

THÈSE

présentée en vue de
l'obtention du titre de

DOCTEUR

de

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE**

SPÉCIALITÉ : GÉNIE MÉCANIQUE

par

Bruno CASTANIÉ

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES STRUCTURES SANDWICHS DISSYMMÉTRIQUES

Soutenue le 22 février 2000 devant la Commission d'Examen :

MM.	J.-M. SEGURA	Président
	J.-J. BARRAU	Directeur de thèse
	P. DAVIES	
	D. GAY	
	J.-P. JAOUEN	
	D. LE HOUEDÉC	Rapporteur
	A. VAUTRIN	Rapporteur

Thèse préparée au sein du département Mécanique - Structures - Matériaux de l'ENSAE.

REMERCIEMENTS

Ce travail s'est effectué au sein du laboratoire Structures de l'ENSAE durant quelques années et a nécessité une contribution importante de tous les acteurs. Je leur dois beaucoup, c'est grâce à eux que cette recherche a pu être menée à son terme.

En premier lieu, je tiens à remercier Monsieur *Jean-Jacques BARRAU*, mon directeur de thèse. Il est difficile d'exprimer ma gratitude tant j'ai appris à son contact. Il a réussi à me convaincre de m'investir jusqu'au résultat que l'on voit à présent..., et ce n'était pas une mince affaire.

Je remercie vivement Monsieur *Alain VAUTRIN*, professeur à l'Ecole des Mines de Saint-Etienne, pour avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse et pour l'intérêt qu'il a manifesté pour le travail que nous réalisons au Laboratoire Structures de Sup'Aéro.

Je tiens aussi à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur *Donatien LE HOUEDEC*, professeur à l'Ecole Centrale de Nantes, pour avoir accepté d'examiner mon travail et pour l'honneur qu'il me fait d'avoir participé à mon jury.

Monsieur *Jean-Pierre JAOUEN*, membre du jury, a aussi été mon interlocuteur privilégié à Eurocopter France. Je tiens à le remercier pour sa confiance, l'excellente collaboration qui a pu s'instaurer entre les deux parties ainsi que d'avoir pu confirmer la pertinence de cette recherche.

Que Monsieur *Peter DAVIES*, ingénieur à l'IFREMER de Brest, Messieurs *Daniel GAY* et *Jean-Marie SEGURA*, professeurs à l'Université Paul Sabatier trouvent ici ma reconnaissance d'avoir accepté d'être membres du jury, pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mon travail et pour les remarques pertinentes qu'ils ont émises.

Je remercie également Monsieur *Serge LAROZE*, chef du département Structures, Matériaux et Technologie pour m'avoir accepté comme thésard dans son laboratoire. Je tiens à souligner ici l'excellente collaboration qui existe entre une école d'ingénieurs comme Sup'Aéro et l'Université Paul Sabatier dont je fais partie. Souhaitons que cette collaboration se poursuive et s'avère encore plus fructueuse grâce à une structure telle que l'Institut de Génie Mécanique.

Que Monsieur *SALAMERO*, directeur de l'U.F.R. P.C.A. de l'Université Paul Sabatier, ainsi que le conseil d'administration de l'U.F.R. P.C.A. trouve ici ma gratitude après m'avoir accordé une décharge de service de 96 heures, ce qui m'a permis de terminer ma thèse dans de meilleures conditions. Je tiens aussi à souligner le soutien et l'amitié dont j'ai pu bénéficier de la part de tous mes collègues de la Filière Génie Mécanique. Qu'ils en soient ici remerciés.

Ce travail n'aurait pas pu avoir cette réussite si les meilleures conditions n'avaient pu être réunies par Monsieur *Serge CRÉZÉ*, chef du Laboratoire Structures. Qu'il trouve ici ma plus sincère gratitude.

Dans ce type d'étude, seule compte la réalisation effective des expériences. Je tiens à souligner la grande compétence et le sérieux du personnel du Laboratoire. Je ne remercie-rais jamais assez Denis Corbière, Philippe Maury, Marc Chartrou, Jean-Paul Bosc, Thierry Duigou ainsi que Michel Jouvent pour l'aide qu'ils m'ont apportée.

Enfin je tiens à souligner l'efficacité de quelques personnes qui ont travaillé avec moi sur ce sujet et qui ont contribué de manière significative au résultat final : Pascal Ybert, Frédéric Beltrando, Guillaume Giraudbit, Sébastien Routaboul, Kenneth Boyden et Maud Lecarpentier.

En dernier lieu, et à cause de tous les sacrifices qu'ils ont consentis, c'est à mon épouse Sophie et à mes enfants Alexandre et Mélissa que je dédie mon travail.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I :

INTRODUCTION GÉNÉRALE.

<i>Construction et Comportement Général des Structures Sandwichs</i>	1
<i>Bref Historique et Panorama des Applications Actuelles</i>	3
<i>Le Cas des Structures Sandwichs Dissymétriques</i>	6
<i>Objectifs et Plan de la Thèse</i>	8

CHAPITRE II :

ÉTUDES BIBLIOGRAPHIQUES.

<i>II.1 PROBLÉMATIQUE ET OBJECTIF DES ESSAIS</i>	11
<i>II.2 COMPORTEMENT DES SANDWICHS À RUPTURE</i>	16
<i>II.3 ESSAIS MONOAXIAUX</i>	20
<i>II.3.1)Flexion 3 ou 4 points</i>	20
<i>II.3.2)Essais de Compression</i>	22
<i>II.3.3)Essai de Cisaillement Plan</i>	24
<i>II.4 ESSAIS MULTIAXIAUX</i>	27
<i>II.4.1) Machines de Traction/Compression Biaxiales</i>	27
<i>II.4.2)Essais de Plaques sous Pression Statique</i>	30
<i>II.4.3)Essais de Compression/Cisaillement</i>	31

II.5 CONCLUSIONS RELATIVES AUX ESSAIS.....	35
II.6 PROBLÉMATIQUE DE LA MODÉLISATION DES SANDWICHS	37
II.7 MODÈLES LINÉAIRES CLASSIQUES DE POUTRES ET PLAQUES SANDWICHS	40
II.7.1)Modèles Simplifiés	40
II.7.2)Modèles 2D.....	43
II.7.2.1)Modèles Globaux.....	43
II.7.2.2)Modèles Locaux	47
II.7.3)Modèles 3D.....	49
II.8 ANALYSE NON LINÉAIRE GÉOMÉTRIQUE DES PLAQUES SANDWICHS	51
II.9 TECHNIQUES D'ANALYSE DE LA COMPRESSION DANS L'ÂME.....	56
II.10 CONCLUSIONS RELATIVES À LA PARTIE THÉORIQUE.....	63

CHAPITRE III :

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE.

Essais Sous Sollicitations Combinées Compression/Cisaillement.

III.1 CONCEPT D'ESSAI SOUS SOLLICITATIONS COMBINÉES.....	65
III.1.1)Contexte Général.....	65
III.1.2)Concept Retenu.....	67
III.2 RÉALISATION ET MISE EN OEUVRE.....	68
III.2.1)Conception Générale et Fabrication	68
III.2.2)Validation Expérimentale	79

III.3	COMPORTEMENT DES PLAQUES NON IMPACTÉES	82
III.3.1)Chronologie des Essais.....	82
III.3.2)Analyse du Chargement	84
III.3.3)Analyse des Ruptures.....	86
III.3.4)Evolution de la Déformation aux Centres des Peaux	91
III.3.5)Champ des Déformations dans les Peaux et Flèche.....	94
III.3.6)Conclusions	99
III.4	ESSAIS SUR PLAQUES IMPACTÉES.....	99
III.4.1)Contexte	99
III.4.2)Essai en Cisaillement	101
III.4.3)Essai en Compression.....	103
III.4.4)Essai sous Sollicitations Combinées	109
III.5	CONCLUSION GÉNÉRALE SUR LES ESSAIS	113

CHAPITRE IV :

ÉTUDE THÉORIQUE.

IV.1	OBJECTIFS ET DÉMARCHE.....	115
IV.2	HYPOTHÈSES GÉNÉRALES	116
IV.2.1)Géométrie.....	116
IV.2.2)Hypothèses Cinématiques	117

IV.2.3)Hypothèses de Comportement des Peaux.....	120
IV.2.4)Hypothèses de l'Analyse non Linéaire Géométrique	122
IV.3 THÉORIES DES POUTRES SANDWICHS DISSYMMÉTRIQUES.....	123
IV.3.1)Géométrie et Champ des Déplacements	123
IV.3.2)Expression des Déformations avec Changement de Variables	125
IV.3.3)Résolution du Problème par Minimisation de l'Energie Potentielle	127
IV.3.4)Ecriture du P.T.V. et Résolution par Méthode Incrémentale/Itérative	130
IV.3.5)Etude Energétique.....	134
IV.3.6)Conclusions et Passage Poutres/Plaques	137
IV.4 THÉORIE DES PLAQUES SANDWICHS DISSYMMÉTRIQUES	140
IV.4.1)Nouvelle Cinématique	140
IV.4.2)Discrétisation des Déplacements	143
IV.4.3)Formulation Matricielle	145
IV.4.4)Calcul de la Matrice de Rigidité Tangente.....	148
IV.4.5)Calcul du Vecteur des Efforts Extérieurs.....	152
IV.4.6)Validation par Comparaison à des Modèles Eléments Finis	155
IV.5 CONCLUSIONS RELATIVES À LA PARTIE THÉORIQUE.....	158

CHAPITRE V :

CORRÉLATION ESSAIS/THÉORIE ET ANALYSES COMPLÉMENTAIRES.

V.1 CORRÉLATION DES ESSAIS.....	161
V.1.1)Description des Essais en Compression sur Poutres	161
V.1.2)Corrélation des Essais sur Poutres	167
V.1.3)Corrélation d'Essais de Compression sur Plaques Réalisés sur le Montage..	173
V.1.3.1)Méthodologies de Corrélation des Essais.....	173
V.1.3.2)Corrélation de l'Essai de Compression n°2 sur le Montage.....	176
V.1.4)Corrélation des Essais de Cisaillement et sous Sollicitations Combinées	177
V.1.5)Conclusions.....	182
V.2 CALCUL DE LA CONTRAINTE NORMALE DANS L'ÂME.....	183
V.2.1)Calcul en Poutres	183
V.2.2)Calcul en Plaques	189
V.2.3)Conclusions.....	191
V.3 COMPORTEMENT GÉNÉRAL DES STRUCTURES SANDWICHS DISSYMMÉTRIQUES	192
V.3.1)Comportement des Poutres et Plaques Sandwichs en Compression.....	192
V.3.2)Comportement des Plaques Sandwichs Dissymétriques en Cisaillement	199
V.3.3)Comportement des Plaques Sandwichs Dissymétriques sous Sollicitations Combinées Compression/Cisaillement.....	201

V.3.4) Conclusions.....	203
--------------------------	-----

CONCLUSIONS GÉNÉRALES

.....	205
-------	-----

ANNEXE I

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

<i>Références Relatives à l'Introduction Générale</i>	A1-1
<i>Ouvrages</i>	A1-2
<i>Références à Dominante Expérimentale</i>	A1-4
<i>Références à Dominante Théorique</i>	A1-7
<i>Rapports, Stages et Publications</i>	A1-12
<i>Normes ASTM</i>	A1-14

ANNEXE II

DOCUMENTS PHOTOGRAPHIQUES.

<i>Conception du Montage</i>	A2-1
<i>Ruptures des Eprouvettes</i>	A2-5
<i>Eprouvettes Impactées</i>	A2-8
<i>Eprouvettes de Type Poutre</i>	A2-10

ANNEXE III

MÉTHODES EXPÉRIMENTALES.

<i>Déroulement d'un Essai</i>	A3-1
<i>Mesure des Efforts Exercés sur le Montage</i>	A3-2
<i>Mesure des Déformations par Extensométrie</i>	A3-3

<i>Mesure des Déplacements.</i>	<i>A3-4</i>
---	-------------

ANNEXE IV

BASES THÉORIQUES.

<i>Cinématiques</i>	<i>A4-1</i>
<i>Mesures des Déformations</i>	<i>A4-3</i>
<i>Mesures des Contraintes</i>	<i>A4-4</i>
<i>Minimisation de l'Energie Potentielle et Méthode de Discrétisation de Rayleigh-Ritz . .</i>	<i>A4-7</i>
<i>Principe des Travaux Virtuels et Méthode Incrémentale/Itérative</i>	<i>A4-8</i>

ANNEXE V

PROGRAMME DE CALCUL SAND.

<i>Introduction.</i>	<i>A5-1</i>
<i>Tabulation des Intégrales.</i>	<i>A5-1</i>
<i>Principe du Calcul</i>	<i>A5-4</i>
<i>Structure du Programme</i>	<i>A5-5</i>
<i>Entrées-Sorties.</i>	<i>A5-8</i>
<i>Performances.</i>	<i>A5-11</i>
<i>Corrélation Cas n°1</i>	<i>A5-12</i>
<i>Corrélation Cas n°2</i>	<i>A5-13</i>
<i>Problème de la Compatibilité</i>	<i>A5-14</i>
<i>Mise en Oeuvre Pratique de la Théorie</i>	<i>A5-19</i>
<i>Conclusions</i>	<i>A5-33</i>

CHAPITRE I

INTRODUCTION GENERALE

CONSTRUCTION ET COMPORTEMENT MECANIQUE GENERAL DES STRUCTURES SANDWICHS.

Une structure sandwich est constituée d'une âme de faible densité et aux caractéristiques mécaniques faibles devant celles des deux peaux qui l'enserrent. Il existe une infinité de combinaisons de matériaux pour l'âme et pour les peaux suivant les domaines d'utilisation, du génie civil à la construction spatiale. Cette étude sera restreinte aux sandwichs de type aéronautique [Guedra-Degeorges 1997].

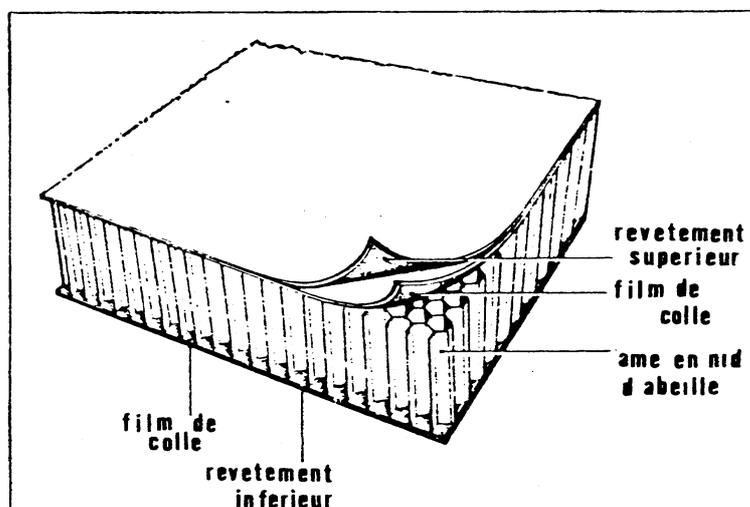


Figure N° 1-1 : Constitution d'un sandwich de type aéronautique. (Document Aérospatiale)

Dans ce cadre, les âmes sont en mousse ou de type nid d'abeille aluminium ou Nomex. Les peaux sont généralement en stratifiés de fibres de verre, de Kevlar ou de carbone, ou encore en alliage d'aluminium. Leur épaisseur maximale est de 2 mm alors que la hauteur de l'âme ne dépasse généralement pas 50 mm. La jonction des peaux à l'âme se fait par un film de colle (Figure N° 1-1). Le comportement mécanique général est parfaitement illustré par l'exemple suivant [Gay 1991] qui utilise une formulation de type R.D.M.

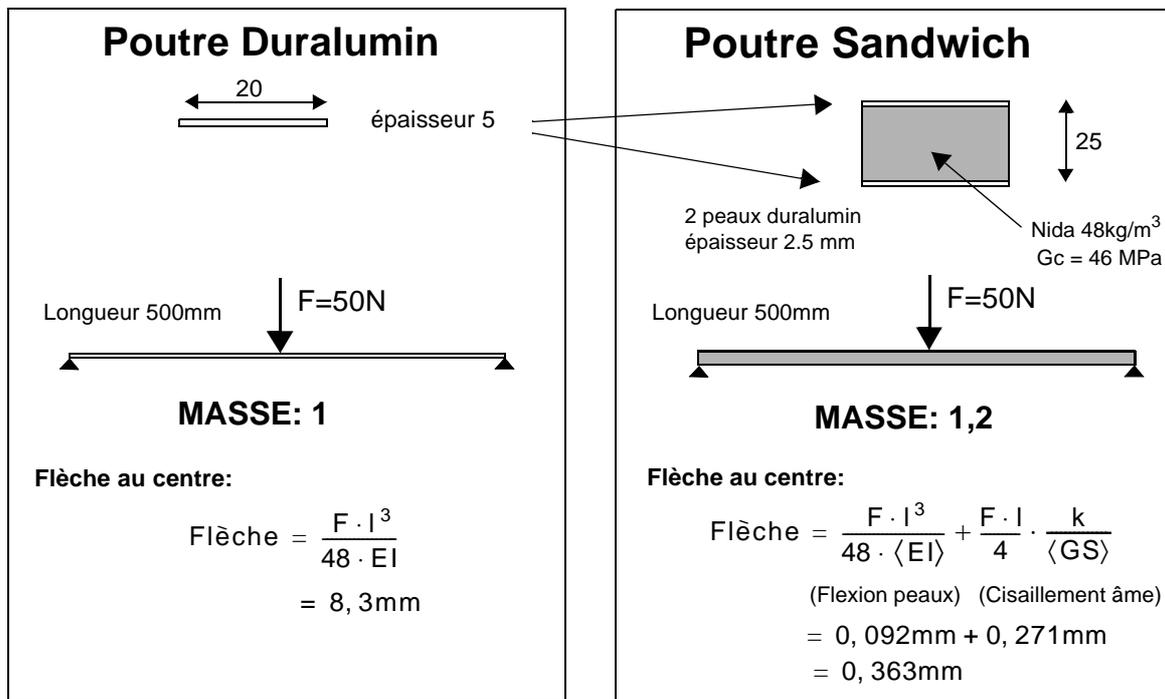


Figure N° 1-2 : Comparaison poutre Duralumin / poutre sandwich.

Ce modèle simplifié montre que :

- La flèche a été divisée par **23** pour seulement 20% d'augmentation de masse. Les structures sandwichs présentent donc une rigidité spécifique de flexion particulièrement élevée.
- La flèche due au moment de flexion est pour cet exemple **3** fois inférieure à celle due à l'effort tranchant. La prise en compte du cisaillement transverse est donc essentielle pour une modélisation correcte des sandwichs.
- Si le mode de sollicitation du sandwich est la flexion, soit par des efforts concentrés soit par pression répartie (ex : coques de navire), deux peaux travaillantes identiques s'imposent. On parle alors de **Sandwich Symétrique**.

D'un point de vue technologique, on est passé d'une structure constituée d'un *matériau* homogène isotrope à une structure multiphase et anisotrope. Ainsi, il est impossible de caractériser simplement le comportement par un seul essai de traction et les modes de ruines deviennent complexes et variés.

BREF HISTORIQUE ET PANORAMA DES APPLICATIONS ACTUELLES.

Le premier à discuter de l'intérêt à faire travailler deux peaux éloignées de la ligne moyenne a été le Français Duleau en 1820 [Zenkert 97]. Mais les premières applications n'ont débuté qu'une centaine d'années plus tard avec la naissance de l'industrie aéronautique.

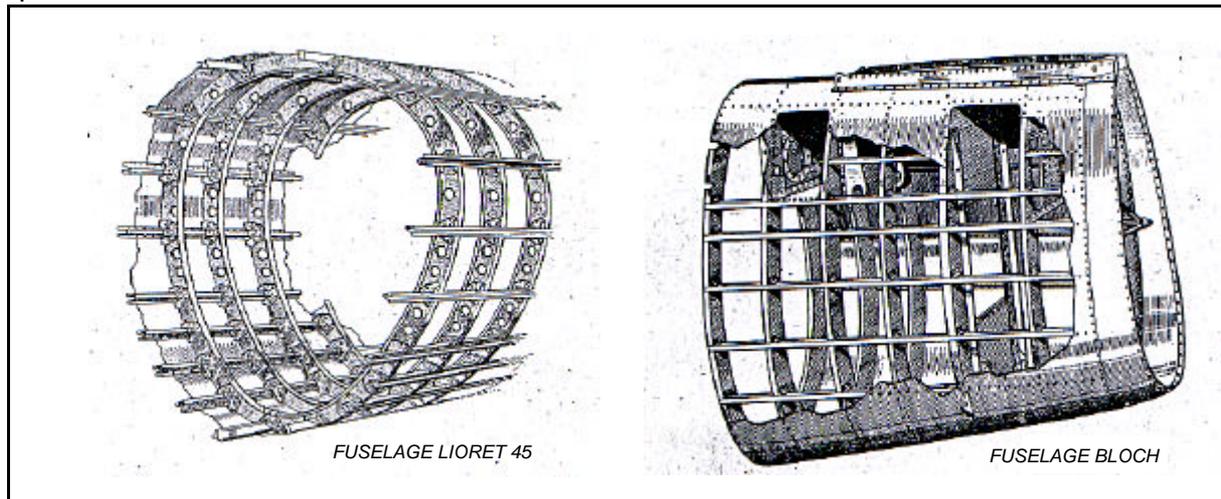


Figure N° 1-3 : Construction métallique aéronautique typique (Années 20-30).

La conception des structures d'aéronefs étant soumise à des impératifs de performances toujours accrues en termes de rigidité, de résistance et de poids, la recherche de constructions nouvelles est permanente. Si les débuts de l'aviation ont consacré la construction bois et toile, la solution peau mince métallique raidie par cadres et lisses a été adoptée dès les années 20 (Figure N° 1-3). Dans les années 30, les industriels ont envisagé la possibilité de réaliser des éléments de structures en sandwichs fabriqués dans les matériaux de l'époque. Un brevet à ce sujet a été déposé par Von Karman en 1924 [Hoff 1944].

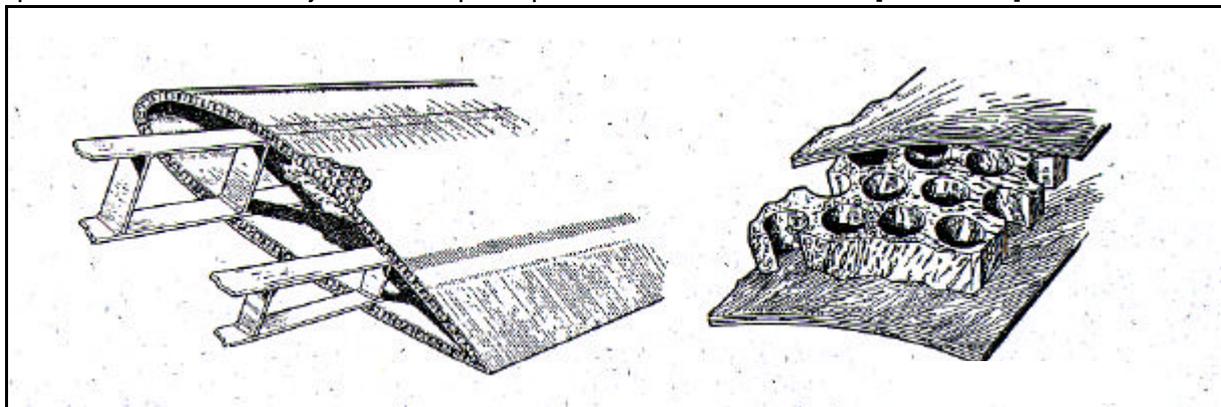


Figure N° 1-4 : Procédé Brodeau (D'après "Quinze Ans d'Aéronautique Française: 1932-1947")

Le procédé Brodeau (1934), consiste en " deux épaisseurs de contreplaqué qui enserrant en **SANDWICH** une certaine épaisseur de matière légère, du liège ou de l'aggloméré

de liège» (Figure N° 1-4). Ce type de solution fut étudié simultanément par les grands pays de la construction aéronautique d'avant-guerre et fut appliqué ponctuellement à la conception de certains éléments de structure (Avion Lignel (1938, F), Schneider (1938, F), De Havilland Albatros (1938, GB), Skydine (1939, U.S.A.). L'application la plus popularisée qui marqua le réel début de la construction sandwich fut le bombardier De Havilland Mosquito (1943, 7741 exemplaires). L'extrados de l'aile était constitué d'un sandwich peaux contreplaqué, coeur balsa alors que l'intrados était construit avec de simples panneaux de contreplaqué. Toutefois, plus que les qualités intrinsèques de la construction sandwich, ce furent la disponibilité des matériaux, la facilité de mise en oeuvre, la tolérance aux impacts et la réparabilité qui déterminèrent le choix de cette conception.



Figure N° 1-5 : Structure du Dauphin 2 (Document Aérospatiale)

Par la suite, l'utilisation de sandwichs à peaux métalliques se généralisa y compris

pour des éléments de structure primaire. L'apparition des fibres de verre tissées et de résines performantes au début des années 50, permit la fabrication des premiers sandwichs à peaux composites et coeur nid d'abeille. Il furent, en France, appliqués à des éléments de structures secondaires de l'avion Vautour (1953) : Carénage d'arête dorsale, contre-dérive, radôme [Aérospatiale 1986].

Actuellement, le pourcentage en masse de composites utilisés dans la structure plafonne à 20% environ dans les avions civils et leur utilisation se limite aux structures secondaires. Très peu d'appareils voient leur structure primaire réalisée entièrement ou partiellement en composites. L'appareil civil le plus avancé de ce point de vue et qui fait largement appel à la construction sandwich est certainement le Beechcraft Starship (1983, U.S.A. 6-10 passagers) dont 70% de la masse de la structure est en matériaux composites. En Europe, le caisson d'extrémité de voilure de l'ATR 42 est en carbone. Le nouvel Airbus A340-500/600 (1er vol : 2001) adoptera pour la première fois un élément de structure travaillante en carbone, à savoir une poutre ventrale d'une longueur de 16 mètres (*Air et Cosmos*, N°1680). Dans le domaine militaire, on parle de plus de 90% de la structure en composite pour les avions du Lockheed Skunks Works : les bombardiers furtifs B2 et F117.

En ce qui concerne la conception des hélicoptères, l'état de l'art publié [Aérospatiale 1986] est bien représenté par l'éclaté du Dauphin 2 (*Figure N° 1-5*). Pour cet hélicoptère, 25% de la masse de la structure est réalisée en matériaux composites. Toutefois, des éléments de structure primaire sont réalisés en sandwich nida Nomex/peau métallique ultrafine. Le récent convertible V22-Osprey n'intègre pour sa part que des structures secondaires en sandwich composite [Schulze 1990].

Le fait de pouvoir construire léger et rigide intéresse de nombreux autres domaines. Les premières coques de bateau en fibre de verre/balsa datent du début des années 60 et l'utilisation dans ce domaine prend de l'ampleur avec l'arrivée de frégates militaires furtives et de bateaux à grande vitesse [Olsson 1997;1998, Lainé 1998]. Par ailleurs, les impératifs de diminution de l'émission de CO₂ de 40% d'ici à 2010 conduit les constructeurs automobiles à changer de technologie et à rechercher des solutions sandwichs pour construire des structures plus légères [Gustafsson 1998]. Toutefois, jusqu'à présent, leur introduction se heurte aux problèmes de la fabrication en grande série et seules des applications ponctuelles ont été réalisées : boucliers anti-crash prototypes [Kerth 1998], containers frigorifiques [Zenkert 1997, Marshall 1982]. En compétition automobile, des sandwichs nida et peau alu sont utilisés pour le châssis en remplacement de treillis soudés. Les mêmes contraintes conduisent à l'apparition de construction hybrides sandwichs/aluminium dans le matériel ferroviaire [Den Hann et Reif 1998, Huybretch 1998, Starlinger et Al 1998].

Le génie civil utilise aussi des sandwichs pour réaliser des voûtes de grandes portées. Le gain en densité surfacique est spectaculaire : de 2600kg/m² pour une voûte en pierre à 33kg/m² pour une solution sandwich acier/mousse [Gay 1991]. Récemment des portes d'écluses, un tablier de pont et un balcon pour habitat collectif ont été réalisés [J.E.C. 98].

Le comportement structural a été mis en avant dans ce paragraphe et suffit à démontrer les avantages intrinsèques des solutions sandwichs. Un autre aspect déterminant consiste en la possibilité d'inclure en plus de la fonction structurale de nombreuses autres fonctions : isolation thermique ou acoustique, amortissement vibratoire, tenue au crash, tenue au feu, furtivité, contrôle actif, etc... Ce dernier point est décisif et est le plus prometteur quant à la généralisation de la construction sandwich.

LE CAS DES STRUCTURES SANDWICHS DISSYMETRIQUES.

Certains éléments de structure primaire d'hélicoptères sont réalisés en sandwich Nomex/peau aluminium ultra-fine. Ce type de construction présente des caractéristiques mécaniques spécifiques très élevées et sa nature métallique fait que le comportement en fatigue ou aux impacts est maîtrisé. De ce fait, un passage à des peaux composites ne présente pas un avantage économique certain. Aussi, seul un saut technologique important peut amener à introduire une nouvelle construction.

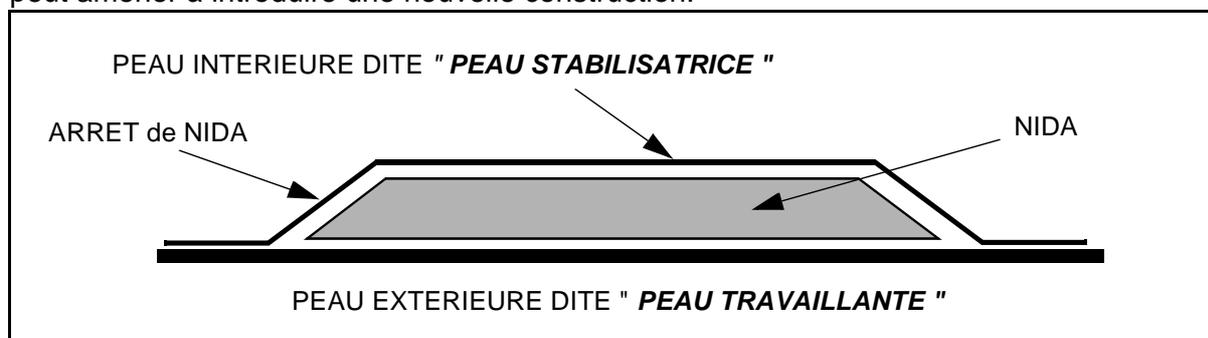


Figure N° 1-6 : Principe de construction des Structures Sandwichs Dissymétriques.

Dans un sandwich classique, donc symétrique, le fait d'éloigner les peaux de la ligne moyenne permet de maximiser la rigidité en flexion. Les **Structures Sandwichs Dissymétriques** reposent sur une idée différente. A l'instar des fuselages classiques constitués d'une peau fine stabilisée par des raidisseurs (Figure N° 1-3), un sandwich dissymétrique est constitué d'une première peau en stratifié de carbone dite "**Peau Travaillante**" qui reprend l'essentiel des flux d'efforts de la structure. La tenue au flambage de cette peau est assurée par du nida et une deuxième peau constituée d'un ou deux plis de carbone ou de Kevlar dite "**Peau Stabilisatrice**" (Figure N° 1-6).

Cette solution, outre des caractéristiques mécaniques particulièrement élevées que nous mettrons en évidence, présente l'avantage d'avoir des zones de jonction dans du monolithique et contourne ainsi le délicat problème du passage d'efforts localisés aux deux peaux via des inserts. Par contre son utilisation est limitée aux structures non pressurisées et modérément chargées de type hélicoptère ou aviation légère.

A notre connaissance, il s'agit d'une technologie récente et il n'y a aucune littérature dédiée explicitement au sujet. Seul un auteur [Zhu 1995] y fait allusion. De même, si des applications existent, elles n'ont pas fait l'objet de communications jusqu'à maintenant.

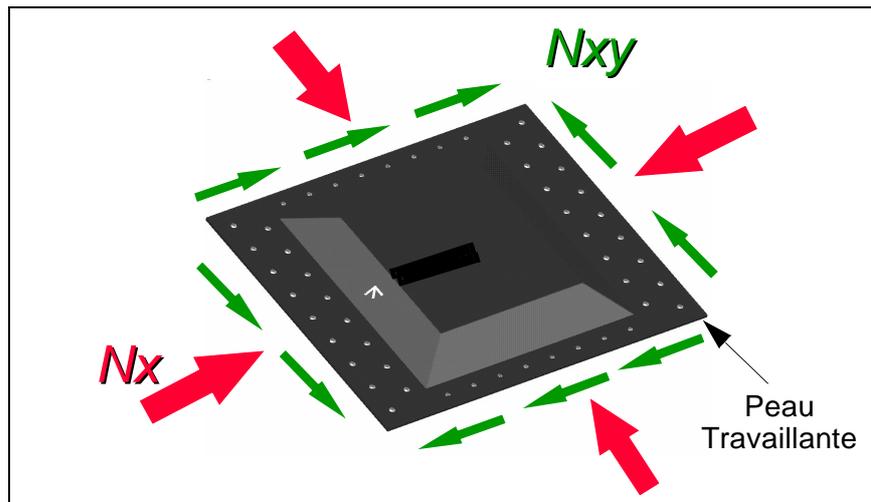


Figure N° 1-7 : Chargement en membrane des structures sandwich dissymétriques.

Par rapport aux sandwichs symétriques, les sandwichs dissymétriques ne travaillent que dans leur plan et la peau travaillante reprend la majorité des flux d'efforts de traction/compression et cisaillement (Figure N° 1-7).

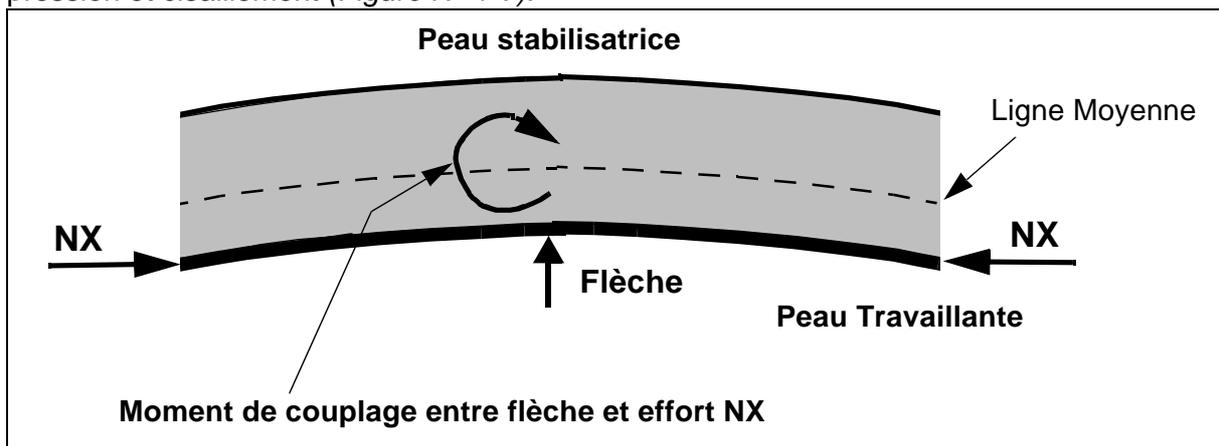


Figure N° 1-8 : Comportement non linéaire des sandwichs dissymétriques travaillant dans leur plan.

Une autre différence fondamentale est leur comportement non linéaire géométrique dû au décalage de la ligne moyenne par rapport au plan de chargement. Ce décalage induit un moment de flexion d'autant plus important que la flèche est élevée. On a ainsi un couplage effort/déplacement qui génère une réponse non-linéaire (Figure N° 1-8).

OBJECTIFS ET PLAN DE LA THÈSE.

Les objectifs de ce travail de recherche sont d'apporter à l'ingénieur concepteur de structures sandwichs dissymétriques travaillant dans leur plan :

- *Un moyen d'essai statique original permettant de tester des plaques en sollicitations combinées compression/cisaillement à rupture et représentatif des conditions aux limites réelles sur aéronef.*
- *Un code de calcul pour plaques, simple d'emploi et performant pour une utilisation en avant-projet.*

Le plan de cette thèse se déduit de ces deux objectifs :

- Le deuxième chapitre est consacré aux études bibliographiques. Après avoir présenté la problématique des essais sur composites, les divers modes de rupture des structures sandwichs seront analysés. Ceci permet une présentation argumentée des essais monoaxiaux classiques et d'autres essais multiaxiaux spécifiques à des métiers. La deuxième partie de l'étude bibliographique est consacrée aux principales théories utilisées dans la description des structures sandwichs dans le domaine linéaire puis dans le domaine non linéaire. Un paragraphe est consacré aux techniques de calcul de la contrainte normale dans l'âme.
- Le troisième chapitre est dédié au nouveau concept d'essai statique. Son développement et sa mise en oeuvre seront détaillés. Le comportement expérimental des éprouvettes saines et impactées obtenu y est analysé.
- Le quatrième chapitre est consacré à l'étude théorique. Dans un premier temps, l'évaluation des hypothèses mécaniques et des méthodes de l'analyse non linéaire géométrique sont effectuées sur un modèle de poutre. En particulier, une théorie simplifiée qui permet de traiter le problème avec seulement quatre inconnues numériques a été élaborée. Dans un second temps, une théorie non linéaire géométrique des plaques sandwichs dissymétriques

incluant une estimation de la compression transverse de l'âme sera présentée. En annexe, on trouvera le code de calcul SAND qui en est issu et qui a été validé industriellement par Eurocopter.

- Le chapitre V est intitulé "Mécanique des Structures Sandwichs Dissymétriques". Il reprend une série d'essais sur poutres sandwichs dissymétriques qui permettent de mettre en évidence le sens physique des paramètres δ et $N\%$ introduits dans le chapitre IV et valider le logiciel de pré-dimensionnement. Bien que ce ne soit pas l'objectif initial, les essais sur plaques seront corrélés à l'aide de la théorie. Un paragraphe est consacré à une méthode de calcul de la contrainte de compression transverse dans l'âme à l'aide d'équilibres locaux des peaux en configuration déformée. Enfin, la réponse des sandwichs dissymétriques aux sollicitations de compression, cisaillement et combinées sera analysée dans le dernier paragraphe.

CHAPITRE II

ETUDES BIBLIOGRAPHIQUES

II.1 - PROBLÉMATIQUE ET OBJECTIFS DES ESSAIS.

Les méthodes d'essais sur composites sont très variées et sont liées aux paramètres suivants :

- *L'échelle* : fibre, mèche, pli, stratifié, sandwich, pièce.
- *La nature du composite* : fibre longue, fibre courte, bois,...
- *La nature et la forme de l'éprouvette* : poutres, plaques, tubes, coques,...
- *La sollicitation* : simple (Traction, Compression, Cisaillement, Flexion) ou complexe.

Cette diversité s'explique par la nature hétérogène des matériaux et par le fait qu'il faille réaliser des essais à la fois sur le *matériau* et la *pièce* car " *en composites, le matériau ne préexiste pas à la pièce* " [Thomas 1998], ce qui n'est pas le cas des matériaux isotropes classiques. De plus, plusieurs phénomènes viennent compliquer l'interprétation des résultats d'essai. Il importe donc de mettre en évidence dans ce paragraphe les points-clés qui permettront l'analyse critique des diverses méthodes expérimentales.

UNE COMPLEXITÉ INTRINSÈQUE.

La simplicité et l'universalité de l'essai de traction en métallique n'est plus de mise en composite. Par exemple, la caractérisation complète du pli unidirectionnel nécessite de fournir quatre composantes élastiques ainsi que cinq résistances à ruptures (si l'on utilise le critère de Hill). Pour obtenir ces données élémentaires, à des fins de calcul de structure, il convient donc de réaliser un plus grand nombre d'essais, parfois délicats.

SAINT-VENANT EST PLUS DIFFICILE À RESPECTER.

On peut s'intéresser par exemple à l'éprouvette utilisée pour déterminer la résistance en compression de plis unidirectionnels de carbone. Après une modélisation E.F., des sur-contraintes très importantes au niveau des talons peuvent être mises en évidence [Effendi 1993] et une optimisation de forme après analyse de l'influence des défauts géométriques sur le champ des contraintes de l'éprouvette de l'Aérospatiale a pu être proposée [Rahier et Grandidier 1997]. Une étude plus générale [Horgan et Baxter 1997] conclue que si la zone affectée par les effets de bord pour un matériau isotrope vaut **1**, elle vaut **4,5** pour un stratifié carbone/époxy de même géométrie. Les chiffres **4** et **5** ont aussi été avancés par d'autres auteurs. L'ordre de grandeur semble acquis [Pierron 1998]. Cela a bien évidemment des conséquences expérimentales importantes quelle que soit la forme de l'éprouvette.

RÉSULTATS D'ESSAI ET MÉTHODE D'ESSAI SONT INDISSOCIABLES.

Les résultats s'avèrent très liés au type d'essai. Un très bon exemple pour illustrer ce phénomène est la recherche de la déformation à rupture en compression des plis unidirectionnels à base de carbone. Les éprouvettes les plus courantes sont conçues de manière à éviter le flambage global. Elles ont la forme de petits parallélépipèdes massifs (*Figure N° 2-1*). Les déformations à rupture mesurées sont alors de l'ordre de **1,2%** pour des fibres de carbone T300 [Effendi 1993, Vinçon et al 1996].

Une autre méthode d'essai radicalement opposée a été proposée initialement par Fukuda [1989] puis reprise par Wisnom [1992] et Vinçon et al [1996]. L'essai dit de "*flambage rotulé*" consiste au contraire à favoriser la flexion de l'éprouvette (*Figure N° 2-1*). Les résultats de ce type d'essai montrent que les plis en compression supportent des déformations sans rupture supérieures à **2%**. La majorité des ruptures se produisent sur les plis en traction. Pour une géométrie d'éprouvette particulière, Vinçon et al obtiennent une rupture

sur la face en compression à une déformation de **2,7%**.

Des modes de rupture analogues ont été obtenus par un essai de flexion 4 points optimisé [Vittecoq 1991]. L'explication physique de ce fait est que dans l'éprouvette en flexion, les plis en compression sont stabilisés par les plis adjacents, alors qu'avec la méthode classique, c'est le micro-comportement fibres/résine qui pilote la rupture. Vinçon et al parlent alors d' "**effet de structure**" pour l'éprouvette de flexion. La déformation à rupture en compression sur l'éprouvette O.N.E.R.A. peut être aussi pratiquement doublée lorsque le drapage n'est plus composé de 100% de plis à 0° mais comporte des plis à 45°.

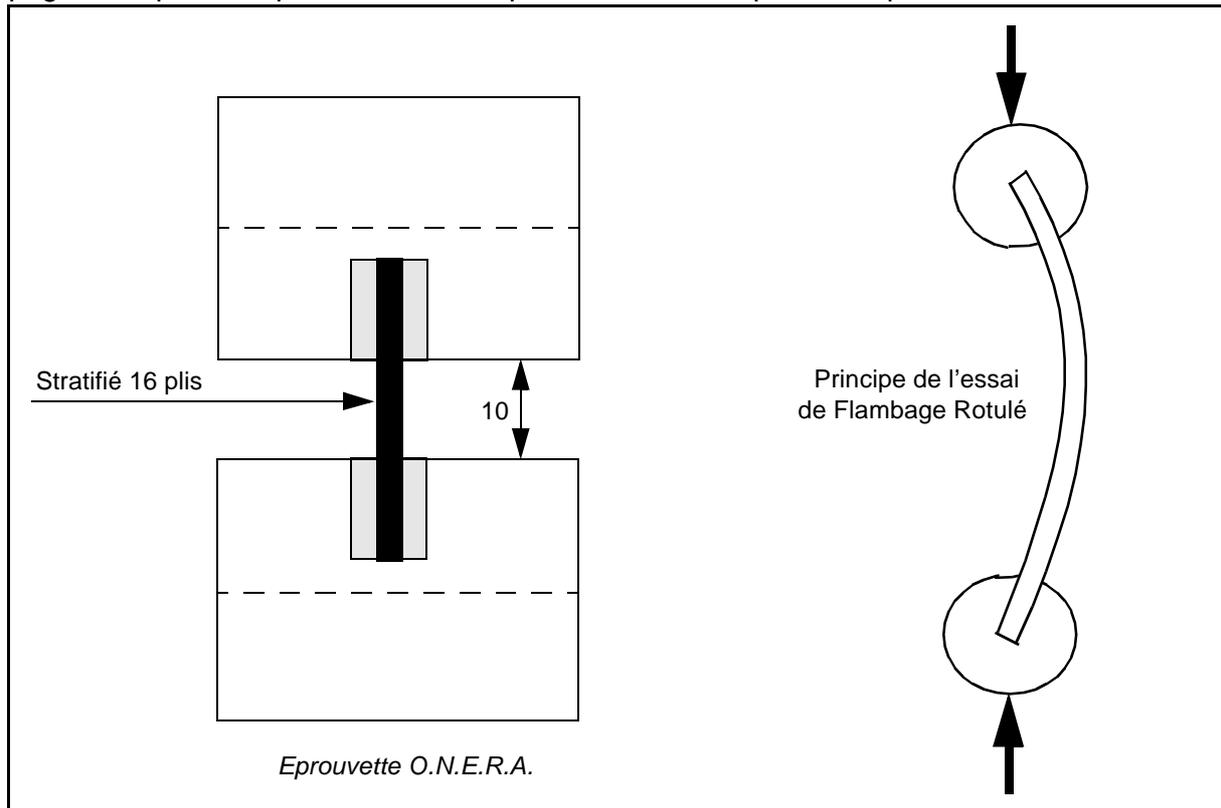


Figure N° 2-1 : Epreuve de compression O.N.E.R.A et Essai de flambage rotulé.

Bien que l'essai de flambage rotulé ne soit pas représentatif du mode de travail des structures aéronautiques (qui sont toujours raidies), il présente l'avantage de bien mettre en évidence les effets de structures qui se manifestent déjà au niveau de la pièce "épreuve". Par conséquent, l'extrapolation des résultats d'un essai sur éprouvette à une structure peut s'avérer inexact en composites. On devra s'assurer d'être toujours conservatif en dimensionnement des structures.

UNE DISPERSION DES RÉSULTATS PLUS IMPORTANTE.

Les résultats d'essais sur éprouvettes métalliques présentent usuellement une dispersion de 2 à 3%. Pour les essais sur composites la plage de variation est toujours de 2 à 5

fois plus importante [Zagainov, pp 389-391]. Ce n'est toutefois qu'un ordre de grandeur, de très nombreux paramètres entrant en jeu. L'exemple de dispersion maximale donné par l'auteur précédent concerne des essais de coques cylindriques en Kevlar et atteint 32.5%. Les facteurs influents sont la complexité de la structure à tester, les dispersions dues à la fabrication et aux matériaux et enfin la nature de la sollicitation. Ce phénomène est donc à connaître pour une interprétation correcte des résultats d'essai.

UNE APPROCHE MULTI-ÉCHELLE ET PRAGMATIQUE : LA PYRAMIDE DES ESSAIS.

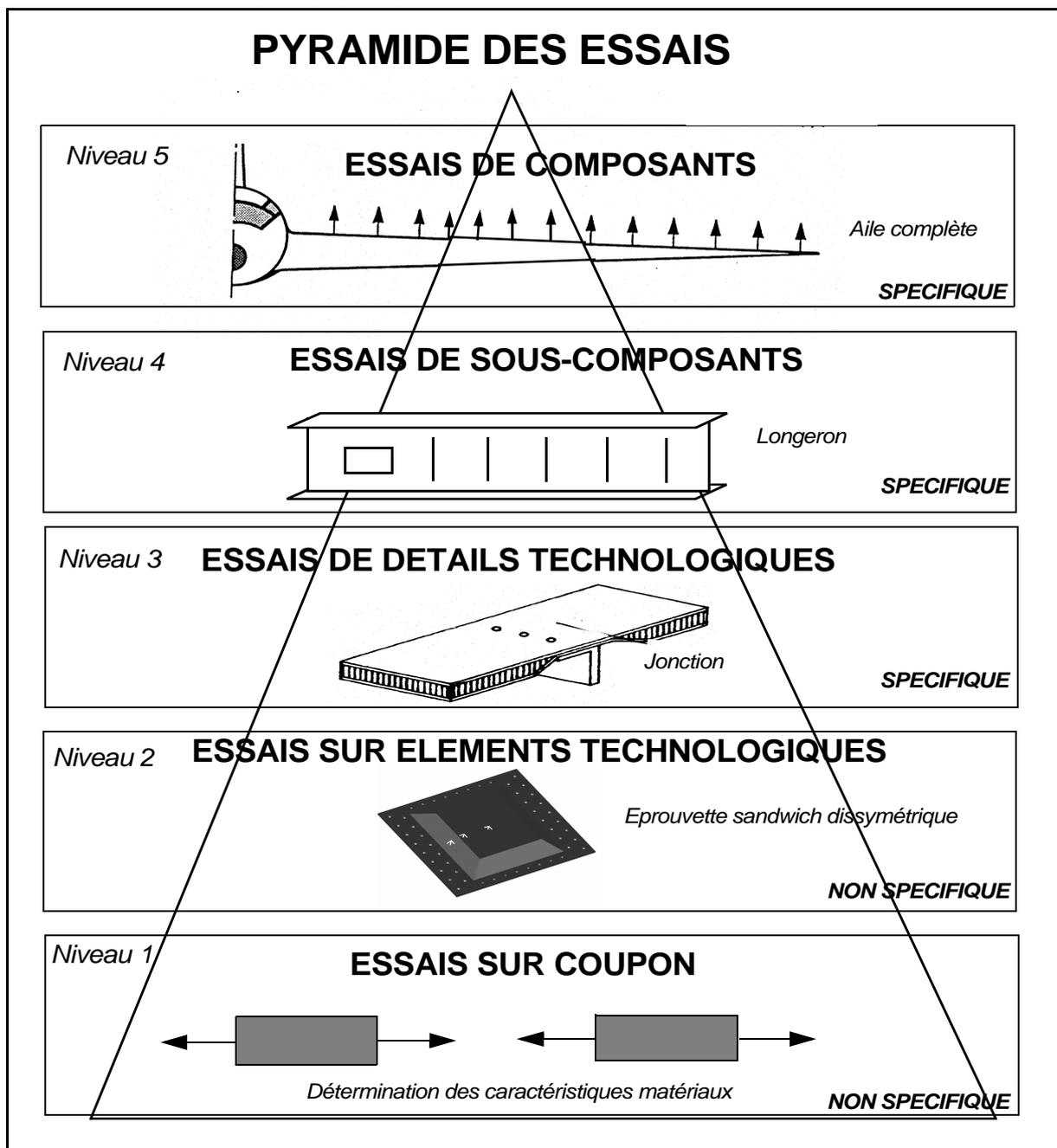


Figure N° 2-2 : Pyramide des essais (D'après Rouchon 1998).

Les effets de structure étant bien connus dans l'aéronautique, les autorités de certification françaises ont proposé une approche multi-échelle des essais dite "Pyramide des essais" pour la construction métallique classique dans un premier temps mais qui se révèle très pertinente pour les structures composites [Rouchon 1998]. Le premier niveau correspond aux essais classiques de réception des matériaux. Le deuxième niveau consiste à valider des zones ou éléments courants d'un ou plusieurs types d'aéronefs. Les niveaux supérieurs sont des essais de validation de sous-éléments ou de détails propres à chaque application. Des approches analogues ont, par ailleurs, été développées en Russie (Zagajnov, p100) et aux Etats-Unis [Niu M. C. Y.1992 p454].

DE L'INTÉRÊT DES ESSAIS SOUS SOLLICITATIONS COMPLEXES.

En premier lieu, l'anisotropie des composites conduit à proposer une série de critères de rupture qui pour être validés nécessitent l'emploi de tests en sollicitations complexes [Perreux et Al]. Ces derniers font l'objet de nombreux développements de la part des laboratoires de recherches : essais sur tubes, obtention de la multiaxialité par des formes spécifiques : plaques ovales, disque plan asymétrique [Arcan et Al 1978], essais de gonflement de plaques [De Mesquita 1993], flexion hors-axe [Grediac 1990], flexion-torsion de poutres [Milot 1990], etc...

En second lieu, on a vu que la connaissance du comportement des structures composites nécessite de faire l'essai sur la pièce. Or dans le cas des structures aéronautiques, celles-ci travaillent essentiellement sous sollicitations combinées compression/cisaillement. Aussi la conception de ces structures nécessite le développement d'essais spécifiques, mieux à même de fournir des données fiables et directement exploitables.

OBJECTIFS DE L'ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES ESSAIS.

Les quelques remarques précédentes permettent d'analyser globalement la problématique importante des essais sur composites. Nous nous limiterons dans le cadre de cette étude bibliographique à l'examen des méthodes d'essai statique applicables aux structures sandwichs. Il est indispensable de préciser que cette recherche ne peut pas être exhaustive et que les industriels ou les centres d'essais communiquent peu leurs méthodes et a fortiori leurs résultats d'essai, ces informations étant stratégiques. Certains essais ayant uniquement pour finalité la caractérisation des peaux ou des âmes sont exclus de notre présentation (compression transverse, test du rail,...), le comportement structural étant privilégié.

Quelques essais originaux qui n'ont pas directement été appliqués aux sandwichs mais qui peuvent s'avérer intéressants pour des concepts futurs sont inclus.

Après avoir présenté, dans un premier temps, les divers modes de rupture observés sur les sandwichs, les essais classiques réalisés sur machine de traction universelle ou ne mettant en oeuvre qu'un seul actionneur que nous qualifierons de "**monoaxiaux**", seront analysés. Dans un deuxième temps, des essais nécessitant un équipement spécifique et/ou permettant d'atteindre des états de contraintes complexes seront détaillés. Nous les qualifierons de "**multiaxiaux**" par opposition aux précédents.

II.2 - COMPORTEMENT DES SANDWICHS À RUPTURE.

Rappelons qu'un sandwich est une structure composée de trois éléments : deux peaux et une âme assemblées par un film de colle. Chacun des constituants possède des modes de rupture propre. L'ensemble qui forme la structure en possède d'autres, on obtient donc un certain nombre de possibilités qui vont être énumérées.

Les conditions dimensionnantes associées à chaque cas ont été recherchées très tôt par les concepteurs de structures aéronautiques et spatiales et sont disponibles dans deux ouvrages de 1968 (U.S. Mil-Hbk 23A) et 1969 (Nasa CR-1457) qui font encore référence par des mises à jour régulières ou dans les abaques ESDU plus récentes. La rupture du sandwich peut intervenir par rupture statique d'un de ces composants dans une zone courante ou une zone d'introduction des efforts (*Figure N° 2-3*).

RUPTURES STATIQUES DES PEAUX.

L'analyse de ces modes de rupture repose sur une détermination des contraintes par des méthodes classiques (E.F. ou analytiques) et comparaison à une contrainte limite par l'utilisation d'un critère de contrainte équivalente (Von Mises ou Hill). Les ruptures des peaux stratifiées sont en général explosives et provoquent la ruine du sandwich.

Le dimensionnement des jonctions dans du monolithique nécessite la connaissance des surcontraintes locales et un drapage optimisé. Gay [1991] propose une méthode de calcul et donne les valeurs de la contrainte de matage admissible (500 MPa pour un stratifié en fibres de carbone et 300 MPa pour un stratifié en fibres de verre).

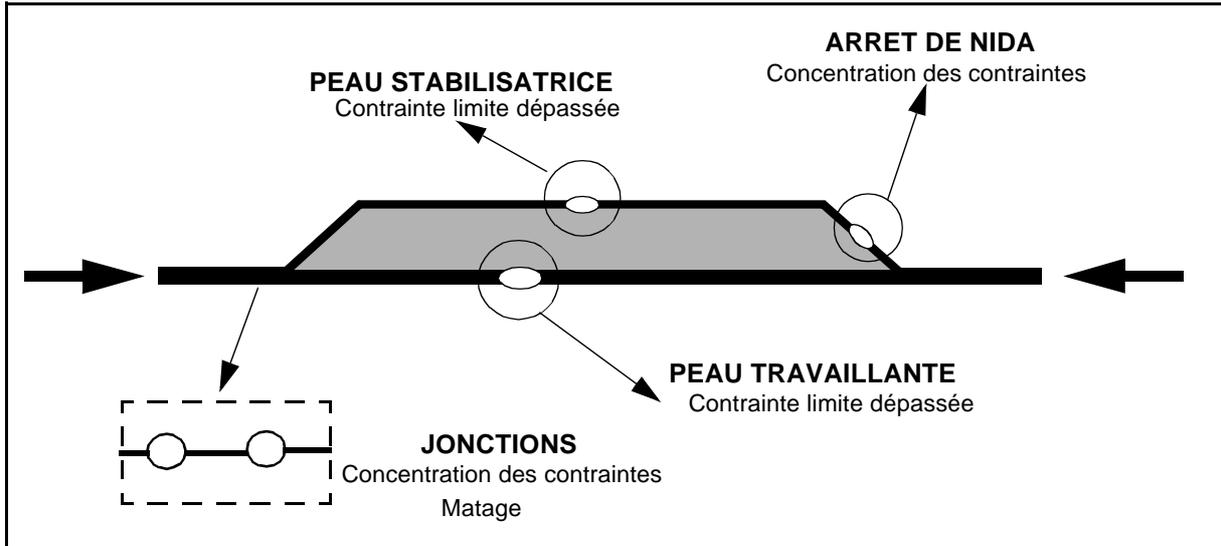


Figure N° 2-3 : Ruptures statiques des peaux.

Pour les sandwichs symétriques, plusieurs technologies sont utilisées dans les zones de jonctions : inserts, densification locale, profilés [Marshall 1982]. Le dimensionnement de la zone d'introduction des efforts fait appel aux éléments finis ainsi qu'aux essais. L'optimisation des caractéristiques mécaniques et de la fiabilité de ces jonctions est une priorité industrielle et par conséquent un axe de recherche important pour le développement des structures sandwichs [Sheahen et Al, 1998].

RUPTURES STATIQUES DE L'ÂME.

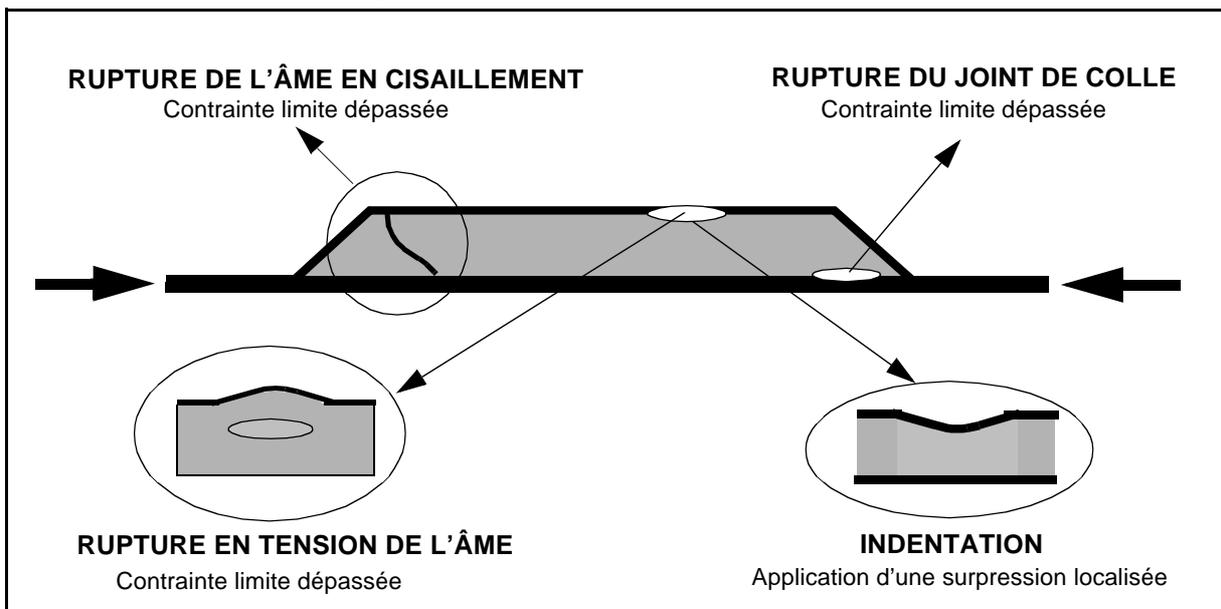


Figure N° 2-4 : Ruptures statiques de l'âme

Comme pour les peaux, le dimensionnement repose sur une étude numérique ou analytique du champ des contraintes dans l'âme. Les valeurs trouvées sont ensuite comparées

(avec marges de sécurité) à des limites déterminées expérimentalement à l'aide d'essais normalisés. La résistance en cisaillement est déterminée par exemple par le test du rail [ASTM C273]. Le poinçonnement affecte bien sûr l'âme, mais aussi une des peaux. Il se produit en particulier aux appuis quand la zone n'a pas été renforcée. Cela peut être le cas par exemple dans les essais de flexion 3 et 4 points. A priori, la structure bien que détériorée n'est pas ruinée.

Les ruptures statiques de l'âme ou du joint de colle ont, à l'analyse, des faciès de rupture souvent difficiles à détecter, car elles sont couplées avec des modes de flambage ou de ruine locaux ou globaux. Par exemple, une rupture en tension de l'âme près d'une peau peut provoquer un décollement puis un flambage local de celle-ci [Kay 1990]. Le phénomène est identique pour une rupture locale du film de colle. De même, une rupture statique de l'âme en cisaillement provoque une diminution de sa rigidité et un flambage global piloté par du cisaillement.

INSTABILITÉS LOCALES.

En ce qui concerne le flambage local (wrinkling), il peut se produire pour des peaux minces en interaction avec une âme de hauteur suffisante et de rigidité en compression faible. Ce phénomène fait encore l'objet de recherches ayant pour objectif de développer des modèles analytiques plus représentatifs [Yusuff 1955, Kay 1990]. La corrélation calcul/théorie s'avère délicate en particulier du fait que les défauts géométriques initiaux ont une influence importante. Aussi, les contraintes critiques fournies par la littérature à partir de modèles simplifiés sont-elles utilisées en général en conception avec un facteur de sécurité de 2 [Marshall 1982].

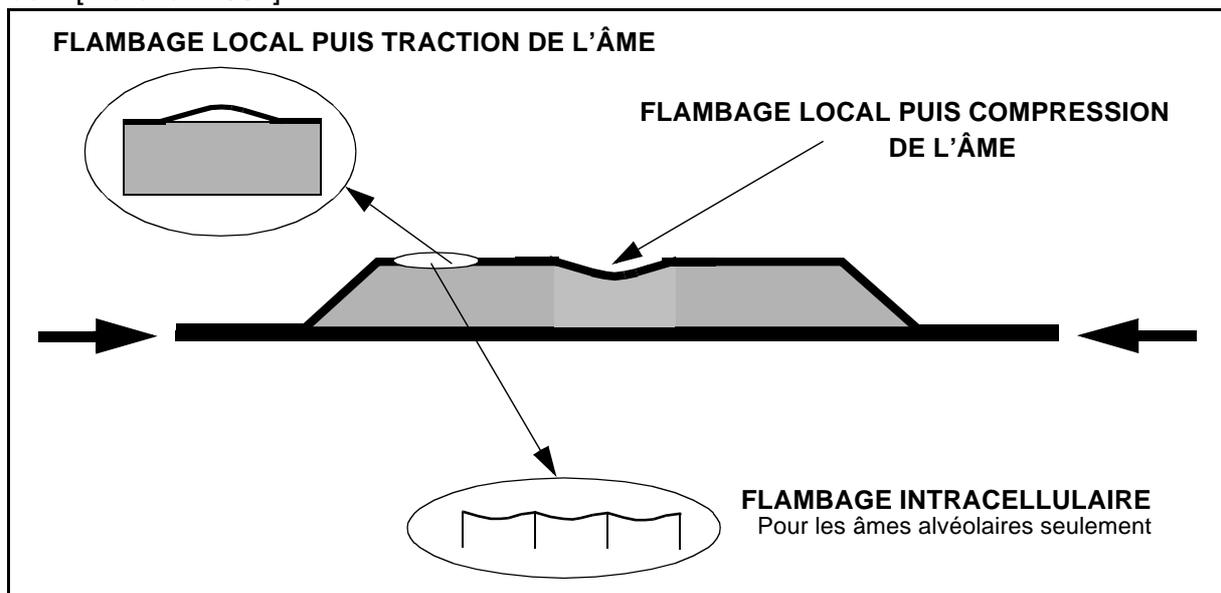


Figure N° 2-5 : Instabilités locales

Si la contrainte critique est commune aux deux modes représentés (*Figure N° 2-5*), les faciès de rupture seront différents suivant les défauts initiaux et la nature de l'âme. D'après des essais réalisés au laboratoire, le flambage local s'accompagne d'une rupture en traction ou compression de l'âme en mousse. Dans le cas où l'âme est en nida Nomex, on assiste plutôt à une rupture du joint de colle. Le flambage intracellulaire est un cas particulier de flambage local d'une peau sur une âme à structure alvéolaire (de type nid d'abeille par exemple).

INSTABILITÉS GLOBALES.

Le flambage piloté par cisaillement de l'âme se produit lorsque la rigidité en cisaillement transverse de l'âme est insuffisante. Le flambage global classique est piloté par la rigidité de flexion du sandwich. De plus, comme pour les plaques isotropes ou anisotropes, les défauts initiaux peuvent amener à une rupture bien avant la charge de flambage qui est calculée avec une géométrie parfaite.

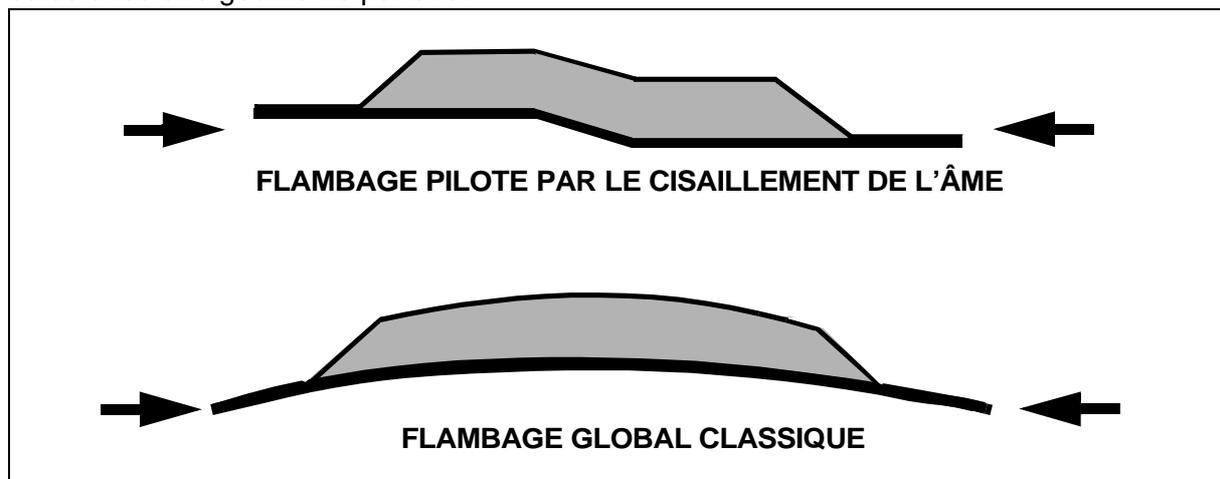


Figure N° 2-6 : Instabilités globales

La diversité des modes de ruine montre la difficulté particulière de conception des sandwichs. Un calcul linéaire est souvent insuffisant à cause des flambages locaux ou globaux. Les ruptures réelles observées dans les essais statiques sont au mieux pilotées par un seul mode mais le plus souvent en combinent plusieurs. Par conséquent, il est souvent difficile de savoir quel est le premier mode de ruine de la structure et l'on est conduit à élaborer **un scénario probable de rupture**.

Les différentes méthodologies d'essai présentées dans les paragraphes suivants sont utilisées pour mettre en évidence l'un ou l'autre des modes de rupture des sandwichs.

II.3 - ESSAIS MONOAXIAUX.

II.3.1 - FLEXION 3 OU 4 POINTS.

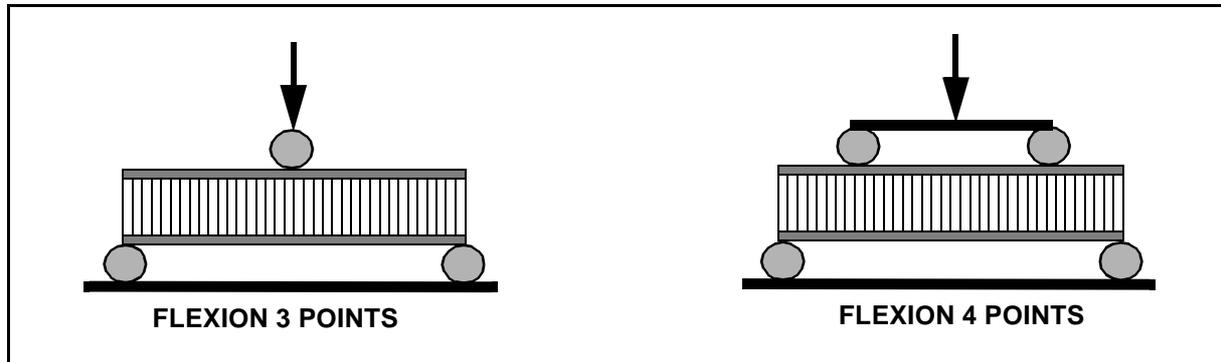


Figure N° 2-7 : Essais de flexion 3 et 4 points.

La flexion 4 points permet en particulier de créer un moment de flexion pur dans la zone centrale. Ces essais sont normalisés [ASTM C393-1962 reconduit en 1988, Figure N° 2-8] et sont couramment utilisés à cause de leur simplicité de mise en oeuvre [DIAS 1990].

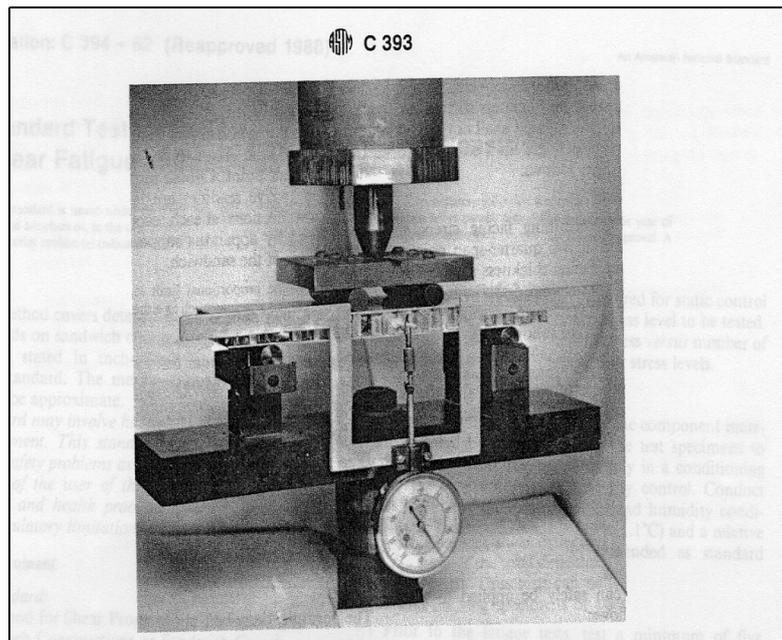


Figure N° 2-8 : Essai de flexion 4 points ASTM C393

Ils permettent de déterminer les éléments suivants :

- Caractéristiques élastiques des peaux (flexion 4 points) et de l'âme (flexion 3 points) avec une bonne fiabilité. [ASTM C393, Kherbouche 1994].
- Résistances de l'âme ou des peaux suivant les modes de rupture. Ceux-ci sont fonctions de la longueur de l'éprouvette :
 - * Eprouvette courte : cisaillement de l'âme.
 - * Eprouvette longue : rupture statique des peaux. [Kherbouche 1994].

Certaines limitations doivent être signalées :

- Problème d'indentation et d'adhérence aux contacts.
- Concentration des contraintes aux contacts en particulier pour l'essai 3 points, ce qui cause des ruptures prématurées. Dans le cadre d'essai d'éprouvettes stratifiées, l'estimation serait minimisée de 30 à 50% [Uemura et Al 1994].
- Non respect du principe de Saint-Venant.
- Limitation à des petits déplacements.
- Non-représentatif de beaucoup d'applications.

L'ensemble de ces limitations fait que plusieurs auteurs ont proposé des essais utilisant le même principe mais en proposant des améliorations diverses [Lardeur et Al 1996, Uemura et Al 1994].

Un essai de flexion original pour des caissons composites de voilure "intelligents" a retenu notre attention [Rehfield,1995]. Ce type de caisson se déforme sous l'action de micro-actionneurs permettant une torsion du profil de l'aile (*Figure N° 2-9*) avec pour objectif final la suppression des ailerons sur les voilures. Les conditions aux limites sur les essais de flexion classiques n'autorisant pas la torsion du caisson, un chargement via des sangles a été adopté, ce qui permet une déformation en torsion. Il peut sembler intéressant, a priori, de généraliser ce type de chargement par sangles aux essais de sandwichs, les problèmes d'indentation étant minimisés. L'auteur signale la difficulté de mesurer les flèches mais obtient de bons résultats par extensométrie.

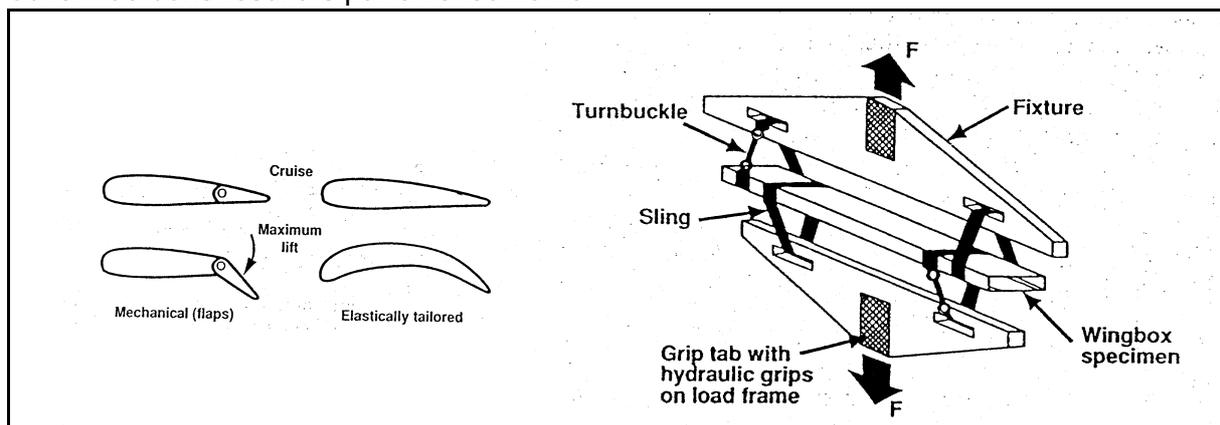


Figure N° 2-9 : Essai de flexion 4 points sur caisson de voilure (D'après Rehfield et A. [1995])

En conclusion, les essais de flexion 3 et 4 points donnent de bons résultats pour l'estimation des caractéristiques élastiques mais des résultats médiocres bien que conservatifs pour les contraintes à rupture des sandwichs. Leur faible coût et leur facilité de mise en oeuvre en feront toujours des essais parmi les plus répandus.

II.3.2 - ESSAIS DE COMPRESSION.

L'essai décrit (*Figure N° 2-10*) s'applique aux plaques sandwichs dissymétriques [Beltrando 1994]. Il se situe au deuxième niveau de la pyramide des essais sur éprouvettes technologiques non-spécifiques. Il permet de déterminer les charges admissibles en compression pour les diverses configurations (dimensions, nida, drapage des peaux). Les modes de rupture prépondérants sont le flambage global ou local suivant les conditions aux limites, les dimensions de l'éprouvette et les matériaux [Parewick et Al 1997].

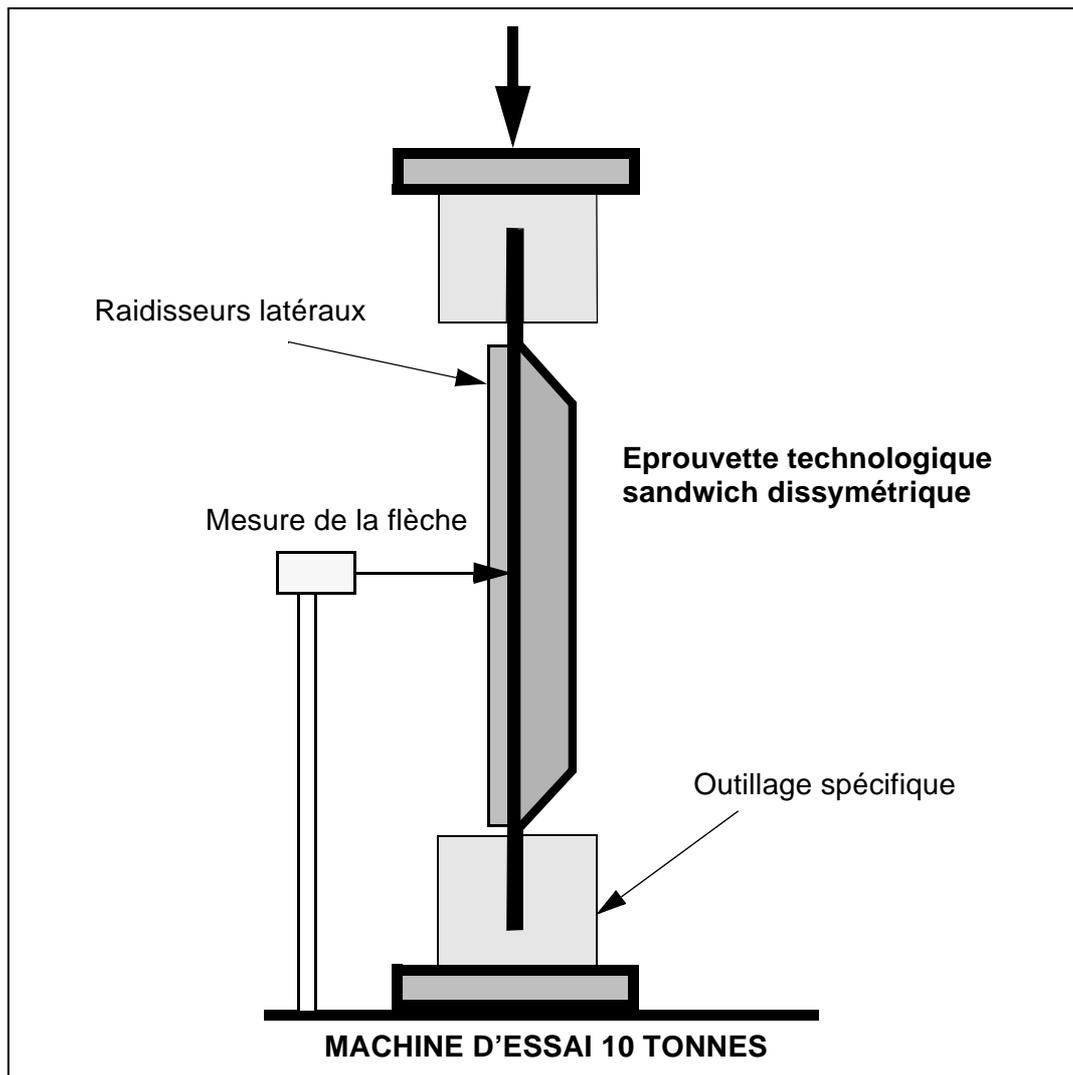


Figure N° 2-10 : Essai de compression sur sandwich dissymétrique.

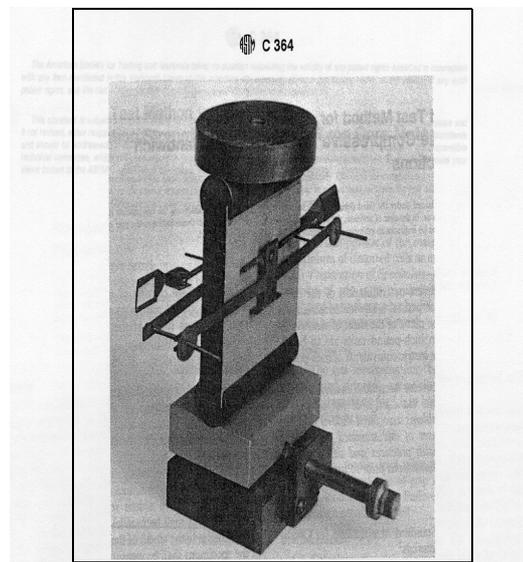
Comme tous les essais de compression, l'alignement des mors de la machine est primordial pour avoir des résultats significatifs. Pour les essais de sandwichs symétriques, les difficultés expérimentales ont été soulignées très tôt [Hoff et Mautner 1945]. Pour être sûr que le chargement soit symétrique, cet auteur préconise de suivre les déformations des points situés aux centres des peaux à l'aide de jauges. La réponse devient non linéaire à

proximité de la charge de flambage. Ce comportement est dû aux défauts initiaux [Minguet et Al 1989].

Comme pour les éprouvettes de compression classiques en UD, les éprouvettes sandwich dissymétriques sont renforcées par des talons pour éviter l'écrasement et le délaminage de la zone monolithique. La présence de ces talons induit un décalage de la ligne moyenne d'introduction des efforts auquel sont très sensibles les sandwichs dissymétriques. Un autre point délicat de cette méthode porte sur les conditions aux limites sur les bords verticaux si on veut obtenir ces bords appuyés. Deux possibilités sont couramment utilisées : soit on ajoute des raidisseurs localement, soit on utilise des couteaux.

Dans le premier cas, le dimensionnement des raidisseurs est délicat : trop rigides, ils reprendront la majeure partie des efforts de compression, trop faibles ils ne stabiliseront pas suffisamment les bords et provoqueront un flambage trop précoce. De plus, les conditions aux limites sont peu représentatives des conditions réelles car les deux bords sont libres malgré la présence de raidisseurs. Les charges de flambage observées sont donc conservatives.

Dans le deuxième cas, l'adhérence au contact des couteaux peut perturber le champ des contraintes dans l'éprouvette de façon importante. Certains auteurs sont même conduits à ajouter de la graisse au bisulfure de molybdène pour faire chuter le coefficient d'adhérence.



L'éprouvette est équipée d'un compresseur optique dit "miroir de Martens"

Figure N° 2-11 : Essai de compression ASTM C364.

A l'instar de l'essai de flexion, les essais de compression sur sandwich font aussi l'objet d'une norme [ASTM C364-61 reconduit en 1988]. Cette norme décrit la méthode de fixation du sandwich sur des éléments intermédiaires en acier, leurs dimensions ainsi que la procédure expérimentale en général. A notre connaissance, il existe aussi des normes internes aux grands constructeurs aéronautiques qui ont été développées en parallèle.

II.3.3 - ESSAI DE CISAILLEMENT PLAN.

L'essai de cisaillement plan utilisé dans l'aéronautique a pour objectif de déterminer la charge critique de flambage. Il est en outre possible d'observer le comportement post-flambé d'une plaque ou d'un panneau courbe.

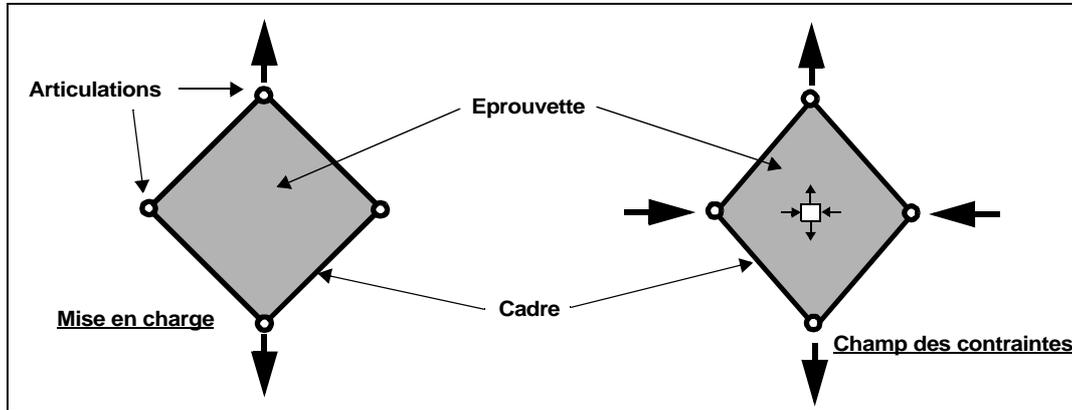


Figure N° 2-12 : Principe du carré déformable.

Une des méthodes d'essai les plus couramment utilisées est celle du carré déformable (Figure N° 2-12). Cette méthode fut initialement développée par l'US National Forest Product Laboratory [Kuenzi 1947] pour tester les panneaux contreplaqués et a fait l'objet d'une normalisation [ASTM D2719]. Les éprouvettes testées par cette méthode sont des plaques métalliques raidies ou non, composites stratifiés, sandwichs symétriques ou dissymétriques. Le principe consiste à exercer un effort suivant la diagonale verticale du carré. Le cadre transmettra alors cet effort à l'éprouvette ainsi qu'un effort de compression égal suivant l'horizontale. Le champ de contraintes dans l'éprouvette est alors théoriquement un état de cisaillement pur (Figure N° 2-12). Les efforts sont transmis du cadre à l'éprouvette par boulonnage.

Une solution technologique est visible (Figure N° 2-13) [Vidal 1992]. La technique a été aussi appliquée aux panneaux de grandes dimensions en construction navale [Davies et Al 1994, Lainé 1998]. La simplicité de principe de cette méthode cache en réalité divers problèmes de conception à résoudre pour obtenir un champ de cisaillement uniforme dans l'éprouvette. Un cadre mal étudié provoquera des surcontraintes dans les coins et des ruptures locales prématurées. La position réelle des articulations influe sur le champ des contraintes dans l'éprouvette de manière non négligeable [Farley et Al 1983].

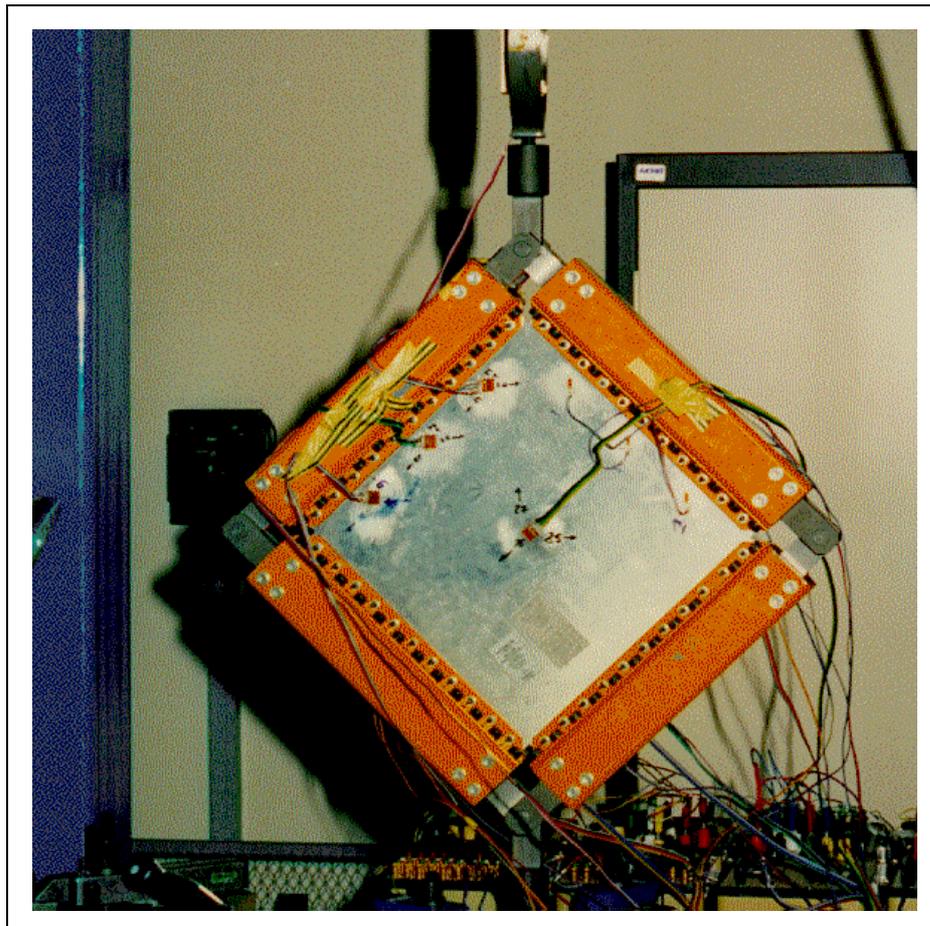


Figure N° 2-13 : Carré déformable.

Par exemple, le carré (Figure N° 2-13) présente des défauts de conception (axes d'articulations mal positionnés et éprouvette non échancrée dans les coins) qui font que le champ des contraintes n'est pas uniforme dans l'éprouvette. Une solution technologique est proposée par Zagainov (Figure N° 2-14) :

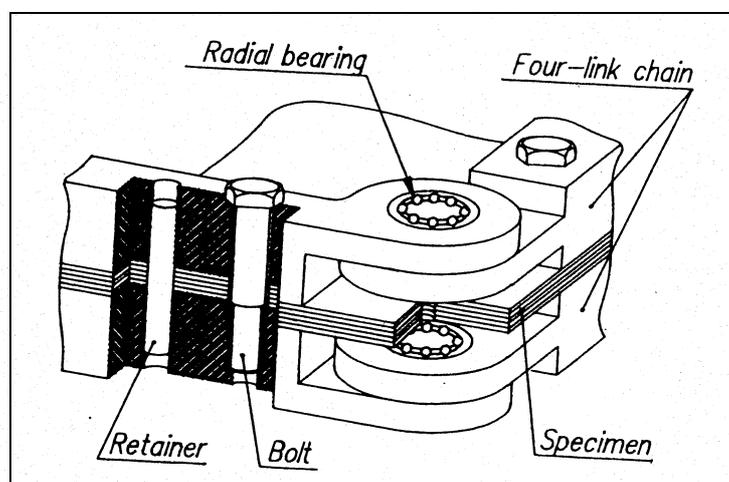


Figure N° 2-14 : Conception d'une articulation de Carré Déformable

Une méthode alternative de chargement a été proposée en utilisant la technique du rail de cisaillement qui est censée donner de meilleurs résultats pour la détermination de la charge à rupture [Farley et Al 1983].

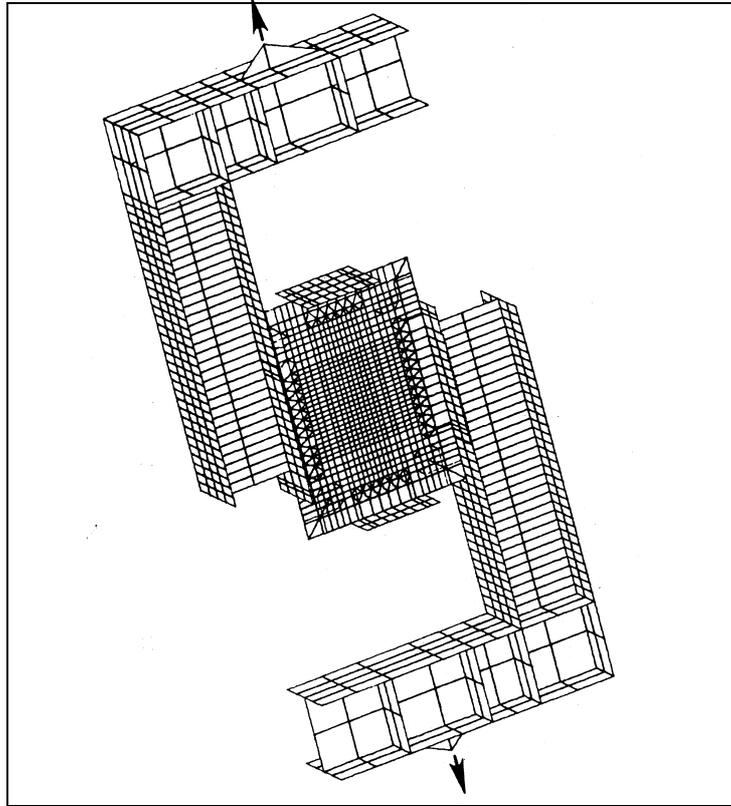


Figure N° 2-15 : Rail de cisaillement. (D'après Fairley et Al [1983])

D'autres techniques de chargement ont été proposées (Figure N° 2-16). On peut utiliser une poutre à âme mince chargée en flexion (trois points ou cantilever). Le moment de flexion est essentiellement repris par les semelles de la poutre alors que l'effort tranchant est essentiellement repris par l'âme qui peut être constituée en partie par une éprouvette. Toutefois, le chargement dans l'éprouvette ne peut être assimilé à du cisaillement pur à cause de l'interaction avec les raidisseurs et les semelles. Ce type d'essai présente l'avantage de bien simuler le comportement des âmes pour un type de structure très utilisé en aéronautique.

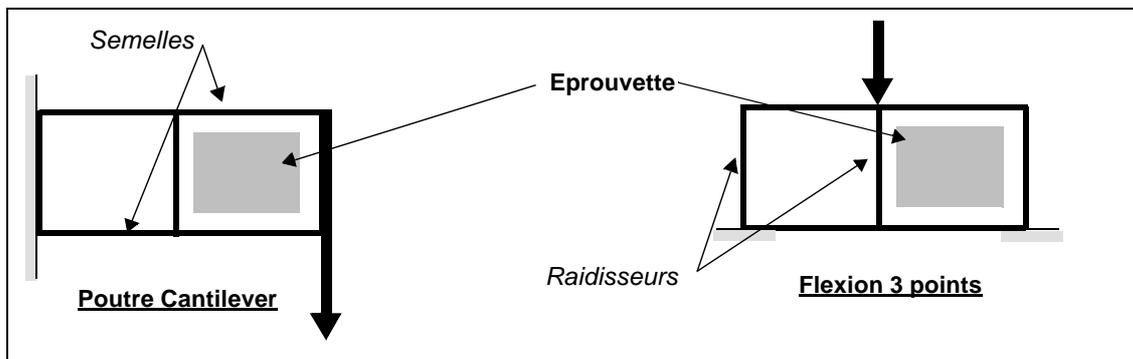


Figure N° 2-16 : Poutres à âmes mince.

II.4 - ESSAIS MULTIAXIAUX.

II.4.1 - MACHINES DE TRACTION-COMPRESSION BIAXIALE.

Le principe de ces machines consiste à exercer des efforts sur des éprouvettes suivant deux directions orthogonales.

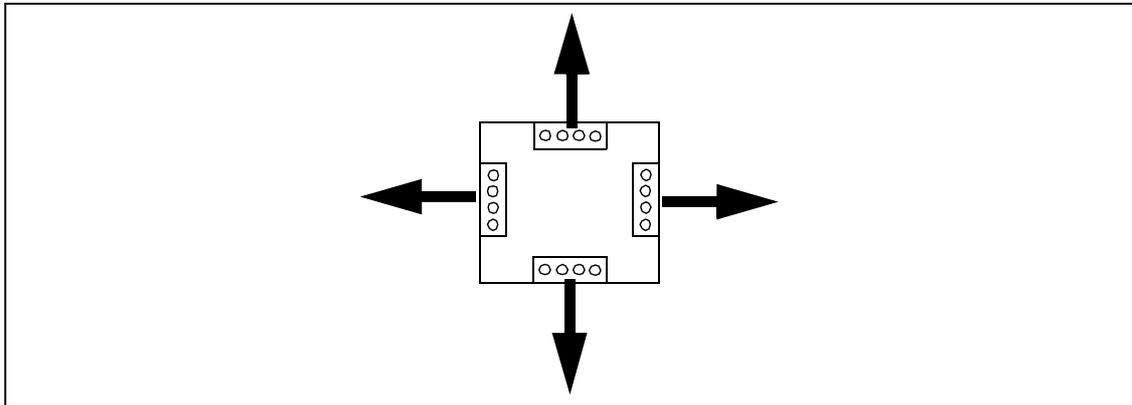


Figure N° 2-17 : Principe de chargement des machines biaxiales.

Les axes sont équipés d'actionneurs hydrauliques asservis (2 ou 4) ce qui permet de réaliser toutes les combinaisons possibles de chargement et de commander les axes en déplacement imposé ou force imposée.

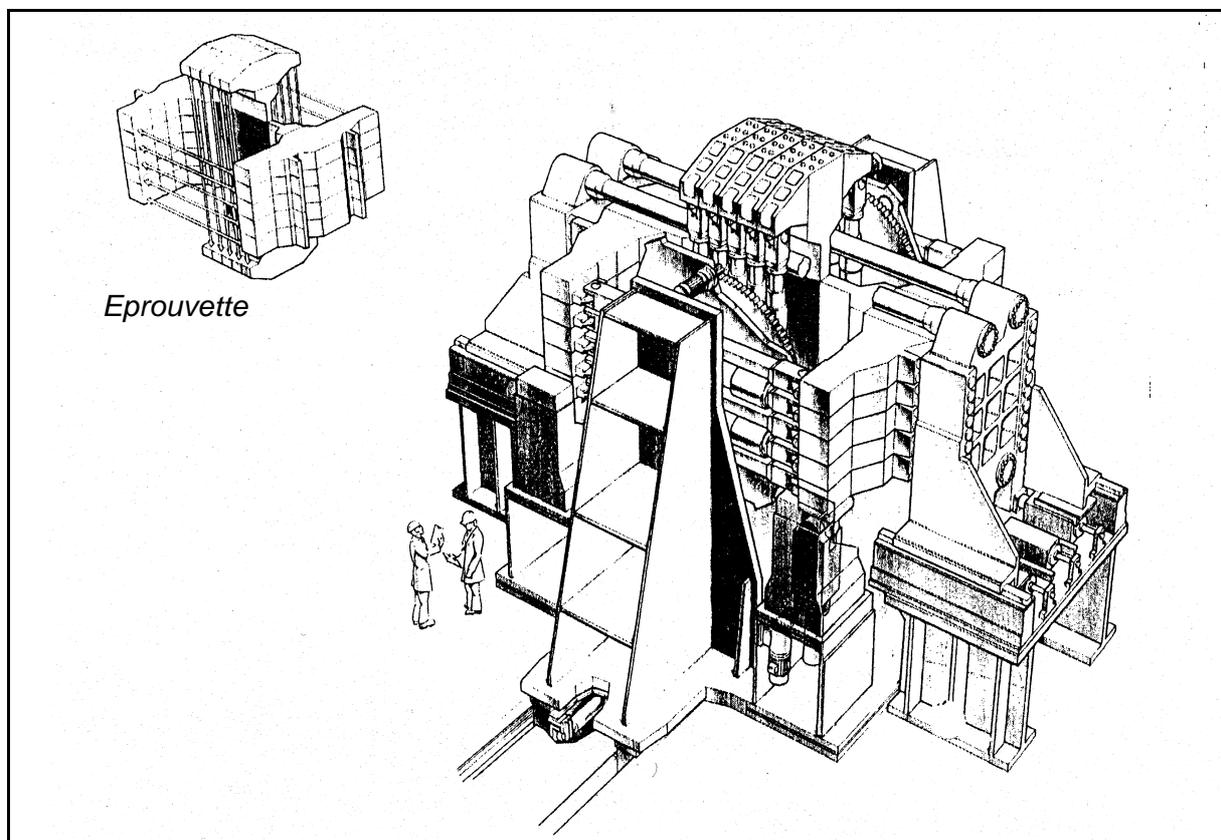


Figure N° 2-18 : Machine du Structural Feature Test Facility (d'après G. Summer).

Ce type de test est utilisé en métallique pour vérifier expérimentalement les critères d'endommagement locaux. En composite, des études ont été essentiellement menées sur l'endommagement des stratifiés troués [Inizan 1986]. Ces machines lorsqu'elles sont aptes à générer de la compression sont aussi utilisées directement pour déterminer les charges de flambage sous sollicitations biaxiales [Tennyson 1983].

Une des machines les plus impressionnante est celle du Structural Feature Test Facility, UKAEA en Grande-Bretagne (*Figure N° 2-18*). Elle permet de tester sous sollicitations biaxiales des plaques métalliques de 1.5 m à 2.5 m de dimension et 150 mm d'épaisseur [Summer 1991]. Le poids des éprouvettes peut atteindre 100 tonnes. La méthode de chargement est astucieuse et s'effectue par une série de vérins en liaison directe avec des tenons soudés directement sur l'éprouvette. Ainsi, le bâti ne sert que de support à l'éprouvette et à son système de chargement. Aucun effort de chargement ne transite par ce bâti qui ne reprend que le poids de l'éprouvette. Un chargement en compression pure peut par conséquent être mis en oeuvre si l'asservissement des vérins est correctement réalisé. Si cette dernière réalisation est clairement un extrême, ce type d'équipement représente dans tous les cas un investissement très lourd.

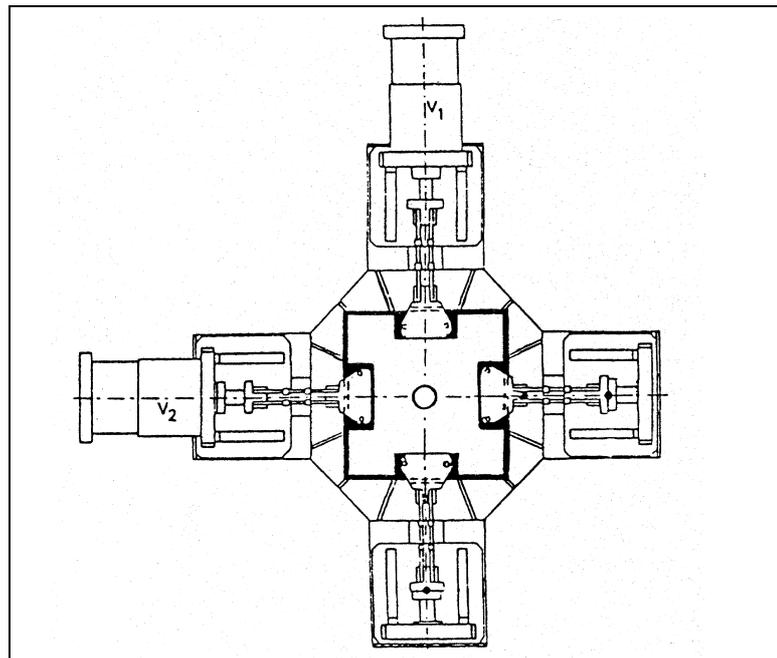


Figure N° 2-19 : Machine de traction biaxiale de l'ONERA (d'après Chaudonneret et Al [1977])

Quelques machines de ce type existent en France, ce sont toutes des prototypes. La machine de traction biaxiale pour essais statiques et dynamiques de l'ONERA a été conçue en collaboration avec la société Shenck [Chaudonneret et Al 1977]. Une machine d'essais biaxiale spécifique aux composites a été développée au CEAT de Toulouse et il existe une machine d'essais de fatigue triaxiale à l'ENS de Cachan.

La principale difficulté expérimentale de ce type d'essais est de réaliser le découplage des efforts sur l'éprouvette. Plusieurs solutions technologiques ont été proposées. Le découplage peut être fait directement au niveau de l'éprouvette qui comporte une zone de chargement cruciforme [Cognard et Al 1996] pour les études en métallique. La solution technique retenue à l'O.N.E.R.A. consiste à charger l'éprouvette via un système de découplage à lames minces parallèles, solution aussi adoptée par Dietrich et Waniewski [1996] (Figure N° 2-20).

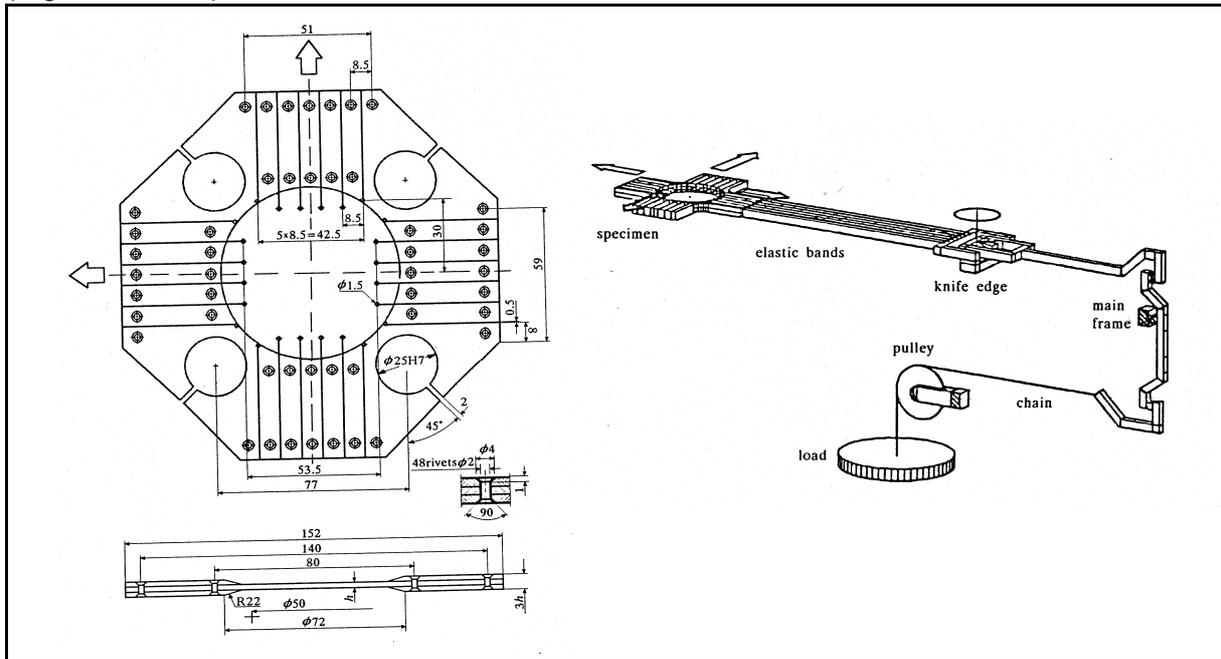


Figure N° 2-20 : Epreuve Anisotrope et Système de Couteaux de Chargement (d'après [Dietrich 1996]).

Une autre possibilité de découplage développée sur la machine du C.E.A.T. de Toulouse consiste à monter un axe de chargement sur rouleaux. Bien que l'éprouvette soit de configuration simple, la difficulté consiste à définir une géométrie telle que d'une part le champ des contraintes soit homogène au centre et que d'autre part les ruptures ne se produisent pas sur les bords. C'est pourquoi l'efficacité de ce type d'essais est meilleure pour les études sur les plaques anisotropes trouées (Figure N° 2-21).

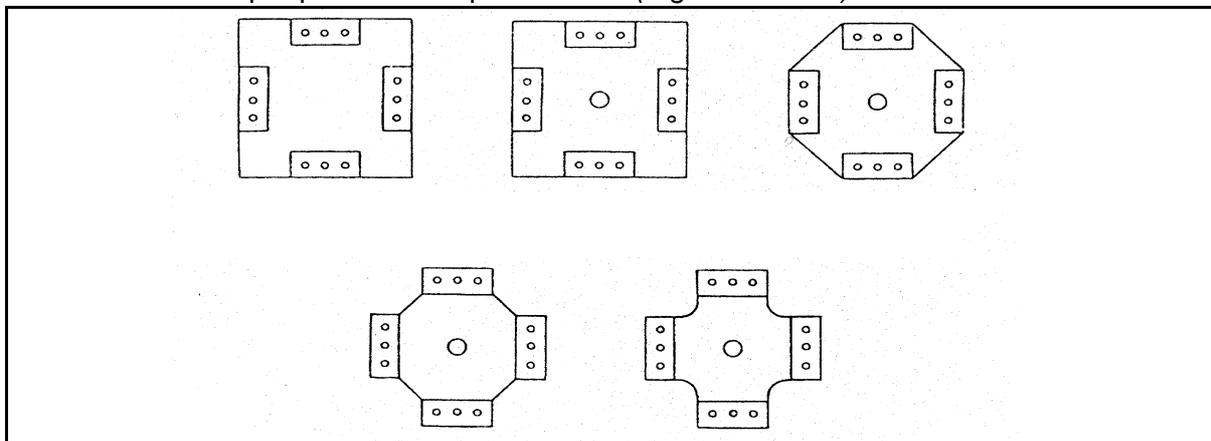


Figure N° 2-21 : Epreuves du C.E.A.T./O.N.E.R.A. (d'après Inizan [1986])

Les quelques concepts présentés dans ce paragraphe montrent que l'obtention de la multiaxialité des contraintes par chargement direct est une chose difficile qui nécessite des moyens techniques et financiers importants. Pour l'heure, il reste délicat de trouver des solutions technologiques permettant un réel découplage des efforts et qui évitent des ruptures locales pour les essais statiques sur les éprouvettes composites saines.

II.4.2 - ESSAI DE PLAQUES SOUS PRESSION STATIQUE.

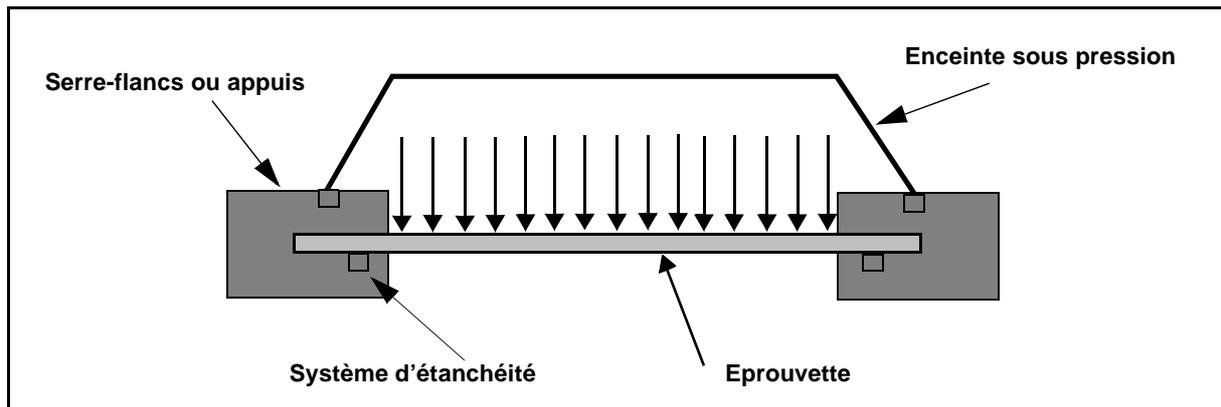


Figure N° 2-22 : Essai sous pression statique.

Le principe de cet essai consiste à exercer une pression uniforme normale à la surface de l'éprouvette à l'aide d'un fluide liquide ou gazeux. L'éprouvette est le plus souvent de forme circulaire. Cet essai (Bulge Test) a été initialement proposé pour déterminer les caractéristiques des métaux sous grandes déformations en particulier pour la mise en forme par emboutissage. Par la suite, plusieurs auteurs l'ont étendu aux structures composites.

De Mesquita [1993] a mis au point un essai de gonflement de plaques anisotropes à fibres courtes avec pour objectif d'atteindre un état de contrainte multiaxial maximal au centre de l'éprouvette circulaire. L'essai est donc utilisé dans ce cas pour la validation de critères de rupture multiaxiaux.

Ce sont les concepteurs de structures marines en stratifiés ou en sandwichs qui sont actuellement les principaux utilisateurs de cette technique à cause de la non-représentativité des essais standards type flexion 3/4 points sur éprouvettes de petites dimensions. L'IFREMER a développé un essai spécifique où la pression (jusqu'à 15 bars) est exercée par de l'eau [Casari et Al 1995] (Figure N° 2-23). Les points expérimentaux les plus délicats consistent en la maîtrise des problèmes d'étanchéité, d'adhérence, de rigidité et de surcontraintes locales aux appuis. La maîtrise de ces phénomènes conditionne la qualité de l'essai et la possibilité de corrélation par éléments finis.

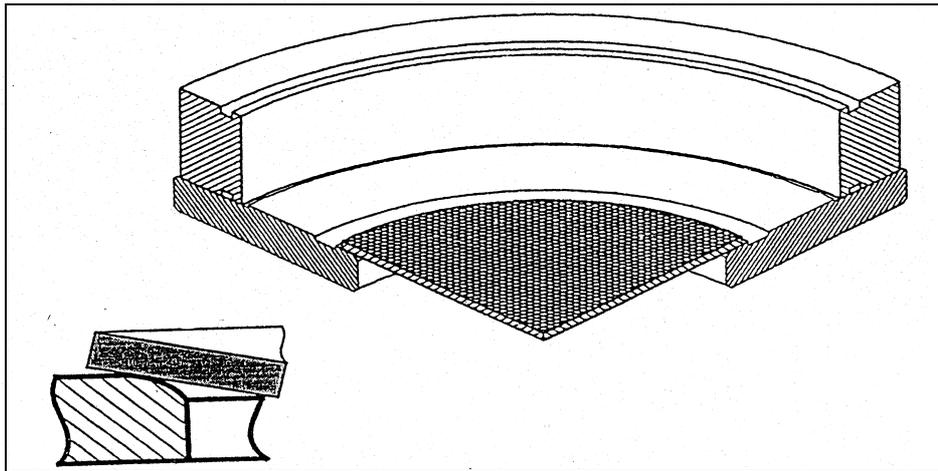


Figure N° 2-23 : Essai IFREMER

Un autre essai de même type a été effectué à l'IFREMER [Davies et Al 1992] mais sur un panneau sandwich raidi rectangulaire de grandes dimensions (1m par 2m). Dans ce cas la pression était exercée par de l'air sous pression (1bar). Enfin, ce principe a été utilisé pour l'étude des grandes flèches des plaques sandwichs [Bau-Madsen et Al 1993]. Les auteurs soulignent en particulier la similitude de l'essai avec la réalité de la construction navale.

Par conséquent, pour satisfaire aux exigences industrielles, un essai sur la pièce (ou la structure), le plus représentatif possible en ce qui concerne les conditions aux limites et les chargements des coques de navires a du être conçu. Dans le même esprit Hayman et Al [1998] ont adopté la même philosophie de conception pour un essai spécifique aux superstructures navales servant à la validation des modèles E.F. de dimensionnement. Roberts et Al [1998] ont aussi conçu une machine d'essais combinés Compression/Pression statique pour tester des structures navales de l'US Navy.

II.4.3 - ESSAIS DE COMPRESSION/CISAILLEMENT.

Ce type d'essai a fait l'objet de plusieurs développements car il répond aux besoins industriels de qualification des structures aéronautiques. Il a pour objectif de déterminer les charges de flambage sous sollicitations combinées. Dès 1948, Peters R.W. a développé un caisson d'essai dont les quatre faces sont formées par quatre éprouvettes planes identiques. Ce caisson est ensuite sollicité en flexion et torsion et les charges de flambage des éprouvettes peuvent être déterminées. Cela permet alors de tracer un ratio des charges critiques compression/cisaillement utile au dimensionnement en bureau d'étude.

L'essai présenté Figure N° 2-24 a été développé au laboratoire allemand D.L.R. [Klein

1989] et est très proche dans le principe et la philosophie de notre proposition. L'objectif est initialement de tester des panneaux sandwichs qui peuvent être utilisés comme peau auto-raidie sur des ailes d'avions.

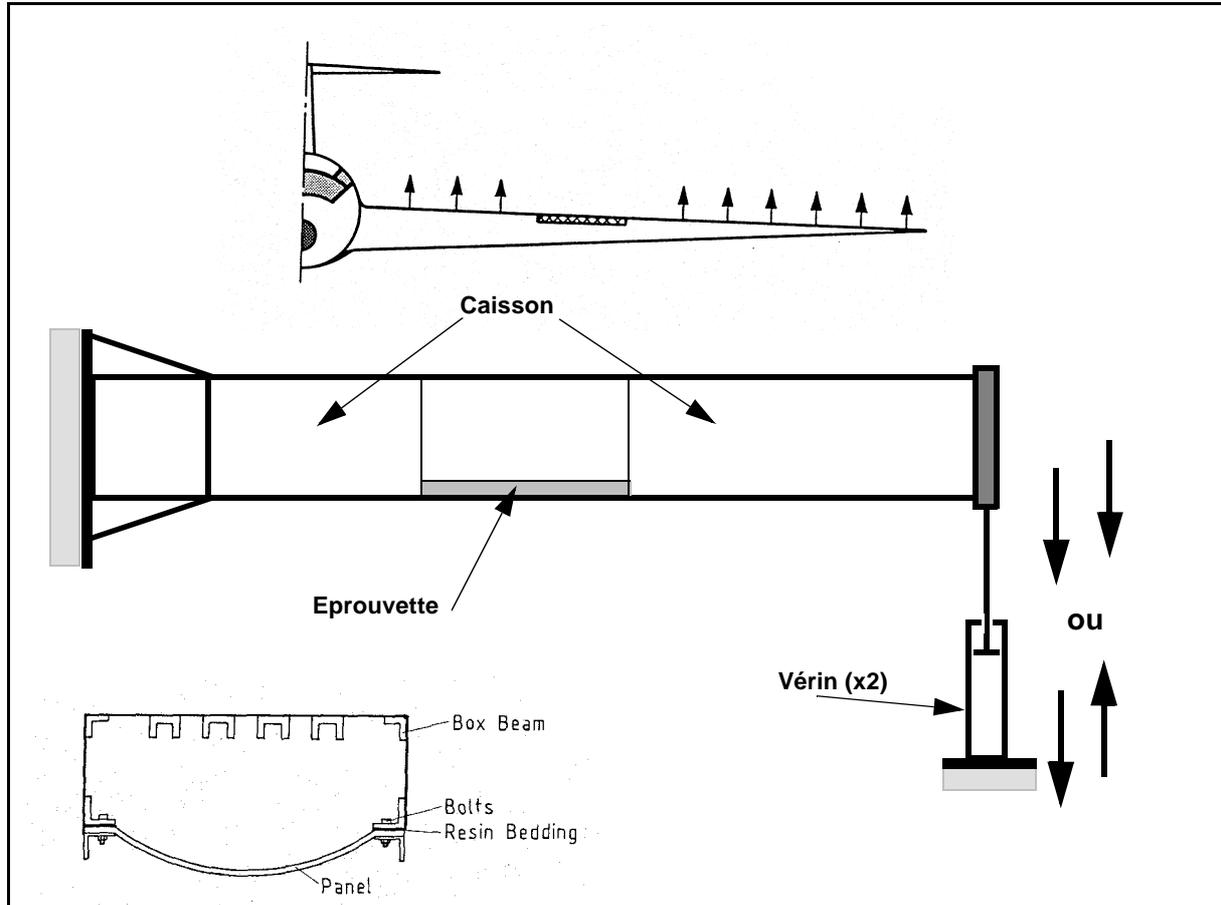


Figure N° 2-24 : Essai sur caisson D.L.R.

L'éprouvette mesure 1m de long et est liée au caisson par 180 boulons et une interface en résine. Ce mode de fixation assure des conditions aux limites réelles très proches du modèle théorique "tout encastré" car le caisson est lui-même très rigide. Ce dernier est fixé à l'une de ses extrémités et chargé à l'autre par deux vérins (*Figure N° 2-24*). Lorsque les deux vérins sont actionnés symétriquement, il est chargé en flexion simple. Dans ce cas, l'éprouvette qui forme une face du caisson est soumise à de la traction ou de la compression (et aussi à du cisaillement transverse). Lorsque les deux vérins sont actionnés anti-symétriquement le caisson est soumis à de la torsion et l'éprouvette qui travaille en membrane est soumise à du cisaillement. On peut combiner ces deux types de chargement, les actionneurs étant asservis.

L'auteur dit avoir obtenu de bons résultats pour la détermination des charges critiques de flambage pour les panneaux sandwichs (épaisseur 6 à 8 mm). Il signale l'impossibilité de connaître les flux qui entrent dans l'éprouvette par cette méthode à partir des charges exercées par les actionneurs. Aussi l'éprouvette est-elle équipée de 150 jauges de déformation

disposées en grille pour permettre la mesure in-situ. Cet essai s'est révélé inefficace pour les stratifiés fins (2 mm) à cause de leur manque de rigidité en flexion et de la forte interaction avec le boulonnage qui en résulte. Cela a conduit le D.L.R. à concevoir un nouvel essai (Figure N° 2-25).

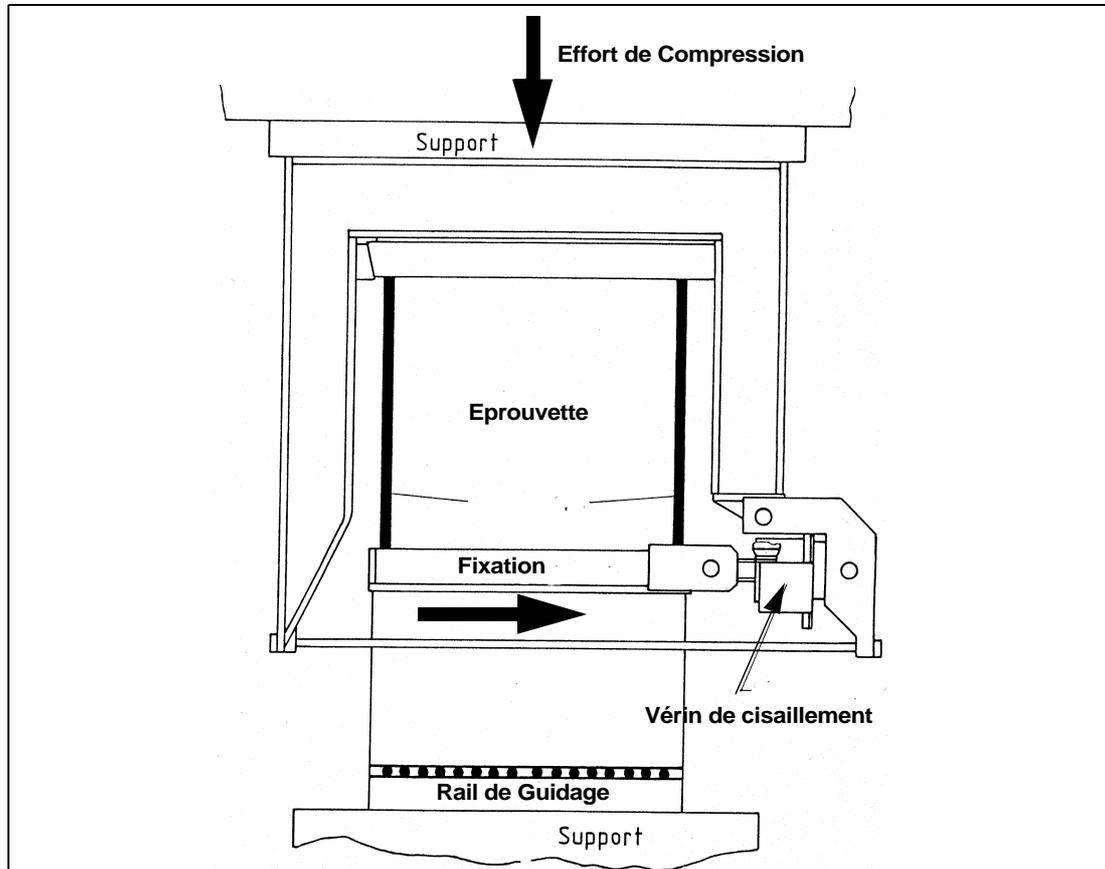


Figure N° 2-25 : Essai sur stratifié D.L.R.

Le principe consiste à venir exercer un effort normal sur un cadre qui supporte deux bords du panneau, les deux autres bords sont raidis. On provoque un déplacement latéral sur la fixation inférieure à l'aide d'un vérin ce qui génère du cisaillement dans l'éprouvette. L'auteur cite comme un avantage le fait d'exercer des efforts directement sur le panneau, ce qui, comparé à la solution sur caisson, génère des charges plus faibles. Les conditions aux limites sont bien maîtrisées. Toutefois, le mode de chargement en cisaillement, qui se rapproche de la technique d'essai sur poutre à âme mince, ne génère pas des contraintes pures, en particulier dans la zone de fixation.

Une machine destinée à tester les panneaux de fuselage a été conçue chez Deutche Airbus [Wolf et Al 1992] (Figure N° 2-26). L'éprouvette est encastrée dans ses parties supérieures et inférieures à des fixations rigides. Les côtés latéraux sont fixés par l'intermédiaire de 44 silent-blocs pour permettre l'introduction du cisaillement.

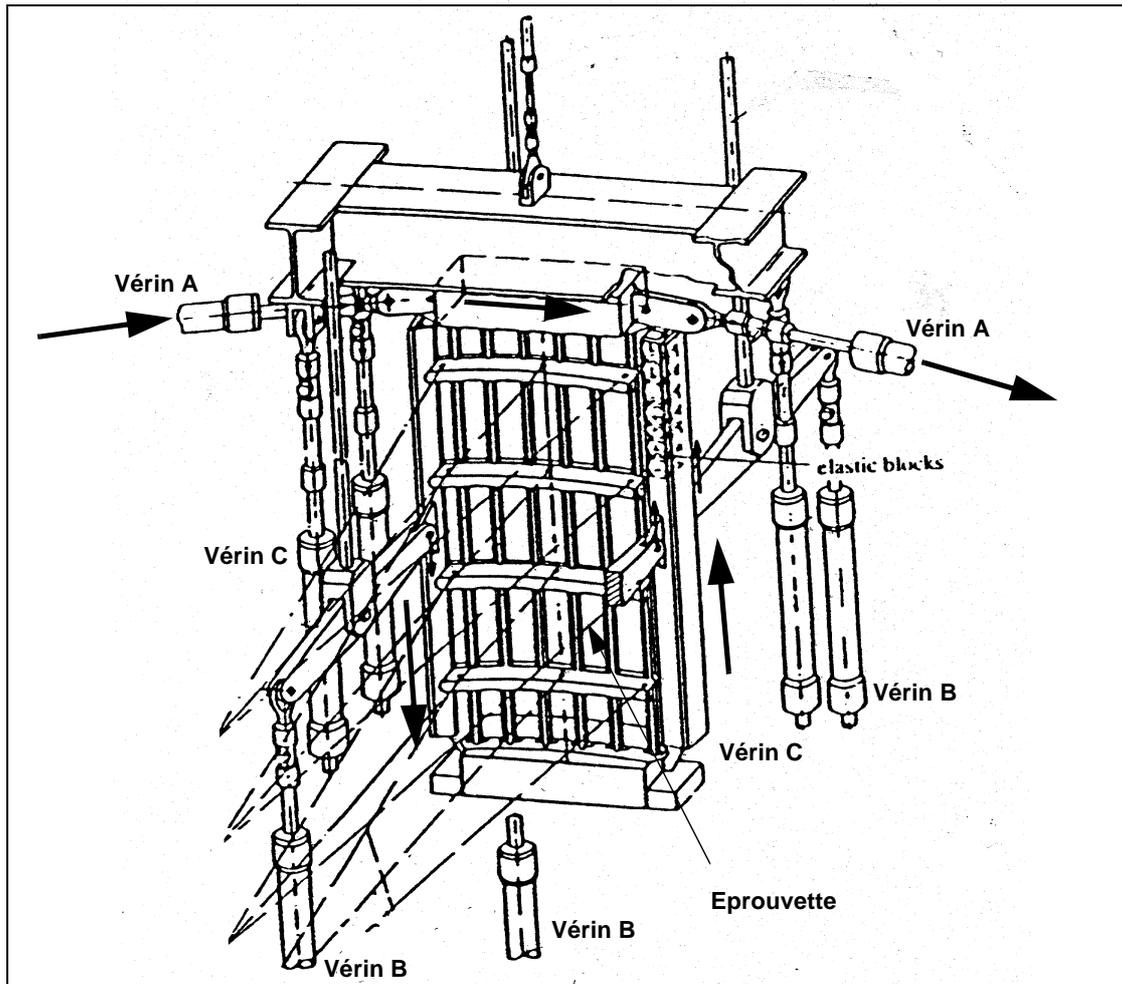


Figure N° 2-26 : Essai Deutsche Airbus

L'introduction du cisaillement se fait par l'action de six vérins. Deux vérins horizontaux (A) exercent un effort sur la fixation horizontale supérieure. Quatre vérins verticaux (B) exercent deux à deux en opposition via un bras de levier un effort sur les deux poutres latérales. Quatre autres vérins (C) permettent l'introduction de la compression dans le montage. Enfin, les poutres qui composent le cadre sont articulées entre elles. L'auteur ne précise pas les avantages et les inconvénients de cette méthode mais l'on peut souligner sa complexité. Le montage/démontage du panneau ne doit pas être aisé et il y a en tout 10 actionneurs à piloter. Par rapport à la machine du D.L.R. précédente, on remarquera que la complexité de la conception vient du souci d'introduire dans l'éprouvette un effort de cisaillement pur, ce qui est réalisé en chargeant 3 des 4 côtés.

Une autre machine capable d'effectuer de la compression/traction biaxiale ainsi que du cisaillement a été développée pour les structures utilisées dans l'industrie spatiale [Roméo et Al 1986] (Figure N° 2-27). L'éprouvette possède une section maximale de 700 x 1000 mm. La fixation inférieure est volontairement montée flottante pour éviter de générer

des interférences entre les chargements. Les vérins sont asservis par des capteurs de position, ce qui permet d'éviter toute rotation de la fixation flottante et l'introduction d'efforts parasites.

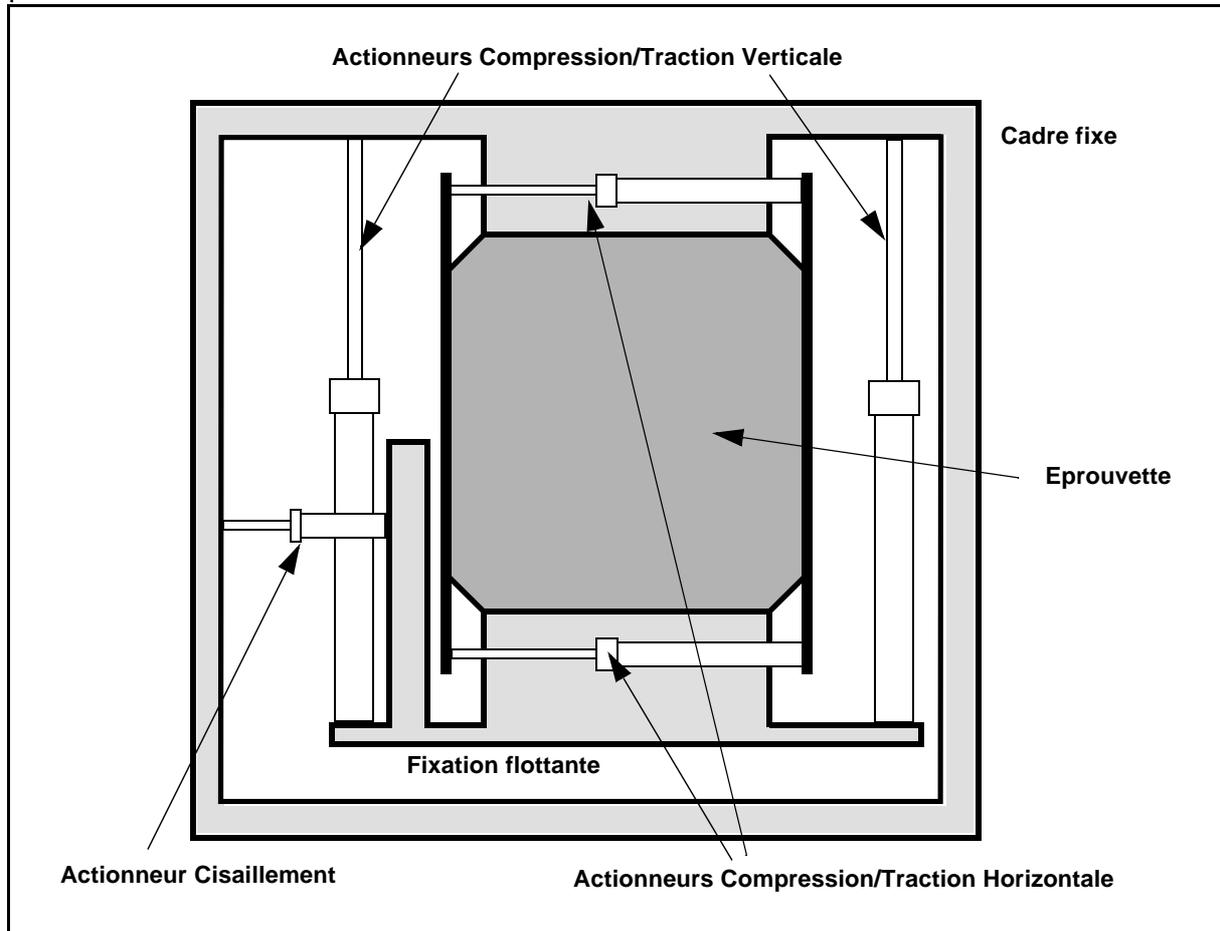


Figure N° 2-27 : Principe d'action de la machine de Roméo et Al.

Cette machine a permis de valider expérimentalement les charges critiques de flambage sous sollicitation biaxiale de compression avec cisaillement sur plaque stratifiée. On retrouve le principe de chargement du D.L.R. avec certainement les mêmes inconvénients.

II.5 - CONCLUSIONS RELATIVES AUX ESSAIS.

Les principales techniques d'essai sur les composites ou sandwichs ont été présentées. Deux grandes tendances se dégagent de l'existant.

En premier lieu, on trouve les essais monoaxiaux de mise en oeuvre simple et économique, issus directement de ce qui se pratique en métallique mais qui n'apportent que des informations partielles. L'extrapolation aux structures réelles est le plus souvent inexacte mais conservative.

En second lieu, des essais multiaxiaux ont été développés pour la construction navale, aéronautique ou spatiale. On peut distinguer deux familles de solutions technologiques : soit les machines sont conçues pour exercer au mieux les chargements théoriques [Roméo, D.L.R, Deutsche Airbus], soit l'essai complet est conçu pour reproduire au mieux la manière dont les structures sont chargées dans la réalité [Caisson D.L.R., IFREMER]. Dans le dernier cas, l'essai doit alors reproduire au mieux la structure réelle du point de vue des conditions aux limites, des fixations, des renforts locaux et des chargements. On pourrait qualifier cette deuxième catégorie d' *"Essais Structures"*.

Cette étude bibliographique montre que des réponses pragmatiques ont été apportées au problème de la qualification des structures composites par des essais spécifiques. La diversité des méthodes met en évidence l'absence de standardisation actuelle. Cette problématique des essais sur composites est parfaitement synthétisée dans le titre de l'article de Matt Bacon [1990] :

"TESTING COMPOSITES, IT AIN'T WHAT YOU DO, IT'S THE WAY YOU DO IT".

Par ailleurs, un point commun à toutes les méthodes, point-clé de la mécanique expérimentale des structures, est que chacune possède ses limitations propres et nécessite un savoir faire expérimental. Les jeux des mécanismes, les déformations, les rigidités, les tolérances d'usinage ou d'assemblages, les précontraintes viennent altérer les modèles analytiques forcément simplifiés et aux conditions aux limites trop pures. Les auteurs ne présentent, la plupart du temps, que les principes de leurs essais et les principales difficultés rencontrées dans quelques cas. Le savoir-faire est en général un secret dont la valeur ajoutée est bien gardée.

En conclusion, les essais sur structures sandwichs sont importants d'un point de vue industriel pour valider les choix de conception, les drapages, les matériaux et les techniques de fabrication. L'interprétation correcte et l'extrapolation des essais monoaxiaux est possible moyennant des précautions et en s'assurant d'être conservatif. Toutefois, des essais multiaxiaux de type structure peuvent être riches d'enseignement et améliorer la connaissance générale des structures composites. Ce type d'essai est encore peu développé à cause de la difficulté de conception, du coût d'étude et de réalisation élevé.

II.6 - PROBLÉMATIQUE DE LA MODÉLISATION DES SANDWICHS SYMÉTRIQUES OU DISSYMÉTRIQUES.

Si les théories des plaques isotropes sont bien comprises et ne présentent plus de difficultés majeures, la modélisation des sandwichs requiert une attention particulière. Le modèle simplifié présenté en introduction générale permet de mettre en évidence le fait qu'un sandwich est une structure hétérogène et anisotrope. De plus, la prise en compte des contraintes de cisaillement transverse voire de compression transverse est essentielle à la description correcte du comportement mécanique ce qui est moins vrai pour les plaques anisotropes stratifiées.

L'étude de ces structures fait l'objet d'une recherche de plus en plus importante. De 367 références en 1966 sur le sujet [Plantema 1966], on en compte 1300 dans une revue bibliographique récente [Noor 1996]. Cette diversité s'explique par l'impossibilité d'établir un modèle universel qui puisse décrire tous les matériaux utilisés, toutes les géométries et les chargements, l'ensemble des modes de ruptures et les différents problèmes de la mécanique des structures, de la flexion des poutres à la dynamique non linéaire ou à l'étude du post-flambement.

On peut toutefois classer les modèles en quatre catégories [Noor 1996] :

LES MODÈLES SIMPLIFIÉS.

Pour la plupart, ils ne permettent l'étude que d'un type de comportement : Flexion, Flambement d'Euler, Flambage local ou global. Naturellement limités, ils fournissent toutefois des formules analytiques utiles en pré-dimensionnement.

LES MODÈLES 2D.

Extensions de la théorie des plaques stratifiées, ils représentent l'essentiel du développement de la théorie des sandwichs. Ils ne permettent pas de représenter certains phénomènes comme le flambage local ou intracellulaire mais donnent des réponses précises en déformations, contraintes ou déplacements pour une large gamme de problèmes de la mécanique des structures. La résolution est de type numérique et nécessite l'emploi de l'informatique.

LES MODÈLES 3D.

L'objectif est ici d'obtenir le champ complet des contraintes et déformations. L'approche consiste à utiliser la Mécanique des Milieux Continus. Aucune hypothèse n'est posée a priori contrairement aux modèles de plaques. Les études de ce type sont très peu nombreuses et restrictives en chargement et conditions aux limites. Considérées comme exactes malgré certains problèmes numériques, elles servent de référence pour l'évaluation des théories 2D et des éléments finis.

LES APPROCHES DE TYPE PRÉDICTEUR/CORRECTEUR.

Le prédicteur est une théorie 2D et le champ complet des contraintes est obtenu a posteriori par écriture des équations d'équilibre locales ou par un développement correctif des champs de déplacement et réécriture des équations d'équilibre.

LES MODÈLES DÉTAILLÉS.

Ce sont uniquement des études numériques de type éléments finis où tout est représenté, du film de colle à la géométrie du nida. [Chamis 1986, Elspass 1990].

Cette classification sera retenue pour exposer les modèles sélectionnés dans cette bibliographie. Malgré le grand nombre de publications, à notre connaissance aucune ne traite explicitement des *sandwichs dissymétriques travaillant dans leur plan*. Aussi, nous sommes amenés dans cette partie de la bibliographie à nous intéresser à l'étude des sandwichs symétriques ou dissymétriques dont on cherche à caractériser le comportement en flexion, ou au flambage. Une présentation exhaustive étant exclue, un certain nombre de critères de sélection ont été choisis :

En premier lieu, ne seront retenues que les théories pour poutres droites et plaques relevant de l'analyse statique linéaire ou non-linéaire géométrique.

En deuxième lieu, les études non dédiées explicitement aux sandwichs de type aéronautiques ne seront pas retenues sauf intérêt particulier.

En troisième lieu, les modèles de type analytique seront privilégiés dans cette présentation par rapport aux développements d'éléments finis de sandwich. Si il est impossible d'exclure totalement ces derniers de cette bibliographie, nous ne retiendrons que les formu-

lations et les hypothèses de description. Les méthodes d'interpolations et d'intégration numériques sont en effet très spécifiques. Voir à ce sujet par exemple [Mahé 1991, Zhu 1995, Touratier 1997, Madenci 1998, Lainé 1998].

En quatrième lieu, une attention particulière sera portée à l'analyse non linéaire géométrique des structures sandwichs. Celle-ci de part sa complexité n'a pas été traitée aussi largement que l'analyse linéaire [Noor 1996], mais les études dans ce domaine progressent rapidement de par l'intérêt porté à ce domaine dans le dimensionnement des structures. Par exemple, les concepteurs de structures navales se sont rendus compte que les effets non linéaires arrivent très rapidement dans les structures chargées dans leur plan et qu'en conséquence leurs coefficients de sécurité peuvent être affectés [Hildebrant et Jorgensen 1998].

En cinquième lieu, l'objectif de cette étude étant aussi d'arriver à modéliser le comportement en compression du nida, un bilan bibliographique non exhaustif des différentes techniques sera effectué. La connaissance de cette contrainte permettra de prévenir le flambage local des peaux fines. Par ailleurs, cette contrainte semble déterminante dans l'étude du comportement des plaques impactées.

Sous les restrictions imposées précédemment, on retrouve un certain nombre d'hypothèses communes à tous les développements :

- Bien que l'âme soit constituée le plus souvent d'un matériau alvéolaire, celle-ci est considérée comme un matériau *homogène* et *orthotrope*, linéaire élastique.
- Le fait de restreindre notre étude à des sandwichs de type aéronautique a un corollaire : les âmes de ce type n'ont *pas de rigidité dans leur plan*. Le terme anglo-saxon lié à cette hypothèse est "*antiplane core*".
- Le *collage* entre les peaux et l'âme est supposé *parfait*. De plus le joint de colle est ignoré. Seule une étude a modélisé la rigidité finie du joint de colle et son influence sur les charges de flambage [Kim 1988].
- Lorsque les peaux sont orthotropes, les *axes d'orthotropie* de l'âme et des peaux *coïncident*. A notre connaissance, cette contrainte est respectée dans les structures aéronautiques réelles.

Dans ce contexte et sous ces hypothèses et restrictions, quelques modèles simplifiés seront présentés dans le paragraphe suivant. Puis l'essentiel des théories 2D sera explicité ainsi que les peu nombreux modèles de référence 3D. L'historique et les techniques de l'analyse non-linéaire des structures sandwichs seront développés paragraphe (II.8 -). Une attention particulière sera portée à la modélisation de la compression de l'âme au paragraphe (II.9 -). Enfin, des conclusions de cette étude bibliographique quant à la modélisation des structures sandwichs dissymétriques seront proposées.

II.7 - MODELES LINEAIRES CLASSIQUES DE POUTRES ET PLAQUES SANDWICHS.

II.7.1 - MODÈLES SIMPLIFIÉS.

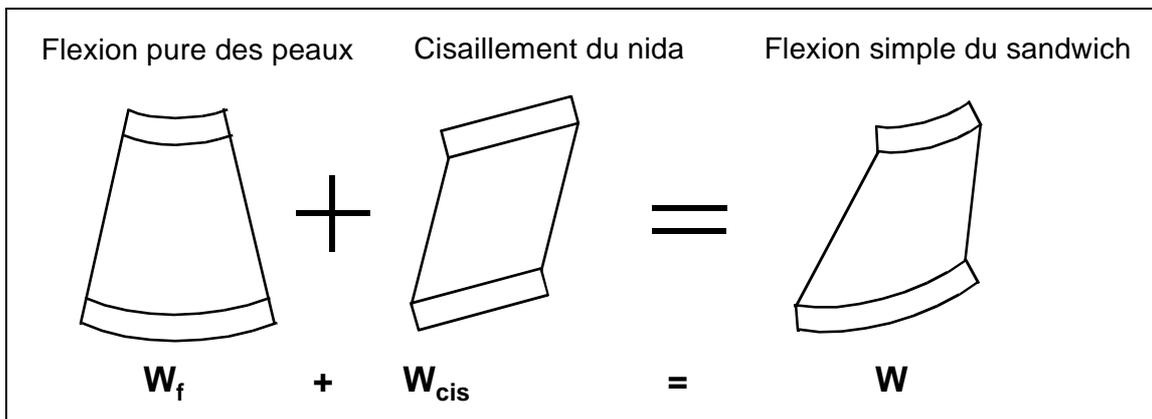


Figure N° 2-28 Flèches partielles (Reproduit de Plantema [1966, p2]).

Le modèle simplifié le plus courant (Figure N° 2-28) fait appel à la notion de *flèches partielles* ce qui peut se traduire par l'assertion suivante [Zenkerts 1997] :

" Dans le cas de la flexion simple, les peaux reprennent le moment de flexion sous forme de contraintes normales et l'âme se charge uniquement à l'effort tranchant".

Cette hypothèse est reprise de Allen [1969, Chap 1] et fournit des formules de type R.D.M. pour la flèche ou les contraintes dans le sandwich [Gay 1991]. Elle permet de traiter les sandwichs symétriques ou dissymétriques moyennant une évaluation différente des rigidités de flexion des peaux. Dans le cas où le chargement n'est pas symétrique, il convient de prendre en compte un cisaillement initial g_0 de l'âme dû au glissement initial des peaux [Zenkerts 1997 p57 et Allen 1969 p19-20]. Si les peaux sont minces, la contrainte normale pourra être constante dans l'épaisseur, alors qu'en peau épaisse, sa variation sera linéaire dans l'épaisseur (poutre de Bernoulli).

Cette approche peut être utilisée pour le calcul de la charge critique de flambage d'une poutre sandwich en compression.

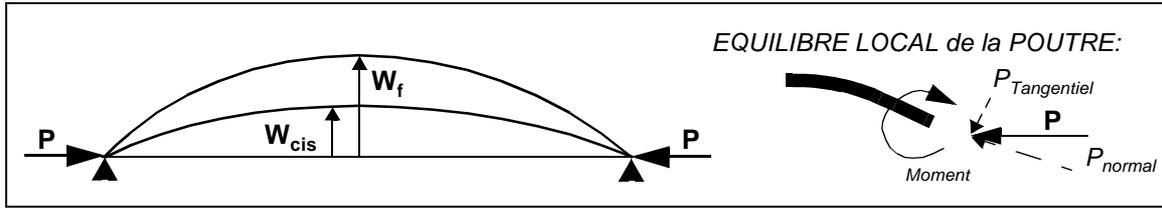


Figure N° 2-29 : Application des flèches partielles au calcul de la charge critique de flambage d'une poutre.

L'équilibre local de la poutre fournit deux équations différentielles [Allen 1969 p49] :

$$-E_{\text{peau}} I_{\text{peau}} \cdot w_f'' = P \cdot (w_{\text{cis}} + w_f) \quad \text{et} \quad w'_{\text{cis}} = \frac{P}{G_{\text{Ame}} S_{\text{Ame}}} \cdot (w'_{\text{cis}} + w'_f)$$

Leur résolution et la recherche de la valeur critique de P conduit à une expression de la charge de flambage :

$$P_{\text{Critique}} = \frac{P_{\text{Euler}}}{1 + \frac{P_{\text{Euler}}}{G_{\text{Ame}} S_{\text{Ame}}}} \quad \text{avec} \quad P_{\text{Euler}} = \frac{\pi^2 \cdot E_{\text{peau}} I_{\text{peau}}}{L^2}$$

Reprise récemment par [Allen 1997], la théorie des flèches partielles permet de traiter les grands déplacements d'arcs sandwichs ou de classifier le type de comportement (via un "master diagramm") en comparant les rigidités et les flèches partielles.

La première étude publiée sur la tenue en compression des structures sandwich a été réalisée dès 1945 [Hoff 1945]. 51 panneaux sandwichs âme mousse et peaux "papreg" (papier plastique haut module) ont été testés. Deux modèles simplifiés de calcul de la charge critique ont été proposés.

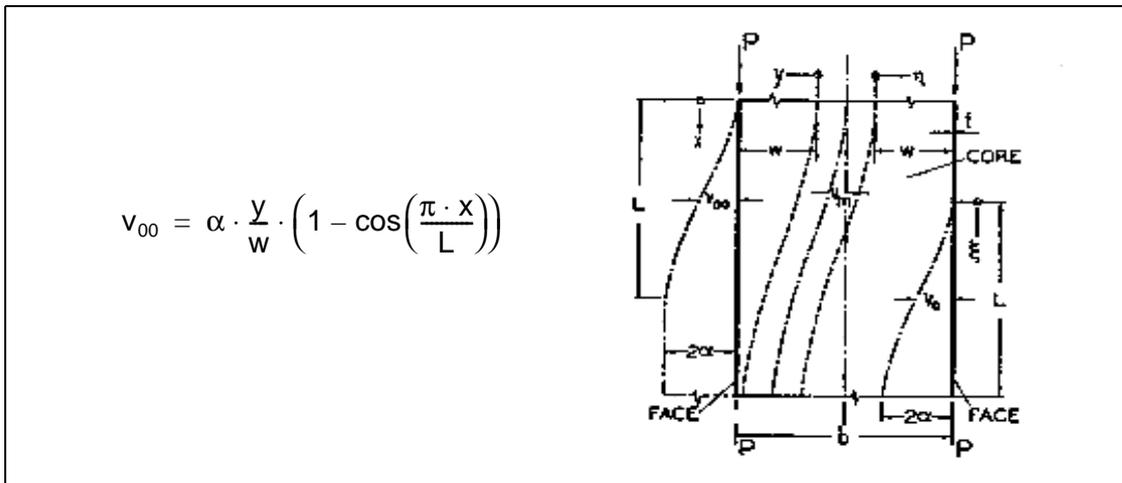


Figure N° 2-30 : Modélisation du flambage local antisymétrique d'après Hoff (1945).

Hoff pose a priori la forme de la déformée (Figure N° 2-30) et (Figure N° 2-31). Le mode

de flambage local est alors soit antisymétrique (*Figure N° 2-30*), soit symétrique (*Figure N° 2-31*). Le champ des déplacements est de type trigonométrique. La longueur d'onde L est inconnue ainsi que la profondeur de la perturbation w . Le champ est linéaire dans l'épaisseur, donc en y . Le modèle prend aussi en compte un chargement P sur les peaux en compression. L'égalité du travail de cette charge P et de l'énergie de déformation du sandwich fournit une expression du type $\sigma = f(L, w)$. La minimisation de cette expression par rapport aux deux paramètres permet de déterminer les valeurs de L et w pour la contrainte critique. On obtient alors l'expression suivante qui sert encore de référence [Meyer-Piening 1998].

$$\sigma_{CR}^{Global} = 0,817 \cdot \sqrt{E_f \cdot E_c} \cdot \sqrt{t/b} + 0,166 \cdot G_c \cdot b/t$$

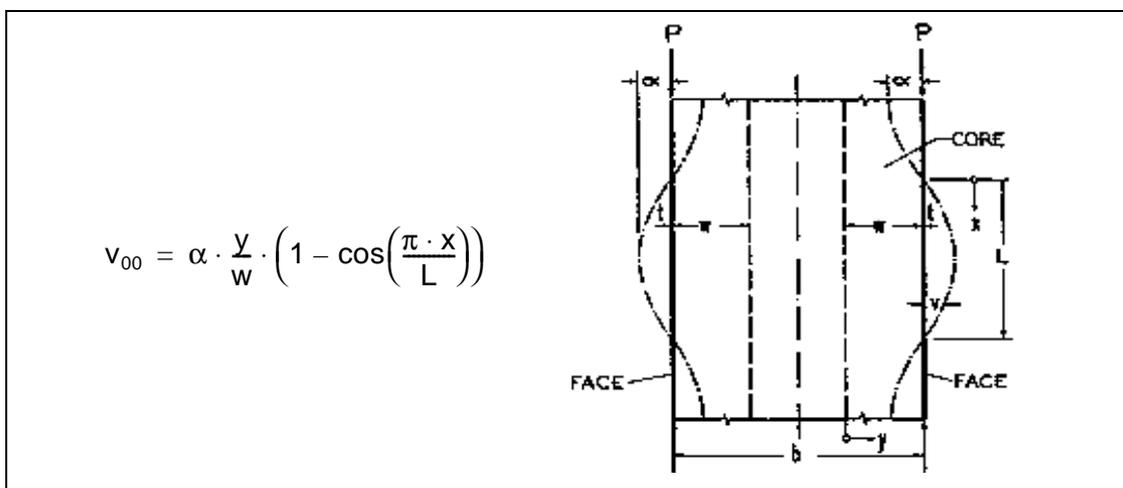


Figure N° 2-31 : Modélisation du flambage local symétrique d'après Hoff (1945).

La formule qui donne la contrainte critique pour le mode de flambage local symétrique est :

$$\sigma_{CR}^{Local} = 0,91 \cdot \sqrt[3]{E_f \cdot E_c \cdot G_c}$$

Les modèles actuels de flambage local sont basés sur le même principe mais avec des variations plus élaborées dans l'épaisseur par exemple de type exponentielle [Kay 1990].

L'intérêt de ce type d'analyse simplifié est de permettre l'établissement pour chaque phénomène de formules qui permettent de fournir les ordres de grandeur. La recherche dans ce domaine est très limitée mais pourtant ne manque pas d'intérêt comme l'a montré Allen récemment. De plus, ce type d'étude permet de bien comprendre la mécanique de base des sandwichs, ce qui est plus difficile dès que la complexité de la formulation prend le dessus comme nous allons le voir dans des développements plus récents.

II.7.2 - MODÈLES 2D.

Dans ce cadre, les structures sandwichs ne sont le plus souvent traitées que comme des cas particuliers des théories des plaques stratifiées anisotropes. Ces théories peuvent être subdivisées en deux catégories :

⇒ Dans les **modèles globaux**, des hypothèses sur le champ de déplacement dans l'épaisseur sont effectuées. Dans ce cas, le nombre et la nature des plis n'entrent pas en compte.

⇒ Dans les **modèles locaux**, les hypothèses en contraintes ou déplacements sont effectuées distinctement dans l'âme et les peaux.

Dans ce paragraphe les plaques seront décrites de manière standard, en supposant que la contrainte en compression transverse soit nulle. Par ailleurs, dans la configuration la plus défavorable, l'énergie de déformation due à la compression transverse n'excède pas 5% [NOOR 1995] et n'influe donc que peu sur la réponse globale du sandwich. Toutefois, cette composante peut être à l'origine de la ruine de la structure, c'est le cas en particulier pour les poutres courbes.

$$\sigma_{zz} = 0$$

Il est d'ailleurs intéressant de noter que cette équation entraîne que la théorie standard des plaques repose sur une formulation mixte puisque l'on effectue à la fois des hypothèses sur les déplacements et les contraintes.

Dans les deux paragraphes suivants, les diverses cinématiques seront présentées sans développer tous les calculs en déformations et contraintes.

II.7.2.1 - MODÈLES GLOBAUX.

HYPOTHÈSE DE REISSNER-MINDLIN (FSDT).

Elle s'énonce de la manière suivante [Reissner 1944, Mindlin 1951] :

«Après application des charges, les fibres normales au plan moyen restent droites mais pas forcément normales au plan moyen déformé, de plus la longueur d'une fibre transverse varie peu au cours de la déformation»

Cette nouvelle cinématique nécessite donc la connaissance de deux fonctions supplémentaires en général intitulées $\psi_x(x, y)$ et $\psi_y(x, y)$ qui vont représenter la rotation de la

fibre sur son axe (Figure N° 2-32).

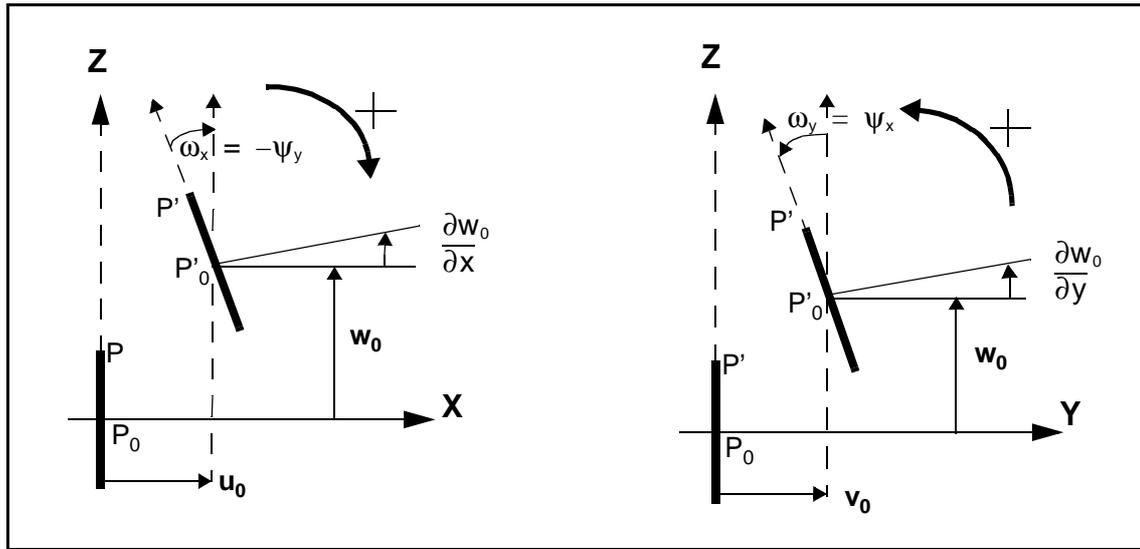


Figure N° 2-32 : Champ des déplacements de Reissner-Mindlin.

Le champ des déplacements s'écrit :

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) + z \cdot \psi_x(x,y) ; \quad v(x,y,z) = v_0(x,y) + z \cdot \psi_y(x,y) ; \quad w_0(x,y)$$

Cette théorie est souvent appelée théorie du premier ordre car les fonctions u et v sont développées au premier ordre en z . (FSDT: First Order Shear Theory). Cette cinématique est reprise par la majorité des éléments finis de plaques anisotropes ou sandwichs disponibles dans les logiciels du commerce [Mahé 1991, Zhu 1995, Lainé 1998]. Le calcul des déformations de cisaillement transverse conduit aux expressions :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x(x,y) \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \psi_y(x,y)$$

L'angle de cisaillement transverse est indépendant de z , donc constant dans l'épaisseur. Par conséquent, la contrainte de cisaillement transverse sera constante par morceaux dans l'épaisseur ce qui est erroné. Pour améliorer la qualité des résultats, il est donc nécessaire d'introduire des coefficients correctifs k_1 et k_2 dans la loi de comportement.

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \cdot G_{xz} & 0 \\ 0 & k_2 \cdot G_{yz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

La valeur prise par défaut par la majorité des logiciels est $k_1 = k_2 = 5/6$ sans possibilité de modification. Or cette valeur n'est valable que pour une plaque isotrope et homogène. Elle fournit toutefois des résultats globaux acceptables pour un stratifié mais est erronée pour des structures sandwichs. Il est meilleur dans ce cas de mettre $k_1 = k_2 = 1$ et de ne considérer que le module de cisaillement de l'âme. Pour plus de détails sur ces coefficients, on peut se référer aux publications de [Vlachoutsis 1992] ou [Whitney 1972].

Moyennant ces quelques précautions, la FSDT donne des résultats globaux tout à fait

corrects [Noor 1995] et peut être appliquée à des problèmes complexes car le nombre de fonctions inconnues reste limité à 5 ce qui assure une certaine robustesse numérique (par exemple l'étude du postflambement avec prise en compte des défauts initiaux [Minguet et Al 1989]).

THÉORIES D'ORDRE SUPÉRIEURS (HSDT).

Les principales limitations de la FSDT proviennent de l'usage des coefficients correctifs et de la mauvaise description des contraintes dans le sens transverse. Pour accéder à ces quantités, il est possible de prendre en compte le gauchissement de la fibre transverse par un développement limité en z à l'ordre 3 des déplacements u et v (HSDT1). Les fonctions u_0 , v_0 , et ξ sont liées au comportement en membrane et ζ et ψ au comportement en flexion (Figure N° 2-33).

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) + z \cdot \psi_x(x,y) + z^2 \cdot \xi_x(x,y) + z^3 \cdot \zeta_x(x,y) .$$

$$v(x,y,z) = v_0(x,y) + z \cdot \psi_y(x,y) + z^2 \cdot \xi_y(x,y) + z^3 \cdot \zeta_y(x,y) .$$

$$w(x,y,z) = w_0(x,y) .$$

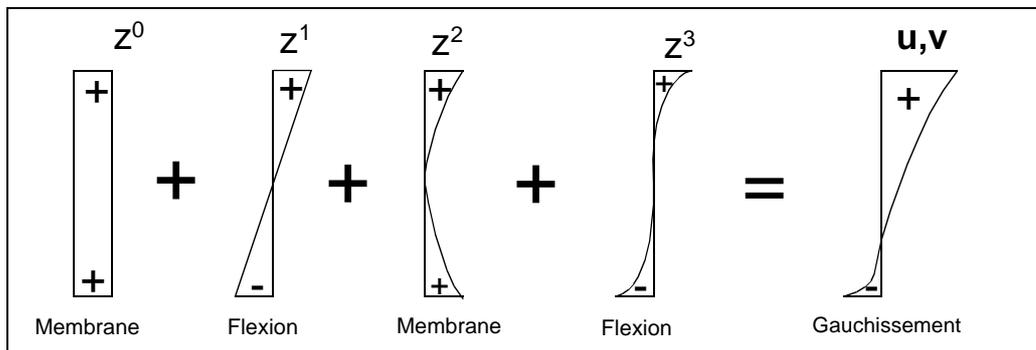


Figure N° 2-33 . Gauchissement de la fibre transverse sous HSDT1.

De ce fait, suivant la nature du stratifié étudié (possédant la symétrie miroir ou non) ou du sandwich (symétrique ou dissymétrique), plusieurs champs restreints peuvent être obtenus en éliminant et superposant les termes pairs ou impairs et certains développements limités peuvent alors être préconisés suivant le problème à traiter [Lo, Christensen et Wu 1978]. Un développement limité de la fonction $w(x,y,z)$ est aussi possible mais ce point sera discuté dans le paragraphe spécifique au calcul de la contrainte normale transverse.

Le nombre de fonctions inconnues est ici de 9 ce qui rend la résolution numérique complexe et augmente les temps de calcul. Il est possible de le réduire à 5 [REDDY 1984] en prenant en compte les conditions aux limites sur les faces libres du stratifié ou du sandwich :

$$\tau_{xz}(x,y,\pm h/2) = 0 \quad \text{et} \quad \tau_{yz}(x,y,\pm h/2) = 0$$

Le champ de déplacement devient alors :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z \cdot \left[\psi_x(x, y) - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{z}{h} \right) \cdot \left(\psi_x(x, y) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right]$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z \cdot \left[\psi_y(x, y) - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{z}{h} \right) \cdot \left(\psi_y(x, y) + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right]$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

Les champs de cisaillement transverses τ_{xz} (courbe 1) et τ_{yz} (courbe 2) obtenus directement par la FSDT et la HSDT de Reddy sont présentés *Figure N° 2-34*.

Le calcul a été effectué pour une plaque stratifiée symétrique $[0/90]_2$, 4 bords encastrés et soumise à une pression sinusoïdale. Bien qu'il s'agisse d'une plaque stratifiée, k_1 et k_2 sont pris égaux à $5/6$ pour la FSDT ce qui rend la comparaison en partie erronée.

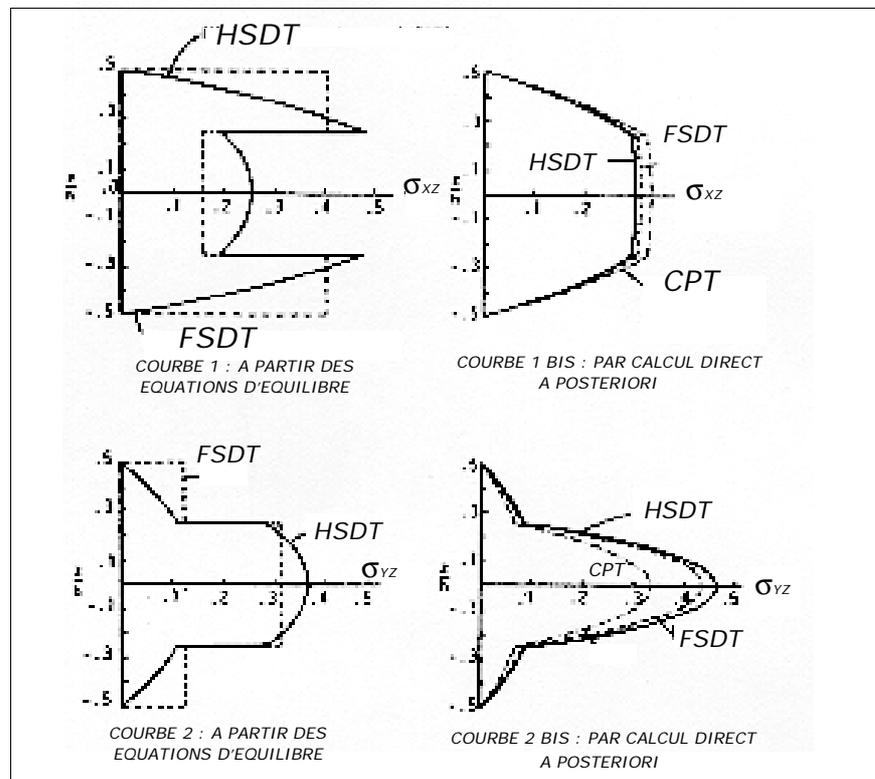


Figure N° 2-34 : Champs de cisaillements transverses pour un stratifié $[0/90/90/0]$ ([REDDY 1984]).

Les courbes 1 Bis et 2 Bis fournissent τ_{xz} et τ_{yz} après réécriture des équations d'équilibre. On remarque que l'ordre de grandeur des contraintes transverses peut être obtenu par la CPT (Kirchhoff). La FSDT et la HSDT de Reddy fournissent des résultats proches. Il semble donc que cette méthode de calcul a posteriori permette d'avoir des estimations correctes en s'affranchissant des difficultés numériques engendrées par les HSDT.

Une comparaison de plusieurs théories d'ordres supérieurs utilisées pour la cinématique

d'un élément fini et de la FSDT a été réalisée par Kant et Manjunatha [1992]. Dans cette étude, une attention particulière a été apportée au calcul des contraintes de cisaillement transverse dans le cas des sandwichs. Le développement complet à l'ordre 3 présenté en début de paragraphe (HSDT1) et une formulation modifiée (HSDT2) sont comparées. Dans la HSDT2, on peut ne retenir pas les termes en z^2 :

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) + z \cdot \psi_x(x,y) + z^3 \cdot \zeta_x(x,y)$$

$$v(x,y,z) = v_0(x,y) + z \cdot \psi_y(x,y) + z^3 \cdot \zeta_y(x,y)$$

$$w(x,y,z) = w_0(x,y)$$

Il résulte de cette comparaison :

- Une différence importante en flèche entre la FSDT et les HSDT quand l'élanement (le ratio Longueur/hauteur) de la plaque sandwich est faible ($L/h = 5$).
- Une différence entre les HSDT1 et HSDT2 quand le sandwich est antisymétrique $[0/90/nida/0/90]$ dû au fait que le gauchissement de la fibre transverse est moins pris en compte par la HSDT2.
- Lorsque l'élanement est plus important ($L/h = 10$) et le sandwich est dissymétrique $[0/45/-45/30/nida/30/90/0]$ les trois théories convergent davantage.
- L'ensemble des théories convergent quand le sandwich est fin et symétrique.

A notre sens, cette étude montre que pour les sandwichs de type aéronautique (élanés, à peau fine et avec une âme de faible rigidité) l'apport des théories d'ordre supérieur n'est pas certain.

II.7.2.2 - MODÈLES LOCAUX.

MODÈLES DITS "ZIG-ZAG".

Le modèle "Zig-Zag" suppose une variation linéaire par morceaux des déplacements de membrane u et v dans l'épaisseur du sandwich. Ceci implique nécessairement que *l'âme n'a pas de rigidité en flexion dans son plan (antiplane core)*.

Les peaux se comportent :

Soit en *membrane* : Hypothèse de Reissner [1948] ; pour les *peaux fines*.

Soit en *flexion* (plaques de Kirchhoff) : Hypothèse de Hoff [1948] ; pour les *peaux épaisses*.

Soit en *flexion+cisaillement transverse* (plaques de Mindlin) : pour les peaux stratifiées épaisses [Lee et Fan 1996].

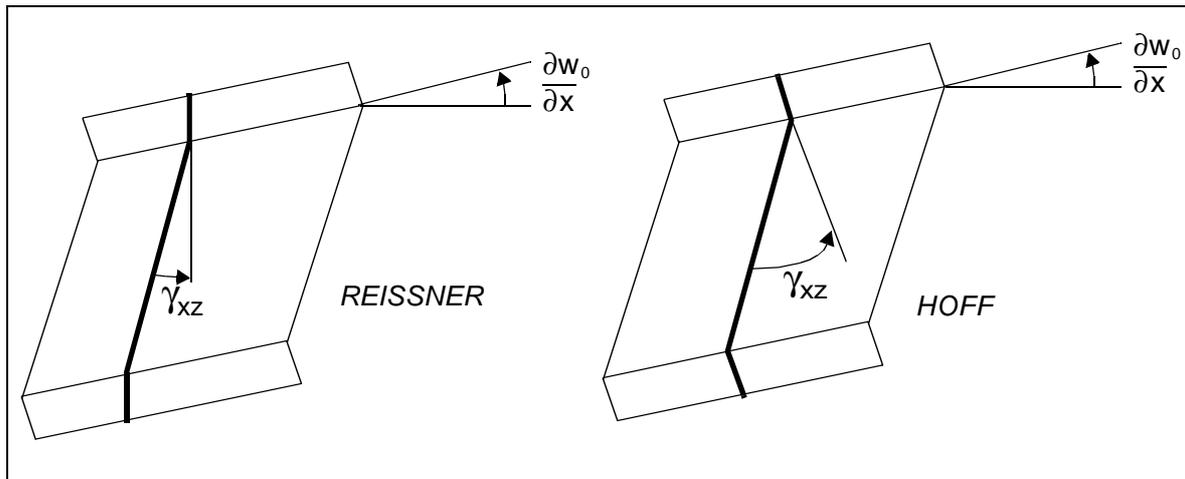


Figure N° 2-35 : Modèles de Reissner et Hoff en configuration déformée (Poutres).

Cette approche est issue des modèles simplifiés et correspond à une approche spécifique aux sandwichs alors que, dans les modèles globaux, il s'agissait de généraliser la théorie des plaques anisotropes. C'est historiquement la première approche et la plus utilisée dans les théories dédiées spécifiquement aux structures sandwichs.

Ces modèles sont dits aussi C^0 car ils assurent la continuité des déplacements. Le nombre d'inconnues en déplacement est de 5. En général, il s'agit des trois déplacements des points du plan moyen du sandwich et des cisaillements de l'âme :

$$u_0(x,y), v_0(x,y), w_0(x,y), g_{xz}(x,y), g_{yz}(x,y)$$

Cette analyse a été synthétisée par Allen [1969].

THÉORIES DISCRÈTES D'ORDRES SUPÉRIEURS.

Dans ce cas, un champ non linéaire d'ordre supérieur est superposé au champ Zig-Zag. Si aucune hypothèse particulière n'est effectuée, le nombre d'inconnues est donc de 9 fonctions (HSDT1) x 3 phases = 27. Un modèle de ce type a été évalué par Noor [1995]. Ce modèle donne de bons résultats tant en ce qui concerne la réponse globale que les contraintes transverses, sauf dans les peaux. Toutefois, cet auteur ne précise pas les temps de calcul et n'évalue pas la "robustesse" numérique.

Pour diminuer le nombre d'inconnues, on peut aussi imposer la continuité en contraintes aux interfaces [Xavier et Al 1992, Cho et Parmenter 1992]. Le premier auteur propose un déplacement discrétisé (pour le k-ième pli) du type :

$$u^k(x, y, z) = u_0^k(x, y) - z \cdot \frac{\partial w_0}{\partial x} + \left(z - \frac{4}{3} \cdot \frac{z^3}{h_{\text{Plaque}}^2} \right) \cdot \psi^k(x, y)$$

$$w_0(x, y)$$

On peut remarquer que la formulation est du même type que celle de Reddy [1984]. La fonction ψ^k qui a la même signification que dans la formulation de Mindlin est reliée au cisaillement transverse dans chaque pli ou dans l'âme. Cette remarque permet de poser :

$$\psi^k = \alpha^k \cdot \psi^1 \quad \text{avec} \quad \alpha^k = G_1 / G_k$$

Ce qui permet d'écrire le déplacement du k-ième pli en fonction de celui du premier pli et après écriture de la continuité des déplacements aux interfaces de ramener le nombre total d'inconnues à 3 (u_0^1, w_0, ψ^1) dans le cadre d'une poutre :

$$u^k(x, y, z) = u_0^1(x, y) + \sum_{j=2}^k (\alpha^{j-1} - \alpha^j) \cdot \left(z - \frac{4}{3} \cdot \frac{z_j^3}{h^2} \right) \cdot \psi^1(x, y)$$

Cette étude a été appliquée aux sandwichs *ayant une âme rigide en flexion*. Dans ce cas, la différence dans la distribution des contraintes transverses de cisaillement est sensible par rapport aux modèles Zig-Zag. Pour une âme sans rigidité, les équations d'équilibre montrent que le cisaillement est constant dans l'épaisseur. Donc, les modèles avec gauçhissement de la fibre transverse de l'âme intègrent un nombre de paramètres supérieur à celui nécessaire à la modélisation des sandwichs aéronautiques.

II.7.3 - MODÈLES 3D.

Le développement de ce type de modèle s'est imposé de par la limitation pratique des modèles existants et la nécessité d'avoir une base étendue de "Benchmark Tests" pour la validation des éléments finis ou des théories analytiques spécifiques sandwichs [Vautrin 1997]. Par contre, ces modèles sont d'un intérêt limité dans un cadre industriel car très restrictifs du point de vue des chargements, de la géométrie et des conditions aux limites ce qui est nécessaire pour traiter le problème. Par exemple, le modèle cité le plus souvent est celui de Pagano [1970]. Il fait référence pour l'évaluation des modèles 2D et des éléments finis car aucune hypothèse n'est imposée a priori sur le champ des contraintes. Par contre, il s'applique à un problème bien précis :

La plaque est rectangulaire et simplement appuyée sur les quatre bords de la face inférieure.

Le champ de pression $q(x,y)$ est sinusoidal et s'exerce sur la face supérieure. Il n'y a aucun effort sur toutes les autres faces.

Les peaux et l'âme peuvent être orthotropes ou isotropes.

Les axes d'orthotropie des peaux et de l'âme sont communs et parallèles aux bords de la plaque.

Le problème est linéaire.

La loi de comportement s'écrit pour chaque pli :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

L'équation d'équilibre local $\text{Div}[\sigma] = 0$ pour chaque pli devient :

$$C_{11} \cdot u_{,xx} + C_{66} \cdot u_{,yy} + C_{55} \cdot u_{,zz} + (C_{12} + C_{66}) v_{,xy} + (C_{13} + C_{55}) w_{,xz} = 0$$

$$(C_{12} + C_{66}) \cdot u_{,xy} + C_{66} \cdot v_{,xx} + C_{22} \cdot v_{,yy} + C_{44} \cdot v_{,zz} + (C_{23} + C_{44}) w_{,yz} = 0$$

$$(C_{13} + C_{55}) \cdot u_{,xz} + (C_{23} + C_{44}) \cdot v_{,yz} + C_{55} \cdot w_{,xx} + C_{44} \cdot w_{,yy} + C_{33} w_{,zz} = 0$$

Le champ de déplacement est ensuite discrétisé pour un harmonique m,n :

$$u = U(z) \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$v = V(z) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b}$$

$$w = W(z) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

puis l'on pose : $(U,V,W) = (U^*,V^*,W^*) \cdot \exp(s \cdot z)$.

La résolution analytique consiste en un problème aux valeurs propres puis une équation différentielle d'ordre 6 en s est discutée. L'intégration des équations nécessite 6 constantes qui sont déterminées par les conditions aux limites sur chaque pli. Un système à 18 équations pour chaque harmonique doit donc être résolu dans le cas d'un sandwich. Ce système s'avère sensible aux erreurs d'arrondis et nécessite l'emploi de réels quadruple précision. Le nombre d'harmoniques nécessaires à la description d'un champ de pression uniforme est 2500 [Vannucci 1997].

Une autre solution analytique a été obtenue [Phan Dang 1976] en faisant des hypothèses plus restrictives sur le comportement des peaux (membranes) et sur une variation soit linéaire, soit parabolique par morceaux des contraintes transverses dans ces mêmes peaux. L'âme est sans rigidité de flexion, par conséquent les contraintes de cisaillement transverses sont constantes dans l'épaisseur. Une formulation mixte est utilisée pour la résolution où les déplacements et les contraintes σ_{13} , σ_{23} , σ_{33} sont inconnues. La discrétisation des inconnues se fait par des séries de Fourier comme pour la théorie de Pagano. Mais, pour chaque harmonique, seulement 7 équations linéaires doivent être résolues. Cette solution est donc plus rapide numériquement même si un plus grand nombre d'harmoniques doit être utilisé [Vannucci 1997].

Outre l'intérêt de ces méthodes pour l'évaluation des éléments finis, elles peuvent aussi être utilisées dans leur principe pour résoudre complètement des problèmes simples mais très utiles en pratique comme la flexion 3 points [Meyer-Piening 1997] ou le flambage [Meyer-Piening 1998] d'une poutre sandwich. Il apparaît donc que ces méthodes peuvent être utilisées comme alternative aux théories d'ordres supérieurs, dans des cas simples, pour déterminer toutes les contraintes dans une structure sandwich.

II.8 - ANALYSE NON LINÉAIRE GÉOMÉTRIQUE DES PLAQUES SANDWICHES.

Le paragraphe précédent a montré la diversité et la complexité des descriptions du comportement des structures sandwichs. Si l'on "superpose" à ce premier problème les difficultés de l'analyse non-linéaire, il est compréhensible que les travaux soient moins nombreux et plus tardifs (de 2 références en 1969 [Allen 1969] à seulement 30 en 1996 [Noor 1996]). Un des principaux points à résoudre est d'ordre numérique ce qui fait que l'analyse non-linéaire des plaques sandwichs se fait en pratique par éléments finis [Jeusette et Laschet 1990, Al-qarra 1988]. Aussi, l'essentiel de la recherche porte sur le développement d'éléments spécifiques reprenant les diverses formulations présentées jusqu'ici.

Toutefois, il peut être nécessaire en avant projet de disposer de moyens de calcul permettant de réaliser des itérations rapidement afin de pouvoir saisir l'influence de tel ou tel paramètre pour converger vers une solution technologique optimale. Ce paragraphe se propose de décrire dans un premier temps les premiers développements de l'analyse non linéaire géométrique des plaques sandwichs jusqu'en 1983. Puis des modèles de plaques spécifiques seront présentés.

ANALYSE NON LINÉAIRE GÉOMÉTRIQUE DES STRUCTURES SANDWICHS JUSQU'EN 1983.

La première formulation non-linéaire pour des plaques sandwichs à peaux isotropes et minces de type membrane a été établi par [Reissner 1948]. Les déformations sont de type Von Karman. Le problème est formulé en un système d'équations différentielles en utilisant la méthode des contraintes et une fonction d'Airy F . Le système obtenu est une généralisation des équations des plaques fines et isotropes en grands déplacements aux structures sandwichs.

$$\Delta\Delta F = 2 \cdot E \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right]$$

$$D \cdot \Delta^2 \Delta^2 F = \left[1 - \frac{D}{hG_c} \cdot \Delta^2 \right] \cdot \left[q + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right]$$

où D représente la rigidité de flexion du sandwich, q la charge répartie, E le module d'Young des peaux et G_c le module de cisaillement de l'âme.

Ces équations ont été reprises dans le cas d'une âme orthotrope [Alwan 1964] et résolues en w par l'utilisation d'une série de fonctions. La méthode des perturbations a aussi été employée [Kan et Huang 1967] en utilisant un développement de w de la forme :

$$w = w_1(\xi, \eta) \cdot W_0 + w_3(\xi, \eta) \cdot W_0^3 + \dots \quad \text{avec} \quad W_0 = \frac{w_{\max}}{h_{\text{Sandwich}}}$$

La résolution a été effectuée au premier ordre en utilisant une fonction w_1 polynômiale qui permet la prise en compte de conditions aux limites tous bords encastés :

$$w_1(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)^2 \cdot (1 - \eta^2)^2 \cdot (1 + B_1 \cdot \xi^2 + C_1 \cdot \eta^2 + D_1 \cdot \xi^4 + E_1 \cdot \eta^4 + F_1 \cdot \xi^2 \cdot \eta^2)$$

Ces premières études se sont donc limitées essentiellement à la détermination de la flèche en utilisant diverses techniques de résolutions numériques du système d'équations différentielles posé par Reissner [Kao 1974], [Kamiya 1975, 1978], [Rao et Valsarjan 1982, 1983].

MODÈLES DE PLAQUES SANDWICHS NON LINÉAIRES.

Parmi les 30 références de l'article bibliographique de Noor, seulement deux études ont retenu notre attention.

La première, à la fois théorique et expérimentale, porte sur le post-flambage des plaques sandwichs symétriques [Minguet, Dugundji et Lagace 1989]. Le champ de déplacement utilise la FSDT avec coefficients de cisaillement égaux à 5/6. L'hypothèse de Von Karman est posée et le champ des déformations s'écrit (w_{init} représente le défaut initial) :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_{init}}{\partial x} + z \cdot \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial w_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial w_{init}}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_{init}}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial w_{init}}{\partial x} + z \cdot \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{13} &= \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} & \gamma_{23} &= \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\end{aligned}$$

Une méthode de Rayleigh-Ritz est employée pour résoudre le problème et diverses bases sont utilisées, par exemple pour u et v :

$$\begin{aligned}u_0(\xi, \eta) &= u_1 \cdot \xi + \sum_i \sum_j u_{ij} \cdot \sin(i\pi\xi) \cdot \cos(j\pi\eta) \\ v_0(\xi, \eta) &= v_1 \cdot \eta + v_2 \cdot \xi + \sum_i \sum_j v_{ij} \cdot \cos(i\pi\xi) \cdot \sin(j\pi\eta)\end{aligned}$$

Les termes linéaires en ξ et η servent à représenter les déformations de membrane de la plaque. Dans la série trigonométrique, tous les harmoniques ne sont pas utilisés dans la mesure où l'expérience a montré que certains sont toujours négligeables. Ceci permet de diminuer le nombre d'inconnues ce qui est important en non linéaire tant du point de vue de la stabilité numérique que du temps de calcul.

La flèche est représentée par des fonctions du type :

$$\begin{aligned}w_0(\xi, \eta) &= \sum_i \sum_j w_{ij} \cdot F_i(\xi) \cdot \sin(j\pi\eta) \\ \text{avec} \quad F_i(\xi) &= \cosh(\alpha_i \cdot \xi) - \cos(\alpha_i \cdot \xi) - \gamma_i \cdot [\sinh(\alpha_i \cdot \xi) - \sin(\alpha_i \cdot \xi)]\end{aligned}$$

F_i est dite "beam fonction". Les coefficients α_i et γ_i sont calculés de manière à s'annuler pour les valeurs de ξ sur les bords. Diverses combinaisons en ξ et η sont possibles pour représenter les différents cas de conditions aux limites.

Le problème est posé sous forme matricielle, et la solution est recherchée en appliquant le principe du minimum de l'énergie potentielle. La technique de résolution employée ici est celle dite "*Line-Search*" [Cf Christfield 1991 Chap 9 pp 254-265]. En effet, la méthode de Newton-Raphson se révèle instable pour l'étude des comportements avec points limites ou points de bifurcation et dans le cas de la recherche de plusieurs minimums correspondant aux différentes solutions post-flambées possibles. Cette technique permet une accélération de convergence en atteignant directement la charge désirée sans incréments successifs. Ici, les solutions d'équilibre sont trouvées par balayage à partir de la solution linéaire

en direction des divers modes de flambage.

Le flambage d'un sandwich symétrique est étudié et montre un comportement post-flambement simple avec seulement une branche de bifurcation (trois solutions post-flambées différentes ont été obtenues dans le cas d'une plaque stratifiée). Par contre la prise en compte des défauts initiaux est importante pour retrouver le comportement expérimental (Figure N° 2-36).

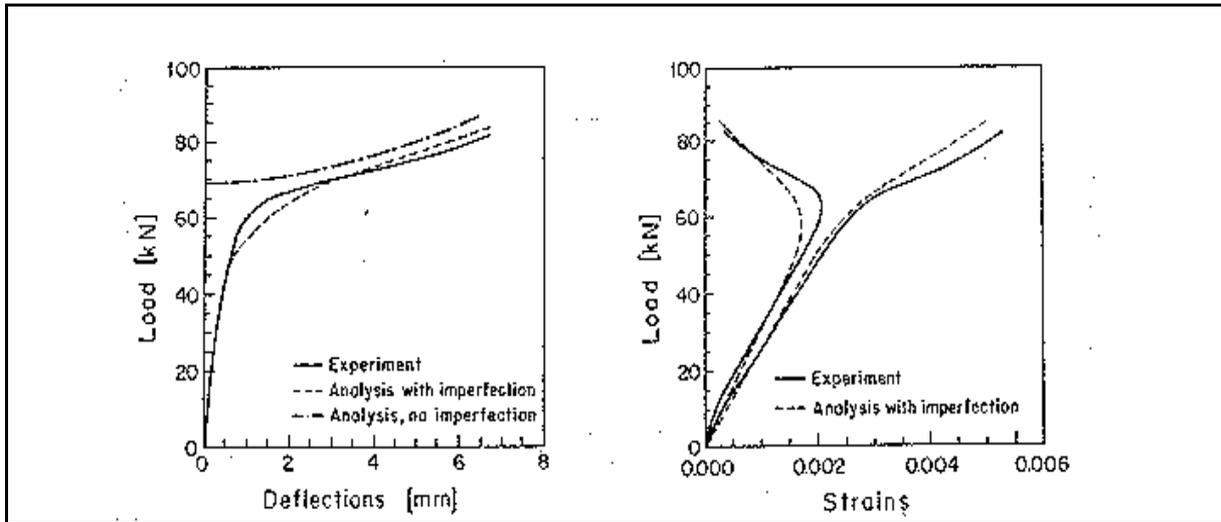


Figure N° 2-36 : Comportement d'un sandwich en compression avec défauts initiaux.

La deuxième étude analysée consiste à étendre en non-linéaire le modèle de plaque de Hoff dans le cas où les peaux sont isotropes [Cheng, Wang et Huang 1993]. La résolution se fait après écriture des équations différentielles d'équilibre du sandwich en discrétisant les déplacements inconnus par des séries de Fourier mixtes :

$$\begin{bmatrix} \Psi_{\xi} \\ \Psi_{\eta} \\ W \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} G_n(\xi) \cdot \cos \beta_n \eta \\ S_n(\xi) \cdot \sin \beta_n \eta \\ G_n(\xi) \cdot \cos \beta_n \eta \end{bmatrix} + \sum_{m=1}^{\infty} \begin{bmatrix} H_m(\xi) \cdot \sin \beta_m \xi \\ T_m(\xi) \cdot \cos \beta_m \xi \\ Y_m(\xi) \cdot \cos \beta_m \xi \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \Psi_{\xi_{mn}}^* \cdot \sin \beta_m \xi \cdot \cos \beta_n \eta \\ \Psi_{\eta_{mn}}^* \cdot \cos \beta_m \xi \cdot \sin \beta_n \eta \\ W_{mn}^* \cdot \cos \beta_m \xi \cdot \cos \beta_n \eta \end{bmatrix}$$

L'intégration de ces équations différentielles se fait par un logiciel de calcul formel et seul les 6 premiers harmoniques sont retenus. Puis les résultats de la formulation sont comparés, uniquement pour la flèche, aux autres formulations d'avant 1982 [Kan & Huang 1967, Kamiya 1978, Rao et Vasarajan 1982]. Par rapport à la formulation de Reissner, les hypothèses de Hoff sont à retenir dans le cas où la plaque est encadrée. L'erreur entre les deux formulations atteint alors 16%.

Bien qu'un certain nombre d'éléments finis non linéaires basés sur les différentes formulations présentées dans les paragraphes précédents ait été réalisés, nous n'avons trouvé qu'une seule évaluation comparative des différentes formulations [Ferreira et Al 1997]. La comparaison s'effectue entre 3 éléments :

- Le *premier élément* est du type FSDT avec coefficients correctifs.
- Le *second élément* est du type HSDT (cf Kant 1992) avec développement au troisième degré ce qui assure une variation parabolique du cisaillement dans l'épaisseur.
- Le *troisième élément* est discret par morceaux avec une formulation de type Mindlin pour chaque pli ou âme.

Les trois modèles convergent pour le cas de peaux isotropes (*Figure N° 2-37*).

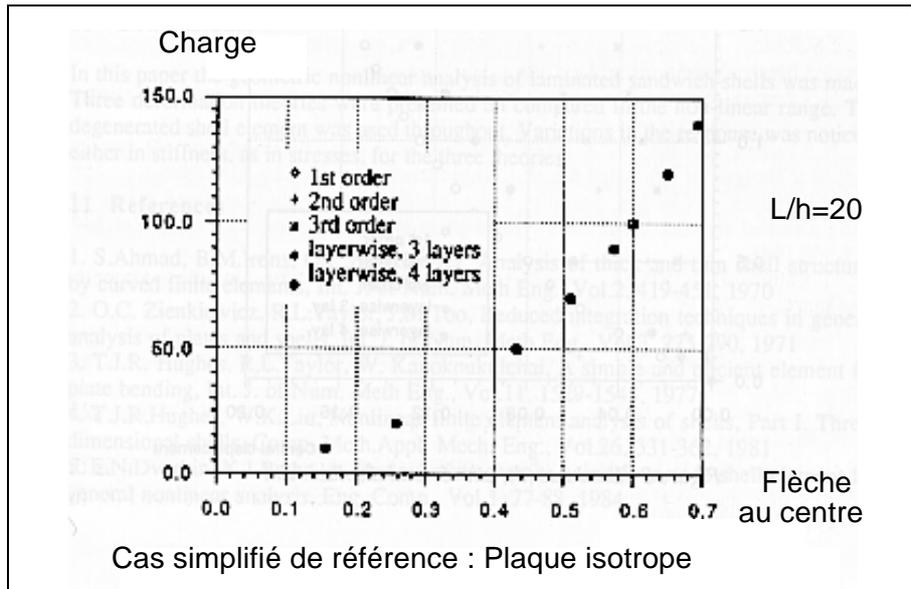


Figure N° 2-37 : Comparaison de modèles d'éléments finis non-linéaires dans le cas d'une plaque isotrope (reproduit de Feirrer et Col 1997).

Par contre, des différences importantes sont observées tant en déplacement qu'en contraintes pour les sandwichs à peaux anisotropes possédant une âme de très faible rigidité devant celle des peaux ce qui est le cas des sandwichs aéronautiques (*Figure N° 2-38*).

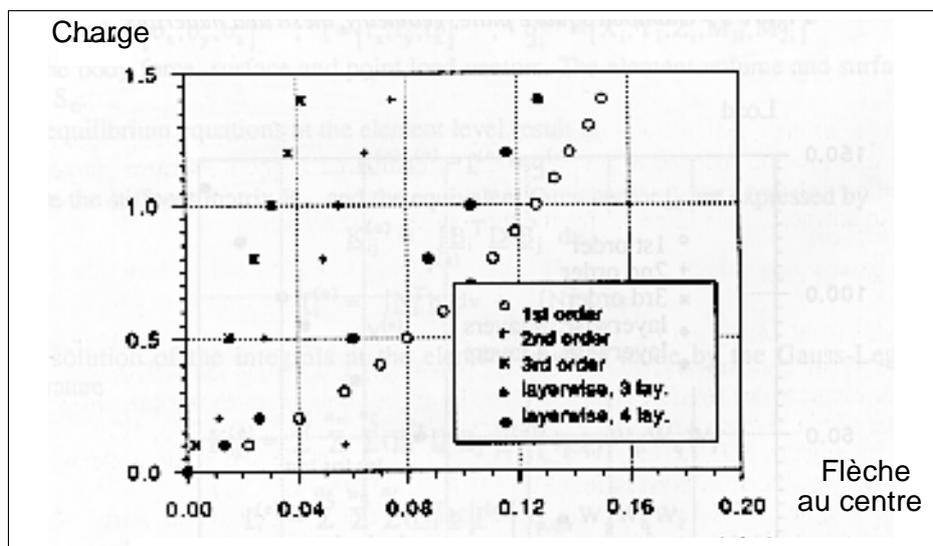


Figure N° 2-38 : Comparaison de modèles E.F. non-linéaires dans le cas d'un sandwich symétrique avec $L/h=6$ et $E_{xx}(\text{Peaux}) = 1000 E_{xx}(\text{Ame}) \Leftrightarrow$ hypothèse antiplane core (reproduit de Feirrer et Col 1997).

Pour l'auteur, dans ce cas, le modèle le plus fiable serait le modèle Zig-Zag. La différence est moins marquée pour les sandwichs qui ont une âme rigidité en flexion. Il semblerait donc que des modèles trop enrichis de type HSDT génèrent des erreurs dans le domaine non linéaire et dans le cas des sandwichs de type aéronautique.

CONCLUSIONS.

Ce chapitre montre que peu de développements de théories spécifiques plaques sandwichs en non linéaire ont été effectués. La difficulté de la formulation et la complexité des géométries des structures réelles font qu'il est logique que les rares spécialistes ayant besoin de dimensionner en non-linéaire se tournent vers les méthodes éléments finis. Par conséquent, les efforts de recherche portent essentiellement sur ce point et la production dans ce domaine est conséquente.

II.9 - TECHNIQUES D'ANALYSE DE LA COMPRESSION DANS L'ÂME.

Cinq méthodes différentes ont été identifiées et vont être présentées en évoluant des formulations les plus classiques en déplacement vers la MMC 3D.

THÉORIES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Un développement limité à l'ordre 2 ou 3 de la flèche en w en z est proposé :

$$w(x,y,z) = w_0(x,y) + z \cdot \psi_z(x,y) + z^2 \cdot \xi_z(x,y) + z^3 \cdot \zeta_z(x,y)$$

Dans le cas où le sandwich est dissymétrique et fortement anisotrope, le développement limité à l'ordre 3 est recommandé si l'on désire connaître avec beaucoup d'acuité les contraintes transverses [Majunatha et Kant 1992]. On peut toutefois remarquer que seul des développements limités à l'ordre 2 sont nécessaires pour l'étude de la réponse statique de sandwichs de type aéronautique [Majunatha et Kant 1993] (voir démonstration dans le paragraphe sur les méthodes de type prédicteur/correcteur).

THÉORIES ZIG-ZAG MODIFIÉES.

On retrouve des champs de déplacements linéaires par morceaux dans les peaux et le nida. Le champ d'inconnues standard [Allen 1969] est composé des trois déplacements du

plan moyen du sandwich u_0, v_0, w_0 et du cisaillement de l'âme g_{xz}, g_{yz} .

$$u_0(x,y), v_0(x,y), w_0(x,y), g_{xz}(x,y), g_{yz}(x,y)$$

Celui est modifié en :

$$u_1(x,y), v_1(x,y), w_1(x,y), u_2(x,y), v_2(x,y), w_2(x,y)$$

où l'on choisi les déplacements du plan moyen de chacune des peaux indicées 1 et 2 (Figure N° 2-39). Cette possibilité a été exploitée pour des modèles de poutre simplifiés [Hoff 1945], [Ojalvo 1967] et pour un élément fini linéaire [Lee et Fan 1996].

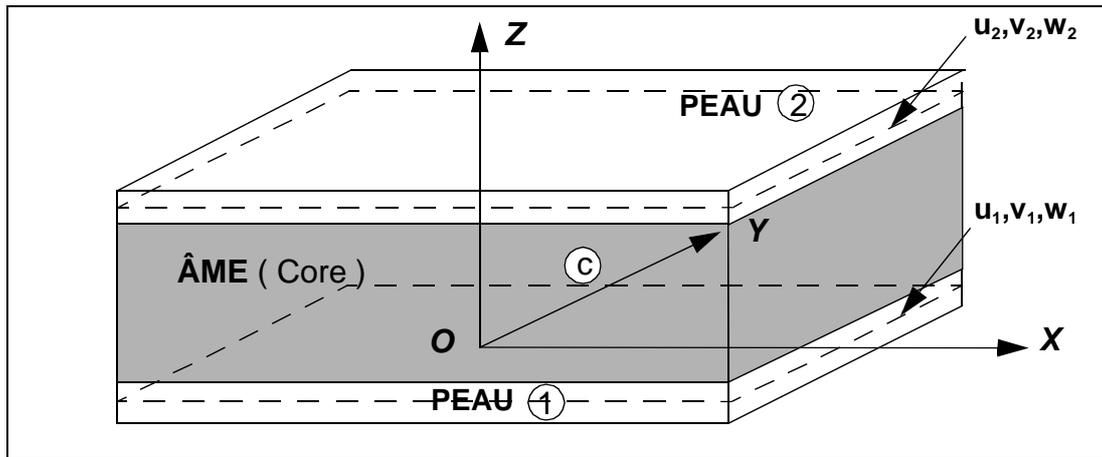


Figure N° 2-39 : Champ des déplacements dans la théorie Zig-Zag modifiée.

Avec cette nouvelle cinématique, le déplacement vertical dans l'âme w_c peut être interpolé linéairement :

$$w_c(x, y, z) = \frac{z}{h_c} \cdot [w_2 - w_1] + (w_{2_{INF}} - w_{1_{SUP}})$$

On en déduit l'expression de la déformation normale et de la contrainte transverse :

$$\epsilon_{33}^c = \frac{w_2 - w_1}{h_c} \quad \text{et} \quad \sigma_{33}^c = E_c \cdot \epsilon_{33}^c \quad (\text{Cas "Antiplane core"})$$

La déformation ϵ_{33} obtenue est constante dans l'épaisseur et donc σ_{33} est aussi constante. Or les équations d'équilibre montrent que la variation est linéaire dans l'épaisseur. On obtient donc par cette technique uniquement une estimation de la contrainte normale transverse.

Lee et Fan ont utilisé cette cinématique pour suivre l'évolution de l'écrasement (w_1-w_2) par rapport à la flèche (w_1 ou w_2) : $(w_1-w_2)/w_2$ (en %) (Figure N° 2-40). Les deux sandwichs (a) et (b) étudiés sont symétriques et ont une âme en nid d'abeille de 10 et 7 mm. Le drapage des peaux pour le sandwich (a) est $[0^\circ]_3$ et pour le sandwich (b) $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$. Les charges peuvent être ponctuelles ou uniformes et les conditions aux limites 4 bords encastres (C) ou en appui simple (SS).

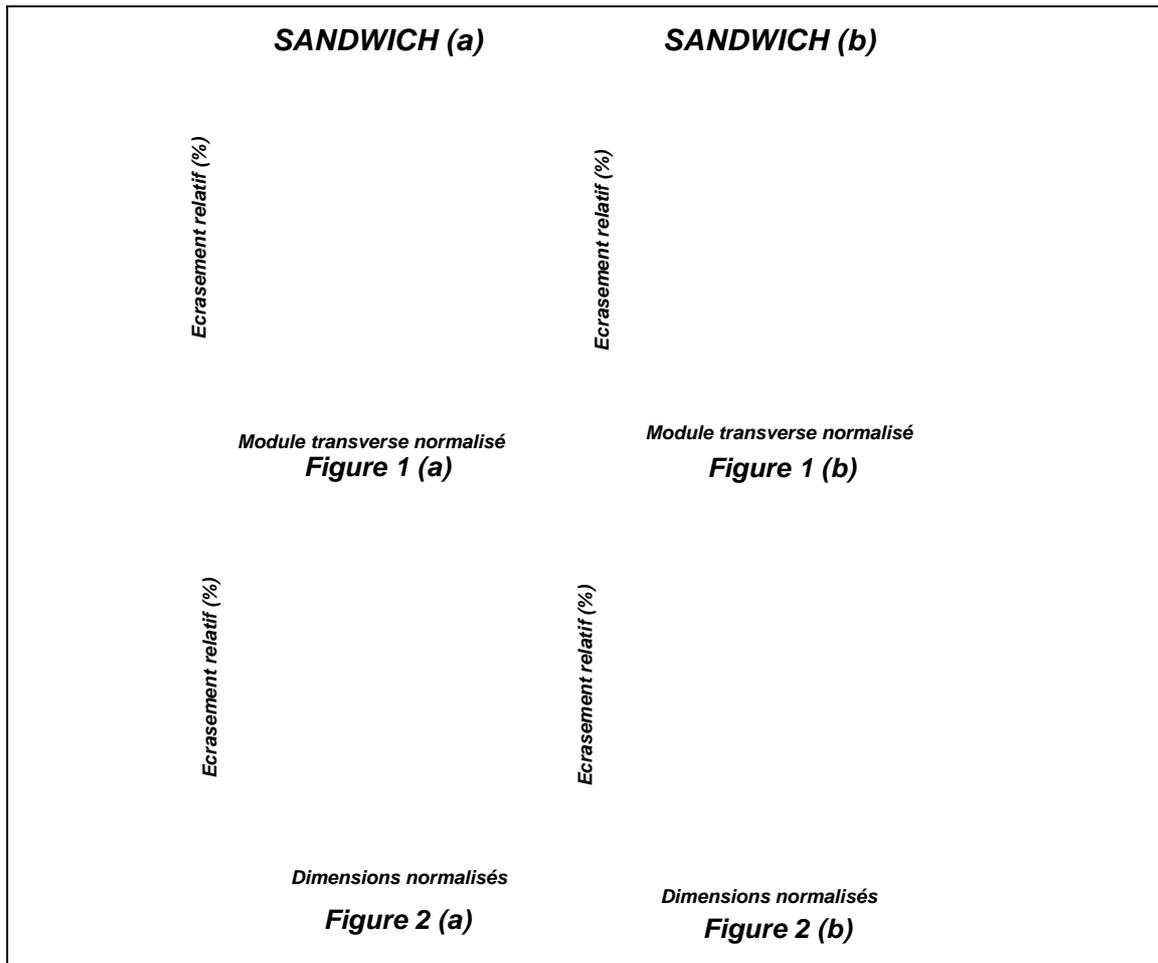


Figure N° 2-40 : Evolution de l'écrasement du nida (Reproduit de Lee et Fan 1996).

Toutes les figures montrent que l'écrasement relatif est très faible pour un chargement par pression uniforme. Pour un chargement concentré, dans les figures 1 (a) et 1 (b), l'écrasement relatif augmente quand la rigidité transverse de l'âme diminue, ce qui n'est pas une surprise. Les valeurs atteintes restent toutefois modérées et ne dépassent pas 18% de la flèche. Par contre, l'écrasement augmente jusqu'à 80% de la flèche dans le cas de chargement concentré lorsque la plaque est de petites dimensions (figures 2 (a) et 2 (b)).

La formulation de cette méthode s'avère simple, peu coûteuse en termes supplémentaires (1 inconnue de plus) ou de couplage. Toutefois, de par la nature trop simple de cette méthode, il semble que les valeurs proposées par ces auteurs ne soient que des estimations. Elles devraient de plus être comparées à l'expérience.

MÉTHODES DE TYPE PRÉDICTEUR/CORRECTEUR.

Les modélisations 2D fournissent une réponse globale correcte en déplacements et en contraintes de membrane, mais sont moins précises en ce qui concerne les contraintes

transverses. Une méthode pour améliorer la précision consiste à récrire les équations d'équilibre a posteriori avec les résultats de la théorie 2D. Dans le cas des poutres sandwich [Majunatha et Kant 1993], les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

Par conséquent l'intégration de la première équation pli par pli fournit pour le L-ième pli :

$$\tau_{xz}^L = - \sum_{i=1}^L \int_{h_i}^{h_{i+1}} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + C_1$$

En éliminant τ_{xz} entre les deux équations d'équilibre on obtient :

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2}$$

Ce qui, intégré pli par pli deux fois, fournit la relation :

$$\sigma_{zz}^L = \sum_{i=1}^L \int_{h_i}^{h_{i+1}} \left(\int_z \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} dz \right) dz + C_2 z + C_3$$

L'intégration de la contrainte normale transverse nécessite la connaissance de deux constantes C_2 et C_3 qui peuvent être déterminées par les conditions aux limites sur les faces libres de la poutre sandwich.

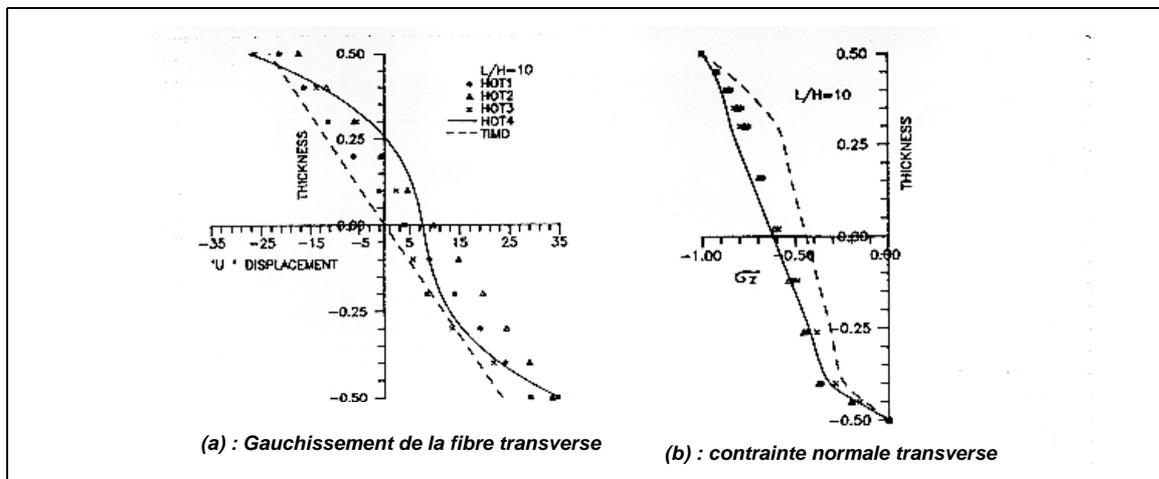


Figure N° 2-41 : Champ de déplacement dans l'épaisseur (a) et contrainte normale transverse (b) (reproduit de Kant et Majunatha 1992).

Par contre, l'intégration de la contrainte de cisaillement transverse dans l'épaisseur ne nécessite la connaissance que d'une seule constante C_1 qui sera déterminée pour le premier pli. On démontre [Barrau 1986, p112-113] que τ_{xz} s'annule sur la deuxième face de la plaque. Il faut aussi noter que l'utilisation de la dérivée seconde des contraintes correspond à une dérivée d'ordre 3 du champ des déplacements et qu'il faut par conséquent une interpolation ou une discrétisation de degré supérieur à 3 (en polynômes).

Le champ des déplacements "u" permet de visualiser le gauchissement de la fibre trans-

verse pour un sandwich (*Figure N° 2-41 (a)*). L'évolution de la contrainte normale transverse σ_{zz} est présentée *Figure N° 2-41 (b)*.

MÉTHODES MIXTES CONTRAINTES/DÉPLACEMENTS.

Dans cette approche, des contraintes et des déplacements choisis sont les inconnues. L'approche employée par [Frostig 1990, 1992] consiste à utiliser la MMC 2D pour décrire le comportement de l'âme de type "antiplane core" et à décrire le comportement des peaux avec un champ de déplacement de type Kirchhoff. Les champs de déplacement dans l'âme $w_c(x,z)$ et $u_c(x,z)$ sont respectivement paraboliques et cubiques en z après intégration des équations d'équilibre.

Un système de 5 équations différentielles où les inconnues en déplacement sont avec nos notations $u_1(x)$, $u_2(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$ et le cisaillement dans le nida $\tau_{xz}(x)$ est obtenu par écriture du principe des travaux virtuels (même méthode que [Hoff 1948]).

$$EA_1 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + b \cdot \tau_{xz} = -N_1 \quad EA_2 \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - b \cdot \tau_{xz} = -N_2$$

$$EI_1 \cdot \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \frac{bE_c w_1}{h_c} - \frac{bE_c w_2}{h_c} - \frac{1}{2} \cdot b \cdot (h_c + h_1) \cdot \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = q_1 - \frac{\partial M_1}{\partial x}$$

$$EI_2 \cdot \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} - \frac{bE_c w_1}{h_c} + \frac{bE_c w_2}{h_c} - \frac{1}{2} \cdot b \cdot (h_c + h_2) \cdot \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = q_2 - \frac{\partial M_2}{\partial x}$$

$$u_1 b - u_2 b - \frac{1}{2} \cdot b \cdot (h_c + h_1) \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot b \cdot (h_c + h_2) \cdot \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{bc^3}{12 \cdot E_c} \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2} + \frac{bc \tau_{xz}}{G_c} = 0$$

L'intégration du système d'équations différentielles fournit une solution particulière polynômiale et une solution générale sous forme de somme d'exponentielles. L'intégration de ce système différentiel nécessite la connaissance de 14 constantes qui sont obtenues par écriture de 7 conditions aux limites en chargements et en déplacements pour chaque interface peau/âme. Cette formulation présente l'intérêt de pouvoir prendre en compte les forces concentrées sans avoir à gérer numériquement des problèmes de discontinuité et de fournir une solution complète. Les champs obtenus pour une poutre de longueur L soumise à de la flexion 3 points sont illustrés (*Figure N° 2-42*).

Cette théorie a été successivement appliquée aux plaques [Frostig 1994], aux sandwichs à faces non parallèles [Frostig 1995] et à l'étude des effets de bords [Frostig 1997].

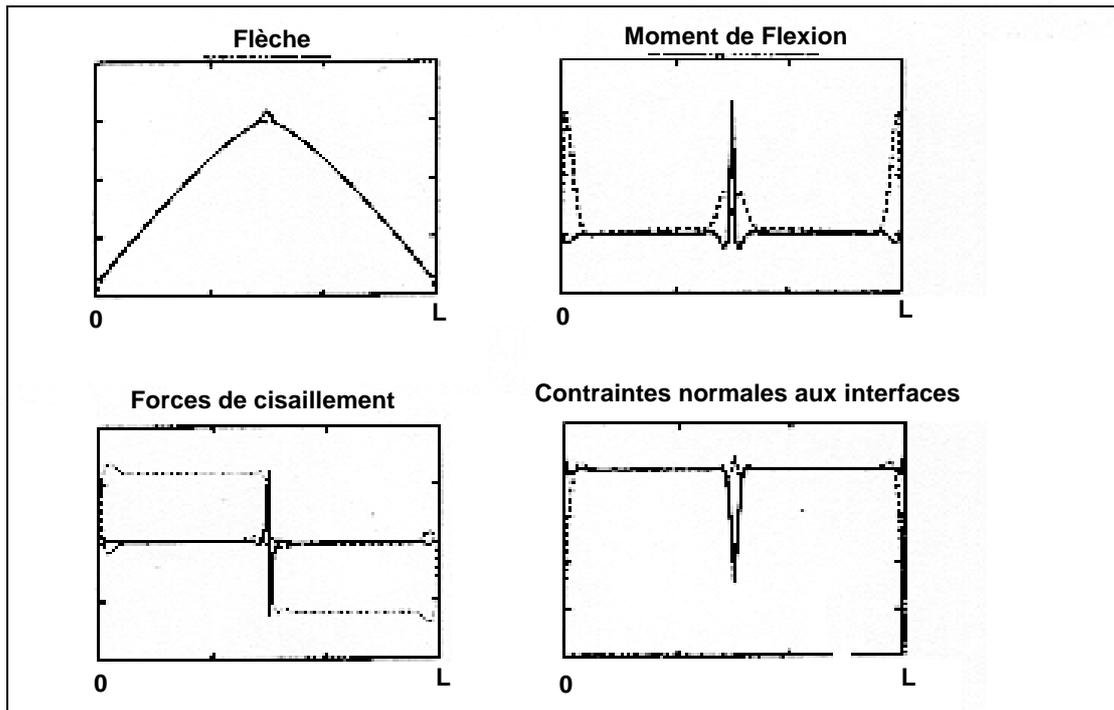


Figure N° 2-42 : Champs de contraintes dans une poutre soumise à de la flexion 3 points (reproduit de Frostig et Al 1994).

Une démarche analogue a été utilisée par Kim et Hong [1988] pour des plaques avec une rigidité finie du joint de colle. Le déplacement dans l'âme obtenu est aussi parabolique en w et cubique en u et v . Le problème est résolu par minimisation de l'énergie potentielle avec multiplicateurs de Lagrange pour la prise en compte de la continuité des déplacements. Les inconnues du problème sont ici $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$, $v_1(x,y)$, $v_2(x,y)$, $w_1(x,y)$, $w_2(x,y)$ et les cisaillements de l'âme $\gamma_x(x,y)$ et $\gamma_y(x,y)$. La résolution se fait alors par une méthode de Rayleigh-Ritz à base de série de fonctions trigonométriques.

MODÈLES M.M.C.

On se reportera pour cette technique au paragraphe (II.7.3 -).

MODÈLES NON LINÉAIRES.

Outre un élément fini développé par Madenci [1998] en grands déplacements, grandes rotations avec formulation lagrangienne actualisée et utilisation des tenseurs de contraintes corotationnels, nous n'avons trouvé à notre connaissance que deux modèles de poutres sandwichs non linéaires avec nida compressible.

La première étude [Chang 1991] s'intéresse au flambage et au post-flambage de pla-

ques sandwichs dont les 4 bords sont rigides (Figure N° 2-43) ce qui permet de traiter le modèle en poutre. La formulation est mixte et le champ des déplacements obtenu dans l'âme est du même type que Kim et Hong [1988] ou Frostig [1992]. Les forces sont introduites dans les angles.

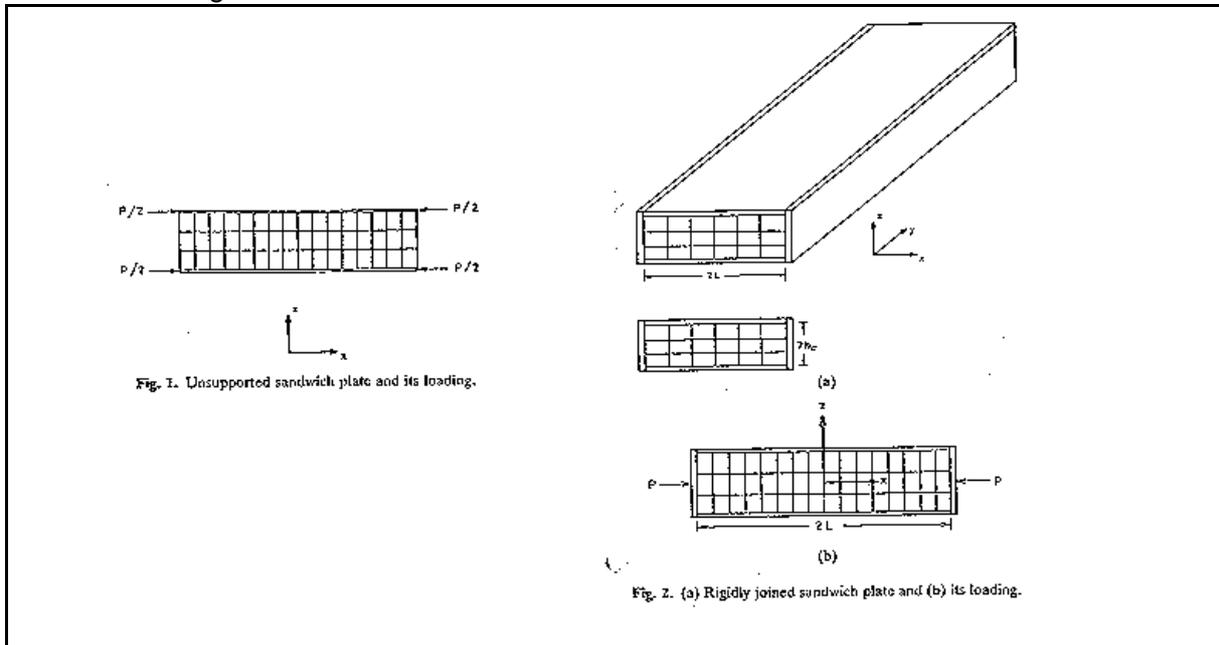


Figure N° 2-43 : Modèle de poutre à bords rigides (Reproduit de Chang 1991).

Les inconnues dans ce problème sont :

- les déplacements des peaux $u_1(x)$, $u_2(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$.
- le cisaillement dans le nida $\tau_{xz}(x)$.
- les contraintes normales aux interfaces σ_{z1} et σ_{z2} .
- les forces et moments dans les angles V1 et V2, M_1 et M_2 , $\Delta F = F_1 - F_2$.
- l'angle de rotation de solide θ du coin du sandwich supposé infiniment rigide.
- une constante d'intégration de $w_{\text{âme}}$: k_1 .

Un système d'équations est formé en écrivant l'équilibre des peaux, des bords rigides, de l'âme, et les conditions aux limites. La relation déplacement/déformation est non linéaire de type Von Karman. Ce modèle permet une étude de l'influence des paramètres matériaux et dimensionnels sur la charge de flambage et le comportement post-flambement.

Le deuxième modèle a été présenté par [Reimerdes et Shermann 1998]. L'approche est analogue dans ses grandes lignes au modèle précédent puisqu'un système d'équations différentielles est obtenu à partir des équations d'équilibre pour les peaux et l'âme. La formulation est aussi mixte. Par contre la relation contrainte-déformation dans les peaux n'uti-

lisse pas la simplification de Von Karman et est du type :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]$$

Le modèle est ensuite comparé à une modélisation E.F. en flexion 4 points. La corrélation est bonne et l'analyse non linéaire avec nida compressible démontre une résistance moindre et permet de mettre en évidence la longueur d'onde de la peau déformée après flambage.

II.10 - CONCLUSIONS RELATIVES A LA PARTIE THÉORIQUE.

La première constatation qui s'impose est la grande variété des modèles de description des structures sandwichs. Des diverses études qui ont été présentées nous retiendrons :

- *Beaucoup des modèles analytiques ou E.F. consistent en l'extension des théories des stratifiés composites aux structures sandwichs. Il semble que pour des modélisations E.F. de grandes structures sandwichs, cette approche est a priori suffisante moyennant un bon choix des coefficients correctifs et la moins coûteuse en terme de temps de calcul.*
- *A notre connaissance, il n'existe que peu de modèles analytiques non linéaires. Ceci peut s'expliquer d'une part par le fait que le dimensionnement des structures réelles se fait aussi et surtout aux jonctions. Dans ces zones, la géométrie est complexe et seules des méthodes E.F. sont viables à l'heure actuelle. Toutefois, il semble que la demande de logiciels de pré-dimensionnement rapide des zones courantes augmente en construction aéronautique.*
- *La modélisation des sandwichs de type aéronautique à âme sans rigidité de flexion et à peaux fines ne nécessite pas de théories trop élaborées car les divers modèles convergent dans cette configuration dans le domaine linéaire. De plus, il semble que pour le domaine non linéaire, le modèle de type Zig-Zag soit le plus fiable [Ferreira 1997].*

- *Les modèles 2D globaux ne permettent pas de traiter séparément les deux peaux en conditions aux limites et en chargement. Ce qui peut s'avérer gênant dans le cas des sandwichs dissymétriques et masque une partie du comportement [Frostig 1997].*
- *C'est un lieu commun mais il est utile de rappeler que le manque de robustesse numérique s'accroît avec la complexité de la formulation.*
- *La recherche de solutions complètes pour les structures sandwichs n'est pas une tâche aisée. Il nous apparaît toutefois que l'idée de traiter a posteriori les variables à "faible valeur énergétique" comme la compression de l'âme est une des plus simple et des plus efficace.*
- *D'une manière générale, il existe trop peu de corrélations expérience/théorie dans la littérature [Vautrin 1997].*

CHAPITRE III

ETUDE EXPERIMENTALE ESSAIS SOUS SOLLICITATIONS COMBINEES COMPRESSION/ CISAILLEMENT

III.1 - CONCEPT D'ESSAI SOUS SOLLICITATIONS COMBINÉES.

III.1.1 - CONTEXTE GENERAL.

La certification des structures composites d'hélicoptère repose sur la démarche de la "Pyramide des Essais" (Figure 2.2). Dans le cadre de cette démarche, cette étude s'est intéressée aux essais de niveau II sur éprouvette technologique. Ce type d'éprouvette est représentative de la technologie et des drapages utilisés sur le fuselage sans être spécifique au sens de la forme et des jonctions à une zone particulière. Les essais de niveau II sont menés en compression sur machine universelle (Chap II.3.2) et en cisaillement au carré déformable (Chap II.3.3). Cette approche présente toutefois deux grandes limitations :

⇒ ***L'enveloppe des contraintes critiques en sollicitations combinées compression/cisaillement n'est pas validée expérimentalement.***

Si il existe des méthodes théoriques qui permettent de déterminer les contraintes critiques sous sollicitations complexes, il n'existe pas ou peu d'essais permettant de valider les

valeurs obtenues (*Chap II.4.3*). On retrouve d'ailleurs cette problématique dans les ouvrages de design des structures sandwichs qui conseillent de prendre de la marge par rapport aux valeurs théoriques [US-Military Handbook 23A]. Il existe donc une lacune à ce niveau dans la démarche de certification des structures par la pyramide des essais.

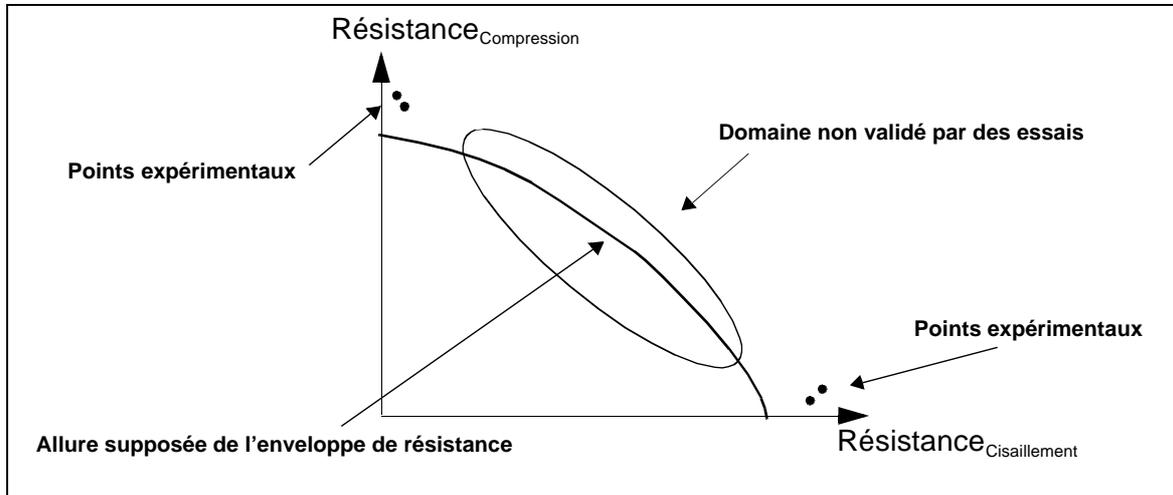


Figure N° 3-1 : Domaine de validité des essais classiques de niveau II.

⇒ **Le domaine de validité des résultats expérimentaux n'est pas clairement établi.**

En effet, compte-tenu de la diversité des modes de ruptures des structures sandwichs et des difficultés expérimentales propres aux composites mises en évidence dans la bibliographie, il n'est pas certain que les "résistances" obtenues à partir des essais usuels soient directement extrapolables ou du moins conservatrices par rapport aux structures réelles.

Le corollaire de cette deuxième problématique est la maîtrise des conditions aux limites en essai. La transmission des efforts de compression sur machine d'essai universelle se fait par adhérence sur des talons collés sur la zone monolithique alors que la technologie utilisée sur appareil est très différente. Or, il s'avère que les sandwichs dissymétriques sont très sensibles au décalage de la ligne moyenne d'introduction des efforts. Par conséquent, il est souhaitable que le mode d'introduction des efforts soit le plus similaire possible en essai et sur appareil.

Ces quelques remarques mettent en évidence l'intérêt d'essais de type structure sous sollicitations complexes et une quasi-absence d'études dans ce domaine. Le besoin est d'ailleurs régulièrement formulé par les industriels de l'aéronautique [*Razi 1998*] et de la construction navale. En conséquence, cette recherche a pour objectif de définir un type d'essai utilisant des conditions aux limites le plus proche possible de la technologie utilisée par Eurocopter et apte à faire travailler les éprouvettes sous sollicitations combinées.

III.1.2 - CONCEPT RETENU.

Le principe consiste à recréer de la manière la plus réaliste et la plus simple possible le mode de travail des structures sandwichs dissymétriques sur appareil. Le **caisson** est la forme géométrique qui répond à cet objectif. Cette solution a d'ailleurs déjà été retenue par plusieurs auteurs [Peters 1948, Klein 1989], mais nos modes d'introduction des efforts sont différents (*Figure N° 3-2*) et la solution est adaptée au cas des sandwichs dissymétriques.

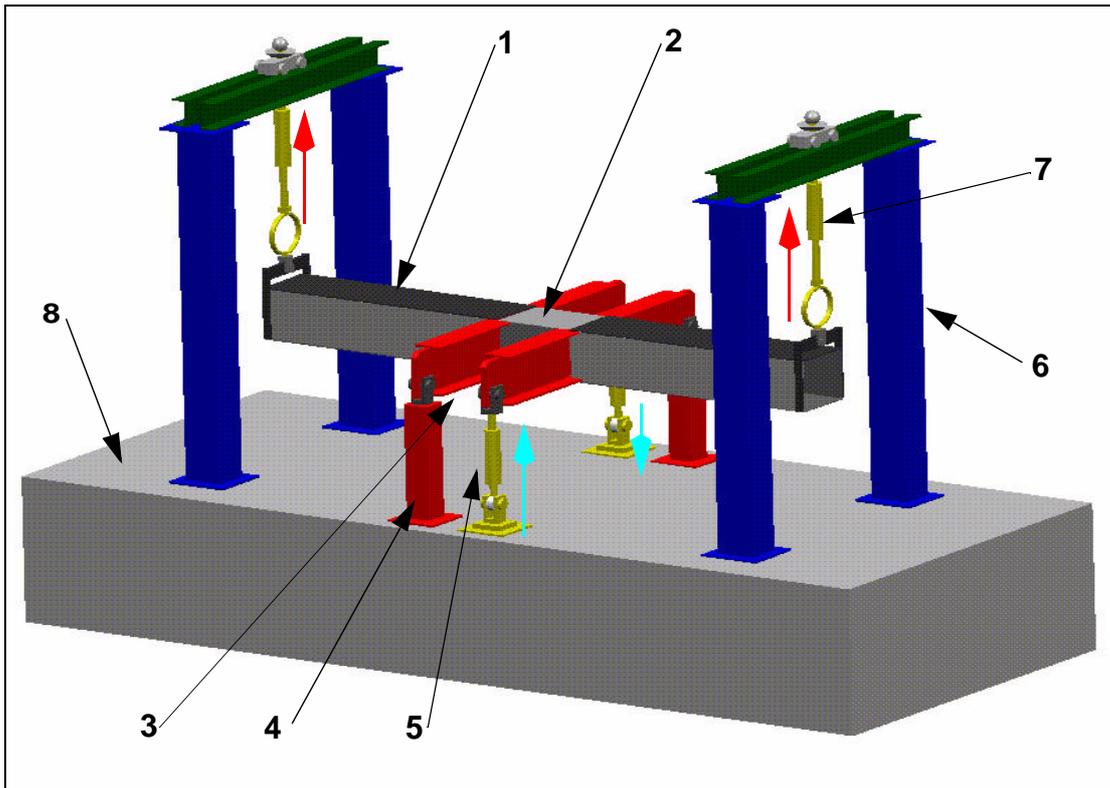


Figure N° 3-2 : Montage d'essai.

Le montage d'essai se décompose en un caisson (1) en alliage d'aluminium et deux poutres en I profil IPN traversantes (3). L'éprouvette technologique (2) en carbone est boulonnée sur la partie centrale de la face supérieure (voir aussi Figure N° 3-10). Le montage est fixé aux extrémités des deux IPN via deux rotules sur deux socles (4). Les deux autres extrémités des IPN (3) sont rotulées aux vérins de torsion (5). Deux potences (6) supportent les vérins de flexion (7) dont l'extrémité de tige est raccordée aux extrémités du caisson (2). L'ensemble repose sur un marbre (8) existant au Laboratoire Structures.

Lorsque les vérins (7) exercent un effort vertical F vers le haut, le caisson est soumis à de la **flexion 4 points** et la zone centrale entre les deux IPN (3) à de la flexion pure. En conséquence l'éprouvette qui forme la face supérieure du caisson central sera soumise à de la **compression** (*Figure N° 3-3*).

Lorsque les vérins (5) exercent un effort vertical T , la partie centrale du caisson est sou-

mise à de la **torsion** introduite par les deux IPN (3), en conséquence l'éprouvette qui forme la face supérieure du caisson central sera soumise à du **cisaillement** (Figure N° 3-3).

Lorsque l'on actionne simultanément les vérins, l'éprouvette sera soumise à un chargement **combiné** compression/cisaillement.

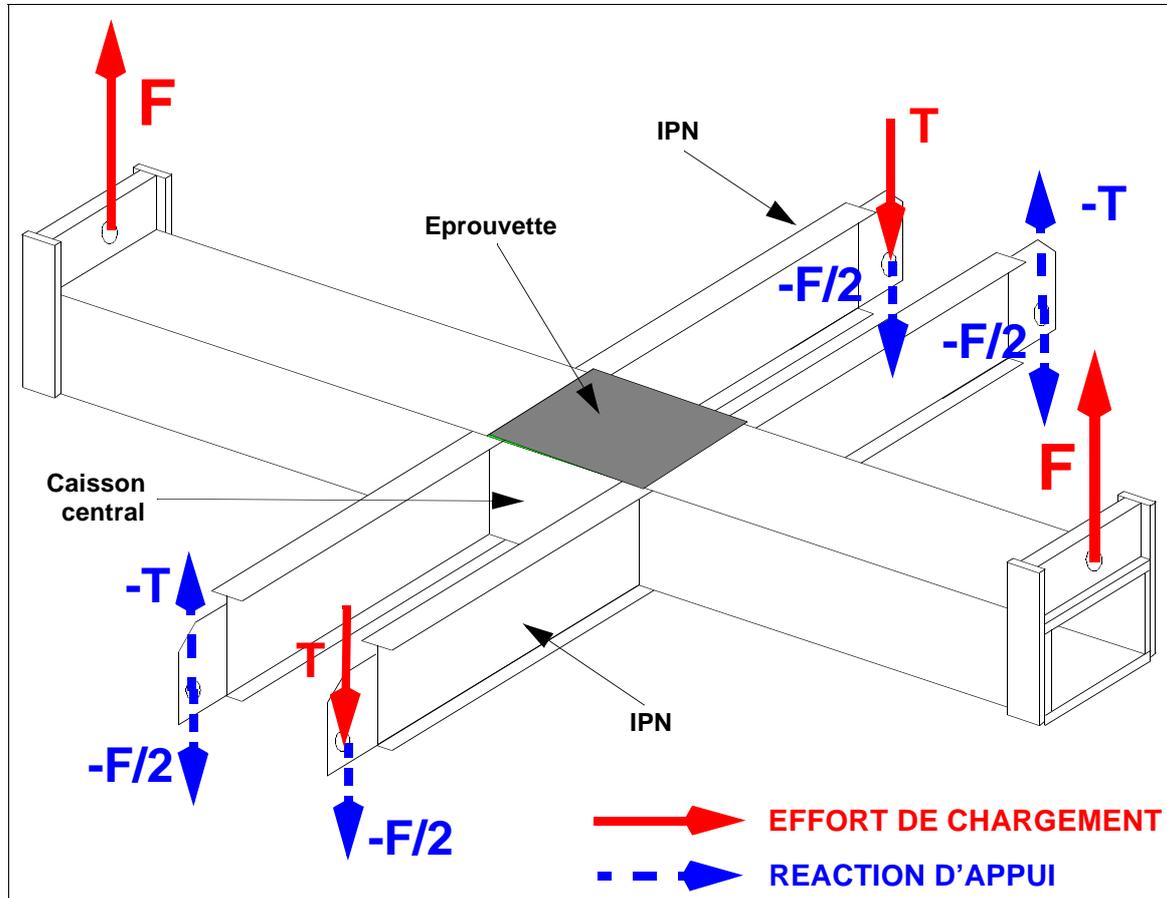


Figure N° 3-3 : Mode de chargement du caisson en flexion et torsion.

On a ainsi simulé le mode de travail des poutres de queue d'hélicoptère qui sont soumises essentiellement à de la flexion lors de ressources et d'atterrissages durs et à de la torsion et de la flexion causées par le rotor anti-couple.

III.2 - RÉALISATION ET MISE EN OEUVRE.

III.2.1 - CONCEPTION GÉNÉRALE ET FABRICATION.

PRÉAMBULE.

De la phase d'avant-projet à la définition finale (Figure N° 3-4) et à la mise au point, la réalisation de la machine d'essai a nécessité une somme de travail tant du point de vue de la conception que de la fabrication ou de l'assemblage dont il n'est ni utile ni possible de

rendre compte dans ce paragraphe. Seules les étapes essentielles de la réalisation pratique seront présentées, à savoir :

- Les critères de prédimensionnement.
- Les conclusions de l'analyse éléments finis linéaires.
- La validation numérique du concept.
- La fabrication.
- Le système de mise en charge.

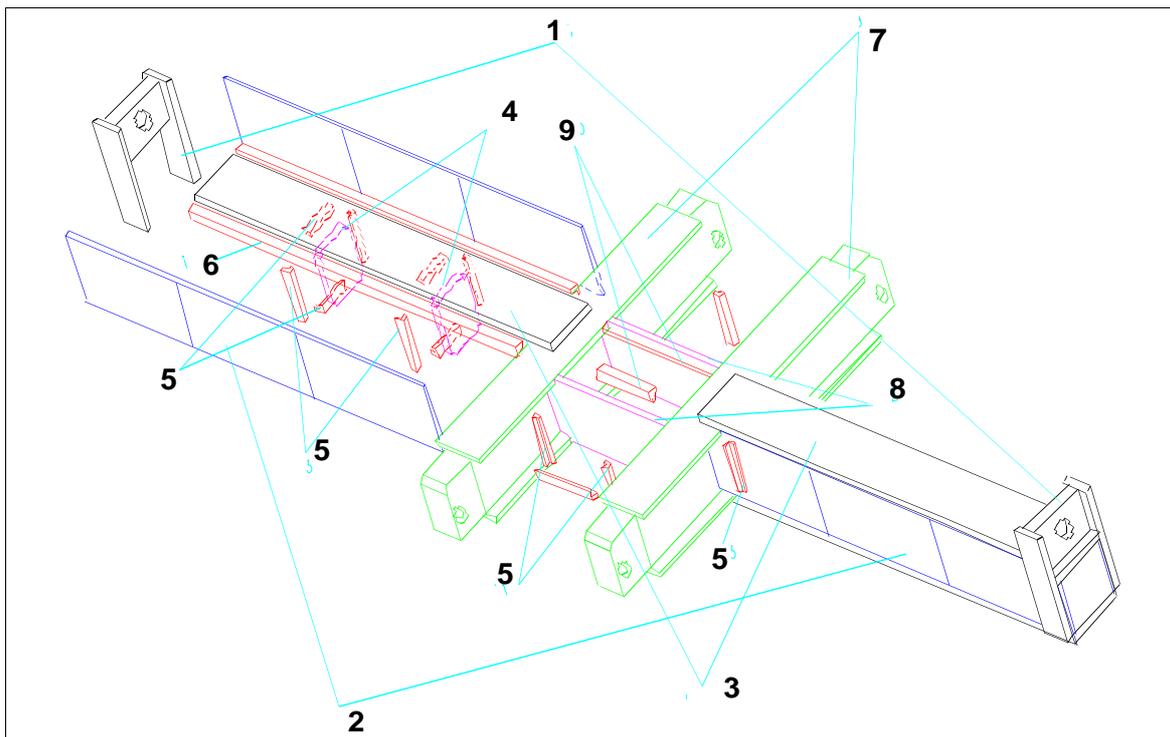


Figure N° 3-4 : Vue éclatée de la définition finale

Légende de la (Figure N° 3-4) :

- 1: Ferrures de flexion (Acier 25CD4S).
- 2: Flancs latéraux caissons (en trois parties) (Alu 2024).
- 3: Semelle supérieure caisson (Acier E24).
- 4: Plaques anti-déversement (Alu 2024).
- 5: Cornières (Alu AGS).
- 6: Cornières (Alu 2024).
- 7: IPN(E24) + Ferrures d'extrémité soudées (25CD4S).
- 8: Flancs latéraux caisson central (Alu 5083 ou Acier E24).
- 9: Cornières fixation éprouvette (Alu 2024).

PRÉ-DIMENSIONNEMENT.

Les dimensions générales du montage sont un compromis entre :

- ⇒ Les contraintes d'encombrement général données par les dimensions du marbre (8) (Figure N° 3-2).
- ⇒ La taille de l'éprouvette, donc sa résistance.
- ⇒ Les efforts fournis par les vérins et les bras de levier des moments de flexion et de torsion.

Trois types de sandwichs à tester ont été proposés par Eurocopter. Le critère de Hill de rupture du premier pli a été utilisé pour déterminer les flux à rupture en cisaillement et compression. Cette démarche est supposée être conservative. Les charges exercées par les vérins ont été fixées puis les bras de levier et les dimensions générales du montage ont pu être calculés. La longueur du caisson obtenue est de 2400 mm, sa section de 248 x 220 mm. Les IPN ont une longueur de 1170 mm entre les points d'accrochage.

La conception générale de l'éprouvette est fournie Figure N° 3-5 (Voir aussi les photos en annexe A2). Elle comporte une zone centrale sandwich dissymétrique raccordée à une zone monolithique par un arrêt de nida. L'éprouvette est boulonnée au montage. Le dimensionnement des fixations a fait appel à l'expérience d'Eurocopter mais d'autres règles plus conservatives sont disponibles [Gay 1990, Chap 6].

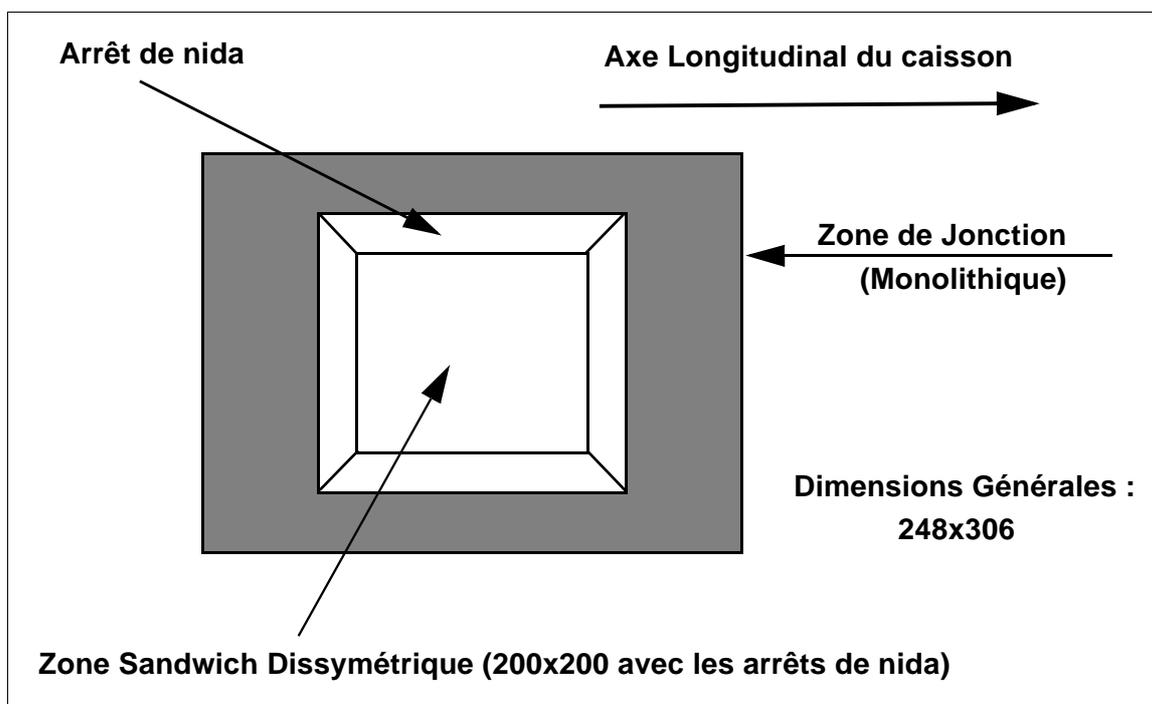


Figure N° 3-5 : Vue de dessus de l'éprouvette.

Le caisson central et l'éprouvette ont été percés par le même montage usiné au Laboratoire ce qui est censé faciliter la fixation.

Le pré-dimensionnement des différentes sections et liaisons a été réalisé de manière classique en utilisant les formules de la R.D.M., les abaques ESDU pour le calcul des charges critiques de flambage et les règles de dimensionnement toujours utilisées en construction aéronautique [Valat, 1950]. Un coefficient de sécurité standard de 2 utilisé en construction mécanique classique a été appliqué dans les zones d'introduction des efforts. De ce point de vue, l'étude éléments finis linéaires a juste servie de validation.

Les points d'accrochage des IPN ont été placés au niveau de la ligne neutre du caisson central afin de minimiser les effets de flexion locaux.

Les matériaux retenus pour ce montage sont les moins onéreux : acier E24 pour les IPN et les semelles supérieures du caisson, alliage d'aluminium 2024 (A-U4G1) "Duralumin" pour les autres faces. Seules les ferrures de reprise des efforts sont en acier Chrome-Molybdène (25CD4S) car soumises à des concentrations des contraintes.

Pour les faces latérales du caisson central, l'option initiale d'opter pour des stratifiés carbone ou fibre de verre n'a pas été finalement retenue. La simplicité de réalisation et la fiabilité de panneaux alu raidis ont été préférés. Leur plastification locale est tolérée moyennant un remplacement régulier.

ÉTUDE ÉLÉMENTS FINIS LINÉAIRES.

Cette étude a permis de vérifier le prédimensionnement du montage, de tester et d'améliorer les choix de conception.

Par exemple, une conception avec des bras triangulaires avait été initialement proposée. L'étude a montré que celle-ci génère une discontinuité des flux d'efforts au niveau des jonctions avec le caisson central. Elle s'avère de plus délicate à réaliser. Pour éliminer ces problèmes, une nouvelle conception avec des bras traversants horizontaux à base d'IPN a été adoptée (*ref 7, Figure N° 3-4*). Pour un coût inférieur, la fabrication est grandement simplifiée et le mode d'introduction des efforts est meilleur.

Des surcontraintes sont aussi apparues dans les semelles supérieures des caissons au niveau de la jonction avec les IPN. Ces contraintes sont susceptibles de provoquer un flambage en compression de ces semelles ou le déversement du caisson. En conséquence, pour rétablir des marges suffisantes, les caissons ont été raidis (*ref 4 Figure N° 3-4*) et l'alliage d'aluminium initialement retenu pour les semelles supérieures (*ref 3 Figure N° 3-4*) a été changé pour de l'acier.

Un point important de l'étude a porté sur la maîtrise du passage des efforts du montage

à l'éprouvette. En effet, à l'instar des essais sur machine de traction universelle, la première idée consiste à vouloir minimiser l'influence du montage sur la plaque et par conséquent avoir un champ de contrainte "pur". On cherche donc à minimiser les rigidités des supports de la plaque. Or ceci s'avère faux pour deux raisons :

⇒ **Il ne faut pas confondre essais matériaux et essais structures.**

Dans les essais de caractérisation des matériaux, on s'attache à obtenir des contraintes quasi-uniformes dans la zone centrale de l'éprouvette. Or, sur une plaque et a fortiori sur une plaque boulonnée, un champ de contrainte uniforme est *impossible* à obtenir. La non-uniformité est la conséquence logique du concept du montage qui veut reproduire de la manière la plus fidèle les sollicitations des structures sandwichs dissymétriques dans la réalité. La conception d'un tel montage doit s'attacher à minimiser le taux de contraintes secondaires tout en sachant qu'elles sont impossibles à supprimer, en particulier aux bords. De toute façon, la technologie développée par Eurocopter prend en compte ce phénomène pour prévenir toute rupture locale.

⇒ **Il faut minimiser les effets de flexion locaux.**

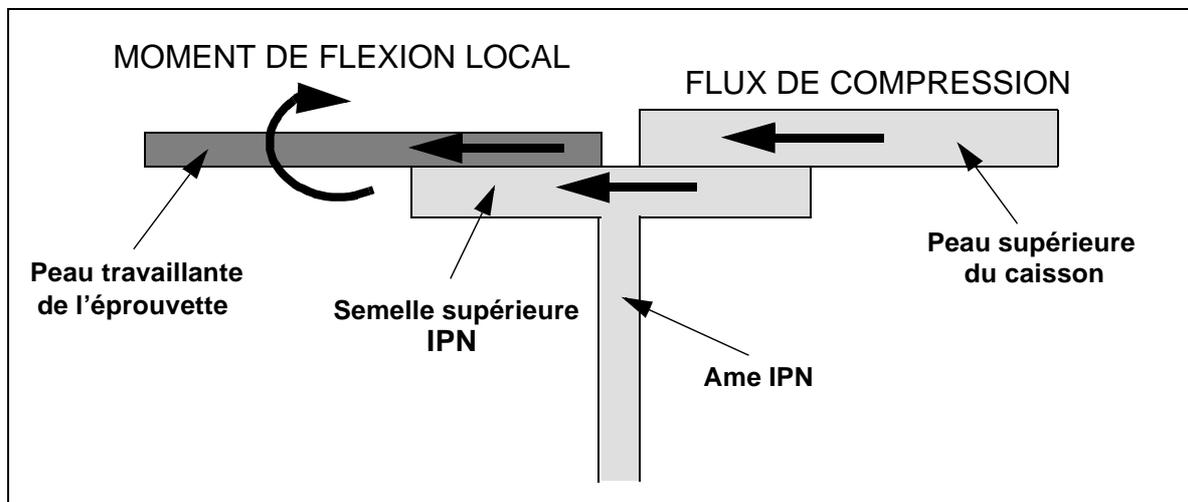


Figure N° 3-6 : Cheminement du flux de compression.

Le cheminement des efforts se fait de la peau supérieure du caisson d'introduction des efforts à la peau travaillante de l'éprouvette via la semelle supérieure des IPN (Figure N° 3-6). Bien que la modélisation éléments finis réalisée ne soit pas suffisamment détaillée pour décrire le passage exact des efforts (matage des alésages, part de l'adhérence, influence des jeux et du serrage des vis), elle permet toutefois de mettre en évidence les effets du décalage entre la semelle de l'IPN et les peaux qui crée un moment de flexion local.

Lorsque l'on cherche à dimensionner l'épaisseur de la semelle, le premier réflexe est de

chercher l'épaisseur la plus faible pour minimiser les effets de bords sur l'éprouvette. Or minimiser la rigidité du support a un effet désastreux ici car le moment de flexion induit par le cheminement des efforts crée une déformation de la semelle très importante qui génère à son tour un champ des contraintes très perturbé dans l'éprouvette. La solution qui permet d'avoir un champ des contraintes acceptable dans l'éprouvette consiste à choisir une semelle très rigide en acier d'épaisseur 8 mm. Le moment de flexion local est repris dans l'épaisseur de la semelle ce qui permet de supprimer les surcontraintes observées dans l'éprouvette.

VALIDATION NUMÉRIQUE DU CONCEPT.

La conception ayant pu être figée globalement grâce à une première étude, un modèle E.F. quasi-définitif du montage a été créé et a pu servir à démontrer numériquement la validité du concept d'essai (*Figure N° 3-7*).

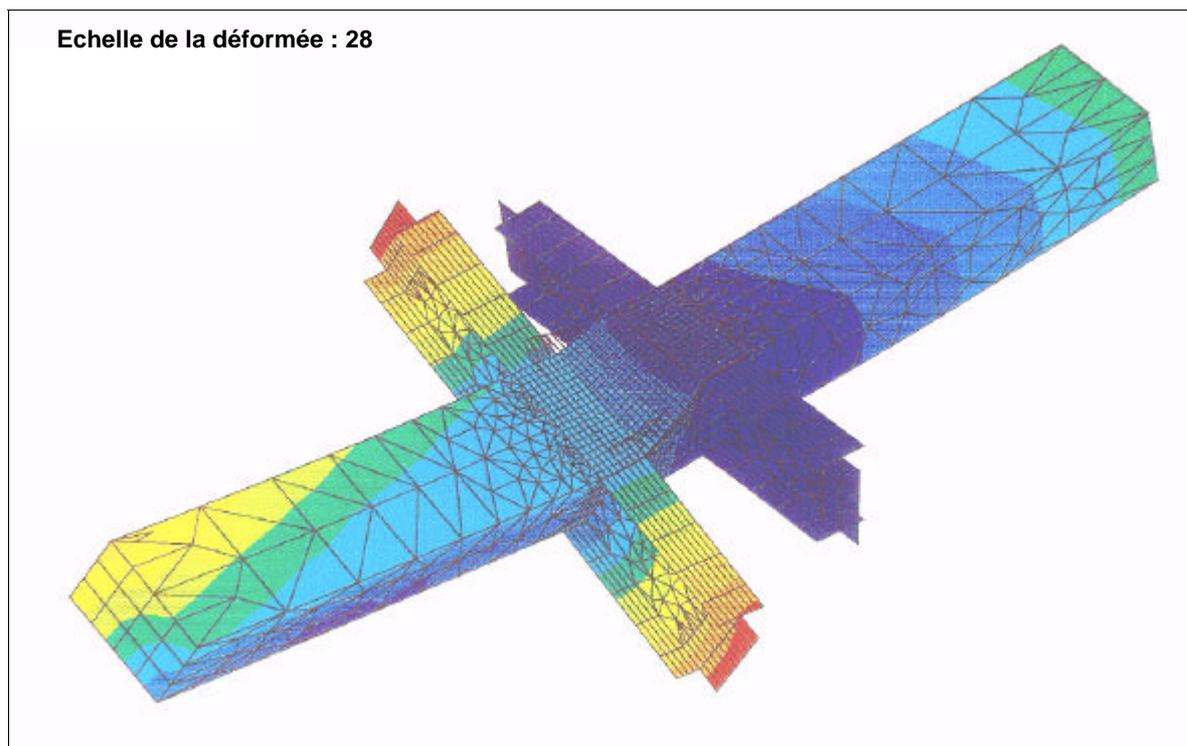


Figure N° 3-7 : Déformée du montage sous sollicitations combinées (D'après [Ybert 1994]).

Comme dans le domaine linéaire les contraintes sous sollicitations combinées peuvent être obtenues par superposition, seuls les champs obtenus en compression et cisaillement sont présentés. Les simulations numériques ont été effectuées pour les trois drapages différents de peau travaillante proposés par Eurocopter. Les résultats des simulations sont synthétisés *Figure N° 3-8* et *Figure N° 3-9* où l'on présente le taux de contraintes secondaires par rapport à la contrainte principale.

Résultats de l'essai numérique de compression :

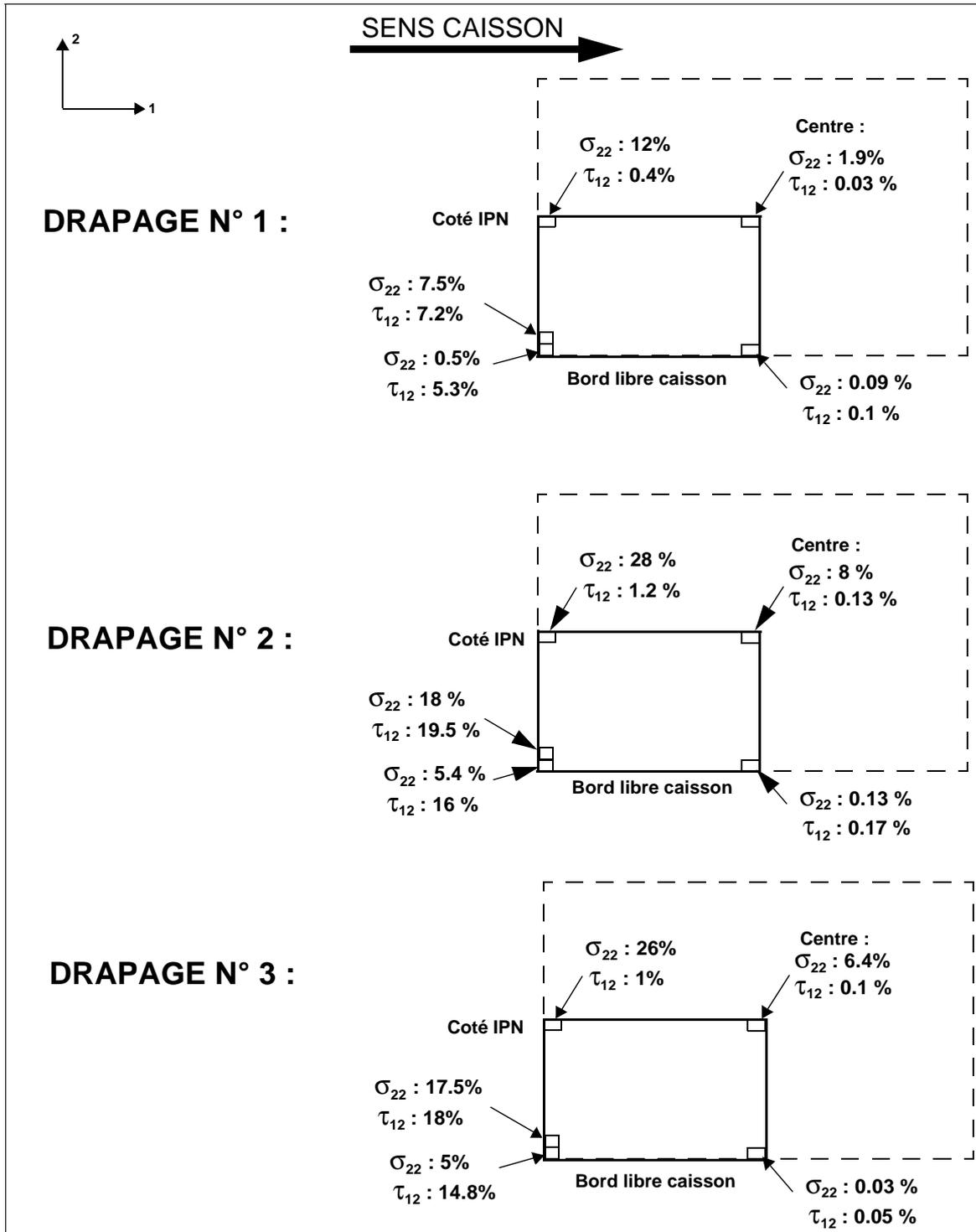


Figure N° 3-8 : Contraintes secondaires dans l'essai numérique de compression.

La variation de la contrainte σ_{11} sur la plaque n'excède pas 10%. Le taux local de contraintes secondaires coté talon reste inférieur à 26% et généralement à moins de 20%. Le taux de contraintes secondaires au centre de la plaque est toujours inférieur à 8%. On constate aussi une concentration des contraintes en τ_{12} coté talon et bord libre (en bas à gauche).

Résultats de l'essai numérique de cisaillement :

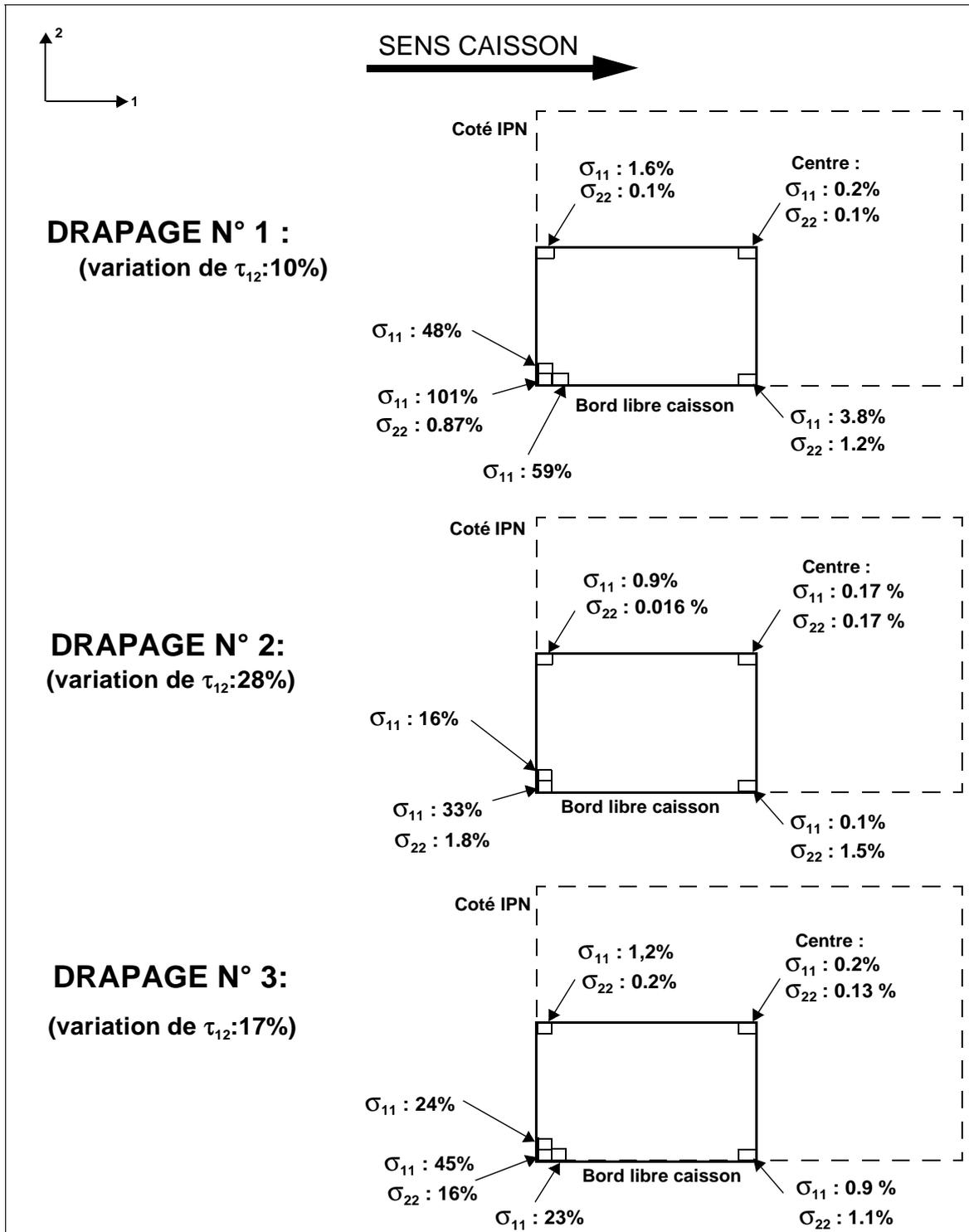


Figure N° 3-9 : Contraintes secondaires dans l'essai numérique de cisaillement.

La qualité des essais est bonne pour le drapage 1, médiocre pour le drapage 2 et moyenne pour le drapage 3. Un phénomène de concentration des contraintes apparaît en coin, vraisemblablement dû à la rigidité supérieure de la zone monolithique. Toutefois, comme la zone centrale n'est pas perturbée et que la technologie d'Eurocopter prévient le risque de rupture localisée, ce phénomène n'est pas préjudiciable à la réussite de l'essai.

Les essais numériques montrent que :

" Les essais sont meilleurs lorsque l'on teste les drapages selon leur destination technologique "

Le modèle E.F. permet de retrouver la sollicitation pour laquelle chacun des drapages a été choisi. Cette remarque s'inscrit dans la logique de ce type d'essai "structure". Il semble que la rigidité en torsion ou en flexion de l'ensemble caisson alu + éprouvette joue ici un rôle. Lorsque la rigidité de l'éprouvette est optimale pour la sollicitation exercée, les flux d'efforts se répartissent de manière homogène dans la peau travaillante. A contrario, lorsque la rigidité de l'éprouvette est plus faible, les flux d'efforts chargent préférentiellement les zones du caisson qui sont plus rigides, générant un champ des contraintes perturbé dans la peau travaillante.

En conclusion, cette étude éléments finis linéaires a permis de faire évoluer l'avant-projet vers une meilleure conception. Il a été démontré numériquement que le concept d'essai est viable ce qui était un préalable. Une meilleure compréhension de la philosophie de ce type d'essai "structure" a aussi été dégagée.

FABRICATION.

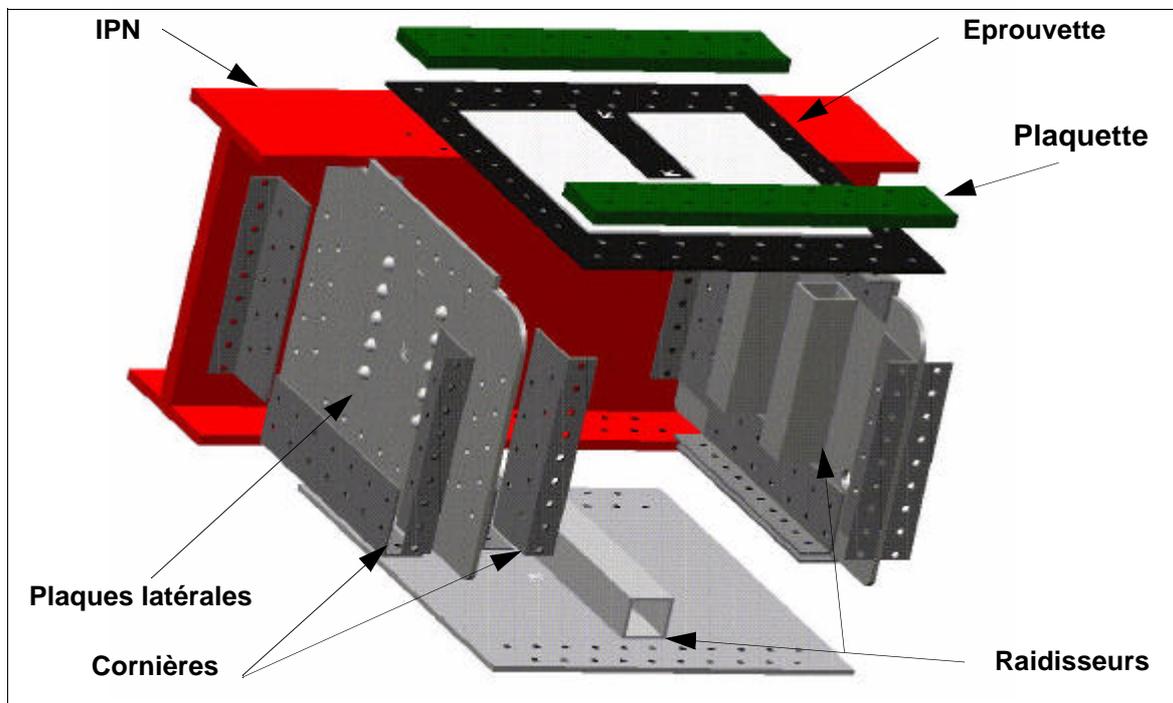


Figure N° 3-10 : Conception et assemblage du caisson central.

La réalisation pratique du montage a été entièrement effectuée au Laboratoire Structures de Sup'Aéro : commande des bruts, usinages, soudages et assemblages. Le détail de la

conception du caisson central est visible *Figure N° 3-10*. On remarquera le montage éclissé des flancs latéraux typique de la construction aéronautique. L'ensemble a bénéficié du savoir-faire et de la compétence des personnels du laboratoire absolument indispensables pour passer du papier à la réalité. Quelques points importants de cette réalisation ont été :

- Usinage des IPN et soudage des ferrures d'extrémité.
- Perçage d'environ 3400 alésages.
- Montage de 1100 vis d=5mm !
- Problèmes d'interférences vis/cornières au montage.
- Problème de fermeture des caissons avec des vis prisonnières.
- Dégauchissage du montage.
- Conception des supports vérins sur le portique.

L'ensemble fini est visible *Figure N° 3-11* et certains détails de la réalisation sont présentés dans l'annexe A2 "Documents photographiques".

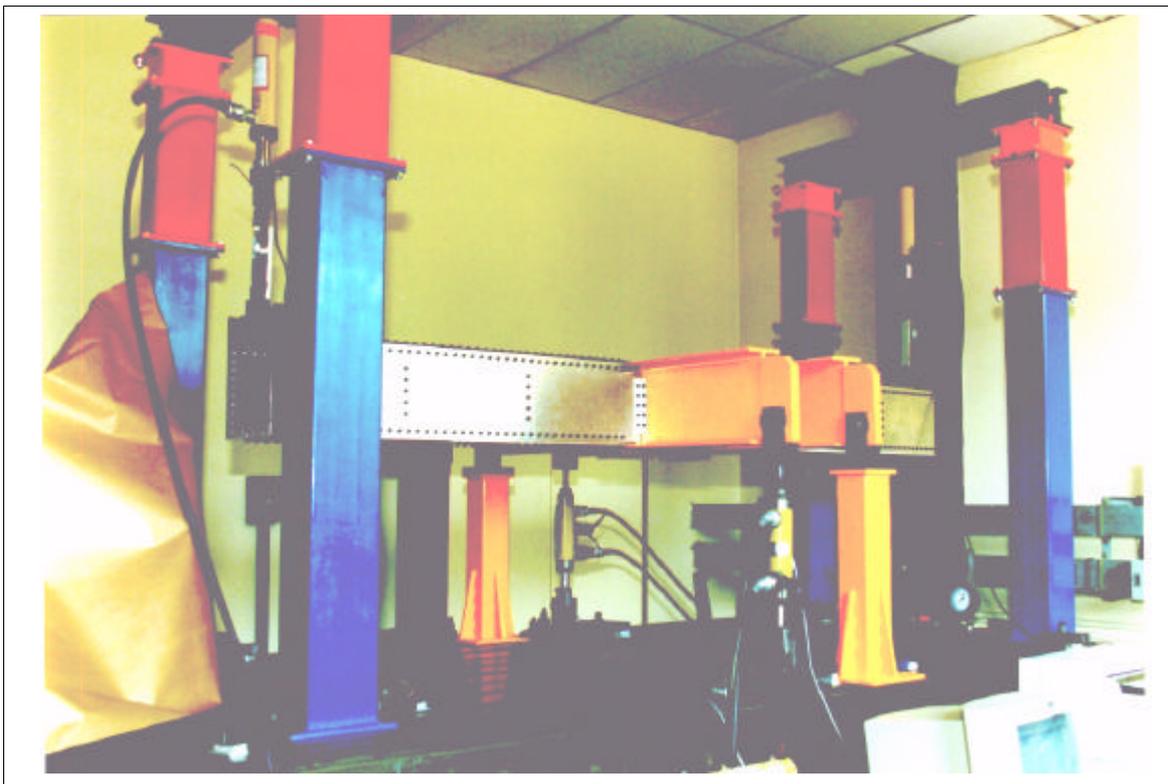


Figure N° 3-11 : Vue générale du montage d'essai.

SYSTÈME DE MISE EN CHARGE.

Le câblage est représenté *Figure N° 3-12*. Les vérins permettant d'appliquer un chargement de flexion sont du type simple effet (capacité : 10 tonnes), ceux permettant la torsion sont à double effet (capacité : 9 tonnes, voir Photo N° A2-1). L'alimentation se fait par deux

pompes à main comportant un manomètre et un clapet anti-retour (Voir Photo N° A2-4).

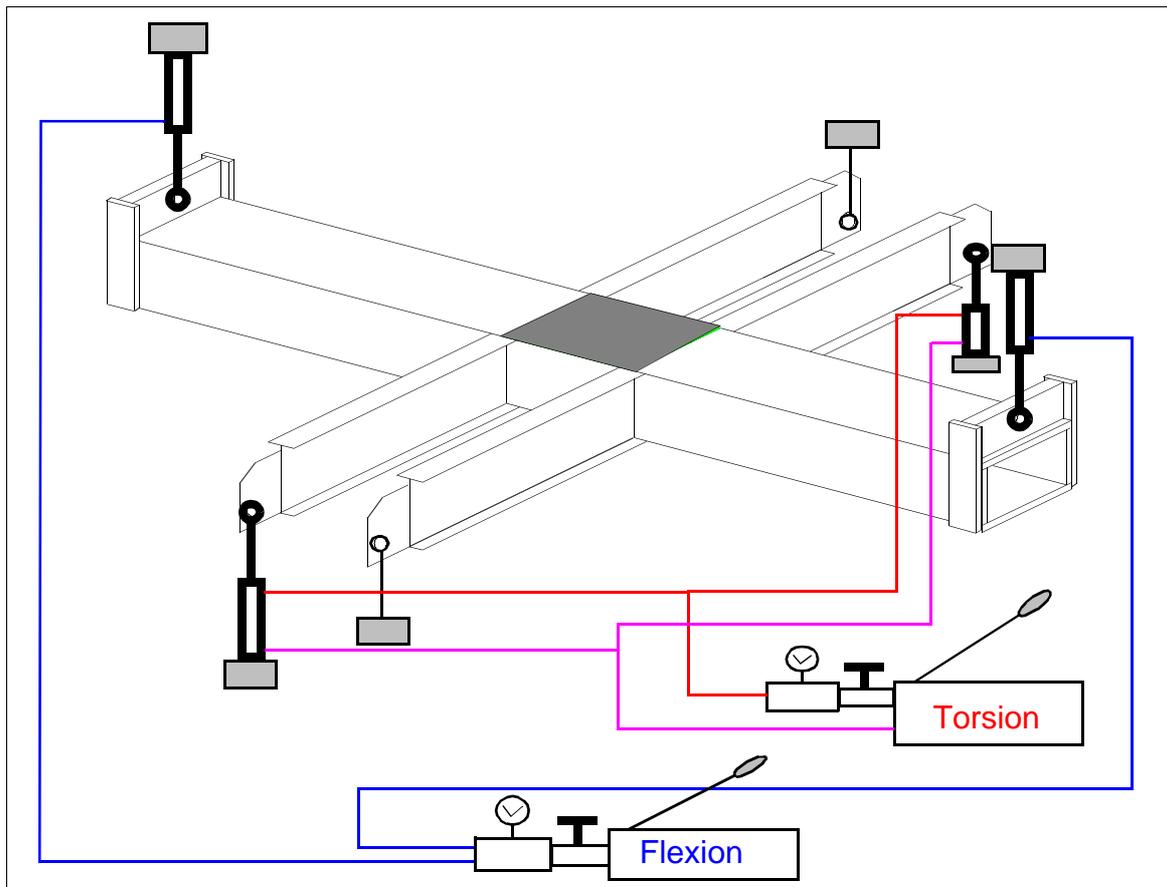


Figure N° 3-12 : Système de mise en charge.

Ce type de solution :

- est d'un coût raisonnable et d'une mise en oeuvre simple.
- permet une adaptation instantanée de la charge appliquée à la résistance résiduelle du montage après la rupture explosive de la plaque. La ruine complète de l'ensemble est évitée et les éprouvettes peuvent être sauvegardées pour analyse.
- nécessite une mise en charge par paliers successifs et non en continu.

Un asservissement, d'une complexité et d'un coût supérieur, n'est jamais assez rapide pour réaliser l'adaptation après rupture et a donc été exclu pour notre étude. Cette solution a par contre générée plusieurs phénomènes liés à la technologie hydraulique :

- Lors des charges élevées, l'étanchéité imparfaite du clapet anti-retour provoque une *baisse* de la charge durant le temps de mesure (de 5 à 12s). On observe une différence entre la dernière et la première mesure de l'ordre de 500 μ déf pour environ 12000 μ déf de valeur nominale. Il convient d'en tenir compte lors du traitement des données et de l'interprétation des résultats.

- Lors des faibles charges, la pression est insuffisante dans le circuit pour que les joints de pistons des vérins (prévus pour 700bars) fonctionnent correctement ce qui occasionne aussi une dérive.
- Le chargement par action manuelle sur les leviers des vérins est par nature imprécis mais la force est correctement mesurée par des capteurs intercalés entre les tiges de vérin et les rotules.
- Pour chaque palier en flexion, il est nécessaire d'effectuer un ajustement de la charge exercée sur les vérins de torsion.
- Les vérins bien que câblés deux par deux ne génèrent pas des efforts strictement identiques. La différence est d'environ 5%.

En fait, il faut vérifier à l'aide des capteurs de force des vérins de torsion que l'équilibre statique du montage est conforme à de la flexion 4 points (*Figure N° 3-3*). Dans le cas contraire, cela signifie qu'un moment de torsion parasite est introduit dans le montage en même temps que le moment de flexion et il convient d'effectuer un ajustement jusqu'à **-F/2**. Si ce type de technologie était développée pour des essais en fatigue, un asservissement en effort pourrait régler la question.

III.2.2 - VALIDATION EXPÉRIMENTALE.

Une fois le montage réalisé, la chaîne de mesure installée, le câblage hydraulique opérationnel, la viabilité du montage a été vérifiée expérimentalement de deux manières : quantitativement par une plaque en duralumin équipée de jauges de déformation et installée à la place de l'éprouvette sandwich, qualitativement par une étude photoélastique sur les premières éprouvettes sandwiches. Le montage a été chargé en flexion puis en torsion.

RÉSULTATS EN FLEXION.

La contrainte attendue de compression σ_{11} est de 26 MPa au centre de la plaque (*Figure N° 3-13*). La variation de σ_{11} sur les points de mesures n'excède pas 14% sauf pour la rosette en bas à gauche où l'on a un σ_{11} de 20,2 MPa. Le niveau des contraintes secondaires σ_{22} (compression dans le sens transverse) et τ_{12} (cisaillement) est de 6% au centre et de 12.3% sur les bords. Ces résultats sont du même ordre de grandeur que ceux obtenus par essai numérique et démontrent que globalement le montage est correct pour réaliser des essais de compression.

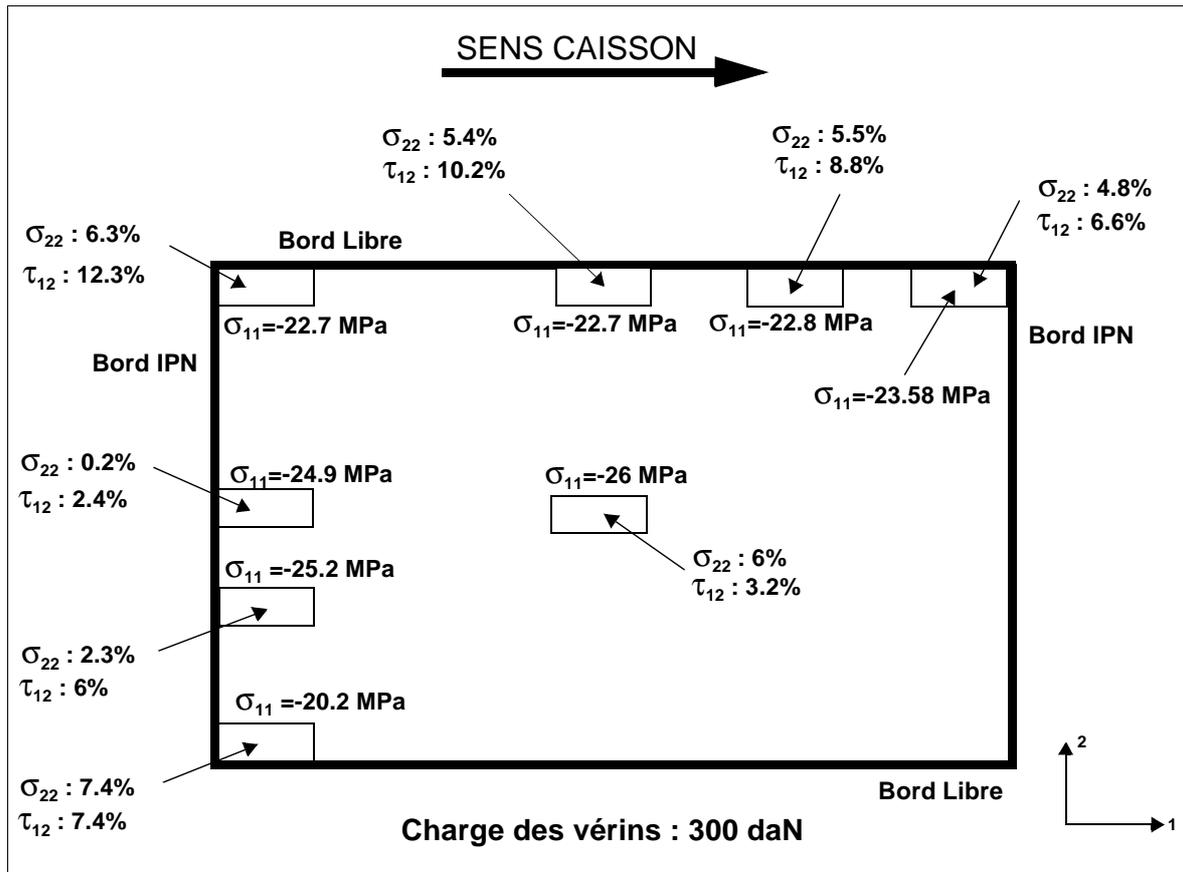


Figure N° 3-13 : Validation expérimentale du montage : essai de compression.

RÉSULTATS EN TORSION.

Les premiers essais en torsion du montage ont montré de très fortes surcontraintes locales et un taux de contraintes secondaires anormalement élevé dans toute la plaque. Celles-ci sont dues à la sollicitation asymétrique du bâti pendant l'essai de torsion qui provoque un déplacement hors de son plan des extrémités de la plaque coté vérins. Or naturellement, celle-ci a tendance à rester horizontale et à se décoller localement. Ce phénomène a été retrouvé en E.F. en relâchant localement les noeuds. La solution technologique à ce problème a consisté à rajouter des plaquettes acier très rigides d'épaisseur 10 mm rectifiées sur la face en contact avec l'éprouvette et percées des trous de fixations (Figure N° 3-10). Ces plaquettes obligent l'éprouvette à suivre le bâti et permettent de retrouver un champ de contraintes plus homogène.

Une fois cette modification installée, un essai de cisaillement a été effectué pour lequel la contrainte τ_{12} attendue est de 22 MPa au centre de la plaque (Figure N° 3-14). La variation de τ_{12} sur les points de mesures n'excède pas 18%. Le niveau des contraintes secon-

dares σ_{11} et σ_{22} atteint 74% pour une mesure sur un coin. Toutefois, les valeurs fournies par les modélisations E.F. en plaque orthotrope atteignent elles aussi des niveaux importants (jusqu'à 101%) et le niveau des contraintes secondaires ne dépasse pas 14% au centre. En conclusion, ces résultats montrent que globalement le montage est correct pour réaliser des essais de cisaillement.

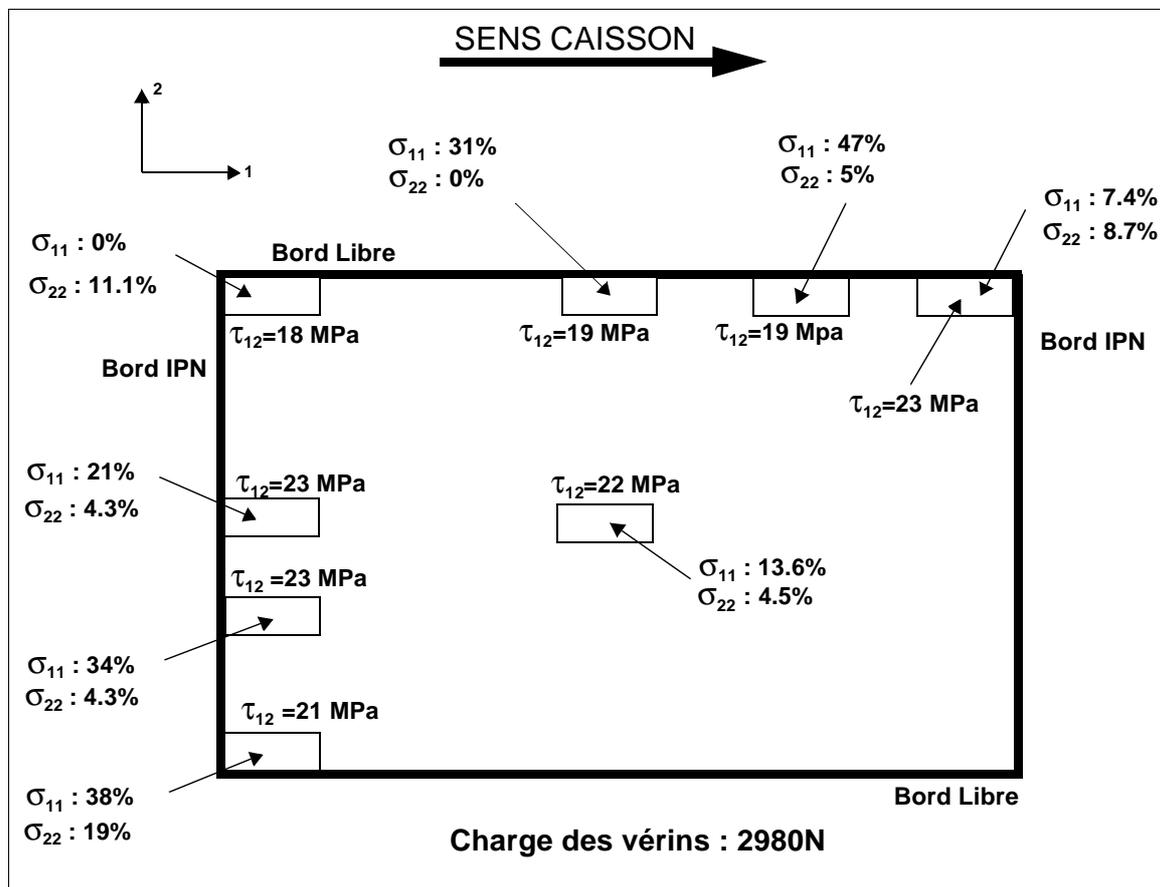


Figure N° 3-14 : Validation expérimentale du montage : essai de compression.

FIXATION DE L'ÉPROUVETTE SANDWICH.

Bien que la plaque en duralumin se soit montée sans problème et que les alésages aient tous été contre-perçés, le montage de la plaque sandwich s'est révélé délicat. En effet, comme celle-ci est très rigide en flexion, les défauts géométriques du montage (inclinaison relative et offset des IPN) n'ont pas pu être compensés par la souplesse de la plaque. Le serrage de l'éprouvette sur le montage génère alors des surcontraintes importantes dans toute la peau travaillante.

La compensation de ces défauts géométriques dus à l'usinage et l'assemblage a été réalisée par dépose de résine micro-ballons sur les IPN et les cornières latérales tout en serrant la plaque légèrement. La fixation de la plaque sur le montage ne génère alors plus

que des déformations de l'ordre de $300 \mu\text{def}$ au centre (essai de cisaillement n°2) soit moins de 3% de la déformation à rupture. Un inconvénient est que la résine s'introduit dans les taraudages et colle les vis ce qui a rendu le démontage de l'éprouvette parfois délicat. Le problème pourrait être résolu par l'utilisation de goujons.

ETUDE PHOTOELASTIQUE.

La photoélasticité n'a été utilisée que de manière qualitative dans la phase de mise au point du montage. La Figure N° 3-15 montre un cliché obtenu pour une charge faible. La couleur uniforme sur la zone d'essai montre que les déformations donc les contraintes sont quasi-uniformes et que l'influence du boulonnage est limitée à la zone monolithique.

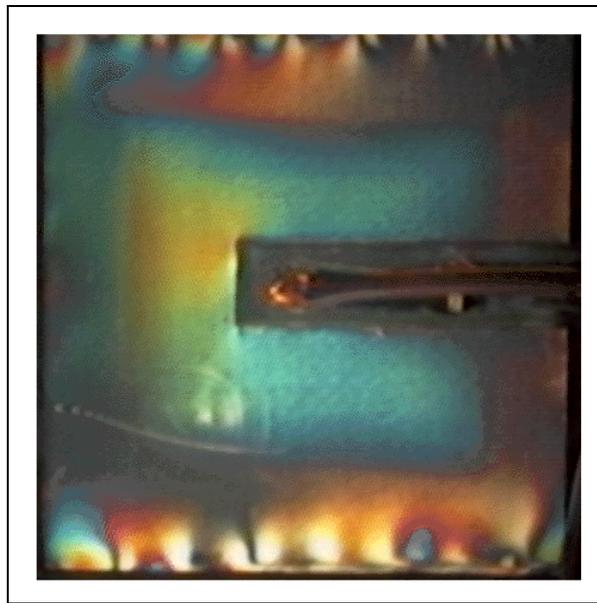


Figure N° 3-15 : Etude photoélastique : champs en compression.

III.3 - COMPORTEMENT DES PLAQUES NON IMPACTÉES.

III.3.1 - CHRONOLOGIE DES ESSAIS.

Deux séries de 3 plaques ont été testées. Les drapages de la zone sandwich dissymétrique pure sont identiques mais les géométries locales de la zone monolithique et de l'arrêt de nida sont adaptées aux 3 sollicitations grâce au savoir-faire d'Eurocopter. Deux essais statiques à rupture pour chaque sollicitation ont été réalisés. A posteriori, le premier de ces deux essais a toujours été un essai de mise au point. Par exemple, après la validation expé-

rimentale (cf Chap III-2-2), 6 montées en charge ont été nécessaires avant d'arriver à la rupture de la première plaque en compression :

- 1^{ère} montée en charge jusqu'à 613 daN (effort des vérins de flexion).
- 2^{ème} montée en charge jusqu'à 2500 daN avec rééquilibrage statique du montage par les vérins de torsion (cf *Figure N° 3-3*).
- 3^{ème} montée en charge jusqu'à 3500 daN, rupture d'une ferrure de flexion.
- 4^{ème} montée en charge jusqu'à 4770 daN, pas de rupture de la plaque, vérins ayant atteints leur capacité maximale (donnée pour 5000 daN), à changer par des vérins de 10 000 daN. Présence de petits bruits secs (ruptures de fibres ?) à partir de 4300 daN.
- 5^{ème} montée en charge jusqu'à 5277 daN : rupture du revêtement photoélastique.
- 6^{ème} montée en charge jusqu'à 5050 daN : rupture explosive de la plaque, absence de petits bruits secs ce qui laisse à penser qu'ils étaient dus au collage du revêtement photoélastique.

Le concept d'essai s'est donc révélé délicat à mettre en oeuvre. Le nombre de paramètres à maîtriser dans ce type d'essai "structures" est plus important ce qui nécessite un temps de mise au point supérieur et l'acquisition d'un certain savoir-faire difficilement descriptible dans ce paragraphe. Le bilan chronologique des essais est le suivant :

- Essai n°1 : Compression 1.
Mise au point générale. Rupture correcte.
- Essai n°2 : Combinées 1.
Rupture correcte mais mauvaise maîtrise de la montée en charge.
- Essai n°3 : Combinées 2.
Déroulement correct de l'essai.
- Essai n°4 : Compression 2.
Déroulement correct de l'essai.
- Essai n°5 : Cisaillement 1.
Rupture dans la zone monolithique.
- Essai n°6 : Cisaillement 2.
Déroulement correct de l'essai après changement des plaques latérales.

III.3.2 - ANALYSE DU CHARGEMENT.

Afin de savoir si le chargement a été correctement réalisé et si l'éprouvette subit réellement la sollicitation espérée, l'indicateur retenu est l'évolution de la direction principale au centre de la peau travaillante. Les mesures pour les essais sous sollicitations simples sont présentées *Figure N° 3-16* et *Figure N° 3-17*.

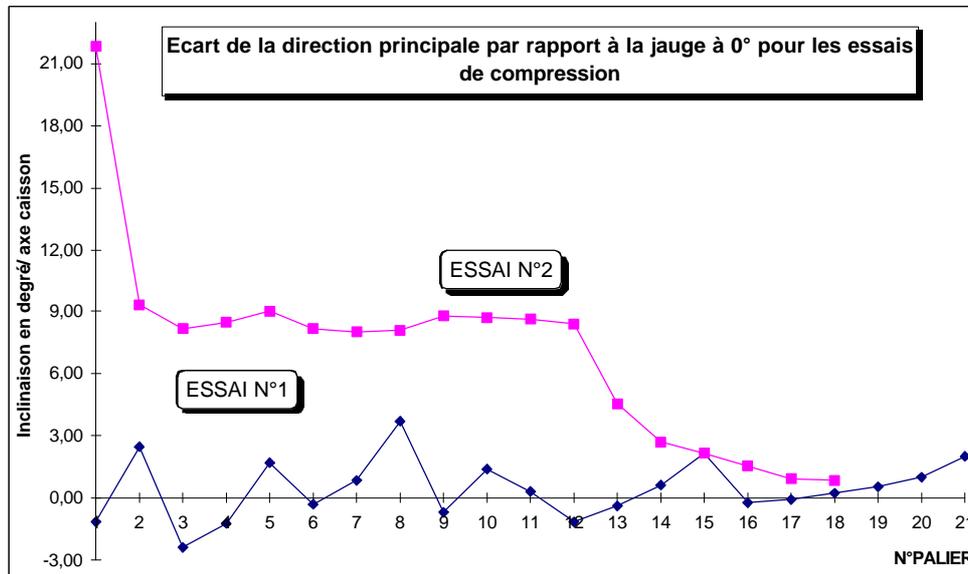


Figure N° 3-16 : Evolution de la direction principale au centre de la peau travaillante, essai de compression.

En compression, pour l'essai n°1, les valeurs sont proches de 0°, la contrainte au centre de l'éprouvette d'essai est bien de la compression pure. Pour l'essai n°2, on a un écart de 8° jusqu'au palier 12.

Pour les essais de cisaillement, les résultats donnés par la rosette au centre de la peau travaillante ont été dépouillés et comparés à la direction principale théorique (-45°). Pour le premier essai, on constate que la direction principale est conforme avec un écart inférieur à 2°. Par contre le deuxième essai montre une dissymétrie plus importante avec un écart qui se stabilise à 5°. Il existe donc une différence qui ne peut être considérée comme négligeable.

Ce désalignement peut avoir plusieurs origines qui peuvent se cumuler :

- Il n'existe aucune référence, ni sur la plaque, ni sur le montage.
- Il y a un désalignement des jauges du au collage de celles-ci (tolérance < 3°).
- Il existe une dissymétrie d'environ 5% des efforts au niveau des vérins de chargement.
- Pour l'essai de compression, une compensation imparfaite de la flexion introduit de la torsion ce qui perturbe le champ des déformations.

Ainsi, ces courbes ne peuvent constituer qu'un *bon indicateur* de la qualité de l'essai réalisé car la dispersion de toutes les causes énumérées peut être estimée à 5-10 °.

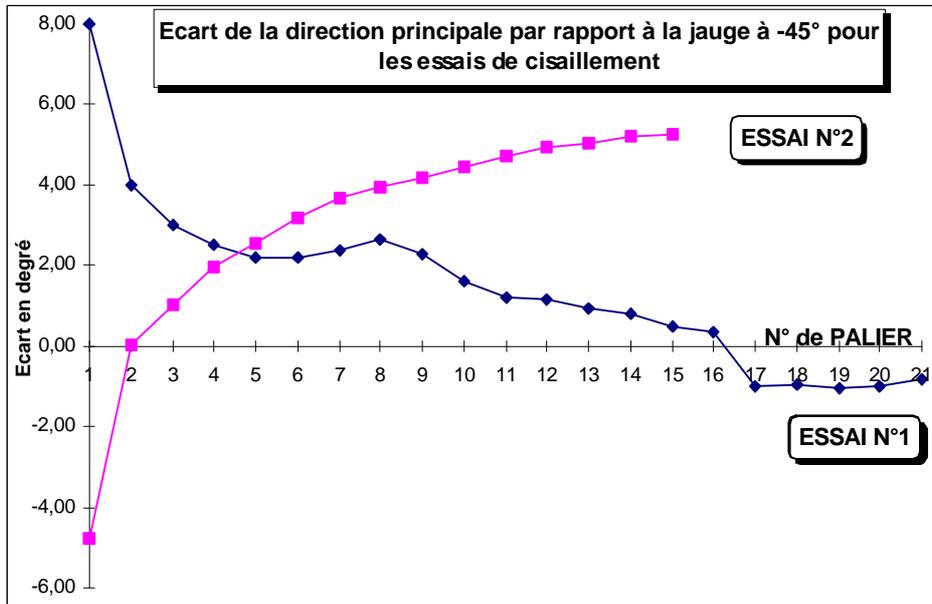


Figure N° 3-17 : Evolution de la direction principale au centre de la peau travaillante par rapport à la direction théorique (-45°).

Pour les essais sous sollicitations combinées, l'analyse permet de bien suivre l'évolution des chargements en compression et cisaillement de l'éprouvette. Dans l'essai n°1, il a été choisi de charger d'abord en torsion puis en flexion. Dans l'essai n°2, l'option inverse, flexion puis torsion a été mise en oeuvre. La valeur de seuil a été fixée à 5000 μ def en cisaillement et à 8000 μ def en compression.

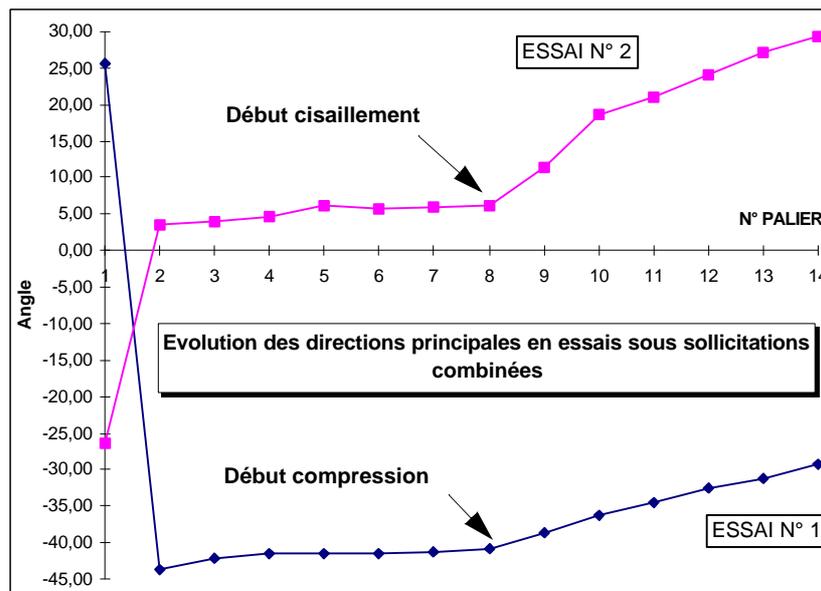


Figure N° 3-18 : Evolution de la direction principale au centre de la peau travaillante.

La rupture de pente observée correspond au début de la sollicitation combinée. Dans l'essai n°2, cette rupture est beaucoup plus franche, avec une valeur de seuil mieux choisie.

On peut d'ailleurs tracer une autre courbe représentative du chargement sous sollicitations combinées directement à partir des charges des vérins (*Figure N° 3-19*). La première partie de la courbe montre bien que le montage est équilibré lors de la montée en flexion. Puis le déséquilibre croît linéairement lors de la montée en torsion. Le chargement en flexion n'est pas rigoureusement constant dans la deuxième phase car il existe un couplage, ce qui a entraîné un réajustement.

En effet, le caisson d'introduction des efforts subit une rotation de solide du fait de la torsion du caisson central et de l'inclinaison des IPN. Cette rotation provoque un déplacement les points d'attache des vérins de flexion. Par réaction, les vérins introduisent une surcharge dans le montage.

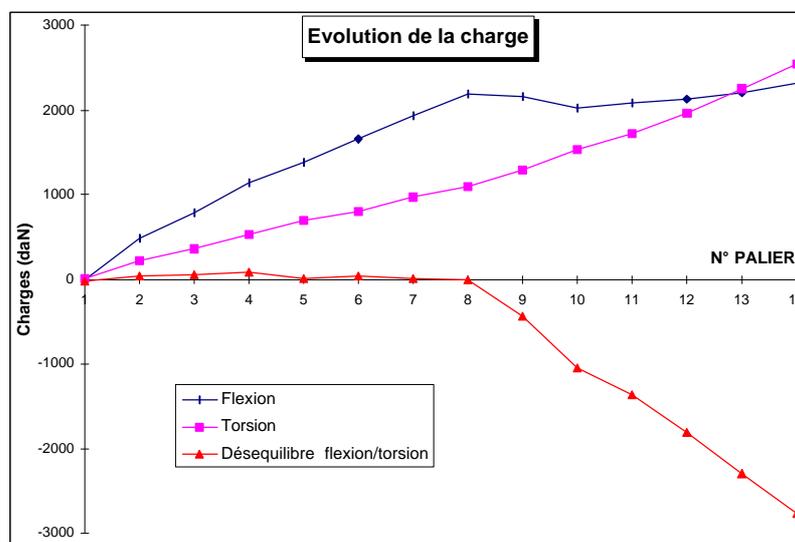


Figure N° 3-19 : Evolution de la charge des vérins de torsion et de flexion, essai n°2.

L'analyse du chargement effectuée par l'étude des directions principales au centre de la peau travaillante de l'éprouvette montre que, globalement, l'état de contrainte est conforme aux sollicitations attendues. Toutefois, des dispersions sont mises en évidence dont l'origine majeure semble être un désalignement entre l'éprouvette et le montage. Cet écart peut être à l'origine des variations dans les charges à rupture observées.

III.3.3 - ANALYSE DES RUPTURES.

COMPRESSION.

La rupture s'est produite pour l'essai n°1 à une charge des vérins de flexion de 5050 daN. Pour le deuxième essai, bien que les déformations mesurées sur la plaque soient supérieures, la charge maximale mesurée n'a été que de 4000 daN soit 20 % de moins. On peut de manière quantitative attribuer cette dérive au vieillissement du montage qui s'est

plastifié localement, au remplacement de certaines cornières, aux serrages différents de la plaque, ... En tout état de cause, cette dérive met en évidence une interaction forte entre le montage et l'éprouvette.

Les deux ruptures se sont produites par rupture statique fragile de la peau travaillante suivant une ligne orthogonale à la direction principale de compression.

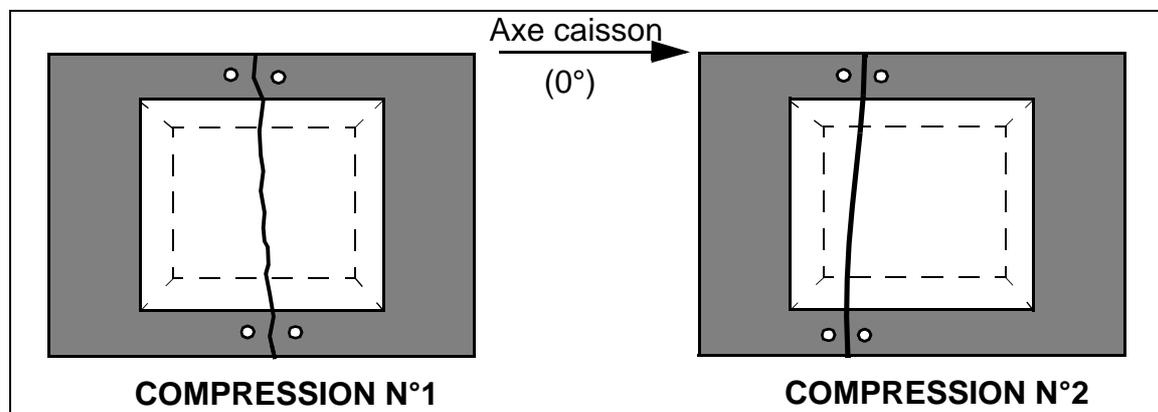


Figure N° 3-20 : Faciès de rupture en compression (voir aussi en annexe Photo N° A2-8 et Photo N° A2-9).

Pour le premier essai, la rupture s'est produite quasiment au centre de la plaque alors que dans le second cas la rupture s'est initiée à une prise de pli locale. Les déformations obtenues au dernier palier stabilisé (qui dure environ 1mn) avant rupture sont fournies Tableau N° 3-1. En proposant comme valeurs les déformations atteintes lors de ce palier, on est certain que la plaque a résisté à cet effort. Par contre, le résultat est conservatif.

VALEURS	ESSAI 1	ESSAI 2
ANGLE	2°	1.58°
ϵ_1	-10467	-12510
ϵ_2	1391	1191

Tableau N° 3-1 : Déformations dans les directions principales au centre de la peau travaillante

Ces valeurs sont remarquablement élevées *pour une structure* et sont dues à l'absence de flambement du sandwich qui est encasté sur ses 4 bords. L'ordre de grandeur est celui obtenu en compression pure sur spécimen monolithique unidirectionnel [Effendi 1993]. Le mode de rupture et les valeurs de déformation obtenues démontrent la résistance élevée des structures sandwichs dissymétriques en compression ainsi qu'une bonne introduction des efforts dans l'éprouvette.

CISAILLEMENT.

Lors du premier essai de cisaillement, la rupture s'est produite dans la zone monolithi-

que. Ceci est attribué au fait que le montage s'est déformé de manière trop importante hors de son plan créant des surcontraintes élevées au niveau du boulonnage. Aussi, pour augmenter la rigidité en torsion du montage, les plaques latérales du caisson central en duralumin ont été changées pour des plaques en acier E24.

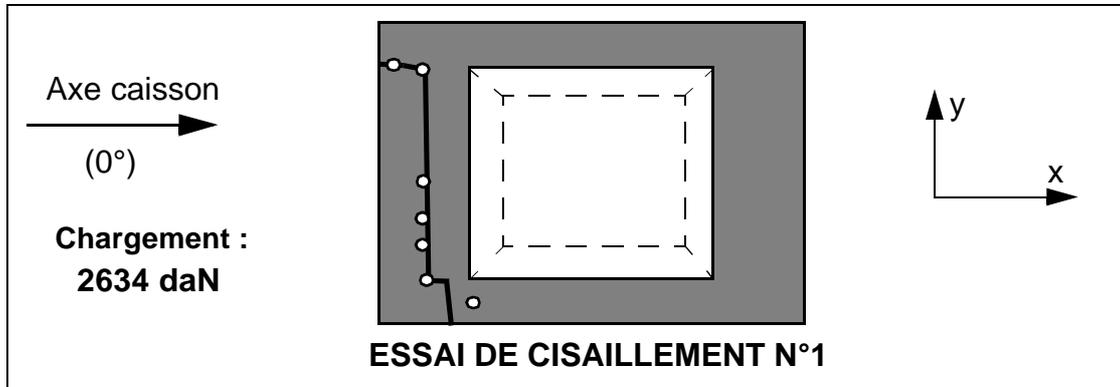


Figure N° 3-21 : Faciès de rupture essai de cisaillement n°1 (Photo N° A2-10).

La deuxième rupture s'est produite par rupture statique fragile d'une des peaux. Il est vraisemblable qu'elle se soit initiée par concentration des contraintes au niveau d'une prise de pli ou de l'arrêt de nida. Ceci peut expliquer que le chargement soit inférieur à celle de l'essai 1. Un glissement important (env 5 mm) dans le sens y s'est produit entre les deux parties rompues de la peau travaillante. Le nida devient apparent après rupture.

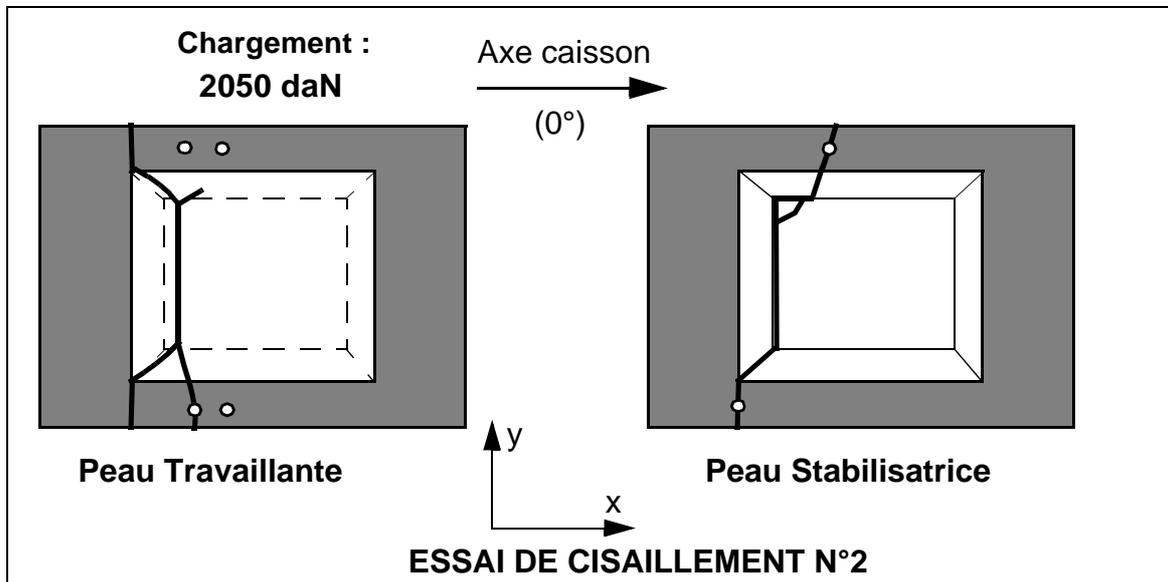


Figure N° 3-22 : Faciès de rupture essai de cisaillement n°2 (Photo n° A2-11).

Les déformations dans les directions principales pour le dernier palier stabilisé avant rupture sont fournies *Tableau N° 3-2*. Pour le premier essai, lors du dernier palier non stabilisé, la valeur maximale lue atteignait $-13868 \mu_{def}$ en instantané. Pour le deuxième essai, la rupture a eu lieu après que $11000 \mu_{def}$ en compression à 45° ait été atteints et avant de pouvoir lancer l'enregistrement. Le résultat pourrait donc être majoré de $500 \mu_{def}$.

VALEURS	ESSAI 1	ESSAI 2
ANGLE	-45.36°	-50.28°
ϵ_1	-12453	-10484
ϵ_2	10291	9154

Tableau N° 3-2 : Déformations dans les directions principales au centre de la peau travaillante.

COMBINÉES.

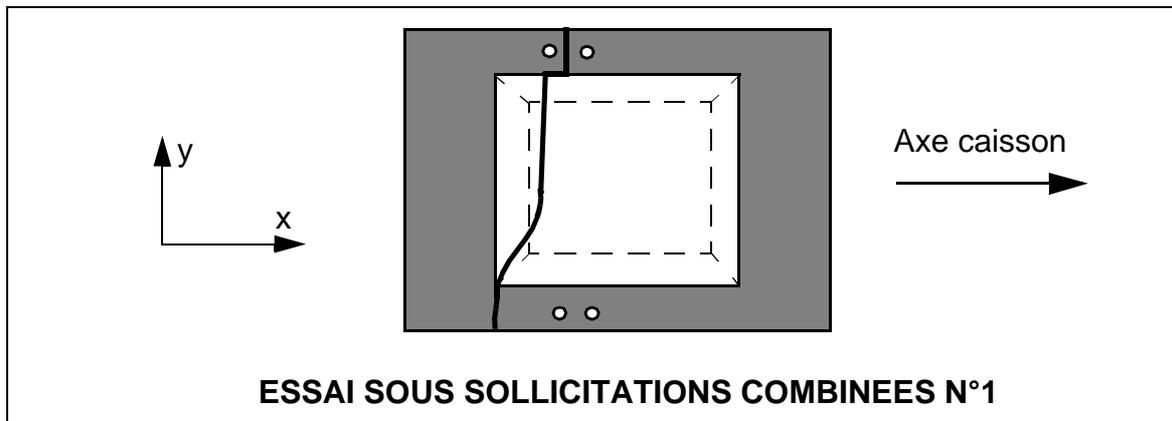


Figure N° 3-23 : Faciès de rupture essai combinées n°1 (Photo N° A2-12).

La première rupture s'est produite par rupture statique fragile de la peau travaillante et concentration des contraintes au niveau d'une prise de pli. Le mode et le faciès de rupture sont proches de celui de l'essai de cisaillement n°2.

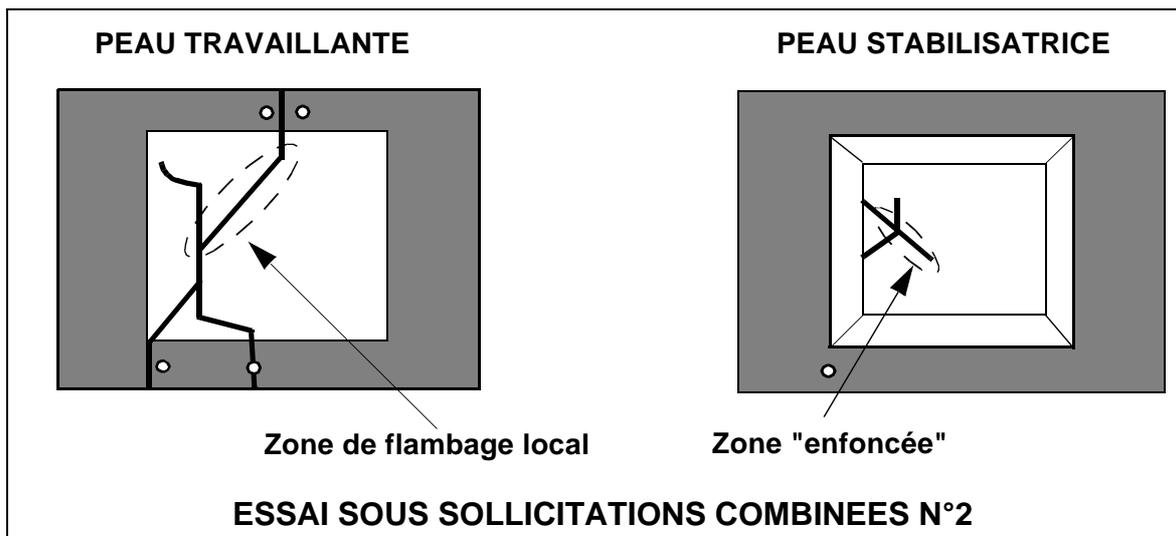


Figure N° 3-24 : Faciès de rupture essai combinées n°2 (Photo N° A2-13).

Dans le deuxième essai, la rupture semble s'initier au même niveau pour se propager ensuite suivant la direction principale d'une part et suivant la prise de pli d'autre part. La

peau travaillante présente de plus un enfoncement marqué autour de la ligne de rupture. Il y a donc eu un phénomène de flambage local à ce niveau. Mais il est impossible de dire s'il est antérieur ou postérieur à la rupture statique. Ce type de faciès de rupture est, à notre connaissance, original et démontre l'aptitude du concept à réaliser des essais sous sollicitations combinées. Les déformations dans les directions principales pour le dernier palier stabilisé sont fournies Tableau N° 3-3. Les déformations des fibres à 0° et 45° sont aussi données.

VALEURS	ESSAI 1		ESSAI 2	
ANGLE	-28°	Fibres	29°	Fibres
ε_1	-10017	à 0° : -6400	-11410	à 0° : -7300
ε_2	3522	à 45° : -8859	5360	à 45° : -10135

Tableau N° 3-3 : Déformations dans les directions principales au centre de la peau travaillante.

On a donc réussi à obtenir des données pour un angle de direction principale de 30° environ ce qui correspond bien à un état de contraintes complexes. Bien que les sollicitations soient combinées, on constate que les déformations principales en compression sont du même ordre que celles obtenues pour les essais sous sollicitations simples.

CONCLUSIONS.

Les modes de rupture sont analogues pour les six essais. Le mode de ruine est la rupture statique de la peau travaillante. L'absence de flambage constatée est attribuée à la petite taille de l'éprouvette, aux conditions aux limites et à la technologie des jonctions développée par Eurocopter. A notre connaissance, ce mode de rupture brutal est aussi observé lors des essais de niveau 2 sur des sous-ensembles structuraux.

Les déformations principales en compression à rupture obtenues au centre sont toujours supérieures à -10000 μ_{def} dans la direction principale. Il paraît toutefois difficile d'établir un critère au sens de la mécanique des milieux continus à partir de ces seuls essais compte-tenu de la diversité des origines des ruptures et du fait qu'un seul drapage ait été testé. La constatation peut être faite que, à une exception près (combinées n°1), la rupture s'est produite pour une déformation de fibre en compression supérieure à 10000 μ_{def} .

Par ailleurs, la dispersion des valeurs est de l'ordre de 20%. Cette dispersion peut être attribuée aux défauts géométriques du montage et à la mauvaise maîtrise de la procédure d'essai dans un essai sur deux.

III.3.4 - EVOLUTION DE LA DÉFORMATION AUX CENTRES DES PEAUX.

Les graphes proposés dans ce paragraphe montrent l'évolution des déformations aux centres des peaux travaillantes et stabilisatrices en fonction de la charge exercée sur le montage. Ce type de graphe permet l'étude de la réponse globale du sandwich. Pour une description plus fine, il conviendrait de tracer ces graphes en fonction des flux d'efforts entrant dans l'éprouvette. La détermination de ces flux n'étant pas immédiate, cette étude est reportée au paragraphe "Corrélation des essais", Chap V.

COMPRESSION.

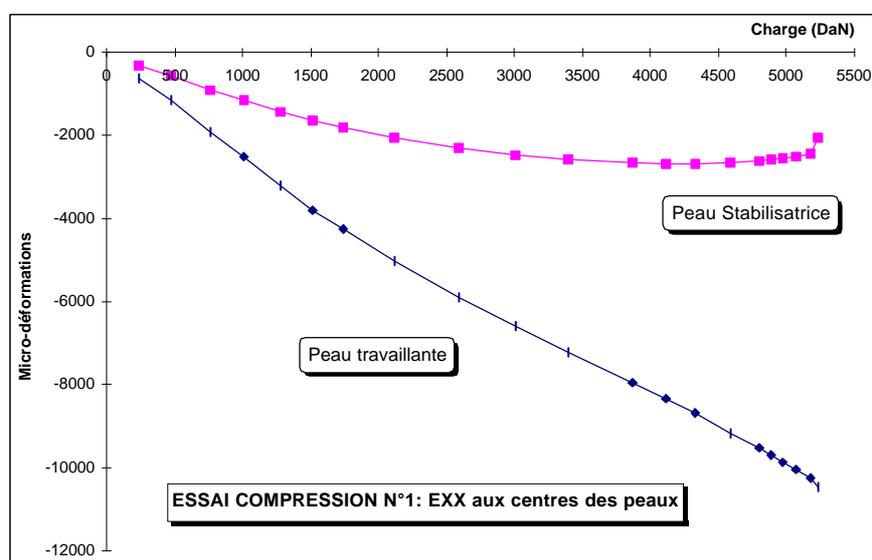


Figure N° 3-25 : Evolution de ε_{xx} au centre en fonction de l'effort de flexion sur le montage (essai 1)

Le comportement non linéaire attendu des sandwichs dissymétriques est retrouvé lors des deux essais. La valeur mesurée de la déformation dans la peau stabilisatrice est double dans l'essai 1 (Figure N° 3-25) par rapport à l'essai 2 (Figure N° 3-26). Deux raisons sont susceptibles d'expliquer ce phénomène : d'une part, une perte de zéro, due à une erreur de manipulation et d'interprétation lors de la rupture du revêtement photoélastique, d'autre part, ni le montage, ni l'éprouvette ne sont strictement identiques, ce qui peut affecter la position de la ligne moyenne d'introduction des efforts et la réponse de la peau stabilisatrice. D'une manière générale, on peut considérer les résultats du deuxième essai meilleurs que ceux du premier. Ils seront les seuls utilisés pour la corrélation avec la théorie.

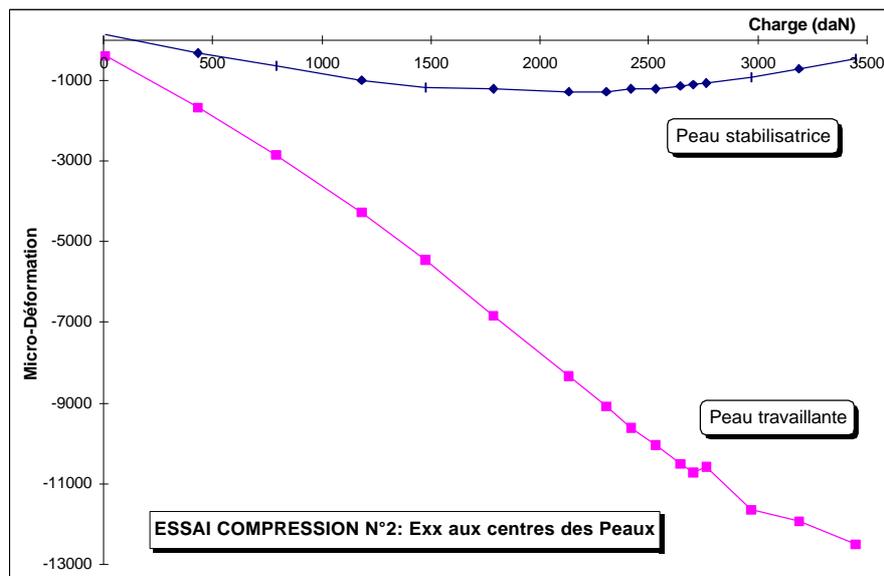


Figure N° 3-26 : Evolution de ε_{xx} au centre en fonction de l'effort de la charge sur le montage (essai 2)

CISAILLEMENT.

Pour cet essai, les dépouillements bruts des jauges à $+45^\circ$ dans les deux peaux peuvent être superposés (Figure N° 3-27).

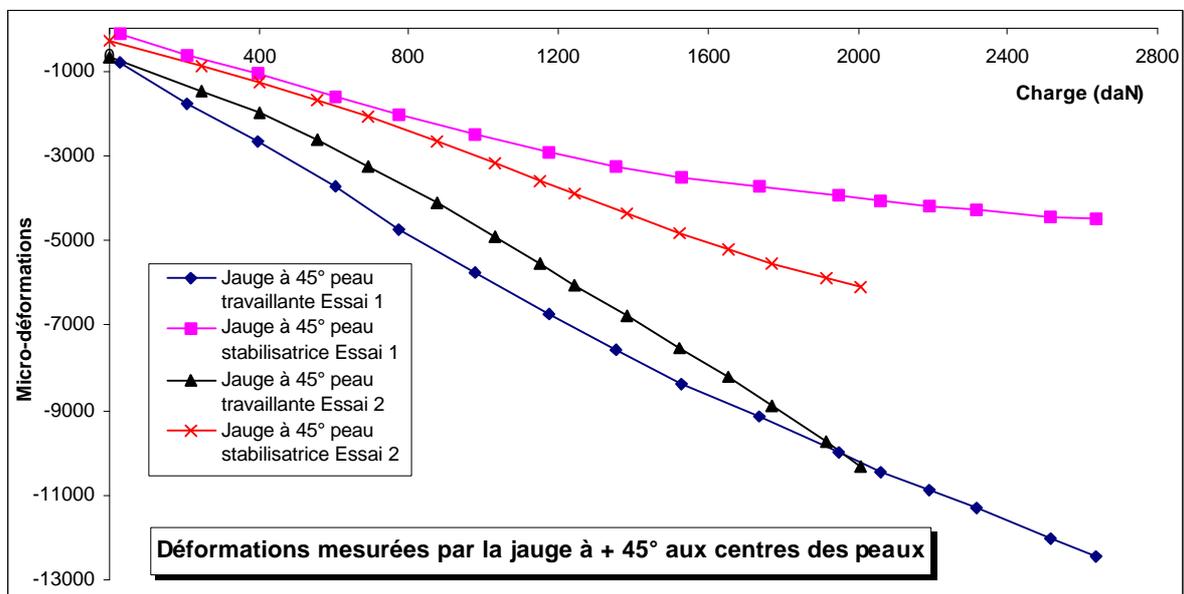


Figure N° 3-27 : Déformations des jauges à $+45^\circ$.

Pour la réponse de la peau travaillante, on a globalement le même comportement avec une courbe plus linéaire pour l'essai 1. La non linéarité de l'essai 2 est probablement due à une plastification plus précoce des plaques aciers, ce qui entraîne un flux de cisaillement plus important dans l'éprouvette dans un second temps.

Les comportements des peaux stabilisatrices diffèrent fortement dans les deux essais. Le grand déplacement des IPN hors du plan est a priori venu fortement perturber le champ des déformations dans l'essai 1 via le boulonnage et l'arrêt de nida ce qui semble être à l'origine de la non-linéarité observée. Par contre, l'adoption d'acier pour les plaques latérales du caisson central a solutionné ce problème.

COMBINÉES.

Les mesures des jauges à 0° et à 45° situées au centre de la peau travaillante permettent de suivre l'évolution de l'état de contraintes dans la plaque. Pour une question de lisibilité de l'essai, la charge de référence (axe des abscisses) est obtenue en sommant les charges exercées par les vérins qui génèrent les efforts de flexion et de torsion.

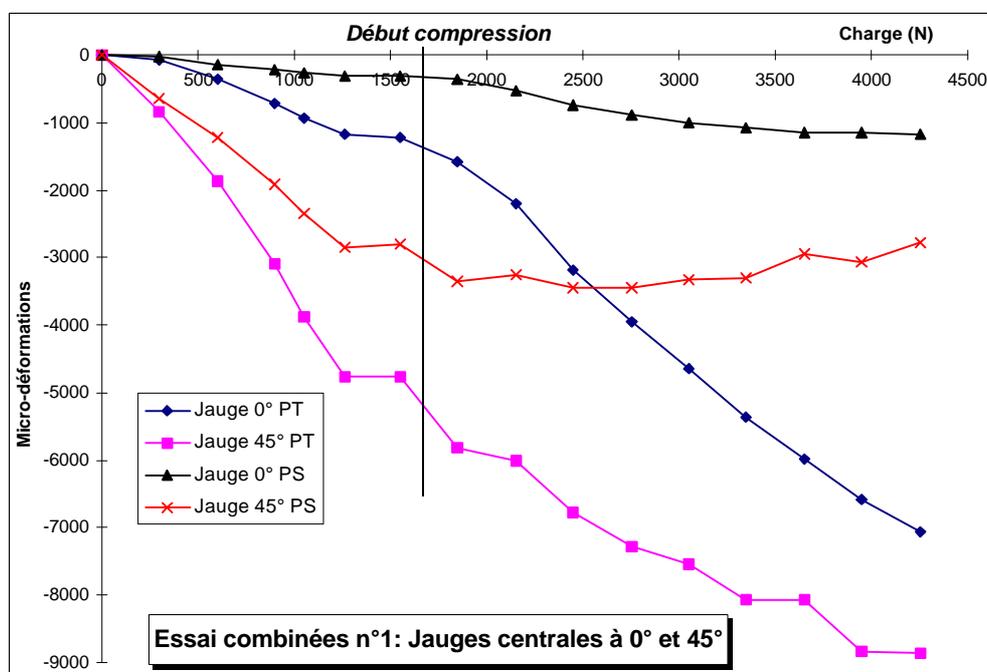


Figure N° 3-28 : Jauges à 0° et 45°, essai combinées n°1.

Dans le premier essai (Figure N° 3-28), l'irrégularité des courbes montre une mauvaise maîtrise de la montée en charge. Par contre, l'interprétation est aisée dans l'essai 2 (Figure N° 3-29), les comportements en cisaillement et compression étant bien distincts et identifiables. Par exemple, le suivi de la jauge à 0° au centre de la peau travaillante montre une montée linéaire en compression puis une stabilisation en cisaillement, celui de la jauge à 45° montre qu'à partir de l'état atteint en compression, on retrouve une montée linéaire en cisaillement. La même réponse peut être observée pour la jauge à 0° dans la peau stabilisatrice : lors de la montée en compression, on retrouve le comportement non linéaire, puis pour le cisaillement, la réponse est linéaire.

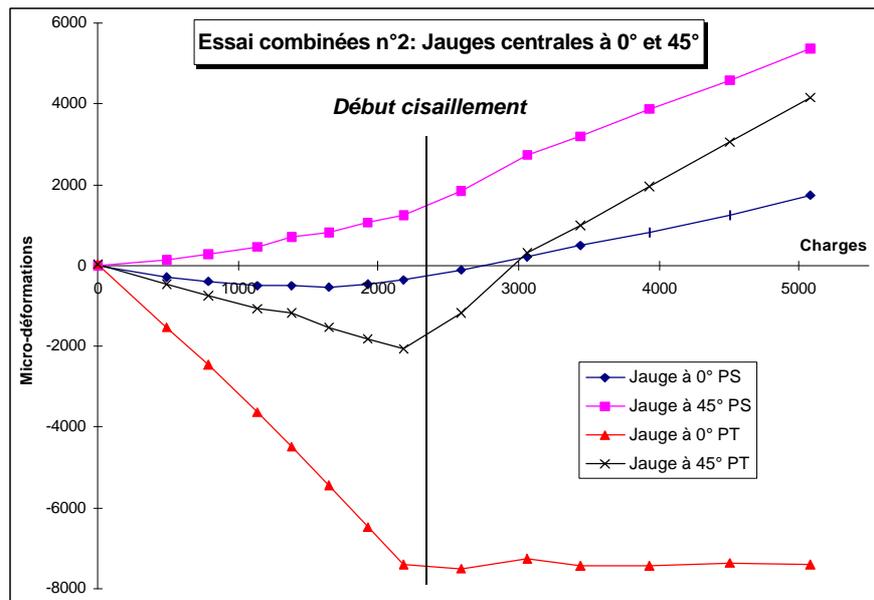


Figure N° 3-29 : Jauges à 0° et 45°, essai combinées n°2.

III.3.5 - CHAMP DES DÉFORMATIONS DANS LES PEAUX ET FLÈCHE.

Outre la réponse des rosettes centrales, d'autres jauges ont été disposées suivant les essais à divers points des peaux afin de vérifier que le champ des déformations est bien conforme aux sollicitations exercées.

COMPRESSION.

Dans *la peau travaillante*, l'étude photoélastique a montré que globalement, le champ des déformations était uniforme. Pour l'essai 2, plusieurs jauges disposées sur la peau travaillante (Figure N° 3-30) confirment ce résultat (noter que les jauges 12 -13 -14 sont sur une rigidité locale différente ce qui explique la différence avec la jauge centrale à 0°). Toutefois la différence entre les jauges 14 et 13 atteint 15 %. La dissymétrie observée provient peut-être de l'introduction d'un moment de flexion parasite dans le plan horizontal. Les mesures des jauges à 45° et 90° prouvent que le taux de déformations donc de contraintes secondaires est faible.

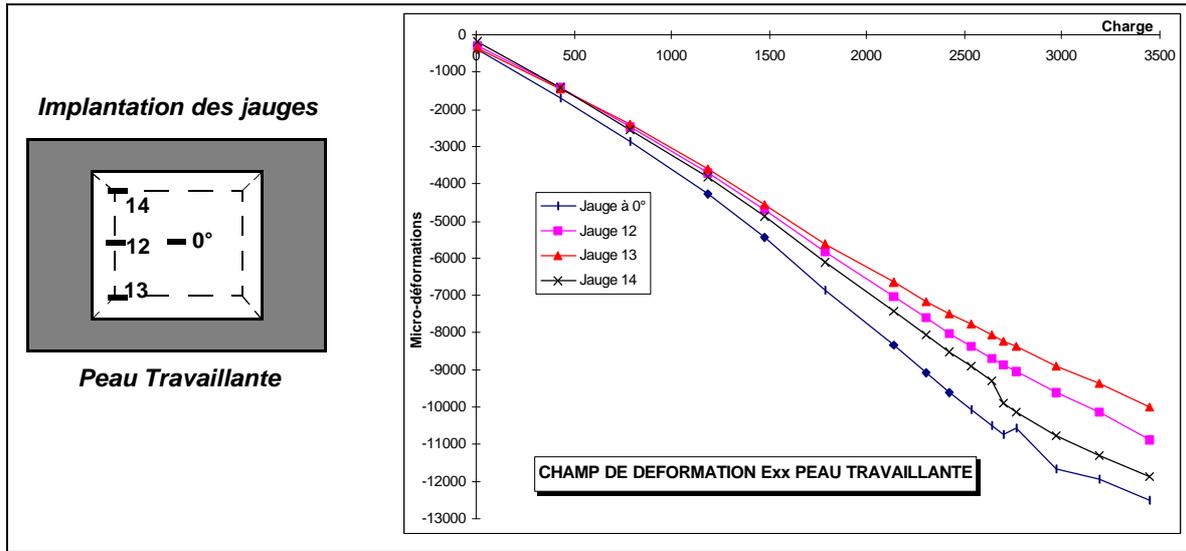


Figure N° 3-30 : Champ des déformations peau travaillante, essai n°2.

Dans **la peau stabilisatrice** (Figure N° 3-31), le champ des déformations ϵ_{xx} sens long est moins uniforme. Il existe aussi une dissymétrie jauge 3/jauge 4 donc entre les côtés. De plus, des concentrations des contraintes existent près des angles (une jauge collée près de l'angle formé par l'arrêt de nida (jauge **A**) mesure une déformation supérieure de 50 % à celle de la jauge centrale (0°)).

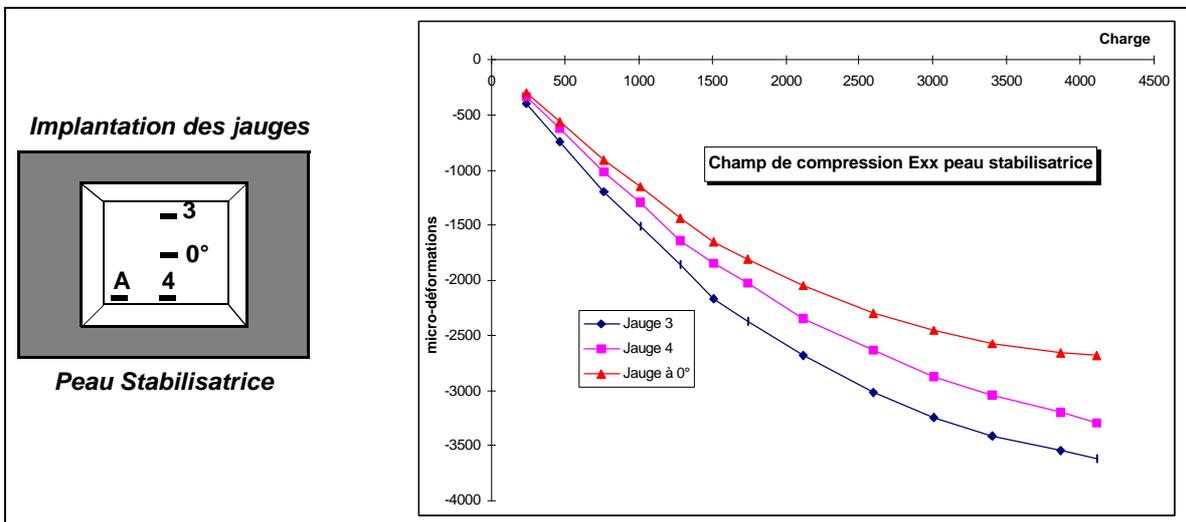


Figure N° 3-31 : Champ des déformations dans la peau stabilisatrice (essai n°1).

Dans **la peau stabilisatrice**, la déformation sens travers ϵ_{yy} est très supérieure à ϵ_{xx} (Figure N° 3-32). Ce comportement peut être attribuer à la flexion globale de la plaque. Comme les 4 cotés sont en appui, il est nécessaire de tendre sens y la peau stabilisatrice pour que cet appui soit effectif. D'autre part, la présence de l'arrêt de nida la forme en pyra-

mide des coins peuvent éventuellement favoriser aussi ce phénomène.

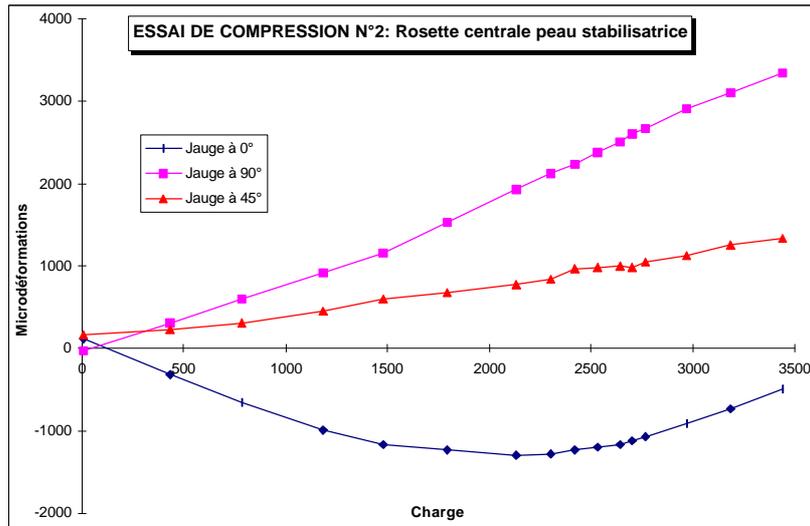


Figure N° 3-32 : Dépouillement de la rosette centrale peau stabilisatrice (essai 2).

CISAILLEMENT.

Pour **la peau travaillante**, dans l'essai 2 (Figure N° 3-33), les déformations mesurées à +/- 45° sont très proches. Il n'y a donc quasiment pas d'effet de bords.

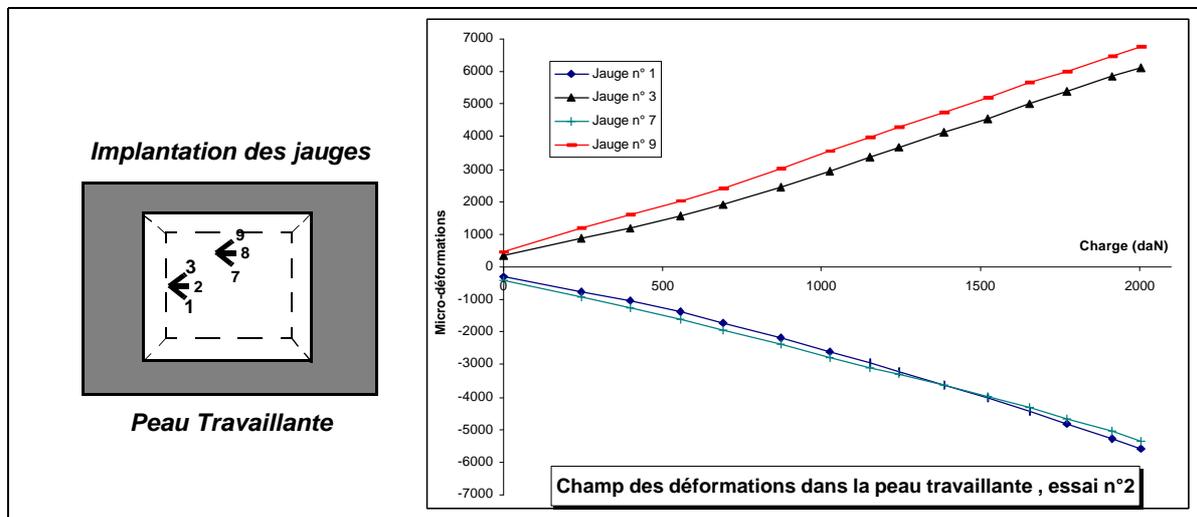


Figure N° 3-33 : Champ de déformation dans la peau travaillante, essai 2.

Dans **la peau stabilisatrice**, pour l'essai 1 (Figure N° 3-34), les résultats sont plus contrastés. Si les jauges orientées à -45° présentent des résultats similaires, les jauges 9 et 12 orientées à +45° présentent une différence plus marquée. On peut noter aussi que, vraisemblablement, la jauge 12 s'est décollée et n'a plus fourni de résultats tangibles à partir de 1800 daN.

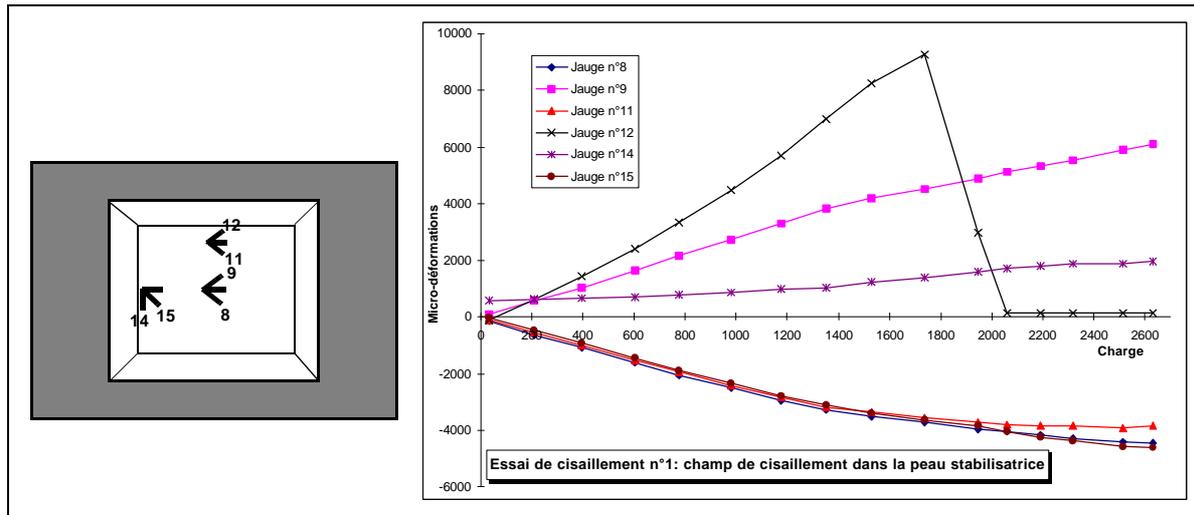


Figure N° 3-34 : Champ de déformation dans la peau stabilisatrice, essai 1.

COMBINÉES.

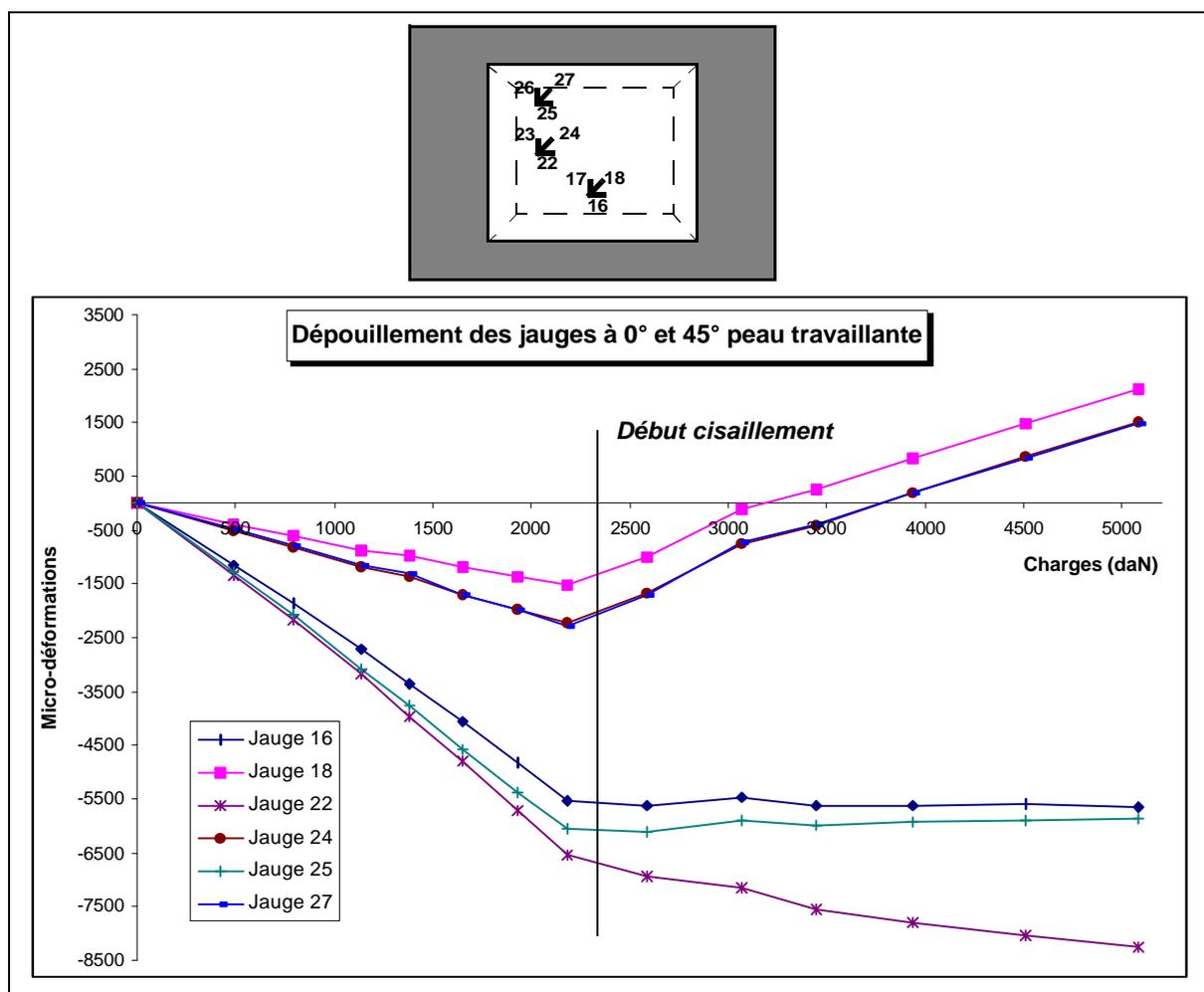


Figure N° 3-35 : Dépouillement des jauges à 0° et +45° peau travaillante, essai 2.

Les résultats sont similaires à ceux obtenus pour les sollicitations simples. L'évolution des déformations dans la peau travaillante (*Figure N° 3-35*) et dans la peau stabilisatrice (*Figure N° 3-36*) montre que le champ est globalement uniforme.

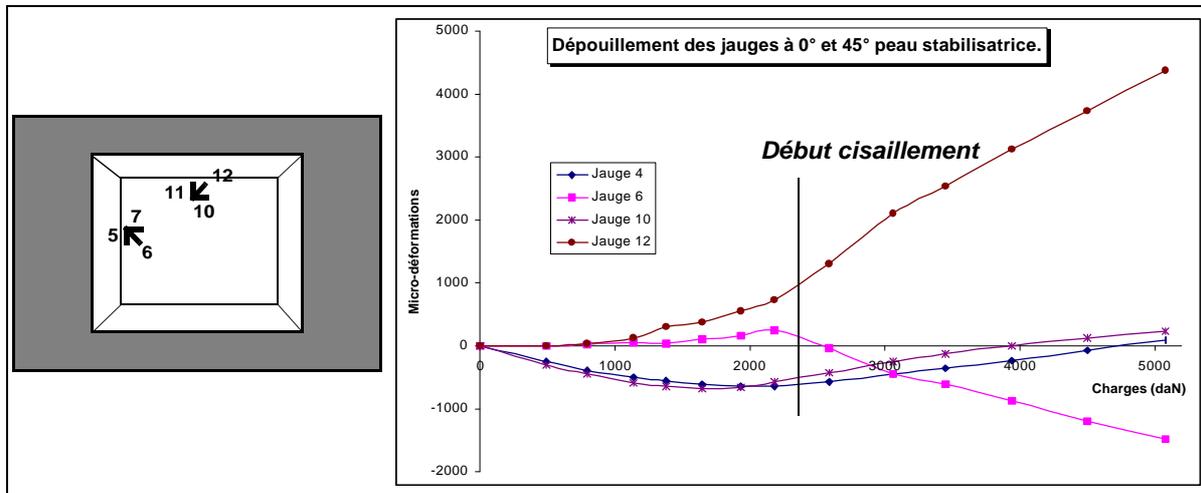


Figure N° 3-36 : Dépouillement des jauges à 0° et +45° peau stabilisatrice, essai 2.

FLÈCHE AU CENTRE.

Une mesure a été effectuée lors de l'essai de compression n°1. Le dépouillement des capteurs de déplacement potentiométriques fournit la courbe Figure N° 3-37. Le résultat a été obtenu en effectuant la différence des mesures du capteur central avec la pente fournie par les deux capteurs amont et aval. Le comportement non linéaire attendu est peu marqué. L'allure générale de la courbe présente des fluctuations. Cette flèche est la flèche globale du sandwich, zone monolithique et arrêt de nida compris.

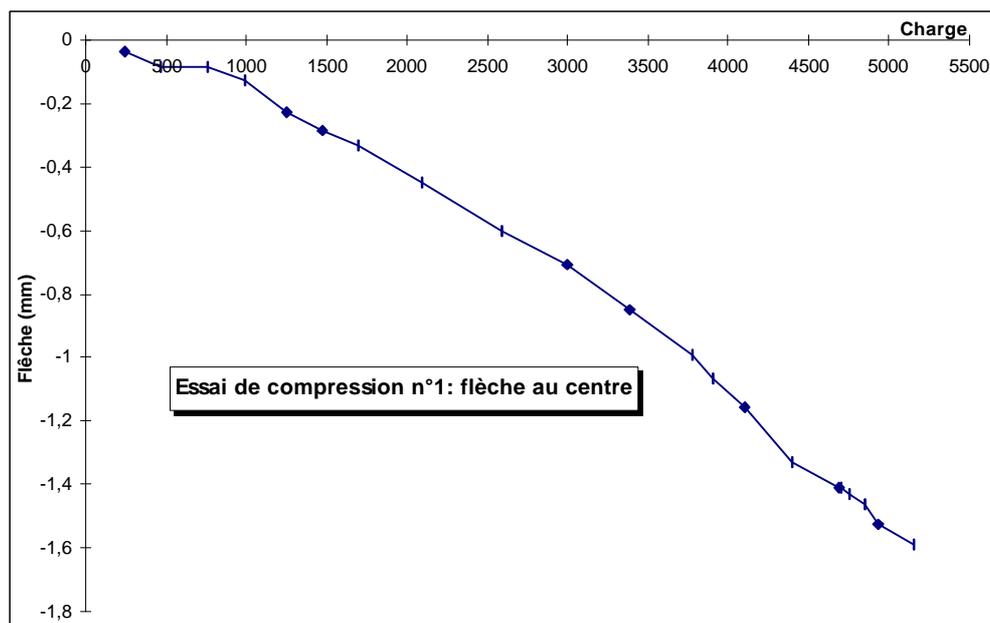


Figure N° 3-37 : Flèche au centre essai 1.

III.3.6 - CONCLUSIONS.

L'ensemble des essais sur plaques non impactées a mis en évidence une résistance particulièrement élevée des structures sandwichs dissymétriques puisque toutes les ruptures ont été obtenues pour des déformations supérieures à 10000 μ déf. L'absence de flambage de l'éprouvette testée peut être attribuée aux conditions aux limites très rigides. Ce type de rupture démontre l'intérêt des structures sandwichs dissymétriques pour la conception des aéronefs.

Malgré une certaine dispersion due à la nature de l'essai, globalement, les résultats obtenus sont conformes à ceux prévus. On notera toutefois que la petite taille de l'éprouvette génère des effets de bord dans la peau stabilisatrice.

III.4 - ESSAIS SUR PLAQUES IMPACTÉES.

III.4.1 - CONTEXTE.

Les résultats obtenus ont conduit Eurocopter à demander des tests supplémentaires sur plaques impactées. En effet, les contraintes critiques avec défauts sont très inférieures à celles des plaques saines et sont dimensionnantes. Ces essais sont présentés dans les paragraphes suivants. Dans le cadre de cette étude, seule une interprétation qualitative sera proposée.

Les plaques fournies par Eurocopter sont déjà impactées au niveau de la peau travaillante et seul leur contre-perçage est effectué à Sup'Aéro. L'énergie mise en jeu dans l'impact n'est pas connue. Afin de faciliter l'interprétation des résultats, une analyse qualitative a été effectuée. L'énergie de l'impacteur est suffisante pour provoquer une rupture locale des plis et un enfoncement marqué de la peau travaillante. Après passage à la machine à mesurer, la profondeur de l'impact varie entre 2.3 et 3.9 mm environ. La sphère équivalente calculée par la machine à partir des points de palpation varie entre 33 et 75 mm. A notre connaissance, les impacts sont réalisés avec un impacteur manuel suivant les normes Boeing ce qui peut expliquer l'origine de la dispersion géométrique.

Afin de vérifier si l'impact n'a pas donné lieu à des délaminages étendus au delà de la zone visible, des analyses par ultrasons (par réflexion) ont été effectuées à l'E.N.S.I.C.A. puis au C.E.A.T. L'analyse des structures sandwichs avec nida Nomex n'est pas aisée par cette technique car le Nomex et la présence de ménisques formés par la résine du joint de colle perturbent l'écho. De ce fait, la qualité de l'analyse dépend grandement du savoir-faire

de l'opérateur et de l'adaptation de l'émetteur.

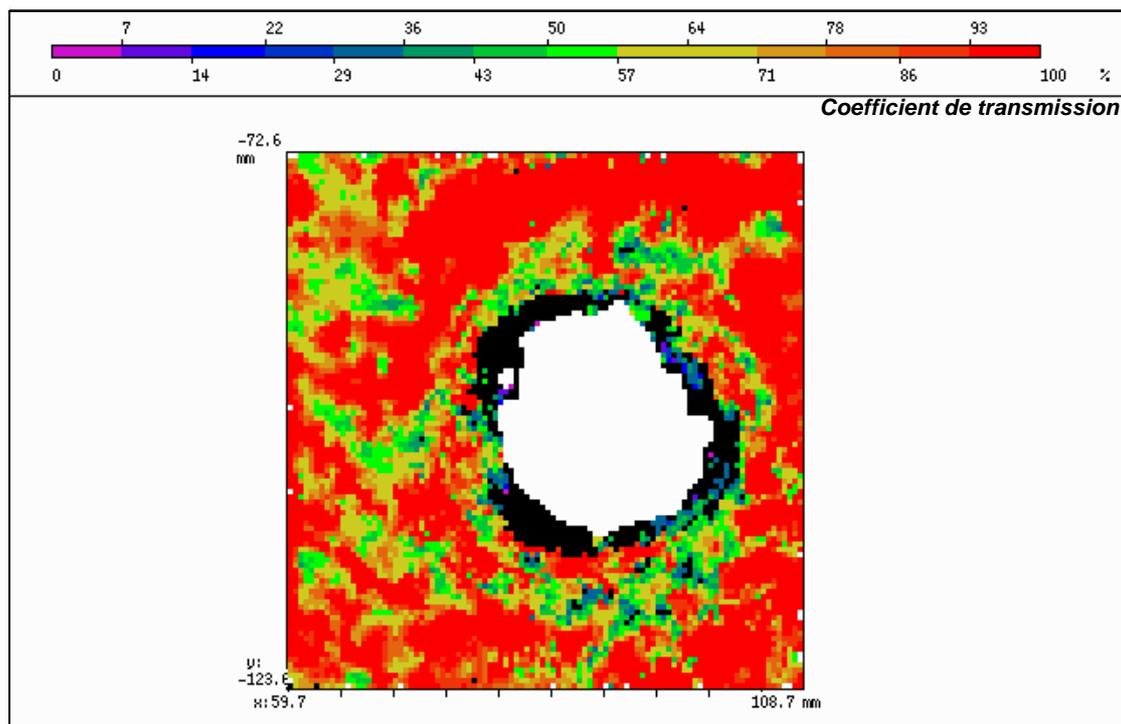


Figure N° 3-38 : Analyse ultrasonore de défaut sur plaque impactée.

Dans la Figure N° 3-38, la couleur rouge correspond à une transmission égale à 100%, la couleur verte à une transmission de 50%. La couleur noire correspond globalement à la limite de l'impact. Pour les spécialistes, compte-tenu de la présence du Nomex et malgré les difficultés expérimentales, la présence d'un délaminage global de la peau travaillante semble peu probable. L'expertise complémentaire du C.E.A.T. a confirmé le résultat de l'E.N.S.I.C.A. avec juste la détection probable d'un défaut local (Figure N° 3-39).

On peut donc conclure qu'il n'existe pas de délaminage global autour de la zone impactée.

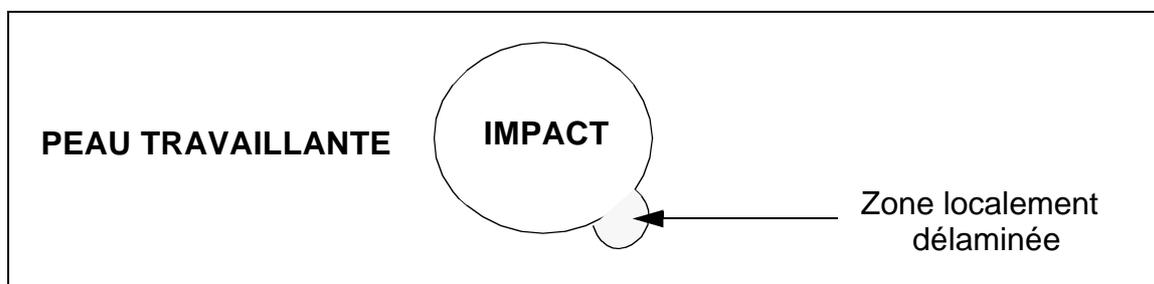


Figure N° 3-39 : Taille et localisation approximative du défaut détecté par le C.E.A.T.

III.4.2 - ESSAI EN CISAILLEMENT.

ANALYSE DE LA RUPTURE.

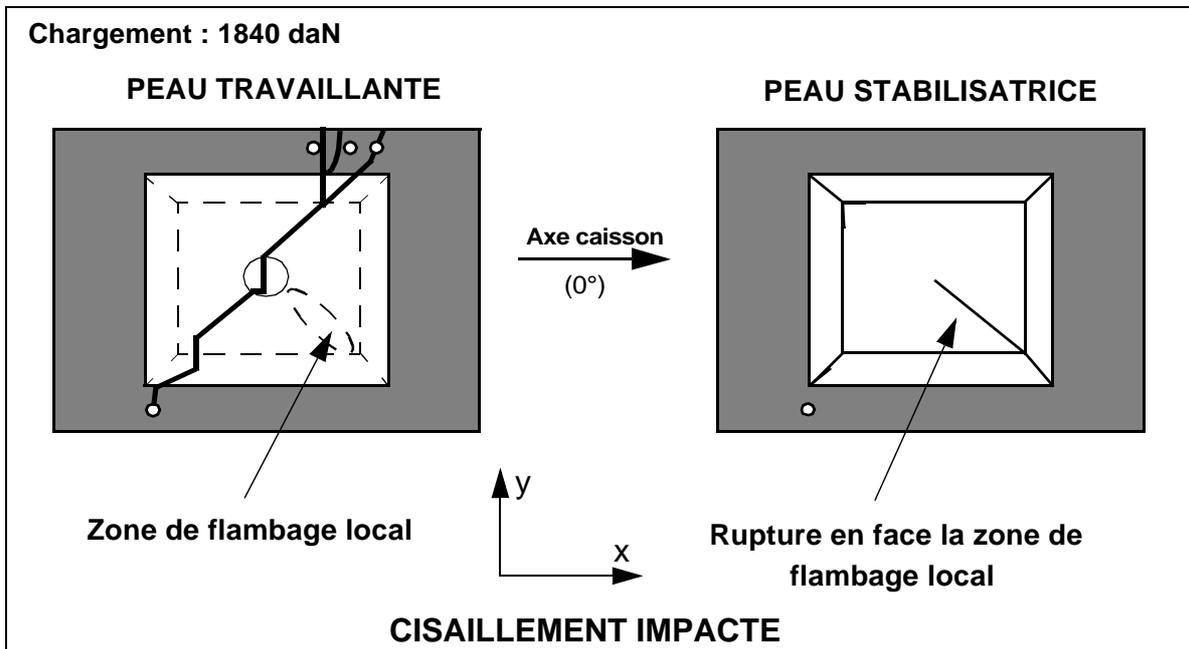


Figure N° 3-40 : Faciès de rupture essai de cisaillement impactée (Photo N° A2-14).

L'essai s'est déroulé normalement avec une montée régulière jusqu'à une charge exercée par les vérins de torsion de 1840 daN. Cette valeur est inférieure de seulement 10% par rapport au chargement effectué sur plaque non impactée. Ceci montre les "redondances" fortes qui existe dans le montage et illustre le fait que les flux d'efforts se répartissent au prorata des rigidités. L'éprouvette s'est rompue brutalement dans la peau travaillante suivant la direction principale à +45°. On constate un enfoncement suivant une ligne à -45°.

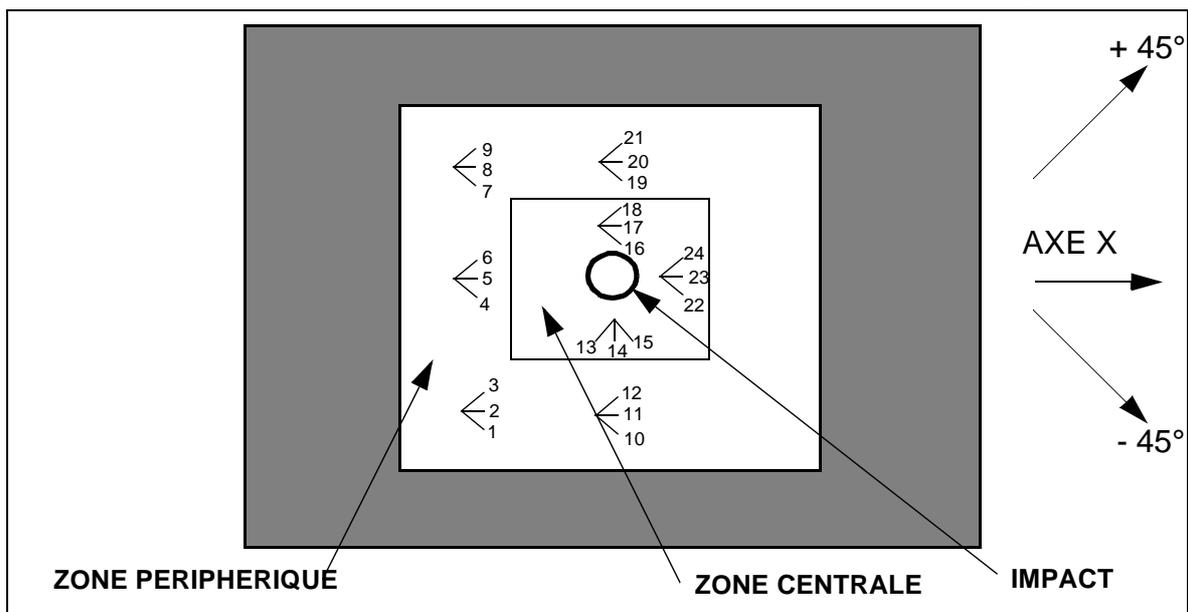


Figure N° 3-41 : Disposition des rosettes sur la peau travaillante, essai de cisaillement plaque impactée.

Le dépouillement des rosettes de la peau travaillante (*Figure N° 3-41*) permet l'analyse de la répartition du flux d'effort autour de l'impact.

ROSETTES	1-2-3	4-5-6	7-8-9	10-11-12	19-20-21
ANGLE	-41.6°	-57.27°	-47.9°	-49.4°	-37.5°
ϵ_1	5011	8295	4563	6089	6924
ϵ_2	-3863	-8433	-5361	-5200	-4652

Tableau N° 3-4 : Directions et déformations principales rosettes zone extérieure (dernier palier).

ROSETTES	13-14-15	16-17-18	22-23-24
ANGLE	-45.7°	-40.4°	-52.1°
ϵ_1	12280	10805	11476
ϵ_2	-8906	-8830	-12791

Tableau N° 3-5 : Directions et déformations principales rosettes zone centrale (dernier palier).

Les valeurs du Tableau N° 3-5 montrent qu'il y a une concentration des contraintes autour de la zone impactée. Cette concentration des contraintes est à l'origine de la rupture. Le fait que la déformation principale maximale mesurée localement (+/-12000 $\mu\text{d}\epsilon$) soit comparable aux valeurs obtenues plaque non impactée et le mode de rupture confirment l'absence de délaminage général autour de l'impact.

CHAMP DE DÉFORMATION DANS LA PEAU TRAVAILLANTE.

Le dépouillement des 3 rosettes disposées dans la zone sans plis de renforts (*Figure N° 3-42*) et montre une distribution relativement homogène du cisaillement autour de l'impact et un faible taux de contraintes secondaires. On peut donc considérer que l'éprouvette est soumise à du cisaillement pur dans cette zone. De plus, à l'exception de la jauge 24, les intensités sont très proches ce qui laisse à penser que les surcontraintes sont très localisées en bord d'impact.

Le dépouillement des 5 rosettes périphériques (*Tableau N° 3-4*) indique une perte d'homogénéité du champ de cisaillement sur l'ensemble de la plaque et un taux de déformations secondaires faible à l'exception de la jauge n°5. Le montage d'essai sollicite donc bien en cisaillement l'éprouvette dont le champ des contraintes est logiquement perturbé par la présence de l'impact. Par ailleurs, seule une rosette a été collée au centre de la peau stabilisatrice. Les mesures montrent que le comportement est légèrement affecté par la présence de l'impact mais que les valeurs de déformations sont comparables à celles de l'essai sur plaque non impactée n°2.

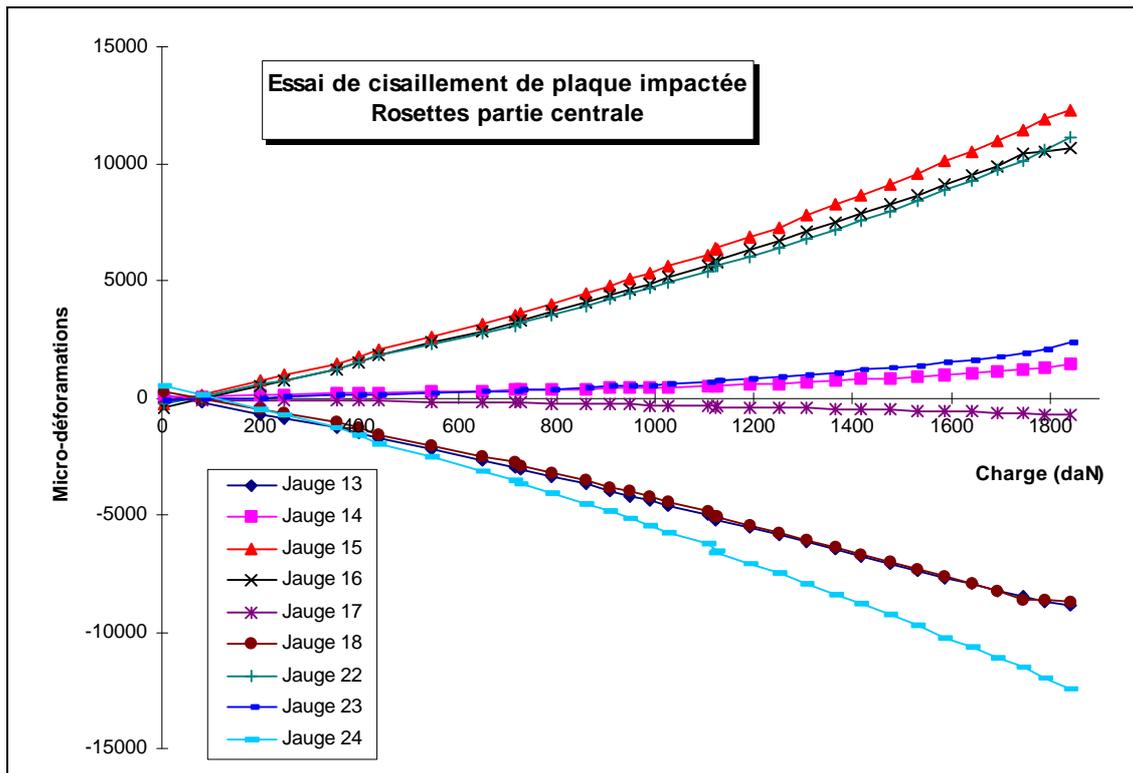


Figure N° 3-42 : Dépouillement rosettes parties centrale, essai de cisaillement impactée.

Dans cet essai l'effet de concentration des contraintes est prépondérant et les effets non linéaires éventuels causés par la présence de l'impact sont négligeables.

III.4.3 - ESSAIS EN COMPRESSION.

ANALYSE DE LA RUPTURE.

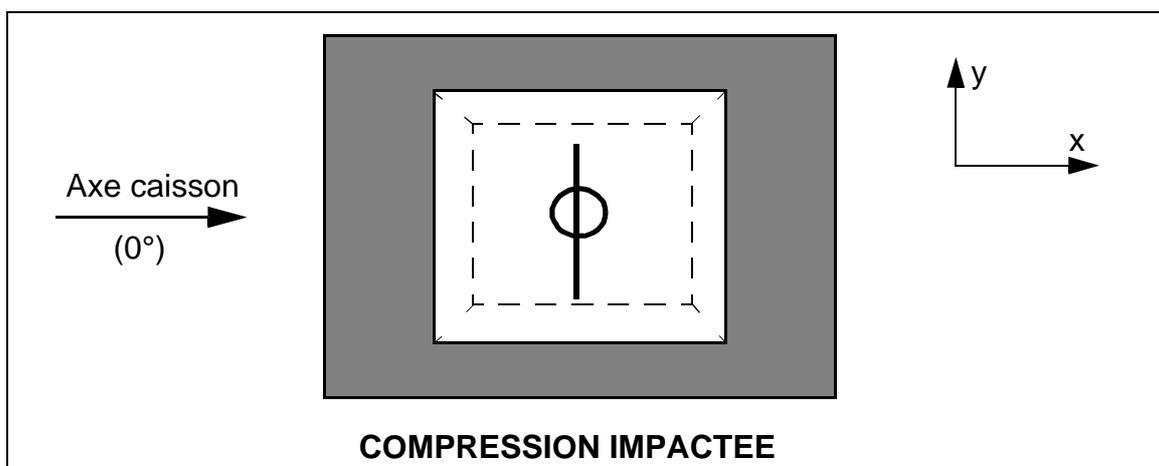


Figure N° 3-43 : Faciès de rupture essais de compression impactées.

Les deux essais réalisés ont permis de mettre en évidence un phénomène de propagation de fissure. En effet, pour les essais en compression ou cisaillement réalisés sous

les jauges 2 et 3, la diminution est plus faible et ne devient sensible que lorsque le pli de renfort est lui-même affecté par la fissure (jauge 5 et 6).

⇒ **Arrêt de l'essai.**

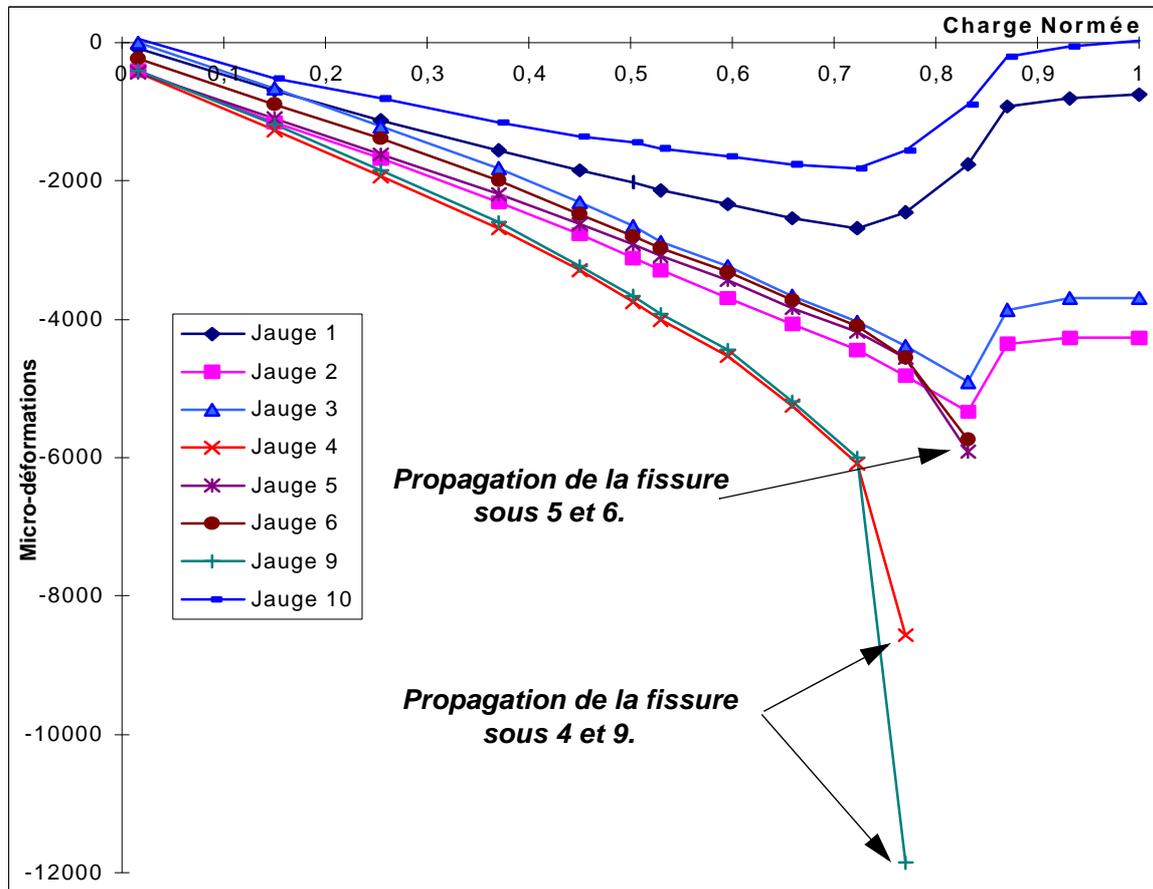


Figure N° 3-45 : Suivi des jauges à 0°, essai de compression plaque impactée.

Les jauges centrales sont détruites lors de la propagation de la fissure. La peau stabilisatrice n'est pas affectée. La plaque présente a posteriori un aspect très plat et quasiment lisse alors que la déformée (en creux autour de la fissure) lors de l'essai était très importante.

Des acquisitions ont été effectuées par la méthode du Moiré lors du deuxième essai où le phénomène s'est reproduit (Figure N° 3-46). Bien que les images soient de médiocre qualité, on peut quand même constater que les lignes de niveau évoluent d'un cercle vers une ellipse dont le grand axe est orienté vers la future direction de propagation de la fissure. De plus, il apparaît qu'une "crevasse" se forme.

Une analyse de l'éprouvette fissurée a été effectuée pour connaître l'étendue du dommage. Elle montre qu'il est peu probable qu'un délaminage important se soit produit (Figure N° 3-47).

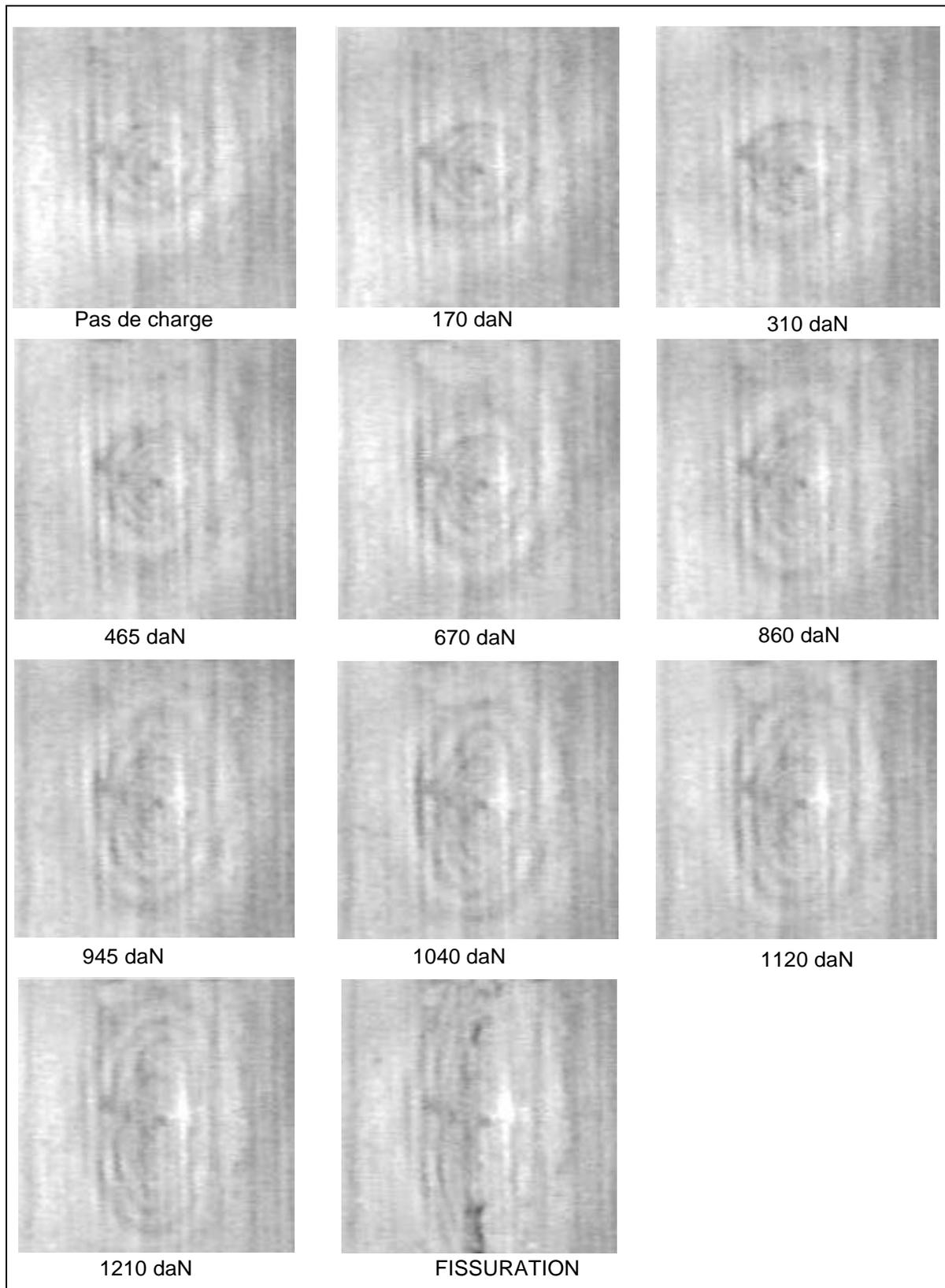


Figure N° 3-46 : Déformée de la zone impactée par la méthode du Moiré, essai compression impactée 2.

On retrouve la trace de la fissure de part et d'autre de l'impact par la présence de pixels noirs. Les zones vertes au delà de la fissure correspondent à une présence de colle sur la

surface due au câblage des jauges. La zone blanche correspond à l'emplacement d'une rosette. La fissuration a donc été pure et progressive sans affecter de manière notable les zones limitrophes. Dans l'essai n°2, on a aussi constaté que la fissure s'est propagée de manière asymétrique, d'abord d'un coté puis de l'autre.

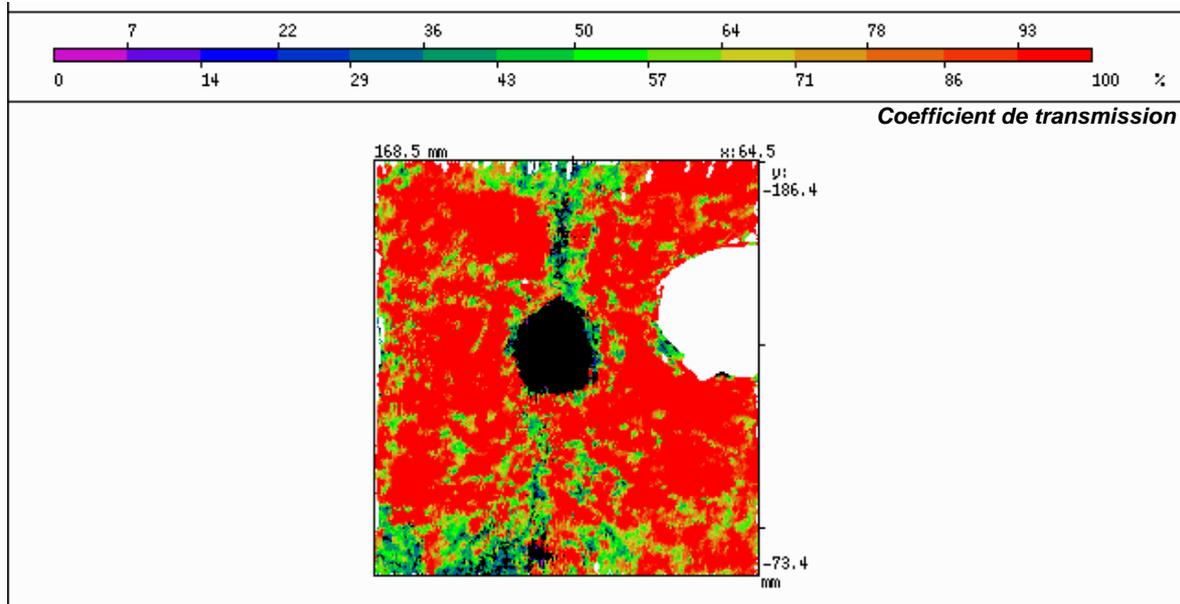


Figure N° 3-47 : Analyse par ultrasons de la plaque fissurée.

Bien que l'expérience montre l'importance de la déformée et de l'enfoncement du nida, il est impossible de trancher dans le cadre de cette étude sur le mécanisme de dégradation. Seule une étude éléments finis non linéaire avec les caractéristiques dégradées après impact pourrait fournir des indications. On pourra aussi se référer aux recherches menées par l'Aérospatiale et Boeing [Guedra-Degeorges 1997, Thevenet 1998, Razi 1998].

DÉFORMATIONS DERNIER PALIER STRUCTURE INTÈGRE.

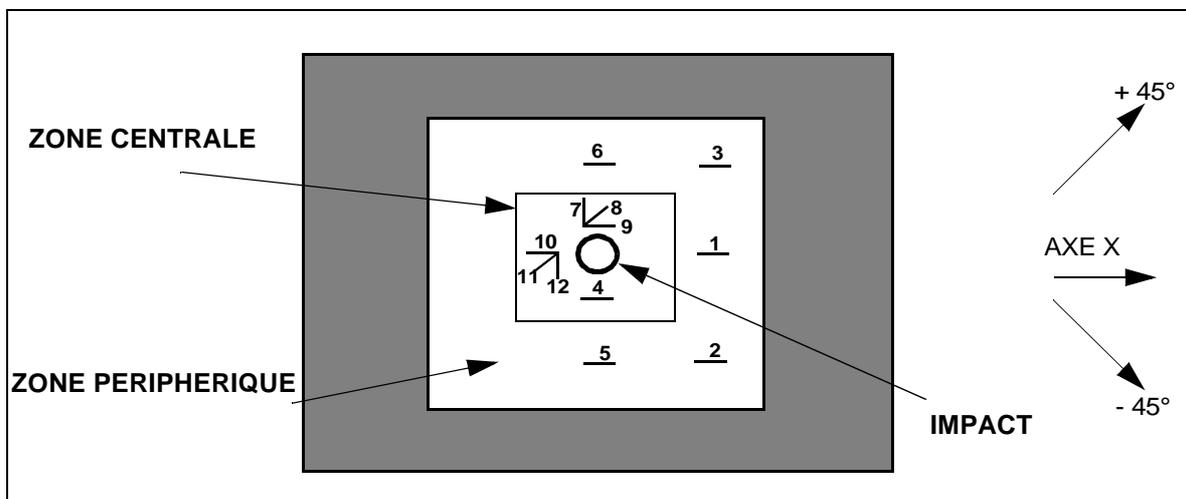


Figure N° 3-48 : Disposition des jauges, essais de compression impactée.

Il n'est pas possible d'effectuer un dépouillement analogue à celui réalisé jusqu'alors compte-tenu du déroulement particulier de l'essai. La charge utile d'un point de vue technologique est celle où la structure n'est pas encore fissurée. Ce palier correspond à une charge de 1210 daN pour l'essai 1 et 1207 daN pour l'essai 2. Les tableaux suivants donnent le dépouillement des jauges situées sur la peau travaillante (*Figure N° 3-48*).

JAUGES	Jauge 4	Jauge 9	Jauge 10
ϵ_0 Essai 1	-8573	-11867	-1570
ϵ_0 Essai 2	-3903	-3657	Absence

Tableau N° 3-6 : Déformations à 0°, essais de compression impactée, zone centrale.

JAUGES	Jauge 1	Jauge 2	Jauge 3	Jauge 5	Jauge 6
ϵ_0 Essai 1	-2052	-4810	-4375	-4549	-4550
ϵ_0 Essai 2	-3090	-2010	-2739	-3103	-2680

Tableau N° 3-7 : Déformations à 0°, essais de compression impactée, zone périphérique.

Il existe une grande différence entre l'essai 1 et l'essai 2 qu'il est très difficile d'expliquer. On peut toutefois noter que le deuxième défaut est moins important (sphère 33 mm au lieu de 75 mm) et que la jauge 1 d'entrée des efforts est 33 % plus chargée ce qui semble prouver que la zone d'impact possède une rigidité résiduelle supérieure.

La moyenne des trois jauges (1-2-3) situées en entrée de flux est un bon indicateur de la résistance de la plaque impactée. On obtient la valeur **-3873** $\mu\text{déf}$ pour le premier essai alors que l'on a seulement **-2613** $\mu\text{déf}$ pour le deuxième, (**-3860** $\mu\text{déf}$ seront obtenus pour l'éprouvette en combinées).

CONCLUSIONS.

Ces valeurs sont proches, à notre connaissance, des valeurs obtenues par les essais classiques. Ce montage est intéressant car il permet grâce au pilotage en déplacement de suivre la propagation de la fissure. Toutefois, il est peu probable que ce comportement soit extrapolable sur hélicoptère car la nature du chargement est fondamentalement différente.

III.4.4 - ESSAI SOUS SOLlicitATIONS COMBINÉES.

Chronologiquement, cet essai s'est déroulé avant les essais de compression. Mais son analyse est facilitée par les résultats des cas précédents montrant l'existence et la propagation "stabilisée" de la fissure.

ANALYSE DU CHARGEMENT.

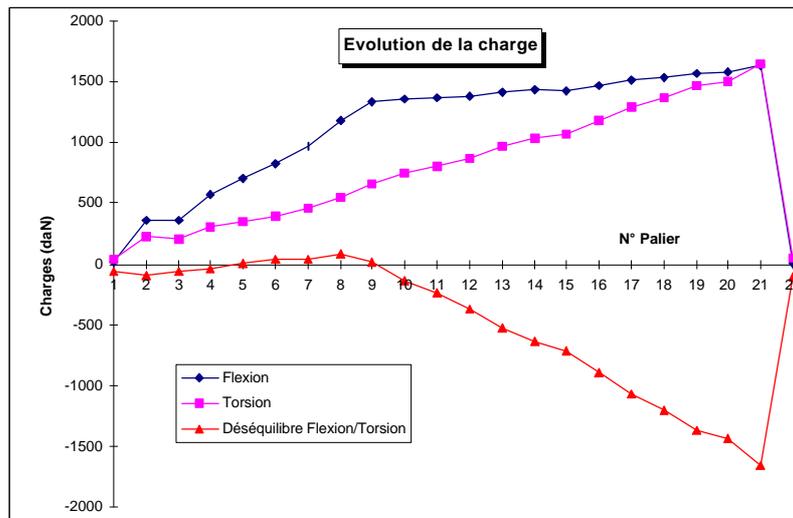


Figure N° 3-49 : Evolution de la charge des vérins de flexion et de torsion, essai combinées impactée.

La montée en charge a été normale comme le montre la Figure N° 3-49. On peut noter toutefois que le couplage existant entre les deux efforts a produit une augmentation de 20% de la charge en flexion pendant le chargement en cisaillement. Contrairement aux essais de compression, la montée en charge a été poursuivie jusqu'à rupture totale de l'éprouvette.

ANALYSE DE LA RUPTURE.

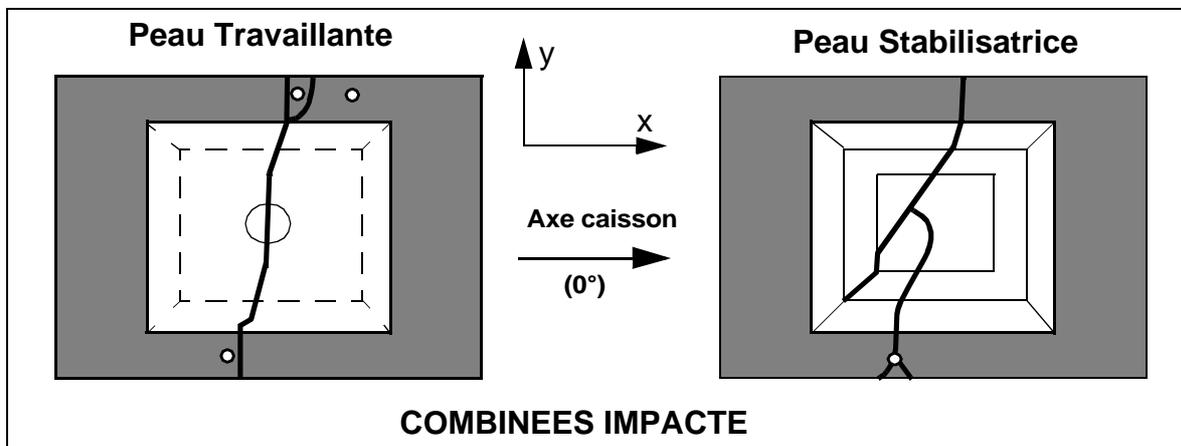


Figure N° 3-50 : Faciès de rupture éprouvette combinées impactée (Photo N° A2-15).

La ligne de rupture de la peau travailleuse est d'abord à 0° avant de s'infléchir suivant une direction à 15°. Pour la peau stabilisatrice, on a un faciès de rupture présentant une ligne de rupture à 45° débutant sur un coin de l'arrêt de nida et une deuxième ligne au parcours plus torturé dont le départ se situe approximativement au centre de la plaque. D'après l'expérience acquise, il semble que la peau stabilisatrice se soit rompue en cisaillement alors que la peau travailleuse se soit rompue sous sollicitations complexes avec une propagation de fissure comme va le montrer le suivi de l'essai.

SUIVI DE L'ESSAI.

Afin d'expliquer le comportement de l'éprouvette, seul le dépouillement de quelques jauges significatives est présenté.

Les jauges :

- **2-5-8** sont significatives du flux entrant dans la peau travaillante.
- **11 et 20** sont significatives du flux passant dans la zone périphérique.
- **17 et 18** sont significatives du comportement de la zone centrale.

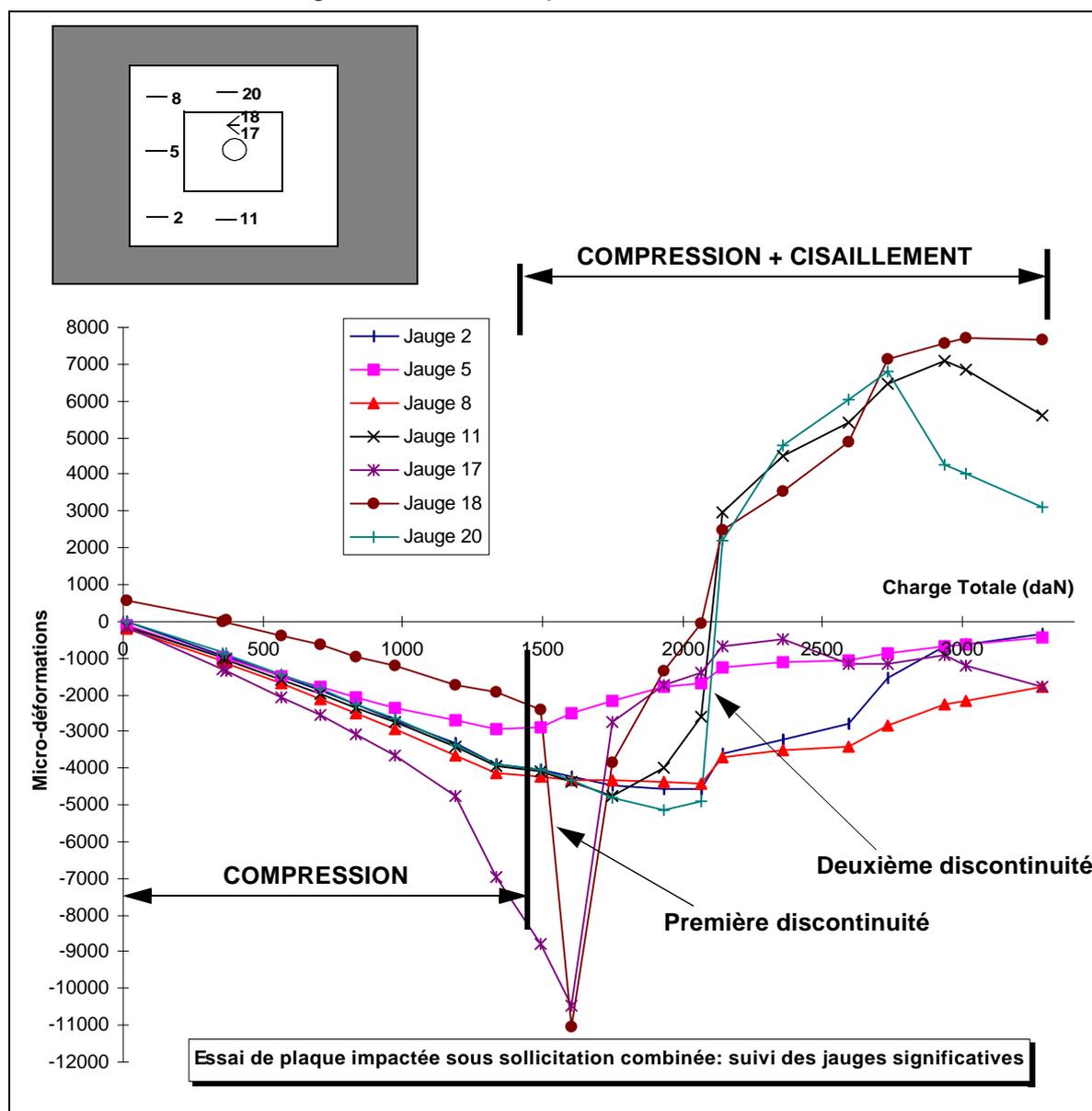


Figure N° 3-51 : Suivi de l'essai combinées impactée.

Le déroulement de l'essai a été le suivant :

- Chargement en compression jusqu'à 1332 daN ce qui correspond à une moyenne de -3644 µdéf sur les jauges d'entrée de flux 2-5-8 puis mise en cisaillement.

- Première discontinuité (chargement total compression + cisaillement : 1480 daN) .
A ce moment, il a été constaté sur la caméra servant à l'étude du Moiré un éclatement local de la peinture à proximité des jauges 17 et 18. A partir de ce moment, des crissements et des craquements importants ont été entendus.
- La deuxième discontinuité marque le changement de comportement dans la zone périphérique.
- Arrêt de l'essai quand le "bang" caractéristique a été entendu.

A la première discontinuité, soit tout juste au début de la mise en charge en cisaillement, la fissure s'est propagée suivant y sous les jauges 17 et 18. Le fait que la fissure soit juste sous ces jauges fait que les valeurs mesurées ne sont plus significatives.

Bien qu'étant fissurée localement, la structure garde encore une rigidité élevée en cisaillement à cause de la zone périphérique qui est intègre, de la peau stabilisatrice et de la zone monolithique. Ce qui explique que la montée en charge se soit poursuivie pendant un certain temps.

A la deuxième discontinuité, la fissure s'est vraisemblablement propagée dans la zone intègre, ce qui explique la modification de son comportement. Enfin une rupture statique fragile a eu lieu.

DÉFORMATIONS DERNIER PALIER STRUCTURE INTÈGRE.

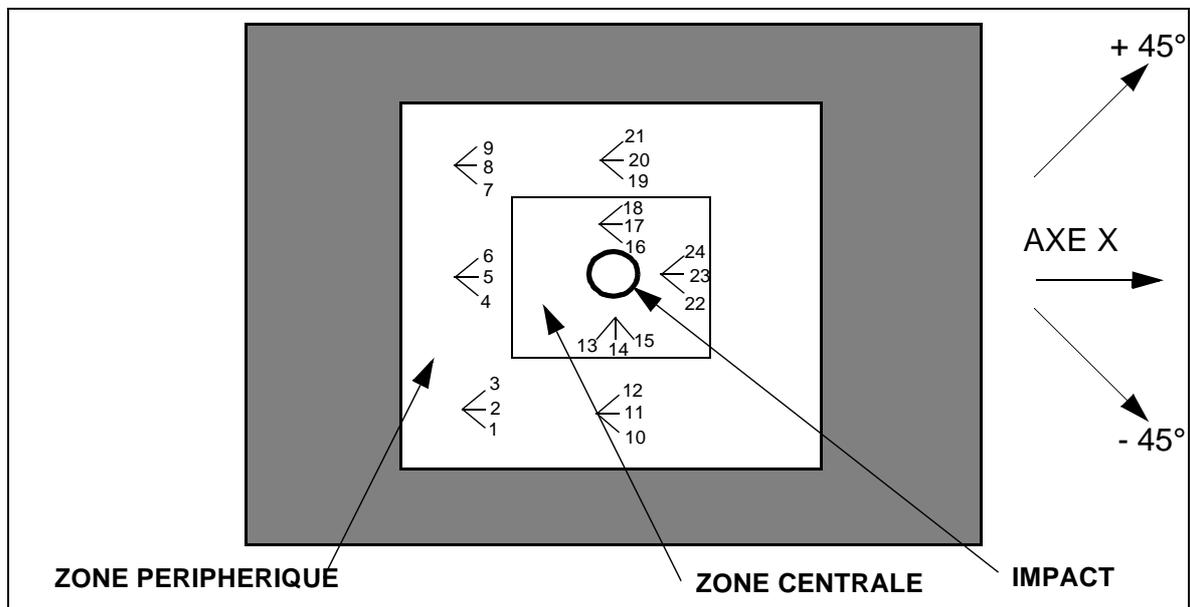


Figure N° 3-52 : disposition des rosettes sur la peau travaillante, essai combinées plaque impactée.

Ce palier est celui qui précède la première discontinuité. Il correspond aux charges suivantes exercées sur le montage d'essai : Flexion : 1353 daN ; Torsion : 141 daN. La disposition des rosettes sur la peau travaillante est identique à celle en cisaillement que l'on

rappelle Figure N° 3-52 pour faciliter la lecture.

La moyenne des directions principales ε_1 des rosettes d'entrée du flux est **-3860** $\mu\text{d}\acute{e}\text{f}$. Cette valeur est comparable à l'essai de traction n°1. On retrouve un phénomène de concentration des contraintes très prononcé autour de l'impact. Les valeurs sont très sensibles car la jauge à 0° N°17 passe de -6948 $\mu\text{d}\acute{e}\text{f}$ à -8844 $\mu\text{d}\acute{e}\text{f}$ pour une augmentation de chargement en torsion de seulement 141 daN.

ROSETTES	1-2-3	4-5-6	7-8-9	10-11-12	19-20-21
ANGLE	+12°	+13.8°	+2.3°	-11°	-9°
ε_1	-4273	-3078	-4226.39	-4426	-4120
ε_2	848	681	1490	44	264.37

ROSETTES	13-14-15	16-17-18	22-23-24
ANGLE	+2.5°	+4.7°	-9.4°
ε_1	-5244	-8844	-2162
ε_2	2851	2202	1564

Tableau N° 3-8 : Déformations principales dernier palier structure intègre essai combiné impactée.

DÉFORMATIONS DERNIER PALIER AVANT RUPTURE.

Ce palier correspond aux charges suivantes exercées sur le montage d'essai : Flexion : 1634 daN ; Torsion : 1642 daN. Les rosettes de la zone centrale (13-14-15), (16-17-18) et des plis de renfort latéraux (10-11-12), (19-20-21) ne fournissent plus de mesures viables. On ne donnera donc que les résultats des 3 rosettes d'entrée du flux dans les directions principales :

ROSETTES	1-2-3	4-5-6	7-8-9
ANGLE	+45°	+41°	+12°
ε_1	+3446	+2711	1492
ε_2	-4010	-2868	-1923

Tableau N° 3-9 : Déformations et directions principales dernier palier avant rupture.

Les mesures montrent que la plaque est quasiment chargée en cisaillement pur à la fin de l'essai bien que l'effort des vérins de flexion soit de 1634 daN. La peau stabilisatrice a une ligne de rupture à 45° ce qui confirme une sollicitation en cisaillement. Il est vraisemblable que le flux de compression est repris par la structure aluminium du caisson central, la rigidité résiduelle de l'éprouvette fissurée étant faible pour cette sollicitation.

CONCLUSIONS.

L'interprétation de cet essai nécessite d'une part d'avoir prouvé qu'il s'agissait bien d'une fissure qui se propageait et non pas un délaminage, et d'autre part de raisonner sur l'ensemble éprouvette + caisson. Il a montré que la plaque impactée a une importante résistance résiduelle en cisaillement même après le début de la fissuration. Toutefois, il n'est pas certain que cette constatation soit extrapolable aux structures réelles car les rigidités avoisinantes jouent un grand rôle en reprenant les flux de compression. De plus celles-ci sont soumises à des efforts alternés, pas à des efforts statiques croissants.

III.5 - CONCLUSION GÉNÉRALE SUR LES ESSAIS.

Les points essentiels que cette étude expérimentale a démontré sont :

⇒ **La validité du concept pour tester sous sollicitations combinées ou sollicitations simples des éprouvettes technologiques.**

⇒ **La mise en évidence de modes de ruptures originaux.**

Les ruptures des plaques non impactées ont toutes été statique fragile dans la peau travaillante à des valeurs proches de la résistance du stratifié. Ces valeurs sont supérieures aux essais classiques de compression et donnent une marge supplémentaire de dimensionnement. De même une propagation non explosive de fissure a pu être observée pour les plaques impactées. Ces comportements peuvent être attribués d'une part à la petite taille de l'éprouvette et d'autre part aux conditions aux limites de type "tout-encasté". A contrario, l'on peut se poser la question de la représentativité des éprouvettes et des possibilités d'extrapolations aux structures réelles.

⇒ **L'existence d'une interaction entre le montage d'essai et l'éprouvette.**

Cette interaction est la conséquence directe du concept proposé. A l'instar des structures aéronautique réelles, le caisson central est hyperstatique. Aussi, les efforts se répartissent en fonction des rigidités entre les cornières, les flancs et l'éprouvette. De plus, il est difficile de quantifier l'influence des serrages, des jeux, des plastifications locales, de la résine micro-ballons et des défauts géométriques. La conséquence de ces quelques remar-

ques est que la connaissance du flux entrant dans l'éprouvette ne peut être faite avec précision qu'*in situ* (voir aussi [Klein 89] qui arrive aux mêmes conclusions). Dans une conception ultérieure, il sera peut-être possible d'imaginer des balances spécifiques pour mesurer les flux d'efforts entrant directement dans le caisson central.

⇒ ***Une mise en oeuvre lourde.***

Dans l'état actuel de la conception, la réalisation d'un essai demande environ une semaine aux personnels du laboratoire. Le montage actuel est un prototype et sa conception pourrait être améliorée : conception modulaire et démontable bras/caissons de chargement et caisson central, utilisation de goujons à la place de vis, adaptations à des dimensions différentes et aux coques, etc... En tout état de cause, ce type d'essai restera plus lourd à mettre en oeuvre que les essais classiques sur machine de traction universelle.

D'une manière générale, le concept de montage d'essai proposé met en évidence le comportement structural de l'éprouvette technologique testée. C'est un avantage "structure" que peut procurer le concept en recréant à un moindre coût et de manière simplifiée une structure réelle. Par contre, l'évaluation des charges entrant effectivement dans l'éprouvette est difficile. L'interprétation de ce type d'essais oblige à raisonner "structures". Comme tous les paramètres ne sont pas maîtrisés, celle-ci peut être erronée, la pondération entre les différents facteurs étant quelquefois très subjective. Enfin, le montage d'essai, tel qu'il est conçu fournit des résultats avec une dispersion élevée, il doit être possible de la réduire en améliorant la qualité générale de la construction du montage mais cela devrait augmenter son coût dans des proportions importantes.

CHAPITRE IV

ETUDE THEORIQUE

IV.1 - OBJECTIFS ET DÉMARCHE.

La description du comportement des structures sandwichs dissymétriques relève de l'analyse non linéaire géométrique. A l'heure actuelle, seules des méthodes éléments finis 3D, lourdes à mettre en oeuvre et n'autorisant pas des temps de réponse rapides sont utilisées pour la modélisation. En outre, ces méthodes ne permettent pas une identification aisée des paramètres influents.

Aussi, l'objectif de la partie théorique de cette étude est de développer une méthode de prédimensionnement rapide permettant de réaliser des itérations de conception sur les drapages et les géométries en avant-projet. La méthode proposée doit pouvoir être apte à corréler les essais du chap III ou ceux effectués par Eurocopter France. Le modèle devra fournir la contrainte de compression transverse de l'âme car celle-ci peut s'avérer critique. Par ailleurs, cette contrainte semble piloter le comportement des structures impactées et sa connaissance pourra être utile dans le cadre de développements ultérieurs.

Pour satisfaire à ce cahier des charges, le programme informatique qui sera écrit à partir de la théorie devra être facile d'emploi et avoir des temps de réponse courts. En conséquence, le choix des hypothèses mécaniques a été dicté en permanence par la recherche du meilleur compromis **qualité mécanique de la description / complexité mathématique minimale**.

Les hypothèses qui seront effectuées dans le paragraphe suivant et le choix de la méthode de résolution seront validées par le développement d'un modèle simplifié de type

poutre. Outre une formulation mathématique allégée qui autorise une programmation rapide en calcul formel, la modélisation de type poutre permet la compréhension de la mécanique des structures sandwichs dissymétriques chargées en compression et permet d'identifier les paramètres influents pour la corrélation des essais.

Une fois les problèmes du passage poutres/plaques résolus, un modèle 2D incluant l'expérience acquise en poutre a été élaboré et le programme SAND a pu être écrit (8846 lignes au 11/99), validé et livré à Eurocopter France.

IV.2 - HYPOTHÈSES GÉNÉRALES.

IV.2.1 - GÉOMÉTRIE.

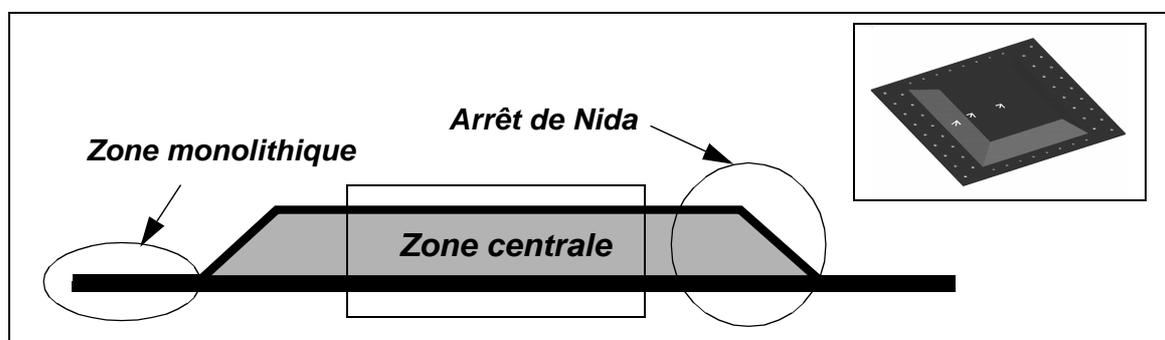


Figure N° 4-1: Plaque sandwich réelle.

Une plaque sandwich dissymétrique comporte 3 zones (Figure N° 4-1).

- Une zone de jonction monolithique.
- Un arrêt de nida. (Il convient de noter que la conception de cette zone est confidentielle et ne peut donc pas être explicitée dans cet ouvrage).
- Une zone centrale sandwich dissymétrique pur.

La modélisation du comportement de l'arrêt de nida s'avère complexe, même en poutre et a par conséquent été abandonnée. On ne trouve par ailleurs que peu de publications sur les sandwichs à faces non parallèles et toujours dans le domaine linéaire [Paydar et Libove 1986, Bailey et Al 1990, Jeon et Hong 1992, Frostig 1995]. Deux études explicites sur des arrêts de nida en poutres ont été publiées très récemment [Kuczma 1999, Chai 1999]. Le problème est encore plus ardu en plaque du fait de la géométrie "en pyramide" des angles. Aussi, dans un souci d'efficacité, une géométrie standard, à savoir parallélépipédique est retenue. (Figure N° 4-2).

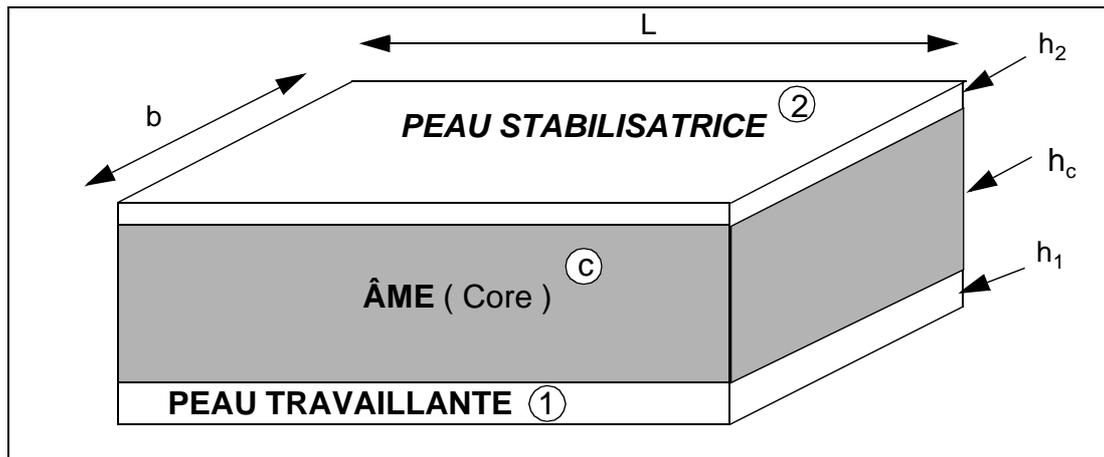


Figure N° 4-2: Géométrie de la plaque sandwich dissymétrique.

Cette nécessité d'avoir un modèle géométrique simple pour pouvoir formuler le problème ne doit pas éluder le comportement réel. Par conséquent, afin de pouvoir corréler les essais, et compte-tenu de la géométrie de l'arrêt de nida, des efforts complexes pourront être introduits dans les peaux travaillante et stabilisatrice (Figure N° 4-3).

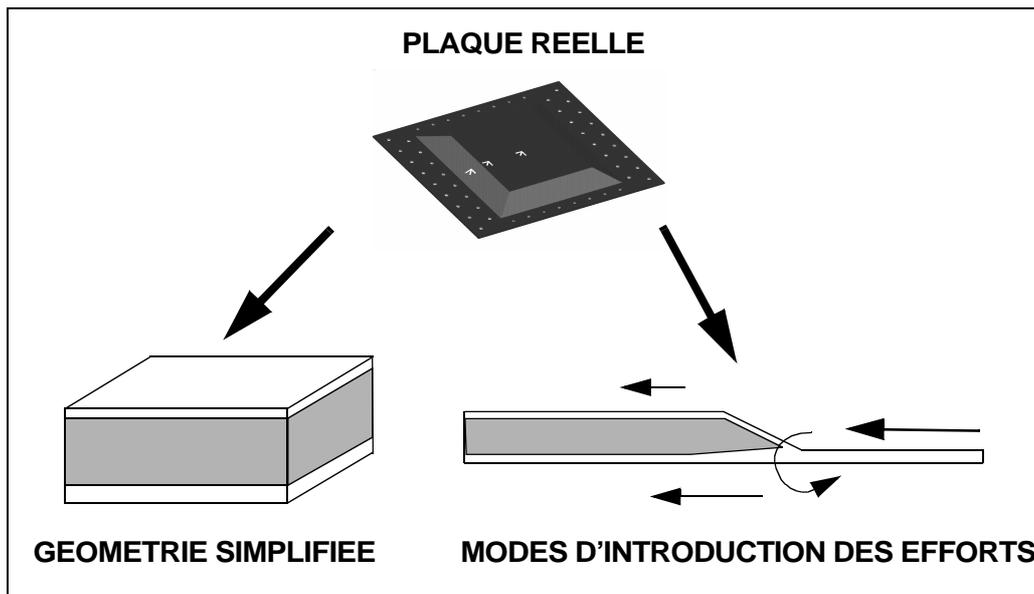


Figure N° 4-3: Principe de la modélisation

IV.2.2 - HYPOTHÈSES CINÉMATIQUES.

MODÈLE LOCAL.

L'étude bibliographique montre que la majorité des auteurs adopte une formulation en déplacement pour décrire le comportement des structures sandwichs. Les formulations mixtes par morceaux, à savoir une formulation en contrainte dans l'âme et en déplacement

dans les peaux fournissent aussi des modélisations de qualité dans le domaine linéaire [Frostig 1992 à 1998].

Pour cette étude, la méthode des déplacements sera retenue car elle répond le mieux, pour un développement à finalité industrielle, aux critères de simplicité et de fiabilité. En effet, l'expérience acquise dans le cadre des éléments finis non linéaires est facilement accessible et transposable à notre étude.

Le choix des hypothèses cinématiques doit concilier deux contraintes opposées :

- ⇒ *Une formulation suffisamment fine pour pouvoir décrire le comportement attendu des structures sandwichs dissymétriques.*
- ⇒ *Une simplicité nécessaire à garantir une robustesse numérique et une réponse logiciel rapide.*

Pour se fixer les bons critères, la réponse aux sollicitations attendues sera examinée **par phase** et des hypothèses minimales de description cinématique seront alors effectuées. Le choix de décrire par phase le comportement du sandwich et les constatations expérimentales sur le mode de chargement impliquent une description de type "**Zig-Zag**" du champ des déplacements. A l'instar de la majorité des auteurs, nous ignorerons la présence du joint de colle et admettrons la continuité des déplacements entre les phases.

Les formulations globales ont été écartées car elles ne permettent pas une différenciation mécanique aussi naturelle entre la peau travaillante et la peau stabilisatrice. Elles sont plus adaptées aux formulations éléments finis et fournissent de très bons résultats dans le cadre de modélisations de structures réelles complètes.

MODE DE CHARGEMENT DES SANDWICHS DISSYMMÉTRIQUES

Les structures d'hélicoptères ne sont pas pressurisées et les pressions aérodynamiques sont à notre connaissance de faible intensité. De ce fait, les charges de flexion réparties sont quasiment inexistantes, ce qui fait que l'on peut utiliser des peaux de rigidités très différentes. Les sandwichs dissymétriques travaillent donc essentiellement dans leur plan. L'expérience acquise lors des essais en compression laisse à penser que le mode de chargement des deux peaux consiste en un flux principal **N_x** repris par la peau travaillante et pouvant être décalé d'une valeur δ suivant l'axe vertical. Un flux secondaire (fraction de quelques **N%** du flux principal) peut aussi charger directement la peau stabilisatrice (*Figure N° 4-4*).

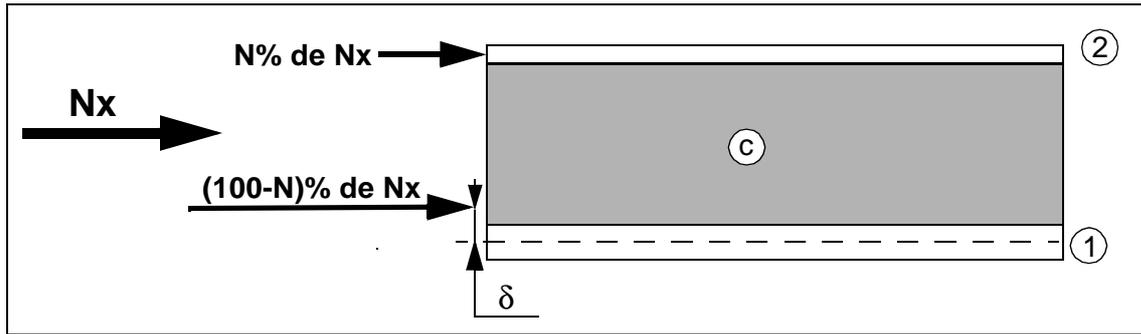


Figure N° 4-4: Chargement d'une poutre sandwich dissymétrique.

Les flux d'efforts sont introduits dans la zone monolithique par un boulonnage. Cette partie est en conséquence dimensionnée au matage. La surépaisseur est donc importante par rapport à la peau travaillante ce qui explique l'origine du décalage δ . Le flux secondaire **N%** est lié à la géométrie de l'arrêt de nida qu'il n'est pas possible d'expliciter ici. Un seul autre auteur y fait référence [Kuczma 1999] et obtient un pourcentage de 5% au maximum par modélisation éléments finis.

HYPOTHÈSES PEAUX TRAVAILLANTE ET STABILISATRICE.

La technologie des sandwichs dissymétriques veut que la peau travaillante soit raidie par le système nida+peau stabilisatrice. Comme il est décrit dans le paragraphe précédent, les sandwichs dissymétriques sont chargés dans leur plan ce qui fait que la peau travaillante est toujours beaucoup plus rigide et épaisse que la peau stabilisatrice. Le sandwich ne reprend pas de charges extérieures de flexion autres que celles induites par le décalage δ de la ligne neutre de la peau travaillante par rapport au plan de chargement.

Dans les deux peaux, compte-tenu des faibles épaisseurs (sandwichs de type aéronautiques), il n'est pas utile de prendre en compte le cisaillement transverse.

Comme la peau travaillante peut être a priori épaisse et qu'elle n'est que stabilisée par l'ensemble nida + peau stabilisatrice, on considère qu'elle possède une certaine rigidité de flexion. En conséquence, la **théorie des plaques classiques (CPT)** ou de **Kirchhoff-Love** est retenue.

La rigidité de la *peau stabilisatrice* sera toujours faible compte-tenu de sa faible épaisseur (2 ou 3 plis seulement). Elle n'est chargée dans son plan que par le cisaillement de l'âme qui génère des contraintes de traction/compression par continuité des déplacements. Un chargement secondaire a aussi été identifié via l'arrêt de nida. En conséquence, une description en **membrane** sera suffisante.

HYPOTHÈSES ÂME.

La problématique est différente dans l'âme. En effet, le fait d'utiliser des âmes en mousse basse densité ou en nid d'abeille permet de poser l'hypothèse "**antiplane core**", à savoir que *l'âme ne possède pas de rigidité dans son plan*. Le tenseur des contraintes ne comporte que 3 composantes non nulles :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz}^c \\ 0 & 0 & \tau_{yz}^c \\ \tau_{xz}^c & \tau_{yz}^c & \sigma_{zz}^c \end{bmatrix}$$

Les équations de l'équilibre local ($\mathbf{Div}[\boldsymbol{\sigma}] = \mathbf{0}$) sont facilement intégrables et on montre que :

- ⇒ *Les contraintes de cisaillement sont constantes dans l'épaisseur.*
- ⇒ *La contrainte normale varie linéairement dans l'épaisseur.*

De l'application de la loi de comportement, on déduit que :

- ⇒ *L'angle de cisaillement γ_{xz} est constant dans l'épaisseur.*
- ⇒ *La composante verticale du déplacement de l'âme peut être modélisée par une fonction du second degré en z.*

IV.2.3 - HYPOTHÈSES DE COMPORTEMENT DES PEAUX

Le comportement des stratifiés avant dégradation est linéaire élastique. Les stratifiés constituant les peaux travaillantes et stabilisatrices seront homogénéisés en plaques orthotropes. Pour pouvoir effectuer cette hypothèse, il est nécessaire :

- ⇒ *Que les drapages utilisés par Eurocopter soient équilibrés et respectent la symétrie miroir. Dans le cas contraire, le couplage plan traction/cisaillement ainsi que le couplage membrane/flexion ne sont pas pris en compte.*
- ⇒ *Dans tous les cas, une erreur est commise en calculant la rigidité de flexion de la peau travaillante puisque la disposition des plis dans l'épaisseur n'est pas prise en compte.*

Il n'est pas possible de détailler dans cet ouvrage les drapages utilisés par Eurocopter,

mais d'une manière générale les drapages non équilibrés ne sont pas utilisés dans l'industrie aéronautique. L'apport éventuel d'un couplage membrane/flexion serait par ailleurs négligeable énergétiquement pour la réponse globale du sandwich.

L'erreur commise en ne prenant pas en compte de manière exacte la rigidité de flexion du stratifié est assumée au profit de la simplicité de la formulation qui en découle.

Les relations de comportement dans les peaux travaillantes (éq IV-1) et stabilisatrice (éq IV-2) dans les axes d'orthotropie qui sont les axes de référence du sandwich s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^1 \\ \sigma_{yy}^1 \\ \tau_{xy}^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{PT} & Q_{12}^{PT} & 0 \\ Q_{21}^{PT} & Q_{22}^{PT} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^{PT} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} \quad \{\sigma^1\} = [Q^{PT}] \times \{\varepsilon^1\} \quad (\text{éq IV-1})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^2 \\ \sigma_{yy}^2 \\ \tau_{xy}^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{PS} & Q_{12}^{PS} & 0 \\ Q_{21}^{PS} & Q_{22}^{PS} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^{PS} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^2 \\ \varepsilon_{yy}^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{Bmatrix} \quad \{\sigma^2\} = [Q^{PS}] \times \{\varepsilon^2\} \quad (\text{éq IV-2})$$

Les coefficients de raideurs équivalents $Q_{i,j}^{PT}$ et $Q_{i,j}^{PS}$ sont les coefficients de la matrice $1/h \cdot [A]$ [GAY 1991, éq (12.7)], calculés à partir des caractéristiques matériaux de chaque pli et de la séquence d'empilement [Barrau 1987, chap VI]. Il est usuel d'utiliser en entrée de données matériaux dans les logiciels éléments finis les caractéristiques orthotropes du pli (E_x module sens long ; E_y module sens travers ; ν_{xy} coefficient de Poisson ; G_{xy} : module de cisaillement). Comme le logiciel SAND prend comme données matériaux les $Q_{i,j}$, il peut être intéressant d'un point de vue pratique de connaître les relations [Berthelot 1996, p216] :

$$Q_{11} = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}} = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}^2 \cdot \frac{E_y}{E_x}} \quad (\text{éq IV-3})$$

$$Q_{22} = \frac{E_y}{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}} = \frac{E_y}{E_x} \cdot Q_{11} \quad (\text{éq IV-4})$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{xy} \cdot E_y}{1 - \nu_{xy} \cdot \nu_{yx}} = \nu_{xy} \cdot Q_{22} \quad (\text{éq IV-5})$$

$$Q_{66} = G_{xy} \quad (\text{éq IV-6})$$

L'hypothèse "Antiplane Core" conduit à l'expression de la relation de comportement

dans l'âme :

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz}^c \\ \tau_{yz}^c \\ \sigma_{zz}^c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{13}^c & 0 & 0 \\ 0 & G_{23}^c & 0 \\ 0 & 0 & E_{zz}^c \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^2 \\ \varepsilon_{yy}^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{Bmatrix} \quad \{\sigma^c\} = [Q^c] \times \{\varepsilon^c\} \quad (\text{éq IV-7})$$

Enfin, comme signalé dans la bibliographie, il convient de noter que pour cette étude aussi les axes d'orthotropie de l'âme et les axes de référence du sandwich sont confondus, ce qui correspond à la réalité et élimine des couplages parasites entre âme et peaux.

IV.2.4 - HYPOTHÈSES DE L'ANALYSE NON LINÉAIRE GEOMETRIQUE.

JUSTIFICATION.

Les résultats d'essai montrent que la réponse des sandwichs dissymétriques chargés dans leur plan est non-linéaire géométrique (Voir Chap III). Si la réponse de la peau travaillante est quasi-linéaire, il n'en va pas de même pour la peau stabilisatrice qui peut passer d'un état de compression à un état de traction. La flèche avant rupture peut atteindre 15% de la longueur de l'éprouvette dans le cas d'essais de compression classiques (cf para II-3.2 et [Beltrando 1995]).

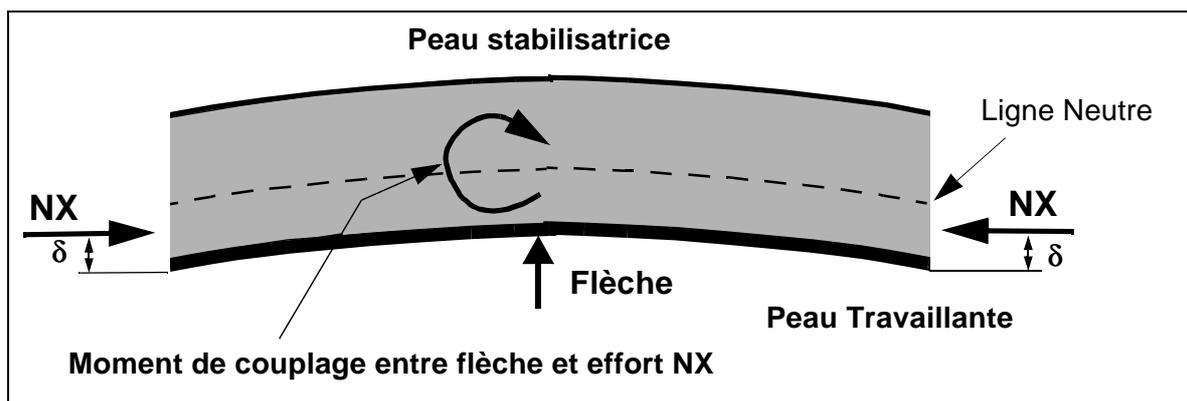


Figure N° 4-5: Explication du comportement non linéaire des sandwichs dissymétriques.

L'origine du comportement non linéaire en compression peut être mis en évidence plus facilement en poutres (Figure N° 4-5). L'introduction des efforts ne se fait ni sur la ligne neutre du sandwich, ni sur la ligne moyenne de la peau travaillante. Le décalage par rapport à la ligne neutre du sandwich est naturel car les charges transitent essentiellement par la peau travaillante dans cette technologie. D'autre part, le décalage d de la charge est dû aux

épaisseurs différentes entre la zone monolithique et la peau travaillante.

Ces décalages créent *un moment de couplage flèche/chargement*. Ce moment devient d'autant plus important que la prise de flèche est importante. Il favorise à son tour la prise de flèche ce qui crée la réponse non-linéaire géométrique puisque la déformée est sensible au chargement.

FORMULATION LAGRANGIENNE TOTALE.

Le domaine exploitable des essais réalisés montre des déformations maximales en compression de l'ordre de 1,4% (<2%). Les déformations restent donc petites. De même, les flèches maximales obtenues lors d'essais classiques ne dépassent pas 15% de la longueur totale de la plaque.

⇒ Une formulation lagrangienne totale est suffisante pour décrire le comportement attendu des structures sandwichs dissymétriques.

La configuration initiale sera donc la configuration de référence pour l'étude du comportement. L'erreur commise en projection en confondant les positions déformée et non déformée des repères de description du sandwichs est d'au maximum 1,1%. On pourra donc confondre un angle et son sinus :

⇒ Les rotations sont petites.

IV.3 - THÉORIES DES POUTRES SANDWICHES DISSYMMÉTRIQUES.

IV.3.1 - GÉOMÉTRIE ET CHAMP DES DÉPLACEMENTS.

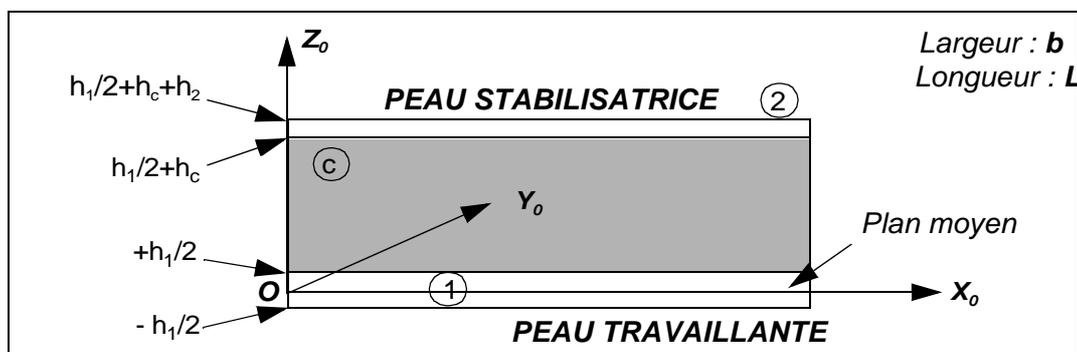


Figure N° 4-6: Géométrie et notations en poutre.

La géométrie retenue est parallélépipédique et l'origine des axes est prise sur le coté gauche du sandwich. Le choix des inconnues de déplacement (Figure N° 4-7) s'est porté sur les déplacements du plan moyen de la peau travaillante $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $w_0(\mathbf{x})$ et la rotation de la section droite de l'âme $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ [Allen 1969].

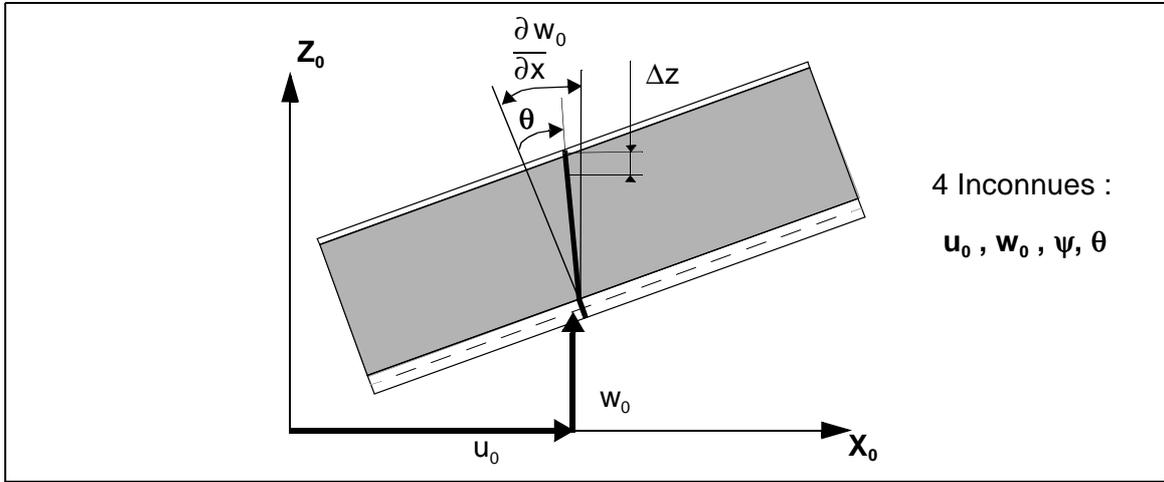


Figure N° 4-7: Champ des déplacements dans le modèle de poutre simplifié.

Le raccourcissement Δz de la fibre transverse de l'âme sera supposé être de la forme :

$$\Delta z = \psi(x) \cdot \left(z - \frac{h_1}{2} \right) \quad (\text{éq IV-8})$$

Cela implique que la contrainte de compression obtenue sera *constante* et ne représentera qu'une *valeur indicative*. On retrouve ce type d'approche lors de modélisations E.F volumiques qui ne comportent qu'un seul élément dans l'épaisseur de l'âme.

Pour la peau travaillante (₁), sous l'hypothèse petites rotations, les champs des déplacements u_1 suivant \mathbf{X}_0 et w_1 suivant \mathbf{Z}_0 sont :

$$u_1(x, z) = u_0(x) - z \cdot \frac{\partial w_0}{\partial x} ; \quad w_1(x, z) = w_0(x) \quad (\text{éq IV-9})$$

Pour l'âme (_c), sous l'hypothèse petites rotations, le champ des déplacements u_c suivant \mathbf{X}_0 et w_c suivant \mathbf{Z}_0 est :

$$u_c(x, z) = u_0(x) - \frac{h_1}{2} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial x} - \left(z - \frac{h_1}{2} \right) \cdot (1 + \psi(x)) \cdot \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - \theta(x) \right) \quad (\text{éq IV-10})$$

$$w_c(x, z) = w_0(x) + \left(z - \frac{h_1}{2} \right) \cdot \psi(x) \quad (\text{éq IV-11})$$

Les déplacements dans la peau stabilisatrice sont obtenus en remplaçant $z = \frac{h_1}{2} + h_c$ dans (éq IV-10) et (éq IV-11).

IV.3.2 - EXPRESSION DES DÉFORMATIONS AVEC CHANGEMENT DE VARIABLES.

PEAU TRAVAILLANTE.

Sous les hypothèses retenues, la déformation ε_{xx} s'écrit dans la peau travaillante :

$$\varepsilon_{xx}^1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - z \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \varepsilon_{xx}^N + \varepsilon_{xx}^{Flex} \quad (\text{éq IV-12})$$

On peut distinguer dans ε_{xx} un premier terme lié aux déformations de membrane (^N) et un deuxième terme lié aux déformations dans l'épaisseur induite par la flexion de la peau (^{Flex}). Le calcul de la variation de longueur $u_s(x)$ de la ligne moyenne de la peau travaillante fournit :

$$\int_0^x \varepsilon_{xx}^N dx = u_0 + \frac{1}{2} \cdot \int_0^x \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 dx = u_s \quad (\text{éq IV-13})$$

On peut alors choisir u_s comme inconnue principale au lieu de u_0 . Le premier intérêt de ce changement de variable réside dans le fait que u_s peut être approximée par une fonction linéaire. En effet, l'effort normal, compte-tenu de la faible courbure, est quasi constant ce qui fait que la ligne moyenne de la peau travaillante est quasiment soumise à de la compression uniforme. Par conséquent, nous poserons :

$$u_s(x) \approx A \cdot x \quad (\text{pour } x = 0, u_0 = u_s = 0) \quad (\text{éq IV-14})$$

La déformation dans la peau travaillante s'écrit donc plus simplement :

$$\varepsilon_{xx}^1 = \frac{\partial u_s}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (\text{éq IV-15})$$

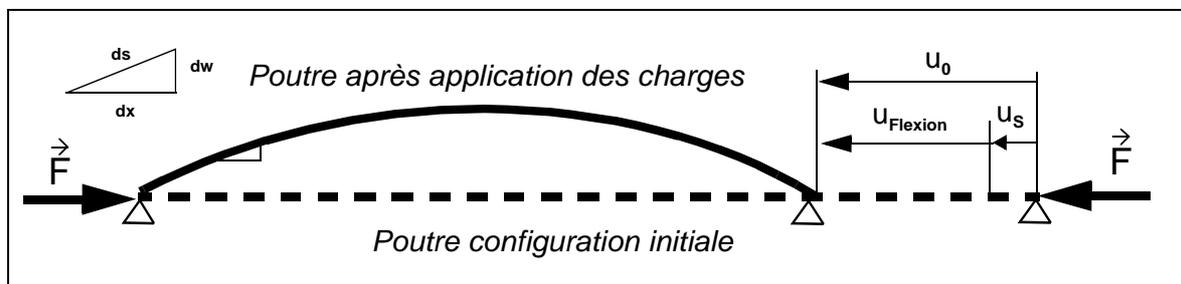


Figure N° 4-8 : Illustration mécanique du changement de variables.

Pour $x = L$, le changement de variable proposé peut être illustré (Figure N° 4-8). Cette figure permet de bien mettre en évidence le fait que u_0 est un déplacement induit en grande partie par la grande flèche de la poutre.

ÂME.

Les expressions des composantes du tenseur des déformations de Green-Lagrange (éq A4-4) s'écrivent :

$$\varepsilon_{zz}^c = \frac{\partial w_c}{\partial z} = \psi \quad (\text{éq IV-16})$$

Les termes supplémentaires d'ordre 2 sont considérés négligeables.

$$\gamma_{xz}^c = \frac{\partial w_c}{\partial x} + \frac{\partial u_c}{\partial z} + \frac{\partial w_c}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_c}{\partial z} = (1 + \psi) \cdot \theta + \left(z - \frac{h_1}{2}\right) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(z - \frac{h_1}{2}\right) \cdot \psi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{éq IV-17})$$

Le dernier terme de l'équation est la contribution du terme non linéaire. Il représente la modification de l'angle de cisaillement γ_{xz} généré par le raccourcissement suivant z . Il est d'ordre 2 car la déformation normale transverse de l'âme sera très faible. Il peut donc être négligé ce qui conduit à l'expression simplifiée :

$$\gamma_{xz}^c \approx (1 + \psi) \cdot \theta + \left(z - \frac{h_1}{2}\right) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{éq IV-18})$$

PEAU STABILISATRICE.

Après changement de variable, on obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)^2 \\ &= \frac{\partial u_s}{\partial x} - \left(\frac{h_1}{2} + h_c \cdot (1 + \psi)\right) \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + h_c \cdot \theta \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + h_c \cdot (1 + \psi) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left(h_c \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 \end{aligned} \quad (\text{éq IV-19})$$

Une étude numérique *a posteriori* a montré que le dernier terme est négligeable [Beltrando 1995, p37]. L'expression se réduit alors à :

$$\varepsilon_{xx}^2 = \frac{\partial u_s}{\partial x} - \left(\frac{h_1}{2} + h_c \cdot (1 + \psi)\right) \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + h_c \cdot \theta \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + h_c \cdot (1 + \psi) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{éq IV-20})$$

Malgré la simplification effectuée, on remarquera que cette expression reste mathématiquement complexe et présente de nombreux termes de couplage.

IV.3.3 - RÉSOLUTION DU PROBLÈME PAR MINIMISATION DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE.

FONCTIONS D'APPROXIMATION.

Deux bases, l'une polynômiale, l'autre sinusoidale ont été utilisées. On rappelle que $u_s(x) = A \cdot x$ dans les deux cas.

Le choix des inconnues u_s , w_0 , θ , et Ψ permet l'utilisation des fonctions simples suivantes :

$$w_0(x) = B \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right) \text{ ou } w_0(x) = B \cdot x \cdot (x - L) \quad (\text{éq IV-21})$$

La prise en compte des symétries conduit à choisir :

$$\theta(x) = C \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right) \quad ; \quad \Psi(x) = D \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right) \quad (\text{éq IV-22})$$

$$\text{ou : } \theta(x) = C \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right) \quad , \quad \Psi(x) = D \quad (\text{éq IV-23})$$

Le problème ne comporte que 4 inconnues numériques **A, B, C, D**.

MINIMISATION DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE.

L'expression de l'énergie de déformation U_d de la poutre sandwich est :

$$U_d = U_d^{\text{Trav}} + U_d^{\text{stab}} + U_d^{\text{Ame}} \quad (\text{éq IV-24})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot E_1 b \cdot \int_0^L \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} (\varepsilon_{xx}^1)^2 dz dx + \frac{1}{2} \cdot E_2 b h_2 \cdot \int_0^L (\varepsilon_{xx}^2)^2 dz dx \\ &+ \frac{1}{2} \cdot E_c b \cdot \int_0^L \int_{\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2} + h_c} (\varepsilon_{zz}^c)^2 dz dx + \frac{1}{2} \cdot G_c b \cdot \int_0^L \int_{\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2} + h_c} (\gamma_{xz}^c)^2 \cdot dz dx \end{aligned}$$

L'expression du potentiel des efforts extérieurs V_{Fext} en prenant en compte le décalage δ et le flux $N\%$ est :

$$-V_{\text{Fext}} = (1-N) \cdot F \cdot \left(\int_0^L \left(\frac{\partial u_s}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right) dx + \delta \cdot \int_0^L \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} dx \right) - N \cdot F \cdot \int_0^L \left(\varepsilon_{xx}^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right) dx \quad (\text{éq IV-25})$$

On peut à présent former le système à 4 équations, 4 inconnues **A, B, C, D** :

$$\frac{\partial U_{\text{TOTALE}}}{\partial A} = \frac{\partial U_{\text{TOTALE}}}{\partial B} = \frac{\partial U_{\text{TOTALE}}}{\partial C} = \frac{\partial U_{\text{TOTALE}}}{\partial D} = 0 \quad (\text{éq IV-26})$$

Le deuxième intérêt du changement de variable est qu'il permet de former un système **linéaire** (éq IV-26), **paramétré par la force F**, ce qui simplifie considérablement la résolution. La mise en oeuvre pratique de cette théorie simplifiée a été réalisée par programmation en calcul formel avec le logiciel MAPLE. La résolution du système se fait par substitution.

VALIDATION.

Les résultats obtenus ont été comparés à un modèle éléments finis de poutre sandwich dissymétrique peaux stratifiées carbone et âme en nida Nomex [Beltrando 1995] utilisant le logiciel SAMCEF. Le sandwich est modélisé par un seul élément volumique T11 dans l'épaisseur pour l'âme et des éléments hybrides T56 pour les peaux.

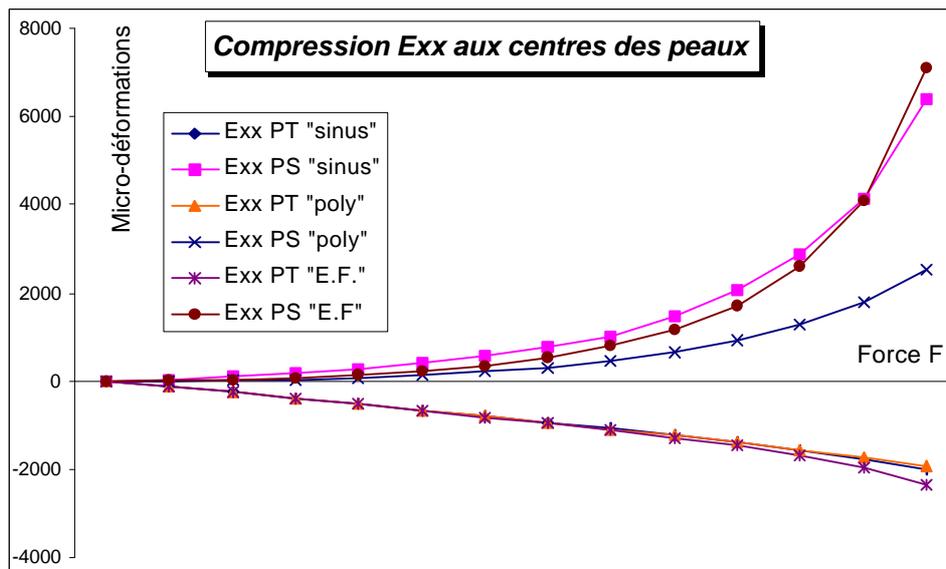


Figure N° 4-9 : Déformation ϵ_{xx} aux centres des 2 peaux en fonction de la charge.

Les déformations aux centres de la peau travaillante ($\epsilon_{xxPS} = \text{Exx PT}$) et de la peau stabilisatrice ($\epsilon_{xxPT} = \text{Exx PS}$) sont fournies (Figure N° 4-9) et montrent que le comportement général des structures sandwichs dissymétriques est bien approché. L'erreur est maximale au dernier incrément de charge. Pour la base de *fonctions sinusoïdales* ("sinus"), elle est pour e_{xxPS} de 10%, pour e_{xxPT} de 15%. L'erreur maxi pour la base de *fonctions polynômiales* ("poly") est pour e_{xxPS} de 65%, pour e_{xxPT} de 18%.

La flèche au centre est visible (Figure N° 4-10) et la déformation de compression uniforme ϵ_{zz} de la fibre transverse de l'âme au centre de la poutre (Figure N° 4-11).

Les fonctions d'approximation de type sinusoïdal corrélent correctement les résultats

E.F. Les fonctions de type polynômial donnent des résultats moins précis. Il faudrait augmenter le degré des polynômes.

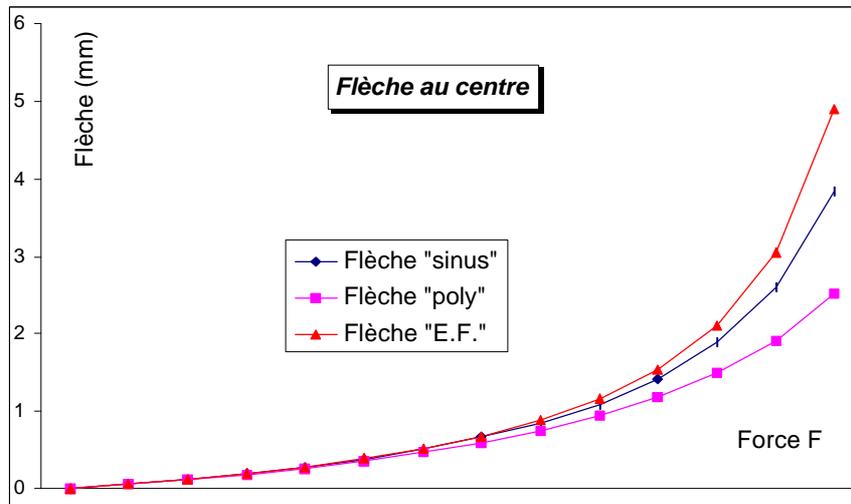


Figure N° 4-10 : Flèche et déformation transverse uniforme ϵ_{zz} au centre de la poutre.

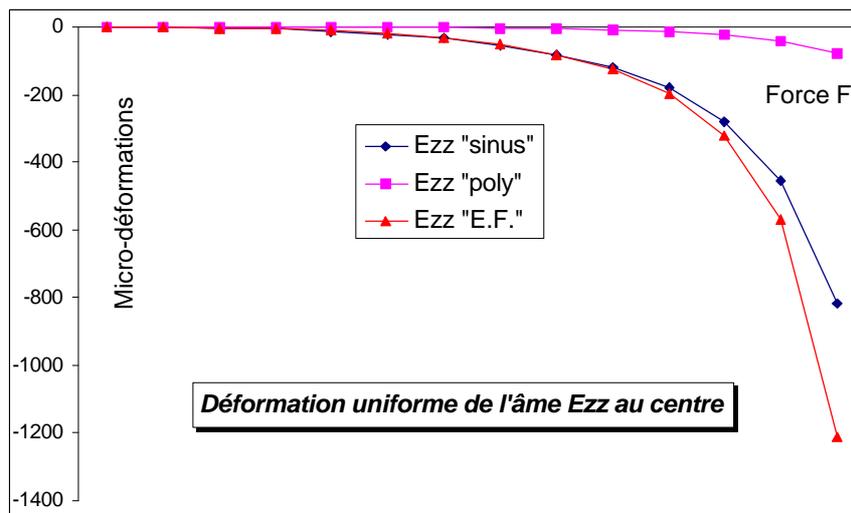


Figure N° 4-11 : Déformation transverse uniforme ϵ_{zz} au centre de la poutre.

Il est remarquable d'arriver à approximer correctement le comportement non linéaire en prenant en compte la compression de l'âme avec seulement 4 inconnues. Mais ceci se comprend par le fait que la flèche d'une poutre bi-appuyée soumise à un effort de compression est représentée par une fonction sinus.

Les temps de réponse très courts et la facilité d'utilisation qu'autorise cette approche par rapport aux modélisations éléments finis non linéaires 3D de poutres facilitent une analyse des différents paramètres qui influent sur le comportement des sandwichs dissymétriques et l'étude de la répartition énergétique dans les phases du sandwich.

IV.3.4 - ÉCRITURE DU PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS ET RÉOLUTION PAR MÉTHODE INCRÉMENTALE/ITÉRATIVE.

L'objectif de ce paragraphe est de *tester la méthode* en poutre afin de l'évaluer pour la formulation en plaque. Le changement de variable u_s n'est pas effectué (ce qui sera justifié a posteriori dans le paragraphe suivant IV-3-5). Pour simplifier l'écriture et la résolution du problème, l'écrasement de l'âme et donc la variable ψ n'est pas considérée. On démontre que l'apport de cette quantité à la réponse globale est très faible, donc cela ne nuit pas à l'évaluation de la méthode.

MISE EN OEUVRE DE LA FORMULATION MATRICIELLE.

Les notations employées sont issues de [NAFEMS 1992, Cristfield 1991]. Les vecteurs du type : $\mathbf{h}_{\text{variable}}$ sont des vecteurs colonnes formés par les bases de fonctions d'approximation des déplacements. Dans (éq IV-27), les vecteurs \mathbf{u}_s , \mathbf{w}_0 , θ sont les vecteurs colonnes formés par les coordonnées généralisées associées à chacune des inconnues. On en déduit les relations suivantes :

$$u_0(x) = {}^T \mathbf{h}_{u_0} \cdot \mathbf{u}_0 ; w_0(x) = {}^T \mathbf{h}_{w_0} \cdot \mathbf{w}_0 ; \theta(x) = {}^T \mathbf{h}_\theta \cdot \theta \quad (\text{éq IV-27})$$

Les dérivées premières des vecteurs $\mathbf{h}_{\text{variable}}$ seront représentées par des vecteurs du type : $\mathbf{b}_{\text{variable}}$ et les dérivées secondes par des vecteurs du type : $\mathbf{c}_{\text{variable}}$. D'où :

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = {}^T \mathbf{b}_{u_0} \cdot \mathbf{u}_0 ; \frac{\partial w_0}{\partial x} = {}^T \mathbf{b}_{w_0} \cdot \mathbf{w}_0 ; \frac{\partial \theta}{\partial x} = {}^T \mathbf{b}_\theta \cdot \theta ; \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = {}^T \mathbf{c}_{w_0} \cdot \mathbf{w}_0 \quad (\text{éq IV-28})$$

Les vecteurs du type \mathbf{h} , \mathbf{b} ou \mathbf{c} sont nommés "*vecteurs d'interpolation*" car, comme en formulation E.F., ils sont composés des fonctions d'interpolations et de leurs dérivées (dans notre cas les fonctions \mathbf{f}_i (éq A4-20)).

TRAVAIL VIRTUEL DES EFFORTS INTÉRIEURS.

Dans un souci de clarté, le développement du calcul est limité au cas de la peau travaillante dans ce paragraphe et les suivants. La méthodologie est identique dans les autres phases. D'après (éq A4-26), il vient :

$$\delta U_d^1 = \int_{V_1} \text{Trace}([\mathbf{PK}_2] \cdot [\delta \mathbf{E}]) dV_1 = \int_{V_1} \mathbf{PK}_2 \cdot \delta \mathbf{E} dV_1 = \int_{V_1} \mathbf{E}_1 \cdot \varepsilon_{xx}^1 \cdot \delta \varepsilon_{xx}^1 dV_1 \quad (\text{éq IV-29})$$

Avec, sous forme matricielle d'après (éq IV-12) :

$$\varepsilon_{xx}^1 = {}^T \mathbf{b}_{u_0} \cdot \mathbf{u}_0 - z \cdot {}^T \mathbf{c}_{w_0} \cdot \mathbf{w}_0 + \frac{1}{2} \cdot ({}^T \mathbf{b}_{w_0} \cdot \mathbf{w}_0)^2 \quad (\text{éq IV-30})$$

$$\delta \varepsilon_{xx}^1 = {}^T \mathbf{b}_{u_0} \cdot \delta \mathbf{u}_0 - z \cdot {}^T \mathbf{c}_{w_0} \cdot \delta \mathbf{w}_0 + ({}^T \mathbf{b}_{w_0} \cdot \mathbf{w}_0) \cdot \mathbf{b}_{w_0} \cdot \delta \mathbf{w}_0 \quad (\text{éq IV-31})$$

CALCUL DES VECTEURS DES EFFORTS INTÉRIEURS ET DE LA MATRICE DE RIGIDITÉ TANGENTE.

dU_d s'exprime en fonction des vecteurs des efforts intérieurs (éq A4-27). Après calcul, par identification, on obtient les deux vecteurs $\mathbf{q}_{i_{u_0}}$ (éq IV-32) et $\mathbf{q}_{i_{w_0}}$ (éq IV-33). Ils représentent les vecteurs des efforts intérieurs dans la peau travaillante relatifs aux coordonnées généralisées \mathbf{u}_0 et \mathbf{w}_0 .

$$\mathbf{q}_{i_{u_0}} = E_1 b h_1 \cdot \int_0^L ({}^T \mathbf{b}_{u_0} \cdot \mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{b}_{u_0} dx + E_1 b h_1 \cdot \int_0^L \frac{1}{2} \cdot ({}^T \mathbf{b}_{w_0} \cdot \mathbf{w}_0)^2 \cdot \mathbf{b}_{u_0} dx \quad (\text{éq IV-32})$$

$$\mathbf{q}_{i_{w_0}} = E_1 b \frac{h_1}{12} \int_0^L ({}^T \mathbf{c}_{w_0} \cdot \mathbf{w}_0) \cdot \mathbf{c}_{w_0} dx + E_1 b h_1 \cdot \int_0^L [{}^T \mathbf{b}_{u_0} \cdot \mathbf{u}_0 + \frac{1}{2} \cdot ({}^T \mathbf{b}_{w_0} \cdot \mathbf{w}_0)^2] \cdot ({}^T \mathbf{b}_{w_0} \cdot \mathbf{w}_0) \cdot \mathbf{b}_{w_0} dx \quad (\text{éq IV-33})$$

La matrice de rigidité tangente s'obtient par différentiation du vecteur des efforts intérieurs (éq A4-29).

$$\text{Si l'on pose : } \mathbf{q}_i^{\text{PT}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{i_{u_0}} \\ \mathbf{q}_{i_{w_0}} \end{Bmatrix} \text{ alors } \delta \mathbf{q}_i^{\text{PT}} = [\mathbf{K}_T^1] \cdot \delta \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{u_0 u_0}^1 & \mathbf{K}_{u_0 w_0}^1 \\ \mathbf{K}_{u_0 w_0}^1 & \mathbf{K}_{w_0 w_0}^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_0 \\ \delta \mathbf{w}_0 \end{Bmatrix} \quad (\text{éq IV-34})$$

Différencier le vecteur des efforts intérieurs permet d'identifier directement les matrices de rigidité tangentes élémentaires de la peau travaillante (en utilisant la formule où \mathbf{X} et \mathbf{A} sont des vecteurs colonnes $({}^T \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = [\mathbf{X} \cdot {}^T \mathbf{X}] \cdot \mathbf{A}$) :

$$[\mathbf{K}_{u_0 u_0}^1] = E_1 b h_1 \cdot \int_0^L [\mathbf{b}_{u_0} \cdot {}^T \mathbf{b}_{u_0}] dx \quad (\text{éq IV-35})$$

$$[\mathbf{K}_{u_0 w_0}^1] = E_1 b h_1 \cdot \int_0^L ({}^T \mathbf{b}_{w_0} \cdot \mathbf{w}_0) \cdot [\mathbf{b}_{u_0} \cdot {}^T \mathbf{b}_{w_0}] dx \quad (\text{éq IV-36})$$

La matrice $[\mathbf{K}_{w_0 w_0}^1]$ se décompose en 3 termes :

$$[\mathbf{K}_{w_0 w_0}^1] = [\mathbf{K}_{T\chi}] + [\mathbf{K}_{T_{NL1}}] + [\mathbf{K}_{T_{NL2}}] \quad (\text{éq IV-37})$$

$$[\mathbf{K}_{T\chi}] = E_1 b \frac{h_1}{12} \cdot \int_0^L [\mathbf{c}_{w_0} \cdot {}^T \mathbf{c}_{w_0}] dx ; \quad [\mathbf{K}_{T_{NL1}}] = \frac{3}{2} E_1 b h_1 \cdot \int_0^L ({}^T \mathbf{b}_{w_0} \cdot \mathbf{w}_0)^2 \cdot [\mathbf{b}_{w_0} \cdot {}^T \mathbf{b}_{w_0}] dx ;$$

$$[\mathbf{K}_{T_{NL2}}] = E_1 b h_1 \cdot \int_0^L ({}^T \mathbf{b}_{u_0} \cdot \mathbf{u}_0) \cdot [\mathbf{b}_{w_0} \cdot {}^T \mathbf{b}_{w_0}] dx \quad (\text{éq IV-38})$$

Le sens physique des matrices obtenues sera précisé dans le modèle de plaque. Cette démarche peut ensuite être appliquée à l'identique dans la peau stabilisatrice et l'âme avec toutefois des calculs plus complexes et la présence de nombreux termes de couplage [Beltrando 1995].

CALCUL DU VECTEUR DES EFFORTS EXTÉRIEURS.

Le travail virtuel des efforts extérieurs s'exprime de la manière suivante :

$$\delta W_e = \delta u_0(L) \cdot F = F \cdot \delta \int_0^L \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) dx \quad (\text{éq IV-39})$$

Le passage en formulation matricielle permet de poser :

$$\delta W_e = {}^T \mathbf{q}_e \cdot \delta \mathbf{p} = {}^T \mathbf{q}_e^{u_0} \cdot \delta \mathbf{u}_0 \quad (\text{éq IV-40})$$

Par identification, le calcul fournit :

$$\mathbf{q}_e^{u_0} = F \cdot \int_0^L \mathbf{b}_{u_0} dx \quad (\text{éq IV-41})$$

BASE DE FONCTIONS.

Des problèmes de conditionnement de matrice conduisent à choisir des variables adimensionnelles. Dans le cas d'une poutre sandwich, on posera : $\xi = \frac{2x}{L} - 1$. Ce changement de variable est pris en compte dans le calcul des intégrales (éq IV-32) à (éq IV-41). On choisit pour w_0 la fonction :

$$w_0 = \sum_{k=0}^2 B_k \cdot \xi^k \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \xi) \quad (\text{éq IV-42})$$

On a donc pour tout k , $w_0(x=0 \text{ ou } \xi = -1) = w_0(x=L \text{ ou } \xi = 1) = 0$, ce qui correspond bien au cas d'une poutre bi-appuyée. Le nombre d'inconnues est pris égal à 3 donc w_0 est un polynôme de degré $2 + 2 = 4$. La fonction u_0 doit être compatible avec w_0 puisqu'elle englobe le déplacement du à w_0 (Figure N° 4-8). Il est possible de démontrer qu'il vaut :

$$\frac{1}{2} \cdot \int_0^x \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 dx \quad (\text{éq IV-43})$$

Si on s'impose cette contrainte, u_0 devra au moins être de degré $2^*(\text{degré}(w_0) - 1) + 1 = 7$. Le degré du polynôme augmentant, le nombre d'inconnues du problème aussi. Si l'on cherche à diminuer le nombre d'inconnues, il est intéressant de savoir si cette compatibilité doit être absolument respectée (Voir l'étude menée a posteriori en annexe "Programme SAND"). Avec u_0 nul pour $x = 0$ ou pour $\xi = -1$, on a :

$$u_0 = \sum_{k=1}^7 A_k \cdot \xi^k \cdot (1 + \xi) \quad (\text{éq IV-44})$$

Pour le cisaillement dans l'âme, en remarquant que $\theta(\xi = 0)$, il vient :

$$\theta = \sum_{k=1}^3 A_k \cdot \xi^k \quad (\text{éq IV-45})$$

VALIDATION.

Les résultats fournis par cette théorie ont ensuite été comparés au même modèle éléments finis que celui utilisé dans le paragraphe précédent.

Les courbes charge/déformations aux centres des peaux travaillante (ϵ_{xxPT}) et stabilisatrice (ϵ_{xxPS}) sont fournies (Figure N° 4-12).

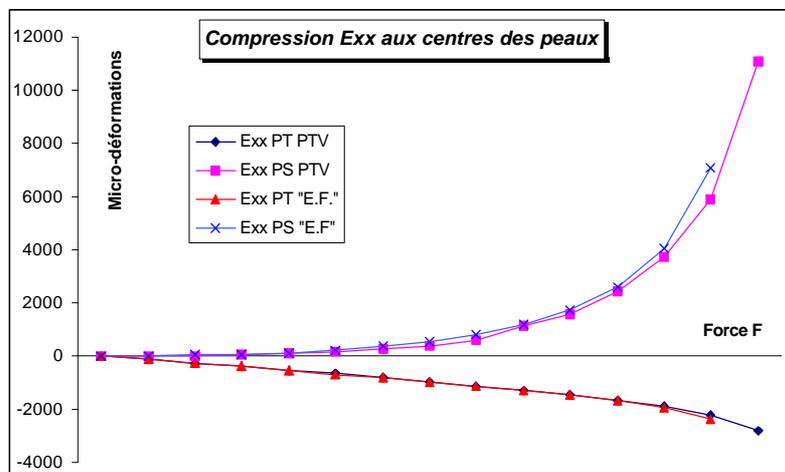


Figure N° 4-12 : Déformation ϵ_{xx} aux centres des 2 peaux en fonction de la charge (P.T.V).

Elles montrent que le comportement général des structures sandwichs dissymétriques est bien approché. Au dernier incrément de charge, l'erreur est maximale et vaut 17.3% pour e_{xxPS} , et pour e_{xxPT} , 6%. Ces valeurs sont du même ordre de grandeur que le modèle avec base sinusoïdale après minimisation de l'énergie potentielle.

Le fait d'augmenter le degré des polynômes et le nombre d'inconnues a permis d'obtenir des résultats corrects avec une base polynômiale limitée à 3 inconnues. La convergence est obtenue sans itérations pour les 8 premiers incréments (sur 14) avec un critère de convergence fixé ici à 0.01. Le nombre d'itérations pour obtenir la convergence est en général égal à 1 et au plus à 3 pour le dernier pas. La flèche au centre est visible (Figure N° 4-13). L'erreur maxi est de 20% au dernier incrément.

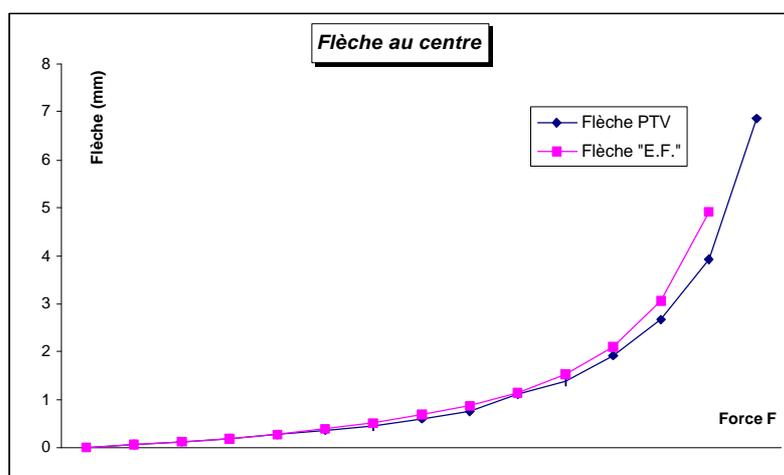


Figure N° 4-13 : Flèche au centre de la poutre (P.T.V.).

Bien que l'objectif du modèle de poutre ne soit pas là, on peut noter que des erreurs relatives supérieures à 15% tant en flèche que sur ε_{xxPS} ne sont pas forcément significatives car la structure n'est pas dimensionnée dans cette zone du chargement.

IV.3.5 - ÉTUDE ÉNERGÉTIQUE.

L'objectif de ce paragraphe est d'une part de montrer à l'aide de graphes de répartition énergétique le comportement des poutres sandwichs dissymétriques et, d'autre part, de permettre de valider ou d'infirmer les hypothèses mécaniques effectuées pour la réponse globale du sandwich dissymétrique. Il semble difficile de conclure a priori quant au comportement en stabilité et à rupture du sandwich dissymétrique. En effet, si l'énergie est un bon indicateur de l'état global du sandwich, ce sont les contraintes critiques qui peuvent être très faibles qui gouvernent le comportement à rupture des composites (par exemple la compression de l'âme).

ÉTUDE DE LA RÉPARTITION DANS LES PHASES.

La géométrie et les matériaux de la poutre qui a servi à la validation des méthodes de résolution sont repris dans ce paragraphe. La théorie utilisant la minimisation de l'énergie de déformation et des fonctions sinusoidales est utilisée car elle inclut la compression de l'âme. La répartition relative de l'énergie dans les phases en fonction des incréments de charge est fournie *Figure N° 4-14*.

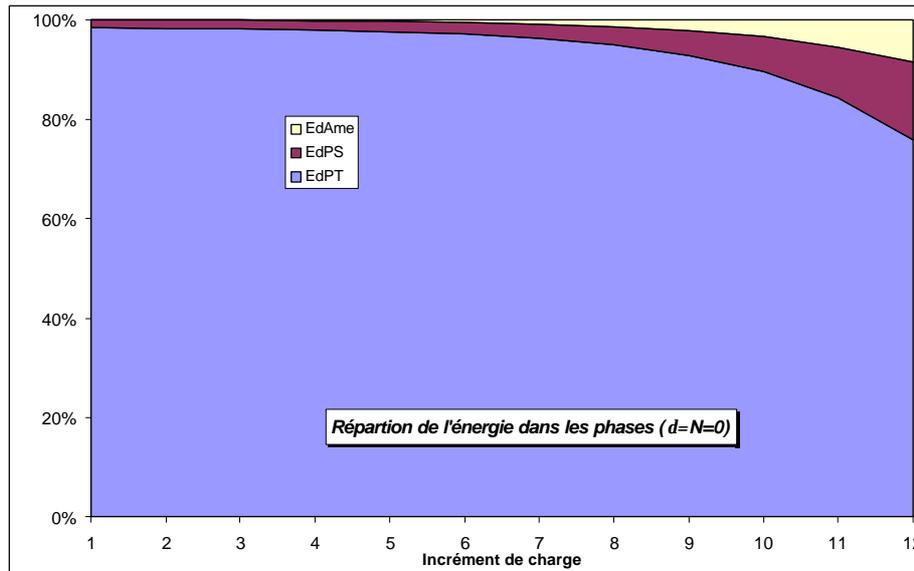


Figure N° 4-14: Répartition énergétique dans les phases (poutre peaux carbone, âme mousse).

Ce graphe permet d'expliquer le comportement des sandwichs dissymétriques. A savoir que dans la première partie quasi-linéaire, jusqu'au 6ème incrément, **97%** de l'énergie est reprise dans la peau travaillante. Ce n'est que lorsque le phénomène de couplage flèche/chargement devient prépondérant, dans une deuxième partie non-linéaire, que la part de l'énergie reprise par l'âme ou la peau stabilisatrice devient non négligeable. Ainsi, la terminologie "**peau travaillante**" est pertinente.

ÉTUDE DE L'ÉNERGIE DE FLEXION DANS LA PEAU TRAVAILLANTE.

L'objectif de ce paragraphe est de vérifier la pertinence de la prise en compte de la flexion de la peau travaillante. Le paragraphe précédent suggère que le chargement de la peau stabilisatrice et de l'âme est du en grande partie au moment de flexion induit par le couplage flèche/chargement. Il est donc opportun de comparer la part énergétique de la flexion reprise dans la peau travaillante ($Ed_{Flex PT}$) à l'énergie de ces deux phases ($Ed_{âme}$ et Ed_{PS}). La somme $Ed_{Flex PT} + Ed_{âme} + Ed_{PS}$ peut être considérée *en première approximation*

comme l'énergie reprise en flexion par le sandwich. L'essentiel de la compression pure étant reprise par la peau travaillante seule. La Figure N° 4-15 montre l'évolution de la part relative de l'énergie de flexion dans la peau travaillante en fonction de la charge. Elle passe par un maximum de 5 % avant de diminuer lorsque le chargement augmente. Cette diminution peut être expliquée par le fait que lorsque le moment de flexion et la flèche augmente, le sandwich dissymétrique a tendance à se comporter comme un sandwich symétrique. Dans ce dernier cas, la flexion des peaux n'est sensible qu'aux fortes épaisseurs.

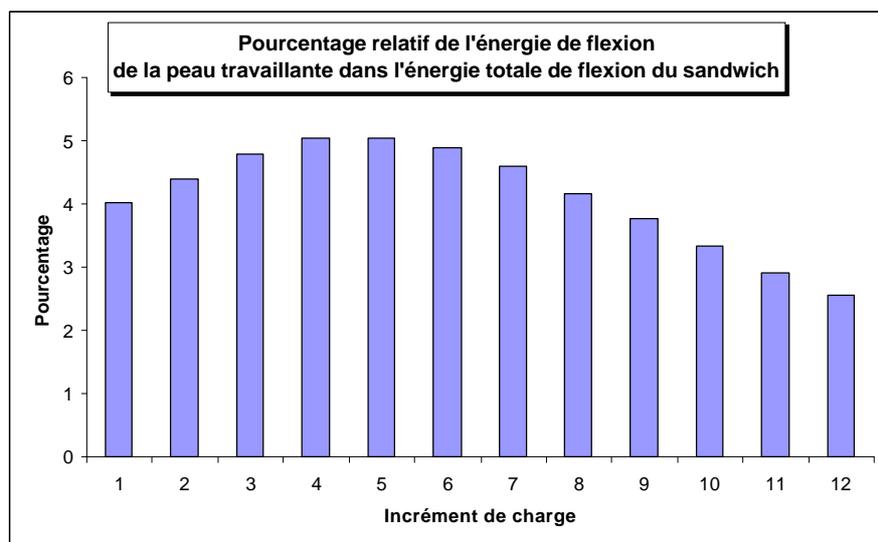


Figure N° 4-15: Evolution du pourcentage de la part relative de l'énergie de flexion dans la peau travaillante.

L'ordre de grandeur est relativement faible (5%) pour le cas de calcul. A priori, la rigidité de la flexion de la peau travaillante ne peut être négligée, des configurations pouvant certainement générer des parts relatives supérieures.

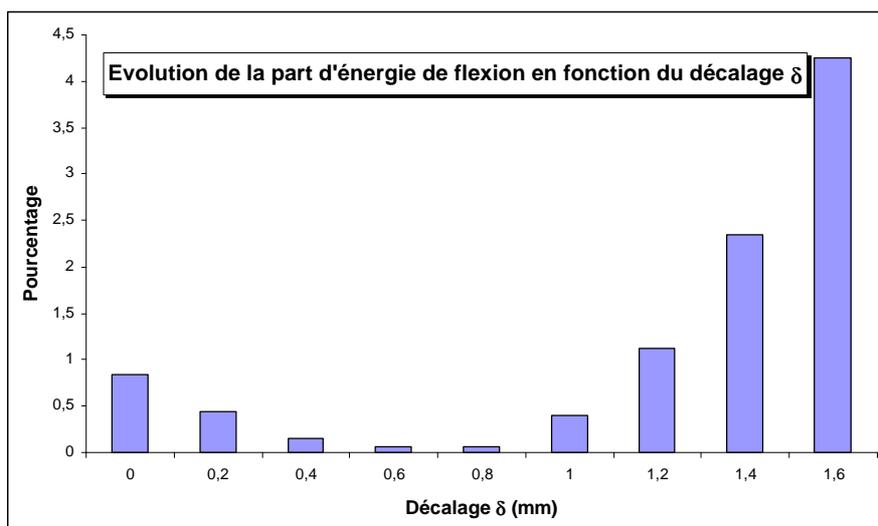


Figure N° 4-16: Evolution de la part de l'énergie de flexion dans la peau travaillante, par rapport à l'énergie totale de la peau travaillante, pour l'incrément 11 en fonction du décalage δ .

On s'intéresse dans la Figure N° 4-16 à l'influence du paramètre δ . Contrairement à ce qui était attendu, le pourcentage de flexion repris par la peau travaillante diminue lorsque

l'on introduit le décalage δ avant d'augmenter à nouveau. A posteriori, l'optimum correspond au chargement sur la ligne neutre du sandwich, ce qui minimise le moment de couplage et donc les efforts de flexion sur le sandwich, en particulier dans la peau travaillante.

ÉTUDE DE L'ÉNERGIE DE COMPRESSION DANS L'ÂME.

On analyse dans ce paragraphe la part de l'énergie de compression dans l'âme par rapport à l'énergie totale de l'âme (Figure N° 4-17). Malgré le fait que la contrainte de compression soit uniforme dans l'épaisseur, l'ordre de grandeur est supposé rester correct. La partie compression reste très faible au cours du chargement. Elle atteint au maximum 0.47% de l'énergie de l'âme ce qui représente moins de 0.04% de l'énergie totale du sandwich. L'influence du décalage δ et du flux N n'est pas significative (pour $\delta = 0.8$ la part tombe à 0.24% et pour $N=10\%$ à 0.22%).

Ainsi, l'influence de la compression dans l'âme est tout à fait négligeable dans le calcul de la réponse globale du sandwich. Il semble que le meilleur moyen d'accéder à cette donnée soit de la calculer a posteriori en utilisant pour notre problème le principe des méthodes type **prédicteur/correcteur**.

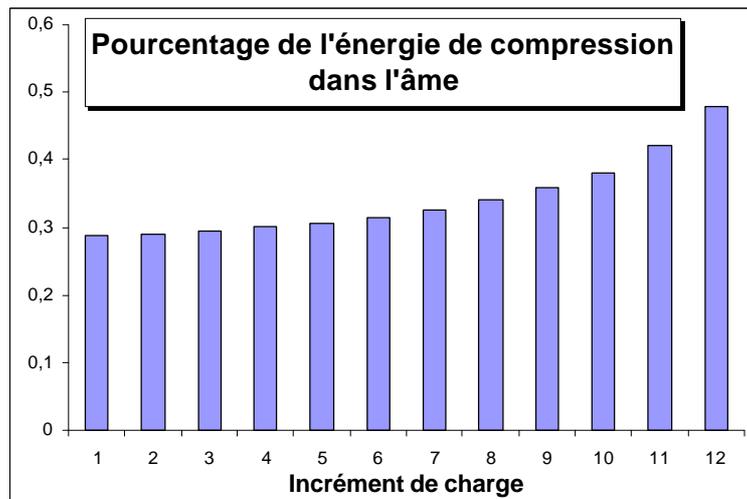


Figure N° 4-17 : Part de l'énergie de compression dans l'énergie de l'âme.

IV.3.6 - CONCLUSIONS ET PASSAGE POUTRE/PLAQUE.

Dans ce paragraphe, des hypothèses générales nécessaires à la description du comportement des sandwichs dissymétriques et une formulation poutre ont été proposées. Les hypothèses de l'analyse non linéaire géométrique (paragraphe IV.2.4 -) et deux méthodes de résolutions basées sur la minimisation de l'énergie potentielle (paragraphe IV.3.3 -) et le principe des travaux virtuels (paragraphe IV.3.4 -) ont aussi été présentées. Les deux

méthodes donnent des résultats analogues et de bonne qualité dans le cas des poutres. Toutefois, l'extension de la théorie aux plaques a soulevé des problèmes particuliers essentiellement dus à la complexité de la formulation en non linéaire. Les difficultés rencontrées sont présentés dans les paragraphes suivants.

SUR LE CHANGEMENT DE VARIABLES :

Rappelons qu'à partir de l'expression des déformations de Von Karman, on pose :

$$\varepsilon_{xx}^1 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - z \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \frac{\partial u_s}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$

En plaque, un changement de variable analogue peut être proposé en compression biaxiale suivant l'axe des y :

$$\varepsilon_{yy}^1 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 - z \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \frac{\partial v_s}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (\text{éq IV-46})$$

Par contre, la plaque peut aussi être soumise à du cisaillement et en tenant compte de ces deux changements de variables, on a :

$$\gamma_{xy}^1 = \frac{\partial u_s}{\partial y} + \frac{\partial v_s}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \int_x \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right) dx - \frac{\partial}{\partial x} \int_y \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right) dy \quad (\text{éq IV-47})$$

L'expression fait apparaître des termes sous intégrale qui enlèvent tout l'intérêt de la simplification effectuée en poutre. Aussi, ce changement de variable a du être abandonné pour la formulation en plaque.

SUR LA CINÉMATIQUE :

Le choix des inconnues u_0 , v_0 , θ_x , θ_y et ψ a été effectué dans un premier temps. Le développement complet de la théorie a été effectué [Castanié 1995] et conduit au calcul de **311** matrices de rigidité dont **113** exprimant un couplage non linéaire avec le terme ψ . Or l'essentiel du temps de calcul de la matrice de rigidité tangente est lié à la présence de ces termes. Il nous est apparu clair, compte-tenu des objectifs de rapidité et de fiabilité requis, que cette cinématique était trop complexe et qu'en conséquent une autre formulation devait être adoptée en plaque.

SUR LA MÉTHODE DE RÉOLUTION :

La minimisation de l'énergie potentielle suppose au préalable l'écriture littérale de l'énergie de déformation et conduit à la résolution d'un système d'équations linéaires paramétré par la charge F . Si cette tâche est facile à réaliser en poutre, il en va autrement en plaque où les calculs deviennent inextricables avec l'apparition de sommes sextuples :

$$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\dots$$

De plus, le système d'équations devient non linéaire si le changement de variable n'est pas effectué. La résolution pratique et la détermination de la solution réelle sont alors très complexes. Ainsi nous avons considérés que cette méthode était inadapté pour l'étude des plaques en analyse non linéaire.

SUR LA BASE DE FONCTIONS :

Deux possibilités ont été évaluées : soit l'utilisation de bases sinusoïdales, soit de bases polynômiales. L'utilisation du P.T.V. a montré qu'une base de degré 2 polynômiale suffit à corrélérer correctement les résultats. Ce type de base a par ailleurs déjà été utilisé dans le laboratoire et a donné entière satisfaction dans l'étude du flambage local des plaques stratifiées sur support élastique ou des sandwichs. Elle permet en outre de pouvoir traiter facilement les conditions aux limites usuelles en élevant l'exposant des termes $1 - \xi$ et $1 + \xi$ dans (éq IV-42). On a :

$$w_0 = \sum_{k=0}^2 B_k \cdot \xi^k \cdot (1 - \xi)^{CL_1} \cdot (1 + \xi)^{CL_2} \quad (\text{éq IV-48})$$

Suivant que $CL_i = 0, 1, 2$ on a $w_0(1 \text{ ou } -1)$ qui est indéterminé, nul ou à pente nulle ce qui correspond aux conditions aux limites *libre*, *appuyé* ou *encastré*. Ce type de fonction présente donc l'avantage de pouvoir traiter les conditions aux limites usuelles en ne modifiant que des exposants, sans avoir à modifier la base elle-même comme cela peut être le cas des bases sinusoïdales. Enfin, les polynômes sont plus adaptés que les fonctions sinusoïdales (moins d'inconnues) à la description des déformées en cisaillement et sollicitations complexes.

IV.4 - THÉORIE DES PLAQUES SANDWICHS DISSYMMÉTRIQUES.

IV.4.1 - NOUVELLE CINÉMATIQUE.

INCONNUES CINÉMATIQUES.

A partir des conclusions du paragraphe précédent, un nouveau choix d'inconnues cinématiques a été effectué analogue à celui de la bibliographie (para II-9) que nous avons nommés **Zig-Zag Modifié**. La deuxième différence par rapport au modèle poutre (Figure N° 4-6) est une modification de l'origine du système d'axe qui est pris au centre du plan moyen de la peau travaillante suite à l'adoption de variables adimensionnelles. L'axe vertical est toujours orienté vers la peau stabilisatrice. Les bornes du domaine seront en X : $-L/2$; $+L/2$ et en Y : $-b/2$; $+b/2$ (Figure N° 4-18). Les nouvelles inconnues de déplacements seront :

- Les déplacements du plan moyen de la peau travaillante :

$$u_0(x,y), v_0(x,y), w_0(x,y)$$

- Les déplacements des points de l'interface âme/peau stabilisatrice :

$$u_2(x,y), v_2(x,y), w_2(x,y)$$

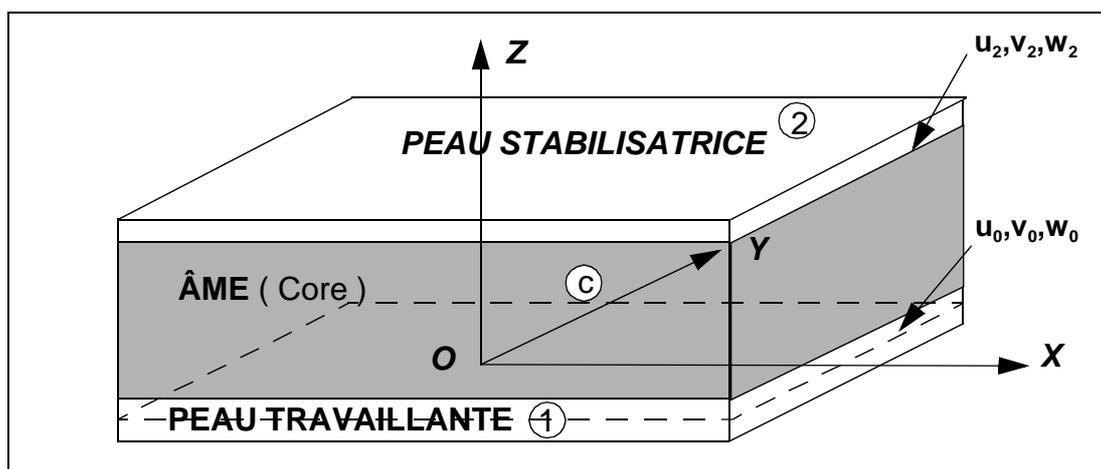


Figure N° 4-18: Géométrie et Inconnues de Déplacement en Plaques.

CHAMP DES DÉPLACEMENTS.

A partir des hypothèses effectuées précédemment, on peut écrire directement l'expression du champ des déplacements de Kirchhoff-Love dans la peau travaillante :

$$u_1(x,y,z) = u_0(x,y) - z \cdot \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{éq IV-49})$$

$$v_1(x,y,z) = v_0(x,y) - z \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{éq IV-50})$$

$$w_1(x,y,z) = w_0(x,y) \quad (\text{éq IV-51})$$

La peau stabilisatrice est assimilée à une membrane donc :

$$u_2(x,y,z) = u_2(x,y) \quad (\text{éq IV-52})$$

$$v_2(x,y,z) = v_2(x,y) \quad (\text{éq IV-53})$$

$$w_2(x,y,z) = w_2(x,y) \quad (\text{éq IV-54})$$

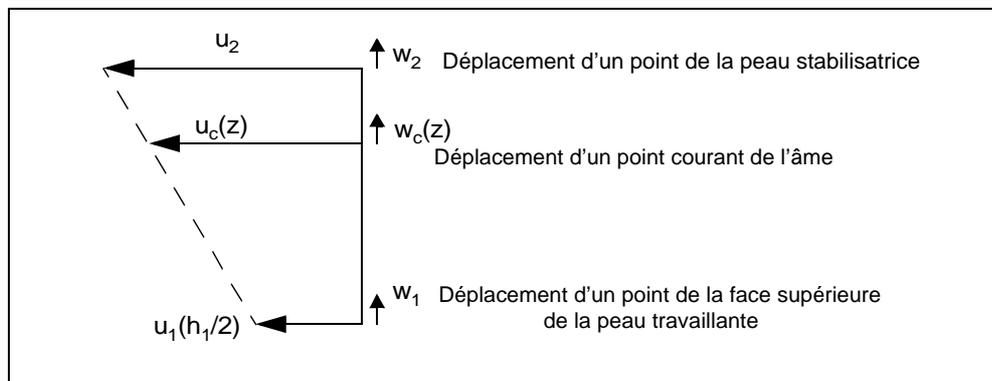


Figure N° 4-19: Interpolation des déplacements dans l'âme.

Dans l'épaisseur de l'âme, le champ des déplacements est interpolé linéairement entre les faces des deux peaux (Figure N° 4-19) ce qui fournit :

$$u_c(x, y, z) = \frac{1}{h_c} \cdot \left[\left(z - \frac{h_1}{2} \right) \cdot u_2 - \left(z - \left(\frac{h_1}{2} + h_c \right) \right) \cdot u_0 + \frac{h_1}{2} \cdot \left(z - \left(\frac{h_1}{2} + h_c \right) \right) \cdot \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] \quad (\text{éq IV-55})$$

$$v_c(x, y, z) = \frac{1}{h_c} \cdot \left[\left(z - \frac{h_1}{2} \right) \cdot v_2 - \left(z - \left(\frac{h_1}{2} + h_c \right) \right) \cdot v_0 + \frac{h_1}{2} \cdot \left(z - \left(\frac{h_1}{2} + h_c \right) \right) \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] \quad (\text{éq IV-56})$$

$$w_c(x, y, z) = \frac{z - \frac{h_1}{2}}{h_c} \cdot [w_2 - w_0] + w_0 \quad (\text{éq IV-57})$$

On peut remarquer que les expressions (éq IV-56) et (éq IV-57) sont plus simples que celles obtenues en poutre (éq IV-10) car les termes de couplage entre inconnues cinématiques ont disparu. Les champs u_c et v_c sont bien linéaires en z ce qui permet de trouver des contraintes de cisaillement dans l'âme constantes dans l'épaisseur.

CHAMP DES DÉFORMATIONS.

L'application des formules de Von Karman permet d'écrire pour la peau travaillante :

$$\varepsilon_{xx}^1 = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 ; \varepsilon_{yy}^1 = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2$$

$$\gamma_{xy}^1 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{éq IV-58})$$

Les expressions sont analogues dans la peau stabilisatrice en enlevant les termes de flexion, celle-ci étant assimilée à une membrane :

$$\varepsilon_{xx}^2 = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 ; \varepsilon_{yy}^2 = \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} \right)^2 ;$$

$$\gamma_{xy}^2 = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_2}{\partial y} \quad (\text{éq IV-59})$$

Le calcul du cisaillement dans l'âme en prenant en compte le terme non linéaire est un peu plus complexe et conduit à l'expression :

$$\gamma_{xz}^c = \frac{\partial w_c}{\partial x} + \frac{\partial u_c}{\partial z} + \frac{\partial w_c}{\partial z} \cdot \frac{\partial w_c}{\partial x} = \frac{(u_2 - u_0)}{h_c} + \frac{1}{h_c} \cdot \left[\left(z - \frac{h_1}{2} \right) \cdot \frac{\partial w_2}{\partial x} - (z - (h_1 + h_c)) \cdot \frac{\partial w_0}{\partial x} \right]$$

$$+ \frac{1}{h_c^2} \cdot (w_2 - w_0) \cdot \left[\left(z - \frac{h_1}{2} \right) \cdot \frac{\partial w_2}{\partial x} + \left(z - \left(\frac{h_1}{2} + h_c \right) \right) \cdot \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] \quad (\text{éq IV-60})$$

Le deuxième terme, non linéaire, est fonction uniquement de la flèche et est lié aux différences d'angle de cisaillement induits par la compression de l'âme ce qui peut être négligé compte-tenu du faible écrasement. Mathématiquement, on a $w_2 - w_0 \ll u_2 - u_0$. Le cisaillement de l'âme s'exprime alors plus simplement :

$$\gamma_{xz}^c = \frac{(u_2 - u_0)}{h_c} + \frac{1}{h_c} \cdot \left[\left(z - \frac{h_1}{2} \right) \cdot \frac{\partial w_2}{\partial x} - (z - (h_1 + h_c)) \cdot \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] \quad (\text{éq IV-61})$$

Et par analogie :

$$\gamma_{yz}^c = \frac{(v_2 - v_0)}{h_c} + \frac{1}{h_c} \cdot \left[\left(z - \frac{h_1}{2} \right) \cdot \frac{\partial w_2}{\partial y} - (z - (h_1 + h_c)) \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] \quad (\text{éq IV-62})$$

Pour la déformation normale, on obtient très facilement :

$$\varepsilon_{zz}^c = \frac{w_2 - w_0}{h_c} \quad (\text{éq IV-63})$$

L'expression (éq IV-63) montre bien le fait que la déformation, donc la contrainte trans-

verse, sont constantes dans l'épaisseur de l'âme. On a donc une approche analogue à celle effectuée en poutre et la valeur obtenue ne sera qu'indicative.

IV.4.2 - DISCRÉTISATION DES DÉPLACEMENTS.

VARIABLES ADIMENSIONNELLES.

Des considérations d'ordre numérique (conditionnement de la matrice de rigidité tangente) conduisent à prendre les variables adimensionnelles ξ et η définies (éq IV-64).

$$\xi = \frac{2 \cdot x}{L} \qquad \eta = \frac{2 \cdot y}{b} \qquad (\text{éq IV-64})$$

Ainsi, les coordonnées généralisées seront toutes homogènes à une longueur (voir (éq IV-65) à (éq IV-70)). Les bornes de ξ et η sont indiquées sur la *Figure N° 4-20*.

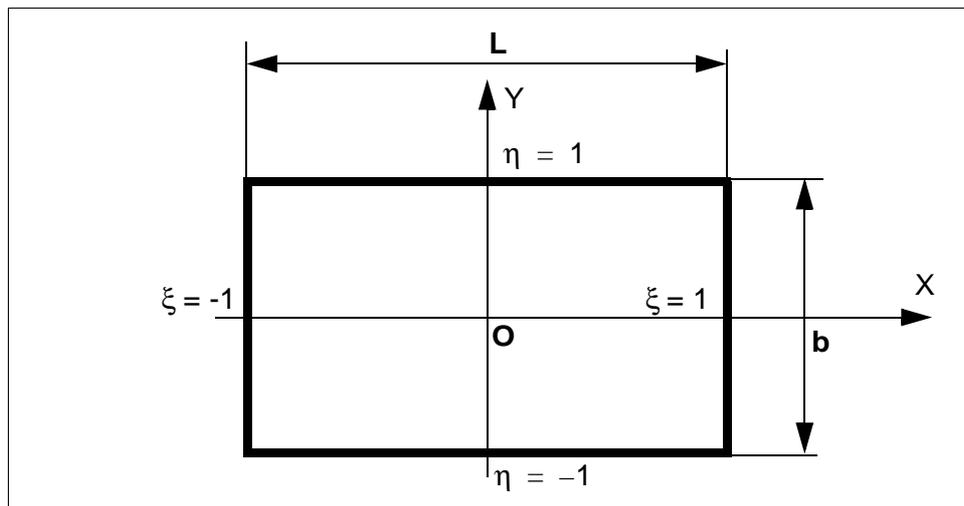


Figure N° 4-20 : Variables adimensionnelles.

FLÈCHE.

L'argumentaire du choix de la base de fonction a été développé lors des conclusions de l'étude en poutre. On choisit pour la flèche de la peau travaillante :

$$w_0(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{M_{w_0}} \sum_{l=0}^{N_{w_0}} A_{kl} \cdot \xi^k \cdot \eta^l \cdot (1 + \xi)^{CL_1} \cdot (1 - \xi)^{CL_2} \cdot (1 + \eta)^{CL_3} \cdot (1 - \eta)^{CL_4} \qquad (\text{éq IV-65})$$

Les coefficients CL_i peuvent être mis à 0, 1 ou 2 ce qui correspond aux conditions aux limites classiques *bord libre*, *simplement appuyé* ou *encastré* pour chacun des bords (*Figure N° 4-20*).

La déformée étant quasi-identique dans la peau stabilisatrice, à l'écrasement de l'âme prés, l'inconnue w_2 sera discrétisée par un polynôme du même type, de même degré et représentant les mêmes conditions aux limites. L'expérience a montré a posteriori que changer les conditions aux limites sur w_2 par des paramètres spécifiques CL_i n'apportait aucune différence significative.

$$w_2(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{M_{w_0}} \sum_{l=0}^{N_{w_0}} D_{kl} \cdot \xi^k \cdot \eta^l \cdot (1 + \xi)^{CL_1} \cdot (1 - \xi)^{CL_2} \cdot (1 + \eta)^{CL_3} \cdot (1 - \eta)^{CL_4} \quad (\text{éq IV-66})$$

MEMBRANE.

A priori, aucune condition aux limites particulière n'est imposée pour les déplacements de membrane $u_0(x,y)$, $v_0(x,y)$, $u_2(x,y)$, $v_2(x,y)$. On pourra donc adopter une base polynômiale simple constituée de monômes x^i . Toutefois, pour que la matrice de rigidité ne soit pas singulière, il faut éliminer les déplacements solides. Les conditions aux limites en $w_{0 \text{ ou } 2}$ éliminent 3 Degrés De Liberté (en abrégé : D.D.L.). On est donc conduit à bloquer 3 autres D.D.L. en membrane.

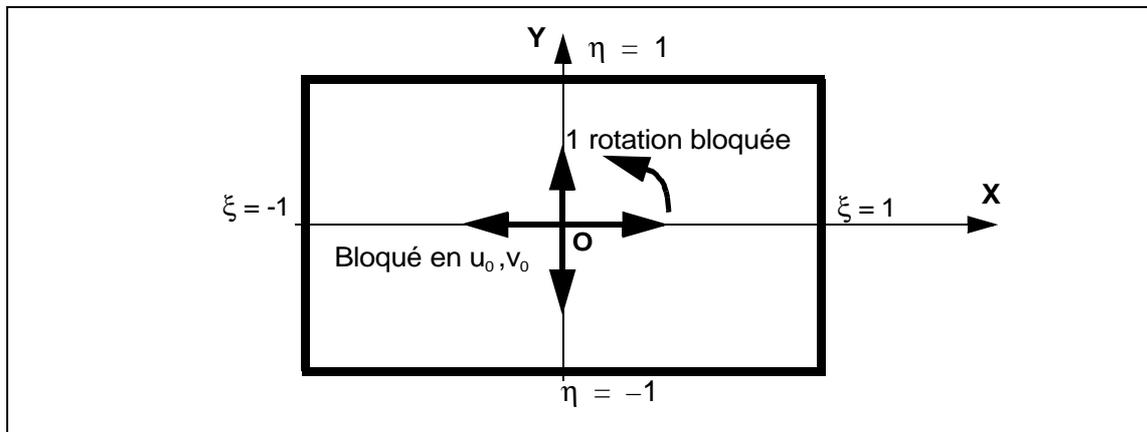


Figure N° 4-21: Isostatisme.

Les déplacements de l'origine sont bloqués en x et y ainsi que la rotation autour du point **O**. Ce choix permet à la plaque de subir librement de la compression biaxiale et du cisaillement. Ces conditions sont traduites par les relations :

$$u_0(0, 0) = 0 \quad v_0(0, 0) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \eta} u_0(0, 0) = 0 \quad (\text{éq IV-67})$$

Ce qui conduit aux expressions suivantes :

$$u_0(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{M_{u_0}} B_{k0} \cdot \xi^k + \eta \cdot \sum_{k=1}^{M_{u_0}} B_{k1} \cdot \xi^k + \sum_{k=0}^{M_{u_0}} \sum_{l=2}^{N_{u_0}} B_{kl} \cdot \eta^l \cdot \xi^k \quad (\text{éq IV-68})$$

$$v_0(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^{M_{v_0}} C_{0l} \cdot \eta^l + \sum_{k=1}^{M_{v_0}} \sum_{l=0}^{N_{v_0}} C_{kl} \cdot \eta^l \cdot \xi^k \quad (\text{éq IV-69})$$

Aucune condition n'a besoin d'être imposée à nouveau sur la peau stabilisatrice et l'on a simplement :

$$u_2(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{M_{u_0}} \sum_{l=0}^{N_{u_0}} E_{kl} \cdot \eta^l \cdot \xi^k \quad \text{et} \quad v_2(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{M_{u_0}} \sum_{l=0}^{N_{u_0}} C_{kl} \cdot \eta^l \cdot \xi^k \quad (\text{éq IV-70})$$

NOMBRE D'INCONNUES.

Comme en poutre (para IV-5-4), on suppose que les degrés des fonctions représentant les déplacements de membrane doivent être compatibles avec celui de la flèche car en l'absence du changement de variable, ils englobent le déplacement dû à w_0 (Figure N° 4-8).

Le tableau 4.1 donne les formules de calcul des degrés en ξ et η des polynômes.

Inconnues	w_0	u_0	v_0	w_2	u_2	v_2
Degré en ξ	$M_{w_0} + CL_1 + CL_2$	$2 \cdot d^e(w_0) - 2$	$2 \cdot d^e(w_0) - 1$	$M_{w_0} + CL_1 + CL_2$	$2 \cdot d^e(w_2) - 2$	$2 \cdot d^e(w_2)$
Degré en η	$N_{w_0} + CL_3 + CL_4$	$2 \cdot d^e(w_0) - 2$	$2 \cdot d^e(w_0) - 1$	$N_{w_0} + CL_3 + CL_4$	$2 \cdot d^e(w_2) - 2$	$2 \cdot d^e(w_2)$

Tableau N° 4-1 : Calcul du degré des polynômes.

Par exemple, un problème bi-appuyé ($CL_1 = CL_2 = 1$ et $CL_3 = CL_4 = 0$) nécessitera en degré 1, 53 inconnues et en degré 2, 143 inconnues. Un problème tout-encasté ($CL_1 = CL_2 = CL_3 = CL_4 = 2$) nécessitera en degré 2, 591 inconnues et en degré 4, 1071 inconnues.

La formulation adoptée présente la particularité de voir son nombre d'inconnues être fonction du degré de w_0 et des conditions aux limites (Tableau N° A5-2). Par exemple, un problème de type tout-encasté nécessite plus d'inconnues et donc plus de temps de calcul qu'un problème de type simplement appuyé. On notera que le nombre d'inconnues correspond aussi directement à la taille des vecteurs inconnus de la formulation matricielle que nous allons présenter dans le paragraphe suivant.

IV.4.3 - FORMULATION MATRICIELLE.

VECTEURS D'INTERPOLATION.

Les notations employées sont issues de la littérature sur les éléments finis non linéaires et ont déjà été présentées en poutres. On aura en plaque :

$$\mathbf{u}_0(x) = {}^T \mathbf{h}_{u_0} \cdot \mathbf{u}_0 ; \quad \mathbf{v}_0(x) = {}^T \mathbf{h}_{v_0} \cdot \mathbf{v}_0 ; \quad \mathbf{w}_0(x) = {}^T \mathbf{h}_{w_0} \cdot \mathbf{w}_0 \quad (\text{éq IV-71})$$

$$\mathbf{u}_2(x) = {}^T \mathbf{h}_{u_2} \cdot \mathbf{u}_2 ; \quad \mathbf{v}_2(x) = {}^T \mathbf{h}_{v_2} \cdot \mathbf{v}_2 ; \quad \mathbf{w}_2(x) = {}^T \mathbf{h}_{w_2} \cdot \mathbf{w}_2 \quad (\text{éq IV-72})$$

Pour les dérivées premières :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x} = {}^T \mathbf{b}_{u_0, x} \cdot \mathbf{u}_0 ; \quad \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial x} = {}^T \mathbf{b}_{v_0, x} \cdot \mathbf{v}_0 ; \quad \frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial x} = {}^T \mathbf{b}_{w_0, x} \cdot \mathbf{w}_0 ; \quad \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x} = {}^T \mathbf{b}_{u_2, x} \cdot \mathbf{u}_0 \quad (\text{éq IV-73})$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial x} = {}^T \mathbf{b}_{v_2, x} \cdot \mathbf{v}_0 ; \quad \frac{\partial \mathbf{w}_2}{\partial x} = {}^T \mathbf{b}_{w_2, x} \cdot \mathbf{w}_0 ; \quad \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial y} = {}^T \mathbf{b}_{u_0, y} \cdot \mathbf{u}_0 ; \quad \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial y} = {}^T \mathbf{b}_{v_0, y} \cdot \mathbf{v}_0 \quad (\text{éq IV-74})$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial y} = {}^T \mathbf{b}_{w_0, y} \cdot \mathbf{w}_0 ; \quad \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial y} = {}^T \mathbf{b}_{u_2, y} \cdot \mathbf{u}_0 ; \quad \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial y} = {}^T \mathbf{b}_{v_2, y} \cdot \mathbf{v}_0 ; \quad \frac{\partial \mathbf{w}_2}{\partial y} = {}^T \mathbf{b}_{w_2, y} \cdot \mathbf{w}_0 \quad (\text{éq IV-75})$$

Pour les dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}_0}{\partial x^2} = {}^T \mathbf{c}_x \cdot \mathbf{w}_0 ; \quad \frac{\partial^2 \mathbf{w}_0}{\partial y^2} = {}^T \mathbf{c}_y \cdot \mathbf{w}_0 ; \quad \frac{\partial^2 \mathbf{w}_0}{\partial x \partial y} = {}^T \mathbf{c}_{xy} \cdot \mathbf{w}_0 \quad (\text{éq IV-76})$$

A partir d'un exemple, il est possible d'expliciter l'expression d'un vecteur d'interpolation. L'expression de w_0 (éq IV-65) peut se mettre sous la forme :

$$w_0(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{M_{w_0}} \sum_{l=0}^{N_{w_0}} A_{kl} \cdot \varphi_{k, CL_1, CL_2}^{\xi} \cdot \varphi_{l, CL_3, CL_4}^{\eta} \quad \text{avec } \varphi_{\alpha, \beta, \gamma}^x = x^{\alpha} \cdot (1+x)^{\beta} \cdot (1-x)^{\gamma} \quad (\text{éq IV-77})$$

Le vecteur des coordonnées généralisées s'écrit :

$${}^T \mathbf{w}_0 = \left\{ A_{00}, A_{01}, \dots, \dots, A_{kl}, \dots, \dots, A_{M_{w_0} N_{w_0}} \right\} = \{ \dots, \dots, w_{0p}, \dots, \dots \} \quad (\text{éq IV-78})$$

Le passage de deux indices de rangement des inconnues k et l à un seul indice p est bijectif. L'expression du vecteur d'interpolation ${}^T \mathbf{h}_{w_0}$ peut être à présent explicitée :

$${}^T \mathbf{h}_{w_0} = \left\{ \varphi_{0, CL_1, CL_2}^{\xi} \cdot \varphi_{0, CL_3, CL_4}^{\eta}, \dots, \varphi_{k, CL_1, CL_2}^{\xi} \cdot \varphi_{l, CL_3, CL_4}^{\eta}, \dots, \varphi_{M_{w_0}, CL_1, CL_2}^{\xi} \cdot \varphi_{N_{w_0}, CL_3, CL_4}^{\eta} \right\} \quad (\text{éq IV-79})$$

Ainsi, tous les vecteurs d'interpolation pourront être écrits en fonction de la fonction φ et de ses dérivées. Par exemple :

$${}^T \mathbf{c}_x = \frac{4}{L^2} \cdot \left\{ \varphi''^{\xi}_{0, CL_1, CL_2} \cdot \varphi^{\eta}_{0, CL_3, CL_4}, \dots, \varphi''^{\xi}_{k, CL_1, CL_2} \cdot \varphi^{\eta}_{l, CL_3, CL_4}, \dots, \varphi''^{\xi}_{M_{w_0}, CL_1, CL_2} \cdot \varphi^{\eta}_{N_{w_0}, CL_3, CL_4} \right\}$$

La fonction φ permet de décrire des bases de monômes en mettant β et γ à 0. C'est sur

le calcul des intégrales des combinaisons linéaires de φ et de ses dérivées que repose la construction de la matrice de rigidité tangente (voir annexe "programme de calcul SAND").

EXPRESSION MATRICIELLE DES DÉFORMATIONS.

Dans la peau travaillante, les déformations peuvent se mettre sous la forme :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^1\} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_m^1\} + z \cdot \{\boldsymbol{\chi}_m^1\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}_{nl}^1\} \text{ avec } {}^T\{\boldsymbol{\varepsilon}^1\} = \{\varepsilon_{xx}^1, \varepsilon_{yy}^1, \gamma_{xy}^1\} \quad (\text{éq IV-80})$$

où l'on reconnaîtra une partition en termes de membrane, de courbure et non linéaires. Avec les notations déjà introduites, on peut donc écrire en membrane :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_m^1\} = \begin{bmatrix} {}^T\mathbf{b}_{u_0,x} & 0 \\ 0 & {}^T\mathbf{b}_{v_0,y} \\ {}^T\mathbf{b}_{u_0,y} & {}^T\mathbf{b}_{v_0,x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}_{m_0}] \cdot \{\mathbf{p}_{m_0}\} \quad (\text{éq IV-81})$$

Les matrices $[\mathbf{B}]$ sont dites "matrices d'interpolation des déformations". Pour les déformations liées à la flèche, on a :

$$\{\boldsymbol{\chi}_m^1\} = \begin{bmatrix} {}^T\mathbf{c}_x \\ {}^T\mathbf{c}_y \\ {}^T\mathbf{c}_{xy} \end{bmatrix} \cdot \{\mathbf{w}_0\} = [\mathbf{B}_\chi] \cdot \{\mathbf{w}_0\} \quad (\text{éq IV-82})$$

Pour le terme non linéaire, l'expression est plus complexe :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_{nl}^1\} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} & \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{T}_0] \cdot \{\mathbf{s}_0\} \quad (\text{éq IV-83})$$

$[\mathbf{T}_0]$ est une fonction de w_0 . On pose de plus :

$$\{\mathbf{s}_0\} = \begin{bmatrix} {}^T\mathbf{b}_{w_0,x} \\ {}^T\mathbf{b}_{w_0,y} \end{bmatrix} \cdot \{\mathbf{w}_0\} = [\mathbf{B}_{s_0}] \cdot \{\mathbf{w}_0\} \quad (\text{éq IV-84})$$

Le calcul dans la peau stabilisatrice est analogue et conduit à :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^2\} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_m^2\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}_{nl}^2\} \quad (\text{éq IV-85})$$

$$\text{avec : } \{\boldsymbol{\varepsilon}_m^2\} = [\mathbf{B}_{m_2}] \cdot \{\mathbf{p}_{m_2}\} \text{ et } \{\boldsymbol{\varepsilon}_{nl}^2\} = \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{T}_2] \cdot \{\mathbf{s}_2\} \quad (\text{éq IV-86})$$

Dans l'âme, on est conduit à séparer les inconnues de déplacement dans le plan et hors du plan du sandwich, d'où :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^c\} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_m^c\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}_w^c\} \text{ avec } {}^T\{\boldsymbol{\varepsilon}^c\} = \{\gamma_{xz}^c, \gamma_{yz}^c, \varepsilon_{zz}^c\} \quad (\text{éq IV-87})$$

Les matrices $[\mathbf{B}]$ dans l'âme sont construites de la manière suivante :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_m^c\} = \frac{1}{h_c} \cdot \begin{bmatrix} -{}^T\mathbf{h}_{u_0} & 0 & {}^T\mathbf{h}_{u_2} & 0 \\ 0 & -{}^T\mathbf{h}_{v_0} & 0 & {}^T\mathbf{h}_{v_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{B}_{m_c}] \cdot \{\mathbf{p}_{m_c}\} \quad (\text{éq IV-88})$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_w^c\} = \begin{bmatrix} -(z - (h_c + h_1)) \cdot {}^T\mathbf{b}_{w_0,x} & \left(z - \frac{h_1}{2}\right) \cdot {}^T\mathbf{b}_{w_2,x} \\ -(z - (h_c + h_1)) \cdot {}^T\mathbf{b}_{w_0,y} & \left(z - \frac{h_1}{2}\right) \cdot {}^T\mathbf{b}_{w_2,y} \\ -{}^T\mathbf{h}_{w_0} & {}^T\mathbf{h}_{w_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{w}_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{B}_{w_c}] \cdot \{\mathbf{w}_c\} \quad (\text{éq IV-89})$$

IV.4.4 - CALCUL DE LA MATRICE DE RIGIDITÉ TANGENTE.

VECTEURS DES EFFORTS INTÉRIEURS.

La démarche est identique à celle explicitée en poutre et consiste à identifier les vecteurs des efforts intérieurs relatifs aux différentes phases et aux différentes coordonnées généralisées à partir de l'expression du travail virtuel. Une étape de calcul supplémentaire est toutefois nécessaire en plaque afin de soulager les écritures. Elle consiste à pratiquer une intégration préalable dans l'épaisseur de manière à faire apparaître les flux d'efforts. L'expression du travail virtuel des efforts intérieurs dans la peau travaillante est d'après (éq A4-26), (éq A4-27) :

$$\delta U_d^1 = \int_{V_1} \text{Trace}([\mathbf{PK}_2] \cdot [\delta \mathbf{E}]) dV_0 = \int_{V_1} \{\boldsymbol{\sigma}^1\} \cdot \{\delta \boldsymbol{\varepsilon}^1\} dV_1 = {}^T\mathbf{q}_{i,m_0} \cdot \delta \mathbf{p}_{m_0} + {}^T\mathbf{q}_{i,w_0} \cdot \delta \mathbf{w}_0 \quad (\text{éq IV-90})$$

Une première intégration dans l'épaisseur fournit :

$$\delta U_d^1 = \iint {}^T\mathbf{N}_1 \cdot (\{\boldsymbol{\varepsilon}_m^1\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}_{nl}^1\}) dA_1 + \iint {}^T\mathbf{M}_1 \cdot \{\boldsymbol{\chi}_m^1\} dA_1 \quad (\text{éq IV-91})$$

Avec, et en utilisant la loi de comportement (éq IV-1) :

$$\mathbf{N}_1 = h_1 \cdot [\mathbf{Q}^{PT}] \cdot (\{\boldsymbol{\varepsilon}_m^1\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}_{nl}^1\}) \text{ et } \mathbf{M}_1 = h_1^3 / 12 \cdot [\mathbf{Q}^{PT}] \cdot \{\boldsymbol{\chi}_m^1\} \quad (\text{éq IV-92})$$

Le calcul des déformations virtuelles fournit directement pour les termes linéaires :

$$\{\delta \boldsymbol{\varepsilon}_m^1\} = [\mathbf{B}_{m_0}] \cdot \{\delta \mathbf{p}_{m_0}\} \text{ et } \{\delta \boldsymbol{\chi}_m^1\} = [\mathbf{B}_\chi] \cdot \{\delta \mathbf{w}_0\} \quad (\text{éq IV-93})$$

Pour la partie non linéaire des déformations, on a :

$$\{\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{nl}^1\} = \frac{1}{2} \cdot [\delta \mathbf{T}_0] \cdot [\mathbf{B}_{s_0}] \cdot \{\mathbf{w}_0\} + \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{T}_0] \cdot [\mathbf{B}_{s_0}] \cdot \{\delta \mathbf{w}_0\} = [\mathbf{T}_0] \cdot [\mathbf{B}_{s_0}] \cdot \{\delta \mathbf{w}_0\} \quad (\text{éq IV-94})$$

La dernière égalité se démontre par développement terme à terme et présente un grand intérêt quant à la simplification des calculs des matrices de rigidité tangente. L'identification terme à terme dans (éq IV-91) permet d'écrire les vecteurs des efforts intérieurs en fonction des matrices d'interpolation :

$${}^T \mathbf{q}_{i, m_0} = \iint {}^T \mathbf{N}_1 \cdot [\mathbf{B}_{m_0}] dA_1 \text{ et } {}^T \mathbf{q}_{i, w_0} = \iint \left({}^T \mathbf{N}_1 \cdot [\mathbf{T}_0] \cdot [\mathbf{B}_{s_0}] + {}^T \mathbf{M}_1 \cdot [\mathbf{B}_\chi] \right) dA_1 \quad (\text{éq IV-95})$$

La même démarche a été effectuée pour l'âme et la peau stabilisatrice et conduit aux expressions des vecteurs des efforts intérieurs correspondants.

MATRICE DE RIGIDITÉ TANGENTE.

On va s'attacher maintenant à déterminer l'expression de la matrice de rigidité tangente (symétrique) dans la peau travaillante. Celle-ci est de la forme :

$$[\mathbf{K}_T^1] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{m_0 m_0}^1 & \mathbf{K}_{m_0 w_0}^1 \\ \mathbf{K}_{m_0 w_0}^1 & \mathbf{K}_{w_0 w_0}^1 \end{bmatrix} \quad (\text{éq IV-96})$$

Les matrices de rigidité tangentes élémentaires sont obtenues par différentiation des vecteurs des efforts intérieurs :

$$\delta \mathbf{q}_{i, m_0} = h_1 \cdot \iint {}^T [\mathbf{B}_{m_0}] \cdot [\mathbf{Q}^{PT}] \cdot \delta \left([\mathbf{B}_{m_0}] \cdot \{\mathbf{p}_{m_0}\} + \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{T}_0] \cdot [\mathbf{B}_{s_0}] \cdot \{\mathbf{w}_0\} \right) dA_1$$

En utilisant (éq IV-94) et après identification, on obtient :

$$[\mathbf{K}_{m_0 m_0}^1] = h_1 \cdot \iint {}^T [\mathbf{B}_{m_0}] \cdot [\mathbf{Q}^{PT}] \cdot [\mathbf{B}_{m_0}] dA_1 \quad (\text{éq IV-97})$$

Cette première matrice représente la rigidité de membrane de la peau travaillante. Elle entre dans la composition de la matrice de rigidité initiale $[\mathbf{K}_{T_0}]$ qui est la partie linéaire de la

réponse du sandwich.

$$[\mathbf{K}_{m_0 w_0}^1] = h_1 \cdot \iint^T [\mathbf{B}_{m_0}] \cdot [\mathbf{Q}^{PT}] \cdot [\mathbf{T}_0] \cdot [\mathbf{B}_{s_0}] dA_1 \quad (\text{éq IV-98})$$

Cette matrice représente le couplage non linéaire membrane/flexion. Chacun de ses termes est une simple somme. Le calcul est plus délicat pour la différentiation du vecteur des efforts intérieurs lié au déplacement w_0 à cause de la présence des termes non linéaires :

$$\delta \mathbf{q}_{i, w_0} = \iint \left(\delta \left({}^T[\mathbf{B}_{s_0}] \cdot {}^T[\mathbf{T}_0] \cdot \mathbf{N}_1 \right) + {}^T[\mathbf{B}_\chi] \cdot \delta \mathbf{M}_1 \right) dA_1$$

Soit :

$$\delta \mathbf{q}_{i, w_0} = \iint \left({}^T[\mathbf{B}_{s_0}] \cdot {}^T[\delta \mathbf{T}_0] \cdot \mathbf{N}_1 + {}^T[\mathbf{B}_{s_0}] \cdot {}^T[\mathbf{T}_0] \cdot \delta \mathbf{N}_1 + {}^T[\mathbf{B}_\chi] \cdot \delta \mathbf{M}_1 \right) dA_1 \quad (\text{éq IV-99})$$

En développant le calcul, un formalisme simplifié est proposé :

$${}^T[\delta \mathbf{T}_0] \cdot \mathbf{N}_1 = \delta \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} & 0 & \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial w_0}{\partial y} & \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_x^1 \\ N_y^1 \\ N_{xy}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \cdot N_x^1 + \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \cdot N_{xy}^1 \\ \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \cdot N_y^1 + \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \cdot N_{xy}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x^1 & N_{xy}^1 \\ N_{xy}^1 & N_y^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ \delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{bmatrix}$$

Il est donc possible de poser :

$${}^T[\delta \mathbf{T}_0] \cdot \mathbf{N}_1 = [\bar{\mathbf{N}}_0] \cdot [\mathbf{B}_{s_0}] \cdot \{\delta \mathbf{w}_0\} \quad (\text{éq IV-100})$$

En remplaçant (éq IV-99) dans (éq IV-100) puis par identification, l'expression de la matrice de rigidité élémentaire $[\mathbf{K}_{w_0 w_0}^1]$ est obtenue :

$$[\mathbf{K}_{w_0 w_0}^1] = [\mathbf{K}_{T\chi}^1] + [\mathbf{K}_{T\sigma}^1] + [\mathbf{K}_{TNL}^1] \quad (\text{éq IV-101})$$

* $[\mathbf{K}_{T\chi}^1]$ est la matrice qui représente la rigidité en flexion de la peau travaillante. Elle entre dans la composition de la matrice de rigidité initiale $[\mathbf{K}_{T_0}]$ et vaut :

$$[\mathbf{K}_{T\chi}^1] = \frac{h_1}{12} \cdot \iint^T [\mathbf{B}_\chi] \cdot [\mathbf{Q}^{PT}] \cdot [\mathbf{B}_\chi] dA_1 \quad (\text{éq IV-102})$$

* $[\mathbf{K}_{T\sigma}^1]$ est appelée matrice de rigidité géométrique. Elle vaut :

$$[\mathbf{K}_{T\sigma}^1] = \iint^T [\mathbf{B}_{s_0}] \cdot [\overline{\mathbf{N}}_0] \cdot [\mathbf{B}_{s_0}] dA_1 \quad (\text{éq IV-103})$$

Cette matrice dont le calcul développé est assez long présente des termes de couplages non linéaires membrane/flexion. Chacun de ses termes est une double somme. C'est dans cette matrice que l'on retrouve la physique du couplage à l'origine du comportement non linéaire. Le temps CPU de calcul de cette matrice est important.

* $[\mathbf{K}_{TNL}^1]$ est une matrice de rigidité non linéaire complémentaire de la précédente :

$$[\mathbf{K}_{TNL}^1] = \iint^T [\mathbf{B}_{s_0}] \cdot {}^T[\mathbf{T}_0] \cdot [\mathbf{Q}^{PT}] \cdot [\mathbf{T}_0] \cdot [\mathbf{B}_{s_0}] dA_1 \quad (\text{éq IV-104})$$

Afin de soulager la présentation de cette partie assez mathématique, il n'est pas utile de présenter les résultats pour la peau stabilisatrice qui sont similaires en enlevant la rigidité de flexion. De même, dans l'âme, le calcul des matrices de rigidité tangente est aisé car il n'y a pas de composantes non linéaires ni de termes de couplage.

Le calcul n'est toutefois pas terminé car l'on doit développer les expressions précédentes pour trouver les matrices de rigidité tangentes élémentaires qui composent la matrice globale (éq IV-105). Ces matrices sont exprimées en fonction des vecteurs d'interpolation, des caractéristiques géométriques et matériaux, et pour les termes non linéaires, en fonction des inconnues (voir annexe "programme SAND"). Ce calcul développé conduit à la détermination de **81** matrices au lieu de 313 pour la première cinématique. La symétrie des peaux fait qu'il existe de nombreux termes analogues ce qui diminue le risque d'erreur de programmation. Une fois ces matrices calculées, comme en éléments finis, un assemblage est réalisé.

$$[\mathbf{K}_{TGLOBAL}] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{u_0u_0} & \mathbf{K}_{u_0v_0} & \mathbf{K}_{u_0w_0} & \mathbf{K}_{u_0u_2} & \mathbf{K}_{u_0v_2} & \mathbf{K}_{u_0w_2} \\ \dots & \mathbf{K}_{v_0v_0} & \mathbf{K}_{v_0w_0} & \mathbf{K}_{v_0u_2} & \mathbf{K}_{v_0v_2} & \mathbf{K}_{v_0w_2} \\ \dots & \dots & \mathbf{K}_{w_0w_0} & \mathbf{K}_{w_0u_2} & \mathbf{K}_{w_0v_2} & \mathbf{K}_{w_0w_2} \\ (\text{sym}) & \dots & \dots & \mathbf{K}_{u_2u_2} & \mathbf{K}_{u_2v_2} & \mathbf{K}_{u_2w_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{K}_{v_2v_2} & \mathbf{K}_{v_2w_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{K}_{w_2w_2} \end{bmatrix} \quad (\text{éq IV-105})$$

La connaissance de $[\mathbf{K}_{TGlobal}]$ permet d'appliquer la méthode incrémentale itérative. Il ne reste plus qu'à calculer le vecteur des efforts extérieurs ce qui fait l'objet du paragraphe suivant.

IV.4.5 - CALCUL DU VECTEUR DES EFFORTS EXTÉRIEURS.

Les expressions des vecteurs des efforts extérieurs s'obtiennent par identification en faisant travailler les flux dans les champs de déplacements virtuels qui leurs sont associés :

$$\delta W_{F_{\text{ext}}} = {}^T \mathbf{q}_e \cdot \delta \mathbf{u}$$

TRACTION - COMPRESSION BIAXIALE.

On calcule dans un premier temps la contribution de N_x et N_y représentant les flux d'efforts extérieurs à la structure, supposés être *dans le plan moyen de la peau travaillante* (Figure N° 4-22). Le décalage δ sera pris en compte par la suite.

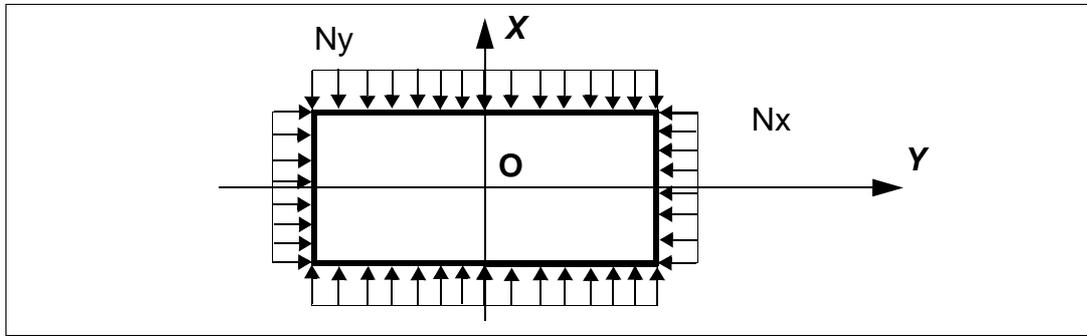


Figure N° 4-22 : Chargement biaxial dans le plan moyen de la peau travaillante.

Le travail virtuel de N_x s'écrit :

$$\delta W_{F_{\text{ext}}}^{N_x} = \iiint (\sigma_{xx} \cdot \delta \varepsilon_{xx}) dv_1 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(N_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_0) \right) dx dy = N_x \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} {}^T \mathbf{b}_{x, u_0} dx dy \cdot \delta \mathbf{u}_0 \quad (\text{éq IV-106})$$

Donc l'expression de $\mathbf{q}_e^{N_x}$ est :

$$\mathbf{q}_e^{N_x} = N_x \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathbf{b}_{x, u_0} dx dy \quad (\text{éq IV-107})$$

On peut s'intéresser à la ligne p de ce vecteur qui est fonction des indices k et l du coefficient A_{kl} des coordonnées généralisées :

$$\{ \mathbf{q}_e^{N_x} \}_p = \frac{L}{2} \cdot N_x \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\varphi'_{k,0,0}{}^\xi \cdot \varphi_{l,0,0}^\eta) d\xi d\eta = \frac{L}{2} \cdot N_x \cdot \int_{-1}^1 \varphi'_{k,0,0}{}^\xi d\xi \cdot \int_{-1}^1 \varphi_{l,0,0}^\eta d\eta \quad (\text{éq IV-108})$$

Dans cette expression, le mode de calcul pratique commun à toute cette formulation apparaît clairement, à savoir que chaque terme de la matrice de rigidité tangente, du vec-

teur des efforts intérieurs ou du vecteur des efforts extérieurs, est le produit d'une intégrale en ξ et d'une intégrale en η . Le type d'opérande commun à toutes ces intégrales est un produit de la fonction φ (éq IV-77) et de ses dérivées. D'un point de vue pratique, 17 combinaisons différentes ont été utilisées (voir annexe "programme SAND"). On peut aussi noter l'intérêt des fonctions choisies qui permettent d'obtenir des variables séparables et donc la transformation de l'intégrale d'un produit en produit d'intégrale. D'un point de vue pratique, cette remarque est essentielle pour obtenir une formulation simplifiée et une programmation efficace. Pour le flux N_y , on obtient sans calcul :

$$\mathbf{q}_e^{N_y} = N_x \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathbf{b}_{y,v_0} dx dy \quad (\text{éq IV-109})$$

La même démarche a été effectuée dans la peau stabilisatrice pour prendre en compte le pourcentage de flux $N\%$ entrant directement.

MOMENT DE FLEXION INDUIT PAR LE DÉCALAGE δ .

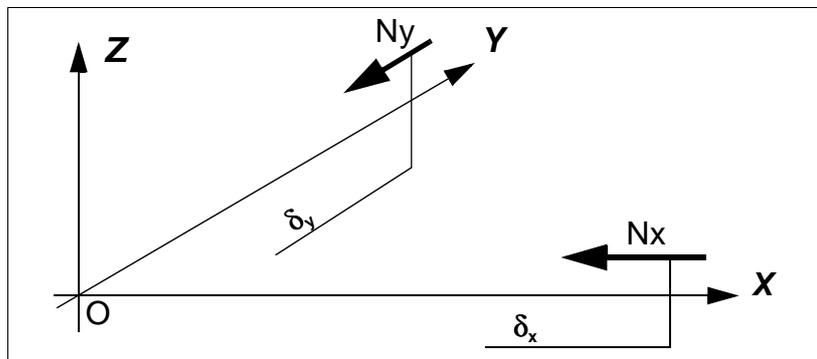


Figure N° 4-23 : Moments de flexion entrant dans la peau travaillante.

Les moments de flexion induits par décalage des flux dans l'épaisseur valent d'après le schéma ci-dessus :

- $\mathbf{M}_x = + \delta_x \cdot \mathbf{N}_x$, porté par \vec{y}
- $\mathbf{M}_y = - \delta_y \cdot \mathbf{N}_y$, porté par \vec{x}

Le moment travaille avec les rotations de sections associées qui compte tenu de l'hypothèse petites rotations valent respectivement $-\frac{\partial w_0}{\partial x}$ et $\frac{\partial w_0}{\partial y}$. L'expression du travail virtuel des efforts extérieurs sera donc :

$$\delta W_{\text{Fext}}^{M_x} = - \iint M_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\delta \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right) dA = - \iint M_x \cdot \delta \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} dA = -M_x \cdot \iint \mathbf{c}_x dA \cdot \delta \mathbf{w}_0 \quad (\text{éq IV-110})$$

L'expression du vecteur des efforts extérieurs pour les moment M_x et M_y s'obtient par identification, soit :

$$\mathbf{q}_e^{M_x} = -M_x \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathbf{c}_x dz dy \quad \text{et} \quad \mathbf{q}_e^{M_y} = M_y \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathbf{c}_y dz dy \quad (\text{éq IV-111})$$

CISAILLEMENT.

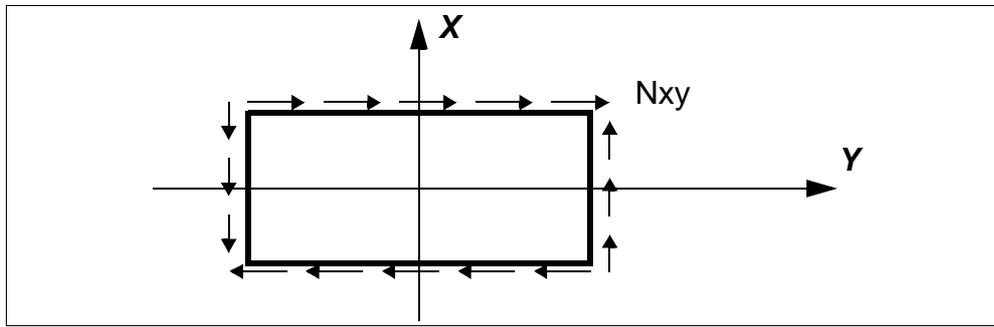


Figure N° 4-24 : Chargement en cisaillement.

Le chargement s'effectue dans le plan moyen de la peau travaillante. L'expression du travail virtuel du flux de cisaillement N_{xy} s'écrit :

$$\delta W_{\text{Fext}}^{N_{xy}} = \iiint (\tau_{xy} \cdot \delta \gamma_{xy}) dV = \mathbf{T}_{\mathbf{q}_{e,u_0}}^{N_{xy}} \cdot \delta \mathbf{u}_0 + \mathbf{T}_{\mathbf{q}_{e,v_0}}^{N_{xy}} \cdot \delta \mathbf{v}_0 \quad (\text{éq IV-112})$$

La démarche de calcul est identique et permet d'arriver à :

$$\mathbf{q}_{e,u_0}^{N_{xy}} = N_{xy} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathbf{b}_{y,u_0} dx dy \quad \text{et} \quad \mathbf{q}_{e,v_0}^{N_{xy}} = N_{xy} \cdot \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \mathbf{b}_{x,v_0} dx dy \quad (\text{éq IV-113})$$

Afin de pouvoir corréler les essais, un calcul analogue a été effectué dans la peau stabilisatrice pour prendre en compte la fraction $\mathbf{N}\%$ du flux de cisaillement susceptible d'entrer directement dans cette peau.

Un assemblage des vecteurs des efforts extérieurs obtenus est nécessaire avant de pouvoir appliquer la méthode incrémentale/itérative. Le calcul de ces vecteurs s'est limité volontairement aux modes de chargements supposés des plaques sandwichs dissymétrique. Il serait possible d'étoffer les cas de chargement (chargements localisé, pression répartie, etc...) dans le cadre de développements ultérieurs.

IV.4.6 - VALIDATION PAR COMPARAISON A DES MODÈLES ÉLÉMENTS FINIS.

Après écriture du programme de calcul (voir Annexe "Programme de calcul SAND"), la théorie a été comparée pour validation à un modèle éléments finis réalisé avec le logiciel SAMCEF. S'il existe plusieurs manières de modéliser les structures sandwichs (7 modèles ont été identifiés et comparés dans le domaine linéaire par SAMCEF), le modèle de référence utilise des éléments volumiques pour l'âme et des coques volumiques pour les peaux (type 8 SAMCEF). En coques, il y a découplage entre le comportement en membrane et dans l'épaisseur.

Pour notre étude, ce modèle a été retenu avec un seul élément dans l'épaisseur de l'âme et deux dans la peau travaillante de manière à pouvoir charger dans le plan moyen. L'élément de type 8 ne fournit que les contraintes en sortie ce qui nous a obligé à retrouver les déformations en utilisant la loi de comportement. Pour l'évolution des contraintes en fonction de la charge, des valeurs moyennes par maille ont été utilisées. Deux cas de chargements ont été traités, l'objectif étant ici seulement de vérifier d'un point de vue sécurité informatique le programme. Les matériaux et les épaisseurs de peaux sont communs aux deux modèles. La flèche et les déformations dans les peaux au centre de la plaque sont comparées. Les résultats en quatre autres points ont été comparés et sont fournis en annexe.

Dans les deux cas, le degré retenu pour w_0 est 2 ce qui représente le meilleur compromis qualité de résultat/temps de calcul (voir annexe "programme SAND"). La résolution se fait par la méthode de Newton-Raphson. Le critère de convergence est fixé à 10^{-3} pour l'essai de compression et 10^{-5} pour le cas en cisaillement.

CAS N°1: COMPRESSION.

Le modèle de plaque a pour dimensions 200 x 200 mm. Il est simplement appuyé sur ses 4 cotés. Le modèle E.F de plaque complète comporte 10 éléments par coté. Les courbes suivantes montrent l'évolution de différentes grandeurs en fonction du flux. La corrélation est excellente dans la première partie du domaine. La différence maximale est atteinte au dernier incrément. Pour la flèche, la différence est de 4.6 % puis de 11% aux deux derniers incréments.

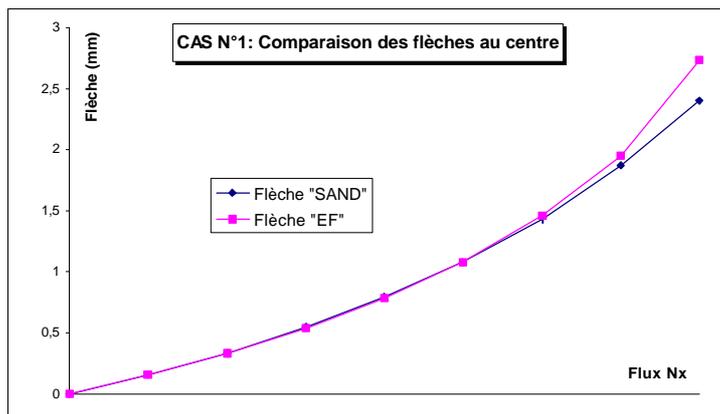


Figure N° 4-25 : Comparaison des flèches au centre cas n°1.

Les déformations de compression ε_{xx} sont aussi très proches. La différence atteint au maximum 1.9% pour la peau travaillante. Compte-tenu de l'échelle, la différence de comportement n'est pas sensible en ce qui concerne la réponse de la peau stabilisatrice. L'erreur est de 10% par comparaison à la valeur maximale.

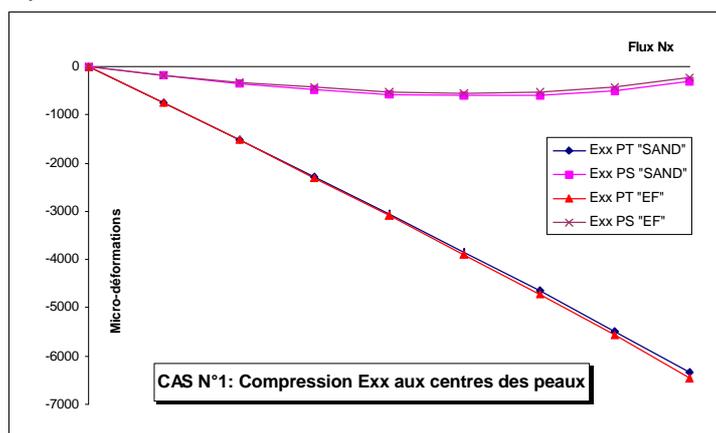


Figure N° 4-26 : Déformations ε_{xx} aux centres des peaux cas n°1.

Plusieurs facteurs interviennent :

- La peau stabilisatrice est modélisée par une membrane dans la théorie alors que l'on utilise des éléments volumiques qui sont plus rigides pour SAMCEF.
- Les erreurs dans la peau stabilisatrice sont toujours plus importantes que celles commises dans la peau travaillante. En fait, une faible part de l'énergie du sandwich (<3%) transite dans cette phase. En conséquence, il semble que toute erreur dans la peau travaillante génère une erreur plus importante dans la peau stabilisatrice.
- L'étude du champ des contraintes dans cette peau montre une grande sensibilité aux conditions aux limites qui affecte même le centre. Cette perturbation est particulièrement élevée dans la zone non linéaire alors que les valeurs sont

quasi identiques pour les faibles flux.

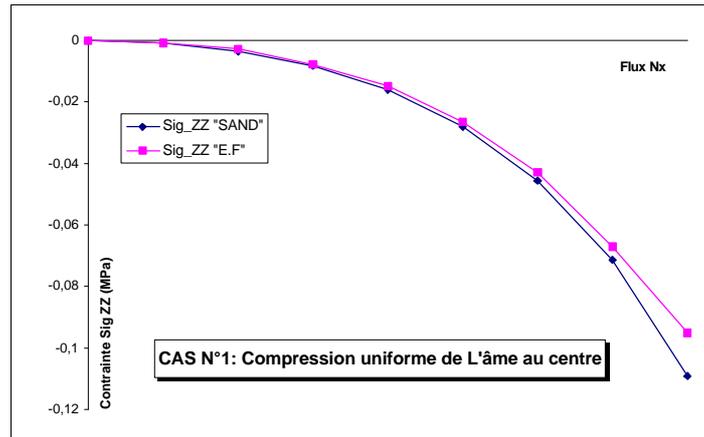


Figure N° 4-27 : Contrainte σ_{zz} au centre cas n°1.

Un relevé des contraintes et des flèches en divers points des peaux et de l'âme est fourni en annexe "Programme de calcul SAND". D'une manière générale, SAND fournit des résultats très corrects. Le modèle éléments finis s'avère aussi beaucoup plus sensible aux conditions aux limites. Le nombre d'éléments est sans doute insuffisant pour une description fine des champs mais suffit à démontrer la validité de la théorie.

CAS N°2 : CISAILLEMENT.

Le modèle de plaque a pour dimensions 800 x 800 mm. Cette dimension importante a été choisie car le cisaillement ne génère pas de déformée importante et il est nécessaire d'assouplir pour visualiser les effets non linéaires dont la flèche. La plaque est appuyée sur ses 4 côtés. Le modèle E.F de plaque complète comporte 20 éléments par côté.

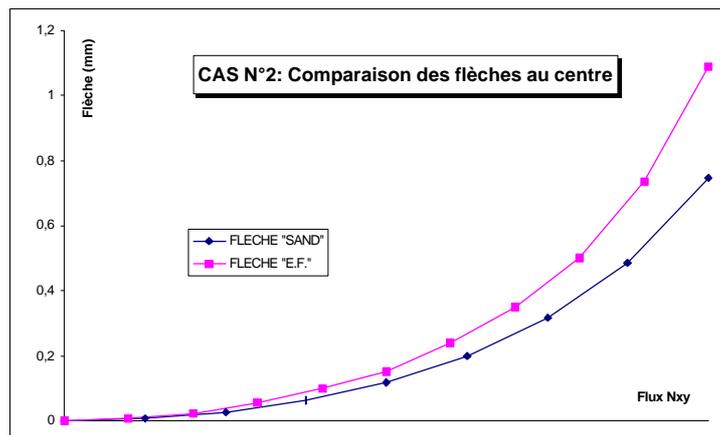


Figure N° 4-28 : Comparaison des flèches au centre cas n°1.

Les courbes Figure N° 4-28 montrent l'évolution de différentes grandeurs en fonction du flux. La différence entre le modèle et les éléments finis est plus marquée pour la flèche. Elle atteint 25% au dernier incrément. Le modèle semble plus rigide car l'utilisation d'une base de degré 2 est insuffisante pour décrire la déformée en cisaillement qui est plus complexe.

L'utilisation de degrés plus élevés n'apporte toutefois pas d'amélioration.

En cisaillement, le résultat en flèche s'est avéré sensible au critère de convergence. Pour un critère fixé à 10^{-3} , la flèche obtenue au dernier incrément est de 0.687 mm alors que pour 10^{-5} on obtient 0.748 mm soit une variation de 8% environ (voir annexe "programme SAND").

La corrélation des résultats pour le champ des contraintes τ_{xy} (Tau XY sur la Figure N° 4-29) est très bonne. L'erreur ne dépasse pas 1.3% pour la peau travaillante et 2% pour la peau stabilisatrice. Un relevé des contraintes et des flèches en divers points des peaux et de l'âme est aussi fourni en annexe "Programme de calcul SAND".

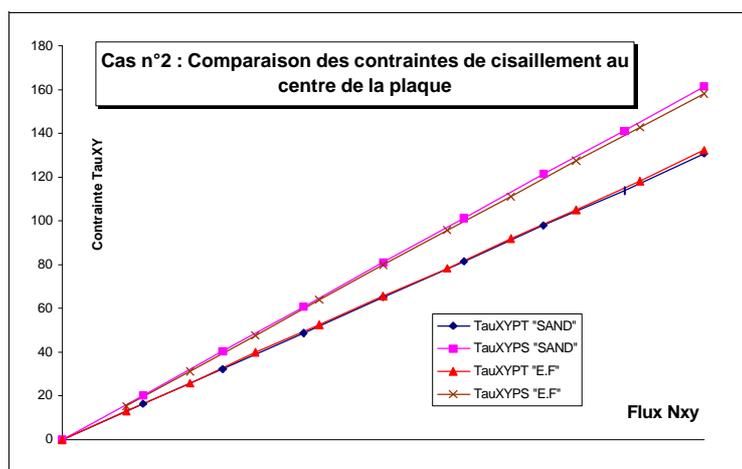


Figure N° 4-29 : Contraintes τ_{xy} aux centres des peaux cas n°2.

L'étude de ces deux cas valide pour l'essentiel la théorie et la programmation effectuée. Les conclusions générales relatives à ce chapitre peuvent maintenant être présentées.

IV.5 - CONCLUSIONS RELATIVES A LA PARTIE THÉORIQUE.

Une théorie non linéaire géométrique des plaques sandwichs dissymétriques a été élaborée et a fait l'objet d'une programmation Fortran. Le modèle prend en compte les divers chargements proposés et permet une estimation des contraintes de compression transverse dans l'âme. La théorie présente la particularité de voir le nombre d'inconnues être fonction des conditions aux limites et du degré du polynôme w_0 . Ses limitations sont liées aux hypothèses et au choix de la méthode de résolution numérique.

On peut citer principalement :

- L'hypothèse " PETITES ROTATIONS" valable pour des rotations inférieures à 20°
Pour les cas fortement non linéaires, l'erreur est plus importante (plaque très

souple et de grandes dimensions par exemple). On a de plus une imprécision au niveau de l'écrasement du nida.

- Le choix des polynômes ne permet de décrire que les cas théoriques de conditions aux limites (appuyé/encastré). Or, pour un bureau d'étude aéronautique, les coefficients de flambage dimensionnants se situent entre ces cas car les conditions aux limites réelles ne sont jamais parfaites. Une voie de développement est donc la prise en compte de raideurs localisées aux frontières.
- Par ailleurs, dans la configuration actuelle, on utilise des bases complètes de polynômes ce qui génère un grand nombre d'inconnues. Comme les coefficients sont adimensionnels, une étude pourrait être réalisée de manière à sélectionner celles qui jouent effectivement un rôle.
- Le fait d'utiliser un matériau orthotrope équivalent ne permet pas de décrire finement le comportement des peaux dont les drapages génèrent des couplages membrane/flexion. Toutefois, on a montré que la flexion propre des peaux est très faible. Donc, cette hypothèse est validée et le comportement général du sandwich est peu affecté.
- La nature du nid d'abeille exclu l'étude de coeurs ayant une rigidité dans leur plan.

De toutes ces limitations, seule l'hypothèse " PETITES ROTATIONS" qui engendrerait une modification complète de la formulation et le passage à une description lagrangienne actualisée présente un caractère vraiment rédhibitoire. Les autres peuvent faire l'objet d'améliorations ultérieures au prix toutefois d'un nombre accru de matrices de rigidité élémentaires à calculer.

Le programme développé à partir de cette théorie répond globalement aux objectifs fixés. Il est plus rapide et plus souple d'emploi que les méthodes éléments finis. Des résultats de très bonne qualité sont obtenus en degré 2 dans la minute (alors que le temps de calcul en éléments finis volumiques avec SAMCEF peut atteindre 1H à 3H). Ce programme possède aussi des capacités de développement intéressantes pour l'étude des sandwichs en flexion et des conditions aux limites non conventionnelles.

D'une manière générale, les erreurs (1 à 2%) pour les caractéristiques principales sont très faibles par rapports aux éléments finis volumiques. Les caractéristiques dominées par le comportement non linéaire, par exemple la flèche en cisaillement ou les déformations dans la peau stabilisatrice, sont approchées avec une erreur d'autant plus importante (de 10 à 25%) que l'on s'approche de la charge critique. L'utilisation du degré 2 s'avère suffisant pour obtenir ces résultats bien que, dans le cas de la flèche en cisaillement, la fonction de forme soit trop limitée.

CHAPITRE V

CORRELATION DES ESSAIS ET ANALYSES COMPLEMENTAIRES

V.1 - CORRÉLATION DES ESSAIS.

V.1.1 - DESCRIPTION DES ESSAIS EN COMPRES- SION SUR POUTRES.

OBJECTIFS.

La bibliographie et la partie expérimentale ont montré que les essais demeurent indispensables pour la compréhension des phénomènes, la validation des modèles de calculs et des solutions technologiques.

Dans l'étude théorique, deux paramètres \mathbf{N} (le pourcentage de flux entrant dans la peau stabilisatrice) et δ (le décalage du flux d'effort par rapport à la ligne moyenne de la peau travaillante) ont été proposés (*Figure N° 4-4*) à la suite d'une analyse a priori des modes de chargements. Pour mieux appréhender ces paramètres et étudier la pertinence de la théorie proposée une étude sur une géométrie simple de type poutre et un chargement simple en compression par une machine universelle ont été réalisés.

GÉOMÉTRIE ET MATÉRIAUX.

Les poutres ont été réalisées au Laboratoire Structures (*Figure N° 5-1*). Le drapage de la peau travaillante est constitué d'une séquence de plis carbone $BD0^\circ/UD0^\circ/BD0^\circ$, celui de la peau stabilisatrice d'un drapage $BD0^\circ/BD0^\circ$. L'âme est constituée d'une mousse Rohacell 31 ($G = 13 \text{ MPa}$ et $E = 36 \text{ MPa}$).

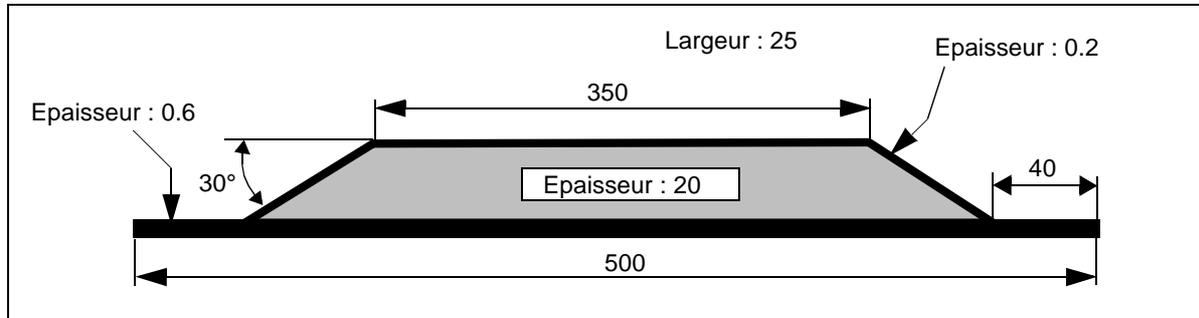


Figure N° 5-1 : Géométrie des poutres d'essai.

La caractérisation de la mousse et des plis de carbone a été effectuée au laboratoire. Toutefois, les modes de fabrication des éprouvettes de caractérisation et des peaux de l'éprouvette sandwich sont différents. Cette différence génère une variation des caractéristiques élastiques de près de 10%. Après découpage des peaux d'une poutre sandwich et essai de traction, on obtient les valeurs indiquées dans le Tableau N° 5-1 (l'épaisseur des peaux est considérée égale à l'épaisseur théorique).

Modules	Calculés à partir des résultats des essais de caractérisation	Obtenus par essais directs	Variation
E Peau Travaillante	86850 MPa	78360 MPa	- 10%
E Peau Stabilisatrice	54545 MPa	58000 MPa	+ 6.3%

Tableau N° 5-1 : Caractéristiques matériaux mesurées des peaux.

Quatre géométries locales différentes ont été fabriquées (*Figure N° 5-2*) :

- La première géométrie est la plus simple et sert de référence. Elle comporte simplement des talons en alliage d'aluminium collés sur la zone monolithique.
- Dans la deuxième éprouvette, deux plis en tissus de fibres de verre orientés à 45° ont été ajoutés de part et d'autre de l'âme en mousse. Le module de cisaillement de l'âme est augmenté de 13 MPa à 44 MPa. La rigidité supérieure de l'âme doit conduire à augmenter la charge à rupture et donc à

favoriser l'observation du comportement non linéaire.

- La troisième éprouvette a pour objectif de favoriser le rotulage local en pied de nida et donc l'influence du paramètre δ . Pour cela les talons sont décalés de 5 mm puis de 8 mm du pied d'arrêt de nida.
- A contrario, dans la quatrième géométrie, le rotulage est limité en ajoutant des plis de renfort en pied de nida, ce qui doit mettre en évidence l'influence de du paramètre **N**.

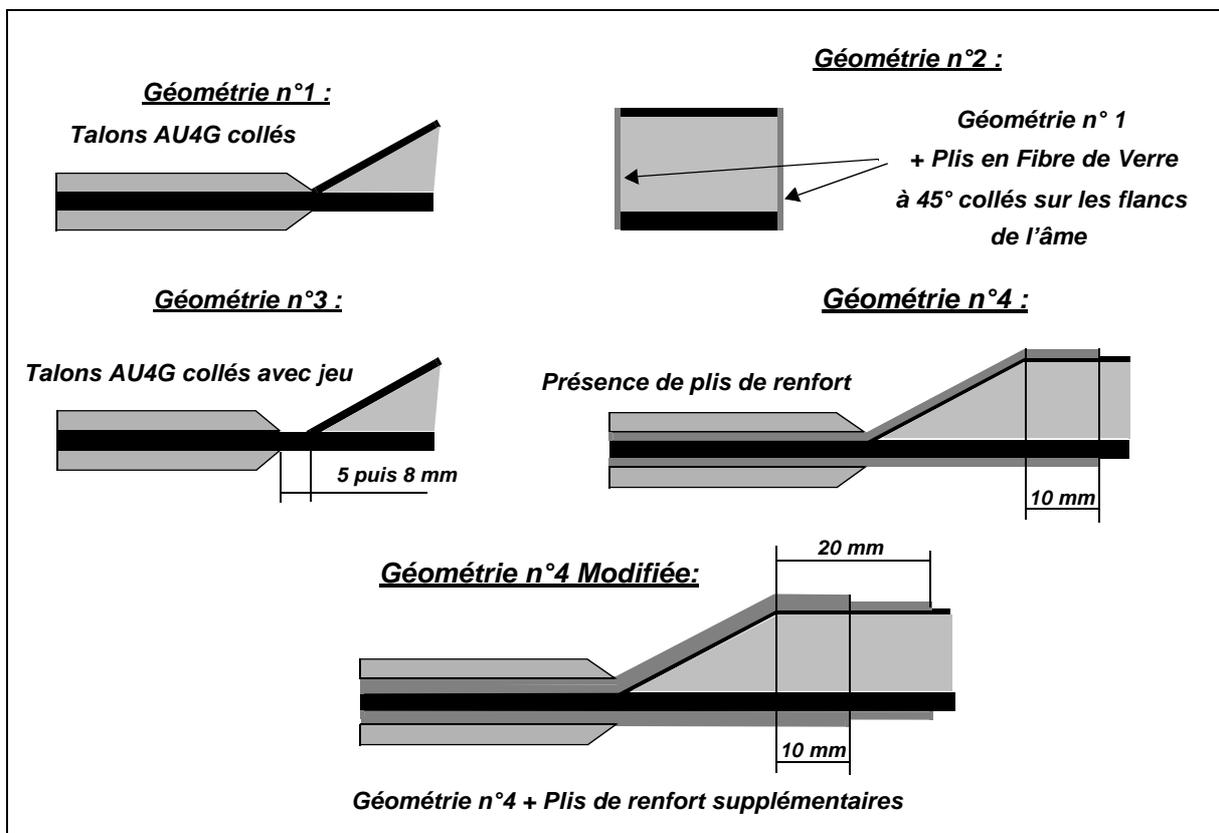


Figure N° 5-2 : Géométrie locale des talons et de l'arrêt de nida.

MÉTHODOLOGIE D'ESSAI.

Les poutres équipées de talons sont fixées aux mors d'une machine d'essai universelle de type INSTRON 4466 de 10 KN de capacité. La montée en charge s'effectue par paliers de 100 N jusqu'à rupture. Deux jauges simples sont collées sur la pente de l'arrêt de nida et sur le début de la peau stabilisatrice (jauges **A** et **B** Figure N° 5-3). Deux autres jauges sont collées aux centres des peaux travaillante et stabilisatrice (jauges **C** et **D** Figure N° 5-3). De plus, trois capteurs de déplacement potentiométriques mesurent la flèche de l'éprouvette.

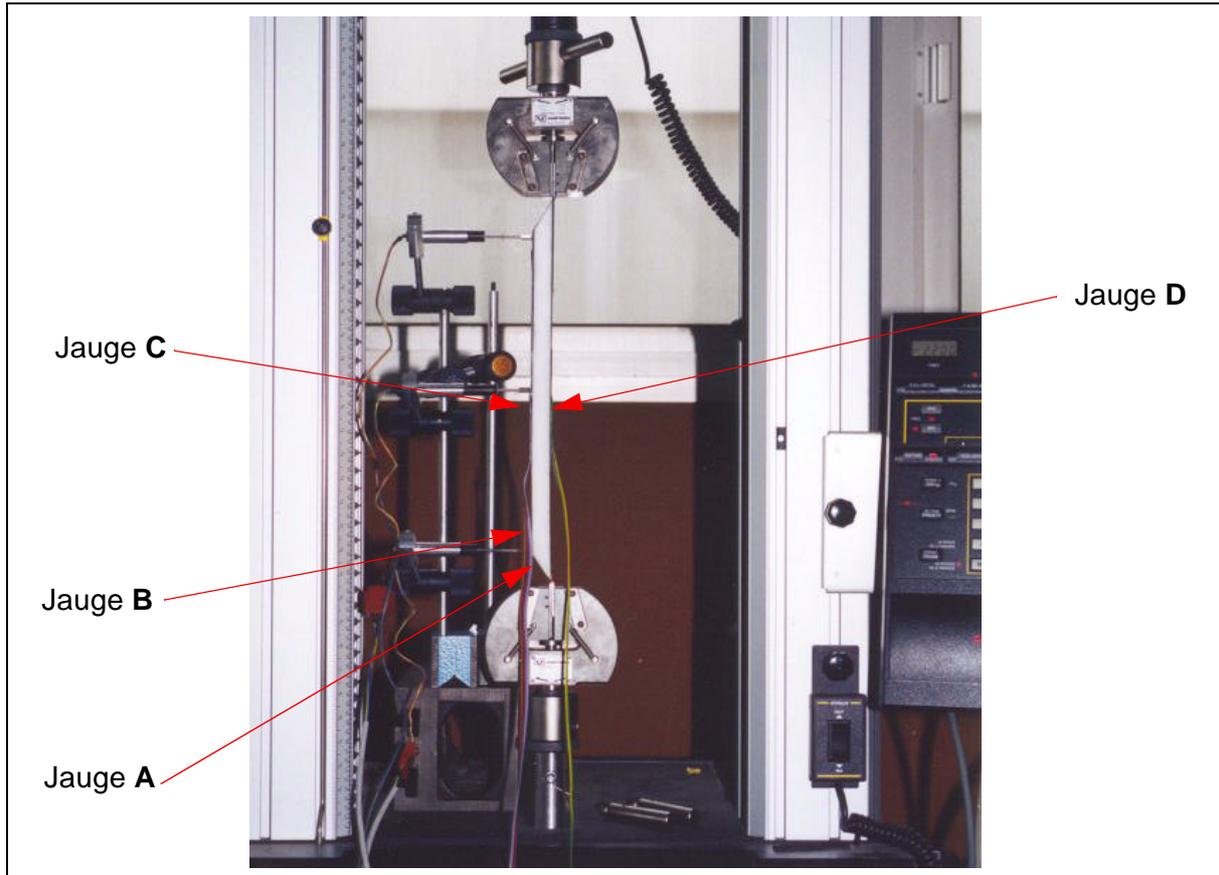


Figure N° 5-3 : Appareillage d'essais sur poutres.

MODES ET CHARGES DE RUPTURE.

Certains faciès de rupture sont visibles dans l'annexe "Documents Photographiques".

	Géométrie 1	Géométrie 2	Géométries 3	Géométries 4
Géométrie de la poutre	<p>Talons AU4G Collés</p>	<p>Avec Flancs FV</p>	<p>Talons collés avec jeu</p>	<p>Plis de renfort</p>
Essai 1	Charge : 2611 N Flambage Local	Charge : 2890 N Rupture PT	Charge : 2800 N Rupture PS	Charge 3300 N Rupture PT
Essai 2	Charge : 2193 N Flambage Local + Rupture PS	Charge : 2681 N Flambage Local	Charge : 2300 N Rupture PT	Charge 3500 N Rupture PT

Tableau N° 5-2 : Modes et charges de ruptures.

Pour le premier essai de la **géométrie n°1**, l'apparition du flambage local a été retardée par l'oubli d'un collier élastique de maintien des fils de jauges sur l'éprouvette (voir photo en

annexe). La rupture de la peau stabilisatrice s'est produite à la jonction de la zone monolithique dans l'essai 2.

L'adoption de renforts latéraux en fibre de verre dans la **géométrie n°2** permet d'augmenter la charge de rupture de la poutre sandwich. La rupture a lieu par concentration des contraintes au niveau du pied de l'arrêt de nida.

Dans la **géométrie n°3**, l'augmentation du jeu entre le pied d'arrêt de nida et le renfort alu permet d'introduire une certaine souplesse au niveau de l'appui. Il y a peu d'influence sur la charge à rupture tant que la valeur n'est pas trop importante (< 5mm). Pour une valeur volontairement exagérée (8mm), la rupture a lieu prématurément par flexion de la peau travaillante.

La présence des plis de renfort sur la zone d'arrêt de nida des **géométries n°4** permet d'augmenter la charge à rupture de 2800 à 3300 N (+ 17.8%) pour la première éprouvette (1 pli de renfort qui recouvre 10 mm de la zone dissymétrique pour chacune des peaux). L'effet est confirmé et augmenté (+ 25%) sur la deuxième éprouvette qui comporte 2 plis de renfort. Le mode de rupture est une rupture statique de la peau travaillante au niveau de l'arrêt du pli de renfort pour les deux éprouvettes.

COURBES D'ESSAI.

La reproductibilité des essais étant très bonne, on ne présente qu'une seule des deux courbes d'essai quand les éprouvettes sont identiques. Les déformations obtenues aux centres des peaux pour les géométries 1 et 2 sont comparées Figure N° 5-4.

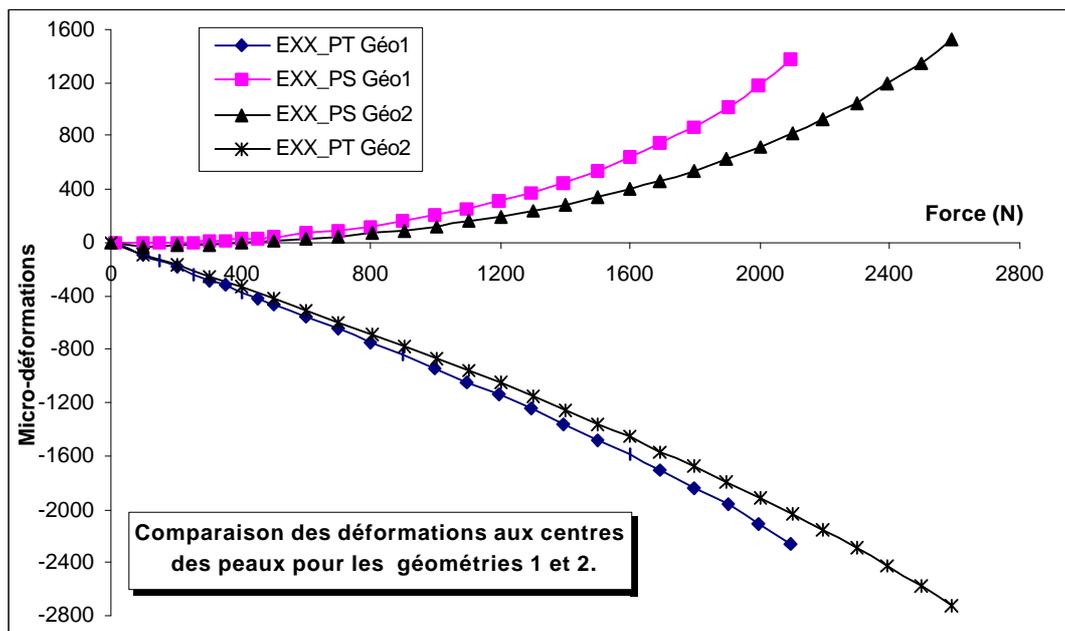


Figure N° 5-4 : Déformations aux centres des peaux. Comparaison des essais 1 et 2.

Le premier effet recherché en augmentant la rigidité en cisaillement de l'âme est obtenu puisque l'on obtient un effort à rupture plus important. La zone de comportement non linéaire de la peau stabilisatrice est aussi augmentée.

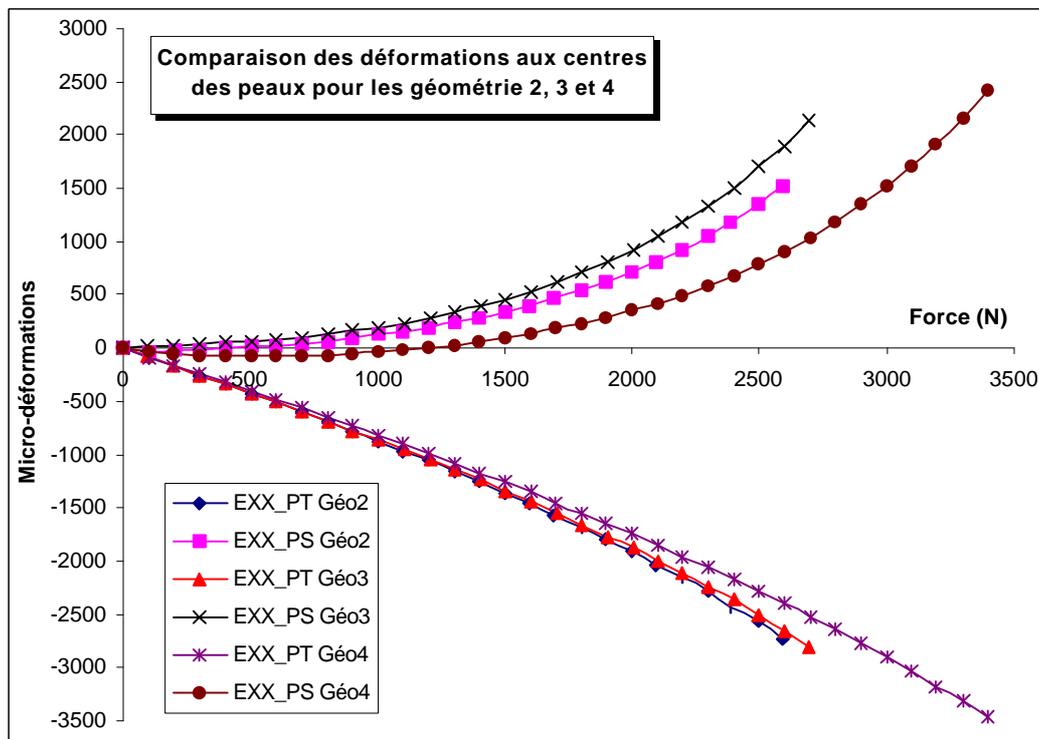


Figure N° 5-5 : Déformations aux centres des peaux. Comparaison des essais 2, 3 et 4.

Les déformations obtenues aux centres des peaux pour les géométries 2, 3 et 4 sont comparées Figure N° 5-5. La géométrie n°2 servant de référence, les valeurs de ϵ_{xxPS} correspondant à l'essai 3 sont supérieures ce qui prouve que le moment introduit est supérieur. A contrario, les valeurs de ϵ_{xxPS} correspondant à l'essai 4 sont inférieures ce qui montre l'influence stabilisatrice des plis de renfort. Cette stabilisation peut a priori être attribuée à trois facteurs :

- Diminution de la longueur sandwich dissymétrique pure.
- Augmentation de la rigidité locale de l'arrêt de nida qui fait que les conditions aux limites sont plus rigides.
- Introduction effective d'un flux secondaire dans la peau stabilisatrice. On peut remarquer une diminution sensible de ϵ_{xxPT} à charge égale.

Sur le dernier point, on peut s'intéresser aux mesures de la jauge B située sur la peau stabilisatrice coté arrêt de nida (Figure N° 5-3). Par rapport à la géométrie n°2, la présence du pli de renfort fait que, localement, la peau stabilisatrice se charge plus en compression que pour le cas avec un seul pli de renfort. Par contre, cet effet n'est plus retrouvé lorsque l'éprouvette possède deux plis de renfort.

Il semble donc difficile de conclure par rapport à l'existence effective d'un flux secondaire. Toutefois le paramètre N permet une prise en compte empirique des trois phénomènes ce qui sera utilisé pour corrélérer des essais.

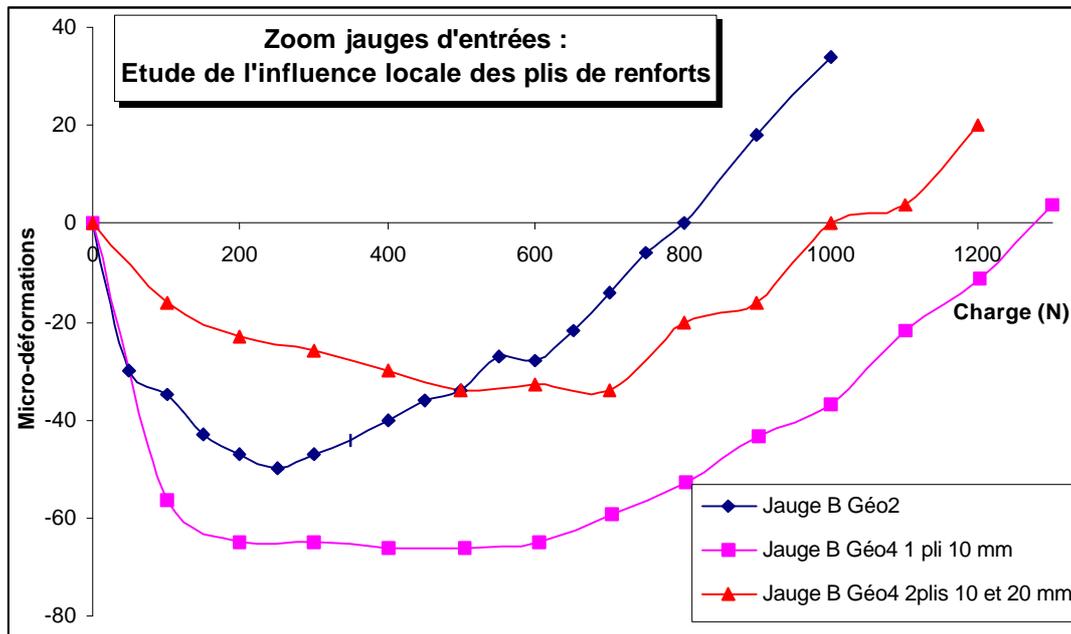


Figure N° 5-6 : Comportement de la peau stabilisatrice du côté arrêt de nida pour les géométries 2 et 4.

V.1.2 - CORRÉLATION DES ESSAIS SUR POUTRES.

GÉOMÉTRIE N°1.

La théorie simplifiée et la théorie des plaques développées dans le cadre de cette étude ont été appliquées pour analyser le comportement des éprouvettes. Le calcul est effectué avec les hypothèses suivantes :

- La longueur de la poutre est de 350 mm (on ne retient que la zone sandwich dissymétrique pure). La largeur est de 25 mm .
- La poutre est considérée *bi-appuyée*, des tests avec des conditions aux limites "*bi-encastrées*" ayant donné de mauvais résultats.
- Pour les deux premiers calculs (*Figure N° 5-7*) et (*Figure N° 5-8*) présentés, on suppose que $N = d = 0$.
- Les caractéristiques matériaux des peaux sont celles mesurées Tableau N° 5-1.

La corrélation obtenue avec le modèle de poutre simplifié est correcte (*Figure N° 5-7*). Toutefois, la réponse fournie par la théorie et le logiciel SAND est meilleure (*Figure N° 5-8*).

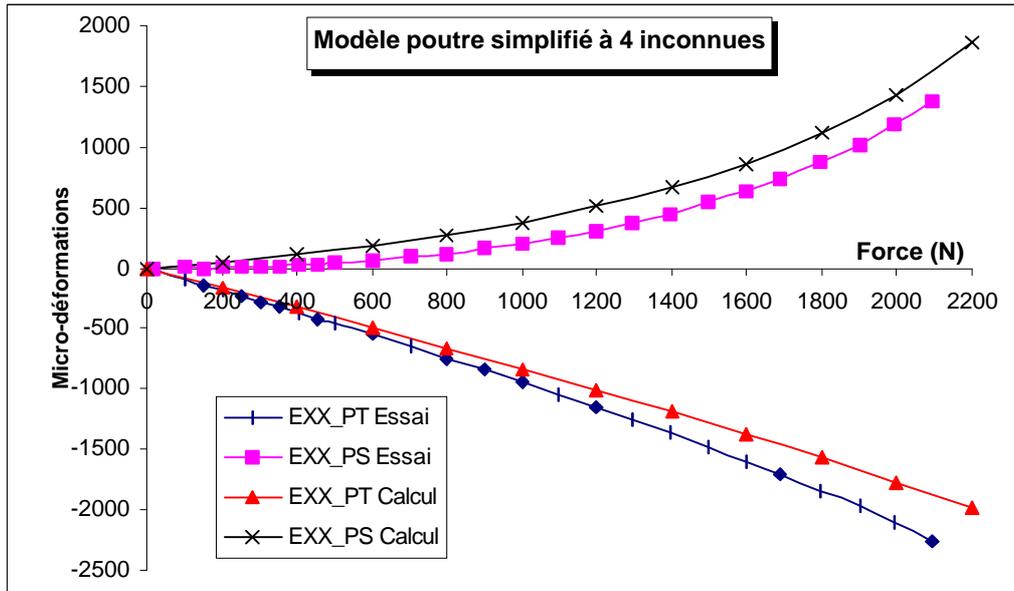


Figure N° 5-7 : Corrélation d'essai sur géométrie 1 en utilisant le modèle simplifié à 4 inconnues.

Cela est logique compte-tenu du fait que la théorie des plaques utilise 143 inconnues alors que la théorie simplifiée n'en compte que 4. En conséquence, le modèle plaque et le logiciel SAND seront utilisés pour la corrélation des essais sur poutres.

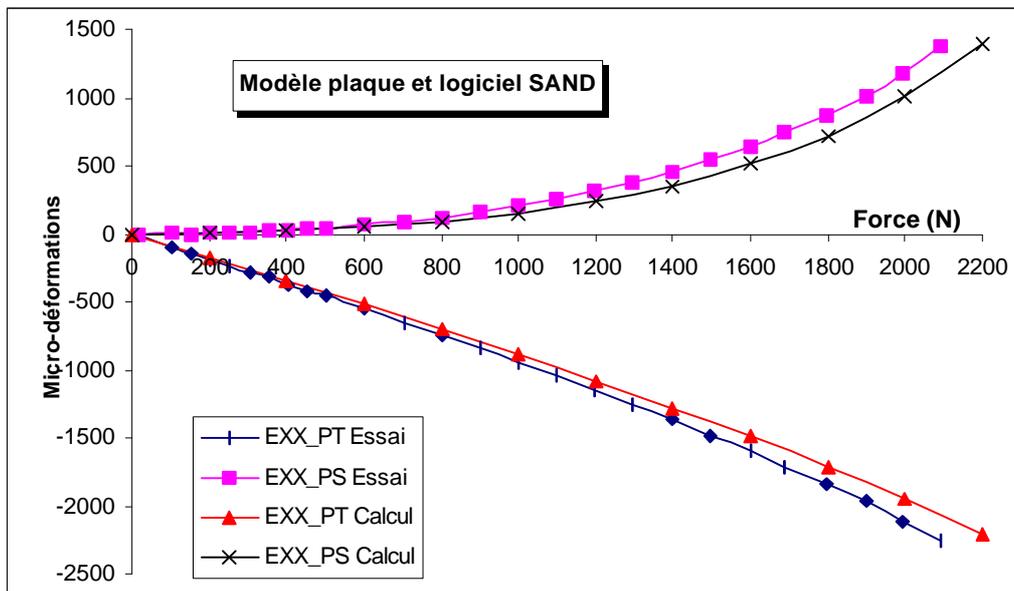


Figure N° 5-8 : Corrélation d'essai sur géométrie 1 en utilisant le modèle de plaque.

Le comportement non linéaire de la peau stabilisatrice est imparfaitement approché avec $N=0\%$ et $d=0\text{ mm}$. Aussi, après plusieurs itérations, les valeurs $N=0\%$ et $d=-0.25\text{ mm}$ sont retenues. Avec ces valeurs de paramètres, la courbe expérimentale de réponse de la peau stabilisatrice est quasiment superposée avec la courbe théorique. De plus, les déformations théoriques et expérimentales sont plus proches dans la peau travaillante, ce qui montre l'intérêt de ce paramètre et l'importance de réaliser une modélisation précise des

conditions aux limites.

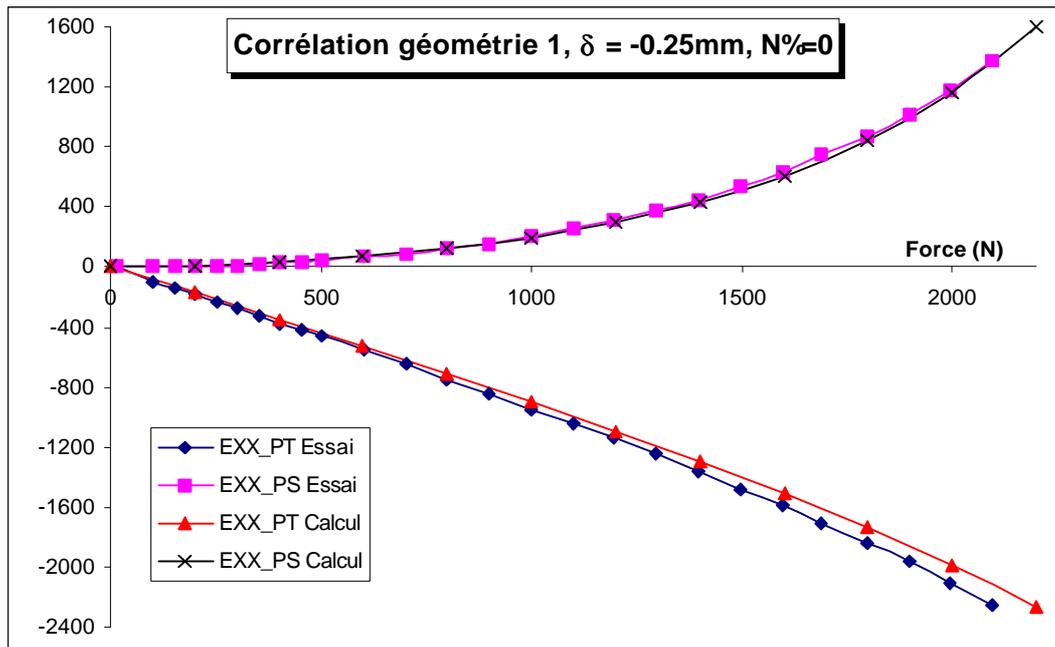


Figure N° 5-9 : Corrélation géométrie 1. $\delta = -0.25 \text{ mm}$.

GÉOMÉTRIE N°2.

Dans la deuxième géométrie, seule la rigidité de l'âme est augmentée de 13 à 44 MPa. Le même décalage $\delta = -0.25 \text{ mm}$ est conservé ce qui permet aussi une excellente corrélation. δ semble donc bien associé à un désalignement de la sollicitation lié à l'éprouvette et à la fixation.

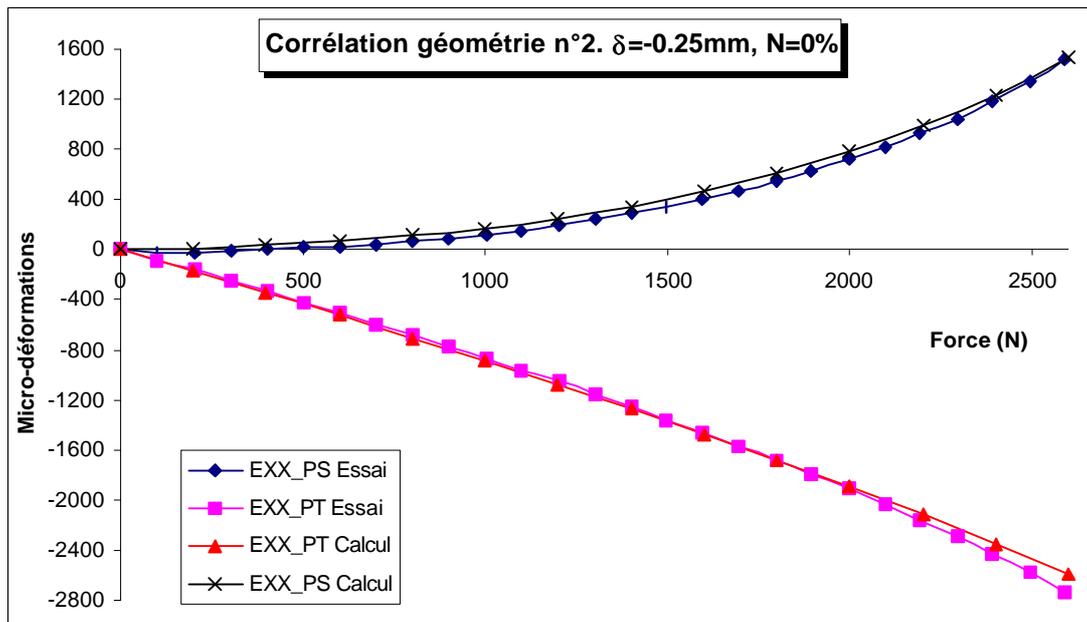


Figure N° 5-10 : Corrélation géométrie n°2. $\delta = -0.25 \text{ mm}$.

GÉOMÉTRIE N°3.

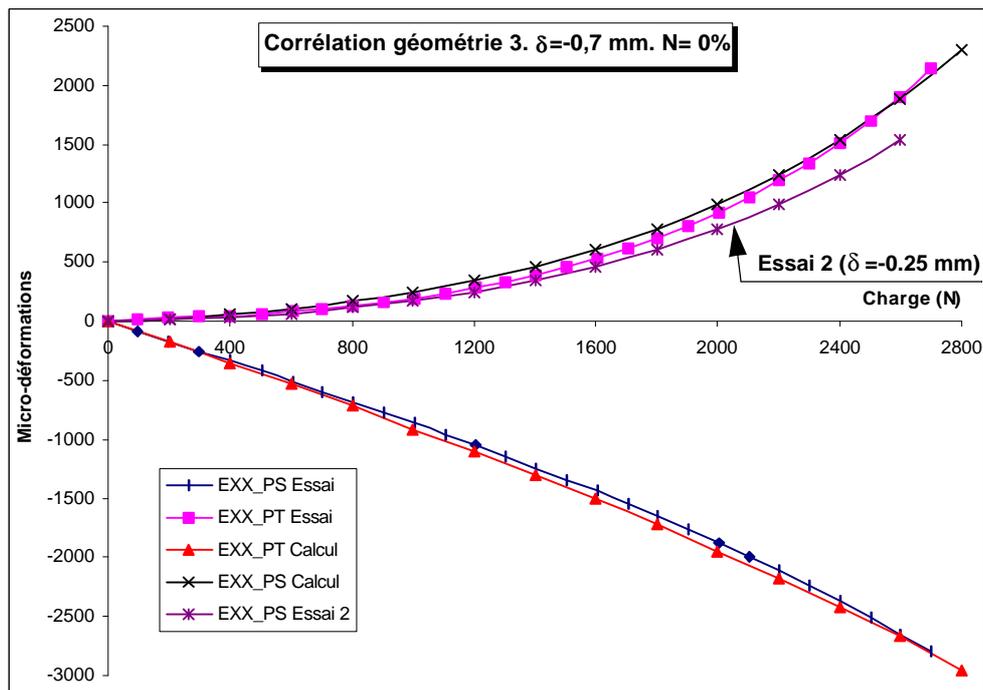


Figure N° 5-11 : Corrélation géométrie n°3. $\delta = -0.7$ mm.

La corrélation des courbes d'essai nécessite avec la géométrie n°3 de fixer δ à -0.7 mm ce qui est supérieur à la valeur trouvée dans la géométrie n°2. Le paramètre δ permet après étalonnage de prendre en compte la variation de la géométrie de la zone d'introduction des efforts.

GÉOMÉTRIE N°4.

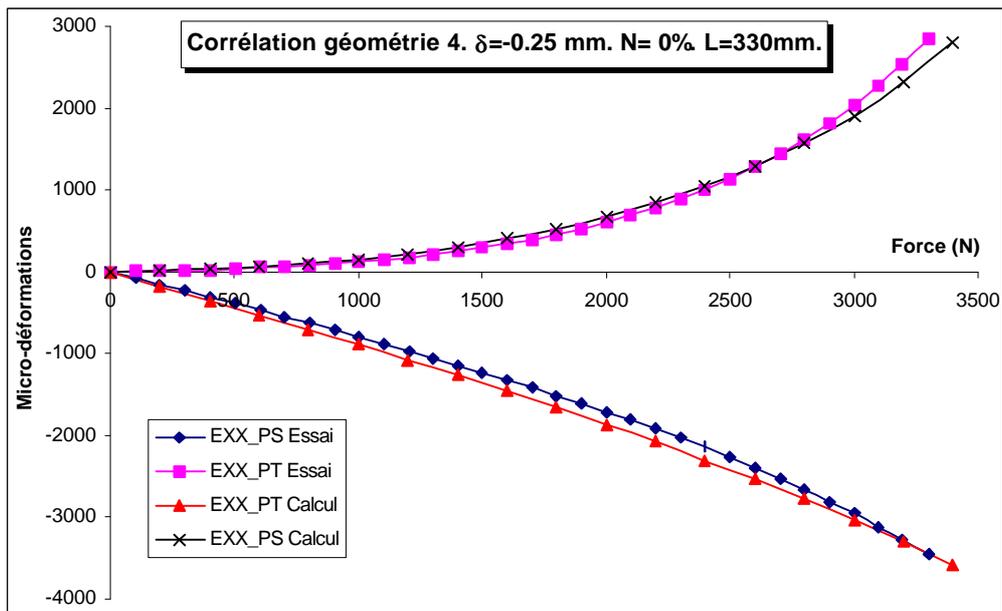


Figure N° 5-12 : Corrélation géométrie n°4 (1 pli de renfort sur 10 mm) avec les paramètres de calcul $\delta = -0.25$ mm. $L = 330$ mm. $N = 0\%$.

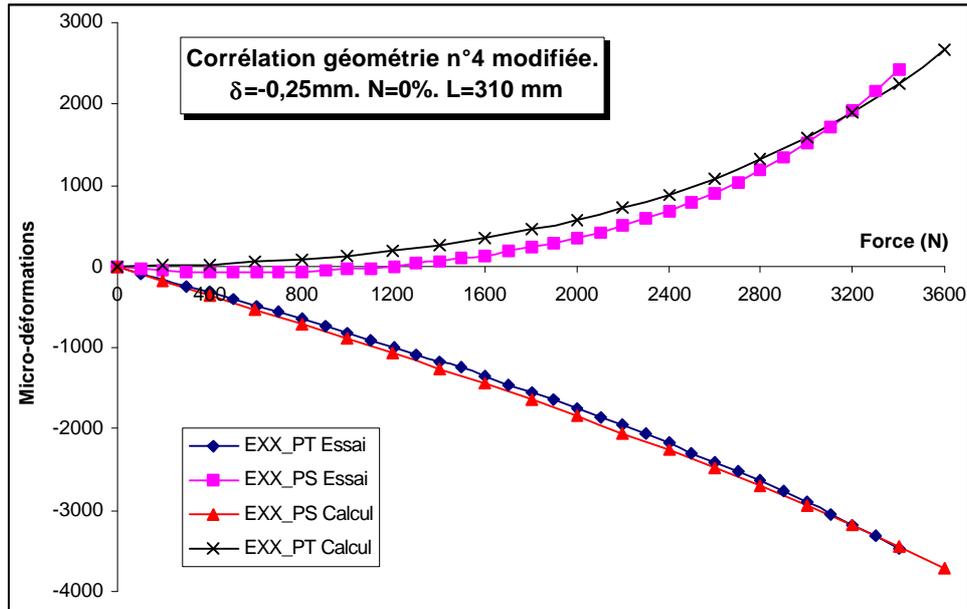


Figure N° 5-13 : Corrélation géométrie n°4 modifiée (2 plis de renfort sur 10 mm et 20 mm) avec les paramètres de calcul $\delta = -0.25$ mm. $L = 310$ mm. $N = 0\%$.

L'ajout de plis de renfort modifie la rigidité locale. La valeur du paramètre δ est conservée. La corrélation n'est plus correcte lorsque l'on prend $N = 0\%$ et la longueur de la zone dissymétrique pure (Figure N° 5-13). Augmenter N en conservant cette longueur ne conduit pas à un meilleur résultat. En fait, la meilleure corrélation est obtenue lorsque la longueur inclut les plis de renfort et que l'on augmente N à respectivement 1.5 % (Figure N° 5-14) et 4% (Figure N° 5-15).

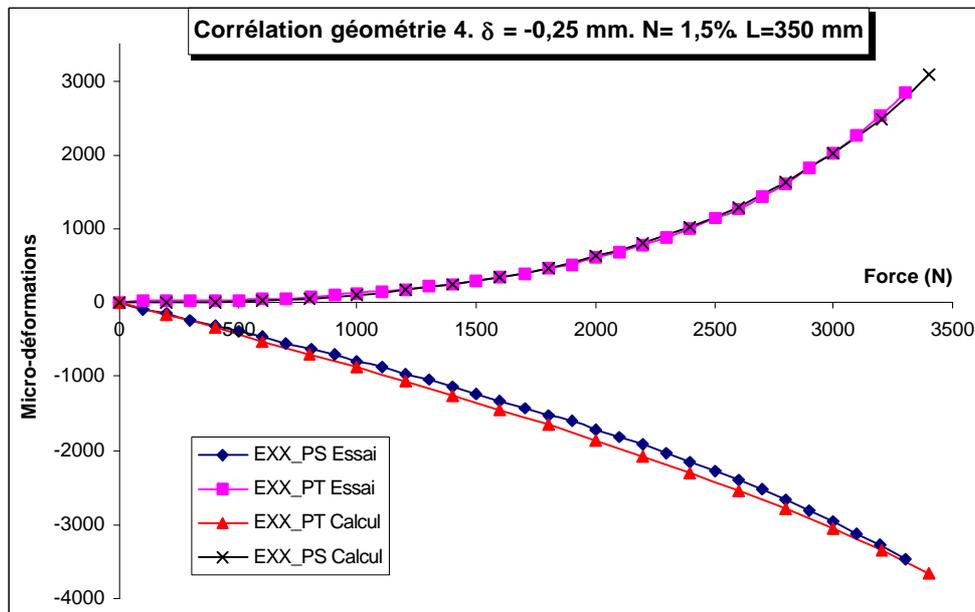


Figure N° 5-14 : Corrélation géométrie n°4 (1 pli de renfort sur 10 mm) avec les paramètres de calcul $\delta = -0.25$ mm. $L = 350$ mm. $N = 1.5\%$.

Ainsi la signification réelle du coefficient N n'est pas une introduction physique directe d'un flux d'effort qui n'a pas pu être mise en évidence. Le coefficient N permet plutôt une

prise en compte empirique des **rigidités locales** lorsqu'elles sont affectées.

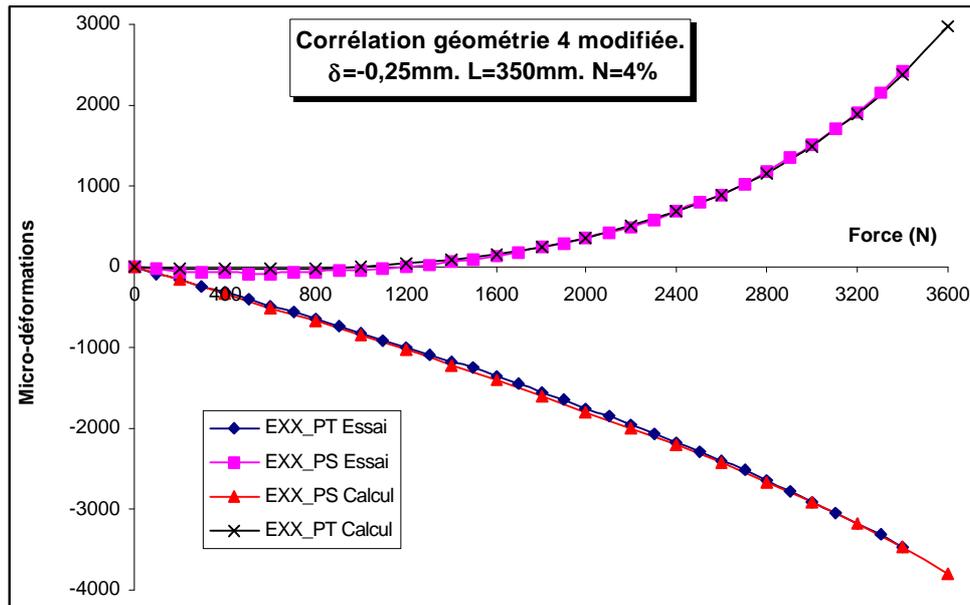


Figure N° 5-15 : Corrélation géométrie n°4 modifiée (2 plis de renfort sur 10 mm et 20 mm) avec les paramètres de calcul $\delta = -0.25$ mm. $L = 350$ mm. $N = 4\%$.

RÉSULTATS DES ESSAIS DANS LA ZONE D'ARRÊT DE NIDA.

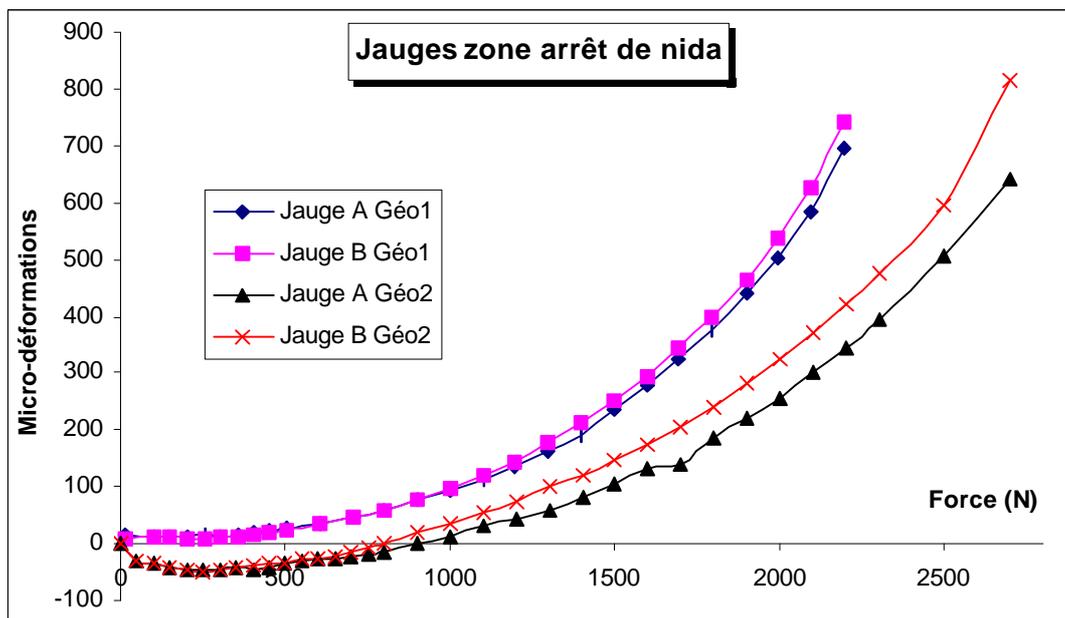


Figure N° 5-16 : Dépouillement des jauges A et B zone arrêt de nida.

Le dépouillement des jauges A et B, pour les géométries 1 et 2, est visible sur les courbes *Figure N° 5-16*. Le comportement non linéaire est très marqué. Bien que la jauge A soit située sur la zone inclinée et la jauge B sur la peau stabilisatrice, les déformations sont très proches et ne dépassent pas 1000 μdef (2000 μdef au centre). Dans le cadre de ces essais, il ne peut donc y avoir de rupture locale de la peau stabilisatrice dans cette zone.

CONCLUSIONS.

Si la théorie n'est pas apte à décrire le comportement des poutres sandwichs dissymétriques dans la zone d'introduction des efforts, elle s'accorde très bien avec l'expérience dans la partie modélisée.

L'influence des paramètres δ et \mathbf{N} a pu être mise en évidence par ces essais sur poutres. Plus que les valeurs par elles mêmes, sujettes à des dispersions, il est prouvé qu'il faut introduire un décalage δ pour prendre en compte la nature exacte du chargement en compression. Le paramètre \mathbf{N} représente de manière empirique la rigidité de l'arrêt de nida par le biais de l'introduction d'un flux d'effort dans la peau stabilisatrice qui vient accroître la rigidité locale.

D'une manière générale, la déformation au centre de la peau stabilisatrice est très sensible à tous ces paramètres. C'est un véritable indicateur de l'état de chargement du sandwich alors que la peau travaillante possède une certaine "inertie" de ce point de vue. Cette propriété pourra être utilisée dans l'étude des essais sur plaques.

V.1.3 - CORRÉLATION D'ESSAIS DE COMPRESSION SUR PLAQUES RÉALISÉS SUR LE MONTAGE.

L'objectif du montage d'essai réalisé est de montrer, par essais à rupture avec des conditions aux limites assez proches de la réalité des structures, que les marges statiques sont suffisantes. La théorie a permis de développer un logiciel de pré-dimensionnement des zones courantes sandwichs dissymétriques. Malgré les dimensions réduites de l'éprouvette, les essais réalisés sur le montage vont être analysés dans ce paragraphe à l'aide du logiciel SAND.

V.1.3.1 - MÉTHODOLOGIES DE CORRÉLATION DES ESSAIS.

La corrélation des essais sur plaques avec la théorie développée est plus délicate que celle des essais sur poutres principalement à cause de trois facteurs :

- ***En premier lieu du fait de la conception des éprouvettes :***

Les géométries locales en zones monolithique et arrêt de nida sont complexes. Elles réduisent fortement les dimensions de la zone sandwich dissymétrique pure où peut être appliquée la théorie développée.

• **En deuxième lieu du fait des méthodes expérimentales :**

Sur notre montage, le calcul des flux d'efforts entrant dans l'éprouvette à partir des chargements des vérins est très difficile. Il est significatif que la différence de chargement des vérins de torsion entre l'essai sur plaque saine (2050 daN) et l'essai sur plaque impactée (1840 daN) soit de seulement 10%. Dans le même temps, les déformations mesurées en zone d'entrée de flux varient d'environ 50%. En fait comme tout le caisson central est chargé, les flux d'efforts se répartissent au prorata des rigidités locales.

• **En troisième lieu du fait des limites de la théorie développée :**

Seule une géométrie parallélépipédique avec un seul type de matériau et une épaisseur constante des peaux peut être prise en compte.

La corrélation des essais peut être effectuée de plusieurs façons :

⇒ **Méthode n°1** : On considère que le flux dans la peau travaillante est uniforme et peut être obtenu en utilisant une théorie poutre pour le caisson central :

$$N_{x_{\text{Eprouvette}}} = F_{\text{machine}}/b.$$

Cette méthode est en fait difficile à utiliser à cause des jonctions et des renforts latéraux qui plastifient. Le problème est d'ailleurs analogue, quoique beaucoup moins sensible, dans les essais classiques sur machine universelle (cf Chap II-3.2) du fait du serrage des mors, de la géométrie locale de l'éprouvette et des raidisseurs latéraux. Des effets de Poisson et de Saint-Venant sont générés et le champ des contraintes dans les peaux ne peut dans les essais de type "structure" être purement uniforme.

Seul un modèle E.F. complet caisson+éprouvette en non linéaire matériau et géométrique permettrait donc de calculer $N_{x_{\text{Eprouvette}}}$. Le développement d'un tel modèle prendrait un temps de calcul important et sort du cadre initial de cette recherche.

Ces constatations font que l'on peut proposer une deuxième méthode où l'on ne comparera que le **flux local** au centre de la plaque à la théorie :

⇒ **Méthode n°2** : le flux dans la peau travaillante est calculé en appliquant la loi de comportement au niveau de la zone sandwich dissymétrique pure à partir des déformations mesurées par les jauges :

$$N_x = h_1 \cdot (QT_{11} \cdot (\epsilon_{xx})_{\text{Mesurée}} + QT_{12} \cdot (\epsilon_{yy})_{\text{Mesurée}})$$

Cette deuxième méthode présente les inconvénients suivants :

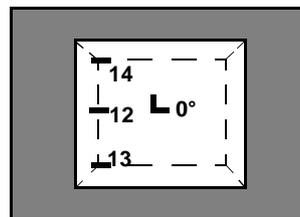
- Les déformations dans la peau travaillante ne peuvent plus être corrélées puisque le flux est calculé à partir des déformations mesurées. Par contre, la validation du modèle peut être effectuée en analysant les résultats sur la peau stabilisatrice qui, cela a été remarqué lors des essais sur poutres, joue un rôle d'indicateur de l'état du chargement de l'éprouvette.
- Une erreur sur l'estimation du flux est systématiquement commise car la peau travaillante est aussi chargée en flexion.

Malgré ces inconvénients, la deuxième méthode sera utilisée car compte tenu de la complexité du caisson central, seule une mesure in-situ du flux de compression est possible. Deux variantes sont proposées :

⇒ **Méthode A** : le flux est calculé en appliquant la loi de comportement au niveau du centre de la peau travaillante à partir des mesures de la rosette centrale (Jauge "0°").

$$N_x = h_1 \cdot (QT_{11} \cdot (\epsilon_{xx})_{\text{Mesurée Rosette Centrale PT}} + QT_{12} \cdot (\epsilon_{yy})_{\text{Mesurée Rosette Centrale PT}})$$

Implantation des jauges



Peau Travaillante

⇒ **Méthode B** : le flux est calculé à partir de la moyenne des déformations de 3 jauges disposées à cet effet sur la peau travaillante (Jauges 12-13-14) et application de la loi de comportement.

$$N_x = h'_1 \cdot (QT'_{11} \cdot (\epsilon_{xx})_{\text{Moyen Jauges Zone d'Introduction du Flux}} + QT'_{12} \cdot (\epsilon_{yy})_{\text{Moyen Jauges Zone d'Introduction du Flux}})$$

Les courbes Flux/Déformations obtenues par les deux méthodes sont visibles (Figure N° 5-17). Les différences sont peu importantes. Le flux maximal est de 720 N/mm par mesure au centre et de 780 N/mm par mesure avec les 3 jauges. Cette différence peut s'expliquer par la présence de renforts locaux dont la rigidité est prise en compte dans la méthode 2 bis, ce qui a pour effet de "décharger" la zone centrale.

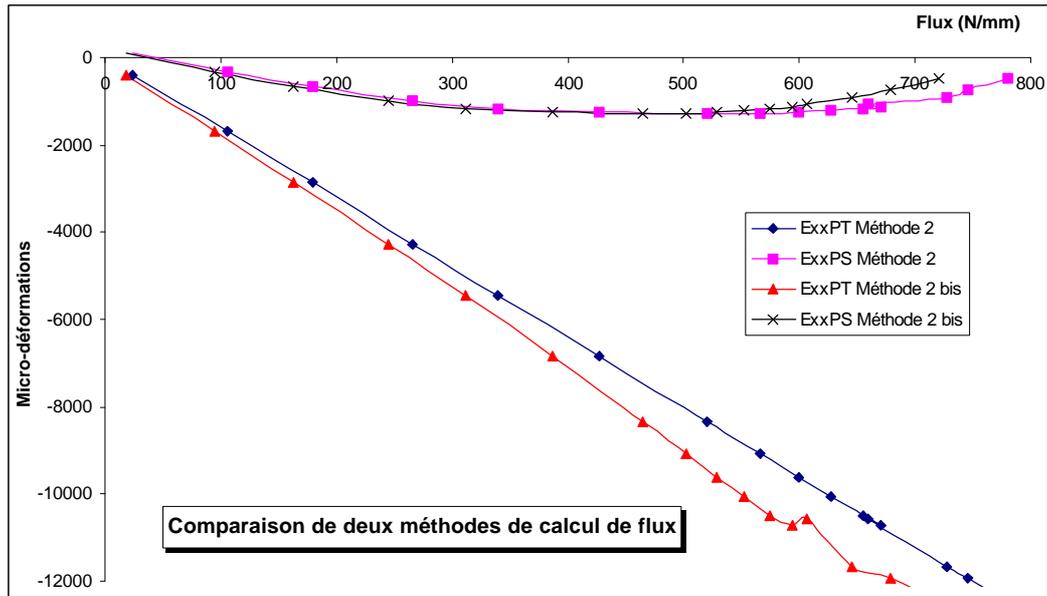


Figure N° 5-17 : Réponse de la plaque suivant le mode de calcul du flux.

Pour la corrélation de l'essai de compression sur le montage, la méthode 2 (estimation du flux par la seule rosette centrale) est retenue.

V.1.3.2 - CORRÉLATION DE L'ESSAI DE COMPRESSION N°2 SUR LE MONTAGE.

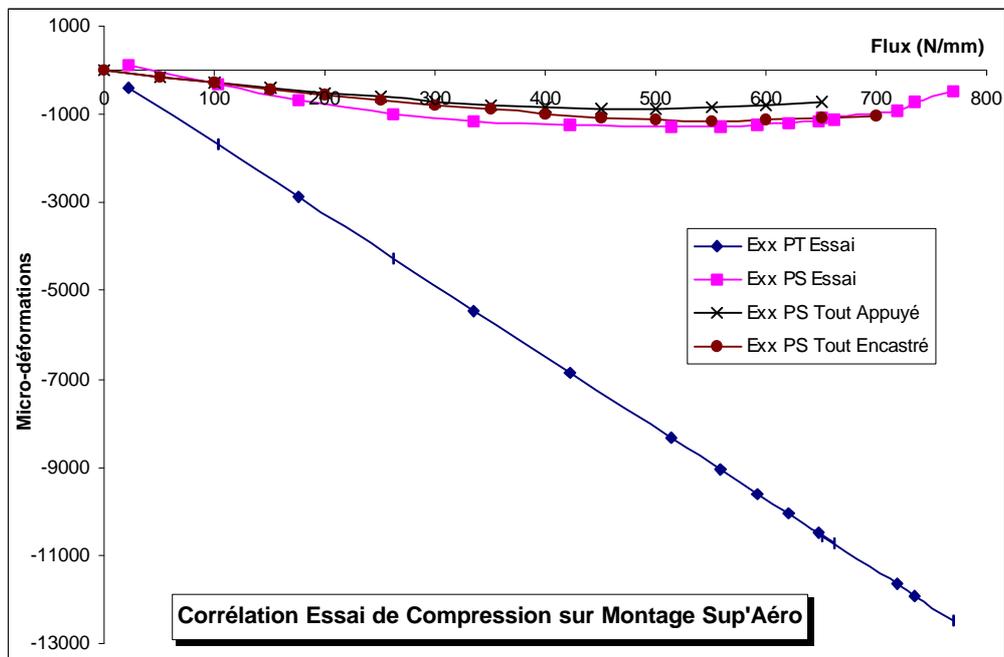


Figure N° 5-18 : Corrélation de l'essai de compression sur le montage.

Une bonne corrélation est obtenue pour les conditions aux limites "tout encastré" et un flux secondaire de $N = 3\%$ (Figure N° 5-18). Toutefois, la déformation ε_{xxPS} de la peau stabi-

lisatrice est moins bien représentée que dans le cas des poutres. Cela s'explique par la difficulté de prise en compte des conditions aux limites réelles et des faibles dimensions de l'éprouvette.

V.1.4 - CORRÉLATION DES ESSAIS DE CISAILLEMENT ET SOUS SOLLICITATIONS COMBINÉES.

CORRÉLATION DES ESSAIS DE CISAILLEMENT.

Pour pouvoir corréler les essais de cisaillement, un effet de taille intrinsèque aux sandwichs dissymétriques a pu être mis en évidence. Le comportement des sandwichs dissymétriques en fonction de leur taille est étudié à l'aide de la *Figure N° 5-19*. Dans cette figure, les distorsions angulaires γ_{xy} aux centres des peaux travaillante (GXYPT sur la figure) et stabilisatrice (GXYPs sur la figure) sont tracées en fonction du flux de cisaillement N_{xy} et des dimensions de la plaque de 5 x 5 mm à 1000 x 1000 mm.

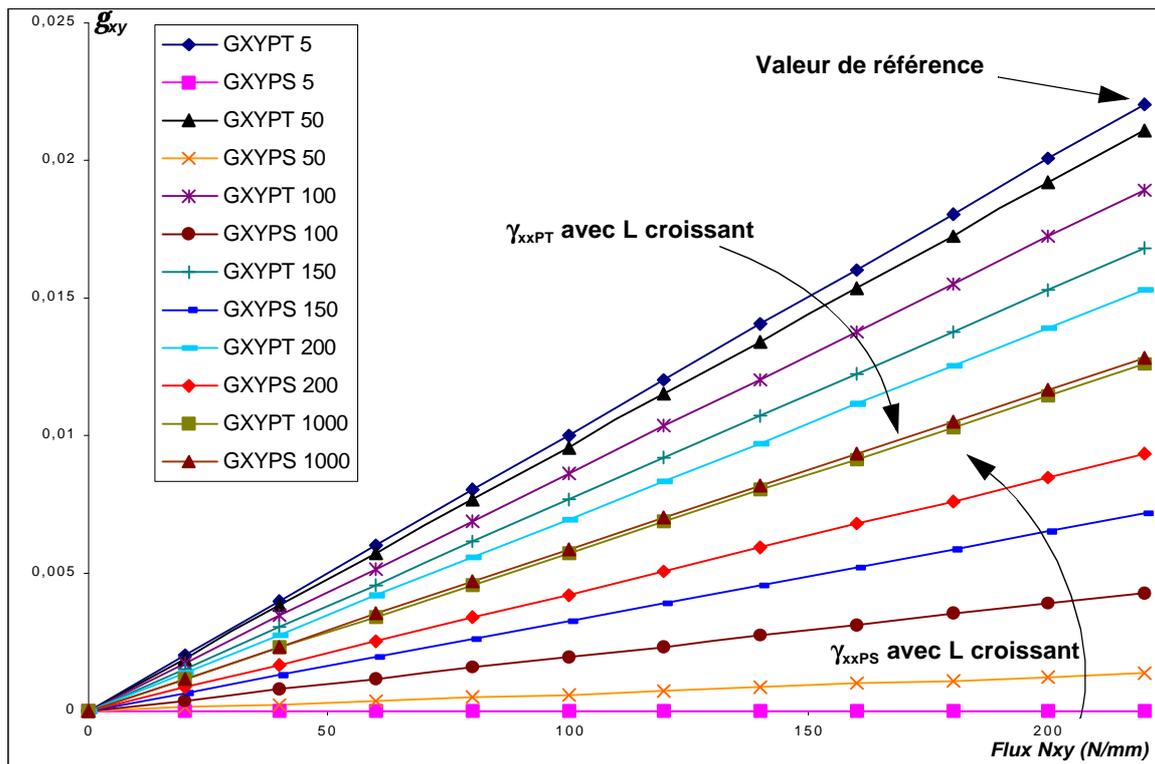


Figure N° 5-19 : Evolution de la réponse en cisaillement (g_{sxy}) des sandwichs dissymétriques en fonction de la taille de l'éprouvette (de $L \times L = 5 \times 5$ mm à 1000 x 1000 mm).

Pour des dimensions de 5 x 5 mm, la distorsion de la peau stabilisatrice est nulle (Courbe GXYPs 5) alors que la distorsion dans la peau travaillante est maximale (Courbe GXYPT 5). Pour des dimensions de 1000 x 1000 mm, les déformations des deux peaux sont pratiquement égales (courbes GXYPT 1000 et GXYPs 1000).

On en déduit donc que :

⇒ Les contraintes de cisaillement dans les peaux d'un sandwich dissymétrique évoluent en fonction des dimensions du sandwich.

Ce comportement est attribuable au fait que seule la peau travaillante est chargée physiquement. L'analyse de ce comportement est plus aisée en comparant les distorsions des peaux travaillante et stabilisatrices à la valeur maximale observée $(\gamma_{xy})_{Réf}$. Lorsqu'une seule peau est travaillante (Courbe GXYPS 5 Figure N° 5-19) on obtient alors la courbe Figure N° 5-20. Cette courbe montre que :

⇒ Pour les grandes dimensions de sandwichs dissymétriques, les déformations étant identiques, les contraintes, donc les flux, se répartissent au prorata des rigidités des peaux :

$$\frac{(\tau_{xy})_{\text{PeauTravaillante}}}{(\tau_{xy})_{\text{PeauStabilisatrice}}} = \frac{\langle GS \rangle_{\text{PeauTravaillante}}}{\langle GS \rangle_{\text{PeauStabilisatrice}}} \quad (\text{éq V-1})$$

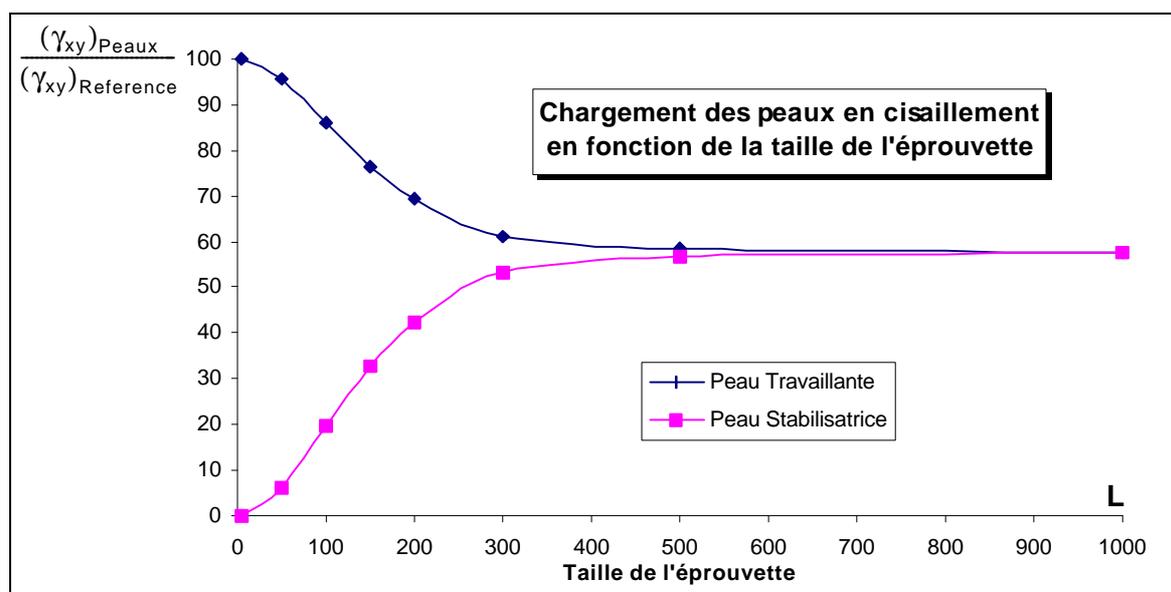


Figure N° 5-20 : Chargement en cisaillement de la peau stabilisatrice en fonction de la taille de l'éprouvette. Evolution des déformations aux centres des peaux par rapport à la valeur de référence (100% du flux repris par la peau travaillante).

⇒ D'un point de vue expérimental, pour s'affranchir de l'effet de taille, il est nécessaire que la taille des éprouvettes soit suffisamment grande.

Pour nos éprouvettes, la taille devrait être supérieure à 500 x 500 mm. Comme ce n'est pas le cas, la mesure du flux de cisaillement à partir de la rosette centrale de la peau stabilisatrice doit être corrigée par un facteur de taille K_{Taille} pour retrouver le flux de chargement exercé sur le sandwich dissymétrique.

La lecture du graphe Figure N° 5-20 permet de trouver que $K_{\text{Taille}} = 1/0.69 = 1.45$ pour une plaque d'essai de 200 x 200 mm. La dimension 200 x200 mm est retenue car l'ensemble arrêt de nida + peau stabilisatrice participe à la rigidité en cisaillement. Le flux de cisaillement est estimé à partir des mesures de la rosette centrale de la peau travaillante et est donc multiplié par K_{Taille} pour retrouver le chargement effectif du sandwich.

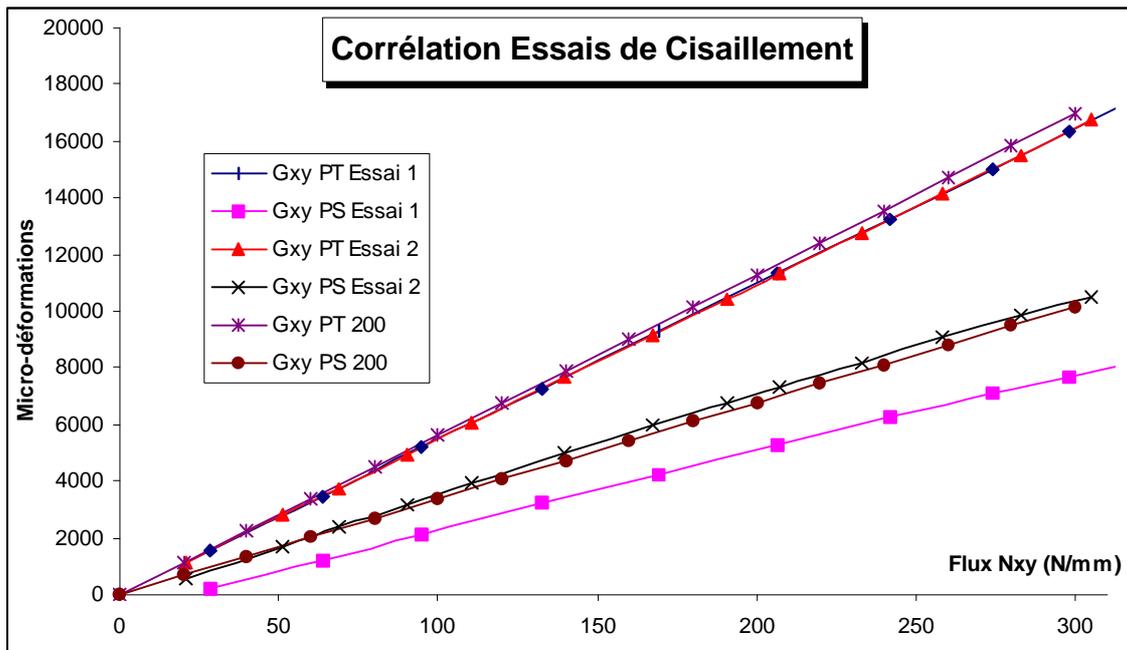


Figure N° 5-21 : Corrélation des essais de cisaillement avec prise en compte de l'effet de taille.

Une bonne corrélation est obtenue pour l'essai 2 (Figure N° 5-21). Les courbes peau travaillante et peau stabilisatrice sont presque parfaitement superposées. Le comportement de la peau stabilisatrice est moins bien approché dans l'essai 1 mais cela est attribuable aux difficultés expérimentales déjà signalées. Cette théorie a aussi été validée pour la corrélation des essais de cisaillement réalisés au carré déformable à Eurocopter. Les éprouvettes y sont de dimensions suffisantes pour qu'il ne soit pas nécessaire d'inclure d'effet de taille.

Il convient toutefois de noter qu'il existe une erreur sur l'estimation du flux réel entrant dans la peau travaillante du fait de la présence de renforts locaux (zone rouge Figure N° 5-22) qui ne peuvent pas être pris en compte dans le modèle théorique (zone bleue Figure N° 5-22). Le flux réel entrant dans le montage peut, après simulation E.F., être majoré de 25 % ($\tau_{xy} = 45$ MPa (\Rightarrow 4000 μ def) dans la zone centrale (Figure N° 5-22) pour un chargement $N_{xy} = 100$ N/mm \Rightarrow soit pour 16000 μ def maximum mesurées : 400 N/mm).

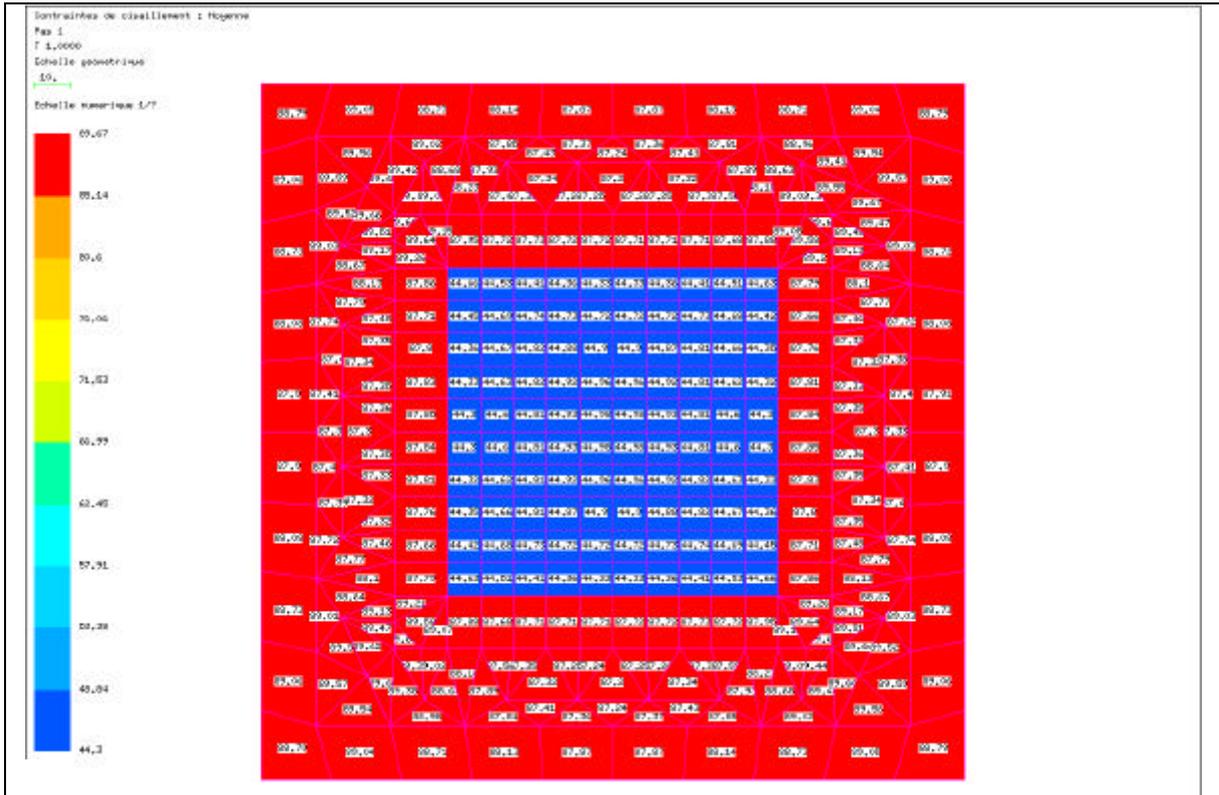


Figure N° 5-22 : Contraintes de cisaillement τ_{xy} dans la peau travaillante pour un flux $N_{xy} = 100$ N/mm.

CORRÉLATION DE L'ESSAI SOUS SOLLICITATIONS COMBINÉES N°2.

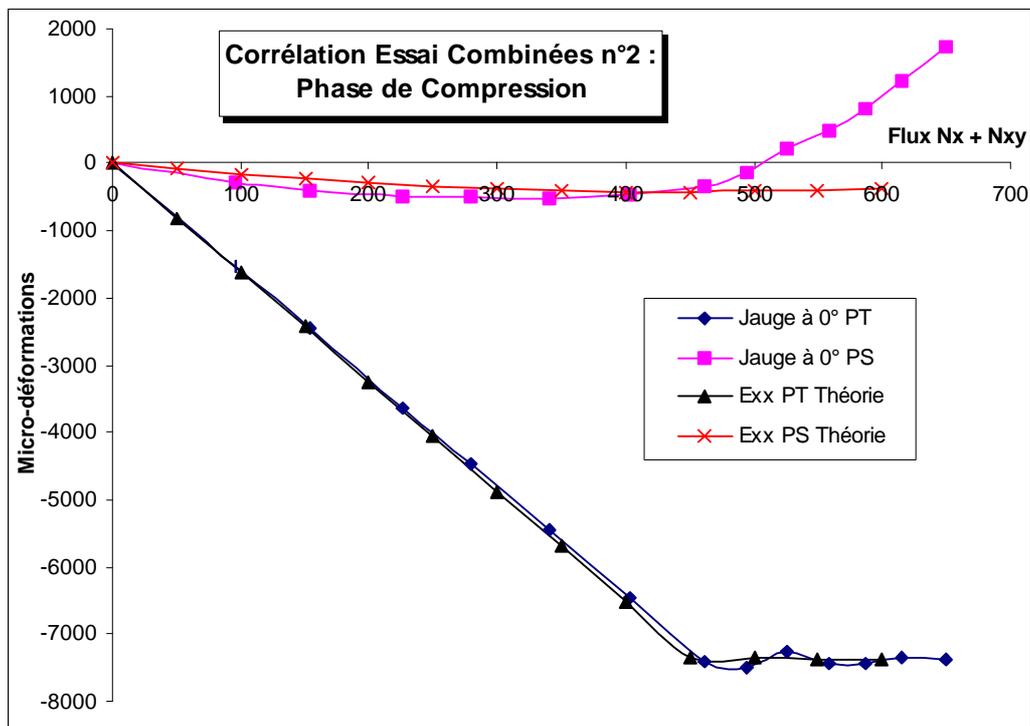


Figure N° 5-23 : Corrélation de l'essai sous sollicitations combinées, phase de compression.

Le chargement consiste d'abord à un chargement de compression puis à un chargement de cisaillement. La première phase du chargement est bien corrélée (*Figure N° 5-23*) ce qui confirme les résultats du paragraphe précédent. Les dimensions de la plaque prise pour le calcul théorique sont celles de la zone sandwich dissymétrique pure : 94 x 94 mm.

Pour la phase de cisaillement, en appliquant la même méthodologie que pour le cisaillement pur, la corrélation est aussi tout-à-fait acceptable (*Figure N° 5-24*). Les quantités corrélées sont les déformations mesurées par les jauges situées à +45° aux centres des deux peaux. La zone sandwich dissymétrique pure retenue pour le calcul en compression n'a pas de sens physique pour le cisaillement. Aussi, la taille de la plaque théorique est identique à celle retenue pour le cisaillement pur, à savoir 200 x 200 mm. Le même coefficient correctif a été appliqué pour tenir compte de l'effet de taille dans l'estimation du flux expérimental.

Il serait possible de faire le calcul pour une dimension 94 x 94 identique à celle nécessaire pour la compression pure ce qui paraîtrait logique en première analyse. Toutefois, il serait alors nécessaire d'appliquer des coefficients correctifs $((\gamma_{xy})_{PT200}/(\gamma_{xy})_{PT94})$ pour les distorsions angulaires de chacune des peaux pour tenir compte de l'effet de taille.

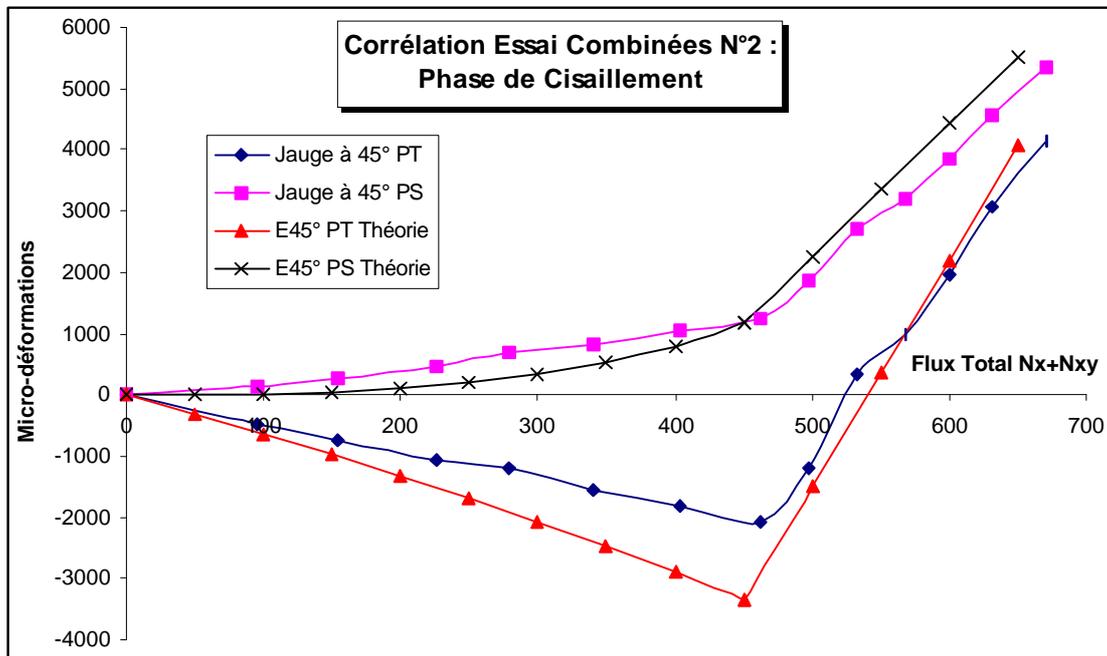


Figure N° 5-24 : Corrélation de l'essai sous sollicitations combinées, partie cisaillement.

V.1.5 - CONCLUSIONS.

Bien que les objectifs de la théorie et ceux des essais soit différents, il est toutefois possible d'effectuer une corrélation tout-à-fait acceptable pour les sollicitations simples compression ou cisaillement. On a ainsi pu remarquer que :

⇒ **Point n°1** : *La théorie permet de corréler les résultats expérimentaux quand la géométrie est simple et le flux parfaitement identifié. (essais sur poutres loin des bords).*

⇒ **Point n°2** : *La difficulté de corréler les essais sur plaques, que ce soit sur machine ou sur notre montage, en cisaillement ou en compression provient de la géométrie complexe des éprouvettes comparée à la géométrie simple du modèle. La corrélation n'est possible que moyennant une analyse des phénomènes et/ou des rigidités dont sont déduits des coefficients de pondération.*

⇒ **Point n°3** : *La petite taille des éprouvettes met en évidence des phénomènes qui sont marginaux dans les grandes structures (rigidité des renforts locaux ou en cisaillement, effet de taille).*

⇒ **Point n°4** : *Bien que l'interaction éprouvette/montage soit forte, il est possible de s'en affranchir quand l'estimation du flux se fait in situ.*

Pour des développements ultérieurs, l'étude théorique devra porter sur la possibilité de prendre en compte les renforts locaux et la mécanique de l'arrêt de nida. D'un point de vue expérimental, l'augmentation en taille de l'éprouvette s'impose.

V.2 - CALCUL DE LA CONTRAINTE NORMALE DANS L'ÂME.

V.2.1 - CALCUL EN POUTRE.

L'étude théorique ainsi que la bibliographie ont clairement montrés que l'énergie de compression de l'âme était très faible ce qui incite à rechercher une méthode de calcul *a posteriori*.

Les modélisations effectuées en E.F. ont été reprises en mettant davantage d'éléments dans l'épaisseur (10). Il a été constaté que la contrainte normale dans l'âme était très peu sensible au module d'Young transversal E_{zz} (Figure N° 5-25). La contrainte normale varie linéairement dans l'épaisseur ce qui est conforme à la théorie (antiplane core). La contrainte est minimale au niveau de la peau stabilisatrice et maximale au niveau de la peau travaillante.

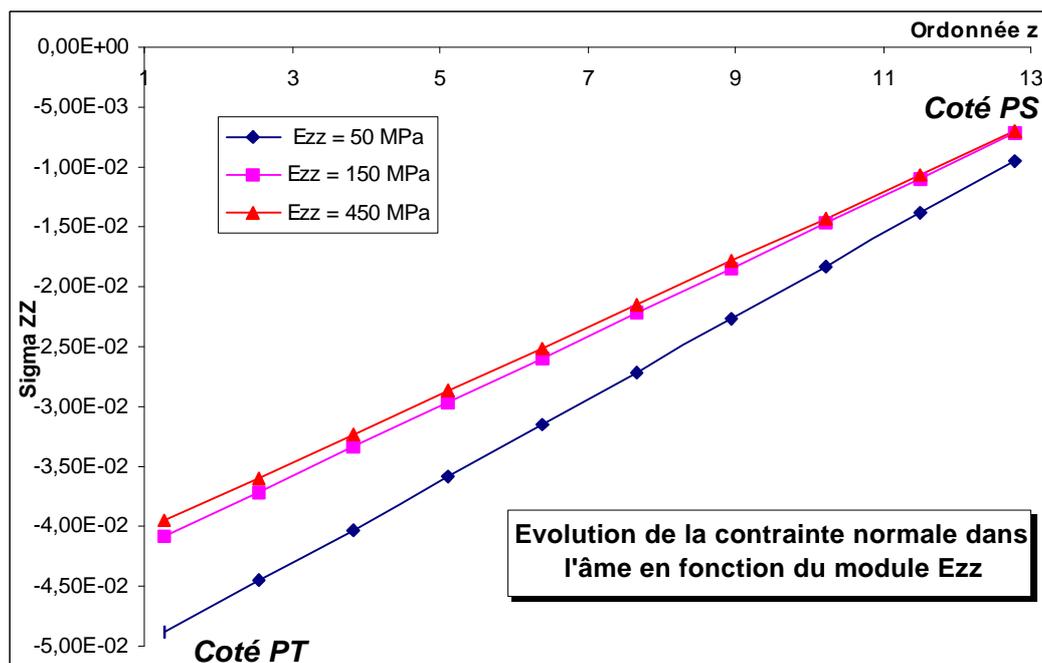


Figure N° 5-25 : Evolution de la contrainte normale dans l'âme en fonction du module d'Young transversal de l'âme : E_{zz} .

Ces constatations suggèrent que la contrainte σ_{zz} peut être obtenue par étude de l'équilibre des peaux. L'équilibre d'une portion de peau sera réalisé en deux temps. On considérera tout d'abord que le cisaillement transverse dans la peau est négligeable ce qui permettra d'obtenir une première expression de σ_{zz} dans l'âme induit par la tension des peaux (Figure N° 5-26). Dans un deuxième temps, l'apport du cisaillement transverse des peaux sera précisé (Figure N° 5-27).

Considérons une portion de peau stabilisatrice travaillant uniquement en membrane :

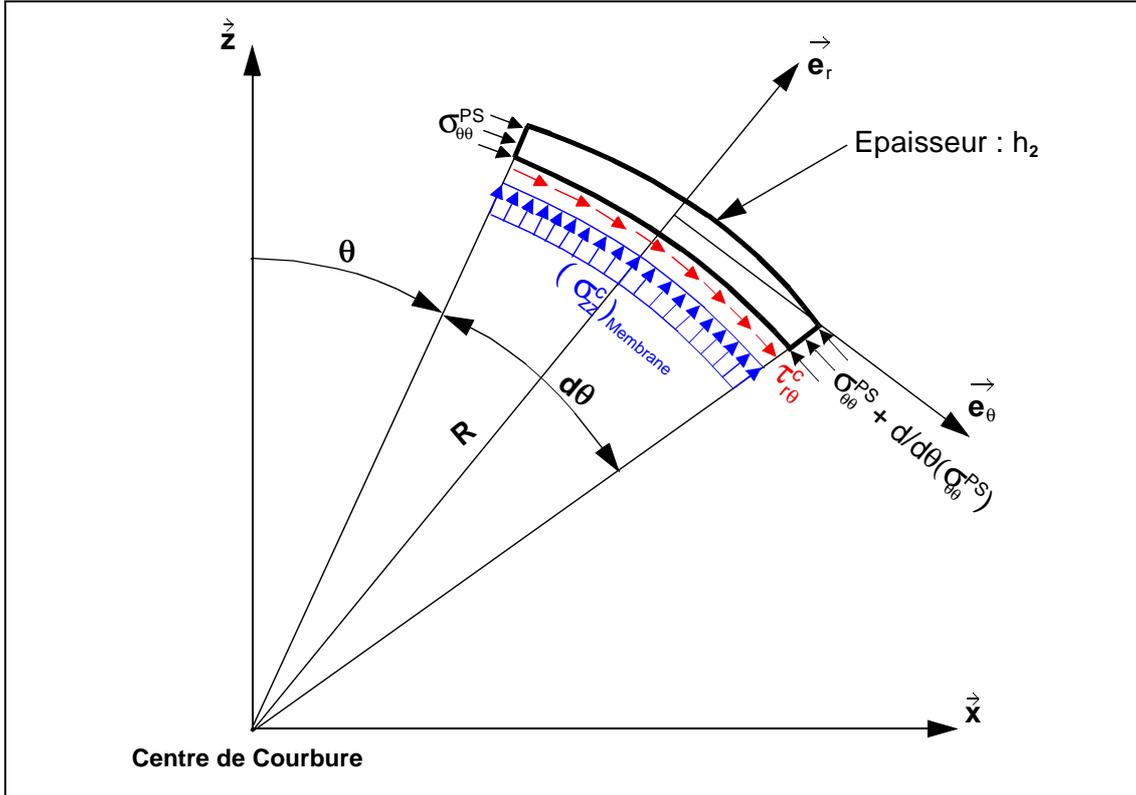


Figure N° 5-26 : Equilibre de la peau stabilisatrice sous l'action des contraintes de membrane.

L'origine est prise au centre de courbure de l'élément isolé. Les équations d'équilibre s'écrivent en projection sur \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ :

$$\mathbf{e}_r : \sigma_{\theta\theta}^{\text{PS}} \cdot \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \cdot h_2 - \left(\sigma_{\theta\theta}^{\text{PS}} + \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}^{\text{PS}}}{\partial\theta} \cdot d\theta\right) \cdot \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \cdot h_2 + (\sigma_{zz}^c)_{\text{Membrane}} \cdot R \cdot d\theta = 0 \quad (\text{éq V-2})$$

$$\mathbf{e}_\theta : \sigma_{\theta\theta}^{\text{PS}} \cdot \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) \cdot h_2 - \left(\sigma_{\theta\theta}^{\text{PS}} + \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}^{\text{PS}}}{\partial\theta} \cdot d\theta\right) \cdot \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) \cdot h_2 - \tau_{r\theta}^c \cdot R \cdot d\theta = 0 \quad (\text{éq V-3})$$

Ce qui conduit à la relation qui fournit σ_{zz} dans l'âme en fonction de la contrainte de traction /compression dans la peau stabilisatrice $\sigma_{\theta\theta}$ et du rayon de courbure local R :

$$\boxed{(\sigma_{zz}^c)_{\text{Membrane}} = -\frac{\sigma_{\theta\theta}^{\text{PS}} \cdot h_2}{R}} \quad (\text{éq V-4})$$

Ce résultat, classique en Mécanique des Milieux Continus, peut aussi être étendu à la peau travaillante. Il est donc possible de calculer les valeurs extrêmes de σ_{zz} dans l'épaisseur de l'âme. Le rayon de courbure R de la déformée est calculé par la formule :

$$R = \left(1 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} / \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (\text{éq V-5})$$

Le logiciel SAND fournit la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$. Considérons à présent l'apport du cisaillement transverse de la peau :

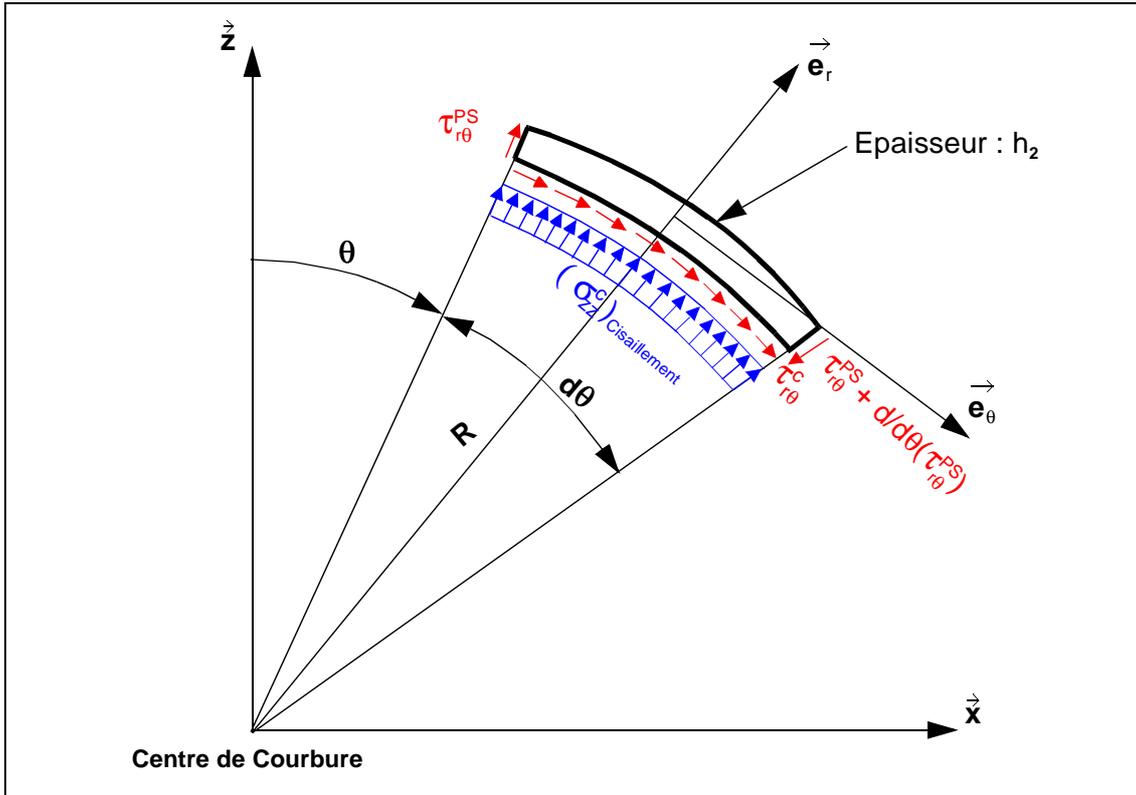


Figure N° 5-27 : Equilibre de la peau stabilisatrice sous l'action des contraintes de cisaillement transverse.

L' équation d'équilibre s'écrit en projection sur \mathbf{e}_r :

$$\mathbf{e}_r : \int_{PS} \tau_{r\theta}^{PS} dr \cdot \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - \int_{PS} \left(\tau_{r\theta}^{PS} + \frac{\partial \tau_{r\theta}^{PS}}{\partial \theta} \cdot d\theta \right) dr \cdot \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) + (\sigma_{zz}^C)_{\text{Cisaillement}} \cdot R \cdot d\theta = 0 \quad (\text{éq V-6})$$

On obtient donc :

$$- \int_{PS} \left(\frac{\partial \tau_{r\theta}^{PS}}{\partial \theta} \cdot d\theta \right) dr + (\sigma_{zz}^C)_{\text{Cisaillement}} \cdot R \cdot d\theta = 0 \quad (\text{éq V-7})$$

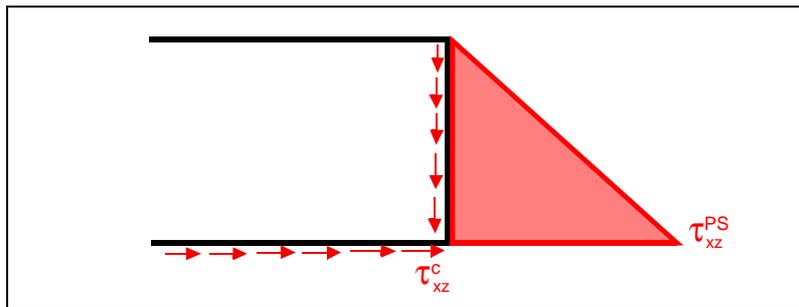


Figure N° 5-28 : Champ des contraintes de cisaillement transverse dans la peau stabilisatrice et continuité des contraintes à l'interface âme/peau.

En émettant l'hypothèse que la variation de la contrainte de cisaillement transverse est linéaire dans l'épaisseur (*Figure N° 5-28*) de la peau et après avoir confondu les repères états déformés et non déformés, il vient :

$$(\sigma_{zz}^c)_{\text{Cisaillement}} = \frac{h_2}{2} \cdot \frac{\partial \tau_{xz}^{\text{PS}}}{\partial x} \quad (\text{éq V-8})$$

La continuité des contraintes entre l'âme et les peaux permet d'écrire : $\tau_{xz}^c = \tau_{xz}^{\text{PS}}$, d'où à l'interface de la peau stabilisatrice et de l'âme, on a :

$$(\sigma_{zz}^c)_{\text{Cisaillement}} = \frac{h_2}{2} \cdot \frac{\partial \tau_{xz}^c}{\partial x} \quad (\text{éq V-9})$$

Analysons les résultats numériques donnés par les formules (éq V-4) et (éq V-9) à partir des données de SAND et ceux fournis par un modèle E.F. volumiques avec 10 éléments dans l'épaisseur de l'âme. Quatre géométries de poutres (*Tableau N° 5-3*) ont été testées. Dans tous les cas, les poutres sont bi-appuyées.

Caractéristiques poutres	L	h1	h2	hc	E1 (MPa)	E2 (MPa)	Gc (MPa)	Ec (MPa)
Poutre 1	200	1.23	0.34	12	86240	27300	46	150
Poutre 2	200	0.89	0.52	15	37800	37800	46	150
Poutre 3	200	1	0.2	15	44900	27300	67	150
Poutre 4	300	2	0.5	15	44900	27300	67	150

Tableau N° 5-3 : Caractéristiques géométriques et matériaux des poutres tests.

Dans le Tableau N° 5-4, les résultats théoriques (fournis par la formule à partir des résultats de SAND) et numériques (fournis par SAMCEF) sont comparés. La comparaison se fait au centre des poutres pour un flux de compression égal à -140 N/mm. Les valeurs fournies par SAMCEF sont la moyenne dans l'élément de l'âme le plus proche d'une des peaux (voir les groupes d'éléments considérés *Figure N° 5-31*).

Pour les résultats théoriques, le terme **en gras** correspond aux contraintes $(\sigma_{zz}^c)_{\text{Membrane}}$. Le terme *en italique* correspond aux contraintes $(\sigma_{zz}^c)_{\text{Cisaillement}}$. Ce terme ne dépasse pas 5 % du terme généré par la tension des peaux. On peut justifier ici, en poutre, l'hypothèse faite par certains auteurs [Frostig 1992] de négliger ce terme. Les résultats théoriques et numériques sont proches compte-tenu des dispersions sur les résultats fournis par SAND.

	RESULTATS THEORIE			RESULTATS MODELE E.F.		
	σ_{zz} coté PT	σ_{zz} coté PS	Flèche	σ_{zz} coté PT	σ_{zz} coté PS	Flèche
Poutre 1	- 0.06 MPa	- 0.00624 MPa	1.58 mm	- 0.0449 MPa	- 0.0074 MPa	1.49 mm
	- 0.0022 MPa	- 0.00061 MPa				
Poutre 2	- 0.074 MPa	- 0.0091 MPa	1.96 mm	- 0.0699 MPa	- 0.0014MPa	2.434 mm
	- 0.00188 MPa	- 0.00011 MPa				
Poutre 3	- 0.0968 MPa	- 0.014 MPa	2.55 mm	- 0.098 MPa	- 0.02 MPa	2.994 mm
	- 0.00266 MPa	- 0.00053 MPa				
Poutre 4	- 0.037 MPa	- 0.004747 MPa	2.28 mm	- 0.0319 MPa	- 0.0061 MPa	2.342 mm
	- 0.00204 MPa	- 0.00051 MPa				

Tableau N° 5-4 : Résultats théoriques et numériques du calcul des contraintes normales d'interface peaux/âme dans le cas des poutres.

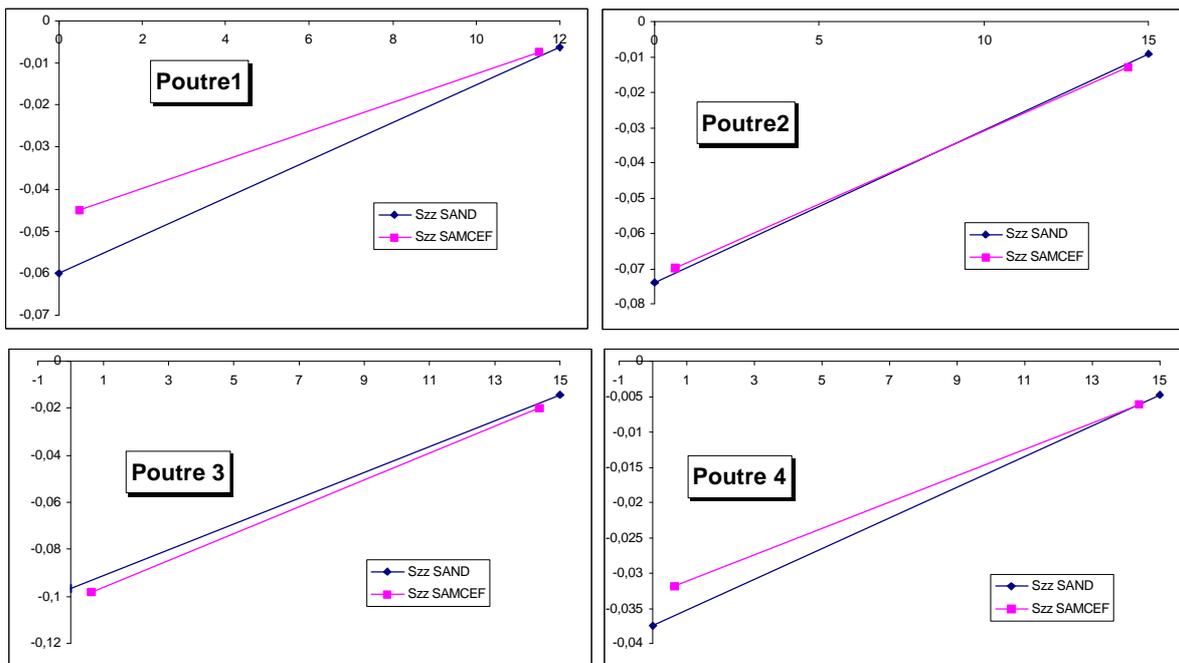


Figure N° 5-29 : Comparaison graphique du calcul des contraintes normales d'interface peaux/âme.

Pour la répartition de la contrainte à l'interface le long de la poutre, la théorie donne aussi de bons résultats. L'allure est tout-à-fait semblable aux résultats éléments finis sauf près des bords.

La méthode proposée de calcul de la contrainte normale aux interfaces est donc satisfaisante dans le cas des poutres. Elle présente l'avantage d'être très simple et très efficace en terme de temps de calcul dans le cas des poutres bi-appuyées.

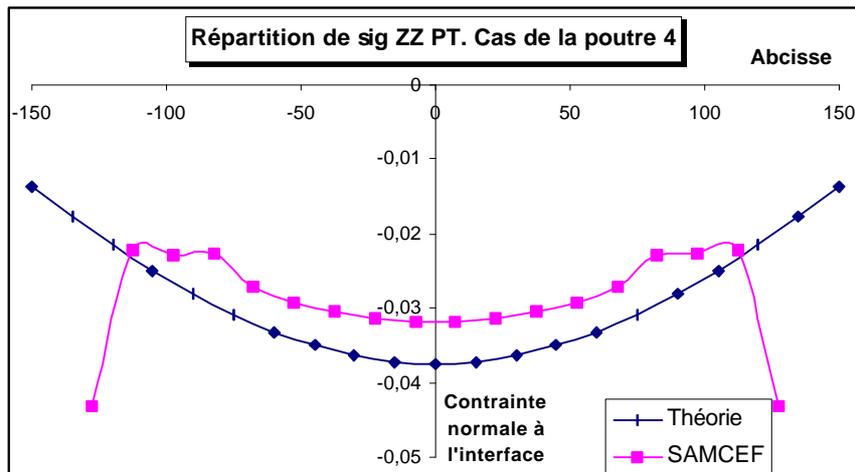


Figure N° 5-30 : Evolution de la contrainte normale le long d'une poutre. Cas de la contrainte σ_{zz} coté Peau Travillante et de la poutre 4.

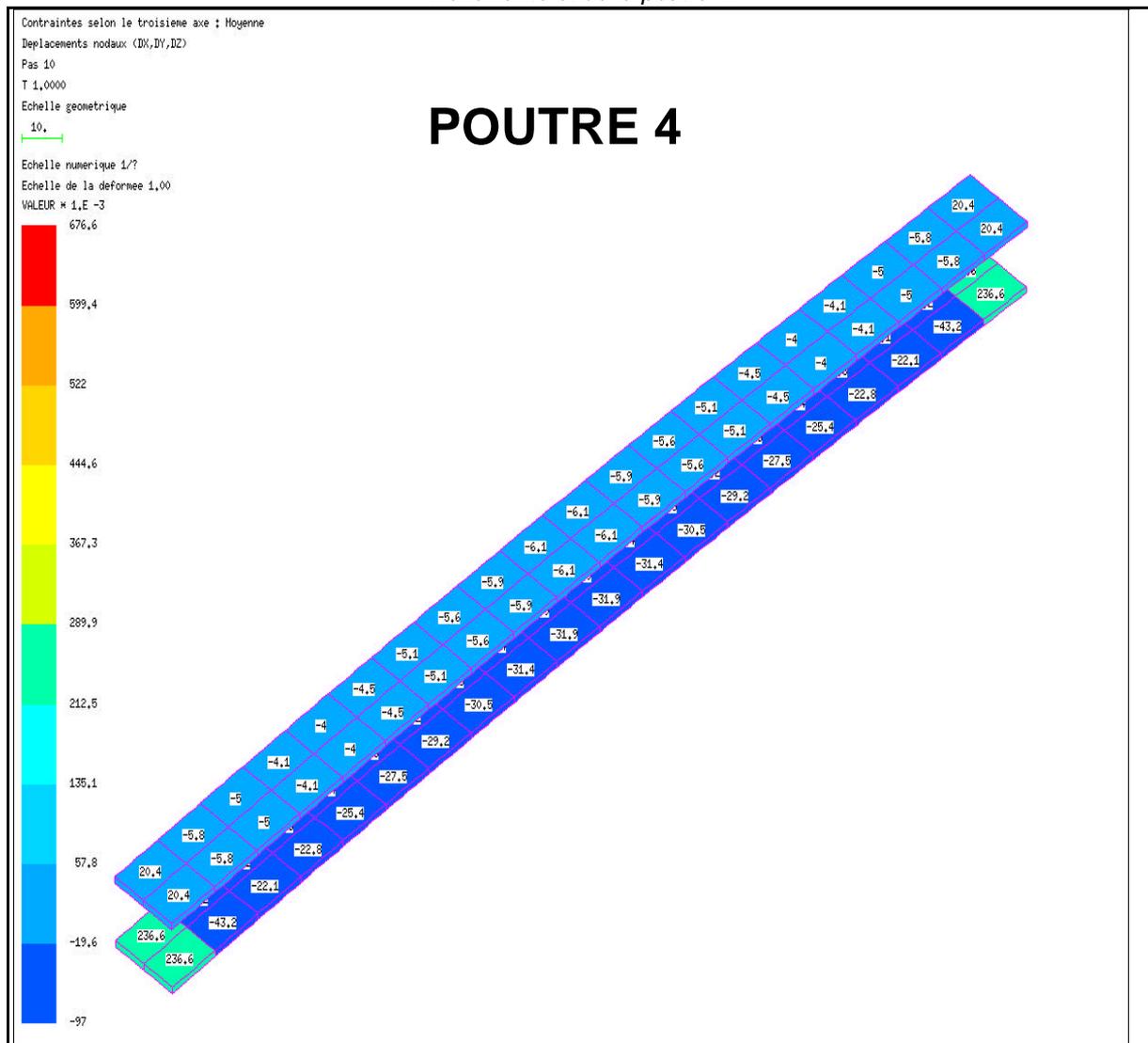


Figure N° 5-31 : Champ des contraintes de compression moyennes par éléments pour les groupes d'éléments de l'âme les plus proches de la peau stabilisatrice (en haut) et de la peau travaillante (en bas). Cas de la poutre n°4.

V.2.2 - CALCUL EN PLAQUES.

L'équation d'équilibre en projection sur la normale d'un carreau élémentaire de coque sous pression est donnée par [Timoshenko, éq 256 p 435 para 105 et para 109] :

$$\frac{N_{\varphi}}{r_1} + \frac{N_{\theta}}{r_2} = -Z \quad (\text{éq V-10})$$

où N_{indice} représente les flux d'efforts, r_1 et r_2 les rayons de courbure normaux, Z est la résultante des efforts de pression. Pour un carreau de côté 1, il vient :

$$\left(\frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r_1} + \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r_2} \right) \cdot e = -p \quad (\text{éq V-11})$$

Avec les notations utilisées, on obtient donc pour le calcul de $(\sigma_{zz}^c)_{\text{Membrane}}$ la relation suivante :

$$\boxed{(\sigma_{zz}^c)_{\text{Membrane}} = -\left(\frac{\sigma_{xx}^2 \cdot h_2}{r_x} + \frac{\sigma_{yy}^2 \cdot h_2}{r_y} \right)} \quad (\text{éq V-12})$$

Cette relation très simple est une généralisation de la formule obtenue en poutre. De la même manière, la contribution du cisaillement transverse dans les peaux conduit à la formule suivante :

$$\boxed{(\sigma_{zz}^c)_{\text{Cisaillement}} = \frac{h_2}{2} \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xz}^c}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^c}{\partial y} \right)} \quad (\text{éq V-13})$$

Cinq tests numériques E.F. non linéaires ont été effectués. Les matériaux sont identiques, seules les dimensions des plaques, les hauteurs de l'âme et les chargements changent.

	L (mm)	b (mm)	h _c (mm)	Flux (N/mm)
Plaque 1	200	200	15	N_x = - 200
Plaque 2	300	200	15	N_x = - 270
Plaque 3	200	300	10	N_x = -200
Plaque 4	200	300	20	N_x = -200
Plaque 5	200	200	15	<u>N_{xy} = 200</u>

Tableau N° 5-5 : Dimensions des plaques tests.

Le modèle comporte 10 éléments volumiques dans l'épaisseur de l'âme. Chaque maille

a pour dimensions dans le plan 20 x 20 mm (Figure N° 5-32).

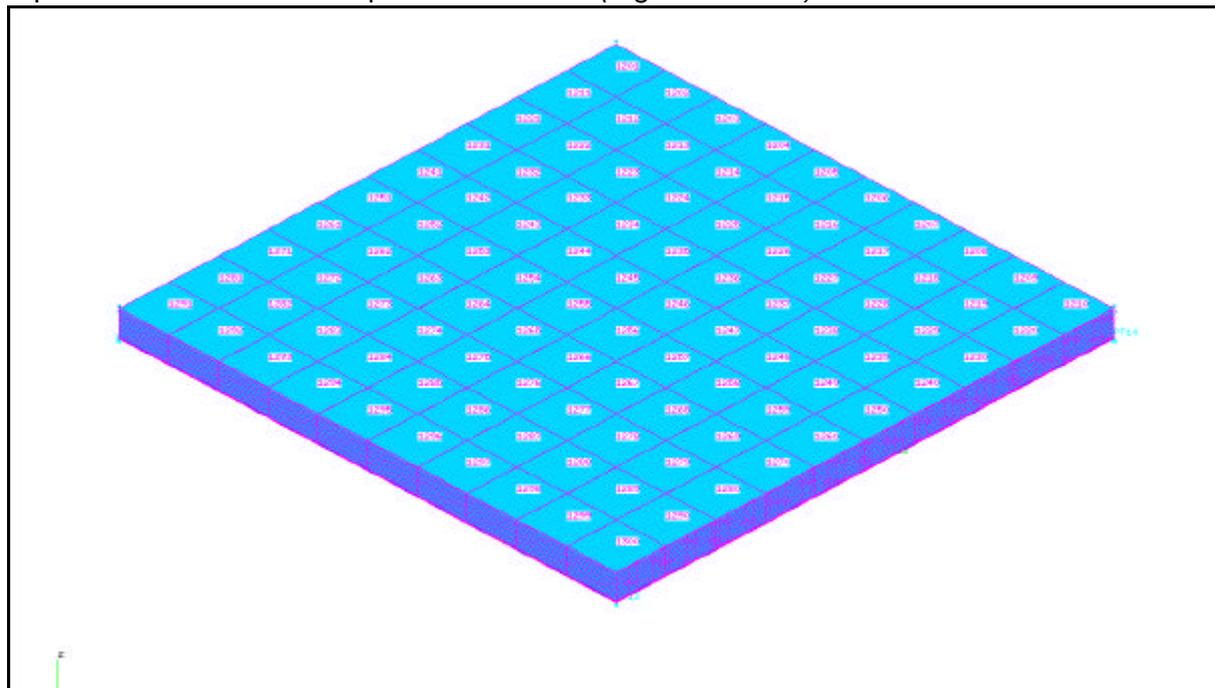


Figure N° 5-32 : Modèle de plaque volumique avec 10 éléments dans l'épaisseur.

Comme en poutre, la valeur de contrainte σ_{zz} fournie par SAMCEF est la valeur moyenne dans l'élément de l'âme le plus proche de la peau. Le Tableau N° 5-6 fournit les résultats théoriques pour les cinq plaques. Pour les résultats théoriques, le terme **en gras** correspond aux contraintes $(\sigma_{zz}^c)_{\text{Membrane}}$. Le terme *en italique* correspond aux contraintes $(\sigma_{zz}^c)_{\text{Cisaillement}}$.

	RESULTATS THEORIE			RESULTATS MODELE E.F.		
	σ_{zz} coté PT	σ_{zz} coté PS	Flèche	σ_{zz} coté PT	σ_{zz} coté PS	Flèche
Plaque 1	- 0.028 MPa	- 0.01 MPa	0.79 mm	- 0.025 MPa	- 0.0061 MPa	0.835 mm
	<i>- 0.000115 MPa</i>	<i>- 0.00067 MPa</i>				
Plaque 2	- 0.0128 MPa	- 0.0035 MPa	1.14 mm	- 0.0161 MPa	- 0.0073 MPa	1.236 mm
	<i>- 0.001141 MPa</i>	<i>- 0.00066 MPa</i>				
Plaque 3	- 0.009 MPa	- 0.0041 MPa	1.23 mm	- 0.0108 MPa	- 0.0058 MPa	1.237 mm
	<i>- 0.001575 MPa</i>	<i>- 0.00092 MPa</i>				
Plaque 4	- 0.03331 MPa	- 0.00096 MPa	0.819 mm	- 0.0292 MPa	- 0.0028 MPa	0.892 mm
	<i>- 0.0008 MPa</i>	<i>- 0.00048 MPa</i>				
Plaque 5	-0.000004 MPa	-0.000038 MPa	-----	-0.009 MPa	+ 0.002 MPa	-----
	<i>- 0.00126 MPa</i>	<i>+ 0.00074 MPa</i>				

Tableau N° 5-6 : Résultats théoriques et numériques du calcul des contraintes normales d'interface peaux/âme dans le cas des poutres.

La comparaison des valeurs fournies par la théorie et des valeurs fournies par le modèle E.F. est correcte. Ceci malgré le fait que les valeurs soit extrêmement faibles (de 10^{-2} à 10^{-3} MPa). A ces niveaux de contraintes, les résultats sont sensibles à la dispersion numérique engendrée par le calcul. D'autre part, on ne compare pas exactement les mêmes sandwichs puisqu'il faut entrer toutes les caractéristiques matériaux dans le modèle E.F. pour ne pas générer de matrice de rigidité singulière.

L'apport du cisaillement transverse reste faible lors de chargement en compression. Par contre ce terme devient prépondérant lors de chargement en cisaillement car les contraintes σ_{xx} et σ_{yy} sont très faibles.

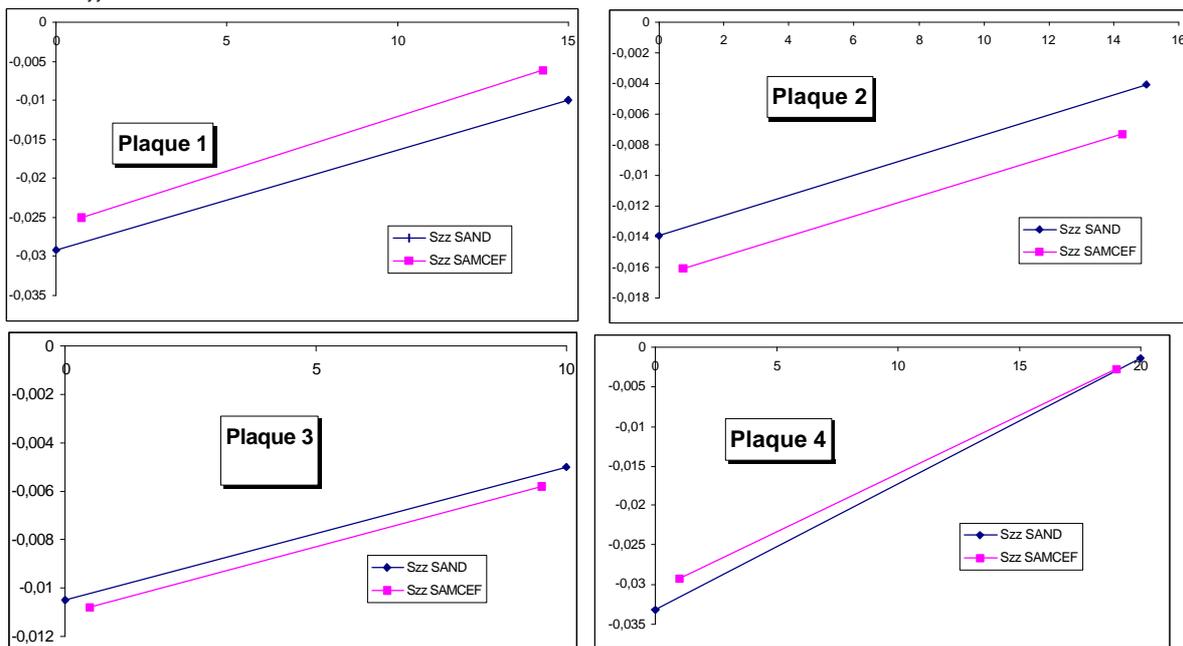


Figure N° 5-33 : Comparaison graphique du calcul des contraintes normales d'interface peaux/âme dans le cas des plaques 3 et 4.

V.2.3 - CONCLUSIONS.

Une méthode de calcul des contraintes dans l'âme a posteriori a été proposée et validée. Pour les cas traités, elle donne de bons résultats par comparaison aux modèles E.F. volumiques. Toutefois, elle n'a pas été validée dans tous les cas de figure et, les valeurs obtenues étant très faibles, les erreurs de modélisation peuvent être importantes. D'autre part, les cas tests démontrent que l'on est loin des contraintes critiques de compression données pour des âmes en nida Nomex (2.5 ou 4.7 MPa [Zenkerts 1997]). Ce qui démontre que ces contraintes ne sont pas critiques pour le dimensionnement en plaque. Il n'en est probablement pas de même pour les coques, les rayons de courbures étant beaucoup plus faibles.

V.3 - COMPORTEMENT GÉNÉRAL DES STRUCTURES SANDWICHS DISSYMMÉTRIQUES.

L'objectif de ce paragraphe est de mettre en évidence la logique du comportement de ces structures sandwichs particulières en utilisant les théories développées dans le chap IV. L'accent sera mis sur l'influence des matériaux plus que sur l'influence des dimensions ou des conditions aux limites.

V.3.1 - COMPORTEMENT DES POUTRES ET PLAQUES SANDWICHS EN COMPRESSION.

La variété de matériaux utilisables est très étendue. La rigidité des peaux peut varier de 20 GPa (Fibre de verre) à 600 GPa (Fibre de carbone HM). La même palette existe pour les âmes, les mousses PVC ont une rigidité G_c de 13 à 108 MPa, les nids d'abeille Nomex de 27 à 138 MPa [Zenkerts 1995]. On choisit la poutre de référence suivante :

- $L=300$ mm ; $b = 25$ mm ; $h_1 = 1.5$ mm ; $h_c = 15$ mm ; $h_2 = 0.5$ mm.
- $E_1 = 60$ GPa ; $E_2 = 20$ GPa ; $G_c = 44$ MPa ; $E_c = 150$ MPa.

L'étude de ce paragraphe a été réalisée avec la théorie simplifiée donc en supposant une poutre bi-appuyée.

INFLUENCE DE E_2 ET G_c .

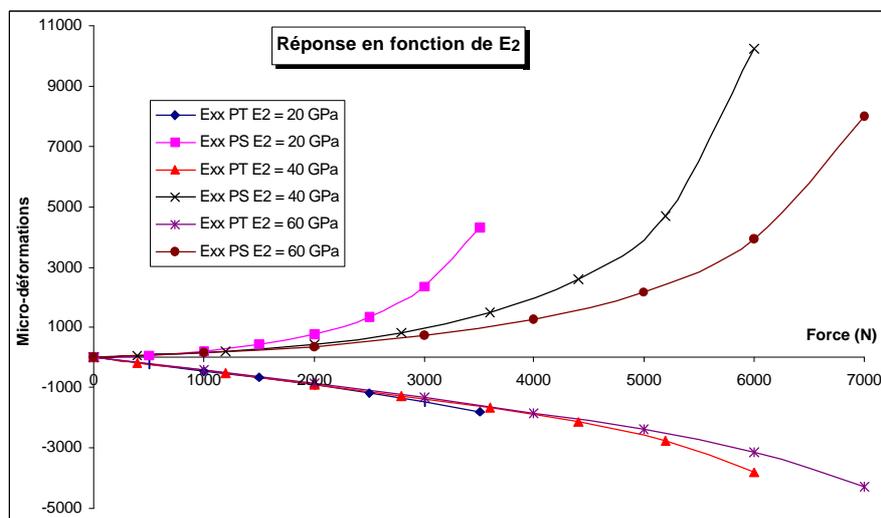


Figure N° 5-34 : Déformations aux centres des peaux en fonction de la rigidité de la peau stabilisatrice.

Etudions dans un premier temps la réponse du sandwich en compression lorsque l'on fait varier la rigidité de la peau stabilisatrice E_2 . La Figure N° 5-34 montre que la dénomination de peau stabilisatrice est pertinente car la charge de flambage est influencée de manière prépondérante par sa rigidité E_2 .

Le même phénomène est observé lorsque l'on diminue ou augmente la rigidité en cisaillement de l'âme G_c (Figure N° 5-35). En conséquence :

Le choix des matériaux d'une structure sandwich dissymétrique doit être homogène.

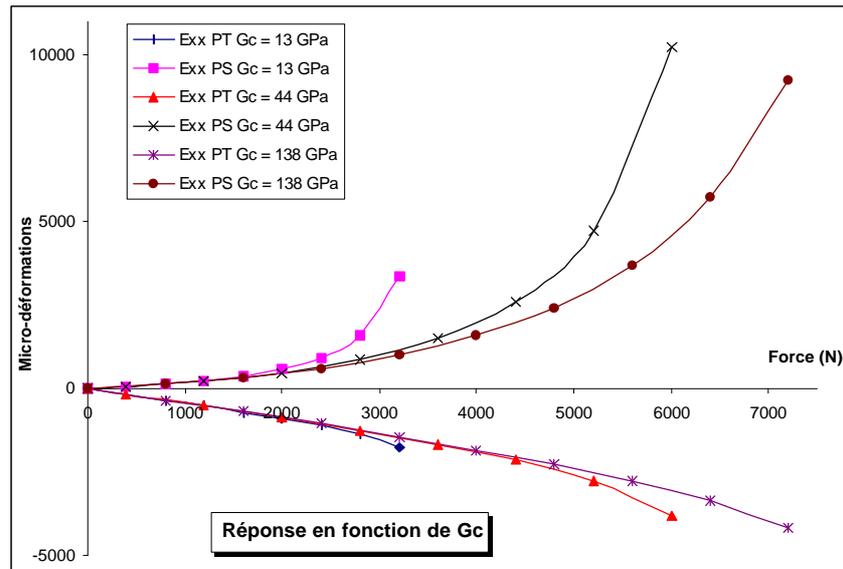


Figure N° 5-35 : Déformations aux centres des peaux en fonction de la rigidité en cisaillement de l'âme.

La différence marquée entre les réponses d'un sandwich dissymétrique avec des âmes de différentes rigidités suggère aussi l'utilisation d'éprouvettes sandwichs dissymétriques pour mesurer G_c . En effet, la mesure s'avère difficile à l'heure actuelle pour les fortes épaisseurs d'âme. Il existe ici peut-être une possibilité.

Sandwich	E1 (GPa)	E2 (GPa)	Gc (MPa)	Ec (MPa)
Type 1	20	20	13	15
Type 2	40	20	27	50
Type 3	60	40	44	150
Type 4	100	60	138	250

Tableau N° 5-7 : Caractéristiques matériaux de 4 poutres sandwichs.

L'étude des 4 sandwichs Tableau N° 5-7 classés par ordre de rigidité croissante montre une répartition de l'énergie dans les phases de même nature (Figure N° 5-36), donc un comportement proche. Dans tous les cas, à l'exception du sandwich 1 où l'âme est en mousse, la part de l'âme est la plus faible et l'énergie de la peau stabilisatrice ne devient

importante que près du flambement quand le sandwich se charge globalement en flexion.

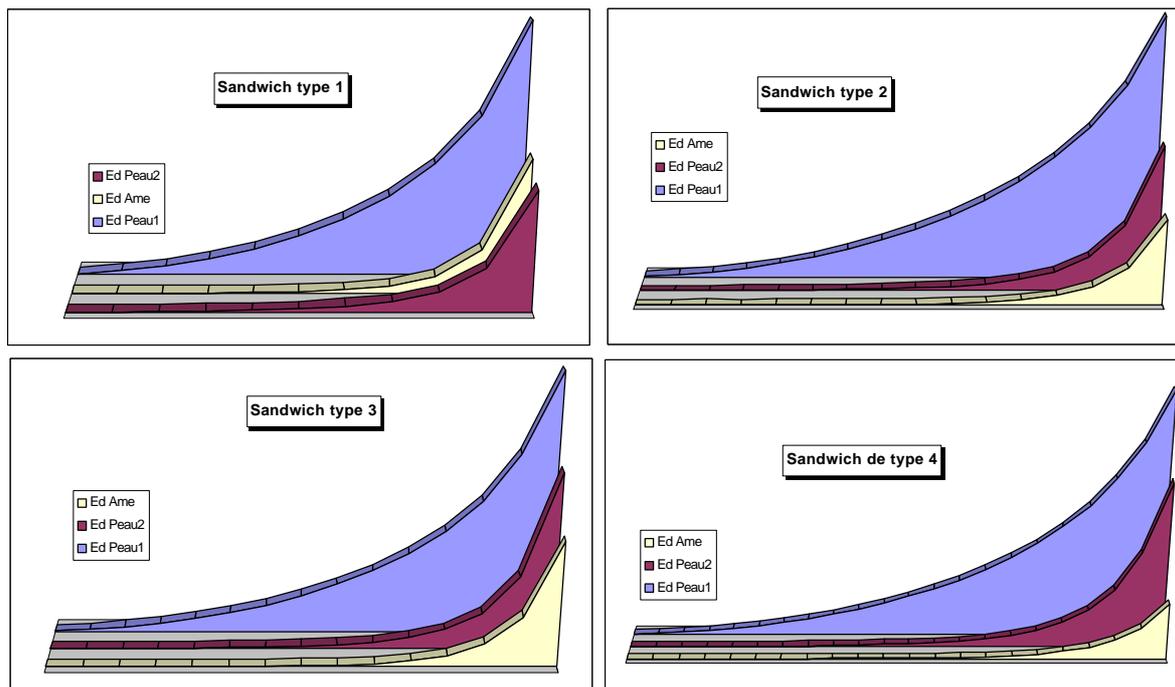


Figure N° 5-36 : Répartition énergétique dans les phases pour 4 sandwichs de rigidités croissantes et homogènes. Le sandwich de référence étudié précédemment correspond au type 3. Les matériaux de l'âme sont de la mousse PVC pour le premier sandwich et des nida Nomex de 29 à 138 kg/m³ pour les trois suivants. E_c a été extrapolé pour les cas 2 et 4.

Un cas numérique avec l'âme en mousse du type 1 et les peaux du type 4 montre une répartition énergétique où l'énergie dans l'âme devient supérieure à l'énergie dans la peau stabilisatrice (Figure N° 5-37).

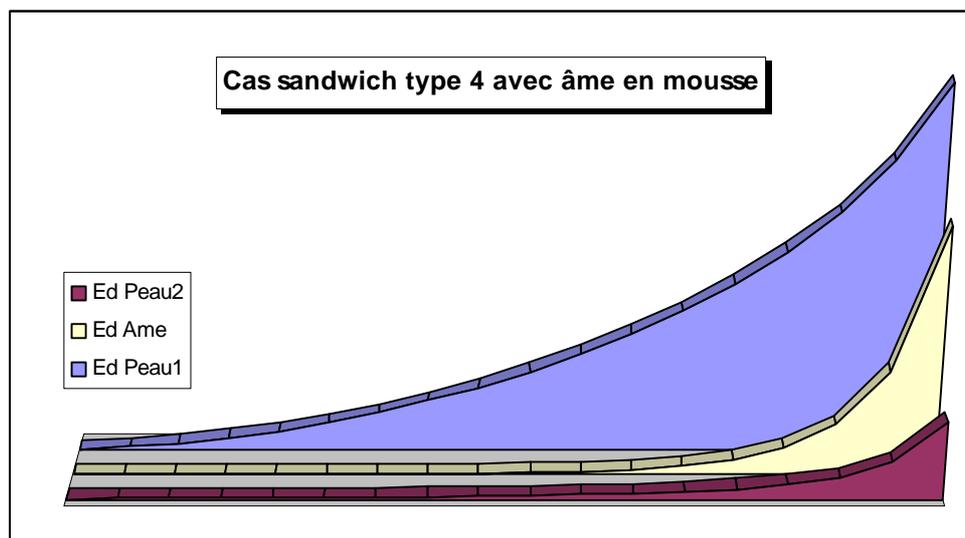


Figure N° 5-37 : Cas d'un sandwich à âme mousse et peaux très rigides.

Il faut que l'âme soit suffisamment rigide en cisaillement pour charger correctement la peau stabilisatrice et assurer la stabilité de l'ensemble du sandwich dissymétrique. Ces graphes énergétiques montrent bien le comportement particulier des sandwichs dissymétriques.

Pour des chargements jusqu'à environ 70% du chargement maxi, une modélisation linéaire de la peau travaillante seule peut être effectuée (cf Chap III-2 : Modèle E.F. linéaire du caisson et voir aussi [Chai 1999]).

Pour des chargements plus importants et pour pouvoir déterminer les marges à rupture en statique, il est nécessaire de réaliser un calcul non linéaire.

COMPRESSION DE L'ÂME.

Analysons l'énergie relative à la compression de l'âme. Les simulations sur le sandwich n°3 ont montré que comme c'est logique, c'est le module de rigidité qui avait l'influence maximale. Plus le module est faible, plus l'énergie reprise est importante. La force critique est par contre diminuée (5600N au lieu de 6000N). Les extremums trouvés par des simulations supplémentaires en faisant varier G_c et E_2 sont 0.15% et 3.7%. Cette énergie est dans tous les cas faible et peut être négligée dans les calculs globaux.

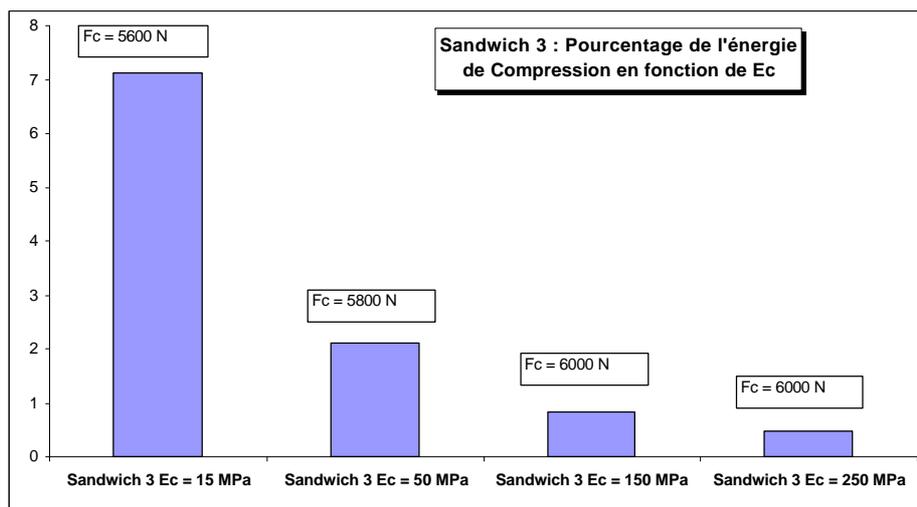


Figure N° 5-38 : Evolution de la part énergétique de la compression de l'âme en fonction de son module pour le sandwich 3. Les valeurs sont celles obtenues au dernier incrément de charge.

INFLUENCE DES PARAMÈTRES δ ET N .

On observe sur les courbes *Figure N° 5-39* et *Figure N° 5-40* que les paramètres δ et N influent de façon importante sur le comportement de la peau stabilisatrice. Les courbes ϵ_{xPT} étant pratiquement superposées, ne sont pas représentées pour faciliter la lecture. Le paramètre N a une influence stabilisatrice. Ce comportement s'explique par la création d'un moment stabilisateur. Le même principe explique l'influence de δ . Pour δ négatif, la divergence a lieu plus tôt et quand il est diminué, la stabilité du sandwich dissymétrique est augmentée.

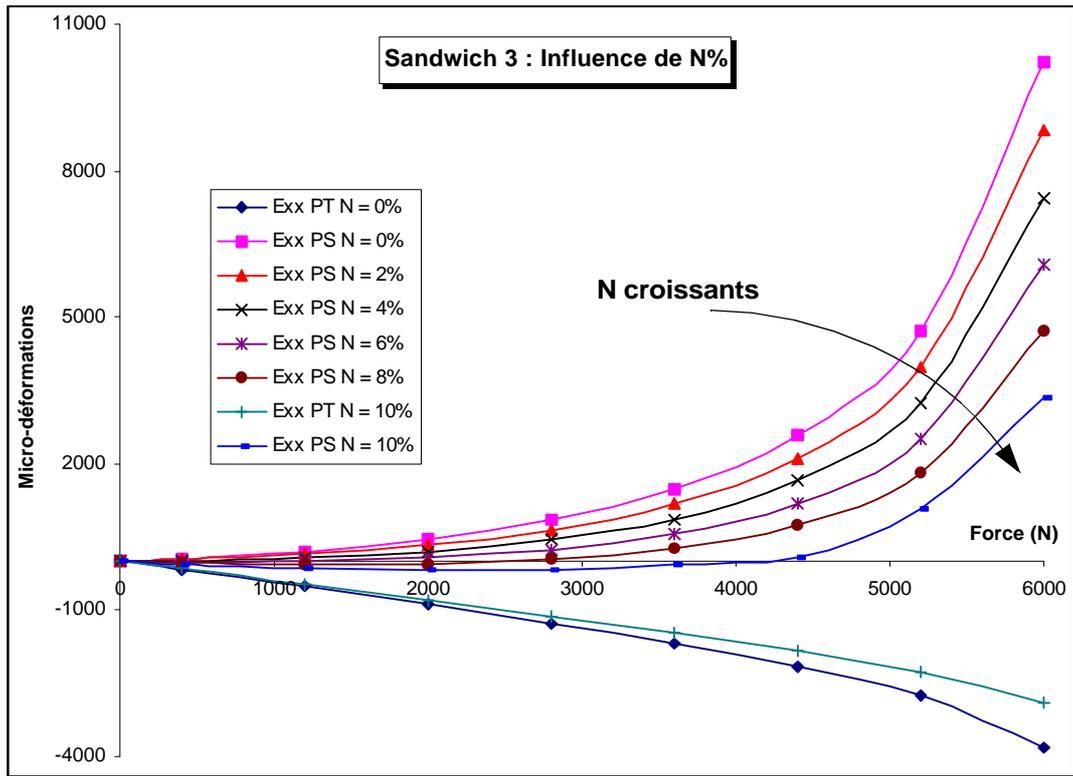


Figure N° 5-39 : Influence du coefficient N.

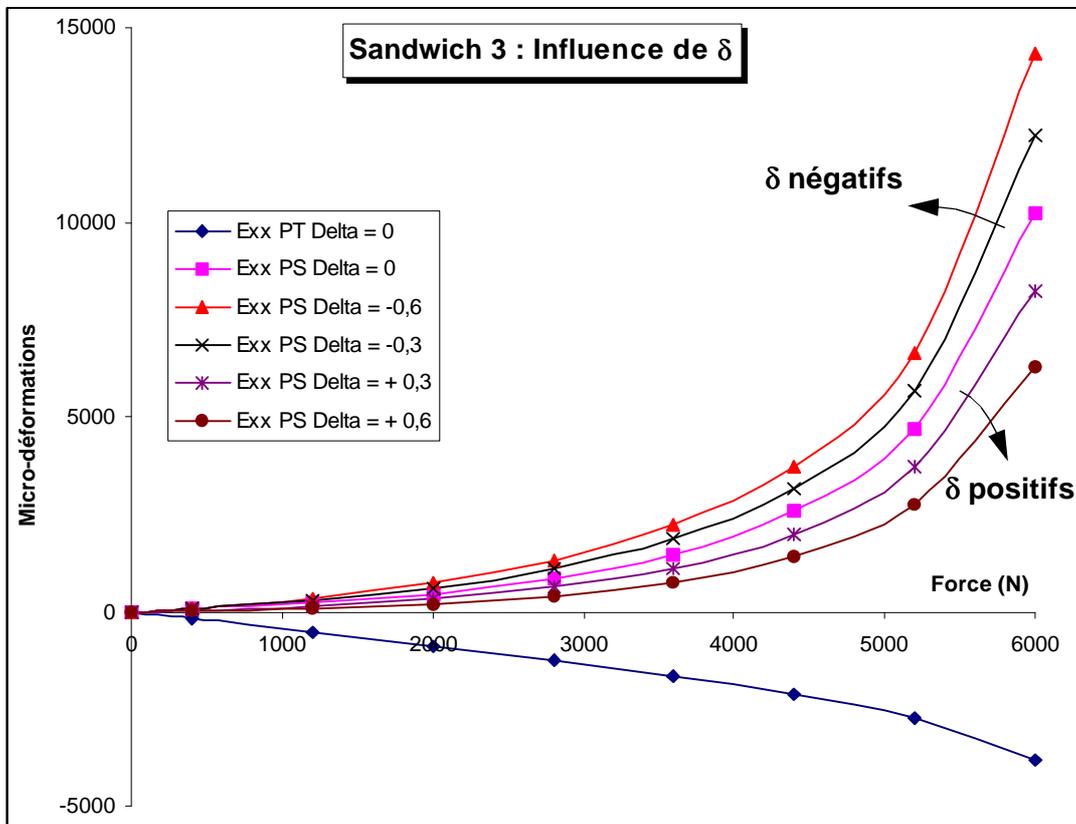


Figure N° 5-40 : Influence du coefficient δ .

PLAQUE EN COMPRESSION.

L'augmentation de la taille diminue la charge critique, l'augmentation des rigidités et de l'épaisseur de l'âme renforce la tenue au flambage. Seule la peau stabilisatrice est affectée par ces variations. La peau travaillante conserve son comportement linéaire pour la plage de chargement. Toutefois, comme les déformations analysées sont les déformations du plan moyen, il convient de vérifier que les déformations sur les faces supérieures et inférieures de la peau travaillante restent aussi linéaires. Sur la *Figure N° 5-41*, il apparaît que l'influence de la flexion des peaux est faible. On peut donc justifier ici, a posteriori, le fait de comparer les mesures de déformation, réalisées sur une des faces de la peau travaillante, et le calcul, effectué dans le plan moyen. Par ailleurs, d'autres simulations ont montré que la différence entre les déformations du plan moyen et les déformations des faces supérieures ou inférieures est plus importante pour les poutres que pour les plaques.

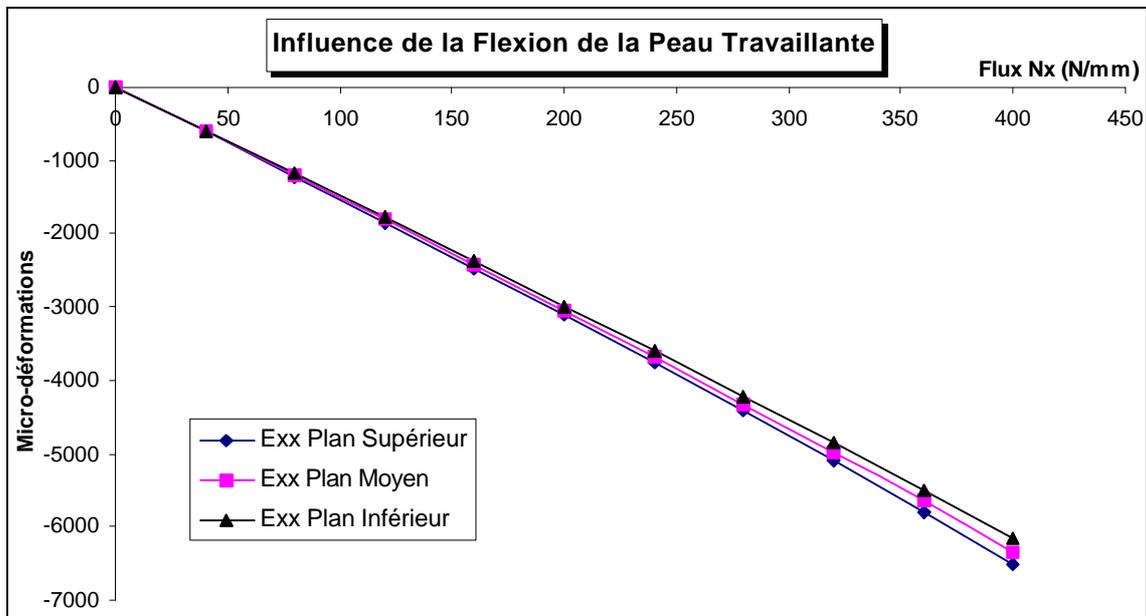


Figure N° 5-41 : Déformations Plans inférieurs, Moyens et Supérieurs d'une Plaque en Compression.

L'influence des conditions aux limites est identique aux autres structures. Par ailleurs, les remarques effectuées en poutre sur les paramètres δ et \mathbf{N} restent vraies en plaque.

On remarquera aussi que la peau stabilisatrice passe en compression pour des paramètres δ et \mathbf{N} fixés à zéro (*Figure N° 5-42*), ce qui n'est pas le cas en poutre. On a donc ici un effet de flexion induit par la rigidité des appuis, confirmé par le fait que les déformations ϵ_{yy} sont supérieures à ϵ_{xx} dans la peau stabilisatrice.

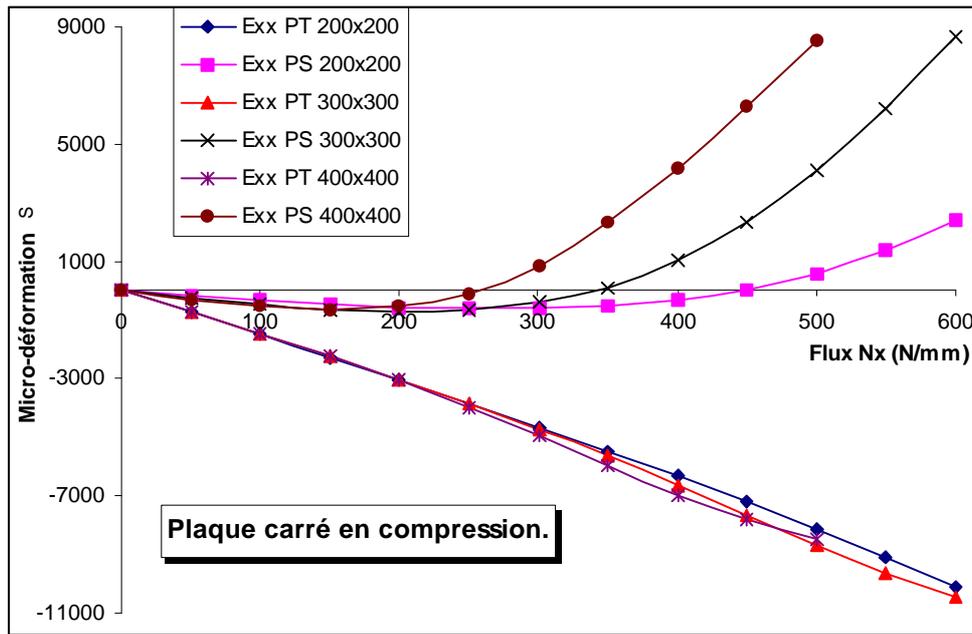


Figure N° 5-42 : Plaque dissymétrique en compression. Tout appuyé. Réponse des déformations aux centres des peaux en fonction de la taille.

CAS DES SANDWICHS SYMÉTRIQUES EN COMPRESSION.

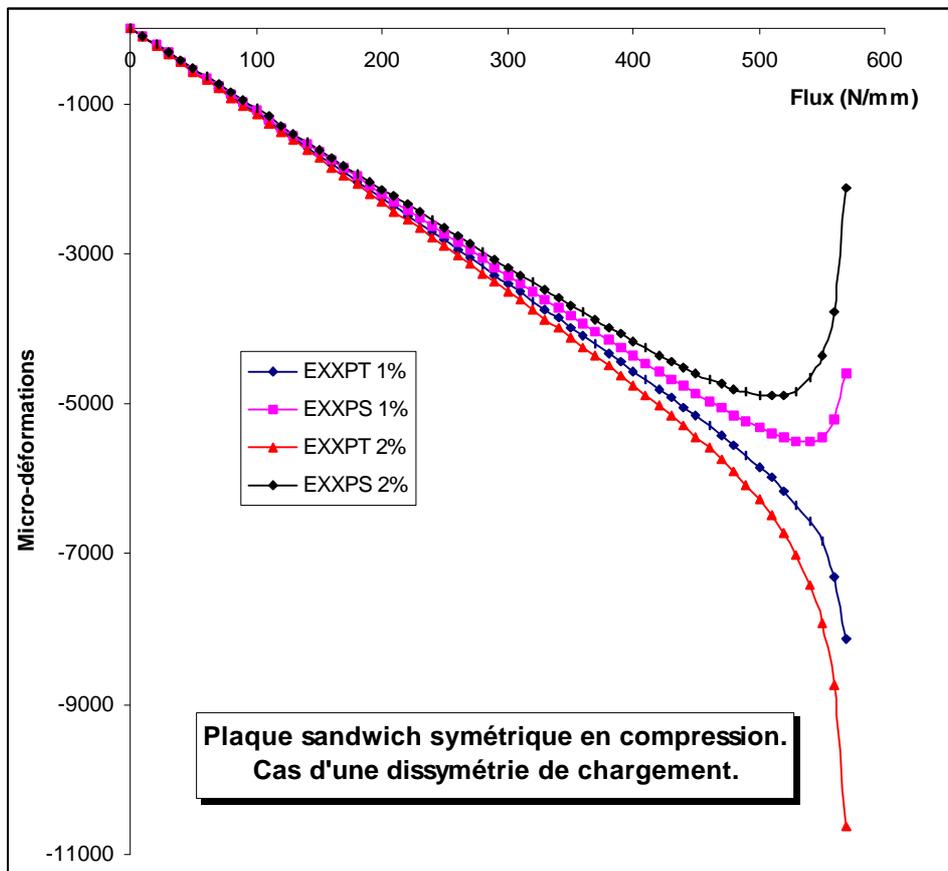


Figure N° 5-43 : Etude d'un sandwich soumis à de la compression dissymétrique (dissymétrie 49/51 : "1%" et 48/52 : "2%").

Ce cas peut être traité par la théorie en fixant N à 50 % ce qui étend l'intérêt de ce programme (voir annexe "Programme SAND"). Toutefois l'intérêt de ce paragraphe réside plutôt dans la possibilité d'analyser le comportement pour différents rapports du chargement entre les deux peaux.

Les résultats obtenus pour des rapports 49/51% et 48/52% sont représentés sur la *Figure N° 5-43*. Les formes des courbes sont très similaires à celles obtenues expérimentalement par Lagace et Al (voir para II-8). Le modèle non linéaire proposé par cet auteur repose sur une formulation de Mindlin, donc globale qui, dans un premier temps, est destinée à l'étude du post-flambement des stratifiés puis généralisée aux sandwichs symétriques en compression. Le phénomène de post-flambement des stratifiés est très bien corrélé et expliqué par la présence de déformations initiales. Cette explication est ensuite généralisée aux sandwichs. Il s'avère que le comportement expérimental peut aussi s'expliquer par une dissymétrie du chargement de +/- 1 ou 2 %, (une dissymétrie de la rigidité des peaux donne le même résultat). C'est d'ailleurs un problème qui avait déjà été souligné par [Hoff 1945].

Si il est tout-à-fait possible de retrouver ce résultat soit par des modélisations E.F. non linéaires volumiques ou par des modélisations plaques en introduisant un moment parasite, la souplesse d'emploi du logiciel SAND permet une analyse réellement physique des phénomènes d'introductions des efforts dans les structures sandwichs.

V.3.2 - COMPORTEMENT DES PLAQUES SANDWICHS DISSYMMÉTRIQUES EN CISAILLEMENT.

Le comportement des plaques sandwichs dissymétriques en cisaillement est globalement analogue à celui des plaques symétriques. La réponse des peaux en déformation est linéaire en fonction du chargement. La théorie non linéaire développée permet de mettre en évidence un déplacement hors du plan qui est très faible. Le phénomène de flambage est brutal comme pour les sandwichs symétriques. L'évolution de la tenue au flambage en fonction des dimensions, des rigidités, et des conditions aux limites est globalement identique.

Pratiquement, la seule particularité est la mise en charge du sandwich par la seule peau travaillante et l'effet de taille qui en résulte (voir *Figure N° 5-20*). Le chargement de la peau stabilisatrice ne peut s'effectuer que par l'âme et une étude menée pour des nida Nomex de 29, 48 et 200 Kg/m³ montre bien évidemment que la mise en charge est plus rapide quand la rigidité en cisaillement de l'âme est plus importante (*Figure N° 5-44*). Le phénomène est peu sensible à l'épaisseur de l'âme pour les essais numériques effectués ($h_c = 5, 15, \text{ et } 30$ mm).

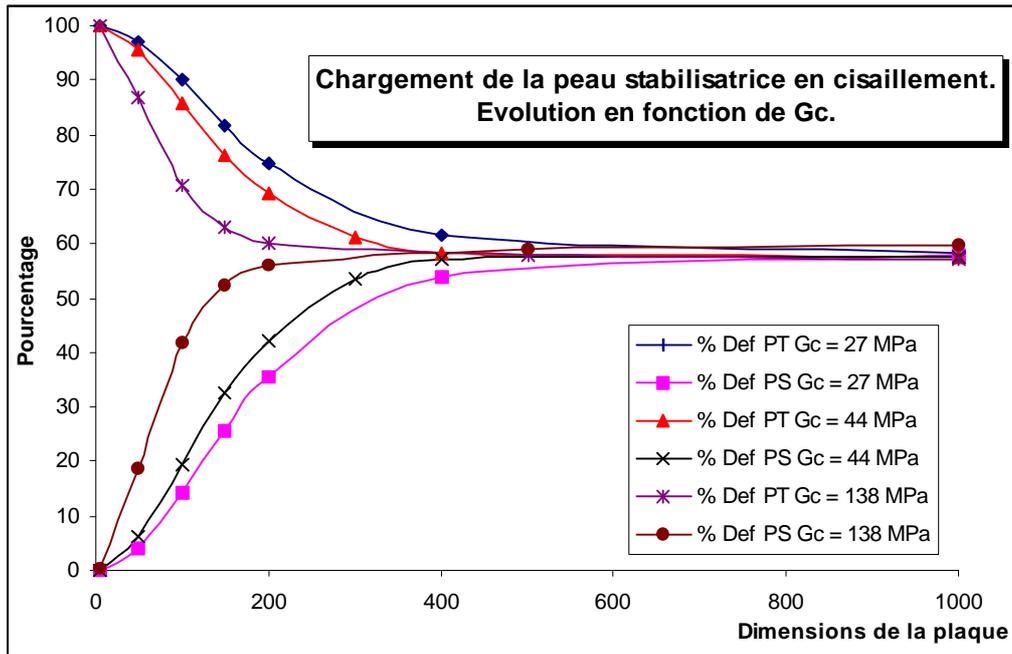


Figure N° 5-44 : Chargement de la peau stabilisatrice en cisaillement en fonction de la rigidité de cisaillement de l'âme pour 27, 44, et 138 MPa.

Le paramètre δ n'a aucune influence. Le paramètre N charge directement la peau stabilisatrice ce qui a pour effet de diminuer la zone où l'effet de taille est sensible. Par exemple, si l'on charge la peau stabilisatrice de la plaque d'essai (200 x 200 mm) avec 50 % de flux, on obtient les courbes Figure N° 5-45. Les déformations γ_{xy} avec $N=50\%$ dans les deux peaux sont presque égales ce qui est typique du comportement d'une plaque plus grande (400 x 400 mm).

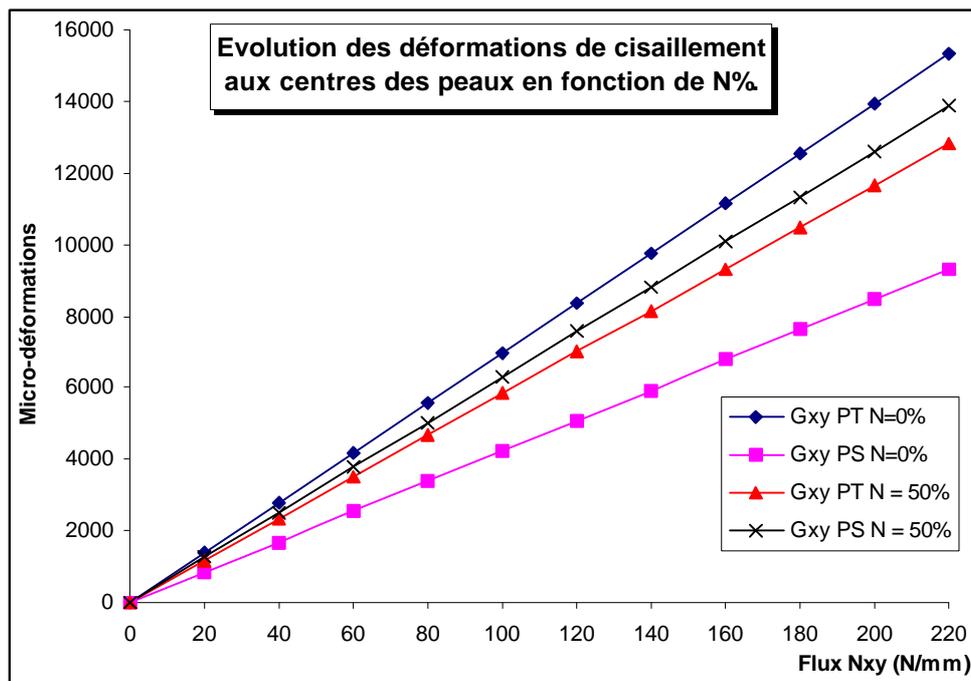


Figure N° 5-45 : Influence du paramètre N pour une plaque soumise en cisaillement.

En conclusion, le mode de chargement des peaux des sandwichs dissymétriques en cisaillement importe peu hors effet de taille. L'énergie n'est plus reprise comme en compression essentiellement dans la peau travaillante mais dans le sandwich complet. La répartition dans les peaux se faisant au prorata des rigidités.

V.3.3 - COMPORTEMENT DES PLAQUES SANDWICHS DISSYMMÉTRIQUES SOUS SOLLICITATIONS COMBINÉES COMPRESSION/CISAILLEMENT.

Le programme SAND propose 3 modes de chargement sous sollicitations combinées :

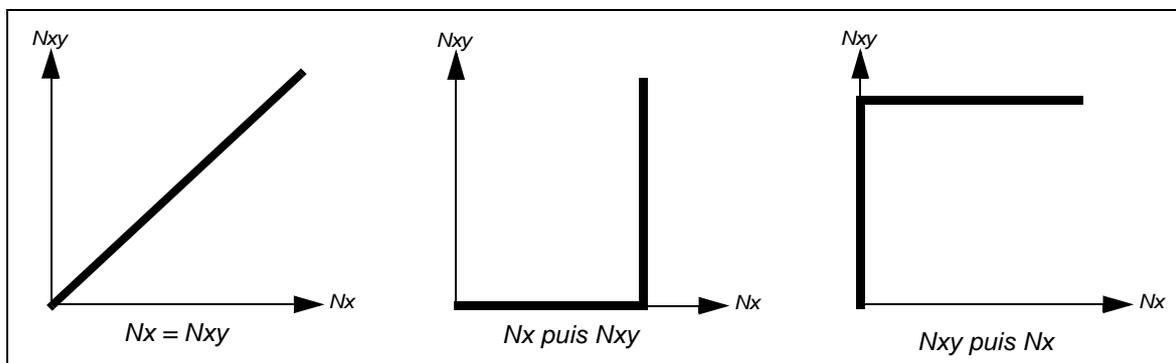


Figure N° 5-46 : Modes de chargement en sollicitations combinées.

Une simulation numérique avec ces trois types de chargement est effectuée pour une plaque ayant les caractéristiques matériaux et dimensionnelles de l'éprouvette d'essai. Le chargement est au maximum de $N_x = N_{xy} = 400$ N/mm.

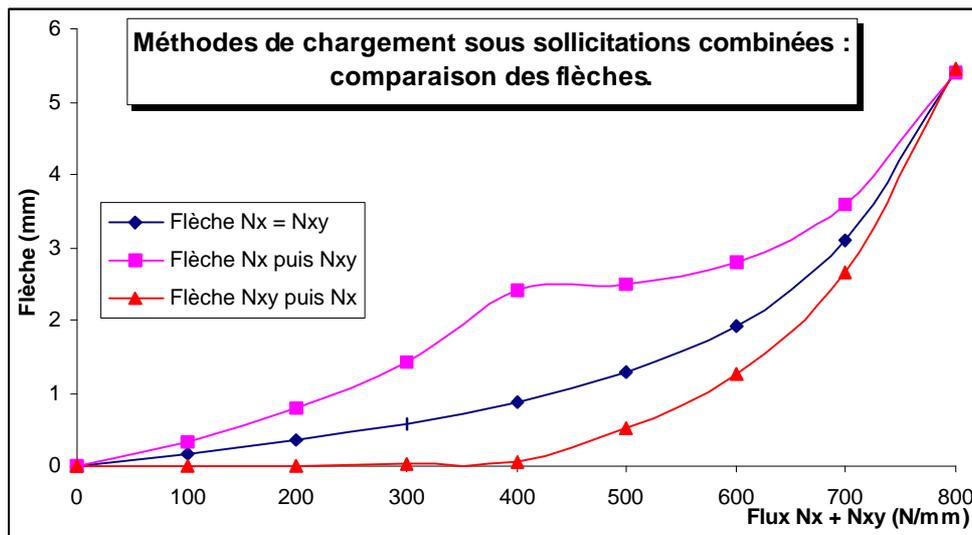


Figure N° 5-47 : Etude de la flèche au centre sous sollicitations combinées.

La Figure N° 5-47 et la Figure N° 5-48 montrent que, pour ce cas numérique, si le chemin est différent, le champ des déformations et des contraintes est quasi identique quel que

soit le mode de chargement. La différence n'est pas nulle mais n'excède pas 0.57% en flèche, 2.46 % pour ϵ_{xxPS} et 0.076 % pour γ_{xyPS} . Ces résultats confirment donc la validité des méthodes de résolution utilisées.

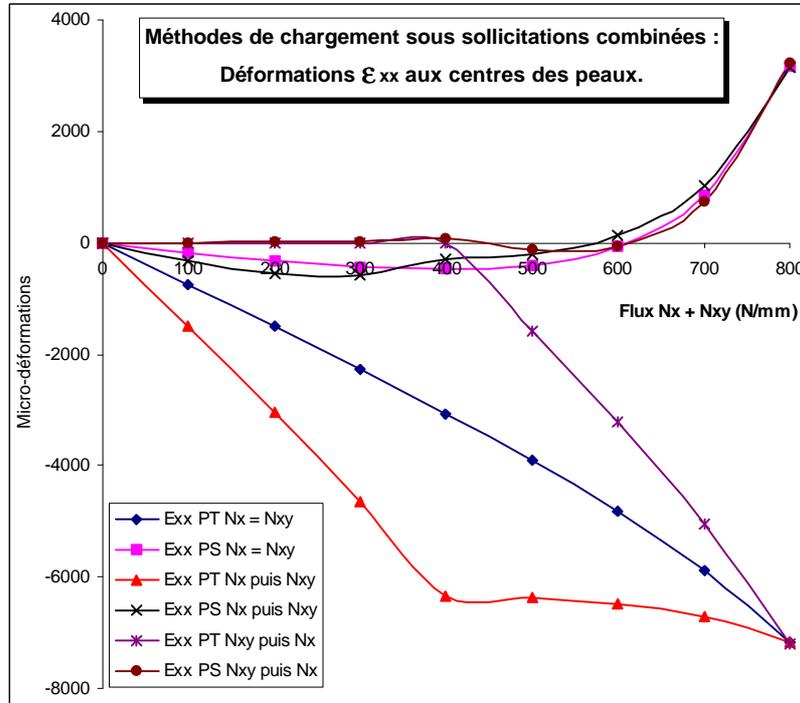


Figure N° 5-48 : Etude des déformations ϵ_{xx} aux centres des peaux sous sollicitations combinées.

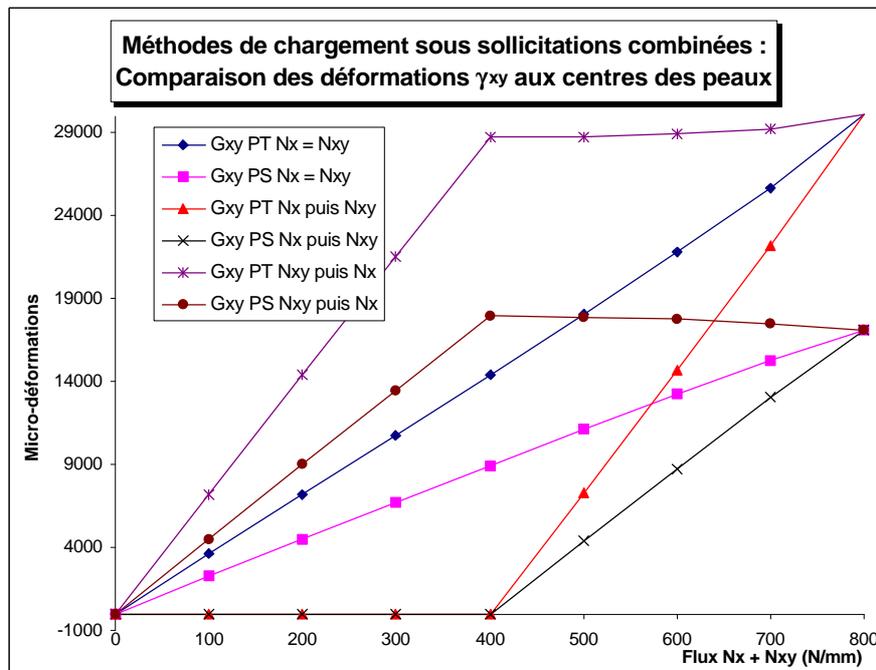


Figure N° 5-49 : Etude des déformations γ_{xy} aux centres des peaux sous sollicitations combinées.

V.3.4 - CONCLUSIONS.

La mécanique des sandwichs dissymétriques s'avère assez prévisible malgré un comportement non linéaire en compression marqué. Le comportement en cisaillement est quant à lui identique aux sandwichs symétriques, hors l'effet de dimensions dû au chargement du sandwich par la seule peau travaillante. En sollicitations combinées, il n'y a pas d'interaction compression/cisaillement. Le comportement en traction n'a pas été présenté car sans surprise et non dimensionnant, en général, pour les structures aéronautiques.

La détermination des charges extrêmes et des marges statiques impose un calcul non linéaire. Par contre, si les coefficients de sécurité induits par la présence d'impacts sont importants, un calcul linéaire peut s'avérer suffisant.

CHAPITRE VI

CONCLUSIONS GENERALES. PERSPECTIVES.

Un moyen d'essai original des structures sandwichs dissymétriques sous sollicitations combinées compression/cisaillement a été développé dans le cadre de cette étude (Chapitre III). Il s'inscrit dans la logique de la pyramide des essais développée par les autorités de certification françaises. A partir d'une géométrie en caisson, une face est remplacée par une éprouvette technologique sandwich dissymétrique non spécifique. Le chargement en flexion 4 points du caisson permet de solliciter l'éprouvette en traction/compression et le chargement en torsion du caisson permet de solliciter l'éprouvette en cisaillement. Les chargements peuvent être appliqués simultanément, ce qui autorise un chargement de l'éprouvette sous sollicitations combinées. Les efforts sont exercés par des vérins hydrauliques et par paliers ce qui crée un chargement à déplacement imposé à l'éprouvette ce qui permet de sauvegarder l'éprouvette pour analyse. Ce moyen d'essai a été calculé par éléments finis, conçu, réalisé et validé au Laboratoire.

Il a démontré globalement plusieurs de ses capacités à :

- *Effectuer des essais statiques à rupture d'éprouvettes technologiques sous sollicitations simples de compression ou de cisaillement.*
- *Effectuer des essais statiques à rupture d'éprouvettes technologiques sous sollicitations combinées compression/cisaillement.*
- *Représenter de manière correcte les conditions aux limites réelles sur aéronef.*
- *Valider les solutions technologiques relatives aux jonctions.*
- *Démontrer de manière expérimentale la validité du concept des sandwichs dissymétriques pour la conception des structures aéronautiques légères.*

Les valeurs de déformation à rupture obtenues sont proches de celles obtenues à rupture en compression sur éprouvette monolithique. Ce résultat démontre que, pour la géométrie d'éprouvette, il n'y a pas eu de flambage et que, d'une manière générale, la résistance spécifique des structures sandwichs dissymétriques est très importante.

La méthode de chargement par déplacements imposés a permis de mettre en évidence une propagation non explosive de fissures sur éprouvette impactée. Les déformations à rupture obtenues sur plaques impactées sont du même ordre de grandeur que celles obtenues par essai sur machine universelle. Ce résultat confirme le caractère intrinsèque du phénomène. Le montage d'essai peut être un moyen d'étude expérimental complémentaire pour la validation de théories développées par ailleurs et la compréhension des phénomènes.

Les essais de type structures sont en général plus complexes que les essais sur machine universelle. Dans notre cas, la présence des jonctions sur l'éprouvette technologiques et dans le caisson central ainsi que la plastification de plaques latérales ne permettent pas un calcul direct du flux entrant dans l'éprouvette. Il a été malgré tout possible de s'affranchir de cette difficulté et de valider les résultats théoriques à partir de la mesure des flux de chargement *in situ* dans la peau travaillante. La corrélation devient alors possible grâce au comportement très particulier de la peau stabilisatrice qui joue un rôle de véritable indicateur de l'état de contrainte et du chargement de l'éprouvette sandwich dissymétrique .

Une théorie des structures sandwichs dissymétriques basées sur des hypothèses en déplacement a été développée au Chapitre IV. Les champs de déplacements retenus sont de type Kirchhoff pour la peau travaillante et membrane pour la peau stabilisatrice. Pour l'âme, la rigidité dans son plan a été négligée mais pas les rigidités en compression et cisaillement transverses. La description non linéaire géométrique retenue repose sur les hypothèses de petites déformations et petites rotations mais grands déplacements.

Une première version simplifiée de la théorie a été utilisée en poutre pour valider ces hypothèses. Un changement de variable dans les inconnues a permis de ramener le nombre d'inconnues numériques à 4. Les équations de l'équilibre sont obtenues par minimisation de l'énergie potentielle totale. La résolution numérique du problème se ramène à la résolution d'un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues, paramétré par la force de chargement \mathbf{F} . Cette théorie simplifiée permet d'obtenir des résultats en accord avec ceux obtenus par des modèles E.F. volumiques non linéaires ce qui valide globalement les hypothèses mécaniques effectuées. De par la simplicité de la formulation, la théorie simplifiée permet une bonne analyse quantitative de la mécanique des poutres sandwichs dissymétriques en compression. Les parts relatives d'énergie dans les phases ont pu aussi être analysées par ce moyen.

En plaque, des fonctions polynômiales ont été utilisées pour représenter la déformée. Les équations de l'équilibre sont trouvées par utilisation du principe des travaux virtuels et la résolution numérique se fait par la méthode de Newton-Raphson. Une formulation matricielle a été adoptée. La théorie a été validée par comparaison à des modèles E.F. volumiques et par corrélation d'essais réalisés sur poutres et sur plaques. De plus, une étude a posteriori, basée sur l'écriture en configuration déformée de l'équilibre des peaux, permet de trouver de façon simple les contraintes de compression transverse dans l'âme.

Un logiciel de prédimensionnement des zones planes courantes des structures sandwichs dissymétriques "SAND" basé sur cette théorie a été écrit en Fortran. Le nombre d'inconnues numériques est fonction du type de conditions aux limites et du degré des polynômes discrétisant les inconnues cinématiques. Il a été démontré que le degré 2 est en général suffisant, ce qui autorise des temps de calcul de l'ordre de la minute sur PC. Le logiciel SAND a été validé industriellement par Eurocopter. L'entrée des données se fait par mots-clef, les déformations aux centres des peaux, les champs de déformations dans les peaux et dans l'âmes sont écrits sur des fichiers formatés ce qui autorise leur post-traitement.

ment par Excel.

L'ensemble de l'étude théorique permet de décrire et de prévoir rapidement le comportement des poutres et plaques sandwichs dissymétriques en statique dans le domaine non linéaire géométrique. Le comportement non linéaire est sensible en compression. La peau stabilisatrice peut, lors d'un chargement en compression du sandwich, être soumise à de la traction et être rompue par cette sollicitation. En cisaillement, la réponse en contraintes et déformations est quasi-linéaire. Seule la flèche est non linéaire. Un effet de taille a été mis en évidence dû au chargement physique du sandwich par la seule peau travaillante. Il existe peu de couplage entre les chargements de cisaillement et de compression.

L'étude théorique réalisée peut être étendue aux sandwichs symétriques travaillant dans leur plan ou en flexion moyennant quelques modifications minimales. La facilité d'emploi et la rapidité des méthodes développées en poutres ou plaques suggère leur utilisation dans des boucles d'optimisations vis-à-vis du poids ou du coût qui seraient d'un intérêt industriel certain. Les études théoriques sur les structures sandwichs dissymétriques pourrait être poursuivies par :

- *L'analyse des structures impactées. Ce cas est réellement dimensionnant et stratégique quant au développement des composites en général.*
- *La modélisation des arrêts de nida qui n'a pas été abordée dans cette étude par soucis de simplification.*
- *L'étude des structures coques.*
- *Le développement d'un élément fini spécifique de sandwich dissymétrique.*

D'un point de vue expérimental, il est souhaitable de s'affranchir de l'effet de taille en cisaillement et d'utiliser des dimensions de panneaux plus proches de la technologie des structures sur aéronef. Il sera possible, en utilisant le même principe, de développer un montage d'essai de dimensions supérieures, adaptable aux panneaux courbes, pour un coût relativement modeste. Des développements à plus long terme peuvent être aussi envisagés pour permettre des sollicitations de fatigue ou thermiques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

A1-1 - REFERENCES RELATIVES A L'INTRODUCTION GENERALE.

- [1] **AEROSPATIALE (1986)** : MATERIAUX COMPOSITES: DANS LA GRANDE MUTATION DES STRUCTURES. *Plaquette interne.*
- [2] **DEN HAAN L.; G REIF (1998)** : Challenges for teaming-up sandwich technology and business success in rail transportation. *Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction, Stockholm 1998, E-MAS Publishing.*
- [3] **GAY Daniel (1991)** : Matériaux Composites. *Editions HERMES.*
- [4] **GUEDRA-DEGEORGES D., THEVENET P., MAISON S. (1997)** : Damage tolerance of sandwich structures. *Proceedings of the Euromech 360 Colloquium, Saint-Etienne 1997, A Vautrin, Kluwer Academic Publishers.*
- [5] **GUSTAFSSON R. N-G. (1998)** : Hybrid stainless assemblies for weight reduction and performance. *Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction, Stockholm 1998, E-MAS Publishing.*
- [6] **HOFF N.J., MAUTNER S.E. (1944)** : Sandwich construction. *Aeronautical Engineering Review, Vol 3, Aug 1944.*
- [7] **HUYBRETCHTS (1998)** : Dimensioning of wound sandwich tramway carriage. *Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction, Stockholm 1998, E-MAS Publishing.*
- [8] **JEC 1998** : Comptes rendus des Journées Européennes des Composites. *Composites n°25-26.*

- [9] **LAINE C. (1998)** : Etude Numérique et Expérimentale du Comportement Mécanique de Plaques et Coques Sandwiches: Développement d'un Elément Non Linéaire Grandes Déformations et Application au Flambement de Coques en Construction Navale. *Thèse Université Joseph Fourier Grenoble 1*
- [10] **MARSHALL A. (1982)** : Sandwich construction. *Handbook of composites, section 21, Van Nostrand Reinhold Company.*
- [11] **OLSSON K.A., MAKINEN K.E., HELLBRATT S.E. (1997)** : The development of sandwich structures for naval vessel during 25 years. *Proceedings of the Euromech 360 Colloquium, Saint-Etienne 1997, A Vautrin, Kluwer Academic Publishers.*
- [12] **OLSSON K.A. (1998)** : Sandwich construction design and experience. *Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction, Stockholm 1998, E-MAS Publishing.*
- [13] **SCHULZE E.J., KESACK W.J. (1990)** : Honeycomb sandwich composite structures used on the V22-Osprey fuselage. *Proceeding of the 22nd International SAMPE technical conference, Boston MA 1990.*
- [14] **STARLINGER A., WALDECK H., DE KALBERMATTEN T. (1998)** : Design and structural testing of the GRP sandwich front cab module of the german BR424-426 suburban train. *Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction, Stockholm 1998, E-MAS Publishing.*
- [15] **WEISS J., BORD C. (1983)** : Les matériaux composites, Tome 2, «Les panneaux sandwichs». *Les publications du CETIM, Ed Lavoisier.*
- [16] **ZENKERT D (1997)** : The handbook of sandwich construction. *EMAS Publishing.*
- [17] **ZHU J. (1995)** : The postbuckling performance of sandwich and composite shells with in-plane shear nonlinearity and unsymmetric layers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 128 (1995) pp 25-47.*

A1-2 - OUVRAGES.

- [18] **ALLEN H. G. (1969)** : Analysis and design of sandwich construction. *Pergamon Press.*
- [19] **AVRIL J. (1974)** : Encyclopédie VISHAY d'analyse des contraintes. *Vishay Micromesures.*
- [20] **BATHE K.-J. (1982)** : Finite element procedures in engineering analysis. *Prentice-Hall*
- [21] **BERTHELOT J.-M. (1996)** : Matériaux composites. *Masson Editeur.*
- [22] **CRISTFIELD M.A. (1991)** : Non linear finite element analysis of solids and structures Volume 1. *Wiley Publishers*

- [23] **GAY Daniel (1991)** : Matériaux Composites. *Editions HERMES*.
- [24] **ESDU n° 67025 (1978)** : Buckling loads under combined longitudinal and transverse direct stress of flat sandwich panels.
- [25] **ESDU n° 68029 (1980)** : Information on the use of data items on sandwich panels.
- [26] **ESDU n° 67024 (1978)** : Buckling loads in shear of flat sandwich panels.
- [27] **LAROZE S. (1998)** : Mécanique des Structures. *Tome 1 et 2, Polycopié de Cours et Exercices Sup'Aéro*.
- [28] **MARSHALL A. (1982)** : Sandwich construction. *Handbook of composites, section 21, Van Nostran Reinhold Company*.
- [29] **NAFEMS (1992)** : Introduction to non-linear finite element analysis. *E. Hinton Editor, Published by NAFEMS*
- [30] **NASA CR-1457 (1969)** : Manual for structural stability analysis of sandwich plates and shells.
- [31] **NIU M.C. Y. (1992)** : Composite Airframe Structures. *Hong-Kong Conmilite Press LTD*.
- [32] **US Military Handbook 23A (1968)** : Design of structural sandwich composites.
- [33] **OLSSON K.A. (1998)**: Sandwich Construction 4, Vol 1 et 2 : *Proceedings. Stockholm 1998. E-mas*.
- [34] **PLANTEMA F. J. (1966)** : SANDWICH CONSTRUCTION. *John Wiley and Sons*.
- [35] **TIMOSHENKO S. (1961)** : Théorie des Plaques et Coques. *Béranger*.
- [36] **VALLAT P. (1950)** : Résistance des matériaux appliquée à l'aviation. *Librairie Polytechnique Ch. Béranger*.
- [37] **VAUTRIN A. (1997)** : Proceedings of the Euromech 360 Colloquium, Saint-Etienne 1997, *Kluwer Academic Publishers*.
- [38] **VINSON J.R. (1999)** : The Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials. *Technomic Publishing Co*.
- [39] **ZAGAINOV G.I., LOZINO-LOZINSKY G.E.** : Composite Materials in Aerospace Design. *Chapman et Hall Ed*.
- [40] **ZENKERT D (1997)** : The handbook of sandwich construction. *EMAS Publishing*.

A1-3 - REFERENCES A DOMINANTE EXPERIMENTALE.

- [41] **ARCAN M., HASHIN Z., VOLOSHIN A. (1978)** : A method to produce uniform plan-stress with application to fiber reinforced materials. *Experimental Mechanics, Vol 18, tome 4 pp141-146.*
- [42] **BACON Matt (1990)** : Testing composites: it ain't what you do, it's the way you do it. *Material edge. Nov/Dec 1990 pp 19-28.*
- [43] **BAU-MADSEN N.K., SVENSEN K.-H, KILDEGAARD A. (1993)** : Large deflection of sandwich plates: an experimental investigation. *Composite Structures 23 (1993) pp 47-52.*
- [44] **BELTRANDO F. (1995)** : Calcul de structures composites sandwich dissymétriques. *Projet de fin d'études Sup' Aéro. Classé Confidentiel Industrie.*
- [45] **CASARI P., CHOQUEUSE D., DE ROECK Y.-H. (1995)** : Corrélation essais-calcul sur plaque circulaire sollicitée en pression répartie. *Journée AMAC 1995 Essais multiaxiaux et composites.*
- [46] **CHAUDONNERET M., GILLES P., LABOURDETTE R., POLICELLA H. (1977)** : Machine d'essai de traction biaxiale pour essais statique et dynamiques. *La recherche Aérospatiale 1997 n°5 pp 299-305.*
- [47] **COGNARD J.Y., FEUARDENT V., VIRELY J.M. (1996)** : Optimisation d'une structure pour essais mécaniques biaxiaux; *IDMME'96, 15-17 Avril 1996, Nantes, France.*
- [48] **DAVIES P., CHOQUEUSE D., BIGOURDAN B. DREVILLON J.-F. (1992)** : Testing of composite panels under uniformly distributed loading. *ECCM Composite Testing and Standardisation (Amsterdam 09/92).*
- [49] **DAVIES P., CHOQUEUSE D., BIGOURDAN B. (1994)** : Essais mécaniques sur panneaux sandwichs de grande dimensions. *Journées AMAC 1994 «Matériaux et structures sandwich».*
- [50] **DE MESQUITA SIQUIERA C. J. (1993)** : DEVELOPPEMENT D'UN ESSAI BIAxIAL SUR PLAQUES COMPOSITES ET UTILISATION POUR LA MODELISATION D'UN MATERIAU S.M.C. *Thèse Université de Besançon.*
- [51] **DIAS M. (1990)** : Adhépore; Accrosténe. *5èmes JOURNEES D'AUTOMNE I.N.E.R.N. Lorient 1990.*
- [52] **EFFENDI R.S. (1993)** : Analyse des Mécanismes de Dégradation en Compression des Composites Unidirectionnels Fibres de Carbone-matrice Organique et Modélisation Associee. *Thèse Sup'aéro.*
- [53] **FARLAY G. L., BAKER D.J. (1983)** : In plane shear test of thin panels. *Experimental mechanics March 1983*
- [54] **GREDIAC M. (1990)** : Description d'un essai de flexion hors-axes sur plaque stratifiée anisotrope. *Comptes rendus de l'académie des sciences Vol 311 n°8 pp 917-922.*
- [55] **GUEDRA-DEGEORGES D., THEVENET P., MAISON S. (1997)** : Damage tolerance of sandwich struc-

- tures. *Proceedings of the Euromech 360 Colloquium, Saint-Etienne 1997, A Vautrin, Kluwer Academic Publishers.*
- [56] **HAYMAN B., WIESE M., DAVIES D., CHOQUESE D., HOYNING B., MITUSH P. (1998)** : Foam-cored sandwich panels under pressure loading: some new tests and analyses. *Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction, Stockholm 1998, E-MAS Publishing.*
- [57] **HOFF N.J., MAUTNER S.E. (1945)** : The buckling of sandwich-type panels. *Journal of the Aeronautical Science. Vol 12 July 1945.*
- [58] **HORGAN C.O., BAXTER S.C. (1997)** : Saint-Venant's principle for sandwich structures. *Proceedings of the Euromech 360 Colloquium, Saint-Etienne 1997, A Vautrin, Kluwer Academic Publishers.*
- [59] **INIZAN G. (1986)** : Endommagement d'une plaque trouée en carbone-époxy sous chargement biaxial monotone et cyclique. *La recherche aérospatiale n°1, 1986.*
- [60] **KAY R. D. (1990)** : Buckling of composite sandwich panels and symmetric laminate plates. *4th year project report Imperial college London, Labo structures Sup'Aero.*
- [61] **KHERBOUCHE A. (1994)** : CONTRIBUTION AU PREDIMENSIONNEMENT DES STRUCTURES COMPOSITES SANDWICHES. *Thèse Université du Mans.*
- [62] **KLEIN Hermann (1989)** : General about buckling tests with thin-walled shells. *Rapport DLR- Mitt; 89-13.*
- [63] **KUCZMA S. C., VIZZINI A. J. (1999)** : Failure of sandwich to laminate sandwich structures. *AIAA Journal, Vol 37, No 2, February 1999.*
- [64] **KUENZI E.W. (1947)** : Stability of a few curved panels subjected to shear. *Forest Products Laboratory, Report n°1571 (1947).*
- [65] **LARDEUR P., BEN ZINEB T., BILLOET J.L., (1996)** : A new testing machine for pure bending under large displacements and rotations: application for composite parts. *ECCM-7. Seventh European Conference on Composite Materials.*
- [66] **MILLOT T. (1990)** : Etude d'un Essai Original de Flexion-torsion 4 Points et Application à la Modélisation du Comportement des Matériaux Composites en Contraintes Complexes. *Thèse Université de Besançon.*
- [67] **PAREWYCK S., VANTOMME J. (1998)** : The buckling phenomenon of sandwich beams: a parametric study. *Congrès Euromech 360: "Mechanics of Sandwich Structures" St-Etienne 1998 (France).*
- [68] **PERREUX D., MAIRE J.F., SIQUEIRA C., VARCHON D., OYTANA C. (1994)** : Multiaxial testing of composite materials. *Matériaux et Techniques n°6-7 1994.*

- [69] **PETERS Roger W. (1948)** : Buckling tests of flat rectangular plates under combined shear and longitudinal compression. *NACA Technical Note n°1750*. <http://www-techreports.larc.nasa.gov/cgi.bin/NTRS>.
- [70] **RAHIER O., GRANDIDIER J.L.** : Amélioration de l'essai de compression pure développé par l'Aérospatiale pour les composites. *Actes du Congrès Français de Mécanique 1997 (Poitiers)*, pp 165-168.
- [71] **RAZI H.** : (*Boeing Commercial Airplane*), "Closing Remarks". *Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction, Stockholm 1998*.
- [72] **RAZI H., WARD S. H., BICKFORD M.D. (1998)** : Strength prediction of notched thin-skin honeycomb sandwich structures. *Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction, Stockholm 1998, E-MAS Publishing*
- [73] **REHFIELD L. W., ZISCHKA P. J., CHANG S., FENTRESS M. L. (1995)** : Experimental evaluation of a box beam specifically tailored for chordwise deformation. *AIAA Journal Vol 33, N°1 pp 116-119*.
- [74] **ROBERTS J.C., BAO G., CRITCHFIELD M., BEACH J., BARLETT S. (1998)** : Buckling and bending of rectangular orthotropic sandwich plates. *Pré-Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction, Stockholm 1998*.
- [75] **ROMEO G., FRULLA G. (1992)** : Buckling and postbuckling behaviour of anisotropic plates under combined biaxial compression and shear loads. *ECCM Composite Testing and Standardisation (Amsterdam 09/92)*.
- [76] **ROUCHON J. (1998)** : Certification des structures en matériaux Composites. *Stage SAE Formation Continue M15*.
- [77] **SCIAMMARELLA C.A. (1982)** : The Moiré method - A review. *Experimental Mechanics, Nov 1982 pp 418-33*.
- [78] **SHEAHEN P., BERSUCH L., HOLCOMBE T., BARON B. (1998)** : Robust Composite Sandwich Structures. *AIAA Paper n° A98-25225/ AIAA 98-1873*.
- [79] **SUMNER G. (1991)** : 20 MN and 100 MN multi-actuators wide plate testing machines in the structural integrity centre of the UKAEA. *IAEA special meeting on large-scale testing. Stuttgart 1991*.
- [80] **SUTCLIFFE M.P.F., PETRAS A. (1999)** : Failure mode map for honeycomb sandwich panels. *Composite Structures, Vol 44, Issue 4, pp 237-252, Avril 1999*.
- [81] **TENNYSON R. C. ELLIOTT. W. G. (1983)** : Failure analysis of Composite Laminates including Biaxial Compression. *NASA -CR-172192*.
- [82] **THEVENET P., GRAPPEIN R., GUEDRA-DEGEORGES D. (1998)** : Behaviour prediction of a debonding in a sandwich material. *Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction, Stockholm 1998, E-MAS Publishing*

- [83] **THOMAS M. (1998)** : Calculs en tolérances aux dommages. *Stage SAE Formation Continue M15*.
- [84] **UEMURA M., IWAI H. (1994)** : Compression bending test for carbon fiber reinforced polymers. *Materiaux et Techniques n°6-7 (1994)*.
- [85] **VIDAL J.F. (1992)** : Etude Et Mise En Oeuvre D'un Montage D'essais Pour Le Flambage Des Plaques Par Cisaillement. *Rapport de D.E.A. Laboratoire Structures Sup'Aéro n°180/B4*.
- [86] **VINCON I., PINNA C., SIGETY P. (1996)** : Approche multi-échelle du comportement en compression des composites carbone-résine. *La recherche aérospatiale, 1996, n° 5-6, pp 441-55*.
- [87] **VITTECOQ E. (1991)** : SUR LE COMPORTEMENT EN COMPRESSION DES STRATIFIES CARBONE-EPOXY. *Thèse Université Paris 6*.
- [88] **WANIEWSKI M., DIETRICH L. (1996)** : Experimental setup for tests under biaxial tension of anisotropic cruciform specimen. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2, 34, 1996*.
- [89] **WISNOM Michael R. (1992)** : On the high compressive strains achieved in bending tests on unidirectional carbon/fibre epoxy. *Composites Science and Technology 43 (1992) pp 229-235*.
- [90] **WOLF K., KOSSIRA H. (1992)** : An efficient test method for the experimental investigation of the postbuckling behaviour of curved shear panels. *ECCM Composite Testing and Standardisation (Amsterdam 09/92)*.
- [91] **YUSUFF S. (1955)** : Theory of wrinkling in sandwich construction. *J. Royal Aerospace Society 64 591 164-67*

A1-4 - RÉFÉRENCES À DOMINANTE THÉORIQUE.

- [92] **ALLEN H. G., ZENG Z. (1997)** : Classification of sandwich panels behaviour. *Proceedings of the Euro-mech 360 Colloquium, Saint-Etienne 1997, A Vautrin, Kluwer Academic Publishers*.
- [93] **AL-QARRA Husam H. (1989)** : Finite deflection of sandwich beams and plates by finite element method. *Journal of Engineering Mechanics (1989), Vol 115, n°6, pp 1318-1335*.
- [94] **ALWAN A.M. (1964)** : Large deflection of rectangular sandwich plates with orthotropic core. *AIAA Journal Vol 2, N°10, (1964) pp 1820*.
- [95] **BARDELL N.S., GANGE G.J (1994)** : An efficient static analysis of sandwich beams. *Composite Structures 29 no 1 (1994) pp 107-117*.

- [96] **BALEY C., MATHERON G., CAMPION F. (1990)** : Approche expérimentale et numérique du comportement de la liaison entre une zone monolithique et une zone sandwich à âme de type mousse PVC. 5èmes JOURNEES D'AUTOMNE I.N.E.R.N. Lorient 1990.
- [97] **BOROVKOV A., MISNIK Y. (1998)** : Finite element stress and vibration analysis of sandwich and multi-layered composite structures. *Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction, Stockholm 1998, E-MAS Publishing.*
- [98] **BROWN R.E., STONE M.A. (1997)** : On the use of polynomial series with the Rayleigh-Ritz method. *Composite Structures Vol 39 N° 3-4 pp 191-196.*
- [99] **CHAI G.B., CHUWA L.S. (1999)** : Stress distribution in sandwich beams under tension. *Composite Structure., Vol 45, Issue 3, pp 195-204, Juin 1999.*
- [100] **CHAMIS CC, AIELLO RA, MURPHY PLN (1986)** : Composite sandwich thermostructural behaviour: computational simulation. *Proc 27th Struct Structural Dyn and Mat Conf , San Antonio TX, May 19-21, 1986, Technical Papers, Part 1, 370-381.*
- [101] **CHANG Jeng-Shian (1992)** : Overall buckling and postbuckling behavior of beam-like sandwich plates. *Composite Science and Technology 45 (1992) pp 55-63.*
- [102] **CHENG Z. Q., WANG X., HUANG M. (1993)** : Large deflection of rectangular Hoff sandwich plates. *International Journal of Solids and Structures Vol 30 n°7 pp 2335-46.*
- [103] **CHO M., PARMENTER R. R. (1992)** : An efficient higher-order plate theory for laminated composites. *Composite Structures Vol 20 pp 113-123 1992.*
- [104] **ELSPASS W, FLEMMING M (1990)** : Analysis of precision sandwich structures under thermal loading. *ICAS Proc 1990, 17th Congress of the Int Council Aeronaut Sci, Stockholm, Sweden, Sept 9-14, 1990, Vol 2, 1513-1518.*
- [105] **FERREIRA A.M., TORRES-MARQUES A., CESAR DE SA J.C (1997)** : Comparison of three shear-deformation theories in the non-linear analysis of sandwich shell elements. *Proceedings of the Euro-mech 360 Colloquium, Saint-Etienne 1997, A Vautrin, Kluwer Academic Publishers.*
- [106] **FROSTIG Y., BARUCH M., VILNAY O., SHEINMAN I. (1992)** : High-order theory for sandwich beam behavior with transversely flexible core. *Journal of Engineering Mechanics, Vol 118, n°5 pp 1026-1043.*
- [107] **FROSTIG Y., BARUCH M. (1994)** : High-order bending of sandwich panels with a transversely flexible core. *Congrès AIAA-94-1934-CP.*
- [108] **FROSTIG Y., PELED D. (1995)** : High-order bending of piecewise uniform sandwich beams with a tapered transition zone and a transversely flexible core. *Composite Structures 31(1995) pp 151-162.*
- [109] **FROSTIG Y., SOKOLINSKI V. (1997)** : Effect of boundary conditions in higher-order buckling of sandwich panels with transversely flexible core. *Proceedings of the Euro-mech 360 Colloquium, Saint-Etienne*

- 1997, *A Vautrin, Kluwer Academic Publishers.*
- [110] **FROSTIG Y. (1998)** : Inaccuracies and validity of simplified models in the theory of sandwich structures. *Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction, Stockholm 1998, E-MAS Publishing.*
- [111] **HAN-KIN KAN, JU-CHIN HUANG (1967)** : Large deflection of rectangular sandwich plates. *AIAA Journal Vol 5, N°9, (1967) pp 1706.*
- [112] **HILDEBRANT M., RIIHENTAU J. (1998)** : Benefits and consequence of non-linear effects in sandwich panels fields. *Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction, Stockholm 1998, E-MAS Publishing.*
- [113] **HOFF N.J., MAUTNER S.E. (1945)** : The buckling of sandwich-type panels. *Journal of the Aeronautical Science. Vol 12 July 1945.*
- [114] **HOFF N.J., MAUTNER S.E. (1948)** : Bending and buckling of sandwich beams. *Journal of the Aeronautical Science. Vol 15 Dec 1948.*
- [115] **HOFF N.J., KUO TAI YEN, SALERNO V. L. (1950)** : Buckling of rectangular sandwich Plates subjected to edgewise compression with loaded edges simply supported and unloaded edges clamped. *Naca Technical Note 2256.*
- [116] **HOLT P.J., WEBBER J. P. H. (1982)** : Exact solution to some honeycomb sandwich beam, plate and shell problems. *Journal of Strain Analysis vol 17 No 1 1982.*
- [117] **JEON J.S., HONG C.S. (1992)** : Bending of tapered anisotropic sandwich plates with arbitrary edge condition. *AIAA Journal Vol 30 N° 7 July 1992 pp1762-1769.*
- [118] **JEUSETTE Jean-Pierre, LASCHET Gottfried (1990)** : Pre and postbuckling finite element analysis of curved composite and sandwich panels. *AIAA journal Vol 28 n°7 pp 1233-1239.*
- [119] **JORGENSEN A.H. (1998)** : Nonlinear design schedule and proper failure criterion for large sandwich structures. *Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction, Stockholm 1998, E-MAS Publishing.*
- [120] **KAMIYA N. (1975)** : Governing Equation for large deflection of sandwich plates. *AIAA Journal Vol 2, N°14, (1967) pp 250.*
- [121] **KAMIYA N. (1978)** : Governing Equation for orthotropic sandwich plates at large deflection. *Revue roumaine de science et techniques, Tome 23, n°1, (1978) pp 61-73.*
- [122] **KAO J-S, GUZMAN-BARON L., HARTMANN A.L. (1974)** : Large deflection of rectangular sandwich plates. *International Journal of Solids and Structures Vol 10 (1974) pp 587-601.*
- [123] **KAY R. D. (1990)** : Buckling of composite sandwich panels and symmetric laminate plates. *4th year*

project report Imperial college London, Labo structures Sup'Aero.

- [124] **KIM C. G., HONG C. S. (1988)** : Buckling of unbalanced anisotropic sandwich plates with finite bonding stiffness. *AIAA Journal Vol 26 n°8 pp 982-988.*
- [125] **LAINÉ C. (1998)** : Etude Numérique et Expérimentale du Comportement Mécanique de Plaques et Coques Sandwiches: Développement d'un Élément Non Linéaire Grandes Déformations et Application au Flambement de Coques en Construction Navale. *Thèse Université Joseph Fourier Grenoble 1*
- [126] **LEE L.J., FAN Y.J (1996)** : Bending and vibration analysis of composite sandwich plates. *Computers and Structures Vol 60, No 1 pp 103-112, 1996.*
- [127] **LO K.H., CHRISTENSEN R.M., WU E.M. (1977)** : A higher -order theory of plate deformation: Part 1: Homogeneous plates; Part 2 Laminated plates. *Journal of Applied Mechanics, December 1977 pp 663-676.*
- [128] **MADENCI E., BARUT A. (1998)** : Analysis of composite sandwich panels via a triangular shell element based on higher-order theory. *Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction, Stockholm 1998, E-MAS Publishing.*
- [129] **MAHE M. (1991)** : Analyse Non Linéaire Géométrique des Coques par Éléments Finis Isoparamétriques Dégénérées avec Intégration Explicite dans L'épaisseur. *Thèse Sup'aéro.*
- [130] **MAHE M. (1998)** : Analyse Non Linéaire Géométrique. *Cours du D.E.A. de Génie Mécanique de Toulouse.*
- [131] **MALLIKARJUNA, KANT T. (1993)** : A critical review and some results of recently developed refined theories of fiber-reinforced laminated composites and sandwiches. *Composite Structures 23 (1993) pp 293-312.*
- [132] **MANJUNATHA B.S., KANT T. (1992)** : Computation of transverse/interlaminar stresses of fibre-reinforced composites and sandwich laminates. *Final report (Indian Institute of Technology) for Indian Government, Ministry of Defense.*
- [133] **MANJUNATHA B.S., KANT T. (1993)** : New theories for symmetric/ unsymmetric composite and sandwich beams with C^0 finite elements. *Composite Structures 23 (1993) pp 293-312.*
- [134] **MEYER-PIENING H.R. (1997)** : Stress distribution in a 4 points or 3 points bending probe. *Proceedings of the Euromech 360 Colloquium, Saint-Etienne 1997, A Vautrin, Kluwer Academic Publishers.*
- [135] **MEYER-PIENING H.R. (1998)** : Buckling and wrinkling of sandwich columns with different faces. *Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction, Stockholm 1998, E-MAS Publishing.*
- [136] **MINDLIN R. (1951)** : Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *JOURNAL OF APPLIED MECHANICS, Vol 18, n°1; TRANS ASME, Vol 73, March 1951, pp 31-38.*

- [137] **MINGUET Pierre, DUGUNDJI John, LAGACE Paul A. (1989)** : Postbuckling behavior of laminated plates using a direct energy-minimisation technique. *AIAA Journal Vol 27, n° 12 (1989)*.
- [138] **NOOR Ahmed K., BURTON Scott W (1995)** : Assesment of computational models for sandwich panels and shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 124 (1995) pp 125-151*.
- [139] **NOOR Ahmed K., BURTON Scott W., BERT C. W. (1996)** : Computational models for sandwich panels and shells. *Applied Mechanics Rewiew Vol 9 (1996) pp 155-199*.
- [140] **OJALVO I.U. (1977)** : Departure from classical beam theory in laminated, sandwich and short beams. *AIAA Journal Vol 15 no 10 (1977) pp 1518-1521*.
- [141] **PAGANO N.J. (1970)** : Exact solution for rectangular bidirectionnal composites and sandwich plates. *Journal of Composite materials (1970), Vol 4, pp 20*.
- [142] **PAYDAR N., LIBOVE C. (1986)** : Stress analysis of sandwich plates with unidirectionnal thickness variation. *Journal of Applied Mechanics Sept 1996 Vol 53 pp 609-613*.
- [143] **PHAM DANG T., VERCHERY G. (1976)** : Théorie des plaques sandwiches assurant la continuité du déplacement et de la contrainte aux interfaces. *C.R. Acad Sciences Paris 2A*.
- [144] **PIERON P (1998)** : Saint-Venant effects in the losipescu specimen. *Journal of Composite Materials, Vol 32, No 22 (1998) pp 1986-2015*.
- [145] **RAO R. N., VALSARAJAN N.K. (1982)** : Some results of the finite deflection analysis of clamped skew sandwich plates. *Journal of Structural Mechanic (1982) 10(2) pp 135-144*.
- [146] **RAO R. N., VALSARAJAN K.V. (1983)** : Large deflection of clamped skew sandwich plates by parametric differentiation. *Computers and Structures (1983), Vol 17, n°4, pp 599-602*.
- [147] **RAO R. N., VALSARAJAN K.V. (1986)** : Integral-Equation solution for the finite deflection of clamped skew sandwich plates. *Computers and Structures (1986), Vol 22, n°4, pp 665-668*.
- [148] **REDDY J.N. (1984)** : A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composites Plates. *Journal of Applied Mechanics Vol 51 (Dec 1984) pp 745-752*.
- [149] **REDDY J.N., KHDEIR A.A. (1989)** : Buckling and vibration analysis of laminated composites plates using various plates theories. *AIAA Journal, Vol 27 n°12 pp 1808-1817*.
- [150] **REISSNER E. (1944)** : On the theory of bending of elastic plates. *Journal of Mathematics and Physics, Vol 23, 1944 pp 184-191*.
- [151] **REISSNER E. (1948)** : Finite deflection of sandwich plates., *Journal of the Aeronautic Science, 1948, Vol 15 p435*.
- [152] **TOURATIER M., POLIT O. (1997)** : A refined shear-deformation finite element. *Proceedings of the Euromech 360 Colloquium, Saint-Etienne 1997, A Vautrin, Kluwer Academic Publishers*.

- [153] **VANUCCI P., AIZAVAZZADEH S., VERCHERY G. (1997)** : A comparative analysis of some theory and finite elements for sandwich plates and shells. *Proceedings of the Euromech 360 Colloquium, Saint-Etienne 1997, A Vautrin, Kluwer Academic Publishers.*
- [154] **VLACHOUTSIS S. (1992)** : Shear correction factors for plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol 33 pp 1537-1552 (1992).*
- [155] **WITHNEY J. M. (1972)** : Stress analysis of thick laminated composite and sandwich plates. *Journal of Composites Materials, Vol 6, pp 426-440.*
- [156] **XAVIER Pascal B., CHEW C. H., LEE K. H. (1992)** : Static response of unsymmetric sandwich beams using an improved zig-zag model. *Composites Engineering, Vol3 n°3 pp 235-248.*
- [157] **XAVIER Pascal B., CHEW C. H., LEE K. H (1994)** : An improved zig-zag model for the vibration of soft-cored unsymmetric sandwich beams. *Composites Engineering, Vol 4 n°5 pp 549-564.*
- [158] **ZHOU H.B., LI G.Y. (1996)** : Free vibration of sandwich plates with laminated faces using spline finite point method. *Computers and Structures Vol 59, No 2 pp 257-263, 1996.*
- [159] **ZHU Jinfu (1995)** : The postbuckling performance of sandwich and composite shells with in-plane shear nonlinearity and unsymmetric layers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 128 (1995) pp 25-47.*
- [160] **ZHU Jinfu (1995)** : Application of natural approach to nonlinear analysis of sandwich and composite plates and shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 120 n°3-4 (1995) pp 355-388.*

A1-5 - RAPPORTS, STAGES ET PUBLICATIONS.

- [161] **BELTRANDO F. (1995)** : Calcul de structures composites sandwichs dissymétriques. *Projet de fin d'études Sup' Aéro. Classé Confidentiel Industrie.*
- [162] **BOYDEN Kenneth (1998)** : NON LINEAR FINITE ELEMENT ANALYSIS OF ASYMMETRICAL SANDWICH STRUCTURES. *Rapport de Fin d'Etudes de Hogeschool Haarlem (Pays-Bas) effectuées au Laboratoire Structures Sup'Aéro.*
- [163] **CASTANIE B., BARRAU J.J., CREZE S., JAOUEN J.P. (1997)** : Theoretical and experimental analysis of dissymmetric sandwich plates with compressible core. *Proceedings of the Euromech 360 Colloquium, Saint-Etienne 1997, A Vautrin, Kluwer Academic Publishers.*

- [164] **CASTANIE B., BARRAU J.J., CREZE S., JAOUEN J.P. (1998)** : Experimental analysis of assymetric sandwich plates under compression, shear and combined loadings. *Proceedings of the Fourth International Conference on Sandwich Construction, Stockholm 1998, E-MAS Publishing.*
- [165] **CASTANIE B., BELTRANDO F., JAOUEN J.P. (1999)** : Analyse non linéaire géométrique de poutres sandwichs dissymétriques. *Congrès Francais de Mécanique AUM 1999, Toulouse.*
- [166] **CASTANIE B., BARRAU J.J. (1994)** : **Avant projet de montage d'essai de plaques sandwichs en sollicitations combinées compression-cisaillement.** *Rapport d'avancement des travaux avril 1994.*
- [167] **CASTANIE B., BARRAU J.J. (1994)** : **Montage d'essai de plaques sandwichs en sollicitations combinées : présentation de la définition finale.** *Rapport d'avancement des travaux septembre 1994.*
- [168] **CASTANIE B., BARRAU J.J. (1995)** : **Validation du montage d'essai de plaques sandwichs. Theorie des plaques sandwichs dissymétriques.** *Rapport d'avancement des travaux décembre 1995.*
- [169] **CASTANIE B., BARRAU J.J. (1996)** : **Rapport intermédiaire sur les essais de plaques sandwichs.** *Rapport d'avancement des travaux juin 1996.*
- [170] **CASTANIE B., BARRAU J.J. (1997)** : **PLAQUES SANDWICHS DISSYMETRIQUES, Tome 1 : THEORIE ET PROGRAMMATION .** *Rapport Final Contrat Eurocopter/ADERMIP.*
- [171] **CASTANIE B., BARRAU J.J. (1998)** : **PLAQUES SANDWICHS DISSYMETRIQUES, Tome 2 : ESSAIS .** *Rapport Final Contrat Eurocopter/ADERMIP.*
- [172] **CRUZ R. (1995)** : Estudio del pandeo de placas sandwich disimétricas mediante elementos finitos. *Stage de fin d'étude Escuela Technica Superior de Ingenieros industriales SAN SEBASTIAN (Espagne) effectué au Laboratoire Structures Sup'Aéro.*
- [173] **LECARPENTIER, MAES (1998)** : **ESSAI EN COMPRESSION SUR PLAQUES IMPACTEES. P.I.R.** *Laboratoire Structures Sup'Aéro n°180/B4.*
- [174] **ROUTABOUL S. (1996)** : Essai de plaques sandwichs dissymétriques. *Rapport de Stage de D.E.A Génie Mécanique Toulouse.*
- [175] **RIVEROLA P. (1995)** : Modèle analytique non linéaire de poutres sandwichs dissymétriques. *Rapport de Stage de D.E.A Génie Mécanique Toulouse.*
- [176] **RODRIGO LEON DEL PEDREGAL (1997)** : Essai sur plaques sandwichs dissymétriques. *Rapport de stage Mastère T.A.S. Sup'Aéro.*
- [177] **YBERT P. (1994)** : Modélisation d'un montage d'essai de plaques sandwichs dissymétriques en sollicitations combinées. *Rapport de Stage de D.E.A Génie Mécanique Toulouse.*

A1-6 - NORMES.

- [178] **ASTM STANDARDS : C393** : Standard test method for flexural properties of flat sandwich construction.
- [179] **ASTM STANDARDS : C394** : Standard test method for shear fatigue of sandwich core materials.
- [180] **ASTM STANDARDS : C480** : Standard test method for flexure-creep of sandwich construction.
- [181] **ASTM STANDARDS : C481** : Standard test method for laboratory aging of sandwich construction.
- [182] **ASTM STANDARDS : C364** : Standard test methods for edgewise compression strength of flat sandwich construction.
- [183] **ASTM STANDARD : C365** : Standard test methods for flatwise compression strength of sandwich cores.
- [184] **ASTM STANDARDS : C366** : Standard test methods for measurement of thickness of sandwich cores.
- [185] **ASTM STANDARDS : C273** : Standard test method for shear properties in flatwise plane of flat sandwich construction or sandwich cores.
- [186] **ASTM STANDARDS : C297** : Standard test method for tensile strength of flat sandwich construction in flatwise plane.
- [187] **ASTM STANDARDS : C363** : Standard test method for delamination strength of honeycomb type core material.

DOCUMENTS PHOTOGRAPHIQUES

Cette annexe a pour objectif de présenter les diverses photographies qui détaillent la conception du montage d'essai et les faciès de rupture des éprouvettes.

A2-1) CONCEPTION DU MONTAGE :

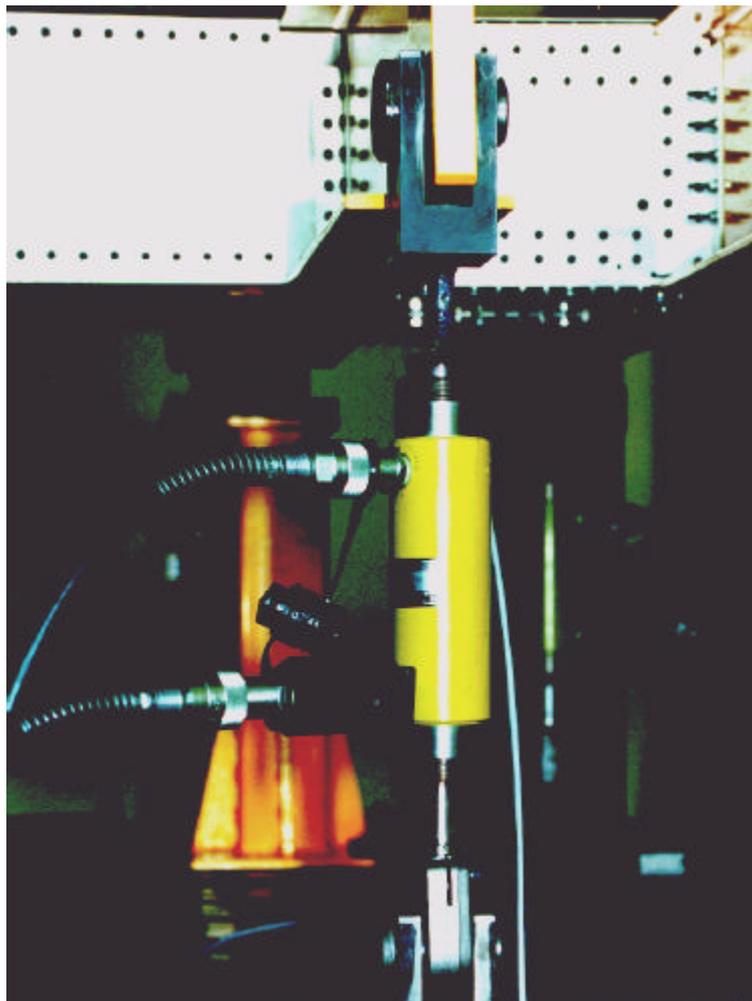


Photo N° A2-1 : Vérin de torsion

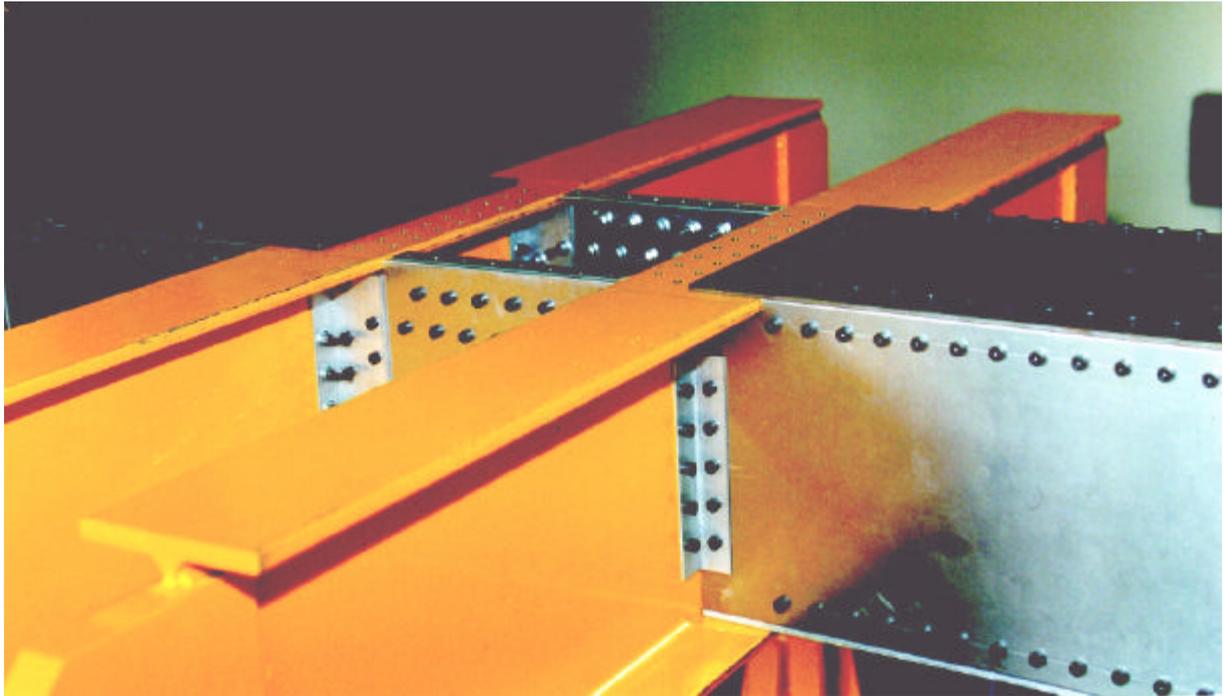


Photo N° A2-2 : Vue partie centrale et IPN

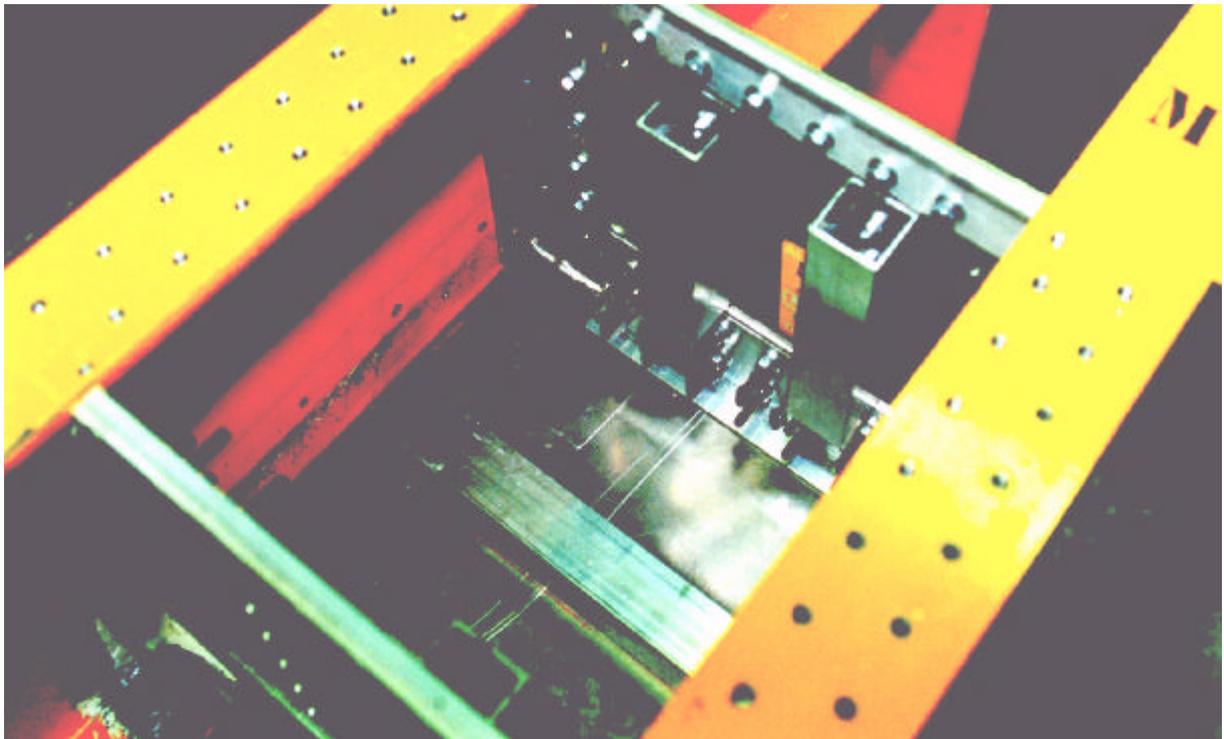


Photo N° A2-3 : Zoom caisson central

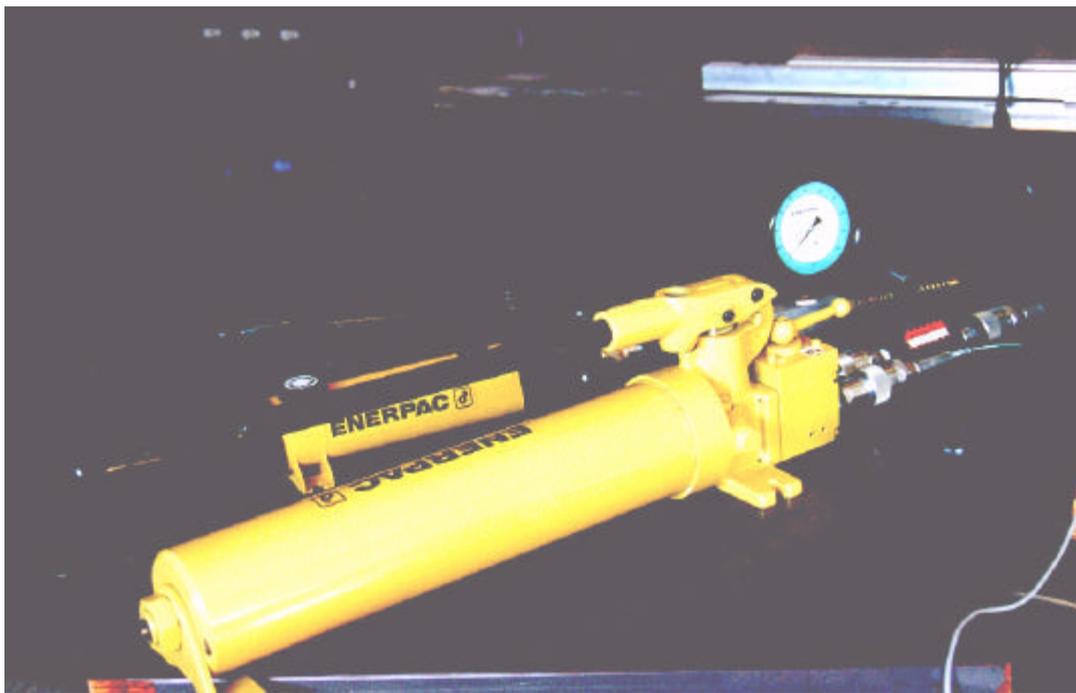


Photo N° A2-4 : Pompes.



Photo N° A2-5 : Vue des PC d'acquisition et de commande de la chaîne HBM.

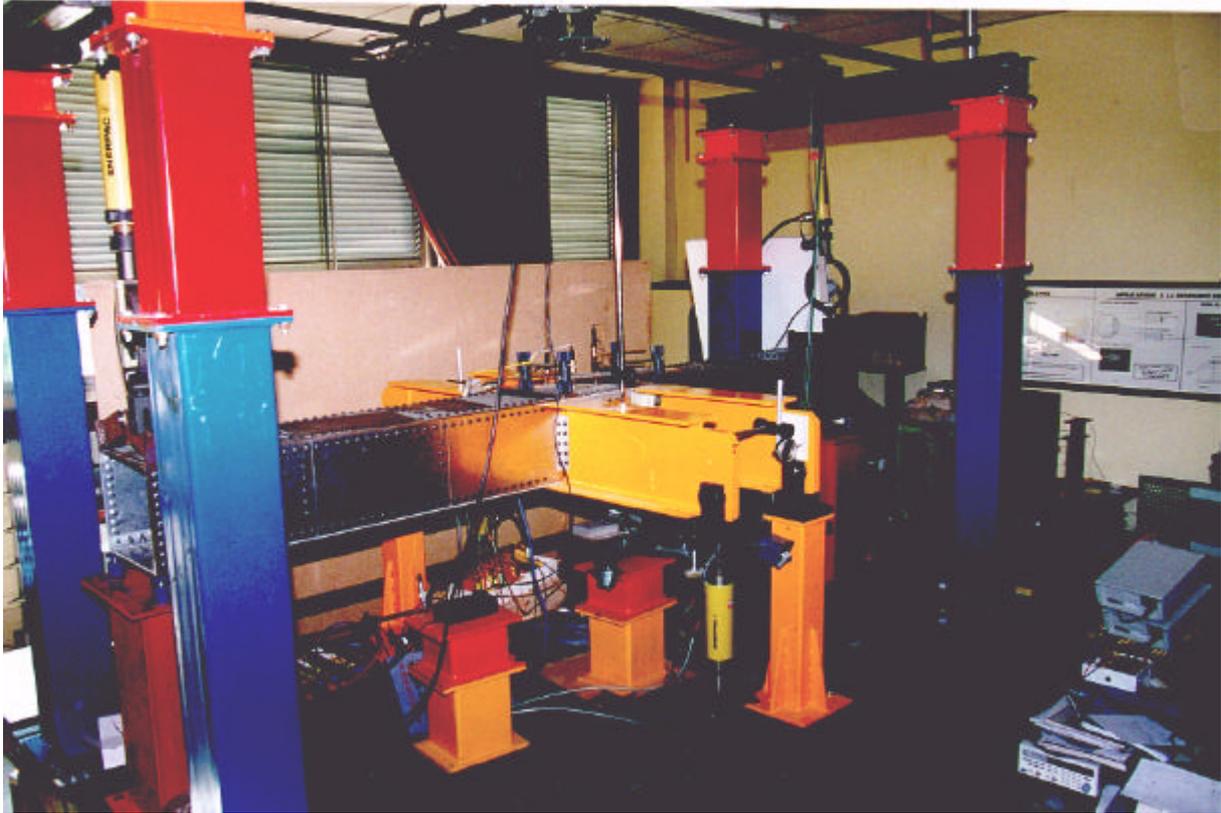


Photo N° A2-6 : Vue du montage avec photoélasticité et capteurs de déplacements.



Photo N° A2-7 : Montage d'essai avec grille de Moiré

A2-2) RUPTURE DES EPROUVETTES :



Photo N° A2-8 : Rupture de la première éprouvette en compression.

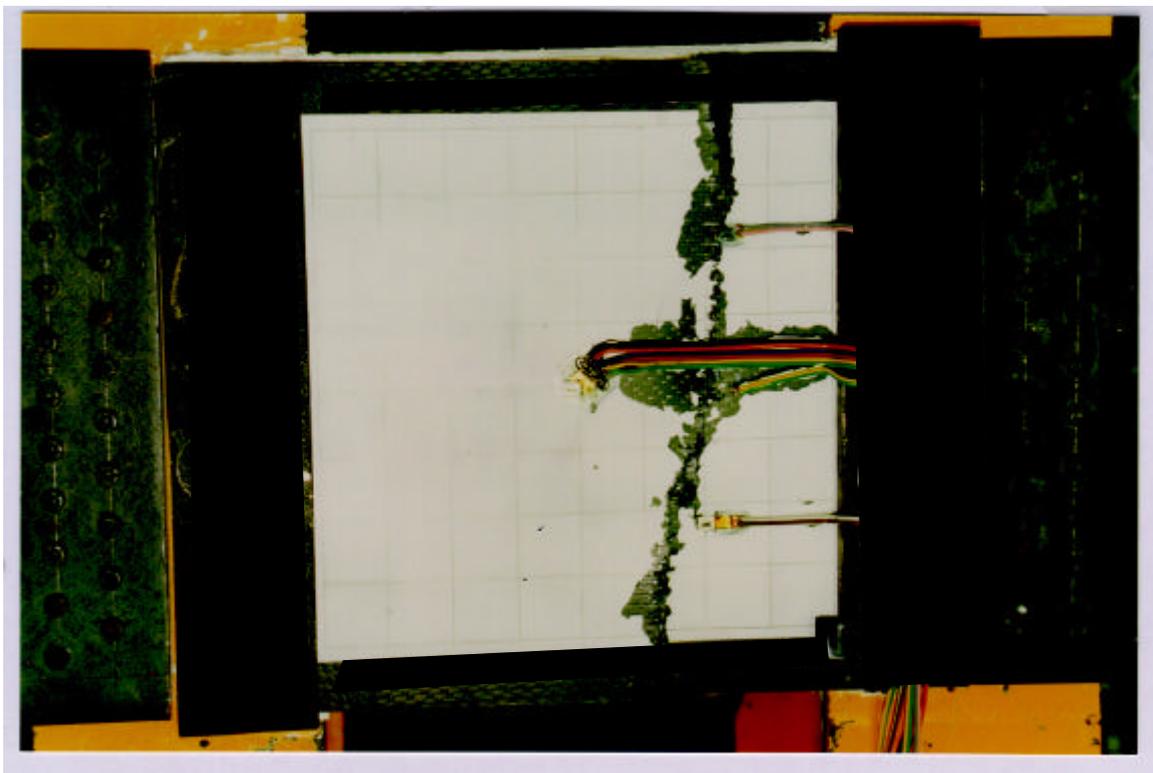


Photo N° A2-9 : Rupture de la deuxième éprouvette en compression (photo sur le montage)



Photo N° A2-10 : Rupture dans la zone monolithique de la première éprouvette en cisaillement.

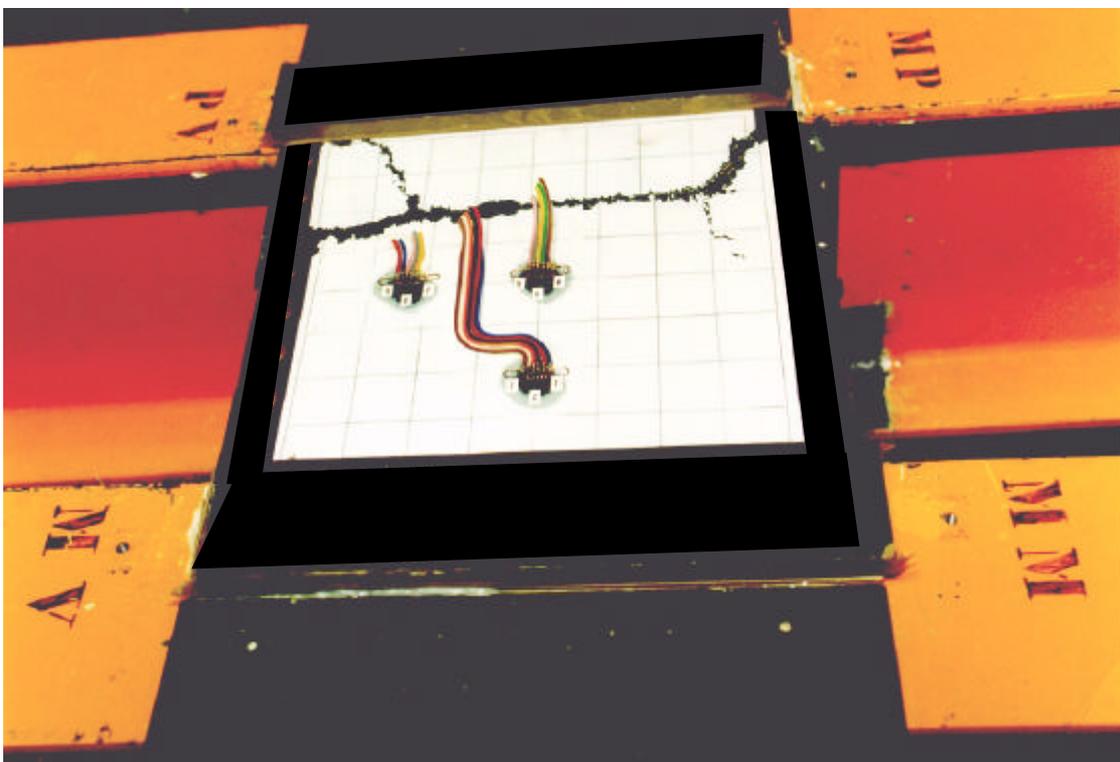


Photo N° A2-11 : Rupture en cisaillement éprouvette n°2

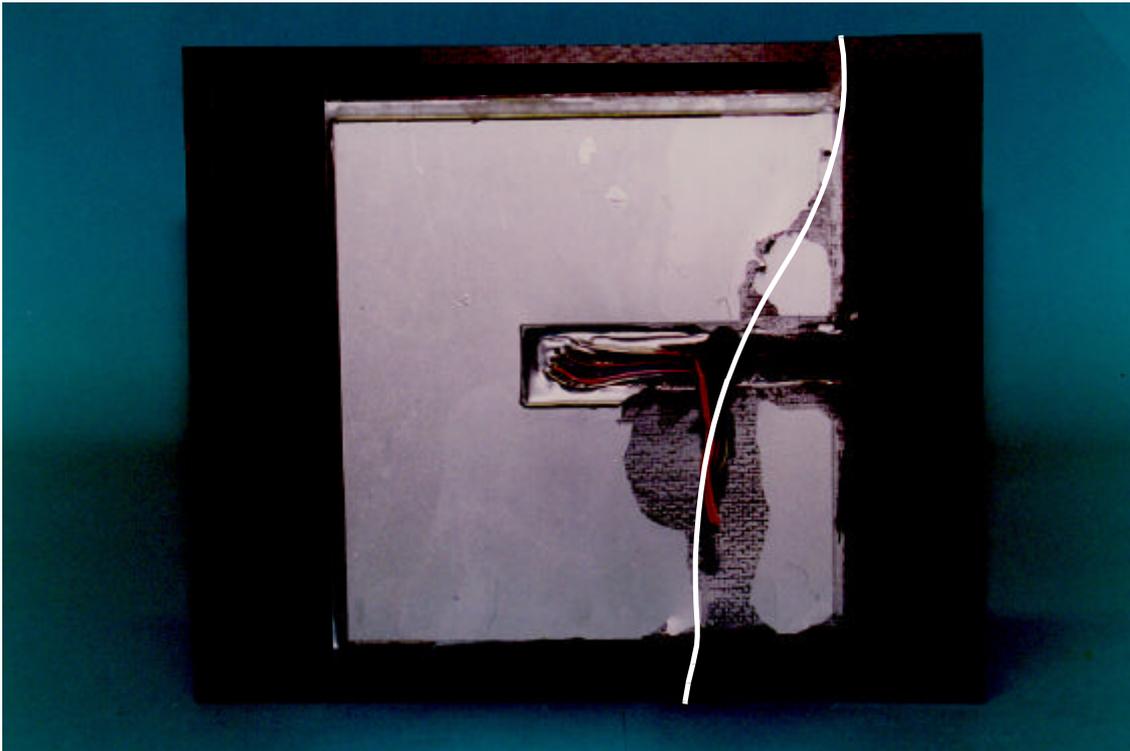


Photo N° A2-12 : Rupture sous sollicitations combinées éprouvette n°1



Photo N° A2-13 : Rupture sous sollicitations combinées éprouvette n°2

A2-3) EPROUVETTES IMPACTÉES

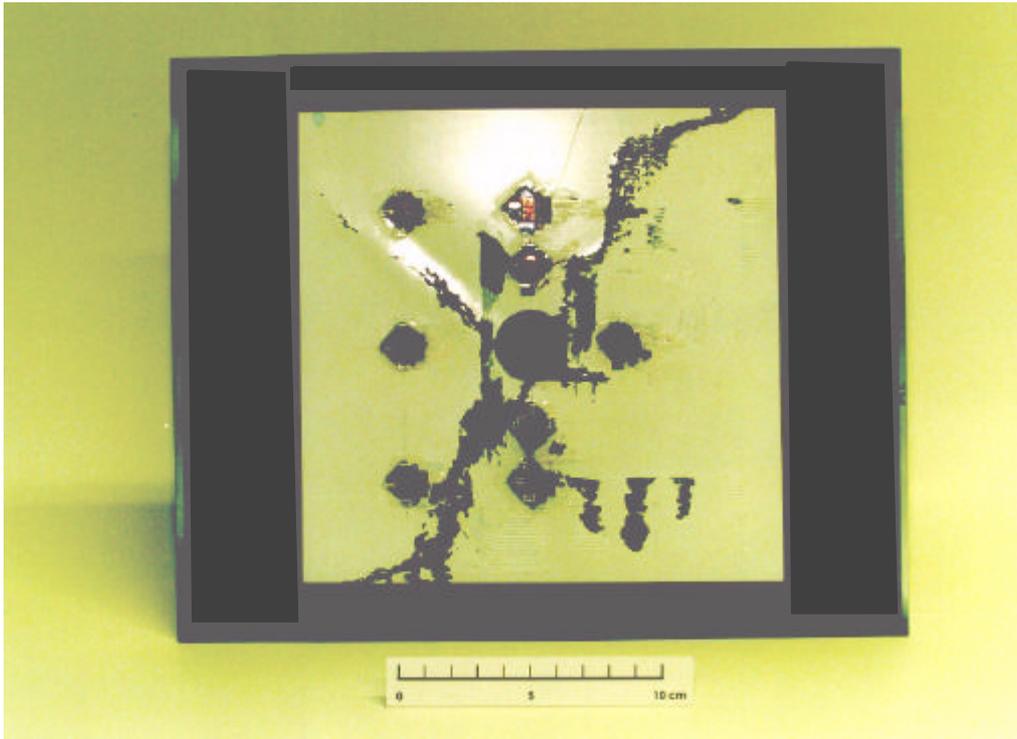


Photo N° A2-14 : Rupture en cisaillement d'une éprouvette impactée.

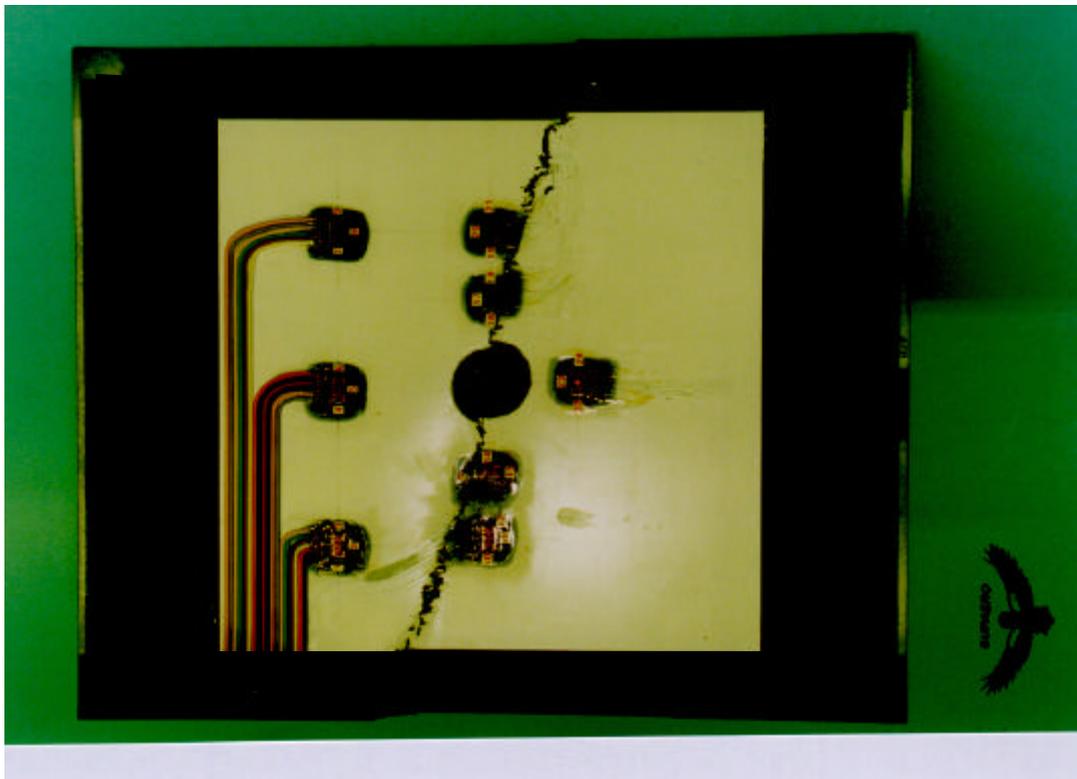


Photo N° A2-15 : Rupture sous sollicitations combinées d'une éprouvette impactée.

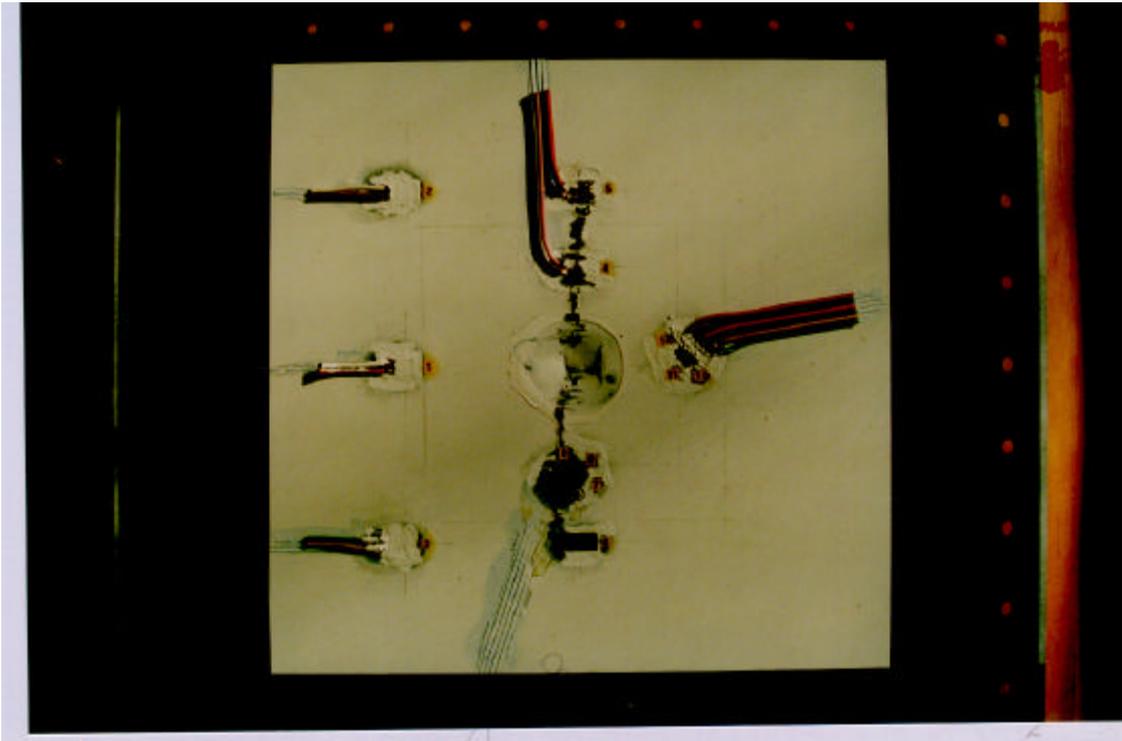


Photo N° A2-16 : Faciés de rupture en compression

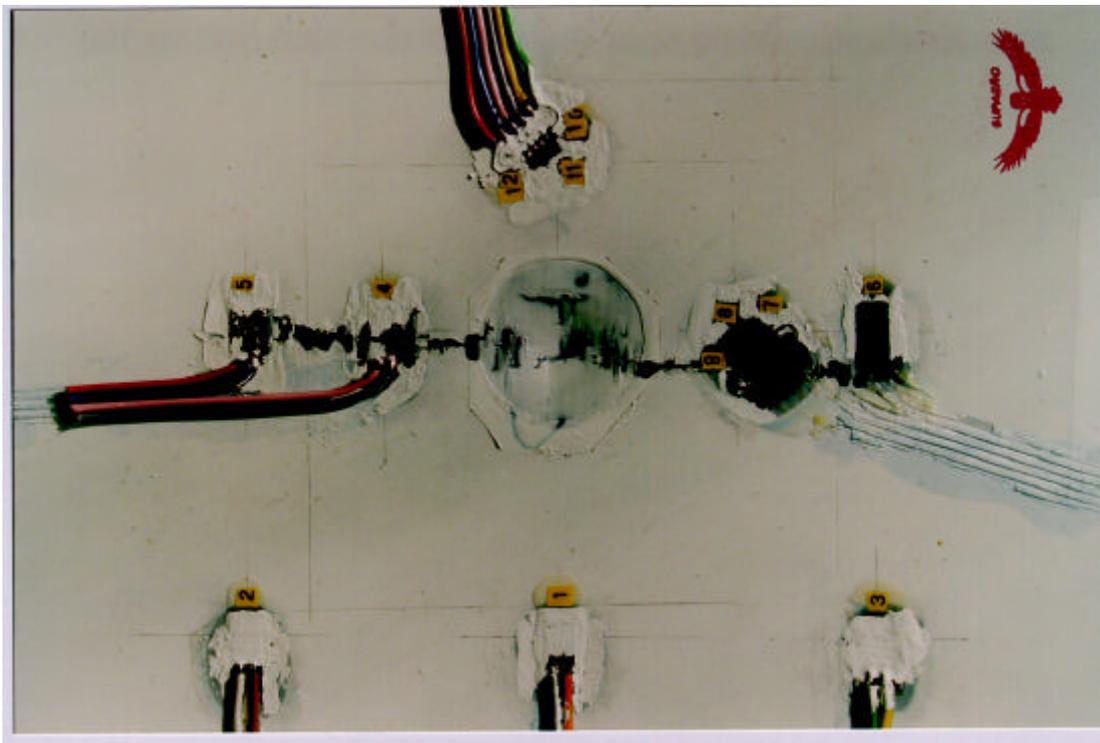


Photo N° A2-17 : Zoom sur la fissure.

A2-4) EPROUVETTES DE TYPE POUTRE :

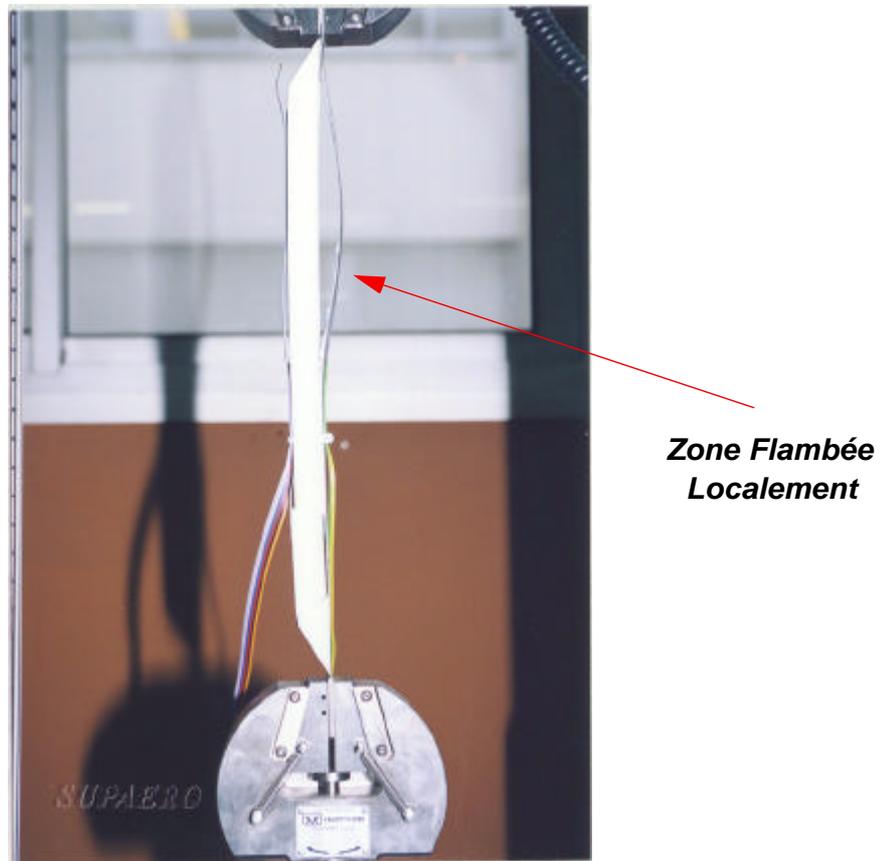


Photo N° A2-18 : Flambage local (Géométrie 1, essai 1)

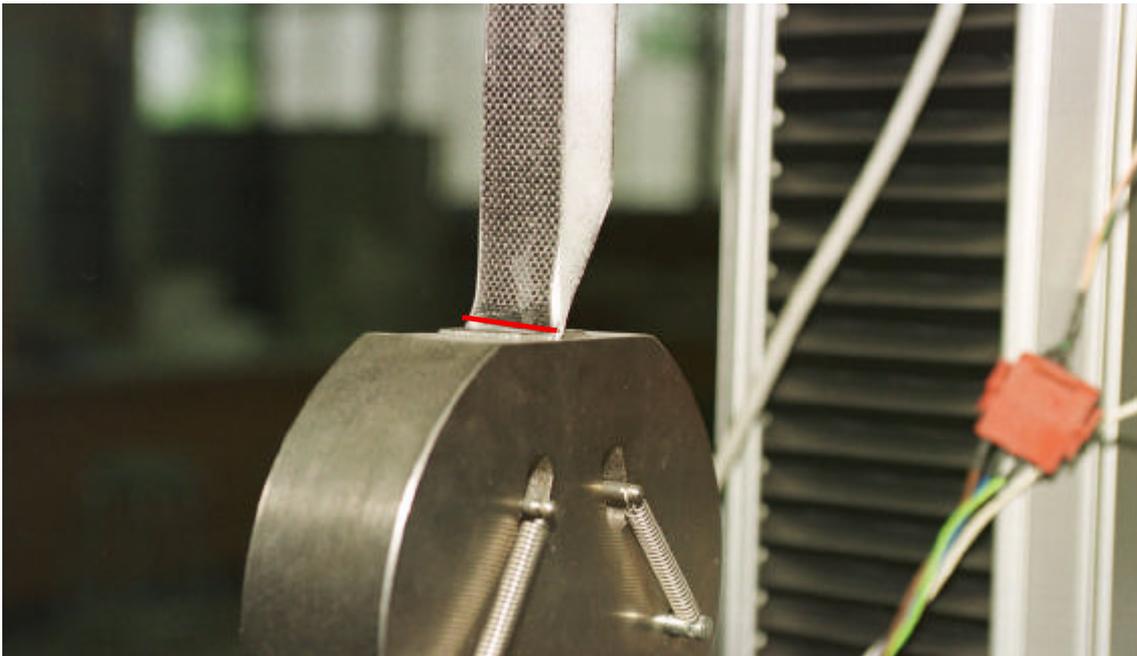


Photo N° A2-19 : Rupture par concentration des contraintes dans la peau travaillante (Essai 1, géométrie 2)

METHODES EXPERIMENTALES

A3-1 - DÉROULEMENT D'UN ESSAI.

Les principales étapes valables pour tous les essais sont :

*** Remise en état du montage suivant le déroulement de l'essai précédent :**

- Nettoyage des débris de carbone.
- Démontage de l'éprouvette.
- Examen des cornières et des plaques latérales.
- Vérification des taraudages et des vis de fixation.
- Remplacement éventuel des pièces endommagées et/ou inadaptées.

*** Montage de la nouvelle éprouvette :**

- Desserrage des cornières et ajustement des alésages éprouvette sandwich/I.P.N. par action sur les vérins. Cette manipulation est due à la déformation résiduelle des plaques latérales du caisson central et n'a pas lieu d'être si l'on procède à leur remplacement.
- Préréglage éprouvette et introduction de la résine micro-ballons.
- Prise des zéros jauges, éprouvette "libre".
- Fixation définitive éprouvette.

*** Essai préliminaire :**

Un tel essai est indispensable pour vérifier le bon fonctionnement de la chaîne d'acquisition, de l'hydraulique et de la procédure d'essai. Après l'essai préliminaire, les jauges ne sont pas remises à zéro même si la valeur initiale n'est pas retrouvée.

*** Essai à rupture :**

Montée en charge par paliers pilotés par la jauge centrale à 0° ou à 45° suivant l'essai de la peau travaillante. Paliers de 500 ou 750 μdef jusqu'à 10000 μdef puis de 250 en 250 au delà. Notons qu'aux fortes charges la dérive due au système hydraulique est importante, ce qui fait que la mesure lors du dernier palier stabilisé est inférieure d'au moins 500 μdef à la valeur réellement atteinte en instantané.

A3-2 - MESURES DES EFFORTS EXERCÉS SUR LE MONTAGE.

Quatre capteurs sont installés pour les 4 vérins entre l'extrémité de la tige et les ferrures d'attache du montage. La conception de ces capteurs a été réalisée au Laboratoire Structures. Ils sont en acier 35NCD16 trempé, revenu et ont une capacité de 200 000 N. Une montée en charge dépassant la limite élastique dite de "tassement" a été effectuée. Elle permet de garantir la linéarité du comportement. Le capteur est équipé de 4 jauges de déformations, 2 suivant l'axe et 2 à 90° ce qui permet de s'affranchir de la flexion parasite qui peut être introduite.

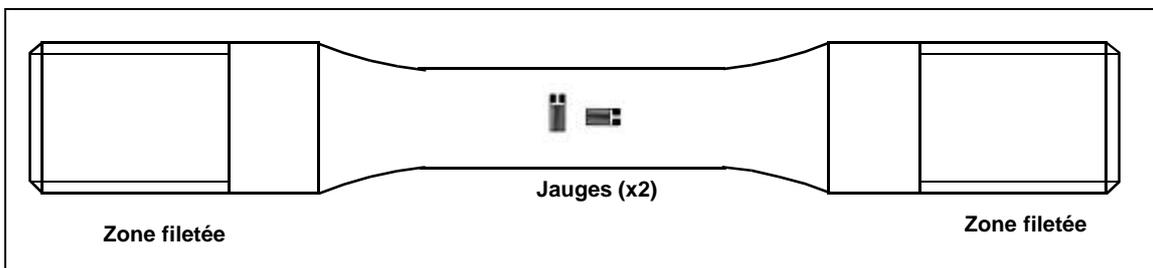


Figure N° A3-1 : Capteur d'efforts.

A3-3 - MESURE DES DÉFORMATIONS PAR EXTENSOMÉTRIE.

Les jauges d'origine Vishay sont soit unidirectionnelles, soit en rosettes à 45°. Leur plage de mesure est 0-3.5% alors que nos valeurs expérimentales ne dépassent pas 1.5%.

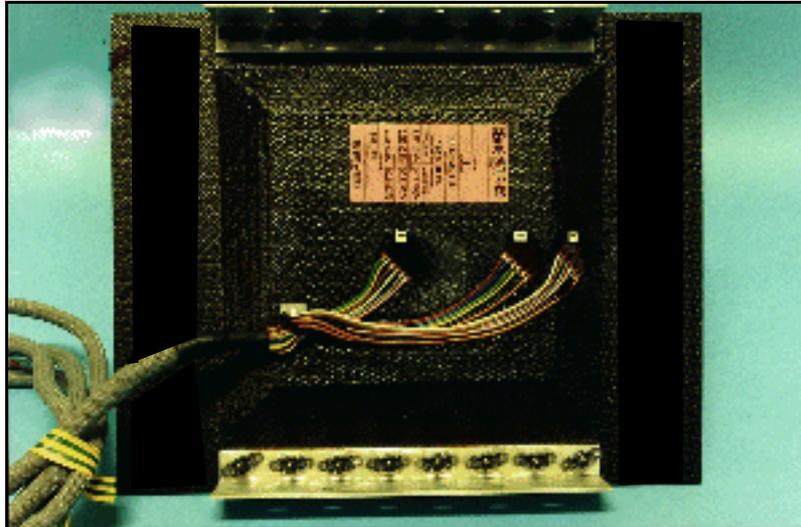


Figure N° A3-2 : Vue peau stabilisatrice éprouvette câblée et cornières de fixation.

Les jauges ainsi que différents capteurs de déplacements sont reliés à une chaîne de mesure de marque H.B.M. qui possède 60 voies dont 10 dédiées aux déplacements (Photo N° A2-5). Un programme permet l'acquisition des diverses grandeurs, le traitement et l'écriture sur fichier . dat des valeurs de sortie. On fournit en particulier à la chaîne :

- Le type de capteur : 1/4 pont ; pont complet, potentiomètre.
- Les coefficients d'amplification, les facteurs de jauge.
- Les tensions d'alimentation.
- Le temps d'intégration (100 milli-secondes).
- Les unités de sortie : Newton, Millimètres, Micro-déformations,...
- Les numéros des voies.

En pratique, pour chaque voie, plusieurs mesures consécutives sont effectuées à chaque incrément de charge. Une série de mesure (une par voie) prend environ 12s. Lors des premiers essais 10 mesures étaient effectuées ce qui prenait environ 2mn, durée qui en pratique s'avère inutile et trop longue. Pour augmenter la rapidité, nécessaire aux plus fortes charges pour limiter la dérive, 5 mesures ont été effectuées lors des derniers essais. Les résultats sont ensuite dépouillés avec le logiciel Excel.

A3-4 - MESURE DES DÉPLACEMENTS.

Deux techniques ont été utilisées. La première est une méthode directe à partir de capteurs potentiométriques (basés sur une variation linéaire de la résistance interne). Une indication sur les déformations ou déplacements que subit le montage peut être fournie par les déplacements en extrémité d'IPN. A cet effet, quatre capteurs (Ref 1,2,3,4) ont été disposés. Ils permettent de mesurer l'angle d'inclinaison des IPN et donc d'estimer le déplacement hors du plan de l'éprouvette sandwich en cisaillement (*Figure N° A3-3*).

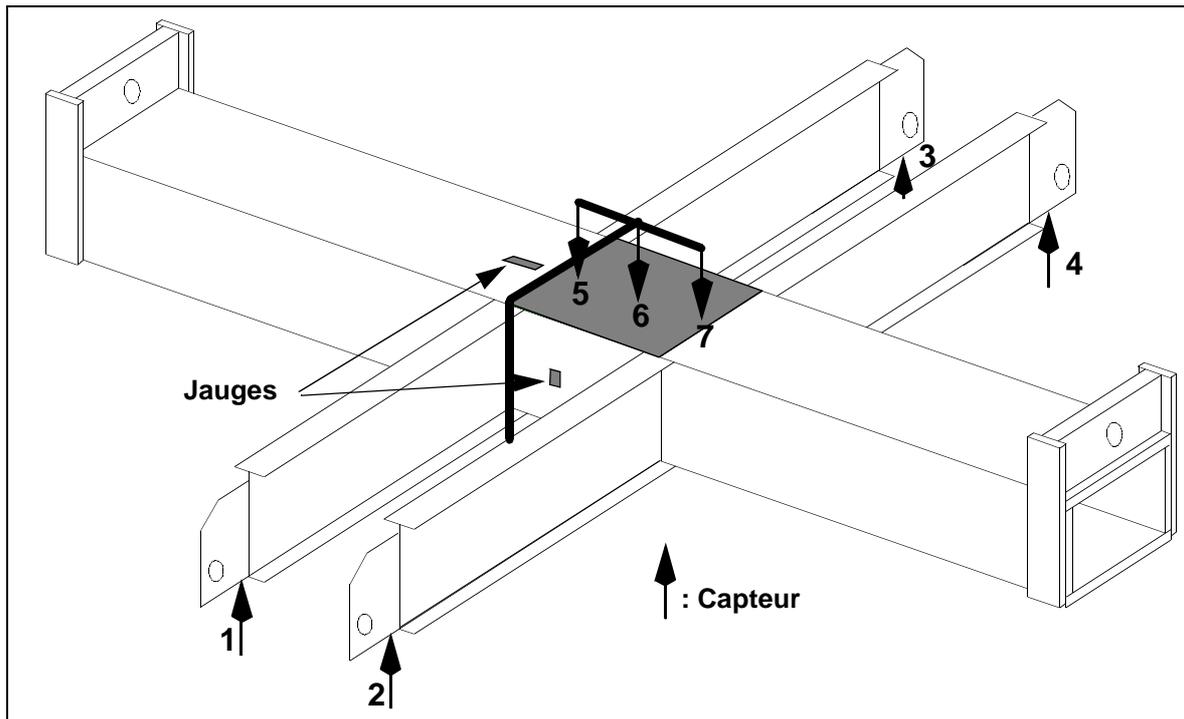


Figure N° A3-3 : Mesure des déplacements par capteur potentiométrique.

Des mesures de la flèche au centre de l'éprouvette ont été faites pour le premier essai de compression. Trois capteurs (Ref. 5,6,7) ont été disposés suivant la ligne médiane de l'éprouvette. Pour s'affranchir du déplacement d'ensemble du montage, la flèche au centre est obtenue après soustraction des déplacements enregistrés par les capteurs 5 et 7. Toutefois, les résultats sont sujets à caution, en particulier à cause de la présence de la plaque photoélastique, du manque de rigidité du support et de l'effort du ressort de rappel de ces capteurs. De plus, les résultats peuvent être difficilement exploités pour une corrélation par SAND (voir chap IV) car la flèche du sandwich complet est mesurée alors que le modèle ne peut fournir que la flèche de la zone dissymétrique pure.

Une deuxième méthode indirecte et sans contact a été mise en oeuvre. Un système de frange dite de Moiré peut être observé lorsque l'on superpose deux réseaux de lignes réguliers et suffisamment denses.

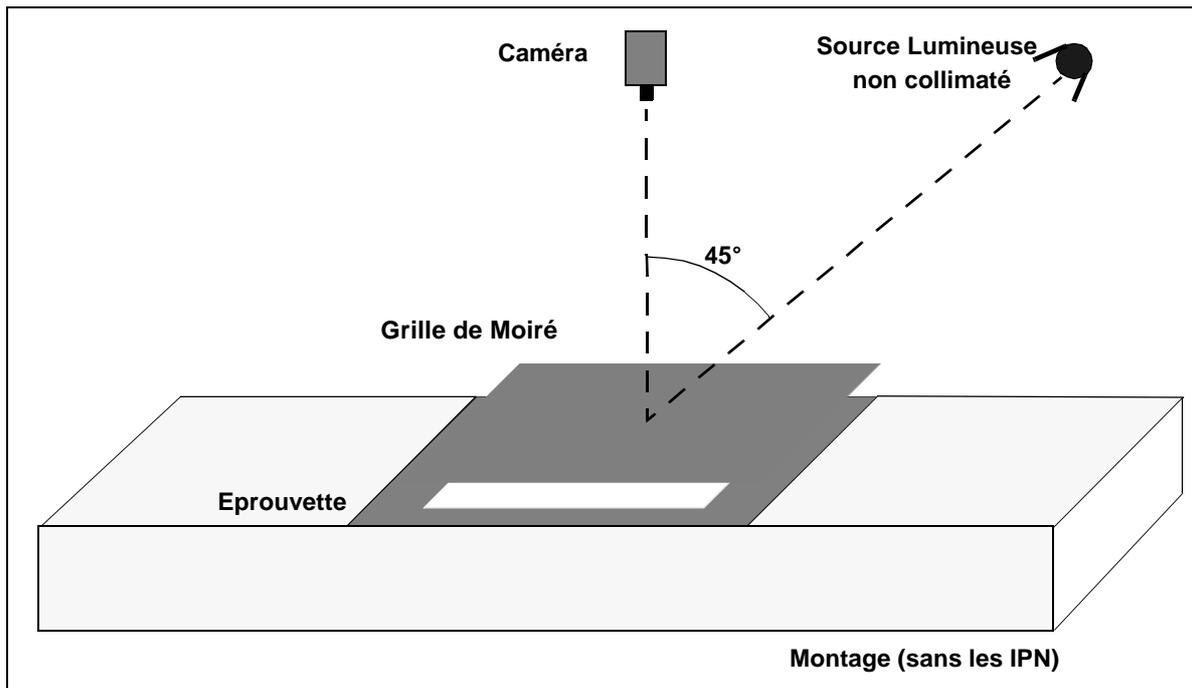


Figure N° A3-4 : Principe du Moiré

Il existe plusieurs variantes à cette technique [Sciammarella, 1982]. La plupart du temps, le réseau est gravé à même l'éprouvette et un deuxième réseau est utilisé pour visualiser les franges. Dans cette étude, un seul réseau sera utilisé, le deuxième étant obtenu par réflexion sur l'éprouvette peinte en blanc (Figure N° A3-4). La grille utilisée a été réalisée au laboratoire et est constituée de fils de 0.5 mm peints en noir. Le système de franges obtenus est assimilable à des lignes de niveaux. Afin d'évaluer la qualité de la description obtenue, un cône de 200mm de diamètre à la base et de 3 mm de hauteur a été usiné et placé sur le montage. La figure de Moiré obtenue montre 6 franges. Par conséquent, l'interfrange correspond approximativement à un déplacement de la surface réfléchie de 0.5 mm.

En conséquence, il faut que l'éprouvette ait une déformée significative pour que l'on puisse utiliser cette méthode. Il est inutile de l'utiliser en cisaillement par exemple. D'autre part, la nature du réseau utilisé fait que les franges ne sont ni très nettes ni très contrastées. Elles deviennent difficiles à distinguer dans le cas où elles sont rapprochées. En compression, la flèche n'atteint que 1.5 mm au centre ce qui fait que 3 franges sont visibles et que seule une étude qualitative peut être menée. On a par ailleurs utilisé un logiciel de traitement de l'image développé à Sup'Aéro qui ne donne pas d'excellents résultats. Enfin, la présence des jauges de déformations perturbe l'image. De ce fait, seule une analyse qualitative des déplacements lors d'essais en compression sur plaque impactée peut être présentée.

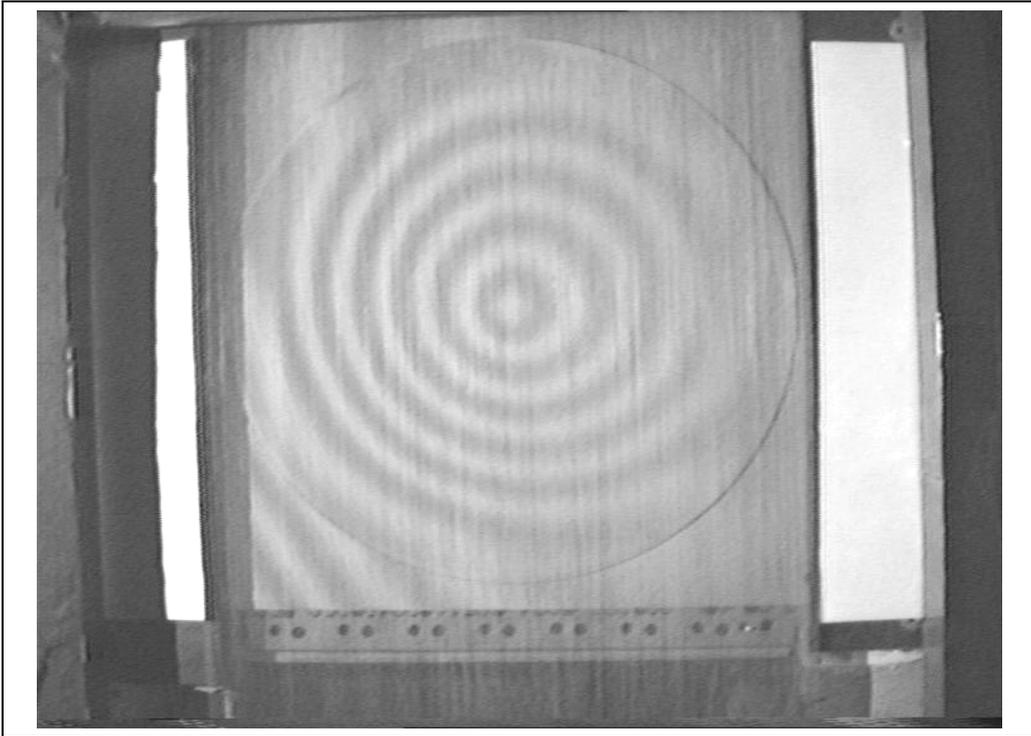


Figure N° A3-5 : Frange de Moiré d'un cône.

BASES THEORIQUES

A4-1) CINÉMATIQUES.

MEMBRANES.

Une membrane ne possède pas de rigidité de flexion et ne peut donc pas modéliser un sandwich complet. Par contre ce modèle sert à décrire le comportement des peaux fines dans l'approche locale. Comme la rigidité de flexion est nulle, une fibre transverse reste droite et le champ des déplacements est identique dans l'épaisseur. La connaissance du déplacement des points du plan moyen (indiqué $_0$) est donc suffisante :

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) ; \quad v(x,y,z) = v_0(x,y)$$

Deux fonctions inconnues permettent de déterminer le problème en membrane.

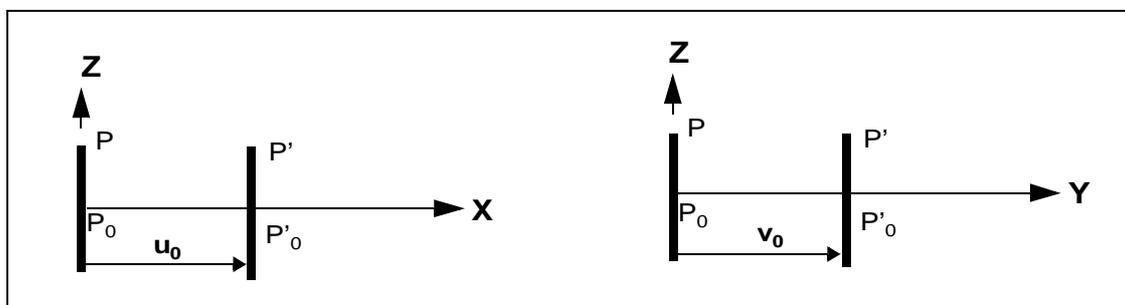


Figure N° A4-1: Champ de déplacement en membrane.

La flèche $w(x,y,z) = w_0(x,y)$ est indéterminée a priori. En général, elle est fixée à zéro (par exemple dans l'étude du comportement membranaire des stratifiés [Gay 1991]).

HYPOTHÈSE DE LOVE-KIRCHHOFF (CPT).

Il s'agit de la théorie des plaques classiques (Classical Plates Theory) qui sert de formulation de référence à la théorie des plaques stratifiées [Barrau 1987], elle s'énonce :

«Après application des charges, les fibres normales au plan moyen restent droites et normales au plan moyen déformé»

Le déplacement dans l'épaisseur de la plaque peut donc s'exprimer en fonction des déplacements des points du plan moyen et le déplacement de la particule courante \mathbf{P} s'écrit

$$\overrightarrow{PP'} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x, y) \\ v_0(x, y) \\ w_0(x, y) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_i(z) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{Bmatrix}$$

Le terme $w_i(z)$ représente le raccourcissement de la fibre. Ce terme est dû à l'effet de Poisson dans l'épaisseur de la plaque. Si les contraintes de compression transverses sont nulles, il n'en est pas de même pour les déplacements qui sont générés par effet de Poisson. Le mettre à 0 signifierait mettre la déformation à 0 dans l'épaisseur de la plaque et donc générer des contraintes normales du même ordre de grandeur que celles obtenues dans le plan. Ce fait conduit à modifier les lois de comportement [Barrau, 1982 p96]. Toutefois, et en particulier en grands déplacements, il est clair que $w_i \ll w_0$. De ce fait, ce terme est négligé dans l'expression du déplacement global.

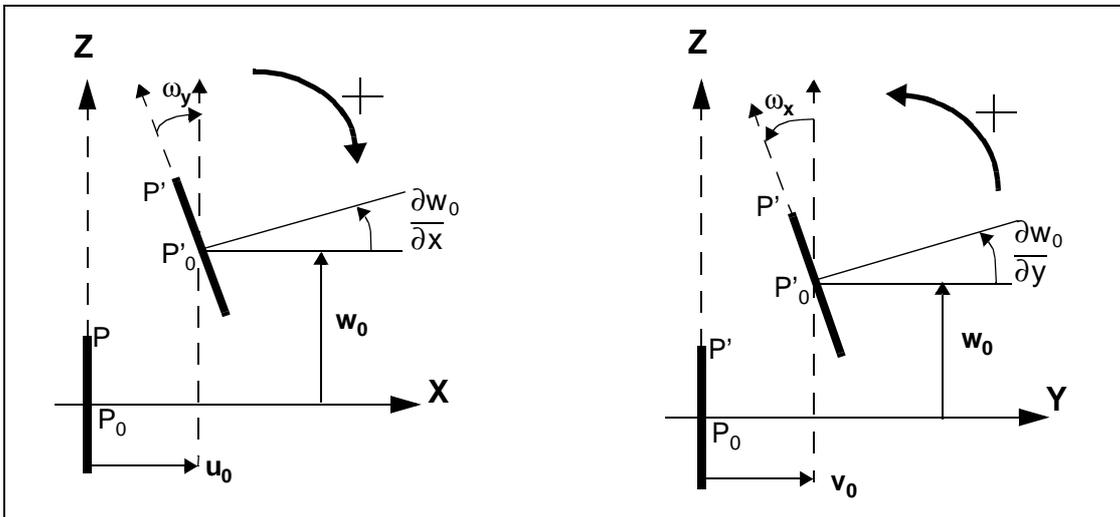


Figure N° A4-2: Champ de déplacement de Kirchhoff-Love.

Comme la fibre reste normale à la déformée du plan moyen, les rotations peuvent s'exprimer en fonction des pentes :

$$\omega_y = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \qquad \omega_x = \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

Ce qui donne finalement l'expression du champ de déplacement suivant :

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) - z \cdot \frac{\partial w_0}{\partial x} ; v(x,y,z) = v_0(x,y) - z \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y} ; w(x,y,z) = w_0(x,y)$$

Le calcul des contraintes de cisaillement transverse γ_{xz} et γ_{yz} donne 0. La CPT ne peut donc décrire le comportement des plaques sandwichs complètes. Par contre, elle peut être utilisée pour décrire le comportement des peaux modérément épaisses dans l'approche locale. Ce modèle s'avère suffisant pour les matériaux isotropes métalliques pour lesquels l'influence du cisaillement transverse est négligeable. Les contraintes transverses peuvent être obtenues a posteriori par réécriture des équations d'équilibre [Barrau p112 et Laroze p172].

A4-2) MESURE DES DÉFORMATIONS.

Il est utile de rappeler dans le cadre de cette étude le sens physique de la mesure de déformation utilisée en formulation lagrangienne totale. Considérons pour cela le déplacement d'une particule de \mathbf{M} à \mathbf{m} (Figure N° A4-3).

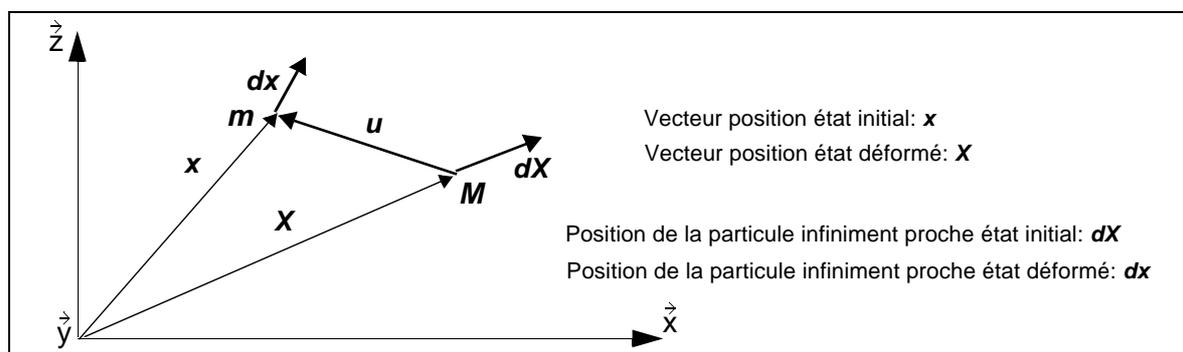


Figure N° A4-3 : Vecteurs position et déplacements (d'après Cristfield 1991).

On a la relation vectorielle : $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$ où \mathbf{u} est le déplacement de la particule. La différentiation de cette relation fournit :

$$d\mathbf{x} = \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right] \cdot d\mathbf{X} = [\mathbf{F}] \cdot d\mathbf{X} = \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} (\mathbf{X} + \mathbf{u}) \right] \cdot d\mathbf{X} = \left[\mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right] \cdot d\mathbf{X} = [\mathbf{I} + \mathbf{D}] \cdot d\mathbf{X} \quad (\text{éq A4-1})$$

Dans l'équation (éq A4-1), \mathbf{F} représente la matrice du gradient de la transformation et \mathbf{D} représente la matrice du gradient des déplacements.

Il convient à présent d'introduire la définition de la mesure des déformations de Green-Lagrange $[\mathbf{E}]$. Elles mesurent la variation de longueur de l'élément déformé $d\mathbf{x}$ par rapport à sa configuration initiale $d\mathbf{X}$. Le tenseur des déformations de Green-Lagrange peut être alors défini de la manière suivante en utilisant la relation $\|\mathbf{X}\|^2 = \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}$ [Cristfield 1991, Chap 4

et aussi Bathe 1982 p328] :

$$(\mathbf{dx})^2 - (d\mathbf{X})^2 = 2 \cdot {}^T d\mathbf{X} \cdot [\mathbf{E}] \cdot d\mathbf{X} \quad (\text{éq A4-2})$$

L'introduction de (éq A4-1) dans (éq A4-2) fournit :

$$[\mathbf{E}] = \frac{1}{2} \cdot ({}^T[\mathbf{D}] + [\mathbf{D}]) + \frac{1}{2} \cdot {}^T[\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{D}] \quad (\text{éq A4-3})$$

Le premier terme est facilement identifiable et correspond à la partie petites perturbations de la transformation alors que le deuxième terme est la contribution non linéaire. Sous l'hypothèse de petites rotations et de flèche w prépondérante (*Hypothèse de Von Karman*), les termes non linéaires de membrane (en u et v) de l'expression mathématique de $[\mathbf{E}]$ deviennent négligeables devant les termes en w et $[\mathbf{E}]$ peut se mettre sous la forme (éq A4-4).

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{éq A4-4})$$

Ce type d'expression est couramment qualifié dans la littérature de déformations de Von Karman. Pour clore ce paragraphe, on peut remarquer que pour mesurer les déformations en configuration déformée, donc pour une description eulérienne, et ainsi définir le tenseur des déformations d'Euler-Almansi $[\varepsilon]$, il suffit de modifier (éq A4-2) en écrivant :

$$(\mathbf{dx})^2 - (d\mathbf{X})^2 = 2 \cdot {}^T d\mathbf{x} \cdot [\varepsilon] \cdot d\mathbf{x} \quad (\text{éq A4-5})$$

A4-3) MESURES DES CONTRAINTES.

Une formulation non linéaire ne confond plus les configurations finales et initiales. Aussi, en toute rigueur, le tenseur des contraintes doit s'exprimer en configuration déformée sur le volume déformé (Figure N° A4-4). Le vecteur contrainte s'écrit :

$$\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = [\boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{n} \quad (\text{éq A4-6})$$

où $[\mathbf{s}]$ est le tenseur des contraintes de Cauchy. La force élémentaire qui s'exerce sur l'élément de surface élémentaire dA sera donc :

$$d\mathbf{F} = \mathbf{t}(P, \mathbf{n}) \cdot dA \quad (\text{éq A4-7})$$

Cette description naturelle s'apparente donc à une formulation eulérienne. Celle-ci présente l'inconvénient de nécessiter la connaissance de la configuration déformée qui est justement l'inconnue recherchée. Aussi, en mécanique des structures, on peut chercher à établir l'expression des contraintes dans la configuration initiale. Deux étapes s'avèrent nécessaires (Figure N° A4-4).

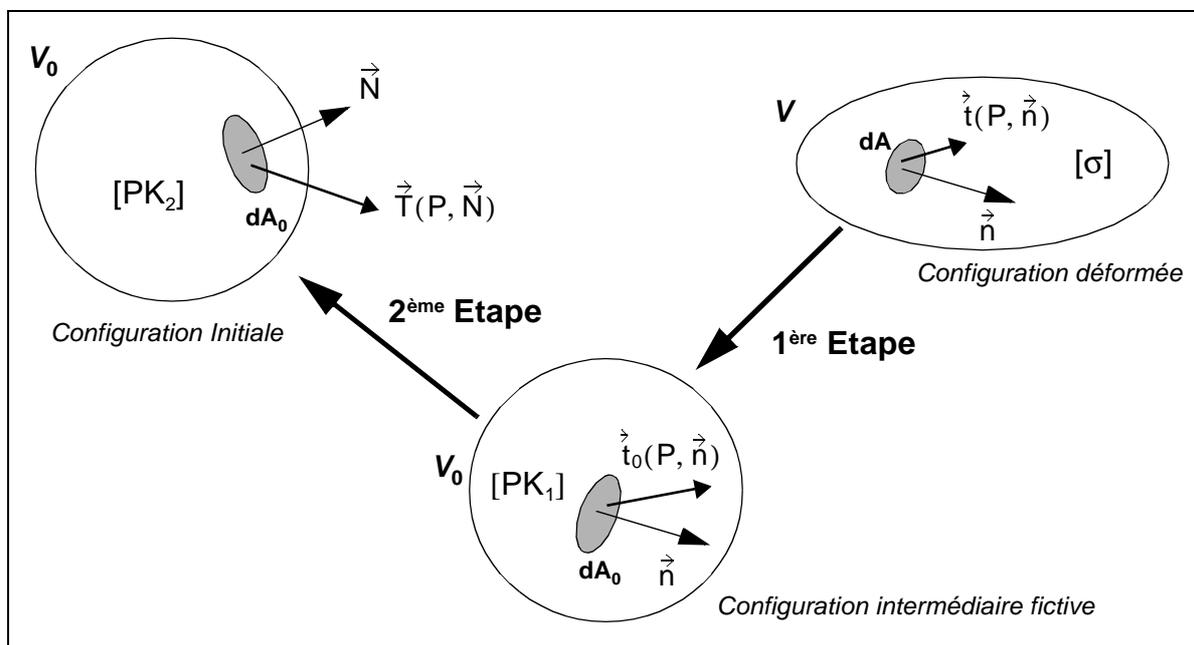


Figure N° A4-4: Visualisation des vecteurs contraintes.

La première étape consiste à mesurer les contraintes sur le volume non déformé. Dans ce cas, le vecteur contrainte s'exprime à l'aide d'un nouveau tenseur des contraintes dit *tenseur de Piola-Kirchhoff de première espèce* $[\mathbf{PK}_1]$ ou de *Boussinesq* [MAHE 1998].

$$\mathbf{t}_0(P, \mathbf{n}) = [\mathbf{PK}_1] \cdot \mathbf{n} \quad (\text{éq A4-8})$$

En conséquence, la force élémentaire s'écrira :

$$d\mathbf{F} = \mathbf{t}_0(P, \mathbf{n}) \cdot dA_0 \quad (\text{éq A4-9})$$

Si $[\mathbf{F}]$ est le gradient de la transformation, la relation entre les deux tenseurs $[\boldsymbol{\sigma}]$ et $[\mathbf{PK}_1]$ est donnée par [NAFEMS 1992, Chap 2.3.5] :

$$[\mathbf{PK}_1] = \det[\mathbf{F}] \cdot [\boldsymbol{\sigma}] \times^T([\mathbf{F}]^{-1}) \quad (\text{éq A4-10})$$

Ce tenseur des contraintes présente la particularité de ne pas être symétrique. Dans la configuration intermédiaire fictive, les repères sont en configuration déformée. Pour revenir en configuration initiale, la deuxième étape consiste donc à faire tourner ces repères. La relation entre les vecteurs contraintes s'écrit :

$$\mathbf{T}(\mathbf{P}, \mathbf{N}) = [\mathbf{F}]^{-1} \cdot \mathbf{t}_0(\mathbf{P}, \mathbf{n}) \quad (\text{éq A4-11})$$

Ce qui conduit à une nouvelle mesure des contraintes connue sous le nom de *tenseur de Piola-Kirchhoff de deuxième espèce* $[\mathbf{PK}_2]$. Il se déduit de $[\mathbf{PK}_1]$ par :

$$[\mathbf{PK}_2] = [\mathbf{F}]^{-1} \times [\mathbf{PK}_1] \quad (\text{éq A4-12})$$

Par conséquent, ces contraintes peuvent s'exprimer en configuration initiale en fonction des contraintes de Cauchy :

$$[\mathbf{PK}_2] = \det[\mathbf{F}] \cdot [\mathbf{F}]^{-1} \times [\boldsymbol{\sigma}] \times ({}^T[\mathbf{F}])^{-1} \quad (\text{éq A4-13})$$

Dans le cadre de notre étude, nous avons postulé le fait que les déformations sont petites $\Rightarrow V \approx V_0$. Or, d'après le théorème de décomposition polaire de Cauchy [note 25 p66 NAFEMS 1992, para 4.8 Cristfield 1991], le gradient de la transformation $[\mathbf{F}]$ peut se décomposer en :

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{R}] \times [\mathbf{U}] \quad (\text{éq A4-14})$$

où $[\mathbf{R}]$ représente une rotation de solide et $[\mathbf{U}]$ une déformation propre. Or, le fait de confondre volume déformé et volume initial en petites déformations conduit à la relation :

$$[\mathbf{U}] \approx [\mathbf{I}] \text{ avec } [\mathbf{I}] \text{ matrice identité.} \quad (\text{éq A4-15})$$

La matrice de rotation $[\mathbf{R}]$ étant symétrique, la relation entre $[\boldsymbol{\sigma}]$ et $[\mathbf{PK}_2]$ se simplifie en :

$$[\mathbf{PK}_2] \approx {}^T[\mathbf{R}] \times [\boldsymbol{\sigma}] \times [\mathbf{R}] \quad (\text{éq A4-16})$$

Les contraintes de Piola-Kirchhoff de deuxième espèce, sous l'hypothèse petites déformations, correspondent donc aux contraintes de Cauchy "tournées" comme peut l'illustrer la Figure N° A4-5. Sous l'hypothèse supplémentaire "petites rotations" $[\mathbf{R}] \approx [\mathbf{I}]$, on peut confondre les deux tenseurs :

$$\boxed{[\mathbf{PK}_2] \approx [\boldsymbol{\sigma}]} \quad (\text{éq A4-17})$$

Les équations d'équilibre ou de continuité des contraintes pourront donc être écrites de manière simple dans le repère initial. Par contre, il est utile de préciser que les contraintes obtenues après écriture de la relation de comportement sont les contraintes de Piola-Kir-

chhoff de deuxième espèce. On a donc la relation (éq A4-18) où $[\mathbf{H}]$ est la matrice de Hooke.

$$[\mathbf{PK}_2] = [\mathbf{H}] \cdot [\mathbf{E}] \quad (\text{éq A4-18})$$

Notons que les mesures des contraintes présentées dans ce paragraphe prennent davantage de sens dans l'étude des grandes déformations [Bathe 1982 p327] où l'on doit aussi définir de nouvelles mesures de déformations.

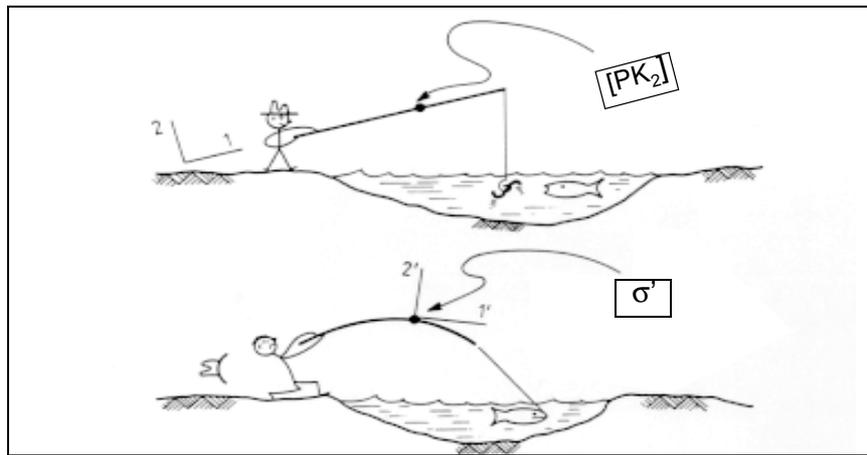


Figure N° A4-5: Tenseurs des contraintes de Cauchy $[\sigma]$ et $[\mathbf{PK}_2]$ (Reproduit de [NAFEMS 1992 p72]).

A4-4) MINIMISATION DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE ET MÉTHODE DE DISCRÉTISATION DE RAYLEIGH-RITZ.

Les équations d'équilibre du problème mécanique sont obtenues à partir de l'expression de l'énergie potentielle totale qui est la somme de l'énergie de déformation et du potentiel des efforts extérieurs $U_{\text{TOTALE}} = U_d + V_{\text{Fext}}$. L'équilibre de la structure correspond au minimum strict de l'énergie potentielle totale et conduit à poser $dU_{\text{TOTALE}}=0$. On obtient ainsi un système d'équations en fonction des inconnues du problème X : $\frac{\partial U_{\text{TOTALE}}}{\partial X} = 0$.

Dans le cadre de l'analyse non linéaire, il convient de formuler correctement l'énergie de déformation de la structure en veillant à ce que les tenseurs de déformation et de contraintes soient conjugués au sens de l'énergie de déformation. On démontre que [NAFEMS p75 note35] :

$$2U_d = \int_{V_0} \text{Trace}([\mathbf{PK}_2] \cdot [\mathbf{E}]) dV_0 \quad (\text{éq A4-19})$$

La méthode de Rayleigh-Ritz consiste à approcher les inconnues X du problème par l'utilisation d'une base de fonctions f_i (voir II.7.5.2). Par analogie à l'analyse vectorielle, les réels inconnus x_i sont appelées coordonnées généralisées.

$$\mathbf{X} = \sum_i x_i \cdot \mathbf{f}_i \quad (\text{éq A4-20})$$

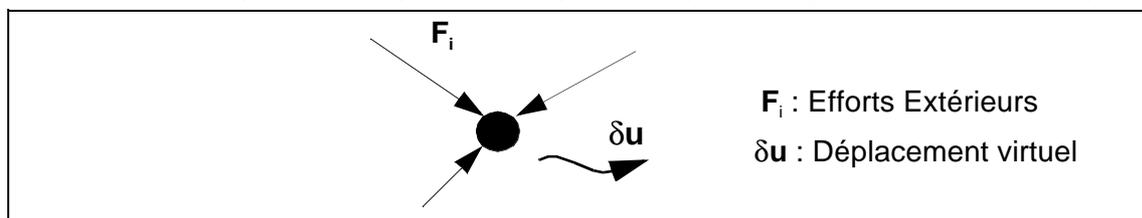
Cette base se doit d'être suffisamment étoffée pour décrire le comportement des inconnues et les conditions aux limites. L'approximation conduit à tronquer la base en ne conservant que les premiers termes où les fonctions f_i peuvent être paires ou impaires suivant la nature de \mathbf{X} . Dans le cadre de notre problème, il s'agit entre autres de pouvoir décrire avec le plus faible nombre d'inconnues, les déformées en compression, cisaillement et combinées.

A4-5) PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS ET MÉTHODE INCRÉMENTALE/ITÉRATIVE.

La deuxième méthode présentée est une méthode incrémentale/itérative (type Newton-Raphson) utilisée après écriture du Principe des Travaux Virtuel. Elle est issue des formulations éléments finis non linéaires [Bathe 1982, Cristfield 1991, NAFEMS 1992] et sera adaptée à notre problème en remplaçant les déplacements nodaux inconnus par des coordonnées généralisées inconnues.

PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS.

L'idée sur laquelle repose le principe des Travaux Virtuels peut avantageusement être mise en évidence à partir de l'équilibre statique d'une particule [NAFEMS 1992, Chap 2.3.6]:



Si la particule est à l'équilibre statique, alors $\sum_i \mathbf{F}_i = 0$. On peut alors imaginer prendre cette particule et lui faire subir un déplacement imaginaire ou *virtuel* du . Ce déplacement est infinitésimal, ce qui fait que la géométrie des forces est inchangée et donc que les \mathbf{F}_i sont indépendantes du déplacement virtuel. Logiquement, le travail dépensé lors de ce déplace-

ment devient nul $dW = 0$. C'est dans l'approche réciproque que réside le principe. En effet, *pour tout déplacement virtuel, si le travail virtuel des efforts extérieurs est nul, alors la particule est en équilibre*. Ecrire $dW=0$ pour tout déplacement implique mathématiquement que

$\sum_I \mathbf{F}_i = 0$. On peut donc énoncer :

"Une condition nécessaire et suffisante d'équilibre d'une structure est que la somme des travaux virtuels de toutes les forces soit nulle dans tout champ de déplacement virtuel".

Appliquons maintenant cette approche à la mécanique des structures. L'équation d'équilibre s'écrit en statique (\mathbf{f} est un champ de force volumiques) :

$$\mathbf{Div}[\boldsymbol{\sigma}] + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (\text{éq A4-21})$$

Le travail virtuel dW est nul dans tout champ de déplacement virtuel $d\mathbf{u}$, et on a :

$$\delta W = \int_V (\mathbf{Div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{u} dV = 0 \quad (\text{éq A4-22})$$

Une série de transformation mathématique permet de montrer que le produit scalaire se met sous la forme [Mahé 1998] :

$$\mathbf{Div}[\boldsymbol{\sigma}] \cdot \delta \mathbf{u} = \mathbf{Div}([\boldsymbol{\sigma}] \cdot \delta \mathbf{u}) - \text{Trace}([\boldsymbol{\sigma}] \cdot [\delta \boldsymbol{\varepsilon}]) \quad (\text{éq A4-23})$$

Après application de la formule d'Ostrogradski au premier terme, l'expression du principe des travaux virtuels devient (\mathbf{f} et \mathbf{t} sont respectivement les efforts volumiques et surfaciques) :

$$\int_V \text{Trace}([\boldsymbol{\sigma}] \cdot [\delta \boldsymbol{\varepsilon}]) dV = \int_V \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} dV \quad (\text{éq A4-24})$$

L'équation (éq A4-24) exprime le P.T.V. en description eulérienne, puisque dans le raisonnement effectué, on ne peut trouver l'équilibre que dans la configuration déformée (ou par analogie, dans le cas d'une particule, quand $\sum_I \mathbf{F}_i = 0$). On retrouve dans le premier terme l'expression de l'énergie de déformation virtuelle et dans le second terme celle du travail virtuel des efforts extérieurs. Le principe des travaux virtuels s'exprime donc :

$$\delta U = \delta U_d - \delta W_{\text{Fext}} = 0 \quad (\text{éq A4-25})$$

où U est le travail virtuel total de toutes les forces exercées sur la structure.

L'équation (éq A4-24) montre que les tenseurs de Cauchy et d'Euler-Almansi sont conjugués au sens du travail virtuel. On peut par ailleurs démontrer qu'il y a équivalence énergétique entre les descriptions eulériennes et lagrangiennes [par exemple Mahé 1991 p87]

ce qui permet de poser :

$$\int_{V_0} \text{Trace}([\mathbf{PK}_2] \cdot [\delta\mathbf{E}]) dV = \int_{V_0} \mathbf{f}_0 \cdot \delta\mathbf{u} dV_0 + \int_{\partial V_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta\mathbf{u} dV_0 \quad (\text{éq A4-26})$$

où les efforts \mathbf{f} et \mathbf{t} sont ramenés sur les volumes et surfaces initiaux.

MISE EN PLACE DE LA MÉTHODE INCRÉMENTALE/ITÉRATIVE.

Cette méthode est empruntée aux formulations éléments finis non linéaires dont on utilise la formulation matricielle (voir par exemple (éq A4-4)). Ainsi l'expression des travaux virtuels δU (éq A4-25) peut se mettre sous la forme :

$$\delta U = \delta U_d - \delta W_{F_{\text{ext}}} = (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_e) \cdot \delta \mathbf{u} = \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} \quad (\text{éq A4-27})$$

où \mathbf{q}_i et \mathbf{q}_e représentent respectivement le *vecteur des efforts intérieurs* et le *vecteur des efforts extérieurs*. Ces vecteurs sont obtenus par identification dans l'expression (éq A4-26) et représentent des forces équivalentes au sens du travail et de l'énergie de déformation dans le déplacement virtuel $\delta \mathbf{u}$. Le vecteur \mathbf{g} est le *vecteur résidu* qui marque physiquement l'écart de ces forces par rapport à la position d'équilibre $d\mathbf{U} = \mathbf{0}$. Par conséquent, quand l'équilibre est réalisé, $\mathbf{g} = \mathbf{0}$.

Dans le cadre des méthodes d'approximation et de l'analyse non linéaire, \mathbf{g} n'est pas nul. Une approche par incréments successifs de force est proposée pour évaluer le comportement non linéaire de la structure sous charge croissante. Une position initiale, supposée être à l'équilibre, est repérée par l'état \mathbf{p} des inconnues. Dans la formulation de notre problème, le vecteur \mathbf{p} représente les coordonnées généralisées. La configuration finale est repérée par $\mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}$ où $\Delta \mathbf{p}$ représente l'incrément des coordonnées généralisées. Un développement de Taylor au premier ordre fournit :

$$\mathbf{q}_i(\mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}) = \mathbf{q}_i(\mathbf{p}) + \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}) \cdot \Delta \mathbf{p} \quad (\text{éq A4-28})$$

Si il y a équilibre en configurations initiales et finales, alors :

$$\mathbf{q}_i(\mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}) - \mathbf{q}_i(\mathbf{p}) = \mathbf{q}_e(\mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}) - \mathbf{q}_e(\mathbf{p}) = \Delta \mathbf{q}_e = \frac{\partial \mathbf{q}_e}{\partial \mathbf{p}} \cdot \Delta \mathbf{p} = [\mathbf{K}_T] \cdot \Delta \mathbf{p} \quad (\text{éq A4-29})$$

où :

- $\Delta \mathbf{q}_e$ est l'incrément des forces extérieures.
- $[\mathbf{K}_T]$ est la **MATRICE DE RIGIDITE TANGENTE**.

Cette matrice dépend de la configuration courante et de la géométrie initiale. On a :

$$\Delta \mathbf{p} = [\mathbf{K}_T]^{-1} \cdot \Delta \mathbf{q}_e \quad (\text{éq A4-30})$$

Il est donc possible de relier les incréments de “déplacement” et les incréments de force (si $[\mathbf{K}_T]$ est inversible). La nouvelle position d’équilibre calculée par cette méthode est donc $\mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}$, où $\Delta \mathbf{p}$ est calculé comme précédemment.

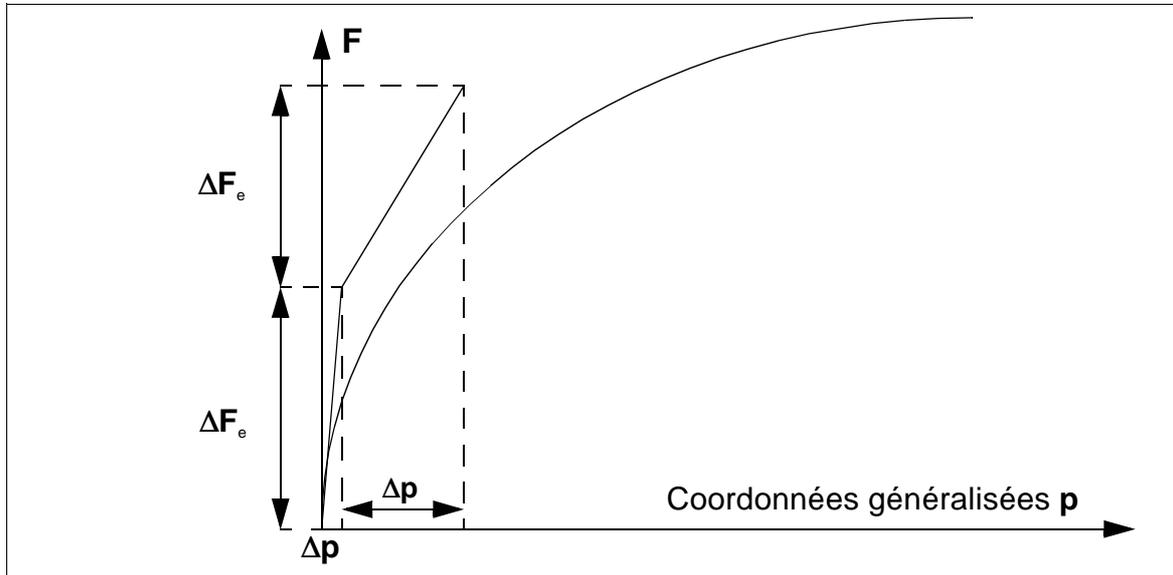


Figure N° A4-6: Méthode incrémentale

En général, pour l’incrément de déplacement calculé, on n’atteint pas l’équilibre de la structure, c’est à dire que le résidu $\mathbf{g}(\mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$. Aussi, à moins d’utiliser des incréments $\Delta \mathbf{p}$ très petits et donc de faire un très grand nombre de pas de calcul, l’écart par rapport à la position d’équilibre va en augmentant (Figure N° A4-6). Pour à la fois converger vers la position d’équilibre et diminuer le nombre d’incrémentes, une **procédure incrémentale/itérative de Newton-Raphson** peut être appliquée. Le calcul s’effectue en trois étapes :

Etape n°1 : Incrémentation :

A partir de la position d’équilibre obtenue à l’incrément précédent, la matrice de rigidité tangente $[\mathbf{K}_T]$ à l’état \mathbf{p} est calculée. La connaissance de cette matrice permet de calculer alors :

- Le nouveau vecteur des efforts extérieurs \mathbf{q}_e pour le niveau de force atteint.
- Le nouvel état de déplacements \mathbf{p} par :

$$\mathbf{p}_{\text{Nouveau}} = \mathbf{p}_{\text{Ancien}} + \Delta \mathbf{p} \text{ et } \Delta \mathbf{p} = [\mathbf{K}_T]^{-1} \cdot \Delta \mathbf{q}_e \quad (\text{éq A4-31})$$

Etape n°2 : Vérification du critère de convergence :

Connaissant le nouvel état de déplacement, le nouveau vecteur des efforts intérieurs \mathbf{q}_i

représentatif de l'état déformé atteint peut être calculé. Il est alors possible de vérifier si la structure est en équilibre au critère de convergence près :

$$\frac{\|q_e\| - \|q_i\|}{\|q_e\|} < \text{Critere} \quad (\text{éq A4-32})$$

Le critère retenu est un des plus simples et utilise la norme euclidienne. Sa valeur est prise entre **0.01** et **0.001**. Une valeur correcte du critère est essentielle car trop importante la solution a tendance à diverger de l'équilibre, trop faible, le nombre d'itération peut augmenter et causer une divergence d'origine numérique.

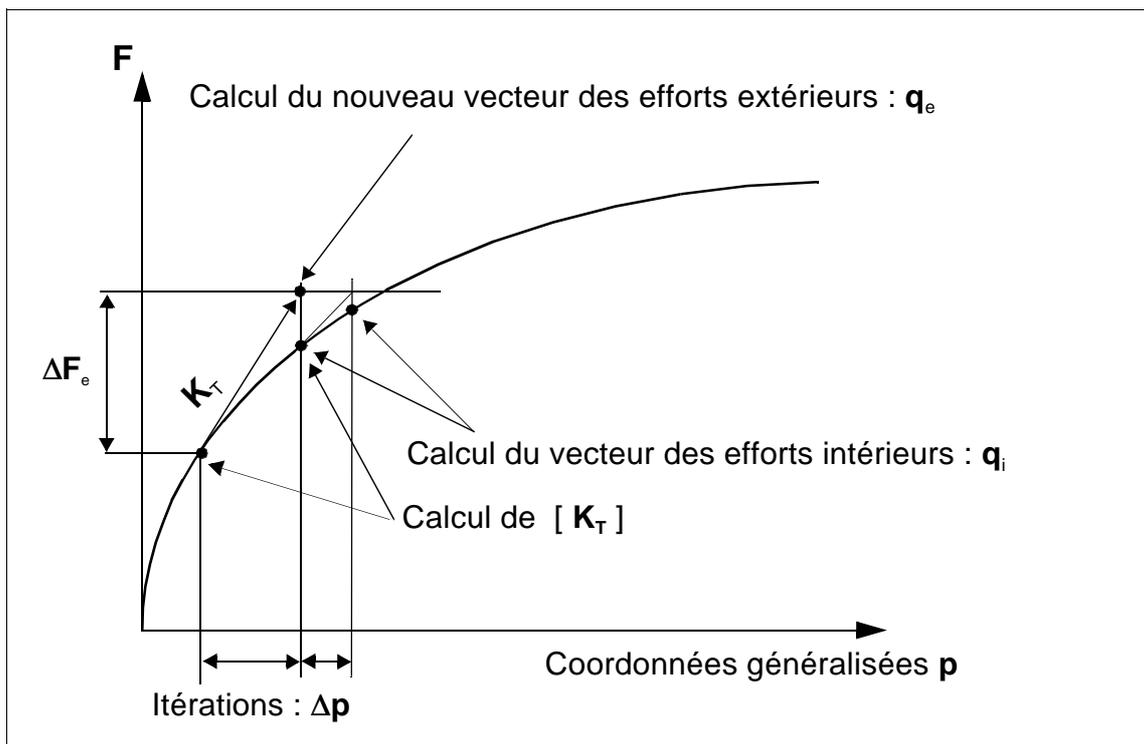


Figure N° A4-7: Méthode de Newton-Raphson.

Etape n°3 : Itération :

Si le critère est satisfait, une incrémentation en charge est possible. Dans le cas contraire, il y a obligation d'itérer sur le déplacement. Trois techniques distinctes sont employées :

- Soit on recalcule $[K_T]$ au nouvel état de déplacement et on applique la relation :

$$\Delta p = [K_{T_{\text{Nouv}}}]^{-1} \cdot (q_e - q_i) = [K_{T_{\text{Nouv}}}]^{-1} \cdot g \quad (\text{éq A4-33})$$

La méthode de **Newton-Raphson** a été appliquée dans ce cas. Le calcul de $[K_T]$ à chaque itération permet une convergence efficace de la méthode au détriment du temps de calcul. Cette méthode qui est relativement rustique d'un point de vue

numérique s'avère suffisante pour traiter le comportement des poutres et plaques sandwichs dissymétriques.

- On peut ne pas recalculer $[\mathbf{K}_T]$ à chaque itération et on a :

$$\Delta \mathbf{p} = [\mathbf{K}_T]^{-1} \cdot (\mathbf{q}_e - \mathbf{q}_i) = [\mathbf{K}_T]^{-1} \cdot \mathbf{g} \quad (\text{éq A4-34})$$

Une méthode de **Newton-Raphson modifiée** a été appliquée dans ce cas.

- Enfin la dernière possibilité consiste à ne calculer la matrice de rigidité tangente qu'une seule fois au début du programme et alors :

$$\Delta \mathbf{p} = [\mathbf{K}_{T_0}]^{-1} \cdot (\mathbf{q}_e - \mathbf{q}_i) = [\mathbf{K}_{T_0}]^{-1} \cdot \mathbf{g} \quad (\text{éq A4-35})$$

où $[\mathbf{K}_{T_0}]$ est la matrice de rigidité initiale (linéaire). La méthode de la **contrainte initiale** a été appliquée dans ce cas. Le calcul de la matrice de rigidité tangente n'est fait qu'une fois, ce qui permet un gain de temps de calcul. Par contre, cette méthode, qui a été programmée, s'avère plus instable numériquement. Elle sera donc réservée, dans le cadre de cette étude, aux problèmes très rigides de type tout-encastré dont le comportement non linéaire est moins marqué.

Sur le principe de cette méthode incrémentale/itérative divers raffinements existent (Quasi-Newton Methods, Line-Search). Il n'a pas été nécessaire d'évaluer ces techniques dans le cadre de cette étude car le comportement des structures sandwichs dissymétriques est exempt de bifurcations, de points de rebroussement ou d'états post-flambés.

PROGRAMME DE CALCUL SAND

A5-1 - INTRODUCTION.

Cette annexe a pour objectif de présenter le travail de programmation qui a été effectué après avoir validé les hypothèses numériques et mécaniques. Bien que séparée de la partie théorique, elle y est intimement liée. Par exemple, l'itération qui a conduit au choix de la nouvelle cinématique est liée à l'impossibilité d'effectuer une programmation fiable. La théorie repose sur le calcul de l'intégrale 1 "INT1" et de ses dérivées, ce qui sera présenté dans le premier paragraphe. Un exemple de calcul détaillé d'un terme d'une matrice non linéaire sera utilisé pour justifier la structure du programme et montrer ses caractéristiques et limitations. Les résultats détaillés de la corrélation SAND/Modèles E.F. non linéaires seront aussi présentés. Cette annexe sera clôturée par des essais numériques illustrant le problème de compatibilité des polynômes et la mise en oeuvre pratique de la théorie (méthodes de résolutions, choix du degré du polynôme).

A5-2 - TABULATION DES INTEGRALES.

La partie théorique a montré que les termes de la matrice de rigidité tangente, du vecteur des efforts intérieurs ou du vecteur des efforts extérieurs peuvent se mettre sous la forme d'un produit de la fonction φ ou de ses dérivées car les variables sont séparables.

L'un des points-clefs de cette théorie sera par conséquent le calcul de l'intégrale suivante :

$$\text{INT1}(\alpha, \beta, \gamma) = \int_{-1}^1 x^\alpha \cdot (1+x)^\beta \cdot (1-x)^\gamma dx$$

(α, β, γ) étant entiers. Si on développe le terme central, on a :

$$\text{INT1}(\alpha, \beta, \gamma) = \int_{-1}^1 x^\alpha \cdot \left(\sum_{i=0}^{\beta} K_{i\beta} \cdot x^i \right) \cdot (1-x)^\gamma dx$$

où $K_{i\beta} = C_i^\beta = \frac{\beta!}{(\beta-i)! \cdot i!}$, sont les coefficients du triangle de Pascal. Le calcul com-

plet conduit à la formule littérale :

$$\text{INT1}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{i=0}^{\beta} \sum_{j=0}^{\gamma} K_{i\beta} \cdot K_{j\gamma} \cdot \frac{(-1)^j}{i+j+\alpha+1} \cdot (1-(-1)^{i+j+\alpha+1})$$

La programmation de cette formule s'est avérée instable numériquement avec des réels double précision, en conséquence, pour des exposants élevés, les valeurs ont été calculées numériquement par la méthode des trapèzes. Des tests ont été effectués avec d'autres méthodes réputées plus précises comme la méthode de Romberg, mais sans changements notables au niveau des résultats donnés par le programme de calcul SAND. Les intégrales des fonctions dérivées de φ se déduisent les unes des autres par l'utilisation de la formule :

$$\varphi'_{\alpha, \beta, \gamma} = \alpha \cdot \varphi_{\alpha-1, \beta, \gamma} - \beta \cdot \varphi_{\alpha, \beta-1, \gamma} + \gamma \cdot \varphi_{\alpha, \beta, \gamma-1}$$

La série d'intégrales suivantes qui peuvent intervenir dans le calcul des matrices de rigidités a donc été programmée.

$$\text{INT1}(\alpha, \beta, \gamma) = \int_{-1}^1 x^\alpha \cdot (1+x)^\beta \cdot (1-x)^\gamma dx = \int_{-1}^1 \varphi_{\alpha, \beta, \gamma}^x dx$$

$$\text{INT2}(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') = \int_{-1}^1 \varphi_{\alpha, \beta, \gamma}^x \cdot \varphi_{\alpha', \beta', \gamma'}^x dx$$

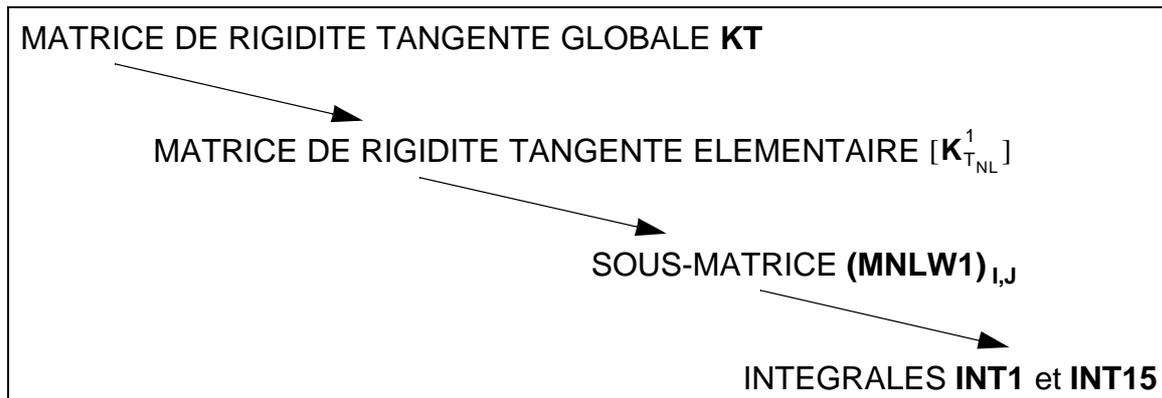
$$\text{INT3}(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') = \int_{-1}^1 \varphi_{\alpha, \beta, \gamma}^x \cdot \varphi_{\alpha', \beta', \gamma'}^x dx$$

$$\text{INT4}(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') = \int_{-1}^1 \varphi_{\alpha, \beta, \gamma}^{\prime\prime x} \cdot \varphi_{\alpha', \beta', \gamma'}^x dx$$

Toutes ces intégrales ne sont pas utilisées dans la formulation car le programme définit lui-même le type d'intégrale à calculer. De ce fait, la programmation possède des marges d'évolutions pour pouvoir modifier la théorie ou traiter d'autres types de problèmes.

A5-3 - PRINCIPE DU CALCUL.

La structure du programme doit permettre le calcul de tous les types de matrices de rigidité élémentaires. L'exemple suivant illustre un calcul type :



$$[K^1_{T_{NL}}] = \iint^T [\mathbf{B}_{s_0}] \cdot {}^T[\mathbf{T}_0] \cdot [\mathbf{Q}^{PT}] \cdot [\mathbf{T}_0] \cdot [\mathbf{B}_{s_0}] dA_1$$

Une des matrices de rigidité élémentaire obtenue une fois cette expression développée est :

$$\mathbf{MNLW1} = \iint \left(\frac{\partial w_0}{\partial X} \right)^2 \cdot \mathbf{b}_{x,w_0} \cdot {}^T \mathbf{b}_{x,w_0} dA_1 = \iint (\mathbf{b}_{x,w_0} \cdot \mathbf{w}_0)^2 \cdot \mathbf{b}_{x,w_0} \cdot {}^T \mathbf{b}_{x,w_0} dA_1$$

Et l'on montre que chaque terme I,J de MNLW1 a pour formule :

$$(\mathbf{MNLW1})_{I,J} = \frac{4b}{L^3} \cdot \sum_p \sum_q \text{INT15}(k_1, L_1, L_2, k_2, L_1, L_2, k_3, L_1, L_2, k_4, L_1, L_2) \cdot \text{INT1}(L_1 + L_2 + L_3 + L_4, 4 \cdot L_3, 4 \cdot L_4) \cdot w_{0p} \cdot w_{0q}$$

Avec : $(k_1, l_1) = f(l)$; $(k_2, l_2) = f(j)$; $(k_3, l_3) = f(p)$; $(k_4, l_4) = f(q)$.

Cet exemple a été choisi de manière à montrer la complexité de la formulation. En effet chaque terme de MNLW1 est une double somme et les termes k_{i,l_i} sont issus du rangement en colonne des coefficients inconnus des polynômes de Ritz. On gère donc bien des sommes sextuples en réalité. De plus, on doit tenir compte du fait que l'intégrale 15 est une combinaison linéaire de l'intégrale 1 et que celle-ci est elle-même une double somme. En toute rigueur, du point de vue numérique pur, on arrive donc à une série de neuf signes sommes : $\Sigma \Sigma \Sigma \Sigma \Sigma \Sigma \Sigma \Sigma \Sigma$.

Un test a été effectué pour compter les appels à INT1 dans le programme SAND pour 2 incréments de charge. Le cas présenté comporte 4 calculs de la matrice de rigidité tangente initiale $[KT_0]$, deux calculs de q_i et un calcul de $[KT]$. Le nombre d'appels à la fonction INT1 est considérable et donne à lui tout seul le temps de calcul. La problématique de l'inversion de matrice, essentielle en E.F. linéaire est par conséquent hors de propos ici. De plus l'augmentation du nombre d'appel est quasiment exponentiel avec le nombre d'inconnues. Par conséquent, si l'on veut s'attacher à la réduction du temps de calcul du programme, c'est à ce paramètre et donc plutôt du point de vue théorique que des efforts devront être menés.

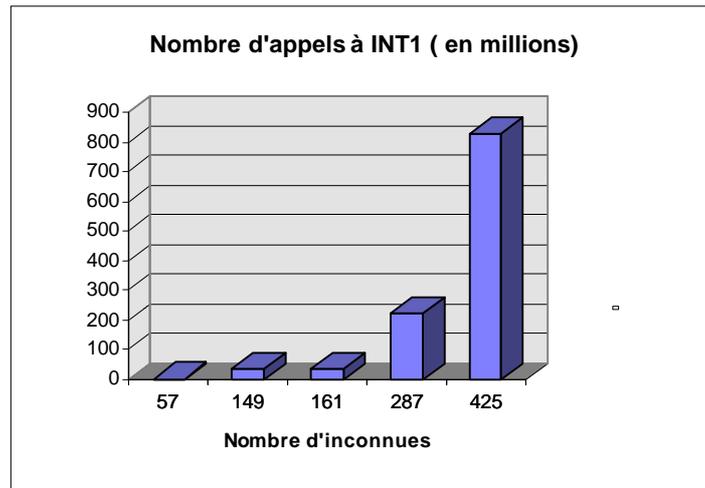


Figure N° A5-1 : Nombre d'appels à l'intégrale 1.

Cette remarque justifie le fait de calculer au préalable les INT1 et de les stocker en mémoire vive (pour $41 \times 41 \times 41$: 680Ko). Deux signes sommes et un ordre de grandeur en temps de calcul sont gagnés. A priori, la même chose pourrait être appliquée pour tous les types d'intégrales mais le coût en mémoire augmente très vite. Par exemple, pour une intégrale 6, le stockage des 10 premiers exposants nécessite 8×10^6 soit 8Mo de mémoire vive. Le coût devient de l'ordre du Go pour les intégrales suivantes.

A5-4 - STRUCTURE DU PROGRAMME.

La structure générale du programme se déduit de la problématique du calcul (voir figure page suivante).

D'un point de vue pratique, le programme a été développé du niveau 1 vers le niveau 4. Les résultats ont été comparés à une routine Maple jusqu'au niveau des matrices de rigidité élémentaires.

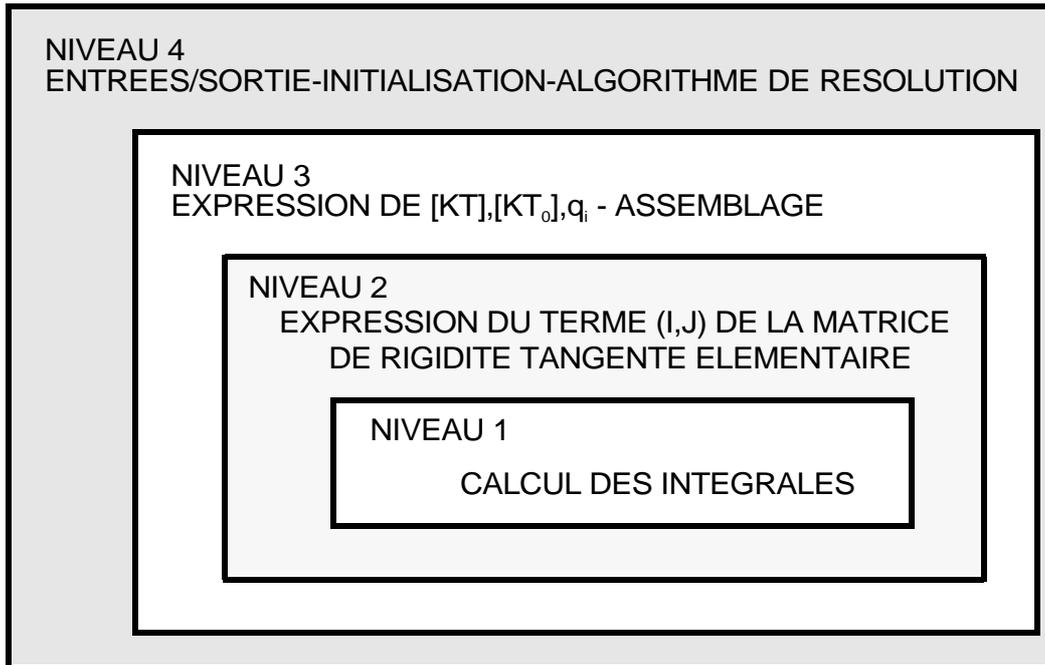


Figure N° A5-2 : Structure générale du programme SAND.

L'algorithme de calcul du terme élémentaire est présenté page suivante. Un calcul simple boucle correspond à une matrice dont tous les termes sont des simples sommes et double boucle à une matrice dont tous les termes sont des doubles sommes. Le programme possède les particularités suivantes :

- A partir du calcul "à la main" de chaque matrice de rigidité tangente élémentaire, un codage est effectué et le calcul numérique de la matrice est réalisé. La théorie peut donc être modifiée jusqu'à un certain point .
- La forme des polynômes inconnus est aussi codée, ce qui permet de tester assez facilement des modifications. Par exemple, on peut rajouter des conditions aux limites en membrane. L'autre intérêt est de pouvoir tester n'importe quelle base polynômiale basée sur x , $x+1$, $x-1$. On peut penser par exemple aux polynômes de Bernstein utilisés par Bézier pour le traitement des raideurs localisées. La seule condition impérative est de conserver des variables séparables.
- Le programme gère automatiquement la taille des matrices qui évolue en fonction du degré de w_0 . Ceci va permettre en particulier l'étude du problème de compatibilité a posteriori.

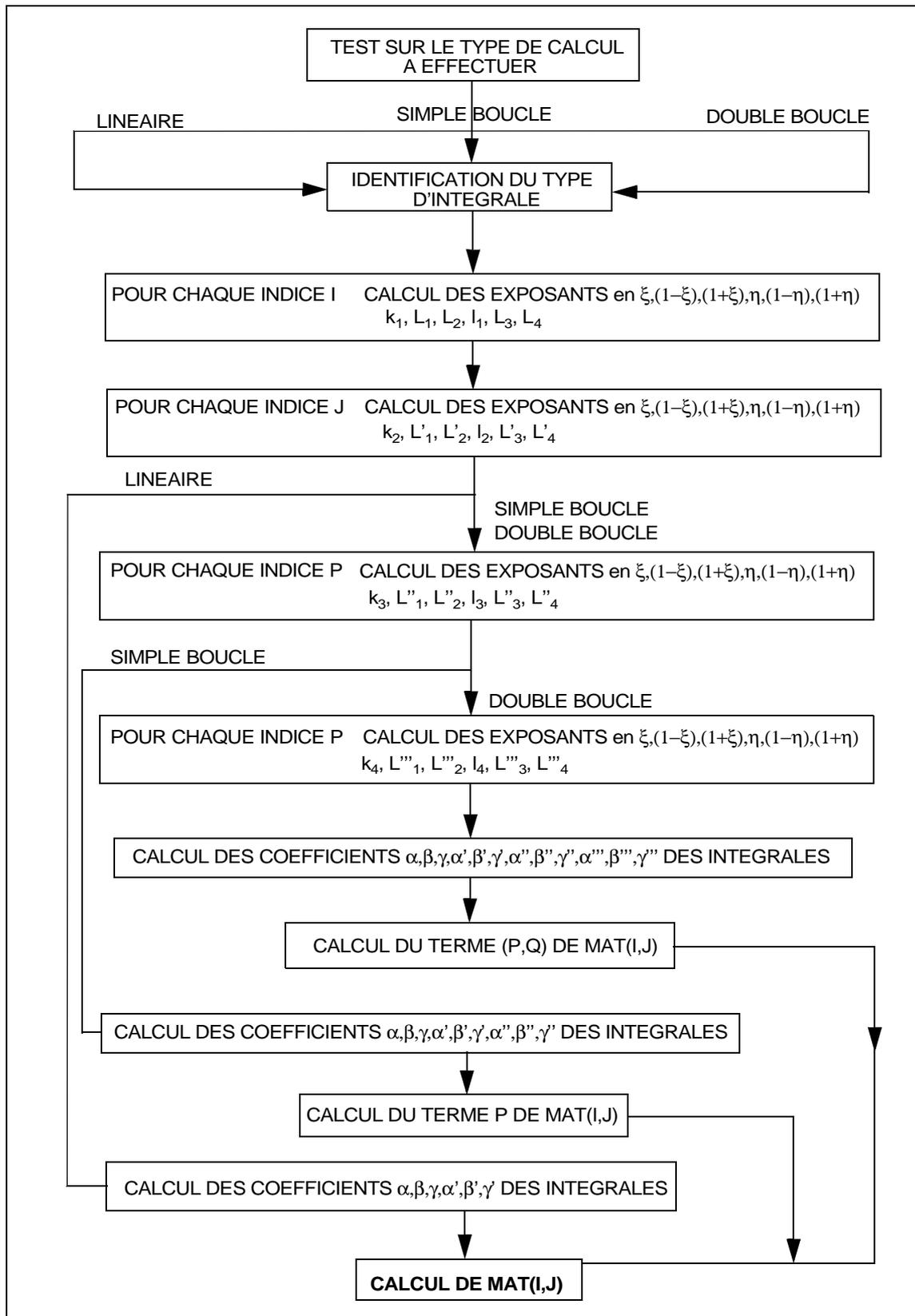


Figure N° A5-3 : Algorithme de calcul des matrices de rigidité élémentaires.

A5-5 - ENTRÉES-SORTIES.

L'entrée se fait par un fichier texte comportant des mots clés (en gras) et toute la mécanique qui a été présentée chap IV.

TITRE: ESSAI

```
*****
*                               CONDITIONS AUX LIMITES                               *
*****
*          CODES : 0 : BORDS LIBRES
*                   1 : BORDS SIMPLEMENT APPUYES
*                   2 : BORDS ENCASTRES
*
CL1:2
CL2:2
CL3:2
CL4:2
*
*****
*                               DIMENSIONS (MM)                               *
*****
B:200.
L:200.
H1:1
HC:15.
H2:0.5
*
*****
* CARACTERISTIQUES EQUIVALENTES PEAU TRAVAILLANTE (MPA) *
*****
QT11:100000.
QT12:10000.
QT22:100000.
QT66:10000.
*
*****
*CARACTERISTIQUES EQUIVALENTES PEAU STABILISATRICE (MPA)*
*****
QSB11:100000.
QSB12:10000.
QSB22:100000.
QSB66:10000.
*
*****
*                               CARACTERISTIQUES NIDA (MPA)                               *
*****
EZZ:100.
GXZ:50.
GYZ:25.
*
*****
*                               CHARGEMENT (N/MM)                               *
```

TYPE D'ANALYSE :

* CODEANA:1 COMPRESSION PURE
 * CODEANA:2 COMPRESSION BIAXIALE
 * CODEANA:3 CISAILLEMENT PUR
 * CODEANA:4 COMBINE TYPE 1 :
 * CODEANA:4 COMBINE TYPE 2 :
 * CODEANA:4 COMBINE TYPE 3 :

CODEANA:1

FLUX MAXIMUM SUIVANT X : NX (POSITIF: TRACTION;NEGATIF: COMPRESSION)

FLUX MAXIMUM SUIVANT Y : NY (POSITIF: TRACTION;NEGATIF: COMPRESSION)

FLUX DE CISAILLEMENT MAXIMUM : NXY

NX:-1000.

NY:0.

NXY:0.

DECALAGES EN Z DU CHARGEMENT DUS A LA PRESENCE DES TALONS

DECALAGE_X:0.**DECALAGE_Y:0.**

* POURCENTAGE ESTIME DE FLUX :

PFLUX:0

*

PARAMETRES DE RESOLUTION

* RESOLUTION:SI CODERES = 1 METHODE DE LA CONTRAINTE INITIALE
 * SI CODERES = 2 METHODE DE NEWTON-RAPHSON
 * EXPW: DEGRE DU POLYNOME SOLUTION EN W0
 * NITERMAX: NOMBRE D'ITERATIONS MAXIMAL
 * CRITCV:CRITERE DE CONVERGENCE
 * NINC:NOMBRE D'INCREMENTS DE CHARGE

CODERES:2**EXPW:1****NITERMAX:5****CRITCV:1.D-3****NINC:1**

*

GESTION DES RESULTATS

* PAS SUIVANT X ET Y DE CALCUL DES SORTIES ET COTE SUIVANT Z
 * DE CALCUL DES SORTIES DANS LE NIDA

PASX:5**PASY:2.5****ZNIDA:15.445**

* SORTIE DES CHAMPS SUR FICHIERS .CH1 ET . CH2

* CODES PROPOSES: 1 : U0 5 : EXXPT 9 : EYYPS 13 : GAMXZ

* 2 : V0 6 : EYYPT 10 : EXYPS 14 : GAMYZ

* 3 : U2 7 : EXYPT 11 : DELTAZ 0 : RIEN

* 4 : V2 8 : EXXPS 12 : EZZ

*

CODECH1:1**CODECH2:1****CODECH3:1****CODECH4:1**

*

FIN:

Le programme fournit plusieurs fichiers résultats formatés. Ces fichiers peuvent être post-traités avec Excell. Deux types d'exploitation sont possibles : soit, à un incrément de force donné on peut visualiser le champ de la variable sur la surface du sandwich, soit, pour le centre, on peut visualiser l'évolution de la variable en fonction de la force. Les principaux fichiers de sortie sont les suivants :

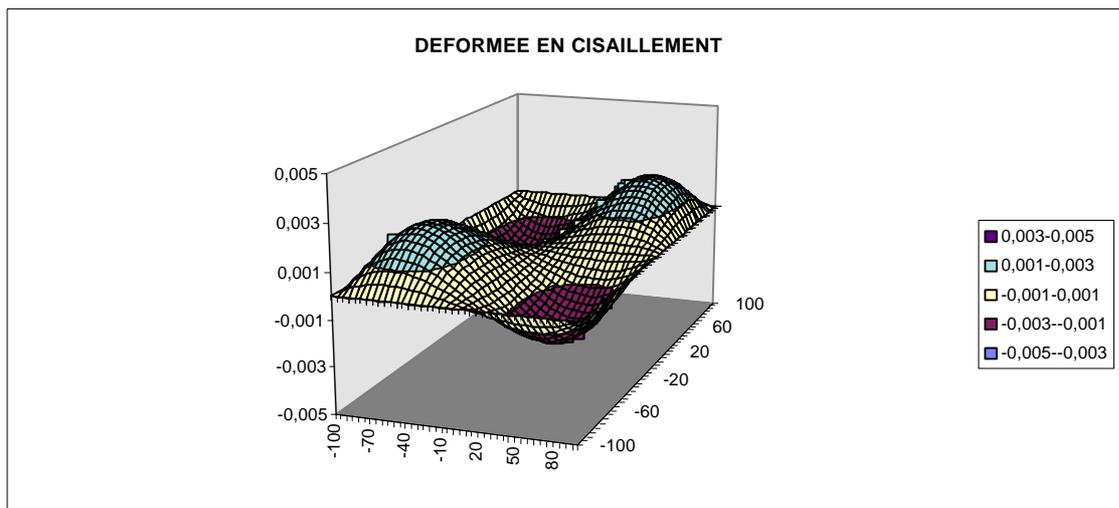
Fichier .EPS (Epsilon) : Réécriture des données d'entrée, historique calcul , données de l'ensemble des déformations :

- Nida: $\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \epsilon_{zz}$
- Peau travaillante: $\epsilon_{xx}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yy}$
- Peau stabilisatrice: $\epsilon_{xx}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yy}$

Fichier .DEP (Déplacements) : Ecriture de tous les déplacements :

- Nida: ΔZ
- Peau travaillante : u_0, v_0, w_0
- Peau stabilisatrice : u_2, v_2, w_2

Fichier .DEF (Déformée) : Ecriture du champ de déplacement w_0 qui permet de tracer la déformée.



Fichiers .CH1 à .CH4 (Champs 1 à 4) : Ecriture de champs de variables au choix pour un traitement analogue.

Fichiers .W0 : Ecriture de W_0 et de Δz au centre fonction de la charge.

Fichiers .CPR (Compression) : Ecriture de W_0 et de ϵ_{xx} au centre pour la peau travaillante et la peau stabilisatrice fonction de la charge.

Fichiers .BI (Compression biaxiale) : Ecriture de ϵ_{xx} et ϵ_{yy} au centre pour la peau travaillante et la peau stabilisatrice fonction de la charge.

Fichiers .CIS (Cisaillement) : Ecriture de ϵ_{xy} au centre pour la peau travaillante et la peau stabilisatrice fonction de la charge.

Fichiers .CBE (Combiné) : Ecriture de ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{xy} au centre pour la peau travaillante et la peau stabilisatrice fonction de la charge.

A5-6 - PERFORMANCES.

Le problème traité comporte 4 incréments et entre 6 et 8 itérations suivant le type de conditions aux limites. La méthode de résolution utilisée est de type Newton-Raphson complète. Le calcul est effectué sur PC Pentium 333 MHz, 256 Mo RAM et sous Windows 98. Les temps de calculs en fonction du nombre d'inconnues et du degré de w_0 sont fournis dans le tableau suivant. On constate que le temps de calcul augmente lorsque le degré augmente ainsi que le nombre d'inconnues. Ceci est vraisemblablement dû au temps supplémentaire nécessaire pour obtenir les intégrales de degré supérieur rangées dans une matrice $41 \times 41 \times 41$.

Nombre d'inconnues	Degré	Temps de calcul
53	1	7"
149	1	10"
271	1	33"
143	2	20"
399	2	40"
591	2	1' 10"
429	3	3' 45"
1071	4	25'

Tableau N° A5-1 Temps de calcul.

L'objectif de faire un programme rapide est tenu sachant que l'on montrera que le degré 2 représente un optimum.

A5-7 - CORRÉLATION CAS N°1.

Dans le premier tableau, les contraintes dans les peaux pour les points considérés sont fournies par extrapolation à partir des points de Gauss sans lissage. En effet dans ce cas SAMCEF fait la moyenne au point géométrique de toutes les données et donc pondère le résultat affiché par les contraintes dans l'âme qui sont nulles ! Les résultats sont globalement analogues mais se détériorent au fur et à mesure que l'on se rapproche du bord.

COMPARAISON POINT PAR POINT CONTRAINTES CAS N°1				
PEAUX				
Déformations SAND				
POINT	ExxPT	EyyPT	ExxPS	EyyPS
"-80;-80"	-0,006263	0,001165	-0,0005692	0,00067
"-40;40"	-0,006293	0,0007375	-0,00046	0,00159
"20;-20"	-0,006323	0,000623	-0,000347	0,001815
"60;60"	-0,0065	0,00094	-0,0006	0,00139
SAMCEF NX=-400 N/mm				
POINT	SIGxxPT	SIGyyPT	SIGxxPS	SIGyyPS
"-80;-80"	-406,7	-8,5	-3,38	32,1
"-40;40"	-439,6	-37,6	16,5	75,8
"20;-20"	-446,8	-45,1	24,8	91,7
"60;60"	-427,6	-25,7	-5,43	52,2
SAND NX=-400N/mm				
POINT	SIGxxPT	SIGyyPT	SIGxxPS	SIGyyPS
"-80;-80"	-442,798	-14,672	-15,251	21,252
"-40;40"	-449,786	-35,453	3,444	63,831
"20;-20"	-453,256	-41,265	11,856	75,542
"60;60"	-462,578	-28,095	-5,793	52,826

Les contraintes dans l'épaisseur de l'âme sont calculées à partir des points de Gauss avec lissage. Pour obtenir des résultats corrects dans l'âme, un cas avec 3 éléments dans l'épaisseur a été traité et le dépouillement a été effectué pour l'élément milieu. Ce cas a divergé pour un flux de 300 N/mm.

COMPARAISON POINT PAR POINT CONTRAINTES CAS N°1				
AME				
SAMCEF NX=-300 N/mm				
POINT	Flèche	SIGzz	TAUxz	TAUyz
"-80;-80"	0,495	***	-0,197	0,209
"-40;40"	2,065	***	-0,07	-0,228
"20;-20"	2,56	***	0,03	0,104
"60;60"	1,328	***	0,146	-0,3136
SAND NX=-300N/mm				
POINT	Flèche	SIGzz	TAUxz	TAUyz
"-80;-80"	0,415	-0,4	-0,424	0,235
"-40;40"	1,85	-0,615	-0,08	-0,205
"20;-20"	2,35	-0,247	0,0253	0,115
"60;60"	1,15	-0,867	0,189	-0,25

Les valeurs des flèches sont obtenues par extrapolation à partir des points de Gauss

sans lissage. On constate que la corrélation est correcte pour cet incrément de charge compte-tenu de l'imprécision des sorties E.F. et de la faible énergie passant dans l'âme.

A5-8 - CORRÉLATION CAS N°2.

COMPARAISON POINT PAR POINT CONTRAINTES CAS N°2

PEAUX

Déformations SAND

POINT	ExxPT	EyyPT	ExxPS	EyyPS	GAMxyPT	GAMxyPS
"-320;-320"	-0,000084	-0,000154	0,000213	0,000213	0,017631	0,00873
"-240;240"	0,00005	0,000074	-0,000152	-0,000129	0,012244	0,011854
"160;-160"	-0,000015	0,000014	-0,000038	-0,000022	0,012263	0,011839
"80;80"	-0,000054	-0,00007	0,000135	0,000097	0,0122	0,011886

SAMCEF NXY=200 N/mm

POINT	SIGxxPT	SIGyyPT	SIGxxPS	SIGyyPS	TAUxyPT	TAUxyPS
"-320;-320"	-0,12	-12,1	19,2	20,25	157	118,5
"-240;240"	4,145	2,36	-8,09	-7,43	134,87	156,4
"160;-160"	0,378	-1	0,22	-0,06	132	161
"80;80"	-8,1	-7,25	10,07	7,91	133,3	158,1

SAND NXY=200N/mm

POINT	SIGxxPT	SIGyyPT	SIGxxPS	SIGyyPS	TAUxyPT	TAUxyPS
"-320;-320"	-7,845	-8,308	12,681	12,681	191,014	116,397
"-240;240"	4,471	4,101	-8,703	-8,026	132,651	158,049
"160;-160"	-0,935	0,501	-2,022	-1,55	132,857	157,849
"80;80"	-4,717	-3,954	7,466	6,346	132,175	158,476

Dans le premier tableau, les contraintes dans les peaux pour les points considérés sont fournies par extrapolation à partir des points de Gauss sans lissage. Il faut noter que dans les zones où la variation de contrainte est importante, les valeurs extrapolées varient de plus de 50%. Par exemple TauxyPT(-320,-320) = 157.7; 190; 124; 157. Pour éviter ce type de variation qui altèrent le résultat final, il faudrait un maillage plus fin, ce qui serait extrêmement coûteux en termes de temps de calcul et d'espace disque pour notre problème.

COMPARAISON POINT PAR POINT CONTRAINTES CAS N°2

AME

SAMCEF NXY=200 N/mm

POINT	Flèche	SIGzz	TAUxz	TAUyz
"-320;-320"	0,4	***	0,25	0,297
"-240;240"	-0,554	***	-0,0025	0,049
"160;-160"	0,315	***	0,033	0,016
"80;80"	0,975	***	0	0,003

SAND NXY=200N/mm

POINT	Flèche	SIGzz	TAUxz	TAUyz
"-320;-320"	0,236	-0,675	0,16	0,273
"-240;240"	-0,1	4,6	-0,29	0,0525
"160;-160"	0,14	3,53	-0,0014	0,01
"80;80"	0,67	-3,6	0,0032	0,008

Bien que l'incrément de charge soit très défavorable, on retrouve avec une bonne précision les contraintes principales τ_{xy} dans les deux peaux. La dispersion qui est plus élevée pour les contraintes secondaires et la flèche est due à des effets non linéaires plus prononcés, à l'utilisation de degré 2 par SAND, et à une modélisation E.F dont chaque élément de volume mesure 40x40 mm ce qui nuit à la précision. Par contre, l'ordre de grandeur est correct en tous points.

Le programme de calcul SAND remplit les objectifs fixés au départ de cette étude et se révèle d'une utilisation beaucoup plus aisée et rapide que les modèles éléments finis. D'une manière générale les résultats sont très corrects pour les caractéristiques principales. La dispersion est par contre plus élevée pour les caractéristiques à faibles valeurs énergétiques (contraintes secondaires, contraintes dans l'âme, dans la peau stabilisatrice et flèche en cisaillement). D'un point de vue pratique, un pré et un post processeur écrits en visual basic seraient d'un intérêt certain et pourront faire l'objet de développements ultérieurs.

A5-9 - PROBLÈME DE LA COMPATIBILITÉ.

NOMBRE D'INCONNUES.

Degré de W0	CL1	CL2	CL3	CL4	W0	U0	V0	W2	U2	V2	Nombre Total
0	1	1	0	0	1	-2	-1	1	0	0	-1
0	1	1	1	1	1	14	15	1	16	16	63
0	2	2	1	1	1	30	31	1	32	32	127
0	2	2	2	2	1	62	63	1	64	64	255
1	1	1	0	0	4	10	11	4	12	12	53
1	1	1	1	1	4	34	35	4	36	36	149
1	2	2	1	1	4	58	59	4	60	60	245
1	2	2	2	2	4	98	99	4	100	100	405
2	1	1	0	0	9	30	31	9	32	32	143
2	1	1	1	1	9	62	63	9	64	64	271
2	2	2	1	1	9	94	95	9	96	96	399
2	2	2	2	2	9	142	143	9	144	144	591
3	1	1	0	0	16	58	59	16	60	60	269
3	1	1	1	1	16	98	99	16	100	100	429
3	2	2	1	1	16	138	139	16	140	140	589
3	2	2	2	2	16	194	195	16	196	196	813
4	1	1	0	0	25	94	95	25	96	96	431
4	1	1	1	1	25	142	143	25	144	144	623
4	2	2	1	1	25	190	191	25	192	192	815
4	2	2	2	2	25	254	255	25	256	256	1071

Tableau N° A5-2 : Nombre d'inconnues du problème.

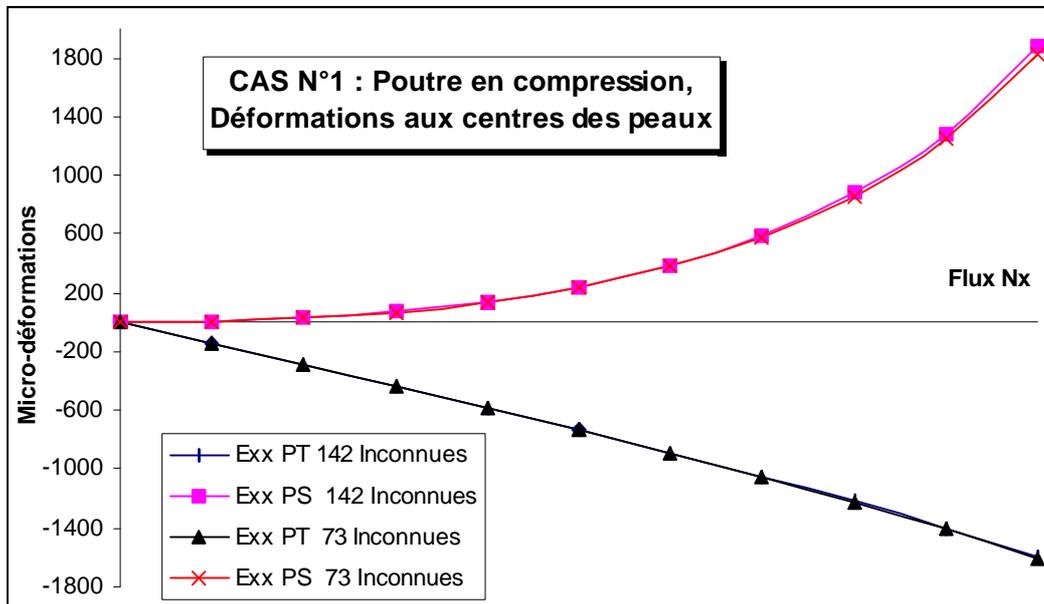
Le paramètre déterminant dans le tableau qui précède est le degré du polynôme w_0 , tous les autres s'en déduisant. Le degré de w_0 devra être suffisant pour pouvoir décrire la déformée dans tous les cas de charge : compression, cisaillement ou combiné compression/cisaillement. A priori, un polynôme de degré 4, soit 25 inconnues doit être suffisant. La

programmation autorisera le choix du degré de w_0 de 0 à 4 (avec $M_{w_0} = N_{w_0}$) ce qui permettra de vérifier a posteriori le degré optimum pour le problème à traiter.

Il est possible de modifier le degré des polynômes utilisés dans la théorie car les formules utilisées dans le chapitre 4 sont directement programmées. Initialement, il est supposé nécessaire que degré $(u_0) = 2 * (\text{degré}(w_0) - 1) + 1$. La compatibilité ne sera plus respectée si on pose degré $(u_0) = \text{degré}(w_0)$ (et idem pour u_2, v_0, v_2). Pour un problème bi-appuyé en degré 2 le nombre d'inconnues diminue alors de 142 à 73. Les trois cas numériques présentés dans le chapitre 4 (poutre en compression et plaque en compression et cisaillement) sont repris ici.

CAS N°1 : POUTRE EN COMPRESSION.

En ne respectant pas la compatibilité, le nombre d'inconnues est ramené de 142 à 73. La comparaison des résultats dans ce premier cas montre des résultats quasi analogues. La différence entre les deux calculs n'excède pas 3% pour le dernier incrément de charge.



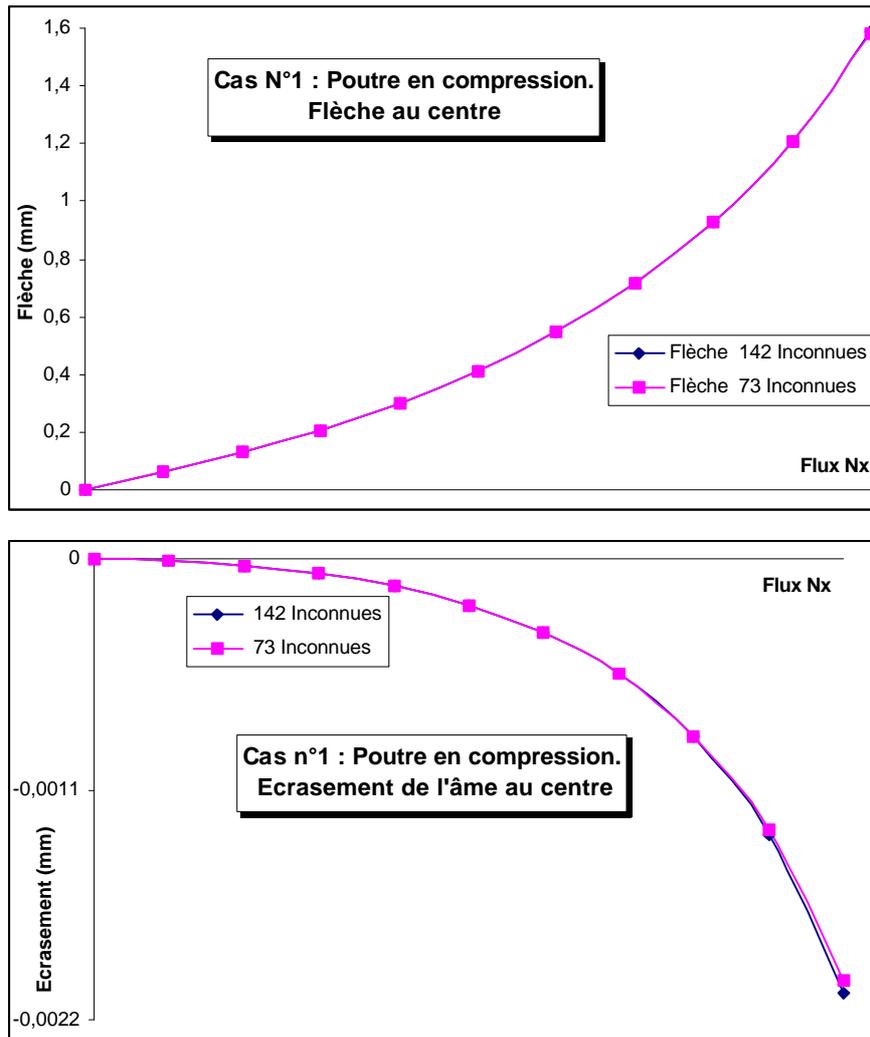
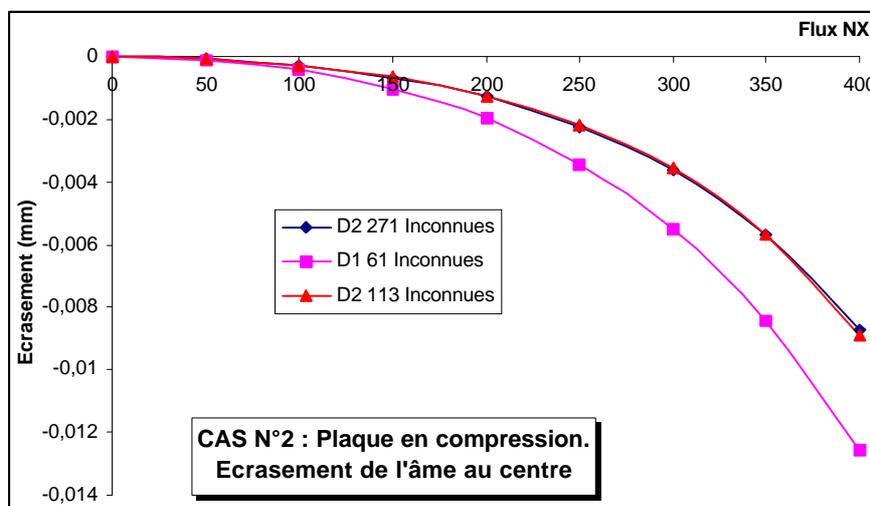


Figure N° A5-4 : Comparaison problème de compatibilité ; cas n°1 : poutre en compression.

CAS N°2 : PLAQUE EN COMPRESSION.



La comparaison des résultats dans ce deuxième cas montre aussi des résultats quasi

analogues. Le nombre d'inconnues pour un problème tout appuyé est ramené de 149 à 61 en degré 1 et de 271 à 113 en degré 2.

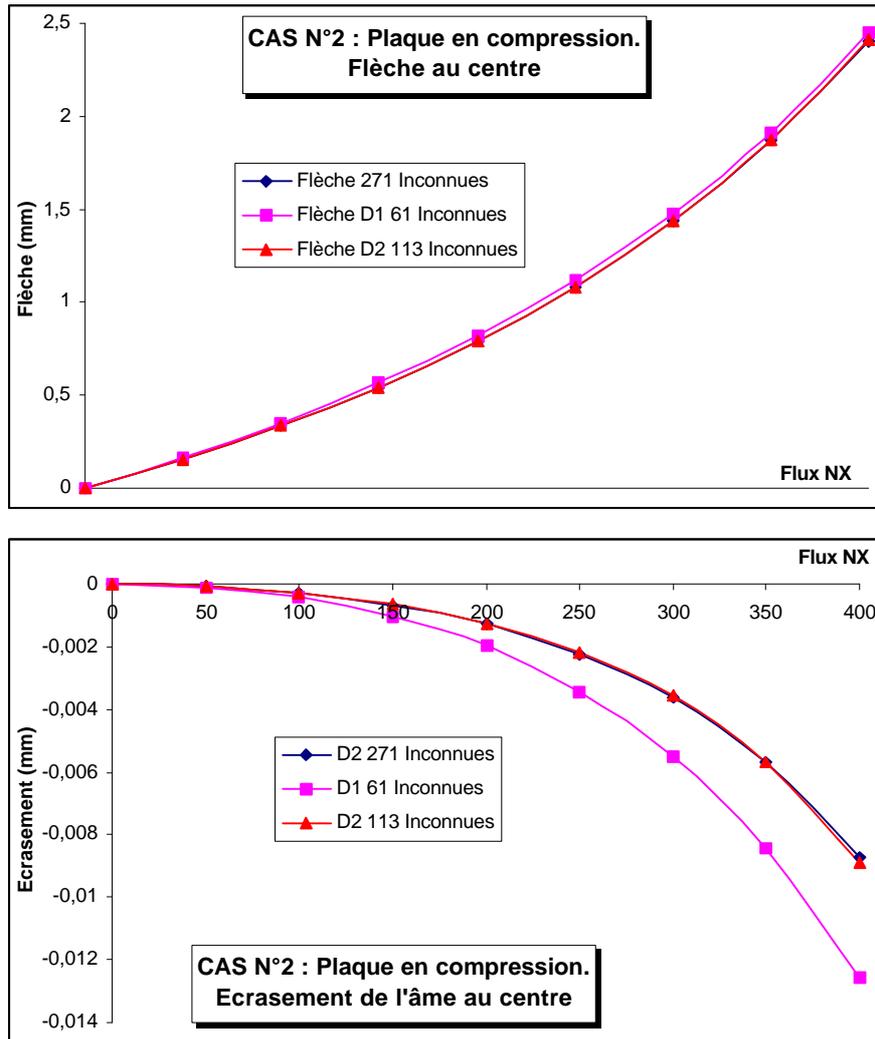
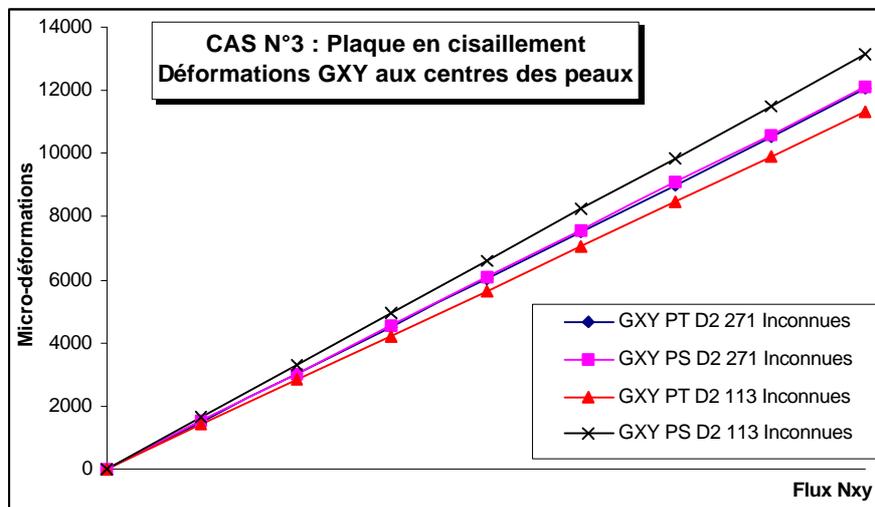


Figure N° A5-5 : Comparaison problème de compatibilité cas n°1 : poutre en compression.

CAS N°3 : PLAQUE EN CISAILLEMENT.



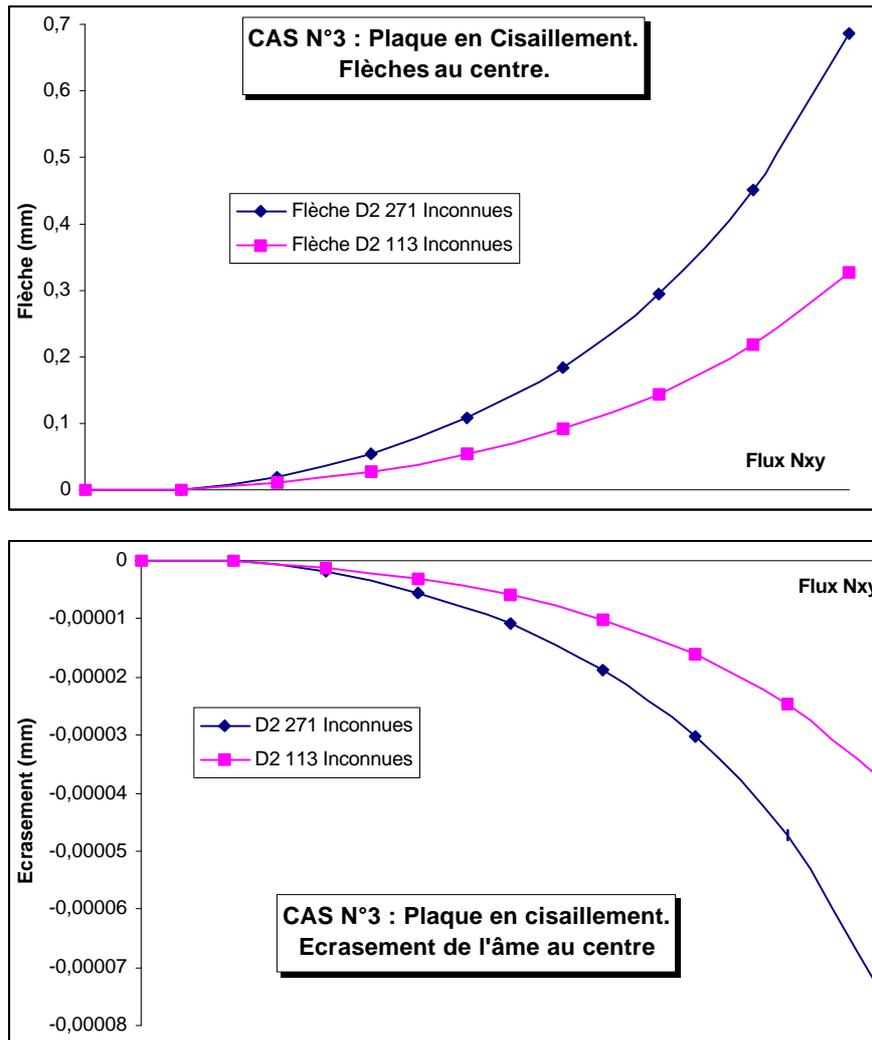


Figure N° A5-6 : Comparaison problème de compatibilité cas n°3 : plaque en cisaillement.

La différence est marquée dans ce troisième cas numérique. Elle atteint 8 % pour la déformation dans la peau stabilisatrice, et 53 % pour la flèche. Le respect de la compatibilité doit donc être impératif dans les cas de chargement en cisaillement. Les déformations de cisaillement étant écrites à partir des déplacements de membrane, il n'est pas surprenant que ces quantités soient affectées par le non respect de la compatibilité.

CONCLUSIONS.

Il semble que l'on puisse proposer une version améliorée de la théorie et du programme SAND par non respect de la compatibilité en compression. Le temps de calcul chute pour un problème bi-appuyé de 45 " à 37", soit un gain relativement faible. Cette faible différence s'explique par le fait déjà signalé que la majeure partie du temps de calcul est due aux matrices non linéaires d'ordre 2 qui sont en $w_{0 \text{ ou } 2}$ essentiellement.

A5-10 - MISE EN OEUVRE PRATIQUE DE LA THÉORIE.

OBJECTIFS DU PARAGRAPHE.

Il ne s'agit pas ici de faire une étude exhaustive de toutes les utilisations possibles du logiciel dans tous les cas et avec toutes les géométries, ce qui se révèle impossible. Aussi, il est proposé de donner des idées directrices à partir de l'expérience de l'auteur sur :

- Le choix de la méthode de résolution : Méthode de la Contrainte Initiale ou Newton-Raphson.
- La valeur à donner aux incréments et au critère de convergence.
- Le choix du degré de w_0 .

CHOIX DE LA MÉTHODE DE RÉOLUTION.

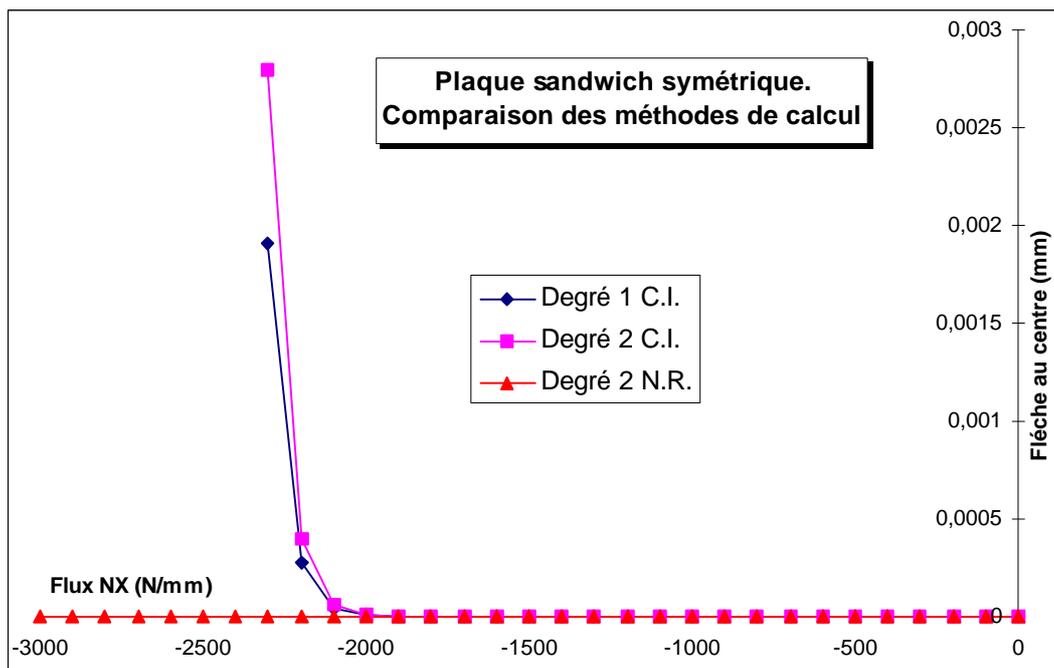


Figure N° A5-7 : Comparaison des méthodes de résolution.

La Méthode de la Contrainte Initiale est réputée plus instable numériquement que celle de Newton-Raphson [Cristfield 1991] mais est aussi plus rapide. Cette affirmation est confirmée par notre expérience. Un premier cas test sur une plaque sandwich symétrique en compression montre en effet que le problème ne diverge que sous l'effet d'une perturbation d'origine numérique dans le cas de la méthode de la contrainte initiale et ceci indépendamment du degré du polynôme (courbes Degré 1 et 2 C.I., Figure N° A5-7). D'un point de vue mécanique, compte tenu des symétries du problème, la flèche doit rester égale à zéro ce

qui est trouvé, en l'absence de perturbation par la méthode de Newton-Raphson (Courbe Degré 2 N.R).

Il convient d'insister sur le fait que la perturbation est d'origine purement numérique et ne permet pas par ce biais d'obtenir la charge de flambage ($N_x = -350$ N/mm) donnée par Allen.

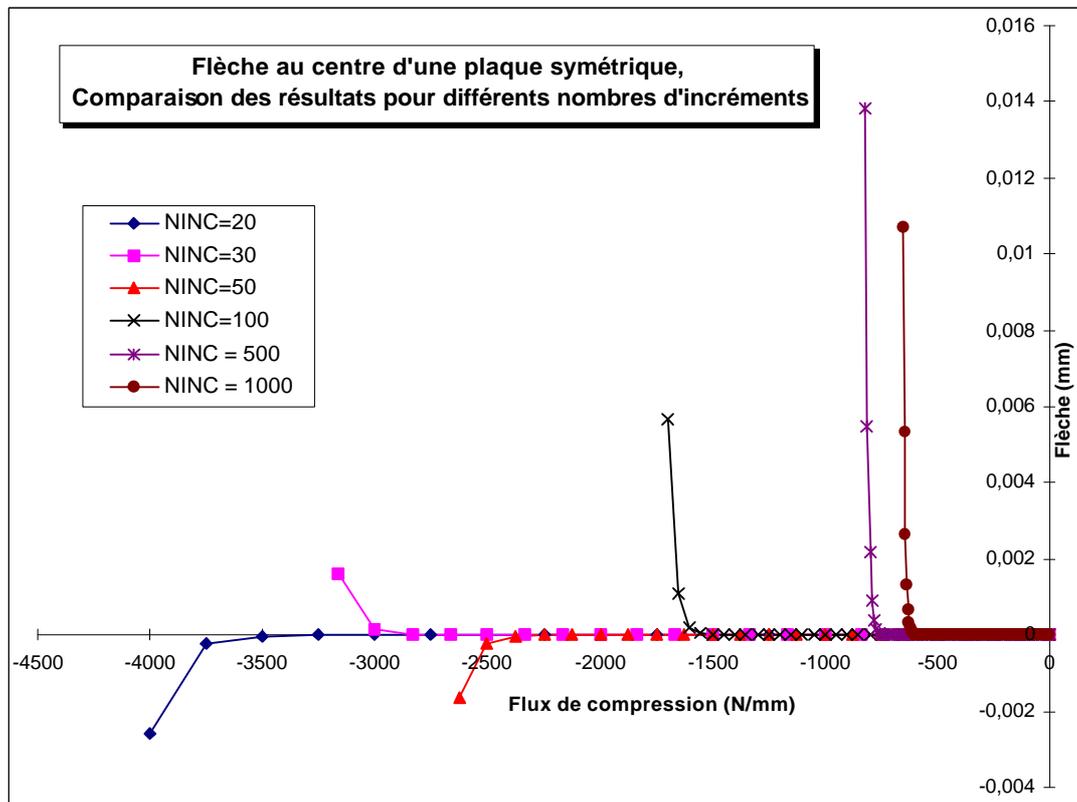


Figure N° A5-8 : Influence du nombre d'incrément. Cas d'une plaque symétrique en compression. Méthode de la contrainte initiale.

Le fait d'augmenter le nombre d'incrément, dans ce cas, génère une perturbation numérique plus précoce et donc un flambage à des valeurs plus faibles que dans la Figure N° A5-7. On pourra remarquer que la flèche est soit positive, soit négative ce qui correspond à la réalité du phénomène de flambage.

D'une manière générale, la méthode de la contrainte initiale peut être utilisée pour tous les problèmes "très rigides" ou au comportement non linéaire peu marqué (Compression tout-encasté, cisaillement tout-appuyé ou tout-encasté). Un cas test sur une plaque 800x800 mm tout appuyé montre que les déformations principales sont quasi-identiques alors que la flèche présente une différence plus marquée. Le temps de calcul chute de 30% d'une méthode à l'autre. Il est donc conseillé, après une première itération en Contrainte Initiale d'effectuer un calcul avec Newton-Raphson pour affiner les résultats.

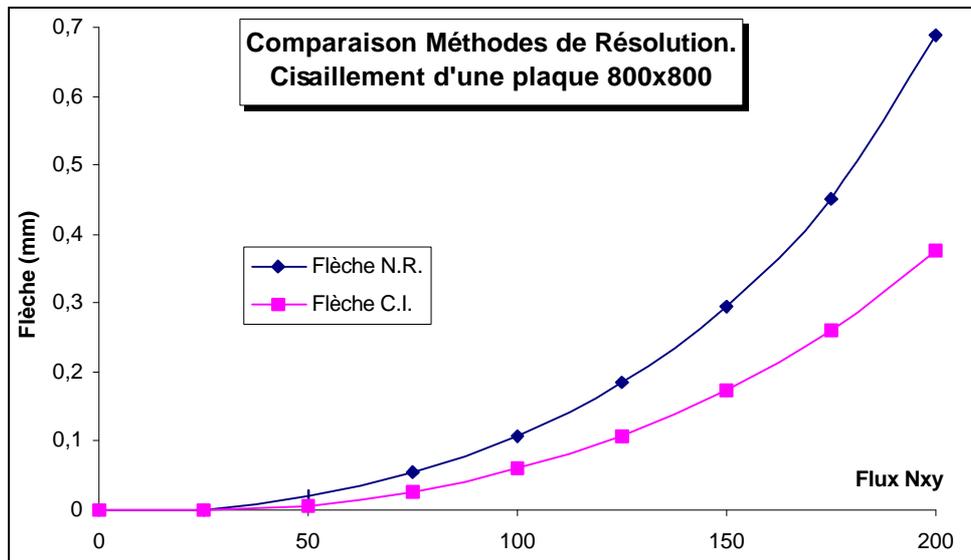
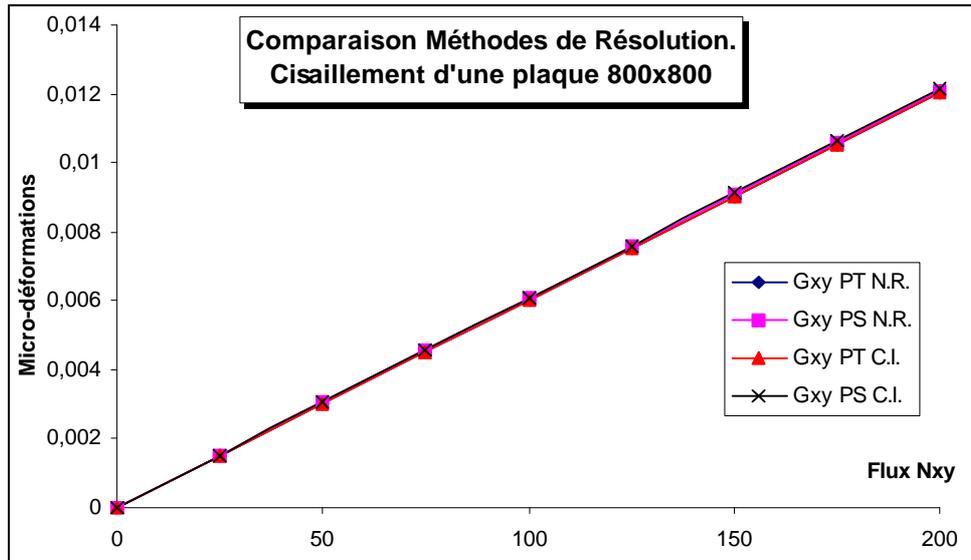


Figure N° A5-9 : Comparaison des méthodes de résolution. Cas d'une plaque en cisaillement.

VALEUR DU CRITÈRE DE CONVERGENCE.

La valeur du critère de convergence a été fixée par défaut, compte tenu de la technique utilisée à 10^{-3} . La sensibilité au critère de convergence est faible dans la majeure partie des cas et des quantités étudiées. Si on reprend l'exemple précédent, l'évolution de la flèche en fonction du critère de convergence fournit le tableau suivant :

NX	CV10-3	CV10-5	CV10-7	CV10-10	CV10-11	CV10-12
0	0	0	0	0	0	0
-100	0	0	0	0	0	0
-200	0	0	0	0	0	0
-300	0	0	0	0	0	0
-400	0	0	0	0	0	0
-500	0	0	0	0	0	0
-600	0	0	0	0	0	0
-700	0	0	0	0	0	0
-800	0	0	0	0	0	0
-900	0	0	0	0	0	0
-1000	0	0	0	0	0	0
-1100	0	0	0	0	0	0
-1200	0	0	0	0	0	0
-1300	0	0	0	0	0	0
-1400	0	0	0	0	0	0
-1500	0	0	0	0	0	0
-1600	0,00000001	0,00000001	0,00000001	0,00000001	0,00000001	0,00000001
-1700	0,00000004	0,00000004	0,00000004	0,00000004		
-1800	0,0000002	0,0000002	0,0000002			
-1900	0,00000115	0,00000115	0,00000115			
-2000	0,00000681	0,00000681	0,00000681			
-2100	0,00004247	0,00004247	0,00004247			
-2200	0,00027828	0,00027828				
-2300	0,00191027	0,00191027				
-2400	0,01370938					
-2500	0,1026652					
-2600	0,80085796					

Tableau N° A5-3 Evolution de la flèche en fonction du critère de convergence. Cas d'une plaque symétrique en compression.

On remarque que les résultats sont strictement identiques, le programme s'arrête seulement plus tôt, le nombre d'itération étant limité à 15.

Dans le cas d'une plaque 200x200 en cisaillement, la variation sur la déformation Gxy PS au centre de la plaque pour un critère de convergence passant de 10^{-3} à 10^{-5} est de 0.04%. Elle est du même ordre dans le cas 800x800. Pour la flèche au centre, la variation atteint 7.3% pour la première plaque et 8.1% pour la plaque 800x800. La variation est très faible lorsque l'on augmente le critère jusqu'à 10^{-9} . En conséquence, si l'on veut obtenir toutes les quantités avec la meilleure précision, on peut conseiller de fixer le critère de convergence à 10^{-5} , au prix, toutefois, d'une possible augmentation du nombre d'itérations et donc du temps de calcul.

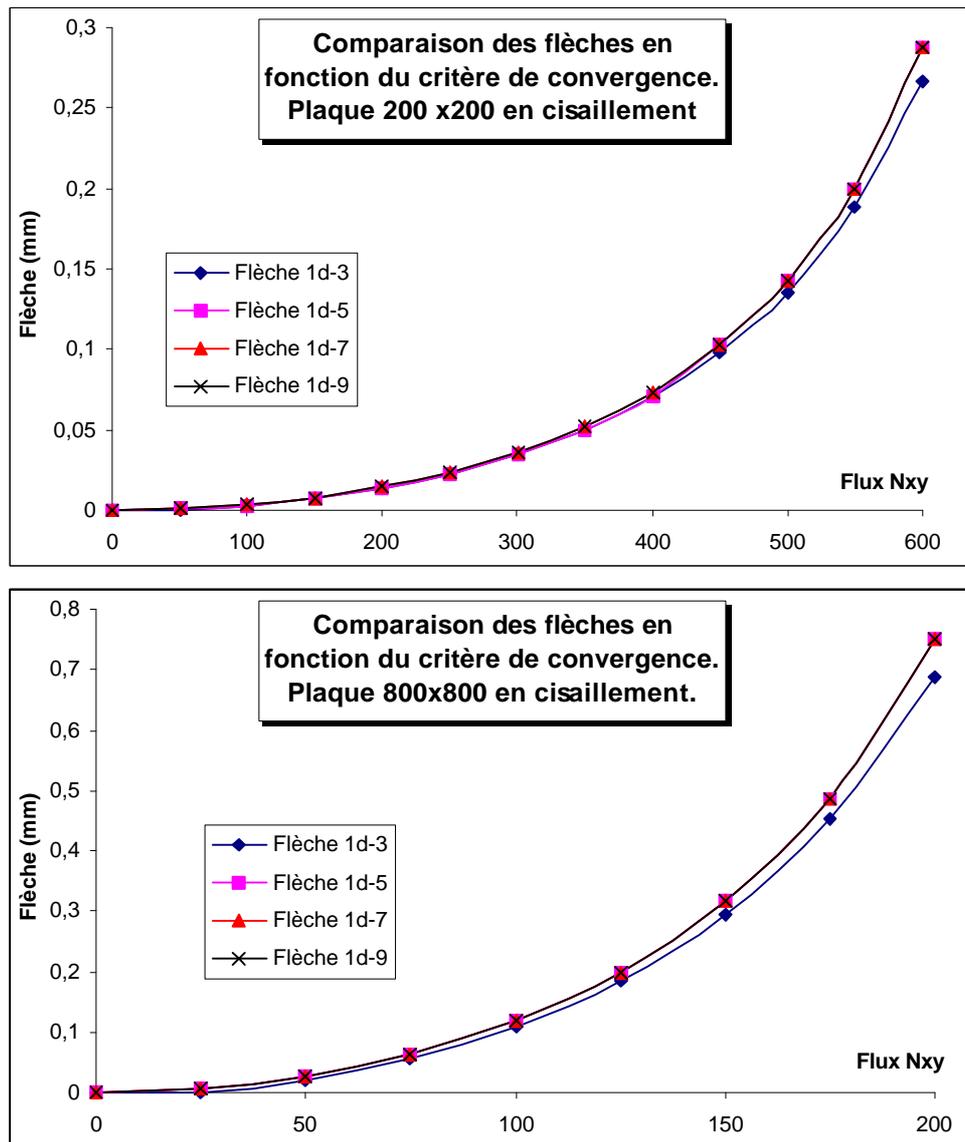


Figure N° A5-10 : Influence du critère de convergence.

CHOIX DU DEGRÉ.

Les trois cas déjà traités (poutre en compression, plaque en compression et cisaillement) sont repris dans ce paragraphe ainsi qu'un cas complémentaire de plaque sous sollicitations combinées.

Poutre en compression :

La comparaison des flèches et des déformations dans les peaux et l'âme pour les 4 degrés montre qu'au delà du degré 2 les résultats sont analogues. La différence est plus marquée pour le degré 1 qui est "plus rigide" car le nombre d'inconnues de description est inférieur. La divergence apparaît aussi plus tard en degré 1.

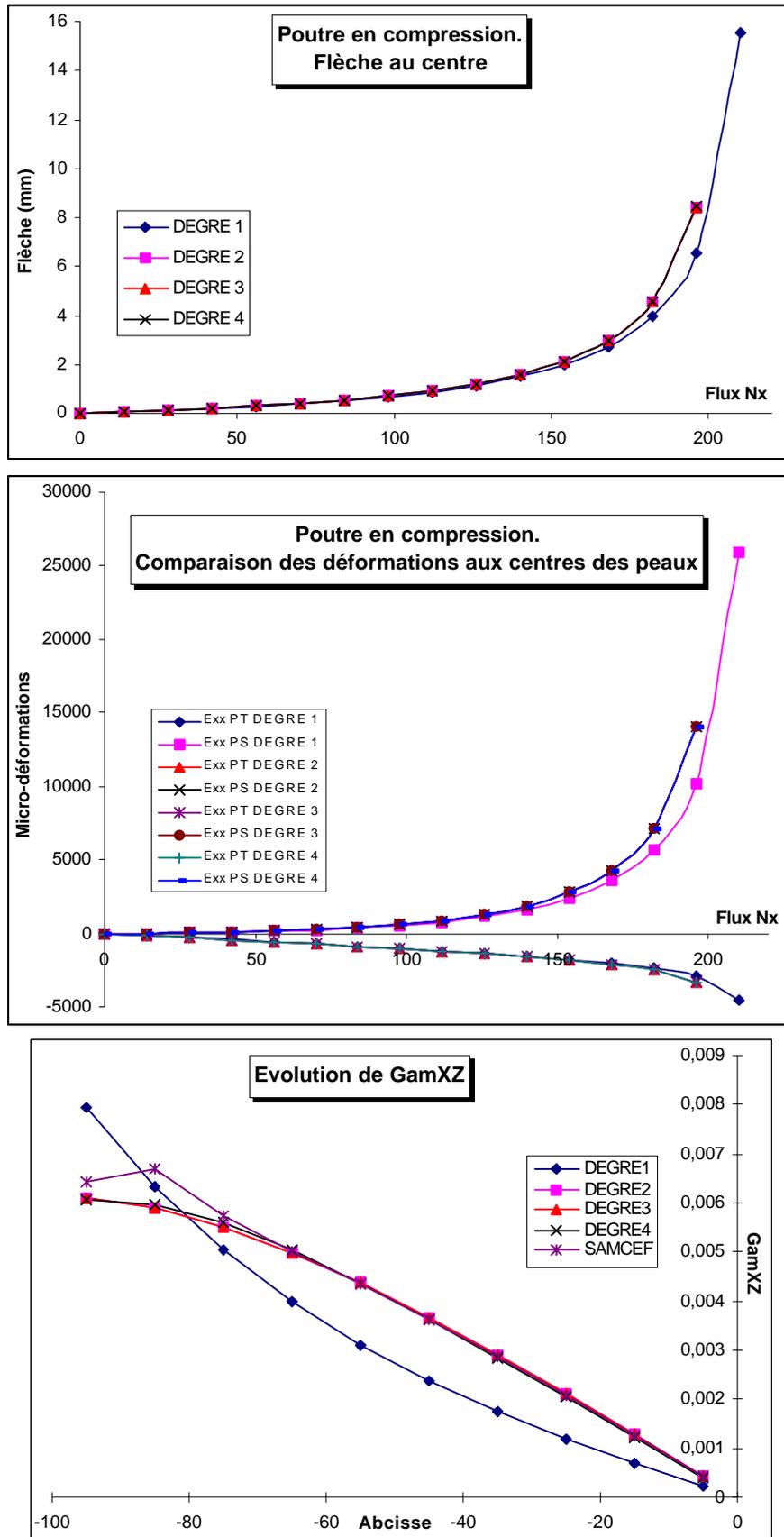


Figure N° A5-11 : Comparaisons des flèches et déformations en fonction du degré. Cas d'une poutre en compression.

Si les résultats des graphiques sont proches pour ces quantités, la déformation normale transverse dans l'âme (ϵ_{zz}) présente une divergence en fonction du degré et dans la longueur (Figure N° A5-12).

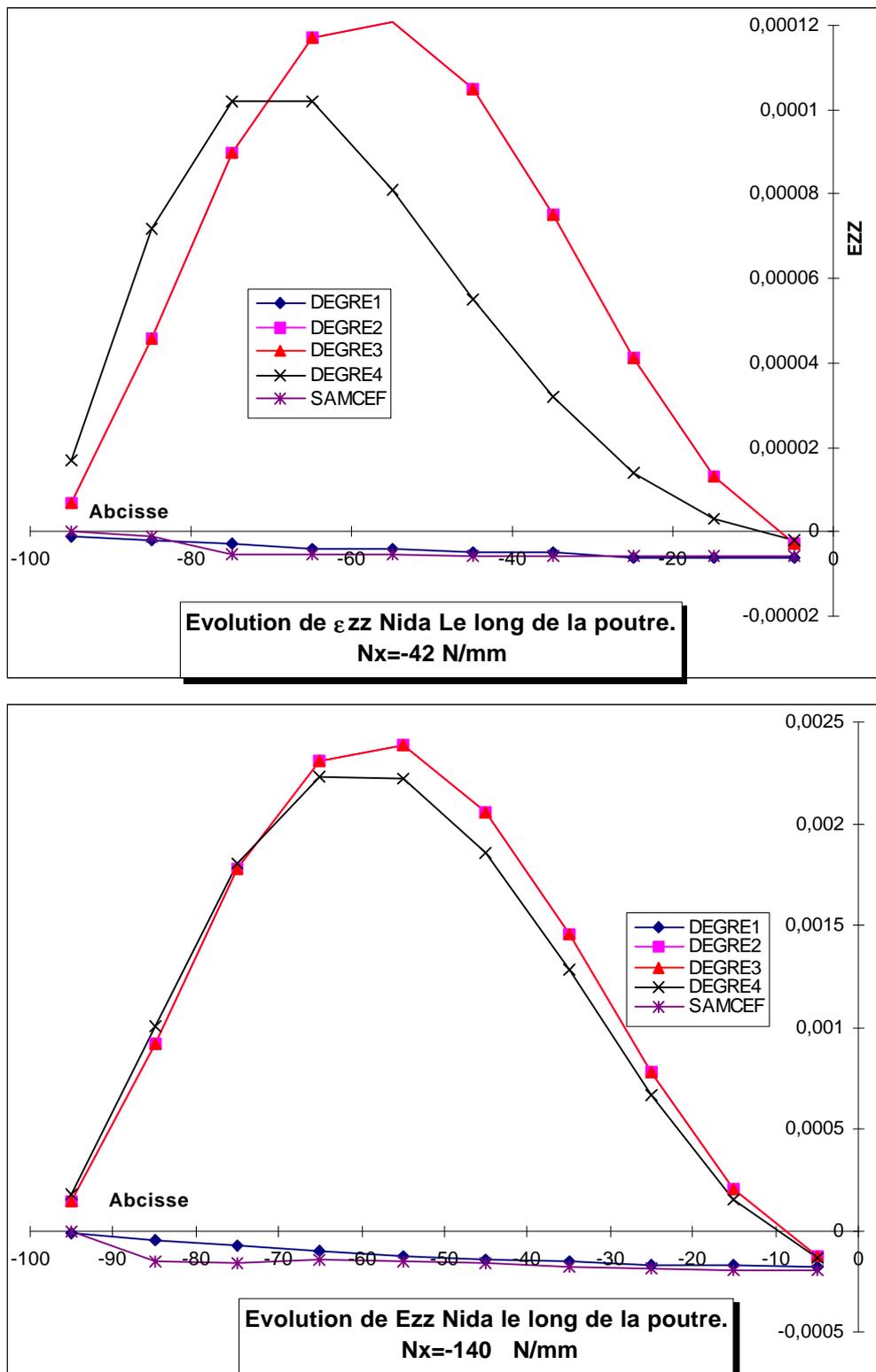


Figure N° A5-12 : Evolution de la déformation normale de l'âme ϵ_{zz} dans la longueur de la poutre.

Simple bogue ou problème plus fondamental numérique ou mécanique, il n'a pas été

possible de trancher à l'instant de la rédaction. En conséquence, pour l'utilisateur, il convient, pour le champ de la déformation normale moyenne dans l'épaisseur ε_{zz} de n'utiliser que **le degré 1** qui est proche des simulations éléments finis. Noter toutefois que la déformation au centre de la poutre est validée quel que soit le degré.

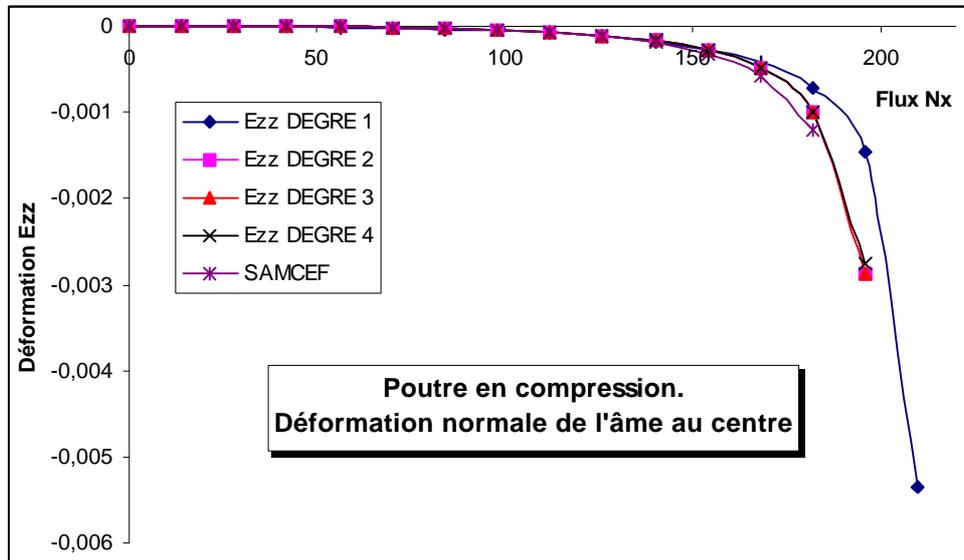


Figure N° A5-13 : Poutre en compression. Déformation normale de l'âme ε_{zz} en fonction du degré.

Plaque en compression :

Pour cet essai numérique, la plaque en compression utilisée dans le cas n°1 est reprise en changeant les conditions aux limites de tout appuyé à tout encastré. La plaque est chargée jusqu'à -800 N/mm et la réponse du logiciel pour les degrés 1 à 4 est commentée.

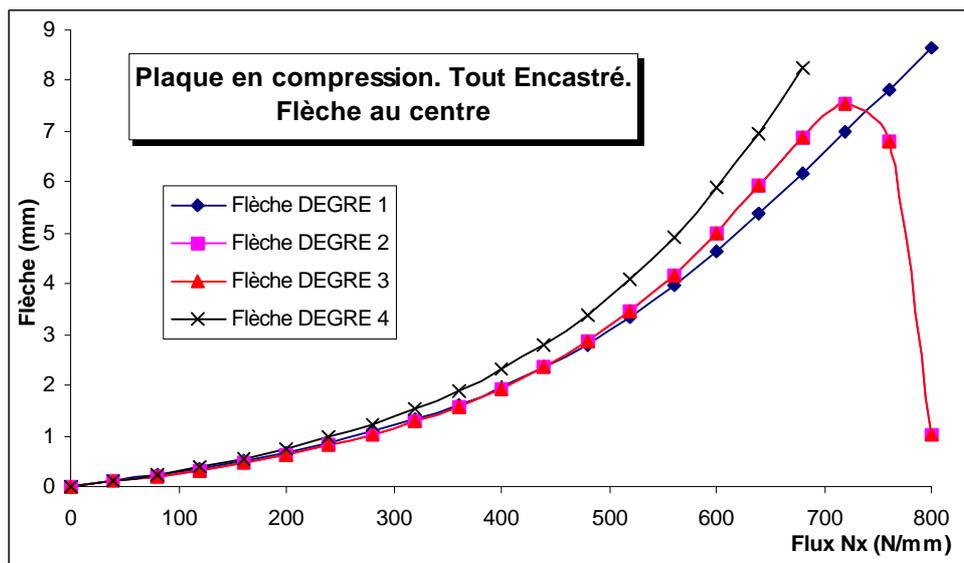


Figure N° A5-14 : Plaque en compression. Tout encastré. Etude de la flèche au centre.

Ce cas confirme que l'utilisation du degré 1 est plus rigide. Il présente ici l'avantage de

ne pas diverger tout en conservant des résultats mécaniquement corrects, ce qui n'est plus le cas au delà de -700 N/mm pour les degré 2 et 3. En degré 4, la solution diverge seulement plus tôt.

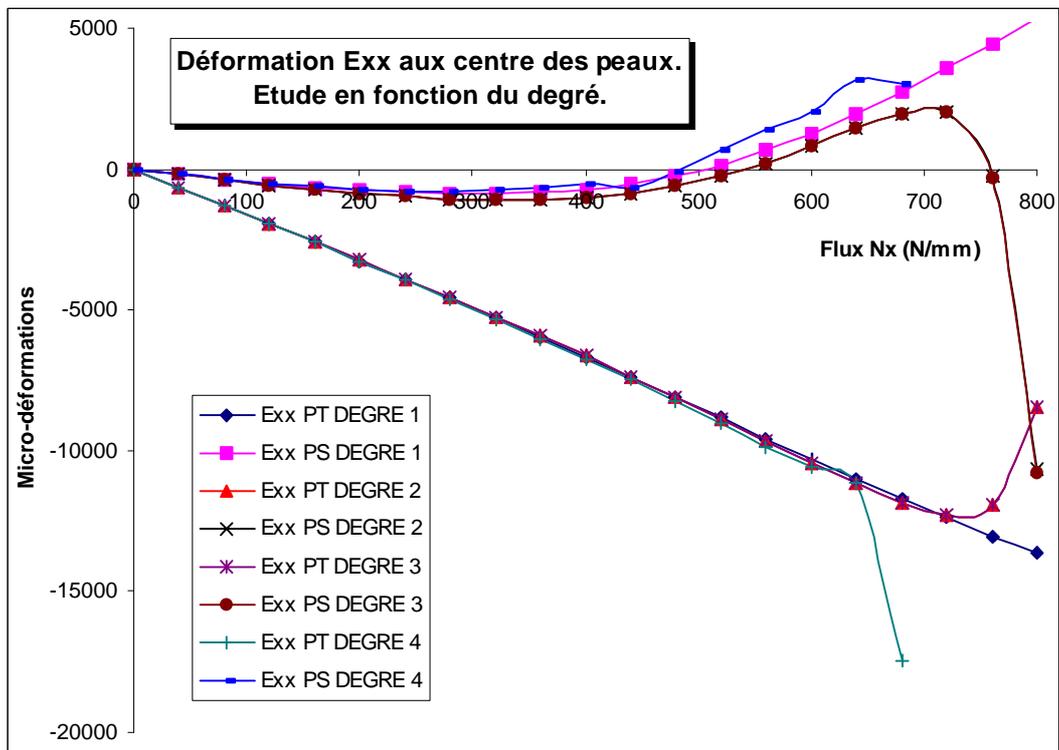


Figure N° A5-15 : Plaque en compression. Tout encastéré. Etude des déformations ϵ_{xx} aux centres des peaux.

On retrouve le même comportement Figure N° A5-15 en notant toutefois que la courbe ϵ_{xx} PS en degré 4 est irrégulière ce qui prouve une certaine sensibilité numérique.

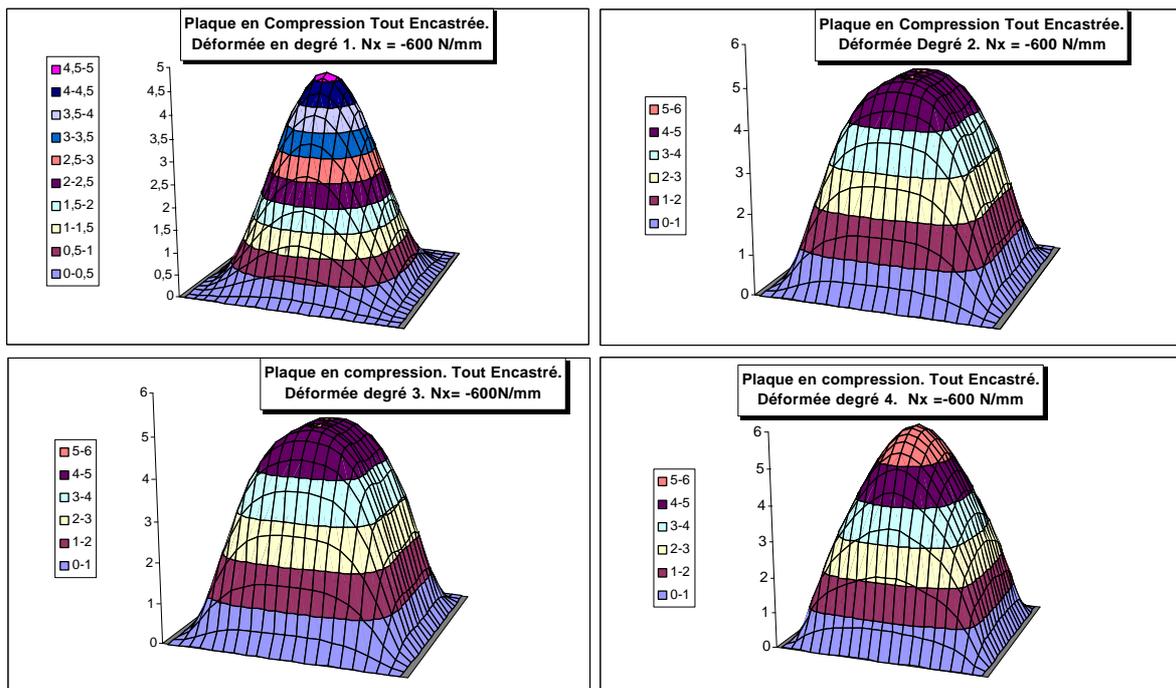


Figure N° A5-16 : Plaque en compression. Tout encastéré. Etude de la déformée pour $N_x = -600$ N/mm.

On notera que les courbes en degré 2 et 3 sont parfaitement superposées. L'étude des déformées Figure N° A5-16 montre peu de différence entre les différentes simulations. L'étude du champ ϵ_{xx} dans la peau travaillante est fournie. Malgré une allure complexe, le champ est quasi-constant, la variation n'excède pas 15 à 20 % en prenant en compte les effets de bords. De la même manière que pour les autres champs, les résultats en degré 4 présentent une allure nettement plus hachée.

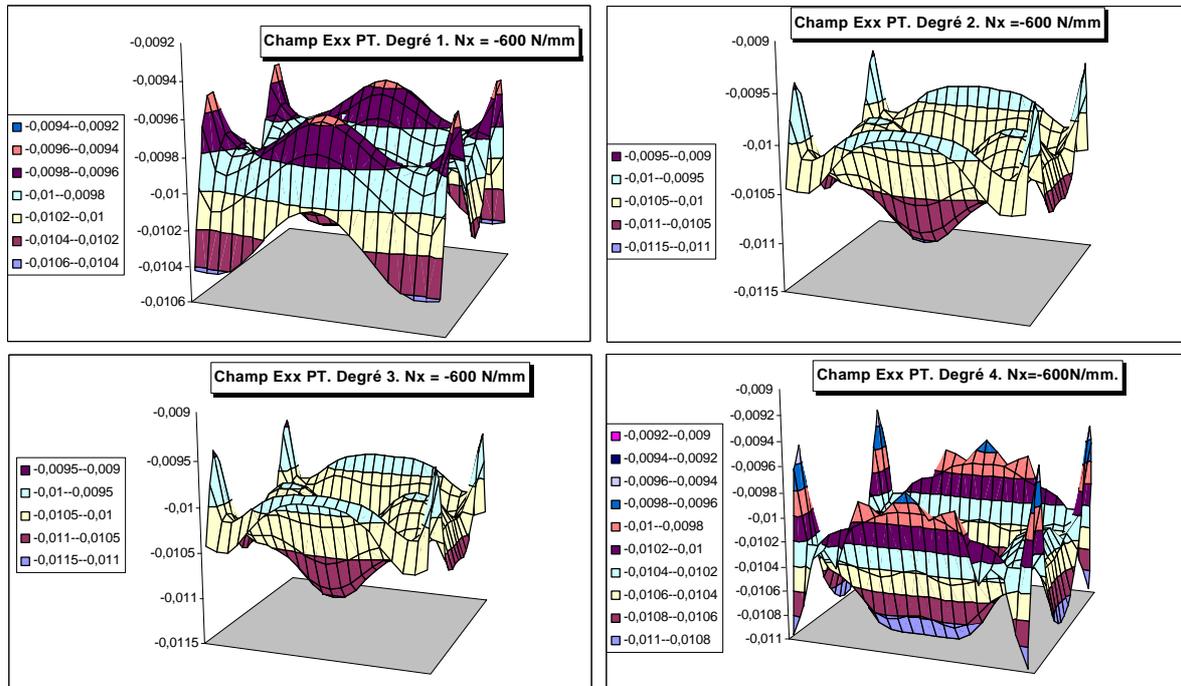


Figure N° A5-17 : Plaque en compression. Tout encastré. Etude de la déformations ϵ_{xx} dans la peau travaillante.

Plaque en cisaillement :

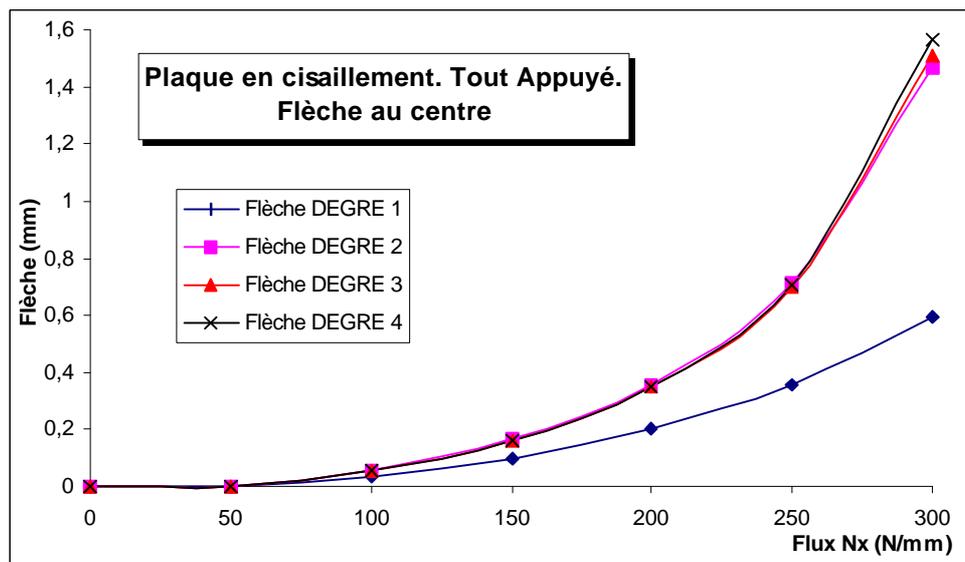


Figure N° A5-18 : Plaque en cisaillement. Tout appuyé. Etude de la Flèche au centre en fonction du degré.

Pour cet essai numérique, la plaque en compression utilisée dans l'exemple précédent est reprise en changeant les conditions aux limites de tout encastré à tout appuyé. De plus les dimensions sont fixées à 600x800. La plaque est chargée jusqu'à 300 N/mm et la réponse du logiciel pour les degrés 1 à 4 est commentée.

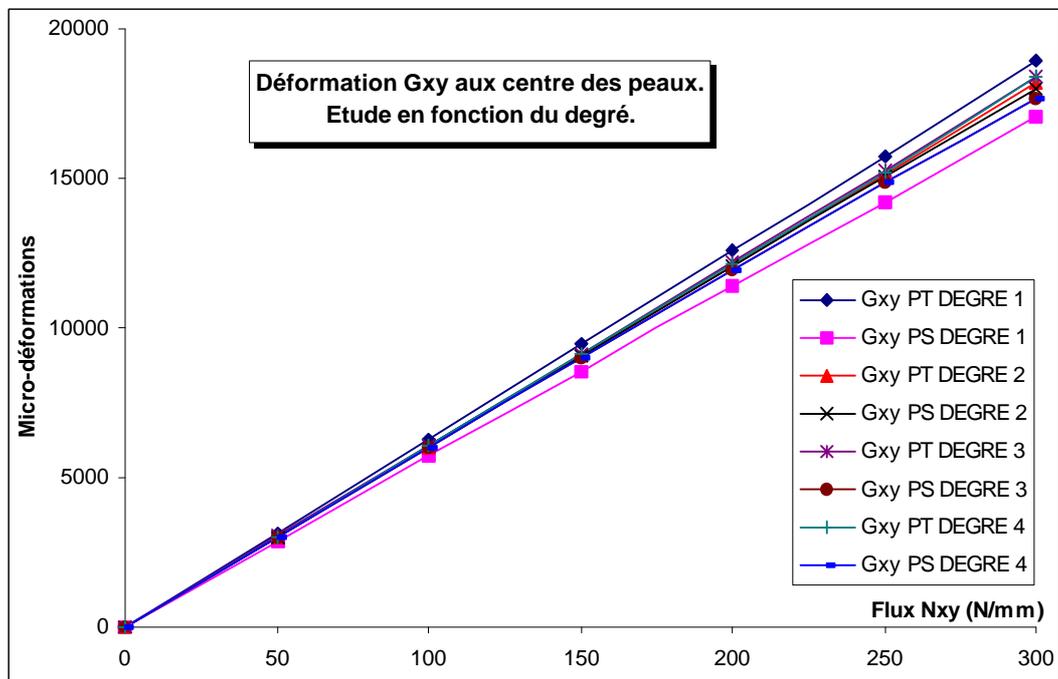


Figure N° A5-19 : Plaque en cisaillement. Tout appuyé. Etude des déformations γ_{xy} aux centres des peaux en fonction du degré.

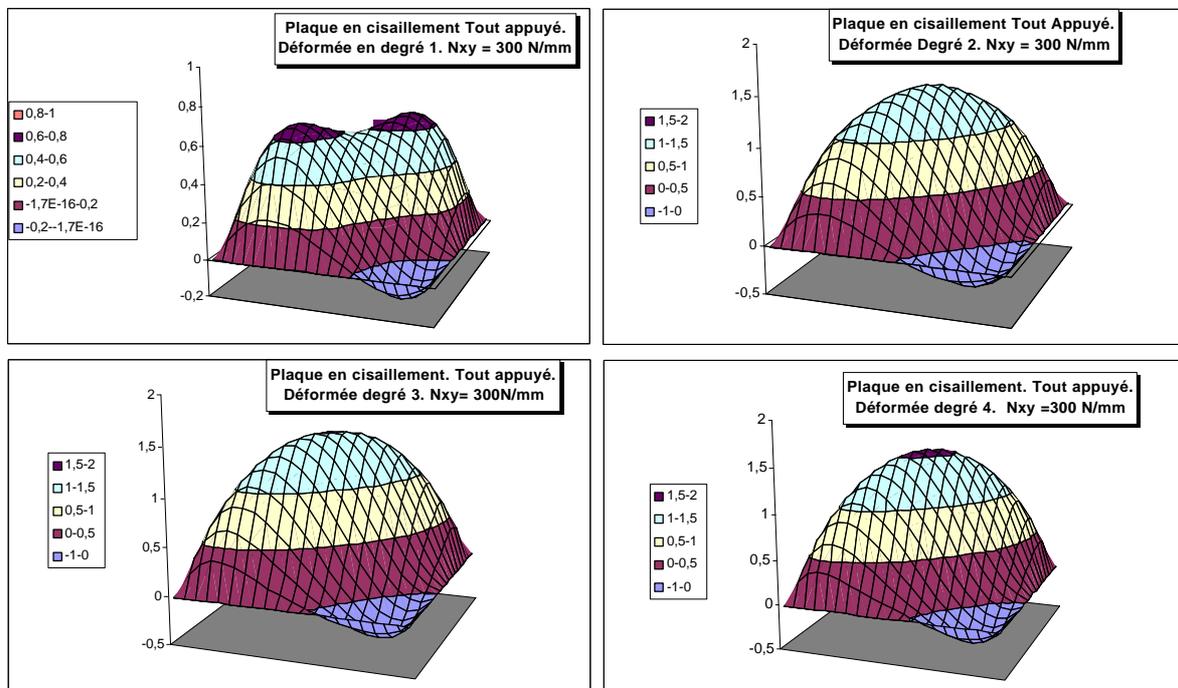


Figure N° A5-20 : Plaque en cisaillement. Tout appuyé. Etude de la déformée en fonction du degré pour $N_{xy} = 300 \text{ N/mm}$.

On retrouve les mêmes conclusions que pour la simulation en compression. Le degré 1 donne pour les quantités principales (γ_{xy}) des résultats approchés corrects à l'exception de

la flèche et de l'allure de la déformée. Pour ce paramètre, la variation atteint 50%. La convergence est atteinte dès le degré 2. Pour les quantités présentées, le degré 4 est "plus stable" qu'en compression, vraisemblablement parce que le phénomène non linéaire n'est pas trop prononcé.

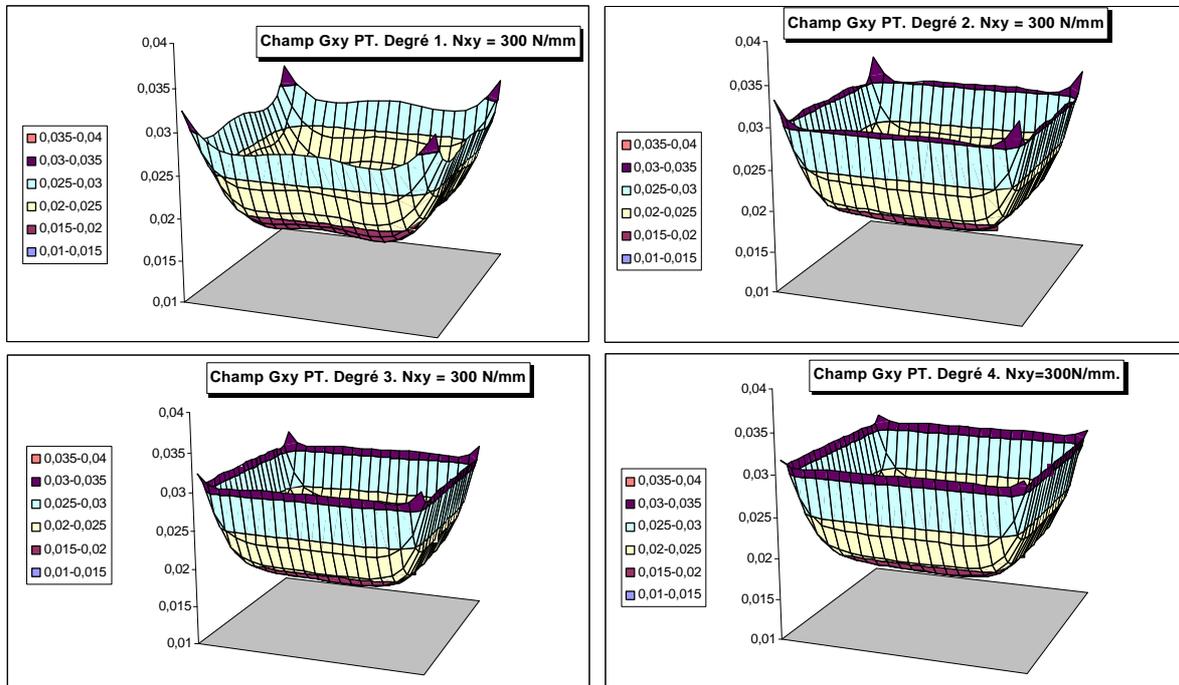


Figure N° A5-21 : Plaque en cisaillement. Tout appuyé. Etude du champ γ_{xy} dans la peau travaillante en fonction du degré pour $N_{xy} = 300 \text{ N/mm}$.

Plaque sous sollicitations combinées :

L'objectif de cet essai numérique supplémentaire est de se placer sous des conditions défavorables en ce qui concerne la complexité de la déformée. Ainsi, on peut supposer que dans ce cas l'utilisation de degrés supérieurs à 2 peut s'imposer. La plaque a pour dimensions 600x800, elle est bi-appuyée et soumise à un flux de cisaillement et un flux de compression tous deux égaux à 100 N/mm. La divergence se produit à 75 N/mm en degré 1 et 2 et à 62.5 N/mm en degré 3 et 4.

Les figures Figure N° A5-22 à Figure N° A5-25 ne montrent pas de différences par rapport aux cas précédents. Les résultats en degré 3 et 4 sont supérieurs aux résultats en degré 1 et 2. Une vérification numérique par modélisation éléments finis confirme la validité de l'étude en degré 4. Pour des conditions aux limites bi-appuyées, la flèche au centre en degré 2 vaut 14.82 mm et en degré 4, 15.91mm. En E.F., elle vaut 15.98 mm.

A priori, dans ce cas, le résultat doit être meilleur en degré 3 ou 4.

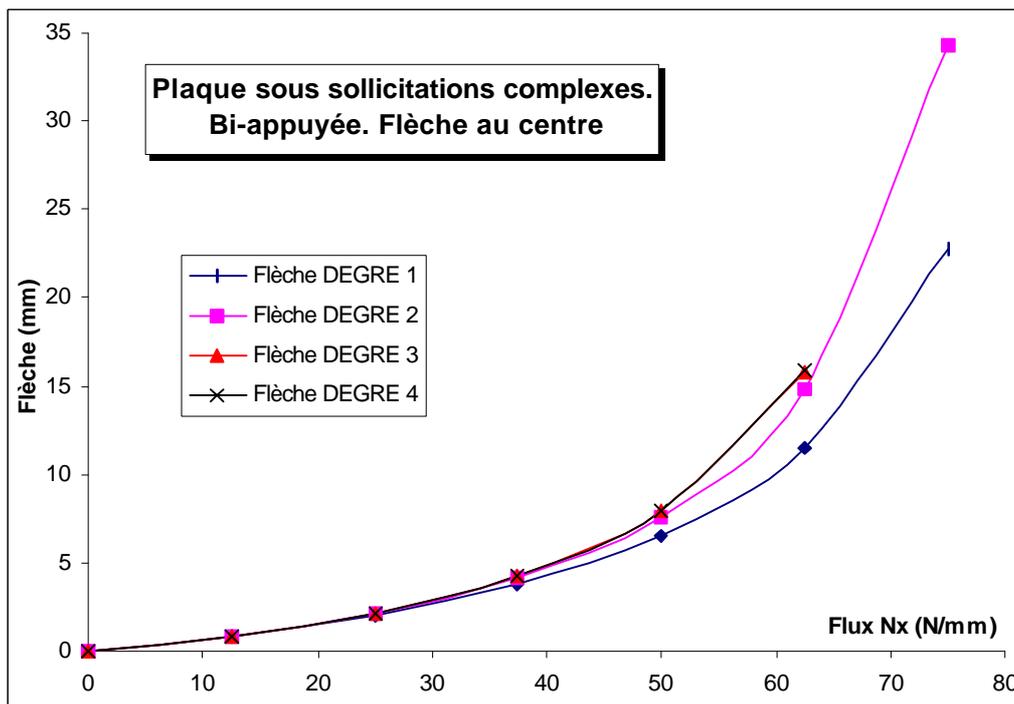


Figure N° A5-22 : Plaque sous sollicitations combinées. Bi-appuyée. Etude de la Flèche au centre.

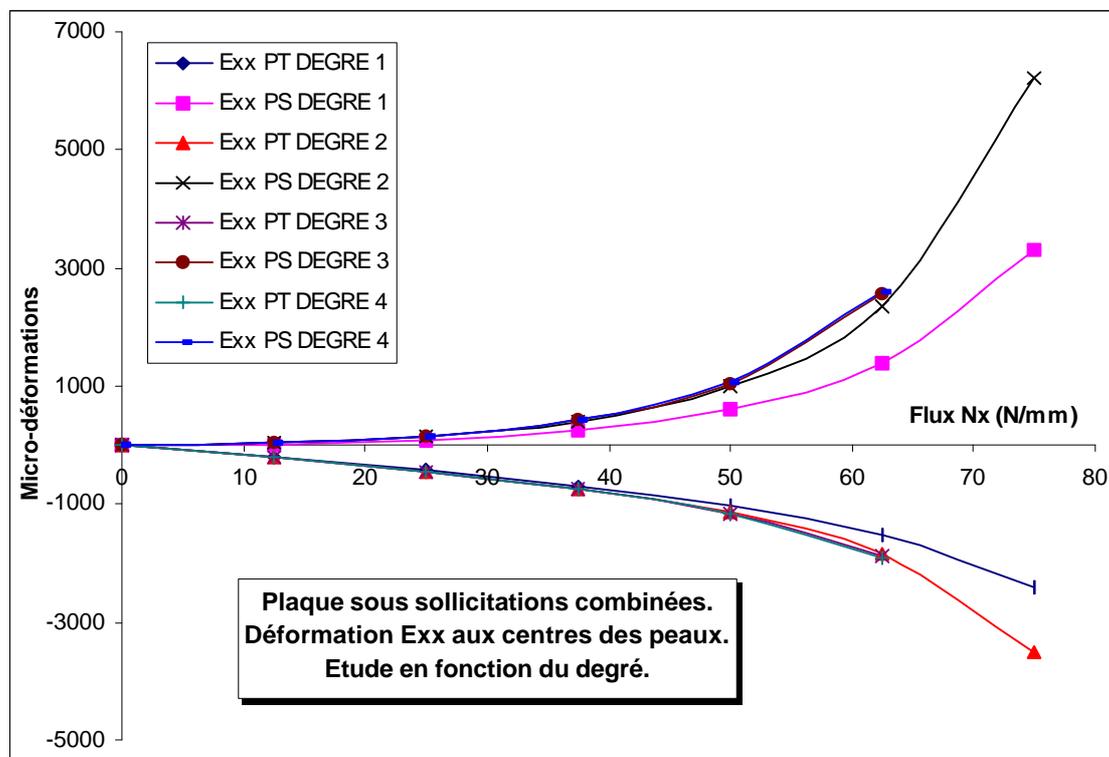


Figure N° A5-23 : Plaque sous sollicitations combinées. Bi-appuyée. Etude de la déformation ϵ_{xx} au centre.

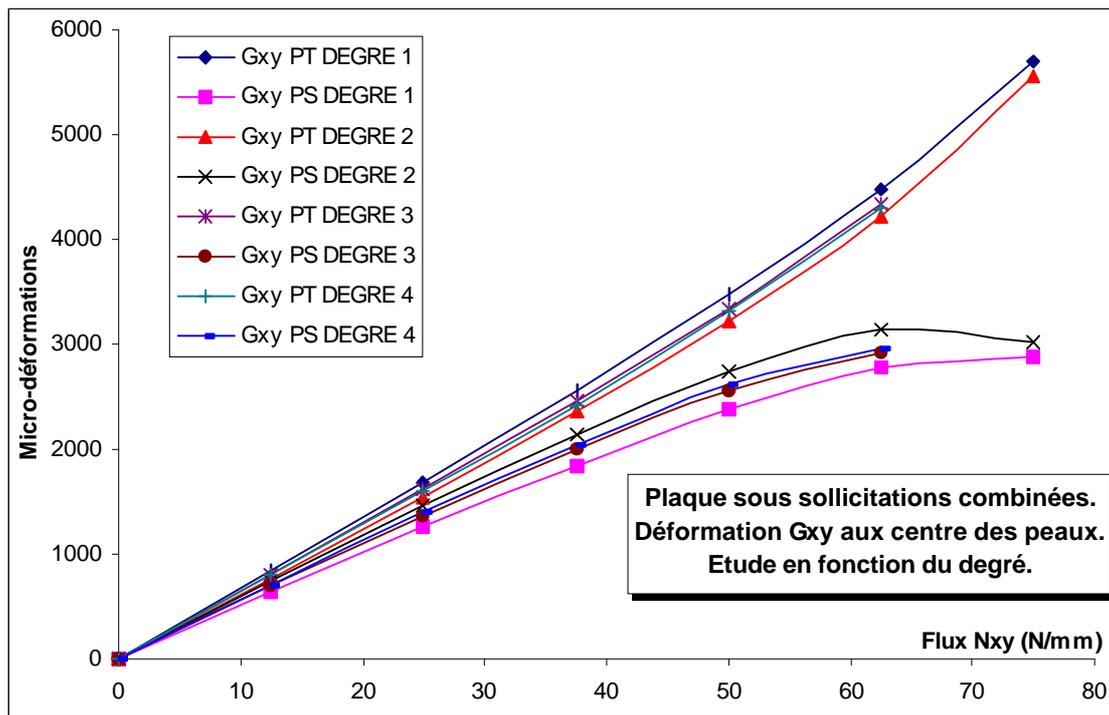


Figure N° A5-24 : Plaque sous sollicitations combinées. Bi-appuyée. Etude de la déformation γ_{xy} au centre.

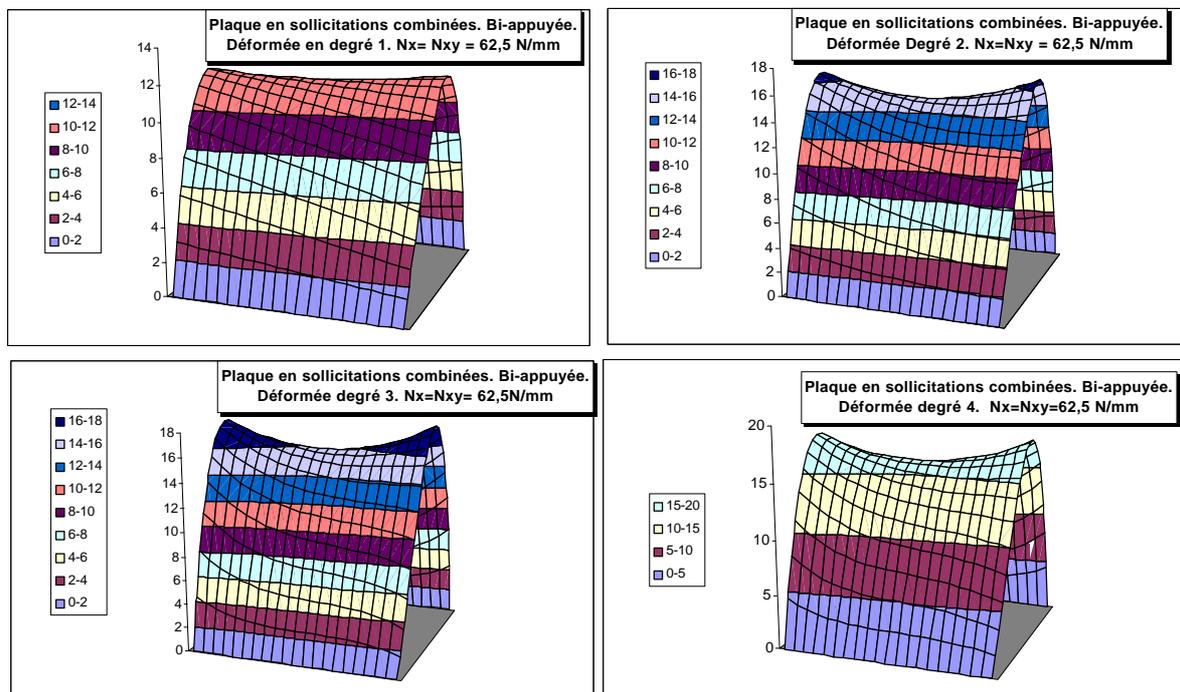


Figure N° A5-25 : Plaque sous sollicitations combinées. Bi-appuyée. Etude de la déformée pour $N_x = N_{xy} = 62.5$ N/mm.

A5-11 - CONCLUSIONS.

L'étude précédente montre que le degré 2 est toujours préférable. Son utilisation est optimale pour les cas où les quatre bords sont soit appuyés, soit encastés. Il peut apparaître insuffisant en sollicitations complexes et dans le cas où seulement deux bords sont appuyés ou encastés. Une itération de calcul supplémentaire en degré 3 ou 4 peut éventuellement affiner le résultat moyennant un temps de calcul beaucoup plus important.

Il est facile d'itérer rapidement avec le degré 1, en sachant que l'on obtient un ordre de grandeur correct pour les déformations principales et que la solution étant plus rigide, la sensibilité aux phénomènes non linéaires est diminuée. De ce fait, en général, le calcul se poursuit plus loin en charge.

D'une manière générale, le programme SAND (8846 lignes au 11/99) donne des résultats conformes à la mécanique. Il n'est pas possible de garantir sa fiabilité absolue comme tout logiciel de calcul de structure. Il appartient à l'utilisateur, familier des structures sandwichs dissymétriques, de veiller à détecter des comportements mécaniques anormaux et de valider ou d'infirmer en cas de doute par une simulation E.F. complémentaire.