dans tous les cas, si nous avons suffisamment de mesures (autant que d'états), tout type de perturbation pourra être pris en compte.

XI.4.5 Stabilité de la solution obtenue

Il nous faut vérifier maintenant que la solution donnée par la formule (XI.27) entraîne un filtre de Kalman stable. Il faut donc examiner sous quelles conditions les pôles du filtre de Kalman dont la dynamique est donnée par $(I - K_oC)A_o$, ont un module inférieur à un. Le polynôme caractéristique de la matrice $(I - K_oC)A_o$ s'écrit sous la forme

$$P(z) = |zI - (I - K_oC)A_o| \tag{XI.28}$$

Déterminons les racines de ce polynôme. Nous utiliserons pour cela les propriétés suivantes

Pour toute matrice M carrée, partitionnée sous la forme

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} \tag{XI.29}$$

Si $|M_4| \neq 0$ alors

$$|M| = |M_4||M_1 - M_2 M_4^{-1} M_3| \tag{XI.30}$$

Si $|M_1| \neq 0$ alors

$$|M| = |M_1||M_4 - M_3 M_1^{-1} M_2| \tag{XI.31}$$

En s'appuyant sur la propriété (XI.30) et sur la relation (XI.27) nous pouvons écrire

$$\begin{vmatrix} zI - A_o & -DV_1 \\ U_1^T C A_o & \Sigma_1 \end{vmatrix} = |\Sigma_1||zI - A_o + K_o C A_o| \tag{XI.32}$$

Comme par hypothèse $|\Sigma_1| \neq 0$, les racines de $P(z)$ sont les racines de

$$\begin{vmatrix} zI - A_o & -DV_1 \\ U_1^T C A_o & \Sigma_1 \end{vmatrix} \tag{XI.33}$$

En multipliant la première ligne de (XI.33) par $U_1^T C$ et en l'ajoutant à la deuxième ligne, il vient :

$$\begin{vmatrix} zI - A_o & -DV_1 \\ U_1^T C A_o & \Sigma_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} zI - A_o & -DV_1 \\ U_1^T C z & 0 \end{vmatrix} \tag{XI.34}$$

Soit comme $\dim(U_1^T C) = t \times n$

$$\begin{vmatrix} zI - A_o & -DV_1 \\ U_1^T C A_o & \Sigma_1 \end{vmatrix} = z^t \begin{vmatrix} zI - A_o & -DV_1 \\ U_1^T C & 0 \end{vmatrix} \tag{XI.35}$$

En utilisant la propriété (XI.31), il vient finalement

$$P(z) = z^t |zI - A_o| \left| U_1^T C (zI - A_o)^{-1} DV_1 \right| \tag{XI.36}$$

La relation (XI.36) nous montre que le filtre de Kalman obtenu grâce à (XI.27) possède t pôles nuls, et que les $(t - n)$ pôles restants sont les zéros du système $\{A_o, DV_1, U_1^T C\}$. La stabilité du filtre de Kalman sera donc assurée si le système nominal est stable et si le

système $\{A_o, DV_1, U_1^T C\}$ est à minimum de phase. Cette dernière hypothèse est semblable à celle rencontrée dans les techniques de commande robuste plus classiques (LQG/LTR, PRLQG...) [47][7].

Nous remarquerons que si le système $\{A_o, DV_1, U_1^T C\}$ possède des zéros instables, seule une augmentation de la dimension de C peut supprimer ces zéros instables. Dans le cas extrême, lorsque $\dim(C) = n \times n$ alors le système ne possède pas de zéros, et tous les pôles du filtre de Kalman sont nuls.

Nous résumerons donc les propriétés que nous venons d'établir par les résultats suivants

Le système S1, décrit par les équations (XI.7), où la matrice A est fonction d'un vecteur paramétrique θ par la relation $A = A_o + \sum_{i=1}^{r} A_i \Delta\theta_i$. Si l'on choisit D tel que

$$D = [A_1 \; A_2 \; \cdots \; A_r] \tag{XI.37}$$

Si les directions de variation paramétrique vérifient les hypothèses H_1 :

- $\text{Rang}(CD) = \text{Rang}(D) = t$
- le système $\{A_o, DV_1, U_1^T C\}$ est à minimum de phase.

Alors en prenant $Q = \alpha^2 I$, nous avons les propriétés suivantes lorsque $\alpha \to \infty$

☐ Le gain de Kalman est indépendant de A, donc des variations paramétriques, et se calcule par

$$K_o = DV_1 \Sigma_1^{-1} U_1^T \tag{XI.38}$$

☐ Le filtre de Kalman ainsi calculé est stable et possède t pôles nuls.

☐ Pour toutes variations ΔA dues à une variation paramétrique $\Delta\theta$ alors

$$\begin{aligned} (I - K_o C)\Delta A &= 0 \\ \Delta K &= 0 \end{aligned} \tag{XI.39}$$

XI.4.6 Expression simplifiée des équations de Lyapunov

Maintenant que nous avons vu sous quelles conditions les relations (XI.39) peuvent être réalisées, nous allons voir comment l'écriture de la mesure de la robustesse peut se simplifier.

Reprenons les trois équations nous servant au calcul de la mesure de robustesse liée à la médiocre qualité de l'identification des paramètres inconnus du système. Ces équations s'écrivent

$$L = A_o L A_o^\tau + A_o K_o M_o K_o^\tau A_o^\tau \tag{XI.40}$$

$$N = A_o N (I - K_o C)^\tau A_o^\tau + A_o K_o M_o (\Delta A K_o - A_o \Delta K)^\tau - A_o L \Delta A^\tau \tag{XI.41}$$

$$\begin{aligned} \Delta P =& A_o (I - K_o C) \Delta P (I - K_o C)^\tau A_o - A_o (I - K_o C) N^\tau \Delta A^\tau \\ &+ (A_o \Delta K + \Delta A K_o) M_o (A_o \Delta K + \Delta A K_o)^\tau \\ &+ \Delta A L \Delta A^\tau - \Delta A N (I - K_o C)^\tau A_o \end{aligned} \tag{XI.42}$$

Avec les hypothèses H_1 que nous venons de formuler, ces équations peuvent se réécrire plus simplement. En effet comme $(I - K_o C)\Delta A = 0$ et $\Delta K = 0$, (XI.41) devient

$$N = -A_o (L + K_o M_o K_o^\tau) \Delta A^\tau \tag{XI.43}$$

En posant $E = -A_o (L + K_o M_o K_o^\tau)$ et en reportant (XI.43) dans (XI.42) il vient

$$\begin{aligned} \Delta P =& A_o (I - K_o C) \Delta P (I - K_o C)^\tau A_o - A_o (I - K_o C) \Delta A^\tau E^\tau \Delta A^\tau \\ &+ \Delta A K_o M_o K_o^\tau \Delta A^\tau + \Delta A L \Delta A^\tau - \Delta A E \Delta A^\tau (I - K_o C)^\tau A_o \end{aligned} \tag{XI.44}$$

ou encore

$$\Delta P = A_o (I - K_o C) \Delta P (I - K_o C)^\tau A_o - \Delta A [L + K_o M_o K_o^\tau] \Delta A^\tau \tag{XI.45}$$

Posons $L_1 = L + K_o M_o K_o^\tau$. Nous pouvons donc réécrire les relations (XI.45) et (XI.40)

$$\Delta P = A_o (I - K_o C) \Delta P (I - K_o C)^\tau A_o^\tau + \Delta A L_1 \Delta A^\tau \tag{XI.46}$$

$$L_1 = A_o L_1 A_o^\tau + K_o M_o K_o^\tau \tag{XI.47}$$

Nous pouvons vérifier que $\Delta P = \Delta A L_1 \Delta A^\tau$ est une solution de (XI.46). Comme la solution d'une équation de Lyapunov discrète est unique, nous savons que cette solution est la solution de (XI.46).

Nous venons donc de montrer qu'en utilisant les hypothèses H_1, le calcul de la matrice ΔP, qui se faisait par la résolution des trois équations (XI.40), (XI.41) et (XI.42) revient à calculer

$$\Delta P = \Delta A L_1 \Delta A^\tau \tag{XI.48}$$

sous la contrainte

$$L_1 = A_o L_1 A_o^\tau + K_o M_o K_o^\tau \tag{XI.49}$$

XI.4.7 Calcul simplifié de la mesure de robustesse

Nous venons de simplifier les écritures des relations nous permettant de calculer la matrice ΔP. Etudions maintenant comment l'écriture de la matrice $G_{\theta_o}^{-1}$ se simplifie.

La mesure de robustesse se détermine grâce à la relation

$$\mathrm{Tr}(M_o^{-1}\Delta M) = \Delta\theta G_{\theta_0}^{-1}\Delta\theta^\top \tag{XI.50}$$

Calculons donc $\mathrm{Tr}(M_o^{-1}\Delta M)$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(M_o^{-1}\Delta M) &= \mathrm{Tr}[M_o^{-1}C\Delta P^\top C] \\ &= \mathrm{Tr}[M_o^{-1}C\Delta A L_1 \Delta A^\top C^\top] \\ &= \mathrm{Tr}[\Delta A^\top C^\top M_o^{-1} C\Delta A L_1] \\ &= \mathrm{Tr}[\Delta A^\top M_1 \Delta A L_1]\end{aligned} \tag{XI.51}$$

en posant $M_1 = C^\top M_o^{-1} C$. La matrice M_o, compte tenu de l'expression asymptotique de P_k s'écrit

$$M_o = \alpha^2 U_1 \Sigma_1 \Sigma_1^\top U_1^\top \tag{XI.52}$$

Si cette matrice n'est pas de rang plein (ou encore si la matrice CD n'est pas de rang plein) alors M_o^{-1} n'existe pas. Physiquement, cela signifie que certaines mesures sont parfaitement connues (covariance d'erreur nulle). Dans ce cas il faudra donc utiliser

$$M_1 = \frac{1}{\alpha^2} C U_1 (\Sigma_1 \Sigma_1^\top)^{-1} U_1^\top C^\top \tag{XI.53}$$

ce qui ne changera pas les résultats obtenus.

Nous avons donc la relation suivante

$$\Delta\theta G_{\theta_0}^{-1}\Delta\theta^\top = \mathrm{Tr}(\Delta A^\top M_1 \Delta A L_1) \tag{XI.54}$$

Par définition de la matrice ΔA, cette expression peut s'écrire

$$\Delta\theta G_{\theta_0}^{-1}\Delta\theta^\top = \mathrm{Tr}\left(\left[\sum_{i=1}^{r} A_i^\top \Delta\theta_i\right] M_1 \left[\sum_{j=1}^{r} A_j^\top \Delta\theta_j\right] L_1\right) \tag{XI.55}$$

Comme les matrices M_1 et L_1 sont symétriques, nous avons la propriété suivante

$$\mathrm{Tr}(A_i^\top M_1 A_j L_1) = \mathrm{Tr}(A_j^\top M_1 A_i L_1) \tag{XI.56}$$

Nous déduisons donc de (XI.55) et (XI.56) l'expression $G_{\theta_o}^{-1}$

$$G_{\theta_o}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{Tr}(A_1^T M_1 A_1 L_1) & \mathrm{Tr}(A_1^T M_1 A_2 L_1) & \cdots & \mathrm{Tr}(A_1^T M_1 A_r L_1) \\ \mathrm{Tr}(A_1^T M_1 A_2 L_1) & \mathrm{Tr}(A_2^T M_1 A_2 L_1) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathrm{Tr}(A_1^T M_1 A_r L_1) & & & \mathrm{Tr}(A_r^T M_1 A_r L_1) \end{bmatrix} \tag{XI.57}$$

Nous voyons donc que la mesure de robustesse que nous avons envisagée peut s'écrire :

$$\mathrm{Tr}\left(G_{\theta_o}^{-1}\right) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Tr}(A_i^T M_1 A_i L_1) \tag{XI.58}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left(G_{\theta_o}^{-1}\right) &= \mathrm{Tr}(Q_c L_1) \\ \text{avec } Qc &= \sum_{i=1}^{r} A_i^T M_1 A_i \end{aligned} \tag{XI.59}$$

XI.4.8 Conclusions

L'objectif recherché, trouver une écriture simplifiée de la mesure de robustesse fondée sur la médiocre qualité de l'identification des paramètres inconnus, et expliciter les conditions sous lesquelles cette écriture est valable, est maintenant atteint et peut se résumer comme suit :

Soit le système discret S1 défini par

$$\begin{aligned} \text{S1} : \begin{cases} X_{k+1} &= AX_k + D\xi_k \\ Y_k &= CX_k + \eta_k \end{cases} \\ \text{avec } E[\xi_j \xi_k^T] = \alpha^2 I \delta_{jk} \text{ et } E[\eta_j \eta_k^T] = R\delta_{jk} \end{aligned} \tag{XI.60}$$

La matrice A est soumise à des perturbations paramétriques de type

$$A = A_o + \sum_{i=1}^{r} A_i \Delta\theta_i \tag{XI.61}$$

Posons $D = [A_1\ A_2\ \cdots\ A_r]$

Soit U_1, V_1 et Σ_1 issues de la décomposition en valeurs singulières de CD

$$CD = [U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U_1 \Sigma_1 V_1^T \tag{XI.62}$$

Si les perturbations vérifient les hypothèses H_1

- ☐ $\mathrm{rang}(CD) = \mathrm{rang}(D)$
- ☐ le système $\{A, DV_1, U_1^T C\}$ est à minimum de phase.

Alors lorsque $\alpha \rightarrow \infty$ il vient les propriétés suivantes

- Le gain du filtre de Kalman nominal K_o associé à S1 est indépendant de A et s'écrit

$$K_o = DV_1 \Sigma_1^{-1} U_1^T \tag{XI.63}$$

- La matrice de covariance de l'erreur de prédiction M_o pour le système nominal s'écrit

$$M_o = \alpha^2 U_1 \Sigma_1 \Sigma_1^T U_1^T \tag{XI.64}$$

- La mesure de robustesse, fondée sur la médiocre qualité de l'identification bayesienne des paramètres inconnus, s'écrit

$$\mathrm{Tr}\left(G_{\theta_o}^{-1}\right) = \mathrm{Tr}(Q_c L_1) \tag{XI.65}$$

où Q_c et L_1 sont déterminées par

$$\begin{aligned} Q_c &= \sum_{i=1}^{r} A_i^T M_1 A_i \\ L_1 &= A_o L_1 A_o^T + K_o M_o K_o^T \end{aligned} \tag{XI.66}$$

où M_1 est donnée par

$$M_1 = \frac{1}{\alpha^2} C U_1 (\Sigma_1 \Sigma_1^T)^{-1} U_1^T C^T \tag{XI.67}$$

XI.5 Nouvelle méthode de synthèse de commande robuste

XI.5.1 Introduction

Nous allons dans cette section envisager la synthèse de lois de commande robuste aux incertitudes paramétriques. Nous nous placerons dans le cadre du retour de sortie, qui englobe plus généralement tous les types de retour, y compris les retours de type dynamique. Comme nous l'avons fait avec les autres mesures de robustesse que nous avons envisagées dans la partie précédente, nous allons considérer comme critère d'optimisation un critère mixte performance et robustesse, nous permettant d'envisager tous les compromis entre la commande la plus robuste et la commande la plus performante, au sens de notre nouvelle mesure de robustesse.

Nous rappellerons donc brièvement les résultats obtenus sur le critère de performance de type quadratique. Nous utiliserons ensuite l'écriture complète du critère mixte performance et robustesse de type

$$J_{\text{mixte}} = \lambda J_{\text{perf}} + (1 - \lambda) J_{\text{rob}} \tag{XI.68}$$

En utilisant le formalisme de Lagrange, nous pourrons explicitement déterminer les conditions d'optimalité de la solution optimale recherchée. Nous décrirons finalement l'algorithme de recherche de la solution optimale.

XI.5.2 Mesure de performance

Rappelons brièvement les résultats établis dans la partie précédente concernant le critère de performance quadratique. Soit le modèle nominal du système en boucle ouverte décrit par les équations suivantes

$$\begin{cases} X_{k+1} &= A_o X_k + B U_k \\ Y_k &= C X_k \end{cases} \tag{XI.69}$$

La matrice A_o, de dimension $n \times n$, représente la dynamique du système en boucle ouverte, la matrice B, de dimensions $n \times m$, représente la matrice d'entrée des commandes du système, et la matrice C, de dimensions $p \times n$ représente la matrice de mesures. Nous supposerons ce système soumis à un retour de sortie de type

$$U_k = K Y_k \tag{XI.70}$$

Le critère de performance quadratique

$$J_{\text{perf}} = \sum_{k=0}^{\infty} X_k^T Q X_k + U_k^T R U_k \tag{XI.71}$$

où Q et R représentent respectivement les poids relatifs sur le vecteur d'état et le vecteur d'entrée, peut également s'écrire sous la forme

$$J_{\text{perf}} = \text{Tr}(\text{X}_o L) \tag{XI.72}$$

où L est solution de l'équation de Lyapunov

$$\begin{gathered} A_c^T L A_c - L + Q_p = 0 \\ \text{avec} \begin{cases} A_c &= A + BKC \\ Q_p &= Q + C^T K^T R K C \end{cases} \end{gathered} \tag{XI.73}$$

Comme nous l'avons vu X_o, représente la matrice de covariance de l'état initial que l'on supposera, si elle n'est pas connue, comme étant uniformément répartie sur une sphère de diamètre ψ (soit $\text{X}_o = \psi^2 I$).

XI.5.3 Synthèse robustesse et performances

Le problème que nous cherchons à résoudre est de trouver un gain K qui minimise le critère mixte performance et robustesse (XI.71). Comme mesure de robustesse, nous utiliserons la mesure de robustesse liée à la plus mauvaise qualité de l'identification des paramètres incertains.

Le critère mixte, vu les relations (XI.72) et (XI.65) peut s'écrire

$$J_{\text{mixte}} = \text{Tr}(\lambda X_o L + (1-\lambda) Q_c L_1) \tag{XI.74}$$

où L et L_1 vérifient respectivement

$$\begin{aligned} A_c^T L A_c - L + Q_p &= 0 \\ A_c L_1 A_c^T - L_1 + K_o M_o K_o^T &= 0 \end{aligned} \tag{XI.75}$$

Ce problème est un problème de minimisation sous contraintes. Pour résoudre ce type de problème nous pouvons le transformer en un problème de minimisation simple en utilisant le formalisme de Lagrange. Nous pourrons, de plus, calculer explicitement les conditions d'optimalité de la solution, ce qui nous permettra d'utiliser un algorithme optimisé de recherche de la solution.

Soit Λ_1 et Λ_2 les paramètres de Lagrange. L'hamiltonien du problème s'écrit

$$H = \text{Tr}[\lambda X_o L + (1-\lambda) Q_c L_1 + \Lambda_1 (A_c^T L A_c - L + Q_p) + \Lambda_2 (A_c L_1 A_c^T - L_1 + K_o M_o K_o^T)] \tag{XI.76}$$

Les conditions nécessaires d'optimalité au premier ordre s'écrivent [1]

$$\frac{\partial H}{\partial \Lambda_1} = A_c^T L A_c - L + Q_p = 0 \tag{XI.77}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \Lambda_2} = A_c L_1 A_c^T - L_1 + K_o M_o K_o^T = 0 \tag{XI.78}$$

$$\frac{\partial H}{\partial L} = A_c \Lambda_1 A_c^T - \Lambda_1 + \lambda X_o = 0 \tag{XI.79}$$

$$\frac{\partial H}{\partial L_1} = A_c^T \Lambda_2 A_c - \Lambda_2 + (1-\lambda) Q_c = 0 \tag{XI.80}$$

$$\frac{\partial H}{\partial K} = B^T (L A_c \Lambda_1 + \Lambda_2 A_c L_1) C^T + R K C \Lambda_1 C^T = 0 \tag{XI.81}$$

Le problème d'optimisation du critère mixte envisagé se résume donc à la résolution simultanée de ces cinq équations matricielles. Ce problème peut être résolu numériquement en utilisant un algorithme utilisant la méthode des gradients conjuguées. Un programme Matlab, fondé sur une minimisation de type min-max [32], a été écrit pour résoudre ce problème d'optimisation. L'algorithme de recherche de la solution optimale utilisé est le suivant.

Etape 1 ***Trouver un retour K satisfaisant :***
Essayer de manière aléatoire différentes matrices K. Parmi toutes les solutions stables trouvées, sélectionner celle qui minimise le critère mixte (XI.74).

Etape 2 ***Calculer L, L_1, Λ_1 et Λ_2 :***
Calculer la boucle fermée $A_c = A + BKC$.
Calculer la matrice $Q_p = Q + C^\tau K^\tau RKC$.
Résoudre les équations

$$\begin{cases} A_c^\tau L A_c - L + Q_p = 0 \\ A_c L_1 A_c^\tau - L_1 + K_o M_o K_o^\tau = 0 \\ A_c \Lambda_1 A_c^\tau - \Lambda_1 + \lambda X_o = 0 \\ A_c^\tau \Lambda_2 A_c - \Lambda_2 + (1-\lambda) Q_c = 0 \end{cases}$$

Etape 3 ***Calculer*** $E = B^\tau (L A_c \Lambda_1 + \Lambda_2 A_c L_1) C^\tau + RKC\Lambda_1 C^\tau$

Etape 4 ***Minimiser*** $||E|| = \max_{ij} \left\{ (e_{ij})^2 \right\}$:
Trouver un nouveau K afin de diminuer la valeur maximale du carré des éléments de E (sous la contrainte d'avoir A_c stable).

Etape 5 Si $||E|| = \max_{ij} \left\{ (e_{ij})^2 \right\} > 10^{-5}$ recommencer à l'étape 2.

Algorithme J: Synthèse d'une commande optimale en performances et stabilité.

La procédure d'optimisation utilisée ne permet pas de certifier que la solution trouvée n'est pas un optimum local. En revanche, si la matrice E est nulle (ou très petite), nous savons que la solution trouvée est une solution optimale, car les conditions d'optimalité sont réalisées, les cinq équations (XI.77) à (XI.80) étant réalisées.

Nous pouvons remarquer que la dimension de la matrice E est la même que celle de K. Nous avons donc, lors de l'optimisation, autant de degrés de liberté (éléments de K) que de contraintes à respecter (minimisation des éléments de E). Ceci montre que notre algorithme d'optimisation est numériquement bien conditionné.

XI.6 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons donc considéré le problème de la synthèse de loi de commande robuste aux variations paramétriques utilisant une mesure de robustesse fondée sur la plus mauvaise qualité de l'identification, en régime asymptotique, des paramètres incertains du système.

Nous avons d'abord envisagé la synthèse naturellement adaptée à la formulation de la mesure de robustesse, utilisant une structure de type LQG (retour d'état avec filtre de Kalman).

Nous avons constaté que cette approche ne semblait pas satisfaisante en pratique, car la recherche de solution repose sur une optimisation non linéaire très coûteuse en temps calcul, sans pour autant assurer l'optimalité des solution obtenues.

Pour résoudre cette difficulté, nous avons été amené à considérer une écriture simplifiée de la mesure de robustesse, par un choix judicieux des matrices décrivant le bruit agissant sur le système (ce bruit devient donc un bruit fictif). Cette écriture n'est possible que pour la classe de système vérifiant les deux conditions suivantes :

- ☐ les mesures du système sont en nombre suffisant pour pouvoir "observer" les perturbations du système.
- ☐ le système ayant comme entrées les bruits fictifs et comme mesures les mesures réelles, est à minimum de phase.

En pratique, si le nombre de mesures est suffisant, ces deux conditions seront réalisées. Dans le cas extrême, lorsque tous les états sont mesurables, alors ces deux conditions seront nécessairement réalisées.

Lorsque ces hypothèses sont vérifiées, nous avons établi que l'écriture de la mesure de robustesse se simplifie et devient linéaire par rapport aux données du problème. Un algorithme de synthèse de retour de sortie optimisant un critère mixte performance/robustesse a donc été décrit en utilisant les conditions nécessaires d'optimalité qui peuvent être explicitement déterminées.

Chapitre XII Comparaison avec les autres approches robustes. Application à l'exemple du troisième ordre.

XII.1 Introduction

Après avoir vu les développements théoriques conduisant à une nouvelle mesure de robustesse, ainsi qu'une nouvelle méthode de synthèse de commande robuste, nous allons nous attacher à comparer cette nouvelle approche à celles précédemment développées.

Nous commencerons par établir des liens théoriques entre la mesure de robustesse liée à la plus mauvaise qualité de l'identification des paramètres incertains, et l'approche fondée sur le calcul des marges de stabilité du système. Nous verrons comment la notion d'amortissement du système, que nous définirons, se rapproche de ces deux mesures de robustesse. Enfin nous établirons un lien entre qualité d'identification des paramètres incertains et insensibilité des performances.

Ensuite nous appliquerons cette nouvelle technique à l'exemple du troisième ordre envisagé dans la partie précédente. Nous commencerons par évaluer la mesure de robustesse fondée sur la médiocre qualité de l'identification des paramètres incertains du système, et notamment les directions de robustesse minimale et maximale. Nous verrons comment le choix des matrices décrivant les caractéristiques du bruit d'état et de mesures peuvent influencer ces directions.

Nous comparerons ensuite la complexité de cette nouvelle mesure de robustesse et de l'algorithme de synthèse de commande robuste, face aux autres méthodologies proposées. Enfin, nous calculerons la commande robuste selon le nouvel algorithme proposé, et nous comparerons les résultats aux autres commandes calculées dans la partie précédente.

XII.2 Liens théoriques entre PRCBI, la robustesse en stabilité et l'insensibilité des performances

Nous allons voir que la nouvelle mesure de robustesse que nous venons de définir est très proche de celle conduisant à la maximisation des marges de stabilité. Nous allons ensuite voir comment l'optimisation de ces mesures de robustesse conduit aussi à un amortissement optimal du système en boucle fermée.

Nous utiliserons pour cela les résultats démontrés par P. Gahinet dans [9] relatif aux équations de Lyapunov discrètes. Nous verrons que les trois propriétés (Stabilité des systèmes, médiocre qualité d'identification des paramètres du système et amortissement optimal) sont

très étroitement liées. Nous verrons aussi que dans certain cas, il existe un lien direct entre la qualité d'identification des paramètres incertains et la sensibilité d'un critère de performance.

XII.2.1 Résultats sur les équations de Lyapunov discrètes

Nous présentons ici de récents résultats établis par P. M. Gahinet dans [9] sur la sensibilité des équations de Lyapunov discrètes. Ces résultats nous permettront d'établir un lien entre la mesure de robustesse liée à la stabilité des systèmes, la mesure liée à la plus mauvaise qualité d'identification des paramètres incertains et l'amortissement optimal des systèmes.

Soit l'équation de Lyapunov discrète suivante

$$A^\tau P A - P + Q = 0 \tag{XII.1}$$

Si A est stable ($|\lambda_{\max}(A)| < 1$), pour toute matrice Q symétrique, définie positive, l'équation de Lyapunov (XII.1) admet une solution unique symétrique, définie positive donnée par

$$P_Q = \sum_{k=0}^{\infty} (A^\tau)^k Q A^k \tag{XII.2}$$

De plus il est démontré dans [9] le théorème suivant

Théorème (A) : Si A est stable, l'unique solution P_I de l'équation

$$A^\tau P A - P + I = 0 \tag{XII.3}$$

donnée par $P_I = \sum_{k=0}^{\infty} (A^\tau)^k A^k$ vérifie, pour tout Q symétrique, définie positive

$$\|P_I\| = \max_{\|Q\|=1} \|P_Q\| \tag{XII.4}$$

où $\|\ .\ \|$ représente la norme spectrale.

Un autre résultat important apporté par P. M. Gahinet concerne l'amortissement optimal des systèmes. Définissons d'abord la notion d'amortissement optimal d'un système.

Soit le système discret évoluant librement

$$X_{k+1} = A X_k \tag{XII.5}$$

Pour toute excitation initiale X_o normée ($\|X_o\| = 1$), considérons la séquence des vecteurs d'états $X_k = A^k X_o$ générée par (XII.5). Définissons l'amortissement quadratique de ce système, soumis à l'excitation initiale X_o, comme la norme de cette séquence

$$S(X_o) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|X_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left\| A^k X_o \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{XII.6}$$

Plus le système sera rapide et amorti, plus $S(X_o)$ sera petit. L'amortissement d'un système sera donné par la condition initiale maximisant $S(X_o)$, et sera noté $S_{\max}$

$$S_{\max} = \max_{\|X_o\|=1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left\| A^k X_o \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{XII.7}$$

Le lien entre l'amortissement du système (XII.5) et la solution de l'équation de Lyapunov (XII.3) est donné par le théorème suivant

Théorème (B) : L'amortissement $S_{\max}$ du système $X_{k+1} = AX_k$ est donné par

$$S_{\max} = \sqrt{\|P_I\|} \tag{XII.8}$$

où P_I est la solution de l'équation de Lyapunov (XII.3)

XII.2.2 Lien entre PRCBI et la robustesse en stabilité

Les équations de la mesure de robustesse fondée sur la plus mauvaise qualité de l'identification des paramètres incertains et de la mesure de robustesse à la stabilité sont semblables. Nous allons voir maintenant, dans le cas des systèmes associés, quel est le lien unissant ces deux mesures de robustesse.

Considérons le système discret de type

$$X_{k+1} = AX_k \tag{XII.9}$$

où A est sous la forme compagne horizontale

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \tag{XII.10}$$

Prenons en compte des perturbations du type $\Delta\theta_i = \Delta a_i$.

Les marges de stabilité de ce système sont maximisées, comme nous l'avons établi, en minimisant $\sigma_{\max}(P)$ (ou $J_{\text{rob}} = \text{Tr}(P)$ en remarquant que $\sigma_{\max}(P) < \text{Tr}(P)$ si P est symétrique, définie positive). P est solution de l'équation de Lyapunov discrète

$$A^T P A - P + I = 0 \tag{XII.11}$$

La mesure de robustesse liée à la plus mauvaise qualité de l'identification des paramètres incertains est donnée par $J_{\text{rob}} = \text{Tr}(Q_c L)$ où L est solution de l'équation de Lyapunov

$$ALA^T - L + Q_M = 0 \tag{XII.12}$$

Vu la forme particulière du système envisagé et des perturbations agissant sur celui-ci, la matrice $Q_c = \sum_{i=1}^{r} A_i^T M_1 A_i$ a une forme particulière. Nous pouvons vérifier que la mesure de robustesse peut s'écrire

$$J_{\text{rob}} = M_{1_{nn}} \text{Tr}(L) \tag{XII.13}$$

où $M_{1_{nn}}$ est l'élément (n,n) de M_1. Dans ce cas l'optimisation de $\text{Tr}(L)$ conduira à l'optimisation de la mesure de robustesse liée à la plus mauvaise qualité de l'identification des paramètres incertains.

Explicitons maintenant le lien existant entre $\text{Tr}(P)$ et $\text{Tr}(L)$, c'est-à-dire le lien existant entre les deux mesures de robustesse. Nous pouvons appliquer le théorème (A) à l'équation de Lyapunov (XII.12) en remarquant qu'il suffit de remplacer A par A^T pour retrouver le type d'équations nécessaires. Il vient donc

$$\frac{\|L\|}{\|Q_M\|} = \left\|\tilde{L}\right\| \tag{XII.14}$$

où $\tilde{L}$ est solution de l'équation de Lyapunov

$$A\tilde{L}A^T - \tilde{L} + I = 0 \tag{XII.15}$$

Les équations de Lyapunov (XII.15) et (XII.11) ne sont pas identiques, et dans le cas général, les solutions $\tilde{L}$ et P de ces équations sont différentes. En revanche nous avons la relation suivante

$$\text{Tr}(P) = \text{Tr}\left(\tilde{L}\right) \tag{XII.16}$$

Comme $\text{Tr}\left(\tilde{L}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\left(\tilde{L}\right) \leq n\lambda_{\max}\left(\tilde{L}\right) = n\left\|\tilde{L}\right\|$ il vient, en tenant compte de (XII.14)

$$\text{Tr}(P) \leq \frac{n}{\|Q_M\|}\|L\| \tag{XII.17}$$

soit finalement

$$\text{Tr}(P) \leq \frac{n}{\|Q_M\|}\text{Tr}(L) \tag{XII.18}$$

La relation (XII.18) nous montre que la minimisation de la mesure de robustesse fondée sur la plus mauvaise qualité de l'identification des paramètres incertains conduit, dans le cas envisagé, à l'optimisation des marges de stabilité du système.

Nous venons donc de montrer que, dans certains cas, la notion de plus mauvaise qualité d'identification des paramètres incertains rejoint la notion de marge de stabilité maximale. Ce résultat très important, confirme les résultats obtenus par M. Gauvrit [10] sur le lien existant entre la médiocre qualité de l'identification et la stabilité des systèmes.

XII.2.3 Amortissement optimal des systèmes discrets

La propriété démontrée dans le théorème (B) permet de montrer que l'optimisation des marges de stabilité des système discrets conduit aussi à un amortissement optimal du système.

La minimisation de $\sigma_{\max}(P)$ où P est solution de l'équation de Lyapunov

$$A^T P A - P + I = 0 \tag{XII.19}$$

conduit donc simultanément aux propriétés suivantes

- ☐ Marges de stabilité optimales
- ☐ Amortissement du système optimal

Ces deux propriétés sont donc très étroitement liées, et seront gages d'une grande robustesse. Nous voyons donc que la mesure de robustesse fondée sur l'optimisation des marges de stabilité s'avère être aussi une mesure de l'amortissement du système.

L'optimisation de la mesure de robustesse fondée sur la plus mauvaise qualité de l'identification des paramètres incertains conduit, dans le cas envisagé ci-dessus, à l'optimisation de $\mathrm{Tr}\left(\widetilde{L}\right)$. Comme $\sigma_{\max}(P) < \mathrm{Tr}(P)$ et $\sigma_{\max}\left(\widetilde{L}\right) < \mathrm{Tr}\left(\widetilde{L}\right)$ avec $\mathrm{Tr}\left(\widetilde{L}\right) = \mathrm{Tr}(P)$, nous voyons que la minimisation de $\mathrm{Tr}\left(\widetilde{L}\right)$ conduit à un réduction de $\sigma_{\max}(P)$ donc à une amélioration de l'amortissement du système.

Ainsi, nous venons d'établir que la propriété d'amortissement du système est une propriété directement induite par l'optimisation des marges de stabilité, et indirectement par l'optimisation de la mesure de robustesse liée à la plus mauvaise qualité de l'identification des paramètres incertains.

XII.2.4 Qualité d'identification et sensibilité aux performances

Un lien a pu être établi, dans un cas particulier, entre la qualité de l'identification des paramètres incertains et la variation d'un critère de performance. Les détails des calculs pourront être trouvés dans [11], nous ne présenterons ici que les résultats importants pour notre propos.

Soit le système linéaire discret monovariable suivant

$$\begin{cases} X_{k+1} &= AX_k + BU_k + DW_k \\ Y_k &= CX_k + V_k \end{cases} \tag{XII.20}$$

avec les matrices A et B de la forme suivante

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{XII.21}$$

Définissons un critère de performance quadratique J_{perf} comme

$$J_{\text{perf}} = E\left[\sum_{j=k+1}^{k+N} X_j^2 \mid Y^k, U^{k-1}\right] \tag{XII.22}$$

et recherchons une commande de type retour d'état, estimé par un filtre de Kalman.

Si les paramètres variables considérés sont les coefficients de la matrice B c'est-à-dire $\Delta\theta_i = \Delta b_i$, alors nous avons les propriétés suivantes :

- La commande qui minimise (XII.22) est robuste aux variations de paramètres, c'est-à-dire

$$\text{pour tout } i \ , \ \left[\frac{\partial J_{\text{perf}}}{\partial \theta_i}\right] = 0 \qquad \text{(XII.23)}$$

- La qualité de cette robustesse est inversement proportionnelle à la qualité des estimés bayésiens obtenus en boucle fermée

$$\frac{\Delta J_{\text{perf}}}{J_{\text{perf}}} = \Delta\theta^{\mathrm{T}} G_{\theta_o}^{-1} \Delta\theta \qquad \text{(XII.24)}$$

Dans ce cas particulier, nous voyons les liens qui existent entre une médiocre qualité d'identification des paramètres variables et l'insensibilité du critère de performance. Ce résultat n'est pas aisément généralisable au cas plus général de la variation des paramètres de la matrice A.

XII.2.5 Conclusions

Nous venons donc de montrer que les propriétés suivantes

- Bonne marge de stabilité,
- Médiocre qualité de l'identification des paramètres incertains,
- Bon amortissement du système,

sont des propriétés voisines, que la mesure de robustesse PRCBI prend en compte. La recherche d'une commande fondée sur l'un de ces critères conduira naturellement à une commande ayant les trois propriétés énoncées ci-dessus.

De plus, nous avons montré, dans un cas particulier, qu'il peut exister un lien entre la qualité d'identification des paramètres incertains et la sensibilité d'un critère de performance.

XII.3 Application à l'exemple du troisième ordre

Afin d'illustrer notre propos et de comparer la nouvelle approche que nous venons de décrire à celles étudiées précédemment, nous avons appliqué cette méthode à l'exemple du troisième ordre que nous avons déjà utilisé dans la partie précédente. A l'aide ce cet exemple, nous pourrons aussi vérifier les liens que nous avons établis, dans certains cas, entre différentes propriétés souhaitables pour le système.

Rappelons brièvement l'exemple utilisé dans la partie précédente. Le système est décrit par les équations suivantes

$$\begin{cases} X_{k+1} &= AX_k + BU_k \\ Y_k &= CX_k \end{cases} \qquad \text{(XII.25)}$$

avec les matrices A, B et C suivantes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ a & 1 & b \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{XII.26}$$

Les paramètres a et b sont supposés incertains, ayant pour valeur nominale respectives a_o et b_o

$$a_o = 0.5 \text{ et } b_o = -0.3 \tag{XII.27}$$

XII.3.1 Mesure de robustesse et directions de robustesse minimale et maximale

La mesure de robustesse a été calculée lorsque le système (XII.25) est soumis au retour d'état K_0, qui optimise le critère de performance suivant

$$J_{\text{perf}} = \sum_{k=0}^{\infty} X_k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X_k^T + U_k \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} U_k^T \tag{XII.28}$$

Nous avons décrit deux formulations de la mesure de robustesse, une que nous appellerons "complète", une dite "simplifiée". Dans le premier cas il nous faut spécifier les matrices D, Q et R décrivant les caractéristiques du bruit d'état et de sortie affectant notre système. Notre exemple étant considéré comme un cas déterministe, ces matrices correspondent donc à un bruit fictif servant au calcul de la mesure de robustesse. Nous avons choisi d'utiliser les matrices suivantes

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{XII.29}$$

Dans le cas de la mesure de robustesse dite simplifiée, ces matrices sont déterminées de manière à avoir certaines propriétés remarquables. Il ne se pose donc pas de problème de choix.

Nous avons calculé les deux mesures de robustesse en différents points du domaine de stabilité, pour la valeur nominale des paramètres et pour d'autres points proches de la frontière du domaine de stabilité. Le tableau ci-dessous présente les résultats numériques des deux mesures de robustesse en fonction de différentes perturbations paramétriques envisagées.

			Mesure de robustesse $\mathrm{Tr}\left(G_{\theta_o}^{-1}\right)$	
	Δa	Δb	Méthode Complète	Méthode simplifiée
(A)	0.00	0.00	2.0283	5.2134
(B)	0.59	-0.54	40.4539	57.9776
(C)	-0.65	-0.96	51.6792	78.2435
(D)	-1.29	0.57	27.3740	37.7450
(E)	-1.10	1.45	15.5752	31.0779

Sur la figure XII-1, nous avons représenté graphiquement les directions de robustesse minimales et maximales, pour chacune des perturbations envisagées. Les longueurs selon chacune des ces directions sont représentées proportionnellement à $\frac{1}{\sqrt{\lambda_{min}}}$ et $\frac{1}{\sqrt{\lambda_{max}}}$

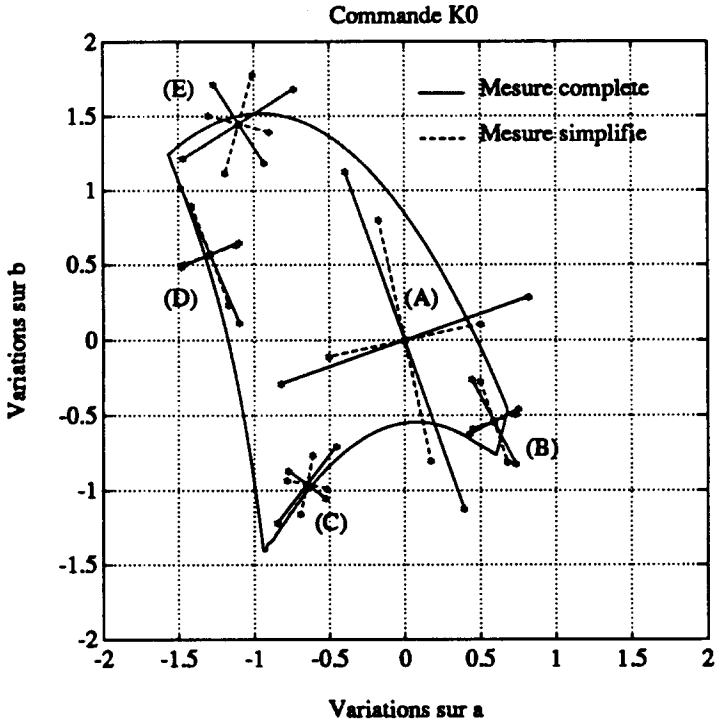


Fig. XII-1: Directions de robustesse minimales et maximales

Nous pouvons observer sur le tableau de valeurs, que la valeur numérique de la mesure de robustesse est sensible aux matrices décrivant le bruit fictif du système. Les deux choix de matrices envisagés donnent en effet des mesures de robustesse différentes. Par contre nous observons que de manière relative, les mesures de robustesse sont équivalentes pour les deux choix de matrices D, Q et R. La mesure la plus faible et la plus grande est atteinte pour les mêmes variations paramétriques. Cela signifie que notre mesure de robustesse est une bonne

mesure *relative* de robustesse, indépendamment du choix de matrices D, Q et R, décrivant le bruit agissant sur le système.

Lorsque les perturbations paramétriques entraînent le système près de la frontière de stabilité, nous observons que le vecteur propre associé à la valeur propre maximale tend à devenir perpendiculaire à cette frontière de stabilité, quand le rapport entre les valeurs propres maximale et minimale est élevé. Ce résultat valide la notion de direction de robustesse. En effet, la direction de robustesse minimale nous indique dans ce cas la direction conduisant au plus vite à l'instabilité. Cette propriété a pu être démontrée dans certains cas (systèmes monovariables et systèmes multivariables dans une représentation associée [28]), et fait l'objet de recherches en cours.

Nous pouvons constater que les directions de robustesse sont sensibles au choix a priori des matrices décrivant le bruit fictif sur le système. Ainsi ces directions devront être interprétées comme des tendances, d'autant plus significatives que le conditionnement de la matrice $G_{\theta_o}^{-1}$ sera élevé.

Toutes ces remarques nous inciteront donc à utiliser par la suite la formulation simplifiée de la mesure de robustesse car le problème du choix de matrices décrivant le bruit fictif agissant sur le système ne se pose plus.

XII.3.2 Complexité du calcul de la mesure de robustesse et de l'algorithme de synthèse

Pour comparer cette nouvelle mesure de robustesse aux autres que nous avons présentées dans la partie précédente, nous avons mesuré expérimentalement les temps de calcul de chacune des mesures. Ces durées sont présentées dans le tableau ci-dessous. Celles-ci sont exprimés en secondes, le temps relatif étant le temps rapportée à la durée la plus courte.

	Temps de calcul	Durée relative
Mesure de performances	0.1186	1.4825
Variations des pôles	0.0800	1.0000
Bornes de stabilité	0.3154	3.9425
Bornes de stabilité (critère simplifié)	0.1293	1.6162
Variations du critère de performance	0.3426	4.2825
Qualité de l'identification des paramètres incertains	1.2435	15.5438
Qualité de l'identification des paramètres incertains (Mesure simplifiée)	0.2467	3.0837

Dans sa formulation complète, la mesure de robustesse est longue à calculer car, pour un système à r paramètres variables, il faut résoudre $3r$ équations de Lyapunov. En revanche, la formulation simplifiée ne demande que la résolution d'une seule équation de Lyapunov et sera donc d'une complexité équivalente au calcul de la mesure de robustesse à la stabilité (une équation de Lyapunov à résoudre).

L'algorithme de synthèse utilisant cette nouvelle mesure de robustesse et celui utilisant la mesure de robustesse à l'instabilité sont de complexité équivalente. En effet la même technique d'optimisation est utilisée, et les formulations des critères sont de complexité équivalente.

XII.3.3 Synthèse de loi de commande robuste

Nous avons calculé, sur l'exemple envisagé, un ensemble de commandes, pour différentes valeurs de λ comprises entre 0 et 1. Nous obtenons donc ainsi différentes commandes entre celle qui minimise le critère de performance et celle qui minimise la mesure de robustesse fondée sur la plus mauvaise qualité de l'identification des paramètres inconnus.

Il est apparu que lorsque λ tend vers zéro, un élément de la matrice de gain K tend vers une valeur très grande (voir figure XII-3), ne rendant pas la détermination de la commande pour $\lambda = 0$ possible. En d'autres termes le gain de retour optimisant rigoureusement la mesure de robustesse dans notre exemple est infini. Nous avons donc calculé les gains de retour jusqu'à une valeur λ de 10^{-6}. Le tracé de l'évolution des mesures de performance et de robustesse est donné sur la figure XII-2 (pour plus de lisibilité ne sont représentées que les mesures de performance et robustesse jusqu'à $\lambda = 10^{-4}$).

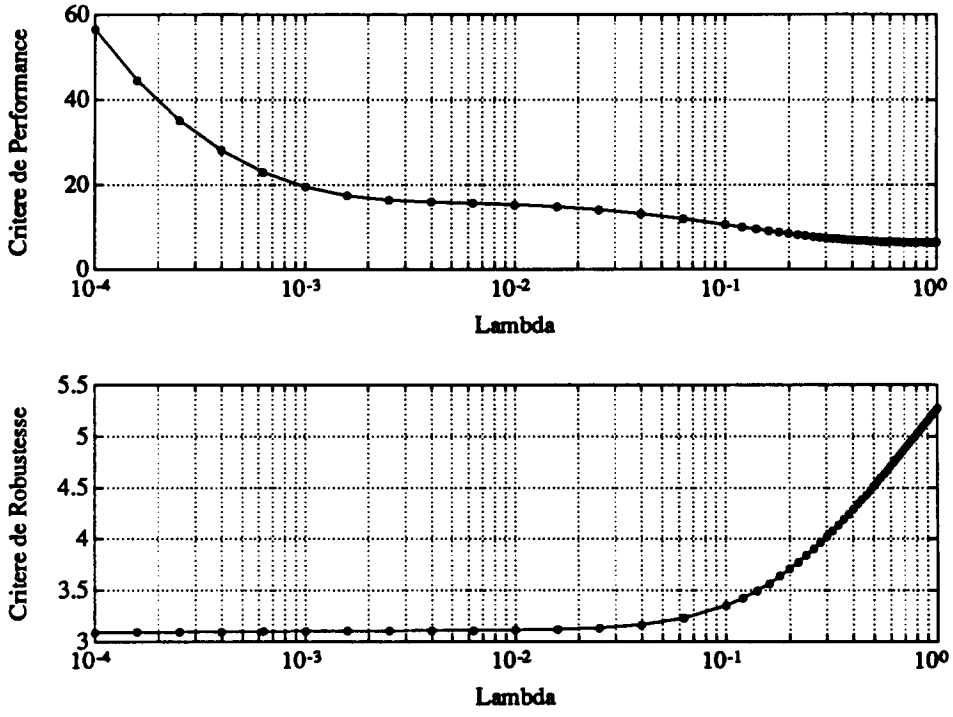


Fig. XII-2: Evolution des mesures de performance et de robustesse en fonction de λ.

Lorsque λ devient très petit, le critère de performance devient infini. Nous pouvons observer ce phénomène en examinant les réponses temporelles pour différents gains déterminés pour de faibles valeurs de λ (Figures XII-4 et XII-7). Nous voyons que les commandes ont tendance à devenir très oscillantes entraînant de faibles amortissements de la réponse temporelle.

Ceci nous montre le rôle primordial que joue le critère de performance, qui nous permet finalement de sélectionner une commande rendant la mesure de robustesse la plus petite possible, tout en empêchant une trop grande perte de performance (qui dans ce cas peut devenir infinie). Nous avons établi que la propriété de bon amortissement du système en boucle fermée est induite par une bonne robustesse PRCBI, pour une classe particulière de systèmes (forme compagne). L'exemple envisagé ne rentrant pas dans cette classe de systèmes, il n'est donc pas surprenant de constater que la minimisation de la qualité de l'identification des paramètres incertains ne conduit pas nécessairement à un système d'amortissement optimal.

Pour différentes valeurs de λ petites, nous avons déterminé le domaine de stabilité, ainsi que le rayon maximal de variation paramétrique autorisée. Ces domaines de stabilité sont représentés figure XII-8. Nous remarquons malgré que les réponses temporelles ne soient plus acceptables lorsque λ devient petit, les domaines de stabilité restent de dimension importante. Le système possède donc une bonne robustesse à la stabilité, bien que les performances deviennent très mauvaises. Ce résultat valide dans un cadre plus général le lien théorique établi dans un cas particulier, entre la robustesse liée à la plus mauvaise qualité d'identification des paramètres incertains et la robustesse en stabilité.

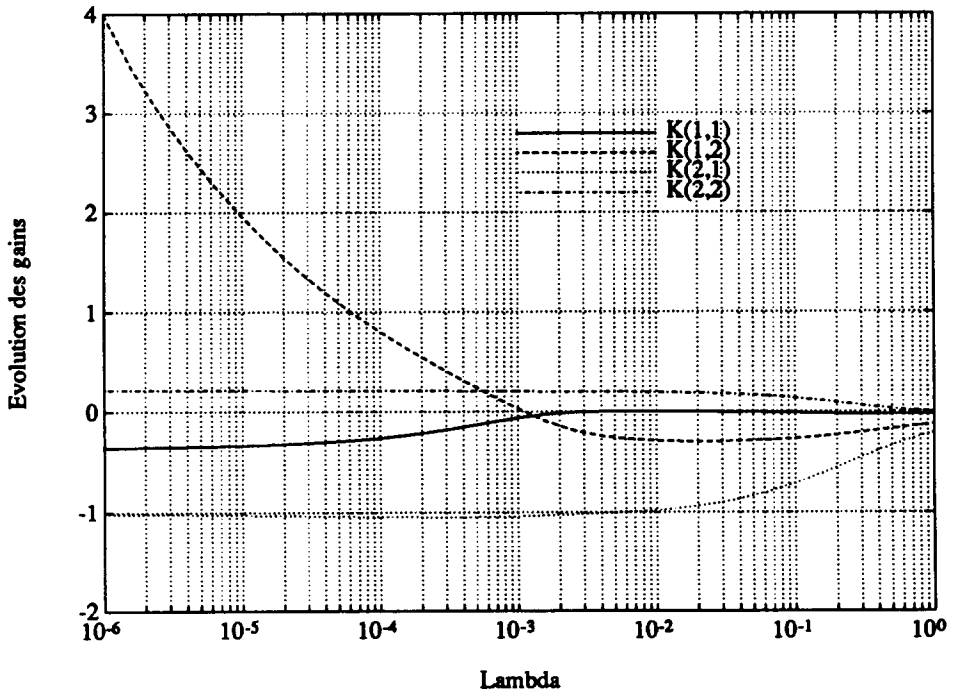


Fig. XII-3: Evolution des coefficients de la matrice de retour K en focntion de λ.

Le tableau ci-dessous rassemble les résultats obtenus pour différentes valeurs de λ (Mesures de robustesse et performance, aire du domaine de stabilité, rayon du disque maximal de stabilité).

λ	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
Mesure de performance	6.3308	10.52	15.27	19.54	71.91	302.9	632.3
Mesure de Robustesse	5.2736	3.3525	3.1121	3.1015	3.0893	3.0857	3.0851
Aire du domaine de stabilité	3.4208	5.8064	16.804	14.39	14.49	18.06	19.36
Rayon max de stabilité	0.4323	0.7269	0.7885	0.8067	0.8274	0.8274	0.8274

La matrice gain de retour de sortie obtenue pour $\lambda = 10^{-5}$, fournit une très bonne robustesse, sans pour autant conduire à des coefficients de matrice élevés. Cette commande notée K_4 vaut

$$K_4 = \begin{bmatrix} -0.3462 & +2.6236 \\ -1.0242 & +0.2178 \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.30)}$$

Comme avec les autres approches, nous retiendrons finalement une commande assurant un bon compromis entre perte de performance et gain en robustesse. Nous avons choisi $\lambda = 0.8$, ce qui représente une perte de 25% par rapport à l'optimum possible, mais un gain en robustesse 40%. Nous noterons cette commande K_4'.

$$K_4' = \begin{bmatrix} -0.0213 & -0.2264 \\ -0.5318 & +0.0869 \end{bmatrix} \qquad \text{(XII.31)}$$

XII.3.4 Comparaison avec les autres commandes robustes

La nouvelle mesure de robustesse liée à la médiocre qualité de l'identification bayesienne des paramètres incertains du système, nous permet de comparer sous un nouvel angle les différentes commandes obtenues dans la partie précédente. Ces résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous.

	K_0	K_1	K_2	K_3	K_4
Critère de performance	6.2606	27.7859	16.8120	25.4459	302.93
Sensibilité des pôles	2.7024	1.6821	1.5567	1.9136	2.2052
Borne de stabilité (μ structurée)	0.1870	0.2729	0.3732	0.3461	0.0341
Variations des performances	7.1892	31.3094	4.9620	4.7×10^{-7}	480.40
Qualité d'identification	6.9829	5.2134	3.4227	3.1727	3.0857

	K_0'	K_1'	K_2'	K_3'	K_4'
Critère de performance	6.3308	22.8007	8.0840	8.0514	8.1702
Sensibilité des pôles	2.7075	1.6642	2.4110	2.9594	2.3197
Borne de stabilité (μ structurée)	0.1797	0.3165	0.2821	0.2345	0.2866
Variations des performances	7.6430	12.4244	6.4456	5.0822	6.9829
Qualité d'identification	5.2736	3.3252	3.8196	4.4426	3.7726

Nous avons aussi construit un tableau récapitulatif (figure XII-9) regroupant les valeurs des différents paramètres nous permettant de juger de la qualité des cinq lois de commande de type retour de sortie K_0' à K_4'.

Comme nous l'avions remarqué dans un cas particulier, nous observons ici, dans un cas plus général, que la minimisation de la mesure de robustesse fondée sur la médiocre qualité de l'identification des paramètres incertains, augmente nettement le domaine de stabilité. Ainsi pour une perte de performance faible (25%), le gain en robustesse en stabilité est de 60%. Le lien que nous avons établi entre cette mesure de robustesse et le domaine de stabilité apparaît donc ici très clairement.

Il est intéressant de comparer le système en boucle fermée soumis aux commandes K_2', K_3' et K_4', correspondant à une perte de performance équivalente (environ 25% par rapport à l'optimal ateignable, c'est-à-dire avec la commande K_0'). Nous pouvons d'abord constater que cette légère perte de performance entraîne des diminutions importantes des mesures de robustesse. Ainsi la mesure de robustesse à la stabilité est améliorée de 30% à 60%, le rayon maximal de variation paramétrique autorisé est élargi de 49% à 58%, et la mesure de qualité de l'identification des paramètres incertains est diminuée de 19% à 40%. Notre approche fondée sur la recherche d'un compromis acceptable entre performance et robustesse, permet donc par une faible diminution des performances, d'améliorer très sensiblement la robustesse du système.

Sur cet exemple, nous pouvons constater que l'approche PRCBI, qui permet de prendre explicitement en compte des variations de type paramétrique ne donne finalement pas une robustesse nettement meilleure que l'approche optimisant les marges de stabilité ignorant la structure des perturbations.

Nous pouvons aussi constater d'une part que l'approche basée sur l'insensibilité du critère de performance s'avère légèrement moins satisfaisante que ces deux dernières approches, notamment au niveau de la grandeur du domaine de stabilité. D'autre part, l'approche fondée sur le placement de pôles robuste ne permet pas d'atteindre un niveau de performance satisfaisant. En effet cette méthode ne prend pas en compte explicitement des contraintes de performance lors du calcul de la loi de commande. Seul un artifice permet d'optimiser les performances a posteriori, ce qui, de plus, ne permet pas le choix d'un compromis entre performance et robustesse. Cette solution ne peut donc être satisfaisante dans le cas où les contraintes sur les performances sont primordiales.

En conclusion nous retiendrons donc de cette comparaison les éléments suivants

- La nouvelle mesure de robustesse que nous avons décrite paraît très bien adaptée au problème de robustesse paramétrique que nous envisageons. Elle permet aussi d'obtenir d'autres propriétés souhaitables (domaine de stabilité étendue notamment).
- Bien que l'approche de robustesse en stabilité ne permette pas la prise en compte explicite de perturbations structurées, les résultats obtenus sur cet exemple restent proches de ceux donnés par l'approche utilisant la qualité d'identification des paramètres incertains.
- Les deux approches par placement de pôles robuste et insensibilité des performances donnent un niveau de performance (respectivement robustesse) finalement inférieur aux deux autres méthodes.
- Les techniques de synthèse présentées permettant de prendre en compte dès la conception de la commande le compromis nécessaire entre performance et robustesse, s'avèrent particulièrement bien adaptées pour résoudre le problème de robustesse paramétrique envisagé.

XII.3.5 Figures

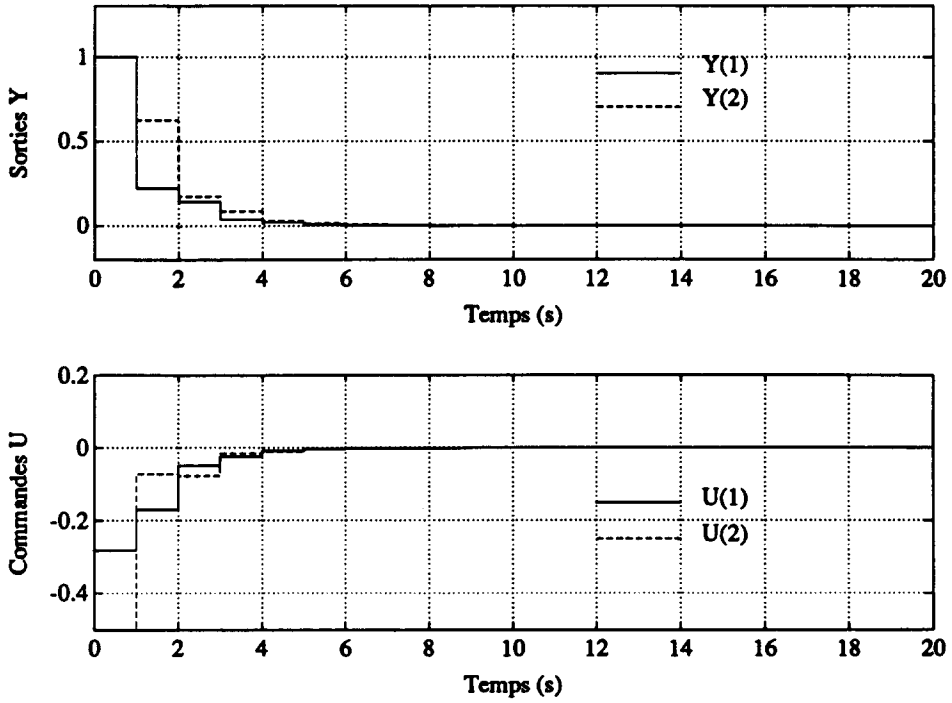


Fig. XII-4: Simulation temporelle en boucle fermée. Commande calculée pour $\lambda = 10^{-1}$.

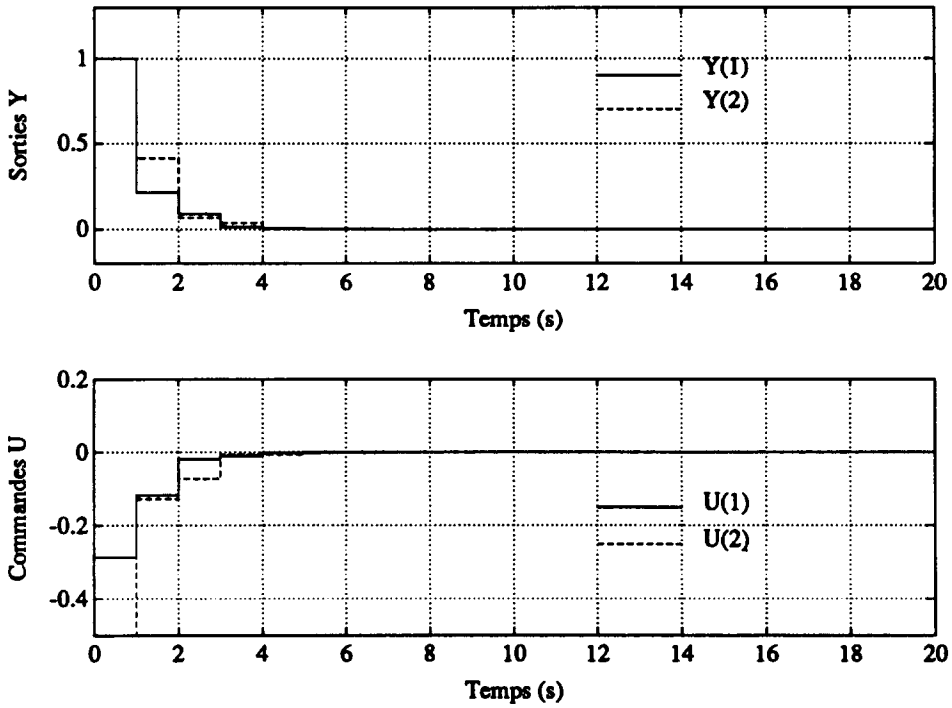


Fig. XII-5: Simulation temporelle en boucle fermée. Commande calculée pour $\lambda = 10^{-2}$.

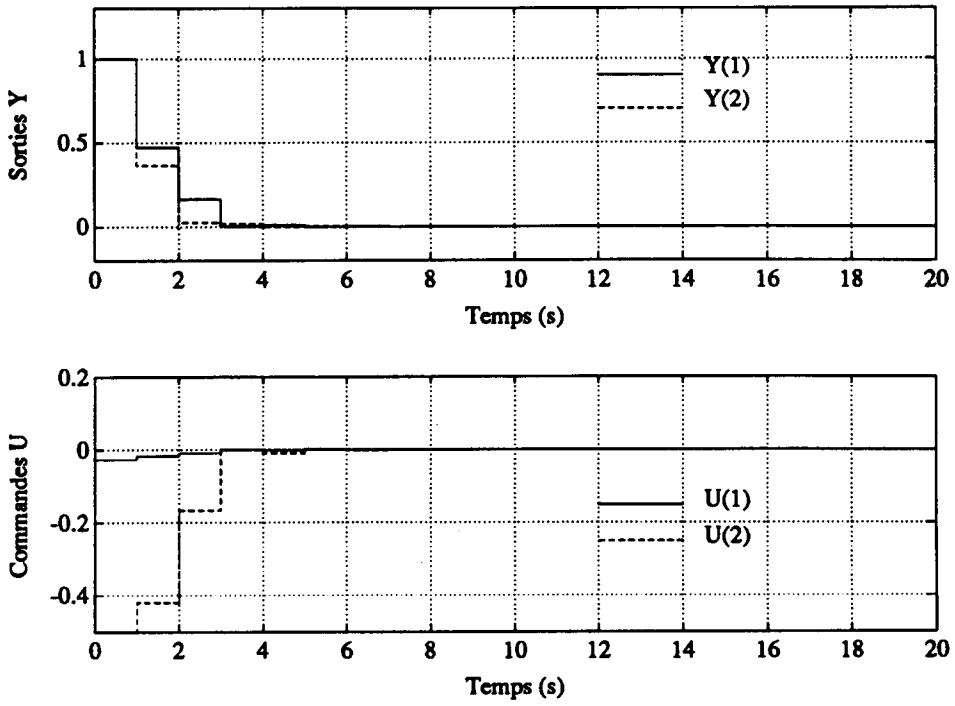


Fig. XII-6: Simulation temporelle en boucle fermée. Commande calculée pour $\lambda = 10^{-3}$.

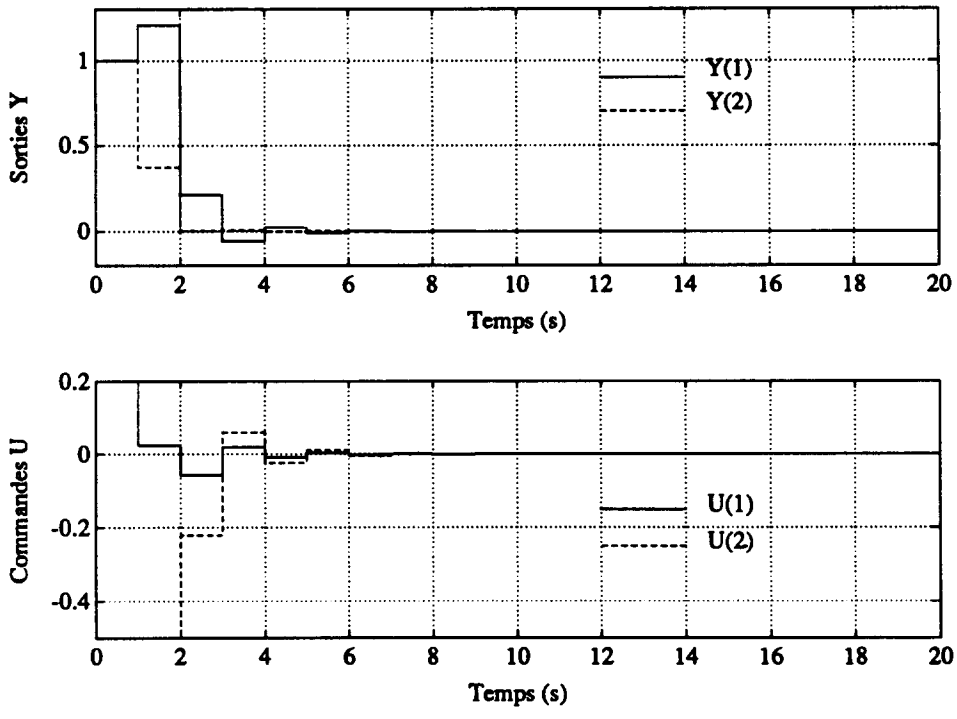


Fig. XII-7: Simulation temporelle en boucle fermée. Commande calculée pour $\lambda = 10^{-4}$.

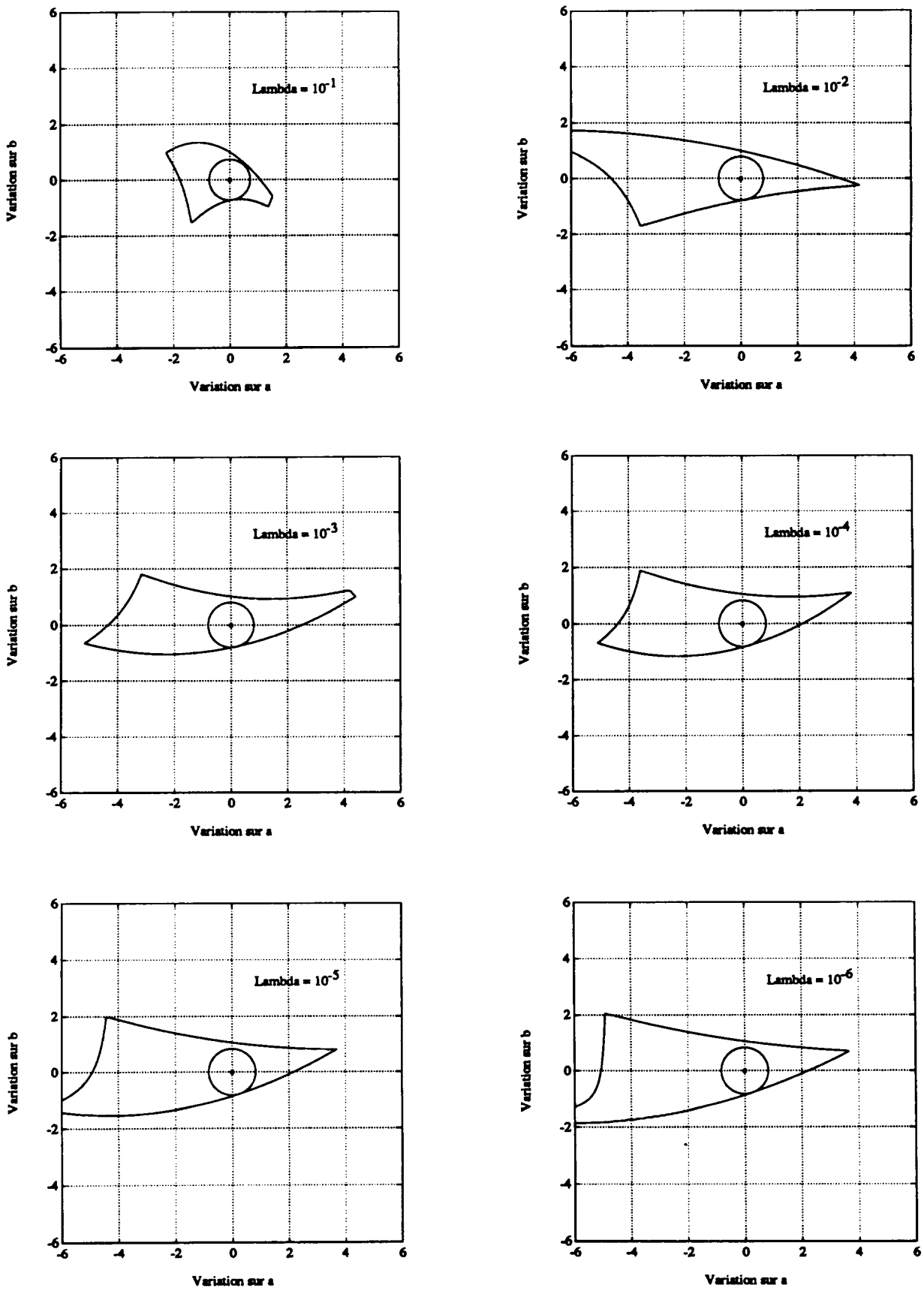


Fig. XII-8: Domaines de stabilité en boucle fermée pour différentes valeurs de λ.

	K_0'	K_1'	K_2'	K_3'	K_4'
Descriptif	Optimale en performances.	Variations de pôles minimisées. Retour d'état et observateur robuste.	Optimisation des marges de stabilité.	Minimisation des variations de performances.	Minimisation de la qualité de l'identification des paramètres inconnus.
Gains	$\begin{bmatrix} -0.0207 & -0.1198 \\ -0.2070 & +0.0031 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.1665 & -0.4545 & -0.1192 \\ -0.0567 & -1.0067 & +0.4436 \end{bmatrix}$ $T = [0.0000 \quad 0.1414]$ $U = [0.7071 \quad 0.0000 \quad -0.7071]$	$\begin{bmatrix} -0.0144 & -0.2560 \\ -0.5182 & +0.0518 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.1889 & -0.3567 \\ -0.2973 & -0.0161 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.0213 & -0.2264 \\ -0.5318 & +0.0869 \end{bmatrix}$
Pôles en boucle fermée	+0.5988 -0.4582±0.20461	-0.5000 +0.4961 -0.4604 -0.4034	+0.4158 -0.4582±0.16481	-0.3888±0.16701 +0.2726	+0.4523 -0.3434±0.16041
Aire du domaine de stabilité	3.4290	10.3968	4.6096	3.8704	4.5696
Rayon maximal de stabilité	0.4314	0.6643	0.6823	0.6421	0.6582
Critère de performance	6.3308	22.807	8.0840	8.0514	8.1702
Mesure de variations des pôles	2.7075	1.6642	2.4110	2.9594	2.3197
Borne de stabilité	0.1797	0.3165	0.2821	0.2345	0.2866
Variations des performances	7.6430	12.4244	6.4445	5.0822	6.9829
Qualité d'identification	5.2736	3.3252	3.8196	4.4426	3.7726
Temps de recherche initial	5.77	-	5.36	4.27	11.61
Temps de convergence	68.72	3.52	54.84	66.65†	69.78

Fig. XII-9: Tableau récapitulatif comparatif des commandes calculées.

† L'algorithme ne converge pas vers la solution optimale trouvé après 100 essais.

XII.4 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons appliqué et comparé la nouvelle méthode de synthèse de commande robuste fondée sur la médiocre qualité de l'identification des paramètres incertains.

Nous avons d'abord établi des liens théoriques entre la robustesse liée à la qualité d'estimation des paramètres incertains, la robustesse en stabilité, la propriété d'amortissement des systèmes et l'invariance des performances. Nous avons démontré que la minimisation de la qualité d'identification des paramètres incertains entraîne, dans certains cas, les propriétés suivantes :

- ☐ Marges de stabilité élargies
- ☐ Amortissement maximal
- ☐ Invariance des performances

Ensuite, nous avons appliqué cette nouvelle méthode à l'exemple du troisième ordre que nous avons déjà considéré, et nous avons ainsi pu vérifier les liens théoriques établis. Le concept de direction de robustesse minimale et maximale a ainsi pu être validé, notamment au voisinage de la frontière de stabilité. Nous avons également vérifié que la minimisation de la qualité d'identification des paramètres incertains conduisait à une optimisation du domaine de stabilité du système.

Nous avons aussi pu valider notre approche utilisant un critère mixte performance/robustesse, qui permet, en autorisant une légère perte de performance, des gains importants en robustesse. Finalement nous avons constaté que les deux méthodes fondées sur la minimisation de la qualité d'identification des paramètres incertains et l'optimisation des marges de stabilité donnaient, sur cet exemple, des résultats très satisfaisants, tant au niveau des performances et de la robustesse, qu'au niveau de la facilité de mise en œuvre.

Tous ces résultats nous confirment la supériorité de cette nouvelle technique de synthèse de loi de commande robuste, car elle permet notamment

- ☐ de prendre en compte des perturbations paramétriques,
- ☐ de choisir le compromis souhaitable entre performance et robustesse,
- ☐ un calcul simplifié de retour de sortie (statique ou dynamique).

Application de la commande robuste au cas du pilote automatique d'un avion de type Airbus.

Chapitre XIII Présentation du problème

Dans ce chapitre nous allons présenter le problème concret que nous avons considéré, c'est-à-dire la conception du pilote automatique longitudinal d'un avion de transport de type Airbus. Nous présenterons dans un premier temps le problème d'un point de vue théorique, ainsi que les modèles disponibles pour notre étude. Nous étudierons aussi les équations de la dynamique du vol aux hautes fréquences, afin d'établir un modèle simplifié du système et ainsi mieux comprendre la dynamique intrinsèque de celui-ci.

Nous décrirons ensuite les spécifications du pilote automatique telles qu'elles sont décrites par l'industriel. A partir de ces spécifications, nous construirons une mesure de robustesse nous permettant de juger de la qualité d'une commande, conformément aux spécifications.

XIII.1 Introduction

Le problème que nous envisageons est la conception du pilote automatique longitudinal d'un avion de transport civil de type Airbus.

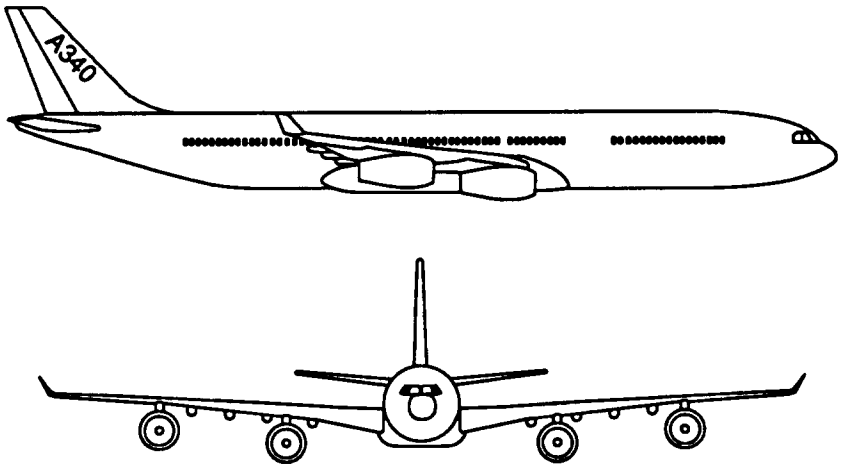


Fig. XIII-1: Le dernier quadriréacteur d'Airbus : l'A340.

Les problèmes liés à la conception d'un tel automatisme sont nombreux. Une des principales difficultés est due aux changements de modèles représentant la dynamique de l'avion induites par les variations de paramètres physiques. Les paramètres ayant une grande influence sur la dynamique d'un tel système sont les suivants :

- La masse.
- Le centrage.
- Le point de vol (Vitesse et Altitude).
- La configuration (Présence de becs, volets, spoilers ...).

La modélisation de tels systèmes aéronautiques est fort complexe, de nombreuses non linéarités apparaissant dans les expressions de la mécanique du vol. L'utilisation d'un modèle

dynamique unique, prenant en compte tous les paramètres variables que nous venons de citer, serait donc très complexe à établir et inutilisable en pratique pour la conception de lois de commande. La solution retenue consiste donc à déterminer un ensemble de modèles dynamiques linéaires, chacun déterminé pour une ensemble de paramètres distincts. La zone de variation de paramètres physiques autorisée est ainsi couverte par un ensemble de modèles linéaires distincts.

La conception d'une loi de commande pour chaque modèle est facilement envisageable. Nous aurions, par cette méthode, un grand nombre de commandes différentes (une pour chaque modèle considéré). A bord de l'appareil, il faudrait donc, outre une mémoire importante, une logique de sélection de la loi de commande adaptée à l'instant présent. Ce mécanisme pose des problèmes aigus de sécurité, car il faudrait pour cela connaître parfaitement les paramètres variables afin de sélectionner la loi de commande parfaitement adaptée à l'instant présent. Une mauvaise estimation de certains paramètres risquerait d'entraîner la sélection d'une loi de commande non adaptée à l'instant traité et conduire à de médiocres performances.

Ainsi, les avionneurs ont le souci de minimiser le nombre de commandes différentes, de manière à ce chacune d'entr'elles soit valable dans une plage de fonctionnement la plus large possible. Ceci rentre tout à fait dans le cadre d'étude que nous nous sommes fixés, à savoir déterminer une commande valable localement, autour d'un modèle nominal, pour un ensemble de modèles le plus large possible, correspondant à des variations paramétriques locales autour de valeurs nominales.

XIII.2 Point de vol

Afin de limiter la complexité de l'étude nous n'allons envisager que les variations de modèles liés aux changements de milieu dans lequel l'avion évolue. Nous supposerons donc que les modèles traités ne sont modifiés que par des changements de vitesse et d'altitude, ce que nous appellerons point de vol de l'avion. En fait la vitesse peut être remplacée par d'autres paramètres comme la vitesse conventionnelle ou le nombre de Mach. Ces nouveaux paramètres sont plus couramment utilisés dans l'aéronautique, car ils sont plus représentatifs des changements de milieux dans lequel l'avion évolue. En effet, à vitesse par rapport à l'air constante, le comportement de l'avion évolue beaucoup pour des altitudes différentes, alors qu'à vitesse conventionnelle ou nombre de Mach constant, ce comportement dynamique est beaucoup plus homogène.

Néanmoins le choix de ces paramètres nous est indifférent car nous traiterons directement les variations de modèles ; sans forcément remonter aux variations des paramètres qui ont conduit à ces changements.

Pour notre étude, nous disposons de 225 modèles linéaires décrivant le comportement dynamique longitudinal d'un avion de type Airbus. Ces modèles sont répartis de manière régulière sur l'ensemble du domaine de vol, zone dans laquelle l'avion peut évoluer. La figure XIII-2 représente le domaine de vol de l'avion où chaque point représente un modèle.

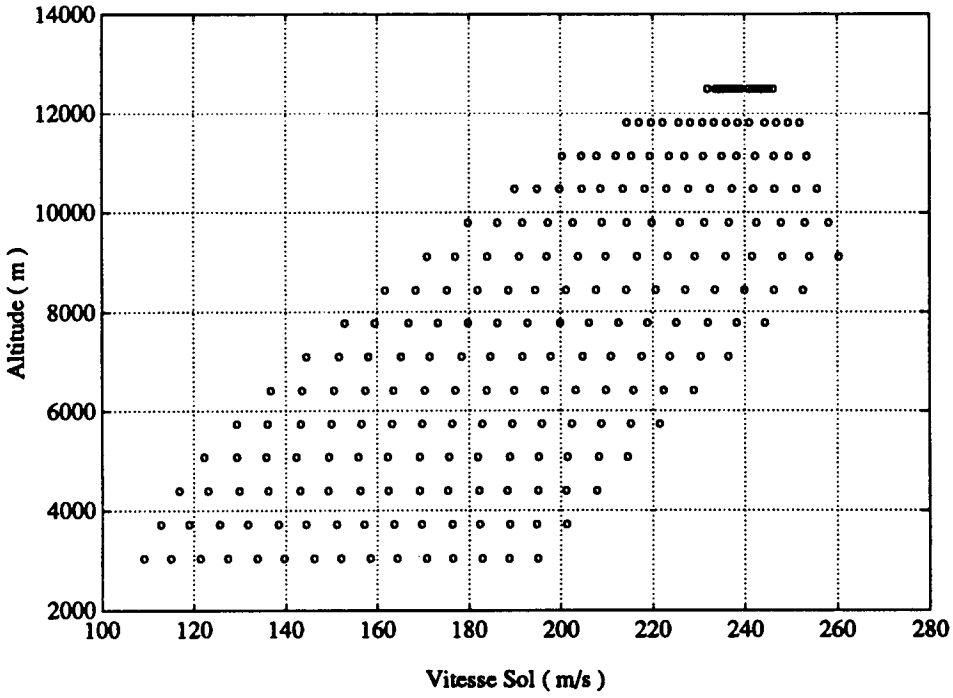


Fig. XIII-2: Domaine de vol de l'avion étudié.

XIII.3 Les modèles dynamiques

Dans cette section, nous décrirons les modèles dynamiques que nous avons utilisés pour la conception de la loi de commande. Nous décrirons d'abord les modèles linéarisés. Ensuite, grâce à un rapide retour aux équations de la dynamique du vol, nous analyserons le comportement dynamique en hautes fréquences de l'avion. Nous verrons ainsi quel est le lien naturel entre les commandes et les sorties. Cela nous permettra de définir un comportement "idéal" souhaité ne violant pas la dynamique naturelle de l'avion.

XIII.3.1 Modèles linéaires

Chacun des 225 modèles à notre disposition est un modèle linéaire multivariable représentant la dynamique de l'avion supposé rigide. Ces modèles sont de la forme

$$\begin{cases} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX \end{cases} \qquad \text{(XIII.1)}$$

La représentation linéaire du système comporte quatre états :

- L'angle d'incidence α (en degrés).
- La vitesse par rapport à l'air V (en m/s).
- La vitesse de tangage q (en degrés/s).
- La vitesse verticale V_z (en m/s).

Nous disposons de deux commandes :

- La gouverne de profondeur δ_q (en degrés).
- La commande de poussée N_1 (régime moteur exprimé en %).

Le modèle est complété de manière à prendre en compte les dynamiques des actionneurs, assimilés à des premiers ordres de constantes de temps suivantes :

Gouverne de profondeur : 0.3 s.
Régime moteur : 2.4 s.

Le vecteur d'état X est donc défini par $X = [\alpha \quad V \quad q \quad V_z \quad \delta_q \quad N_1]^\intercal$ et le vecteur de commande U par $U = [\delta_q \quad N_1]^\intercal$.

Le vecteur de mesures Y est défini par $Y = [N_{z_{av}} \quad q \quad V \quad V_z]^\intercal$ où $N_{z_{av}}$ est l'accélération verticale au niveau du poste de pilotage, ou plus précisément, au niveau de la centrale inertielle, située à proximité du poste de pilotage.

Les grandeurs que nous venons de définir sont en fait des variations autour de valeurs d'équilibre ; l'équilibre considéré étant le vol en palier stabilisé (Vitesse constante, Vitesse verticale nulle).

Le schéma de la figure XIII-3 résume un certain nombre des grandeurs décrites ci-dessus ainsi que les angles fondamentaux suivants

- α : *Incidence*. Angle entre l'avion et le vecteur vitesse.
- θ : *Assiette*. Angle entre avion de l'horizontale.
- γ : *Pente*. Angle entre vecteur vitesse et horizontale.

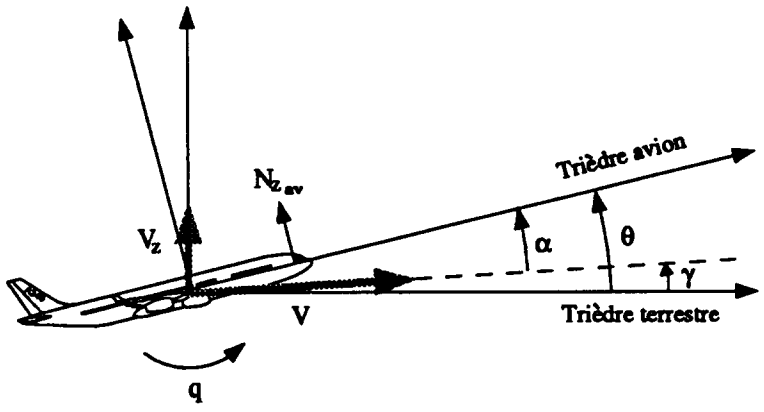


Fig. XIII-3: Grandeurs de références du modèle-avion.

XIII.3.2 Calcul approché des fonctions de transfert entrées/sorties

Exprimons maintenant les équations approchées régissant la dynamique du vol de l'avion. Nous supposerons que l'avion est en vol stabilisé horizontal avec une incidence faible. Nous ne nous intéressons qu'au comportement dynamique en haute fréquence.

L'équation de traînée s'écrit :

$$m\dot{V} = N_{1_o} + N_1 - \frac{1}{2}\rho S C_x (V + V_o)^2 \qquad \text{(XIII.2)}$$

Soit en linéarisant et remarquant que C_x est constant en supposant $\alpha = \alpha_o$

$$m\dot{V} = N_1 - \rho S C_x V_o V \qquad \text{(XIII.3)}$$

Soit γ la pente de l'avion En supposant que V est constant ($V = V_o$), il vient

$$V_z = V_o \sin\gamma \simeq V_o \gamma \qquad \text{(XIII.4)}$$

L'équation de portance s'écrit

$$m\dot{V}_z = \frac{1}{2}\rho S[C_{z_o} + C_{z_\alpha}(\alpha + \alpha_o)]V^2 - mg \qquad \text{(XIII.5)}$$

D'où en linéarisant :

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2m}\rho S C_{z_\alpha} \alpha V_o \qquad \text{(XIII.6)}$$

L'équation du moment permet d'écrire

$$\frac{1}{2}\rho S l V_o^2 \left[C_{m_o} + C_{m_\alpha}(\alpha + \alpha_o) + C_{m_{\delta_q}}(\delta_q - \delta_{q_o})\right] = J\ddot{\theta} \qquad \text{(XIII.7)}$$

En remarquant que $\theta = \alpha + \gamma$ et en linéarisant l'équation du moment, il vient

$$J\ddot{\alpha} + \frac{J}{2m}\rho S C_{z_\alpha} V_o \dot{\alpha} - \frac{1}{2}\rho S l V_o^2 C_{m_\alpha}\alpha = \frac{1}{2}\rho S l V_o^2 C_{m_{\delta_q}}\delta_q \qquad \text{(XIII.8)}$$

Les équations (XIII.3) et (XIII.8) nous permettent de déterminer les fonctions de transfert entre N_1 et V d'une part, et entre δ_q et V_z d'autre part. La figure XIII-4 montre ces fonctions de transfert.

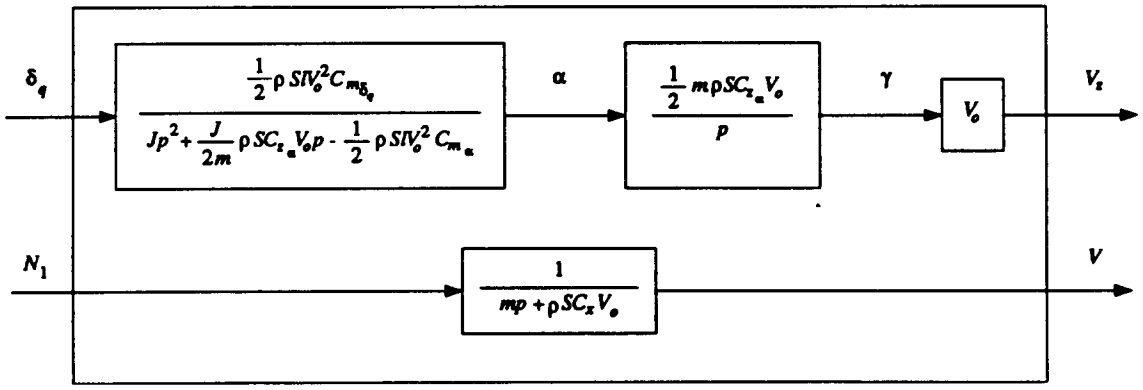


Fig. XIII-4: Fonctions de transfert approchées (hautes fréquences).

Nous voyons donc qu'en première approximation, en hautes fréquences, la poussée affecte la vitesse par un premier ordre et que la gouverne de profondeur affecte la vitesse verticale par un troisième ordre. Nous pouvons observer ici l'effet de l'oscillation d'incidence (deuxième ordre entre δ_q et α), phénomène bien connu en aéronautique. Ces considérations physiques sont très intéressantes car elles nous permettent d'analyser le comportement naturel de l'avion. De cette façon, nous pourrons déterminer un comportement en boucle fermée ne violant pas la nature du système.

Le schéma présenté ci-dessus ne montre pas les couplages existant entre les commandes et les sorties. En effet en régime asymptotique, c'est plutôt la poussée qui commande la vitesse verticale et la gouverne de profondeur qui commande la vitesse (Pour monter, il faut beaucoup plus d'énergie, donc augmenter la poussée, pour changer la vitesse en palier, il faut changer l'incidence, donc agir sur la gouverne de profondeur). Ceci montre bien que le système est naturellement très couplé.

XIII.4 Spécifications du pilote automatique

Le rôle du pilote automatique longitudinal est d'asservir l'avion sur une trajectoire ou une attitude donnée. Différents modes de fonctionnement sont possibles, correspondant à des asservissements de variables physiques différentes (vitesse, altitude, pente...). Dans notre étude, nous avons considéré le mode de fonctionnement asservissant les vitesses longitudinales V et verticales V_z. Ce mode de fonctionnement permet de spécifier un vol en palier à vitesse constante ($V_z = 0$) et une montée ou une descente à vitesse constante (V_z =constate).

Les contraintes à respecter s'expriment de la manière suivante

- ☐ Erreur nulle en régime permanent sur les sorties asservies
- ☐ Gain de retour statique.
- ☐ Faibles gains afin de limiter l'amplitude du bruit de mesure ramené sur les gouvernes.

Ces contraintes amènent un certain nombre de remarques.

- La première contrainte impose de fait l'utilisation d'intégrateurs sur la différence entre consigne et variables asservies.
- La deuxième contrainte peut paraître superflue, mais correspond à la volonté de conserver un sens physique aux gains de retour. En effet la capacité actuelle des calculateurs embarqués ne saurait justifier la limitation liée à l'emploi d'une commande "dynamique". Ces deux contraintes figent donc la structure de la loi de commande.
- La dernière contrainte n'est pas superflue, l'excitation des gouvernes en hautes fréquences n'étant pas désirable, car cela diminue fortement les durées de vie des actionneurs. En revanche, la forme sous laquelle elle est exprimée, est conservative, le critère "amplitude des gains" n'étant pas forcément le plus significatif.

Les spécifications dynamiques du pilote automatique sont données dans le domaine temporel. Elle correspondent à des comportements désirés pour des échelons de consigne standards. Deux échelons standards sont définis et seront considérés comme équivalent :

- Echelon en Vitesse : V = 20 kts.

  La réponse en V doit être sans dépassement et avoir un temps de réponse d'environ 20 secondes.

  La réponse en V_z doit être telle que $|V_z| < 100$ ft/min.

- Echelon en Vitesse verticale : V_z = 1000 ft/min.

  La réponse en V doit être telle que $|V| < 3$ kts.

  La réponse en V_z doit être sans dépassement et avoir un temps de réponse d'environ 10 secondes.

  Les actions moteurs doivent être telles que $\left|\dot{N}_1\right| < 2$ %/s.

Comme nous pouvons le voir, ces spécifications sont surtout contraignantes au niveau des amortissement, et des découplages entre les deux sorties asservies. Le temps de réponse n'est pas la contrainte la plus limitative, et celui-ci devrait pouvoir évoluer en fonction des modèles que nous utiliserons. Cette tolérance à des variations de temps de réponse est, d'un point de vu physique, compréhensible. En effet lorsque l'avion est à basse vitesse, il parait normal de désirer un comportement plus lent, que lorsqu'il évolue à haute vitesse. Comme nous le verrons par la suite, cette tolérance à des changements de temps de réponse sera difficilement intégrable lors de la synthèse de la loi de commande.

Les figures XIII-5 et XIII-6 présentent un exemple de réponses temporelles aux deux échelons standards acceptables.

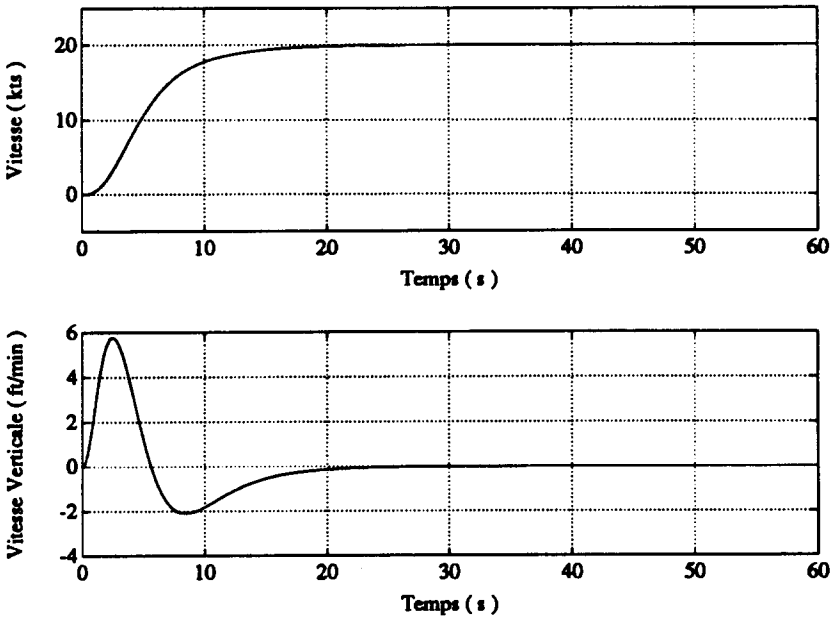


Fig. XIII-5: Exemple de réponses temporelles à l'échelon en V.

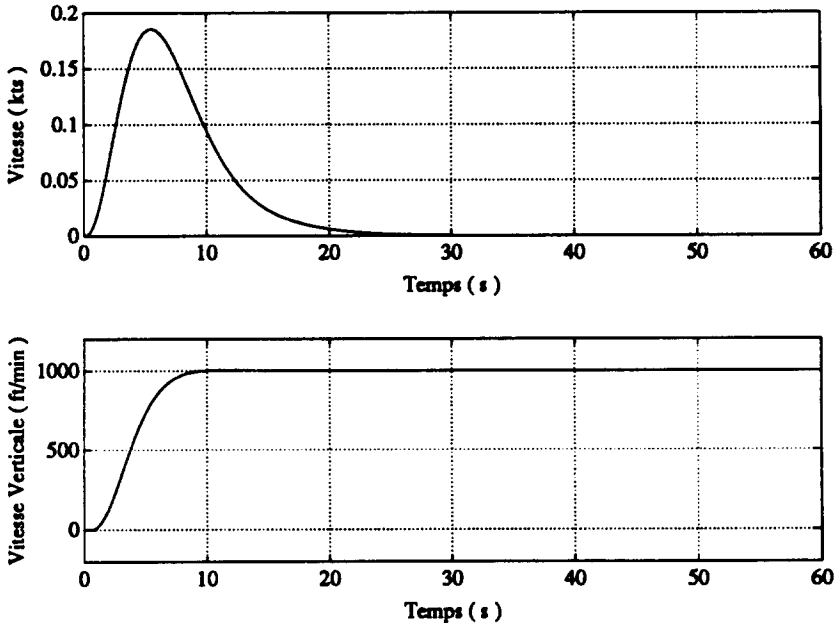


Fig. XIII-6: Exemple de réponses temporelles à l'échelon en V_z.

XIII.5 Structure de la commande

Compte tenu des spécifications, la structure de la loi de commande nous est imposée, et peut être représentée par la figure XIII-7.

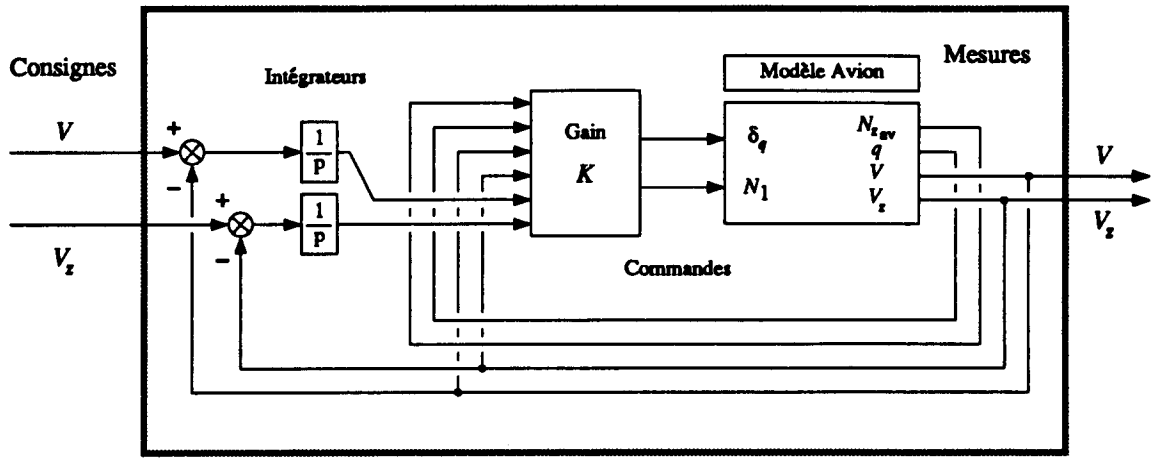


Fig. XIII-7: Structure de la commande de type retour de sortie.

Le gain K sera une matrice à coefficients constants de dimension (2×6) représentant de gain de retour. Notons IV et IV_z les intégrales d'erreur d'asservissement. La matrice K aura la forme suivante :

$$K = \begin{array}{c} \\ \delta_q \\ N_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} N_{z_{av}} & q & V & V_z & IV & IV_z \end{array} \\ \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \end{array}$$

XIII.5.1 Prise en compte des intégrateurs

La synthèse de la commande que nous avons considérée est la synthèse de retour de type retour de sortie. Etudions maintenant comment prendre en compte les intégrateurs sur l'erreur de consigne afin de se ramener à un problème de type retour de sortie.

Les équations du système en boucle ouverte sont les suivantes

$$\begin{cases} \dot{X}_o &= A_o X_o + B_o U \\ Y_a &= C_c X_o \\ Y_m &= C_m X_o \end{cases} \qquad \text{(XIII.9)}$$

où Y_a représente les sorties asservies $Y_a = [V \quad V_z]^T$ et Y_m les variables mesurées $Y_m = [N_{z_{av}} \quad q \quad V \quad V_z]^T$.

Augmentons la dimension du système de manière à pouvoir intégrer deux nouveaux états liés aux intégrateurs. En posant $X = [X_o^T \quad IV \quad IV_z]^T$, et avec les définitions suivantes

$$A = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ C_a & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_o \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$C_e = \begin{bmatrix} C_m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \qquad C_a = [C_c \quad 0] \tag{XIII.10}$$

les équations du système en boucle fermée peuvent s'exprimer sous la forme

$$\begin{cases} \dot{X} &= AX + BU + DZ \\ Y_a &= C_a X \\ U &= KC_e X \end{cases} \tag{XIII.11}$$

où $Y_e = C_e X$ représente les sorties nécessaires pour la commande ($Y_e = [N_{z_{av}} \quad q \quad V \quad V_z \quad IV \quad IV_z]^T$), et Z les consignes ($Z = [V \quad V_z]^T$).

Le problème de la recherche d'une commande avec les termes intégraux sur l'erreur d'asservissement, se ramène donc à un problème de choix de retour de sortie pour le système étendu (XIII.11) dont nous venons de détailler la construction.

XIII.5.2 Passage continu-discret

Les modèles que nous avons à notre disposition sont des modèles de type continu. Les méthodes de synthèse que nous avons envisagées sont de type discrète (utilisant des modèles à temps discret). Le passage de l'une à l'autre des représentations est possible grâce aux formules de transformations décrites dans le chapitre d'introduction.

Pour notre étude nous avons choisi de présenter les résultats en utilisant une représentation continue. Les gains sont calculés avec les modèles continus discrétisés à une période d'échantillonnage très faible, ce qui permet l'utilisation directe dans le cas continu des gains déterminés en échantillonné. La période d'échantillonnage retenue est

$$T_e = 0.05 \text{ seconde} \tag{XIII.12}$$

Dans la suite du travail, nous présenterons donc les résultats pour les modèles continus, bien que certains calculs sont en fait réalisés avec des modèles discrets.

XIII.6 Mesure de performance

Les différentes méthodes de synthèse de loi de commande robuste que nous avons envisagées utilisent une mesure de performance de type quadratique pour qualifier le niveau de performance en boucle fermée du système. Au vu des spécifications que nous avons décrites, nous avons dû construire une mesure de performance de type quadratique, prenant en compte toutes les composantes des spécifications.

La solution qui nous a paru la plus appropriée est celle d'envisager une mesure de performance basée sur l'écart entre le système en boucle fermée et un modèle de référence (modèle désiré en boucle fermée).

Dans les paragraphes qui suivent, nous décrirons en détail comment construire le modèle de référence ainsi que le système complet permettant la synthèse d'une loi de commande.

XIII.6.1 Modèle de référence

Le modèle de référence que nous désirons est un modèle dont le comportement doit être "atteignable" par le système en boucle fermée. Ainsi ce modèle doit respecter la dynamique naturelle de l'avion pour que l'objectif fixé — avoir un comportement en boucle fermé aussi proche que possible du modèle de référence — soit un objectif réaliste. Le choix d'un bon modèle de référence est en outre primordial, car c'est à partir de ce modèle qu'est établi la mesure de performance.

Nous avons donc pris en compte, pour le choix du modèle de référence, les remarques faites sur la répartition des modes dans le système. Nous avons vu que le système avait naturellement un mode affectant principalement la vitesse et trois modes affectant la vitesse verticale. L'utilisation de deux intégrateurs sur l'erreur de consigne a pour effet d'augmenter l'ordre du système, en ajoutant un pôle sur chaque "axe". Nous avons également intégré au modèle de référence les modes liés aux actionneurs. Nous affecterons le mode lié à la commande des moteurs sur l'axe en V et le mode lié à la gouverne de profondeur à l'axe en V_z. Le modèle de référence finalement retenu peut être schématisé par le figure XIII-8

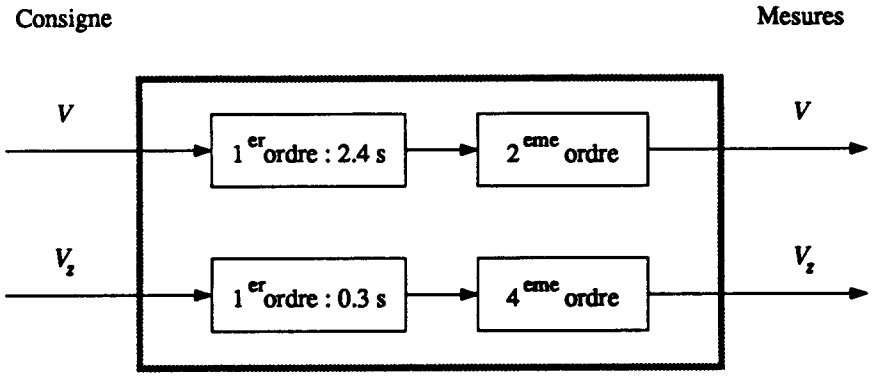


Fig. XIII-8: Modèle de référence

Ce modèle de référence sera fixé en choisissant des temps de réponses et les amortissements des valeurs propres de celui-ci. Il sera représenté sous une forme de représentation d'état notée

$$\begin{cases} \dot{X}_r &= A_r X_r + B_r U_r \\ Y_r &= C_r X_r \end{cases} \qquad \text{(XIII.13)}$$

XIII.6.2 Mesure de performance

Nous avons choisi comme mesure de performance, un critère mesurant l'écart quadratique entre la réponse du système en boucle fermé et un modèle de référence représentant un modèle souhaité en boucle fermée. Cette mesure s'exprime de la manière suivante

$$J_{\text{perf}} = \int_{t=0}^{\infty} \left[(Y_r - Y_a)^\top Q (Y_r - Y_a) + U^\top R U \right] dt \qquad \text{(XIII.14)}$$

où toutes les grandeurs sont déterminés lorsque le système est soumis aux deux échelons de consigne standard ($V = 20$ kts et $V_z = 1000$ ftr/min). La matrice Q représentera le poids sur la différence entre les sorties asservies et les sorties du modèle de référence, et R représentera un poids sur l'amplitude des commandes.

Les mesures de performance quadratique que nous avons envisagées jusqu'à présent doivent s'écrire sous la forme

$$J_{\text{perf}} = \sum_{k=0}^{\infty} X_e^{\intercal}(k) Q_e X_e(k) + U_e^{\intercal}(k) R_e U_e(k) \qquad \text{(XIII.15)}$$

et nous savons calculer cette mesure lorsque le système de type

$$\begin{cases} X_e(k+1) & = A_e X_e(k) + B_e U_e(k) \\ Y_e(k) & = C_e X_e(k) \end{cases} \qquad \text{(XIII.16)}$$

soumis à une commande de type $U_e(k) = K_e Y_e(k)$, évolue librement à partir d'une condition initiale $X_e(0)$.

Nous devons donc construire un système étendu $\{A_e, B_e, C_e\}$ et déterminer les poids Q_e et R_e et la condition initiale $X_e(0)$, de manière à ce que la mesure de performance (XIII.14) puisse s'exprimer sous la forme standard (XIII.15).

Remarquons d'abord que la mesure (XIII.14) doit être calculée lorsque le système est soumis à un échelon de consigne, alors que la mesure (XIII.15) ne se calcule que pour une réponse à une condition initiale $X_e(0)$. Il faudrait donc en théorie, construire un système étendu contenant deux intégrateurs afin de pouvoir transformer une condition initiale en un échelon de consigne. Si cette méthode était appliquée, la mesure de performance ne serait plus calculable (nous avons supposé que la système nominal en boucle fermée était strictement stable). De plus la mesure (XIII.14) deviendrait infinie car les commandes, en régime permanent, après une consigne de type échelon, n'ont pas une valeur nulle.

Pour palier à ces deux difficultés, tout en construisant une mesure de performance mesurant les écarts de réponse pour une consigne de type échelon, nous avons introduit dans le système étendu un pseudo intégrateur, constitué de deux modes faiblement amortis. Ainsi nous pouvons créer une consigne ayant la forme proche d'un échelon, qui soit nulle au bout d'un temps fini, choisi grand devant les temps de réponse désirés pour le système. Ce pseudo échelon de consigne est représenté sur la figure XIII-9. Avec ce choix, la mesure de performance devient calculable (système strictement stable) et la part représentant le poids sur la commande n'est plus infinie, car les commandes reviennent à l'équilibre vers zéro.

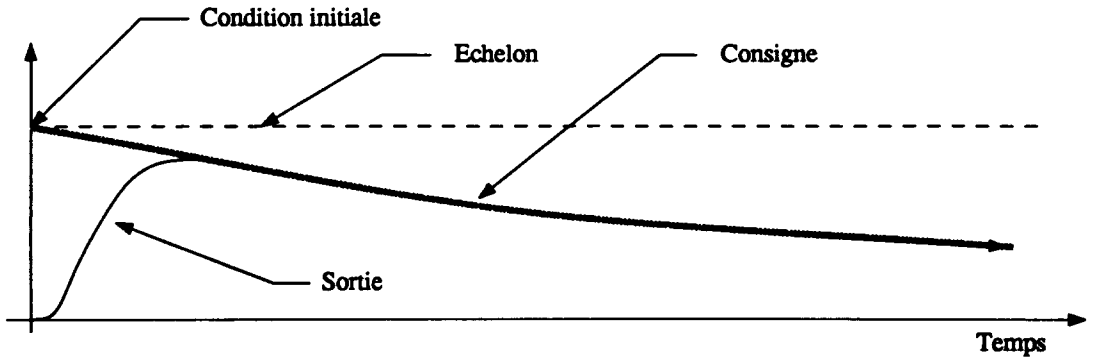


Fig. XIII-9: Pseudo échelon de consigne pour le calcul de la mesure de performance.

Le modèle étendu peut maintenant être construit en utilisant la représentation discrète du système et du modèle de référence afin de pouvoir transformer l'intégrale (XIII.14) en une somme discrète (XIII.15). Le modèle étendu retenu est le suivant

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_r \\ X \\ Z \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} A_{dr} & 0 & B_{dr} \\ 0 & A_d & D_d \\ 0 & 0 & \alpha I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_r \\ X \\ Z \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ B_d \\ 0 \end{bmatrix} U_k \\ Y_k = [0 \quad C \quad 0] \begin{bmatrix} X_r \\ X \\ Z \end{bmatrix}_k \end{cases} \tag{XIII.17}$$

Les matrices A_{dr}, A_d, B_{dr}, B_d et D_d sont issues de la discrétisation des matrices A_r, A, B_r, B et D. La valeur de α fixera l'amortissement du pseudo échelon de consigne. Nous avons choisi $\alpha = 0.999$.

Les matrices Q_e et R_e seront de la forme

$$Q_e = \begin{bmatrix} -C_r^T \\ C^T \\ 0 \end{bmatrix} Q [-C_r \quad C \quad 0] \text{ et } R_e = R \tag{XIII.18}$$

XIII.6.3 Condition initiale

Nous devons mesurer l'écart entre les sorties du système en boucle fermée et les sorties du modèle de référence pour chaque échelon standard, soit pour deux conditions initiales différentes. Nous voulons en effet deux types d'échelon de consigne notés Z_1 et Z_2 de la forme

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 20 \text{ kts} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } Z_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \text{ ft/min.} \end{bmatrix} \tag{XIII.19}$$

Les conditions initiales pour le système (XIII.17) seront donc de la forme

$$X_e(0)_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_1 \end{bmatrix} \text{ et } X_e(0)_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Z_2 \end{bmatrix} \tag{XIII.20}$$

Pou le calcul de la mesure de performance utilisant une matrice de covariance de la condition initiale, il suffira de prendre en compte ces deux conditions initiales et d'ajouter les deux matrices de covariance. La matrice de covariance de la condition initiale sera donc

$$X_o = X_e(0)_1 X_e(0)_1^T + X_e(0)_2 X_e(0)_2^T \qquad \text{(XIII.21)}$$

La mesure de performance mesurera ainsi les écarts pour chacun des deux échelons standards considérés.

XIII.6.4 Remarques sur la mesure de performance

La mesure de performance que nous venons de décrire parait particulièrement bien adaptée au problème traité. En effet grâce au modèle de référence nous pouvons spécifier une dynamique souhaitée pour le système en boucle fermée. Nous pouvons aussi grâce au poids relatif entre Q et R pondérer le compromis souhaitable entre une faible exitation des gouvernes et un bon suivi du modèle de référence.

En revanche notre mesure peut paraître un peu restrictive car elle n'autorise pas de variation de temps de réponse par rapport au modèle de référence. Dans notre cas particulier, de telles variations sont effectivement tolérées. La figure XIII-10 illustre ce propos. Le premier cas présente une dégradation de performance liée à un dépassement trop important. Le deuxième cas présente un changement de temps de réponse, acceptable en pratique, mais donnant une perte de performance très supérieur au premier cas.

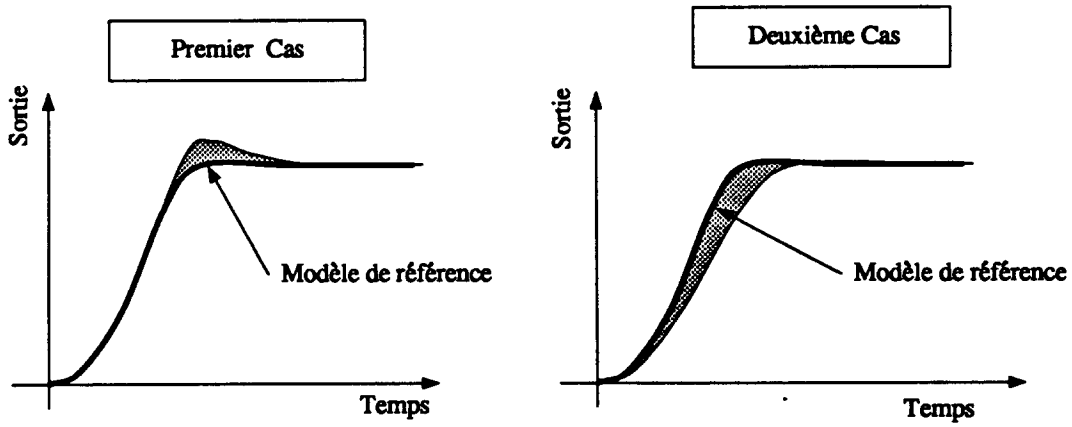


Fig. XIII-10: Comparaison entre deux réponse l'une acceptable, l'autre non acceptable.

Nous retiendrons donc que la mesure de performance que nous utiliserons peut donner des résultats exagérément pessimistes pour des systèmes qui sont en fait acceptables.

XIII.7 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons présenté l'application réaliste que nous allons traiter : la conception du pilote automatique longitudinal d'un avion de transport civil de type Airbus.

Nous avons d'abord décrit le problème de la robustesse de la loi de commande aux changements de modèles liés au changement de point de vol de l'avion (Vitesse et Altitude de croisière). Pour décrire ces variations paramétriques, nous disposons d'un ensemble de modèles linéaires, chacun déterminés pour une valeur de paramètres (vitesse et altitude de croisière) différents.

Nous avons ensuite présenté les contraintes et les spécifications voulues pour la loi de commande. Les performances d'une loi de commande seront jugées sur les réponses temporelles à deux échelons de consigne standards considérés comme équivalent. Ces spécifications imposent aussi une structure particulière pour la loi de commande (deux intégrateurs sur l'erreur d'asservissement et retour statique).

Nous avons enfin choisi une mesure de performance répondant aux objectifs désirés. Pour cela nous avons considéré l'écart entre le système en boucle fermée et un modèle de référence. Ce modèle de référence, ou encore modèle désiré en boucle fermée, a été choisi de manière à respecter la dynamique naturelle de l'avion. Nous avons vu comment exprimer cette mesure de performance sous la forme d'une mesure quadratique en considérant le système étendu intégrant le modèle de l'avion et le modèle de référence. Nous avons aussi vu que cette mesure de performance peut s'avérer restrictive, car elle ne tolère pas de variations de temps de réponse par rapport au modèle de référence.

Chapitre XIV Synthèse de loi de commande pour le pilote automatique

XIV.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons appliquer au cas du pilote automatique longitudinal de l'avion les différents algorithmes que nous avons présentés. Nous donnerons les résultats numériques issus de ces algorithmes, ainsi que les choix faits pour appliquer ces techniques.

Nous commencerons par présenter les modèles que nous avons utilisés pour la conception de la loi de commande, les choix faits pour la mesure de performance, ainsi que la manière dont nous avons défini des paramètres fictifs, permettant de prendre en compte des changements de modèle sur le domaine de vol.

Nous décrirons ensuite la méthodologie classique de placement de valeurs et vecteurs propres actuellement utilisée pour résoudre ce type de problèmes. Nous verrons qu'une telle méthode permet de spécifier des temps de réponse, d'assurer certains découplages, et fournit de très bonnes réponses temporelles (conforme aux spécifications). Cette méthode, qui ne prend pas en compte les aspects de robustesse, nous servira de référence pour évaluer les résultats obtenus avec les autres approches.

Nous traiterons ensuite l'approche de synthèse de pôles robuste. La localisation d'un ensemble de pôles en boucle fermée ne suffisant pas à assurer de bonnes performances, nous considèrerons donc une procédure de choix de pôles en boucle fermée optimisant la mesure de performance. Cette procédure très coûteuse en temps de calcul, nous permettra tout de même de trouver une loi de commande satisfaisante.

L'approche de synthèse robuste en stabilité sera ensuite envisagée. Cette méthode fournissant toutes les commandes entre la plus performante et la plus robuste en stabilité, nous analyserons en détail la robustesse de la loi de commande la plus performante et les gains possibles en robustesse, sans pour autant dégrader les performances.

Finalement nous considérerons la méthode réduisant le qualité d'identification des paramètres incertains du système. Nous verrons que cette approche permet des gains importants en robustesse, tout en ne réduisant que modestement les performances optimales possibles.

Pour plus de lisibilité, les simulations temporelles de chacune des commandes décrites sont rassemblées dans la section XIV.8.

XIV.2 Choix des modèles

Nous avons vu que nous disposions de 225 modèles différents couvrant l'ensemble du domaine de vol de l'avion. Pour pouvoir appliquer les méthodes que nous avons présentées, il nous faut sélectionner un modèle nominal, puis des directions de perturbations correspondant à des variations de modèle. Nous définirons précisément dans cette section le choix du modèle

de référence, ce qui nous permettra de spécifier la dynamique désirée pour le système en boucle fermée.

XIV.2.1 Modèle nominal et modèles perturbés

Nous avons choisi d'utiliser comme système nominal le système situé au centre du domaine de vol. Pour les études de robustesse, nous ne pouvons pas prendre en compte l'ensemble des modèles différents du modèle nominal. Nous avons choisi d'utiliser six modèles, appelés modèles extrêmes ou modèles perturbés, répartis le long de la frontière du domaine de vol. Ces différents choix sont représentés sur la figure la figure XIV-1. Les six modèles extrêmes que nous avons choisis nous permettent de couvrir l'ensemble du domaine de vol de l'avion.

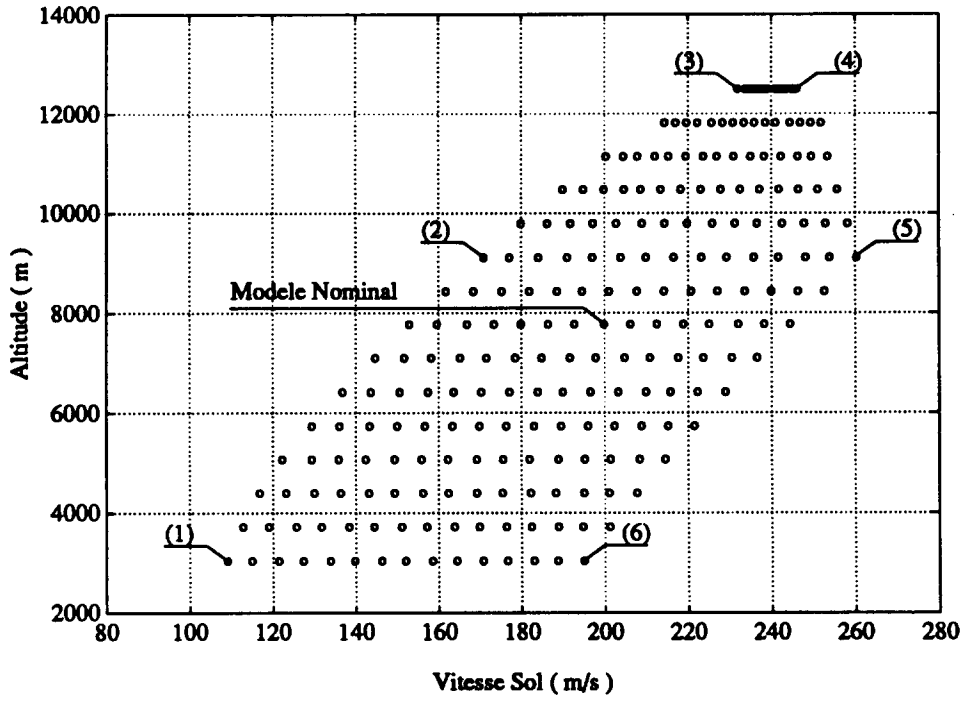


Fig. XIV-1: Modèle nominal et modèles perturbés utilisés

Le tableau ci-dessous détaille les valeurs des paramètres physiques associés à chaque modèle (le modèle noté 0 représente le modèle nominal).

Modèle	Altitude	Vitesse Sol	Vitesse Conventionnelle	Nombre de Mach
0	25 500 ft	200 m/s	266 kts	0.65
1	10 000 ft	109 m/s	183 kts	0.33
2	30 000 ft	171 m/s	209 kts	0.56
3	41 000 ft	232 m/s	232 kts	0.79
4	41 000 ft	246 m/s	248 kts	0,83
5	30 000 ft	260 m/s	329 kts	0.86
6	10 000 ft	195 m/s	330 kts	0.59

La position des pôles de l'ensemble des 225 modèles en boucle ouverte est visualisée sur la figure XIV-2. Nous pouvons remarquer que certains modèles possèdent des pôles légèrement instables. Ces modèles correspondent aux modèles du domaine de vol ayant un nombre de Mach élevé. En pratique, cette instabilité naturelle est très facilement contrôlable par le pilote, car elle est très lente.

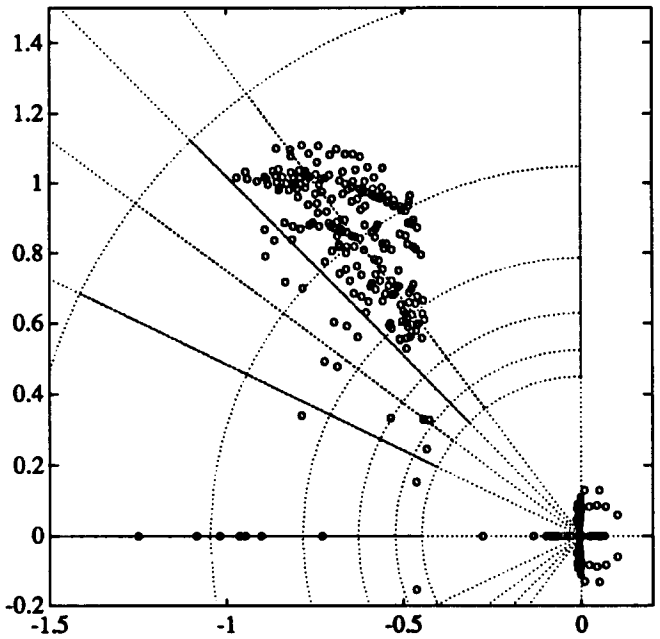


Fig. XIV-2: Lieu des pôles en boucle ouverte des 225 modèles disponibles.

XIV.2.2 Paramètres fictifs

Comme nous l'avons déjà remarqué, bien que les modèles dépendent des variations de deux paramètres physiques (vitesse et altitude), nous ne pouvons avoir de lien explicite entre ces variations paramétriques et les variations de modèles induites par ces variations. Afin de pouvoir considérer toutes les variations de modèles autour du modèle nominal, nous allons créer des paramètres fictifs, chacun correspondant au passage entre le modèle nominal et un modèle extrême (Figure XIV-3). De cette manière nous pourrons considérer des variations de modèle couvrant globalement l'ensemble du domaine de vol.

Chaque variation paramétrique fictive associé à $\Delta\theta_i$ sera calculée par différence entre un modèle nominal et le modèle extrême associé.

$$\Delta A_i = A_i - A_0 \tag{XIV.1}$$

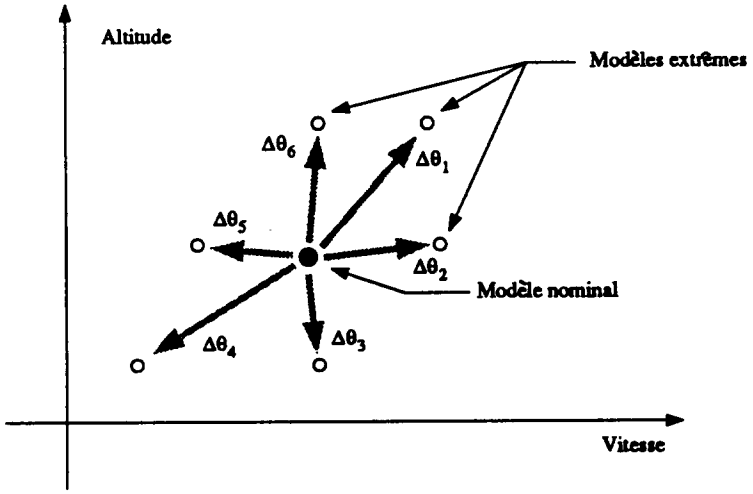
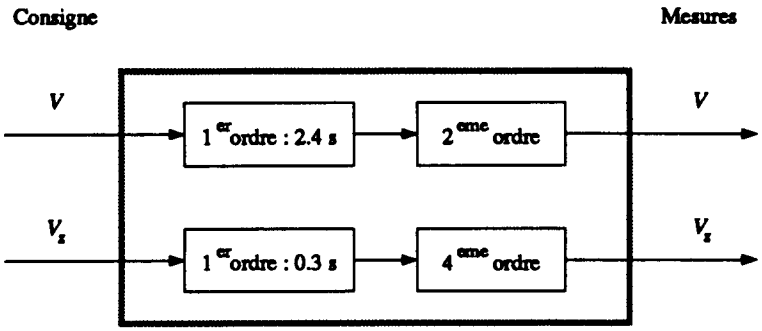


Fig. XIV-3: Définition des paramètres fictifs.

Le vecteur paramétrique θ aura donc six composantes correspondant à chacun des six modèles extrêmes considérés. Nous pouvons, avec cette définition, appliquer les algorithmes prenant en compte des variations paramétriques, chacune de ces variations correspondant donc à un changement de modèle.

XIV.2.3 Modèle de référence et critère de performance

Choisissons maintenant le modèle de référence désiré en boucle fermée. Ce choix est très important car il va conditionner le comportement désiré en boucle fermée. Rappelons d'abord que ce modèle possède la structure suivante



Définissons maintenant les temps de réponse du modèle de référence en fonction de la vitesse conventionnelle du modèle nominal, selon une règle établie par l'Aérospatiale. Les amortissements des pôles ont été choisis à $\xi = 0.9$ de façon à obtenir des réponses aux échelons sans dépassement. Les pôles ainsi déterminés pour le modèle de référence seront donc les suivants

	Temps de réponse	Pôles	Amortissement
Vitesse	22.0	-0.2948±0.1428i	0.9
Vitesse Verticale	8.44	-0.7473±0.3619i	0.9
	6.44	-0.9710±0.4703i	0.9
Modes Actionneurs	0.3	-10.0	1
	10.0	-1.25	1

Tableau 1 Pôles du modèle de référence.

Le modèle de référence étant fixé, nous devons aussi choisir les poids relatifs Q et R, respectivement poids sur la différence entre les sorties du modèle de référence et les sorties du système en boucle fermée, et poids sur la commande. Les matrices Q et R ont été choisies sous forme diagonale. La normalisation des mesures et des commandes s'est effectuée de la manière suivante

$$\begin{array}{rcl} V = 20 \text{ kts} & \Longleftrightarrow & V_z = 1000 \text{ ft/min} \\ \delta_q = 0.5 \text{ degrés} & \Longleftrightarrow & N1 = 10\ \% \end{array} \qquad \text{(XIV.2)}$$

De plus nous avons privilégié dans le critère de performance les écarts sur les sorties asservies par rapport aux amplitudes des commandes en choisissant

$$\frac{\|Q\|}{\|R\|} = 1\,000 \qquad \text{(XIV.3)}$$

Nous venons donc de définir complètement la mesure de performance, en définissant le modèle de référence en boucle fermée et les poids Q et R permettant de qualifier l'écart entre le modèle de référence et le système en boucle fermée.

Nous avons distingué quatre classes de mesure de performance, ce qui nous a permis de différencier chacune des réponses d'un système en boucle fermée. Les classes considérées sont données par le tableau ci-dessous.

	Niveau de performance	Symbole
Excellent	$J_{\text{perf}} < 500$	o
Acceptable	$500 \leq J_{\text{perf}} < 1000$	*
Médiocre	$1000 \leq J_{\text{perf}} < 2000$	x
Mauvais	$2000 \leq J_{\text{perf}}$	+

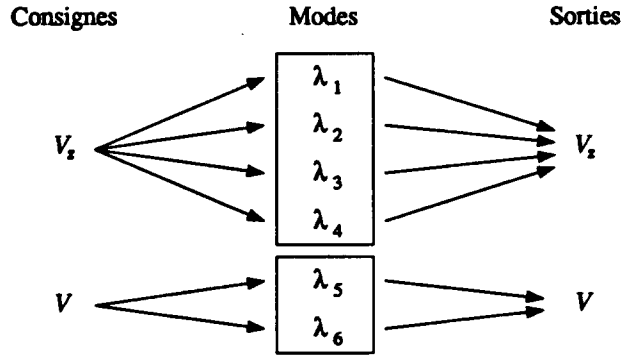
XIV.3 Placement de valeurs et vecteurs propres

XIV.3.1 Description de la méthode

Dans le chapitre sur le placement des valeurs propres robustes, nous avons vu qu'il est possible, de calculer un retour d'état permettant d'avoir un système en boucle fermée avec des valeurs propres arbitraires. Dans le cas multivariable, nous avons aussi vu qu'il était possible de choisir les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres, afin d'assurer d'autres propriétés souhaitables pour le système. Nous avons utilisé ces degrés de liberté pour affiner la robustesse du système, mais habituellement les vecteurs propres sont utilisés pour assurer des découplages. Décrivons maintenant comment choisir ces vecteurs propres pour assurer des découplages entre les sorties.

Les vecteurs propres définissent la répartition des valeurs propres sur les sorties, ou l'effet d'une entrée sur la valeur propre. Nous pouvons ainsi définir la sortie sur laquelle chaque valeur propre va agir. Par ce moyen nous pouvons spécifier des découplages en définissant plusieurs ensembles de valeurs propres, chaque ensemble de valeurs propres agissant sur une sortie différente.

Dans notre cas, nous désirons un découplage le plus parfait possible entre les deux sorties. Vues les considérations physiques que nous avons faites sur le système, nous souhaitons donc associer quatre modes, plutôt rapides, agissant sur le vitesse verticale V_z, et deux modes, plutôt lents, agissant sur la vitesse V (mis à part les modes des actionneurs). Nous choisirons donc la répartition suivante :



Chaque vecteur propre doit appartenir à un espace propre de dimension deux. Nous pouvons donc imposer une contrainte sur le choix des vecteurs propres. Afin de se rapprocher du découplage précisé ci-dessus, chaque vecteur propre, associé à la variable V_z sera choisi orthogonal à la direction de V. De même, chaque vecteur propre associé à V sera choisi orthogonal à V_z.

XIV.3.2 Calcul de la commande

Les pôles désirés en boucle fermée sont ceux que nous avons déjà choisis pour le modèle de référence (tableau 1). Les modes des actionneurs ne seront pas placés, ce qui permet ainsi de calculer directement un retour de sortie [33] et donc d'éviter le recours à un observateur.

Ces choix conduisent au retour de sortie suivant

$$K = \begin{bmatrix} 12.54 & 2.63 & -0.15 & 1.58 & -0.03 & 0.40 \\ 46.97 & 7.23 & -14.92 & 4.39 & -2.14 & 0.65 \end{bmatrix} \qquad \text{(XIV.4)}$$

Les réponses temporelles aux échelons standards avec cette commande, sont représentées sur la figure XIV-14. Nous voyons que le temps de réponse obtenu pour un échelon en vitesse est plus lent que celui donné par le modèle de référence. Par contre les dépassements et les découplages sont très bons. La mesure de performance vaut pour cette commande

$$J_{\text{perf}} = 888.9 \qquad \text{(XIV.5)}$$

Cette mesure de performance n'est pas très bonne, bien que les réponses temporelles soient acceptables. En effet, le temps de réponse de la réponse en vitesse, est plus lent que celui désiré. Cette remarque confirme les limitations que nous avons indiqués concernant à la mesure de performance utilisée.

Un autre choix de découplage permet d'obtenir des gains de retours plus faibles. Cette approche consiste à découpler les modes rapides (associés à V_z) du mode associé à la commande des moteurs, ce qui aussi aura pour effet de prendre en compte la contrainte de faible agitation des commandes moteurs. Le gain, noté K_a, déterminé par ce découplage est le suivant

$$K_a = \begin{bmatrix} 12.34 & 2.60 & -0.15 & 1.56 & -0.03 & 0.40 \\ 8.15 & 1.14 & -14.87 & 0.54 & -2.13 & -0.29 \end{bmatrix} \qquad \text{(XIV.6)}$$

Les réponses temporelles en boucle fermée avec cette commande sont données sur la figure XIV-15. Comme nous le remarquons, le découplage pour un échelon entre V_z et V s'est légèrement déterioré, mais la grandeur des coefficients du gain du correcteur a fortement diminué. De plus la mesure de performance a légèrement diminué et vaut

$$J_{\text{perf}} = 793.2 \qquad \text{(XIV.7)}$$

D'un point de vue pratique nous préférerons utiliser le second choix de placement de vecteurs propres, car les gouvernes sont moins sollicitées, et les niveaux de découplage entre les sorties, bien que moins parfaits, restent tout à fait acceptables.

XIV.3.3 Evaluation de la robustesse

Afin d'évaluer la robustesse de cette dernière loi de commande, nous l'avons appliquée à l'ensemble des modèles répartis sur tout le domaine de vol. Nous avons ensuite déterminé la mesure de performance pour chacun des 225 modèles. Pour chaque valeur de performance, nous avons calculé le nombre de modèles possédant des performances inférieures à cette valeur. Nous pouvons ainsi construire un graphe cumulé représentant le nombre de modèles en fonction d'une valeur de la mesure de performance. Ce graphe est représenté ci-dessous, figure XIV-4.

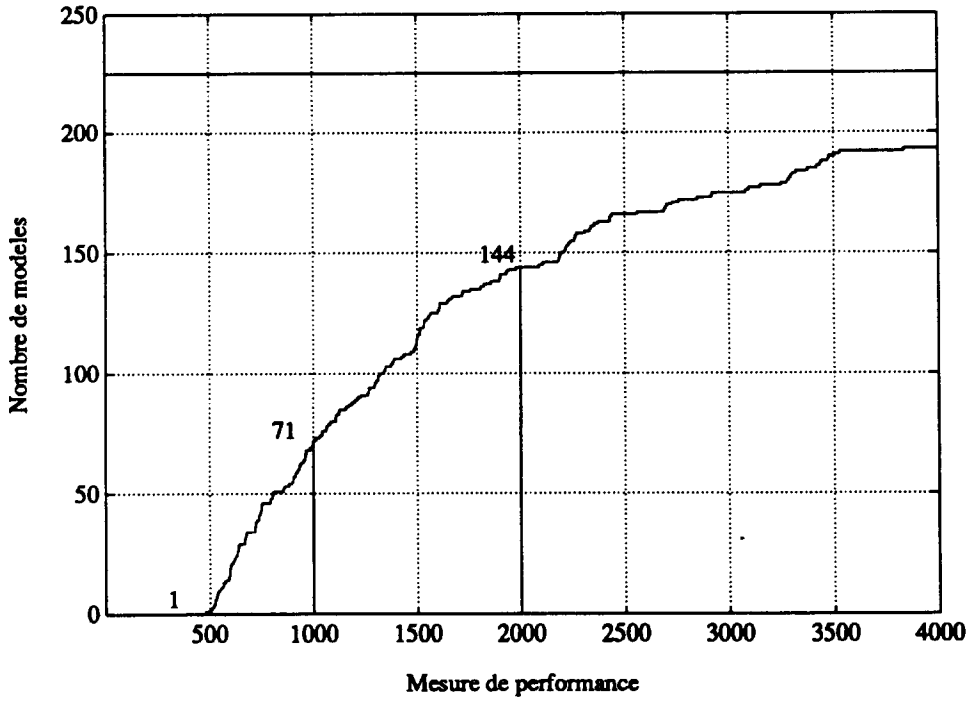


Fig. XIV-4: Performance de l'ensemble des modèles soumis à la commande K_a.

Grâce aux différentes classes que nous venons de décrire, il devient possible de visualiser, sur le domaine de vol, la répartition des modèles donnant, en boucle fermée avec la commande K_a, une réponse temporelle acceptable ou inacceptable. Sur la figure XIV-22 est représenté le domaine de vol où est figuré chaque modèle, avec le symbole représentatif de la classe à laquelle il appartient.

Nous pouvons observer que les modèles donnant un bon niveau de performance sont proches du modèle nominal pour lequel la loi de commande a été conçue. De plus les meilleures performances ne sont pas obtenues avec le modèle pour lequel la commande a été conçue, mais plutôt pour les modèles ayant une vitesse plus élevée. Ce phénomène peut s'expliquer simplement par le fait que ces modèles ont un comportement plus rapide en boucle ouverte, donc un temps de réponse en boucle fermée plus rapide, ce qui entraîne finalement une mesure de performance plus faible.

Nous avons aussi déterminé l'ensemble des pôles en boucle fermée de chacun des 225 modèles. Tous ces pôles sont représentés sur un même graphique, figure XIV-26. Nous observons qu'aucun modèle n'est instable avec cette commande K_a, mais qu'un nombre important de modèles possèdent une paire de pôles rapide mal amortie, ce qui explique le niveau de performance élevé d'un grand nombre de modèles.

XIV.4 Placement robuste de pôles

Dans cette section nous présenterons les résultats obtenus grâce à la méthode de placement de pôles robuste aux variations paramétriques. Nous verrons qu'un choix "logique" de pôles en boucle fermée ne donne pas des performances acceptables. Nous envisagerons donc une procédure de recherche de pôles en boucle fermée permettant de minimiser les performances en boucle fermée.

XIV.4.1 Placement direct de pôles

Comme nous l'avons déjà remarqué, le choix d'un ensemble de pôles en boucle fermée a une très grande influence sur la qualité de la réponse en boucle fermée. Nous avons d'abord essayé l'ensemble des pôles utilisés dans la section précédente (tableau 1), pôles déterminés grâce à des considérations physiques sur les temps de réponses et les amortissements souhaités. Comme nous déterminons un retour d'état, nous devons maintenant placer l'ensemble des pôles du système, y compris les modes des actionneurs.

Le retour d'état déterminé avec un tel choix de pôles en boucle fermée est le suivant

$$K = \begin{bmatrix} 0.76 & 1.41 & 1.31 & 0.65 & -0.11 & 0.03 & 0.60 & 0.12 \\ -5.56 & -73.12 & -22.26 & -7.32 & 19.71 & -1.28 & -17.63 & -1.71 \end{bmatrix} \quad \text{(XIV.8)}$$

Les réponses temporelles du modèle nominal en boucle fermée avec ce gain est représenté sur la figure XIV-16. La performance en boucle fermée avec ce retour d'état est $J_{\text{perf}} = 9.17 \times 10^5$. Cette commande est donc inacceptable, principalement à cause du mauvais découplage entre la vitesse verticale et la vitesse. En revanche, nous pouvons voir figure

XIV-27, où nous avons représenté l'ensemble des pôles des 225 systèmes soumis à cette commande, que la procédure de placement robuste de pôles a un effet significatif.

Nous avons vu que le choix des vecteurs propres nous permettait de spécifier des découplages. Comme l'approche par placement de valeurs propres robustes aux variations paramétriques utilise les vecteurs propres pour optimiser la robustesse, les découplages ne sont plus maîtrisés, et les performances de la loi de commande deviennent inacceptables.

XIV.4.2 Optimisation du choix des valeurs propres

Pour palier à la difficulté présentée ci-dessus, nous avons envisagé, comme nous l'avions fait dans la partie précédente, une procédure de sélection d'un ensemble de valeurs propres en boucle fermée, de manière à minimiser la mesure de performance du système en boucle fermée. En d'autres termes, nous chercherons l'ensemble des pôles en boucle fermée tels que la commande issue de la procédure de placement robuste des pôles produise un système en boucle fermée aussi proche que possible du modèle de référence que nous avons choisi.

Cette procédure de recherche de solution optimale peut être schématisée par la figure XIV-5. Pour cette optimisation nous avons utilisé un algorithme d'optimisation de type quasi-newton de l'optimisation toolbox de Matlab. Nous avons choisi de ne pas déplacer les modes des actionneurs; ainsi, les pôles associés à ces modes ne seront pas considérés comme des paramètres libres pour l'optimisation.

Une telle procédure est très coûteuse en temps calcul car, à chaque étape de l'optimisation, il faut calculer un nouveau gain associé aux nouvelles valeurs propres, puis le gradient du critère pour des petites variations de pôles (six pôles libres). Pour chaque étape élémentaire, calcul d'un gain et de la mesure de performance associée, dure environ 5 secondes. La durée totale de l'algorithme de choix d'ensemble de pôles optimal a été de l'ordre de plusieurs heures sur une station de travail de type Sun 4.

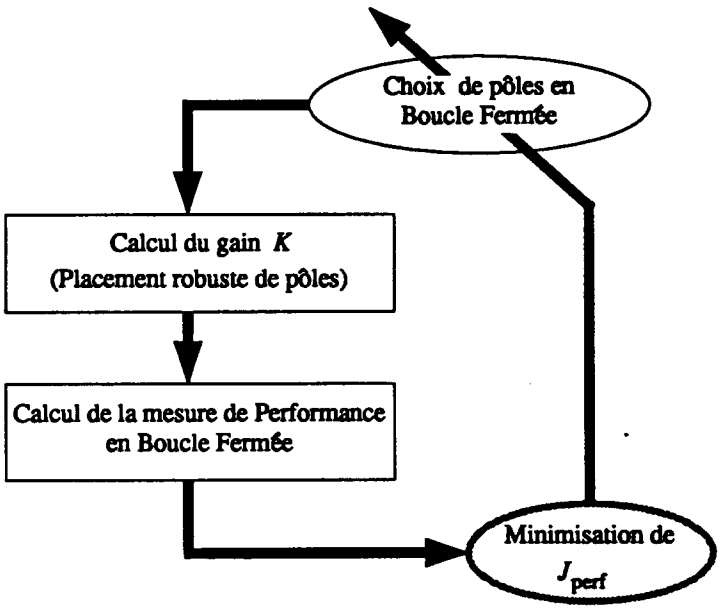


Fig. XIV-5: Algorithme d'optimisation du choix des pôles en boucle fermée.

L'ensemble de pôles en boucle fermée finalement sélectionné, pour le modèle nominal, par cette procédure d'optimisation est le suivant

Valeur propre	Amortissement
-2.3668±0.2702i	0.9935
-0.3402±0.0595i	0.9850
-0.5603±0.0401i	0.9974
-10.0000	1.0000
-1.2500	1.0000

Ces pôles sont obtenus par le retour d'état noté K_e

$$K_e = \begin{bmatrix} 2.64 & -0.77 & 2.63 & 1.50 & -0.35 & -0.02 & -0.17 & 0.26 \\ -4.18 & -55.26 & -7.14 & -3.68 & 3.28 & -1.41 & -9.54 & -2.32 \end{bmatrix} \quad \text{(XIV.9)}$$

Notons que les gains figurés dans cette expression étant les gains d'un retour d'état, ils ne peuvent être comparés directement aux gains du retour de sortie, car l'ordre des sorties est différent de l'ordre des états du système. En effet le vecteur de sortie utilisé pour la commande est $Y_e = [N_{z_{av}} \quad q \quad V \quad V_z \quad IV \quad IV_z]^T$ alors que le vecteur d'état est $X_e = [\alpha \quad V \quad q \quad V_z \quad \delta_q \quad N_1 \quad IV \quad IV_z]^T$.

La mesure de performance en boucle fermée pour cette commande est $J_{\text{perf}} = 3022$. Les réponses temporelles en boucle fermée avec ce retour sont présentées figure XIV-17. Ces réponses sont satisfaisantes au niveau des amortissements et des découplages, mais ne le sont pas au niveau des temps de réponse, ce qui explique la valeur si élevée de la mesure de performance. Nous pouvons remarquer de plus que les temps de réponse des deux sorties sont identiques. Les modes placés agissent donc simultanément sur les deux sorties. Nous avions en effet réussi à obtenir des temps de réponse différents grâce à un choix judicieux de vecteurs propres, qui permettent de répartir l'effet de chaque valeur propre sur chaque sortie. Maintenant, avec cette commande, cette répartition est imposée par le choix de vecteurs propres minimisant la sensibilité des pôles.

Les pôles de chacun des 225 modèles en boucle fermée, avec cette commande, sont visualisés sur la figure XIV-28. Nous pouvons voir sur cette figure que les pôles sont très regroupés, autour des valeurs de pôles du modèle nominal. Cet effet est précisément l'effet recherché par l'algorithme de placement robuste de pôles, tendant à minimiser les déplacements de pôles. Nous voyons donc que cette commande est bien une commande robuste, mais que les performances optimales atteintes ne sont pas compatibles avec nos exigences de temps de réponse différents, qui entraînent des mesures de performance trop élevées.

XIV.4.3 Robustesse du retour d'état

Afin d'évaluer la robustesse de ce retour d'état, nous avons déterminé l'évolution du nombre de modèles en fonction de la mesure de performance en boucle fermée (figure XIV-6). Nous observons sur ce graphique que la mesure de performance moyenne de l'ensemble

de modèles est, avec cette commande, assez élevée. Cependant, un relativement faible nombre de modèles ont une mesure de performance très mauvaise. En d'autres termes, nous pouvons observer que les taux de croissance de la courbe représentée sur la figure XIV-6 sont plus importants que celui de la courbe figure XIV-4. Cette propriété est gage d'une grande robustesse de la loi de commande, mais à partir d'un niveau de performance trop médiocre.

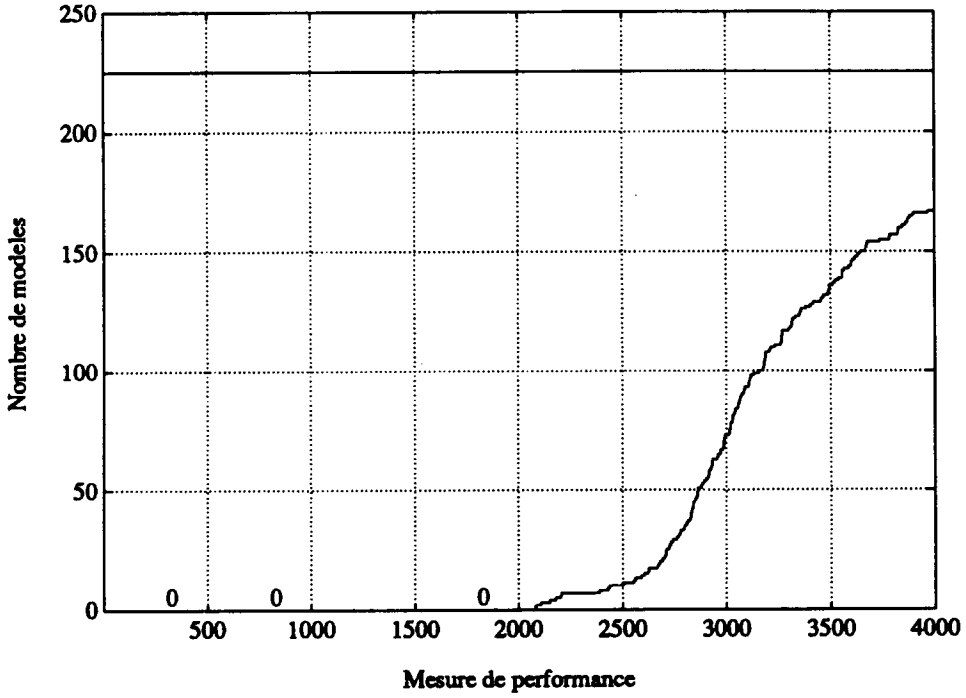


Fig. XIV-6: Performance de l'ensemble des modèles soumis à la commande K_e.

XIV.4.4 Observateur

Présentons maintenant les résultats liés à la détermination d'un observateur permettant de reconstruire les deux états non mesurés (les états liés aux actionneurs). Notons d'abord que le fait d'utiliser un observateur ne nous permet pas de respecter scrupuleusement les contraintes fixées dans les spécifications (gain de retour statique). Néanmoins l'observateur étant du deuxième ordre, sa mise en œuvre ne sera pas complexe, et permettra de conserver un sens physique à toutes les grandeurs considérées.

L'observateur que nous devons construire est un observateur d'ordre deux, permettant de reconstruire les états liés aux actionneurs, qui ne sont pas mesurés. Nous avons choisi comme dynamique de l'observateur une dynamique identique à la dynamique naturelle des gouvernes, c'est à dire

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -10.0 & 0 \\ 0 & -1.25 \end{bmatrix} \qquad \text{(XIV.10)}$$

L'observateur robuste déterminé avec cette dynamique est le suivant

$$T = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 10.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 1.25 \end{bmatrix}$$
$$U = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -1.00 \end{bmatrix} \qquad \text{(XIV.11)}$$

Cet observateur, optimal pour la robustesse aux variation paramétriques, est en fait très mal conditionné. En effet nous avons

$$\left\| \begin{bmatrix} C \\ U \end{bmatrix}^{-1} \right\|_F = 1.16 \times 10^7 \qquad \text{(XIV.12)}$$

Cette solution n'étant pas acceptable, car inapplicable en pratique, nous avons modifié légèrement l'algorithme de recherche d'observateur, en libérant un degré de liberté dans l'optimisation de celui-ci. Ainsi, nous pouvons minimiser simultanément la sensibilité des pôles de l'observateur aux variations paramétriques et le conditionnement de la matrice $\begin{bmatrix} C \\ U \end{bmatrix}^{-1}$. Une telle approche donne les résultats suivants

$$T = 10^{-14} \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.85 & 0.00 & -8.54 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -1.41 & 0.00 & -1.76 & 0.00 \end{bmatrix}$$
$$U = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \qquad \text{(XIV.13)}$$
$$\left\| \begin{bmatrix} C \\ U \end{bmatrix}^{-1} \right\|_F = 3.471$$

Le fait que la matrice T soit presque nulle signifie que l'observateur fonctionne presque en boucle ouverte. Ce mode de fonctionnement n'est pas gênant si les modes des actionneurs sont bien connus. En pratique, ce n'est pas le cas, il faudrait donc prendre en compte cette variation comme une incertitude paramétrique supplémentaire lors de la conception de la loi de commande et de l'observateur.

Les simulations en boucle fermée pour le modèle nominal avec l'observateur (figure XIV-18) montrent que la présence de l'observateur n'a pas dégradé les performances de manière significative, les performances de la loi de commande. La mesure de performance est même rigoureusement identique à celle déterminée sans observateur (cette mesure augmente de 1.1×10^{-9} par rapport à la commande sans observateur). La présence de l'observateur ne modifie finalement pas les performances ni la robustesse de la loi de commande de type retour d'état.

XIV.4.5 Conclusions

Nous venons donc de voir comment construire une commande utilisant l'algorithme de placement robuste de valeurs propres. Nous avons vu que la mise en œuvre pratique de cet

algorithme demandait une couche d'optimisation supplémentaire afin d'obtenir un niveau de performance acceptable. Ce sur coût de calcul rend la détermination de la loi de commande finalement très longue.

Nous avons ensuite vu que le retour d'état ainsi déterminé, bien que relativement robuste, donnait un niveau de performance trop faible, car les temps de réponses ne sont pas ceux désirés (réponse en vitesse trop rapide et réponse en vitesse verticale trop lente).

Finalement nous avons déterminé un observateur permettant d'appliquer le retour d'état déterminé sur le système réel. Nous avons constaté que la présence de l'observateur ne modifiait pas de manière significative les réponses temporelles et les niveaux de performance atteints.

XIV.5 Commande robuste en stabilité

Nous avons appliqué dans cette section la méthodologie permettant de donner au système nominal en boucle fermée de bonnes marges de stabilité, ou encore un amortissement optimal. Nous avons vu aussi que cette approche permettait d'envisager tous les compromis possibles entre la commande la plus performante et la plus robuste, par le biais d'un paramètre λ variant entre 0 et 1. Rappelons aussi que cette approche ne permet pas de prendre en compte les informations disponibles sur la structure des perturbations. La robustesse ainsi atteinte sera une robustesse de type "non-structurée".

XIV.5.1 Détermination des commandes

Nous avons déterminé, pour 21 valeurs de λ comprises entre 0 et 1, le retour de sortie optimisant le critère

$$J = \lambda J_{\text{perf}} + (1 - \lambda) J_{\text{rob}} \qquad \text{(XIV.14)}$$

où J_{rob} représente la mesure de robustesse liée à la stabilité du système. Ce calcul nous a donc donné 21 commandes différentes, que nous nous sommes attachées à évaluer.

Nous avons représenté sur la figure XIV-7 l'évolution des mesures de performance et de robustesse en fonction de λ. Cette figure montre que nous avons avec ces différentes commandes une très grande plage de variation des mesures de performance et robustesse. Dans les paragraphes suivants, nous évaluons la commande optimisant la mesure de performance, et nous choisissons une bonne valeur de λ permettant d'améliorer la robustesse, tout en ne pénalisant pas trop les performances.

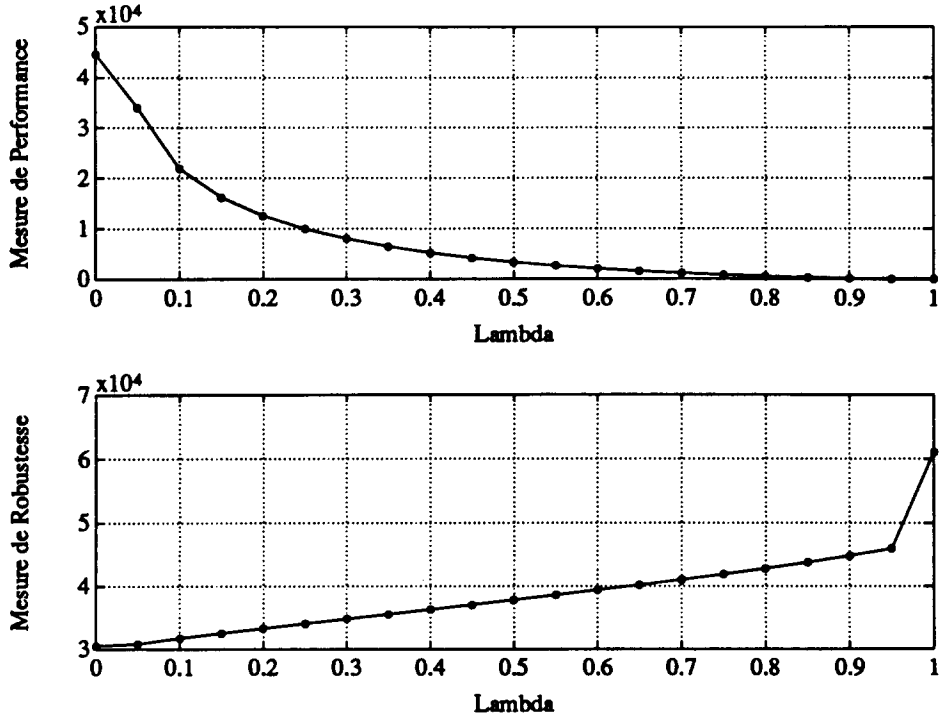


Fig. XIV-7: Evolution des mesures de performance et robustesse.

XIV.5.2 Commande optimale en performance

Etudions en détail les performances et la robustesse de la loi de commande minimisant la mesure de performance pour le modèle nominal. Ce retour de sortie permet d'obtenir la mesure de performance

$$J_{\text{perf}} = 45.6 \tag{XIV.15}$$

Nous pouvons vérifier sur les réponses temporelles aux échelons standard (figure XIV-19) que la réponse du système en boucle fermée est très proche de celle du système de référence, et que les amplitudes des commandes ne sont pas trop grandes, ni trop agitées.

La commande rendant optimale la mesure de performance, notée K_p est la suivante

$$K_p = \begin{bmatrix} 13.26 & 2.84 & -0.15 & 1.66 & -0.03 & 0.42 \\ -423.19 & -113.16 & -15.65 & -48.03 & -2.47 & -12.66 \end{bmatrix} \tag{XIV.16}$$

Les pôles en boucle fermée obtenus avec cette commande sont donnés dans le tableau ci-dessous. Cette commande ne place donc pas de pôles dans une région du plan complexe mal amorti, et ne déplace pas trop les modes des actionneurs. Mis à part le fait que ce retour possède des coefficients grande amplitude, ce qui est contraire à l'objectif recherché, cette commande parait donc pleinement satisfaisante.

Valeur propre	Amortissement
-1.4142±0.7114i	0.8933
-0.5421±0.5017i	0.7339
-0.3452±0.1257i	0.9396
-14.2564	1.0000
-0.5030	1.0000

La robustesse de cette loi de commande peut être évaluée avec des représentations identiques à celles utilisées pour les autres commandes. La figure XIV-8 représente les performances atteintes par l'ensemble des modèles en boucle fermée soumis à la commande K_p. Les différents modèles classés selon leurs niveaux de performance sont représentés figure XIV-23. La figure XIV-29 montrent les pôles de chacun des 225 modèles en boucle fermée avec cette commande.

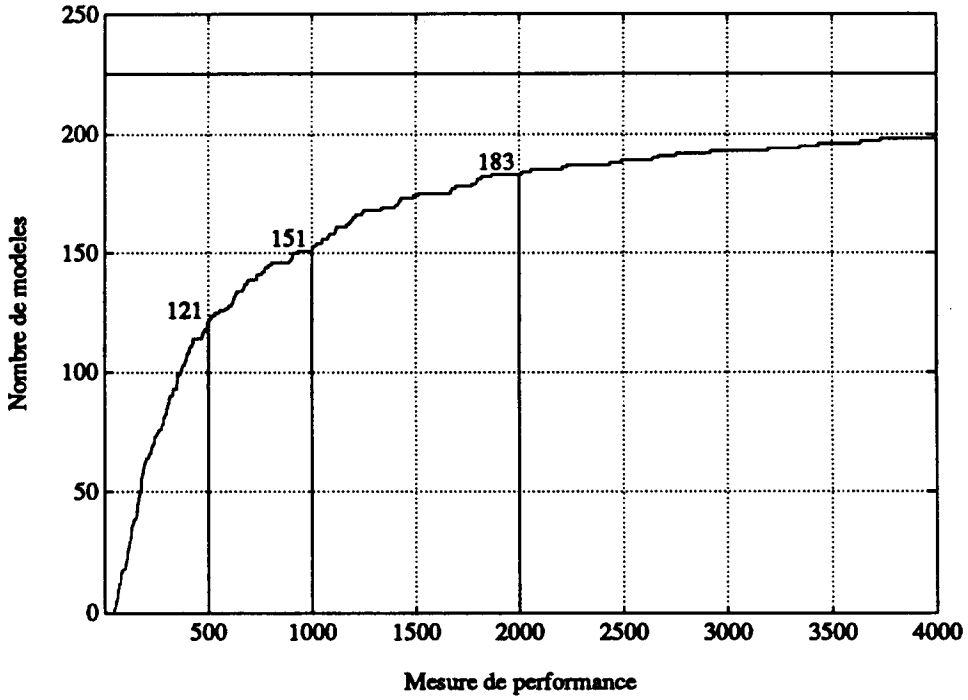


Fig. XIV-8: Performance de l'ensemble des modèles soumis à la commande K_p.

Nous pouvons aussi constater sur ces figures que la commande optimisant la mesure de performance pour le système nominal, s'avère être étonnamment robuste. Nous avons finalement 151 modèles ayant un niveau de performance acceptable (contre 71 avec la commande K_a déterminée par placement de valeurs et vecteurs propres). Par contre pour des modèles relativement éloignés du modèle nominal, le niveau de performance se dégrade, certains modèles ayant, en boucle fermée, des pôles mal amortis.

Nous voyons sur cet exemple que les lois de commande déterminées par optimisation d'un critère de performance quadratique, conduisent naturellement à une bonne robustesse.

Néanmoins, nous allons voir qu'une amélioration de cette commande, en prenant en compte les contraintes de robustesse, est encore possible.

XIV.5.3 Amélioration de la robustesse

Essayons maintenant d'évaluer les possibilités de gain en robustesse, par rapport à la commande optimale en performance, qui comme nous l'avons vu est déjà relativement robuste. Pour cela nous avons calculé, pour chacune des 21 lois de commande déterminées, la valeur de la mesure de performance en boucle fermée, pour l'ensemble des 225 modèles disponibles. Nous avons ensuite déterminé, pour chaque valeur de λ, le nombre de modèles ayant une mesure de performance fixée. Ces résultats sont présentés sur la figure XIV-9, où nous avons tracés, pour différentes valeurs de la mesure de performance, l'évolution du nombre de modèles assurant ce niveau de performance en fonction de λ.

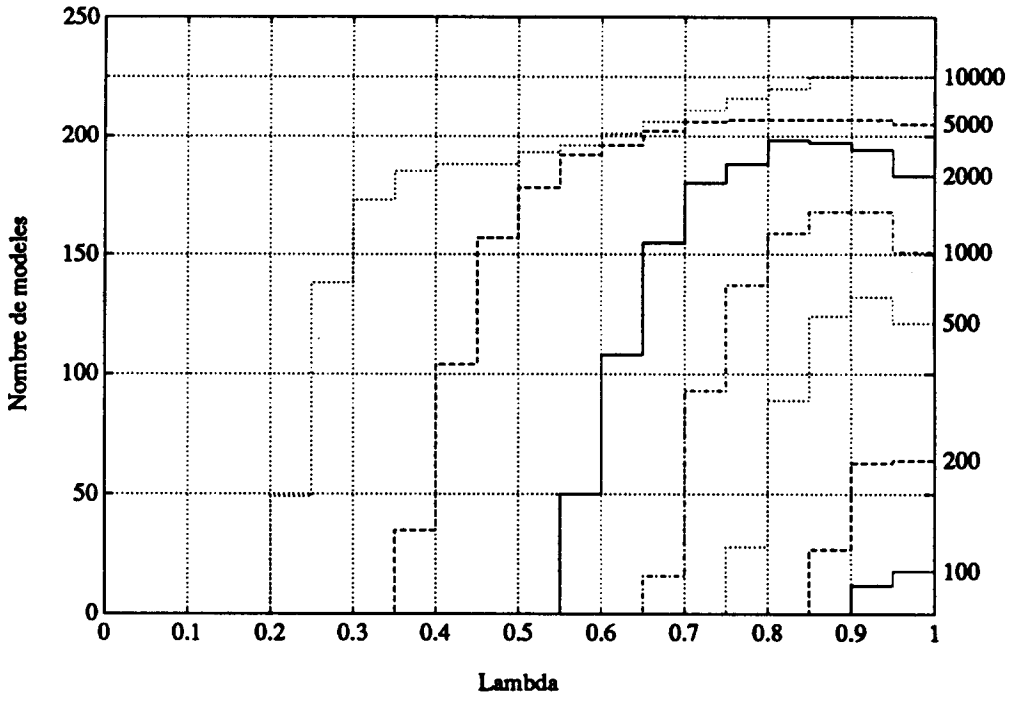


Fig. XIV-9: Performance de la commande en boucle fermée en fonction de λ

Nous voyons sur cette figure que lorsque λ décroît, le nombre de modèles ayant un niveau de performance acceptable ($J_{perf} < 1000$) augmente, puis décroît rapidement. En revanche, le nombre de modèles ayant une mesure de performance très faible ($J_{perf} < 100$) décroît dès que λ diminue. Nous voyons donc sur ce graphique, que les gains en robustesse (augmentation du nombre de modèles ayant un niveau de robustesse acceptable), s'accompagnent d'un niveau de performance moins bon.

Pour $\lambda = 0.9$, nous avons un nombre maximal de modèles ayant une mesure de robustesse inférieure à 200, ce qui nous apparaît comme un compromis très acceptable. La commande déterminée avec cette valeur de λ, notée K_s vaut

$$K_s = \begin{bmatrix} 35.22 & 4.95 & -0.20 & 3.28 & -0.04 & 8.89 \\ -38.89 & -5.63 & -16.33 & -3.53 & -2.66 & -1.47 \end{bmatrix} \qquad \text{(XIV.17)}$$

La mesure de performance du modèle nominal avec cette commande est $J_{\text{perf}} = 184.5$. Les pôles en boucle fermée du modèle nominal sont donnés dans le tableau ci-dessous. Les réponses temporelles aux deux échelons sont représentées figure XIV-20. Au niveau des pôles en boucle fermée et au niveau de l'amplitude des coefficients de la matrice K_s, cette commande est finalement assez proche de la commande optimale en performance.

Valeur propre	Amortissement
-1.2788±1.3858i	0.6782
-0.4063±0.3362i	0.7705
-0.3559±0.1914i	0.8807
-25.1466	1.0000
-0.5516	1.0000

Nous pouvons évaluer plus précisément les gains de robustesse en comparant la répartition du nombre de modèles en fonction d'un niveau de performance donnée. Sur la figure XIV-10, nous avons représenté les niveaux de performance atteints pour les 225 modèles avec les deux commandes considérées. Nous voyons que pour une mesure de performance faible ($J_{\text{perf}} < 500$), cette nouvelle commande est plutôt moins bonne que la commande optimale en performance, et que pour des valeurs de la mesure performance plus élevées, le nombre de modèles ayant ce niveau de performance augmente très sensiblement.

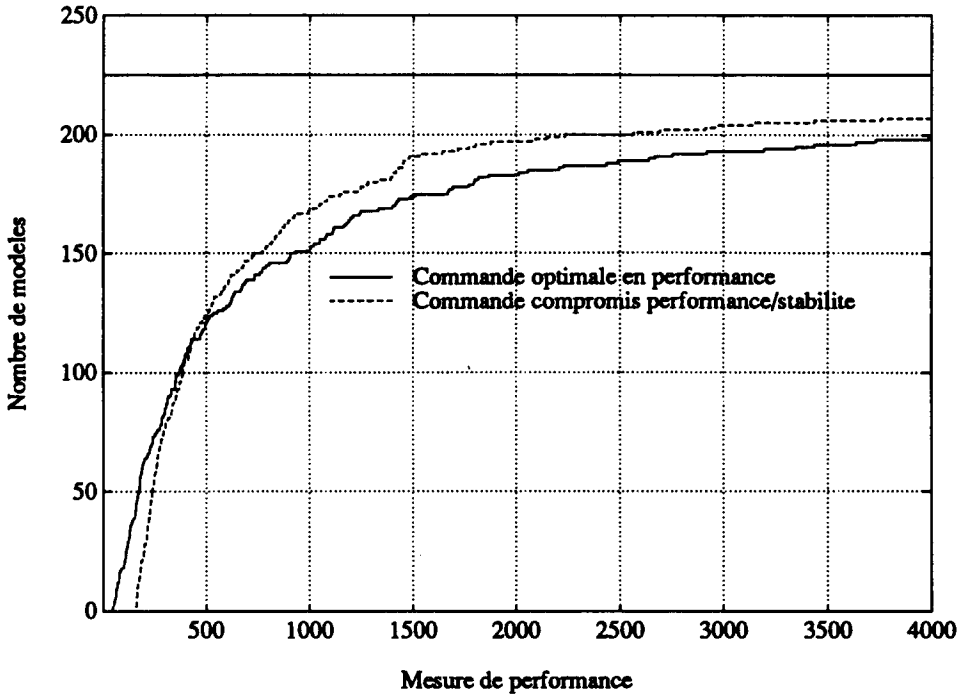


Fig. XIV-10: Performance de l'ensemble des modèles soumis aux commandes K_p et K_s.

Sur la figure XIV-30, nous avons représenté les pôles en boucle fermée de l'ensemble des modèles soumis à la commande K_s. Nous voyons sur ce graphique que les pôles sont nettement plus regroupés que pour la commande optimale en performance.

Finalement, nous voyons que cette commande bien que plus robuste, dégrade sensiblement les performances minimales possibles. Le gain en robustesse s'est donc produit au détriment d'excellentes performances. Comme cette méthode ne prend pas en compte la structure des perturbations pour améliorer la robustesse de la loi de commande, nous allons voir qu'il est possible, d'améliorer cette robustesse, grâce à la technique de synthèse de commande robuste PRCBI.

XIV.6 Commande robuste PRCBI

Nous avons appliqué dans cette section la méthodologie permettant de rendre, en boucle fermée, la qualité d'identification des paramètres incertains du système la plus mauvaise possible. Comme dans notre cas les paramètres incertains considérés sont des paramètres fictifs représentant le passage du modèle nominal aux modèles extrêmes, cette commande aura tendance à rendre le système en boucle fermée, insensible à tout changement de modèle.

XIV.6.1 Détermination des commandes

Nous avons déterminé, pour 19 valeurs de λ comprises entre 0 et 0.0001, le retour de sortie optimisant le critère mixte

$$J = \lambda J_{\text{perf}} + (1 - \lambda) J_{\text{rob}} \qquad \text{(XIV.18)}$$

où J_{rob} représente la mesure de robustesse liée à la plus mauvaise qualité d'identification des paramètres incertains.

Dans un premier temps, nous avons analysé les résultats obtenus avec ces commandes. Sur la figure XIV-11, nous avons représenté l'évolution des mesures de performance et de robustesse en fonction de λ. Nous voyons qu'il est possible de diminuer fortement la mesure de robustesse sans beaucoup dégrader les performances du modèle nominal. Nous pouvons donc par cette technique, espérer des gains importants en robustesse sans grande dégradation de performance.

XIV.6.2 Evaluation des gains en robustesse

Comme nous l'avons fait pour la commande robuste en stabilité, essayons maintenant d'évaluer les possibilités de gain en robustesse, par rapport à la commande K_p minimisant la mesure de performance pour le modèle nominal. Pour cela nous avons calculé, pour chacune des 19 lois de commandes déterminées, la valeur de la mesure de performance pour l'ensemble des 225 modèles disponibles. Nous avons ensuite déterminé le nombre de modèles ayant différents niveaux de performance déterminé en fonction de λ, . Ces résultats sont présentés sur la figure XIV-12.

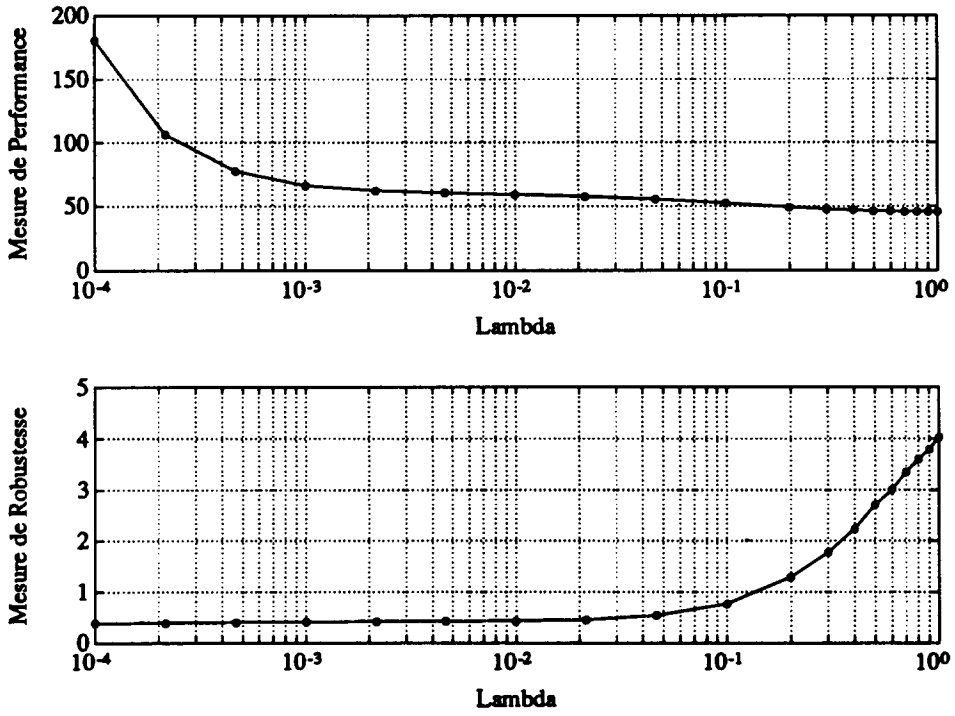


Fig. XIV-11: Evolution des mesures de performance et robustesse.

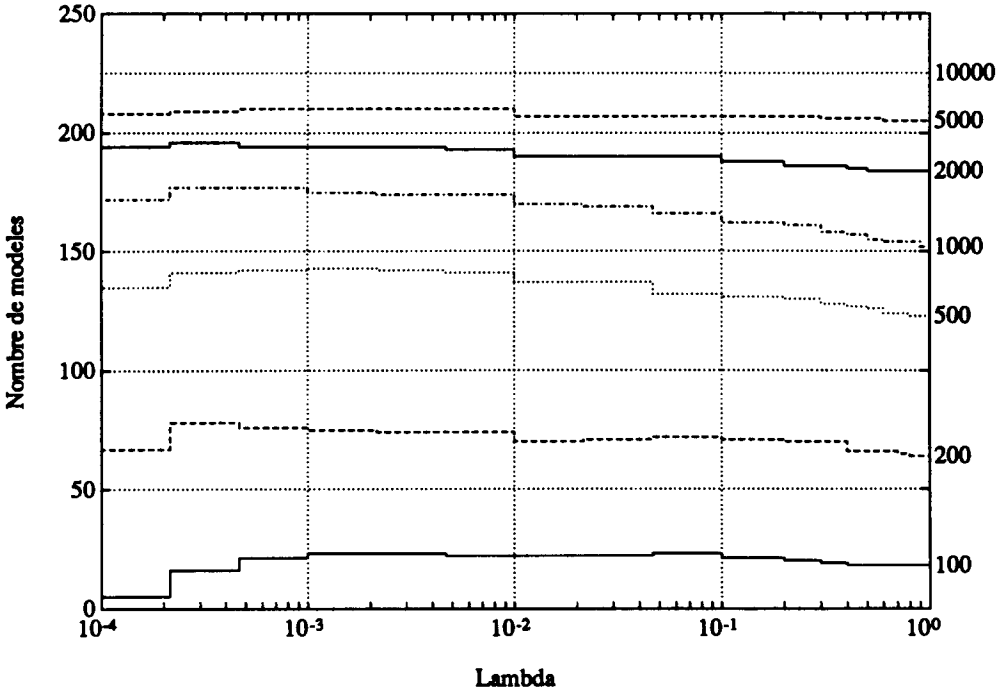


Fig. XIV-12: Performance de la commande en boucle fermée en fonction de λ

Nous voyons sur ce dernier graphique que lorsque λ diminue, le nombre de modèles ayant un niveau de performance donné, augmente, *quelle que soit la valeur de la mesure de performance considérée*. Ainsi, cette technique permet d'améliorer la robustesse, sans pour autant détériorer les performance moyennes de l'ensemble des modèles.

La commande déterminée pour $\lambda = 0.001$ nous semble être celle qui optimise le compromis entre une bonne robustesse et de bonnes performances. Le gain de retour de sortie déterminé pour cette valeur de λ, noté K_g vaut

$$K_g = \begin{bmatrix} 25.58 & 5.18 & -0.19 & 2.79 & -0.04 & 0.71 \\ -9.76 & 0.19 & -17.59 & -0.91 & -2.76 & -0.73 \end{bmatrix} \qquad \text{(XIV.19)}$$

La simulation temporelle obtenue avec cette commande est donnée figure XIV-21. Les réponses temporelles obtenues grâce à cette commande sont très bonnes et nous pouvons aussi remarquer que l'amplitude des coefficients de la matrice K_g sont faibles, ce qui répond à un des objectifs recherchés. La mesure de performance du modèle nominal avec cette commande est $J_{\text{perf}} = 66.31$. Les pôles en boucle fermée du modèle nominal sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Valeur propre	Amortissement
-0.5336±0.3781i	0.8159
-0.4698±0.2754i	0.8627
-2.2044	1.0000
-1.0913	1.0000
-20.7087	1.0000
-0.3126	1.0000

Les gains en robustesse peuvent être évalués en comparant les résultats obtenus avec cette commande à ceux donnés par les commandes K_p, optimale en performance, et K_s, compromis performance/stabilité. Ces résultats sont représentés figure XIV-13.

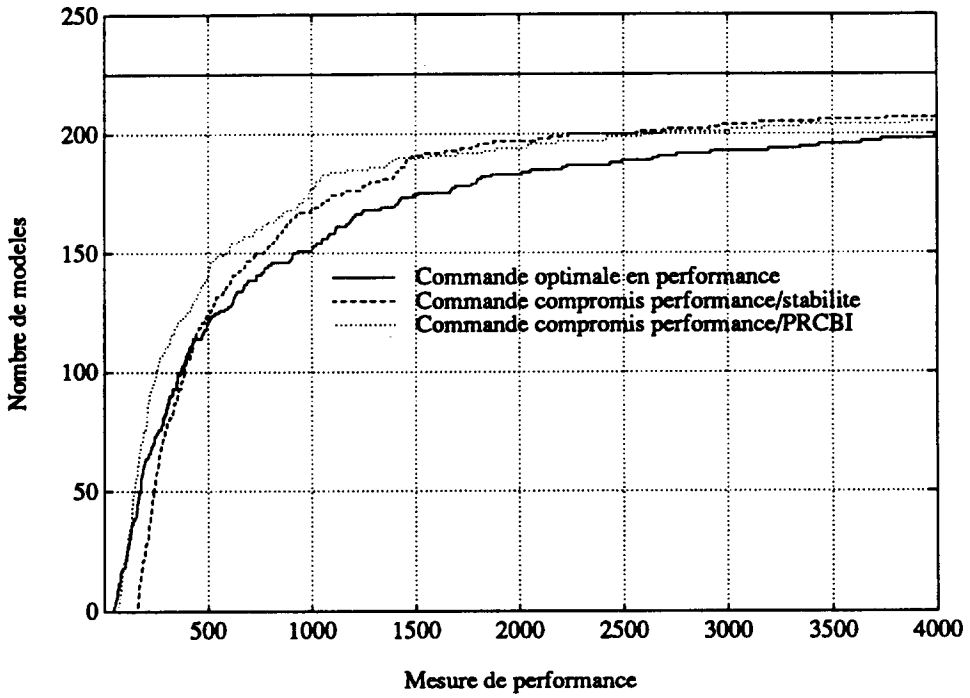


Fig. XIV-13: Performance de l'ensemble des modèles soumis aux commandes K_p, K_s et K_g.

Cette commande permet donc des gains notables de robustesse sans pour autant dégrader les performances minimales possibles. Les pôles en boucle fermée de chacun des 225 modèles soumis à cette commande sont représentés figure XIV-31. Nous voyons de plus que les pôles de tous les modèles sont très "concentrés", ayant tous un amortissement faible.

Cette commande possède donc l'ensemble des propriétés que nous souhaitons :

- ☐ Faibles gains de la matrice de retour.
- ☐ Pôles en boucle fermée correctement amortis.
- ☐ Mesure de performance très faible.
- ☐ Excellente robustesse.

XIV.7 Conclusions

Sur l'application que nous venons d'étudier, nous avons d'abord abordé le problème lié à la mise en adéquation des spécifications et des outils disponibles pour traiter le problème (mesure de performance, choix du modèle nominal, paramètres fictifs).

Nous avons ensuite appliqué chacune des méthodes permettant d'obtenir une commande robuste. Nous avons vu que la méthode de placement de pôles robuste ne permettait pas d'atteindre un niveau de performance acceptable.

Nous avons ensuite constaté que l'optimisation de la mesure de performance conduit à une commande ayant d'assez bonnes propriétés de robustesse. La technique de robustesse à la stabilité permet d'améliorer la robustesse de cette dernière loi de commande mais ce gain s'effectue au détriment d'un bon niveau de performance de l'ensemble des commandes.

En revanche, la technique PRCBI, prenant en compte explicitement les variations paramétriques, permet d'améliorer très significativement la robustesse de la loi de commande optimale en performance, sans pour autant beaucoup dégrader le niveau de performance. De plus, cette commande permet d'obtenir une matrice de retour avec des coefficients faibles, et conduit vers un système en boucle fermé très bien amorti. Cette approche nous paraît donc bien adaptée à la synthèse de loi de commande robustes aux variations paramétriques.

XIV.8 Planches

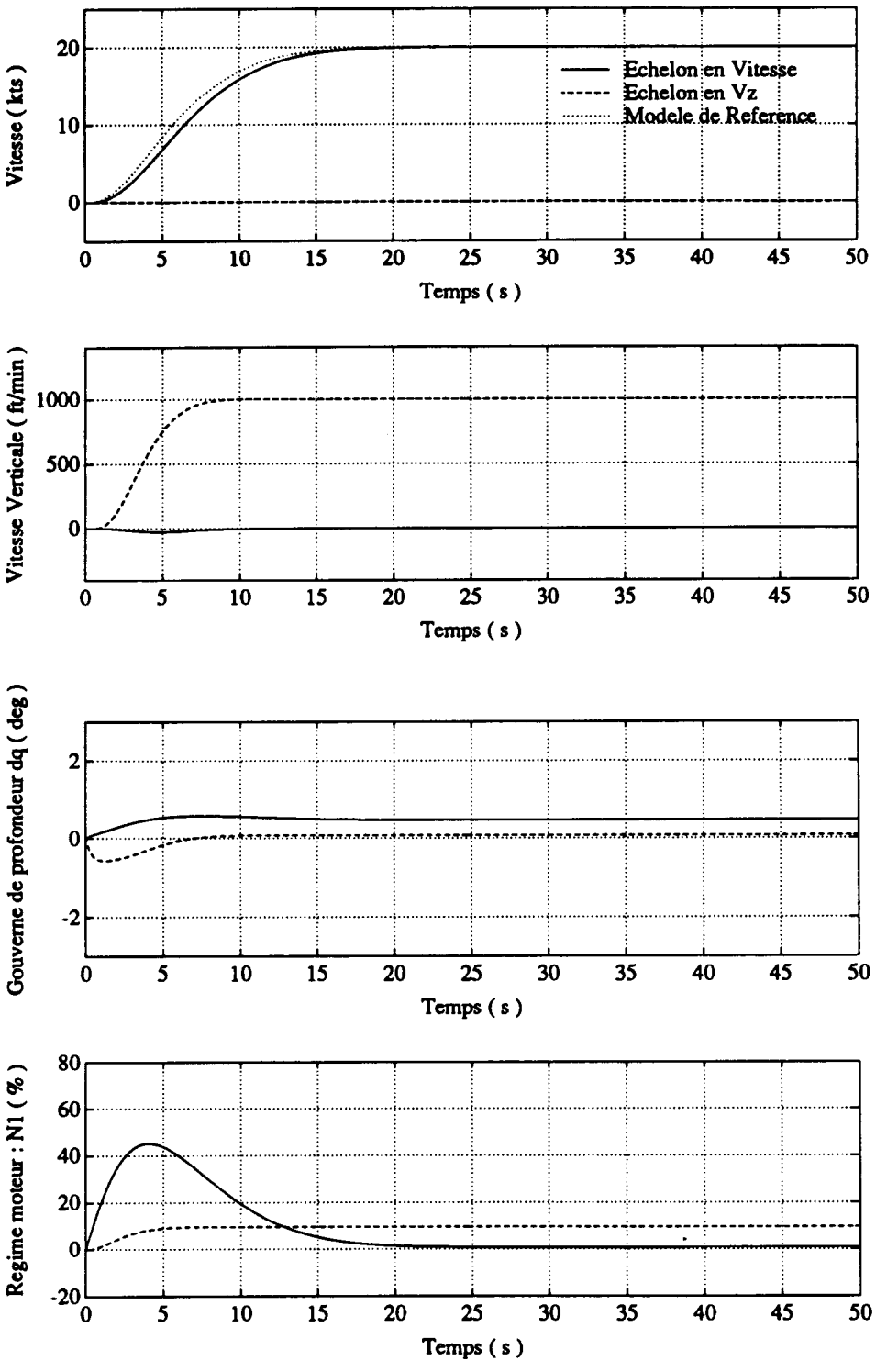


Fig. XIV-14: Placement de valeurs et vecteurs propres (découplage modes/sorties). $J_{perf} = 888.9$.

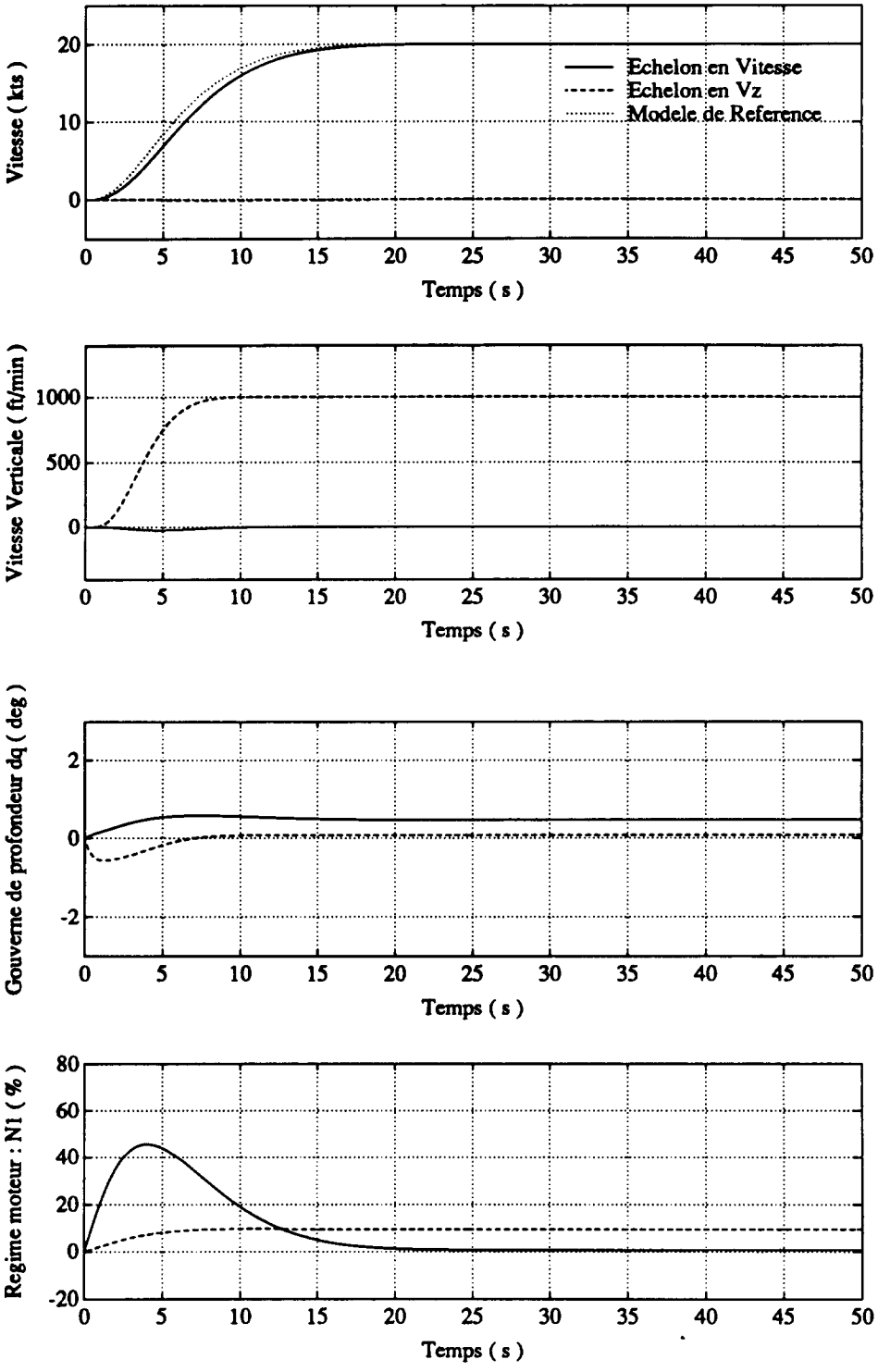


Fig. XIV-15: Commande K_a. Placement de valeurs et vecteurs propres (découplage modes rapides/gouverne moteur). $J_{\text{perf}} = 793.0$.

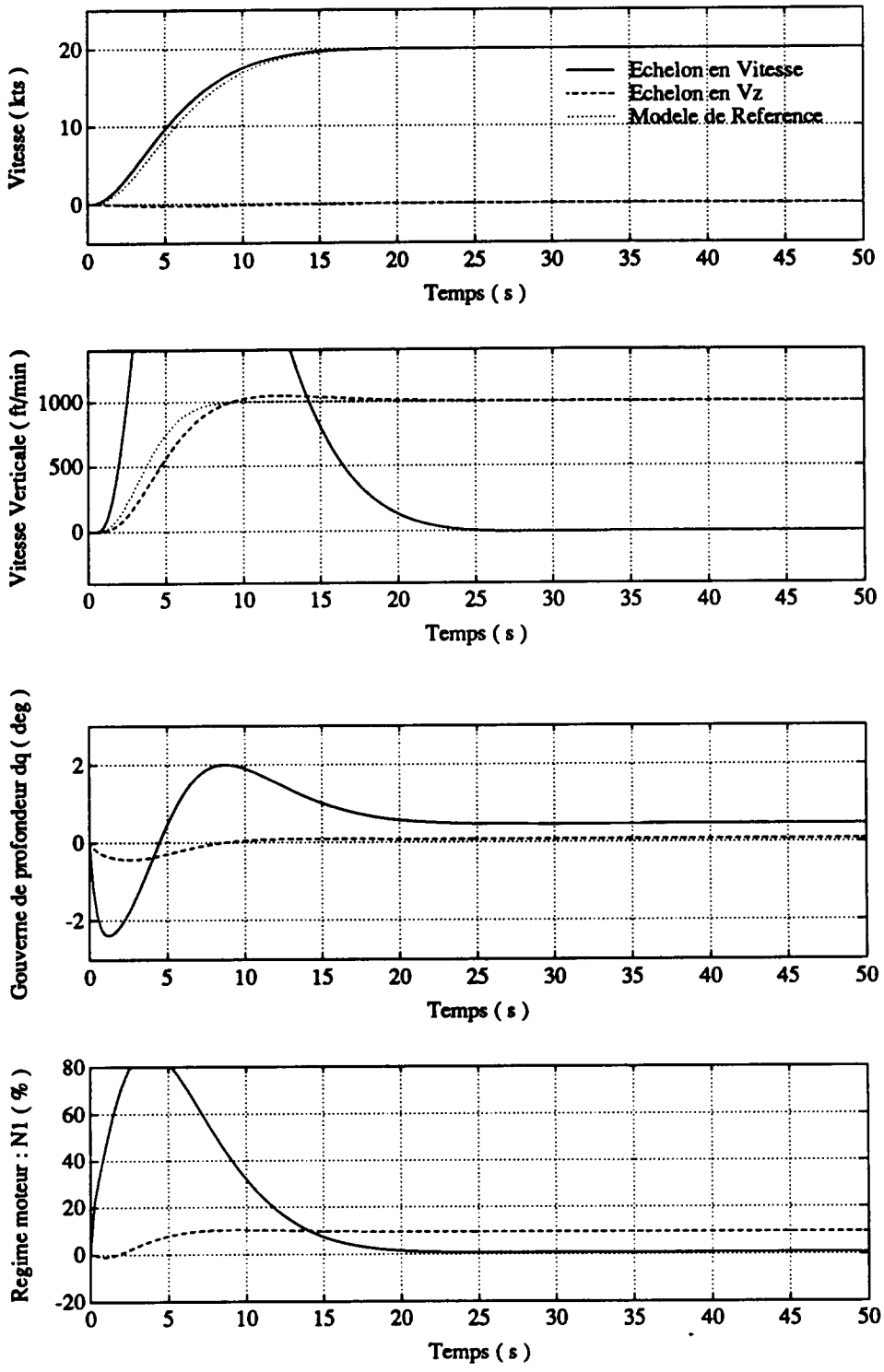


Fig. XIV-16: Placement robuste de pôles. Choix de pôles "logique". $J_{perf} = 9.17 \times 10^5$.

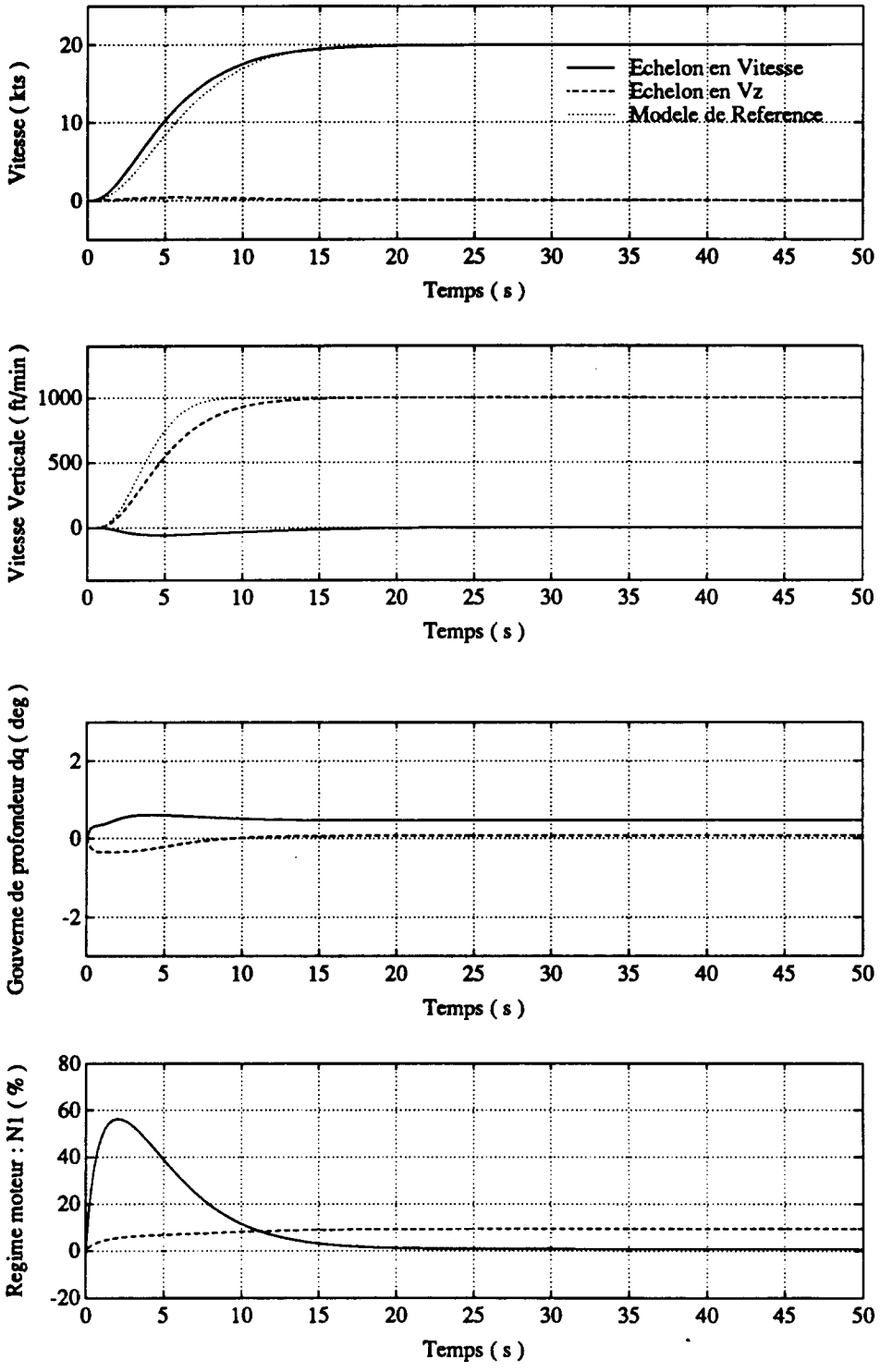


Fig. XIV-17: Commande K_e. Placement robuste de pôles. Choix de pôles minimisant la mesure de performance. $J_{\text{perf}} = 3\,022$.

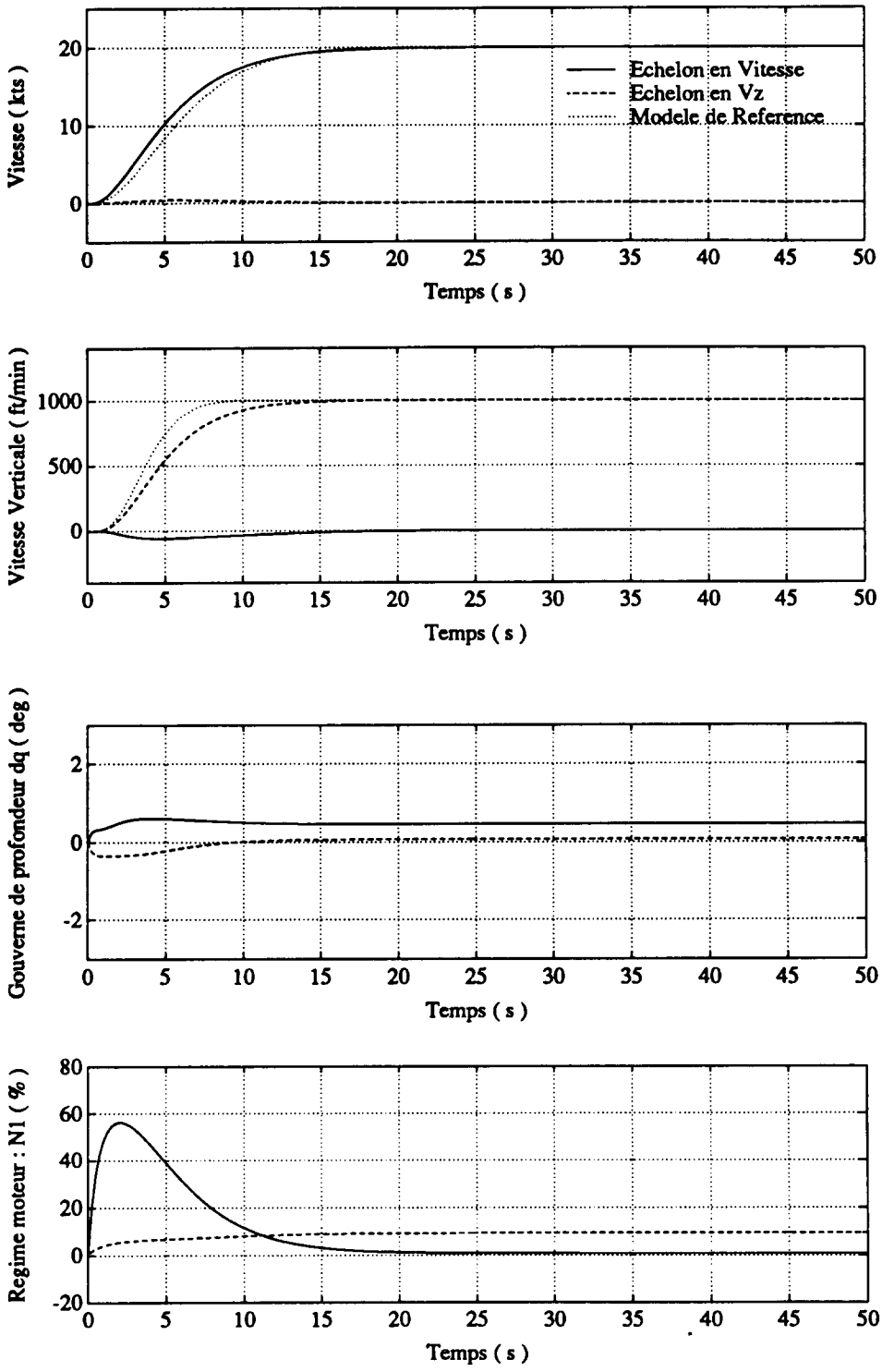


Fig. XIV-18: Commande K_e avec observateur. $J_{\text{perf}} = 3\,022$.

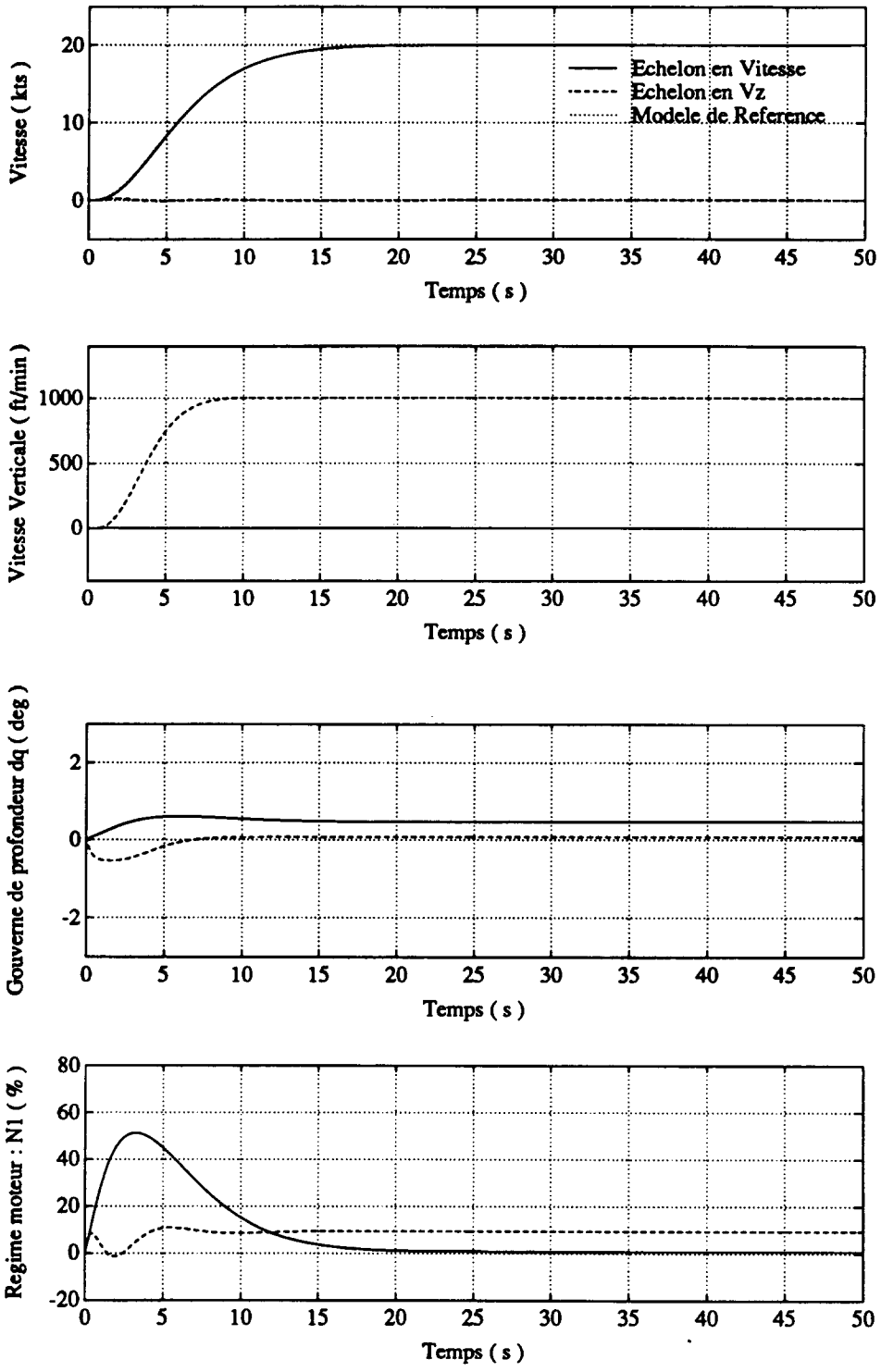


Fig. XIV-19: Commande K_p optimale en performance. $J_{\text{perf}} = 45.6$.

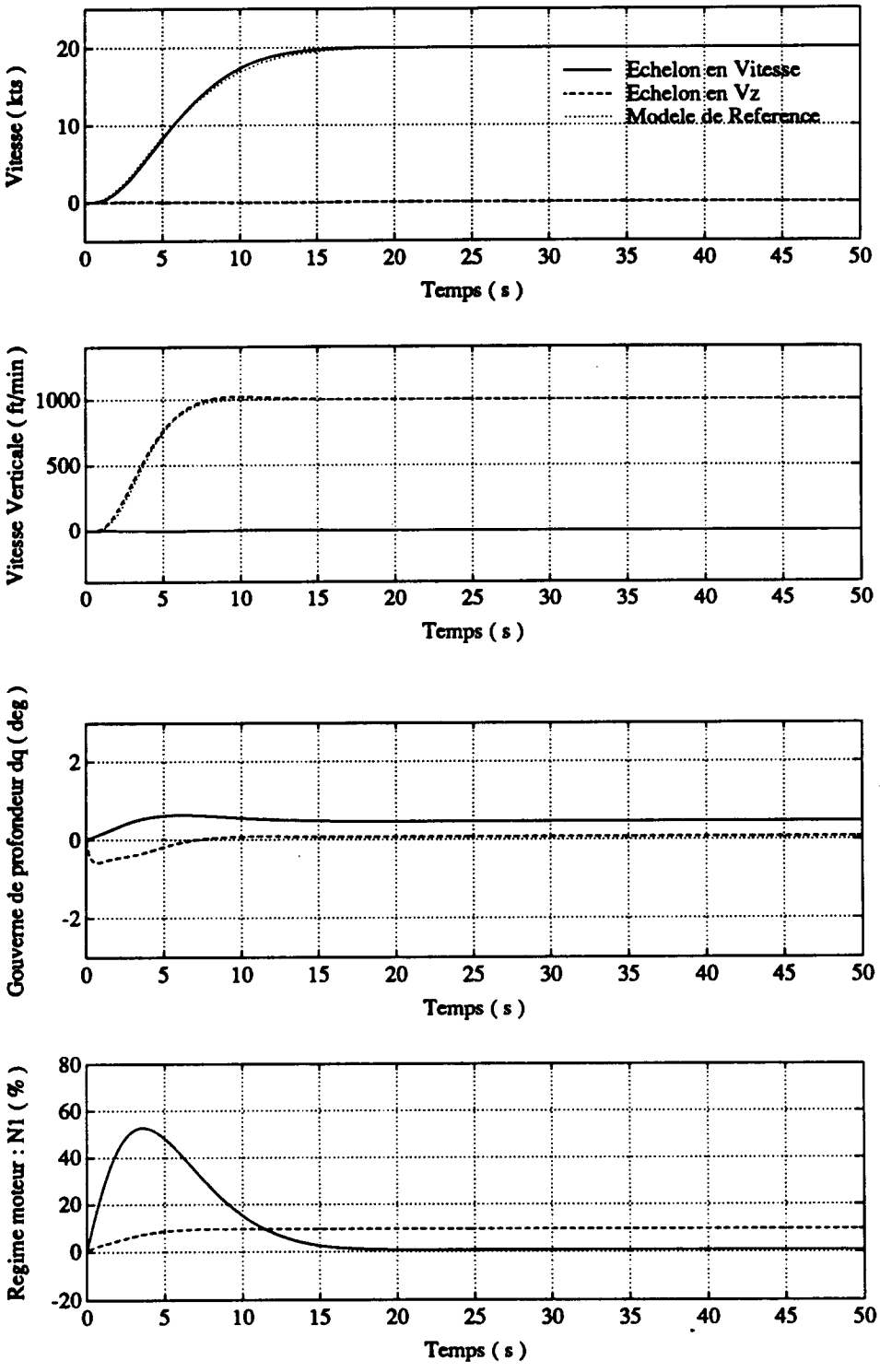


Fig. XIV-20: Commande K_s. Compromis performance/stablité. $J_{\text{perf}} = 184.5$

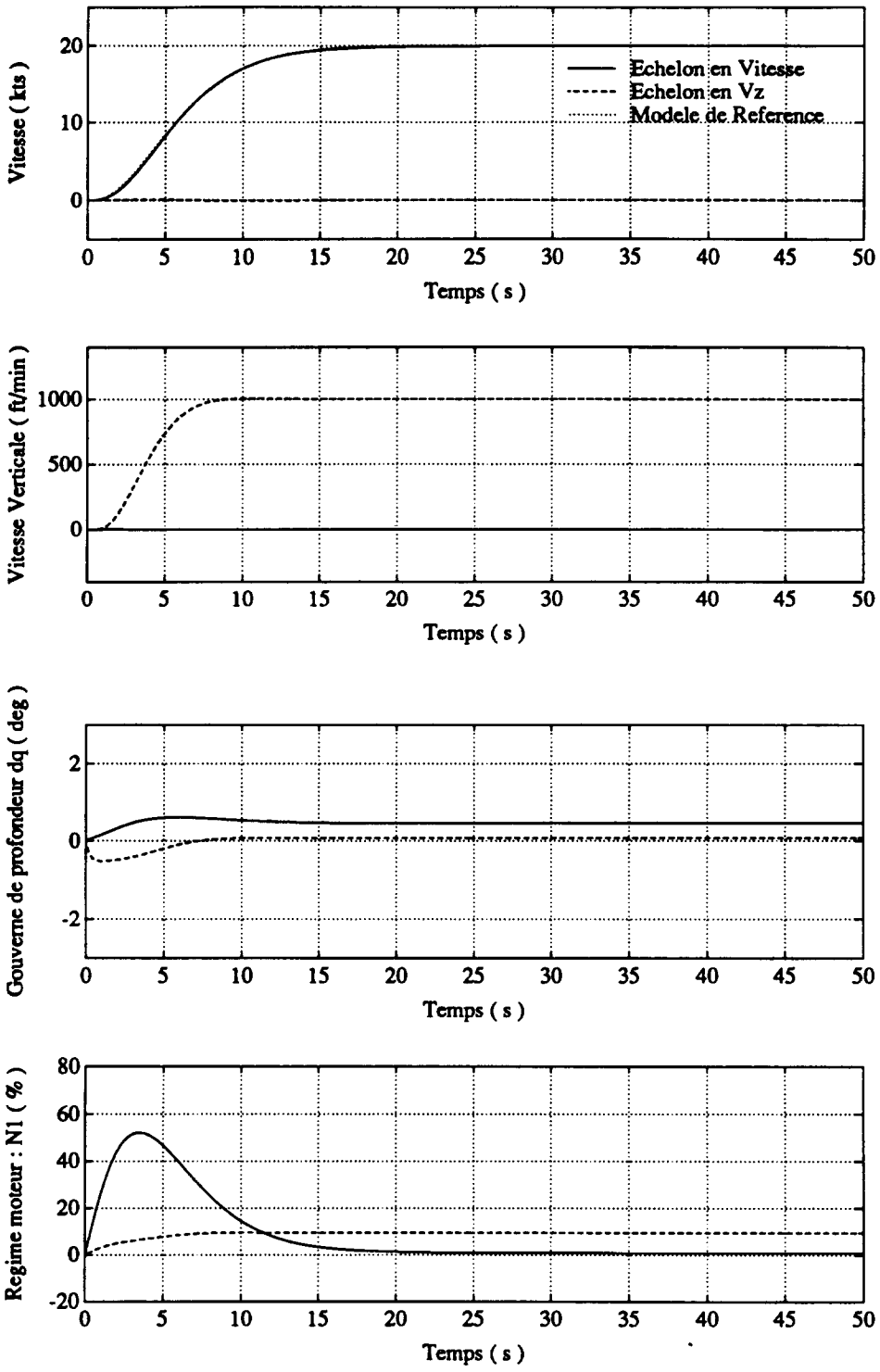


Fig. XIV-21: Commande K_g. Compromis performance/PRCBI. $J_{\text{perf}} = 66.31$.

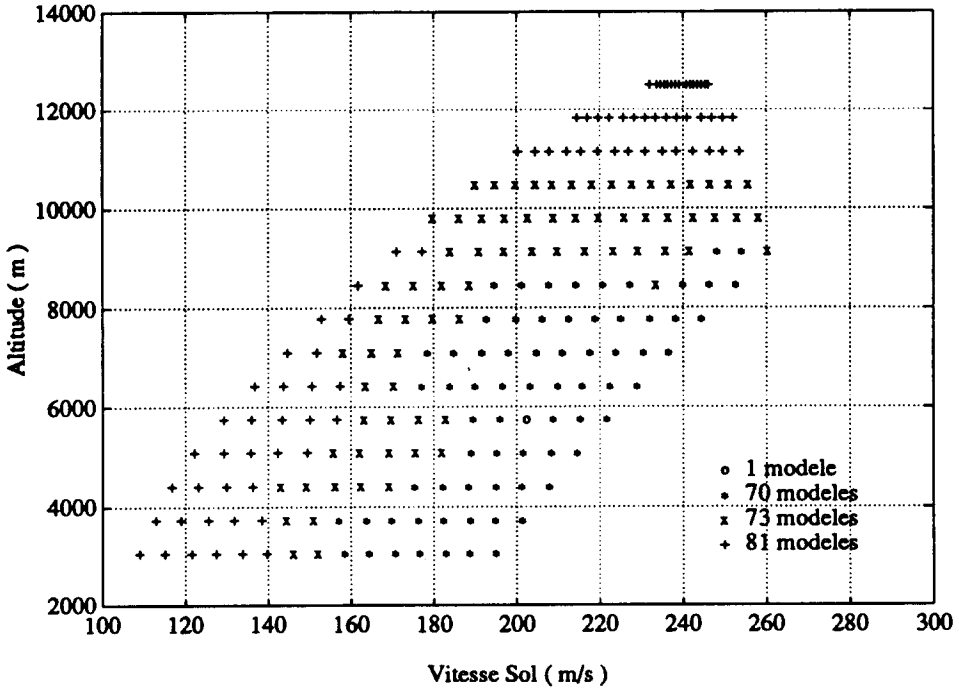


Fig. XIV-22: Commande K_a. Placement de valeurs et vecteurs propres.

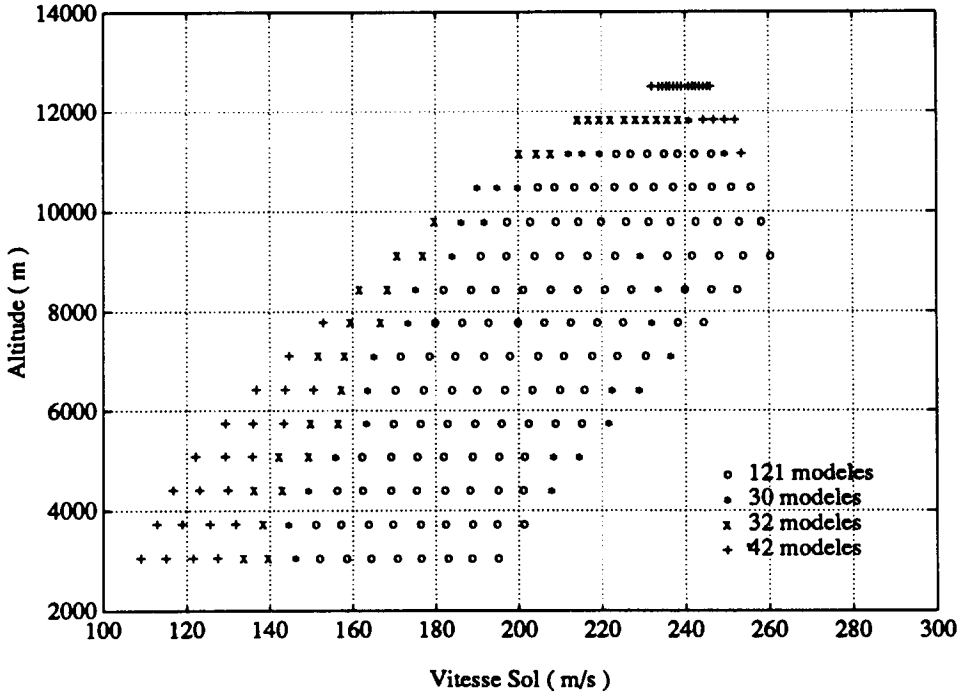


Fig. XIV-23: Commande K_p optimisant le critère de performance.

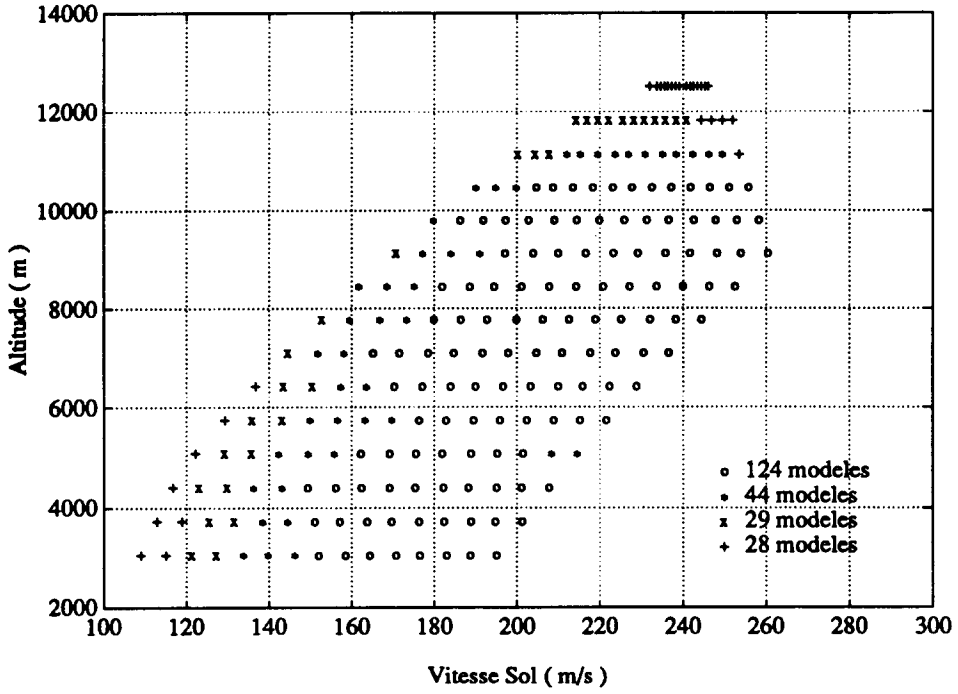


Fig. XIV-24: Commande K_s compromis performance/stabilité.

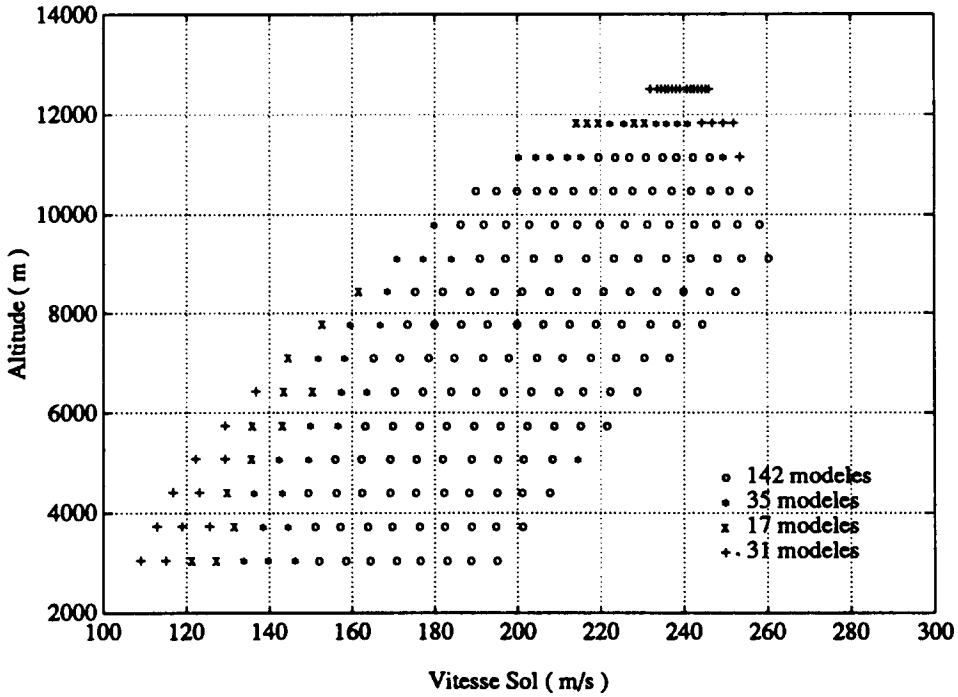


Fig. XIV-25: Commande K_g compromis performance/PRCBI.

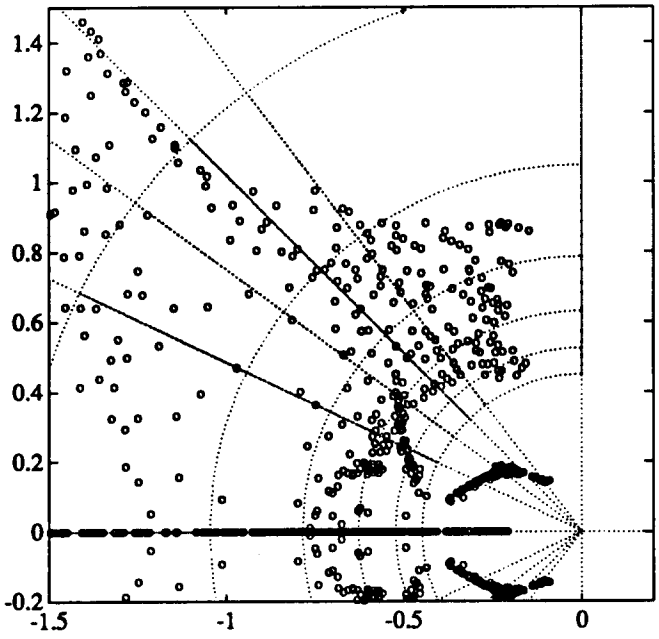


Fig. XIV-26: Commande K_a. Placement de valeurs et vecteurs propres.

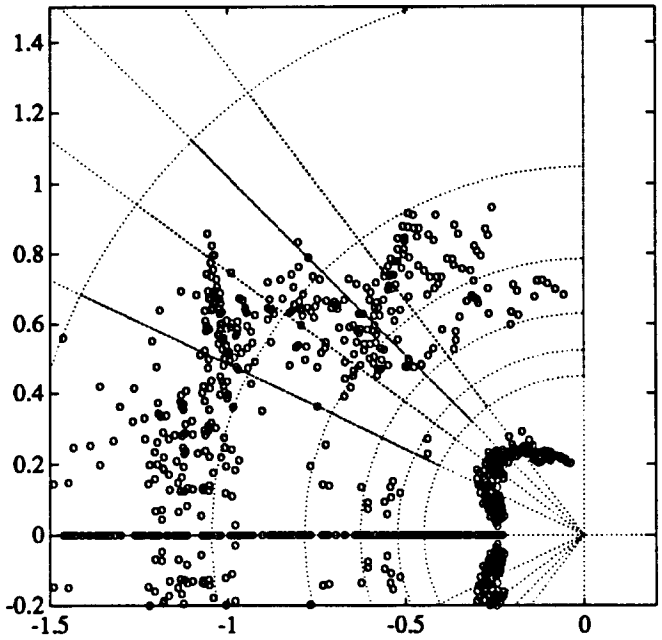


Fig. XIV-27: Placement robuste de valeurs propres (Mauvais choix de pôles).

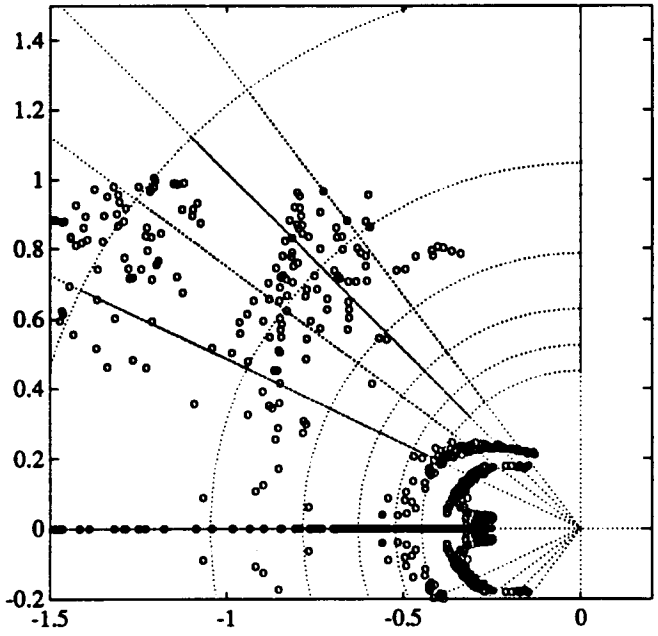


Fig. XIV-28: Commande K_e. Placement robuste de pôles minimisant les performances.

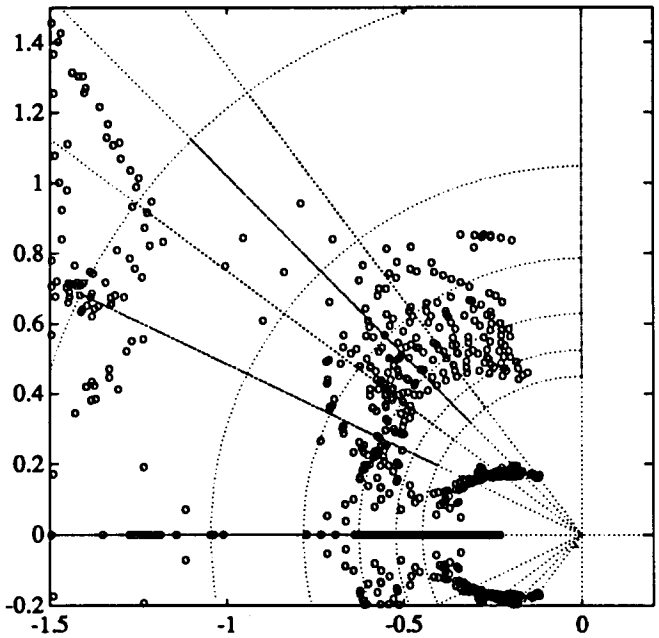


Fig. XIV-29: Commande K_p optimale en performance.

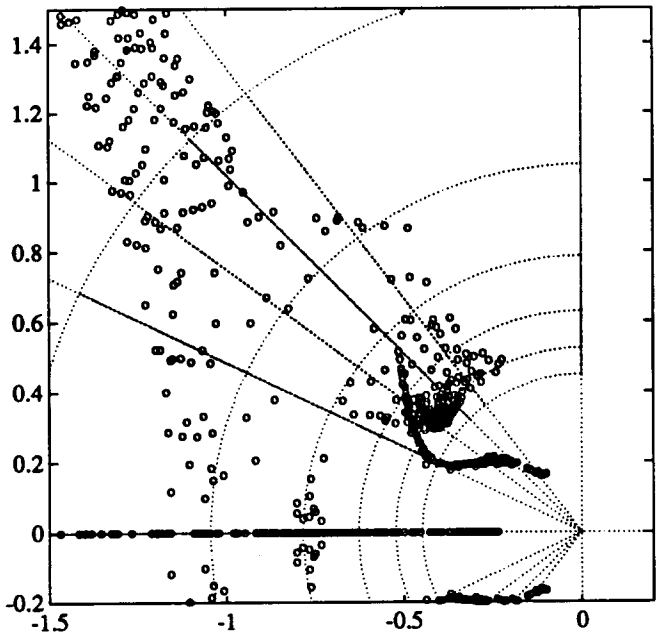


Fig. XIV-30: Commande K_s. Compromis performance/stabilité.

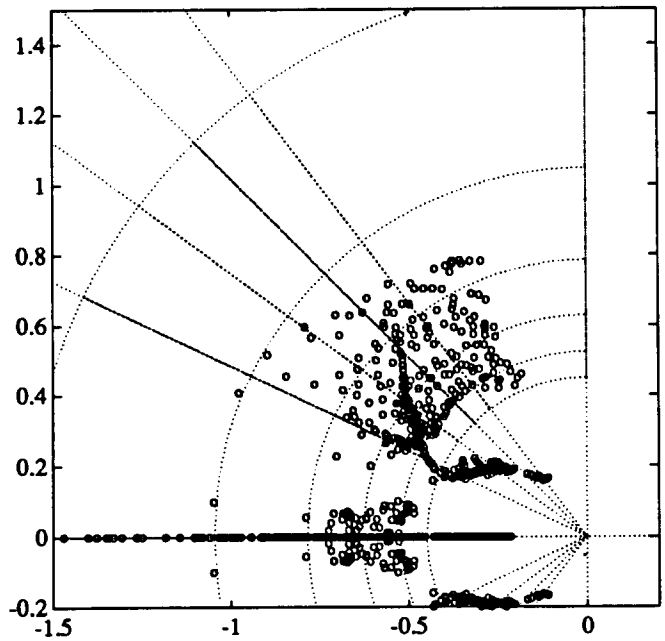


Fig. XIV-31: Commande K_g. Compromis performance/PRCBI.

Conclusions et perspectives.

1 Résumé de la contribution

Le travail que nous présentons représente une contribution dans le domaine de la conception de lois de commande robustes aux variations paramétriques pour les systèmes multivariables discrets. Nous nous sommes intéressés au cas où les paramètres variables évoluent localement autour de valeurs nominales supposées connues. Par l'étude de quatre méthodes différentes, dont une originale, nous présentons dans ce travail différents outils utilisables pour la conception de lois de commandes de type retour de sortie (statique ou dynamique) robustes aux variations paramétriques.

Dans la première partie, nous avons considéré trois notions différentes de robustesse :

1. La robustesse par invariance des pôles.
2. La robustesse par amélioration des marges de stabilité.
3. La robustesse par invariance d'un critère de performance.

Pour chacune de ces notions, nous avons décrit une *mesure de robustesse* permettant de qualifier la robustesse en boucle fermée des systèmes multivariables discrets. Ensuite nous avons considéré les algorithmes de synthèse de lois de commande robustes et performantes. L'application à un exemple académique nous a permis de valider les concepts de robustesse ainsi que les algorithmes développés.

Il apparaît notamment que la méthode de placement robuste de pôles ne permet pas d'obtenir simplement de bonnes performances car le seul choix d'un ensemble de pôles en boucle fermée ne suffit pas, pour les systèmes multivariables, à spécifier complètement de bonnes performances. De plus, nous avons vu que la synthèse de commande robuste en stabilité n'est possible actuellement que dans le cas de perturbations non structurées. Nous avons aussi remarqué que la mise en œuvre pratique de l'algorithme fondé sur l'invariance d'un critère de performance s'avère très délicate, car l'optimisation de la seule mesure de robustesse est un problème numériquement complexe, demandant de très nombreux calculs.

Dans la deuxième partie, nous avons détaillé un nouvelle approche, nommée PRCBI, permettant la synthèse de lois de commande robustes aux variations paramétriques pour les systèmes multivariables discrets. Cette technique est fondée sur la qualité de l'identification bayesienne, en régime asymptotique, des paramètres incertains du système. Plus cette qualité sera mauvaise, plus le comportement du système, d'un point de vue entrées-sorties, sera insensible à des variations de ces paramètres, propriété que nous appelons robustesse.

Nous avons d'abord détaillé les calculs nous permettant de déterminer cette nouvelle mesure de robustesse. Nous pouvons, grâce à cette mesure, définir des directions de robustesse minimale et maximale. Cet outil d'analyse s'avère particulièrement bien adapté pour l'étude des directions paramétriques rendant le système très ou peu sensible à des perturbations. Afin de pouvoir envisager une méthode simple de synthèse de lois de commande robustes fondées sur cette nouvelle approche, nous nous sommes attachés à simplifier l'écriture de la mesure

de robustesse. Nous avons vu que cette simplification était possible si certaines hypothèses étaient réalisées, et notamment si le système dispose de suffisamment de mesures pour pouvoir observer les perturbations paramétriques considérées.

Après avoir établi l'algorithme de synthèse de lois de commande robustes aux variations paramétriques, nous avons essayé de comparer d'un point de vue mathématique, les différentes méthodologies employées. Nous avons établi, dans certains cas, l'équivalence entre la méthode PRCBI et l'optimisation des marges de stabilité. De plus, l'optimisation des marges de stabilité conduit aussi à un amortissement optimal du système. Dans un autre cas particulier, nous avons établi un lien théorique entre l'insensibilité des performances et la plus mauvaise qualité d'identification des paramètres incertains du système. L'application de cette nouvelle méthode sur l'exemple académique déjà considéré a validé la nouvelle technique proposée, ainsi que les liens théoriques établis entre ces différentes approches.

Dans la dernière partie, nous avons appliqué les différents outils développés sur un exemple réaliste, où le problème de la robustesse aux variations paramétrique est particulièrement pertinent. Pour pouvoir appliquer ces méthodologies, nous avons élaboré une mesure de performance permettant de prendre en compte les spécifications exprimées sous la forme du temps de réponse et du dépassement souhaités pour la réponse à un échelon. Les résultats obtenus par application des techniques de commande robuste donnent finalement des gains importants en robustesse, sans pour autant dégrader de manière trop significative les performances du système.

La contribution de notre travail a donc particulièrement porté sur les points suivants

- ☐ L'amélioration des algorithmes de synthèse de loi de commande robuste permettant la synthèse de retours de sortie prenant en compte simultanément des contraintes de performance et de robustesse.
- ☐ La simplification de l'écriture PRCBI permettant d'envisager une synthèse de loi de commande simplifiée, et l'étude des cas particuliers où cette simplification est possible.
- ☐ La comparaison des différentes méthodes proposées, et plus particulièrement l'étude des liens théoriques entre la robustesse liée a la qualité d'identification des paramètres incertains, la stabilité, l'amortissement optimal des systèmes, et l'invariance des performances,
- ☐ La mise en œuvre pratique sur un exemple réaliste des différentes techniques développées permettant de valider les concepts et les outils développés.

En résumé, nous avons montré que la prise en compte, dès la conception de la loi de commande, des contraintes sur la robustesse aux variations paramétriques, permettait l'élaboration de commandes très robustes. Ces approches, et plus particulièrement la méthode PRCBI, permettent donc l'amélioration des techniques de synthèse optimales, par l'introduction d'un terme de robustesse aux variations paramétriques.

Selon le problème considéré, en fonction des contraintes ou des objectifs souhaités pour le système, l'utilisation de l'une ou l'autre des méthodes développées permettra la prise en compte, par une mesure de robustesse adaptée, d'exigences différentes.

2 Perspectives

Les résultats théoriques et numériques présentés ne prétendent nullement résoudre tous les problèmes liées à la robustesse des systèmes multivariables. S'ajoutant à la liste des résultats déjà acquis dans ce domaine, ils apportent un éclairage nouveau sur la manière de traiter le cas des systèmes discrets soumis à des variations paramétriques locales autour de valeurs nominales.

La méthode de placement robuste de pôles utilise, pour optimiser la robustesse, les degrés de libertés dûs aux vecteurs propres du système. Nous avons vu que le choix de pôles en boucle fermée ne suffit pas à définir des performances. Ne pas utiliser les vecteurs propres uniquement pour la robustesse permettrait de réserver quelques degrés de libertés pour des exigences de découplage ou de performance supplémentaires. Cette méthode pourrait ainsi conduire directement à une commande performante et robuste.

Nous avons vu qu'il était possible de déterminer des marges de stabilité dans les cas de variations paramétriques, mais nous n'avons pas pu utiliser celles-ci pour l'élaboration d'une technique de synthèse de loi de commande robuste. Des recherches plus approfondies devraient sûrement permettre le développement d'une technique de synthèse de loi de commande utilisant l'information sur la structure de perturbations.

D'autre part, les algorithmes de synthèse de lois de commande proposés ne permettent pas une résolution analytique directe des problèmes d'optimisation considérés. L'expression de certaines mesures de robustesse pouvant se mettre sous la forme d'un critère quadratique, une résolution analytique sous optimale permettant le calcul direct de commande, pourrait probablement être envisagée. Des efforts peuvent aussi porter, de manière plus générale, sur l'amélioration des algorithmes d'optimisation de recherche de la loi de commande.

Enfin, sur l'application envisagée, la pilote automatique longitudinal d'un avion de transport de type Airbus, il serait souhaitable d'étudier différentes structures de lois de commande, ce qui permettrait d'augmenter les degrés de libertés disponibles pour l'optimisation de la robustesse globale de la loi de commande.

Bibliographie

[1] M. Athans.
The matrix maximum principle.
J. Informat. Control, 11:592–606, 1968.

[2] B. R. Barmish.
Invariance of the strict hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients.
IEEE Trans. Automatic Control, 29(10):935–936, 1984.

[3] T. Bourret and M. Gauvrit.
Parameter robust control design using closed-loop identification properties.
In *Journées Nationales sur le Robustesse*, 31 Août - 1er Septembre 1992.

[4] P.G. Ciarlet.
Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.
Masson, Paris, 1988.

[5] J.C. Doyle and K. Glover.
State-space solution to standard H_2 and H_∞ control problems.
IEEE Trans. Automatic Control, 34(8):4–16, August 1989.

[6] J.C. Doyle, A. Packard, and K. Zhou.
Review of LFTs, LMIs and μ.
Proc. 30th IEEE Conf. Decision and Control, 2(1):1227–1232, Brighton U.K., 1991.

[7] J.C. Doyle and G. Stein.
Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis.
IEEE Trans. Automatic Control, 26(1):4–16, February 1981.

[8] Y.K. Foo and Y.C. Soh.
Root clustering of interval polynomials in the left-sector.
System and Control Letters, 13(3):239–245, 1989.

[9] P. M. Gahinet, A. J. Laub, and S. Kenney.
Sensitivity of the stable discrete-time lyapunov equation.
IEEE Trans. Automatic Control, 35(11):1209–1217, November 1990.

[10] M. Gauvrit.
Performances des Estimateurs Bayesiens en Boucle Ouverte et Fermée. Dualité Identification Commande.
PhD thesis, Univerité Paul Sabatier (Toulouse), 1982.

[11] M. Gauvrit.
Robustesse locale des systèmes stochastiques linéaires.
R.A.I.R.O. Automatique/Systems Analysis and Control, 18(3):283–295, 1984.

[12] T. T. Georgiou and M. C. Smith.

Topological approaches to robustness.
Proc. 10th International Conf. on Analysis and Optimization of Systems, Sophia-Antipolis, June 9–12 1992.

[13] G. P. Gomes.
Synthèse d'une commande robuste liée à la qualité de l'identification bayesienne.
PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 1991.

[14] G.C. Goodwin and Kwai Sang Sin.
Adaptive Filtering Prediction and Control.
Prentice-Hall, New Jersey, 1984.

[15] H. P. Horisberger and P.R. Belanger.
Solution of the optimal constant output feedback problem by conjugate gradients.
IEEE Trans. Automatic Control, 19(4):434–435, August 1974.

[16] I. Horowitz.
Synthesis of feedback Systems.
Academic Press, New York, 1963.

[17] I. Horowitz.
Quantitative feed-back theory.
Proceeding of the Institution of Electrical Engineers, 129(Part D):215–226, 1982.

[18] F. Jabbari.
Robustness bounds for linear systems with uncertainty: Keeping eigenvalues in specified regions.
In *Proceedings of the 29th IEEE Conf. on Decision and Control*, volume 2, pages 430–431, December 1990.

[19] J. Kautsky and N.K. Nichols.
Robust pole assignment in systems subject to structured perturbations.
System & Control Letters, 15(5):373–380, December 1990.

[20] J. Kautsky, N.K. Nichols, and P. Van Dooren.
Robust pole assignment in linear state feedback.
International Journal of Control, 41(5):1129–1155, May 1985.

[21] L. H. Keel, S. P. Bhattachayya, and J. W. Howze.
Robust control with structured perturbations.
IEEE Trans. Automatic Control, 33(1):68–78, January 1988.

[22] L.H. Kell, S.P. Bhattacharya, and J.H. Howse.
Robust control with structured perturbations.
IEEE Trans. Automatic Control, 30, January 1988.

[23] S. R. Kolla and J. B. Farison.

Improved stability robustness bounds using state transformation for linear discrete systems.
Automatica, 26(5):933–935, 1990.

[24] S. R. Kolla and J. B. Farison.
Reduce order dynamic compensator design for stability robustness of linear discrete-time systems.
IEEE Trans. Automatic Control, 36(9):1077–1081, September 1991.

[25] S. R. Kolla, R. K. Yedavalli, and J. B. Farison.
Robust stability bounds on time-varying pretubations for state-space models of linear discrete-time systems.
Int. Journal of Control, 50(1):151–159, July 1989.

[26] M. Labarrere, J.P. Krief, and B. Gimonet.
Le filtrage et ses applications.
CEPADUES-editions, Toulouse 1978.

[27] P. Lancaster.
Explicit solutions of linear matrix equations.
SIAM Review, 12(4), October 1970.

[28] G. Lavigne.
Identification paramétrique. etude de la stabilité des systèmes.
Technical report, Rapport CERT-DERA, Décembre 1992.

[29] N.A. Lehtomaki, B.C. Levy, and N.R. Sandell.
Robustness and modeling error characterization.
IEEE Trans. Automatic Control, 29(3), March 1984.

[30] A. M. Lyapunov.
Lyapunov centenary issue.
International Journal of Control, 55(3), March 1992.

[31] J.M. Maciejowski.
Multivariable Feedback Design.
Anddison-Wesley, Wokingham U.K., 1989.

[32] K. Madsen and H. Schjaer-Jacobsen.
Algorithms for worst case tolerance optimization.
IEEE Trans. on Circuits and Systems, 26, September 1979.

[33] J. F. Magni and C. Charpentier.
Analyse et synthese de loi de commande modales.
Cours de l'E.N.S.A.E., 1990.

[34] R.S. Mendes.

Synthèse de régulateurs robustes à placement de pôles.
PhD thesis, Université Paul Sabatier (Toulouse), 1988.

[35] C. B. Moler.
MATALB user guide.
University of New Mexico, Department of Computer Sciences, 1981.

[36] B.C. Moore.
On the flexibility offered by state feedback in multivariable system beyond closed-loop eigenvalue assignment.
IEEE Trans. Automatic Control, 21(5):689–692, 1976.

[37] X. N. Niu, J. A. De Abreu-Garcia, and E. Yaz.
Improved bounds for linear discrete-time systems with structured perturbations.
IEEE Trans. Automatic Control, 37(8):1170–1173, August 1992.

[38] K. Ogata.
Discrete-time Control Systems.
Rentice Hall, New Jersey, 1987.

[39] J. O'Reilly.
Optimal low-order feedback controllers for linear discrete-time systems.
Contr. Dynami. Syst., 16:352–367, 1980.

[40] P. Peres, J. Bernussou, and J.C. Geromel.
A cutting plane technique applied to robust synthesis.
In *Control Applications of Nonlinear Programming and Optimisation*, pages 177–186.
8th IFAC Workshop, Paris, France, June 1989.

[41] B. Porter and T.R. Corssley.
Modal Control : theory and applications.
Taylor and Francis, London, 1972.

[42] M.G. Safonov, A.J. Laub, and G.L. Hartman.
Feedback properties of multivariable systems : The role and use of the return difference matrix.
IEEE Trans. Automatic Control, 26(1), February 1981.

[43] D. F. Shanno.
Conditioning of quasi-newton methods for function minimization.
Mathematics of Comput., 24:647–656, 1970.

[44] C.B. Soh, C.S. Berger, and K.P. Dapke.
On the stability properties of polynomials with perturbed coefficients.
IEEE Trans. Automatic Control, 30(10), October 1985.

[45] G. Stein and M. Athans.

The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control design.
IEEE Trans. Automatic Control, 32:105–114, February 1987.

[46] R. Subbayyan and M. C. Vaithilingam.
Sensitivity-reduced design of linear regulators.
Int. Journal of Control, 29(3):435–440, 1979.

[47] M. Tahk and J.L. Speyer.
Modeling of parameter variations and asymptotic LQG synthesis. a parameter robust LQG design synthesis with applications to control of flexible structures.
IEEE Trans. Automatic Control, 30, 1987.

[48] M. Tahk and J.L. Speyer.
A parameter robust LQG design synthesis with applications to control of flexible structures.
IEEE Trans. Automatic Control, 30, 1987.

[49] J. H. Wilkinson.
The algebric Eigenvalue Problem.
Oxford University Press, Oxford, 1965.

Annexes

Annexe A Propriétés et Dérivation de la Trace d'une matrice

A.1 Définition

Soit A une matrice réelle carrée d'éléments $\{a_{ij}\}$ et de dimensions $(n \times n)$. Par définition la trace de la matrice A vaut

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{A.1}$$

A.2 Propriétés fondamentales

Pour toutes matrices A et B réelles de dimensions conformes nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A^\top) &= \mathrm{Tr}(A) \\ \mathrm{Tr}(A+B) &= \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) \\ \mathrm{Tr}(AB) &= \mathrm{Tr}(BA) \end{aligned} \tag{A.2}$$

A.3 Dérivation par rapport à une matrice

La différentiation de la trace d'un produit de matrices par rapport à une matrice X peut être réalisée grace aux formules écrites ci-dessous. Ces formules ne sont valables que si X est une matrice quelconque, c'est à dire que tous ces éléments sont indépendants (dans le cas particulier où la matrice X est symétrique, ces formules ne sont pas valables).

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial X}\mathrm{Tr}(X) = I \\ &\frac{\partial}{\partial X}\mathrm{Tr}(AX) = A^\top \\ &\frac{\partial}{\partial X}\mathrm{Tr}(AX^\top) = A \\ &\frac{\partial}{\partial X}\mathrm{Tr}(AXB) = A^\top B^\top \\ &\frac{\partial}{\partial X}\mathrm{Tr}(AX^\top B) = BA \\ &\frac{\partial}{\partial X}\mathrm{Tr}(XX^\top) = 2X \\ &\frac{\partial}{\partial X}\mathrm{Tr}(AXBX) = A^\top X^\top B^\top + B^\top X^\top A^\top \\ &\frac{\partial}{\partial X}\mathrm{Tr}(AXBX^\top) = A^\top X B^\top + AXB \end{aligned} \tag{A.3}$$

Annexe B Valeurs singulières d'une matrice

B.1 Décomposition singulière d'une matrice

Soit une matrice X complexe de dimensions $(n \times p)$, alors il existe deux matrices U et V othonormées, de dimentions respectives $(n \times n)$ et $(p \times p)$ vérifiant

$$\begin{cases} U^T X V = \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} & \text{si } n \geq p \\ U^T X V = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \end{bmatrix} & \text{si } n \leq p \end{cases} \tag{B.1}$$

avec

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0 \tag{B.2}$$

où r est le rang de la matrice X.

L'ensemble des valeurs singulières $\{\sigma_i\}$ de la matrice X sont les r racines carrées des valeurs propres non nulles de XX^T ou X^TX.

B.2 Valeurs singulières min et max

Les valeurs singulières minimales ($\sigma_{\min}$) et maximales ($\sigma_{\max}$) vérifient les propriétés suivantes

$$\sigma_{\max} = \sup_{x \in \mathbb{C}^n} \left\{ \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \right\} = \sup_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2 \tag{B.3}$$

Le vecteur de norme unité (ou une base orthonormée de l'espace) réalisant cet optimum est obtenu par la (ou les) première(s) colonnes de V selon la multiplicité de la valeur singulière maximale.

$$\sigma_{\min} = \min_{x \in \mathbb{C}^n} \left\{ \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \right\} = \min_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2 \tag{B.4}$$

Le vecteur de norme unité (ou une base orthonormée de l'espace) réalisant cet optimum est obtenu par la (ou les) dernière(s) colonnes de V correspondant à une valeur singulière non nulle.

B.3 Propriétés des valeurs singulières

- Les espaces fondamentaux de X sont données par les matrices U et V partitionnées de la manière suivante

$$X = [U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_r & \\ & 0 & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^\top \\ V_2^\top \end{bmatrix} \tag{B.5}$$

Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(X) &= \mathrm{Im}(U_1) \\ \mathrm{Ker}(X) &= \mathrm{Im}(V_2) \\ \mathrm{Im}^\perp(X) &= \mathrm{Im}(U_2) \\ \mathrm{Ker}^\perp(X) &= \mathrm{Im}(V_1) \end{aligned} \tag{B.6}$$

- Si la matrice X est carrée et inversible

$$\sigma_{\max}(X) = \frac{1}{\sigma_{\min}(X^{-1})} \tag{B.7}$$

$$X \text{ inversible} \iff \sigma_{\min}(X) > 0 \tag{B.8}$$

$$\sigma_{\min}(X) - 1 \leq \sigma_{\min}(X + I) \leq \sigma_{\min}(X) + 1 \tag{B.9}$$

- Valeurs propres et valeurs singulières d'une matrice X carrée de dimensions $n \times n$

$$\sigma_{\min}(X) \leq \lambda_i(X) \leq \sigma_{\max}(X) \text{ pour } i = 1, 2, \cdots, n \tag{B.10}$$

- Le conditionnement d'une matrice est donnée par

$$\mathrm{cond}(X) = \frac{\sigma_{\max}(X)}{\sigma_{\min}(X)} \tag{B.11}$$

Annexe C Normes matricielles

C.1 Norme spectrale

Soit une matrice A complexe de dimensions $n \times p$, nous appellerons norme spectrale de A

$$\|A\| = \sigma_{\max}(A) \tag{C.1}$$

La norme spectrale est la norme induite sur les matrices par la norme euclidienne. Pour tout vecteur X, norme spectrale de X sera identique à la norme euclidienne de X soit

$$\text{pour tout vecteur } X, \quad \|X\| = \|X\|_2 \tag{C.2}$$

La norme spectrale a les propriétés suivantes

$$\|A\| = 0 \implies A = 0 \tag{C.3}$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha|.\|A\| \tag{C.4}$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \tag{C.5}$$

$$\|AB\| \leq \|A\|.\|B\| \tag{C.6}$$

C.2 Norme de Frobenius

Soit une matrice A complexe de dimensions $n \times p$, nous appellerons norme de Frobenius de A

$$\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^T A)} \tag{C.7}$$

La norme de Frobenius a toutes les propriétés d'une norme

$$\|A\|_F = 0 \implies A = 0 \tag{C.8}$$

$$\|\alpha A\|_F = |\alpha|.\|A\|_F \tag{C.9}$$

$$\|A + B\|_F \leq \|A\|_F + \|B\|_F \tag{C.10}$$

C.3 Lien entre les normes matricielles

Il existe un lien entre la norme spectrale et la norme de Frobenius

$$\|A\| \leq \|A\|_F \tag{C.11}$$

Dans le cas d'une matrice P symétrique, définie positive, de dimensions $n \times n$ nous avons les propriétés suivantes

$$\|P\| = \lambda_{max}(P) \tag{C.12}$$

$$\|P\|_F = \mathrm{Tr}(P) \tag{C.13}$$

$$\|P\| \leq \|P\|_F \leq n\|P\| \tag{C.14}$$