

# THÈSE

présentée en vue de  
l'obtention du titre de

**DOCTEUR**

de

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE**

**SPÉCIALITÉ : TRAITEMENT DU SIGNAL ET TÉLÉCOMMUNICATIONS**

par

**Vincent CALMETTES**

**ÉTUDE DE TECHNIQUES D'ADOUCCISSEMENT DE SPECTRE POUR RÉCEPTEUR GPS**

Soutenue le 11 décembre 2001 devant la Commission d'Examen :

<b>MM.</b>	<b>F. CASTANIE</b>	<b>Président</b>
	<b>G. ALENGRIN</b>	<b>Rapporteur</b>
	<b>M. BELLANGER</b>	<b>Rapporteur</b>
	<b>M. BOUSQUET</b>	
	<b>F. PRADEILLES</b>	<b>Directeur de thèse</b>
	<b>O. CROP</b>	<b>Membre invité</b>
	<b>G. LUNEAU</b>	<b>Membre invité</b>
	<b>A. RENARD</b>	<b>Membre invité</b>

Etude de techniques d'adoucissement de spectre  
pour  
récepteur GPS

par

Vincent CALMETTES

Thèse soutenue le 11 décembre 2001 devant la commission d'examen :

M. Francis CASTANIE	Président
M. Gérard ALENGRIN	Rapporteur
M. Maurice BELLANGER	Rapporteur
M. Frédéric PRADEILLES	Directeur de thèse
M. Michel BOUSQUET	
M. Olivier CROP	Membre invité
M. Ghislain LUNEAU	Membre invité
M. Alain RENARD	Membre invité



# Table des matières

<b>1 Récepteur GPS : Avant Propos</b>	<b>7</b>
<b>I Le récepteur conventionnel défini en présence de bruit blanc gaussien</b>	<b>11</b>
<b>1 Récepteur optimal en présence de bruit blanc et gaussien</b>	<b>13</b>
1.1 Signal à l'entrée du récepteur adapté . . . . .	14
1.2 Estimation des paramètres du signal . . . . .	15
1.3 Performance du récepteur . . . . .	16
1.3.1 Puissance du test . . . . .	16
1.3.2 Performance de la boucle de code . . . . .	20
1.4 Conclusions . . . . .	21
<b>2 Effets des interférences sur les récepteurs GPS</b>	<b>23</b>
2.1 Sources d'interférence . . . . .	24
2.2 Bruit en présence d'une interférence . . . . .	24
2.2.1 Interférence bande étroite . . . . .	26
2.2.2 Interférence de bande semi étroite . . . . .	27
2.3 Effet d'une interférence sur la boucle de poursuite . . . . .	27
2.4 Effet d'une interférence sur la quantification . . . . .	28
2.5 Conclusions . . . . .	31
<b>II Le récepteur GPS en présence de bruits non blancs</b>	<b>33</b>
<b>1 Elimination des interférences par filtrage temporel linéaire</b>	<b>35</b>
1.1 Présentation . . . . .	36
1.2 Architecture du filtre à encoches . . . . .	36
1.3 Etude d'une cellule de Filtrage à encoche . . . . .	37

1.4	Filtre à encoche adaptatif . . . . .	39
1.4.1	Puissance de l'interférence en sortie du bloc AR ( $J_I$ ) . . . . .	40
1.4.2	Puissance du bruit blanc gaussien en sortie du bloc AR ( $G_I$ ) . . . . .	42
1.4.3	Rapport de puissance interférence-bruit en sortie du bloc AR . . . . .	42
1.5	Adaptation en présence d'une interférence fixe . . . . .	43
1.5.1	Solution de Wiener . . . . .	44
1.5.2	Caractéristique du filtre de Wiener . . . . .	45
1.5.3	L'algorithme du gradient . . . . .	46
1.5.4	Convergence de l'algorithme du gradient . . . . .	47
1.5.5	Temps de convergence . . . . .	49
1.5.6	Convergence en présence du bloc AR . . . . .	49
1.5.7	Erreur d'estimation . . . . .	50
1.5.8	Puissance résiduelle en sortie du bloc AR . . . . .	53
1.5.9	Réglage du coefficient $\alpha_0$ du bloc AR . . . . .	54
1.5.10	Mise en œuvre du filtre . . . . .	55
1.6	Adaptation en présence d'une interférence modulée . . . . .	57
1.6.1	Solution de Wiener . . . . .	57
1.6.2	Convergence du LMS en présence d'une interférence modulée . . . . .	58
1.6.3	Vitesse de poursuite du filtre . . . . .	61
1.7	Filtrage de plusieurs brouilleurs . . . . .	62
1.7.1	Solution de Wiener . . . . .	63
1.7.2	Caractéristique du filtre de Wiener . . . . .	64
1.7.3	Convergence de l'algorithme du gradient . . . . .	65
1.7.4	Comportement en présence du bloc AR . . . . .	66
1.7.5	Filtrage de la solution . . . . .	69
1.8	Performances . . . . .	73
1.8.1	Intercorrélation Signal reçu filtré - Code local . . . . .	73
1.8.2	Fonction d'autocorrélation du Signal reçu filtré . . . . .	75
1.8.3	Gain de corrélation . . . . .	77
1.9	Application à l'élimination de 4 brouilleurs . . . . .	78
1.10	Conclusions . . . . .	79
<b>2</b>	<b>Elimination des interférences par filtrage fréquentiel</b>	<b>83</b>
2.1	Principe du filtrage fréquentiel . . . . .	84
2.1.1	Présentation . . . . .	84
2.1.2	Caractéristiques du signal dans le domaine des fréquences . . . . .	85
2.1.3	Choix du nombre de points de la représentation en fréquence . . . . .	88

2.1.4	Choix de la fenêtre de troncature . . . . .	89
2.2	Filtrage fréquentiel . . . . .	92
2.2.1	Élimination des composantes fréquentielles de l'interférence . . . . .	92
2.2.2	Filtrage fréquentiel conservant la phase . . . . .	99
2.3	Comparaison des 2 techniques de filtrage . . . . .	105
2.4	Estimation de la puissance du bruit gaussien . . . . .	106
2.5	Conclusions . . . . .	109
 <b>III Le récepteur GPS en présence de bruits non gaussiens</b>		<b>111</b>
 <b>1 Détection d'un signal dans un bruit non gaussien</b>		<b>113</b>
1.1	Définition du détecteur optimum . . . . .	115
1.1.1	Principe . . . . .	115
1.1.2	Architecture du récepteur optimum . . . . .	118
1.1.3	Propriété de l'opérateur . . . . .	118
1.1.4	Convergence du test . . . . .	119
1.1.5	Fonction à maximiser en présence des termes d'ordre 2 . . . . .	119
1.2	Performances du détecteur optimum . . . . .	121
1.2.1	Rapport signal sur bruit en l'absence de l'opérateur . . . . .	122
1.2.2	Rapport signal sur bruit en présence de l'opérateur . . . . .	122
1.2.3	Gain de traitement . . . . .	123
1.3	Application à des bruits particuliers . . . . .	124
1.3.1	Bruits gaussiens . . . . .	124
1.3.2	Bruits sinusoïdaux . . . . .	125
1.3.3	Bruits composites : bruit sinusoïdal + bruit gaussien . . . . .	126
1.4	Simulation du récepteur optimum . . . . .	127
1.4.1	Conditions de simulation . . . . .	127
1.4.2	Représentations du bruit . . . . .	127
1.4.3	Estimation des lois $f_w$ et $G_w$ . . . . .	128
1.4.4	Estimation du gain de traitement théorique . . . . .	130
1.4.5	Estimation des densités spectrales de puissance . . . . .	130
1.4.6	Estimation du gain de traitement par corrélation . . . . .	131
1.5	Conclusions . . . . .	132
 <b>2 Le récepteur GPS en présence de bruits non gaussiens</b>		<b>135</b>
2.1	Définition du problème . . . . .	136
2.2	Récepteur optimum . . . . .	136

2.2.1	Principe . . . . .	136
2.2.2	Rapport de vraisemblance . . . . .	138
2.2.3	Expression de la fonction test . . . . .	138
2.2.4	Architecture du récepteur localement optimum . . . . .	139
2.3	Construction d'un signal unidimensionnel . . . . .	140
2.3.1	Intérêt . . . . .	140
2.3.2	Expression de l'opérateur non linéaire . . . . .	140
2.4	Performances . . . . .	143
2.4.1	Contexte de l'évaluation . . . . .	143
2.4.2	Rapport signal sur bruit en l'absence de l'opérateur . . . . .	144
2.4.3	Rapport signal sur bruit en présence de l'opérateur . . . . .	145
2.4.4	Gain de traitement . . . . .	147
2.5	Performances en présence de bruits particuliers . . . . .	148
2.5.1	Bruit gaussien . . . . .	148
2.5.2	Bruit sinusoïdal . . . . .	149
2.5.3	Bruits composites : bruit sinusoïdal + bruit gaussien . . . . .	151
2.5.4	Interférence balayée en fréquence + bruit gaussien . . . . .	157
2.5.5	Interférence pulsée + bruit gaussien . . . . .	157
2.6	Simulation du récepteur optimum . . . . .	159
2.6.1	Conditions de simulation . . . . .	159
2.6.2	Estimation des lois $f_{w_r}$ et $G_{w_r}$ . . . . .	159
2.6.3	Estimation du gain de traitement théorique . . . . .	160
2.6.4	Estimation des densités spectrales de puissance . . . . .	161
2.6.5	Estimation du gain de traitement par corrélation . . . . .	163
2.7	Conclusions . . . . .	163
<b>3</b>	<b>Traitement en fréquence de l'amplitude</b>	<b>167</b>
3.1	Position du problème . . . . .	168
3.2	Caractéristique fréquentielle du bruit . . . . .	169
3.3	Traitement de l'amplitude dans le plan fréquentiel . . . . .	171
3.3.1	Principe . . . . .	171
3.3.2	Définition du traitement . . . . .	172
3.3.3	Performances . . . . .	175
3.3.4	Estimation de l'amplitude de l'interférence . . . . .	176
3.4	Conclusions . . . . .	180

---

<b>IV Synthèse</b>	<b>183</b>
<b>1 Synthèse et Perspectives</b>	<b>185</b>
1.1 Synthèse . . . . .	185
1.2 Perspectives . . . . .	187
<b>V Annexes</b>	<b>189</b>
<b>Annexe 1: Caractéristiques du signal GPS</b>	<b>191</b>
0.3 Caractéristiques du signal émis par un satellite . . . . .	192
0.3.1 Formation du signal GPS . . . . .	192
0.3.2 Expression du signal généré . . . . .	193
0.3.3 Fonctions d'autocorrélation des codes d'étalement . . . . .	193
0.3.4 Spectre du signal GPS . . . . .	197
0.4 Caractéristiques du signal à l'entrée du récepteur . . . . .	198
0.4.1 Puissance du signal au niveau du récepteur . . . . .	198
0.4.2 Densité spectrale du bruit thermique . . . . .	199
0.4.3 Rapport puissance du signal sur densité spectrale de bruit . . . . .	200
0.4.4 Expression du signal à l'entrée du récepteur . . . . .	200
0.4.5 Expression du signal à l'entrée des boucles de corrélation . . . . .	201
<b>Annexe 2: Le récepteur conventionnel</b>	<b>203</b>
0.5 Le Récepteur adapté . . . . .	204
0.6 Architecture du récepteur . . . . .	205
0.6.1 Principe . . . . .	205
0.6.2 Boucle de code . . . . .	206
0.7 Le récepteur numérique . . . . .	208
0.7.1 Echantillonnage . . . . .	209
0.7.2 Quantification . . . . .	211
<b>Annexe 3: Filtre à encoche temporel</b>	<b>217</b>
0.8 Caractéristique du filtre à encoche . . . . .	218
0.8.1 Réponse en fréquence . . . . .	218
0.8.2 Bande excisée . . . . .	218
0.8.3 Caractéristiques fréquentielles du bloc AR . . . . .	219
0.8.4 Caractéristiques fréquentielles du bloc MA . . . . .	220
0.9 Intercorrélation code PN filtré-code PN . . . . .	222
0.10 Autocorrélation code PN filtré . . . . .	223

0.11	Processus interférence+bruit gaussien . . . . .	226
0.11.1	Interférence non modulée . . . . .	226
0.11.2	Interférence modulée linéairement en fréquence . . . . .	227
0.12	Puissance résiduelle en sortie du filtre adaptatif . . . . .	228
0.13	Réglage du coefficient $\alpha_0$ du bloc AR . . . . .	235
0.13.1	Influence du module $\alpha_0$ sur le temps de réponse . . . . .	235
0.13.2	Relation entre le pas d'adaptation de l'algorithme $\delta$ et le module $\alpha_0$ du bloc AR . . . . .	236
0.14	Performance du bloc AR en présence d'une interférence modulé . . . . .	238
<b>Annexe 4: Filtre fréquentiel</b>		<b>241</b>
0.15	Réponse impulsionnelle du filtre centré sur la fréquence nulle . . . . .	242
0.16	Densité spectrale du signal échantillonné . . . . .	242
0.17	Interspectre signal reçu-séquence de référence . . . . .	243
0.18	Traitement conservant la phase: Gain de traitement optimum . . . . .	245
<b>Annexe 5: Récepteur optimum en présence de bruits non gaussien</b>		<b>247</b>
0.19	Rapport de vraisemblance . . . . .	248

# Chapitre 1

## Récepteur GPS : Avant Propos

La robustesse des systèmes de communication à spectre étalé est bien connue : le gain de traitement, en présence de signaux d'interférence bande étroite est tel que leurs effets sur le système de réception sont atténués de manière significative [1].

On note toutefois une altération des performances du système GPS en présence d'interférences de forte puissance, le récepteur pouvant même devenir inopérant [11].

Pour améliorer la robustesse de ces systèmes des méthodes d'adoucissement sont mises en œuvre. **Nous nous intéressons ici à des techniques dites de précorrélacion qui traitent le signal à l'entrée du module numérique constitué par les boucles de poursuite du code d'étalement et de la phase.**

Nous nous attachons donc à définir le récepteur numérique incluant ces techniques d'adoucissement. Pour construire ce récepteur, la théorie de la décision est généralement appliquée en l'absence du signal d'interférence, le bruit étant donc considéré blanc, centré et gaussien [7]. Cette approche permet de dériver, pour cette représentation du bruit, le récepteur optimum. Ce récepteur consiste en un banc de filtres adaptés aux différentes représentations du signal informatif. Dans le cas du récepteur GPS, ces représentations étant antipodales, le récepteur se résume à un seul filtre adapté.

En présence d'un signal d'interférence cette approche n'est plus valable. Il paraît légitime de lever une ou plusieurs des hypothèses faites sur le bruit. Nous considérons, dans un premier temps, que le bruit est coloré. Le récepteur adapté conventionnel est conservé, précédé d'un filtre de "blanchiment" dont la fonction de transfert se définit comme l'inverse de la densité spectrale de puissance du bruit [23].

De même l'hypothèse de gaussianité prise en compte constitue une hypothèse forte. Il est nécessaire de considérer la représentation de la densité de probabilité du bruit. La théorie

de la détection ainsi appliquée conduit, sous l'hypothèse d'un faible rapport signal sur bruit, à dériver le récepteur localement optimum, c'est à dire optimum autour du bruit [31].

Ce document présente, dans la première partie, l'architecture du récepteur adapté. Elle est obtenue en appliquant la théorie de la décision au signal GPS noyé dans un bruit blanc gaussien. Ce signal est défini dans l'annexe 1 qui décrit le système GPS. **Les performances de ce récepteur dépendent de la "qualité" du signal à l'entrée du corrélateur. Nous définissons donc un critère pour caractériser ce signal. Il permettra par la suite d'évaluer, théoriquement ou à partir de simulations de Monte Carlo, différentes techniques d'adoucissement de spectre.**

Nous terminons cette partie par une étude des effets d'un signal d'interférence sur le récepteur ainsi défini. **Cette étude met en évidence les dégradations des performances des récepteurs en présence de brouilleurs de forte puissance et justifie ainsi le traitement du signal à l'entrée du filtre adapté.**

Nous nous proposons ensuite d'analyser et de comparer les deux techniques pré-citées (filtre de blanchiment, détection localement optimale). **La deuxième partie concerne l'étude en présence de bruits colorés. Elle conduit à l'utilisation de filtres de blanchiment appliqués dans le domaine temporel ou dans le domaine des fréquences.** Pour des signaux à spectre étalé, et des bruits bande étroite les filtres mis en œuvre éliminent ou modifient les composantes spectrales affectées par le signal d'interférence [9], [20], [26], [29]. Il en résulte une dégradation des performances du système.

**Dans la troisième partie nous exploitons la statistique du bruit pour dériver le détecteur optimal. Cette étude revient à construire un opérateur non linéaire qui traite le signal autour de ce bruit.** La non linéarité est déduite de la loi de probabilité du bruit composite (bruit gaussien et signal d'interférence additif). Elle est appliquée à l'amplitude du signal complexe représenté en coordonnées polaires. Cette méthode est d'abord implantée dans le domaine temporel. L'étude montre que les performances sont dégradées en présence de brouilleurs multiples. Le problème est alors transposé dans le domaine des fréquences.

Ces solutions conduisent à des récepteurs dont les caractéristiques doivent varier dans le temps pour s'adapter à la nature de l'interférence. Elles sont caractérisées pour différents signaux d'interférence : sinusoïdaux, fixes, modulés linéairement en fréquence ou pulsés. **Cette caractérisation porte d'abord sur l'amélioration des performances du récepteur**

GPS qui dépend de 2 paramètres :

- Le gain de traitement  $G_t$  qui mesure l'atténuation sur le signal d'interférence,
- Le gain de corrélation  $G_\Gamma$  qui mesure la dégradation sur le signal GPS.

Le gain de traitement mesure en réalité le gain sur le rapport signal sur bruit. Ce gain est supérieur à 1 lorsque le filtrage réalisé atténue le signal d'interférence. Ce gain ne traduit pas directement l'amélioration sur le récepteur à spectre étalé qui présente de bonnes performances en présence de signaux bande étroite.

Nous mesurons également la capacité de poursuite de ces techniques en présence de brouilleurs non stationnaires.

Nous concluons cette étude, dans la quatrième partie, par une synthèse des résultats et une comparaison de ces méthodes.



## Première partie

Le récepteur conventionnel défini en  
présence de bruit blanc gaussien



## Chapitre 1

# Récepteur optimal en présence de bruit blanc et gaussien

La précision de la mesure dans un récepteur GPS dépend de la qualité de l'estimation des paramètres du signal GPS. Parmi ces paramètres la position du code C/A et la dérive en fréquence, utilisés dans les équations de navigation, présentent un intérêt particulier.

L'estimateur du maximum de vraisemblance est généralement utilisé pour ses propriétés : consistant, asymptotiquement sans biais et asymptotiquement efficace.

Le problème de l'estimation est posé ici en présence de bruit blanc gaussien. Nous en déduisons l'architecture classique du récepteur. Il consiste en un corrélateur qui nécessite de générer localement une réplique du code C/A.

**Nous proposons alors une architecture pour le récepteur et nous montrons que les performances se déduisent des caractéristiques du signal à l'entrée du corrélateur. Nous définissons ici une méthode permettant de mesurer la "qualité" de ce signal, de manière théorique, ou expérimentalement à partir d'une simulation de Monte Carlo. Cette méthode sera utilisée ultérieurement pour caractériser différentes techniques d'adoucissement.**

## 1.1 Signal à l'entrée du récepteur adapté

Le système GPS est décrit en annexe 1. Il est basé sur une communication à spectre étalé. L'étalement de spectre est obtenu par une séquence C/A. Le signal en bande de base est appliqué à un modulateur de phase à 2 états. Le signal à l'entrée du récepteur adapté est décrit par la relation (A1-10), de l'annexe 1.

$$S_r(t) = A_c \cdot P(t(1 + k_d) + \tau) \cos(2\pi f_c t + \theta_e(t)) + W(t)$$

Où :

$f_c$	Fréquence centrale à l'entrée du récepteur numérique
$P()$	Séquence C/A modulée par les données
$\tau$	Décalage entre le code signal et la référence GPS
$\theta_e(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega_d dt$	$\omega_d = 2\pi f_d$ Dérive Doppler
$k_d = \frac{f_d}{f_{L1}}$	Modélise le Doppler sur le code
$f_{L1}$	Fréquence porteuse du signal GPS codé C/A
$W(t)$	Bruit blanc gaussien généré dans le canal

Nous considérons dans ce chapitre **que le bruit superposé au signal est blanc et gaussien** de variance  $\sigma_g^2$ . Il s'agit d'estimer les paramètres du signal GPS noyé dans ce bruit blanc.

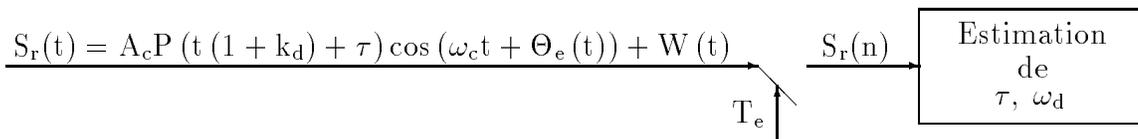


FIG. 1.1: Paramètres du signal GPS à estimer

Le signal traité est le signal échantillonné  $S_r$ .

$$S_r(n) = S_r(nT_e) = A_c \cdot P(nT_e(1 + k_d) + \tau) \cos(2\pi f_c nT_e + \theta_e(nT_e)) + W(nT_e)$$

Nous adoptons, la fréquence Doppler étant constante sur la durée d'observation, la notation :

$$S_{r_n} = A_c \cdot P(nT_e(1 + k_d) + \tau) \cos(2\pi f_c nT_e + \theta_{e_n}) + W_n = S_n + W_n$$

$$\theta_{e_n} = 2\pi f_d nT_e + \theta_0$$

## 1.2 Estimation des paramètres du signal

Le problème est d'estimer le vecteur de paramètres  $\underline{\Theta} = [A_c, \tau, \omega_d, \theta_0]^T$ . La méthode du maximum de vraisemblance est appliquée pour rechercher sous quelle hypothèse la vraisemblance de l'évènement est maximale [7]. Les développements sont donnés dans l'annexe 1. En injectant les valeurs optimales de  $A_c$  et  $\theta_0$  dans la solution on obtient l'expression de la fonction à maximiser. Cette fonction, qui dépend de  $\omega_d$  et  $\tau$ , est :

$$L(\underline{S}_r; [\tau, \omega_d]) \approx \frac{2}{N} \left\| \sum_{n=1}^N S_{r_n} P(nT_e(1+k_d) + \tau) \exp((2i\pi(f_c + f_d)nT_e)) \right\|^2 \quad (1.1)$$

De cette fonction on déduit l'architecture du récepteur adapté. Deux porteuses en phase et en quadrature, de fréquence  $f_c + f_d$ , générées au niveau du récepteur, permettent d'obtenir l'enveloppe complexe du signal GPS qui est corrélée avec une réplique du code (voir figure (I-1.2)). Pour le maximum de la fonction  $L(\underline{S}_r; [\tau, \omega_d])$  on obtient l'alignement du code généré localement et du code reçu.

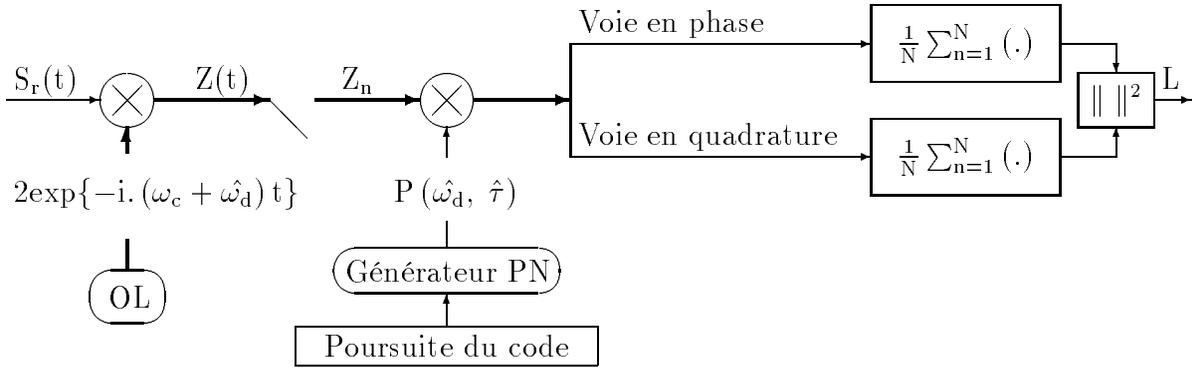


FIG. 1.2: Architecture du récepteur

Les meilleures estimées  $(\hat{\tau}, \hat{\omega}_d)$  sont obtenues en recherchant le maximum de la fonction obtenue, à un facteur multiplicatif près, en remplaçant dans (I-1.1)  $(\tau, \omega_d)$  par leurs estimées.

$$L_{MV} \sim \frac{1}{N} \left\| \sum_{n=1}^N S_{r_n} P\left(nT_e \left(1 + \frac{\hat{f}_d}{f_{L1}}\right) + \hat{\tau}\right) \exp((2i\pi(f_c + \hat{f}_d)nT_e)) \right\|^2 \quad (1.2)$$

Et la valeur de cette fonction, pour une estimée du couple  $\hat{\tau}, \hat{\omega}_d$ , est obtenue en remplaçant  $S_{r_n}$  par son expression. En considérant que le filtre numérique  $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\cdot)$  élimine les composantes

à  $2f_c + f_d + \hat{f}_d$  on obtient, **en l'absence de bruit** :

$$L_{MV} \sim \frac{A_c^2}{N} \left( \sum_{n=1}^N P(nT_e(1+k_d) + \tau) \cdot P\left(nT_e\left(1 + \frac{\hat{f}_d}{f_{L_1}}\right) + \hat{\tau}\right) \cos(2\pi(f_d - \hat{f}_d)nT_e + \theta_0) \right)^2 + \frac{A_c^2}{N} \left( \sum_{n=1}^N P(nT_e(1+k_d) + \tau) \cdot P\left(nT_e\left(1 + \frac{\hat{f}_d}{f_{L_1}}\right) + \hat{\tau}\right) \sin(2\pi(f_d - \hat{f}_d)nT_e + \theta_0) \right)^2 \quad (1.3)$$

En conclusion l'estimation des paramètres donnant les informations de pseudo distance et pseudo vitesse passe par la recherche du maximum de la fonction (I-1.2) qui dépend des 2 paramètres indépendants  $\hat{\tau}$  et  $\hat{\omega}_d$ , c'est à dire par la recherche du maximum de corrélation entre le signal reçu et le code généré localement. Ce maximum est obtenu lorsque la cohérence code reçu-code local est atteinte. On a alors :

$$\begin{cases} \hat{\tau} = \tau \\ \hat{f}_d = f_d \Rightarrow \frac{\hat{f}_d}{f_{L_1}} = k_d \end{cases}$$

Et, en l'absence de bruit, le maximum de la fonction est  $L \approx A_c^2$

## 1.3 Performance du récepteur

### 1.3.1 Puissance du test

Dans l'étude qui précède nous avons construit l'estimateur de maximum de vraisemblance permettant la mesure des paramètres  $\tau, \omega_d$ . Nous obtenons le récepteur adapté décrit sur la figure (I-1.2). Le maximum de corrélation est obtenu lorsque l'alignement des codes est réalisé. Lorsque la cohérence de phase n'est pas exigée, la mesure de corrélation est réalisée sur 2 étages. Le premier étage constitue le filtre de prédétection. Un opérateur non linéaire ( $s = \|e\|^2$ ) permet de s'affranchir des erreurs de phase à l'entrée du filtre de post détection. **Nous proposons ici un critère permettant d'évaluer ce récepteur. Ce critère sera utilisé, au cours de cette étude, pour caractériser différentes techniques d'adoucissement de spectre.**

Nous considérons le vecteur d'observation  $\underline{Z} = [z_1 z_2 \dots z_N]$ ,  $N=KM$ . Lorsque l'alignement des codes est réalisé le filtre adapté est représenté par le modèle simplifié (I-1.3).

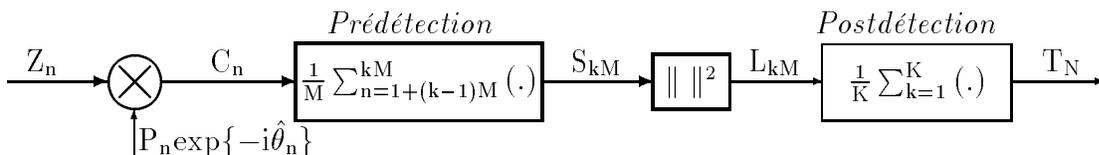


FIG. 1.3: *Modèle du corrélateur dans un récepteur non cohérent*

Dans cette étude le code local est supposé en phase avec le code reçu. Nous utilisons donc la notation ci-dessous qui ne prend pas en compte le retard sur le code reçu et l'estimé du retard appliqué au code local.

$$\begin{cases} Z_n = A_c P_{r_n} \exp\{i\Theta_n\} + W_n \\ C_n = A_c P_{r_n} P_n \exp\{i(\Theta_n - \hat{\Theta}_n)\} + W_n P_n \end{cases} \quad (1.4)$$

Avec :

$$\begin{aligned} P_{r_n} & \text{ Représentation du code à l'entrée du corrélateur} \\ P_n & \text{ Représentation du code généré localement} \\ W_n & \text{ Bruit blanc gaussien complexe de puissance } 2\sigma_g^2 \\ \Theta_n = \Theta_0 + \int_0^{nT_e} \omega_d(u) du & \quad \omega_d : \text{ Pulsation Doppler} \end{aligned}$$

**Remarque 1:** La représentation de la séquence  $P_{r_n}$  à l'entrée du récepteur peut être différente de celle du code généré localement  $P_n$  (non linéarités des étages HF et des filtres).

**Remarque 2:** Dans un récepteur non cohérent le filtrage est réalisé sur 2 étages. Sur la durée  $[0, MT_e]$  on peut considérer que l'erreur de phase  $\Theta_n - \hat{\Theta}_n$  est constante. Cette erreur de phase est éliminée par l'opérateur non linéaire ( $s = \|e\|^2$ ) à l'entrée du filtre de post-détection. On admet donc que :

$$\begin{aligned} \Theta_n - \hat{\Theta}_n & \approx \Delta_{kM} \quad n = 1 + (k-1)M, \dots, kM \\ \Delta_{kM} & \text{ uniformément répartie sur } [0, 2\pi] \end{aligned}$$

On obtient alors comme expression de la sortie du filtre de prédétection :

$$\begin{cases} S_{kM} = A_c \exp\{i\Delta_{kM}\} R_{p_{rp}}(0) + W_f \\ R_{p_{rp}}(0) = \frac{1}{M} \sum_{n=1+(k-1)M}^{kM} P_{r_n} P_n = E\{P_{r_n} P_n\} \end{cases} \quad (1.5)$$

Dans cette expression le bruit  $W_f$  est le bruit filtré. Pour un bruit blanc de puissance  $P_w$  on a :

$$E\{\|W_f\|^2\} = E\{W_f W_f^*\} = \frac{P_w}{M} \quad (1.6)$$

Le test est appliqué à la fonction  $T_N$ . La puissance de ce test dépend du rapport signal sur bruit mesuré sur le signal  $L_{kM}$ , en sortie du bloc non linéaire ( $s = \|e\|^2$ ) :

$$L_{kM} = A_c^2 \|R_{p_{rp}}(0)\|^2 + W_l \quad (1.7)$$

Le nombre d'échantillons  $M$  doit être tel que, en sortie du filtre de prédétection, la puissance du bruit soit très petite devant la puissance d'intercorrélacion  $R_{p,p}(0)$ . On a alors :

$$E\{L_{kM}\} = A_c^2 \|R_{p,p}(0)\|^2 + E\{\|W_f\|^2\} \approx A_c^2 \|R_{p,p}(0)\|^2$$

Par ailleurs, les bruits  $\Re\{W_f\}$  et  $\Im\{W_f\}$  étant indépendants on a :

$$W_l = \|W_f\|^2 + 2A_c R_{p,p}(0) (\Re\{W_f\} \cos \Delta\Theta_d + \Im\{W_f\} \sin \Delta\Theta_d)$$

Et la variance du signal  $L_{kM}$  est :

$$Var\{L_{kM}\} = 2A_c^2 \|R_{p,p}(0)\|^2 E\{W_f W_f^*\}$$

Le rapport signal sur bruit  $T$ , mesuré sur le signal  $L_{kM}$ , a donc pour expression :

$$T = \frac{E\{L_{kM}\}^2}{var\{L_{kM}\}} \approx \frac{A_c^4 \|R_{p,p}(0)\|^4}{2A_c^2 \|R_{p,p}(0)\|^2 E\{W_f W_f^*\}} = \frac{A_c^2 \|R_{p,p}(0)\|^2}{2E\{W_f W_f^*\}} \quad (1.8)$$

$$T = \frac{E\{L_{kM}\}^2}{var\{L_{kM}\}} \approx \frac{MA_c^2 \|R_{p,p}(0)\|^2}{2P_w}$$

Les performances du récepteur dépendent du nombre d'échantillons  $M$  traités par le filtre de prédétection et des caractéristiques du signal. **Nous nous attachons ici à améliorer les caractéristiques de ce signal en présence d'un signal d'interférence. Nous utiliserons donc, pour caractériser les techniques d'adoucissement, le rapport  $\Gamma$  donné par la relation (I-1.9) qui caractérise le signal à l'entrée du corrélateur.**

$$\Gamma = \frac{A_c^2 \|R_{p,p}(0)\|^2}{P_w} \quad (1.9)$$

Pour évaluer ce rapport en simulation nous adopterons le modèle donné figure (I-1.4).

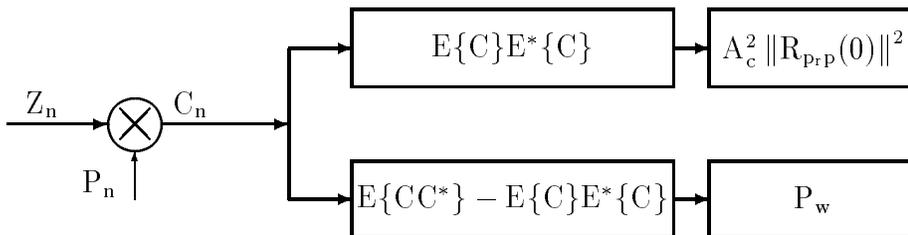


FIG. 1.4: *Modèle de simulation pour la caractérisation du signal d'entrée du corrélateur*

La puissance d'intercorrélacion et la puissance du bruit sont mesurées respectivement sur la branche supérieure et sur la branche inférieure de la figure (I-1.4). On obtient d'après les relations (I-1.4) :

$$\begin{cases} E\{C(n)\}E^*\{C(n)\} = A_c^2 \|R_{p,p}(0)\|^2 \\ E\{C(n)C^*(n)\} = A_c^2 \|R_{p,p}(0)\|^2 + E\{W(n)W^*(n)\} \\ \Gamma = \frac{E\{C(n)\}E^*\{C(n)\}}{E\{C(n)C^*(n)\} - E\{C(n)\}E^*\{C(n)\}} \end{cases} \quad (1.10)$$

Il est donc possible d'estimer, pour des processus stationnaires, le rapport  $\Gamma$  qui caractérise le signal d'entrée du corrélateur, à partir d'une simulation de Monte Carlo, les échantillons étant appliqués au modèle représenté figure I-1.4. Ce rapport traduit les performances du récepteur en présence de bruit blanc.

$$T = \frac{E\{L_{kM}\}^2}{\text{var}\{L_{kM}\}} = \frac{M}{2}\Gamma \quad (1.11)$$

**Important :** Les performances des techniques d'adoucissement sont déduites du rapport  $\Gamma$  mesuré après filtrage. Ces performances dépendent de l'atténuation apportée sur le signal d'interférence et de la dégradation sur le signal GPS qui résulte de l'opération de filtrage. Nous définissons ainsi dans un premier temps le gain de traitement qui mesure l'amélioration du rapport signal sur bruit amenée par le filtre. Ce rapport est obtenu en comparant le rapport  $\Gamma$  mesuré après filtrage au rapport obtenu, en présence d'un signal d'interférence, à l'entrée du filtre.

$$\begin{cases} \Gamma_{\text{avant filtrage}} = \frac{A_c^2 \|R_{pp}(0)\|^2}{P_w} \\ R_{pp}(0) = \frac{1}{M} \sum_{n=1+(k-1)M}^{kM} P_n P_n = E\{P_n P_n\} \quad \text{Autocorrélation sur le code} \\ P_w = G + J = 2\sigma_g^2 \quad J : \text{Puissance du signal d'interférence} \\ G_t = \frac{\Gamma_{\text{avant filtrage}}}{\Gamma} \quad \text{Gain de traitement} \end{cases} \quad (1.12)$$

Nous définissons de même le gain de corrélation pour mesurer la dégradation sur le signal GPS. Lorsque, après filtrage, le signal d'interférence est de puissance négligeable devant la puissance du bruit gaussien, ce rapport est comparé à celui mesuré à l'entrée d'un récepteur GPS en l'absence d'interférence. De cette

comparaison est déduite le gain de corrélation qui, s'il est inférieur à 1, traduit la dégradation du signal GPS.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{idéal} = \frac{A_c^2 \|R_{pp}(0)\|^2}{G} \\ R_{pp}(0) = \frac{1}{M} \sum_{n=1+(k-1)M}^{kM} P_n P_n = E\{P_n P_n\} \quad \text{Autocorrélation sur le code} \\ G = 2\sigma_g^2 \quad \text{Puissance du bruit gaussien} \\ G_\Gamma = \frac{\Gamma}{\Gamma_{idéal}} \quad \text{Gain de corrélation} \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Le filtre idéal élimine le signal d'interférence sans affecter le signal GPS. lorsque la puissance du signal d'interférence est très grande devant la puissance du bruit gaussien, il présente un gain de traitement égal au rapport interférence sur bruit gaussien et un gain de corrélation égal à 1..

### 1.3.2 Performance de la boucle de code

Nous venons de montrer que la puissance du test, mesurée lorsque code signal et code local sont en phase, dépend du rapport  $\Gamma$  défini par la relation 1.9. L'alignement de ces codes est assuré par une boucle à asservissement de délai (l'architecture du récepteur est décrite en annexe 2). Le cœur du récepteur est donc constitué de 3 corrélateurs, le corrélateur en phase dont la sortie représente la fonction de vraisemblance (I-1.2), et les 2 corrélateurs en avance et en retard qui permettent la discrimination de l'écart entre le code local et le code reçu. La caractéristique du discriminateur de retard est représentée figure (A2-11), annexe 2. Lorsque l'on considère le bruit gaussien superposé au signal et le bruit de phase des oscillateurs, on obtient un bruit de mesure sur la grandeur  $\tau - \hat{\tau}$ .

Nous rappelons ici que les performances de cette boucle dépendent du rapport  $C/N_0$ . L'écart type de ce bruit, exprimé en chips, est donné dans [4], pp. 167-172.

$$\sigma_{DLL} = \sqrt{\frac{4k_c^2 B_n}{C/N_0} (2(1 - k_c) + \frac{4k_c}{NT_e C/N_0})} \text{ chips} \quad (1.14)$$

La puissance du bruit sur la mesure de pseudo distance est fonction :

- de l'écart avance-retard égal à  $k_c T_c$  ( $T_c$  : durée chip),
- du rapport  $C/N_0$ ,
- de la bande équivalente de bruit de la boucle  $B_n$ ,
- et de la durée d'observation  $NT_e$ .

La qualité de la mesure de pseudo distance dépend d'abord de la configuration du récepteur au niveau duquel on pourra fixer en particulier les paramètres  $k_c$ ,  $B_n$  et la durée d'observation. Il n'est pas de notre propos de modifier ces paramètres qui conditionnent le comportement du récepteur et en particulier ses caractéristiques dynamiques. Dans le cadre de notre étude on s'attachera plus particulièrement à l'amélioration du rapport signal sur bruit à l'entrée, en présence d'interférence. Nous montrerons ultérieurement que, dans une approche simple qui suppose un signal GPS blanc, la présence de brouilleurs dans la bande du signal GPS se traduit par une dégradation du rapport  $C/N_0$ .

## 1.4 Conclusions

Le récepteur en présence de bruit blanc gaussien consiste en un corrélateur cohérent ou non cohérent. Ce dernier est moins sensible aux perturbations de la boucle de phase. La synchronisation du code local sur l'enveloppe complexe du signal reçu utilise une boucle à asservissement de délai.

**Pour évaluer les performances de ce récepteur nous proposons de mesurer le rapport puissance d'intercorrélacion code local-code reçu sur puissance du bruit. Ces grandeurs peuvent être obtenues à partir d'une simulation de Monte Carlo. Le modèle de simulation correspond à celui du schéma donné figure (I-1.4).**

De cette mesure nous déduirons le gain de traitement et le gain de corrélation qui caractérise les techniques de filtrage que nous présentons dans ce document.



## Chapitre 2

# Effets des interférences sur les récepteurs GPS

Nous avons défini dans le chapitre qui précède le récepteur GPS en l'absence d'interférence. Or, bien que les bandes de fréquence du GPS soient protégées par la FCC (Federal Communication Commission), le système n'est pas à l'abri de sources de brouillage intentionnelles ou non.

Par nature le système GPS, qui utilise la technique d'accès multiple par étalement de spectre, est moins sensible aux signaux d'interférence que les systèmes de navigation conventionnel, à bande étroite. Une interférence de puissance suffisamment élevée peut toutefois altérer son fonctionnement.

Nous nous attachons donc ici à mettre en évidence les effets néfastes des signaux de brouillage sur le système GPS.

## 2.1 Sources d'interférence

Les sources d'interférence présentes dans le spectre du signal GPS sont de nature diverse :

- Les brouillages intentionnels de type gaussien à large bande,
- Les brouilleurs à spectre étalé,
- Les brouilleurs à bande étroite.

Nous nous intéressons ici au traitement des brouilleurs non intentionnels, bande étroite. Les bandes allouées au système GPS sont la bande  $L_2 = [1,215\text{GHz} - 1,240\text{GHz}]$  pour le signal émis avec le code P et la bande  $L_1 = [1,559 - 1,610\text{GHz}]$  pour la composante composite constituée du signal C/A et du signal P. Les sources de brouillage considérées en premier lieu concernent les systèmes qui opèrent dans les bandes adjacentes à celles du système GPS. En particulier la bande  $[1,535\text{GHz}-1,559 \text{GHz}]$  est utilisée pour des liaisons descendantes de satellites de communication (mobile, maritime, aéronautique) et la bande  $[1,610\text{GHz}-1,625 \text{GHz}]$  sert aux liaisons montantes de la téléphonie cellulaire. Le système GPS doit être doté de filtres appropriés pour éliminer tous ces signaux. Il faut également prendre en compte les produits d'intermodulation et les harmoniques de systèmes opérant dans des bandes plus éloignées :

- Les harmoniques ou les produits d'intermodulation de divers émetteurs comme la télévision (signaux modulés large bande) ou les stations FM (signaux à bande étroite),
- Les produits d'intermodulation de signaux issus provenant d'équipements voisins du récepteur GPS,
- Les impulsions provenant d'un signal radar,
- etc.

Une présentation et une caractérisation des principales sources de brouillage sont présentées dans [8].

## 2.2 Bruit en présence d'une interférence

Le bruit considéré ici est le bruit additif qui se superpose au signal en sortie du corrélateur défini figure (I-1.2) dans le chapitre qui précède. L'analyse est faite pour un récepteur GPS fonctionnant en mode C/A. Le code utilisé, émis au rythme de 1,023MHz est de longueur 1023. Il en résulte que le spectre du signal GPS, étalé dans une bande de 1MHz ne peut être considéré comme étant parfaitement blanc. La figure (A1-8) montre que le spectre du signal C/A consiste en **un spectre de raies espacées de 1KHz**, chaque raie étant étalée par le spectre des données de largeur 50Hz.

En présence d'interférence l'expression du signal à l'entrée du corrélateur donnée par la relation (A1-10) est modifiée :

$$W_j(t) = A_j \cos(2\pi f_c t + \Theta_j(t)) \quad \text{Expression de l'interférence}$$

$$S_r(t) = +A_c P(t(1 + k_d) + \tau) \cos(2\pi f_c t + \Theta_e(t)) + W(t) \\ + A_j \cos(2\pi f_c t + \Theta_j(t))$$

Ce signal est donc appliqué, dans un récepteur conventionnel, au corrélateur décrit figure (I-1.2). Pour évaluer l'effet de cette interférence, nous proposons de mesurer la puissance du bruit en sortie de ce corrélateur.

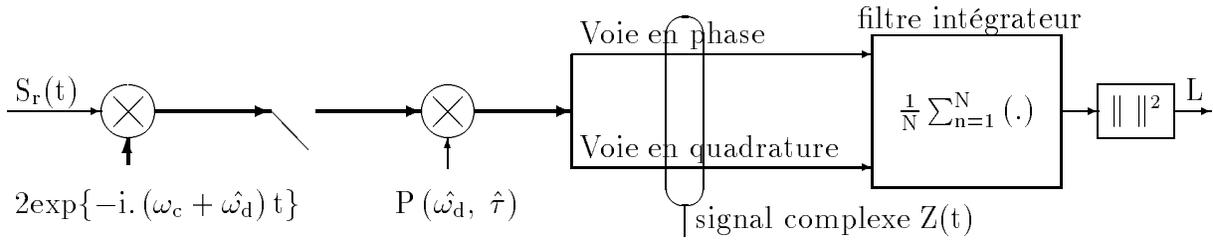


FIG. 2.1: Architecture du corrélateur

La puissance du bruit est déduite de la densité spectrale du bruit à l'entrée du filtre intégrateur et de la bande équivalente de bruit de cet intégrateur. Nous nous intéressons donc à l'expression de la composante "passe bas" du signal complexe \$Z(t)\$ en présence d'interférence, la composante haute fréquence, centrée sur \$2f\_c\$, étant éliminée par le filtre de type intégrateur. Nous obtenons :

$$Z(t) = A_c \exp\{i2\pi (\Theta_e(t) - \hat{\Theta}_e(t))\} + W_c(t) + A_j P(t, \hat{\tau}) \exp\{i2\pi (\Theta_j(t) - \hat{\Theta}_e(t))\} \quad (2.1)$$

Dans cette relation \$W\_c(t)\$ représente un bruit gaussien complexe. Et le signal d'interférence est :

$$Z_j(t) = A_j P(t, \hat{\tau}) \exp\{i2\pi (\Theta_j(t) - \hat{\Theta}_e(t))\} \quad (2.2)$$

Ce signal d'interférence est multiplié par la séquence codée \$P(t)\$. Il s'agit donc d'un bruit large bande dont le spectre est obtenu en convoluant le spectre de l'interférence par le spectre du code C/A dont l'expression est donnée par (A1-7). On obtient pour l'expression du spectre du bruit inhérent à l'interférence :

$$S_J(f) = +\frac{1}{p^2} \left( \delta(f) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} M(k) (p+1) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k}{p}\right) \delta\left(f - \frac{k}{pT_c}\right) \right) * I(f) \quad (2.3)$$

où  $I(f)$  représente le spectre de l'interférence,

\* représente un produit de convolution.

On considère que, sur l'intervalle d'observation, la fréquence déduite de l'estimation de l'effet Doppler, dont résulte  $\hat{\Theta}_e$  est constante, notée  $\hat{f}_d$ . Si le spectre de l'interférence est centré sur la fréquence  $f_j$  on obtient :

$$I(f) = I_{PB}(f) * \left( \delta(f - f_j + \hat{f}_d) \right) \quad I_{PB}(f) : \text{Représentation passe bas de } I(f)$$

$$S_J(f) = +\frac{1}{p^2} \left( I_{PB}(f) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} M(k) (p+1) \text{sinc}^2 \left( \frac{k}{p} \right) I_{PB} \left( f - \frac{k}{pT_c} \right) \right) * \left( \delta(f - f_j + \hat{f}_d) \right)$$

La densité spectrale du bruit lié à l'interférence est obtenue en convoluant le spectre de raies du code C/A, décalé de  $f_j - \hat{f}_d$ , par la représentation passe bas de l'interférence.

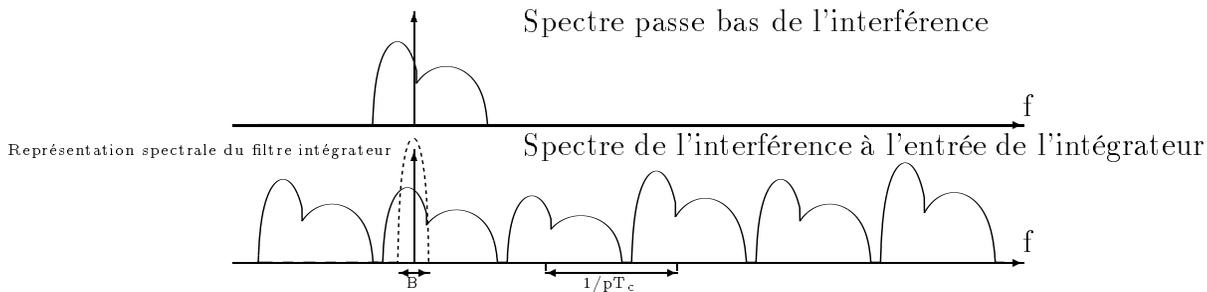


FIG. 2.2: *Spectre de l'interférence à l'entrée du filtre intégrateur*

La puissance du bruit en sortie du filtre intégrateur qui traduit la dégradation apportée par l'interférence dépend donc de la largeur de la bande  $B$  du filtre intégrateur qui fixe sa bande équivalente de bruit, de la fréquence centrale de l'interférence et de sa représentation spectrale.

### 2.2.1 Interférence bande étroite

Lorsque le spectre de l'interférence est représentée par une raie spectrale, le cas le plus défavorable est donc lorsque cette raie de fréquence  $f_j - \hat{f}_d$  se superpose à l'une des raies du signal C/A. Par translation spectrale cette interférence entre dans le filtre intégrateur et son atténuation, en moyenne de 30dB, peut dans le pire cas n'atteindre que 18.3 dB (voir expression (A1-7)).

Cette configuration est toutefois peu probable: les raies du code C/A étant séparées de 1000Hz, la probabilité d'obtenir une raie en sortie du filtre intégrateur dépend de la largeur  $B$  de ce filtre. Elle est de 10% pour un filtre de bande  $B=[-50\text{Hz}, 50\text{Hz}]$ , de 1% pour un filtre de bande  $B=[-5\text{Hz}, 5\text{Hz}]$ .

### 2.2.2 Interférence de bande semi étroite

Lorsque la bande du spectre de l'interférence est supérieure à 1000Hz, le bruit à l'entrée du filtre intégrateur est continûment étalé dans le domaine fréquentiel. Toutefois l'atténuation idéale de -30dB/Hz que produirait un code infiniment long émis au rythme de  $1,023 \cdot 10^6$  chips/sec n'est pas obtenue dans toute la bande puisque les raies du signal C/A ne présentent pas toutes la même amplitude.

## 2.3 Effet d'une interférence sur la boucle de poursuite

Nous avons mis en évidence, dans le chapitre qui précède, que les performances du récepteur dépendaient étroitement du rapport signal sur bruit. La relation (I-1.14) permet de relier le bruit d'estimation sur la mesure de position au rapport  $C/B_n N_0$ .  $B_n$  représente la bande équivalente de bruit du corrélateur constitué par la boucle de code et le produit  $N_0 B_n$  correspond à la puissance  $P_w$  du bruit, mesurée dans la fenêtre fréquentielle de ce corrélateur. **En présence d'une interférence de bande supérieure à 1KHz le spectre de l'interférence est blanchi par le code. On peut alors exprimer la dégradation du rapport signal sur densité spectrale de bruit  $C/N_0$  lorsque cette interférence entre dans le spectre du signal GPS.**

En l'absence d'interférence :  $P_w = N_0 B_n$

En présence d'interférence :  $P_w = (N_0 + \frac{J}{f_c}) B_n$

Où :

$f_c = 1/T_c$	Bande du brouilleur après étalement
$N_0$	Densité spectrale du bruit thermique
$J$	Puissance de l'interférence
$B_n$	Bande équivalente de bruit de la boucle

On définit alors un rapport  $C/N_0$  équivalent :

$$\left[ \frac{C}{N_0} \right]_{eq} = \frac{C}{N_0 + \frac{J}{f_c}} = \frac{1}{\left( \frac{C}{N_0} \right)^{-1} + \frac{J/C}{f_c}}$$

La dégradation du rapport  $C/N_0$  est donnée, dans le cas général, dans [4], pp. 219-220.

$$\left[ \frac{C}{N_0} \right]_{eq} = \frac{1}{\left( \frac{C}{N_0} \right)^{-1} + \frac{J/S}{Q f_c}} \quad (2.4)$$

Dans cette relation le terme  $J/S$  représente le rapport de puissance Interférence sur Signal utile, et le facteur  $Q$  est un coefficient d'ajustement qui dépend de la nature du brouilleur ( $Q=1$  pour un brouilleur bande étroite). Pour exemple, un rapport  $C/N_0$  de 38.4dB-Hz, en présence d'un brouilleur bande étroite caractérisé par un rapport  $J/S$  de 50 dB, est dégradé de près de 30 dB ( $((C/N_0)_{\text{eq}} \approx 10\text{dB} - \text{Hz})$ ) ([4], pp. 223).

## 2.4 Effet d'une interférence sur la quantification

Dans l'annexe 2 qui décrit l'architecture du récepteur, nous montrons que le nombre de bits utilisés pour la quantification peut être faible. La dégradation du rapport signal sur bruit est de 1.96dB pour un codage sur 1 bit, de 0.54dB pour un codage optimal sur 2 bits.

Nous reprenons ici l'étude qui est réalisée dans cette annexe pour un bruit gaussien. Cette étude consiste à mesurer la dégradation du rapport puissance d'intercorrélacion sur bruit défini au chapitre précédent par la relation I-1.9. Nous noterons ici  $\Gamma_{\text{idéal}}$  et  $\Gamma_Q$  ce rapport en l'absence et en présence de quantifieur.

L'étude est réalisée en présence d'un signal réel. En présence d'une interférence, un bruit sinusoïdal se superpose au signal  $X_n$  qui se définit alors la relation (A2-22).

$$X_n = A_c P_n + W_{G_n} + A_j \cos(\Theta_{j_n})$$

Dans le cas le plus défavorable, c'est à dire en présence d'un brouilleur cohérent ( $\Theta_j = 0$ ), nous obtenons :

$$X_n = A_c P_n + W_{G_n} + A_j$$

### • Quantification 1 bit

Nous pouvons évaluer comme précédemment la dégradation du rapport signal sur bruit, les lois de probabilité conditionnelle subissant une translation de  $A_j$ . Nous obtenons alors :

$$E\{C\} = 0.25 \left( \text{erfc} \left( -\sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} - \sqrt{\gamma_{jg}} \right) + \text{erfc} \left( -\sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} + \sqrt{\gamma_{jg}} \right) \right) - 0.25 \left( \text{erfc} \left( \sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} + \sqrt{\gamma_{jg}} \right) + \text{erfc} \left( \sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} - \sqrt{\gamma_{jg}} \right) \right) \quad (2.5)$$

où  $\gamma_i$  représente le rapport de puissance signal sur bruit gaussien en l'absence d'interférence et  $\gamma_{jg}$  le rapport de puissance interférence sur bruit gaussien. De cette expression (I-2.5) on déduit le rapport  $\Gamma_Q$  qui caractérise le signal à l'entrée du corrélateur. La puissance totale

de sortie étant unitaire, ce rapport s'écrit d'après (I-1.10) :

$$\begin{cases} \Gamma_Q = \frac{(E\{C\})^2}{1 - (E\{C\})^2} \\ E\{C\} \text{ donné par la relation (I-2.5)} \end{cases}$$

Nous observons sur la figure (I-2.3), pour un rapport signal sur bruit gaussien de -20dB, la dégradation du rapport signal sur bruit en fonction de  $\gamma_{jg}$ .

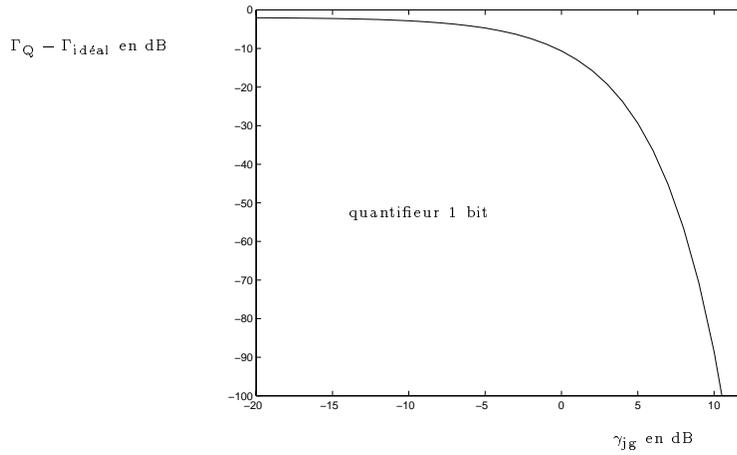


FIG. 2.3: Dégradation en présence d'une interférence cohérente

#### • Quantification 2 bits

La translation des lois de probabilité entraîne une dégradation du rapport  $\gamma_o$  que nous pouvons évaluer pour des rapports  $\gamma_i \ll 1$ . Nous posons :

$$K_q = \frac{A_M}{2\sqrt{2}\sigma_g}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} E\{C\} &= 0.25 \left( \operatorname{erfc} \left( -\sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} - \sqrt{\gamma_{jg}} \right) + \operatorname{erfc} \left( -\sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} - \sqrt{\gamma_{jg}} + K_q \right) \right) \\ &\quad - 0.25 \left( \operatorname{erfc} \left( +\sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} - \sqrt{\gamma_{jg}} \right) + \operatorname{erfc} \left( +\sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} - \sqrt{\gamma_{jg}} + K_q \right) \right) \\ &\quad + 0.25 \left( \operatorname{erfc} \left( -\sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} - \sqrt{\gamma_{jg}} - K_q \right) - \operatorname{erfc} \left( +\sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} - \sqrt{\gamma_{jg}} - K_q \right) \right) \\ E\{C^2\} &= +0.5 \left( \operatorname{erfc} \left( -\sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} - \sqrt{\gamma_{jg}} + K_q \right) + \operatorname{erfc} \left( +\sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} - \sqrt{\gamma_{jg}} + K_q \right) \right) \\ &\quad - 0.5 \left( \operatorname{erfc} \left( -\sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} - \sqrt{\gamma_{jg}} - K_q \right) + \operatorname{erfc} \left( +\sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} - \sqrt{\gamma_{jg}} - K_q \right) \right) + 4.5 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dans le ce cas le plus simple le contrôle automatique de gain conserve le facteur de crête de 2, valeur optimale en l'absence d'interférence.

$$\zeta = \frac{A_M}{\sigma_g + \frac{A_j}{\sqrt{2}}} \quad (2.7)$$

et :

$$K_q = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \sqrt{\gamma_{jg}}) \quad (2.8)$$

Il est possible, au prix d'un traitement lourd, d'optimiser le contrôle de gain pour cette configuration ([5], pp. 733-737). Les paramètres de réglage du dispositif de contrôle de gain, pour une quantification optimum sont :

$$\zeta = 2 \frac{\sqrt{\sigma_g^2 + A_j^2}}{\sigma_g + \frac{A_j}{\sqrt{2}}} \quad (2.9)$$

$$K_q = \sqrt{0.5 + \gamma_{jg}} \quad (2.10)$$

Des expressions (I-2.6) à (I-2.10) nous déduisons le rapport  $\Gamma_Q$  pour les deux valeurs du facteur de crête. Nous représentons, sur la figure (I-2.4), la dégradation  $\Gamma_Q - \Gamma_{\text{idéal}}$  pour un rapport  $\gamma_i$  de -20dB.

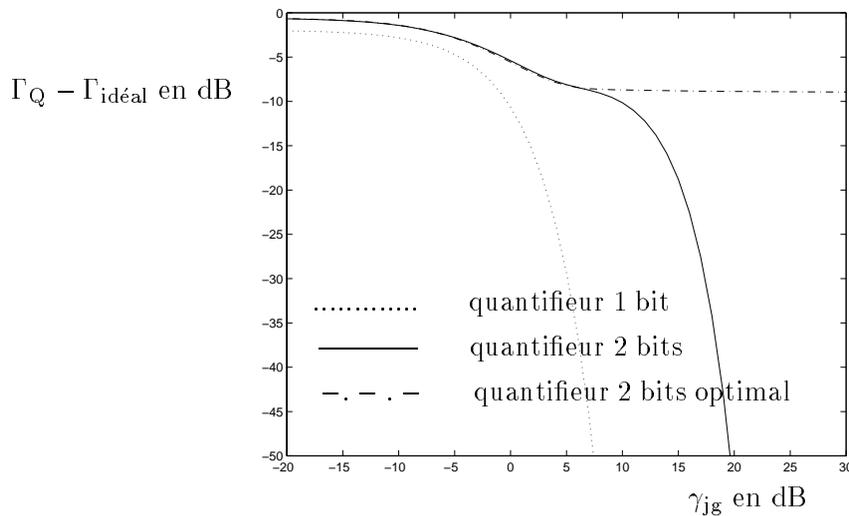


FIG. 2.4: Dégradation en présence d'une interférence cohérente

Cette étude met en évidence des dégradations importantes en présence d'in-

terférence. Elles sont inacceptables pour un quantifieur 1 bit. Elles restent importantes pour le quantifieur 2 bits, même pour une quantification optimale (dégradation de l'ordre de 9dB). Nous n'avons pas poursuivi cette étude pour un quantifieur 3 bits mais on montre ([5], pp. 743-745) que le quantifieur 3 bits, bien que moins sensible au facteur de crête que le quantifieur 2 bits, donne dans le meilleur des cas une dégradation du même ordre (9dB).

## 2.5 Conclusions

La présence d'interférence dans le spectre du signal GPS entraîne des dégradations. En l'absence de quantification cette dégradation peut être vue, pour le code P, comme une dégradation du rapport  $C/N_0$ . Pour le code C/A la position du brouilleur devient importante. Un brouilleur aligné sur une des raies du code rentre après étalement dans la bande du récepteur et son atténuation, fonction de la raie, peut n'atteindre que 18.3 dB dans le pire cas. Pour un récepteur numérique, il devient nécessaire de considérer la dégradation du rapport signal sur bruit introduite par le quantifieur en présence d'interférence. Une quantification sur 3 bits qui, en l'absence d'interférence, génère une perte quasi nulle sur le rapport signal sur bruit, entraîne une forte dégradation en présence d'un brouilleur (perte de 9dB sur le rapport signal en bruit pour un brouilleur cohérent).

La présence d'interférence entraîne donc une altération des performances du récepteur. Le rapport signal sur bruit est affecté et il en résulte une perte de précision sur les mesures.

Il faut de plus considérer les caractéristiques entrée-sortie du discriminateur de retard de la boucle de code, et du discriminateur de phase de la boucle de porteuse. En présence de brouilleurs forts, le bruit sur la mesure peut amener les discriminateurs en dehors de leurs domaines de linéarité, entraînant un décrochage de la boucle de porteuse puis de la boucle de code et le coût de l'opération de capture est important.

Il est difficile de préciser la puissance du brouilleur entraînant ce décrochage. Elle dépend de la bande équivalente et de l'ordre de la boucle, de la structure du discriminateur et de la dynamique du mobile portant le récepteur. On peut, pour apprécier le niveau de décrochage de la boucle de code, appliquer la règle suivante ([4], pp 167-169) :

$$3\sigma_{DLL} = 2k_c T_c \quad (2k_c T_c : \text{espacement avance - retard})$$

L'écart type  $\sigma_{DLL}$  du bruit sur la mesure du retard  $\tau$ , qui dépend de la densité spectrale de bruit  $N_0$  et de la puissance de l'interférence, ne doit pas dépasser un seuil qui est fonction de la valeur de l'écart avance-retard.



## Deuxième partie

# Le récepteur GPS en présence de bruits non blancs



# Chapitre 1

## Elimination des interférences par filtrage temporel linéaire

Dans la première partie de ce document nous avons présenté le récepteur à maximum de vraisemblance en présence d'un bruit blanc et gaussien. Nous recherchons ici une évolution de ce récepteur en présence de signaux d'interférence qui peuvent prendre des formes diverses (CWI, CWIs multiples, CWI pulsée, CWI modulée en fréquence).

En présence de ces bruits corrélés une méthode classique consiste à introduire un filtre de blanchiment en amont du récepteur conventionnel. Pour des signaux à spectre étalé et des bruits bande étroite ce filtre se ramène à des zéros appliqués aux fréquences modifiées par l'interférence. Nous proposons ici d'étudier une technique de filtrage linéaire opérant dans le domaine temporel. Ce filtre adaptatif est évalué pour diverses formes de l'interférence.

Nos travaux complètent une étude menée à SUPAERO [9] et présentée dans [11]. Un filtre RII à encoche est proposé pour le filtrage de signaux réels. Ce filtre est modifié ici pour être appliqué au signal complexe d'entrée du corrélateur. Nous obtenons alors une structure très simple définie par 2 coefficients.

La technique du gradient analysée dans [10] et [18] est utilisée ici pour adapter le filtre au signal d'interférence. Nous proposons d'étudier la convergence de cet algorithme appliqué à notre filtre complexe, son comportement en présence de brouilleurs non stationnaires, de mesurer l'impact du filtre sur les performances du récepteur GPS et de modifier le récepteur pour l'adapter au signal ainsi filtré.

Les résultats présentés ici permettent de dimensionner la cellule de filtrage, d'évaluer ses performances en présence de brouilleurs multiples (résolution fréquentielle), de caractériser son comportement dynamique en présence des brouilleurs balayés en fréquence (vitesse de convergence et de poursuite) et de mesurer le gain de traitement qui résulte du filtrage.

## 1.1 Présentation

Ces filtres adaptatifs doivent permettre l'élimination de brouilleurs de puissance variable ( $0\text{dB} < \gamma_{\text{ig}} < 50\text{dB}$ ). Plusieurs solutions sont proposées pour l'élimination de signaux bande étroite dans le domaine temporel [20]-[22]. Elles utilisent généralement des filtres RIF pour leur phase linéaire. La complexité de ces structures définie par le nombre de coefficients dépend du nombre de brouilleurs. Elle conditionne les performances de l'algorithme en terme de convergence et de poursuite et la largeur de la bande éliminée qui détermine la dégradation apportée sur le signal. Elle est toujours importante.

Nous proposons ici d'utiliser un filtre à encoche adaptatif présenté dans [9]-[11], dérivé de travaux exposés dans [12]-[16]. Ce filtre de type RII aboutit, lorsqu'il est appliqué à l'enveloppe complexe, à une architecture très simple à 2 coefficients. Le principal avantage de cette structure réside dans la maîtrise de la forme de l'encoche qui résulte de contraintes apportées sur la position des pôles et des zéros, permettant ainsi de contrôler la dégradation qui affecte le signal GPS.

Il introduit toutefois une rotation de phase à la fréquence de l'encoche. Cette rotation de phase est d'autant plus rapide que le filtre est étroit. Lorsque l'encoche est proche de la fréquence centrale du signal GPS il en résulte une distorsion importante de la fonction d'intercorrélation signal reçu-code local et en conséquence un biais inacceptable sur la mesure de position.

Nos travaux ont consisté à adapter cette structure, définie pour des signaux réels, au signal complexe d'entrée. L'architecture proposée devient plus simple. L'adaptation consiste à régler un coefficient qui contrôle la position du zéro de ce filtre. Nous analysons la convergence de cette structure et fournissons des résultats permettant de dimensionner ce filtre pour optimiser cette convergence. Nous étudions par ailleurs son comportement en présence d'un brouilleur non stationnaire et de brouilleurs multiples. Enfin nous nous intéressons aux caractéristiques du signal GPS filtré. Nous donnons en particulier l'expression de la fonction d'autocorrélation après filtrage et mettons en évidence les dégradations de cette fonction lorsque le filtre opère sur le lobe principal du signal GPS. Pour terminer nous proposons une évolution du récepteur permettant de pallier ces dégradations consécutives aux variations du délai de groupe.

## 1.2 Architecture du filtre à encoches

La cellule de base est un filtre à encoche. Elle est adaptative. Elle doit permettre la capture rapide et précise d'un brouilleur qui pénètre dans le spectre du signal GPS, la poursuite

et l'élimination de ce brouilleur. La réjection de brouilleurs multiples est assurée par une cascade de cellules basées sur cette structure (voir figure (II-1.1)).

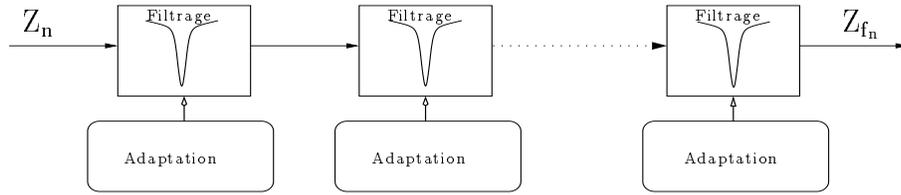


FIG. 1.1: *Cascade de filtres à encoche adaptatif*

### 1.3 Etude d'une cellule de Filtrage à encoche

Le cœur de cette cellule est constitué d'un filtre à encoche centré sur la fréquence  $f_0$ . Ce filtre de type RII présente un zéro  $z_0$  et un pôle  $p_0$  d'argument  $2\pi f_0$ . L'annulation d'une interférence de fréquence  $f_0$  est obtenue pour  $z_0$  de module unitaire. La contrainte imposée sur le module du pôle ( $p_0 = \alpha_0 z_0$ ,  $\alpha_0 < 1$ ) permet de garantir la stabilité du filtre et d'ajuster la largeur de l'encoche.

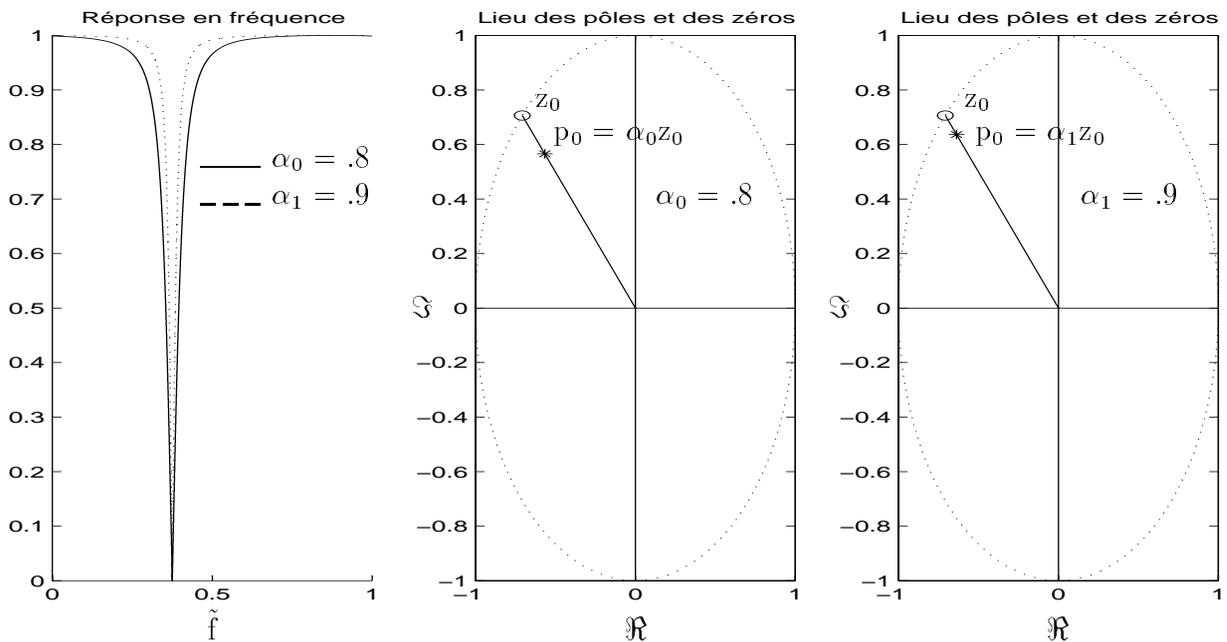


FIG. 1.2: *Filtre à encoche*

- **Fonction de transfert :** La fonction de transfert en  $z$  du filtre est :

$$H(z) = \frac{1 + \alpha_0}{2} \left( \frac{z - z_0}{z - p_0} \right) \quad (1.1)$$

On obtient pour la réponse en fréquence :

$$\left\{ \begin{array}{l} H(\tilde{f}) = \frac{1 + \alpha_0}{2} \frac{\exp\{i2\pi\tilde{f}\} - z_0}{\exp\{i2\pi\tilde{f}\} - p_0} = \frac{1 + \alpha_0}{2} \frac{\exp\{i2\pi\tilde{f}\} - \exp\{i2\pi f_0\}}{\exp\{i2\pi\tilde{f}\} - \alpha_0 \exp\{i2\pi f_0\}} \\ |H(\tilde{f})|^2 = \frac{(1 + \alpha_0)^2}{4} \frac{2 - 2\cos(2\pi(\tilde{f} - f_0))}{1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0\cos(2\pi(\tilde{f} - f_0))} \\ |H(f_0)|^2 = 0 \\ \int_0^1 |H(\tilde{f})|^2 d\tilde{f} \stackrel{\alpha_0 \approx 1}{\approx} 1 \end{array} \right. \quad (1.2)$$

• **Largeur de la bande excisée :** La largeur de l'encoche est définie pour un niveau d'atténuation (voir annexe 3 les relations (A3-25)-(A3-27)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{Hz} \approx \frac{2}{\pi} (1 - \alpha_0) \sqrt{\frac{A_{lin}^{-1}}{1 + \alpha_0^2 + 2\alpha_0(1 - 2A_{lin}^{-1})}} \stackrel{\alpha_0 \approx 1 \text{ et } A_{lin} \gg 1}{\approx} B_{Hz} \approx \frac{1 - \alpha_0}{\pi \sqrt{A_{lin}}} \\ A_{lin} = 10^{A_{dB}/10} \quad A_{dB} : \text{Atténuation en puissance exprimée en dB} \end{array} \right. \quad (1.3)$$

La figure (II-1.3) permet de mesurer, pour différentes valeurs de l'atténuation, la largeur de la bande excisée en fonction de  $\alpha_0$ .

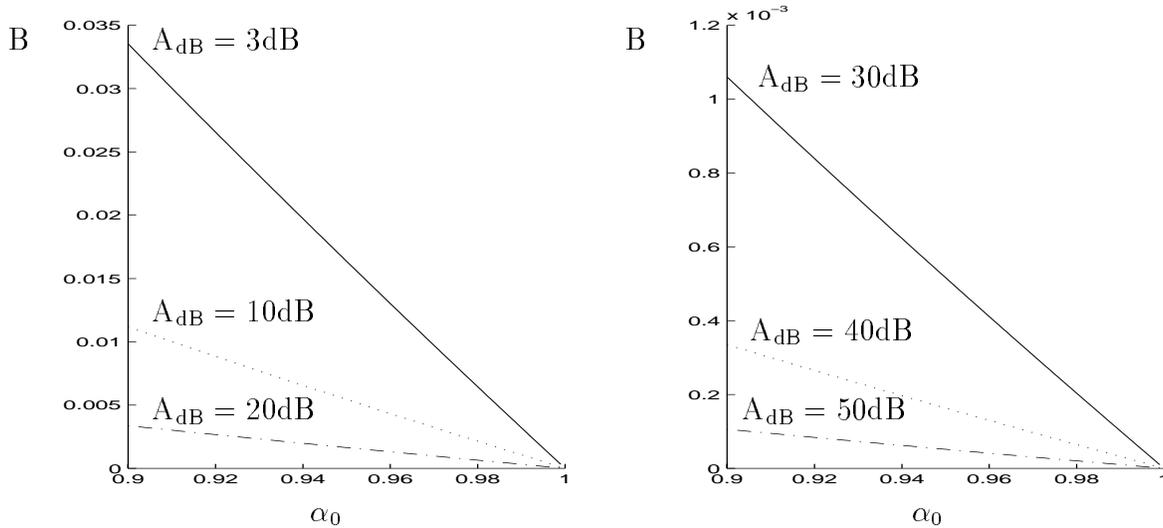


FIG. 1.3: Largeur de l'encoche en fonction de  $\alpha_0$

- **Réponse impulsionnelle :** La réponse impulsionnelle est obtenue à partir de (II-1.1) :

$$\begin{cases} h(n) = \frac{1 + \alpha_0}{2} (\alpha_0^n - \alpha_0^{n-1}) \exp\{i2\pi n f_0\} & n > 0 \\ h(0) = \frac{1 + \alpha_0}{2} \end{cases} \quad (1.4)$$

- **Structures du filtre :** Ce filtre résulte de la cascade de 2 blocs correspondants respectivement aux pôles et aux zéros du filtre. Ces blocs peuvent être ordonnés de 2 manières différentes. On obtient ainsi les 2 configurations présentées sur la figure (II-1.4).

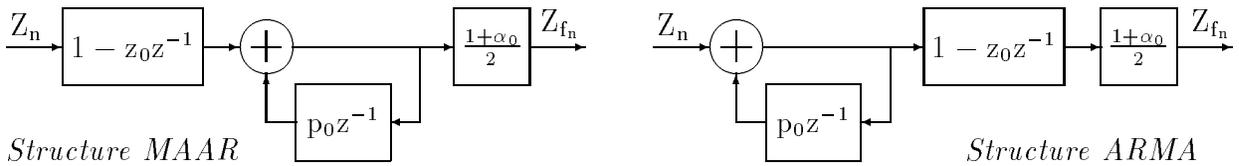


FIG. 1.4: Structures du filtre à encoche

## 1.4 Filtre à encoche adaptatif

L'adaptation des coefficients d'un filtre à encoche opérant sur un signal réel a fait l'objet de nombreuses publications [12]-[15]. Ces publications mettent en évidence l'intérêt de contraintes sur les pôles et les zéros. Ces contraintes, pour un filtre réel, imposent le module des pôles et des zéros et la symétrie des pôles conjugués [13]. Elles permettent d'assurer la stabilité du filtre, de réduire le nombre de paramètres à estimer et la charge de calcul, et d'améliorer la vitesse de convergence de l'algorithme d'adaptation. Une application de filtres à encoche à des signaux complexes est proposée dans [16]. Mais cette étude ne permet pas le dimensionnement de ces filtres à partir de spécifications sur la dynamique des brouilleurs. Par ailleurs des études menées dans [17]-[18] ont permis d'analyser les algorithmes du gradient et des moindres carrés récursifs appliqués à un signal sinusoïdal modulé linéairement en fréquence. Cette analyse est réalisée en l'absence de contrainte sur les pôles et les zéros. Elle permet de paramétrer ces algorithmes (pas d'adaptation du LMS et facteur d'oubli du RLS) en vue de performances optimales en phase de poursuite et de mesurer ces performances. Elle montre que les propriétés de convergence ne permettent pas de conclure quant à la capacité de poursuite en présence de bruits non stationnaires. Les performances de l'algorithme, en phase de poursuite, se mesurent par le décalage de la solution obtenue par

rapport à la solution optimale et par le bruit sur l'erreur. Ainsi l'algorithme des moindres carrés récursifs présente de bonnes propriétés à la convergence qui ne sont pas exploitées en phase de poursuite.

Nous avons donc préféré, pour sa robustesse et sa simplicité de mise en œuvre, l'algorithme du gradient. La fonction de transfert de la cellule de filtrage étant maîtrisée (encoche) l'adaptation consiste à régler la position de cette encoche. L'algorithme est appliqué au bloc MA. La position du pôle est imposée par la contrainte  $p_0 = k_\alpha z_0$ . L'étude conduite dans [9] a montré qu'il était préférable d'adopter la structure ARMA. Dans cette configuration les pôles placés en tête permettent d'améliorer, à l'entrée de la cellule adaptative, le rapport interférence sur bruit gaussien  $\gamma_{jg}$ . Il en résulte de meilleures performances de l'algorithme d'adaptation. La cellule adaptative est représentée figure (II-1.5). A l'adaptation du zéro la puissance de sortie est minimum.

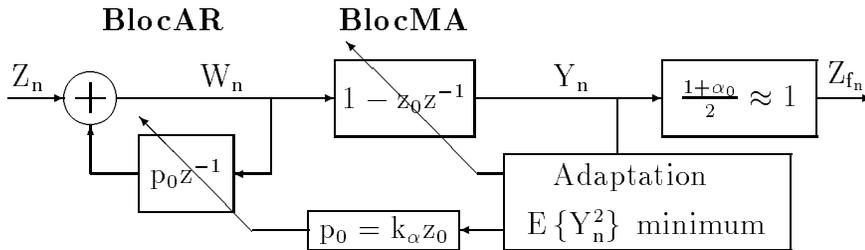


FIG. 1.5: Adaptation des coefficients du filtre à encoche

#### Notation :

	A l'entrée du filtre (Z)	A l'entrée du bloc adaptatif (W)	En sortie du filtre (Y)
Puissance de l'interférence	J	$J_I$	$J_F$
Puissance du bruit blanc gaussien	G	$G_I$	$G_F$
Puissance totale	$P_{jg}$	$P_{jg \ I}$	$P_{jg \ F}$
Rapport Interférence sur Bruit	$\gamma_{jg}$	$\gamma_{jg \ I}$	$\gamma_{jg \ F}$

#### 1.4.1 Puissance de l'interférence en sortie du bloc AR ( $J_I$ )

L'architecture retenue permet d'augmenter la puissance de l'interférence à l'entrée de la cellule adaptative ( $J_I$ ). Pour une sinusoïde de fréquence  $f_j$ , de puissance J, on obtient d'après les relations (A3-28) et (A3-29) de l'annexe 3 :

$$|H_{AR}(f_j)|^2 = \frac{1}{1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0 \cos(2\pi(f_0 - f_j))} \quad (1.5)$$

$$J_I(f_j) = \frac{J}{1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0 \cos(2\pi(f_0 - f_j))}$$

Cette puissance est maximale lorsque la fréquence de l'encoche est calée sur la fréquence du brouilleur ( $f_j = f_0$ ).

$$J_I(f_0) = \frac{J}{(1 - \alpha_0)^2} \quad (1.6)$$

La figure (II-1.6-1) représente, lorsque le filtre est calé à la fréquence 0,5, pour 2 valeurs de  $\alpha_0$ , la variation du gain en puissance  $J_I$  en fonction de la fréquence du brouilleur. La figure (II-1.6-2) représente la variation du gain en puissance maximum  $J_I(f_0)$  en fonction de  $\alpha_0$ . Ce gain croît avec  $\alpha_0$ .

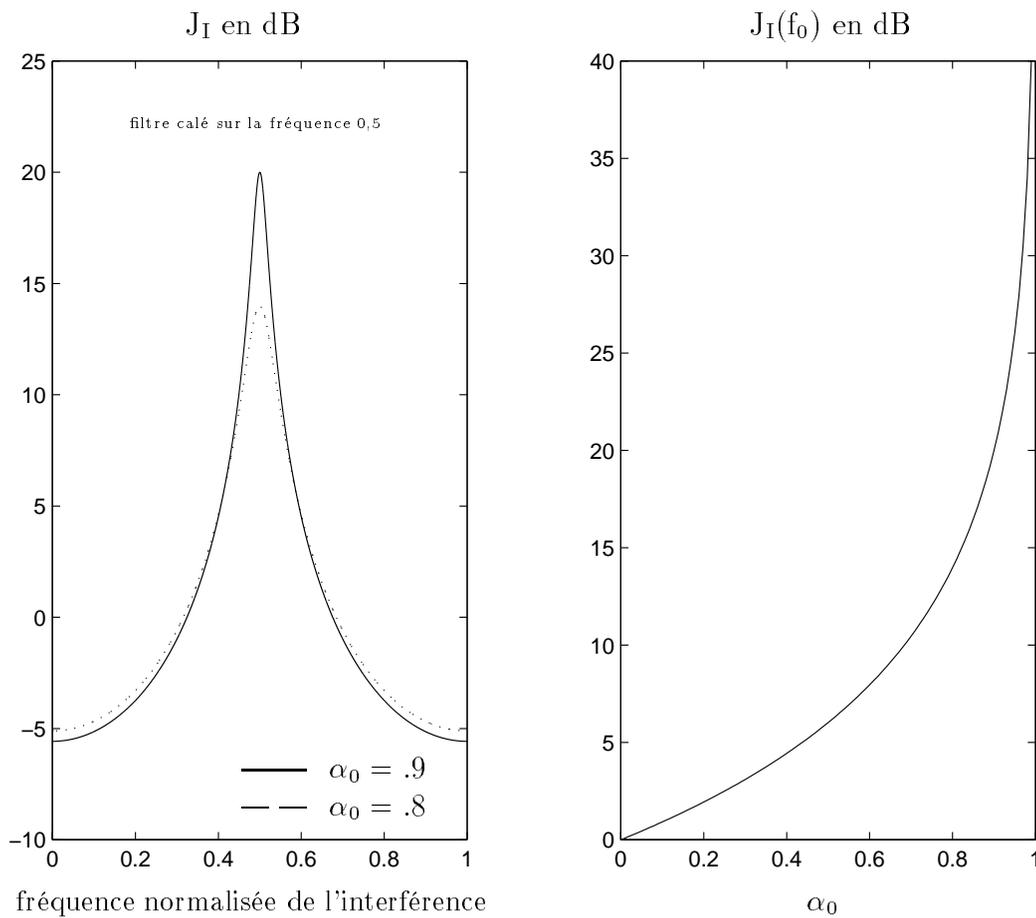


FIG. 1.6: 1- Gain  $J_I(f_j)$  2- Gain maximum  $J_I(f_0)$  fonction de  $\alpha_0$

La partie AR permet donc d'amplifier une interférence de fréquence voisine de la fréquence centrale  $f_0$ . Cette amplification est d'autant plus importante que  $\alpha_0$  est proche de 1.

### 1.4.2 Puissance du bruit blanc gaussien en sortie du bloc AR ( $G_I$ )

La puissance du bruit dépend de la bande équivalente de bruit du filtre AR. Elle est déduite des relations (A3-28) et (A3-29) de l'annexe 3 :

$$\int_0^1 |H_{AR}(\tilde{f})|^2 d\tilde{f} = \int_0^1 \frac{1}{1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0 \cos(2\pi(\tilde{f} - f_0))} d\tilde{f} = \frac{1}{1 - \alpha_0^2}$$

$$G_I = \frac{G}{1 - \alpha_0^2} \quad (1.7)$$

On note une augmentation de la puissance du bruit gaussien et une concentration de l'énergie autour de  $f_0$ . Le bruit, en sortie du bloc AR, est coloré.

### 1.4.3 Rapport de puissance interférence-bruit en sortie du bloc AR

Ce rapport noté  $\gamma_{jg\_I}$  conditionne les performances des algorithmes adaptatifs appliqués au bloc MA [17]. La puissance de l'interférence étant donnée par (II-1.5) et la puissance du bruit blanc par (II-1.7), on en déduit l'expression du rapport de puissance interférence sur bruit blanc en sortie de la partie AR. Ce rapport dépend de l'écart de fréquence  $f_j - f_0$  :

$$\gamma_{jg\_I}(f_j) = \gamma_{jg}(f_j) \frac{1 - \alpha_0^2}{1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0 \cos(2\pi(f_j - f_0))} \quad (1.8)$$

Soit un gain sur le rapport de puissance interférence sur bruit gaussien de :

$$G_\gamma^{AR}(f_j) = \frac{\gamma_{jg\_I}(f_j)}{\gamma_{jg}(f_j)} = \frac{1 - \alpha_0^2}{1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0 \cos(2\pi(f_j - f_0))} \quad (1.9)$$

La figure (II-1.7-1) montre, pour un filtre calé sur la fréquence normalisée de 0,5, l'évolution de ce gain en fonction de la fréquence du signal d'interférence sinusoïdal  $f_j$  et du coefficient  $\alpha_0$  du filtre. On réalise 3 coupes sur ce schéma pour  $\alpha_0 = 0, 1, \alpha_0 = 0, 5$  et  $\alpha_0 = 0, 99$  et une coupe pour  $f_j = f_0$ . Ces coupes sont tracées sur les figures (II-1.7-2) et (II-1.7-3).

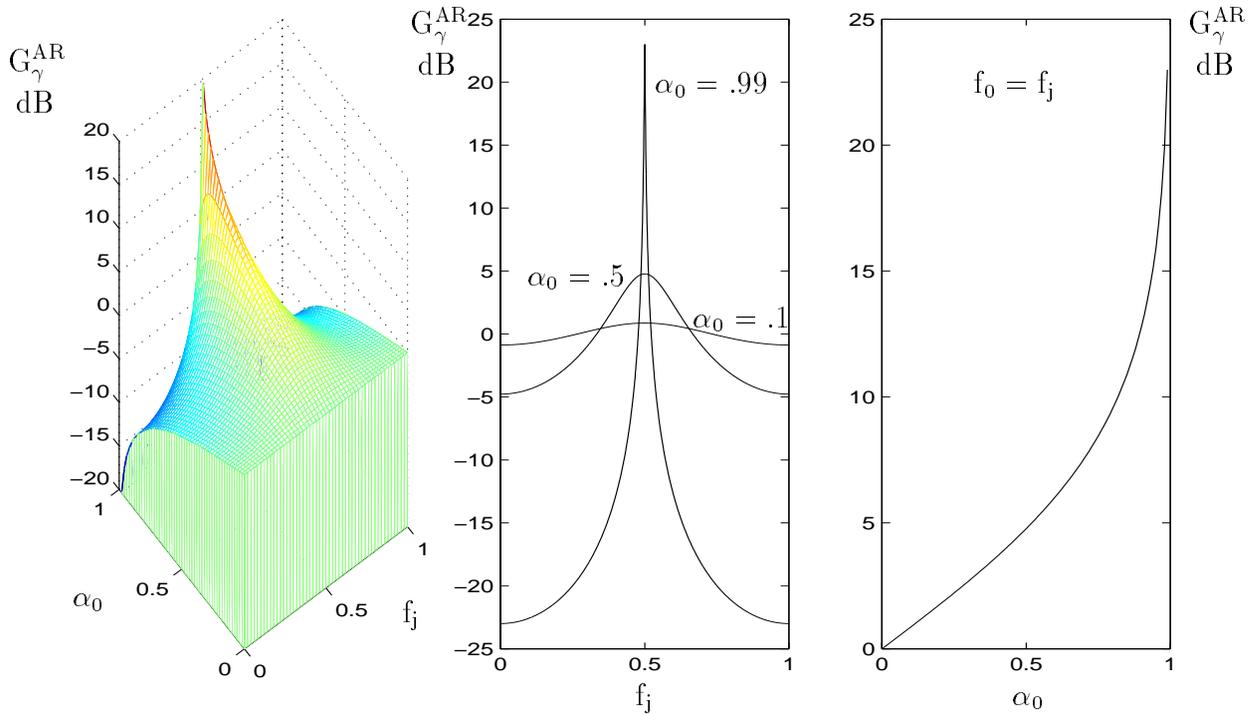


FIG. 1.7: 1- Rapport  $\gamma_{jg\_I}(f_j, \alpha_0)$  2-Rapport  $\gamma_{jg\_I}(f_j)$  3-Rapport  $\gamma_{jg\_I}(\alpha_0)$

On met ainsi en évidence l'augmentation du rapport  $\gamma_{jg\_I}$  au voisinage de la fréquence centrale du filtre. Cette augmentation est d'autant plus sensible que le coefficient  $\alpha_0$  est proche de l'unité. On imagine donc que le réglage de ce paramètre du filtre qui contrôle le gradient de puissance à l'entrée du bloc adaptatif conditionne les performances de l'algorithme d'adaptation.

### 1.5 Adaptation en présence d'une interférence fixe

Il s'agit d'adapter le zéro du filtre afin de minimiser la puissance du brouilleur en sortie du filtre. Cette puissance sera minimum lorsque le zéro se cale sur le cercle unitaire à la fréquence du brouilleur. Il serait donc normal de contraindre le module du zéro. Pour le filtre complexe cette contrainte ne peut être imposée de manière simple. Nous utilisons l'algorithme du gradient pour ajuster le module et l'argument du zéro du filtre.

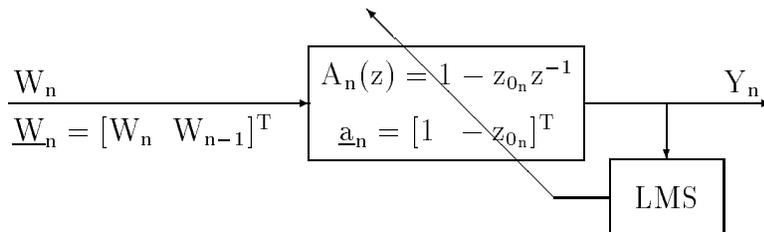


FIG. 1.8: Adaptation du coefficient de la partie MA

### 1.5.1 Solution de Wiener

L'algorithme du gradient permet la convergence en moyenne du filtre vers la solution optimale de Wiener [10]. Cette solution est donnée par :

$$C = E \{Y_n Y_n^*\} \text{ minimum}$$

La sortie du filtre peut s'exprimer en fonction des coefficients du filtre et de l'entrée. On obtient :

$$Y_n = \underline{\mathbf{a}}_n^T \underline{\mathbf{W}}_n \quad (1.10)$$

On note  $R_{ww}$  la matrice d'autocorrélation du signal d'entrée  $W$ . On a :

$$R_{ww}(n) = E \{ \underline{\mathbf{W}}_n \underline{\mathbf{W}}_n^H \} \quad (1.11)$$

$$C = E \{ \underline{\mathbf{a}}_n^T \underline{\mathbf{W}}_n \underline{\mathbf{W}}_n^H \underline{\mathbf{a}}_n^* \} = \underline{\mathbf{a}}_n^T R_{ww}(n) \underline{\mathbf{a}}_n^*$$

On recherche l'expression optimale du filtre  $\underline{\mathbf{a}}_{opt} = [1 \ z_{0,opt}]^T$  lorsque le signal d'entrée est constitué d'un signal sinusoïdal de fréquence  $f_j$  de puissance  $J_I$  et d'un bruit blanc gaussien complexe de puissance  $G_I$ . Dans ce cas la solution est indépendante de  $n$ .

$$W_n = A_j \exp \{ i (2\pi f_j n + \Theta) \} + g_n \quad (1.12)$$

On note  $z_j = \exp \{ i2\pi f_j \}$ . La matrice d'autocorrélation du signal d'entrée s'écrit :

$$R_{ww} = \begin{bmatrix} J_I + G_I & J_I z_j \\ J_I z_j^* & J_I + G_I \end{bmatrix} \quad \text{indépendante de } n$$

La solution de Wiener s'exprime alors de la manière suivante :

$$\begin{cases} C = \underline{\mathbf{a}}^T R_{ww} \underline{\mathbf{a}}^* = (J_I + G_I)(1 + |z_0|^2) - 2J_I \Re(z_j z_0^*) \\ \nabla_{\underline{\mathbf{a}}} C = 0 \end{cases}$$

Le problème se ramène ici à la recherche du seul coefficient complexe  $z_0 = z_{r_0} + i z_{i_0}$  qui minimise  $C$  :

$$z_{0,opt} \text{ solution de } \frac{\partial C}{\partial z_{r_0}} + \frac{\partial C}{\partial z_{i_0}} = 0$$

On obtient :

$$\begin{cases} z_{r_0} = \frac{J_I}{J_I + G_I} \Re(z_j) \\ z_{i_0} = \frac{J_I}{J_I + G_I} \Im(z_j) \end{cases}$$

Et :

$$z_{0_{opt}} = \frac{J_I}{J_I + G_I} z_j = \frac{\gamma_{jg\_I}}{1 + \gamma_{jg\_I}} z_j \quad (1.13)$$

La solution obtenue correspond à un filtre réjecteur centré sur la fréquence du signal sinusoïdal. **Le filtre idéal qui présente un zéro de module unitaire, est obtenu pour  $\gamma_{jg_I} \rightarrow \infty$ .** Ce module décroît avec la puissance de l'interférence entraînant logiquement une diminution de la bande équivalente de bruit et, en conséquence, de la puissance du bruit blanc gaussien. **Pour notre application, il sera impératif de restreindre la région excisée au voisinage de l'interférence pour limiter la dégradation apportée au signal GPS et donc en conséquence de maintenir le rapport de puissance interférence sur bruit blanc gaussien à des valeurs élevées ( $\gamma_{jg\_I}$  très grand devant 1).**

### 1.5.2 Caractéristique du filtre de Wiener

Lorsque le zéro du filtre n'est plus sur le cercle unitaire ( $|z_0| = \beta_0$ ) la relation (II-1.2) devient :

$$\begin{cases} |H(\tilde{f})|^2 = \frac{(1 + \alpha_0)^2}{(1 + \beta_0)^2} \frac{1 + \beta_0^2 - 2\beta_0 \cos(2\pi(\tilde{f} - f_0))}{1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0 \cos(2\pi(\tilde{f} - f_0))} \\ \beta_0 = \frac{\gamma_{jg\_I}}{1 + \gamma_{jg\_I}} = |z_0| \\ \alpha_0 = |p_0| \end{cases} \quad (1.14)$$

Et le module du filtre n'est plus nul à la fréquence centrale  $f_0$ .

$$|H(f_0)| = \frac{1 - \beta_0}{1 - \alpha_0} = \frac{1}{(1 + \gamma_{jg_I})(1 - \alpha_0)} \stackrel{\gamma_{jg_I} \gg 1}{\approx} \frac{1}{\gamma_{jg_I}(1 - \alpha_0)} \quad (1.15)$$

On peut exprimer ce module en fonction du rapport signal sur bruit en entrée  $\gamma_{jg}$  et du

paramètre  $\alpha_0$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{\gamma}^{AR}(f_0) = \frac{\gamma_{jg\_I}(f_0)}{\gamma_{jg}} = \frac{1 + \alpha_0}{1 - \alpha_0} \text{ d'après (II - 1.9)} \\ |H(f_0)| \approx \frac{1}{\gamma_{jg}(1 + \alpha_0)} \end{array} \right. \quad (1.16)$$

On en déduit le rapport interférence sur bruit gaussien en sortie :

$$\gamma_{jg\_F} = \frac{J_F}{G_F} \approx \frac{J * |H(f_0)|^2}{G} \approx \frac{1}{\gamma_{jg}(1 + \alpha_0)^2} \quad (1.17)$$

Les performances de ce filtre, en terme de réjection, augmentent avec le rapport interférence sur bruit gaussien  $\gamma_{jg}$  et avec le coefficient  $\alpha_0$  du bloc AR. Le zéro du filtre se rapproche alors du cercle unitaire et la puissance du signal d'interférence diminue.

Nous pouvons donc admettre que lorsque le filtre se cale sur la solution de Wiener ( $\gamma_{jg} > 0\text{dB}$ ) nous obtenons en sortie un signal d'interférence de puissance négligeable devant la puissance du bruit gaussien.

Par ailleurs on aura intérêt à choisir, pour le coefficient  $\alpha_0$ , des valeurs de ce paramètre proches de 1. Ceci permettra de limiter la largeur de l'encoche, d'améliorer ainsi la sélectivité du filtre, de réduire les dégradations sur le signal GPS, de garantir des rapports interférence sur bruit gaussien  $\gamma_{jgI}$  élevés à l'entrée du bloc adaptatif.

### 1.5.3 L'algorithme du gradient

L'algorithme du gradient est donc utilisé pour adapter le filtre. La fonction à minimiser est une fonction quadratique et présente un minimum qu'on atteindra de manière itérative en recherchant à chaque étape la direction de la plus grande pente. Le gradient à appliquer est estimé pour chaque échantillon du signal d'entrée  $W$ . Il est nul en moyenne à la convergence. Son expression est :

$$\nabla_{\underline{a}} C = -2E \{Y_n \underline{W}_n^*\} \quad (1.18)$$

En utilisant l'approximation temporelle de Widrow (moyenne réalisée sur des calculs successifs) on obtient pour l'équation de mise à jour du coefficient  $z_0$  :

$$z_0(n+1) = z_0(n) + 2\mu Y_n W_{n-1}^* \quad (1.19)$$

Dans le cadre de notre application la puissance de l'interférence à l'entrée du filtre adaptatif (bloc MA) dépend de l'écart entre la fréquence centrale du filtre et la fréquence du brouilleur (voir figure (II-1.6-1)). Cette écart diminuant à chaque itération il est préférable de normaliser en puissance le gradient appliqué [11].

$$\begin{cases} z_0(n+1) = z_0(n) + \frac{\delta}{P_{jg\_I}(n)} Y_n W_{n-1}^* \\ \delta = 2\mu \\ P_{jg\_I}(n) = J_I(n) + G_I(n) \end{cases} \quad (1.20)$$

A chaque estimation on peut exprimer l'erreur à posteriori en remplaçant dans (II-1.10) le coefficient  $z_0$  du filtre par sa nouvelle estimée donnée par (II-1.20) :

$$\tilde{Y}_n = \underline{a}_{n+1}^T \underline{W}_n = Y_n - \frac{\delta}{P_{jg\_I}(n)} Y_n W_{n-1} W_{n-1}^* \quad (1.21)$$

La convergence de l'algorithme impose le choix du paramètre  $\delta$ . On choisit ce paramètre de l'algorithme de manière à obtenir, en moyenne, une erreur à posteriori inférieure en valeur absolue à l'erreur à priori [10]:

$$E \left\{ |\tilde{Y}_n| \right\} < E \left\{ |Y_n| \right\} \quad (1.22)$$

On obtient donc la condition suivante sur le pas  $\delta$  :

$$\left| 1 - \frac{\delta}{P_{jg\_I}(n)} E \left\{ W_{n-1} W_{n-1}^* \right\} \right| = |1 - \delta| < 1 \iff 0 < \delta < 2 \quad (1.23)$$

#### 1.5.4 Convergence de l'algorithme du gradient

Cette étude est réalisée en présence d'un brouilleur stationnaire, la puissance du bruit étant alors indépendante de  $n$ . On utilise les relations (II-1.10) et (II-1.20) pour établir l'équation de récurrence sur  $z_0$  :

$$\begin{cases} z_0(n+1) = z_0(n) + \frac{\delta}{P_{jg\_I}} W_n W_{n-1}^* - \frac{\delta}{P_{jg\_I}} z_0(n) W_{n-1} W_{n-1}^* \\ W(n) = g_n + j_n = g_n + A_j \exp \{ i 2\pi f_j n \} \end{cases} \quad (1.24)$$

On exprime l'espérance de  $z_0(n+1)$  lorsque  $g$  est un bruit blanc et en admettant que  $z_0(n)$  est indépendant de  $W_{n-1}$ . D'après les relations (A3-45), (A3-46) de l'annexe 3 on a :

$$E \{ z_0(n+1) \} = (1 - \delta) E \{ z_0(n) \} + \frac{\delta J_I}{P_{jg\_I}} \exp \{ i 2\pi f_j \} \quad (1.25)$$

En régime stationnaire on admet que la solution, en moyenne, est indépendante de  $n$ . On obtient d'après (II-1.25):

$$E\{z_0(\infty)\} = \frac{J_I}{P_{jg\_I}} \exp\{i2\pi f_j\} = \frac{\gamma_{jgI}}{1 + \gamma_{jgI}} \exp\{i2\pi f_j\} \quad (1.26)$$

L'algorithme converge, en moyenne, vers la solution de Wiener (voir (II-1.13)). Par ailleurs on note que, pour  $\delta = 1$ , l'estimation à l'instant  $n+1$  est indépendante de l'estimation à l'instant  $n$ . La solution converge en moyenne, sur une estimation, vers la solution de Wiener:

$$\text{Pour } \delta = 1 \text{ on a: } E\{z_0(n+1)\} = \frac{\gamma_{jgI}}{1 + \gamma_{jgI}} \exp\{i2\pi f_j\} \quad (1.27)$$

On montre sur la figure (II-1.9), pour  $\delta = 0,1$  et  $\delta = 1$ , l'évolution du coefficient du filtre  $z_0$  dans le plan complexe, de son module et de sa phase. La représentation en trait continu est obtenue en appliquant l'algorithme du gradient à des échantillons d'un signal composé d'un brouilleur sinusoïdal de fréquence normalisée  $f_j$  égale à 0,125 et d'un bruit gaussien additif. Le rapport  $\gamma_{jg\_I}$  à l'entrée du bloc adaptatif est fixé à +10dB.

La courbe en trait pointillé, qui représente l'espérance de  $z_0(n)$ , est dérivée de l'équation (II-1.25). On vérifie que le filtre converge vers la solution de Wiener. On note par ailleurs l'incidence de  $\delta$  sur la vitesse de convergence et sur la puissance de l'erreur résiduelle.

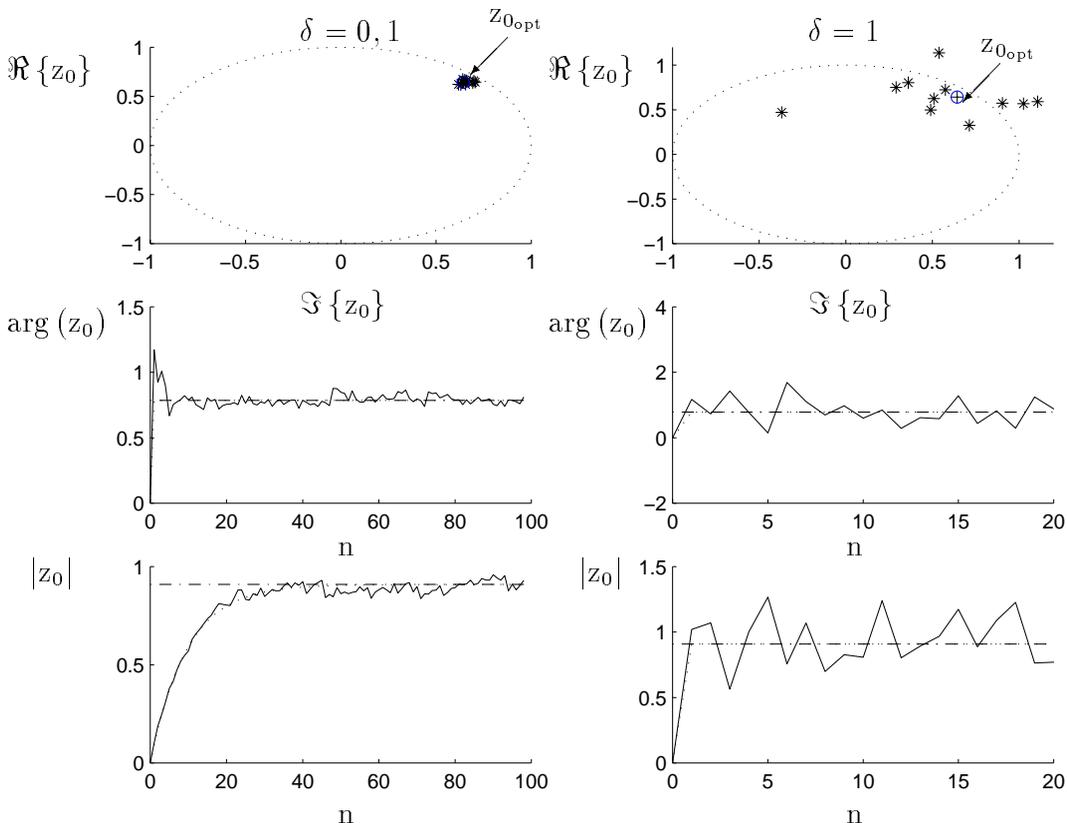


FIG. 1.9: Convergence du coefficient  $z_0$  pour  $\delta = 0,1$  et  $\delta = 1$

### 1.5.5 Temps de convergence

La figure (II-1.9) met en évidence l'influence du paramètre  $\delta$  sur le temps de convergence. Nous considérons une évolution exponentielle du coefficient vers la solution asymptotique. La constante de temps du filtre est proportionnelle au pas d'adaptation [10]. Pour la version normalisée du LMS on a :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\delta} && \text{Constante de temps du filtre} \\ T_{conv} &\sim \frac{6}{\delta} && \text{Temps de convergence du filtre} \end{aligned} \quad (1.28)$$

### 1.5.6 Convergence en présence du bloc AR

L'étude qui précède postule que le signal d'interférence est noyé dans un bruit blanc et gaussien. Lorsque le bloc AR est placé à l'entrée du bloc adaptatif, l'énergie du bruit gaussien est concentrée autour de la fréquence centrale du filtre. Le bruit est coloré et la matrice de covariance du signal à l'entrée du bloc adaptatif dépend du coefficient  $\alpha_0$  du bloc AR. Pour définir cette matrice, nous exprimons la réponse impulsionnelle du filtre AR qui présente un pôle de module  $\alpha_0$  :

$$h(n) = \alpha_0^n \exp \{i(2\pi f_j)\}^n = \alpha_0^n z_j^n \quad (1.29)$$

On en déduit la fonction d'autocorrélation du bruit gaussien :

$$R_{g_I}(n) = G\delta(n) * h(n) * \text{conj} \{h(-n)\} = G \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) \text{conj} \{h(k-n)\} \quad (1.30)$$

On obtient ainsi en zéro :

$$R_{g_I}(0) = G \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) \text{conj} \{h(k)\} = G \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_0^{2k} = \frac{G}{1 - \alpha_0^2} = G_I \quad (1.31)$$

Et pour  $n=1$  :

$$\begin{aligned} R_{g_I}(1) &= G \sum_{k=1}^{+\infty} h(k) \text{conj} \{h(k-1)\} \\ &= G \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_0 z_j)^k (\alpha_0 z_j^*)^{k-1} \quad (z_j^* = \text{conj}(z_j)) \\ &= G \alpha_0 z_j \sum_{l=0}^{+\infty} (\alpha_0 z_j)^l (\alpha_0 z_j^*)^l \\ &= G_I \alpha_0 z_j \end{aligned} \quad (1.32)$$

Et enfin pour  $n=-1$  :

$$R_{g_I}(-1) = G_I \alpha_0 z_j^* \quad (1.33)$$

La matrice de covariance devient alors :

$$R_{ww} = \begin{bmatrix} J_I + G_I & z_j (J_I + \alpha_0 G_I) \\ z_j^* (J_I + \alpha_0 G_I) & J_I + G_I \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

Et la solution de Wiener s'écrit :

$$z_{0_{opt}} = \frac{r_{12}}{r_{22}} = z_j \frac{J_I + \alpha_0 G_I}{J_I + G_I} \quad (1.35)$$

La distance au cercle unitaire est donc plus faible en présence du bloc AR. Elle diminue avec  $\alpha_0$ .

$$1 - \frac{J_I + \alpha_0 G_I}{J_I + G_I} = \frac{G_I(1 - \alpha_0)}{J_I + G_I} \quad (1.36)$$

Le biais sur le module introduit ici est donc inférieur à celui obtenu en présence d'un bruit blanc et l'approximation utilisée par la suite ( $\|z_j\| \approx 1$  en présence du bloc AR) est bien vérifiée.

### 1.5.7 Erreur d'estimation

De même l'erreur d'estimation dépend du pas d'adaptation  $\delta$ . Nous nous proposons d'estimer, en régime permanent, la puissance de cette erreur c'est à dire la variance de l'erreur  $z_0 - z_{0_{opt}}$ . L'équation d'évolution du coefficient  $z_0$ , autour de la solution de Wiener, est obtenue en substituant  $z_{0_{opt}}$  à  $z_0(n)$  dans la relation (II-1.24).

$$z_0(n+1) = z_{0_{opt}} + \frac{\delta}{P_{jg\_I}} W_n W_{n-1}^* - \frac{\delta}{P_{jg\_I}} z_{0_{opt}} W_{n-1} W_{n-1}^*$$

On en déduit la variance sur l'estimation de  $z_0$  :

$$E \left\{ \left| z_0(n+1) - z_{0_{opt}} \right|^2 \right\} = \left( \frac{\delta}{P_{jg\_I}} \right)^2 \left[ \begin{aligned} & E \left\{ W_n W_{n-1}^* W_n^* W_{n-1} \right\} \\ & + E \left\{ W_{n-1} W_{n-1}^* W_{n-1} W_{n-1}^* \left| z_{0_{opt}} \right|^2 \right\} \\ & - E \left\{ W_n W_{n-1}^* W_{n-1} W_{n-1}^* z_{0_{opt}}^* \right\} \\ & - E \left\{ W_n^* W_{n-1} W_{n-1} W_{n-1}^* z_{0_{opt}} \right\} \end{aligned} \right] \quad (1.37)$$

On obtient, d'après les relations (A3-45) et (A3-46) de l'annexe 3, sous l'hypothèse simplifi-

catrice d'un bruit gaussien blanc :

$$E \left\{ \left| z_0(n+1) - z_{0_{opt}} \right|^2 \right\} = \delta^2 \left( 2 \frac{\gamma_{jg\_I}^3}{1 + \gamma_{jg\_I}^4} + 4 \frac{\gamma_{jg\_I}^2}{1 + \gamma_{jg\_I}^4} + 4 \frac{\gamma_{jg\_I}}{1 + \gamma_{jg\_I}^4} + \frac{1}{1 + \gamma_{jg\_I}^4} \right)$$

On admet que, en sortie du bloc AR, le rapport  $\gamma_{jg\_I}$  est élevé ( $\gamma_{jg\_I} \gg 1$ ). On a alors :

$$E \left\{ \left| z_0(n+1) - z_{0_{opt}} \right|^2 \right\} \approx \frac{2\delta^2}{\gamma_{jg\_I}} \quad (1.38)$$

L'algorithme est implanté sous MATLAB, le signal d'entrée étant constitué d'un signal sinusoïdal et d'un bruit gaussien complexes. Le pas d'adaptation  $\delta$  est égal à 0,1 et le rapport de puissance interférence sur bruit blanc  $\gamma_{jg\_I}$  est égal à 10dB. La figure (II-1.10) montre l'évolution, après convergence, du coefficient  $z_0$  dans le plan complexe pour 30 itérations de l'algorithme. La variance mesurée sur l'erreur  $z_0(n+1) - z_{0_{opt}}$  est conforme à celle donnée par la relation (II-1.38).

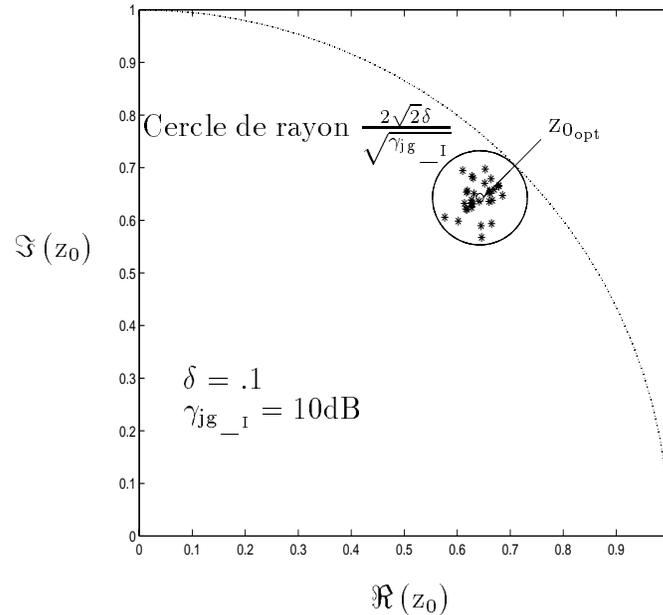


FIG. 1.10: Evolution du coefficient  $z_0$  après convergence de l'algorithme

Par ailleurs, le bruit superposé à l'interférence étant gaussien et complexe, le processus  $z_0(n) - z_{0_{opt}}$  est également gaussien et complexe. La loi de densité de probabilité du module  $R_z = \left| z_0 - z_{0_{opt}} \right|$  est une loi de Rayleigh et la loi de l'argument de  $z_0 - z_{0_{opt}}$  suit une loi uniforme. Le coefficient  $z_{0_{opt}}$  évolue dans un cercle de rayon égal à 2 fois la variance de  $z_0$  avec une probabilité de 87%. Cette probabilité est de 99% pour un cercle égal à 3 fois la

variance de  $z_0$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} R_z(n) = |z_0 - z_{0_{opt}}| \\ \Theta_z(n) = Arg(z_0 - z_{0_{opt}}) \\ \\ \sigma_{z_0} = \delta \sqrt{\frac{2}{\gamma_{jg\_I}}} \\ f_{R_z}(r) = \frac{r}{\sigma_{z_0}^2} exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma_{z_0}^2}\right\} \\ P\left[R_z > \frac{2\sqrt{2}\delta}{\sqrt{\gamma_{jg\_I}}}\right] \approx 0,13 \\ \\ f_{\Theta_z}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \quad \theta \in [0, 2\pi] \end{array} \right. \quad (1.39)$$

La figure (II-1.11) représente l'histogramme du module  $R_z$  établi à partir de 1000 itérations de l'algorithme du gradient.

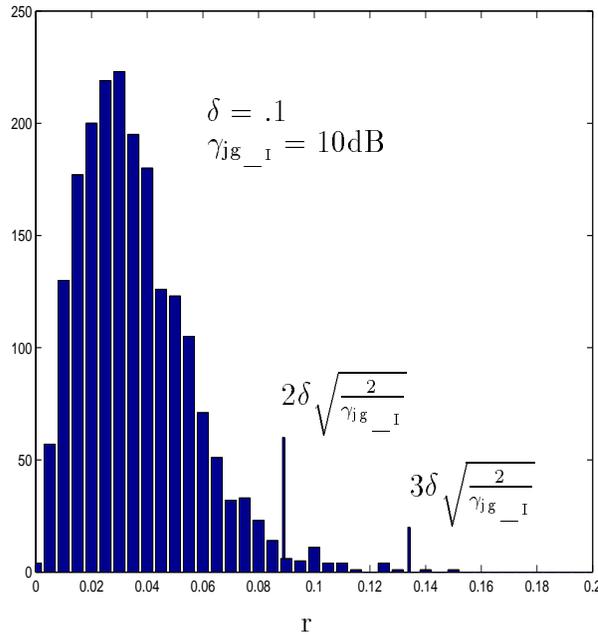


FIG. 1.11: Histogramme du module  $|z_0 - z_{0_{opt}}|$

**Le module du signal d'erreur  $z_0 - z_{0_{opt}}$  suit donc une loi de Rayleigh. La puissance de cette erreur est proportionnelle au carré du pas d'adaptation  $\delta$  et inversement proportionnelle au rapport interférence sur bruit gaussien  $\gamma_{jg_I}$ .**

Une étude présentée en annexe 3 montre que ce bruit sur l'estimation de  $z_0$  entraîne une dégradation des performances du filtre. L'étude est réalisée lorsque le signal d'entrée du bloc d'adaptatif est composé d'un signal sinusoïdal complexe et d'un bruit blanc, gaussien, complexe. Elle utilise la statistique de l'erreur  $z_0 - z_{0_{opt}}$ . Elle aboutit à l'estimation, en sortie,

de la puissance résiduelle du signal d'interférence et du rapport  $\gamma_{jg_F}$ .

### 1.5.8 Puissance résiduelle en sortie du bloc AR

Nous proposons donc en annexe 3 une estimation de la puissance résiduelle. Cette estimation est réalisée lorsque le signal, à l'entrée du bloc MA, est composé d'un bruit blanc gaussien et d'un bruit sinusoïdal. L'étude montre que, en sortie, la puissance du signal d'interférence résulte de 2 phénomènes.

- La solution de Wiener  $z_{0_{opt}}$  obtenue à la convergence donne un zéro de module différent de l'unité.
- Le coefficient  $z_0$  évolue autour de  $z_{0_{opt}}$  en raison du bruit d'estimation.

De cette étude il résulte que :

- Le bruit sinusoïdal présente, pour  $z_0 = z_{0_{opt}}$ , une puissance  $J_F = J_{F_{min}}$  qui est négligeable devant la puissance du bruit gaussien (voir relation (A3-52)) .
- Pour des rapports interférence sur bruit gaussien  $\gamma_{jg_I}$  supérieurs ou égaux à 20dB, la puissance totale estimée ne dépend que du pas d'adaptation  $\delta$  (voir figure (A3-22)).
- Cette puissance résulte du bruit gaussien et du bruit sinusoïdal. On néglige la puissance obtenue pour la solution de Wiener ( $J_{F_{min}} \approx 0$ ). Le résidu de puissance sur le bruit sinusoïdal, dû au bruit sur l'estimation de  $z_0$ , est alors proportionnel à la puissance du bruit gaussien et au carré du pas d'adaptation  $\delta$  (voir la relation (A3-56) et tableau (A3-0.12)).

$$J_F \approx J_{F_{min}} + G \frac{\pi \delta^2}{4} \approx G \frac{\pi \delta^2}{4} \quad (1.40)$$

Cette étude sur la convergence de l'algorithme du gradient appliqué au filtre complexe réjecteur nous inspire 2 remarques :

- Le rapport interférence sur bruit blanc en sortie du bloc AR ( $\gamma_{jg_{-I}}$ ) permet de régler l'efficacité du filtre réjecteur optimum correspondant à la solution de Wiener,
- Le pas d'adaptation  $\delta$  permet de contrôler le bruit d'estimation.

En corollaire de ceci, nous fixerons les 2 contraintes suivantes :

- Le bloc AR placé en tête devra garantir des rapports  $\gamma_{jg_{-I}}$  très grands devant l'unité,
- Le pas d'adaptation  $\delta$  sera maintenu à des valeurs petites devant l'unité. Un pas de 0,1 permet de s'affranchir du bruit d'estimation. La puissance du signal

d'interférence obtenu en sortie est alors négligeable devant la puissance du bruit gaussien. Et la constante de temps du filtre est de 10 ( $1/\delta$ ).

### 1.5.9 Réglage du coefficient $\alpha_0$ du bloc AR

Le réglage du bloc AR se résume au réglage du pôle  $p_0$ . L'argument de ce pôle est transmis par le bloc MA. Le module  $\alpha_0$  de ce pôle est fixé par le coefficient  $k_\alpha$  ( $p_0 = k_\alpha z_0$  et  $\alpha_0 \approx k_\alpha$  pour  $z_0 = z_{0_{opt}}$  et  $\gamma_{jg_I} \gg 1$ ). Ce coefficient modifie les caractéristiques du signal à l'entrée du bloc MA. Or l'étude qui précède montre que les performances de l'algorithme du gradient dépendent en particulier du rapport de puissance interférence sur bruit blanc à l'entrée du bloc adaptatif (rapport  $\gamma_{jg_{-I}}$ ). Une augmentation de ce rapport, qui résulte d'une diminution de la largeur de l'encoche, accroît l'efficacité et la sélectivité du filtre réjecteur. Le rôle du bloc AR est donc important. Il améliore le rapport interférence sur bruit blanc ( $G_\gamma^{AR} > 1$ ) autour de la fréquence centrale du filtre. Cette amélioration est donnée par la relation (II-1.9). Elle dépend du module  $\alpha_0$  et de la précision sur la fréquence de l'encoche (voir graphe (II-1.7)).

Nous proposons en annexe 3 une étude permettant de dimensionner le coefficient  $k_\alpha$  qui détermine le module  $\alpha_0$  du pôle  $p_0$ . Le choix de  $k_\alpha$  dépendra de la valeur du pas d'adaptation  $\delta$ . Une augmentation de ce pas entraîne une augmentation du bruit d'estimation (voir relation (II-1.38)). Le réglage du paramètre  $k_\alpha$  permettra alors d'élargir le gradient de puissance de manière à limiter les variations du rapport  $\gamma_{jg_I}$  lorsque le zéro du filtre évolue autour de la valeur optimale  $z_{0_{opt}}$ . Cette évolution entraîne des variations de la position du pôle ( $p_0 = k_\alpha z_0$ ) qui ne doivent pas modifier de manière significative le signal à l'entrée du bloc adaptatif. La valeur maximale du coefficient  $k_\alpha$  qui détermine le module  $\alpha_0$  est ainsi déduite des caractéristiques fréquentielles du bloc AR et de la statistique de l'erreur d'estimation  $z_0 - z_{0_{opt}}$ . La relation (A3-60) relie le module  $\alpha_0$  au pas d'adaptation choisi. Elle impose ainsi une distance du pôle au cercle unitaire ( $E_{\alpha_0}$ ) qui est fonction du pas  $\delta$  :

$$E_{\alpha_0} = 1 - \alpha_0 > 4\delta^2 \quad (1.41)$$

On montre par ailleurs que du module  $\alpha_0$  dépend le temps de réponse de ce filtre (voir figure (A3-24)).

**Le choix de  $k_\alpha$  qui détermine le module  $\alpha_0$  est donc important. Lorsque la distance du pôle au cercle unitaire diminue la largeur de l'encoche diminue et la pente du gradient de puissance augmente. Il en résulte une amélioration de la précision de l'estimation. Ceci impose une diminution du bruit d'estimation du coefficient**

$z_0$  et donc du pas d'adaptation. On note par ailleurs que cette diminution de l'écart  $E_{\alpha_0}$  entraîne une dégradation du temps de réponse du filtre.

### 1.5.10 Mise en œuvre du filtre

En pratique on utilisera 2 couples de valeurs  $(k_\alpha, \delta)$ . Le premier assurera en phase d'accrochage un élargissement du gradient de puissance et une amélioration du temps de réponse. Le deuxième permettra de resserrer le gradient autour de la fréquence du brouilleur capturé et d'améliorer la précision de l'estimation. Pour valider cette étude nous implantons l'algorithme du filtre selon le modèle présenté sur la figure (II-1.12). Le choix du couple  $(k_\alpha, \delta)$  dépend du mode du filtre. En mode capture le choix de ces paramètres privilégie la dynamique du filtre. Le but est alors de capturer rapidement un brouilleur qui apparaît dans le spectre du signal GPS. En mode poursuite le coefficient  $k_\alpha$  est fixé à 0,99 pour limiter les dégradations sur le signal et pour assurer une bonne sélectivité en fréquence du filtre. On utilise alors  $\delta = 0,05 = \sqrt{(1 - k_\alpha)/4}$ , valeur limite imposée par l'inégalité (II-1.41). L'algorithme ainsi dimensionné est appliqué à un signal composé d'un signal sinusoïdal et d'un bruit blanc gaussien additif.

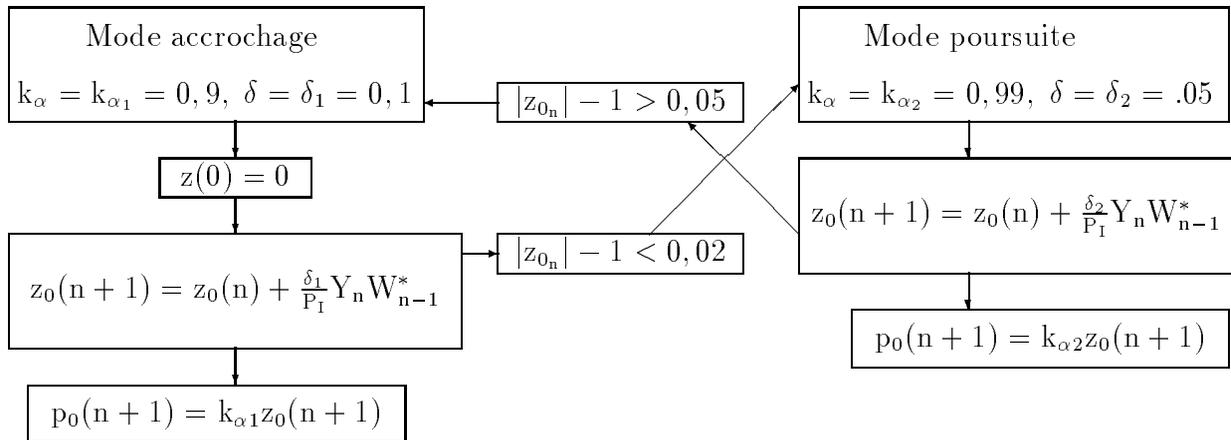


FIG. 1.12: Algorithme du LMS appliqué au filtre à encoche

On mesure le temps d'accrochage et le rapport  $\gamma_{jgF}$  obtenu après convergence, en fonction du rapport  $\gamma_{jg}$  (voir tableau (II-1.5.10)). Le temps d'accrochage est indépendant de la fréquence de l'interférence et, pour des rapports  $\gamma_{jg} \geq 8\text{dB}$ , égal à 28 fois la période d'échantillonnage. Par ailleurs le rapport  $\gamma_{jgF}$  varie très peu conformément à la théorie qui montre l'amélioration des performances du filtre réjecteur adaptatif avec  $\gamma_{jg}$ . Ce rapport, qui dépend du pas  $\delta$ , est de l'ordre de -16dB. Ces simulations permettent donc de conclure quant à l'efficacité du filtre: la puissance de l'interférence est environ 40 fois inférieure à la puissance du bruit

gaussien.

Rapport $\gamma_{jg}$	0dB	1dB	2dB	3dB	4dB	5dB	6dB	7dB	$\geq 8dB$
Tps d'accrochage	53 Te	49 Te	46 Te	38 Te	35 Te	31 Te	30 Te	20 Te	28 Te

Rapport $\gamma_{jg}$	0dB	10dB	20dB	30dB	40dB	50dB
Rapport $\gamma_{jgR}$	-16.1dB	-16.2dB	-16.2 dB	-16.2 dB	-16.2dB	-16.2dB

Tableau 1.5.10 : Temps d'accrochage et rapport  $\gamma_{jgR}$  en fonction de  $\gamma_{jg}$

On observe enfin l'évolution de la puissance à l'entrée du bloc AR et, après convergence, la densité spectrale du signal de sortie (voir figure (II-1.13)). On note ainsi, le pôle se calant sur la fréquence de l'interférence, une augmentation de la puissance à l'entrée du bloc AR pendant la phase de convergence. Le régime stationnaire est atteint après traitement de 800 échantillons. Sur le spectre observé alors on vérifie que l'énergie du signal d'interférence est faible.

Réprésentations pour différentes valeurs du rapport  $\gamma_{jg}$

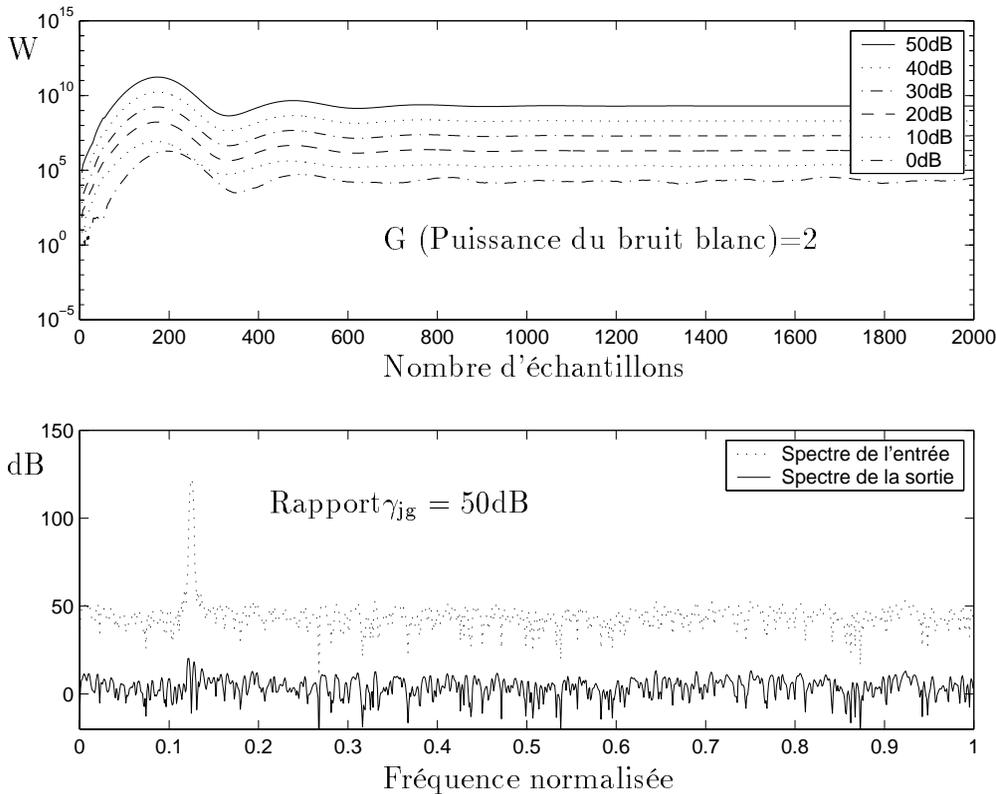


FIG. 1.13: 1- Puissance en sortie du bloc AR 2-Spectre des signaux d'entrée et sortie

Cette étude permet donc, en présence d'un brouilleur stationnaire, de dimen-

sionner correctement le filtre réjecteur. Les résultats observés en simulation traduisent le bon fonctionnement de ce filtre. La réjection sur le brouilleur est satisfaisante ( $\gamma_{jgF} \approx -16\text{dB}$  à la convergence obtenue après traitement de 800 échantillons).

Elle aboutit à une structure simple. L'adaptation s'applique au seul coefficient du bloc MA. Par ailleurs la mesure du module du zéro de ce filtre permet de conclure quant à l'état du filtre (accrochage ou poursuite) et donc d'inactiver le filtre en l'absence d'interférence.

L'étude qui suit vise une caractérisation de cette cellule en présence d'un brouilleur modulé en fréquence et de brouilleurs multiples.

## 1.6 Adaptation en présence d'une interférence modulée

On considère ici un brouilleur modulé linéairement en fréquence. On a alors :

$$\begin{cases} j_n = A_j \exp \left\{ i \left( 2\pi f_j n + \frac{k_\omega}{2} n^2 + \theta \right) \right\} \\ W_n = j_n + g_n \end{cases}$$

Et :

$$j_{n-l} = j_n \exp \left\{ -i \left( 2\pi f_j l - \frac{k_\omega}{2} l^2 \right) \right\} \exp \{ -ik_\omega n l \} \quad (1.42)$$

### 1.6.1 Solution de Wiener

On établit, pour exprimer la fonction C à minimiser, la matrice d'autocorrélation du signal W. D'après les relations (A3-47) de l'annexe 3 on a :

$$R_{ww}(n) = \begin{bmatrix} J_I + G_I & J_I \exp \left\{ i \left( 2\pi f_j \frac{k_\omega}{2} \right) \right\} \exp \{ ik_\omega n \} \\ J_I \exp \left\{ -i \left( 2\pi f_j \frac{k_\omega}{2} \right) \right\} \exp \{ -ik_\omega n \} & J_I + G_I \end{bmatrix}$$

La matrice d'autocorrélation dépend de  $n$  et la fonction  $C_n$  à minimiser devient :

$$C_n = \underline{a}_n^T R_{ww}(n) \underline{a}_n^* \quad \text{avec} \quad \underline{a}_n^T = [1 - z_{0n}]$$

$$C_n = J_I + G_I (1 + |z_{0n}|^2) + 2\Re \left\{ z_{0n} \exp \left\{ -i \left( 2\pi f_j - \frac{k_\omega}{2} \right) \right\} \exp \{ -ik_\omega n \} \right\}$$

On en déduit l'expression du coefficient à l'instant  $n$  :

$$\nabla_{\underline{a}_n} C_n = 0 \Rightarrow z_{0_{opt}}(n) = \frac{\gamma_{jg_I}}{1 + \gamma_{jg_I}} \exp \left\{ i \left( 2\pi f_j - \frac{k_\omega}{2} \right) \right\} \exp \{ ik_\omega n \}$$

**Remarque :** La pulsation instantanée de l'interférence est  $\omega_j(n) = 2\pi f_j + k_\omega n$  à l'instant de mise à jour du filtre. Elle variera de  $\omega_j(n) = 2\pi f_j + k_\omega n$  à  $\omega_j(n+1) = 2\pi f_j + k_\omega(n+1)$  dans l'intervalle de temps précédent la mise à jour suivante. Dans cet intervalle le zéro du filtre est aligné sur la fréquence  $\omega_j + k_\omega(n - \frac{1}{2})$ .

### 1.6.2 Convergence du LMS en présence d'une interférence modulée

La récurrence sur le coefficient du filtre exprimée pour un brouilleur stationnaire reste valable.

$$z_0(n+1) = z_0(n) + \frac{\delta}{P_{jg\_I}} W_n W_{n-1}^* - \frac{\delta}{P_{jg\_I}} z_0(n) W_{n-1} W_{n-1}^* \quad (1.43)$$

D'après les relations (A3-47) données en annexe 3 on obtient pour l'espérance de  $z_0$  à l'instant  $(n+1)T_e$  :

$$E \{ z_0(n+1) \} = E \{ z_0(n) \} (1 - \delta) + \delta \frac{\gamma_{jg_I}}{1 + \gamma_{jg_I}} \exp \left\{ i \left( 2\pi f_j - \frac{k_\omega}{2} \right) \right\} \exp \{ ik_\omega n \} \quad (1.44)$$

En régime permanent, dans la mesure où le filtre poursuit la fréquence du brouilleur, on a :

$$E \{ z_0(n+1) \} = E \{ z_0(n) \exp \{ ik_\omega \} \} \quad (1.45)$$

Et en conséquence :

$$E \{ z_0(n) \} = \delta \frac{\gamma_{jg_I}}{1 + \gamma_{jg_I}} \frac{\exp \left\{ i \left( 2\pi f_j - \frac{k_\omega}{2} \right) \right\} \exp \{ ik_\omega n \}}{\exp \{ ik_\omega \} - 1 + \delta} = z_{0_c}(n) \quad (1.46)$$

Où  $z_{0c}$  est la solution obtenue, en moyenne, à la convergence. On applique cette solution au signal  $W$  en l'absence de bruit blanc afin de mesurer l'atténuation sur le signal d'interférence.

On a alors :

$$\begin{cases} W_n = j_n \\ Y_n = [1 - z_{0c}(n)] \underline{W}_n = j_n - z_{0c}(n)j_{n-1} \end{cases}$$

D'après la relation (II-1.42) qui exprime  $j_n$  en fonction de  $j_{n-1}$  on obtient, pour l'expression du zéro  $z_{0c}(n)$  donnée ci-dessus, l'expression de  $Y_n$  suivante :

$$Y_n = j_{n-1} \exp \left\{ i \left( 2\pi f_j - \frac{k_\omega}{2} + k_\omega \right) \right\} \left( 1 - \delta \frac{J}{P_{jgI}} \frac{1}{\exp \{ik_\omega\} - 1 + \delta} \right)$$

De cette expression on peut déduire la puissance de l'interférence en sortie du filtre. Cette puissance est calculée lorsque le rapport  $\gamma_{jgI}$  est très grand devant l'unité (on a vu que cette approximation se justifie en présence du bloc AR placé en tête).

$$J_F = E \{Y_n Y_n^*\} = J_I \left( 1 + \frac{\delta^2 - 2\delta (\cos k_\omega - 1 + \delta)}{|\exp \{ik_\omega\} - 1 + \delta|^2} \right)$$

La poursuite impose  $k_\omega \ll 2\pi$ . Dans ces conditions on obtient en utilisant un développement à l'ordre 2 de la fonction cosinus :

$$J_F = E \{Y_n Y_n^*\} = J_I \frac{k_\omega^2}{\delta^2 + (1 - \delta) k_\omega^2} \approx J_I \frac{k_\omega^2}{\delta^2}$$

La puissance de l'interférence en sortie croît avec  $k_\omega^2$  alors que la puissance du bruit gaussien filtré est quasi constante égale à la puissance du bruit gaussien ( $G$ ) en entrée du bloc AR (voir (II-1.2)). On en déduit la relation entre le rapport  $\gamma_{jgF}$  et le rapport  $\gamma_{jg}$ .

$$\left. \begin{aligned} J_F &= J_I \frac{k_\omega^2}{\delta^2} = J |H_{AR}(f_j)|^2 \frac{k_\omega^2}{\delta^2} \\ |H_{AR}(f_j)|^2 &= \frac{1}{(1 - \alpha_0)^2} \\ G_F &\approx G \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma_{jgF} = \gamma_{jg} \left( \frac{k_\omega}{\delta(1 - \alpha_0)} \right)^2 \quad (1.47)$$

Pour exemple un brouilleur de forte puissance, caractérisé par un rapport  $\gamma_{jg}$  de 50dB, présente, pour  $\alpha_0 = 0,99$ , une puissance  $J_I$  en sortie du bloc AR  $10^4$  fois supérieure. Le filtre ne peut ramener le rapport  $\gamma_{jgF}$  en dessous de -10dB que pour des valeurs de  $k_\omega$  inférieures à  $10^{-5} \delta$ .

L'analyse de la convergence, en moyenne, permet donc de mesurer la capacité du filtre à poursuivre des brouilleurs modulés linéairement en fréquence. La pente  $k_\omega$  étant fixée, le gain de traitement dépend d'abord du pas d'adaptation  $\delta$  qui fixe le biais d'estimation sur la fréquence centrale de l'encoche. Il dépend également de la distance du pôle au cercle unitaire  $(1 - \alpha_0)$  qui détermine la largeur de la bande excisée.

$$G_t \frac{\gamma_{jg}}{\gamma_{jgF}} \gg 1 \approx \frac{\gamma_{jg}}{\gamma_{jgF}} \approx \frac{J_F}{J} \approx \left( \frac{\delta(1 - \alpha_0)}{k_\omega} \right)^2 \quad \text{Gain de traitement} \quad (1.48)$$

L'étude réalisée en présence d'un brouilleur fixe montre que la puissance du bruit sur l'estimation de  $z_0$  est proportionnelle au carré du pas  $\delta$  (voir (II-1.38)). Le réglage de ce paramètre est donc imposé par la puissance admissible sur cette erreur. Le gain de traitement ne dépend alors que de la distance du pôle au cercle unitaire  $(1 - \alpha_0)$ . Une amélioration de ce gain est ainsi obtenue en augmentant la bande du filtre. Il en résulte alors une dégradation du gain de corrélation.

**Remarque 1 :** Le réglage du pas  $\delta$  est imposé en mode poursuite (pas fixé à 0,05) pour limiter la puissance du bruit d'estimation. Le paramètre  $\alpha_0$  sera ajusté pour amener le gain de traitement à la valeur souhaitée. La distance du pôle au cercle unitaire peut être ainsi diminuée pour de faibles valeurs de  $k_\omega$  en respectant toutefois l'équation (II-1.41). Celle-ci relie la largeur du gradient de puissance (déterminée par  $1 - \alpha_0$ ) à la puissance du bruit d'estimation (fonction du pas delta).

**Remarque 2 :** On pourrait utiliser comme signal de sortie le signal d'erreur exprimé à posteriori pour améliorer les performances du filtre en terme de réjection. Ce signal s'exprime par :

$$\begin{cases} W_n = j_n \\ Y_n = [1 - z_{0c}(n)] \underline{W}_n = j_n - z_{0c}(n+1)j_{n-1} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$Y_n = j_{n-1} \exp \left\{ i \left( 2\pi f_j + \frac{k_\omega}{2} \right) \right\} \left( 1 - \delta \frac{J}{P_{jgI}} \frac{\exp \{ ik_\omega \}}{\exp \{ ik_\omega \} - 1 + \delta} \right)$$

Lorsque  $P_{jgI} \approx J_I$  l'expression de la puissance de l'interférence en sortie du filtre devient :

$$J_F = J_I \left( 1 + \frac{\delta^2 - 2\delta(1 + \cos k_\omega(-1 + \delta))}{|\exp \{ ik_\omega \} - 1 + \delta|^2} \right) = J_I \left( 1 + \frac{\delta^2 - 2\delta + 2\delta(1 - \delta)\cos k_\omega}{\delta^2 + 2(1 - \delta)(1 - \cos k_\omega)} \right)$$

En utilisant un développement à l'ordre 2 de la fonction cosinus on obtient :

$$J_F = J_I \frac{(1 - \delta)^2 k_\omega^2}{\delta^2 + (1 - \delta) k_\omega^2} \quad (1.49)$$

Pour des valeurs de  $\delta$  petites devant 1, imposées en phase de poursuite pour réduire le bruit d'estimation, cette solution n'apporte aucune amélioration : l'erreur à postériori est du même ordre que l'erreur à priori.

**Remarque 3 :** On détermine par ailleurs, en annexe 3, l'influence du biais entre la fréquence centrale de l'encoche estimée et la fréquence de l'interférence sur les performances du bloc AR. Ce bloc doit assurer une amélioration du rapport interférence sur bruit gaussien qui conditionne les performances du bloc adaptatif. La relation (A3-61) permet de mesurer l'amplification sur le signal d'interférence en sortie du bloc AR. Elle met en évidence le bon comportement du bloc AR des valeurs de  $k_\omega$  très petites devant le produit  $\delta(1 - \alpha_0)$ .

### 1.6.3 Vitesse de poursuite du filtre

Dans le paragraphe qui précède nous avons mis en évidence des dégradations des performances du filtre pour des valeurs du coefficient  $k_\omega$  élevées. Nous pouvons exprimer d'après (II-1.48) la limite sur ce coefficient  $k_\omega$  en fonction du gain de traitement, du pas d'adaptation de l'algorithme et de la largeur de l'encoche. On obtient d'après 1.48 :

$$k_\omega = \frac{1}{\sqrt{G_t}} \delta(1 - \alpha_0) \quad (1.50)$$

Le tableau (II-1.6.3.1) donne les valeurs de  $k_\omega$  maximum lorsque on impose en sortie un rapport  $\gamma_{jg}$  de -10dB. Ces valeurs sont obtenues à partir de la relation (II-1.50) pour un pas  $\delta$  égal à 0,05 (valeur retenue en poursuite pour une interférence fixe).

$\gamma_{jg}$	0dB	10dB	20dB	30dB	40dB	50dB
Rapport $G_t$	10dB	20dB	30dB	40dB	50dB	60dB
$k_\omega$ max pour $\alpha_0 = 0,99$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$1.6 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-7}$
$k_\omega$ pour $\alpha_0 = 0,97$	$4.8 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$4.8 \cdot 10^{-5}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$4.8 \cdot 10^{-6}$	$1.5 \cdot 10^{-6}$

**Tableau 1.6.3.1 : Valeur du coefficient  $k_\omega$  de l'interférence imposée par  $G_\gamma^{MA}$**

Pour valider cette étude on applique, en simulation, l'algorithme décrit figure (II-1.12) ( $\alpha_0 = 0,99$ ,  $\delta = 0,05$ ) à une interférence modulée linéairement en fréquence. L'amplitude de l'interférence est adaptée à la puissance du bruit blanc gaussien additif pour régler le rapport  $\gamma_{jg}$ . Ce rapport variant de 0dB à 50dB par pas de 10dB, on impose le coefficient

$k_\omega$  qui fixe la vitesse de variation de la fréquence de l'interférence d'après la règle définie ci-dessus. On mesure alors le rapport  $\gamma_{jgF}$  en sortie à partir de 1000 échantillons prélevés après convergence du LMS. Les résultats sont reportés dans le tableau (II-1.6.3.2). On précise par ailleurs sur ce tableau, pour chaque valeur de  $k_\omega$ , la vitesse de variation de l'interférence lorsque la fréquence d'échantillonnage du système est de 5MHz.

$\gamma_{jg}$	0dB	10dB	20dB	30dB	40dB	50dB
$k_\omega$	$1.610^{-4}$	$510^{-5}$	$1.610^{-5}$	$510^{-6}$	$1.610^{-6}$	$510^{-7}$
$\frac{\Delta f}{\Delta t}$ à $F_e=5\text{MHz}$	629MHz/s	200MHz/s	63MHz/s	20MHz/s	6.3MHz/s	2MHz/s
$\gamma_{jgF}$	-8.9dB	-9dB	-9.1dB	-8.9dB	-9dB	-9dB

**Tableau 1.6.3.2 : Rapport  $\gamma_{jgF}$  obtenu en simulation**

Les performances obtenues en simulation sont donc conformes à la théorie. Les résultats obtenus pour le rapport  $\gamma_{jgF}$  en sortie approchent la valeur théorique de -10dB puisque le bruit d'estimation est négligeable pour cette valeur de  $\delta$  (voir l'expression (A3-55) qui relie l'erreur totale à l'erreur minimum obtenue ici pour  $z_0 = z_{0c}$ ). Par ailleurs cette simulation permet de vérifier que ce rapport  $\gamma_{jgF}$  varie proportionnellement au carré du coefficient  $k_\omega$ . Il croît ainsi de 6dB lorsque les valeurs de  $k_\omega$ , imposées dans le tableau (II-1.6.3.1) pour  $\gamma_{jgF} = -10\text{dB}$ , sont multipliées par 2.

## 1.7 Filtrage de plusieurs brouilleurs

Nous considérons ici que le signal d'interférence superposé au bruit gaussien est composé de signaux sinusoïdaux de fréquences fixes que nous limitons au nombre de 2 dans cette étude. Le filtre est alors caractérisé par 2 zéros appliqués à chacune de ces 2 fréquences et sa fonction de transfert présente 2 encoches. La solution retenue ici consiste en la mise en cascade de 2 cellules telles que celle étudiée précédemment. Cette solution permet d'aboutir, dans le cas général, à un système de conception simple empilant un nombre de cellules égal au nombre de brouilleurs. Chaque cellule devant se caler sur une raie de l'interférence, les performances d'un filtre ainsi organisé dépendent du pouvoir de séparation de chacune d'elles. En particulier la cellule placée en tête reçoit l'énergie de tous les brouilleurs qui se comportent comme des attracteurs déviant le filtre de sa solution optimale. Nous analysons ici, dans un schéma simple à 2 brouilleurs, le comportement d'une cellule de rejection adaptative.

### 1.7.1 Solution de Wiener

Nous étudions d'abord la cellule adaptative (bloc MA) qui reçoit le signal noté  $W$ . Nous notons  $R_{ww}$  la matrice d'autocorrélation de ce signal  $W$ .

$$R_{ww}(n) = \begin{bmatrix} r_{11}(n) & r_{12}(n) \\ r_{21}(n) & r_{22}(n) \end{bmatrix}$$

La fonction à minimiser, définie par (II-1.11), a pour expression :

$$C(n) = \underline{a}_n^T R_{ww} \underline{a}_n^* = [1 - z_{0n}] \begin{bmatrix} r_{11}(n) & r_{12}(n) \\ r_{21}(n) & r_{22}(n) \end{bmatrix} [1 - z_{0n}^*]^T$$

$$C = r_{11}(n) + |z_{0n}|^2 r_{22}(n) - 2\Re \{z_{0n} r_{21}(n)\}$$

Le gradient de cette fonction exprimé par rapport à  $z_0$  permet d'obtenir la solution de Wiener. On a :

$$z_{0opt} = \frac{r_{12}(n)}{r_{22}(n)}$$

On exprime ces 2 termes de la matrice d'autocorrélation en présence de 2 signaux sinusoïdaux de fréquences  $f_1$  et  $f_2$ , d'amplitudes  $A_1$  et  $A_2$ , de puissances  $J_{I_1}$  et  $J_{I_2}$  :

$$j_1(n) = A_1 \exp \{i(2\pi f_1 n + \phi_1)\}$$

$$j_2(n) = A_2 \exp \{i(2\pi f_2 n + \phi_2)\}$$

$$W_n = g_n + j_1(n) + j_2(n)$$

$$W_{n-1} = g_{n-1} + j_1(n-1) + j_2(n-1)$$

$$\begin{aligned} r_{22}(n) &= E \{W_{n-1} W_{n-1}^*\} \\ &= G + J_{I_1} + J_{I_2} + 2\Re \{j_1(n) j_2^*(n) \exp \{i2\pi (f_2 - f_1)\}\} \\ &= G + J_{I_1} + J_{I_2} + 2A_1 A_2 \cos(2\pi (f_1 - f_2)(n-1) + \phi_1 - \phi_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{12}(n) &= E \{W_n W_{n-1}^*\} \\ &= J_{I_1} \exp \{i2\pi f_1\} + J_{I_2} \exp \{i2\pi f_2\} + j_1(n) j_2^*(n) \exp \{i2\pi f_2\} + j_1^*(n) j_2(n) \exp \{i2\pi f_1\} \\ &= J_{I_1} \exp \{i2\pi f_1\} + J_{I_2} \exp \{i2\pi (f_2)\} \\ &\quad + A_1 A_2 \exp \{i2\pi (f_2 + (f_1 - f_2)n + \phi_1 - \phi_2)\} \\ &\quad + A_1 A_2 \exp \{i2\pi (f_1 + (f_2 - f_1)n + \phi_2 - \phi_1)\} \end{aligned}$$

(1.51)

La solution est fonction de  $n$ , alors que les signaux d'interférence sont à fréquence fixe. Elle ne correspond pas, logiquement, à celle espérée correspondant à un zéro calé sur l'une des 2 raies spectrales. En moyenne cette solution dépend de la puissance et de la fréquence des 2 brouilleurs en présence. Par ailleurs, en raison de l'intercorrélacion non nulle des 2 signaux sinusoïdaux, des termes à la fréquence  $f_2 - f_1$  traduisent le comportement ondulatoire de la solution autour de cette moyenne.

### 1.7.2 Caractéristique du filtre de Wiener

Le filtre est non stationnaire. Toutefois en prenant l'espérance de la solution sur  $N$  échantillons tel que  $N(f_2 - f_1) \gg 1$  on obtient une solution notée  $z_{0m}$ , indépendante de  $n$ .

$$z_{0m} = \frac{J_{I_1} \exp\{i2\pi f_1\} + J_{I_2} \exp\{i2\pi f_2\}}{G + J_{I_1} + J_{I_2}} \quad (1.52)$$

On considère des rapports interférence sur bruit gaussien  $\gamma_{ji_1}$  ( $\gamma_{ji_1} = (J_{I_1} + J_{I_2})/G$ ) très grand devant 1. La solution obtenue est caractéristique du filtre MA, doté d'un zéro de module proche de 1 lorsque  $|f_2 - f_1| \ll 1$ , qui minimise la puissance de sortie en présence de 2 signaux sinusoïdaux ( $J_F$  minimum ( $J_F = J_{F_1} + J_{F_2}$ )). On représente figure (II-1.14) la fonction de transfert de ce filtre.

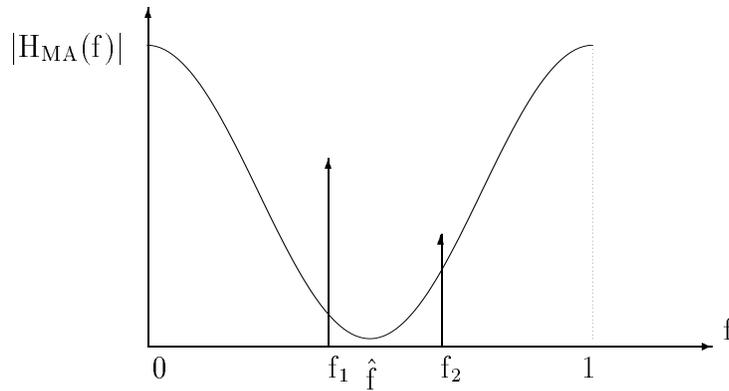


FIG. 1.14: Filtre MA appliqué aux 2 raies de l'interférence

Si  $\hat{\theta} = i2\pi\hat{f}$  est l'argument du zéro de ce filtre, la puissance du signal d'interférence de sortie de ce bloc a pour expression :

$$\begin{aligned} J_F = J_{F_1} + J_{F_2} &= J_{I_1} \left| H_{MA}(2\pi(\hat{f} - f_1)) \right|^2 + J_{I_2} \left| H_{MA}(2\pi(f_2 - \hat{f})) \right|^2 \\ &= J_{I_1} (2 - 2\cos(2\pi(\hat{f} - f_1))) + J_{I_2} (2 - 2\cos(2\pi(f_2 - \hat{f}))) \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à  $\hat{f}$  on obtient, pour la valeur nulle de la dérivée, l'expression de la

fréquence centrale du filtre qui minimise la puissance  $J_F$ .

$$\frac{\partial J_F}{\partial \hat{f}} = 2J_{I_1} \sin(2\pi(\hat{f} - f_1)) - 2J_{I_2} \sin(2\pi(f_2 - \hat{f}))$$

$$\frac{\partial J_F}{\partial \hat{f}} = 0 \Rightarrow 2\pi \hat{f} = tg^{-1} \frac{J_{I_1} \sin(2\pi f_1) + J_{I_2} \sin(2\pi f_2)}{J_{I_1} \cos(2\pi f_1) + J_{I_2} \cos(2\pi f_2)} = tg^{-1} \frac{\Im(z_{0_m})}{\Re(z_{0_m})}$$

La puissance en sortie du bloc MA est donc minimum lorsque le zéro du filtre est d'argument  $\text{Argument}(z_{0_m})$ . Le filtre optimum est obtenu en filtrant les termes de fréquence  $f_2 - f_1$  de la solution de Wiener. Le filtre souhaité, qui rejetterait totalement une raie, par exemple la raie de fréquence  $f_1$ , est obtenu pour  $J_{I_1} \gg J_{I_2}$ . Ceci dépendra, en présence du bloc AR en tête, de la puissance des 2 composantes à l'entrée ( $J_1, J_2$ ), de l'écart de fréquence  $f_2 - f_1$  et du module  $\alpha_0$  du pôle. Le fonctionnement en présence du bloc AR est traité plus loin.

### 1.7.3 Convergence de l'algorithme du gradient

Nous nous intéressons à l'estimation du coefficient en régime permanent. Nous utilisons l'équation de récurrence définie par (II-1.24).

$$z_0(n+1) = z_0(n) + \frac{\delta}{P_{jg\_I}} W_n W_{n-1}^* - \frac{\delta}{P_{jg\_I}} z_0(n) W_{n-1} W_{n-1}^*$$

Nous obtenons en moyenne :

$$E\{z_0(n+1)\} = E\{z_0(n)\} + \frac{\delta}{E\{W_n W_n^*\}} E\{W_n W_{n-1}^*\} - \frac{\delta E\{z_0(n)\}}{E\{W_n W_n^*\}} E\{W_{n-1} W_{n-1}^*\}$$

Avec :

$$E\{W_{n-1} W_{n-1}^*\} = G + J_{I_1} + J_{I_2} + 2A_1 A_2 \cos(2\pi(f_1 - f_2)(n-1) + \phi_1 - \phi_2)$$

$$\begin{aligned} E\{W_n W_{n-1}^*\} &= J_{I_1} \exp\{i2\pi f_1\} + J_{I_2} \exp\{i2\pi(f_2)\} \\ &+ A_1 A_2 \exp\{i2\pi(f_2 + (f_1 - f_2)n + \phi_1 - \phi_2)\} \\ &+ A_1 A_2 \exp\{i2\pi(f_1 + (f_2 - f_1)n + \phi_2 - \phi_1)\} \end{aligned}$$

Dans le cas de signaux d'interférence de fréquences très voisines la puissance du signal varie très lentement avec  $n$ . Il en est de même du coefficient du filtre qui, en moyenne, conserve

sa valeur entre 2 échantillons consécutifs :

$$\begin{cases} E \{W_{n-1}W_{n-1}^*\} \approx E \{W_nW_n^*\} \\ E \{z_0(n+1)\} \approx E \{z_0(n)\} \end{cases}$$

On obtient alors, après convergence :

$$E \{z_0(n)\} = \frac{E \{W_nW_{n-1}^*\}}{E \{W_{n-1}W_{n-1}^*\}} = \frac{r_{12}(n)}{r_{22}(n)}$$

On retrouve l'expression de la solution de Wiener étudiée ci-dessus après filtrage des composantes à  $f_2 - f_1$ .

**En présence de 2 brouilleurs de fréquences  $f_1$  et  $f_2$ , de puissance à l'entrée du bloc adaptatif  $J_{I_1}$  et  $J_{I_2}$  le zéro du filtre, obtenu en moyenne à la convergence, se cale sur une fréquence comprise entre  $f_1$  et  $f_2$ . Le décalage par rapport à la fréquence du brouilleur à éliminer dépend des puissances  $J_{I_1}$  et  $J_{I_2}$  et de l'écart  $f_1 - f_2$ .**

#### 1.7.4 Comportement en présence du bloc AR

Cette étude est réalisée lorsque les composantes aux fréquences  $f_2 - f_1$  sont éliminées (l'élimination de ces composantes est abordée ultérieurement). Dans ces conditions le bloc adaptatif minimise la puissance des 2 interférences en sortie. En présence du bloc AR cette puissance dépend des caractéristiques des 2 composantes appliquées à l'entrée du bloc AR ( $J_1$  et  $J_2$ ,  $f_1$  et  $f_2$ ). Elle s'exprime, d'après l'expression de la fonction de transfert du filtre donnée en annexe 3 (A3-24), pour une encoche centrée sur la fréquence  $\hat{f}$ , par :

$$\begin{aligned} J_F = J_{F_1} + J_{F_2} &= J_1 \left| H(2\pi(\hat{f} - f_1)) \right|^2 + J_2 \left| H(2\pi(f_2 - \hat{f})) \right|^2 \\ &= K_{\alpha_0} \left( J_1 \frac{2 - 2\cos(2\pi(\hat{f} - f_1))}{1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0\cos(2\pi(\hat{f} - f_1))} + J_2 \frac{2 - 2\cos(2\pi((f_2 - \hat{f})))}{1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0\cos(2\pi(f_2 - \hat{f}))} \right) \end{aligned}$$

La figure (II-1.15) montre l'évolution de cette puissance lorsque  $\alpha_0 = 0,99$ .

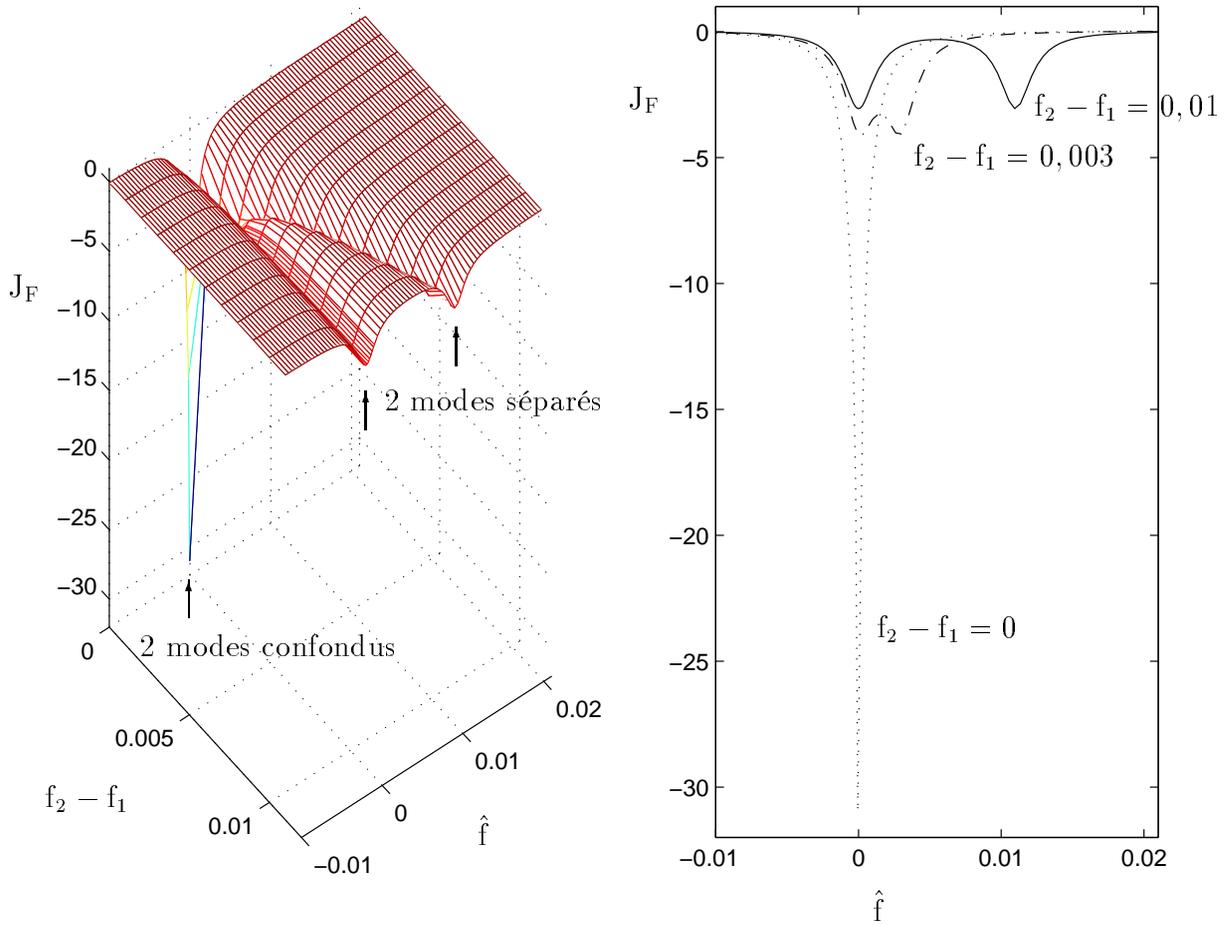


FIG. 1.15: Puissance en sortie du filtre ( $\alpha_0 = 0,99$ ,  $J_1 = J_2$ )

Sur la partie gauche cette évolution est représentée en fonction de  $\hat{f}$  et de l'écart de fréquence  $f_2 - f_1$ . Sur la partie droite 3 coupes montrent que pour  $f_2 - f_1 < 0,003$  les 2 modes sont quasiment confondus. A partir de  $f_2 - f_1 = 0,003$  on commence à percevoir les 2 modes en présence. Pour  $f_2 - f_1 = 0,01$  les 2 modes sont bien identifiés.

La solution du bloc adaptatif, obtenue après filtrage des composantes à  $f_2 - f_1$ , minimise la puissance en sortie. Elle est donc obtenue pour :

$$\nabla_{\hat{f}} J_F = 0$$

L'expression du gradient de puissance exprimé par rapport à  $\hat{f}$  est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\hat{f}} J_F = K'_{\alpha_0} \left( \frac{J_1 \sin(2\pi(\hat{f} - f_1))}{(1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0 \cos(2\pi(\hat{f} - f_1)))^2} - \frac{J_2 \sin(2\pi(f_2 - \hat{f}))}{(1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0 \cos(2\pi(f_2 - \hat{f})))^2} \right) \\ K'_{\alpha_0} = 4\pi K_{\alpha_0} (1 - \alpha_0)^2 \end{array} \right.$$

La puissance  $J_F$  et son gradient  $\nabla_{\hat{f}} J_F$  sont représentés sur la figure (II-1.16) pour  $J_1 = 2J_2$  et  $f_2 - f_1 = 0,01$ .

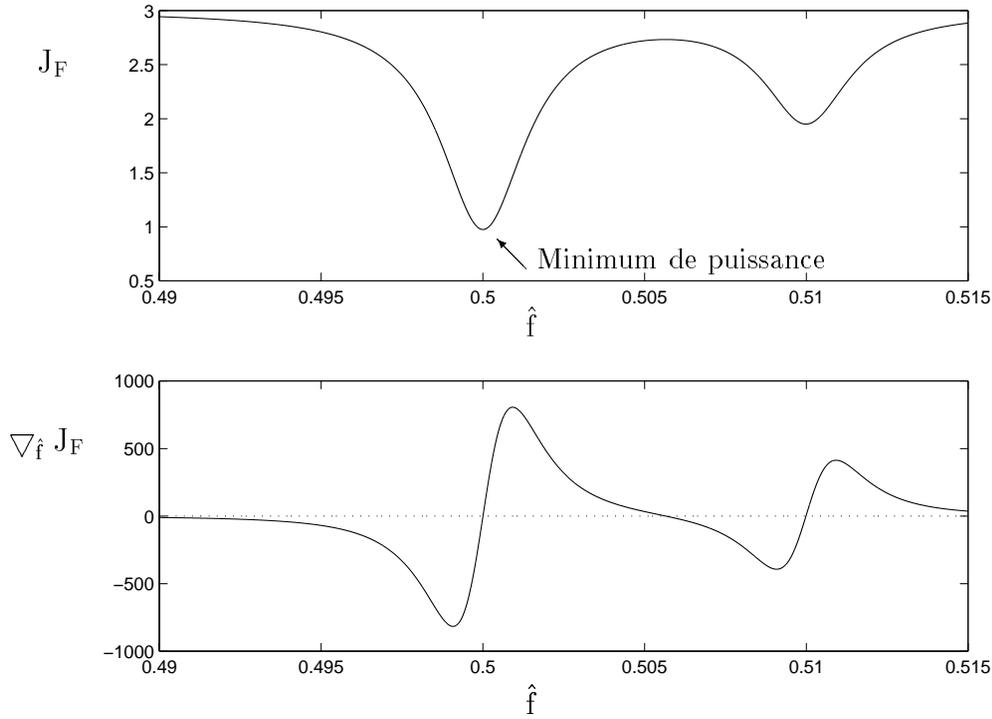


FIG. 1.16: *Puissance de sortie et son gradient par rapport à  $\hat{f}$*  ( $J_1 = 2J_2$ )

Nous recherchons la valeur de la fréquence de l'encoche  $\hat{f} = \hat{f}_{opt}$  qui minimise la puissance de sortie. Pour ce faire, nous posons  $\hat{f}_{opt} = f_1 + \epsilon_f$  et nous linéarisons, en supposant que  $\epsilon_f \ll \Delta f$ , la solution de l'équation  $\nabla_{\hat{f}} J_F = 0$  autour de  $f_1$ . Nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{2\pi\epsilon_f J_1}{(1 - \alpha_0)^4} = \frac{J_2 \sin(2\pi(\Delta f - \epsilon_f))}{(1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0 \cos(2\pi(\Delta f - \epsilon_f)))^2} \\ \Delta f = f_2 - f_1 \end{cases}$$

On en déduit la fréquence  $\hat{f}_{opt}$  du filtre qui minimise la puissance totale  $J_F$  :

$$\hat{f}_{opt} = f_1 + \epsilon_f \approx f_1 + \frac{J_2 (1 - \alpha_0)^4 \sin(2\pi\Delta f)}{2\pi J_1 (1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0 \cos(2\pi\Delta f))^2} \quad (1.53)$$

Et le gain à la fréquence  $f_1$  est déduit de l'expression de la fonction de transfert (A3-24) de l'annexe 3 :

$$|H(f_1)|^2 = \frac{(1 + \alpha_0)^2}{4} \frac{2 - 2\cos(2\pi\epsilon_f)}{1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0 \cos(2\pi\epsilon_f)} \quad (1.54)$$

On représente sur la partie gauche de la figure (II-1.17) l'atténuation à la fréquence  $f_1$  en

fonction de l'écart  $\Delta f$  pour différentes valeurs de  $\alpha_0$ .

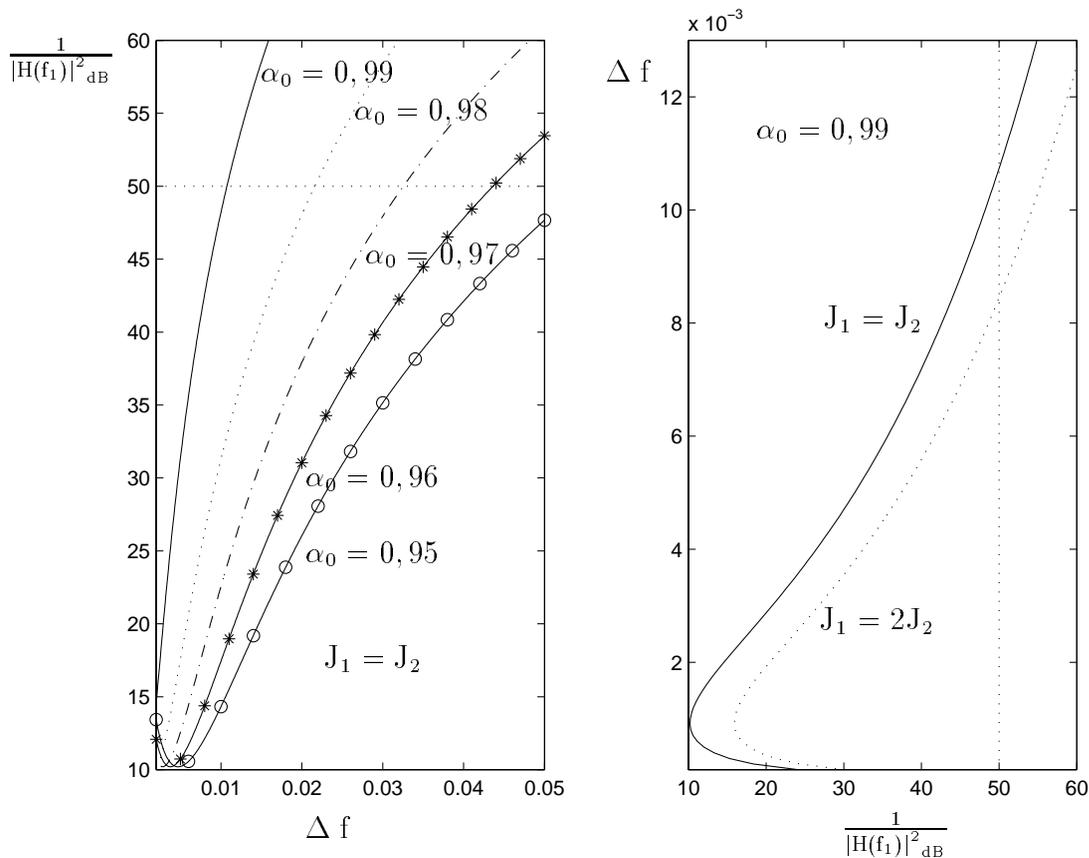


FIG. 1.17: 1-Atténuation en fonction de la distance fréquentielle entre 2 brouilleurs  $\Delta f$   
2- Distance fréquentielle  $\Delta f$  en fonction de l'atténuation exigée à la fréquence  $f_1$

La courbe sur la partie droite est obtenue pour  $\alpha_0 = 0,99$ . Elle permet de déterminer, pour l'atténuation exigée, la distance fréquentielle minimum entre 2 brouilleurs. On notera pour exemple que cette distance  $\Delta f$  est proche de 0,01 lorsque on souhaite une atténuation de 50dB.

Le deuxième brouilleur en présence se comporte comme un attracteur. Il dévie le filtre de la raie à éliminer. En présence du bloc AR le décalage dépend de la largeur du gradient fixée par  $\alpha_0$  et de l'écart de fréquences  $f_2 - f_1$ .

### 1.7.5 Filtrage de la solution

#### Principe

L'analyse qui précède présente le fonctionnement du filtre, en présence de 2 raies d'interférence, lorsque les composantes à la fréquence de battement  $f_2 - f_1$  sont éliminées. Ces composantes apparaissent dans la solution de Wiener obtenue à la convergence (voir (II-1.51)).

Elles caractérisent le comportement ondulatoire de la solution. Il en résulte une dégradation des performances du filtre. La figure (II-1.18) montre après convergence de l'algorithme, en présence de 2 sinusoïdes séparées de 0,1Hz, les évolutions dans le plan complexe du coefficient  $z_0$  autour de la solution obtenue en moyenne. Cette solution est représentée par le coefficient  $z_{0_m}$  défini par l'équation (II-1.52).

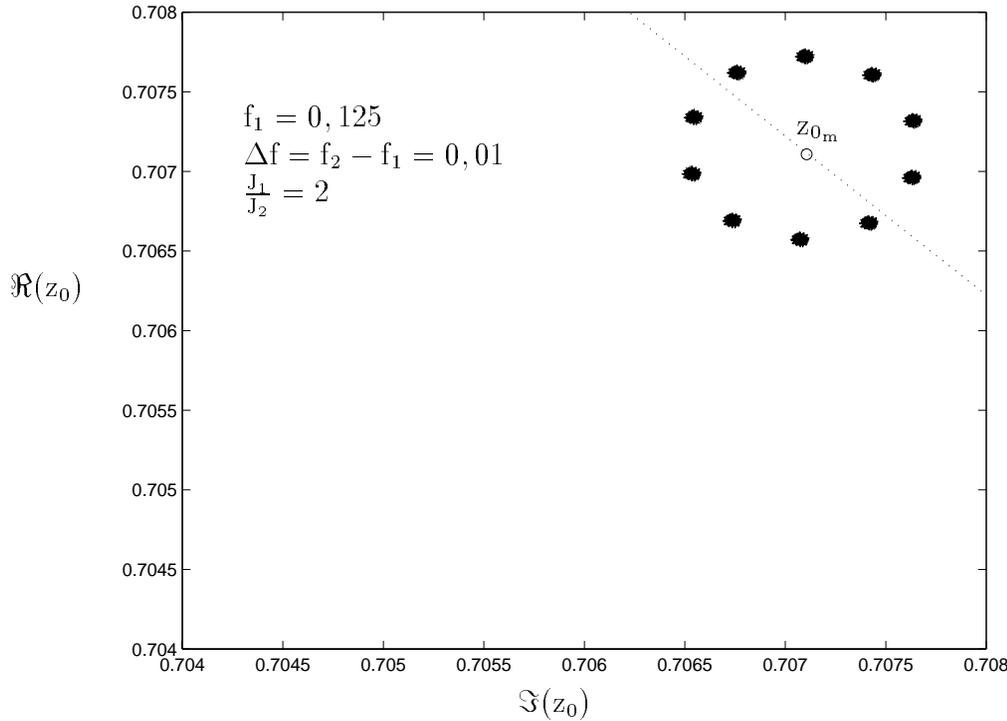


FIG. 1.18: Evolution après convergence, en présence de 2 sinusoïdes, du coefficient  $z_0$

Pour éliminer les composantes à la fréquence de battement nous proposons d'appliquer un filtre passe bas au coefficient  $z_0(n)$ . D'après les courbes (II-1.17) la distance fréquentielle  $\Delta f$  entre 2 brouilleurs de même puissance doit au minimum être de 0,01, afin que la précision sur la fréquence centrale de l'encoche permette une atténuation de 50dB à la fréquence du brouilleur capturé. Cet écart est défini dans le pire cas, lorsque 2 brouilleurs de même puissance constituent le signal d'interférence. Dans cette configuration la solution obtenue, en moyenne, à la convergence, contient une composante à cette fréquence de 0,01 qu'il est nécessaire d'éliminer. On choisit à cet effet, pour sa réponse indicielle et pour son temps de propagation de groupe, un filtre de Bessel d'ordre 4. La fréquence de coupure normalisée est fixée à  $10^{-3}$ , permettant d'obtenir une atténuation supérieure à 50dB à la fréquence de 0,01. Nous obtenons alors l'architecture (II-1.19). La partie supérieure, représentée par une structure ARMA, est utilisée pour l'estimation des coefficients  $z_0$  et  $p_0$  du filtre. La partie inférieure utilise une structure MAAR qui permet une réduction du nombre de bits de quantification sur le signal [9]. Elle assure le filtrage de l'interférence. Les coefficients  $z_{0_f}$  et  $p_{0_f}$

de cette cellule sont obtenus après filtrage du coefficient  $z_0$ . Le coefficient de proportionalité qui relie le pôle  $p_0$  au zéro  $z_0$  du filtre peut être choisi indépendamment pour les 2 cellules. Pour la cellule d'estimation le coefficient  $k_\alpha$  est choisi de manière à privilégier la sélectivité fréquentielle. Pour la cellule de filtrage on peut accepter, si la dégradation sur le signal reste acceptable, une diminution de ce coefficient noté  $k_{\alpha_f}$  de manière à accroître la largeur de la bande excisée. Il en résulte une meilleure atténuation de l'interférence et une amélioration de la capacité de poursuite du filtre. On peut également envisager, pour accroître l'efficacité du filtre, une normalisation permettant de ramener le zéro de la cellule de filtrage  $z_{0_m}$  sur le cercle unitaire.

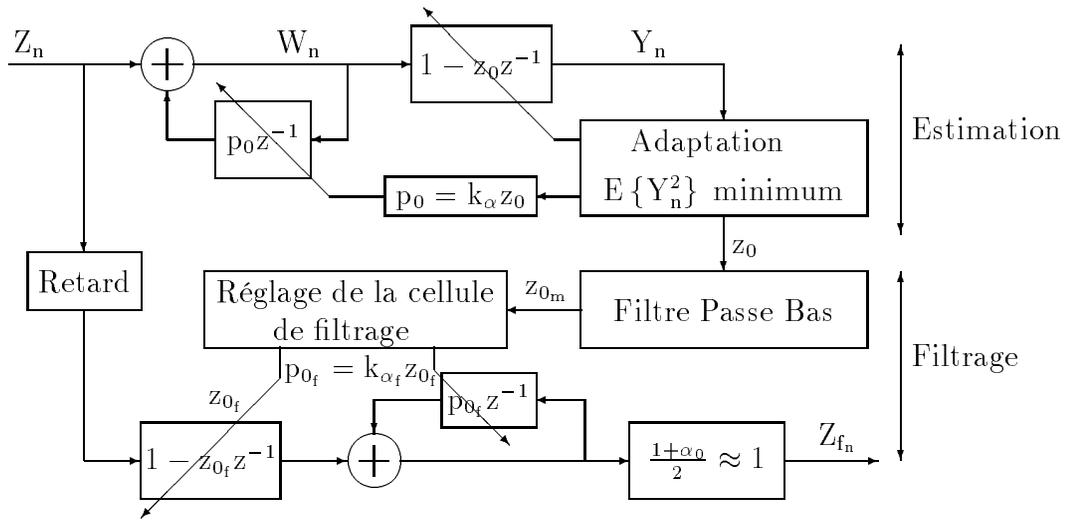


FIG. 1.19: *Structure Estimation-Filtrage*

### Etude en présence de 2 brouilleurs fixes

Pour caractériser cette cellule nous conduisons une simulation en présence de 2 brouilleurs de puissance respective  $J_1 = G + 50\text{dB}$  et  $J_2 = J_1$ , de fréquence  $f_1$  et  $f_2$ . La cellule d'estimation utilise un coefficient  $k_\alpha$  égal à 0,99. Les conditions initiales permettent de favoriser la capture du brouilleur de fréquence  $f_1$ . Nous enregistrons, à la convergence, l'évolution du coefficient  $z_0(n)$  de la cellule d'estimation et ce même coefficient filtré ( $z_{0_m}(n)$ ). Cette simulation est réalisée pour différentes valeurs de la distance fréquentielle  $\Delta_f = f_2 - f_1$  qui sépare ces 2 brouilleurs. Nous mesurons ensuite les performances de la cellule de filtrage en appliquant à son entrée un signal sinusoïdal de fréquence  $f_1$ . Nous comparons, pour cette cellule, les 4 configurations suivantes :

- filtre 1 tel que  $z_{0_f}(n) = z_0(n)$  et  $p_{0_f}(n) = 0,99 * z_0(n)$  (pas de filtrage de la solution),
- filtre 2 tel que  $z_{0_f}(n) = z_{0_m}(n)$  et  $p_{0_f}(n) = 0,99 * z_{0_f}(n)$ ,
- filtre 3 tel que  $z_{0_f}(n) = z_{0_m}(n)$  et  $p_{0_f}(n) = 0,97 * z_{0_f}(n)$ ,
- filtre 4 tel que  $z_{0_f}(n) = \frac{z_{0_m}}{|z_{0_m}|}(n)$  et  $p_{0_f}(n) = 0,97 * z_{0_f}(n)$ .

Une mesure, après filtrage, de la puissance de ce signal d'interférence sinusoïdal de fréquence  $f_1$  permet d'évaluer l'atténuation du filtre à la fréquence  $f_1$ . Les résultats sont reportés sur la figure (II-1.20).

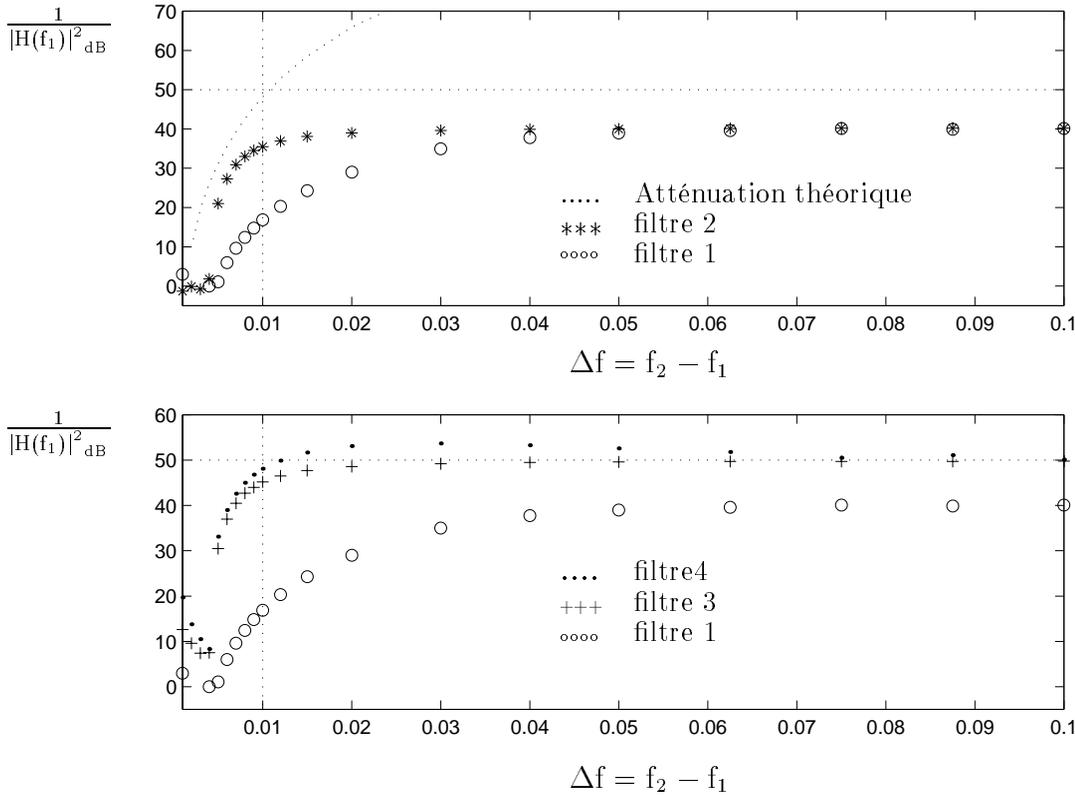


FIG. 1.20: Atténuation du brouilleur capturé en présence de 2 sinusoïdes

Sur la partie supérieure on compare à l'atténuation théorique, l'atténuation obtenue en utilisant pour la cellule de filtrage le même coefficient que pour la cellule d'estimation ( $k_{\alpha_f} = k_{\alpha} = .99$ ). L'atténuation théorique est obtenue numériquement en recherchant la fréquence de l'encoche qui minimise la puissance de sortie. Ce graphe montre l'intérêt du filtre appliqué au coefficient estimé. Par ailleurs, pour un écart  $\Delta f$  supérieur à 0,01, l'atténuation obtenue est inférieure à l'atténuation théorique. Ceci signifie que les 2 vecteurs qui représentent les 2 brouilleurs dans le plan complexe ne peuvent plus être considérés comme colinéaires et que l'hypothèse faite d'un zéro de module unitaire n'est plus vraie.

Sur la partie inférieure du graphe, on met en évidence l'intérêt du filtre 3 qui, utilisant un facteur  $k_{\alpha_f}$  plus faible, élimine l'interférence sur une bande plus large. Les performances sont toutefois supérieures avec le filtre 4. Il présente, par rapport au filtre 3, un zéro parfaitement ajusté sur le cercle unitaire.

### Comportement en présence d'un brouilleur modulé

Lorsque le brouilleur est modulé linéairement en fréquence sa pulsation est :

$$\omega_j(n) = 2\pi f_{j_0} + k_\omega n$$

Et on obtient pour l'expression théorique du coefficient estimé :

$$z = \exp \{i (2\pi f_{j_0} + k_\omega n)\}$$

Le filtre de Bessel ne dégrade pas la capacité de poursuite définie par l'équation (II-1.50) lorsque sa fréquence de coupure est supérieure à  $\frac{k_\omega}{2\pi}$ . Pour une valeur du rapport  $\gamma_{j_{gf}}$  en sortie de -10dB, on retrouve les résultats portés dans le tableau (II-1.6.3.1). La vitesse de poursuite dépend du coefficient  $k_{\alpha_f}$  de la cellule de filtrage (partie inférieure de l'architecture (II-1.19)). Ainsi le filtre 3 caractérisé par  $z_{0f}(n) = z_{0m}(n)$  et  $p_{0f}(n) = 0,97 * z_{0f}(n)$  est plus intéressant de ce point de vue que filtre 1. Caractérisé par une encoche plus large il accepte, pour une même atténuation, un biais plus important sur l'estimation. Il permet donc des vitesses de variation plus grandes.

## 1.8 Performances

On mesure ici les performances obtenues lorsque le filtre annule le signal d'interférence. **(Le gain de traitement  $G_t$  défini par les relations (I-1.12) est idéal ( $G_t \approx \gamma_{jg}$ )).** Le filtrage réalisé élimine alors les composantes spectrales du signal aux fréquences de cette interférence. Il en résulte une dégradation du signal GPS que nous mesurons à partir du gain de corrélation  $G_\Gamma$  décrit par les relations (I-1.13). Il se déduit du rapport signal sur bruit  $\Gamma$  défini par la relation (I-1.9). Si on considère que le filtre élimine le brouilleur sans affecter le bruit gaussien la dégradation du rapport  $\Gamma$  se mesure par la perte sur la puissance d'intercorrélation code filtré-code généré localement.

### 1.8.1 Intercorrélation Signal reçu filtré - Code local

Nous considérons le signal d'entrée  $P_n$  représenté par une signal NRZ échantillonné prenant aléatoirement les valeurs +1 et -1. Le nombre d'échantillons par chip est noté  $N_c$  et sa

fonction d'autocorrélation est :

$$\begin{cases} R_{pp}(k) = 1 - \frac{|k|}{N_c} & |k| \leq N_c \\ R_{pp}(k) = 0 & k > N_c \end{cases}$$

L'étude du récepteur montre que ce signal est appliqué, après filtrage, au corrélateur représenté figure (II-1.21).

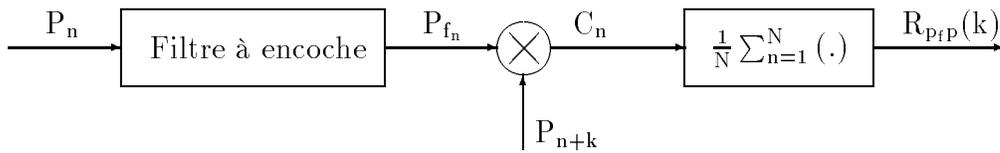


FIG. 1.21: *Intercorrélation Signal filtré-Code local*

Nous considérons ici que le filtre consiste en une encoche. Nous pouvons exprimer sa réponse impulsionnelle est :

$$\begin{cases} h(n) = \frac{1 + \alpha_0}{2} p_1^n (1 - \alpha_0^{-1}) & n > 0 \\ h(n) = \frac{1 + \alpha_0}{2} & n = 0 \end{cases}$$

La fonction d'intercorrélacion, d'après les relations de Wiener Lee, se déduit de l'expression de la réponse impulsionnelle :

$$R_{pfp}(k) = h(k) * R_{pp}(k)$$

Cette fonction, dont l'expression est donnée en annexe 3 par les relations (A3-38)-(A3-41), est représentée sur la partie supérieure de figure (II-1.22) lorsque l'encoche est calée sur la fréquence centrale du signal NRZ, pour 3 valeurs de  $\alpha_0$  ( $\alpha_0 = 0,95$ ,  $\alpha_0 = 0,97$  et  $\alpha_0 = 0,99$ ). Le nombre d'échantillons par chip est fixé à 5. Sur la partie inférieure on trace également la

fonction de discrimination définie annexe 2 par l'équation (A2-20).

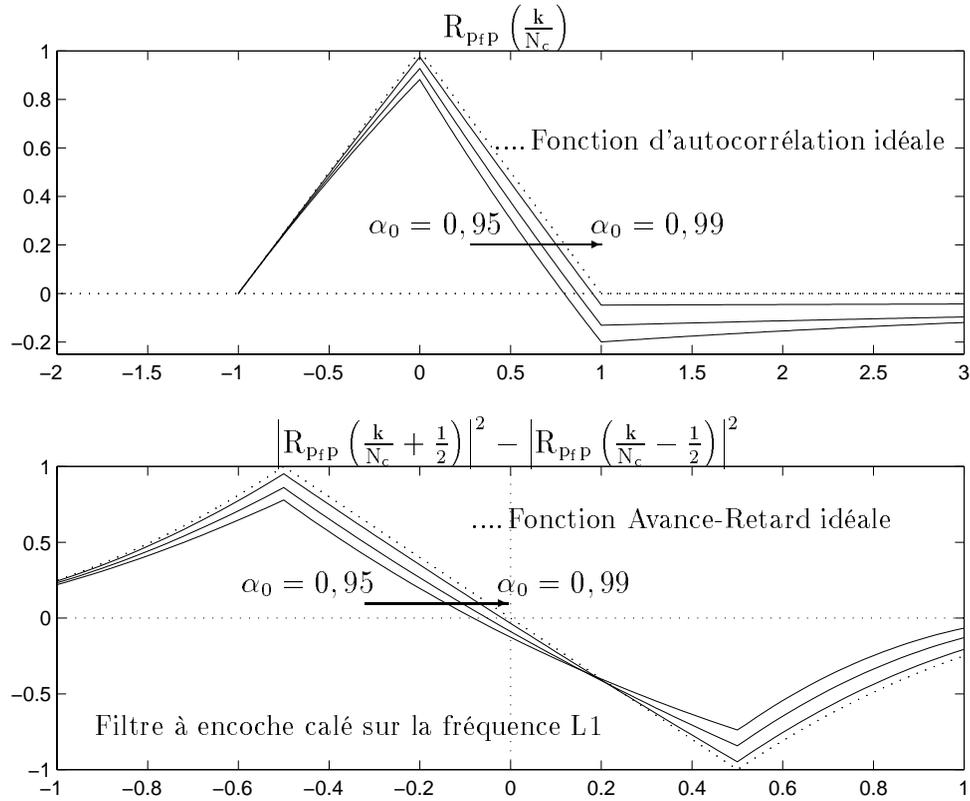
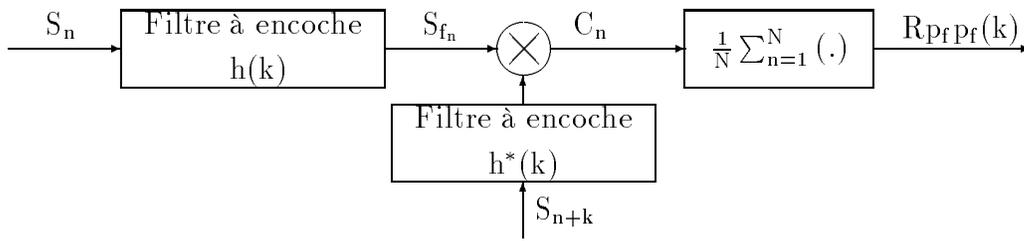


FIG. 1.22: 1- Fonction d'intercorrélacion séquence PN-séquence PN filtré  
2- Fonction avance-retard

Ces graphes mettent en évidence 2 problèmes. On mesure d'une part une perte de corrélation qui traduit une dégradation du rapport signal sur bruit  $\Gamma$ , d'autre part un décalage de la fonction avance-retard qui induit un biais sur la mesure de position inacceptable. Ces dégradations augmentent logiquement avec la largeur de la bande excisée. Il en est de même lorsque qu'on augmente le nombre d'échantillons par chip entraînant ainsi un resserrement du lobe principal.

### 1.8.2 Fonction d'autocorrélation du Signal reçu filtré

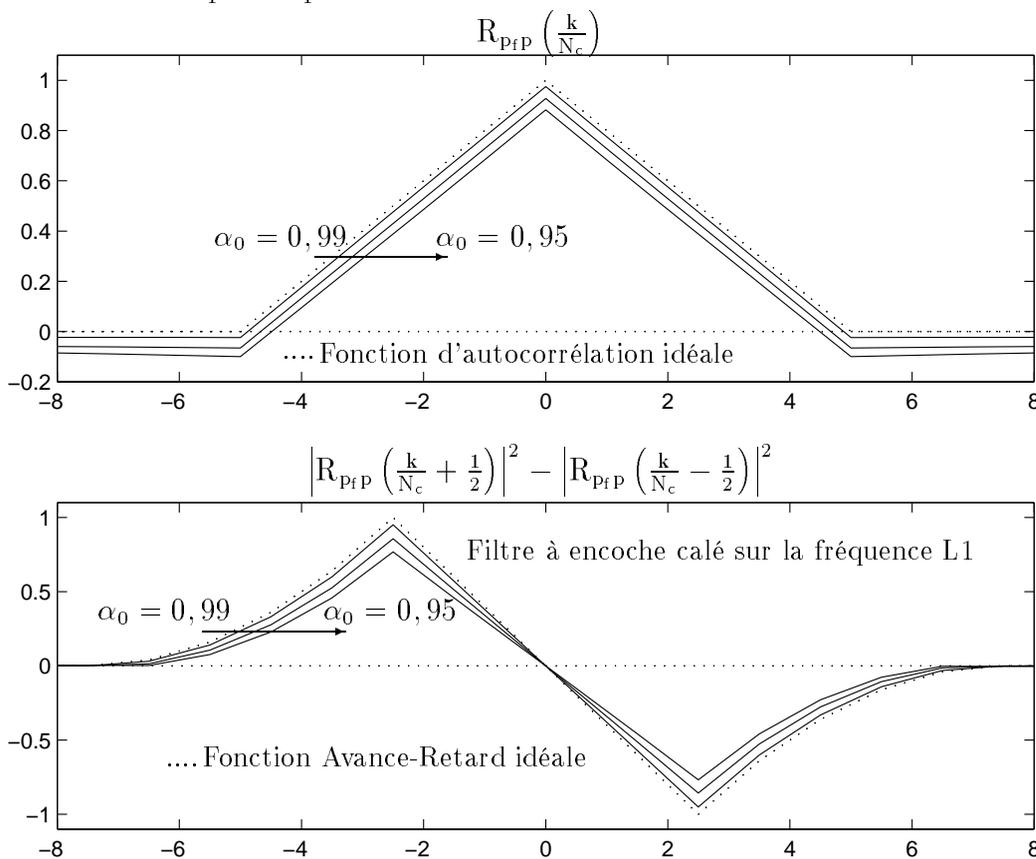
Les distorsions mises en évidence sur le graphe (II-1.22), dues au temps de propagation de groupe du filtre, doivent être corrigées. A cette fin on propose d'appliquer le même filtre au code généré localement. Nous obtenons alors l'architecture (II-1.23).

FIG. 1.23: *Autocorrélation Signal filtré-Code local filtré*

L'expression de la fonction d'autocorrélation s'écrit :

$$R_{pfp}(k) = h(k) * h^*(-k) * R_{pp}(k)$$

L'expression de cette fonction est décrite dans l'annexe 3 par les relations (A3-42)-(A3-44). On en donne une représentation sur la partie supérieure de la figure (II-1.24) lorsque le filtre est calé sur la fréquence L1, pour 3 valeurs de  $\alpha_0$  ( $\alpha_0 = 0,95$ ,  $\alpha_0 = 0,97$ ,  $\alpha_0 = 0,99$ ). Le nombre d'échantillons par chip est fixé à 5.

FIG. 1.24: **1-** *Fonction d'autocorrélation de la séquence PN filtré*

**2-** *Fonction avance-retard*

Cette fonction est paire et sa valeur en zéro dépend de la largeur de l'encoche. Cette mo-

dification du récepteur permet donc de s'affranchir des distorsions de phase générées par le filtre : la fonction avance retard représentée sur la partie inférieure de cette même figure est impaire.

### 1.8.3 Gain de corrélation

On peut alors mesurer la qualité du signal GPS lorsque ce filtre est appliqué. La dégradation sur le rapport signal sur bruit  $\Gamma$ , en présence du filtre, se déduit directement de la fonction d'autocorrélation en zéro. Celle-ci est donnée en annexe 3 par (A3-42). On obtient ainsi pour le gain de corrélation :

$$G_{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Gamma_{ideal}} = R_{p_f p_f}(0) = \frac{1 + \alpha_0}{2} \left( 1 + \frac{z_0 - p_0}{2} \left( \frac{1}{1 - p_0} \left( \frac{1 - p_0^{N_c}}{N_c (1 - p_0)} - 1 \right) \right) \right) + \frac{1 + \alpha_0}{2} \frac{z_0 - p_0}{2(z_0 - \alpha_0)} \left( \frac{1 - \left(\frac{\alpha_0}{z_0}\right)^{N_c}}{N_c (z_0 - \alpha_0)} - \frac{1}{z_0} \right) \quad (1.55)$$

Elle est représentée sur la figure (II-1.25) en fonction de la fréquence centrale de l'encoche, pour les valeurs de  $\alpha_0$  prises ci-dessus et pour différentes fréquences d'échantillonnage (2, 5 et 10 échantillons par chip).

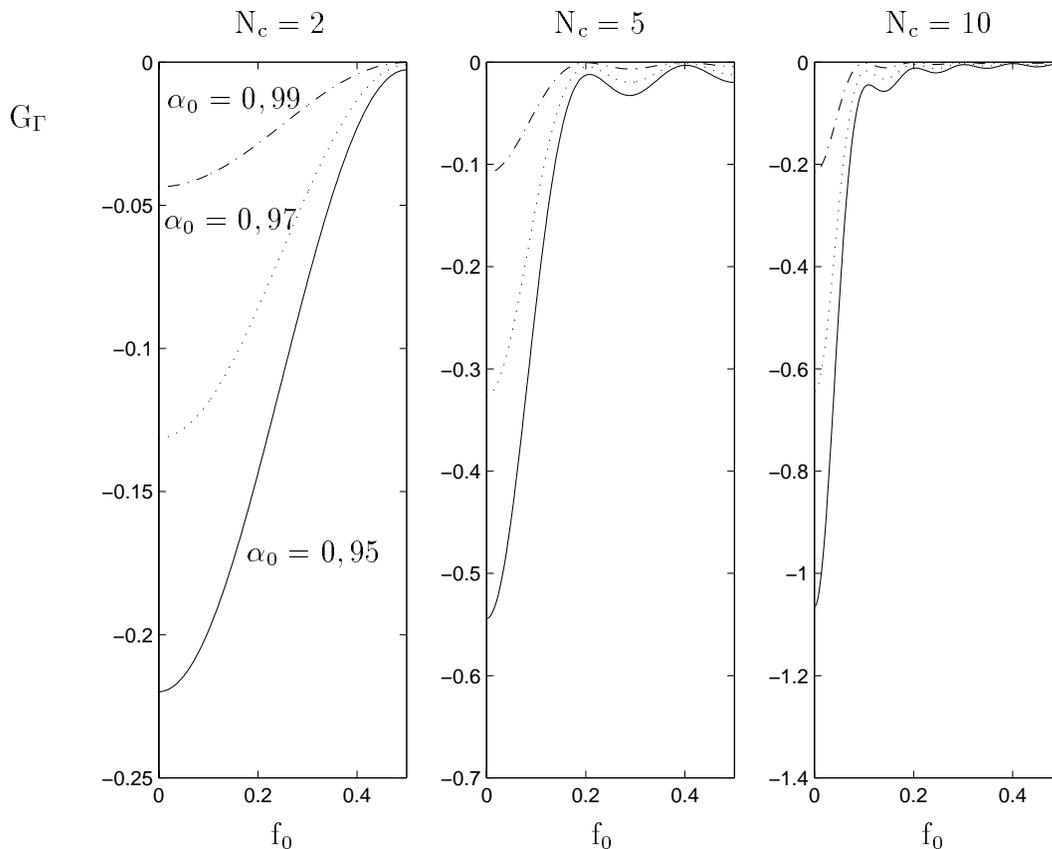


FIG. 1.25: Gain de corrélation pour  $N_c \in [2, 5, 10]$  et  $\alpha_0 \in [0, 95, 0, 97, 0, 99]$

La perte de corrélation obtenue avec une cellule de filtrage affectée d'un coefficient  $\alpha_0$  égal à 0,97 est faible. Dans le cas le plus défavorable présenté ici, pour 10 échantillons par chip, l'atténuation en présence d'une encoche calée sur le lobe principal, est de l'ordre de 1 dB.

## 1.9 Application à l'élimination de 4 brouilleurs

L'élimination de plusieurs brouilleurs est assurée par la mise en cascade de cellules telles que celle décrite sur la figure (II-1.19). Une configuration dynamique de l'ordre de ces cellules peut être envisagée. Elle consiste à placer en queue une cellule qui passe du mode poursuite au mode capture. Nous proposons, pour évaluer cette structure, une simulation en présence de 4 brouilleurs.

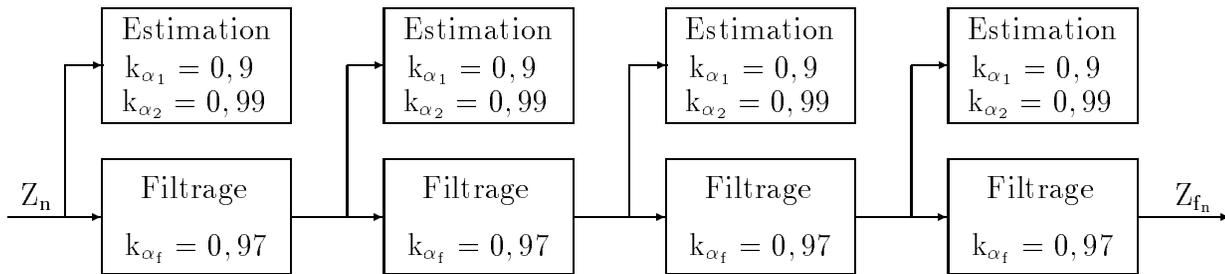


FIG. 1.26: Mise en cascade de 4 cellules

La cellule d'estimation est décrite figure (II-1.12). Elle utilise en phase de capture un coefficient  $k_\alpha$  de 0,9 qui permet un élargissement du gradient, en phase de poursuite un coefficient  $k_\alpha$  de 0,99 qui fixe la sélectivité en fréquence. Le coefficient  $z_{0_f}$  de la cellule de MAAR utilisée pour l'élimination de l'interférence est obtenu après filtrage du coefficient estimé (voir figure (II-1.19)), sans normalisation du module. Le pôle est fixé à  $p_{0_f} = 0,97z_{0_f}$ .

Les 4 signaux sinusoïdaux qui constituent le signal d'interférence sont ainsi paramétrés :

Brouilleur	$\gamma_{jg}$	$f_j$	$k_\omega$
1	50dB	0,2	0
2	40dB	0,21	0
3	40dB	0,5	$1.6 \cdot 10^{-6}$
4	30dB	0,8	$1.10^{-5}$

Cette configuration permet donc de vérifier le comportement du filtre en présence de brouilleurs modulés linéairement en fréquence et le pouvoir de séparation en présence de brouilleurs proches. L'écart de fréquence qui sépare les brouilleurs 1 et 2 est fixé à 0,01 ce qui correspond à la valeur minimum admissible pour  $k_\alpha = 0,99$ . Pour cette évaluation, nous observons

l'évolution des coefficients des cellules d'estimation et le signal de sortie de chaque cellule de filtrage. Nous représentons sur la figure (II-1.27) la position du zéro de chaque cellule à la convergence, l'évolution de l'argument de ces zéros, le spectre du signal d'entrée et du signal de sortie.

Cette simulation permet de mettre en évidence le bon fonctionnement de ce filtre. Le spectre du signal de sortie est blanc. Les 2 signaux modulés en fréquence et les 2 signaux de fréquences voisines sont correctement éliminés.

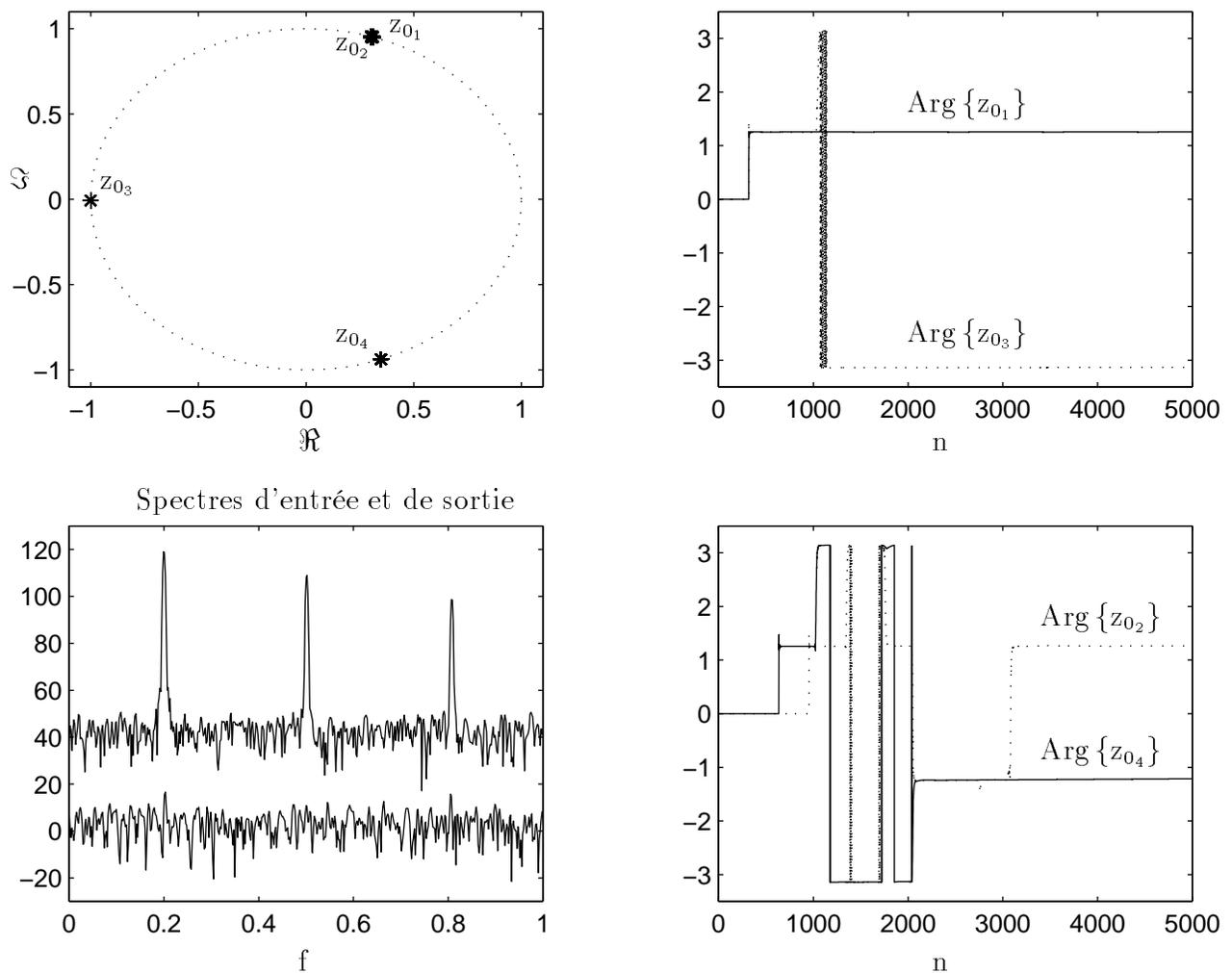


FIG. 1.27: Filtrage de 4 brouilleurs

## 1.10 Conclusions

Cette technique peut être appliquée à des brouilleurs variant lentement dans le temps. Le réglage correct des paramètres de la cellule permet de ramener le niveau de puissance de l'interférence en dessous de celui du bruit blanc, le gain de traitement étant alors idéal.

Ses performances dépendent du coefficient  $\alpha_0$  de la cellule AR.

- Il règle la largeur de la bande excisée. Un élargissement de la bande entraîne une augmentation des pertes de corrélation et une dégradation de la qualité du signal. Pour exemple un coefficient  $k_{\alpha_f}$  de 0,97 appliqué à la cellule de filtrage induit, pour un filtre calé sur la fréquence  $L_1$ , une perte de corrélation de 0,13 dB pour  $N_c = 2$ , de 0,32dB pour  $N_c = 5$ , de 0,6 dB pour  $N_c = 10$ . Ces pertes sont respectivement de 0,22dB, 0,55dB, 1.2dB pour un coefficient  $k_{\alpha_f}$  égal à 0,95.
- Il règle la sélectivité du filtre. La résolution obtenue avec une cellule d'estimation utilisant un coefficient  $k_\alpha = 0,99$  correspond à celle d'un filtrage fréquentiel utilisant une transformée de Fourier discrète sur 128 points. Elle peut être améliorée, au détriment du temps de réponse et de la complexité (nombre de bits de quantification) en adoptant des valeurs de  $\alpha_0$  plus proche de l'unité.
- Il règle la vitesse de poursuite en présence d'un brouilleur modulé linéairement.

Les cellules d'estimation et de filtrage étant paramétrées indépendamment il est possible de régler la cellule d'estimation de manière à privilégier la sélectivité en fréquence alors que le choix du coefficient  $\alpha_0$  de la cellule de filtrage résulte d'un compromis vitesse de poursuite-Gain de corrélation. Nous traçons ainsi le gain de corrélation  $G_\Gamma$  en fonction de la pente de la modulation  $k_\omega$  pour différentes valeurs du gain de traitement (atténuation sur le signal d'interférence). On obtient cette courbe à partir des relations (II-1.50) et (II-1.55). La première permet de dimensionner, pour une valeur du gain de traitement, le module  $\alpha_0$  de la cellule de filtrage en fonction de la pente de la modulation  $k_\omega$ . La deuxième relie le gain de corrélation au module  $\alpha_0$  de cette cellule. La figure (II-1.28) représente  $G_\Gamma(k_\omega)$  pour des gains de traitement de 50dB, 40dB et 30dB, le nombre d'échantillons par chip  $N_c$  prenant les valeurs 2, 5, 10. Le filtre est alors calé sur la fréquence  $L_1$ .

Ce filtre aboutit par ailleurs à une structure simple. Le nombre d'opérateurs par cellule d'estimation-filtrage est inférieur à 20. L'architecture est moins complexe que celle imposée par un filtrage fréquentiel dès lors que le nombre de cellules est inférieur à 44.

Elle n'est toutefois pas adaptée à des brouilleurs variant rapidement dans le temps ou à des brouilleurs pulsés qui affectent particulièrement les récepteurs GPS [24]. Dans ce cas le bloc filtrage, en raison de son temps de réponse fixé par  $\alpha_0$ , n'est pas efficace.

Elle nécessite par ailleurs une modification du corrélateur, le même filtre devant être appliqué au code généré localement.

Enfin le filtrage est inefficace pendant les phases de capture. Durant ces phases le récepteur n'est donc pas protégé.

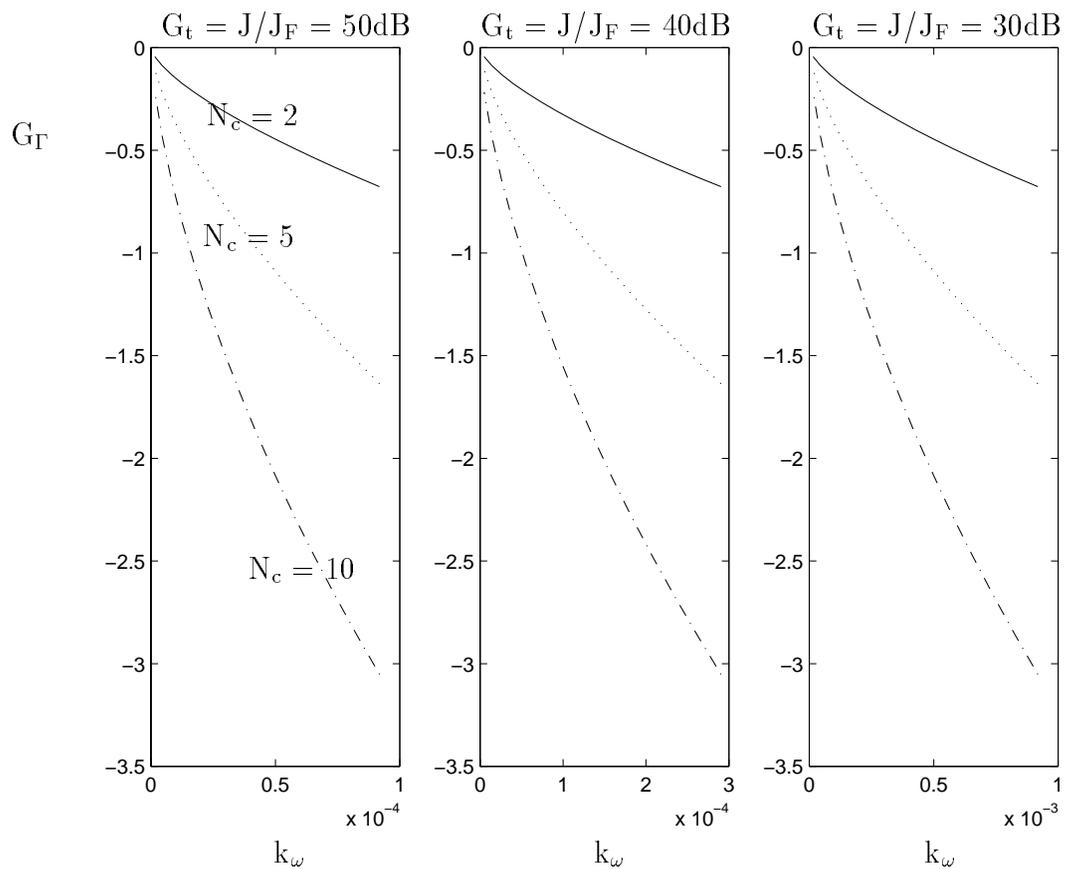


FIG. 1.28:  $G_\Gamma$  en fonction de  $k_\omega$  pour  $N_c \in [2, 5, 10]$



## Chapitre 2

# Elimination des interférences par filtrage fréquentiel

Dans le chapitre qui précède nous avons présenté une technique permettant l'élimination des interférences dans le domaine temporel. Cette technique nécessite la mise en cascade de filtres à encoche dont le nombre doit être supérieur ou égal au nombre de brouilleurs.

Nous étudions ici les caractéristiques d'un filtre qui, opérant dans le domaine des fréquences, permet de traiter simultanément toutes les composantes du signal d'interférence. Lorsque la transformée de Fourier discrète (TFD) est appliquée au signal d'entrée, ces composantes présentent un module supérieur à un seuil fixé d'après la variance du bruit gaussien. Le traitement optimum est défini par [23]. Il repose sur la connaissance de la densité spectrale du bruit. L'estimation de cette densité est délicate et ce traitement ne peut être envisagé. Pour un signal à spectre étalé le filtre généralement appliqué annule le signal composite (signal et bruit) dans les régions fréquentielles de l'interférence. Un circuit ASIC réalisant ce filtrage est décrit dans [29]. Une autre technique est présentée dans [26]. Le traitement proposé modifie le module de la TFD. Il est défini en présence de bruit gaussien. Il n'affecte pas la phase du signal obtenu dans la représentation de Fourier.

Nous évaluons ici ces techniques lorsqu'elles sont appliquées à l'adoucissement du signal GPS, en présence de brouilleurs bande étroite à fréquence fixe, modulés linéairement ou pulsés. Pour la méthode qui préserve la phase nous définissons le traitement du module qui privilégie les caractéristiques du signal GPS. Nous proposons enfin une méthode permettant d'améliorer l'estimation de l'écart type du bruit gaussien. De cette estimation dépendent les performances de ces méthodes de filtrage.

## 2.1 Principe du filtrage fréquentiel

### 2.1.1 Présentation

La représentation fréquentielle permet d'exploiter les caractéristiques du signal GPS et des brouilleurs sinusoïdaux. Dans le plan de Fourier le signal GPS est étalé sur une bande fixée par le rythme "chip" alors que les brouilleurs sinusoïdaux sont concentrés dans une fenêtre fréquentielle dont la largeur dépend de la durée d'observation. Pour des rapports signal sur bruit faibles, caractéristiques du signal GPS, et pour des rapports interférence sur bruit gaussien supérieur à l'unité ( $\gamma_{ig} > 1$ ) on obtient dans le plan fréquentiel, aux fréquences des brouilleurs, des raies d'amplitude très supérieure au niveau du signal GPS et du bruit blanc gaussien. Les composantes spectrales contenant ces raies sont filtrées. Cette technique conduit à l'architecture ci-dessous.

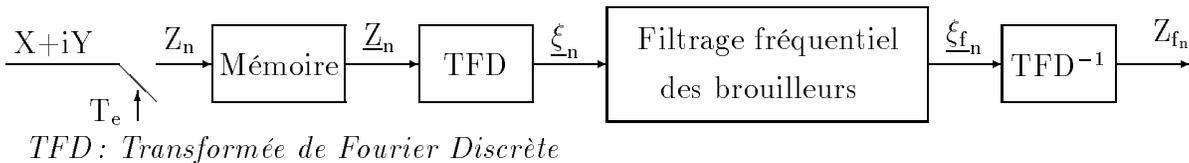


FIG. 2.1: Principe du filtrage fréquentiel

L'opération de filtrage la plus simple consiste à éliminer les composantes fréquentielles des brouilleurs. La figure (II-2.2) donne la représentation spectrale de l'enveloppe complexe du signal GPS avant et après ce filtrage.

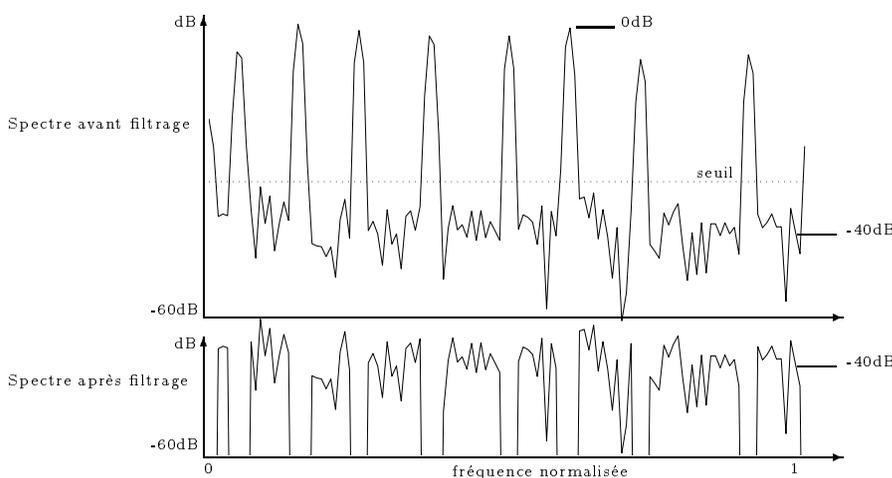


FIG. 2.2: Spectre du signal GPS avant et après filtrage

La transformée de Fourier discrète (TFD) est utilisée, appliquée à des blocs de  $N$  échantillons prélevés sur le signal d'entrée. Elle permet de définir le spectre aux fréquences  $kF_e/N$  ( $F_e$  :

fréquence d'échantillonnage). La troncature réalisée sur le signal d'entrée introduit des discontinuités aux extrémités des blocs. Il en résulte, lorsque le signal d'interférence n'est pas périodique de période  $N/kF_e$ , des distorsions sur la représentation spectrale qui se traduisent par un élargissement de la bande du brouilleur et l'apparition de lobes secondaires. Des fenêtres de pondération doivent être appliquées aux paquets  $\underline{Z}_n$  du signal pour adoucir les discontinuités dans le domaine temporel [25]. Elles limitent la diffusion spectrale de l'énergie du signal d'interférence et permettent ainsi de réduire le domaine des fréquences à traiter au lobe principal.

### 2.1.2 Caractéristiques du signal dans le domaine des fréquences

Nous utilisons, pour cette caractérisation, la notation suivante :

- Signal complexe dans le domaine temporel

$$\begin{aligned} Z_n &= Z(n) && \text{Echantillon prélevé à l'instant } nT_e \\ \underline{Z}(n) &= [Z_n Z_{n+1} \dots Z_{n+N-1}]^T && \text{Bloc des } N \text{ échantillons prélevés à partir de l'instant } nT_e \end{aligned}$$

- Signal complexe dans le domaine fréquentiel

$$\begin{aligned} \xi \left( \frac{kF_e}{N} \right) &= \xi_k && \text{Représentation de la composante de fréquence } kF_e/N \\ \underline{\xi}(n) &= [\xi_0(n) \xi_1(n) \dots \xi_{n+N-1}(n)]^T && \text{TFD du bloc } \underline{Z}(n) \end{aligned}$$

- Matrice associée à la TFD

$$M = [M_{kn}]_{0 \leq k, n \leq N-1} \quad \text{où } M_{kn} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2i\pi kn/N}$$

La représentation fréquentielle est donc obtenue en appliquant la transformée dont le noyau est défini par  $M$  au vecteur  $\underline{Z}_n$  :

$$\underline{\xi}(n) = M \cdot \underline{Z}(n)$$

Et le module de la transformée, aux fréquences  $f = k \frac{F_e}{N}$  ( $F_e$  : fréquence d'échantillonnage), a pour expression :

$$R_k(n) = \sqrt{\xi_k(n) \cdot \xi_k(n)^*}$$

### Représentation du module en présence d'un brouilleur sinusoïdal

Dans ce cas de figure, le signal résulte du signal GPS, du bruit blanc gaussien généré dans le canal de transmission et du bruit sinusoïdal.

$$Z = Z_s + Z_w = Z_s + Z_g + Z_j$$

Et nous obtenons dans le domaine des fréquences :

$$\xi = \xi_s + \xi_w = \xi_s + \xi_g + \xi_j$$

Avec :

$$\begin{array}{ll} Z_s \xrightarrow{TF} \xi_s & \text{Transformée de Fourier du signal} \\ Z_g \xrightarrow{TF} \xi_g & \text{Transformée de Fourier du bruit blanc gaussien} \\ Z_j \xrightarrow{TF} \xi_j & \text{Transformée de Fourier du bruit sinusoïdal} \end{array}$$

Dans le plan des fréquences le signal GPS est noyé dans le bruit blanc gaussien et ne modifie pas en conséquence la représentation du module. Nous nous intéressons donc à la caractérisation des composantes  $\xi_g$  et  $\xi_j$ .

**Composante gaussienne :** Le bruit  $Z_g$  étant gaussien,  $\xi_g$  suit la même loi puisque  $M$  est la matrice d'un changement de bases orthonormales. Par ailleurs, le bruit étant blanc, l'expression de la matrice de covariance  $\underline{\xi}$  s'écrit :

$$E(\underline{\xi}_g \underline{\xi}_g^H) = E(M \underline{Z}_g \underline{Z}_g^H M^H) = (\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2) M M^H$$

$$E(\underline{\xi}_g \underline{\xi}_g^H) = (\sigma(X)^2 + \sigma(Y)^2) I = 2\sigma_g^2 I$$

Et l'amplitude  $R_g$  suit alors une loi de Rayleigh.

$$R = R_g = \sqrt{\xi_g \cdot \xi_g^*}$$

Avec :

$$f_{R_g}(R) = \frac{R}{\sigma_g^2} \exp\left\{-\frac{R^2}{2\sigma_g^2}\right\} \mathbf{1}_{R \geq 0} \quad (2.1)$$

En l'absence de brouilleur le module du signal, constitué par les composantes signal GPS et bruit gaussien, suit dans le domaine des fréquences une loi de Rayleigh. En conséquence les dégradations générées sur ce signal sont quasi nulles lorsque le filtrage est appliqué à des composantes fréquentielles d'amplitude supérieure à un seuil de valeur  $4\sigma_g$ . Elles sont

négligeables lorsque ce seuil est ramené à  $3\sigma_g$ . Le tableau ci dessous précise les probabilités de fausse alarme (filtrage d'une composante fréquentielle du signal GPS qui n'est pas affectée par le signal d'interférence).

Seuil	$2\sigma_g$	$3\sigma_g$	$4\sigma_g$
Probabilité [R >Seuil]	13%	1%	.03%

**Tableau 2.1.2 : Probabilité de fausse alarme**

**Composante sinusoïdale :** La TFD permet d'obtenir une représentation déterministe du bruit sinusoïdal.

$$Z_{j_n} = A_j \exp \left( i \left( 2\pi \frac{f_j}{F_e} n + \Theta_j \right) \right) \quad ; \quad \Theta_j \text{ UR sur } [0, 2\pi]$$

Où  $F_e$  est la fréquence d'échantillonnage.

Aux fréquences  $f = k \frac{F_e}{N}$  on a :

$$\xi_{j_k}(n) = \frac{A_j}{\sqrt{N}} \frac{\sin \left( \pi N \left( \frac{k}{N} - \frac{f_j}{F_e} \right) \right)}{\sin \left( \pi \left( \frac{k}{N} - \frac{f_j}{F_e} \right) \right)} \exp \left( i \left( \Theta_j - \pi \left( k - N \frac{f_j}{F_e} \right) \frac{N-1}{N} \right) \right) \exp \left( i 2\pi \frac{f_j}{F_e} n \right)$$

Et :

$$R_{j_k} = \sqrt{\xi_{j_k} \cdot \xi_{j_k}^*} = \frac{A_j}{\sqrt{N}} \left| \frac{\sin \left( \pi N \left( \frac{k}{N} - \frac{f_j}{F_e} \right) \right)}{\sin \left( \pi \left( \frac{k}{N} - \frac{f_j}{F_e} \right) \right)} \right|$$

Nous obtenons, pour le module  $R_{j_k}$ , une représentation **indépendante de n et de la phase du brouilleur**. Lorsque la fréquence du brouilleur ne correspond pas aux fréquences définies par la TFD ( $f_j \neq kF_e/N$ ) la troncature du signal réalisée dans le domaine temporel entraîne une diffusion de l'énergie du brouilleur dans le domaine spectral. Une fenêtre de pondération, qui lisse les discontinuités aux extrémités des paquets  $\underline{Z}_n$ , permettra de réduire le nombre de composantes fréquentielles du signal GPS affectées par le filtrage de ce brouilleur. On note  $\tilde{F}(\tilde{f})$  la représentation fréquentielle de cette fenêtre échantillonnée, où  $\tilde{f}$  est la fréquence normalisée ( $0 \leq \tilde{f} < 1$ ).

On obtient :

$$\begin{cases} \xi_{j_k}(n) = A_j \sqrt{N} F \left( \frac{k}{N} - \frac{f_j}{F_e} \right) \exp \left( i \left( \Theta_j - \pi \left( k - N \frac{f_j}{F_e} \right) \frac{N-1}{N} \right) \right) \exp \left( i 2\pi \frac{f_j}{F_e} n \right) \\ R_{j_k}(n) = A_j \sqrt{N} \left| F \left( \frac{k}{N} - \frac{f_j}{F_e} \right) \right| \end{cases} \quad (2.2)$$

**Signal composite :** La transformée étant linéaire on obtient en présence d'un bruit gaussien et d'un brouilleur sinusoïdal :

$$\begin{cases} \xi_k(n) = \xi_{j_k}(n) + \xi_{g_k}(n) \\ \xi_{g_k}(n) \quad \text{processus gaussien} \\ \xi_{j_k}(n) \quad \text{défini par (II - 2.2)} \end{cases} \quad (2.3)$$

**Le choix d'une fenêtre appropriée permettra de réduire le domaine fréquentiel du brouilleur au lobe principal. En dehors de ce domaine on pourra considérer que le module du bruit suit une loi de Rayleigh (voir (II-2.1)).** Le filtrage des fréquences altérées par le brouilleur ne devant pas affecter de manière sensible cette région le seuil de filtrage représenté sur la figure (II-2.2) sera fixé d'après le tableau (II-2.1.2), en prenant en compte l'atténuation introduite par la fenêtre.

### 2.1.3 Choix du nombre de points de la représentation en fréquence

En présence de brouilleurs sinusoïdaux multiples, l'orthogonalité de la transformée de Fourier n'est pas vérifiée lorsqu'elle est appliquée sous sa forme discrète.

$$Z_{j_n} = \sum_l A_l \exp \left( i \left( 2\pi \frac{f_l}{F_e} n + \Theta_l \right) \right) \quad ; \quad \Theta_l \text{ UR sur } [0, 2\pi]$$

On note  $R_{l_k}$  le module d'un brouilleur sinusoïdal de fréquence  $f_l$ . On obtient :

$$\begin{cases} \xi_{j_k}(n) = \sum_l R_{l_k}(n) \exp \left( i \left( \Theta_l - \pi \left( k - N \frac{f_l}{F_e} \right) \frac{N-1}{N} T_e \right) \right) \exp \left( i 2\pi \frac{f_l}{F_e} n \right) \\ R_{l_k}(n) = A_l \sqrt{N} \left| F \left( \frac{k}{N} - \frac{f_l}{F_e} \right) \right| \end{cases} \quad (2.4)$$

**Le module  $R_{j_k}$  de l'interférence composée de plusieurs brouilleurs sinusoïdaux dépend de n.** Il s'exprime à partir des paramètres caractéristiques des brouilleurs (amplitudes,

fréquences, phases).

$$Rj_k(n) = \left\| \sum_l Rl_k(n) \exp \left( i \left( \Theta_l - \pi \left( k - N \frac{f_l}{F_e} \right) \frac{N-1}{N} T_e \right) \right) \exp \left( i 2\pi \frac{f_l}{F_e} n \right) \right\| \quad (2.5)$$

Les fréquences des brouilleurs étant fixées, la séparation de ces brouilleurs dépend du nombre d'échantillons  $N$  du bloc  $\underline{Z}(n)$  qui conditionne la largeur de la représentation fréquentielle de la fenêtre de pondération. Le choix de  $N$  résulte donc d'un compromis temps de calcul, résolution.

### 2.1.4 Choix de la fenêtre de troncature

Cette fenêtre doit permettre de réduire le nombre des composantes fréquentielles affectées par un brouilleur sinusoïdal. En particulier l'amplitude des lobes secondaires qui apparaissent dans la représentation fréquentielle de la fenêtre doit rester faible devant le niveau du bruit gaussien.

$$\begin{cases} k_F = \frac{\text{Amplitude du premier lobe secondaire}}{\text{Amplitude du lobe principal}} \\ k_F A_j \sqrt{N} \ll \sigma_g \end{cases}$$

On définit ainsi le rapport  $k_F$  de la fenêtre à partir du rapport interférence sur bruit gaussien noté  $\gamma_{jg}$  :

$$\begin{cases} k_F \ll \sqrt{\frac{1}{2N\gamma_{jg}}} \\ k_F|_{dB} \ll -10 * \log_{10}(2N) - (\gamma_{jg})_{dB} \end{cases} \quad (2.6)$$

La relation (II-2.7) précise la valeur du coefficient  $k_F$  de la fenêtre lorsque la TFD est appliquée à des blocs de 512 échantillons.

$$k_F|_{dB} \ll -(\gamma_{jg})_{dB} - 30dB \quad (2.7)$$

En pratique les rapports  $\gamma_{jg}$  peuvent atteindre des valeurs supérieures à 50dB. Afin de favoriser l'atténuation des lobes secondaires nous proposons une fenêtre de Blackmann-Harris à 4 coefficients qui permet d'obtenir, comme le montre la figure (II-2.3) une atténuation sur les lobes secondaires supérieure à 90 dB.

$$f_n = a_0 + \sum_{m=1}^3 (-1)^m a_m \cos \left( \frac{2 * \pi}{N} m.n \right) \quad n = 0, \dots, N-1$$

Avec  $a_0 = 0,35785$        $a_1 = 0,48829$        $a_2 = 0,14128$        $a_3 = 0,01168$ .

On montre sur la figure (II-2.3) la représentation en fréquence de cette fenêtre définie sur 512 échantillons. La largeur normalisée ( $F_e = 1$ ) du lobe principal est de 0,015. L'amplitude à la fréquence centrale est de -8.9dB, de 90dB supérieure à l'amplitude du lobe secondaire.

$$\left\{ \begin{array}{ll} B_F = 0,015 & \text{Largeur normalisée du lobe principal} \\ F(0)_{dB} = 20 * \log \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \right) = -8.9dB & \text{Amplitude de la fenêtre en 0} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

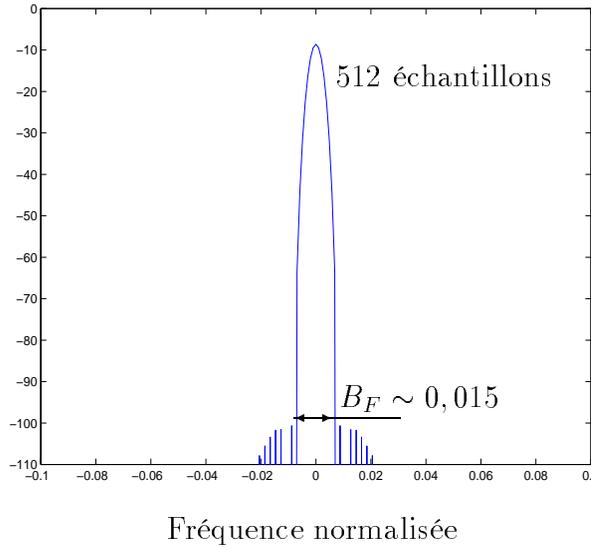


FIG. 2.3: *Module de la fenêtre de Blackman-Harris*

### Effet de la fenêtre sur le signal GPS

L'atténuation apportée par la fenêtre de Blackmann aux extrémités entraîne une atténuation et une dégradation du signal. Pour estimer cette dégradation, caractérisée par le gain de corrélation  $\Gamma$ , on mesure le rapport  $\Gamma$ , défini par la relation (I-1.9), qui caractérise le signal à l'entrée du corrélateur. On note  $f(n)$  l'expression temporelle de la fenêtre à l'instant  $nT_e$ ,  $P_s$  et  $P_w$  les puissances du signal et du bruit. Pour des rapports signal sur bruit très petits devant l'unité, on obtient d'après les relations (I-1.10):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Gamma_{avec\ fen\hat{e}tre} = \frac{P_s^2 m_F^2}{P_s P_w \lambda_F^2} = \Gamma_{sans\ fen\hat{e}tre} \frac{m_F^2}{\lambda_F^2} & \text{Rapport signal sur bruit en sortie} \\ \lambda_F = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n)^2 & \text{Atténuation en puissance due à la fenêtre} \\ m_F = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) & \text{Valeur moyenne de la fenêtre} \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Soit :

$$G_{\Gamma} = \frac{\Gamma_{avec\ fen\hat{e}tre}}{\Gamma_{sans\ fen\hat{e}tre}} = \frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} f(n)\right)^2}{N \sum_{n=0}^{N-1} f(n)^2} \quad \text{D\`egradation du rapport signal sur bruit} \quad (2.10)$$

**Cette d\`egradation est de 3dB lorsque la fen\`etre de Blackman-Harris est utilis\`ee : Il est n\`ecessaire de traiter des blocs non disjoints pour pallier ce probl\`eme.**

### Int\`er\`et du recouvrement sur les blocs

Pour limiter la d\`egradation du rapport signal sur bruit nous proposons un entrelacement des blocs trait\`es, les \`echantillons \`etant somm\`es en sortie dans la r\`egion de recouvrement (voir figure (II-2.4)).

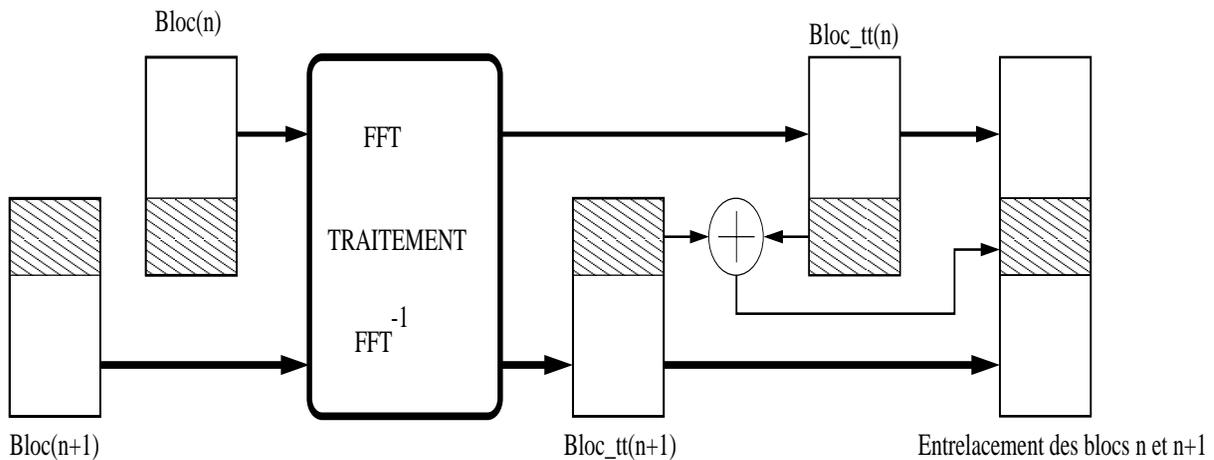


FIG. 2.4: *Architecture du traitement avec recouvrement*

Nous reportons dans le tableau (II-1.4.6) les pertes sur le rapport signal sur bruit calcul\`ees pour diff\`erentes valeurs du recouvrement, lorsque la transform\`ee est appliqu\`ee \`a des blocs de 512 \`echantillons.

Nombre de points de recouvrement	0	16	32	64	128	192	256
Perte de corr\`elation	-3	-2.9	-2.7	-2.4	-1.75	-1	.31

**Tableau 1.4.6 : Perte de corr\`elation**

### Choix de la fen\`etre et taille du recouvrement

Les valeurs du rapport interf\`erence sur bruit gaussien  $\gamma_{jg}$  \`a l'entr\`ee du filtre impose l'utilisation d'une fen\`etre de Blackman-Harris. Cette fen\`etre g\`en\`ere, en l'absence de recouvrement entre blocs, une perte de 3dB sur le rapport signal sur bruit. Pour pallier ce probl\`eme il

est nécessaire de traiter des blocs non disjoints. En particulier des recouvrements de 192 échantillons et de 256 échantillons appliqués sur des blocs de 512 permettent respectivement de limiter les pertes de corrélation à 1dB et 0,31dB.

## 2.2 Filtrage fréquentiel

Nous réalisons cette opération en présence de signaux d'interférence bande étroite. Nous obtenons alors, après transformée de Fourier, une concentration de l'interférence sur quelques composantes fréquentielles. Le filtrage consiste au traitement de ces composantes. Son expression optimale est basée sur la connaissance de la densité spectrale de puissance de l'interférence [23]. Il consiste à appliquer à chaque composante fréquentielle une pondération inversement proportionnelle à la puissance de l'interférence sur cette composante. Le problème réside dans l'estimation de cette densité spectrale alors que la représentation en fréquence du signal d'interférence évolue (brouilleur modulé en fréquence, brouilleurs multiples). Lorsque l'estimation est réalisée en présence d'un bruit additif gaussien, sur une réalisation, l'algorithme de filtrage est numériquement instable. Ce traitement ne peut donc être envisagé pour notre application.

Dans [26] le filtrage optimum est ainsi défini en présence de bruit gaussien (en l'absence d'interférence). Il est appliqué, dans le domaine fréquentiel, au module de la représentation de Fourier. Deux approches sont alors considérées pour améliorer le rapport signal sur bruit. La première conduit à l'élimination des composantes fréquentielles affectées par l'interférence. Cette technique est étudiée dans [27]. Elle est généralement retenue pour sa simplicité de mise en œuvre [29]. La deuxième préserve la phase de la représentation fréquentielle. L'amplitude des composantes modifiées est fixée à une valeur qui dépend des caractéristiques du bruit gaussien et de la représentation fréquentielle du signal. Ces 2 techniques sont évaluées dans les paragraphes qui suivent.

### 2.2.1 Élimination des composantes fréquentielles de l'interférence

#### Principe

**Les composantes affectées par l'interférence sont détectées en comparant le module de la représentation en fréquence à un seuil déterminé d'après la variance du bruit gaussien. Ces composantes sont éliminées.** A ces fréquences l'énergie de l'interférence est annulée. Il en est de même de celle du bruit gaussien et du signal. Nous montrons sur la figure (II-2.5) la représentation obtenue après la transformée de Fourier discrète pour différentes formes de l'interférence (Signal sinusoïdal fixe, modulé linéairement en fréquence, pulsé). La bande excisée dépend de la nature du brouilleur. Dans le cas le plus

favorable (brouilleur fixe) cette bande, normalisée, est de 0,015 lorsque la fenêtre de Blackman Harris est appliquée sur des blocs de 512 échantillons (voir figure (II-2.3)). Pour un brouilleur modulé linéairement en fréquence elle augmente avec  $k_\omega$ , pente de la modulation. Elle est inacceptable en présence d'un brouilleur pulsé de forte puissance. Dans ce cas la représentation temporelle du signal sinusoïdal dépend des caractéristiques du brouilleur. La taille des blocs qui fixe la largeur du lobe principal n'est plus maîtrisée. La fenêtre appliquée aux paquets  $\underline{Z}_n$  n'est plus efficace.

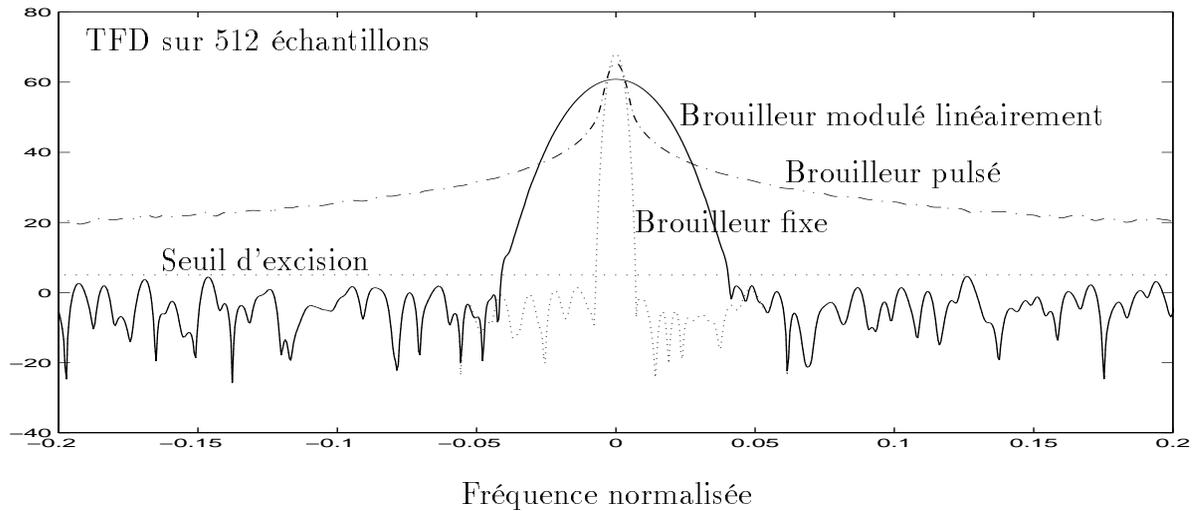


FIG. 2.5: Représentation en fréquence pour différents signaux d'interférence

**Performances**

Nous considérons que le signal filtré ne contient plus le signal d'interférence, c'est à dire que le filtre annule toutes les composantes de celles-ci. **Le gain de traitement  $G_t$  est idéal, de l'ordre de  $\gamma_{jg}$ .** Nous déduisons alors les performances de cette technique du gain de corrélation  $G_\Gamma$  qui s'exprime à partir du rapport signal sur bruit  $\Gamma$  défini par la relation (I-1.9).

$$\Gamma = \frac{A_c^2 \|R_{pp}(0)\|^2}{P_w}$$

Pour estimer ce rapport  $\Gamma$  nous utilisons le modèle ci-dessous.

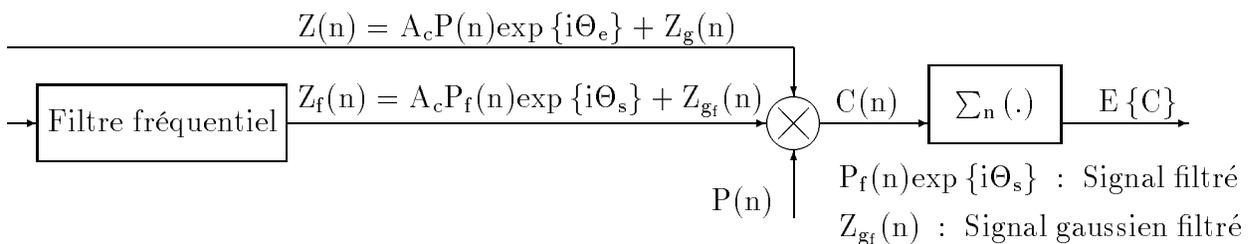


FIG. 2.6: Corrélateur

En l'absence de filtre on a :

$$\left. \begin{array}{l} R_{p_r p}(0) = R_{pp}(0) = 1 \\ P_w = G = 2\sigma_g^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma = \frac{A_c^2}{G} = \Gamma_{idéal}$$

En présence du filtre ce rapport dépend de la puissance du bruit gaussien filtré et de la puissance d'intercorrélacion  $R_{p_f p}(0)$  mesurée en présence du filtre.

$$\left. \begin{array}{l} R_{p_r p}(0) = R_{p_f p}(0) \\ P_w = G_f = 2\sigma_{g_f}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma = \frac{A_c^2 \|R_{p_f p}(0)\|^2}{G_f}$$

De ces 2 relations qui définissent le rapport  $\Gamma$  avant et après filtrage on déduit les performances de ce filtre. On définit le rapport  $G_\Gamma$  qui mesure le gain de corrélation obtenu en utilisant comme référence le signal GPS d'origine (sans interférence et non filtré).

$$G_\Gamma = \frac{\Gamma_{avec\ filtre}}{\Gamma_{idéal}} = \frac{G \|R_{p_f p}(0)\|^2}{G_f} \quad \text{Gain de corrélation} \quad (2.11)$$

Ce rapport dépend de l'atténuation en puissance appliquée au bruit gaussien filtré et de la puissance d'intercorrélacion signal filtré-signal non filtré.

- Puissance du bruit gaussien filtré

Après filtrage la puissance du bruit blanc et gaussien est :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_f = \frac{G * (N - M)}{N} \\ N : \text{Nombre de points de la FFT} \\ M : \text{Nombre de composantes annulées} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

- Puissance d'intercorrélacion signal filtré-signal non filtré

Nous déterminons la fonction d'intercorrélacion signal filtré-signal non filtré à partir de la réponse impulsionnelle du filtre :

$$R_{p_f p}(l) = h(l) * R_{pp}(l)$$

La dégradation est particulièrement importante lorsque les composantes fréquentielles sont éliminées autour de la bande  $L_1$ . On considère donc un filtrage qui consisterait en l'annulation, après application de la transformée de Fourier discrète, de  $2L+1$  composantes spectrales

autour de la fréquence centrale du signal GPS. Ce filtre est défini dans le domaine des fréquences normalisées  $[0, (N - 1)/N]$  par :

$$\begin{cases} H\left(\frac{k}{N}\right) = 0 & \forall k \in [0, L - 1] \cup [N - L + 1, N - 1] \\ H(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Le nombre d'échantillons  $N$  étant impair, on exploite la parité de cette fonction, dans le plan des fréquences discrètes. On obtient alors pour la réponse impulsionnelle échantillonnée l'expression (II-2.13). Les développements sont donnés en annexe 4 (relation (A4-63)).

$$\begin{cases} h(n) = -\frac{1}{N} \frac{\sin \frac{\pi n(2L-1)}{N}}{\sin \frac{\pi n}{N}} & \forall n \in \left[-\frac{N-1}{2}, -1\right] \cup \left[1, \frac{N-1}{2}\right] \\ h(0) = \frac{N-2L+1}{N} \end{cases} \quad (2.13)$$

On en déduit l'expression de la fonction d'intercorrélation signal reçu-code local, en zéro. Si  $N_c$  représente le nombre d'échantillons par chip on a :

$$\begin{aligned} R_{pfp}(0) &= \sum_{m=-N_c}^{N_c} R_{pp}(m)h(m) = R_{pp}(0)h(0) + 2 \sum_{m=1}^{N_c} R_{pp}(m)h(m) \\ &= \frac{N-2L+1}{N} - \frac{2}{N} \sum_{m=1}^{N_c} \left(1 - \frac{m}{N_c}\right) \frac{\sin \frac{\pi m(2L-1)}{N}}{\sin \frac{\pi m}{N}} \end{aligned}$$

On admet que le nombre d'échantillons par chip est très petit devant la taille du bloc  $N$ . On obtient alors :

$$R_{pfp}(0) \approx 1 - \frac{2L-1}{N} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{N_c} \left(1 - \frac{m}{N_c}\right) \operatorname{sinc} \frac{(2L-1)m}{N}\right) \quad (2.14)$$

Il est facile de généraliser ce résultat à un filtre décalé de  $k_d$  composantes par rapport à la composante 0.

$$\begin{cases} H\left(\frac{k}{N}\right) = 0 & \forall k \in [k_d - L, k_d + L] \\ H(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Et :

$$\begin{cases} R_{pfp}(0)(k_d) \approx 1 - \frac{2L-1}{N} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{N_c} \left(1 - \frac{m}{N_c}\right) \operatorname{sinc} \frac{(2L-1)m}{N} \exp\left\{i \frac{2\pi k_d m}{N}\right\}\right) \\ \frac{k_d}{N} \text{ fréquence centrale normalisée du filtre} \end{cases} \quad (2.15)$$

- Gain de corrélation

Nous déduisons des relations (II-2.12) et (II-2.15) le gain de corrélation défini par la relation (II-2.11).

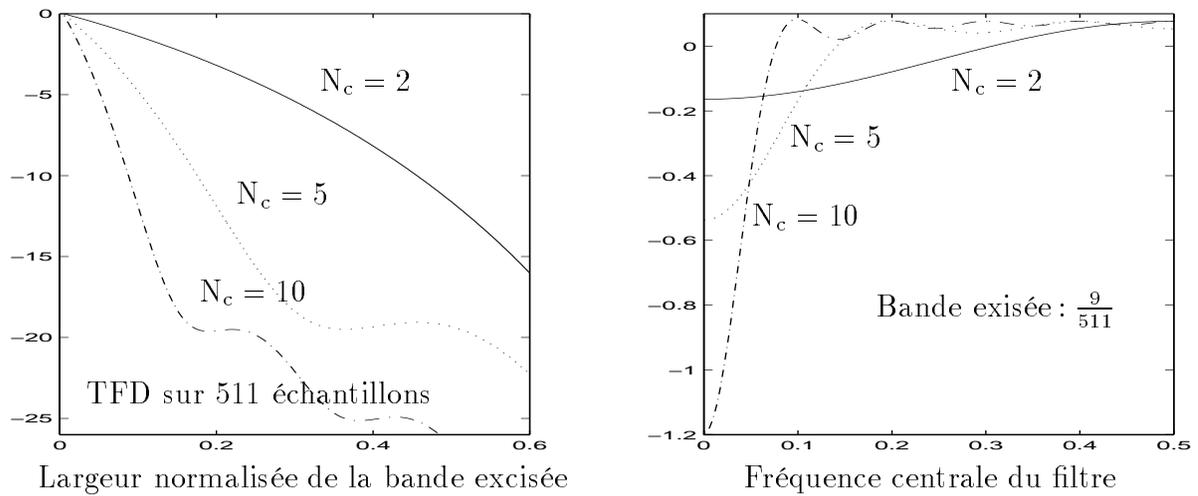
$$\begin{aligned}
 G_{\Gamma} &= \frac{\Gamma_{avec\ filtre}}{\Gamma_{idéal}} = \frac{R_{pp}(0)^2 G}{G_f} \\
 &= \frac{N}{N-M} \left( 1 - \frac{2L-1}{N} \left( 1 + 2 \sum_{m=1}^{N_c} \left( 1 - \frac{m}{N_c} \right) \operatorname{sinc} \frac{(2L-1)m}{N} \exp \left\{ i \frac{2\pi k_d m}{N} \right\} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

La figure (II-2.7) représente, sur la partie gauche, ce rapport  $G_{\Gamma}$  en fonction de la largeur de la bande excisée normalisée  $((2L+1)/N)$ . Le filtre est alors calé sur la fréquence  $L_1$  ( $k_d = 0$ ). Trois valeurs du nombre d'échantillons par chip  $N_c$  sont utilisées. Ce paramètre fixe, dans le domaine des fréquences, la largeur du lobe principal du signal GPS. Sur la partie droite de ce même graphe on représente le rapport  $G_{\Gamma}$  en présence d'un filtre, de largeur fixe, dont la fréquence centrale varie, en valeur normalisée, de 0 à 0,5. La largeur du filtre considérée est de l'ordre de 0,015. Lorsque la fenêtre de Blackman Harris est utilisée, appliquée à des blocs de 512 échantillons, cela correspond, à la bande excisée en présence d'un brouilleur à fréquence fixe.

**Ces graphes montrent que cette technique de réjection altère les performances du système GPS lorsque la bande excisée est localisée autour de la fréquence 0. Le signal GPS n'est pas blanc et son énergie est localisée dans le lobe principal. Plus le nombre d'échantillons par chip augmente, plus l'énergie du signal est concentrée et plus ces dégradations sont importantes.** Lorsque on décale le filtre on peut noter une amélioration des performances lorsque le filtre se cale sur un zéro de la représentation spectrale du signal. Dans ce cas la puissance retirée sur le bruit gaussien est supérieure à celle prélevée sur le signal. Le rapport  $G_{\Gamma}$  est alors supérieur à 0dB.

Il est à noter que cette étude ne prend pas en compte les dégradations apportées par la fenêtre qui dépendent du recouvrement sur les blocs (voir tableau (II-1.4.6)).

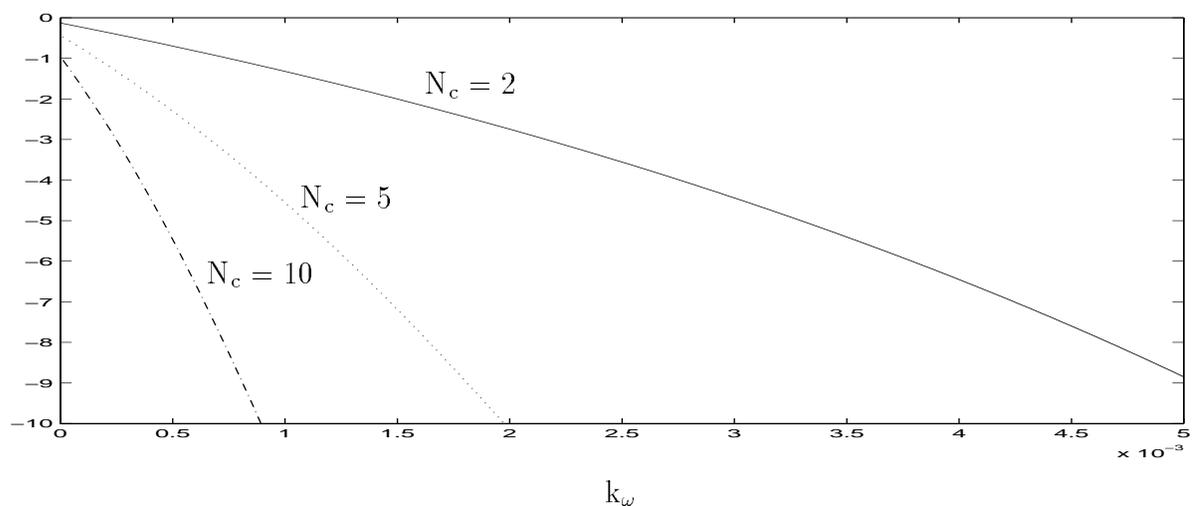
Lorsque le recouvrement sur les blocs pallie l'atténuation engendrée par la fenêtre de pondération, la dégradation mesurée ici sur le rapport signal sur bruit est du même ordre que celle introduite par le filtre temporel à encoche utilisant un ppôle de module  $\alpha_0$  égal à 0,95. Elle dépend de la fenêtre de pondération et de la taille des blocs  $Z_n$ . Elle est fonction de la position du pôle (c'est à dire du module  $\alpha_0$ ), pour le filtre à encoche.

FIG. 2.7: Gain de corrélation ( $G_\Gamma$  en dB)

Pour comparer cette technique, en présence d'un brouilleur modulé linéairement, au filtre à encoche appliqué dans le domaine temporel nous représentons sur la figure (II-2.8) le rapport  $G_\Gamma$  en fonction de la pente du modulateur  $k_\omega$ . Le filtre est calé sur la fréquence centrale du signal GPS.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_j = 2\pi f_j n + \frac{k_\omega n^2}{2} \\ \text{Nombre de composantes excisées} \approx 9 + \frac{k_\omega N^2}{2\pi} \\ 9 : \text{Nombre de composantes excisées en présence d'un brouilleur fixe} \end{array} \right.$$

La largeur de la bande excisée ainsi définie est égale à la celle du lobe obtenu en présence d'un brouilleur modulé linéairement (voir figure (II-2.5)).

FIG. 2.8: Gain de corrélation ( $G_\Gamma$  en dB) en fonction  $k_\omega$ 

Pour le filtrage fréquentiel appliqué à des blocs de taille 512 on devra donc accepter une

dégradation plus importante que pour le filtre à encoche temporel. Une vitesse de modulation caractérisée par  $k_\omega = 1e - 4$  entraîne, sur le rapport signal sur bruit, une perte supérieure à 1 dB. Si on accepte cette dégradation, il est plus performant en terme de vitesse de poursuite dès lors que le rapport de puissance interférence sur bruit gaussien ( $\gamma_{jg}$ ) est supérieur à 10dB. On rappelle que le filtre temporel qui utilise un coefficient  $k_\alpha$  de 0,97 pour la cellule de filtrage, induit une perte de corrélation de 0,6 dB lorsque le nombre d'échantillons par chip est égal à 10. En présence d'un brouilleur modulé le biais sur l'estimation de la fréquence centrale de l'encoche limite sa capacité de réjection. Le tableau (II-1.6.3.1) donné au chapitre précédent permet de mesurer le coefficient  $k_\omega$  maximum pour lequel la puissance du brouilleur est ramenée 10 dB au dessous de celle du bruit gaussien. La valeur de ce coefficient dépend du rapport  $\gamma_{jg}$ .

### Impact sur la fonction avance retard

Pour compléter nous donnons une représentation de la fonction d'intercorrrelation et de la fonction avance retard. Ces représentations sont obtenues à partir des expressions théoriques de la réponse impulsionnelle du filtre et de la fonction d'autocorrélation du signal non filtré.

$$R_{pfp}(l) = \sum_{m=-N_c}^{N_c} R_{pp}(m)h(l-m)$$

La réponse impulsionnelle est donnée par l'équation (II-2.13), définie pour un filtre calée sur la fréquence 0. Le nombre d'échantillons par chip est égal à 10. La perte de corrélation est fixée à 1dB puis à 2dB en ajustant la largeur de la bande excisée.

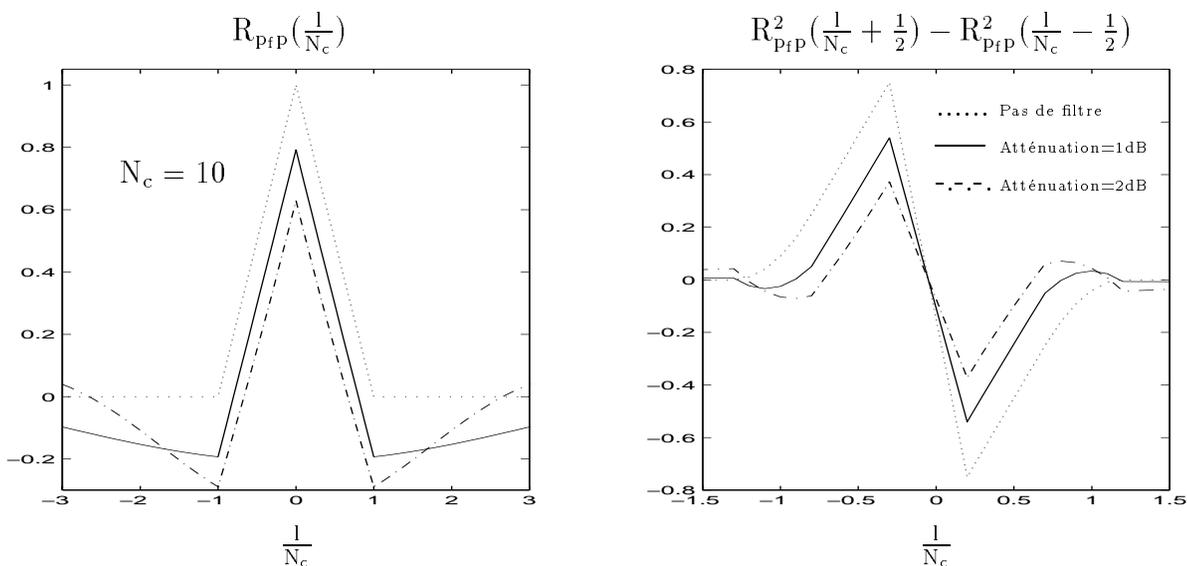


FIG. 2.9: Intercorrrelation code reçu- code local et Fonction AR

Le filtre est ici à phase linéaire et on vérifie que le filtrage n'induit pas de décalage de la

fonction avance retard.

## 2.2.2 Filtrage fréquentiel conservant la phase

### Principe

Lorsque le filtre fréquentiel élimine les composantes du signal d'interférence autour de la fréquence  $L_1$ , les pertes de corrélation sont importantes. Sur la figure (II-2.8) on peut mesurer cette dégradation en présence d'un brouilleur modulé linéairement. Lorsque le nombre d'échantillons par chip est égal à 10, on mesure une perte de 6dB pour une pente  $k_\omega$  égale à  $5.10^{-4}$ . Nous évaluons ici une méthode qui n'affecte pas la phase du signal. Elle consiste à appliquer, dans les régions fréquentielles de l'interférence, le traitement suivant [26]:

$$\xi_f(k) = R_c \frac{\xi_k}{|\xi_k|} \quad (2.17)$$

### Performances en présence de bruit blanc gaussien

Il s'agit de mesurer, en présence de bruit gaussien, le gain de corrélation  $G_\Gamma$ . La démarche est identique à celle adoptée pour le filtre précédent, le rapport signal sur bruit étant évalué en l'absence et en présence de traitement (voir figure (II-2.6)). Toutefois nous substituons ici à l'expression de l'intercorrélation définie dans le domaine temporel celle de l'interspectre. Le traitement non linéaire appliqué ne permet pas de définir simplement, après filtrage, les composantes signal et bruit dans le domaine temporel.

- Expression du test dans le domaine temporel

$$\begin{cases} E\{C\} = R_{ZP}(0) = E\{Z_n P_n\} = E\{P_n (Z_s(n) + Z_g(n))\} \\ Z_s(n) = A_c P_n \exp\{i\Theta_\epsilon\} \end{cases}$$

On considère que la phase  $\Theta_\epsilon$  du signal est constante sur la durée de prédétection. On a alors :

$$\|E\{C\}\| = \|R_{ZP}(0)\| = \left\| E \left\{ \frac{Z_s^*}{A_c}(n) (Z_s(n) + Z_g(n)) \right\} \right\|$$

Et les performances dépendent du rapport  $\Gamma$  défini par la relation (I-1.9). On obtient d'après les relations (I-1.10):

$$\Gamma = \frac{\|E\{C\}\|^2}{E\{CC^*\} - \|E\{C\}\|^2} = \frac{\|R_{ZP}(0)\|^2}{E\{Z_g Z_g^*\}}$$

- Expression du test dans le domaine fréquentiel

La TFD étant appliquée à des paquets de  $N$  échantillons on a :

$$R_{ZP}(0) \xrightarrow{TFD} \frac{1}{NA_c} \sum_{k=0}^{N-1} E \{(\xi_s(k) + \xi_g(k)) \xi_s^*(k)\}$$

$$E \{Z_g Z_g^*\} \xrightarrow{TFD} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} E \{\xi_g(k) \xi_g(k)^*\}$$

D'où le rapport puissance d'intercorrélation sur bruit  $\Gamma$  :

$$\Gamma = \frac{1}{NA_c^2} \frac{\left\| \sum_{k=0}^{N-1} E \{(\xi_s(k) + \xi_g(k)) \xi_s^*(k)\} \right\|^2}{\sum_{k=0}^{N-1} E \{\xi_g(k) \xi_g(k)^*\}}$$

- Gain de corrélation

On exprime d'abord le rapport signal sur bruit en l'absence de traitement. La transformée  $\xi_g$  du bruit gaussien  $z_g$  est un bruit gaussien. On a :

$$\begin{cases} S_g(k) = E \{\xi_g(k) \xi_g(k)^*\} = 2\sigma_g^2 \\ S_{gs}(k) = E \{\xi_g(k) \xi_s^*(k)\} = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$S_{rs}(k) = E \{\xi(k) \xi_s^*(k)\} = E \{\xi_s(k) \xi_s^*(k)\} = S_s(k)$$

Et, d'après la relation (A4-67) de l'annexe 4 :

$$S_s(k) = E \{\xi_s(k) \xi_s^*(k)\} = A_c^2 \left( 1 + 2 \sum_{l=1}^{N_c} \left( 1 - \frac{l}{N_c} \right) \cos \frac{2\pi}{N} kl \right)$$

Où  $N_c$  représente le nombre d'échantillons par chip. Le rapport  $\Gamma$ , en l'absence de traitement, a donc pour expression :

$$\Gamma_{sans\ traitement} = A_c^2 \frac{\frac{1}{N^2} \left| \sum_{k=0}^{N-1} S_s(k) \right|^2}{2\sigma_g^2} = \frac{A_c^2}{2\sigma_g^2}$$

Lorsque le traitement défini par la relation (II-2.17) est appliqué aux composantes fréquentielles (composantes qui seraient affectées par le signal d'interférence, en présence de celui ci) le rapport signal sur bruit est modifié. On note  $D_I$  le domaine fréquentiel sur lequel le filtre est appliqué, et  $D_G$  le domaine sur lequel le signal n'est pas modifié. On a :

$$\Gamma_{avec\ traitement} = \frac{1}{NA_c^2} \frac{\left| \sum_{k \in D_G} S_s(k) + \sum_{k \in D_I} S_s(k) \right|^2}{\sum_{k \in D_G} S_g(k) + \sum_{k \in D_I} S_g(k)} \quad (2.18)$$

Sur le domaine  $D_G$  l'expression de  $S_g$  est :

$$S_g(k) = E \{ \xi_g(k) \xi_g(k)^* \} = 2\sigma_g^2 \quad (2.19)$$

Et l'expression de l'interspectre  $S_{rs}$  signal reçu-référence est :

$$S_{rs}(k) = S_s(k) = E \{ \xi_s(k) \xi_s^*(k) \} = A_c^2 \left( 1 + 2 \sum_{l=1}^{N_c} \left( 1 - \frac{l}{N_c} \right) \cos \frac{2\pi}{N} kl \right) \quad (2.20)$$

Sur le domaine  $D_I$  on a :

$$\xi_{g_f}(k) \stackrel{G \gg S}{\approx} \xi_f(k) = R_c \frac{\xi_k}{|\xi_k|} \quad (2.21)$$

On en déduit la densité spectrale de bruit :

$$S_g(k) \approx E \{ \xi_f(k) \xi_f(k)^* \} = R_c^2 \quad (2.22)$$

Et l'expression de l'interspectre signal reçu-référence est :

$$S_{rs}(k) = E \left\{ \frac{\xi_k}{|\xi_k|} \xi_s^*(k) \right\} = R_c E \left\{ \frac{\xi_s(k) + \xi_g(k)}{|\xi_s(k) + \xi_g(k)|} \xi_s^*(k) \right\}$$

En considérant que la phase signal brouilleur est uniformément répartie sur  $[0, 2\pi]$ , on obtient d'après (A4-70), pour des valeurs du rapport signal sur bruit petites devant l'unité :

$$S_{rs}(k) = R_c E \left\{ \frac{|\xi_s|^2(k)}{2|\xi_g(k)|} \right\} = \frac{R_c}{2\sigma_g} \sqrt{\frac{\pi}{2}} S_s(k) = \frac{R_c A_c^2}{2\sigma_g} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + 2 \sum_{l=1}^{N_c} \left( 1 - \frac{l}{N_c} \right) \cos \frac{2\pi}{N} kl \right) \quad (2.23)$$

On note  $L_I$  la dimension du domaine  $D_I$ ,  $L_G$  la dimension du domaine  $D_G$ . On peut exprimer, d'après les relations (II-2.19), (II-2.20), (II-2.23), le rapport signal sur bruit (II-2.18). On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{avec\ traitement} = \frac{1}{N A_c^2} \frac{|\sum_{k \in D_G} S_s(k) + \frac{R_c}{2\sigma_g} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k \in D_I} S_s(k)|^2}{2\sigma_g^2 L_G + R_c^2 L_I} \\ S_s(k) = A_c^2 \left( 1 + 2 \sum_{l=1}^{N_c} \left( 1 - \frac{l}{N_c} \right) \cos \frac{2\pi}{N} kl \right) \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Et le gain de corrélation est :

$$G_\Gamma = \frac{\Gamma_{avec\ traitement}}{\Gamma_{sans\ traitement}} = \frac{2\sigma_g^2}{N A_c^4} \frac{|\sum_{k \in D_G} S_s(k) + \frac{R_c}{2\sigma_g} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k \in D_I} S_s(k)|^2}{2\sigma_g^2 L_G + R_c^2 L_I} \quad (2.25)$$

- Valeur de  $R_c$  qui maximise le gain de corrélation

Le gain de corrélation est optimum pour la valeur de  $R_c$  qui maximise le rapport signal sur bruit (II-2.24). On utilise la notation suivante :

$$\begin{cases} P_G = \sum_{k \in D_G} S_s(k) \\ P_I = \sum_{k \in D_I} S_s(k) \end{cases}$$

Le rapport (II-2.24) est optimum pour (voir relation (A4-71)) :

$$R_c = R_{opt} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{P_I L_G}{P_G L_I} \sigma_g \quad (2.26)$$

Lorsque cette valeur est utilisée, on note d'abord une modification de la représentation spectrale du signal et une forte coloration du bruit.

$$\begin{cases} S_{rs}(k) = S_s(k) \text{ sur } L_G \\ S_{rs}(k) = \frac{R_c}{2\sigma_g} \sqrt{\frac{\pi}{2}} S_s(k) \text{ sur } L_I \text{ d'après (II - 2.23)} \end{cases}$$

Il en résulte une dégradation de la fonction d'intercorrélation signal reçu-code local qui induit une déformation de la fonction du discriminateur avance-retard.

Par ailleurs le gain optimal obtenu en injectant dans (II-2.25) la valeur  $R_c = R_{opt}$  ne traduit pas directement les performances du test. Nous avons admis jusqu'ici que ces performances pouvaient se déduire, d'après la relation (I-1.11), du rapport signal sur bruit  $\Gamma$ . Cette relation n'est valable qu'en présence de bruit blanc, la puissance du bruit en sortie du filtre de prédétection étant alors inversement proportionnelle au nombre d'échantillons  $M$  traités par ce filtre. Or le traitement appliqué ici n'est pas linéaire : le bruit est coloré. On mesure ainsi une dégradation de la puissance du test alors que le gain de corrélation est supérieur à l'unité. Cette dégradation peut atteindre 5dB.

- Valeur de  $R_c$  qui privilégie la statistique du bruit gaussien

Lorsque ce traitement est appliqué en présence d'un bruit blanc et gaussien, la valeur  $R_c = R_{opt}$  permet de maximiser le rapport signal sur bruit en entrée du corrélateur. Il en résulte toutefois une corrélation sur le bruit et une distorsion de la fonction d'intercorrélation. Dans [26] on propose de choisir  $R_c$  en fonction du pourcentage de composantes fréquentielles

traitées.

$$R_c = R_{cg} \text{ tel que } P[R > R_{cg}] = \frac{L_I}{N}$$

On obtient donc :

$$\int_{R_{cg}}^{+\infty} \frac{R}{\sigma_g^2} \exp\left\{-\frac{R^2}{2\sigma_g^2}\right\} = \frac{L_I}{N} \quad (2.27)$$

$$R_{cg} = \sigma_g \sqrt{2 * \text{Ln}\left(\frac{N}{L_I}\right)}$$

Le gain de corrélation est alors représenté sur la figure (II-2.10). Le traitement est appliqué autour de la fréquence  $L_1$  sur une bande de fréquence normalisée variant de 0 à 1. Cette représentation est obtenue à partir d'une simulation de Monte Carlo. Cette simulation permet d'établir la statistique du signal  $L_{kM}$  (voir figure (I-1.3)). De cette statistique on déduit sa moyenne et sa variance qui définissent le rapport T. Cette procédure permet de prendre en compte les performances du filtre de prédétection.

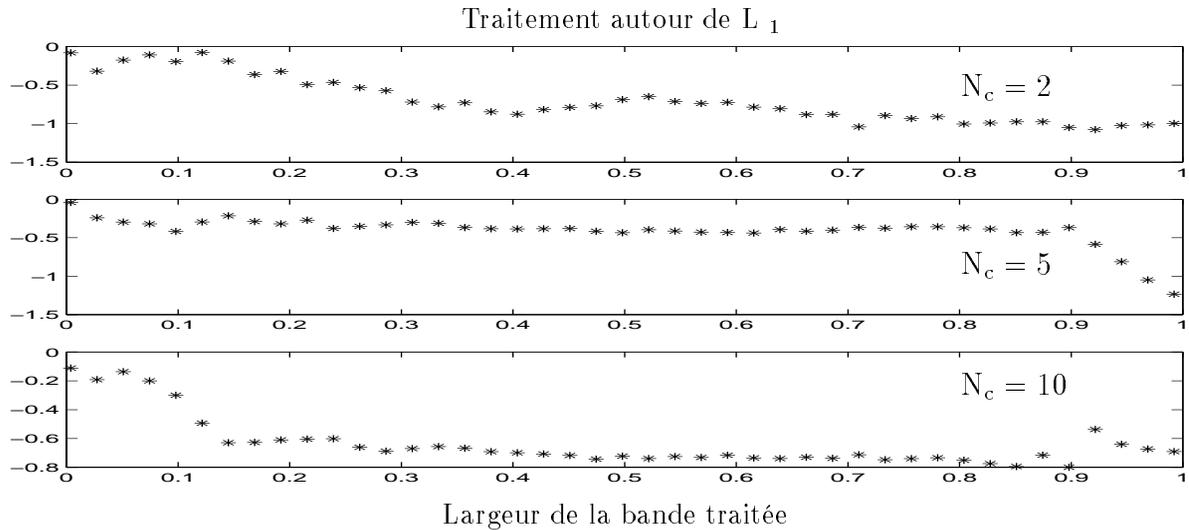


FIG. 2.10: Gain de corrélation  $G_T$  en fonction de la largeur de la bande traitée ( $R_c = R_{cg}$ )

Les performances mesurées ici sont supérieures à celles obtenues pour  $R_c = R_{opt}$

- Valeur de  $R_c$  qui privilégie la représentation spectrale du signal

Nous définissons ici la valeur de  $R_c$  qui conserve la représentation spectrale du signal. D'après (II-2.23) on a :

$$S_{rs}(k) = S_s(k) \text{ si } \frac{R_c}{2\sigma_g} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1 \implies R_c = R_{cs} = 2\sigma_g \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (2.28)$$

Dans ce cas la forme de la fonction d'intercorrélacion n'est pas affectée. Le gain de corrélation est représenté sur la figure (II-2.11) pour  $R_c = R_{cs}$ .

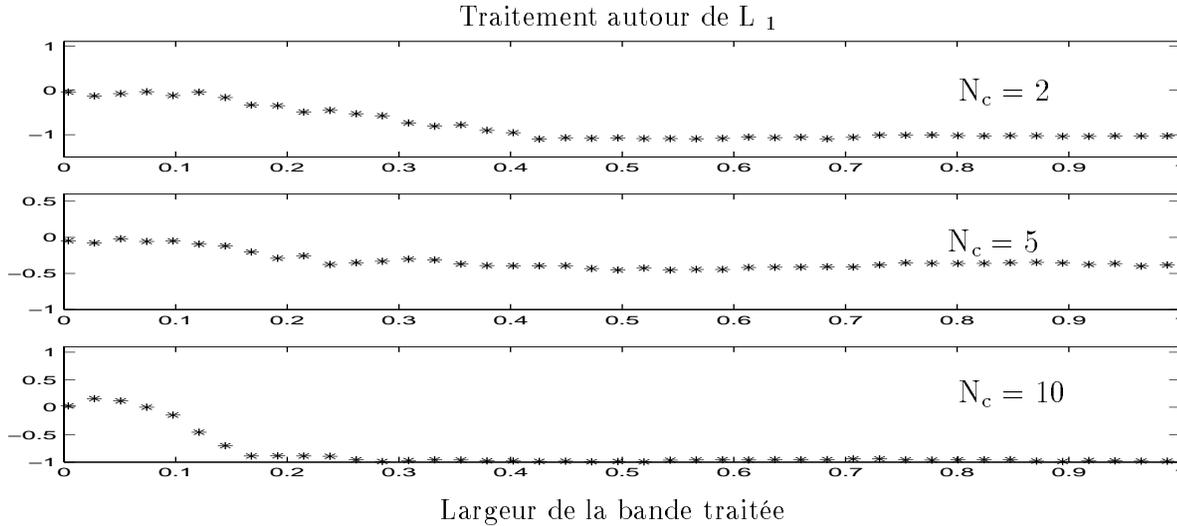


FIG. 2.11: Gain de corrélation  $G_\Gamma$  en fonction de la largeur de la bande traitée ( $R_c = R_{cs}$ )

Pour cette valeur de  $R_c$  les pertes de corrélation restent également très faibles (Gain de corrélation supérieur à -1dB pour  $N_c = 10$ ). Ce choix de  $R_c$  présente par ailleurs 2 avantages. D'une part il n'entraîne pas de distorsion de la fonction d'autocorrélacion. D'autre part, ne dépendant pas de la largeur de bande excisée, il se déduit directement de la puissance du bruit gaussien.

### Performances en présence d'un signal d'interférence

L'étude qui précède montre que, **en présence d'un bruit gaussien, le traitement qui conserve la phase du signal est plus performant que la technique d'excision qui annule signal et bruit dans la bande traitée.** Nous évaluons ce traitement en présence d'un signal d'interférence à partir d'une simulation de Monte Carlo. Le module est fixé à  $R_c = R_{cs}$  sur la plage des fréquences de l'interférence. Cette valeur ne modifie pas la représentation spectrale du signal et offre, d'après l'étude qui précède, des performances qui sont comparables à celles mesurées  $R_c = R_{cg}$ . Le signal d'interférence est un signal sinusoïdal balayée linéairement autour de la fréquence  $L_1$ . La largeur de la bande traitée dépend du coefficient  $k_\omega$  de la modulation. De la statistique du signal  $L_{KM}$  (voir figure 1.3) on déduit le rapport signal sur bruit défini par (I-1.8) qui permet de mesurer le gain de corrélation. Ce gain est estimé pour 3 valeurs du nombre d'échantillons par chip  $N_c$  et représenté figure

(II-2.12). Il est comparé à celui obtenu par le traitement précédent qui annule l'énergie dans la bande du signal d'interférence (Méthode 1).

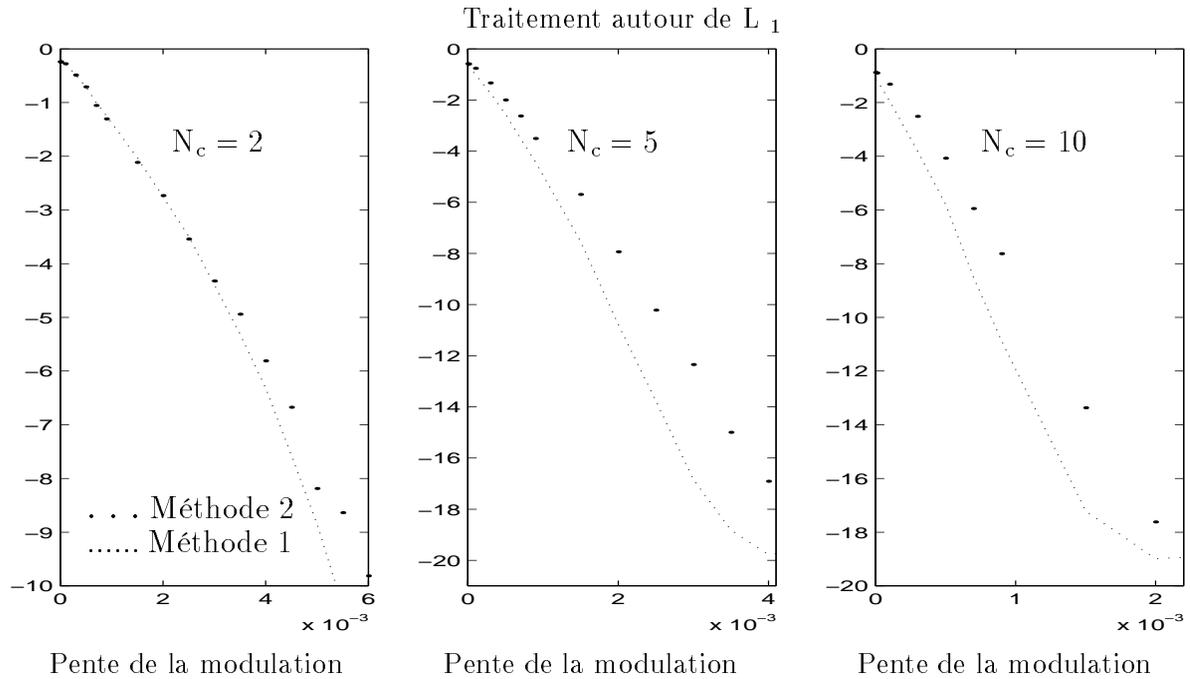


FIG. 2.12: Gain de corrélation  $G_T$  mesuré en fonction de la pente de la modulation

Ces graphes montrent que les fortes améliorations constatées en présence de bruit gaussien sont peu significatives en présence du signal d'interférence.

## 2.3 Comparaison des 2 techniques de filtrage

La méthode 1, qui réalise l'excision des fréquences altérées par le signal d'interférence, est simple de mise en œuvre. En présence d'un signal d'interférence, lorsque la largeur de la bande excisée reste faible, elle offre un gain de corrélation comparable à celui obtenu avec la méthode 2. Lorsque le lobe principal du signal GPS est entièrement affecté par le signal d'interférence la méthode 2, qui préserve la phase du signal, offre de meilleures performances. Elle permet alors un gain de l'ordre de 2dB. Ses performances dépendent cependant de la valeur de  $R_c$  qui est imposée par le traitement. La valeur de  $R_c = R_{cs}$ , définie par la relation (II-2.28), a été retenue parce qu'elle préserve la représentation spectrale du signal. Elle se déduit de la puissance du bruit gaussien. Sa mise en œuvre nécessite donc une bonne estimation de ce paramètre.

## 2.4 Estimation de la puissance du bruit gaussien

### Objectif

Le problème est d'estimer la puissance du bruit gaussien. De cette puissance on déduit d'une part les composantes affectées par le traitement, d'autre part le niveau du module de la représentation fréquentielle dans le traitement qui conserve la phase du signal. Les techniques utilisées dans [26] et [29] utilisent la moyenne et la variance du module pour cette estimation. Ces méthodes sont peu précises. Elles sont paramétrées en fonction de la nature de l'interférence. Nous proposons ici une technique d'estimation qui utilise l'histogramme cumulé du module.

### Principe

En l'absence d'interférence, et pour des rapports signal sur bruit gaussien petits devant l'unité, le module obtenu dans la représentation de Fourier suit une loi de Rayleigh (voir équation (II-2.1)). En présence d'une interférence la loi de probabilité est modifiée. On admet que la fenêtre de pondération appliquée dans le domaine temporel permet de concentrer l'énergie de l'interférence dans le lobe principal. On peut donc considérer que le module de la représentation en fréquence n'est pas affectée aux faibles amplitudes qui caractérisent le bruit gaussien. La figure (II-2.13) représente l'histogramme et l'histogramme cumulé du module obtenu en présence d'une interférence.

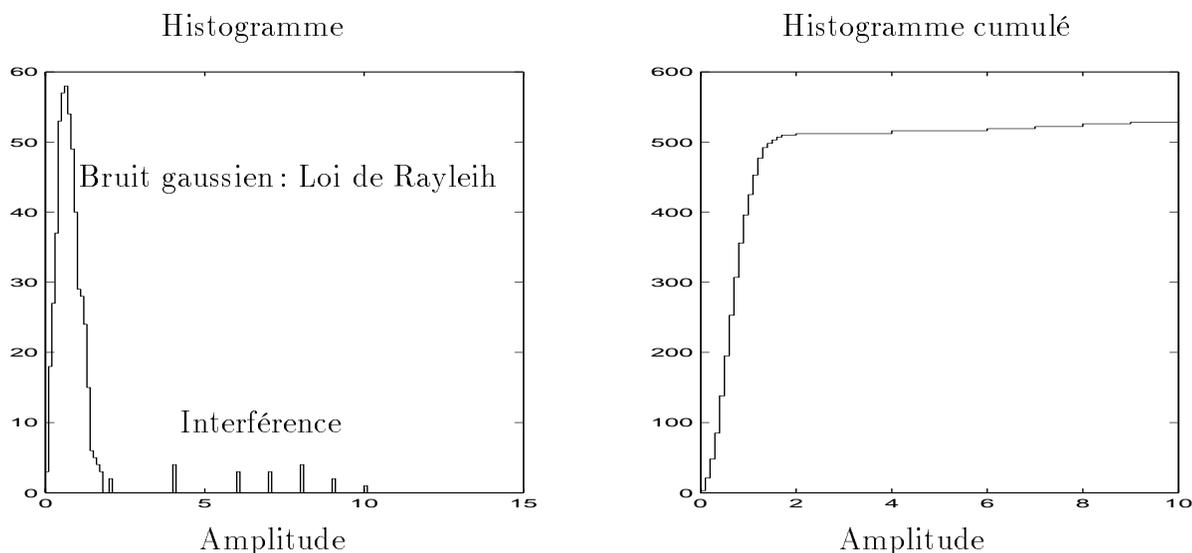


FIG. 2.13: *Histogramme et histogramme cumulé du module de la représentation de Fourier*

Dans la région proche de zéro nous pouvons considérer que la loi de probabilité suit une loi de Rayleigh et exprimer la variance du bruit gaussien à partir de la fonction de répartition

du module.

$$f_{R_g}(R) = \frac{R}{\sigma_g^2} \exp \left\{ -\frac{R^2}{2\sigma_g^2} \right\} \mathbf{1}_{R \geq 0}$$

$$F_{R_g}(R) = \int_{-\infty}^R f_{R_g}(u) du = 1 - \exp \left\{ -\frac{R^2}{2\sigma_g^2} \right\} \mathbf{1}_{R \geq 0} \quad \text{et} \quad \sigma_g^2 = \frac{R(1 - F_{R_g}(R))}{dF_{R_g}(R)/dR}$$

En linéarisant la fonction de répartition sur un intervalle  $\Delta R$  de l'histogramme cumulée on obtient l'expression de  $\sigma_g^2$  sur cet intervalle:

$$\sigma_g^2 = \frac{R\Delta R(1 - F_{R_g}(R))}{\Delta F_{R_g}} \quad (2.29)$$

En pratique il est préférable de travailler sur des tranches équiprobables. On note  $N_{ec}$  le nombre d'échantillons par tranche. L'histogramme cumulée présentent donc des "marches" de hauteur  $N_{ec}$ . Une représentation en est donnée figure (II-2.14).

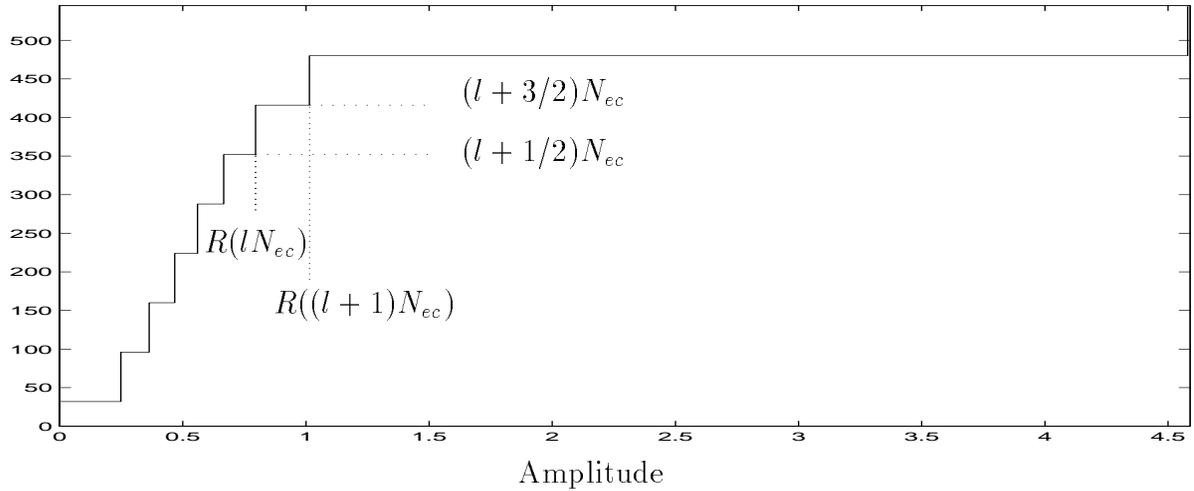


FIG. 2.14: *Histogramme cumulé établi sur des tranches équiprobables*

L'expression (II-2.29) devient alors :

$$\sigma_g^2 = \frac{(R(lN_{ec}) + R((l+1)N_{ec}))(R((l+1)N_{ec}) - R(lN_{ec}))(N - lN_{ec} - 1/2N_{ec})}{2N_{ec}} \quad (2.30)$$

$$\sigma_g^2 = \frac{(R^2((l+1)N_{ec}) - R^2(lN_{ec}))(2N - (2l+1)N_{ec})}{4N_{ec}}$$

La variance  $\sigma_g^2$  peut alors être estimée en moyennant les résultats obtenus sur les tranches considérées. Les tranches supérieures affectées par le signal d'interférence sont éliminées. On

représente sur la figure (II-2.15) la distribution de l'erreur d'estimation sur l'écart type  $\sigma_g$ . Cette erreur est prise en valeur relative lorsque le signal d'interférence est constitué de  $N_j$  brouilleurs. L'histogramme est obtenue à partir de 10000 représentations fréquentielles. Pour chacune d'elles le nombre de brouilleurs, la fréquence et l'amplitude de ces brouilleurs sont générés de manière aléatoire. Le nombre de brouilleurs peut ainsi varier de 0 à 20. Le bruit gaussien est de fréquence unitaire et la puissance des brouilleurs est comprise entre 0 et 60dB. Une de ces représentations est donnée sur la partie gauche de la figure.

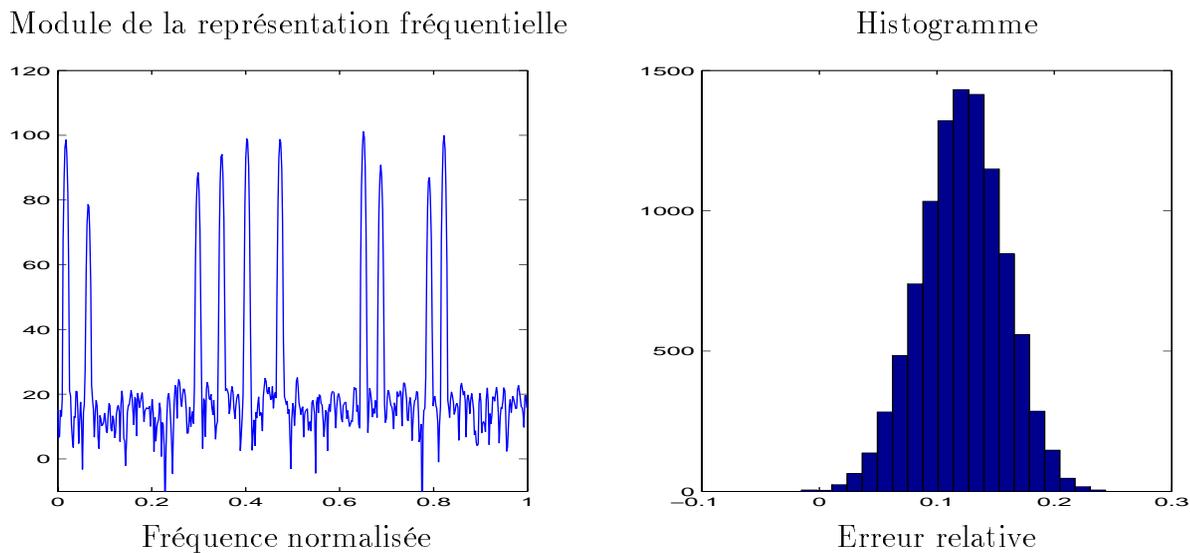


FIG. 2.15: *Histogramme de l'erreur d'estimation relative  $\frac{\sigma_g \text{ estimée} - \sigma_g}{\sigma_g}$*

Cette technique d'estimation donne de bons résultats. La précision obtenue sur l'estimation de l'écart type est satisfaisante, inférieure à 20%, de 10% en moyenne. Elle nécessite toutefois le classement en ordre croissant des échantillons du module de la représentation de Fourier.

### Méthode simplifiée

Pour éviter le tri des échantillons nous proposons une évolution de la méthode présentée. L'estimation est alors réalisée sur une seule tranche obtenue après élimination des échantillons de plus forte amplitude. L'algorithme nécessite alors les 3 étapes suivantes :

- Élimination des échantillons de plus forte amplitude,
- Recherche du minimum,
- Recherche du maximum.

On représente sur la figure (II-2.16) la nouvelle distribution de l'erreur relative mesurée établie à partir de 10000 réalisations fréquentielles.

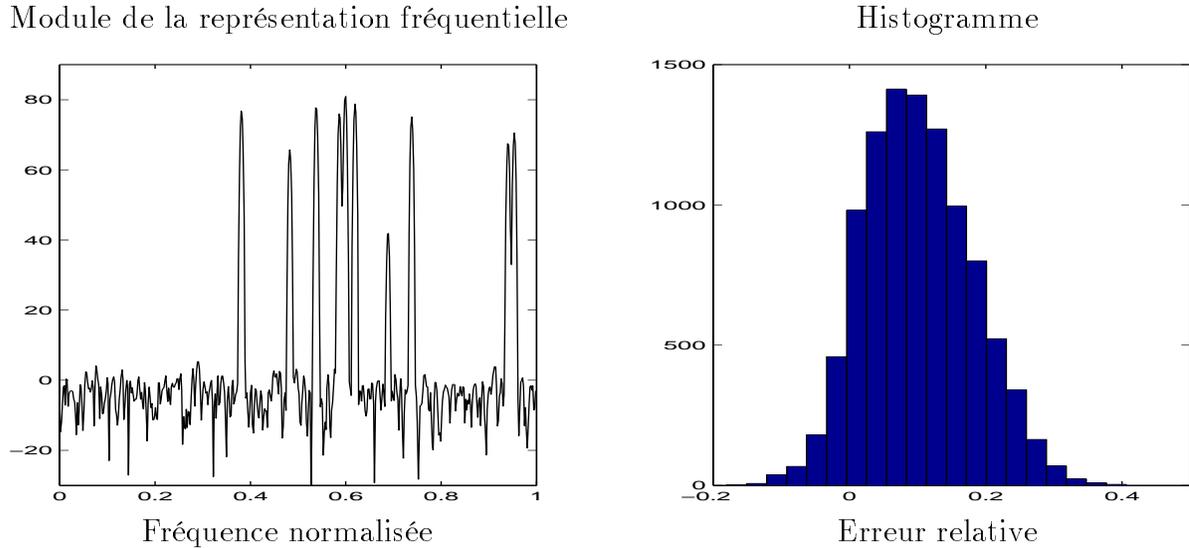


FIG. 2.16: *Histogramme de l'erreur d'estimation relative*  $\frac{\sigma_g \text{ estimée} - \sigma_g}{\sigma_g}$

Le bruit d'estimation est supérieur à celui obtenu avec la méthode précédente puisque le traitement ne permet pas ici de moyennner sur plusieurs tranches. Une amélioration peut alors être obtenue, en supposant que la puissance du bruit blanc varie lentement dans le temps, par un filtrage de la solution obtenue ( $\sigma_g(n) = k\sigma_g \text{ estimée} + (1 - k)\sigma_g(n - 1)$ ).

## 2.5 Conclusions

Le filtrage fréquentiel permet de rejeter efficacement les signaux d'interférence. Appliqué à chaque bloc il permet de s'adapter rapidement à ces signaux. La dégradation apportée sur le signal dépend de la largeur de la bande excisée. La méthode proposée ici pour le calcul du seuil d'excision permet de restreindre cette bande aux composantes modifiées par l'interférence. Les pertes de corrélation mesurées dépendent alors de la taille des blocs à l'entrée de la TFD, du nombre d'échantillons par chip, de la nature et de la fréquence des brouilleurs. En présence d'un seul brouilleur à fréquence fixe ces pertes restent faibles. Lorsque les blocs sont de taille 512 ces pertes sont du même ordre que celles obtenues en présence du filtre temporel à encoche utilisant un coefficient  $\alpha_0 = 0,95$  (0,2dB pour  $N_c = 2$ , 0,6dB pour  $N_c = 5$ , 1.2dB pour  $N_c = 10$ ). Lorsque le brouilleur est modulé linéairement en fréquence la plage des fréquences affectées est plus importante. Sa largeur croît avec  $k_\omega$  qui représente la pente de la modulation. La technique qui conserve la phase permet alors, par rapport à la méthode qui annule l'énergie du signal, de réduire les pertes lorsque la bande de fréquence affectée par le brouilleur est importante. On mesure ainsi sur la figure (II-2.12) une légère amélioration,

de l'ordre de 2dB, lorsque cette bande est égale à la moitié de la bande occupée par le lobe principal du signal GPS.

Nos conclusions sont donc les suivantes :

- La technique de filtrage fréquentiel présente l'avantage de s'adapter immédiatement au signal d'interférence.
- Le seul paramètre de réglage concerne la taille des blocs.
- Les pertes de corrélation dépendent de la taille de ces blocs.
- Le traitement doit être réalisé sur des blocs entrelacés après application d'une fenêtre de pondération.
- Les pertes de corrélation devant rester faibles la première technique qui annule le signal et l'interférence peut être appliquée pour sa simplicité de mise en œuvre (le gain apporté par la deuxième technique n'est sensible (de l'ordre de 2dB) que pour de fortes pertes de corrélation).
- La technique de filtrage fréquentiel ne peut être utilisée en présence d'un brouilleur pulsé de forte puissance qui diffuse son énergie dans tout le spectre.
- En présence de brouilleurs modulés linéairement en fréquence la largeur de la bande excisée croît avec la pente  $k_\omega$ . Les pertes de corrélation dépendent alors de la valeur de cette pente.

## Troisième partie

# Le récepteur GPS en présence de bruits non gaussiens



## Chapitre 1

# Détection d'un signal dans un bruit non gaussien

Dans la deuxième partie de ce document nous avons proposé une évolution du récepteur défini en présence de bruit blanc gaussien pour améliorer ses performances en présence d'interférence bande étroite. Cette évolution est basée sur un filtre de blanchiment placé à l'entrée du corrélateur. Des filtres rejeteurs adaptatifs sont utilisés pour annuler dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel les composantes spectrales modifiées par l'interférence. L'étude réalisée a montré les limites de ces techniques. Appliquées dans le domaine temporel ces méthodes ne permettent pas la poursuite de brouilleurs variants rapidement dans le temps. De même, dans le domaine fréquentiel, le filtrage opéré peut conduire, en présence d'interférence de bande semi étroite, à la dégradation du signal GPS.

Nous proposons de redéfinir ici le récepteur optimum en présence de bruit non gaussien. Le signal GPS étant noyé dans le bruit (*rapport signal sur bruit faible*), nous appliquons la théorie de la détection classique pour dériver le récepteur optimum. Nous posons ici le problème dans un cas simple en supposant les paramètres  $\tau$ ,  $\omega_d$ ,  $\theta_0$  correctement estimés. Nous obtenons alors à l'entrée du détecteur optimum un signal unidimensionnel qui représente le signal en bande de base.

**Ce chapitre nous permet de dégager, pour ce modèle simplifié, les principes du détecteur optimum et de présenter les performances obtenues pour différentes représentations du bruit. Nous admettons ici que cette technique préserve le signal GPS. Pour caractériser les performances de cette méthode nous utiliserons donc le gain de traitement qui permet de mesurer la réjection sur le signal d'interférence.** Ces performances sont, dans un premier temps, évaluées de manière analytique pour certains modèles de bruit. Cette étude est complétée par une simulation de Monte-Carlo, effectuée pour des modèles de bruit plus complexes.



## 1.1 Définition du détecteur optimum

### 1.1.1 Principe

Il s'agit de définir ici la structure du détecteur optimum. Ce détecteur est appliqué au signal d'entrée du corrélateur  $Z_n$  défini par la relation (I-1.4). Pour simplifier cette étude nous considérons ici le signal unidimensionnel qui serait obtenu pour un récepteur cohérent. Nous ne prenons donc pas en considération la phase du signal d'entrée. Le signal  $Z_n$  est alors un signal réel de la forme :

$$Z_n = A_c \cdot P_n + W_n = S_n + W_n$$

où  $S_n$  représente le signal GPS en Bande de base et  $W_n$  représente le bruit.

$$S(n) \in (-A_c, +A_c)$$

Le bruit est représenté par les échantillons  $W_n$  qui modélisent le bruit gaussien et les signaux d'interférence. N'ayant pas de connaissance sur la structure de corrélation des brouilleurs, nous considérons dans ce chapitre des bruits indépendants et stationnaires. Par ailleurs nous supposons connue la loi de densité de probabilité  $f_w$  qui décrit la statistique de ce bruit et nous supposons que :

$$f_w(x) \text{ existe, paire et dérivable} \quad (1.1)$$

$$f'_w(x) = \frac{df_w(x)}{dx} \text{ existe et } \int_{-\infty}^{+\infty} |f'_w(x)| dx < \infty, \int_{-\infty}^{+\infty} f'_w(x) dx = 0 \quad (1.2)$$

$$f'_w(x) \text{ fonction impaire} \quad (1.3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f''_w(x) dx = [f'_w(x)]_{-\infty}^{+\infty} = 0 \quad (1.4)$$

Le signal à détecter est donc le signal GPS dont les échantillons sont notés  $S_n$ . S'agissant d'un signal de faible puissance (rapport signal sur bruit faible), il convient d'employer, pour extraire ce signal, le détecteur localement optimal ([30] , pp 5-8, pp34-38), défini autour de l'hypothèse  $H_0$  correspondant à l'absence de signal. Pour dériver ce récepteur optimum on traite le problème de détection correspondant aux 2 hypothèses ci-dessous :

$$H_1 : Z_n = S_n + W_n \quad \text{signal petit devant le bruit}$$

$$H_0 : Z_n = W_n \quad \text{pas de signal}$$

On note  $\underline{Z}$  le vecteur d'observation ,

$$\underline{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$$

et  $f_{\underline{Z}}^0(z_1, z_2, \dots, z_N)$  la loi de probabilité de  $\underline{Z}$  sous  $H_0$ ,  $f_{\underline{Z}}^1(z_1, z_2, \dots, z_N)$  la loi de probabilité de  $\underline{Z}$  sous  $H_1$ . L'approche de Neyman-Pearson pour ce problème consiste à déterminer la région de décision  $R_1$ , région d'acceptation de l'hypothèse  $H_1$ , de manière à maximiser la probabilité de détection pour un niveau de fausse alarme donné  $P_{fa}$ .

On montre que la stratégie optimale revient à comparer à un seuil déterminé par la contrainte  $P_{fa}$ , le rapport de vraisemblance  $\Lambda(\underline{Z})$  [29] :

$$\Lambda(\underline{Z}) = \frac{f_{\underline{Z}}^1(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)}{f_{\underline{Z}}^0(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)} = \frac{f_{\underline{Z}}^1(\underline{Z})}{f_{\underline{Z}}^0(\underline{Z})} > < \text{seuil} \quad (1.5)$$

Pour développer l'expression  $\Lambda(\underline{Z})$ , nous exprimons les lois, sous les 2 hypothèses  $H_0$  et  $H_1$  :

$$\begin{cases} f_{\underline{Z}}^0(\underline{Z}) = \prod_{n=1}^N f_w(Z_n) = F_w(\underline{Z}) \\ f_{\underline{Z}}^1(\underline{Z}) = \prod_{n=1}^N f_w(Z_n - S_n) = F_w(\underline{Z} - \underline{S}) \end{cases}$$

Pour des signaux de faible rapport signal à bruit, sous l'hypothèse composite  $H_1$ , le signal prend des valeurs proches de celles correspondants à l'hypothèse simple  $H_0$ . Ceci rend les décisions difficiles. On considère alors que la loi de densité de probabilité est linéaire dans cette région. Sous cette hypothèse on décompose  $f_{\underline{Z}}^1$  en série de Taylor autour de  $\underline{Z}$ . On obtient au premier ordre :

$$f_{\underline{Z}}^1(\underline{Z}) = F_w(\underline{Z}) - \sum_{n=1}^N \frac{\partial F_w(\underline{Z})}{\partial Z_n} S_n + \mathcal{O}(S^2) \quad (1.6)$$

Exprimons  $\frac{\partial}{\partial Z_n} F_w(\underline{Z})$  :

$$\frac{\partial F_w(\underline{Z})}{\partial Z_n} = f'_w(Z_n) \prod_{m \neq n} (f_w(Z_m)) = F_w(\underline{Z}) \frac{f'_w(Z_n)}{f_w(Z_n)} \quad (1.7)$$

Le rapport de vraisemblance de l'équation (III-1.5) devient :

$$\Lambda(\underline{Z}) = 1 - \sum_{n=1}^N S_n \frac{f'_w(Z_n)}{f_w(Z_n)} \quad (1.8)$$

Dans ces conditions la probabilité de détection  $P_D$  s'écrit :

$$\begin{aligned} P_D &= \int_{D_1} f_{\underline{Z}}^1(\underline{Z}) dZ_1 dZ_2 \dots dZ_N \quad \text{où } D_1 \sim \{\underline{Z} : \Lambda(\underline{Z}) > \text{seuil}\} \\ &= \int_{D_1} F_w(\underline{Z}) dZ_1 dZ_2 \dots dZ_N - \int_{D_1} \sum_{n=1}^N \frac{\partial F_w(\underline{Z})}{\partial Z_n} S_n dZ_1 dZ_2 \dots dZ_N \quad \text{d'après (III - 1.6)} \end{aligned}$$

On note  $P_{FA}$  la probabilité de fausse alarme et on obtient :

$$P_D = P_{FA} - \int_{D_1} F_w(\underline{Z}) \sum_{n=1}^N S_n \frac{f'_w}{f_w}(Z_n) dZ_1 dZ_2 \dots dZ_N \quad (1.9)$$

Si on choisit une règle de décision qui impose  $P_{FA}$  on obtient la formulation du détecteur localement optimum  $\Lambda_{lo}(\underline{Z})$  qui maximise la probabilité de détection.

$$\Lambda_{lo}(\underline{Z}) = -\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_n \cdot \left( \frac{f'_w}{f_w}(Z_n) \right) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_n \cdot G_w(Z_n) \quad (1.10)$$

Où  $G_w(Z_n)$  est, sauf pour des modèles de bruit particuliers, une fonction non linéaire.

$$G_w(Z_n) = G_{lo} = -\frac{f'_w}{f_w}(Z_n) \quad (1.11)$$

Le rapport  $\Lambda_{lo}$  dépend de la loi de densité de probabilité du bruit ce qui signifie que l'existence et la puissance du test seront fonction du modèle de bruit.

### Remarque :

Sur la figure (III-1.1) on retrouve l'expression de l'opérateur lorsque la décision est appliquée à un échantillon  $Z_n$  du signal.

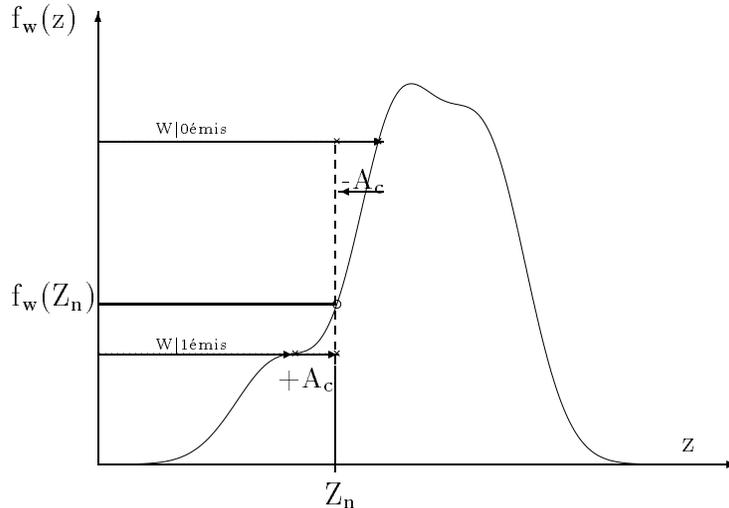


FIG. 1.1: Principe du détecteur localement optimal

En linéarisant la loi de probabilité autour de  $H_0$  on obtient :

$$\frac{f_w^1(Z_n)}{f_w^0(Z_n)} = \frac{f_w(Z_n) - S_n f'_w(Z_n)}{f_w(Z_n)} = 1 - S_n \frac{f'_w(Z_n)}{f_w(Z_n)} \quad (1.12)$$

### 1.1.2 Architecture du récepteur optimum

De l'expression de  $\Lambda_{10}$  donnée en (III-1.10) on déduit l'architecture du récepteur optimum présentée figure (III-1.2) :

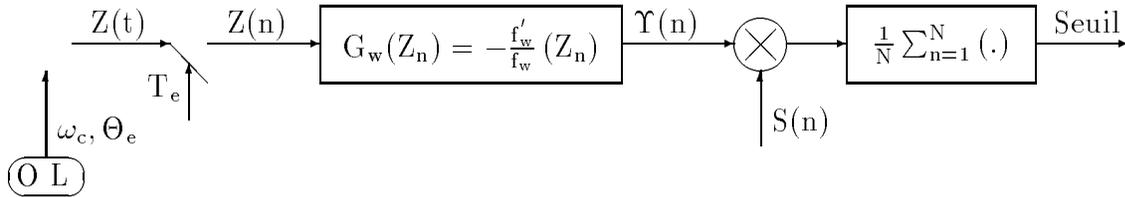


FIG. 1.2: Architecture du récepteur optimum

Cette architecture diffère, de par la présence de l'opérateur non linéaire  $G_w$ , du récepteur adapté défini en présence de bruit gaussien.

### 1.1.3 Propriété de l'opérateur

Pour étudier les propriétés du détecteur nous aurons besoin dans les développements qui suivent des caractéristiques statistiques de l'opérateur  $G_w$  et de sa dérivée. Ces caractéristiques sont déduites des propriétés de la loi de densité de probabilité du bruit données en (III-1.1)-(III-1.4).

**Expression de l'opérateur :**

$$G_w(x) = -\frac{f'_w}{f_w}(x) \text{ fonction impaire} \quad (1.13)$$

**Espérance de l'opérateur :**

$$\begin{aligned} E\{G_w\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} G_w(x) f_w(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{f'_w}{f_w}(x) \cdot f_w(x) dx \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f'_w(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

**Espérance de la dérivée de l'opérateur :**

$$\begin{aligned} E\{G'_w\} &= E\left\{\left(\frac{f'_w}{f_w}(x)\right)^2 - \left(\frac{f''_w}{f_w}(x)\right)\right\} \\ E\{G'_w\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} G_w^2(x) f_w(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f''_w(x) dx = E\{G_w^2(x)\} \\ &= E\{G_w^2(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_w^2(x) f_w(x) dx = I(f_w) \end{aligned} \quad (1.15)$$

L'espérance de  $G_w$  étant nulle,  $I(f_w)$  représente la variance de l'opérateur  $G_w$ . Nous étudierons  $I(f_w)$  appelée information de Fisher ([30], pp42-47) pour des modèles d'interférence classiques (bruit gaussien, bruit sinusoïdal,...). Nous admettrons dans les développements qui suivent que l'information de Fisher  $I(f_w)$  associée à  $f_w$  est finie :

$$I(f_w) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_w^2(x) f_w(x) dx < \infty \quad (1.16)$$

### 1.1.4 Convergence du test

Pour l'étude de la convergence nous supposons que le processus est stationnaire et ergodique.

- Sous l'hypothèse  $H_0$  le rapport  $\Lambda_{l_0}$  converge asymptotiquement vers 0 :

$$\Lambda_{l_0}(\mathbb{Z})|_{Z_n=W_n} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_n \cdot G_w(W_n)$$

$$\text{et } \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_n \cdot G_w(W_n) = E\{S_n\} \cdot E\{G_w\} = 0 \quad (1.17)$$

- Sous l'hypothèse  $H_1$ , le rapport converge  $\Lambda_{l_0}$  asymptotiquement vers  $P_s \cdot I(f_w)$  :

$$\Lambda_{l_0}(\mathbb{Z})|_{Z_n=W_n+S_n} = \frac{1}{N} \left( \sum_{n=1}^N S_n \cdot G_w(W_n) + \sum_{n=1}^N S_n^2 G'_w(W_n) \right)$$

$$\text{et } \lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda_{l_0}(\mathbb{Z})|_{Z_n=W_n+S_n} = E\{S_n^2\} \cdot E\{G'_w(W_n)\} = P_s \cdot I(f_w) \quad (1.18)$$

Le test converge sous les 2 hypothèses.

- Sous  $H_0$ ,  $\sqrt{N} \hat{\Lambda}_{l_0} \xrightarrow{\mathcal{L}_{oi}} \mathcal{N}(0, P_s I(f))$  :  $\Lambda_{l_0}$  converge presque sûrement vers 0 avec une variance qui vaut  $\frac{1}{N} P_s \cdot I(f_w)$ .
- Sous  $H_1$ ,  $\Lambda_{l_0}$  converge vers  $P_s I(f_w)$

La capacité de détection dépend de la puissance du signal et de  $I(f_w)$ , c'est à dire du modèle de bruit.

### 1.1.5 Fonction à maximiser en présence des termes d'ordre 2

Dans le récepteur adapté présenté chapitre précédent nous utilisons un détecteur quadratique. Nous mesurons ici l'influence des termes quadratiques. Nous utiliserons ces résultats

dans le chapitre qui suit. Le développement à l'ordre 2 de l'équation (III-1.6) donne :

$$f_{\underline{Z}}^1(\underline{Z}) = F_w(\underline{Z}) - \sum_{n=1}^N \frac{\partial F_w(\underline{Z})}{\partial Z_n} S_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\partial^2 F_w(\underline{Z})}{\partial Z_n \partial Z_m} S_n S_m + o(S^2) \quad (1.19)$$

Avec d'après (III-1.7):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\partial^2 F_w(\underline{Z})}{\partial Z_n \partial Z_m} S_n S_m &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N S_n S_m \frac{\partial}{\partial Z_n} \left( \frac{f'_w}{f_w}(Z_m) F_w(\underline{Z}) \right) \\ &= \sum_{n=1}^N S_n^2 \frac{\partial}{\partial Z_n} \left( \frac{f'_w}{f_w}(Z_n) F_w(\underline{Z}) \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N S_n S_m \frac{f'_w}{f_w}(Z_n) \frac{f'_w}{f_w}(Z_m) F_w(\underline{Z}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\partial^2 F_w(\underline{Z})}{\partial Z_n \partial Z_m} S_n S_m &= \sum_{n=1}^N S_n^2 \left( \frac{f''_w}{f_w}(Z_n) - \left( \frac{f'_w}{f_w}(Z_n) \right)^2 + \left( \frac{f'_w}{f_w}(Z_n) \right)^2 \right) F_w(\underline{Z}) \\ &\quad + F_w(\underline{Z}) \left( \sum_{n=1}^N S_n \frac{f'_w}{f_w}(Z_n) \right)^2 - F_w(\underline{Z}) \sum_{n=1}^N S_n^2 \left( \frac{f'_w}{f_w}(Z_n) \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\partial^2 F_w(\underline{Z})}{\partial Z_n \partial Z_m} S_n S_m &= F_w(\underline{Z}) \left( \sum_{n=1}^N S_n^2 \left( \frac{f''_w}{f_w}(Z_n) - \left( \frac{f'_w}{f_w}(Z_n) \right)^2 \right) + \left( \sum_{n=1}^N S_n \frac{f'_w}{f_w}(Z_n) \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (1.20)$$

De (III-1.19) et (III-1.20) on déduit  $\Lambda(\underline{Z})$ :

$$\begin{aligned} \Lambda(\underline{Z}) &= 1 - \sum_{n=1}^N S_n \frac{f'_w}{f_w}(Z_n) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N S_n^2 \left( \frac{f''_w}{f_w}(Z_n) - \left( \frac{f'_w}{f_w}(Z_n) \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^N S_n \frac{f'_w}{f_w}(Z_n) \right)^2 \\ &\quad + o(S^2) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Dans la formulation de la fonction à optimiser (III-1.21) on retrouve le terme du premier ordre qui conduit à la définition de l'indicateur  $\Lambda_{10}$ . Cet indicateur définit le récepteur optimum dont découle l'architecture présentée figure (III-1.2).

En ce qui concerne la convergence des termes fonction de  $S_n^2$  nous avons d'après (III-1.15):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_n^2 \left( \left( \frac{f''_w}{f_w}(Z_n) \right) - \left( \frac{f'_w}{f_w}(Z_n) \right)^2 \right) = -P_s I(f_w), \text{ p.s. sous } H_0 \text{ et } H_1 \quad (1.22)$$

Et d'après (III-1.17) et (III-1.18) :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left( \sum_{n=1}^N S_n \frac{f'_w}{f_w}(Z_n) \right)^2 \stackrel{\mathcal{L}oi}{=} (\mathcal{N}(0, P_s I(f)))^2 \text{ sous } H_0 \quad (1.23)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left( \sum_{n=1}^N S_n \frac{f'_w}{f_w}(Z_n) - N.P_s.I(f_w) \right)^2 \stackrel{\mathcal{L}oi}{=} (\mathcal{N}(0, P_s I(f)))^2 \text{ sous } H_1 \quad (1.24)$$

Nous obtenons pour cet indicateur une variable aléatoire qui converge en loi vers une loi du  $\chi^2$ . Par contre on a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \left( \sum_{n=1}^N S_n \frac{f'_w}{f_w}(Z_n) \right)^2 = 0 \text{ sous } H_0 \quad (1.25)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \left( \sum_{n=1}^N S_n \frac{f'_w}{f_w}(Z_n) \right)^2 = P_s^2 . I^2(f_w) \text{ sous } H_1 \quad (1.26)$$

En conclusion ne présentent un intérêt que les termes du 2<sup>ème</sup> degré qui dépendent de l'hypothèse sur le paramètre. Le premier terme qui converge vers  $-P_s I(f_w)$  quelque soit l'état de l'entrée est écarté de l'expression du test. On ne conservera que le deuxième terme qui représente le carré de  $\Lambda_{ol}$  dans l'expression du détecteur quadratique.

$$\Lambda_q = \frac{1}{N^2} \left( \sum_{n=1}^N S_n \frac{f'_w}{f_w}(Z_n) \right)^2 \quad (1.27)$$

Nous utiliserons ce résultat dans le chapitre suivant qui définit le détecteur quadratique optimum.

## 1.2 Performances du détecteur optimum

Les performances du récepteur GPS dépendent du rapport signal sur bruit à l'entrée des boucles de corrélation. **Pour les techniques présentées au chapitre 2 nous avons utilisé comme critère la mesure du gain de corrélation  $\Gamma$  défini par la relation (I-1.13). En admettant que le filtre éliminait totalement le signal d'interférence (gain de traitement  $\approx \gamma_{jg}$ ) cela revenait à la mesure de la puissance d'intercorrélation  $R_{pfp}$  en zéro. Nous considérons ici que le filtre préserve le signal GPS. Le gain de corrélation est alors unitaire. Les performances dépendent de l'atténuation apportée sur le signal d'interférence. Nous mesurons donc ici le gain de traitement, c'est à dire la différence en dB entre les rapports signal sur bruit (gaussien+interférence) mesurés avant et après traitement.**

Pour estimer le rapport signal sur bruit, en l'absence et en présence de l'opérateur non linéaire  $G_w$  nous utilisons le modèle du corrélateur défini ci dessous pour un signal unidimensionnel.

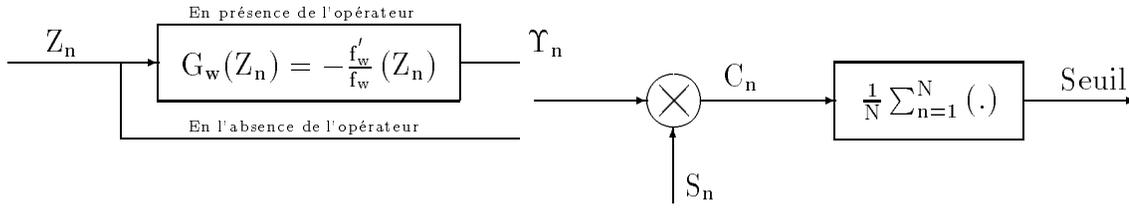


FIG. 1.3: Architecture du corrélateur

### 1.2.1 Rapport signal sur bruit en l'absence de l'opérateur

A l'entrée du récepteur numérique le signal s'écrit :

$$\begin{aligned} Z_n &= A_c.P_n + W_n = S_n + W_n && \text{Signal + Bruit} \\ S_n &\in (-A_c, +A_c) \end{aligned}$$

On peut exprimer, en sortie du corrélateur, les puissances de chaque composante et en déduire le rapport signal sur bruit (voir (I-1.10)) :

$$\begin{aligned} C_n &= S_n^2 + S_n W_n \\ P_s &= (E\{C_n\})^2 = E\{S_n^2\}^2 = A_c^4 && \text{Puissance du signal} \\ P_T &= E\{C_n^2\} && \text{Puissance totale} \\ P_w &= E\{C_n^2\} - (E\{C_n\})^2 && (1.28) \\ P_w &= E\{S_n^2\} E\{W_n^2\} = A_c^2 E\{W_n^2\} && \text{Puissance du bruit} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{sans\ opérateur} = \frac{A_c^2}{E\{W_n^2\}} \quad (1.29)$$

### 1.2.2 Rapport signal sur bruit en présence de l'opérateur

Pour exprimer le rapport signal sur bruit nous développons autour du bruit, comme nous l'avons fait pour le rapport de vraisemblance (voir équation (III-1.18)), l'expression du signal (noté  $\Upsilon$ ) en sortie de l'opérateur  $G_w$  :

$$\begin{aligned} \Upsilon_n &= G_w(Z_n)|_{Z_n=W_n+S_n} = G_w(W_n + S_n) \\ &= G_w(Z_n)|_{Z_n=W_n+S_n} = G_w(W_n) + G'_{w_n}.S_n \\ &= G_w(Z_n)|_{Z_n=W_n+S_n} = G_w(W_n) + \left( \left( \frac{f'_w}{f_w}(W_n) - \frac{f''_w}{f_w}(W_n) \right)^2 \right).S_n \end{aligned} \quad (1.30)$$

En sortie de l'opérateur le bruit est affecté de la non linéarité. Le gain sur la composante signal dépend de la pente de la non linéarité.

### Puissance du signal en sortie du corrélateur

$$\begin{aligned} C_n &= S_n^2 G'_{w_n} + S_n G_w(W_n) \\ P_s &= (E\{C_n\})^2 \\ P_s &= E\{S_n^2\}^2 (E\{G'_{w_n}\})^2 = A_c^4 (E\{G'_{w_n}\})^2 \end{aligned} \quad \text{Puissance du signal}$$

On obtient d'après (III-1.15) :

$$P_s = A_c^4 (E\{G'_{w_n}\})^2 = A_c^4 \left( E \left\{ \left( \frac{f'_w}{f_w}(W_n) \right)^2 - \frac{f''_w}{f_w}(W_n) \right\} \right)^2 = A_c^4 I^2(f_w) \quad (1.31)$$

$G'_{w_n}$  représente le gain appliqué localement (autour de  $W_n$ ) au signal. La puissance du signal en sortie du corrélateur se déduit de l'espérance de  $G'_{w_n}$  qui représente  $I(f_w)$ .

### Puissance du bruit en sortie du corrélateur

$$\begin{aligned} P_w &= E\{C_n^2\} - (E\{C_n\})^2 \\ P_w &= A_c^2 E\{(G_w(W_n))^2\} \\ P_w &= A_c^2 I(f_w) \end{aligned} \quad \text{D'après (III - 1.15)}$$

Le bruit est centré et de puissance proportionnelle à  $I(f_w)$ .

### Rapport signal sur bruit en sortie de l'opérateur

Le rapport signal sur bruit a donc pour valeur :

$$\Gamma_{avec\ opérateur} = \frac{A_c^4 \cdot I^2(f_w)}{A_c^2 \cdot I(f_w)} = A_c^2 \cdot I(f_w) \quad (1.32)$$

### 1.2.3 Gain de traitement

On en déduit le gain de traitement :

$$\begin{aligned} \Gamma_{sans\ opérateur} &= \frac{A_c^2}{E\{W_n^2\}} \\ \Gamma_{avec\ opérateur} &= A_c^2 \cdot I(f_w) \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} G_t &= \frac{\Gamma_{avec\ opérateur}}{\Gamma_{sans\ opérateur}} = E\{W_n^2\} \cdot I(f_w) \\ &= E\{W_n^2\} \cdot I(f_w) = E\{W_n^2\} \cdot E\{G_w^2\} = E\{W_n^2\} \cdot E\{G'_w\} \end{aligned}$$

Le gain dépend de la forme et de la puissance du bruit. Nous vérifions que le gain de traitement est supérieur à 1, c'est à dire que l'opérateur non linéaire améliore le rapport signal à bruit.

$$G_t = E\{W_n^2\}.I(f_w) = E\{W_n^2\}.E\{G_w^2\} \quad (1.34)$$

Nous utilisons l'inégalité de Schwartz :

$$(E\{W_n.G_w\})^2 \leq E\{W_n^2\}.E\{G_w^2\} \quad (1.35)$$

L'égalité est obtenue si et seulement si  $G_w(W_n) = \lambda W_n$ , c'est à dire si  $W_n$  est un bruit gaussien. Dans le cas contraire, en supposant que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x f'_w(x)| dx < \infty \quad \text{et} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} x f_w(x) = 0.$$

on obtient :

$$E\{W_n.G_w\} = \int_{-\infty}^{+\infty} -x f'_w(x) dx = [-x f_w(x)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f_w(x) dx = 1 \quad (1.36)$$

**Le gain de traitement est donc supérieur ou égal à 1 : l'opérateur améliore le rapport signal à bruit dès lors que le bruit est non gaussien.**

## 1.3 Application à des bruits particuliers

### 1.3.1 Bruits gaussiens

L'opérateur non linéaire est déduit de la loi de densité de probabilité du bruit :

$$G_w(x) = -\frac{f'_w(x)}{f_w(x)} \quad (1.37)$$

On a donc dans le cas gaussien :

$$\begin{cases} f_w(x) = f_g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_g^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_g^2}\right) \\ G_w(x) = G_g(x) = -\frac{f'_g(x)}{f_g(x)} = \frac{x}{\sigma_g^2} \end{cases} \quad (1.38)$$

L'opérateur est linéaire et le gain de traitement est égal à 1 :

$$I(f_w) = E\{G_w^2(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_w^2(x) f_g(x) dx = \frac{1}{\sigma_g^2} \quad (1.39)$$

La puissance du bruit est :

$$E\{W_n^2\} = \sigma_g^2 \quad (1.40)$$

Ei le gain de traitement est égal à 1.

$$Gt = 1 \quad (1.41)$$

### 1.3.2 Bruits sinusoïdaux

On considère ici que le bruit est un signal sinusoïdal de valeur efficace  $\sigma_j$ . Sa loi de densité de probabilité est :

$$f_w(x) = f_j(x) = \frac{1}{\sigma_j \pi \sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2\sigma_j^2}}} \quad \text{avec : } |x| < \sigma_j \sqrt{2} \quad (1.42)$$

Et :

$$G_w(x) = G_j(x) = -\frac{f'_j(x)}{f_j(x)} = -\frac{x}{2\sigma_j^2 \left(1 - \frac{x^2}{2\sigma_j^2}\right)} \quad (1.43)$$

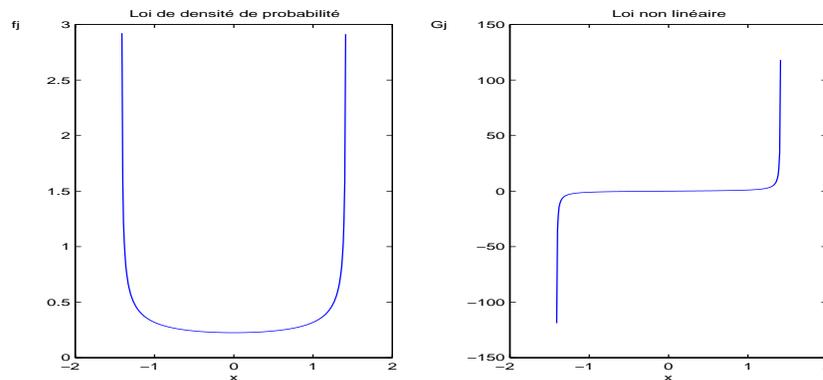


FIG. 1.4: Lois pour  $\sigma_j = 1$

Pour ce type de bruit la propriété (III-1.2) n'est pas vérifiée. L'opérateur  $G_w$  est infini aux valeurs extrêmes du bruit et le gain de traitement est théoriquement infini.

Il faut toutefois remarquer que, en pratique, l'opérateur ne pourra prendre des valeurs à l'extérieur de la plage de quantification  $[-A_M, A_M]$  et l'expression de l'opérateur est la suivante :

$$G_Q(x) = \begin{cases} -A_M & \text{si } G_w(x) \leq -A_M \\ G(x) & \text{si } |G_w(x)| \leq A_M \\ A_M & \text{si } G_w(x) \geq A_M \end{cases}$$

### 1.3.3 Bruits composites : bruit sinusoïdal + bruit gaussien

On s'intéresse ici à un bruit constitué d'un signal sinusoïdal et d'un bruit gaussien. Les lois de densité de probabilité respectives sont :

$$f_j(x) = \frac{1}{\sigma_j \pi \sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2\sigma_j^2}}} \quad \text{avec : } |x| < \sigma_j \sqrt{2} \quad (1.44)$$

$$f_g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_g^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_g^2}\right) \quad (1.45)$$

La loi de  $W = J + G$  est :

$$f_w(x) = \int_{-\sigma_j \sqrt{2}}^{+\sigma_j \sqrt{2}} f_j(y) \cdot f_g(x - y) dy \quad (1.46)$$

On calcule numériquement cette intégrale, en posant, pour supprimer les singularités aux bornes :

$$y = \sigma_j \sqrt{2} \cos(\theta) dy = -\sigma_j \sqrt{2} \sin(\theta) \quad (1.47)$$

On obtient :

$$f_w(x) = \frac{2}{\pi \sigma_g \sqrt{2\pi}} \int_0^\pi \exp\left(-\frac{(x - \sigma_j \sqrt{2} \cos(\theta))^2}{2\sigma_g^2}\right) d\theta \quad (1.48)$$

Les représentations des lois  $f_w$  et des lois  $G_w$  obtenues numériquement sont représentées figure (III-1.5), pour différentes valeurs du rapport  $J/G$  ( $J$ , puissance du bruit sinusoïdal et  $G$ , puissance du bruit gaussien).

$$\frac{J}{G} = \frac{\sigma_j^2}{\sigma_g^2}$$

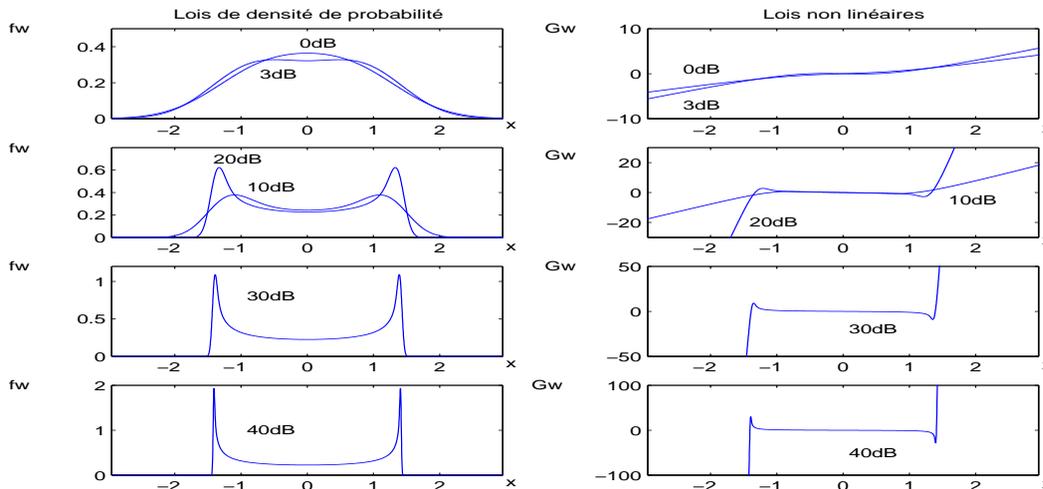


FIG. 1.5: Lois pour des rapports  $J/G$  variant de 0dB à 40dB

Le gain de traitement est également calculé de manière numérique, à partir de ces représentations. Les résultats sont présentés dans le tableau (III-1.3.3).

Rapport J/G	0dB	3dB	10dB	20dB	30dB	40dB
Gain de Traitement	0,1dB	0,8dB	4,7dB	11,9dB	19,6dB	27,6dB

Tableau 1.3.3 : Gain de Traitement

## 1.4 Simulation du récepteur optimum

### 1.4.1 Conditions de simulation

Il s'agit d'évaluer le gain de traitement à partir d'une simulation réalisée sur 20 millions d'échantillons. Le modèle de simulation est donné figure (III-1.6). La puissance du signal est maintenue 20dB en dessous de la puissance du bruit gaussien.

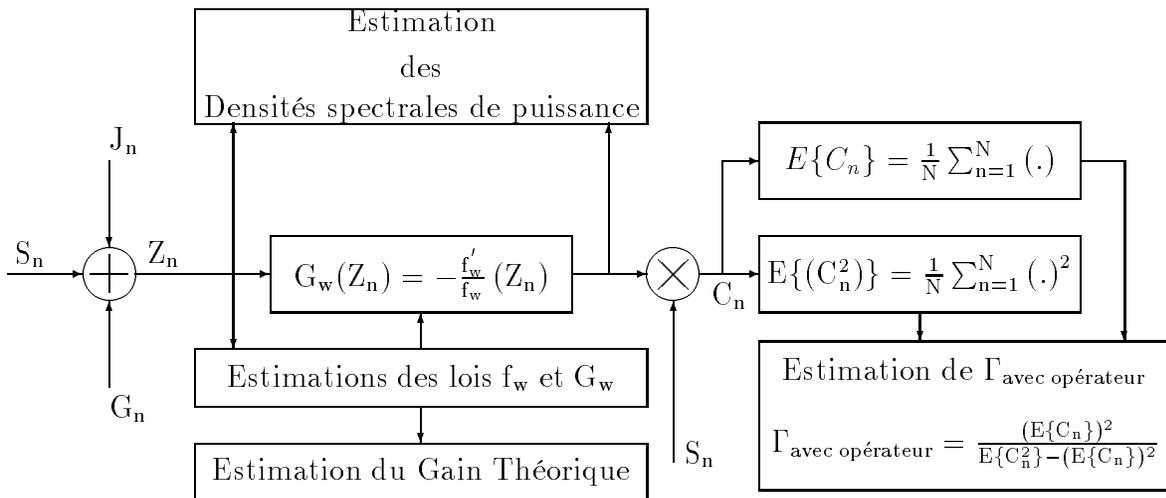


FIG. 1.6: *Modèle de simulation*

### 1.4.2 Représentations du bruit

Nous étudions dans ce cas le comportement du détecteur pour différentes représentations du bruit :

- **Bruit blanc gaussien**

L'opérateur optimal ne présente dans ce cas aucun intérêt. Nous validons dans cette configuration les conditions expérimentales (quantification, estimation, etc). Nous vérifions que le gain de traitement est égal à l'unité.

- **Bruit blanc gaussien+1CWI, J/G  $\in$  [10dB, 20dB, 30dB, 40dB]**

Nous mesurons les performances du traitement qui, conformément à l'étude théorique, sont d'autant meilleures que  $J/G$  est grand. Nous ne prenons que des valeurs de  $J/G$  supérieures ou égales à 10dB puisque nous avons montré que le gain de traitement est faible en deça de cette valeur. La simulation est également appliquée à des brouilleurs modulés en fréquence et à des brouilleurs pulsés.

- **Bruit blanc gaussien + 2 CWIs**,  $J_1/G = J_2/G = 30\text{dB}$
- **Bruit blanc gaussien + 3 CWIs**,  $J_1/G = J_2/G = J_3/G = 30\text{dB}$
- **Bruit blanc gaussien + CWI pulsée à 50%**,  $J/G = 30\text{dB}$
- **Bruit blanc gaussien + CWI balayée sur  $\Delta f = 0,1$  à  $10^{-5}\text{Hz}$** ,  $J/G = 30\text{dB}$

### 1.4.3 Estimation des lois $f_w$ et $G_w$

#### Estimation de la loi de densité de probabilité

En prenant pour hypothèse que la densité de probabilité du bruit est égale à la densité de probabilité du signal appliqué à l'entrée de l'opérateur (rapport bruit sur signal  $> 20\text{dB}$  :  $W_n \simeq Z_n$ ), il est possible d'estimer  $f_w$  à partir des échantillons  $Z_n$ .

Cette opération est réalisée à partir d'échantillons quantifiés sur  $N_n = 256$  niveaux. Le facteur de crête à l'entrée du quantifieur est fixée à  $k_c = 1.7$  (appliqué en présence d'interférence pour des brouilleurs pulsés). Cette valeur du facteur de crête entraîne, pour des bruits gaussiens, des bruits de quantification et d'écrêtage de puissances respectives :

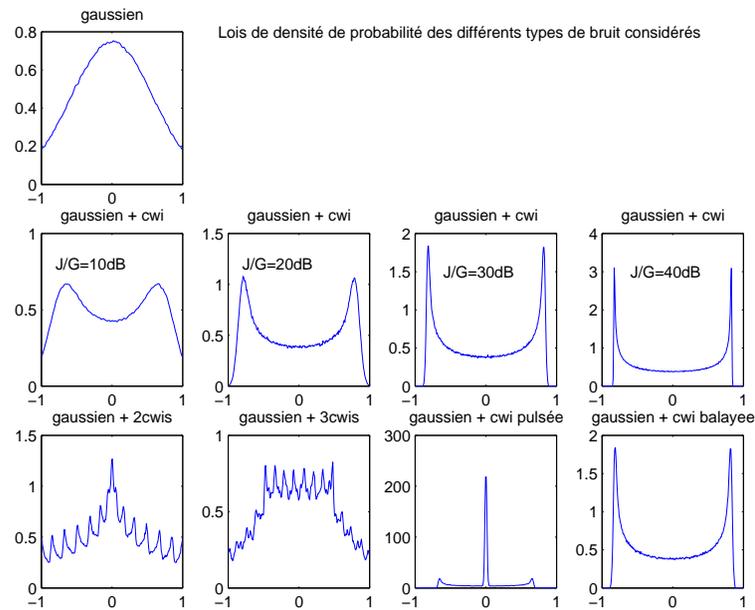
$$N_q = \frac{1}{3} \left( \frac{k_c}{N_n} \right)^2 \text{erfc} \left( \frac{k_c}{\sqrt{2}} \right) \cdot \sigma^2 = 1,3 \cdot 10^{-5} \sigma^2 \quad (1.49)$$

$$N_e = \left( \left( 1 + k_c^2 \right) \text{erfc} \left( \frac{k}{\sqrt{2}} \right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} k_c e^{-\frac{k^2}{2}} \right) \cdot \sigma^2 = 0,027 \sigma^2 \quad (1.50)$$

Nous obtenons ainsi une représentation discrète de la loi de  $f_w$  en réalisant, sur des paquets de 2048 échantillons, des histogrammes sur 256 tranches réparties uniformément sur  $[-k_c \sqrt{P_w} : +k_c \sqrt{P_w}]$  où  $P_w$  est la puissance du bruit.

Dans cette partie nous ne traitons que des signaux stationnaires. Nous pouvons donc appliquer un filtrage temporel de manière à ramener la variance d'estimation à une valeur négligeable. Pour des bruits gaussiens nous appliquons sur l'histogramme obtenu un filtrage spatial réalisé sur 5 tranches adjacentes.

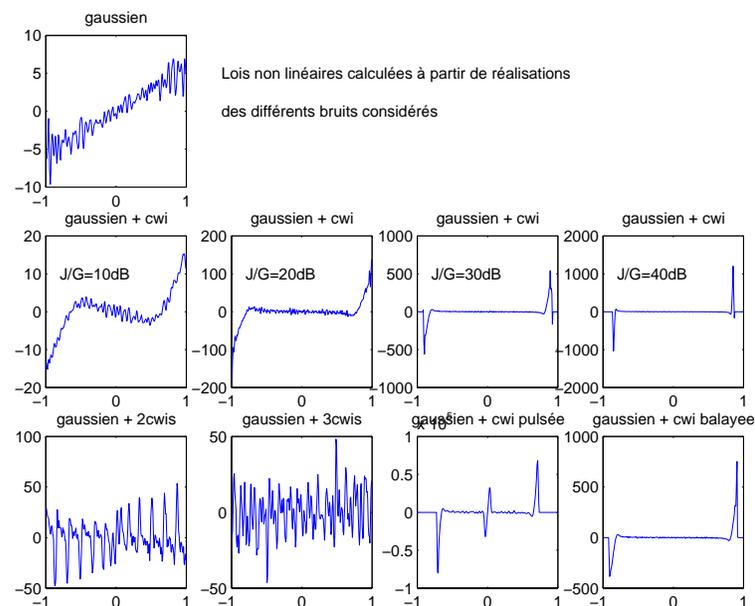
Sur la figure (III-1.7) nous montrons les lois de densité de probabilité obtenues pour différentes représentations du bruit.

FIG. 1.7: *Lois de densité de probabilité estimées*

### Estimation de la loi non linéaire

La loi  $G_w$  est déduite de la loi de densité de probabilité estimée, la dérivée de  $f_w$  étant obtenue par différence de 2 tranches successives de l'histogramme.

La figure (III-1.8) représente les lois non linéaires obtenues à partir des lois de probabilités estimées ci-dessus.

FIG. 1.8: *Lois non linéaires estimées*

### 1.4.4 Estimation du gain de traitement théorique

Le gain de traitement théorique est directement déduit des équations (III-1.33) qui utilisent l'information de Fisher  $I(f_w)$  :

$$G_t = \frac{\Gamma_{avec\ opérateur}}{\Gamma_{sans\ opérateur}} = E\{W_n^2\} \cdot I(f_w) \quad (1.51)$$

$I(f_w)$  qui représente la variance du bruit filtré par l'opérateur non linéaire est calculée numériquement à partir des estimations  $G_w$  représentées figure (III-1.8). Le tableau (III-1.4.4) donne les gains théoriques ainsi obtenus. Ces résultats sont cohérents, dans le cas de bruits "gaussien+1CWI", avec ceux du tableau (III-1.3.3) établi dans l'approche théorique.

Bruit	gaussien	gaussien + 1 CWI	gaussien + 1 CWI	gaussien +1 CWI	gaussien + 1 CWI
Rapport J/G		10dB	20dB	30dB	40dB
Gain estimé	-1dB	2,7dB	12dB	19,4dB	26,7dB
Bruit	gaussien +2 CWIs	gaussien +3 CWIs	gaussien +1 CWI pulsée	gaussien +1 CWI balayée	
Rapport J/G	30dB	30dB	30dB	30dB	
Gain estimé	12,6dB	10,2dB	23,6dB	19,3dB	

Tableau 1.4.4: Gains théoriques estimés en simulation

### 1.4.5 Estimation des densités spectrales de puissance

Les densités spectrales sont obtenues par la méthode du périodogramme cumulé appliquée à des paquets de 2048 échantillons.

Nous représentons figures (III-1.9) et (III-1.10) les densités spectrales avant et après l'opérateur pour les signaux étudiés. Le traitement réalisé permet un adoucissement du spectre en sortie particulièrement marqué pour des niveaux de J/S élevés.

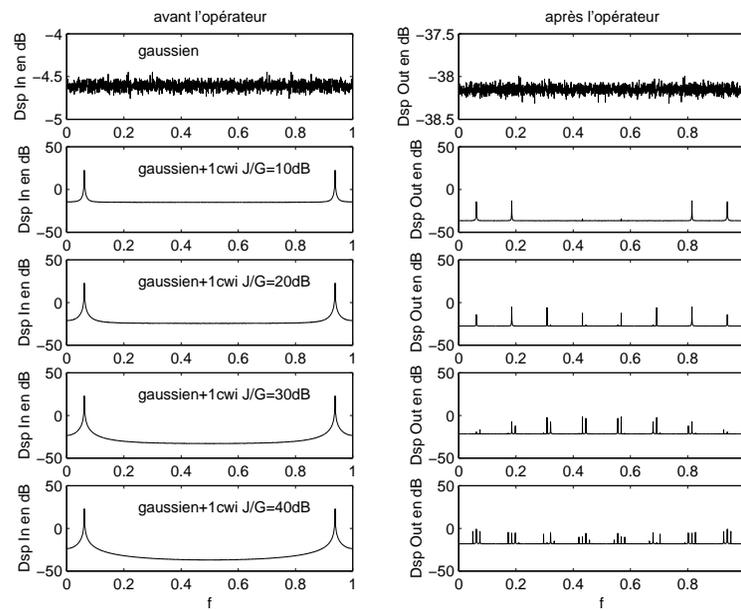


FIG. 1.9: *Bruits gaussien, gaussien+cwi: Densités spectrales de puissance*

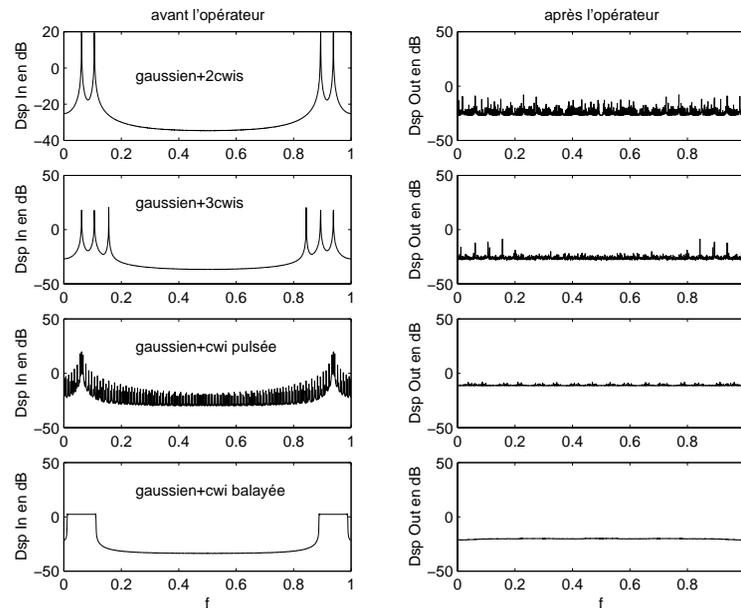


FIG. 1.10: *Interférences multiples, pulsée, balayée: Densités spectrales de puissance*

### 1.4.6 Estimation du gain de traitement par corrélation

Le gain de traitement est obtenu par corrélation conformément aux relations (III-1.28). La puissance du signal est déduite de la moyenne du signal, noté  $C_n$  sur la figure (III-1.6) qui présente le simulateur, et la puissance totale de la moyenne quadratique de ce signal  $C_n$ .

L'estimation de ces 2 grandeurs permet d'obtenir le gain de traitement :

$$\begin{cases} \Gamma_{avec\ opérateur} = \frac{(E\{C_n\})^2}{E\{C_n^2\} - (E\{C_n\})^2} \\ G_t = \frac{\Gamma_{avec\ opérateur}}{\Gamma_{sans\ opérateur}} \end{cases} \quad (1.52)$$

Ce gain est donc déduit des estimations réalisées en simulation à partir de 20 millions d'échantillons du signal d'entrée. Le tableau (III-1.4.6) présente les résultats obtenus et rappelle les gains théoriques estimés à partir de  $I(f_w)$  donnés tableau (III-1.4.4). On peut constater que les 2 méthodes d'estimation du gain donnent des résultats similaires. Par ailleurs, conformément à l'étude théorique, les performances obtenues pour des rapports J/S élevés justifient cette évolution du récepteur adapté pour la réjection des signaux d'interférence.

Bruit	gaussien	gaussien + 1 CWI	gaussien + 1 CWI	gaussien +1 CWI	gaussien + 1 CWI
Rapport J/G		10dB	20dB	30dB	40dB
Gain estimé à partir de $I(f_w)$	-1dB	2,7dB	12dB	19,4dB	26,7dB
Gain estimé par corrélation	-0,4dB	4dB	11,4dB	19,2dB	25,2dB
Bruit	gaussien +2 CWIs	gaussien +3 CWIs	gaussien +1 CWI pulsée	gaussien +1 CWI balayée	
Rapport J/G	30dB	30dB	30dB	30dB	
Gain estimé à partir de $I(f_w)$	12,6dB	10,2dB	25,6dB	19,3dB	
Gain estimé par corrélation	10,7dB	11,9dB	24,4dB	18,9dB	

**Tableau 1.4.6 : Gains théoriques et Gains par corrélation obtenus en simulation**

## 1.5 Conclusions

Dans le cadre de nos travaux visant la réjection des signaux de brouillage. Il est donc intéressant d'utiliser le détecteur optimum appliqué au signal monodimensionnel avant les boucles de corrélation. Cette étude amène plusieurs remarques :

- Le gain de traitement dépend de la variance de  $G_w$ . De part la construction de  $G_w$ , le gain sera d'autant meilleur que le support de  $f_w$  est étroit (concentration du signal en amplitude).
- En présence d'un bruit sinusoïdal le gain de traitement théorique est infini. La technique ne dégradant pas le signal GPS, nous obtenons alors pour le rapport  $\Gamma$  défini par la relation (I-1.9) la valeur idéale obtenue en l'absence d'interférence.
- Le gain de traitement se dégrade lorsque le nombre de CWIs augmente, la statistique du bruit prenant l'allure d'une gaussienne (Cf figure (III-1.11)). Le gain de traitement obtenu est alors très faible (3.6dB pour 10 CWIs),

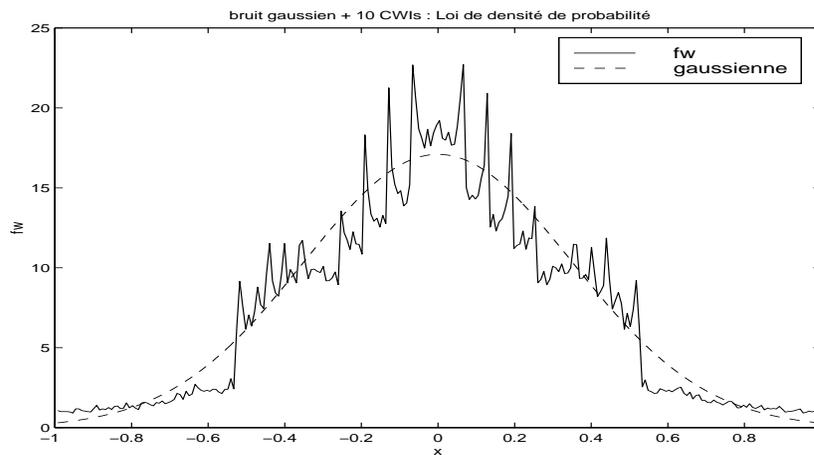


FIG. 1.11: *Loi de probabilité pour 10 CWIs*

- La mise en œuvre passe par une estimation de la loi de densité de probabilité. Dans les phases transitoires (apparition ou disparition d'un signal d'interférence) l'estimation de la loi de densité de probabilité, qui ici est réalisée par filtrage temporel des histogrammes obtenus sur des paquets de 2048 échantillons du signal, n'est pas correcte et le détecteur n'est pas efficace, voire gênant.
- Cette architecture ne peut s'appliquer au récepteur non cohérent. En raison de l'erreur de phase, que l'on considère uniformément répartie sur  $[0 - 2\pi]$ , le signal doit être projeté sur 2 voies en quadrature, les 2 projections représentant l'enveloppe complexe du signal. Les termes d'ordre 1 de la décomposition en série de Taylor sont alors nuls en moyenne : le détecteur quadratique doit être utilisé.



## Chapitre 2

# Le récepteur GPS en présence de bruits non gaussiens

Dans le chapitre qui précède nous avons défini le récepteur optimum, en présence de bruits non gaussiens, dans le cas d'un signal unidimensionnel. Cette méthode repose sur l'application d'un opérateur non linéaire déduit de la statistique du bruit. Nous avons par ailleurs montré que les performances obtenues étaient étroitement liées aux caractéristiques de loi de densité de probabilité du bruit. A l'extrême, pour une représentation gaussienne de cette loi le gain obtenu est égal à 1.

Nous élargissons ici cette étude au détecteur quadratique présenté dans la première partie de ce document. La théorie de la détection est appliquée au couple de signaux  $X, Y$  généré à l'entrée du récepteur numérique, après projection du signal d'entrée sur deux voies en quadrature. Nous montrons que, dans ce cas, il est intéressant de représenter ce couple  $X, Y$  par son amplitude et sa phase. Cette étude conduit à définir la forme de la non linéarité affectée à l'amplitude du signal. La méthode est ainsi connue sous le nom de ADP "Amplitude Domain Processing". Le récepteur obtenu diffère du récepteur classique, défini dans la première partie, de par la présence d'une non linéarité qui affecte l'amplitude du signal complexe.

Nous appliquons cette technique au signal GPS. Comme dans le chapitre précédent nous nous trouvons en présence d'un signal noyé dans un bruit. Le bruit considéré ici est le bruit blanc additif gaussien généré dans le canal de transmission et le bruit lié à la présence de signaux d'interférence (CWI, CWIs multiples, CWI pulsée, CWI modulée en fréquence). Nous donnons pour ces signaux d'interférence l'expression de la loi de probabilité du bruit, de la non linéarité et du gain de traitement. Ces expressions sont obtenues par des méthodes analytiques. Une simulation de Monte Carlo permet de valider ces résultats théoriques.

## 2.1 Définition du problème

Nous appliquons donc la théorie de la décision comme nous l'avons fait au chapitre précédent. Nous considérons ici le signal complexe généré à l'entrée des boucles du corrélateur. Ce signal est obtenu en multipliant le signal d'entrée du récepteur numérique par 2 signaux sinusoïdaux en quadrature.

$$Z_n = A_c \cdot P_n \exp\{i\Theta_{s_n}\} + W_n = S_n + W_n$$

Le signal  $S_n$  représente le signal GPS en Bande de base. La phase de ce signal  $\Theta_s$  modélise l'erreur d'estimation dans un récepteur non cohérent. **Nous admettons que cette erreur de phase est uniformément répartie sur  $[0, 2\pi]$ , qu'elle varie très peu sur la durée du filtre de prédétection.** Le bruit incluant la composante gaussienne et le signal d'interférence est modélisé par  $W_n$ .

La notation complexe permet de manipuler conjointement les variables aléatoires  $X$  et  $Y$ . Elle peut utiliser les coordonnées polaires amplitude, phase ou les coordonnées rectangulaires partie réelle, partie imaginaire :

$$\begin{cases} Z_n = R_n \exp(i\Theta_n) \\ Z_n = X_n + jY_n \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} X_n = R_{s_n} \cdot \cos \Theta_{s_n} + R_{w_n} \cdot \cos \Theta_{w_n} = S_{x_n} + W_{x_n} \\ Y_n = R_{s_n} \cdot \sin \Theta_{s_n} + R_{w_n} \cdot \sin \Theta_{w_n} = S_{y_n} + W_{y_n} \end{cases}$$

## 2.2 Récepteur optimum

### 2.2.1 Principe

Le bruit est ici représenté par deux composantes indépendantes en quadrature. Comme dans le chapitre qui précède les bruits sont supposés indépendants et stationnaires et nous

supposons connue la loi de densité de probabilité conjointe que nous notons  $f_{ww}(x, y)$  :

$$f_{ww}(z) = f_{ww}(x, y) = f_{w_x}(x) \cdot f_{w_y}(y) \quad (2.1)$$

Nous posons, pour dériver le récepteur optimum, le problème de détection correspondant aux 2 hypothèses ci dessous [31] [33] :

$$H_1 : \begin{cases} X_n = S_{x_n} + W_{x_n} \\ Y_n = S_{y_n} + W_{y_n} \end{cases}$$

Et :

$$H_0 : \begin{cases} X_n = W_{x_n} \\ Y_n = W_{y_n} \end{cases}$$

Le vecteur d'observation étant noté  $\underline{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$ , nous définissons les lois de probabilité conditionnelles de  $\underline{Z}$  qui permettent d'établir le rapport de vraisemblance.

Nous obtenons sous l'hypothèse  $H_0$  :

$$f_{\underline{Z}}^0(\underline{Z}) = \prod_{n=1}^N f_{ww}(X_n, Y_n) = F_{ww}(\underline{X}, \underline{Y}) = F_{ww}(\underline{Z}) \quad (2.2)$$

et, sous l'hypothèse  $H_1$  :

$$f_{\underline{Z}}^1(\underline{Z}) = \prod_{n=1}^N f_{ww}(X_n - S_{x_n}, Y_n - S_{y_n}) \quad (2.3)$$

Le rapport de vraisemblance étant :

$$\Lambda(\underline{Z}) = \frac{f_{\underline{Z}}^1(\underline{Z})}{f_{\underline{Z}}^0(\underline{Z})} \quad (2.4)$$

### 2.2.2 Rapport de vraisemblance

Nous explicitons le rapport de vraisemblance pour définir l'architecture du récepteur optimum.

$$\Lambda(\underline{Z}) = \frac{f_{\underline{Z}}^1(\underline{Z})}{f_{\underline{Z}}^0(\underline{Z})} = \frac{\prod_{n=1}^N f_{ww}(X_n - S_{x_n}, Y_n - S_{y_n})}{\prod_{n=1}^N f_{ww}(X_n, Y_n)} \quad (2.5)$$

$$\Lambda(\underline{Z}) = \frac{f_{\underline{Z}}^1(\underline{Z})}{f_{\underline{Z}}^0(\underline{Z})} = \frac{F_{ww}(\underline{X} - \underline{S}_x, \underline{Y} - \underline{S}_y)}{F_{ww}(\underline{Z})} \quad (2.6)$$

Ce rapport est obtenu en décomposant, sous l'hypothèse de faible rapport signal à bruit, la fonction  $f_{\underline{Z}}^1$  en série de Taylor autour de sa valeur  $F_{ww}(\underline{Z})$  prise sous l'hypothèse  $H_0$ . Les développements sont donnés en annexe 5.

Pour un récepteur non cohérent la phase du signal peut être considérée, sur un intervalle d'intégration suffisamment long, comme étant uniformément répartie sur  $[0, 2\pi]$ . Nous rappelons que cette hypothèse justifie l'utilisation du détecteur quadratique dans le récepteur conventionnel. On obtient alors en moyenne :

$$\begin{aligned} E_{\Theta_s} \{\Lambda(\underline{Z})\} - 1 = & + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^N R_{s_n}^2 \left( \frac{\Delta f_{ww}}{f_{ww}}(Z_n) - \left\| \frac{\nabla f_{ww}}{f_{ww}}(Z_n) \right\|^2 \right) \\ & + \frac{1}{4} \left( \left( \sum_{n=1}^N R_{s_n} \frac{\partial f_{ww}}{\partial X}(Z_n) \right)^2 + \left( \sum_{n=1}^N R_{s_n} \frac{\partial f_{ww}}{\partial Y}(Z_n) \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dans cette expression, l'amplitude du signal GPS complexe  $R_{s_n}$  est affectée d'un gain qui dépend de la dérivée de la loi conjointe  $f_{ww}$  exprimée autour du bruit.

### 2.2.3 Expression de la fonction test

Pour définir la fonction test nous étudions la convergence de l'expression (III-2.7) qui définit le rapport de vraisemblance. Pour le premier terme de cette expression nous obtenons, comme pour le signal unidimensionnel traité dans le chapitre qui précède (voir ((III-1.22))), une convergence indépendante de l'hypothèse.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N R_{s_n}^2 \left( \frac{\Delta f_{ww}}{f_{ww}}(Z_n) - \left\| \frac{\nabla f_{ww}}{f_{ww}}(Z_n) \right\|^2 \right) = 2.P_s.I(f_{ww}) \text{ sous } H_0 \text{ et } H_1 \quad (2.8)$$

L'expression de la fonction test se limite donc au deuxième terme du rapport de vraisemblance (III-2.7). La fonction test notée  $\Lambda_q$  est :

$$\Lambda_q = \frac{1}{N^2} \left( \left( \sum_{n=1}^N R_{s_n} \frac{\partial f_{ww}}{\partial X} (Z_n) \right)^2 + \left( \sum_{n=1}^N R_{s_n} \frac{\partial f_{ww}}{\partial Y} (Z_n) \right)^2 \right) \quad (2.9)$$

Cet indicateur converge asymptotiquement d'après (III-1.25) et (III-1.26).

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \left( \left( \sum_{n=1}^N R_{s_n} \frac{\partial f_{ww}}{\partial X} (Z_n) \right)^2 + \left( \sum_{n=1}^N R_{s_n} \frac{\partial f_{ww}}{\partial Y} (Z_n) \right)^2 \right) = 0 \quad \text{sous } H_0$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \left( \left( \sum_{n=1}^N R_{s_n} \frac{\partial f_{ww}}{\partial X} (Z_n) \right)^2 + \left( \sum_{n=1}^N R_{s_n} \frac{\partial f_{ww}}{\partial Y} (Z_n) \right)^2 \right) = 2P_s^2 \cdot I^2(f_{ww}) \quad \text{sous } H_1$$

L'opération de détection revient donc à tester le rapport  $\Lambda_q$  donné en (III-2.9). La puissance du test dépend de la puissance du signal et de la forme du bruit qui détermine le gain appliqué au signal GPS.

### 2.2.4 Architecture du récepteur localement optimum

L'architecture du récepteur optimum (III-2.1) procède de l'expression (III-2.9). Elle diffère du récepteur défini pour un bruit gaussien de par la présence d'une non linéarité appliquée aux 2 composantes X et Y du signal complexe. Pour de faibles rapports signal sur bruit cette non linéarité est déduite de la statistique du bruit (loi conjointe  $f_{ww}(x, y)$ ).

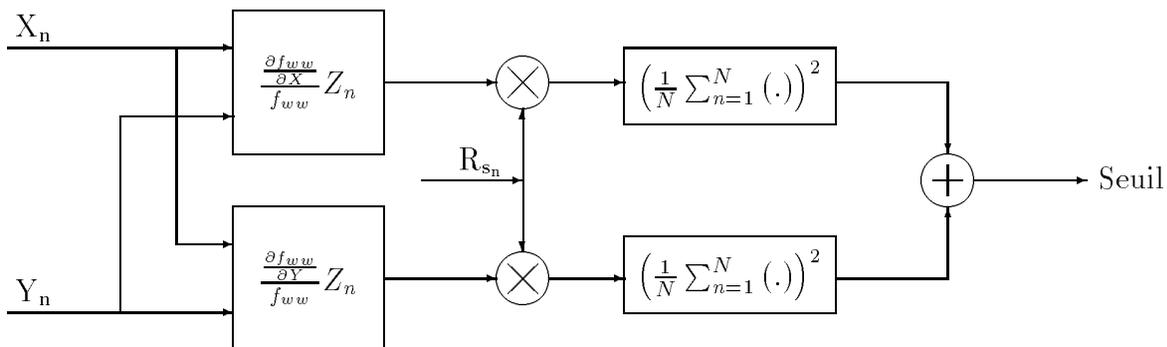


FIG. 2.1: Architecture du récepteur optimum

## 2.3 Construction d'un signal unidimensionnel

### 2.3.1 Intérêt

L'architecture du récepteur optimum présenté figure (III-2.1) montre le principe de la détection appliquée aux signaux en phase et en quadrature que nous avons notés  $X$  et  $Y$ . Comme dans le cas du récepteur unidimensionnel, ce schéma diffère du schéma du détecteur quadratique classique de par la présence d'un élément non linéaire dans la chaîne. **Ici, la difficulté réside dans le fait que l'opérateur est déduit de la loi conjointe  $f_{ww}(x, y)$ , loi qu'il n'est pas facile d'estimer.**

Il est donc préférable, pour se ramener à une variable unidimensionnelle, d'appliquer le traitement au signal complexe représenté en coordonnées polaires [31] [32]:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_n = X_n + jY_n \quad \text{Enveloppe complexe du signal en coordonnées rectangulaires} \\ Z_n = R_n e^{i\Theta_n} \quad \text{Enveloppe complexe du signal en coordonnées polaires} \end{array} \right.$$

Si le bruit est à symétrie circulaire ce qui est vrai pour le bruit gaussien et que nous supposons vrai pour les bruits sinusoïdaux, nous pouvons passer, les courbes d'équidensité étant représentées par des cercles, de la variable aléatoire  $Z$  à deux dimensions à la variable aléatoire  $R$  qui représente l'amplitude du signal. Le récepteur optimum est ainsi conçu selon le modèle (III-2.2). Le traitement non linéaire est déduit de la statistique de l'amplitude  $R$ .

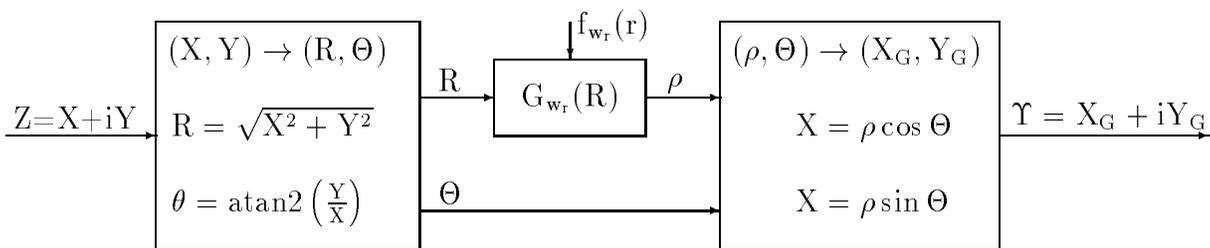


FIG. 2.2: *Modèle de traitement des amplitudes*

### 2.3.2 Expression de l'opérateur non linéaire

Il s'agit de déterminer l'expression de l'opérateur non linéaire  $G_{wr}$  à partir de la loi de densité de probabilité de  $R$  notée  $f_{wr}$ .

Sous l'hypothèse de faible rapport signal à bruit on admet que :

$$\frac{\frac{\partial f_{ww}}{\partial X}(Z_n)}{f_{ww}} \sim \frac{\frac{\partial f_{ww}}{\partial X}(W_n)}{f_{ww}} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{\partial f_{ww}}{\partial Y}(Z_n)}{f_{ww}} \sim \frac{\frac{\partial f_{ww}}{\partial Y}(W_n)}{f_{ww}} \quad \text{indépendants de } R_{s_n}$$

Nous utilisons alors la propriété (III-2.10) donnée pour des symboles indépendants et équiprobales.

$$E \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{k=1, k \neq n}^N R_{s_n} R_{s_k} \left( \frac{\frac{\partial f_{ww}}{\partial X}(Z_n)}{f_{ww}} \frac{\frac{\partial f_{ww}}{\partial X}(Z_k)}{f_{ww}} + \frac{\frac{\partial f_{ww}}{\partial Y}(Z_n)}{f_{ww}} \frac{\frac{\partial f_{ww}}{\partial Y}(Z_k)}{f_{ww}} \right) \right\} = 0 \quad (2.10)$$

Cette propriété permet de substituer la somme des carrés au carré de la somme dans (III-2.9). On obtient alors pour expression du rapport  $\Lambda_q$ :

$$\begin{aligned} \Lambda_q &= \frac{1}{N^2} \left( \left( \sum_{n=1}^N R_{s_n} \frac{\frac{\partial f_{ww}}{\partial X}(Z_n)}{f_{ww}} \right)^2 + \left( \sum_{n=1}^N R_{s_n} \frac{\frac{\partial f_{ww}}{\partial Y}(Z_n)}{f_{ww}} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N R_{s_n}^2 \left( \left( \frac{\frac{\partial f_{ww}}{\partial X}(Z_n)}{f_{ww}} \right)^2 + \left( \frac{\frac{\partial f_{ww}}{\partial Y}(Z_n)}{f_{ww}} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Nous posons  $f_r(\mathbf{R}, \Theta) = f_r(\mathbf{R}) = f_{ww}(X, Y)|_{R=\sqrt{X^2+Y^2}}$  et nous utilisons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial f_{ww}}{\partial X}(Z_n)}{f_{ww}} &= \frac{\frac{\partial f_r}{\partial R}(R_n)}{f_r} \frac{\partial R}{\partial X}(Z_n) \Big|_{R_n=\sqrt{X_n^2+Y_n^2}}, \quad \frac{\frac{\partial f_{ww}}{\partial Y}(Z_n)}{f_{ww}} = \frac{\frac{\partial f_r}{\partial R}(R_n)}{f_r} \frac{\partial R}{\partial Y}(Z_n) \Big|_{R_n=\sqrt{X_n^2+Y_n^2}} \\ \text{avec} \quad \frac{\partial R}{\partial X}(Z_n) &= \frac{X_n}{R_n}, \quad \frac{\partial R}{\partial Y}(Z_n) = \frac{Y_n}{R_n} \end{aligned}$$

Le rapport  $\Lambda_q$  peut alors s'exprimer en fonction de  $\mathbf{R} = (R_0, R_1, \dots, R_n)$ :

$$\Lambda_q(\mathbf{R}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N R_{s_n}^2 \left( \frac{\frac{\partial f_r}{\partial R}(R_n)}{f_r} \right)^2 \left( \frac{X_n^2 + Y_n^2}{R_n^2} \right) \Big|_{X_n^2 + Y_n^2 = R_n^2} = \sum_{n=1}^N R_{s_n}^2 \left( \frac{\frac{\partial f_r}{\partial R}(R_n)}{f_r} \right)^2$$

L'opérateur non linéaire du détecteur optimum peut ainsi se déduire des propriétés statistiques de  $\mathbf{R}$ . Nous pouvons exprimer la loi  $f_r$  en fonction de la loi de densité de probabilité

des amplitudes  $f_{w_r}$ . Pour un bruit à symétrie de révolution on a :

$$f_{w_r}(r).dr = Prob(r < R < r + dr) = \left( \int_0^{2\pi} f_r(r).rd\Theta \right) .dr = 2\pi r f_r(r)dr$$

$$f_{w_r}(r) = 2\pi r f_r(r)$$

D'où on déduit l'expression de  $\Lambda_q$  :

$$\Lambda_q(\underline{R}) = \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N R_{s_n}^2 \left( \frac{\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{f_{w_r}}{R} \right)}{\frac{f_{w_r}}{R}} (R_n) \right)^2$$

$$= \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N R_{s_n} \left( \frac{\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{f_{w_r}}{R} \right)}{\frac{f_{w_r}}{R}} (R_n) \right) \right\|^2 \quad \text{d'après (III - 2.10)} \quad (2.11)$$

On note  $G_{w_r}$  l'opérateur non linéaire déduit de la loi de probabilité de l'amplitude du bruit :

$$\Lambda_q(\underline{R}) = \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N R_{s_n} G_{w_r}(R_n) \right\|^2 \quad (2.12)$$

$$G_{w_r}(r) = -\frac{\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{f_{w_r}}{R} \right)}{\frac{f_{w_r}}{R}}(r) \quad (2.13)$$

On obtient donc le modèle de récepteur (III-2.3) :

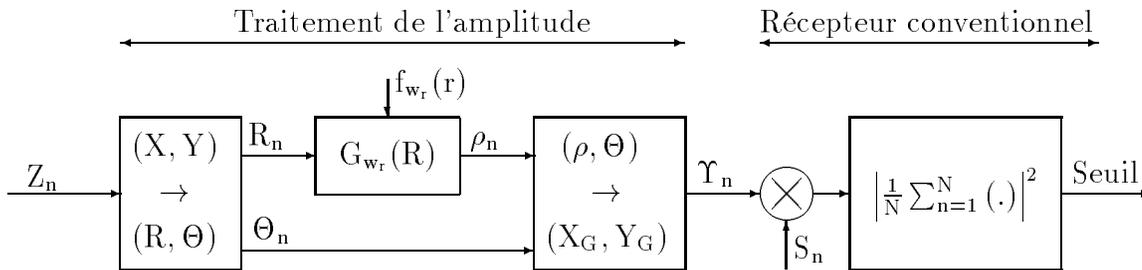


FIG. 2.3: Récepteur incluant le module de traitement de l'amplitude

L'architecture du récepteur optimum diffère du récepteur défini en présence du bruit gaussien de par la présence d'une non linéarité appliquée au signal complexe généré à l'entrée du récepteur. En représentant le signal complexe par ses coordonnées polaires nous nous ramenons à un problème unidimensionnel, la non linéarité affectant l'amplitude du signal complexe  $\mathbf{R}$ .

En conclusion, si le bruit est invariant par rotation, nous obtenons la représentation donnée pour un signal unidimensionnel. Le traitement non linéaire affecte

l'amplitude de l'enveloppe complexe de l'entrée du récepteur numérique, qui est obtenue en projetant la composante signal utile dans la direction du bruit. La non linéarité dépend de la statistique de l'amplitude du bruit  $f_{w_r}$ . Cette loi est divisée par  $R$  puisque dans ce plan la probabilité d'obtenir  $R$  est proportionnelle à l'aire  $Rdrd\theta$ . La phase restituée au signal est la phase d'origine qui pour de faibles rapports signal à bruit correspond à la phase du bruit.

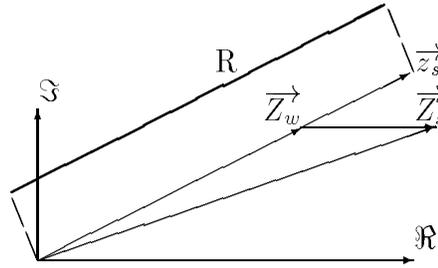


FIG. 2.4: Construction d'un signal unidimensionnel

## 2.4 Performances

### 2.4.1 Contexte de l'évaluation

Nous nous intéressons d'abord, comme au chapitre précédent, à la mesure du gain de traitement. Nous rappelons que ce gain permet de mesurer l'atténuation sur le brouilleur, en présence de l'opérateur non linéaire appliqué à l'amplitude du signal. Nous mesurons ensuite les pertes de corrélation induites par ce traitement. Nous abordons cette étude pour des rapports signal à bruit faibles. Le modèle de calcul est représenté figure (III-2.5).

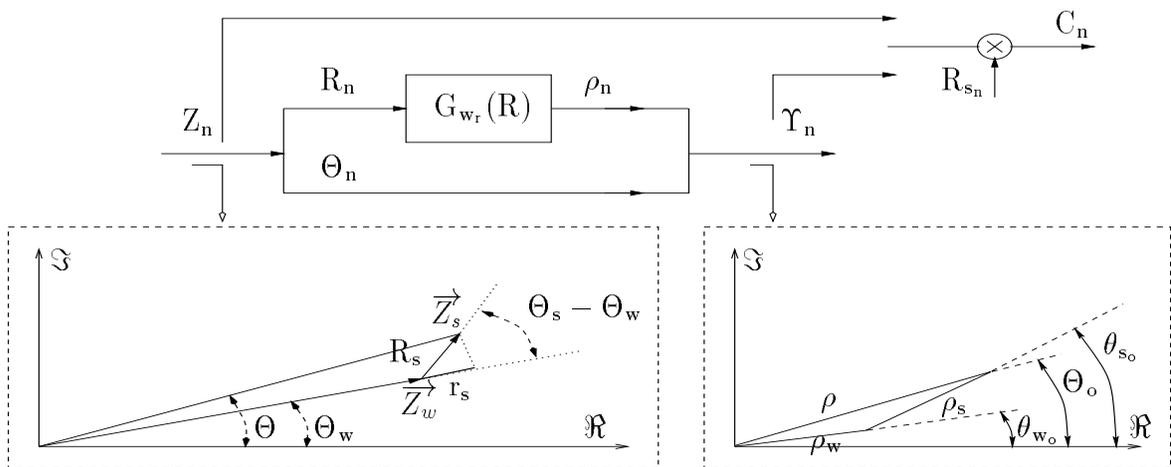


FIG. 2.5: Modèle de calcul du gain de traitement

Le contexte est donc le suivant.

- $Z$  et  $\Upsilon$  représentent les expressions de l'enveloppe complexe, respectivement avant et après traitement de l'amplitude.

$$Z = R \exp(i\Theta) = R_s \exp(i\Theta_s) + R_w \exp(i\Theta_w) = Z_s + Z_w \quad (2.14)$$

$$\Upsilon = \rho \exp(i\Theta) = \rho_s \exp(i\Theta_{s_o}) + \rho_w \exp(i\Theta_{w_o}) = \Upsilon_s + \Upsilon_w \quad (2.15)$$

- La décision étant difficile près de l'hypothèse  $H_0$  on définit le test le plus puissant dans cette région. Sous l'hypothèse  $H_1$ , la variation du signal autour du bruit est notée  $r_s$ :  $r_s = R_s \cos(\Theta_s - \Theta_w)$ .  $\Theta_w$  et  $\Theta_s$  représentent respectivement les phases instantanées du bruit et du signal.

- Le traitement réalisé conserve la phase du signal d'entrée (voir figure (III-2.3)). Cette phase peut être assimilée à  $\Theta_w$  pour des rapports signal à bruit faibles ( $\Theta \sim \Theta_w$ ).

- Enfin nous supposons que, **en présence de forts signaux d'interférence**, nous obtenons une distribution des échantillons  $R_n$  autour de l'amplitude du signal d'interférence nous faisons les hypothèses suivantes :

$$f_{w_r}(r) = f(r) * \delta(r - R_{A_j}) \quad R_{A_j} \approx R_w \quad (2.16)$$

$$f(r) \text{ paire} \quad (2.17)$$

$$f'(r) \text{ existe et } \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(r)dr| < \infty, \int_{-\infty}^{+\infty} f'(r)dr = 0 \quad (2.18)$$

$$\int_0^{+\infty} r \cdot f_r''(r) \cdot dr = 0 \quad (2.19)$$

- Par ailleurs pour des rapports  $\gamma_{jg} = \frac{J}{G}$  élevés nous pouvons poser que, sur le support de la fonction  $f_{w_r}$ , on a :

$$f_r(r) = \frac{f_{w_r}(r)}{r} \sim \frac{f_{w_r}(r)}{R_{A_j}} \quad \text{et} \quad \frac{f_r'}{f_r}(r) \sim \frac{f_{w_r}'}{f_{w_r}}(r) \quad (2.20)$$

## 2.4.2 Rapport signal sur bruit en l'absence de l'opérateur

Nous construisons, pour estimer le rapport signal à bruit, le corrélateur appliqué au signal en coordonnées polaires (voir figure (III-2.5)). Nous déduisons le rapport signal à bruit des

relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 C_n &= Z_n R_{s_n} && \text{En l'absence de l'opérateur} \\
 C_n &= R_{s_n}^2 \exp(i\Theta_{s_n}) + R_{s_n} R_{w_n} \exp(i\Theta_{w_n}) \\
 P_s &= E\{C_n\} (E\{C_n\})^* && \text{Puissance du signal} \\
 P_T &= E\{C_n C_n^*\} && \text{Puissance totale} \\
 P_w &= P_T - P_s && \text{Puissance du bruit}
 \end{aligned}$$

A l'entrée de la boucle de code non cohérente la phase résiduelle du signal doit être quasi constante sur la durée d'intégration du filtre de prédétection ( $\Delta\Theta_s \ll 2\pi$ ). Dans cette approche nous pouvons donc considérer, sur la durée d'observation, de très petites variations de la phase résiduelle du signal. On pose :

$$E\{\exp(i\Theta_s)\} \approx \exp(i\Theta_s) \quad (2.21)$$

En utilisant l'indépendance bruit signal et sachant que  $E(R_{s_n}) = 0$  nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 E\{C_n\} &= R_{s_n}^2 \exp(i\Theta_{s_n}) \Rightarrow P_s = R_s^4 \\
 E\{C_n C_n^*\} &= R_s^4 + R_s^2 E\{R_w^2\}
 \end{aligned}$$

D'où le rapport signal à bruit :

$$\Gamma_{sans\ opérateur} = \frac{R_s^2}{E\{R_w^2\}} \quad (2.22)$$

### 2.4.3 Rapport signal sur bruit en présence de l'opérateur

Dans ce cas le signal à l'entrée du corrélateur est  $\Upsilon_n$ , d'amplitude  $\rho_n$ . Cette amplitude est déduite de  $G_{w_r}$  qui dépend de la loi de densité de probabilité de  $R_w$ . Ne considérant que l'amplitude nous retrouvons pour  $\rho_n$  une expression de la même forme que (III-1.30), obtenue pour un signal unidimensionnel.

$$\rho_n = G_{w_r}(R_n) = |_{R_n=R_{w_n}+r_{s_n}} G_{w_r}(R_{w_n} + r_{s_n}) \quad (2.23)$$

Où, pour de faibles rapports signal sur bruit,  $r_{s_n}$  est obtenu à partir d'un développement au premier ordre :

$$\begin{cases} \rho_n = G_{w_r}(R_n) = G_{w_r}(R_{w_n} + R_{s_n} \cos(\Theta_s - \Theta_w)) = G_{w_r}(R_{w_n} + r_{s_n}) \\ r_{s_n} = R_{s_n} \cos(\Theta_s - \Theta_w) \end{cases} \quad (2.24)$$

Nous pouvons développer (voir (III-1.30)) cette expression autour du bruit en présence de faibles rapports signal à bruit :

$$\rho_n \sim G_{w_r}(R_{w_n}) + G'_{w_r}(R_{w_n})r_{s_n} \quad (2.25)$$

Dans ce schéma l'amplitude  $\rho$  résulte de la somme vectorielle des 2 composantes bruit et signal.

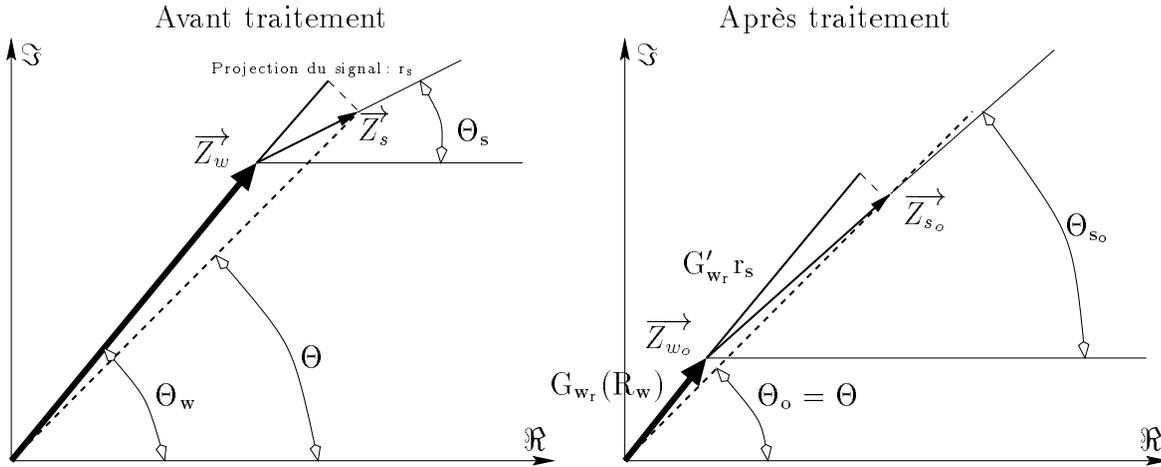


FIG. 2.6: Phase de la composante signal après traitement

Pour des signaux de faible rapport signal à bruit, on peut considérer que les vecteurs qui représentent le bruit à l'entrée et à la sortie de l'opérateur sont colinéaires. L'amplitude du bruit est  $G_{w_r}(R_w)$  après traitement.

$$\vec{\Upsilon} = \vec{Z}_{w_o} + \vec{Z}_{s_o} = G_{w_r}(R_w) \frac{\vec{Z}_w}{R_w} + \vec{Z}_{s_o}$$

Au contraire la composante signal subit une rotation qui dépend de  $R_w - G_{w_r}(R_w)$  et du gain  $G'_{w_r}$  (voir figure (III-2.6)).

$$\vec{Z}_{s_o} = G'_{w_r} R_s \frac{\cos(\theta_s - \theta_w)}{\cos(\theta_{s_o} - \theta_w)} \frac{\vec{\Upsilon} - \vec{Z}_{w_o}}{\|\vec{\Upsilon} - \vec{Z}_{w_o}\|}$$

Et nous obtenons pour la représentation complexe de  $\Upsilon$

$$\Upsilon = G_{w_r}(R_w) \exp(i\theta_w) + K_w G'_{w_r}(R_w) R_s \exp(i\theta_{s_o}) \quad \text{avec } K_w = \frac{\cos(\theta_s - \theta_w)}{\cos(\theta_{s_o} - \theta_w)}$$

D'où l'expression de  $C$  à la sortie du corrélateur :

$$C = G_{w_r}(R_w) R_s \exp(i\theta_w) + K_w G'_{w_r}(R_w) R_s^2 \exp(i\theta_{s_o})$$

On déduit de C la puissance du signal :

$$P_s = E\{C\}(E\{C\})^* = \left(E\{G'_{w_r}\}\right)^2 R_s^4 \parallel E\{K_w \exp(i\Theta_{s_o})\} \parallel^2 = K_{P_s} \left(E\{G'_{w_r}\}\right)^2 R_s^4$$

Avec  $K_{P_s} = \parallel E\{K_w \exp(i\Theta_{s_o})\} \parallel^2$

Pour la puissance totale on obtient:

$$P_T = E\{CC^*\} = E\{G_{w_r}^2\} R_s^2 + E\{K_w^2 G_{w_r}'^2\} R_s^4$$

On en déduit le rapport signal sur bruit en présence de l'opérateur :

$$\Gamma_{avec\ op\ erateur} = \frac{\left(E\{G'_{w_r}\}\right)^2 R_s^2 K_{P_s}}{E\{G_{w_r}^2\} + R_s^2 \left(E\{K_w^2 G_{w_r}'^2\} - \left(E\{G'_{w_r}\}\right)^2 K_{P_s}\right)} \quad (2.26)$$

Nous expliciterons ultérieurement cette expression pour certaines représentations du bruit tels que des bruits gaussiens et des bruits sinusoïdaux. Nous pouvons formuler ici l'expression du gain  $G'_{w_r}$  en présence de forte interférence.

$$G'_{w_r}(R_{w_n}) = \left(\frac{f'_r}{f_r}(R_{w_n})\right)^2 - \frac{f''_r}{f_r}(R_{w_n}) \quad (2.27)$$

Avec  $f_r(r) = f_{w_r}/2\pi r$  et d'après (III-2.16), (III-2.20) :

$$E\left(\frac{f''_r}{f_r}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{f''_r}{f_r}(r) f_{w_r}(r) dr = 0 \quad \text{et} \quad \frac{f'_r}{f_r}(R_{w_n}) = \frac{f'_{w_r}}{f_{w_r}}(R_{w_n})$$

Et l'expression de l'espérance de  $G'_{w_r}$  est :

$$E\{G'_{w_r}\} = E\left\{\left(\frac{f'_{w_r}}{f_{w_r}}\right)^2\right\} \approx E\{G_{w_r}^2\} \quad (2.28)$$

#### 2.4.4 Gain de traitement

Le gain de traitement est déduit de (III- 2.22) et (III-2.26).

$$\begin{cases} G_t = \frac{\left(E\{G'_{w_r}\}\right)^2 E\{R_w^2\} K_{P_s}}{E\{G_{w_r}^2\} + R_s^2 \left(E\{K_w^2 G_{w_r}'^2\} - \left(E\{G'_{w_r}\}\right)^2 K_{P_s}\right)} \\ K_{P_s} = \parallel E\{K_w \exp(i\Theta_{s_o})\} \parallel^2 \end{cases} \quad (2.29)$$

Le gain de traitement dépend puissance du bruit, de la représentation de la non linéarité mais également de la phase du signal après traitement.

## 2.5 Performances en présence de bruits particuliers

### 2.5.1 Bruit gaussien

Nous pouvons exprimer  $f_{w_r}$  et en déduire  $G'_{w_r}$  et  $G_{w_r}$  :

$$\begin{aligned}
 f_{w_r}(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_g^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma_g^2}\right) \\
 f_{w_r}(r) &= \frac{r}{\sigma_g^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_g^2}\right) \mathbf{1}_{r \geq 0} \\
 G_{w_r}(r) &= -\frac{\frac{\partial}{\partial r} f_{w_r}}{\frac{f_{w_r}}{r}}(r) = \frac{r}{\sigma_g^2} \mathbf{1}_{r \geq 0} \Rightarrow E\{G_{w_r}^2\} = \frac{2}{\sigma_g^2} \\
 G'_{w_r}(r) &= \frac{1}{\sigma_g^2} \Rightarrow E\{G'_{w_r}\} = \frac{1}{\sigma_g^2}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

L'opérateur obtenu ici est linéaire (Voir représentation (III-2.7)). La transformation est une homothétie de rapport  $1/\sigma_g^2$ . La phase du signal n'est pas modifiée ( $\Theta_{s_0} = \Theta_s$ ).

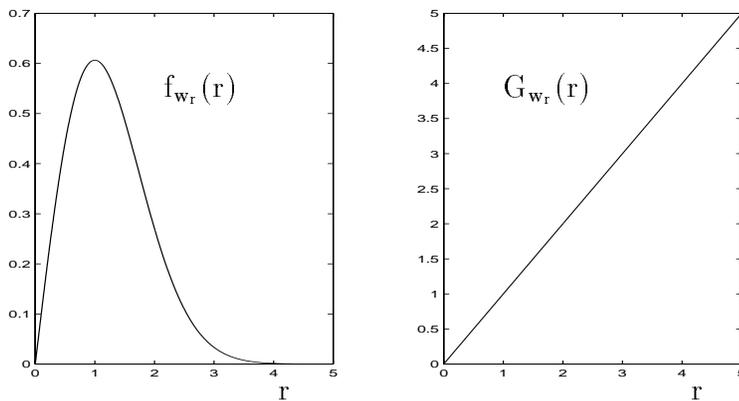


FIG. 2.7: Bruit gaussien : Lois pour  $\sigma_g = 1$

On en déduit donc l'expression du gain de traitement (III-2.29).

$$\begin{aligned}
 K_w &= 1 \quad \text{car } \Theta_{s_0} = \Theta_s \\
 E\{K_w \exp(i\Theta_{s_0})\} &= E\{\exp(i\Theta_s)\}
 \end{aligned}$$

D'où d'après (III-2.21):

$$E\{\exp(i\Theta_s)\} \approx \exp(i\Theta_s) \Rightarrow \|E\{K_w \exp(i\Theta_{s_0})\}\|^2 = 1$$

Et le gain de traitement (III-2.29) devient :

$$G_t = \frac{\frac{1}{\sigma_g^4} E\{R_w^2\}}{\frac{2}{\sigma_g^2}} = \frac{\frac{1}{\sigma_g^4} 2\sigma_g^2}{\frac{2}{\sigma_g^2}} \quad (2.31)$$

L'opérateur est linéaire et le gain de traitement est égal à 1.

$$G_t = 1 \quad (2.32)$$

## 2.5.2 Bruit sinusoïdal

Le signal  $Z_n$  a pour expression :

$$Z_n = R_{s_n} \exp(i\Theta_s) + A_j \exp(i\Theta_j) \quad \text{avec} \quad R_{s_n} = \pm A_s$$

Et l'amplitude du brouilleur est constante :

$$\begin{cases} f_{w_r} = \delta(r - A_j) \\ f_r = \frac{1}{A_j} \delta(r - A_j) \\ G_{w_r}(r) = -\frac{\frac{\partial}{\partial r} f_r}{f_r}(r) = -\frac{\frac{\partial}{\partial r} f_{w_r}}{f_{w_r}}(r) \end{cases} \quad (2.33)$$

Pour exprimer l'opérateur  $G_{w_r}$  nous définissons  $f_\varepsilon(r)$  qui converge vers  $\delta(r)$  au sens des distributions.

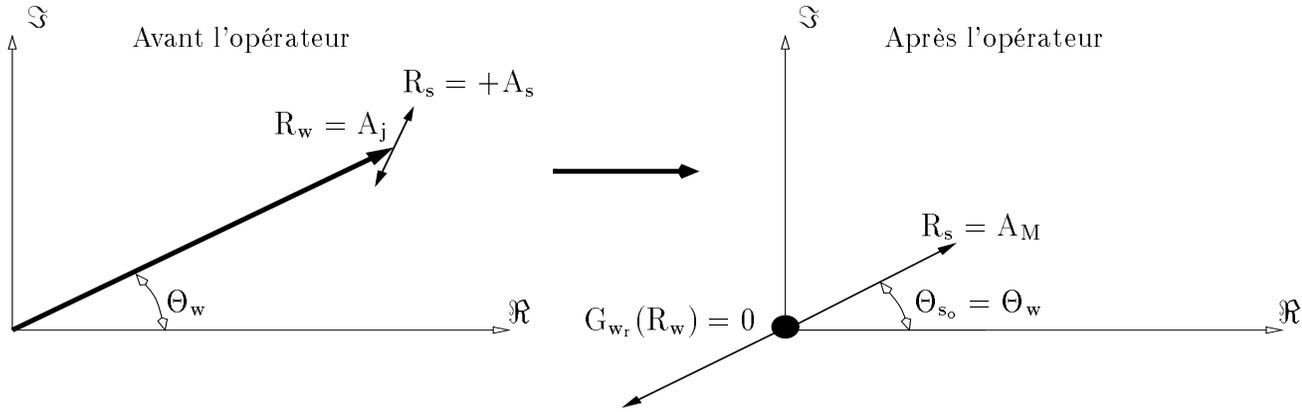
$$\begin{cases} f_\varepsilon(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \exp\left(\frac{-r^2}{2\varepsilon}\right) & f_\varepsilon \text{ densité de probabilité } \geq 0 \\ \varepsilon \rightarrow \infty \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} (G_{w_r})_\varepsilon(r) = \frac{r - A_j}{\varepsilon} \\ G_{w_r} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty \text{ autour de } A_j \text{ et } G'_{w_r} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty \end{cases}$$

En pratique l'opérateur prend des valeurs dans la plage de quantification  $[-A_M, A_M]$  mais le gain de traitement demeure infini puisque le traitement supprime le bruit sinusoïdal (voir figure (III-2.8)).

$$G_Q(r) = \begin{cases} -A_M & \text{si } G_{w_r}(r) \leq -A_M \\ G_{w_r}(r) & \text{si } |G_{w_r}(r)| \leq A_M \\ A_M & \text{si } G_{w_r}(r) \geq A_M \end{cases}$$

FIG. 2.8: *Traitement d'un bruit sinusoidal*

Dans l'approche ci-dessus le caractère bidimensionnel n'est pas pris en compte. En réalité il faut considérer la phase des différentes composantes qui conditionne  $K_w$  et  $\theta_{s_o}$  dans la relation (III-2.29). Dans cette configuration la phase affectée au signal, à la sortie de l'opérateur non linéaire, peut être approximée par  $\theta_w$  puisque  $G_{w_r}(R_w) = 0$  (voir figure (III-2.8)). On obtient alors :

$$K_w = \frac{\cos(\theta_s - \theta_w)}{1}$$

$$E\{K_w \exp(i\theta_{s_o})\} = E\{\cos(\theta_s - \theta_w) \exp(i\theta_w)\} \quad (2.34)$$

$$E\{K_w \exp(i\theta_{s_o})\} = \frac{1}{2} E\{\exp(i\theta_s) + \exp(-i(\theta_s - 2\theta_w))\}$$

On considère tout d'abord que, sur la durée d'observation, la phase du bruit est uniformément répartie sur  $[0, 2\pi]$ . La phase du signal  $\theta_s$  étant quasi constante on obtient alors :

$$E\{K_w \exp(i\theta_{s_o})\} = \frac{1}{2} \exp(i\theta_s) \Rightarrow K_{P_s} = \| E\{K_w \exp(i\theta_{s_o})\} \|^2 = \frac{1}{4} \quad (2.35)$$

Ce facteur n'a pas d'incidence ici le gain étant infini. Au contraire si la phase du brouilleur varie très lentement on obtient :

$$K_{P_s} = \| E\{K_w \exp(i\theta_{s_o})\} \|^2 = \frac{1}{4} \| E\{\exp(i\theta_s) + \exp(-i(\theta_s - 2\theta_w))\} \|^2 \quad (2.36)$$

$$0 < K_{P_s} < 1$$

Le facteur  $K_{P_s}$  dépend du déphasage  $\theta_s - \theta_w$ . En particulier pour un déphasage constant  $\theta_s - \theta_w = \pi/2$  le signal est orthogonal au bruit, la projection  $r_s$  est nulle (voir figure (III-2.5)) et  $K_{P_s} = 0$ . Au contraire, si signal et interférence sont colinéaires, on obtient un signal de puissance maximum ( $K_{P_s} = 1$ ). Le cas le plus défavorable consisterait donc en une interférence calée sur la fréquence centrale du signal GPS, en quadrature avec le signal GPS. Dans la représentation en bande de base on obtient alors une interférence de fréquence nulle, de phase constante  $\theta_s \pm \pi/2$ . Cette configuration est improbable. On peut en pratique consi-

dérer un écart de fréquence signal brouilleur qui entraîne une variation de la phase  $\Theta_s - \Theta_w$  sur la durée d'observation : la puissance moyenne du signal n'est pas nulle. La phase  $\Theta_s - \Theta_w$  variant de  $\pi/2 - \Delta\Theta$  à  $\pi/2 + \Delta\Theta$  sur cette durée, on obtient pour un écart de fréquence constant :

$$K_{P_s} = \left\| \frac{1}{4\Delta\Theta} \int_{\Theta_s + \frac{\pi}{2} - \Delta\Theta}^{\Theta_s + \frac{\pi}{2} + \Delta\Theta} \exp(i\Theta_s + \exp(-i\Theta_s + 2i\Theta_w)) d\Theta_w \right\|^2 \quad (2.37)$$

$$K_{P_s} = \frac{1}{4} \left\| 1 - \text{sinc}(2\Delta\Theta) \right\|^2$$

Pour exemple on peut mentionner qu'un écart de fréquence signal interférence de 25Hz génère sur une durée d'observation de 20mS une rotation de  $\pi$ . Cette rotation entraînant une déviation  $\Delta\Theta = \pm\pi/2$  on obtient  $K_{P_s} \approx .25$ . Cette valeur est égale à celle obtenue pour une interférence dont la phase est uniformément répartie sur  $[0, 2\pi]$ . La figure (III-2.9) montre l'évolution de  $K_{P_s}$  en fonction de  $\Delta\Theta$ .

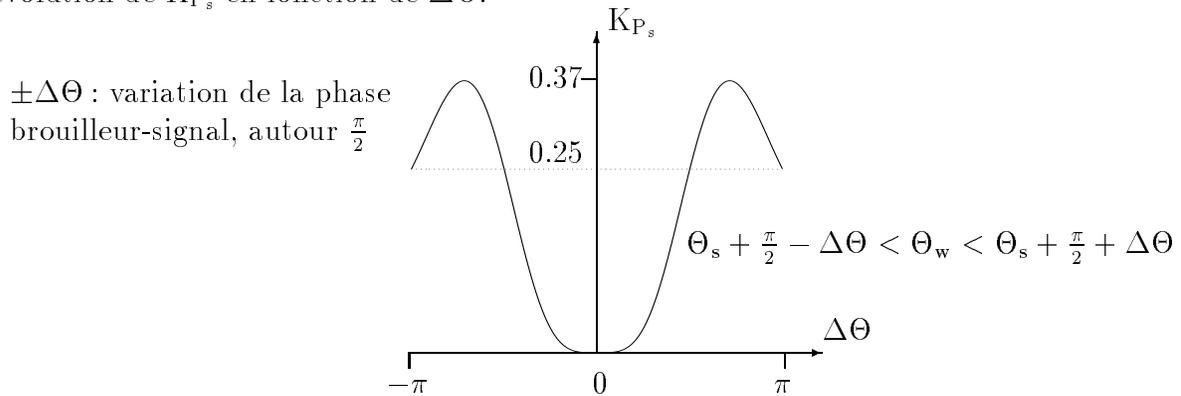


FIG. 2.9: Atténuation de la puissance du signal en fonction de la variation  $\Delta\Theta$

### 2.5.3 Bruits composites : bruit sinusoïdal + bruit gaussien

Dans ces conditions les 2 composantes de bruit sont :

$$\begin{cases} W_x = A_j \cdot \cos\Theta_j + W_{g_x} \\ W_y = A_j \cdot \sin\Theta_j + W_{g_y} \end{cases} \quad (2.38)$$

Les composantes  $W_{g_x}$  et  $W_{g_y}$  représentant le bruit gaussien nous obtenons les expressions des lois de densité de probabilité suivantes :

$$\begin{cases} f_{w_x}(x) = \frac{1}{\sigma_g \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - A_j \cos\Theta_j)^2}{2\sigma_g^2}\right) \\ f_{w_y}(y) = \frac{1}{\sigma_g \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y - A_j \sin\Theta_j)^2}{2\sigma_g^2}\right) \end{cases}$$

On considère que les 2 composantes sont indépendantes. La loi conjointe s'écrit :

$$f_{ww}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_g^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + A_j^2 - 2A_j(x.\cos\Theta_j + y.\sin\Theta_j)}{2\sigma_g^2}\right)$$

D'où on déduit la loi  $f_{w_r}(r, \theta)$  :

$$f_{w_r}(r, \theta) = \frac{r}{2\pi\sigma_g^2} \exp\left(-\frac{r^2 + A_j^2 - 2A_jr.\cos(\theta - \Theta_j)}{2\sigma_g^2}\right) \mathbf{1}_{r \geq 0}$$

Si on suppose que le bruit est à symétrie circulaire on peut faire le changement de variable  $\alpha = \theta - \Theta_j$ . Alors, en intégrant sur  $[0, 2\pi]$  pour balayer autour de l'interférence l'angle décrit aléatoirement par le bruit gaussien, on obtient la loi marginale  $f_{w_r}(r)$  :

$$f_{w_r}(r) = \left(\frac{r}{2\pi\sigma_g^2} \exp\left(-\frac{r^2 + A_j^2}{2\sigma_g^2}\right) \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{A_jr.\cos(\alpha)}{\sigma_g^2}\right) d\alpha\right) \mathbf{1}_{r \geq 0}$$

$$f_{w_r}(r) = \frac{r}{\sigma_g^2} \exp\left(-\frac{r^2 + A_j^2}{2\sigma_g^2}\right) I_0\left(\frac{A_jr}{\sigma_g^2}\right) \mathbf{1}_{r \geq 0} \quad I_0 \text{ fonction de Bessel modifiée d'ordre 0}$$

On fait apparaître le rapport  $\gamma_{jg} = \frac{J}{G}$ , puissance du signal sinusoïdal sur puissance du bruit gaussien.

$$f_{w_r}(r) = \frac{r}{\sigma_g^2} \exp\left(\left(-\frac{r^2}{2\sigma_g^2} - \gamma_{jg}\right) I_0\left(\frac{r\sqrt{2\gamma_{jg}}}{\sigma_g}\right)\right) \mathbf{1}_{r \geq 0}$$

### Etude pour des rapports $\gamma_{jg}$ élevés

Pour des valeurs de  $\gamma_{jg}$  très grandes devant 1 nous pouvons utiliser, dans la zone d'intérêt centrée sur  $A_j$ , une approximation de la fonction  $I_0$  :

$$I_0(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad \text{si } x \gg 1$$

Et on obtient pour la loi  $f_{w_r}$  :

$$f_{w_r}(r) = \frac{\sqrt{r}}{\sigma_g \sqrt{2\pi A_j}} \exp\left(-\frac{(r - A_j)^2}{2\sigma_g^2}\right) \mathbf{1}_{r \geq 0} \quad (2.39)$$

Pour des rapports  $\gamma_{jg} \gg 1$  nous nous intéressons à la représentation de la loi autour de  $A_j$ .

Cette loi approche la loi gaussienne de moyenne  $A_j$  et de variance  $\sigma_g^2$ .

$$f_{w_r}(r) \sim \frac{1}{\sigma_g \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(r - A_j)^2}{2\sigma_g^2}\right) \mathbf{1}_{\{A_j - 2\sigma_g \leq r \leq A_j + 2\sigma_g\}} \quad (2.40)$$

La loi de probabilité  $f_{w_r}$  vérifie les propriétés (III-2.16)-(III- 2.20) :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{w_r}(r) \approx \frac{1}{\sigma_g \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(r - A_j)^2}{2\sigma_g^2}\right) = f(r) * \delta(r - A_j) \text{ au voisinage de } A_j \\ f(r) = \frac{1}{\sigma_g \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_g^2}\right) \text{ paire} \\ f_{w_r}(r) \approx f_r(r) \\ \int_0^{+\infty} r.f_r''(r).dr \approx \int_{-\infty}^{+\infty} f''(r).dr = 0 \end{array} \right.$$

On déduit de la loi de probabilité l'expression de l'opérateur :

$$G_{w_r}(r) = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{f_{w_r}}{r}(r) = \frac{1}{2r} + \frac{r - A_j}{\sigma_g^2}$$

Dans la région d'intérêt,  $\gamma_{jg}$  étant très grand devant 1, cet opérateur devient :

$$G_{w_r}(r) \approx \frac{1}{2A_j} + \frac{r - A_j}{\sigma_g^2} \approx \frac{r - A_j}{\sigma_g^2} \quad (2.41)$$

La figure (III-2.10) compare l'expression de ces lois à des estimations obtenues à partir d'histogrammes réalisées sur 2048 échantillons.

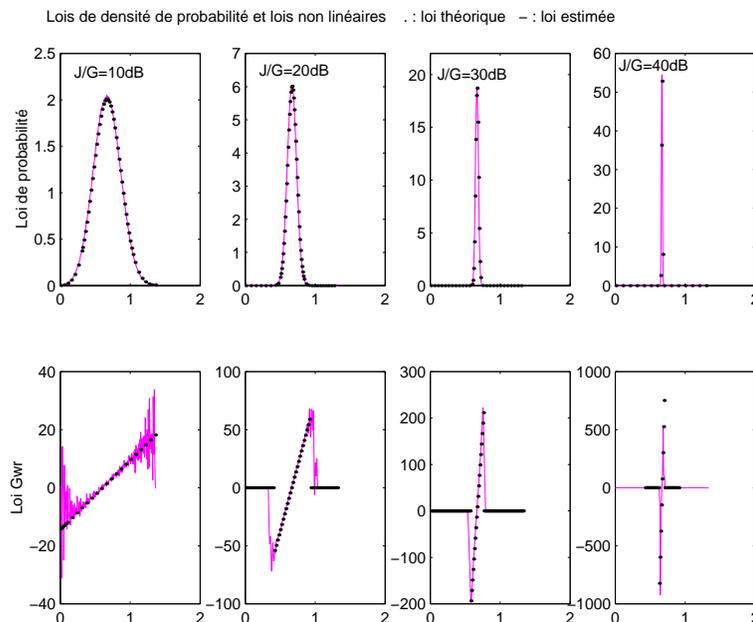


FIG. 2.10: Lois de densité de probabilité et lois non linéaires pour  $\gamma_{jg} \gg 1$

Le traitement appliqué à l'amplitude est déduit de l'expression (III-2.41). La composante liée à l'interférence est éliminée (voir figure (III-2.11)). On note S, J, G les puissances du signal, du bruit sinusoïdal et du bruit gaussien. La puissance du bruit diminue après l'opérateur de  $J+G$  à  $G$  et le rapport signal à bruit varie, en première approximation, de  $\frac{S}{J+G}$  à  $\frac{S}{G}$ . Le gain de traitement est de l'ordre de  $\gamma_{jg}$ .

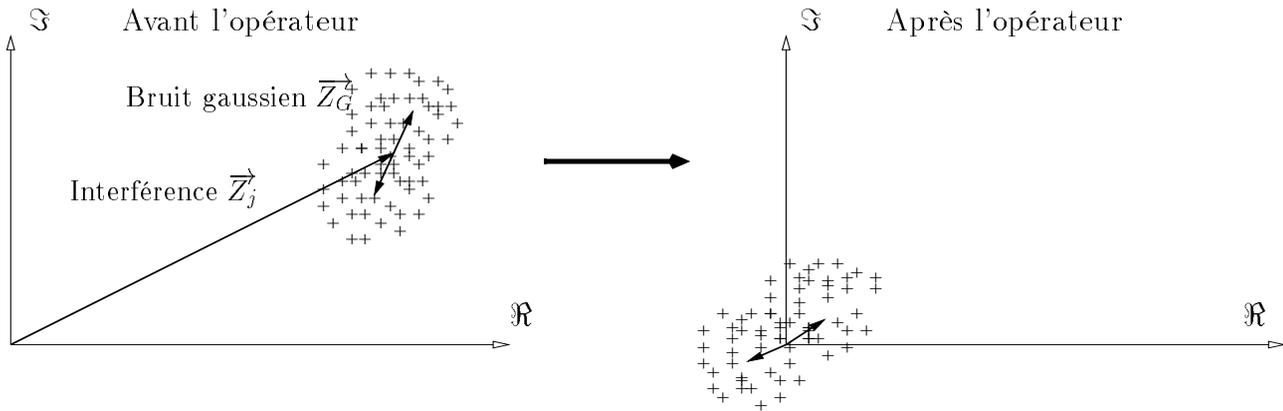


FIG. 2.11: Traitement d'un brouilleur sinusoïdal en présence de bruit gaussien :  $\gamma_{jg} \gg 1$

Sur la figure (III-2.11),  $\vec{Z}_j$  et  $\vec{Z}_G$  représentent respectivement le bruit sinusoïdal et le bruit gaussien.

$$\begin{aligned} \vec{Z}_j &\xrightarrow{\text{dans } C} Z_j = A_j \exp(i\Theta_j) \\ \vec{Z}_G &\xrightarrow{\text{dans } C} Z_G = R_G \exp(i\Theta_G) \end{aligned}$$

Pour exprimer plus précisément le gain de traitement on utilise la relation (III-2.29), la phase du bruit étant affectée au signal. On traite le cas général d'une interférence telle que l'écart de phase  $\Theta_s - \Theta_w$  est uniformément réparti sur  $[0, 2\pi]$ .

$$G_t = \frac{(E\{G'_{w_r}\})^2 E\{R_w^2\} K_{P_s}}{E\{G_{w_r}^2\} + R_s^2 \left( E\{K_w^2 G'_{w_r}{}^2\} - (E\{G'_{w_r}\})^2 \| E\{K_w \exp(i\Theta_{s_o})\} \|^2 \right)}$$

Avec :

$$\sqrt{E\{G'_{w_r}\}} \approx \frac{1}{\sigma_g^2}$$

$$\sqrt{E\{R_w^2\}} = E\{(Z_j + Z_G)(Z_j + Z_G)^*\} = A_j^2 + E\{R_G^2\} = A_j^2 + 2\sigma_g^2$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\Theta_{s_o} \sim \Theta_w} &\text{ car } G_{w_r}(R_w) \approx 0 \text{ pour de forts rapports } \gamma_{jg} \\ \text{et } K_w = \cos(\Theta_s - \Theta_w) &\Rightarrow K_{P_s} = \| E\{K_w \exp(i\Theta_{s_o})\} \|^2 = \frac{1}{4} \text{ d'après les relations (III - 2.35)} \end{aligned}$$

Et :

$$\sqrt{G_{w_r}(R_w)} \sim (R_w - A_j)/\sigma_g^2 \quad \text{avec } R_w = \|\vec{Z}_g + \vec{Z}_j\|$$

$$R_w = \sqrt{A_j^2 + R_G^2 + 2A_jR_G\cos(\Theta_G - \Theta_j)} \xrightarrow{J \gg G} R_w \sim A_j + R_G\cos(\Theta_G - \Theta_j)$$

$$G_{w_r}(R_w) \approx \frac{R_G}{\sigma_g^2}\cos(\Theta_G - \Theta_j) \Rightarrow E\{G_{w_r}(R_w)^2\} = \frac{E\{R_G^2\}}{2\sigma_g^4} = \frac{1}{\sigma_g^2}$$

$$\sqrt{K_w^2} = (\cos(\Theta_s - \Theta_w))^2 \Rightarrow E\{K_w^2 G_{w_r}^2\} = \frac{1}{2\sigma_g^4}$$

D'où le gain de traitement :

$$G_t = \frac{A_j^2 + 2\sigma_g^2}{4\sigma_g^2 + R_s^2} \xrightarrow{J/G \gg 1 \text{ et } G/S \gg 1} G_t \approx \frac{A_j^2}{4\sigma_g^2} = \frac{J}{2G} = \frac{\gamma_{jg}}{2} \quad (2.42)$$

Le gain de traitement est donné dans le tableau (III-2.5.3), pour différentes valeurs de  $\gamma_{jg}$  :

Bruit	gaussien + 1 CWI	gaussien + 1 CWI	gaussien +1 CWI	gaussien + 1 CWI
Rapport J/G	10dB	20dB	30dB	40dB
Gain théorique	7dB	17dB	27dB	37dB

**Tableau 2.5.3 : Gains théoriques pour des rapports  $\gamma_{jg} \gg 1$**

**Remarque 1 :**

Cette étude montre que l'opérateur ainsi appliqué annule l'énergie du brouilleur. Ce brouilleur éliminé, le gain de traitement est inférieur à  $\gamma_{jg}$ . Ceci résulte de la dégradation du signal GPS. On mesure ainsi une perte de corrélation due à la rotation de phase appliquée au signal. Le gain de corrélation  $G_\Gamma$  n'est donc pas unitaire.

$$\Gamma_{avec\ opérateur} = \frac{1}{2} \frac{P_s}{P_w} = \frac{A_c^2}{4\sigma_g^2} \Rightarrow G_\Gamma = \frac{\Gamma}{\Gamma_{ideal}} = \frac{1}{2} \quad (2.43)$$

**Remarque 2 :**

Ce gain représente le gain moyen obtenu lorsque la phase de l'interférence est uniformément répartie sur  $[0, 2\pi]$ . Si la phase de l'interférence varie peu sur la durée de l'observation la valeur de  $K_{P_s}$  est définie par la relation (III-2.36). L'expression générale du gain, en présence

de faibles rapports S/G, est donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_t = K_{P_s} \frac{A_j^2 + 2\sigma_g^2}{\sigma_g^2} \quad \text{avec : } K_{P_s} = \frac{1}{4} \left\| E\{\exp(i\Theta_s) + \exp(-i(\Theta_s - 2\Theta_w))\} \right\|^2 \\ K_{P_s} = 1 \quad \text{si } \Theta_s - \Theta_w = 0 \\ K_{P_s} = \frac{1}{4} \left\| 1 - \text{sinc}(2\Delta\Theta) \right\|^2 \quad \text{si } \Theta_w \text{ varie de } \pm \Delta\Theta \text{ autour de } \Theta_s + \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad (2.44)$$

Le graphe (III-2.9) donne la valeur de  $K_{P_s}$  lorsque la phase de l'interférence varie uniformément de  $\pm\Delta\Theta$  autour de  $\Theta_s + \pi/2$ .

Cette configuration (brouilleur en quadrature avec le signal GPS, de fréquence très proche de  $L_1$ ) est toutefois peu probable. Les résultats présentés ultérieurement, obtenus à partir de simulations de Monte Carlo, seront donnés lorsque l'écart de phase  $\Theta_s - \Theta_w$  est uniformément réparti sur  $[0, 2\pi]$ .

### Etude pour des rapports $\gamma_{jg}$ quelconques

Dans le cas général la fonction utilisée pour l'approximation de la fonction de Bessel n'est plus valable. Nous exprimons alors  $G_{w_r}$  en fonction de  $I_0$  et  $I_1$ , fonctions de Bessel modifiées d'ordre 0 et 1.

$$\begin{aligned} f_{w_r}(r) &= \frac{r}{\sigma_g^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_g^2} - \gamma_{jg}\right) I_0\left(\frac{r\sqrt{2\gamma_{jg}}}{\sigma_g}\right) \mathbf{1}_{r \geq 0} \\ f_r(r) &= \frac{1}{2\pi\sigma_g^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_g^2} - \gamma_{jg}\right) I_0\left(\frac{r\sqrt{2\gamma_{jg}}}{\sigma_g}\right) \mathbf{1}_{r \geq 0} \\ G_{w_r}(r) &= -\frac{f'_r(r)}{f_r(r)} = \frac{r}{\sigma_g^2} - \frac{\sqrt{2\gamma_{jg}}}{\sigma_g} \frac{I_1\left(\frac{r\sqrt{2\gamma_{jg}}}{\sigma_g}\right)}{I_0\left(\frac{r\sqrt{2\gamma_{jg}}}{\sigma_g}\right)} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Les représentations des lois de probabilité et des non linéarités obtenues sont représentées figure (III-2.12) pour différentes valeurs du rapport interférence sur bruit gaussien. Ces représentations mettent bien en évidence que pour de faibles valeurs de ce rapport ( $\gamma_{jg} = -10\text{dB}$ ) la loi de densité de probabilité  $f_{w_r}$  tend vers une loi de Rayleigh. Au contraire pour des

valeurs élevées de ce rapport ( $\gamma_{jg} = +20\text{dB}$ ) la loi  $f_{w_r}$  tend vers une loi gaussienne centrée sur l'amplitude du signal d'interférence.

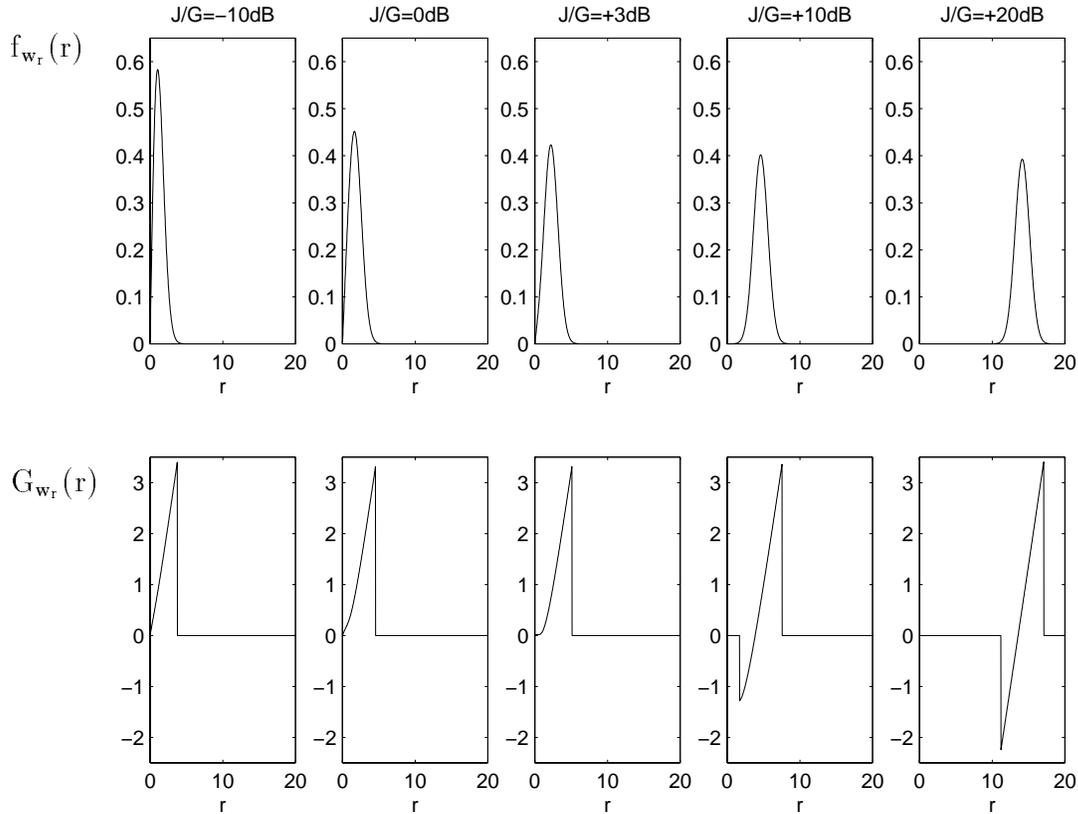


FIG. 2.12: Lois de probabilité pour différentes valeurs du rapport  $\gamma_{jg}$

#### 2.5.4 Interférence balayée en fréquence + bruit gaussien

L'amplitude de l'interférence n'étant pas affectée, l'étude réalisée précédemment est directement applicable à un brouilleur balayé en fréquence. On peut alors considérer la phase répartie sur  $[0, 2\pi]$ . On obtient, pour de forts rapports signal sur bruit, les gains de traitement portés dans le tableau (III-2.5.3).

#### 2.5.5 Interférence pulsée + bruit gaussien

Sur la durée d'observation, le bruit présente alternativement les caractéristiques d'un bruit gaussien et celles d'un bruit composé d'une sinusoïde et d'un bruit gaussien additif. On note  $P_0$  et  $P_1$  les proportions du temps occupé par ces 2 bruits.

La statistique obtenue sur la durée d'observation participe de ces 2 bruits. De (III-2.30) et (III-2.40) on déduit la statistique obtenue pour une interférence pulsée en présence de forts

rappports bruit sinusoïdal sur bruit gaussien :

$$f_r(r) \approx P_0 \left( \frac{r}{\sigma_g^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_g^2}\right) \right) \mathbf{1}_{r \in [0, 4\sigma_g]} + P_1 \frac{\sqrt{r}}{\sigma_g \sqrt{2\pi A_j}} \exp\left(-\frac{(r - A_j)^2}{2\sigma_g^2}\right) \mathbf{1}_{r \in [-3\sigma_g, 3\sigma_g]} \quad (2.46)$$

$$G(r) = \left( \frac{r}{\sigma_g^2} \right) \mathbf{1}_{r \in [0, 4\sigma_g]} + \left( \frac{1}{2A_j} + \frac{r - A_j}{\sigma_g^2} \right) \mathbf{1}_{r \in [-3\sigma_g, 3\sigma_g]}$$

Les représentations des lois de probabilité et des non linéarités obtenues sont présentées figure (III-2.13).

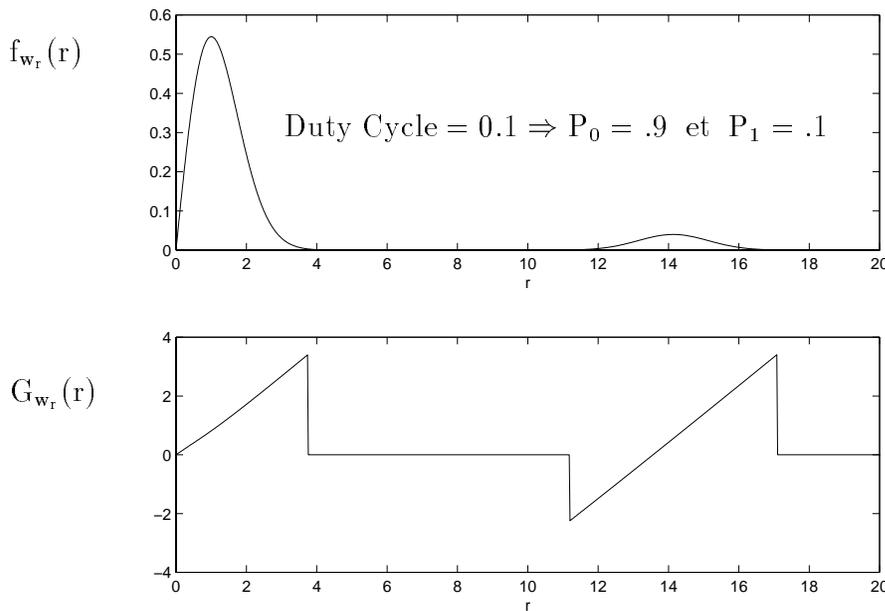


FIG. 2.13: *Lois de probabilité et non linéarité pour un brouilleur pulsé*

Le gain de traitement est donné pour les 2 configurations du bruit par les relations (III-2.32) et (III-2.42). On peut en déduire le rapport signal sur bruit  $\Gamma$  (défini par la relation (I-1.9)). Lorsque le bruit est gaussien on obtient le rapport idéal. Lorsque le signal d'interférence apparaît, le traitement introduit une perte de corrélation de 3dB (voir relation (III-2.43)). Le rapport signal sur bruit  $\Gamma$  obtenu en moyenne dépend donc des proportions  $P_0$  et  $P_1$ .

$$\begin{cases} \Gamma = \Gamma_{ideal} \left( P_0 + \frac{P_1}{2} \right) = \frac{A_c^2}{2\sigma_g^2} \left( P_0 + \frac{P_1}{2} \right) \\ G_\Gamma = \frac{\Gamma}{\Gamma_{ideal}} = \left( P_0 + \frac{P_1}{2} \right) \end{cases} \quad (2.47)$$

## 2.6 Simulation du récepteur optimum

### 2.6.1 Conditions de simulation

Pour valider cette étude, nous proposons une simulation réalisée sur 10 millions d'échantillons. L'architecture du simulateur est représentée fig (III-2.14). Le cœur du simulateur est constitué par le nouveau récepteur. Ce récepteur inclut l'élément non linéaire dont la forme est déduite d'histogrammes établis à partir des échantillons du signal.

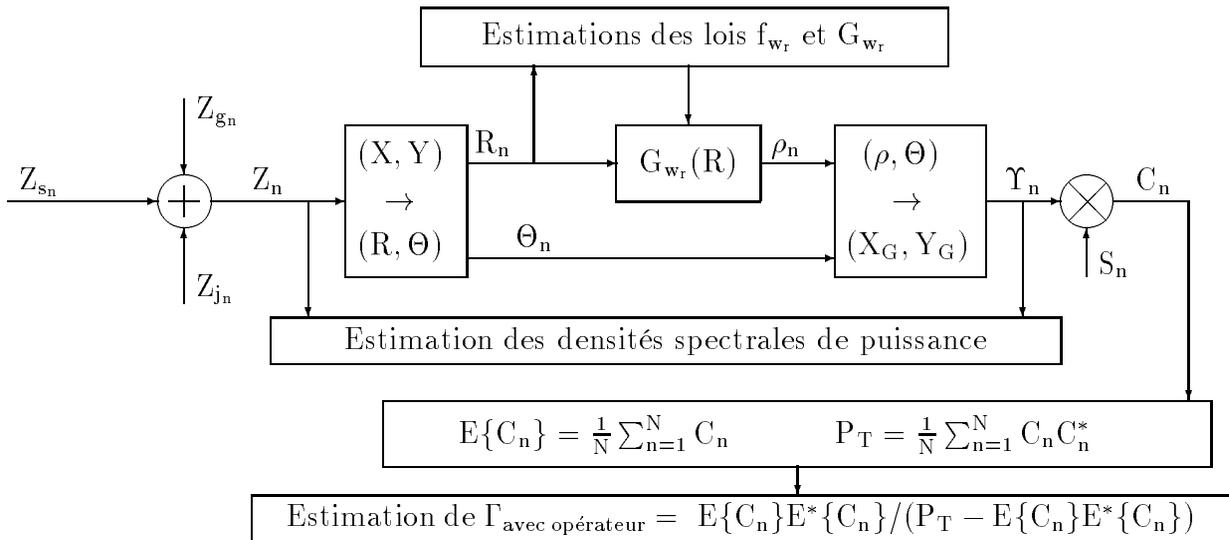


FIG. 2.14: *Modèle de simulation*

Le récepteur est évalué, comme le récepteur unidimensionnel, pour les représentations du bruit suivantes :

- **Bruit blanc gaussien**
- **Bruit blanc gaussien + 1CWI**,  $J/G \in [10\text{dB}, 20\text{dB}, 30\text{dB}, 40\text{dB}]$
- **Bruit blanc gaussien + 2 CWIs**,  $J_1/G = J_2/G = 30\text{dB}$
- **Bruit blanc gaussien + 3 CWIs**,  $J_1/G = J_2/G = J_3/G = 30\text{dB}$
- **Bruit blanc gaussien + CWI pulsée à 50%**,  $J/G = 30\text{dB}$
- **Bruit blanc gaussien + CWI balayée sur  $\Delta f = 0.1$  à  $10^{-5}\text{Hz}$** ,  $J/G = 30\text{dB}$

La puissance du signal est maintenue 20 dB en dessous du bruit gaussien.

### 2.6.2 Estimation des lois $f_{wr}$ et $G_{wr}$

Ces estimations sont réalisées à partir de l'histogramme lissé de l'amplitude  $R$  quantifié sur 256 niveaux. Le lissage est réalisé par filtrage temporel d'histogrammes successifs et par filtrage spatial effectué sur 5 tranches adjacentes. La plage de quantification est évaluée en

présence de bruits gaussiens. La loi de probabilité  $f_{w_r}$  est alors une loi de Rayleigh et la puissance du bruit d'écrêtage est :

$$Ne = 2 * \sigma_g^2 e^{-\frac{R_{max}^2}{2\sigma_g^2}} - R_{max} \sqrt{2\pi} \cdot \sigma_g \cdot \text{erfc} \left( \frac{R_{max}}{\sqrt{2\pi}} \right) \tag{2.48}$$

On choisit  $R_{max} = 3\sigma_g$  et la puissance du bruit d'écrêtage est alors de  $2.10^{-3}\sigma_g^2$ . Les représentations obtenues pour les lois  $f_{w_r}$  et  $G_{w_r}$  sont données figure (III-2.15) et (III-2.16).

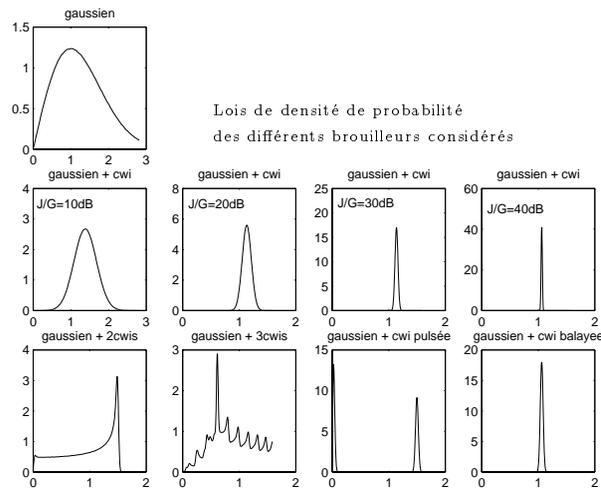


FIG. 2.15: Lois de densité de probabilité estimées

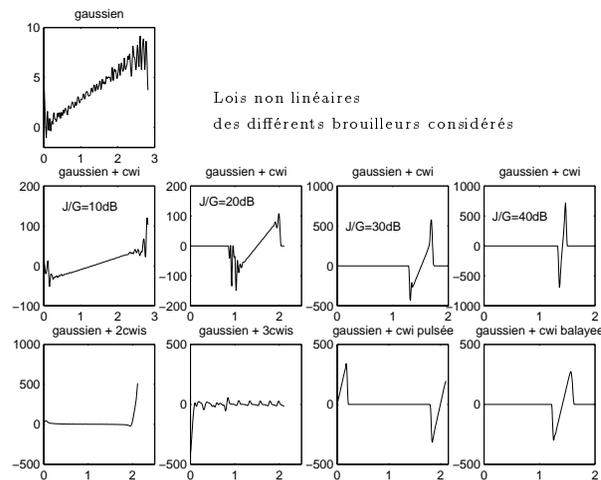


FIG. 2.16: Lois non linéaires estimées

### 2.6.3 Estimation du gain de traitement théorique

L'expression du gain de traitement théorique est donnée par l'équation (III-2.29). Nous réalisons l'estimation de ce gain en présence d'interférences sinusoïdales. La puissance de ces

interférences est telle que  $J/G \gg 1$ . La fréquence de ces interférences permet d'obtenir une distribution uniforme de la phase sur  $[0, 2\pi]$ . Pour des rapports  $G/S \gg 1$  on a :

$$G_t \approx K_{P_s} \frac{(E(G'_{w_r}))^2 E(R_w)^2}{E(G_{w_r}^2)} \quad \text{Avec } K_{P_s} = \frac{1}{4}$$

D'où d'après (III-2.28) :

$$G_t = K_{P_s} E(G'_{w_r}) E(R_w)^2 = \frac{1}{4} E(G'_{w_r}) E(R_w)^2$$

Ce gain dépend de la puissance du bruit ( $\sim$  puissance du signal à l'entrée de l'opérateur) et de l'information de Fisher  $E(G'_{w_r}) = E(G_{w_r}^2)$ . L'estimation du gain de traitement théorique est réalisée numériquement à partir de l'estimée de la non linéarité  $G_{w_r}$ . On trouve sur le tableau (III-2.6.3) les valeurs des gains de traitement estimés. De la valeur du gain de traitement, on déduit le gain de corrélation  $G_\Gamma$ . Ce gain est comparé au gain théorique ( $G_\Gamma = 1$  pour un bruit gaussien,  $G_\Gamma$  donné par les relations (III-2.43) et (III-2.47) pour un brouilleur sinusoïdal fixe et pulsé).

Bruit	gaussien	gaussien + 1 CWI	gaussien + 1 CWI	gaussien +1 CWI	gaussien + 1 CWI
Rapport J/G		10dB	20dB	30dB	40dB
Gain estimé $G_t$	-7dB	7.3dB	17dB	26.7dB	36.8dB
$G_\Gamma$ estimé	-7dB	-2.7dB	-3dB	-3.3dB	-3.2dB
$G_\Gamma$ théorique	0dB	-3dB	-3dB	-3dB	-3dB
Bruit	gaussien +2 CWIs	gaussien +3 CWIs	gaussien +1 CWI pulsée	gaussien +1 CWI balayée	
Gain estimé $G_t$	20.8dB	18.8dB	28.4dB	26.4dB	
$G_\Gamma$ estimé			-1.6dB	-3.6dB	
$G_\Gamma$ théorique			-1.25dB	-3dB	

Tableau 2.6.3 : Gains théoriques estimés en simulation

On remarque que les performances sont supérieures aux performances obtenues en unidimensionnel et que, pour des représentations simples des signaux d'interférence (1 CWI), le gain de corrélation  $G_\Gamma$  estimé par cette méthode est voisin du gain théorique.

### 2.6.4 Estimation des densités spectrales de puissance

Les représentations des densités spectrales de puissance obtenues par la méthode du périodogramme cumulé, sont données figures (III-2.17) et (III-2.18). Elles montrent que les raies

spectrales après traitement sont de puissances négligeables et que le spectre du signal n'est pas altéré.

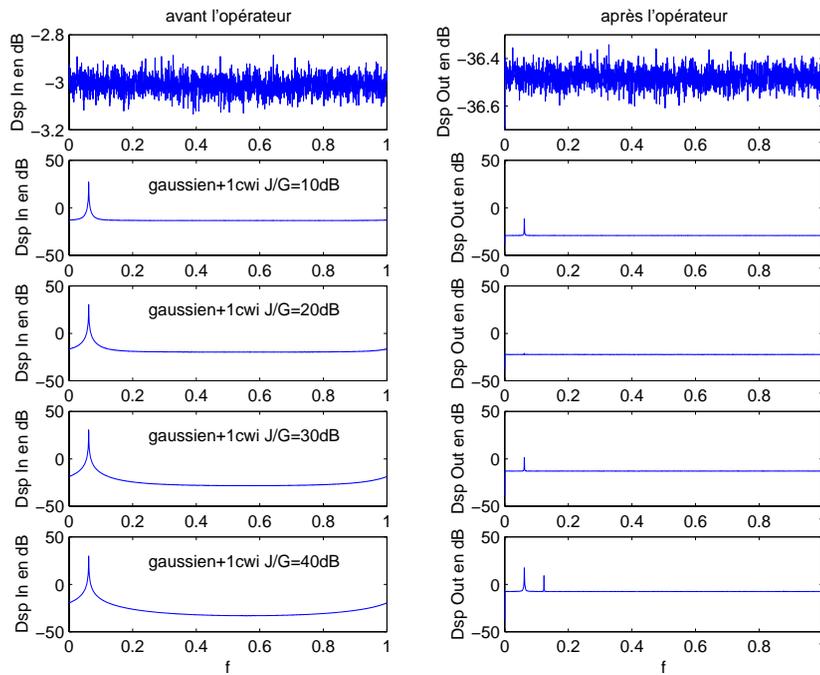


FIG. 2.17: *Bruits gaussien, gaussien+cwi : Densités spectrales de puissance*

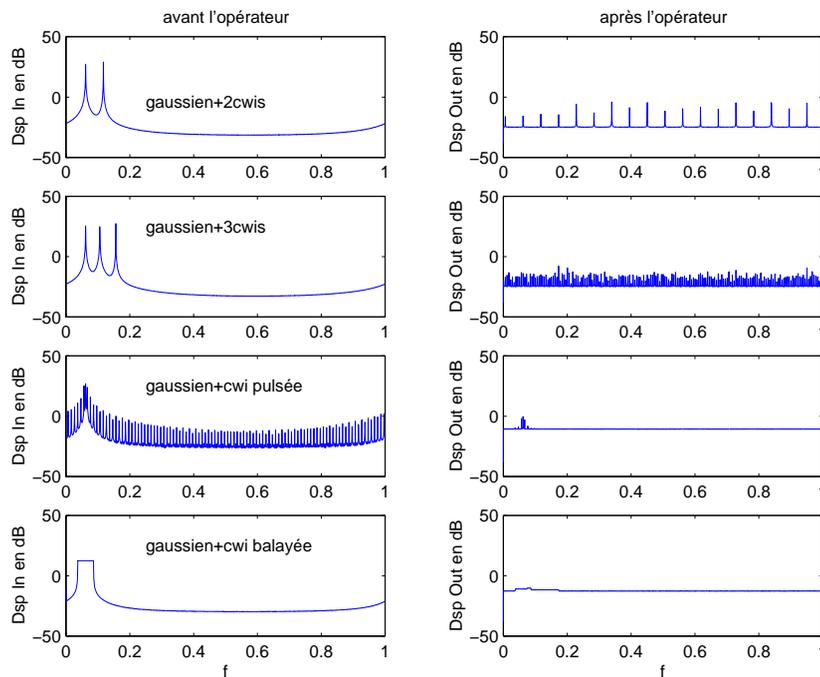


FIG. 2.18: *Bruits gaussien+cwis, gaussien+cwi pulsée, gaussien+cwi balayée : Densités spectrales de puissance*

### 2.6.5 Estimation du gain de traitement par corrélation

Le gain de traitement est déduit de l'estimation de la puissance et de la moyenne de  $C$  (voir figure (III-2.14)). Cette estimation est réalisée sur 10 millions d'échantillons.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{avec\ opérateur} = \frac{(E(C_n))^2}{E(C_n^2) - (E(C_n))^2} \\ G_t = \frac{\Gamma_{avec\ opérateur}}{\Gamma_{sans\ opérateur}} \end{array} \right. \quad (2.49)$$

Le tableau (III-2.6.5) compare les gains théoriques aux gains ainsi estimés.

Bruit	gaussien	gaussien + 1 CWI	gaussien + 1 CWI	gaussien +1 CWI	gaussien + 1 CWI
Rapport J/G		10dB	20dB	30dB	40dB
Gain par corrélation	-0.2dB	7.3dB	16.9dB	26.9dB	36.8dB
$G_\Gamma$ estimé	-.2dB	-2.7dB	-3.1dB	-3.1dB	-3.2dB
$G_\Gamma$ théorique	0dB	-3dB	-3dB	-3dB	-3dB
Bruit	gaussien +2 CWIs	gaussien +3 CWIs	gaussien +1 CWI pulsée	gaussien +1 CWI balayée	
Rapport J/G	30dB	30dB	30dB	30dB	
Gain par corrélation	18.2dB	16.4dB	28.6dB	26.8dB	
$G_\Gamma$ estimé			-1.4dB	-3.2dB	
$G_\Gamma$ théorique			-1.25dB	-3dB	

**Tableau 2.6.5 : Gains théoriques et Gains par corrélation obtenus en simulation**

Le gain estimé par cette méthode est très proche du gain estimé à partir de l'estimation de la non linéarité (voir tableau (III-2.6.3)) et du gain théorique.

## 2.7 Conclusions

Le traitement appliqué sur l'enveloppe complexe du signal permet d'obtenir des gains de traitement élevés pour les configurations de bruit présentées tableau (III-2.6.5).

Ce traitement passe par une évolution du récepteur classique. La nouvelle architecture fait apparaître un élément non linéaire dont la loi est déduite de la forme de la loi de densité de probabilité du bruit.

La difficulté de mise en œuvre réside dans l'estimation de cette loi. Le récepteur testé dans ce chapitre utilise un module qui réalise cette estimation permettant un traitement adaptatif

du signal d'entrée.

Cette technique est donc très efficace en présence d'une CW. Le traitement élimine le brouilleur. Il en résulte toutefois une perte de corrélation de 3dB sur le signal. Cette perte résulte de la rotation de phase apportée par le traitement.

La méthode s'avère particulièrement intéressante en présence d'un brouilleur modulé en fréquence ou en présence d'un brouilleur pulsé, voire d'un brouilleur modulé en amplitude qu'il est parfois difficile de traiter avec les techniques de filtrage linéaire présentées précédemment (problème de poursuite lorsque le traitement est réalisé dans le domaine temporel, élargissement de la bande occupée lorsqu'il est appliqué dans le domaine fréquentiel).

Ramené à un traitement unidimensionnel ne traitant que l'amplitude, cette technique n'est pas sensible aux variations de fréquence du brouilleur. Par ailleurs les techniques d'estimation appliquées permettent, en vertu de la propriété d'ergodicité des signaux d'interférence, de décrire correctement la loi de probabilité de l'interférence lorsque les intervalles de stationnarité sont correctement fixés pour la réalisation des estimations. En particulier, dans le cadre de nos simulations, la non linéarité obtenue associe les 2 domaines d'un brouilleur pulsé.

Toutefois on note une nette dégradation en présence de CWs multiples. La loi statistique de l'amplitude du bruit approche alors une loi de Rayleigh et les performances obtenues sont dégradées. Pour exemple, on donne figure (III-2.19) la loi de probabilité et la non linéarité obtenues en présence de 10 CWs. Le spectre du signal de sortie est alors représenté figure (III-2.20). On mesure dans ce cas un gain de traitement inférieur à l'unité (-2dB).

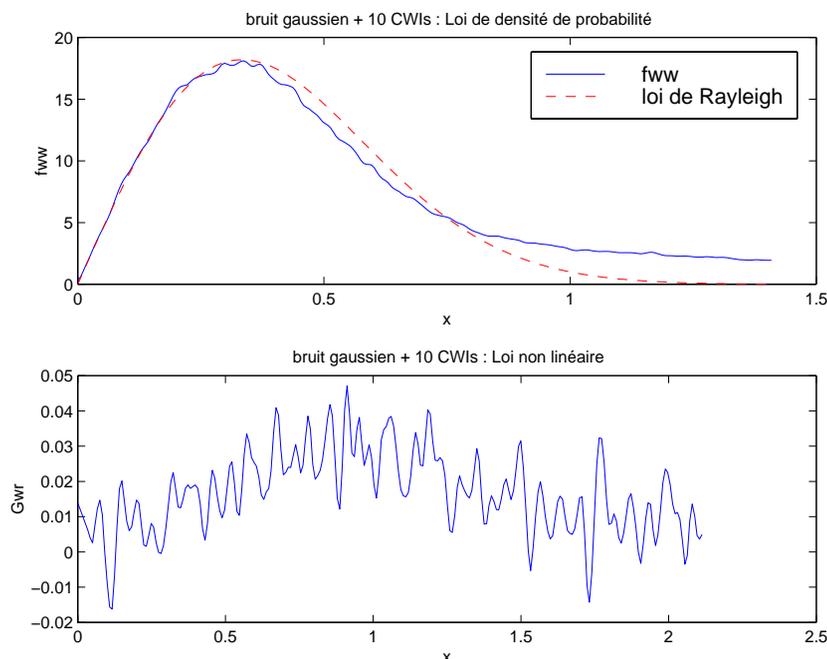


FIG. 2.19: *Bruit gaussien+10CWs : loi de densité de probabilité et loi non linéaire*

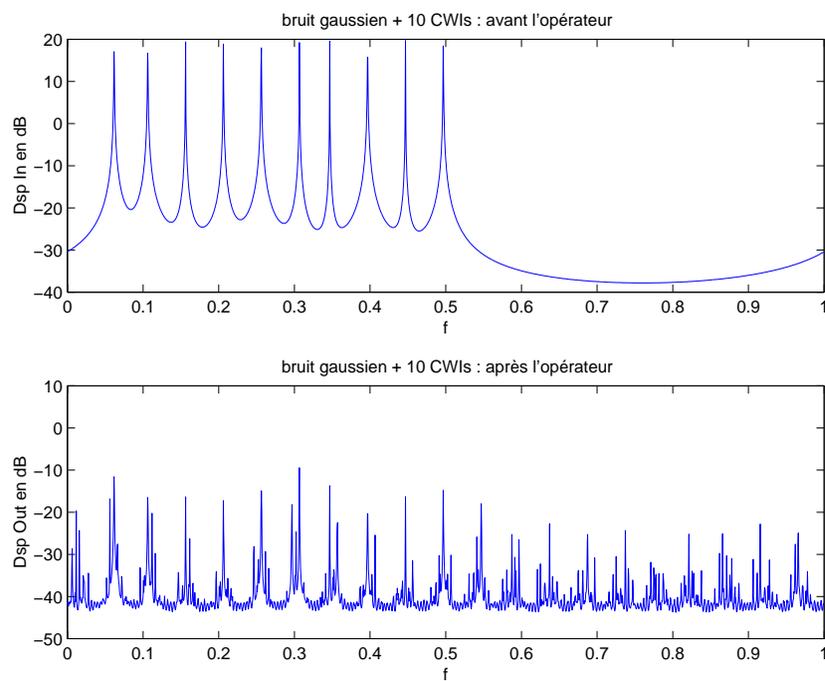


FIG. 2.20: *Bruit gaussien+10CWs : Densités spectrales de puissance*



## Chapitre 3

# Traitement en fréquence de l'amplitude

La théorie de la détection appliquée à l'amplitude de l'enveloppe complexe du signal reçu donne de bons résultats en présence d'un brouilleur unique. Le traitement permet la réjection d'un signal d'interférence tel que CWI, CWI balayée en fréquence, CWI pulsée. La seule dégradation, due à la perte de cohérence sur le signal, induit une perte de corrélation de 3dB pour un brouilleur à amplitude constante. Cette perte est plus faible pour un brouilleur pulsé.

Toutefois, nous avons mis en évidence l'inefficacité du traitement lorsque le nombre de signaux d'interférence devient important. Dans ce chapitre nous envisageons d'utiliser une représentation du couple  $R, \Theta$  permettant le traitement de CWIs multiples. La séparation de ces bruits est obtenue par le biais d'une projection orthogonale appliquée à l'enveloppe complexe du signal [32]. Ces bruits étant sinusoïdaux, la transformée de Fourier est utilisée. Cette transformée est appliquée au couple  $X, Y$  qui représente les signaux en phase et en quadrature à l'entrée du récepteur numérique. Nous obtenons alors, à chaque fréquence décrite par la transformée de Fourier discrète, une représentation similaire à la représentation obtenue dans le domaine temporel. Le module de la transformée du bruit suit une loi de Rayleigh aux fréquences exemptes de brouilleur. À ces fréquences, l'opérateur est linéaire. Aux fréquences modifiées par le brouilleur, le module du bruit suit une loi gaussienne centrée sur l'enveloppe du bruit. L'opérateur est linéaire autour de cette enveloppe.

Ce chapitre définit cette technique, c'est à dire le traitement non linéaire appliqué dans le domaine des fréquences. Les performances sont mesurées en présence d'un brouilleur fixe et d'un brouilleur modulé linéairement. Enfin une architecture permettant le traitement de brouilleurs multiples est proposée.

### 3.1 Position du problème

Nous retrouvons ici les conditions du chapitre précédent. Le signal complexe généré à l'entrée des boucles du corrélateur est de la forme :

$$Z_n = A_c \cdot P_n \exp\{i\Theta_{s_n}\} + W_n = S_n + W_n$$

Le bruit incluant la composante gaussienne et le signal d'interférence est modélisé par  $W_n$ .

La construction du détecteur optimum conduit à définir l'opérateur non linéaire qui doit être appliqué à ce signal complexe. Cet opérateur est déduit de la statistique du module du signal complexe  $Z = X + iY$  ou plus exactement de la composante "bruit" de ce signal. Or la loi de densité de probabilité du bruit du couple  $\{X, Y\}$ , en présence de CWs multiples, devient gaussienne. Le module suit alors une loi de Rayleigh et le traitement est inefficace. Afin de pallier ce problème, nous appliquons une transformée de Fourier au signal complexe  $Z$ . Les signaux d'interférence sinusoïdaux sont alors représentés sur une base orthogonale et traités séparément.

L'architecture du récepteur numérique représentée figure (III-2.2) est modifiée. Le traitement de l'amplitude du signal d'entrée est précédé d'une transformée de Fourier appliquée sous sa forme discrète.

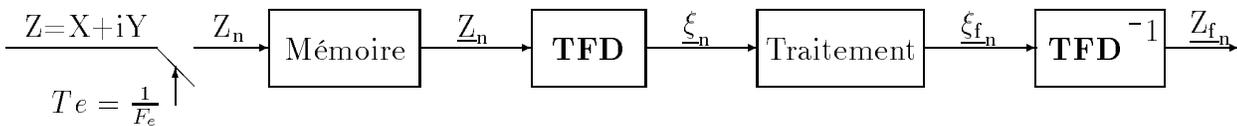


FIG. 3.1: Traitement fréquentiel de l'amplitude

Nous retrouverons ici la notation introduite dans le chapitre 2 de la deuxième partie.

$Z_n = Z(n)$	Echantillon prélevé à l'instant $nT_e$
$\underline{Z}(n) = [Z_n Z_{n+1} \dots Z_{n+N-1}]^T$	Bloc des N échantillons, prélevés à partir de l'instant $nT_e$
$M = [M_{kn}]_{0 \leq k, n \leq N-1}$	Matrice associée à la TFD
$\underline{\xi}(n) = M \cdot \underline{Z}(n)$	TFD obtenue à partir du bloc $\underline{Z}(n)$
$\underline{R}(n) = \sqrt{\underline{\xi}(n) \cdot \underline{\xi}^*(n)}$	Module de la TFD $\underline{\xi}(n)$
$R_k(n) = \sqrt{\xi_k(n) \cdot \xi_k^*(n)}$	Module aux fréquences $f = k \frac{F_e}{N}$

Le problème est donc de définir le traitement non linéaire qui doit être appliqué au signal

complexe obtenu après la TFD. Ce traitement sera appliqué au module du signal défini dans le domaine fréquentiel. Il nécessite donc une connaissance de la statistique du bruit en sortie de la TFD.

## 3.2 Caractéristique fréquentielle du bruit

Pour traiter le problème de la détection nous définissons la statistique du bruit dans le domaine des fréquences. En utilisant la linéarité de la transformée de Fourier, on distingue dans le plan des fréquences les 2 composantes signal et bruit.

$$\xi = \xi_s + \xi_w$$

Dans le plan de Fourier, la statistique du bruit dépend de la fréquence. Nous nous intéressons à la caractérisation de ce bruit aux fréquences définies par la TFD, c'est à dire aux composantes  $\xi_{w_k}$  obtenues aux fréquences  $kF_e/N$ .

### Bruit blanc gaussien

Nous avons étudié la statistique du bruit gaussien obtenue après la TFD au chapitre 2 (2<sup>ème</sup> partie). Le module de ce bruit  $R_w = R_g$  suit une loi de Rayleigh (II-2.1).

$$f_{R_g}(R) = \frac{R}{\sigma_g^2} \exp\left\{-\frac{R^2}{2\sigma_g^2}\right\} \mathbf{1}_{r \geq 0}$$

On postule que le processus  $R_{g_k}(n)$ , qui décrit l'évolution du module du bruit aux fréquences exemptes de brouilleurs, est ergodique. Ce processus suit une loi de Rayleigh. La loi appliquée au module du signal composite  $R_k = |\xi_k|$  est :

$$G_{R_k}(R) = \frac{R}{\sigma_g^2} \quad \forall k \quad (3.1)$$

**Dans ce cas l'opérateur est linéaire : le traitement est inutile.**

### Bruit sinusoïdal

La transformée de Fourier discrète permet d'obtenir pour le module du bruit sinusoïdal, une représentation déterministe, donnée chapitre 2 (2<sup>ème</sup> partie) par la relation (II-2.2), qui fait

intervenir la fenêtre de pondération appliquée sur les blocs avant la TFD.

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{w_k}(n) = R_{j_k}(n) = A_j \sqrt{N} \left| F\left(\frac{k}{N} - \frac{f_j}{F_e}\right) \right| \\ F(\tilde{f}) : \text{Transformée de Fourier de la fenêtre échantillonnée} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

La loi de probabilité unidimensionnelle du processus  $R_{j_k}(n)$  a pour expression :

$$f_{R_{j_k}}(R) = \delta(R - R_{j_k}) \quad (3.3)$$

**A une fréquence donnée, nous retrouvons une expression identique à celle obtenue dans le domaine temporel pour un bruit sinusoïdal (voir (III-2.33)). Le gain de traitement, vis à vis de cette CWI de fréquence  $f_j$ , est théoriquement infini.**

### Bruit blanc gaussien + 1 CWI

D'après (II-2.3) et (II-2.2), l'expression du bruit dans le domaine des fréquences est de la forme :

$$\xi_{w_k}(n) = A_j \sqrt{N} F\left(\frac{k}{N} - \frac{f_j}{F_e}\right) \exp(i\Phi_j(n)) + \xi_{g_k}(n) \quad (3.4)$$

$$\xi_{w_k}(n) = R_{j_k} \exp(i\Phi_j(n)) + \xi_{g_k}(n)$$

Cette expression est équivalente à l'expression (III-2.38). De l'étude conduite au chapitre qui précède, on déduit l'expression de la loi de densité de probabilité du processus  $R_{w_k}(n) = |\xi_{w_k}(n)|$  et de l'opérateur non linéaire.

$$f_{R_{w_k}}(R) = \frac{R}{\sigma_g^2} \exp\left(-\frac{R^2 + R_{j_k}^2}{2\sigma_g^2}\right) I_0\left(\frac{R_{j_k} R}{\sigma_g^2}\right) \quad (3.5)$$

$$G_{R_k}(R) = \frac{R}{\sigma_g^2} - \frac{R_{j_k}}{\sigma_g^2} \cdot \frac{I_1}{I_0}\left(\frac{R_{j_k} R}{\sigma_g^2}\right)$$

Dans ce cas, la représentation du brouilleur étant stationnaire ( $R_{j_k}$  indépendant de l'indice sur les blocs  $n$ ), il est aisé d'estimer, à partir de moyennes réalisées sur les spectres successifs, les 2 paramètres  $R_{j_k}$  et  $\sigma_g$  qui permettent de construire l'opérateur non linéaire.

### Bruit blanc gaussien et CWIs multiples

L'expression de ce bruit dans le domaine fréquentiel est établie d'après les équations (II-2.4) et (II-2.5). Lorsque, pour une distribution donnée des fréquences, la fenêtre ne permet pas de séparer les brouilleurs en présence, le module de l'interférence  $R_{j_k}$  dépend de  $n$ , indice sur les blocs.

$$\xi_{w_k}(n) = R_{j_k}(n) \exp(i\Phi_j(n)) + \xi_{g_k}(n)$$

$$R_{j_k}(n) = \left\| \sum_l A_l \sqrt{N} \left| F\left(\frac{k}{N} - \frac{f_l}{F_e}\right) \right| \exp\left(i\left(\Theta_l - \pi\left(k - N\frac{f_l}{F_e}\right)\frac{N-1}{N}T_e\right)\right) \exp\left(i2\pi\frac{f_l}{F_e}n\right) \right\| \quad (3.6)$$

On retrouve, pour la loi de densité de probabilité et pour la loi non linéaire des expressions de la forme (III-3.5).

$$f_{R_k}(R, n) = \frac{R}{\sigma_g^2} \exp\left(-\frac{R^2 + R_{j_k}(n)^2}{2\sigma_g^2}\right) I_0\left(\frac{R_{j_k}(n)R}{\sigma_g^2}\right) \quad (3.7)$$

$$G_{R_k}(R, n) = \frac{R}{\sigma_g^2} - \frac{R_{j_k}(n)}{\sigma_g^2} \cdot \frac{I_1}{I_0}\left(\frac{R_{j_k}(n)R}{\sigma_g^2}\right) \quad (3.8)$$

Par contre, si nous comparons les résultats obtenus sur deux paquets d'échantillons, nous observons des variations de l'enveloppe  $R_{j_k}$  lorsque la fenêtre d'analyse ne permet pas de séparer les brouilleurs en présence. Les lois dépendent alors de  $n$ .

## 3.3 Traitement de l'amplitude dans le plan fréquentiel

### 3.3.1 Principe

Nous nous intéressons au traitement à réaliser en présence de brouilleurs sinusoïdaux. L'expression de la loi est alors donnée par la relation (III-3.8). Cette loi est identique à la loi définie pour le traitement, dans le domaine temporel, de l'amplitude d'un brouilleur sinusoïdal unique, en présence de bruit blanc gaussien additif (III-2.45).

$$\begin{array}{ccc} \text{Traitement en temps} & & \text{Traitement en fréquence} \\ A_j \text{ (III - 2.45)} & \longrightarrow & R_{j_k}(n) \text{ (III - 3.8)} \end{array}$$

La représentation de la non linéarité appliquée à la fréquence  $kF_e/N$  repose donc sur l'estimation de la puissance de la composante gaussienne du bruit ( $\sigma_g^2$ ), et de l'amplitude de l'interférence à cette fréquence ( $R_{j_k}$ ). Dans le cas général la difficulté réside dans le fait que cette amplitude est une fonction de  $n$ , indice sur les paquets d'échantillons (voir relation (III-3.6)). Le processus  $R_k = |\xi_k|$  n'est pas stationnaire. Sa loi de probabilité (donnée par (III-3.7)), qui dépend de  $R_{j_k}$ , varie avec le temps (voir figure (III-3.2)). Les estimateurs "classiques" basés sur la propriété d'ergodicité des processus ne peuvent pas être utilisés dans ce contexte.

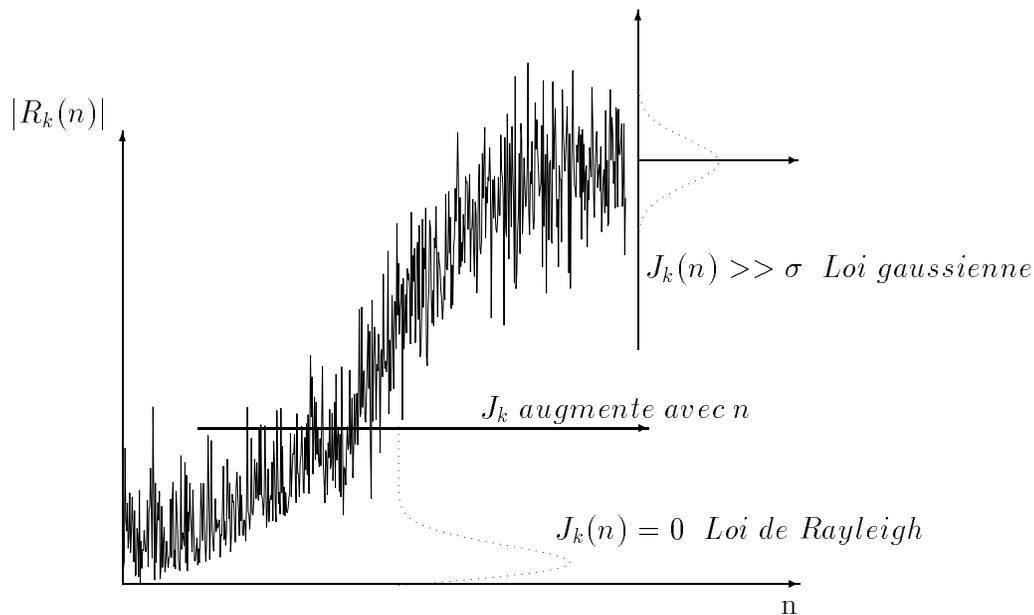


FIG. 3.2: Exemple de trajectoire de  $R_k(n)$  et évolution de loi de densité de ce processus

En conséquence, les non linéarités  $\{G_{R_k}\}$  doivent être établies pour chaque bloc généré par la transformée de Fourier discrète et appliquées à chaque composante du module de la représentation spectrale.

### 3.3.2 Définition du traitement

La non linéarité à une fréquence donnée dépend du module du brouilleur à cette fréquence. Nous avons représenté au chapitre précédent la forme des non linéarités pour différentes valeurs du rapport  $J/G$  (voir figure (III-2.12)). Une étude plus précise montre que pour des rapports  $J$  sur  $G$  inférieurs à  $-10\text{dB}$  l'opérateur est linéaire et ne modifie pas l'amplitude du signal, et que lorsque le rapport  $J$  sur  $G$  atteint le seuil de  $10\text{dB}$  l'opérateur est linéaire autour de l'amplitude du brouilleur.

Dans ce contexte (traitement en fréquence), il faut substituer au rapport  $J/G$  le rapport

$K_{JG}(k)$  qui, à une fréquence donnée  $f = kF_e/N$ , se définit à partir de l'amplitude de l'interférence à cette fréquence et de la puissance du bruit gaussien.

$$\begin{array}{ccc} \text{Traitement en temps} & \longrightarrow & \text{Traitement en fréquence} \\ \frac{J}{G} & & K_{JG}(k) = \frac{R_{Jk}^2}{G} \end{array}$$

La puissance du bruit gaussien dépend de la fenêtre de pondération utilisée. Elle se déduit à partir des relations (II-2.9) de la puissance du bruit gaussien à l'entrée.

$$G = 2\sigma_{g_F}^2 = 2\lambda_F * \sigma_g^2 \tag{3.9}$$

Où  $\lambda_F$  représente l'atténuation en puissance apportée par la fenêtre.

On en déduit l'expression du rapport  $K_{JG}(k)$  :

$$K_{JG}(k) = \frac{R_{Jk}^2}{2\sigma_{g_F}^2} \tag{3.10}$$

Lorsque le traitement est appliqué en fréquence il dépend, à la fréquence  $f = kF_e/N$ , du rapport  $K_{JG}(k)$  défini par la relation (III-3.10).

Nous donnons, pour des blocs de taille  $N=512$ , une représentation du spectre en présence de brouilleurs multiples figure 3.3-a et 3.3-b.

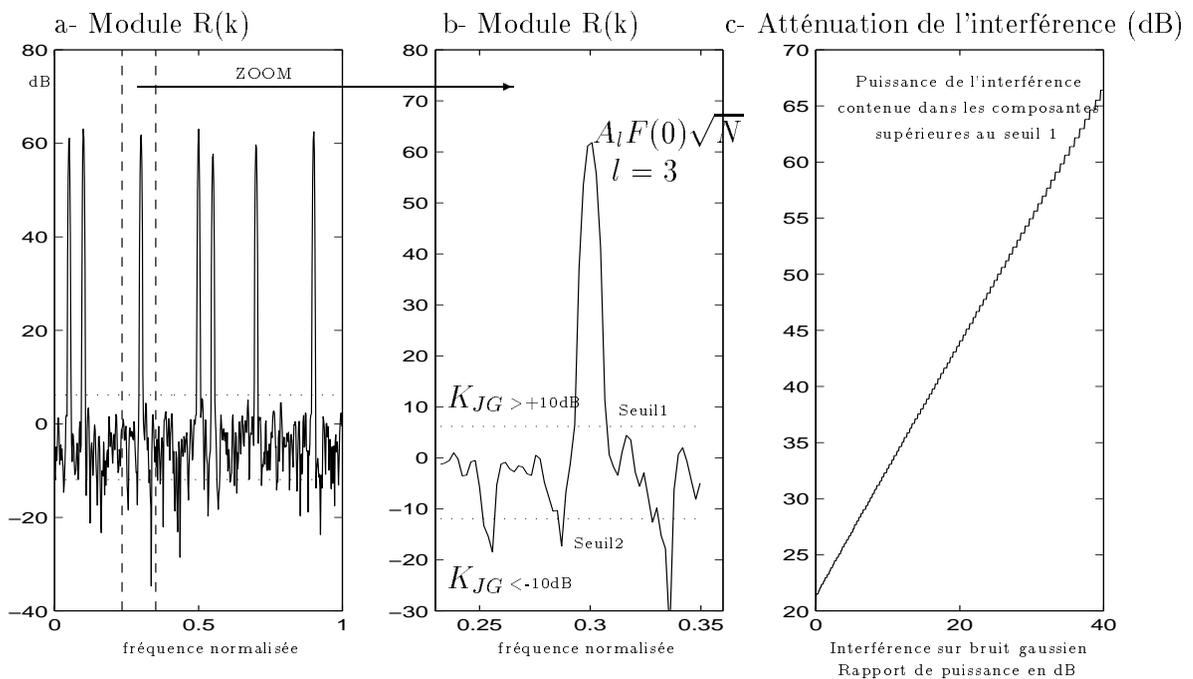


FIG. 3.3: Représentation spectrale en présence de brouilleurs

La partition réalisée sur ces figures définit 3 régions. L'étude conduite au chapitre précédent dans le domaine temporel permet de définir dans chacune de ces régions l'opérateur non linéaire. Au dessous du seuil 2 on peut admettre que le bruit est gaussien et le traitement est défini par la relation (III-2.30). Au dessus du seuil 1 le signal d'interférence est tel que le rapport  $K_{JG}$  est très grand devant 1 et le traitement est défini par la relation (III-2.41). Entre les 2 seuils le signal d'interférence ne respecte pas la condition ( $K_{JG} \gg 1$ ) et le traitement est défini par la relation générale (III-2.45).

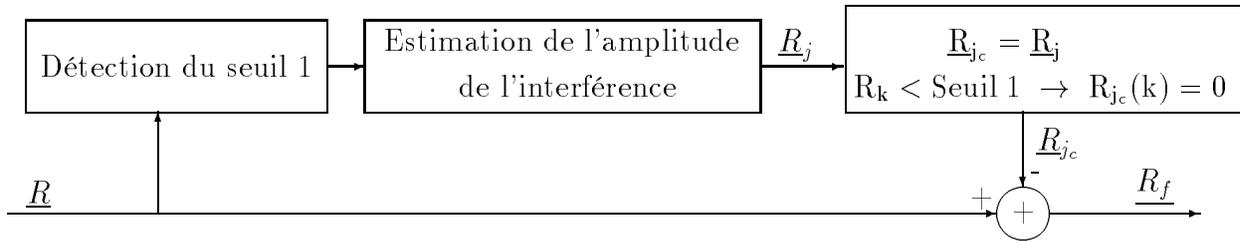
$$\left\{ \begin{array}{l} R_k > \text{Seuil } 1 \approx 4\sigma_{g_F} \quad \text{après traitement} \quad R_{k_f} \approx \frac{R_k - R_{j_k}}{\sigma_{g_F}^2} \\ (K_{JG} > 10dB) \\ \\ R_k < \text{Seuil } 2 \approx 0.5\sigma_{g_F} \quad \text{après traitement} \quad R_{k_f} \approx \frac{R_k}{\sigma_{g_F}^2} \\ (K_{JG} < -10dB) \\ \\ \text{Seuil } 2 < R_k < \text{Seuil } 1 \quad \text{après traitement} \quad R_{k_f} = \frac{R_k}{\sigma_{g_F}^2} - \frac{R_k R_{j_k}}{\sigma_{g_F}^2} \frac{I_1}{I_0} \left( \frac{R_k R_{j_k}}{\sigma_{g_F}^2} \right) \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Par ailleurs on représente sur la figure 3.3-c, pour une interférence, l'atténuation apportée sur cette interférence **par le traitement appliqué uniquement aux composantes d'amplitude supérieure au seuil 1**. Cette atténuation de la puissance de l'interférence est tracée en fonction du rapport interférence sur bruit gaussien  $\gamma_{jg} = J/G$ . Elle est telle que l'on peut négliger, après ce traitement, la puissance résiduelle du signal d'interférence. **Ceci signifie que l'énergie du brouilleur est concentrée dans le lobe principal et qu'il n'est pas utile de traiter les composantes de ce brouilleur qui ne dépassent pas le seuil 1.**

En corollaire de ceci le traitement de brouilleurs dans le domaine des fréquences passe par les étapes suivantes :

1. Détection des brouilleurs dans le plan des fréquences par comparaison du module défini dans le domaine fréquentiel, à un seuil de  $4\sigma_{g_F}$ ,
2. Estimation de l'enveloppe de ces brouilleurs,
3. Traitement, ce traitement consistant à soustraire du module obtenu, dans la région au dessus du seuil 1, l'enveloppe estimée des brouilleurs.

Les étapes de ce traitement sont représentées figure 3.4.

FIG. 3.4: *Traitement dans le plan fréquentiel*

L'application de ce traitement, dans le domaine des fréquences, aboutit à une structure très simple. La détection du seuil 1 résulte de l'estimation de la puissance du bruit gaussien. Cette estimation utilise la technique présentée dans le chapitre 3 de la 2<sup>ème</sup> partie. La seule difficulté réside donc dans l'estimation de l'enveloppe du signal d'interférence lorsque la représentation spectrale du brouilleur évolue avec l'indice sur les blocs  $n$ .

### 3.3.3 Performances

La distorsion de phase étant localisée en fréquence on vérifie que les pertes de corrélations introduites sont plus faibles que celles mesurées lorsque le traitement est réalisé dans le domaine temporel. Les performances sont évaluées en simulation. Celle-ci est réalisée dans les mêmes conditions que celle conduite pour l'étude des 2 techniques de filtrage fréquentiel exposées dans la 2<sup>ème</sup> partie (voir figure (II-2.12)). On rappelle que la première méthode consiste à annuler les composantes fréquentielles dans la région de l'interférence, que la deuxième méthode fixe ces composantes à une valeur constante qui dépend de la puissance du bruit gaussien.

Le signal d'interférence, à l'entrée du filtre, est un signal sinusoïdal centré sur la fréquence  $L_1$ . Ce signal est modulé linéairement en fréquence. La largeur de la bande traitée dépend de la pente de la modulation  $k_w$ . On déduit de cette simulation, à partir de la statistique du test  $T$  (voir figure(I-1.3)), le gain de corrélation  $G_T$  en présence du filtre.

Les résultats sont reportés sur la figure (III-3.5). Ces 3 graphes, présentés pour  $N_c = 2$ ,  $N_c = 5$ ,  $N_c = 10$ , permettent ainsi de comparer les performances obtenues ici à celles mesurées pour les méthodes présentées chapitre 2. L'atténuation sur la fonction d'intercorrélation reste ici, lorsque tout le lobe principal est éliminé, inférieure à 4 dB. Pour un brouilleur fixe centré sur  $L_1$ , cette atténuation est négligeable (inférieure à 0.5 dB pour  $N_c = 10$ ).

**Cette technique est donc plus performante. Elle permet de réduire les pertes**

de corrélation lorsque le traitement fréquentiel est appliqué dans le lobe principal du signal GPS, à une interférence large bande ou à des brouilleurs multiples. Le problème réside dans l'estimation de l'enveloppe de cette interférence.

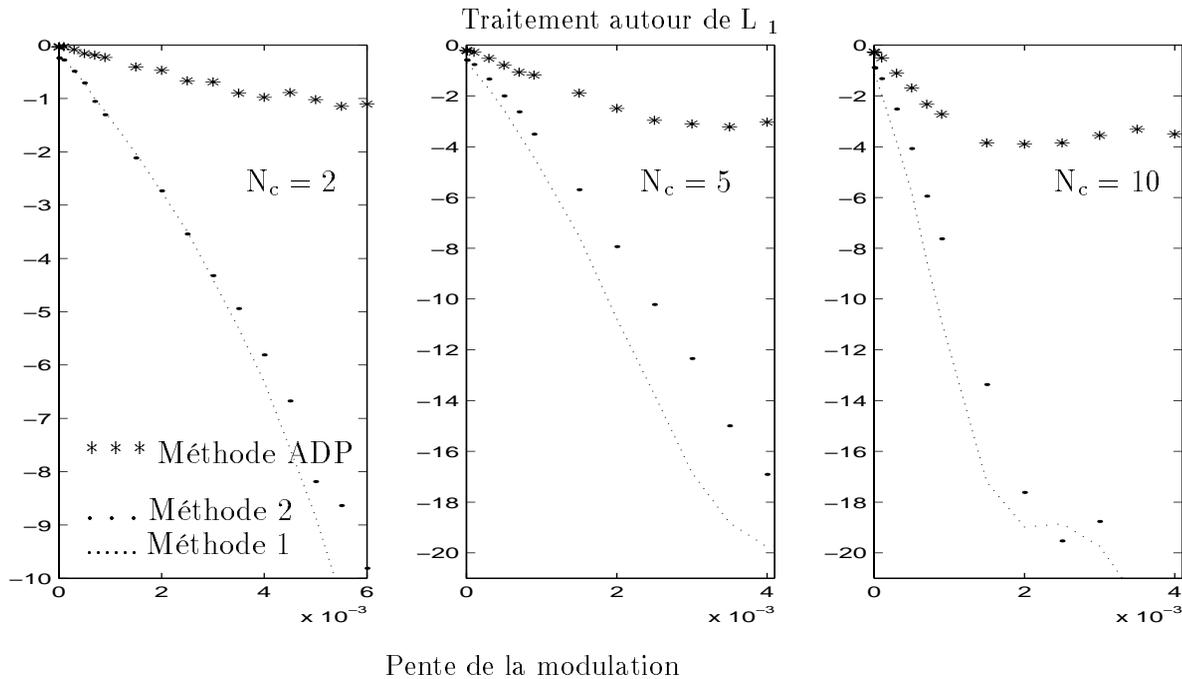


FIG. 3.5: Gain de corrélation  $G_T$  en fonction de la pente de la modulation

### 3.3.4 Estimation de l'amplitude de l'interférence

On ne peut pas ici estimer la statistique du bruit à chaque fréquence à partir de moyennes réalisées sur des blocs successifs. La mise en oeuvre d'un tel estimateur exigerait de traiter un nombre important d'échantillons. De plus, en présence de brouilleurs multiples, la statistique de l'amplitude  $R_{w_k}$  dépend de  $n$ .

Par ailleurs nous venons de mettre en évidence que **le traitement à appliquer sur un bloc de la TFD consistait à soustraire, à chacune des fréquences de l'interférence, l'amplitude du brouilleur à cette fréquence. Nous proposons donc d'estimer cette amplitude  $R_{j_k}$  pour chaque bloc de la TFD.**

L'estimation de l'amplitude  $R_{j_k}$  proposée est applicable à des brouilleurs fixes. Lorsque la taille des blocs de la TFD permet de séparer les composantes fréquentielles de ces brouilleurs,

cette amplitude peut se déduire de la représentation de la fenêtre  $F_k$  qui est connue.

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{j_k} = \sum_{l=1}^{N_j} A_l F\left(\frac{k}{N} - \frac{f_l}{F_e}\right) \\ N_j : \text{Nombre de brouilleurs} \\ A_l : \text{Amplitude du brouilleur d'indice } l \\ f_l : \text{fréquence du brouilleur d'indice } l \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Il suffit donc de rechercher dans la représentation du module  $R_k$  obtenue après la TFD des motifs qui ressemblent à la représentation fréquentielle de la fenêtre  $F_k$ . Nous déduisons ainsi la fréquence et l'amplitude des brouilleurs de la position et du niveau des maxima de la fonction d'intercorrélacion entre  $R_k$  et  $F_k = F(k/N)$ . Pour améliorer cette estimation un zoom est réalisé dans la région fréquentielle du signal d'interférence. Les étapes de cette méthode sont énumérées ci dessous :

1. Application de la TFD à des blocs de taille 512 pour obtenir  $\underline{\xi}_k$ ,
2. Calcul du module de la TFD  $\underline{R}_k$ ,
3. Mesure de la puissance du bruit gaussien (voir technique exposée chapitre 2),
4. Recherche des composantes fréquentielles de l'interférence par comparaison de  $\underline{R}_k$  à un seuil déduit de la puissance du bruit gaussien,
5. Interpolation en fréquence dans cette région,
6. Calcul du module dans cette région,
7. Mesure de la fonction d'intercorrélacion entre ce module et la fenêtre,
8. Recherche des fréquences et amplitudes des maxima de la fonction d'intercorrélacion,
9. Génération d'un signal composé d'impulsions de Dirac calées sur les fréquences estimées à l'étape qui précède,
10. Convolution de ce signal par la fenêtre,
11. Décimation en fréquence,
12. Traitement des composantes fréquentielles isolées à l'étape 4.

Ce traitement est appliqué ci après, à l'élimination de 4 brouilleurs situés dans le lobe

principal du signal GPS. La TFD est implantée sur des blocs de taille 512. L'interpolation en fréquence dans la région de l'interférence est réalisée sur des blocs de taille 16. Le premier lobe de la fenêtre étant défini sur 7 échantillons fréquentiels, cette taille permet d'isoler 2 brouilleurs. L'opération d'interpolation est implantée de la manière suivante :

1. Extraction d'un bloc de taille 16,
2. TFD inverse sur ce bloc,
3. Zéro padding,
4. TFD sur 512 points après zéro padding.

Nous représentons ainsi sur la figure (III-3.6) les 6 premières étapes de ce traitement. Le 1<sup>er</sup> graphe représente le spectre obtenu après la TFD. Les composantes supérieures à  $4\sigma_{\text{gF}}$  sont isolées et représentées sur le 2<sup>ème</sup> graphe. Une interpolation est réalisée dans cette région. On obtient alors les représentations 3 et 4 sur lesquelles les points représentent les composantes d'origine (avant interpolation).

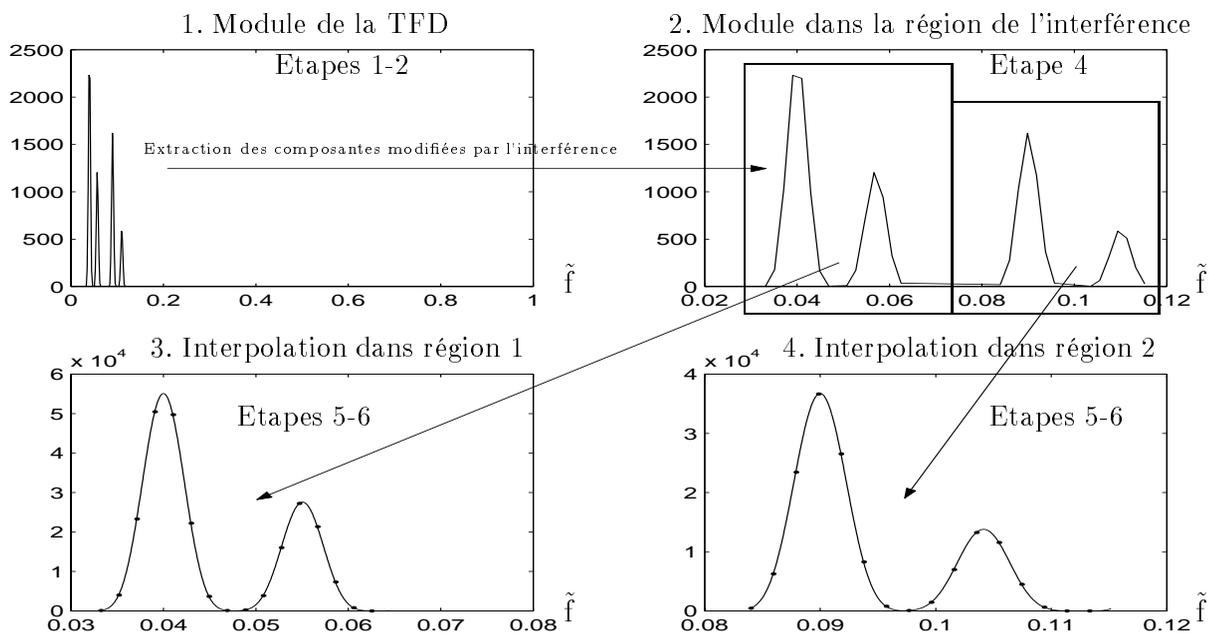


FIG. 3.6: *Module obtenu pour les 6 premières étapes du traitement*

Les figures (III-3.7-1) et (III-3.7-2) montrent les fonctions d'intercorrélation entre la fenêtre et les modules représentés figures (III-3.6-3) et (III-3.6-4). Des positions et des amplitudes des maxima relevés sur ces figures, on déduit les signaux (III-3.7-3) et (III-3.7-4) constitués

d'impulsions de Dirac calées sur les fréquences de l'interférence.

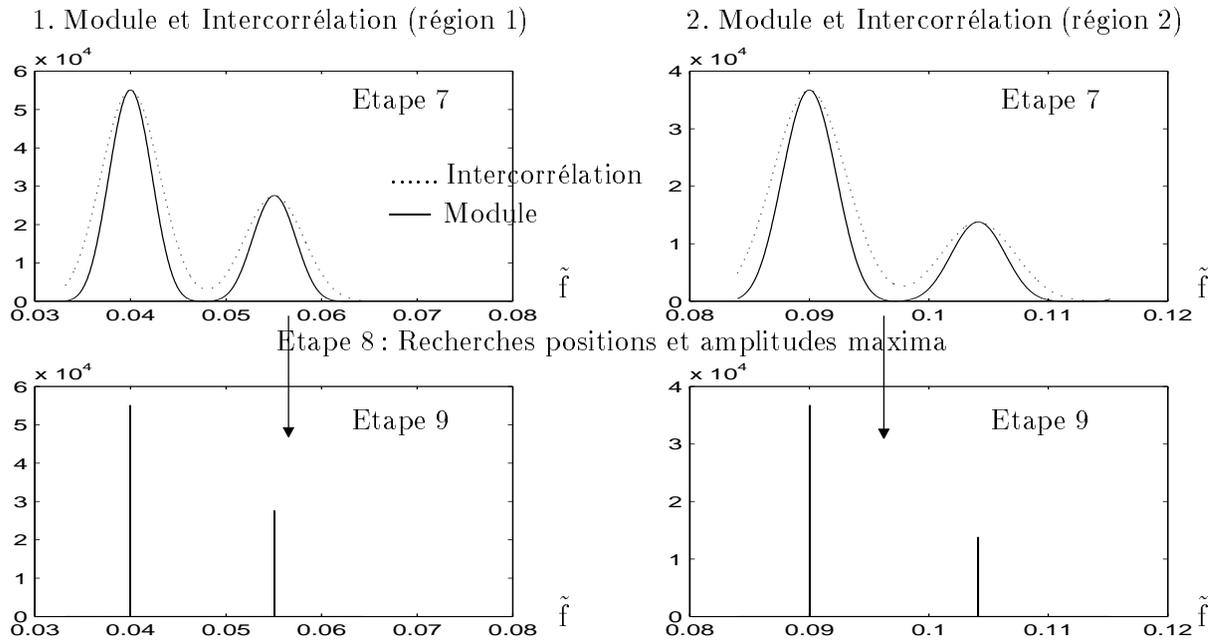


FIG. 3.7: Signaux obtenus pour les étapes 7-9 du traitement

Les signaux (III-3.7-3) et (III-3.7-4) sont convolués par la représentation de la fenêtre  $F_k$ . On obtient alors les représentations (III-3.8-3) et (III-3.8-4).

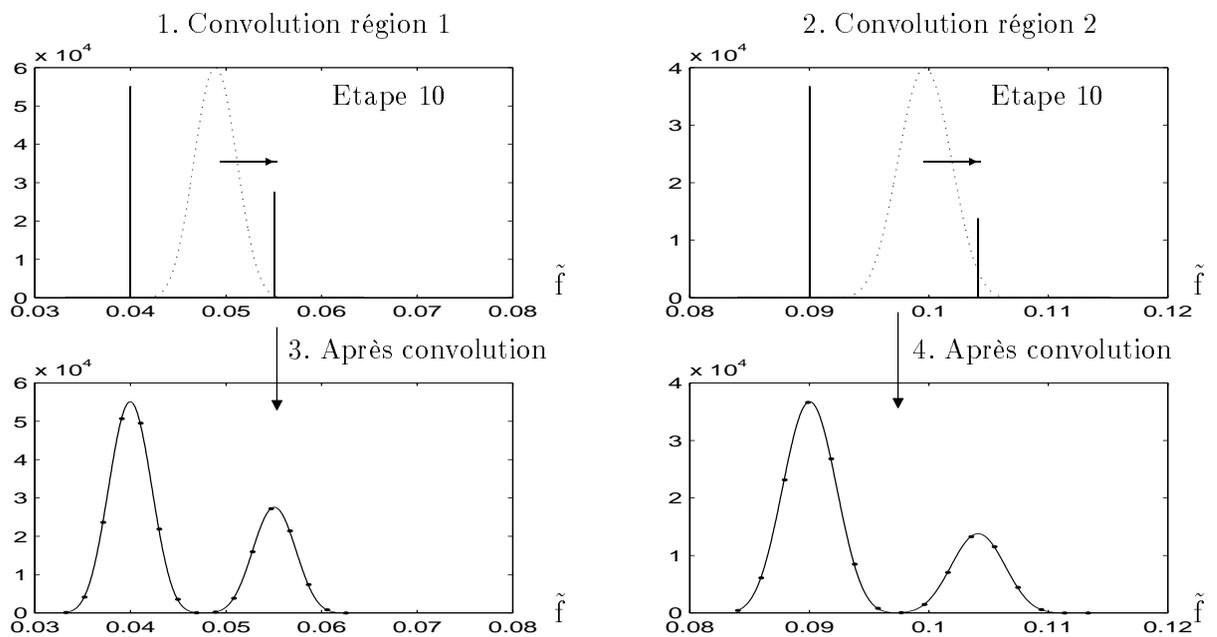


FIG. 3.8: Signaux obtenus pour les étapes 10 et 11 du traitement

Après décimation on obtient les valeurs du module de l'interférence aux fréquences à corriger. Ces valeurs sont représentées par des points sur les figures (III-3.8-3) et (III-3.8-4).

On montre enfin sur la partie figure (III-3.9) l'erreur d'estimation ( $R_{jk} - R_{jk} \text{ estimé}$ ) et le spectre obtenu après traitement.

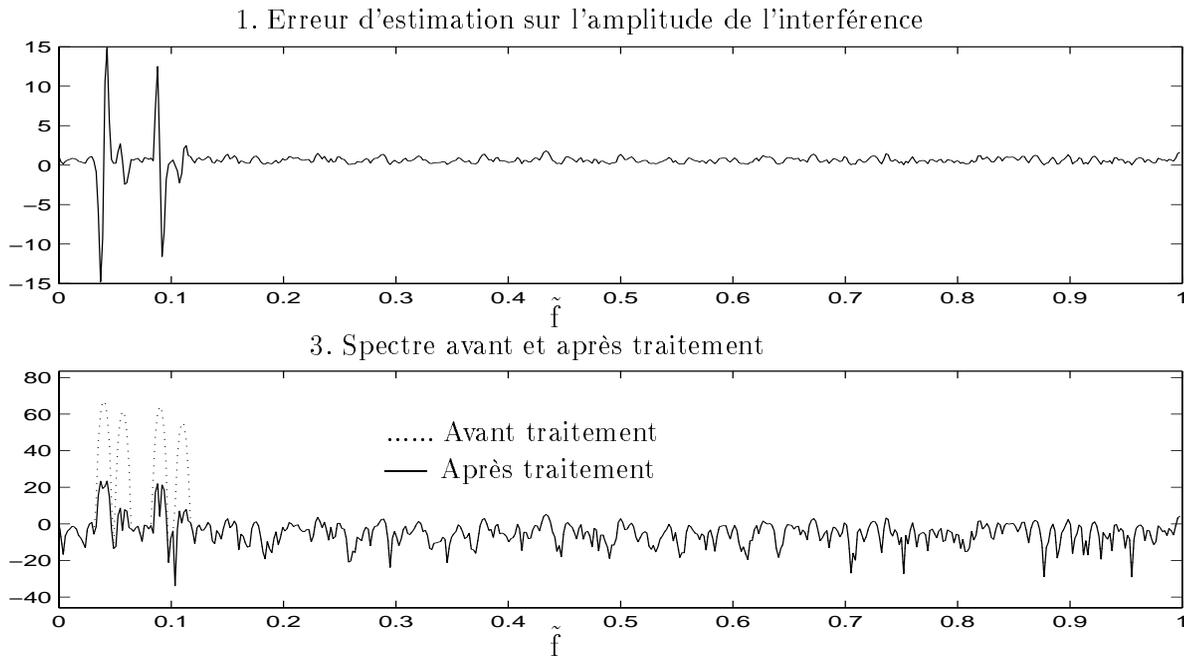


FIG. 3.9: Erreur d'estimation sur l'enveloppe  $R_j$  et spectres

L'erreur d'estimation résulte de l'échantillonnage fréquentiel réalisée sur la fenêtre. Une augmentation du nombre de points après interpolation permettrait de diminuer la puissance de cette erreur.

Dans notre exemple la puissance du signal d'interférence est de 43.1dB supérieure à la puissance du bruit gaussien. Après traitement cette puissance est atténuée de 40.1dB. La puissance résiduelle sur le signal d'interférence est donc faible. Cette puissance étant étalée en fréquence par le code, elle peut être négligée en sortie du filtre de postdétECTION (voir figure (I-2.2)).

### 3.4 Conclusions

Le traitement en fréquence de l'amplitude du signal permet l'élimination des signaux d'interférence en limitant la dégradation sur le signal. Ainsi le filtrage de tout le lobe principal entraîne une perte de corrélation de 4dB alors que cette perte est de l'ordre de 18dB lorsque

le filtrage fréquentiel est appliqué selon les méthodes présentées chapitre 2.

Cette méthode nécessite toutefois l'estimation du module du signal d'interférence qui induit une charge de calcul importante.

Enfin cette méthode reste inapplicable en présence d'un brouilleur pulsé qui diffuse son énergie dans tout le spectre en l'absence de pondération efficace.



## Quatrième partie

### Synthèse



# Chapitre 1

## Synthèse et Perspectives

### 1.1 Synthèse

Les méthodes présentées ici permettent d'éliminer ou d'atténuer des signaux d'interférence bande étroite et ainsi d'améliorer la robustesse du système GPS.

◆ La puissance de ces méthodes dépend de leur capacité à rejeter les signaux d'interférence. Toutefois cette opération ne doit pas engendrer de dégradation sur le signal GPS. Nous avons donc, pour caractériser ces méthodes, utilisé 2 critères :

- Le gain de traitement  $G_t$  qui mesure l'atténuation sur le signal d'interférence,
- Le rapport  $G_\Gamma$  qui mesure la dégradation sur le signal GPS.

● De façon très générale, les techniques exposées au chapitre 2 satisfont le premier de ces critères. On peut considérer que l'énergie du signal d'interférence, en sortie, est très petite devant celle du bruit gaussien. Elles affectent toutefois le signal GPS. La dégradation est maximale lorsque le filtre est calé sur la fréquence centrale de ce signal.

Pour le filtre appliqué dans le domaine temporel, elle dépend de la largeur de l'encoche de la cellule de filtrage. La largeur de cette encoche sera dimensionnée pour permettre l'élimination de brouilleur modulée en fréquence. Ainsi une augmentation de la vitesse de poursuite passe, pour une valeur du gain de traitement imposé, par un élargissement de l'encoche de la cellule de filtrage qui entraîne une dégradation du gain de corrélation  $G_\Gamma$  (voir figure (II-1.28)).

Pour le filtre en fréquence qui traite le signal sur le domaine fréquentiel du signal d'interférence, le rapport  $G_\Gamma$  ne dépend, en présence d'un brouilleur modulé, que de la pente  $k_\omega$

(voir figure (II-2.12)).

- Au contraire, les méthodes présentées au chapitre 3 satisfont normalement le deuxième de ces critères. Par contre, le gain de traitement obtenu n'est pas toujours satisfaisant.

Lorsque le traitement, dans le domaine temporel, est appliqué sur l'amplitude, on note toutefois une dégradation du rapport signal sur bruit  $\Gamma$ . Le gain de corrélation  $G_\Gamma$  est de -3dB, le passage à un signal unidimensionnel ne permettant pas de conserver la phase du signal. Cette dégradation est moindre en présence de brouilleurs pulsés.

Par ailleurs le gain de traitement qui est, en présence d'un signal de brouillage sinusoïdal unique, de l'ordre de  $\gamma_{jg}$ , se dégrade lorsque le nombre de brouilleurs augmente.

La méthode appliquée en fréquence permet de pallier ces problèmes. Le traitement de l'amplitude est localisé en fréquence. Les pertes de corrélation restent faibles et le gain de traitement tend vers  $\gamma_{jg}$  lorsque l'estimation de l'enveloppe du signal d'interférence est correctement réalisée.

◆ Une autre approche du problème consiste à comparer les techniques appliquées dans le domaine temporel à celles implantées dans le domaine des fréquences. On remarquera d'abord que les méthodes fréquentielles, qui traitent chaque bloc après la TFD, s'adaptent rapidement au signal d'interférence. **Elles sont par contre inadaptées en présence d'un brouilleur pulsé de forte puissance qui diffuse son énergie dans toute la bande de fréquence.**

Les méthodes en temps convergent plus lentement. Cette convergence est liée à celle de l'algorithme du LMS pour le filtre linéaire. Elle dépend de l'estimation de l'opérateur pour le filtre non linéaire.

D'autres critères conditionnent le choix entre le traitement temporel et le traitement fréquentiel. Pour les méthodes exposées au chapitre 2, ces critères sont énoncés ci après.

- La résolution en fréquence: elle dépend du coefficient  $\alpha_0$  du bloc estimation pour le filtre temporel, du nombre de points de la TFD pour le filtre fréquentiel,
- La vitesse de poursuite: le choix dépendra alors du gain de traitement souhaité.
- La complexité et le temps de calcul: les méthodes temporelles sont alors préférées aux

méthodes fréquentielles.

◆ Pour terminer cette étude nous proposons 2 architectures :

- Pour éliminer plusieurs brouilleurs fixes ou modulés en fréquence, et un petit nombre de brouilleurs pulsés, le traitement doit être implanté dans le domaine temporel. On utilisera une cascade de filtres à encoche et un filtre non linéaire "ADP". Les filtres à encoche permettent de réduire le nombre de brouilleurs à l'entrée du filtre "ADP". L'analyse des signaux en sortie des blocs AR des filtres à encoche permet d'ajuster le nombre de cellules au nombre de brouilleurs, non compris les brouilleurs pulsés. Les brouilleurs pulsés sont alors traités par l'opérateur non linéaire appliqué à l'amplitude du signal complexe.
- Pour éliminer plusieurs brouilleurs fixes ou variant lentement en fréquence, le traitement peut être implanté dans le domaine fréquentiel. Le traitement non linéaire de l'amplitude est alors souhaitable. Il offre un gain de corrélation supérieur à celui mesuré après le filtre à encoche fréquentiel (voir figure(III-3.5)).

## 1.2 Perspectives

Ce travail permet de dimensionner et de caractériser une architecture pour l'adoucissement de spectre dans un systèmes GPS. La mise en cascade de cellules d'estimation telles que celles utilisées pour le filtre à encoche temporel permettra de déterminer le nombre de brouilleurs et leurs caractéristiques. Des puissances des signaux de sortie des blocs AR, on déduira les puissances des brouilleurs et la nature de ces brouilleurs (à amplitude constante ou pulsé). Des paramètres des blocs adaptatifs, on déduira les fréquences instantannées des brouilleurs et les pentes de la modulation  $k_\omega$  pour des brouilleurs modulés linéairement en fréquence. Ces informations permettront de dimensionner le filtre à appliquer en entrée des boucles de corrélation.

Lorsque le filtre est appliqué en temps ces informations sont :

- Le nombre de filtres à encoche temporel,
- Les coefficients  $k_{\alpha_f}$  de chaque filtre (déduits des pentes  $k_\omega$  et des puissances mesurées),
- La présence de brouilleurs pulsés exigeant un traitement non linéaire de l'amplitude.

Lorsque le filtre est appliqué en fréquence, en l'absence de brouilleurs pulsés, on pourra adapter la fenêtre de pondération à la puissance des brouilleurs en présence.

Le traitement en temps est toutefois beaucoup moins exigeant en terme de charge de calcul. En présence d'un nombre important de brouilleurs pulsés un découpage en sous bande peut être envisagé.

Pour la cellule de traitement non linéaire appliquée en temps, une amélioration de l'estimation de l'opérateur peut être obtenue lorsque l'estimateur est défini sur des tranches équiprobables du bruit. Le nombre de classes peut être réduit au nombre de niveaux de quantification souhaités après filtrage. Lorsque le traitement annule le signal d'interférence, le nombre de ces niveaux peut être réduit (voir l'étude sur la quantification réalisée en annexe 2).

## Cinquième partie

### Annexes



# Annexe 1: Caractéristiques du signal GPS

Notre travail consiste en la définition de l'architecture d'un récepteur GPS fonctionnant en présence de signaux d'interférence. Les améliorations apportées sont basées sur des techniques numériques appliquées au signal passe bas équivalent, à l'entrée des boucles de corrélation.

Nous nous proposons donc ici de caractériser le signal GPS, de l'émission jusqu'à l'entrée du système de traitement numérique. Ce chapitre inclut une présentation du module de formation du signal GPS au niveau du satellite, un bilan de liaison et une analyse du récepteur, de l'antenne jusqu'au module numérique. En ce qui concerne le canal, ne sont pas prises en considération les perturbations liées à la présence d'interférences et de multi-trajets. Les dégradations qui résultent de signaux d'interférence dans le spectre du GPS sont étudiées dans un autre chapitre.

De même ne sont pas étudiés d'autres phénomènes (bruits d'horloge, retard ionosphérique, etc) qui affectent directement les mesures GPS.

## 0.3 Caractéristiques du signal émis par un satellite

### 0.3.1 Formation du signal GPS

Le signal GPS est constitué de 2 porteuses [3]: la porteuse primaire  $L_1$  centrée à la fréquence  $f_1$  et la porteuse secondaire  $L_2$  centrée à la fréquence  $f_2$ . Ces fréquences sont des multiples de l'horloge de référence de fréquence  $f_0 = 10.23\text{MHz}$  :

- $f_1 = 1575,42\text{MHz} = 154f_0$
- $f_2 = 1227,60\text{MHz} = 120f_0$

Tous les satellites GPS émettent sur ces 2 fréquences. La séparation des signaux des différents satellites utilise des techniques CDMA, chaque porteuse étant modulée par une séquence pseudo-aléatoire d'étalement dépendant du satellite.

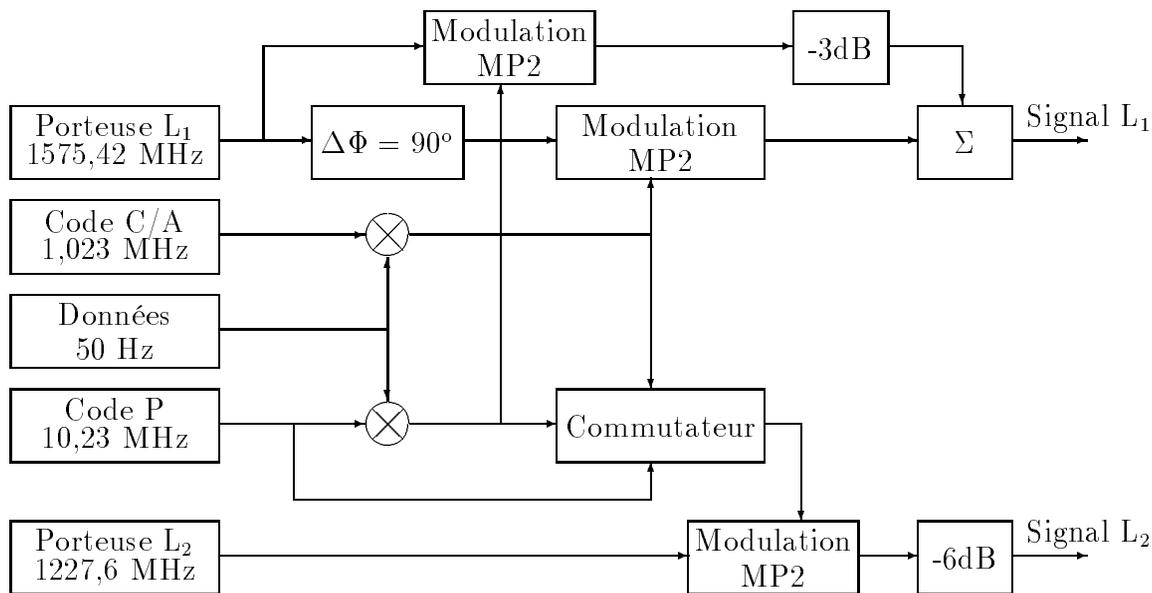


FIG. 1: Formation du signal GPS

Le code d'étalement de précision est noté P et le code d'acquisition rapide est noté C/A (Coarse Acquisition). Le code P est matérialisé par un signal NRZ émis à la fréquence de 10,23 Mchips/sec. Sa période est d'environ 38 semaines. Il est réinitialisé chaque semaine.

Le code C/A est un code de Gold unique de période 1 msec émis à une fréquence de 1,023 Mchips/sec. Il permet par rapport au code P une localisation plus rapide mais moins précise.

Les propriétés d'autocorrélation et d'intercorrélation de ces codes permettent d'une part l'accès multiple par codage, d'autre part de dater sans ambiguïté les messages reçus. Les données de navigation sont transmises au rythme de 50 bits/sec.

### 0.3.2 Expression du signal généré

Pour un satellite donné  $i$ , l'expression temporelle du signal généré est donc la suivante :

$$S_i(t) = \sqrt{\frac{C_1}{3}} P_i(t) D_i(t) \cos(2\pi f_{L_1} t + \Phi_{11}) + \sqrt{2\frac{C_1}{3}} G_i(t) D_i(t) \cos(2\pi f_{L_1} t + \Phi_{12}) + \sqrt{C_2} P_i(t) D_i(t) \cos(2\pi f_{L_2} t + \Phi_2) \quad (1)$$

Avec :

$P_i(t)$  : séquence P du satellite  $i$  = séquence pseudo-aléatoire de  $+1$  et  $-1$ .

$G_i(t)$  : séquence C/A du satellite  $i$  = séquence pseudo-aléatoire de  $+1$  et  $-1$ .

$D_i(t)$  : données  $i$  = séquence de  $+1$  et  $-1$  dépendante du message de navigation.

$f_{L_1}$  et  $f_{L_2}$  : fréquences des porteuses L1 et L2.

$\Phi_{11}$ ,  $\Phi_{12}$  et  $\Phi_2$  : bruits de phase et dérives des oscillateurs.

$C_1$  et  $C_2$  : puissance des porteuses L1 et L2.

### 0.3.3 Fonctions d'autocorrélation des codes d'étalement

Le multiplexage des signaux des différents satellites utilise la technique "CDMA". On s'intéresse donc à la fonction d'autocorrélation des codes utilisés dont les caractéristiques sont exploitées dans le système de démodulation, pour la recherche et la poursuite du code du satellite sélectionné.

Les satellites GPS utilisent 2 codes d'étalement : le code d'étalement de précision noté P et le code d'acquisition rapide noté C/A. Ces codes sont obtenus à partir de séquences de longueur maximale.

#### • Séquence de longueur maximale : code PN

Ces séquences sont obtenues à partir de polynômes primitifs. Si le polynôme est de degré  $L$ , la séquence  $S_{PN}$ , prenant les valeurs  $\pm 1$ , est de période  $p=2L-1$  et sa fonction de corrélation a pour expression :

$$R_{PN}(k) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_{PN}(n) S_{PN}(n+k) = \frac{1}{p-1} \left[ -1 + p \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(k-lp) \right] \quad (2)$$

La figure (A1-2) représente une séquence  $S_{PN}$  matérialisée par un signal NRZ. Cette séquence est notée  $pn(t)$ .

$$pn(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_{PN}(n) \Pi_{T_c}(t - nT_c) \quad (3)$$

Où  $T_c$  représente la durée d'un chip du signal NRZ ainsi généré et :

$$\square_{T_c}(t) = 1 \text{ pour } |t| < \frac{T_c}{2}, = 0 \text{ ailleurs.}$$

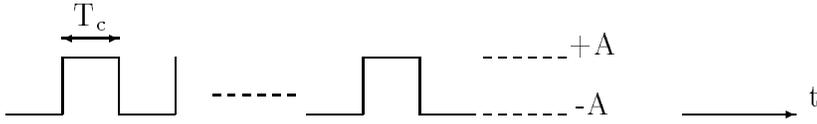


FIG. 2: Séquence PN matérialisée par un signal NRZ

La fonction d'autocorrélation du signal ainsi obtenu a pour expression [4]:

$$R_{PN}(\tau) = +\frac{A^2}{p} (-1 + (p+1) \wedge_{T_c}(\tau)) \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - n(pT_c)) \quad (4)$$

Où

$$\wedge_{T_c}(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{T_c} \text{ pour } |\tau| < T_c, = 0 \text{ ailleurs.}$$

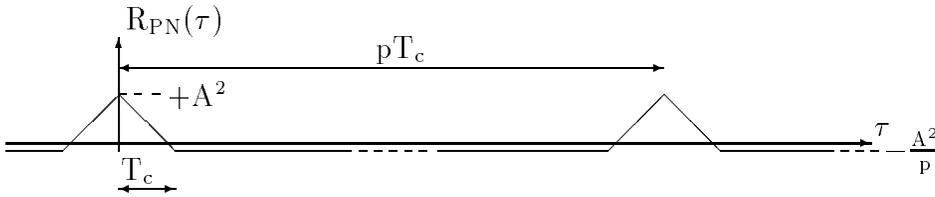


FIG. 3: Fonction d'autocorrélation d'une séquence PN matérialisée par un signal NRZ

Et la densité spectrale de puissance, déduite de la fonction d'autocorrélation, est représentée par des raies espacées de  $\frac{1}{pT_c}$  :

$$S_{PN}(f) = +\frac{A^2}{p} \left( -\delta(f) + \frac{p+1}{p} \text{sinc}^2(fT_c) \right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{pT_c}\right) \quad (5)$$

$$S_{PN}(f) = +\frac{A^2}{p^2} \left( \delta(f) + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} (p+1) \text{sinc}^2\left(\frac{k}{p}\right) \delta\left(f - \frac{k}{pT_c}\right) \right) \quad (6)$$

La représentation de la densité spectrale  $S_{PN}(f)$  est donnée figure (A1-4).

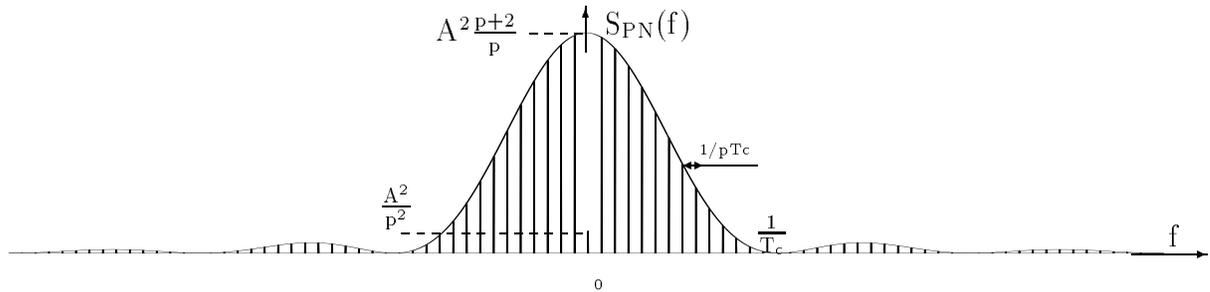


FIG. 4: Densité spectrale de puissance

#### • Code C/A : code GOLD

Les séquences de longueur maximale présentent de très bonnes propriétés d'autocorrélation mais ne peuvent être utilisées dans des systèmes utilisant des techniques de CDMA. Le nombre de séquences de longueur maximale, pour un degré du polynôme donné, est faible (en général 30 séquences pour un polynôme de degré 10 par exemple). Par ailleurs, les propriétés d'intercorrélations de ces codes ne sont pas toujours satisfaisantes [2]. Pour pallier ces 2 inconvénients des codes composites, obtenus par combinaison linéaire de séquences de longueur maximale, sont utilisés. Dans le système GPS, les codes utilisés en mode C/A sont des codes de Gold ([4], pp. 91-97) construits à partir de 2 séquences maximales de longueur  $p=1023$ . Ces 2 séquences sont donc générées par 2 polynômes primitifs distincts de degré  $L=10$  produisant  $2L$  codes. Pour obtenir des codes quasi orthogonaux, les 2 séquences doivent former une paire 'privilegiée', les 2 séquences devant présenter une intercorrélations minimale.

$$|R_{PN_1PN_2}(k)| \ll |R_{PN_1}(0)| \quad \forall k$$

Les séquences générant le code C/A sont ainsi obtenues à partir des polynômes suivant :

$$g_1(x) = 1 + x^3 + x^{10}$$

$$g_2(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^6 + x^8 + x^9 + x^{10}$$

La théorie de Gold établit qu'il existe 4 niveaux d'autocorrélation et 3 niveaux d'intercorrélations pour ces codes. Ces niveaux apparaissent sur la figure (A1-5).

Autocorrélation :  $R_{G_l}(0) \approx 1$  et  $R_{G_l}(k) \in \{V_1, V_2, V_3\} \forall k \neq 0$   
 Intercorrélation :  $R_{G_l G_m}(k) \in \{V_1, V_2, V_3\} \forall k$   
 Avec :  $V_1 = -\frac{1}{p}$   $V_2 = -\frac{2^{\frac{L+2}{2}} + 1}{p}$  et  $V_3 = \frac{2^{\frac{L+2}{2}} - 1}{p}$

On montre figure (A1-5) , pour une séquence de Gold, une représentation de la fonction d'autocorrélation et, pour 2 séquences de Gold, une représentation de la fonction d'intercorrélation.

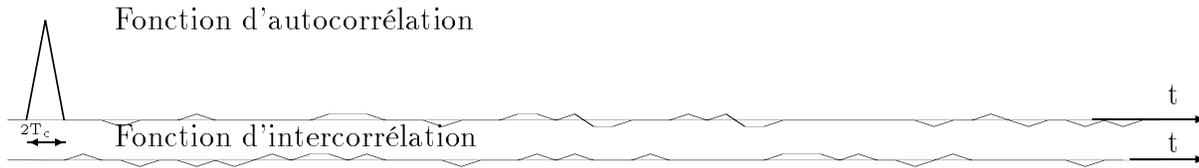


FIG. 5: Fonctions d'autocorrélation et d'intercorrélation

En ce qui concerne la densité spectrale de puissance, on obtient, comme pour une séquence PN, des raies spectrales espacées de  $1/pT_c$  mais la répartition énergétique ne présente pas la même uniformité: les raies ne décrivent pas parfaitement l'enveloppe en  $\text{sinc}^2(x)$ . La puissance sur chaque raie dépend du code utilisé.

$$S_G(f) = +\frac{A^2}{p^2} \left( \delta(f) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} M(k) (p+1) \text{sinc}^2\left(\frac{k}{p}\right) \delta\left(f - \frac{k}{pT_c}\right) \right) \quad (7)$$

avec  $M(k) \leq 14.3 \forall k$  et quelque soit le code

$M(k)$  traduit le défaut d'uniformité. Les raies spectrales obtenues pour le code C/A ne présentent donc pas toutes la même atténuation. L'atténuation idéale (de l'ordre de  $-30\text{dB}$ ) que produirait une séquence maximale peut atteindre des valeurs beaucoup plus faibles ( $-18.3\text{dB}$  dans le pire des cas) ([5], pp. 97-107). La figure (A1-6) donne les premières raies du spectre normalisé en puissance, obtenu avec le code C/A alloué au satellite SV1 (Spatial Vehicle number 1). Le niveau  $-30\text{dB}$  correspond au niveau obtenu pour un code utilisant une séquence maximale.

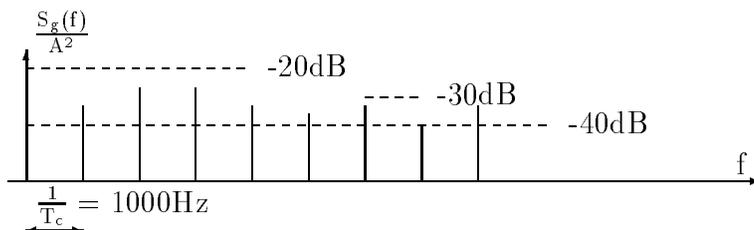


FIG. 6: Code de Gold: répartition fréquentielle de l'énergie

### • Code P

Le code P n'est pas un code à séquence maximale mais sa longueur est telle que sa fonction d'autocorrélation est quasi idéale.

$$R_P(\tau) = \frac{A^2}{p} (-1 + (p+1) \wedge(\tau)) \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - n(pT_c)) \quad (8)$$

Avec :

$$p = 6.1871 \cdot 10^{12}, \quad T_c = \frac{1}{10.23 \cdot 10^6} \quad \text{et} \quad \frac{1}{pT_c} = \frac{1}{6.1871 \cdot 10^{12} \cdot 10.23 \cdot 10^6} \approx 1.6 \cdot 10^{-20}$$

### 0.3.4 Spectre du signal GPS

Le signal GPS consiste donc en deux porteuses (voir figure (A1-1)). La porteuse  $L_2$  est modulée par les données mélangées au code P de débit 10.23MHz/s. La porteuse  $L_1$  est représentée par 2 composantes en quadrature, l'une modulée par les données mélangées au code C/A de débit 1.023MHz/s, l'autre modulée par les données mélangées au code P. L'occupation spectrale est définie sur la figure (A1-7).

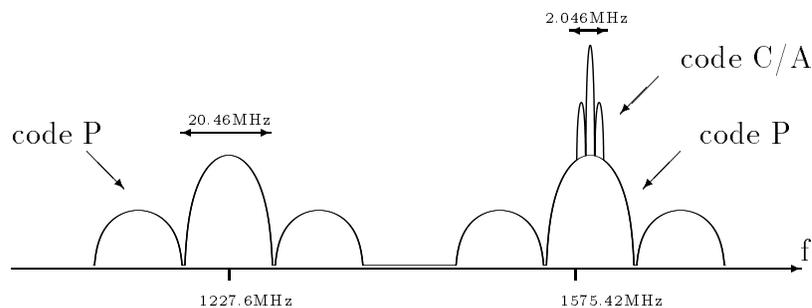


FIG. 7: Occupation spectrale du signal GPS

Plus précisément, la représentation spectrale est obtenue par convolution dans le domaine temporel du spectre des codes C/A ou P par le spectre des données matérialisées par le signal NRZ  $D(t)$  de débit 50Hz. Les spectres ainsi obtenus sont translatés autour des fréquences  $L_1$  ou  $L_2$ .

Le spectre produit ainsi à partir du code P est blanc puisque la distance entre 2 raies du code, qui est de  $1.6 \cdot 10^{-20}$ , est très petite devant le rythme des données (50bits/sec). Ceci n'est pas vrai pour le signal produit par le code C/A qui présente des "raies" dont la largeur

spectrale dépend du rythme des données :

$$S_{L_1-C/A}(f) = \frac{2C_1}{3} \left( S_D(f) + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} M(k) \frac{p+1}{p^2} \text{sinc}^2\left(\frac{k}{p}\right) S_D\left(f - \frac{k}{pT_c}\right) \right) * (\delta(f - f_{L_1}) + \delta(f - f_{L_1}))$$

Où  $S_D(f) = T_D \text{sinc}^2(fT_D)$  représente le spectre du signal des données  $D(t)$ .

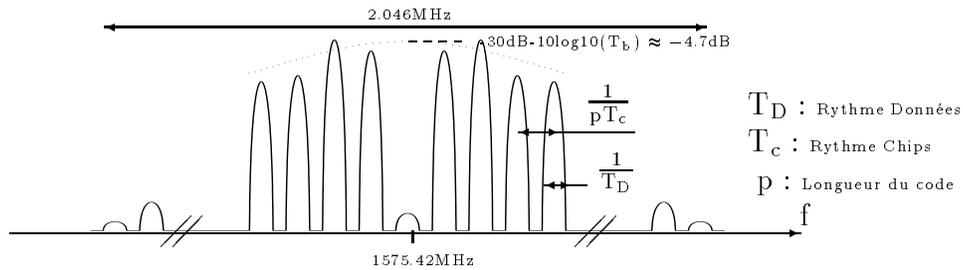


FIG. 8: Densité spectrale du signal C/A

## 0.4 Caractéristiques du signal à l'entrée du récepteur

### 0.4.1 Puissance du signal au niveau du récepteur

Les satellites émettent en polarisation circulaire droite (RHCP). La puissance du signal reçu notée  $C$ , est spécifiée ([4], pp. 97-99), ([5], pp. 82-90) en dBW pour une antenne polarisée linéairement, de gain 3dB. Le diagramme de rayonnement du réseau d'antenne est tel que cette puissance est minimale lorsque le satellite est à 5° d'élevation et lorsqu'il passe au zénith.

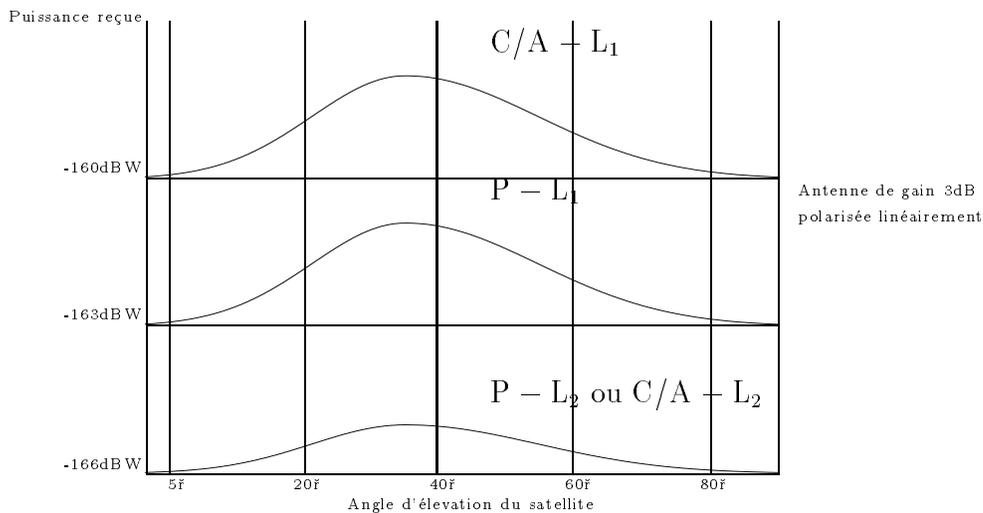


FIG. 9: Niveau de puissance minimum des signaux reçus

Le tableau (A1-0.4.1) donne les niveaux de puissance minimum obtenus alors que le satellite est à une élévation de 5° ou au zénith.

Porteuse L <sub>1</sub> -code C/A	Porteuse L <sub>1</sub> -code P	Porteuse L <sub>2</sub> -code P ou C/A
-159.6dBW	-162.6dBW	-165.2dBW CWI

**Tableau 0.4.1 : Niveaux de puissance minimum au niveau du récepteur**

## 0.4.2 Densité spectrale du bruit thermique

La densité spectrale de bruit  $N_0$  est déduite de la température équivalente de bruit  $T_e$ .

$$N_0 = 10 \log (kT_e)$$

$$\text{avec } k(\text{constante de Boltzmann}) = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{W/}^\circ\text{K/Hz} = -228.6 \text{dBW/}^\circ\text{K/Hz}$$

Cette température équivalente s'exprime, au port d'entrée du récepteur, à partir de la température de bruit de l'antenne  $T_A$  et de la température de bruit du récepteur  $T_R$ . L'antenne et son amplificateur peuvent être modélisés par une ligne de transmission d'affaiblissement  $L$  et un amplificateur faible bruit, de facteur de bruit  $F$ . On note  $T_0$  la température de référence ( $T_0 = 293^\circ\text{K}$ ) et on obtient pour  $T_e$ :

$$T_e = \frac{T_A}{L} + \frac{L-1}{L}T_0 + T_R = \frac{T_A}{L} + \frac{L-1}{L}T_0 + (F-1)T_0$$

On retient comme valeurs typiques :

- $T_A = 130^\circ\text{K}$
- $L=1.1$
- $F=1.5 \Rightarrow T_R = 145^\circ\text{K}$

Ce qui donne :

$$T_e = 289^\circ\text{K}$$

$$N_0 = -204 \text{dBW/Hz}$$

Dans la bande du code C/A notée  $B$ , la puissance du bruit thermique notée  $N$ , est donc :

$$N = N_0 \cdot B = 2.046 \cdot 10^6 N_0$$

$$N = -141 \text{dBW}$$

### 0.4.3 Rapport puissance du signal sur densité spectrale de bruit

La puissance minimale reçue, pour un récepteur muni d'une antenne RHCP, est donc en ce qui concerne le signal C/A sur L1 de -159.6 dBW (voir tableau (A1-0.4.1)). On estime les pertes d'implémentation et de conversion à 2 dBW. Le rapport entre la puissance du signal reçu C et la densité spectrale de puissance  $N_0$  exprimée en dBW-Hz est donc alors :

$$\frac{C}{N_0} = -159.6 - 2 - (-204) = 42.4\text{dB} - \text{Hz}$$

Et peut atteindre la valeur de 51.5 dB-Hz.

Pour les canaux L1-P et L2-P, ce rapport C/No est respectivement de 3 dB et de 5.6 dB inférieur à celui du canal L1-C/A. Quel que soit le signal, le rapport signal sur bruit est donc faible, de l'ordre de -20dB pour le signal C/A considéré dans une bande de 2.046Mz. C'est une des caractéristiques des transmissions à spectre étalé. Ceci justifie donc le fait que les bruits liés à la présence des signaux émis par les autres satellites ne sont pas pris en considération dans cette étude. Ces signaux utilisent des codes orthogonaux au code du signal démodulé et peuvent être considérés comme des bruits blancs de puissance négligeable vis à vis du bruit thermique.

### 0.4.4 Expression du signal à l'entrée du récepteur

Le signal à l'entrée des étages radio fréquences correspond donc à la somme des signaux émis par les satellites, décrits par l'équation (A1-1), atténués, retardés et noyés dans un bruit blanc centré gaussien.

$$\begin{aligned} S_{ant}(t) = & \sum_i \left( \sqrt{2P_{11i}} P_i(t - \tau_i(t)) D_i(t - \tau_i(t)) \cos(2\pi f_{L1}(t - \tau_i(t)) + \Phi_{11}) \right) \\ & + \sum_i \left( \sqrt{2P_{12i}} G_i(t - \tau_i(t)) D_i(t - \tau_i(t)) \cos(2\pi f_{L1}(t - \tau_i(t)) + \Phi_{12}) \right) \\ & + \sum_i \left( \sqrt{2P_{2i}} P_i(t - \tau_i(t)) D_i(t - \tau_i(t)) \cos(2\pi f_{L2}(t - \tau_i(t)) + \Phi_2) \right) \\ & + W(t) \end{aligned}$$

Avec :

$P_{11i}, P_{12i}$  et  $P_{2i}$  : puissances respectives reçues,

$W(t)$  : bruit blanc gaussien.

On note  $v_{d_i}(t)$  la vitesse radiale du récepteur par rapport au satellite  $i$  et  $d_i(0)$  la distance, à l'instant d'origine, du récepteur au satellite  $i$ . On obtient, en considérant la propagation

idéale en espace libre, l'expression du retard  $\tau_i(t)$  :

$$\tau_i(t) = \frac{d_i(0)}{C_{lum}} + \int_0^t \frac{v_{d_i}}{C_{lum}} dt = \tau_{0_i} + \int_0^t \frac{v_{d_i}}{C_{lum}} dt$$

### 0.4.5 Expression du signal à l'entrée des boucles de corrélation

L'étage RF consiste en des mélangeurs suivis par des filtres intermédiaires. Ces étages permettent de décaler le spectre vers les basses fréquences. Le choix de la fréquence centrale, après transposition, dépend de la largeur spectrale des signaux GPS et de la fréquence d'échantillonnage du système numérique. Les filtres intermédiaires utilisés (filtre à onde de surface, filtres LC) sont supposés à phase linéaire.

Par ailleurs nous postulons ici que le corrélateur est adapté au code C/A d'un satellite donné, c'est à dire que le signal délivré au corrélateur est mélangé par le code C/A de ce satellite. En admettant les propriétés d'orthogonalité des codes et que les signaux GPS sont noyés dans le bruit on peut supposer que le signal d'entrée du corrélateur est le signal correspondant au code C/A considéré, les autres signaux apparaissant comme un bruit blanc de densité spectrale négligeable devant la densité spectrale du bruit thermique.

L'expression du signal considéré ici est donné par (A1-9). Il s'agit du signal traité par le récepteur, c'est à dire du signal corrélé au code généré localement.

$$S_r(t) = +A_c P(t - \tau(t) - \tau_f) \cos \left( 2\pi \left( f_c t + f_{L1} \int_0^t \frac{v_d}{C_{lum}} dt \right) + \Phi_{12} + \Phi_f \right) + W(t) \quad (9)$$

Dans cette équation  $P(t)$  représente les données modulées par le code de Gold,  $\tau_f$  et  $\Phi_f$  modélisent les retards amenés par l'étage RF, et  $f_c$  est la fréquence obtenue après transposition. Par ailleurs nous supposons dans cette étude que le signal  $P(t)$  est matérialisé par un signal NRZ d'amplitude  $\pm 1$ , le coefficient  $A_c$  fixant la puissance de ce signal. On obtient, si la vitesse radiale  $v_d$  relative au satellite considéré est constante :

$$S_r(t) = +A_c P(t(1 + k_d) + \tau) \cos (2\pi f_c t + \Theta_e(t)) + W(t) \quad (10)$$

Où :

$f_c$	Fréquence porteuse à l'entrée du récepteur numérique
$P()$	Séquence C/A modulée par les données
$\tau$	Décalage entre le code signal et la référence GPS
$\theta_e(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega_d dt$	$\omega_d = 2\pi f_d$ Dérive Doppler
$k_d = \frac{f_d}{f_{L1}}$	Modélise le Doppler sur le code
$f_{L1}$	Fréquence porteuse
$W(t)$	Bruit blanc gaussien généré dans le canal

Nous obtenons ainsi l'expression du signal à l'entrée des boucles numériques de précorrélacion en l'absence de multi trajets et d'interférence. Nous définissons dans le chapitre qui suit le récepteur adapté à ce signal.

## Annexe 2: Le récepteur conventionnel

Le récepteur conventionnel est défini en présence de bruit blanc gaussien. Dans cette annexe, on trouvera les développements utilisés pour la construction de ce récepteur ainsi qu'une description de son architecture.

## 0.5 Le Récepteur adapté

Le récepteur adapté est ici défini en présence de bruit blanc, centré, gaussien. La fréquence Doppler étant constante sur la durée d'observation, le signal d'entrée du récepteur numérique a pour expression :

$$\begin{aligned} S_{r_n} &= A_c \cdot P (nT_e (1 + k_d) + \tau) \cos (2\pi f_c nT_e + \theta_{e_n}) + W_n = S_n + W_n \\ S_{r_n} &= A_c \cdot P (nT_e (1 + k_d) + \tau) \cos (2\pi (f_c + f_d) nT_e + \theta_0) + W_n = S_n + W_n \end{aligned}$$

Le problème, dans un récepteur GPS, consiste à estimer les grandeurs  $\tau$ ,  $\omega_d$  que porte le signal reçu. De ces grandeurs sont déduites les informations de pseudo distance et pseudo vitesse qui sont utilisées dans les équations de navigation. Les autres paramètres du signal sont  $A_c$  qui dépend de la puissance de ce signal et  $\theta_0$  la phase à l'origine. On recherche donc une estimation du vecteur  $\underline{\Theta}$  :

$$\underline{\Theta} = [A_c, \tau, \omega_d, \theta_0]^T, \quad \underline{\Theta} \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^4$$

Nous utilisons la méthode du maximum de vraisemblance qui postule que la meilleure estimée du vecteur des paramètres est celle qui maximise la probabilité de l'évènement observé [6], [7]. On note  $\underline{S}_r$  le vecteur d'observation obtenu par échantillonnage du signal  $S_r$  :

$$\underline{S}_r = (S_{r_1}, S_{r_2}, \dots, S_{r_N})$$

Ce vecteur d'observation est gaussien, de moyenne  $[S_1, S_2, \dots, S_N]$  et de matrice de covariance  $\sigma_g^2 \cdot I$ . La fonction de vraisemblance  $f_{\underline{S}_r}^1(z_1, z_2, \dots, z_N; \underline{\Theta})$  s'exprime en fonction de  $f_w$  loi de densité de probabilité du bruit :

$$f_{\underline{S}_r}^1(\underline{S}_r; \underline{\Theta}) = \prod_{n=1}^N f_w(S_{r_n} - S_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma_g^2)^N}} \exp \left\{ - \sum_{n=1}^N \frac{(S_{r_n} - S_n)^2}{2\sigma_g^2} \right\} \quad (11)$$

$$f_{\underline{S}_r}^1(\underline{S}_r; \underline{\Theta}) = \prod_{n=1}^N f_w(S_{r_n} - S_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma_g^2)^N}} \exp \left\{ - \sum_{n=1}^N \frac{S_{r_n}^2 + S_n^2 - 2S_n S_{r_n}}{2\sigma_g^2} \right\} \quad (12)$$

Il s'agit de rechercher les valeurs des paramètres qui maximisent la fonction (A2-12) ou la fonction log-vraisemblance (A2-13). Dans cette dernière expression ne sont conservés que les termes qui, dépendant de  $S_n$ , contiennent de manière explicite les paramètres qui composent le vecteur  $\underline{\Theta}$ .

$$L(\underline{S}_r; \underline{\Theta}) = - \sum_{n=1}^N (S_n^2 - 2S_n S_{r_n}) \quad (13)$$

En remplaçant  $S_n$  par son expression on obtient :

$$L(\underline{S}_r; \underline{\Theta}) = - \sum_{n=1}^N A_c^2 \cos^2 (2\pi (f_c + f_d) nT_e + \theta_0) \\ + \sum_{n=1}^N 2A_c S_{r_n} P (nT_e (1 + k_d) + \tau) \cos (2\pi (f_c + f_d) nT_e + \theta_0)$$

En admettant que la durée d'observation est telle que  $N (f_c + f_d) T_e \gg 1$ , on obtient :

$$L(\underline{S}_r; \underline{\Theta}) \approx -N \frac{A_c^2}{2} + \sum_{n=1}^N 2A_c S_{r_n} P (nT_e (1 + k_d) + \tau) \cos (2\pi (f_c + f_d) nT_e + \theta_0) \quad (14)$$

$$L(\underline{S}_r; \underline{\Theta}) \approx -N \frac{A_c^2}{2} + 2A_c \Re \left\{ \exp(i\theta_0) \sum_{n=1}^N S_{r_n} P (nT_e (1 + k_d) + \tau) \exp((2i\pi (f_c + f_d) nT_e)) \right\} \quad (15)$$

Recherchons d'abord  $\hat{\theta}_0$  qui maximise la fonction (A2-15).

$$L(\underline{S}_r; \theta_0) \text{ max pour } \hat{\theta}_0 = -\text{Arg} \left\{ \sum_{n=1}^N S_{r_n} P (nT_e (1 + k_d) + \tau) \exp((2i\pi (f_c + f_d) nT_e)) \right\}$$

Et on obtient pour expression de la fonction de log-vraisemblance :

$$L(\underline{S}_r; [A_c, \tau, \omega_d]) \approx -N \frac{A_c^2}{2} + 2A_c \left\| \sum_{n=1}^N S_{r_n} P (nT_e (1 + k_d) + \tau) \exp((2i\pi (f_c + f_d) nT_e)) \right\|$$

De même on obtient  $\hat{A}_c$  en dérivant par rapport à  $A_c$  la fonction L :

$$\hat{A}_c = \frac{2}{N} \left\| \sum_{n=1}^N S_{r_n} P (nT_e (1 + k_d) + \tau) \exp((2i\pi (f_c + f_d) nT_e)) \right\| \quad (16)$$

La fonction à maximiser, pour obtenir les estimations du maximum de vraisemblance de  $\omega_d$  et  $\tau$ , devient :

$$L(\underline{S}_r; [\tau, \omega_d]) \approx \frac{2}{N} \left\| \sum_{n=1}^N S_{r_n} P (nT_e (1 + k_d) + \tau) \exp((2i\pi (f_c + f_d) nT_e)) \right\|^2 \quad (17)$$

## 0.6 Architecture du récepteur

### 0.6.1 Principe

La fonction (A2-17) permet de dériver le récepteur optimum en présence de bruit gaussien. L'architecture de ce récepteur est représentée, dans la première partie, par la figure (I-1.2).

Le problème réside donc dans l'estimation du décalage  $\hat{\tau}$  et de la fréquence Doppler  $\hat{\omega}_d$  qui assure la cohérence entre le code local et le signal reçu. Dans un récepteur GPS une recherche sur les 2 dimensions  $\tau, \omega_d$  est réalisée. Nous admettons ici que la correction de la dérive Doppler est réalisée et que la rotation de phase est petite devant  $2\pi$  sur la durée d'observation. Nous nous intéressons alors à la boucle de code d'un récepteur non cohérent. Cette boucle utilise le décalage code reçu-code local comme grandeur d'asservissement. Au niveau du récepteur, les étapes pour la synchronisation de cette boucle sont les suivantes :

- recherche dans le plan  $\tau, \omega_d$ , par comparaison à un seuil de la fonction (I-1.2), des estimées de ces paramètres,
- maintien, au moyen d'une boucle à verrouillage de retard (DLL), de la synchronisation code local-code reçu.

### 0.6.2 Boucle de code

Cette boucle constitue le coeur d'un récepteur GPS. Le coût d'acquisition du code (recherche dans le plan  $\tau, \omega_d$ ) étant non négligeable, la robustesse de cette boucle, c'est à dire sa capacité à poursuivre le code du signal reçu en présence de perturbations telles que des interférences en particulier, constitue une de ses principales caractéristiques. Les boucles utilisées sont généralement non cohérentes c'est à dire que l'estimation de la fréquence Doppler est obtenue indépendamment du fonctionnement de la boucle de phase. Le décrochage de cette dernière, plus fragile, n'a donc pas de conséquence sur la boucle de code.

Les principales caractéristiques de la boucle de code sont les suivantes :

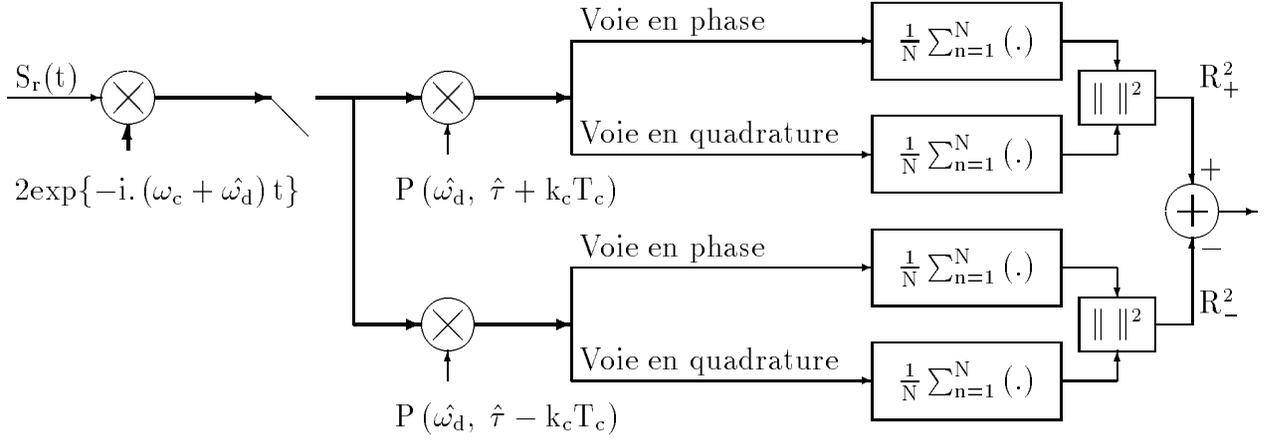
- la variance de l'erreur  $\tau - \hat{\tau}$  qui conditionne la précision sur la mesure de position,
- le comportement dynamique qui détermine, pour une trajectoire du véhicule (accélération, jerk), la capacité du récepteur à poursuivre le signal reçu.

Les éléments constitutifs de cette boucle sont :

- le discriminateur de retard qui mesure la grandeur d'asservissement,
- l'oscillateur asservi en fréquence qui contrôle le générateur de code local,
- le filtre qui détermine la bande de bruit de la boucle et son comportement dynamique.

#### Le discriminateur de retard

Ce discriminateur est basé sur la mesure de la corrélation entre le signal reçu et 2 réalisations du code local, l'une en avance sur le code local de référence, l'autre en retard. La valeur de l'avance et du retard correspond à une fraction de chip : avance = retard =  $k_c T_c$ ,  $k_c < 1$ .

FIG. 10: *Corrélateur avance-retard*

L'expression de la sortie des voies en avance et en retard, en l'absence de bruit, est déduite de (I-1.3). Sur la durée d'intégration  $NT_e$ , on doit considérer que l'estimation de la fréquence Doppler est telle que  $N(f_d - \hat{f}_d)T_e \ll 1$  pour extraire les termes en cosinus et sinus du signe somme. Ces termes disparaissent du carré du module.

$$R_{\pm}^2(\tau - \hat{\tau}, f_d, \hat{f}_d) = \frac{A_c^2}{N} \left( \sum_{n=1}^N P \left( nT_e \left( 1 + \frac{f_d}{f_{L1}} \right) + \tau \right) \cdot P \left( nT_e \left( 1 + \frac{\hat{f}_d}{f_{L1}} \right) + \hat{\tau} \pm k_c T_c \right) \right)^2 \quad (18)$$

On note, sur la durée d'intégration  $[nT_e, (n + N - 1)T_e]$ ,  $\Delta\tau_d(n)$  l'écart moyen code local-code reçu dû à l'effet Doppler. On obtient cette durée d'observation :

$$\begin{cases} R_{\pm}^2(\tau - \hat{\tau}, \Delta\tau_d(n)) = \frac{A_c^2}{N} R_{PP}^2(\Delta\tau_d(n) + \tau - \hat{\tau} \pm k_c T_c) & \text{où } R_{PP}(\rho) = \sum_{n=1}^N P(n)P(n + \rho) \\ \Delta\tau_d(n) \approx \frac{f_d - \hat{f}_d}{f_{L1}} \left( \frac{2n + N - 1}{2} \right) \end{cases} \quad (19)$$

Et l'expression de la sortie du corrélateur, sur cette durée, devient :

$$S_{discr} = \frac{A_c^2}{N} (R_{PP}^2(\Delta\tau_d(n) + \tau - \hat{\tau} + k_c T_c) - R_{PP}^2(\Delta\tau_d(n) + \tau - \hat{\tau} - k_c T_c)) \quad (20)$$

On donne figure (A2-11), pour différentes valeurs de  $k_c$ , la représentation continue des corrélations avance et retard (en fonction du temps  $t$ ), et de la sortie du discriminateur (en fonction du retard entre le code reçu et le code local  $\delta$ ). Le temps  $t$  et le retard  $\delta$  sont exprimés en nombre de chips. Ces représentations dépendent de  $A_c$  c'est à dire de la puissance du signal reçu. Elles sont données ici pour  $A_c = 1$ .

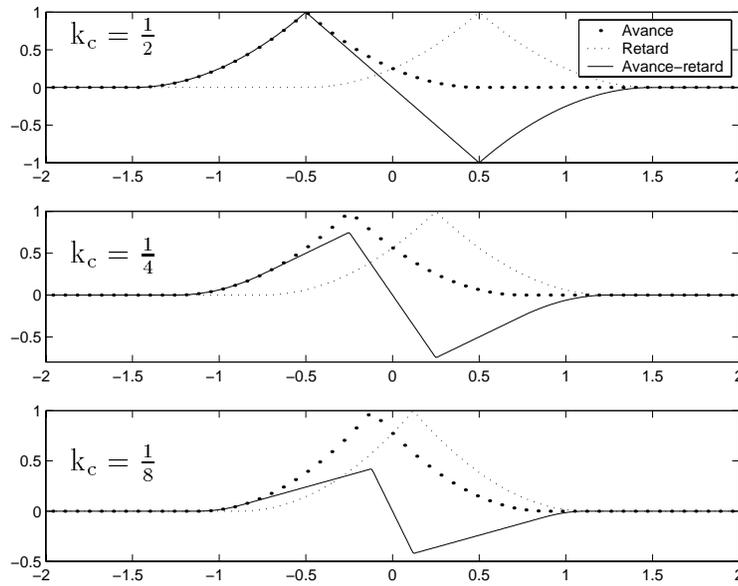


FIG. 11: *Corrélation avance, corrélation retard, et sortie du discriminateur*

**Remarque :** Il existe des versions normalisées du discriminateur, pour lesquelles la sortie du discriminateur ne dépend plus de la puissance du signal ([4], pp. 143-146).

### Le filtre

Le propos n'est pas ici d'analyser les caractéristiques de la boucle de code. Nous retiendrons que le choix du filtre conditionne à la fois le comportement dynamique du filtre (ordre de la boucle) et la bande équivalente de bruit de cette boucle, c'est à dire la variance de la grandeur  $\tau_d - \hat{\tau}_d$  ([4], pp. 151-156). Pour la boucle de code, des filtres d'ordre 0 et d'ordre 1 sont généralement utilisés de manière à réduire la bande équivalente de bruit. L'amélioration du comportement dynamique de ces boucles nécessite une commande additionnelle (aide) provenant de la boucle de phase ou d'un système inertiel.

## 0.7 Le récepteur numérique

Les corrélateurs qui constituent le discriminateur de retard donné figure (A2-10) sont intégrés dans un circuit numérique. A l'entrée de ce composant, on retrouve les fonctions classiques d'échantillonnage et de quantification qui permettent une représentation discrète du signal sur les 2 axes temps et amplitude. Nous nous proposons de mesurer les effets de ces 2 opérations.

### 0.7.1 Échantillonnage

Le choix de la fréquence d'échantillonnage impose la fréquence maximale du signal GPS numérisé. On montre sur la figure (A2-12), pour une séquence PN "idéale", la représentation des densités spectrales, en l'absence de repliement sur le spectre du signal échantillonné, pour différentes valeurs de la fréquence d'échantillonnage  $F_e = 1/T_e$  ( $F_e = \frac{2}{T_c}$ ,  $F_e = \frac{4}{T_c}$ ,  $F_e = \frac{6}{T_c}$ ,  $F_e = \frac{8}{T_c}$ , où  $T_c$  représente la période chip).

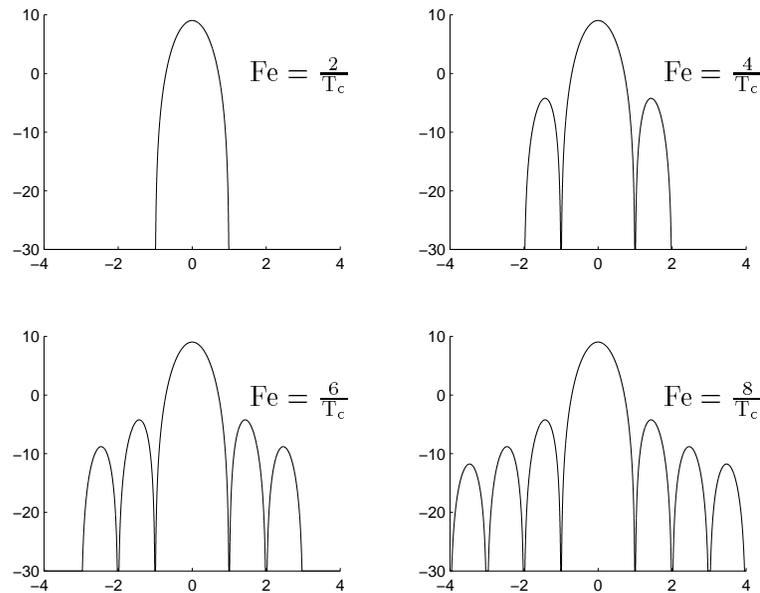


FIG. 12: *Densités spectrales de puissance*

La restriction du spectre au support  $(0, F_e/2]$  entraîne une déformation des signaux de sortie des corrélateurs avance et retard, et en conséquence du signal de sortie du discriminateur de retard. Nous mettons ceci en évidence sur les figures (A2-13), (A2-14), (A2-15) représentées pour différentes valeurs du coefficient  $k_c$ , qui fixe l'écart avance retard. Elles montrent l'influence de la fréquence d'échantillonnage (figures obtenues pour  $F_e = \frac{8}{T_c}$ ,  $F_e = \frac{4}{T_c}$ ,  $F_e = \frac{2}{T_c}$ ).

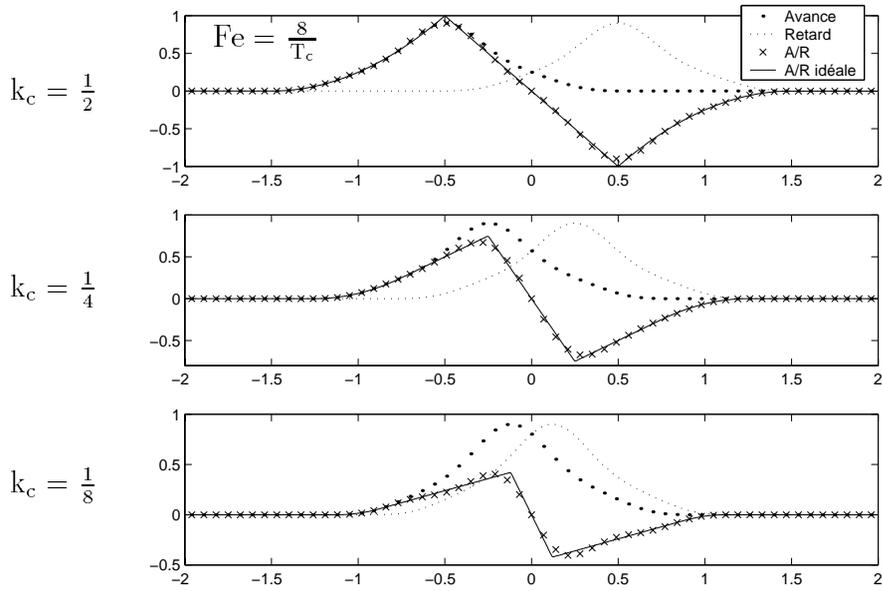


FIG. 13: *Corrélation avance, corrélation retard, et sortie du discriminateur ( $Fe = 8/T_c$ )*

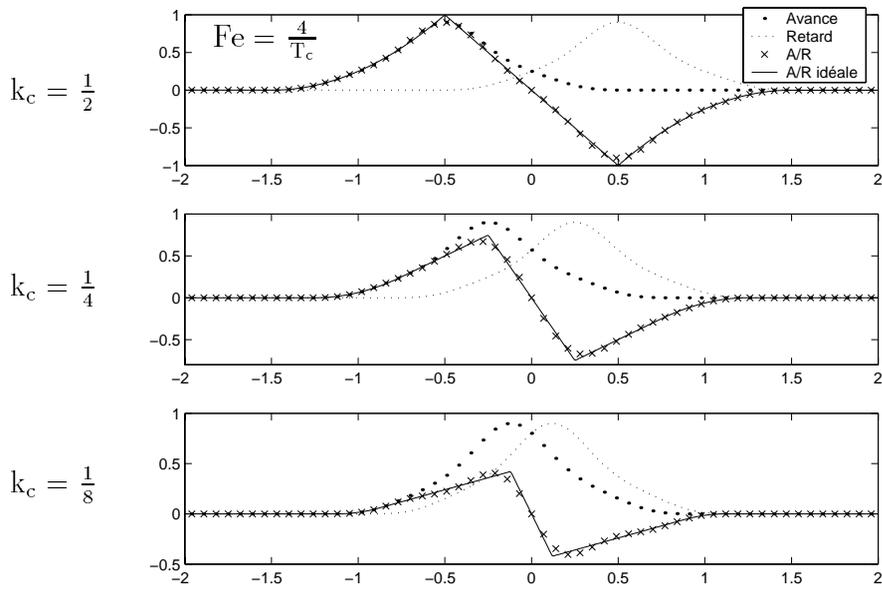


FIG. 14: *Corrélation avance, corrélation retard, et sortie du discriminateur ( $Fe = 4/T_c$ )*

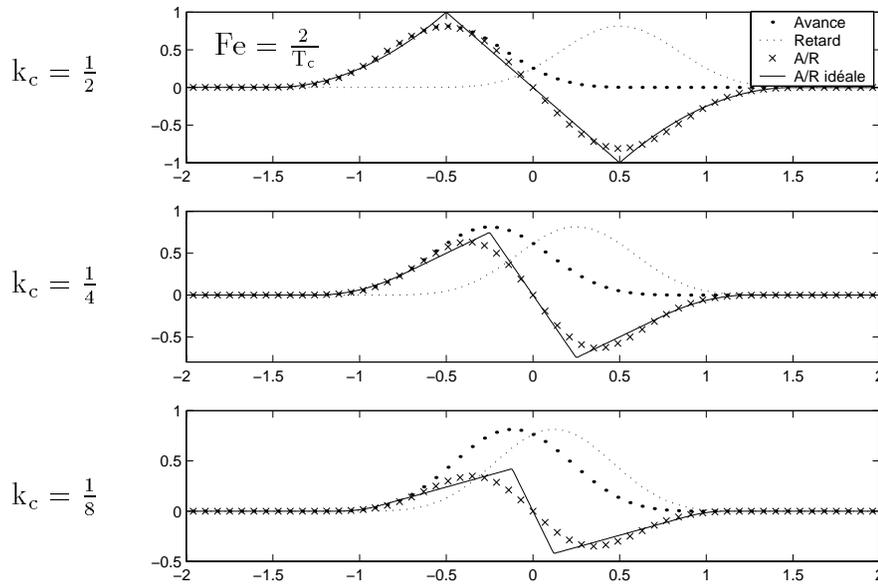


FIG. 15: *Corrélation avance, corrélation retard, et sortie du discriminateur ( $Fe = 2/T_c$ )*

Le choix de la fréquence d'échantillonnage est directement lié à la forme du discriminateur avance-retard. Une réduction du paramètre  $k_c$  qui fixe l'écart avance-retard conduit à un corrélateur étroit et nécessite un élargissement de la bande du signal qui impose une augmentation de la fréquence d'échantillonnage.

### 0.7.2 Quantification

La quantification introduit un bruit et entraîne en conséquence une dégradation du rapport signal sur bruit en sortie du corrélateur. Nous proposons de mesurer cette dégradation, c'est à dire d'évaluer le rapport puissance d'intercorrrelation sur bruit défini par la relation (I-1.9). Pour estimer ce rapport  $\Gamma$  nous utilisons le modèle ci-dessous. Ce modèle se déduit des relations (I-1.10).

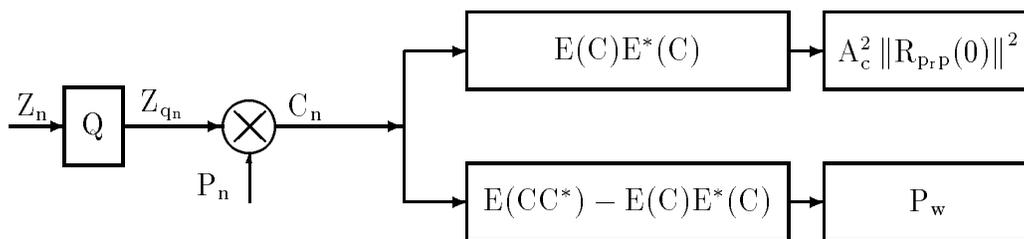


FIG. 16: *Mesure du rapport signal sur bruit en présence du quantifieur*

Le rapport puissance d'intercorrélacion sur bruit  $\Gamma$  qui caractérise le signal se déduit donc des relations (I-1.10). Nous considérons, en l'absence de quantification, la représentation idéale du signal d'entrée ( $P_{r_n} = P_n$ ). Le rapport  $\Gamma$ , noté en l'absence du quantifieur,  $\Gamma_O$ , est alors égal au rapport signal sur bruit en entrée.

$$\begin{cases} \Gamma_O = \frac{E(C(t))E(C^*(t))}{E(C(t)C^*(t)) - E(C(t))E(C^*(t))} = \frac{P_s}{P_w} \\ P_s = A_c^2 \\ P_w = E\{W W^*\} = 2\sigma_g^2 \end{cases} \quad (21)$$

### Etude du quantifieur 1 bit

Pour simplifier cette étude, nous considérons que la phase du signal  $Z_n$  défini par la relation (I-1.4) est nulle ( $\Theta_n = \Theta_0 = 0 \forall n$ ). En conséquence nous ne traitons le problème de la quantification que sur la voie en phase. Sur cette voie, le bruit est gaussien et noté  $W_G$ .

$$X_n = \Re\{Z_n\} = A_c P_n + W_n \quad (22)$$

La caractéristique du quantifieur est donnée figure (A2-17). Le signal quantifié  $X_q = \Re\{Z_q\}$  et le signal  $C$  ne peuvent prendre que les 2 valeurs  $+1$  et  $-1$ , les probabilités étant :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(C = +1) &= \mathcal{P}(P = 1)\mathcal{P}(X_q = +1|1\text{émis}) + \mathcal{P}(P = -1)\mathcal{P}(X_q = -1|-1\text{émis}) \\ \mathcal{P}(C = -1) &= \mathcal{P}(P = 1)\mathcal{P}(X_q = -1|1\text{émis}) + \mathcal{P}(P = -1)\mathcal{P}(X_q = +1|-1\text{émis}) \end{aligned}$$

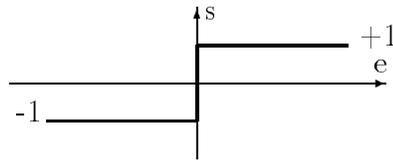


FIG. 17: *quantifieur 1 bit*

Le bruit étant gaussien, les lois de probabilité conditionnelles,  $\mathcal{P}(X|1\text{émis})$  et  $\mathcal{P}(X|-1\text{émis})$ , suivent des lois normales de moyennes respectives  $+A_c$  et  $-A_c$  et d'écart type fonction du rapport signal à bruit avant quantification  $\gamma_i$ . De ces lois, on déduit l'expression de l'espérance de  $C$ , de la puissance totale et du rapport Gamma, en présence du quantifieur. Ce rapport

est noté  $\Gamma_Q$ .

$$E(C)^2 = \left( \operatorname{erf} \left( -\sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} \right) \right)^2$$

$$E(C^2) = 1$$

$$\Gamma_Q = \frac{\left( \operatorname{erf} \left( -\sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} \right) \right)^2}{1 - \left( \operatorname{erf} \left( -\sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} \right) \right)^2} \quad \text{d'après (I - 1.10)}$$

La figure (A2-18) montre la dégradation du rapport signal sur bruit lorsque ce rapport évolue à l'entrée de -30dB à 0dB.

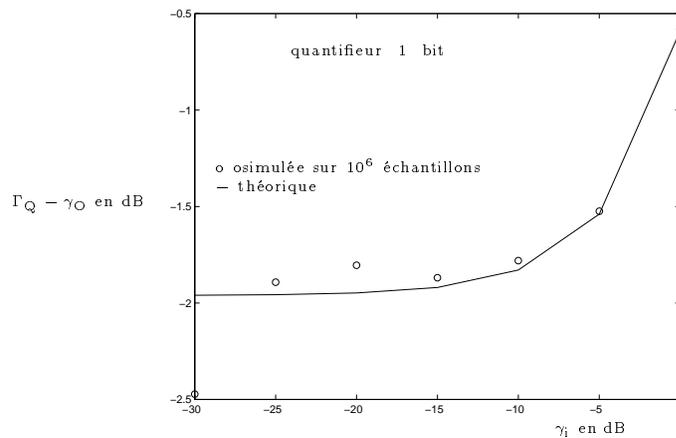


FIG. 18: Dégradation du rapport signal sur bruit

Pour le système GPS, c'est à dire pour des faibles valeurs du rapport  $\gamma_i$ , la dégradation est quasi constante et inférieure à 2 dB. La valeur de cette dégradation est obtenue en utilisant un développement à l'ordre 3 de la fonction erf.

$$\text{Si } \gamma_i \ll 1 \quad \Gamma_Q \sim \frac{2}{\pi} \gamma_i$$

$$\text{Et} : \Gamma_Q - \Gamma_O = -10 \log \frac{2}{\pi} \sim -1.96 \text{ dB}$$

### • Quantification 2 bits

La caractéristique du quantifieur est donnée figure (A2-19).

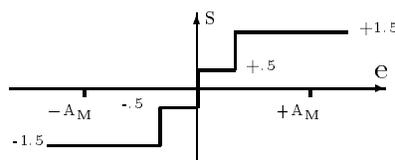


FIG. 19: quantifieur 2 bits

Le signal  $C$  peut désormais prendre les 4 valeurs  $-1.5$ ,  $-0.5$ ,  $+0.5$  et  $+1.5$ . Les niveaux de transition dépendent du facteur de crête du signal à l'entrée du quantifieur.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(C = +1.5) &= \mathcal{P}(P = 1)\mathcal{P}(X_q = 1.5|1\text{émis}) + \mathcal{P}(P = -1)\mathcal{P}(q = -1.5|-1\text{émis}) \\ \mathcal{P}(C = +0.5) &= \mathcal{P}(P = 1)\mathcal{P}(X_q = 0.5|1\text{émis}) + \mathcal{P}(P = -1)\mathcal{P}(q = -0.5|-1\text{émis}) \\ \mathcal{P}(C = -0.5) &= \mathcal{P}(P = 1)\mathcal{P}(X_q = -0.5|1\text{émis}) + \mathcal{P}(P = -1)\mathcal{P}(q = +0.5|-1\text{émis}) \\ \mathcal{P}(C = -1.5) &= \mathcal{P}(P = 1)\mathcal{P}(X_q = -1.5|1\text{émis}) + \mathcal{P}(P = -1)\mathcal{P}(q = +1.5|-1\text{émis})\end{aligned}$$

Et le rapport signal sur bruit en sortie peut s'exprimer comme précédemment mais fait intervenir le facteur crête que l'on notera  $\zeta$ .

On pose :

$$\zeta = \frac{A_M}{\sigma_g} \quad \sigma_g^2 \text{ variance du bruit gaussien}$$

On obtient pour  $\gamma_i \ll 1$  :

$$\begin{aligned}E(C) &= 0.25 \left( \operatorname{erfc} \left( -\sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} \right) - \operatorname{erfc} \left( +\sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} \right) \right) \\ &\quad + 0.5 \left( \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} \right) \right)\end{aligned}$$

$$E(C^2) = 0.25 + \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} \right) + \operatorname{erfc} \left( \frac{\zeta}{2\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{\gamma_i}{2}} \right)$$

D'où on déduit d'après (I-1.10) le rapport  $\Gamma_Q$ . La figure (A2-20) montre la dégradation du rapport signal sur bruit  $\Gamma_Q - \Gamma_O$  en fonction du rapport signal sur bruit à l'entrée du quantifieur, pour différentes valeurs du facteur de crête.

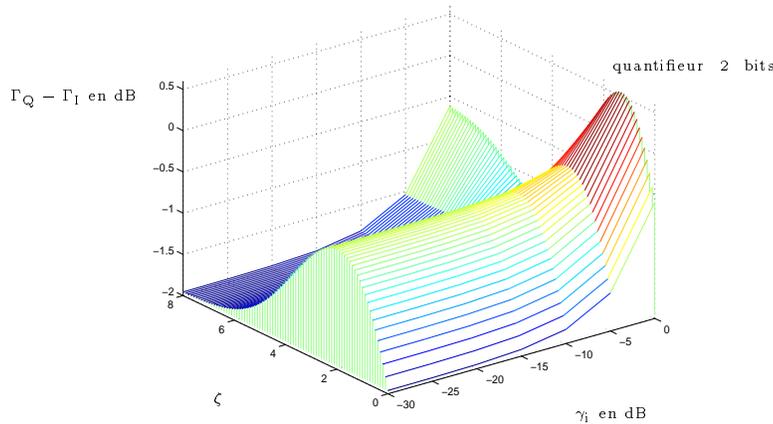


FIG. 20: Dégradation du rapport signal sur bruit en fonction de  $\zeta$

Pour de faibles valeurs de  $\gamma_i$  ( $\gamma_i \ll 0\text{dB}$ ) la dégradation est minimum pour  $\zeta = 2$ , égale à 0.54 dB (voir figure (A2-21)).

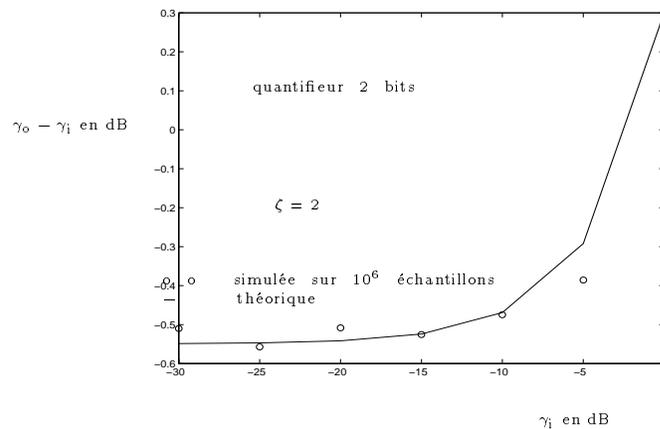


FIG. 21: Dégradation du rapport signal sur bruit pour  $\zeta = 2$

### • Quantification 3 bits

En l'absence d'interférence la dégradation sur le rapport signal sur bruit devient négligeable. Elle n'est que de 0.161dB pour un quantifieur optimal ([5], pp. 726).

On peut donc considérer que la dégradation apportée par la quantification en présence de bruit gaussien reste faible. De 1.96 dB dans la configuration la plus simple, qui ne conserve que le bit de signe du signal d'entrée, elle n'est plus que de 0.161dB lorsque le signal est quantifié sur 3 bits.



## Annexe 3: Filtre à encoche temporel

## 0.8 Caractéristique du filtre à encoche

Nous donnons ici les caractéristiques du filtre à encoche complexe. Ce filtre est composé d'un zéro de module  $\beta_0$  et d'un pôle de module  $\alpha_0$  alignés sur la fréquence de l'encoche.

$$\begin{cases} z_0 = \beta_0 \exp\{i2\pi f_0\} \\ p_0 = \alpha_0 \exp\{i2\pi f_0\} \end{cases} \quad (23)$$

### 0.8.1 Réponse en fréquence

$$H(\tilde{f}) = \frac{1 + \alpha_0 \exp\{i2\pi\tilde{f}\} - z_0}{1 + \beta_0 \exp\{i2\pi\tilde{f}\} - p_0} = \frac{1 + \alpha_0 \exp\{i2\pi\tilde{f}\} - \beta_0 \exp\{i2\pi f_0\}}{1 + \beta_0 \exp\{i2\pi\tilde{f}\} - \alpha_0 \exp\{i2\pi f_0\}}$$

$$|H(\tilde{f})|^2 = \frac{(1 + \alpha_0)^2}{(1 + \beta_0)^2} \frac{1 + \beta_0^2 - 2\beta_0 \cos(2\pi(\tilde{f} - f_0))}{1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0 \cos(2\pi(\tilde{f} - f_0))} = K_{\alpha\beta_0} \frac{1 + \beta_0^2 - 2\beta_0 \cos(2\pi(\tilde{f} - f_0))}{1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0 \cos(2\pi(\tilde{f} - f_0))}$$

$$|H(\tilde{f})|^2 \stackrel{\beta_0=1}{=} \frac{(1 + \alpha_0)^2}{4} \frac{2 - 2\cos(2\pi(\tilde{f} - f_0))}{1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0 \cos(2\pi(\tilde{f} - f_0))} \quad (24)$$

### 0.8.2 Bande excisée

Ce résultat est donné pour un zéro de module unitaire ( $\beta_0 = 1$ ). On note B la largeur de l'encoche pour un niveau d'atténuation  $A_{lin}$ . On a :

$$\begin{cases} A_{lin}^{-1} = \frac{(1 + \alpha_0)^2}{4} \frac{2 - 2\cos\theta}{1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0 \cos\theta} \\ A_{lin} = 10^{-A_{dB}/10} & A_{dB} \text{ Atténuation en puissance exprimée en dB} \\ \theta = \pi B \end{cases} \quad (25)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{(1 - 2A_{lin}^{-1})(1 + \alpha_0^2) + 2\alpha_0}{1 + \alpha_0^2 + 2\alpha_0(1 - 2A_{lin}^{-1})} \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{A_{lin}^{-1}(1 - \alpha_0)^2}{1 + \alpha_0^2 + 2\alpha_0(1 - 2A_{lin}^{-1})} \end{aligned} \quad (26)$$

Pour des largeurs de la bande très faibles  $B \ll 1$  on a :

$$\frac{\theta^2}{4} = \frac{A_{lin}^{-1}(1 - \alpha_0)^2}{1 + \alpha_0^2 + 2\alpha_0(1 - 2A_{lin}^{-1})}$$

$$B_{Hz} \sim \frac{2}{\pi} (1 - \alpha_0) \sqrt{\frac{A_{lin}^{-1}}{1 + \alpha_0^2 + 2\alpha_0(1 - 2A_{lin}^{-1})}}$$
(27)

### 0.8.3 Caractéristiques fréquentielles du bloc AR

Le bloc MA présente un pôle noté  $p_0 = \alpha_0 \exp\{i2\pi f_0\}$ . On a :

$$H_{AR}(\tilde{f}) = \frac{1}{B(\tilde{f})} = \frac{1}{1 - \alpha_0 \exp\{i2\pi(f_0 - \tilde{f})\}}$$

$$|H_{AR}(\tilde{f})|^2 = \frac{1}{1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0 \cos(2\pi(f_0 - \tilde{f}))}$$

$$|H_{AR}(f_0)|^2 = \frac{1}{(1 - \alpha_0)^2}$$

$$\int_0^1 |H_{AR}(\tilde{f})|^2 d\tilde{f} = \int_0^1 \frac{1}{1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0 \cos(2\pi(\tilde{f} - f_0))} d\tilde{f} = \frac{1}{1 - \alpha_0^2}$$
(28)

Si on applique à l'entrée de ce filtre un signal composite constitué d'une interférence de puissance  $J$ , de fréquence  $\tilde{f}$  et d'un bruit blanc gaussien de puissance  $G$ , le rapport de puissance interférence sur bruit blanc est modifié. On note  $J_I$  et  $G_I$  les puissances de ces 2 composantes en sortie de la partie AR. On obtient :

$$J_I(\tilde{f}) = J |H_{AR}(\tilde{f})|^2 = \frac{J}{1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0 \cos(2\pi(f_0 - \tilde{f}))}$$

$$G_I(\tilde{f}) = G \int_0^1 |H_{AR}(\tilde{f})|^2 d\tilde{f} = \frac{G}{1 - \alpha_0^2}$$

$$G_\gamma^{AR}(\tilde{f}) = \frac{\gamma_{jg}^{-1}(\tilde{f})}{\gamma_{jg}} = \frac{1 - \alpha_0^2}{1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0 \cos(2\pi(\tilde{f} - f_0))}$$
(29)

Il est intéressant d'exprimer la sensibilité du gain  $G_\gamma^{AR}$  aux paramètres  $\alpha_0$  et  $\theta = 2\pi(\tilde{f} - f_0)$ .

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_\gamma^{AR}(\alpha, \theta) = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\theta - \theta_0)} \\ \alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha \\ \theta = 2\pi f_0 + \Delta\theta = \theta_0 + \Delta\theta \\ \\ G_\gamma^{AR}(\alpha_0, \theta_0) = \frac{1 - \alpha_0^2}{(1 - \alpha_0)^2} \end{array} \right. \quad (30)$$

On obtient pour les expressions des dérivés partielles exprimées par rapport à  $\alpha$  et  $\Theta$  :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G_\gamma^{AR}(\alpha, \theta)}{\partial \alpha} \right|_{\theta=\theta_0} &= \frac{2}{(1 - \alpha)^2} \\ \left. \frac{\partial G_\gamma^{AR}(\alpha, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\alpha=\alpha_0} &= -\frac{2\alpha_0(1 - \alpha_0^2)\sin(\theta - \theta_0)}{(1 + \alpha_0^2 - 2\alpha_0\cos(\theta - \theta_0))^2} \stackrel{\theta - \theta_0 \ll 2\pi}{\approx} -G_\gamma^{AR}(\alpha_0, \theta_0) \frac{2\alpha_0}{(1 - \alpha_0)^2} (\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (31)$$

On considère de faibles variations  $\Delta\alpha, \Delta\theta$  autour de  $\alpha_0, \theta_0$ . On a :

$$G_\gamma^{AR}(\alpha_0 + \Delta\alpha, \theta_0 + \Delta\theta) = G_\gamma^{AR}(\alpha_0, \theta_0) \left( 1 + \frac{2}{1 - \alpha_0^2} \Delta\alpha - \frac{\alpha_0}{(1 - \alpha_0)^2} \Delta\theta^2 \right) \quad (32)$$

La sensibilité est donc très forte lorsque le pôle est proche du cercle unitaire.

#### 0.8.4 Caractéristiques fréquentielles du bloc MA

Le bloc MA présente un zéro noté  $z_0 = \beta_0 \exp\{i2\pi f_0\}$ . On a :

$$\begin{aligned} H_{MA}(\tilde{f}) &= A(\tilde{f}) = 1 - \beta_0 \exp\{i2\pi(f_0 - \tilde{f})\} \\ |H_{MA}(\tilde{f})|^2 &= 1 + \beta_0^2 - 2\beta_0 \cos(2\pi(f_0 - \tilde{f})) \\ |H_{MA}(f_0)|^2 &= (1 - \beta_0)^2 \\ \int_0^1 |H_{MA}(\tilde{f})|^2 d\tilde{f} &= 1 + \beta_0^2 \end{aligned} \quad (33)$$

Si on applique à l'entrée de ce filtre un signal composite constitué d'une interférence de puissance  $J_I$ , de fréquence  $\tilde{f}$  et d'un bruit blanc gaussien de puissance  $G_I$ , le rapport de puissance interférence sur bruit blanc est modifié. On note  $J_F$  et  $G_F$  les puissances de ces 2 composantes en sortie de la partie MA. On obtient :

$$\begin{aligned}
 J_F(\tilde{f}) &= J_I |H_{MA}(\tilde{f})|^2 = J_I (1 + \beta_0^2 - 2\beta_0 \cos(2\pi(f_0 - \tilde{f}))) \\
 G_F(\tilde{f}) &= G_I \int_0^1 |H_{MA}(\tilde{f})|^2 d\tilde{f} = G_I (1 + \beta_0^2) \\
 G_\gamma^{MA}(\tilde{f}) &= \frac{\gamma_{jg\_F}}{\gamma_{jg\_I}}(\tilde{f}) = \frac{1 + \beta_0^2 - 2\beta_0 \cos(2\pi(\tilde{f} - f_0))}{1 + \beta_0^2}
 \end{aligned} \tag{34}$$

On peut exprimer la sensibilité du gain  $G_\gamma^{MA}$  aux paramètres  $\beta$  et  $\theta = 2\pi(\tilde{f} - f_0)$ . On a :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 G_\gamma^{MA}(\beta, \theta) = \frac{1 + \beta^2 - 2\beta \cos(\theta - \theta_0)}{1 + \beta^2} \\
 \beta = \beta_0 + \Delta\beta \\
 \theta = 2\pi f_0 + \Delta\theta = \theta_0 + \Delta\theta \\
 G_\gamma^{MA}(\beta_0, \theta_0) = \frac{(1 - \beta_0)^2}{1 + \beta_0^2}
 \end{array} \right. \tag{35}$$

On obtient pour les expressions des dérivés partielles exprimées par rapport à  $\beta$  et  $\theta$  :

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial G_\gamma^{MA}(\beta, \theta)}{\partial \beta} \right|_{\theta=\theta_0} &= -2 \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta^2)^2} \\
 \left. \frac{\partial G_\gamma^{MA}(\beta, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\beta=\beta_0} &= + \frac{2\beta_0 \sin(\theta - \theta_0)}{1 + \beta_0^2} \theta - \theta_0 \lesssim < 2\pi + 2G_\gamma^{MA}(\beta_0, \theta_0) \frac{\beta_0}{(1 - \beta_0)^2} (\theta - \theta_0)
 \end{aligned} \tag{36}$$

On considère de faibles variations  $\Delta\beta, \Delta\theta$  autour de  $\beta_0, \theta_0$ . On a :

$$G_\gamma^{MA}(\beta_0 + \Delta\beta, \theta_0 + \Delta\theta) = G_\gamma^{MA}(\beta_0, \theta_0) \left( 1 - 2 \frac{1 + \beta_0}{(1 - \beta_0)(1 + \beta_0^2)} \Delta\beta + \frac{\beta_0}{(1 - \beta_0)^2} \Delta\theta^2 \right) \tag{37}$$

## 0.9 Intercorrélation code PN filtré-code PN

On considère une séquence PN filtrée par le filtre à encoche. On mesure la fonction d'inter-corrélation entre cette séquence et la séquence d'origine non filtrée. Elle s'écrit, d'après les relations de Wiener Lee :

$$R_{pfp}(k) = h(k) * R_{pp}(k)$$

Avec :

$$\begin{cases} R_{pp}(k) = 1 - \frac{|k|}{N_c} & |k| \leq N_c \\ R_{pp}(k) = 0 & k > N_c \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(n) = \frac{1 + \alpha_0}{2} p_0^n (1 - \alpha_0^{-1}) & n > 0 \\ h(n) = \frac{1 + \alpha_0}{2} & n = 0 \end{cases}$$

En conséquence la fonction d'inter-corrélation s'écrit :

$$R_{pfp}(k) = \sum_{m=-N_c}^{+N_c} \left(1 - \frac{|m|}{N_c}\right) h(k - m)$$

On obtient :

Pour  $k < -N_c$  :

$$R_{pfp}(k) = 0 \quad (38)$$

Pour  $-N_c \leq k \leq 0$  :

$$\begin{aligned} R_{pfp}(k) &= 1 + \frac{k}{N_c} h(0) + \sum_{m=-N_c}^{k-1} \left(1 + \frac{m}{N_c}\right) h(k - m) \\ &= \frac{1 + \alpha_0}{2} \left(1 + \frac{k}{N_c} + p_0^k (1 - \alpha_0^{-1}) \sum_{m=-N_c}^{k-1} \left(1 + \frac{m}{N_c}\right) p_0^{-m}\right) \\ &= \frac{1 + \alpha_0}{2} \left(1 + \frac{k}{N_c} + \frac{z_0 - p_0}{N_c} \left(\frac{p_0 - p_0^{k+N_c}}{(1 - p_0)^2} - \frac{N_c + k - 1}{1 - p_0}\right)\right) \end{aligned} \quad (39)$$

Pour  $0 < k \leq N_c$  :

$$\begin{aligned}
R_{p_f p}(k) &= 1 - \frac{k}{N_c} h(0) + \sum_{m=-N_c}^0 \left(1 + \frac{m}{N_c}\right) h(k-m) + \sum_{m=1}^{k-1} \left(1 - \frac{m}{N_c}\right) h(k-m) \\
&= \frac{1 + \alpha_0}{2} \left(1 - \frac{k}{N_c} + p_0^k (1 - \alpha_0^{-1}) \left( \sum_{m=-N_c}^{k-1} p_0^{-m} + \sum_{m=-N_c}^0 m p_0^{-m} - \sum_{m=1}^{k-1} m p_0^{-m} \right)\right) \\
&= \frac{1 + \alpha_0}{2} \left(1 - \frac{k}{N_c} + \frac{z_0 - p_0}{N_c} \left( \frac{p_0^k - p_0^{k+N_c} + (N_c - 1 - N_c p_0^{-1}) (p_0 - p_0^k)}{(1 - p_0)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{N_c p_0^{k-1} + 1 - k}{1 - p_0} \right)\right) \tag{40}
\end{aligned}$$

Pour  $k > N_c$  :

$$\begin{aligned}
R_{p_f p}(k) &= \sum_{m=-N_c}^{N_c} \left(1 + \frac{|m|}{N_c}\right) h(k-m) \\
&= \frac{1 + \alpha_0}{2} p_0^k (1 - \alpha_0^{-1}) \left( \sum_{m=-N_c}^{N_c} p_0^{-m} + \sum_{m=-N_c}^0 m p_0^{-m} - \sum_{m=1}^{N_c} m p_0^{-m} \right) \\
&= \frac{1 + \alpha_0}{2} p_0^k \frac{z_0 - p_0}{N_c} \left( \frac{1 - p_0^{N_c} + (p_0^{-N_c} - 1) (N_c - 1 - N_c p_0^{-1})}{(1 - p_0)^2} \right. \\
&\quad \left. - N_c \frac{p_0^{-1} - p_0^{-(N_c+1)}}{1 - p_0} \right) \tag{41}
\end{aligned}$$

## 0.10 Autocorrélation code PN filtré

On considère maintenant la fonction d'autocorrélation de la séquence PN filtrée par le filtre à encoche.

$$\begin{cases} R_{p_f p}(k) = R_{pp}(k) * h_h(k) \\ h_h(k) = h(k) * h^*(-k) \end{cases}$$

On exprime  $h_h(k)$  :

$$\begin{cases} h_h(n) = \sum_{m=n}^{+\infty} h(m) h^*(m-n) \\ h_h(-n) = h_h^*(n) \end{cases}$$

On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_h(0) = \sum_{m=0}^{+\infty} |h(m)|^2 = |h(0)|^2 + \left(\frac{1+\alpha_0}{2}\right)^2 (1-\alpha_0^{-1})^2 \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_0^{2m} \\ = \left(\frac{1+\alpha_0}{2}\right)^2 \left(1 + (1-\alpha_0^{-1})^2 \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_0^{2m}\right) = \frac{1+\alpha_0}{2} = h(0) \\ \\ h_h(n)_{n>0} = h(n)h^*(0) + \left(\frac{1+\alpha_0}{2}\right)^2 \sum_{m=n+1}^{+\infty} z_0^m \alpha_0^{2m} (1-\alpha_0^{-1}) (\alpha_0^{-n} - \alpha_0^{-(n+1)}) z_0^{n-m} \\ = \left(\frac{1+\alpha_0}{2}\right)^2 \left( p_0^n (1-\alpha_0^{-1}) + z_0^n (\alpha_0^{-n} - 2\alpha_0^{-(n+1)} + \alpha_0^{-(n+2)}) \sum_{m=n+1}^{+\infty} \alpha_0^{2m} \right) \\ = \left(\frac{1+\alpha_0}{2}\right)^2 p_0^n \frac{1-\alpha_0^{-1}}{1+\alpha_0} = \frac{h(n)}{2} \\ \\ h_h(n)_{n<0} = \frac{h^*(-n)}{2} \end{array} \right.$$

On en déduit la fonction d'autocorrélation de la séquence filtrée :

Pour  $k = 0$  :

$$\begin{aligned} R_{p_f p_f}(0) &= h(0) + \sum_{m=-N_c}^{-1} \left(1 + \frac{m}{N_c}\right) \frac{h(-m)}{2} + \sum_{m=1}^{N_c} \left(1 - \frac{m}{N_c}\right) \frac{h^*(m)}{2} \\ &= h(0) + \sum_{m=1}^{N_c} \left(1 - \frac{m}{N_c}\right) \frac{h(m) + h^*(m)}{2} \\ &= \frac{1+\alpha_0}{2} \left(1 + \frac{1-\alpha_0^{-1}}{2} \sum_{m=1}^{N_c} \left(1 - \frac{m}{N_c}\right) \left(p_0^m - \left(\frac{\alpha_0}{z_0}\right)^m\right)\right) \\ &= \frac{1+\alpha_0}{2} \left(1 + \frac{z_0 - p_0}{2} \left(\frac{1}{1-p_0} \left(\frac{1-p_0^{N_c}}{N_c(1-p_0)} - 1\right)\right)\right) \\ &\quad + \frac{1+\alpha_0}{2} \frac{z_0 - p_0}{2(z_0 - \alpha_0)} \left(\frac{1 - \left(\frac{\alpha_0}{z_0}\right)^{N_c}}{N_c(z_0 - \alpha_0)} - \frac{1}{z_0}\right) \end{aligned} \tag{42}$$

Pour  $0 < k \leq N_c$  :

$$\begin{aligned}
R_{p_f p_f}(k) &= \left(1 - \frac{k}{N_c}\right) h(0) + \sum_{m=-N_c}^0 \left(1 + \frac{m}{N_c}\right) \frac{h(k-m)}{2} + \sum_{m=1}^{k-1} \left(1 - \frac{m}{N_c}\right) \frac{h(k-m)}{2} \\
&\quad + \sum_{m=k+1}^{N_c} \left(1 - \frac{m}{N_c}\right) \frac{h^*(m-k)}{2} \\
&= \frac{1 + \alpha_0}{2} \left(1 - \frac{k}{N_c}\right) \\
&\quad + \frac{1 + \alpha_0}{2} \frac{1 - \alpha_0^{-1}}{2} p_0^k \left( \sum_{m=-N_c}^{k-1} p_0^{-m} + \frac{1}{N_c} \sum_{m=-N_c}^{-1} m p_0^{-m} - \frac{1}{N_c} \sum_{m=1}^{k-1} m p_0^{-m} \right) \\
&\quad + \frac{1 + \alpha_0}{2} \frac{1 - \alpha_0^{-1}}{2} \left(\frac{z_0}{\alpha_0}\right)^k \sum_{m=k+1}^{N_c} \left(1 - \frac{m}{N_c}\right) \left(\frac{z_0}{\alpha_0}\right)^{-m} \\
R_{p_f p_f}(k) &= \frac{1 + \alpha_0}{2} \left(1 - \frac{k}{N_c}\right) \\
&\quad + \frac{1 + \alpha_0}{4N_c} (z_0 - p_0) \left( \frac{p_0^k + k - N_c - 1}{1 - p_0} - \frac{p_0 + p_0^{k+N_c} - p_0^k - p_0^{k+1}}{(1 - p_0)^2} \right) \\
&\quad + \frac{1 + \alpha_0}{4N_c} \frac{z_0 - p_0}{z_0} \left( \frac{k - N_c}{z_0 - \alpha_0} + z_0 \frac{1 - \left(\frac{z_0}{\alpha_0}\right)^{k-N_c}}{(z_0 - \alpha_0)^2} \right)
\end{aligned} \tag{43}$$

Pour  $k > N_c$  :

$$\begin{aligned}
R_{p_f p_f}(k) &= \sum_{m=-N_c}^{N_c} \left(1 - \frac{|m|}{N_c}\right) \frac{h(k-m)}{2} \\
&= \frac{1 + \alpha_0}{2} \frac{1 - \alpha_0^{-1}}{2} p_0^k \left( \sum_{m=-N_c}^{N_c} p_0^{-m} + \frac{1}{N_c} \sum_{m=-N_c}^{-1} m p_0^{-m} - \frac{1}{N_c} \sum_{m=1}^{N_c} m p_0^{-m} \right) \\
&= \frac{1 + \alpha_0}{2} \frac{1 - \alpha_0^{-1}}{2} p_0^k \left( \sum_{m=-N_c}^{N_c} p_0^{-m} - \frac{1}{N_c} \sum_{m=1}^{N_c} m (p_0^{-m} + p_0^m) \right) \\
&= \frac{1 + \alpha_0}{4N_c} (z_0 - p_0) p_0^k \frac{2 - p_0^{N_c} - p_0^{-N_c}}{(1 - p_0)^2}
\end{aligned} \tag{44}$$

## 0.11 Processus interférence+bruit gaussien

Nous évaluons ici les moments d'un processus aléatoire issu d'une interference et d'un bruit blanc gaussien additif.

### 0.11.1 Interférence non modulée

On utilise ici la notation suivante :

$$\begin{aligned}
 j_n &= A_j \exp\{i2\pi f_j n + \theta\} && \text{Interférence} \\
 g_n &= g_c(n) + i g_s(n) && \text{Bruit blanc centré gaussien complexe} \\
 z_n &= j_n + g_n \\
 J &= A_j^2 && \text{Puissance de l'interférence} \\
 G &= 2\sigma_g^2 && \text{Puissance du bruit blanc gaussien} \\
 P_{jg} &= J + G
 \end{aligned}$$

On admet par ailleurs que :

$$\begin{aligned}
 E\{g_n g_n^*\} &= G \\
 E\{g_n g_n\} &= 0 \\
 E\{g_{cn}^4\} &= E\{g_{sn}^4\} = 3\sigma_g^4
 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
 E\{z_n z_n^*\} &= J + G = P_{jg} \\
 E\{z_n z_{n-1}^*\} &= E\{(j_n + g_n)(j_{n-1}^* + g_{n-1}^*)\} = J \exp\{i2\pi f_j\} \\
 E\{z_n z_n^* z_{n-1} z_{n-1}^*\} &= E\{(j_n + g_n)(j_n^* + g_n^*)(j_{n-1} + g_{n-1})(j_{n-1}^* + g_{n-1}^*)\} \\
 &= E\{(J + g_n g_n^* + g_n j_n^* + g_n^* j_n) \\
 &\quad (J + g_{n-1} g_{n-1}^* + g_{n-1} j_{n-1}^* + g_{n-1}^* j_{n-1})\} \\
 &= J^2 + 2JG + G^2 = P_{jg}^2 \tag{45} \\
 E\{z_n z_n^* z_n z_n^*\} &= E\{(j_n + g_n)(j_n^* + g_n^*)(j_n + g_n)(j_n^* + g_n^*)\} \\
 &= E\{(J + g_n g_n^* + g_n j_n^* + g_n^* j_n)^2\} \\
 &= E\{J^2 + 4JG + g_n g_n^* g_n g_n^*\} \\
 &= J^2 + 4JG + E\{(g_c(n))^2 + (g_s(n))^2\} \\
 &= J^2 + 4JG + 8\sigma_g^4 = J^2 + 4JG + 2G^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E \left\{ z_n z_{n-1}^* z_{n-1} z_{n-1}^* \right\} &= E \left\{ (j_n + g_n)(j_{n-1}^* + g_{n-1}^*)(j_{n-1} + g_{n-1})(j_{n-1}^* + g_{n-1}^*) \right\} \\
&= E \left\{ j_n(j_{n-1}^* + g_{n-1}^*)(J + g_{n-1}g_{n-1}^* + g_{n-1}j_{n-1}^* + g_{n-1}^*j_{n-1}) \right\} \\
&= E \left\{ (J \exp \{i2\pi f_j\} + j_n g_{n-1}^*) \right. \\
&\quad \left. (J + g_{n-1}g_{n-1}^* + g_{n-1}j_{n-1}^* + g_{n-1}^*j_{n-1}) \right\} \\
&= (J^2 + 2JG) \exp \{i2\pi f_j\}
\end{aligned} \tag{46}$$

### 0.11.2 Interférence modulée linéairement en fréquence

On utilise ici la notation suivante :

$$\begin{aligned}
j_n &= A_j \exp \left\{ i \left( 2\pi f_j n + \frac{k_\omega}{2} n^2 + \theta \right) \right\} && \text{Interférence} \\
g_n &= g_c(n) + i g_s(n) && \text{Bruit blanc centré gaussien complexe} \\
z_n &= j_n + g_n \\
J &= A_j^2 && \text{Puissance de l'interférence} \\
G &= 2\sigma_g^2 && \text{Puissance du bruit blanc gaussien} \\
P_{jg} &= J + G
\end{aligned}$$

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned}
j_{n-l} &= j_n \exp \left\{ -i \left( 2\pi f_j l - \frac{k_\omega}{2} l^2 \right) \right\} \exp \{-ik_\omega n l\} \\
j_{n-1} &= j_n \exp \left\{ -i \left( 2\pi f_j - \frac{k_\omega}{2} \right) \right\} \exp \{-ik_\omega n\}
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
E \left\{ z_n z_{n-1}^* \right\} &= E \left\{ (j_n + g_n)(j_{n-1}^* + g_{n-1}^*) \right\} \\
&= E \left\{ (j_n + g_n) \left( j_n \exp \left\{ i \left( 2\pi f_j - \frac{k_\omega}{2} \right) \right\} \exp \{ik_\omega n\} + g_{n-1}^* \right) \right\} \\
&= J \exp \left\{ i \left( 2\pi f_j - \frac{k_\omega}{2} \right) \right\} \exp \{ik_\omega n\} + G
\end{aligned} \tag{47}$$

## 0.12 Puissance résiduelle en sortie du filtre adaptatif

Cette étude est menée en présence d'un brouilleur à fréquence fixe. L'algorithme du gradient appliqué au bloc MA est utilisé pour ajuster le zéro de ce filtre sur la fréquence de ce brouilleur. Il converge vers la solution de Wiener donnée par (II-1.13) et (II-1.26). Le zéro obtenu à la convergence ne présente pas un module unitaire et la puissance du signal d'interférence n'est pas nulle en sortie. Par ailleurs le bruit sur l'estimation de ce zéro dégrade les performances du filtre. Nous nous proposons ici d'évaluer la puissance du signal de sortie.

### • Valeur quadratique minimum

La puissance est minimum pour la solution optimum du filtre  $z_0 = z_{0_{opt}}$ . On obtient en utilisant les relations (A3-45), (A3-46) :

$$\begin{aligned}
 C_{min} &= E \left\{ |Y_n|^2 \right\} \Big|_{z_0=z_{0_{opt}}} \\
 &= E \left\{ \left( W(n) - \frac{J_I}{P_{jg\_I}} \exp\{i2\pi f_j\} W_{n-1} \right) \left( W(n)^* - \frac{J_I}{P_{jg\_I}} \exp\{-i2\pi f_j\} W_{n-1}^* \right) \right\} \\
 &= G_I \frac{1 + 2\gamma_{jg\_I}}{1 + \gamma_{jg\_I}} \underset{\gamma_{jg\_I} \gg 1}{\approx} 2G_I
 \end{aligned} \tag{48}$$

Le signal de sortie résulte des 2 composantes, interférence et bruit gaussien. Une analyse fréquentielle permet de mesurer la contribution de ces composantes. On obtient en considérant que le bruit gaussien est blanc.

$$\begin{cases} C_{min} = J_F + G_F \\ J_F = J_I * |A(f_j)|^2 \\ G_F = G_I * \int_0^1 |A(\tilde{f})|^2 d\tilde{f} \end{cases} \tag{49}$$

On utilise les relations (A3-33) qui donnent les caractéristiques fréquentielles du bloc MA. Lorsque  $z_0 = z_{0_{opt}}$  on a :

$$\begin{cases} z_0 = z_{0_{opt}} = \frac{1}{1 + \gamma_{jg\_I}} \exp\{i2\pi f_j\} \\ |A_f(f_j)|^2 = \frac{1}{(1 + \gamma_{jg\_I})^2} \underset{\gamma_{jg\_I} \gg 1}{\approx} \frac{1}{\gamma_{jg\_I}^2} \\ \int_0^1 |A(\tilde{f})|^2 d\tilde{f} = 1 + \frac{\gamma_{jg\_I}^2}{(1 + \gamma_{jg\_I})^2} \underset{\gamma_{jg\_I} \gg 1}{\approx} 2 \end{cases} \tag{50}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} C_{min} = J_F + G_F \\ J_F = J_I * |A_f(f_j)|^2 = \frac{1}{(1 + \gamma_{jg\_I})^2} \approx \frac{J_I}{\gamma_{jg\_I}^2} \\ G_F = G_I * \int_0^1 |A(\tilde{f})|^2 d\tilde{f} \approx 2G_I \end{cases} \quad (51)$$

On vérifie que  $C_{min} = J_F + G_F$ , que la puissance de l'interférence s'annule lorsque le rapport  $\gamma_{jg\_I}$  tend vers l'infini. Par ailleurs on obtient, après filtrage, une dégradation du rapport de puissance interférence sur bruit gaussien.

$$\gamma_{jg\_F} \stackrel{\gamma_{jg\_I} \gg 1}{\sim} \frac{1}{2\gamma_{jg\_I}} \quad \text{pour } z_0 = z_{0opt} \quad (52)$$

**On admettra que le rapport interférence sur bruit gaussien en entrée de ce bloc est grand devant 1 et que en conséquence, après filtrage, la puissance de l'interférence est négligeable devant la puissance du bruit gaussien.**

- Valeur quadratique totale

On observe sur la figure (II-1.9) les variations du coefficient estimé autour de la solution de Wiener pour 2 valeurs du pas d'adaptation  $\delta$ . La puissance de l'erreur est donc supérieure à  $C_{min}$ .

$$\begin{cases} C = E \{ |Y_n|^2 \} \\ Y_n = W_n - z_0(n)W_{n-1} = W_n - z_{opt}W_{n-1} + \epsilon_n W_{n-1} \\ \epsilon_n = z_{opt} - z_0(n) \end{cases}$$

La grandeur  $\epsilon_n$  représente l'erreur d'estimation. Si on admet que cette erreur est nulle en moyenne ( $E \{ \epsilon_n \} = 0$ ) et que  $\epsilon_n$  est indépendant de  $W_{n-1}$  et de  $Y_{n,opt}$ , on obtient :

$$C = E \{ |W_n - z_{opt}W_{n-1}|^2 \} + P_{jg\_I} E \{ |\epsilon_n|^2 \} = C_{min} + P_{jg\_I} E \{ |\epsilon_n|^2 \} \quad (53)$$

Pour calculer la puissance de l'erreur d'estimation, on établit l'équation de récurrence sur

cette erreur à partir de (II-1.20) :

$$\begin{aligned}
\epsilon_{n+1} &= \epsilon_n - \frac{\delta}{P_{jg\_I}} Y_n W_{n-1}^* \\
&= \epsilon_n - \frac{\delta}{P_{jg\_I}} W_n W_{n-1}^* + \frac{\delta}{P_{jg\_I}} z_0(n) W_{n-1} W_{n-1}^* \\
&= \epsilon_n \left( 1 - \frac{\delta}{P_{jg\_I}} W_{n-1} W_{n-1}^* \right) - \frac{\delta}{P_{jg\_I}} W_n W_{n-1}^* + \frac{\delta}{P_{jg\_I}} z_{opt} W_{n-1} W_{n-1}^*
\end{aligned}$$

On peut exprimer la récurrence sur la puissance de cette erreur en utilisant les relations (A3-45), (A3-46) et on obtient :

$$\begin{aligned}
E \{ |\epsilon_{n+1}|^2 \} &= E \{ |\epsilon_n|^2 \} \left( 1 - 2\delta + \frac{\delta^2}{P_{jg\_I}^2} (J_I^2 + 4J_I G_I + 2G_I^2) \right) \\
&\quad + \frac{\delta^2}{P_{jg\_I}^2} P_{jg^2\_I} \\
&\quad + \frac{\delta^2}{P_{jg\_I}^2} |z_{opt}|^2 (J_I^2 + 4J_I G_I + 2G_I^2) \\
&\quad - \frac{\delta^2}{P_{jg\_I}^2} z_{opt}^* (J_I^2 + 2J_I G_I) \exp \{ i2\pi f_j \} \\
&\quad - \frac{\delta^2}{P_{jg\_I}^2} z_{opt} (J_I^2 + 2J_I G_I) \exp \{ -i2\pi f_j \}
\end{aligned}$$

La valeur du coefficient  $z_{opt}$  est donnée par (II-1.13). On obtient :

$$\begin{aligned}
E \{ |\epsilon_{n+1}|^2 \} &= E \{ |\epsilon_n|^2 \} \left( 1 - 2\delta + \frac{\delta^2}{P_{jg\_I}^2} (J_I^2 + 4J_I G_I + 2G_I^2) \right) \\
&\quad + \delta^2 \left( 1 - \frac{2J_I}{P_{jg\_I}^3} (J_I^2 + 2J_I G_I) + \frac{J_I^2}{P_{jg\_I}^4} (J_I^2 + 4J_I G_I + G_I) \right)
\end{aligned}$$

Pour estimer la puissance de l'erreur on postule que, lorsque  $n$  tend vers l'infini, la variance est indépendante de  $n$ .

$$\begin{aligned} E \left\{ |\epsilon_n|^2 \right\} \Big|_{n \rightarrow +\infty} &= \delta \frac{1 + \frac{J_I^2}{P_{jg\_I}^4} (J_I^2 + 4J_I G_I + 2G_I^2) - \frac{2J_I}{P_{jg\_I}} (J_I^2 + 2J_I G_I)}{2 - \frac{\delta}{P_{jg\_I}} (J_I^2 + 4J_I G_I + 2G_I^2)} \\ &= \frac{\delta}{P_{jg\_I}} \frac{2J_I^3 G_I + 4J_I^2 G_I^2 + 4J_I G_I^3 + G_I^4}{J_I^3 (2 - \delta) + J_I^2 G_I (6 - 5\delta) + 6J_I G_I^2 (1 - \delta) + 2G_I^3 (1 - \delta)} \end{aligned}$$

En injectant cette expression dans (A3-53) on a :

$$\begin{aligned} C &= C_{min} + \delta \frac{2J_I^3 G_I + 4J_I^2 G_I^2 + 4J_I G_I^3 + G_I^4}{(2 - \delta)J_I^3 + (6 - 5\delta)J_I^2 G_I + 6(1 - \delta)J_I G_I^2 + 2(1 - \delta)G_I^3} \\ &= C_{min} + \delta G_I \frac{1 + 4\gamma_{jg\_I} + 4\gamma_{jg\_I}^2 + 2\gamma_{jg\_I}^3}{2(1 - \delta) + 6(1 - \delta)\gamma_{jg\_I} + (6 - 5\delta)\gamma_{jg\_I}^2 + 2(1 - \delta)\gamma_{jg\_I}^3} \end{aligned} \quad (54)$$

On montre sur la figure (A3-22), pour  $G_I = 1$ , l'évolution de la puissance de l'erreur en sortie en fonction du rapport  $\gamma_{jg\_I}$  et du pas d'adaptation  $\delta$ , définie par l'équation (A3-54).

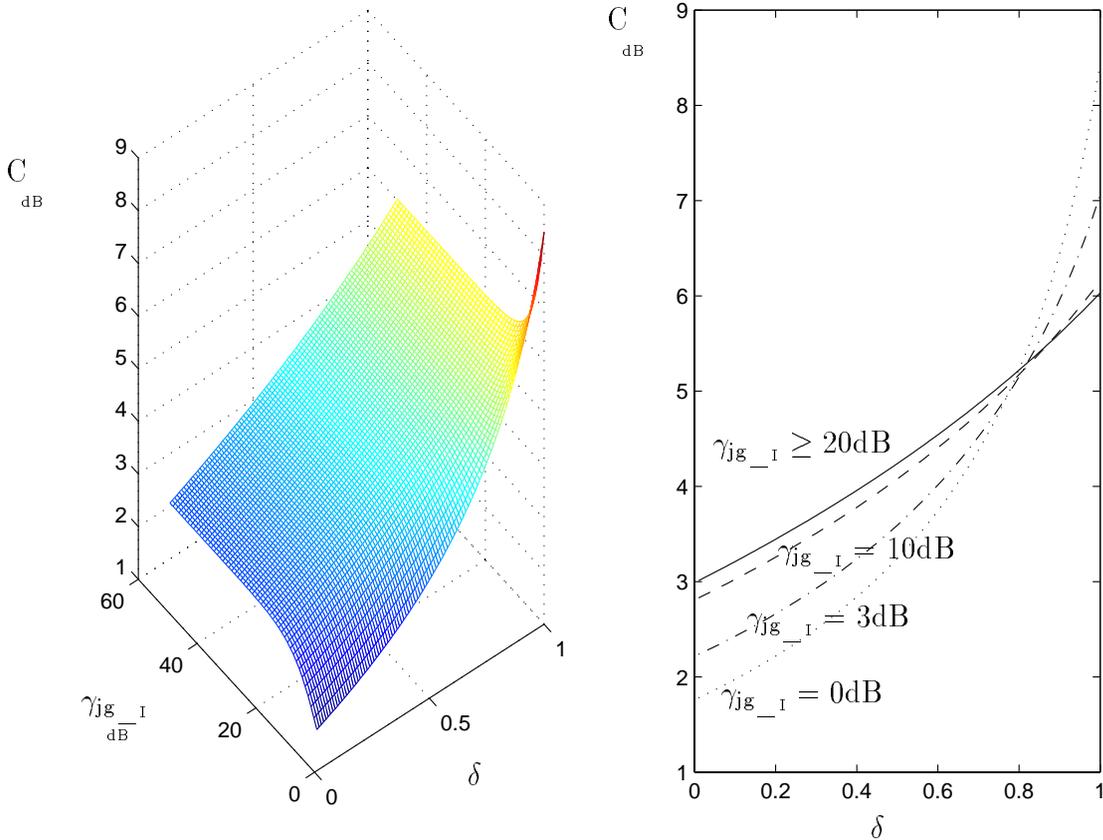


FIG. 22: Erreur quadratique en sortie du bloc MA adaptatif ( $G_I = 1$ )

Une coupe est réalisée pour différentes valeurs du rapport  $\gamma_{jg\_I}$ . L'erreur quadratique augmente logiquement avec  $\delta$ . Elle varie très peu avec  $\gamma_{jg\_I}$  puisque le bruit d'estimation diminue lorsque la puissance de l'interférence augmente. Lorsque ce rapport dépasse 20dB il n'affecte plus l'erreur quadratique.

Nous avons vérifié ces résultats en appliquant l'algorithme du LMS sur 2000 échantillons. La puissance de l'erreur est mesurée après convergence de l'algorithme, à partir des 1000 derniers échantillons. Le rapport  $\gamma_{jg\_I}$  est maintenu entre 0dB et 50dB. On retrouve les résultats donnés par l'expression (A3-54) avec une erreur inférieure à 1dB lorsque le pas  $\delta$  varie entre 0.01 et .5, inférieure à 1.5dB pour un pas compris entre .5 et 1.

### Cas particulier : $\gamma_{jg\_I} \gg 1$

Nous pouvons postuler, dans le cadre de notre application, que le rapport  $\gamma_{jg\_I}$  est très grand devant 1 en raison de la présence du bloc AR. On a alors :

$$C = G_I \left( 2 + \delta \frac{2}{2 - \delta} \right) = \frac{2}{2 - \delta} C_{min} \quad (55)$$

La puissance résiduelle est supérieure à la puissance minimum  $C_{min}$  obtenue pour  $z_0 = z_{opt}$ . Cet accroissement est dû au bruit qui entache l'estimation du coefficient  $z_0$ . La bande de bruit du filtre étant peu sensible à ce paramètre, on admet que le supplément de puissance en sortie résulte d'une augmentation du signal d'interférence en sortie. Pour mettre ceci en évidence nous mesurons, lorsque le zéro du filtre évolue autour de sa position optimale, les variations du rapport  $G_\gamma^{MA}$  qui représente le gain sur le rapport interférence sur bruit blanc amené par le bloc MA. Nous estimons alors ce gain en moyenne pour mesurer l'efficacité du filtre, qui est d'autant meilleure que ce rapport est faible. Nous considérons ainsi que la puissance de l'interférence en sortie est proportionnelle à la valeur moyenne du carré du module de la fonction de transfert, exprimée à la fréquence de l'interférence, et que la puissance du bruit est proportionnelle à la valeur moyenne de la bande équivalente de bruit du filtre.

$$\left. \begin{aligned} \frac{J_F}{J_I} &= E \left\{ |H_{AR}(f_j)|^2 \right\} \\ \frac{G_F}{G_I} &= E \left\{ \int_0^1 |H_{AR}(\tilde{f})|^2 d\tilde{f} \right\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\gamma_{jgI}}{\gamma_{jgF}} = E \left\{ G_\gamma^{MA} \right\}$$

La valeur minimale de ce rapport est obtenue pour la solution de Wiener. Le zéro du filtre a alors pour expression  $z_0 = \beta_0 \exp \{i2\pi f_0\}$  ( $f_0 = f_j$ ). Lorsque le coefficient  $z_0$  évolue autour de la solution optimale son module et son argument subissent des variations  $\Delta\beta$  et  $\Delta\theta$ . Les relations (A3-35) et (A3-37) permettent de mesurer la sensibilité du rapport  $G_\gamma^{MA}$  à ces

variations. On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{\gamma}^{MA}(\beta_0, \theta_0) = \left( \frac{\gamma_{jg\_I}}{\gamma_{jg\_I}} \right)_{opt} = \frac{(1 - \beta_0)^2}{1 + \beta_0^2} \quad \text{avec } \beta_0 = \frac{\gamma_{jg\_I}}{1 + \gamma_{jg\_I}} \\ G_{\gamma}^{MA}(\beta_0 + \Delta\beta, \theta_0 + \Delta\theta) = G_{\gamma}^{MA}(\beta_0, \theta_0) \left( 1 - 2 \frac{1 + \beta_0}{(1 - \beta_0)(1 + \beta_0^2)} \Delta\beta + \frac{\beta_0}{(1 - \beta_0)^2} \Delta\theta^2 \right) \end{array} \right.$$

Pour des valeurs de  $\beta_0$  proches de 1, caractéristiques de rapports  $\gamma_{jg\_I}$  élevés, le gain est minimum, de l'ordre de  $1/2\gamma_{jg\_I}^2$ . Par ailleurs, d'après les statistiques de  $z_0 - z_{0opt}$  données par (II-1.39), les variations du module de  $z_0$  ( $\Delta\beta$ ) sont nulles en moyenne. On obtient donc :

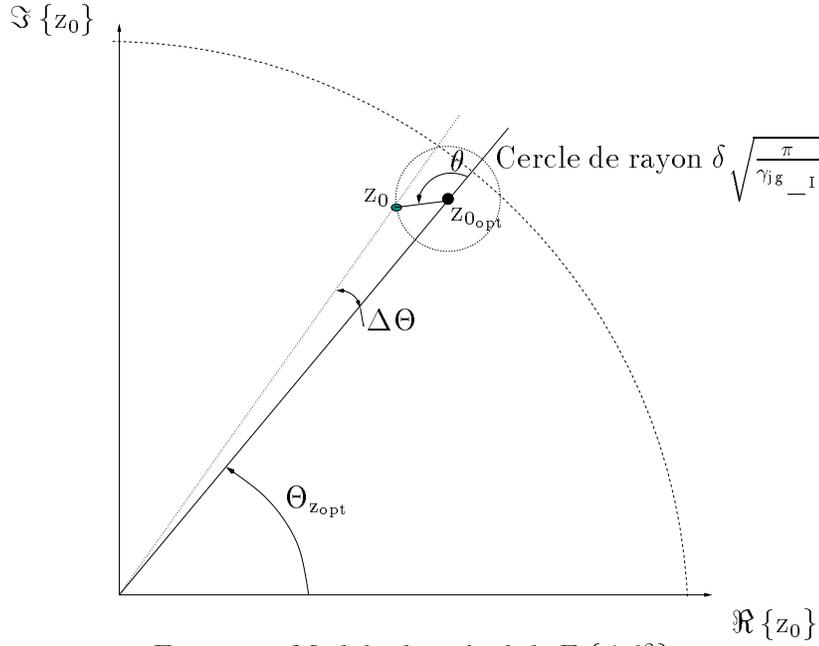
$$\left\{ \begin{array}{l} G_{\gamma}^{MA}(\beta_0, \theta_0) = \frac{(1 - \beta_0)^2}{1 + \beta_0^2} \sim \frac{1}{2\gamma_{jg\_I}^2} \\ E \{ G_{\gamma}^{MA}(\beta_0 + \Delta\beta, \theta_0 + \Delta\theta) \} = G_{\gamma}^{MA}(\beta_0, \theta_0) \left( 1 + \frac{\beta_0 E \{ \Delta\theta^2 \}}{(1 - \beta_0)^2} \right) \sim \frac{1}{2\gamma_{jg\_I}^2} + \frac{E \{ \Delta\theta^2 \}}{2\gamma_{jg\_I}} \end{array} \right.$$

Ce gain, en moyenne, est supérieur au gain minimum obtenu pour la solution de Wiener. On observe une dégradation des performances du filtre d'autant plus importante que  $\Delta\theta^2$  est grand. Pour estimer cette dégradation nous postulons que, en moyenne,  $z_0$  évolue sur un cercle centré sur  $z_{0opt}$  de rayon égal à  $E \{ R_z \}$  où  $R_z = |z - z_0|$ . Nous avons d'après les relations (II-1.39) :

$$\left. \begin{array}{l} E \{ R_z \} = \int_0^{+\infty} \frac{r^2}{\sigma_{z_0}^2} \exp \left\{ -\frac{r^2}{2\sigma_{z_0}^2} \right\} \\ \sigma_{z_0} = \delta \sqrt{\frac{2}{\gamma_{jg\_I}}} \end{array} \right\} \Rightarrow E \{ R_z \} = \delta \sqrt{\frac{\pi}{\gamma_{jd\_I}}}$$

Nous admettons que  $\sigma_{z_0}$  est très petit devant 1. Nous obtenons alors (voir figure (A3-23)) :

$$E \{ \Delta\theta^2 \} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta^2 \frac{\pi}{\gamma_{jd\_I}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi \delta^2}{2\gamma_{jd\_I}}$$

FIG. 23: *Modèle de calcul de  $E\{\Delta\theta^2\}$* 

Nous en déduisons les valeurs moyennes des rapports  $G_\gamma^{MA}$  et  $\gamma_{jg\_F}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} E\{G_\gamma^{MA}\} \stackrel{\gamma_{jg\_I} \gg 1}{\sim} \frac{1}{2\gamma_{jg\_I}^2} + \frac{\pi\delta^2}{4\gamma_{jg\_I}} = G_\gamma^{MA_{min}} + \frac{\pi\delta^2}{4\gamma_{jg\_I}} \\ E\{\gamma_{jg\_F}\} \stackrel{\gamma_{jg\_I} \gg 1}{\sim} \frac{1}{2\gamma_{jg\_I}} + \frac{\pi\delta^2}{4} = \gamma_{jg\_F_{min}} + \frac{\pi\delta^2}{4} \\ J_F = J_{F_{min}} + G_F \frac{\pi\delta^2}{4} \approx J_{F_{min}} + G \frac{\pi\delta^2}{4} \end{array} \right. \quad (56)$$

**La puissance résiduelle obtenue en sortie résulte de 2 composantes. La composante  $J_F = J_{F_{min}}$  obtenue pour la solution de Wiener résulte du fait que le zéro obtenu, en moyenne à la convergence, n'est pas de module unitaire. La composante  $J_F = G\pi\delta^2/4$  résulte du bruit sur l'estimation de  $z_0$ .**

Nous vérifions ce résultat en mesurant, après convergence de l'algorithme, le gain moyen en puissance à la fréquence de l'interférence et la bande de bruit moyenne.

$$\int_0^1 |H_{MA}(\tilde{f})|^2 d\tilde{f} = 1 + \beta_0^2 \sim \sum_n 1 + |z_0(n)|^2$$

$$|H_{MA}(f_j)|^2 = 1 + \beta_0^2 - 2\beta_0 \cos(2\pi(\tilde{f} - f_j)) \sim \sum_n \left| 1 - \frac{z_0(n)z_{0_{opt}}^{-1}}{|z_{0_{opt}}|} \right|^2$$

Les résultats de la simulation sont reportés dans le tableau (A3-0.12). Une comparaison des

valeurs du rapport  $\gamma_{\text{ig\_F}}$  obtenues en simulation aux valeurs estimées à partir de la relation (A3-56) permet de valider l'approche théorique.

$\delta$	$\gamma_{\text{ig\_I}}$	10dB	20dB	30dB	40dB	50dB
1	$\gamma_{\text{ig\_F}}$ théorique	0.83	0.79	0.79	0.79	0.79
	$\gamma_{\text{ig\_F}}$ simulation	1.4	1	1	1	1
0.1	$\gamma_{\text{ig\_F}}$ théorique	$5.8 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$8.4 \cdot 10^{-3}$	$7.9 \cdot 10^{-3}$	$7.9 \cdot 10^{-3}$
	$\gamma_{\text{ig\_F}}$ simulation	$5.4 \cdot 10^{-2}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$5.8 \cdot 10^{-3}$	$5.6 \cdot 10^{-3}$	$5.2 \cdot 10^{-3}$
0.01	$\gamma_{\text{ig\_F}}$ théorique	$5 \cdot 10^{-2}$	$5.1 \cdot 10^{-3}$	$5.8 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$8.3 \cdot 10^{-5}$
	$\gamma_{\text{ig\_F}}$ simulation	$5.4 \cdot 10^{-2}$	$4.8 \cdot 10^{-3}$	$5.3 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$5.3 \cdot 10^{-5}$

Tableau 0.12 : Rapport interférence sur bruit blanc en sortie du bloc MA

## 0.13 Réglage du coefficient $\alpha_0$ du bloc AR

Nous proposons des critères permettant de régler le coefficient  $\alpha_0$  du bloc AR. Ce bloc placé en amont du bloc MA conditionne les performances de l'algorithme du gradient. Il permet en particulier de régler la largeur du gradient de puissance et le rapport (rapport  $\gamma_{\text{ig\_I}}$ ). Le rôle du bloc AR est donc important. Il améliore le rapport interférence sur bruit blanc ( $G_\gamma^{\text{AR}} > 1$ ) autour de la fréquence centrale du filtre. Cette amélioration est donnée par la relation (II-1.9). Elle dépend du paramètre  $\alpha_0$  et de la précision sur la fréquence de l'encoche (voir graphe (II-1.7)). Or ces paramètres sont transmis par le bloc MA :

$$\begin{cases} p_0 = k_\alpha z_0 & \text{contrainte de stabilité} \\ |p_0| = \alpha_0 = k_\alpha \beta_0 \\ \text{Arg}(p_0) = \text{Arg}(z_0) \end{cases}$$

Nous nous proposons ici de mesurer l'influence du module  $\alpha_0$  sur le temps de réponse du filtre et d'ajuster le pas d'adaptation de l'algorithme du gradient appliqué au bloc MA en fonction de ce module.

### 0.13.1 Influence du module $\alpha_0$ sur le temps de réponse

Nous déduisons la réponse impulsionnelle  $u(n)$  du bloc AR de la fonction de transfert en  $z$  :

$$H(z) = \frac{1}{1 - p_0 z^{-1}} \Rightarrow u(n) = \frac{1 - p_0^{n-1}}{1 - p_0} = \sum_{k=0}^{n-1} p_0^k$$

Le temps de réponse est :

$$\text{Temps de réponse à 50 \% : } t_{50\%} = \frac{\log(.5)}{\log(\alpha_0)}$$

$$\text{Temps de réponse à 90 \% : } t_{90\%} = \frac{\log(.1)}{\log(\alpha_0)}$$

La figure (A3-24) permet de mesurer le temps de réponse à 50% et 90% lorsque le module  $\alpha_0$  varie entre 0.8 et 0.99. Pour  $\alpha_0 = .9$ , le temps de réponse est égal à 7 fois la période d'échantillonnage lorsqu'il est défini à 50%, à 22 fois la période d'échantillonnage lorsqu'il est défini à 90%. Ce temps de réponse est 10 fois supérieur lorsque le pôle présente un module  $\alpha_0$  égal à .99.

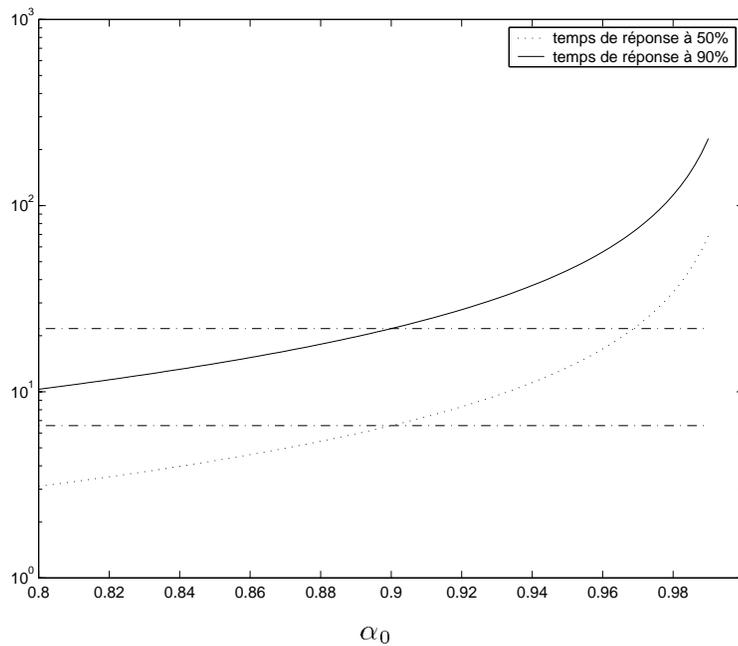


FIG. 24: Temps de réponse du bloc AR en fonction de  $\alpha_0$

### 0.13.2 Relation entre le pas d'adaptation de l'algorithme $\delta$ et le module $\alpha_0$ du bloc AR

Le réglage du coefficient  $k_\alpha$  qui définit le rapport entre les modules du pôle et du zéro s'effectuera en fonction de plusieurs critères :

- Précision sur la position de l'encoche,
- Temps de réponse du filtre,
- Gain sur le rapport de puissance  $\gamma_{j_{\text{GI}}}$  à la fréquence de l'interférence  $f_j$ ,

- Largeur de la bande du bloc AR centrée sur  $f_j$ , où l'amélioration du rapport  $\gamma_{jg_I}$  est sensible.

Il conditionne les performances de l'algorithme d'adaptation qui dépendent du rapport  $\gamma_{jg_I}$ . Le coefficient  $k_\alpha$  étant fixé, on choisira le pas d'adaptation de manière à ce que le bruit sur l'estimée du zéro du filtre n'entraîne pas des déviations trop importantes rendant la partie AR inactive. Ainsi des valeurs de  $k_\alpha$  proches de l'unité engendrent des fonctions de transfert  $H_{AR}(\tilde{f})$  très étroites : une augmentation de  $k_\alpha$  nécessitera donc une diminution de  $\delta$ . Pour s'affranchir du bouclage réalisé ( $p_0 \rightarrow \gamma_{jg_{-I}} \rightarrow z_0 \rightarrow p_0$ ), on choisira le pas d'adaptation  $\delta$  de manière à ce que le bruit sur l'estimation du coefficient  $z_0$  n'entraîne pas de variations sensibles de  $\gamma_{jg_{-I}}$  ( $\Delta\gamma_{jg_{-I}}/\gamma_{jg_{-I}} \ll 1$ ).

Nous utilisons les relations (A3-30) et (A3-32).

$$\left\{ \begin{array}{l} G_\gamma^{AR}(\alpha_0 + \Delta\alpha, \theta_0 + \Delta\theta) = G_\gamma^{AR}(\alpha_0, \theta_0) \left( 1 + \frac{2}{1 - \alpha_0^2} \Delta\alpha - \frac{\alpha_0}{(1 - \alpha_0)^2} \Delta\theta^2 \right) \\ G_\gamma^{AR}(\alpha_0 + \Delta\alpha, \theta_0 + \Delta\theta) = \frac{\gamma_{jg_{-I}^F}}{\gamma_{jg_{-I}}}(\alpha_0 + \Delta\alpha, \theta_0 + \Delta\theta) \\ G_\gamma^{AR}(\alpha_0, \theta_0) = \frac{1 - \alpha_0^2}{(1 - \alpha_0)^2} \stackrel{\alpha_0 \approx 1}{\approx} \frac{2}{1 - \alpha_0} \end{array} \right.$$

Nous imposons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2|\Delta\alpha|}{1 - \alpha_0^2} \stackrel{\alpha_0 \approx 1}{\approx} \frac{|\Delta\alpha|}{1 - \alpha_0} \ll 1 \\ \frac{\alpha_0 \Delta\theta^2}{(1 - \alpha_0)^2} \stackrel{\alpha_0 \approx 1}{\approx} \frac{\Delta\theta^2}{(1 - \alpha_0)^2} \ll 1 \end{array} \right. \quad (57)$$

En se référant à la figure (A3-23) et d'après les statistiques (II-1.39) nous posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} P \left\{ |\Delta\alpha| > 2\delta \sqrt{\frac{2}{\gamma_{jg_{-I}}}} \right\} \ll 1 \quad \text{car } k_\alpha \approx 1 \text{ et } \Delta\alpha \approx \Delta\beta \\ P \left\{ |\Delta\theta| > 2\delta \sqrt{\frac{2}{\gamma_{jg_{-I}}}} \right\} \ll 1 \quad \text{car } \Delta\beta \ll 1 \text{ et } \Delta\theta \approx \Delta\beta \end{array} \right. \quad (58)$$

Les contraintes (A3-57) sur les variations de  $\alpha$  et  $\theta$  permettent de définir une relation entre le pas d'adaptation  $\delta$  et la distance du pôle au cercle unitaire ( $1 - \alpha_0$ ) : la vitesse de convergence

dépend de la largeur du filtre à encoche. Cette relation est déduite de (A3-57) et (A3-58) :

$$2\delta \sqrt{\frac{2}{\gamma_{jg\_I}}} < 1 - \alpha_0 \quad (59)$$

Puisque nous imposons de faibles variations du rapport  $\gamma_{jg\_I}$  nous pouvons considérer que le gain du bloc AR est optimum. Pour des rapports interférence sur bruit blanc à l'entrée de la structure AR-MA supérieurs à l'unité nous obtenons :

$$\left. \begin{array}{l} G_\gamma^{AR}(\alpha_0, \theta_0) = \frac{2}{1 - \alpha_0} \\ \gamma_{jg} > 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma_{jg\_I} > \frac{2}{1 - \alpha_0}$$

Ceci permet de déduire de l'inégalité (A3-59) la contrainte sur le coefficient  $\alpha_0$  du bloc AR :

$$\delta^2 < \frac{1 - \alpha_0}{4} \quad (60)$$

Une réduction de la largeur de l'encoche, qui permet une amélioration de la précision de l'estimation, impose une diminution du bruit d'estimation du coefficient  $z_0$  et donc du pas d'adaptation.

## 0.14 Performance du bloc AR en présence d'une interférence modulé

En présence d'un brouilleur modulé, la fréquence de l'encoche estimée par l'algorithme du gradient est décalée par rapport à la fréquence du brouilleur. Cette étude permet de mesurer alors les performances du bloc AR. Ce bloc doit permettre de garantir des rapports  $\gamma_{jg_I}$  élevés devant l'unité. Pour  $\alpha_0$  égal à 0.99, le gain  $G_\gamma^{AR}$  théorique est de 23 dB. On vérifie donc que, malgré le biais sur l'estimation de fréquence, le gain obtenu approche ce gain théorique. Pour caractériser ce gain on exprime la sortie du bloc AR lorsque le signal d'entrée est une interférence modulée linéairement en fréquence et lorsque le pôle du bloc AR est le pôle estimé  $p_{0c}(n) = k_\alpha z_{0c}(n)$ . On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_n = j_n \\ W_n = j_I(n) = Z_n + p_{0c}(n)W_{n-1} = j_n + p_{0c}(n)W_{n-1} \\ p_{0c}(n) = k_\alpha z_{0c}(n) = \delta \frac{J_I}{P_{jg_I}} k_\alpha \frac{\exp\{i(2\pi f_j - k_\omega/2 + k_\omega n)\}}{\exp\{ik_\omega\} - 1 + \delta} \end{array} \right.$$

On admet que le rapport  $\gamma_{j_{gI}}$  est très grand devant l'unité. On établit ainsi, d'après (II-1.42), la relation suivante :

$$p_{0c}(n)j_{n-1} = \delta \frac{J_I}{P_{j_{gI}}} k_\alpha j_n \frac{1}{\exp\{ik_\omega\} - 1 + \delta} \sim j_n \frac{\delta k_\alpha}{\exp\{ik_\omega\} - 1 + \delta} = j_n \Psi(k_\alpha, \delta, k_\omega)$$

On peut alors exprimer la suite des échantillons du signal W :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_0 = 0 \\ W_1 = j_1 + p_{0c}(1)W(0) = j(1) \\ W_2 = j_2 + p_{0c}(2)j(1) = j(2)(1 + \Psi(k_\alpha, \delta, k_\omega)) \\ W_3 = j_3 + p_{0c}(3)j(2)(1 + \Psi(k_\alpha, \delta, k_\omega)) = j(3) \left(1 + \Psi(k_\alpha, \delta, k_\omega) + \Psi(k_\alpha, \delta, k_\omega)^2\right) \\ \dots \\ W_n = j_n \left(1 + \Psi(k_\alpha, \delta, k_\omega) + \Psi(k_\alpha, \delta, k_\omega)^2 + \dots + \Psi(k_\alpha, \delta, k_\omega)^{n-1}\right) \end{array} \right.$$

Le coefficient d'adaptation du LMS  $\delta$  étant inférieur à l'unité on obtient pour l'échantillon  $W_n$  exprimé en régime permanent ( $n \rightarrow \infty$ ):

$$W(n) = j_n \frac{1 - \Psi(k_\alpha, \delta, k_\omega)^n}{1 - \Psi(k_\alpha, \delta, k_\omega)} \sim j_n \frac{1}{1 - \Psi(k_\alpha, \delta, k_\omega)} = j_n \frac{\exp\{ik_\omega\} - 1 + \delta}{\exp\{ik_\omega\} - 1 + \delta(1 - k_\alpha)}$$

La puissance du signal de sortie du filtre AR, exprimée en régime permanent lorsque le signal d'entrée est une interférence sinusoïdale modulée linéairement en fréquence, est :

$$J_I = E(W(n)W(n)^*) = J \left| \frac{\exp\{ik_\omega\} - 1 + \delta}{\exp\{ik_\omega\} - 1 + \delta(1 - k_\alpha)} \right|^2$$

$$J_I = J \frac{1 + (1 - \delta)^2 - 2(1 - \delta)\cos k_\omega}{1 + (1 - \delta(1 - k_\alpha))^2 - 2(1 - \delta(1 - k_\alpha))\cos k_\omega}$$

En développant la fonction cosinus à l'ordre 2 on obtient :

$$J_I = E(W(n)W(n)^*) = J \left| \frac{\exp\{ik_\omega\} - 1 + \delta}{\exp\{ik_\omega\} - 1 + \delta(1 - k_\alpha)} \right|^2 \quad (61)$$

$$J_I = J \frac{\delta^2 + (1 - \delta)k_\omega^2}{\delta^2(1 - k_\alpha)^2 + (1 - \delta(1 - k_\alpha))k_\omega^2} \quad \delta \ll 1, (1 - k_\alpha) \ll 1, k_\omega^2 \ll \delta^2 \quad J \frac{\delta^2}{\delta^2(1 - k_\alpha)^2 + k_\omega^2}$$

Le gain idéal obtenu pour une interférence calée sur la fréquence centrale du filtre est atteint pour des valeurs du coefficient  $k_\omega$  très petites devant  $\delta(1 - k_\alpha)$ .

$$\text{Si } k_\omega \ll \delta(1 - k_\alpha) \quad \text{alors } \frac{J_I}{J} \approx \frac{1}{(1 - k_\alpha)^2} \quad (62)$$



## Annexe 4: Filtre fréquentiel

## 0.15 Réponse impulsionnelle du filtre centré sur la fréquence nulle

On considère un filtre éliminant les composantes autour de la fréquence nulle.

$$\begin{cases} H\left(\frac{k}{N}\right) = 0 & \forall k \in [0, L-1] \cup [N-L+1, N-1] \\ H(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour  $N$  impair on obtient, une réponse impulsionnelle réelle et paire définie sur  $N$  échantillons :

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=L}^{N-L} \exp\left\{i \frac{2\pi nk}{N}\right\} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\exp\left\{i \frac{2\pi nL}{N}\right\} - \exp\left\{i \frac{2\pi n(N-L+1)}{N}\right\}}{1 - \exp\left\{i \frac{2\pi n}{N}\right\}} \\ &= \frac{1}{N} \frac{\exp\left\{i \frac{\pi n(2L-1)}{N}\right\} - \exp\left\{-i \frac{\pi n(2L-1)}{N}\right\}}{\exp\left\{-i \frac{\pi n}{N}\right\} - \exp\left\{i \frac{\pi n}{N}\right\}} \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{cases} h(n) = -\frac{1}{N} \frac{\sin \frac{\pi n(2L-1)}{N}}{\sin \frac{\pi n}{N}} & \forall n \in \left[-\frac{N-1}{2}, -1\right] \cup \left[1, \frac{N-1}{2}\right] \\ h(0) = \frac{N-2L+1}{N} \end{cases} \quad (63)$$

## 0.16 Densité spectrale du signal échantillonné

L'expression de la densité spectrale du signal  $Z(n) = A_c P_n \exp\{i\Theta_n\}$  est notée  $S_s$ . Elle est obtenue à partir de  $\xi_s$ , transformée de Fourier discrète de  $Z_s$  :

$$\begin{cases} S_s(k) = E\{\xi_s(k)\xi_s^*(k)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} E\{Z_n Z_m^*\} W_N^{k(n-m)} \\ W_N = \exp\left\{-i \frac{2\pi}{N}\right\} \end{cases} \quad (64)$$

On note  $N_c$  le nombre d'échantillons par chip. On a :

$$E \{Z_n Z_m^*\} = A_c^2 E \{P_n P_m^*\} = A_c^2 R_{PP}(n - m) = A_c^2 \left(1 - \frac{|n - m|}{N_c}\right)^+ \quad (65)$$

On obtient pour 64 :

$$\begin{aligned} S_s(k) &= \frac{A_c^2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} R_{PP}(n - m) \cos \frac{2\pi}{N} k (n - m) \\ &= \frac{A_c^2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=-n}^{N-1-n} R_{PP}(l) \cos \frac{2\pi}{N} kl \\ &= \frac{A_c^2}{N} \sum_{l=-N-1}^{N-1} \sum_{n=-l}^{N-1-l} R_{PP}(l) \cos \frac{2\pi}{N} kl \\ &= A_c^2 \sum_{l=-N-1}^{N-1} R_{PP}(l) \cos \frac{2\pi}{N} kl \\ &= A_c^2 \sum_{l=-N_c}^{N_c} \left(1 - \frac{|l|}{N_c}\right) \cos \frac{2\pi}{N} kl \end{aligned} \quad (66)$$

D'où :

$$S_s(k) = A_c^2 \left(1 + 2 \sum_{l=1}^{N_c} \left(1 - \frac{l}{N_c}\right) \cos \frac{2\pi}{N} kl\right) \quad (67)$$

## 0.17 Interspectre signal reçu-séquence de référence

L'expression de l'interspectre est :

$$\begin{aligned} S_{rs}(k) &= E \left\{ \frac{\xi_k}{|\xi_k|} \xi_s^*(k) \right\} \\ &= R_c E \left\{ \frac{\xi_s(k) + \xi_g(k)}{|\xi_s(k) + \xi_g(k)|} \xi_s^*(k) \right\} \end{aligned} \quad (68)$$

Avec :

$$\frac{\xi_s(k) + \xi_g(k)}{|\xi_s(k) + \xi_g(k)|} \xi_s^*(k) = |\xi_s(k) + \xi_g(k)| - \frac{|\xi_s(k)|^2}{|\xi_s(k) + \xi_g(k)|} - \frac{\xi_s(k) \xi_g^*(k)}{|\xi_s(k) + \xi_g(k)|} \quad (69)$$

Et :

$$\left\{ \begin{array}{l} |\xi_s(k) + \xi_g(k)| = \sqrt{|\xi_s(k)|^2 + |\xi_g(k)|^2 + 2|\xi_s(k)||\xi_g(k)|\cos\alpha_k} \\ = |\xi_s(k)| \sqrt{1 + \frac{|\xi_s(k)|^2}{|\xi_g(k)|^2} + 2\frac{|\xi_s(k)|}{|\xi_g(k)|}\cos\alpha_k} \\ \alpha_k = \text{Arg}\{\xi_s(k)\} - \text{Arg}\{\xi_g(k)\} \end{array} \right.$$

On obtient, pour des rapports signal sur bruit petits devant l'unité :

$$|\xi_s(k) + \xi_g(k)| - \frac{|\xi_s(k)|^2}{|\xi_s(k) + \xi_g(k)|} = |\xi_g(k)| \left[ \begin{array}{l} 2\cos\alpha_k \frac{|\xi_s(k)|}{|\xi_g(k)|} \\ + (1 - 2\cos^2\alpha_k) \frac{|\xi_s(k)|^2}{|\xi_g(k)|^2} \\ + (-2\cos\alpha_k + 3\cos^3\alpha_k) \frac{|\xi_s(k)|^3}{|\xi_g(k)|^3} \\ + \left(-\frac{1}{2} + \frac{9}{2}\cos^2\alpha_k - 5\cos^4\alpha_k\right) \frac{|\xi_s(k)|^4}{|\xi_g(k)|^4} \\ + o\left(\frac{|\xi_s(k)|^5}{|\xi_g(k)|^5}\right) \end{array} \right]$$

Et, pour  $\alpha$  uniformément réparti sur  $[0, 2\pi]$  :

$$E_\alpha \left\{ |\xi_s(k) + \xi_g(k)| - \frac{|\xi_s(k)|^2}{|\xi_s(k) + \xi_g(k)|} \right\} \approx -\frac{1}{8} \frac{|\xi_s(k)|^4}{|\xi_g(k)|^3}$$

De même :

$$\begin{aligned} \frac{\xi_s(k)\xi_g^*(k)}{|\xi_s(k) + \xi_g(k)|} &= \frac{|\xi_s(k)||\xi_g(k)|}{|\xi_s(k) + \xi_g(k)|} \exp\{i\alpha_k\} \\ &= |\xi_s(k)| \left[ \begin{array}{l} 1 - \frac{|\xi_s(k)|}{|\xi_g(k)|} \cos\alpha_k \\ + \frac{|\xi_s(k)|^2}{|\xi_g(k)|^2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2\alpha_k\right) + o\left(\frac{|\xi_s(k)|^3}{|\xi_g(k)|^3}\right) \end{array} \right] \exp\{i\alpha_k\} \end{aligned}$$

Et :

$$E_\alpha \left\{ \frac{\xi_s(k)\xi_g^*(k)}{|\xi_s(k) + \xi_g(k)|} \right\} \approx -\frac{|\xi_s(k)|^2}{2|\xi_g(k)|}$$

On obtient donc, à l'ordre 2, pour l'expression 69 :

$$\frac{\xi_s(k) + \xi_g(k)}{|\xi_s(k) + \xi_g(k)|} \xi_s^*(k) \approx \frac{|\xi_s(k)|^2}{2|\xi_g(k)|}$$

Et l'interspectre défini par 68 devient :

$$S_{rs}(k) = R_c E \left\{ \frac{\xi_s(k) + \xi_g(k)}{|\xi_s(k) + \xi_g(k)|} \xi_s^*(k) \right\} \approx R_c E \left\{ \frac{|\xi_s(k)|^2}{2|\xi_g(k)|} \right\} \quad (70)$$

## 0.18 Traitement conservant la phase : Gain de traitement optimum

Il s'agit de rechercher la valeur du module notée  $R_c$  qui maximise le rapport signal sur bruit en sortie du corrélateur.

$$\gamma_{sg} \approx \frac{1}{A_c^2} \frac{\left| \sum_{k \in D_G} S_s(k) + \frac{R_c}{2\sigma_g} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k \in D_I} S_s(k) \right|^2}{2\sigma_g^2 \frac{L_G}{N} + R_c^2 \frac{L_I}{N}}$$

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{sg} = \frac{N}{A_c^2} \frac{P_G + K_\sigma P_I R_c}{2\sigma_g^2 L_G + R_c^2 L_I} \\ P_G = \sum_{k \in D_G} S_s(k) \\ P_I = \sum_{k \in D_I} S_s(k) \\ K_\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\sigma_g} \end{array} \right.$$

D'où :

$$\frac{d\gamma_{sg}}{dR_c} = \frac{2N}{A_c^2 (2\sigma_g^2 L_G + R_c^2 L_I)} \left( 2K_\sigma \sigma_g^2 P_G P_I L_G + (2K_\sigma^2 \sigma_g^2 P_I^2 L_G - P_G^2 L_I) R_c - K_\sigma L_I P_G P_I R_c^2 \right)$$

On en déduit la valeur de  $R_c$  positive, qui maximise le rapport  $\gamma_{sg}$  :

$$R_c = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{P_I L_G}{P_G L_I} \sigma_g \quad (71)$$

Et le rapport signal sur bruit optimum est :

$$\gamma_{sg} = \frac{N}{A_c^2} \frac{2P_G^3 L_I + K_\sigma \sqrt{2\pi} P_G P_I^2 L_G \sigma_g}{4P_G^2 \sigma_g^2 L_G L_I + \pi P_I^2 L_G^2 P_G^2 L_I \sigma_g^2}$$

## Annexe 5 : Récepteur optimum en présence de bruits non gaussien

Nous définissons ici, en présence d'un bruit blanc non gaussien, le récepteur optimum adapté pour le signal d'entrée complexe.

## 0.19 Rapport de vraisemblance

Le rapport de vraisemblance appliqué au signal complexe a pour expression :

$$\Lambda(\underline{Z}) = \frac{f_{\underline{Z}}^1(\underline{Z})}{f_{\underline{Z}}^0(\underline{Z})} = \frac{\prod_{n=1}^N f_{ww}(X_n - S_{x_n}, Y_n - S_{y_n})}{\prod_{n=1}^N f_{ww}(X_n, Y_n)} \quad (72)$$

$$\Lambda(\underline{Z}) = \frac{f_{\underline{Z}}^1(\underline{Z})}{f_{\underline{Z}}^0(\underline{Z})} = \frac{F_{ww}(\underline{X} - \underline{S}_x, \underline{Y} - \underline{S}_y)}{F_{ww}(\underline{Z})} \quad (73)$$

Sous l'hypothèse de faible rapport signal à bruit nous décomposons  $f_{\underline{Z}}^1$  en série de Taylor autour de  $\underline{Z} = (\underline{X}, \underline{Y})$  obtenu sous l'hypothèse  $H_0$ . Le développement est réalisé à l'ordre 2 (pour le récepteur non cohérent les termes d'ordre 1 sont nuls en moyenne).

$$\begin{aligned} f_{\underline{Z}}^1(\underline{Z}) = & F_{ww}(\underline{Z}) - \sum_{n=1}^N \frac{\partial F_{ww}(\underline{Z})}{\partial X_n} S_{x_n} - \sum_{n=1}^N \frac{\partial F_{ww}(\underline{Z})}{\partial Y_n} S_{y_n} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \left( \frac{\partial^2 F_{ww}(\underline{Z})}{\partial X_n \partial X_m} S_{x_n} S_{x_m} + \frac{\partial^2 F_{ww}(\underline{Z})}{\partial Y_n \partial Y_m} S_{y_n} S_{y_m} \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \left( \frac{\partial^2 F_{ww}(\underline{Z})}{\partial X_n \partial Y_m} S_{x_n} S_{y_m} + \frac{\partial^2 F_{ww}(\underline{Z})}{\partial Y_n \partial X_m} S_{y_n} S_{x_m} \right) \end{aligned}$$

Avec d'après (III-1.7) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{\partial F_{ww}(\underline{Z})}{\partial X_n} S_{x_n} &= F_{ww}(\underline{Z}) \sum_{n=1}^N \frac{\partial f_{ww}}{\partial X}(Z_n) S_{x_n} \\ \sum_{n=1}^N \frac{\partial F_{ww}(\underline{Z})}{\partial Y_n} S_{y_n} &= F_{ww}(\underline{Z}) \sum_{n=1}^N \frac{\partial f_{ww}}{\partial Y}(Z_n) S_{y_n} \end{aligned}$$

Et d'après (III-1.20) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\partial^2 F_{ww}(\underline{Z})}{\partial X_n \partial X_m} S_{x_n} S_{x_m} = & F_{ww}(\underline{Z}) \sum_{n=1}^N S_{x_n}^2 \left( \frac{\partial^2 f_{ww}}{\partial X^2}(Z_n) - \left( \frac{\partial f_{ww}}{\partial X}(Z_n) \right)^2 \right) \\ & + F_{ww}(\underline{Z}) \left( \sum_{n=1}^N S_{x_n} \frac{\partial f_{ww}}{\partial X}(Z_n) \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\partial^2 F_{ww}(\underline{Z})}{\partial Y_n \partial Y_m} S_{y_n} S_{y_m} &= F_{ww}(\underline{Z}) \sum_{n=1}^N S_{y_n}^2 \left( \frac{\partial^2 f_{ww}}{\partial Y^2}(Z_n) - \left( \frac{\partial f_{ww}}{\partial Y}(Z_n) \right)^2 \right) \\ &\quad + F_{ww}(\underline{Z}) \left( \sum_{n=1}^N S_{y_n} \frac{\partial f_{ww}}{\partial Y}(Z_n) \right)^2 \end{aligned}$$

Enfin :

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\partial^2 F_{ww}(\underline{Z})}{\partial X_n \partial Y_m} S_{x_n} S_{y_m} = F_{ww}(\underline{Z}) \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\partial f_{ww}}{\partial X}(Z_n) \frac{\partial f_{ww}}{\partial Y}(Z_m) S_{x_n} S_{y_m}$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\partial^2 F_{ww}(\underline{Z})}{\partial Y_n \partial X_m} S_{y_n} S_{x_m} = F_{ww}(\underline{Z}) \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\partial f_{ww}}{\partial Y}(Z_n) \frac{\partial f_{ww}}{\partial X}(Z_m) S_{y_n} S_{x_m}$$

D'où on déduit le développement de  $\Lambda(\underline{Z})$  :

$$\begin{aligned} \Lambda(\underline{Z}) &= 1 - \sum_{n=1}^N \frac{\partial f_{ww}}{\partial X}(Z_n) S_{x_n} - \sum_{n=1}^N \frac{\partial f_{ww}}{\partial Y}(Z_n) S_{y_n} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left( S_{x_n}^2 \left( \frac{\partial^2 f_{ww}}{\partial X^2}(Z_n) - \left( \frac{\partial f_{ww}}{\partial X}(Z_n) \right)^2 \right) + S_{y_n}^2 \left( \frac{\partial^2 f_{ww}}{\partial Y^2}(Z_n) - \left( \frac{\partial f_{ww}}{\partial Y}(Z_n) \right)^2 \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \left( \sum_{n=1}^N S_{x_n} \frac{\partial f_{ww}}{\partial X}(Z_n) \right)^2 + \left( \sum_{n=1}^N S_{y_n} \frac{\partial f_{ww}}{\partial Y}(Z_n) \right)^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\partial f_{ww}}{\partial X}(Z_n) \frac{\partial f_{ww}}{\partial Y}(Z_m) S_{x_n} S_{y_m} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{\partial f_{ww}}{\partial Y}(Z_n) \frac{\partial f_{ww}}{\partial X}(Z_m) S_{y_n} S_{x_m} \end{aligned}$$

Avec :

$$S_{x_n} = R_{s_n} \cdot \cos \Theta_{s_n}$$

$$S_{y_n} = R_{s_n} \cdot \sin \Theta_{s_n}$$

Dans des conditions de rapport signal à bruit faible, on peut considérer que  $\underline{Z} \equiv \underline{W}$  et dans ces conditions utiliser l'indépendance  $\underline{Z}$ ,  $\Theta_s$  pour évaluer l'espérance de  $\Lambda(\underline{Z})$  par rapport à  $\Theta_s$ . Par ailleurs on admet que sur la durée d'estimation la phase du signal  $\Theta_s$  est uniformément répartie sur  $[0, 2\pi]$ . Ceci est vrai pour un récepteur non cohérent et justifie l'emploi du détecteur quadratique.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 E_{\Theta_s} \{ \Lambda(\underline{Z}) \} - 1 &= +\frac{1}{4} \sum_{n=1}^N R_{s_n}^2 \left( \left( \frac{\partial^2 f_{ww}}{\partial X^2}(Z_n) - \left( \frac{\partial f_{ww}}{\partial X}(Z_n) \right)^2 \right) + \left( \frac{\partial^2 f_{ww}}{\partial Y^2}(Z_n) - \left( \frac{\partial f_{ww}}{\partial Y}(Z_n) \right)^2 \right) \right) \\
 &+ \frac{1}{4} \left( \left( \sum_{n=1}^N R_{s_n} \frac{\partial f_{ww}}{\partial X}(Z_n) \right)^2 + \left( \sum_{n=1}^N R_{s_n} \frac{\partial f_{ww}}{\partial Y}(Z_n) \right)^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{\Theta_s} \{ \Lambda(\underline{Z}) \} - 1 &= +\frac{1}{4} \sum_{n=1}^N R_{s_n}^2 \left( \frac{\Delta f_{ww}}{f_{ww}}(Z_n) - \left\| \frac{\nabla f_{ww}}{f_{ww}}(Z_n) \right\|^2 \right) \\
 &+ \frac{1}{4} \left( \left( \sum_{n=1}^N R_{s_n} \frac{\partial f_{ww}}{\partial X}(Z_n) \right)^2 + \left( \sum_{n=1}^N R_{s_n} \frac{\partial f_{ww}}{\partial Y}(Z_n) \right)^2 \right)
 \end{aligned}$$

# Bibliographie

- [1] Jack K. Holmes, Coherent Spread Spectrum Systems, pp. 348-349, Wiley-Interscience Publication, 1982.
- [2] R. C. Dixon, Spectrum Systems, pp. 72-75, Wiley-Interscience Publication, 1976.
- [3] Nato(1993a), Caractéristiques du Système Mondial de Détermination de Position Navstar(GPS). STANAG 4294 (Edition 1), August 1993.
- [4] Elliott D. Kaplan, Understanding GPS, Principles and Applications, The Artech House Telecommunications library, 1996.
- [5] James J. Spilker Jr., Global Positioning System : Theory and applications, Volume I, Bradford W. Parkinson edition.
- [6] Helstrom C.W, Elements of signal Detection and Estimation ,1995.
- [7] Weihua Zhuang, Composite GPS Receiver Modelling, Simulations and Applications, Thesis submitted in the department of Electrical Engineering of the University of New Brunswick, october 1992.
- [8] René Jr. Landry, Analysis of Potential Interférence Sources and Assessment of Present Solutions for GPS/GNSS Receiver, 4<sup>th</sup> St Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, St. Petersburg, Mai 1997.
- [9] René Jr. Landry, Techniques de Robustesse aux Brouilleurs pour les Récepteurs GPS, Thèse SUPAERO Toulouse, le 16 Décembre 1997.
- [10] M. Bellanger, Analyse des signaux et filtrage numérique adaptatif, Masson, 1989. and Mitigation Techniques Evaluation, Navigation 2000, ION National Technical Meeting, Long Beach, CA, 21-23 Janvier 1998.
- [11] René Jr. Landry, Vincent Calmettes, Alain Ducasse, Impact of Interference on the New COSSAP GPS Receiver and Mitigation Techniques Evaluation, Navigation 2000, ION National Technical Meeting, Long Beach, CA, 21-23 Janvier 1998.

- 
- [12] B. Friedlander and J.O. Smith, Analysis and Performance evaluation of an adaptive notch filter. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-30, pp 283-295, Mar. 1984.
- [13] Arye Nehorai, Member, IEEE, A minimal Parameter Adaptive Notch Filter with constrained poles and zeros, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-33, No. 4, pp 983-996, Aug. 1985.
- [14] D. V. B. Rao et S. Y. Kung, Adaptive notch filter for the retrieval of sinusoids in noise, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-32, No. 4, pp 791-802, Aug. 1984.
- [15] T. S. Ng, Some aspects of an adaptive digital notch filter with constrained poles and zeros, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-35, No. 2, pp 158-161, Feb. 1987.
- [16] C. C. Ko et C. P. Li, An adaptive IIR Structure for the Separation, Enhancement, and Tracking of Multiple Sinusoids, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 42, No. 10, pp 2832-2834, Oct. 1994.
- [17] O. M. Macchi and N. J. Bershad, Adaptive recovery of a chirped sinusoid in noise, part 1: Performance of the RLS Algorithm, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 39, No. 3, pp 583-594, Mar. 1991.
- [18] O. M. Macchi and N. J. Bershad, Adaptive recovery of a chirped sinusoid in noise, part 2: Performance of the LMS Algorithm, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 39, No. 3, pp 595-602, Mar. 1991.
- [19] J. Capon, Optimum Coincident Procedures for Detecting Weak Signals in noise, *IEEE Transaction on Information Theory*, 1960.
- [20] J. Ketchum and J. Proakis, Adaptive algorithms for estimating and suppressing narrow band interference in PN spread spectrum systems, *IEEE transactions on communications*, Vol. COM-30, pp. 913-924, May 1982.
- [21] R. Iltis, J. Ritcey, L. Milstein, Interference rejection in FFH systems using least squares estimation techniques, *IEEE transactions on communications*, Vol. 38, pp. 2174-2182, Dec 1990.
- [22] Dae C. Shin, Student Member, IEEE, and Chrysostomos L. Nikias, Fellow, IEEE, Adaptive Interference Canceller for Narrowband and Wide band Interferences Using Higher

- Order Statistics, IEEE transactions on signal processing, Vol. 42, No. 10, pp. 2715-2728, Octobre 1994.
- [23] R. C. DiPietro, An FFT based technique for suppressing narrow-band interference in PN spread-spectrum communication systems, Proceedings 1989 International Conference ASSP, Glasgow, Scotland, 1989, paper D11.2.
- [24] Ponos Z. M., Dukic M.L., 4<sup>th</sup> Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services. TELSIKS'99 (Cat. No.99EX365), Proceeding of papers, Vol. 2, pp415-18. 13-15 Oct. 1999.
- [25] F. Harris, On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier Transform, Proc. IEEE, Vol. 66, pp51-83. Jan. 1978.
- [26] Jeffrey A. Young, Member, IEEE, and James S lehnert, Senior Member, IEEE, Analysis of DFT-Based Frequency Excision Algorithms for Direct-Sequence Spread Spectrum Communications, IEEE Transactions on Communications, Vol. 46, No. 8, August 1998.
- [27] R.R Kurth, Performance of FFT-based interference excision for HF communications, IEEE MILCOM'90, Monterey, CA, pp59.1.1-59.1.4, Sept. 30-Oct. 3, 1990.
- [28] G. Lesthievent, Description of th FDAF algorithm, CNES, Document interne ref. STX-NT-21-12-CN.
- [29] Paul T. Capozza, Member, IEEE, Brian J. Holland, Thomas M. Hopkinson, Member, IEEE, and Roberto L. Landrau, Member, IEEE, A Single-Chip Narrow-Band Frequency-Domain Excisor for a Global Positioning System (GPS), IEEE Journal of Solid-State Circuits, Vol. 35, No. 3, March 2000.
- [30] S. A. Kassam, Signal Detection in Non-Gaussian Noise, Springer-Verlag, 1988.
- [31] D. Allinger, D. Fitzmartin, P. Konop, A. Tetewsky, P. Van Broekhoven, J. Veale, Theory of an adaptive NonLinear Spread-Spectrum receiver for gaussian or non-gaussian interference, Twentieth Asimolar Conference on Signals, Systems and computers (Cat. No.87CH2461-2), pp58-62, 1987. Detection in Non-Gaussian Noise, Springer-Verlag, 1988
- [32] J. Przyjemski, E. Balboni, J. Dowle, GPS Anti-Jam Enhancement Techniques, Proceedings of the 49<sup>th</sup> annual Meeting on Future Global Navigation and Guidance, Cambridge, MA, pp. 41-50, June 1993.

- [33] William E. Jacklin, Jimm H. Grimm, and Donald R.L Ucci, The Simulation of a Two-Dimensional Spread Spectrum System with Locally Optimal Processing, Proceedings of the 1993 IEEE Military Communications Conference.

## Etude de techniques d'adoucissement de spectre pour récepteur GPS

Les récepteurs GPS sont soumis à de nombreux signaux d'interférence bande étroite. Cette étude concerne des techniques d'adoucissement de spectre, dites de précorrélation. Elles s'appliquent au signal complexe à l'entrée du récepteur numérique.

La première partie de ce mémoire présente le récepteur optimum. Il est déduit de la théorie de la détection appliquée en présence de bruits blancs et gaussiens. L'étude met en évidence les dégradations des performances de ce récepteur, lorsqu'il est soumis à des signaux d'interférence.

La deuxième partie traite de l'amélioration des performances du récepteur, sous l'hypothèse de bruits non blancs. Elle décrit des filtres de blanchiment implantés à l'entrée du récepteur numérique conventionnel. Pour des signaux à spectre étalé et des bruits bande étroite, ces techniques utilisent des filtres à encoche adaptatifs appliqués dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel.

Dans la troisième partie, le récepteur optimum est dérivé en présence de bruits non gaussiens, sous l'hypothèse simplificatrice d'indépendance du bruit. L'approche de Neyman-Pearson est utilisée. Lorsque cette théorie est appliquée au signal GPS, caractérisé par des rapports signal sur bruit très petits devant l'unité, cette technique conduit à définir le récepteur localement optimum. Il est obtenu en linéarisant la loi de densité de probabilité du bruit autour de l'hypothèse  $H_0$ . Le détecteur optimum diffère alors du détecteur défini en présence de bruits gaussiens de par la présence, en entrée, d'un opérateur non linéaire déduit de cette loi. Lorsque cette technique est appliquée au signal complexe, elle consiste au traitement de l'amplitude du signal représenté par ses coordonnées polaires. Elle peut être appliquée dans le domaine temporel, ou dans le domaine fréquentiel lorsque le nombre de sources d'interférence augmente.

Mots clés : Récepteur GPS, brouillage, filtrage adaptatif, récepteur localement optimum, traitement de l'amplitude, filtrage non linéaire.

## Study of interference mitigation techniques for GPS receiver

GPS receivers are adversely affected by narrow band interference signals. This thesis investigates different precorrelation mitigation techniques. These techniques are applied to the complex signal, at the input of the digital receiver.

First, the optimum receiver is presented. It is defined from the detection theory applied in the presence of white gaussian noise. It is shown that interference signals affect its performances.

Secondly, the receiver is improved in the presence of colored noises. The techniques consist of pre-whitening filters in front of the conventional receiver optimized for white and gaussian noise. For spread spectrum signal and narrow band interference, adaptive notch filters are proposed. These filters can be applied in time domain or in frequency domain.

Lastly, the optimum receiver is derived in the presence of non gaussian noise, by assuming independent noise. This receiver is deduced from the noise probability density. When the signal is buried in the noise a locally optimum test is defined. By expanding the probability density function around the  $H_0$  hypothesis the likelihood ratio of the optimum receiver is obtained. In that case the detector uses a non-linear function deduced from the probability density of the noise. This theory leads to a non-linear operator applied to the amplitude of the complex GPS signal defined by its polar components. This technique, which is known as Amplitude Domain Processing, can be implanted in the time domain, or in the frequency domain when the number of interference signals increase.

Key-words : GPS receiver, jamming, adaptive filtering, locally optimum receiver, amplitude processing, non-linear filtering.