N° d'ordre : 193 Année 1996

THÈSE

présentée en vue de
l'obtention du titre de

DOCTEUR

de

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE**

SPÉCIALITÉ : AUTOMATIQUE

par

Jean-Marc BIANNIC

COMMANDE ROBUSTE DES SYSTÈMES À PARAMÈTRES VARIABLES. APPLICATIONS EN AÉRONAUTIQUE.

Soutenue le 28 octobre 1996 devant la Commission d'Examen :

MM.	A.	FOSSARD	Président
	P.	APKARIAN	Directeur de thèse
	J.	BERNUSSOU	Rapporteur
	C.	CHAMPETIER	
	A.	OUSTALOUP	Rapporteur

Résumé

On s'intéresse dans cette thèse, au développement de nouvelles méthodes de synthèse de lois de commande robuste pour les systèmes non stationnaires. Après une étude historique puis une analyse détaillée de la non stationnarité, le problème central de la synthèse est posé.

L'idée originale des travaux repose sur un choix judicieux de la nature des correcteurs que l'on retiendra sous une forme identique à celle du procédé. Ainsi, les non stationnarités sont directement prises en compte par la loi de commande qui offre alors la garantie d'une stabilité globale en boucle fermée, même dans le cas des systèmes à évolution rapide. On montre par ailleurs qu'un tel choix permet d'accéder à une caractérisation convexe des solutions que l'on pourra obtenir par résolution d'inégalités matricielles linéaires (LMI).

L'approche proposée est ensuite validée sur un ensemble d'applications réalistes appartenant aux domaines aéronautique (pilotage d'un missile et d'un avion de combat) et naval (tenue en immersion d'un sous-marin). Des applications dans le domaine spatial sont également envisageables (pilotage des lanceurs, contrôle d'attitude des satellites).

Mots clés: Systèmes LPV , Commande robuste , Séquencement de gains , LMI

Abstract

The study contained herein presents original robust control methodologies for non-stationary systems. Following a background description and a detailed analysis of non-stationary systems, the central synthesis task is developed.

The key idea behind this work is based on a judicious choice of the controller structure which is identical to that of the plant. Thus, non-stationary phenomena are automatically integrated by the control law which garantees global stability for the closed-loop system over its entire operating range, regardless of its evolution rate. In addition, such a method is shown to result in a convex characterization (based on Linear Matrix Inequalities - LMIs) of the solutions.

This study demonstrates the proposed method on various real-world applications encompassed by both the aeronautical (missile and fighter aircraft control) and naval (submarine depth maintenance) fields. Applications within the space industry may also fall under the scope of the proposed methodology such as satellite attitude control.

Keywords: LPV systems, Robust control , Gain-scheduling , LMI

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE

10, avenue Edouard-Belin - B.P. 4032 - 31055 TOULOUSE CEDEX

Tout ce qui n'est pas pensée est le pur néant;
puisque nous ne pouvons penser que la pensée
et que les mots dont nous disposons pour parler
des choses ne peuvent exprimer que des pensées;
dire qu'il y a autre chose que la pensée,
c'est donc une affirmation qui ne peut avoir de sens.
Et cependant - étrange contradiction pour ceux qui
croient au temps - l'histoire géologique nous montre
que la vie n'est qu'un court épisode entre deux
éternités de mort, et que, dans cet épisode même,
la pensée consciente n'a duré et ne durera qu'un moment.
La pensée n'est qu'un éclair
au milieu d'une longue nuit
mais, c'est cet éclair qui est tout.

(H. Poincaré - *La valeur de la science*)

à Valérie

Avant-propos

Les travaux présentés dans ce mémoire, financés par une bourse DRET/DCN gérée par le CNRS, ont été effectués au Centre d'Etudes et de Recherches de Toulouse, dans le département Automatique (DERA). Je remercie Monsieur F. Jouaillec pour m'avoir accueilli au sein de son établissement.

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la formation doctorale de l'ENSAE dont je remercie les directeurs successifs Messieurs C. Ripoll et J. Kerbrat, pour avoir retenu ma candidature. Je tiens aussi à remercier vivement Monsieur A.J. Fossard, professeur d'automatique à l'ENSAE et responsable de la formation doctorale de l'école, qui me fait l'honneur de présider le jury.

Mes remerciements vont également à Messieurs Marc Labarrère, chef du département lorsque j'ai commencé ma thèse et Jean-Pierre Jung son actuel successeur qui, à plusieurs reprises m'ont apporté leur soutien en montrant l'intérêt qu'ils portaient à mes travaux.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur Pierre Apkarian, ingénieur de recherches au DERA qui a bien voulu prendre en charge la direction de ma thèse et a toujours su me faire profiter de ses compétences théoriques et de son expérience. Je lui adresse aussi mes remerciements les plus vifs pour le soutien constant et amical qu'il m'a m'apporté.

Je remercie vivement Monsieur J. Bernussou, directeur de recherches au CNRS ainsi que Monsieur A. Oustaloup, professeur à l'ENSERB pour avoir accepté d'être rapporteurs de mon travail. Que Monsieur C. Champetier soit également remercié pour avoir bien voulu participer au jury.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous les ingénieurs et stagiaires du DERA, qui contribuent à entretenir une ambiance agréable au sein du département. Je remercie en particulier Monsieur Laurent Leletty pour son amitié et ses conseils avisés. J'exprime également ma reconnaissance à l'ensemble du secrétariat pour le soutien et l'aide apportés tout au long de ces trois années, sans oublier le service édition, pour la qualité et la rapidité du travail fourni.

Enfin, je remercie de tout cœur mon épouse, pour son soutien et l'intérêt constant qu'elle a porté à l'égard de mes travaux. J'associe dans ces remerciements, parents et amis qui, de près comme de loin m'ont également soutenu et encouragé aux moments opportuns.

Table des matières

Introduction Générale **1**

I Modélisation et Analyse des Systèmes Non Stationnaires **9**

Introduction **11**

1 De la stabilité des systèmes dynamiques **12**

1.1 Définitions 12

1.1.1 Stabilité au sens de Lyapunov 12

1.1.2 Stabilité entrée/sortie 17

1.2 Théorèmes généraux sur la stabilité 21

1.2.1 Stabilité asymptotique uniforme globale 21

1.2.2 Théorème du faible gain 22

1.2.3 Liens entre la stabilité au sens de Lyapunov et la stabilité entrée/sortie 24

1.2.4 Conclusions 26

1.3 Cas des systèmes linéaires 26

1.3.1 Trajectoires et caractérisation de la stabilité 27

1.3.2 Systèmes linéaires à temps invariant (LTI) 28
1.3.3 Systèmes linéaires à temps variant (LTV) 29
1.3.4 Systèmes linéaires à paramètres variables (LPV) 32
Systèmes LPV et systèmes non linéaires 33
1.4 Systèmes bouclés 37
1.4.1 Historique 37
1.4.2 Critère du cercle 39
1.4.3 Critère de Popov et extensions 41
1.4.4 Faible gain 44
1.5 Conclusion 47

2 Choix et construction des modèles **48**
2.1 Modèle affine et modèle polytopique 49
2.1.1 Définitions 49
2.1.2 D'un modèle à l'autre 52
2.1.3 Construction du modèle polytopique 55
2.1.4 Réduction de polytopes 58
2.2 Modèle "LFT" 61
2.2.1 Transformations Linéaires Fractionnelles (LFT) 62
2.2.2 LFT et fonctions rationnelles 68
2.2.3 Construction du modèle LFT 70
2.2.4 Vers la minimalité 76
2.3 Comparaisons 79
2.3.1 Sur le plan théorique 80
2.3.2 Sur le plan pratique 81
Discrétisation des systèmes LPV 82

3 Résultats d'analyse **85**

3.1 Introduction 85

3.2 Mesures de performance pour les systèmes LPV 85

3.3 Approche quadratique 87

3.3.1 Application au modèle polytopique 90

3.3.2 Cas du modèle LFT 91

3.3.3 A propos du conservatisme 95

3.4 Extensions à l'analyse des systèmes LPV incertains 99

3.4.1 Description des incertitudes 100

3.4.2 Utilisation de scalings 101

3.4.3 Utilisation de multiplieurs 105

3.5 Fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres 106

3.5.1 "Quadrillage" paramétrique 107

3.5.2 Multi-convexité 109

Conclusion **112**

II Synthèse de Lois de Commande à Paramètres Variables **113**

Introduction **115**

4 Correcteurs polytopiques **118**

4.1 Introduction 118

4.2 Critère de type $\mathcal{H}_\infty$ 120

4.3 Critère de type $\mathcal{H}_2$ 126

4.4 Synthèses multi-objectifs 131

4.4.1 Critère de type $\mathcal{H}_\infty$ et placement de pôles 131

4.4.2 Critère mixte de type $\mathcal{H}_\infty$ / $\mathcal{H}_2$ 133

4.5 Implémentation des correcteurs polytopiques 134

4.6 Commentaires sur l'insensibilité paramétrique 135

5 Correcteurs *LFT* **137**

5.1 Introduction 137

5.2 Critère de type $\mathcal{H}_\infty$ 139

5.3 Variations sur le critère de performances 144

5.4 Méthode itérative pour la robustesse 144

5.5 Implémentation des correcteurs *LFT* 147

6 Commande des systèmes à paramètres lentement variables **149**

6.1 Cas du retour d'état 150

6.2 Cas du retour de sorties 152

6.3 Illustration de la méthode 157

Conclusion **162**

III Applications **163**

7 Pilotage d'un missile **166**

7.1 Description et analyse du problème 167

7.2 Mise en forme du problème de synthèse 171

7.3 Choix des filtres et résolution 174

7.4 Simulations et conclusions 177

8 Tenue en immersion d'un Sous-Marin **184**

8.1 Modélisation du sous-marin et des efforts de houle 185

8.2 Construction du modèle de synthèse 190

8.3 Résultats 193

9 Pilotage d'un avion de combat **197**

9.1 Description générale 199

9.1.1 Equations du mouvement 199

9.1.2 Nature et rôle du correcteur 204

9.2 Modélisation 206

9.2.1 Mise sous forme LPV 206

9.2.2 Approximation par un modèle polytopique 209

9.2.3 Approximation par un modèle LFT 211

9.3 Construction du modèle de synthèse LPV 217

9.4 Calcul des correcteurs 220

9.4.1 Utilisation d'un modèle polytopique 220

9.4.2 Utilisation d'un modèle LFT 222

9.5 Implémentation et simulations 226

9.5.1 Analyse et réduction du correcteur 227

9.5.2 Simulations temporelles 228

9.6 Conclusion 232

Conclusion Générale **235**

Annexes **241**

Annexe A : Inégalités Matricielles Linéaires **243**

A.1 Un peu d'histoire 243

A.2 Définitions 244

A.3 Méthodes générales de résolution 246

A.4 Méthodes algébriques 249

Annexe B : Lemmes techniques **252**

B.1 Variations autour du complément de Schur 252

B.2 $\mathcal{S}$ procédure 254

B.3 Elimination et changements de variables 260

Annexe C : Espaces $\mathcal{L}_q$ **265**

C.1 Quelques notations préliminaires 265

C.2 L'espace $\mathcal{L}_q$ et ses extensions 265

C.3 Normes 266

Annexe D : Propriétés des systèmes linéaires invariants **267**

D.1 Fonctions de transfert 267

D.2 Localisation des pôles 267

D.3 Passivité 271

D.4 Systèmes bornés en norme 273

Bibliographie **278**

Notations

$\mathbb{N}$	Entiers naturels
$\mathbb{R}$	Corps des réels
$\mathbb{C}$	Corps des complexes
j	Imaginaire pur ($j^2 = -1$)
$\mathbb{K}^{p\times m}$	Algèbre des matrices de dimension $(p \times m)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.
$\otimes$	produit de Kronecker
$\star$	produit de Redheffer
I_n	Matrice identité de dimension n
A^T	Matrice Transposée de A
A^{-1}	Inverse de A
A^{-T}	Transposée de l'inverse de A
$A^\dagger$	Inverse de Moore-Penrose de A
$Ker(A)$	Noyau de la matrice A
$\bar{A}$	Matrice Conjuguée de A
A^*	Matrice Transconjuguée de A : $\bar{A}^T$
$Re(A)$	Partie réelle de A : $\frac{1}{2}(A + \bar{A})$
$Im(A)$	Partie imaginaire de A : $\frac{1}{2}j(A - \bar{A})$
$\lambda_{max}(A)$	Valeur propre maximale de A
$\bar{\sigma}(A)$	Valeur singulière maximale de A : $\sqrt{\lambda_{max}(A^*A)}$

Acronymes

LMI	Linear Matrix Inequality (Inégalité matricielle linéaire)
LFT	Linear Fractional Transformation (tranformation linéaire fractionnelle)
LTI	Linéaire à Temps Invariant
LTV	Linéaire à Temps Variant
LPV	Linéaire à Paramètres Variants

Introduction Générale

La notion de robustesse, à l'origine purement mathématique, joue maintenant depuis de nombreuses années un rôle essentiel dans les domaines connexes de l'analyse et de la conception de lois pour les systèmes asservis. L'émergence de cette notion[1] fut principalement motivée par la nécessité pratique - toujours actuelle - qui oblige le concepteur à travailler sur une représentation mathématique simplifiée du système réel. Les simplifications introduites porteront typiquement sur les non linéarités, le comportement hautes fréquences puis l'idéalisation des capteurs et des actionneurs. Ainsi, la loi de commande, conçue pour fonctionner sur un modèle idéal devra être robuste aux perturbations engendrées par les phénomènes physiques volontairement occultés.

De telles perturbations agissent de manière **non structurée** sur le modèle. Dans le cas où ce dernier est linéaire à temps invariant (LTI), il existe alors de nombreuses méthodes qui permettent d'envisager la résolution du problème de synthèse. Celles-ci, pour la plupart, reposent sur l'étude de certaines fonctions de transfert en boucle fermée [56, 97]. Parmi les approches multi-variables, il convient de signaler la méthode LQG/LTR [76, 119] dont l'objectif, grâce à l'analyse des valeurs singulières, est de pallier le manque de robustesse observé sur l'approche LQG. Mentionnons également les méthodes d'optimisation $\mathcal{H}_\infty$ et $\mathcal{H}_2$ [36], qui depuis quelques années font l'objet de nombreux développements, aussi bien sur le plan théorique qu'applicatif.

Un autre type de perturbations, dont on pourra cette fois localiser de manière précise l'action sur le modèle, devra souvent être pris en compte dans la phase de conception. Il s'agit des incertitudes paramétriques qui traduisent par exemple la méconnaissance de certains coefficients physiques difficilement identifiables. Les méthodologies de synthèse simultanément robustes aux perturbations non structurées de modèle et aux incertitudes paramétriques sont encore peu nombreuses. On notera qu'il s'agit, dans le seul cas réellement intéressant en pratique, du retour de sorties, d'un problème généralement non convexe. Sa résolution devra être envisagée par conséquent selon une heuristique plus ou moins astucieuse, qui, sans garantir la convergence vers un optimum global fournira une solution satisfaisante dans la pratique. Toujours dans le cas où le modèle nominal est supposé LTI, l'exemple souvent cité d'un algorithme qui utilise une telle heuristique est la μ-synthèse [9].

Mais qu'advient-il si maintenant le modèle mathématique, malgré les simplifications subies, conserve un caractère fortement non stationnaire? Occulter cette propriété en traitant la non-stationnarité comme une incertitude variant dans le temps constitue une approche excessivement conservative du problème. Une méthode sans doute mieux adaptée et utilisée dans l'industrie depuis de nombreuses années, repose sur la résolution succes-

[1] qui caractérise l'invariance du comportement d'un processus contrôlé, en présence de perturbations d'origine externe ou interne.

sives des deux étapes indépendantes:

- détermination, par une méthode classique, d'une série de lois de commande en différents points de fonctionnement du système, supposé localement stationnaire,

- élaboration de la loi de commande globale par interpolation en ligne des lois de commande locales.

Malheureusement, cette technique n'offre aucune garantie a priori quant au comportement global du système asservi (stabilité, performances). Elle soulève par ailleurs une difficulté pratique de conception relative au choix souvent délicat de la méthode d'interpolation en ligne. Cette étape est d'autant plus critique quand les correcteurs "locaux" sont d'ordre élevé. Une autre approche fondée sur la théorie de la commande adaptative, permet, grâce à une estimation en ligne des paramètres, la prise en compte explicite des aspects non stationnaires. De cette manière, on pourra espérer atteindre un niveau de performance relativement élevé. En contrepartie, une telle méthode, utilisée dans sa version actuelle, n'est pas robuste aux perturbations non identifiées de modèle (les perturbations non structurées) [75], et se heurte aux difficultés inhérentes aux systèmes à évolutions rapides.

L'approche développée dans la thèse repose sur le concept de systèmes linéaires à paramètres variables (LPV) [116]. Plus précisément, on supposera que le modèle non stationnaire admet une description temporelle de la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \\ y(t) = C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t) \\ \theta(t) \in \mathcal{P} \end{cases}$$

Les éléments de la représentation d'état du modèle dépendent donc explicitement du paramètre variable $\theta(t)$ (notation vectorielle). Ce dernier, évoluant dans le domaine borné $\mathcal{P}$ ne traduit aucunement une incertitude mais une variation **connue** faisant partie intégrante du modèle non stationnaire. Dans la suite on supposera donc ce paramètre accessible à la **mesure en temps réel**. L'idée originale des travaux présentés dans [98, 15, 7] repose sur l'exploitation logique de cette richesse par la loi de commande.

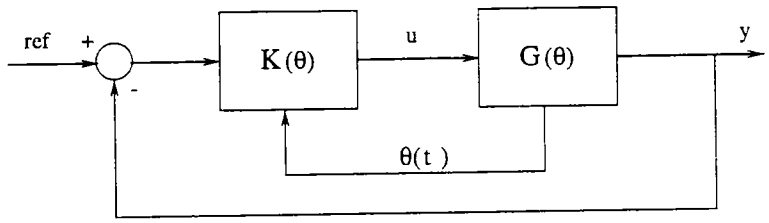


Figure 0.1: Schéma de commande LPV

Comme le met en évidence le schéma de rétroaction ci-dessus, on retiendra pour le correcteur, une structure identique à celle du système. Ainsi, la dépendance paramétrique sera intégralement recopiée. Ce choix est à l'origine des extensions des méthodes déjà citées de synthèse $\mathcal{H}_\infty$ et $\mathcal{H}_2$ dans le cadre des systèmes LPV [7, 19]. En l'absence d'une prise en compte explicite de la structure des incertitudes paramétriques susceptibles d'affecter le modèle non stationnaire, il est intéressant de souligner la **convexité** des caractérisations obtenues. En effet, celles-ci prendront la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes inégalités matricielles linéaires (LMI). D'un point de vue numérique, il existe depuis peu des outils performants [46] qui permettent d'aborder cette classe de problèmes et donc d'envisager des applications réalistes.

Dans le cas le plus général de la prise en compte simultanée de perturbations non structurées de modèle et d'incertitudes paramétriques, nous montrerons, à partir d'une approche bi-convexe, calquée dans son principe sur celui de la μ-synthèse, qu'il est possible d'intégrer les phénomènes non stationnaires.

objectifs de la thèse

L'un des principaux objectifs de cette thèse est de fournir au lecteur une vue complète et relativement détaillée sur l'ensemble des méthodes LPV. Nous nous efforcerons au préalable, d'apporter un soin particulier à la présentation des différents modèles et techniques de construction qui leur sont associées. Ce point nous semble en effet essentiel dans la mesure où la qualité du modèle utilisé influence directement celle des résultats.

Toutefois, nous avons ici pour objectif prioritaire de démontrer la pertinence et l'applicabilité des méthodes LPV sur des problèmes variés que nous avons souhaités les plus réalistes possibles.

Organisation de la thèse

La thèse est divisée en trois parties, composées chacune de trois chapitres. La première est conscarée à l'analyse des systèmes non stationnaires. Cette analyse servira ensuite de base aux résultats de synthèse que nous développons dans la seconde partie du mémoire. L'applicabilité des méthodes exposées sera finalement démontrée sur les applications de la troisième partie.

Le chapitre I est une introduction générale au thème de la stabilité des systèmes dynamiques non stationnaires. Il s'agit en fait d'une étude historique, sur laquelle nous portons néanmoins un regard actualisé, qui nous permet d'introduire notamment la notion de système LPV ainsi que la nécessité du choix d'un modèle convenable d'analyse.

Le chapitre II est essentiel puiqu'il détaille les différents aspects de la construction des modèles autour desquels s'articulent les différentes méthodes d'analyse et de synthèse.

Le chapitre III vient prolonger le premier en développant les principaux résultats d'analyse, non seulement en stabilité mais aussi en performance, pour les systèmes LPV

Les chapitres IV, V et VI présentent un ensemble de résultats de synthèse déduits du chapitre III. On s'intéressera successivement au cas des modèles polytopiques, LFT et affines détaillés au second chapitre.

Le chapitre VII est consacré à une première application, au pilotage longitudinal d'un missile air-air sur un domaine de vol très étendu. Les variations paramétriques seront donc particulièrement importantes. Dans cet exemple très réaliste, on prendra également en compte la flexibilité de l'engin.

Le chapitre VIII présente une application à la tenue en immersion d'un sous-marin. Les variations paramétriques seront moins sensibles que dans le cas précédent mais néanmoins présentes compte tenu des évolutions de la vitesse. Il s'agira ici de résoudre un problème de réjection de perturbations de type bruit blanc (efforts de houle) en évolution non stationnaire.

Le chapitre IX relate l'application majeure de cette thèse. Il est cette fois question de pilotage en incidence d'un avion de combat. On détaillera ici avec soin la construction des modèles de synthèse. La loi de commande obtenue sera validée après implémentation sur le modèle non linéaire complet du système.

Conseils de lecture

Terminons cette introduction par quelques conseils donnés au lecteur non familier des méthodes de synthèse considérées dans ce document. Nous ne saurions trop, dans ce cas, l'inviter à commencer sa lecture par celle des chapitres VII et VIII. Ces applications mettent en relief de manière claire et précise, les nouvelles possibilités offertes par les techniques LPV, donnant ainsi un raccourci du contenu théorique de la méthodologie proposée. Cette lecture préalable devrait permettre de rendre moins abstraits les éléments théoriques des chapitres III à VI. La compréhension globale du dernier chapitre (avion de combat) requiert au moins un parcours rapide du chapitre V.

Modélisation et Analyse des Systèmes Non Stationnaires

Introduction

La non-stationnarité est un phénomène courant dans la pratique. Rares sont en effet, les systèmes ou processus rigoureusement stationnaires, quelque soit, du reste, leur domaine d'appartenance: aéronautique, spatial, énergétique, transport, chimie...

Il s'agit d'ailleurs d'un phénomène auquel s'intéressent les théoriciens depuis de nombreuses années. Nous soulignerons ce point tout au long du premier chapitre en proposant une vue historique sur l'étude de la non-stationnarité.

Nous profiterons également de ce premier chapitre pour préciser la notion de stabilité au sens large. Nous insisterons enfin sur les difficultés soulevées par l'étude des systèmes non stationnaires dans le cas général et soulignerons de ce fait, l'importance du choix d'un modèle.

Cette question sera reprise au second chapitre où seront également développées diverses méthodes de construction. Finalement, dans un troisième volet, nous décrirons un ensemble de résultats d'analyse en stabilité mais aussi en performances, par rapport aux modèles obtenus.

La formulation adoptée - fondée sur l'utilisation de LMI (voir annexe A) - dans la présentation de ces résultats est choisie de manière à:

- garantir leur validité sur le plan numérique,
- faciliter la transition vers la seconde étape qui sera celle de la synthèse.

Chapitre 1

De la stabilité des systèmes dynamiques

1.1 Définitions

La notion de stabilité est fondamentale dans l'étude des systèmes dynamiques et en particulier en automatique mais également dans bien d'autres domaines. Au premier abord, ce concept nous semble relativement naturel. Pourtant, un examen plus attentif montre qu'on peut lui associer une multitude de définitions [34, 127, 67, 65]. Nous nous efforçons d'apporter ici une vue synthétique et non exhaustive sur la question. Pour cela, nous ferons la distinction classique entre **stabilité au sens de Lyapunov** d'une part, et **stabilité entrée/sortie**, d'autre part.

1.1.1 Stabilité au sens de Lyapunov

Position du problème

De manière très générale, la théorie de Lyapunov traite de l'étude de la stabilité du mouvement [84, 67]. Par mouvement, on entend plus précisément un déplacement le long des trajectoires solutions d'un système d'équations différentielles de la forme:

$$\dot{x} = f(x,t)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0 \tag{1.1}$$

soumis aux conditions initiales:

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

Existence et unicité des solutions

Pour un ensemble de conditions initiales donné, afin de garantir existence et unicité **locale** d'une solution sur un intervalle de temps $[t_0\ t_0 + \delta]$ on supposera que la fonction $f(.,.)$ définie sur $\mathcal{D} \times [t_0, \infty[\ \ (\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, est:

- Continue par morceaux par rapport à t
- Localement Lipschitzienne par rapport à x, ie:
  $\forall K \subset \mathcal{D},\ \exists L > 0\ /\ \forall (x,\ y) \in K^2,\ \forall t \in [t_0,\ t_1]$:

$$\|f(x,t) - f(y,t)\| \leq L\|x - y\|$$

Notons que la condition de Lipschitz est assurée dès lors que la dérivée partielle de f par rapport à x est continue sur $\mathcal{D} \times [t_0,\ t_1]$. De plus, si la constante L ne dépend pas du compact K, on dit que f est **globalement Lipschitzienne**, et dans ce cas, il existe une solution unique globale sur l'intervalle $[t_0,\ t_1]$. Une condition suffisante pour que f vérifie cette dernière hypothèse est que sa dérivée partielle par rapport à x soit continue et uniformément bornée sur $\mathcal{D} \times [t_0,\ t_1]$.

Nous supposerons toujours que les conditions d'existence et d'unicité sont vérifiées dans la suite de ce travail.

Nous ajouterons enfin une dernière hypothèse sur f, à laquelle il est toujours possible de se ramener par simple translation:

$$\forall t \geq t_0,\ \ f(0,t) = 0$$

Ainsi, $x \equiv 0$ est une **trajectoire d'équilibre**. Cette dernière notion est fondamentale dans la théorie de Lyapunov, car c'est de la stabilité de ce type de trajectoires dont il s'agit et dont nous allons parler maintenant.

Stabilité des trajectoires d'équilibre

De manière très générale, une trajectoire d'équilibre est dite stable, si le système, initialisé dans un voisinage de la trajectoire, converge finalement vers elle. Les définitions qui vont suivre ont pour but de formaliser ces propos.

Définition 1.1 Stabilité simple. *La trajectoire d'équilibre $x \equiv 0$ est dite simplement stable si, $\forall \epsilon > 0$, $\forall t_0 \geq 0$, $\exists \delta(\epsilon, t_0)$, tel que:*

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \forall t \geq t_0,\ \|x(t)\| < \epsilon$$

△

Définition 1.2 Stabilité uniforme. *La trajectoire d'équilibre $x \equiv 0$ est dite uniformément stable si:*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta(\epsilon)\ \ \forall t \geq t_0 \geq 0,\ \|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon$$

△

Définition 1.3 Stabilité asymptotique uniforme. *La trajectoire d'équilibre $x \equiv 0$ est dite uniformément asymptotiquement stable si:*

- *la condition précédente de stabilité uniforme est vérifiée,*
- $\exists c > 0 \ / \ \forall \|x(t_0)\| < c,\ \ x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$, unif. / t_0, *ie.*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists T(c) \ / \ \forall t > t_0 + T,\ \|x(t)\| < \epsilon$$

△

Définition 1.4 Stabilité asymptotique uniforme globale. *La trajectoire d'équilibre $x \equiv 0$ est dite globalement uniformément asymptotiquement stable (**g.u.a.s.**) si les conditions de stabilité asymptotique uniforme sont vérifiées avec $c = \infty$.*

△

Nous concluons cette série de définitions par celle de la stabilité exponentielle, plus complète que les précédentes car elle prend en compte la rapidité de convergence.

Définition 1.5 Stabilité asymptotique exponentielle (globale). *La trajectoire d'équilibre $x \equiv 0$ est dite (globalement) exponentiellememt asymptotiquement stable si:*

- *les conditions de stabilité asymptotique uniforme (globale) sont vérifiées*
- *il existe un réel strictement positif λ tel que:*

$$\forall \|x(t_0)\| < c,\ \exists M(x(t_0))\ /\ t \geq t_0 \Rightarrow \|x(t)\| \leq Me^{-\lambda t}$$

△

Toutes ces définitions sont extrêmement générales puisqu'elles s'appliquent à l'ensemble des systèmes non linéaires, non stationnaires décrits par la relation (1.1). Aussi, la notion d'uniformité joue-t-elle ici un rôle essentiel. La définition de la stabilité simple, si elle convient aux systèmes invariants, devient inadaptée dans le cas général où la taille du domaine de stabilité associé[1] est une fonction de l'instant initial.

Dans cette introduction sommaire à la stabilité au sens de Lyapunov, nous avons opté pour une formulation relativement classique [67]. Le lecteur pourra trouver dans [65] une manière légèrement différente de présenter les choses, sans doute moins naturelle, mais finalement plus commode à manipuler pour la démonstration ce certains théorèmes.

Nous illustrons à présent les principales notions introduites sur deux exemples simples:

Exemple 1

Considérons le système à temps variant suivant:

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{1+t}\,x(t)\,, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \geq t_0 \geq 0 \tag{1.3}$$

dont $x \equiv 0$ est l'unique trajectoire d'équilibre. Profitons de la simplicité de cet exemple pour calculer l'ensemble des trajectoires, correspondant à des conditions initiales quelconques:

$$x(t) = x(t_0)\exp\int_{t_0}^{t}\frac{-1}{1+\tau}\,d\tau\ = x(t_0)\frac{1+t_0}{1+t} \tag{1.4}$$

On en déduit l'inégalité:

$$\forall t \geq t_0, \|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| \tag{1.5}$$

qui permet d'établir la stabilité uniforme globale du système (1.3) (*cf. définition 1.2*).

Notons en outre la convergence simple des trajectoires vers 0, ce qui permet de conclure à la **stabilité asymptotique**.

[1] En l'occurence, il s'agit de l'ensemble des x tels que $\|x\| \leq \delta(\epsilon, t_0)$.

En revanche, le système (1.3) n'est pas uniformément asymptotiquement stable, car la convergence de $x(t)$ vers 0 n'est pas uniforme par rapport à t_0. En effet,

$$x(t_0+T) = x(t_0)\frac{1+t_0}{1+t_0+T}$$

d'où, pour tout $\epsilon < x(t_0)$, on déduit l'équivalence:

$$\|x(t_0+T)\| < \epsilon \iff T > (1+t_0)(\frac{x(t_0)}{\epsilon} - 1)$$

montrant que le choix de T ne peut être rendu indépendant de l'instant initial t_0.

Exemple 2

Soit maintenant le système:

$$\dot{x}(t) = -2t\,x(t)\,, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \geq t_0 \geq 0 \tag{1.6}$$

Là encore, l'unique trajectoire d'équilibre est $x \equiv 0$, tandis qu'un calcul élémentaire analogue au précédent donne l'ensemble des trajectoires du système:

$$x(t) = x(t_0)\exp\int_{t_0}^{t} -2\tau\,d\tau \;= x(t_0)e^{-(t^2-t_0{}^2)} \tag{1.7}$$

Ce système est uniformément stable car $\|x(t)\|$ est borné par $\|x(t_0)\|$. Il est même uniformément asymptotiquement stable. On a en effet:

$$x(t_0+T) = x(t_0)e^{-(T^2+2t_0T)}$$

d'où, puisque, $t_0 \geq 0$, en choisissant:

$$T > \sqrt{\log\left(\frac{\delta}{\epsilon}\right)}$$

On vérifie bien que, pour tout $\epsilon < \delta$,

$$\|x(t_0)\| < \delta \;\Rightarrow\; \forall t > t_0+T,\; \|x(t)\| < \epsilon$$

1.1.2 Stabilité entrée/sortie

Une vue générale

Demandez à quiconque de vous donner sa propre définition de la stabilité, il y a de fortes chances qu'il vous réponde à peu près ceci:

un système est stable si, quand on lui applique des entrées bornées, ses sorties le sont également,

ou encore:

un système est stable si, quand on lui applique des entrées d'énergie finie, ses sorties ont également une énergie finie.

Ces réponses paraissent en effet les plus probables car elles s'appuient sur une représentation très classique d'un système en tant qu'expression (plus ou moins fidèle) de son comportement "entrée/sortie":

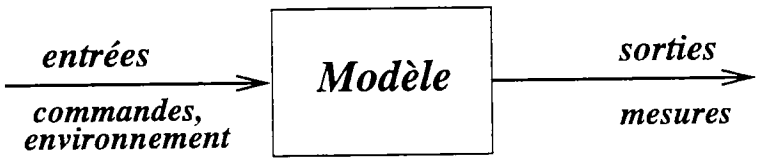


Figure 1.1: Modèle entrée/sortie

Toutefois, aussi naturelle que puisse paraître la notion de stabilité "entrée/sortie" sur le plan qualitatif, il en va différemment de son interprétation mathématique fondée sur la théorie des opérateurs (voir [64] pour une étude assez complète). Notons d'ailleurs que les premiers développements théoriques sur la notion de stabilité entrée/sortie datent seulement d'une trentaine d'années [112, 141, 142]. Citons également le livre de Desoer et Vidyasagar [34] qui reste l'ouvrage de référence incontournable dans le domaine. La lecture du dernier chapitre de [127] donne aussi une vue synthétique sur la stabilité entrée/sortie.

Dans ce qui suit, en nous appuyant sur l'approche proposée dans [34], nous précisons la définition qualitative donnée plus haut, dans le cadre général des systèmes non linéaires, non stationnaires. Pour cela, nous nous appuierons sur les notions d'espaces fonctionnels et d'opérateurs que nous rappelons dans l'annexe C.

Notations

Le système considéré maintenant est le suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \ , \qquad \forall t \geq t_0 \end{cases} \tag{1.8}$$

assorti de la condition initiale:

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.9}$$

Les hypothèses sur f sont analogues à celles que l'on a pu faire dans le paragraphe (1.1.1) de manière à assurer existence et unicité des solutions. Ainsi, pour une condition initiale et un vecteur d'entrées $u(t)$ donnés, on détermine un unique vecteur de sorties $y(t)$. En l'absence de conditions initiales ($x_0 = 0$) et de sollicitations extérieures ($u \equiv 0$), les sorties du système sont supposées nulles, ce que l'on garantit par les relations sur f et g:

$$\forall t \geq t_0, \ f(0,0,t) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(0,0,t) = 0$$

On supposera en outre que les signaux $u(.)$ et $y(.)$ appartiennent respectivement aux espaces fonctionnels $\mathcal{L}^m_{q,e}$ et $\mathcal{L}^p_{q,e}$ et on notera finalement H_{x_0} l'opérateur de $\mathcal{L}^m_{q,e}$ dans $\mathcal{L}^p_{q,e}$ associé au système (1.8), tel que:

$$y = H_{x_0}(u) \tag{1.10}$$

- Sur le plan purement conceptuel la construction de l'opérateur à partir des équations différentielles est toujours possible. Dans la pratique, en revanche, certaines hypothèses simplificatrices seront nécessaires. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

- L'opérateur H_{x_0} associé au système dynamique déterministe 1.8, est **causal**. Autrement dit, les sorties $y(t)$ de l'opérateur ne dépendent, à un instant donné, que du passé des entrées $u(t)$.

Définition

Nous sommes maintenant en mesure de donner une définition précise de la notion de stabilité entrée/sortie, au sens des espaces $\mathcal{L}_{q,e}$ (cf. annexe C). Pour cela nous faisons appel à l'opérateur de troncature que l'on notera simplement $(.)_T$ (cf. annexe C):

Définition 1.6 $\mathcal{L}_q$**-stabilité**

L'opérateur H_{x_0} (ou le système associé) est dit $\mathcal{L}_q$-stable si:

$$\begin{cases} \forall u \in \mathcal{L}_{q,e}^m\,,\ H(u) \in \mathcal{L}_{q,e}^m \\ \exists(\gamma,\beta) \,/\, \forall u \in \mathcal{L}_{q,e}^m\,, \forall T > 0\,,\ \|(H(u))_T\|_q \leq \gamma\|u_T\|_q + \beta \end{cases} \tag{1.11}$$

△

S'il existe une valeur γ vérifiant la condition (1.11), alors il en est de même de toutes les valeurs supérieures. Aussi, nous nous intéresserons à la plus petite de ces valeurs, que nous appellerons **gain** $\mathcal{L}_q$ de l'opérateur H_{x_0}. Quant à β, il s'agit d'un terme résiduel qui, compte tenu des hypothèses sur f et g devient nul en l'absence de conditions initiales.

On vérifiera simplement que pour les systèmes $\mathcal{L}_q$ stables causaux, on a:

$$u \in \mathcal{L}_q^m \Rightarrow H(u) \in \mathcal{L}_q^p \text{ et } \|H(u)\| \leq \gamma\|u\| + \beta$$

Notons pour finir l'adéquation complète entre cette définition et la notion qualitative que nous donnions à titre introductif au début de la section. En effet, la $\mathcal{L}_\infty$-stabilité est directement reliée à la notion de stabilité "entrée bornée - sortie bornée", tandis que la $\mathcal{L}_2$-stabilité correspond à la notion de stabilté "énergie d'entrée finie - énergie de sortie finie". C'est d'ailleurs cette dernière que nous utiliserons le plus, car elle permet, via l'égalité de Parseval, des interprétations intéressantes dans le domaine fréquentiel.

Exemples

Nous reprenons ici les deux exemples de la section précédente, en ajoutant bien sûr, une entrée $u(t)$ et un signal $y(t)$ qui mesure l'état $x(t)$. Considérons donc tout d'abord le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{1+t}\,x(t) \,+\, u(t)\,, \qquad x \in \mathbb{R}, u \in \mathcal{L}_{q,e}, \qquad t \geq t_0 \geq 0 \\ y(t) = x(t) \end{cases} \tag{1.12}$$

dont les trajectoires sont données par:

$$y(t) = x(t) = \frac{1+t_0}{1+t}x(t_0) \,+\, \int_{t_0}^{t} \frac{1+\tau}{1+t}u(\tau)d\tau \tag{1.13}$$

Prenons maintenant pour $u(.)$ une fonction de $\mathcal{L}_2$, par exemple:

$$u(t) = \frac{1}{(1+t)^\alpha}\,, t \geq 0$$

Cette fonction, d'après le critère de Riemann est bien de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$, pour tout α strictement supérieur à $\frac{1}{2}$. La sortie du système, correspondant à ce signal d'entrée est:

$$y(t) = x(t) = \frac{1+t_0}{1+t}x_0 + \frac{1}{1-\alpha}\Big((1+t)^{1-\alpha} - \frac{(1+t_0)^{2-\alpha}}{1+t}\Big) \tag{1.14}$$

où il apparaît clairement que,

$$\forall \alpha \in]\frac{1}{2}\ 1[\,,\ y(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Autrement dit, la sortie n'est pas bornée, et n'appartient ni à $\mathcal{L}_\infty$ ni a fortiori à $\mathcal{L}_2$. Le système 1.12 n'est pas $\mathcal{L}_2$ stable.

Intéressons-nous à présent au second système, décrit par les relations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2t\,x(t) + u(t), & x \in \mathbb{R},\ u \in \mathcal{L}_2 \qquad t \geq t_0 \geq 0 \\ y(t) = x(t) \end{cases} \tag{1.15}$$

Afin de simplifier l'expression de $y(t)$, nous posons $t_0 = 0$. On a alors:

$$y(t) = x(t) = x(t_0)e^{-t^2} + e^{-t^2}\int_0^t e^{-\tau^2}u(\tau)d\tau$$

Tout signal de $\mathcal{L}_2$ étant nécessairement borné, on vérifie aisément l'existence de l'intégrale. Plus précisément, on a:

$$\forall u(.) \in \mathcal{L}_2,\ \exists K\ /\ \int_0^t e^{-\tau^2}u(\tau)d\tau \leq K$$

d'où il vient:

$$\forall t \geq 0,\ |y(t)| \leq (x(t_0) + K)e^{-t^2}$$

On en déduit l'appartenance de $y(.)$ à $\mathcal{L}_2$.

En l'absence de conditions initiales, on a de plus:

$$||y||_2^2 = \int_0^\infty \Big(e^{-t^2}\int_0^t e^{-\tau^2}u(\tau)d\tau\Big)^2 dt$$

d'où l'on déduit, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$||y||_2^2 \leq \Big(\int_0^\infty e^{-2\tau^2}d\tau\Big)^2 ||u||_2^2 \ = \ \frac{\pi}{2}||u||_2^2$$

ce qui prouve finalement la $\mathcal{L}_2$ stabilité du système (1.15) dont le gain est borné par $\pi/2$. Notons qu'en présence de conditions initiales non nulles, au prix de calculs supplémentaires, nous ferions apparaître un terme résiduel β non nul. La conclusion quant à la stabilité serait bien sûr la même.

A travers ces deux exemples, certes élémentaires, il semble s'établir un parallèle entre la notion de stabilité entrée-sortie et la stabilité asymptotique uniforme. En effet, le premier système n'était pas uniformément asymptotiquement stable et il n'est pas non plus $\mathcal{L}_2$-stable. Tandis que le second système, globalement uniformément asymptotiquement stable est également $\mathcal{L}_2$-stable.

De là à conclure à l'équivalence des deux notions, il y a un pas que nous nous garderons bien de franchir. On peut en effet imaginer un système, par exemple du second ordre $\mathcal{L}_2$-stable, dont on n'excite et n'observe que le premier état. Dans ce cas, la notion de stabilité entrée-sortie est trop faible, puisqu'elle ignore totalement le comportement du deuxième état, qui, en présence de conditions initiales non nulles peut diverger très rapidement. Dans la théorie de la stabilité au sens de Lyapunov en revanche, on s'intéresse à la totalité des états du systèmes. Mais nous revenons sur ce point dans la section suivante, en précisant les liens essentiels qui existent entre les deux théories.

1.2 Théorèmes généraux sur la stabilité

Toujours dans le cadre très général de notre étude des systèmes non stationnaires, nous rappelons ici deux théorèmes fondamentaux d'analyse de la stabilité. Le premier donne, avec son corollaire, des conditions suffisantes de stabilité asymptotique uniforme globale (exponentielle). Notons que la notion plus élémentaire de stabilité uniforme est abandonnée car, au vu des exemples précédents, elle ne garantit pas la stabilité entrée/sortie. Le second théorème - *Théorème du Faible Gain* - présenté dans cette section constitue le pilier de la théorie de la stabilité entrée/sortie. A l'instar du premier, il servira de base à une part importante de nos résultats. Dans un troisième volet, nous présentons encore deux théorèmes qui font apparaître les liens entre les deux théories.

1.2.1 Stabilité asymptotique uniforme globale

Théorème 1.7 *[67] Le système (1.1) est globalement, uniformément, asymptotiquement stable s'il existe une fonction continuement différentiable, V, définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout t positif:*

$$\begin{cases} \alpha_1(\|x\|) \leq V(t,x) \leq \alpha_2(\|x\|) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \leq \alpha_3(\|x\|) \end{cases} \tag{1.16}$$

où α_1, α_2 et α_3 sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, continues, strictement croissantes, non bornées et nulles à l'origine.

□

Corollaire 1.8 *Si les hypothèses du théorème précédent sont satisfaites avec des fonctions α_i de la forme:*

$$\alpha_i(\|x\|) = \lambda_i \|x\|^c, \ \lambda_i > 0, \ c > 0$$

alors le système est globalement exponentiellement stable.

□

Interprétation et terminologie

En vertu des propriétés que lui impose le théorème (1.7), la fonction $V(x,t)$ est définie positive tandis que sa dérivée temporelle le long des trajectoires du système reste négative. On peut voir cette fonction comme une mesure de l'énergie du système à un instant donné. La stabilité s'interprète alors physiquement par la décroissance de l'énergie le long des trajectoires. C'est l'idée centrale des travaux de Lyapunov [84],c'est pourquoi l'on retient ce type de fonction sous le nom de fonction de Lyapunov.

Une telle fonction, qui prouve la stabilité asymptotique uniforme d'un système est une **fonction de Lyapunov**.

1.2.2 Théorème du faible gain

Il n'existe pas de résultat général qui permette de vérifier directement la stabilité entrée/sortie d'un système, à moins bien sûr de pouvoir en calculer toutes les trajectoires. En fait, cette approche de la stabilité est complémentaire de la précédente. Plus précisément, son but essentiel est de faciliter l'analyse des interconnections de systèmes (figure 1.2):

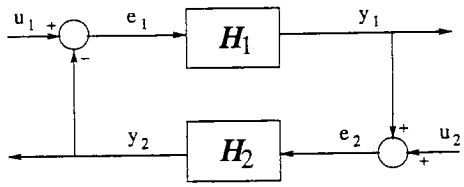


Figure 1.2: Schéma d'interconnection

Théorème 1.9 Forme générale

Etant donnés deux opérateurs H_1 et H_2, $\mathcal{L}_q$ stables, de gains respectifs γ_1 et γ_2, si

$$\gamma_1\gamma_2 < 1,$$

alors, $\forall u_1 \in \mathcal{L}_{q,e}^{m_1}, \forall u_2 \in \mathcal{L}_{q,e}^{m_2}, \forall T > 0$,

$$\|(e_1)_T\|_q \leq \frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2}(\|(u_1)_T\|_q + \gamma_2\|(u_2)_T\|_q + \beta_2 + \gamma_2\beta_1)$$

$$\|(e_2)_T\|_q \leq \frac{1}{1-\gamma_1\gamma_2}(\|(u_2)_T\|_q + \gamma_1\|(u_1)_T\|_q + \beta_1 + \gamma_1\beta_2)$$

et donc le système en boucle fermée est $\mathcal{L}_q$ stable, des entrées $(u1, u2)$ vers les sorties $(y1, y2)$.

□

Dans le cas fréquent où u_2 est nul, le schéma précédent se simplifie:

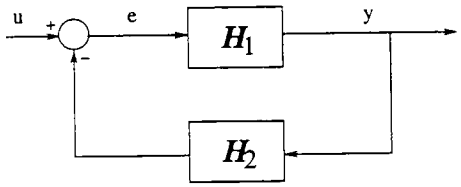


Figure 1.3: Schéma d'interconnection simplifié

et, les mêmes hypothèses sur les opérateurs H_1 et H_2 conduisent alors à l'inégalité:

$$\|y_1\|_q \leq \frac{\gamma_1}{1-\gamma_1\gamma_2}\|u_1\|$$

qui prouve la $\mathcal{L}_{q,e}$ stabilité du système rebouclé, dont le gain est borné par:

$$\gamma = \frac{\gamma_1}{1 - \gamma_1\gamma_2}$$

ce qui donne lieu à l'énoncé de la forme classique du théorème du faible gain:

Théorème 1.10 Forme classique

Etant donnés un opérateur H_1, $\mathcal{L}_q$ stable, et H_2, tel que le produit H_2H_1 soit $\mathcal{L}_q$ stable, de gain strictement borné par 1, *alors le système en boucle fermée (figure 1.3) est $\mathcal{L}_q$ stable de l'entrée u vers la sortie y.*

□

Le théorème du faible gain garantit donc la stabilité d'un système en boucle fermée à partir d'informations de type entrée/sortie sur les éléments constitutifs de cette boucle. S'agissant d'une analyse de la stabilité d'un point de vue externe, il n'y a absolument aucune contrainte quant à la nature des opérateurs envisagés. Ceux-ci peuvent être non linéaires, non stationnaires, avec ou sans mémoire. Il existe cependant une approche encore plus générale: **la stabilité sectorielle de Safonov** qui autorise chacun des opérateurs de la boucle à dépendre de signaux externes. Cette approche, dont on peut voir le théorème du faible gain comme l'un de ses corollaires, s'appuie sur l'approche sectorielle de la stabilité. Ici, nous n'en dirons pas plus. Nous invitons donc le lecteur qui souhaiterait en savoir davantage sur la question à consulter [108]. Signalons également la présence d'un résumé assez complet sur cette approche dans [3].

1.2.3 Liens entre la stabilité au sens de Lyapunov et la stabilité entrée/sortie

Nous reprenons à présent une discussion amorcée plus haut sur les liens existant entre la stabilité au sens de Lyapunov d'une part et la stabilité entrée/sortie d'autre part. Découvrir ces liens présente un réel intérêt, ne serait-ce que pour établir, par exemple, la stabilité $\mathcal{L}_2$ d'un système à partir d'une fonction de Lyapunov. On s'assure ainsi que le système en question est stable au sens de Lyapunov, et que son gain $\mathcal{L}_2$ est borné par une certaine valeur γ. Cette dernière propriété permet d'évaluer les performances. Plus précisément, le problème posé est celui de la recherche de conditions suffisantes pour que la stabilité asymptotique uniforme entraine la stabilité entrée/sortie. La solution proposée ici est relativement générale. Nous en proposerons d'autres, dans le chapitre 3.

Théorème 1.11 *[65] Considérons le système:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, t) \\ y(t) = h(x, u, t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où f est continuement différentiable, et h continue. On supposera en outre que la trajectoire $x \equiv 0$ est une trajectoire d'équilibre pour le système non excité ($f(0, 0, t) = 0$).

Si les conditions suivantes sont vérifiées:

- *$x \equiv 0$ est globalement exponentiellement stable*
- *$\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont globalement bornées*
- $\exists k_1, k_2, k_3 \geq 0 \,/\, \|h(x, u, t)\| \leq k_1\|x\| + k_2\|u\| + k_3$

alors, $\exists \gamma > 0 \,/\, \forall \|x_0\| \leq \delta, \forall \beta \geq 0,$

$$\|y\|_\infty \leq \gamma \|u\|_\infty + \beta$$

□

Ce théorème est intéressant dans la mesure où les hypothèses qu'il met en jeu sont finalement peu restrictives. En revanche, s'il prouve la stabilité entrée/sortie (au sens de $\mathcal{L}_\infty$), il ne donne pas d'informations quant au gain obtenu.

Remarquons que sous les hypothèses d'observabilité et de détectabilité uniforme, on peut établir la réciproque à condition toutefois de remplacer stabilité exponentielle par stabilité asymptotique.

Théorème 1.12 *[130] Une réalisation uniformément observable et uniformément atteignable d'un système stable au sens de la stabililité entrée/sortie, est globalement asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.*

□

1.2.4 Conclusions

Sur l'ensemble des résultats précédemment obtenus, nous retiendrons principalement les deux premiers pour la suite: le théorème général de stabilité globale au sens de Lyapunov et le théorème du faible gain.

Cependant, dans un cas comme dans l'autre, les conditions qui permettent de conclure à la stabilité restent très générales et souvent difficiles à vérifier. Aussi, serons-nous amenés à formuler des hypothèses supplémentaires. Toute la difficulté consiste à choisir ces dernières de façon à restreindre le moins possible le cadre de l'analyse.

L'hypothèse sans aucun doute la plus classique, en théorie de la commande, est celle de la **linéarité**. Certes, il s'agit d'une contrainte assez forte, dans la mesure où les systèmes physiques sont rarement linéaires. Toutefois, ils le deviennent "presque" dans le cadre d'une étude des petits mouvements. On parlera dans ce cas de stabilité locale. Notons par ailleurs que linéarité ne signifie pas stationnarité et que, finalement la classe des systèmes linéaires à paramètres variables que nous introduisons dans la section suivante est souvent plus générale qu'on ne le pense.

A propos de la seconde hypothèse, presque aussi classique que la première, nous pourrions dire qu'elle est au théorème du faible gain ce que la première est au théorème de la stabilité au sens de Lyapunov. Elle consiste à isoler les non-linéarités et non-stationnarités du système au sein d'un opérateur qui vient "boucler" sur le système principal devenu linéaire invariant.

1.3 Cas des systèmes linéaires

Nous présentons dans cette section un certain nombre de résultats sur l'analyse des systèmes linéaires, en insistant toutefois sur les aspects non stationnaires. Dans la mesure où il s'agit de systèmes linéaires, nous nous intéresserons implicitement à la stabilité des trajectoires d'équilibre à l'origine ($x \equiv 0$). Nous nous appuierons donc essentiellement sur le théorème de stabilité (1.7).

On distingue généralement trois grandes classes de systèmes linéaires. La première, bien qu'elle nous conduise temporairement hors du cadre des systèmes non stationnaires, est incontournable. Il s'agit de la classe des systèmes linéaires à temps invariant. Elle a fait l'objet de multiples publications aussi bien sur le plan théorique qu'au niveau des applications. La littérature montre que l'intérêt qu'elle suscite est toujours actuel. Nous considérons ensuite la classe des systèmes linéaires à temps variant, pour laquelle il existe

également quelques résultats. L'étude de cette classe est particulièrement intéressante pour certaines applications. L'exemple type d'un tel système est celui du lanceur dont la masse varie considérablement et de manière prévisible au cours du vol, puisqu'il suit une trajectoire calculée a priori.

La dernière classe, plus large que la précédente (voir figure 1.5) est celle des systèmes linéaires à paramètres variables. Elle fera ici l'objet d'une attention particulière car c'est en grande partie sur elle que reposent les méthodes d'analyse et de synthèse développées dans la thèse.

1.3.1 Trajectoires et caractérisation de la stabilité

Pour tout système linéaire - stationnaire ou non - on peut donner une expression générale des trajectoires suivies par le vecteur d'état x:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)f(\tau)d\tau \tag{1.17}$$

où $\Phi(t, \tau)$ est appelée **matrice de transition d'état**, tandis que le vecteur $f(t)$ matérialise les entrées du système à l'instant t. On aura par exemple, dans le cas des systèmes stationnaires $f(t) = Bu(t)$.

L'expression des trajectoires suggère un critère de stabilité simplifié, fondé sur l'utilisation de la matrice Φ:

Théorème 1.13 *La trajectoire d'équilibre $x \equiv 0$ d'un système linéaire est globalement exponentiellement stable* **si et seulement si**:

$$\exists k, \gamma > 0,\ \forall t \geq t_0 \geq 0, \|\Phi(t, t_0)\| \leq ke^{-\gamma(t-t_0)}$$

□

Ce critère, s'il permet d'éviter le recours à l'utilisation d'une fonction de Lyapunov pour prouver la stabilité d'un système linéaire, n'a cependant qu'une portée limitée puisque la détermination explicite de Φ n'est possible que dans le cadre des systèmes invariants...

1.3.2 Systèmes linéaires à temps invariant (LTI)

Un système linéaire à temps invariant (système LTI), d'ordre n, avec m entrées et p sorties, peut être décrit, dans le domaine temporel, par une représentation d'état de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.18}$$

où les matrices A,B,C et D appartiennent respectivement aux espaces $\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbb{R}^{p\times n}$, et $\mathbb{R}^{p\times m}$.

En dérivant la relation (1.17) on vérifie facilement que:

$$\frac{\partial \Phi(t,\tau)}{\partial t} = A(t)\Phi(t,\tau)$$

d'où il vient:

$$\Phi(t,\tau) = e^{A(t-\tau)} \tag{1.19}$$

Pour plus de simplicité, supposons la matrice A diagonalisable, et notons V, la matrice des vecteurs propres de A. Exprimons maintenant la matrice de transition du système en fonction de V et des valeurs propres λ_i de A. Il vient:

$$\Phi(t,\tau) = V \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-\tau)} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n(t-\tau)} \end{pmatrix} V^{-1} \tag{1.20}$$

Il est clair, d'après le critère (1.13), que le système LTI (1.18) est exponentiellement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A appartiennent au demi-plan ouvert gauche de $\mathbb{C}$:

$$\mathcal{R}e(\lambda_i(A)) < 0\,, \quad i = 1,\ldots,n$$

On peut retrouver ce résultat en appliquant le théorème (1.7). Pour cela, il suffit de rechercher une fonction de Lyapunov quadratique, de la forme:

$$V(x) = x^T X x \;\; X > 0$$

La dérivée temporelle de V le long des trajectoires du système s'exprime par:

$$\dot{V}(x) = x^T(A^T X + XA)x$$

d'où l'on déduit finalement une condition suffisante de stabilité:

$$\exists X > 0 \,/\, A^T X + XA < 0 \tag{1.21}$$

qui est également nécessaire puisque:

$$\exists X > 0,\ Q > 0,\ /\ A^T X + XA = -Q \iff \forall i\ \mathcal{R}e(\lambda_i(A)) < 0$$

et l'on a:

$$X = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

1.3.3 Systèmes linéaires à temps variant (LTV)

Par analogie à ce qui précède, nous retiendrons pour ces systèmes la description suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.22}$$

Les éléments $A(.)$, $B(.)$, $C(.)$, et $D(.)$ de la représentation d'état sont ici des fonctions généralement continues et bornées du temps, dont la dépendance est connue **a priori**.

Il devient maintenant impossible de déterminer une expression générale de la matrice de transition du système. Tout ce que l'on peut en dire, c'est qu'elle vérifie les relations:

$$\frac{\partial \Phi(t,\tau)}{\partial t} = A(t)\Phi(t,\tau)$$

et

$$\frac{\partial \Phi(t,\tau)}{\partial \tau} = -\Phi(t,\tau)A(\tau)$$

Aussi, l'utilisation du critère 1.13 devient-elle particulièrement délicate, dans la mesure où il faut à présent déterminer une borne sur la norme de Φ dont on ne connait pas de formulation explicite.

De nombreux travaux ont toutefois été entrepris dans ce sens, en s'appuyant sur l'hypothèse fondamentale d'évolution **lente** du système. Il est en effet naturel de penser que l'on puisse étendre les résultats relatifs aux systèmes LTI, au cas des systèmes linéaires variant lentement dans le temps.

Mais, avant d'aller plus loin, illustrons nos propos par ce petit exemple où l'on compare deux systèmes LTV du premier ordre:

Influence de la vitesse de variation

Considérons les deux systèmes suivant:

$$\dot{x} = A_1(t)x(t) = -\frac{1}{1+t}x(t)\,,\ x(0) = x_0 \tag{1.23}$$

$$\dot{x} = A_2(t)x(t) = -\frac{1}{\sqrt{1+t}}x(t)\,,\ x(0) = x_0 \tag{1.24}$$

Nous avons déjà montré, dans ce chapitre que le premier système n'était pas uniformément asymptotiquement stable, bien que:

$$\forall t \geq 0, A_1(t) = -\frac{1}{1+t} < 0$$

En revanche, les trajectoires du second système, étant de la forme:

$$x(t) = x_0 e^{-2(\sqrt{1+t}-1)}$$

on en déduit la stabilité exponentielle globale.

Or, il se trouve comme l'illustre la figure ci-après, que l'évolution du pôle du second système est plus lente que celle du premier:

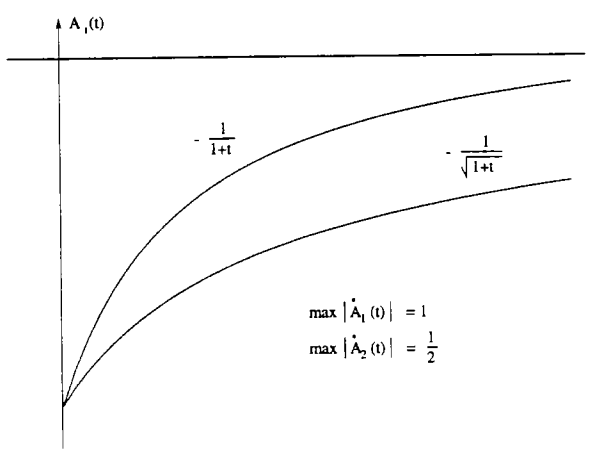


Figure 1.4: Evolutions temporelles des pôles

Parmi les premiers résultats théoriques dans ce domaine, citons une note de Desoer parue en 1969 [33] dans laquelle il montre que si la fonction $A(.)$ est bornée et que, pour

σ suffisamment grand et ϵ suffisamment petit tels que:

$$\begin{cases} \forall t \geq 0, \mathcal{R}e(\lambda(A(t))) \leq -\sigma < 0 \\ \|\dot{A}(t)\| \leq \epsilon \end{cases}$$

alors le système est asymptotiquement stable. Il ne s'agit bien sûr que d'une condition suffisante - donc plus ou moins conservative - de stabilité. Plusieurs améliorations ont d'ailleurs été proposées[2] dont certaines sont relativement récentes [58, 55].

Néanmoins, il s'agit toujours de conditions assez théoriques et qualitatives. On ne peut guère espérer résoudre, par ce type d'approche, un problème général de stabilisation de système LTV variant lentement.

Cherchons maintenant à prouver la stabilité du système (1.22) à l'aide d'une fonction de Lyapunov quadratique variant dans le temps:

$$V(x,t) = x^T X(t) x$$

Les conditions du théorème (1.7) et de son corollaire (1.8) sont satisfaites s'il existe des constantes strictement positives α_1 et α_2 telles que, pour toute valeur positive de t:

$$\begin{cases} \alpha_1 I \leq X(t) \leq \alpha_2 I \\ \dot{X}(t) + A^T(t)X(t) + X(t)A(t) < 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

Ces conditions suffisantes de stabilité sont également nécessaires. En effet, si le système est exponentiellement stable, la fonction $X(t)$ définie pour $Q(t) > 0$ par:

$$X(t) = \int_0^t \Phi(t,\tau)^T Q(\tau) \Phi(t,\tau) d\tau$$

vérifie (1.25).

Toutefois, la recherche de la fonction $X(t)$, dans la cas général, s'avère difficile et on est souvent amené à simplifier le problème, en considérant par exemple une fonction constante. D'autres hypothèses, moins restrictives pourront également être formulées. Généralement, on retiendra les approches qui consistent à choisir une fonction de Lyapunov dont la dépendance temporelle recopie celle du système. Ainsi, par exemple, si la matrice d'évolution du système s'écrit:

$$A(t) = A_0 + f(t)A_1$$

on prendra une fonction de la forme:

$$X(t) = X_0 + f(t)X_1$$

[2] visant généralement à réduire la borne inférieure sur σ et à augmenter la borne supérieure sur ϵ.

Dans ce cas, en supposant la fonction $f(.)$ bornée, à dérivée bornée, on obtient un critère qu'il est possible d'exprimer à l'aide d'inégalités matricielles linéaires (cf. annexe A). Certes, la condition obtenue restera conservative, mais dans une moindre mesure que celle à laquelle conduit le choix d'une fonction X constante.

Au sens de la définition que nous en avons donnée, le dernier exemple sort du cadre strict des systèmes LTV. En effet, la dépendance temporelle apparaît à travers la fonction $f(.)$, que l'on peut voir comme un paramètre du système. Il est donc plus juste de dire que ce dernier appartient à la classe des systèmes à paramètres variables.

1.3.4 Systèmes linéaires à paramètres variables (LPV)

Une vue générale

Comme le montrent les équations ci-dessous, les systèmes linéaires à paramètres variables, contrairement aux systèmes LTV, ne dépendent pas explicitement du temps:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \\ y(t) = C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))u(t) \\ \forall t \geq 0, \;\; \theta(t) = [\theta_1(t)\ \theta_2(t)\ \ldots\ \theta_r(t)]^T \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^r \end{cases} \tag{1.26}$$

Les éléments $A(.)$, $B(.)$, $C(.)$, et $D(.)$ de la représentation d'état sont des fonctions matricielles du **vecteur de paramètres** $\theta(t)$. Elles sont définies de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbb{R}^{p\times n}$ et $\mathbb{R}^{p\times m}$ respectivement.

Un bref résumé de la situation est illustré par le schéma suivant:

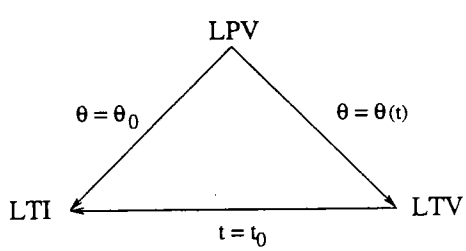


Figure 1.5: Liens entre systèmes linéaires

où l'on voit qu'un système LTI peut s'interpréter comme un système LPV dont on a figé les paramètres, où comme un système LTV dont on a figé le temps. Par ailleurs, ce dernier peut être vu comme un système LPV dont on aurait prédéfini une trajectoire.

Remarque: Afin de rendre les formules plus lisibles, il nous arrivera fréquemment d'omettre la dépendance temporelle. Ainsi, le système 1.26 devient:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)u \\ y = C(\theta)x + D(\theta)u \\ \theta \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^r \end{cases} \tag{1.27}$$

Les systèmes LPV interviennent fréquemment dans les applications. De nombreux systèmes **même non linéaires**, peuvent en effet être approchés (cf. paragraphe 1.3.4) par la description 1.26. Citons bien sûr le cas de l'avion de combat (cf. troisième partie) dont le modèle "linéarisé" dépend de la pression dynamique et de la vitesse, lesquelles évoluent dans le temps. Citons également le cas du missile dont les coefficients aérodynamiques varient en fonction de l'incidence, de l'altitude et de la vitesse. Pour sortir du domaine de l'aéronautique, nous pourrions encore penser à divers processus chimiques où les paramètres clé sont le plus souvent la température et les concentrations des composants. Dans chacun de ces cas, bien que l'évolution des paramètres puisse souvent être mesurée en temps réel, elle est rarement connue a priori. En effet, les causes de variations de la pression dynamique, de la vitesse ou encore de la température, sont souvent nombreuses et de surcroît imprévisibles. Ainsi, par opposition à un système LTV dont l'évolution temporelle est entièrement décrite par les équations, un système LPV pourra afficher autant de comportements différents qu'il y a de trajectoires paramétriques admissibles.

Compte tenu de la définition qui a été adoptée, nous entendons par trajectoires admissibles, toutes celles dont les points appartiennent à chaque instant au domaine $\mathcal{P}$ de l'espace $\mathbb{R}^r$. Il aurait été plus juste et certainement plus précis, de définir $\mathcal{P}$ comme un domaine de l'espace-temps qui décrirait directement un ensemble de trajectoires ayant toutes un sens physique. La caractérisation que nous avons retenue autorise en effet certaines évolutions paramétriques peu souhaitables présentant par exemple des discontinuités de vitesse voire même de position. Néanmoins, sur le plan mathématique, définir un ensemble de points plutôt qu'un ensemble de trajectoires, facilite grandement l'analyse. De plus, sans remettre en cause notre définition de $\mathcal{P}$, nous verrons qu'il est possible d'ajouter certaines contraintes sur l'évolution des paramètres sans que cela ne devienne un obstacle insurmontable au développement des méthodes numériques d'analyse ou de synthèse.

Systèmes LPV et systèmes non linéaires

Contrairement à ce qu'indique son nom, la classe des systèmes LPV dépasse assez largement le cadre des systèmes classiques. Cette remarque rend d'ailleurs, comme nous le soulignions plus haut, son étude d'autant plus intéressante.

Jusqu'à présent, dans notre description des systèmes LPV, nous avons considéré le vecteur de paramètres indépendamment des états du système. Pourtant, à condition de supposer ses trajectoires a priori bornées, il est parfaitement licite d'envisager un système décrit par [79]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(y)x + B(y)u\,,\ x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx \\ \forall t \geq 0\,,\ y(t) \in \mathcal{P}_y \subset \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.28}$$

où le vecteur de paramètres coïncide avec celui des sorties mesurées. Ce système appartient à ce que que nous appellerons la classe des systèmes "quasi-LPV".

Dans le théorème suivant, nous établissons le lien entre cette classe et les systèmes non-linéaires:

Théorème 1.14 *Soit un système* **non linéaire** *de la forme relativement générale suivante (à laquelle on pourra souvent se ramener par dérivation):*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + B(y(t))u\,,\ x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \\ \forall t \geq 0\,,\ y(t) \in \mathcal{P}_y \end{cases} \tag{1.29}$$

Si l'on suppose en outre que (au prix d'un éventuel équilibrage):

$$f(0) = 0$$

et que la non-linéarité de f concerne uniquement les états mesurables:

$$f(x) = Lx + g(y)$$

alors le système non linéaire (1.29) admet la formulation "quasi-LPV" (1.28) avec:

$$A(y) = L + \left(\int_0^1 \nabla g(ty)dt\right) C \tag{1.30}$$

□

Preuve: Il suffit de remarquer que la relation:

$$f(x) = A(y)x$$

est vérifiée à l'origine et que les dérivées temporelles de chacun des deux membres coïncident à chaque instant.

■

Dans un contexte légèrement différent, cette idée qui consiste à linéariser de manière exacte un système non linéaire en vue de son analyse est également présente dans [124].

Comme nous l'avons déjà mentionné, le modèle quasi-LPV n'a de sens que si ses trajectoires évoluent dans un domaine borné. Cette contrainte sera vérifiée dès lors que le système sera stable. Toutefois, pour vérifier la stabilité d'un système LPV, il est nécessaire de connaître le domaine d'évolution des paramètres. Cette donnée fondamentale fait normalement partie de la description du système. Aussi dans le cas des sytèmes "quasi-LPV" faudra-t-il émettre une hypothèse a priori quant à la taille du domaine $\mathcal{P}_y$, pour ensuite en vérifier la stabilité. Si le système est instable, on devra réduire la taille de $\mathcal{P}_y$ si par contre il est stable, il faudra s'assurer, pour toute condition initiale licite, que les trajectoires restent dans $\mathcal{P}_y$. Dans la pratique, cette démarche est souvent facilitée car on connaît bien a priori les bornes d'évolution des sorties mesurées (cf. partie III).

Bien que, par la technique exposée on puisse représenter une classe très large de systèmes non linéaires, il faut être conscient d'une limitation pratique majeure. En effet, considérer un nombre trop important d'états comme des paramètres rend l'analyse souvent très conservative d'une part et numériquement délicate d'autre part car la complexité d'un modèle LPV est très étroitement liée à la taille du vecteur $\theta(t)$ (cf chapitre 2). En revanche, si la non-linéarité porte sur quelques états, la méthode pourra s'avérer non seulement séduisante mais aussi d'une grande efficacité.

On pourra naturellement envisager des systèmes partiellement non linéaires, à paramètres variables. Ainsi, par exemple, le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \theta x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 - x_2 \end{cases}$$

peut encore s'écrire sous la forme quasi-LPV:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta & x_2 \\ x_2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Introduction à l'analyse

Nous présentons, dans ce paragraphe, une introduction très rapide sur le sujet qui, par ailleurs, sera largement développé au chapitre 3. Nous restons dans le contexte d'une analyse fondée sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov. Un autre point de vue sera abordé dans la dernière section du chapitre (cf. section 1.4).

On s'intéresse donc au système suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x \\ x(0) = x_0 \\ \theta \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^r \end{cases} \tag{1.31}$$

dont on veut prouver la stabilité à l'aide d'une fonction de la forme:

$$V(x, \theta(t)) = x^T X(\theta(t))x$$

Pour cela, il nous suffit de traduire la décroissance de V le long des trajectoires du système. Il vient la condition suivante:

$$\forall \theta \in \mathcal{P}\,, \quad \dot{\theta}\frac{\partial X}{\partial \theta} + A^T(\theta)X(\theta) + X(\theta)A(\theta) < 0 \tag{1.32}$$

qu'il est malheureusement difficile de vérifier dans le cas général. En revanche si l'on suppose la dépendance paramétrique affine, ie:

$$A(\theta) = A_0 + \theta_1 A_1 + \ldots \theta_r A_r$$

nous verrons qu'il est possible d'obtenir un critère assez peu conservatif et facile à coder.

Nous venons ici de souligner un point important dans notre étude des systèmes LPV concernant le **choix d'un modèle d'analyse**. Nécessaire, ce choix s'avère également capital, car c'est bien en priorité de la qualité du modèle dont dépendra celle de l'analyse et a fortiori celle de la synthèse.

L'approche qui vient d'être présentée suggère le choix d'un modèle affine. Nous verrons au chapitre 2 qu'il s'agit en fait d'une hypothèse moins restrictive qu'elle ne le laisse paraître au premier abord. Mais nous détaillerons également la construction d'un autre modèle, fondé sur une hypothèse plus générale qui autorise le système à dépendre des paramètres de façon linéaire fractionnelle.

Ce dernier modèle trouve sa justification dans une approche fondée sur la notion de stabilité entrée/sortie. C'est à dessein que nous l'avons ici occultée car, la classe des systèmes dont elle permet l'analyse, couvre non seulement une large part de celle des systèmes LPV, mais aussi un ensemble non négligeable de systèmes à la fois non stationnaires et non linéaires. La section suivante a donc pour objet de réparer cet oubli volontaire.

1.4 Systèmes bouclés

1.4.1 Historique

L'analyse des systèmes non linéaires, non stationnaires, que nous proposons ici, repose en fait essentiellement sur la théorie de la stabilité absolue [85]. Ce sont les mathématiciens Russes, A.I. Lur'e et V.N. Postnikov, qui en 1944, ont posé les premières pierres de cette théorie, en étudiant la stabilité des systèmes de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx \\ u = -\varphi(y) \end{cases} \tag{1.33}$$

qui admettent aussi la représentation schématique:

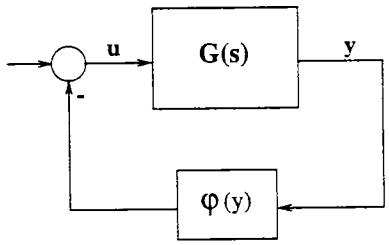


Figure 1.6: Système de Lur'e - Postnikov

où $G(s)$ correspond à la fonction de transfert (cf. annexe D) mono-entrée/mono-sortie associée à la partie linéaire invariante du système:

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}b$$

tandis que $\varphi(.)$ est une fonction non linéaire sans mémoire, vérifiant l'inégalité:

$$\forall y \in \mathbb{R}^*, \frac{\varphi(y)}{y} \geq 0 \tag{1.34}$$

Par la suite, des containtes sectorielles plus "fines" (figure 1.7) ont été introduites:

$$\forall y \in \mathbb{R}^*, \underline{k} \leq \frac{\varphi(y)}{y} \leq \bar{k} \tag{1.35}$$

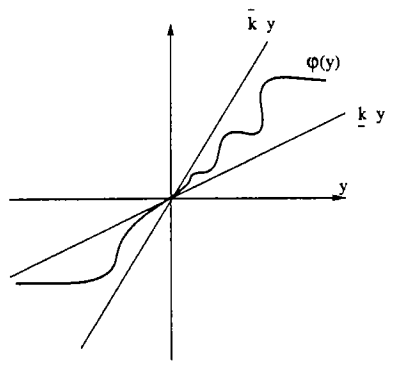


Figure 1.7: Contraintes sectorielles sur φ

Cette étude[3] fut initialement conduite dans le cadre de la théorie de Lyapunov, et ses auteurs ont proposé le choix de fonctions de la forme:

$$V(x) = x^T P x + 2\beta \int_0^y \varphi(\sigma) d\sigma \tag{1.36}$$

qui portent aujourd'hui leurs noms. L'approche fréquentielle fut développée une vingtaine d'années plus tard par le scientifique roumain Popov qui a laissé son nom à un critère aujourd'hui très célèbre.

Pour conclure ce bref historique, nous remarquerons simplement que l'idée qui consiste à simplifier l'étude des systèmes non linéaires en isolant la non-linéarité au sein d'un opérateur (supposé, dans le cas du problème de Lur'e, stationnaire, sans mémoire) "bouclant" sur la partie linéaire invariante n'est pas si récente!

Généralisation du problème de Lur'e

Afin de traiter le cas des systèmes où apparaissent plusieurs non linéarités mais aussi plusieurs **non-stationnarités**, nous proposons de généraliser le problème de Lur'e (schéma 1.8).

[3]intitulée: résolution du problème de Lur'e.

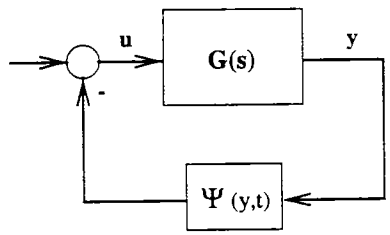


Figure 1.8: Généralisation du système de Lur'e

où le système linéaire invariant $G(s) = D+C(sI-A)^{-1}B$ est désormais multi-dimensionnel. Par ailleurs, on généralisera les contraintes sectorielles en introduisant les matrices diagonales $\underline{K}$ et $\bar{K}$:

$$\underline{K} = diag(\underline{k_1}\ \underline{k_2}\ \ldots\ \underline{k_r}) \quad \text{et} \quad \underline{K} = diag(\bar{k_1}\ \bar{k_2}\ \ldots\ \bar{k_r})$$

telles que:

$$\forall t \geq 0\,, \forall y\,,\ (\Psi(y,t) - \underline{K}y)^T(\Psi(y,t) - \bar{K}y) \leq 0$$

On étudiera également le cas où la fonction Ψ est bornée:

$$\forall t \geq 0\,, \forall y\,,\ \|\Psi(y,t)\| \leq 1$$

Nous présentons maintenant quelques résultats essentiels sur l'analyse des systèmes bouclés: Critère de Popov, Critère du Cercle, applications du Théorème du Faible Gain. Bien qu'il s'agisse - nous l'avons déjà souligné - de résultats relativement anciens, la formulation adoptée à la fois dans la description et la justification de ces résultats est assez récente [24, 50, 51, 79].

Afin de simplifier les développements - sans que cela ne réduise pour autant la généralité du raisonnement - nous supposerons dans ce qui suit, la matrice $\underline{K}$ identiquement nulle. On posera alors $\bar{K} = K$. Ainsi, l'inégalité précédente devient:

$$\forall \Psi, \Psi^T(\Psi - Ky) \leq 0 \tag{1.37}$$

soit, en remarquant que $y = Cx + Du$ et $u = -\Psi$:

$$\forall x,\ \forall \Psi,\ \ \Psi^T(2I + KD + D^TK^T)\Psi - 2\Psi^TKCx \leq 0 \tag{1.38}$$

1.4.2 Critère du cercle

Pour établir le critère du cercle, dont on justifiera le nom un peu plus loin, on choisit une fonction de Lyapunov **quadratique**:

$$V(x) = x^TXx\,,\ X > 0$$

D'après le théorème 1.7, le système (fig. 1.8) est stable si:

$$\forall \Psi, \Psi^T(\Psi - Ky) \leq 0 \;\Rightarrow\; \dot{V}(x) < 0 \tag{1.39}$$

On vérifie aisément que:

$$\dot{V}(x) = x^T(A^TP + PA)x - 2x^TPB\Psi$$

et que, compte tenu des hypothèses:

$$\Psi^T(\Psi - Ky) = \Psi^T(2I + KD + D^TK^T)\Psi - 2\Psi^TKCx$$

Chacune de ces expresions étant quadratique, on obtient facilement une condition suffisante de stabilité en appliquant la $\mathcal{S}$ procédure (vf. annexe B). On en déduit la version suivante du critère du cercle.

Théorème 1.15 Critère du "cercle" simplifié

Le système (fig. 1.8) est stable, pour toute perturbation non linéaire, non stationnaire Ψ telle que:

$$\forall t \geq 0\, \forall y,\; \Psi^T(\Psi - Ky) \leq 0$$

s'il existe une matrice symétrique définie positive X solution de l'inégalité matricielle linéaire (LMI):

$$\begin{pmatrix} A^TX + XA & C^TK^T - XB \\ KC - B^TX & -KD - D^TK^T - I \end{pmatrix} < 0 \tag{1.40}$$

□

Pour établir le lien avec le critère fréquentiel, il suffit de remarquer (cf. annexe D) que l'inégalité matricielle (1.40) est satisfaite si et seulement si, le système:

$$H(s) = I + KG(s)$$

est strictement positif réel, ie:

$$\forall s\,, \mathcal{R}e(s) > 0 \Rightarrow H(s) + H(s)^* > 0$$

Autrement dit, dans le cas scalaire, le système est stable si son lieu de Nyquist reste à droite du point $-1/k$, et on comprend mal pourquoi cela s'appelle critère du cercle!

Mais, si l'on suppose que la contrainte sectorielle est symétrique:

$$\bar{K} = -\underline{K} = K > 0$$

l'inégalité précédente devient:

$$\begin{pmatrix} A^T X + XA + C^T K^T KC & -XB + C^T K^K D \\ -B^T X + D^T K^T KC & -I - D^T K^T KD \end{pmatrix} < 0$$

soit, par complément de Schur (annexe B):

$$\begin{pmatrix} A^T X + XA & -XB & C^T K^T \\ -B^T X & -I & D^T K^T \\ KC & KD & -I \end{pmatrix} < 0$$

où l'on reconnait l'inégalité du lemme borné-réel (annexe D) appliquée au système $KG(s)$. Elle équivaut donc à:

$$\|KG(s)\|_\infty < 1$$

Pour en revenir à l'interprétation géométrique, dans le cas scalaire, le système demeure stable en présence de perturbations Ψ vérifiant des contraintes sectorielles symétriques ($|\Psi(y,t)| \leq k|y|$), si son lieu de Nyquist reste à l'intérieur du cercle centré en 0 et de rayon $1/k$. Dans le cas de contraintes non symétriques, on observera une translation du cercle sur l'axe réel. De plus, si $\bar{k}$ et $\underline{k}$ sont de même signe, le lieu de Nyquist devra rester à l'extérieur du cercle [65] et non plus à l'intérieur.

1.4.3 Critère de Popov et extensions

Nous nous proposons d'établir ici le critère de Popov en suivant une démarche analogue à celle qui précède. Afin de traiter le cas multi-dimensionnel, on généralise la fonction de Lur'e et Postnikov (1.36):

$$V(x) = x^T X x + 2\alpha \sum_{i=1}^{i=r} k_i \int_0^{y_i} \varphi_i(\sigma) d\sigma \,,\ X > 0$$

où les fonctions $\varphi_i(.)$ sont les composantes du vecteur Ψ que l'on suppose provisoirement **stationnaire**. Les réels k_i constituent quant à eux les éléments de la matrice diagonale K. On supposera, comme précédemment que Ψ vérifie la contrainte sectorielle:

$$\forall y, \Psi^T(\Psi - Ky) \leq 0$$

De ce fait, on montre que chaque intégrale dans l'expression de V est positive, donc V est strictement positive. Reste à exprimer la dérivée temporelle:

$$\dot{V}(x) = x^T(A^TX + XA)x + 2x^T(-XB + \alpha A^TC^TK^T)\Psi - \alpha\Psi^T(KCB + B^TK^TC^T)\Psi$$

D'où l'on déduit, d'après le théorème (1.7) et en appliquant à nouveau la $\mathcal{S}$ procédure, que le système reste stable en présence de Ψ, si:

$$\begin{pmatrix} A^TX + XA & C^TK^T + \alpha A^TC^TK^T - XB \\ KC + \alpha KCA - XB & -(I + KD) - (I + KD)^T - \alpha(KCB + B^TC^TK^T) \end{pmatrix} < 0$$

En remarquant que (le lecteur trouvera une généralisation de ce résultat par exemple dans [83]):

$$I + (1 + \alpha s)KG(s) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline KC + \alpha KCA & I + KD + \alpha KCB \end{array}\right)$$

on en conclut (cf. annexe D) que l'inégalité précédente est vérifiée si et seulement si:

$$H(s) = I + (1 + \alpha s)KG(s)$$

est **strictement positif réel**. Ce résultat, qui constitue le critère de Popov multivariable est moins général que le critère du cercle puisqu'il ne prend pas en compte les systèmes non stationnaires. Toutefois, dans le cadre des systèmes purement non linéaires, de par la présence du paramètre supplémentaire α, il conduit à une caractérisation moins conservative de la stabilité[4]. Ce paramètre intervient dans l'expression:

$$m(s) = 1 + \alpha s$$

laquelle vient multiplier le système. Aussi l'appelle-t-on tout simplement multiplieur de Popov! Cette remarque, a priori anodine, ne l'est pas tant que ça. Elle permet entre autres de faire le lien entre le critère précédent du cercle et le critère de Popov. Ce lien, qui repose sur l'équivalence entre le schéma (1.8) et le suivant:

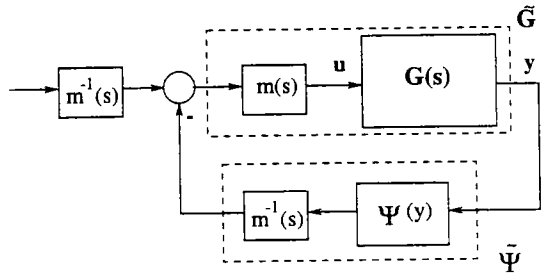


Figure 1.9: Introduction des multiplieurs

[4]pour $\alpha = 0$, on retrouve le critère du cercle.

est à l'origine de nombreux développements autour des techniques d'analyse fondées sur l'utilisation des multiplieurs. On ne tarda pas d'ailleurs à étendre ces techniques à l'étude des systèmes non stationnaires.

Parmi les premiers travaux dans ce domaine, on retiendra un article de Narendra et Taylor [93] qui proposent une extension du critère de Popov, au cas des non-linéarités de la forme:

$$\Psi(y,t) = k(t)F(y)$$

où le gain variable $k(t)$ est supposé borné, tandis que la non-linéarité $F(y)$ vérifie les contraintes sectorielles habituelles. L'analyse proposée par les auteurs repose sur le choix de fonctions de Lyapunov dont l'allure nous est maintenant familière:

$$V(x,t) = x^T X x + 2\alpha \sum_{i=1}^{i=r} \beta_i k(t) \int_0^{y_i} f_i(\sigma) d\sigma \,, \; X > 0$$

Remarquons toutefois que de telles fonctions ne dépendent pas seulement de x, mais également du temps par l'intermédiaire du gain $k(t)$. De ce fait, si le critère obtenu par les auteurs se rapproche de celui de Popov par certains côtés (condition sur la positivité) il en diffère fondamentalement par d'autres (contraintes sur la vitesse de variation du gain $k(t)$).

Choisissant comme point de départ, le critère de Nyquist, Venkatesh a également proposé dans une note parue en 1969 [126] un ensemble de conditions assurant la stabilité de la classe de systèmes non stationnaires décrite par la figure (1.10):

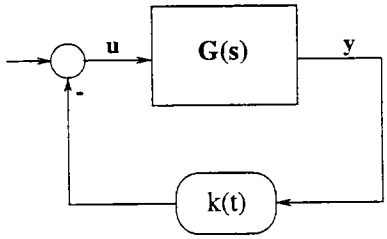


Figure 1.10: Bouclage par un gain variable

Sundareshan et Thathachar [122] se sont également intéressés à l'étude de cette classe dans le cadre de la $\mathcal{L}_2$ stabilité. Leur approche repose donc largement sur la notion d'opérateurs. Si les conditions qu'ils obtiennent mettent bien sûr en œuvre des multiplieurs, toutefois, elles ne sont valables que dans le cadre des systèmes mono-variables (cf. figure 1.10).

Les généralisations de ces travaux au cas multivariable sont relativement récentes [87, 86]. Notons par ailleurs, depuis quelques années, un véritable engouement pour ce qu'on pourrait appeler la théorie des multiplieurs ou encore théorie de la positivité, non seulement en analyse [83, 8, 61] mais aussi en synthèse [109, 73].

1.4.4 Faible gain

Nous reprenons ici la forme classique du théorème du faible gain (1.10) dans le contexte de l'analyse des systèmes non stationnaires. L'hypothèse de départ, repose sur la représentation désormais classique:

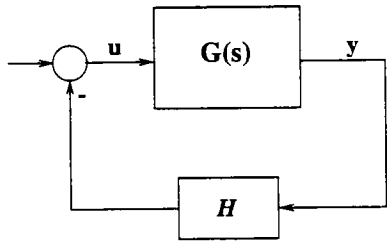


Figure 1.11: Bouclage par un opérateur

où $G(s)$ décrit la partie linéaire invariante du système supposée gouvernable et observable ($G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$) tandis que l'opérateur H contient toutes les non-linéarités et/ou non-stationnarités. Dans l'immédiat, on ne formulera aucune hypothèse quant à la nature de H (opérateur multivariable, non linéaire, non stationnaire avec ou sans mémoire). On supposera simplement ce dernier, $\mathcal{L}_2$ stable à gain borné par 1:

$$\forall y \in \mathcal{L}_{2,e}{}^p,\ \forall T \geq 0,\ \|(H(y))_T\|_2 \leq \|y_T\|_2$$

D'après la forme classique du Théorème du Faible Gain, le système bouclé est $\mathcal{L}_2$ stable si:

- G est $\mathcal{L}_2$ stable, H est $\mathcal{L}_2$ stable
- HG est $\mathcal{L}_2$ stable à gain strictement borné par 1

Compte tenu de l'hypothèse sur H, il suffit de vérifier que G est $\mathcal{L}_2$ stable à gain strictement borné par 1. Si G est un système LTI, la condition pourra s'écrire, puisque le gain

$\mathcal{L}_2$ coïncide avec la norme $\mathcal{H}_\infty$ de la réalisation rationnelle:

$$\|G(s)\|_\infty < 1 \tag{1.41}$$

qui pourra aussi s'avérer malheureusement, très conservative pour plusieurs raisons:

- **Absence de prise en compte de la nature de H.** En général il s'agit d'un opérateur non linéaire, mais plusieurs questions restent en suspens. Est-il non stationnaire? Est-ce un opérateur dynamique? (ie. avec mémoire).
- **Absence de prise en compte de la structure.** Cet aspect est fondamental dans le cas des sytèmes multivariables. De plus, dans la mesure où H est souvent utilisé pour modéliser des incertitudes ou variations temporelles, il affiche souvent une structure bien spécifique, typiquement diagonale par blocs.

La technique généralement proposée pour traiter ce genre de problèmes consiste à "raffiner" le théorème du faible gain en ajoutant dans la boucle un opérateur inversible D et son inverse D^{-1} commutant avec H. Ainsi, on ne modifie rien aux propriétés de stabilité de la boucle puisque les deux schéma ci-après sont équivalents:

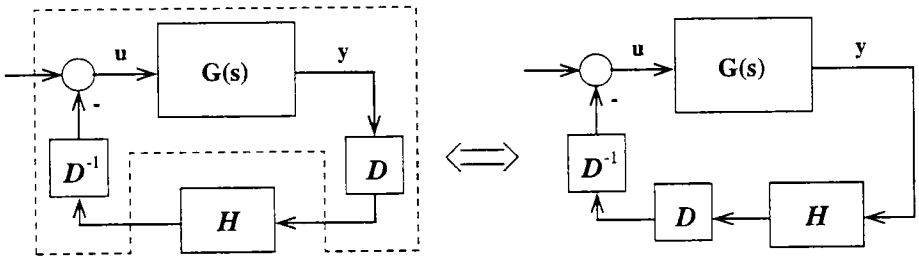


Figure 1.12: Introduction des "scalings"

Afin de simplifier la présentation, on suppose le système carré. Au besoin, il suffira d'ajouter des lignes ou colonnes de zéros.

Appliquons maintenant le théorème du faible gain au système délimité par les pointillés. On en déduit le théorème:

Théorème 1.16 *Le système en boucle fermée décrit par le schéma (1.10) est $\mathcal{L}_2$ stable s'il existe un opérateur D inversible, commutant avec H tel que:*

$$\forall u \in \mathcal{L}_{2,e}{}^m,\ \|(DGD^{-1}(u))_T\|_2 < \|u_T\|_2$$

□

Si l'on restreint D à la classe des opérateurs linéaires invariants, on obtient le corollaire:

Corollaire 1.17 *Le système en boucle fermée décrit par le schéma (1.11) où H est LTI, est $\mathcal{L}_2$ stable si:*

$$\inf_{D \in \mathcal{D}} \|D(s)G(s)D^{-1}(s)\|_\infty < 1$$

où $\mathcal{D}$ représente l'ensemble des opérateurs linéaires invariants stables à inverses stables, commutant avec H.

□

Dans chacun des cas, l'opérateur D, que l'on appellera souvent opérateur de "**scaling**" (ou plus simplement: scaling) joue le rôle d'un répartiteur des sorties de H sur le système linéaire G de manière à en minimiser l'effet. En fait il occupe, dans le cadre de la théorie du faible gain, une place similaire à celle détenue par les multiplieurs dans le cadre de la théorie de la positivité.

Les scalings commutent nécessairement avec l'opérateur H. C'est en ce sens, qu'il y a une prise en compte effective de sa structure mais aussi de sa nature. En effet, si H est non stationnaire, on devra, pour garantir la commutativité, choisir un opérateur sans mémoire. Le choix le plus simple consiste à prendre une matrice D constante. On obtient alors un nouveau corollaire:

Corollaire 1.18 *Le système bouclé par un opérateur H* **non stationnaire** *(fig. 1.11) $\mathcal{L}_2$ stable est $\mathcal{L}_2$ stable s'il existe une matrice symétrique définie positive X et une matrice symétrique, définie positive $L \in \mathcal{L}$ telles que:*

$$\begin{pmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -L & D^T \\ C & D & -L^{-1} \end{pmatrix} < 0 \tag{1.42}$$

où

$$\mathcal{L} = \{L = L^T \ / \ \forall u \in \mathcal{L}_{2,e}{}^m, HL(u) = LH(u)\}$$

□

Preuve: Il suffit d'appliquer le lemme borné réel (annexe D) au système $DG(s)D^{-1}$, puis de multiplier l'inégalité obtenue à gauche et à droite respectivement par:

$$\mathrm{diag}(I, D^T, D^{-1}) \quad \text{et} \quad \mathrm{diag}(I, D, D^{-T})$$

On obtient alors (1.42) avec $L = D^T D > 0$ puisque D est non singulière.

■

Ce dernier résultat illustre l'intérêt que présente une approche de type "faible gain" dans l'analyse des systèmes non stationnaires. Il nous amène aussi à nous poser un certain nombre de questions, en particulier quant à la détermination de l'ensemble $\mathcal{L}$ et ses diverses généralisations possibles. Ce point sera traité plus loin.

1.5 Conclusion

A travers ce parcours introductif mais aussi très général sur l'analyse en stabilité des systèmes non stationnaires, nous avons développé deux grandes approches. La première s'appuie sur la théorie de Lyapunov, tandis que la seconde repose sur un concept plus récent de stabilité entrée/sortie.

Les liens souvent très forts qui unissent ces deux approches, a priori distantes, ont été soulignés. Pour y parvenir avec davantage de facilité, nous avons utilisé un formalisme fondé sur l'utilisation de LMI [5]. C'était aussi l'occasion d'introduire une méthodologie à laquelle nous ferons largement appel par la suite (dès le chapitre 3).

Par ailleurs, nous avons mis en évidence la nécessité d'une certaine adéquation entre la méthode retenue pour mener à bien l'analyse d'une part, et le choix d'un modèle d'autre part. A cet égard, les pistes essentielles ont été fournies. Nous avons évoqué notamment une première hypothèse selon laquelle le système serait linéaire, à dépendance paramétrique affine. Puis, nous avons ensuite envisagé le cas des systèmes bouclés.

C'est donc autour de ces deux pistes que nous allons bâtir le chapitre 2, consacré non seulement au problème du choix d'un modèle mais aussi et surtout à celui de sa construction. Dans un deuxième temps (chapitre 3), nous détaillerons les méthodes d'analyse.

[5] Si l'idée est relativement ancienne, c'est depuis peu, en revanche, que l'on reconnaît les mérites d'une telle approche (cf annexe A).

Chapitre 2

Choix et construction des modèles

L'ensemble des systèmes non stationnaires est excessivement général pour servir de cadre à une étude dont on puisse espérer des résultats numériquement exploitables. Aussi, pour un système physique donné [1] devient-il nécessaire de choisir, puis de construire un modèle qui permette de simplifier la mise en œuvre des méthodes d'analyse (et a fortiori de synthèse).

Notre objectif principal est ici de développer des approches systématiques pour la construction de tels modèles. Pour y parvenir nous limiterons ici notre étude à la classe des systèmes linéaires à paramètres variants (LPV), en rappelant que la classe en question:

- trouve un certain nombre de justifications sur le plan pratique, fondées notamment sur les différentes techniques de linéarisation (cf. chapitre 1 et partie III),
- permet, par extension presque immédiate, d'approximer raisonnablement un certain nombre de systèmes non linéaires, non stationnaires (cf. chapitre 1).

La limitation introduite est donc assez peu restrictive.

Dans ce chapitre, nous proposons deux modélisations possibles pour les systèmes LPV.

- La première repose sur une hypothèse que nous avons déjà formulée dans l'étude générale du premier chapitre: il s'agit de la dépendance affine par rapport aux paramètres. Elle trouve sa justification dans le cadre de l'analyse au sens de Lyapunov. On parlera de **modèle affine** ou encore de **modèle polytopique** [2].

[1] a priori non linéaire et non stationnaire.

[2] ce qui n'est pas tout-à-fait la même chose: cf. section 2.1.

- La seconde hypothèse généralise la première, puisqu'elle prend en compte une dépendance rationnelle. On montrera que le modèle correspondant, dont la construction repose sur l'utilisation de la transformation linéaire fractionnelle (LFT) - aussi parlera-t-on de **modèle** LFT - fait intervenir un opérateur non stationnaire $\Theta(t)$, agissant en boucle fermée sur la partie invariante du système. A ce niveau, on établit donc un lien entre les sections 1.3 et 1.4 du chapitre précédent.

Dans un deuxième temps, nous proposerons quelques éléments de comparaisons, permettant de guider les pas du concepteur vers le choix d'un modèle, plutôt qu'un autre, en fonction du problème à traiter.

On rappelle que les éléments de la classe des systèmes LPV sont décrits par la représentation d'état (cf. chapitre 1):

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)u \\ y = C(\theta)x + D(\theta)u \\ \theta \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^r \end{cases} \tag{2.1}$$

2.1 Modèle affine et modèle polytopique

2.1.1 Définitions

Le modèle affine

Dans le cas de la dépendance affine, les éléments de la représentation d'état $A(.)$, $B(.)$, $C(.)$, $D(.)$ vérifient:

$$\forall \theta \in \mathcal{P}\,, \begin{cases} A(\theta) = A_0 + \sum\limits_{i=1}^{i=r} \theta_i A_i \\ B(\theta) = B_0 + \sum\limits_{i=1}^{i=r} \theta_i B_i \\ C(\theta) = C_0 + \sum\limits_{i=1}^{i=r} \theta_i C_i \\ D(\theta) = D_0 + \sum\limits_{i=1}^{i=r} \theta_i D_i \end{cases} \tag{2.2}$$

On supposera en outre que les composantes θ_i du vecteur de paramètres évoluent **indépendamment** et que:

$$\forall i = 1, 2, \ldots, r,\ \theta_i \in [\underline{\theta}_i\ \bar{\theta}_i]$$

Autrement dit, le domaine $\mathcal{P}$ est un **hypercube** de dimension r, dont les sommets correspondent aux valeurs extrémales de θ.

Nous pourrions envisager une définition plus générale du modèle affine, où l'hypercube $\mathcal{P}$ serait remplacé par un polyèdre convexe et borné de sommets $\mathcal{P}_i$. Dans ce cas, l'indépendance des paramètres θ_i n'étant plus garantie, il faudra s'attendre à certaines difficultés d'analyse. Par changement de variables, on pourra lever cette difficulté, malheureusement la dépendance par rappport aux nouveaux paramètres devient **multi-affine**. Pour illustrer ces propos, prenons le cas du plan:

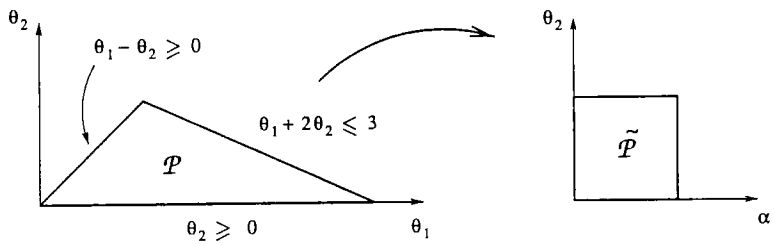


Figure 2.1: Illustration d'un changement de variables

et considérons le système dont la matrice d'évolution est décrite par:

$$A(\theta) = A_0 + \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2$$

Les paramètres θ_1 et θ_2 évoluant dans le triangle $\mathcal{P}$ sont contraints par les inégalités:

$$\begin{cases} 0 \leq \theta_2 \leq 1 \\ \theta_2 \leq \theta_1 \leq 3 - 2\theta_2 \end{cases}$$

Autrement dit, θ_1 évolue entre deux bornes qui sont des fonctions de θ_2. Nous traduirons cela par la relation barycentrique:

$$\theta_1 = (1-\alpha)\theta_2 + \alpha(3 - 2\theta_2)\,, \alpha \in [0\ 1]$$

faisant ainsi apparaître la nouvelle variable α indépendante de θ_2. L'expression correspondante de la matrice A s'écrit:

$$A(\alpha, \theta_2) = A_0 + 3\alpha A_1 + \theta_2(A_1 + A_2) - 3\alpha\theta_2 A_1\,,\ (\alpha, \theta_2) \in \tilde{\mathcal{P}}$$

Modèle polytopique

Le modèle polytopique est assez proche du modèle affine. Disons qu'il est aux coordonnées barycentriques, ce que l'autre est aux coordonnées cartésiennes.

Le système LPV décrit au début du chapitre, pour lequel on adoptera ici la formulation compacte:

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{pmatrix}, \ \theta \in \mathcal{P}$$

admet un **modèle polytopique non conservatif** si on peut déterminer un ensemble de matrices S_i constituant les sommets d'un polytope [3] défini par:

$$\mathcal{C}o\{S_1, S_2, \ldots, S_N\} \triangleq \{\sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i S_i \ \ \alpha_i \geq 0 \,, \ \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i = 1\} \tag{2.3}$$

et tel que ce dernier coïncide avec l'image par $S(.)$ du domaine $\mathcal{P}$:

$$\{S(\theta) \,, \ \theta \in \mathcal{P}\} \equiv \mathcal{C}o\{S_1, S_2, \ldots, S_N\} \tag{2.4}$$

Cas général: La fonction $S(.)$ et le domaine $\mathcal{P}$ étant quelconques, la convexité de l'image n'est pas garantie. On pourra néanmoins proposer un modèle polytopique dont les sommets vérifient l'inclusion:

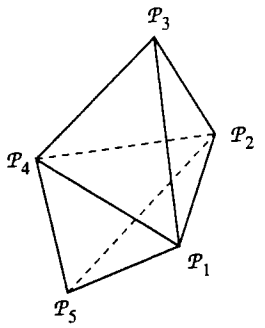
$$\{S(\theta) \,, \ \theta \in \mathcal{P}\} \subset \mathcal{C}o\{S_1, S_2, \ldots, S_N\} \tag{2.5}$$

Le modèle obtenu est nécessairement **conservatif**. On parle de **recouvrement polytopique**. La recherche du meilleur modèle (le moins conservatif) repose sur la détermination de l'**enveloppe convexe** [4] de $\{S(\theta) \,, \ \theta \in \mathcal{P}\}$. Nous reviendrons en détail sur ce point dans le cadre de la construction du modèle polytopique.

Cas usuel: Il s'agit du cas où la fonction $S(.)$ est **affine** et le domaine $\mathcal{P}$ est un polytope à N sommets.

[3] Selon la définition habituelle, un polytope est un polyèdre convexe, compact et d'intérieur non vide [16].

[4] L'enveloppe convexe d'un ensemble E, est le plus petit ensemble convexe contenant E.



$$\mathcal{P} = Co\{\mathcal{P}_1\,,\,\mathcal{P}_2\,,\,\ldots\,,\,\mathcal{P}_N\}$$
$$\theta \in \mathcal{P} \iff \theta = \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i \mathcal{P}_i\,,\ \alpha_i \geq 0\,,\ \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i = 1$$

Figure 2.2: Représentation de $\mathcal{P}$ pour $r = 3$ et $N = 5$

D'après la relation indiquée sur le schéma et en utilisant le fait que $S(.)$ est affine, il vient:

$$\begin{aligned} S(\theta) &= S(\sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i \mathcal{P}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{i=N} S(\alpha_i \mathcal{P}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i S(\mathcal{P}_i) \end{aligned}$$

Autrement dit, on obtient un modèle polytopique non conservatif, dont les sommets S_i sont les images par $S(.)$ des sommets de $\mathcal{P}$.

2.1.2 D'un modèle à l'autre

Si, comme nous venons de le voir, le modèle affine s'apparente au modèle polytopique - dans le cas usuel - nous attirons toutefois l'attention du lecteur sur un point essentiel qui différencie les deux approches. Ce point concerne la dépendance paramétrique. Dans la première, en effet, le modèle dépend directement du vecteur de paramètres physiques θ, alors que dans la seconde, ce sont les coordonnées barycentriques de θ par rapport aux sommets $\mathcal{P}_i$, qui, à un instant donné, situent le système dans le polytope. C'est donc la notion de sommet (S_i) qui joue un rôle prépondérant, peu importe la forme du domaine $\mathcal{P}$ pourvu qu'il s'agisse d'un polytope. En ce sens, le modèle polytopique généralise la définition que nous avons donnée du modèle affine. Il faut cependant attacher une grande importance au contexte. Si par exemple, pour les besoins de l'analyse, on souhaite limiter la vitesse d'évolution des paramètres, c'est le modèle affine qu'il faudra retenir.

Détermination des coordonnées barycentriques

Le choix du modèle polytopique pose à un moment ou à un autre - nous y reviendrons - le problème du calcul des coordonnées α_i de θ par rapport aux sommets $\mathcal{P}_i$.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i \mathcal{P}_i = \theta \\ \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i = 1 \;\; \alpha_i \geq 0 \end{cases}$$

soit, en adoptant une formulation matricielle:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 & \dots & \mathcal{P}_N \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix} \;,\; \alpha_i \geq 0$$

De la matrice $M \in \mathbb{R}^{(r+1)\times N}$, il y a $\mathcal{C}_N^{r+1}$ façons d'extraire une matrice carrée $(r+1) \times (r+1)$. On notera M_i la matrice extraite associée à la $i^{\text{ième}}$ combinaison:

$$M_i = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{i_1} & \dots & \mathcal{P}_{i_{r+1}} \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Si

(i) M_i est inversible

(ii) $\tilde{\alpha} = M_i^{-1}\theta \Rightarrow \forall i \,,\; \tilde{\alpha}_i \geq 0$

alors, le N-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ défini par:

$$\begin{cases} \alpha_i = \tilde{\alpha}_{i_k} \;\; \text{si } i = i_k \,,\; k \in \{1, \dots, r+1\} \\ \alpha_i = 0 \;\; \text{sinon} \end{cases}$$

est solution du problème.

Si aucune matrice extraite ne vérifie les conditions (i) et (ii), alors le vecteur θ n'appartient pas à $\mathcal{P}$. Par contre, la solution est rarement unique, dès lors que le nombre N de sommets du polytope est strictement supérieur à $r+1$. Sur la figure (2.3) ($N = 4$, $r = 2$), θ appartient simultanément aux triangles $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3)$ et $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_4)$.

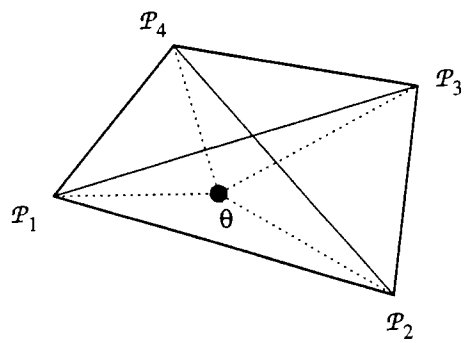


Figure 2.3: Localisation de θ dans $\mathcal{P}$

Il arrive souvent que le nombre de sommet du polytope soit très largement supérieur à la dimension de l'espace. Dans ce cas, la méthode que nous avons indiquée peut être d'autant plus longue, que la matrice M_i vérifiant (i) et (ii) arrive parmi les dernières.

Toutefois, si l'on connaît les coordonnées barycentriques de θ à l'instant t, et qu'on veuille déterminer sa nouvelle position à l'instant $t + \Delta t$, on adoptera une procédure bien adaptée. Dans la mesure où θ est un paramètre physique, il est rare qu'il suive une évolution arbitrairement rapide. En outre, Δt - qui correspond typiquement à une période d'échantillonnage - étant petit, la distance entre les deux positions successives de θ reste faible. On commencera donc par vérifier si $\theta(t + \Delta t)$ n'appartient pas au même simplexe [5] que $\theta(t)$. Si tel n'est pas le cas, on étend la recherche aux polytopes élémentaires adjacents [6], puis éventuellement adjacents aux précédents. On établit donc un classement parmi toutes les possibilités d'extraire les matrices M_i (cf. figure 2.4).

[5] Dans un espace de dimension r, on appelle simplexe , tout polytope de $r + 1$ sommets.

[6] Deux polytopes sont adjacents dans un espace de dimension r s'ils ont r sommets en commun.

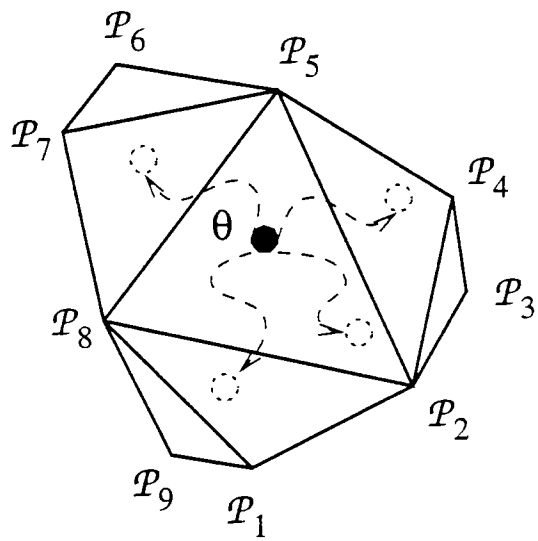


Figure 2.4: Evolution de θ dans $\mathcal{P}$

2.1.3 Construction du modèle polytopique

Nous proposons ici une méthode générale de construction d'un modèle polytopique pour les systèmes à paramètres variables mis sous la forme générale[7]:

$$S(\theta) = (f_{ij}(\theta))_{1 \leq i \leq n+p \;\; 1 \leq j \leq n+m}$$

où θ évolue dans un domaine sur lequel les fonctions $f_{ij}(.)$ sont bornées. Une première approche consisterait donc à déterminer les bornes de chacune des fonctions pour en déduire un modèle extrêmement conservatif formé par les $2^{(n+m)(n+p)}$ sommets correspondant à toutes les combinaisons possibles de valeurs extrémales. Un modèle, nettement moins conservatif pourra être obtenu de la manière suivante:

1. Quadriller l'espace d'évolution de θ.

2. Calculer $S(\theta)$ en chaque point du quadrillage.

3. Déterminer l'enveloppe convexe de l'ensemble obtenu.

[7]Le système est néanmoins **affine** par rapport aux fonctions $f_{ij}(.)$ qui finalement jouent le rôle de paramètres.

La première étape nécessite une étude préalable - spécifique au système considéré - dont le but sera d'orienter le choix du quadrillage quant à sa nature (linéaire, logarithmique,...) et bien sûr, sa finesse. La seconde étape ne pose aucune difficulté, en revanche, nous allons détailler la dernière qui revient à déterminer l'**enveloppe convexe** de N points répartis de manière quelconque dans $\mathbb{R}^r$.

Enveloppe convexe de N points dans $\mathbb{R}^r$

Il s'agit là d'une construction fondamentale en géométrie, qui retient l'attention des mathématiciens depuis plus d'un demi-siècle. Les généralisations des algorithmes au cas de la dimension quelconque sont pourtant assez récentes et le sujet continue d'ailleurs à faire l'objet de nombreuses publications (voir [11] et références incluses).

On distingue deux grandes familles de méthodes. La première repose sur l'existence d'une dualité entre l'enveloppe convexe d'une part et l'intersection de demi-espaces d'autre part. La seconde regroupe toutes les approches itératives, dont nous proposons ici une version.

Dans l'algorithme proposé, le polytope est représenté par un ensemble de facettes qui sont en fait des hyperplans délimités par des "arêtes"[8]. Chaque arête résulte de l'intersection de deux facettes voisines entre elles. Chaque facette peut également être vue comme un polytope à r sommets. Ainsi, on dira que deux facettes sont voisines si elles ont $r-1$ sommets en commun. Enfin, on dit que la facette F d'un polytope est visible d'un point p, si, pour tout point p_i appartenant à F, le vecteur reliant p_i à p forme un angle aigu avec le vecteur normal à F orienté vers l'extérieur du polytope.

Algorithme 2.1 Construction de l'enveloppe convexe

1. *Initialiser l'algorithme par un simplexe formé de $r+1$ sommets appartenant aux N points à traiter.*

2. *Choisir un nouveau point p.*

3. *Déterminer la position de p par rapport à chaque facette. Affecter une étiquette:*

   - *facette visible*
   - *facette cachée*

[8] terminologie empruntée à la dimension 3.

4. *Si toutes les facettes sont cachées:*

   retour en 2

   sinon:

   - *Déterminer le contour apparent C formé par les arêtes du polytope résultant de l'intersection d'une facette visible et d'une facette cachée.*
   - *Créer les nouvelles facettes constituées chacune du point p et d'un élément de C. Déterminer leurs facettes adjacentes respectives pour en déduire les nouvelles arêtes.*
   - *Supprimer les facettes visibles et mettre à jour l'ensemble des arêtes*

5. *Retour en 2 s'il reste des points à traiter.*

□

Illustration du principe en dimension 2: L'exemple suivant fait apparaître différents cas de figures. En fonction du nombre de faces cachées, on note une augmentation, une stagnation ou même une diminution du nombre de sommets:

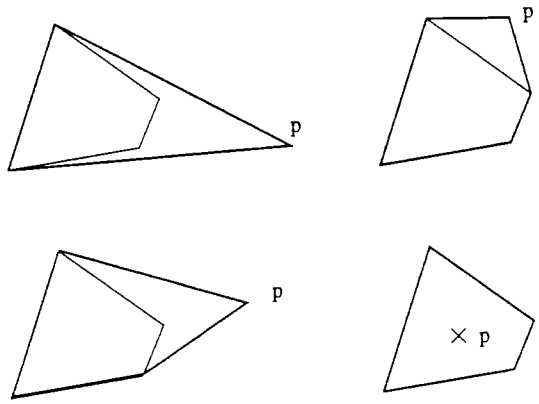


Figure 2.5: Construction de polytopes

Application en dimension 3: On génère aléatoirement 13 points dans l'espace dont on stocke les coordonnées dans la matrice:

$$P = \begin{pmatrix} 21 & 67 & 51 & 5 & 0 & 41 & 93 & 9 & 70 & 26 & 32 & 99 & 98 \\ 4 & 93 & 83 & 53 & 38 & 68 & 84 & 65 & 91 & 4 & 63 & 36 & 72 \\ 67 & 38 & 3 & 67 & 6 & 58 & 52 & 41 & 76 & 73 & 75 & 24 & 75 \end{pmatrix}$$

puis on applique l'agorithme précédent, pour finalement obtenir un polytope à 12 sommets (le $6^{\text{ième}}$ point devant être supprimé):

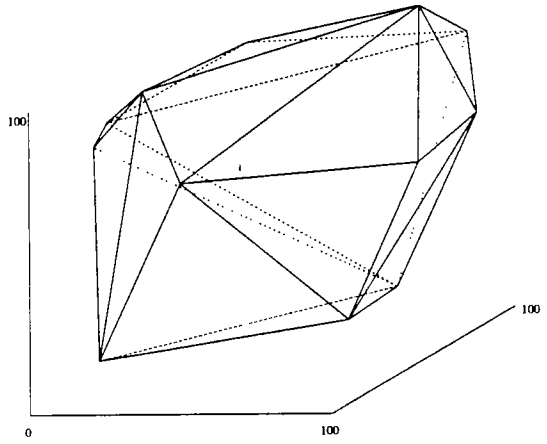


Figure 2.6: Enveloppe convexe

2.1.4 Réduction de polytopes

Plus on souhaite un modèle proche de la réalité, plus le quadrillage doit être fin et plus le nombre de sommets risque d'être élevé. La mise en œuvre des techniques d'analyse devient très coûteuse sur le plan numérique. Bien souvent, on ne pourra pas obtenir de solution. Il est donc nécessaire de réduire le nombre de sommets du polytope, tout en essayant de limiter au maximum l'augmentation de volume.

L'algorithme que nous nous proposons de développer tire son principe relativement simple de l'illustration suivante:

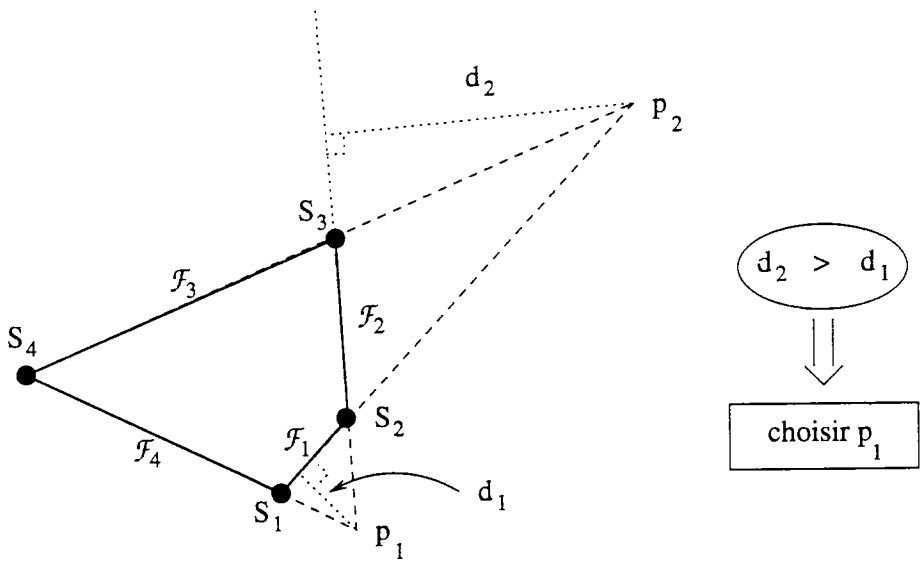


Figure 2.7: Principe de réduction de polytope

Dans le cas du plan (figure 2.5), étant donné un polygône à N sommets, on recherche, pour chaque arête $\mathcal{F}_i$, le point p_i, **s'il existe**, tel que:

- l'arête et ses voisines soient visibles du point p_i,
- la distance du point p_i à l'arête $\mathcal{F}_i$ soit minimale.

Les contraintes de "visibilité"" s'expriment par la positivité de produits scalaires, tandis que la distance admet une expression quadratique par rapport aux coordonnées de p_i. Il suffit donc de minimiser un critère quadratique sous contraintes inégalités linéaires. Si les contraintes sont incompatibles, le problème n'a pas de solution (l'arête $\mathcal{F}_i$ fait un angle aigu avec au moins l'une de ses deux voisines). Sur notre exemple, on a pu déterminer deux solutions p_1 et p_2 associées aux arêtes $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. Il reste ensuite à choisir parmi les points obtenus, celui pour lequel la distance d_i est la plus faible. On pourra également retenir d'autres critères.

La généralisation en dimension quelconque nous conduit à l'algorithme suivant:

Algorithme 2.2 Réduction de polytope

1. *Pour chaque facette $\mathcal{F}_i$ du polytope:*

- *déterminer les r facettes adjacentes,*
- *résoudre le problème d'optimisation quadratique (convexe) mentionné plus haut,*
- *stocker l'éventuelle solution (si elle existe, elle est unique) et le critère associé.*

2. *Déterminer le point associé au meilleur critère.*

3. *Ajouter ce point au polytope, en suivant les étapes décrites dans l'agorithme de construction précédent.*

4. *Si le nombre de sommets du nouveau polytope est supérieur au seuil désiré et si au cours de la précédente boucle sur les facettes, deux solutions au moins ont pu être obtenues:*

   retour en 1

   sinon

   Fin de l'agorithme.

□

Des améliorations techniques peuvent bien sûr être apportées à cet algorithme pour en accélérer le déroulement. En effet, à chaque itération, l'ajout d'un nouveau point engendre une modification seulement locale de la géométrie du polytope. De ce fait, lors de l'itération suivante, il n'est pas nécessaire de recalculer tous les points p_i, ce qui permet un gain de temps appréciable.

En ce qui concerne le critère retenu pour l'optimisation, nous avons opté pour la distance d_i séparant le point calculé de la facette $\mathcal{F}_i$. Ce choix diffère quelque peu de l'idée initiale fondée sur la volonté de limiter l'augmentation de volume. Mais il est moins coûteux de calculer une distance qu'un volume dont l'expression par ailleurs ne serait pas quadratique. Il en résulterait donc une difficulté supplémentaire au niveau des procédures d'optimisation. Notons de plus, qu'il est tout à fait possible d'ajouter, lors de la détermination d'un point p_i, autant d'inégalités linéaires que l'on veut. C'est un moyen simple d'imposer une enveloppe polyédrale au polytope réduit et ainsi de faire face à une augmentation de volume excessive.

Pour illustrer la méthode, nous reprenons l'exemple précédent en dimension 3. Le polytope dont le nombre de sommets valait initialement 12 est d'abord réduit à 10, puis 8, 6 et finalement 4:

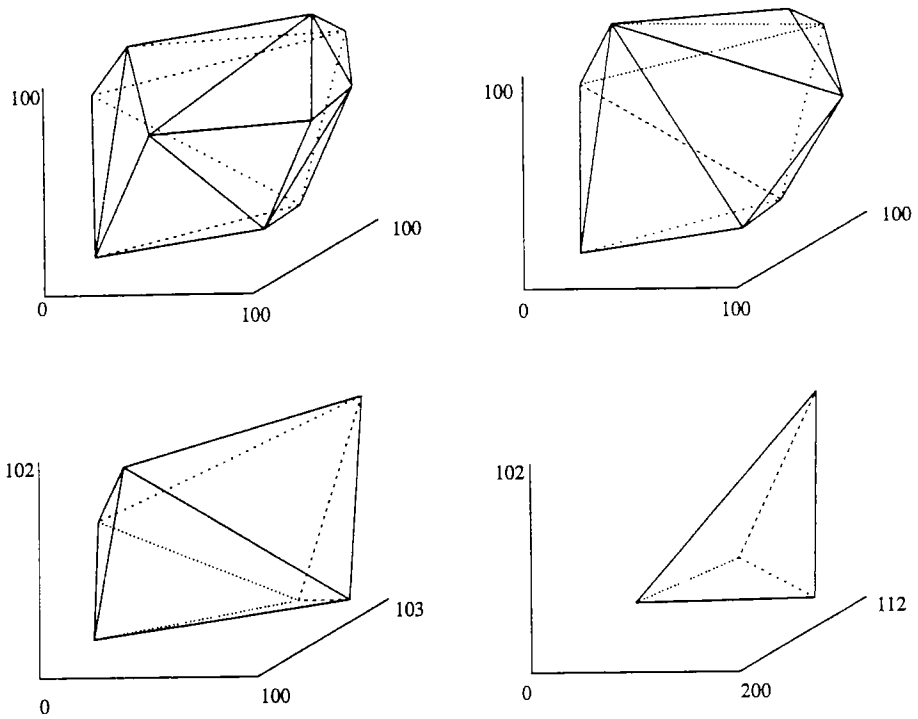


Figure 2.8: Réduction polytopique

Les différentes figures présentées sur ce schéma ont été obtenues sans prise en compte de contraintes particulières. Si les trois premières réductions (jusqu'à 6 sommets) n'engendrent pas d'augmentation de volume excessive, ce n'est pas le cas de la dernière (voir échelle sur l'axe des abscisses).

Nous reviendrons sur l'application de l'algorithme dans la troisième partie de la thèse.

2.2 Modèle "LFT"

Après avoir envisagé le cas de la dépendance affine, nous nous intéressons maintenant à une forme plus générale de systèmes LPV:

$$\forall \theta \in \mathcal{P} \;\; S(\theta) = \begin{pmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{i=k} \varphi_i(\theta) \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

où l'expression $\varphi_i(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r)$ est **rationnelle** par rapport à chacune des variables. Cette hypothèse est assez peu restrictive car, la plupart des fonctions rencontrées dans la

pratique, à défaut de l'être déjà, admettent souvent des approximations rationnelles de bonne qualité.

La modélisation de tels systèmes - de par la nature de la dépendance paramétrique - repose sur un outil, aujourd'hui très largement utilisé: la **Transformation Linéaire Fractionnelle** (en anglais: LFT). Nous commencerons donc par décrire cet outil et en présenter quelques propriétés, avant d'aborder le problème de la modélisation proprement dit.

2.2.1 Transformations Linéaires Fractionnelles (LFT)

Les transformations linéaires fractionnelles (**LFT**) jouent un rôle essentiel dans la représentation des incertitudes et suscitent donc un réel intérêt dans bien des domaines de l'automatique. Elles généralisent les notions classiques de fonctions de transfert et de représentation d'état en permettant la prise en compte simultanée de différents types d'incertitudes de nature fréquentielle aussi bien que temporelle.

Connues depuis fort longtemps [103, 138], c'est véritablement au tout début des années 90 que les LFT dévoilent leurs principaux atouts avec le développement et la mise en œuvre de nouvelles théories, notamment dans les domaines connexes de la commande robuste [37, 80, 81, 137] et de la modélisation des incertitudes [128, 74, 70, 13, 28, 121].

Définition 2.3 *Soit M une matrice complexe quelconque, partitionnée de la manière suivante:*

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(p_1+p_2)\times(q_1+q_2)}$$

Les transformations linéaires fractionnelles (LFT) associées à M sont définies par les applications (on supposera successivement les matrices M_{22} puis M_{22} carrée):

$$\mathcal{F}_l(M,.) : \begin{cases} \mathcal{D}_2 \to \mathcal{C}^{p_1\times q_1} \\ \Delta_2 \mapsto \mathcal{F}_l(M,\Delta_2) = M_{11} + M_{12}\Delta_2(I - M_{22}\Delta_2)^{-1}M_{21} \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\mathcal{F}_u(M,.) : \begin{cases} \mathcal{D}_1 \to \mathcal{C}^{p_2\times q_2} \\ \Delta_1 \mapsto \mathcal{F}_u(M,\Delta_1) = M_{22} + M_{21}\Delta_1(I - M_{11}\Delta_1)^{-1}M_{12} \end{cases} \tag{2.8}$$

sur leurs domaines respectifs:

$$\mathcal{D}_2 = \{\Delta_2 \in \mathbb{C}^{q_2\times p_2},\ \det(I - M_{22}\Delta_2) \neq 0\} \tag{2.9}$$

$$\mathcal{D}_1 = \{\Delta_1 \in \mathbb{C}^{q_1\times p_1},\ \det(I - M_{11}\Delta_1) \neq 0\} \tag{2.10}$$

$\triangle$

Remarque 1: On imposera généralement une structure particulière - typiquement bloc-diagonale - à l'opérateur Δ, et on notera $\mathbf{\Delta}$ l'ensemble des matrices vérifiant cette structure. Auquel cas, on montre que, s'il existe une matrice T_i, telle que pour $i = 1$ ou 2, on ait:

$$\begin{cases} \forall \Delta \in \mathbf{\Delta}\,,\ T\Delta = \Delta T \\ \bar{\sigma}(TM_{ii}T^{-1}) < 1 \end{cases} \tag{2.11}$$

alors,

$$\mathcal{D}_i \subset \mathcal{B}_\Delta \triangleq \{\Delta \in \mathbf{\Delta} \ / \ \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1\}$$

Remarque 2: Les indices l et u des applications $\mathcal{F}_l(M,.)$ et $\mathcal{F}_u(M,.)$ proviennent respectivement des initiales des mots anglais *lower* et *upper*, signifiant que Δ_1 ou Δ_2 est "bouclé" sur M par le bas ou par le haut (voir figure 2.9).

LFT et systèmes "bouclés"

Considérons les systèmes statiques en boucle fermée de la figure suivante:

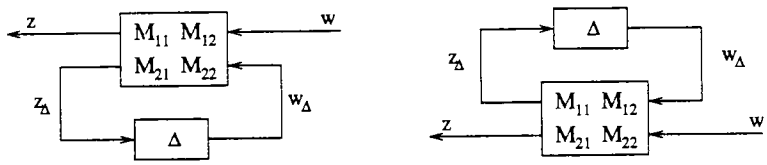


Figure 2.9: Systèmes bouclés

et cherchons dans un premier temps à exprimer le transfert de w vers z sur le schéma de gauche. On obtient d'abord par simple lecture:

$$\begin{cases} z &= M_{11}w + M_{12}w_\Delta \\ z_\Delta &= M_{21}w + M_{22}w_\Delta \\ w_\Delta &= \Delta z_\Delta \end{cases}$$

d'où, en reportant la dernière relation dans la seconde pour exprimer w_Δ en fonction de w, il vient finalement, d'après la première:

$$z = \left(M_{11} + M_{12}\Delta(I - M_{22})^{-1}M_{21}\right) w = \mathcal{F}_l(M, \Delta)\, w$$

Sur le schéma de droite, un calcul analogue conduit à l'expression:

$$z = \left(M_{22} + M_{21}\Delta(I - M_{11})^{-1}M_{12}\right) w = \mathcal{F}_u(M, \Delta)\, w$$

Les LFT offrent un formalisme d'autant plus général pour la description des systèmes bouclés, que la définition (2.3) - présentée dans le cas matriciel - reste valable dans un cadre plus large. En remarquant notamment qu'une fonction de transfert est une LFT:

$$\forall s \in \mathbb{C}^*\,,\ \mathcal{F}_u\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \frac{1}{s}I\right) = D + C(sI - A)^{-1}B \triangleq M(s) \tag{2.12}$$

on pourra par exemple justifier des expressions de la forme:

$$\mathcal{F}_u\left(\mathcal{F}_u(M, \frac{1}{s}I), \Delta\right)$$

que l'on notera plus simplement:

$$\mathcal{F}_u(M(s), \Delta)$$

A son tour, l'opérateur Δ, initialement statique, pourra être dynamique,linéaire invariant. Il s'agira dans ce cas d'une LFT que l'on représentera par la fonction de transfert $\Delta(s)$. Mais, il pourra également s'agir d'une matrice de gains variant dans le temps notée $\Delta(t)$ (voir figure 2.10):

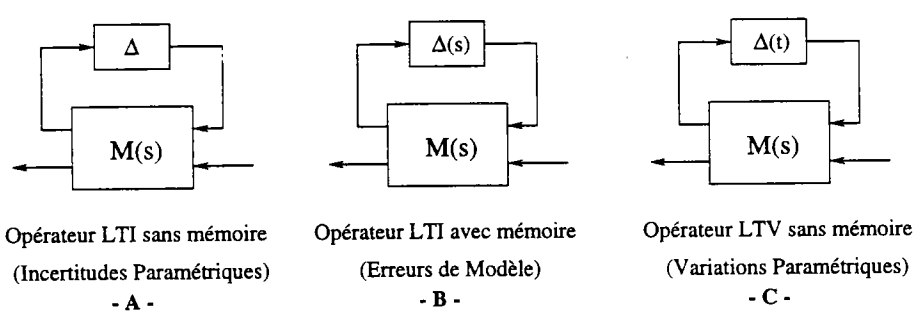


Figure 2.10: Variations sur la nature de l'opérateur Δ

Pour chaque situation, on associe à l'opérateur Δ l'interprétation la plus courante.

- Dans le cas de la figure B, l'opérateur $\Delta(s)$ représente typiquement l'ensemble des erreurs de modèles: dynamiques négligées (souvent hautes fréquences) et non-linéarités, incertitudes de mesures, méconnaissance sur les actionneurs. On obtient généralement une structure bloc-diagonale, formée de blocs complexes, pleins. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point dans la partie applicative (voir également [3, 110] pour une discussion plus détaillée).

- Dans les cas de figures A et C, équivalents sur le plan de la modélisation, la matrice Δ est bloc-diagonale de la forme:

$$\Delta = \text{blocdiag}(\Delta_1\,,\ \Delta_2\,, \ldots,\ \Delta_r) \quad \text{avec} \quad \Delta_i = \delta_i I_{n_i}$$

  Une telle structure permet de prendre en compte celle des incertitudes ou des variations paramétriques.

Finalement, on peut envisager, au sein d'un modèle unique $M(s)$, l'association des trois types d'incertitude, ce qui donne une illustration de la puissance de modélisation offerte par les LFT :

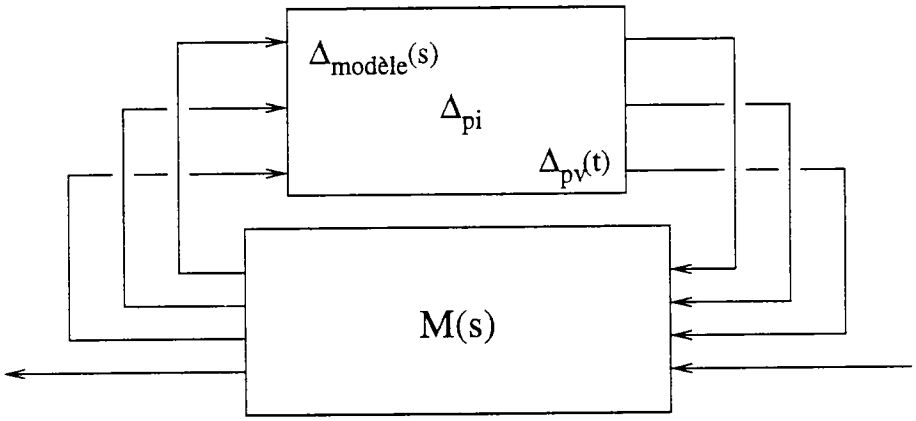


Figure 2.11: Modèle LFT général

Propriétés fondamentales

Pour compléter cette introduction rapide aux LFT, nous rappelons ici trois propriétés essentielles, fréquemment utilisées par la suite:

- La somme de n LFT est une LFT.
- Le produit (mise en cascade) de n LFT est une LFT (cf. figure 2.10).
- L'inverse d'une LFT, quand elle existe, est une LFT.

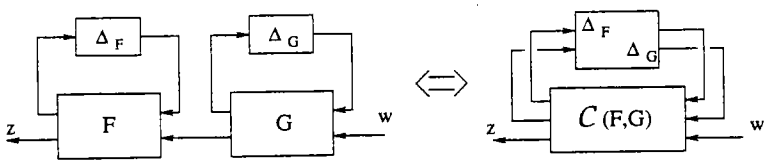


Figure 2.12: LFT en cascade

Il suffira d'établir les deux premières propriétés pour $n = 2$. Le cas général est ensuite obtenu par récurrence. Pour cela, on introduit deux LFT, par exemple $\mathcal{F}_u(F, .)$ et $\mathcal{F}_u(G, .)$. Le choix d'un bouclage par le haut n'aura aucune incidence sur le raisonnement. Nous laissons au lecteur le soin d'adapter les résultats dans le cas d'un bouclage par le bas.

On adoptera pour les matrices F et G les partitions habituelles en quatre blocs:

$$\begin{array}{cc} & \overset{m_F}{\leftrightarrow} \\ p_F \updownarrow & \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{cc} & \overset{m_G}{\leftrightarrow} \\ p_G \updownarrow & \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

et on supposera les dimensions successivement adaptées à chacun des cas. Plus précisément, avant de définir la somme, on s'assurera que $m_F = m_G$ et $p_F = p_G$. Dans le cas du produit, il suffira de vérifier l'égalité $m_F = p_G$ ou $m_G = p_F$ selon l'ordre retenu. Enfin, l'inverse de $\mathcal{F}_u(F, .)$, pourra être définie si et seulement si la matrice F_{22} est carrée ($m_F = p_F$) et inversible.

Munis, dans chacun des cas, des hypothèses appropriées, nous obtenons après quelques calculs, pour toutes matrices complexes Δ_F et Δ_G, de dimensions respectivement égales à celles de F_{11}^T et G_{11}^T:

Somme:

$$\mathcal{F}_u(F, \Delta_F) + \mathcal{F}_u(G, \Delta_G) = \mathcal{F}_u\left(\mathcal{S}(F, G), \begin{pmatrix} \Delta_F & 0 \\ 0 & \Delta_G \end{pmatrix}\right) \tag{2.13}$$

avec

$$\mathcal{S}(F, G) = \left(\begin{array}{cc|c} F_{11} & 0 & F_{12} \\ 0 & G_{11} & G_{12} \\ \hline F_{21} & G_{21} & F_{22} + G_{22} \end{array}\right) \tag{2.14}$$

Produit:

$$\mathcal{F}_u(F,\Delta_F)\,.\,\mathcal{F}_u(G,\Delta_G) = \mathcal{F}_u\left(\mathcal{C}(F,G), \begin{pmatrix} \Delta_F & 0 \\ 0 & \Delta_G \end{pmatrix}\right) \tag{2.15}$$

avec

$$\mathcal{C}(F,G) = \left(\begin{array}{cc|c} F_{11} & F_{12}G_{21} & F_{12}G_{22} \\ 0 & G_{11} & G_{12} \\ \hline F_{21} & F_{22}G_{21} & F_{22}G_{22} \end{array}\right) \tag{2.16}$$

Inverse:

$$\mathcal{F}_u(F,\Delta_F)^{-1} = \mathcal{F}_u\left(\begin{pmatrix} F_{11} - F_{12}F_{22}^{-1}F_{21} & F_{12}F_{22}^{-1} \\ -F_{22}^{-1}F_{21} & F_{22}^{-1} \end{pmatrix}, \Delta_F\right) \tag{2.17}$$

Remarque: Par récurrence, d'après les deux premières relations, il vient:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{F}_u(F_i,\Delta_i) = \mathcal{F}_u\left(\mathcal{S}\Big(F_1,\ldots\mathcal{S}(F_{n-2},\mathcal{S}(F_{n-1},F_n))\Big)\,,\ \mathrm{diag}(\Delta_1,\ldots,\Delta_n)\right) \tag{2.18}$$

et

$$\prod_{i=1}^{i=n} \mathcal{F}_u(F_i,\Delta_i) = \mathcal{F}_u\left(\mathcal{C}\Big(F_1,\ldots\mathcal{C}(F_{n-2},\mathcal{C}(F_{n-1},F_n))\Big)\,,\ \mathrm{diag}(\Delta_1,\ldots,\Delta_n)\right) \tag{2.19}$$

Produit de Redheffer

Il s'agit d'une généralisation relativement immédiate des LFT:

Définition 2.4 *Soient M et N deux matrices partitionnées ainsi:*

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}\ ,\quad N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}$$

de telle sorte que le produit $M_{22}N_{11}$ soit bien défini et génère une matrice carrée dont les valeurs propres sont toutes différentes de 1. On définit le produit de Redheffer de M par N, noté $M \star N$:

$$M \star N \triangleq \begin{pmatrix} \mathcal{F}_l(M,N_{11}) & M_{12}(I - N_{11}M_{22})^{-1}N_{12} \\ N_{21}(I - M_{22}N_{11})^{-1}M_{21} & \mathcal{F}_u(N,M_{22}) \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Propriété 2.5 *Le produit de Redheffer est associatif:*

$$(M \star N) \star P = M \star (N \star P)$$

Il apparaît dans l'expression entrée/sortie des systèmes interconnectés de la forme:

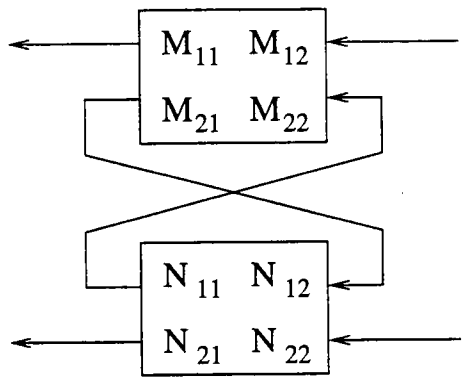


Figure 2.13: Interconnection de systèmes

Remarque: On étendra souvent la notation $\star$ en adoptant les conventions:

$$\mathcal{F}_l(M, \Delta) = M \star \Delta \ , \quad \mathcal{F}_u(M, \Delta) = \Delta \star M \tag{2.21}$$

2.2.2 *LFT* et fonctions rationnelles

Dans ce paragraphe nous commençons par établir une relation entre les fonctions rationnelles monovariables et les *LFT*. Puis, en invoquant certaines des propriété énoncées plus haut, nous proposerons une généralisation aux fonctions multivariables. Ce résultat servira de point de départ à la méthode de construction de modèles proposée plus loin.

Proposition 2.6 *Soit une fonction rationnelle* **monovariable**, *quelconque, de degré* [9] q, *à coefficients dans* $\mathbb{R}$, *définie sur* $\mathcal{D}$:

$$f(\theta) = \nu_0 + \frac{\nu_1\theta + \ldots + \nu_q\theta^q}{1 - \delta_1\theta - \ldots - \delta_q\theta^q} \tag{2.22}$$

[9] On retiendra le degré le plus élevé entre celui du numérateur et du dénominateur. En ce sens, les polynômes sont encore des fonctions rationnelles.

alors,

$$\forall\theta \in \mathcal{D}\,,\ f(\theta) = \mathcal{F}_u\left(\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \delta_q & \delta_{q-1} & \dots & \delta_1 & 1 \\ \hline \nu_q & \nu_{q-1} & \dots & \nu_1 & \nu_0 \end{array}\right)}_{F}, \theta I_q\right) \tag{2.23}$$

□

Preuve: Il suffit d'appliquer la relation (2.8) en remarquant que:

$$(I - \theta F_{11})^{-1} = \frac{1}{1 - \delta_1\theta - \ldots - \delta_q\theta^q}\begin{pmatrix} * & \dots & * & \theta^{q-1} \\ * & \dots & * & \theta^{q-2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ * & \dots & * & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque: Les blocs F_{ij} de la matrice F coïncident avec les éléments de la représentation d'état sous forme compagne horizontale, associée à la fonction de transfert $f(s)$ (voir par exemple [43]). Par suite, la matrice F, comme toute représentation d'état, n'est pas unique. En effet, si P est une matrice inversible quelconque de $\mathbb{R}^{n\times n}$ alors

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} P^{-1}F_{11}P & P^{-1}F_{12} \\ F_{21}P & F_{22} \end{pmatrix}$$

vérifie également la relation (2.23).

Généralisation multivariable

Une fonction rationnelle multivariable pourra toujours s'écrire sous la forme suivante:

$$\varphi(\theta_1, \ldots, \theta_r) = \sum_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{r} f_j^i(\theta_j) \tag{2.24}$$

où $f_j^i(.)$ est une fonction rationnelle monovariable de degré q_j^i:

$$f_j^i(\theta_j) = \nu_{j,0}^i + \frac{\nu_{j,1}^i\theta_j + \ldots + \nu_{j,q_j^i}^i\theta_j^{q_j^i}}{1 - \delta_{j,1}^i\theta_j - \ldots - \delta_{j,q_j^i}^i\theta_j^{q_j^i}}$$

Il existe bien sûr différentes décompositions possibles, parmi lesquelles certaines seront moins coûteuses que d'autres. Dans la mesure du possible il faudra chercher à tendre vers l'expression la plus proche d'une factorisation complète de φ, ce qui limitera le nombre de termes s de la somme.

Pour une décomposition donnée, il vient, d'après la proposition 2.6:

$$\varphi(\theta_1, \ldots, \theta_r) = \sum_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{r} \mathcal{F}_u\Big(F_j^i, \theta_j I_{q_j^i}\Big)$$

puis, d'après les résultats 2.19 2.18 établis précédemment:

$$\varphi(\theta_1, \ldots, \theta_r) = \mathcal{F}_u(\Phi, \Theta) \tag{2.25}$$

avec:

$$\begin{cases} \Phi = \mathcal{S}\Big(F^1, \ldots \mathcal{S}(F^{s-2}, \mathcal{S}(F^{s-1}, F^s))\Big) \\ F^j = \mathcal{C}\Big(F_1^j, \ldots \mathcal{C}(F_{n-2}^j, \mathcal{C}(F_{n-1}^j, F_n^j))\Big) \\ \Theta = \mathrm{diag}(\theta_1 I_{q_1^1} \ldots \theta_r I_{q_r^1}, \ldots, \theta_1 I_{q_1^s} \ldots \theta_r I_{q_r^s}) \end{cases} \tag{2.26}$$

2.2.3 Construction du modèle LFT

Nous abordons maintenant le point essentiel de cette section, qui est celui de la construction de modèles LFT pour la classe des systèmes LPV (2.1) à dépendance paramétrique rationnelle. Compte tenu de ce qui précède, nous sommes en mesure de proposer la formulation suivante:

formulation du problème

Etant donné un système à paramètres variables de dimensions n pour le nombre d'état, m pour le nombre de commandes, p pour le nombre de mesures, et r pour le nombre de paramètres, décrit par la relation (2.6) que nous rappelons ci-après:

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^{i=k} \varphi_i(\theta) \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix} \ , \ \theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_r]^T \in \mathcal{P}$$

il s'agit de déterminer une matrice quelconque $P \in \mathbb{R}^{(n+p+N)\times(n+m+N)}$ et une matrice diagonale $\Theta \in \mathbb{R}^{N\times N}$ de la forme (on notera $\mathbf{\Theta}$ l'ensemble de ces matrices):

$$\Theta = diag(\underbrace{\theta_1 \dots \theta_1}_{n_1}, \underbrace{\theta_2 \dots \theta_2}_{n_2}, \dots, \underbrace{\theta_r \dots \theta_r}_{n_r}) \ , \ N = \sum_{i=1}^{i=r} n_i \tag{2.27}$$

telles que:

- $\forall \theta \in \mathcal{P} \ , \ S(\theta) = \mathcal{F}_u(P, \Theta)$
- la taille N du bloc paramétrique soit **minimale**.

Remarque: On s'arrangera généralement pour que le domaine $\mathcal{P}$ d'évolution des θ_i soit tel que:

$$\forall i \ , \ |\theta_i| \leq 1$$

et, de sorte que le domaine de définition de la transformation obtenue coïncide avec $\mathcal{B}_\Theta$.

Résolution dans le cas général

Nous avons vu comment, à partir des LFT, peuvent être représentées les fonctions rationnelles multivariables. Autrement dit, nous nous sommes intéressés à la nature des variations paramétriques. Il reste maintenant à prendre en compte leur structure, donc le passage de la fonction scalaire à la fonction matricielle.

Pour cela, reprenons tout d'abord la relation (2.6) qui, d'après les résultats précédents peut aussi s'écrire:

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{F}_u(\Phi_i, \Theta_i) \underbrace{\begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}}_{M_i} \tag{2.28}$$

En décomposant les M_i en sommes de matrices de rang unitaire:

$$M_i = \sum_{j=1}^{k_i} u_j {v_j}^T \ , \ u_j \in \mathbb{R}^{n+p} \ , \ v_j \in \mathbb{R}^{n+m} \tag{2.29}$$

nous obtenons, pour $S(\theta)$, l'expression suivante:

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k_i} u_j \mathcal{F}_u(\Phi_i, \Theta_i) {v_j}^T \tag{2.30}$$

puis, en partitionnant les Φ_i selon le schéma habituel, il vient d'après 2.8:

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k_i} \mathcal{F}_u\left(\begin{pmatrix} \Phi_{i,11} & \Phi_{i,12} {v_i}^T \\ u_i \Phi_{i,21} & u_i \Phi_{i,22} {v_i}^T \end{pmatrix}, \Theta_i \right) \tag{2.31}$$

Introduisons les vecteurs $U_i = [u_1 \dots u_{k_i}]^T$ et $V_i = [v_1 \dots v_{k_i}]^T$ et appliquons la relation (2.18). Nous obtenons d'abord:

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^{k} \mathcal{F}_u\left(\begin{pmatrix} I_{k_i} \otimes \Phi_{i,11} & (V_i \otimes {\Phi_{i,12}}^T)^T \\ U_i \otimes \Phi_{i,21} & U_i \Phi_{i,22} V_i^T \end{pmatrix}, I_{k_i} \otimes \Theta_i \right) \tag{2.32}$$

puis finalement, en sommant les k LFT restantes:

$$S(\theta) = \mathcal{F}_u(P, \Theta) \tag{2.33}$$

avec

$$P = \left(\begin{array}{ccc|c} I_{k_1} \otimes \Phi_{1,11} & & & V_1^T \otimes \Phi_{1,12} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & I_{k_k} \otimes \Phi_{k,11} & V_k^T \otimes \Phi_{k,12} \\ \hline U_1 \otimes \Phi_{1,21} & \dots & U_k \otimes \Phi_{k,21} & \sum_{i=1}^{i=k} U_i \Phi_{i,22} V_i^T \end{array} \right) \tag{2.34}$$

et

$$\Theta = \begin{pmatrix} I_{k_1} \otimes \Theta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & I_{k_k} \otimes \Theta_k \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

Attention! La méthode ne répond pas exactement au problème posé. Certes, elle apporte une solution systématique sur le premier point, et peut sans difficulté faire l'objet d'une implantation sur calculateur. En revanche, la complexité du modèle obtenu, que l'on mesure à la taille N du bloc paramétrique Θ, n'est pas maîtrisée. Cette dernière, quantifiée par la relation:

$$N = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r} k_i q_i^j \tag{2.36}$$

augmente avec:

- le nombre k et les degrés q_i^j des fonctions rationnelles
- les rangs k_i des matrices M_i

Dans certains cas, N pourra devenir très grand et le modèle ainsi construit, difficilement exploitable. Devant l'absence de méthodes générales permettant l'obtention directe d'un modèle minimal, il reste deux alternatives:

- Mettre en œuvre une approche spécifique sur un exemple donné, en expoitant par exemple les relations qui existent parfois entre les différentes fonctions $\varphi_i(.)$.
- Appliquer la méthode générale pour tenter ensuite de réduire le modèle obtenu.

Nous reviendrons sur la seconde à la fin de la section. Dans l'immédiat, nous proposons un exemple illustratif de la méthode générale que l'on comparera à une approche spécifique. Après quoi, nous considérerons un cas particulier important: le modèle affine.

Illustration

Considérons le système à paramètres variables décrit par les équations:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} w \\ z & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \\ \forall t \geq 0, & -\frac{\pi}{6} \leq \theta(t) \leq \frac{\pi}{6} & \end{array} \right. \tag{2.37}$$

Le domaine de variation du paramètre $\theta(t)$ permet les approximations suivantes avec moins de quatre pour cent d'erreur:

$$\begin{array}{rclcl} \sin\theta & \approx & \theta & = & f_1(\theta) \\ \cos\theta & \approx & 1 - \frac{\theta^2}{2} & = & f_2(\theta) \end{array}$$

d'où peut être déduit le système:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\frac{\theta^2}{2} & \theta \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} w \\ z & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \\ \forall t \geq 0, & & -\frac{\pi}{6} \leq \theta(t) \leq \frac{\pi}{6} \end{array}\right. \tag{2.38}$$

où la dépendance paramétrique, devenue polynômiale est a fortiori rationnelle. Ce dernier admet donc un modèle LFT, dont nous envisagerons d'abord la construction en appliquant la méthode générale. Dans un second temps, nous proposerons une approche plus intuitive, qui sur cet exemple conduira à un modèle de taille minimale.

Commençons donc par appliquer la méthode générale, en décomposant le système sous la forme:

$$S(\theta) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M_0} + u_1\, f_1(\theta)\, v_1^T + u_2\, f_2(\theta)\, v_2^T \tag{2.39}$$

avec

$$u_1 = [0\ 1\ 0]^T, \quad v_1 = [1\ 0\ 0]^T, \quad u_2 = [0\ 1\ 0]^T, \quad \text{et } v_2 = [0\ 1\ 0]^T$$

D'après la proposition 2.6,

$$f_1(\theta) = \mathcal{F}_u\left(\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right), \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix}\right) \tag{2.40}$$

et

$$f_2(\theta) = \mathcal{F}_u\left(\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array}\right), \theta\right) \tag{2.41}$$

Nous obtenons ensuite, d'après 2.31,

$$S(\theta) = M_0 + \mathcal{F}_u\left(\left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix}\right) + \mathcal{F}_u\left(\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \theta\right) \tag{2.42}$$

d'où, par sommation:

$$S(\theta) = \mathcal{F}_u\left(\left(\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & \theta \end{pmatrix}\right) \tag{2.43}$$

Le polynôme $f_1(\theta)$ étant de degré 2, on ne pouvait pas espérer obtenir un bloc Θ de dimension inférieure à 2. Toutefois, elle vaut ici 3 et il y a fort peu de chance que le modèle soit minimal.

En effet, si l'on exploite la relation suivante entre $f_1(.)$ et $f_2(.)$:

$$1 - f_1(\theta) = \frac{1}{2}\theta f_2(\theta)$$

il vient:

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{\theta^2}{2} & \theta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_0} + \theta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\theta}{2} & \theta \end{pmatrix}}_{A_1(\theta)} \tag{2.44}$$

puis, en remarquant que:

$$A_1(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(I_2 - \theta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\right)^{-1}$$

on s'aperçoit que l'expression (2.44) coïncide avec celle d'une LFT (2.8), d'où on déduit facilement le résultat:

$$S(\theta) = \mathcal{F}_u\left(\underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)}_{P}, \underbrace{\begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix}}_{\Theta}\right) \tag{2.45}$$

qui confirme notre pressentiment quant à la non-minimalité du modèle précédent. Ce dernier en revanche est bien minimal. La méthode employée pour l'obtenir ne peut hélas être généralisée. Toutefois, lorsque n'intervient qu'un paramètre, comme c'est le cas dans notre exemple, il existe une méthode systématique de réduction, permettant d'accéder à un modèle minimal.

Modèle LFT affine

La dépendance affine est un cas particulier important de dépendance rationnelle, pour lequel l'obtention d'un modèle LFT est grandement facilitée [92]. Considérons en effet le système décrit par:

$$\forall \theta \in \mathcal{P}\,,\ S(\theta) = S_0 + \sum_{i=1}^{i=n} \theta_i S_i \tag{2.46}$$

En décomposant chaque matrice S_i (de rang r_i) sous la forme:

$$S_i = U_i V_i^T$$

on vérifie simplement que:

$$S(\theta) = \mathcal{F}_l\left(\begin{pmatrix} S_0 & U_1 & \dots & U_n \\ V_1^T & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_n^T & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \Theta\right) = \mathcal{F}_u\left(\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & V_1^T \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & V_n^T \\ U_1 & \dots & U_n & S_0 \end{pmatrix}, \Theta\right) \tag{2.47}$$

avec:

$$\Theta = \mathrm{diag}(\theta_1 I_{r_1}\,,\ \theta_2 I_{r_2}\,,\ \dots\,,\ \theta_n I_{r_n}) \tag{2.48}$$

De plus, Θ est de dimension **minimale**.

2.2.4 Vers la minimalité

Dans le cas général, nous avons déjà souligné ce problème, il n'est pas évident d'obtenir un modèle LFT minimal. En particulier, la méthode générale que nous avons développée, ne traite pas cet aspect. Nous nous efforçons ici d'y remédier en proposant une approche de réduction fondée sur la notion de grammiens structurés que nous allons préciser.

Position du problème

Etant donné un modèle LFT

$$\mathcal{F}_u\left(\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \Theta\right) \tag{2.49}$$

défini sur la boule unité de l'ensemble $\mathbf{\Theta}$ des matrices bloc-diagonales:

$$\Theta = \text{bloc diag}(\Theta_1, \ldots, \Theta_r)\,, \quad \Theta_i = \theta_i I_{n_i} \tag{2.50}$$

et vérifiant les conditions (2.11), c'est-à-dire:

$$\exists T \;/\; \begin{cases} \forall \Theta \in \mathbf{\Theta}\,,\; T\,\Theta = \Theta\, T \\ \bar{\sigma}(T M_{11} T^{-1}) < 1 \end{cases} \tag{2.51}$$

on recherche une matrice $\hat{M}$ et une structure réduite $\hat{\mathbf{\Theta}}$ telles que:

$$\forall \Theta \in \mathbf{\Theta} \;\; \exists \hat{\Theta} \in \hat{\mathbf{\Theta}} \;\; / \; \mathcal{F}_u(M, \Theta) = \mathcal{F}_u(\hat{M}, \hat{\Theta}) \tag{2.52}$$

Cas d'un seul bloc

Si Θ contient **un seul** paramètre:

$$\Theta = \theta I_n$$

on pourra interpréter la LFT comme la représentation d'un système linéaire invariant de dimension n. Elle sera donc minimale si et seulement si le système associé est gouvernable et observable. Dans le cas contraire, on pourra lui appliquer une méthode classique de **réduction équilibrée** [71, 90] dont nous rappelons succintement sans les justifier, les trois étapes:

- **Calcul des grammiens:** solutions symétriques positives[10] des équations de Lyapunov:

$$M_{11}^T X M_{11} - X + M_{21}^T M_{21} = 0$$

$$M_{11} Y M_{11}^T - Y + M_{12} M_{12}^T = 0$$

[10] L'existence de telles solutions est garantie par les conditions 2.51.

- **Diagonalisation de** YX: On recherche une transformation T, telle que: $YX = T^{-1}\Lambda T$ où les éléments[11] de Λ sont classées par ordre décroissant:

$$\Sigma = diag(\sigma_1,\, \sigma_2,\, \ldots, \sigma_r,\, 0,\, \ldots, 0)$$

- Le modèle minimal est finalement obtenu par troncature à l'ordre r du modèle dans la base T, encore appelé modèle équilibré. Ainsi, $\hat{M}_{11}$ est la matrice formée par les r premières lignes et colonnes de $TM_{11}T^{-1}$, $\hat{M}_{12}$ contient les r premières lignes de TM_{12} et $\hat{M}_{12}$, les r premières colonnes de $M_{21}T^{-1}$. La matrice M_{22} quant à elle, reste inchangée. Enfin, la structure réduite $\hat{\Theta}$ est également par simple troncature en dimension r de la structure originale.

Cas général

Dans le cas général de plusieurs blocs, une méthode de réduction a été développée dans [128, 13]. Elle repose sur la notion de grammiens structurés, définis comme les solutions positives de **rangs minimaux** X et Y vérifiant:

$$\begin{cases} \forall\Theta \in \boldsymbol{\Theta}\,,\ \Theta X = X\Theta \quad \text{et} \quad \Theta Y = Y\Theta \\ M_{11}^T X M_{11} - X + M_{21}^T M_{21} \leq 0 \\ M_{11} Y M_{11}^T - Y + M_{12} M_{12}^T \leq 0 \end{cases} \tag{2.53}$$

On montre [128] que l'existence des solutions X et Y est garantie si et seulement si les conditions (2.51) sont vérifiées. De plus, dans une base appropriée T,

$$M_{11} \rightarrow \tilde{M}_{11} = TM_{11}T^{-1}\,,\ \ M_{12} \rightarrow \tilde{M}_{12} = TM_{12}\,,\ \ M_{21} \rightarrow \tilde{M}_{21} = M_{21}T^{-1}$$

on aura,

$$X = Y = \Sigma = \mathrm{diag}(\Sigma^1,\, \Sigma^2, \ldots, \Sigma^r)$$

avec,

$$\Sigma^i = \mathrm{diag}(\sigma_1^i, \ldots, \sigma_{n_{r_i}}^i, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n_i - n_{r_i}})$$

Théorème 2.7 Condition nécessaire et suffisante de minimalité

La LFT décrite par (2.49) et (2.50) est **minimale** *si et seulement si, les* **grammiens structurés** *X et Y sont de rang plein (ie. $\forall i, n_i = n_{r_i}$).*

□

[11] connues sous le nom de valeurs singulières de Hankel.

Preuve: voir [13].

On en déduit la procédure de réduction de modèle:

- Déterminer un couple (X, Y) de matrices positives, de rangs minimaux vérifiant (2.53), puis une base orthonormée, diagonalisante T.
- Construire le modèle équilibré $\tilde{M}$ et le réduire en supprimant les lignes et colonnes de $\tilde{M}$ situées en regard des zéros de Σ.

La structure $\hat{\Theta}$ associée au modèle obtenu est définie par l'ensemble des éléments de la forme:

$$\Theta = \text{blocdiag}(\theta_1 I_{n_{r_1}}, \ldots, \theta_r I_{n_{r_r}})$$

et, est bien minimale.

A propos du calcul des grammiens généralisés... On aura remarqué bien sûr qu'il s'agit d'un étape décisive dans cette approche. Malheureusement il s'agit aussi d'une étape difficile, puisqu'elle pose le problème suivant:

Minimiser le rang d'une matrice sous contraintes LMI

lequel n'est pas convexe [39, 31, 13]. Les techniques d'optimisation présentées en annexe A ne sont donc pas directement applicables. Elles pourront servir de base toutefois à certaines heuristiques proposées notamment dans [31, 32].

2.3 Comparaisons

Pour conclure ce chapitre, nous proposons quelques éléments de comparaison entre les différents modèles présentés, notamment le modèle polytopique et le modèle LFT. Ces comparaisons seront effectuées du strict point de vue de la modélisation, conformément à l'esprit du chapitre. Ultérieurement, nous aurons à nouveau l'occasion de débattre des avantages d'un modèle par rapport à l'autre dans le cadre de l'analyse puis de la synthèse.

2.3.1 Sur le plan théorique

Sur le plan théorique, le principal argument qui puisse orienter notre choix vers un modèle plutôt qu'un autre est celui du **conservatisme**. Pour illustrer cette notion[12], qui ici restera nécessairement qualitative[13], nous considérons un exemple, qui sera repris dans le chapitre 3:

Exemple Soit un système LPV, décrit par l'équation différentielle classique

$$\dot{x} = A(\theta)x\,,\ x(0) = x_0$$

avec

$$\forall|\theta| \leq 1\,,\ A(\theta) = \begin{pmatrix} -1 & 5+\alpha\theta \\ -\frac{\alpha\theta}{5+\alpha\theta} & -\beta \end{pmatrix}$$

où α et β sont des paramètres que nous utiliserons plus tard pour les besoins de l'analyse. La dépendance paramétrique étant rationnelle, on peut construire un modèle LFT, a priori non conservatif:

$$\mathcal{F}_l\left(\left(\begin{array}{c|c} A_0 & B_\theta \\ \hline C_\theta & D_{\theta\theta} \end{array}\right), \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix}\right)$$

où

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix},\ B_\theta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha/5} \end{pmatrix},\ C_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sqrt{\alpha/5} & 0 \end{pmatrix},\ D_{\theta\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\alpha/5 \end{pmatrix}$$

Pour la construction du modèle polytopique, en revanche, il faut avoir recours à la technique du recouvrement. Autrement dit, on devra poser:

$$\theta_1 = 5 + \alpha\theta$$

et

$$\theta_2 = -\frac{\alpha\theta}{5+\alpha\theta}$$

Une manière brutale de procéder consiste à déterminer les bornes de chacun des paramètres pour en déduire un "modèle rectangulaire". On pourra cependant envisager une approche plus fine, illustrée par la figure suivante:

[12]Nous l'avons déjà évoquée, notamment dans le cadre de la présentation du modèle polytopique.

[13]Il serait de toute façon inutile de proposer une définition précise en l'absence de point de vue global qui prenne en compte les aspects analyse et synthèse.

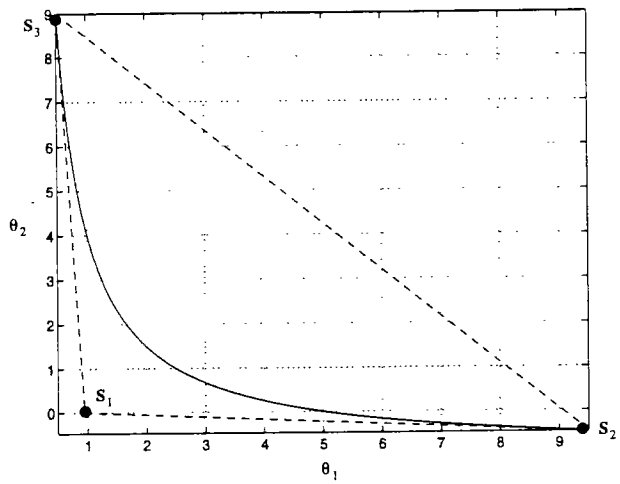


Figure 2.14: Evolution des paramètres

Le modèle polytopique associé est défini par les trois sommets:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & \theta_1(S_1) \\ \theta_2(S_1) & -\beta \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} -1 & \theta_1(S_2) \\ \theta_2(S_2) & -\beta \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} -1 & \theta_1(S_3) \\ \theta_2(S_3) & -\beta \end{pmatrix}$$

Si l'on retient pour cet exemple, comme mesure du conservatisme, la surface occupée dans le plan paramétrique (θ_1, θ_2), le modèle polytopique "triangulaire" est meilleur que son homologue "rectangulaire". Par contre, il est infiniment moins proche de la réalité que le modèle LFT dont la courbe $(\mathcal{C})$ représentative occupe une surface nulle! Toutefois, il faudra se méfier de cette mesure du conservatisme qui n'est en fait, licite que lorsqu'on compare deux modèles de même nature entre eux. Une première raison - qui nous oblige à élargir notre point de vue initial - vient du fait, que dans l'analyse d'un modèle LFT, il est plus difficile de prendre en compte le caractère purement réel des paramètres[14] . Cela n'est pas le cas pour un modèle polytopique.

2.3.2 Sur le plan pratique

Sur le plan pratique, nous préférerons souvent le modèle LFT. En général, on manipule plus aisément un modèle décrit par un système unique plutôt que par un ensemble de sommets. Notamment, l'accès au bloc Θ à partir des paramètres physiques du vecteur

[14] Il existe néanmoins des méthodes qui permettent par intersections de cercles, permettent d'approximer des segments d'axes réels à l'aide de LFT [74].

θ est relativement immédiat sur un modèle LFT, alors que, l'opération analogue sur un modèle polytopique requiert un calcul de coordonnées barycentriques.

Mais l'argument essentiel qu'il faut retenir de ce paragraphe est celui que nous développons maintenant. Il s'inscrit dans le cadre de considérations sur la discrétisation des systèmes LPV en vue de la simulation numérique.

Discrétisation des systèmes LPV

On s'intéresse dans un premier temps, au système LPV continu décrit par l'équation générale:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)u \\ y = C(\theta)x + D(\theta)u \end{cases}$$

auquel on associe, pour une période d'écantillonnage T, le modèle discret[15]:

$$x_{k+1} = e^{A(\theta_k)T}x_k + \left(\int_0^T e^{A(\theta_k)(T-\tau)}B(\theta_k)d\tau\right)u_k \tag{2.54}$$

avec les notations classiques:

$$x_k = x(kT)\,, \quad u_k = u(kT) \quad \theta_k = \theta(kT)$$

On supposera vérifiée la condition de Shannon, à savoir:

$$\forall\theta \in \mathcal{P},\ \bar{\sigma}(A(\theta)) < \frac{2}{T}$$

et, en utilisant un approximant de Padé pour l'évaluation des exponentielles, puis une méthode trapézoïdale pour le calcul de l'intégrale, il vient, après changement de la variable x en z [4]:

$$\begin{cases} z_{k+1} &= A_k z_k + B_k u_k \\ y_k &= C_k z_k + D_k u_k \end{cases} \tag{2.55}$$

avec

$$\begin{cases} A_k = \left(I - \frac{T}{2}A(\theta_k)\right)^{-1}\left(I + \frac{T}{2}A(\theta_k)\right) \\ B_k = \sqrt{T}\left(I - \frac{T}{2}A(\theta_k)\right)^{-1}B(\theta_k) \\ C_k = \sqrt{T}C(\theta_k)\left(I - \frac{T}{2}A(\theta_k)\right)^{-1} \\ D_k = D(\theta_k) + \frac{T}{2}C(\theta_k)\left(I - \frac{T}{2}A(\theta_k)\right)^{-1}B(\theta_k) \end{cases} \tag{2.56}$$

[15] La détermination de ce modèle repose sur l'approximation classique selon laquelle sur tout intervalle de la forme $[kT,\ (k+1)T[$ les vecteurs x, u et θ diffèrent peu de leurs valeurs respectives prises à l'instant kT.

et

$$x_k = \sqrt{T}\Big(I - \frac{T}{2}A(\theta_k)\Big)^{-1}\Big(z_k + \frac{\sqrt{T}}{2}B(\theta_k)u_k\Big)$$

On notera avec intérêt qu'une expression équivalente de ce dernier résultat peut être obtenue via le produit de Redheffer:

$$\begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I & \sqrt{T}I \\ \sqrt{T}I & \frac{T}{2}I \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}} \star \begin{pmatrix} A(\theta_k) & B(\theta_k) \\ C(\theta_k) & D(\theta_k) \end{pmatrix} \tag{2.57}$$

où $\mathcal{B}$ correspond à la tranformation bilinéaire.

Application au modèle LFT

Si maintenant on suppose que le système LPV initialement quelconque est décrit par un modèle LFT, on a:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{F}_u\left(\begin{pmatrix} A & B_\theta & B_u \\ C_\theta & D_{\theta\theta} & D_{\theta u} \\ C_y & D_{y\theta} & D_{yu} \end{pmatrix}, \Theta\right) = \mathcal{F}_l\left(\begin{pmatrix} A & B_u & B_\theta \\ C_y & D_{yu} & D_{y\theta} \\ C_\theta & D_{\theta u} & D_{\theta\theta} \end{pmatrix}, \Theta\right) \tag{2.58}$$

que l'on peut encore écrire, en remplaçant la transformation $\mathcal{F}_u$ par un produit de Redheffer (cf. équation 2.21):

$$\begin{pmatrix} A(\theta_k) & B(\theta_k) \\ C(\theta_k) & D(\theta_k) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & B_u & B_\theta \\ C_y & D_{yu} & D_{y\theta} \\ C_\theta & D_{\theta u} & D_{\theta\theta} \end{pmatrix}}_{M} \star \Theta_k \tag{2.59}$$

Finalement, en appliquant la technique de discrétisation résumée par la formule (2.57), il vient en vertu de l'associativité du produit de Redheffer:

$$\begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix} = \mathcal{B} \star \big(M \star \Theta_k\big) = \underbrace{\big(\mathcal{B} \star M\big)}_{M^d} \star \Theta_k \tag{2.60}$$

Cette dernière relation est riche de sens puisqu'elle montre que la discrétisation peut être effectuée **hors ligne**[16] sur la partie **linéaire invariante** du modèle. La seule opération devant être effectuée en ligne, pour déterminer z_{k+1} et y_k en fonction de z_k et u_k

[16] donc une seule fois.

repose sur l'évaluation de la LFT suivante:

$$\begin{pmatrix} z_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix} = \mathcal{F}_l(M^d, \Theta_k) \begin{pmatrix} z_k \\ u_k \end{pmatrix}$$

laquelle nécessite généralement peu de calculs (cf. partie II).

En conclusion, si l'objectif prioritaire est de faciliter la simulation, le modèle LFT paraît tout indiqué. Nous reviendrons sur la nécessité d'un tel objectif, dans le cadre d'une discussion sur l'implémentation de lois de commande non stationnaires (partie II).

Chapitre 3

Résultats d'analyse

3.1 Introduction

Nous présentons ici un ensemble de résultats concernant l'analyse des systèmes LPV mis sous forme polytopique, LFT ou affine. Ce chapitre vient donc s'inscrire dans le prolongement logique des *considérations générales sur la stabilité.*

Pour commencer, nous proposons quelques réflexions sur la notion de performances dans le cadre des systèmes LPV. Après quoi, nous décrivons une première méthode d'analyse d'abord en stabilité puis en performances, fondée sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov quadratiques. Nous adapterons ensuite la méthode en vue de prendre en compte, non seulement les variations paramétriques du modèle mais aussi diverses formes d'incertitudes. Enfin, nous terminerons le chapitre par un exposé sur quelques approches non quadratiques. Nous préciserons les apports de telles méthodes, notamment dans la prise en compte de bornes sur les vitesses de variation des paramètres.

3.2 Mesures de performance pour les systèmes LPV

Dans le cadre des systèmes **linéaires invariants**, on relie couramment la notion de performances à l'existence d'une borne sur la norme $\mathcal{H}_\infty$ ou $\mathcal{H}_2$ d'une fonction de transfert ou encore à la localisation de ses pôles (cf. annexe D).

En revanche, dès lors que l'on s'intéresse à la classe des systèmes LTV ou LPV, on ne peut plus parler de fonction de transfert, ni par conséquent de norme $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ et encore

moins de pôles. Aussi, les résultats d'analyse en performances présentés dans ce chapitre s'appuieront-ils sur les mesures suivantes, que l'on définira exclusivement dans le domaine temporel:

Extension de la norme $\mathcal{H}_\infty$

On parlera plus précisément de norme $\mathcal{L}_2$-induite (annexe C) et on dira que la norme $\mathcal{L}_2$-induite d'un système LPV:

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)w \\ z = C(\theta)x + D(\theta)w \end{cases}$$

est bornée par γ si, pour toute trajectoire paramétrique du domaine $\mathcal{P}$:

$$\forall u \in \mathcal{L}_2\,,\ \forall T \geq 0\,,\ \int_0^T z(t)^T z(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^T w(t)^T w(t)dt \tag{3.1}$$

que l'on retrouve d'ailleurs en annexe D. Cette définition coïncide parfaitement avec la norme $\mathcal{H}_\infty$ classique dans le cas des systèmes linéaires. Remarquons ici simplement l'absence d'interprétation dans le domaine fréquentiel. Si S est un système LPV, on notera $\gamma_{\mathcal{H}_\infty}(S)$ la plus petite valeur de γ telle que la relation (3.1) soit encore vérifiée:

$$\gamma_{\mathcal{H}_\infty}(S) = \sup_{w \in \mathcal{L}_2,\, \theta(t) \in \mathcal{P}} \frac{\int_0^\infty z^T z dt}{\int_0^\infty w^T w dt} \tag{3.2}$$

Extension de la norme $\mathcal{H}_2$

On définira simplement une extension de la norme $\mathcal{H}_2$, comme la plus grande énergie atteignable par la **réponse impulsionnelle** lorsque θ décrit l'ensemble des trajectoires contenues dans le domaine $\mathcal{P}$. Plus précisément, si on considère le système LPV (à m entrées):

$$S : \begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + \underbrace{[b_1(\theta), \ldots, b_m(\theta)]}_{B(\theta)} w \\ z = C(\theta)x \end{cases}$$

auquel on associe les m systèmes, S_i en remplaçant chaque entrée par une condition initiale non nulle produisant sur la sortie, le même effet qu'une **entrée impulsionnelle**:

$$S_i : \begin{cases} \dot{x}_i &= A(\theta)x_i\,,\ \ x_i(0) = b_i(\theta_0) \\ z_i &= C(\theta)x_i \end{cases}$$

l'extension de la norme $\mathcal{H}_2$ au cas des systèmes LPV est alors donnée par l'expression suivante:

$$\gamma_{\mathcal{H}_2}(S) = \sup_{\theta(t)\in\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{i=m} \int_0^\infty z_i(t)^T z_i(t) dt$$

qui généralise celle qu'on pourra trouver en annexe D.

Commentaires sur la notion de pôles

En toute rigueur, on ne peut pas définir la notion de pôle pour un système LPV puisqu'elle repose sur l'existence d'une fonction de transfert. Néanmoins, on pourra s'intéresser à la localisation de ces derniers pour toute valeur figée[1] du vecteur de paramètres θ et donc développer des critères qui vont permettre d'étendre certains résultats de l'annexe D.

3.3 Approche quadratique

On considère le système LPV (1.27) que l'on se propose d'analyser à l'aide d'une fonction de Lyapunov **quadratique** de la forme:

$$V(x) = x^T X x \,,\ X > 0$$

L'inégalité (1.32) que nous avions écrite dans le cadre d'une introduction à l'analyse (section 1.3.4) se simplifie pour donner la condition suffisante de stabilité exponentielle globale:

$$\forall \theta \in \mathcal{P} \,,\ A^T(\theta)X + XA(\theta) < 0 \tag{3.3}$$

qui définit aussi la notion de **stabilité quadratique** sur $\mathcal{P}$. On dit encore que le système (1.27) est **quadratiquement stable** sur $\mathcal{P}$. On parlera également de **stabilité robuste** à des incertitudes **paramétriques** variant **arbitrairement vite** dans le temps. Cette approche aujourd'hui relativement classique de la robustesse a d'ailleurs fait l'objet de nombreuses publications (voir notamment [12, 17] et références incluses).

Nous nous proposons maintenant d'associer la stabilité quadratique aux différentes mesures de performances que nous avons introduites. Cela nous va nous permettre de définir successivement les notions de:

- Performance quadratique de type $\mathcal{H}_\infty$

[1] en notant bien qu'il s'agit là d'une mesure qui vient en complément de la stabilité, et qui en aucun cas ne permet à elle seule de la garantir - cf. chapitre 1.

- Performance quadratique de type $\mathcal{H}_2$
- Performance quadratique par localisation des pôles

que nous caractérisons par les théorèmes suivants:

Théorème 3.1 Performance quadratique de type $\mathcal{H}_\infty$

Le système LPV (1.27) noté S est quadratiquement stable sur $\mathcal{P}$ et vérifie, pour un réel positif γ, la contrainte de performance:

$$\gamma_{\mathcal{H}_\infty}(S) < \gamma$$

s'il existe une matrice strictement positive X telle que:

$$\forall \theta \in \mathcal{P}\,, \begin{pmatrix} A(\theta)^T X + X A(\theta) & XB(\theta) & C(\theta)^T \\ B(\theta)^T X & -\gamma I & D(\theta)^T \\ C(\theta) & D(\theta) & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \tag{3.4}$$

□

Théorème 3.2 Performance quadratique de type $\mathcal{H}_2$

Le système LPV (1.27) noté S, tel que:

$$\forall \theta \in \mathcal{P},\ D(\theta) = 0$$

est quadratiquement stable sur $\mathcal{P}$ et vérifie, pour un réel positif γ, la contrainte de performance:

$$\gamma_{\mathcal{H}_2}(S) < \gamma$$

s'il existe une matrice strictement positive X telle que:

$$\forall \theta \in \mathcal{P}\,, \begin{cases} A(\theta)^T X + X A(\theta) + C(\theta)^T C(\theta) < 0 \\ trace\Big(B(\theta)^T X B(\theta)\Big) < \gamma \end{cases} \tag{3.5}$$

□

Théorème 3.3 Performance quadratique par localisation des pôles

Le système LPV (1.27) noté S est quadratiquement stable sur $\mathcal{P}$ et, pour toutes valeurs figées des paramètres, les pôles des systèmes LTI associés, restent dans le disque ouvert de centre α et de rayon r s'il existe une matrice X strictement positive X telle que:

$$\forall \theta \in \mathcal{P}\,,\ \begin{pmatrix} -rX & X(A(\theta)-\alpha I) \\ (A(\theta)^T-\alpha I)X & -rX \end{pmatrix} < 0 \tag{3.6}$$

□

Preuves: Elles sont directement inspirées de celles que l'on pourra trouver en annexe D. Autrement dit, pour prouver le premier théorème, il suffit de choisir une fonction $V(x) = x^T X x$ strictement positive, telle que, **pour toute trajectoire**:

$$\dot{V}(x) < \gamma^2 u^T u - y^T y$$

On remarquera d'ailleurs que l'inégalité obtenue, lorsqu'on fige les paramètres n'est autre que celle du lemme borné-réel. La preuve du second est faite à l'aide de fonctions $V(x_i) = x_i^T X x_i$, associées à chacun des m systèmes S_i, et telles que, **pour toute trajectoire**:

$$\dot{V}_i(x) < -y_i(t)^T y_i(t)$$

Quant au dernier, il s'agit d'une extension immédiate du résultat obtenu en annexe D pour les systèmes LTI. Notons que le critère présenté pourra être étendu sans difficulté au cas de la localisation des pôles dans un secteur $\mathcal{S}(\lambda, r, \alpha)$. Remarquons pour conclure, que chacune des caratérisations implique nécessairement:

$$\forall \theta \in \mathcal{P},\ A(\theta)^T X + X A(\theta) < 0$$

ce qui garantit la stabilité quadratique.

■

Remarque: Les premier et dernier critères mettent en jeu des inégalités **linéaires** par rapport aux éléments de la représentation d'état du système. Ce n'est pas le cas, en revanche du critère de type $\mathcal{H}_2$ pour lequel nous avons retenue la formulation la plus classique issue des expressions des grammiens. Par la suite, on substituera généralement à la seconde inégalité (3.5), les nouvelles inégalités suivantes:

$$B(\theta)^T X B(\theta) < P(\theta) \quad \text{et} \quad trace(P(\theta)) < \gamma$$

Pour simplifier, on supposera la matrice $P(\theta)$ constante. Il vient donc la caractérisation suivante:

$$\forall\theta \in \mathcal{P}\,, \begin{cases} \begin{pmatrix} A(\theta)^T X + XA(\theta) & C(\theta)^T \\ C(\theta) & -I \end{pmatrix} < 0 \\ \begin{pmatrix} P & B(\theta)^T X \\ XB(\theta) & X \end{pmatrix} > 0 \\ trace(P) < \gamma \end{cases} \tag{3.7}$$

où γ correspond maintenant à une borne supérieure de la mesure de performance quadratique $\mathcal{H}_2$.

3.3.1 Application au modèle polytopique

On se propose maintenant d'appliquer les résultats qui précèdent, dans le cas où le système LPV est représenté par un modèle polytopique:

$$\mathcal{C}o\{S_1,\, S_2, \ldots S_N\} \quad \text{avec} \;:\; S_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

En utilisant la propriété suivante:

Propriété 3.4 *Etant données N matrices symétriques P_i de mêmes dimensions, les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\forall i = 1 \ldots N,\; P_i < 0$

(ii) $\forall \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i = 1 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i P_i < 0$

□

puis, en remarquant que chacune des inégalités présentées dans les théorèmes (3.1-3.3) est linéaire par rapport aux éléments de la représentation d'état du système, on vérifie facilement que:

Le système LPV (1.27) satisfait aux conditions du théorème (3.1) de performance quadratique $\mathcal{H}_\infty$ si et seulement si:

$$\exists X > 0 \;/\; \forall i = 1, \ldots, N, \begin{pmatrix} A_i^T X + XA_i & XB_i & C_i^T \\ B_i^T X & -\gamma I & D_i^T \\ C_i & D_i & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \tag{3.9}$$

Le système LPV (1.27) satisfait aux conditions du théorème (3.2) de performance quadratique $\mathcal{H}_2$ si:

$$\exists X\,, P > 0 \;/\; \forall i = 1, \ldots, N, \begin{cases} \begin{pmatrix} A_i^T X + X A_i & C_i^T \\ C_i & -I \end{pmatrix} < 0 \\ \begin{pmatrix} P & B_i^T X \\ X B_i & X \end{pmatrix} > 0 \\ trace(P) < \gamma \end{cases} \tag{3.10}$$

Le système LPV (1.27) satisfait aux conditions du théorème (3.3) de performance quadratique par localisation des pôles dans un disque si et seulement si:

$$\exists X > 0 \;/\; \forall i = 1, \ldots, N \begin{pmatrix} -rX & X(A_i - \alpha I) \\ (A_i^T - \alpha I)X & -rX \end{pmatrix} < 0 \tag{3.11}$$

Remarque: Dans chacun des cas, on a donc remplacé un critère mettant en jeu une infinité d'inégalités, par un critère équivalent[2] où n'apparaissent plus qu'un nombre fini d'inégalités, qui plus est, **linéaires** par rapport aux variables X et éventuellement P. Les résultats obtenus sont donc parfaitement acceptables sur le plan numérique (cf annexe A), ce qui justifie au passage le bien-fondé du modèle polytopique.

3.3.2 Cas du modèle LFT

Nous envisageons ici une seconde hypothèse de modélisation décrite au chapitre 2, à savoir le modèle LFT. On supposera donc le système (1.27) décrit par:

$$\mathcal{F}_u(P(s), \Theta(t))$$

avec:

$$P(s) = \left(\begin{array}{c|cc} A & B_\theta & B_p \\ \hline C_\theta & D_{\theta\theta} & D_{\theta p} \\ C_p & D_{p\theta} & D_{pp} \end{array}\right)$$

et

$$\forall t \geq 0, \quad \Theta(t) = \text{blocdiag}(\theta_1 I_{n_1}\,, \theta_2 I_{n_2} \ldots \theta_r I_{n_r}) \in \Theta\,, \quad \text{et} \quad \Theta(t)^T \Theta(t) \leq I$$

[2] dans le cadre du modèle polytopique.

On pourra encore écrire ce modèle sous la forme:

$$\forall \Theta \in \mathbf{\Theta}\,,\ \Theta(t)^T\Theta(t) \leq I$$

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} \dot{x} & = & Ax & + & B_\theta w_\theta & + & B_p w \\ z_\theta & = & C_\theta x & + & D_{\theta\theta} w_\theta & + & D_{\theta p} w_p \\ z_p & = & C_p x & + & D_{p\theta} w_\theta & + & D_{pp} w_p \\ w_\theta & = & \Theta z_\theta & & & & \end{array}\right. \tag{3.12}$$

Contrairement au modèle polytopique, le modèle LFT ne se prête pas à une adaptation immédiate des théorèmes (3.1)-(3.3). Ce dernier en revanche, puisqu'il représente un système en boucle fermée, s'accomodera fort bien des résultats de la "théorie du faible gain" ou de la "positivité". Mais nous y reviendrons ultérieurement dans le cadre de l'analyse des systèmes LPV incertains.

Dans l'immédiat, pour rester dans l'esprit d'une approche quadratique, au sens précis du terme, nous nous proposons d'adapter les théorèmes précédents en suivant une démarche que nous avons déjà introduite au premier chapitre. Il s'agissait alors de démontrer le critère du cercle et le critère de Popov à l'aide de fonctions de Lyapunov, en utilisant la $\mathcal{S}$ procédure (annexe B). On pourra d'ailleurs interpréter les résultats qui suivent comme des prolongements du critère de stabilité du cercle avec prise en compte:

- d'une mesure de performances
- de la structure de l'opérateur Θ

Le système LPV décrit par (3.12) vérifie les conditions de performance quadratique du théorème (3.1) s'il existe une matrice strictement positive X et une matrice strictement positive L, commutant avec les éléments de $\mathbf{\Theta}$ telles que:

$$\begin{pmatrix} A^TX + XA & XB_\theta & XB_p & C_\theta^T & C_p^T \\ B_\theta^T X & -L & 0 & D_{\theta\theta}^T & D_{p\theta}^T \\ B_p^T X & 0 & -\gamma I & D_{\theta p}^T & D_{pp}^T \\ C_\theta & D_{\theta\theta} & D_{\theta p} & -L^{-1} & 0 \\ C_p & D_{p\theta} & D_{pp} & 0 & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \tag{3.13}$$

Preuve: En choisissant - de même que nous l'avons fait pour établir le théorème (3.1) - une fonction de Lyapunov, quadratique, définie positive, telle que:

$$\dot{V}(x) < \gamma w^T w - \frac{1}{\gamma} z^T z$$

on obtient une contrainte quadratique de la forme:

$$[x\ w_\theta\ w_p]^T P[x\ w_\theta\ w_p] < 0$$

laquelle doit être vérifiée pour tout x, w_p et w_θ, tels que:

$$\forall \|\Theta(t)\| \leq 1\,,\ \Theta(t) \in \mathbf{\Theta}\,,\ \ w_\theta = \Theta(t)(C_\theta x + D_{\theta\theta} w_\theta + D_{\theta p} w_p)$$

Il suffit ensuite de réécrire cette dernière relation (voir annexe B - condition suffisante de robustesse d'un critère quadratique) pour lui substituer une inégalité quadratique. C'est à ce niveau, qu'entre en jeu la matrice de "scaling" L permettant de prendre en compte la structure de Θ. On applique finalement la $\mathcal{S}$ procédure comme indiqué par le théorème (B.11) pour obtenir une première inégalité matricielle, qui après complément de Schur se met sous la forme (3.13).

■

Remarque: L'inégalité matricielle (3.13) est équivalente à:

$$\left\| \begin{pmatrix} L^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} I \end{pmatrix} G(s) \begin{pmatrix} L^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} I \end{pmatrix} \right\|_\infty < 1 \tag{3.14}$$

ce qui illustre clairement le rôle de $L^{\frac{1}{2}}$ comme opérateur de "scaling". On reconnaît ici une application classique du théorème du faible gain (cf. chapitre 1) avec utilisation de scalings constants[3].

Le système LPV décrit par (3.12) tel que:

$$D_{\theta p} = 0 \ \text{ et } \ D_{pp} = 0$$

vérifie les conditions de performance quadratique du théorème (3.2) s'il existe une matrice strictement positive X et une matrice strictement positive L, commutant avec les éléments de $\mathbf{\Theta}$ telles que:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} A^T X + XA & XB_\theta & C_\theta^T & C_p^T \\ B_\theta^T X & -L & D_{\theta\theta}^T & D_{p\theta}^T \\ C_\theta & D_{\theta\theta} & -L^{-1} & 0 \\ C_p & D_{p\theta} & 0 & -I \end{pmatrix} < 0 \\ trace(B_p^T X B_p) < \gamma \end{cases} \tag{3.15}$$

[3] Ce qui assure ainsi la commutativité avec le bloc de paramètres, variant dans le temps. Nous verrons dans la section suivante, une analyse plus générale, mettant en jeu également des scalings dynamiques.

Preuve: Elle suit le même schéma que la précédente, à la différence près que l'on commencera, comme nous l'avons déjà fait à plusieurs reprises, par introduire un ensemble de systèmes S_i obtenus en remplaçant chaque entrée par une condition initiale non nulle. Le choix de la fonction de Lyapunov est parfaitement similaire à celui qui nous a permis d'établir le théorème (3.2).

Le système LPV décrit par (3.12) vérifie les conditions de performance quadratique du théorème (3.1) s'il existe une matrice strictement positive X et une matrice strictement positive L, commutant avec les éléments de $\mathbf{\Theta}$ telles que:

$$\begin{pmatrix} (A-\alpha I)^T X (A-\alpha I) & (A-\alpha I)^T X B_\theta & C_\theta^T \\ B_p^T X (A-\alpha I) & -L & D_{\theta\theta}^T \\ C_\theta & D_{\theta\theta} & -L^{-1} \end{pmatrix} < 0 \tag{3.16}$$

Preuve: La démarche est ici un peu particulière car, pour démontrer que les valeurs propres d'une matrice restent à l'intérieur d'un disque, on s'appuie sur la contrainte de stabilité d'un système discret. Pour cela, il suffit, par homothétie et translation de se ramener au disque unité, centré à l'origine. On considère donc le système LFT décrit par:

$$\begin{cases} x_{k+1} &= \underbrace{\dfrac{A-\alpha I}{r}}_{\tilde{A}} x_k &+ B_\theta w_\theta \\ z_\theta &= C_\theta x_k &+ D_{\theta\theta} w_\theta \end{cases}$$

dont on cherche à prouver la stabilité (discrète) à l'aide de fonctions de la forme:

$$V(x_k) = x_k^T X x_k\,, \quad X > 0$$

La décroissance de V le long des trajectoires s'écrit:

$$V_{k+1} - V_k = x_k^T(\tilde{A}^T X \tilde{A} - X)x_k + 2x_k^T(\tilde{A}^T X B_\theta)w_\theta + w_\theta^T B_\theta^T X B_\theta w_\theta < 0$$

pour tout x_k et w_θ tels que:

$$\forall \|\Theta\| \leq 1,\ \Theta(t) \in \mathbf{\Theta}\,, \quad w_\theta = \Theta(C_\theta x_k + D_{\theta\theta} w_\theta)$$

Comme précédemment, il ne reste plus alors qu'à transformer cette dernière contrainte pour finalement appliquer la $\mathcal{S}$ procédure (théorème B.11).

■

Remarques:

- Comme ce fut le cas pour le modèle polytopique, les critères que nous venons de développer ici dans le cadre du modèle LFT, sont tout à fait licites sur le plan numérique. Il s'agit en effet de résoudre des LMI par rapport aux variables X et L. Notons que la présence de L^{-1} n'est aucunement gênante, puisque par complément de Schur on restaure la linéarité. Par ailleurs, on remarquera avec intérêt que chacun des critères développé ne met en jeu qu'une seule inégalité (contre N inégalités pour le modèle polytopique). En revanche, on aura une variable supplémentaire L à optimiser. La complexité des algorithmes de résolution de LMI étant plus grande vis-à-vis du nombre de variables que du nombre d'inégalités, la suprématie des derniers critères sur les précédents n'est pas fondée! Cela dépendra essentiellement du problème traité.

- Une deuxième remarque, que nous illustrerons par la suite, concerne le conservatisme liée à la méthode (notamment la $\mathcal{S}$ procédure: cf. annexe B). On remarquera, plus précisément, que les résultats obtenus dans le cadre de l'*approche polytopique* sont équivalents aux conditions fournies par les théorèmes généraux de performances quadratiques. En revanche, l'*approche LFT* conduit seulement à des conditions suffisantes.

3.3.3 A propos du conservatisme

Nous nous proposons ici de débattre plus longuement quant au conservatisme inhérent à l'approche LFT. Ce paragraphe vient également compléter - en apportant le point de vue de l'analyse - certains aspects développés au chapitre 2 où nous proposions une première étude comparative entre modèle polytopique d'une part et modèle LFT d'autre part.

Pour appuyer notre argumentation, nous allons considérer successivement deux exemples relativement simples d'analyse en stabilité (approche quadratique) de systèmes LPV. Le premier affichera une dépendance paramétrique affine, tandis que celle du second, pour reprendre l'exemple du paragraphe 2.3.1 sera rationnelle. Dans chacun des cas, nous déterminerons la taille du plus grand domaine paramétrique admissible sur lequel la stabilité quadratique sera préservée.

Exemple 1

Soit le système LPV suivant:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6(1+\theta_1) & -10(1+\theta_2) \end{pmatrix} x \tag{3.17}$$

pour lequel on cherche à maximiser la borne ρ telle que, pour toute évolution (arbitrairement rapide) des paramètres dans la "boîte":

$$\forall t \geq 0,\ |\theta_1(t)| \leq \rho\,,\ \ |\theta_2(t)| \leq \rho$$

le système demeure quadratiquement stable.

- L'approche polytopique est relativement immédiate sur ce type de problème. Puisque la dépendance est affine, on est en mesure de construire un modèle non conservatif dont les quatre sommets A_i sont exprimés par les valeurs extrémales de $A(\theta)$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6(1-\rho) & -10(1-\rho) \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6(1-\rho) & -10(1+\rho) \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6(1+\rho) & -10(1-\rho) \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6(1+\rho) & -10(1+\rho) \end{pmatrix}$$

  Il ne reste plus ensuite qu'à résoudre le problème suivant:

$$\max_{\rho}\ /\ A_i(\rho)^T X + X A_i(\rho) < 0 \quad i = 1, \ldots, 4$$

  qui pour chaque valeur de ρ est une LMI en X (il s'agit d'un problème de faisabilité - cf. annexe A). De plus, on vérifie aisément que si le problème admet une solution pour une valeur donnée de ρ, alors il admet également une solution pour toutes les valeurs inférieures. Cette propriété justifie une recherche par dichotomie que l'on effectuera sur l'intervalle [0 1]. Après 7 itérations, on obtient à 10^{-3} près:

$$\rho_{pol} = 0.7710$$

- Construisons maintenant un modèle LFT - de dimension minimale -pour le système (3.17), ce qui, compte tenu du caratère affine de la dépendance paramétrique ne pose guère de difficultés. On retiendra par exemple[4] le modèle suivant:

$$\mathcal{F}_l\left(\left(\begin{array}{c|c} A_0 & \sqrt{\rho}B_\theta \\ \hline \sqrt{\rho}I & 0 \end{array}\right), \begin{pmatrix} \theta_1(t) & 0 \\ 0 & \theta_2(t) \end{pmatrix}\right)$$

[4]On rappelle qu'il existe une infinité de modèles possibles. Le choix d'un modèle plutôt qu'un autre n'aura bien sûr aucune influence sur le résultat.

avec

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -10 \end{pmatrix} \text{ et } B_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -6 & -10 \end{pmatrix}$$

Le problème d'optimisation associé que nous voulons résoudre s'écrit maintenant:

$$\max_\rho \ / \ \begin{cases} \begin{pmatrix} A_0^T X + X A_0 + \rho L & \sqrt{\rho} X B_\theta \\ \sqrt{\rho} B_\theta^T X & -L \end{pmatrix} < 0 \\ X = X^T > 0 \\ L = \mathrm{diag}(l_1, l_2) > 0 \end{cases}$$

Là encore, pour chaque valeur de ρ il s'agit de résoudre un problème de faisabilité. Pour la détermination de ρ, on procédera également par dichotomie. Toujours après 7 itérations, on obtient:

$$\rho_{lft} = 0.6851$$

qui est de plus de 11 % inférieure à la borne précédente.

Exemple 2

Le second système considéré est décrit par:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 5 + \alpha\theta \\ -\frac{\alpha\theta}{5+\alpha\theta} & -\beta \end{pmatrix} x$$

où α et β sont des paramètres de réglages. On prendra $\alpha = 1$ tandis qu'on fera évoluer β entre 2 et 10000. Le problème posé est similaire au précédent. On cherche donc à maximiser la borne ρ garantissant la stabilité quadratique pour toute évolution de $\theta(t)$ borné en module par ρ.

Nous ne reviendrons pas sur les aspects modélisation de ce système qui ont déjà fait l'objet d'une discussion au chapitre 1 (paragraphe 2.3.1). Rappelons simplement que l'obtention d'un modèle polytopique non conservatif n'est pas possible. Par contre, comme l'indique la figure (2.14) du paragraphe 2.3.1), deux possibilités de recouvrement sont envisageables. La première, assez brutale, génère un modèle à quatre sommets. La seconde, moins conservative, génère en outre un modèle dont le nombre de sommets est réduit à trois. Quant au modèle LFT, compte tenu de la nature de la dépendance paramétrique (rationnelle), il est parfaitement adapté à la description du système.

Pour chacun des modèles ainsi construits, on forme le problème d'optimisation convexe associé à la recherche de la plus grande valeur de ρ qui dépend bien sûr du paramètre β. Pour différentes valeurs de β, on détermine ρ_i ($i = 1, 2, 3$ selon le modèle) par dichotomie. On représente ensuite l'évolution de ρ en fonction du logarithme de β:

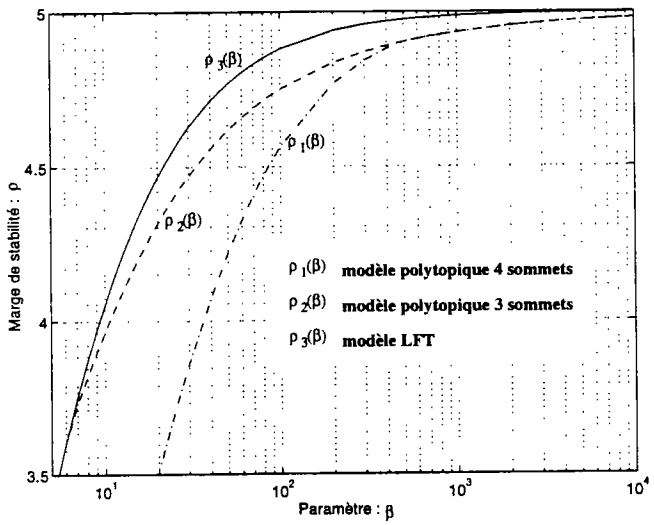


Figure 3.1: Comparaisons des marges de stabilité

Conclusions

Du premier exemple, on retiendra, dans le cas des systèmes affines, que l'approche polytopique s'avère moins pessimiste que l' approche LFT. On pourra expliquer la différence entre les résultats obtenus pour essentiellement deux raisons:

- La première est liée à l'utilisation de la $\mathcal{S}$ procédure qui exprime une condition seulement **suffisante** de satisfaction des contraintes quadratiques relatives au problème à résoudre (voir l'énoncé du théorème - annexe B).

- La seconde vient du fait que dans l'analyse que nous avons présentée, l'approche LFT autorise des variations paramétriques dans le plan **complexe**. Notons ici, qu'il est possible, en introduisant des variables supplémentaires, de raffiner notre approche en vue de prendre en compte des variations réelles. Nous présentons la méthode en annexe B. Nous reviendrons également sur ce point dans la section suivante.

Du deuxième exemple, on concluera naturellement à la suprématie de l'approche LFT dès lors que la dépendance paramétrique est rationnelle. Toutefois, il faut noter que les écarts ne sont pas toujours convaincants, en particulier pour les faibles valeurs du paramètre β. On notera à cet égard, que le modèle polytopique "3 sommets" conduit à une

analyse guère plus pessimiste que l'approche LFT. En revanche, la figure (3.1) confirme très nettement l'intérêt qu'il faut porter à la recherche du meilleur modèle polytopique. On relève en effet des écarts importants entre les valeurs de ρ_1 et de ρ_2.

De l'étude comparative qui précède, la balance semble donc pencher en faveur de l'approche "polytopique". Pourtant c'est principalement la seconde que nous nous proposons de développer davantage maintenant. Il demeure en effet un aspect du modèle LFT que nous n'avons pas développé jusqu'à présent dans notre analyse. Cet aspect concerne la prise en compte des incertitudes de différentes natures.

3.4 Extensions à l'analyse des systèmes LPV incertains

Nous nous sommes intéressés jusqu'à présent, à l'analyse en stabilité et en performances des systèmes LPV au sens strict de la définition proposée. Nous étendon ici cette analyse afin de traiter le cas des systèmes LPV incertains. Une telle étude présente un réel intérêt sur le plan pratique où les incertitudes qui affectent inévitablement tout modèle interviennent généralement à plusieurs niveaux:

- Erreurs de modèle (dynamiques hautes fréquences négligées, phénomènes non linéaires),
- Incertitudes de mesures dues principalement à la présence de bruits haute fréquence, en dehors de la bande passante des capteurs,
- Limitation des actionneurs (bande passante, saturations) associée à une méconnaissance de leur comportement sur certaines plages de fréquences.

Nous commencerons par définir plus précisément la modélisation retenue [5] pour représenter les systèmes LPV incertains. Puis nous développerons successivement deux approches[6] mettant en œuvre "scalings" ou "multiplieurs".

[5] fondée bien évidemment sur l'utilisation des LFT (cf. chapitre 2).

[6] Elles prolongent certains résultats obtenus au premier chapitre, dont notamment le critère du cercle et le critère de Popov.

3.4.1 Description des incertitudes

On modélisera un système LPV incertain sous la forme décrite par le schéma en boucle fermée suivant:

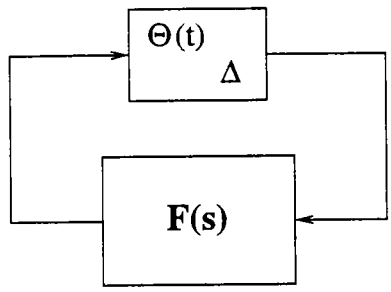


Figure 3.2: Variations paramétriques + incertitudes

que l'on notera souvent par une LFT:

$$\mathcal{F}_u(F(s), \text{blocdiag}(\Theta(t), \Delta)) \tag{3.18}$$

avec, comme précédemment,

$$\Theta(t) \in \boldsymbol{\Theta} \text{ et } \|\Theta(t)\| \leq 1 \tag{3.19}$$

et, pour le bloc d'incertitudes:

$$\Delta = \text{blocdiag}(\Delta_{TV}, \Delta_{TI}) \tag{3.20}$$

où $\Delta_{TV}(t)$ représente un bloc incertain, borné en norme par 1, variant dans le temps, sans mémoire, dont la structure $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{TV}}$ sera identique, aux dimensions près, à celle de $\boldsymbol{\Theta}$. Du point de vue de l'analyse, il n'y aura donc pas lieu de faire la distinction. Cela ne sera pas le cas, en revanche, du point de vue de la synthèse. C'est la raison pour laquelle, nous introduisons une notation spécifique dès à présent. Nous avons déjà sous-entendue la nuance en parlant systématiquement de $\Theta(t)$ comme d'un opérateur modélisant les <u>variations</u> paramétriques du système, tandis que $\Delta_{TV}(t)$ décrit typiquement des <u>incertitudes</u> paramétriques (structurées) variant dans le temps.

Contrairement à la première partie de Δ que nous venons de détailler, la seconde est stationnaire. Elle se décompose en deux blocs, l'un est statique et réel, l'autre est dynamique:

$$\Delta_{TI} = \text{blocdiag}(\Delta_{TI}^{R}, \Delta_{TI}^{C}(s)) \in \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{TI}} \tag{3.21}$$

avec

$$\begin{cases} \Delta_{TI}^{R} \in \mathbf{\Delta_{TI}^{R}} \triangleq \left\{\text{blocdiag}(\delta_1^R I_{R_1}, \ldots, \delta_q^R I_{R_p}\,, \quad \delta_i^R \in \mathbb{R})\right\} \\ \Delta_{TI}^{C}(s) \in \mathbf{\Delta_{TI}^{C}} \triangleq \left\{\text{blocdiag}(\Delta_1, \ldots, \Delta_p\,, \quad \Delta_i \in \mathbb{C}^{c_i \times c_i})\right\} \end{cases} \tag{3.22}$$

Les réels δ_i^R représentent des incertitudes paramétriques invariantes tandis que les blocs complexes Δ_i (fonctions de la fréquence) permettent de modéliser toute incertitude appartenant à la classe des opérateurs dynamiques linéaires, invariants. On supposera, pour les besoins de l'analyse, que:

$$\forall i \; |\delta_i^R| \leq 1 \;\text{ et }\; \|\Delta_i(s)\|_\infty \leq 1 \tag{3.23}$$

Remarque

Si les blocs complexes Δ_i sont typiquement dédiés à la représentation des incertitudes de modèles évoquées en introduction, on associera généralement le dernier d'entre eux aux signaux de performances (noté Δ_{perf}):

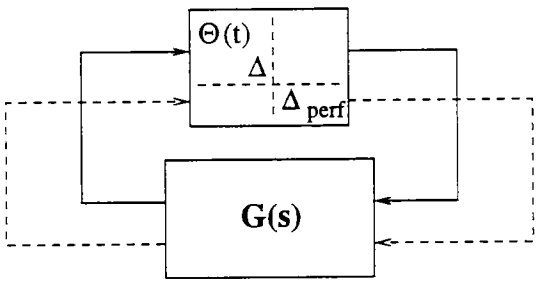


Figure 3.3: Représentation des signaux de performances

Ainsi, on pourra interpréter les résultats aussi bien du point de vue d'une analyse de la robustesse en stabilité qu'en performances[7].

3.4.2 Utilisation de scalings

Nous présentons ici une analyse fondée sur une extension classique du théorème du faible gain mettant en œuvre des opérateurs de "scalings". Le principe de la méthode (déjà

[7] mesurées par la norme $\mathcal{L}_2$ induite.

évoqué au chapitre 1) est illustré par la figure (1.12). Rappelons (théorème 1.16) qu'il s'agit de déterminer un opérateur D, inversible tel que:

- La norme $\mathcal{L}_2$ induite du système $DF(s)D^{-1}$ soit strictement bornée par 1
- D commute avec les éléments de $\mathbf{\Theta} \oplus \mathbf{\Delta_{TV}} \oplus \mathbf{\Delta_{TI}}$

On obtient ainsi une condition suffisante de robustesse en stabilité[8] couramment utilisée pour l'analyse des systèmes stationnaires incertains [35, 38]. Dans ce cas, les ensembles $\mathbf{\Theta}$ et Δ_{TV} sont supposés vides. On pourra donc choisir D dans la classe des opérateurs **dynamiques** LTI commutant avec les éléments de $\mathbf{\Delta_{TI}}$ (cf. chapitre 1 - corollaire 1.17) que l'on notera $\mathcal{D}_{\Delta_{TI}}$. Le problème d'optimisation associé s'écrit:

$$\hat{D} = arg \inf_{D(s)\in\mathcal{D}_{\Delta_{TI}}} \|D(s)F(s)D(s)^{-1}\|_\infty$$

et la valeur optimale de la norme $\mathcal{H}_\infty$ fournit une borne supérieure du μ complexe[35, 99]:

$$\mu_{\Delta_{TI}}(F) \leq \inf_{D(s)\in\mathcal{D}_{\Delta_{TI}}} \|D(s)F(s)D(s)^{-1}\|_\infty$$

On pourra résoudre ce type de problème à l'aide des outils de "*μ analysis and synthesis toolbox*" [9].

Une autre possibilité consiste à choisir des scalings **constants**. Ces derniers, dotés d'une structure adéquate, ont l'avantage de commuter avec les éléments de $\mathbf{\Theta}$, $\mathbf{\Delta_{TV}}$ et $\mathbf{\Delta_{TI}}$. De plus, ce type de problème admet une formulation LMI (noter par exemple l'équivalence entre les relations (3.13) et (3.14) - voir également [6]).

Ici, compte tenu de la nature des "perturbations" (mixtes LTV, LTI), nous voudrions développer une approche adaptée, qui mette simultanément en jeu, scalings constants et dynamiques [18, 22, 20, 78, 100].

En partitionnant la matrice $F(s)$ en quatre blocs de dimensions compatibles avec celles de $\mathbf{\Theta} \oplus \mathbf{\Delta_{TV}}$ et de $\mathbf{\Delta_{TI}}$, les conditions précédentes de stabilité robuste sont vérifiées si:

[8] ou en performances d'après la remarque du paragraphe précédent.

$$\forall\omega,\quad \bar{\sigma}\left[\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2(\omega) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{11}(j\omega) & F_{12}(j\omega) \\ F_{21}(j\omega) & F_{22}(j\omega) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_1^{-1} & 0 \\ 0 & {D_2}^{-1}(\omega) \end{pmatrix}\right] < 1 \tag{3.24}$$

avec:

$$D_1 \in \mathcal{D}_{\Theta\oplus\Delta_{TV}}$$

et

$$\forall\omega\,,\quad D_2(\omega) \in \mathcal{D}_{\Delta_{TI}}$$

En remarquant, d'après la définition des valeurs singulières, que:

$$\bar{\sigma}(M) < 1 \iff M^*M < I$$

puis en introduisant les nouvelles variables $L = D_1^* D_1 > 0$ et $Q(\omega) = D_2(\omega)^* D_2(\omega) > 0$, on montre que les inégalités (3.24) sont équivalentes à:

$$\forall\omega\,,\ \begin{pmatrix} F_{11}(j\omega)^* & F_{21}(j\omega)^* \\ F_{12}(j\omega)^* & F_{22}(j\omega)^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & Q(\omega) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{11}(j\omega) & F_{12}(j\omega) \\ F_{21}(j\omega & F_{22}(j\omega) \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & Q(\omega) \end{pmatrix}$$

On est donc amené à résoudre un problème de faisabilité, caractérisé par une infinité de contraintes LMI (cf. annexe A) dont les variables d'optimisation L et $Q(j\omega)$ définies positives, vérifient en outre:

$$L \in \mathcal{D}_{\Theta\oplus\Delta_{TV}}\,,\quad Q(\omega) \in \mathcal{D}_{\Delta_{TI}}$$

On choisira pour ces variables des structures **diagonales par blocs**.

La difficulté principale que nous devons maintenant résoudre est liée à la dimension infinie de notre problème. Pour cela, nous retiendrons la solution classique [9] qui repose sur l'idée d'un **échantillonnage en fréquences**:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n_\omega}\}$$

On obtient ainsi un problème de dimension finie, décrit par n_ω LMI, dont les variables sont L et:

$$Q_i = Q(\omega_i)\,,\quad i = 1, \ldots, n_\omega$$

Ce problème pourra être résolu par *LMI-Lab* [46], à condition toutefois de rendre réelles les inégalités, ce qui se fera aisément, en posant (voir annexe A):

$$\tilde{F}_{ij}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}e(F_{ij}(\omega)) & \mathcal{I}m(F_{ij}(\omega)) \\ -\mathcal{I}m(F_{ij}(\omega)) & \mathcal{R}e(F_{ij}(\omega)) \end{pmatrix} \quad i,j \in \{1,2\} \tag{3.25}$$

et

$$\tilde{Q}_i = \begin{pmatrix} \mathcal{R}e(Q_i) & \mathcal{I}m(Q_i) \\ -\mathcal{I}m(Q_i) & \mathcal{R}e(Q_i) \end{pmatrix} , \quad \tilde{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}e(L) & \mathcal{I}m(L) \\ -\mathcal{I}m(L) & \mathcal{R}e(L) \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

On en déduit un algorithme d'analyse de la robustesse en stabilité des systèmes de la forme (3.18), dont l'implantation sur calculateur est relativement aisée.

Algorithme 3.5 Robustesse en stabilité - Incertitudes LTI/LTV

- *Choisir un ensemble de points sur une plage suffisamment large de fréquences (on prendra généralement une répartition logarithmique).*
- *Résoudre, par rapport aux variables $\tilde{L}$ et $\tilde{Q}_i$, le problème d'optimisation convexe décrit par les LMI:*

$$\forall i = 1, \ldots, n_\omega \quad \begin{cases} U_{1i}^T \tilde{L} U_{1i} + V_{1i}^T \tilde{Q}_i V_{1i} < U_2^T \tilde{L} U_2 + V_2^T \tilde{Q}_i V_2 \\ U_2^T \tilde{L} U_2 + V_2^T \tilde{Q}_i V_2 > 0 \end{cases} \tag{3.27}$$

  avec [9]

$$L \in \mathcal{D}_{\Theta \oplus \Delta_{TV}} , \quad Q_i \in \mathcal{D}_{\Delta_{TI}}$$

  et les notations:

$$U_{1i} = [\tilde{F}_{11}(\omega_i) \;\; \tilde{F}_{12}(\omega_i)] , \quad V_{1i} = [\tilde{F}_{21}(\omega_i) \;\; \tilde{F}_{22}(\omega_i)]$$
$$U_2 = [I \;\; 0] , \quad V_2 = [0 \;\; I]$$

- *En déduire D_1 et la famille $\{D_2(\omega_i)\}_{i=1}^{n_\omega}$, puis construire, par interpolation un opérateur LTI $D_2(s)$, stable, à inverse stable, passant au mieux par les éléments de la famille.*
- *Vérifier le résultat en calculant la norme:*

$$\gamma = \left\| \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2(s) \end{pmatrix} F(s) \begin{pmatrix} D_1^{-1} & 0 \\ 0 & D_2^{-1}(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

  Si $\gamma > 1$, essayer une interpolation plus précise, en augmentant l'ordre de $D_2(s)$. Si cela ne suffit pas, revenir sur la première étape de l'algorithme, en cherchant si possible un échantillonnage mieux adapté au système (en resserrant par exemple les fréquences au voisinage d'éventuels modes flexibles).

  Si $\gamma < 1$, **fin de l'algorithme**.

□

[9] on rappelle que $\tilde{L}$ et $\tilde{Q}_i$ sont liées à L et Q_i par les relations (3.26).

Incertitudes réelles

Dans ce qui précède, le caractère réel des variations et incertitudes paramétriques n'a pas explicitement été pris en considération. Cela constitue une source[10] de conservatisme que nous avons déjà évoquée. Une solution, dans le cas d'incertitudes mixtes réelles/complexes stationnaires a été proposée au début des années 1990 [41, 139]. Son extension dans le cadre qui nous intéresse - en vue de l'analyse des systèmes LPV incertains - est relativement immédiate. Elle conduit à la condition suivante:

$$\forall \omega\,,\quad F^*(j\omega)Q(\omega)F(j\omega) + j\left(G(\omega)F(j\omega) - F^*(\omega)G(\omega)\right) < Q(\omega) \tag{3.28}$$

avec

$$Q(\omega) = D^*(\omega)D(\omega) > 0$$
$$D(\omega) = \text{blocdiag}\left(D_{TV}, D_{TI}(\omega)\right)\ ,\ D_{TV} \in \mathcal{D}_{\Theta\oplus\Delta_{TV}}\ ,\ D_{TI}(\omega) \in \mathcal{D}_{\Delta_{TI}}$$

et

$$\begin{aligned} G(\omega) &= G^*(\omega) = \text{blocdiag}\left(G_{TV}, G_{TI}(\omega)\right) \\ & G_{TV} \in \mathcal{D}_{\Theta\oplus\Delta_{TI}} \\ & G_{TI}(\omega) = \text{blocdiag}\left(G_{TI}^R(\omega), 0\right) \in \mathcal{D}_{\Delta_{TI}} \end{aligned}$$

La méthode consiste donc à introduire une classe de scalings supplémentaires $\mathcal{G}$, n'affectant que les variations et incertitudes réelles, de manière à restreindre ces dernières à l'intérieur de disques excentrés, couvrant le segment d'axe réel $[-1\ 1]$. On pourra d'ailleurs observer une certaine similitude entre le résultat précédent et un théorème présenté en annexe B dans le cadre de la prise en compte de perturbations réelles par la $\mathcal{S}$ procédure (cf. théorème B.13). L'idée de base est la même.

Comme nous l'avons fait précédemment, un échantillonnage fréquentiel, suivi d'une tranformation des inégalités pour les rendre réelles, permettront d'obtenir un critère numérique facile à implanter.

3.4.3 Utilisation de multiplieurs

Comme nous l'annoncions déjà au premier chapitre, l'analyse par multiplieurs fait l'objet, depuis quelques années, de recherches particulièrement actives. L'un des principaux attraits de cette analyse, fondée sur la notion de positivité, est qu'elle permet, contrairement à l'utilisation de scalings, d'éviter l'échantillonnage fréquentiel.

[10] plus ou mois importante selon l'application.

L'idée centrale consiste à transformer[11] les opérateurs Θ et Δ bornés en norme, en opérateurs passifs pour ensuite vérifier l'existence d'un multiplieur M tel que:

$$\forall \omega\,, \quad herm\,(F(j\omega)M(j\omega)) > 0 \tag{3.29}$$

où M satisfait un certain nombre de propriétés structurelles [83] garantissant entre autres, la commutativité avec $\Theta \oplus \Delta$ et la prise en compte des paramètres réels. L'inégalité (3.29) est une condition suffisante de robustesse en stabilité [109, 83, 8], qu'il est possible de modifier grâce au lemme de Kalman-Yakubovic-Popov (voir annexe D). On obtient ainsi une caractérisation par inégalité matricielle, dont on montre qu'elle est linéaire par rapport aux composantes (dans une base appropriée) du multiplieur $M(j\omega)$.

Ce constat semble à première vue séduisant, puisque:

- de par la formulation obtenue (LMI), on peut espérer une résolution relativement rapide et efficace,
- grâce à la décomposition des multiplieurs, on s'affranchit d'une recherche par balayage fréquentiel.

Il faut pourtant se méfier des conclusions hâtives! L'approche que nous venons de décrire en quelques lignes, pose en effet des difficultés relativement sérieuses, notamment en ce qui concerne le choix de la base de multiplieurs. La solution fréquemment adoptée consiste à définir une base polynômiale, laquelle facilite l'obtention de la contrainte LMI. Cependant, si la méthode semble produire des résultats satisfaisant en analyse, on constate que la mise en œuvre de ce type d'approche[12] dans les algorithmes de synthèse pose d'importants problèmes de convergence. Il convient de signaler par ailleurs, le "coût numérique" parfois prohibitif d'une analyse par multiplieurs dont le nombre de variables[13] mises en jeu est souvent élevé.

3.5 Fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres

Pour clôturer ce chapitre, nous proposons une étude des systèmes LPV dont on connaît une borne sur la vitesse d'évolution des paramètres, ce qui dans la pratique est généralement le cas. L'objectif est de mettre ainsi en place une analyse moins conservative,

[11] à l'aide de la transformation bilinéaire de secteur [109].

[12] avec le choix d'une base polynômiale des multiplieurs.

[13] il s'agit des composantes de M, dont le nombre augmente - dans le cas de la décomposition polynômiale - avec l'ordre du polynôme.

car mieux adaptée à la réalité physique. On peut envisager une telle étude dans le cadre précédent de l'utilisation de multiplieurs [102, 60]. Compte tenu toutefois des difficultés mentionnées plus haut, nous préférons ici revenir à une utilisation explicite des fonctions de Lyapunov.

La prise en compte d'informations sur la vitesse d'évolution paramétrique se fera au moyen de fonctions dépendant des paramètres variants du système:

$$V(x,\theta(t)) = x^T X(\theta(t))x\,,\ \forall\theta\in\mathcal{P},\ X(\theta)>0$$

En ce qui concerne la vitesse d'évolution, nous retiendrons l'hypothèse classique suivante:

$$\forall i=1,\ldots,r \quad \forall t\geq 0\,,\ \ |\dot\theta_i(t)|\leq \nu_i \tag{3.30}$$

Enfin, dans le seul but de simplifier la présentation, nous développerons les résultats dans le cadre d'une analyse en stabilité. Le lecteur pourra facilement adapter ces derniers et obtenir des résultats d'analyse en performance de type $\mathcal{H}_\infty$ ou $\mathcal{H}_2$.

L'application du théorème général (1.7) (voir chapitre 1), fournit une condition suffisante de stabilité [14] décrite par:

$$\forall\theta\in\mathcal{P}\,,\ |\dot\theta_i(t)|\leq\nu_i\,,\quad \begin{cases} A^T(\theta)X(\theta)+X(\theta)A(\theta)+\sum\limits_{i=1}^{r}\dot\theta_i\frac{\partial X}{\partial\theta_i}<0\\ X(\theta)>0\end{cases} \tag{3.31}$$

Nous indiquons ci-après deux méthodes permettant d'aborder la résolution de ce problème qui, pour l'instant est de dimension infinie!

3.5.1 "Quadrillage" paramétrique

Commençons par réécrire la condition précédente, en considérant indépendamment les paramètres θ_i des valeurs de leurs dérivées, dont on sait qu'elles évoluent sur des segments d'axes réels $[-\nu_i\ \ \nu_i]$. Pour chaque valeur de θ, on obtient ainsi un critère formé par 2^r+1 inégalités:

$$\forall\theta\in\mathcal{P}\,,\ |\dot\theta_i(t)|\leq\nu_i\,,\quad \begin{cases} A^T(\theta)X(\theta)+X(\theta)A(\theta)+\sum\limits_{i=1}^{r}\pm\nu_i\frac{\partial X}{\partial\theta_i}<0\\ X(\theta)>0\end{cases} \tag{3.32}$$

[14] on pourra vérifier qu'il s'agit de stabilité exponentielle.

Dans ce problème, que l'on aimerait bien résoudre comme une LMI, il y a finalement deux difficultés, respectivement liées au fait que:

- le nombre d'inégalités (en θ) est infini,
- $X(\theta)$ évolue dans un espace fonctionnel de dimension infinie.

Afin de limiter dans un premier temps la dimension de l'espace fonctionnel, on propose le choix suivant:

$$X(\theta) = \sum_{i=1}^{N} f_i(\theta) X_i$$

ce qui permet d'obtenir de nouvelles conditions:

$$\begin{array}{l} \forall \theta \in \mathcal{P}, \\ \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{N} (A(\theta)^T X_i + X_i A(\theta)) + \sum\limits_{i=1}^{r} \pm \Big(\nu_i \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i(\theta)}{\partial \theta_i} X_i \Big) < 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{N} f_i(\theta) X_i > 0 \end{array} \right. \end{array} \tag{3.33}$$

Il s'agit donc de vérifier $2^r + 1$ LMI en X_i, pour chaque valeur de θ. Afin de limiter dans un deuxième temps, le nombre d'inégalités, une idée naturelle consiste à quadriller l'espace d'évolution des paramètres:

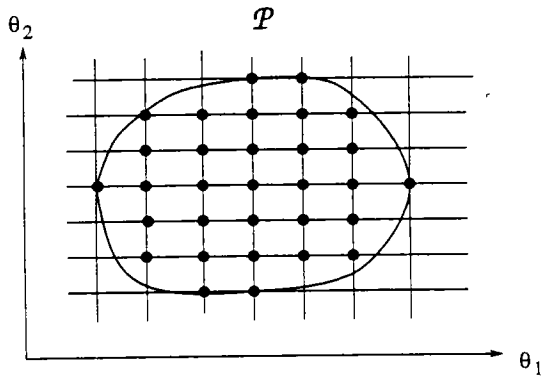


Figure 3.4: Quadrillage de $\mathcal{P}$ en dimension 2

On effectue ainsi un nombre fini de tests en chaque point du quadrillage. Une telle approche [14, 135], simple dans son principe, se veut extrêmement générale, puisque nous n'avons

formulé aucune hypothèse quant à la nature de la fonction $A(.)$. Toutefois, elle soulève un certain nombre de difficultés, en ce qui concerne tout d'abord le choix des fonctions $f_i(.)$, et ensuite, la finesse du quadrillage. Le lecteur trouvera des éléments de réponse dans [135]. Nous reviendrons également sur cette méthode dans la seconde partie de la thèse, où sera proposée - dans le cadre des techniques de synthèse - une étude comparative avec une approche fondée sur la notion de multi-convexité. C'est cette notion que nous abordons maintenant.

3.5.2 Multi-convexité

Contrairement à ce qui précède, on formulera ici une hypothèse quant à la nature de la dépendance paramétrique. Plus précisément, c'est le modèle affine qui nous servira de base. On considère donc la matrice $A(\theta)$ sous la forme:

$$A(\theta) = A_0 + \theta_1 A_1 + \ldots + \theta_r A_r$$

De même, on choisira $X(\theta)$ telle que:

$$X(\theta) = X_0 + \theta_1 X_1 + \ldots + \theta_r X_r$$

Finalement, on supposera que le domaine $\mathcal{P}$ est défini par un polytope dont l'ensemble des sommets sera repéré par le symbole $\mathcal{V}$.

On rappelle par ailleurs, que les dérivées des paramètres évoluent dans un hypercube dont les sommets constituent un ensemble noté $\mathcal{N}$.

Compte tenu de ces hypothèses, on pourra réécrire le critère de stabilité (3.31)sous la forme suivante:

$$\forall \theta \in \mathcal{P}, \quad |\dot{\theta}_i| \leq \nu_i$$
$$\begin{cases} L(\theta, \dot{\theta}) \;=\; (A_0 + \sum \theta_i A_i)^T (X_0 + \sum \theta_i X_i) + (X_0 + \sum \theta_i X_i)(A_0 + \sum \theta_i A_i) \\ \qquad\qquad + \underbrace{X_0 + \sum \dot{\theta}_i X_i}_{X(\dot{\theta}) - X_0} < 0 \\ X(\theta) > 0 \end{cases}$$

La deuxième inégalité étant linéaire par rapport à θ, il suffira de la tester sur $\mathcal{V}$, donc sur un nombre fini de points. Quant à la première, on peut la voir comme une fonction de deux paramètres indépendants, quadratique en θ, et linéaire en $\dot{\theta}$. Du fait de la dépendance quadratique, vérifier cette inégalité sur $\mathcal{V} \times \mathcal{N}$ ne suffit pas à garantir la négativité en

tout point. Par contre, on vérifie facilement que ce test devient suffisant dès lors que la fonction scalaire:

$$f(x) = x^T\Big((A_0 + \sum \theta_i A_i)^T (X_0 + \sum \theta_i X_i) + (X_0 + \sum \theta_i X_i)(A_0 + \sum \theta_i A_i)\Big)x$$

associée à la partie quadratique de l'inégalité est convexe par rapport à chaque θ_i. On parle alors de **multi-convexité** [45], laquelle s'exprime par:

$$\forall x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial {\theta_i}^2}(\theta) = x^T\Big(A_i^T X_i + X_i A_i\Big)x \geq 0\,, \quad i = 1, \ldots, r$$

D'où l'on déduit finalement le théorème [45]:

Théorème 3.6 Stabilité quadratique affine[15]. *Le système LPV décrit par:*

$$\dot{x} = (A_0 + \sum_{i=1}^{r} \theta_i(t) A_i)x\,, \quad x(0) = x_0$$

tel que,

$$\forall t \geq 0, \;\; \theta(t) \in Co(\mathcal{V})\,, \;\; \dot{\theta}(t) \in Co(\mathcal{N})$$

est exponentiellement stable si:

$$\begin{array}{rl} A(v)^T X(v) + X(v)A(v) + X(\nu) < X_0 & \forall (v,\nu) \in \mathcal{V} \times \mathcal{N} \\ X(v) > 0 & \forall v \in \mathcal{V} \\ A_i^T X_i + X_i A_i \geq 0 & \forall i = 1, \ldots, r \end{array} \tag{3.34}$$

□

Ce dernier résultat diffère du précédent à plusieurs niveaux. Notons tout d'abord que le recours au "quadrillage" du domaine $\mathcal{P}$ n'est plus nécessaire, puisque le nombre d'inégalités est maintenant **fini**. Il n'est plus nécessaire par ailleurs, d'introduire l'ensemble des fonctions $f_i(.)$ pour exprimer $X(\theta)$ dont la dépendance vis à vis des paramètres a été choisie analogue à celle du système, donc affine.

Il résulte de ces premières constatations une facilité considérablement accrue de mise en œuvre. En contrepartie, le critère est moins général puisqu'il repose sur le modèle affine. Il pourra également s'avérer plus conservatif, dans la mesure où il peut très bien exister des fonctions négatives en tout point qui ne soient pas multi-convexes pour autant.

[15] Ainsi nommé, pour reprendre la terminologie de [45], parce que la stabilité est prouvée à l'aide d'une fonction de Lyapunov quadratique, affine en θ

Nous reviendrons, dans la seconde partie, sur la comparaison des deux approches, à travers un exemple. Ce sera également l'occasion de montrer, comment, l'utilisation de fonctions de Lyapunov dépendant de paramètres, permet la prise en compte de diverses relations entre ces paramètres. En ce sens, le dernier critère, a priori réservé au cas de la dépendance affine, pourra être élargi à une classe plus large de systèmes LPV.

Conclusion

Après avoir introduit quelques considérations générales sur la stabilité des systèmes non stationnaires, qui nous auront permis de retracer un bref historique de l'évolution des méthodes, nous avons mis en évidence la nécessité et l'importance du choix d'un modèle.

Deux méthodes de construction, l'une pour le modèle polytopique, l'autre pour le modèle LFT ont ensuite été proposées. Dans chacun des cas, les problèmes liés à l'obtention d'un modèle minimal ont retenu toute notre attention.

Finalement, nous avons prolongé notre analyse autour des modèles obtenus, avec pour objectif prioritaire, d'obtenir des résultats numériquement exploitables.

Synthèse de Lois de Commande à Paramètres Variables

Introduction

La détermination de lois de commande pour les systèmes à paramètres variables constitue un problème auquel les ingénieurs automaticiens se trouvent confrontés depuis de nombreuses années. Une approche classique de résolution, fréquemment adoptée dans l'industrie est celle qui consiste à:

1. linéariser le système autour d'un ensemble représentatif de points de fonctionnement,
2. déterminer un correcteur pour chaque modèle linéaire obtenu à l'aide d'une méthode de synthèse LTI classique,
3. construire la loi de commande globale, par interpolation des paramètres des correcteurs locaux.

Les difficultés que pose une telle méthode sont nombreuses. En particulier, elle ne garantit pas la stabilité globale de la boucle fermée (non stationnaire). Ce point, que nous avons mis en évidence dès le premier chapitre[16] de la thèse, nécessite donc une analyse a posteriori [115, 116]. Par ailleurs, un savoir-faire éprouvé, associé à une bonne connaissance du système sont souvent indispensables à la mise en place d'une technique d'interpolation appropriée [63].

Une autre manière d'aborder le problème repose sur la théorie de la commande adaptative, qui grâce à une estimation en ligne des paramètres du système, permet la prise en compte des non-stationnarités. Cette approche peut s'avérer performante, mais hélas, peu robuste aux erreurs non identifiées de modèle (dynamiques négligées par exemple). Signalons à ce propos, que d'importants efforts de recherche sont consacrés depuis peu, au développement de nouvelles méthodes fondées sur la complémentarité des théories de la commande adaptative d'une part et de la commande robuste d'autre part [75].

[16] voir étude des systèmes variant lentement.

L'approche que nous proposons d'adopter dans cette seconde partie de la thèse s'appuie sur une modélisation LPV du système à commander:

$$G(\theta) \quad \begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)u \\ y = C(\theta)x + D(\theta)u \end{cases}$$

En ce sens, on pourra donc la rapprocher des méthodes classiques. Elle s'en démarque néanmoins par le fait essentiel que la loi de commande est directement recherchée sous la forme d'un **correcteur global, bâti sur le même modèle que le système**. Autrement dit, les équations du correcteur - que l'on appellera correcteur LPV - s'écriront sous la forme:

$$K(\theta) \quad \begin{cases} \dot{x}_K &= A_K(\theta)x_K &+ B_K(\theta)y \\ u &= C_K(\theta)x_K &+ D_K(\theta)y \end{cases}$$

et la structure de commande en boucle fermée pour être retenue sous la forme suivante:

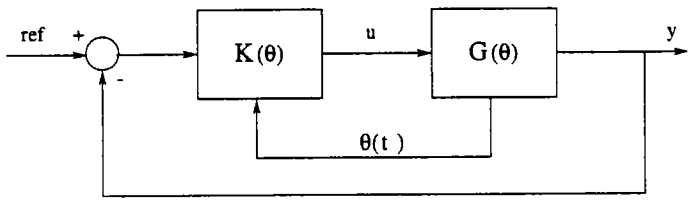


Figure 3.5: Structure de commande LPV

Autrement dit, les variations paramétriques du système supposées seront directement intégrées au niveau de la loi de commande dont la structure recopie celle du système. Un tel choix, justifié par la **mesurabilité** des paramètres, permettra de garantir stabilité et performances sur un domaine d'évolution paramétrique relativement large. On pourra notamment envisager la résolution de certains problèmes pour lesquels les diverses techniques de commande robuste, trop conservatives, n'apportent pas de réponse.

Contrairement aux techniques adaptatives, notre approche, de par la structure adoptée, permet d'éviter le recours, souvent délicat, au processus d'identification en ligne.

Les résultats de synthèse que nous présentons ici reposent très largement sur l'analyse du chapitre précédent. Nous retiendrons par conséquent le même formalisme, en cherchant à caractériser les solutions à l'aide d'inégalités matricielles linéaires.

Les chapitres 4 et 5 s'inscrivent dans le cadre d'une approche quadratique classique [7, 21, 98, 15]. Nous considérons successivement le cas du modèle polytopique puis du modèle LFT. A ce niveau, nous proposons une méthode de synthèse LPV robuste [20, 52].

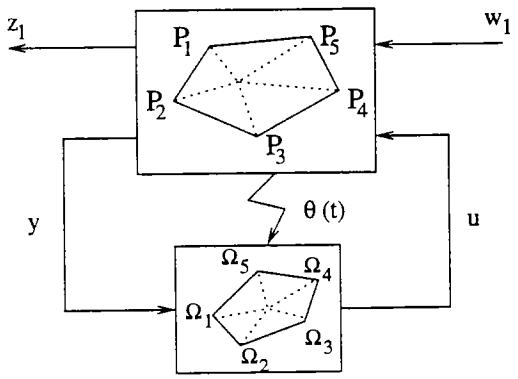
Le chapitre 6 est consacré, dans l'hypothèse d'une modélisation affine, au développement de méthodes adaptées au contrôle des systèmes variant lentement. On utilisera pour cela une analyse fondée sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres.

Chapitre 4

Correcteurs polytopiques

4.1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre, à la synthèse de lois de commande pour les systèmes LPV décrits par un polytope (voir chapitre 2). Profitant, comme annoncé, de la mesurabilité des paramètres, nous choisirons, sans restriction aucune, pour les correcteurs une structure polytopique, analogue à celle du système.



$$P(\theta) = \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i(\theta)\, P_i$$

$$\Omega(\theta) = \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i(\theta)\, \Omega_i$$

$$\theta = \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i(\theta)\, \theta_i\,, \quad \alpha_i(\theta) \geq 0\,, \quad \sum_{i=1}^{i=N} \alpha_i(\theta) = 1$$

Figure 4.1: Systèmes polytopiques en boucle fermée

Les sommets P_i et Ω_i du système $P(\theta)$ et du correcteur $\Omega(\theta)$ sont respectivement décrits par les matrices suivantes qui correspondent aux éléments de leurs représentations

d'état:

$$P_i = \begin{array}{c} \\ n \updownarrow \\ p_1 \updownarrow \\ p_2 \updownarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} n & m_1 & m_2 \\ \leftrightarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_i & B_{1i} & B_2 \\ C_{1i} & D_{11i} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{4.1}$$

et:

$$\Omega_i = \begin{array}{c} \\ n_k \updownarrow \\ m_2 \updownarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_k & p_2 \\ \leftrightarrow & \leftrightarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{K_i} & B_{K_i} \\ C_{K_i} & D_{K_i} \end{pmatrix} \end{array} \tag{4.2}$$

On notera, comme en formulation $\mathcal{H}_\infty$, par un indice 1 les éléments relatifs au signal de performances, et par un indice 2, les éléments qui se rattachent aux signaux de mesures et de commandes.

Les matrices B_2, C_2, D_{12} et D_{21} sont volontairement choisies **constantes** (indépendantes du paramètre $\theta(t)$) afin que le système LPV en boucle fermée, comme nous allons le voir, admette également un modèle polytopique. Par ailleurs, pour simplifier les expressions, nous supposerons qu'il n'y a pas de transmission directe ($D_{22} = 0$). Cela n'est pas vraiment gênant, puisqu'il est toujours possible de se ramener au cas général par transformation du correcteur.

Déterminons à présent, la représentation d'état du système P_i rebouclé par le correcteur Ω_i. On obtient facilement, compte tenu des hypothèses (les matrices correspondent aux représentations d'état):

$$S_{cl_i} = \begin{pmatrix} A_{cl_i} & B_{cl_i} \\ C_{cl_i} & D_{cl_i} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

avec

$$\begin{aligned} A_{cl_i} &= \begin{pmatrix} A_i + B_2 D_{K_i} C_2 & B_2 C_{K_i} \\ B_{K_i} C_2 & A_{K_i} \end{pmatrix} \qquad B_{cl_i} = \begin{pmatrix} B_{1i} + B_2 D_{K_i} D_{21} \\ B_{K_i} D_{21} \end{pmatrix} \\ C_{cl_i} &= \begin{pmatrix} C_{1i} + D_{12} D_{K_i} D_{21} & D_{12} C_{K_i} \end{pmatrix} \quad D_{cl_i} = D_{11i} + D_{12} D_{K_i} D_{21} \end{aligned} \tag{4.4}$$

ce que l'on peut encore écrire sous la forme suivante:

$$S_{cl_i} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_i & \mathcal{B}_{1i} \\ \mathcal{C}_{1i} & D_{11i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{B}_2 \\ \mathcal{D}_{12} \end{pmatrix} \Omega_i \begin{pmatrix} \mathcal{C}_2 & \mathcal{D}_{21} \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

où

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_i = \begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{B}_{1i} = \begin{pmatrix} B_{1i} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ I_{n_k} & 0 \end{pmatrix} \\ &\mathcal{C}_{1i} = \begin{pmatrix} C_{1i} & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{D}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & D_{12} \end{pmatrix} \\ &\mathcal{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & I_{n_k} \\ C_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{D}_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ D_{21} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Notons qu'en posant:

$$\mathcal{P}_i = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_i & \mathcal{B}_{1i} & \mathcal{B}_2 \\ \mathcal{C}_{1i} & \mathcal{D}_{11i} & \mathcal{D}_{12} \\ \mathcal{C}_2 & \mathcal{D}_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

on obtient finalement S_{cl_i} sous la forme suivante:

$$S_{cl_i} = \mathcal{F}_l(\mathcal{P}_i, \Omega_i) \tag{4.7}$$

L'expression (4.5) est intéressante car elle met clairement en évidence la linéarité de la boucle fermée par rapport aux données du correcteur. Plus précisément, si on s'intéresse à une expression de la boucle fermée en un point quelconque du domaine d'évolution paramétrique, il vient:

$$S_{cl}(\theta) = \mathcal{F}_l\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i(\theta)\mathcal{P}_i\,,\ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(\theta)\Omega_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(\theta)\mathcal{F}_l(\mathcal{P}_i, \Omega_i) \tag{4.8}$$

On en conclut, comme prévu, que le système en boucle fermée (voir figure 4.2) est bien décrit par un modèle polytopique formé des N sommets S_{cl_i} auquel nous allons maintenant pouvoir appliquer les résultats d'analyse développés au chapitre 3.

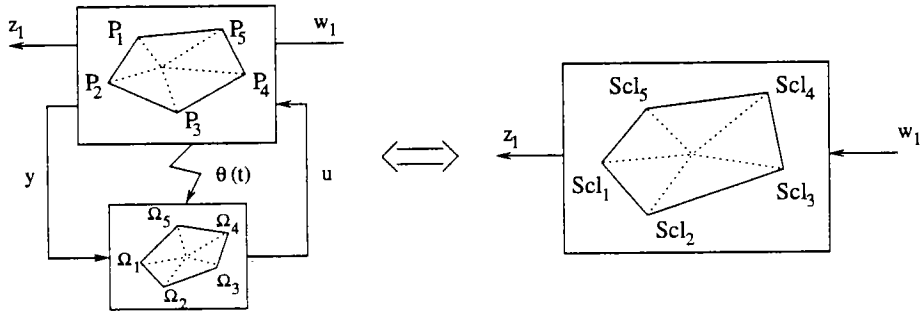


Figure 4.2: La boucle fermée est encore un polytope

4.2 Critère de type $\mathcal{H}_\infty$

Nous considérons en premier lieu, la caractérisation d'un correcteur polytopique tel que le système en boucle fermée $S_{cl}(\theta)$, que nous venons de décrire, vérifie les contraintes de performance quadratique $\mathcal{H}_\infty$ décrites au chapitre 3, par le théorème 3.1. La méthode que

nous exposons maintenant sera appliquée au pilotage en incidence d'un missile sur un très large domaine de vol (voir chapitre 7).

D'après l'inégalité (3.9) et les notations qui précèdent, un tel correcteur existe si et seulement si on peut déterminer une matrice X, définie positive, et un ensemble de matrices quelconques $\Omega_i \in \mathbb{R}^{(n_k+m_2)\times(n_k+p_2)}$ telles que:

$$\Psi_i(X,\Omega_i) = \begin{pmatrix} A_{cl_i}^T X + X A_{cl_i} & X B_{cl_i} & C_{cl_i}^T \\ B_{cl_i}^T X & -\gamma I & D_{cl_i}^T \\ C_{cl_i} & D_{cl_i} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0\,, \quad i = 1,\ldots,N \tag{4.9}$$

On remarquera que ces N inégalités sont bilinéaires par rapport aux variables X et Ω_i. Sous cette forme, le problème d'optimisation associé n'est donc pas convexe. La première approche que nous proposons afin de restaurer la convexité repose sur une élimination des variables Ω_i, liées au correcteur. Cette technique, présentée en annexe B (lemme de projection) , est ici relativement simple à mettre en œuvre, puisque, en posant:

$$P = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_2^T & 0 & \mathcal{D}_{12}^T \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_2 & \mathcal{D}_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

les inégalités (4.9) deviennent d'après (4.5):

$$\Psi_i(X,0) + \left(P \begin{pmatrix} X & & \\ & I & \\ & & I \end{pmatrix}\right)^T \Omega_i Q + Q^T \Omega_i^T \underbrace{\left(P \begin{pmatrix} X & & \\ & I & \\ & & I \end{pmatrix}\right)}_{P_X} < 0\,, \quad i = 1,\ldots,N \tag{4.10}$$

Introduisons maintenant les noyaux respectifs des matrices P_X et Q, respectivement notés $\mathcal{N}_{P_X}$ et $\mathcal{N}_Q$. D'après le lemme de projection, les inégalités (4.10) sont équivalentes à:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{P_X}^T \Psi_i(X,0) \mathcal{N}_{P_X} < 0\,, \quad i = 1,\ldots,N \\ \mathcal{N}_Q^T \Psi_i(X,0) \mathcal{N}_Q < 0\,, \quad i = 1,\ldots,N \end{aligned}$$

En remarquant que:

$$\mathcal{N}_{P_X} = \text{blocdiag}\big(X^{-1}\ I\ I\big)\mathcal{N}_P \quad \text{avec} \quad \mathcal{N}_P = \text{Ker}(P)$$

on obtient, après un rapide calcul:

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}_P^T \left(\begin{array}{c|cc} X^{-1}\mathcal{A}_i^T + \mathcal{A}_i X^{-1} & \mathcal{B}_{1i} & X^{-1}\mathcal{C}_{1i}^T \\ \hline \mathcal{B}_{1i}^T & -\gamma I & D_{11i}^T \\ \mathcal{C}_{1i} X^{-1} & D_{11i} & -\gamma I \end{array}\right) \mathcal{N}_P < 0\,, \quad i = 1,\ldots,N \\ &\mathcal{N}_Q^T \left(\begin{array}{c|cc} \mathcal{A}_i^T X + X \mathcal{A}_i & X\mathcal{B}_{1i} & \mathcal{C}_{1i}^T \\ \hline \mathcal{B}_{1i}^T X & -\gamma I & D_{11i}^T \\ \mathcal{C}_{1i}^T & D_{11i} & -\gamma I \end{array}\right) \mathcal{N}_Q < 0\,, \quad i = 1,\ldots,N \end{aligned} \tag{4.11}$$

où les noyaux $\mathcal{N}_P$ et $\mathcal{N}_Q$ sont de la forme:

$$\mathcal{N}_P = \left(\begin{array}{cc} N_{R_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & I \\ N_{R_2} & 0 \end{array}\right), \quad \mathcal{N}_Q = \left(\begin{array}{cc} N_{S_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline N_{S_2} & 0 \\ 0 & I \end{array}\right)$$

avec

$$\mathcal{N}_R = \begin{pmatrix} N_{R_1} \\ N_{R_2} \end{pmatrix} = Ker\,(\,B_2^T \quad D_{12}^T\,)$$

et

$$\mathcal{N}_S = \begin{pmatrix} N_{S_1} \\ N_{S_2} \end{pmatrix} = Ker\,(\,C_2 \quad D_{21}\,)$$

De par la position des blocs de zéros sur chacun des noyaux, on pourra obtenir une simplification particulièrement intéressante des inégalités (4.11). En effet, si l'on introduit pour X et X^{-1}, les partitions suivantes:

$$X = \begin{pmatrix} S & N \\ N^T & F \end{pmatrix} > 0 \quad \text{et} \quad X^{-1} = \begin{pmatrix} R & M \\ M^T & E \end{pmatrix} > 0 \tag{4.12}$$

on obtient, après calculs et suppression des lignes et colonnes en regard des zéros de $\mathcal{N}_P$ et $\mathcal{N}_Q$ deux nouvelles séries d'inégalités où seules subsistent les matrices R et S:

$$\begin{array}{l} \mathcal{N}_R^T \begin{pmatrix} A_iR + RA_i^T & B_{1i} & RC_{1i}^T \\ B_{1i}^T & -\gamma I & D_{11i}^T \\ C_{1i}R & D_{11i} & -\gamma I \end{pmatrix} \mathcal{N}_R < 0\,, \quad i = 1, \ldots, N \\ \mathcal{N}_S^T \begin{pmatrix} A_i^TS + SA_i & SB_{1i} & C_{1i}^T \\ B_{1i}^TS & -\gamma I & D_{11i}^T \\ C_{1i} & D_{11i} & -\gamma I \end{pmatrix} \mathcal{N}_S < 0\,, \quad i = 1, \ldots, N \end{array} \tag{4.13}$$

Remarquons pour conclure que le choix des matrices R et S pour être en accord avec les relations (4.12) devra simplement être effectué de manière à satisfaire les contraintes convexes suivantes [44]:

$$R > 0\,, \quad S > 0\,, \quad \lambda_{min}(RS) \geq 1 \tag{4.14}$$

Par ailleurs, les inégalités matricielles (4.13) étant linéaires par rapport aux nouvelles variables R et S, il en résulte une caractérisation entièrement convexe des correcteurs recherchés. Nous résumons cela par un théorème [21, 5]:

Théorème 4.1 Correcteurs polytopiques de type $\mathcal{H}_\infty$

Etant donné un système de la forme (4.1), il existe un correcteur polytopique (4.2), tel que la performance quadratique $\mathcal{H}_\infty$ du système LPV en boucle fermée, reste bornée par γ si et seulement s'il existe un couple (R, S) de matrices symétriques vérifiant (4.13) et (4.14).

□

La mise en œuvre sur le logiciel $LMI - Lab$ est immédiate. A la condition portant sur le rayon spectral de la matrice RS, on substituera l'inégalité matricielle équivalente (voir annexe A):

$$\begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix} \geq 0 \tag{4.15}$$

qui, par l'algorithme d'optimisation sera considérée comme une inégalité stricte. Cette même LMI garantira ainsi la positivité stricte des matrices R et S qui constituent sa diagonale.

A l'optimum, on pourra observer une perte de rang de la matrice $I - RS$ (saturation de l'inégalité (4.15)):

$$rang(I - RS) = n_r \leq n$$

Dans ce cas, on montre [44] que l'ordre du correcteur, dont nous allons maintenant détailler la reconstruction, peut être réduit à $n_k = n_r$.

Reconstruction du correcteur

La détermination des variables Ω_i du correcteur, à partir de R et S est relativement rapide. On distinguera deux étapes.

- **Calcul de X:**
  - Décomposer $I - RS$ en valeurs singulières pour obtenir les matrices M et N telles que:
  $$I - RS = U\Sigma V^T = \left(U\Sigma^{\frac{1}{2}}\right)\left(V\Sigma^{\frac{1}{2}}\right)^T = MN^T$$
  - On montre alors que X peut être déterminée comme l'unique solution du système linéaire [44]:
  $$\begin{pmatrix} I & 0 \\ R & M \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} S & N \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

- **Calcul des Ω_i:** Connaissant maintenant X, il ne reste plus qu'à résoudre les N inégalités indépendantes:

$$\Psi_i(X,0) + (PX)^T\Omega_i Q + Q^T\Omega_i PX < 0\,, \quad i = 1,\ldots,N \tag{4.17}$$

A moins d'imposer des contraintes supplémentaires sur les données du correcteur (portant sur la norme des matrices Ω_i par exemple[1]), on pourra envisager une résolution algébrique, donc rapide des inégalités (4.17) (voir annexe A)

Amélioration numérique du codage des LMI: Le conditionnement[2] des matrices R et S, obtenues après optimisation est généralement élevé, ce qui rend souvent délicat le calcul de X. Dans ce cas, il est préférable de manipuler directement les matrices R, S, M et N. En multipliant l'inégalité (4.17) à gauche et à droite, respectivement par les matrices T et T^T:

$$T = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ R & M \end{pmatrix}, I, I\right)$$

il vient immédiatement, une nouvelle inégalité qui, d'après (4.16), s'exprimera en fonction de R, S, M et N. Ainsi, la détermination explicite de X n'est pas nécessaire au calcul du correcteur.

Variante: Utilisation du changement de variables

Le recours au changement de variables permettra d'éviter la phase de reconstruction qui précède. On commencera pour adopter les notations standards (annexe B), par transformer l'inégalité (4.18) du lemme borné-réel, que l'on exprime ici par rapport à $Y = X^{-1}$:

$$\tilde{\Psi}_i(Y,\Omega_i) = \begin{pmatrix} A_{cl_i}Y + YA_{cl_i}^T & B_{cl_i} & YC_{cl_i}^T \\ B_{cl_i}^T & -\gamma I & D_{cl_i}^T \\ C_{cl_i}Y & D_{cl_i} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0\,, \quad i = 1,\ldots,N \tag{4.18}$$

Une telle expression est obtenue de manière tout à fait classique en multipliant à gauche les premières lignes de $\Psi(X,\Omega_i)$ par Y^T $(= Y)$ et à droite les premières colonnes par Y.

De même que nous l'avons fait précédemment, nous partitionnerons les matrices Y et Y^{-1} en quatre blocs:

$$Y = \begin{pmatrix} R & M \\ M^T & E \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y^{-1} = \begin{pmatrix} S & N \\ N^T & F \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

[1] C'est un moyen entre autres, d'empêcher l'apparition de dynamiques excessivement rapides au niveau de la loi de commande. Des contraintes trop fortes cependant peuvent conduire à l'absence de solution.

[2] Pour les matrices strictement positives, il s'agit simplement du rapport de la plus grande valeur propre sur la plus petite.

Nous supposerons en outre les matrices M et N carrées (appartenant donc à $\mathbb{R}^{n\times n}$) et inversibles (voir annexe B pour la justification de ces hypothèses - voir également [30]). Il s'en suit que le correcteur obtenu sera du même ordre que le système, ce qui facilitera, après optimisation, le retour aux variables initiales.

On obtient donc, compte tenu de la remarque qui a été faite sur l'inversibilité de la matrice N:

$$Y = \begin{pmatrix} R & I \\ M^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & S \\ 0 & N^T \end{pmatrix}^{-1} = Y_1 Y_2^{-1}$$

avec:

$$I - RS = MN^T$$

et on remarquera facilement d'après la section 4.2 que:

$$Y > 0 \iff \begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix} > 0 \tag{4.20}$$

Finalement, en posant:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{K_i} = S(A_i + B_2 D_{K_i} C_2)R + NB_{K_i} C_2 R + SB_2 C_{K_i} M^T + NA_{K_i} M^T \\ \mathcal{B}_{K_i} = SB_2 D_{K_i} + NB_{K_i} \\ \mathcal{C}_{K_i} = D_{K_i} C_2 R + C_{K_i} M^T \end{cases} \tag{4.21}$$

et

$$T = \mathrm{diag}(Y_2\,,\, I\,,\, I) \tag{4.22}$$

il vient:

$$T^T\, \tilde{\Psi}_i(Y, \Omega_i)\, T = \begin{pmatrix} A_i R + B_2 \mathcal{C}_{K_i} + sym & \star & \star & \star \\ \mathcal{A}_{K_i} + (B_2 D_{K_i} C_2)^T & SA + \mathcal{B}_{K_i} + sym & \star & \star \\ B_{1i}^T + (B_2 D_{K_i} D_{21})^T & B_{1i}^T S + D_{21}^T \mathcal{B}_{K_i}^T & -\gamma I & \star \\ C_{1i} R + D_{12} \mathcal{C}_{K_i} & C_{1i} + D_{12} D_{K_i} D_{21} & D_{11i} + D_{12} D_{K_i} D_{21} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \tag{4.23}$$

Cette dernière expression est linéaire par rapport aux variables R, S, $\mathcal{A}_{K_i}$, $\mathcal{B}_{K_i}$, $\mathcal{C}_{K_i}$ et D_{K_i}. D'après (4.20), il en va de même de la contrainte de positivité sur Y. On obtient donc là encore, une caractérisation convexe du correcteur, entièrement formulée par inégalités matricielles linéaires. Après optimisation, les variables A_{K_i}, B_{K_i} et C_{K_i} seront obtenues par résolution du système (4.21) (voir annexe B).

Remarque: Nous reviendrons souvent par la suite sur cette dernière approche qui offrent certains avantages par rapport à la précédente. Toutefois, il convient de signaler un inconvénient majeur, en ce qui concerne le nombre de variables qu'elle fait intervenir. Le tableau ci-après souligne en effet l'écart important qui existe à ce niveau, entre les deux méthodes:

	Projection (section 4.2)	Changement de Variables
R	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n+1)}{2}$
S	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n+1)}{2}$
γ	1	1
$\mathcal{A}_{K_i}$		n^2
$\mathcal{B}_{K_i}$		$n \times p_2$
$\mathcal{C}_{K_i}$		$m_2 \times n$
$\mathcal{D}_{K_i}$		$m_2 \times p_2$
Total	$1 + n(n+1)$	$1 + n(n+1) + (n+p_2)(n+m_2)N$

Un attrait particulier de la première approche réside dans le fait que le nombre de variables est indépendant du nombre de sommets du polytope. Chaque fois que cela sera possible, il conviendra donc de privilégier l'utilisation du lemme de projection. La deuxième approche deviendra hélas, rapidement inutilisable. Prenons par exemple un système très simple, décrit par quatre sommets, d'ordre 10, avec 2 mesures et 2 commandes. Dans le premier cas, on comptera 111 variables contre 687 dans le second!

4.3 Critère de type $\mathcal{H}_2$

Nous abordons maintenant un problème en apparence similaire à celui qui précède, où la question posée est celle de la détermination de correcteurs minimisant cette fois un critère de performance quadratique $\mathcal{H}_2$. De par l'interprétation stochastique que l'on attribue généralement à la norme $\mathcal{H}_2$ dans le cadre des systèmes LTI, la résolution du problème considéré comporte un réel intérêt pour certaines applications. C'est le cas notamment de celle que nous développons au chapitre 8, où il s'agit de maintenir un sous-marin en immersion constante, sous l'influence des variations de vitesse et malgré la houle (modélisée par un bruit blanc filtré).

Nous évoquions quelques lignes plus haut, la similitude seulement apparente entre ce nouveau problème et le précédent. Il y a en effet une difficulté supplémentaire ici, liée à

la nullité nécessaire de la transmission directe en boucle fermée:

$$D_{cl_i} = D_{11i} + D_{12} D_{K_i} D_{21} = 0\,, \quad i = 1, \ldots, N \tag{4.24}$$

Pour cela, nous ferons une première hypothèse tout à fait classique en optimisation $\mathcal{H}_2$ (pour une discussion détaillée sur les hypothèses de résolution du problème $\mathcal{H}_2$, voir [120, 107]):

$$\forall i \quad D_{11i} = 0$$

Puis, nous allons restreindre la recherche à la classe des correcteurs polytopiques strictement propres, ce que l'on traduit par:

$$\forall i\,, \quad D_{K_i} = 0$$

Autrement dit, cela revient à imposer une contrainte structurelle sur les matrices Ω_i dont le choix ne peut plus être arbitraire sur $\mathbb{R}^{(n+m_2)\times(n+p_2)}$. C'est la première raison pour laquelle on ne pourra pas utiliser le lemme de projection. La seconde est liée au fait qu'il nous est impossible ici d'écrire les deux séries d'inégalités sous la forme (4.10). Le problème de minimisation, sous contraintes LMI que nous voulons résoudre, d'après (3.10), est en effet le suivant:

$$\min\ trace(P)\ /\ \begin{cases} \begin{pmatrix} A_{cl_i}^T X + X A_{cl_i} & C_{cl_i}^T \\ C_{cl_i} & -I \end{pmatrix} < 0\,, \quad i = 1, \ldots, N \\ \begin{pmatrix} P & B_{cl_i}^T X \\ X B_{cl_i} & X \end{pmatrix} > 0\,, \quad i = 1, \ldots, N \\ X > 0 \end{cases} \tag{4.25}$$

Compte tenu des remarques qui précèdent, nous opterons pour une méthode de changement de variables, et commencerons dans cette optique, par transformer les inégalités précédentes, pour obtenir la formulation équivalente:

$$\min\ trace(P)\ /\ \begin{cases} \begin{pmatrix} A_{cl_i} Y + Y A_{cl_i}^T & Y C_{cl_i}^T \\ C_{cl_i} Y & -I \end{pmatrix} < 0\,, \quad i = 1, \ldots, N \\ \begin{pmatrix} P & B_{cl_i}^T \\ B_{cl_i} & Y \end{pmatrix} > 0\,, \quad i = 1, \ldots, N \\ Y > 0 \end{cases} \tag{4.26}$$

On partitionne ensuite Y et Y^{-1} comme indiqué par la relation (4.19) puis on effectue le changement de variables légèrement simplifié ici, de par l'absence de transmission directe:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{K_i} = SA_iR + NB_{K_i}C_2R + SB_2C_{K_i}M^T + NA_{K_i}M^T \\ \mathcal{B}_{K_i} = NB_{K_i} \\ \mathcal{C}_{K_i} = C_{K_i}M^T \end{cases} \tag{4.27}$$

Après calculs on obtient la caractérisation convexe qui suit:

Théorème 4.2 Correcteurs polytopiques de type $\mathcal{H}_2$

Etant donné un système de la forme (4.1), tel que:

$$\forall i, \quad D_{11i} = 0$$

il existe un correcteur polytopique (4.2) strictement propre, de même ordre que le système tel que la performance quadratique $\mathcal{H}_2$ de la boucle fermée, reste bornée par $\gamma^{\frac{1}{2}}$ s'il existe un ensemble de matrices sysmétriques $\{R, S, P\}$ et un ensemble de matrices queclonques $\{\mathcal{A}_{K_i}, \mathcal{B}_{K_i}, \mathcal{C}_{K_i}\}_{\{i=1\ldots N\}}$ vérifiant:

$$\begin{array}{rcll} trace(P) & < & \gamma & \\ \begin{pmatrix} A_iR + B_2\mathcal{C}_{K_i} + sym & \star & \star \\ \mathcal{A}_{K_i} & SA_i + \mathcal{B}_{K_i}C_2 + sym & \star \\ C_{1i}R + D_{12}\mathcal{C}_{K_i} & C_{1i} & -I \end{pmatrix} & < & 0 & i = 1, \ldots, N \\ \begin{pmatrix} P & \star & \star \\ B_{1i} & R & \star \\ SB_{1i} + \mathcal{B}_{K_i}D_{21} & I & S \end{pmatrix} & > & 0 & i = 1, \ldots, N \end{array} \tag{4.28}$$

□

Malgré l'absence de transmission directe au niveau du correcteur, la caractérisation qui précède met en jeu un nombre relativement élevé de variables:

$$N_{var} = n(n+1) + \frac{p_1(p_1+1)}{2} + (n^2 + nm_2 + np_2)N$$

ce qui peut limiter l'applicabilité de la méthode.

C'est pour cette raison que nous nous proposons maintenant d'étudier le cas particulier où D_{21} est nul. Cette hypothèse n'est pas véritablement restrictive dans la pratique car on pourra toujours s'y ramener en plaçant un filtre strictement propre sur le bruit de mesures. Le choix d'une fréquence de coupure suffisamment élevée évitera toute incidence notable sur la modélisation initiale.

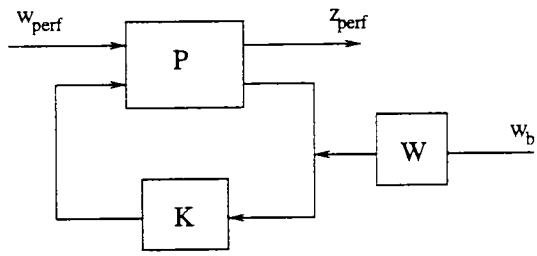


Figure 4.3: Filtrage du bruit blanc

De cette hypothèse, il résulte par ailleurs deux conséquences sur le plan numérique:

- La nullité de la transmission directe en boucle fermée est garantie, indépendamment du choix des matrices D_{K_i}. On pourra donc revenir à un traitement global des éléments du correcteur, à l'aide des matrices Ω_i.
- Les matrices B_{cl_i} admettent une expression simplifiée, indépendante de la loi de commande:

$$B_{cl_i} = \begin{pmatrix} B_{1i} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Celles-ci sont particulièrement intéressantes, puisqu'elles vont nous permettre de reformuler le problème (4.25) de telle sorte qu'on pourra envisager sa résolution en appliquant le lemme de projection. En effet, avec les notations introduites au début du chapitre, et en adoptant pour X et X^{-1} les partitions habituelles (4.12), le problème peut être réécrit sous la forme:

$$\min \; trace(P) \;\; / \;\; \begin{cases} \begin{pmatrix} (\mathcal{A}_i + \mathcal{B}_2\Omega_i\mathcal{C}_2)^T X + sym & \star \\ C_{1i} + \mathcal{C}_2\Omega_i\mathcal{D}_{21} & -I \end{pmatrix} < 0\,, \quad i = 1, \ldots, N \\ \begin{pmatrix} P & B_{1i}^T S \\ SB_{1i} & S \end{pmatrix} > 0\,, \quad i = 1, \ldots, N \\ X > 0 \end{cases} \tag{4.29}$$

On remarquera que la seconde inégalité ne dépend pas des variables Ω_i et, qui plus est, d'une partie seulement de X, puisqu'on aura pu, en raison de la structure particulière des matrices B_{cl_i}, l'exprimer directement en fonction de S. Cette inégalité est donc déjà sous sa forme finale. Notons ensuite que les inégalités en X et Ω_i ont la forme adéquate en vue de l'application du lemme de projection. Des calculs similaires à ceux que nous avons détaillés dans le cadre de l'approche de type $\mathcal{H}_\infty$ conduisent finalement à l'énoncé du théorème suivant [19]:

Théorème 4.3 Cas particulier de synthèse de type $\mathcal{H}_2$

Etant donné un système de la forme (4.1), tel que:

$$\forall i, \quad D_{11i} = 0 \text{ et } D_{21i} = 0$$

il existe un correcteur polytopique (4.2) tel que la performance quadratique $\mathcal{H}_2$ de la boucle fermée, reste bornée par γ s'il existe des matrices symétriques (de dimensions appropriées) R, S et P telles que soient vérifiées les LMI suivantes:

$$\begin{array}{rcll} trace(P) & < & \gamma & \\ \mathcal{N}_R^T \begin{pmatrix} A_iR + RA_i^T & RC_{1i}^T \\ C_{1i}R & -I \end{pmatrix} \mathcal{N}_R & < & 0 & i = 1, \ldots, N \\ \mathcal{N}_S^T \begin{pmatrix} A_i^TS + SA_i & C_{1i}^T \\ C_{1i} & -I \end{pmatrix} \mathcal{N}_S & < & 0 & i = 1, \ldots, N \\ \begin{pmatrix} P & B_{1i}^TS \\ SB_{1i} & S \end{pmatrix} & > & 0 & i = 1, \ldots, N \\ \lambda_{min}(RS) & \geq & 1 & \end{array} \tag{4.30}$$

avec

$$\begin{array}{l} \mathcal{N}_R = Ker(B_2^T \;\; D_{12}^T) \\ \mathcal{N}_S = Ker(C_2 \;\; 0) \end{array} \tag{4.31}$$

□

Ici, le nombre de variables se trouve nettement diminué (et indépendant du nombre de sommets N):

$$N_{var} = n(n+1) + \frac{p_1(p_1+1)}{2}$$

puisque celles du correcteur ont disparu. Il faudra par contre, après optimisation des variables R et S, envisager la reconstruction de ce dernier. Pour cela, nous renvoyons le lecteur à la section précédente. La démarche est en effet identique.

Nous aurons l'occasion de revenir sur la résolution de ce type de problème au chapitre 8, dans le cadre de l'application déjà mentionnée, à la tenue en immersion d'un sous-marin. Nous invitons par ailleurs le lecteur à consulter [133] où est présentée une approche inspirée de la méthode LQG. Le correcteur LPV est donc recherché avec une structure classique de type "observateur + retour d'état". Néanmoins, cette approche, contrairement à celles que nous avons présentées ici n'est pas convexe.

4.4 Synthèses multi-objectifs

Les problèmes de synthèse multi-objectifs ont fait l'objet d'investigations, pour la plupart récentes, principalement dans le cadre des systèmes LTI [66, 62, 143]. Nous montrons ici qu'il est très simple de généraliser de tels résultats à la classe des systèmes LPV. Pour cela, nous mettrons en œuvre la technique déjà utilisée à plusieurs reprises, du changement de variables. En effet, dès l'instant où plusieurs critères doivent être optimisés simultanément, il faut s'attendre à ce qu'apparaissent plusieurs séries d'inégalités. La méthode de projection devient par conséquent inutilisable.

Au chapitre 3, nous avons introduit trois mesures de performances. Trois types de critères mixtes pourraient donc être envisagés ici en synthèse:

- Critère de type $\mathcal{H}_\infty$ / placement de pôles
- Critère de type $\mathcal{H}_\infty$ / $\mathcal{H}_2$
- Critère de type $\mathcal{H}_2$ / placement de pôles

Nous détaillerons uniquement le premier, qui nous permettra notamment d'aborder le problème du placement de pôles. Nous évoquerons rapidement le second, eu égard à sa notoriété! Nous laissons enfin au lecteur le soin de déduire le troisième par intersection des deux premiers, en signalant par ailleurs que l'intérêt pratique qu'il représente est moindre.

4.4.1 Critère de type $\mathcal{H}_\infty$ et placement de pôles

Placer les pôles d'un système en boucle fermée est un problème relativement classique, abondamment traité dans la littérature, dans le cas stationnaire. C'est également un problème qui suscite un certain intérêt parmi les industriels, puisque la localisation des pôles permet immédiatement de déduire des informations assez riches sur le système[3] (temps de réponse, amortissement). De plus, ces techniques, dites de placement de structures propres, permettent d'adjoindre aux contraintes initiales de localisation des pôles, des spécifications également appréciées dans l'industrie, de découplage.

La généralisation de ces techniques - fondées sur un calcul de noyaux - au cas des systèmes à paramètres variables[4] est rendue difficile par l'absence de caractérisation convexe.

[3] toujours supposé linéaire stationnaire.

[4] indépendamment des difficultés inhérentes à l'interprétation de la notion de pôle dans ce cas - voir chapitre 3.

En revanche, nous soulignons en annexe D, l'existence d'un critère convexe de localisation des pôles dans un disque ou un secteur. De par la forme de ce critère, nous pourrions facilement mettre en place une technique de synthèse LPV assurant la stabilité quadratique en boucle fermée et le placement des pôles pour toutes valeurs figées des paramètres. Cependant, les spécifications de découplage ne sont plus prises en compte. Pour pallier ce manque, tout en préservant la convexité, nous proposons une approche fondée sur l'optimisation d'un critère mixte $\mathcal{H}_\infty$ / placement de pôles. On associera alors la qualité du découplage[5] obtenu à la valeur de γ (voir figure 4.4).

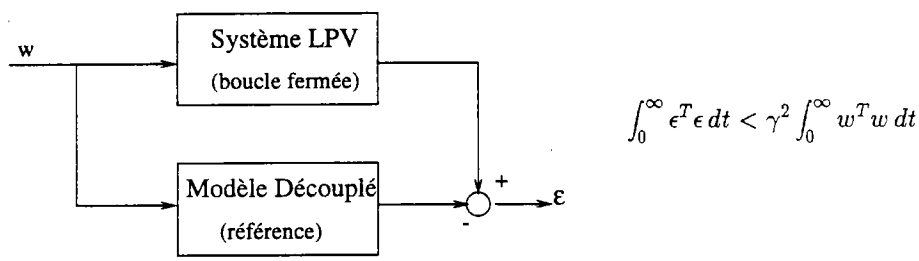


Figure 4.4: Utilisation du critère de type $\mathcal{H}_\infty$ pour le découplage

On pourra également justifier d'un autre point de vue le critère mixte considéré ici. Ce point de vue est celui du correcteur, dont il devient possible, grâce au placement de pôles [30], de spécifier indirectement la dynamique, pour chaque valeur figée de θ.

En vue de simplifier la présentation des résultats, nous nous intéresserons à la localisation des pôles dans un disque de centre c, et de rayon r. La localisation dans un secteur pourra en être immédiatement déduite d'après la caractérisation détaillée en annexe D.

En adaptant un résultat présenté au chapitre 3, sur la localisation dans un disque, on obtient la condition suivante:

$$\begin{pmatrix} -rY & A_{cl_i}Y - cY \\ YA_{cl_i}^T - cY & -rY \end{pmatrix} < 0\,, \quad i = 1, \ldots, N \tag{4.32}$$

que nous associerons donc aux inégalités de la forme (4.18) en vue de traduire la contrainte de type $\mathcal{H}_\infty$. Notons que la matrice Y qui apparaît dans (4.18) est a priori indépendante de la précédente (associée au placement de pôles), ce qui pose une petite difficulté au niveau de l'application de la méthode de changement de variables. En dépit du conservatisme que cela risque d'introduire [30], on supposera donc ces deux fonctions identiques. On obtient ainsi, après un désormais classique changement de variables, le théorème suivant:

[5] que l'on exprimera en terme de réjection de perturbations.

Théorème 4.4 Synthèse mixte de $\mathcal{H}_\infty$ / placement de pôles

Etant donné un système LPV représenté par un polytope, une condition suffisante d'existence d'un correcteur polytopique tel que:

- *Le système LPV en boucle fermée vérifie les conditions de performance quadratique $\mathcal{H}_\infty$*
- *Pour toute valeur figée du vecteur de paramètres θ, les pôles du système LTI associé restent dans le disque ouvert de centre c et de rayon r*

est caractérisée par la faisabilité, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ des LMI:

$$\begin{pmatrix} A_iR + B_2\mathcal{C}_{K_i} + sym & \star & \star & \star \\ \mathcal{A}_{K_i} + (B_2D_{K_i}C_2)^T & SA + \mathcal{B}_{K_i} + sym & \star & \star \\ B_{1i}^T + (B_2D_{K_i}D_{21})^T & B_{1i}^TS + D_{21}^T\mathcal{B}_{K_i}^T & -\gamma I & \star \\ C_{1i}R + D_{12}\mathcal{C}_{K_i} & C_{1i} + D_{12}D_{K_i}D_{21} & D_{11i} + D_{12}D_{K_i}D_{21} & -\gamma I \end{pmatrix} < 0$$

$$\begin{pmatrix} -rR & \star & \star & \star \\ -rI & -rS & \star & \star \\ A_iR + B_2\mathcal{C}_{K_i} - cR & A_i + B_2D_{K_i}C_2 - cI & -rR & \star \\ \mathcal{A}_{K_i} - cI & SA_i + \mathcal{B}_{K_i}C_2 - cS & -rI & -rS \end{pmatrix} < 0 \tag{4.33}$$

□

On reconnaît la première inégalité (cf. 4.23) qui traduit la performance quadratique $\mathcal{H}_\infty$. La seconde résulte de l'application du changement de variables à (4.32).

4.4.2 Critère mixte de type $\mathcal{H}_\infty$ / $\mathcal{H}_2$

Comme nous l'annoncions en tête de ces quelques pages consacrées aux synthèses *LPV* multi-objectifs, le critère que nous évoquons maintenant a déjà fait l'objet de multiples travaux dans le cadre des systèmes *LTI*. Plusieurs possibilités sont envisageables quant à la manière de considérer le problème. La plus courante est celle qui suit:

Formulation classique du problème: *Pour un système donné sous la forme standard suivante:*

$$P = \begin{array}{c} \\ z_2 \\ z_\infty \\ y \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & w_2 & w_\infty & u \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & B_{11} & B_{12} & B_2 \\ C_{11} & 0 & 0 & D_{112} \\ C_{12} & 0 & D_{1212} & D_{122} \\ C_2 & D_{211} & D_{212} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

déterminer la loi de commande $u = K(s)y$ qui minimise, en boucle fermée, la norme $\mathcal{H}_2$ du premier transfert de w_2 vers z_2, sous contrainte que la norme $\mathcal{H}_\infty$ du second, de w_∞ vers z_∞ reste bornée par γ, dont la valeur est fixée a priori.

Ce problème est typiquement celui que l'on rencontre quand il s'agit de réaliser une atténuation de bruits en présence de perturbations bornées de modèle par exemple.

L'extension aux systèmes LPV polytopiques est relativement immédiate. Il suffira en effet d'optimiser la performance quadratique de type $\mathcal{H}_2$ associée au premier modèle dont les sommets sont décrits par:

$$P_{1i} = \begin{pmatrix} A_i & B_{11i} & B_2 \\ C_{11i} & 0 & D_{112} \\ C_2 & D_{211} & 0 \end{pmatrix}$$

en s'assurant que la performance de type $\mathcal{H}_\infty$ associée au second:

$$P_{2i} = \begin{pmatrix} A_i & B_{12i} & B_2 \\ C_{12i} & D_{1212i} & D_{122} \\ C_2 & D_{211} & 0 \end{pmatrix}$$

Pour cela on recherchera donc à minimiser la trace de la matrice P telle que soient vérifiées les inégalités[6] (4.28) du problème de type $\mathcal{H}_2$ d'une part et celles du problème de type $\mathcal{H}_\infty$ (4.23) d'autre part. De même que nous l'avons fait dans le cas du placement de pôles, la fonction de Lyapunov est supposée identique dans chacune des inégalités.

4.5 Implémentation des correcteurs polytopiques

L'implémentation d'une loi de commande LPV sur un système physique, calculée à partir d'un modèle polytopique, est résumée par le schéma suivant:

[6] dont on adaptera les notations.

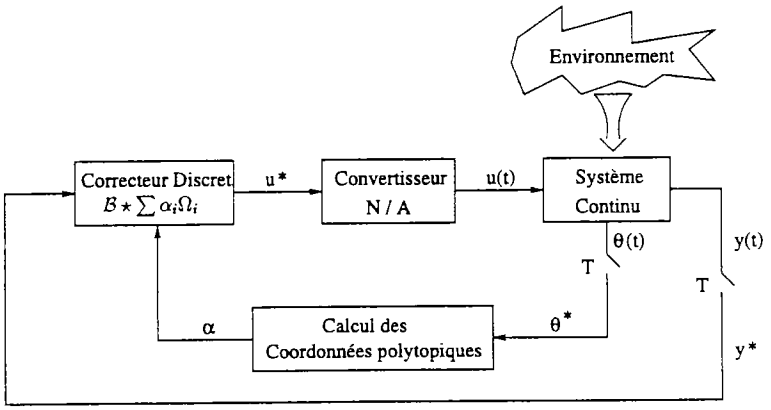


Figure 4.5: Schéma d'implémentation des correcteurs polytopiques

Entre deux instants d'échantillonnage, le calculateur embarqué dispose d'une période T pour mener à bien les opérations suivantes:

- Calcul des coordonnées polytopiques
- Discrétisation du correcteur et calcul des signaux de commande

que nous avons détaillées au chapitre 2. On rappelle que la discrétisation pourra être effectuée par transformation bilinéaire (notée $\mathcal{B}$ sur le schéma). On se ramène alors à un produit de Redheffer (voir relation 2.57), dont le calcul est relativement rapide.

Au préalable, on devra naturellement s'assurer que la discrétisation n'engendre pas un masquage de certaines dynamiques excessivement rapides du modèle continu du correcteur. Pour ce faire, nous suggérons une démarche plus ou moins empirique qui consiste à déterminer le pôle le plus rapide de l'ensemble des correcteurs associés à chaque sommet du polytope, pour ensuite vérifier la condition du théorème de Shannon.

4.6 Commentaires sur l'insensibilité paramétrique

Bien qu'aucune spécification en ce sens n'ait été explicitement prise en compte dans l'approche que nous avons présentée, il est intéressant de souligner néanmoins l'insensibilité paramétrique plus ou moins marquée, des correcteurs obtenus. On pourra donner une justification rapide à cette propriété en remarquant que les inégalités qui interviennent dans chacun des théorèmes énoncés sont **strictes**.

Considérons pour simplifier, le cas de la robustesse en stabilité. Quelque soit le critère considéré (minimisation d'une performance quadratique $\mathcal{H}_\infty$, $\mathcal{H}_2$, placement de pôles, critères mixtes), le correcteur polytopique, s'il existe, garantit le résultat suivant:

$$\exists X > 0 \ / \ \Psi_i = A_{cl_i}^T X + X A_{cl_i} < 0 \quad i = 1, \ldots, N \tag{4.34}$$

Par continuité de la fonction:

$$f(\delta) = \max_{\substack{\|\Delta\| \leq \delta \\ i=1\ldots N}} \lambda_{max}\Big(\Psi_i + \Delta^T X + X\Delta\Big) \tag{4.35}$$

qui, d'après (4.34) est strictement négative en 0, on déduit l'existence d'une borne strictement positive ρ telle que:

$$\forall \delta, \ \ |\delta| < \rho \ \Rightarrow \ f(\delta) < 0, \quad i = 1, \ldots, N$$

Cette borne caractérise l'insensibilité paramétrique en présence d'incertitudes non structurées sur la matrice d'évolution de la boucle fermée.

Il s'agit d'une borne particulièrement pessimiste dans la mesure où Δ modélise le plus souvent des incertitudes structurées. On écrira dans ce cas:

$$\Delta(\delta) = \delta_1 \Delta_1 + \ldots + \delta_q \Delta_q$$

pour s'intéresser au problème suivant:

$$\max \rho \ / \ |\delta_j| < \rho \ \Rightarrow \ \Psi_i + \sum_{j=1}^{q} \delta_j (\Delta_j^T X + X\Delta_j) < 0, \quad i = 1, \ldots, N \tag{4.36}$$

que l'on pourra résoudre par dichotomie, en testant pour une valeur donnée de ρ, la négativité des $2^q N$ inégalités:

$$\Psi_i + \sum_{j=1}^{q} \pm\rho(\Delta_j^T X + X\Delta_j)$$

De cette manière, on expliquera le comportement plutôt satisfaisant - que nous avons observé en pratique - des lois de commandes LPV obtenues en présence de perturbations ou retard sur la mesure des paramètres. En effet, il s'agit de phénomènes dont l'interprétation en tant qu'incertitudes paramétriques[7] est relativement immédiate. De plus, il s'agit de phénomènes aisément quantifiables, ce qui facilite la construction et le dimensionnement des matrices Δ_i en vue de l'analyse.

[7] venant affecter les coefficients qui justement dépendent des paramètres mesurés.

Chapitre 5

Correcteurs *LFT*

5.1 Introduction

Après avoir envisagé le cas du modèle polytopique, nous présentons maintenant quelques résultats essentiels de synthèse sur les systèmes *LFT*. Là encore, plutôt que de rechercher un correcteur invariant, robuste aux variations paramétriques, nous proposons d'adopter une structure de loi de commande analogue à celle du système.

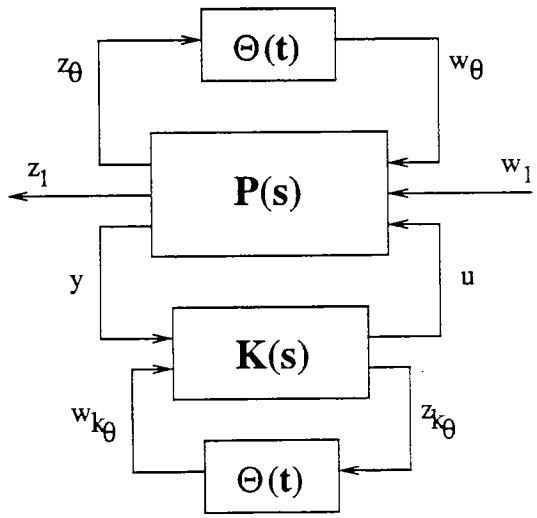


Figure 5.1: Structure des correcteurs *LFT*

Autrement dit, le système à commander étant décrit par la LFT:

$$\mathcal{F}_u\left(P(s), \Theta(t)\right), \quad \forall t \geq 0, \quad \begin{cases} \Theta(t) \in \boldsymbol{\Theta} \\ \Theta(t)^T \Theta(t) \leq 1 \end{cases} \tag{5.1}$$

on choisira le correcteur sous la forme:

$$\mathcal{F}_l(K(s), \Theta(t)) \tag{5.2}$$

Si le schéma (figure 5.1) rappelle la formulation standard des problèmes de synthèse de lois de commande robuste [36], il en diffère néanmoins par la présence d'une boucle supplémentaire. Cette boucle est celle du correcteur qui dépend ici des paramètres. Pour se ramener au cas "standard" et surtout permettre l'application des résultats d'analyse développés au chapitre 3, il suffira de regrouper les blocs paramétriques du système et du correcteur pour former un seul bloc répété. Cette opération est réalisée simplement, en augmentant le système $P(s)$ de la manière suivante:

$$\tilde{P}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_N \\ 0 & P(s) & 0 \\ I_N & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Ainsi, on obtient:

$$\mathcal{F}_l\Big(\mathcal{F}_u\Big(P, \begin{pmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}\Big), \mathcal{F}_l(K, \Theta)\Big) = \mathcal{F}_u\left(\mathcal{F}_l\left(\tilde{P}(s), K(s)\right), \begin{pmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix}\right) \tag{5.4}$$

ce que nous pouvons illustrer par un nouveau schéma, équivalent au précédent:

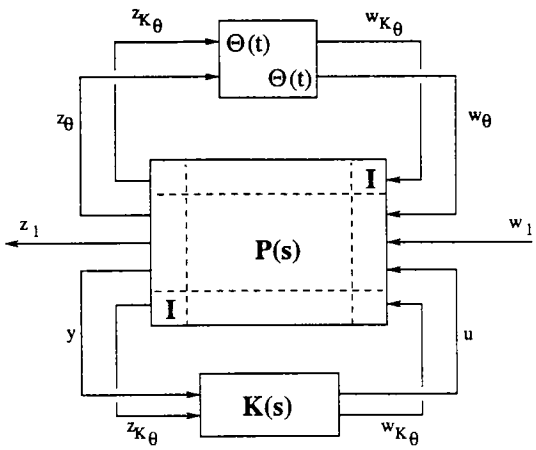


Figure 5.2: Répétition du bloc de paramètres

Il convient dès maintenant de mettre l'accent sur une propriété fondamentale du modèle obtenu quant à la structure tout à fait spécifique[1] du bloc de paramètres:

$$\text{blocdiag}\Big(\Theta(t), \Theta(t)\Big)$$

Nous nous efforcerons de mettre en évidence l'influence d'une telle répétition au niveau de l'application des résultats d'analyse sur la boucle fermée et montrerons en particulier comment est ainsi préservée la **convexité**.

Souhaitant ne pas alourdir inutilement notre exposé, nous proposons de limiter principalement notre étude au cadre de la performance quadratique $\mathcal{H}_\infty$. Un tel choix est délibéré de notre part, puisqu'il nous permettra - après une courte discussion sur les autres critères de performance - d'orienter notre propos vers un aspect central de la thèse: **La synthèse de correcteurs *LFT* robustes pour les systèmes *LPV* incertains.**

Notons que les résultats développés dans ce chapitre feront l'objet d'une application complète au pilotage d'un avion de combat (voir chapitre 9).

5.2 Critère de type $\mathcal{H}_\infty$

A la lumière de l'introduction qui précède et des résultats du chapitre 3, le système *LPV* en boucle fermée (figures 5.1 et 5.2), vérifie les conditions de performance quadratique $\mathcal{H}_\infty$ (voir (3.13)) s'il existe:

- une matrice X strictement positive (associée à une fonction de Lyapunov)
- une matrice L strictement positive qui de plus commute ici avec les éléments de $\boldsymbol{\Theta} \oplus \boldsymbol{\Theta}$ (on associe cette dernière à un opérateur de scaling constant)

telles que les matrices de la représentation d'état du système:

$$\mathcal{F}_l(\tilde{P}(s), K(s)) = \left(\begin{array}{c|cc} A_{cl} & B_{cl_\theta} & B_{cl_p} \\ \hline C_{cl_\theta} & D_{cl_{\theta\theta}} & D_{cl_{\theta p}} \\ C_{cl_p} & D_{cl_{p\theta}} & D_{cl_{pp}} \end{array}\right) \tag{5.5}$$

[1] La répétition du bloc Θ est en effet directement liée au fait que l'on mesure les paramètres, lesquels sont ainsi directement intégrés au niveau de la loi de commande.

vérifie l'inégalité:

$$\begin{pmatrix} A_{cl}^T X + X A_{cl} & X B_{cl_\theta} & X B_{cl_p} & C_{cl_\theta}^T & C_{cl_p}^T \\ B_{cl_\theta}^T X & -L & 0 & D_{cl_{\theta\theta}}^T & D_{cl_{p\theta}}^T \\ B_{cl_p}^T X & 0 & -\gamma I & D_{cl_{\theta p}}^T & D_{cl_{pp}}^T \\ C_{cl_\theta} & D_{cl_{\theta\theta}} & D_{cl_{\theta p}} & -L^{-1} & 0 \\ C_{cl_p} & D_{cl_p\theta} & D_{cl_{pp}} & 0 & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \tag{5.6}$$

Dans la suite, on utilisera pour le système $P(s)$, les notations indiquées par la relation suivante:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_\theta \\ z_1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B_\theta & B_1 & B_2 \\ C_\theta & D_{\theta\theta} & D_{\theta 1} & D_{\theta 2} \\ C_1 & D_{1\theta} & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{2\theta} & D_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w_\theta \\ w_1 \\ u \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

Les éléments du correcteurs seront consignés dans la matrice Ω:

$$\Omega = \begin{pmatrix} A_K & B_{K_1} & B_{K_\theta} \\ C_{K_1} & D_{K_{11}} & D_{K_{1\theta}} \\ C_{K_\theta} & D_{K_{\theta 1}} & D_{K_{\theta\theta}} \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

En supposant nulle la transmission directe - ce qui ne nuit pas à la généralité des résultats (voir introduction du chapitre précédent) - on montre, après quelques calculs dont nous épargnons le lecteur, que l'inégalité (5.6) admet la reformulation suivante:

$$\Psi(X) + P_X^T \Omega Q + Q^T \Omega^T P_X < 0 \tag{5.9}$$

avec

$$\Psi(X) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^T X + X \mathcal{A} & X \mathcal{B}_\theta & X \mathcal{B}_p & \mathcal{C}_\theta^T & \mathcal{C}_p^T \\ \mathcal{B}_\theta^T X & -L & 0 & \mathcal{D}_{\theta\theta}^T & \mathcal{D}_{p\theta}^T \\ \mathcal{B}_p^T X & 0 & -\gamma I & \mathcal{D}_{\theta p}^T & \mathcal{D}_{pp}^T \\ \mathcal{C}_\theta & \mathcal{D}_{\theta\theta} & \mathcal{D}_{\theta p} & -L^{-1} & 0 \\ \mathcal{C}_p & \mathcal{D}_{p\theta} & \mathcal{D}_{pp} & 0 & -\gamma I \end{pmatrix}$$

$$P_X = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_2^T X & 0 & 0 & \mathcal{D}_{12\theta}^T & \mathcal{D}_{12p}^T \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_2 & \mathcal{D}_{21\theta} & \mathcal{D}_{21p} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et les notations présentées en bas de page[2].

Compte tenu de la forme particulière de (5.9), nous pouvons maintenant appliquer le lemme de projection afin d'éliminer les variables du correcteur. Il vient donc dans

[2]Notations:

un premier temps, les deux inégalités classiques, a priori non convexes puisqu'elles sont linéaires en X et L mais aussi en X^{-1} et L^{-1}:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{P_X}^T \Psi_i(X,0)\mathcal{N}_{P_X} < 0\,, \quad i = 1,\ldots,N \\ \mathcal{N}_Q^T \Psi_i(X,0)\mathcal{N}_Q < 0\,, \quad i = 1,\ldots,N \end{aligned} \tag{5.10}$$

On introduit alors, pour X et X^{-1}, les partitions classiques (4.12), puis pour les matrices de scaling L et L^{-1}:

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_2^T & L_3 \end{pmatrix} > 0\,, \quad L^{-1} = J = \begin{pmatrix} J_1 & J_2 \\ J_2^T & J_3 \end{pmatrix} > 0 \tag{5.11}$$

On vérifiera simplement, pour assurer la commutativité de ces dernières avec les éléments de $\Theta \oplus \Theta$, qu'il suffit de choisir L_i et J_i parmi les matrices commutant avec Θ:

$$L_i \in \mathcal{D}_\Theta\,, \quad J_i \in \mathcal{D}_\Theta\,, \qquad i = 1,2,3 \tag{5.12}$$

En suivant une démarche similaire à celle présentée dans la section 4.2, on obtient une caractérisation LMI par rapport aux variables R, S, L_3 et J_3. Il restera simplement à s'assurer que le choix de ces dernières soit tel que la reconstruction de X et L demeure possible. Il en résulte les contraintes (voir chapitre précédent):

$$R > 0\,, \quad S > 0\,, \quad L_3 > 0\,, \quad J_3 > 0\,, \quad \lambda_{min}(RS) \geq 1\,, \quad \lambda_{min}(L_3 J_3) \geq 1$$

Remarquons ici d'après (5.12), l'importance du fait que les matrices L_2 et J_2 ne soient pas nulles, car, au moment de la reconstruction de L, nous devrons résoudre:

$$L_2^T J_2 = I - L_3 J_3 \neq 0$$

Il en aurait été tout autrement dans le cas d'une structure classique non répétée. C'est toute la différence, illustrée ici sur le plan mathématique (voir aussi [7] pour une discussion plus complète), qui existe entre la commande LPV d'une part et la commande robuste aux incertitudes paramétriques d'autre part.

De ce qui précède, on déduit finalement:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}_\theta & \mathcal{B}_p \\ \mathcal{C}_\theta & \mathcal{D}_{\theta\theta} & \mathcal{D}_{\theta p} \\ \mathcal{C}_p & \mathcal{D}_{p\theta} & \mathcal{D}_{pp} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc|c} \mathcal{A} & 0 & 0 & \mathcal{B}_\theta & \mathcal{B}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{C}_\theta & 0 & 0 & \mathcal{D}_{\theta\theta} & \mathcal{D}_{\theta 1} \\ \hline \mathcal{C}_1 & 0 & 0 & \mathcal{D}_{1\theta} & \mathcal{D}_{11} \end{array}\right), \quad \begin{pmatrix} \mathcal{B}_2^T & \mathcal{D}_{12\theta}^T & \mathcal{D}_{12p}^T \\ \mathcal{C}_2 & \mathcal{D}_{21\theta} & \mathcal{D}_{21p} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 0 & I_{n_k} & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{B}_2^T & 0 & 0 & \mathcal{D}_{\theta 2}^T & \mathcal{D}_{12}^T \\ 0 & 0 & I_N & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{n_k} & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{C}_2 & 0 & 0 & \mathcal{D}_{2\theta} & \mathcal{D}_{21} \\ 0 & 0 & I_N & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Théorème 5.1 *[7]* **Caractérisation convexe des correcteurs** LFT **de type** $\mathcal{H}_\infty$

Etant donné un système de la forme (5.1), il existe un correcteur LFT (5.2) tel que la performance quadratique $\mathcal{H}_\infty$ *du système LPV en boucle fermée (figure 5.1), reste bornée par* γ *s'il existe des matrices* R, S, L_3 *et* J_3, *solutions* **strictement positives** *du problème d'optimisation convexe:*

$$\begin{array}{l}
\mathcal{N}_R^T \begin{pmatrix} AR+RA^T & RC_\theta^T & RC_1^T & B_\theta J_3 & B_1 \\ C_\theta R & -J_3 & 0 & D_{\theta\theta} J_3 & D_{\theta 1} \\ C_1 R & 0 & -\gamma I & D_{1\theta} J_3 & D_{11} \\ J_3 B_\theta^T & J_3 D_{\theta\theta}^T & J_3 D_{1\theta}^T & -J_3 & 0 \\ B_1^T & D_{\theta 1}^T & D_{11}^T & 0 & -\gamma I \end{pmatrix} \mathcal{N}_R \ < \ 0 \\
\mathcal{N}_S^T \begin{pmatrix} A^T S+SA & SB_\theta & SB_1 & C_\theta^T L_3 & C_1^T \\ B_\theta^T S & -L_3 & 0 & D_{\theta\theta}^T L_3 & D_{1\theta}^T \\ B_1^T S & 0 & -\gamma I & D_{\theta 1}^T L_3 & D_{11}^T \\ L_3 C_\theta & L_3 D_{\theta\theta} & L_3 D_{\theta 1} & -L_3 & 0 \\ C_1 & D_{1\theta} & D_{11} & 0 & -\gamma I \end{pmatrix} \mathcal{N}_S \ < \ 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_{min}(RS) \ \geq \ 1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad L_3 \in \mathcal{D}_\Theta\,, \quad J_3 \in \mathcal{D}_\Theta\,, \quad \lambda_{min}(L_3 J_3) \ \geq \ 1
\end{array} \tag{5.13}$$

□

Les remarques que nous avons pu faire dans le cadre de l'approche polytopique s'appliquent ici de la même façon. En particulier, on remplacera, au moment de l'optimisation, les conditions spectrales, par des inégalités strictes:

$$\begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix} > 0 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} L_3 & I \\ I & J_3 \end{pmatrix} > 0$$

qui vont également garantir la positivité des matrices R, S, L_3 et J_3. Là encore, on pourra observer une réduction possible de l'ordre du correcteur selon que la première contrainte spectrale est saturée ou non. Enfin, ajoutons une remarque quant au conservatisme. Il faut bien noter en effet que les inégalités du théorème (5.1) constituent simplement une condition suffisante de performance quadratique. Dans le cas de l'approche polytopique, les conditions obtenues étaient également nécessaires, d'où un moindre conservatisme de cette dernière lorsque les deux techniques sont applicables.

Reconstruction du correcteur

Le processus est bien sûr analogue à celui que nous avons détaillé au chapitre précédent. Il y aura simplement une étape supplémentaire ici: **le calcul de** L. Pour ce faire, on

adpatera la méthode qui aura permis la détermination de X afin de prendre en compte la contrainte supplémentaire:

$$\forall\, \Theta(t) \in \mathbf{\Theta}\,, \quad L\Theta(t) = \Theta(t)L$$

On choisira donc pour les matrices L_i une structure bloc-diagonale:

$$L_i = \text{blocdiag}\ ((L_i)_1, \ldots, (L_i)_r)\ , \quad (L_i)_k \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$$

et on effectuera les décompositions en valeurs singulières, séparément sur chaque bloc:

$$I_{n_k} - (L_3)_k (J_3)_k = U_k \Sigma_k V_k^T = (U_k \Sigma_k^{\frac{1}{2}})(V_k \Sigma_k^{\frac{1}{2}})^T = (L_2)_k^T (J_2)_k$$

d'où l'on déduit L_2^T et J_2^T, puis finalement L comme l'unique solution positive de:

$$\begin{pmatrix} 0 & J_2^T \\ I & J_3 \end{pmatrix} L = \begin{pmatrix} L_2^T & L_3 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

On pourra vérifier en outre que cette solution appartient bien à l'ensemble $\mathcal{D}_{\Theta\oplus\Theta}$.

Causalité du correcteur

Une difficulté spécifique de l'approche que nous venons de décrire vient du fait que le correcteur LFT n'est pas nécessairement défini en tout point du domaine. Autrement dit, la méthode ne garantit pas que:

$$\forall \Theta(t) \in \mathcal{B}_\Theta\,,\ det\,(I - D_{K_{\theta\theta}}\Theta(t)) \neq 0$$

Il en résulte, chaque fois qu'une trajectoire passera par un point singulier, une destruction de la relation de causalité entre les entrées du correcteur et ses sorties. Toutefois, dès l'instant où le système vérifie l'une ou l'autre des propriétés suivantes:

- $D_{\theta 2} = 0 \ \left(\Rightarrow\ \forall\, \theta\,,\ B_2(\theta) = B_2\,,\ D_{12}(\theta) = D_{12}\right)$
- $D_{2\theta} = 0 \ \left(\Rightarrow\ \forall\, \theta\,,\ C_2(\theta) = C_2\,,\ D_{21}(\theta) = D_{21}\right)$

on montre [7] que la méthode proposée génère des correcteurs LFT bien définis. On notera que l'une ou l'autre de ces propriétés est très souvent vérifiée dans la pratique. Rappelons d'ailleurs que dans le cadre de l'approche polytopique, nous avions dû considérer l'hypothèse suivante:

$$\forall\, i \ \ B_{2i} = B_2 \ \ D_{12i} = D_{12} \ \ C_{2i} = C_2\,,\ D_{21i} = D_2$$

ce qui revient ici à vérifier simultanément les deux conditions que nous venons d'introduire. Mentionnons néanmoins l'existence d'une approche itérative qui permettra de traiter le cas général. Voir [7] pour plus de détails.

5.3 Variations sur le critère de performances

A partir des résultats du chapitre 3 (voir en particulier les relations 3.15 et 3.16), on pourra facilement obtenir une caractérisation convexe des correcteurs LFT permettant:

- d'optimiser un critère de performance quadratique de type $\mathcal{H}_2$
- ou de placer les pôles de tout système LTI déduit du modèle LPV (en boucle fermée) à l'intérieur d'un disque tout en garantissant la stabilité quadratique.

Dans chacun des cas, on pourra adopter une démarche similaire à celle que nous venons de présenter. Le cas des critères mixtes en revanche devra faire l'objet d'une attention particulière dans la mesure où le changement de variables utilisé au chapitre 4 ne permet plus d'établir la convexité des expressions rencontrées. A notre connaissance, il n'existe pas actuellement de résultat théorique général dans ce domaine.

5.4 Méthode itérative pour la robustesse

L'ensemble des méthodes que nous avons développées jusqu'à présent, dans ce chapitre affichent une certaine insensibilité paramétrique intrinsèque. La justification donnée à la fin du chapitre précédent reste en effet valable puisque la caractérisation des correcteurs LFT tout comme celle des correcteurs polytopiques s'appuie sur des inégalités strictes.

Toutefois, il ne s'agit là que d'une analyse a posteriori, dont on ne maîtrise pas le résultat. C'est pourquoi, nous proposons ici d'inclure des spécifications de robustesse au niveau même de la conception des lois de commande.

Le problème de synthèse considéré est schématisé par la figure 5.3. Il s'agit de déterminer le correcteur LFT tel que la boucle fermée reste stable pour toute perturbation bornée en norme Δ, appartenant à l'ensemble $\mathbf{\Delta}$ décrit au chapitre 3 (voir paragraphe 3.4.1).

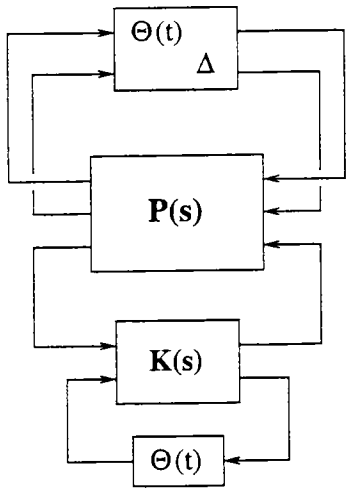


Figure 5.3: Commande des systèmes LPV incertains

On notera que l'opérateur Δ, modélisant les incertitudes pourra également contenir un "bloc de performances". On interprétera donc le problème posé, comme celui de la recherche d'une loi de commande LPV assurant la **robustesse en performances.**

Une analyse de type "faible gain", compte tenu de l'équivalence[3] des deux schéma[4]:

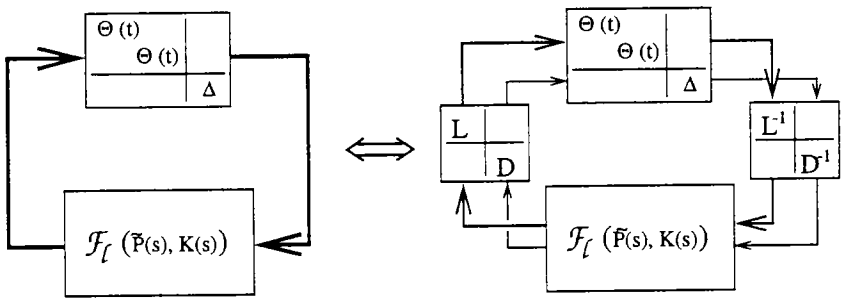


Figure 5.4: Utilisation de scalings

fournit la condition suffisante de robustesse:

$$\left\| \begin{pmatrix} L^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} D \end{pmatrix} \mathcal{F}_l\left(\tilde{P}(s), K(s)\right) \begin{pmatrix} L^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} D^{-1} \end{pmatrix} \right\|_\infty < 1 \tag{5.14}$$

[3]pourvu que L et D commutent avec les éléments de $\mathbf{\Theta} \oplus \mathbf{\Theta}$ et $\mathbf{\Delta}$, respectivement.

[4]On rappelle que $\tilde{P}$ représente le système augmenté permettant le regroupement des blocs $\Theta(t)$ (voir l'introduction de ce chapitre).

pour toute perturbation Δ dont le gain $\mathcal{L}_2$ reste borné par $\frac{1}{\gamma}$.

Bien sûr, la condition (5.14) n'est pas convexe par rapport à l'ensemble des variables K, L et D. Néanmoins, d'après les développements qui précèdent, on pourra déterminer simultanément K et L en fixant D. Puis, en fixant K, on vérifie simplement la convexité par rapport aux variables L et D (voir chapitre 3 - algorithme 3.5).

On en déduit donc une méthode itérative de calcul des correcteurs LPV robustes, fondée sur l'alternance des phases de synthèse et d'analyse de la robustesse. Il s'agit en fait d'une approche inspirée de la μ-synthèse [9].

Algorithme 5.2 Synthèse LPV robuste

- *Synthèse d'un correcteur LFT de type $\mathcal{H}_\infty$*
  - *Résoudre le problème d'optimisation convexe:*
$$\min \gamma \ / \ \left\| \begin{pmatrix} L^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} I \end{pmatrix} \mathcal{F}_l\left(\tilde{P}(s), K(s)\right) \begin{pmatrix} L^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} I \end{pmatrix} \right\|_\infty < 1 \qquad (5.15)$$
    en appliquant les conditions du théorème 5.1.
  - *En déduire $\hat{\gamma}$ puis par reconstruction, et $\hat{L}$ $\hat{K}$.*
- *Analyse de la robustesse*
  - *Construire le modèle d'analyse:*
$$F(s) = \begin{pmatrix} \hat{L}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \mathcal{F}_l\left(\tilde{P}(s), \hat{K}(s)\right) \begin{pmatrix} \hat{L}^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$
  - *Résoudre le problème suivant, en adaptant l'algorithme 3.5:*
$$\min \gamma \ / \ \left\| \begin{pmatrix} L^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} D \end{pmatrix} F(s) \begin{pmatrix} L^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} D^{-1} \end{pmatrix} \right\|_\infty < 1 \qquad (5.16)$$
- *Si $\gamma > 1$*
  - *Intégrer le scaling D au système initial:*
$$P(s) \ \rightarrow \ \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} P(s) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$$
  - *Retour à l'étape de synthèse*

Si $\gamma \leq 1$: **Fin de l'algorithme**

□

Commentaires

- **Convergence:** La méthode proposée est une heuristique, sans propriété de convexité globale. La convergence de l'agorithme vers un optimum global ne pourra donc pas être garantie. Néanmoins, on peut s'attendre à un comportement voisin - donc satisfaisant sur de nombreuses applications - de celui que l'on observe en μ-synthèse. Notre algorithme reprend en effet le principe déjà éprouvé, de l'alternance des phases de synthèse dans le domaine temporel et des phases d'analyse dans le domaine fréquentiel. Par ailleurs, l'expérience montre que le nombre d'itérations requis reste relativement faible (2 ou 3) dans la plupart des cas.

- **Ordre du correcteur:** Utilisée sans précaution, la méthode pourra générer des correcteurs d'ordre relativement élevés. En effet, après chaque analyse, les opérateurs de scaling dynamiques sont intégrés au modèle de synthèse, dont l'ordre coïncide avec celui de la loi de commande calculée à l'itération suivante. Plutôt que de procéder à un empilage systématique, il est préférable, de reprendre, à chaque itération, l'interpolation depuis le départ. L'ordre peut ainsi être maîtrisé.

- **Prise en compte d'incertitudes mixtes réelles/complexes:** La méthode que nous avons présentée correspond au cas des incertitudes purement complexes. Il est tout à fait possible, de mettre en place une analyse réservant un traitement spécifique aux incertitudes réelles (voir chapitre 3). Aux scalings habituels D s'ajouterons dans ce cas, les scalings G, dont la prise en compte au niveau de la synthèse pourra se faire conformément au schéma proposé dans [140, 53].

5.5 Implémentation des correcteurs LFT

Les correcteurs LFT répondent mieux que leurs homologues polytopiques aux exigences parfois sévères d'une implémentation sur système réel. Pour des raisons de poids, mais aussi bien sûr de coût, le dimensionnement du calculateur embarqué est souvent vu au plus juste. Le nombre d'opérations à effectuer entre chaque période d'échantillonnage doit donc être réduit au strict minimum.

Or dans le cas qui nous intéresse ici, les deux étapes de calcul que nous avions évoquées au chapitre précédent se trouvent ici considérablement simplifiées:

- Construction du bloc Θ à partir de θ

- Rebouclage de Θ sur le correcteur discrétisé **hors ligne** et calcul des signaux de commande

On s'aperçoit donc que la première étape, que nous avons conservée, par similitude avec l'approche polytopique, n'est plus vraiment une étape de calcul. Il s'agit simplement de restructurer les données. En ce qui concerne la seconde, on remarquera (voir schéma 5.5) que le calcul précédent d'un produit de Redheffer a été remplacé, par celui, nettement plus simple d'une LFT. Cela s'explique par le fait, qu'il est possible de discrétiser le correcteur hors ligne (voir paragraphe sur la discrétisation des modèles LPV au chapitre 2). La LFT calculée en ligne porte donc, non pas sur Ω mais directement sur Ω_d (correcteur LFT discret).

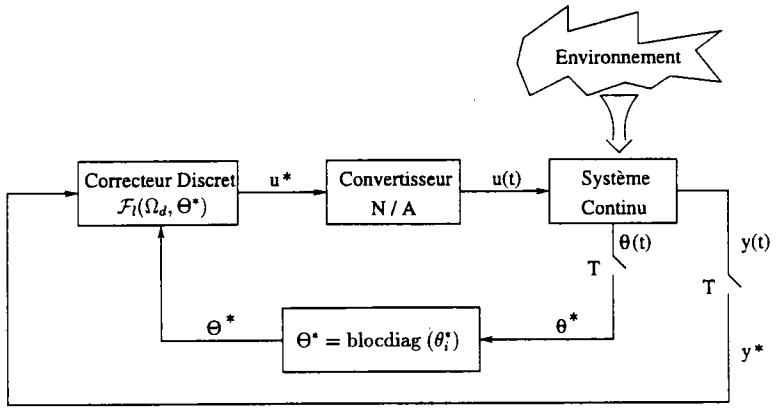


Figure 5.5: Schéma d'implémentation des correcteurs LFT

De même que nous l'avions fait remarquer dans le cas polytopique, il faudra là encore s'assurer qu'il n'y a pas de perte d'information lors de l'étape de discrétisation (théorème de Shannon).

Chapitre 6

Commande des systèmes à paramètres lentement variables

A travers ce chapitre, nous développons une méthode de synthèse LPV, fondée sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres. Il s'agit d'une notion déjà introduite en analyse, permettant entre autres, l'étude des systèmes à paramètres lentement variables.

En synthèse, les travaux dans ce domaine sont encore peu nombreux et relativement récents. Parmi les contributions majeures, on retiendra [135, 14] où est introduite une méthode très générale de résolution fondée sur une technique de "quadrillage paramétrique" (voir chapitre 3). Malheureusement, une telle approche reste difficilement utilisable par une personne non expérimentée. Elle requiert en effet de la part de l'utilisateur:

- le choix d'une base pour exprimer la fonction de Lyapunov
- le choix d'un "quadrillage" assez fin pour garantir que le critère soit vérifié en tout point du domaine, mais également assez sommaire pour ne pas compliquer outre mesure l'implémentation numérique

Dans le cas particulier des systèmes LPV **affines**, nous montrons ici qu'il est possible de mettre en place une approche plus systématique.

Nous envisagerons d'abord le cas le plus simple du retour d'état en stabilité. Nous introduisons ensuite une mesure de performance de type $\mathcal{H}_\infty$ adaptée à la nouvelle forme des fonctions de Lyapunov considérées dans ce chapitre. Puis, nous généraliserons l'approche au cas du retour dynamique de sorties.

Une illustration sur un exemple tiré de [135] sera finalement présentée, ce qui permettra une comparaison intéressante des deux approches.

6.1 Cas du retour d'état

On considère un système LPV de la forme suivante:

$$\dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)u \tag{6.1}$$

dont le vecteur de paramètres θ est supposé évoluer dans un polytope $\mathcal{P}$ noté $\mathcal{C}o(\mathcal{V})$. On supposera en outre la **vitesse d'évolution bornée**, soit:

$$\forall t \geq 0\,, \quad \dot{\theta}(t) \in \mathcal{C}o(\mathcal{N})$$

où $\mathcal{N}$ coïncidera le plus souvent[1] avec l'ensemble des sommets d'un hypercube centré sur l'origine, puisque les contraintes généralement adoptées dans la pratique pour limiter la vitesse d'évolution des paramètres s'écrivent:

$$\forall t \geq 0\,, \quad |\dot{\theta}_i(t)| \leq \nu_i$$

Pour ce système, nous voudrions déterminer un retour d'état dépendant des paramètres:

$$u = K(\theta)x \tag{6.2}$$

assurant, en boucle fermée, la stabilité exponentielle de toutes les trajectoires.

D'après 1.32, une condition suffisante de stabilité est donnée par les inégalités:

$$\forall \theta \in \mathcal{C}o(\mathcal{V})\,, \quad \dot{\theta} \in \mathcal{C}o(\mathcal{N})\,, \quad \begin{cases} A_{cl}(\theta)^T X(\theta) + X(\theta)A_{cl}(\theta) + \dot{X}(\theta) < 0 \\ X(\theta) > 0 \end{cases}$$

avec

$$A_{cl}(\theta) = A(\theta) + B(\theta)K(\theta)$$

Afin de faciliter la mise en place du changement de variables, on exprimera ces conditions par rapport à $Y = X^{-1}$. Ainsi, après multiplication à gauche et à droite par la matrice symétrique et non singulière, $Y(\theta)$, la première inégalité devient:

$$A_{cl}(\theta)Y(\theta) + Y(\theta)A_{cl}(\theta)^T + Y(\theta)\dot{Y}^{-1}(\theta)Y(\theta) < 0$$

[1] Ce n'est pas toutefois une nécessité dans notre approche.

soit encore, (en notant que $\dot{Y}^{-1}(\theta) = -Y^{-1}(\theta)\dot{Y}(\theta)Y^{-1}(\theta)$):

$$A_{cl}(\theta)Y(\theta) + Y(\theta)A_{cl}(\theta)^T - \dot{Y}(\theta) < 0$$

Changeons maintenant de variables (voir annexe B):

$$W(\theta) = K(\theta)Y(\theta)$$

pour finalement obtenir l'inégalité suivante:

$$A(\theta)Y(\theta) + Y(\theta)A(\theta)^T + B(\theta)W(\theta) + W(\theta)^T B(\theta)^T - \dot{Y}(\theta) < 0 \tag{6.3}$$

qu'il conviendrait, dans le cas général, de vérifier pour chaque valeur de θ et de sa dérivée, ce qui, numériquement n'est pas envisageable. Par conséquent, afin de simplifier les conditions (6.3), nous ferons ici l'hypothèse annoncée en introduction, d'une **dépendance affine en** θ. Autrement dit:

$$A(\theta) = A_0 + \sum_{i=1}^{r} \theta_i A_i\,, \quad B(\theta) = B_0 + \sum_{i=1}^{r} \theta_i B_i \tag{6.4}$$

De même, nous retiendrons, pour $Y(\theta)$ et $W(\theta)$ les expressions suivantes:

$$Y(\theta) = Y_0 + \sum_{i=1}^{r} \theta_i Y_i\,, \quad W(\theta) = W_0 + \sum_{i=1}^{r} \theta_i W_i$$

Ainsi, en suivant une démarche - fondée sur la notion de multi-convexité - analogue à celle qui nous a permis d'établir le théorème 3.6, nous obtenons la condition suffisante de stabilisabilité[2] énoncée ci-après:

Théorème 6.1 Stabilisabilité quadratique affine par retour d'état

Le système LPV (6.1) vérifiant (6.4) tel que:

$$\forall t \geq 0, \;\; \theta(t) \in \mathcal{C}o(\mathcal{V})\,, \;\; \dot{\theta}(t) \in \mathcal{C}o(\mathcal{N})$$

est exponentiellement stabilisable par un retour d'état, dépendant des paramètres, si:

$$\begin{aligned} A(v)Y(v) + Y(v)A(v)^T + B(v)W(v) + W(v)^T B(v)^T + Y_0 - Y(\nu) < 0 \quad & \forall\,(v,\nu) \in \mathcal{V} \times \mathcal{N} \\ Y(v) > 0 \quad & \forall\, v \in \mathcal{V} \\ A_i Y_i + Y_i A_i + B_i W_i + W_i^T B_i^T \geq 0 \quad & \forall\, i = 1, \ldots, r \end{aligned} \tag{6.5}$$

[2]Dans la mesure où la stabilité est prouvée par une fonction de Lyapunov quadratique, affine en θ, on parlera de **stabilisabilité quadratique affine**.

La matrice de gains du retour d'état est alors donnée par:

$$K(\theta) = \Big(W_0 + \sum_{i=1}^{r} \theta_i W_i\Big)\Big(Y_0 + \sum_{i=1}^{r} \theta_i Y_i\Big)^{-1} \tag{6.6}$$

□

Les conditions (6.5) constituent un ensemble de LMI que l'on pourra facilement implémenter sur calculateur. Au préalable, on remplacera cependant les dernières inégalités **non strictes** par:

$$A_i Y_i + Y_i A_i + B_i W_i + W_i^T B_i^T + \mu_i I > 0\,, \quad \mu_i > 0\,, \quad \forall\, i = 1, \ldots, r \tag{6.7}$$

ce qui permet simultanément (voir [45] pour plus de détails):

- de se ramener à un problème entièrement décrit par des inégalités strictes (condition numériquement nécessaire)
- de rendre le critère moins conservatif grâce à l'adjonction de nouvelles variables μ_i (au lieu d'imposer directement la multi-convexité de la fonction, on impose simplement qu'elle admette une fonction multi-convexe comme borne supérieure).

6.2 Cas du retour de sorties

Nous proposons ici une généralisation de la méthode au cas du retour de sorties minimisant un critère de type $\mathcal{H}_\infty$. Etant donné un système à commander - strictement propre - décrit par:

$$P(\theta) = \begin{pmatrix} A(\theta) & B_1(\theta) & B_2(\theta) \\ C_1(\theta) & D_{11}(\theta) & D_{12}(\theta) \\ C_2(\theta) & D_{21}(\theta) & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathcal{C}o(\mathcal{V})\,, \quad \dot{\theta} \in \mathcal{C}o(\mathcal{N}) \tag{6.8}$$

le problème que l'on cherche à résoudre est le suivant:

Problème 6.2 *Déterminer un correcteur dynamique LPV, strictement propre, de même ordre que le système:*

$$\Omega(\theta) = \begin{pmatrix} A_K(\theta) & B_K(\theta) \\ C_K(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

tel que le gain $\mathcal{L}_2$ de la boucle fermée:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{cl}(\theta)x + B_{cl}(\theta)w \\ z = C_{cl}(\theta)x + D_{cl}(\theta)w \end{cases}$$

reste borné par γ pour toute trajectoire paramétrique vérifiant:

$$\theta \in \mathcal{C}o(\mathcal{V}), \quad \dot{\theta} \in \mathcal{C}o(\mathcal{N})$$

Pour établir cette propriété, nous utiliserons, comme précédemment, une fonction de Lyapunov dépendant des paramètres, laquelle devra vérifier en outre l'inégalité:

$$\dot{V}(x,\theta) < \gamma^2 w(t)^T w(t) - z(t)^T z(t)$$

On en déduit, pour toute trajectoire paramétrique admissible:

$$\begin{pmatrix} A_{cl}(\theta)Y(\theta) + Y(\theta)A_{cl}(\theta)^T - \dot{Y}(\theta) & B_{cl}(\theta) & Y(\theta)C_{cl}(\theta) \\ B_{cl}(\theta)^T & -\gamma I & D_{cl}(\theta)^T \\ C_{cl}(\theta)Y(\theta) & D_{cl}(\theta) & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \tag{6.9}$$

et

$$Y(\theta) > 0 \tag{6.10}$$

Le changement de variable désormais classique (voir annexe B):

$$\begin{cases} \mathcal{A}_K(\theta) = S(\theta)A(\theta)R(\theta) + N(\theta)B_K(\theta)C_2(\theta)R(\theta) + S(\theta)B_2(\theta)C_K(\theta)M(\theta)^T + N(\theta)A_K(\theta)M(\theta)^T \\ \mathcal{B}_K(\theta) = N(\theta)B_K(\theta) \\ \mathcal{C}_K(\theta) = C_K(\theta)M(\theta)^T \end{cases} \tag{6.11}$$

avec

$$Y(\theta) = \begin{pmatrix} R(\theta) & M(\theta) \\ M(\theta)^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & S(\theta) \\ 0 & N(\theta)^T \end{pmatrix}^{-1} = Y_1(\theta)Y_2(\theta)^{-1} \tag{6.12}$$

permet de réécrire l'inégalité (6.9) sous la forme:

$$\Psi(\theta,\dot{\theta}) = \begin{pmatrix} \Psi_{11}(\theta) - \Phi_{\dot{Y}}(\theta,\dot{\theta}) & \Psi_{21}(\theta)^T \\ \Psi_{21}(\theta) & \Psi_{22}(\theta) \end{pmatrix} < 0 \tag{6.13}$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(\theta) &= \begin{pmatrix} A(\theta)R(\theta) + B_2(\theta)\mathcal{C}_K(\theta) + sym & \star \\ \mathcal{A}_K(\theta) & S(\theta)A(\theta) + \mathcal{B}_K(\theta)C_2(\theta) + sym \end{pmatrix} \\ \Phi_{\dot{Y}}(\theta,\dot{\theta}) &= Y_2(\theta)^T\dot{Y}(\theta)Y_2(\theta) \\ \Psi_{21}(\theta) &= \begin{pmatrix} B_1(\theta)^T & B_1(\theta)^T S(\theta) + D_{21}(\theta)^T\mathcal{B}_K(\theta)^T \\ C_1(\theta)R(\theta) + D_{12}(\theta)\mathcal{C}_K(\theta) & C_1(\theta) \end{pmatrix} \\ \Psi_{22}(\theta) &= \begin{pmatrix} -\gamma I & \star \\ D_{11}(\theta) & -\gamma I \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.14}$$

tandis que l'inégalité (6.10) devient, d'après (4.20):

$$\begin{pmatrix} R(\theta) & I \\ I & S(\theta) \end{pmatrix} > 0 \tag{6.15}$$

On obtient ainsi des conditions qui, dans la forme, sont finalement assez proches de celles que nous avons pu écrire dans le cas du retour d'état (6.3). Toutefois, il reste à simplifier le terme:

$$\Phi_{\dot{Y}}(\theta) = Y_2(\theta)^T \dot{Y}(\theta) Y_2(\theta)$$

En utilisant (6.12), il vient:

$$\begin{aligned} \Phi_{\dot{Y}}(\theta,\dot{\theta}) &= Y_2(\theta)^T \tfrac{d}{dt}\left(Y_1(\theta)Y_2(\theta)^{-1}\right) Y_2(\theta) \\ &= Y_2(\theta)^T \dot{Y}_1(\theta) - \underbrace{Y_2(\theta)^T Y_1(\theta)}_{=Y_1(\theta)^T Y_2(\theta)} Y_2(\theta)^{-1} \dot{Y}_2(\theta) \\ &= Y_2(\theta)^T \dot{Y}_1(\theta) - Y_1(\theta)^T \dot{Y}_2(\theta) \end{aligned}$$

d'où, en remplaçant Y_1 et Y_2 par leurs expressions:

$$\Phi_{\dot{Y}}(\theta,\dot{\theta}) = \begin{pmatrix} \dot{R}(\theta) & \star \\ S(\theta)\dot{R}(\theta) + N(\theta)\dot{M}(\theta)^T & -\dot{S}(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{R}(\theta) & \star \\ -\dot{S}(\theta)R(\theta) - \dot{N}(\theta)M(\theta)^T & -\dot{S}(\theta) \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

Hypothèses de résolution

Ne pouvant pas complètement éliminer les variables M et N, dans l'expression de $\Phi_{\dot{Y}}$, nous serons amenés à considérer l'une d'entre elles comme une constante. Par la suite, nous supposerons que tel est le cas de la matrice M.

$$\Phi_{\dot{Y}}(\theta,\dot{\theta}) = \begin{pmatrix} \dot{R}(\theta) & \star \\ S(\theta)\dot{R}(\theta) & -\dot{S}(\theta) \end{pmatrix} \tag{6.17}$$

Par ailleurs, nous supposerons pour faciliter la résolution, que les éléments du système à commander dépendent de façon affine, des paramètres:

$$P(\theta) = \begin{pmatrix} A_0 & B_{1_0} & B_{2_0} \\ C_{1_0} & D_{11_0} & D_{12_0} \\ C_{2_0} & D_{21_0} & 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{r} \theta_i \begin{pmatrix} A_i & B_{1_i} & B_{2_i} \\ C_{1_i} & D_{11_i} & D_{12_i} \\ C_{2_i} & D_{21_i} & 0 \end{pmatrix} \tag{6.18}$$

et nous ferons la même hypothèse en ce qui concerne les variables d'optimisation $R(\theta)$, $S(\theta)$, $\mathcal{A}_K(\theta)$, $\mathcal{B}_K(\theta)$ et $\mathcal{C}_K(\theta)$. Enfin, pour obtenir une expression linéaire de $\Phi_{\dot{Y}}(\theta,\dot{\theta})$ par

rapport aux variables d'optimisation, on recherchera la variable $R(\theta)$ sous la forme d'une matrice symétrique constante R. Ainsi, on obtient:

$$\Phi_{\dot{Y}}(\theta,\dot{\theta}) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S_0 - S(\dot{\theta}) \end{pmatrix}$$

On notera enfin que les éléments $\Psi_{ij}(\theta)$ sont des formes linéaires-quadratiques en θ. En invoquant un argument de multi-convexité (cf. retour d'état), on pourra donc vérifier la négativité de $\Psi(\theta,\dot{\theta})$ sur $\mathcal{C}o(\mathcal{V}) \times \mathcal{C}o(\mathcal{N})$ par un nombre **fini** de tests. On en déduit une caractérisation convexe des solutions, décrite par un ensemble de LMI:

Théorème 6.3 Performance quadratique $\mathcal{H}_\infty$ affine par retour de sorties

Etant donné un système LPV (6.8) vérifiant (6.18), il existe un retour dynamique de sorties, dépendant des paramètres, tel qu'en boucle fermée, les contraintes de performances quadratiques $\mathcal{H}_\infty$ (6.8 - 6.10) soient satisfaites si:

$$\begin{array}{rl} \Psi(v,\nu) < 0 & \forall (v,\nu) \in \mathcal{V} \times \mathcal{N} \\ \begin{pmatrix} R & I \\ I & S(v) \end{pmatrix} > 0 & \forall v \in \mathcal{V} \\ \begin{pmatrix} B_{2i}\mathcal{C}_{K_i} + \mathcal{C}_{K_i}^T B_{2i}^T & \star & \star & \star \\ 0 & S_i A_i + \mathcal{B}_{K_i} C_{2_i} + sym & \star & \star \\ 0 & B_{1i}^T S_i + D_{21_i}^T \mathcal{B}_{K_i}^T & 0 & \star \\ D_{12i}\mathcal{C}_{K_i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0 & \forall i = 1,\ldots,r \end{array} \tag{6.19}$$

Les éléments du correcteur sont alors obtenus par inversion du changement de variables:

$$\begin{cases} A_K(\theta) = (I - RS(\theta))^{-1} \left(\mathcal{A}_K(\theta) - S(\theta)\left(A(\theta)R + B_2(\theta)\mathcal{C}_K(\theta)\right) - \mathcal{B}_K(\theta)C_2(\theta)R\right) \\ B_K(\theta) = (I - RS(\theta))^{-1}\, \mathcal{B}_K(\theta) \\ C_K(\theta) = \mathcal{C}_K(\theta) \end{cases} \tag{6.20}$$

□

Commentaires

- Pour des raisons identiques à celles que nous avons invoquées en retour d'état, les dernières inégalités non strictes seront remplacées, au moment de l'implémentation,

par:

$$\begin{pmatrix} \mu_i I_n + B_{2i}\mathcal{C}_{K_i} + sym & \star & \star & \star \\ 0 & \mu_i I_n + S_i A_i + \mathcal{B}_{K_i} C_{2_i} + sym & \star & \star \\ 0 & B_{1i}^T S_i + D_{21_i}^T \mathcal{B}_{K_i}^T & \mu_i I_{m_1} & \star \\ D_{12i}\mathcal{C}_{K_i} & 0 & 0 & \mu_i I_{p_1} \end{pmatrix} > 0$$

$$\mu_i > 0 \tag{6.21}$$

- Le calcul des éléments du correcteur est présenté dans le cas où M est une matrice constante. Afin de vérifier la relation:

$$I - RS(\theta) = MN(\theta)^T$$

nous avons choisi:

$$M = I \quad \text{et} \quad N(\theta) = (I - RS(\theta))^T = I - S(\theta)R$$

Compte tenu de l'inégalité stricte (6.15), on vérifiera que la matrice $N(\theta)$ est toujours inversible.

Variante

Outre les fonctions classiques d'analyse $R(\theta)$ et $S(\theta)$, la méthode que nous venons d'exposer, puisqu'elle repose sur un changement de variables, met également en jeu les matrices $\mathcal{A}_K(\theta)$, $\mathcal{B}_K(\theta)$ et $\mathcal{C}_K(\theta)$ liées au correcteur. Une telle approche permet de s'affranchir des contraintes classiques en optimisation $\mathcal{H}_\infty$, concernant notamment les rangs des matrices $D_{12}(\theta)$ et $D_{21}(\theta)$. Elle offre par ailleurs l'avantage d'une reconstruction relativement simple et rapide des données du correcteur.

En contrepartie, la présence d'un nombre élevé de variables d'optimisation génère:

- une augmentation de la complexité sur le plan calculatoire
- une augmentation sensible du conservatisme, puisque nous avons supposé toutes les variables affines par rapport aux paramètres

En supposant les conditions suivantes vérifiées, pour toute valeur du vecteur de paramètres θ:

- $D_{11}(\theta) = 0$, $D_{22}(\theta) = 0$

- $D_{12}(\theta) = [0 \;\; I]^T$
- $D_{21}(\theta) = [0 \;\; I]$

on pourra développer un critère ne faisant plus intervenir que les matrices $R(\theta)$ et $S(\theta)$. Toutefois, là encore, la reconstruction d'un correcteur dépendant des paramètres, n'est possible qu'à condition de supposer $R(\theta)$ constante. En relâchant cette hypothèse on obtient en effet un correcteur dont la matrice d'évolution dépend de la dérivée $\dot{\theta}$, et présente donc un intérêt moindre sur le plan pratique.

Compte tenu de cette dernière hypothèse et en partitionnant les matrices $B_1(\theta)$ et $C_1(\theta)$ sous la forme[3]:

$$B_1(\theta) = [B_{11}(\theta) \;\; B_{12}(\theta)]\,, \quad C_1(\theta)^T = [C_{11}(\theta) \;\; C_{12}(\theta)]^T$$

notre problème (6.2) admet une solution si, pour toute trajectoire paramétrique admissible les trois inégalités suivantes en R et $S(\theta)$ sont vérifiées (voir [135] pour la démonstration):

$$\begin{array}{rcl}
\begin{pmatrix} (A(\theta) - B_2(\theta)C_{12}(\theta))\,R + sym - B_2(\theta)B_2(\theta)^T & \star & \star \\ C_{11}(\theta)R & -I & \star \\ \gamma^{-1}B_1(\theta)^T & 0 & -I \end{pmatrix} & < & 0 \\
\begin{pmatrix} S(\theta)\,(A(\theta) - B_{12}(\theta)C_2(\theta)) + sym - C_2(\theta)C_2(\theta)^T + \dot{S}(\theta) & \star & \star \\ B_{11}(\theta)^T S(\theta) & -I & \star \\ \gamma^{-1}C_1(\theta) & 0 & -I \end{pmatrix} & < & 0 \\
\begin{pmatrix} R & \gamma^{-1}I \\ \gamma^{-1}I & S(\theta) \end{pmatrix} & > & 0
\end{array} \tag{6.22}$$

En supposant finalement la matrice $B_{12}(\theta)$ ou $C_2(\theta)$, indépendante des paramètres, et $S(\theta)$ affine, on pourra envisager une technique de résolution identique à la précédente. On note ici, comme prévu, une diminution considérable du nombre de variables à optimiser. En revanche, la reconstruction des données du correcteur à partir de R et $S(\theta)$ nécessitera plus de calculs que dans le cas précédent (voir [111, 135]).

6.3 Illustration de la méthode

Nous proposons maintenant une courte illustration des approches que nous avons introduites sur un exemple emprunté à [135]. On considère donc le système décrit par les

[3]en accord avec les partitions de D_{12} et D_{21}

équations suivantes:

$$G_\rho \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & A(\rho(t))x + B_b w_b + B_2 u \\ y & = & C_2 x \end{array} \right. \tag{6.23}$$

avec

$$\mathrm{A}(\rho(\mathrm{t})) = \begin{pmatrix} 0.75 & 2 & cos(\rho(t)) & sin(\rho(t)) \\ 0 & 0.5 & -sin(\rho(t)) & cos(\rho(t)) \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \quad \mathrm{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \quad \mathrm{C}_2^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et où w_b représente une entrée bruitée.

On remarquera que ce système est instable en boucle ouverte et de plus, qu'il n'est pas quadratiquement stabilisable même par un retour d'état LPV (voir [135]). Par conséquent, la prise en compte d'une borne sur la dérivée du paramètre ρ est ici nécessaire:

$$\forall\, t \geq 0 \;\; |\dot{\rho}(t)|| \leq \nu \tag{6.24}$$

Le problème que nous cherchons à résoudre, successivement en retour d'état puis en retour dynamique de sorties est décrit par le schéma standard de la figure 6.1. Il s'agit de déterminer une loi de commande minimisant la mesure de performances γ telle que:

$$\forall\, T \geq 0\,, \quad \int_0^T \left(z_p^T z_p + z_u^T z_u \right) dt \leq \gamma^2 \int_0^T \left(w_p^T w_p + w_m^T w_m + w_b^T w_b \right) dt$$

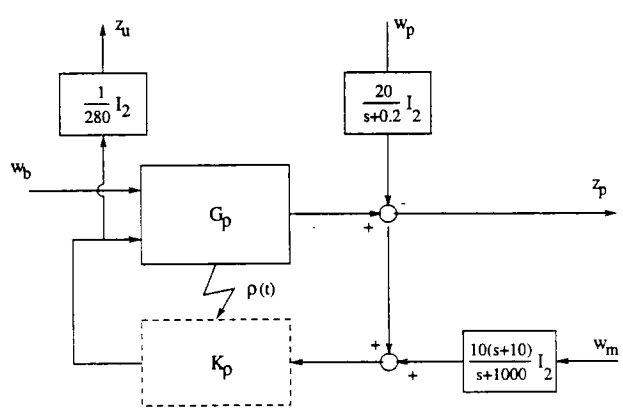


Figure 6.1: Formulation du problème de synthèse

Ce problème comprend donc des objectifs de stabilisation, suivi de consigne, réjection de perturbations (bruit de mesure, entrées bruitées sur le système), limitation des gains de

commande. L'ensemble de ces objectifs sont calibrés par des filtres dynamiques linéaires, qui pour permettre la comparaison des méthodes ont été choisis identiques à ceux de [135].

Les approches que nous avons développées n'étant valables que dans le cas d'une dépendance affine, on introduira les nouveaux paramètres:

$$\begin{cases} \theta_1(t) = cos(\rho(t)), & |\theta_1| \leq 1, & |\dot{\theta}_1| \leq \nu \\ \theta_2(t) = sin(\rho(t)), & |\theta_2| \leq 1, & |\dot{\theta}_2| \leq \nu \end{cases} \tag{6.25}$$

ce qui perrmet de réécrire $A(\rho)$ sous la forme:

$$A(\rho) = A_0 + \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2$$

Néanmoins, cette transformation est source d'un conservatisme excessif que nous devons limiter en adaptant nos méthodes de manière à prendre en compte les relations qui suivent:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1(t) = -\dot{\rho}(t)\theta_2(t) \\ \dot{\theta}_2(t) = \dot{\rho}(t)\theta_1(t) \\ \theta_1(t)^2 + \theta_2(t)^2 = 1 \end{cases} \tag{6.26}$$

Ainsi, par exemple, l'expression:

$$\Psi(\theta, \dot{\theta}) = A(\theta)Y(\theta) + Y(\theta)A(\theta)^T - \dot{Y}(\theta)$$

qui, a priori, dépend des paramètres θ_1, θ_2, $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$ sera traitée sous la forme:

$$\begin{aligned} \Psi(\theta, \dot{\theta}) = A_0Y_0 + Y_0A_0^T + A_2Y_2 + Y_2A_2^T \quad &+ \quad \theta_1(A_0Y_1 + Y_1A_0^T + A_1Y_0 + Y_0A_1^T - \dot{\rho}Y_2) \\ &+ \quad \theta_2(A_0Y_2 + Y_2A_0^T + A_2Y_0 + Y_0A_2^T + \dot{\rho}Y_1) \\ &+ \quad \theta_1\theta_2(A_1Y_2 + Y_2A_1^T - A_2Y_2 - Y_2A_2^T) \\ &+ \quad \theta_1^2(A_1Y_1 + Y_1A_1^T - A_2Y_2 - Y_2A_2^T) \end{aligned} \tag{6.27}$$

On aura donc pu remplacer $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$ par un seul paramètre $\dot{\rho}$, tandis que les termes en θ_2^2 auront été redistribués sur la partie constante d'une part et la partie en θ_1^2 d'autre part. L'expression obtenue est donc quadratique en θ_1 uniquement, ce qui rend moins conservatif le test de multi-convexité.

Nous avons implémenté pour ce problème, la méthode de résolution par retour d'état (théorème 6.1), puis par retour de sorties en utilisant la technique de changement de variables. L'optimisation du niveau de performance γ est effectuée pour chaque valeur entière de ν entre 0 et 10.

On représente finalement (voir figure 6.2) les courbes d'évolution du niveau de performance atteint en fonction de la vitesse maximale d'évolution du paramètre $\rho(t)$. On

notera, ce qui était prévisible, que les performances obtenues sont d'autant plus médiocres que les variations paramétriques peuvent être rapides. A la limite, c'est-à-dire lorsque ν tend vers l'infini, le système n'est plus stabilisable et γ tend également vers l'infini.

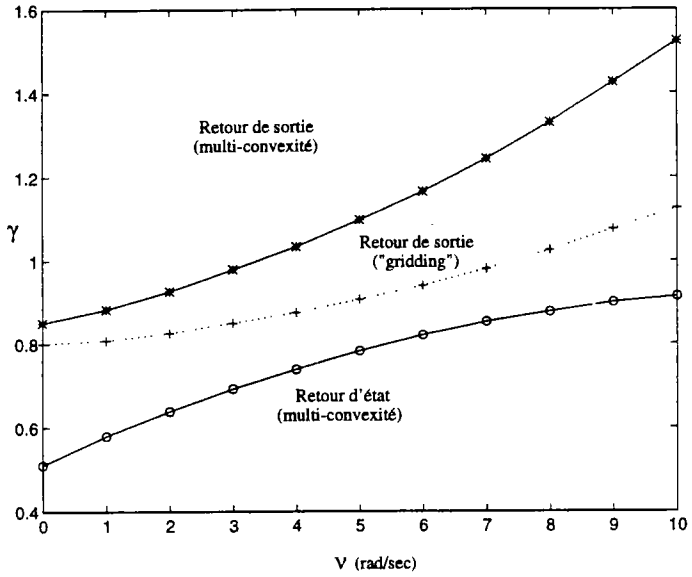


Figure 6.2: Évolution de γ en fonction de ν

La courbe en pointillés correspond à l'approche développée dans [135] et s'appuie sur la technique de quadrillage du domaine paramétrique (voir chapitre 3). Le fait qu'elle conduise à un meilleur résultat, en particulier sur cet exemple était prévisible car:

- elle permet de traiter le problème directement, sans recours à une transformation affine, plus ou moins conservative
- en testant la négativité en différents points, elle vérifie des conditions qui sont nécessaires (mais non suffisantes en général).

Il faut savoir néanmoins, que le correcteur obtenu par cette dernière approche n'est pas directement utilisable puisqu'il contient dans son expression, la dérivée des paramètres[4]. Pour contourner cette difficulté, on trouvera une variante dans [14], qui consiste à traiter

[4]qui est une mesure rarement disponible!

la dérivée en question comme de l'incertitude. De notre point de vue, cela contribue à alourdir une méthode, dont la mise en œuvre était déjà relativement complexe.

Pour conclure, on pourra finalement souligner que l'écart observé entre les deux approches reste modeste, ce qui constitue un argument de poids en faveur des résultats que nous avons présentés, auquel s'ajoute surtout celui d'une plus grande simplicité de mise en œuvre.

Néanmoins, en ce qui concerne l'ensemble de ces techniques de synthèse pour les systèmes LPV à paramètres lentement variables, il faut être conscient qu'elles se situent actuellement à la limite des problèmes que l'on peut raisonnablement traiter en faisant appel à la résolution de LMI. L'exemple que nous venons de décrire est relativement simple, puisqu'il ne comporte que 8 états. Pourtant, le nombre de variables à optimiser est déjà supérieur à 200 quelque soit l'approche retenue (légèrement moindre toutefois, dans le cas du retour d'état). La viabilité pratique de ces dernières approches passe donc par l'amélioration des performances des algorithmes de résolution des LMI mais aussi par la simplification des caractérisations théoriques.

Conclusion

En utilisant les résultats d'analyse du chapitre 3, nous avons développé dans cette seconde partie du mémoire, un ensemble de méthodes de synthèse pour les systèmes LPV. En choisissant le correcteur sous une forme similaire à celle du système, nous avons pu mettre en évidence la convexité des caractérisations obtenues, ce qui, pour la résolution numérique est essentiel.

Un algorithme itératif de synthèse LPV robuste a également été développé en vue de permettre notamment le calcul de lois de commande pour les systèmes LPV dont les paramètres ne sont pas tous mesurables, ou dont certains sont mal connus. Bien que cette technique ne soit pas globalement convexe, l'expérience montre qu'elle affiche un comportement qui, sur le plan numérique est généralement tout à fait satisfaisant. L'algorithme sera d'ailleurs utilisé au chapitre 9.

Finalement, nous nous sommes intéressés à la prise en compte explicite de bornes sur la vitesse d'évolution des paramètres. Dans le cas du modèle affine, une caractérisation convexe des solutions, a pu être obtenue.

Applications

Introduction

Nous présentons dans cette troisième partie du mémoire, trois applications, dans l'ordre chronologique où elles ont été développées.

Dans la première, on s'intéresse au pilotage en incidence d'un missile air-air. L'étendue du domaine de vol induit des variations extrêmement importantes sur les coefficients aérodynamiques, ce qui rend impossible la détermination d'une loi de commande unique assurant stabilité et performances. Par ailleurs, les évolutions extrêmement brutales de l'engin, constituent un point critique pour l'implémentation de lois de commandes interpolées, dont on ne peut être sûr qu'elles garantiront la stabilité globale. Il s'agit par conséquent d'une application tout à fait pertinente pour la mise en œuvre des techniques de synthèse que nous avons développées dans la seconde partie.

Nous considérons ensuite un problème dont la nature est complètement différente puisqu'il s'agit de la tenue en immersion constante d'un sous-marin en présence de houle. Les variations paramétriques du modèle seront engendrées ici par les évolutions de la vitesse longitudinale de l'engin. Ces dernières sont naturellement peu rapides et, pour cet exemple, les techniques classiques de séquencement de gains en fonction de la vitesse peuvent être envisagées. Néanmoins, notre approche ne nécessitant qu'une seule synthèse, celle-ci est moins fastidieuse dans sa mise en œuvre. Elle permet aussi d'éviter les soucis de l'interpolation, dont nous avons déjà souligné dans l'introduction à la seconde partie, qu'elle requiert un certain niveau d'expertise ainsi qu'une connaissance précise du système.

Nous consacrons une attention particulière à la dernière application où nous traiterons du pilotage longitudinal d'un avion de combat. Le but est de fournir une aide au pilote qui continue donc à jouer un rôle actif dans la boucle, mais pour qui la prise en compte de certains phénomènes liés à d'importantes variations paramétriques est loin d'être évidente. Cette application fera l'objet d'un développement complet depuis la phase de construction des modèles en vue d'appliquer une méthode de synthèse LPV robuste aux incertitudes paramétriques jusqu'aux validations finales sur simulations non-linéaires.

Chapitre 7

Pilotage d'un missile

Le problème considéré dans ce chapitre est celui du pilotage en incidence d'un missile air-air. L'engin évolue sur un domaine extrêmement large. L'altitude est en effet libre de varier entre 0 et 18000 m, tandis que le nombre de Mach évolue entre 0.35 et 4.35. Ajoutons à cela des variations possibles de l'incidence entre 0 et ± 40 deg. Il faut donc s'attendre à des variations paramétriques rapides et de grande amplitude d'une part, ainsi qu'à d'importantes non-linéarités d'autre part. Notons par ailleurs la présence d'un mode flexible qui vient sévèrement perturber l'accès aux mesures d'incidence et de vitesse de tangage.

Pour répondre au cahier des charges, la loi de commande devra:

- assurer un niveau de performance élevé sur l'ensemble du domaine de fonctionnement, en prenant pour cela nécessairement en compte l'évolution des dynamiques au cours du vol,
- garantir des marges satisfaisantes de gain, de phase et de retard ainsi qu'une atténuation suffisante du mode flexible lorsque l'on procède à une analyse fréquentielle du système

Les méthodologies de synthèse modernes décrites dans [104, 132] fournissent une réponse systématique au second point. Mais, compte tenu de la complexité des correcteurs obtenus (ordre élevé), la phase d'interpolation, qui devrait permettre de satisfaire au premier objectif s'avère particulièrement délicate. Les techniques de synthèse adaptatives [68], permettent a contrario de répondre aux exigences de performances sur l'ensemble du domaine d'évolution, mais rencontrent des difficultés dans la prise en compte des spécifications de robustesse non paramétrique.

Fournir une réponse simultanée à ces deux objectifs est certainement l'une des principales motivations qui a conduit au développement des méthodes de synthèse LPV présentées dans la seconde partie de la thèse [10, 117, 21, 5, 134].

Nous utiliserons ici un résultat du chapitre 4 concernant l'approche quadratique de type $\mathcal{H}_\infty$ dans le cadre d'une modélisation polytopique. Dans un premier temps, nous nous livrons à une rapide description du système suivi d'une analyse boucle ouverte, d'où l'on fera clairement ressortir la nécessité d'une compensation en boucle fermée. Nous présenterons ensuite la structure retenue pour la loi de commande puis la construction du modèle de synthèse, en précisant de quelle manière sont prises en compte les spécifications de performances et de robustesse. La résolution numérique pourra alors être envisagée, suivi d'une série d'analyse et de simulations des résultats obtenus.

Note importante: Le travail présenté dans ce chapitre ayant fait l'objet d'une étude industrielle classée **Confidentiel Défense**, la partie de notre exposé consacrée à la description boucle ouverte du missile, se limitera à ce qu'il nous a été autorisé de publier [21, 5].

7.1 Description et analyse du problème

Dans cette application, on suppose légitime le découplage des axes de tangage, roulis et lacet, et on s'intéressera par la suite aux évolutions dans le plan longitudinal, car il est ici question de pilotage en incidence. Il est à noter que la méthode a également été appliquée avec succès aux problèmes de stabilisation du roulis et du lacet[1].

Après linéarisation autour d'un point de vol, les équations du mouvement longitudinal de l'engin sont décrites par la représentation simplifiée:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -Z_\alpha & 1 \\ -M_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ M_{\delta_m} \end{pmatrix} \delta_m \\ \begin{pmatrix} a_z \\ q \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -Z_\alpha V & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ q \end{pmatrix} \end{array} \right. \tag{7.1}$$

où les états α et q correspondent respectivement à l'incidence, et à la vitesse de tangage, tandis que δ_m représente le débattement des gouvernes aérodynamiques couplées permettant le pilotage. V désigne la vitesse de l'air et a_z l'accélération verticale, laquelle sera

[1] La résolution de ces problèmes est d'ailleurs plus simple que celui que nous développons dans ce chapitre car la flexibilité du missile en torsion est négligeable et les mesures de vitesse de lacet et roulis sont donc peu perturbées.

par la suite "normalisée":

$$a_{zv} = \frac{a_z}{Z_\alpha V} = -\alpha$$

Les paramètres aérodynamiques Z_α, M_α et M_{δ_m} sont ici des fonctions du point de vol (Mach (M), Altitude (H)) et de l'incidence α. On remarquera au passage que le modèle est en fait obtenu par linéarisation non pas autour de points d'équilibre, mais de trajectoires le long desquelles l'incidence n'est pas nécessairement constante.

On notera que la force de rappel sur q est négligeable ($M_q = 0$), de même que la portance engendrée par les gouvernes ($Z_{\delta_m} = 0$), ce qui permet de simplifier quelque peu le modèle. Notons par ailleurs que les modes flexibles affectent uniquement les mesures gyroscopiques (voir figure 7.1) grâce à un positionnement adéquat du module de mesures inertielles.

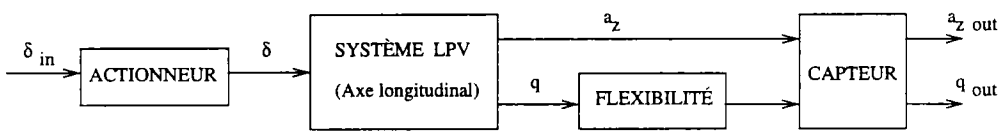


Figure 7.1: Description générale - boucle ouverte

Puisque α, M, H sont des grandeurs mesurables, les paramètres:

$$\begin{cases} Z_\alpha(t) = Z_\alpha\left(\alpha(t), M(t), H(t)\right) \\ M_\alpha(t) = M_\alpha\left(\alpha(t), M(t), H(t)\right) \\ M_q(t) = M_q\left(\alpha(t), M(t), H(t)\right) \end{cases}$$

sont donc accessibles en temps réel pour la loi de commande. On pourra donc simplifier le modèle (7.1), en intégrant la dépendance en M_q de la matrice de commande au niveau du correcteur LPV. Il vient finalement, compte tenu de la normalisation des mesures accélérométriques:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Z_\alpha & 1 \\ -M_\alpha & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta, \quad \delta = M_{\delta_m} \delta_m \\ \begin{pmatrix} a_{zv} \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ q \end{pmatrix} \end{cases} \tag{7.2}$$

Le calcul des modèles est effectué pour différentes valeurs de l'incidence entre -40 deg et $+40$ deg, du nombre de Mach entre 0.35 et 4.35, et de l'altitude entre 0 et 18000 m. Il

en résulte, comme annoncé, des variations paramétriques dont l'amplitude, est particulièrement élevée:

$$Z_\alpha(t) \in [0.30\,,\ \ 4.40]\,, \qquad M_\alpha(t) \in [-370\,,\ \ 380] \tag{7.3}$$

Si l'on se livre maintenant à une rapide analyse boucle ouverte, on remarquera qu'un domaine paramétrique relativement large engendre l'instabilité. Pour chaque valeur figée de Z_α et M_α, le polynôme caractéristique est donné par:

$$p(s) = s^2 + Z_\alpha s + M_\alpha$$

On s'aperçoit donc que le système LTI est instable pour toute valeur négative de M_α, tandis que l'influence de Z_α porte essentiellement sur l'amortissement (voir figure 7.2).

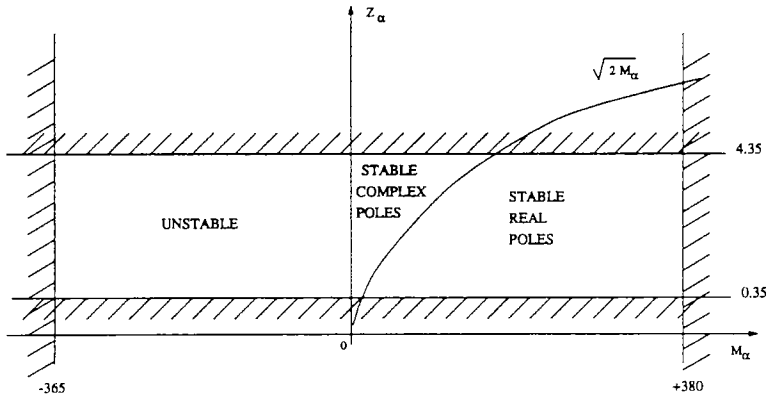


Figure 7.2: Nature des pôles en fonction du point de vol

Pour donner une idée plus précise de la forte disparité entre les modèles et du degré d'instabilité de certains d'entre eux, nous représentons sur la figure suivante les pôles associés à 25 couples $(Z_\alpha\,,\ M_\alpha)$ représentatifs du domaine de fonctionnement:

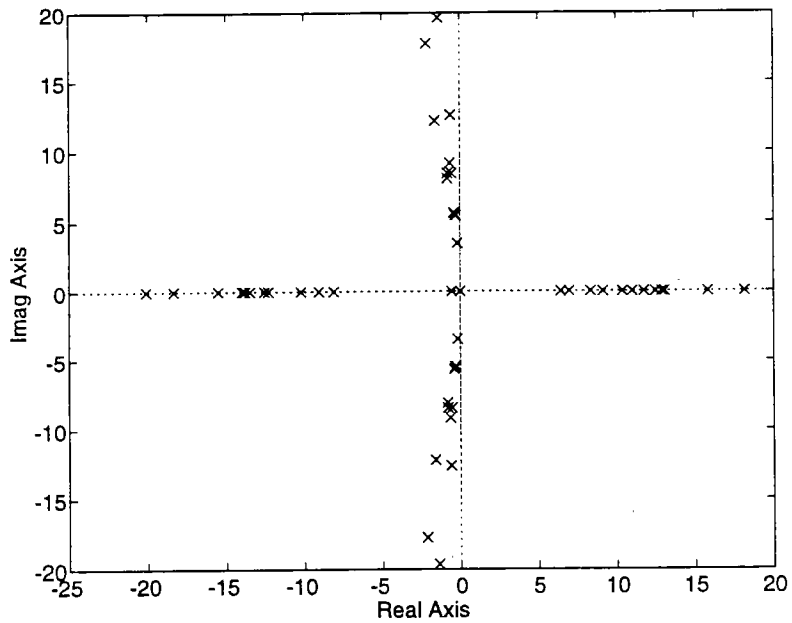


Figure 7.3: Répartition des pôles

Cette figure donne par ailleurs une illustration éloquente de la difficulté que représenterait la recherche d'un correcteur unique, robuste à de telles variations. Ces 25 modèles seront utilisés un peu plus loin dans la phase de validations des lois de commande LPV.

Afin de compléter la description, il convient d'intégrer voir figure 7.1) à la partie LPV du modèle:

- le mode flexible sur la chaine de mesures gyroscopiques,
- la centrale inertielle et l'actionneur dont les bandes passantes, comme dans toute application réaliste, sont nécessairement limitées.

En toute rigueur, l'influence de la flexibilité varie avec les paramètres Z_α et M_α. Pour simplifier, on supposera néanmoins cette influence constante en retenant le pire cas, c'est-à-dire l'amortissement le plus faible et la fréquence de résonance la plus basse. La figure (7.4) représente la caractéristique fréquentielle associée. On trouvera également les fonctions de transfert (passe-bas) de l'actionneur et des détecteurs (même fonction pour a_z et q).

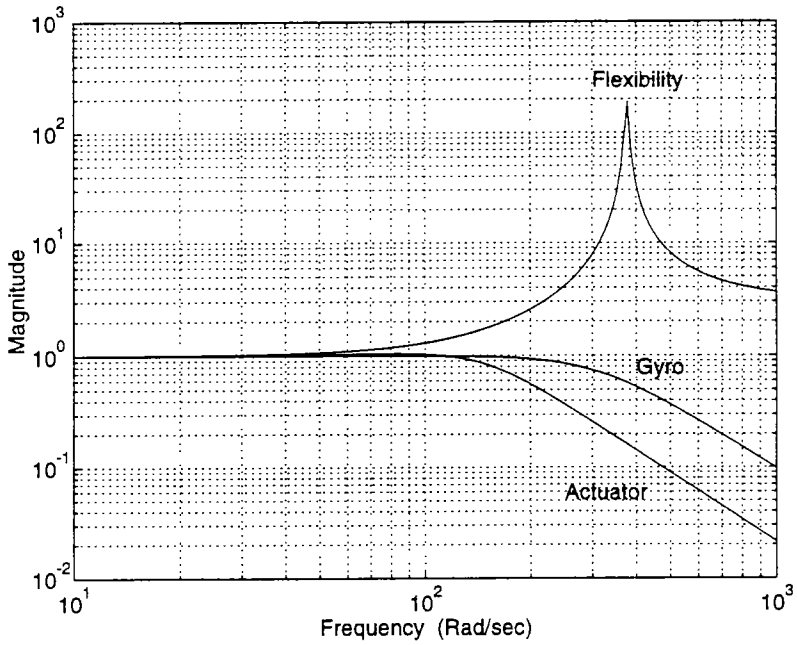


Figure 7.4: Fonctions de transfert: Actionneur, Détecteur, Mode flexible

7.2 Mise en forme du problème de synthèse

Nous présentons maintenant les différentes étapes de la construction du modèle de synthèse LPV sur lequel nous appliquerons ensuite la méthode résumée par le théorème 4.1: *Correcteurs polytopiques de type* $\mathcal{H}_\infty$.

Modèle polytopique du missile

En remarquant, d'après (7.2) que la dépendance paramétrique intervient après simplification, uniquement dans la matrice A, et que les éléments ajoutés (actionneur, détecteur, flexibilité) sont stationnaires, le modèle LPV du système complet s'écrira sous la forme:

$$G(\theta) \quad \begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + B_2\delta \\ y = C_2 x \end{cases} \tag{7.4}$$

où θ, conformément aux notations des parties **I** et **II**, désigne le vecteur des paramètres regroupant ici Z_α et M_α:

$$\theta(t) \triangleq \begin{pmatrix} Z_\alpha(t) \\ M_\alpha(t) \end{pmatrix}$$

Bien que les composantes de θ ne soient pas tout à fait indépendantes entre elles, nous supposerons néanmoins pour simplifier que tel est le cas. Elles évoluent donc dans un carré dont les 4 sommets correspondent aux différentes combinaisons de valeurs extrémales:

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} 0.30 \\ -370 \end{pmatrix} \quad \theta_2 = \begin{pmatrix} 0.30 \\ +380 \end{pmatrix} \quad \theta_3 = \begin{pmatrix} 4.40 \\ -370 \end{pmatrix} \quad \theta_4 = \begin{pmatrix} 4.40 \\ +380 \end{pmatrix}$$

En notant d'après (7.2), que la matrice A dépend des paramètres de manière **affine**, on déduit facilement un modèle polytopique du système $G(\theta)$:

$$\mathcal{C}o\left\{\begin{pmatrix} A_i & B_2 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix}, \ i = 1, \ldots, 4\right\}, \quad A_i = A(\theta_i), \ i = 1, \ldots, 4$$

Structure de la loi de commande

On choisira pour ce problème particulièrement exigeant au niveau des performances, une structure de loi de commande, plus riche que la structure classique, puisqu'elle comporte deux "degrés de liberté": K_1 et K_2:

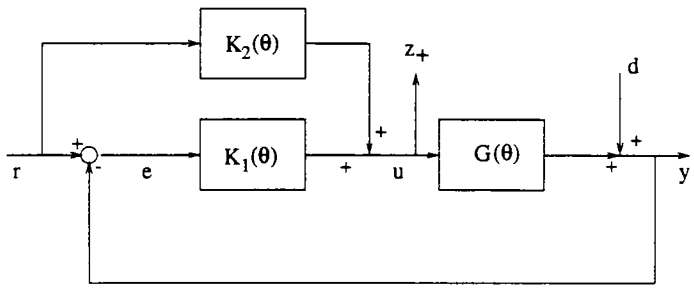


Figure 7.5: Structure de la loi de commande

Chacun des correcteurs K_1 et K_2 - recherché sous forme polytopique - dépend bien sûr du vecteur paramétrique θ.

Description du modèle de synthèse

La procédure de construction du modèle de synthèse que nous détaillons maintenant est largement inspirée de la formulation classique des problèmes de synthèse $\mathcal{H}_\infty$. La différence

essentielle réside dans le fait que les opérateurs dont on va rechercher à minimiser le gain, dépendent du paramètre θ.

La prise en compte des objectifs de performances et de robustesse étant réalisée ici par la minimisation d'un critère de type "sensibilité mixte", on s'intéressera aux opérateurs suivants:

$$\mathcal{T}_1(\theta) = \mathcal{T}_{r\to e}(\theta) \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_2(\theta) = \mathcal{T}_{d\to z_+}(\theta)$$

qui aux entrées r et d (voir schéma 7.5) font correspondre respectivement les sorties e et z_+.

Notons qu'en l'absence d'injection de consignes ($K_2(\theta) = 0$), on retrouve les relations habituelles:

$$\mathcal{T}_{r\to e}(\theta) = -\mathcal{T}_{d\to e}(\theta) \triangleq S(\theta) = (I + G(\theta)K_1(\theta))^{-1}$$
$$\mathcal{T}_{r\to z_+}(\theta) = -\mathcal{T}_{d\to z_+}(\theta) = K_1(\theta)S(\theta)$$

qui permettent d'établir le lien entre:

- $\mathcal{T}_1(\theta)$ et la fonction de sensibilité classique S dont on associe la norme à une mesure de performances (qualité du suivi de consignes),
- $\mathcal{T}_1(\theta)$ et la fonction KS dont on montre qu'elle permet la prise en compte d'erreurs additives de modèle.

Compte tenu des éléments qui précèdent, le problème de synthèse que nous devons chercher à résoudre consiste en la détermination d'un correcteur LPV:

$$K(\theta) = \begin{pmatrix} K_1(\theta) & K_2(\theta) \end{pmatrix}$$

assurant, pour toute trajectoire admissible $\theta(t)$:

- la stabilité interne du système décrit par la figure (7.5),
- la minimisation du gain $\mathcal{L}_2$ de l'opérateur en boucle fermée (voir schéma 7.6):

$$\begin{pmatrix} W_1\mathcal{T}_1(\theta) \\ W_2\mathcal{T}_2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{pmatrix} \mathcal{F}_l\left(P(\theta), K(\theta)\right)$$

où W_1 et W_2 sont des opérateurs de pondération LTI que nous décrirons ultérieurement. La forme standard de synthèse $P(\theta)$ est définie par les relations suivantes:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_+ \\ e \\ e \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\theta(t)) & 0 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -C & I & -I & 0 \\ -C & I & -I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ r \\ d \\ u \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

soit, sous forme **polytopique**:

$$P(\theta) \in Co \left\{ \begin{pmatrix} A_i & 0 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -C & I & -I & 0 \\ -C & I & -I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad i = 1, \ldots, 4 \right\} \tag{7.6}$$

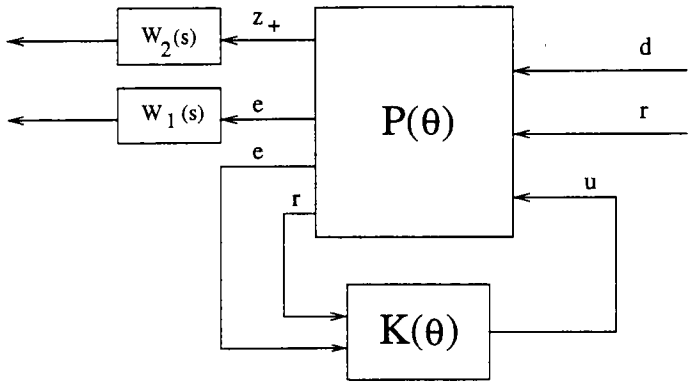


Figure 7.6: Illustration du problème de synthèse

7.3 Choix des filtres et résolution

Spécifications et choix des filtres

La détermination des filtres de pondération repose sur une analyse à paramètres "gelés" du système LPV. Les principes qui vont guider notre choix sont donc ceux que l'on retrouve en synthèse $\mathcal{H}_\infty$ classique. Les exigences au niveau performances et robustesse, si l'on considère le missile comme un système LTI autour de chaque point de vol sont les suivantes:

- Temps de réponse autour de 0.2 *sec* avec un dépassement maximal de consigne toléré à 15%,
- Limitation des gains hautes fréquences (robustesse aux bruits de mesures, atténuation des modes flexibles),
- Contraintes classiques sur les marges de gain et de phase:

- Marge de gain: $M_G > 5dB$
- Marge de phase: $M_\varphi > 30\ deg$

Après quelques essais, suivis d'analyses en boucle fermée des résultats obtenus, nous avons finalement retenu le choix suivant:

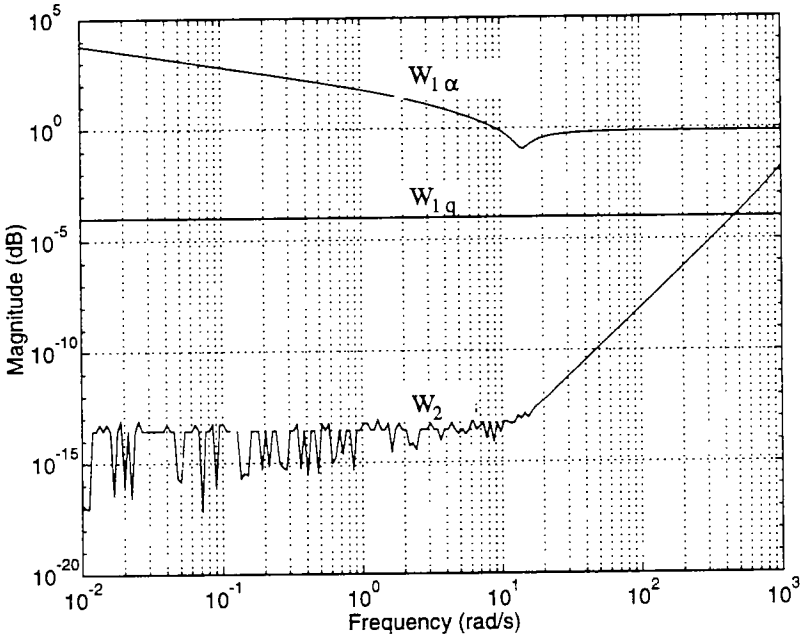


Figure 7.7: Filtres de pondération

Filtre de performances $W_1(s)$:

$$W_1(s) = \begin{pmatrix} W_{1\alpha}(s) & 0 \\ 0 & W_{1q}(s) \end{pmatrix}$$

où $W_{1\alpha}(s)$ est filtre passe-bas, du second ordre, tandis que $W_{1q}(s)$ est un simple gain statique. Dans la mesure où le critère de performances porte sur la qualité du suivi de consigne en α, le gain du premier filtre sera choisi nettement supérieur à celui du second (voir figure 7.7).

Filtre de robustesse $W_2(s)$: Le filtre $W_2(s)$, afin de limiter les gains hautes fréquences est donc un filtre passe-haut. Plusieurs tentatives infructueuses, ont clairement mis en évidence la nécessité d'une sélectivité importante du filtre, avec un gain particulièrement faible en dessous de 10 rad/sec puis un taux de montée très élevé au-delà. Pour ce faire, nous avons opté pour un filtre de Chebyshev d'ordre 6.

Résolution et implémentation du correcteur

Pour un choix effectué de W_1 et W_2, il ne reste plus qu'à construire le modèle polytopique de la "forme standard pondérée":

$$P_{\mathrm{W}}(\theta) = \mathrm{diag}(W_2,\, W_1,\, I)\, P(\theta)$$

En remarquant qu'elle se met sous la forme (4.1), l'application du théorème (4.1) est immédiate. La résolution a été effectuée grâce au logiciel $LMI - Lab$. Nous avons obtenu, pour le choix des filtres indiqué plus haut, après 100 itérations, un gain $\gamma = 1.1$. Le temps de calcul est d'environ 10 min, ce qui rend parfaitement envisageable le procédé itératif de choix des filtres mentionné précédemment. On notera cependant, que les premiers réglages ont été effectués à partir de synthèses classiques réalisées en divers points du domaine de vol.

Transformation de coordonnées: Après optimisation, on procède à la reconstruction des sommets du correcteur (voir chapitre 4) que l'on obtient donc sous la forme:

$$\begin{pmatrix} A_K(\theta(t)) & B_K(\theta(t)) \\ C_K(\theta(t)) & D_K(\theta(t)) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i(t) \begin{pmatrix} A_{K_i} & B_{K_i} \\ C_{K_i} & D_{K_i} \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

où les $\alpha_i(t)$ sont les coordonnées barycentriques du vecteur $\theta(t)$ à l'intérieur du carré de sommets $\{\theta_i\}_{\{i=1\ldots4\}}$ (voir figure 7.8).

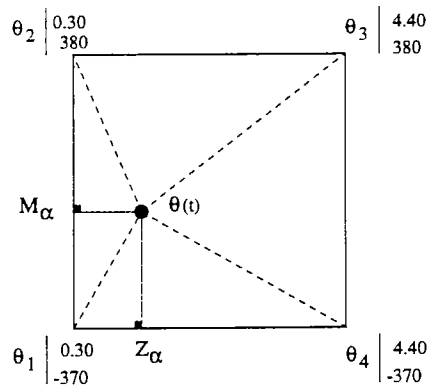


Figure 7.8: Coordonnées barycentriques

L'implémentation du correcteur polytopique (voir 4.5) repose sur la transformation de coordonnées suivante:

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = \left(\frac{4.40-Z_\alpha(t)}{4.10}\right)\left(\frac{380-Z_\alpha(t)}{750}\right) \\ \alpha_2(t) = \left(\frac{4.40-Z_\alpha(t)}{4.10}\right)\left(\frac{370+Z_\alpha(t)}{750}\right) \\ \alpha_3(t) = \left(\frac{Z_\alpha(t)-0.30}{4.10}\right)\left(\frac{380-M_\alpha(t)}{750}\right) \\ \alpha_4(t) = \left(\frac{Z_\alpha(t)-0.30}{4.10}\right)\left(\frac{370+M_\alpha(t)}{750}\right) \end{cases} \tag{7.8}$$

On notera ici, compte tenu de la simplicité du modèle que le calcul des α_i à partir des coordonnées cartésiennes $Z_\alpha(t)$ et $M_\alpha(t)$ requiert très peu de calculs. Ce point est fondamental, dans la mesure où ces opérations doivent être effectées par le calculateur embarqué, en temps réel.

Echantillonnage: De par la rapidité de l'engin, la fréquence d'échantillonnage choisie par le constructeur est particulièrement élevée. Elle est ici de 1000 Hz. La discrétisation du correcteur (voir chapitre 3) sera donc réalisée avec une période de 1 ms. On s'assurera pour cela que les dynamiques les plus rapides n'excèdent pas 2000 rad/sec.

7.4 Simulations et conclusions

Avant de conclure, nous nous livrons ici à deux séries de tests en vue de valider le correcteur LPV obtenu:

Tests LTI

Il s'agit de tests classiques dans le domaine fréquentiel (lieux de Black) pour évaluer les marges de gain et de phase, ou encore de simulations temporelles LTI. L'ensemble de ces tests est donc réalisé en "gelant" les paramètres. On gardera néanmoins à l'esprit la validité toute relative de ce type de test. Nous reprendrons pour cette première analyse, les 25 modèles dont nous avons représentés les pôles sur la figure (7.3).

On observe, sur la superposition des lieux de Black (voir figure 7.9) une marge de gain supérieure à 5 dB et une marge de phase supérieure à 35 deg, quelque soit le modèle envisagé.

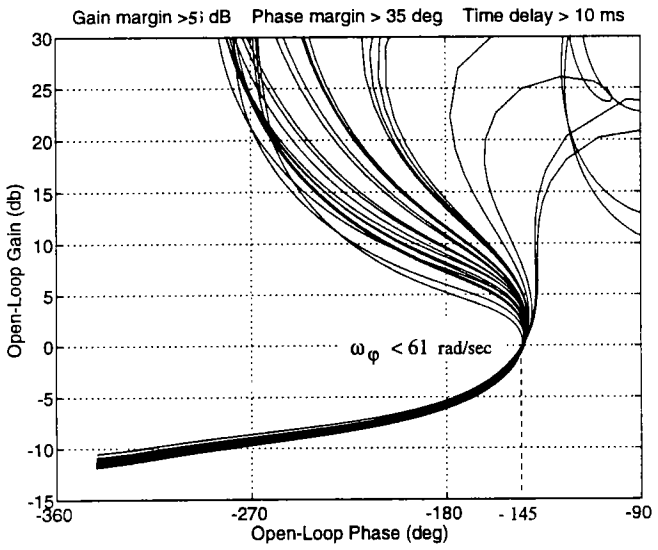


Figure 7.9: Superposition des lieux de Black

On notera par ailleurs la grande proximité des lieux dans le domaine des hautes fréquences ($\omega > \omega_\varphi$), après franchissement de l'axe 0 dB, ce qui témoigne d'un comportement robuste de la loi de commande. Enfin, le calcul des marges de retard donne pour chaque modèle:

$$M_r \triangleq \frac{M_\varphi}{\omega_\varphi} \geq 10\ ms$$

soit une marge dix fois supérieure à la période d'échantillonnage.

Le tracé des réponses temporelles à un échelon (figure 7.10) montre ensuite, que les spécifications de temps de réponse sont respectées indépendamment du point de fonctionnement. Par ailleurs, les dépassements de consigne restent toujours inférieurs à 15%.

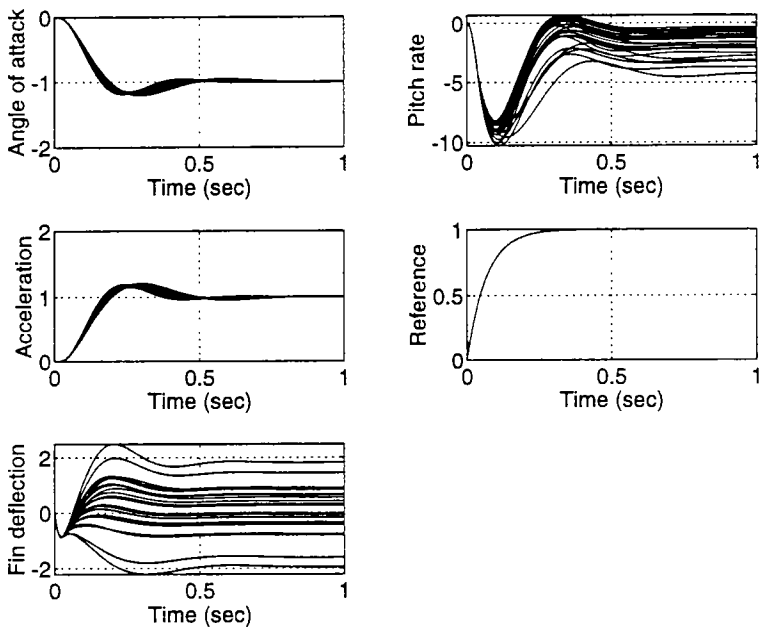


Figure 7.10: Simulations LTI sur 25 points

Tests LPV

Comme nous l'avons déjà signalé dans ce chapitre ainsi qu'en différents points de la thèse, si les analyses que nous venons de présenter donnent un premier aperçu favorable quant au comportement du correcteur, elles ne permettent pas de conclure quant au respect des performances dans le cas d'évolutions rapides des paramètres. Nous proposons ici d'étudier ce comportement sur une série de simulations temporelles[2]. Pour cela, nous ferons suivre aux paramètres, Z_α et M_α, successivement trois types de trajectoires:

- **Trajectoire N°1:** Il s'agit d'une trajectoire continue, différentiable (voir figure 7.11), parcourant rapidement les zônes "LTI-stables" et "LTI-instables" du do-

[2]L'analyse fréquentielle n'est plus valable ici - voir chapitre 9 pour une étude plus complète du système LPV en boucle fermée

maine paramétrique, pour venir converger vers un point fixe. La simulation temporelle correspondante est représentée par la figure (7.12).

- **Trajectoire N°2:** Dénuée de tout sens physique, cette trajectoire particulièrement brutale, non différentiable, permet de tester le comportement du correcteur dans des conditions extrêmes. On vérifie ainsi, que des variations infiniment rapides des paramètres ne déstabilisent pas la boucle fermée - voir figures (7.13)-(7.14).

- **Trajectoire N°3:** Sur cette dernière trajectoire (figure 7.15), analogue à la seconde, on notera la présence de bruit sur le second paramètre (M_α). De notre point de vue, ce dernier test revêt une importance capitale, dans la mesure où il s'agit d'un phénomène courant sur la plupart des applications. Curieusement, on notera un meilleur comportement du correcteur dans ce dernier cas (voir figure 7.16), par rapport au précédent. Le dépassement de consigne est en effet moindre! Il apparaît donc que la mesure précise des paramètres n'est pas nécessaire ici pour garantir un bon niveau de performances en boucle fermée. Ce constat, justifié par les arguments théoriques que nous avons développés au chapitre 4, est particulièrement encourageant.

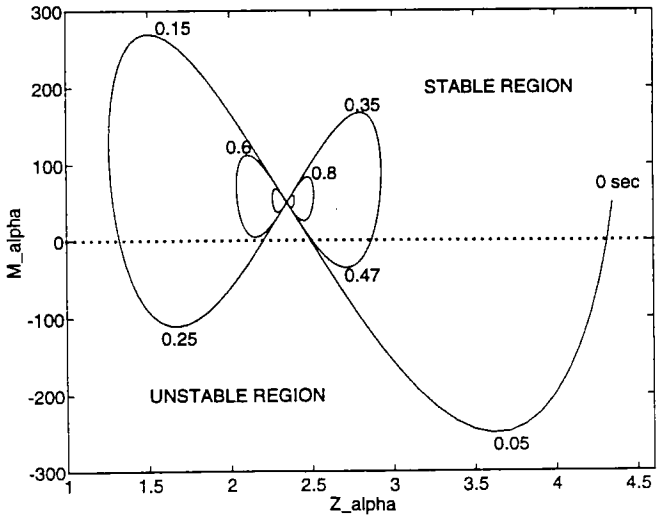


Figure 7.11: Trajectoire paramétrique N° 1

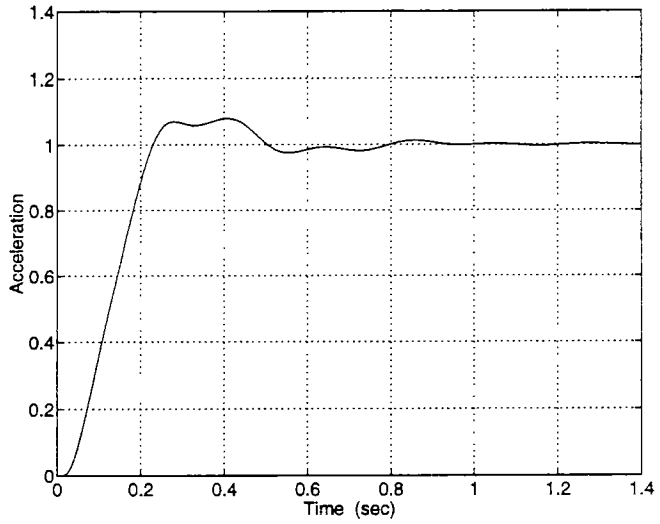


Figure 7.12: Simulation LPV N° 1

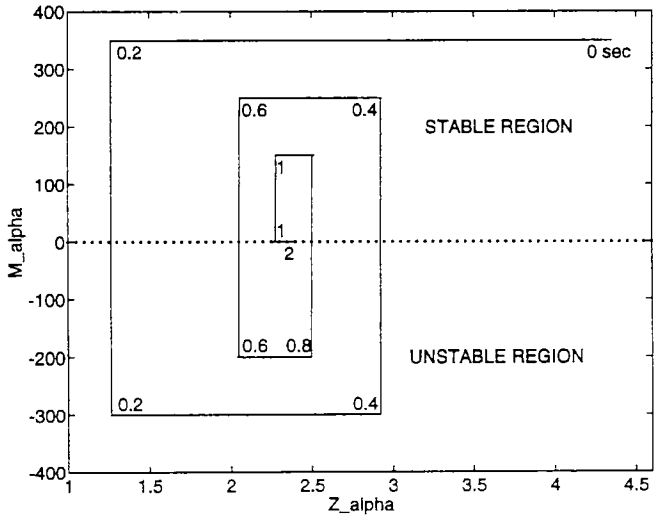


Figure 7.13: Trajectoire paramétrique N° 2

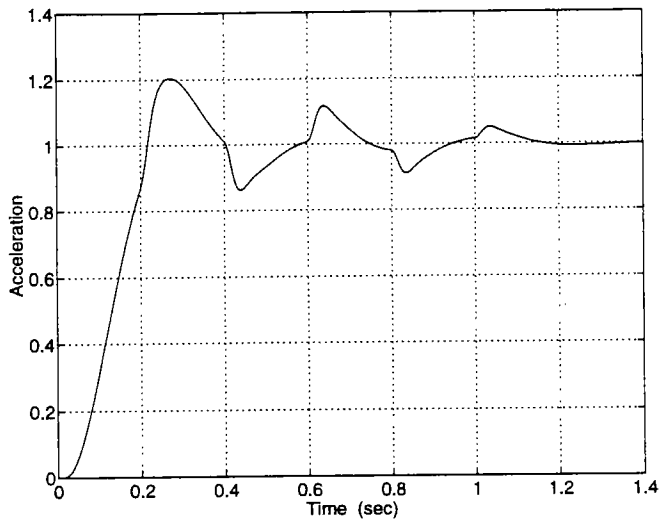


Figure 7.14: Simulation LPV N° 2

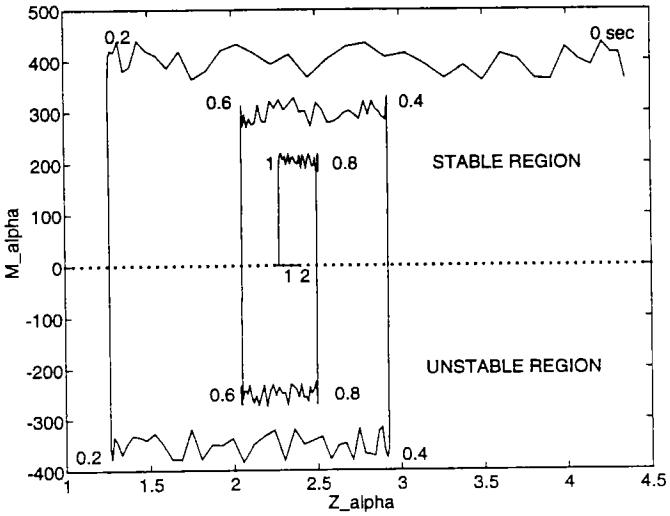


Figure 7.15: Trajectoire paramétrique N° 3

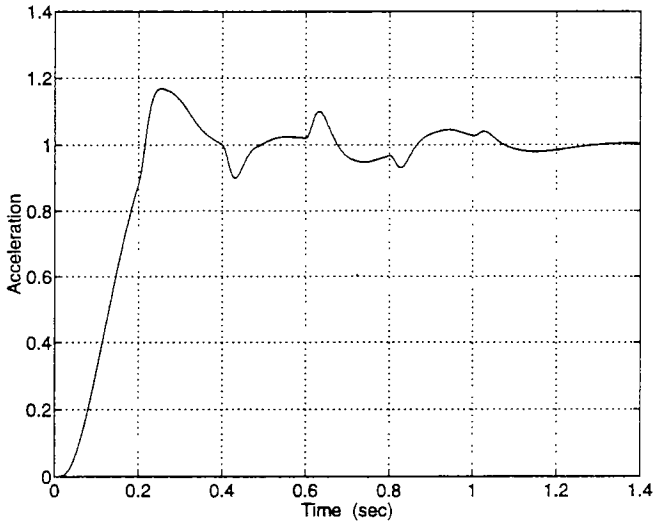


Figure 7.16: Simulation LPV N° 3

Conclusions

A travers ce chapitre, nous avons envisagé une application réaliste au pilotage en incidence d'un missile air-air. La méthode utilisée, au vu des analyses et simulations présentées a donné complète satisfaction en répondant de manière rigoureuse aux objectifs fixés. Il est important de souligner que la même technique a été utilisée avec succès afin d'asservir (atour de 0) les angles de roulis et lacet. Notons finalement, que l'approche a pu être validée après implémentation sur un modèle complet du missile par une série de simulations non-linéaires. La dernière application (cf. chapitre 9) sera pour nous l'occasion d'illustrer plus en détails cette phase importante que constitue l'intégration de la loi de commande LPV sur le système non-linéaire.

Chapitre 8

Tenue en immersion d'un Sous-Marin

S'il est vrai que les perturbations extérieures, principalement liées aux efforts de houle, agissent très faiblement sur un sous-marin en immersion profonde, ces conditions idéales de navigation se dégradent fortement au voisinage de la surface. Il est pourtant essentiel que l'engin puisse évoluer avec précision en immersion périscopique, donc à quelques mètres seulement de profondeur, même si la mer devient forte.

La conception d'un système automatique de tenue en immersion requiert donc une attention particulière. La loi de commande devra en effet:

- compenser les effets de la houle que nous venons d'évoquer,
- s'adapter aux évolutions de la vitesse du sous-marin qui engendrent des variations importantes sur l'efficacité des gouvernes mais aussi sur les dynamiques de l'appareil.

La démarche souvent adoptée dans la littérature pour traiter le problème - tout à fait classique[1] - s'articule autour des deux étapes suivantes:

1. Déterminer un ensemble de correcteurs permettant, en compensant les effets de la houle, de maintenir le sous-marin en immersion constante pour diverses valeurs de vitesse,
2. Construire une loi de commande globale par interpolation des différents correcteurs obtenus.

[1] voir introduction de la seconde partie.

Les méthodes envisagées pour résoudre le problème à vitesse constante[2]. sont assez variées. On remarque depuis quelques années un engouement particulier en faveur des techniques $\mathcal{H}_\infty$ [131, 125]. Il en découle cependant des lois de commande souvent complexes qu'il devient difficile d'interpoler. Dans une publication récente [77], on note un retour aux méthodes classiques de synthèse axe par axe, fondées sur l'exploitation des lieux de Bode et de Nyquist. Une telle approche offre l'avantage appréciable de fournir un ensemble de correcteurs d'ordre peu élevé, limitant ainsi le nombre de gains à interpoler.

Toutefois, les méthodes qui de notre point de vue, sont les mieux adaptées au problème à traiter sont celles qui consistent à minimiser un critère de type $\mathcal{H}_2$ [72]. Ce sont en effet ces méthodes qui prennent le mieux en compte la nature stochastique des efforts de houle, pour lesquels on admet généralement une modélisation spectrale. Autrement dit, la houle est vue comme un bruit blanc filtré et il s'agit finalement de minimiser la covariance du bruit de mesures en sortie.

C'est donc sur la minimisation d'un tel critère que repose l'approche que nous nous proposons ici de suivre, dans le cadre bien sûr des systèmes LPV. Là encore, nous éviterons ainsi la fastidieuse étape d'interpolation de gains.

8.1 Modélisation du sous-marin et des efforts de houle

Le pilotage du sous-marin dans le plan vertical est assuré à l'aide de deux barres de plongée situées au niveau de la tourelle et l'arrière de l'engin. Un changement d'inclinaison des barres modifie dans un premier temps la direction des forces hydrodynamiques ce qui induit une variation d'assiette laquelle est à l'origine d'un mouvement de plongée ou de remontée vers la surface.

[2]Il faut noter que ce problème reste encore particulièrement délicat, dans la mesure où les efforts de houle qu'il faut pourtant maîtriser sont extrêmement puissants. De plus, la difficulté est encore accrue dans le domaine des faibles vitesses associées à une perte d'efficacité sur les gouvernes.

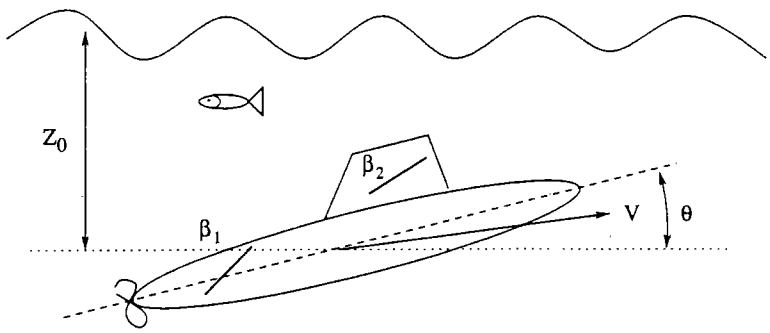


Figure 8.1: Organes de commande

Ces barres sont actionnées par des verrins dont nous indiquons sur le tableau ci-après, les limitations en position et en vitesse:

	position (deg)	vitesse (deg/sec)
β_1	± 20	± 4
β_2	± 14	± 4

Equations du mouvement dans le plan vertical

L'écriture du principe fondamental de la dynamique, conduit après linéarisation à assiette nulle, autour d'une immersion de référence (Z_0), à un système d'équations différentielles de la forme (voir [72] ou [77] pour plus de détails):

$$\dot{x} = A(v, v^2)x + v^2 B_2 u + f \tag{8.1}$$

où le vecteur d'états x et le vecteur de commandes u sont donnés par (voir schéma 8.1):

$$x = [z\ \dot{z}\ \theta\ \dot{\theta}]^T, \quad z = Z - Z_0$$

et

$$u = [\beta_1\ \beta_2]^T$$

Les éléments de la matrice d'évolution A s'expriment bien sûr, en fonction des caractéristiques hydrodynamiques de l'engin et dépendent principalement de la vitesse[3]. Il en est de même de la matrice de commande où l'on remarque que l'efficacité des gouvernes est directement proportionnelle au carré de la vitesse. Dans l'application traitée ici, les

[3]La dépendance par rapport à l'immersion reste relativement faible.

valeurs numériques sont les suivantes (immersion de $30m$, vitesse exprimée en nœuds, angles en radians):

$$A(v, v^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3.49\,10^{-3}v & -1.8\,10^{-3}v^2 & -0.35v \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1.7\,10^{-3} + 4.37\,10^{-5}v^2 & -7.66\,10^{-3} \end{pmatrix}.$$

$$B_2 = 10^{-5} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -38.2 & -42.1 \\ 0 & 0 \\ -1.87 & 1.14 \end{pmatrix}$$

Notons enfin que le vecteur $f = [0\ f_1\ 0\ f_2]^T$ représente les **efforts de houle** dont l'action sur le mouvement longitudinal se décompose en:

- une force verticale de pilonnement f_1, responsable en l'absence de contrôle, de variations d'immersion très importantes,
- un moment de tangage f_2 venant donc perturber l'assiette du sous-marin, et à terme par conséquent, l'immersion.

Il faut ajouter également une force de succion, dont l'intensité varie avec la profondeur. Dans le cas des immersions faibles, elle tend à "aspirer" le sous-marin vers la surface. Son action se situe typiquement dans les très basses fréquences. Ici, on ne prendra pas en compte ce type de force que l'on pourra compenser en faisant varier le volume d'eau contenu dans les caisses de pesée.

Modélisation spectrale des efforts de houle

L'intensité des efforts induits par la houle est plus importante à certaines fréquences. Ainsi, on notera, en ce qui concerne la force de pillonnement f_1, une action importante en basses fréquences (jusqu'à $0.1\,rad/sec$), puis un pic haute fréquence autour de $0.5\,rad/sec$. Ce dernier est particulièrement gênant car il se situe dans la bande passante des actionneurs. On décomposera donc f_1 de la façon suivante:

$$f_1 = f_{1_b} + f_{1_h}$$

Quant à l'intensité du moment de tangage f_2, elle reste particulièrement faible dans les basses fréquences pour présenter également un pic autour de $0.5\,rad/sec$.

En toute rigueur, l'influence de la houle varie en fonction de la direction du sous-marin par rapport aux vagues et de sa vitesse. Ici, nous considérerons pour simplifier, un modèle constant, associé à l'action la plus pénalisante, c'est-à-dire, celle qui correspond aux plus basses vitesses. Par ailleurs, les conditions relatives à l'état de la mer sont celles que l'on retrouve dans la plupart des publications: Force 5 avec une hauteur moyenne des vagues autour de $3m$.

Le modèle que nous retiendrons est décrit par le schéma suivant:

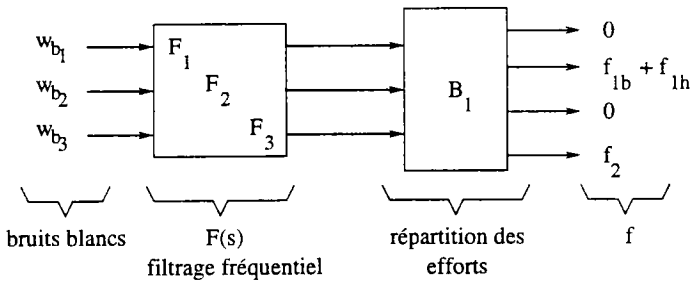


Figure 8.2: Modélisation des efforts de houle

Autrement dit, la houle est modélisée par un ensemble de bruits blancs, passés au travers de filtres fréquentiels, et dont les actions sont ensuite réparties sur f. Les filtres $F_1(s)$, $F_2(s)$ et $F_3(s)$, respectivement d'ordre 3, 6 et 6 sont caractérisés par les réponses en fréquence suivantes [27]:

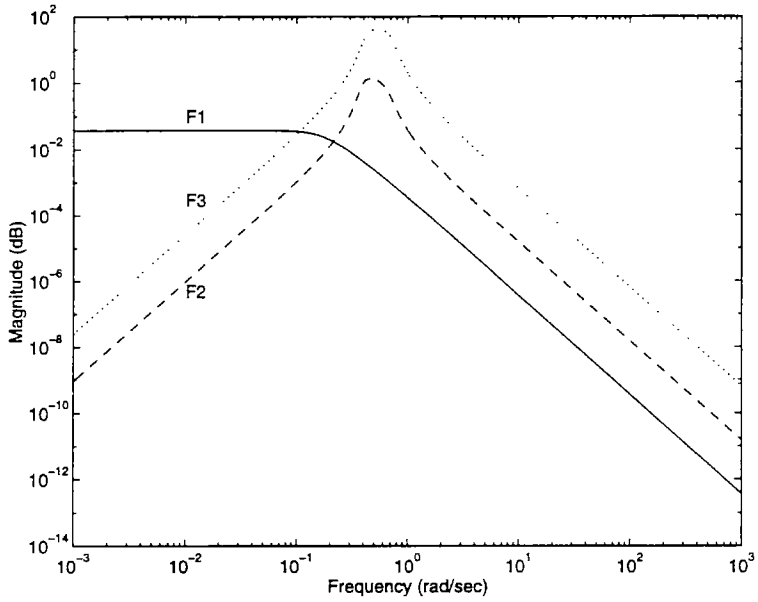


Figure 8.3: Caractérisation fréquentielle de la houle

Enfin, la matrice B_1 de répartition des efforts est donnée par:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.53 & 0.53 & 0 \\ 0 & 0 & 4.33\,10^{-4} \end{pmatrix}$$

Vue d'ensemble du système à réguler

Le modèle complet "sous-marin + houle" que nous devrons contrôler, en utilisant les mesures d'immersion (z), d'assiette (θ) et de vitesse (v) est résumé par la figure 8.4:

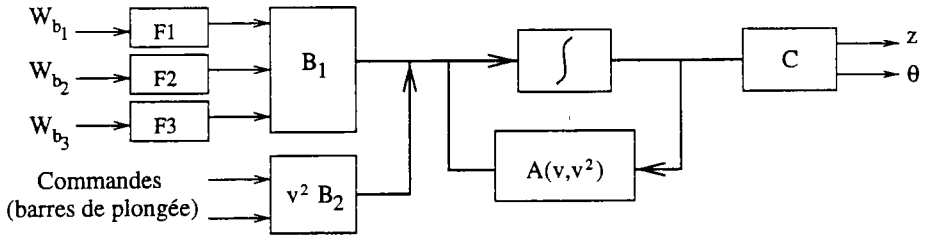


Figure 8.4: Sous-marin + houle

Dans la suite, compte tenu de la méthode de synthèse mise en œuvre, nous utiliserons un modèle temporel de la houle, en écrivant $F(s)$ sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}_F = A_F x_F + B_F w_b \\ y_F = C_F x_F \end{cases}$$

L'ensemble "sous-marin + houle" est donc finalement décrit par:

$$S(v) \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(v,v^2) & B_1 C_F \\ 0 & A_F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ B_F \end{pmatrix} w_b + \begin{pmatrix} v^2 B_2 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = C_2 x \end{cases} \tag{8.2}$$

8.2 Construction du modèle de synthèse

Modèle polytopique

Comme nous l'avons fait sur l'application précédente, la dépendance paramétrique au niveau de la matrice de commande sera directement intégrée dans la loi de commande LPV. Il reste donc à prendre en compte uniquement les variations de la matrice A dont on notera l'expression polynômiale (degré 2) en v. Une modélisation de type LFT (voir chapitre 2) semblerait donc bien indiquée dans une telle situation.

Toutefois, en remarquant la faible courbure de la fonction $f(v) = v^2$ sur la plage de vitesses (de 5 à 15 nœuds) qui nous intéresse, il s'avère que la technique du recouvrement polytopique (voir figure 8.5) est ici relativement peu conservative et conduit finalement à un résultat de meilleure qualité que le modèle LFT. On rappelle en effet (voir paragraphe 3.3.3), bien que le modèle LFT paraisse ici mieux adapté, qu'il subsiste avec ce dernier, une difficulté au niveau de la synthèse, quant à la prise en compte du caractère réel des paramètres (en l'occurence il s'agit de la vitesse).

Nous allons donc construire un modèle polytopique, à partir du recouvrement suivant:

$$\forall\, v \in [5\,,\ 15]\,, \quad (v\,,\ v^2) \in \mathcal{C}o\,\{\theta_1\,,\ \theta_2\,,\ \theta_3\}$$

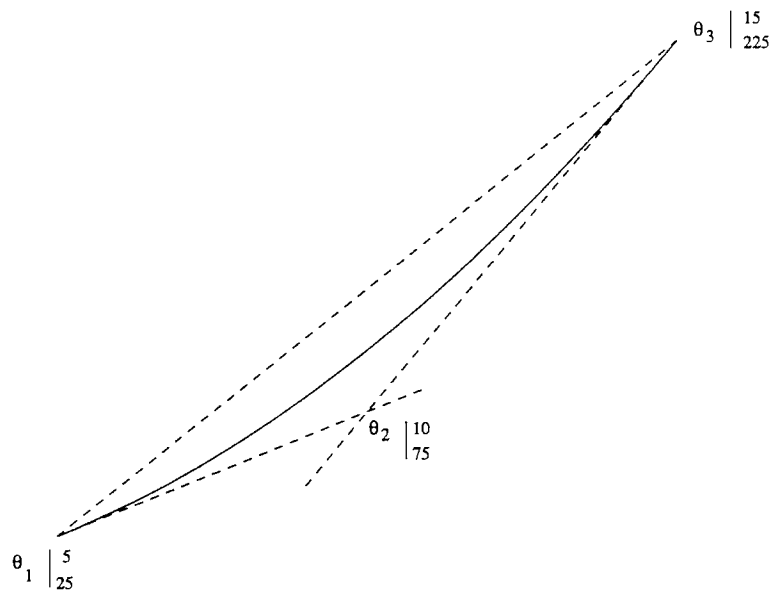


Figure 8.5: Recouvrement polytopique de la fonction $f(v) = v^2$

Remarque: Pour une vitesse donnée, appartenant à l'intervalle $[5\,,\ 15]$, les coordonnées polytopiques $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ s'obtiennent comme l'unique solution du système linéaire:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 5\alpha_1 & + & 10\alpha_2 & + & 15\alpha_3 & = & v \\ 25\alpha_1 & + & 75\alpha_2 & + & 100\alpha_3 & = & v^2 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 1 \end{array}\right. \tag{8.3}$$

On notera A_1, A_2 et A_3 les sommets du polytope tels que:

$$\forall\, v \in [5\,,\ 15]\,, \quad A(v, v^2) \in \mathcal{C}o\{A_1\,,\ A_2\,,\ A_3\}$$

soit, tout simplement:

$$A_i = A(\theta_i)\,, \quad i = 1, 2, 3$$

Finalement, en absorbant les filtres de houle, le modèle polytopique du système complet $S(\theta)$ en boucle ouverte sera obtenu sous la forme:

$$S(\theta) \in \mathcal{C}o\left\{\left[\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A_i & B_1C_F \\ 0 & A_F \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ B_F & 0 \end{pmatrix} \\ (\,C_2 \quad 0\,) & (\,0 \quad 0\,) \end{array}\right]\,,\ i = 1, 2, 3\right\}$$

Formulation du problème de synthèse

Compte tenu de la nature du problème à traiter, la structure adoptée pour la loi de commande, s'inscrit dans un schéma de régulation (figure 8.6):

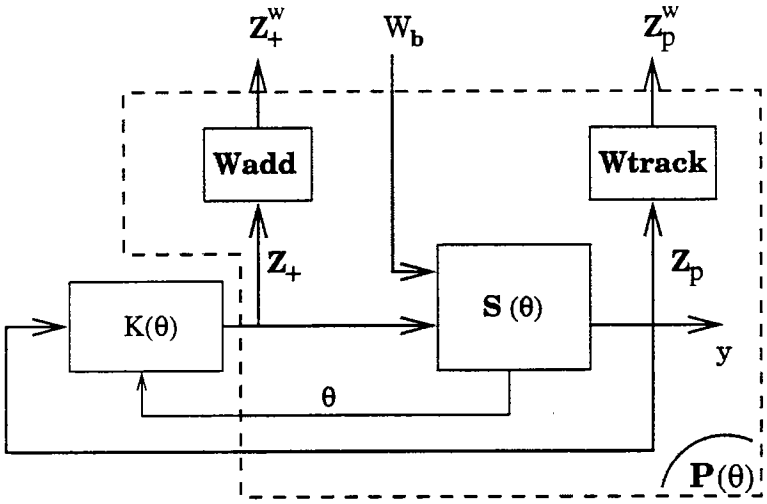


Figure 8.6: Forme standard de synthèse

Il s'agit ici de minimiser l'influence du bruit w_b sur les sorties mesurées (variations autour de l'immersion de consigne et assiette) et sur l'activité des gouvernes (respecter notamment les limitations au niveau des actionneurs).

Pour cela, nous utiliserons l'approche développée au chapitre 4 (voir théorème 4.3) en remarquant que le modèle polytopique de synthèse $P(\theta)$ déduit du schéma 8.6:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_F \\ z_+ \\ z_p \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c|c} A(\theta) & B_1C_F & 0 & B_2 \\ 0 & A_F & B_F & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I \\ C_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline C_2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ x_F \\ w_b \\ u \end{pmatrix} \tag{8.4}$$

vérifie bien les hypothèses de résolution rappelées ci-dessous:

$$D_{11i} = 0\,,\ D_{22i} = 0 \ \text{ et } \ D_{21i} = 0$$

Notons avant de poursuivre que l'approche que nous avons considérée dans le cas du missile est inadaptée ici dans la mesure où w_b est un signal stochastique.

8.3 Résultats

Choix des filtres

L'ordre relativement élevé (19) de l'ensemble "sous-marin + houle", nous impose une certaine simplicité dans le choix des filtres de pondérations sans quoi les temps de calculs deviendraient rapidement un obstacle. C'est pourquoi, nous avons choisi d'adopter des pondérations constantes sur les signaux de performance associés à la régulation de l'immersion et de l'assiette. On retiendra, pour un premier réglage des filtres, les valeurs suivantes, établis à partir des arguments standards d'une optimisation de type $\mathcal{H}_\infty$:

- sur z: on souhaite que l'amplitude maximale des variations autour de Z_0 reste inférieure à $1m$, c'est-à-dire $\pm 50cm$. On prendra donc comme valeur initiale pour W_{track1}:
$$W^0_{track1} = \frac{1}{0.5} = 2$$
- sur θ: l'amplitude maximale des variations d'assiette, pour le confort de l'équipage, est fixée à $1deg$. Le choix initial pour W_{track2} sera le suivant:
$$W^0_{track2} = \frac{180}{0.5\,\pi} \approx 115$$

On procédera de façon similaire en ce qui concerne le réglage des filtres de pondération sur les signaux de commandes. Ces derniers néanmoins seront choisis "passe-haut" avec une dynamique du premier ordre:

$$W_{add_i}(s) = \lambda_i \frac{s}{s + \alpha_i}$$

ce qui permet de limiter les gains hautes fréquences. On situera la fréquence de coupure autour de $0.4rad/sec$ c'est-à-dire légèrement en amont des perturbations hautes fréquences engendrées par la houle. Il est en effet peu souhaitable et irréaliste de chercher à compenser ces dernières, dont la puissance est extrêmement élevée. Par contre, il convient de laisser libre toute activité de commande visant à compenser l'action particulièrement nuisible de la houle dans les basses fréquences.

Les valeurs initiales retenues pour les gains λ_i sont respectivement données par:

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 4$$

Après quelques essais et simulations, nous avons apporté certaines modifications pour finalement retenir les valeurs indiquées sur la figure suivante:

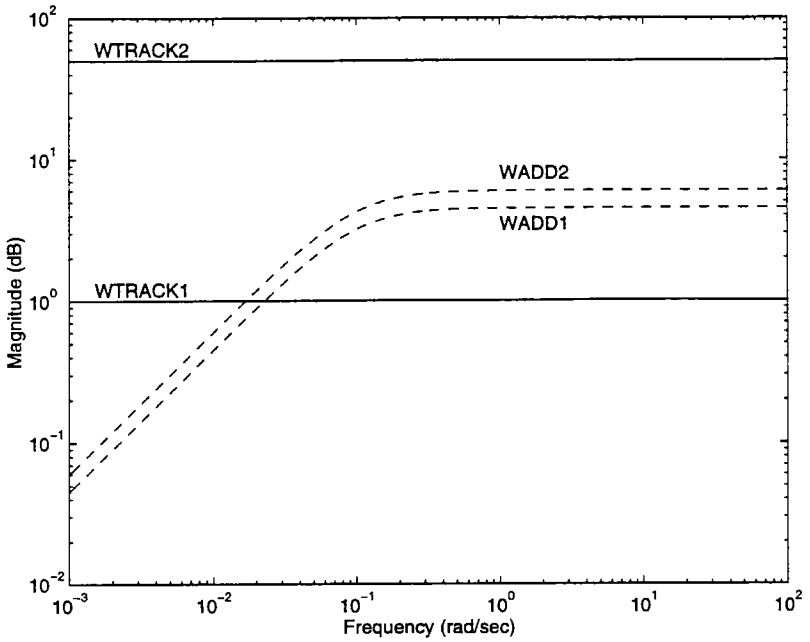


Figure 8.7: Pondérations fréquentielles

La méthode implantée sur calculateur a convergé après 85 itérations et le niveau de performances - proche de 1 - obtenu vaut:

$$\gamma = 1.048$$

Simulation

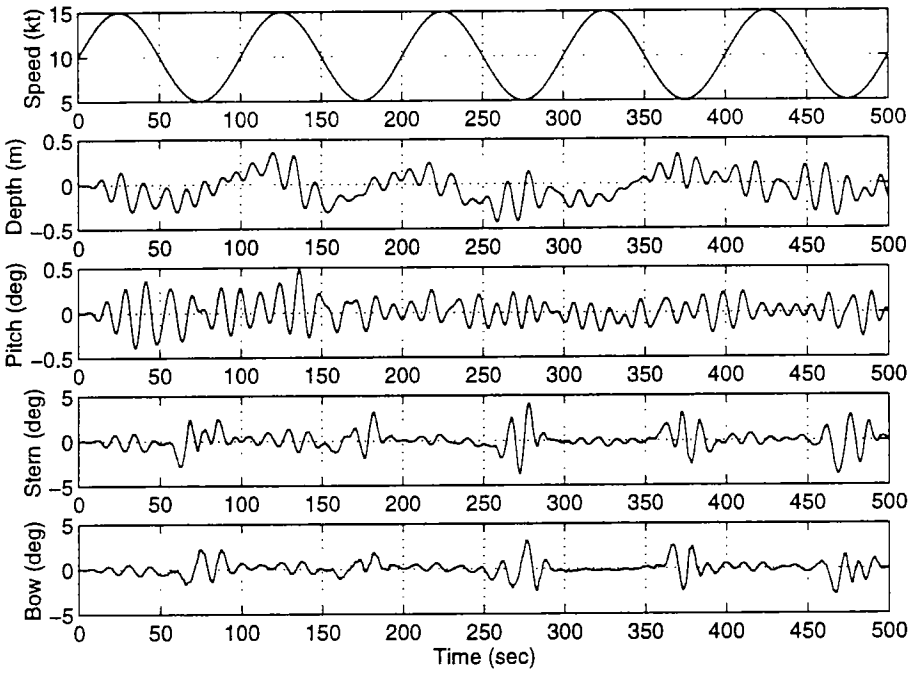


Figure 8.8: Simulations temporelles

La loi de commande LPV obtenue (ordre 21) est implémentée sur le système décrit par la figure (8.4). La fréquence d'échantillonnage est fixée à $1Hz$. Le nombre de calculs à chaque période, compte tenu de l'ordre élevé du correcteur est relativement important:

- Discrétisation,
- Calcul des nouvelles commandes à appliquer.

Néanmoins, le temps disponible pour cela (ici $\approx 1sec$) est nettement plus élevé que sur un missile ou un avion. Par ailleurs, les contraintes de poids et de volume du calculateur embarqué sont peu sévères, ce qui permet aussi d'en diminuer le coût.

Les simulations temporelles (voir figure 8.8) que nous présentons, sont effectuées pour une évolution sinusoïdale de la vitesse entre 5 et 15 noœuds. On notera une plus forte activité des gouvernes lors des passages aux faibles vitesses, ce qui témoigne d'une moindre efficacité.

Notons que les spécifications sont satisfaites, tant au niveau des performances (tenue de l'immersion et de l'assiette) qu'au niveau de l'amplitude des débattements de gouvernes. On pourra également vérifier à ce niveau l'absence de saturations en vitesse ($< 4deg/sec$), bien que l'on ne sache pas actuellement traiter explicitement ces dernières.

Conclusion

L'application que nous avons développée dans ce chapitre aura donc permis de valider l'approche théorique qui consiste, dans la classe des systèmes LPV, à minimiser une extension de la norme $\mathcal{H}_2$. Les résultats obtenus, malgré la complexité engendrée par un nombre important d'états (modèle de synthèse d'ordre 21), démontrent l'applicabilité de la méthode sur un problème réaliste. Dans des développements futurs, la mise en œuvre d'une approche mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ pourrait être envisagée afin par exemple, de prendre en compte de manière plus rigoureuse les limitations au niveau des actionneurs.

Chapitre 9

Pilotage d'un avion de combat

L'application que nous allons développer dans ce chapitre concerne la conception d'une loi de commande robuste à paramètres variables permettant de faciliter le pilotage d'un avion de combat dans le plan longitudinal.

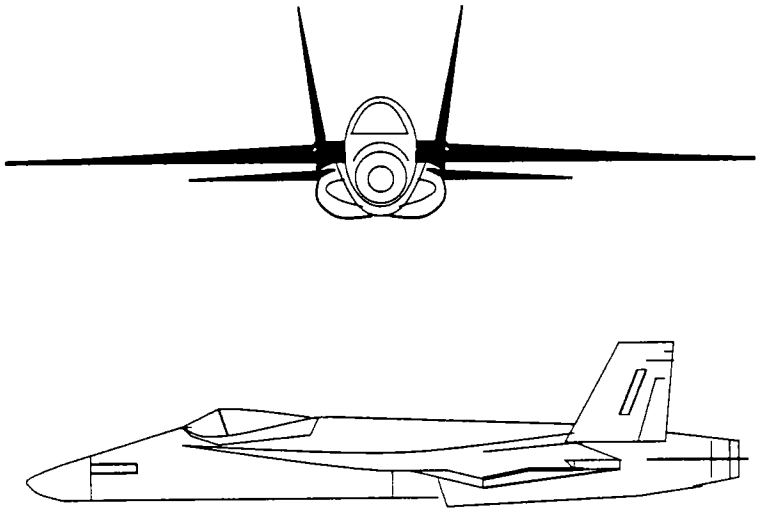


Figure 9.1: Avion de combat F-18

Les données numériques que nous avons utilisées sont celles d'une version modifiée du **F-18** qui fut construit pour l'Armée américaine "US. Navy" par les compagnies McDonnell Douglas et Northrop. Il s'agit d'un avion de chasse mono-place propulsé par deux

réacteurs jumelés. Il est facilement reconnaissable à son empennage arrière, pour lequel, afin d'améliorer la stabilité directionnelle, a été retenue une "structure en V" (voir figure 9.1). En ce qui concerne la partie horizontale de l'empennage, nous remarquerons sur la même figure qu'elle est située en dessous du plan de voilure. Ce choix est motivé par la volonté d'accroître la stabilité longitudinale aux fortes incidences. Dans sa version modifiée (HARV, High Angle Research Vehicule) le F-18 "standard" s'est vu ajouter deux tuyères orientables, bi-directionnelles permettant au pilote de canaliser la poussée des réacteurs. Cette nouvelle commande vient compléter harmonieusement les gouvernes habituelles qui perdent de leur efficacité aux grandes incidences. Toutefois, dans cette application, nous limiterons notre étude à un domaine de vol où l'utilisation de la poussée vectorielle ne sera pas justifiée. L'incidence pourra néanmoins atteindre des valeurs particulièrement élevées proches de 50 degrés, ce qui engendre des variations paramétriques et non linéarités importantes.

Parmi les diverses méthodes envisagées dans la littérature pour résoudre le problème traité dans ce chapitre, il en existe une, fondée sur les techniques d'inversion dynamique, dont les résultats semblent prometteurs [118, 105, 106, 1, 57]. L'idée consiste à inverser à chaque instant, la dynamique du système (non linéaire) pour lui substituer une dynamique désirée. Le but est d'obtenir un système LTI auquel on appliquera ensuite une technique de μ-synthèse afin de prendre en compte les incertitudes commises au moment de l'inversion. Une telle approche soulève néanmoins deux difficultés. La première, d'ordre pratique, est liée à la complexité des correcteurs obtenus. La seconde, plutôt théorique, pose le problème de la stabilité globale en boucle fermée [91].

La démarche que nous nous proposons maintenant de suivre, par analogie à celles que nous avons adoptées dans les deux premières applications, repose sur le concept de système LPV. Néanmoins, la technique de synthèse employée s'appuiera non plus sur un modèle polytopique du système à commander mais sur un modèle LFT jugé ici mieux adapté. Ce choix permettra notamment d'appliquer l'algorithme de synthèse de lois de commande LPV robustes décrites au chapitre 5. Les correcteurs obtenus seront analysés puis implémentés sur le système non linéaire. Une série de simulations temporelles viendra finalement valider notre approche.

9.1 Description générale

9.1.1 Equations du mouvement

Nous rappelons ici brièvement les équations du mouvement de l'avion dans le plan longitudinal (pour plus de détails voir [57, 25]). Pour cela, nous ferons les hypothèses classiques:

- Terre plate et immobile
- Gravitation constante (les variations de g avec l'altitude sont négligées)
- Masse et inerties varient lentement
- Découplage longitudinal/latéral

Les variables dans le plan longitudinal, sont représentées sur le système d'axes de la figure suivante:

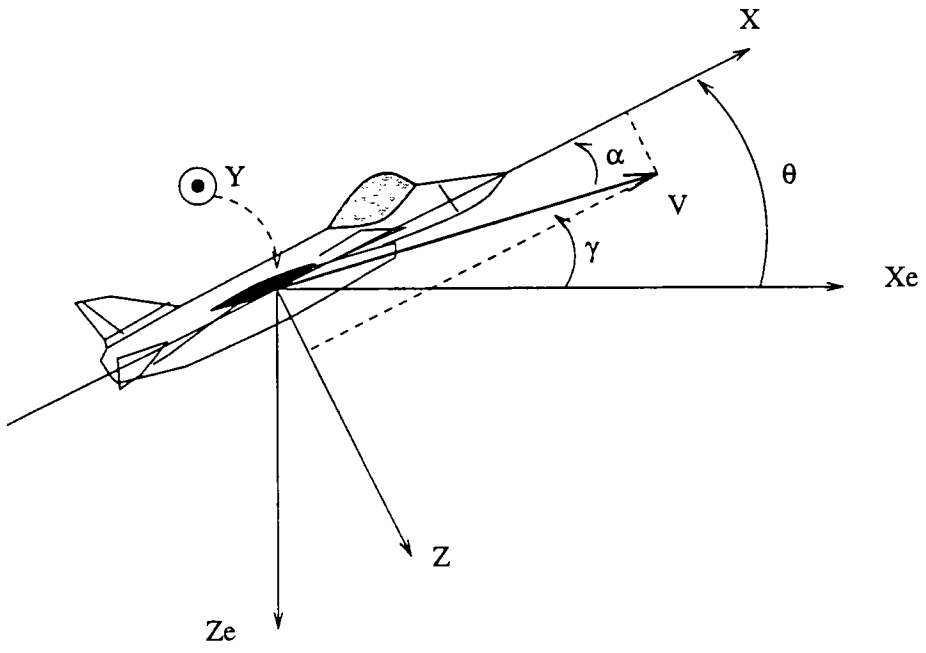


Figure 9.2: Système d'axes longitudinal

En considérant l'avion comme un solide de masse m (voir tableau 9.1), l'application du principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton) conduit aux relations:

$$\dot{\gamma} = -\frac{g}{V}\cos\gamma + \frac{L}{mV} + \frac{F}{mV}\sin\alpha \tag{9.1}$$

$$\dot{V} = -g\sin\gamma - \frac{D}{m} + \frac{F}{m} \tag{9.2}$$

où D et L correspondent respectivement aux résultantes des forces aérodynamiques de traînée et de portance, tandis que F modélise les forces de propulsion.

Remarque : *Ici, la commande permettant d'orienter la poussée des réacteurs n'étant pas utilisée, la force notée F agit uniquement dans la direction X. Dans le cas contraire, il conviendrait de prendre en compte les différentes projections sur chacun des axes de l'avion: F_x, F_y, F_z. Par ailleurs, le mouvement latéral de l'avion n'étant pas envisagé, nous avons supposé nuls l'angle de dérapage, de lacet ainsi que l'ensemble des forces latérales. Tout ceci a bien sûr pour effet de simplifier considérablement les équations. Pour une description complète du mouvement avec prise en compte de la poussée dirigée, consulter [57].*

Des considérations cinématiques permettent ensuite d'établir:

$$\begin{array}{l} \dot{\theta} = q \iff \dot{\alpha} = q - \dot{\gamma} \\ \dot{H} = V\sin\gamma \end{array} \tag{9.3}$$

où q désigne la vitesse de tangage et H l'altitude de l'avion. Enfin, en appliquant le théorème du moment cinétique, nous obtenons:

$$\dot{q} = M\frac{\bar{c}}{J_y} \tag{9.4}$$

où M correspond au moment autour de l'axe Y, tandis que J_y et $\bar{c}$ sont des constantes spécifiques du F-18 précisées par le tableau 9.1.

Symbole	Désignation	Valeur
S	Surface de référence	400 ft^2
$\bar{c}$	Corde aérodynamique moyenne	11.52 ft
m	masse	1117.6 $slug$
J_y	Moment d'inertie en tangage	174246.3 $slug\, ft^2$

Table 9.1: Constantes utiles.

Les grandeurs aérodynamiques L, D et M vérifient:

$$\begin{cases} L &= \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(C_{L_\alpha(\alpha)} + q\frac{\bar{c}}{2V}C_{L_q(\alpha)} + \delta_e C_{L_{\delta_e}(\alpha)}\right) \\ D &= \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(C_{D_\alpha(\alpha)} + q\frac{\bar{c}}{2V}C_{D_q(\alpha)} + \delta_e C_{D_{\delta_e}(\alpha)}\right) \\ M &= \frac{1}{2}\rho S V^2 \left(C_{M_\alpha(\alpha)} + q\frac{\bar{c}}{2V}C_{M_q(\alpha)} + \delta_e C_{M_{\delta_e}(\alpha)}\right) \end{cases} \tag{9.5}$$

Ces relations font intervenir une nouvelle variable δ_e qui représente le débattement des gouvernes de profondeur. Notons également la présence de coefficients aérodynamiques dépendant principalement de l'incidence α et représentés par les figures (9.3), (9.4) et (9.5). Les données numériques proviennent des résultats d'un travail d'identification (selon la méthode des moindres carrés) réalisé par la compagnie américaine Honeywell [54].

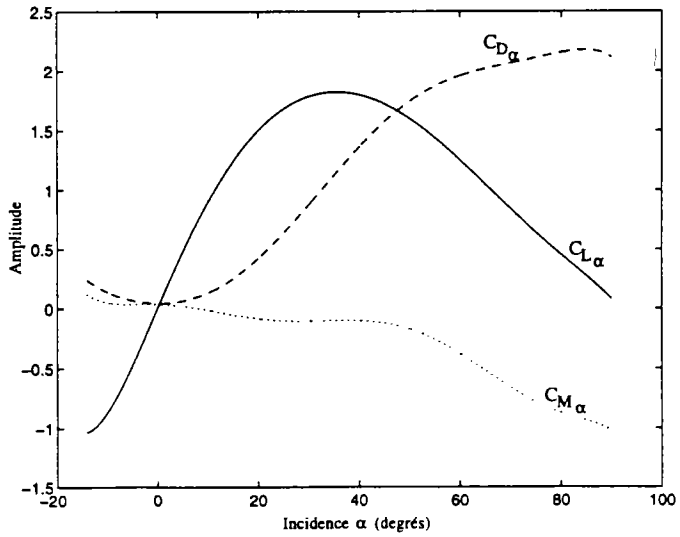


Figure 9.3: Coefficients aérodynamiques C_{L_α}, C_{D_α}, C_{M_α}

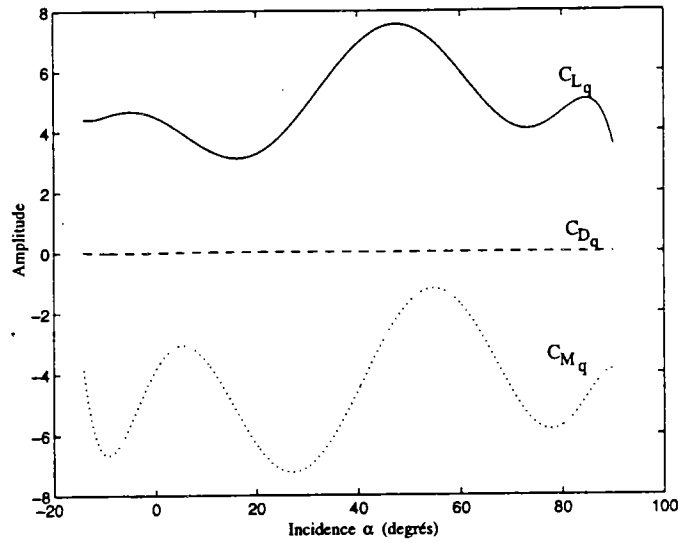


Figure 9.4: Coefficients aérodynamiques C_{L_q}, C_{D_q}, C_{M_q}

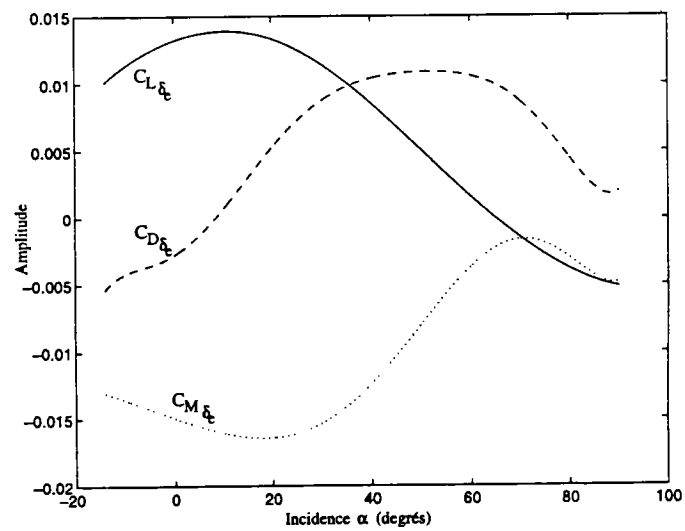


Figure 9.5: Coefficients aérodynamiques $C_{L_{\delta_e}}$, $C_{D_{\delta_e}}$, $C_{M_{\delta_e}}$

Enfin, pour compléter la description, nous donnons ci-après les expressions analytiques utilisées pour la densité de l'air et la vitesse du son. Ces expressions sont valables de $5000ft$ à $40000ft$.

$$\rho(H) = 5.03\ 10^{-13}H^2 - 6.39\ 10^{-8}H + 2.35\ 10^{-3}\ \ (slug/ft^3) \tag{9.6}$$

$$V_{\text{son}}(H) = -3.89\ 10^{-3}H + 1.11\ 10^{3}\ \ (ft/sec) \tag{9.7}$$

Représentation d'état

Des équations qui précèdent, on déduit la représentation d'état:

$$\dot{X} = f(X) + g(X)\delta_e + h(X)F \tag{9.8}$$

où le vecteur X est donné par:

$$X = [\gamma\ \ \alpha\ \ q\ V\ \ H]^T$$

et les entrées de commande du système sont:

- Le débattement de la gouverne de profondeur δ_e
- La propulsion (régime moteur) F

Enfin, les mesures généralement disponibles sont l'incidence, la vitesse de tangage, l'altitude et la pression dynamique q_d , qui permet de générer une estimation de la vitesse à partir de la relation:

$$q_d = \frac{1}{2}\rho(H)V^2 \tag{9.9}$$

Sur le schéma (9.6), sont représentées par des flèches horizontales, les entrées-sorties directement utilisées par la loi de commande. Les flèches verticales correspondent à la force de propulsion d'une part, laquelle sera supposée constante dans les simulations court-terme, et aux mesures de pression et d'altitude d'autre part qui permettent de définir le point de vol.

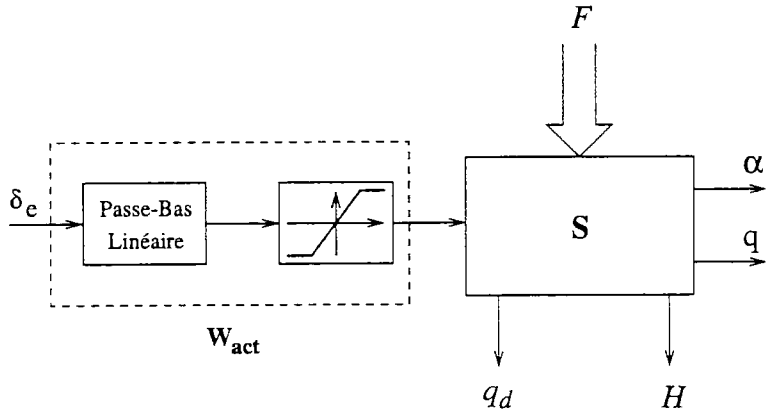


Figure 9.6: Système avion "boucle ouverte"

Sur la figure 9.6 apparaît également un modèle actionneur W_{act}, que nous supposerons décrit par un filtre linéaire passe-bas du quatrième ordre (figure 9.7) mis en cascade avec un bloc non linéaire modélisant les saturations en position et vitesse.

$$\begin{cases} -24 \leq \delta_e \leq 10.5 & (deg) \\ -60 \leq \dot{\delta}_e \leq 60 & (deg/sec) \end{cases} \tag{9.10}$$

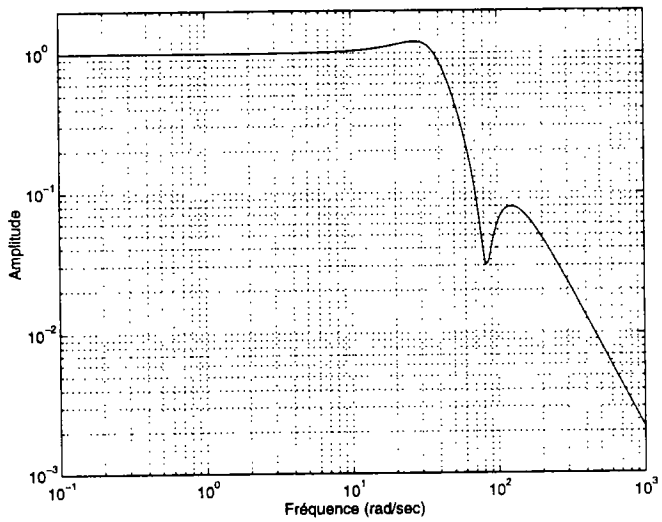


Figure 9.7: réponse fréquentielle de l'actionneur

9.1.2 Nature et rôle du correcteur

Avant d'aborder les différentes étapes de la construction du modèle de synthèse, quelques précisions concernant le rôle du correcteur et ses interactions avec le pilote humain ou une éventuelle loi de guidage sont nécessaires.

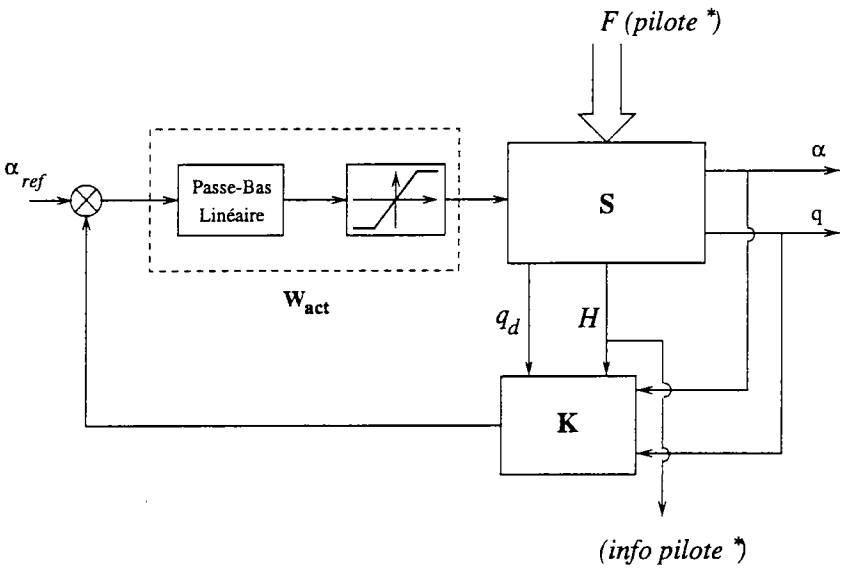


Figure 9.8: Système avion "boucle fermée"

Comme le montre la figure (9.8), il ne s'agit pas de mettre en place un système de pilotage automatique longitudinal complet, mais uniquement de régler la partie "court-terme" portant sur les dynamiques rapides. Son rôle est de permettre un pilotage direct en incidence, de sorte que le pilote n'ait qu'à afficher la consigne à suivre, sans se soucier des paramètres (altitude, vitesse) susceptibles de sévèrement influencer le comportement de l'avion. Si le correcteur, pour élaborer le signal de commande qu'il envoie aux gouvernes de profondeur utilise essentiellement les mesures d'incidence et de vitesse de tangage, il devra également s'adapter aux évolutions du modèle en intégrant les paramètres (H et V) qui caractérisent le point de vol. Cela se fera par l'intermédiaire des mesures de pression dynamique et d'altitude (voir figure). La loi de commande recherchée est donc non stationnaire. Compte tenu du haut niveau de performances requis sur un large domaine de vol, nous illustrerons par la suite le bien fondé d'un tel choix.

Le "long-terme" qui concerne typiquement la régulation de l'altitude et de la vitesse sera pris en charge par le pilote ou éventuellement par un système automatique de guidage. Les commandes dont il dispose pour cela sont la manette des gaz d'une part et l'incidence pilotée d'autre part.

9.2 Modélisation

Compte tenu des éléments qui précèdent, nous allons simplement chercher à modéliser les dynamiques rapides (α et q) de l'avion. Le but est d'obtenir un système LPV exploitable par les techniques développées dans la seconde partie du mémoire.

9.2.1 Mise sous forme LPV

Le domaine de vol

Le domaine de vol considéré dans cette application est défini par les inégalités suivantes portant sur le nombre de Mach, l'altitude et la pression dynamique:

$$\begin{array}{rcccl} 0.15 & \leq & M & \leq & 0.9 \\ 5000 & \leq & H & \leq & 25000 \\ & & q_d & \geq & 27 \end{array}$$

Un examen rapide des équations du mouvement montre qu'il est plus naturel - même si c'est un peu plus compliqué - de caractériser le domaine, non pas dans le plan classique (M, H) comme nous venons de le faire, mais dans le plan (q_d, V) (zône hachurée):

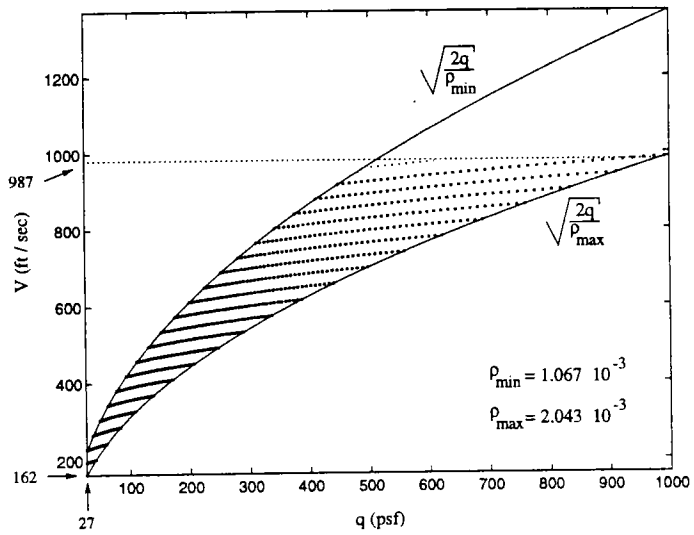


Figure 9.9: Domaine de vol dans le plan (q_d, V)

On notera que la vitesse reste suffisamment élevée ($V \geq 162 ft/sec$) pour permettre l'approximation sur L qui consiste à négliger le terme $q\frac{\bar{c}}{2V}C_{L_q}(\alpha)$. Les équations en α et q, valables sur l'ensemble du domaine de vol s'écrivent:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\frac{q_d S}{mV}\left(C_L(\alpha) + C_{L_{\delta_e}}(\alpha)\delta_e\right) + \frac{g}{V}cos\gamma - \frac{F}{mV}sin\alpha + q \\ \dot{q} &= \frac{q_d S\bar{c}}{J_y}\left(C_M(\alpha) + \frac{\bar{c}}{2V}C_{M_q}(\alpha)q + C_{M_{\delta_e}}(\alpha)\delta_e\right) \end{aligned} \tag{9.11}$$

Linéarisation autour des points d'équilibre

On se propose maintenant de linéariser les équations (9.11) autour des points d'équilibres $(\bar{X}, \bar{\delta}_e, \bar{F})$ du système (9.8). Ces derniers vérifient donc:

$$f(\bar{X}) + g(\bar{X})\bar{\delta}_e + h(\bar{X})\bar{F} = 0$$

On obtient, d'après (9.3):

$$\bar{\gamma} = \bar{q} = 0$$

tandis que $\bar{\alpha}$, $\bar{\delta}_e$ et $\bar{F}$ vérifient:

$$\begin{cases} q_d S\left(C_{L_\alpha}(\bar{\alpha}) + \bar{\delta}_e C_{L_{\delta_e}}(\bar{\alpha})\right) + \bar{F}\sin\bar{\alpha} - mg = 0 \\ q_d S\left(C_{D_\alpha}(\bar{\alpha}) + \bar{\delta}_e C_{D_{\delta_e}}(\bar{\alpha})\right) - \bar{F} = 0 \\ C_{M_\alpha}(\bar{\alpha}) + \bar{\delta}_e C_{M_{\delta_e}}(\bar{\alpha}) = 0 \end{cases} \tag{9.12}$$

Pour chaque valeur de la pression dynamique (entre 27 et 1000), la résolution du système (9.12) conduit à un unique triplet pour lequel l'incidence appartient à l'intervalle [0 50 *deg*]. On obtient ainsi les courbes de points d'équilibres représentées sur la figure (9.10):

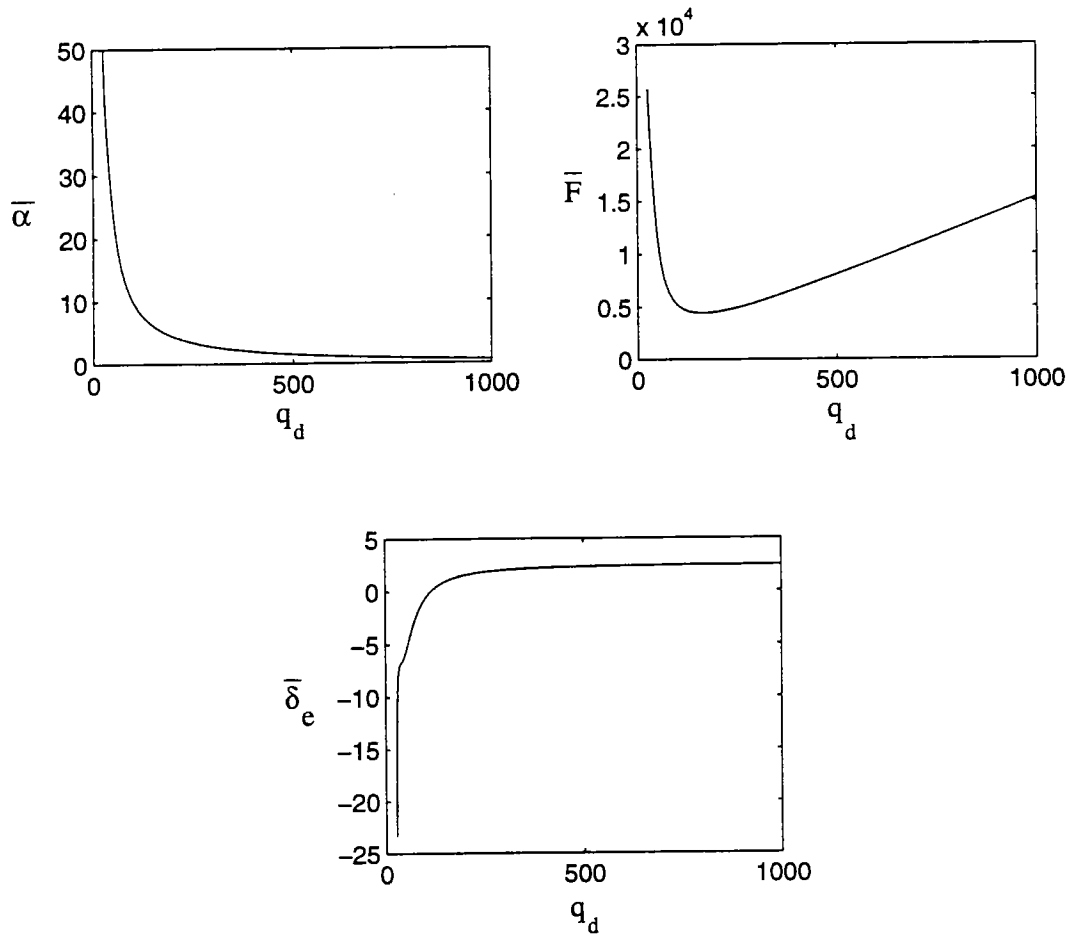


Figure 9.10: Courbes de points d'équilibre

Posons maintenant:

$$\alpha = \bar{\alpha}(q_d) + \tilde{\alpha}\,, \quad \tilde{q} = q \quad \delta_e = \bar{\delta}_e(q_d) + \tilde{\delta}_e$$

En remarquant que:

$$|\dot{\bar{\alpha}}(q_d)| = \left|\dot{q}_d \frac{\partial \alpha}{\partial q_d}(q_d)\right| << \left|\dot{\tilde{\alpha}}\right| \tag{9.13}$$

les équations (9.11) se linéarisent sous la forme:

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{\alpha}} \\ \dot{\tilde{q}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} Z_\alpha(q_d, V) & 1 \\ M_\alpha(q_d, V) & M_q(q_d, V) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_{\delta_e}(q_d, V) \\ M_{\delta_e}(q_d, V) \end{pmatrix} \tilde{\delta}_e \tag{9.14}$$

avec

$$
\begin{aligned}
Z_\alpha(q_d, V) &= -\frac{q_d S}{mV}\left[\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}(\bar{\alpha}) + \bar{\delta}_e \frac{\partial C_{L_{\delta_e}}}{\partial \alpha}(\bar{\alpha})\right] - \frac{\bar{F}}{mV}\cos\bar{\alpha} \\
M_\alpha(q_d, V) &= \frac{q_d S \bar{c}}{J_y}\left[\frac{\partial C_M}{\partial \alpha}(\bar{\alpha}) + \bar{\delta}_e \frac{\partial C_{M_{\delta_e}}}{\partial \alpha}(\bar{\alpha})\right] \\
M_q(q_d, V) &= \frac{q_d S \bar{c}^2}{2 J_y V} C_{M_q}(\bar{\alpha}) \\
Z_{\delta_e}(q_d, V) &= -\frac{q_d S}{mV} C_{L_{\delta_e}}(\bar{\alpha}) \\
M_{\delta_e}(q_d, V) &= \frac{q_d S \bar{c}}{J_y} C_{M_{\delta_e}}(\bar{\alpha})
\end{aligned}
\tag{9.15}
$$

Les équations (9.14) décrivent donc un système LPV dont les paramètres q_d et V évoluent dans le domaine de vol représenté sur la figure 9.9.

9.2.2 Approximation par un modèle polytopique

En notant que la portance induite par les gouvernes de profondeur reste négligeable sur l'ensemble du domaine de vol ($Z_{\delta_e} \approx 0$) et que par contre, $M_{\delta_e}(q_d, V)$ ne devient jamais nul, on pourra envisager l'inversion de la matrice de commande. On limitera ainsi à trois, le nombre de coefficients à prendre en compte dans la construction du modèle.

Le problème posé consiste donc à déterminer la meilleure approximation polytopique de l'image du domaine de vol par la fonction f:

$$
f : (q_d, V) \mapsto \left| \begin{array}{l} Z_\alpha(q_d, V) \\ M_\alpha(q_d, V) \\ M_q(q_d, V) \end{array} \right. \in \mathbb{R}^3
$$

Pour ce faire, nous avons quadrillé le domaine de vol de manière à générer un ensemble représentatif de points appartenant à l'image de f. Puis, en appliquant l'algorithme 2.1 décrit au chapitre 2, nous avons déterminé l'enveloppe convexe de cet ensemble. Le modèle initialement obtenu, (184 sommets!) a ensuite fait l'objet d'une réduction (algorithme 2.2), qui au prix d'une augmentation modérée de volume, nous a finalement conduit à un modèle numériquement exploitable à 13 sommets.

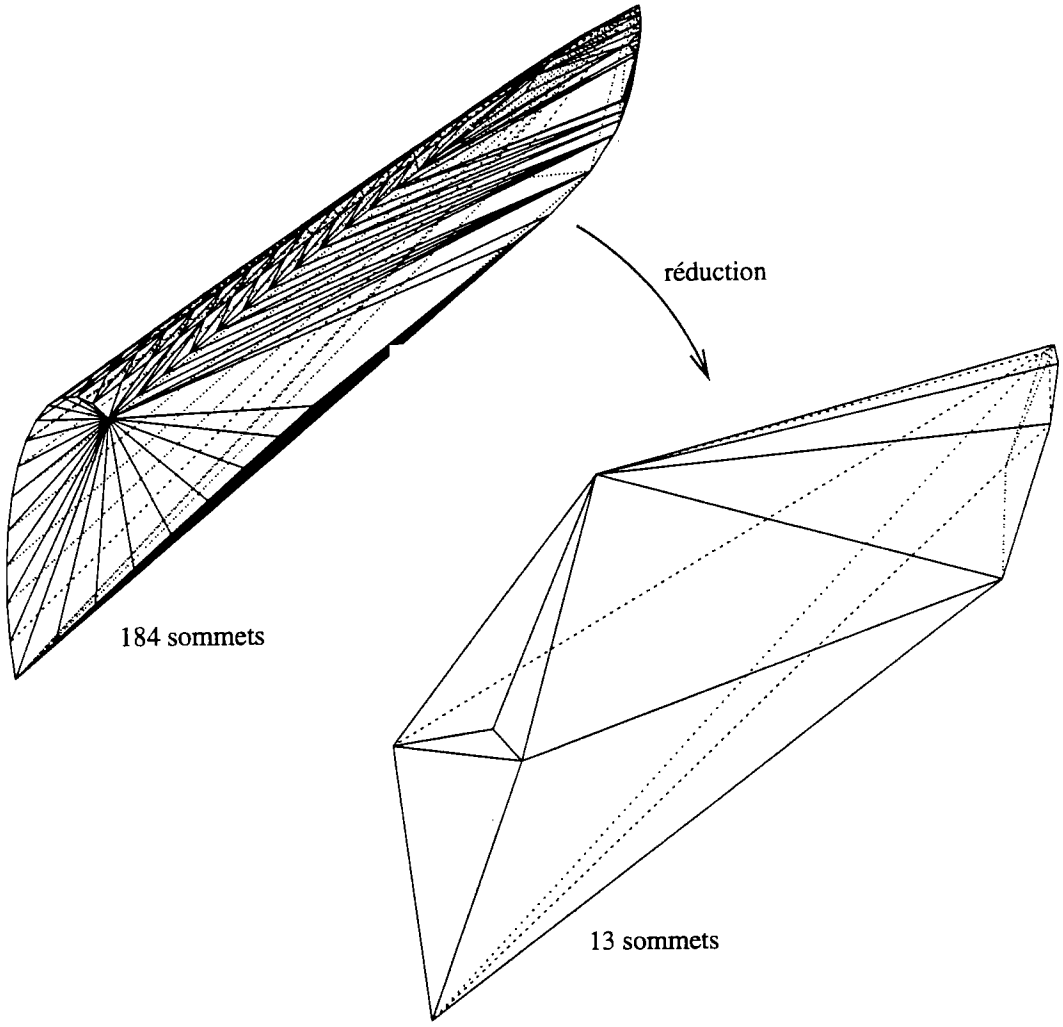


Figure 9.11: Le modèle polytopique

On rappelle que dans la première application que nous avons traitée (pilotage du missile), le coefficient M_q était négligeable. De de fait, la dimension du domaine de vol coïncidant avec celle de l'image, le modèle polytopique était peu conservatif. Il n'avait d'ailleurs pas été nécessaire d'exploiter une éventuelle relation entre les deux coefficients Z_α et M_α.

Ici par contre, l'image toujours générée à partir de $\mathbb{R}^2$ appartient maintenant à $\mathbb{R}^3$. Il s'agit donc d'une surface. Le modèle proposé, bien qu'il exploite au mieux les relations entre les divers coefficients restera nécessairement conservatif puisqu'il représente un "vo-

lume". Nous illustrerons néanmoins l'importance, au niveau de la synthèse, de la prise en compte de ces relations. Pour cela, nous comparerons le modèle présenté avec un modèle dont les huit sommets sont ceux de l'hypercube associé aux valeurs extrémales de Z_α, M_α et M_q.

9.2.3 Approximation par un modèle *LFT*

Dans la construction de ce modèle, on distinguera deux grandes étapes:

- Interpolation des coefficients (Z_α, M_α,...) par des fonctions rationnelles simples,
- Mise sous forme *LFT* (cf. chapitre 2).

La première est spécifique de la nature de l'application considérée. C'est aussi une étape préliminaire très importante qui va permettre de définir les éléments du bloc paramétrique (Θ) de la *LFT*.

interpolations

Avant de procéder à l'interpolation, commençons par mettre en évidence la séparation des variables[2]. D'après (9.15), on peut en effet écrire:

$$\mathrm{Z}_\alpha = \frac{\mathrm{f}_{11}(\mathrm{q_d})}{\mathrm{V}}\,,\ \mathrm{M}_\alpha = \mathrm{f}_{21}(\mathrm{q_d})\,,\ \mathrm{M_q} = \frac{\mathrm{f}_{22}(\mathrm{q_d})}{\mathrm{V}}\,,\ \mathrm{M}_{\delta_e} = \mathrm{g}(\mathrm{q_d}) \tag{9.16}$$

et on évite ainsi une interpolation bi-dimensionnelle. Néanmoins, il convient de prendre en compte la forme particulière du domaine de vol, dans lequel la vitesse est reliée à la pression dynamique par la double inégalité (voir figure 9.9):

$$\sqrt{\frac{2q_d}{\rho_{max}}} \leq V \leq \sqrt{\frac{2q_d}{\rho_{min}}}$$

On en déduit l'existence de constantes K_1 et K_2:

$$K_1 = \sqrt{\frac{\rho_{min}}{2}}\,,\quad K_2 = \sqrt{\frac{\rho_{max}}{2}}$$

[2]Cette propriété est liée à la caractérisation du domaine de vol en fonction des variables q_d et V plutôt que M et H.

telles que:

$$\frac{K_1}{\sqrt{q_d}} \leq \frac{1}{V} \leq \frac{K_2}{\sqrt{q_d}}$$

En traduisant cette double inégalité par une relation barycentrique, il vient:

$$\frac{1}{V} = \nu \frac{K_1}{\sqrt{q_d}} + (1-\nu)\frac{K_2}{\sqrt{q_d}}, \quad \nu \in [0\,,\ 1] \tag{9.17}$$

On associera finalement la vitesse au paramètre θ_2 (indépendant de la pression dynamique), résultat de la normalisation du coefficient de pondération ν:

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{\sqrt{q_d}}\left((K_1+K_2)+\theta_2(K_1-K_2)\right) = \frac{\alpha\theta_2+\beta}{\sqrt{q_d}}, \quad \theta_2 \in [-1\,,\ 1] \tag{9.18}$$

Ainsi, les coefficients aérodynamiques Z_α et M_q (9.16) qui dépendent de q_d et V, s'écrivent à présent sous la forme:

$$Z_\alpha = (\alpha\theta_2+\beta)\frac{f_{11}(q_d)}{\sqrt{q_d}} = (\alpha\theta_2+\beta)\,\tilde{f}_{11}(q_d) \tag{9.19}$$

$$M_q = (\alpha\theta_2+\beta)\frac{f_{22}(q_d)}{\sqrt{q_d}} = (\alpha\theta_2+\beta)\,\tilde{f}_{22}(q_d) \tag{9.20}$$

Dans le but de limiter au maximum la complexité du modèle, les expressions $\tilde{f_{11}}(q_d)$, $\tilde{f_{22}}(q_d)$, $f_{21}(q_d)$ et $g(q_d)$ seront approchées par des fonctions linéaires. La qualité d'une telle approximation est satisfaisante, à condition d'échanger le paramètre q_d contre sa racine $\sqrt{q_d}$. Les résultats obtenus sont illustrés par la figure (9.12). On notera θ_1 le paramètre normalisé associé à $\sqrt{q_d}$.

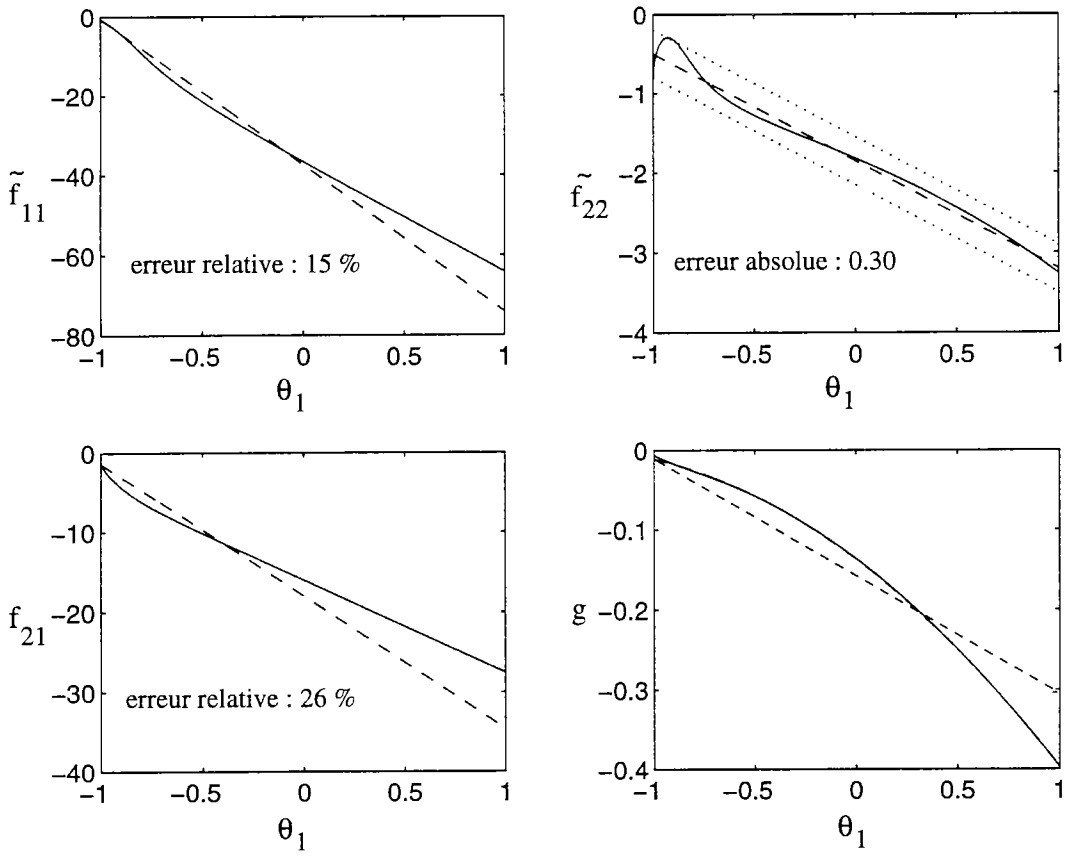


Figure 9.12: Interpolations

On précise, dans chacun des cas, l'erreur commise au moment de l'interpolation. Compte tenu de l'allure particulière (non-linéarité importante autour de l'origine) de la fonction $\tilde{f}_{22}$, nous avons déterminé l'approximation linéaire qui minimise l'erreur absolue. Dans les autres cas, il s'agit d'erreurs relatives. En ce qui concerne la fonction g, la qualité de l'interpolation[3] n'est pas vraiment critique. En effet, dans la mesure où la matrice de commande est inversible, on pourrait envisager - comme dans le cas polytopique - un modèle de synthèse conçu à partir de la valeur la plus critique de g, vue comme une constante indépendante de la pression dynamique. Néanmoins, la prise en compte même grossière de la variation d'efficacité de gouverne permettra un traitement moins conservatif au moment de la synthèse.

[3]En toute rigueur, il aurait fallu utiliser une approximation polyômiale, puisque cette fonction est pratiquement linéaire en q_d

A partir des éléments qui précèdent, on déduira immédiatement une expression bilinéaire en θ_1 et θ_2 de la matrice d'évolution $A(\theta)$, tandis que celle de la matrice de commande $B(\theta)$, indépendante de la vitesse, est linéaire en θ_1:

$$\begin{aligned} A(\theta) &= A_0 + \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \theta_1\theta_2 A_3 \\ B(\theta) &= B_0 + \theta_1 B_1 \end{aligned} \tag{9.21}$$

avec les valeurs numériques (pour α, q et δ_e exprimés en radians):

$$\mathrm{A}_0 = \begin{pmatrix} -1.03 & 1 \\ -1.85 & -0.496 \end{pmatrix}, \ \mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} -1.01 & 0 \\ -1.35 & -0.457 \end{pmatrix}, \ \mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} 0.166 & 0 \\ 0 & 0.080 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}_3 = \begin{pmatrix} 0.163 & 0 \\ 0 & 0.074 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.156 \end{pmatrix}, \ \mathrm{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.144 \end{pmatrix}$$

Mise sous forme *LFT*

En appliquant les techniques exposées au chapitre 2, on obtient un modèle *LFT* sous la forme suivante:

$$\left\{ \begin{array}{lclclclcl} \dot{x} & = & A_0 x & + & I_2 w_{\theta_1} & + & A_2 w_{\theta_2} & + & B_0 u \\ z_{\theta_1} & = & A_1 x & & & + & A_3 w_{\theta_2} & + & B_1 u \\ z_{\theta_2} & = & I_2 x & & & & & & \end{array} \right. \tag{9.22}$$

avec

$$w_{\theta_1} = \theta_1 z_{\theta_1}, \quad w_{\theta_2} = \theta_2 z_{\theta_2} \tag{9.23}$$

Le bloc paramétrique est donc de dimension 4:

$$\Theta(t) = \mathrm{blocdiag}\,(\theta_1 I_2\,,\ \theta_2 I_2) \tag{9.24}$$

et on pourra vérifier - par le calcul des grammiens structurés ou tout simplement, en remarquant ici que les matrices A_i sont de rang plein - que cette *LFT* est de dimension minimale.

Modélisation des incertitudes

Nous complétons ici le modèle par la prise en compte des incertitudes structurées sur la matrice A. Ces dernières sont liées bien sûr aux erreurs d'interpolation mais aussi aux erreurs possibles d'identification des coefficients. Cette modélisation des incertitudes pourra également permettre de traduire d'éventuels bruits ou retards sur la mesure des paramètres de pression et d'altitude (ces données étant à l'origine de l'évaluation des coefficients).

Il s'agit donc de déterminer le modèle LFT, tel que la matrice nominale $A(\theta)$ soit modifiée en $A(\theta, \delta)$:

$$A(\theta, \delta) = \begin{pmatrix} (1+\delta_1)Z_\alpha(\theta) & 1 \\ M_\alpha(\theta) + \delta_3 & (1+\delta_2)M_q(\theta) \end{pmatrix} \tag{9.25}$$

Un tel modèle - noté $G(\theta, \delta)$ - s'obtient facilement sous la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_{\theta_1} \\ z_{\theta_2} \\ z_\delta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & I & A_2 & B_\delta & B_0 \\ A_1 & 0 & A_3 & D_{\theta_1\delta} & B_1 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_\delta & 0 & D_{\delta\theta_2} & 0 & 0 \\ C_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w_{\theta_1} \\ w_{\theta_2} \\ w_\delta \\ u \end{pmatrix} \tag{9.26}$$

avec

$$\begin{pmatrix} w_\theta \\ w_\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta(t) & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_\theta \\ z_\delta \end{pmatrix}, \quad \Delta = \mathrm{diag}(\delta_1,\, \delta_2,\, \delta_3) \tag{9.27}$$

Les matrices B_δ, $D_{\theta_1\delta}$, C_δ et $D_{\delta\theta_2}$ seront déterminées afin de traduire, pour toute valeur normalisée de Δ:

- Une incertitude relative maximale de 15% sur Z_α
- Une incertitude relative maximale de 26% sur M_α
- Une incertitude absolue bornée par 0.3 sur M_q

Analyse en boucle ouverte

Nous proposons dans ce paragraphe une rapide analyse de l'ensemble des systèmes invariants obtenus en figeant les paramètres θ_1 et θ_2 du modèle LPV (9.21). Cette étude donne un aperçu du comportement longitudinal de l'avion sur l'ensemble du domaine de vol. On verra notamment sur la figure (9.13), l'influence du point de vol sur l'amortissement et le temps de réponse de l'appareil. Les pôles les mieux amortis correspondent aux valeurs élevées de pression dynamique et de vitesse.

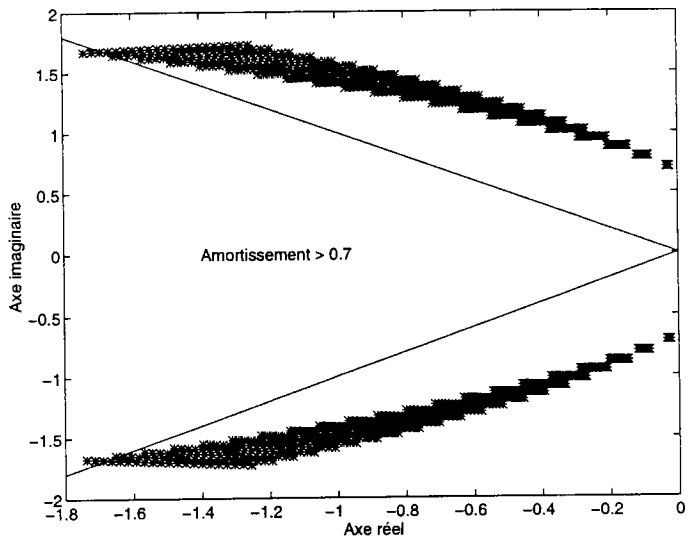


Figure 9.13: Localisation des pôles

L'examen des réponses fréquentielles en deux points de vol extrêmes (voir figure 9.14) révèle par ailleurs une importante disparité au niveau des gains et de la bande passante.

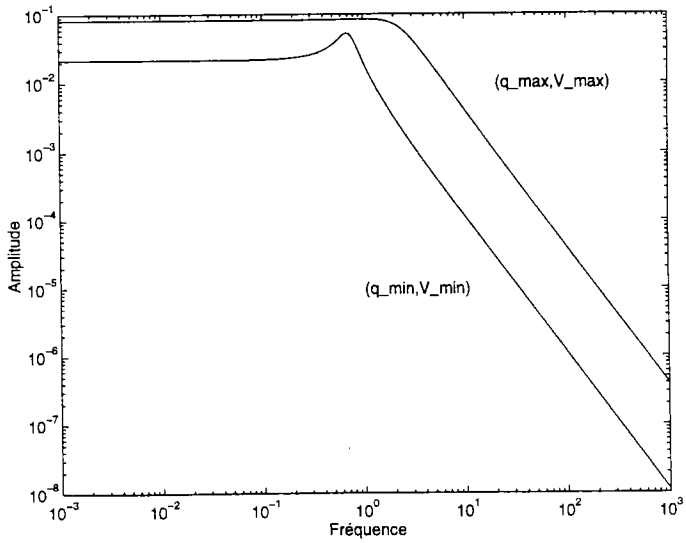


Figure 9.14: Transferts $\delta_e \longrightarrow \alpha$

9.3 Construction du modèle de synthèse LPV

Spécifications: performances et robustesse

L'analyse qui précède montre donc que le comportement naturel de l'avion dépend fortement de la pression dynamique et de la vitesse. Il s'agit d'un phénomène que l'on devra compenser afin d'améliorer le temps de réponse et l'amortissement

De par la localisation des pôles, l'analyse précédente souligne la présence de dynamiques relativement lentes et mal amorties, plus particulièrement quand la pression dynamique est faible. C'est un phénomène qu'il faudra donc compenser en boucle fermée tout en respectant la tendance naturelle du système à répondre d'autant plus vite que la vitesse et la pression dynamique sont élevées.

Suivi d'un modèle de référence variable

Afin de satisfaire à ces objectifs, qui correspondent également à une demande de la part des pilotes, nous envisagerons un suivi de modèle de référence variable de la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega(q_d)^2 & -2\xi(q_d)\omega(q_d) \end{pmatrix} x_r + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega(q_d)^2 \end{pmatrix} \alpha_c \\ \alpha_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x_r \end{cases} \tag{9.28}$$

Ce modèle est donc un "second-ordre" dont l'amortissement et la pulsation dépendent de la pression dynamique. Pour simplifier, on aura volontairement omis la vitesse dans ce modèle, dont l'influence est moins critique sur le comportement que celle de la pression. On notera par ailleurs que le suivi de consigne porte sur l'incidence α. Il s'agit d'un choix classique dans la conception d'un pilotage longitudinal. L'autre alternative consiste à réaliser un asservissement de la vitesse de tangage en laissant le contrôle de l'incidence à la charge du pilote.

Les spécifications requises en performances sont indiquées par le tableau ci-après:

	Amortissement	Pulsation
$q_d = 27$	0.6	2
$q_d = 1000$	0.75	4

Table 9.2: Spécifications en performances

On construira ensuite un modèle de référence LPV en θ_1, par interpolation linéaire

entre les deux valeurs extrêmes de q_d:

$$R(\theta_1)\begin{cases} \dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10-6\theta_1 & -4.2-1.8\theta_1 \end{pmatrix}}_{A_r(\theta)} x_r + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 10+6\theta_1 \end{pmatrix}}_{B_r(\theta)} \alpha_c \\ \alpha_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x_r \end{cases} \tag{9.29}$$

Robustesse

Afin de prendre en compte les incertitudes de modélisation, mais également les manques et imperfections du modèle mathématique[4], il convient d'inclure au schéma de synthèse diverses spécifications de robustesse. Celles-ci devront traduire notamment les incertitudes au niveau de l'actionneur d'une part et du processus de mesure de l'incidence d'autre part. On traduira ces phénomènes respectivement par la modélisation de perturbations additives en entrée et multiplicatives en sortie (voir schéma 9.15).

On tiendra compte par ailleurs de la présence d'incertitudes paramétriques sur la matrice $A(\theta)$ (voir relation (9.25)).

Structure de la loi de commande

On retiendra pour cette application, une structure de commande analogue à celle que nous avons utilisée pour le pilotage du missile. L'injection de consignes (via le gain K_2) permet une amélioration sensible du niveau de performances.

[4]qui n'est jamais qu'une vue très simplifiée de la réalité.

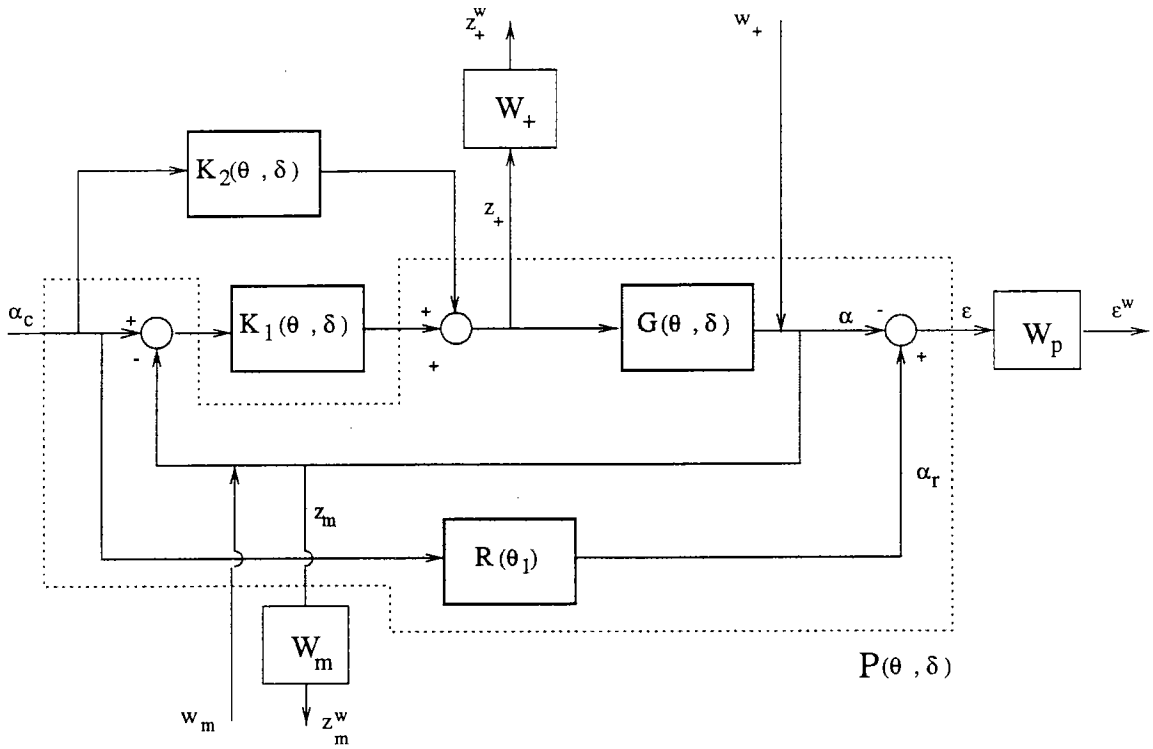


Figure 9.15: Structure de commande

Le schéma (9.15) fait appararaître les trois transferts:

$$\mathcal{T}_{\alpha_c \to \epsilon}\,, \quad \mathcal{T}_{w_+ \to z_+}\,, \quad \mathcal{T}_{w_m \to z_m}$$

que l'on associera respectivement aux objectifs de performance, de robustesse aux perturbations additives et de robustesse aux perturbations multiplicatives.

Le modèle LPV de synthèse $P(\theta, \delta)$ représenté par la zône grisée de la figure 9.15 est encore décrit par les relations:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_r \\ \epsilon \\ z_+ \\ z_m \\ \alpha_c - \alpha_{mes} \\ \alpha_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\theta,\delta) & 0 & 0 & B(\theta) & 0 & B(\theta) \\ 0 & A_r(\theta_1) & B_r(\theta_1) & 0 & 0 & 0 \\ -C & C_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C & 0 & I & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_r \\ \alpha_c \\ w_+ \\ w_m \\ u \end{pmatrix} \tag{9.30}$$

Notons enfin la présence de pondérations fréquentielles W_{perf}, W_+ et W_m dont il faut bien reconnaître que le réglage reste un problème délicat. Celui-ci est effectué à paramètres constants, et incertitudes paramétriques nulles. On applique alors une méthode de synthèse $\mathcal{H}_\infty$ classique, puis on procède à une analyse des résultats obtenus (fonctions de sensibilité et simulations linéaires). Après quelques essais, on retiendra finalement les filtres du premier ordre décrits par la figure (9.16).

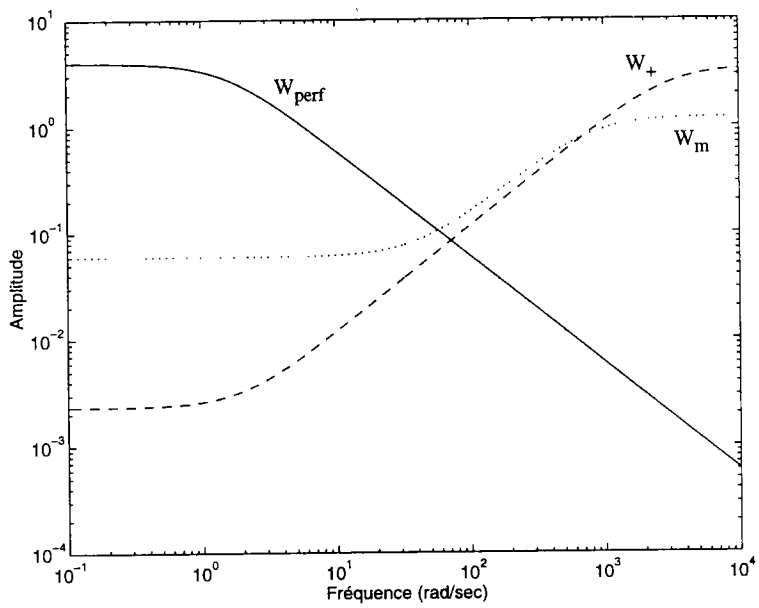


Figure 9.16: Filtres de pondération

9.4 Calcul des correcteurs

Nous abordons maintenant la phase de synthèse des correcteurs proprement dite, dans les cas successifs d'une utilisation du modèle polytopique puis du modèle LFT.

9.4.1 Utilisation d'un modèle polytopique

Ce point sera relativement bref, dans la mesure où le modèle polytopique n'est pas le mieux adapté à notre problème. Nous avions déjà souligné le conservatisme introduit dans le cas présent par une telle représentation. Il faut y ajouter les difficultés liées à:

- l'intégration du modèle de référence variable,
- la prise en compte explicite des incertitudes paramétriques et erreurs de modélisation (en particulier au niveau des actionneurs et capteurs).

Ici, on supposera donc le modèle de référence stationnaire avec un amortissement de 0.7 et une pulsation de 3 rad/sec. Par ailleurs, on ne tiendra pas compte, pour simplifier, des incertitudes paramétriques. Il s'agit donc de déterminer le correcteur LPV, sous forme polytopique, qui minimise la performance γ de type $\mathcal{H}_\infty$ telle que, pour $\delta = 0$:

$$\forall T \geq 0\,, \quad \forall\,(\theta_1(t), \theta_2(t))\,,\ |\theta_i(t)| \leq 1\,,$$

$$\int_0^T \left(\epsilon^w(t)^T \epsilon^w(t) + z_+^w(t)^T z_+^w(t) + z_m^w(t)^T z_m^w(t)\right) dt$$
$$\leq \ \gamma^2 \int_0^T \left(\alpha_c(t)^T \alpha_c(t) + w_+(t)^T w_+(t) + w_m(t)^T w_m(t)\right) dt$$

A partir de la description LPV (9.30), on construit le modèle polytopique de synthèse en suivant la même procédure que dans les chapitres 7 et 8. Pour cela, on utilisera successivement l'approximation représentée sur la figure (9.11) puis celle qui consiste à approcher le domaine d'évolution des coefficients par un cube (voir paragraphe 9.2.2).

L'application de la méthodologie de synthèse, résumée par le théorème 4.1 conduit aux résultats indiqués par le tableau suivant:

	Performance γ	Nombre d'itérations
Modèle 13 sommets (fig. 9.11)	1.40	47
Modèle 8 sommets (cube)	12.9	49

Table 9.3: Comparaison des niveaux de performance obtenus

Dans les deux cas, la convergence de l'algorithme de résolution des LMI se produit après une cinquantaine d'itérations. On notera ici l'influence particulièrement forte de la finesse du modèle sur le niveau de performance. Il s'en suivra malheureusement une complexité accrue de la loi de commande. Le choix du modèle à 13 sommets rend en effet plus délicate la phase d'inversion des coordonnées polytopiques. Il devient nécessaire ici de mettre en place l'approche développée au chapitre 2 permettant de réduire le nombre de calculs (voir illustration 1.4). Une autre technique consisterait à tenter une réduction a posteriori du nombre de sommets du correcteur.

Toutefois, nous ne développerons pas davantage cette première approche pour consacrer davantage de temps à la conception d'une loi de commande de type LFT, qui s'est avérée plus satisfaisante sur ce problème.

9.4.2 Utilisation d'un modèle LFT

Contrairement aux difficultés que l'on a pu relever dans le cadre de la modélisation polytopique, la mise sous forme LFT du modèle de synthèse (9.30) est pratiquement immédiate. Elle est en outre facilitée par le fait que le modèle de référence dépend de manière affine du paramètre θ_1 (voir chapitre 2 - paragraphe sur la construction d'un modèle LFT affine):

$$A_r(\theta_1) = A_{r_0} + \theta_1 A_{r_1}$$

$$B_r(\theta_1) = B_{r_0} + \theta_1 B_{r_1}$$

Notons par ailleurs le rang unitaire des matrices A_{r_1} et B_{r_1}, ce qui induit une augmentation minime de la taille du bloc paramétrique $\Theta(t)$:

$$\Theta(t) = \text{blocdiag}\Big(\theta_1(t)I_3\,,\ \theta_2(t)I_2\Big)$$

La formalisation du problème de synthèse considéré dans ce paragraphe est résumée par la figure (9.17).

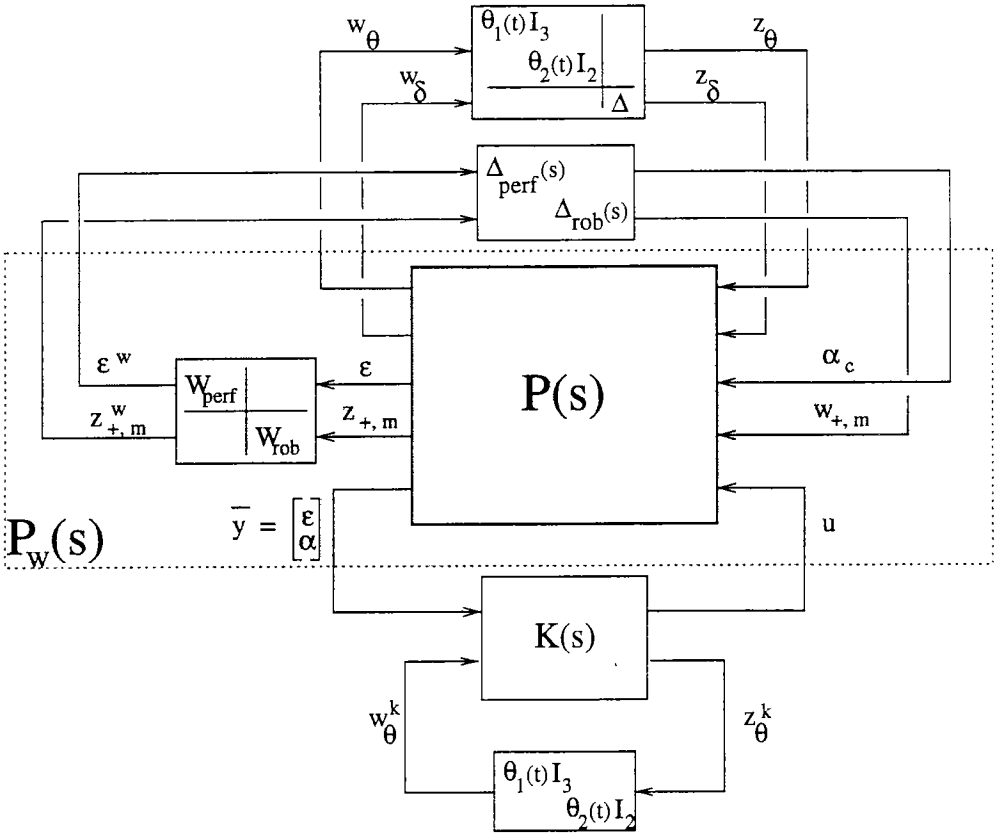


Figure 9.17: Représentation du problème de synthèse LPV robuste

On appliquera ici la méthode de résolution itérative décrite au chapitre 5, par l'algorithme 5.2, en comparant les résultats obtenus par la mise en œuvre de scalings constants puis de scalings dynamiques.

Première étape: Synthèse LPV (de type $\mathcal{H}_\infty$)

On résoud ici le problème[5] formulé par (5.15) en appliquant le théorème 5.1 au modèle pondéré $P_W(s)$. La convergence est obtenue après 38 itérations. Le niveau de performances est donné par:

$$\gamma = 4.185$$

Le correcteur LFT est d'ordre 8. Le temps de calcul reste ici inférieur à la minute, donc à peine supérieur à la durée d'une synthèse $\mathcal{H}_\infty$ standard.

[5]sans tenir compte de la structure des perturbations ni des incertitudes paramétriques.

Deuxième étape: Analyse

A correcteur fixé, on effectue ensuite une analyse de la robustesse prenant en considération la structure des incertitudes. Pour ce faire, on introduira des opérateurs de scalings bloc-diagonaux, d'abord constants puis dynamiques:

$$D = \mathrm{diag}\Big(D_{\delta_1}, D_{\delta_2}, D_{\delta_3}, D_\epsilon, D_+, D_m\Big)$$

Pour résoudre le problème, on suivra la démarche indiquée au chapitre 3 (voir algorithme 3.5). Le calcul des scalings dynamiques est réalisé sur une répartition logarithmique des fréquences (on retiendra 40 points) entre 10^{-1} et 10^3. Les tracés de la figure (9.18) représentent les niveaux de performance $\gamma(\omega)$ en fonction de la fréquence tels que, après optimisation des scalings (cf. 5.16):

$$\bar{\sigma}\left(\begin{pmatrix} L^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma(\omega)}}D(j\omega) \end{pmatrix} F(j\omega) \begin{pmatrix} L^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma(\omega)}}D(j\omega)^{-1} \end{pmatrix}\right) < 1$$

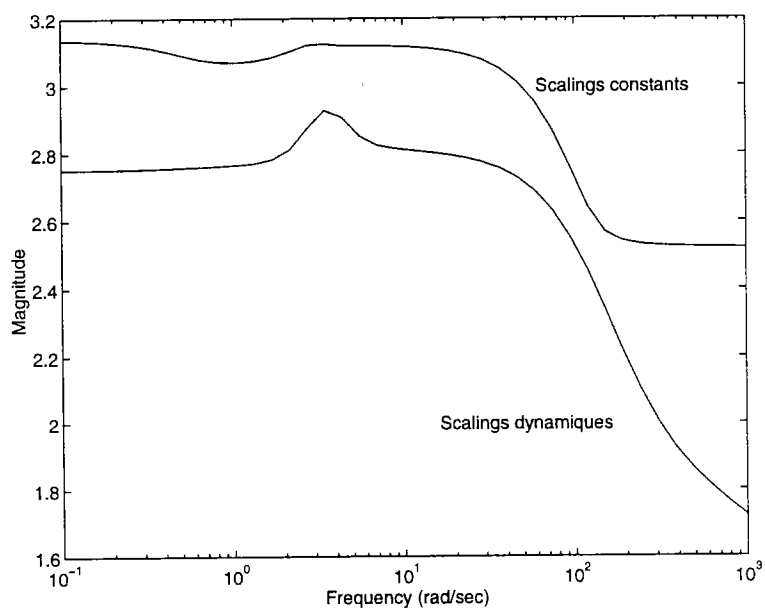


Figure 9.18: Niveau de performance en fonction de ω

Les niveaux de performance $\mathcal{H}_\infty$ et temps approximatifs de calculs (sur station Sun - Sparc 10) sont précisés par le tableau suivant:

	performance γ	temps de calcul
Scalings constants	3.15	env. 10 min.
Scalings dynamiques	2.92	env. 45 min

Table 9.4: Niveaux de performance et temps de calcul

Les temps de calcul sont donnés de manière approximative car ils dépendent fortement de la précision requise sur le résultat. Dans le cas de scalings constants, l'approche est dichotomique. A chaque itération, on résoud un problème de faisabilité (LMI) à performance fixée. La durée que nous avons affichée correspond à trois itérations. Dans le cas de scalings dynamiques, il s'agit d'un problème aux valeurs propres généralisées dont le calcul est d'autant plus couteux que le nombre de variables est assez élevé:

$$N_{var} = \underbrace{1}_{\gamma} + \underbrace{36}_{L} + \underbrace{40 \times 6}_{D(s)} = 277$$

Comme prévu, on notera une amélioration sensible - légèrement accrue dans le cas de l'analyse par scalings constants - du niveau de performance. Néanmoins, les valeurs obtenues restent supérieures à 1. On devra donc procéder à une nouvelle étape de synthèse.

Troisième étape: Nouvelle synthèse LPV

On commence ici par intégrer les scalings (voir algorithme 5.2) au modèle initial de synthèse P_{W}. Dans le cas des scalings constants, la procédure est immédiate. Les scalings dynamiques en revanche, devront faire l'objet d'une interpolation que l'on s'efforcera de simplifier au mieux afin de limiter l'ordre du correcteur (et aussi les temps de calculs!):

	D_{δ_1}	D_{δ_2}	D_{δ_3}	D_ϵ	D_+	D_m	$D(s)$
ordre	0	0	1	1	1	1	4

Table 9.5: Ordre des scalings pour l'interpolation (0 pour statique)

L'ordre du correcteur correspondant à cette nouvelle synthèse sera donc de 16 ($8 + 4 + 4$). On obtient les résultats suivants:

	performance γ	nb. itérations	temps de calcul
Synthèse avec scalings constants	2.37	38	env. 1 min.
Synthèse avec scalings dynamiques	1.85	35	env. 4 min

Table 9.6: Résultats de la deuxième synthèse LPV

Quatrième étape: Analyse

On propose ici une analyse du dernier résultat obtenu en synthèse (scalings dynamiques) qui mettra en lumière l'influence de la prise en compte du caractère réel des incertitudes δ_i. Pour ce faire, on codera donc l'approche résumée au chapitre 3 par la relation (3.28). Les résultats sont illustrés sur la figure (9.19).

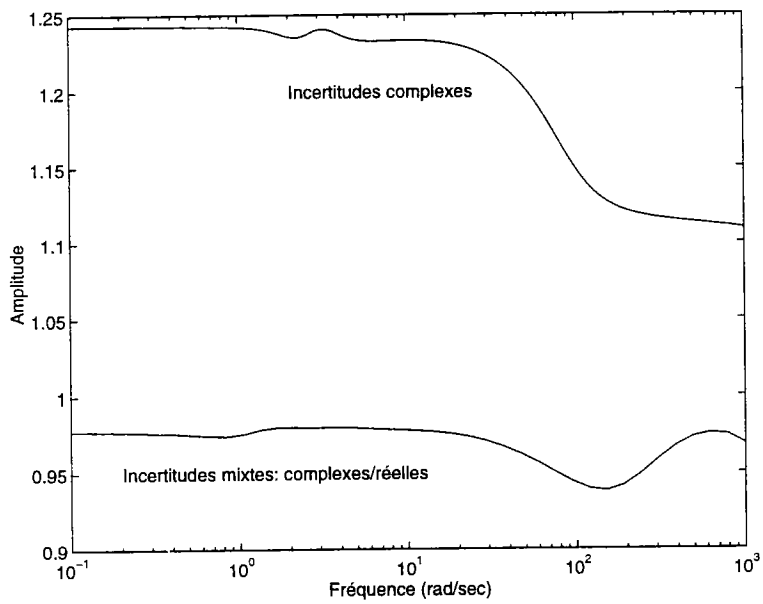


Figure 9.19: Prise en compte des incertitudes réelles

On observe donc sur cette dernière analyse, grâce à la prise en compte des incertitudes mixtes, une amélioration importante du niveau de performances qui devient inférieur à 1.

Le correcteur déterminé dans la troisième étape, à partir des scalings dynamiques, sera donc jugé satisfaisant dans la mesure où il remplit les objectifs de synthèse que nous nous étions fixés.

9.5 Implémentation et simulations

Avant de procéder à l'implémentation sur le système non linéaire, puis aux validations finales, on propose ici une rapide analyse du correcteur illustrant son caractère non stationnaire. Le problème de la réduction de l'ordre sera également évoqué.

9.5.1 Analyse et réduction du correcteur

On rappelle que la loi de commande est obtenue sous la forme suivante:

$$\mathcal{F}_l(K(s), \Theta(t)) \tag{9.31}$$

où $K(s)$ est un opérateur LTI d'ordre 16. On représente ici les réponses fréquentielles obtenues pour deux valeurs extrêmes des paramètres (figure 9.20):

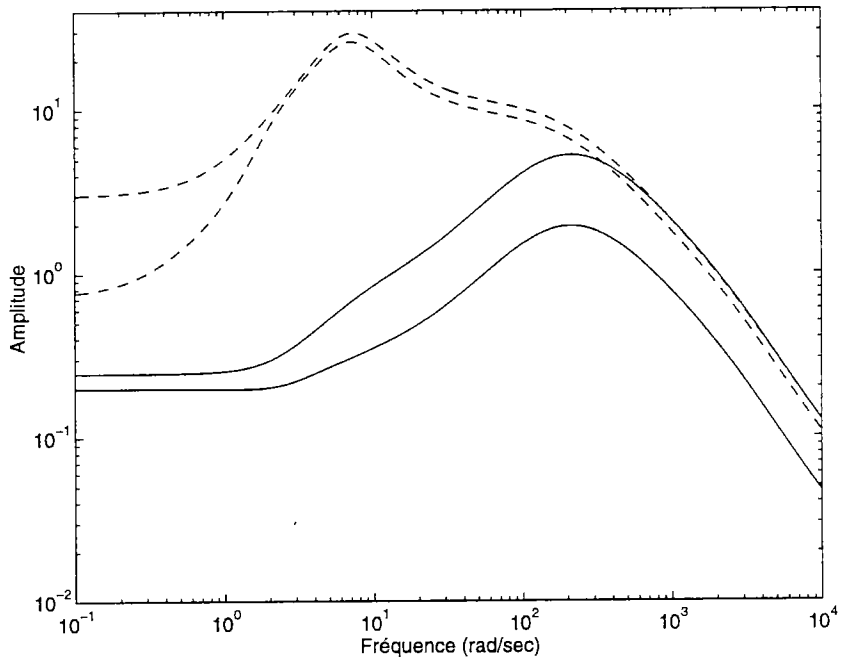


Figure 9.20: Réponses fréquentielles de deux correcteurs

Les courbes en trait plein correspondent à $\Theta(t) = I$, (pression et vitesse maximales). Les deux autres (trait interrompu) correspondent à $\Theta(t) = -I$ (pression et vitesse minimales). On observe dans ce dernier cas, des gains logiquement plus élevés, du fait de la moindre efficacité des gouvernes.

Réduction du correcteur

Pour des raisons pratiques, en vue de la mise en œuvre sur système réel, la loi de commande (9.31) a finalement été réduite. Pour cela, profitant de la structure LFT, nous

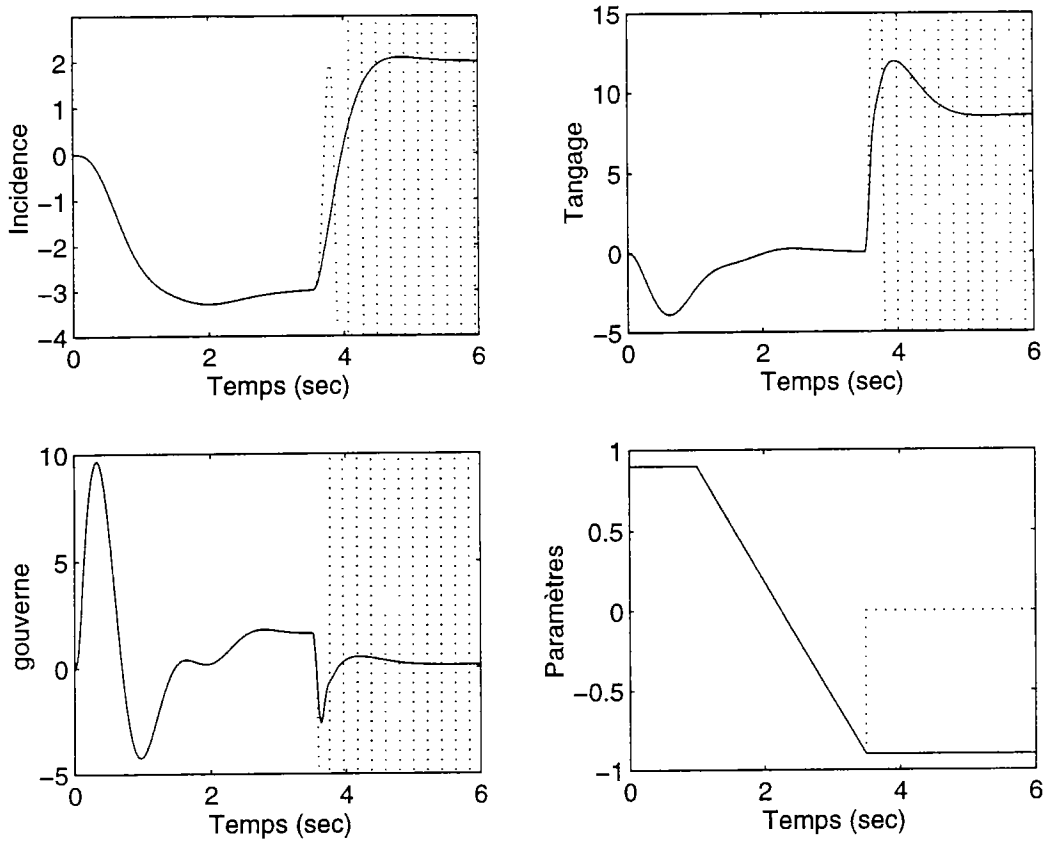
avons appliqué une technique classique de réduction équilibrée au système stationnaire $K(s)$ dont il est important de noter la stabilité. Bien qu'il n'existe actuellement aucun développement théorique permettant de justifier cette approche, les résultats obtenus dans la pratique sont souvent très satisfaisants. Sur cette application, l'ordre du correcteur a ainsi pu être ramené à 9.

9.5.2 Simulations temporelles

Conformément au schéma d'implémentation donné au chapitre 5 (figure 5.5), le correcteur LFT réduit a ensuite été discrétisé. La fréquence d'échantillonnage que nous avons utilisée est de 100 Hz.

Simulation linéaire

La figure (9.21) représente une simulation linéaire, réalisée à partir du modèle LPV de l'avion. A l'instant initial, on suppose la pression dynamique et la vitesse minimales, et on applique un échelon de consigne en incidence de -3 deg. On observera que le ralliement s'effectue de manière **très présise** en suivant le modèle de référence (les courbes sont confondues). A l'instant 3.5 sec, on applique un nouvel échelon d'amplitude 5 deg. Entre temps, pressions dynamiques et vitesses ont évolué pour atteindre leurs valeurs maximales. La nouvelle consigne grâce au correcteur LPV est atteinte en moins de 1 sec. En revanche, si à partir de l'instant 3.5 sec on cesse de prendre en compte l'évolution des paramètres au niveau de la loi de commande on observe une instabilité et une divergence rapide de l'incidence (voir la simulation en pointillés). Cette figure confirme donc la nécessité d'une adaptation du correcteur aux variations paramétriques du système.



——— Simulation 1 : adaptation des paramètres sur la durée totale de la simulation

····· Simulation 2 : adaptation des paramètres stoppée pour t > 3.5 sec

Figure 9.21: Simulations linéaires

Simulation non linéaire

La loi de commande est ensuite implémentée sur le système non linéaire complet, intégrant la modélisation des actionneurs et détecteurs. Dans la mesure où la conception du correcteur repose sur la linéarisation du système, on modifiera les signaux qu'il reçoit et génère comme indiqué sur le schéma suivant:

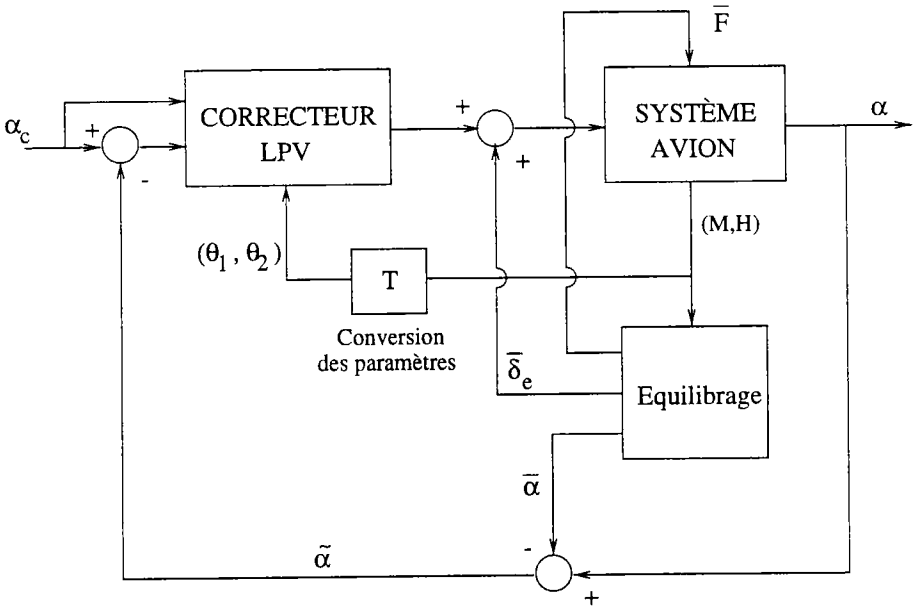


Figure 9.22: Schéma d'implémentation

Les figures (9.23) et (9.24) montrent une simulation non linéaire initialisée autour du point d'équilibre correspondant à une altitude de 6000 ft et $Mach$ 0.8. Au cours de la simulation d'une durée de 12 sec, on applique successivement deux échelons. Le premier d' amplitude de 17.5 deg dure 2 sec, le second d'amplitude 11 sec est appliqué pendant 3 sec. Il en résulte une perte de vitesse associée à une montée importante de l'appareil, d'où une diminution spectaculaire de la pression dynamique. Initialement proche de 800 psf, celle-ci voit sa valeur, en fin de simulation, passer en-dessous de 200 psf (voir figure 9.24). La trajectoire de référence apparaît en pointillés sur la figure (9.23). On pourra ainsi noter la qualité du suivi de consigne. On remarquera par ailleurs le respect des spécifications au niveau du débattement des gouvernes, tant en position qu'en vitesse.

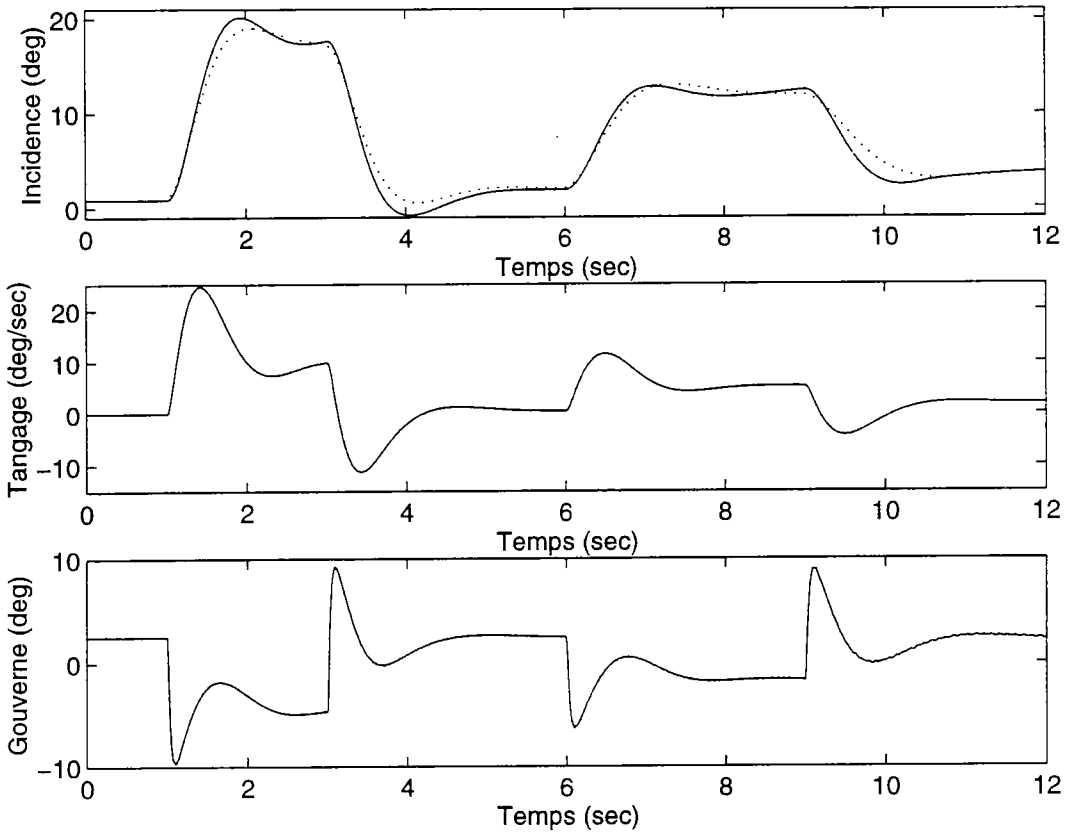


Figure 9.23: Simulation non linéaire

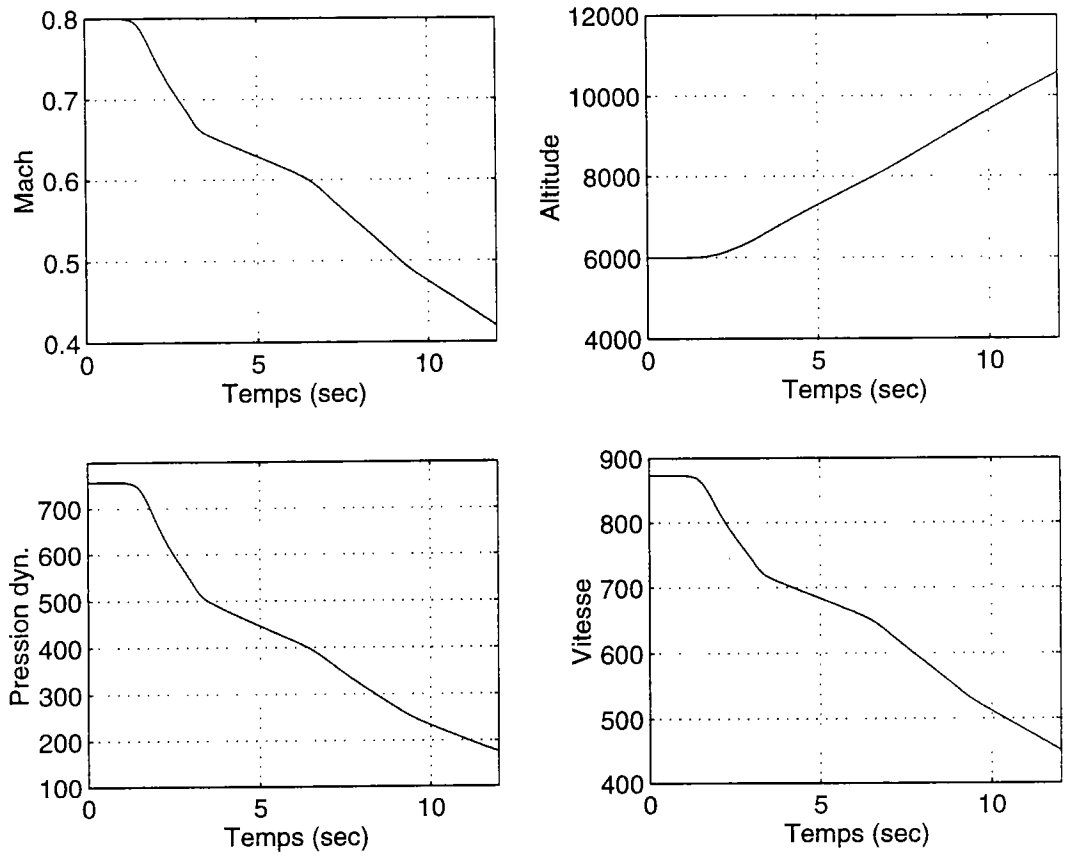


Figure 9.24: Evolution des paramètres

9.6 Conclusion

Cette application au pilotage longitudinal d'un avion de combat constitue finalement un argument supplémentaire en faveur des méthodes de synthèse développées dans la seconde partie du mémoire. Elle illustre notamment le bien-fondé de notre approche qui, calquée sur le principe de la μ-synthèse, permet de générer des correcteurs LPV robustes. Elle met également en évidence l'intérêt de la modélisation LFT que nous avons ici présentée dans le détail.

Par ailleurs, il peut être intéressant de noter le caractère générique de l'approche utilisée dans la construction du modèle de synthèse, depuis l'écriture des équations de la mécanique du vol, jusqu'à la formulation finale. Ainsi, une procédure similaire pourrait

par exemple être envisagée dans le cadre du pilotage des avions civils, même si à ce niveau les variations paramétriques sont moins brutales.

Conclusion Générale

Résumé de la contribution

Sur le plan théorique

Des variations autour de l'algorithme de synthèse LPV proposé dans [7] ont été développées afin de prendre en compte, des critères d'optimisation différents, de type $\mathcal{H}_2$ ou mixtes $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$. Cette approche - validée par une application au pilotage d'un sous-marin - s'avère particulièrement intéressante pour résoudre les problèmes de réjection de bruits sur les systèmes non stationnaires.

Dans un deuxième temps, la robustesse des lois de commande LPV aux incertitudes paramétriques ainsi qu'aux erreurs de modélisation (actionneurs, capteurs, non-linéarité et dynamiques négligées) a fait l'objet d'une étude approfondie. Une approche heuristique, inspirée de la μ-synthèse a ainsi pu être développée.

Sur la mise en œuvre: vers une approche plus systématique

Un travail important visant à rendre la méthode plus facilement utilisable a été entrepris. Les algorithmes de synthèse développés, nécessitent en effet une modélisation particulière de la dépendance paramétrique: forme linéaire fractionnelle ou polytopique. Or, ces dernières correspondent rarement à la forme initiale des modèles rencontrés dans les applications, qui dans la plupart des cas, présentent des non-linéarités. Naturellement, par le biais des techniques LPV, nous ne prétendons pas résoudre tous les problèmes que pose la commande des systèmes non linéaires. Cependant, dans le cas des systèmes aéronautiques (voir chapitre IX) nous avons pu mettre en évidence une approche générique de construction de modèles LPV à partir des équations (non linéaires) de la mécanique du vol.

Par ailleurs, les deux modélisations utilisées (linéaire fractionnelle ou polytopique) ont fait l'objet d'une étude comparative dans laquelle ressortent les avantages de l'une par rapport à l'autre selon l'application considérée et selon l'algorithme de synthese utilisé.

Au niveau des applications

Dans ce travail, nous avons concentré une part importante de nos efforts aux développements d'applications réalistes et variées. Les méthodes théoriques proposés ont donc fait l'objet d'un codage numérique sur Matlab, utilisant les outils de résolution de $LMI - Lab$ [46].

Nous avons déjà evoqué le pilotage du sous-marin (régulation de l'immersion en présence de houle). Les techniques LPV ont également permis la conception d'une loi de commande pour le pilotage en incidence d'un missile sur un grand domaine de vol. La difficulté majeure sur cette application, outre la taille du domaine de vol qui engendre des variations paramétriques notables, fut la prise en compte de flexibilités perturbant considérablement les mesures.

L'application la plus complète concerne la conception d'une loi de commande pour l'aide au pilotage d'un avion de combat. A partir du modèle non linéaire fourni par les équations de la mecanique du vol d'une part et d'essais en vol pour l'identification des coefficients aerodynamiques d'autre part, deux modèles LPV ont été construits. Nous avons finalement retenu le modèle LFT, mieux adpaté à la nature de l'application traitée. L'algorithme de synthèse de lois de commande LPV robustes aux incertitudes paramétriques a été mis en œuvre avec succès. La loi de commande a fait l'objet d'une implémentation complète sur le modèle non linéaire intégrant les dynamiques des capteurs et des actionneurs. Les simulations temporelles obtenues valident finalement notre approche.

Critiques et Perspectives

Comme toutes les méthodes d'analyse ou de synthèse, celles que nous avons développées dans la thèse présentent quelques limitations qu'il convient de garder à l'esprit au moment de la conception des lois de commande. Ici, il s'agira principalement de limitations numériques. En particulier, si l'ordre du système devient trop élevé, les temps de calcul augmentent rapidement pour finalement devenir prohibitifs. Par ailleurs, une certaine expertise est parfois nécessaire pour améliorer, en fonction de la nature de l'application, le comportement numérique des algorithmes.

Perspectives sur le plan théorique Les prolongements possibles de nos travaux, sur le plan théorique, pourraient donc se situer au niveau de l'amélioration du comportement et de la rapidité des algorithmes. Mais il s'agit là d'un travail plus proche des préoccupations du numéricien que de l'automaticien. Nous ne doutons pas que les travaux des spécialistes dans ce domaine pourront apporter encore davantage de crédit à ce type de techniques.

Perspectives au niveau des applications Les applications que nous présentons dans la thèse appartiennent principalement au domaine de l'aéronautique - à l'exception près du sous-marin que l'on rattachera bien sûr au domaine naval. Notons cependant que des

applications par exemple dans le domaine spatial - particulièrement riche en systèmes non stationnaires - sont parfaitement envisageables:

- commande robuste appliquée au pilotage des lanceurs,
- stabilisation des véhicules spatiaux,
- contrôle d'attitude des satellites.

Dans chacun des cas, qu'il s'agisse de l'évolution d'un paramètre physique (perte de masse), d'une évolution de l'environnement ou de la configuration (orientation des panneaux solaires), l'aspect non stationnaire est fortement présent.

Annexes

Annexe A: Inégalités Matricielles Linéaires

Les principaux résultats présentés dans cette thèse sont exprimés à l'aide d'inégalités matricielles linéaires (que nous notons **LMI** - le lecteur voudra bien pardonner cet anglicisme!). Ce formalisme est particulièrement attrayant puisqu'il conduit à des problèmes d'optimisation convexe pour lesquels, bien qu'il s'agisse de problèmes non différentiables, il existe aujourd'hui des outils de résolution efficaces [46].

A.1 Un peu d'histoire

Les LMI jouent à cache-cache avec la théorie de la commande des systèmes depuis plus d'un siècle (cf. analyse de la stabilité au sens de Lyapunov). Mais, c'est plus tard, au cours des années 50, que Lur'e et Postnikov, sans pour autant utiliser la terminologie actuelle, ont développé un critère de stabilité [82] qui a exactement la forme d'une LMI et montré ainsi que la théorie de Lyapunov avait un brillant avenir devant elle dans le domaine des applications. Citons également les travaux de Yakubovich [136], qui au milieu des années 60, a développé des méthodes d'analyse de la stabilité absolue, fondées sur ce qu'il appelait déjà inégalités matricielles. Au cours de cette même période décidément riche, on montra que parmi ces premières inégalités, certaines pouvaient être résolues par des méthodes graphiques (critère de la positivité - lemme de Kalmand-Yakubovich-Popov, connu également sous le nom de lemme positif-réel). Puis, au tout début de la décennie suivante, dans un article paru en 1971 [129], Willems développe une méthode algébrique de résolution de certaines LMI résultant de l'application du lemme positif-réel. C'est finalement au début des années 80 que l'on s'aperçut qu'il était certainement possible, grâce notamment à la puissance accrue des calculateurs, de résoudre les LMI par les techniques de programmation convexe. L'application de ces techniques apparaît aujourd'hui non seulement dans la théorie de la commande des systèmes, mais également

dans la plupart des branches de l'automatique. Pour plus de détails, nous invitons le lecteur à se reporter à [23].

Très récemment, afin de traiter une classe plus large que celle des problèmes d'optimisation convexe, quelques auteurs se sont intéressés à la résolution d'inégalités matricielles bilinéaires, naturellement baptisées **BMI** [49, 89]. Malheureusement, pour étendre les LMI aux BMI, il ne suffit pas de changer le L en B! Résoudre une inégalité matricielle bilinéaire est en effet un problème non convexe dont on montre qu'il est $\mathcal{NP}$ complet [123] (la résolution ne peut se faire en temps polynômial).

A.2 Définitions

Positivité des matrices symétriques

La notion d'inégalité matricielle linéaire repose sur la définition d'une relation d'ordre sur les matrices symétriques (ou hermitiennes - cf. paragraphe A.2).

Définition A.1 *La matrice symétrique $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est dite positive (resp. strictement positive) si et seulement si:*

$$\forall v \in \mathbb{R}^n,\ v^T P v \geq 0\ (resp. > 0) \tag{A.32}$$

△

En remarquant que les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles, nous pouvons énoncer la propriété suivante:

Propriété A.2

$$P = P^T \geq 0\ (resp. > 0) \iff \lambda_{min}(P) \geq 0\ (resp. > 0) \tag{A.33}$$

□

Une seconde propriété fondamentale que nous utilisons, le plus souvent sans même la citer est la suivante:

Propriété A.3 *Etant donnée une matrice quelconque $V \in \mathbb{R}^{n\times m}$ de* **rang plein**, *on a:*

$$P = P^T > 0 \iff V^T P V > 0 \tag{A.34}$$

□

Inégalités matricielles linéaires

Définition A.4 *Etant donnée une famille de matrices symétriques $\{P_i\}_{i=1\ldots r}$ de $\mathbb{R}^{n\times n}$ et un vecteur $x = [x_1\ x_2 \ldots x_r]^T$ de $\mathbb{R}^r$,une inégalité matricielle linéaire (LMI) stricte (resp. non stricte) s'écrit sous la forme:*

$$P(x) = P_0 + x_1 P_1 + \ldots + x_r P_r > 0\,(resp. \geq 0) \tag{A.35}$$

△

Remarques

- Les variables de décision x_i stockées dans le vecteur x peuvent l'être également dans une matrice quelconque X. Ainsi, par exemple, l'inégalité suivante est une LMI (on suppose les matrices de dimensions compatibles de sorte que le produit AXB soit bien défini):

  $$AXB + B^T X^T A^T < 0 \tag{A.36}$$

  La linéarité de l'expression en X et donc par rapport aux scalaires x_{ij} qui constitue cette matrice, est en effet évidente.

- Un ensemble de LMI peut être traité comme une seule LMI structurée. Nous avons en effet:

  $$\forall i = 1, \ldots, m,\ P_i(x) > 0 \iff diag(P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x)) > 0 \tag{A.37}$$

LMI au sens de la positivité des matrices hermitiennes

La notion de positivité des matrices hermitiennes est une extension immédiate dans $\mathbb{C}$ à ce qui précède:

$$P = P^* > 0\,(resp. \geq 0) \iff \forall v \in \mathbb{C}^n, v^T P v > 0\,(resp. \geq 0) \tag{A.38}$$

Notons que la propriété A.2 reste valable ici dans la mesure où les valeurs propres de matrices hermitiennes restent réelles.

L'application des théories du faible gain, ou de la positivité, entre autres, conduisent souvent à des problèmes de résolution de LMI au sens de la positivité de ces matrices, c'est-à-dire:

$$P(x) = S(x) + jT(x) > 0 \tag{A.39}$$

où $P(x)$ est une matrice hermitienne de $\mathbb{C}^{n\times n}$ dont la partie réelle symétrique est notée $S(x)$ tandis que $T(x)$ correspond à la partie imaginaire, anti-symétrique ($T(x) = -T^T(x)$).

Cependant les algorithmes de résolution travaillent sur des inégalités réelles. Il convient donc de modifier la relation (A.39) en remarquant que:

$$V \begin{pmatrix} S(x) & T(x) \\ -T(x) & S(x) \end{pmatrix} V^{-1} = \begin{pmatrix} S(x) - jT(x) & 0 \\ 0 & S(x) + jT(x) \end{pmatrix} \tag{A.40}$$

avec

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{pmatrix} \tag{A.41}$$

On en déduit l'identité des spectres:

$$\Lambda(P(x)) = \Lambda\left(\begin{pmatrix} S(x) & T(x) \\ -T(x) & S(x) \end{pmatrix}\right) \tag{A.42}$$

puis finalement:

$$P(x) > 0 \iff \begin{pmatrix} S(x) & T(x) \\ -T(x) & S(x) \end{pmatrix} > 0 \tag{A.43}$$

A.3 Méthodes générales de résolution

Les trois problèmes classiques

Les trois problèmes d'optimisation convexe que l'on rencontre le plus fréquemment dans le cadre de la formulation par LMI sont:

- **Le problème de faisabilité.** Il s'agit de trouver un vecteur x tel que $P(x) > 0$. On remplace généralement ce problème par la recherche de x qui minimise le scalaire t tel que:

  $$-P(x) < t.I \tag{A.44}$$

  Si le meilleur t obtenu est négatif, le problème est faisable. Vérifier la stabilité d'un système linéaire invariant se ramène très facilement à ce genre de problème.

- **Le problème de valeurs propres.** Il s'agit cette fois de minimiser un objectif linéaire, sous contrainte LMI, supposée faisable:

$$min\, c^T x \;/\; P(x) > 0 \tag{A.45}$$

où c est un vecteur de même dimension que x. On pourra rencontrer ce type de problème en cherchant par exemple à calculer la norme d'un système linéaire.

- **Le problème de valeurs propres généralisées.** Ce type de problème, numériquement plus coûteux, se formalise ainsi:

$$min\, \lambda \;/\; \begin{cases} P_1(x) < \lambda P_2(x) \\ P_2(x) > 0 \\ P_3(x) > 0 \end{cases} \tag{A.46}$$

Il apparaît notamment dans les problèmes de recherche de "Scalings".

Remarque 1: Les contraintes exprimées à travers chacun de ces trois problèmes, sont strictes. Il arrive parfois que l'on doive prendre en compte des inégalités non strictes. Dans certains cas pathologiques, cela peut conduire à des solutions radicalement différentes. Néanmoins, une LMI, faisable, non stricte peut toujours se ramener à une inégalité stricte [23].

Remarque 2: Les trois problèmes que nous avons présentés sont naturellement convexes ou quasi-convexes, ce qui garantit l'existence d'un optimum global. En revanche, ils ne sont pas différentiables, dans la mesure où les contraintes portent sur des valeurs propres qui, au voisinage de l'optimum deviennent multiples. Le calcul des directions de recherche optimales, s'il s'avérait nécessaire, requiert alors l'évaluation d'un sous-gradient.

Nous présentons maintenant de façon très succinte les deux grandes familles de méthodes qui permettent de traiter les problèmes exposés.

Méthodes des plans sécants

Ces méthodes, fondées sur un principe relativement simple, furent introduites dans le cadre de la programmation convexe au cours des années 1970 [40]. Ce n'est pourtant qu'à la fin de la dernière décennie que l'on trouve des applications dans le domaine de la commande robuste [101, 48].

Sur le plan théorique, les méthodes de plans sécants offrent la garantie d'une certaine efficacité, puisqu'elles assurent la convergence vers l'optimum en temps polynomial. En revanche, la mise en œuvre sur calculateur conduit souvent à des temps de calcul prohibitifs.

Afin de donner au lecteur une idée un peu plus précise du principe général de fonctionnement de ces méthodes, nous décrivons ci-après celle de l'ellipsoïde:

Algorithme de l'ellipsoïde

1. Initialiser l'algorithme par un ellipsoïde $\mathcal{E}_0$ qui contient la solution.
2. Couper cet ellipsoïde par un plan passant par son centre.
3. Déterminer le plus petit ellipsoïde $\mathcal{E}_1$ qui enveloppe le demi-ellipsoïde précédent contenant la solution.
4. Itérer le processus (retour en 2) jusqu'à obtenir un ellipsoïde suffisamment petit.

On montre que la suite des volumes $\{V(\mathcal{E}_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ ainsi obtenue observe une décroissance géométrique, ce qui garantit la convergence en temps polynomial.

Méthodes de point intérieur

Les méthodes de points intérieurs, dans le cadre de la résolution des LMI furent développées en 1988 par deux mathématiciens russes [95]. Des améliorations ont ensuite été apportées à l'idée initiale pour arriver à la méthode décrite dans [96, 94] et de laquelle est inspirée la boîte à outils pour Matlab [46].

Cette méthode que nous nous garderons bien de développer ici repose sur une transformation préalable du problème par l'introduction de la fonction "barrière":

$$\Phi(x) = \begin{cases} -log(det(P(x))) & si\ P(x) > 0 \\ \infty & sinon \end{cases} \tag{A.47}$$

Ainsi par exemple, le problème de faisabilité revient maintenant à minimiser la fonction $\Phi(x)$. Pour cela il est fait appel aux outils de l'optimisation non différentiable d'une part et à la notion - développée par les auteurs - de fonctions "auto-concordantes" [96] d'autre part.

Cette méthode, offre un avantage certain sur les techniques de plans sécants: la rapidité. Des problèmes de taille relativement grande peuvent ainsi être traités efficacement, comme peuvent en témoigner les applications développées dans cette thèse.

A.4 Méthodes algébriques

En dépit de leur rareté, les problèmes d'optimisation sous contraintes LMI, pouvant être résolus par une approche algébrique méritent qu'on s'y attarde. En effet, chaque fois qu'on pourra éviter la mise en œuvre d'une méthode générale relativement coûteuse on tâchera de le faire. Nous commençons par décrire un exemple classique dont la résolution se ramène à celle d'une équation de Riccati. Dans un deuxième temps, nous considérons une inégalité que nous retrouvons en annexe B et dont la résolution constitue souvent la phase finale des méthodes de synthèses proposées dans la seconde partie de ce mémoire.

Un exemple classique

Soient quatre matrices A, B, C, et D constituant les données de la représentation d'état d'un système quelconque et sur lesquelles on fait les hypothèses suivantes:

- (i) $D^T D$ est inversible
- (ii) $D^T C = 0$

Nous voudrions déterminer la matrice symétrique définie positive Q de trace maximale telle que soit satisfaite l'inégalité:

$$\begin{pmatrix} AQ + QA^T - 2B(D^TD)^{-1}B^T & QC^T - D(D^TD)^{-1}B^T \\ CQ - D(D^TD)^{-1}B^T & -I \end{pmatrix} \leq 0 \qquad \text{(A.48)}$$

De façon évidente, il s'agit d'un problème aux valeurs propres, qui entre dans la seconde catégorie de ceux que nous avons définis plus haut. Mais, un deuxième regard révèle qu'il s'agit aussi d'une formulation LMI du problème LQR [129] dont on connaît fort bien une solution analytique! Aussi, la matrice Q est-elle donnée par la relation: $Q = P^{-1}$ où P est la solution de l'**équation de Riccati**:

$$A^T P + PA - PB(D^TD)^{-1}B^T P + C^T C = 0 \qquad \text{(A.49)}$$

LMI de la forme: $\Psi + P^T\Omega Q + Q^T\Omega^T P < 0$

Le problème de **faisabilité** considéré dans ce paragraphe est le suivant:

Problème A.5 *Etant données une matrice symétrique $\Psi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et deux matrices quelconques $P \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $(p \leq n)$, $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $(m \leq m)$, déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_\Omega$ des matrices $\Omega \in \mathbb{R}^{m\times p}$ telles que:*

$$\Psi + P^T\Omega Q + Q^T\Omega^T P < 0 \tag{A.50}$$

Remarque: Ce type d'inégalité intervient en particulier dans les formulations LMI de diverses méthodes de synthèse, dont celles que nous présentons dans ce mémoire. La variable Ω représente en général les paramètres de la représentation d'état du correcteur:

$$\Omega = \begin{pmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{pmatrix}$$

Nous verrons plus loin, dans un contexte légèrement différent (cf. annexe B - lemme de projection) que le problème A.5 admet un ensemble de solutions $\mathcal{E}_\Omega$ non nul si et seulement si:

$$\begin{cases} \mathcal{N}_P{}^T\Psi\mathcal{N}_P < 0 \\ \mathcal{N}_Q{}^T\Psi\mathcal{N}_Q < 0 \end{cases} \tag{A.51}$$

où $\mathcal{N}_P$ et $\mathcal{N}_Q$ sont des bases des noyaux respectifs des matrices P et Q.

Afin de simplifier l'écriture des solutions, on supposera en outre que P et Q sont de rang plein, ie:

$$rang(P) = p\,, \quad rang(Q) = m \tag{A.52}$$

Notons qu'il est toujours possible de se ramener à ce cas. En effet, si les lignes de P et Q ne sont pas toutes indépendantes entre elles, il existe des matrices de changements de base X et Y telles que:

$$XP = \begin{pmatrix} \tilde{P} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad YQ = \begin{pmatrix} \tilde{Q} \\ 0 \end{pmatrix}$$

où $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ sont maintenant de rang pleins.

L'inégalité A.50 peut alors s'écrire:

$$\Psi + \tilde{P}^T\tilde{\Omega}_{11}\tilde{Q} + \tilde{Q}^T\tilde{\Omega}_{11}\tilde{P} < 0 \tag{A.53}$$

avec:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_{11} & \tilde{\Omega}_{12} \\ \tilde{\Omega}_{21} & \tilde{\Omega}_{22} \end{pmatrix} = Y^{-T}\Omega X^{-1} \tag{A.54}$$

Finalement, à partir de l'ensemble $\tilde{\mathcal{E}}_{\Omega_{11}}$ des solutions de l'inégalité A.53, on déduit:

$$\mathcal{E}_\Omega = \left\{ Y^T \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_{11} & * \\ * & * \end{pmatrix} X \ , \ \tilde{\Omega}_{11} \in \tilde{\mathcal{E}}_{\Omega_{11}} \right\} \tag{A.55}$$

Ayant décrit l'ensemble des conditions de résolution, nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème suivant:

Théorème A.6 Caractérisation algébrique de $\mathcal{E}_\Omega$ *Compte tenu des hypothèses (A.51) et (A.52), l'ensemble $\mathcal{E}_\Omega$ des solutions du problème A.5 est constitué par les matrices de la forme:*

$$\Omega = \Omega_1 + {\Omega_2}^{\frac{1}{2}} U {\Omega_3}^{\frac{1}{2}} \tag{A.56}$$

où U est une matrice arbitraire bornée en norme par 1, tandis que Ω_1, Ω_2 et Ω_3 sont déterminées de manière unique par les relations algébriques:

$$\begin{cases} \Omega_1 = -(Q_1^T - \Psi_{12}{\Psi_{22}}^{-1}{Q_2}^T)\Omega_3 \\ \Omega_2 = (\Psi_{12}{\Psi_{22}}^{-1}{\Psi_{12}}^T - \Psi_{11} - \Omega_1{\Omega_3}^{-1}{\Omega_1}^T) \\ \Omega_3 = -(Q_2{\Psi_{22}}^{-1}{Q_2}^T)^{-1} \end{cases} \tag{A.57}$$

avec

$$\begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {P^\dagger}^T \\ {\mathcal{N}_P}^T \end{pmatrix} \Psi \, (P^\dagger \quad \mathcal{N}_P) \tag{A.58}$$

et

$$(Q_1 \quad Q_2) = Q \, (P^\dagger \quad \mathcal{N}_P) \tag{A.59}$$

□

La preuve un peu technique de ce théorème est détaillée dans [44, 59]. Remarquons simplement ici que d'après les hypothèses (A.51) et (A.52) on a:

$$\Psi_{22} < 0 \quad \Omega_2 > 0 \quad \Omega_3 > 0$$

ce qui garantit l'existence d'un ensemble de solutions non vide.

Annexe B: Lemmes techniques

L'objet de cette annexe est de présenter un certain nombre de résultats techniques intermédiaires que nous utilisons à plusieurs reprises dans ce mémoire.

B.1 Variations autour du complément de Schur

Le complément de Schur est sans doute le lemme le plus utilisé puisqu'il permet d'écrire sous forme de LMI certaines inégalités matricielles **non linéaires**.

Lemme B.7 Complément de Schur

Etant données une matrice quelconque $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ et deux matrices symétriques $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $S \in \mathbb{R}^{m\times m}$, alors:

$$\begin{pmatrix} R & M \\ M^T & S \end{pmatrix} > 0 \iff \begin{cases} R > 0 \\ S - M^T R^{-1} M > 0 \\ S > 0 \\ R - M S^{-1} M^T > 0 \end{cases} \tag{B.60}$$

□

Corollaire B.8 Projection du complément de Schur

En reprenant les notations précédentes et en introduisant de plus la matrice $N \in \mathbb{R}^{n\times p}$ et l'identité I de $\mathbb{R}^{m\times m}$, on a:

$$\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} R & M \\ M^T & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} > 0 \iff \begin{cases} S > 0 \\ N^T(R - MS^{-1}M^T)N > 0 \end{cases} \tag{B.61}$$

□

Nous terminons ce point en présentant deux exemples classiques d'application du complément de Schur que nous retrouvons en différents points de la thèse:

Exemple B.1 Valeur singulière maximale

Etant donnée une matrice M quelconque de $\mathbb{R}^{n\times m}$,

$$\bar{\sigma}(M) \triangleq \sqrt{\lambda_{max}(M^T M)} < \alpha \iff \begin{pmatrix} \alpha I & M \\ M^T & \alpha I \end{pmatrix} > 0 \tag{B.62}$$

Exemple B.2 Rayon Spectral

Etant données deux matrices symétriques de mêmes dimensions, R et S,

$$\begin{cases} S > 0 \\ \lambda_{min}(RS) > \alpha^2 I \end{cases} \iff \begin{pmatrix} R & \alpha I \\ \alpha I & S \end{pmatrix} > 0 \tag{B.63}$$

Le premier exemple est une application directe du lemme B.7. Pour vérifier la seconde équivalence, appliquons d'abord le complément de Schur à l'inégalité matricielle qui équivaut à:

$$S > 0 \; et \; R > \alpha^2 S^{-1} \tag{B.64}$$

puis, comme on a également $S > 0$ (toujours d'après le lemme B.7), la matrice symétrique réelle non singulière $S^{\frac{1}{2}}$ existe et:

$$R > \alpha^2 S^{-1} \iff S^{\frac{1}{2}} R S^{\frac{1}{2}} > \alpha^2 I \tag{B.65}$$

Finalement, l'identité des spectres:

$$\Lambda(S^{\frac{1}{2}} R S^{\frac{1}{2}}) = \Lambda(RS) \tag{B.66}$$

conduit au résultat. Réciproquement, S étant par hypothèse, strictement positive, on peut utiliser l'identité (B.66), qui, compte tenu de la contrainte spectrale, nous amène à:

$$S^{\frac{1}{2}} R S^{\frac{1}{2}} > \alpha^2 I \tag{B.67}$$

puis, en multipliant cette inégalité à gauche et à droite respectivement par $(S^{-\frac{1}{2}})^T = S^{-\frac{1}{2}}$ et par $S^{-\frac{1}{2}}$, il vient:

$$R > \alpha^2 S^{-1} \tag{B.68}$$

■

B.2 $\mathcal{S}$ procédure

Introduction à la méthode

La $\mathcal{S}$ procédure est une méthode qui permet de formaliser un problème décrit par une contrainte quadratique devant être vérifiée sous un ensemble de contraintes également quadratiques. Il s'agit d'un problème qui intéresse les mathématiciens depuis fort longtemps et qui fait actuellement l'objet d'un regain d'intérêt de la part de quelques théoriciens en Automatique. La difficulté majeure inhérente à la $\mathcal{S}$ procédure tient au fait qu'elle engendre souvent une formulation plus ou moins conservative du problème initial. La plupart des publications récentes qui abordent cette question reposent sur le théorème dit d'application non conservative de la $\mathcal{S}$ procédure ($\mathcal{S}$ procedure losslessness theorem) [87, 88, 114].

Nous décrivons ici les versions originales de la méthode qui ont le mérite de conduire simplement à des formulations par inégalités matricielles linéaires. Afin de rendre la suite plus claire et plus concise nous proposons une définition préliminaire des contraintes quadratiques.

Définition B.9 Contraintes quadratiques

Soit $\{Q_i\}_{i=1\ldots r}$, une famille de matrices symétriques de $\mathbb{R}^{n\times n}$, à laquelle on associe l'ensemble convexe $\mathcal{C}_{\{Q_i\}}$, défini par:

$$\mathcal{C}_{\{Q_i\}} \triangleq \left\{\xi \in \mathbb{R}^n \,/\, \forall i = 1\ldots r,\ \xi^T Q_i \xi \leq 0\right\} \tag{B.69}$$

△

Le résultat suivant constitue la $\mathcal{S}$ procédure pour les formes quadratiques:

Théorème B.10 $\mathcal{S}$ procédure pour les formes quadratiques

Etant donnée une matrice symétrique $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, une **condition suffisante** *pour que:*

$$\forall \xi \in \mathcal{C}_{\{Q_i\}},\ \xi^T P \xi \leq 0 \ (resp. < 0) \tag{B.70}$$

est qu'il existe une famille de réels positifs $\{\lambda_i\}_{i=1\ldots r}$, telle que:

$$P - \sum_{i=1}^{i=r} \lambda_i Q_i \leq 0 \ (resp. < 0) \tag{B.71}$$

□

Remarques

- Si $r = 1$, la condition devient nécessaire.
- Dans le cas de l'inégalité non stricte, le résultat reste vrai si l'on remplace les formes quadratiques $\xi^T Q_i \xi$ et $\xi^T P \xi$ par des fonctions quadratiques de formes respectives: $\xi^T Qi\xi + v_i^T \xi + c_i$ et $\xi^T P \xi + v^T \xi + c$. Si maintenant on annule les matrices Q_i ainsi que la matrice P, les fonctions quadratiques deviennent linéaires. Dans ce cas, les relations (B.70) et (B.71) sont équivalentes. Ce résultat est connu sous le nom du lemme de Farkas.

$\mathcal{S}$ procédure, LMI et perturbations structurées

Pour que la notion introduite ne reste pas un outil mathématique abstrait, nous proposons ici une illustration classique de la méthode qui établit un lien avec les LMI d'une part et la notion importante pour l'automaticien de robustesse en présence de perturbations structurées d'autre part.

Condition suffisante de robustesse d'un critère quadratique

Considérons le système dynamique perturbé suivant:

$$\forall \Delta \in \mathbf{\Delta}\,,\ \|\Delta\| \leq 1$$
$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Ax + B_\Delta w_\Delta + B_p w_p \\ z_\Delta & = & C_\Delta x + D_{\Delta\Delta} w_\Delta + D_{\Delta p} w_p \\ z & = & C_p x + D_{p\Delta} w_\Delta + D_{pp} w_p \\ w_\Delta & = & \Delta z_\Delta \end{array} \right. \tag{B.72}$$

où $\mathbf{\Delta}$ représente l'ensemble des perturbations admissibles pour le système, vérifiant un certain nombre de contraintes structurelles. Ce type de modélisation de l'incertitude repose sur la notion de transformation linéaire fractionnelle (LFT) définie au Chapitre 2:

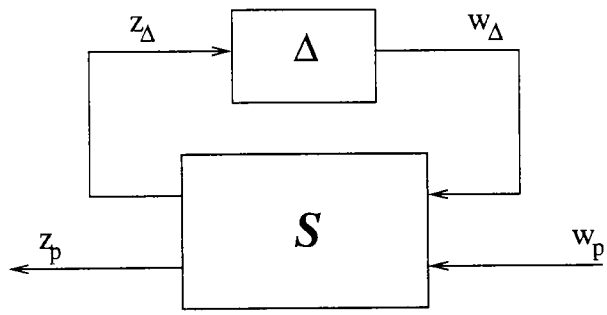


Figure B.25: Schéma du système perturbé

Supposons maintenant qu'une propriété relative à ce système bouclé s'exprime par la contrainte quadratique:

$$\mathcal{P}(\xi) = \xi^T P \xi = \xi^T \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ {P_{12}}^T & P_{22} & P_{23} \\ {P_{13}}^T & {P_{23}}^T & P_{33} \end{pmatrix} \xi \leq 0 \tag{B.73}$$

avec: $\xi = [x \ w_\Delta \ w_p]^T$ et où les P_{ij} dépendent des éléments A, B_Δ, B_p, ... de la représentation d'état du système.

Notons que ce type de contrainte est de la forme de celui que l'on peut obtenir en appliquant la théorie de Lyapunov et en choisissant des fonctions quadratiques (cf. chapitres 1 et 3).

Nous nous intéressons ici à la robustesse de la propriété $\mathcal{P}$ en présence des perturbations structurées, modélisées par $\Delta \in \mathbf{\Delta}$. Il s'agit donc de s'assurer que la contrainte (B.73) soit vérifiée pour toute perturbation admissible Δ bornée en norme par 1. Compte tenu des relations (B.72), nous pouvons écrire le problème sous la forme:

$$\begin{cases} \forall \xi \ / \ w_\Delta = U\xi = \Delta z_\Delta = \Delta V \xi, \\ \mathcal{P}(\xi) \leq 0 \end{cases} \tag{B.74}$$

avec $U = [0 \ \ I \ \ 0]$ et $V = [C_\Delta \ \ D_{\Delta\Delta} \ \ D_{\Delta p}]$

En utilisant simplement le fait que Δ est bornée par 1, on peut remplacer la contrainte égalité de (B.74) par l'inégalité quadratique:

$$\xi^T \left(U^T U - V^T V \right) \xi \leq 0 \tag{B.75}$$

et appliquer ensuite la $\mathcal{S}$ procédure. Cependant, on perd ainsi toute information sur la structure de la perturbation et le test de robustesse obtenu peut s'avérer extrêmement

conservatif. Pour améliorer le test, nous proposons une approche classique fondée sur l'utilisation d'opérateurs de "Scalings" (cf. chapitre 3). Cette approche s'inscrit habituellement dans le cadre de la théorie du faible gain. Nous en décrivons ici une version adaptée en vue de l'application de la $\mathcal{S}$ procédure.

Commençons par remarquer, que, pour toute perturbation Δ:

$$U\xi = \Delta V\xi \iff \forall D,\ DU\xi = D\Delta V\xi \tag{B.76}$$

et supposons maintenant que D commute avec Δ, l'inégalité quadratique (B.75) devient:

$$\xi^T\Big(U^T(D^TD)U - V^T(D^TD)V\Big)\xi \leq 0 \tag{B.77}$$

En fait, la relation (B.77) cache une multitude d'inégalités que l'on découvre en décomposant la matrice $L = D^TD$ sur une base $\{L_i\}_{i=1\ldots n_L}$ des matrices symétriques positives commutant avec Δ et le test de robustesse peut alors être réécrit sous la forme:

$$\begin{cases} \forall\xi,\ \forall i,\ /\ \xi^T\Big(U^TL_iU - V^TL_iV)\xi \leq 0 \\ \mathcal{P}(\xi) \leq 0 \end{cases} \tag{B.78}$$

En appliquant finalement la $\mathcal{S}$ procédure au problème décrit par les contraintes (B.78) il vient le premier résultat suivant:

S'il existe une famille $\{\lambda_i\}_{i=1\ldots n_L}$ de réels positifs telle que:

$$P - \sum_{i=1}^{i=n_L} \lambda_i(U^TL_iU - V^TL_iV) \leq 0 \tag{B.79}$$

alors la propriété $\mathcal{P}$ est robuste aux incertitudes structurées modélisées par Δ.

Finalement en reprenant la notation matricielle L le résultat qui précède admet la reformulation suivante:

Théorème B.11 *S'il existe une matrice symétrique positive L commutant avec les éléments de $\mathbf{\Delta}$ telle que la LMI suivante soit satisfaite:*

$$\begin{pmatrix} P_{11} + {C_\Delta}^TLC_\Delta & P_{12} + {C_\Delta}^TLD_{\Delta\Delta} & P_{13} + {C_\Delta}^TLD_{\Delta p} \\ {P_{12}}^T + {D_{\Delta\Delta}}^TLC_\Delta & P_{22} - L + {D_{\Delta\Delta}}^TLD_{\Delta\Delta} & P_{23} + {D_{\Delta\Delta}}^TLD_{\Delta p} \\ {P_{13}}^T + {D_{\Delta p}}^TLC_\Delta & {P_{23}}^T + {D_{\Delta p}}^TLD_{\Delta\Delta} & {P_{33}}^T + {D_{\Delta p}}^TLD_{\Delta p} \end{pmatrix} \leq 0 \tag{B.80}$$

alors, la propriété $\mathcal{P}$ est robuste aux perturbations structurées modélisées par l'opérateur Δ.

□

Remarques

- L'inégalité (B.80) généralise l'approche "faible gain" classique dans la mesure où elle exprime la robustesse d'une propriété quelconque, pourvu qu'elle puisse être traduite par une contrainte quadratique.

- Notons que l'inégalité obtenue est non stricte. De même, la matrice symétrique L doit être positive, mais pas strictement positive. Toutefois, au niveau de l'implémentation numérique de ce genre de test, on sera amené à considérer ces inégalités comme des inégalités strictes (voir annexe A). Ici, cela ne changera pas le résultat obtenu.

- Le théorème B.11 est une condition **suffisante** de robustesse. Le "conservatisme" intervient à plusieurs niveaux.

  - La faute incombe partiellement (voir au début de cette annexe) à la $\mathcal{S}$ procédure dès que le nombre des contraintes quadratiques sous lesquelles doit être vérifiée la contrainte $\mathcal{P}$ dépasse 1. Or, c'est toujours la cas quand il s'agit de prendre en compte des perturbations structurées.
  - Le conservatisme est lié également à la modélisation de l'incertitude qui repose ici sur une formulation LFT. En particulier dans cette approche, on ne tient pas compte de la distinction entre incertitudes réelles et complexes - voir chapitres 2 et 3 pour une discussion sur le conservatisme du modèle LFT.

S procédure et perturbations réelles

Suite à la dernière remarque que nous avons faite, nous développons ici un test de robustesse du critère quadratique $\mathcal{P}$ en présence de perturbations réelles structurées. Pour cela, nous adoptons une démarche analogue à celle qui précède. Toutefois, il nous faut adapter la formulation des contraintes quadratiques afin de prendre en compte le caractère réel de Δ, que nous supposons diagonale:

$$\Delta = diag(\delta_1,\ \delta_2,\ \ldots\ \delta_r) \tag{B.81}$$

notons que cette hypothèse, certes simplificatrice, est également inspirée de considérations pratiques.

Ainsi, les relations d'incertitudes s'écrivent à présent:

$$\forall \xi,\ U_i\xi = \delta_i V_i \xi,\ \ \delta_i \in \mathbb{R},\ |\delta_i| \leq 1 \tag{B.82}$$

où

$$U_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$V_i = [C_{\delta i} \;\; D_{\delta\delta i} \;\; D_{\delta p_i}]$$

Toute la difficulté, pour appliquer la méthode précédente dans les meilleures conditions, consiste maintenant à reformuler de façon non conservative les relations (B.82) à l'aide de contraintes quadratiques. Plusieurs auteurs se sont intéressés à ce problème [41, 42] car c'est la question incontournable à laquelle il faut répondre dès que l'on cherche à prendre en compte des perturbations réelles dans une approche fondée sur l'utilisation d'un modèle LFT. Nous nous appuyons ici sur un résultat de [42] exprimé par le lemme suivant:

Lemme B.12 *Etant donnés deux vecteurs $w \in \mathbb{R}^n$ et $z \in \mathbb{R}^n$. Il existe un réel δ tel que $w = \delta z$ et $|\delta| \leq 1$ si et seulement si:*

$$\begin{array}{ll} \forall S = S^T \geq 0, & w^T S w \leq z^T S z \\ \forall T = -T^T, & w^T T z = 0 \end{array} \tag{B.83}$$

□

L'application de la $\mathcal{S}$ procedure conduit finalement à la condition suffisante:

Théorème B.13 *S'il existe une famille de matrices symétriques positives S_i et une famille de matrices anti-symétriques T_i telles que:*

$$P - \sum_{i=1}^{i=r} ({U_i}^T S_i U_i - {V_i}^T S_i V_i + {U_i}^T T_i V_i - {V_i}^T T_i U_i) \leq 0 \tag{B.84}$$

alors, la propriété $\mathcal{P}$ est robuste aux perturbations structurées **réelles** *décrites par la relation (B.81).*

□

Par le même type d'approche, il est tout à fait possible d'envisager le cas des incertitudes mixtes complexes/réelles.

B.3 Elimination et changements de variables

La transposition des résultats d'analyse (cf. chapitre 3) pour en déduire des résultats de synthèse n'est pas toujours chose aisée car apparaît alors une variable matricielle supplémentaire relative aux paramètres du correcteur. Cette variable, simplement notée K quand il s'agit de compensation statique et Ω quand il s'agit de compensation dynamique, vient généralement multiplier les variables d'analyse (fonctions de Lyapunov, Scalings ou multiplieurs). Ainsi, le problème initialement caractérisé par une ou plusieurs LMI se transforme en une ou plusieurs $BMIs$ (cf. annexe A) qu'il s'agit de résoudre. Fort heureusement, il existe un certain nombre de cas où il est possible de contourner cette difficulté:

- soit par élimination pure et simple de la variable liée au correcteur, en utilisant le lemme de projection,
- soit par un changement de variable plus ou moins sophistiqué selon qu'il s'agisse d'un retour d'état ou d'un retour de sortie.

C'est cet ensemble de méthodes que nous nous proposons de détailler maintenant.

Lemme de projection

Le lemme que nous présentons ici permet d'éliminer la variable Ω dans les inégalités de la forme (voir annexe A):

$$\Psi + P^T\Omega Q + Q^T\Omega^T P < 0 \tag{B.85}$$

où la matrice symétrique Ψ est généralement une expression linéaire des variables d'analyse. Les matrices P et Q sont quelconques, de dimensions compatibles avec celles de Ψ et Ω. Il se peut également qu'elles dépendent linéairement des variables d'analyse. Ce type d'inégalités intervient dans différents problèmes de synthèse [44, 19].

Lemme B.14 *Etant données une matrice symétrique $\Psi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et deux matrices quelconques $P \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{p\times n}$, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

$$\Psi + P^T\Omega Q + Q^T\Omega P < 0 \tag{B.86}$$

$$\begin{cases} {\mathcal{N}_P}^T\Psi\mathcal{N}_P < 0 \\ {\mathcal{N}_Q}^T\Psi\mathcal{N}_Q < 0 \end{cases} \tag{B.87}$$

où $\mathcal{N}_P$ et $\mathcal{N}_Q$ désignent les noyaux respectifs des matrices P et Q.

□

Remarques

- La résolution du problème initial B.85 peut donc s'effectuer en deux étapes. La première consiste à résoudre les inégalités (B.87) par rapport aux variables d'analyse. Encore faut-il que ces inégalités soient linéaires. Puis, il ne reste plus qu'à résoudre l'inégalité (B.85), où les matrices Ψ, P et Q qui ne dépendent que des variables d'analyse, sont maintenant constantes. Nous indiquons au terme de cette annexe, une méthode algébrique de résolution des inégalités de ce type.

- Cette technique de résolution reste applicable pour les problèmes de la forme que nous avons décrite, pourvu que la contrainte (B.85) initiale soit unique. Elle ne permet donc pas - du moins, à l'heure actuelle - de traiter les problèmes de synthèse multi-objectifs par retour de sortie.

Changement de variable pour le retour d'état

Une grande variété de problèmes de synthèse (stabilisation, placement de pôles, synthèses $\mathcal{H}_\infty$, $\mathcal{H}_2$) en retour d'état se ramène à des inégalités matricielles de la forme:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(L, X, KX) = \mathcal{L}_1(L) + \mathcal{L}_2(X) + \mathcal{L}_3(KX) < 0 \\ X = X^T > 0 \end{cases} \tag{B.88}$$

où les expressions matricielles symétriques $\mathcal{L}_i(.)$ sont linéaires par rapport aux variables respectives L, X et KX.

En effectuant le **changement de variable**:

$$Y = KX \tag{B.89}$$

on est ramené à la résolution d'un problème **convexe** par rapport aux variables L, X et Y. La matrice K est finalement obtenue en inversant B.89:

$$K = YX^{-1} \tag{B.90}$$

ce qui ne pose pas de difficulté puisque $X > 0$ et donc inversible.

Ce changement de variable offre l'avantage non négligeable d'une grande simplicité de mise en œuvre. Malheureusement son utilisation dans le cas du retour de sortie nécessite l'introduction de contraintes de structure sur X [26]. Aussi, les conditions obtenues sont-elles parfois très conservatives.

Changement de variable pour le retour de sortie

Nous proposons ici un changement de variable, récemment introduit dans [30] et grâce auquel aucune hypothèse sur X n'est nécessaire. Il s'agit donc d'une alternative possible à la technique d'élimination de variables, avec toutefois un attrait supplémentaire, dans la mesure où ce changement de variable permet de transformer simultanément plusieurs inégalités. Il devient donc possible de traiter les problèmes multi-objectifs [30, 29, 113] de manière peu conservative.

Pour fixer les idées, intéressons-nous au problème de la stabilisation par retour dynamique de sortie représenté par le schéma ci-dessous:

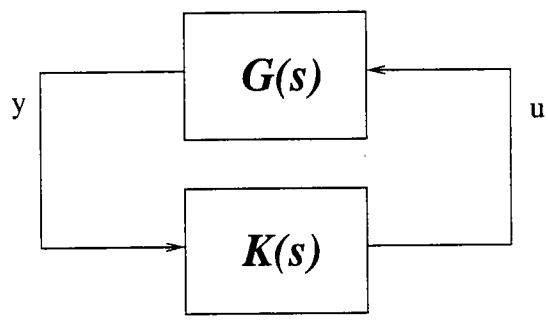


Figure B.26: Schéma de stabilisation

où on introduit les notations:

$$\begin{cases} G(s) = C_2(sI - A)^{-1}B_2 \\ K(s) = D_K + C_K(sI - A_K)^{-1}B_K \end{cases}$$

Afin de simplifier les expressions on suppose le système $G(s)$ strictement propre ($D_{22} = 0$). Notons qu'il est toujours possible de se ramener à ce cas par une transformation préalable des variables du correcteur.

La matrice d'évolution du système (figure B.26) en boucle fermée est donnée par la relation:

$$A_{cl} = \begin{pmatrix} A + B_2 D_K C_2 & B_2 C_K \\ B_K C_2 & A_K \end{pmatrix} \tag{B.91}$$

Le problème que nous voulons résoudre est celui de la recherche simultanée d'une matrice symétrique X et des paramètres du correcteur, tels que:

$$\begin{cases} A_{cl}X + X{A_{cl}}^T < 0 \\ X > 0 \end{cases} \tag{B.92}$$

On voit immédiatement que la première inégalité n'est pas linéaire par rapport aux variables X, A_K, B_K, C_K, et D_K. Le changement de variables que nous proposons ici a pour but de rendre cette inégalité linéaire.

Pour cela, afin de développer le produit $A_{cl}X$, nous commençons par partitionner la matrice X et son inverse:

$$X = \begin{pmatrix} R & M \\ M^T & E \end{pmatrix} \qquad X^{-1} = \begin{pmatrix} S & N \\ N^T & F \end{pmatrix} \tag{B.93}$$

Nous supposerons par la suite que l'ordre du correcteur coïncide avec celui du système. Ainsi, les matrices M et N deviennent carrées. En outre, dans la mesure où les inégalités (B.92) sont strictes, il n'est pas restrictif, au prix d'une petite perturbation sur M et N de supposer ces matrices inversibles. On invoquera simplement la densité de l'ensemble des matrices inversibles de $\mathbb{R}^{n\times n}$ dans $\mathbb{R}^{n\times n}$.

De par ces hypothèses, les partitions (B.93) conduisent à une expression factorisée de X qui présente l'avantage de ne plus dépendre ni de E, ni de F:

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} R & I \\ M^T & 0 \end{pmatrix}}_{X_1} \underbrace{\begin{pmatrix} I & S \\ 0 & N^T \end{pmatrix}^{-1}}_{{X_2}^{-1}} \tag{B.94}$$

avec

$$I - RS = MN^T \tag{B.95}$$

En multipliant les deux inégalités (B.92) à gauche et à droite, respectivement par ${X_2}^T$ et X_2, il vient:

$$\begin{cases} {X_2}^T A_{cl} X_1 + {X_1}^T {A_{cl}}^T X_2 < 0 \\ {X_2}^T X_1 > 0 \end{cases}$$

puis, en remplaçant X_1, X_2 et A_{cl} par leurs expressions respectives, on montre finalement que le problème de stabilisation par retour dynamique de sortie revient à satisfaire les deux inégalités suivantes:

$$\begin{pmatrix} AR + RA^T + B_2\mathcal{C}_K + {\mathcal{C}_K}^T {B_2}^T & \mathcal{A}_K + B_2 D_K C_2 \\ \mathcal{A}_K + (B_2 D_K C_2)^T & A^T S + SA + \mathcal{B}_K C_2 + {C_2}^T {\mathcal{B}_K}^T \end{pmatrix} < 0 \tag{B.96}$$

$$\begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix} > 0 \tag{B.97}$$

avec le **changement de variables**:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_K = S(A + B_2 D_K C_2)R + NB_K C_2 R + SB_2 C_K M^T + NA_K M^T \\ \mathcal{B}_K = SB_2 D_K + NB_K \\ \mathcal{C}_K = D_K C_2 R + C_K M^T \end{cases} \tag{B.98}$$

Remarques

- Les inégalités matricielles (B.96),(B.97) sont **linéaires** par rapport aux **nouvelles** variables: R, S, $\mathcal{A}_K$, $\mathcal{B}_K$, $\mathcal{C}_K$ et D_K. Après optimisation, le retour aux variables initiales X, A_K, B_K, C_K et D_K se fait ainsi:

  - Calculer M et N vérifiant (B.95). Notons que ce calcul est toujours réalisable. En effet, d'après (B.97), on vérifie (voir exemple B.2 sur l'utilisation du complément de Schur) que $\lambda_{min}(RS) > 1$ d'où l'inversibilité de $I - RS$. Une décomposition en valeurs singulières donne:

$$I - RS = U\Sigma V^T$$

    d'où:

$$M = U\Sigma^{\frac{1}{2}} \qquad N = V\Sigma^{\frac{1}{2}}$$

  - Inverser le système linéaire (B.98) pour en déduire successivement les paramètres B_K, C_K et A_K du correcteur:

$$\left\{\begin{array}{l} B_K = N^{-1}(\mathcal{B}_K - SB_2D_K) \\ C_K = (\mathcal{C}_K - D_KC_2R)M^{-T} \\ A_K = \quad N^{-1}(\mathcal{A}_K - S(A + B_2D_KC_2)R)M^{-T} \\ \qquad\quad -\mathcal{B}_KC_2RM^{-T} - N^{-1}SB_2C_K \end{array}\right. \tag{B.99}$$

- Ce même changement de variables, que nous avons choisi de présenter dans le cas le plus simple de la stabilisation, permet également de traiter des inégalités plus générales (intervenant par exemple en synthèse $\mathcal{H}_\infty$ ou $\mathcal{H}_2$ - voir seconde partie de la thèse). Notons en particulier, qu'il n'y a aucune limitation quant aux nombres d'inégalités, pourvu que, dans chacune d'elles apparaisse la même fonction de Lyapunov X.

Annexe C: Espaces $\mathcal{L}_q$

C.1 Quelques notations préliminaires

Dans cette annexe, μ désigne la mesure de Lebesgue et $\mathbf{E}$ l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, mesurables au sens de Lebesgue. Par extension, $\mathbf{E^n}$ est l'espace des fonctions $f(.) = [f_1(.)\ f_2(.)\ \ldots f_n(.)]^T$ telles que chaque composante f_i appartienne à E. On dira qu'une fonction de E est **essentiellement bornée**, si elle est bornée sur tout intervalle de $\mathbb{R}_+$ de mesure non nulle au sens de μ. On notera **ess sup f** la borne essentielle de f:

$$\text{ess } sup\ f \ = \ inf\{a/\mu(t/f(t) > a) = 0\}$$

Enfin, pour toute fonction $f(.)$ de E, on notera $\mathbf{f_T}(.)$ sa troncature au delà de l'instant T, c'est-à-dire:

$$\begin{cases} f_T(t) = f(t) & si\ t \leq T \\ f_T(t) = 0 & si\ t > T \end{cases} \tag{C.100}$$

C.2 L'espace $\mathcal{L}_q$ et ses extensions

Définition C.15 Espace $\mathcal{L}_q$

On note $\mathcal{L}_q$ l'espace des fonctions $f(.)$ de E telles que:

$$\begin{cases} \int_0^\infty |f(t)|^q dt \ < \infty & si\ q < \infty \\ f(.) \text{ est essentiellement borne} & si\ q = \infty \end{cases} \tag{C.101}$$

△

Définition C.16 Espace $\mathcal{L}_{q,e}$

On note $\mathcal{L}_{q,e}$ une extension classique de $\mathcal{L}_q$ à l'espace des fonctions $f(.)$ de E telles que:

$$\forall T > 0,\ f_T(.) \in \mathcal{L}_q\ (resp.\mathcal{L}_q^n) \tag{C.102}$$

△

Définition C.17 Espace $\mathcal{L}_q^n$, $\mathcal{L}_{q,e}^n$

On note $\mathcal{L}_q^n$ (resp. $\mathcal{L}_{q,e}^n$) l'espace des fonctions $f(.)$ de E^n telles que:

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots n\},\ f_i(.) \in \mathcal{L}_q\ (resp.\mathcal{L}_{q,e}) \tag{C.103}$$

△

Propriété C.18 *Espaces vectoriels*

$\mathcal{L}_q$, $\mathcal{L}_q^n$, $\mathcal{L}_{q,e}$, $\mathcal{L}_{q,e}^n$ sont des **espaces vectoriels**.

□

C.3 Normes

Définition C.19 $\|.\|_q$

On note $\|.\|_q$ l'application de $\mathcal{L}_q^n$ dans $\mathbb{R}_+$, définie pour $n = 1$, par:

$$\|f(.)\|_q \triangleq \begin{cases} \left(\int_0^\infty |f(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} & si\ q < \infty \\ \text{ess}\ sup\ f & si\ q = \infty \end{cases} \tag{C.104}$$

et pour $n > 1$, par:

$$\|f(.)\|_q \triangleq \begin{cases} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\int_0^\infty |f_i(t)|^q dt\right)^{2/q}} & si\ q < \infty \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n (\text{ess}\ sup\ f_i)^2} & si\ q = \infty \end{cases} \tag{C.105}$$

△

Propriété C.20 *Espace de Hilbert*

L'application $\|.\|_q$ vérifie les axiomes d'une norme et $\mathcal{L}_q^n$ muni de cette norme est un **espace vectoriel normé** *de Banach.*

□

Annexe D: Propriétés des systèmes linéaires invariants

D.1 Fonctions de transfert

On rappelle que tout système linéaire invariant, gouvernable et observable, décrit dans le domaine temporel:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{D.106}$$

admet une représentation équivalente dans le domaine fréquentiel:

$$(s) = D + C(sI - A)^{-1}B \tag{D.107}$$

La fonction matricielle $G(s)$, appelée **fonction de transfert**, exprime la tranformée de Laplace du signal de sortie en fonction de celle du signal d'entrée:

$$\hat{y}(s) \triangleq \int_0^\infty e^{-st} y(t)dt = G(s)\hat{u}(s) \tag{D.108}$$

Les notations que nous venons d'introduire resteront valables dans la suite de cette annexe. En particulier, toute représentation temporelle sera implicitement supposée **minimale**, c'est-à-dire, gouvernable et observable.

D.2 Localisation des pôles

Introduction

On rappelle que les pôles d'un système linéaire $G(s)$ coïncident avec les valeurs propres de la matrice d'évolution A. Par conséquent, leur localisation dans le plan complexe aura

une influence directe sur:

- la stabilité du système (cf. section 1.3.2),
- son comportement transitoire [69]
  - temps de réponse,
  - amortissement.

On retiendra généralement des secteurs de la forme suivante:

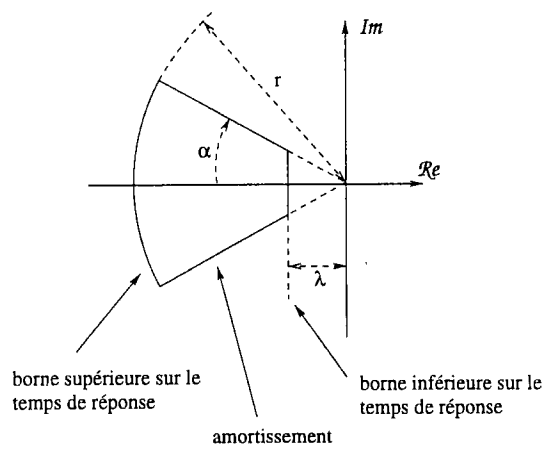


Figure D.27: Secteur $\mathcal{S}(\lambda, r, \alpha)$

Considérons à présent un pôle représenté par le complexe z, auquel on associe un temps de réponse t_r et un amortissement ξ. Si ce pôle appartient au secteur $\mathcal{S}(\lambda, r, \alpha)$, il vérifie simultanément trois contraintes qui permettent, comme nous l'annoncions plus haut, de spécifier temps de réponse et amortissement:

- $\mathcal{R}e(z) < -\lambda \;\Rightarrow\; t_r < t_{r_{max}}$
- $|z| < r \;\Rightarrow\; t_r > t_{r_{min}}$
- $|\mathcal{I}m(z)| < tan\,\alpha\; |\mathcal{R}e(z)| \;\Rightarrow\; \xi > \xi_{min}$

Les valeurs de $t_{r_{min}}$, $t_{r_{max}}$ et ξ_{min} sont déterminées en fonction de λ, r , α et de la nature du pôle (premier ou second ordre).

Il peut donc être intéressant de chercher à placer les pôles d'un système dans un tel secteur. Les techniques de placement de pôles sont d'ailleurs relativement nombreuses et, pour la plupart, déjà anciennes. Nous proposons ci-dessous des critères[6] de localisation plus récents qui ont l'avantage d'offrir une certaine souplesse.

Localisation dans un disque

Nous envisageons pour commencer le cas relativement simple de la localisation dans un disque, qui trouve une justification sur le schéma suivant:

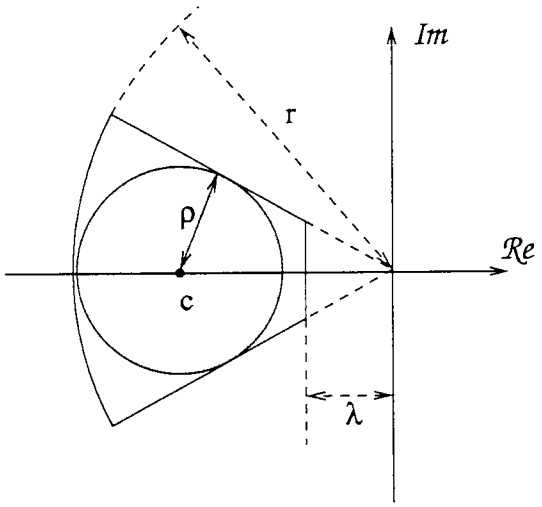


Figure D.28: Localisation dans un disque

Les pôles du système $G(s)$ sont contenus dans le disque ouvert de centre c et de rayon ρ si et seulement si, toutes les valeurs propres de la matrice:

$$\tilde{A} = \frac{A - cI}{\rho}$$

sont strictement bornées en module par 1, ce que l'on peut relier à l'existence d'une matrice carrée, non singulière T, telle que:

$$\bar{\sigma}(T\tilde{A}T^{-1}) < 1$$

[6]formulés par LMI.

ou encore:

$$\tilde{A}^T T^T T \tilde{A} < T^T T$$

En posant $X = T^T T$, on obtient une inégalité matricielle linéaire en X. Finalement, d'après le complément de Schur, il vient le théorème suivant [47]:

Théorème D.21 *Les pôles du système $G(s)$ sont contenus dans le disque ouvert de centre c et de rayon ρ si et seulement si:*

$$\exists X > 0 \ / \ \begin{pmatrix} -\rho X^{-1} & A - cI \\ A^T - cI & -\rho X \end{pmatrix} < 0 \tag{D.109}$$

□

Localisation dans le secteur $\mathcal{S}(\lambda, r, \alpha)$

Dans le cas plus général de la localisation dans un secteur $\mathcal{S}(\alpha, r, \theta)$, la caractérisation obtenue compte trois inégalités (une inégalité par contrainte) [30]:

Théorème D.22 *Les pôles du système $G(s)$ sont contenus dans le secteur $\mathcal{S}(\alpha, r, \theta)$ si et seulement s'il existe une matrice strictement positive X, telle que:*

$$\begin{cases} A^T X + XA + 2\lambda X < 0 \\ \begin{pmatrix} -rX^{-1} & A \\ A^T & -rX \end{pmatrix} < 0 \\ \begin{pmatrix} sin\alpha\,(A^T X + XA) & cos\alpha\,(A^T X - XA) \\ -cos\alpha\,(A^T X - XA) & sin\alpha\,(A^T X + XA) \end{pmatrix} < 0 \end{cases} \tag{D.110}$$

□

Preuve: La première inégalité traduit le fait que toutes les valeurs propres sont à partie réelle strictement inférieure à $-\alpha$. Autrement dit, la matrice translatée $A + \alpha I$ doit être stable, c'est-à-dire:

$$\exists X > 0 \ / \ (A + \lambda I)^T X + X(A + \lambda I) < 0$$

La seconde exprime l'appartenance au disque centré en 0, de rayon r. Elle se déduit donc du résultat précédent. Enfin, la dernière inégalité, d'après un résultat énoncé en annexe A (section A.2), équivaut à:

$$sin\alpha\,(A^T X + XA) + j cos\alpha\,(A^T X - XA) < 0$$

ce qui peut encore s'écrire:

$$\Big((sin\alpha + jcos\alpha)A\Big)^* X + X\Big((sin\alpha + jcos\alpha)A\Big) < 0$$

Cette dernière relation exprime une condition nécessaire et suffisante de stabilité de la matrice $\tilde{A} = (sin\theta + icos\theta)A$ ou de sa conjuguée. Ainsi, toute valeur propre λ de A vérifie:

$$\mathcal{R}e\Big((sin\alpha + jcos\alpha)\lambda\Big) < 0$$

soit:

$$|\mathcal{I}m(\lambda)| < tan\alpha\, |\mathcal{R}e(\lambda)|$$

ce qui traduit bien l'appartenance au cône de sommet l'origine et d'ouverture α. Notons pour conclure, que chacun des trois tests peut être effectué de manière non conservative en utilisant la même matrice X [30].

■

D.3 Passivité

Définition et lien avec la positivité

Le système (D.106) est dit **passif** si, en présence de conditions initiales nulles, il vérifie:

$$\forall T \geq 0\,,\ \int_0^T u(t)^T y(t) dt \geq 0 \tag{D.111}$$

On montre [34], que cette propriété est équivalente à:

$$\forall s, \mathcal{R}e(s) > 0 \Rightarrow G(s) + G(s)^* \geq 0 \tag{D.112}$$

On dit alors que le système est **positif réel**.

Si l'inégalité qui précède est vérifiée strictement, et si de plus, toutes les valeurs propres de A restent dans le demi-plan ouvert gauche de $\mathbb{C}$, alors le système est **strictement positif réel**.

Dans le cas des systèmes mono-entrée/mono-sortie, ces dernières conditions sont facilement vérifiables. Il suffit en effet de tracer le lieu de Nyquist du système et s'assurer qu'il reste dans le demi-plan droit de $\mathbb{C}$. Par contre, cette méthode graphique s'avère inefficace pour établir la passivité d'un système multi-dimensionnel.

Lemme de Kalman-Yakubovich-Popov

Le lemme [2] que nous présentons maintenant, fournit un critère algébrique de positivité, particulièrement utile lorsque la méthode graphique devient inapplicable. Il s'agit du lemme de Kalman-Yakubovich-Popov, également connu sous le nom de lemme positif-réel:

Lemme D.23 "Positif-réel" *La fonction de transfert $G(s)$ est positive réelle si et seulement s'il existe un réel positif ϵ, une matrice symétrique définie positive X ainsi que deux matrices quelconques L et W, de dimensions appropriées, telles que:*

$$\begin{aligned} A^T X + XA &= -LL^T - \epsilon X \\ XB &= C^T - LW \\ W^T W &= D + D^T \end{aligned} \tag{D.113}$$

□

Si la constante ϵ est strictement positive, le système est strictement positif réel. Dans ce cas, il est aussi exponentiellement stable (toutes les valeurs propres de A sont à parties réelles strictement négatives).

Caractérisation par inégalité matricielle

En remarquant, d'après le lemme précédent, que:

$$\begin{pmatrix} A^T X + XA & XB - C^T \\ B^T X - C & -(D + D^T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^T \\ W^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & W \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \epsilon X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que le système est positif réel (resp. strictement) si et seulement s'il existe une matrice symétrique, définie positive P telle que:

$$\begin{pmatrix} A^T X + XA & XB - C^T \\ B^T X - C & -(D + D^T) \end{pmatrix} \leq 0 \ (resp. \ < 0) \tag{D.114}$$

Une preuve directe de ce dernier résultat peut aussi être obtenue en utilisant une fonction de Lyapunov quadratique:

$$V(x) = x^T X x \, , \ X > 0$$

telle que:

$$\forall t \geq 0, \ \dot{V}(x) \leq 2u(t)^T y(t) \tag{D.115}$$

Par intégration, on obtient en effet, (avec $x(0) = 0$):

$$\forall T \geq 0, \int_0^T u(t)^T y(t) dt \geq V(x(T)) \geq 0$$

Autrement dit, la fonction V, si elle existe, établit la passivité du système. Or, en exprimant $\dot{V}(x)$, on montre que l'inégalité (D.115) est équivalente à la proposition suivante:

$$\forall x, u \; x^T(A^T X + XA)x + 2x^T(XB - C^T)u - u^T(D + D^T)u \leq 0$$

soit finalement:

$$\begin{pmatrix} A^T X + XA & XB - C^T \\ B^T X - C & -(D + D^T) \end{pmatrix} \leq 0$$

■

Cette démarche qui consiste à utiliser une fonction de Lyapunov pour établir une propriété de type "entrée/sortie" d'un système est assez classique. Elle est particulièrement intéressante pour nous, dans la mesure où elle évite le passage dans le domaine fréquentiel. Cela signifie qu'elle restera valable pour établir certaines propriétés sur les systèmes non stationnaires (cf. chapitre 3). De plus, cette démarche conduit de manière naturelle à l'obtention d'inégalités matricielles, ce qui confère une certaine souplesse au critère. Notamment, le passage souvent délicat de l'analyse à la synthèse s'en trouve grandement facilité (cf. partie II).

D.4 Systèmes bornés en norme

La notion de norme joue un rôle fondamental dans la théorie de la commande des systèmes linéaires. C'est aussi bien un outil d'analyse que de synthèse, qui permet généralement de caractériser plus que la stabilité, le niveau de performances. Le choix d'une norme plutôt qu'une autre sera généralement guidé par des motivations physiques. Ici, nous retiendrons celles qui à notre avis sont les plus riches de sens physique: la norme $\mathcal{H}_\infty$ et la norme $\mathcal{H}_2$.

Norme $\mathcal{H}_\infty$

Dire que la norme $\mathcal{H}_\infty$ d'un système linéaire est finie et bornée par γ, c'est non seulement dire que ce système est stable mais encore que l'énergie qu'il restitue reste inférieure, dans un rapport γ à celle qu'on lui apporte, ie:

$$\forall T \geq 0 \,, \int_0^T y(t)^T y(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^T u(t)^T u(t) dt \tag{D.116}$$

Définition D.24 *La norme $\mathcal{H}_\infty$ du système linéaire invariant considéré, est la plus petite valeur de γ vérifiant l'inégalité (D.116).*

$\triangle$

Remarquons que cette norme est induite par la norme usuelle sur les signaux de $\mathcal{L}_2$ (cf. annexe C).

Cette définition "énergétique" du domaine temporel se transpose aisément au domaine fréquentiel par une utilisation conjointe de l'égalité de Parseval:

$$\forall u \in \mathcal{L}_2, \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(j\omega)|^2 d\omega$$

d'une part, et la relation entrée/sortie:

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \hat{y}(j\omega) = G(j\omega)\hat{u}(j\omega)$$

d'autre part. On en déduit, si le système est stable, une expression bien connue de la norme $\mathcal{H}_\infty$ que l'on notera $\|G(s)\|_\infty$:

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \geq 0} \bar{\sigma}(G(j\omega) \tag{D.117}$$

Etant donné un système stable, calculer sa norme $\mathcal{H}_\infty$ est un exercice intéressant pour plusieurs raisons. Aussi, de nombreuses solutions ont-elles été proposées dans la littérature. Celle que nous retiendrons repose sur l'utilisation du lemme borné-réel. Sur le plan numérique ce n'est certainement pas la moins coûteuse. Toutefois, elle présente pour nous bien des avantages par ailleurs (cf. commentaires sur le lemme positif réel).

Le lemme "borné-réel" existe sous diverses formes. Voici celle où la linéarité de l'inégalité matricielle mise en jeu est la plus évidente:

Lemme D.25 "Borné-réel" *Le système (D.106) est stable et sa norme $\mathcal{H}_\infty$ est bornée par γ si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive X telle que:*

$$\begin{pmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \tag{D.118}$$

$\square$

Preuve: Il suffit de choisir une fonction de Lyapunov $V(x) = x^T X x$ telle que:

$$\dot{V}(x) < \gamma^2 u(t)^T u(t) - y(t)^T y(t)$$

■

Norme $\mathcal{H}_2$

La norme $\mathcal{H}_2$ donne lieu à deux interprétations, cela en fait d'une certaine manière, sa richesse. La première est déterministe tandis que la seconde est stochastique. Dans le premier cas, on supposera que l'entrée est un signal impulsionnel (Dirac). Tandis que, dans le second, il s'agira d'un bruit blanc gaussien normalisé. Voici donc deux définitions:

Définition D.26 Hypothèse déterministe *La norme $\mathcal{H}_2$ d'un système linéaire invariant déterministe et stable, notée $\|G(s)\|_2$ correspond à l'énergie de sa réponse impulsionnelle. On a donc:*

$$\|G(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} trace\,(G^*(j\omega)G(j\omega))\, d\omega \tag{D.119}$$

△

Définition D.27 Hypothèse stochastique *La norme $\mathcal{H}_2$ d'un système linéaire invariant stable, est également caractérisée par la covariance du bruit de mesure lorsque l'entrée est un bruit blanc gaussien normalisé.*

△

Une expression algébrique exacte de la norme $\mathcal{H}_2$ peut facilement être obtenue. Son calcul respose sur la détermination des **grammiens** d'observabilité et de gouvernabilité (X et Y) qui sont les uniques solutions définies positives des équations de Lyapunov:

$$A^T X + XA + C^T C = 0$$

et

$$AY + YA^T + BB^T = 0$$

On a alors:

$$\|G(s)\|_2^2 = trace(B^T X B) = trace(CYC^T)$$

Afin de calquer les précédentes approches, nous allons chercher à relier l'existence d'une borne sur la norme $\mathcal{H}_2$ d'un système linéaire invariant à celle d'une fonction de Lyapunov, vérifiant certaines propriétés. Pour cela nous devons commencer par réécrire l'expression (D.119) dont la nature fréquentielle ne convient pas à notre approche. Aussi, proposons-nous d'adopter la formulation suivante (dont on vérifie facilement qu'elle est équivalente à (D.119)):

$$\|G(s)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{i=m} \int_0^\infty y_i(t)^T y_i(t) dt$$

où $y_i(t)$ est le vecteur de sorties du système:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = Ax_i(t)\,,\ x_i(0) = B_i \\ y_i(t) = Cx_i(t) \end{cases}$$

On a donc substitué aux entrées du système, des conditions initiales non nulles ($x_i(0) = B_i$: $_i$ième colonne de B). Ces dernières sont choisies de manière à produire le même effet sur les sorties que des **entrées impusionnelles**.

Considérons à présent une fonction de Lyapunov quadratique définie positive

$$V(x_i) = x_i^T X x_i\,,\ X > 0$$

telle que:

$$\dot{V}(x_i) < -y_i(t)^T y_i(t)$$

Par intégration, il vient:

$$\int_0^\infty y_i(t)^T y_i(t) dt < V(x_i(0)) - V(x_i(\infty)) \leq V(x_i(0)) = B_i^T X B_i$$

En remarquant par ailleurs que la contrainte portant sur la dérivée temporelle de V équivaut à:

$$\forall t \geq 0\,,\ x_i(t)^T (A^T X + XA + C^T C) x_i(t) < 0\,,$$

on obtient facilement une condition valable pour l'ensemble des systèmes, quelle que soit la condition initiale:

$$\exists X > 0 \,/\, A^T X + XA + C^T C < 0 \Rightarrow \forall i,\ \int_0^\infty y_i(t)^T y_i(t) dt < B_i^T X B_i$$

D'où le résultat final:

Théorème D.28 *Etant donné un système linéaire invariant (D.106), pour lequel existe une matrice symétrique définie positive solution de l'inégalité matricielle linéaire:*

$$A^T X + XA + C^T C < 0$$

alors, le système est stable et:

$$\|G(s)\|_2^2 < trace(B^T X B)$$

□

Lien avec la passivité

Montrer que la norme $\mathcal{H}_\infty$ d'un système G est inférieure à γ revient en fait à prouver la passivité d'un système H déduit de G par de simples opérations algébriques:

Théorème D.29 *Soit $G(s)$ un système linéaire invariant stable, alors:*

$$\|G(s)\|_\infty \leq \gamma \iff H(s) = (\gamma I - G)(\gamma I + G)^{-1} \text{ positif rel}$$

△

Preuve: Ce théorème s'appuie sur une propriété de la transformation de Cayley, qui à toute matrice carrée S, complexe telle que $det(I + S) \neq 0$, associe la matrice Z définie par:

$$Z = (I - S)(I + S)^{-1}$$

Dans le cas scalaire, cette application définit une bijection entre le disque unité privé du point $\{-1\}$ et le demi-plan droit de $\mathbb{C}$. Dans le cas matriciel, on établit un résultat analogue:

$$\bar{\sigma}(S) \leq 1 \iff Z + Z^* \geq 0$$

d'où l'énoncé du théorème.

■

Bibliographie

[1] R.J. Adams, J.M. Buffington, A.G. Sparks, and S. Banda. *Robust multivariable flight control.* Advances in industrial control. Springer-Verlag, London, 1994.

[2] B.D.O Anderson. A system theory criterion for positive real matrices. *SIAM journal of control*, 5:171–182, 1967.

[3] P. Apkarian. Robustesse de la commande des systèmes multivariables. Application au pilotage d'un hélicoptère. Thèse de l'E.N.S.A.E. à Toulouse (France), 1988.

[4] P. Apkarian. On the dicretization of lmi-synthesized linear parameter varying controllers. In preparation, April 1996.

[5] P. Apkarian, J-M. Biannic, and P. Gahinet. Self-scheduled H_∞ control of missile via linear matrix inequalities. *Journal of Guid. Contr. and Dyn.*, 18(3):532–538, May-June 1995.

[6] P. Apkarian, J.P. Chretien, P. Gahinet, and J.M. Biannic. μ Synthesis by D-K iterations with constant scalings. In *proceedings of ECC*, pages 2075–2080, Groningen, NL, 1993.

[7] P. Apkarian and P. Gahinet. A convex characterization of gain-scheduled H_∞ Controllers. *IEEE Trans Automat. Contr.*, 40(5):853–864, May 1995.

[8] V. Balakrishnan. Construction of Lyapunov functions in robustness analysis with multipliers. In *proceedings of 33rd IEEE Conference on Dec. and Contr.*, pages 2021–2025, Lake Buena Vista, FL., Dec. 1994.

[9] G.J. Balas, J. C. Doyle, K. Glover, A. Packard, and R. Smith. *μ-Analysis and synthesis toolbox: User's Guide.* The MathWorks, Inc., april 1991.

[10] G.J. Balas and A. Packard. Design of robust time-varying controllers for missile autopilot. In *proceedings of IEEE Conference*, pages 104–110, Dayton, OH, 1992.

[11] C.B. Barber, D.P. Dobkin, and H. Huhdanpaa. The quickhull algorithm for convex hulls. *Submitted to the ACM Transactions on Math. Software*, Jan. 1995. available via ftp://geom.umn.edu/pub.

[12] B.R. Barmish. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of optim. theory and appl.*, 46(4), 1985.

[13] C. Beck. Minimality of uncertain systems and IQCs. In *proceedings of the 33rd IEEE Conf. on Dec. and Contr.*, pages 3068–3073, Lake Buena Vista, Fl, Dec 1994.

[14] G. Becker. parameter-dependent control of an under-actuated mechanical system. In *Proceedings of 34th IEEE CDC*, pages 543–549, New Orleans, LO, December 1995.

[15] G. Becker, A. Packard, D. Philbrick, and G. Balas. Control of parametrically-dependent linear systems: A single quadratic Lyapunov approach. In *proceedings of ACC*, San Francisco, CA, 1993.

[16] M. Berger. *Géométrie - Convexes et polytopes, polyèdres réguliers et volumes*, volume 3. CEDIC - Fernand Nathan, Paris, 1978.

[17] J. Bernussou, P.L.D. Peres, and J.C. Geromel. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization. *Syst. Contr. Lett.*, (13), 1989.

[18] J.M Biannic. Application de la commande LPV au pilotage d'un avion de combat. Rapport de deuxième année de thèse - DRET/CERT/DERA n° 1/7927.00, 1995.

[19] J.M. Biannic and P. Apkarian. A convex characterization of self-scheduled H_2 controllers. In *proceedings of IFAC Conference on System Structure and Control*, Nantes, Fr., July 1995.

[20] J.M. Biannic, P. Apkarian, and W.L. Garrard. Parameter-varying control of a high performance aircraft. In *proceedings of AIAA Conference on Guid. Nav. and Contr.*, San Diego, CA., July 1996. Full version also submitted in AIAA Journal.

[21] J.M. Biannic, P. Apkarian, and L. Leletty. A quadratic H_∞ performance approach to gain scheduling of a missile autopilot. In *proceedings of the Workshop on Var. Struct. and Lyap. Tech.*, Benevento, IT, sept 1994.

[22] J.M Biannic, P. Apkarian, and L. Leletty. Optimisation convexe pour la commande robuste. Rapport Final DRET/CERT/DERA n° 1/7968.00, 1996.

[23] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15 of *Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, PA, June 1994.

[24] S. Boyd and Q. Yang. Structured and simultaneous Lyapunov functions for system stability problems. *Int. J. Contr.*, 49(6):2215–2240, 1993.

[25] Brumbaugh. Aircraft model for the AIAA controls design challenge. *Journal of Guid. Contr. and Dyn.*, 17(4):747–752, 1994.

[26] P. Camozzi. Systèmes à modélisation incertaine: Commande par placement de pôles. Thèse de l'Université Paul Sabatier - No 2119, 1995.

[27] P. Carton and A. Le Pourhiet. Modélisation spectrale des efforts de houle. Rapport CERT/DERA 209/93 - Convention DCN Ingéniérie, 1993.

[28] Y. Cheng and B. DeMoor. A multi-dimensional realization algorithm for parametric uncertainty modelling and multiparameter margin problems. *Int. J. Contr.*, 60(5):789–807, Nov 1994.

[29] M. Chilali. Multi-objective output-feedback synthesis via LMI optimization. In *proceedings of IFAC*, San Francisco, CA., July 1996.

[30] M. Chilali and P. Gahinet. $\mathcal{H}_\infty$ design with pole placement constraints: An LMI approach. *IEEE Trans Automat. Contr.*, 41(3):358–367, March 1996.

[31] J. David and B. DeMoor. The opposite of analytic center for solving minimum rank problems in control and identification. In *proceedings of 32nd IEEE Conf. on Dec. and Control*, volume 3, pages 2901–2902, San Antonio, Texas, December 1993.

[32] J. David and B. DeMoor. Designing reduced order output feedback controllers using a potential reduction method. In *proceedings of ACC*, Maryland, 1994.

[33] C. Desoer. Slowly Varying Systems $\dot{x} = A(t)x$. *IEEE Trans Automat. Contr.*, pages 780–781, 1969. correspondance.

[34] C.A. Desoer and M. Vidyasagar. *Feedback Systems Input-Ouput properties*. Electrical sciences. Academic Press, 1975.

[35] J.C. Doyle. Analysis of feedback systems with structured uncertainty. In *proceedings of IEE, part D*, volume 6, pages 242–250, November 1982.

[36] J.C. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. Francis. State-space solutions to standard H_∞/H_2 Control Problems. *IEEE Trans Automat. Contr.*, 34(8):831–847, Aug 1989.

[37] J.C. Doyle, A. Packard, and K. Zhou. Review of LFTs, LMIs and μ. In *proceedings of the 30th Conf. on Dec. and Control*, pages 1227–1232, Brighton, En., December 1991.

[38] J.C. Doyle, J.E. Wall, and G. Stein. Performance and robustness analysis for structured uncertainty. In *proceedings of IEEE Conf. on Dec. and Control*, pages 629–636, Orlando, Fl., December 1982.

[39] L. El Ghaoui and P. Gahinet. Rank minimization under LMI constraints: A framework for output feedback problems. In *proceedings of ECC*, volume 3, pages 1176–1179, Groningen, NL, June,28 - July,1 1993.

[40] J. Elzinga and T.G. Moore. A central cutting plane algorithm for the convex programming problem. *Mathematical programming*, 8(2):134–145, April 1975.

[41] M.K.H. Fan, A. Tits, and J.C. Doyle. Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics. *IEEE Trans Automat. Contr.*, 36(1):25–38, Jan 1991.

[42] E. Feron, P. Apkarian, and P. Gahinet. Analysis and Synthesis of Robust Control Systems via Parameter-Dependent Lyapunov Functions. *IEEE Trans Automat. Contr.*, 41(7):1041–1046, July 96.

[43] A.J. Fossard. *Commande des systèmes multi-dimensionnels.* Techniques de l'Automatisme. Dunod, Paris, 1972.

[44] P. Gahinet and P. Apkarian. A linear matrix inequality approach to $\mathcal{H}_\infty$ control. *Int. J. Robust and Nonl. Contr.*, 4:421–448, Apr. 1994.

[45] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. Affine parameter-dependent Lyapunov functions for real parametric uncertainty. In *proceedings of the 33rd Conf. on Dec. and Control*, pages 2026–2031, Lake Buena Vista, FL., December 1994.

[46] P. Gahinet, A. Nemirowskii, A.J. Laub, and M. Chilali. LMI control toolbox. *Mathworks, Natick, MA*, 1994.

[47] G. Garcia and J. Bernussou. Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback. *IEEE Trans Automat. Contr.*, 40(1):184–190, January 1995.

[48] J.C. Geromel, P. Peres, and J. Bernussou. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM J. Contr. Optimiz.*, 29(2):381–402, March 1991.

[49] K.C. Goh, M.G. Safonov, and G.P. Papavassilopoulos. A global optimization approach for the BMI problem. In *proceedings of the 33rd Conf. on Dec. and Control*, pages 2009–2014, Lake Buena Vista, FL., December 1994.

[50] W.M. Haddad and D.S. Bernstein. Explicit construction of quadratic Lyapunov functions for the small gain, positivity, circle and Popov theorems and their application to robust stability. In *proceedings of 30th IEEE conference on Dec. and Contr.*, pages 2618–2623, Brighton, England, Dec. 1991.

[51] W.M Haddad, E.G. Collins, and D.S. Bernstein. Robust stability analysis using the small gain, circle, positivity and Popov theorems: A comparative study. *IEEE Transactions on Contr. Syst. Tech.*, 1(4):290–293, Dec 1993. Letters.

[52] A. Helmerson. *Methods for robust gain scheduling.* Number 406 in Studies in science and technology. Dissertations. LTAB Linkopings, Linkoping, Sweden, 1995.

[53] A. Helmerson. μ Synthesis and LFT gain scheduling with mixed uncertainties. In *proceedings of the 3rd ECC*, pages 153–158, Rome, Italy, Sept 1995.

[54] Honeywell. Dynamic inversion based flight control laws for the harv. Final report, Honeywell, Co., March 1992.

[55] K.S. Hong, J.W. Wu, and K.I. Lee. New conditions for the exponential stability of evolution equations. *IEEE Trans Automat. Contr.*, 39(7):1432–1436, July 1994.

[56] I. Horowitz. Quantitative synthesis of uncertain MIMO feedback systems. *Int. J. Contr.*, 30:81–106, 1979.

[57] S. Hougui, G.J. Balas, and W.L. Garrard. Design of a robust dynamic inversion lateral/directional flight controller. In *proceedings of AIAA Guid. Nav. and Contr. Conf.*, August 1995.

[58] A. Ilchmann, D.H. Owens, and D. Pratzel-Wolters. Sufficient conditions for stability of linear time-varying systems. *Syst. Contr. Lett.*, 9:157–163, 1987. correspondance.

[59] T. Iwasaki and R.E. Skelton. All controllers for the general $\mathcal{H}_\infty$ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. *Automatica*, 30(8):1307–1317, 1994.

[60] U. Jonsson and A. Rantzer. Systems with uncertain parameters - Time variations with bounded derivatives. In *proceedings of the 33rd Conf. on Dec. and Contr.*, pages 3074–3079, Lake Buena Vista, FL., Dec. 1994.

[61] U. Jonsson and A. Rantzer. A unifying format for multiplier optimization. In *proceedings of ACC*, pages 3859–3860, Seattle, WA., June 1995.

[62] I. Kaminer, P. Khargonekar, and M. Rotea. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control for discrete time systems via convex optimization. *Automatica*, 29(1):57–70, 1993.

[63] I. Kaminer, A.M. Pascoal, P. Khargonekar, and E. Coleman. A velocity algorithm for the implementation of gain-scheduled controllers. *Automatica*, 31(8):1185–1191, 1995.

[64] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators.* comprehensive studies in mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[65] H.K. Khalil. *Nonlinear systems.* Macmillan publishing company, 1992.

[66] P. Khargonekar and M. Rotea. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control: a convex optimization approach. *IEEE Trans Automat. Contr.*, 36(7):824–837, July 1991.

[67] N.N. Krasovskii. *Stability of motion.* Stanford university press, Stanford, CA., 1963.

[68] J. Krause, M. Jackson, J. Cloutier, J. Evers, and R. Wilson. An adaptive autopilot for a flexible air-to-air missile. In *proceedings of IEEE Conf. on Decision Contr.*, pages 3002–3007, Brighton, UK, 1991.

[69] B.C. Kuo. *Automatic control systems.* Electrical engineering. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967.

[70] P. Lambrechts, J. Terlouw, S. Bennani, and M. Steinbuch. Parametric uncertainty modeling using LFTs. In *proceedings of ACC Conf*, pages 267–272, San Francisco, CA, USA., June 1993.

[71] A.J. Laub. Computation of balancing transformations. In *proceedings of ACC*, 1980.

[72] A. Le Pourhiet and P. Carton. Pilotage vertical d'un sous-marin en immersion périscopique. Rapport CERT/DERA 108/93 - Convention DCN Ingéniérie, 1993.

[73] F.C. Lee, H. Flashner, and M.G. Safonov. Positivity-based control system synthesis using alternating LMIs. In *proceedings of ACC*, pages 1469–1473, Seattle, WA., June 1995.

[74] L. Lee and A.L. Tits. Linear fractional transformations for the approximation of various uncertainty sets. In *Internatiional workshop on robust control*, pages 53–62, San Antonio, Texas, USA, March 1991.

[75] W.S. Lee and B.D.O. Anderson. A new approach to adaptive robust control. *Int. J. Adapt. Contr. and Signal Processing*, 7:183–211, 1993.

[76] N.A. Lehtomaki. Robustness results in Linear Quadratic Gaussian based multivariable control designs. *IEEE Trans Automat. Contr.*, 26:75–92, 1981.

[77] E. Licega-Castro and G.M. van der Molen. A submarine depth control system design. *Int. J. Contr.*, 2(61):279–308, 1995.

[78] R. Lind, G.J. Balas, and A. Packard. Robustness analysis with linear time-invariant and time-varying real uncertainty. In *proceedings of AIAA Conference*, pages 132–140, Baltimore, USA, July 1995.

[79] W.M. Lu and J.C. Doyle. Robustness analysis and synthesis for uncertain nonlinear systems. In *proceedings of IEEE Conf. on Decision Contr.*, pages 787–792, Lake Buena Vista, FL., Dec. 1994.

[80] W.M. Lu, K. Zhou, and J.C. Doyle. Stabilization of *LFT* systems. In *proceedings of 30th IEEE Conf. on Decision Contr.*, pages 1239–1244, Brighton, England, Dec. 1991.

[81] W.M. Lu, K. Zhou, and J.C. Doyle. Stabilization of uncertain linear systems: an LFT approach. *IEEE Trans Automat. Contr.*, AC-41(1):50–64, Jan 1996.

[82] A.I. Lur'e. *Some nonlinear problems in the theory of automatic control.* H.M. Stationery Off., London, 1957.

[83] J.H. Ly, M.G. Safonov, and R.Y. Chiang. Real/Complex multivariable stability margin computation via generalized Popov multiplier - LMI approach. In *proceedings of ACC*, pages 425–429, Baltimore, Maryland, June 1994.

[84] A.M. Lyapunov. The general problem of stability of motion. *Int. J. Contr.*, 55(3):531–773, March 1992. Lyapunov Centenary Issue.

[85] Aizerman M.A. and F.R. Gantmacher. *Absolute stability of regulator systems.* Information systems. Holden-Day, San Francisco, 1964. originally published in russian, acad. of sc. USSR, 1963 - translated by E. Polak.

[86] A. Megretski. Frequency domain criteria of robust stability of slowly time-varying systems. *IEEE Trans Automat. Contr.*, AC-40(1):153–155, January 1993.

[87] A. Megretski. Necessary and sufficient conditions of stability: A multiloop generalization of the circle criterion. *IEEE Trans Automat. Contr.*, AC-38(5):753–756, May 1993. Technical notes.

[88] A. Megretski and S. Treil. Power distribution inequalities in optimization ansd robustness of uncertain systems. *J. Math. Systems, Estimation, Control*, 3(3):301–319, March 1993.

[89] M. Mesbahi, G.P. Papavassilopoulos, and M.G. Safonov. Matrix cones, complementarity problems and the bilinear matrix inequality. In *proceedings of the 34th Conf. on Dec. and Control*, pages 3102–3107, New Orleans, LA., December 1995.

[90] B.C. Moore. Principal component analysis in linear systems: controllability, observability and model reduction. *IEEE Trans Automat. Contr.*, 26:17–32, 1981.

[91] B. Morton, D. Enns, and B-Y. Zhang. Stability of dynamic inversion control laws applied to nonlinear aircraft pitch-axis models. *Int. J. Contr.*, 63(1):1–25, 1996.

[92] B.G. Morton. New applications of μ to real parameter variation problem. In *proceedings of 24th IEEE Conf. on Dec. and Contr.*, pages 233–238, Dec. 1985.

[93] K.S Narendra and J.H. Taylor. Lyapunov functions for nonlinear time-varying systems. *Information and control*, 12(3):378–393, 1993.

[94] Y. Nemirowski and P. Gahinet. The projective method for solving linear matrix inequalities. In *proceedings of ACC*, pages 840–844, Baltimore, 1994.

[95] Y. Nesterov and A. Nemirowski. A general approach to polynomial-time algorithm design for convex programming. Technical report, Centr. Econ. Math Inst. USSR Acad Sci Moscow, 1988.

[96] Yu. E. Nesterov and A. S. Nemirovski. *Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming: Theory and Applications*, volume 13 of *SIAM Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, 1994.

[97] A. Oustaloup. *La commande CRONE*. Editions Hermès, Paris, 1991.

[98] A. Packard. Gain scheduling via linear fractional tranformations. *Syst. Contr. Lett.*, 22:79–92, 1994.

[99] A. Packard and J.C. Doyle. The complex structured singular value. *Automatica*, 29(1):71–109, Jan. 1993.

[100] F. Paganini. Analysis of systems with combined time invariant / time varying structured uncertainty. In *proceedings of ACC*, pages 3878–3882, Seattle, WA., June 1995.

[101] P. Peres, J.C. Geromel, J. Bernussou, and H. Siguerdidjane. A cutting plane technique applied to robust control synthesis. In UK Pergamon, Oxford, editor, *proceedings of the 8th IFAC Workshop*, pages 105–109, Paris, France, June 1989.

[102] A. Rantzer and A. Megretski. System analysis via integral quadratic constraints. In *proceedings of the 33rd Conf. on Dec. and Contr.*, pages 3062–3067, Lake Buena Vista, FL., Dec. 1994.

[103] R.M. Redheffer. On a certain linear fractional transformation. *J. Math. and Phys.*, (39):269–286, 1960.

[104] R.T. Reichert. Robust autopilot design using μ-synthesis. In *proceedings of ACC*, pages 2368–2373, May 1990.

[105] J. Reiner, G.J. Balas, and W.L. Garrard. Design of a flight control system for a highly maneuverable aircraft using μ synthesis. In *proceedings of AIAA Guid. Nav and Contr. Conf.*, pages 710–719, Monterey, CA, August 1993.

[106] J. Reiner, G.J. Balas, and W.L. Garrard. Design of a flight control system for a highly maneuverable aircraft using robust dynamic inversion. *Journal of Guid. Contr. and Dyn.*, (1):18–24, Jan-Feb 1995.

[107] M.A. Rotea. The generalized $\mathcal{H}_2$ control problem. *Automatica*, 29(2):373–385, 1993.

[108] M.G. Safonov. *Stability and robustness of multivariable feedback systems.* MIT Press, 1980.

[109] M.G. Safonov and R.Y. Chiang. *Real/complex K_m synthesis without curve fitting.* Academic Press, c. leondes edition, 1993.

[110] C. Samblancat. Commande robuste multivariable - applications à l'hélicoptère. Thèse de l'E.N.S.A.E. à Toulouse (France), 1991.

[111] M. Sampei, T. Mita, and M. Nakamichi. An algebraic approach to $\mathcal{H}_\infty$ output feedback control problems. *Syst. Contr. Lett.*, (14):13–24, 1990.

[112] I.W. Sandberg. On the $\mathcal{L}_2$ boundedness of solutions of nonlinear functional equations. *Bell. Sys. Tech. J.*, 43:1601–1608, 1964.

[113] C. Scherer. From LMI analysis to multichannel mixed LMI synthesis. *To appear in Syst. and Ctrl letters*, 1996.

[114] J.F. Shamma. Robust stability analysis of time-varying systems using time-varying quadratic forms. *Syst. Contr. Lett.*, 24(1):13–17, Jan. 1995.

[115] J.F. Shamma and M. Athans. Analysis of gain-scheduled control for nonlinear plants. *IEEE Trans Automat. Contr.*, 35(8):898–907, August 1990.

[116] J.F. Shamma and M. Athans. Guaranteed properties of gain-scheduled control for linear parameter-varying plants. In *proceedings of ACC*, pages 516–521, January 1991.

[117] J.F. Shamma and J-R. Cloutier. A linear parameter-varying approach to gain-scheduled missile autopilot design. In *proceedings of ACC*, pages 1317–1321, June 1992.

[118] S.A. Snell, D.F. Enns, and W.L. Garrard. Nonlinear inversion flight control for a supermaneuverable aircraft. In *proceedings of AIAA Guid. Nav and Contr. Conf.*, pages 808–825, Washington, DC, August 1990.

[119] G. Stein and M. Athans. The LQG/LTR procedure for multivariable feedback control. *IEEE Trans Automat. Contr.*, 32:105–114t, 1987.

[120] A.A. Stoorvogel. The singular $\mathcal{H}_2$ control problem. *Automatica*, 28(3):627–631, 1992.

[121] T. Sugie and M. Kawanishi. μ Analysis-Synthesis based on exact expression of physical parameter variations. In *proceedings of the 3rd ECC*, pages 159–164, Rome, Italy, Sept 1995.

[122] M.K. Sundareshan and M.A.L. Thathachar. $\mathcal{L}_2$ stability of linear time-varying systems - conditions involving noncausal multipliers. *IEEE Trans Automat. Contr.*, 17(4):504–509, Aug. 1972.

[123] O. Toker and H. Ozbay. On the NP hardness of solving bilinear matrix inequality ans simultaneous stabilization with static output feedback. In *proceedings of ACC*, pages 2525–2526, Seattle, Washington, June 1995.

[124] H.D. Tuan and S. Hosoe. On linearization techniques in robust nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control. *Syst. Contr. Lett.*, 27:21–27, 1996.

[125] G.M. van der Molen and M.J. Grimble. $\mathcal{H}_\infty$ submarine depth and pitch control. In *proceedings of the 32nd Conf. on Dec. and Control*, pages 2511–2516, San Antonio, TE., December 1993.

[126] Y.V. Venkatesh. On the stability of linear time-varying systems. *IEEE Trans Automat. Contr.*, pages 426–427, August 1969. Technical notes.

[127] M. Vidyasagar. *Nonlinear systems analysis.* Electrical Engineering. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1978.

[128] W. Wang, J.C. Doyle, C. Beck, and K. Glover. Model reduction of LFT systems. In *proceedings of the 30th IEEE Conf. on Dec. and Contr.*, pages 1233–1237, Brighton, England, Dec. 1991.

[129] J.C. Willems. Least square stationnary optimal control and the algebraic Riccati equation. *IEEE Trans Automat. Contr.*, 16(6):621–634, Dec 1971.

[130] J.C. Willems. The generation of Lyapunov functions for input-output stable systems. *SIAM Journal on Control*, 9(1):105–134, Febr. 1971.

[131] S.J. Williams and W.B. Marshfield. A full envelope submarine depth control system incorporating switched $\mathcal{H}_\infty$ controllers. In *proceedings of ACC*, volume 1, pages 583–588, Boston, MA., June 1991.

[132] K. Wise and K. Poolla. Missile autopilot design using $\mathcal{H}_\infty$ optimal control with μ-synthesis. In *proceedings of ACC*, pages 2362–2367, May 1990.

[133] F. Wu and A. Packard. LQG control design for LPV systems. In *proceedings of ACC*, pages 4440–4444, Seattle, WA., June 1995.

[134] F. Wu, A. Packard, and G. Balas. LPV control design for pitch-axis missile autopilots. In *proceedings of IEEE conf. on dec. and contr.*, pages 188–193, New Orleans, LA., Dec 1995.

[135] F. Wu, X.H. Yang, A. Packard, and G. Becker. Induced L_2 -norm control for LPV system with bounded parameter variation rates. In *proceedings of ACC*, volume 3, pages 2379–2383, Seattle, WA, June 1995.

[136] V.A. Yakubovich. Method of matrix inequalities in the stability theory of nonlinear control systems - Absolute stability of forced oscillations. *Avtomatika i telemekhanika*, 25(7), 1964.

[137] W-Y. Yan and J.B. Moore. Stable linear fractional transformations with applications to stabilization and multistage $\mathcal{H}_\infty$ control design. *Int. J. Robust and Nonl. Contr.*, (6):101–122, 1996.

[138] N.J. Yong. Linear fractional transformations in rings and modules. *Linear algebra and its applications*, (56):251–290, 1984.

[139] M. Young, P. Matthew, P. Newlin, and J.C. Doyle. μ analysis with real parametric uncertainty. In *proceedings of 30th IEEE Conf. on Dec. and Contr.*, pages 1251–1256, Brighton, England, Dec. 1991.

[140] P.M. Young. Controller design with mixed uncertainties. In *proceedings of ACC*, pages 2333–2337, Maryland, 1994.

[141] G. Zames. On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems, part I: Conditions derived using concepts of loop, gain, conicity and positivity. *IEEE Trans Automat. Contr.*, AC-11:228–238, 1966.

[142] G. Zames. On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems, part II: Conditions involving circles in the frequency plane and sector nonlinearities. *IEEE Trans Automat. Contr.*, AC-11:465–476, 1966.

[143] K. Zhou, K. Glover, B. Bodenheimer, and J. Doyle. Mixed $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ performance objectives: Robust performance analysis. *IEEE Trans Automat. Contr.*, 39(8):1565–1587, 1994.