

THÈSE

présentée en vue de
l'obtention du titre de

DOCTEUR

de

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE**

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Lionel SÉGUI

**SUR UN PROBLÈME INVERSE EN DIFFRACTION D'ONDES.
IDENTIFICATION DES PERMITTIVITÉS COMPLEXES D'UN MATÉRIAU
À PARTIR DE DONNÉES EN CHAMP PROCHE.**

Soutenue le 20 novembre 2000 devant la Commission d'Examen :

MM.	A. BENDALI	Président
	G. CHAVENT	Rapporteur
	T. HA-DUONG	Rapporteur
	M. MASMOUDI	
	P.-A. MAZET	
	B. MICHIELSEN	
	J.-P. RAYMOND	Directeur de thèse

Sur un problème inverse en diffraction d'ondes :
identification des permittivités complexes d'un matériau à
partir de données du champ proche.

Lionel Ségui.

20 novembre 2000

Remerciements.

Mes remerciements s'adressent avant tout à mes deux directeurs de thèse, Pierre-Alain Mazet et Jean-Pierre Raymond. Par leur disponibilité, ils ont su m'apporter, tout au long de la thèse, le soutien et les encouragements nécessaires à l'accomplissement de ce travail. Leur patience, leur intuition et leur investissement, autant dans les conseils qu'ils ont su me prodiguer que dans leur travail de relecture, sont réellement exceptionnels.

C'est au sein de l'unité M2SN de l'ONERA-Centre de Toulouse que cette thèse a été effectuée. Daniel Kalfon est le responsable de cette unité. Je lui sais gré, autant de m'avoir accueilli au sein de son équipe que d'avoir su montrer dès le début un vif intérêt pour mon travail, se tenant régulièrement au courant de ses avancées.

J'adresse également toute ma sympathie aux ingénieurs de l'équipe d'analyse numérique de M2SN : Patricia Harran-Klotz, François Rogier, Philippe Villedieu et Dominique Volpert. Par leur disponibilité autant que par leurs compétences, leur aide ponctuelle fut précieuse. Leurs qualités humaines ont quant à elles grandement facilité mon intégration au sein de l'équipe.

Je ne saurai en aucun cas oublier les thésards et stagiaires que j'ai croisé à M2SN au cours de cette période. La liste est longue, et mes pensées vont tout particulièrement vers Jouke, Stéphan, Jean-Marie, Stéphane, Yves, Arnaud, Jean-Luc, Samuel, Cécile, Guilhem, Philippe. Les autres se reconnaîtront d'eux-mêmes, en voulant bien m'excuser de ne les avoir point cités.

Abderrahmane Bendali, Bastian Michielsen et Mohammed Masmoudi me font l'honneur de participer au Jury. Je leur en exprime toute ma gratitude.

Guy Chavent et Tuong Ha-Duong ont bien voulu être rapporteurs de ce mémoire. Je les remercie de leur lecture attentive et bienveillante du manuscrit, ainsi que de leurs conseils pertinents.

Je tiens également à remercier tous mes parents et amis de m'avoir supporté en cette période difficile où je me suis retrouvé tout simplement insupportable, encore plus qu'à l'accoutumée... et c'est peu dire diront certains...

Enfin, Babeth a su me redonner le surcroît de motivation dont j'avais grandement besoin lors de la douloureuse période de fin de rédaction. Je ne saurai jamais lui exprimer suffisamment ma gratitude. Ce mémoire lui est dédié.

Table des matières

Introduction.	7
1 De la description du problème inverse vers une stratégie de résolution.	9
1.1 Bien modéliser le problème pour mieux le résoudre.	9
1.2 Résoudre des problèmes directs pour estimer le critère à minimiser.	11
1.3 Définir un algorithme de résolution du problème inverse.	12
1.3.1 Choix de l'algorithme d'inversion.	13
1.3.2 Stratégie de régularisation du problème.	14
1.4 Organisation de la thèse.	15
2 Unicité de la solution du problème inverse.	17
2.1 Quelques résultats de scattering direct.	17
2.1.1 Unicité de la solution.	18
2.1.2 Formulation intégrale volumique, existence et comportement asymptotique de l'équation de Helmholtz.	22
2.1.3 Passage des données 'champ lointain' en données 'champ proche'.	30
2.2 Unicité du problème de scattering inverse pour $n \in L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$	32
2.2.1 Le théorème d'unicité en champ lointain.	32
2.2.2 Le théorème d'unicité en champ proche.	37
3 Approximation PML du problème direct.	39
3.1 Historique - équations de Bérenger pour Maxwell 2D instationnaire et passage en harmonique.	39
3.2 L'équation de Helmholtz-PML dans \mathbb{R}^2 en coordonnées cartésiennes ou polaires.	42
3.2.1 L'équation de Helmholtz standard pour un obstacle diélectrique parfait.	42
3.2.2 Ecriture des équations du milieu PML en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires.	43
3.2.3 Décroissance exponentielle de la solution dans le milieu PML.	46
3.3 L'équation de Helmholtz-PML polaire en domaine borné.	49
3.4 Existence et unicité de la solution des problèmes Helmholtz-PML 2D en milieu borné.	52
3.4.1 Existence et unicité de la solution du problème PML polaire.	53
3.4.2 Une condition de Robin adaptée aux PML cartésiennes.	55

3.5	Formulation variationnelle - résolution du problème approché.	58
3.5.1	Approximation du domaine de calcul - formulation variationnelle matricielle approchée.	58
3.5.2	Validation du code - cas d'un obstacle circulaire diélectrique homogène.	60
4	Résolution du problème par une méthode de Gauss-Newton régularisée.	65
4.1	Rappel du problème inverse.	65
4.2	Présentation de la méthode de Gauss-Newton.	66
4.2.1	Condition d'optimalité d'un problème de moindres carrés linéaires à valeurs dans \mathbb{C}	67
4.2.2	Un résultat de convergence locale de la méthode de Gauss-Newton sur un espace de dimension finie.	68
4.3	Application au problème inverse - convergence de l'algorithme.	70
4.4	Régularisation de Tychonov.	76
4.5	Régularisation par une pénalisation en semi-norme BV.	78
4.5.1	L'espace $BV(\Omega)$	79
4.5.2	L'espace $BV_0(\overline{\Omega})$	80
4.6	Un résultat d'unicité d'une itérée de Gauss-Newton en dimension finie.	81
4.6.1	Choix de l'espace de discrétisation.	82
4.6.2	Une régularisation de la semi-norme $J_{0,D}$ sur le sous-espace $BV_{0,\mathcal{T}}(D)$	83
4.7	Traitement de données discrètes - Algorithme de résolution.	85
4.7.1	Résolution des problèmes directs pour l'évaluation de $\mathcal{F}_{V_g}(\delta n)$	86
4.7.2	Résolution d'une étape de Gauss-Newton régularisée par une méthode de Newton simplifiée.	88
5	Validation de la méthode et tests numériques.	91
5.1	Premier cas test :l'hexagone	91
5.2	Détermination de l'indice de réfraction de la moelle osseuse dans une section de jambe.	96
5.2.1	Première série de tests :identification de 24 paramètres complexes.	97
5.2.2	Deuxième série de tests :identification de 96 paramètres complexes.	113
5.2.3	Troisième série de tests :l'obstacle entier.	122
5.3	Le carré de Kleinman et van den Berg.	125
5.4	Initialisation de l'indice par une valeur moyenne.	131
	Conclusion.	135

Introduction.

Lorsqu'un obstacle diélectrique présente de trop fortes hétérogénéités d'indice de réfraction, la détermination de cet indice à l'aide de méthodes optiques (radiographie par rayons X) n'est plus envisageable. En effet, les ondes de très haute fréquence sont entièrement réfléchies sur la frontière de la zone fortement hétérogène, et de ce fait la valeur de l'indice à l'intérieur de cette zone est sans incidence sur la mesure.

C'est la raison pour laquelle on se place dans le domaine de la diffraction (longueurs d'ondes centimétriques) pour traiter ce type de problème. On espère ainsi que tout en faisant varier la direction du signal incident, la prise en compte de tous les phénomènes complexes de la diffraction (réflexion, réfraction) sur une surface entourant l'obstacle permette de restituer ces valeurs inaccessibles pour des fréquences du domaine de l'optique. Les inhomogénéités que l'on souhaite détecter par ce procédé ont des tailles critiques de l'ordre du dixième de la longueur d'onde. Ce problème est néanmoins difficile, puisqu'une étude de sensibilité que nous avons effectuée montre qu'une variation élémentaire de 100% de la valeur de l'indice de réfraction sur une zone de cette taille entraîne une variation de la mesure du champ diffracté de l'ordre du pour cent, ce qui est en fait bien inférieur à l'incertitude que l'on peut avoir dans la pratique sur cette mesure. Il est par conséquent nécessaire de travailler sur l'aspect qualitatif autant que sur l'aspect quantitatif de ces données pour donner un sens à une telle précision dans la restitution de l'obstacle à partir de mesures bruitées.

Les applications de l'identification de l'indice de réfraction d'un obstacle sont nombreuses. On peut entre autres citer le contrôle non destructif des matériaux, industriels ou stratégiques, l'imagerie médicale à l'intérieur des os (recherche de tumeurs dans des cavités osseuses), et dans une moindre mesure la détection, et éventuellement l'identification d'objets enfouis dans le sol, en particulier les mines antipersonnel. En effet, la dernière génération de mines est composée de matériaux non-métalliques, de manière à rendre leur détection plus difficile. Cependant, cette dernière application concerne un problème d'identification dans un milieu infini, dispersif et aléatoire pour lequel les méthodes d'approximation du problème direct sont encore mal maîtrisées.

On propose dans cette thèse une méthode d'inversion permettant de restituer l'indice de réfraction d'un obstacle de support borné plongé dans un milieu homogène à partir de données du champ proche sur une surface entourant l'obstacle. Cette méthode, que nous avons implémentée et testée en dimension deux, a néanmoins été conçue avec le souci permanent de conserver des temps de calcul raisonnables, pour pouvoir envisager son application à la dimension trois. L'indice doit pouvoir être recherché sur tout le support de l'obstacle, mais il doit être également possible de rechercher des défauts uniquement à l'intérieur de zones localisées de cet obstacle, auquel cas l'indice de réfraction est connu sur le complémentaire de ces zones. La méthode d'approximation des problèmes directs, ainsi que

l'algorithme d'inversion et sa régularisation ont été choisis en conséquence.

Les problèmes issus de la physique nécessitent une modélisation soignée de manière à pouvoir les résoudre numériquement. Cette étape de modélisation est d'une importance capitale dans la résolution des problèmes inverses. Ces problèmes sont en effet toujours mal posés, et sortent de ce fait du cadre mathématique habituel. Modéliser le problème consiste alors à s'assurer que les données dont on dispose permettent effectivement d'identifier de manière unique l'inconnue recherchée. Si ce n'est pas le cas, il peut alors être nécessaire de modifier la nature comme la quantité de ces données de manière à obtenir ce résultat d'unicité. Ce n'est qu'ensuite qu'il devient possible de définir une stratégie convenable de résolution de ce problème.

Chapitre 1

De la description du problème inverse vers une stratégie de résolution.

Ce premier chapitre se veut une introduction aux différents aspects théoriques développés dans cette thèse. Mais avant de rentrer dans le vif du sujet, il semble primordial de bien en cerner la problématique générale. C'est pourquoi nous allons dans un premier temps nous intéresser à définir convenablement le problème que l'on se pose. Dans ce but, il est souhaitable, sinon indispensable de modéliser correctement le problème inverse si l'on souhaite le résoudre efficacement. Ce n'est que par la suite que nous sommes en mesure de proposer des solutions algorithmiques adaptées à cette résolution.

1.1 Bien modéliser le problème pour mieux le résoudre.

Le problème que l'on considère consiste en la détermination de l'indice de réfraction $n(x)$ d'un obstacle inhomogène plongé dans un milieu homogène, en dimension $m = 2$ ou 3 , à partir de données du champ proche, en acoustique ou en électromagnétisme, pour un nombre d'onde k fixé. Cet indice est recherché dans un espace V non précisé pour l'instant. Le support D de cet obstacle est borné, et une donnée du problème est la connaissance de ce support, ou d'un borné Ω le contenant (cf figure 1.1). La donnée dont on dispose est un ensemble de mesures du champ proche, effectuées sur une frontière Σ , suffisamment régulière et extérieure à Ω . Ce sont les mesures des traces sur Σ de champs diffractés $u^s(\theta)$, solutions de l'équation de Helmholtz

$$\begin{cases} \Delta u^s(\theta) + k^2 n u^s(\theta) = k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc}(\theta) & \text{dans } \mathbb{R}^m, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{(m-1)/2} \left(\frac{\partial u^s(\theta)}{\partial r} \Leftrightarrow i k u^s(\theta) \right) = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

où $u^{inc}(\theta) = e^{ik\theta \cdot x}$ désigne l'onde plane sinusoïdale incidente associée, de direction de propagation unitaire $\theta \in S^{m-1}$ et de nombre d'onde $k \in \mathbb{R}_*^+$. On désigne par g cette donnée (i.e. l'ensemble des mesures sur Σ), sans préciser pour l'instant l'espace U_{mes} auquel elle appartient. On note F l'opérateur qui, à $n \in V$, associe un ensemble de traces sur Σ de champs diffractés solutions d'équations de Helmholtz du type (1.1). Cet ensemble est sensé coïncider avec la donnée g . Cependant, les mesures que

l'on effectue sont généralement entâchées d'incertitudes dûes à des erreurs de modèle (position approximative des capteurs, interactions avec l'appareillage de mesure...), telles qu'elles peuvent ne pas correspondre à des traces sur Σ d'une équation de Helmholtz. Cela signifie que l'opérateur F n'est pas surjectif de V dans U_{mes} . De ce fait, la résolution exacte de l'équation $F(n) = g$ est en général dénuée de sens. D'où la nécessité de résoudre ce problème en un sens plus faible : on recherche $n \in V$ minimisant le critère

$$|F(n) \leftrightarrow g|_{U_{mes}}^2,$$

ce qui revient à chercher l'indice n comme une solution d'un problème de moindres carrés dans U_{mes} .

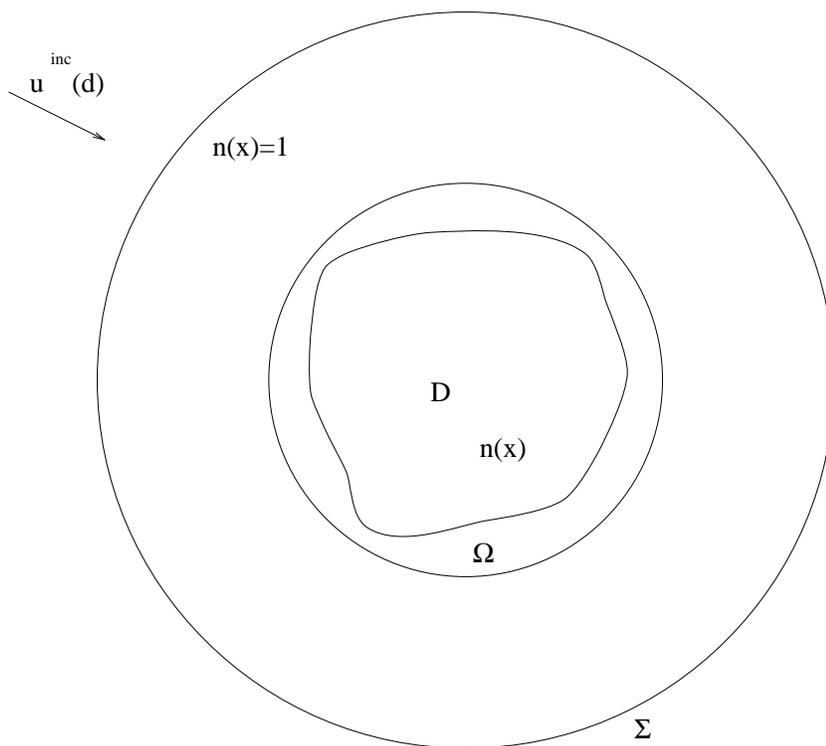


Figure 1.1: Le problème de la diffraction.

Contrairement aux problèmes de contrôle dont le but est de minimiser un critère sans pour autant se soucier de l'unicité du minimum, la finalité du problème inverse est l'identification de ce minimum : l'unicité de la solution, c'est à dire l'injectivité de l'opérateur F est de ce fait essentielle. Il est par conséquent nécessaire de choisir un opérateur F vérifiant cette propriété. Cette première étape dans la modélisation du problème inverse consiste à définir à la fois l'espace V dans lequel on cherche la solution, et un ensemble de traces sur Σ de champs diffractés solutions d'équations de Helmholtz du type (1.1) permettant de restituer n dans V de manière unique. Ces choix sont à la fois dictés par la physique du problème (quel est l'espace fonctionnel décrivant au mieux l'ensemble des indices de réfraction ayant une signification physique?) et par les contraintes que rencontrent les expérimentateurs quant au positionnement des capteurs et actionneurs.

Lorsque c'est possible, la démarche du mathématicien numéricien consiste à considérer un problème continu, c'est à dire posé en dimension infinie, et à en étudier les propriétés mathématiques. Ce n'est qu'ensuite qu'il réduit ce problème à un problème de dimension finie, et qu'il propose éventuellement un algorithme de résolution de ce problème approché. C'est la raison pour laquelle nous étudions, dans le chapitre 2, l'unicité dans $L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ de la solution du problème inverse continu, à partir de la donnée du champ proche sur Σ pour toute direction incidente $\theta \in S^2$, et pour $k \in \mathbb{R}_*^+$ fixé (théorème 2.2.6). Ce choix de régularité de l'indice est guidé par la physique du problème : en effet, les indices que nous sommes amenés à restituer dans la pratique sont essentiellement des fonctions bornées, discontinues et constantes par morceaux.

Les techniques de démonstration du résultat d'unicité ne s'appliquent pas au cas de la dimension deux, et le résultat équivalent dans \mathbb{R}^2 reste de ce fait un problème ouvert. Il existe cependant dans ce cas des résultats partiels d'unicité ([24], Théorèmes 5.4.2, 5.4.3 et 5.4.4).

L'étape suivante dans la modélisation du problème inverse consiste à définir la méthode de résolution approchée des problèmes directs qui, à $n \in L^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$ fixé, permet d'estimer la valeur du critère que l'on souhaite minimiser, soit dans notre cas

$$J(n) = |F(n) \Leftrightarrow g|_{L^2(\Sigma \times S^{m-1})}^2.$$

C'est le thème que l'on développe dans le paragraphe suivant.

1.2 Résoudre des problèmes directs pour estimer le critère à minimiser.

Quel que soit l'algorithme que l'on souhaite utiliser pour minimiser la fonctionnelle $J(n)$ sur un sous-espace de dimension finie de $L^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$, il est nécessaire d'estimer sa valeur aux points n que l'on considère, ce qui implique de calculer $F(n)$ en ces points. L'opérateur F est défini par

$$\begin{aligned} F : L^\infty(D) &\Leftrightarrow L^2(\Sigma \times S^{m-1}) \\ n|_D &\Leftrightarrow u(n, \theta)|_\Sigma, \theta \in S^{m-1}, \end{aligned}$$

où $u(n, \theta)$ désigne la solution de l'équation de Helmholtz

$$\begin{cases} \Delta u(\theta) + k^2 n u(\theta) = k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc}(\theta) & \text{dans } \mathbb{R}^m, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{(m-1)/2} \left(\frac{\partial u(\theta)}{\partial r} \Leftrightarrow i k u(\theta) \right) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Il suffit donc de résoudre cette équation de manière approchée pour calculer $F(n)$.

Les méthodes existantes pour calculer la solution d'une équation décrivant la propagation des ondes dans un milieu inhomogène composé de diélectriques peuvent se classer en deux catégories : les méthodes intégrales et les méthodes variationnelles d'approximation de l'EDP.

L'utilisation de méthodes intégrales surfaciques n'est pas envisageable du fait de l'inhomogénéité de l'obstacle. Le choix d'une méthode intégrale pour résoudre ce type de problèmes implique alors la

résolution d'une équation intégrale volumique, appelée équation de Lippmann-Schwinger pour l'équation de Helmholtz. Celle-ci s'avère très coûteuse en place mémoire et en temps de calcul, puisqu'elle requiert l'inversion de systèmes linéaires pleins de grande dimension. C'est néanmoins jusqu'à présent la méthode la plus fréquemment utilisée dans la littérature pour résoudre ce problème inverse. Son atout principal est en effet de prendre en compte dans sa formulation les conditions de radiation à l'infini de manière exacte. Mais si elle s'avère coûteuse à résoudre numériquement pour les problèmes posés en dimension deux, ce coût devient prohibitif en dimension trois, à tel point que la résolution du problème inverse (lequel va nécessiter un nombre élevé de résolutions de problèmes directs) n'est plus envisageable avec les outils numériques dont on dispose actuellement.

La résolution du problème par des méthodes d'approximation des équations aux dérivées partielles, si elle mène à l'inversion de systèmes très creux, présente par contre une difficulté dans la nécessité de borner le domaine de calcul. La précision du résultat dépend en effet fortement de la précision de la condition aux limites que l'on impose sur la frontière de ce domaine, laquelle est sensée simuler les conditions de radiation à l'infini.

Une manière de contourner ce problème est d'imposer une condition absorbante d'ordre zéro à une distance finie mais grande, de l'ordre de 50 fois le diamètre de l'obstacle. Cependant, la taille du domaine de calcul devient trop grande et fait perdre tout l'avantage de la résolution par EDP par rapport à la méthode intégrale volumique.

Une autre approche consiste à rechercher des conditions absorbantes d'ordre supérieur, en approximant l'opérateur pseudo-différentiel sur le bord du domaine. Mais leur calcul s'avère d'une grande complexité, parfois même supérieure à la résolution de l'équation que l'on souhaite résoudre.

Enfin, une troisième approche consiste à considérer le couplage de l'opérateur de Helmholtz avec un opérateur pseudo-différentiel décrivant la propagation des ondes dans un milieu fictif absorbant, dit milieu PML (Perfectly Matched Layer) de Bérenger. Ce milieu, qui entoure un borné contenant l'obstacle, a pour propriété d'amortir, exponentiellement et sans réflexion, les ondes le pénétrant, indépendamment de la fréquence. Ce couplage s'avère d'un grand intérêt pour la résolution numérique des équations de propagation des ondes, et par conséquent pour l'équation de Helmholtz : il permet en effet de simuler de manière précise les conditions de radiation à l'infini en imposant des conditions aux limites à distance finie dans le milieu PML.

Cette dernière approche est celle que l'on a choisie pour approximer la solution des problèmes directs, en dimension deux ou trois. L'exemple de son application pour l'équation de Helmholtz en dimension deux est traité dans le chapitre 3. Si le cas de la dimension trois n'est pas abordé ici, les résultats obtenus sur les équations de Maxwell 3D en instationnaire [26] laissent néanmoins penser que la méthode reste applicable à ce cas.

Une fois traitée la question de l'approximation des problèmes directs, l'étape essentielle dans la résolution du problème inverse concerne le choix de l'algorithme d'inversion.

1.3 Définir un algorithme de résolution du problème inverse.

Le problème inverse que l'on souhaite traiter se présente sous la forme d'un problème de moindres carrés non-linéaires. Il est par conséquent nécessaire de définir un algorithme de résolution pour ce

problème d'optimisation non-linéaire. Néanmoins, même si ce problème est bien posé en unicité, on montre dans le chapitre 2 que l'opérateur inverse est non-continu : de petites erreurs sur les données suffisent à engendrer des erreurs incontrôlables sur la solution. Numériquement, cette non-continuité se traduit par un défaut de stabilité de l'algorithme d'inversion. On pallie ce défaut en ajoutant des contraintes sur la solution du problème. Plutôt que de considérer un problème d'optimisation sous contraintes, on choisit de traiter ce problème comme un problème sans contrainte, que l'on régularise ensuite à l'aide d'un terme de pénalisation.

1.3.1 Choix de l'algorithme d'inversion.

Les algorithmes d'optimisation sans contrainte que l'on peut utiliser pour minimiser une fonctionnelle non-linéaire sont nombreux. On peut citer entre autres les algorithmes de gradient simple, de gradient conjugué ainsi que les méthodes de Newton, de quasi-Newton ou de Gauss-Newton. Parmi ces algorithmes, les méthodes de gradient conjugué et de Gauss-Newton s'avèrent les mieux adaptées pour résoudre un problème de moindres carrés non-linéaires. Elle sont de ce fait les plus souvent rencontrées dans la résolution de ce type de problèmes. Ainsi, pour le problème inverse de la restitution de l'indice de réfraction en dimension deux à partir du champ lointain, R.E. Kleinman et P.M. van den Berg [5] ont utilisé un algorithme de gradient conjugué couplé à la résolution de problèmes directs par la formulation intégrale de Lippmann-Schwinger.

Il est également possible de développer un algorithme d'optimisation spécifique au problème que l'on se pose. C'est ainsi que D. Colton et P. Monk ont construit deux méthodes d'identification de l'indice de réfraction à partir de données du champ lointain pour plusieurs fréquences ([15], [16], [17]). Ces deux méthodes utilisent la détermination de données duales du champ lointain dans $L^2(S^{m-1})$, et conduisent à des problèmes d'optimisation non-linéaires, dans lesquels le couplage avec l'équation de Helmholtz se fait à l'aide de la formulation intégrale de Lippmann-Schwinger.

Plutôt que de reproduire l'un de ces algorithmes et d'en développer une variante couplée à la résolution approchée de l'équation de Helmholtz par une méthode variationnelle et utilisant des données du champ proche, nous avons choisi de tester la méthode de Gauss-Newton. Cette méthode admet deux types de formulation, primale ou duale.

La méthode primale, c'est à dire la méthode de Gauss-Newton classique, est une méthode itérative dans laquelle on approxime localement à chaque étape le problème de moindres carrés non-linéaires par un problème de moindres carrés linéaires que l'on minimise sur l'espace des inconnues.

La méthode duale consiste à minimiser à chaque étape le problème dual du problème de moindres carrés linéarisé par la méthode de Gauss-Newton classique, puis à recomposer l'inconnue primale à l'aide d'une formule de dualité. Dans le cas présent, cette méthode est encore appelée méthode des sentinelles non-linéaires. G. Chavent a montré dans [7] que chaque étape de cette méthode était parfaitement équivalente à une étape de la méthode de Gauss-Newton classique. Le problème que l'on souhaite résoudre étant généralement très surcontraint, l'utilisation de cette dernière méthode n'est pas souhaitable, puisqu'elle multiplie les calculs sans pour autant apporter d'amélioration sur les résultats. De plus, il est nécessaire de pallier le défaut de stabilité de l'algorithme en ajoutant des contraintes sur la solution du problème à l'aide d'une régularisation, ce qui revient à pénaliser le problème primal par une fonctionnelle. Cette fonctionnelle n'est pas nécessairement quadratique, et dualiser un tel

problème pénalisé peut alors s'avérer difficile à interpréter en dimension infinie.

L'algorithme d'inversion que nous avons adopté est par conséquent celui de la méthode de Gauss-Newton classique. Cette méthode, et son application au problème inverse que l'on souhaite résoudre, sont détaillées dans le début du chapitre 4.

1.3.2 Stratégie de régularisation du problème.

Lors d'une étape de la méthode de Gauss-Newton, la linéarisation d'un problème de moindres carrés non-linéaires mal posé en continuité donne un problème de moindres carrés linéaires mal posé. De plus, il n'est pas évident que ce problème linéarisé soit injectif, alors que le problème non-linéaire de départ l'est. C'est pourquoi il est nécessaire de régulariser l'algorithme, ce qui revient en dimension infinie à approcher l'opérateur inverse non-continu par un opérateur continu.

En pratique, on introduit la régularisation d'un problème sous la forme d'une pénalisation du critère à minimiser par une fonctionnelle que l'on souhaite strictement convexe sur l'espace de minimisation, et différentiable pour des raisons algorithmiques. Cette fonctionnelle est généralement la régularisée d'une norme sur un espace fonctionnel approprié.

Si la norme choisie est une norme hilbertienne, alors le problème est pénalisé à l'aide du carré de cette norme, lequel est un carré scalaire. Cette pénalisation porte le nom de régularisation de Tychonov. C'est à la fois la plus simple et la plus répandue des régularisations utilisées pour résoudre les problèmes inverses. Cette pénalisation étant quadratique, il est équivalent pour un problème non-linéaire d'appliquer la méthode de Gauss-Newton à la fonctionnelle pénalisée, ou de pénaliser de la même manière chaque étape de l'algorithme.

Il est cependant possible que le choix d'une norme hilbertienne s'avère inadapté à la régularisation de certains problèmes. Le choix de la norme par rapport à laquelle on souhaite régulariser dépend en effet de l'espace dans lequel on recherche les inconnues du problème.

Ici, les paramètres que l'on souhaite identifier sont les valeurs complexes de l'indice de réfraction d'un obstacle inhomogène, lequel est généralement composé d'un faible nombre de zones homogènes d'indice constant. Dans ce cas, la prise en compte des variations de l'indice pondérées par la mesure de Hausdorff de la surface de discontinuité (ou de la courbe en dimension deux) semble mieux adaptée au problème que l'on souhaite résoudre. C'est pourquoi on régularise ce problème en dimension finie à l'aide d'une pénalisation par une régularisée différentiable et strictement convexe de la semi-norme BV. Contrairement aux régularisations de Tychonov, cette fonctionnelle n'est pas quadratique. Une pénalisation différente par une fonctionnelle régularisée de la semi-norme BV a déjà été utilisée avec succès par P.M. van den Berg and R.E. Kleinman [5] dans leur algorithme de gradient conjugué, mais uniquement dans un espace de fonctions continues. Sur l'espace d'approximation de l'indice que l'on considère, la pénalisation qu'ils proposent n'est ni strictement convexe, ni différentiable en zéro.

Plutôt que de pénaliser le problème non-linéaire et de lui appliquer la méthode de Gauss-Newton, on choisit de pénaliser chaque étape de l'algorithme, et par conséquent de résoudre à chaque itération un problème non-linéaire, pour lequel l'existence et l'unicité du minimum sont démontrées (théorème 4.6.2). Le système d'optimalité caractérisant ce minimum est résolu par une méthode de Newton simplifiée. Cette méthode est efficace car l'approximation du hessien de la fonctionnelle de pénalisation est simple à calculer. De plus, son coût d'assemblage en temps de calcul est bien moins élevé que celui

de la matrice normale et du second membre du problème linéarisé non pénalisé. En effet, ces derniers nécessitent des résolutions de problèmes directs de manière à estimer les valeurs de la fonction coût et de ses dérivées. On espère ainsi accélérer la convergence vers la solution du problème. De plus, si l'on souhaite améliorer la méthode en introduisant une stratégie de choix d'un paramètre de régularisation optimal, telle qu'une méthode de régions de confiance ([21], pp 227-228), cette approche s'interprète plus clairement que l'application de la méthode de Gauss-Newton à la fonctionnelle régularisée.

C'est par conséquent l'algorithme de Gauss-Newton régularisé par cette fonctionnelle, couplé à la résolution des problèmes directs par approximation de l'équation de Helmholtz-PML à l'aide du code éléments finis P_1 décrit en fin du chapitre 3 qui a été implémenté en dimension deux. Le temps de calcul raisonnable laisse penser que la méthode reste applicable en dimension trois : ce temps de calcul est d'environ 30 minutes de temps CPU sur un ordinateur CRAY J916 pour restituer les 856 inconnues complexes du cas test décrit dans le paragraphe 5.3.

A titre de comparaison quant à la qualité des résultats obtenus, deux autres programmes utilisant des régularisations de Tychonov, l'un par la norme L^2 , l'autre par la semi-norme H^1 discrète ont été successivement testés sur les différents cas étudiés dans le chapitre 5.

1.4 Organisation de la thèse.

Cette thèse est divisée en deux parties : une première partie dans laquelle on développe les aspects théoriques de la résolution du problème inverse que l'on souhaite traiter (chapitres 2 à 4), et une seconde partie consacrée à la présentation commentée des résultats numériques obtenus (chapitre 5). L'ensemble de la thèse est organisé en chapitres.

La partie théorique est composée de trois chapitres indépendants : tout d'abord, le chapitre 2 rappelle les résultats d'existence, d'unicité et de dépendance continue par rapport au second membre de la solution du problème direct en dimension deux ou trois. Ces résultats permettent dans le cas de la dimension trois de redémontrer l'unicité de la solution du problème inverse dans $L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$, à partir des données complètes du champ lointain (amplitude de scattering) ou du champ proche, pour toute direction incidente. On montre également que l'opérateur inverse ainsi défini est non-continu, ce qui permet d'en déduire que le problème est mal posé, et par conséquent difficile à résoudre.

Le chapitre 3 est consacré au couplage de l'opérateur de Helmholtz dans un milieu inhomogène formé de diélectriques parfaits avec un opérateur pseudo-différentiel décrivant un milieu PML de Bérenger. L'existence et l'unicité de la solution des équations de Helmholtz-PML en milieu borné ainsi obtenues, en coordonnées cartésiennes ou polaires, sont démontrées pour tout k réel, à l'exclusion d'un sous-ensemble discret, localement fini de \mathbb{R} , éventuellement vide. Ces résultats sont adaptés de ceux établis par F. Collino et P. Monk ([12], [11]) pour des obstacles de type conducteur parfait. On détaille ensuite la méthode d'éléments finis P_1 développée pour résoudre de manière approchée cette équation. Deux cas tests effectués sur des obstacles cylindriques, pour lesquels la solution exacte est connue, permettent enfin de valider cette méthode.

Le chapitre 4 traite de la résolution du problème inverse par un algorithme de Gauss-Newton régularisé. Cette méthode est d'abord présentée dans un cadre assez général pour lequel on étudie la convergence locale de l'algorithme en dimension finie. On applique ensuite cette méthode au problème

inverse que l'on considère. Le résultat obtenu dans le chapitre 2 sur la non-continuité de l'opérateur inverse rend nécessaire l'introduction dans l'algorithme d'une régularisation de manière à le rendre stable. C'est pourquoi on s'intéresse d'abord aux régularisations de Tychonov, puis à une régularisation plus élaborée, en dimension finie, à l'aide d'une pénalisation par une fonctionnelle non-linéaire construite comme une régularisation strictement convexe et différentiable de la semi-norme BV. On propose enfin un algorithme d'inversion utilisant ce type de régularisation pour résoudre le problème inverse. Cet algorithme est couplé à la résolution approchée des problèmes directs par la méthode variationnelle décrite dans le chapitre 3.

La partie expérimentale de cette thèse est l'objet du chapitre 5. L'algorithme décrit en fin de chapitre 4 est testé sur différents cas tests, dont deux sont adaptés de la littérature existante sur le sujet. De manière à évaluer son apport éventuel quant à l'amélioration des résultats, elle est systématiquement comparée, lorsque c'est possible, avec les deux régularisations de Tychonov définies dans le paragraphe 4.4. Ceci permet de juger de l'importance croissante du choix de la régularisation sur la qualité des résultats, au fur et à mesure que la dimension de l'espace d'approximation de l'inconnue augmente, c'est à dire lorsque le problème devient de plus en plus mal posé.

Chapitre 2

Unicité de la solution du problème inverse.

Nous étudions dans ce chapitre le problème théorique d'unicité du problème inverse à k fixé, pour des obstacles bornés d'indice de réfraction $n \in L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$, à partir de données du champ proche pour toutes les incidences. Dans toute la suite, on suppose que $\operatorname{Re} n \geq 0$ et $\operatorname{Im} n \geq 0$. Ce résultat d'unicité existe dans la littérature sous une forme plus générale ([24], Théorème 6.2.1). Par souci d'auto-consistance, nous démontrons ce théorème d'une manière plus économique en adaptant au cas d'un indice $L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ un résultat connu concernant l'unicité du problème inverse à partir du champ lointain pour un indice $n \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ ([25], Théorème 5.25). La recherche d'un indice de classe C^2 n'est guère satisfaisante du point de vue de la modélisation, puisque même un obstacle homogène ne possède pas cette régularité. Un autre résultat concerne le cas d'un indice réel, avec $(1 \Leftrightarrow n(x)) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ [35], mais s'avère trop restrictif car l'obstacle ne peut pas être dissipatif.

Avant d'énoncer le théorème, nous présentons quelques résultats de scattering direct en dimension deux ou trois. Pour la dimension trois, ils seront nécessaires à la démonstration : existence et unicité du problème direct associé, équivalence de ce problème avec une équation intégrale volumique, l'équation de Lippmann-Schwinger, définition du champ lointain. Nous montrons ensuite la dépendance continue de la solution dans H^2 d'un borné par rapport à un second membre de $L^2(\mathbb{R}^m)$ à support compact, ainsi que la non-continuité de l'opérateur inverse considéré dans la thèse. Nous établissons enfin l'équivalence entre données champ lointain et données champ proche sous réserve de conditions sur la frontière de mesure permettant de bien poser le problème extérieur. Les résultats équivalents en dimension deux seront quant à eux utilisés dans le chapitre suivant concernant l'approximation des problèmes directs pour la résolution du problème inverse.

2.1 Quelques résultats de scattering direct.

Dans tout ce paragraphe, $m = 2$ ou 3 désigne la dimension de l'espace sur lequel l'équation de Helmholtz est posée.

2.1.1 Unicité de la solution.

La démonstration d'unicité de la solution de l'équation de Helmholtz utilise deux ingrédients énoncés ici sous forme de lemmes : le lemme de Rellich et le principe de continuation unique. Bien que des versions plus générales de ces résultats existent dans la littérature (lemme de Rellich : [38], Théorème 4.2, continuation unique : [14], Théorème 8.6), nous avons choisi, par souci de clarté, de citer ces résultats sous des formes simplifiées suffisantes pour l'unicité.

Le lemme de Rellich.

Présenté sous cette forme, le lemme de Rellich énonce une condition suffisante de nullité de la solution de l'équation de Helmholtz sur un domaine extérieur à une boule. Ce résultat fondamental intervient à nombreuses reprises dans les démonstrations, y compris dans l'unicité du problème inverse.

Lemme 2.1.1 *Soit u solution de l'équation de Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$ sur $|x| > a$, vérifiant*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |u(x)|^2 dS = 0.$$

Alors $u = 0$ sur $|x| > a$.

La démonstration de ce lemme est disponible dans [14] (Lemme 2.11).

Quelques notations d'espaces fonctionnels.

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^m . On notera :

$$\begin{aligned} L_c^2(\overline{\Omega}) &= L^2(\Omega) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m) = \{f \in L^2(\Omega), f \text{ à support compact dans } \mathbb{R}^m\}, \\ L_{loc}^2(\overline{\Omega}) &= \{f : f \in L^2(K \cap \Omega) \text{ pour tout compact } K \text{ de } \mathbb{R}^m\}, \\ H_{loc}^s(\overline{\Omega}) &= H^s(\Omega) \cap L_{loc}^2(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

Unicité de la solution dans un milieu homogène avec second membre.

Un premier résultat d'unicité concerne celle de l'équation de Helmholtz dans le vide avec second membre. Ce résultat, ainsi que sa démonstration, sont énoncés dans un cadre plus général pour les problèmes extérieurs dans [38] (Théorème 4.1).

Soit $f \in L_c^2(\mathbb{R}^m)$, $\text{supp}(f) \subset B(0, a)$, $a > 0$. On considère le problème

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= f \text{ dans } \mathbb{R}^m, \\ \frac{\partial u}{\partial r} &\Leftrightarrow iku = O(1/r^{(m+1)/2}) \text{ lorsque } r = |x| \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{2.1}$$

On a le théorème suivant :

Théorème 2.1.2 *Le problème (2.1) admet au plus une solution dans $L_{loc}^2(\mathbb{R}^m)$.*

Le principe de continuation unique.

Avant d'énoncer le principe de continuation unique, nous allons considérer un lemme technique dont le résultat intervient à la fois pour la continuation et dans la démonstration de l'unicité du problème inverse. Une fonction g de $L^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$ est dite 2π -périodique si elle vérifie $g(2\pi l + x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$ et $\forall l \in \mathbb{Z}^m$. On identifie cette classe de fonctions avec $L^2(Q)$, $Q = [\Leftrightarrow\pi, \pi]^m$. Le lemme suivant est énoncé dans ([25], Lemme 5.3) pour le cas $m = 3$. Nous l'étendons ici au cas $m = 2$.

Lemme 2.1.3 *Soient $a \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $Q = [\Leftrightarrow\pi, \pi]^m \subset \mathbb{R}^m$ et $\hat{e} = (1, i)^T \in \mathbb{C}^2$ si $m = 2$ ou $\hat{e} = (1, i, 0)^T \in \mathbb{C}^3$ si $m = 3$. Alors, quels que soient $t > 0$ et $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$ 2π -périodique, il existe une unique fonction 2π -périodique $w = w_t(g) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$ solution faible de l'équation*

$$\Delta w + (2t\hat{e} \Leftrightarrow ia) \cdot \nabla w \Leftrightarrow (it + \alpha)w = g \text{ dans } \mathbb{R}^m, \quad (2.2)$$

c'est à dire w de période 2π vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}^m} w [\Delta \varphi \Leftrightarrow (2t\hat{e} \Leftrightarrow ia) \cdot \nabla \varphi \Leftrightarrow (it + \alpha)\varphi] dx = \int_{\mathbb{R}^m} g \varphi dx,$$

quel que soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. De plus, w vérifie l'estimation suivante :

$$\|w\|_{L^2(Q)} \leq \frac{1}{t} \|g\|_{L^2(Q)}, \text{ quels que soient } g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^m) \text{ et } t > 0.$$

Démonstration : On développe g en série de Fourier :

$$g(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^m} g_j e^{ij \cdot x}, \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

avec

$$g_j = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_Q g(y) e^{-ij \cdot y} dy, \quad j \in \mathbb{Z}^m.$$

Un développement de w sous la forme $w(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^m} w_j e^{ij \cdot x}$ nous permet de poser les équations

$$w_j [\Leftrightarrow |j|^2 + ij \cdot (2t\hat{e} \Leftrightarrow ia) \Leftrightarrow (it + \alpha)] = g_j, \quad j \in \mathbb{Z}^m$$

vérifiées par les coefficients w_j . De l'estimation

$$|\Leftrightarrow |j|^2 + ij \cdot (2t\hat{e} \Leftrightarrow ia) \Leftrightarrow (it + \alpha)| \geq |\mathbf{Im} [\dots]| = t|2j_1 \Leftrightarrow 1| \geq t, \quad \forall j \in \mathbb{Z}^m \text{ et } t > 0,$$

on déduit que l'opérateur

$$L_t g(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^m} \frac{g_j}{\Leftrightarrow |j|^2 + ij \cdot (2t\hat{e} \Leftrightarrow ia) \Leftrightarrow (it + \alpha)} e^{ij \cdot x}, \quad g \in L^2(Q),$$

est bien défini et borné avec $\|L_t\|_{\mathcal{L}(L^2(Q))} \leq 1/t$ quel que soit $t > 0$. En tronquant la série, puis à l'aide d'une intégration par parties, il est aisé de montrer que $w = L_t g$ satisfait la formulation faible pour des g polynômes trigonométriques. Par densité, on en déduit le résultat quel que soit $g \in L^2(Q)$. \square

Nous pouvons maintenant utiliser ce résultat pour démontrer un principe de continuation unique. Ce théorème est une généralisation du Théorème 5.4 de [25] à un indice de réfraction $L^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$. Sa démonstration est d'ailleurs en tous points identique pour la dimension trois.

Théorème 2.1.4 *Soit $n \in L^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$ vérifiant $n(x) = 1$ pour $|x| \geq a$. Soit $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$ une solution de l'équation de Helmholtz $\Delta u + k^2 n u = 0$ dans \mathbb{R}^m telle que $u(x) = 0$ quel que soit x vérifiant $|x| \geq b$, avec $b \geq a$. Alors $u = 0$ sur \mathbb{R}^m tout entier.*

Démonstration : on pose $\hat{e} = (1, i)^T \in \mathbb{C}^2$ si $m = 2$ et $\hat{e} = (1, i, 0)^T \in \mathbb{C}^3$ si $m = 3$, $\rho = 2b/\pi$, et

$$w(x) = e^{\frac{i}{2}x_1 - t\hat{e} \cdot x} u(\rho x), \quad x \in Q = [\Leftrightarrow\pi, \pi]^m,$$

avec $t > 0$. Alors $w(x) = 0$ quel que soit $|x| \geq \pi/2$, en particulier au voisinage de la frontière du cube. On prolonge w en une fonction 2π -périodique sur \mathbb{R}^m en posant $w(2\pi l + x) = w(x)$, $x \in Q$ et $l \in \mathbb{Z}^m$, $l \neq 0$. Alors $w \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$, et des calculs élémentaires montrent que w est solution faible de l'équation

$$\Delta w(x) + (2t\hat{e} \Leftrightarrow ia) \cdot \nabla w(x) \Leftrightarrow (it + 1/4)w(x) = \Leftrightarrow \rho^2 k^2 \tilde{n}(x)w(x) \text{ dans } \mathbb{R}^m, \quad (2.3)$$

avec $a = (1, 0)^T$ si $m = 2$, $a = (1, 0, 0)^T$ si $m = 3$, et $\tilde{n}(2\pi l + x) = n(\rho x)$ quel que soit $x \in [\Leftrightarrow\pi, \pi]^m$ et $l \in \mathbb{Z}^m$. L'application du lemme précédent nous donne l'existence d'un opérateur L_t , borné de $L^2(Q)$ dans lui-même, vérifiant $\|L_t\|_{L^2(Q)} \leq 1/t$, et tel que l'équation 2.3 soit équivalente à

$$w = \Leftrightarrow \rho^2 k^2 L_t(\tilde{n}w).$$

L'estimation

$$\|w\|_{L^2(Q)} \leq \frac{\rho^2 k^2}{t} \|\tilde{n}w\|_{L^2(Q)} \leq \frac{\rho^2 k^2 \|n\|_\infty}{t} \|w\|_{L^2(Q)}$$

donne $w = 0$ dès que t est suffisamment grand. On en déduit $u = 0$. \square

Dans toute la suite, u^{inc} **est un champ incident**, c'est à dire une solution de l'équation de Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$ dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$, sans condition de radiation à l'infini. En pratique, les champs incidents que l'on considère sont les ondes planes sinusoïdales de la forme $u^{inc}(\theta) = e^{ik\theta \cdot x}$. Les ondes planes modélisent en effet de manière approchée les champs incidents correspondant à des sources ponctuelles situées à l'infini. La fonction u^{inc} désigne par conséquent soit un champ incident quelconque, soit une onde plane sinusoïdale quelconque de pulsation k .

Le problème de diffraction.

Pour un milieu d'indice $n \in L^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$ vérifiant $\text{supp}(1 \Leftrightarrow n) \subset B(0, a)$, $a > 0$, $\text{Re } n \geq 0$, $\text{Im } n \geq 0$, et un champ incident u^{inc} fixés, le champ total u que l'on observe est solution de l'équation de Helmholtz

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 n u &= 0 \text{ dans } \mathbb{R}^m, \\ \frac{\partial u^s}{\partial r} \Leftrightarrow i k u^s &= O(1/r^{(m+1)/2}) \text{ lorsque } r = |x| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.4)$$

où $u^s = u \Leftrightarrow u^{inc}$ désigne le champ diffracté. La fonction u^{inc} étant solution de l'équation de Helmholtz $\Delta u + k^2 u = 0$ dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$, ce problème s'écrit de manière équivalente en champ diffracté

$$\begin{aligned} \Delta u^s + k^2 n u^s &= k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc} \text{ dans } \mathbb{R}^m, \\ \frac{\partial u^s}{\partial r} \Leftrightarrow i k u^s &= O(1/r^{(m+1)/2}) \text{ lorsque } r = |x| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Notons que le second membre $k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc}$ de cette dernière équation appartient à $L^2_c(\mathbb{R}^m)$.

Les outils nécessaires à la démonstration de l'unicité de la solution du problème direct de diffraction étant réunis, nous pouvons énoncer le théorème d'unicité. Ici encore, la régularité $n \in L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ est suffisante pour que la démonstration soit identique dans ses grandes lignes au cas $n \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ ([25], Théorème 5.5). Ici encore, l'extension à la dimension deux ne modifie pas la démonstration.

Le théorème d'unicité ($n \in L^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$).

Théorème 2.1.5 *Soit $n \in L^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$ un indice de réfraction vérifiant $\text{supp}(1 \Leftrightarrow n) \subset B(0, a)$, avec $a > 0$, et $\text{Re } n \geq 0$, $\text{Im } n \geq 0$. Pour un champ incident u^{inc} fixé, le problème (2.4), avec $u = u^{inc} + u^s$, admet au plus une solution dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$. En d'autres termes, si u est une solution de (2.4) correspondant à $u^{inc} = 0$, alors $u = 0$. De plus, cette solution appartient à $H^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$.*

Démonstration : On pose $u^{inc} = 0$. La condition de radiation donne

$$\begin{aligned} O(1/R^{(m+1)/2}) &= \int_{|x|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \Leftrightarrow i k u \right|^2 dS \\ &= \int_{|x|=R} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + k^2 |u|^2 \right) dS + 2k \text{Im} \int_{|x|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} dS. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Si $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$ existe, alors $k^2 n u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$, et par conséquent $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$. En appliquant la formule de Green à la dernière intégrale, on obtient

$$\int_{|x|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} dS = \int_{|x|<R} [u \Delta \bar{u} + |\nabla u|^2] dx = \int_{|x|<R} [|\nabla u|^2 \Leftrightarrow k^2 \bar{n} |u|^2] dx,$$

c'est à dire

$$\text{Im} \int_{|x|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} dS = k^2 \int_{|x|<R} \text{Im } n |u|^2 dx \geq 0.$$

On introduit cette estimation dans (2.6), en faisant tendre R vers l'infini, ce qui donne

$$0 \leq \limsup_{R \rightarrow +\infty} \int_{|x|=R} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + k^2 |u|^2 \right) dS \leq 0,$$

et donc

$$\int_{|x|=R} |u|^2 dS \rightarrow 0 \text{ lorsque } R \rightarrow \infty.$$

Le Lemme 2.1.1 implique que $u = 0$ pour $|x| > a$. Le principe de continuation unique donne $u = 0$ dans \mathbb{R}^m . \square

2.1.2 Formulation intégrale volumique, existence et comportement asymptotique de l'équation de Helmholtz.

Avant de définir l'équation de Lippmann-Schwinger dont les propriétés permettent de déduire l'existence de solutions pour le problème direct, nous introduisons, sous forme de rappel, les propriétés du noyau de Green de l'opérateur de Helmholtz dans le vide avec condition d'onde sortante (i.e. vérifiant la condition sortante de radiation de Sommerfeld).

Solution fondamentale de l'équation de Helmholtz.

On pose

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x \Leftrightarrow y|} \text{ pour } x, y \in \mathbb{R}^3, x \neq y, \\ &= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x \Leftrightarrow y|) \text{ pour } x, y \in \mathbb{R}^2, x \neq y, \end{aligned}$$

où $H_0^{(1)}$ est la fonction de Hankel du premier genre et d'ordre 0. La fonction $\Phi(x, y)$ est appelée solution fondamentale de l'équation de Helmholtz dans \mathbb{R}^m (ou noyau de Green de l'opérateur de Helmholtz dans le vide) associée à une condition de radiation sortante. Elle vérifie donc :

$\Phi(\cdot, y)$ est solution au sens des distributions de l'équation de Helmholtz $\Delta u + k^2 u = \delta_y$ dans \mathbb{R}^m pour tout $y \in \mathbb{R}^m$. Elle satisfait la condition de radiation

$$\frac{x}{|x|} \cdot \nabla_x \Phi(x, y) \Leftrightarrow ik\Phi(x, y) = O(1/|x|^{(m+1)/2})$$

uniformément en $\frac{x}{|x|} \in S^{m-1}$ et $y \in K$ pour tout borné $K \subset \mathbb{R}^m$. De plus,

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} e^{-ik\hat{x} \cdot y} + O(1/|x|^2) \text{ si } m = 3, \\ &= \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k|x \Leftrightarrow y|}} e^{i(k|x-y|-\pi/4)} (1 + O(1/|x|)) \text{ si } m = 2, \end{aligned}$$

uniformément en $\hat{x} = \frac{x}{|x|} \in S^{m-1}$ et $y \in K$.

Avant de caractériser sous la forme de solutions d'une équation intégrale les solutions sortantes de l'équation de Helmholtz dans des milieux inhomogènes, nous allons montrer que les potentiels de volume définis à partir de Φ sont des solutions sortantes de l'équation de Helmholtz dans le vide avec second membre, et réciproquement, que toute solution sortante de ce type d'équation s'écrit sous la forme d'un potentiel de volume. Le lemme suivant constitue une étape préliminaire à la démonstration de ce résultat.

Lemme 2.1.6 [14] (Théorème 8.2) Soient D et G deux domaines bornés de \mathbb{R}^m . Le potentiel de volume

$$V\varphi(x) = \int_D \varphi(y)\Phi(x, y)dy$$

définit un opérateur borné de $L^2(D)$ dans $H^2(G)$.

Remarque : Ce résultat est donné dans [14] pour $m = 3$. Sa démonstration reste en tout point identique dans le cas $m = 2$, avec le noyau de Green correspondant.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.1.7 Soit $\varphi \in L^2_c(\mathbb{R}^m)$, $\text{supp}(\varphi) \subset B(0, a)$. On pose

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y)\Phi(x, y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^m. \quad (2.7)$$

Alors $v \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$ et v est solution du problème

$$\begin{aligned} \Delta v + k^2 v &= \varphi \text{ dans } \mathbb{R}^m, \\ \frac{\partial v}{\partial r} &\Leftrightarrow ikv = O(1/r^{(m+1)/2}) \text{ lorsque } r = |x| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Réciproquement, si $v \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$ est solution de (2.8), alors v s'écrit sous la forme (2.7).

Démonstration : L'application du Lemme 2.1.6 donne $v = V\varphi \in H^2(G)$ pour tout $\varphi \in L^2_c(\mathbb{R}^m)$, quel que soit G domaine borné. On en déduit $v \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$. \square

Pour tout $\epsilon > 0$, on définit k_ϵ réel et $s_\epsilon > 0$ par la relation $(k_\epsilon + is_\epsilon)^2 = k^2 + i\epsilon$. Soit la fonction

$$\begin{aligned} \Phi_\epsilon(x, y) &= \frac{e^{(ik_\epsilon - s_\epsilon)|x-y|}}{|x \Leftrightarrow y|} \text{ si } m = 3 \\ &= \frac{i}{4} H_0^{(1)}((k_\epsilon + is_\epsilon)|x \Leftrightarrow y|) \text{ si } m = 2, \end{aligned}$$

Alors $\Phi_\epsilon(x, y)$ est l'unique solution fondamentale de

$$\Delta v_\epsilon + (k^2 + i\epsilon)v_\epsilon = \delta_y$$

vérifiant $\int_{|x|>R} |v_\epsilon|^2 dx < \infty, \forall R > 0$. Pour $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}^m)$, l'unique solution de

$$\Delta v_\epsilon + (k^2 + i\epsilon)v_\epsilon = \Leftrightarrow \varphi$$

vérifiant $\int_{|x|>R} |v_\epsilon|^2 dx < \infty, \forall R > 0$ s'écrit

$$v_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y) \Phi_\epsilon(x, y) dy.$$

Par passage à la limite lorsque ϵ tend vers 0, en appliquant le principe d'absorption limite ([38], Théorème 4.4), on en déduit que $v(x)$ défini par (2.7) est solution de (2.8).

Réciproquement, d'après le Théorème 2.1.2, (2.8) admet au plus une solution dans $H_{loc}^2(\mathbb{R}^m)$. Les écritures (2.7) et (2.8) sont donc équivalentes. \square

Ce théorème étant établi, nous pouvons définir une équation intégrale équivalente à l'équation de Helmholtz avec un second membre dans $L_c^2(\mathbb{R}^m)$ pour les milieux inhomogènes.

L'équation intégrale de volume dans les milieux inhomogènes.

Théorème 2.1.8 Soit $n \in L^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$ vérifiant $\text{Re } n \geq 0, \text{Im } n \geq 0, \text{supp}(1 \Leftrightarrow n) \subset B(0, a)$, avec $a > 0$, et $f \in L_c^2(\mathbb{R}^m)$ vérifiant $\text{supp}(f) \subset B(0, a)$. Soit $u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^m)$ solution du problème avec second membre :

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 n u &= f \text{ dans } \mathbb{R}^m, \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Leftrightarrow i k u &= O(1/r^{(m+1)/2}) \text{ lorsque } r = |x| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Alors u est solution de l'équation intégrale de volume

$$u(x) = \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^m} [f(y) + k^2(1 \Leftrightarrow n(y))u(y)] \Phi(x, y) dy, \quad (2.10)$$

et réciproquement.

Démonstration : Par unicité de la solution dans $L_{loc}^2(\mathbb{R}^m)$ (Théorème 2.1.5), u vérifie

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= f + k^2(1 \Leftrightarrow n)u \text{ dans } \mathbb{R}^m, \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Leftrightarrow i k u &= O(1/r^{(m+1)/2}) \text{ lorsque } r = |x| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec $f + k^2(1 \Leftrightarrow n)u \in L_c^2(\mathbb{R}^m)$. L'application du résultat précédent en posant $\Leftrightarrow \varphi = f + k^2(1 \Leftrightarrow n)u$ nous permet de définir une équation intégrale volumique équivalente à (2.9)

$$u(x) = \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^m} [f(y) + k^2(1 \Leftrightarrow n(y))u(y)] \Phi(x, y) dy,$$

ce qui achève la démonstration. □

Soient les opérateurs

$$\begin{aligned} L : L^2(B(0, a)) &\Leftrightarrow L^2(B(0, a)) \\ f &\Leftrightarrow \Leftrightarrow \int_{B(0, a)} f(y) \Phi(x, y) dy, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L_n : L^2(B(0, a)) &\Leftrightarrow L^2(B(0, a)) \\ v &\Leftrightarrow \Leftrightarrow \int_{B(0, a)} k^2(1 \Leftrightarrow n(y))v(y) \Phi(x, y) dy. \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.1.8, la fonction $v \in L^2(B(0, a))$ solution de l'équation

$$v = Lf + L_nv \tag{2.12}$$

est la restriction à $B(0, a)$ de la solution u de (2.9).

Théorème 2.1.9 *Les opérateurs L et L_n sont compacts de $L^2(B(0, a))$ dans $L^2(B(0, a))$, et bornés de $L^2(B(0, a))$ dans $H^2(B(0, a))$.*

Démonstration : L'opérateur L est un opérateur à noyau faiblement singulier dans $B(0, a)$ ([13], paragraphe 2.4). On en déduit qu'il est compact de $L^2(B(0, a))$ dans $L^2(B(0, a))$. Du lemme 2.1.6, il découle que L est borné de $L^2(B(0, a))$ dans $H^2(B(0, a))$. Il suffit enfin de remarquer que $L_n = L \circ \chi_n$, où χ_n est l'opérateur de multiplication par $(1 \Leftrightarrow n)$, continu de $L^2(B(0, a))$ dans $L^2(B(0, a))$, pour étendre ce résultat à l'opérateur L_n . □

Théorème 2.1.10 *L'opérateur $(I \Leftrightarrow L_n)$ est une bijection bicontinue de $L^2(B(0, a))$ dans $L^2(B(0, a))$.*

Démonstration : Montrons dans un premier temps que $(I \Leftrightarrow L_n)$ est injectif dans $L^2(B(0, a))$. Soit $v \in L^2(B(0, a))$ vérifiant $(I \Leftrightarrow L_n)v = 0$, ce qui équivaut à écrire

$$v(x) = \Leftrightarrow \int_{B(0, a)} k^2(1 \Leftrightarrow n(y))v(y) \Phi(x, y) dy \text{ p.p. sur } B(0, a).$$

Alors v se prolonge en une fonction u définie sur \mathbb{R}^m , vérifiant

$$\begin{aligned} u(x) &= \Leftrightarrow \int_{B(0, a)} k^2(1 \Leftrightarrow n(y))u(y) \Phi(x, y) dy \\ &= \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^m} k^2(1 \Leftrightarrow n(y))u(y) \Phi(x, y) dy \text{ p.p. sur } \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.1.8, la fonction u est également solution de l'équation de Helmholtz

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 n u &= 0 \text{ dans } \mathbb{R}^m, \\ \frac{\partial u}{\partial r} &\Leftrightarrow i k u = O(1/r^{(m+1)/2}) \text{ lorsque } r = |x| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Du théorème 2.1.5, on déduit $u = 0$. Alors sa restriction v à $B(0, a)$ vaut également 0. On en déduit l'injectivité de $(I \Leftrightarrow L_n)$ dans $L^2(B(0, a))$.

D'après le théorème 2.1.9, l'opérateur L_n est compact de $L^2(B(0, a))$ dans $L^2(B(0, a))$, et $(I \Leftrightarrow L_n)$ étant injectif dans $L^2(B(0, a))$, 1 n'est pas valeur propre de L_n . L'opérateur $(I \Leftrightarrow L_n)$ est donc bijectif bicontinuu de $L^2(B(0, a))$ dans $L^2(B(0, a))$. \square

On déduit de ce théorème que l'application $(I \Leftrightarrow L_n)^{-1}L$ est continue de $L^2(B(0, a))$ dans $L^2(B(0, a))$.

Corollaire 2.1.11 *Pour tout ouvert borné G de \mathbb{R}^m , il existe une constante $C_G > 0$ telle que pour toute fonction $f \in L^2_c(\mathbb{R}^m)$ vérifiant $\text{supp}(f) \subset D$, avec D ouvert borné, la solution u du problème (2.9) vérifie*

$$|u|_{H^2(G)} \leq C_G |f|_{L^2(D)}.$$

Démonstration : On définit $a > 0$ tel que $G \subset B(0, a)$ et $D \subset B(0, a)$. Soit v la restriction de u à $B(0, a)$. La fonction v vérifie

$$(I \Leftrightarrow L_n)v = Lf,$$

et par continuité de l'opérateur $(I \Leftrightarrow L_n)^{-1}L$, ainsi que de l'opérateur de restriction à G , il existe une constante $K_G > 0$, indépendante de f , telle que

$$|v|_{L^2(G)} \leq K_G |f|_{L^2(B(0, a))} = K_G |f|_{L^2(D)}.$$

Les fonctions u et v étant par définition confondues sur $B(0, a)$ donc sur G , on montre ainsi

$$|u|_{L^2(G)} \leq K_G |f|_{L^2(D)}. \quad (2.13)$$

Le problème (2.9) peut s'écrire de manière équivalente sous la forme (2.11). Ainsi, la fonction u se décompose de manière unique en $u = \tilde{u} + \hat{u}$, avec \tilde{u} et \hat{u} les solutions respectives des équations de Helmholtz dans le vide

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u} + k^2 \tilde{u} &= f \text{ dans } \mathbb{R}^m, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \Leftrightarrow ik \tilde{u} &= O(1/r^{(m+1)/2}) \text{ lorsque } r = |x| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta \hat{u} + k^2 \hat{u} &= k^2(1 \Leftrightarrow n)u \text{ dans } \mathbb{R}^m, \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} \Leftrightarrow ik \hat{u} &= O(1/r^{(m+1)/2}) \text{ lorsque } r = |x| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

On déduit du lemme 2.1.6 qu'il existe des constantes $\tilde{C} > 0$ et $\hat{C} > 0$ telles que

$$|\tilde{u}|_{H^2(G)} \leq \tilde{C} |f|_{L^2(D)}, \quad (2.14)$$

et

$$|\hat{u}|_{H^2(G)} \leq \hat{C} |k^2(1 \Leftrightarrow n)u|_{L^2(D)}. \quad (2.15)$$

La fonction $1 \Leftrightarrow n$ étant bornée, il existe une constante $\widehat{C}' > 0$ telle que

$$|\widehat{u}|_{H^2(G)} \leq \widehat{C}' |u|_{L^2(D)},$$

et en appliquant l'estimation (2.13) pour $G = D$, il existe une constante $\widehat{K} > 0$ telle que

$$|\widehat{u}|_{H^2(G)} \leq \widehat{K} |f|_{L^2(D)}.$$

Ainsi, la solution u de (2.9) vérifie

$$\begin{aligned} |u|_{H^2(G)} = |\widetilde{u} + \widehat{u}|_{H^2(G)} &\leq |\widetilde{u}|_{H^2(G)} + |\widehat{u}|_{H^2(G)} \\ &\leq (\widetilde{C} + \widehat{K}) |f|_{L^2(D)} = C_G |f|_{L^2(D)}. \end{aligned}$$

Le corollaire est ainsi démontré. \square

Remarque : La constante C_G dépend de l'indice de réfraction n .

Une fois ces résultats établis, nous pouvons définir une équation intégrale équivalente à l'équation de Helmholtz dans les milieux inhomogènes, l'équation de Lippmann-Schwinger.

L'équation de Lippmann-Schwinger.

Théorème 2.1.12 Soit $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$ solution du problème avec obstacle :

$$\begin{aligned} u &= u^{inc} + u^s, \quad n \in L^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{C}), \quad \text{Re } n \geq 0, \quad \text{Im } n \geq 0, \\ \text{supp}(1 \Leftrightarrow n) &\subset\subset B(0, a), \quad a > 0, \\ \Delta u + k^2 n u &= 0 \text{ dans } \mathbb{R}^m, \\ \frac{\partial u^s}{\partial r} \Leftrightarrow i k u^s &= O(1/r^{(m+1)/2}) \text{ lorsque } r = |x| \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Alors u est solution de l'équation de Lippmann-Schwinger

$$u(x) = u^{inc} \Leftrightarrow k^2 \int_{\mathbb{R}^m} (1 \Leftrightarrow n(y)) u(y) \Phi(x, y) dy, \tag{2.17}$$

et réciproquement.

Démonstration : Le champ diffracté $u^s = u \Leftrightarrow u^{inc}$ est solution de l'équation de Helmholtz (2.5), avec $k^2(1 \Leftrightarrow n)u^{inc} \in L^2_c(\mathbb{R}^m)$. L'application du théorème 2.1.8 en posant $f = k^2(1 \Leftrightarrow n)u^{inc}$ nous permet de définir une équation intégrale volumique équivalente à (2.16)

$$u^s(y) = \Leftrightarrow k^2 \int_{\mathbb{R}^m} (1 \Leftrightarrow n(y)) (u^{inc}(y) + u^s(y)) \Phi(x, y) dy,$$

ou encore, écrite en champ total

$$\begin{aligned} u(x) &= u^{inc} \Leftrightarrow k^2 \int_{\mathbb{R}^m} (1 \Leftrightarrow n(y)) u(y) \Phi(x, y) dy \\ &= u^{inc} \Leftrightarrow T u, \end{aligned} \tag{2.18}$$

où l'opérateur $T : L^2(B(0, a)) \rightarrow L^2(B(0, a))$ est défini par

$$Tu(x) = k^2 \int_{B(0, a)} (1 \Leftrightarrow n(y)) \Phi(x, y) u(y) dy = \Leftrightarrow L_n u(x), \quad x \in B(0, a).$$

Ceci achève la démonstration. \square

Une application directe du Théorème 2.1.10 nous permet de déduire l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale (2.17) ainsi que de l'équation de Helmholtz (2.16).

Théorème 2.1.13 *Le problème (2.16) admet une solution unique dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^m)$.*

Démonstration : Il suffit de poser $f = k^2(1 \Leftrightarrow n)u^{inc} \in L^2_c(\mathbb{R}^m)$ pour déduire ce résultat du Théorème 2.1.10. \square

Considérons maintenant l'opérateur du problème inverse, soit

$$\begin{aligned} F : L^\infty(D) &\Leftrightarrow L^2(S^{m-1} \times \Sigma) \\ n|_D &\Leftrightarrow (u(n, \theta)|_\Sigma, \theta \in S^{m-1}), \end{aligned}$$

Nous souhaitons montrer que son inverse est non-continu, et que de ce fait le problème est mal posé. Pour cela, on étudie son application partielle F_θ , à θ fixé.

Complète continuité de l'opérateur F_θ .

Soit D un ouvert borné vérifiant $\text{supp}(1 \Leftrightarrow n) \subset D$, et F_θ l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} F_\theta : L^\infty(D) &\Leftrightarrow L^2(\Sigma) \\ n|_D &\Leftrightarrow u(n, \theta)|_\Sigma, \end{aligned}$$

où $u(n, \theta)$ désigne la solution du problème

$$\begin{aligned} \Delta u(n, \theta) + k^2 n u(n, \theta) &= k^2(1 \Leftrightarrow n)u^{inc}(\theta) \text{ dans } \mathbb{R}^m, \\ \frac{\partial u(n, \theta)}{\partial r} \Leftrightarrow i k u(n, \theta) &= O(1/r^{(m+1)/2}) \text{ lorsque } r = |x| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Soit G un ouvert borné de \mathbb{R}^m vérifiant $\Sigma \subset G$. On note $I_{2,1}$ l'injection de $H^2(G)$ dans $H^1(G)$, γ_Σ l'opérateur trace, défini de $H^1(G)$ dans $L^2(\Sigma)$, et $F_{G,\theta}$ l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} F_{G,\theta} : L^\infty(D) &\Leftrightarrow H^2(G) \\ n|_D &\Leftrightarrow u(n, \theta). \end{aligned}$$

Alors $F_\theta = \gamma_\Sigma \circ I_{2,1} \circ F_{G,\theta}$. On souhaite déduire des propriétés des opérateurs γ_Σ , $I_{2,1}$, et $F_{G,\theta}$ que l'opérateur F_θ est complètement continu. Dans un premier temps, on étudie la continuité de l'opérateur $F_{G,\theta}$. Ce résultat fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2.1.14 *L'opérateur $F_{G,\theta}$ est continu de $L^\infty(D)$ dans $H^2(G)$.*

Démonstration : Soit $\tilde{n} \in L^\infty(D)$ fixé. La fonction $u(\tilde{n}, \theta)$ est solution du problème

$$\begin{aligned} \Delta u(\tilde{n}, \theta) + k^2 \tilde{n} u(\tilde{n}, \theta) &= k^2 (1 \Leftrightarrow \tilde{n}) u^{inc}(\theta) \quad \text{dans } \mathbb{R}^m, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{(m-1)/2} \left(\frac{\partial u(\tilde{n}, \theta)}{\partial r} \Leftrightarrow i k u(\tilde{n}, \theta) \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

et la fonction $u(\tilde{n} + \delta n, \theta)$ est solution de

$$\begin{aligned} \Delta u(\tilde{n} + \delta n, \theta) + k^2 (\tilde{n} + \delta n) u(\tilde{n} + \delta n, \theta) &= k^2 (1 \Leftrightarrow \tilde{n} \Leftrightarrow \delta n) u^{inc}(\theta) \quad \text{dans } \mathbb{R}^m, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{(m-1)/2} \left(\frac{\partial u(\tilde{n} + \delta n, \theta)}{\partial r} \Leftrightarrow i k u(\tilde{n} + \delta n, \theta) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Par soustraction, la fonction $\delta u(\theta) = u(\tilde{n} + \delta n, \theta) \Leftrightarrow u(\tilde{n}, \theta)$ est solution de

$$\begin{aligned} \Delta \delta u(\theta) + k^2 \tilde{n} \delta u(\theta) &= \Leftrightarrow k^2 \delta n (u^{inc}(\theta) + u(\tilde{n}, \theta) + \delta u(\theta)) \quad \text{dans } \mathbb{R}^m, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{(m-1)/2} \left(\frac{\partial \delta u(\theta)}{\partial r} \Leftrightarrow i k \delta u(\theta) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Pour tout ouvert borné G de \mathbb{R}^m , d'après le corollaire 2.1.11, l'application qui à un second membre associe la solution de l'équation de Helmholtz est linéaire et continue de $L^2(D)$ dans $H^2(G)$. En d'autres termes, il existe une constante $C_G > 0$ telle que

$$|u(\tilde{n}, \theta)|_{H^2(G)} \leq C_G |(1 \Leftrightarrow \tilde{n}) u^{inc}(\theta)|_{L^2(D)}, \quad (2.23)$$

et $(1 \Leftrightarrow \tilde{n})$ étant borné, on en déduit qu'il existe $L_G > 0$ vérifiant

$$|u(\tilde{n}, \theta)|_{H^2(G)} \leq L_G |u^{inc}(\theta)|_{L^2(D)}. \quad (2.24)$$

La relation de continuité (2.23) appliquée au second membre de l'équation (2.22) donne l'estimation

$$|\delta u(\theta)|_{H^2(G)} \leq C_G |\delta n (u^{inc}(\theta) + u(\tilde{n}, \theta) + \delta u(\theta))|_{L^2(D)}. \quad (2.25)$$

A l'aide de la relation (2.24), on montre que

$$\begin{aligned} |u^{inc}(\theta) + u(\tilde{n}, \theta)|_{L^2(D)} &\leq |u^{inc}(\theta)|_{L^2(D)} + |u(\tilde{n}, \theta)|_{L^2(D)} \\ &\leq (1 + L_D) |u^{inc}(\theta)|_{L^2(D)} \\ &\leq K, \end{aligned}$$

où K est une constante indépendante de θ , puisque $u^{inc}(\theta) = e^{ikx \cdot \theta}$ est uniformément borné dans $L^2(D)$ pour $\theta \in S^{m-1}$. D'où

$$\begin{aligned} |\delta u(\theta)|_{H^2(G)} &\leq C_G |\delta n|_\infty (K + |\delta u(\theta)|_{L^2(D)}) \\ &\leq C_G |\delta n|_\infty (K + |\delta u(\theta)|_{H^2(D)}), \end{aligned}$$

et en particulier, il existe une constante $C_{D,G} > 0$ telle que

$$|\delta u(\theta)|_{H^2(D \cup G)} \leq C_{D,G} |\delta n|_\infty (K + |\delta u(\theta)|_{H^2(D)}) \leq C_{D,G} |\delta n|_\infty (K + |\delta u(\theta)|_{H^2(D \cup G)}).$$

Si $|\delta n|_\infty \leq 1/(2C_{D,G})$, alors

$$|\delta u(\theta)|_{H^2(G)} \leq |\delta u(\theta)|_{H^2(D \cup G)} \leq K_G |\delta n|_\infty, \text{ avec } K_G = 2C_{D,G} \cdot K. \quad (2.26)$$

La constante K_G est indépendante de θ . On en déduit la continuité de l'opérateur $F_{G,\theta}$. \square

De cette proposition, on montre la complète continuité de l'opérateur F_θ .

Corollaire 2.1.15 *L'opérateur F_θ est un opérateur complètement continu de $L^\infty(D)$ dans $L^2(\Sigma)$.*

Démonstration : L'application F_θ est complètement continue, comme composée de γ_Σ continu par $I_{2,1}$ compact, puis par $F_{G,\theta}$ continu. \square

Ce résultat met en lumière la difficulté du problème inverse à résoudre, puisque d'après ([14], Théorème 4.2), l'inversion de F_θ constitue un problème mal posé. Il s'ensuit que l'inversion de l'opérateur que l'on considère, soit $F = (F_\theta, \theta \in S^{m-1})$, est également mal posée puisque son inverse est non-continu.

Définissons enfin le champ lointain, ou amplitude de scattering, de l'équation de Helmholtz. C'est la donnée que l'on considère dans le théorème d'unicité du problème inverse. Les propriétés suivantes se déduisent du comportement asymptotique de la solution fondamentale.

Comportement asymptotique de la solution - opérateur de champ lointain.

La solution u du problème (2.16), vérifie

$$u(x) = u^{inc}(x) + \frac{e^{ik|x|}}{|x|^{(m-1)/2}} u_\infty(\hat{x}) + O(1/|x|^{m-1}) \text{ lorsque } |x| \rightarrow \infty \quad (2.27)$$

uniformément en $\hat{x} = x/|x|$, où

$$u_\infty(\hat{x}) = \Leftrightarrow \frac{k^2}{(2m \Leftrightarrow 2)\pi} \int_{B(0,a)} (1 \Leftrightarrow n(y)) e^{-ik\hat{x} \cdot y} dy, \quad \hat{x} \in S^{m-1}. \quad (2.28)$$

La fonction $u_\infty : S^{m-1} \rightarrow \mathbb{C}$ est appelée champ lointain, ou encore amplitude de scattering de u .

Afin de pouvoir considérer des données de type champ proche pour l'unicité du problème inverse, on montre, dans le paragraphe suivant, leur équivalence avec les données de type champ lointain.

2.1.3 Passage des données 'champ lointain' en données 'champ proche'.

Les théorèmes d'unicité pour le problème inverse nous concernant sont généralement obtenus à partir de données de type champ lointain, de la forme $\{u_\infty(\hat{x}, \theta), \forall (\hat{x}, \theta) \in S^{m-1} \times S^{m-1}\}$. On se propose de montrer, que sous certaines hypothèses sur une frontière Γ de dimension $m \Leftrightarrow 1$, la donnée du champ $\{u^s(x, \theta), \forall (x, \theta) \in \Gamma \times S^{m-1}\}$ est équivalente pour le problème d'unicité à celle du champ lointain.

Un domaine Ω est dit non-trapping pour l'équation de Helmholtz si tout rayon pénétrant dans un compact K contenant Ω et se réfléchissant sur $\partial\Omega$ en suivant les lois de l'optique géométrique quitte K

en un temps fini. Cette propriété est vérifiée grâce à des conditions géométriques sur la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de Ω . Une définition plus générale d'obstacle non-trapping est disponible dans [33] (Définition 7.4.4.).

Sous ces hypothèses, l'existence et l'unicité de la solution sortante dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega})$ pour l'équation de Helmholtz dans le vide avec conditions de Dirichlet dans $H^{1/2}(\Gamma)$ sont données dans [38] (Corollaire 4.5).

Lemme 2.1.16 *Soit Ω un domaine borné non-trapping de classe C^1 , de frontière Γ , et soit $n \in L^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$ vérifiant $\text{supp}(1 \Leftrightarrow n) \subset B(0, a) \subset \Omega$. Soit u une solution de l'équation de Helmholtz $\Delta u + k^2 n u = 0$, $u = u^{inc} + u^s$, u^s vérifie $\partial u^s / \partial r \Leftrightarrow i k u^s = O(1/r^{(m+1)/2})$ et $u_\infty(\hat{x})$, $\hat{x} \in S^{m-1}$ son champ lointain associé. Alors on a l'équivalence suivante :*

$$u_\infty(\hat{x}) = 0, \forall \hat{x} \in S^{m-1} \Leftrightarrow u^s(x) = 0, \forall x \in \Gamma.$$

Démonstration : D'après le Théorème 2.1.13, u^s existe et est unique. De plus, u^s vérifie (2.27) uniformément en $\hat{x} = x/|x|$, et est solution de $\Delta u^s + k^2 u^s = 0$ pour $|x| > a$. De $u_\infty(\hat{x}) = 0$, $\forall \hat{x} \in S^{m-1}$ et (2.27), on déduit que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |u^s(x)|^2 dS = 0$. Le Lemme 2.1.1 nous permet de conclure $u^s = 0$ pour $|x| > a$, et donc $u^s(x) = 0$, $\forall x \in \Gamma$.

Réciproquement, on suppose $u^s(x) = 0$, $\forall x \in \Gamma$. Le domaine Ω étant non-trapping, le problème extérieur

$$\begin{aligned} \Delta u^s + k^2 u^s &= 0 \text{ dans } \mathbb{R}^m \setminus \overline{\Omega} \\ u^s &= 0 \text{ sur } \Gamma \\ \frac{\partial u^s}{\partial r} &\Leftrightarrow i k u^s = O(1/r^{(m+1)/2}) \end{aligned}$$

admet $u^s = 0$ comme solution unique. D'où on déduit $u_\infty(\hat{x}) = 0$, $\forall \hat{x} \in S^{m-1}$. \square

De ce lemme on déduit un corollaire fondamental pour passer du champ lointain au champ proche dans un théorème d'unicité.

Corollaire 2.1.17 *Soient $n_1, n_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$ deux indices de réfraction vérifiant $n_1(x) = n_2(x) = 1$ pour tout $|x| \geq a$, et Ω un domaine borné non-trapping de classe C^1 , de frontière Γ , vérifiant $\text{supp}(1 \Leftrightarrow n_j) \subset B(0, a) \subset \Omega$, $j = 1, 2$. Alors on a l'équivalence suivante :*

$$u_{1,\infty}(\hat{x}, \theta) = u_{2,\infty}(\hat{x}, \theta), \forall (\hat{x}, \theta) \in S^{m-1} \times S^{m-1} \Leftrightarrow u_1^s(x, \theta) = u_2^s(x, \theta), \forall (x, \theta) \in \Gamma \times S^{m-1},$$

où $u_j(\cdot, \theta)$ est solution de l'équation de Helmholtz $\Delta u_j(\cdot, \theta) + k^2 n_j u_j(\cdot, \theta) = 0$, $j = 1, 2$ dans \mathbb{R}^m correspondant au champ incident $u^{inc}(x, \theta) = e^{i k x \cdot \theta}$.

Démonstration : on pose $u^s = u_1^s \Leftrightarrow u_2^s$. La fonction u^s est solution de $\Delta u^s + k^2 u^s = 0$ pour $|x| > a$ et vérifie la condition de radiation à l'infini. L'application du Lemme 2.1.16 à u^s permet de déduire le résultat. \square

2.2 Unicité du problème de scattering inverse pour $n \in L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$.

Pour toute la suite de ce chapitre, on fixe la dimension d'espace à $m = 3$.

2.2.1 Le théorème d'unicité en champ lointain.

Théorème 2.2.1 *Soient $n_1, n_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ deux indices de réfraction vérifiant $\text{supp}(1 \Leftrightarrow n_1)$ et $\text{supp}(1 \Leftrightarrow n_2) \subset B(0, a)$, a réel > 0 fixé. Si les champs lointains $u_{1,\infty}(\hat{x}, \theta)$ et $u_{2,\infty}(\hat{x}, \theta)$ coïncident pour tout $(\hat{x}, \theta) \in S^2 \times S^2$, alors $n_1 = n_2$.*

Démonstration : La preuve de ce théorème pour le cas $n_1, n_2 \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ consiste en trois étapes, formulées sous forme de lemmes, dont les démonstrations sont dues à A. Nachman [30], R. Novikov [31] et A. Ramm [35]. Il est entièrement démontré dans [25] (Théorème 5.25). A l'aide des résultats établis pour les problèmes directs dans le paragraphe précédent, et en particulier de celui du Théorème 2.1.13, on se propose d'appliquer le même procédé démonstratif dans le cas $n \in L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$, moyennant quelques modifications. Nous présenterons donc cette démonstration sous la forme des trois lemmes modifiés. Le premier lemme, adapté de [25] (Lemme 5.20), est un résultat de densité de l'espace engendré par les solutions de l'équation de Helmholtz correspondant aux champs incidents ondes planes sinusoidales dans l'espace de toutes les solutions de cette même équation pour un domaine borné contenant l'obstacle. La régularité $L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ de l'indice ne modifie pas la démonstration.

Lemme 2.2.2 *Soit $n \in L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$, $\text{supp}(1 \Leftrightarrow n) \subset B(0, a)$. Soit $u(\cdot, \theta)$ le champ total correspondant au champ incident $u^{inc}(x, \theta) = e^{ikx \cdot \theta}$, solution de :*

$$\Delta u(x, \theta) + k^2 n u(x, \theta) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3,$$

et $H = \{v \in H^2(B(0, b)) : \Delta v + k^2 n v = 0 \text{ dans } B(0, b), b > a\}$. Alors $\text{Vect}\{u(\cdot, \theta)|_{B(0, a)}, \theta \in S^2\}$ est dense dans $H|_{B(0, a)}$ par rapport à la norme $L^2(B(0, a))$.

Démonstration : Soit $v \in \overline{H}$ vérifiant :

$$(v, u(\cdot, \theta))_{L^2(B(0, a))} = \int_{B(0, a)} v(x) \overline{u(x, \theta)} dx = 0, \forall \theta \in S^2.$$

D'après l'équation de Lippmann-Schwinger écrite sous la forme (2.18), $u = (I + T)^{-1} u^{inc}$; d'où :

$$0 = (v, (I + T)^{-1} u^{inc}(\cdot, \theta))_{L^2(B(0, a))} = ((I + T^*)^{-1} v, u^{inc}(\cdot, \theta))_{L^2(B(0, a))},$$

quel que soit $\theta \in S^2$. Soit $w = (I + T^*)^{-1} v$. Alors $w \in L^2(B(0, a))$ et satisfait l'équation adjointe :

$$v(x) = w(x) + k^2 (1 \Leftrightarrow \overline{n(x)}) \int_{B(0, a)} \overline{\Phi(x, y)} w(y) dy, \quad x \in B(0, a).$$

On pose

$$\tilde{w}(x) = \int_{B(0,a)} \overline{w(y)} \Phi(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Alors \tilde{w} est un potentiel de volume de densité \overline{w} . C'est une solution de l'équation de Helmholtz $\Delta \tilde{w} + k^2 \tilde{w} = 0$ pour $|x| > a$. De plus, son champ lointain vérifie:

$$\overline{\tilde{w}_\infty(\theta)} = \frac{1}{4\pi} \int_{B(0,a)} \overline{w(y)} e^{ik\theta \cdot y} dy = \frac{1}{4\pi} (w, u^{inc}(\cdot, \hat{\theta}))_{L^2(B(0,a))} = 0$$

quel que soit $\theta \in S^2$. On en déduit, d'après le Lemme 2.1.1, que $\tilde{w}(x) = 0$ quel que soit $x \notin B(0, a)$.

Soit v_j une suite de H vérifiant $v_j \rightarrow v$ dans $L^2(B(0, a))$. Alors :

$$\begin{aligned} \int_{B(0,a)} \overline{v_j} v_j dx &= \int_{B(0,a)} \overline{w} v_j dx + k^2 \int_{B(0,a)} (1 \Leftrightarrow n) \tilde{w} v_j dx \\ &= \int_{B(0,a)} \overline{w} v_j dx + \int_{B(0,a)} \tilde{w} [\Delta v_j + k^2 v_j] dx. \end{aligned}$$

En remplaçant \tilde{w} par sa valeur et en intervertissant l'ordre des intégrations, on obtient :

$$\int_{B(0,a)} \overline{v_j} v_j dx = \int_{B(0,a)} \overline{w(y)} \left[v_j(y) + \int_{B(0,a)} \Phi(x, y) [\Delta v_j(x) + k^2 v_j(x)] dx \right] dy.$$

L'application du théorème de représentation de Green donne :

$$\int_{B(0,a)} \overline{v_j} v_j dx = \int_{B(0,a)} \overline{w(y)} \int_{|x|=a} \left[\Phi(\cdot, y) \frac{\partial v_j}{\partial \nu} \Leftrightarrow v_j \frac{\partial \Phi(\cdot, y)}{\partial \nu} \right] dS dy.$$

Comme v_j satisfait l'équation de Helmholtz $\Delta v_j + k^2 v_j = 0$ pour $a < |x| < b$, l'intégrale de bord peut se poser sur $\{x : |x| = c\}$ pour $a < c < b$. Intervertissant de nouveau l'ordre des intégrations, on obtient finalement :

$$\int_{B(0,a)} \overline{v_j} v_j dx = \int_{|x|=c} \left[\tilde{w} \frac{\partial v_j}{\partial \nu} \Leftrightarrow v_j \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \nu} \right] dS = 0,$$

car $\tilde{w} = 0$ à l'extérieur de $B(0, a)$. Par passage à la limite, on en déduit $v = 0$. \square

Le deuxième lemme, adapté de [25] (Lemme 5.21), énonce une certaine relation d'orthogonalité existant entre les solutions de l'équation de Helmholtz pour différents indices de réfraction n_1 et n_2 . Là encore, la démonstration reste identique au cas $n \in C^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$.

Lemme 2.2.3 Soient $n_1, n_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ deux indices de réfraction vérifiant $n_1(x) = n_2(x) = 1$ pour tout $|x| \geq a$. On suppose que $u_{1,\infty}(\hat{x}, \theta) = u_{2,\infty}(\hat{x}, \theta)$ pour tout $(\hat{x}, \theta) \in S^2 \times S^2$. Alors

$$\int_{B(0,a)} v_1(x) v_2(x) [n_1(x) \Leftrightarrow n_2(x)] dx = 0, \quad (2.29)$$

quels que soient $v_j \in H^2(B(0, b))$ solutions des équations de Helmholtz $\Delta v_j + k^2 n_j v_j = 0$ dans $B(0, b)$, $j = 1, 2$, avec $b > a$.

Démonstration : Soit v_1 fixé une solution de $\Delta v_1 + k^2 n_1 v_1 = 0$ dans $B(0, a)$. D'après le lemme précédent, il suffit de montrer le résultat pour $v_2 = u_2(\cdot, \theta)$, avec $\theta \in S^2$ arbitraire. On pose $u = u_1(\cdot, \theta) \Leftrightarrow u_2(\cdot, \theta)$. Alors u est solution faible de l'équation de Helmholtz

$$\Delta u + k^2 n_1 u = k^2 (n_2 \Leftrightarrow n_1) u_2.$$

On multiplie cette équation par v_1 , et l'équation satisfaite par v_1 par u , on les soustrait, puis les intègre. Ce qui donne :

$$\int_{B(0,a)} (v_1 \Delta u \Leftrightarrow u \Delta v_1) dx = k^2 \int_{B(0,a)} (n_2 \Leftrightarrow n_1) u_2 v_1 dx.$$

La formule de Green appliquée au membre de gauche donne

$$\int_{B(0,a)} (n_2 \Leftrightarrow n_1) u_2 v_1 dx = \int_{|x|=a} \left(v_1 \frac{\partial u}{\partial \nu} \Leftrightarrow u \frac{\partial v_1}{\partial \nu} \right) dS.$$

D'après l'hypothèse $u_{1,\infty}(\cdot, \theta) = u_{2,\infty}(\cdot, \theta)$ et le Lemme de Rellich 2.1.1, on déduit que u est nul à l'extérieur de $B(0, a)$. L'intégrale de surface est donc aussi nulle et l'on en déduit le résultat. \square

Le lemme suivant permettant d'achever la démonstration de l'unicité est une adaptation de ([25], Théorème 5.24) à des indices de réfraction $n_1, n_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$. Il établit le résultat important que l'ensemble formé des produits de solutions de l'équation de Helmholtz dans un borné Ω de \mathbb{R}^3 est dense dans $L^2(\Omega)$. Sa première démonstration est due à J. Sylvester et G. Uhlmann [37].

Lemme 2.2.4 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné, et $n_1, n_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ tels que $n_1 \Leftrightarrow 1$ et $n_2 \Leftrightarrow 1$ soient à support compact dans Ω . L'ensemble des produits

$$\{u_1 u_2 : u_j \in H^2(\Omega) \text{ est solution de } \Delta u_j + k^2 n_j u_j = 0 \text{ dans } \Omega, j = 1, 2\}$$

est dense dans $L^2(\Omega)$.

Démonstration : La preuve utilise un résultat préliminaire, adapté de [25] (Théorème 5.23), que nous allons énoncer sous forme de lemme.

Lemme 2.2.5 Soit $B(0, b)$ une boule de rayon b et $n \in L^\infty(B(0, b); \mathbb{C})$ vérifiant $\text{supp}(n \Leftrightarrow 1) \subset B(0, b)$. Alors il existe $T > 0$ et $C > 0$ tels que, quel que soit $z \in \mathbb{C}^3$ vérifiant $z \cdot z = 0$ et $|z| \geq T$, il existe une solution $u_z \in L^2(B(0, b))$ de l'équation

$$\Delta u_z + k^2 n u_z = 0 \tag{2.30}$$

de la forme

$$u_z(x) = e^{z \cdot x} (1 + v_z(x)), \quad x \in B(0, b). \tag{2.31}$$

De plus, v_z vérifie

$$\|v_z\|_{L^2(B(0,b))} \leq \frac{C}{|z|}, \quad \text{quel que soit } z \in \mathbb{C}^3 \text{ vérifiant } z \cdot z = 0 \text{ et } |z| \geq T.$$

Démonstration : Ce lemme se démontre en deux étapes. Dans un premier temps, v_z est construit pour $z = t\hat{e}$, avec $\hat{e} = (1, i, 0)^T \in \mathbb{C}^3$ et t assez grand. Ensuite, le cas général est obtenu par rotation.

Soit $z = t\hat{e}$, avec $t > 0$. Par un changement d'échelle, on peut considérer sans perte de généralité que $B(0, b) \subset Q = [\frac{\pi}{2}, \pi]^3 \subset \mathbb{R}^3$. On construit une solution faible u_z de l'équation de Helmholtz, c'est à dire $u_z \in L^2(Q)$ vérifiant

$$\int_Q u_z [\Delta\varphi + k^2 n\varphi] dx = 0$$

quel que soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ à support contenu dans Q . La régularité de cette solution faible implique le fait que ce soit également une solution forte à l'intérieur de Q .

On remarque alors que u défini par

$$u(x) = e^{t\hat{e}\cdot x} [1 + \exp(i/2x_1)w_t(x)]$$

est solution de (2.30) si et seulement si w_t est solution de l'équation :

$$\Delta w_t(x) + (2t\hat{e} \Leftrightarrow ia) \cdot \nabla w_t(x) \Leftrightarrow (it + 1/4)w_t(x) = \Leftrightarrow k^2 n(x)w_t(x) \Leftrightarrow k^2 n(x)\exp(i/2x_1) \text{ dans } Q,$$

avec $a = (1, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^3$. On cherche à déterminer une solution 2π -périodique de cette équation. Comme celle-ci est de la forme (2.2), pour $\alpha = 1/4$, on utilise l'opérateur L_t du Lemme 2.1.3, et on écrit cette équation sous la forme

$$w_t + k^2 L_t(nw_t) = L_t \tilde{n} \text{ dans } Q, \quad (2.32)$$

avec $\tilde{n}(x) = \Leftrightarrow k^2 n(x)\exp(i/2x_1)$. Pour de grandes valeurs de t , l'opérateur $K_t : w \mapsto k^2 L_t(nw)$ est une application contractante de $L^2(Q)$. Ceci se déduit des estimations

$$\begin{aligned} \|K_t w\|_{L^2(Q)} &= k^2 \|L_t(nw)\|_{L^2(Q)} \\ &\leq \frac{k^2}{t} \|nw\|_{L^2(Q)} \leq \frac{k^2 \|n\|_\infty}{t} \|w\|_{L^2(Q)}, \end{aligned}$$

lesquelles impliquent que $\|K_t\|_{\mathcal{L}(L^2(Q))} < 1$ si $t > 0$ est suffisamment grand. Pour ces valeurs de t , il existe une solution unique w_t de (2.32). Comme cette solution dépend continûment du second membre, on en déduit qu'il existe une constante $c > 0$ vérifiant

$$\|w_t\|_{L^2(Q)} \leq c \|L_t \tilde{n}\|_{L^2(Q)} \leq \frac{ck^2}{t} \|n\|_{L^2(Q)},$$

quel que soit $t \geq T$ pour un $T > 0$.

En appliquant le théorème de Green, il est aisé de voir que la fonction $u(x) = e^{t\hat{e}\cdot x} [1 + e^{-i/2x_1}w_t(x)]$ est une solution faible de l'équation (2.30). Ce qui démontre le lemme pour $z = t\hat{e}$.

Soit maintenant $z \in \mathbb{C}^3$ arbitraire, avec $z \cdot z = 0$, et $|z| \geq T$. Ces propriétés impliquent que $|\operatorname{Re} z| = |\operatorname{Im} z|$ et $(\operatorname{Re} z) \cdot (\operatorname{Im} z) = 0$. Le vecteur z se décompose de manière unique sous la forme $z = t(\hat{a} + i\hat{b})$, avec $\hat{a}, \hat{b} \in S^2$, $t > 0$ et $\hat{a} \cdot \hat{b} = 0$. On définit le produit vectoriel $\hat{c} = \hat{a} \times \hat{b}$ et la matrice

orthogonale $R = [\widehat{ab\hat{c}}] \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Alors $tR\hat{e} = z$ et donc $R^T z = t\hat{e}$. La transformation $x \mapsto Rx$ transforme l'équation de Helmholtz (2.30) en

$$\Delta w(x) + k^2 n(Rx)w(x) = 0, \quad x \in B(0, b),$$

pour $w(x) = v(Rx)$, $x \in B(0, b)$. L'application de la première partie de la preuve nous permet de déduire l'existence d'une solution w de cette équation sous la forme

$$w(x) = e^{t\hat{e} \cdot x} [1 + \exp(\Leftrightarrow i/2x_1)w_t(x)],$$

avec $\|w_t\|_{L^2(Q)} \leq C/t$ pour $t \geq T$. De $v(x) = w(R^T x)$, on conclut que

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{t\hat{e} \cdot R^T x} [1 + \exp(\Leftrightarrow i/2\hat{a} \cdot x)w_t(R^T x)] \\ &= e^{z \cdot x} [1 + \exp(\Leftrightarrow i/2\hat{a} \cdot x)w_t(R^T x)], \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme pour ce cas. □

Nous pouvons maintenant démontrer le lemme général de densité.

Preuve du Lemme 2.2.4: On choisit $b > 0$ tel que $\overline{\Omega}$ soit contenu dans $B(0, b)$. Soit $g \in L^2(\Omega)$ vérifiant

$$\int_{\Omega} g(x)u_1(x)u_2(x)dx = 0 \tag{2.33}$$

quels que soient $u_j \in H^2(\Omega)$ solutions des équations de Helmholtz $\Delta u_j + k^2 n_j u_j = 0$ dans Ω , $j = 1, 2$. En particulier, (2.33) est vérifiée pour toute solution de l'équation de Helmholtz dans $B(0, b)$.

Fixons un vecteur arbitraire $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ et un nombre $\rho > 0$. On choisit un vecteur unitaire $\hat{a} \in \mathbb{R}^3$ et un vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ tels que $|b|^2 = |y|^2 + \rho^2$, et tel que $\{y, \hat{a}, b\}$ soit une famille orthogonale de \mathbb{R}^3 . Posons

$$z^1 = \frac{1}{2}b \Leftrightarrow \frac{i}{2}(y + \rho\hat{a}) \text{ et } z^2 = \Leftrightarrow \frac{1}{2}b \Leftrightarrow \frac{i}{2}(y \Leftrightarrow \rho\hat{a}).$$

Alors $z^j \cdot z^j = |\operatorname{Re} z^j|^2 \Leftrightarrow |\operatorname{Im} z^j|^2 + 2i \operatorname{Re} z^j \cdot \operatorname{Im} z^j = |b|^2/4 \Leftrightarrow (|y|^2 + \rho^2)/4 = 0$ et $|z^j|^2 = (|b|^2 + |y|^2 + \rho^2)/4 \geq \rho^2/4$. De plus, $z^1 + z^2 = \Leftrightarrow iy$.

On applique alors le Lemme 2.2.5 avec $z = z^j$ aux équations de Helmholtz $\Delta u_j + k^2 n_j u_j = 0$ dans $B(0, b)$. On introduit les u_j sous la forme de (2.31) dans la relation d'orthogonalité (2.33), et l'on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} e^{(z^1+z^2) \cdot x} [1 + v_1(x)][1 + v_2(x)]g(x)dx \\ &= \int_{\Omega} e^{-iy \cdot x} [1 + v_1(x) + v_2(x) + v_1(x)v_2(x)]g(x)dx. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.2.5, il existe des constantes $T > 0$ et $C > 0$ telles que

$$\|v_j\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v_j\|_{L^2(B(0,b))} \leq \frac{C}{|z^j|} \leq \frac{2C}{\rho}$$

quel que soit $\rho \geq T$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne, lorsque ρ tend vers $+\infty$

$$\int_{\Omega} e^{-iy \cdot x} g(x) dx = 0.$$

Comme le vecteur $y \in \mathbb{R}^3$ était arbitraire, on en déduit que la transformée de Fourier de g est nulle. Ce qui donne $g = 0$. \square

Il n'existe pas de preuve analogue dans \mathbb{R}^2 , dans la mesure où une décomposition de $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, de la même manière que celle décrite en dimension trois dans la démonstration du Lemme 2.2.4, n'est pas possible dans \mathbb{C}^2 . La démonstration de ce résultat dans \mathbb{R}^2 , et de ce fait celle d'un théorème global d'unicité reste un problème ouvert à ce jour. Néanmoins, des résultats partiels d'unicité ont été démontrés dans le cas de la dimension deux ([24], Théorèmes 5.4.2, 5.4.3 et 5.4.4).

Ces trois lemmes étant démontrés, la démonstration du Théorème 2.2.1 est immédiate, puisqu'il suffit de combiner la relation d'orthogonalité du Lemme 2.2.3 avec le résultat de densité du Lemme 2.2.4 en posant $\Omega = B(0, a)$ pour obtenir l'unicité.

En utilisant le résultat d'équivalence entre les données champ proche et champ lointain (Lemme 2.1.17), on déduit immédiatement du résultat précédent un théorème d'unicité en champ proche.

2.2.2 Le théorème d'unicité en champ proche.

Théorème 2.2.6 *Soient $n_1, n_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ deux indices de réfraction vérifiant $n_1(x) = n_2(x) = 1$ pour tout $|x| \geq a$, et Ω un domaine borné non trapping de classe C^1 , de frontière Γ , vérifiant $\text{supp}(1 \Leftrightarrow n_j) \subset B(0, a) \subset \Omega$, $j = 1, 2$. Si les champs proches $u_1^s(x, \theta)$ et $u_2^s(x, \theta)$, définis sur $\Gamma \times S^2$, coïncident pour tout $(x, \theta) \in \Gamma \times S^2$, alors $n_1 = n_2$.*

Ce dernier résultat justifie le fait de rechercher dans $L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ l'indice de réfraction d'un obstacle à partir des données du champ proche pour tout champ incident de type onde plane sinusoïdale. Avant de proposer un algorithme permettant la résolution approchée de ce problème inverse, nous nous intéressons, dans le chapitre suivant, à la résolution approchée du problème direct de la diffraction par un obstacle diélectrique parfait. De telles résolutions interviennent en effet dans l'algorithme d'inversion.

Chapitre 3

Approximation PML du problème direct.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution numérique des problèmes directs qui interviennent dans la résolution du problème inverse. Leur rôle est de lier les données à l'indice de réfraction recherché dans le problème inverse. Si l'on souhaite restituer des indices à partir de mesures physiques, souvent bruitées et issues d'un problème de surcroît mal posé, une résolution précise de ces problèmes directs semble nécessaire.

C'est pourquoi on considère le couplage de l'opérateur de Helmholtz avec un opérateur pseudo-différentiel décrivant la propagation des ondes dans un milieu fictif absorbant, dit milieu PML (Perfectly Matched Layer) de Bérenger. Ce milieu, qui entoure un borné contenant l'obstacle, a pour propriété d'amortir, exponentiellement et sans réflexion, les ondes le pénétrant, indépendamment de la fréquence et de l'incidence. Ce couplage s'avère d'un grand intérêt pour la résolution numérique des équations de propagation des ondes, et par conséquent pour l'équation de Helmholtz : il permet en effet de simuler les conditions de radiation à l'infini en imposant des conditions aux limites à distance finie dans le milieu PML. Si le sujet a été largement traité du point de vue numérique (cf [10] pour un aperçu), les articles théoriques concernant le milieu PML sont beaucoup moins nombreux, surtout dans le cas du problème harmonique. L'existence et l'unicité du couplage Helmholtz-PML en domaine borné ont été démontrées uniquement dans le cadre de la dimension deux, pour un obstacle conducteur parfait, en coordonnées polaires ([10], théorème 2) ou cartésiennes ([11], Théorème 1), et en excluant un ensemble discret de fréquences propres, éventuellement vide. Nous adaptons ce résultat au cas d'un obstacle diélectrique parfait, d'indice de réfraction $n \in L^\infty(\Omega_b; \mathbb{C})$. De manière à en démontrer l'efficacité, cette méthode est ensuite testée numériquement à l'aide d'un code éléments finis P_1 sur des maillages non structurés.

3.1 Historique - équations de Bérenger pour Maxwell 2D instationnaire et passage en harmonique.

Jean-Pierre Bérenger [4] a introduit en 1994 un milieu fictif absorbant appelé PML (pour perfectly matched layer, ou couches parfaitement adaptées). Considérant le système instationnaire de Maxwell en 2D pour un obstacle parfaitement conducteur, dont les inconnues sont les composantes E_x , E_y et

H_z des champs électrique et magnétique (mode transverse électrique)

$$\begin{aligned} \partial_t H_z &= \partial_y E_x \Leftrightarrow \partial_x E_y \\ \partial_t E_y &= \Leftrightarrow \partial_x H_z \\ \partial_t E_x &= \partial_y H_z \end{aligned} \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}, \quad (3.1)$$

où \mathcal{O} contient le support de l'obstacle, il a rajouté une équation au système en découplant l'inconnue H_z en deux sous-composantes H_{zx} et H_{zy} , puis en introduisant des facteurs absorbants $\sigma_x(x)$ et $\sigma_y(y)$ vérifiant

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \subset] \Leftrightarrow a; a[\times] \Leftrightarrow b; b[, \\ \sigma_x(x) = 0 \text{ sur }] \Leftrightarrow a; a[\text{ et } \sigma_x(x) > 0 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus] \Leftrightarrow a; a[, \\ \sigma_y(y) = 0 \text{ sur }] \Leftrightarrow b; b[\text{ et } \sigma_y(y) > 0 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus] \Leftrightarrow b; b[. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Le système instationnaire qu'il propose est

$$\begin{aligned} \partial_t H_{zy} + \sigma_y H_{zy} &= \partial_y E_x \\ \partial_t H_{zx} + \sigma_x H_{zx} &= \Leftrightarrow \partial_x E_y \\ \partial_t E_y + \sigma_x E_y &= \Leftrightarrow \partial_x H_z \\ \partial_t E_x + \sigma_y E_x &= \partial_y H_z \end{aligned} \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}. \quad (3.3)$$

Lorsque $\sigma_x = \sigma_y = 0$, les deux premières équations sont regroupables pour n'en former plus qu'une, et l'on retrouve ainsi le système de Maxwell (3.1) originel. De plus, si J.P. Bérenger a dans un premier temps considéré la diffraction des ondes électromagnétiques par un obstacle parfaitement conducteur, le cas du diélectrique parfait peut également être traité par cette méthode. Il suffit dans tous les cas de disjointre le support de l'obstacle du milieu PML ($\sigma_x \neq 0$ ou $\sigma_y \neq 0$).

L'opérateur associé au système (3.3) est faiblement hyperbolique mais pas fortement hyperbolique, contrairement à celui du système de Maxwell associé. A. de la Bourdonnaye [20], ou S. Abarbanel et D. Gottlieb [1] décrivent ce défaut comme une faible stabilité du système, ce qui mène à un problème dit faiblement bien posé. Le symbole complet de l'opérateur ne vérifie pas les conditions de Hadamard-Petrovsky ([28], Théorème 4.6), et le problème est de ce fait mal posé en unicité.

On rappelle que dans le cas d'un problème d'évolution où l'on ne considère que les temps positifs, la condition de Hadamard-Petrovsky est vérifiée si et seulement si les parties imaginaires des valeurs propres du symbole complet de l'opérateur spatial sont bornées. Cette condition n'étant pas vérifiée pour le système de Bérenger, il semble a priori nécessaire de modifier les équations, tout en conservant les propriétés du matériau fictif décrit par J.P. Bérenger.

Dès 1994, W.C. Chew et W.H. Weedon [9] ont proposé, à l'aide d'une transformation formelle par Laplace des équations et d'un regroupement judicieux de celles-ci, une interprétation du milieu PML pour les équations de Maxwell en 3D en termes d'un changement de coordonnées complexes. Ils démontrent en outre la décroissance exponentielle de l'amplitude des ondes planes dans le milieu

PML. Si l'on effectue cette manipulation sur le système 2D (3.3)

$$\begin{aligned} p\widehat{H}_{zy} &= \frac{p}{(p + \sigma_y)} \partial_y \widehat{E}_x \\ p\widehat{H}_{zx} &= \Leftrightarrow \frac{p}{(p + \sigma_x)} \partial_x \widehat{E}_y \\ p\widehat{E}_y &= \Leftrightarrow \frac{p}{(p + \sigma_x)} \partial_x \widehat{H}_z \\ p\widehat{E}_x &= \frac{p}{(p + \sigma_y)} \partial_y \widehat{H}_z \end{aligned} \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O},$$

on obtient, en regroupant les deux premières équations

$$\begin{aligned} p\widehat{H}_z &= \frac{p}{(p + \sigma_y)} \partial_y \widehat{E}_x \Leftrightarrow \frac{p}{(p + \sigma_x)} \partial_x \widehat{E}_y \\ p\widehat{E}_y &= \Leftrightarrow \frac{p}{(p + \sigma_x)} \partial_x \widehat{H}_z \\ p\widehat{E}_x &= \frac{p}{(p + \sigma_y)} \partial_y \widehat{H}_z \end{aligned} \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}.$$

En remplaçant les inconnues \widehat{E}_x et \widehat{E}_y par leurs expressions en fonction de \widehat{H}_z , on obtient l'équation

$$p^2 \widehat{H}_z \Leftrightarrow \frac{p}{(p + \sigma_x)} \partial_x \left(\frac{p}{(p + \sigma_x)} \partial_x \widehat{H}_z \right) \Leftrightarrow \frac{p}{(p + \sigma_y)} \partial_y \left(\frac{p}{(p + \sigma_y)} \partial_y \widehat{H}_z \right) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}. \quad (3.4)$$

On remarque alors, en posant $p = \Leftrightarrow ik$, que l'équation (3.4) est une équation de Helmholtz à poids complexes, et que l'opérateur différentiel d'ordre deux qui remplace le Laplacien est symétrique mais non hermitien.

De cette interprétation, F. Collino et P. Monk [10], [12] ont démontré en 96 l'existence et unicité du problème des PML harmoniques en coordonnées polaires pour l'équation de Helmholtz scalaire 2D en milieu non borné, et en milieu borné et pour toute fréquence, excepté un ensemble discret et localement fini, pouvant être vide. Les tests numériques qu'ils ont effectués à l'aide d'une méthode d'éléments finis P_1 ont confirmé l'intérêt de cette approche. Une extension au problème écrit en coordonnées cartésiennes est présentée dans [11].

Parallèlement, le rétablissement en instationnaire du système harmonique 3D décrit par Chew et Weedon a permis d'interpréter le milieu PML comme un milieu dispersif fictif [36], [26], [32]. L'utilisation de la théorie des semi-groupes a permis d'obtenir l'existence et unicité des équations PML couplées aux équations de Maxwell 3D, en domaine borné ou non borné, pour des obstacles diélectriques ou conducteurs parfaits. Une vision similaire des PML en tant que milieu dispersif a également été développée en 2D par P.G. Petropoulos, L. Zhao et A.C. Cangellaris [34].

Plus récemment, J. Métral et O. Vacus [27] ont proposé un changement d'inconnues couplé à un choix d'espace fonctionnel permettant de bien poser le système de Bérenger instationnaire en 2D, pour des données initiales suffisamment régulières.

Pour le problème inverse que nous souhaitons résoudre (l'équation dans laquelle on recherche l'indice de réfraction étant justement l'équation de Helmholtz scalaire), l'approche de F. Collino et P. Monk apparaît bien adaptée pour la résolution des problèmes directs associés. C'est en s'appuyant

sur cette théorie que nous avons mis au point un code éléments finis pour l'équation de Helmholtz 2D incluant les PML cartésiennes ou polaires. Comparé à celui qu'ils ont développé dans [12], la seule originalité du code "polaire", technique mais non théorique, réside dans la discrétisation des couches PML sur un maillage non structuré, et par la prise en compte d'obstacles diélectriques parfaits.

L'objet du paragraphe suivant est de présenter le changement de coordonnées complexes, adapté de celui présenté dans [9], pour l'équation de Helmholtz scalaire en dimension deux, sur des systèmes de coordonnées cartésiennes ou polaires.

3.2 L'équation de Helmholtz-PML dans \mathbb{R}^2 en coordonnées cartésiennes ou polaires.

Partant de l'équation de Helmholtz dans \mathbb{R}^2 pour un milieu inhomogène, nous introduisons les équations de milieux PML associés, en coordonnées cartésiennes ou polaires. Sous réserve de l'existence et unicité de la solution, nous montrons ensuite que les ondes sont exponentiellement amorties dans le milieu PML, ce qui permet d'envisager la restriction de l'équation à un domaine borné sur lequel on impose une condition aux limites homogène sans que la solution ne soit sensiblement perturbée par des réflexions au voisinage de l'obstacle, c'est à dire à l'endroit où l'opérateur PML est confondu avec l'opérateur de Helmholtz.

3.2.1 L'équation de Helmholtz standard pour un obstacle diélectrique parfait.

Soient D un domaine borné de \mathbb{R}^2 , et $n \in L^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$, vérifiant $\text{Re}(n) > 0$, $\text{Im}(n) \geq 0$, et $\text{supp}(1 \Leftrightarrow n) \subset D$. Le champ diffracté u correspondant au champ incident u^{inc} pour un obstacle d'indice de réfraction n est solution de

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 n u &= k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc} \text{ dans } \mathbb{R}^2, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \Leftrightarrow i k u \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

où $r = |X|$ est la coordonnée radiale. Ce problème admet une solution unique dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ (Théorème 2.1.13).

Notons que cette solution u est également l'unique solution du problème posé dans le vide avec un potentiel $\varphi = k^2 (1 \Leftrightarrow n) (u^{inc} + u)$, soit :

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= \varphi \text{ dans } \mathbb{R}^2, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \Leftrightarrow i k u \right) &= 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

et admet de ce fait une représentation intégrale du type

$$u(X) = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(|X \Leftrightarrow X'|) \varphi(X') dX',$$

où $\Phi(X) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|X|)$ est le noyau de Green de l'opérateur de Helmholtz dans \mathbb{R}^2 avec une condition de radiation de type Hankel 1.

Remarque : Dans ce chapitre, contrairement au chapitre précédent, on pose $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. L'intérêt de cette notation apparaît clairement dès le paragraphe suivant.

3.2.2 Ecriture des équations du milieu PML en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires.

Pour obtenir un milieu PML de Bérenger en coordonnées cartésiennes ou polaires, on cherche à étendre la solution de l'équation (3.5) à des coordonnées complexes de manière à ce que l'onde devienne évanescence lorsque la partie réelle de certaines de ces coordonnées (l'abscisse et l'ordonnée dans le cas cartésien, la coordonnée radiale dans le cas polaire) tend vers l'infini. Les parties imaginaires de ces coordonnées complexes dépendant de leurs parties réelles associées, c'est en réécrivant les équations comme dépendant des coordonnées réelles seules, à l'aide d'un changement de variable complexe, que l'on obtient les équations du milieu PML. Une fois les équations ainsi modifiées, il n'est plus utile d'imposer la condition de radiation de Sommerfeld, toute onde solution étant alors une combinaison linéaire d'ondes de modules exponentiellement décroissants et d'ondes de modules exponentiellement croissants. De manière à ne prendre en compte dans ces équations que les solutions de modules exponentiellement décroissants (et donc d'éliminer les solutions de modules exponentiellement croissants), on remplace la condition de radiation de Sommerfeld par une condition de décroissance uniforme vers zéro à l'infini. Notons que dans le cas présent, une condition de bornitude de la solution à l'infini serait parfaitement équivalente.

Cas cartésien.

Pour obtenir les équations du milieu PML en coordonnées cartésiennes, on écrit l'équation de Helmholtz sur une variété à deux dimensions réelles de \mathbb{C}^2 . On introduit des coefficients d'absorption artificielle σ_x et σ_y réels, ne dépendant respectivement que des coordonnées x et y , vérifiant

$$\begin{aligned} D \subset] &\Leftrightarrow a; a[\times] \Leftrightarrow b; b[, \\ \sigma_x(x) = 0 \text{ sur }] &\Leftrightarrow a; a[\text{ et } \sigma_x(x) > 0 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus] \Leftrightarrow a; a[, \\ \sigma_y(y) = 0 \text{ sur }] &\Leftrightarrow b; b[\text{ et } \sigma_y(y) > 0 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus] \Leftrightarrow b; b[, \end{aligned} \quad (3.7)$$

et l'on suppose

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left| \int_0^x \sigma_x(\tau) d\tau \right| = \lim_{|y| \rightarrow \infty} \left| \int_0^y \sigma_y(\tau) d\tau \right| = +\infty. \quad (3.8)$$

On pose :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \tilde{x}(x) = x + \frac{i}{k} \int_0^x \sigma_x(\tau) d\tau, \\ \tilde{y} &= \tilde{y}(y) = y + \frac{i}{k} \int_0^y \sigma_y(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ainsi, formellement

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} &= \left(1 + \frac{i\sigma_x}{k}\right) = s_x, \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} &= \left(1 + \frac{i\sigma_y}{k}\right) = s_y.\end{aligned}$$

On désigne par $\tilde{\Phi}(X) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + y^2})$ le prolongement analytique à \mathbb{C}^2 du noyau de Green de l'opérateur $\Delta + k^2$ défini dans le paragraphe (3.2.1), la racine carrée dans \mathbb{C} s'entendant alors au sens de sa détermination principale.

On pose

$$u^B(\tilde{X}(X)) = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\Phi}(\tilde{X}(X \Leftrightarrow X')) \varphi(X') dX',$$

avec $\tilde{X}(X) = (\tilde{x}(x), \tilde{y}(y))$. Par construction, la fonction $u^B(\tilde{X})$ est solution de

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}u^B + k^2nu^B &= k^2(1 \Leftrightarrow n)u^{inc} \text{ dans } \mathbb{R}^2, \\ |u^B| &\text{ tend uniformément vers zéro lorsque } r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty,\end{aligned}\tag{3.9}$$

l'opérateur $\tilde{\Delta}$ désignant le Laplacien écrit dans le système de coordonnées complexes (\tilde{x}, \tilde{y}) . Dans $] \Leftrightarrow a; a[\times] \Leftrightarrow b; b[$, la fonction u^B satisfait l'équation de Helmholtz standard avec obstacle. En effet, $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y)$ et donc $u^B = u$. En utilisant de manière formelle la règle de dérivation en chaîne,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^B}{\partial \tilde{x}} &= \frac{\partial u^B}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{s_x} \frac{\partial u^B}{\partial x}, \\ \frac{\partial u^B}{\partial \tilde{y}} &= \frac{\partial u^B}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{s_y} \frac{\partial u^B}{\partial y}.\end{aligned}$$

Dans le système de coordonnées réelles (x, y) , en écrivant par abus de notation $u^B(X) = u^B(\tilde{X}(X))$, la fonction $u^B(x, y)$ est donc solution de l'équation

$$\begin{aligned}\frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{s_x} \frac{\partial u^B}{\partial x} \right) + \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{s_y} \frac{\partial u^B}{\partial y} \right) + k^2nu^B &= k^2(1 \Leftrightarrow n)u^{inc} \text{ dans } \mathbb{R}^2, \\ |u^B| &\text{ tend uniformément vers zéro lorsque } r \rightarrow \infty.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Cas polaire.

Supposons que D soit contenu dans une boule $B(0, \rho')$, ρ' réel positif fixé. Alors pour $r = |X| \geq \rho'$, la fonction u solution du problème (3.5) peut s'écrire à l'aide d'une méthode de séparation de variables

$$u(X) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p H_p^{(1)}(kr) \exp(ip\theta),\tag{3.11}$$

où $H_p^{(1)}$ est la fonction de Hankel du premier genre et d'ordre p , et $X = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Cette série converge uniformément pour $r \geq \rho'$.

Pour l'écriture des équations du milieu PML en coordonnées polaires, seule la coordonnée radiale est étendue au plan complexe. On introduit un rayon complexe \tilde{r} dépendant de r , contenu dans le quadrant $\text{Re}(\tilde{r}) \geq 0$, $\text{Im}(k\tilde{r}) \geq 0$ lorsque r décrit \mathbb{R}^+ . En effet, on souhaite un comportement asymptotique des fonctions de Hankel du type

$$|H_p^{(1)}(k\tilde{r})| \sim \frac{|C_p|}{\sqrt{k|\tilde{r}|}} \exp(\Leftrightarrow \text{Im}(k\tilde{r})), \quad |\tilde{r}| \rightarrow \infty,$$

ce qui implique que le demi-plan sur lequel on doit étendre la solution est

$$\text{Im}(k\tilde{r}) > 0.$$

Soit $\rho > \rho'$, et un coefficient artificiel d'absorption $\sigma = \sigma(r)$ réel vérifiant $\sigma(r) = 0$ si $r < \rho$ et $\sigma(r) > 0$ si $r > \rho$. On pose

$$\tilde{r} = \begin{cases} r + \int_{\rho}^r \frac{i\sigma(s)}{k} ds & \text{si } r \geq \rho, \\ r & \text{si } r < \rho, \end{cases}$$

avec

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\rho}^r \frac{i\sigma(s)}{k} ds = \infty.$$

Alors

$$\frac{\partial \tilde{r}}{\partial r} = \beta = \begin{cases} 1 + \frac{i\sigma(r)}{k} & \text{si } r \geq \rho, \\ 1 & \text{si } r < \rho, \end{cases}$$

et en posant

$$\tilde{\sigma} = \begin{cases} \frac{1}{r} \int_{\rho}^r \sigma(s) ds & \text{si } r \geq \rho, \\ 0 & \text{si } r < \rho, \end{cases}$$

\tilde{r} et r sont liés par la formule

$$\tilde{r} = r \left(1 + \frac{i\tilde{\sigma}}{k} \right) = r\tilde{\beta},$$

avec la notation $\tilde{\beta} = 1 + \frac{i\tilde{\sigma}}{k}$.

On définit ainsi une solution de Bérenger u^B dans \mathbb{R}^2 par

$$u^B(X) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p H_p^{(1)}(k\tilde{r}) \exp(in\theta).$$

Dans D , u^B satisfait l'équation de Helmholtz standard avec obstacle. En effet, $\tilde{r} = r$ et donc $u^B = u$. Dans $\mathbb{R}^2 \setminus D$, u^B est une somme de fonctions de Hankel et vérifie l'équation de Helmholtz dans laquelle r est remplacé par \tilde{r}

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} u^B \right) + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u^B \right) + k^2 n u^B &= k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc} \text{ dans } \mathbb{R}^2, \\ |u^B| \text{ tend uniformément vers zéro lorsque } r &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.12)$$

En utilisant de manière formelle la règle de dérivation en chaîne,

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{r}} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \tilde{r}} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial u}{\partial r}.$$

On peut alors réécrire (3.12) par rapport à la variable r , ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{\beta} r} \left(\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tilde{\beta}}{\beta} r \frac{\partial}{\partial r} u^B \right) + \frac{1}{\tilde{\beta} r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u^B \right) + k^2 n u^B &= k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc} \text{ dans } \mathbb{R}^2, \\ |u^B| \text{ tend uniformément vers zéro lorsque } r &\rightarrow \infty, \end{aligned}$$

ou encore, $(1 \Leftrightarrow n)$ et $(1 \Leftrightarrow \beta \tilde{\beta})$ étant de supports disjoints par définition du milieu PML,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tilde{\beta} r}{\beta} \frac{\partial}{\partial r} u^B \right) + \frac{\beta}{\tilde{\beta} r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u^B \right) + k^2 \tilde{\beta} \beta n u^B &= k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc} \text{ dans } \mathbb{R}^2, \\ |u^B| \text{ tend uniformément vers zéro lorsque } r &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.2.3 Décroissance exponentielle de la solution dans le milieu PML.

On s'intéresse dans ce paragraphe au comportement spatial à l'infini des équations du milieu PML. Sous réserve de l'existence et unicité de la solution, il est intéressant de vérifier la décroissance exponentielle de celle-ci, de manière à justifier l'approximation de l'équation sur un domaine borné avec des conditions aux limites homogènes. On étudiera donc successivement les cas cartésiens et polaires décrits dans le paragraphe 3.2.2.

Cas cartésien.

Le problème (3.5) admet une solution unique $u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^2)$. Supposons que le problème (3.10) admette une solution unique u^B . Alors $u^B(\tilde{x}, \tilde{y})$ est aussi l'unique solution de (3.9). Si la solution u^B

est unique, alors elle est confondue sur D avec la solution u du problème (3.5), et de ce fait $\varphi^B = \varphi$, potentiel de l'équation (3.6). La fonction u^B admet une représentation intégrale de la forme

$$u^B(X) = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\Phi}(\tilde{X}(X \Leftrightarrow X')) \varphi(X') dX',$$

où $\tilde{\Phi}(X) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\sqrt{x^2 + y^2})$ désigne le prolongement analytique à \mathbb{C}^2 du noyau de Green de l'opérateur $\Delta + k^2$ avec condition de radiation de type Hankel 1 à l'infini, la racine carrée dans \mathbb{C} s'entendant alors au sens de sa détermination principale. Du comportement asymptotique à l'infini de la fonction $\tilde{\Phi}$ on déduit le comportement asymptotique de u^B [12]

$$\left| H_0^{(1)}(k\sqrt{\tilde{x}(x)^2 + \tilde{y}(y)^2}) \right| \sim \frac{e^{ik\sqrt{\tilde{x}(x)^2 + \tilde{y}(y)^2}}}{\sqrt{ik\sqrt{\tilde{x}(x)^2 + \tilde{y}(y)^2}}}.$$

Le comportement à l'infini de u^B dépend du comportement de $\text{Im}(\sqrt{\tilde{x}(x)^2 + \tilde{y}(y)^2})$; pour $y = y_0$ fixé, en faisant tendre x vers l'infini

$$\begin{aligned} \sqrt{\tilde{x}(x)^2 + \tilde{y}(y_0)^2} &= \sqrt{\left(x + \frac{i}{k} \int_0^x \sigma_x(\tau) d\tau\right)^2 + \tilde{y}(y_0)^2} \\ &= |x| \sqrt{\left(1 + \frac{i}{kx} \int_0^x \sigma_x(\tau) d\tau\right)^2 + O\left(\frac{1}{|x|}\right)} \\ &= |x| \left(1 + \frac{i}{kx} \int_0^x \sigma_x(\tau) d\tau\right) \sqrt{1 + \epsilon\left(\frac{1}{|x|}\right)}, \end{aligned}$$

avec $\lim_{s \rightarrow 0} \epsilon(s) = 0$. Il existe par conséquent une constante $C_{y_0} > 0$ dépendant de y_0 telle que

$$\left| \frac{e^{ik\sqrt{\tilde{x}(x)^2 + \tilde{y}(y)^2}}}{\sqrt{ik\sqrt{\tilde{x}(x)^2 + \tilde{y}(y)^2}}} \right| < C_{y_0} \frac{e^{-k|\text{Im}(\tilde{x}(x))|}}{\sqrt{ik\sqrt{\tilde{x}(x)^2 + \tilde{y}(y)^2}}} \text{ lorsque } x \rightarrow \infty,$$

où $\Leftrightarrow k|\text{Im}(\tilde{x}(x))| = \Leftrightarrow \left| \int_0^x \sigma_x(\tau) d\tau \right|$.

Un raisonnement analogue à $x = x_0$ fixé en faisant tendre y vers l'infini permet d'affirmer qu'il existe une constante $C_{x_0} > 0$ dépendant de x_0 telle que

$$\left| \frac{e^{ik\sqrt{\tilde{x}(x)^2 + \tilde{y}(y)^2}}}{\sqrt{ik\sqrt{\tilde{x}(x)^2 + \tilde{y}(y)^2}}} \right| < C_{x_0} \frac{e^{-k|\text{Im}(\tilde{y}(y))|}}{\sqrt{ik\sqrt{\tilde{x}(x)^2 + \tilde{y}(y)^2}}} \text{ lorsque } y \rightarrow \infty,$$

avec $\Leftrightarrow k|\text{Im}(\tilde{y}(y))| = \Leftrightarrow \left| \int_0^y \sigma_y(\tau) d\tau \right|$. Pour $\sigma_x(x)$ et $\sigma_y(y)$ vérifiant les hypothèses (3.7) et (3.8), on en déduit que le noyau de Green $\tilde{\Phi}(X)$ décroît exponentiellement lorsque x et y tendent respectivement vers l'infini.

Cas polaire.

En effectuant un raisonnement similaire dans le cas de l'équation écrite en coordonnées polaires, si u^B est solution unique de (3.12), alors u^B est également l'unique solution de

$$\frac{1}{\tilde{r}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} u^B \right) + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u^B \right) + k^2 u^B = k^2 (1 \Leftrightarrow n) (u^{inc} + u^B) = \varphi^B \text{ dans } \mathbb{R}^2,$$

$|u^B|$ tend uniformément vers zéro lorsque $r \rightarrow \infty$.

Si la solution u^B est unique, alors elle est confondue sur D avec la solution u du problème (3.5), et de ce fait $\varphi^B = \varphi$, potentiel de l'équation (3.6). La fonction u^B admet une représentation intégrale de la forme

$$u^B(r, \theta) = \int_{\mathbb{R} \times]0; 2\pi[} \tilde{\Phi} \left(\tilde{r} \left(\left| \begin{smallmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \end{smallmatrix} \right| \Leftrightarrow \begin{smallmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \end{smallmatrix} \right) \right) \varphi(r', \theta') r' dr' d\theta',$$

avec la notation $\begin{smallmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \end{smallmatrix} = X = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. La fonction $\tilde{\Phi}(\tilde{r}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\tilde{r})$ désigne le prolongement analytique à \mathbb{C}^2 du noyau de Green de l'opérateur $\Delta + k^2$ avec condition de radiation de type Hankel 1 à l'infini. Du comportement asymptotique à l'infini de la fonction $\tilde{\Phi}$ on déduit le comportement asymptotique de u^B [12]

$$\left| H_0^{(1)}(k\tilde{r}) \right| \sim \left| \frac{e^{ik\tilde{r}}}{\sqrt{ik\tilde{r}}} \right| = \frac{e^{-k\text{Im}(\tilde{r})}}{\sqrt{k|\tilde{r}|}} = \frac{\exp\left(\Leftrightarrow \int_{\rho}^r \sigma(\tau) d\tau\right)}{\sqrt{k|\tilde{r}|}},$$

la racine carrée dans \mathbb{C} s'entendant au sens de sa détermination principale. Le comportement de u^B est donc exponentiellement décroissant pour $\text{Im}(k\tilde{r}) > 0$, ce qui est vérifié grâce aux hypothèses effectuées sur σ dès que $r > \rho$.

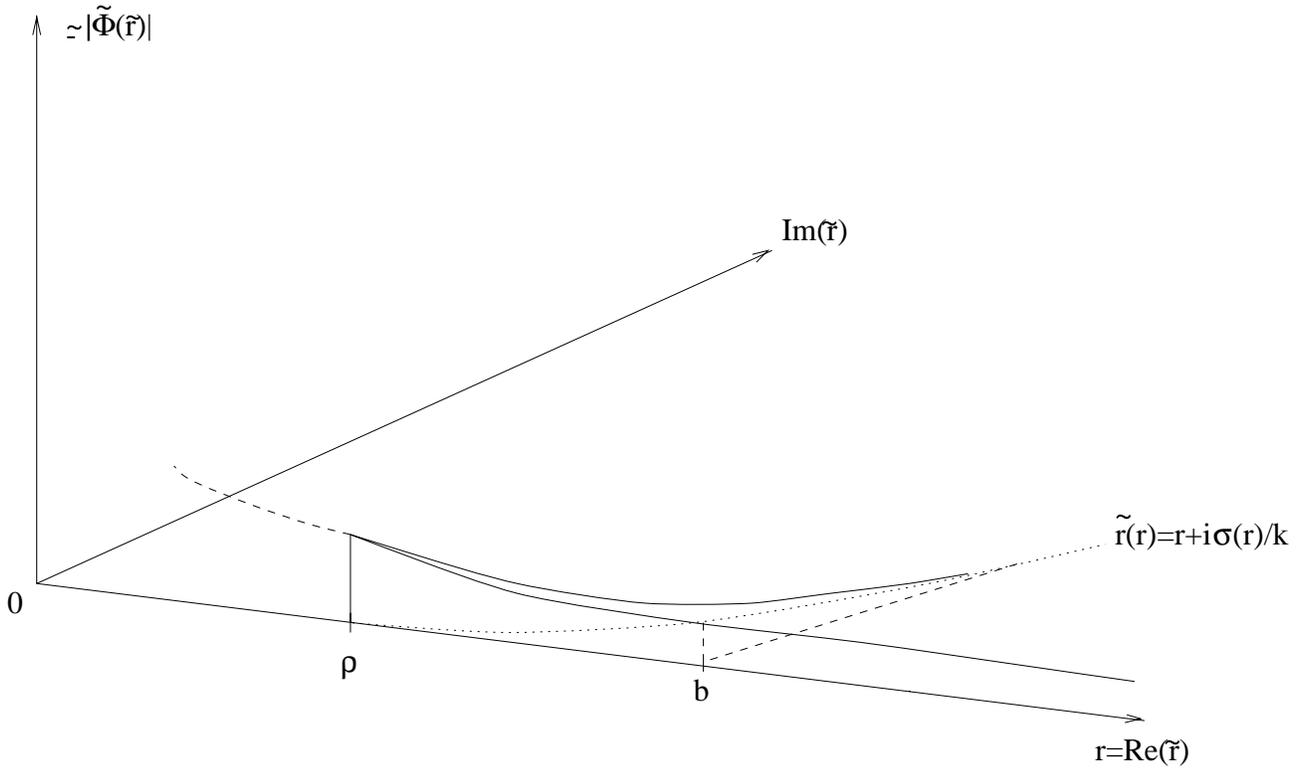


Figure 3.1: Une idée de la décroissance du prolongement du noyau de Green sur le chemin complexe $\tilde{r}(r) = r + i\sigma(r)/k$.

Ces décroissances sont justifiées sous réserve de l'existence et unicité des solutions aux problèmes (3.10) et (3.12). C'est après avoir transformé les équations du milieu PML en coordonnées polaires pour établir un opérateur de dérivation équivalent dépendant des coordonnées cartésiennes, que nous adaptons, dans le paragraphe suivant, le résultat d'existence et unicité de F. Collino et P. Monk [12] au problème que l'on souhaite résoudre.

3.3 L'équation de Helmholtz-PML polaire en domaine borné.

Pour résoudre de manière approchée le problème (3.13), il est nécessaire de considérer un domaine borné pour effectuer les calculs. C'est pourquoi on remplace ce problème par la résolution de l'équation

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\tilde{\beta}_r}{\beta} \frac{\partial}{\partial r} u^B \right) + \frac{\beta}{\tilde{\beta}_r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u^B \right) + k^2 \tilde{\beta} \beta n u^B = k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc} \text{ dans } \Omega_b = B(0, b), \quad (3.14)$$

à laquelle il faut adjoindre une condition aux limites sur le bord du domaine de calcul. Si l'on choisit $b > \rho$ suffisamment grand de manière à ce que la décroissance exponentielle de l'onde dans le milieu PML ait grandement atténué le module de la solution, le type de condition aux limites que l'on impose

(Dirichlet, Neumann ou d'impédance) importe peu, sous réserve bien sûr de l'existence et unicité de cette solution. En effet, les réflexions éventuelles sont alors de faible module et de nouveau atténuées dans le milieu PML, au point qu'elles ne sont plus sensibles au voisinage de l'obstacle. Néanmoins, la réduction de l'épaisseur du milieu PML va dans le sens de la réduction du domaine de calcul, et une condition d'impédance adaptée au milieu PML, écrite sous la forme d'une généralisation de la condition de Robin, s'avère plus précise que les conditions de Neumann ou Dirichlet.

C'est pourquoi on cherche à définir une condition de Robin généralisée "naturelle" pour l'équation (3.14). On considère pour cela l'équation de Helmholtz (3.5) dont elle est dérivée, ainsi que la condition de radiation qui lui est associée. Dans le domaine borné Ω_b , le problème associé avec une condition aux limites de type Robin est

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 n u &= k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc} \text{ dans } \Omega_b, \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Leftrightarrow i k u &= 0 \text{ sur } \Gamma_b = \partial \Omega_b. \end{aligned}$$

Sachant que l'équation du milieu PML se déduit de l'équation de Helmholtz en effectuant le changement d'inconnue complexe $r \mapsto \tilde{r}(r)$, on en conclut qu'une condition de Robin généralisée pour l'équation (3.14) est

$$\frac{\partial u^B}{\partial \tilde{r}} \Leftrightarrow i k u^B = 0 \text{ sur } \Gamma_b.$$

En utilisant la règle de dérivation en chaîne, on obtient

$$\frac{\partial u^B}{\partial \tilde{r}} = \frac{\partial u^B}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \tilde{r}} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial u^B}{\partial r},$$

et cette condition généralisée s'écrit par conséquent

$$\frac{\partial u^B}{\partial r} \Leftrightarrow i k \beta u^B = 0 \text{ sur } \Gamma_b. \quad (3.15)$$

Les conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann restent quant à elles inchangées par le changement d'inconnues complexes. On peut ainsi considérer le problème (3.14) avec la condition de Dirichlet

$$u^B = 0 \text{ sur } \Gamma_b, \quad (3.16)$$

ou encore avec la condition de Neumann

$$\frac{\partial u^B}{\partial r} = 0 \text{ sur } \Gamma_b. \quad (3.17)$$

Il est pratique (du point de vue implémentation dans un code éléments finis standard) de rétablir cette équation en coordonnées cartésiennes pour obtenir une équation du type

$$\beta \tilde{\beta} k^2 n u^B + \nabla \cdot (A \nabla u^B) = k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc} \text{ dans } \Omega_b. \quad (3.18)$$

L'écriture de la formulation variationnelle associée au problème (3.14) avec la condition aux limites de Robin généralisée (3.15) sur $\Gamma_b = \partial B(0, b)$ et son passage en coordonnées cartésiennes par changement de variables nous permettent, dans la proposition suivante, d'expliciter la matrice A .

Proposition 3.3.1 *La formulation variationnelle du problème (3.14) en coordonnées cartésiennes avec la condition de Robin généralisée (3.15) est*

$$\int_{\Omega_b} [k^2 \beta \tilde{\beta} n u^B \varphi \Leftrightarrow (A \nabla u^B) \cdot \nabla \varphi] dX + \int_{\Gamma_b} ik \tilde{\beta} u^B \varphi dS = \int_{\Omega_b} k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc} \varphi dX, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_b), \quad (3.19)$$

où A est la fonction matricielle

$$A(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{\beta}}{\beta} \cos^2(\theta) + \frac{\beta}{\tilde{\beta}} \sin^2(\theta) & \left(\frac{\tilde{\beta}}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\tilde{\beta}} \right) \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \left(\frac{\tilde{\beta}}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\tilde{\beta}} \right) \cos(\theta) \sin(\theta) & \frac{\tilde{\beta}}{\beta} \sin^2(\theta) + \frac{\beta}{\tilde{\beta}} \cos^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

La solution u^B de (3.19) est solution faible du problème aux limites

$$\begin{aligned} \beta \tilde{\beta} k^2 n u^B + \nabla \cdot (A \nabla u^B) &= k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc} \text{ dans } \Omega_b, \\ \frac{\partial u^B}{\partial r} \Leftrightarrow ik \beta u^B &= 0 \text{ sur } \Gamma_b. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Démonstration : On multiplie l'équation (3.14) par une fonction $\varphi \in H^1(\Omega_b)$, puis on intègre le résultat sur Ω_b , ce qui donne

$$\int_{\Omega_b} [k^2 \beta \tilde{\beta} n u^B \varphi + \frac{\varphi}{r} (\partial_r (\frac{\tilde{\beta} r}{\beta} \partial_r u^B) + \partial_\theta (\frac{\beta}{\tilde{\beta} r} \partial_\theta u^B))] dX = \int_{\Omega_b} k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc} \varphi dX, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_b),$$

avec $dX = dx dy = r dr d\theta$. En intégrant par parties cette équation, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_b} k^2 \beta \tilde{\beta} n u^B \varphi dX &\Leftrightarrow \int_{\Omega_b} [\frac{\tilde{\beta} r}{\beta} \partial_r u^B \partial_r \varphi + \frac{\beta}{\tilde{\beta} r} \partial_\theta u^B \partial_\theta \varphi] dr d\theta + \int_{\Gamma_b} \varphi \frac{\tilde{\beta}}{\beta} \partial_r u^B b d\theta \\ &= \int_{\Omega_b} k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc} \varphi dX, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_b). \end{aligned}$$

Sachant que $dS = r d\theta = b d\theta$ sur Γ_b , la condition (3.15) permet d'écrire

$$\int_{\Gamma_b} \varphi \frac{\tilde{\beta}}{\beta} \partial_r u^B b d\theta = \int_{\Gamma_b} ik \tilde{\beta} u^B \varphi dS.$$

Il reste à reformuler les dérivations du terme $\int_{\Omega_b} [\frac{\tilde{\beta} r}{\beta} \partial_r u^B \partial_r \varphi + \frac{\beta}{\tilde{\beta} r} \partial_\theta u^B \partial_\theta \varphi] dr d\theta$ en coordonnées cartésiennes. Or $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. En utilisant la règle de différentiation en chaîne, on

obtient

$$\begin{aligned}\partial_r &= \partial_x \frac{\partial x}{\partial r} + \partial_y \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y, \\ \partial_\theta &= \partial_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + \partial_y \frac{\partial y}{\partial \theta} = \Leftrightarrow r \sin \theta \partial_x + r \cos \theta \partial_y.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}& \int_{\Omega_b} \left[\frac{\tilde{\beta} r}{\beta} \partial_r u^B \partial_r \varphi + \frac{\beta}{\tilde{\beta} r} \partial_\theta u^B \partial_\theta \varphi \right] dr d\theta \\ &= \int_{\Omega_b} \left[\frac{\tilde{\beta}}{\beta} (\cos \theta \partial_x u^B + \sin \theta \partial_y u^B) (\cos \theta \partial_x \varphi + \sin \theta \partial_y \varphi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta}{\tilde{\beta} r^2} (\Leftrightarrow r \sin \theta \partial_x u^B + r \cos \theta \partial_y u^B) (\Leftrightarrow r \sin \theta \partial_x \varphi + r \cos \theta \partial_y \varphi) \right] dx dy \\ &= \int_{\Omega_b} \left[\frac{\tilde{\beta}}{\beta} (\cos^2 \theta \partial_x u^B \partial_x \varphi + \cos \theta \sin \theta (\partial_x u^B \partial_y \varphi + \partial_y u^B \partial_x \varphi) + \sin^2 \theta \partial_y u^B \partial_y \varphi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta}{\tilde{\beta}} (\sin^2 \theta \partial_x u^B \partial_x \varphi \Leftrightarrow \cos \theta \sin \theta (\partial_x u^B \partial_y \varphi + \partial_y u^B \partial_x \varphi) + \cos^2 \theta \partial_y u^B \partial_y \varphi) \right] dx dy \\ &= \int_{\Omega_b} \left[\left(\frac{\tilde{\beta}}{\beta} \cos^2 \theta + \frac{\beta}{\tilde{\beta}} \sin^2 \theta \right) \partial_x u^B \partial_x \varphi \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\tilde{\beta}}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\tilde{\beta}} \right) \cos \theta \sin \theta (\partial_x u^B \partial_y \varphi + \partial_y u^B \partial_x \varphi) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\tilde{\beta}}{\beta} \sin^2 \theta + \frac{\beta}{\tilde{\beta}} \cos^2 \theta \right) \partial_y u^B \partial_y \varphi \right] dx dy \\ &= \int_{\Omega_b} (A \nabla u^B) \cdot \nabla \varphi dX,\end{aligned}$$

où $A = A(r, \theta)$ défini en (3.20). On en déduit la formulation variationnelle (3.19) du problème. \square

3.4 Existence et unicité de la solution des problèmes Helmholtz-PML 2D en milieu borné.

L'objet de ce paragraphe est de présenter l'existence et unicité des problèmes PML en coordonnées polaires et cartésiennes, en milieu borné, pour des obstacles diélectriques parfaits d'indice de réfraction $n \in L^\infty(\Omega_b; \mathbb{C})$. Les résultats proches existant sur le sujet ont été obtenus par F. Collino et P. Monk, et concernent l'existence et unicité du problème des PML en coordonnées polaires pour un obstacle parfaitement conducteur avec des conditions de Dirichlet ou de Robin adaptées [12], ainsi que celle du

problème en coordonnées cartésiennes pour un obstacle parfaitement conducteur avec des conditions de Dirichlet [11]. Leur démonstration utilise le théorème de Fredholm analytique ([14], Théorème 8.19), lequel ne permet pas d'éliminer un éventuel ensemble discret et localement fini de fréquences propres. Nous proposons ensuite une condition de Robin adaptée aux PML cartésiennes permettant de bien poser le problème, sans pour autant éliminer les éventuelles fréquences propres. Les notations retenues sont celles du paragraphe (3.3).

3.4.1 Existence et unicité de la solution du problème PML polaire.

Pour démontrer l'existence et unicité du problème (3.21), on se propose d'adapter la démonstration du théorème d'existence et unicité pour le problème avec obstacle conducteur parfait de F. Collino et P. Monk ([12], Théorème 2) à ce problème. Les points similaires seront signalés sans être redémontrés, et seules les parties qui diffèrent de la démonstration originelle seront entièrement démontrées.

Théorème 3.4.1 *Soit $n(X) \in L^\infty(\Omega_b; \mathbb{C})$, vérifiant $Re(n) > 0$, $Im(n) \geq 0$, $supp(1 \Leftrightarrow n) \subset \{|X| < \rho\}$, et $\sigma \in L^\infty(0; b)$. Le problème aux limites (3.21) admet une solution unique $u^B \in H^1(\Omega_b)$, pour tout réel $k \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$, où \mathcal{Z} est un sous-ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de \mathbb{R} .*

Démonstration : La preuve utilise le théorème de Fredholm analytique ([14], Théorème 8.19). Soit \mathcal{U} le sous-ensemble de \mathbb{C} , contenant l'axe des réels privé de zéro, et défini par

$$\mathcal{U} = \{k \in \mathbb{C}, \text{Im}(k) > 0\} \cup \{k = k_r + ik_i, k_r \neq 0, |k_i| < k_r^2/M\},$$

où $M > 0$ est la constante positive définie par

$$M = \sup_{r \in (\rho, b)} \sigma(r) + \tilde{\sigma}(r).$$

Si la fonction $u^B \in H^1(\Omega_b)$ est solution de (3.21), alors u^B vérifie la formulation variationnelle (3.19). On note

$$(u, v) = \int_{\Omega_b} u v dX, \text{ et } \langle u, v \rangle_b = \int_{\Gamma_b} u v dS.$$

La formulation (3.19) s'écrit donc

$$(A \nabla u^B, \nabla \varphi) \Leftrightarrow k^2 (\beta \tilde{\beta} n u^B, \varphi) \Leftrightarrow ik \langle \tilde{\beta} u^B, \varphi \rangle_b = \Leftrightarrow k^2 ((1 \Leftrightarrow n) u^{inc}, \varphi), \forall \varphi \in H^1(\Omega_b).$$

On définit deux opérateurs $\mathcal{A}(k) : H^1(\Omega_b) \rightarrow H^1(\Omega_b)$ et $\mathcal{B}(k) : H^1(\Omega_b) \rightarrow H^1(\Omega_b)$, linéaires et continus, par

$$\begin{aligned} (\nabla \mathcal{A}u, \nabla v) + (\mathcal{A}u, v) &= (A \nabla u, \nabla v) + (u, v), \\ (\nabla \mathcal{B}u, \nabla v) + (\mathcal{B}u, v) &= \left((k^2 \beta \tilde{\beta} n + 1)u, v \right) + ik \langle \tilde{\beta} u, v \rangle_b, \end{aligned}$$

quels que soient $u, v \in H^1(\Omega_b)$. Ces deux opérateurs sont définis grâce au théorème de représentation de Riesz dans $H^1(\Omega_b)$, et comme β et $\tilde{\beta}$ dépendent de k , les opérateurs \mathcal{A} et \mathcal{B} dépendent de k .

Notons que l'opérateur \mathcal{A} défini ci-dessus est le même que celui défini dans la démonstration du théorème 2 de [12]. Il est donc analytique en k , et en lui appliquant le lemme de Lax-Milgram, on montre qu'il est inversible pour tout $k \in \mathcal{U}$.

Montrons maintenant que l'opérateur \mathcal{B} est compact. En effet, $w = \mathcal{B}u \in H^1(\Omega_b)$ est solution du problème aux limites

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \Delta w + w &= (k^2 \beta \tilde{\beta} n + 1)u \text{ dans } \Omega_b, \\ \frac{\partial w}{\partial r} &= \Leftrightarrow i k \tilde{\beta} u \text{ sur } \Gamma_b. \end{aligned}$$

Comme β , $\tilde{\beta}$ et n sont des fonctions de $L^\infty(\Omega_b; \mathbb{C})$, $\tilde{\beta}$ étant également Lipschitz continue, on en déduit que $\tilde{\beta}u \in H^{1/2}(\Gamma_b)$, et grâce à la théorie des équations elliptiques, que $|w|_{H^2(\Omega_b)} \leq C|u|_{H^1(\Omega_b)}$. L'injection compacte de $H^2(\Omega_b)$ dans $H^1(\Omega_b)$ permet de conclure que \mathcal{B} est compact. De plus, l'opérateur \mathcal{B} est analytique en k pour tout $k \in \mathbb{C}$.

Soit maintenant $F \in H^1(\Omega_b)$, défini à l'aide du théorème de représentation de Riesz par

$$(\nabla F, \nabla v) + (F, v) = k^2 ((1 \Leftrightarrow n)u^{inc}, v), \quad \forall v \in H^1(\Omega_b).$$

Alors le problème (3.21) revient à trouver $u^B \in H^1(\Omega_b)$ tel que

$$\mathcal{A}u^B \Leftrightarrow \mathcal{B}u^B = F.$$

Comme \mathcal{A}^{-1} est borné, $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$ est compact, et de plus l'opérateur $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$ est analytique en k . On peut donc lui appliquer le théorème de Fredholm analytique. Pour décider de l'alternative s'y appliquant, on montre qu'une solution au problème (3.21) existe lorsque $k = i$. Cela implique alors que $(I \Leftrightarrow \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})^{-1}$ existe, hormis pour un ensemble discret et localement fini, pouvant être vide, de valeurs de k .

Lorsque $k = i$, les fonctions β et $\tilde{\beta}$ sont réelles et positives, puisque

$$\beta = (1 + \sigma) > 0 \text{ et } \tilde{\beta} = 1 + \frac{i\tilde{\sigma}}{k} = (1 + \tilde{\sigma}) > 0.$$

On en déduit que la matrice A définie en (3.20) est réelle, et définie positive uniformément par rapport à X . De plus, $\text{Re}(\beta\tilde{\beta}n) > 0$. Le problème écrit sous forme faible revient à trouver $u^B \in H^1(\Omega_b)$ tel que

$$(A\nabla u^B, \nabla \varphi) + (\beta\tilde{\beta}n u^B, \varphi) + \left\langle \tilde{\beta}u^B, \varphi \right\rangle_b = ((1 \Leftrightarrow n)u^{inc}, \varphi), \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_b). \quad (3.22)$$

La forme bilinéaire associée à ce problème est coercive dans $H^1(\Omega_b)$, puisque sa partie réelle vérifie

$$(A\nabla u, \nabla \bar{u}) + \text{Re} \left(\beta\tilde{\beta}n u, \bar{u} \right) + \left\langle \tilde{\beta}u, \bar{u} \right\rangle_b \geq C \left(|\nabla u|_{L^2(\Omega_b)}^2 + |u|_{L^2(\Omega_b)}^2 \right).$$

L'application du lemme de Lax-Milgram suffit alors à démontrer l'existence et unicité du problème (3.22). \square

Ce théorème, dont la démonstration repose sur l'application du théorème de Fredholm analytique, montre l'existence et l'unicité de la solution mis à part pour d'éventuelles fréquences propres. Sous réserve de l'écriture de la condition de Robin adaptée, ou en remplaçant cette condition par une condition de Dirichlet homogène, le résultat peut également être étendu au cas des PML écrites en coordonnées cartésiennes, la matrice $A(r, \theta)$ définie par (3.20) étant alors remplacée par la matrice diagonale

$$\tilde{A}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{s_y}{s_x} & 0 \\ 0 & \frac{s_x}{s_y} \end{pmatrix}$$

dépendant des coordonnées cartésiennes, le terme de multiplication de l'opérateur en $\beta\tilde{\beta}$ étant remplacé par $s_x s_y$. Le cas des conditions aux limites de type Dirichlet homogène pour un obstacle parfaitement conducteur est traité dans [11], et son extension à des obstacles diélectriques parfaits d'indice n de classe L^∞ utilise les mêmes arguments que ceux utilisés dans le cas polaire. On se propose dans le paragraphe suivant, de présenter une condition de Robin adaptée à la formulation cartésienne des PML.

3.4.2 Une condition de Robin adaptée aux PML cartésiennes.

On cherche à définir une condition de Robin généralisée "naturelle" pour la restriction de l'équation (3.10) à un domaine borné Ω de frontière Γ , soit

$$\frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{s_x} \frac{\partial u^B}{\partial x} \right) + \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{s_y} \frac{\partial u^B}{\partial y} \right) + k^2 n u^B = k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc} \text{ dans } \Omega,$$

ou encore, puisque $(1 \Leftrightarrow n)$ et $(1 \Leftrightarrow s_x s_y)$ sont de supports disjoints par construction,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{s_y}{s_x} \frac{\partial u^B}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{s_x}{s_y} \frac{\partial u^B}{\partial y} \right) + k^2 n s_x s_y u^B = k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc} \text{ dans } \Omega. \quad (3.23)$$

On considère pour cela l'équation de Helmholtz (3.5) dont elle est dérivée, ainsi que la condition de radiation qui lui est associée. Dans le domaine borné Ω , le problème associé avec une condition aux limites de type Robin est

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 n u &= k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc} \text{ dans } \Omega_b, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \Leftrightarrow i k u &= 0 \text{ sur } \Gamma, \end{aligned}$$

où ν désigne la normale unitaire à Γ dirigée vers l'extérieur de Ω . Sachant que l'équation du milieu PML se déduit de l'équation de Helmholtz en effectuant les changements d'inconnues complexes $x \mapsto \tilde{x}(x)$ et $y \mapsto \tilde{y}(y)$, on propose de généraliser à l'équation (3.23) la condition de Robin "classique" par la condition

$$\tilde{\nabla} u^B \cdot \nu \Leftrightarrow i k u^B = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

où l'opérateur $\tilde{\nabla}$ désigne $(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}, \frac{\partial}{\partial \tilde{y}})^T$. Rétablie dans le système de coordonnées réelles (x, y) en utilisant la règle de dérivation en chaîne, cette condition généralisée s'écrit

$$\left(\frac{\nu_x}{s_x} \frac{\partial u^B}{\partial x} + \frac{\nu_y}{s_y} \frac{\partial u^B}{\partial y} \right) \Leftrightarrow iku^B = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (3.24)$$

On remarque, dans le cas particulier où l'opérateur PML est confondu avec l'opérateur de Helmholtz (c'est à dire en posant $\sigma_x = \sigma_y = 0$), que la condition (3.24) est alors exactement la condition de Robin classique qui est une condition absorbante d'ordre zéro pour l'équation de Helmholtz. De même, cette condition est également une condition absorbante d'ordre zéro dans le cas des PML posées sur un demi-espace : pour un milieu PML situé dans le demi-espace $x > 0$, c'est-à-dire avec $\sigma_y = 0$ et $\nu_x = 1$, on retrouve la condition absorbante d'ordre zéro $\frac{\partial u^B}{\partial x} \Leftrightarrow ik_{s_x} u^B = 0$ sur une frontière artificielle $\{X = (x, y) : x = b\}$, avec $b > 0$ fixé. Cette condition s'obtient en effectuant une transformation de Fourier partielle en y de l'équation de Helmholtz-PML dans ce milieu, soit

$$\frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{s_x} \frac{\partial \widehat{u^B}}{\partial x} \right) + (k^2 \Leftrightarrow \eta^2) \widehat{u^B} = 0. \quad (3.25)$$

Sans perte de généralité, on suppose que le coefficient d'amortissement σ_x est constant pour $x \geq b - \epsilon$, avec $\epsilon > 0$. On remarque alors que pour $\eta = 0$, la solution propagative et dissipative de l'équation différentielle (3.25) vérifie la relation $\frac{\partial \widehat{u^B}}{\partial x} \Leftrightarrow ik_{s_x} \widehat{u^B} = 0$ en $x = b$.

Déterminons maintenant la formulation variationnelle associée à (3.23) avec la condition aux limites (3.24). On multiplie l'équation (3.23) par une fonction $\varphi \in H^1(\Omega)$, puis on intègre le résultat sur Ω , ce qui donne

$$\int_{\Omega} [k^2 n s_x s_y u^B \varphi + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{s_y}{s_x} \frac{\partial u^B}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{s_x}{s_y} \frac{\partial u^B}{\partial y} \right) \right) \varphi] dX = \int_{\Omega} k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc} \varphi dX, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega),$$

avec $dX = dx dy$. En intégrant par parties cette équation, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k^2 n s_x s_y u^B \varphi dX &\Leftrightarrow \int_{\Omega} \left[\frac{s_y}{s_x} \frac{\partial u^B}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{s_x}{s_y} \frac{\partial u^B}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] dX + \int_{\Gamma} \left(\frac{s_y}{s_x} \frac{\partial u^B}{\partial x} \nu_x + \frac{s_x}{s_y} \frac{\partial u^B}{\partial y} \nu_y \right) \varphi dS \\ &= \int_{\Omega} k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc} \varphi dX, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

En remarquant que $\nu_x^2 + \nu_y^2 = 1$, u^B peut se décomposer en la somme $u^B = \nu_x^2 u^B + \nu_y^2 u^B$, et la condition (3.24) permet alors d'écrire

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{s_y}{s_x} \frac{\partial u^B}{\partial x} \nu_x + \frac{s_x}{s_y} \frac{\partial u^B}{\partial y} \nu_y \right) \varphi dS = \int_{\Gamma} ik (s_y \nu_x^2 + s_x \nu_y^2) u^B \varphi dS.$$

Une formulation variationnelle associée au problème (3.23) avec la condition aux limites (3.24) est alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k^2 n s_x s_y u^B \varphi dX &\Leftrightarrow \int_{\Omega} \left[\frac{s_y}{s_x} \frac{\partial u^B}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{s_x}{s_y} \frac{\partial u^B}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] dX + \int_{\Gamma} ik (s_y \nu_x^2 + s_x \nu_y^2) u^B \varphi dS \\ &= \int_{\Omega} k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc} \varphi dX, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Une adaptation évidente de ([11], Théorème 1) nous permet alors de déduire de cette formulation l'existence et unicité du problème (3.23, 3.24).

Théorème 3.4.2 *Soit $n(X) \in L^\infty(\Omega; \mathbb{C})$, vérifiant $\text{Re}(n) > 0$, $\text{Im}(n) \geq 0$, $\text{supp}(1 \Leftrightarrow n) \subset]\Leftrightarrow a; a[\times] \Leftrightarrow b; b[\subset \subset \Omega \subset \subset] \Leftrightarrow c; c[\times] \Leftrightarrow d; d[$, et σ_x, σ_y des fonctions, respectivement de classe C^0 sur $]\Leftrightarrow c; c[$ et $]\Leftrightarrow d; d[$, vérifiant*

$$\begin{aligned} \sigma_x(x) = 0 \text{ sur }]\Leftrightarrow a; a[\text{ et } \sigma_x(x) > 0 \text{ si } |x| > a, \\ \sigma_y(y) = 0 \text{ sur }]\Leftrightarrow b; b[\text{ et } \sigma_y(y) > 0 \text{ si } |y| > b. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Le problème aux limites (3.23, 3.24) admet une solution unique $u^B \in H^1(\Omega)$, pour tout k réel, hormis un sous-ensemble discret et localement fini pouvant être vide de \mathbb{R} .

Démonstration : L'opérateur \mathcal{A} défini dans la démonstration de ([11], Théorème 1) est inchangé, ainsi que l'ensemble \mathcal{U} . C'est un isomorphisme de $H^1(\Omega)$, analytique pour $k \in \mathcal{U}$. L'opérateur \mathcal{B} est remplacé par un opérateur $\tilde{\mathcal{B}}$, lequel est défini par

$$\left(\nabla \tilde{\mathcal{B}}u, \nabla v \right) + \left(\tilde{\mathcal{B}}u, v \right) = \left((k^2 n s_x s_y + 1)u, v \right) + ik \left\langle (s_y \nu_x^2 + s_x \nu_y^2) u, v \right\rangle,$$

en notant

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv dX, \text{ et } \langle u, v \rangle = \int_{\Gamma} uv dS.$$

Alors $w = \tilde{\mathcal{B}}u \in H^1(\Omega)$ est solution du problème

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \Delta w + w &= (k^2 n s_x s_y + 1)u \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} &= \Leftrightarrow ik (s_y \nu_x^2 + s_x \nu_y^2) u \text{ sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Les fonctions s_x et s_y étant de classe C^0 , la fonction $(s_y \nu_x^2 + s_x \nu_y^2) u$ est de classe L^2 sur Γ , et les résultats de régularité des problèmes elliptiques permettent de conclure que $\tilde{\mathcal{B}}$ est un opérateur compact sur $H^1(\Omega)$, analytique par rapport à $k \in \mathcal{U}$. L'opérateur $\mathcal{A}^{-1} \tilde{\mathcal{B}}$ est ainsi compact analytique sur \mathcal{U} , et de ce fait on peut appliquer le théorème de Fredholm analytique ([14], Théorème 8.19) à l'opérateur $\mathcal{A} \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{B}}$. L'étude du point $k = i$ donne des coefficients s_x, s_y réels, et $s_x = (1 + \sigma_x) > 0$, $s_y =$

$(1 + \sigma_y) > 0$. La forme bilinéaire associée à ce problème est coercive sur $H^1(\Omega)$, puisque sa partie réelle vérifie

$$(A\nabla u, \nabla \bar{u}) + \operatorname{Re}(n_{s_x s_y} u, \bar{u}) + \langle (s_y \nu_x^2 + s_x \nu_y^2) u, \bar{u} \rangle \geq C \left(|\nabla u|_{L^2(\Omega)}^2 + |u|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

L'application du lemme de Lax-Milgram suffit alors à démontrer l'existence et unicité du problème (3.23, 3.24). \square

Remarque : il est également possible de considérer des fonctions σ_x et σ_y continues par morceaux dans l'énoncé de ce théorème.

Le paragraphe suivant traite de la discrétisation du problème en coordonnées polaires et de sa résolution approchée par une méthode d'éléments finis P_1 .

3.5 Formulation variationnelle - résolution du problème approché.

Le résultat d'existence et unicité dans un borné de la solution de l'équation PML en coordonnées polaires (3.21) dérivée de l'équation de Helmholtz (Théorème 3.4.1) permet d'envisager une résolution approchée du problème direct par éléments finis. Le paragraphe ci-dessous traite de la discrétisation du problème ainsi que de la mise sous forme matricielle de la formulation variationnelle associée.

3.5.1 Approximation du domaine de calcul - formulation variationnelle matricielle approchée.

Soit $\Omega_\rho = \{X \in \mathbb{R}^2 : |X| < \rho\}$ un domaine circulaire, de frontière Γ_ρ , contenant l'obstacle de support D ainsi que la frontière Σ sur laquelle on effectue les mesures pour la résolution du problème inverse. On entoure ce domaine de la couronne $\{x : \rho < |X| < b\}$, et on note $\Omega_b = \{X \in \mathbb{R}^2 : |X| < b\}$ le domaine circulaire d'approximation, de frontière Γ_b .

Pour $r = |X|$, on introduit un coefficient artificiel d'absorption de Bérenger $\sigma(r) \in L^\infty(0, b)$, réel, positif et croissant sur $[0, b]$, vérifiant $\sigma(r) = 0$ si $r < \rho$, ainsi que les coefficients $\tilde{\sigma}(r)$, $\beta(r)$, et $\tilde{\beta}(r)$ définis à partir de σ de manière identique à celle du paragraphe 3.2.2.

Soit $u^B \in H^1(\Omega_b)$ solution du problème aux limites (3.21) :

$$\begin{aligned} \beta \tilde{\beta} k^2 n u^B + \nabla \cdot (A \nabla u^B) &= k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc} \text{ dans } \Omega_b, \\ \frac{\partial u^B}{\partial r} \Leftrightarrow i k \beta u^B &= 0 \text{ sur } \Gamma_b. \end{aligned}$$

Le problème écrit sous forme variationnelle est alors

Trouver $u^B \in H^1(\Omega_b)$ tel que $\forall \varphi \in H^1(\Omega_b)$,

$$\int_{\Omega_b} [a_0 n u^B \varphi + (\nabla \varphi)^T (A \nabla u^B)] dX + \int_{\Gamma_b} i k \tilde{\beta} u^B \varphi dS = \int_{\Omega_b} k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc} \varphi dX,$$

avec $a_0 = k^2 \beta \tilde{\beta}$, et $A = A(r, \theta)$ définie par (3.20).

On effectue une triangulation régulière $(T_k), k \in \{1, \dots, n_t\}$ de ces domaines ; on désignera par $D^h, \Sigma^h, \Omega_b^h$ et Γ_b^h les discrétisations de D, Σ, Ω_b et Γ_b relativement à cette triangulation. Les n_s sommets du maillage sont notés $q^i, i \in \{1, \dots, n_s\}$. On note $S_l, l \in \{1, \dots, n_f\}$ les arêtes de la frontière Γ_b^h , et $p_m, m \in \{1, \dots, n_f\}$ les sommets de ces arêtes.

Soient les espaces d'approximation

$$\begin{aligned} H^{1,h} &= \{ \Psi : \Omega_b^h \rightarrow \mathbb{R}, \Psi \text{ continue sur } \Omega_b^h \text{ et } \forall k \in \{1, \dots, n_t\}, \Psi|_{T_k} \text{ est une fonction affine} \}, \\ V^{1,h} &= \{ \phi : \Gamma_b^h \rightarrow \mathbb{R}, \phi \text{ continue sur } \Gamma_b^h \text{ et } \forall l \in \{1, \dots, n_f\}, \phi|_{S_l} \text{ est une fonction affine} \}, \\ \text{avec } \Omega_b^h &= \bigcup_{k=1}^{n_t} T_k, \text{ et } \Gamma_b^h = \partial\Omega_b^h = \bigcup_{l=1}^{n_f} S_l. \end{aligned}$$

L'ensemble des fonctions $(\Psi_i)_{i=1, n_s}$ vérifiant $\Psi_i(q_j) = \delta_{ij}$ définit une base de $H^{1,h}$. De même, l'ensemble des fonctions $(\phi_l)_{l=1, n_f}$ vérifiant $\phi_l(q_m) = \delta_{lm}$ définit une base de $V^{1,h}$. Remarquons que la trace $\gamma_0 \Psi_i$ de toute fonction Ψ_i sur Γ_b^h est soit une fonction de la base $(\phi_l)_{l=1, n_f}$, soit la fonction identiquement nulle sur Γ_b^h . Le champ incident u^{inc} est projeté sur l'espace $H^{1,h}$, on note $u^{inc,h} = \sum_{j=1}^{n_s} u_j^{inc} \Psi_j$ son approximation, avec $u_j^{inc} = u^{inc}(q_j)$. Le problème approché est alors

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u^{B,h} \in H^{1,h} \text{ tel que, } \forall \Psi \in H^{1,h}, \\ \int_{\Omega_b^h} [\Leftrightarrow(\nabla \Psi)^T A \nabla u^{B,h} + a_0 n u^{B,h}] dX + ik \int_{\Gamma_b^h} \tilde{\beta} \gamma_0 u^{B,h} \gamma_0 \Psi dS = \int_{\Omega_b^h} k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc,h} \Psi dX. \end{aligned} \quad (3.28)$$

La fonction $u^{B,h}$ se décompose dans la base (Ψ_i) en

$$u^{B,h} = \sum_{j=1}^{n_s} u_j^B \Psi_j,$$

et l'expression du gradient de $u^{B,h}$ est donnée par

$$\nabla u^{B,h} = \sum_{j=1}^{n_s} u_j^B \nabla \Psi_j.$$

Ainsi, le problème (3.28) peut s'écrire de manière équivalente

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (u_j^B)_{j=1, n_s} \text{ tel que, } \forall i \in \{1..n_s\}, \\ \sum_{j=1}^{n_s} \left(\int_{\Omega_b^h} [\Leftrightarrow(\nabla \Psi_i)^T A \nabla \Psi_j + a_0 n \Psi_i \Psi_j] dX + ik \int_{\Gamma_b^h} \tilde{\beta} \gamma_0 \Psi_i \gamma_0 \Psi_j dS \right) u_j^B \\ = \sum_{j=1}^{n_s} k^2 \int_{\Omega_b^h} (1 \Leftrightarrow n) u_j^{inc} \Psi_j \Psi_i dX. \end{aligned} \quad (3.29)$$

En notant Φ le vecteur de composantes $(u_j^B)_j$, M la matrice de terme général

$$M_{ij} = \left(\int_{\Omega_b^h} [\Leftrightarrow(\nabla \Psi_i)^T A \nabla \Psi_j + a_0 n \Psi_i \Psi_j] dX + ik \int_{\Gamma_b^h} \tilde{\beta} \gamma_0 \Psi_i \gamma_0 \Psi_j dS \right),$$

et F le vecteur de composantes $\left(\sum_{j=1}^{n_s} k^2 \int_{\Omega_b^h} (1 \Leftrightarrow n) u_j^{inc} \Psi_j \Psi_i dX \right)_i$, la formulation variationnelle (3.29) s'écrit sous la forme $M\Phi = F$.

3.5.2 Validation du code - cas d'un obstacle circulaire diélectrique homogène.

Pour tester l'efficacité de la méthode, on cherche à comparer les résultats obtenus sur des objets simples avec la solution analytique associée ; en effet, l'expression de cette solution sous la forme d'une série de fonctions de Hankel est dans ce cas parfaitement connue. On effectue par conséquent le calcul avec un obstacle circulaire homogène de rayon 1 centré à l'origine, éclairé par une onde plane sinusoïdale de longueur d'onde $\lambda = 1$ et d'incidence zéro degré, dans un cas purement diffractif ($n(X) = 2$ sur $\{|X| \leq 1\}$), puis dans un cas à la fois diffractif et dissipatif ($n(X) = 2 + 0.5i$ sur $\{|X| \leq 1\}$). Le domaine de calcul est borné par le cercle de rayon 3 centré à l'origine, et approximé par un maillage non structuré, présenté en figure 3.2, dont le pas vaut 0.1, soit $\lambda/10$. Le coefficient $\sigma(r)$ d'absorption de Bérenger est fixé à 0 dans le domaine $\{|X| \leq 1.7\}$, et à $\sigma(r) = 3 \cdot (r \Leftrightarrow 1.7)$ dans la couronne $\{1.7 \leq |X| \leq 3\}$. A titre de comparaison, on effectue également le calcul avec un coefficient $\sigma(r) = 0$ sur tout le domaine de calcul, ce qui correspond au cas de l'équation de Helmholtz classique avec une condition de Robin sur le bord. Les résultats comparés (fig. 3.3 et 3.4) correspondent aux valeurs complexes du champ diffracté sur le cercle de rayon 1.3, représenté par la frontière turquoise de la figure 3.2. Pour un domaine de calcul identique, le gain de précision de l'approximation PML par rapport à une approximation de l'équation de Helmholtz standard avec une condition aux limites d'ordre zéro est conséquent, quelle que soit la nature du diélectrique. L'erreur résiduelle entre le résultat obtenu par résolution de l'équation PML avec condition de Robin adaptée et la solution exacte est essentiellement due à la grossièreté du maillage et à la pauvreté de l'approximation numérique qui en découle. Un pas de maillage de $\lambda/15$ permettrait de diminuer considérablement cette erreur. Les figures 3.5 illustrent la décroissance exponentielle de la solution dans le milieu PML, pour les deux types de diélectrique considérés.

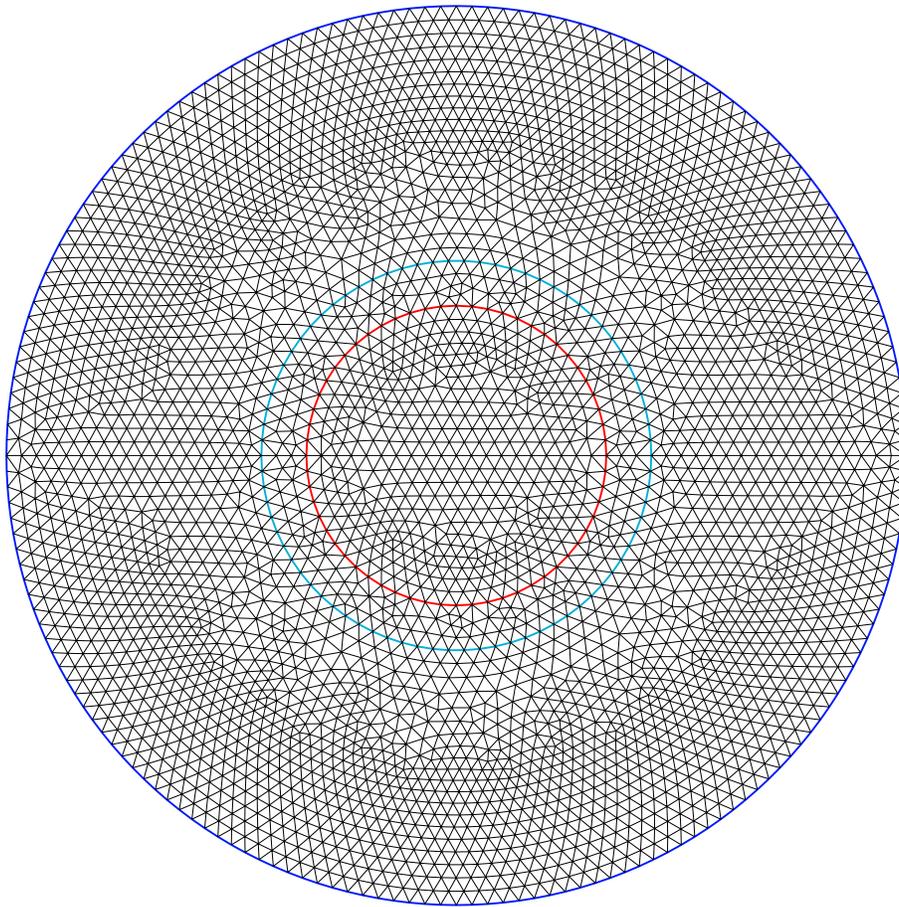


Figure 3.2: maillage du domaine de calcul.

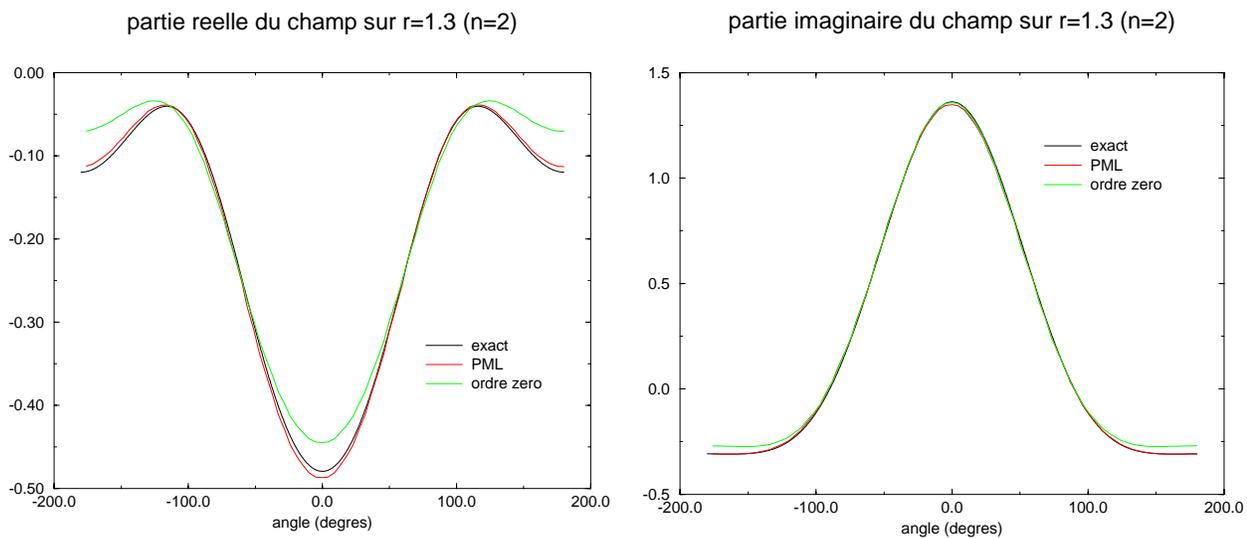


Figure 3.3: disque purement diffractif.

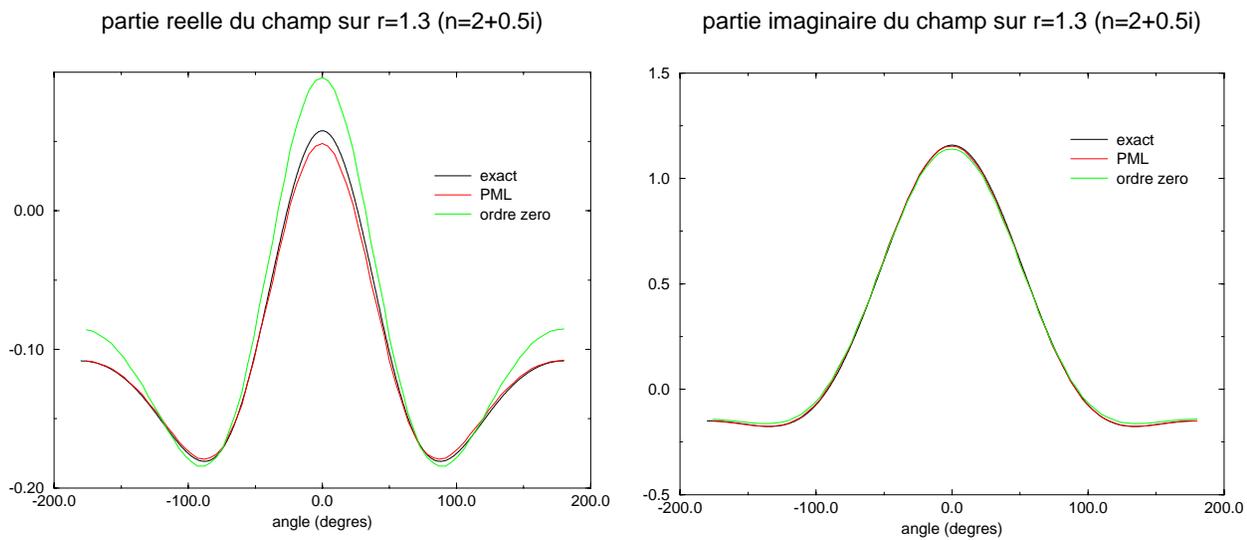


Figure 3.4: disque diffractif et dissipatif.

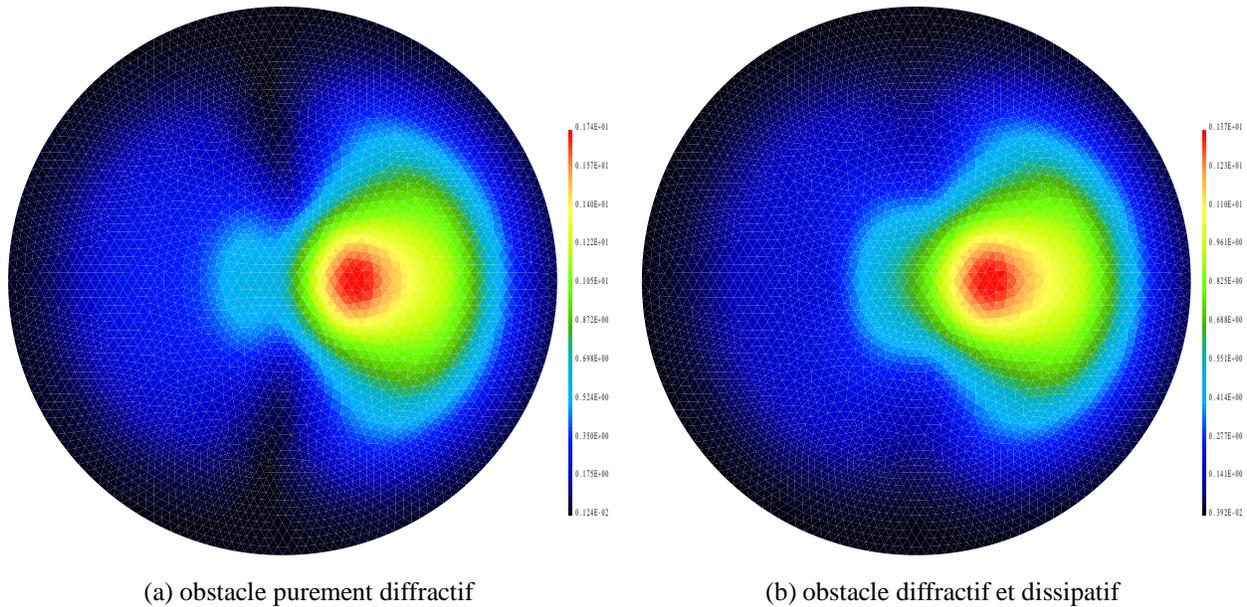


Figure 3.5: module des champs diffractés sur le domaine de calcul.

La précision des résultats obtenus démontre l'intérêt du changement d'inconnues complexes transformant l'équation de Helmholtz en une équation PML. Il suffit en effet d'entourer l'obstacle par un domaine d'épaisseur réduite, et de résoudre un problème approché dont la complexité n'est guère supérieure à celle de l'équation de Helmholtz équivalente : les matrices et coefficients de poids complexes propres au changement d'inconnue se calculent de manière locale, sans alourdir significativement la taille mémoire ou le temps d'exécution. Notons que dans la perspective de résolution du problème inverse, l'inclusion de la frontière de mesures dans le milieu Helmholtz classique, ou même encore dans le domaine de calcul n'est nullement nécessaire, puisque des formules intégrales simples permettent de calculer la solution sur toute frontière extérieure à l'obstacle à partir du champ calculé sur une frontière très proche de celui-ci. Ce constat permet en outre d'envisager la résolution du problème inverse à partir de données de type champ lointain.

Chapitre 4

Résolution du problème par une méthode de Gauss-Newton régularisée.

On considère la méthode de Gauss-Newton pour la résolution des problèmes de moindres carrés non-linéaires. Cette méthode fait partie de la famille des méthodes de Newton qui sont basées sur des approximations locales par des formes quadratiques de la fonctionnelle à minimiser. C'est la méthode la plus utilisée pour ce type de problèmes.

La convergence locale de la méthode requiert une bonne initialisation, et chaque itération constituant un problème linéaire mal posé, il est nécessaire de le régulariser. C'est en introduisant des données a priori sur la solution, sous la forme d'une pénalisation de la fonctionnelle par la norme des fonctions à variation bornée (norme BV), que nous obtenons un problème approché stable.

4.1 Rappel du problème inverse.

Soient D un domaine borné de \mathbb{R}^m , $n \in L^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{C})$, vérifiant $\text{supp}(1 \Leftrightarrow n) \subset D$, et Σ la frontière d'un domaine D' vérifiant $D \subset D'$, avec Σ lipschitzienne. Dans toute la suite, on désigne par $L^\infty(\mathbb{R}^m)$ l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{C})$. La même simplification d'écriture sera faite pour d'autres espaces. On rappelle le problème à résoudre :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } n \in L^\infty(\mathbb{R}^m) \\ & \text{vérifiant } \text{supp}(1 \Leftrightarrow n) \subset D, \\ & \text{tel que } u(n, \theta) \text{ solution de} \\ & \Delta u(n, \theta) + k^2 n u(n, \theta) = k^2 (1 \Leftrightarrow n) u^{inc}(\theta) \text{ dans } \mathbb{R}^m, \\ & \lim_{r \rightarrow \infty} r^{(m-1)/2} \left(\frac{\partial u(n, \theta)}{\partial r} \Leftrightarrow i k u(n, \theta) \right) = 0, \\ & \text{vérifie } u(n, \theta)|_\Sigma = g(\theta), \theta \in S^{m-1}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

L'opérateur

$$\begin{aligned} F : L^\infty(D) & \Leftrightarrow L^2(\Sigma \times S^{m-1}) \\ n|_D & \Leftrightarrow (u(n, \theta)|_\Sigma, \theta \in S^{m-1}) \end{aligned} \tag{4.2}$$

est un opérateur non-linéaire, d'inverse non-continu (pour $m = 2$ ou $m = 3$), et injectif pour $m = 3$ (Théorème 2.2.6).

L'opérateur F n'étant pas surjectif, la nature de la donnée $(g(\theta), \theta \in S^{m-1})$, généralement composée de mesures sur lesquelles peuvent reposer une incertitude, ne permet pas d'envisager la résolution directe de l'équation $F(n) = g = (g(\theta), \theta \in S^{m-1})$. Il est donc nécessaire d'effectuer cette résolution au sens des moindres carrés. Le problème à considérer est par conséquent le problème de moindres carrés non-linéaires

$$\text{Trouver } n \in L^\infty(D) \text{ minimisant } |F(n) \Leftrightarrow g|_{L^2(\Sigma \times S^{m-1})}^2 = |u(n, \theta)|_\Sigma \Leftrightarrow g(\theta)|_{L^2(\Sigma \times S^{m-1})}^2. \quad (4.3)$$

Pour résoudre ce type de problème, différents algorithmes peuvent être utilisés, comme les méthodes de gradient, les méthodes de sécantes, ou encore les méthodes de Newton et de quasi-Newton. Notre choix s'est porté sur la méthode de Gauss-Newton, laquelle est une méthode particulièrement bien adaptée à la résolution des problèmes de moindres carrés non-linéaires.

4.2 Présentation de la méthode de Gauss-Newton.

Soient X et Y des espaces de Hilbert complexes, munis des produits hermitiens $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ associés aux normes $|\cdot|_X$ et $|\cdot|_Y$. Soient $F : X \rightarrow Y$ un opérateur différentiable non-linéaire injectif, et $y \in Y$. On cherche $\tilde{x} \in X$ minimisant le critère

$$|F(x) \Leftrightarrow y|_Y^2 = \langle F(x) \Leftrightarrow y, F(x) \Leftrightarrow y \rangle_Y. \quad (4.4)$$

La méthode de Gauss-Newton appliquée à ce problème de moindres carrés non-linéaires est une méthode itérative qui consiste à construire une suite $(x_n)_n$ de X . Connaissant x_p , le point x_{p+1} est déterminé de la façon suivante. Le développement de Taylor d'ordre un de F en x_p est

$$F(x) = F(x_p) + F'(x_p) \cdot (x \Leftrightarrow x_p) + |x \Leftrightarrow x_p|_X \varepsilon(x \Leftrightarrow x_p),$$

avec $\lim_{|x|_X \rightarrow 0} |\varepsilon(x)|_Y = 0$,

dans laquelle $F'(x_p)$ désigne la différentielle de F au point x_p . On suppose que la différentielle $F'(x_p)$ est injective. En posant $y_p = F(x_p)$, $\delta x_p = x \Leftrightarrow x_p$, et en remplaçant dans (4.4) $F(x)$ par la partie affine de son développement de Taylor en x_p , on obtient le problème de moindres carrés linéaires

$$|F'(x_p) \cdot \delta x_p \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow y_p)|_Y^2, \quad (4.5)$$

dont le minimum est atteint au point $\widehat{\delta x_p}$. On pose $x_{p+1} = x_p + \widehat{\delta x_p}$. Dans la proposition ci-dessous, on calcule la condition d'optimalité vérifiée par la solution du problème (4.5) dans un espace de Hilbert complexe.

4.2.1 Condition d'optimalité d'un problème de moindres carrés linéaires à valeurs dans \mathbb{C} .

Proposition 4.2.1 Soit A un opérateur linéaire injectif de X dans Y , et $b \in Y$. On considère le problème de minimisation de la fonctionnelle

$$J : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$J(x) = \|Ax \ominus b\|_Y^2 = \langle Ax \ominus b, Ax \ominus b \rangle_Y .$$

Alors le minimum \hat{x} de J sur X vérifie

$$A^*A\hat{x} = A^*b,$$

avec A^* adjoint de A au sens des produits hermitiens sur X et Y .

Démonstration : On calcule la Gâteaux-différentielle de J au point \hat{x} dans la direction $\xi \in X$

$$\begin{aligned} J'(\hat{x}, \xi) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(\hat{x} + \lambda\xi) - J(\hat{x})}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} (\lambda^2 \langle A\xi, A\xi \rangle_Y + \lambda \langle A\hat{x}, A\xi \rangle_Y + \lambda \langle A\xi, A\hat{x} \rangle_Y \ominus \lambda \langle A\xi, b \rangle_Y \ominus \lambda \langle b, A\xi \rangle_Y) \\ &= \langle A\hat{x}, A\xi \rangle_Y + \overline{\langle A\hat{x}, A\xi \rangle_Y} \ominus \langle A\xi, b \rangle_Y \ominus \overline{\langle A\xi, b \rangle_Y} \\ &= 2\operatorname{Re}(\langle A^*A\hat{x} \ominus A^*b, \xi \rangle_X). \end{aligned}$$

Une condition nécessaire d'optimalité de J au point \hat{x} est

$$J'(\hat{x}, \xi) = 0, \text{ quel que soit } \xi \in X,$$

ce qui équivaut à

$$\operatorname{Re}(\langle A^*A\hat{x} \ominus A^*b, \xi \rangle_X) = 0 \text{ pour tout } \xi \in X.$$

En particulier, si l'on choisit $\xi = A^*A\hat{x} \ominus A^*b$, on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\langle A^*A\hat{x} \ominus A^*b, A^*A\hat{x} \ominus A^*b \rangle_X) &= \langle A^*A\hat{x} \ominus A^*b, A^*A\hat{x} \ominus A^*b \rangle_X = 0 \\ \iff A^*A\hat{x} \ominus A^*b &= 0. \end{aligned}$$

La proposition est ainsi démontrée. □

En appliquant directement la proposition ci-dessus, on déduit que, si la différentielle $F'(x_p)$ est injective, la solution $\widehat{\delta x}_p = x_{p+1} \ominus x_p$ du problème de moindres carrés linéaires (4.5) vérifie l'équation normale

$$(F'(x_p))^* F'(x_p) \widehat{\delta x}_p \ominus (F'(x_p))^* (y \ominus y_p) = 0. \quad (4.6)$$

En pratique, ce n'est pas parce que l'opérateur non linéaire F est injectif que sa différentielle en un point x_p l'est nécessairement. Le minimum du problème de moindres carrés linéarisé n'est alors pas

unique. C'est pourquoi on pénalise le problème linéarisé (4.5) à l'aide d'une régularisation de Tychonov en additionnant au critère le terme quadratique

$$\alpha \|\delta x_p\|_X^2, \quad (4.7)$$

où $\alpha > 0$ désigne le paramètre de régularisation de Tychonov, et $\|\cdot\|_X$ désigne une norme sur X qui n'est pas nécessairement la norme $|\cdot|_X$ induite par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$. Le problème de moindres carrés linéaires que l'on résoud consiste alors en la minimisation de

$$|F'(x_p) \cdot \delta x_p \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow y_p)|_Y^2 + \alpha \|\delta x_p\|_X^2. \quad (4.8)$$

Si la norme $\|\cdot\|_X$ désigne la norme $|\cdot|_X$, alors le minimum $\widehat{\delta x_{p,\alpha}}$ de la fonctionnelle (4.8) vérifie

$$((F'(x_p))^* F'(x_p) + \alpha I) \widehat{\delta x_{p,\alpha}} \Leftrightarrow (F'(x_p))^* (y \Leftrightarrow y_p) = 0. \quad (4.9)$$

Lorsque le paramètre α tend vers zéro, on montre que $\widehat{\delta x_{p,\alpha}}$ tend vers $\widehat{\delta x_p}$ solution de norme $|\cdot|_X$ minimale de l'équation (4.6).

Ainsi, la méthode de Gauss-Newton revient à résoudre une succession de problèmes de moindres carrés linéaires. Dans cette méthode, le Hessien de la fonctionnelle est approximé par ses termes de rang un. Comme la méthode de Newton dont elle dérive, la convergence de l'algorithme est locale, et de ce fait étroitement liée à l'initialisation : c'est pourquoi il est nécessaire de disposer de données a priori suffisantes pour assurer cette convergence vers une solution acceptable. Dans le paragraphe suivant, on se propose d'adapter un théorème de convergence de la méthode de Gauss-Newton ([21], Théorème 10.2.1) au cas d'un opérateur F agissant d'un espace X de dimension finie N dans un espace hermitien Y .

4.2.2 Un résultat de convergence locale de la méthode de Gauss-Newton sur un espace de dimension finie.

Dans tout ce paragraphe, X désigne un espace de dimension N dans \mathbb{C} , et Y désigne un espace hermitien. On identifie l'espace X à \mathbb{C}^N , et on pose, par abus de notation, $F : \mathbb{C}^N \rightarrow Y$.

Avant d'énoncer le théorème de convergence, on donne un résultat d'analyse, adapté de ([21], Lemme 4.1.12) que l'on présente sous la forme d'un lemme.

Lemme 4.2.2 *Soit $F : \mathbb{C}^N \rightarrow Y$ une fonction continûment différentiable sur un ouvert convexe O de \mathbb{C}^N , $x \in O$. On suppose que l'application $x \mapsto F'(x)$ est Lipschitz-continue de constante γ sur O . Alors, quel que soit $x + p \in O$,*

$$|F(x + p) \Leftrightarrow F(x) \Leftrightarrow F'(x)p| \leq \frac{\gamma}{2} |p|^2.$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} F(x + p) \Leftrightarrow F(x) \Leftrightarrow F'(x)p &= \left[\int_0^1 F'(x + tp) p dt \right] \Leftrightarrow F'(x)p \\ &= \int_0^1 [F'(x + tp) \Leftrightarrow F'(x)] p dt. \end{aligned}$$

En utilisant la Lipschitz-continuité de F' en x dans l'ouvert O , on obtient

$$\begin{aligned} |F(x+p) \Leftrightarrow F(x) \Leftrightarrow F'(x)p| &\leq \int_0^1 \|F'(x+tp) \Leftrightarrow F'(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^N, Y)} |p| dt \\ &\leq \int_0^1 \gamma |tp| |p| dt \\ &\leq \gamma |p|^2 \int_0^1 t dt \\ &\leq \frac{\gamma}{2} |p|^2. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration. □

Théorème 4.2.3 Soient $F : \mathbb{C}^N \rightarrow Y$, $y \in Y$, et $J(x) = |F(x) \Leftrightarrow y|^2$ deux fois continûment différentiable sur un ouvert convexe O de \mathbb{C}^N . On suppose que l'application $x \mapsto F'(x)$ est Lipschitz-continue de constante γ sur O , vérifie $\|F'(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^N, Y)} < \alpha$ pour tout $x \in O$, et qu'il existe $\hat{x} \in O$ et $\sigma > 0$ tels que $F'(\hat{x})^*(F(\hat{x}) \Leftrightarrow y) = 0$, et

$$|(F'(x) \Leftrightarrow F'(\hat{x}))^*(F(\hat{x}) \Leftrightarrow y)| \leq \sigma |x \Leftrightarrow \hat{x}| \quad (4.10)$$

quel que soit $x \in O$. On désigne par λ la plus petite valeur propre de $F'(\hat{x})^*F'(\hat{x})$. Si $\sigma < \lambda$, alors pour tout $c \in (1, \lambda/\sigma)$, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x_0 \in B(\hat{x}, \epsilon)$, la suite engendrée par la méthode de Gauss-Newton

$$x_{p+1} = x_p \Leftrightarrow (F'(x_p)^*F'(x_p))^{-1} F'(x_p)^*(F(x_p) \Leftrightarrow y)$$

est bien définie, converge vers \hat{x} , et vérifie

$$|x_{p+1} \Leftrightarrow \hat{x}| \leq \frac{c\sigma}{\lambda} |x_p \Leftrightarrow \hat{x}| + \frac{c\alpha\gamma}{\lambda} |x_p \Leftrightarrow \hat{x}|^2, \quad (4.11)$$

et

$$|x_{p+1} \Leftrightarrow \hat{x}| \leq \frac{c\sigma + \lambda}{2\lambda} |x_p \Leftrightarrow \hat{x}| < |x_p \Leftrightarrow \hat{x}|. \quad (4.12)$$

Démonstration: On raisonne par récurrence. On suppose que $\lambda > \sigma > 0$, puisque les conclusions du théorème s'appliquent uniquement dans ce cas. Soit c une constante fixée dans $(1, \lambda/\sigma)$. F'_0, F_0 , et \hat{F} désignent respectivement $F'(x_0)$, $F(x_0) \Leftrightarrow y$ et $F(\hat{x}) \Leftrightarrow y$. Il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que $F'_0{}^*F'_0$ soit non-singulière, et

$$|(F'_0{}^*F'_0)^{-1}| \leq \frac{c}{\lambda} \text{ pour } x_0 \in B(\hat{x}, \epsilon_1). \quad (4.13)$$

On pose

$$\epsilon = \min \left\{ \epsilon_1, \frac{\lambda \Leftrightarrow c\sigma}{c\alpha\gamma} \right\}. \quad (4.14)$$

Alors, à la première itération, x_1 est bien définie et

$$\begin{aligned} x_1 \Leftrightarrow \hat{x} &= x_0 \Leftrightarrow \hat{x} \Leftrightarrow (F_0'^* F_0')^{-1} F_0'^* F_0 \\ &= \Leftrightarrow (F_0'^* F_0')^{-1} [F_0'^* F_0 + F_0'^* F_0'(\hat{x} \Leftrightarrow x_0)] \\ &= \Leftrightarrow (F_0'^* F_0')^{-1} \left[F_0'^* \hat{F} \Leftrightarrow F_0'^*(\hat{F} \Leftrightarrow F_0 \Leftrightarrow F_0'(\hat{x} \Leftrightarrow x_0)) \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

D'après le Lemme 4.2.2,

$$\left| \hat{F} \Leftrightarrow F_0 \Leftrightarrow F_0'(\hat{x} \Leftrightarrow x_0) \right| \leq \frac{\gamma}{2} |x_0 \Leftrightarrow \hat{x}|^2. \quad (4.16)$$

D'après la relation (4.10), en rappelant que $F'(\hat{x})^*(F(\hat{x}) \Leftrightarrow y) = 0$,

$$\left| F_0'^* \hat{F} \right| \leq \sigma |x_0 \Leftrightarrow \hat{x}|. \quad (4.17)$$

En combinant (4.15), (4.13), (4.16), (4.17) et $\|F_0'\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^N, Y)} < \alpha$, on obtient

$$\begin{aligned} |x_1 \Leftrightarrow \hat{x}| &\leq \left| (F_0'^* F_0')^{-1} \left[\left| F_0'^* \hat{F} \right| + \|F_0'\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^N, Y)} \left| \hat{F} \Leftrightarrow F_0 \Leftrightarrow F_0'(\hat{x} \Leftrightarrow x_0) \right| \right] \right| \\ &\leq \frac{c}{\lambda} \left[\sigma |x_0 \Leftrightarrow \hat{x}| + \frac{\alpha\gamma}{2} |x_0 \Leftrightarrow \hat{x}|^2 \right], \end{aligned}$$

ce qui démontre (4.11) pour le cas $p = 0$. D'après (4.14) et ce qui précède,

$$\begin{aligned} |x_1 \Leftrightarrow \hat{x}| &\leq |x_0 \Leftrightarrow \hat{x}| \left[\frac{c\sigma}{\lambda} + \frac{c\alpha\gamma}{2\lambda} |x_0 \Leftrightarrow \hat{x}| \right] \\ &\leq |x_0 \Leftrightarrow \hat{x}| \left[\frac{c\sigma}{\lambda} + \frac{\lambda \Leftrightarrow c\sigma}{2\lambda} \right] \\ &= \frac{c\sigma + \lambda}{2\lambda} |x_0 \Leftrightarrow \hat{x}| \\ &< |x_0 \Leftrightarrow \hat{x}|, \end{aligned}$$

ce qui démontre (4.12) pour le cas $p = 0$. Par récurrence, on en déduit le résultat pour tout p , et par conséquent la convergence de l'algorithme. \square

Dans le paragraphe suivant, on considère l'application de la méthode de Gauss-Newton au problème de moindres carrés non-linéaires (4.3). Pour que le problème d'identification ait un sens, l'indice n doit être borné à chaque itération. On doit donc choisir n dans $L^\infty(D)$, qui n'est pas un espace de Hilbert. On récupère toutefois une structure Hilbertienne en se plaçant sur un sous-espace V de $L^\infty(D)$ de dimension finie. On étudie également les conditions nécessaires que doit vérifier l'opérateur F pour que le théorème 4.2.3 de convergence locale soit applicable à ce problème.

4.3 Application au problème inverse - convergence de l'algorithme.

Pour appliquer la méthode de Gauss-Newton au problème inverse (4.1) que l'on souhaite traiter, il est nécessaire de montrer la différentiabilité de l'opérateur F défini en (4.2), et de calculer sa différentielle

$F'(\tilde{n})$ en tout point \tilde{n} . En effet, dans la méthode de Gauss-Newton, la fonctionnelle non-linéaire $|F(n) \Leftrightarrow g|_{L^2(\Sigma \times S^{m-1})}^2$ est remplacée à chaque itération par la forme quadratique en $\delta n = n \Leftrightarrow \tilde{n}$:

$$|F'(\tilde{n})\delta n \Leftrightarrow (g \Leftrightarrow F(\tilde{n}))|_{L^2(\Sigma \times S^{m-1})}^2. \quad (4.18)$$

Pour ce faire, on travaille dans un premier temps à incidence θ fixée. Pour un ouvert borné G quelconque, on étudie la différentiabilité de l'application $F_{G,\theta}$, définie de $L^\infty(D)$ dans $H^2(G)$, qui à $n|_D$ associe $u(n, \theta)|_G$. Il s'agit par conséquent de montrer que pour tout ouvert borné G de \mathbb{R}^m , il existe une application $F'_{G,\theta}(\tilde{n})$, linéaire continue de $L^\infty(D)$ dans $H^2(G)$, telle que

$$u(n, \theta)|_G = u(\tilde{n}, \theta)|_G + F'_{G,\theta}(\tilde{n})(n \Leftrightarrow \tilde{n}) + |n \Leftrightarrow \tilde{n}|_\infty \varepsilon(n \Leftrightarrow \tilde{n}),$$

avec $\lim_{|n|_\infty \rightarrow 0} |\varepsilon(n)|_{H^2(G)} = 0$. Le calcul de $F'_{G,\theta}(\tilde{n})$ fait l'objet de la proposition suivante. Dans le but d'appliquer le théorème 4.2.3 au problème (4.1), on étudie également dans cette proposition la différentiabilité seconde de l'application $F_{G,\theta}$.

Proposition 4.3.1 *Pour tout ouvert borné G de \mathbb{R}^m , pour tout $\theta \in S^{m-1}$, l'application*

$$\begin{aligned} F_{G,\theta} : L^\infty(D) &\Leftrightarrow H^2(G) \\ n|_D &\Leftrightarrow u(n, \theta)|_G \end{aligned}$$

est deux fois différentiable de $L^\infty(D)$ dans $H^2(G)$. La différentielle de $F_{G,\theta}$ au point \tilde{n} dans la direction δn , i.e. $F'_{G,\theta}(\tilde{n})\delta n$, est définie par la restriction à G de la solution $v(\theta)$ du problème

$$\begin{aligned} \Delta v(\theta) + k^2 \tilde{n} v(\theta) &= \Leftrightarrow k^2 \delta n (u^{inc}(\theta) + u(\tilde{n}, \theta)) \quad \text{dans } \mathbb{R}^m, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{(m-1)/2} \left(\frac{\partial v(\theta)}{\partial r} \Leftrightarrow i k v(\theta) \right) &= 0. \end{aligned}$$

Sa différentielle seconde au point \tilde{n} dans les directions δn et $\check{\delta} n$, i.e. $F''_{G,\theta}(\tilde{n})(\delta n, \check{\delta} n)$, est définie par la restriction à G de la solution $w(\theta)$ du problème

$$\begin{aligned} \Delta w(\theta) + k^2 \tilde{n} w(\theta) &= \Leftrightarrow k^2 (\check{\delta} n v(\theta) + \delta n \check{v}(\theta)) \quad \text{dans } \mathbb{R}^m, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{(m-1)/2} \left(\frac{\partial w(\theta)}{\partial r} \Leftrightarrow i k w(\theta) \right) &= 0, \end{aligned}$$

où $\check{v}(\theta)$ est la solution du problème

$$\begin{aligned} \Delta \check{v}(\theta) + k^2 \tilde{n} \check{v}(\theta) &= \Leftrightarrow k^2 \check{\delta} n (u^{inc}(\theta) + u(\tilde{n}, \theta)) \quad \text{dans } \mathbb{R}^m, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{(m-1)/2} \left(\frac{\partial \check{v}(\theta)}{\partial r} \Leftrightarrow i k \check{v}(\theta) \right) &= 0. \end{aligned}$$

Démonstration : On reprend les notations de la proposition 2.1.14. Le début de la démonstration, c'est à dire la continuité de $L^\infty(D)$ dans $H^2(D)$ de l'opérateur $F_{D,\theta}$, présente de fortes similarités avec ce résultat du chapitre 2. Afin d'éviter toute ambiguïté sur la signification des constantes utilisées, on choisit néanmoins de reproduire la démonstration dans son intégralité.

La fonction $u(\tilde{n}, \theta)$ est solution du problème

$$\begin{aligned} \Delta u(\tilde{n}, \theta) + k^2 \tilde{n} u(\tilde{n}, \theta) &= k^2 (1 \Leftrightarrow \tilde{n}) u^{inc}(\theta) \quad \text{dans } \mathbb{R}^m, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{(m-1)/2} \left(\frac{\partial u(\tilde{n}, \theta)}{\partial r} \Leftrightarrow i k u(\tilde{n}, \theta) \right) &= 0, \end{aligned} \quad (4.19)$$

et la fonction $u(\tilde{n} + \delta n, \theta)$ est solution de

$$\begin{aligned} \Delta u(\tilde{n} + \delta n, \theta) + k^2 (\tilde{n} + \delta n) u(\tilde{n} + \delta n, \theta) &= k^2 (1 \Leftrightarrow \tilde{n} \Leftrightarrow \delta n) u^{inc}(\theta) \quad \text{dans } \mathbb{R}^m, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{(m-1)/2} \left(\frac{\partial u(\tilde{n} + \delta n, \theta)}{\partial r} \Leftrightarrow i k u(\tilde{n} + \delta n, \theta) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Par soustraction, la fonction $\delta u(\theta) = u(\tilde{n} + \delta n, \theta) \Leftrightarrow u(\tilde{n}, \theta)$ est solution de

$$\begin{aligned} \Delta \delta u(\theta) + k^2 \tilde{n} \delta u(\theta) &= \Leftrightarrow k^2 \delta n (u^{inc}(\theta) + u(\tilde{n}, \theta) + \delta u(\theta)) \quad \text{dans } \mathbb{R}^m, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{(m-1)/2} \left(\frac{\partial \delta u(\theta)}{\partial r} \Leftrightarrow i k \delta u(\theta) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

D'après le corollaire 2.1.11 du chapitre 2, pour tout ouvert borné G de \mathbb{R}^m , l'application qui à un second membre associe la solution de l'équation de Helmholtz est linéaire et continue de $L^2(D)$ dans $H^2(G)$. En d'autres termes, il existe une constante $C_G > 0$ telle que

$$|u(\tilde{n}, \theta)|_{H^2(G)} \leq C_G |(1 \Leftrightarrow \tilde{n}) u^{inc}(\theta)|_{L^2(D)}, \quad (4.22)$$

et $(1 \Leftrightarrow \tilde{n})$ étant borné, on en déduit qu'il existe $L_G > 0$ vérifiant

$$|u(\tilde{n}, \theta)|_{H^2(G)} \leq L_G |u^{inc}(\theta)|_{L^2(D)}. \quad (4.23)$$

La relation de continuité (4.22) appliquée au second membre de l'équation (4.21) donne l'estimation

$$|\delta u(\theta)|_{H^2(G)} \leq C_G |\delta n (u^{inc}(\theta) + u(\tilde{n}, \theta) + \delta u(\theta))|_{L^2(D)}. \quad (4.24)$$

A l'aide de la relation (4.23), on montre que

$$\begin{aligned} |u^{inc}(\theta) + u(\tilde{n}, \theta)|_{L^2(D)} &\leq |u^{inc}(\theta)|_{L^2(D)} + |u(\tilde{n}, \theta)|_{L^2(D)} \\ &\leq (1 + L_D) |u^{inc}(\theta)|_{L^2(D)} \\ &\leq K, \end{aligned}$$

où K est une constante indépendante de θ , puisque $u^{inc}(\theta) = e^{ikx \cdot \theta}$ est uniformément borné dans $L^2(D)$ pour $\theta \in S^{m-1}$. D'où

$$\begin{aligned} |\delta u(\theta)|_{H^2(G)} &\leq C_G |\delta n|_{\infty} (K + |\delta u(\theta)|_{L^2(D)}) \\ &\leq C_G |\delta n|_{\infty} (K + |\delta u(\theta)|_{H^2(D)}), \end{aligned}$$

et en particulier, il existe une constante $C_D > 0$ telle que

$$|\delta u(\theta)|_{H^2(D)} \leq C_D |\delta n|_{\infty} (K + |\delta u(\theta)|_{H^2(D)}).$$

Si $|\delta n|_\infty \leq 1/(2C_D)$, alors

$$|\delta u(\theta)|_{H^2(D)} \leq K_D |\delta n|_\infty \text{ avec } K_D = 2C_D \cdot K. \quad (4.25)$$

La constante K_D est indépendante de θ .

Soit $v(\theta)$ la solution du problème:

$$\begin{aligned} \Delta v(\theta) + k^2 \tilde{n} v(\theta) &= \Leftrightarrow k^2 \delta n (u^{inc}(\theta) + u(\tilde{n}, \theta)) \quad \text{dans } \mathbb{R}^m, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{(m-1)/2} \left(\frac{\partial v(\theta)}{\partial r} \Leftrightarrow i k v(\theta) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Alors $\delta u(\theta) \Leftrightarrow v(\theta)$ est solution de

$$\begin{aligned} \Delta(\delta u(\theta) \Leftrightarrow v(\theta)) + k^2 \tilde{n} (\delta u(\theta) \Leftrightarrow v(\theta)) &= \Leftrightarrow k^2 \delta n \cdot \delta u(\theta) \quad \text{dans } \mathbb{R}^m, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{(m-1)/2} \left(\frac{\partial(\delta u(\theta) \Leftrightarrow v(\theta))}{\partial r} \Leftrightarrow i k (\delta u(\theta) \Leftrightarrow v(\theta)) \right) &= 0. \end{aligned}$$

La relation de continuité (4.24) appliquée au second membre $\varphi = \Leftrightarrow k^2 \delta n \cdot \delta u(\theta)$ ainsi que l'estimation (4.25) permettent de déduire que

$$\begin{aligned} |\delta u(\theta) \Leftrightarrow v(\theta)|_{H^2(G)} &\leq C_G |\delta n \cdot \delta u(\theta)|_{L^2(D)} \\ &\leq C_G |\delta n|_\infty |\delta u(\theta)|_{L^2(D)} \\ &\leq C_G |\delta n|_\infty |\delta u(\theta)|_{H^2(D)} \\ &\leq K_G |\delta n|_\infty^2 \text{ lorsque } |\delta n|_\infty \leq 1/(2C_D), \end{aligned}$$

avec $K_G = C_G \cdot K_D$, et K_G indépendante de θ .

Ainsi, quel que soit G ouvert borné dans \mathbb{R}^m ,

$$\lim_{|\delta n|_\infty \rightarrow 0} \frac{|u(\tilde{n} + \delta n, \theta) \Leftrightarrow u(\tilde{n}, \theta) \Leftrightarrow v(\theta)|_{H^2(G)}}{|\delta n|_\infty} = \lim_{|\delta n|_\infty \rightarrow 0} \frac{|\delta u(\theta) \Leftrightarrow v(\theta)|_{H^2(G)}}{|\delta n|_\infty} \leq \lim_{|\delta n|_\infty \rightarrow 0} \frac{K_G |\delta n|_\infty^2}{|\delta n|_\infty} = 0, \quad (4.27)$$

et par conséquent $F'_{G,\theta}(\tilde{n})\delta n = v(\theta)|_G$.

Un raisonnement analogue pour le calcul de la différentielle l'application $\tilde{n} \mapsto v(\theta)$ dans la direction $\delta \tilde{n}$ donne $w(\theta)$ solution du problème

$$\begin{aligned} \Delta w(\theta) + k^2 \tilde{n} w(\theta) &= \Leftrightarrow k^2 (\delta \tilde{n} v(\theta) + \delta n \check{v}(\theta)) \quad \text{dans } \mathbb{R}^m, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{(m-1)/2} \left(\frac{\partial w(\theta)}{\partial r} \Leftrightarrow i k w(\theta) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

On en déduit que $F''_{G,\theta}(\tilde{n})\delta n \cdot \delta \tilde{n} = w(\theta)|_G$. Ceci achève la démonstration. \square

Corollaire 4.3.2 *L'opérateur*

$$\begin{aligned} F : L^\infty(D) &\Leftrightarrow L^2(\Sigma \times S^{m-1}) \\ n|_D &\Leftrightarrow (u(n, \theta)|_\Sigma, \theta \in S^{m-1}) \end{aligned}$$

est deux fois différentiable de $L^\infty(D)$ dans $L^2(\Sigma \times S^{m-1})$.

Démonstration : Soit G un ouvert borné vérifiant $\Sigma \subset G$. L'application trace γ_Σ est linéaire et continue de $H^2(G)$ dans $L^2(\Sigma)$. Il existe par conséquent une constante $\alpha > 0$ telle que

$$|\gamma_\Sigma u|_{L^2(\Sigma)} \leq \alpha |u|_{H^2(G)}.$$

Par composition, on en déduit que l'application $F_\theta = \gamma_\Sigma F_{G,\theta}$ est deux fois différentiable de $L^\infty(D)$ dans $L^2(\Sigma)$. Sa différentielle dans la direction δn est $F'_\theta(\tilde{n})\delta n = \gamma_\Sigma v(\theta)$. En effet, d'après (4.27),

$$\lim_{|\delta n|_\infty \rightarrow 0} \frac{|\gamma_\Sigma u(\tilde{n} + \delta n, \theta) \Leftrightarrow \gamma_\Sigma u(\tilde{n}, \theta) \Leftrightarrow \gamma_\Sigma v(\theta)|_{L^2(\Sigma)}}{|\delta n|_\infty} \leq \alpha \lim_{|\delta n|_\infty \rightarrow 0} \frac{|u(\tilde{n} + \delta n, \theta) \Leftrightarrow u(\tilde{n}, \theta) \Leftrightarrow v(\theta)|_{H^2(G)}}{|\delta n|_\infty} = 0.$$

A l'aide d'un argument similaire, on montre que la différentielle seconde $F''_\theta(\tilde{n})$ de F_θ au point \tilde{n} , dans les directions $\delta n, \delta \tilde{n}$ est $\gamma_\Sigma w(\theta)$, où $w(\theta)$ est la solution du problème (4.28). De plus, l'estimation

$$|\gamma_\Sigma u(\tilde{n} + \delta n, \theta) \Leftrightarrow \gamma_\Sigma u(\tilde{n}, \theta) \Leftrightarrow \gamma_\Sigma v(\theta)|_{L^2(\Sigma)} \leq \alpha K_G |\delta n|_\infty^2$$

étant uniforme en θ , on en déduit que

$$\lim_{|\delta n|_\infty \rightarrow 0} \frac{|\gamma_\Sigma u(\tilde{n} + \delta n, \theta) \Leftrightarrow \gamma_\Sigma u(\tilde{n}, \theta) \Leftrightarrow \gamma_\Sigma v(\theta)|_{L^2(\Sigma \times S^{m-1})}}{|\delta n|_\infty} \leq \sqrt{(2m \Leftrightarrow 2)\pi} \alpha \lim_{|\delta n|_\infty \rightarrow 0} \frac{K_G |\delta n|_\infty^2}{|\delta n|_\infty} = 0.$$

D'où la différentiabilité de l'opérateur F . La différentiabilité seconde de F est basée sur les mêmes arguments. \square

Convergence de l'algorithme en dimension finie.

Soient V un sous-espace de dimension N de $L^\infty(D)$, et $(\Phi_j)_{j=1,N}$ une base de V . Toute fonction $n \in V$ s'écrit sous la forme $n = \sum_{j=1}^N n_j \Phi_j$. On identifie $n \in V$ au vecteur $(n_j)_{j=1,N}$ de \mathbb{C}^N . On remplace, après discrétisation de l'inconnue n , le problème (4.3) par :

$$\text{Trouver } n \in V \text{ minimisant } |u(n, \theta)|_\Sigma \Leftrightarrow g(\theta)|_{L^2(\Sigma \times S^{m-1})}^2. \quad (4.29)$$

Soit $\tilde{n} \in V$. D'après le lemme 4.3.2, la linéarisation du problème (4.29) par la méthode de Gauss-Newton est bien définie sur ce sous-espace de $L^\infty(D)$. On obtient le problème de minimisation sur V de la fonctionnelle quadratique (4.18). Dans toute la suite de ce paragraphe, F désigne la restriction à V de l'opérateur F . Sous l'hypothèse d'injectivité de l'opérateur $F'(\tilde{n})$, on déduit, par application de la proposition (4.2.1), que son minimum $\widehat{\delta n}$ vérifie l'équation normale

$$(F'(\tilde{n})^* F'(\tilde{n})) \widehat{\delta n} \Leftrightarrow F'(\tilde{n})^* (g \Leftrightarrow F(\tilde{n})) = 0,$$

soit

$$\int_{S^{m-1} \times \Sigma} (F'_\theta(\tilde{n})^* F'_\theta(\tilde{n})) \widehat{\delta n} \Leftrightarrow F'_\theta(\tilde{n})^* (g(\theta) \Leftrightarrow u(\tilde{n}, \theta)|_\Sigma) dS d\theta = 0.$$

On peut se poser la question de la convergence de la méthode de Gauss-Newton pour le problème de moindres carrés (4.29). C'est pourquoi on étudie la convergence locale de la méthode de Gauss-Newton appliquée à la recherche de l'indice de réfraction n dans V .

Proposition 4.3.3 Soit $\hat{n} \in V$ vérifiant

$$(F'(\hat{n}))^* (F(\hat{n}) \Leftrightarrow g) = 0.$$

Si $F'(\hat{n})$ est injectif, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $n_0 \in B_V(\hat{n}, \epsilon)$, la suite $(n_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de V , engendrée par la méthode de Gauss-Newton appliquée au problème (4.29), converge vers \hat{n} .

Démonstration : Il suffit de montrer que si $F'(\hat{n})$ est injectif, alors les hypothèses du théorème 4.2.3 peuvent être vérifiées pour le problème (4.29). Soit K un ouvert convexe borné quelconque de V vérifiant $\hat{n} \in K$. L'application

$$F : \begin{array}{l} V \Leftrightarrow L^2(\Sigma \times S^{m-1}) \\ n|_D = \sum_{j=1}^N n_j \Phi_j \Leftrightarrow F(n) = (u(n, \theta)|_\Sigma, \theta \in S^{m-1}) \end{array}$$

est deux fois continûment différentiable de V dans $L^2(\Sigma \times S^{m-1})$. On en déduit que l'application

$$J : \begin{array}{l} V \Leftrightarrow \mathbb{R} \\ n|_D = \sum_{j=1}^N n_j \Phi_j \Leftrightarrow |F(n) \Leftrightarrow g|_{L^2(\Sigma \times S^{m-1})}^2, \end{array} \quad (4.30)$$

avec $g = (g(\theta), \theta \in S^{m-1})$, est deux fois continûment différentiable de V dans \mathbb{R} comme composée d'applications deux fois continûment différentiables. De plus, F étant deux fois continûment différentiable sur V , on en déduit que F' est bornée et de différentielle bornée sur K . Il existe par conséquent γ tel que F' soit Lipschitz-continue de constante γ sur K , et α tel que, quel que soit $n \in K$,

$$\|F'(n)\|_{\mathcal{L}(V, L^2(\Sigma \times S^{m-1}))} < \alpha.$$

La solution \hat{n} du problème (4.29) vérifie

$$(F'(\hat{n}))^* (F(\hat{n}) \Leftrightarrow g) = 0.$$

L'application $n \mapsto F'(n)$ étant Lipschitz de constante γ sur K , elle vérifie, quel que soit $n \in K$,

$$\|F'(n) \Leftrightarrow F'(\hat{n})\|_{\mathcal{L}(V, L^2(\Sigma \times S^{m-1}))} < \gamma |n \Leftrightarrow \hat{n}|.$$

On en déduit l'existence d'une constante $\sigma > 0$, dépendant toujours de K , telle que

$$|(F'(n) \Leftrightarrow F'(\hat{n}))^* (F(\hat{n}) \Leftrightarrow g)| < \sigma |n \Leftrightarrow \hat{n}|.$$

Posons $\sigma = \sigma(K)$. L'opérateur $F'(\hat{n})$ étant injectif dans l'espace V de dimension finie, il existe K tel que $\sigma(K) < \lambda$, où $\lambda > 0$ est la plus petite valeur propre de l'opérateur $(F'(\hat{n}))^* F'(\hat{n})$. Ainsi, d'après le théorème 4.2.3, quel que soit $c \in (1, \lambda/\sigma)$, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $n_0 \in B_V(\hat{n}, \epsilon)$, la suite de V engendrée par la méthode de Gauss-Newton

$$n_{p+1} = n_p \Leftrightarrow (F'(n_p)^* F'(n_p))^{-1} F'(n_p)^* (F(n_p) \Leftrightarrow g)$$

est bien définie et converge vers \hat{n} . D'où le résultat de convergence locale. \square

La condition suffisante $\lambda > 0$ n'est vérifiée que si l'opérateur linéarisé $F'(\hat{n})$ est injectif de V dans $L^2(\Sigma \times S^{m-1})$, ce qui n'a jamais été démontré. Si l'on suppose que l'opérateur $F'(\hat{n})$ est injectif de $L^\infty(D)$ dans $L^2(\Sigma \times S^{m-1})$, alors cette hypothèse est vérifiée. Par conséquent, l'opérateur $(F'(\hat{n}))^* F'(\hat{n})$ admet une plus petite valeur propre $\lambda > 0$, et l'algorithme de Gauss-Newton posé sur le sous-espace de dimension finie V converge localement. Cependant, cette valeur propre λ dépend à la fois du choix de l'espace de discrétisation ainsi que de sa dimension. L'opérateur $F'(\hat{n})$ étant compact de $L^\infty(D)$ dans $L^2(\Sigma \times S^{m-1})$ ([14], Théorème 4.19), l'ensemble de ses valeurs singulières possède un point d'accumulation en zéro, ce qui signifie que même si zéro n'est pas une valeur singulière de $F'(\hat{n})$, la suite $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}}$ des valeurs singulières de $F'(\hat{n})$ prises dans l'ordre décroissant converge vers zéro. De ce fait, même en dimension finie, le voisinage sur lequel la convergence de la méthode de Gauss-Newton est assurée peut être très petit, et tend vers le singleton $\{\hat{n}\}$ lorsque la dimension de l'espace de discrétisation tend vers l'infini.

Afin d'assurer la recherche d'une solution acceptable à ce problème, c'est à dire peu éloignée en un certain sens de la donnée a priori, il est nécessaire de régulariser la fonctionnelle à minimiser. Parmi les régularisations existantes, la régularisation de Tychonov joue un rôle prépondérant. Elle consiste en une pénalisation de la fonctionnelle par le carré d'une norme hermitienne de l'espace dans lequel on cherche la solution du problème inverse. Dans le paragraphe suivant, on étudie la convergence de la méthode de Gauss-Newton pénalisée par une régularisation de Tychonov, en norme $L^2(D)$, puis en semi-norme $H_0^1(D)$.

4.4 Régularisation de Tychonov.

De manière à assurer la convergence locale vers une solution acceptable de la méthode de Gauss-Newton appliquée au problème (4.29), il est possible de pénaliser la fonctionnelle (4.30) par une régularisation de Tychonov. On obtient alors, sous les conditions d'application du théorème 4.2.3, la convergence de la méthode de Gauss-Newton ainsi pénalisée vers une solution approchée.

Le sous-espace V est muni de la norme hilbertienne complexe $|\cdot|_{L^2(D)}$. Soit $\|\cdot\|_V$ une norme hilbertienne complexe sur V . La régularisation de Tychonov en norme $\|\cdot\|_V$ du problème (4.29) consiste à pénaliser le problème (4.29) par la fonctionnelle

$$\alpha \|\cdot\|_V^2, \quad (4.31)$$

où $\alpha > 0$ désigne le paramètre de régularisation de Tychonov. Le problème (4.29) ainsi régularisé revient alors à minimiser sur V la fonctionnelle

$$|F(n) \Leftrightarrow g|_{L^2(\Sigma \times S^{m-1})}^2 + \alpha \|n\|_V^2. \quad (4.32)$$

Comme la fonctionnelle (4.31) est quadratique, la fonctionnelle quadratique approchant la fonctionnelle (4.30) à chaque étape de l'algorithme de Gauss-Newton est pénalisée de la même manière. Ainsi, à l'étape $p + 1$, le problème devient

$$\text{Trouver } \delta n \in V \text{ minimisant } |F'(n_p)\delta n \Leftrightarrow (g \Leftrightarrow F(n_p))|_{L^2(\Sigma \times S^{m-1})}^2 + \alpha \|\delta n\|_V^2. \quad (4.33)$$

L'espace V étant de dimension finie, il existe un opérateur linéaire B , hermitien et positif, tel que, pour tout $n \in V$,

$$\|n\|_V^2 = \langle Bn, n \rangle_{L^2(D)}.$$

De plus, $\|\cdot\|_V$ est une norme sur V , et on en déduit que l'application bilinéaire $\langle B\cdot, \cdot \rangle_{L^2(D)}$ est coercive. Le problème (4.33) admet par conséquent une solution unique $\widehat{\delta n_p}$, laquelle vérifie l'équation normale

$$(F'(n_p)^* F'(n_p) + 2\alpha B) \widehat{\delta n_p} \Leftrightarrow F'(n_p)^* (g \Leftrightarrow F(n_p)) = 0. \quad (4.34)$$

Ainsi, la régularisation de Tychonov consiste en une approximation de l'opérateur linéarisé par un opérateur linéaire injectif, lequel possède une plus petite valeur singulière strictement positive, et toujours supérieure à celle de l'opérateur non régularisé. On résoud ainsi un problème approché dont la solution présente une meilleure stabilité par rapport aux données. La fonctionnelle régularisée (4.32) est de classe C^2 sur V , et en appliquant à cette fonctionnelle les arguments contenus dans la démonstration de la proposition 4.3.3, le théorème 4.2.3 assure la convergence locale de la méthode de Gauss-Newton régularisée.

Notons enfin qu'il existe des variantes de la régularisation de Tychonov appliquées à la méthode de Gauss-Newton, lesquelles consistent à faire varier le paramètre α à chaque étape de l'algorithme de manière à choisir la pénalisation optimale pour chacun des problèmes linéarisés. On peut citer entre autres la méthode de Levenberg-Marquardt ([21]), ou encore la méthode des régions de confiance ([21], [29]). Des résultats de convergence locale de la méthode de Gauss-Newton ainsi pénalisée, adaptés du théorème 4.2.3 peuvent être obtenus (cf [21]).

Deux pénalisations par des normes hilbertiennes complexes ont été testées numériquement pour le problème (4.29), pour des paramètres de régularisation de Tychonov constants ou variables : une pénalisation en norme $L^2(D)$ et une pénalisation par une norme hermitienne sur le sous-espace V , prenant en compte les discontinuités de l'indice. L'indice n est alors recherché sous la forme $1 + \tilde{n}$, où $\tilde{n} \in V$. Sur les espaces d'approximation étudiés dans le paragraphe 4.6.1, et en utilisant les notations de ce paragraphe, cette norme est définie par

$$|\lambda|_1 = \left(\sum_{l=1}^p \rho_l |[\lambda]_l|^2 \right)^{1/2}.$$

Dans le cas d'un maillage formé de carrés, cette norme correspond à l'approximation non-conforme par différences divisées de la semi-norme $H^1(D)$, aussi appelée semi-norme H^1 discrète. L'étude numérique de ces régularisations montre d'abord que le choix de la norme L^2 s'avère peu concluant lorsque la dimension de l'espace V d'approximation augmente : en effet, des oscillations de l'indice apparaissent assez rapidement, au point qu'on ne peut pas restituer l'indice de réfraction à partir de données synthétiques exactes. C'est pourquoi nous avons ensuite testé la régularisation de Tychonov par la norme $|\cdot|_1$. Cette fois, la solution obtenue est trop régulière et a tendance à lisser les discontinuités d'indice qui peuvent exister dans la solution exacte. Des illustrations de ces résultats pour les cas tests étudiés sont données dans le chapitre 5.

Le choix de la norme par rapport à laquelle on régularise est prépondérant, puisqu'il doit contenir avec la donnée initiale le maximum d'informations sur la solution. La recherche de l'indice de réfraction dans un espace fonctionnel décrivant au mieux la physique du problème s'avère par conséquent nécessaire.

4.5 Régularisation par une pénalisation en semi-norme BV.

Le problème linéarisé étant mal posé, il est nécessaire d'imposer des contraintes de régularité sur la solution approchée lors de sa résolution. Ici, le problème à résoudre est un problème d'identification de paramètres dont la solution est discontinue. Une méthode de régularisation standard, telle la régularisation de Tychonov en norme L^2 , ne favorise pas ce type de solution. Cette difficulté peut être résolue en recherchant la stabilité non pas à l'aide d'une régularisation par la norme L^2 , mais plutôt par la norme BV, ce qui a pour effet d'amortir les oscillations sans lisser les discontinuités éventuelles. Ainsi, on peut résoudre

$$\min_{L^\infty(D)} |F(n) \Leftrightarrow g|_{L^2(\Sigma \times S^{m-1})}^2 + \alpha \mathcal{J}(n),$$

où \mathcal{J} est une fonctionnelle mesurant la variation totale de la fonction n , ce qui peut être interprété comme une pénalisation du problème

$$\min_{L^\infty(D)} |F(n) \Leftrightarrow g|_{L^2(\Sigma \times S^{m-1})}^2.$$

Ici, le paramètre de pénalisation α joue le rôle d'un facteur de pondération entre la vérification du critère par la solution approchée et sa variation totale, mesurée par $\mathcal{J}(n)$. Ce type de pénalisation joue le rôle d'une régularisation du problème inverse. Parmi les régularisations de ce type qui ont été étudiées pour les problèmes de moindres carrés non-linéaires, on peut entre autres citer la fonctionnelle

$$J_{0,\Omega}(u) = |Du|(\Omega),$$

qui désigne la semi-norme BV [6], ou encore

$$|u|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta |Du|(\Omega),$$

avec $\beta > 0$ [8]. Une pénalisation par cette dernière fonctionnelle présente l'avantage de rendre injectif le problème de moindres carrés régularisé, même si le problème de départ ne l'est pas. Plutôt que de considérer ce type de fonctionnelle, nous avons choisi, pour des raisons algorithmiques, de considérer une pénalisation par une régularisée différentiable de la semi-norme BV dans un espace de dimension finie. Avant de présenter cette fonctionnelle de pénalisation, nous rappelons, dans le paragraphe suivant, les propriétés essentielles des fonctions à variation bornée.

4.5.1 L'espace $\mathbf{BV}(\Omega)$.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^m de frontière régulière. On note $|\cdot|_p$ la norme sur les espaces $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Soit $|\Omega|$ la mesure de Ω , et χ_S la fonction indicatrice d'un ensemble $S \subset \Omega$.

On définit l'espace $\mathbf{BV}(\Omega)$ comme l'espace des fonctions $u \in L^1(\Omega)$ dont les dérivées partielles du premier ordre $\partial_1 u, \dots, \partial_m u$, calculées au sens des distributions sur Ω , sont des mesures de Radon bornées à valeurs dans \mathbb{C} . On note Du la mesure de Borel sur Ω à valeurs dans \mathbb{C}^m définie par $Du = (\partial_1 u, \dots, \partial_m u)$.

La semi-norme BV, ou variation totale, est définie par

$$\begin{aligned} J_{0,\Omega}(u) &:= |Du|(\Omega) \\ &= \sup_{v \in V} \int_{\Omega} u(x) \overline{\operatorname{div} v(x)} dx, \end{aligned} \quad (4.35)$$

où $V = \{v \in (C_0^\infty(\Omega; \mathbb{C}))^m, \|v(x)\|_\infty \leq 1, x \in \Omega\}$, avec $|v(x)| = \left(\sum_{d=1}^m v_d(x) \overline{v_d(x)}\right)^{1/2}$. La mesure Du se décompose sous la forme $Du_a + Du_s$, les mesures Du_a et Du_s désignent respectivement les parties absolument continues et singulières de la mesure Du par rapport à la mesure de Lebesgue. Ainsi

$$|Du|(\Omega) = \int_{\Omega} |Du_a| dx + |Du_s|(\Omega).$$

Si $u \in C^1(\Omega)$, alors

$$J_{0,\Omega}(u) = |Du|(\Omega) = \int_{\Omega} |Du_a| dx,$$

et (4.35) devient une intégrale classique au sens de la mesure de Lebesgue. Par densité, cette formule s'applique également pour $u \in W^{1,1}(\Omega)$. L'espace des fonctions à variation bornée sur Ω est défini par

$$\mathbf{BV}(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega) : J_{0,\Omega}(u) < \infty\},$$

et la norme sur $\mathbf{BV}(\Omega)$ est donnée par

$$|u|_{\mathbf{BV}} = |u|_1 + J_{0,\Omega}(u).$$

Propriétés de l'espace $\mathbf{BV}(\Omega)$ et de $J_{0,\Omega}$.

- (i) L'injection de $\mathbf{BV}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est compacte pour $1 \leq p < m/m \Leftrightarrow 1$ ([23], Théorème 1.19).
- (ii) La semi-norme $J_{0,\Omega}$ est une fonctionnelle semi-continue inférieurement pour les topologies faibles et fortes de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ ([2], théorème 2.3).

4.5.2 L'espace $BV_0(\overline{\Omega})$.

Soit Ω^* un ouvert tel que $\Omega \subset\subset \Omega^*$. On définit l'espace $BV_0(\overline{\Omega})$ comme l'espace des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions $u \in BV(\Omega^*)$ telles que $u = 0$ dans $\Omega^* \setminus \overline{\Omega}$.

L'espace $BV_0(\overline{\Omega})$ peut aussi être interprété comme l'espace des fonctions $u \in BV(\Omega)$ ayant une "trace extérieure" sur $\partial\Omega$ fixée à zéro.

Théorème 4.5.1 (Inégalité de Poincaré dans $BV_0(\overline{\Omega})$)

Soit Ω un ouvert borné de frontière lipschitzienne. Il existe une constante $C = C(\Omega)$ telle que, quel que soit $u \in BV_0(\overline{\Omega})$,

$$\int_{\Omega} |u| dx \leq C(\Omega) |Du|(\overline{\Omega}).$$

Démonstration : Il suffit de démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que, quel que soit $v \in BV_0(\overline{\Omega})$ vérifiant $|v|_1 = 1$, $J_{0,\overline{\Omega}}(v) > C$.

Supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe une suite v_l de $BV_0(\overline{\Omega})$, $|v_l|_1 = 1$ telle que $J_{0,\overline{\Omega}}(v_l) \leq 1/l$. La suite $(v_l)_{l \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $BV_0(\overline{\Omega})$. En prolongeant les éléments de la suite v_l par zéro dans $BV(\Omega^* \setminus \overline{\Omega})$, et par compacité de l'injection de $BV(\Omega^*)$ dans $L^1(\Omega^*)$, la suite v_l admet une sous-suite convergente dans $L^1(\Omega^*)$ fort vers $v \in L^1(\Omega^*)$. Les éléments de la sous-suite $(Dv_l = (\partial_1 v_l, \dots, \partial_m v_l))_l$ étant des mesures de Borel sur \mathbb{C}^m uniformément bornées en l , cette sous-suite admet elle-même une sous-suite faible- \star convergente vers $g \in (\mathcal{M}_b(\Omega^*))^m$. Quel que soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega^*)$, $\langle Dv_l, \varphi \rangle = \langle v_l, \operatorname{div} \varphi \rangle$. Par passage à la limite, on en déduit $\langle g, \varphi \rangle = \langle v, \operatorname{div} \varphi \rangle$, et par définition de la dérivée au sens des distributions, on en déduit $g = Dv$. D'où $v \in BV(\Omega^*)$. De plus, la restriction de v_l à $\Omega^* \setminus \overline{\Omega}$ est la suite nulle dans $BV(\Omega^* \setminus \overline{\Omega})$ qui converge fortement dans $L^1(\Omega^* \setminus \overline{\Omega})$ vers $v = 0$. Par semi-continuité inférieure de J_{0,Ω^*} par rapport à la topologie $L^1(\Omega^*)$, on en déduit

$$J_{0,\overline{\Omega}}(v) = J_{0,\Omega^*}(v) \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} J_{0,\Omega^*}(v_l) = \liminf_{l \rightarrow \infty} J_{0,\overline{\Omega}}(v_l) = 0.$$

Alors $Dv = 0$ sur $\Omega \iff v = \gamma = \text{cte p.p. sur } \Omega$. Comme la trace extérieure v^+ de v est nulle sur $\partial\Omega$,

$$\begin{aligned} 0 &= J_{0,\overline{\Omega}}(v) = \int_{\partial\Omega} |\gamma| = |\gamma| \cdot H_{m-1}(\partial\Omega) \\ \Rightarrow \gamma &= 0. \end{aligned}$$

D'où $v = 0$ p.p., ce qui contredit l'hypothèse $|v|_1 = 1$. □

La semi-norme $J_{0,\overline{\Omega}}$ définit ainsi une norme sur $BV_0(\overline{\Omega})$. On en déduit la coercivité de $J_{0,\overline{\Omega}}$ sur $BV_0(\overline{\Omega})$. De plus, sur $BV_0(\overline{\Omega})$, cette norme est équivalente à la norme $BV(\Omega^*)$.

De ces propriétés, on déduit l'existence d'une solution au problème pénalisé dans $BV_0(\overline{D}) \cap K$, avec K convexe fermé borné dans $L^\infty(\Omega^*)$, et Ω^* un ouvert borné contenant D .

Théorème 4.5.2 *La fonctionnelle*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 : BV_0(\overline{D}) \cap K &\Leftrightarrow \mathbb{R} \\ \delta n &\Leftrightarrow |F'(\tilde{n})\delta n \Leftrightarrow (g \Leftrightarrow F(\tilde{n}))|_{L^2(\Sigma \times S^{m-1})}^2 + \alpha J_{0,\overline{D}}(\delta n) \\ &= \mathcal{F}(\delta n) + \alpha J_{0,\overline{D}}(\delta n) \end{aligned}$$

avec $\alpha > 0$ fixé admet au moins un minimum dans $BV_0(\overline{D}) \cap K$.

Démonstration : Soit $(\delta n_l)_{l \in \mathbb{N}}$ une suite minimisante de \mathcal{F}_0 dans $BV_0(\overline{D}) \cap K$, $\lim_{l \rightarrow \infty} \mathcal{F}_0(\delta n_l) = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}^+$. Par positivité de \mathcal{F} et par coercivité de $J_{0,\overline{D}}$, la suite δn_l est bornée dans $BV_0(\overline{D})$, et son prolongement par zéro à Ω^* l'est donc dans $BV(\Omega^*)$. L'injection de $BV(\Omega^*)$ dans $L^1(\Omega^*)$ étant compacte ([2], théorème 2.5), la suite δn_l admet une sous-suite (que l'on note aussi δn_l) qui converge vers une limite δn^* dans $L^1(\Omega^*)$ fort et dans $L^\infty(\Omega^*)$ faible-*. La fonctionnelle $J_{0,\overline{D}}$ étant fortement s.c.i. pour la topologie L^1 , on en déduit

$$J_{0,\overline{D}}(\delta n^*) \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} J_{0,\overline{D}}(\delta n_l).$$

L'opérateur

$$\begin{aligned} F'(\tilde{n}) : L^\infty(\Omega^*) &\Leftrightarrow L^2(\Sigma \times S^{m-1}) \\ \delta n_l &\Leftrightarrow F'(\tilde{n})\delta n_l \end{aligned}$$

est compact. On en déduit que $\lim_{l \rightarrow \infty} F'(\tilde{n})\delta n_l = F'(\tilde{n})\delta n^*$ dans $L^2(\Sigma \times S^{m-1})$. L'opérateur

$$h \in L^2(\Sigma \times S^{m-1}) \Leftrightarrow |h \Leftrightarrow (g \Leftrightarrow F(\tilde{n}))|_{L^2(\Sigma \times S^{m-1})}^2$$

est continu, et par conséquent $\lim_{l \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\delta n_l) = \mathcal{F}(\delta n^*)$. Ainsi,

$$\mathcal{F}_0(\delta n^*) \leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \mathcal{F}_0(\delta n_l) = \mu.$$

La fonctionnelle \mathcal{F}_0 atteint donc un minimum fini en δn^* . D'où le résultat. \square

4.6 Un résultat d'unicité d'une itérée de Gauss-Newton en dimension finie.

Si une pénalisation par la semi-norme $J_{0,\overline{\Omega}}$ permet en théorie de régulariser le problème en amortissant les oscillations de la solution, sa non-différentiabilité en zéro, même discrétisée en dimension finie, ne permet pas de l'exploiter numériquement. En pratique, la pénalisation s'effectue à l'aide d'une régularisation de cette semi-norme palliant le défaut de différentiabilité une fois discrétisée. Parmi les

régularisations possibles, celles remplaçant la variation totale par une fonction convexe de la mesure, et en particulier celles du type

$$\int_{\overline{\Omega}} \sqrt{|Du|^2 + \beta} dx \text{ si } u \in W_0^{1,1}(\overline{\Omega}),$$

avec $\beta > 0$, ont été beaucoup étudiées ([2], [3], [22]). Cette fonctionnelle est étendue pour $u \in \text{BV}_0(\overline{\Omega})$ par

$$\int_{\overline{\Omega}} \sqrt{|Du_a|^2 + \beta} dx + |Du_s|(\overline{\Omega}).$$

Notons que ces régularisations n'agissent en fait que sur la partie régulière de la fonctionnelle $J_{0,\overline{\Omega}}$, la partie singulière restant non-différentiable en zéro. Plutôt que de considérer une régularisation de la semi-norme BV que l'on discrétise ensuite, on se propose de décrire cette semi-norme de manière discrète dans un sous-espace de dimension finie de $\text{BV}_0(\overline{\Omega})$, puis d'en considérer une régularisation de sorte que la fonctionnelle ainsi régularisée soit différentiable. On démontre ensuite la stricte convexité de la fonctionnelle régularisée sur les sous-espaces considérés, ce qui permet de déduire l'unicité de chaque itération de l'algorithme de Gauss-Newton ainsi discrétisé.

4.6.1 Choix de l'espace de discrétisation.

L'inconnue $n(x)$ est l'indice de réfraction d'un obstacle dont on connaît le support D ; physiquement, c'est une fonction constante par morceaux, égale à 1 en dehors de D . On choisit d'approcher cet indice par une combinaison linéaire de fonctions indicatrices des éléments d'un maillage du support D de $\lambda(x) = 1 \Leftrightarrow n(x)$. Soient T_1, \dots, T_N ces éléments, et Φ_1, \dots, Φ_N les fonctions de base associées, telles que Φ_i soit constante et égale à 1 sur l'élément T_i , et nulle sur T_j , $j \neq i$. On note \mathcal{T} l'ensemble des éléments $(T_j)_{j=1,N}$, et $\partial\mathcal{T} = \{S_l, l = 1, \dots, p\}$ l'ensemble des frontières de ces éléments, comptées une seule fois.

On désigne par $\text{BV}_{0,\mathcal{T}}(D)$ l'espace engendré par la base (Φ_1, \dots, Φ_N) . Ainsi, toute fonction $\eta(x)$ de l'espace $\text{BV}_{0,\mathcal{T}}(D)$ s'écrit $\eta(x) = \sum_{j=1}^N \eta^j \Phi_j$. Rechercher λ dans $\text{BV}_{0,\mathcal{T}}(D)$ revient par conséquent à rechercher $\lambda(x)$ sous la forme $\sum_{j=1}^N \lambda^j \Phi_j$, c'est à dire à identifier les paramètres λ^j , $j = 1, \dots, N$.

L'espace $\text{BV}_{0,\mathcal{T}}(D)$ est un sous-espace de $\text{BV}_0(D)$. On le munit de la semi-norme $J_{0,D}$. Pour $\lambda(x) = \sum_{j=1}^N \lambda^j \Phi_j \in \text{BV}_{0,\mathcal{T}}(D)$, $J_{0,D}(\lambda)$ s'exprime sous la forme

$$\begin{aligned} J_{0,D}(\lambda) &= |D\lambda|(D) \\ &= \int_D |D\lambda_a| dx + |D\lambda_s|(D), \\ &= |D\lambda_s(D)|, \text{ car } D\lambda_a \equiv 0 \text{ sur } D, \\ &= \int_{\partial\mathcal{T}} |[\lambda]| = |[\lambda]| \cdot H_{m-1}(\partial\mathcal{T}), \\ &= \sum_{l=1}^p \rho_l |[\lambda]_l|, \end{aligned}$$

où $[\lambda] = \lambda_+ \Leftrightarrow \lambda_- \in \mathbb{C}$ désigne le saut de la fonction $\lambda(x)$ sur la surface de discontinuité éventuelle $\partial\mathcal{T}$ suivant une normale orientée prédéfinie. On désigne par $[\lambda]_l$ la valeur de ce saut sur la frontière S_l de mesure ρ_l , cette valeur étant constante sur chaque frontière S_l , $l = 1, \dots, p$. La normale est orientée vers l'extérieur de D sur $\partial\mathcal{T} \cap \partial D$, ce qui donne $\lambda_+ = 0$ sur ce sous-ensemble de $\partial\mathcal{T}$.

La semi-norme $J_{0,D}$ restreinte au sous-espace de dimension finie $\text{BV}_{0,\mathcal{T}}(D)$ reste bien entendu non différentiable. On présente, dans le paragraphe suivant, une régularisation différentiable de cette semi-norme.

4.6.2 Une régularisation de la semi-norme $J_{0,D}$ sur le sous-espace $\text{BV}_{0,\mathcal{T}}(D)$.

Dans le sous-espace $\text{BV}_{0,\mathcal{T}}(D)$, la non-différentiabilité en zéro de la fonction module implique la non-différentiabilité de la semi-norme $J_{0,D}$. C'est en remplaçant le module par une régularisée de celui-ci que l'on introduit une fonctionnelle différentiable dont on montre ensuite l'uniforme équivalence avec $J_{0,D}$. Soit γ une constante strictement positive. La fonction

$$f_\gamma : \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \mathbb{R} \\ x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + \gamma}$$

est strictement convexe, continue, croissante, dérivable sur \mathbb{R}^+ . Pour tout x , elle vérifie

$$|x| \leq f_\gamma(x) \leq |x| + \sqrt{\gamma}. \quad (4.36)$$

Soit β une constante strictement positive fixée. On pose

$$J_{\beta,D}(\lambda) = \sum_{l=1}^p \rho_l \sqrt{||[\lambda]_l|^2 + \frac{\beta}{(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'})^2}}.$$

Proposition 4.6.1 (*propriétés de $J_{\beta,D}$*)

(i) Pour toute triangulation \mathcal{T} de D , pour tout $\lambda \in \text{BV}_{0,\mathcal{T}}(D)$, la fonctionnelle $J_{\beta,D}$ vérifie

$$J_{0,D}(\lambda) \leq J_{\beta,D}(\lambda) \leq J_{0,D}(\lambda) + \sqrt{\beta}.$$

(ii) La fonctionnelle $J_{\beta,D}$ est différentiable et strictement convexe.

Démonstration : (i) En appliquant l'estimation (4.36) pour $|x| = ||[\lambda]_l|$ et $\gamma = \frac{\sqrt{\beta}}{\sum_{l'=1}^p \rho_{l'}}$,

$$||[\lambda]_l| \leq \sqrt{||[\lambda]_l|^2 + \frac{\beta}{(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'})^2}} \leq ||[\lambda]_l| + \frac{\sqrt{\beta}}{\sum_{l'=1}^p \rho_{l'}},$$

soit en sommant sur tous les l ,

$$J_{0,D}(\lambda) \leq J_{\beta,D}(\lambda) \leq J_{0,D}(\lambda) + \sum_{l=1}^p \rho_l \frac{\sqrt{\beta}}{\sum_{l'=1}^p \rho_{l'}} = J_{0,D}(\lambda) + \sqrt{\beta}.$$

On en déduit la coercivité de la fonctionnelle $J_{\beta,D}$.

(ii) Calculons la différentielle seconde de $J_{\beta,D}$ en un point $\lambda \in \mathbb{C}^N$:

$$J'_{\beta,D}(\lambda, \xi) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^p \rho_l \left(\frac{(\lambda_+^l \Leftrightarrow \lambda_-^l)}{\sqrt{|\lambda_l|^2 + \frac{\beta}{(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'})^2}}} \overline{\xi_+^l \Leftrightarrow \xi_-^l} + \frac{\overline{\lambda_+^l \Leftrightarrow \lambda_-^l}}{\sqrt{|\lambda_l|^2 + \frac{\beta}{(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'})^2}}} (\xi_+^l \Leftrightarrow \xi_-^l) \right),$$

et

$$J''_{\beta,D}(\lambda, \xi, \xi) = \sum_{l=1}^p \rho_l \left(H_l(\lambda) \begin{pmatrix} \xi_+^l \\ \xi_-^l \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} \xi_+^l \\ \xi_-^l \end{pmatrix}} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \frac{\left((\lambda_+^l \Leftrightarrow \lambda_-^l) \overline{\xi_+^l \Leftrightarrow \xi_-^l} \Leftrightarrow (\xi_+^l \Leftrightarrow \xi_-^l) \overline{\lambda_+^l \Leftrightarrow \lambda_-^l} \right)^2}{\left(|\lambda_l|^2 + \frac{\beta}{(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'})^2} \right)^{3/2}} \right),$$

avec

$$H_l(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\left(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'} \right)^2 \left(|\lambda_l|^2 + \frac{\beta}{(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'})^2} \right)^{3/2}} & \Leftrightarrow \frac{\beta}{\left(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'} \right)^2 \left(|\lambda_l|^2 + \frac{\beta}{(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'})^2} \right)^{3/2}} \\ \Leftrightarrow \frac{\beta}{\left(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'} \right)^2 \left(|\lambda_l|^2 + \frac{\beta}{(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'})^2} \right)^{3/2}} & \frac{\beta}{\left(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'} \right)^2 \left(|\lambda_l|^2 + \frac{\beta}{(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'})^2} \right)^{3/2}} \end{pmatrix},$$

soit

$$J''_{\beta,D}(\lambda, \xi, \xi) = \sum_{l=1}^p \rho_l \frac{\beta |\xi_+^l \Leftrightarrow \xi_-^l|^2 + \left(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'} \right)^2 \left(\text{Im} \left(\overline{\lambda_+^l \Leftrightarrow \lambda_-^l} (\xi_+^l \Leftrightarrow \xi_-^l) \right) \right)^2}{\left(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'} \right)^2 \left(|\lambda_l|^2 + \frac{\beta}{(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'})^2} \right)^{3/2}}.$$

Si $J''_{\beta,D}(\lambda, \xi, \xi) = 0$, alors $\xi_+^l = \xi_-^l = \kappa \in \mathbb{C}$ constante pour tout l . Or $\xi_+^l = 0$ si $S_l \in \partial\mathcal{T} \cap \partial D$. D'où $\kappa = 0$, et la fonction ξ est par conséquent nulle sur D . D'où la stricte convexité. \square

On peut noter qu'une pénalisation par une fonctionnelle définie sur les espaces BV a déjà été utilisée avec succès par P.M. van den Berg and R.E. Kleinman [5] dans leur algorithme de gradient conjugué, pour la recherche d'indices de réfraction dans un espace de fonctions continues. Sur l'espace $\text{BV}_{0,\mathcal{T}}(D)$, cette pénalisation correspond à la semi-norme BV non-régularisée. Elle n'est de ce fait ni strictement convexe (cf [2] pour un contre-exemple), ni différentiable en zéro.

Le résultat de stricte convexité de la fonctionnelle $J_{\beta,D}$ sur le sous-espace $\text{BV}_{0,\mathcal{T}}(D)$ nous permet de déduire l'existence et l'unicité d'une itérée de la méthode de Gauss-Newton ainsi régularisée.

Théorème 4.6.2 *Pour tout $\tilde{n} \in BV_{0,\mathcal{T}}(D)$, pour tout $\alpha > 0$ fixé, la fonctionnelle*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\beta,\mathcal{T}} : BV_{0,\mathcal{T}}(D) &\Leftrightarrow \mathbb{R} \\ \delta n &\Leftrightarrow |F'(\tilde{n})\delta n \Leftrightarrow (g \Leftrightarrow F(\tilde{n}))|_{L^2(\Sigma \times S^{m-1})}^2 + \alpha J_{\beta,D}(\delta n) \\ &= \mathcal{F}(\delta n) + \alpha J_{\beta,D}(\delta n) \end{aligned}$$

admet un minimum unique dans $BV_{0,\mathcal{T}}(D)$.

Démonstration : La fonctionnelle $\mathcal{F}_{\beta,\mathcal{T}}$ est continue, coercive et strictement convexe, en tant que somme d'une fonctionnelle convexe continue et d'une fonctionnelle strictement convexe, coercive et continue. D'où le résultat d'existence et unicité d'un minimum sur $BV_{0,\mathcal{T}}(D)$. \square

Le but du paragraphe suivant est de présenter l'algorithme de résolution utilisé pour résoudre le problème inverse à partir de données discrètes. Nous détaillons également quelques astuces de programmation basées sur des principes théoriques qui permettent de diminuer les temps de calcul sur ordinateur. Dans toute la suite de ce chapitre, on pose la dimension d'espace m égale à deux, ce qui correspond au cas traité numériquement. Le cas $m = 3$ peut néanmoins être traité de la même manière. Il est alors indispensable de disposer d'un solveur efficace des problèmes directs en $3D$, afin d'évaluer de manière précise les opérateurs F et F' en un point \tilde{n} fixé de $BV_{0,\mathcal{T}}(D)$.

4.7 Traitement de données discrètes - Algorithme de résolution.

Qu'elle soit obtenue à partir de mesures physiques ou de manière synthétique, c'est à dire par le biais de résolutions approchées de problèmes directs, la donnée g du problème (4.3) est remplacée par une donnée appartenant à un sous-espace de dimension finie de $L^2(\Sigma \times S^1)$. La frontière Σ est discrétisée par l'ensemble des éléments linéiques $\{S_r, r = 1, N_\Sigma\}$, de sommets $M_{j_{som}}$, pour j_{som} variant de 1 à N_{som} . Soit V_Σ le sous-espace de $L^2(\Sigma)$ dont une base est l'ensemble des fonctions $(\sigma_{j_{som}})_{j_{som}=1, N_{som}}$, telles que $\sigma_{j_{som}}$ soit la fonction de base éléments finis P_1 associée au sommet $M_{j_{som}}$. Soit $(\theta_s, s = 1, N_{inc})$ un ensemble fini de directions de S^1 . A la direction incidente θ_s , correspondant au champ incident $u^{inc,s} = e^{ikx \cdot \theta_s}$, on associe la donnée $g^s = g(\theta_s) = \sum_{j_{som}=1}^{N_{som}} g_{j_{som}}(\theta_s) \sigma_{j_{som}}$ de V_Σ . La donnée

g appartient par conséquent à l'espace $V_g = (V_\Sigma)^{N_{inc}}$. Dans la suite de ce paragraphe, on confond, pour une incidence θ_s fixée, la donnée g^s et le vecteur $(g_{j_{som}}(\theta_s))_{j_{som}=1, N_{som}}$ de ses composantes dans la base $(\sigma_{j_{som}})_{j_{som}=1, N_{som}}$.

L'algorithme de Gauss-Newton régularisé en dimension finie.

Soit $\tilde{n} \in BV_{0,\mathcal{T}}(D)$ fixé. Effectuer une itération de la méthode de Gauss-Newton pénalisée par la fonction $J_{\beta,D}(\delta n)$ consiste à minimiser la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\beta,\mathcal{T}} : BV_{0,\mathcal{T}}(D) &\Leftrightarrow \mathbb{R} \\ \delta n &\Leftrightarrow |F'(\tilde{n})\delta n \Leftrightarrow (g \Leftrightarrow F(\tilde{n}))|_{L^2(\Sigma \times S^{m-1})}^2 + \alpha J_{\beta,D}(\delta n) \\ &= \mathcal{F}(\delta n) + \alpha J_{\beta,D}(\delta n). \end{aligned}$$

Dans le cadre d'un calcul numérique sur ordinateur, les fonctionnelles F et F' sont approximées par des fonctionnelles à valeurs dans un sous-espace de dimension finie W de $L^2(\Sigma \times S^{m-1})$. De manière à ne pas alourdir les notations, on choisit d'approximer les opérateurs F et F' par des opérateurs à valeurs dans l'espace V_g des données discrètes. Si ce n'était pas le cas, il serait nécessaire d'interpoler ces données dans l'espace W . Soient donc les opérateurs

$$F_{V_g} : \mathbf{BV}_{0,\mathcal{T}}(D) \begin{array}{l} \Leftrightarrow V_g \\ \tilde{n} \Leftrightarrow F_{V_g}(\tilde{n}), \end{array}$$

et

$$F'_{V_g} : \mathbf{BV}_{0,\mathcal{T}}(D) \begin{array}{l} \Leftrightarrow \mathcal{L}(L^\infty(D); V_g) \\ \tilde{n} \Leftrightarrow F'_{V_g}(\tilde{n}). \end{array}$$

La fonctionnelle que l'on minimise lors d'une étape de l'algorithme de Gauss-Newton est alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\beta,\mathcal{T},V_g}(\delta n) &= \left| F'_{V_g}(\tilde{n})\delta n \Leftrightarrow (g \Leftrightarrow F_{V_g}(\tilde{n})) \right|_{L^2(\Sigma \times S^{m-1})}^2 + \alpha J_{\beta,D}(\delta n) \\ &= \mathcal{F}_{V_g}(\delta n) + \alpha J_{\beta,D}(\delta n) \\ &= \sum_{s=1}^{N_{inc}} \left| F_{V_g}^s(\tilde{n})\delta n \Leftrightarrow (g^s \Leftrightarrow F_{V_g}^s(\tilde{n})) \right|_{L^2(\Sigma)}^2 + \alpha \sum_{l=1}^p \rho_l \sqrt{|\delta n|_l^2 + \frac{\beta}{(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'})^2}}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

4.7.1 Résolution des problèmes directs pour l'évaluation de $\mathcal{F}_{V_g}(\delta n)$.

Les quantités $F_{V_g}^s(\tilde{n})$ et $F_{V_g}^s(\tilde{n})'$ sont évaluées en prenant les traces sur Σ des solutions approchées des problèmes

$$\begin{cases} \Delta u(\tilde{n}, \theta_s) + k^2 \tilde{n}(x)u(\tilde{n}, \theta_s) = k^2(1 \Leftrightarrow \tilde{n})u^{inc}(\theta_s) \text{ dans } \mathbb{R}^2, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u(\tilde{n}, \theta_s)}{\partial r} \Leftrightarrow iku_j(\tilde{n}, \theta_s) \right) = 0, \end{cases} \quad (4.38)$$

et

$$\begin{cases} \Delta u_j(\tilde{n}, \theta_s) + k^2 \tilde{n}(x)u_j(\tilde{n}, \theta_s) = \Leftrightarrow k^2 \Phi_j(u^{inc}(\theta_s) + u(\tilde{n}, \theta_s)) \text{ dans } \mathbb{R}^2, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u_j(\tilde{n}, \theta_s)}{\partial r} \Leftrightarrow iku_j(\tilde{n}, \theta_s) \right) = 0, \text{ pour } j = 1, N, \end{cases} \quad (4.39)$$

que l'on résout à l'aide du code éléments finis P_1 décrit dans le chapitre 3. On rappelle que ce code concerne la résolution approchée de l'équation de Helmholtz couplée aux PML de Bérenger. La condition de radiation de Sommerfeld est remplacée par une condition de Robin adaptée aux PML sur le bord Γ_b d'un domaine borné $\Omega_b = \{X \in \mathbb{R}^2; |X| < b\}$, contenant l'obstacle ainsi que la frontière Σ . Pour $\rho < b$, on introduit un paramètre réel d'amortissement PML de la forme $\sigma = \sigma(r)$, $\sigma(r) = 0$ si

$r < \rho$, et $\sigma(r) > 0$ si $r > \rho$. On suppose $\Sigma \subset \Omega_\rho = \{X \in \mathbb{R}^2; |X| < \rho\}$. L'équation de Helmholtz-PML dans Ω_b correspondant à l'équation de Helmholtz pour un obstacle diélectrique parfait d'indice de réfraction \tilde{n} et un second membre f de support inclus dans Ω_ρ est

$$\begin{cases} \beta \tilde{\beta} k^2 \tilde{n} u^B + \nabla \cdot (A \nabla u^B) = f \text{ dans } \Omega_b, \\ \frac{\partial u^B}{\partial r} \Leftrightarrow i k \beta u^B = 0 \text{ sur } \Gamma_b, \end{cases} \quad (4.40)$$

où

$$A(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{\beta}}{\beta} \cos^2(\theta) + \frac{\beta}{\tilde{\beta}} \sin^2(\theta) & \left(\frac{\tilde{\beta}}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\tilde{\beta}} \right) \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \left(\frac{\tilde{\beta}}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\tilde{\beta}} \right) \cos(\theta) \sin(\theta) & \frac{\tilde{\beta}}{\beta} \sin^2(\theta) + \frac{\beta}{\tilde{\beta}} \cos^2(\theta) \end{pmatrix},$$

$$\beta = 1 + \frac{i\sigma}{k}, \tilde{\beta} = 1 + \frac{i\tilde{\sigma}}{k}, \text{ avec } \tilde{\sigma} = \frac{1}{r} \int_\rho^r \sigma(s) ds \text{ si } r \geq \rho, \text{ et } \tilde{\sigma} = 0 \text{ si } r < \rho.$$

Lors d'une étape de la méthode de Gauss-Newton, les calculs directs que l'on effectue consistent en une simple factorisation de la matrice creuse éléments finis correspondant à l'opérateur de Helmholtz-PML avec obstacle d'indice de réfraction \tilde{n} , et à des descentes-remontées. En effet, à \tilde{n} fixé, seuls les seconds membres des différents problèmes directs à résoudre varient.

En particulier, les approximations des seconds membres de l'équation (4.39) sont de la forme

$$\sum_{l=1}^3 c_j^{(l)}(\theta_s) \varphi_j^{(l)},$$

où $\varphi_j^{(l)}$ est la fonction P_1 associée au sommet local numéro l de l'élément T_j , et valant zéro en dehors de T_j . De manière à réduire le nombre de descentes-remontées, on utilise la linéarité des équations (4.39) en calculant les traces $\gamma_\Sigma(u_j(\tilde{n}, d_s))$ de leurs solutions $u_j(\tilde{n}, d_s)$ à l'aide des combinaisons linéaires

$$\sum_{l=1}^3 c_j^{(l)}(\theta_s) \gamma_\Sigma(u_j^{(l)}(\tilde{n})),$$

avec $u_j^{(l)}(\tilde{n})$ solution de :

$$\begin{cases} \beta \tilde{\beta} k^2 \tilde{n} u_j^{(l)}(\tilde{n}) + \nabla \cdot (A \nabla u_j^{(l)}(\tilde{n})) = \varphi_j^{(l)} \text{ dans } \Omega_b, \\ \frac{\partial u_j^{(l)}(\tilde{n})}{\partial r} \Leftrightarrow i k \beta u_j^{(l)}(\tilde{n}) = 0 \text{ sur } \Gamma_b. \end{cases} \quad (4.41)$$

Cette astuce permet de réduire le nombre de descentes-remontées de $N_{inc} \times N$ à $3 \times N$ pour évaluer l'opérateur F' .

Le terme de pénalisation $\alpha J_{\beta, D}$ de la fonctionnelle $\mathcal{F}_{\beta, \mathcal{T}, V_g}$ n'étant pas quadratique, la condition d'optimalité vérifiée par le minimum de cette fonctionnelle n'est pas linéaire. C'est pourquoi on résout l'équation non-linéaire correspondante par une méthode de Newton simplifiée. Dans le paragraphe suivant, on détaille brièvement cette méthode appliquée au problème de la minimisation de $\mathcal{F}_{\beta, \mathcal{T}, V_g}$.

4.7.2 Résolution d'une étape de Gauss-Newton régularisée par une méthode de Newton simplifiée.

Pour une valeur de \tilde{n} fixée dans $\text{BV}_{0,\mathcal{T}}(D)$, par un calcul analogue à celui de la preuve de la Proposition 4.2.1, on peut montrer que le minimum $\widehat{\delta n}$ de la fonctionnelle $\mathcal{F}_{\beta,\mathcal{T},V_g}$ vérifie la condition d'optimalité

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\beta,\mathcal{T},V_g}(\widehat{\delta n}) &= \sum_{s=1}^{N_{inc}} \left(\left(F_{V_g}^s \prime(\tilde{n}) \right)^* F_{V_g}^s \prime(\tilde{n}) \widehat{\delta n} \Leftrightarrow \left(F_{V_g}^s \prime(\tilde{n}) \right)^* \left(g^s \Leftrightarrow F_{V_g}^s(\tilde{n}) \right) \right) + \alpha \mathcal{R}^* \mathcal{J}_{\beta,D}(\widehat{\delta n}) \\ &= 0 \text{ dans } \mathbb{C}^N, \end{aligned}$$

où l'opérateur

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \text{BV}_{0,\mathcal{T}}(D) &\Leftrightarrow \mathbb{C}^p \\ \delta n &\Leftrightarrow [\delta n] = \delta n_+ \Leftrightarrow \delta n_- \end{aligned}$$

associe à un indice de $\text{BV}_{0,\mathcal{T}}(D)$ les valeurs de ses sauts sur les frontières orientées des éléments de \mathcal{T} . L'opérateur $\mathcal{J}_{\beta,D}(\cdot)$ est quant à lui défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\beta,D} : \text{BV}_{0,\mathcal{T}}(D) &\Leftrightarrow \mathbb{C}^p \\ \delta n &\Leftrightarrow \mathcal{J}_{\beta,D}(\delta n) = \left(\begin{array}{c} \rho_l \frac{[\delta n]_l}{\sqrt{|\delta n]_l|^2 + \frac{\beta}{(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'})^2}}} \end{array} \right)_{1 \leq l \leq p}. \end{aligned}$$

Le terme de pénalisation $\mathcal{R}^* \mathcal{J}_{\beta,D}(\delta n)$ est non-linéaire en δn . On choisit de rechercher le minimum de la fonctionnelle $\mathcal{F}_{\beta,\mathcal{T},V_g}$, c'est à dire le zéro de $\mathcal{K}_{\beta,\mathcal{T},V_g}$, à l'aide d'une méthode de type Newton simplifiée. Avant de présenter cette méthode, on présente la méthode de Newton exacte appliquée à ce problème, ce qui permet de mettre en évidence les difficultés d'implémentation que génère son application.

La méthode de Newton.

L'application de la méthode de Newton au problème de la minimisation de la fonctionnelle $\mathcal{F}_{\beta,\mathcal{T},V_g}$ consiste à construire une suite $(\delta n_p)_p$ de $\text{BV}_{0,\mathcal{T}}(D)$. Connaissant δn_p , le point δn_{p+1} est déterminé de la façon suivante : le développement de Taylor d'ordre un de $\mathcal{K}_{\beta,\mathcal{T},V_g}$ en δn_p est

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\beta,\mathcal{T},V_g}(\delta n) &= \mathcal{K}_{\beta,\mathcal{T},V_g}(\delta n_p) + \mathcal{K}'_{\beta,\mathcal{T},V_g}(\delta n_p, \delta n \Leftrightarrow \delta n_p) + |\delta n \Leftrightarrow \delta n_p| \varepsilon(\delta n \Leftrightarrow \delta n_p), \\ \text{avec } \lim_{|\delta n| \rightarrow 0} |\varepsilon(\delta n)| &= 0, \end{aligned}$$

où $\mathcal{K}'_{\beta,\mathcal{T},V_g}(\delta n_p, \tau n)$ désigne la Gâteaux-différentielle de $\mathcal{K}_{\beta,\mathcal{T},V_g}$ au point δn_p dans la direction τn . Le calcul de $\mathcal{K}'_{\beta,\mathcal{T},V_g}(\delta n_p, \tau n)$ donne

$$\mathcal{K}'_{\beta,\mathcal{T},V_g}(\delta n_p, \tau n) = \sum_{s=1}^{N_{inc}} \left(F_{V_g}^s \prime(\tilde{n}) \right)^* F_{V_g}^s \prime(\tilde{n}) \tau n + \alpha \mathcal{R}^* \mathcal{J}'_{\beta,D}(\delta n_p, \tau n),$$

où l'opérateur $\mathcal{J}'_{\beta,D}(\delta n_p, \cdot)$ est défini par

$$\mathcal{J}'_{\beta,D}(\delta n_p, \cdot) : \mathbf{BV}_{0,\mathcal{T}}(D) \Leftrightarrow \mathbb{C}^p$$

$$\tau n \Leftrightarrow \left(\frac{\rho_l \left(\beta[\tau n]_l + \frac{1}{2} \left(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'} \right)^2 (|[\delta n_p]_l|^2 [\tau n]_l \Leftrightarrow [\delta n_p]_l^2 [\overline{\tau n}]_l) \right)}{\left(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'} \right)^2 \left(|[\delta n_p]_l|^2 + \frac{\beta}{\left(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'} \right)^2} \right)^{3/2}} \right)_{1 \leq l \leq p}.$$

L'opérateur $\mathcal{J}'_{\beta,D}(\delta n_p, \cdot)$ est la somme d'un opérateur linéaire et d'un opérateur sesquilinéaire. Cet opérateur n'est par conséquent pas linéaire sur l'espace $\mathbf{BV}_{0,\mathcal{T}}(D)$. Il est cependant linéaire par rapport aux parties réelles et imaginaires de la variable. De ce fait, si l'on souhaite résoudre numériquement l'équation $\mathcal{K}_{\beta,\mathcal{T},V_g}(\widehat{\delta n}) = 0$ par la méthode de Newton, il est nécessaire de découpler le système de N équations complexes en un système de $2N$ équations réelles.

Plutôt que de programmer la méthode de Newton exacte, nous avons choisi de tester une méthode de Newton simplifiée, dans laquelle on approche l'opérateur $\mathcal{J}'_{\beta,D}(\delta n_p, \cdot)$ par un opérateur linéaire sur $\mathbf{BV}_{0,\mathcal{T}}(D)$.

Une méthode de Newton simplifiée.

De manière à éviter le découplage en $2N$ équations réelles du système obtenu par la méthode de Newton, nous avons approché l'opérateur $\mathcal{J}'_{\beta,D}(\delta n_p, \cdot)$, lequel n'est pas linéaire sur l'espace $\mathbf{BV}_{0,\mathcal{T}}(D)$, par l'opérateur linéaire défini par

$$\tilde{\mathcal{J}}_{\beta,D}(\delta n_p) : \mathbf{BV}_{0,\mathcal{T}}(D) \Leftrightarrow \mathbb{C}^p$$

$$\tau n \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{J}}_{\beta,D}(\delta n_p)\tau n = \left(\frac{\rho_l \beta [\tau n]_l}{\left(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'} \right)^2 \left(|[\delta n_p]_l|^2 + \frac{\beta}{\left(\sum_{l'=1}^p \rho_{l'} \right)^2} \right)^{3/2}} \right)_{1 \leq l \leq p}.$$

Cette simplification revient à approcher l'opérateur $\mathcal{K}'_{\beta,\mathcal{T},V_g}(\delta n_p, \cdot)$ par l'opérateur linéaire

$$\tilde{\mathcal{K}}_{\beta,\mathcal{T},V_g}(\delta n_p) = \sum_{s=1}^{N_{inc}} \left(F_{V_g}^s{}'(\tilde{n}) \right)^* F_{V_g}^s{}'(\tilde{n}) + \alpha \mathcal{R}^* \tilde{\mathcal{J}}_{\beta,D}(\delta n_p).$$

Dans l'algorithme de cette méthode de Newton simplifiée, on construit une suite $(\delta n_p)_p$ de $\mathbf{BV}_{0,\mathcal{T}}(D)$, dont les éléments sont calculés à l'aide de la relation de récurrence

$$\delta n_{p+1} = \delta n_p \Leftrightarrow \left(\tilde{\mathcal{K}}_{\beta,\mathcal{T},V_g}(\delta n_p) \right)^{-1} \mathcal{K}_{\beta,\mathcal{T},V_g}(\delta n_p).$$

L'élément δn_{p+1} de cette suite est par conséquent déterminé par la résolution du système linéaire complexe de dimension N

$$\tilde{\mathcal{K}}_{\beta, \mathcal{T}, V_g}(\delta n_p)(\delta n_p) \cdot \tau n_p = \Leftrightarrow \mathcal{K}_{\beta, \mathcal{T}, V_g}(\delta n_p),$$

avec $\tau n_p = \delta n_{p+1} \Leftrightarrow \delta n_p$, soit

$$\left(\sum_{s=1}^{N_{inc}} \left(F_{V_g}^s{}'(\tilde{n}) \right)^* F_{V_g}^s{}'(\tilde{n}) + \alpha \mathcal{R}^* \tilde{\mathcal{J}}_{\beta, D}(\delta n_p) \right) \tau n_p = \left(F_{V_g}^s{}'(\tilde{n}) \right)^* \left(g^s \Leftrightarrow F_{V_g}^s(\tilde{n}) \right) \Leftrightarrow \alpha \mathcal{R}^* \mathcal{J}_{\beta, D}(\delta n_p).$$

On peut remarquer que dans le cas de la recherche d'une variation $\widehat{\delta n}$ réelle (resp. imaginaire pure) de l'indice, les opérateurs $\mathcal{J}'_{\beta, D}(\delta n_p, \cdot)$ et $\tilde{\mathcal{J}}_{\beta, D}(\delta n_p)$ sont confondus sur le sous-espace des fonctions de partie imaginaire nulle (resp. de partie réelle nulle) de $BV_{0, \mathcal{T}}(D)$. C'est en partie la raison qui nous a amenés à considérer cette simplification de $\mathcal{J}'_{\beta, D}(\delta n_p, \cdot)$ plutôt qu'une autre.

Il faut également noter que la matrice normale $\sum_{s=1}^{N_{inc}} \left(F_{V_g}^s{}'(\tilde{n}) \right)^* F_{V_g}^s{}'(\tilde{n})$ de l'opérateur non-régularisé, ainsi que le second membre $\left(F_{V_g}^s{}'(\tilde{n}) \right)^* \left(g^s \Leftrightarrow F_{V_g}^s(\tilde{n}) \right)$, ne changent pas au cours des itérations d'une méthode de type Newton, sur une étape de Gauss-Newton à \tilde{n} fixé. Il suffit par conséquent de ne modifier que la partie correspondant à la régularisation par la fonctionnelle $J_{\beta, D}$, laquelle est rapide à calculer, puisqu'elle ne fait intervenir que les sauts de l'inconnue sur les arêtes de la zone discrétisée dont on recherche l'indice de réfraction.

Si la convergence de cette méthode de Newton simplifiée n'est pour l'instant pas justifiée sur le plan théorique, elle semble s'avérer rapide si l'on se fie aux résultats expérimentaux. En effet, pour les différents cas tests que l'on a étudié, cette convergence a toujours eu lieu, en moins de 10 itérations sur les premières étapes de la méthode de Gauss-Newton pour rapidement tendre vers une seule itération au fur et à mesure que l'algorithme converge.

Si comparée à une régularisation de Tychonov standard, la pénalisation du problème par la fonctionnelle non-linéaire $J_{\beta, D}$ accroît la complexité de l'algorithme de résolution, le gain obtenu en terme de stabilité et de convergence justifie pleinement son emploi. C'est ce que semblent montrer les résultats numériques que l'on présente dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

Validation de la méthode et tests numériques.

Ce dernier chapitre est consacré à l'étude des résultats obtenus pour la résolution du problème inverse par la méthode de Gauss-Newton, régularisée soit par Tychonov, en norme L^2 ou en semi-norme H^1 , soit par la fonctionnelle $J_{\beta,D}$, sur des cas tests significatifs. Ces cas tests, dont certains sont tirés ou adaptés de ceux qui ont été développés dans la littérature sur le sujet, présentent en effet une large palette de ce que l'on peut chercher à résoudre : recherche de l'indice sur une partie ou la totalité de l'obstacle, identification d'inhomogénéités de taille et de géométrie variables, avec un ordre du nombre d'inconnues complexes du problème variant 10 à 10^3 . A expérience fixée, on étudie, pour chaque type de régularisation, l'influence sur la solution d'un bruit dans les données. On peut ainsi montrer le gain de stabilité qu'apporte la régularisation par la fonctionnelle $J_{\beta,D}$ par rapport à une régularisation de Tychonov standard.

5.1 Premier cas test : l'hexagone

Le premier cas test que nous ayons traité consiste à déterminer l'indice de réfraction d'un obstacle hexagonal plongé dans le vide. Idéalement, il s'agit d'un objet homogène, d'indice adimensionné égal à 2. L'indice recherché comporte une valeur par élément de l'objet, soit 6 inconnues complexes. L'hexagone présente un défaut : son indice vaut 3 sur un élément. Partant du cas idéal homogène, c'est à dire $n = 2$ sur chaque élément, on cherche à détecter ce défaut à l'aide de la méthode de Gauss-Newton régularisée par Tychonov en norme L^2 , puis par la fonctionnelle $J_{\beta,D}$. Les données exactes sont obtenues par la résolution approchée de l'équation de Helmholtz-PML par éléments finis, pour 12 incidences équiréparties, et correspondent à des mesures effectuées sur la frontière turquoise (figure 5.1). Le nombre d'onde k adimensionné vaut 0.6, ce qui veut dire que la longueur d'onde caractéristique vaut environ 10 fois le pas de maillage (fixé à 1), soit 5 fois la taille de l'objet, délimité par la frontière rouge (figure 5.1).

Plusieurs résolutions ont été effectuées : d'abord à partir de données exactes, sans régularisation, et ensuite en introduisant sur ces données des bruits de 2, puis 10%. Les paramètres de pénalisation de chacun des problèmes bruités ont été déterminés, pour chaque type de régularisation, de manière empirique. Pour les données exactes, on retrouve exactement l'indice recherché (figure 5.2), l'erreur relative avec la solution exacte étant inférieure à 10^{-3} dès la troisième itération. Dans le cas des données

bruitées, à 2 ou 10%, les deux types de régularisation donnent des résultats en tous points comparables : ce constat s'explique par le faible nombre d'inconnues du problème, puisque dans ce cas il n'est presque pas utile de le régulariser, et les constantes de continuité liant la norme L^2 à la semi-norme BV sont proches de 1. Quel que soit le niveau de bruit, le défaut apparaît dès la première itération. Les méthodes convergent ensuite très nettement vers un résultat approché à partir de la troisième itération, les erreurs relatives avec la solution exacte étant au bout de six itérations de l'ordre de 10^{-2} dans le cas de données bruitées à 2% (figures 5.3 et 5.4), et de l'ordre de 10^{-1} pour les données bruitées à 10% (figures 5.5 et 5.6).

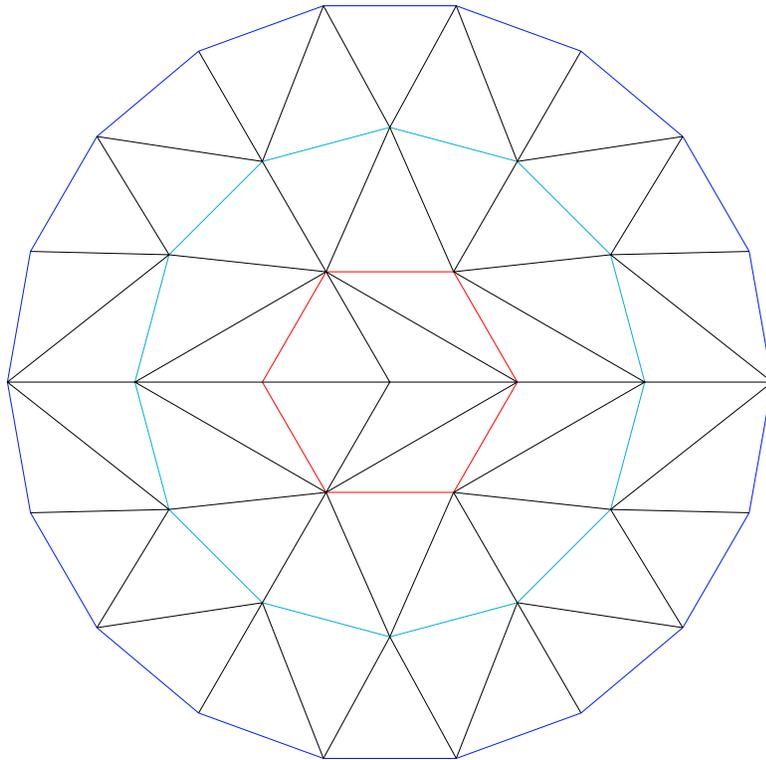


Figure 5.1: maillage du domaine de calcul

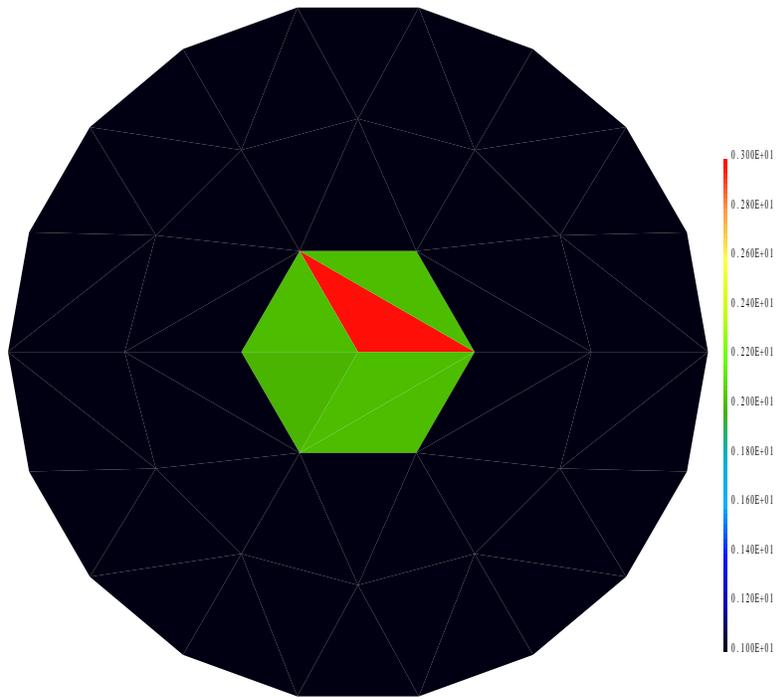


Figure 5.2: Partie réelle de l'indice à partir de données exactes après 6 itérations.

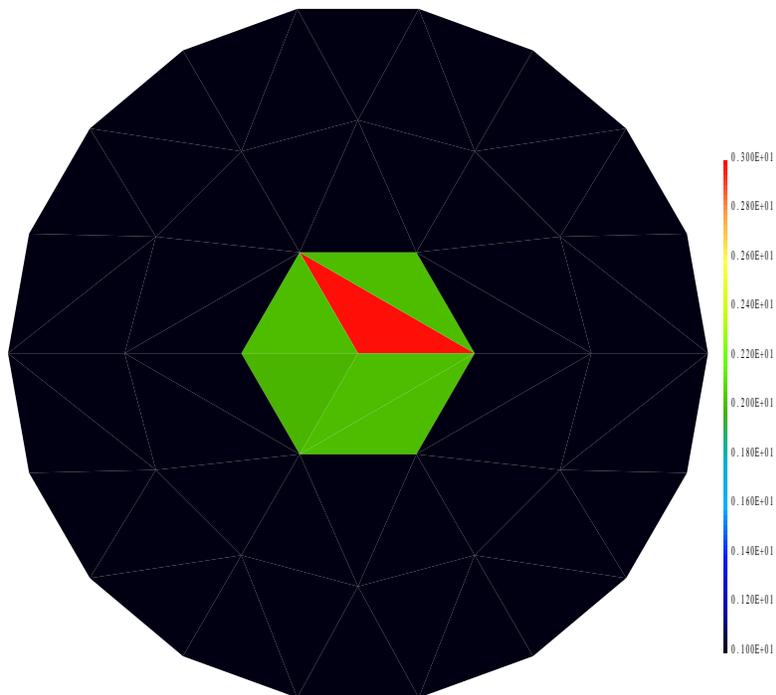


Figure 5.3: Partie réelle de l'indice avec régularisation L^2 à partir de données bruitées à 2% après 6 itérations, $\alpha = 10^{-6}$.

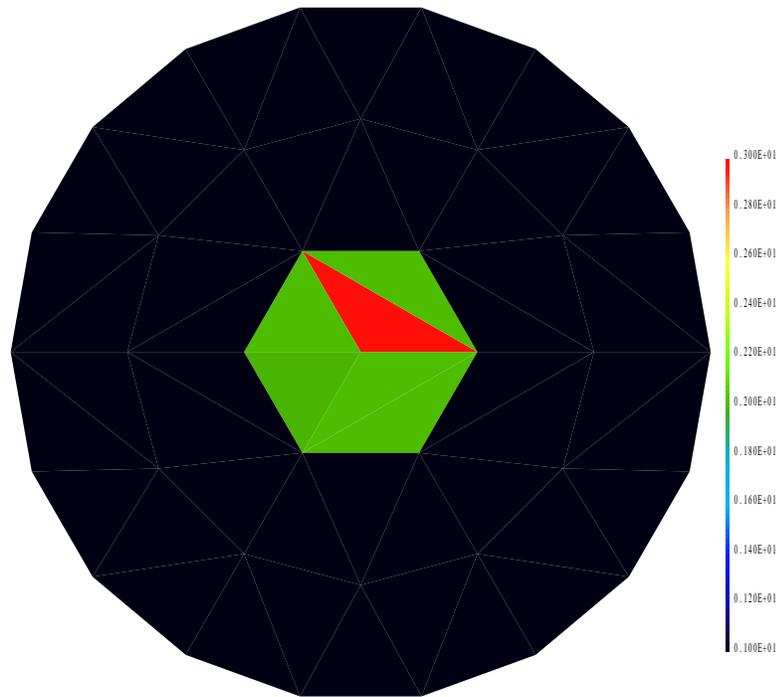


Figure 5.4: Partie réelle de l'indice avec régularisation BV à partir de données bruitées à 2% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-5}$.

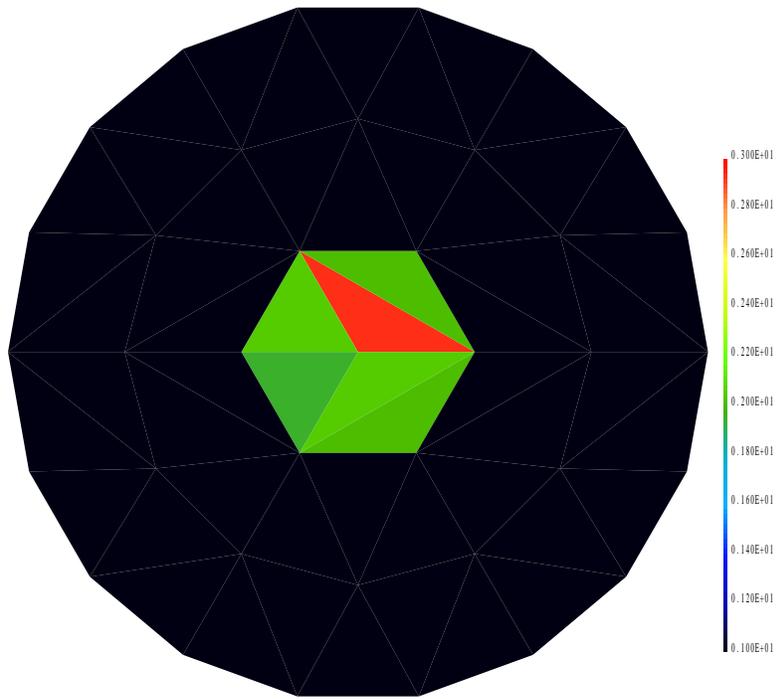


Figure 5.5: Partie réelle de l'indice avec régularisation L^2 à partir de données bruitées à 10% après 6 itérations, $\alpha = 10^{-5}$.

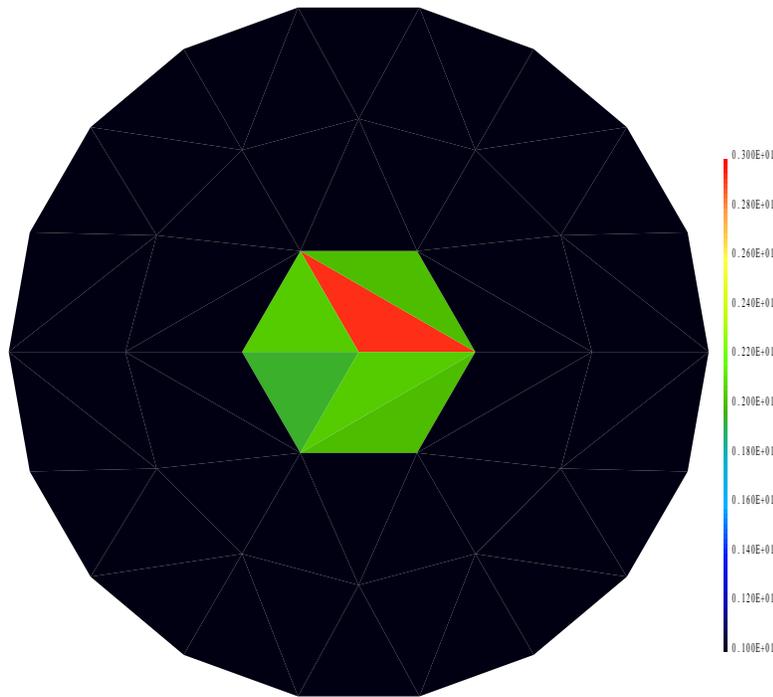


Figure 5.6: Partie réelle de l'indice avec régularisation BV à partir de données bruitées à 10% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-5}$.

5.2 Détermination de l'indice de réfraction de la moelle osseuse dans une section de jambe.

Une application de la résolution numérique de tels problèmes inverses est à terme de permettre le contrôle de l'évolution de la leucémie par des méthodes non-destructives grâce à des mesures de la diffraction autour d'une section de jambe. Cette série de tests est inspirée des expériences numériques publiées dans *Inverse Problems* en 94 et 95 par D. Colton et P. Monk [18] [19]. La motivation est la suivante : jusqu'à présent, les procédés médicaux permettant une telle évaluation s'avèrent lourds (ponctions multiples de moelle à l'intérieur de l'os), ou sinon incompatibles avec le traitement de la leucémie. En effet, pour que la moelle soit visible pour de hautes fréquences telles que les rayons X, il est nécessaire d'injecter à l'intérieur de l'os des produits qui s'avèrent contre-indiqués dans le cadre d'un traitement par chimiothérapie. Partant du fait que la densité cellulaire, ainsi que l'indice de réfraction de la moelle sont différents suivant que les cellules sont ou non dégénérées, on se propose d'adapter les méthodes de Gauss-Newton régularisées que nous avons développé à la détection et à la localisation de tels défauts dans la moelle osseuse.

L'expérience est la suivante : la jambe (modélisée par un cylindre) est plongée dans l'eau, et à l'aide de mesures du champ diffracté pour plusieurs incidences équiréparties, on recherche des modifications de l'indice de réfraction de la moelle osseuse, en initialisant la méthode aux valeurs des indices de réfraction correspondant à des cellules saines. Dans cette série de tests, on néglige le ca-

ractère dispersif des matériaux étudiés en supposant que leurs indices de réfraction ne varient pas avec la fréquence du champ incident. L'indice de la graisse, du muscle ainsi que de l'os est fixé à $0.7 + 0.4i$. L'indice de la moelle saine vaut $0.8 + 0.5i$, celui de la moelle atteinte $1.6 + 0.25i$, pour un indice de l'eau adimensionné à $1 + 0i$.

Les tests effectués sur cet exemple ont été partitionnés en trois séries : tout d'abord sur le maillage original (figure 5.7), pour lequel on cherche uniquement à déterminer l'indice de la moelle osseuse, soit 24 valeurs complexes, puis sur un maillage raffiné (figure 5.21), pour lequel l'indice de la moelle est discrétisé par 96 inconnues complexes. Enfin, on utilise de nouveau le maillage original dans une troisième série consacrée à la détermination de l'indice de réfraction de l'obstacle entier (c'est à dire toute la section de jambe), soit 186 inconnues complexes. Pour tous ces tests, les données exactes proviennent de la résolution du problème direct associé (c'est à dire sur le maillage utilisé) pour 8 incidences équiréparties, et sont effectuées sur la frontière turquoise de ces maillages.

5.2.1 Première série de tests : identification de 24 paramètres complexes.

Dans un premier temps, on cherche à détecter des défauts dans la moelle osseuse à partir de calculs effectués sur un maillage de pas 0.2, pour un nombre d'onde k fixé à 3, ce qui correspond à une longueur d'onde caractéristique d'environ 2. Les zones bleue (eau) et turquoise (ensemble muscle-graisse-os) de la figure 5.7 ont des indices constants, respectivement fixés à $1 + 0i$ et $0.7 + 0.4i$. L'indice de la moelle (zones vertes de la figure 5.7), soit l'inconnue du problème, est représenté par 24 valeurs complexes sur les éléments du maillage. Il est initialisé à la valeur de $0.8 + 0.5i$, laquelle correspond à l'indice de la moelle saine.

Trois types de défauts ont été étudiés : d'abord un assez gros défaut, de taille 0.4, représenté par six éléments (zone vert clair de la figure 5.7), puis un défaut de plus petite taille (deux éléments), et enfin un défaut non connexe de petite taille (trois éléments).

Pour le premier défaut, nous avons cherché à restituer l'indice de réfraction recherché à partir de données synthétiques exactes, puis à partir des mêmes données bruitées successivement à 2, 10 et 20%. Le cas non-bruité (figure 5.8) ne nécessite aucune régularisation, et l'indice est déterminé de manière très précise avec une convergence très rapide, puisque l'erreur relative avec la solution exacte devient inférieure à 10^{-3} dès la troisième itération. Dans le cas des données bruitées, les trois types de régularisation que nous avons étudié (L^2 , semi-norme H^1 et fonctionnelle $J_{\beta,D}$) ont été testés. Les paramètres de régularisation de chacun des problèmes ont été déterminés de manière empirique. Pour des bruits de 2 ou 10% (figures 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13 et 5.14), le défaut apparaît assez nettement sur la partie réelle dès la deuxième itération. Au bout de six itérations, chacune des méthodes a convergé ou s'est stationnarisée. Cependant, seule la régularisation par la fonctionnelle $J_{\beta,D}$ permet d'identifier le défaut sur sa partie imaginaire pour un bruit de 10% (figure 5.14). Pour un bruit de 20%, elle seule donne une solution convenable (figure 5.15), les deux autres méthodes ne permettant ni sur la partie réelle, ni sur la partie imaginaire d'identifier le défaut. Par conséquent, quel que soit le niveau de bruit, la régularisation par la fonctionnelle $J_{\beta,D}$ s'avère meilleure que la régularisation en semi-norme H^1 , laquelle donne tout de même de meilleurs résultats que la régularisation en norme L^2 pour la résolution de ce type de problème.

Pour le deuxième défaut, seule la régularisation par la fonctionnelle $J_{\beta,D}$ a été testée, en données

exactes (figure 5.16), puis avec 2% (figure 5.17), et 10% de bruit (figure 5.18). Les paramètres de régularisation sont ajustés de manière expérimentale. Les résultats se montrent concluants pour la méthode, on peut seulement noter une légère dégradation de la partie imaginaire de l'indice pour une erreur de mesure de 10%.

L'étude du troisième type de défaut semble peut-être montrer une limite de performance de la régularisation par la fonctionnelle $J_{\beta,D}$: en effet, si l'indice est restitué de manière très précise dans le cas des données exactes (figure 5.19), l'utilisation de données bruitées à 2% ne permet pas de localiser de manière précise le défaut situé le plus à l'intérieur de l'obstacle (figure 5.20). Il faut cependant noter que celui-ci est de très petite taille (un élément, soit un dixième de la longueur d'onde), et positionné quasiment au centre d'un obstacle dissipatif. Une étude plus poussée paraît donc nécessaire pour déterminer la cause exacte de ce résultat moyen.

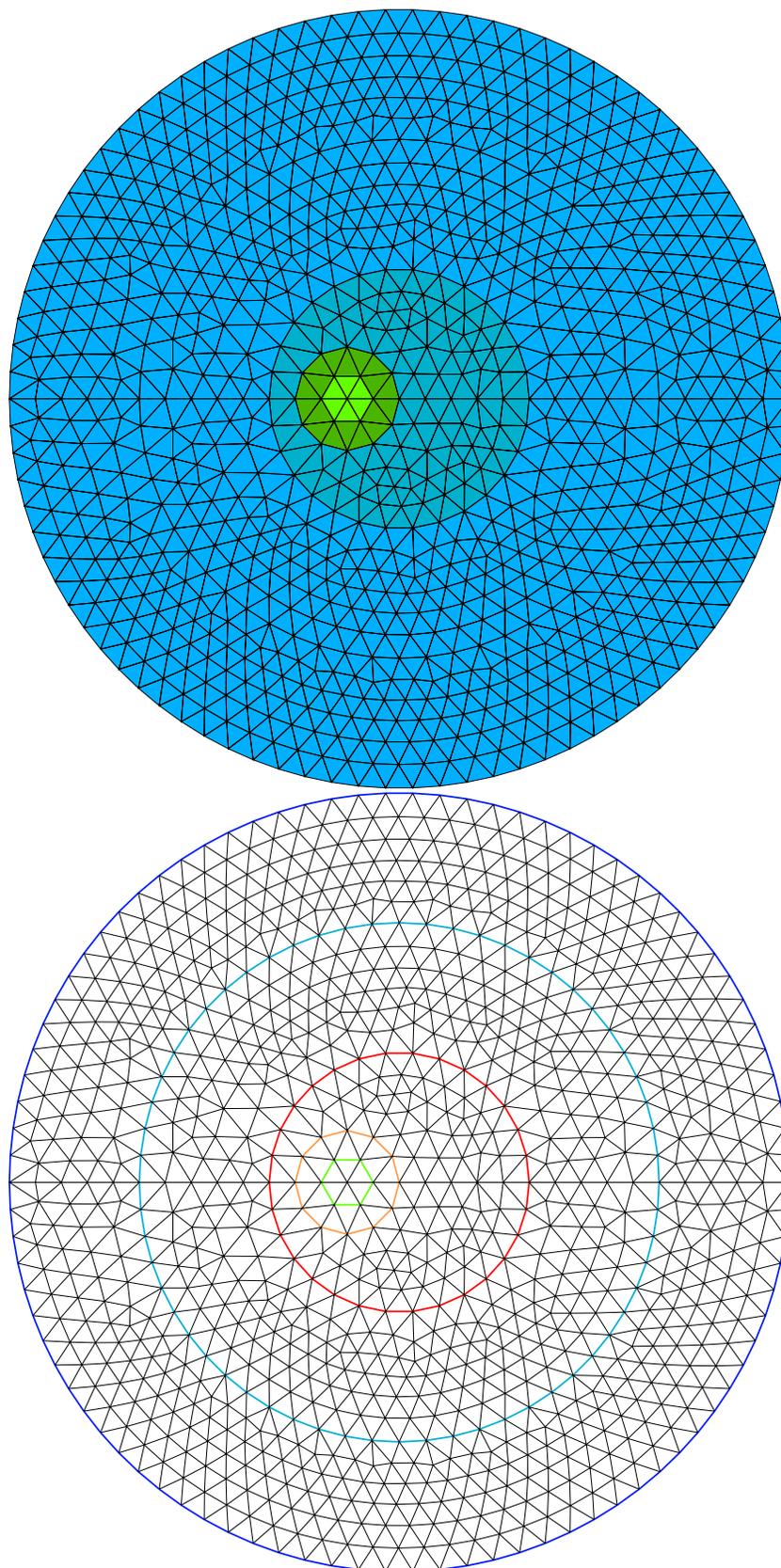


Figure 5.7: Maillage et frontières du domaine de calcul.

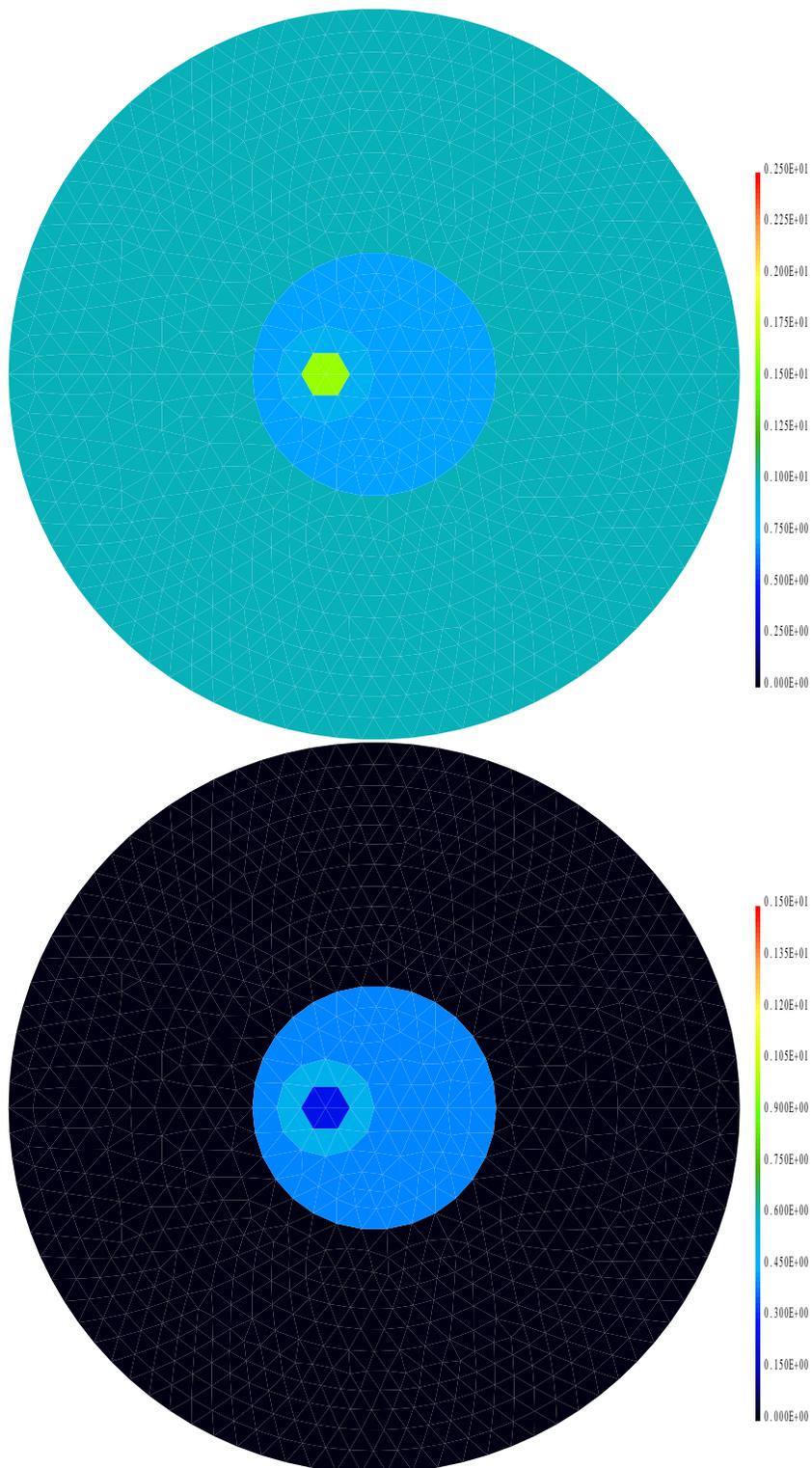


Figure 5.8: Parties réelle et imaginaire de l'indice à partir de données exactes après 6 itérations.

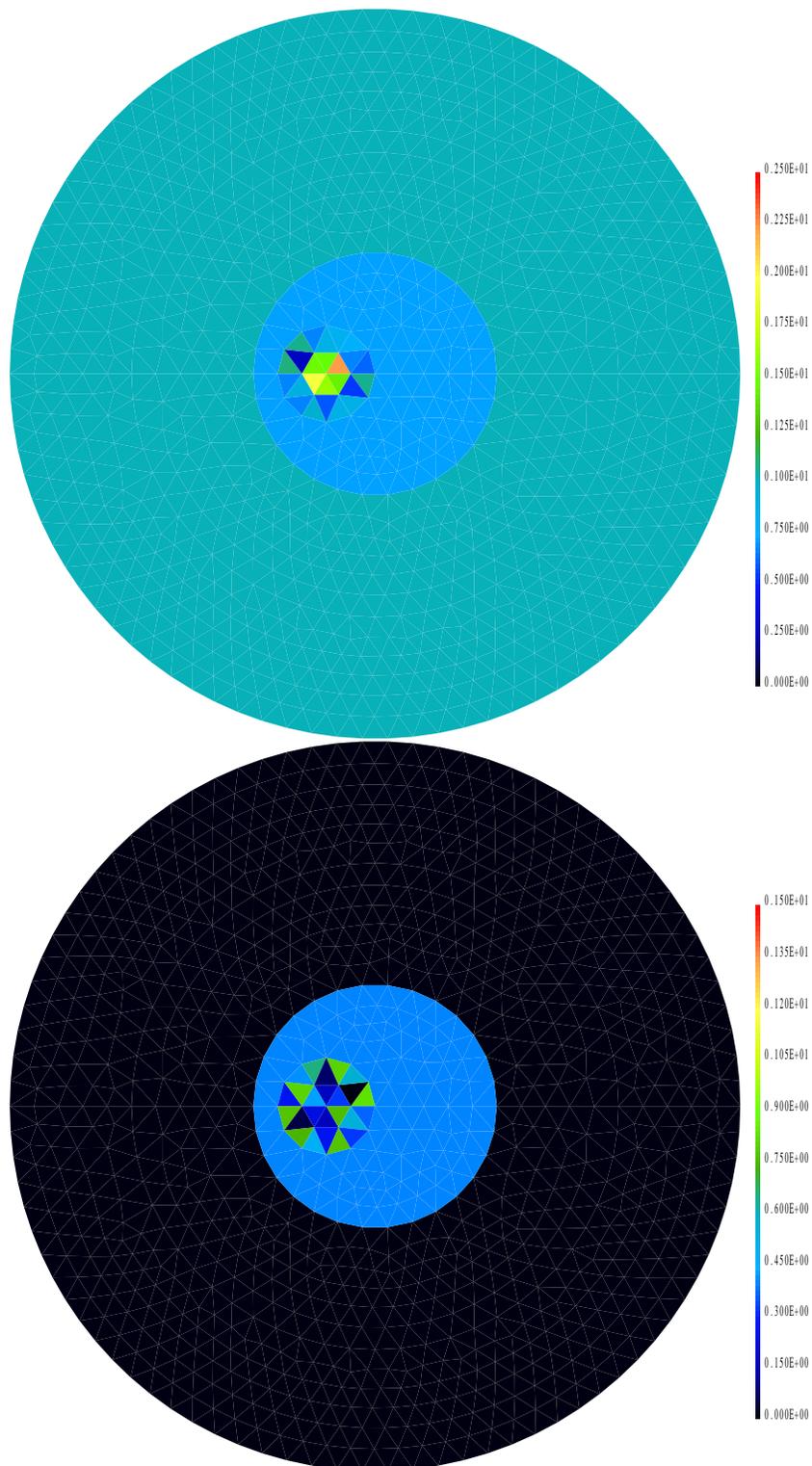


Figure 5.9: Parties réelle et imaginaire de l'indice avec régularisation L^2 à partir de données bruitées à 2% après 6 itérations, $\alpha = 10^{-6}$.

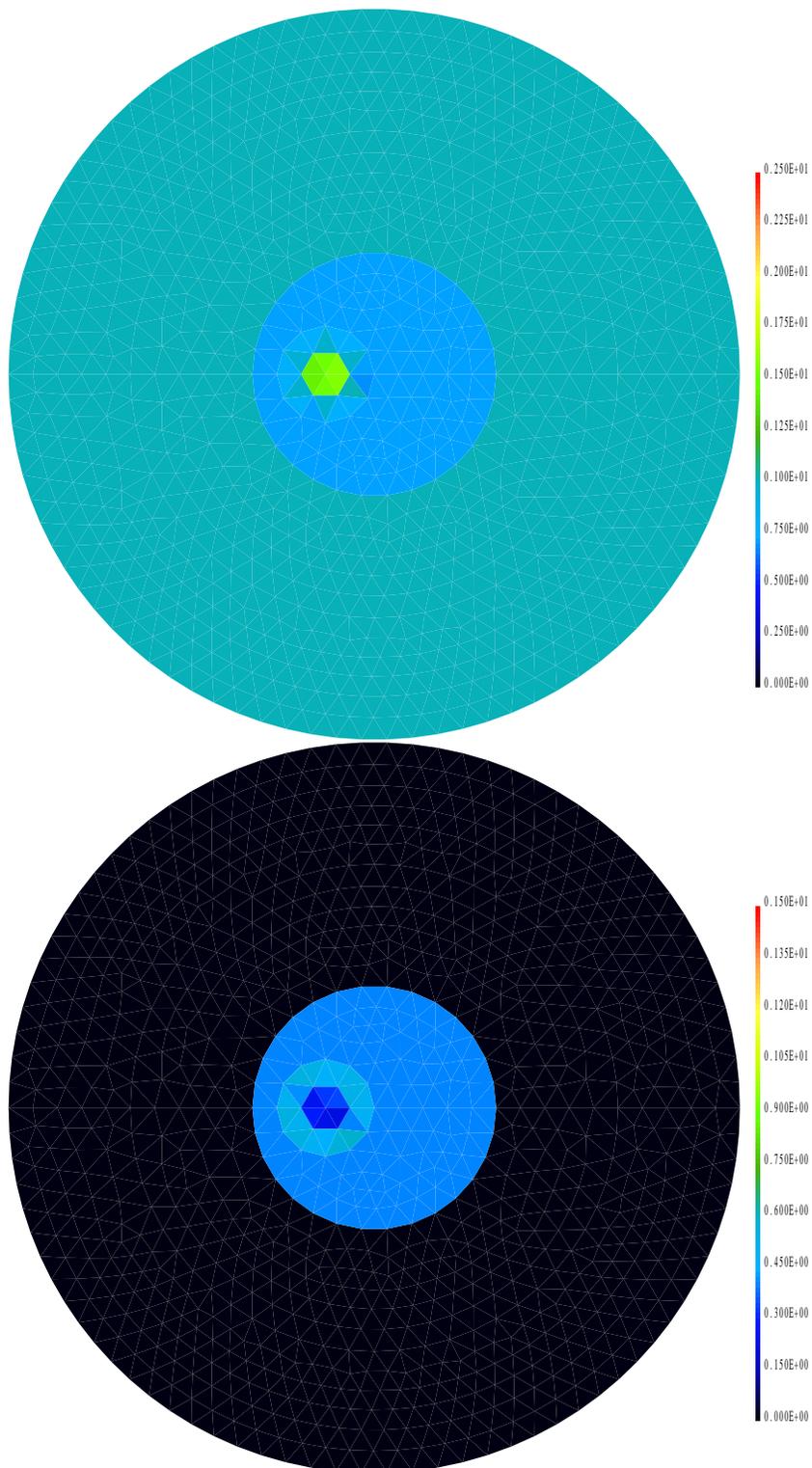


Figure 5.10: Parties réelle et imaginaire avec régularisation “semi-norme H^1 ” en données bruitées à 2% après 6 itérations, $\alpha = 1$.

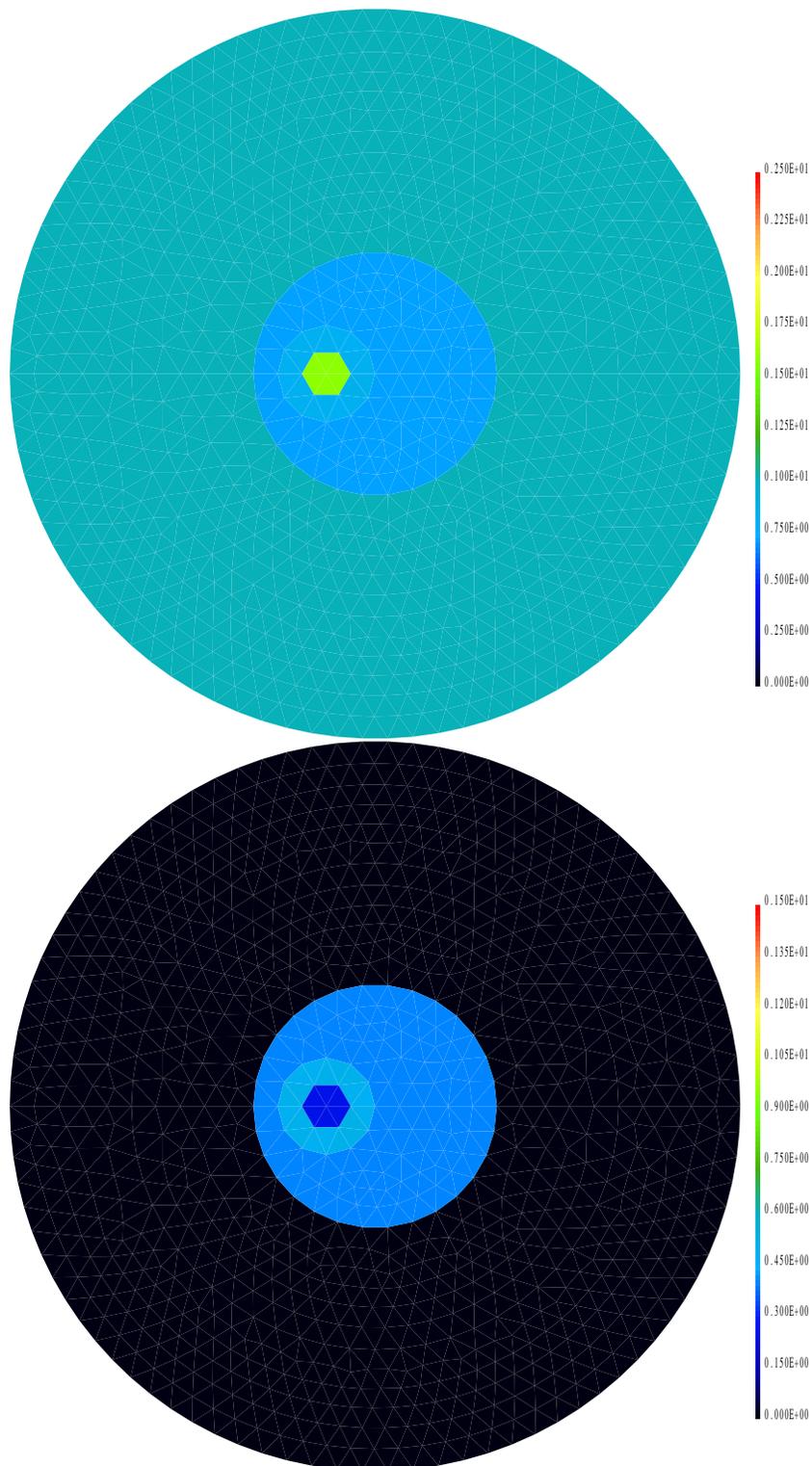


Figure 5.11: Parties réelle et imaginaire de l'indice restitué avec régularisation BV en données bruitées à 2% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 1.5 \cdot 10^{-1}$.

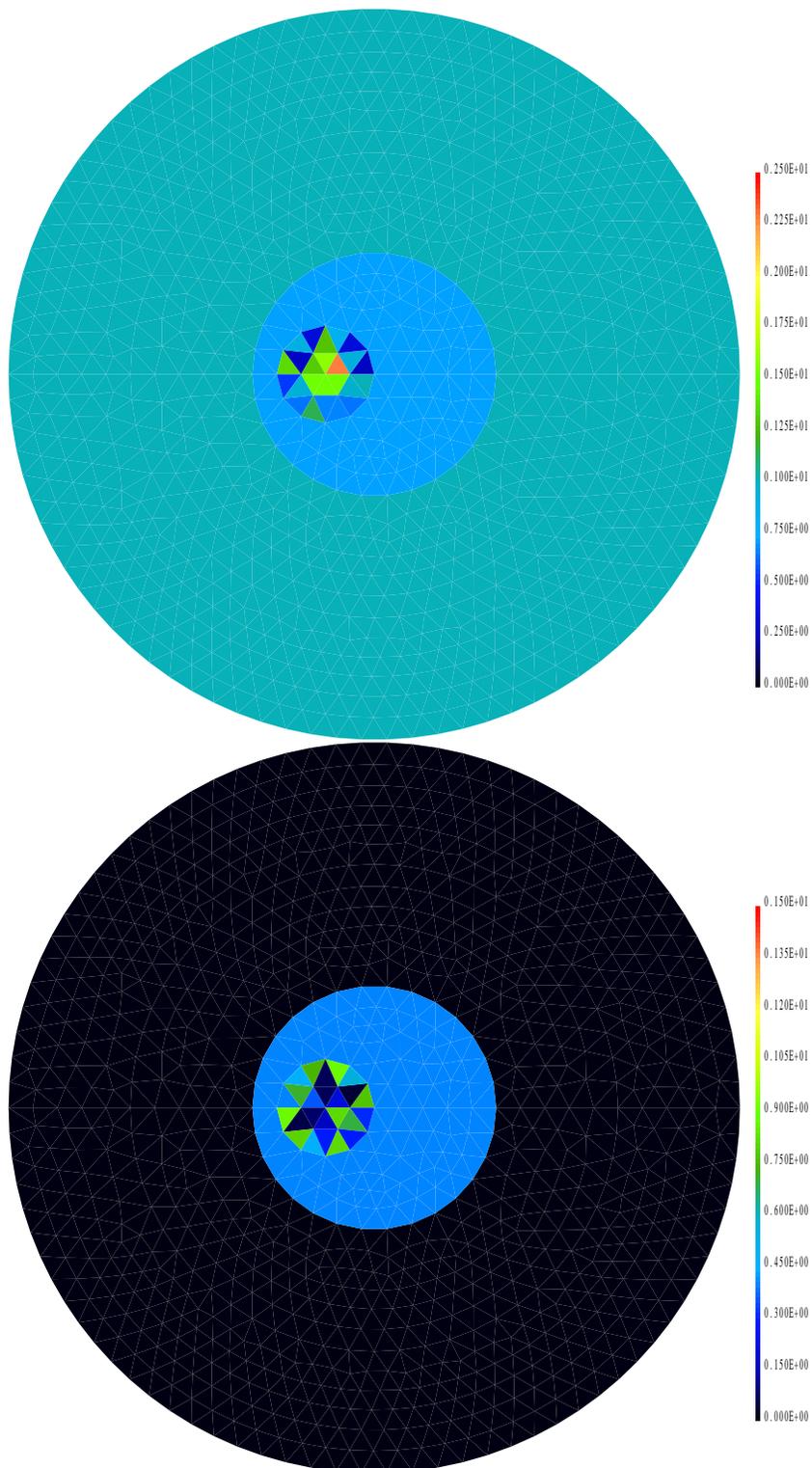


Figure 5.12: Parties réelle et imaginaire de l'indice avec régularisation L^2 à partir de données bruitées à 10% après 6 itérations, $\alpha = 10^{-5}$.

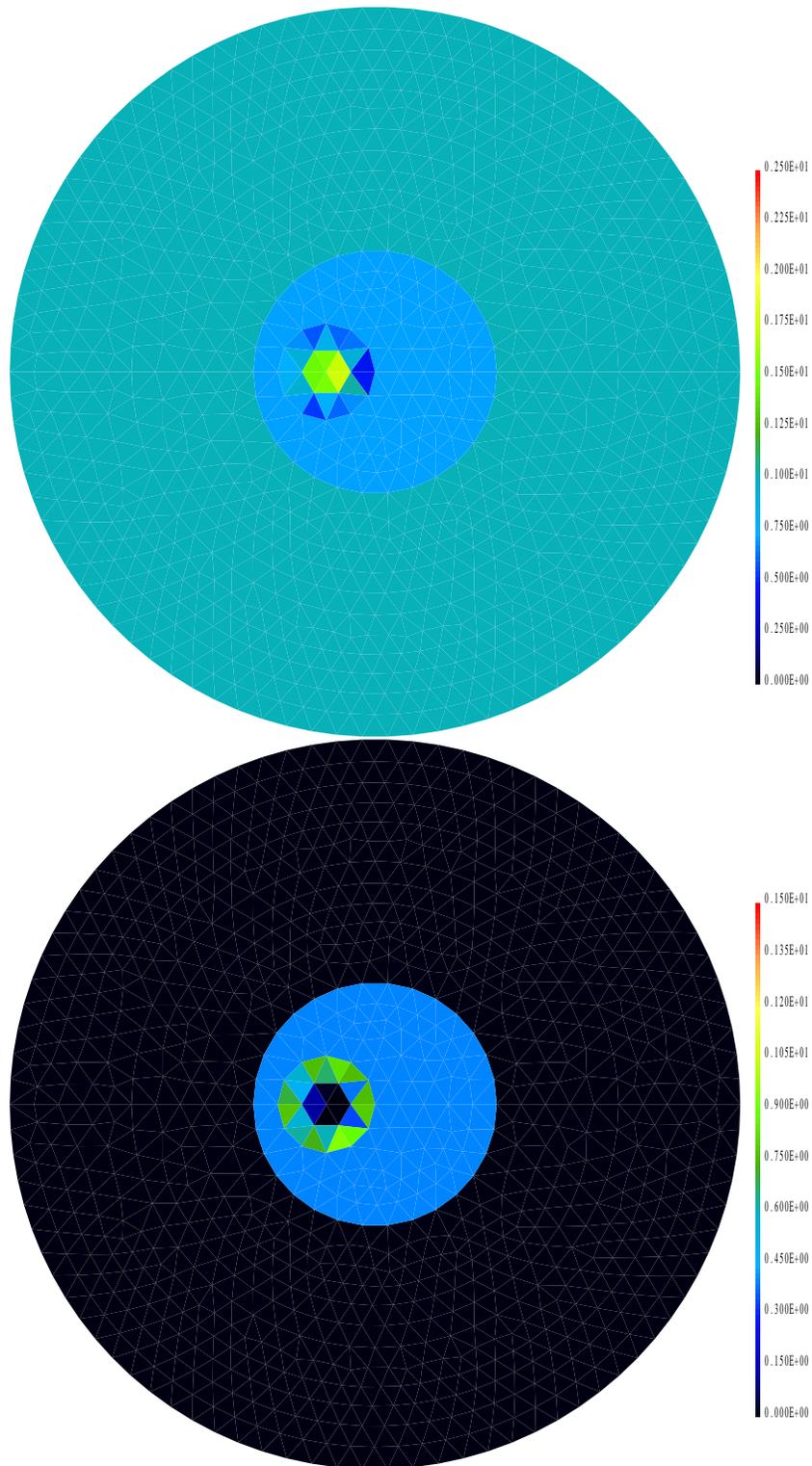


Figure 5.13: Parties réelle et imaginaire avec régularisation “semi-norme H^1 ” en données bruitées à 10% après 6 itérations, $\alpha = 10$.

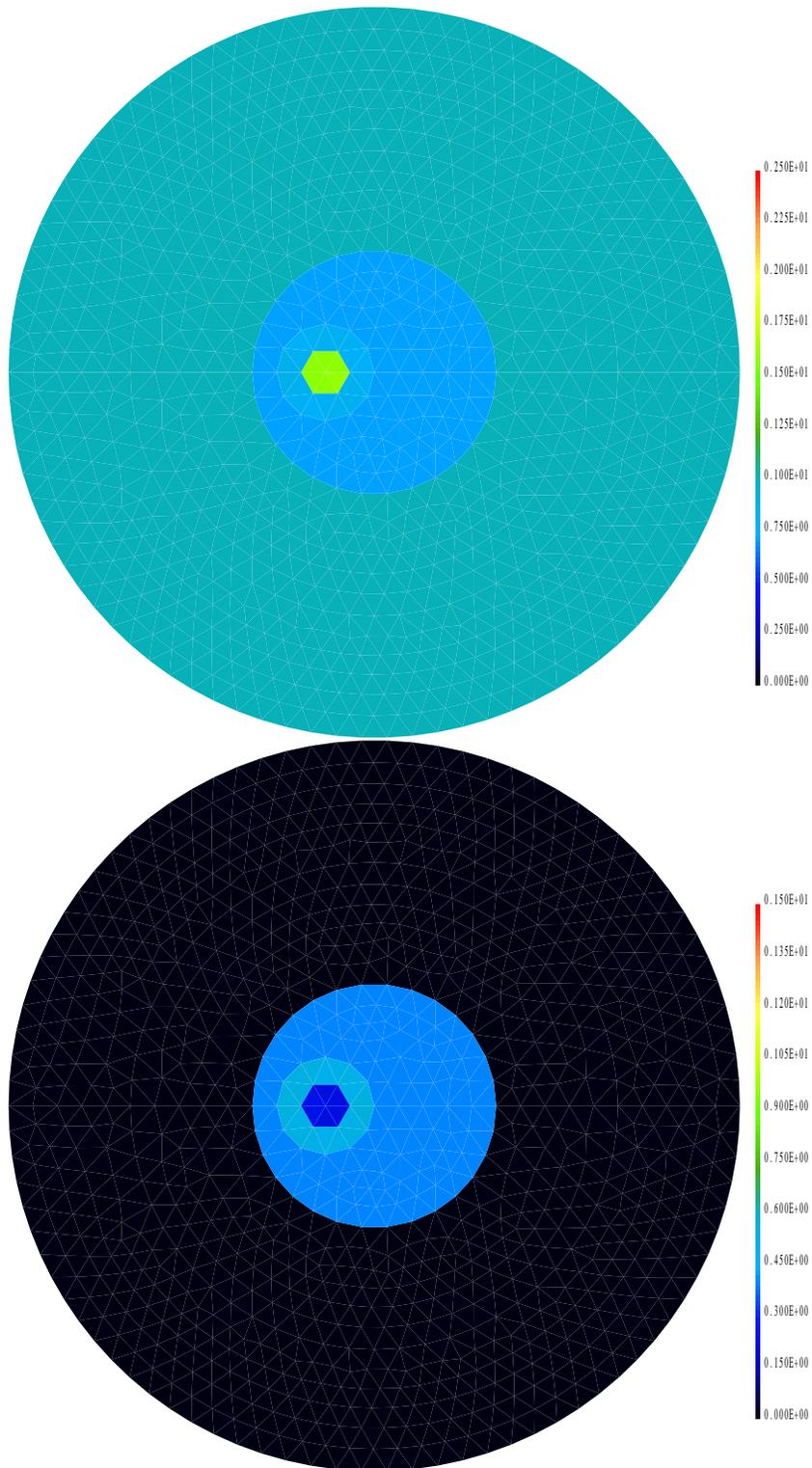


Figure 5.14: Parties réelle et imaginaire de l'indice restitué avec régularisation BV en données bruitées à 10% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 1.5$.

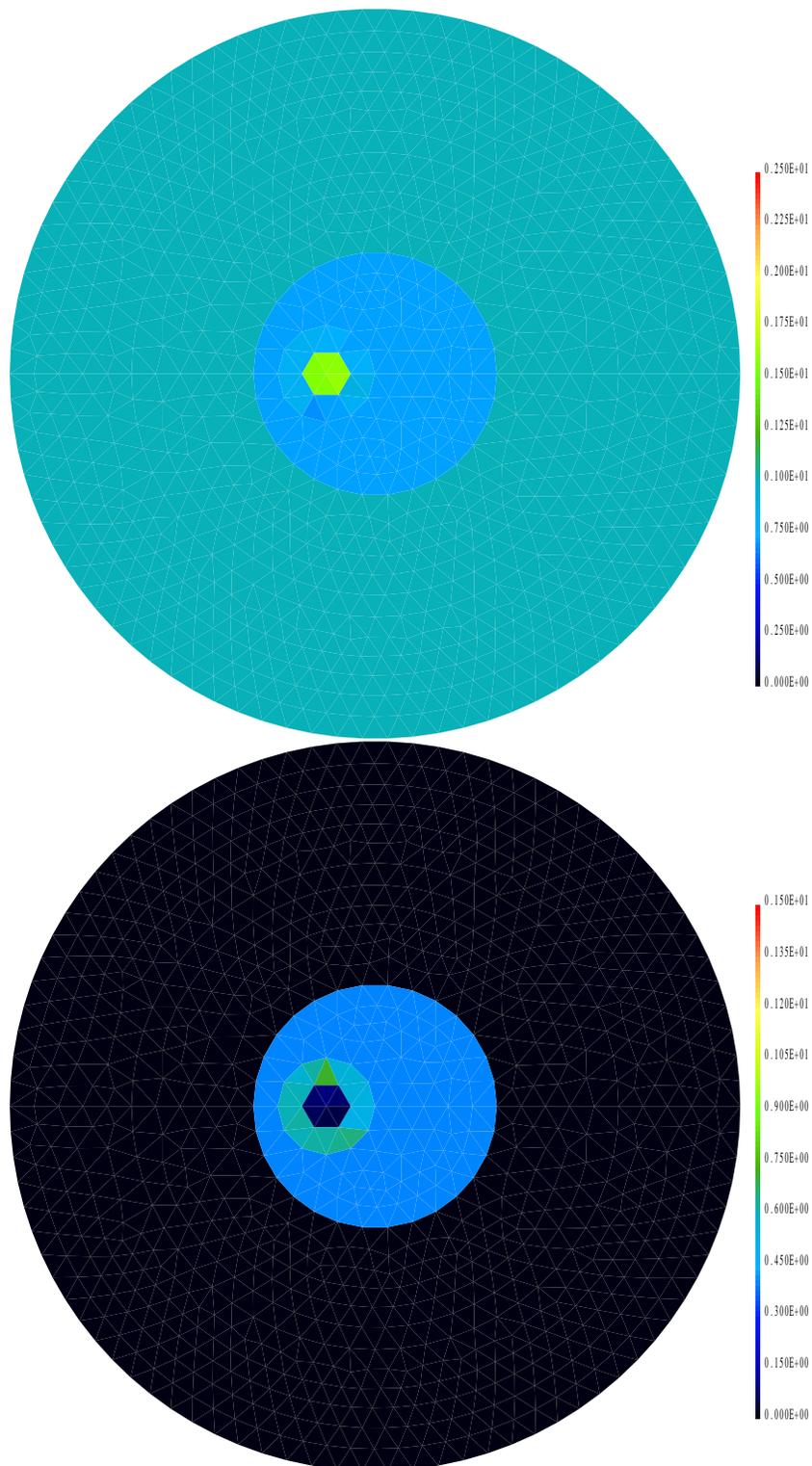


Figure 5.15: Parties réelle et imaginaire de l'indice restitué avec régularisation BV en données bruitées à 20% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 2.5$.

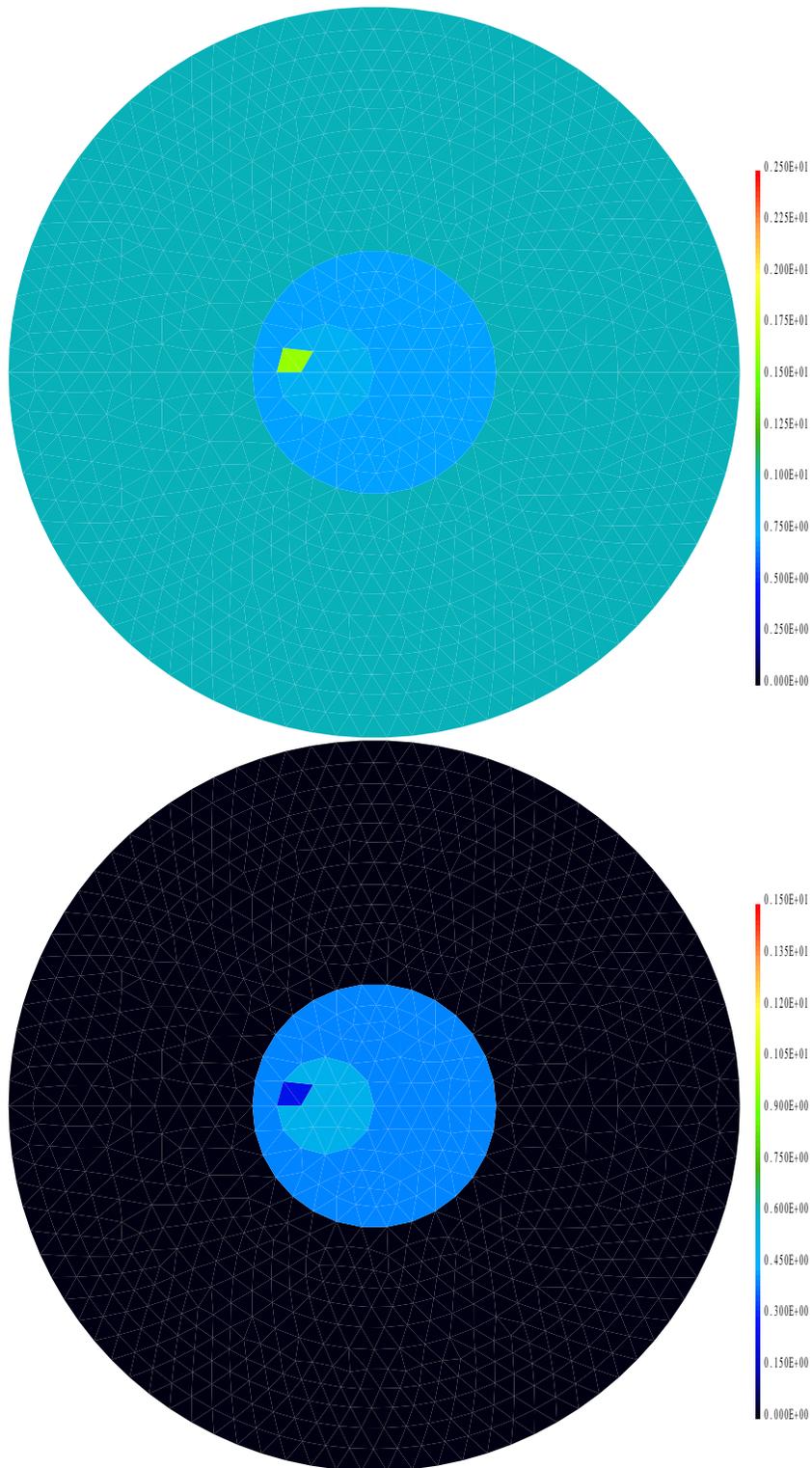


Figure 5.16: Défaut plus petit. Parties réelle et imaginaire de l'indice restitué avec régularisation BV en données exactes après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-6}$.

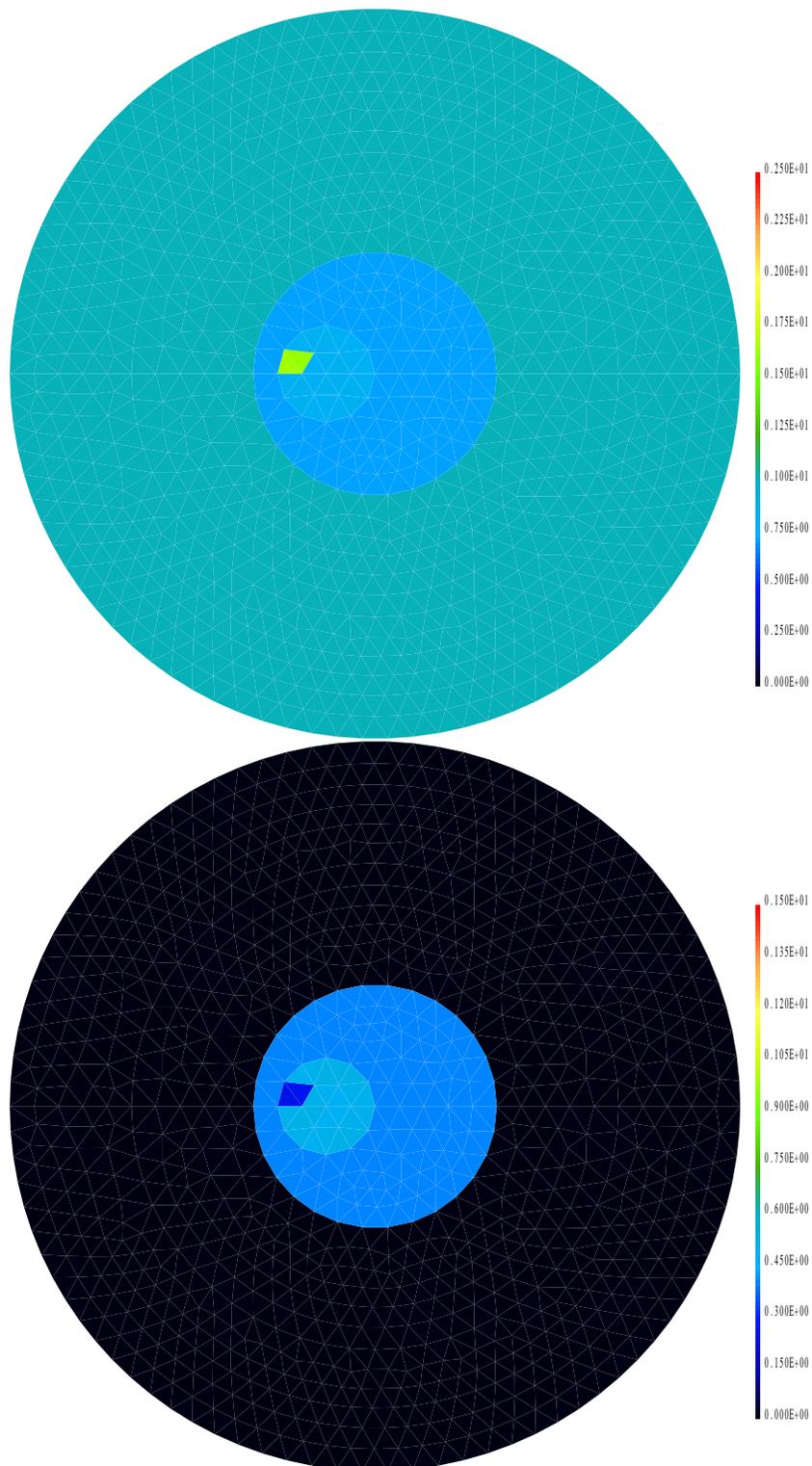


Figure 5.17: Défaut plus petit. Parties réelle et imaginaire de l'indice restitué avec régularisation BV en données bruitées à 2% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-1}$.

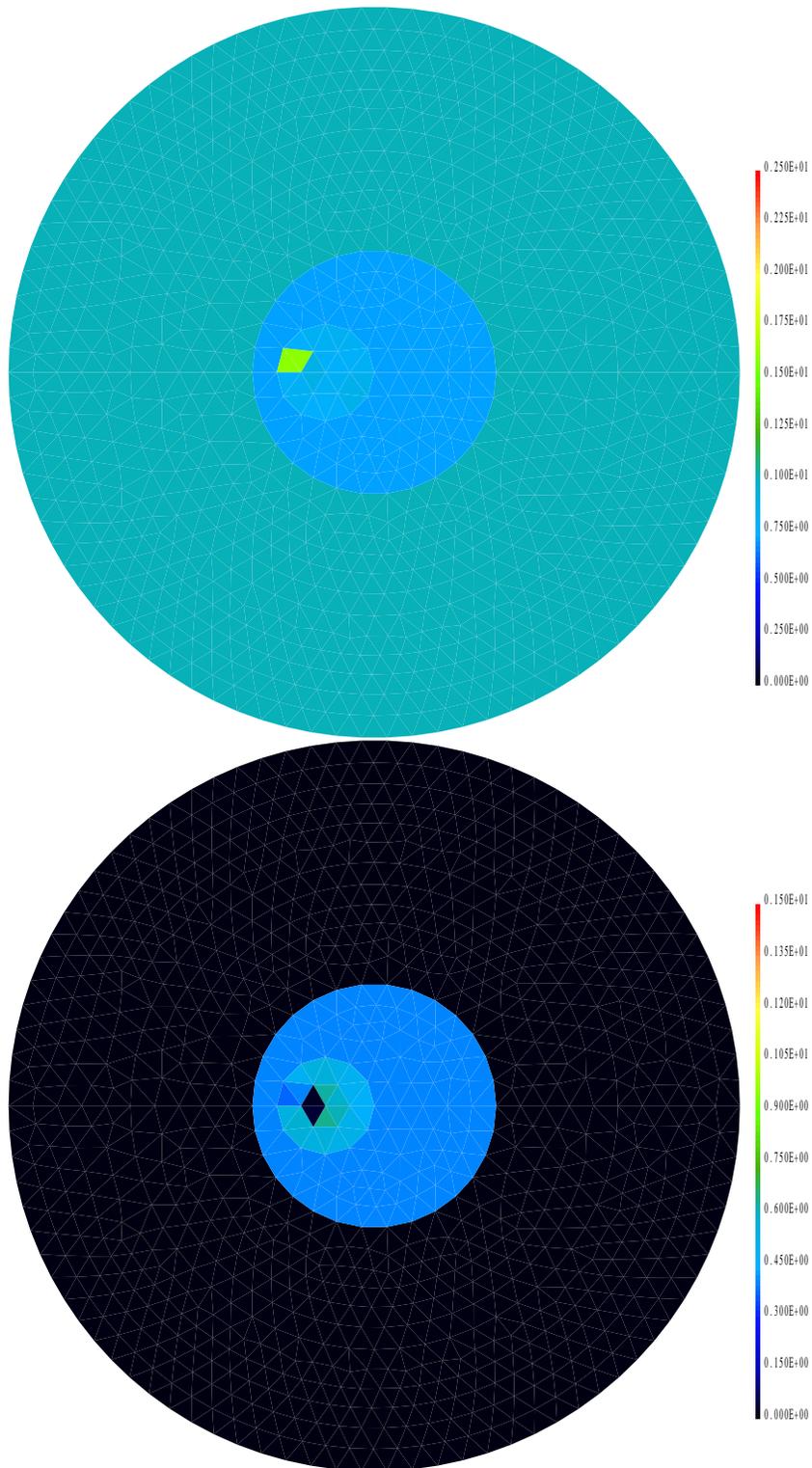


Figure 5.18: Défaut plus petit. Parties réelle et imaginaire de l'indice restitué avec régularisation BV en données bruitées à 10% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 0.7$.

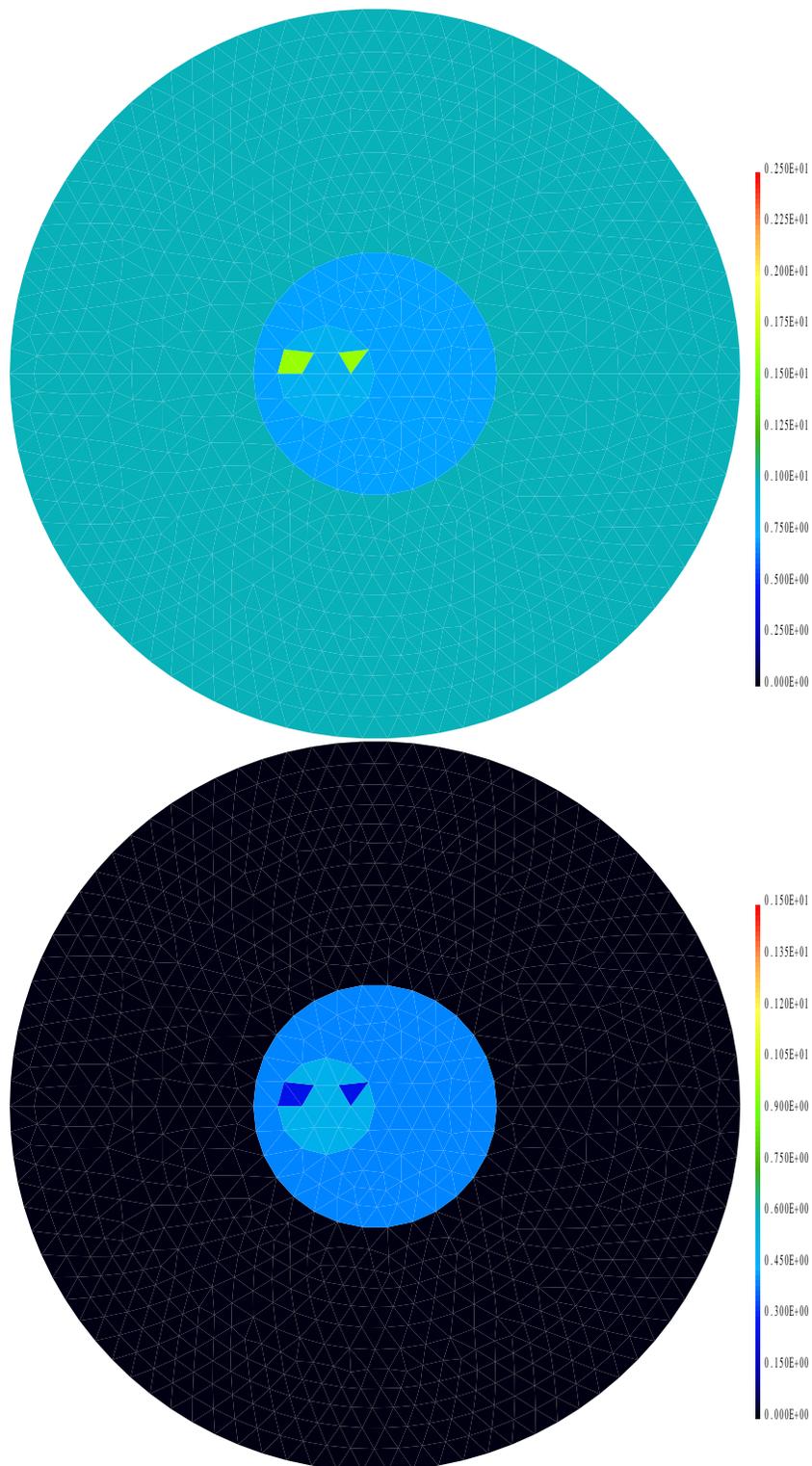


Figure 5.19: Défaut non connexe. Parties réelle et imaginaire de l'indice restitué avec régularisation BV en données exactes après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-4}$.

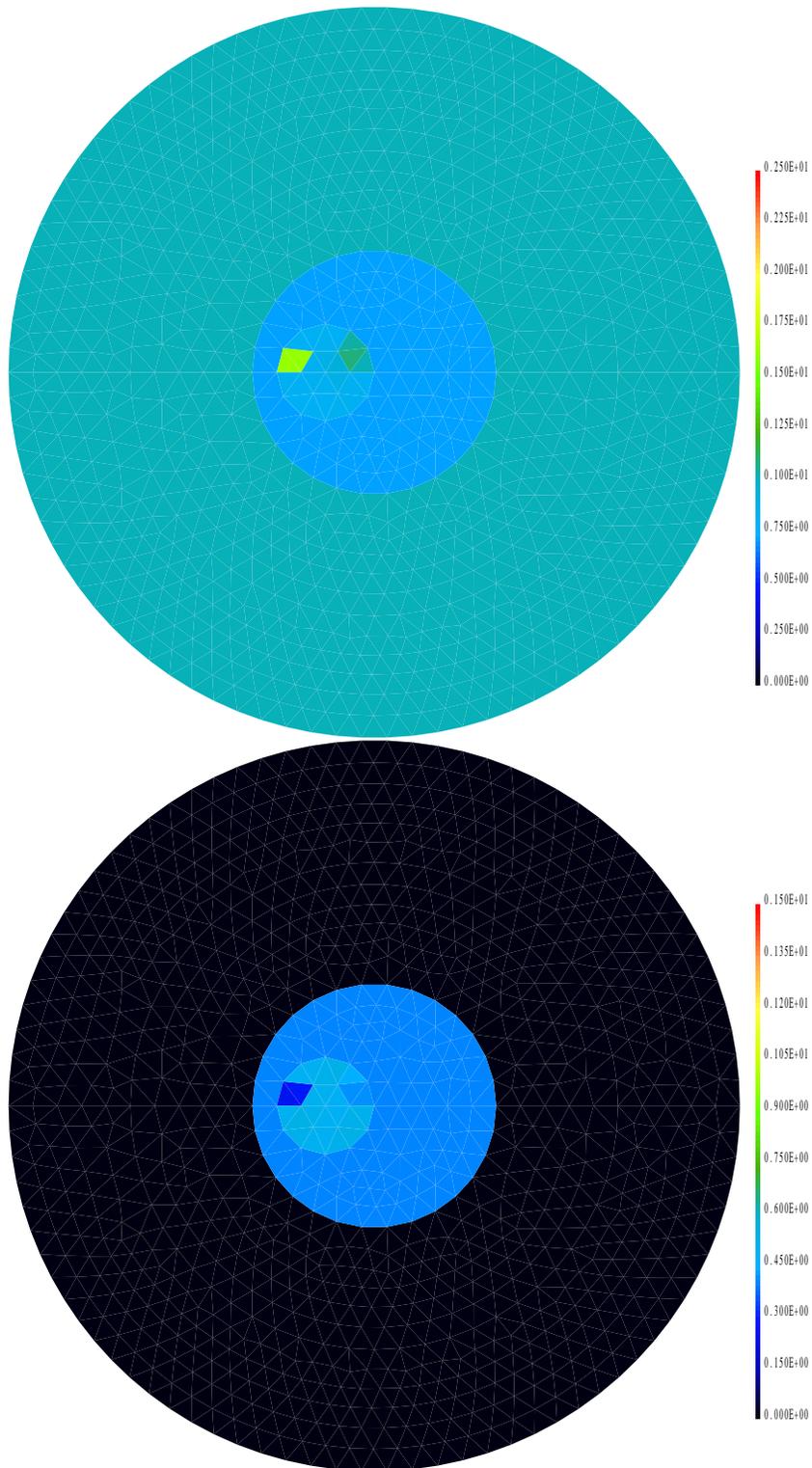


Figure 5.20: Défaut non connexe. Parties réelle et imaginaire de l'indice restitué avec régularisation BV en données bruitées à 2% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-1}$.

5.2.2 Deuxième série de tests : identification de 96 paramètres complexes.

De manière à tester la stabilité des méthodes de Gauss-Newton régularisées que nous avons programmées, nous avons reproduit, sur un maillage raffiné au pas de 0.1, l'expérience de la détection du "gros défaut" étudié dans le paragraphe précédent. Le nombre d'onde k est fixé à 6, ce qui correspond à une longueur d'onde caractéristique d'environ 1. Pour ce maillage, l'indice de la moelle (zones vertes de la figure 5.21), soit l'inconnue du problème, est représenté par 96 valeurs complexes sur les éléments du maillage. Il est toujours initialisé à la valeur de $0.8 + 0.5i$. Le support du défaut est quant à lui représenté par 24 éléments du maillage.

Un premier constat, assez troublant, est qu'il n'est dans ce cas plus possible de restituer le défaut à partir de données synthétiques exactes sans régularisation. En effet, la suite des itérés de la méthode de Gauss-Newton non-régularisée diverge. Ceci est en fait dû au fait que le problème inverse devient de plus en plus mal posé au fur et à mesure que le nombre d'inconnues augmente.

Autre fait étonnant, la régularisation de Tychonov en norme L^2 ne permet pas de converger vers la solution attendue, mais au mieux vers une solution lissée (figure 5.22). Elle favorise en effet plutôt ce type de solutions que la solution constante par morceaux que nous cherchons à restituer. C'est par ailleurs ce résultat qui nous a amenés à étudier des régularisations plus élaborées pour résoudre le problème inverse.

Les régularisations en semi-norme H^1 ou par la fonctionnelle $J_{\beta,D}$ permettent quant à elles de restituer l'indice de manière très précise à partir des données exactes (figures 5.23 et 5.24). Dans le cas de données bruitées, il nous a paru inutile d'étudier la régularisation en norme L^2 puisqu'elle ne s'est pas montrée satisfaisante en données exactes. Ici encore, quel que soit le niveau de bruit (2 ou 10%), la régularisation par la fonctionnelle $J_{\beta,D}$ offre les meilleurs résultats (figures 5.26, 5.28). On peut en effet juste noter une dégradation des valeurs de la partie imaginaire de l'indice pour 10% de bruit, alors que le résultat est déjà nettement dégradé à 2% de bruit pour la régularisation en semi-norme H^1 (figures 5.25, 5.27). Cette série de résolutions laisse présager que seule la régularisation par la fonctionnelle $J_{\beta,D}$ permet de résoudre les cas les plus compliqués, ce qui semble d'ailleurs se confirmer dans la suite de ce chapitre.

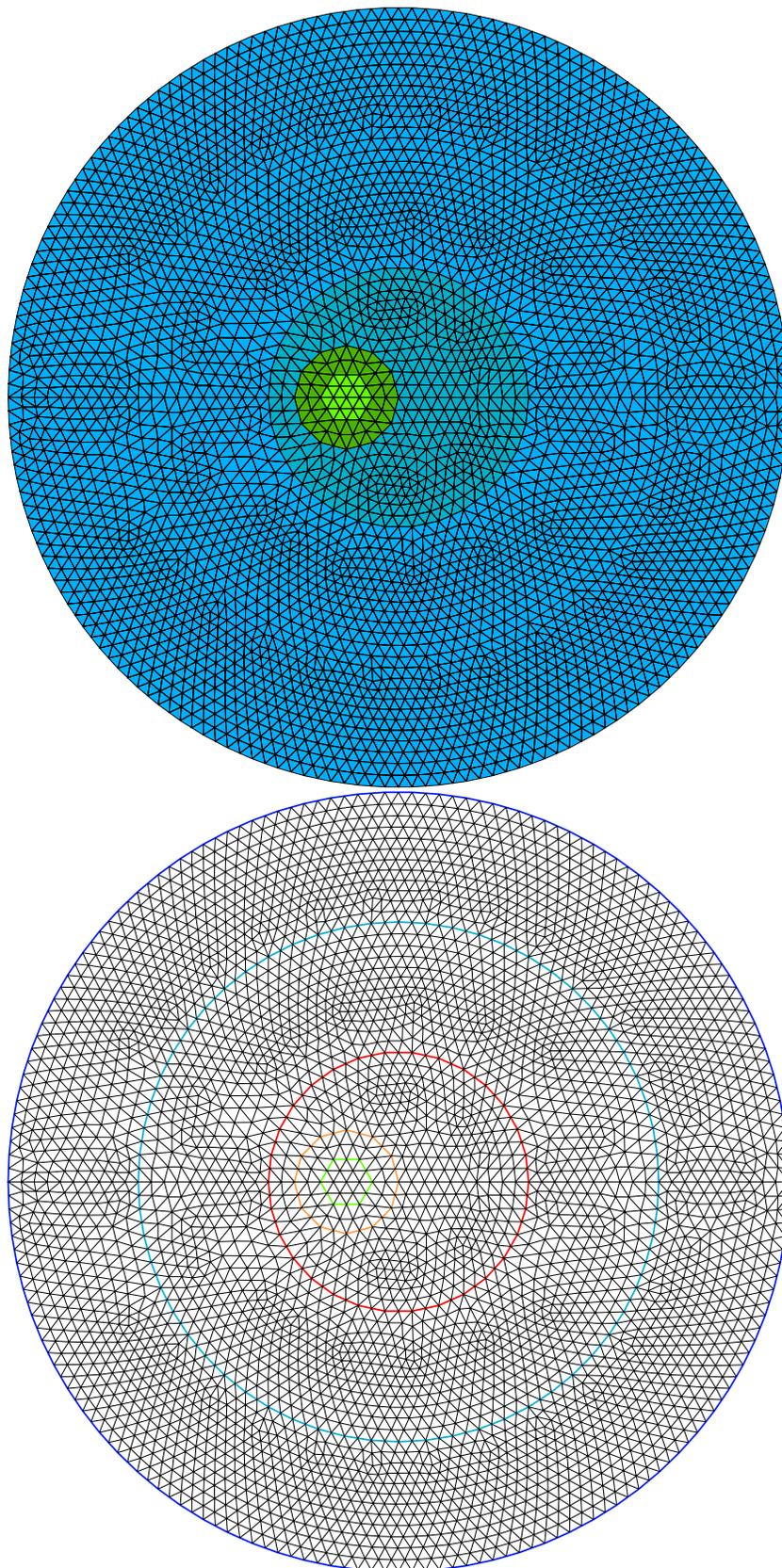


Figure 5.21: Cas raffiné. Maillage et frontières du domaine de calcul.

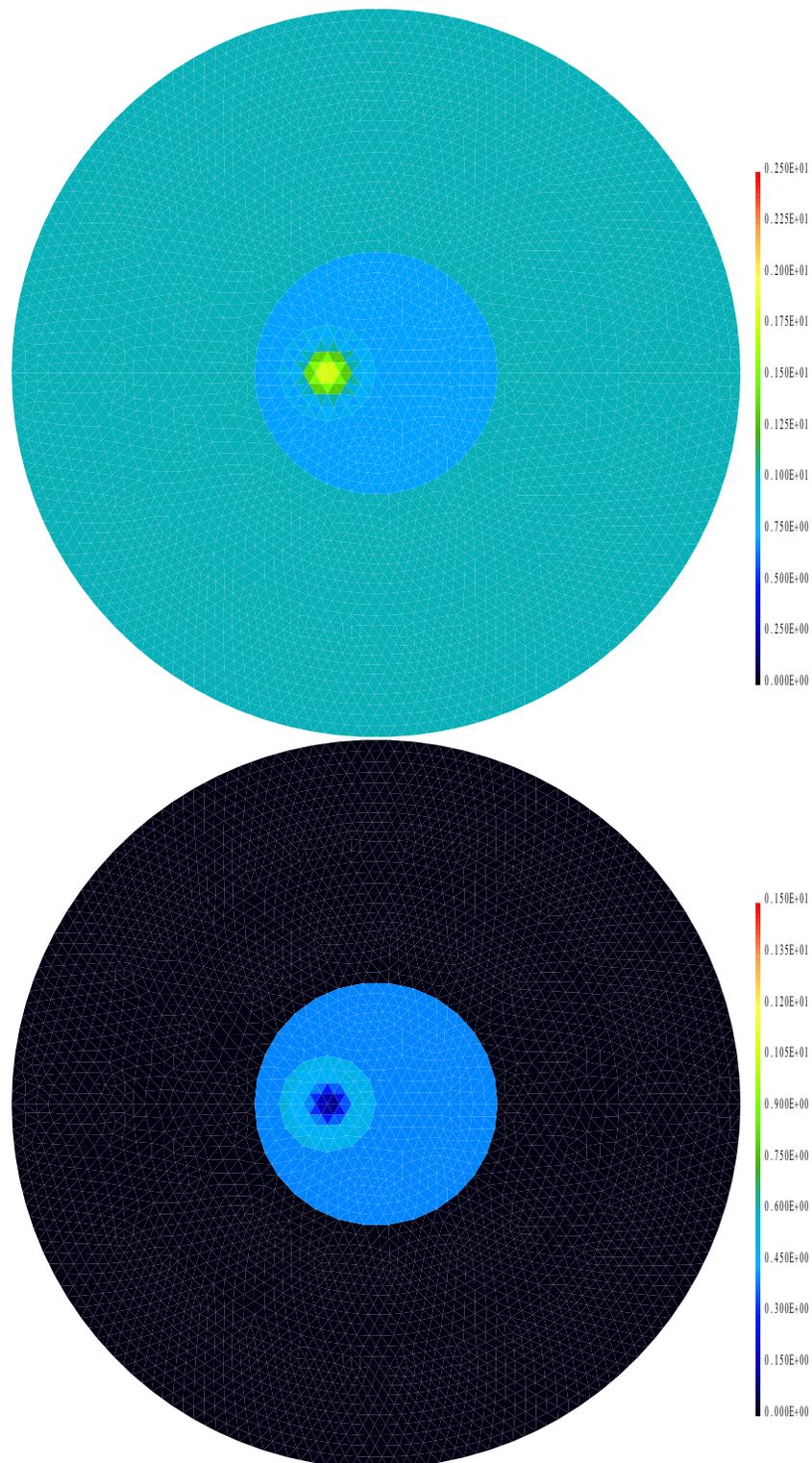


Figure 5.22: Cas raffiné. Parties réelle et imaginaire avec régularisation L^2 en données exactes après 6 itérations, $\alpha = 10^{-5}$.

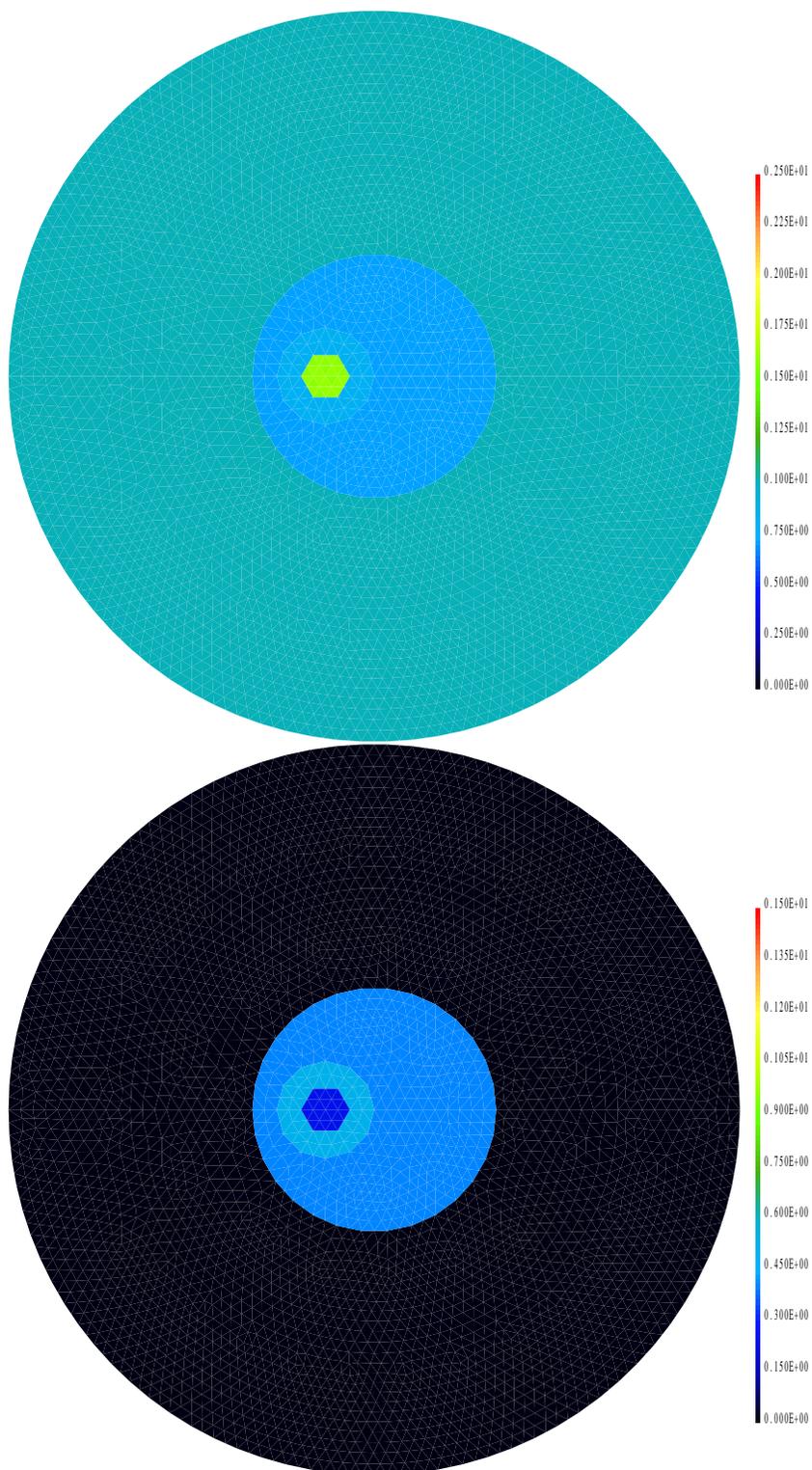


Figure 5.23: Cas raffiné. Parties réelle et imaginaire avec régularisation “semi-norme H^1 ” en données exactes après 6 itérations, $\alpha = 10^{-6}$.

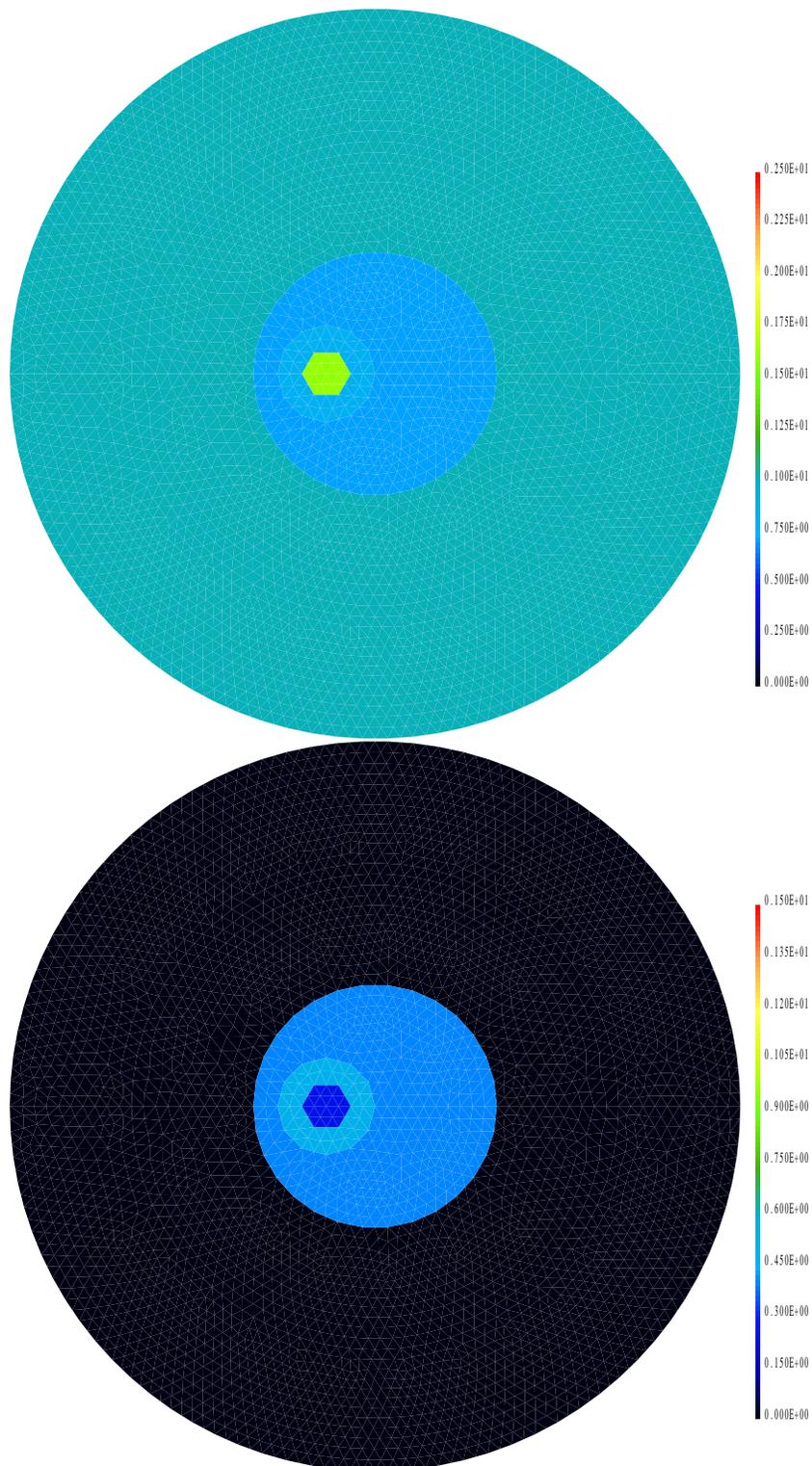


Figure 5.24: Cas raffiné. Parties réelle et imaginaire avec régularisation BV en données exactes après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-5}$.

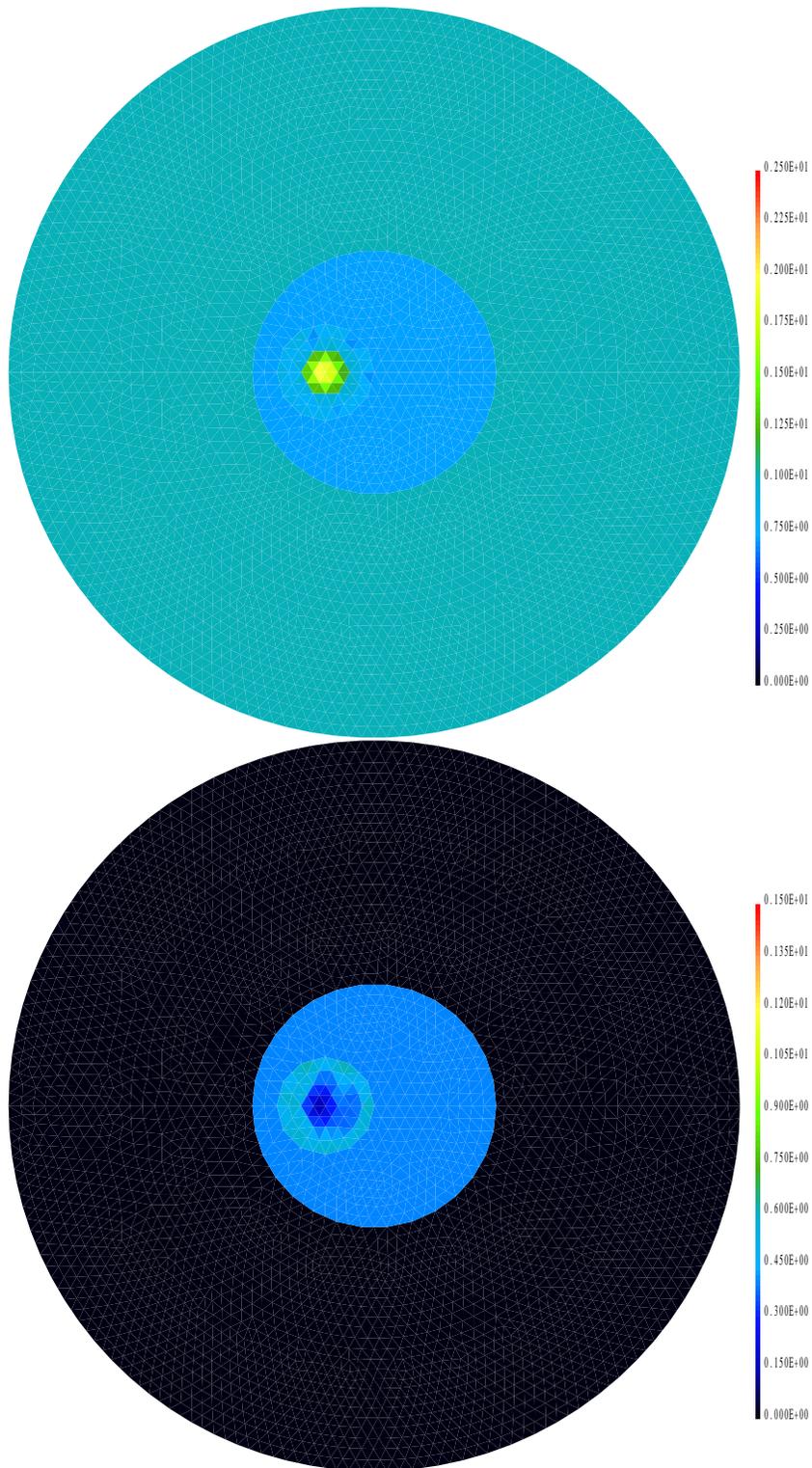


Figure 5.25: Cas raffiné. Parties réelle et imaginaire avec régularisation “semi-norme H^1 ” en données bruitées à 2% après 6 itérations, $\alpha = 20$.

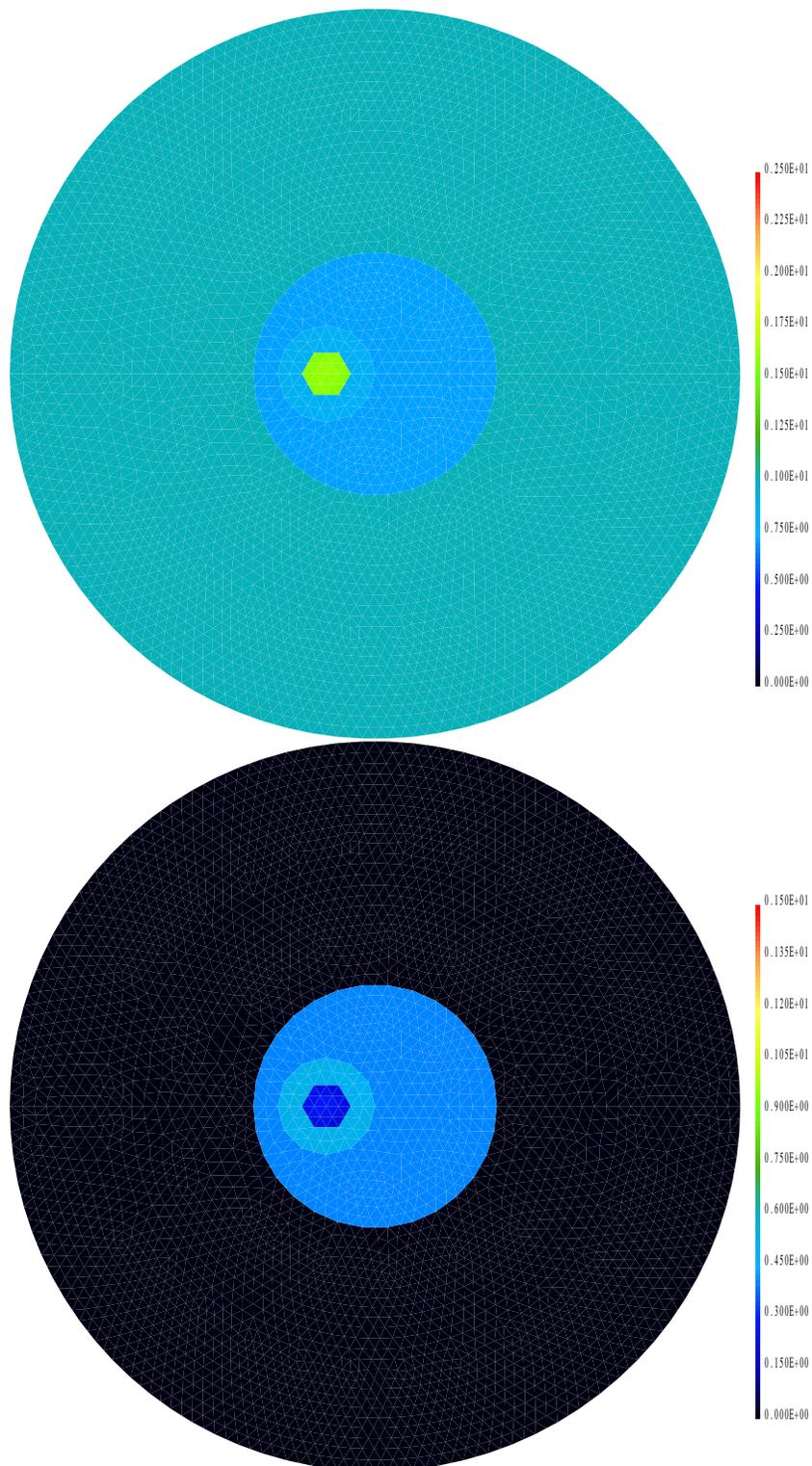


Figure 5.26: Cas raffiné. Parties réelle et imaginaire avec régularisation BV en données bruitées à 2% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-1}$.

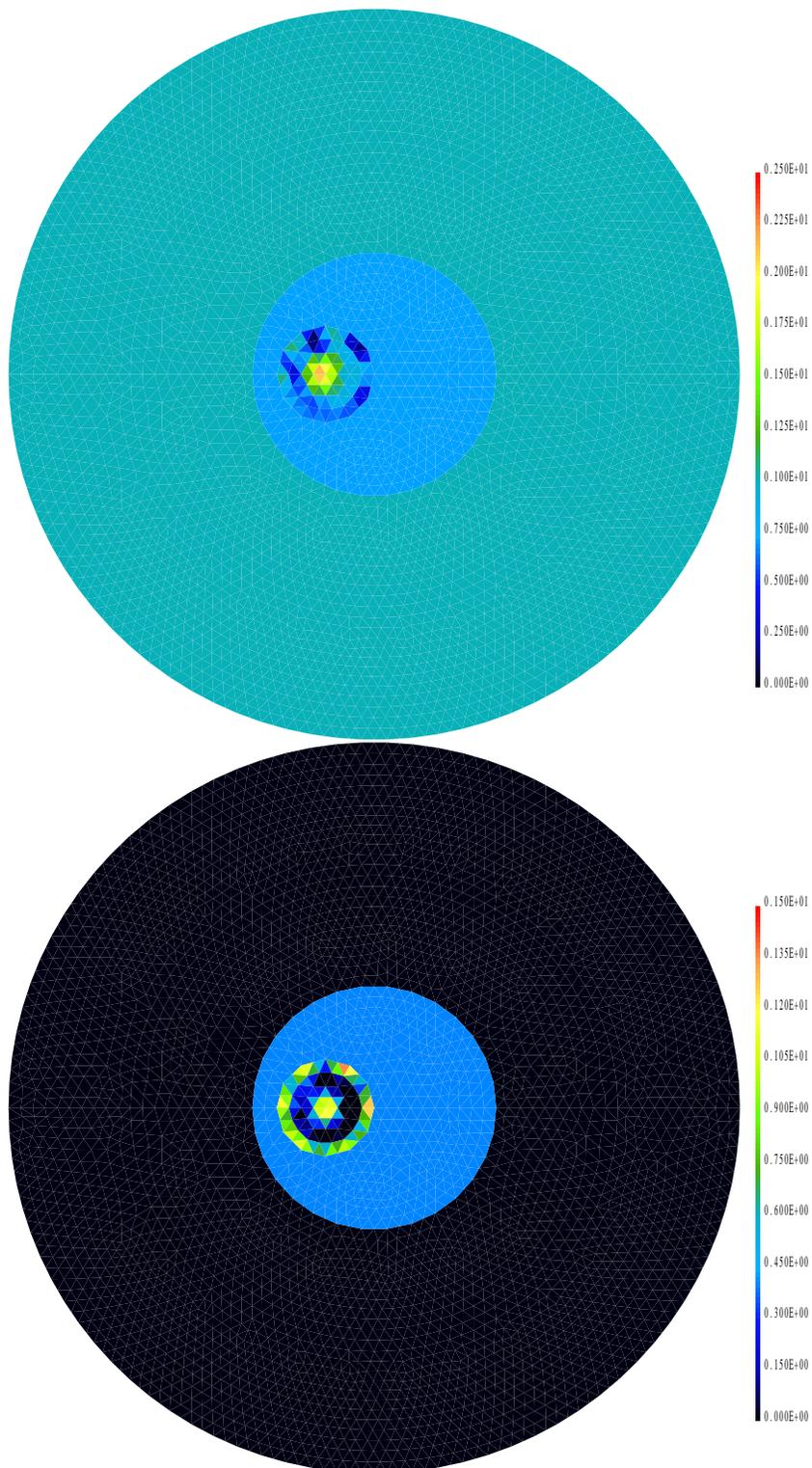


Figure 5.27: Cas raffiné. Parties réelle et imaginaire avec régularisation “semi-norme H^1 ” en données bruitées à 10% après 6 itérations, $\alpha = 30$.

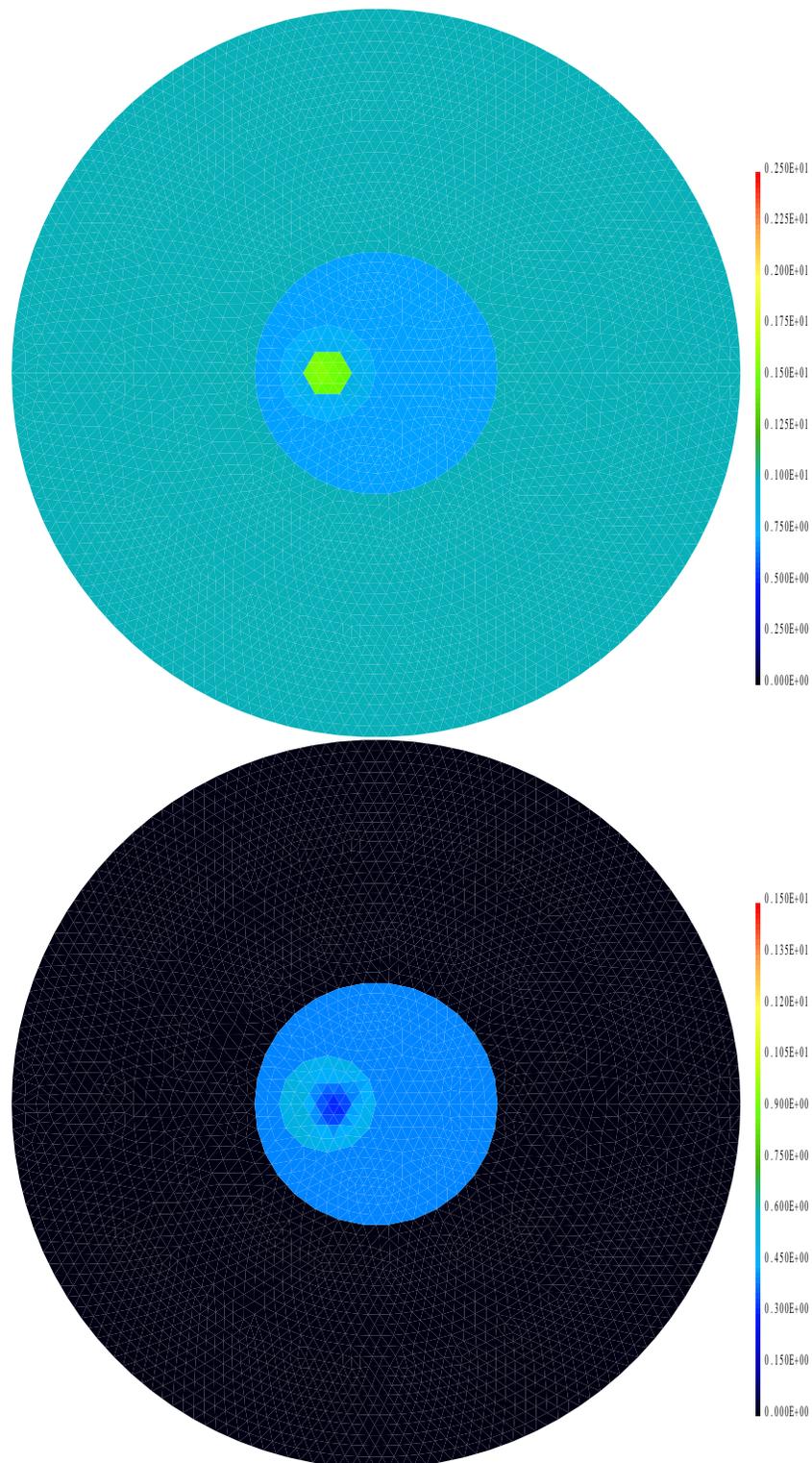


Figure 5.28: Cas raffiné. Parties réelle et imaginaire avec régularisation BV en données bruitées à 10% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 1$.

5.2.3 Troisième série de tests : l'obstacle entier.

Cette dernière série de tests sur l'identification de défauts dans la moelle osseuse concerne la restitution sur le premier maillage (c'est à dire le maillage non-raffiné au pas de 0.2) de l'obstacle dans son intégralité, en initialisant son indice aux valeurs sans défaut. Comme pour la première série de tests, le nombre d'onde k est fixé à 3. Ce problème comporte 186 inconnues complexes, soit environ le double des inconnues du problème précédent. Mais il est plus difficile de surcroît, puisque toutes les valeurs de l'indice de réfraction de l'obstacle sont susceptibles d'évoluer au cours de l'algorithme. Il nous a donc semblé intéressant d'étudier la stabilité des différentes méthodes sur ce problème.

Les régularisations en norme L^2 ou en semi-norme H^1 n'ont donné aucun résultat satisfaisant, et ce même en données exactes. En dépit d'une recherche poussée, nous n'avons pas été en mesure de trouver des paramètres de régularisation permettant de résoudre le problème par ces méthodes. Elles marquent donc nettement le pas sur la régularisation par la fonctionnelle $J_{\beta,D}$ qui donne de bons résultats en données exactes (figure 5.29), ou même en données bruitées à 2% (figure 5.30). Pour les données exactes, il y a en effet convergence vers la solution exacte, l'effet marbré sur la partie réelle étant dû à une discontinuité de l'échelle de couleurs dans le logiciel de visualisation. Pour traiter le troisième cas test, nous avons choisi de ne plus utiliser que cette méthode.

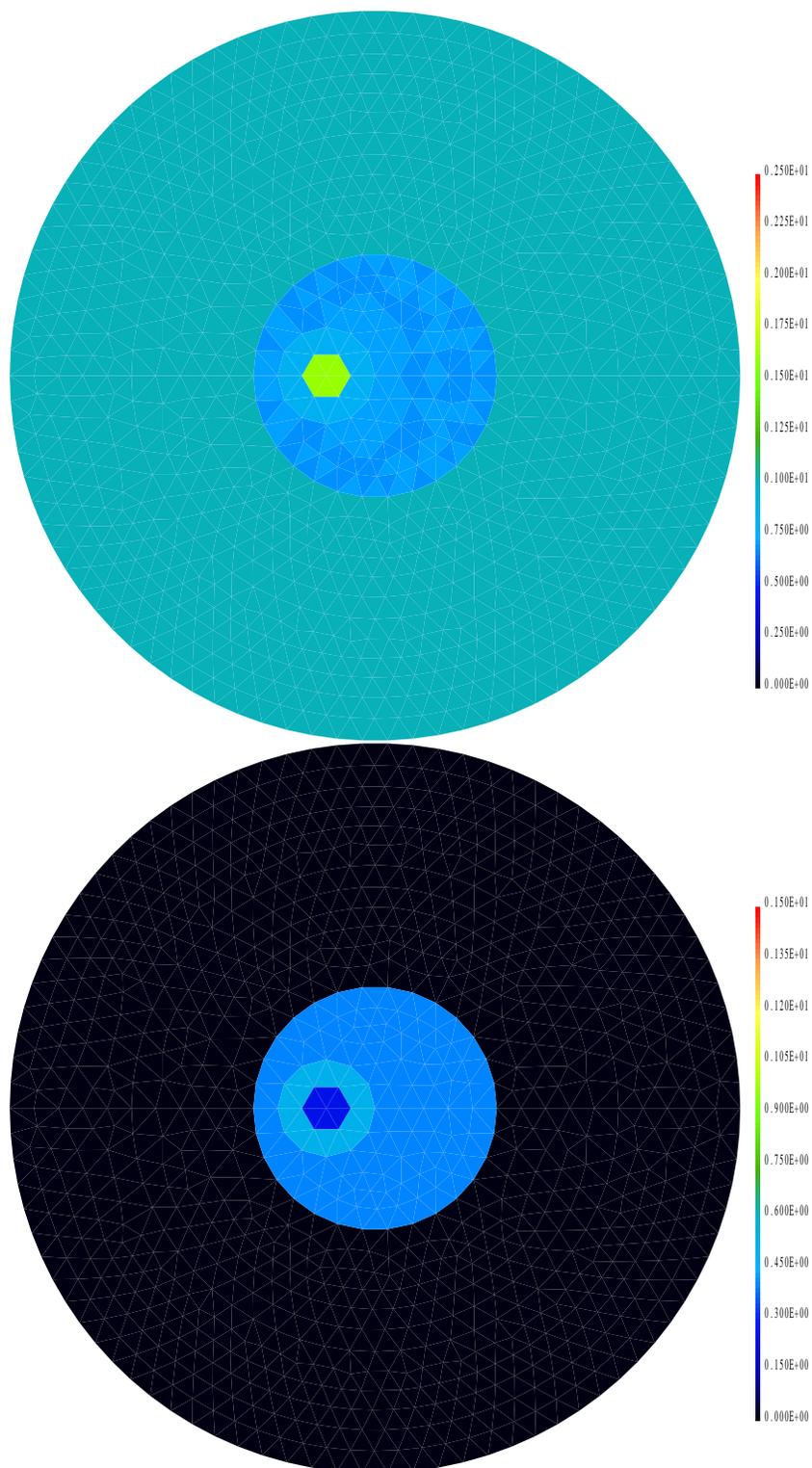


Figure 5.29: Obstacle entier. Parties réelle et imaginaire avec régularisation BV en données exactes après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-6}$.

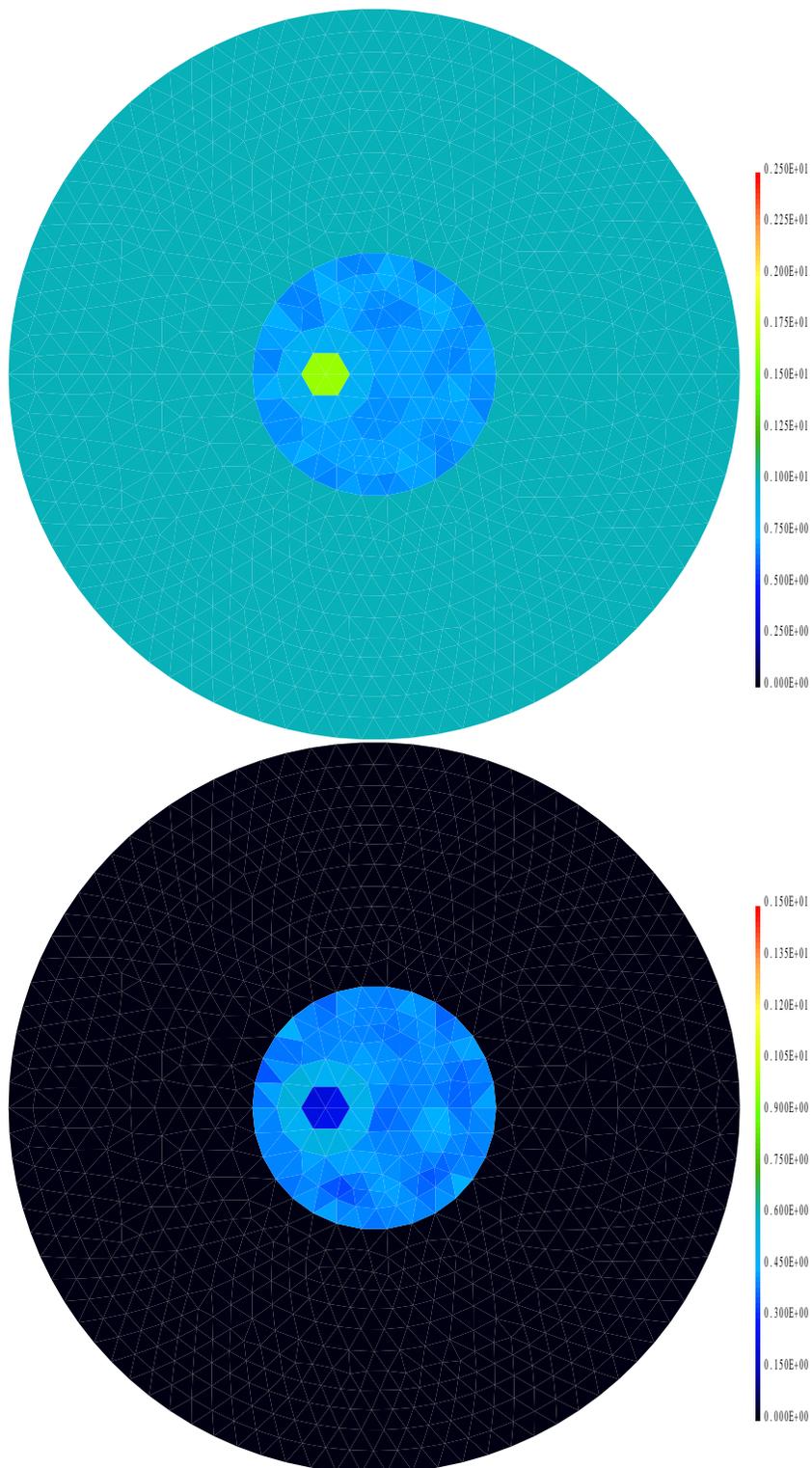


Figure 5.30: Obstacle entier. Parties réelle et imaginaire avec régularisation BV en données bruitées à 2% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-2}$.

5.3 Le carré de Kleinman et van den Berg.

Ce dernier cas test, adapté d'une expérience numérique présentée dans [5], concerne la restitution d'une partie ou de l'intégralité de l'indice de réfraction d'une plaque carrée formée de deux matériaux homogènes : une plaque carrée, de côté 1.6 et d'indice de réfraction $1.6 + 0.2i$ entourée d'un matériau d'indice $1.3 + 0.4i$. Le tout forme une plaque carrée de dimension 4. L'obstacle est entouré de vide, d'indice adimensionné égal à $1 + 0i$, et l'ensemble est maillé avec un pas de 0.2 (figure 5.31). Les données exactes sont exprimées sur la frontière turquoise du maillage, et proviennent de la résolution des problèmes directs associés pour 29 incidences équiréparties. Le nombre d'onde adimensionné k est fixé à 3, ce qui correspond à une longueur d'onde d'environ 2.

Dans chacune des expériences traitées pour ce cas, l'indice de réfraction de la plaque est initialisé à la valeur homogène de $1.3 + 0.4i$. Dans un premier temps, nous avons juste cherché à restituer l'indice de réfraction du carré intérieur, lequel est représenté par 128 inconnues complexes. Que ce soit en données exactes (figure 5.32), ou en données bruitées à 2 ou 10% (figures 5.33 et 5.34), la méthode de Gauss-Newton régularisée par la fonctionnelle $J_{\beta, D}$ donne d'excellents résultats, puisque l'indice est restitué de manière exacte en données exactes, et avec de faibles erreurs pour les données bruitées. Nous avons ensuite essayé de restituer l'obstacle entier, soit 856 inconnues complexes, à partir des données exactes (figure 5.35). Une nouvelle fois, l'indice est déterminé de manière exacte. Le cas de données bruitées n'a par contre pas pu être traité favorablement : il semble qu'au vu du nombre élevé d'inconnues, une stratégie de régularisation avec un paramètre α variable à chaque itération soit nécessaire, ceci afin de contenir les premières itérations pour lesquelles la valeur du critère est importante, et de ne pas ralentir démesurément les suivantes.

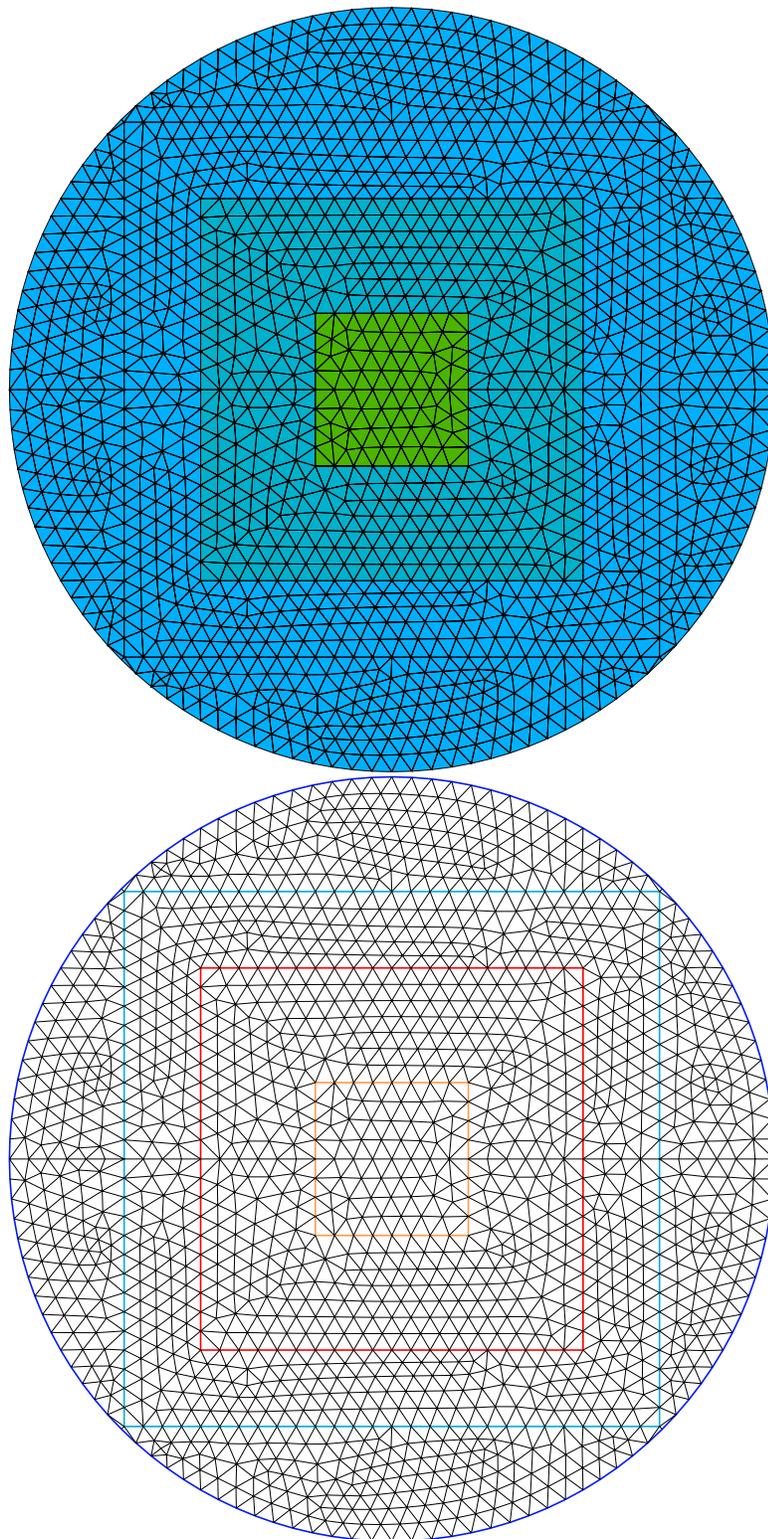


Figure 5.31: Maillage et frontières du domaine de calcul.

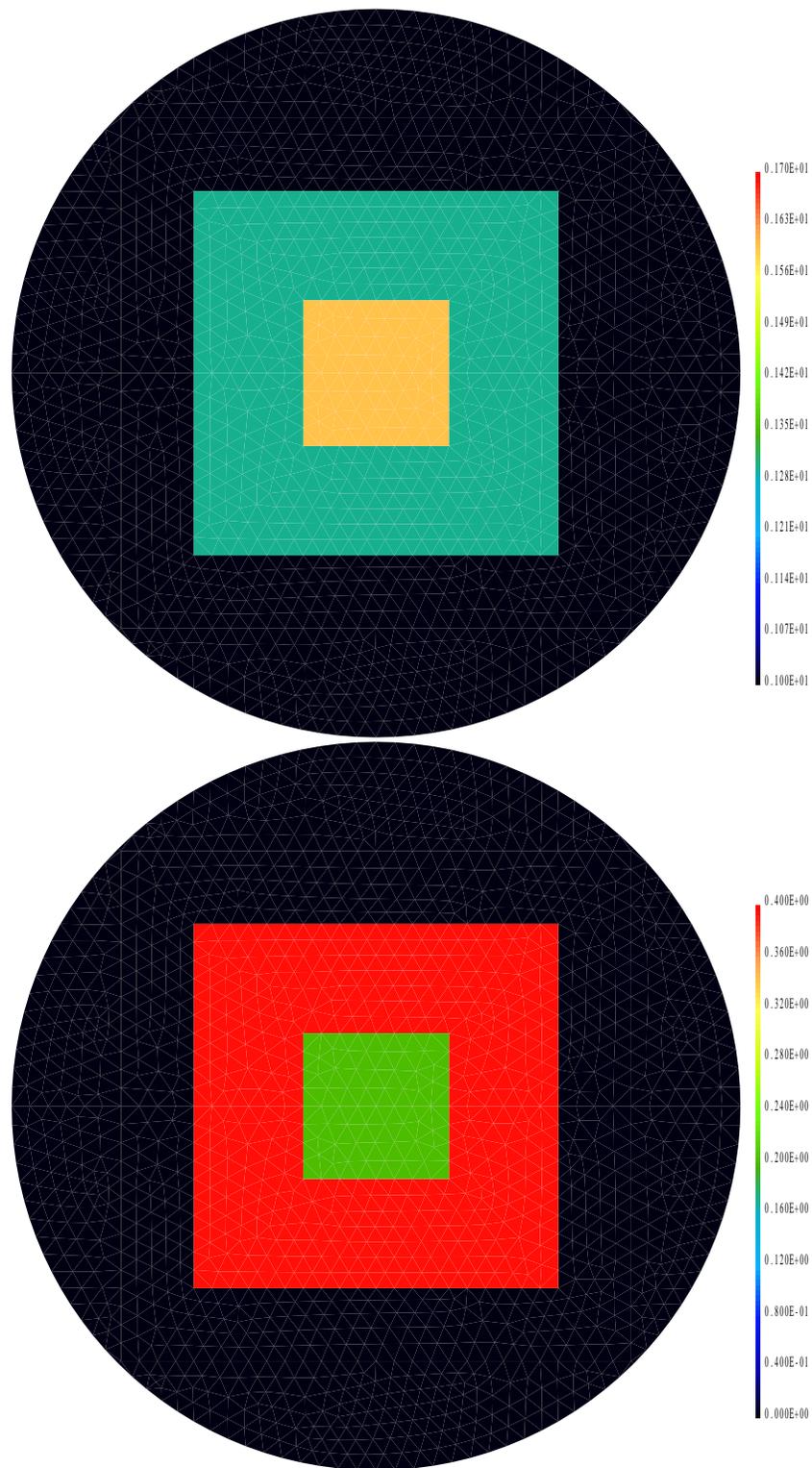


Figure 5.32: Carré intérieur. Parties réelle et imaginaire avec régularisation BV en données exactes après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 20$.

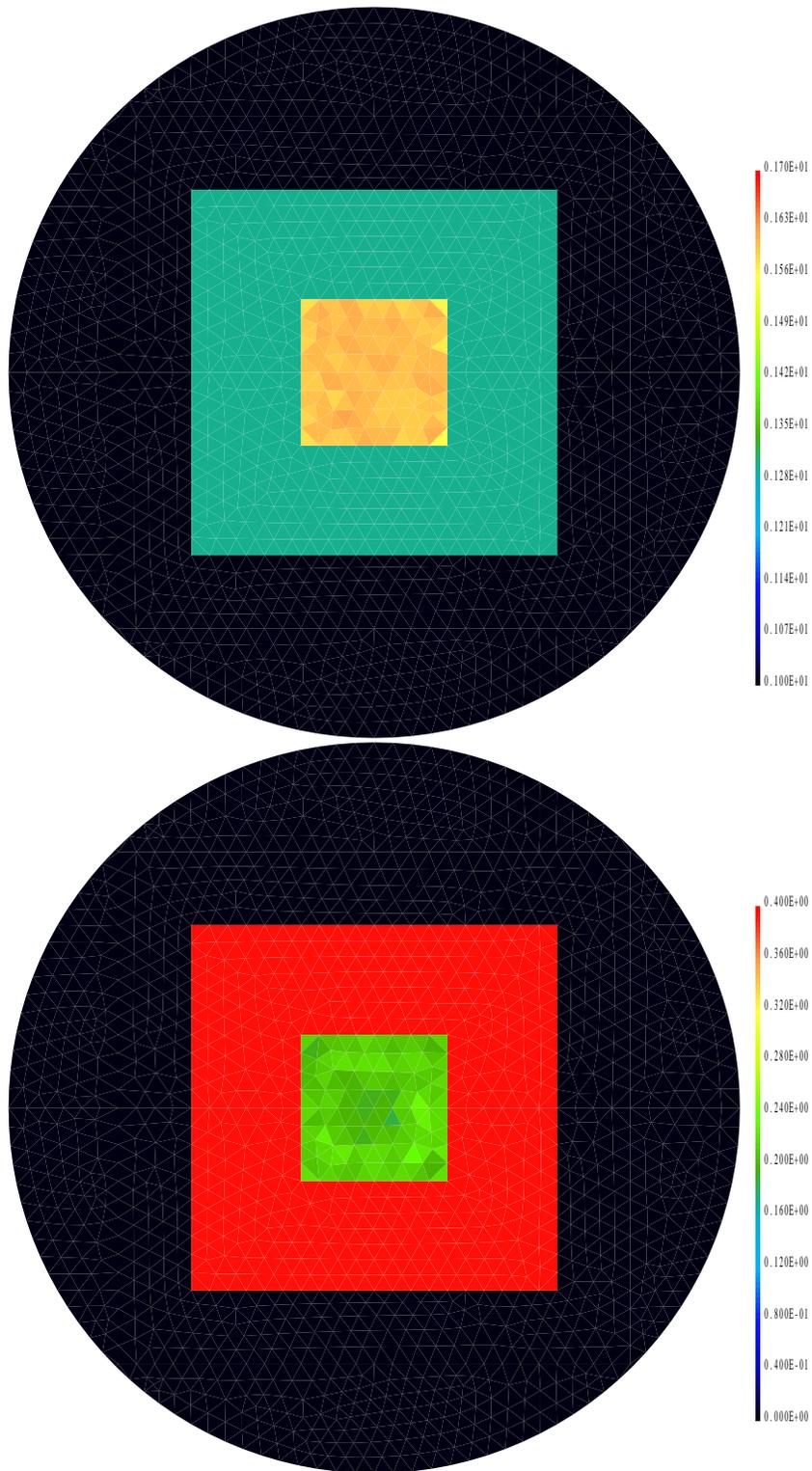


Figure 5.33: Carré intérieur. Parties réelle et imaginaire avec régularisation BV en données bruitées à 2% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 20$.

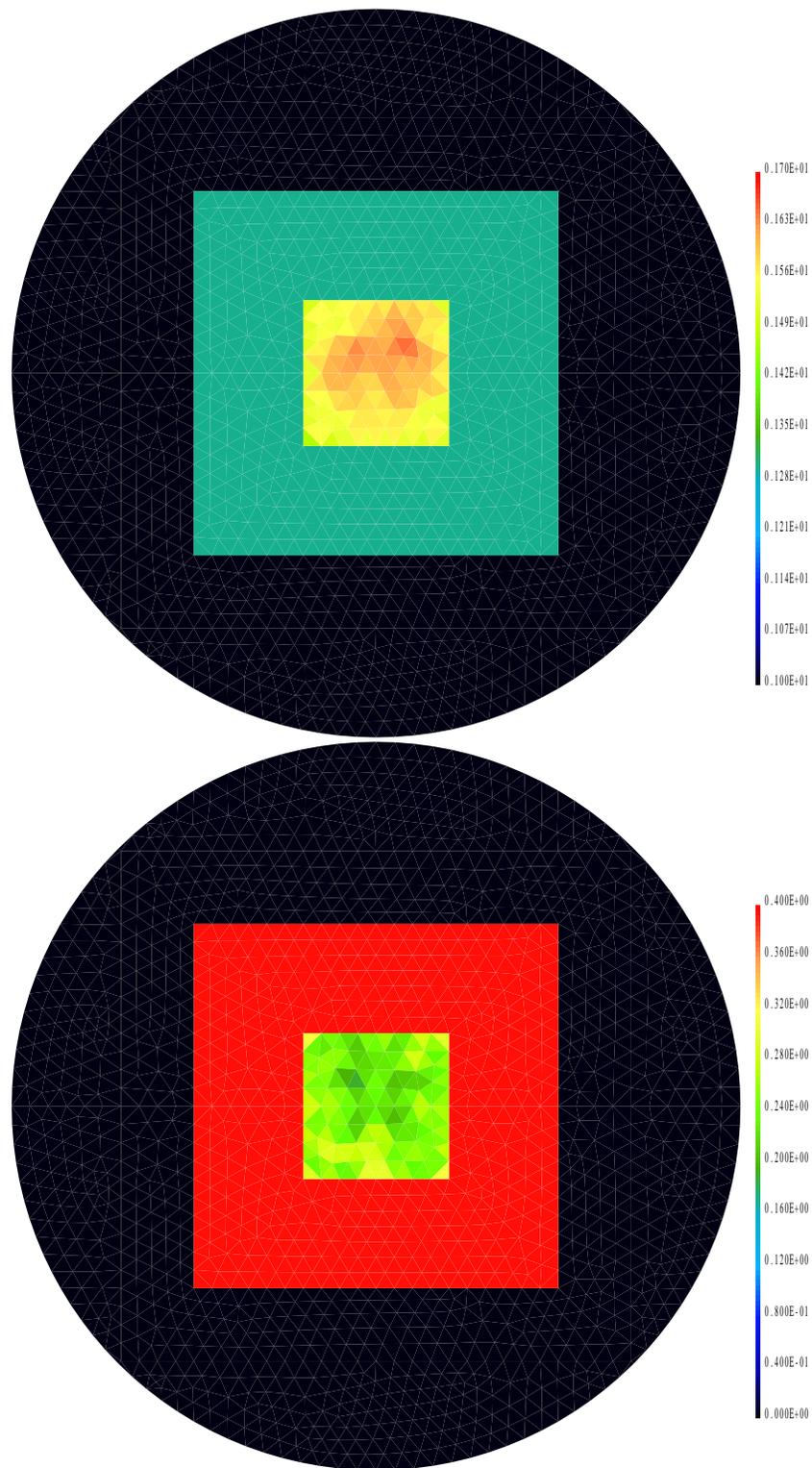


Figure 5.34: Carré intérieur. Parties réelle et imaginaire avec régularisation BV en données bruitées à 10% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 20$.

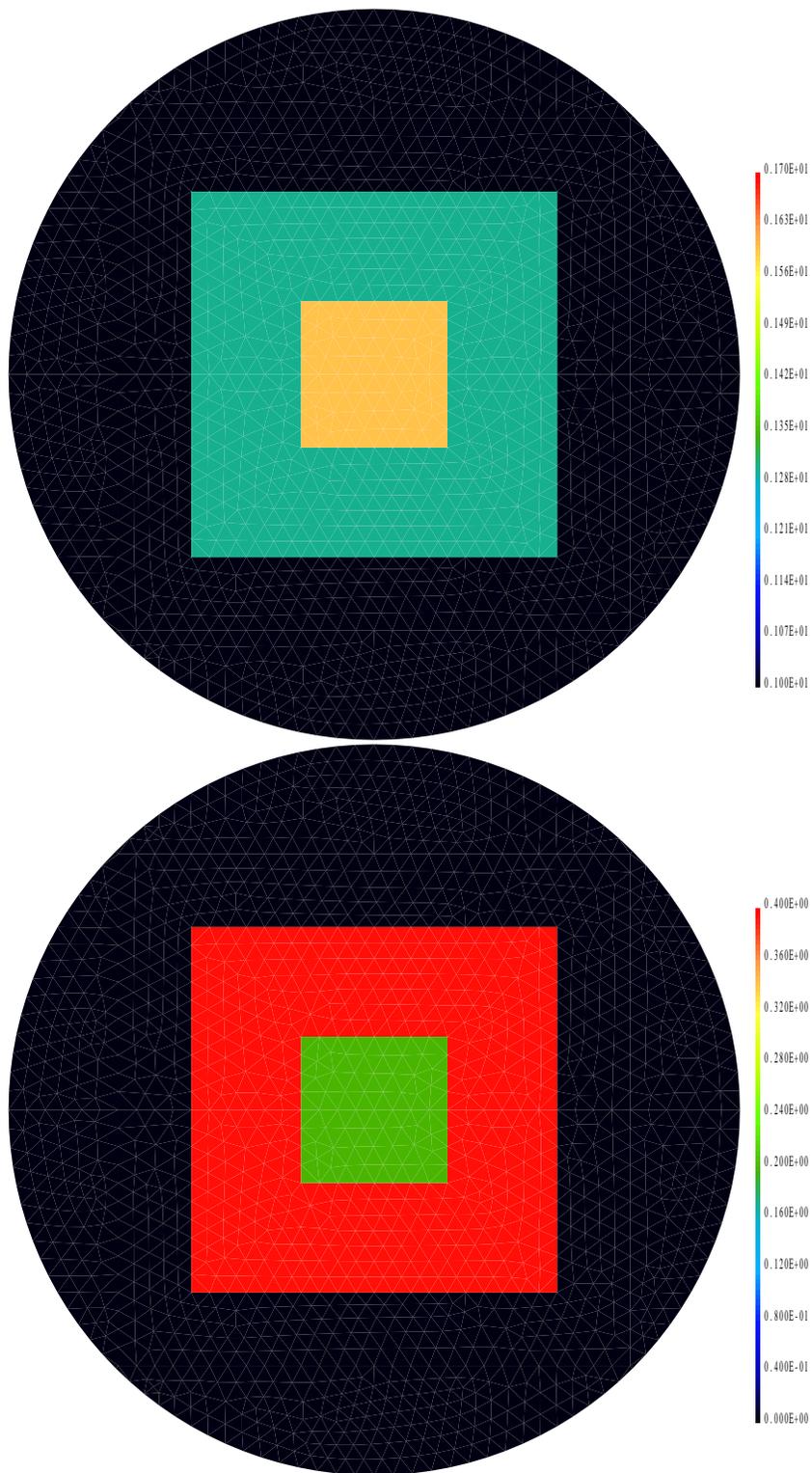


Figure 5.35: Carré entier. Parties réelle et imaginaire avec régularisation BV en données exactes après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 20$.

5.4 Initialisation de l'indice par une valeur moyenne.

Appliquée au cas d'obstacles entiers (figures 5.29 et 5.35), la méthode de Gauss-Newton régularisée par la fonctionnelle $J_{\beta,D}$ donne de très bons résultats, à condition que l'indice soit initialisé suffisamment proche de la solution. Il n'en est pas de même si l'indice de l'obstacle est initialisé à la valeur du vide. Cependant, il est possible que l'on doive résoudre un problème inverse de ce type sans pour autant avoir d'informations a priori sur l'indice de réfraction de l'obstacle. C'est pourquoi nous avons testé une méthode simple permettant d'obtenir une valeur moyenne avant d'appliquer la méthode.

Son principe est le suivant : on cherche l'indice de l'obstacle homogène minimisant la fonction coût, ce qui revient à rechercher un seul paramètre complexe par la méthode de Gauss-Newton. Ce processus s'est montré rapide, puisque 4 itérations de la méthode de Gauss-Newton simplifiée (une seule évaluation d'indice à chaque étape, sans régularisation) ont suffi pour obtenir la convergence vers la valeur moyenne recherchée. Cette valeur moyenne permet ensuite d'initialiser la méthode de Gauss-Newton "multivaleurs" régularisée par la fonctionnelle $J_{\beta,D}$, laquelle converge en données exactes vers la solution recherchée (figures 5.36 et 5.37) pour les deux problèmes complexes que nous avons étudié.

Ce type de stratégie "bigrille" laisse augurer de bons résultats sur une méthode multigrille. En effet, il n'est dans de nombreux cas pas nécessaire d'utiliser sur tout l'obstacle un maillage fin, et une stratégie de raffinement-déraffinement pourrait permettre de diminuer le nombre d'inconnues du problème inverse, et de ce fait de le rendre plus simple à résoudre.

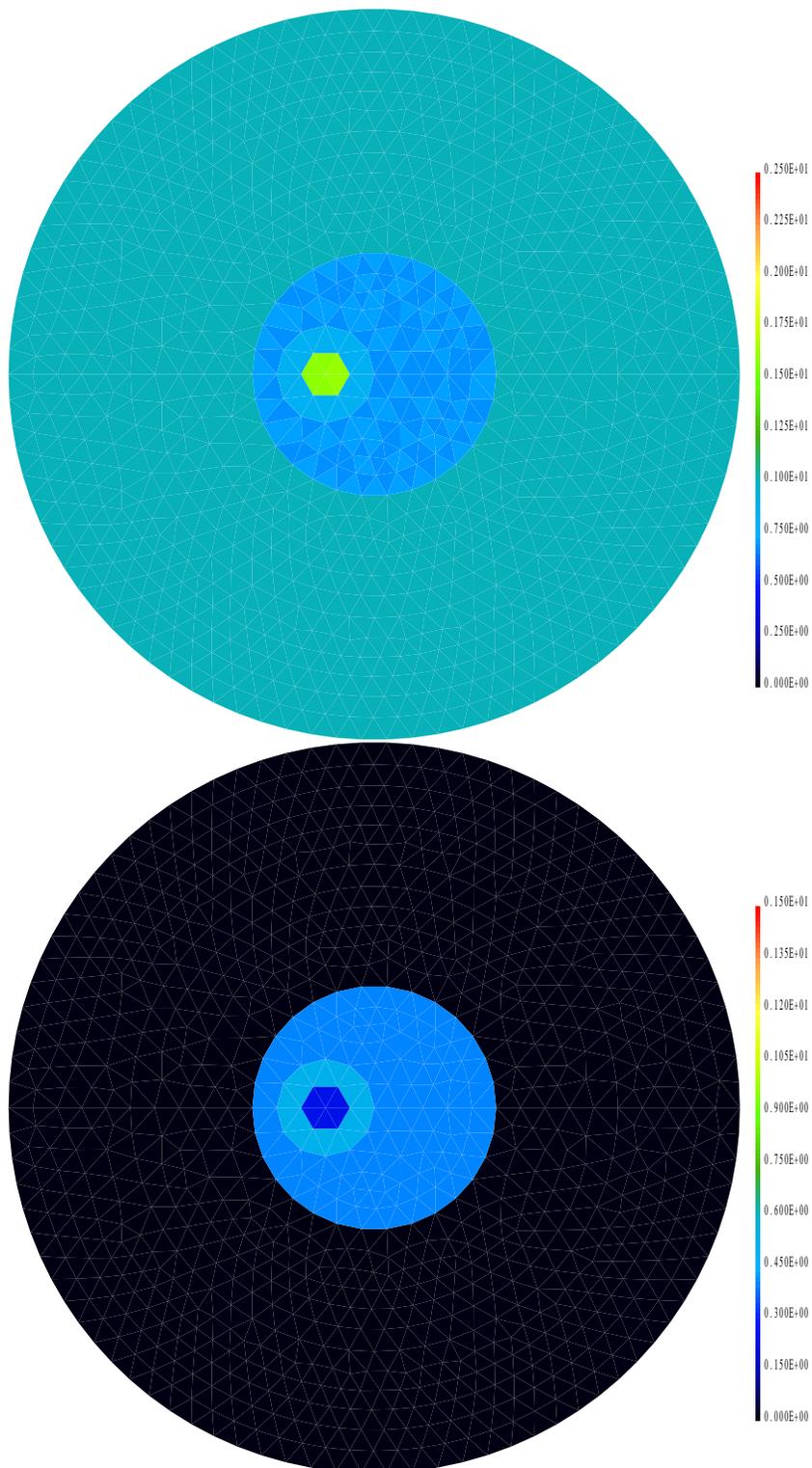


Figure 5.36: Obstacle entier initialisation vide. Parties réelle et imaginaire avec régularisation BV en données exactes après 4+6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-6}$.

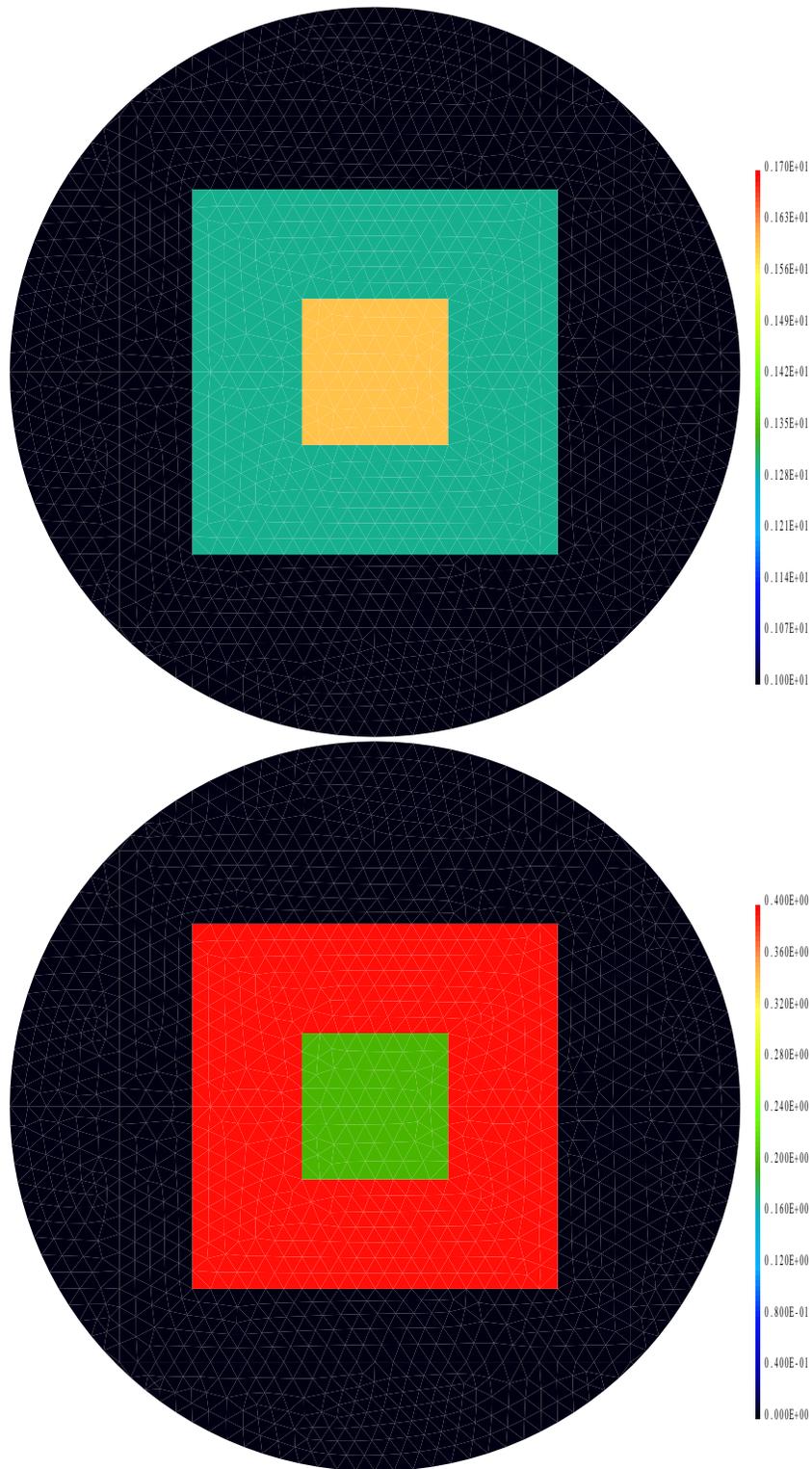


Figure 5.37: Carré entier initialisation vide. Parties réelle et imaginaire avec régularisation BV en données exactes après 4+6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 20$.

Conclusion.

Partant d'une définition assez floue du problème inverse que l'on se posait, à savoir l'identification de l'indice de réfraction d'un obstacle diélectrique parfait à partir de données du champ proche, nous avons dans un premier temps établi le support théorique nécessaire à sa résolution. C'est ainsi que partant de considérations physiques sur la nature de la solution, nous avons choisi de rechercher cet indice dans un espace fonctionnel adéquat, à savoir $L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$. Un résultat d'unicité de la solution dans cet espace à partir de la mesure du champ proche pour toute direction incidente nous a permis de poser convenablement le problème, puisqu'on définit ainsi un ensemble suffisant de données pour cette identification.

La résolution de ce problème inverse consiste alors en la minimisation d'un problème de moindres carrés non-linéaires. Quel que soit l'algorithme d'optimisation choisi pour traiter ce problème, il est nécessaire d'évaluer de nombreuses fois la valeur du critère, ainsi que celle de ses sensibilités à des variations élémentaires de l'indice. On doit alors résoudre de multiples problèmes directs pour estimer ces valeurs de la fonctionnelle. Le choix d'une méthode variationnelle d'approximation de l'équation aux dérivées partielles est motivé par son faible coût d'assemblage, ainsi que sa rapidité d'exécution qui offre des perspectives pour la résolution du problème inverse en dimension trois. Le problème de l'approximation des conditions de radiation à l'infini est quant à lui traité en couplant l'opérateur de Helmholtz classique à un opérateur pseudo-différentiel décrivant un milieu PML de Bérenger associé à l'équation considérée.

L'algorithme d'inversion choisi est celui de Gauss-Newton. Cette méthode classique est en effet bien adaptée à la résolution des problèmes de moindres carrés non-linéaires, et facile à implémenter. A chaque étape de la méthode de Gauss-Newton, les problèmes de moindres carrés linéaires à résoudre sont mal posés, et il est nécessaire de régulariser l'algorithme pour le rendre stable. On choisit pour cela de pénaliser en dimension finie chaque étape de l'algorithme par une fonctionnelle non-quadratique, régularisée de la semi-norme BV, différentiable et strictement convexe sur l'espace d'approximation que l'on considère.

Les résultats obtenus sur les différents cas tests étudiés à l'aide du code expérimental 2D que nous avons élaboré à partir de cette méthode semblent montrer qu'une telle régularisation est bien mieux adaptée à la résolution du problème que les régularisations de Tychonov standard. Chaque problème inverse possède en effet des spécificités propres, et la régularisation de Tychonov s'avère un outil beaucoup trop général pour s'adapter aux particularités de chacun de ces problèmes.

Une première perspective à cette étude, d'ordre numérique, est d'élaborer le code équivalent en dimension trois. L'étape la plus subtile de cette adaptation est sans conteste l'écriture du couplage des opérateurs de Helmholtz, ou de Maxwell harmonique avec un opérateur décrivant un milieu PML de

Bérenger. Ce travail fait actuellement l'objet d'une autre thèse. Le passage en 3D de l'algorithme d'inversion ne nécessite pas quant à lui d'effort particulier.

Il serait également intéressant d'élaborer une stratégie de choix d'un paramètre optimal de régularisation à chaque étape. En effet, les valeurs du critère comme de la pénalisation évoluent énormément au cours de l'algorithme, et un choix empirique et constant de ce paramètre dès la première étape ne permet plus de restituer l'indice à l'aide de mesures bruitées pour un grand nombre d'inconnues.

Enfin, une dernière perspective, entrevue dans le paragraphe 5.4, concerne la possibilité éventuelle de résoudre le problème inverse à l'aide d'une méthode multigrille. En effet, les obstacles dont on souhaite calculer l'indice de réfraction sont généralement composés d'un faible nombre de zones homogènes de dimensions variées. Il serait par conséquent intéressant d'élaborer des critères de raffinement-déraffinement, qui affinent le maillage au voisinage des discontinuités d'indice, et suppriment des éléments au milieu des zones homogènes.

Bibliographie

- [1] S. ABARBANEL and D. GOTTLIEB. A mathematical analysis of the PML method. *Journal of Computational Physics*, 134(2):357–363, 1997.
- [2] R. ACAR and C.R. VOGEL. Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems. *Inverse Problems*, 10:1217–29, 1994.
- [3] G. ANZELLOTTI, G. BUTTAZZO, and G. DAL MASO. Dirichlet problem for demi-coercive functionals. *Nonlinear Analysis*, 10(6):603–613, 1986.
- [4] J.P. BERENGER. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114(2):185–200, 1994.
- [5] P.M. VAN DEN BERG and R.E. KLEINMAN. A total variation enhanced modified gradient algorithm for profile reconstruction. *Inverse Problems*, 11:L5–L10, 1995.
- [6] E. CASAS, K. KUNISCH, and C. POLA. Regularization by functions of bounded variation and applications to image enhancement. *Applied Mathematics and Optimization*, 40:229–257, 1999.
- [7] G. CHAVENT. Generalized sentinels defined via least squares. *Applied Mathematics and Optimization*, pages 189–218, 1995.
- [8] G. CHAVENT and K. KUNISCH. Regularization of linear least squares problems by total bounded variation. *ESAIM : C.O.C.V.*, 2:359–376, December 1997.
- [9] W.C. CHEW and W.H. WEEDON. A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell’s equations with stretched coordinates. *Microwave and Optical Technology Letters*, 7(13):599–604, 1994.
- [10] F. COLLINO and P. MONK. The perfectly matched layer in curvilinear coordinates. Technical Report 3049, INRIA, November 1996.
- [11] F. COLLINO and P. MONK. Conditions et couches absorbantes pour les équations de Maxwell. In G. Cohen and P. Joly, editors, *Ecole des ondes INRIA : Aspects récents en méthodes numériques pour les équations de Maxwell*. INRIA, Mars 1998.
- [12] F. COLLINO and P. MONK. The perfectly matched layer in curvilinear coordinates. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19:2061–2090, 1998.

- [13] D. COLTON and R. KRESS. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. John Wiley & Sons, 1983.
- [14] D. COLTON and R. KRESS. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, volume 93 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer Verlag, second edition, 1992.
- [15] D. COLTON and P. MONK. The inverse scattering problem for acoustic waves in an inhomogeneous medium. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 41:97–125, 1988.
- [16] D. COLTON and P. MONK. A new method for solving the inverse scattering problem for acoustic waves in an inhomogeneous medium. *Inverse Problems*, 5:1013–1026, 1989.
- [17] D. COLTON and P. MONK. A new method for solving the inverse scattering problem for acoustic waves in an inhomogeneous medium II. *Inverse Problems*, 6:935–947, 1990.
- [18] D. COLTON and P. MONK. The detection and monitoring of leukemia using electromagnetic waves : mathematical theory. *Inverse Problems*, 10:1235 – 1251, 1994.
- [19] D. COLTON and P. MONK. The detection and monitoring of leukemia using electromagnetic waves : numerical analysis. *Inverse Problems*, 11:329–342, 1995.
- [20] A. de la BOURDONNAYE. Sur le problème de Cauchy pour le système de Bérénger. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 322(Série I):285–288, 1996.
- [21] J. E. DENNIS and R. B. SCHNABEL. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, volume 16 of *Classics in Applied Mathematics*. SIAM, 1996.
- [22] M. GIAQUINTA, G. MODICA, and J. SOUCEK. Functionals with linear growth in the calculus of variations. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 20(1):143–172, 1979.
- [23] E. GIUSTI. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, volume 80 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser, 1984.
- [24] V. ISAKOV. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, volume 127 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer Verlag, 1998.
- [25] A. KIRSCH. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, volume 120 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer Verlag, 1996.
- [26] P.A. MAZET, S. PAINTANDRE, and A. RAHMOUNI. Interprétation dispersive du milieu PML de Bérénger. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 327(Série I):59–64, 1998.
- [27] J. METRAL and O. VACUS. Caractère bien posé du problème de Cauchy pour le système de Bérénger. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 328(Série I):847–852, 1999.
- [28] MIZOHATA. *La Théorie des Equations aux Dérivées Partielles: Hypoellipticité des Opérateurs*. CNRS, 1956.

- [29] J.J. MORE and D.C. SORENSEN. Computing a trust region step. *SIAM J. Sci.Stat. Comput.*, 4(3):553–572, 1983.
- [30] A. NACHMAN. Reconstruction from boundary measurements. *Ann. Math.*, 128:531–576, 1988.
- [31] R. NOVIKOV. Multidimensional inverse spectral problems for the equation $\Leftrightarrow\Delta\psi + (v(x) \Leftrightarrow Eu(x))\psi = 0$. *Trans. Func. Anal. Appl.*, 22:263–272, 1988.
- [32] S. PAINTANDRE. *Matériaux non parfaits en électromagnétisme : matériaux non linéaires, dispersifs et matériau fictif absorbant*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Juin 1998.
- [33] V. PETKOV. *Scattering Theory for Hyperbolic Operators*, volume 21 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland, 1989.
- [34] P.G. PETROPOULOS, L. ZHAO, and A.C. CANGELLARIS. A reflectionless sponge layer absorbing boundary condition for the solution of Maxwell's equations with high-order staggered finite difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 139(1):184–208, 1998.
- [35] A.G. RAMM. Recovery of the potential from fixed-energy scattering data. *Inverse Problems*, 4:877–886, 1988.
- [36] L. SEGUI. Couplage de l'opérateur de Maxwell avec un opérateur pseudo-différentiel absorbant : interprétation dispersive du milieu PML de Bérenger. mémoire de DEA, Université Paul Sabatier, Juin 1996.
- [37] J. SYLVESTER and G. UHLMANN. A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. *Ann. Math.*, 125:153–169, 1987.
- [38] C.H. WILCOX. *Scattering Theory for the d'Alembert Equation in Exterior Domains*, volume 442 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1975.

Liste des figures

1.1	Le problème de la diffraction.	10
3.1	Une idée de la décroissance du prolongement du noyau de Green sur le chemin complexe $\tilde{r}(r) = r + i\sigma(r)/k$	49
3.2	maillage du domaine de calcul.	61
3.3	disque purement diffractif.	62
3.4	disque diffractif et dissipatif.	62
3.5	module des champs diffractés sur le domaine de calcul.	63
5.1	maillage du domaine de calcul	92
5.2	Partie réelle de l'indice à partir de données exactes après 6 itérations.	93
5.3	Partie réelle de l'indice avec régularisation L^2 à partir de données bruitées à 2% après 6 itérations, $\alpha = 10^{-6}$	93
5.4	Partie réelle de l'indice avec régularisation BV à partir de données bruitées à 2% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}, \alpha = 10^{-5}$	94
5.5	Partie réelle de l'indice avec régularisation L^2 à partir de données bruitées à 10% après 6 itérations, $\alpha = 10^{-5}$	95
5.6	Partie réelle de l'indice avec régularisation BV à partir de données bruitées à 10% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}, \alpha = 10^{-5}$	96
5.7	Maillage et frontières du domaine de calcul.	99
5.8	Parties réelle et imaginaire de l'indice à partir de données exactes après 6 itérations.	100
5.9	Parties réelle et imaginaire de l'indice avec régularisation L^2 à partir de données bruitées à 2% après 6 itérations, $\alpha = 10^{-6}$	101
5.10	Parties réelle et imaginaire avec régularisation "semi-norme H^1 " en données bruitées à 2% après 6 itérations, $\alpha = 1$	102
5.11	Parties réelle et imaginaire de l'indice restitué avec régularisation BV en données bruitées à 2% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}, \alpha = 1.5 \cdot 10^{-1}$	103
5.12	Parties réelle et imaginaire de l'indice avec régularisation L^2 à partir de données bruitées à 10% après 6 itérations, $\alpha = 10^{-5}$	104
5.13	Parties réelle et imaginaire avec régularisation "semi-norme H^1 " en données bruitées à 10% après 6 itérations, $\alpha = 10$	105
5.14	Parties réelle et imaginaire de l'indice restitué avec régularisation BV en données bruitées à 10% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}, \alpha = 1.5$	106

5.15	Parties réelle et imaginaire de l'indice restitué avec régularisation BV en données bruitées à 20% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 2.5$.	107
5.16	Défaut plus petit. Parties réelle et imaginaire de l'indice restitué avec régularisation BV en données exactes après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-6}$.	108
5.17	Défaut plus petit. Parties réelle et imaginaire de l'indice restitué avec régularisation BV en données bruitées à 2% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-1}$.	109
5.18	Défaut plus petit. Parties réelle et imaginaire de l'indice restitué avec régularisation BV en données bruitées à 10% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 0.7$.	110
5.19	Défaut non connexe. Parties réelle et imaginaire de l'indice restitué avec régularisation BV en données exactes après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-4}$.	111
5.20	Défaut non connexe. Parties réelle et imaginaire de l'indice restitué avec régularisation BV en données bruitées à 2% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-1}$.	112
5.21	Cas raffiné. Maillage et frontières du domaine de calcul.	114
5.22	Cas raffiné. Parties réelle et imaginaire avec régularisation L^2 en données exactes après 6 itérations, $\alpha = 10^{-5}$.	115
5.23	Cas raffiné. Parties réelle et imaginaire avec régularisation "semi-norme H^1 " en données exactes après 6 itérations, $\alpha = 10^{-6}$.	116
5.24	Cas raffiné. Parties réelle et imaginaire avec régularisation BV en données exactes après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-5}$.	117
5.25	Cas raffiné. Parties réelle et imaginaire avec régularisation "semi-norme H^1 " en données bruitées à 2% après 6 itérations, $\alpha = 20$.	118
5.26	Cas raffiné. Parties réelle et imaginaire avec régularisation BV en données bruitées à 2% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-1}$.	119
5.27	Cas raffiné. Parties réelle et imaginaire avec régularisation "semi-norme H^1 " en données bruitées à 10% après 6 itérations, $\alpha = 30$.	120
5.28	Cas raffiné. Parties réelle et imaginaire avec régularisation BV en données bruitées à 10% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 1$.	121
5.29	Obstacle entier. Parties réelle et imaginaire avec régularisation BV en données exactes après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-6}$.	123
5.30	Obstacle entier. Parties réelle et imaginaire avec régularisation BV en données bruitées à 2% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-2}$.	124
5.31	Maillage et frontières du domaine de calcul.	126
5.32	Carré intérieur. Parties réelle et imaginaire avec régularisation BV en données exactes après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 20$.	127
5.33	Carré intérieur. Parties réelle et imaginaire avec régularisation BV en données bruitées à 2% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 20$.	128
5.34	Carré intérieur. Parties réelle et imaginaire avec régularisation BV en données bruitées à 10% après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 20$.	129
5.35	Carré entier. Parties réelle et imaginaire avec régularisation BV en données exactes après 6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 20$.	130
5.36	Obstacle entier initialisation vide. Parties réelle et imaginaire avec régularisation BV en données exactes après 4+6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 10^{-6}$.	132

5.37 Carré entier initialisation vide. Parties réelle et imaginaire avec régularisation BV en données exactes après 4+6 itérations, $\beta = 10^{-3}$, $\alpha = 20$ 133

Sur un problème inverse en diffraction d'ondes - identification des permittivités complexes d'un matériau à partir de données en champ proche.

Résumé : La présence de fortes hétérogénéités à l'intérieur d'un obstacle diélectrique ne permet pas la détermination de son indice de réfraction par des méthodes optiques. C'est pourquoi il est nécessaire de se placer dans le domaine de la diffraction. L'indice de réfraction est alors lié à des mesures du champ diffracté par l'équation de Helmholtz. Du point de vue mathématique, ce problème inverse est à la fois non-linéaire et mal posé, que les données soient de type champ proche ou champ lointain.

L'objet de cette thèse est de proposer une méthode de résolution approchée pour ce problème inverse, à partir de données du champ proche sur une surface entourant l'obstacle. Contrairement aux problèmes de contrôle dont le but est de minimiser un critère sans pour autant se soucier de l'unicité du minimum, on se préoccupe ici de l'identification de ce minimum, et l'unicité de la solution est de ce fait essentielle. L'indice est ainsi identifiable de manière unique dans $L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ à partir de la mesure du champ proche pour toute direction incidente de S^2 .

Développée dans un premier temps pour le cas de la dimension deux, la méthode doit rester applicable à la dimension trois sans que les temps de calcul ne deviennent pour autant prohibitifs. C'est pourquoi on choisit d'évaluer les sensibilités des mesures à des variations élémentaires de l'indice par une méthode d'approximation de l'EDP plutôt que par la méthode intégrale volumique (équation de Lippmann-Schwinger) habituellement utilisée dans ce type de problème. La méthode choisie inverse des matrices creuses en lieu et place des matrices pleines de la méthode intégrale. L'approximation des conditions aux limites est effectuée de manière très précise grâce à l'introduction, autour du domaine de calcul, d'un milieu fictif absorbant PML de Bérenger.

L'algorithme d'inversion choisi est celui de Gauss-Newton, pour lequel on recherche une forme de stabilité en testant successivement deux régularisations de Tychonov (en norme L^2 et en semi-norme H^1), puis une pénalisation par une régularisée de la semi-norme BV. Cette dernière s'avère, au vu des différents cas tests étudiés, la mieux adaptée pour résoudre ce problème.

Mots Clefs : Problème inverse, Equation de Helmholtz, Indice de réfraction, Unicité, Milieu PML de Bérenger, Méthode de Gauss-Newton, Régularisation, Semi-norme BV.

On an inverse scattering problem - identification of the refractive index of a body from near field data.

Abstract : Due to high heterogeneities that can exist inside a dielectric obstacle, generally optical methods cannot be used in order to retrieve the refractive index of a body. This implies to use scattering methods, where the refractive index is linked to measurements of the scattered field via the Helmholtz equation. From a mathematical point of view, this problem is both nonlinear and ill-posed, whether we consider near field or far field data.

The purpose of this thesis is to describe a numerical method to identify the refractive index from near field data on a surface surrounding the obstacle. Whereas control problems only require the minimization of a criteria with no necessary information on the uniqueness of this minimum, here we need to identify this minimum, and therefore the uniqueness of the solution is essential. We study the uniqueness of the solution in $L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ from near field data for all incident directions in S^2 .

Although developed for the two dimensional case, the numerical method was built in order to be fast enough to have applications in the 3D case. We choose to calculate the measurements sensitivities with respect to elementary variations of the index by using a variational formulation of the PDE rather than by the volumic integral method (the Lippmann-Schwinger equation) usually used to solve this kind of problem. The variational method requires the inversion of sparse matrices instead of full matrices in the integral method. The radiation condition is accurately approximated by a curvilinear coordinates PML formulation around the computation domain.

The inversion is performed through the Gauss-Newton algorithm, and the stability is assured by means of penalization with two different types of Tychonov regularization (L^2 norm and H^1 seminorm), and by a BV regularized seminorm. This last penalization appears to be the best fitted to solve our problem.

Key Words : Inverse problem, Helmholtz equation, Refractive index, Uniqueness, Bérenger's Perfectly Matched Layer, Gauss-Newton method, Regularization, BV seminorm.