

THÈSE

présentée en vue de
l'obtention du titre de

DOCTEUR

de

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE

SPÉCIALITÉ : **SYSTÈMES INDUSTRIELS**

par

Karine DESCHINKEL

**RÉGULATION DU TRAFIC AÉRIEN PAR
OPTIMISATION DYNAMIQUE DES PRIX
D'UTILISATION DU RÉSEAU**

Soutenue le 8 novembre 2001 devant la Commission d'Examen :

MM.	J.L. FARGES	Directeur de thèse
	D. DELAHAYE	Co-directeur de thèse
	E. FÉRON	Rapporteur
	J.B. LESORT	Rapporteur
	M. MINOUX	Président
	J.F. BONNANS	

Thèse préparée au sein du Département Commande des Systèmes et Dynamique du vol de
l'ONERA - Centre de Toulouse

Remerciements

Les travaux présentés dans cette thèse ont été menés au Département Commande des Systèmes et Dynamique du vol DCSD du centre de Toulouse de l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA). Je remercie, Monsieur Jean-Pierre Jung, ex-directeur du département et directeur du centre pour m'avoir accueilli au sein de son établissement. Je voudrais également remercier Monsieur Claude Barrouil, directeur du département et Madame Liliane Arendo, secrétaire du département, pour avoir facilité ma participation à des congrès scientifiques.

Cette thèse a été financée, en partie, par une bourse du Ministère de la Recherche et de l'Enseignement supérieur. A ce sujet, je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur Jean-Francois Gabard pour avoir soutenu mon dossier de bourse et pour m'avoir aidé dans toutes les démarches administratives au cours de ces trois années. Je remercie aussi Madame Annie Bailhé, responsable des études doctorales à Supaéro et Madame Villemur, secrétaire de l'Ecole Doctorale Système, pour leur assistance dans les démarches d'obtention du doctorat.

Monsieur Jean-Loup Farges a dirigé mes travaux avec enthousiasme et exigence, ne manquant jamais d'idées pour surmonter les difficultés, m'encourageant dans les moments difficiles. J'ai pu apprécier tout au long de ces années sa patience, sa disponibilité et la perspicacité de sa vision. En bref, je le remercie chaleureusement pour son formidable encadrement. Je tiens également à témoigner toute ma reconnaissance à Monsieur Daniel Delahaye pour avoir pris en charge le co-encadrement de ma thèse et pour m'avoir fait profiter de ses connaissances multiples dans le domaine du transport aérien. Nous avons aussi abordé ensemble des sujets plus personnels et j'en suis touchée.

Je remercie, Monsieur Michel Minoux, Professeur au Laboratoire d'Informatique de Paris 6, pour l'honneur qu'il m'a fait d'être président du jury. Je suis très reconnaissante envers Monsieur Frédéric Bonnans, Directeur de Recherche en Informatique à l'INRIA Rocquencourt, pour sa participation au jury et son intérêt porté à mon travail. J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur Jean-Baptiste Lesort, directeur du LICIT (Laboratoire d'Ingénierie Circulation Transport), pour ses remarques particulièrement judicieuses et constructives en tant que rapporteur et membre du jury. Merci à Monsieur Eric Féron d'avoir accepté la tâche de rapporteur.

Je remercie, Marianne Raffarin, doctorante à l'ENAC, pour sa re-lecture du chapitre 6 concernant les méthodes de tarification et pour sans aide dans le déchiffrement du jargon économique.

J'adresse un grand merci à toutes les personnes du DCSD qui ont contribué au bon déroulement de ma thèse. Je citerai tout particulièrement Magali Barbier, pour m'avoir fait part de ses expériences dans la vie personnelle et professionnelle, et pour le réconfort qu'elle a su m'apporter.

J'ai apprécié, les repas, les pause cafés et les soirées entre doctorants et stagiaires. J'exprime toute ma reconnaissance à Fabrice Demourant pour son humour et sa grande gentillesse. Je n'oublierai pas ces "rendez-vous" pour partager histoires de coeur et de travail. Je remercie aussi Carsten Doll, car il a su être à l'écoute de mes problèmes.

Enfin, je souhaite dédier cette thèse à ma famille et à mon ami. Mes parents m'ont toujours accordé leur confiance et leur soutien dans tout ce que j'entreprenais. Ils m'ont montré la nécessité de communiquer pour avancer dans la vie. Je les remercie profondément pour ce qu'ils font. Ma grande soeur a toujours été très fière de moi et je la remercie pour son appui. Enfin, un grand merci à Jérôme, qui, même loin de moi, a su m'encourager pendant les périodes de doute et a su me donner les motivations nécessaires pour m' "accrocher".

Table des matières

Liste des figures	11
Liste des tableaux	15
Liste des symboles	17
Introduction	21
1 Le trafic aérien	25
1.1 Introduction	25
1.2 L'organisation de l'espace aérien	25
1.2.1 Les routes aériennes	25
1.2.2 Les secteurs aériens	26
1.3 Le contrôle du trafic aérien	27
1.4 La congestion des secteurs de contrôle	28
1.5 Les solutions au problème de congestion	29
1.5.1 Adapter la capacité à la demande	29
1.5.2 Adapter la demande à la capacité	30
1.6 Conclusion	34
2 L'affectation de trafic dans un réseau	35
2.1 Introduction	35
2.2 Affectation statique	35
2.2.1 Modélisation du réseau de transport	35
2.2.2 Affectation statique déterministe	37
2.2.3 Affectation statique stochastique	41
2.3 Affectation dynamique	43
2.3.1 Affectation dynamique déterministe	44
2.3.2 Affectation dynamique stochastique	45
2.4 Conclusion	47

3	La tarification de la congestion	49
3.1	Introduction	49
3.2	La tarification de la congestion en transport routier	49
3.2.1	Modèles de tarification de la congestion	50
3.2.2	Quelques applications	55
3.3	La tarification de l'Internet	55
3.3.1	La tarification dynamique	56
3.3.2	La tarification statique	56
3.3.3	Le mécanisme d'enchère	56
3.4	La tarification en trafic aérien	57
3.4.1	La tarification aéroportuaire	57
3.4.2	La tarification du contrôle en route	60
3.5	Conclusion	62
4	Le problème de tarification	63
4.1	Introduction	63
4.2	Le mécanisme de tarification	64
4.3	Modélisation des prix d'options	68
4.4	Modélisation du choix des compagnies	71
4.5	Programme de simulation	71
4.5.1	Définitions	71
4.5.2	Procédure	72
4.5.3	Remarque	72
4.6	Identification des paramètres du modèle	74
4.7	Optimisation des prix de secteurs	75
4.7.1	Définition de la cible	75
4.7.2	Formulation du problème d'optimisation	76
4.8	Conclusion	76
5	Etat de l'art des méthodes d'optimisation	79
5.1	Introduction	79
5.2	Problèmes d'optimisation étudiés	79
5.3	Classification des méthodes	80
5.4	Optimisation déterministes: méthodes locales	81
5.4.1	L'algorithme de Nelder Mead	81
5.4.2	Méthode du gradient	82
5.4.3	Méthode du gradient conjugué	83
5.4.4	Méthode de Newton	84
5.4.5	Méthodes quasi newtoniennes (ou méthodes à métriques variables)	84

5.5	Optimisation déterministe : méthodes globales	85
5.5.1	Programmation linéaire	85
5.5.2	Algorithmes de séparation-évaluation (Branch and Bound)	85
5.6	Optimisation stochastique	86
5.6.1	Méthode de Monte Carlo	86
5.6.2	Recuit simulé	87
5.6.3	Recherche Tabou	92
5.6.4	Les algorithmes évolutionnaires	93
5.7	Conclusion	95
6	Identification des paramètres du modèle	97
6.1	Introduction	97
6.2	Paramètres du modèle	97
6.3	Méthode de résolution	99
6.4	Tests et résultats	102
6.4.1	Exemple académique	102
6.4.2	Exemple plus réaliste	106
6.5	Conclusion	108
7	Tarification continue des secteurs aériens	109
7.1	Introduction	109
7.2	Caractéristiques du problème	109
7.3	Algorithme du gradient	114
7.4	Algorithme du recuit simulé	115
7.5	Complexité des algorithmes	116
7.5.1	Calcul du critère d'optimisation	116
7.5.2	Calcul du vecteur gradient	116
7.5.3	Calcul des écarts	117
7.6	Tests et résultats	117
7.6.1	Exemple 1	117
7.6.2	Exemple 2	120
7.6.3	Exemple 3	127
7.7	Conclusion	136
8	Tarification par niveau des secteurs aériens	137
8.1	Introduction	137
8.2	Formulation mathématique	137
8.3	Algorithmes de résolution	138
8.3.1	Première approche : Recuit simulé + Gradient	138
8.3.2	Deuxième approche : Recuit simulé à variables mixtes	140

8.3.3	Troisième approche : Méthode Tabou	142
8.4	Tests et résultats	144
8.4.1	Exemple 2	144
8.4.2	Exemple 3	151
8.5	Conclusion	155
8.6	Contributions	157
8.7	Perspectives	159
Conclusion		157
A Modèles probabilistes de choix discrets		161
A.1	Introduction	161
A.2	Principe général	161
A.2.1	Le terme aléatoire de l'utilité	162
A.2.2	Le terme déterministe de l'utilité	164
A.3	Le modèle Logit pour un choix non binaire	164
A.4	Le modèle Logit emboîté	165
A.5	Le modèle : Valeur extrême généralisée	167
A.6	Application aux choix de routes et d'heures de départ	167
A.6.1	Problème de choix de routes	167
A.6.2	Problème de choix d'heures de départ	168
A.7	Conclusion	168
B Modèle de tarification pour la congestion aéroportuaire (Daniel)		171
B.1	Formulation mathématique	171
B.2	Calcul des taxes de congestion	172
C Modèle de tarification pour la congestion aéroportuaire (Jansson)		175
C.1	Formulation mathématique	175
C.2	Calcul des taxes de congestion	176
D Principaux résultats de convergence du recuit simulé en optimisation discrète		179
D.1	Modélisation de l'algorithme	179
D.2	Modèle homogène	180
D.3	Modèle in-homogène	181
E Un résultat particulier sur l'identification des paramètres		183
E.1	Énoncé	183
E.2	Démonstration	184

F Exemple 1	187
F.1 Scénario	187
F.1.1 Réseau	187
F.1.2 Demande	187
F.2 Modèle	190
F.2.1 Paramètres	190
F.2.2 Variables	190
F.3 Cibles	190
F.3.1 Définition	190
F.3.2 Remarques	190
G Exemple 2 : exemple académique	193
G.1 Scénario	193
G.1.1 Réseau	193
G.1.2 Demande	194
G.2 Modèle	194
G.2.1 Paramètres	194
G.2.2 Variables	194
G.3 Cibles	196
G.4 Calcul des prix de secteurs	197
G.5 Identification des pénalités de route	199
H Exemple 3 : exemple plus réaliste	203
H.1 Scénario	203
H.1.1 Réseau	203
H.1.2 Demande	203
H.2 Modèle	205
H.2.1 Paramètres	205
H.2.2 Variables	205
H.3 Cible	206
Bibliographie	209

Liste des figures

Figure 1.1	Navigation segmentée	26
Figure 1.2	Secteurs de contrôle de l'espace aérien supérieur français	27
Figure 2.1	Répartition de 2 utilisateurs sur le réseau en fonction des probabilités d'utilisation des chemins	43
Figure 3.1	Coûts marginaux et demande	51
Figure 3.2	Réseau avec 2 routes	52
Figure 4.1	Étape 1 : Modélisation des prix d'options	65
Figure 4.2	Étape 2 : Modélisation du choix des compagnies aériennes	66
Figure 4.3	Étape transitoire	66
Figure 4.4	Étape 3 : Identification des paramètres du modèle	67
Figure 4.5	Étape 4 : Optimisation des prix d'entrée dans les secteurs aériens	67
Figure 4.6	Étape facultative : Simulation	68
Figure 4.7	Structure globale du mécanisme de tarification	69
Figure 4.8	Périodes d'entrée dans le secteur k	70
Figure 5.1	Projection sur X en dimension 2	80
Figure 5.2	Minimum local et minimum global	81
Figure 5.3	Méthode du gradient en dimension 1	83
Figure 5.4	Algorithme du recuit simulé	88
Figure 5.5	Principe de l'algorithme évolutionnaire	94
Figure 6.1	Algorithme du recuit simulé pour l'identification des paramètres	101
Figure 6.2	Prix des options pour la paire OD1 pour différents résultats d'identification des paramètres du modèle - Cible 1	104

Figure 6.3	Prix des options pour la paire OD2 pour différents résultats d'identification des paramètres du modèle - Cible 1	105
Figure 7.1	Configuration étudiée	111
Figure 7.2	Signe de $\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_1}$ en fonction de $PR(1)$	113
Figure 7.3	Valeur du critère en fonction du prix des routes 1 et 2	113
Figure 7.4	Méthode du gradient : Évolution du critère pour les 4 cibles	118
Figure 7.5	Méthode du recuit simulé : Évolution du critère pour les 4 cibles	120
Figure 7.6	Relation entre un prix maximal de secteur (donné comme une proportion du coût de la route la moins chère) et les résultats de l'optimisation : critère (trait plein) et indice de charge du secteur 4 (trait pointillé)	121
Figure 7.7	Fonction $K(u) = F(uX_R + (1 - u)X_G)$, X_R minimum obtenu avec le recuit simulé, X_G minimum obtenu avec la méthode du gradient pour la cible 1	123
Figure 7.8	Coût, prix optimisés et utilités d'options pour la cible 1	124
Figure 7.9	Histogramme d'indice de charge du secteur 4 pour 1000 jours de simulation - pas de tarification des secteurs aériens	125
Figure 7.10	Histogramme d'indice de charge du secteur 4 pour 1000 jours de simulation - tarification continue des secteurs aériens	126
Figure 7.11	Évolution du critère d'optimisation en fonction du temps d'exécution de l'algorithme sur une station ULTRASPARC II (450 MH)	129
Figure 7.12	Dépassement moyen de capacité des secteurs aériens en l'absence de tarification	131
Figure 7.13	Dépassement moyen de capacité des secteurs aériens en présence de tarification	132
Figure 7.14	Couples (secteur, période) avec dépassement de capacité avant et après tarification	133
Figure 7.15	Prix d'utilisation de l'espace aérien avec le système actuel et le nouveau système de tarification pour les vols de la paire OD Paris-Marseille	135

Figure 8.1	Schéma algorithmique pour la première approche de résolution : recuit + gradient	139
Figure 8.2	Schéma algorithmique du recuit simulé pour la recherche simultanée d'une matrice d'affectation et d'un ensemble de valeurs de prix	141
Figure 8.3	Schéma algorithmique de la méthode Tabou pour la recherche simultanée d'une matrice d'affectation et d'un ensemble de valeurs de prix	145
Figure 8.4	Évolution du critère pour la cible 1 avec 4 niveaux de prix	146
Figure 8.5	Évolution du critère en fonction des variations de prix v_1 pour une matrice d'affectation donnée	147
Figure 8.6	Comparaison des utilités entre une tarification continue et une tarification par niveau - Cible 1	149
Figure 8.7	Histogramme d'indice de charge du secteur 4 pour 1000 jours de simulation - tarification à quatre niveaux de prix de secteurs	150
Figure 8.8	Dépassement moyen de capacité des secteurs aériens (prix établis avec la méthode Tabou)	153
Figure 8.9	Couples (secteur, période) avec dépassement de capacité avant et après tarification (prix établis avec la méthode Tabou)	154
Figure A.1	Exemple de choix entre 3 routes	165
Figure B.1	Arrivées et atterrissages cumulés	173
Figure C.1	Courbes de demande inverse et de coût	177
Figure F.1	Paire OD : LFPO-LFBO	188
Figure F.2	Paire OD : LFBO-LFPO	188
Figure F.3	Paire OD : LFPG-LFBO	189
Figure F.4	Paire OD : LFBO-LFPG	189
Figure G.1	Réseau de l'exemple 2	193
Figure G.2	Cibles de l'exemple 2	196
Figure H.1	Réseau de l'exemple 3	204
Figure H.2	Procédure de construction d'une cible qui minimise la congestion	207

Liste des tableaux

Tableau 1.1	Attente au sol imposée aux avions devant traverser un secteur saturé	31
Tableau 2.1	Distribution de probabilité des variables aléatoires discrètes F_1 et F_2	42
Tableau 2.2	Distribution de probabilité de la variable aléatoire discrète $\underline{F} = (F_1, F_2)$	43
Tableau 5.1	Lois de décroissance de la température fréquemment utilisées	90
Tableau 6.1	Résultats de l'identification en fonction du nombre de journées de trafic observées pour l'exemple 2	102
Tableau 6.2	Critère d'optimisation et mesures de congestion pour trois tables de prix différentes (optimisées pour des valeurs différentes des paramètres du modèle) - Exemple 2	103
Tableau 6.3	Résultats de l'identification en fonction du nombre de journées de trafic observées pour l'exemple 3	106
Tableau 6.4	Critère d'optimisation et mesures de congestion pour différentes tables de prix (optimisées pour des valeurs différentes des paramètres du modèle) - Exemple 3	107
Tableau 7.1	Données du problème	112
Tableau 7.2	Éléments caractéristiques du problème	116
Tableau 7.3	Temps de calcul sur ULTRA SPARC II (440 MH)	117
Tableau 7.4	Valeurs du critère avec la méthode du gradient	118
Tableau 7.5	Meilleures valeurs du critère avec la méthode du recuit simulé	119
Tableau 7.6	Critère d'optimisation avec la méthode du gradient et du recuit simulé	122
Tableau 7.7	Nombre moyen d'itérations nécessaires pour atteindre les cibles avec les versions 2 et 3 de l'algorithme du recuit simulé	123

Tableau 7.8	Table de prix de secteurs indépendants, optimisés pour la cible 1	124
Tableau 7.9	Moyenne \mp écart-type des indicateurs de congestion Q_1 et Q_2 avant et après tarification	126
Tableau 7.10	Résultats de l'optimisation des prix de secteurs avec la version 2 de l'algorithme du recuit simulé	128
Tableau 7.11	Résultats de l'optimisation des prix de secteurs avec la version 3 de l'algorithme du recuit simulé	128
Tableau 7.12	Moyenne et écart-type des indicateurs de congestion pour des prix de secteurs optimisés avec la version 2 du recuit simulé	130
Tableau 7.13	Moyenne et écart-type des indicateurs de congestion pour des prix de secteurs optimisés avec la version 3 du recuit simulé	130
Tableau 8.1	Critère d'optimisation avec la première approche	146
Tableau 8.2	Critère d'optimisation avec la méthode du recuit simulé à variables mixtes	147
Tableau 8.3	Table de prix de secteurs à 4 niveaux, optimisés pour la cible 1	148
Tableau 8.4	Critère d'optimisation avec la méthode Tabou	149
Tableau 8.5	Temps CPU (en secondes) pour atteindre la cible (critère < 0.001) avec le recuit simulé à variables mixtes ou la méthode Tabou	150
Tableau 8.6	Moyenne \mp écart-type des indicateurs de congestion Q_1 et Q_2 avant et après tarification	151
Tableau 8.7	Critère d'optimisation avec la méthode du recuit à variables mixtes et la méthode Tabou pour 4 niveaux de prix	152
Tableau 8.8	Moyenne et écart-type des indicateurs de congestion pour une tarification par niveau	152
Tableau F.1	Nombre de vols par période pour la paire OD LFPG-LFBO	191
Tableau H.1	Demande pour les paires OD du réseau	205

Liste des symboles

Les principales notations utilisées dans ce mémoire, pour décrire le modèle de tarification, sont données par ordre d'apparition :

W	ensemble des paires Origine-Destination du réseau
N	nombre de paires Origine-Destination
OD	paire Origine-Destination
ω	indice de paire Origine-Destination
T	nombre de périodes de l'horizon de temps considéré
Δ	longueur d'une période de temps
S	nombre de secteurs aériens
ℓ	type de l'avion
u	indice de période de décollage programmé
i	indice de route
j	indice de période de décollage possible
(i,j)	option : route i et période de décollage j
$R_{\omega,\ell}$	nombre de routes de la paire OD ω pour le type d'avion ℓ
J_{min}	nombre de périodes d'avance possibles pour décoller
J_{max}	nombre de périodes de retard possibles pour décoller
$C_u^{\omega,\ell}(i,j)$	coût total pour un vol de type ℓ de l'OD ω programmé en période u et affecté sur l'option (i,j)
$P^{\omega,\ell}(i,j)$	prix de l'option (i,j) pour un vol de type ℓ de l'OD ω

k	indice de secteur
n	indice de période tarifée
$x_{k,n}$	prix d'entrée dans le secteur k en période n
$NP^\omega(u)$	nombre de vols de type ℓ de la paire OD ω devant décoller en période u
$NE^{\omega,\ell}(i,j)$	nombre de vols de type ℓ de la paire OD ω affectés sur l'option (i,j)
$NO^{\omega,\ell}(i,j)$	nombre de vols de type ℓ de la paire OD ω observés sur l'option (i,j)
$ND^{\omega,\ell}(i,j)$	nombre de vols de type ℓ de la paire OD ω désirés sur l'option (i,j)
seq_i^ℓ	séquence de secteurs traversés par un avion de type ℓ qui utilise la route i
$t_{i,k}^\ell$	date d'entrée dans le secteur k pour un avion de type ℓ utilisant la route i
$s_{i,k}^\ell$	date de sortie du secteur k pour un avion de type ℓ qui utilise la route i
$b_{(i,j)}^{(k,n,\ell)}$	probabilité qu'un avion de type ℓ décollant en période j et utilisant la route i entre dans le secteur k en période n
T'	nombre de périodes pendant lesquelles les secteurs sont tarifés
\mathbf{X}	matrice de prix de secteurs de dimension $S \times T'$
α	paramètre de sensibilité aux différences de coûts
E	ensemble des paramètres du modèle d'affectation stochastique
$PR_u^{\omega,\ell}(i,j)$	probabilité que le vol de type ℓ de la paire OD ω programmé en période u soit affecté sur l'option (i,j)
$V_u^{\omega,\ell}(i,j)$	utilité d'une option (i,j) pour un vol de type ℓ de la paire OD ω
$L_{k,n}$	indice de charge du secteur k en période n
$I_{k,n}$	nombre d'avions entrant dans le secteur k en période n
$O_{k,n}$	nombre d'avions sortant du secteur k en période n

$M_{k,n}$	nombre d'avions dans le secteur k en période n
$C_{k,n}$	capacité du secteur k en période n
Q_1	nombre total de dépassements de capacité
Q_2	volume total de dépassements de capacité
$q^{\omega,\ell}(u)$	ratio d'avions de type ℓ pour la demande de la paire OD ω en période u
$c^{\omega,\ell}(i)$	coût de vol par la route i pour un vol de type ℓ de la paire OD ω
$r^\ell(u,j)$	coût de retard pour un vol de type ℓ programmé en période u et décollant en période j
c_{ms}^ℓ	coût moyen d'une minute au sol pour un avion de type ℓ
η	rapport entre le coût d'une minute d'attente au sol et le coût d'une minute de vol
$d^{\omega,\ell}(i)$	durée de vol par la route i de la paire OD ω pour un avion de type ℓ
$\rho^{\omega,\ell}(i)$	pénalité de la route i de la paire OD ω pour un avion de type ℓ
$\lambda_{k,n}$	écart entre le nombre de vols désirés et le nombre de vols calculés avec le modèle dans le secteur k période n
\mathbf{V}	ensemble des valeurs de prix possibles
\mathbf{A}	matrice d'affectation de niveau de prix de dimension $S \times T'$
$a_{k,n}$	niveau de prix affecté au secteur k en période n

Introduction

Depuis dix ans, le trafic aérien croît de manière soutenue et toutes les prévisions indiquent que cette tendance va se poursuivre à un rythme comparable pendant les vingt prochaines années. En Europe comme aux États-Unis, l'accroissement régulier de la demande de trafic a engendré des problèmes de congestion au niveau des aéroports et dans l'espace. L'espace aérien est divisé en secteurs sous la responsabilité de contrôleurs aériens. Les contrôleurs aériens disposent de moyens de détection et de visualisation pour assurer la prévention de collisions entre les appareils. Actuellement, la charge de travail des contrôleurs est le facteur principal de limitation de la capacité de l'espace aérien. En effet, si le nombre d'avions dans un secteur de l'espace devient trop important, les contrôleurs aériens ne sont plus capables de gérer l'écoulement du trafic dans des conditions optimales de sécurité. Un secteur dans une telle situation est dit congestionné. Comme la congestion résulte du dépassement de capacité par la demande, elle peut être atténuée ou éliminée par des actions visant soit à augmenter cette capacité, soit à modifier la demande.

Une augmentation de capacité peut être obtenue, par la construction ou l'agrandissement d'aéroports, par la mise en place de nouvelles routes aériennes, et par une meilleure division de l'espace en secteurs. Les améliorations technologiques des systèmes de surveillance, de navigation et de communications air-sol, les progrès réalisés en matière d'électronique de bord et d'altimétrie, et une meilleure distribution des tâches de contrôle, facilitent le travail des contrôleurs qui peuvent prendre en charge davantage de vols. Mais de telles mesures restent insuffisantes pour obtenir des gains de capacité significatifs et absorber la demande toujours croissante. De plus, elles représentent souvent un coût très élevé.

La régulation de la demande peut se faire à différents niveaux. Les programmes d'attente au sol font partie des premiers dispositifs mis en place par les organismes de gestion des flux pour réguler le trafic aérien. Il s'agit d'allouer des créneaux de décollage en vue de prévenir la surcharge des aéroports et des secteurs. La congestion est alors reportée au sol. Plusieurs études en cours portent sur l'optimisation de ce processus d'allocation de créneaux. Pour des espaces fortement congestionnés, les solutions proposées induisent parfois des délais inacceptables (de 3 à 4 heures pour certains avions) qui peuvent provoquer l'annulation des vols concernés. Le problème est donc étendu à l'allocation conjointe de créneaux et de routes pour répartir la demande non seulement dans le temps, mais aussi dans l'espace en affectant des routes alternatives aux vols. Oussedik et Delahaye [OD98] ont formalisé ce principe d'allocation de routes alternatives et de retards aux vols pour le trafic aérien. Ils ont développé une méthode d'optimisation globale basée sur l'évolution artificielle pour

trouver une allocation de routes et de créneaux qui permet de réduire de façon significative la congestion des secteurs et des aéroports les plus saturés.

Si l'attribution arbitraire, par un organisme central, des créneaux de décollage et des routes, conduit à un optimum système au sens de la congestion globale, cela se fait au prix d'une affectation qui ne respecte pas l'équité entre les différents opérateurs aériens. En effet, deux vols d'une même paire Origine-Destination(OD) peuvent être affectés sur des routes présentant des coûts très différents. Au contraire, si on laisse une totale liberté aux utilisateurs du réseau dans le choix de l'heure de départ et de la route, un équilibre utilisateur peut s'établir. Moins performant en terme de congestion globale, il présente l'avantage d'assurer naturellement l'équité entre les utilisateurs. Des études portant sur l'affectation de trafic dans un réseau montrent que le choix des usagers en termes de routes et d'heure de départ est directement lié aux coûts de transport associés et qu'il est ainsi possible de déplacer l'équilibre utilisateur vers l'optimum système par un mécanisme de tarification [BACP84]. Dans cette optique, l'objectif de ce travail est de mettre en place une politique de prix qui incite les compagnies aériennes à modifier les horaires et les routes de leurs vols de manière à atteindre une cible. Cette cible est supposée connue. Elle correspond à une répartition de la demande de trafic dans le temps et dans l'espace qui conduit à une forte réduction de la congestion.

Ce mémoire est articulé de la façon suivante :

1. Le trafic aérien :

Cette partie présente la structure du réseau aérien et les principes de gestion du trafic. Elle met en évidence les problèmes de congestion dus à une croissance constante du trafic et les solutions possibles.

2. L'affectation du trafic dans un réseau :

Les problèmes de congestion rencontrés sont liés à la manière dont les usagers se répartissent sur le réseau. Cette partie est consacrée aux différents types d'affectation.

3. La tarification de la congestion :

Cette partie montre comment la tarification permet de traiter les problèmes de congestion en orientant la demande. Elle présente les méthodes de tarification applicables en transport routier, les techniques étudiées pour tarifier le réseau Internet. Elle expose le principe existant des redevances aériennes et dresse enfin un bilan non exhaustif des études relatives à la tarification du réseau aérien. Ces études concernent uniquement les problèmes de congestion aéroportuaire.

4. Le problème de tarification :

Il s'agit de proposer un mécanisme de régulation par les prix pour faire face à la saturation de l'espace aérien. Dans cette partie, nous exposons la démarche adoptée pour établir une tarification dynamique des secteurs aériens. Nous développons un modèle d'affectation qui relie le choix des compagnies aériennes en termes de routes et de périodes de décollage et les prix des secteurs traversés.

5. État de l'art des méthodes d'optimisation :

L'estimation des paramètres du modèle ou le calcul des prix d'entrée dans un secteur

s'expriment sous forme de problèmes d'optimisation. Cette partie propose une classification des méthodes d'optimisation principalement utilisées en faisant ressortir leurs points faibles et leurs points forts vis-à-vis des problèmes étudiés.

6. Identification des paramètres du modèle

Cette partie est consacrée à l'estimation des paramètres du modèle.

7. Tarification continue des secteurs aériens :

Dans cette partie, deux algorithmes de calcul de prix sont développés pour répondre à une première stratégie de tarification qui consiste à établir des prix d'entrée par secteur et par période, indépendants les uns des autres. Les méthodes d'optimisation utilisées sont le gradient et le recuit simulé. Elles sont testées et comparées sur trois scénarios de trafic.

8. Tarification par niveau des secteurs aériens :

Cette dernière partie présente trois heuristiques d'optimisation pour restreindre la tarification des secteurs aériens à un nombre limité de prix. Ces méthodes sont appliquées à deux scénarios de trafic.

Chapitre 1

Le trafic aérien

1.1 Introduction

Comme pour les autres systèmes de transport, le transport aérien est caractérisé par un réseau de routes et par un système d'exploitation pour assurer un mouvement sûr et efficace des aéronefs. La gestion du trafic aérien comprend le contrôle du trafic aérien, la gestion de l'espace et la gestion des flux. Les acronymes couramment utilisés proviennent de l'anglais ; Air Traffic Management (ATM), Air Traffic Control (ATC), Airspace Management (ASM) et Air Traffic Flow Management (ATFM). Le contrôle du trafic aérien s'appuie sur des services de Communication, Navigation et Surveillance (CNS) standardisés au plan mondial par l'Organisation de l'Aviation Civile Internationale¹. Dans ce chapitre, nous présentons le réseau aérien et le système de contrôle aérien en mettant l'accent sur les problèmes de congestion liés à la densité du trafic et les deux types d'approche possible pour y faire face.

1.2 L'organisation de l'espace aérien

1.2.1 Les routes aériennes

Le réseau aérien se présente sous la forme d'un réseau de transport classique. Il peut se modéliser sous la forme d'un graphe. Les noeuds sont les aéroports ou les balises (points de repère au sol). Les arcs sont les tronçons possibles entre chaque noeud. Une route aérienne est constituée d'une succession de tronçons. En préparant sa navigation, le pilote jalonne sa route de balises sur lesquels il devra faire un passage à la verticale afin de confirmer sa position aux contrôleurs. Le nombre de balises étant limité, la route réellement suivie s'écartera plus ou moins de la route idéale. Ainsi un pilote au départ de l'aéroport $A1$ (voir figure 1.1) sélectionne la balise $B1$ et détermine sa position par rapport au segment $A1B1$ à l'aide des instruments de bord, ce qui lui permet d'apporter les corrections nécessaires. Arrivé à la verticale de la balise $B1$, la balise $B2$ est sélectionnée pour cheminer

1. Créée en 1947 et liée à l'ONU, l'Organisation de l'Aviation Civile Internationale (OACI) exécute des programmes de coopération technique relatifs à l'aviation civile. Ses projets visent à accroître la sécurité aérienne, à améliorer les normes d'exploitation, à établir les normes d'activité des pilotes et des équipages, des contrôleurs du trafic aérien, de l'entretien au sol, etc.

sur le tronçon $B1B2$ etc. Un couple de villes reliées par des routes aériennes est appelé

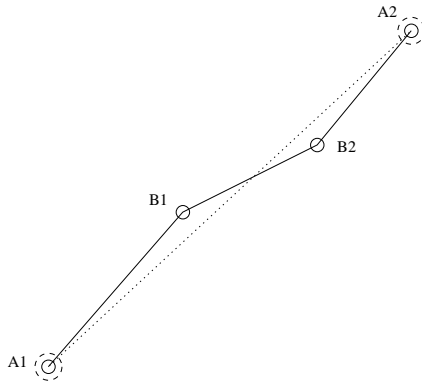


FIG. 1.1 – *Navigation segmentée*

une paire Origine-Destination (OD). On pourrait penser que ce principe de navigation par jalonnement sur balises soit amené à disparaître. En effet, les avions modernes sont maintenant équipés de calculateurs de bord, qui, lorsqu'ils sont couplés au pilote automatique, sont capables de suivre avec une grande précision n'importe quelle route définie par un point origine, un ensemble de points de passage et un point destination. Mais le concept consistant à laisser au pilote la liberté de choisir sa trajectoire n'est pas encore applicable en ces termes. D'une part, le contrôleur aérien a besoin de points de repère pour situer le trafic et assurer un écoulement efficace et ordonné du trafic. D'autre part, il existe dans beaucoup de pays un assez grand nombre de zones réservées aux militaires qui doivent être contournées par les routes aériennes civiles.

Une route aérienne pouvant être utilisée dans les deux sens, il a été élaboré une règle de séparation verticale (règle semi-circulaire) imposant des altitudes de vol aux aéronefs afin d'assurer des croisements en toute sécurité. Ainsi, les niveaux de vol² réglementaires utilisables dépendent de l'orientation magnétique de la route suivie :

- si la route magnétique est comprise entre 0° et 179° , les niveaux de vol impairs multipliés par 10 sont utilisables (exemple : 30, 50, 70, ...)
- si la route magnétique est comprise entre 180° et 359° , les niveaux de vol pairs multipliés par 10 sont utilisables (exemple : 20, 40, 80, ...)

Cette règle garantit que deux vols qui suivent des routes en sens inverse sont séparés d'au moins 1000 pieds (300 mètres). Pour des niveaux de vol supérieurs à 290, les règles actuelles de sécurité imposent une séparation de 2000 pieds.

1.2.2 Les secteurs aériens

L'espace aérien où la densité de trafic aérien devient importante fait l'objet d'un contrôle pour assurer la sécurité des vols. L'espace aérien sous contrôle est divisé en secteurs (voir

² Niveau de vol : altitude lue sur un altimètre calé sur la surface isobare 1013 mb exprimée en centaines de pied ; ainsi une différence de 5000 pieds par rapport à cette surface se notera Flight Level (FL) 50.

figure 1.2). Un secteur est un volume de l'espace défini par un plancher et éventuellement un plafond, et traversé par des routes aériennes. Un secteur peut être groupé avec des secteurs voisins. Chaque groupe de secteurs est sous la responsabilité de contrôleurs aériens chargés de maintenir les séparations minimales horizontales et verticales entre les avions, et de définir les niveaux de vols des avions entrant et quittant le secteur.

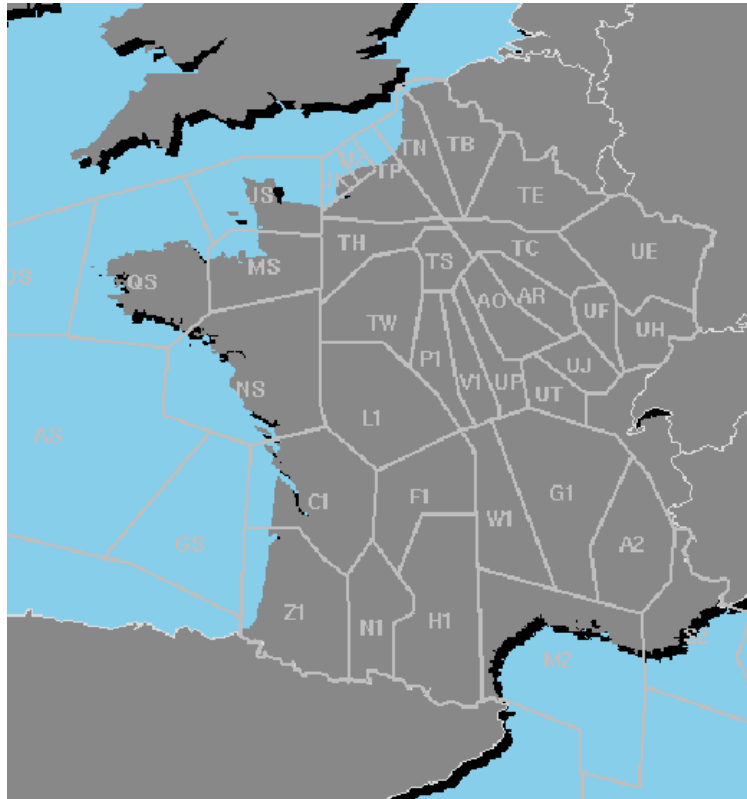


FIG. 1.2 – Secteurs de contrôle de l'espace aérien supérieur français

1.3 Le contrôle du trafic aérien

Un système de navigation et de contrôle standardisé au niveau international a vu le jour pour gérer de manière sûre et efficace les flux de trafic aérien. Seules certaines zones font l'objet d'un contrôle aérien pour des raisons de sécurité. Celui-ci consiste à faire circuler les avions dans un espace donné en faisant respecter les normes de sécurité. A l'aide d'outils informatiques, de radars et de radios, le contrôleur aérien est en mesure d'avoir une visualisation du trafic et de communiquer avec les pilotes.

Le contrôle aérien se décompose en trois catégories :

- **Le contrôle d'aérodrome** gère le trafic aérien au sol, les procédures de décollage et d'atterrissage. Il s'effectue à partir des tours de contrôle.

- **Le contrôle d’approche** assure la régulation du trafic dans les zones proches des aéroports en vue de séparer les avions en phase d’atterrissage et s’occupe également des avions au décollage en imposant si nécessaire des attentes au sol.
- **Le contrôle en route** concerne la surveillance des avions en dehors des secteurs d’aérodromes. Le travail des contrôleurs aériens, responsables de secteurs aériens, peut se décomposer en trois types de tâches appelées surveillance, résolution de conflits, et coordination [Del95].
 - Surveillance : Les contrôleurs ont pour mission de veiller au respect des normes de sécurité. Ils vérifient le bon déroulement des plans de vols et anticipent sur les risques potentiels. Ce travail représente la majeure partie de leur activité.
 - Résolution de conflits : Ils séparent les avions susceptibles de se trouver sur des trajectoires trop proches en imposant des modifications de caps, d’altitudes ou de vitesses.
 - Coordination : Ils assurent le passage des avions d’un secteur à l’autre en fixant les modalités de transfert avec les contrôleurs voisins.

La charge de travail pour la surveillance croît avec le nombre d’avions dans le secteur. La charge de conflit dépend du nombre de croisements d’avions et la charge de coordination varie en fonction des débits d’entrée et de sortie. Il existe d’autres charges de contrôle facilement quantifiables mais leur impact sur l’ensemble de la charge de contrôle du secteur est négligeable par rapport aux trois précédentes.

$$\text{Charge de travail} = \text{Charge}_{\text{surveillance}} + \text{Charge}_{\text{conflit}} + \text{Charge}_{\text{coordination}}$$

1.4 La congestion des secteurs de contrôle

Le contrôle aérien présente un ensemble de tâches à accomplir rendues de plus en plus difficiles par la croissance du trafic. Depuis 1985, la croissance annuelle moyenne du trafic en Europe en nombre de passagers par kilomètre varie entre 5% et 12% [Fro98b] et ce rythme semble devoir se poursuivre dans les prochaines années. Plus le nombre d’avions dans un secteur est important, plus la charge de travail des contrôleurs augmente. Par exemple dans [Del95], le nombre de conflits potentiels est montré comme étant proportionnel au carré du nombre d’avions dans le secteur. Si le nombre d’avions devant traverser un secteur dépasse un certain seuil, appelé capacité du secteur, les contrôleurs de ce secteur ne sont plus en mesure d’assurer la gestion du trafic dans des conditions optimales de sécurité. Le secteur est dit saturé. Les contrôleurs en charge du secteur ne peuvent plus accepter de nouveaux avions. Les avions sont alors déviés vers d’autres secteurs ou mis en attente dans les secteurs en amont. Cet état critique provoque un phénomène cumulatif de surcharge sur les secteurs en amont pouvant remonter jusqu’aux aéroports de départ. Il est difficile d’estimer le seuil au delà duquel un secteur est saturé, car celui-ci dépend de la géométrie des routes qui le traversent, de la géométrie du secteur lui-même, de la répartition des avions sur les routes, des performances de l’équipe de contrôle, etc. Un seuil généralement admis est de 3 conflits et 15 avions dans un secteur donné, cette situation ne devant pas durer plus d’une dizaine de minutes.

On comprend mieux comment l'accroissement régulier de la demande de trafic engendre des problèmes de congestion et donc une augmentation des retards en route³. On estime qu'en 2003, le système fonctionnera en limite de saturation [Vil90].

1.5 Les solutions au problème de congestion

Pour faire face au problème de saturation de l'espace aérien, des mesures sont prises à différents niveaux. Les principales décisions à long terme portent sur l'organisation de l'espace aérien (ASM). Pour une organisation de l'espace donnée, il faut s'assurer que le trafic ne dépasse pas la capacité des secteurs. C'est le but de la gestion des flux de trafic (ATFM). Pour l'Europe, cette gestion est traitée de manière centralisée par l'unité centrale de gestion des flux d'Eurocontrol⁴ pour le compte de l'ensemble des États membres de la CEAC⁵. Les deux directions d'étude pour décongestionner l'espace aérien sont donc :

- adapter la capacité à la demande (construction de nouveaux aéroports et d'infrastructures, nouvelle sectorisation, ...)
- adapter la demande à la capacité (gestion des flux de trafic et meilleur partage des informations)

Pour mettre en adéquation la demande et la capacité, il paraît aussi nécessaire que les différents acteurs du système coopèrent. Cela fait partie des grands projets d'amélioration de la gestion du trafic aérien.

1.5.1 Adapter la capacité à la demande

Aspects structurels

- Pour augmenter la capacité, les moyens couramment mis en œuvre reposent sur l'accroissement du nombre de secteurs et la réorganisation du réseau des routes aériennes. Mais ce système présente des limites. D'une part, si les secteurs sont trop petits, la résolution des conflits par le contrôleur est rendue plus difficile. D'autre part, plus les routes sont entrelacées, plus la gestion du trafic dans le secteur se complique en raison du nombre important de croisements d'avions.
- L'augmentation de la capacité passe par un meilleur partage de l'espace entre l'aviation civile et militaire. En effet, une activation des zones militaires en dehors des heures de pointe du trafic civil, comme cela se pratique déjà en Hongrie, offrirait une capacité d'espace bien supérieure et limiterait les retards de façon significative.

3. +68% de retards en route entre 1998 et 1999 dont 8.6% supérieurs à 15 minutes en 1998 et 12.4% supérieurs à 15 minutes en 1999.

4. Fondée en 1960, l'organisation européenne pour la sécurité de la navigation aérienne (Eurocontrol) a pour but principal le développement d'un système de contrôle de trafic aérien cohérent et coordonné en Europe. Depuis 1996, la Central Flow Management Unit (CFMU) assure la régulation du trafic aérien européen afin d'utiliser de façon optimale l'espace aérien et de prévenir la congestion du trafic.

5. Fondée en 1955 comme organisation intergouvernementale, la Conférence Européenne de l'Aviation Civile (CEAC) a pour objectif de promouvoir le développement d'un système de transport aérien européen sûr, efficace et durable. Elle compte 38 états membres au 01/01/2001.

Aspects technologiques

- Les progrès technologiques réalisés dans le domaine des équipements avioniques contribuent à une meilleure exploitation de l'espace aérien. Par exemple, il est prévu de réduire la norme de séparation verticale à 300 mètres au-dessus de 9000 mètres d'altitude (au lieu de 600 mètres actuellement) à partir de janvier 2002 en Europe. Cette mesure devrait permettre l'ajout de huit niveaux de vols et de ce fait augmenter la capacité aux altitudes de croisière d'environ de 30%, soit l'équivalent de cinq ans de croissance de trafic dans cette partie de l'espace. On espère aussi par ce moyen limiter le nombre de croisement de routes et faciliter l'introduction de routes directes, moins coûteuses en temps et en distance.
- L'utilisation d'outils automatisés de plus en plus sophistiqués avec de meilleures interfaces homme/machine facilite le travail du contrôleurs. Ils bénéficient ainsi d'une meilleure assistance dans leurs activités de prises de décision.
- Les développements en technologie de l'information, grâce notamment à la technologie satellitaire, aux communications entre les mobiles et le sol par liaisons de données, améliorent l'efficacité du transport aérien.

Aspects organisationnels

L'introduction de nouveaux outils nécessitent une définition nouvelle des rôles de chaque acteur [GMPD00]. Une répartition différente des tâches entre les contrôleurs, une plus grande autonomie des pilotes dans la prise de décision, par exemple, le transfert partiel, du contrôleur vers le pilote, de la responsabilité du maintien de la séparation, sont des modifications qui permettent une réduction de la charge de travail des contrôleurs et donc un accroissement de la capacité des secteurs.

Outre ces mesures visant à obtenir des gains de capacité, une autre manière de réduire la congestion serait d'adapter la demande à la capacité disponible.

1.5.2 Adapter la demande à la capacité

Le fonctionnement opérationnel actuel

Pour éviter que la demande de passage dans un secteur dépasse la capacité du secteur, des mesures de régulation sont prises par l'unité de gestion des flux. Ces actions de régulation s'opèrent en trois phases :

- La **phase stratégique** consiste à organiser le trafic à moyen et long terme (supérieur à 6 mois). Pendant cette phase, l'unité de gestion des flux recueille le nombre de vols planifiés par les compagnies aériennes. Ces données lui permettent d'avoir une prévision de la demande et de prendre des premières mesures de régulation, appelées Traffic Orientation Scheme(TOS), permettant d'étaler le trafic dans l'espace à l'aide d'itinéraires obligatoires.
- La **phase pré-tactique** consiste à réguler une journée de trafic la veille ou l'avant-veille. Des créneaux de décollage sont alloués aux avions devant traverser des zones

prévues saturées. Le principe retenu est celui de la gestion de files d'attente au sol. Les secteurs où la demande risque de dépasser la capacité sont identifiés et les vols se voient attribuer un créneau de départ compatible avec le respect des capacités de tous les secteurs traversés. Pour chaque secteur, la file d'attente fonctionne selon la règle "premier planifié, premier servi". En Europe, cette gestion des zones saturées se fait à l'aide d'un outil appelé Computer Assisted Slot Allocation (CASA). Le tableau 1.1 donne un exemple des retards attribués aux avions devant traverser un secteur saturé. Pour éviter l'encombrement du secteur entre 10h00 et 10h20, les avions sont retardés au sol, ce qui permet d'étaler l'arrivée des avions dans le secteur (1 avion toutes les 10 minutes).

Heure prévue de décollage	Heure d'entrée prévue en secteur saturé	Heure d'entrée régulée en secteur saturé	Retard	Heure effective de décollage
07h00	10h00	10h00	00h00	07h00
09h05	10h05	10h10	00h05	09h10
08h07	10h07	10h20	00h13	08h20
06h15	10h15	10h30	00h15	06h30
08h20	10h20	10h40	00h20	08h40

TAB. 1.1 – Attente au sol imposée aux avions devant traverser un secteur saturé

Ce système permet de limiter l'attente en vol plus coûteuse qu'au sol mais conduit à des retards parfois inacceptables. Une minute supplémentaire en vol est environ 3 fois plus chère qu'une minute d'attente au sol [Fro98b]. On estime que les retards cumulés dans la zone régulée par la CFMU étaient de 20,6 millions de minutes en 1996 pour environ 7 millions de vols (3 mn de retard moyen par vol) et représentaient un coût de 2,5 GF pour les exploitants.

- La **phase tactique**, consiste à réguler le trafic le jour même en prenant des mesures qui tiennent compte des conditions réelles d'écoulement des flux (conditions météorologiques, pannes, retards,...). L'unité de gestion des flux alloue à chaque avion un créneau de décollage, propose éventuellement un re-routage (changement de route) ou des plans de vols alternatifs afin d'assurer des débits maximaux en toute sécurité. On trouve aussi des actions de régulation portant sur la vitesse des avions et sur l'attente en l'air.

Les recherches visant à optimiser le fonctionnement opérationnel

Le principe d'allocation de créneaux de décollage actuellement utilisé a pour objectif majeur de prévenir la surcharge des secteurs et des aéroports mais il n'utilise pas de méthodes d'optimisation. Ces dernières années, les études se sont donc portées sur la formalisation du problème d'allocation et sa résolution par des méthodes d'optimisation [Odo94].

Les programmes d'attente au sol font partie des premiers dispositifs pour réguler le trafic aérien. Il s'agit d'imposer une attente au sol aux avions devant traverser des secteurs

surchargés ou à destination d'aéroports encombrés. Ce principe est moins coûteux pour les compagnies et plus sécuritaire que de retarder les avions en l'air. Mais il est difficile de connaître avec exactitude le retard minimum à appliquer sur chaque vol pour réduire au maximum la congestion. Les modèles d'optimisation offrent des méthodologies prometteuses pour construire des systèmes de décision répondant à cette question [Mau96]. La formulation générale du problème est la suivante :

Si la demande est susceptible d'excéder la capacité d'un ou plusieurs aéroports ou de saturer l'espace aérien, il faut trouver une nouvelle planification de vols (avec des retards, des changements de routes,...) qui maximise (minimise) une mesure d'efficacité (les coûts) et qui respecte les contraintes de capacité des aéroports et des secteurs.

Les modèles développés pour traiter ce problème rentrent dans le cadre de la programmation entière et de l'optimisation des flots dans un réseau. Une première formalisation de ce problème a été proposée par Terrab et Odoni [TO93]. Le modèle décrit une situation déterministe (demandes et capacités connues) avec un seul aéroport, et sans contrainte de capacité en-route. Le problème est assimilé à un problème de flux maximum sur un réseau capacitif. Des modèles de plus en plus complexes sont apparus par la suite. Richetta et Odoni [RO93],[RO94], ont développé un problème traitant le cas d'un aéroport avec des demandes et des capacités stochastiques et résolu par programmation dynamique. Vranas et al. [VBO94b], [VBO94a], ont proposé une formulation dynamique en nombre entier pour plusieurs aéroports avec des capacités déterministes aux aéroports et plusieurs périodes. Ces modèles ne prennent pas en compte les contraintes de capacité des secteurs. Bertsimas et Stock [BS94] ont développé un modèle linéaire en nombre entier tenant compte des contraintes de capacité au sol et en route et des connexions entre les vols, avec la possibilité d'utiliser de multiples actions de régulation telles que le re-routage, l'attente au sol et en route. Cependant, ce modèle nécessite un temps de calcul important pour résoudre des instances de grande taille. De manière générale, les modèles sont de plus en plus réalistes, mais aussi de plus en plus complexes et il est difficile d'obtenir des solutions efficaces pour des problèmes de grande taille. Pour donner un ordre de grandeur de la complexité du problème, nous proposons une version simplifiée d'un problème linéaire en nombre entier. Notons :

- F l'ensemble des vols
- T l'ensemble des périodes
- S l'ensemble des secteurs
- T_f l'ensemble des créneaux de décollage valables pour le vol f

Les variables de décision X_f^t décrivent l'affectation du créneau de décollage t au vol f . Le nombre de variables est égal à $\sum_{f \in F} |T_f|$ (où $|\cdot|$ désigne le cardinal). On retrouve deux grands types de contraintes, $|S| \times |T|$ contraintes de capacité et $|F|$ contraintes d'existence et d'unicité ($\sum_{t \in T_f} X_f^t = 1 \quad \forall f \in F$). La fonction objectif est représentée dans la plupart des modèles par une fonction de coût :

$$\min_{\mathbf{d}} \sum_{f \in F} c_f(d_f)$$

où d_f est la durée du retard imposé au vol f et $c_f(d_f)$ le coût résultant. Par exemple, pour l'espace aérien français :

- $|F| = 6000$
- $|T| = 288$ pour une journée de 24 heures divisées en périodes de 5 mn
- $|S| = 100$
- $|T_f| = 18$ pour des créneaux de 5 mn et une plage de décollage comprise entre -30 mn et +60 mn autour du créneau initial

Le nombre de variables est $|F| \times |T_f| = 6000 \times 18 = 108000$ et le nombre de contraintes $|S| \times |T| + |F| = 100 \times 288 + 6000 = 34800$. Dans la littérature, les modèles sont encore plus raffinés et comportent donc plus de variables et de contraintes. On comprend alors les difficultés à résoudre de tels problèmes. D'autre part, ce principe d'affectation de créneaux de décollage a atteint ses limites pour des espaces très congestionnés : les retards affectés aux avions sont supérieurs à plusieurs heures ce qui se traduit en pratique par l'annulation des vols. Il paraît donc nécessaire, de répartir les avions non seulement dans le temps mais aussi dans l'espace. L'introduction d'outils permettant de calculer automatiquement des routes alternatives est considérée comme très importante par les opérateurs aériens qui voient là une source potentielle de réduction des retards. Pour résoudre le problème de la double allocation, toutes les approches précédentes par la programmation linéaire en nombre entier restent inefficaces à cause des ressources mémoires requises pour l'addition de routes alternatives et l'impossibilité pour la programmation linéaire en nombre entier de gérer des modèles plus réalistes et donc non linéaires. Oussedik et Delahaye [OD98],[ODS98a],[ODS98b], proposent un modèle et un algorithme d'optimisation stochastique qui donnent de bons résultats sur des exemples de taille réelle. La nouvelle allocation de routes et de créneaux obtenue par un algorithme génétique permet de réduire de façon significative la congestion en-route et aux aéroports les plus saturés.

Vers un partage de l'information

La régulation du trafic aérien passe aussi par une distribution et un partage des informations disponibles entre les différents acteurs du système. En effet, pour améliorer le processus de régulation, les services de contrôle et de gestion des flux doivent disposer d'une meilleure prévision de la demande et de la congestion. Chaque compagnie connaît ses propres coûts, ses contraintes et les priorités entre ses vols. Elle dispose d'informations capitales pour prendre des décisions. Pourtant, ce sont les services de contrôle et les autorités aéroportuaires qui prennent les mesures de régulation et imposent les retards aux compagnies. Un échange d'informations plus poussé et une meilleure compréhension mutuelle des intérêts de chacun devraient permettre d'augmenter la flexibilité des opérations de régulation. La prise de décision par collaboration est un concept clé d'un programme d'Eurocontrol [Eur98a],[Eur98b] et aux États-Unis, les premières initiatives dans cette voie ont déjà fourni des gains significatifs [FAA]. Les applications du concept sont diverses et font l'objet de nombreuses recherches pour identifier les coûts et les bénéfices qu'elles impliquent [SHK⁺00]. L'amélioration des échanges d'information paraît essentielle pour mettre en adéquation la demande et la capacité.

1.6 Conclusion

Ce chapitre décrit le fonctionnement de la circulation aérienne et les problèmes associés. La congestion des aéroports et de l'espace aérien est le problème majeur auquel doivent aujourd'hui faire face les exploitants du système. Les mesures prises pour résoudre le problème de saturation cherchent à mettre en adéquation la demande et la capacité. L'analyse du fonctionnement actuel et des recherches visant à adapter la demande à la capacité conduit aux constatations suivantes :

- Actuellement, une équité entre les utilisateurs est assurée au travers d'un mécanisme de retards au sol de type : premier arrivé, premier servi.
- Les recherches ont conduit à des mécanismes de retards au sol et de changement de routes optimisés où la notion d'équité n'apparaît plus.
- La collaboration entre les intervenants est souhaitable.

L'introduction d'une coordination par les prix est donc envisageable. En effet, l'instauration de prix variables dans le temps et dans l'espace permettrait d'inciter les utilisateurs à utiliser les routes et les créneaux optimisés tout en maintenant l'équité.

Les services de navigation aérienne souhaitent utiliser au mieux l'espace aérien pour satisfaire toute la demande, les compagnies aériennes, utilisatrices du réseau, souhaitent minimiser leurs propres coûts d'exploitation. Dans tous les systèmes de transport, la prise en compte des intérêts des différents acteurs du système et l'interaction entre la demande et la capacité disponible font l'objet d'un ensemble de problèmes appelés problèmes d'affectation. Les problèmes d'affectation de trafic dans un réseau sont présentés dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

L'affectation de trafic dans un réseau

2.1 Introduction

Le phénomène de congestion rencontré dans le trafic aérien est le résultat d'un déséquilibre entre la demande et la capacité. Un réseau de transport présente toujours deux entités antagonistes qui sont la demande de transport et les possibilités du réseau à accepter cette demande. Le problème d'affectation de trafic consiste alors à répartir le flot sur le réseau en fonction de la capacité disponible et des coûts de transport afin d'optimiser un certain nombre de critères prédéterminés à l'avance (temps de parcours, longueur du parcours, etc). On distingue deux grandes classes d'optimisation suivant que le réseau est autonome (les utilisateurs se répartissent librement sur le réseau) ou qu'un agent extérieur oriente les flux (cela suppose une coopération des utilisateurs qui doivent se soumettre aux ordres du gestionnaire). De plus, suivant la nature statique ou dynamique de la demande et la modélisation déterministe ou stochastique des coûts de transport, on peut identifier quatre catégories d'affectation qui sont détaillées dans la suite.

2.2 Affectation statique

2.2.1 Modélisation du réseau de transport

Pour les problèmes d'affectation statique, le réseau de transport peut être modélisé par un triplet $\{N, A, C\}$ avec :

- N : ensemble des noeuds du réseau
- A : ensemble des arcs reliant des paires de noeuds

$$A = \{a = (i, j) \mid i \in N, \text{ et } j \in N\} \quad (2.1)$$

- C : ensemble des coûts unitaires (coût par unité de flux) de transport sur les différents arcs du réseau.

$$C = \{c_a \mid a \in A\} \quad (2.2)$$

Le coût de transport sur un arc s'interprète par exemple comme un temps de parcours. Il peut être constant si les interactions entre mobiles sont faibles. Sinon, il dépend du débit sur cet arc et peut dépendre des débits sur les autres arcs à cause des intersections.

On définit le vecteur D qui représente la demande de transport pour chaque paire Origine-Destination (OD) du réseau. La demande correspond au nombre d'utilisateurs qui désirent voyager d'un noeud origine à un noeud destination.

$$D = (D_1, D_2, D_3, \dots, D_r, \dots)^T \quad (2.3)$$

où D_r est la demande sur la paire OD d'indice r .

La demande de transport sur une paire OD peut être répartie sur les différents arcs du réseau en empruntant un ou plusieurs chemins. On définit K , l'ensemble des chemins possibles pour toutes les paires OD et K_r l'ensemble des chemins possibles pour la paire OD d'indice r . On note F_k le flot sur le chemin k . On obtient la relation suivante entre la demande et le flot :

$$\sum_{k \in K_r} F_k = D_r \quad (2.4)$$

Le coût C_k associé au flot F_k sur le chemin k est égal à la somme des coûts sur chacun des arcs constituant le chemin k :

$$C_k = \sum_{a \in A} \delta_{ak} c_a \quad (2.5)$$

avec $\delta_{ak} = 1$ si l'arc a fait partie du chemin k (0 sinon). On définit également le vecteur \underline{f} , vecteur des flots sur les arcs du réseau.

$$\underline{f} = \{f_a \mid a \in A\} \quad (2.6)$$

Le flot sur l'arc a est la somme des flots des chemins contenant cet arc :

$$f_a = \sum_{k \in K} \delta_{ak} F_k \quad (2.7)$$

Remarques :

1. S'il existe plusieurs paires Origine-Destination pour lesquelles les utilisateurs n'ont pas de destination imposée, on parlera de flux mono-mode, multi-terminaux ;
2. S'il existe plusieurs paires Origine-Destination avec des utilisateurs astreints à relier certaines paires OD, on parle de flux multi-modes et multi-terminaux ;
3. Si les utilisateurs ont des caractéristiques de transport différentes, on parle alors de flux multi-classes ;
4. Si la demande D_r sur une paire OD r est dépendante du coût de transport sur ce même couple OD, cette demande est dit élastique ; dans le cas contraire elle est fixe. La fonction de demande \mathcal{D}_r est généralement une fonction décroissante du coût de transport :

$$D_r = \mathcal{D}_r(C_{OD_r})$$

Le coût de transport C_{OD_r} sur une paire OD r est égal au coût moyen sur tous les chemins reliant la paire OD r :

$$C_{OD_r} = \frac{\sum_{k \in K_r} F_k C_k}{D_r}$$

Pour une demande élastique, on peut aussi définir la fonction de demande inverse \mathcal{D}_r^{-1} :

$$C_{OD_r} = \mathcal{D}_r^{-1}(D_r)$$

Dans le cadre du trafic aérien, le flux peut être considéré comme multi-modes, multi-terminaux, et multi-classes.

Dans le cas général d'une demande élastique, il se produit une interaction entre le flot et la demande par l'intermédiaire de la fonction coût. Cette interaction entre le flot, la demande et les coûts a des effets en chaîne : le flot présent sur le réseau fixe les coûts qui fixent à leur tour la demande et ainsi de suite. Cet enchaînement peut conduire à un état d'équilibre. A l'équilibre, les coûts, la demande, et la répartition du flot sur le réseau sont déterminés. Dans le cas d'une demande fixe, seule la répartition du flot a besoin d'être calculée à l'équilibre. Pour déterminer l'état d'équilibre, on suppose que tous les utilisateurs ont le même comportement. Mais les utilisateurs connaissent le réseau (arcs, chemins, coûts associés) avec plus ou moins de précision. L'équilibre obtenu est déterministe si on estime que tous les utilisateurs ont une perception correcte du réseau. Dans le cas contraire, on parle d'équilibre stochastique.

2.2.2 Affectation statique déterministe

Dans un modèle déterministe d'affectation, tous les utilisateurs sont supposés avoir une connaissance parfaite du réseau et des coûts sur les arcs. Ce modèle n'est pas réaliste. En général, les utilisateurs ne disposent pas d'une information complète sur l'état de congestion des routes. Même si ce modèle ne reflète pas tout à fait la réalité, il permet d'introduire deux approches d'affectation : une approche utilisateur et une approche système. Ces deux approches ont été proposées par Wardrop [War52] en considérant les temps de parcours comme coût.

– Approche utilisateur

Dans cette approche, on considère que les utilisateurs se répartissent librement sur le réseau. Comme ils ont une connaissance complète du réseau, ils agissent avec bon sens et choisissent le chemin de coût minimum pour se déplacer. Dans ce cas, l'équilibre est atteint lorsqu'aucun utilisateur ne peut réduire son coût de transport en sélectionnant une autre route que celle utilisée actuellement. Ce type d'équilibre s'exprime à travers le premier principe de Wardrop :

Principe 1 (Wardrop) : Les temps de parcours sur toutes les routes utilisées sont égaux et plus petits que ceux des routes inutilisées.

– **Approche système**

Dans l'approche système, on fait l'hypothèse que les utilisateurs ne sont plus libres de leurs choix mais agissent sous la direction d'un agent extérieur qui cherche à satisfaire l' "intérêt collectif", c'est-à-dire minimiser le coût global du transport. Le second principe de Wardrop reflète cette idée :

Principe 2 (Wardrop) : Le temps moyen de parcours pour l'ensemble des utilisateurs est minimum.

Le temps moyen de parcours est donné par la formule :

$$\frac{\sum_{k \in K} F_k C_k}{\sum_r D_r} \quad (2.8)$$

Dans ce cas, la règle d'utilisation du chemin de coût minimum n'est plus valable. Le flot résultant est tel que les coûts marginaux (le calcul de ces coûts est donné plus loin) sur les chemins utilisés pour relier une paire OD sont égaux et plus petits que ceux des chemins inutilisés reliant la même paire OD.

Dans un réseau dit autonome, les utilisateurs se répartissent librement sur le réseau de manière à satisfaire leurs propres intérêts. L'équilibre atteint est appelé équilibre utilisateur. Si le réseau est piloté par un agent extérieur, les utilisateurs coopèrent et suivent les règles d'un gestionnaire pour atteindre un objectif commun. L'équilibre système est le résultat de cette coopération.

La recherche de **l'équilibre utilisateur** s'obtient en résolvant le système d'équations suivant :

- (1) $C_k = C_s$ si $F_k > 0$ et $F_s > 0 \quad \forall k, s \in K_r \quad \forall$ paire OD r
- (2) $C_k > C_s$ si $F_k = 0$ et $F_s > 0 \quad \forall k, s \in K_r \quad \forall$ paire OD r
- (3) $\sum_{k \in K_r} F_k = D_r \quad \forall$ paire OD r
- (4) $f_a = \sum_{k \in K} \delta_{ak} F_k \quad \forall a \in A$
- (5) $f_a \geq 0 \quad F_k \geq 0 \quad \forall a \in A, \quad \forall k \in K$

Dans le cas où la demande est fixe (D_r est une fonction constante) et le coût sur un arc fonction du seul flot sur cet arc ($c_a = c_a(f_a) \quad \forall a \in A$), **l'équilibre système** est défini par l'ensemble d'équations :

- (1) $C'_k = C'_s$ si $F_k > 0$ et $F_s > 0 \quad \forall k, s \in K_r \quad \forall$ paire OD r
- (2) $C'_k > C'_s$ si $F_k = 0$ et $F_s > 0 \quad \forall k, s \in K_r \quad \forall$ paire OD r
- (3) $\sum_{k \in K_r} F_k = D_r \quad \forall$ paire OD r
- (4) $f_a = \sum_{k \in K} \delta_{ak} F_k \quad \forall a \in A$
- (5) $f_a \geq 0 \quad F_k \geq 0 \quad \forall a \in A, \forall k \in K$

où C'_k correspond au coût marginal sur le chemin k :

$$C'_k = \sum_{a \in A} \delta_{ak} \frac{\partial(f_a c_a(f_a))}{\partial f_a} \quad (2.9)$$

Preuve

Le deuxième principe de Wardrop se traduit par le problème d'optimisation :

$$\text{Min}_{F_k} \frac{\sum_{k \in K} F_k C_k}{\sum_r D_r} \text{ sous les contraintes :} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K_r} F_k &= D_r \quad \forall \text{ paire OD } r \\ F_k &\geq 0 \quad \forall k \in K \end{aligned}$$

Si la demande n'est pas élastique, les débits optimaux seront les mêmes si on optimise le coût total :

$$\text{Min}_{F_k} \sum_{k \in K} F_k C_k$$

Les conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker liées au problèmes sont :

$$\exists \lambda_r \in \mathfrak{R}, \quad \mu_k \geq 0 \text{ tels que :}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum_k F_k C_k}{\partial F_k} + \lambda_r - \mu_k &= 0 \\ \mu_k F_k &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Pour deux chemins k et s d'une même paire OD r :

$$\frac{\partial \sum_{l \in K} F_l C_l}{\partial F_k} - \mu_k = -\lambda_r = \frac{\partial \sum_{l \in K} F_l C_l}{\partial F_s} - \mu_s \quad (2.12)$$

En remarquant que :

$$f_a = \sum_{l \in K} \delta_{al} F_l \Rightarrow \frac{\partial f_a}{\partial F_k} = \delta_{ak} \quad (2.13)$$

et sachant que :

$$C_l = \sum_{a \in A} \delta_{al} c_a \quad (2.14)$$

on obtient :

- si $F_k > 0$ et $F_s > 0$, alors $\mu_k = \mu_s = 0$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum_{l \in K} F_l C_l}{\partial F_k} &= \frac{\partial \sum_{l \in K} F_l C_l}{\partial F_s} \\ \frac{\partial \sum_{l \in K} F_l \sum_{a \in A} \delta_{al} c_a(f_a)}{\partial F_k} &= \frac{\partial \sum_{l \in K} F_l \sum_{a \in A} \delta_{al} c_a(f_a)}{\partial F_s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sum_{a \in A} \sum_{l \in K} F_l \delta_{al} c_a(f_a)}{\partial F_k} &= \frac{\partial \sum_{a \in A} \sum_{l \in K} F_l \delta_{al} c_a(f_a)}{\partial F_s} \\
\sum_{a \in A} \frac{\partial (\sum_{l \in K} F_l \delta_{al}) c_a(f_a)}{\partial F_k} &= \sum_{a \in A} \frac{\partial (\sum_{l \in K} F_l \delta_{al}) c_a(f_a)}{\partial F_s} \\
\sum_{a \in A} \frac{\partial f_a c_a(f_a)}{\partial F_k} &= \sum_{a \in A} \frac{\partial f_a c_a(f_a)}{\partial F_s} \\
\sum_{a \in A} \frac{\partial f_a c_a(f_a)}{\partial f_a} \frac{\partial f_a}{\partial F_k} &= \sum_{a \in A} \frac{\partial f_a c_a(f_a)}{\partial f_a} \frac{\partial f_a}{\partial F_s} \\
\sum_{a \in A} \delta_{ak} \frac{\partial f_a c_a(f_a)}{\partial f_a} &= \sum_{a \in A} \delta_{as} \frac{\partial f_a c_a(f_a)}{\partial f_a} \\
C'_k &= C'_s
\end{aligned} \tag{2.15}$$

– si $F_k = 0$ et $F_s > 0$, on a $\mu_k > 0$ et $\mu_s = 0$

$$\begin{aligned}
C'_k - \mu_k &= C'_s \\
C'_k &> C'_s
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Les problèmes d'équilibre utilisateur et système peuvent aussi se présenter sous la forme de problèmes d'optimisation où les relations (1) et (2) sont remplacées par des critères ($Z(f)$) à minimiser sous les contraintes (3),(4) et (5) [Daf72],[BMW56].

– Équilibre système

En théorie économique, le “bien-être” social est la différence entre le prix que les usagers sont prêts à payer (c'est-à-dire le bénéfice qu'ils retirent du trajet) et le coût total du trajet. L'équilibre peut être atteint quand ce “bien-être social” est maximal. Le coût total de transport est égal à : $\sum_{a \in A} (f_a c_a(f_a))$.

Le bénéfice total correspond à la somme sur toutes les OD r du bénéfice des usagers : $\sum_r \int_0^{D_r} \mathcal{D}_r^{-1}(x) dx$. On écrit le problème d'optimisation lié à l'équilibre système :

$$Min \quad Z(\underline{f}) = \sum_{a \in A} (f_a c_a(f_a)) - \sum_r \int_0^{D_r} \mathcal{D}_r^{-1}(x) dx \tag{2.17}$$

– Équilibre utilisateur

La solution au problème d'équilibre utilisateur est obtenue en résolvant le problème mathématique :

$$Min \quad Z(\underline{f}) = \sum_{a \in A} \int_0^{f_a} c_a(x) dx - \sum_r \int_0^{D_r} \mathcal{D}_r^{-1}(x) dx \tag{2.18}$$

Dans ce cas, il n'existe pas d'interprétation économique pour la fonction objectif.

On montre que :

- Les équilibres utilisateur et système existent si et seulement si $\mathcal{D}_r(C_{OD_r})$ est une fonction continue et positive, et si $c_a(f_a)$ est une fonction non décroissante.

- Ces équilibres sont uniques quand $c_a(f_a)$ est une fonction strictement croissante.
- L'équilibre système induit toujours un coût global inférieur ou égal à celui engendré par l'équilibre utilisateur.

Dans les modèles décrits ci-dessus, le coût sur un arc est fonction du seul flot sur cet arc. Mais il peut aussi dépendre du débit sur les autres arcs. Pour tenir compte de cette remarque, il suffit de remplacer la fonction coût précédemment utilisée par une fonction dépendante du vecteur flot (\underline{f}) sur l'ensemble du réseau. On distingue alors trois cas suivant l'interdépendance dans le réseau. Pour cela, on définit la matrice jacobienne suivante :

$$\mathbf{J} = \left[\frac{\partial c_a(\underline{f})}{\partial f_b} \right] \quad (2.19)$$

- coûts séparables : $\partial c_a(\underline{f})/\partial f_b = 0 \quad \forall a \neq b$
- coûts non séparables et symétriques : $\partial c_a(\underline{f})/\partial f_b = \partial c_b(\underline{f})/\partial f_a \quad \forall a, b$
- coûts non séparables asymétriques : $\exists a, b \quad | \quad \partial c_a(\underline{f})/\partial f_b \neq \partial c_b(\underline{f})/\partial f_a$

Dans le cas général d'une matrice jacobienne asymétrique, une formulation en termes d'inégalités variationnelles est proposée pour le problème d'équilibre [Daf80].

Les problèmes d'optimisation liés aux deux équilibres (utilisateur et système) ont été longuement étudiés et il existe un grand nombre d'algorithmes de résolution. Le plus fréquemment appliqué est l'algorithme de Frank-Wolfe [She85].

2.2.3 Affectation statique stochastique

Sous l'hypothèse que les utilisateurs disposent d'une information complète sur les coûts des arcs et suivent tous le même comportement, l'équilibre utilisateur se caractérise par une situation dans laquelle aucun utilisateur ne peut réduire le coût de son trajet en changeant de route. Les modèles fondés sur cette hypothèse reflètent une situation idéale de trafic. Dans la réalité, les utilisateurs manquent d'information sur les coûts de transport et ne les perçoivent pas tous de la même façon. Ils peuvent aussi avoir des préférences différentes. Les modèles d'affectation stochastique traduisent ce type de comportement. Les différences de perception des coûts des routes entre les différents utilisateurs sont introduites par un terme aléatoire. En supposant que les coûts perçus par les utilisateurs sont indépendants et homogènes, le coût perçu pour la route k est \tilde{C}_k

$$\tilde{C}_k = C_k + \varepsilon_k \quad (2.20)$$

où ε_k représente le terme aléatoire et C_k le coût réel du chemin k . Daganzo et Sheffi [DS72] ont étendu le premier principe de Wardrop pour l'équilibre utilisateur dans le cadre stochastique :

Principe généralisé au cas stochastique (Daganzo et Sheffi)

Dans un équilibre utilisateur stochastique, aucun utilisateur ne peut réduire le coût de transport qu'il perçoit en changeant de route.

Le choix des routes par les utilisateurs dans le cadre stochastique est représenté par un

modèle de choix discret. Ce type de modèle s'applique aux situations dans lesquelles les usagers doivent faire un choix parmi un ensemble de possibilités [Hor83]. Pour plus de détails, il est préférable de se référer à l'annexe A. Dans les problèmes d'affectation stochastique, ce type de modèle donne la probabilité $P_{k,r}$ que le chemin k soit emprunté pour la paire OD r en fonction des coûts sur chacun des chemins possibles pour cette même paire. L'utilisateur choisit un chemin k de manière à minimiser le coût qu'il perçoit [Cas91] :

$$\begin{aligned} P_{k,r} &= Prob\{\tilde{C}_k < \tilde{C}_h\} \\ P_{k,r} &= Prob\{C_k - C_h < \epsilon_h - \epsilon_k\} \forall h \neq k, k, h \in K_r \end{aligned} \quad (2.21)$$

Suivant la distribution de probabilité choisie pour le terme aléatoire ϵ_k , on obtient différents modèles de choix discrets. Le modèle le plus largement utilisé est le modèle Logit [Dia71], [Yan97], [Aka97], [LLTT98]. Ce modèle repose sur l'hypothèse que les variables aléatoires ϵ_k sont des variables de Gumbel indépendantes et identiquement distribuées. La probabilité P_k de choix d'une route k pour la paire OD r se présente sous la forme :

$$P_{k,r} = \frac{\exp(-\alpha C_k)}{\sum_{s \in K_r} \exp(-\alpha C_s)} \quad (2.22)$$

Le paramètre α est positif. Il peut être interprété comme une mesure de la sensibilité des utilisateurs aux coûts des routes. Il peut être aussi considéré comme le degré d'information à disposition des utilisateurs. Les variations de ce paramètre reflètent différents types de comportement. A la limite, lorsque $\alpha \rightarrow \infty$, on retrouve l'équilibre utilisateur déterministe. Au contraire, si $\alpha \rightarrow 0$, toutes les routes ont la même probabilité d'être sélectionnées.

A partir des probabilités $P_{k,r}$, on peut construire une distribution discrète de probabilité en considérant le flot F_k sur chaque chemin k comme une variable aléatoire discrète. On peut illustrer le processus (voir figure 2.1) en considérant une seule paire OD, deux utilisateurs et deux chemins numérotés de 1 à 2. On suppose que $P_1 = \frac{1}{4}$ et que $P_2 = \frac{3}{4}$. Dans ce cas, les fonctions de distribution sont données par le tableau 2.1.

Valeurs	0	1	2
F_1	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$
F_2	$\frac{1}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{9}{16}$

TAB. 2.1 – *Distribution de probabilité des variables aléatoires discrètes F_1 et F_2*

Le nombre moyen d'utilisateurs \overline{F}_k sur chaque chemin k est égal à $D_r P_{k,r}$:

$$\begin{aligned} \overline{F}_1 &= 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ \overline{F}_2 &= 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

On peut aussi considérer la variable aléatoire \underline{F} formée par le couple (F_1, F_2) . La distribution de probabilité associée est donnée par le tableau 2.2.

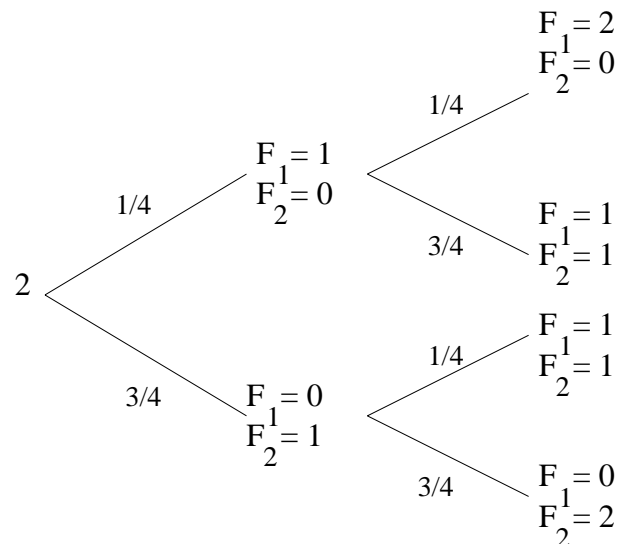


FIG. 2.1 – Répartition de 2 utilisateurs sur le réseau en fonction des probabilités d'utilisation des chemins

Valeurs	(1,1)	(0,2)	(2,0)
\underline{F}	$\frac{6}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$

TAB. 2.2 – Distribution de probabilité de la variable aléatoire discrète $\underline{F} = (F_1, F_2)$

Sous l'hypothèse que les variables aléatoires ont une densité normale multidimensionnelle, on obtient le modèle Probit [She85]. Le calcul des probabilités est plus difficile avec ce modèle car elles ne s'expriment pas explicitement.

Si le modèle stochastique d'affectation est plus réaliste, il reste encore difficile à manipuler. Pour le trafic aérien, on ne peut pas encore parler de réseau fortement congestionné, il est donc préférable de se placer dans un cadre stochastique. De plus, les modèles d'affectation statique sont insuffisants pour traduire l'évolution du trafic quand la demande et les coûts varient au cours du temps. Il paraît donc nécessaire de s'intéresser à des modèles d'affectation dynamique.

2.3 Affectation dynamique

Dans les problèmes d'affectation dynamique, on étudie l'évolution du trafic dans un réseau congestionné pour lequel la demande de trafic et les coûts d'arcs sont variables dans le temps. On retrouve, dans ces problèmes, les deux approches décrites précédemment : l'approche système et l'approche utilisateur. De la même manière, on parle d'affectation dynamique déterministe ou d'affectation dynamique stochastique selon les hypothèses faites sur la perception des coûts.

2.3.1 Affectation dynamique déterministe

Cette partie propose une formulation mathématique continue liée au problème d'affectation dynamique déterministe donnée par [FLTW89]. On considère un réseau avec plusieurs origines et une seule destination sur l'horizon de temps $[0, T]$. Pour un réseau avec plusieurs origines et plusieurs destinations, l'évolution dynamique du système est plus complexe à décrire. On utilise les notations suivantes pour décrire le problème :

- M : ensemble des noeuds origines ($M = N \setminus \{\text{Noeud destination}\}$)
- t : temps
- $x_a(t)$: trafic présent sur l'arc $a \in A$ à l'instant t
- $c_a[x_a(t)]$: coût unitaire de l'arc $a \in A$ à l'instant t (la fonction coût est supposée croissante, dérivable et convexe)
- $u_a(t)$: flot entrant sur l'arc $a \in A$ à l'instant t
- $g_a[x_a(t)]$: flot sortant de l'arc $a \in A$ à l'instant t
- $B(i)$: ensemble des arcs arrivant au noeud $i \in N$
- $A(i)$: ensemble des arcs partant du noeud $i \in N$
- $S_i(t)$: flot généré au noeud i à l'instant t

Les contraintes suivantes doivent être vérifiées :

- (1) $\frac{dx_a(t)}{dt} = u_a(t) - g_a[x_a(t)] \quad \forall a \in A, \quad t \in [0, T]$
- (2) $S_i(t) = \sum_{a \in A(i)} u_a(t) - \sum_{a \in B(i)} g_a[x_a(t)] \quad \forall i \in M, \quad t \in [0, T]$
- (3) $x_a(0) = x_a^0 \geq 0 \quad \forall a \in A$
- (4) $u_a(t) \geq 0 \quad \forall a \in A, \quad t \in [0, T]$
- (5) $x_a(t) \geq 0 \quad \forall a \in A, \quad t \in [0, T]$

Le flot résultant sur chaque arc est solution d'un problème d'optimisation différent suivant le type d'approche adoptée :

- Approche système

Dans cette approche, on cherche à minimiser le coût total du transport sur l'horizon de temps T . L'affectation optimale du point de vue système est solution du problème :

$$\min J_1 = \sum_{a \in A} \int_0^T c_a[x_a(t)] x_a(t) dt \quad (2.23)$$

sous les contraintes (1),(2),(3),(4) et (5)

- Approche utilisateur

Le premier principe de Wardrop est généralisé à l'affectation dynamique :

Si à chaque instant, pour chaque paire Origine-Destination, les coûts unitaires instantanés de tous les chemins utilisés sont identiques et minimaux, l'équilibre utilisateur est atteint.

L'affectation optimale du point de vue utilisateur est solution du problème :

$$\min J_2 = \sum_{a \in A} \int_0^T \int_0^{x_a(t)} c_a(\omega) \frac{dg_a(\omega)}{d\omega} d\omega dt \quad (2.24)$$

sous les contraintes (1),(2),(3),(4) et (5)

Il existe plusieurs généralisations du premier principe de Wardrop pour le cas dynamique. Dans celui formulé précédemment, on fait l'hypothèse que les utilisateurs ont une connaissance parfaite de l'état du réseau à chaque instant mais n'ont pas connaissance de son évolution. Quand ils choisissent une route à l'instant t , ils supposent que les temps de parcours ne vont pas changer. Puis, au cours du temps, ils ont la possibilité de réviser leurs choix. Dans ce contexte dynamique, on trouve aussi des modèles d'affectation dans lesquels les utilisateurs ont non seulement la possibilité de choisir leurs routes mais aussi leurs heures de départ [RHB96]. L'équilibre est atteint lorsqu'aucun utilisateur ne peut réduire son coût de transport en choisissant une autre route et/ou une autre heure de départ. De manière générale, les modèles d'affectation dynamique et déterministe s'appliquent lorsque la demande et les coûts varient de façon significative chaque jour et que les utilisateurs disposent d'une bonne information sur les conditions de trafic. Dans une telle situation, les utilisateurs cherchent chaque jour à optimiser leurs trajets, sans prendre en compte les informations des jours précédents. En l'absence de telles hypothèses, on trouve des modèles appropriés pour simuler l'évolution du trafic d'une journée à l'autre, ou au cours d'un même journée et prenant en compte les effets de mémoire et de prédiction sur la perception des coûts. Ce sont des modèles d'affectation dynamique stochastique.

2.3.2 Affectation dynamique stochastique

Les modèles d'affectation dynamique et stochastique traduisent l'évolution du trafic au cours de périodes de temps successives. Pour simplifier, considérons le "jour" comme période de référence. Sur la période de référence, la demande est uniformément distribuée et on utilise le modèle de réseau défini dans la partie 2.2.1 à l'exception des aspects liés à l'élasticité de la demande.

En écriture matricielle, la relation 2.6 s'écrit :

$$\underline{f} = \mathbf{A} \underline{F} \quad (2.25)$$

avec $\underline{f} = (f_1, f_2, \dots, f_a, \dots)^T$ vecteur des flots sur les arcs, $\underline{F} = (F_1, F_2, \dots, F_k, \dots)^T$ vecteur de flots sur les chemins et $\mathbf{A} = [\delta_{ak}]$ matrice d'incidence liée au réseau. De même pour les coûts, l'équation 2.5 s'écrit :

$$\underline{C} = \mathbf{A}^T \underline{c} \quad (2.26)$$

avec $\underline{c} = (c_1, c_2, \dots, c_a, \dots)^T$ et $\underline{C} = (C_1, C_2, \dots, C_k, \dots)^T$.

L'évolution du trafic au cours des périodes successives est décrit par un processus stochastique. L'état du système au jour n est représenté par le flot global sur le réseau et noté :

\underline{F}^n . Le flot sur chaque chemin le jour n résulte du choix des utilisateurs. Ces choix ne sont pas déterministes et la probabilité $P_{k,r}^n$ que le chemin k soit emprunté pour relier la paire OD r le jour n est donnée par un des modèles de choix discrets défini dans la partie 2.2.3. Les coûts perçus le jour n se notent \tilde{C}_k^n et sont définis par :

$$\tilde{C}_k^n = \overline{C}_k^n + \varepsilon_k \quad (2.27)$$

où \overline{C}_k^n représente le coût moyen prévu par les utilisateurs. Suivant la distribution de probabilité choisie pour les variables aléatoires ε_k , on retrouve le modèle Logit ou le modèle Probit décrit précédemment. A ce modèle vient s'ajouter un effet mémoire : les utilisateurs tiennent compte des difficultés rencontrés les jours précédents pour faire leur choix le jour présent. \overline{C}_k^n est donc fonction des coûts encourus les m jours précédents :

$$\overline{C}_k^n = \theta [C_k^{n-1}(\underline{F}^{n-1}), \dots, C_k^{n-m}(\underline{F}^{n-m})] \quad (2.28)$$

θ est la fonction d'apprentissage et de prédiction du coût rencontré. Le plus souvent, cette fonction est une pondération des coûts précédents :

$$\overline{C}_k^n = \sum_{i=1}^{i=m} \omega_i C_k^{n-i}(\underline{F}^{n-i}) \quad (2.29)$$

Les principaux résultats concernant le processus stochastique ainsi défini sont donnés par Cascetta et Cantarella [CC91],[CC95]. L'état occupé par le système est une variable aléatoire discrète dont la loi de probabilité dépend des coûts et des flots dans le réseau des jours précédents. On montre que le processus stochastique résultant admet une distribution stationnaire d'occupation d'état (convergence stochastique) et qu'il est ergodique si les trois conditions suivantes sont réunies :

- Le nombre de jours m est fini.
- Le mécanisme de choix des routes par les utilisateurs est stable dans le temps.

$$P_{k,r}^n = P_{k,r}^n[\underline{F}^{n-1} = \underline{F}_p, \dots, \underline{F}^{n-m} = \underline{F}_q] = P_{k,r}^h[\underline{F}^{h-1} = \underline{F}_p, \dots, \underline{F}^{h-m} = \underline{F}_q] \quad (2.30)$$

- Les probabilités de choix sont strictement positives.

$$P_{k,r}^n > 0 \quad \forall k \in K_r \quad (2.31)$$

Sous ces conditions, le processus stochastique résultant est une "m" chaîne de Markov homogène. L'espérance mathématique $E[\underline{F}]$ et la matrice de covariance $COV[\underline{F}]$ du vecteur d'état de cette chaîne sont données par :

$$E[\underline{F}] = \sum_i \pi_i \underline{F}_i \quad (2.32)$$

$$COV[\underline{F}] = \sum_i \pi_i (\underline{F}_i - E[\underline{F}])(\underline{F}_i - E[\underline{F}])^T \quad (2.33)$$

où π_i est la probabilité (en régime permanent) de trouver l'état \underline{F} dans la configuration \underline{F}_i . Pour l'instant, on ne connaît pas de méthodes analytiques pour déterminer le régime permanent résultant. On utilise donc des méthodes de simulation qui reproduisent le comportement du système.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les problèmes d'affectation de trafic ont été présentés de manière générale pour tous les réseaux de transport. Ils font apparaître deux types d'équilibre : l'équilibre utilisateur et l'équilibre système selon la nature du réseau. Lorsque les utilisateurs de réseau effectuent individuellement un choix de routes et d'heures de départ, ils cherchent à minimiser leurs coûts de transport et la répartition du trafic tend vers un équilibre utilisateur. Au contraire, si un gestionnaire du réseau est habilité à orienter le trafic, on s'approche d'un équilibre système qui est plus performant en terme de réduction de congestion. En trafic aérien, on retrouve cette différence stratégique entre les objectifs des gestionnaires de trafic (services ATC et ATFM) et ceux des compagnies aériennes. Aujourd'hui, l'allocation de créneaux horaires, pour étaler la demande de trafic dans le temps, ne suffit plus à traiter le problème de saturation de l'espace aérien. Dans l'avenir, pour assurer une meilleure utilisation de l'espace aérien, les organismes de gestion de trafic devront prendre des mesures de régulation plus fortes. Dans le chapitre suivant, nous verrons comment la mise en place d'un mécanisme de tarification contribue à une meilleure répartition de la demande, et par conséquent, à une meilleure utilisation des capacités du réseau. En ce qui concerne le modèle d'affectation à utiliser pour traiter le problème de tarification dynamique des secteurs aériens, on peut noter les points suivants :

- Il ne semble pas utile de considérer une demande élastique. En effet, l'objectif de la tarification n'est pas de réduire le trafic, mais de mieux répartir les vols dans le temps et sur les routes.
- Le modèle doit traduire un équilibre utilisateur puisqu'il doit refléter le comportement des compagnies aériennes.
- La dépendance entre les débits sur le réseau et le coût d'un arc pour une compagnie semble difficile à établir. Mais si le coût d'arc est considéré comme indépendant des débits, un modèle déterministe présente un comportement tout ou rien. Il est donc préférable d'utiliser un modèle stochastique pour pouvoir expliquer une utilisation non optimale des routes et des créneaux.
- L'aspect dynamique provient essentiellement de la variation de la demande au cours de la journée. Cependant les queues ne se forment pas sur les arcs mais aux origines. En effet, la gestion du trafic aérien impose des retards au sol. Il convient donc, soit de négliger l'aspect de formation des queues, soit de développer un modèle différent de ceux trouvés dans la littérature.

En conclusion, le modèle doit traduire un équilibre utilisateur stochastique pour une demande non élastique. L'aspect dynamique lié à la variation de la demande dans la journée doit y être intégré.

Chapitre 3

La tarification de la congestion

3.1 Introduction

Ce chapitre présente différentes études portant sur la tarification en présence de congestion. Ces études ont d'abord concerné le transport routier. D'autres plus récentes traitent des problèmes de congestion en transport aérien. On parle d'encombrement ou de congestion d'un réseau (réseau téléphonique, réseau de distribution d'électricité, réseau routier, réseau aérien) quand le nombre d'utilisateurs du réseau dépasse la capacité du réseau (trop de communications téléphoniques au même moment, demande en électricité trop grande, trop de voitures sur une route, trop d'avions dans un même secteur de l'espace au même moment). Ce phénomène de congestion se traduit par exemple, par des embouteillages sur les routes, par un retard au décollage des avions. L'utilisation de périodes tarifaires en téléphonie (appel moins cher le soir que pendant les heures de travail), la pratique de tarifs de consommation électrique différents suivant l'heure de la journée (heures pleines, heures creuses) pour mieux répartir la demande sont deux exemples de tarification en présence de congestion. L'exemple le plus couramment cité et le plus souvent étudié concerne la mise en place de péages sur le réseau routier. Les problèmes opérationnels, notamment les problèmes de congestion, posés par l'exploitation du réseau routier sont souvent semblables à ceux du réseau aérien. La première partie de ce chapitre est donc consacrée aux études menées sur la tarification de la congestion en transport routier. Plus récent et en plein essor, le réseau d'échanges d'informations que représente l'Internet, est soumis lui aussi aux problèmes de congestion. Il semble intéressant de voir quelles sont les solutions tarifaires envisagées. Plus proche de nos préoccupations, nous nous intéressons aux systèmes de tarification mis en place pour supporter le coût des installations et du contrôle aérien, et traiter le problème de congestion aéroportuaire.

3.2 La tarification de la congestion en transport routier

La réponse traditionnelle aux problèmes de congestion routière est la construction de nouvelles routes. Mais ces mesures sont souvent coûteuses, s'opposent aux défenseurs de l'environnement et présentent des contraintes physiques difficilement surmontables. L'attention

s'est donc portée sur des mesures qui visent à une meilleure utilisation du réseau existant. Parmi ces mesures, on peut citer, l'amélioration du système de feux de circulation, la mise en place de systèmes d'information (panneau à messages variables) pour informer les usagers sur les conditions de trafic. Plutôt que d'augmenter l'offre, agir sur la demande semble mieux répondre aux problèmes de congestion. Il existent plusieurs modèles de tarification en présence de congestion. Cette partie présente les principaux.

3.2.1 Modèles de tarification de la congestion

La tarification des routes, présentée comme un moyen efficace pour orienter la demande et apporter des revenus supplémentaires pour l'entretien ou la construction de nouvelles voies, a été largement étudiée par des chercheurs en transport et par des économistes [AS94]. Certaines simulations, à partir de modèles de comportement, ont montré une sensibilité immédiate à la tarification routière. Les observations à Singapour et les simulations à Hong-Kong montrent que deux tiers des automobilistes se dirigeant vers le centre soumis à péage changent de mode de transport en faveur des transports collectifs, la majorité des restants se déplaçant à d'autres heures que celles soumises à péage, lorsque le péage est modulé dans le temps. Ces simulations conduisent à conclure à l'efficacité d'un péage généralisé comme moyen de lutte contre la congestion et comme moyen de financement procurant des recettes non négligeables.

Il y a en général deux classes de modèles de tarification de la congestion dans la littérature : modèles statiques et modèles dynamiques pour différencier les cas où les taxes de congestion varient ou non au cours du temps. La théorie de la tarification au coût marginal a été la principale approche utilisée pour traiter les problèmes de congestion du trafic. Pour atteindre l'équilibre système, l'utilisateur devrait payer non seulement le coût (en temps et en argent) que le trajet lui coûte effectivement mais aussi le coût de retard supplémentaire qu'il impose aux autres usagers en décidant de voyager. On parle alors d'internalisation de l'externalité constituée par la congestion. Ce coût de retard peut être prélevé sous forme d'une taxe. En transport, la taxe prélevée à l'utilisateur pour accéder ou traverser une route est appelée péage. Dans la suite, on utilisera indifféremment les termes taxe ou péage. Dans la littérature, il existe plusieurs termes économiques pour présenter la théorie de la tarification au coût marginal. Dans ce rapport, les définitions suivantes sont retenues :

- **Coût marginal privé** = Coût de transport supporté par l'utilisateur additionnel
- **Coût marginal social** = Coût marginal privé + coût supplémentaire imposé à tous les utilisateurs par l'utilisateur additionnel

Ces définitions sont un peu formelles. Pour illustrer cette théorie, examinons le cas d'une route à forte circulation. Dans des conditions idéales, le trafic s'écoule normalement. Mais quand la densité de trafic devient plus élevée, l'addition d'un ou plusieurs autres véhicules ralentit la circulation et augmente la durée du trajet des autres véhicules. A ce stade, la congestion apparaît. Les courbes de coûts présentées sur la figure 3.1 illustrent ce mécanisme. L'axe vertical mesure les coûts au kilomètre par véhicule et l'axe horizontal le nombre de véhicule par heure. La courbe désignée par *CMP* pour coûts marginaux privés, correspond au coût que chaque usager subit (consommation de carburant, temps d'utilisation de la voiture, coût de congestion qu'il s'impose à lui-même). L'autre courbe

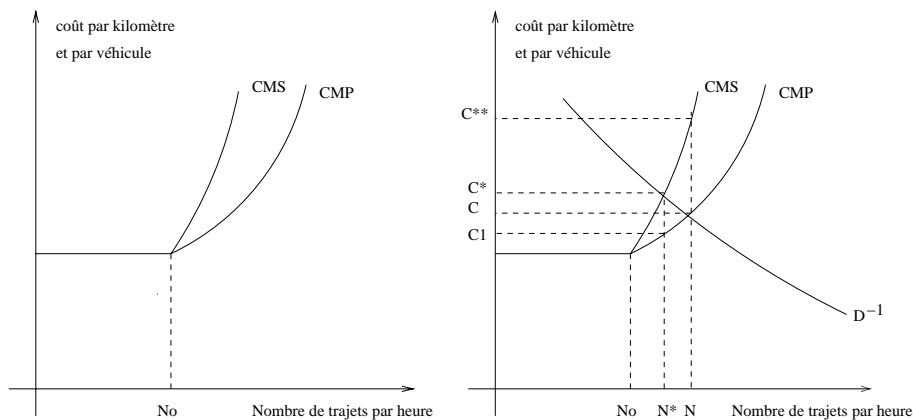


FIG. 3.1 – Coûts marginaux et demande

désignée par CMS pour coûts marginaux sociaux comprend les coûts marginaux privés plus les coûts que chaque usager impose aux autres. Sur l'axe horizontal à gauche de No , les courbes coïncident, et les voitures circulent avec fluidité. Mais à droite de No , la congestion s'installe et les deux courbes se séparent. La courbe CMS croît plus vite que la courbe CMP car en situation de congestion, l'addition de véhicules supplémentaires augmente la consommation de carburant, la durée de trajet des usagers. La fonction de demande représente le nombre d'automobilistes prêts à payer le prix w pour circuler : $N = \mathcal{D}(w)$. On peut ajouter sur le graphique l'inverse de la courbe de demande. Le point d'intersection de la courbe des coûts marginaux privés avec la courbe de demande inverse fait apparaître un coût unitaire C . Dans ce cas, il y a N trajets par heure effectués. Cependant, au point N , les usagers paient C pour effectuer leur trajet au lieu de C^{**} , le prix qui inclut les coûts de congestion imposés aux autres usagers. Si les usagers devaient payer pour la congestion qu'ils imposent aux autres, N^* deviendrait le nombre optimal de trajets. Ceci correspond au point d'intersection des courbes \mathcal{D}^{-1} et CMS . Les durées de transport seraient réduites par une diminution de $N - N^*$ trajets. Pour ce faire, un péage égal à la différence entre CMS et CMP à N^* , soit $C^* - C_1$, devrait être collecté.

Modèles statiques

Walters [Wal61] a appliqué la théorie de la tarification au coût marginal pour calculer des péages sur un réseau de routes. Il a aussi suggéré d'ajouter des taxes sur le carburant, et sur le kilométrage. Dafermos et Sparrow [DS71] ont développé un modèle statique de tarification de la congestion pour déterminer un système de péages optimal sur des réseaux de trafic routier et ont proposé deux formes de péages : des péages collectés sur des arcs du réseau et des péages collectés sur des chemins. Ils ont montré qu'un système de péages pouvait influencer le choix des usagers en terme de routes et pouvait conduire à utilisation du réseau optimale du point de vue système. Dafermos [Daf73] a appliqué la théorie de la tarification au coût marginal pour déterminer les montants des péages sur un réseau avec plusieurs classes d'utilisateurs. Smith [Smi79] a montré que la tarification au coût

marginal était optimale si les fonctions de coûts et de demande répondaient à certaines conditions. Il a généralisé le principe de tarification aux cas où les fonctions de coûts et de demande étaient non séparables. Un exemple simple avec deux routes présenté sur la figure 3.2 permet de mieux comprendre les études menées. Notons f_1 la valeur du flux sur

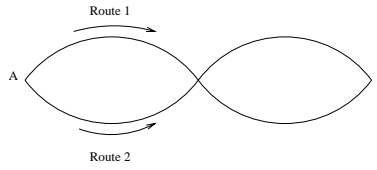


FIG. 3.2 – Réseau avec 2 routes

la route 1 et f_2 sur la route 2. A chaque distribution de flux correspond un coût sur chaque route : $c_1(f_1, f_2)$ et $c_2(f_1, f_2)$. L'équilibre système est obtenu par la résolution du problème d'optimisation :

$$\text{Min}_{f_1, f_2} \quad J = \text{Min} \quad f_1 c_1(f_1, f_2) + f_2 c_2(f_1, f_2) \quad (3.1)$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} f_1 &\geq 0 \\ f_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Les conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker liées au problèmes sont :

$$\exists \mu_1, \mu_2 \geq 0 \text{ tels que :}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial f_1} - \mu_1 &= 0 \\ \frac{\partial J}{\partial f_2} - \mu_2 &= 0 \\ \mu_1 f_1 &= 0, \quad \mu_2 f_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} c_1(f_1, f_2) + f_1 \frac{\partial c_1}{\partial f_1} + f_2 \frac{\partial c_2}{\partial f_1} - \mu_1 &= 0 \\ c_2(f_1, f_2) + f_1 \frac{\partial c_1}{\partial f_2} + f_2 \frac{\partial c_2}{\partial f_2} - \mu_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Si $f_1 > 0$ et $f_2 > 0$, alors $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 = 0$, on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} c_1(f_1, f_2) + f_1 \frac{\partial c_1}{\partial f_1} + f_2 \frac{\partial c_2}{\partial f_1} &= c_2(f_1, f_2) + f_1 \frac{\partial c_1}{\partial f_2} + f_2 \frac{\partial c_2}{\partial f_2} \\ c_1(f_1, f_2) + \tau_1(f_1, f_2) &= c_2(f_1, f_2) + \tau_2(f_1, f_2) \\ C_1 &= C_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Si $f_1 = 0$ et $f_2 > 0$, $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 = 0$, on a :

$$\begin{aligned} C_1 - \mu_1 &= C_2 \\ C_1 &> C_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Si $f_1 > 0$ et $f_2 = 0$, $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 > 0$, on a :

$$\begin{aligned} C_1 &= C_2 - \mu_2 \\ C_2 &> C_1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Il suffit donc de faire payer une taxe τ_1 aux utilisateurs de la route 1 et une taxe τ_2 aux utilisateurs de la route 2 pour retrouver les conditions de l'équilibre utilisateur (voir partie 2.2, page 35). Sur cet exemple et sous les conditions de dérivabilité des fonctions coûts, on montre qu'il existe un couple de prix (τ_1, τ_2) (péage collecté sur chaque route) qui amène l'équilibre utilisateur à l'équilibre système. Sous des conditions semblables, le propos peut être généralisé aux réseaux avec plusieurs routes et plusieurs origines et destinations. La taxe sur la route j est définie par :

$$\tau_j(f_1, f_2, \dots, f_n) = \sum_{i=1}^{i=n} f_i \frac{\partial c_i}{\partial f_j}(f_1, f_2, \dots, f_n) \quad (3.7)$$

où f_i est le flux présent sur la route i . Cette taxe peut être interprétée comme la différence entre le coût marginal social et le coût marginal privé :

$$\tau_j = \text{coût marginal social} \left(\frac{\partial C_{tot}}{\partial f_j} \right) - \text{coût marginal privé} (c_j)$$

où $C_{tot} = \sum_j f_j c_j$ désigne le coût total de transport. Les travaux mentionnés précédemment proposent des expressions analytiques pour la tarification et se placent dans des situations idéales. Dans la réalité, la tarification est sujette à divers types de contraintes et l'équilibre système n'est pas toujours atteint. Récemment, Yang et Lam [YL96], Yang et Bell [YB97] ont utilisé une technique de programmation à deux niveaux pour obtenir des péages de routes optimaux avec des contraintes de capacités sur les arcs. Le problème de tarification de la congestion est présenté comme un jeu de Stackelberg [YL96][YB97], jeu meneur-suiveur. Le pilote du réseau (par exemple l'État) est le meneur et les usagers du réseau sont les suiveurs. Le gestionnaire du réseau peut influencer les choix des routes des utilisateurs par la mise en place d'une politique de tarification. En fonction des péages mis en place, les usagers prennent leurs décisions de manière à satisfaire leurs propres intérêts (équilibre utilisateur). L'interaction entre les deux parties se formule comme un problème d'optimisation à deux niveaux :

$$\text{Min}_{\mathbf{u}} F(\mathbf{u}, \mathbf{v}(\mathbf{u})) \quad (3.8)$$

$$\text{sous } G(\mathbf{u}, \mathbf{v}(\mathbf{u})) \leq 0$$

où $\mathbf{v}(\mathbf{u})$ est défini par :

$$\text{Min}_{\mathbf{v}} f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (3.9)$$

$$\text{sous } g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq 0$$

- F fonction objectif du meneur (agent extérieur)
- \mathbf{u} vecteur de décision du meneur (montant des péages)
- G ensemble des contraintes sur les décisions du meneur
- f fonction objectif du suiveur (usagers du réseau)
- \mathbf{v} vecteur de décision du suiveur (flux dans le réseau)
- g ensemble des contraintes sur les décisions du suiveur

Le meneur cherche à maximiser un critère de performance F en choisissant une structure de péage adaptée (montant des taxes prélevées sur certains arcs du réseau). Plusieurs stratégies de tarification peuvent être utilisées. Les objectifs les plus courants sont :

- Minimiser le coût total de transport sur le réseau et les temps d'attente
- Maximiser le gain obtenu par le prélèvement des taxes

Dans le premier cas, la tarification a pour seul but de réduire la congestion. Dans l'autre, la tarification est un moyen de générer de nouveaux revenus pour financer éventuellement de nouvelles infrastructures ou entretenir celles en place. On peut construire des fonctions objectif prenant en compte ces deux tendances. Les usagers du réseau, avec une complète connaissance des tarifs appliqués, choisissent la meilleure route de façon à minimiser leurs coûts. Le problème de 2ème niveau se formule comme un problème d'équilibre utilisateur classique avec des contraintes de capacité sur les arcs pour rendre compte de la saturation possible de certains axes.

Modèles dynamiques

La seconde classe de modèles de tarification de la congestion est dynamique : les péages sont modulés dans le temps. La première approche, développée par Vickrey [Vic69], consiste à utiliser un péage modulé dans le temps sur une voie encombrée (goulot d'étranglement). Vickrey a montré que les usagers modifient leur date de départ en fonction du montant du péage et réalisent un compromis entre arriver tôt ou tard sur leur lieu de travail, subir un temps de parcours élevé et payer une taxe de passage. Henderson [Hen74] a utilisé un modèle de flots avec des courbes vitesse-densité. Il a montré que des péages modulés dans le temps influencent les décisions des usagers en terme d'heure de départ et conduisent à une organisation du trafic plus efficace par rapport à une situation sans péage. Pour définir un péage sur un goulot d'étranglement, Agnew [Agn77] a appliqué la théorie de la commande optimale en trouvant une définition correcte des coûts marginaux pour le modèle dynamique. Ben-Akiva et al. [BAPK86] ont développé un modèle de simulation de trafic sur un réseau avec une seule paire Origine-destination, plusieurs routes parallèles, et des goulots d'étranglement sur chacune des routes. Le choix des usagers est décrit par un modèle Logit (voir annexe A). Ce modèle est utilisé, entre autres, pour analyser l'impact des taxes sur la congestion. Sur un exemple avec deux routes, ils montrent qu'il existe un profil de taxes qui minimise la congestion. Arnott et al. [APL90b] [APL90a] ont examiné l'effet de péages modulables dans le temps sur un réseau avec une route ou deux routes parallèles. Carey et Srinivasan [CS93] ont calculé les coûts marginaux sociaux, les coûts marginaux privés pour des réseaux congestionnés en utilisant les conditions de Kuhn-Tucker. Ils ont obtenu un ensemble de péages optimal qui pourrait être utilisé pour passer d'un équilibre utilisateur à un équilibre système. Ils ont montré qu'une analyse statique de la congestion pourrait

être inapproprié car les péages résultants ne prennent pas en compte le taux de croissance et de décroissance de la congestion. Récemment, Huang et Yang [HY96] ont formulé un modèle de tarification de la congestion avec des péages modulés dans le temps pour des réseaux congestionnés avec des routes parallèles et une demande élastique en utilisant la théorie de la commande optimale. La plupart des modèles de tarification dynamiques se limitent à l'étude d'un péage sur un goulot d'étranglement ou sur des réseaux avec une seule destination. Wie et Tobin [WT98] ont étendu le modèle à un réseau avec plusieurs paires OD. Ils ont déterminé un péage modulable dans le temps en s'appuyant sur une formulation convexe du problème d'affectation système.

3.2.2 Quelques applications

Si un grand nombre d'études est mené sur la tarification de la congestion, sa mise en place reste encore timide. L'exemple le plus significatif de péage urbain est celui de Singapour [APL94]. Il est opérationnel depuis 1975. Les automobilistes traversant la zone hypercentre de la ville pendant les périodes de pointe (le matin entre 7h30 et 10h15, l'après-midi entre 16h30 et 18h30) doivent payer une taxe d'un montant fixe [San94]. Hong-Kong, ville fortement congestionnée, a joué le rôle de ville pilote en 1985 pour tester l'efficacité d'un schéma de tarification. Dans ce projet, 2500 véhicules équipés de cartes électroniques étaient taxés en traversant les 18 zones de péages installées en bordure du centre-ville. Le montant de la taxe était variable, suivant l'heure de passage et la localisation du péage. Pour des raisons politiques, ce projet n'a pas donné suite. Mais face à un problème de congestion toujours croissant, la mise en place d'un péage à Hong-Kong est de nouveau à l'étude. Outre les péages urbains, les péages "d'infrastructure" pour emprunter une voie rapide ou un tunnel se sont développés. Aux États-Unis, un système de péage modulé dans le temps pour la traversée du pont de la baie d'Oakland à San Francisco a pour double objectif, la réduction de la congestion aux heures de pointe et l'augmentation de la demande aux heures creuses. En France, un péage à modulation tarifaire a été mise en place sur l'autoroute A1 pour réduire les bouchons à l'arrivée sur Paris aux heures de pointe les retours de week-end [BC99]. En période de pointe, soit de 16h30 à 20h30, le tarif est le tarif normal augmenté de 25%. Avant et après cette période, soit de 14h30 à 16h30 et de 20h30 à 23h30, le tarif devient le tarif normal moins 25%. Avec ce principe de tarification, le trafic en période de tarif accru a occupé une part déclinante du trafic total. L'expérience montre qu'il existe bien une élasticité de la demande au prix et que cette sensibilité permet une certaine régulation du trafic.

3.3 La tarification de l'Internet

Internet est un réseau qui permet d'échanger des informations. Les applications de l'Internet demandent de plus en plus de débit (bande passante), ce débit étant limité, le réseau est parfois saturé : certains paquets d'informations sont perdus ou retardés. L'Internet est assimilable à un réseau routier dans lequel la circulation des informations doit être le plus fluide possible. Comme en transport routier, la tarification se présente comme un moyen de réduire la congestion. Les économistes ont proposé différents modèles de tarification afin

d'allouer au mieux la ressource rare (la bande passante) entre les utilisateurs. La solution théorique au problème de congestion est la tarification au coût marginal. Elle consiste à établir une taxe de congestion de telle sorte qu'en comparant son bénéfice marginal à son coût marginal privé plus la taxe, chaque utilisateur puisse prendre une décision socialement optimale. Dans ce contexte, l'utilisateur est vu comme un consommateur d'unités de service fournies par Internet. Le coût marginal correspond au supplément de coût engendré par la consommation d'une unité de service supplémentaire. Le bénéfice marginal au bénéfice perçu pour la consommation d'une unité supplémentaire.

3.3.1 La tarification dynamique

Le modèle de référence en tarification dynamique pour l'Internet est celui de Gupta, Sthal et Whinston [GSW97]. Il s'agit d'une représentation complexe d'un réseau d'ordinateurs qui comprend un modèle de prix dynamique, une demande de services qui varie au cours du temps et un modèle stochastique de flux de trafic. Dans ce modèle, l'utilisateur qui se connecte à Internet, se voit proposer un menu d'options incluant le coût monétaire et une durée estimée pour utiliser chacun des services. Les prix sont réajustés toutes les T unités de temps en fonction de la demande et des durées de service estimés. Les résultats obtenus avec un modèle de simulation montrent l'efficacité d'un tel schéma de tarification pour réduire les délais d'acheminement et satisfaire les intérêts des utilisateurs.

3.3.2 La tarification statique

Contrairement à la tarification dynamique où les prix varient en fonction des conditions de trafic, la tarification statique propose une table de prix indépendants de l'état de congestion du réseau. Dans ce contexte, Cocchi et al. [CSEL93] étudient un modèle de priorité pour accéder à différentes classes de service et une tarification associée. L'idée est de faire choisir aux usagers un ordre de priorité par le biais d'une tarification différenciée. Selon la nécessité que l'information (courrier électronique, fichiers, etc) soit transmise rapidement ou non, l'utilisateur choisira une priorité plus ou moins élevée et paiera un prix pour cette priorité (prix plus élevé pour une priorité plus forte). Les simulations réalisées sur des réseaux simples montrent qu'il est possible de fixer des prix pour satisfaire les intérêts des utilisateurs qui, en choisissant un ordre de priorité, réalisent un compromis entre le coût de la priorité et celui du retard. Dans la partie suivante, nous verrons que ce système des priorités a été également étudié pour la tarification du contrôle aérien.

3.3.3 Le mécanisme d'enchère

Selon Mackie-Mason et Varian [MMV95], la tarification optimale de la congestion peut être obtenue à l'aide d'une enchère où les utilisateurs ont intérêt à révéler leur disposition à payer pour un service plus rapide. Le mécanisme d'enchère utilisé s'inspire du modèle d'enchère de Vickrey ("second-price auction"). Dans ce modèle, les enchères se font à bulletins secrets. L'objet mis en vente est attribué à l'enchérisseur de la plus haute annonce. Il achète l'objet au prix de la deuxième offre. Par exemple, si l'individu A offre 10 francs,

l'individu B 15 francs et l'individu C 20 francs, c'est C qui emporte le bien au prix de 15 francs. Ce principe peut être appliqué à l'Internet quand les utilisateurs veulent effectuer un certain nombre de tâches dans un temps limité. Chaque utilisateur annonce un prix pour que sa tâche soit traitée. Les enchères sont triées par ordre décroissant de prix et les tâches sont réalisées dans cet ordre. Le prix à payer pour une tâche traitée est celui de la première tâche qui n'a pas pu être traitée pendant le temps imparti. Si toutes les tâches sont traitées, le prix est nul. Ce système d'enchère est révélateur. En effet, en augmentant l'offre, l'utilisateur augmente les chances de voir sa tâche traitée, mais il n'a pas intérêt à annoncer une offre plus élevée que la valeur qu'il accorde à la tâche. Pour Mackie-Mason et Varian, ce système d'enchères, encore appelé "smart market" pourrait être mis en place par les opérateurs sur le réseau aux points de congestion potentiels. Mais son application présente plusieurs inconvénients. Le traitement des enchères peut s'avérer long et complexe et dans des situations où il y a un grand nombre de tâches à effectuer, il faut tenir compte du lien entre les enchères précédentes et les suivantes.

Qu'il s'agisse de l'Internet, du réseau routier ou aérien, la question reste la même. Comment orienter la demande pour diminuer les retards? Ce n'est donc pas étonnant que les méthodes de tarification développées en trafic routier et pour l'Internet soient reprises en trafic aérien pour solutionner les problèmes de congestion.

3.4 La tarification en trafic aérien

Avant de présenter les études menées sur la tarification pour le trafic aérien en présence de congestion, il est important de rappeler les spécificités de la tarification déjà existante dans ce domaine [Bon94]. Pour chaque vol, les compagnies aériennes paient une taxe de décollage et une taxe d'atterrissage aux aéroports concernés et versent une redevance de route pour le service de contrôle aérien. Les redevances aéroportuaires couvrent les coûts des installations (aéroports, pistes, ...) et des services fournis par l'aéroport. La redevance de route sert à financer les services de la navigation aérienne, c'est-à-dire essentiellement le contrôle et tout ce qui s'y rattache, mais aussi les services annexes comme la météo. En général, les redevances aéroportuaires ou de la circulation aérienne ne sont pas liées directement à la congestion. Si une modulation des redevances (tarification plus élevée en période de pointe) a été mise en place sur certains aéroports (Heathrow et Gatwick), et fait l'objet de plusieurs études, la construction d'un mécanisme de tarification pour diminuer la congestion en route mérite réflexion. Cette partie dresse le bilan de l'existant en terme de redevances aériennes et présente les études portant sur la tarification de la congestion en trafic aérien.

3.4.1 La tarification aéroportuaire

Les redevances aéroportuaires

Les redevances aéroportuaires couvrent l'utilisation d'un grand nombre d'installations et de services. Les installations d'atterrissage, d'éclairage, de stationnement, d'avitaillement

et de stockage sont financées par les redevances aéroportuaires. Les redevances couvrent les frais des services concernant l'aéronef, les passagers et les marchandises. Il n'y a pas de norme qui fixe le calcul et le montant de ces redevances et elles peuvent varier sensiblement d'un État à l'autre et parfois d'un aéroport à l'autre dans le même État. Cependant, certains critères sont couramment employés. Bien souvent, l'origine ou la destination du vol est pris en compte pour le calcul des taxes d'atterrissage, de passagers et d'éclairage. En particulier, une distinction est faite entre les vols intérieurs et les vols internationaux. Les redevances d'atterrissage et de stationnement tiennent compte de la masse de l'aéronef, souvent du poids maximal au décollage. La redevance de stationnement est fonction du nombre d'heures. La classe sonore de l'aéronef peut être aussi retenue pour le calcul des redevances de bruit si elles existent ou pour le calcul de la redevance d'atterrissage si celle-ci est modulée en fonction des émissions sonores de l'aéronef. La redevance passager peut dépendre du nombre de passagers, de leur âge et parfois de la distance de vol [Com98].

Les redevances pour heures de pointe

Certains aéroports perçoivent des redevances d'atterrissage ou de décollage spéciales pendant les périodes de pointe. Ces redevances plus élevées que d'ordinaire sont imposées de façon égale à l'ensemble du trafic circulant durant les heures de pointe (en conformité avec l'article 15 de la *Convention de Chicago* relative à l'aviation civile internationale). Ces redevances ont pour objectif d'encourager le trafic aérien à délaissé les heures de pointe pour des périodes d'encombrement moindre. En plus de gérer les problèmes de capacité des aéroports, cette méthode permet de couvrir les coûts de mise à disposition d'installations et de services supplémentaires rendus nécessaires pour une utilisation accrue de l'aéroport en période de pointe. Le système de redevances pour heures de pointe est en vigueur dans 28 aéroports, surtout en Europe mais aussi en Amérique Centrale et du Sud et aux Caraïbes. Ce système de redevances n'apporte pas tous les effets escomptés car les redevances aéroportuaires ne représentent qu'une faible partie des coûts d'exploitation totaux des compagnies (environ 4 %). Mais le cas de Londres est plutôt encourageant car depuis la mise en service progressive de ce système, la proportion d'atterrissage en heure de pointe par rapport au nombre total d'atterrissages a fortement diminué. Ce qui laisse entendre que la tarification permet d'infléchir la demande. Et même si l'acceptabilité d'un tarif n'est pas immédiate, la tarification est un mode de régulation de la congestion qui peut s'avérer au moins aussi bon que la réglementation¹.

Les modèles de tarification de la congestion aéroportuaire

Les modèles de file d'attente utilisés en trafic routier pour modéliser la congestion et calculer des taxes de congestion ont été repris et adaptés au trafic aérien, pour traiter,

1. Pour exemple, en 1967, une tarification différenciée en heures de pointe entre les petits appareils et les gros transporteurs fut mise en place aux gros aéroports de New-York pour détourner les petits avions vers les aéroports périphériques. Les pilotes utilisateurs de ces derniers protestèrent contre la discrimination dont ils étaient l'objet mais les tribunaux légitimèrent ce type de tarification en indiquant que la modulation tarifaire n'était pas une mesure plus discriminatoire que des systèmes de quotas réduisant le nombre de mouvements.

notamment, les problèmes de congestion aéroportuaire. Les travaux de Daniel et Jansson en sont l'exemple.

– Modèles de Daniel

Daniel [Dan97] présente trois modèles de tarification de la congestion et les applique à des données réelles de trafic aéroportuaire.

- Le premier modèle inspiré des travaux de Morisson et Winston [MW89] correspond à une tarification de pointe utilisant des fonctions de coût, de demande et de retard simplifiées.
- Le deuxième modèle repose sur un modèle de queue déterministe développé par Vickrey [Vic69] pour traduire le comportement des automobilistes qui se rendent au travail et empruntent une voie congestionnée. Ici, le modèle de queue s'applique à l'attente des avions désirant atterrir sur un aéroport approximativement à la même heure. La limitation de capacité empêche les avions d'atterrir tous en même temps. Pour calculer le montant des taxes à appliquer pour étaler les arrivées, le problème est formulé mathématiquement (voir annexe B).
- Le troisième modèle est une extension du précédent avec une modélisation stochastique des queues.

Ces trois modèles sont utilisés pour calculer des taxes de congestion pour l'aéroport de Minneapolis-St.Paul. Les résultats obtenus attestent de l'efficacité des prix sur la réduction des retards. Le troisième modèle reflète mieux la réalité. Mais l'approche de Daniel se limite au cas d'aéroports "hub" où tous les avions ont le même horaire préférentiel d'arrivée et de départ à l'intérieur d'une courte période. Il faudrait pouvoir l'étendre à des aéroports où les arrivées et les départs suivent des horaires plus complexes.

– Modèles de Jansson

Jansson [Jan98] développe deux modèles de queue pour traduire la congestion aéroportuaire et calcule pour chacun d'eux le montant des taxes à appliquer pour réduire la congestion en utilisant le principe de la tarification au coût marginal (voir annexe C). Il montre que l'application d'une taxe de congestion provoque une diminution de la demande et qu'une réduction de 10% de la demande suffit à réduire les retards de 90%. Si la tarification au coût marginal se présente comme un bon moyen de réduire la congestion, ce principe est en réalité très peu appliqué aux aéroports à cause des difficultés de calcul du coût marginal qui nécessite d'avoir une bonne estimation de la fonction de demande et des coûts de retard et de connaître avec précision le temps de service, variable suivant les conditions météorologiques. Aux U.S.A, la tarification au coût marginal fait aussi l'objet d'une sévère résistance de la part de l'aviation privée, qui ne pouvant pas payer des taxes trop élevées, serait dans l'obligation de délaissier les heures de pointe.

– Modèle d'Odoni

Un modèle de tarification de pointe applicable à l'aéroport de Boston-Logan est proposé dans [BMS⁺]. La recherche d'une politique de tarification sur cet aéroport

s'articule en quatre étapes. La première étape consiste à identifier la période de pointe, c'est-à-dire les heures pour lesquelles le nombre d'opérations demandées excède de 20% la moyenne journalière. Dans un deuxième temps, il s'agit de définir une structure de redevance aéroportuaire. Les taxes d'atterrissage ou de décollage se décomposent en trois parties :

- une taxe variable suivant le poids ou à la taille de l'avion
- une taxe pour le service d'atterrissage ou de décollage (dépendante du type d'avion)
- une taxe applicable seulement en période de pointe

L'étape suivante est l'estimation de l'impact de cette nouvelle structure de prix sur le trafic. Si ce principe de tarification de pointe était introduit, l'étude montre que 15% des opérations prévues en période de pointe seraient, soit déplacées à d'autres périodes (5%), soit annulées (10%). L'analyse se poursuit par une estimation de la réduction des retards engendrée par cette tarification. Les retards en période de pointe devraient être réduits de 10000 heures par an et représenter une économie annuelle de 13 millions de dollars pour les compagnies. Si les gains sont significatifs, la mise en place d'une telle tarification doit se faire sous certaines conditions. Il s'agit de bien mesurer la congestion et la sensibilité des compagnies aux différences de prix.

Remarques

En dehors des principes de tarification de pointe pour lisser la demande et éviter l'encombrement des aéroports à certaines heures, il existe un débat de fond portant sur l'attribution des créneaux aéroportuaire. En effet, les difficultés croissantes dues au manque de créneaux répondant à la demande remettent en cause le système actuel. Celui-ci reconnaît comme "acquis" par la compagnie, un créneau qu'elle a utilisé au cours d'une saison précédente équivalente. Ce système pourrait être amené à disparaître au profit d'autres règles. Par exemple, la vente aux enchères des créneaux est une option envisagée. La mise en pratique de ce principe n'est pas clairement définie, mais quelques études ont déjà été menée à ce sujet [GPV93][RSB82]. L'effet attendu est un meilleur usage des créneaux rares.

3.4.2 La tarification du contrôle en route

Les redevances de route

Les usagers de l'espace aérien (aviation militaire et civile) paient des redevances pour l'utilisation des routes aériennes. Les redevances de route permettent de supporter le coût de contrôle du trafic aérien. En Europe, ce coût atteignait 18.5 GF en 1996 et représentait environ 4% des coûts d'exploitation des grandes compagnies. Le principe de calcul des redevances de route est commun à tous les États membres d'Eurocontrol. Le montant prélevé (PA) est déterminé en tenant compte d'un taux unitaire (TU), de manière proportionnelle à la distance D (en kilomètres) et en fonction de la racine carrée de la masse M de l'aéronef

(en tonnes) :

$$PA = TU \times \frac{D}{100} \times \sqrt{\frac{M}{50}} \quad (3.10)$$

Le taux unitaire de redevance (ex : 52.42 euros pour la France en mai 2001) est calculé de manière prévisionnelle chaque année par chaque État afin d'assurer l'équilibre budgétaire des services de navigation aérienne (en fonction des prévisions de trafic et du budget prévisionnel). Le calcul des redevances se fait sur la base de la route décrite dans le plan de vol en tenant compte des changements apportés par l'exploitant ou approuvés par celui-ci suite à des mesures de gestion des flux de trafic. Le service central des redevances d'Eurocontrol se charge de centraliser le paiement des redevances de route et de reverser à chaque État adhérent la part qui lui revient. La plupart des pays du monde ont adopté un système de redevances en route similaire à celui-ci, mais les facteurs, distance et masse, ne reflètent pas au mieux les coûts et ont tendance à favoriser la concentration des vols sur les routes les plus courtes. Il ne faut pas perdre de vue que la charge de travail des contrôleurs qui influe sur les coûts des services de navigation, dépend aussi des secteurs traversés et du nombre d'avions dans ces secteurs.

La tarification de la congestion en-route

Les redevances de route actuelles ne sont pas liées à l'état de congestion des secteurs. Ce principe pourrait bien être révisé afin de promouvoir un meilleur usage de l'espace aérien. Par exemple, les redevances pourraient être plus élevées sur les routes aériennes encombrées et le montant des taxes pourrait être dépendant de l'heure de la journée. Eurocontrol [Eur00],[Eur98a], étudie la possibilité de tarifier différemment l'utilisation de l'espace aérien. Mais très peu d'études ont été menées à ce jour sur la tarification de la congestion en-route. C'est un domaine nouveau qui reste largement ouvert à l'exploration. Dans la thèse de Lenoir [Len95], plusieurs solutions économiques aux problèmes de la congestion de l'espace aérien sont passées en revue et évaluées. Les tarifs dits de pointe étant peu adaptés à la structure spatiale du contrôle aérien, un système de tarification des priorités est recommandé. Comme pour le réseau Internet, l'idée est de fixer plusieurs niveaux de priorités, d'établir un prix pour chaque niveau de priorité et de faire choisir par les usagers un niveau de priorité. Concrètement, ce système pourrait être mis en oeuvre de la manière suivante : au dépôt du plan de vol, c'est-à-dire quelques heures avant le décollage, la compagnie aurait connaissance des niveaux de priorité disponibles, des prix associés à chacun des niveaux, et du retard moyen estimé pour chaque niveau. A partir de ces informations, elle serait capable d'arbitrer entre le coût de la priorité et celui du retard estimé. Le créneau de décollage de l'avion serait alors alloué en fonction de la priorité choisie par la compagnie. Ce système présente l'avantage de laisser à chaque compagnie le soin de choisir ce qui lui convient le mieux. La principale difficulté de mise en pratique réside dans le calcul des prix de priorités. Et aucune réponse n'est fournie à ce sujet.

3.5 Conclusion

L'objectif du travail est de mettre en place une tarification dynamique des secteurs aériens pour atteindre une cible. Cette cible correspond à une meilleure répartition du trafic dans l'espace et dans le temps pour une diminution de la congestion. Les méthodes de tarification applicables et présentées dans ce chapitre répondent plus ou moins bien à l'objectif fixé.

- Une tarification au coût marginal qui agit sur une demande élastique ne convient pas au problème traité ici car l'objectif n'est pas de réduire la demande. Pour appliquer une telle tarification en transport aérien, il faudrait connaître le coût de retard imposé à tous les vols pour l'entrée d'un vol supplémentaire dans l'espace aérien.
- Le formalisme d'une tarification issue d'un jeu meneur-suiveur présente l'avantage de différencier totalement les coûts utilisateurs des coûts systèmes. Il faut néanmoins noter que la formalisation des décisions du suiveur par la solution d'un problème d'optimisation est plutôt adaptée à une affectation déterministe.
- Toutes les méthodes de tarification dynamique utilisant des péages sur des arcs, ou sur les routes sont inadaptées, car d'une part, l'objectif est d'atteindre une cible, et d'autre part, les tarifs doivent porter sur des secteurs. On retiendra néanmoins la simulation de Ben-Akiva et al. [BAPK86] utilisant un modèle d'affectation stochastique. Cependant, on désire ici non pas simuler l'effet d'un péage mais plutôt l'optimiser.
- Une tarification visant à éliminer les files d'attente sous des hypothèses d'équilibre utilisateur et de date préférée d'arrivée reste très spécifique.
- Les priorités et les enchères semblent appropriées à un traitement direct de la saturation mais pas au suivi d'une cible.

Finalement, le système de tarification des secteurs aériens mis en place pourrait remplacer le système actuel de redevances aériennes sans réduire la demande à condition que la recette dégagée soit équivalente à la somme des redevances collectées actuellement.

Chapitre 4

Le problème de tarification

4.1 Introduction

Le chapitre précédent fait état des principes de tarification utilisés principalement en transport routier pour orienter la demande et prévenir la congestion. En trafic aérien, les études menées se concentrent en majorité sur les problèmes de congestion rencontrés aux aéroports. Les efforts doivent aussi se porter sur les moyens tarifaires de faire face à la saturation de l'espace aérien. La régulation par les prix peut intervenir à différents niveaux :

- Au niveau stratégique (organisation du trafic à moyen et long terme) : Les compagnies aériennes planifient leurs vols 5 à 6 mois avant le début de la saison d'été ou d'hiver. A cette date, elles doivent définir les origines, les destinations et les calendriers horaires de leurs vols. Pour atterrir et décoller d'un aéroport, elles font la demande de créneaux auprès des comités des horaires des aéroports. Une phase de négociation pour l'allocation de créneaux s'établit entre les compagnies et les comités. La conférence IATA (Association du Transport Aérien International) de coordination des horaires marque la fin des négociations. La programmation des vols pourra être ajustée par la suite, mais les grandes lignes sont définies. Pour définir le calendrier des vols, les compagnies prennent en compte plusieurs aspects : les coûts de transport, les disponibilités des équipages et de la flotte, les opérations de maintenance, les revenus escomptés suivant le taux de remplissage des avions et la fréquence des vols. A ce stade, on peut envisager que l'allocation des créneaux horaires passe par un mécanisme de tarification, plutôt que par un consensus.
 - Au niveau tactique (le jour des opérations) : Les compagnies aériennes doivent déposer pour chacun de leurs vols un plan de vol. Ce plan de vol doit être déposé aux services de contrôle aérien au moins 4 à 5 heures avant l'heure de décollage. A cette date, les facteurs météorologiques peuvent être pris en compte. Le plan de vol contient, entre autres, les informations suivantes :
 - le numéro d'identification de l'avion et son type
 - le code de l'aéroport de départ et d'arrivée
 - l'heure estimée de départ et la durée du vol
 - la vitesse, le niveau de vol et la route définie par une suite de balises
-

Pour construire un plan de vol optimal, les compagnies disposent d'outils sophistiqués. Les critères d'optimisation sont principalement la consommation de carburant et la durée de vol. En fonction de la densité de trafic, le service ATC accepte ou non le plan de vol. En période de pointe de trafic, le vol peut être retardé et un autre créneau de décollage lui est attribué selon la règle "premier planifié, premier servi" (voir partie 1.5.2). Le service ATC peut aussi proposer un changement de routes. Pour imposer le moins possible des changements de créneaux et de routes aux compagnies, on peut imaginer une situation dans laquelle chaque compagnie est taxée, au dépôt du plan de vol, en fonction de l'heure de décollage et de la route choisie.

Il a été montré dans le chapitre 3 que la congestion dans un réseau pouvait être atténuée en appliquant un schéma de tarification qui oriente les choix des utilisateurs de ce réseau. Ce chapitre propose un mécanisme de tarification de l'espace aérien au niveau tactique incitant les compagnies aériennes à déplacer les périodes de décollage de leurs vols et à emprunter des routes alternatives. La cible à atteindre est une meilleure répartition de trafic dans le temps et dans l'espace, meilleure dans le sens où la congestion des secteurs aériens serait fortement réduite. La démarche adoptée pour parvenir à une tarification adéquate comporte quatre étapes principales :

- Choisir un modèle de prix d'options. Une option correspond à une combinaison de route et de période de décollage.
- Modéliser l'influence des conditions financières sur la définition des heures de départ et sur le choix des routes par les compagnies aériennes.
- Identifier les paramètres du modèle de choix des compagnies.
- Fixer les prix d'options pour que les décisions prises par les compagnies conduisent à la planification de vols désirée.

Le chapitre commence par une description générale du mécanisme de tarification, puis les quatre étapes ci-dessus sont présentées globalement. Les problèmes d'identification et de calcul des prix sont détaillés dans les chapitres suivants.

4.2 Le mécanisme de tarification

On s'intéresse à la demande en trafic d'un ensemble W de N paires Origine-Destination (OD) ω sur un horizon de temps découpé en T périodes de même longueur Δ . L'espace aérien considéré est découpé en S secteurs.

Au dépôt d'un plan de vol, pour un avion de type ℓ devant décoller en période u , la compagnie aérienne doit faire le choix d'une route i et d'une période de décollage j . Chaque couple (i, j) désigne une option de route i et de période de décollage j .

La route i pour l'OD ω et l'avion de type ℓ est choisie dans un ensemble $R_{\omega, \ell}$ de routes qui comprend les routes habituellement utilisées par les compagnies et des routes alternatives. Les compagnies choisissent une période de décollage proche du créneau initialement programmé. La période de décollage j d'un avion programmé en période u est choisie dans l'ensemble $\{u - J_{min}, \dots, u, u + 1, u + 2, \dots, u + J_{max}\}$ où J_{min} et J_{max} correspondent aux décalages maximaux acceptés. Les valeurs J_{min} et J_{max} restent à être fixées.

La compagnie prend sa décision en fonction des coûts $C_u^{\omega, \ell}(i, j)$ associés à chaque option et

des prix d'acquisition $P^{\omega,\ell}(i,j)$. Il faut bien noter la distinction faite entre les dénominations “coûts” et “prix”. Les coûts rassemblent les frais d'exploitation associés au vol. Une structure plus complète de la fonction coût est donnée dans la suite. Par “prix” $P^{\omega,\ell}(i,j)$, on entend le montant d'une taxe prélevée à la compagnie pour l'utilisation de la route i par un avion de type ℓ décollant en période j .

Si les prix d'options étaient indépendants les uns des autres, des vols d'une même paire OD qui traversent un même secteur au même instant ne seraient pas soumis à la même taxe. Ce système est éloigné d'une tarification de la congestion équitable selon laquelle tous les utilisateurs qui occupent une partie du réseau pendant la même période doivent payer la même taxe. Ce système est donc rejeté au profit d'un système de tarification dynamique des secteurs aériens. Il s'agit de définir un prix $x_{k,n}$ de droit d'entrée dans le secteur k ($k = 1, S$) en période n pour tous les secteurs de l'espace aérien considéré et pour toutes les périodes de l'horizon de temps choisi.

La première étape consiste à modéliser la relation qu'il existe entre les prix de secteurs et les prix d'options (voir figure 4.1).

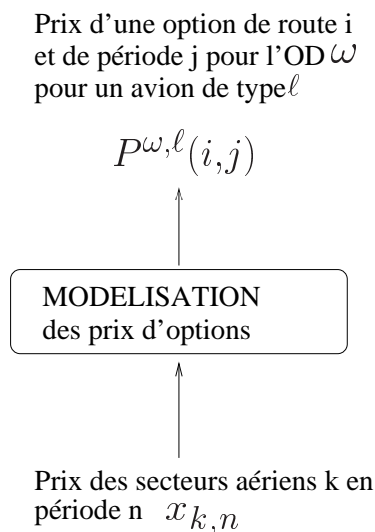


FIG. 4.1 – Étape 1 : Modélisation des prix d'options

Il faut ensuite modéliser le choix des compagnies en fonction des coûts et des prix de chaque option (voir figure 4.2). Pour chaque paire OD ω et chaque période u ($u = 1, T$), le nombre de décollages programmés $NP^{\omega}(u)$ peut être déduit des horaires fournis par les compagnies. Pour ces vols, le type de l'avion ℓ est connu.

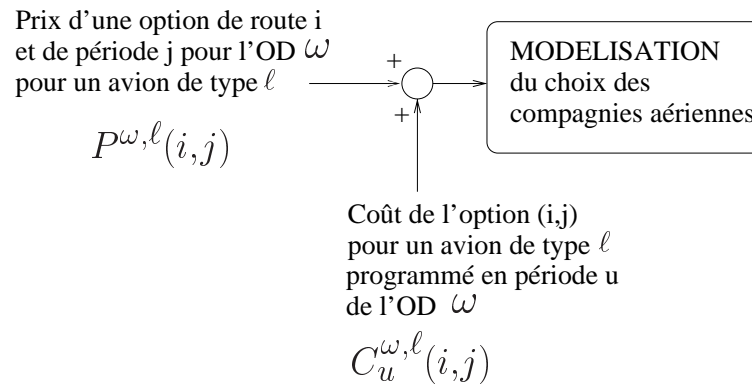


FIG. 4.2 – Étape 2 : Modélisation du choix des compagnies aériennes

La mise en place d'un système de tarification modifie le choix des compagnies. Les compagnies prennent en compte les prix d'achat des options pour choisir une option de route et de période de décollage pour chacun de leurs vols. Leurs choix conduisent à une nouvelle affectation des vols. $NE^{\omega, \ell}(i, j)$ désigne le nombre moyen de vols attendus sur chaque option (i, j) pour chaque paire OD ω (voir figure 4.3).

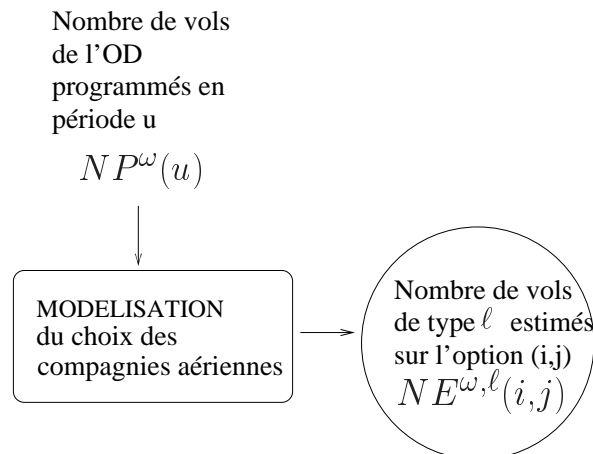
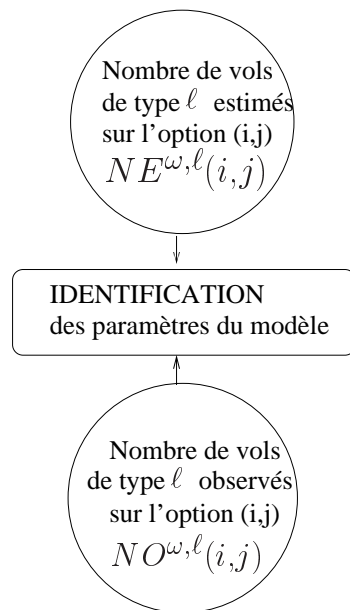


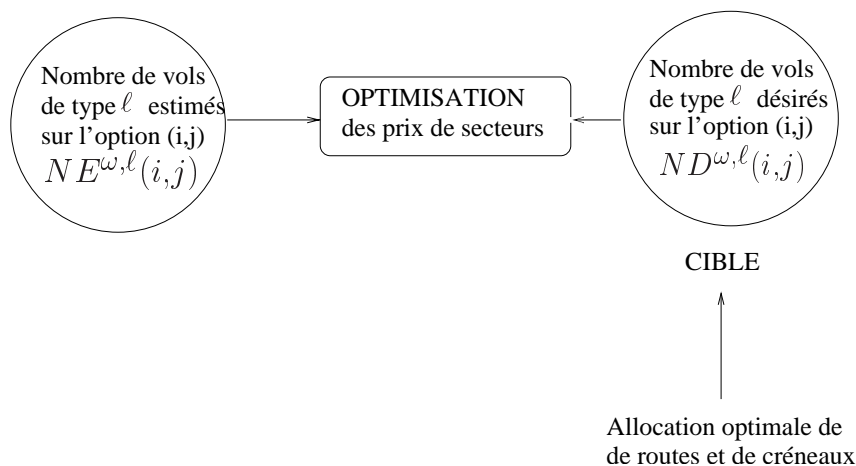
FIG. 4.3 – Étape transitoire

On suppose disposer de statistiques sur les routes et les périodes de décollage planifiées par les compagnies pour plusieurs journées de trafic. Il est ainsi possible de connaître le nombre d'avions $NO^{\omega, \ell}(i, j)$ de type ℓ affectés sur chaque option (i, j) de la paire OD ω . Le modèle de choix des compagnies contient plusieurs paramètres à estimer. La troisième étape du travail consiste à identifier les paramètres du modèle en comparant les nombres de vols $NE^{\omega, \ell}(i, j)$ issus du modèle et les nombres de vols $NO^{\omega, \ell}(i, j)$ résultant des statistiques d'observation du trafic (voir figure 4.4).

Une fois les paramètres identifiés, l'étape suivante correspond au calcul des prix de sec-

FIG. 4.4 – *Étape 3 : Identification des paramètres du modèle*

teurs. On souhaite que cette affectation guidée par les prix se rapproche d'une cible fixée au préalable. La cible correspond à une allocation de routes et de périodes de décollage pour l'ensemble des vols qui permettrait de réduire de manière significative la congestion. La cible se caractérise par un nombre de vols désirés $ND^{\omega,\ell}(i,j)$ pour chaque type d'avion ℓ pour chaque option (i,j) de chaque paire OD ω . Le calcul des prix de secteurs se formule comme un problème de minimisation de l'écart quadratique entre les nombres de vols $NE^{\omega,\ell}(i,j)$ issus du modèle et les nombres $ND^{\omega,\ell}(i,j)$ définis par la cible (voir figure 4.5).

FIG. 4.5 – *Étape 4 : Optimisation des prix d'entrée dans les secteurs aériens*

Le modèle de choix des compagnies sert de base à un programme de simulation (voir figure 4.6). Ce programme est utilisé pour simuler le choix des compagnies aériennes sur une journée de trafic. Il permet de calculer des indicateurs relatifs à la congestion des secteurs et les prix des options achetées par les compagnies aériennes.

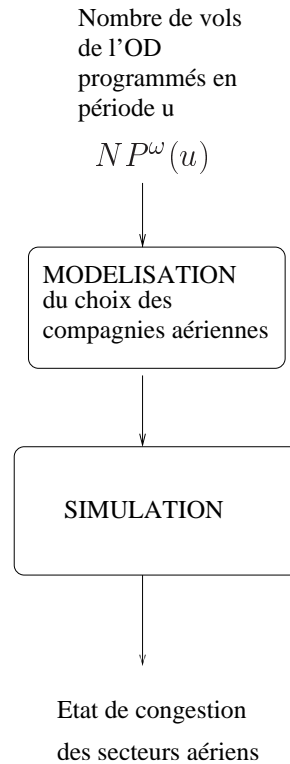


FIG. 4.6 – *Étape facultative : Simulation*

L'ensemble du mécanisme de tarification est représenté par la figure 4.7.

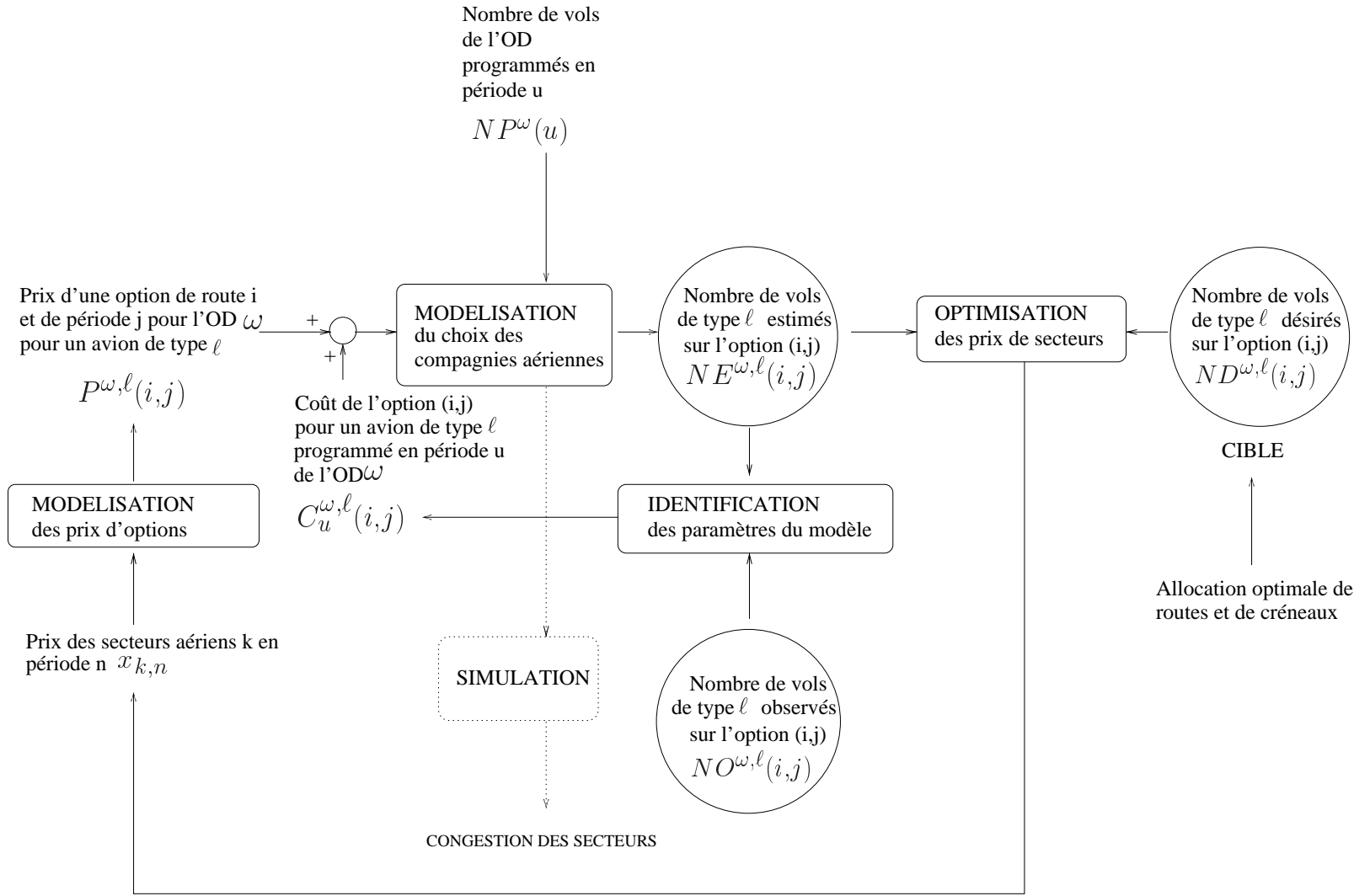
4.3 Modélisation des prix d'options

Il faut trouver une relation qui lie les prix d'options $P^{\omega,\ell}(i,j)$ aux prix des secteurs traversés. Pour trouver cette relation mathématique, on s'intéresse d'abord au lien physique existant entre une route aérienne et les secteurs aériens (voir partie 1.2). Une route est définie par une suite de balises (points de repère au sol). Par exemple, une route reliant Toulouse à Paris-Orly est définie par :

LFBO XTLW FISTO BUGUS LMG BALAN AMB CDN CDEP EPR PO

“FISTO” désigne le code de la balise de coordonnées (044 28'02.5"N, 001 12'03.9"E).

FIG. 4.7 – Structure globale du mécanisme de tarification



Suivant le type d'avion et le niveau de vol adopté, la route définie en terme de balises se traduit par une séquence de secteurs, décrite par exemple par :

$$16 \quad 0.00 - 17 \quad 2.00 - 10 \quad 6.48 - 4 \quad 7.59 - 8 \quad 20.15 - 53 \quad 34.43 - 48 \quad 40.50$$

Dans cette séquence, "16" indique le premier secteur traversé et "0.00" l'intervalle de temps entre le décollage et l'entrée dans ce secteur (exprimée en minutes), "2.00" l'intervalle de temps entre le décollage et l'entrée dans le secteur "17" et ainsi de suite.

La séquence de secteurs associée à une route i pour un avion de type ℓ est notée seq_i^ℓ . Pour chaque secteur k de cette séquence, les dates d'entrée et de sortie sont connues et notées respectivement $t_{i,k}^\ell$ et $s_{i,k}^\ell$. Ce sont des dates relatives à l'instant de décollage. Dans l'exemple, sachant qu'il s'agit de la route 1 et du type d'avion 3 :

$$\begin{aligned} t_{1,16}^3 &= 0.00 \\ s_{1,16}^3 &= t_{1,17}^3 = 2.00 \end{aligned}$$

Dans le modèle, l'instant de décollage n'est pas précis : un avion devant décoller en période j est supposé avoir une date de décollage uniformément répartie entre les dates $(j-1)\Delta$ et $j\Delta$. De cette manière, un avion de type ℓ , qui emprunte la route i et décolle en période j , entre dans le secteur k de la séquence seq_i^ℓ en période $j + E\left(\frac{t_{i,k}^\ell}{\Delta}\right)$ avec la probabilité $1 - D\left(\frac{t_{i,k}^\ell}{\Delta}\right)$, ou en période $j + E\left(\frac{t_{i,k}^\ell}{\Delta}\right) + 1$ avec la probabilité $D\left(\frac{t_{i,k}^\ell}{\Delta}\right)$, $E(\cdot)$ représentant la partie entière, et $D(\cdot)$ la partie décimale d'un nombre réel. Ces considérations sur les

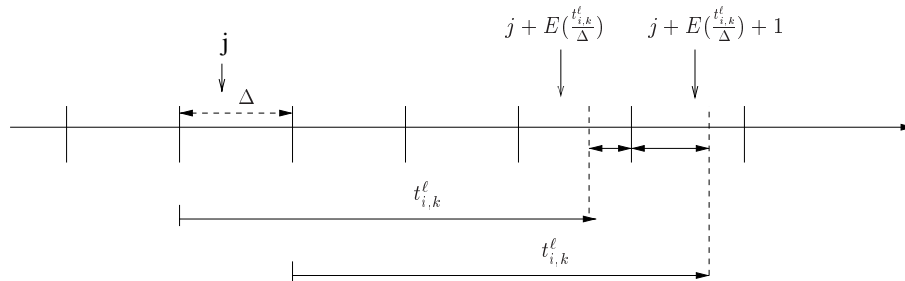


FIG. 4.8 – Périodes d'entrée dans le secteur k

liens entre la route choisie, la période de décollage, le type d'avion et les périodes d'entrée dans les secteurs permettent de définir une relation mathématique entre les prix d'options $P^{\omega,\ell}(i,j)$ et les prix d'entrée de secteurs $x_{k,n}$:

$$P^{\omega,\ell}(i,j)[\mathbf{X}] = \sum_{k=1}^{k=S} \sum_{n=1}^{n=T'} b_{(i,j)}^{(k,n,\ell)} x_{k,n} \quad (4.1)$$

T' est calculé de façon à tarifier toutes les périodes d'entrée possibles dans un secteur pour un avion décollant en période j ($j = 1, T$). On note \mathbf{X} la matrice de composantes $x_{k,n}$.

$$b_{(i,j)}^{(k,n,\ell)} = \begin{cases} 1 - D\left(\frac{t_{i,k}^\ell}{\Delta}\right) & \text{si } k \in \text{seq}_i^\ell \text{ et} \\ & n = j + E\left(\frac{t_{i,k}^\ell}{\Delta}\right) \\ D\left(\frac{t_{i,k}^\ell}{\Delta}\right) & \text{si } k \in \text{seq}_i^\ell \text{ et} \\ & n = j + E\left(\frac{t_{i,k}^\ell}{\Delta}\right) + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.2)$$

4.4 Modélisation du choix des compagnies

Pour chaque vol, la compagnie doit faire le choix d'une route et d'une période de décollage. Il s'agit de trouver un modèle de prédiction des choix des compagnies aériennes pour connaître l'affectation de vols résultante. Les modèles couramment utilisés en trafic pour prédire les décisions des utilisateurs font partie d'une classe de modèles mathématiques appelés modèles de choix discrets (voir partie 2.2.3). Ces modèles donnent la probabilité qu'une option soit choisie parmi un ensemble d'options possibles. Le modèle Logit et le modèle Probit sont deux exemples de modèles de choix discrets [LLTT98]. Dans le modèle Logit, les expressions des probabilités sont explicites (voir annexe A). Le modèle Logit est choisi pour prédire les décisions des compagnies aériennes.

La probabilité que la compagnie choisisse l'option (i,j) , pour un vol de type ℓ de l'OD ω , programmé en période u , est :

$$PR_u^{\omega,\ell}(i,j)[E,\mathbf{X}] = \frac{\exp[-\alpha V_u^{\omega,\ell}(i,j)[E,\mathbf{X}]]}{\sum_{r \in R_{\omega,\ell}} \sum_{s=u-J_{min}}^{s=u+J_{max}} \exp[-\alpha V_u^{\omega,\ell}(r,s)[E,\mathbf{X}]]} \quad (4.3)$$

α est un paramètre d'échelle positif. E désigne l'ensemble des paramètres du modèle, α inclus. L'utilité $V_u^{\omega,\ell}(i,j)[E,\mathbf{X}]$ associée à une option de route i et de période de décollage j pour un vol de type ℓ de l'OD ω , programmé en période u , a l'expression suivante :

$$V_u^{\omega,\ell}(i,j)[E,\mathbf{X}] = C_u^{\omega,\ell}(i,j) + P^{\omega,\ell}(i,j)[\mathbf{X}] \quad (4.4)$$

où $C_u^{\omega,\ell}(i,j)$ correspond au coût du vol et $P^{\omega,\ell}(i,j)[\mathbf{X}]$ à la taxe prélevée à la compagnie pour l'utilisation de l'option (i,j) .

4.5 Programme de simulation

4.5.1 Définitions

Le modèle d'affectation stochastique utilisé pour prédire les décisions des compagnies en termes de routes et de périodes de décollage peut être exploité pour simuler la demande de trafic pour l'ensemble des paires OD considéré. L'intérêt de construire un programme de simulation est double. Il permet d'une part, en l'absence de données réelles, de pouvoir

générer des statistiques sur les routes et les périodes de décollage utilisés. Il peut fournir d'autre part plusieurs indicateurs relatifs à la congestion de l'espace aérien. Dans la partie 1.3 du chapitre 1, il est indiqué que la charge de travail des contrôleurs est directement liée au nombre d'avions dans le secteur et aussi aux débits d'entrée et de sortie. Pour avoir une idée globale de l'état de congestion d'un secteur, on définit un indice de charge $L_{k,n}$. L'indice de charge du secteur k en période n est la somme pondérée du volume d'entrée ($I_{k,n}$), du volume de sortie ($O_{k,n}$) et du nombre d'avions dans le secteur ($M_{k,n}$) :

$$L_{k,n} = p_I I_{k,n} + p_O O_{k,n} + p_M M_{k,n} \quad (4.5)$$

Les facteurs p_I, p_O et p_M sont des réels positifs. En référence à cet indice de charge, on suppose connaître les capacités $C_{k,n}$ des secteurs. Si la charge $L_{k,n}$ du secteur k en période n est supérieure à la capacité $C_{k,n}$, le secteur est congestionné. Pour évaluer l'état de congestion de l'espace aérien, on se munit de deux indicateurs Q_1 et Q_2 . Q_1 correspond au nombre de fois où les secteurs sont saturés :

$$Q_1 = \sum_{k=1}^{k=S} \sum_{n=1}^{n=T'} H(L_{k,n} - C_{k,n}) \quad (4.6)$$

H est la fonction de Heavyside définie par : $H(x) = 1$ si $x > 0$, $H(x) = 0$ si $x \leq 0 \quad \forall x \in \mathfrak{R}$. Q_2 mesure l'excès total de charge :

$$Q_2 = \sum_{k=1}^{k=S} \sum_{n=1}^{n=T'} (L_{k,n} - C_{k,n}) H(L_{k,n} - C_{k,n}) \quad (4.7)$$

Dans la procédure de simulation, on peut aussi calculer les prix $PO^{\omega,\ell}(i,j)$ payés par les compagnies aériennes en fonction des dates de décollage et des routes utilisées.

4.5.2 Procédure

La procédure de simulation est donnée sur la page suivante.

4.5.3 Remarque

Pour les problèmes d'identification des paramètres et de calcul des prix de secteurs, ce programme de simulation n'est pas utilisé car les temps de calcul seraient trop élevés. On préfère travailler avec l'espérance du nombre de vols $NE^{\omega,\ell}(i,j)$ sur chaque option.

$$NE^{\omega,\ell}(i,j)[E, \mathbf{X}] = \sum_{u=j-J_{max}}^{u=j+J_{min}} NP^{\omega}(u) q^{\omega,\ell}(u) PR_u^{\omega,\ell}(i,j)[E, \mathbf{X}] \quad (4.8)$$

où $q^{\omega,\ell}(u)$ correspond au ratio d'avions de type ℓ pour la demande de la paire OD ω en période u .

Procédure de simulation

Pour chaque paire OD $\omega \in W$

Pour chaque période $u \in [1, T]$

Pour chaque vol programmé en période u

Lire le type d'avion ℓ

Pour chaque route $i \in R_{\omega, \ell}$ et chaque période de décollage $j \in [u - J_{min}, u + J_{max}]$

Calculer $V_u^{\omega, \ell}(i, j)[E, \mathbf{X}]$ en utilisant les équations 4.1, 4.2 et 4.4

Fin Pour

Pour chaque route $i \in R_{\omega, \ell}$ et chaque période de décollage $j \in [u - J_{min}, u + J_{max}]$

Calculer $PR_u^{\omega, \ell}(i, j)[E, \mathbf{X}]$ en utilisant l'équation 4.3

Fin Pour

Tirer une route \hat{i} et une période de décollage \hat{j} suivant les probabilités $PR_u^{\omega, \ell}(i, j)[E, \mathbf{X}]$

Tirer uniformément une date de décollage τ dans $[(\hat{j} - 1)\Delta, \hat{j}\Delta]$

Pour chaque secteur k de la séquence seq_i^ℓ

$$n = E \left(\frac{\tau + t_{i, k}^\ell}{\Delta} \right)$$

$$I_{k, n} \leftarrow I_{k, n} + 1$$

$$PO^{\omega, \ell}(\hat{i}, \hat{j}) \leftarrow PO^{\omega, \ell}(\hat{i}, \hat{j}) + x_{k, n}$$

$$m = E \left(\frac{\tau + s_{i, k}^\ell}{\Delta} \right)$$

$$O_{k, m} \leftarrow O_{k, m} + 1$$

Si $n \neq m$

Pour $l = n + 1$ à m

$$M_{k, l} \leftarrow M_{k, l} + 1$$

Fin Pour

Fin Si

Fin Pour

Fin Pour

Fin Pour

Fin Pour

Pour chaque secteur k

Pour chaque période n

Calculer $L_{k, n}$ avec l'équation 4.5

$$Q1 \leftarrow Q1 + H(L_{k, n} - C_{k, n})$$

$$Q2 \leftarrow Q2 + (L_{k, n} - C_{k, n}) H(L_{k, n} - C_{k, n})$$

Fin Pour

Fin Pour

4.6 Identification des paramètres du modèle

En l'absence ou en présence de tarification, le modèle d'affectation stochastique utilisé doit refléter le mieux possible la répartition du trafic sur les différentes routes et les différentes périodes de décollage. Il doit aussi traduire les préférences des compagnies pour telle ou telle route. On suppose qu'il est possible de recueillir sur M journées de trafic les plans de vols déposés par les compagnies aériennes. Il faut que les journées de trafic soient identiques en termes de vols programmés. Par exemple, il faudra distinguer les jours de semaine, des jours du week-end. Ces données permettent de déduire, pour chaque paire OD ω , et pour chaque journée m observée, le nombre de vols de type ℓ sur chaque option de route et de période de décollage : $NO^{(\omega,\ell,m)}(i,j)$. Ces statistiques vont servir de base à l'identification des différents paramètres du modèle. Le travail d'identification conduit à diverses réflexions. Quelle méthode faut-il choisir? La structure du modèle permet-elle l'identification de tous les paramètres? Combien de jours d'observation de trafic sont nécessaires à l'identification? Quelle est l'influence du résultat de l'identification sur le calcul des prix? Dans cette partie, une réponse est apportée à la première question. Les autres interrogations sont abordées dans le chapitre 6.

Pour estimer les paramètres d'un modèle, plusieurs techniques peuvent être employées. Par exemple, on peut décider de minimiser l'écart quadratique entre un nombre de vols observés et un nombre de vols calculés à partir du modèle. On peut aussi choisir de maximiser la probabilité que la répartition de trafic issue du modèle soit proche de la répartition de trafic observée. La première technique correspond à une minimisation de l'erreur quadratique, la seconde à une maximisation de la vraisemblance.

– Minimisation de l'erreur quadratique

Le problème d'identification des paramètres se formule de la manière suivante :

$$\text{Min}_E \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{\omega \in W} \sum_{\ell} \sum_{i \in R_{\omega,\ell}} \sum_{j=1}^{j=T} \left[NO^{(\omega,\ell,m)}(i,j) - NE^{\omega,\ell}(i,j)[E,\mathbf{X}] \right]^2 \quad (4.9)$$

S'il est possible d'observer, avec précision, pour chaque vol programmé, l'option de route et de période retenue, on peut chercher à minimiser l'écart entre les probabilités de choix issues des statistiques d'observation et les probabilités de choix issues du modèle ($PR_u^{\omega,\ell}(i,j)[E,\mathbf{X}]$).

– Maximisation de la vraisemblance

La probabilité qu'un vol de l'OD ω de type ℓ soit affecté sur l'option (i,j) s'écrit :

$$PR^{\omega,\ell}(i,j)[E,\mathbf{X}] = \frac{1}{NV_{\omega,\ell}} NE^{\omega,\ell}(i,j)[E,\mathbf{X}] \quad (4.10)$$

où $NV_{\omega,\ell}$ correspond au nombre de vols de l'OD ω de type ℓ planifiés sur l'horizon de temps considéré :

$$NV_{\omega,\ell} = \sum_u NP^\omega(u)q^{\omega,\ell}(u) \quad (4.11)$$

Le problème de maximisation de la vraisemblance du modèle s'écrit :

$$Max_E \quad Q \prod_{m=1}^{m=M} \prod_{\omega \in W} \prod_{\ell} \prod_{i \in R_{\omega, \ell}} \prod_{j=1}^{j=T} \left[PR^{\omega, \ell}(i, j)[E, \mathbf{X}] \right]^{NO^{(\omega, \ell, m)}(i, j)} \quad (4.12)$$

avec Q une constante dont le calcul n'a pas d'intérêt pour l'estimation des paramètres.

Ces deux techniques conduisent au même ensemble solution E^* dans le cas particulier où l'ensemble solution E^* permet de vérifier :

$$NE^{\omega, \ell}(i, j)[E^*, \mathbf{X}] = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{m=M} NO^{(\omega, \ell, m)}(i, j) \quad \forall \omega \in W, \quad \ell, \quad i \in R_{\omega, \ell}, \quad j \in [1, T] \quad (4.13)$$

Ce résultat est démontré en annexe E. Dans les autres cas, les deux techniques peuvent conduire à des résultats différents. La minimisation quadratique a l'avantage de conduire à une formulation plus simple du problème d'identification. Pour cette technique, une autre fonction objectif peut être proposée. Il s'agit de minimiser l'écart quadratique entre le nombre moyen de vols observés sur chaque option pendant M journées de trafic et le nombre de vols sur chaque option calculés à partir du modèle :

$$Min_E G(E) = Min_E \sum_{\omega \in W} \sum_{\ell} \sum_{i \in R_{\omega, \ell}} \sum_{j=1}^{j=T} \left[\left\{ \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{m=M} NO^{(\omega, \ell, m)}(i, j) \right\} - NE^{\omega, \ell}(i, j)[E, \mathbf{X}] \right]^2 \quad (4.14)$$

4.7 Optimisation des prix de secteurs

Par une tarification dynamique des secteurs aériens, on souhaite orienter le choix des compagnies aériennes de manière à atteindre une cible.

4.7.1 Définition de la cible

La cible est le résultat d'un problème d'affectation de périodes de décollage et de routes pour différents vols sur une journée de trafic avec pour objectif la diminution de la congestion et pour contraintes :

- **Le respect des connexions entre les vols**

Le système de réseau en étoile (Hub et Spoke) et la gestion de la flotte aérienne imposent des contraintes de précédence entre les vols. Certains vols doivent atterrir avant le décollage d'autres vols et il existe un temps de "rotation" minimum (c'est le temps requis pour débarquer, nettoyer, faire le plein de kérosène et embarquer des passagers) entre deux vols liés par ce type de contrainte.

- **Une possibilité limitée de décalage des périodes de décollage**

La période de décollage affectée à un vol ne doit pas être trop éloignée de la période de décollage initiale. Il faut éviter des perturbations trop importantes dans les horaires

de décollage car un retard trop important peut entraîner l'annulation de certains vols. Pour donner un ordre d'idée, un retard ou une avance de 30 minutes au maximum par rapport à l'horaire prévu reste raisonnable.

– **Un rallongement limité des routes alternatives**

Les compagnies choisissent habituellement leur route préférée pour chacun de leurs vols. Si d'autres routes leur sont proposées, celles-ci doivent induire un rallongement et un surcoût limité pour qu'elles soient acceptées.

Les travaux menés par Oussedik et Delahaye ([OD98], [ODS98a], [ODS98b]) consistent à développer une méthode d'optimisation stochastique pour trouver une allocation de routes et de périodes de décollage respectant ces contraintes et contribuant à la diminution de la congestion. La cible ainsi construite se caractérise par un nombre de vols désirés $ND^{\omega,\ell}(i,j)$ pour chaque type d'avion ℓ pour chaque option (i,j) de chaque paire OD ω .

4.7.2 Formulation du problème d'optimisation

Le problème de calcul des prix de secteurs peut se ramener à un problème de minimisation quadratique entre les nombres de vols $NE^{\omega,\ell}(i,j)[E,\mathbf{X}]$ issus du modèle et les nombres de vols $ND^{\omega,\ell}(i,j)$ associés à la cible :

$$\text{Min}_{\mathbf{X}} F(\mathbf{X}) = \text{Min}_{\mathbf{X}} \sum_{\omega \in W} \sum_{\ell} \sum_{i \in R_{\omega,\ell}} \sum_{j=1}^{j=T} [ND^{\omega,\ell}(i,j) - NE^{\omega,\ell}(i,j)[E,\mathbf{X}]]^2 \quad (4.15)$$

Les prix de secteurs sont positifs, ils doivent représenter un coût faible comparativement aux coûts fixes d'exploitation du vol mais doivent avoir suffisamment d'impact sur les prises de décisions des compagnies. D'autre part, la résolution du problème d'optimisation pourrait conduire à des prix de valeur infinie en cherchant à obtenir des probabilités égales à 0 ou 1. L'ajout d'une borne minimale nulle et d'une borne maximale égale à \bar{x} s'avère nécessaire.

$$0 \leq x_{k,n} \leq \bar{x} \quad \forall k \in [1,S], \quad n \in [1,T'] \quad (4.16)$$

À ce stade, deux stratégies de tarification peuvent être envisagées. La première consiste à établir des prix par secteur et par période indépendamment les uns des autres. Dans ce cas, le problème d'optimisation associé est un problème à variables continues. On parle alors de tarification continue. La deuxième stratégie de tarification consiste à limiter le nombre de valeurs de prix. Dans ce cas, on parle de tarification structurée par niveau. Il s'agit d'assigner un niveau de prix à chaque couple (secteur, période). Par exemple, on peut se limiter à 3 niveaux de prix : prix faible, prix moyen, prix fort. Le problème de calcul des prix de secteur devient un problème d'optimisation mixte où interviennent des variables discrètes et continues.

4.8 Conclusion

Ce chapitre explique le principe de tarification retenu pour décongestionner l'espace aérien. Il s'agit de faire payer aux compagnies des droits d'entrée dans les secteurs aériens, ces

droits d'entrée étant modulables dans le temps. L'objectif de cette tarification est de mieux répartir la demande dans l'espace et dans le temps afin d'obtenir une réduction des pointes de congestion. Lors du calcul du plan de vol, la compagnie tient compte des différents prix appliqués suivant la route et la période de décollage choisie. Elle porte son choix sur une option qui répond au mieux à ses intérêts pratiques et financiers. La démarche adoptée pour mettre en place ce système de tarification a été décrite dans les grandes lignes. Elle nécessite, en particulier, la résolution de deux problèmes d'optimisation : un problème d'identification des paramètres du modèle et un problème de calcul des prix de secteurs. Avant d'entreprendre la résolution de ces deux problèmes, il convient d'examiner les différentes méthodes d'optimisation existantes.

Chapitre 5

Etat de l'art des méthodes d'optimisation

5.1 Introduction

Pour choisir une méthode d'optimisation adaptée au problème auquel on s'intéresse, il s'agit de bien définir ses caractéristiques. Quelle est la fonction à optimiser ? Quelles sont les variables d'optimisation ? Quelles sont les contraintes du problème ? Les réponses à ces trois questions permettent d'identifier le problème et de faire apparaître éventuellement des similitudes avec des problèmes connus. Ensuite, il faut examiner les propriétés de la fonction objectif, étudier en particulier sa convexité. La prise en compte de la dimension du problème (nombre de variables d'optimisation), et des types de contraintes formulées permet d'orienter le choix de la méthode d'optimisation. Il faut aussi s'interroger sur la nature du résultat souhaité. Est-ce qu'on cherche une solution de bonne qualité quelque soit le temps d'exécution de la méthode ? Est-ce qu'on préfère un solution de moins bonne qualité mais avec un temps de calcul réduit ? Ces réflexions servent à sélectionner une ou plusieurs méthodes d'optimisation appropriées. Dans ce qui suit, on rappelle les différentes classes de méthodes d'optimisation en donnant une description des méthodes les plus courantes.

5.2 Problèmes d'optimisation étudiés

Le problème d'identification des paramètres (4.14) et le problème de calcul des prix de secteurs (4.15) en tarification continue se présentent sous la forme d'un problème d'optimisation du type :

$$\text{Min}_{x \in X} f(x) \tag{5.1}$$

sous les contraintes :

$$a_i \leq x_i \leq b_i \quad \forall i = 1, n$$

Ce problème correspond à la recherche d'un minimum d'une fonction réelle f de n variables réelles $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. L'espace de recherche est $X = \{x \in \mathfrak{R}^n, \quad a \leq x \leq b\}$. La fonction

f n'est pas linéaire. Les bornes a_i et b_i pour chaque variable x_i sont des contraintes qui peuvent être facilement prises en compte par projection sur l'espace de recherche. Par exemple, si dans la procédure d'optimisation, un point $x \notin X$ est généré, une projection sur l'espace de recherche est réalisée pour se ramener à un point $x' \in X$. La figure 5.1 présente la procédure de projection en dimension 2. En dimension n , la projection $Proj$ se définit de la manière suivante :

$$x' = Proj(x) \text{ avec pour } i = 1..n \quad x'_i = \begin{cases} x_i & \text{si } a_i \leq x_i \leq b_i \\ a_i & \text{si } x_i < a_i \\ b_i & \text{si } x_i > b_i \end{cases} \quad (5.2)$$

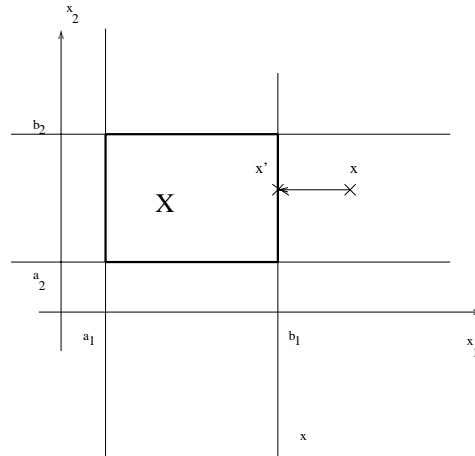


FIG. 5.1 – Projection sur X en dimension 2

Les problèmes étudiés sont similaires à un problème de minimisation multidimensionnel non linéaire et sans contrainte.

Dans le cadre d'une tarification par niveau, la formulation du problème d'optimisation des prix est plus complexe. Elle sera développée dans le chapitre 8.

5.3 Classification des méthodes

Pour résoudre un problème d'optimisation, il existe deux types de méthodes, des méthodes déterministes et des méthodes stochastiques. Ces deux grandes classes de méthodes diffèrent par leur mode de déplacement dans l'espace de recherche.

Les méthodes d'optimisation déterministes se caractérisent par une exploration déterministe de l'espace de recherche. En effet, sous certaines conditions, elles permettent de situer la direction de l'optimum par rapport à chacun des points de cet espace et de proche en proche, de diminuer la distance entre le point courant et l'optimum. Il existe de nombreuses méthodes d'optimisation déterministes. Elles se divisent en deux catégories :

- **Les méthodes locales** [Min90a] assurent la convergence vers l'optimum local le plus proche. Les méthodes les plus courantes sont celles d'ordre zéro (Nelder Mead),

d'ordre un (Gradient) et d'ordre deux (Newton, BFGS). Le numéro d'ordre correspond au niveau de dérivabilité de f utilisé dans la recherche.

- **Les méthodes globales** correspondent à la recherche d'un optimum global. Les algorithmes les plus répandus sont le Simplexe pour les problèmes linéaires, l'algorithme de Séparation et Évaluation (Branch and Bound) dans les autres cas.

La figure 5.2 donne une représentation d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ et met en évidence la différence entre minimum local et minimum global.

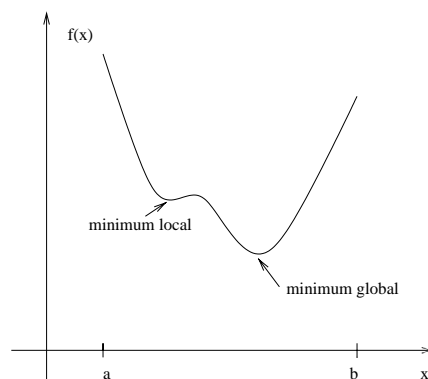


FIG. 5.2 – *Minimum local et minimum global*

Les méthodes d'optimisation stochastiques ont pour but d'approcher le minimum de la fonction f au moyen d'une recherche aléatoire dans l'espace d'état. Elle sera préférée à une approche déterministe si cette dernière est trop coûteuse en temps de calcul. Les principales méthodes d'optimisation stochastiques sont le Recuit Simulé, la Recherche Tabou, et les Algorithmes Evolutionnaires. Ces méthodes sont passées en revue dans [AL93].

Dans la suite du chapitre, les méthodes précédemment citées sont décrites. On s'attache en particulier à faire ressortir leurs points faibles et leurs points forts par rapport au type de problème étudié.

5.4 Optimisation déterministes : méthodes locales

5.4.1 L'algorithme de Nelder Mead

L'algorithme du simplexe de Nelder Mead date de 1965 [NM65]. Cette méthode utilise pour seule information les points de l'espace de recherche, ainsi que les valeurs du critère associé. Elle ne nécessite pas de calcul de gradient ou de hessien, ce qui peut être très avantageux pour certains problèmes. Son principe consiste à modifier un simplexe géométrique par des mouvements élémentaires (réflexions, contractions, expansions). Si n est la dimension de l'espace de recherche, le simplexe géométrique est caractérisé par $n+1$ points de l'espace. En dimension 2, le simplexe est un triangle, en dimension 3, une pyramide. Dans l'algorithme

de Nelder Mead, un premier simplexe est généré puis à chaque étape de la recherche, un nouveau simplexe est construit en remplaçant le point le plus "mauvais" (au sens du critère) du précédent simplexe par son "symétrique" (en dimension 2, si A,B,C constituent les 3 points du simplexe initial avec A le plus mauvais point, le nouveau point construit est A', symétrique de A par rapport à l'axe (BC)) de manière à explorer une partie de l'espace plus prometteuse. On procède aussi à des ajustements du pas de déplacement au fur et à mesure pour éviter de trop s'écarter du minimum. Quand la taille du simplexe est suffisamment petite (par rapport à un seuil de tolérance fixé à l'avance), l'algorithme est arrêté. Les calculs sont extrêmement simples mais la convergence risque d'être très lente car la recherche n'est pas vraiment orientée.

5.4.2 Méthode du gradient

Principes de base

La méthode du gradient et les méthodes dérivées de cette méthode consistent à rechercher un point x^* stationnaire. " x^* est un point stationnaire de f " signifie que le gradient de f en ce point est nul : $\nabla f(x^*) = 0$. La stationnarité de f est une condition nécessaire d'optimalité. La méthode du gradient est une méthode itérative où l'on engendre une suite de points x^0, x^1, \dots, x^q convergeant vers un optimum local de f . A chaque étape q , x^{q+1} est défini par : $x^{q+1} = x^q + \lambda_q d_q$ où d_q est une direction de descente (c'est-à-dire $\nabla f^T(x^q) \cdot d_q < 0$) et $\lambda_q > 0$ un pas de déplacement. Dans le cas d'une minimisation sans contrainte, la structure de l'algorithme est la suivante :

Initialisation :

Choisir un point de départ x^0 , $q = 0$

Tant que le critère d'arrêt est non vérifié :

- $x^{q+1} = x^q - \lambda_q \frac{\nabla f(x^q)}{\|\nabla f(x^q)\|}$, $\lambda_q > 0$
- $q \leftarrow q + 1$

Fin Tant que

La figure 5.3 donne le schéma de la méthode du gradient en dimension 1.

Remarques

- Critère d'arrêt :

Comme la convergence n'est pas, en général, finie, on doit définir un test d'arrêt. Les critères les plus utilisés sont :

- Critère 1 : $\max_{i=1..n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ donné)
- Critère 2 : $\|\nabla f\| = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 < \varepsilon$
- Critère 3 : $|f(x^{q+1}) - f(x^q)| < \varepsilon$
- Critère 4 : arrêt après un nombre fixé d'itérations

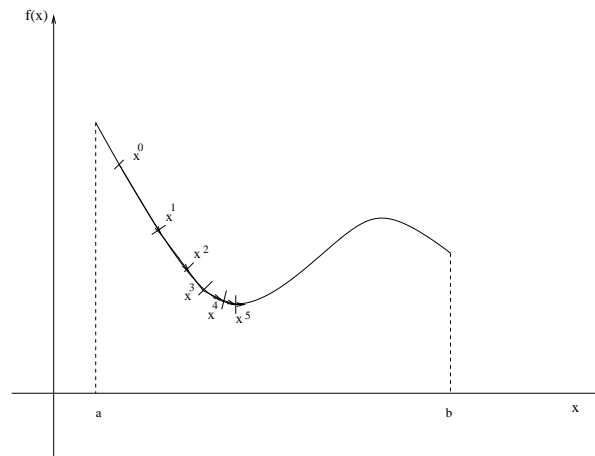


FIG. 5.3 – Méthode du gradient en dimension 1

– Convergence :

Pour assurer la convergence de ce schéma itératif, on choisit les valeurs de déplacements λ_q à chaque itération q qui vérifient :

$$\begin{cases} \lambda_q \rightarrow 0 & (q \rightarrow +\infty) \\ \sum_{q=0}^{+\infty} \lambda_q = +\infty \end{cases} \quad (5.3)$$

Par exemple, on peut prendre $\lambda_q = 1/q$. Cette procédure est appelée méthode de la série divergente. Pour un tel choix de déplacement, il arrive que la convergence soit très lente. Il existe d'autres stratégies de choix a priori de déplacements λ_q . En particulier, le choix d'un déplacement à pas constant permet d'obtenir une convergence plus rapide que la méthode de la série divergente.

Il existe aussi une autre manière de choisir le pas de déplacement. On peut choisir λ_q de façon à minimiser la fonction $g(\lambda)$ sur l'ensemble des $\lambda > 0$:

$$g(\lambda) = f(x^q + \lambda d_q) \quad (5.4)$$

avec $d_q = -\nabla f(x^q)$ comme direction de descente. La méthode du gradient est appelée dans ce cas méthode de la plus forte pente. Le problème de minimisation en λ est un problème de minimisation unidimensionnelle.

La méthode du gradient est une méthode de référence pour des algorithmes plus évolués.

5.4.3 Méthode du gradient conjugué

Appliquée au départ à l'optimisation de fonctions quadratiques, la méthode du gradient conjugué s'est étendue aux fonctions quelconques (méthode de Fletcher et Reeves, de Polak-Ribière). Cette méthode est intéressante car elle nécessite le stockage de très peu d'information et sa vitesse de convergence est en général très supérieure à celle des algorithmes

de gradient classiques. La structure de l'algorithme est la suivante :

Initialisation :

Choisir un point de départ x^0 , $q = 0$, poser $d_0 = -\nabla f(x^0)$

Tant que le critère d'arrêt est non vérifié :

- Choisir λ_q minimisant : $g(\lambda) = f(x^q + \lambda d_q)$ (problème de minimisation unidimensionnelle)
- $x^{q+1} = x^q + \lambda_q d_q$
- $d_{q+1} = -\nabla f(x^{q+1}) + \beta_q d_q$ avec :

$$\beta_q = \frac{\|\nabla f(x^{q+1})\|^2}{\|\nabla f(x^q)\|^2} \text{ (Fletcher et Reeves)}$$

$$\beta_q = \frac{\nabla f(x^{q+1})^T (\nabla f(x^{q+1}) - \nabla f(x^q))}{\|\nabla f(x^q)\|^2} \text{ (Polak-Ribière)}$$

- $q \leftarrow q + 1$

Fin Tant que

La convergence globale de la méthode n'est assurée que si l'on procède à une ré-initialisation périodique en repartant du dernier point obtenu avec comme direction de déplacement le gradient en ce point.

5.4.4 Méthode de Newton

La méthode de Newton est une méthode d'ordre 2. Elle s'applique à des fonctions deux fois différentiables et dont on sait calculer toutes les dérivées secondes. L'idée consiste à remplacer, au voisinage du point courant x^q , la fonction f par son approximation quadratique. Dans ce cas, la structure de l'algorithme est semblable à celle du gradient à la différence près de la formule itérative qui devient : $x^{q+1} = x^q - \lambda_q [\nabla^2 f(x^q)]^{-1} \cdot \nabla f(x^q)$ (avec à priori λ_q compris entre 0 et 1). La direction de déplacement $-[\nabla^2 f(x^q)]^{-1} \cdot \nabla f(x^q)$ est une direction de descente si le hessien $\nabla^2 f(x^q)$ est défini positif. Cette méthode converge en une seule itération lorsqu'elle est appliquée à une fonction quadratique strictement convexe. Mais pour des fonctions non convexes, la convergence globale n'est pas assurée. Il peut arriver qu'en un point x^q , le hessien ne soit pas défini positif ou qu'il ne soit pas inversible. Si cela se produit, il faut perturber légèrement le hessien de façon à obtenir une matrice définie positive et donc inversible. Le calcul de la direction de descente peut donc s'avérer très coûteux en temps.

5.4.5 Méthodes quasi newtoniennes (ou méthodes à métriques variables)

Le principe de ces méthodes est une généralisation de la formule itérative de Newton. En effet, dans la méthode de Newton, la condition de défini-positivité du hessien est restrictive. Dans les méthodes quasi-newtoniennes, le hessien est approché par une suite de matrices H_q définies positives. Pour une forme quadratique définie positive de dimension

N , la méthode converge en $N + 1$ itérations. Les algorithmes diffèrent selon la formule itérative choisie pour construire les matrices H_q . Les algorithmes les plus connus sont DFP (Davidon-Fletcher-Powell), et BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno). Lorsqu'ils sont appliqués à des fonctions quelconques, il faut procéder à des ré-initialisations périodiques (ré-initialisation de H_q) pour assurer la convergence globale de ces méthodes. Les méthodes quasi-newtoniennes sont généralement supérieures du strict point de vue de la vitesse de convergence mais présentent l'inconvénient de nécessiter beaucoup plus de calcul (nombreux calculs matriciels intermédiaires) à chaque itération et un encombrement mémoire relativement important.

Toutes les méthodes qui viennent d'être décrites s'adressent à des problèmes d'optimisation continue. Elles assurent la convergence vers l'optimum le plus proche du point de départ. À l'exception de l'algorithme de Nelder Mead, les autres méthodes exigent que la fonction objectif soit continûment différentiable. Pour des fonctions convexes à optimiser sur un ensemble convexe, l'optimum local trouvé est aussi un optimum global.

5.5 Optimisation déterministe : méthodes globales

5.5.1 Programmation linéaire

La programmation linéaire [Dan63] regroupe l'ensemble des techniques permettant la résolution et l'analyse de problèmes linéaires. Dans un problème d'optimisation linéaire, la fonction objectif est une fonction linéaire des variables de décision, les contraintes sont également linéaires et s'expriment sous la forme d'équations ou d'inéquations. L'algorithme du Simplexe est actuellement la méthode la plus utilisée pour résoudre des problèmes d'optimisation linéaire. Pourtant en 1984, Karmakar proposa une nouvelle classe d'algorithmes présentant des propriétés théoriques remarquables (complexité polynomiale) et surpassant parfois le Simplexe pour les problèmes d'optimisation linéaire de grande taille. Contrairement à la méthode du Simplexe qui explore le polytope réalisable en suivant ses bords pour trouver l'optimum du problème, ces algorithmes produisent une suite d'itérées à l'intérieur de l'ensemble admissible, ce qui leur vaut le nom de méthodes de points intérieurs. Mais comme son nom l'indique, la programmation linéaire nécessite de modéliser le problème sous forme linéaire, ce qui est généralement impossible ou très difficile à réaliser pour des problèmes réels. En particulier, les problèmes d'identification et de calcul des prix de secteurs définis dans le chapitre 4 ne sont pas linéaires.

5.5.2 Algorithmes de séparation-évaluation (Branch and Bound)

La technique consiste à découper l'espace initial de recherche en domaines de plus en plus restreints afin d'isoler l'optimum global. La méthode commence par considérer le problème avec tout le domaine de recherche. Un minorant et un majorant du critère sont calculés. S'ils sont identiques, une solution optimale a été trouvée et la procédure s'arrête. Sinon, le domaine est découpé en deux ou plusieurs sous-domaines qui recouvrent le domaine de recherche initial dans son entier. Les sous-problèmes ainsi obtenus sont évalués par leur minorant. Si ce minorant est supérieur au critère de la meilleure solution atteinte jus-

qu'à présent, la recherche à partir de ce noeud est arrêtée. Sinon la solution associée à ce minorant devient la meilleure solution rencontrée et le domaine de recherche associé à ce sous-problème est découpé à son tour en d'autres sous-domaines qui donnent lieu à d'autres sous-problèmes et ainsi de suite. L'algorithme crée ainsi un arbre de recherche dont chacun des noeuds représente un sous-domaine. Le parcours de l'arbre s'arrête quand l'écart entre la meilleure solution et les bornes inférieures des sous-problèmes devient plus petit qu'un certain seuil. Le Branch and Bound s'applique essentiellement à des problèmes discrets avec des espaces de recherche de faibles dimensions et dont le partitionnement peut être choisi de façon judicieuse. La difficulté de cette méthode réside dans le choix du principe de séparation et d'évaluation et dans le calcul d'un minorant du critère pour chaque sous problème.

Les méthodes déterministes sont bien adaptées pour résoudre, de façon quasi-exacte, des problèmes de taille réduite. En effet, les calculs peuvent s'avérer très rapidement coûteux en temps et en mémoire pour des problèmes de grande dimension ou pour des fonctions objectif complexes. Les méthodes stochastiques, quant à elles, permettent de traiter des problèmes continus ou discrets et d'intégrer facilement des contraintes.

5.6 Optimisation stochastique

5.6.1 Méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo est la méthode stochastique la plus simple. On parle aussi de descente aléatoire pure. En effet, cette méthode consiste en une exploration aléatoire de l'espace de recherche en ne retenant que les solutions qui améliorent le critère. Un algorithme de descente aléatoire pure se présente comme suit :

Initialisation :

Choisir un point de départ x^0 , $q = 0$

Tant que le critère d'arrêt est non vérifié :

- Générer un point aléatoire x à partir de x^q
- Si $f(x) < f(x^q)$ alors $x^{q+1} = x$
- Sinon $x^{q+1} = x^q$
- $q \leftarrow q + 1$

Fin Tant que

Le passage de x^q à x se fait par tirage aléatoire, par exemple selon une loi normale centrée sur x^q . L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'elle n'accepte que des diminutions de la fonction. L'algorithme risque ainsi de se trouver bloqué dans un minimum local si la structure du voisinage (ensemble des points x pouvant être générés à partir de x^q) ne couvre pas l'ensemble de l'espace de recherche.

5.6.2 Recuit simulé

Principes

Contrairement aux méthodes locales d'optimisation déterministes qui se limitent à trouver un extrémum local, le recuit simulé offre la possibilité d'atteindre l'extrémum global en acceptant, avec une certaine probabilité, une dégradation du critère. L'algorithme de recuit simulé [LA87] est un algorithme itératif qui explore de manière aléatoire l'espace de recherche en partant d'une solution admissible et en se déplaçant d'une solution à une autre par un mécanisme de génération et d'acceptation. Il est proposé en 1983 par Kirkpatrick et al. [KGV83] pour la résolution d'un problème de placement. Le mécanisme du recuit simulé s'inspire de la thermodynamique. Les systèmes physiques atteignent rapidement leur état d'équilibre (minimum d'énergie) en dépit du nombre immense de configurations que peuvent prendre les particules constituant le système. La probabilité p pour qu'un système physique passe du niveau d'énergie E_1 au niveau E_2 ($E_2 > E_1$) est donnée par la loi de Boltzmann :

$$p = \exp\left(\frac{E_1 - E_2}{k_B \theta}\right) \quad (5.5)$$

où k_B est la constante de Boltzmann et θ la température absolue. La probabilité d'observer une augmentation de l'énergie est donc d'autant plus grande que la température est élevée. Par équivalence avec le système physique, dans le problème d'optimisation, les solutions admissibles sont les différents états du système et la fonction à minimiser son énergie. Les propriétés définies précédemment se traduisent par :

- Une diminution de la fonction sera toujours acceptée.
- Une augmentation de la fonction sera acceptée avec la probabilité p avec $k_B = 1$ et θ est un paramètre formel jouant le rôle de la température.

Algorithme

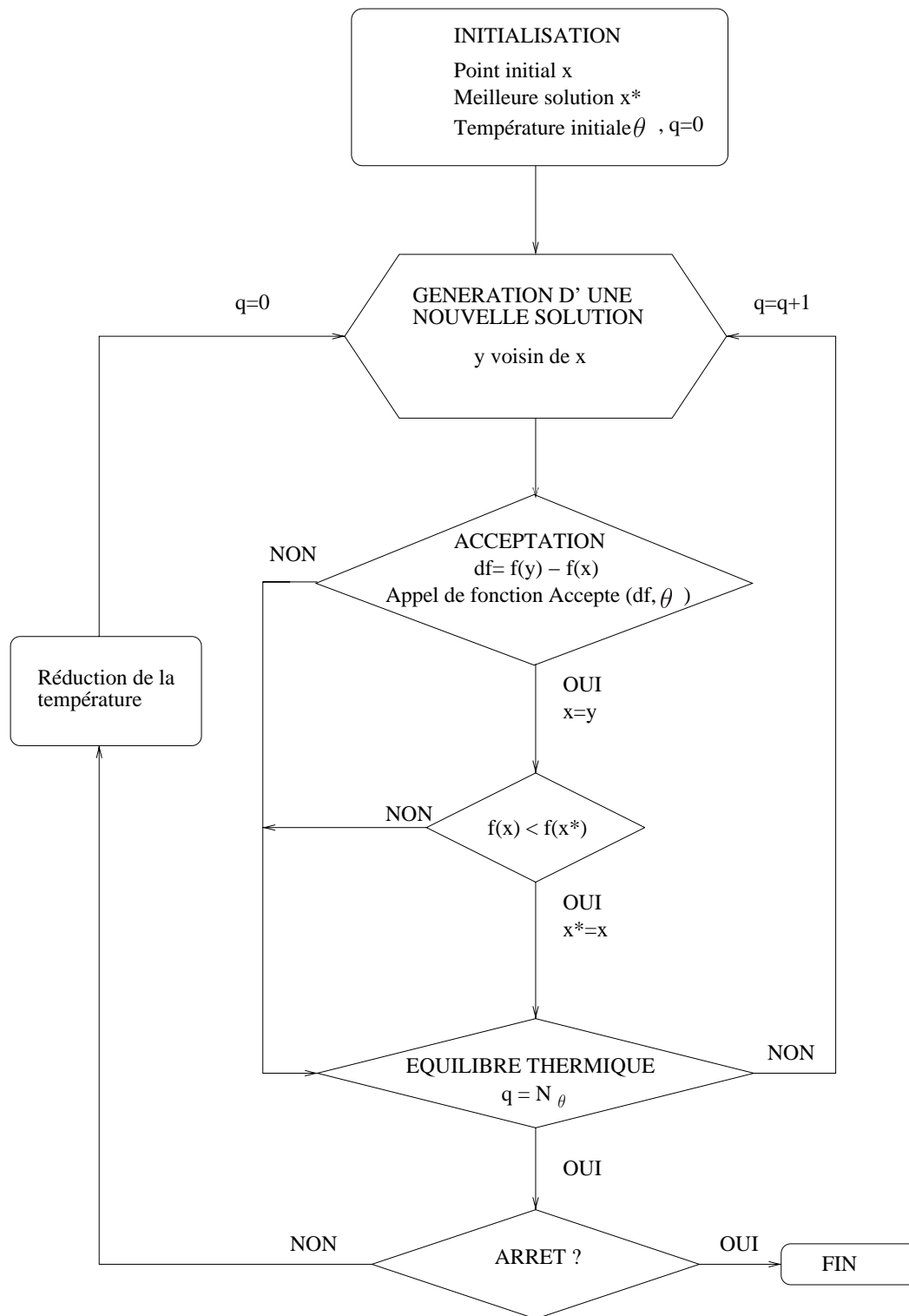
Le schéma général de l'algorithme du recuit simulé est donné par la figure 5.4.

Au début de l'algorithme, la température est élevée, et presque toutes les variations df sont acceptables. Au contraire, quand la température diminue, seules de très faibles augmentations du critère peuvent être acceptées. Si une configuration (solution) est rejetée, le système essaie d'en trouver une autre, sinon elle est acceptée et la recherche continue avec celle-ci jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit atteint. Pour implémenter cet algorithme, il faut :

1. Une fonction **Accepte**(df, θ)

La fonction **Accepte** (df, θ) se présente ainsi :

- Si $df < 0$ alors
 - **Accepte** = vrai
- Sinon
 - $A = \exp(-df/\theta)$
 - si **Random** (0,1) $< A$ alors **Accepte** = vrai sinon **Accepte** = faux

FIG. 5.4 – *Algorithme du recuit simulé*

Random(x,y) désigne un nombre aléatoire tiré dans une loi uniforme sur l'intervalle [x,y].

2. Une procédure de détermination de la température initiale

La température est un paramètre de contrôle du recuit simulé. Il faut une température assez haute pour surmonter l'obstacle des optimums locaux et suffisamment basse pour orienter malgré tout la recherche vers le minimum global. La détermination de la température initiale et du schéma de décroissance de la température sont deux points clés de l'algorithme. Au début des itérations, la température initiale doit être choisie élevée pour favoriser l'acceptation d'un maximum de configurations. La température est, soit fixée arbitrairement, soit déterminée dans une phase de pré-traitement. D'après Kirkpatrick et al. [KGV83], la température initiale doit être choisie de sorte que la probabilité d'acceptation de la plus mauvaise solution soit d'environ 80% ($P_a = 0.8$) au début de l'algorithme. Par exemple, si on note Δf^+ , l'accroissement maximal acceptable de la fonction objectif, la valeur θ_0 de la température initiale est déduite de la formule :

$$\theta_0 = \frac{-\Delta f^+}{\ln P_a} \quad (5.6)$$

Lutfiyya [LM91] suggère une exploration partielle de l'espace de recherche pour fixer la température initiale. L'algorithme de pré-traitement débute avec une température faible et la température est augmentée progressivement jusqu'à ce que le rapport entre le nombre de configurations acceptées ($nb_{acceptees}$) par rapport aux nombre de configurations générées ($nb_{generees}$) soit supérieur à un certain seuil s (s proche de 1, par exemple, $s = 0.9$). L'algorithme se présente de la façon suivante :

Initialisation :

Choisir une température initiale $\theta = \theta^0$, et un point $x \in X$

Tant que $\frac{nb_{acceptees}}{nb_{generees}} < s$

- $nb_{acceptees} = 0, l = 0$
- *Tant que* $l \leq nb_{generees}$
 - Générer un point y voisin de x
 - Appeler fonction Accepte ($f(y)-f(x),\theta$)
 - *Si* Accepte est vrai alors :
 - $nb_{acceptees} = nb_{acceptees} + 1$
 - *Fin* *Si*
- $l \leftarrow l + 1$
- *Fin* *Tant que*
- $\theta = \theta * \beta$ avec $\beta > 1$

Fin *Tant que*

3. Un schéma de décroissance de la température

Au début du processus, les valeurs de la température sont élevées ce qui permet

d'accepter des transitions à forte dégradation de critère et d'explorer ainsi l'espace de recherche de façon homogène. Au fur et à mesure la température est diminuée de manière à ce que seules les transitions améliorant le critère ou à faible détérioration du critère soient acceptées. Le choix d'un schéma de décroissance de la température est un point critique de l'algorithme. La décroissance de la température se fait par palier. La difficulté réside dans le choix de la longueur du palier N_θ et de la fonction de décroissance. Les fonctions les plus couramment utilisées dans la littérature sont les fonctions linéaires, discrètes ou exponentielles présentées dans le tableau 5.1. La

Type	Fonctions	Paramètres	Références
Linéaire	$\theta_{k+1} = \beta\theta_k$	$0.8 \leq \beta \leq 0.95$	[OF93]
Discrète	$\theta_{k+1} = \theta_k - \Delta$	Δ arbitraire	[RG86]
Exponentielle	$\theta_{k+1} = \theta_k \exp\left(\frac{-\lambda\theta_k}{\sigma_k}\right)$	σ_k , écart-type des coûts des configurations acceptées sous la température θ_k , λ paramètre de réglage fixé par l'utilisateur	[HL95]

TAB. 5.1 – Loïs de décroissance de la température fréquemment utilisées

loi linéaire est intéressante à utiliser. Elle permet d'avoir une décroissance ni trop rapide (loi discrète) ni trop lente (loi exponentielle). La loi exponentielle rend la décroissance dynamique et adaptative car elle tient compte de la température précédente et de l'écart-type résultant. Le paramètre λ permet de faire décroître plus ou moins lentement la température. Pour manipuler la fonction discrète, il faut s'assurer que la valeur du pas de décroissance choisie maintienne la température positive.

Il existe plusieurs façons de choisir la longueur N_{θ_k} du palier k , c'est-à-dire le nombre d'éléments générés à la température θ_k . La plus simple consiste à choisir une longueur indépendante de la température et polynomiale en la taille du problème. D'autres stratégies consistent à choisir la longueur du palier de manière à vérifier certaines conditions sur le nombre d'états acceptés ou rejetés. D'une manière générale, il faut que la longueur du palier soit suffisamment grande pour atteindre, à chaque niveau de température, une situation de quasi-équilibre.

4. Une notion de voisinage

À chaque palier de température, un ensemble de configurations est généré et testé. Pour générer un point y voisin d'un point x , il faut se munir d'une densité de probabilité de génération. Suivant les lois de génération utilisées, on distingue plusieurs types de recuit :

- Recuit standard : la loi de génération est une loi Normale. La probabilité de générer l'état y à partir de x à la température θ_k est donnée par :

$$G_k(y|x) = \frac{1}{(2\pi\theta_k)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\|y-x\|^2}{2\theta_k}\right) \quad (5.7)$$

avec $\|y-x\|$ norme euclidienne du vecteur $y-x$ dans \mathfrak{R}^n .

- Recuit Rapide : la loi de génération est une loi de Cauchy.

$$G_k(y|x) = \frac{\theta_k}{(\|y - x\|^2 + \theta_k^2)^{\frac{n+1}{2}}} \quad (5.8)$$

- Recuit adaptatif : la loi de génération tient compte des caractéristiques du problème ce qui permet d'orienter la recherche dans l'espace de recherche. Chaque composante du vecteur y est traitée séparément.

5. Un critère d'arrêt

Comme il s'agit d'une exploration aléatoire dans l'espace de recherche, plus le nombre d'itérations est élevé, meilleure est la solution. Cependant, si le nombre d'itérations devient trop grand, la température devient trop basse, et les améliorations du critère très faibles. Un nombre maximal d'itérations, un seuil de température final, sont des critères qui peuvent être retenus pour stopper l'algorithme du recuit simulé.

Efficacité

L'algorithme du recuit simulé permet de trouver l'optimum global pour des problèmes d'optimisation non convexes. Pour résoudre des problèmes d'optimisation continus, une classe d'algorithmes de recuit simulé a été développée et des propriétés de convergence ont été mises en évidence suivant le type de fonction de génération adoptée en caractérisant l'algorithme par une chaîne de Markov non homogène à états continus [Yan00]. En optimisation discrète ou combinatoire, l'algorithme du recuit simulé peut être caractérisé par des chaînes de Markov à états discrets. La convergence de ce type d'algorithme vers l'optimum global a été largement analysée et des conditions nécessaires ou suffisantes sur les fonctions de génération, d'acceptation et sur le schéma de décroissance de la température pour assurer la convergence globale ont été obtenues [AL93] (voir annexe D).

En optimisation discrète, tous les résultats concernant la convergence asymptotique de l'algorithme du recuit simulé vers l'ensemble des solutions optimales supposent un nombre infini d'itérations. En pratique, pour implémenter un algorithme de recuit simulé, le temps de calcul est limité, si bien que la convergence asymptotique ne peut être qu'approchée. A cause de cette approximation, l'algorithme du recuit simulé ne peut garantir d'atteindre l'optimum global avec une probabilité égale à 1. Aussi, pour augmenter la chance d'obtenir une solution la plus proche du minimum global, il est important de trouver un bon compromis entre les différents paramètres du recuit : la valeur de la température initiale, le schéma de décroissance de la température, la longueur des paliers. En fait, il existe un schéma de recuit optimal pour chaque problème et c'est à l'utilisateur de définir celui qui est le plus adapté à son application. Si l'on n'a aucune information sur le schéma de recuit optimal, ce qui est généralement le cas, on peut prendre un schéma standard pour lequel le paramètre θ_k évolue de façon linéaire et régler le paramètre β et la longueur des paliers en fonction du problème. Cette approche n'est pas optimale mais a l'avantage d'être robuste et assure une convergence quasi-optimale même s'il lui faut plus de temps pour l'atteindre que le schéma de recuit optimal.

5.6.3 Recherche Tabou

Principes de base

La méthode Tabou est une méthode d'optimisation combinatoire. Développée par Glover [GTW93], [GL97], dans les années 80 et indépendamment par Hansen, la recherche avec tabous (RT) s'est révélée particulièrement efficace pour de nombreux problèmes d'optimisation reconnus difficiles. La RT est une métaheuristique : un ensemble de règles et de principes généraux contrôlent et guident une heuristique interne, spécifiquement adaptée au problème à résoudre, afin de lui permettre de surmonter l'obstacle des optima locaux. Les algorithmes génétiques ou le recuit simulé utilisent des arguments probabilistes pour atteindre cet objectif tandis que la RT exploite la notion de mémoire. Inspirée des bases de l'intelligence artificielle, la RT conserve une trace du cheminement passé du processus de recherche et se sert de cette information pour les orientations futures. Plus explicitement, la RT consiste en un schéma de recherche locale qui explore partiellement l'espace des solutions en se déplaçant d'une solution à une autre à chaque étape. A chaque solution est associé un voisinage qui regroupe l'ensemble des solutions pouvant être atteintes à partir de la solution courante par une ou plusieurs transitions appelées mouvement. A chaque itération, le voisinage de la solution courante est examiné et le candidat le "meilleur" (au sens de la fonction objectif ou d'autres critères) est sélectionné pour obtenir la nouvelle solution courante. Pour éviter des cycles dans le processus d'exploration, la notion de mémoire intervient. Le passé récent de la recherche est mémorisé. Les t dernières transformations effectuées sont ainsi temporairement interdites, déclarées tabou, pour ne pas ramener la procédure vers des solutions déjà rencontrées, t représente la taille de la liste tabou. A ce mécanisme général s'ajoutent des raffinements tels que la diversification et l'intensification. La diversification permet de visiter des régions de l'espace de recherche peu explorées. L'intensification consiste à concentrer les recherches de solutions dans les régions jugées prometteuses.

Schéma algorithmique de la recherche avec tabous

L'algorithme de RT peut être schématisé de la manière suivante :

Initialisation :

Choisir un point initial $x \in X$, la meilleure solution est $x^* = x$

Tant que le critère d'arrêt est non vérifié :

- Construire le voisinage $V(x)$: ensemble des solutions admissibles à partir de x
- Choisir $y \in V(x)$, y non tabou qui minimise f
- $x = y$
- Retenir la meilleure solution x^* : Si $f(x) \leq f(x^*)$, $x^* = x$
- Mettre à jour les tabous

Fin Tant que

Le critère d'arrêt peut être défini de différentes manières. Les plus courantes sont :

- arrêt après un nombre fixé d'itérations
- arrêt lorsque la fonction objectif atteint une valeur satisfaisante
- arrêt après un certains nombre d'itérations consécutives sans améliorer la meilleure solution

Efficacité de la méthode

A notre connaissance, aucune démonstration mathématique prouvant la convergence de cette méthode n'a été publiée à ce jour. Les recherches théoriques sur cette méthode méritent donc d'être poursuivies. En pratique, un travail d'adaptation considérable et une bonne connaissance du problème à résoudre permet de développer une heuristique vraiment efficace. Le réglage de la taille de la liste tabou est aussi un paramètre important de la méthode. Si la longueur de la liste tabou est trop grande, le passage en revue des éléments pour savoir si le mouvement envisagé est tabou ou non peut être très coûteux en temps de calcul. Si la liste tabou est trop petite, l'effet mémoire est atténué et le risque de retourner vers des solutions déjà rencontrées augmente.

5.6.4 Les algorithmes évolutionnaires

Principes de base

Les algorithmes évolutionnaires dérivent de la théorie darwinienne sur l'évolution des populations biologiques. Il en existe plusieurs types : Algorithmes Génétiques [Hol75], Stratégies d'Evolution [Sch95], Programmation Evolutive [Fog94], Programmation Génétique [Koz92]. Ils ne diffèrent que par l'espace de recherche sur lequel ils travaillent (historiquement, l'espace de recherche est $\{0,1\}^n$ dans un algorithme génétique, et \mathbb{R}^n dans les stratégies d'évolution) et par l'absence ou la présence de tel ou tel opérateur. Ils sont employés essentiellement pour accomplir des tâches d'optimisation. Les algorithmes évolutionnaires peuvent résoudre un problème d'optimisation en faisant muter et en croisant les solutions potentielles du problème puis en les sélectionnant à la manière de la génétique et de l'évolution naturelle. Le parallèle entre le problème d'optimisation et les principes d'évolution se fait de la manière suivante :

Evolution biologique	Problème d'optimisation
Individu	Un élément x de l'espace de recherche X
Performance (ou fitness)	Valeur de la fonction objectif $f(x)$
Population	Ensemble d'éléments de X

Schéma algorithmique

Dans le cadre d'un problème d'optimisation résolu par un algorithme évolutionnaire, chaque individu représente un point de l'espace de recherche auquel on associe la valeur du critère à optimiser. Une population d'individus est générée aléatoirement puis par des processus

de mutation et de croisement, les individus les plus performants sont sélectionnés. Après un certain nombre de générations, les meilleurs individus apparaissent dans la population, ce sont les optima de f . Les étapes d'un algorithme évolutionnaire sont les suivantes :

Initialisation :

Générer une population initiale d'individus

Tant que le critère d'arrêt est non vérifié :

- Evaluation de la fitness de chaque individu de la population
- Sélection des meilleurs individus pour lesquels certains sont ensuite :
 - croisés avec une probabilité P_c
 - mutés avec une probabilité P_m
- Construction de la nouvelle population

Fin Tant que

La figure 5.5 illustre ce processus.

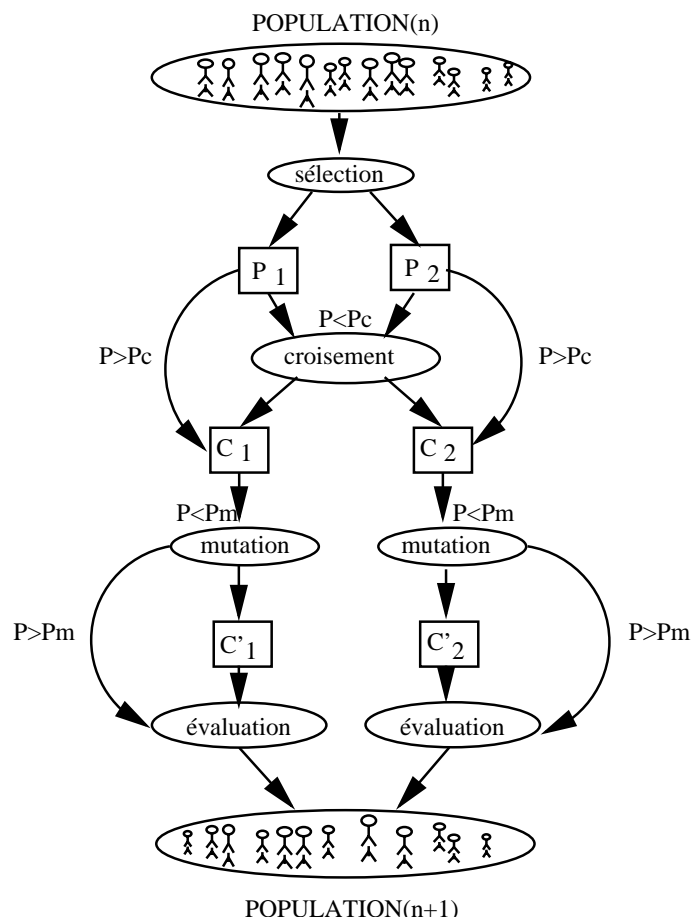


FIG. 5.5 – Principe de l'algorithme évolutionnaire

La condition d'arrêt est en général un nombre fixé de générations ou une stagnation de la fitness pendant un nombre élevé de générations. Il existe des règles communes à tout problème d'optimisation pour définir les procédures de sélection, croisement et mutation, mais elles ne seront pas détaillées dans ce chapitre car l'algorithme évolutionnaire ne sera pas utilisé dans la suite.

Efficacité de la méthode

Les techniques d'évolution permettent d'aborder des problèmes d'optimisation de grande dimension, multi-modes, multi-objectifs et sans propriétés particulières. En général, le recuit simulé converge plus vite vers la solution optimale qu'un algorithme évolutionnaire mais dans le cas des problèmes multi-modes (avec plusieurs optima), le recuit ne donnera qu'une solution. A l'inverse, les algorithmes évolutionnaires fournissent plusieurs solutions quasi-optimales mais au prix d'un temps de convergence plus long [IR92]. Comme pour les autres algorithmes d'optimisation stochastiques, l'ajustement des paramètres intervenant dans les différentes procédures (taille de la population, probabilités d'application des opérateurs,...) est difficile à réaliser. Pour obtenir des résultats satisfaisants, il faut une bonne représentation du problème pour construire des opérateurs d'évolution adaptés. Enfin, il est d'usage de compléter une méthode stochastique par une méthode locale.

5.7 Conclusion

L'examen des différentes méthodes d'optimisation et de leurs conditions d'application va permettre d'éliminer certains algorithmes de recherche qui seraient mal adaptés aux deux problèmes d'optimisation étudiés, à savoir l'identification des paramètres du modèle et le calcul des prix de secteurs. Dans les chapitres suivants, ces deux problèmes sont examinés de plus près, et en fonction des caractéristiques qui s'en dégagent, différents algorithmes de résolution sont proposés et testés.

Chapitre 6

Identification des paramètres du modèle

6.1 Introduction

Par définition, l'identification consiste à estimer les différents paramètres d'un modèle pour que celui-ci soit une bonne représentation du système réel. Ici, le modèle étudié est un modèle Logit représentatif des choix des compagnies aériennes en termes de routes et de périodes de décollage. L'identification des paramètres du modèle s'appuie sur la connaissance, pour une journée de trafic m et pour chaque paire OD ω , du nombre de vols de type ℓ observés sur chaque route i et sur chaque période j : $NO^{\omega,\ell,m}(i,j)$. Dans la partie 4.6 du chapitre 4, le principe d'identification retenu consiste à minimiser l'erreur quadratique entre un nombre moyen de vols observés et un nombre de vols résultant de l'application du modèle (voir équations 4.14 et 4.8).

$$Min_E G(E) = Min_E \sum_{\omega \in W} \sum_{\ell} \sum_{i \in R_{\omega,\ell}} \sum_{j=1}^{j=T} \left[\left\{ \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{m=M} NO^{\omega,\ell,m}(i,j) \right\} - NE^{\omega,\ell}(i,j)[E, \mathbf{X}] \right]^2$$

Dans cette formulation, il reste à définir l'ensemble E des paramètres. C'est l'objet de la première partie du travail d'identification. Une fois l'ensemble des paramètres établi, il faut résoudre ce problème d'optimisation. Dans ce chapitre, ces deux étapes sont présentées.

6.2 Paramètres du modèle

Les probabilités issues du modèle Logit pour l'affection des routes et des périodes de décollage ont l'expression suivante :

$$PR_u^{\omega,\ell}(i,j)[E, \mathbf{X}] = \frac{\exp[-\alpha(C_u^{\omega,\ell}(i,j) + P^{\omega,\ell}(i,j)[\mathbf{X}])]}{\sum_{r \in R_{\omega,\ell}} \sum_{s=u-J_{min}^{max}}^{s=u+J_{max}} \exp[-\alpha(C_u^{\omega}(r,s) + P^{\omega,\ell}(r,s)[\mathbf{X}])]} \quad (6.1)$$

Dans ce cas, l'ensemble des paramètres du modèle à estimer est :

$$E = \left\{ \alpha, C_u^{\omega,\ell}(i,j) \text{ pour } \omega \in W, \text{ tout type } \ell, i \in R_\omega, u \text{ et } j \text{ variant de } 1 \text{ à } T \right\} \quad (6.2)$$

Il convient de fixer J_{min} et J_{max} au préalable en sachant qu'il est rarissime qu'un avion décolle bien avant (plus d'un quart d'heure avant) ou bien après (plus de trois quart d'heure après) son heure de départ. Un décollage en dehors de cette plage horaire reste un fait exceptionnel (problèmes techniques, problèmes liés à l'embarquement des passagers ou au chargement des bagages,...). Mais sous cette forme, le modèle n'est pas identifiable. Deux points essentiels permettent de justifier cette affirmation :

- Dans la formulation du problème d'identification, les paramètres du modèle interviennent dans l'expression analytique $\sum_{u=j-J_{max}}^{u=j+J_{min}} NP^\omega(u) q^{\omega,\ell}(u) PR_u^{\omega,\ell}(i,j)[E, \mathbf{X}]$. Il peut arriver que certains coûts $C_u^{\omega,\ell}(i,j)$ ne soient pas identifiables à cause de la nullité du nombre de vols programmés ($NP^\omega(u) = 0$ ou $q^{\omega,\ell}(u) = 0$).
- En l'absence de tarification, l'identification ne conduit pas à un ensemble de valeurs unique. En effet, si

$$E(\alpha(1), C(1)) = \left\{ \alpha = \alpha(1), C_u^{\omega,\ell}(i,j) = C_u^{\omega,\ell}(i,j)(1) \right\}$$

est solution du problème d'identification, alors $E(\alpha(2), C(2))$ est aussi solution avec :

$$\alpha(2) = \lambda \alpha(1)$$

$$C_u^{\omega,\ell}(i,j)(2) = \frac{1}{\lambda} C_u^{\omega,\ell}(i,j)(1) \quad \forall \lambda \in \mathfrak{R}^*$$

Ces deux remarques montrent la nécessité de structurer plus fortement le modèle. On peut supposer que le coût $C_u^{\omega,\ell}(i,j)$ d'une option (i,j) pour un avion programmé en période u est la somme de deux coûts : un coût de route + un coût de retard. Si les effets météorologiques sont négligés, le coût de route est indépendant de la période de décollage. Le coût de retard au décollage est indépendant de la route choisie mais directement lié à la différence entre la période de décollage u initialement programmée et la période j de décollage effectif. On obtient ainsi une structure de coût d'option de la forme :

$$C_u^{\omega,\ell}(i,j) = c^{\omega,\ell}(i) + r^\ell(u,j) \quad (6.3)$$

Il faut pouvoir exprimer tous les coûts dans la même unité, l'euro par exemple, et se munir d'une valeur de référence pour pouvoir par la suite tarifier les secteurs aériens. Le coût du retard peut être modélisé simplement sous la forme suivante :

$$r^\ell(u,j) = c_{ms}^\ell \Delta | j - u | \quad (6.4)$$

où c_{ms}^ℓ est le coût d'attente pour une minute au sol. Le coût d'attente au sol varie en fonction du type d'avion ℓ . Le coût moyen est estimé à 30 euros par minute [FAA94][IAT97].

Pour rester cohérent avec l'expression du coût de retard au sol, la durée du vol doit intervenir dans le calcul des coûts de route. Un allongement de route suppose une durée de vol

plus grande, et donc une consommation de carburant plus élevée. Le coût d'une minute de vol est évalué comme étant 3 à 4 fois supérieur au coût des retards au sol [Fro98a]. Mais seule la durée du vol $d^{\omega,\ell}(i,j)$ n'est pas suffisante pour capturer les préférences des compagnies pour certaines routes. Il paraît donc nécessaire d'ajouter une pénalité ($\rho^{\omega,\ell}(i)$) sur chacune des routes alternatives. Le coût de route est supposé être de la forme :

$$c^{\omega,\ell}(i) = \eta c_{ms}^{\ell} \left(d^{\omega,\ell}(i) + \rho^{\omega,\ell}(i) \right) \quad (6.5)$$

où η est le rapport entre le coût d'une minute de vol et le coût d'une minute d'attente au sol. Pour chaque paire OD et chaque type d'avion ℓ , la pénalité de la route la plus empruntée est fixée à 0. Cette contrainte est nécessaire pour assurer l'unicité de la solution du problème d'identification. Sinon, il suffit d'augmenter, de la même quantité $K_{\omega,\ell}$, toutes les utilités d'une même paire OD pour retrouver les même probabilités :

$$\begin{aligned} PR_u^{\omega,\ell}(i,j)[E,\mathbf{X}] &= \frac{\exp(-\alpha V_u^{\omega,\ell}(i,j)[E,\mathbf{X}])}{\sum_{r \in R_{\omega,\ell}} \sum_{s=u-J_{min}^{max}}^{s=u+J_{max}} \exp(-\alpha V_u^{\omega,\ell}(r,s))} \\ &= \frac{\exp(-\alpha (V_u^{\omega,\ell}(i,j)[E,\mathbf{X}] + K_{\omega,\ell}))}{\sum_{r \in R_{\omega,\ell}} \sum_{s=u-J_{min}^{max}}^{s=u+J_{max}} \exp(-\alpha (V_u^{\omega,\ell}(r,s)[E,\mathbf{X}] + K_{\omega,\ell}))} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Pour résumer, l'utilité $V_u^{\omega,\ell}(i,j)[E,\mathbf{X}]$ associée au choix d'une option de route i et de période de décollage j pour un vol, de type ℓ , de la paire OD ω , programmé en période u , est structurée de la manière suivante :

$$V_u^{\omega,\ell}(i,j)[E,\mathbf{X}] = \eta c_{ms}^{\ell} (d^{\omega,\ell}(i) + \rho^{\omega,\ell}(i)) + c_{ms}^{\ell} \Delta |j - u| + P^{\omega,\ell}(i,j)[\mathbf{X}] \quad (6.7)$$

L'ensemble des paramètres à identifier est constitué du paramètre α , qui reflète la sensibilité des compagnies aux différences de coûts, et des pénalités $\rho^{\omega,\ell}(i)$ qui traduisent pour chaque paire OD et chaque type d'avion la différence de coût entre la route préférée (\hat{i}_{ω} et les autres.

$$E = \left\{ \alpha, \rho^{\omega,\ell}(i) \text{ pour } \omega \in W, \text{ tout type } \ell, i \in R_{\omega,i} \neq \hat{i}_{\omega} \right\} \quad (6.8)$$

Le modèle ainsi construit est cohérent du point de vue économique. En effet, les prix optimisés pour atteindre une planification cible s'expriment dans la même unité que celle choisie pour le coût d'une minute d'attente au sol et sont directement sensibles à ses variations.

6.3 Méthode de résolution

Le problème d'identification des paramètres est formulé comme un problème de minimisation d'erreur quadratique. Les paramètres à estimer sont α et ρ . Pour choisir une méthode de résolution adaptée au problème, il faut examiner les caractéristiques de celui-ci :

Dimension

Il y a un seul paramètre α et pour chaque paire OD ω et chaque type d'avion ℓ , un ensemble de routes $R_{\omega,\ell}$. Seuls les paramètres $\rho^{\omega,\ell}(i)$ liés aux routes alternatives sont à estimer, la

pénalité de la route préférée \hat{i}_ω étant fixée à 0. En supposant qu'il y a en moyenne L types d'avions et I routes par paire OD, le nombre moyen de variables d'optimisation s'élève à : 1 (pour α) + $N \times L \times (I - 1)$ (pour les pénalités). Pour le réseau aérien européen, en ne considérant que les 20 plus grands aéroports, on compte déjà 400 paires OD. Pour chacune d'elle, il y a en moyenne 3 routes possibles, et 3 types d'avions, ce qui conduit à estimer environ 2400 paramètres.

Linéarité

La fonction G est non linéaire.

Continuité - Dérivabilité

La fonction G est différentiable et à dérivées premières continues.

Convexité

L'étude de convexité de la fonction G est trop complexe. Pour obtenir quelques éléments de réponse, on peut étudier la convexité d'une fonction plus simple qui sert de base à la construction de la fonction G . Dans l'expression de G , on trouve des fonctions de base de la forme : $g(\alpha, x, y) = \frac{1}{1 + \exp(-\alpha(x-y))}$. On peut montrer que cette fonction n'est pas convexe. Il suffit de calculer son hessien et de montrer qu'il existe un triplet (α, x, y) pour lequel le hessien n'est pas une matrice semi-définie positive. Par exemple, au point $(\alpha = 0.5, x = 10, y = 5)$, le hessien de g n'est pas une matrice semi-définie positive. Ce résultat n'est pas une preuve de non convexité de la fonction G mais un élément qui laisse entrevoir que la fonction G peut ne pas être convexe.

Multimodalité

On dit qu'une fonction est multimodale si elle peut avoir des optima locaux. Si le modèle est bien construit, cette situation ne doit pas avoir lieu.

Le problème étudié est donc un problème d'optimisation non linéaire sans contrainte non convexe et de grande taille. Ces caractéristiques orientent le choix vers une méthode stochastique. La méthode la plus facile d'approche est le recuit simulé.

L'algorithme de recuit simulé utilisé pour l'estimation des paramètres est décrit par le schéma 6.1. Pour générer un ensemble de paramètres Z voisin de E , une stratégie très simple consiste à tirer aléatoirement une nouvelle valeur de α , α_Z à partir de l'ancienne valeur α_E dans l'intervalle $[\max(0, \alpha_E - \delta), \min(\alpha_E + \delta, \alpha_{MAX})]$. On détermine α_{MAX} de manière à ce que le coût du retard ait de l'influence dans la prise de décision, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \exp(-\alpha \overline{c_{ms}} \Delta) &> 10E^{-10} \\ -\alpha \overline{c_{ms}} \Delta &> \ln(10E^{-10}) \\ -\alpha &> \frac{\ln(10E^{-10})}{\Delta \overline{c_{ms}}} \\ \alpha &< \alpha_{MAX} \end{aligned} \tag{6.9}$$

avec $\overline{c_{ms}}$, le coût moyen d'une minute d'attente au sol.

Le pas de déplacement δ est de l'ordre de 1/100 de α_{MAX} .

Les nouvelles pénalités de routes $\rho_Z^{\omega, \ell}(i)$ (pour $i \in R_{\omega, \ell} - \{\hat{i}_\omega\}$) sont générées à partir des anciennes en tirant les valeurs aléatoirement dans l'intervalle : $[\rho_E^{\omega, \ell}(i) - \varepsilon, \rho_E^{\omega, \ell}(i) + \varepsilon]$ avec une valeur de ε assez petite pour éviter la dispersion des solutions.

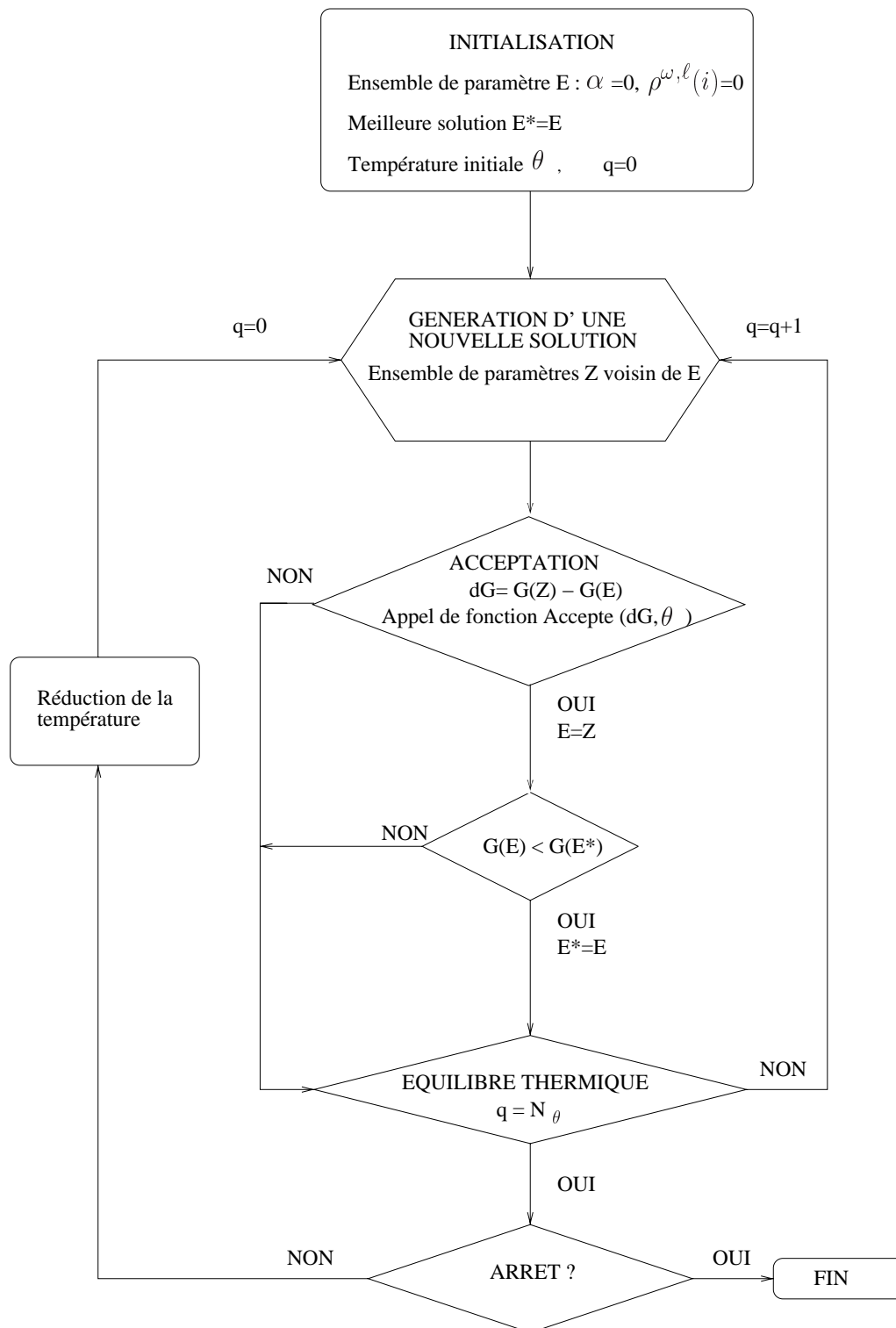


FIG. 6.1 – Algorithme du recuit simulé pour l'identification des paramètres

6.4 Tests et résultats

6.4.1 Exemple académique

L'algorithme du recuit simulé est testé sur l'exemple décrit en annexe B. Dans cet exemple, le réseau présente des symétries qui ne sont pas prises en compte dans l'algorithme car celui-ci doit pouvoir s'appliquer à tout type de réseau. A travers cet exemple, on cherche à mesurer l'efficacité du recuit simulé pour résoudre le problème de minimisation et à évaluer la qualité des résultats de l'estimation des paramètres suivant le nombre de jours d'observation de trafic. Pour ce faire, on fixe au préalable, les valeurs des paramètres du modèle ($\alpha = 0.1$, les pénalités sur les routes alternatives : $\rho^\omega(1) = \rho^\omega(3) = 5.14$, $\rho^\omega(2) = 0.0$ pour $\omega = 1,2$). On utilise le programme de simulation défini dans la partie 4.5 pour simuler M journées de trafic. Les données recueillies servent de base statistique pour l'identification du modèle.

En comparant les résultats de l'identification aux valeurs fixées au préalable, il est possible de juger de l'efficacité de la méthode d'identification employée. Le tableau 6.1 présente les résultats obtenus avec le recuit simulé pour le problème d'optimisation défini en 4.14. L'algorithme du recuit simulé est arrêté après 200000 itérations. Un pré-traitement permet de déterminer une température initiale de manière à ce que le rapport entre le nombre de configurations acceptées et le nombre de configurations générées soit supérieur à 0.8. La température décroît linéairement par palier avec le facteur de décroissance égal à 0.9. Un palier compte 5000 itérations. Pour cet exemple, la valeur de α_{MAX} est égale à 0.5. Le pas de déplacement δ est fixé à 0.01. Les pénalités de route sont modifiées en prenant $\varepsilon = 0.1$. Dans le tableau 6.1, on peut lire suivant le nombre de journées de trafic observées, la moyenne et l'écart-type des valeurs des paramètres et du critère d'identification G (sous la forme : moyenne \pm écart-type) obtenus pour 40 initialisations différentes du générateur aléatoire.

Nombre de jours	α	$\rho^1(1)$	$\rho^1(3)$	$\rho^2(1)$	$\rho^2(3)$	Critère G
1	0.50 \pm 0.00	15.46 \pm 6.56	15.21 \pm 5.55	13.17 \pm 4.30	15.40 \pm 6.37	1.0E ⁻¹⁸ \pm 0.00E ⁰
10	0.29 \pm 0.08	1.05 \pm 0.22	9.72 \pm 3.85	1.05 \pm 0.22	11.17 \pm 3.79	4.8E ⁻⁸ \pm 3.6E ⁻⁸
30	0.10 \pm 0.00	3.76 \pm 0.00	15.78 \pm 4.58	3.76 \pm 0.00	14.32 \pm 4.42	4.9E ⁻⁶ \pm 5.6E ⁻⁷
100	0.10 \pm 0.00	4.24 \pm 0.01	5.46 \pm 0.02	4.24 \pm 0.01	5.45 \pm 0.02	2.2E ⁻⁶ \pm 1.5E ⁻⁷
180	0.10 \pm 0.00	4.71 \pm 0.01	6.47 \pm 0.02	4.71 \pm 0.01	6.49 \pm 0.04	2.7E ⁻⁶ \pm 1.4E ⁻⁷
360	0.10 \pm 0.00	4.91 \pm 0.01	5.70 \pm 0.01	4.92 \pm 0.01	5.70 \pm 0.02	1.3E ⁻⁵ \pm 2.5E ⁻⁷
720	0.10 \pm 0.00	4.96 \pm 0.01	5.25 \pm 0.02	4.96 \pm 0.01	5.25 \pm 0.01	2.9E ⁻⁶ \pm 3.1E ⁻⁷
1000	0.10 \pm 0.00	4.83 \pm 0.01	5.03 \pm 0.01	4.83 \pm 0.01	5.05 \pm 0.01	1.9E ⁻⁶ \pm 2.4E ⁻⁷
2000	0.10 \pm 0.00	5.05 \pm 0.01	5.04 \pm 0.02	5.05 \pm 0.00	5.04 \pm 0.00	3.4E ⁻⁶ \pm 5.9E ⁻⁷
4000	0.10 \pm 0.00	5.08 \pm 0.01	5.16 \pm 0.01	5.08 \pm 0.01	5.15 \pm 0.02	8.3E ⁻⁷ \pm 3.1E ⁻⁷
10000	0.10 \pm 0.00	5.14 \pm 0.01	5.14 \pm 0.01	5.14 \pm 0.01	5.14 \pm 0.02	7.7E ⁻⁷ \pm 3.0E ⁻⁷

TAB. 6.1 – Résultats de l'identification en fonction du nombre de journées de trafic observées pour l'exemple 2

Ces résultats montrent la nécessité d'observer la répartition du trafic sur un nombre de jours suffisants pour avoir une estimation correcte des paramètres. Pour cet exemple, il faut

1 mois (30 jours) d'observation pour estimer correctement α , mais il faudrait plus de 30 ans (10000 jours) pour estimer exactement les pénalités accordées aux routes alternatives. Dans la pratique, les compagnies définissent leurs horaires pour une période de 6 mois, donc il est possible d'observer au maximum 180 journées de trafic identiques en terme de planification. Dans cette optique, il paraît intéressant de voir en quoi une identification imparfaite des paramètres influence la tarification.

Les figures 6.2 et 6.3 donnent les prix d'options (option (i,j) pour route i et période de décollage j) calculés pour la cible 1 dans le cas où les valeurs des paramètres sont fixées préalablement (Prix (*)) et dans le cas où les valeurs de paramètres ont été estimées à partir de l'observation de 30 jours et de 180 jours de trafic (Prix - 30 jours et Prix - 180 jours). Le calcul des prix d'options est réalisé avec un algorithme de recuit simulé décrit dans le chapitre suivant (partie 7.4).

Le critère d'optimisation des prix de secteurs calculé avec un modèle parfaitement identifié correspond au critère F , encore appelé critère réel. Le critère d'optimisation des prix de secteurs calculé avec différentes estimations des paramètres du modèle est noté F' et nommé critère apparent.

Le tableau 6.2 donne les valeurs du critère réel et du critère apparent pour les trois tables de prix. La première ligne sert de référence, elle correspond à une situation sans tarification. Le programme de simulation fournit les moyennes et les écarts-type des indicateurs de congestion Q_1 et Q_2 pour 1000 jours de simulation, pour chaque table de prix appliquée et avec les paramètres réels. Les indicateurs de congestion ont été calculés en prenant $p_I = 1$, $p_O = 0$ et $p_M = 0$ dans la formule 4.5 de l'indice de charge.

	Critère F'	Critère F	$\overline{Q_1} \pm \sigma_{Q_1}$	$\overline{Q_2} \pm \sigma_{Q_2}$
Sans prix	-	17.00	5.1 ± 0.3	12.5 ± 1.5
Prix(30 jours)	0.001	11.90	6.0 ± 0.0	11.91 ± 0.4
Prix(180 jours)	0.001	2.93	5.0 ± 2.1	6.7 ± 3.8
Prix(*)	0.0007	0.0007	4.6 ± 2.5	5.2 ± 3.3

TAB. 6.2 – Critère d'optimisation et mesures de congestion pour trois tables de prix différentes (optimisées pour des valeurs différentes des paramètres du modèle) - Exemple 2

Des résultats semblables sont obtenus pour les autres cibles. Les remarques suivantes sont faites :

- A partir de 180 jours d'observation du trafic, il est possible d'estimer assez convenablement les paramètres du modèle. Les prix optimisés en vue d'atteindre la cible, à partir du modèle obtenu, sont très proches de ceux calculés avec les "vraies" valeurs de paramètres.
- En disposant seulement de 30 jours d'observation de trafic, le modèle ne peut pas être parfaitement identifié, ce qui induit des prix d'options non optimaux. Ces prix ne permettent pas d'orienter le trafic dans la direction souhaitée. Il en ressort que la congestion n'a pas diminué et que, dans certains secteurs, elle a même augmenté.

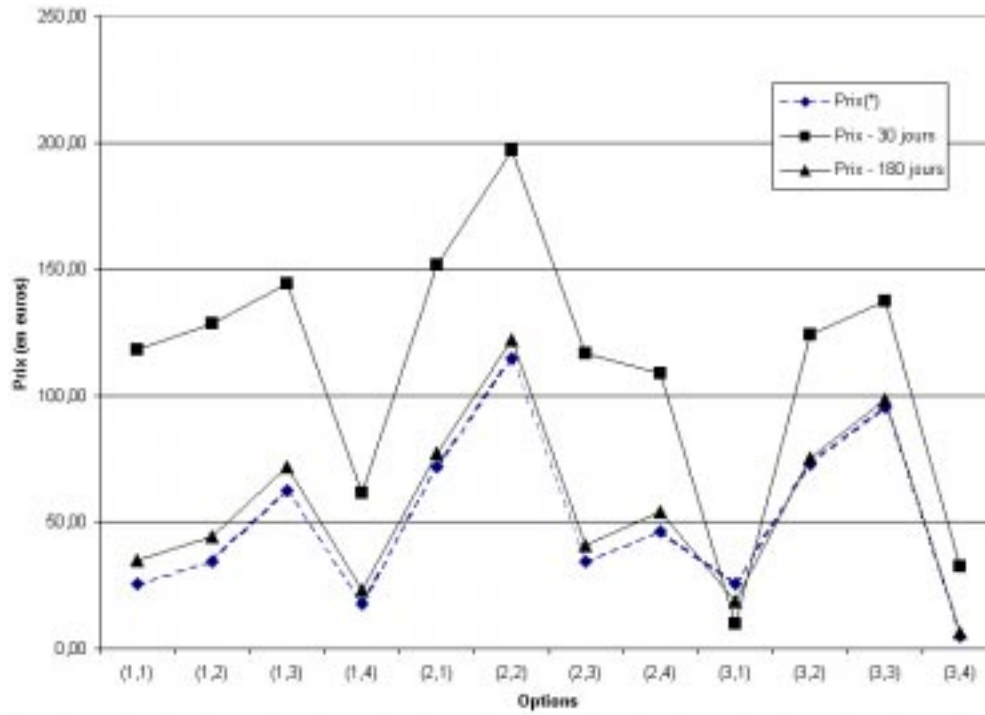


FIG. 6.2 – Prix des options pour la paire OD1 pour différents résultats d'identification des paramètres du modèle - Cible 1

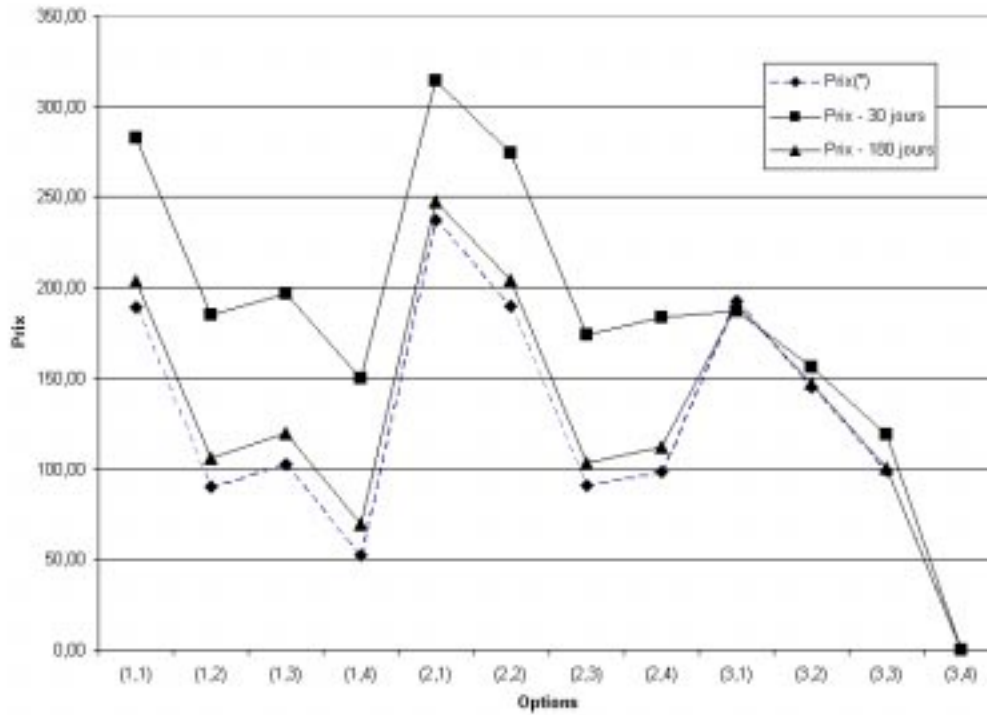


FIG. 6.3 – Prix des options pour la paire OD2 pour différents résultats d'identification des paramètres du modèle - Cible 1

6.4.2 Exemple plus réaliste

Le scénario de trafic présenté en annexe H est plus complexe et plus réaliste. Les valeurs des paramètres du modèle ont été fixées arbitrairement. La valeur de α est 0.01 et les pénalités des routes alternatives sont comprises entre 0 et 1. Pour cet exemple, il y a 51 pénalités à estimer. Comme pour l'exemple précédent, on cherche à apprécier les performances du recuit simulé pour la minimisation du critère d'identification G , à évaluer la qualité des résultats suivant le nombre de jours de trafic observés. Pour obtenir des statistiques d'observation de trafic, le programme de simulation défini dans la partie 4.5 est utilisé.

Le tableau 6.3 rassemble les résultats obtenus avec le recuit simulé en fonction du nombre de jours d'observation du trafic. L'indicateur EC^2 correspond à la somme des écarts quadratiques entre les valeurs des pénalités estimées avec le recuit simulé et les "vraies" valeurs des pénalités. L'indicateur EC_{max} donne l'écart maximal constaté. Les valeurs du critère d'identification après optimisation sont données dans la colonne "Critère G ".

Nombre de jours	α	EC^2	EC_{max}	Critère G
1	0.01	296.73	5.27	23.94
10	0.01	89.40	4.56	1.26
30	0.01	50.94	3.35	0.39
100	0.01	14.84	2.16	0.23
180	0.01	8.53	1.53	0.16
10000	0.01	5.25	0.89	0.00

TAB. 6.3 – Résultats de l'identification en fonction du nombre de journées de trafic observées pour l'exemple 3

Ces résultats amènent les commentaires suivants :

- L'estimation des paramètres du modèle est améliorée (la valeur de EC diminue) avec l'augmentation du nombre de jours de trafic observés.
- Pour une observation inférieure ou égale à 10 jours, les valeurs du critère d'identification G sont encore élevées, même après optimisation. Ceci n'est pas étonnant dans la mesure où il y a un plus grand nombre de vols que dans l'exemple précédent. Pour un seul jour d'observation, il y a aussi certaines situations difficilement explicables par le modèle. Par exemple, pour une même paire OD, il y a deux vols du même type qui décolle à deux périodes différentes, l'un utilise la route préférée, l'autre la route alternative. Dans ce cas, la pénalité de la route alternative est fixée de manière à égaliser les coûts de route. Mais le modèle ainsi identifié ne colle pas complètement à la situation observée.
- Le paramètre α de sensibilité aux prix est facilement identifiable. Cette remarque peut inciter à utiliser une autre méthode pour identifier les paramètres du modèle. Par exemple, on pourrait utiliser le recuit simulé pour minimiser le critère G et identifier α , et ensuite estimer les pénalités en traitant chaque paire OD indépendamment.

Connaissant α , le problème d'estimation des pénalités s'écrit pour chaque paire OD :

$$\text{Min}_\rho G_\omega(\rho) = \text{Min}_\rho \sum_{\ell} \sum_{i \in R_\omega} \sum_{j=1}^{j=T} \left[\left\{ \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{m=M} NO^{(\omega, \ell, m)}(i, j) \right\} - NE^{\omega, \ell}(i, j)[E, \mathbf{X}] \right]^2$$

- Dans cet exemple, les pénalités sont très faibles par rapport aux écarts existants entre la durée de vol par la route préférée et les durées de vols par les autres routes. Il faut par conséquent un grand nombre de statistiques pour pouvoir estimer convenablement leurs valeurs.

À présent, on veut mesurer les effets d'une identification imparfaite sur la tarification. Le tableau 6.4 donne les valeurs du critère réel et du critère apparent pour des tables de prix optimisées avec différentes estimations du modèle. La première ligne sert de référence, elle correspond à une situation sans tarification. La dernière ligne correspond à un table de prix (Prix(*)) optimisée avec un modèle parfaitement identifié. Le programme de simulation fournit les moyennes et les écarts-type des indicateurs de congestion Q_1 et Q_2 pour 1000 jours de simulation, pour chaque table de prix appliquée et avec les paramètres réels. Les indicateurs de congestion ont été calculés en prenant $p_I = 0.5$, $p_O = 0.5$ et $p_M = 0.5$ dans la formule 4.5 de l'indice de charge.

	Critère F'	Critère F	$\overline{Q_1} \pm \sigma_{Q_1}$	$\overline{Q_2} \pm \sigma_{Q_2}$
Sans prix	-	107.23	26.89 ± 1.76	44.19 ± 2.03
Prix(1 jour)	11.86	8.88	20.09 ± 3.32	18.20 ± 4.05
Prix(10 jours)	9.63	8.45	19.21 ± 3.36	17.40 ± 3.02
Prix(30 jours)	8.38	8.15	19.43 ± 3.40	17.62 ± 4.02
Prix(100 jours)	8.70	8.13	19.03 ± 3.47	17.08 ± 4.28
Prix(180 jours)	9.64	8.59	18.70 ± 3.45	16.87 ± 4.30
Prix(10000 jours)	7.55	9.25	19.76 ± 3.49	18.09 ± 4.33
Prix(*)	8.05	8.05	19.33 ± 3.41	17.54 ± 4.18

TAB. 6.4 – Critère d'optimisation et mesures de congestion pour différentes tables de prix (optimisées pour des valeurs différentes des paramètres du modèle) - Exemple 3

Les résultats obtenus sont plutôt surprenants. En effet, on s'attendait à ce qu'une identification imparfaite des paramètres conduisent à des tables de prix dont le critère réel soit très supérieur au critère obtenu avec la table de prix (Prix(*)). Ce n'est pas le cas. Par conséquent, même si le modèle est mal identifié, la tarification mise en place permet de réduire la congestion. Plusieurs facteurs entrent en jeu pour expliquer ces résultats :

- La cible à atteindre n'est pas construite par optimisation mais de façon heuristique. Il se peut donc qu'une table de prix non optimale au sens du critère réel F induise tout de même une affectation de trafic pour laquelle la congestion est fortement réduite.
- Les pénalités estimées sont très faibles par rapport aux écarts de durées de vol. Elles ne modifient pas de manière significative l'affectation, le critère réel est donc très proche du critère apparent.

6.5 Conclusion

Le modèle proposé initialement présente un nombre trop important de paramètres pour que ceux-ci puissent être estimés à partir de mesures. Une structuration plus forte du modèle, séparant coûts de route et coûts de retard, et s'appuyant sur la connaissance du coût de la minute en vol et au sol, conduit à une réduction du nombre de paramètres.

Pour identifier les paramètres du modèle, plusieurs formulations ont été envisagées (voir partie 4.6). La minimisation de l'erreur quadratique faisant intervenir un nombre moyen de vols observés a été retenue, car dans ce cas, la complexité du calcul du critère est indépendante de la taille des statistiques.

L'utilisation d'un algorithme de recuit simulé sur un problème simple indique que les paramètres peuvent alors être identifiés. Sur le second exemple, plus complexe, et de plus grande taille, on note qu'une identification parfaite des paramètres ne peut être obtenue que suite à des mesures durant une période de temps trop importante pour être envisagée dans la pratique. Néanmoins, le paramètre de sensibilité α peut être facilement identifié et les valeurs des pénalités étant très faibles, les prix d'options établis modifient la répartition du trafic et conduisent à une diminution de la congestion.

Les liens entre l'estimation des paramètres et la tarification induite mériteraient d'être analysés sur des exemples concrets. En effet, ces liens diffèrent d'un exemple à l'autre. La question de savoir si une erreur d'estimation entraîne, dans la pratique, une différence significative d'affectation et de saturation reste donc ouverte. Une méthode pour mesurer la sensibilité du modèle aux erreurs d'estimation a néanmoins été proposée et mise en oeuvre.

Chapitre 7

Tarification continue des secteurs aériens

7.1 Introduction

Le problème de tarification des secteurs aériens se présente comme un problème d'optimisation où la fonction objectif mesure un écart quadratique entre une répartition de vols issue de la tarification et une répartition de vols désirée. Les variables du problème sont des prix par secteur et par période. Il s'agit de fixer les prix $x_{k,n}$ de chaque secteur k à chaque période n pour atteindre la cible souhaitée. Le problème d'optimisation est décrit par les équations 4.15 et 4.16 :

$$\text{Min}_{\mathbf{X}} F(\mathbf{X}) = \text{Min}_{\mathbf{X}} \sum_{\omega \in W} \sum_{\ell} \sum_{i \in R_{\omega, \ell}} \sum_{j=1}^{j=T} [ND^{\omega, \ell}(i, j) - NE^{\omega, \ell}(i, j)[E, \mathbf{X}]]^2$$

sous les contraintes :

$$0 \leq x_{k,n} \leq \bar{x} \quad \forall k = 1, S \quad \forall n = 1, T'$$

7.2 Caractéristiques du problème

Avant d'entreprendre la résolution de ce problème, il faut examiner ses caractéristiques :

Dimension

Pour une tarification continue des secteurs aériens, le nombre de variables de prix s'élève à : $S \times T'$. Pour donner un ordre de grandeur, l'espace aérien français comporte une centaine de secteurs. Pour une journée de trafic (24 heures) découpée en périodes de 15 minutes ($\Delta = 15$), il y a 96 périodes de décollage. Dans ce cas, il y a environ $100 \times 100 = 10000$ variables de prix. Cependant certains prix de secteurs à certaine période n'ont pas d'influence sur le critère d'optimisation. En effet, il y a des périodes de la journée où des secteurs peuvent être vides (pas d'avion qui les traverse). Un secteur k en période n dans une telle situation

satisfait l'égalité :

$$\sum_{\omega} \sum_{\ell} \sum_{i \in R_{\omega, \ell}} \sum_{j=1}^{j=T} b_{(i,j)}^{(k,n,\ell)} \sum_{u=j-J_{max}}^{u=j+J_{min}} NP^{\omega}(u) q^{\omega, \ell}(u) = 0 \quad (7.1)$$

Les variables de prix des couples (secteur, période) qui vérifient cette égalité ne sont pas significatives, elles n'ont pas d'influence sur le critère d'optimisation. Dans tous les algorithmes développés dans la suite, les valeurs de telles variables seront fixées à 0 et ne seront pas modifiées.

Linéarité

La fonction f est non linéaire.

Continuité - Dérivabilité

La fonction f est différentiable et à dérivées premières continues.

Contraintes

On a vu dans le chapitre 5 qu'on pouvait toujours se ramener à l'ensemble des solutions admissibles par projection.

Multimodalité

La structure même du modèle d'affectation laisse à penser que la fonction F possède plusieurs optima. En effet, si tous les prix d'options $P^{\omega, \ell}(i, j)[\mathbf{X}]$ sont augmentés d'une même quantité $K_{\omega, \ell}$, on retrouve les mêmes probabilités :

$$\begin{aligned} PR_u^{\omega, \ell}(i, j)[E, \mathbf{X}] &= \frac{\exp(-\alpha(C_u^{\omega, \ell}(i, j) + P^{\omega, \ell}(i, j)[\mathbf{X}]))}{\sum_{r \in R_{\omega, \ell}} \sum_{s=u-J_{min}}^{s=u+J_{max}} \exp(-\alpha(C_u^{\omega, \ell}(r, s) + P^{\omega, \ell}(r, s)[\mathbf{X}]))} \\ &= \frac{\exp(-\alpha(C_u^{\omega, \ell}(i, j) + P^{\omega, \ell}(i, j)[\mathbf{X}] + K_{\omega, \ell}))}{\sum_{r \in R_{\omega, \ell}} \sum_{s=u-J_{min}}^{s=u+J_{max}} \exp(-\alpha(C_u^{\omega, \ell}(r, s) + P^{\omega, \ell}(r, s)[\mathbf{X}] + K_{\omega, \ell}))} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Convexité

La recherche de convexité d'une fonction passe en général par le calcul du hessien. Si le hessien $\nabla^2 F(\mathbf{X})$ est une matrice semi-définie positive pour tout \mathbf{X} , F est une fonction convexe. Bien que l'on puisse calculer une expression analytique du hessien, l'étude de la semi-définie positivité s'avère très complexe. On se place alors dans un cas simple (voir figure 7.1) avec deux paires Origine-Destination (paires OD A et OD B), un seul type d'avion, deux routes, deux secteurs pour observer la nature de la fonction F . La dimension temporelle du problème est écartée.

Le critère de minimisation s'écrit :

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= [ND^A(1) - NE^A(1)]^2 + [ND^A(2) - NE^A(2)]^2 \\ &+ [ND^B(1) - NE^B(1)]^2 + [ND^B(2) - NE^B(2)]^2 \end{aligned} \quad (7.3)$$

avec :

$$NE^A(i) = NP^A PR^A(i) \quad i = 1, 2 \quad (7.4)$$

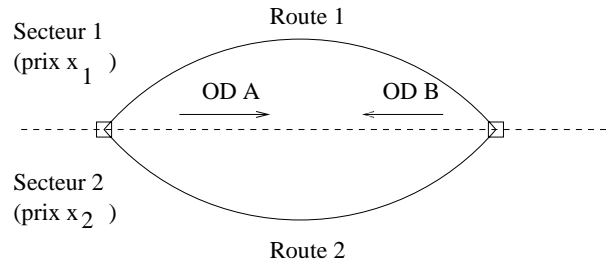


FIG. 7.1 - Configuration étudiée

$$NE^B(i) = NP^B PR^B(i) \quad i = 1,2 \quad (7.5)$$

et :

$$PR^\omega(i) = \frac{\exp[-\alpha(C^\omega(i) + x_i)]}{\exp[-\alpha(C^\omega(1) + x_1)] + \exp[-\alpha(C^\omega(2) + x_2)]} \quad \forall i = 1,2 \quad \forall \omega = A,B \quad (7.6)$$

En supposant que les coûts des routes sont indépendants de la paire OD, c'est-à-dire :

$$C^A(1) = C^B(1) = C_1 \quad (7.7)$$

$$C^A(2) = C^B(2) = C_2 \quad (7.8)$$

on peut écrire que :

$$PR(1) = PR^A(1) = PR^B(1) = \frac{1}{1 + \exp[-\alpha(C_2 - C_1 + x_2 - x_1)]} \quad (7.9)$$

$$PR(2) = PR^A(2) = PR^B(2) = \frac{1}{1 + \exp[-\alpha(C_1 - C_2 + x_1 - x_2)]} \quad (7.10)$$

Le critère de minimisation s'écrit :

$$F(x_1, x_2) = [ND^A(1) - NP^A PR(1)]^2 + [ND^A(2) - NP^A PR(2)]^2 + [ND^B(1) - NP^B PR(1)]^2 + [ND^B(2) - NP^B PR(2)]^2 \quad (7.11)$$

Le hessien de la fonction F s'écrit :

$$\nabla^2 F = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_1 x_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_2 x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_2} \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

Pour cet exemple, on a :

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

En utilisant les égalités :

$$PR(1) + PR(2) = 1 \quad (7.14)$$

et

$$ND^A(1) + ND^A(2) = NP^A \quad (7.15)$$

$$ND^B(1) + ND^B(2) = NP^B \quad (7.16)$$

on trouve :

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2\alpha PR(1)(1 - PR(1)) \left[ND^A(1)NP^A + ND^B(1)NP^B - PR(1)[NP^{A^2} + NP^{B^2}] \right] \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_1} &= -2\alpha^2 PR(1)(1 - PR(1))^2(\beta - \gamma PR(1)) \\ &+ 2\alpha^2 PR(1)^2(1 - PR(1))(\beta - \gamma PR(1)) \\ &+ 2\alpha^2 PR(1)^2(1 - PR(1))^2\gamma \end{aligned} \quad (7.18)$$

avec :

$$\begin{aligned} \beta &= ND^A(1)NP^A + ND^B(1)NP^B \\ \gamma &= NP^{A^2} + NP^{B^2} \end{aligned} \quad (7.19)$$

La matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

est semi-définie positive. La semi-définie positivité du hessien de F est donc déterminée par le signe de $\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_1}$. Pour les données du tableau 7.1, la figure 7.2 donne le signe de $\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_1}$ lorsque la probabilité $PR(1)$ varie de 0 à 1.

α	$ND^A(1)$	$ND^A(2)$	$ND^B(1)$	$ND^B(2)$	NP^A	NP^B	C_1	C_2
0.1	2	0	2	0	2	2	1	10

TAB. 7.1 – Données du problème

Les résultats obtenus sur cet exemple très simple montrent que la fonction F n'est pas convexe car il existe des points (x_1, x_2) où la matrice hessienne n'est pas semi-définie positive. Cette remarque de non-convexité peut être sans doute généralisée à des exemples plus complexes. La figure 7.3 donne la valeur du critère F en fonction des prix x_1 et x_2 des deux secteurs. Bien que la fonction ne soit pas convexe, elle ne présente pas de minimum locaux.

En tenant compte de cette dernière remarque, il paraît intéressant d'utiliser une méthode locale et une méthode globale pour résoudre le problème d'optimisation et de comparer leurs performances. La complexité de la fonction F ainsi que la possible non convexité incite à se limiter à une méthode locale ne nécessitant pas le calcul des dérivées secondes.

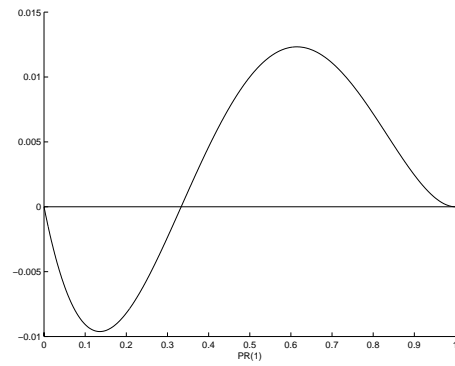


FIG. 7.2 – *Signe de $\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_1}$ en fonction de $PR(1)$*

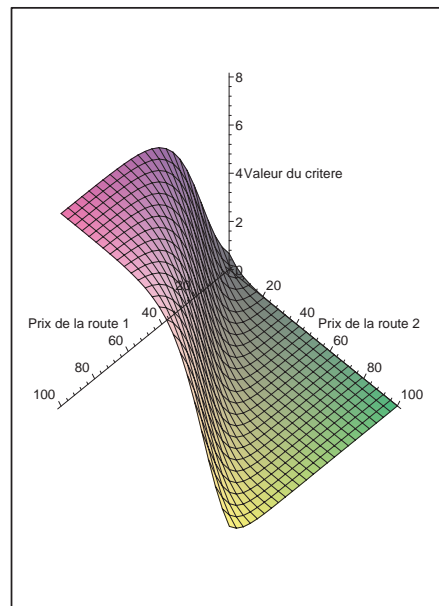


FIG. 7.3 – *Valeur du critère en fonction du prix des routes 1 et 2*

La méthode du gradient semble donc la plus adaptée. Cette méthode est déterministe. Comme méthode globale et stochastique, on peut choisir le recuit simulé. Il est inutile d'entreprendre une résolution par un algorithme génétique, car, d'une part, l'objectif est de trouver une seule solution, et d'autre part, il paraît difficile de trouver un opérateur de croisement en accord avec la représentation du problème. Les deux parties suivantes décrivent les algorithmes du gradient et du recuit simulé adaptés au calcul des prix de secteurs.

7.3 Algorithme du gradient

La méthode de gradient adapté au calcul des prix de secteurs est décrite par l'algorithme suivant :

Initialisation :

- Partir d'une matrice de prix nuls
 $x_{kn}^0 = 0$ pour $k = 1, S$ et $n = 1, T'$
- Nombre d'itérations $q = 0$

Tant que le critère d'arrêt est non vérifié :

- Calculer $\nabla F^q(\mathbf{X})$ la matrice de composantes $\nabla f_{k,n}^q$ où

$$\nabla f_{k,n}^q = \left. \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial x_{k,n}} \right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^q} \quad \forall k = 1, S \quad \forall n = 1, T'$$

- Choisir un pas de déplacement λ_q
- Faire $x_{kn}^{q+1} = \min \left(\max \left(x_{kn}^q - \lambda_q \nabla f_{k,n}^q, 0 \right), \bar{x} \right) \quad \forall k = 1, S \quad \forall n = 1, T'$
- $q \leftarrow q + 1$

Fin Tant que

L'algorithme est arrêté si le critère d'optimisation atteint une certaine valeur ou après un nombre fixe d'itérations. A chaque itération, le pas de déplacement λ_q est obtenu en minimisant le critère vis à vis de ce paramètre avec la méthode du nombre d'or [Min90b]. L'expression analytique des composantes $\nabla f_{k,n}^q$ est donnée par :

$$\nabla f_{k,n}^q = -2 \sum_{\omega \in W} \sum_{\ell} \sum_{i \in R_{\omega,\ell}} \sum_{j=1}^{j=T} \left[N D^{\omega,\ell}(i,j) - N E^{\omega,\ell}(i,j) [E, \mathbf{X}] \right] \nabla n e_{k,n}^{\omega,\ell}(i,j) \quad (7.21)$$

avec :

$$\nabla n e_{k,n}^{\omega,\ell}(i,j) = \sum_{u=j-J_{max}}^{u=j+J_{min}} N P^{\omega}(u) q^{\omega,\ell}(u) P R_u^{\omega,\ell}(i,j) \nabla p r_{k,n}^{\omega,\ell,u}(i,j) \quad (7.22)$$

et :

$$\nabla pr_{k,n}^{\omega,\ell,u}(i,j) = -\alpha \left[b_{(i,j)}^{(k,n,\ell)} + \frac{\sum_{r \in R_{\omega,\ell}} \sum_{s=u-J_{min}}^{s=u+J_{max}} b_{(r,s)}^{(k,n,\ell)} \exp \left[-\alpha V_u^{\omega,\ell}(r,s) \right]}{\sum_{r \in R_{\omega,\ell}} \sum_{s=u-J_{min}}^{s=u+J_{max}} \exp \left[-\alpha V_u^{\omega,\ell}(r,s) \right]} \right] \quad (7.23)$$

7.4 Algorithme du recuit simulé

Le schéma du recuit simulé défini par la figure 5.4 au chapitre 5 est repris et adapté au calcul des prix de secteurs. Les variables du problème de minimisation sont des matrices de prix \mathbf{X} . Le point initial du schéma algorithmique correspond à une matrice de prix nuls :

$$x_{k,n} = 0 \text{ pour } k = 1, S \text{ et } n = 1, T'$$

Dans cet algorithme, la loi d'acceptation de nouvelles solutions est la même que celle décrite dans la partie 5.6.2. Une décroissance linéaire de la température est choisie : $\theta_{t+1} = \beta^t \theta_0$ avec $0.8 \leq \beta \leq 0.99$.

Pour déterminer une matrice de prix \mathbf{Y} voisine de \mathbf{X} , trois stratégies de voisinages sont adoptées.

- **Version 1** : La plus simple consiste à choisir aléatoirement la valeur de chaque composante $y_{k,n}$ sur l'intervalle $[\max(0, x_{k,n} - \delta), \min(x_{k,n} + \delta, \bar{x})]$, où δ est un réel positif représentant un pas de déplacement. Mais cette stratégie ne prend pas en compte les caractéristiques du problème.
- **Version 2** : Pour orienter l'exploration des solutions, les deux autres voisinages prennent en compte l'écart entre le nombre de vols désirés, dans un secteur sur une période, et le nombre de vols calculés avec le modèle. Soit $\lambda_{k,n}[E, \mathbf{X}]$ l'écart mesuré pour le secteur k en période n :

$$\lambda_{k,n}[E, \mathbf{X}] = \sum_{\omega \in W} \sum_{\ell} \sum_{i \in R_{\omega,\ell}} \sum_{j=1}^{j=T} b_{(i,j)}^{(k,n,\ell)} \left[NE^{\omega,\ell}(i,j)[E, \mathbf{X}] - ND^{\omega,\ell}(i,j) \right] \quad (7.24)$$

Cet indicateur donne une idée sur la manière de fixer les prix. Si un secteur k est en surcharge ($\lambda_{k,n}[E, \mathbf{X}] > 0$) sur une période n , il est préférable d'augmenter le prix de ce secteur sur cette période pour éviter la congestion. Si au contraire, un secteur est en sous-charge ($\lambda_{k,n}[E, \mathbf{X}] < 0$) il est fort probable que le prix appliqué soit trop élevé et il est conseillé de le baisser. Ce principe est appliqué pour construire un voisinage :

$$\text{Si } \lambda_{k,n}[E, \mathbf{X}] > 0, \quad y_{k,n} = x_{k,n} + \min(\max(0, \delta \times \text{Random}(-0.5, 1.5)), \bar{x}) \quad (7.25)$$

$$\text{Si } \lambda_{k,n}[E, \mathbf{X}] < 0, \quad y_{k,n} = x_{k,n} + \min(\max(0, \delta \times \text{Random}(-1.5, 0.5)), \bar{x}) \quad (7.26)$$

$\text{Random}(x,y)$ désigne un nombre aléatoire tiré dans une loi uniforme sur l'intervalle $[x,y]$.

- **Version 3** : Une troisième stratégie consiste à modifier les prix des secteurs proportionnellement aux écarts constatés :

$$y_{k,n} = x_{k,n} + \min(\max(0, \lambda_{k,n}[E, \mathbf{X}] \times \text{Random}(0, \delta)), \bar{x}) \quad (7.27)$$

Le critère d'arrêt choisi est le même que pour l'algorithme du gradient. Cependant, pour comparer les performances des deux algorithmes, il est préférable d'examiner les solutions obtenues à temps de calcul égal.

7.5 Complexité des algorithmes

Pour avoir une estimation du temps de résolution et pouvoir comparer les deux types d'algorithme, il faut étudier leur complexité pour le problème à résoudre. Le problème est caractérisé par les éléments du tableau 7.2.

Nombre de paires OD	N
Nombre de périodes de l'horizon de temps	T
Nombre de périodes de décollage	$J = J_{min} + J_{max} + 1$
Nombre de périodes d'entrée dans les secteurs	T'
Nombre de secteurs	S
Nombre moyen de routes par OD	I

TAB. 7.2 – *Éléments caractéristiques du problème*

A partir de ces données, il est possible d'obtenir un ordre de grandeur du nombre d'opérations nécessaires au calcul du critère d'optimisation, au calcul du vecteur gradient et au calcul des écarts de charge. Une opération correspond de manière générale à une opération arithmétique du type addition, soustraction, ou multiplication. Les ordres de grandeur trouvés sont indépendants des conditions pratiques de mise en oeuvre des calculs.

7.5.1 Calcul du critère d'optimisation

Le calcul du critère d'optimisation peut se décomposer par paire OD. Pour évaluer le critère d'optimisation associé à une paire OD, il faut :

- Calculer les prix d'options à partir des prix de secteurs (voir équation 4.1)
- Calculer la somme des écarts quadratiques $((ND^{\omega,\ell}(i,j) - NE^{\omega,\ell}(i,j))^2)$

Le premier calcul nécessite de l'ordre de $I \times T \times S \times T'$ opérations. Le nombre d'opérations pour le calcul des écarts quadratiques est de l'ordre de : $I \times T \times J \times I \times J$. L'ordre de grandeur $\overline{nb_c}$ du nombre d'opérations pour l'évaluation du critère d'optimisation est :

$$\overline{nb_c} = N \times (ISTT' + I^2 J^2 T) \quad (7.28)$$

7.5.2 Calcul du vecteur gradient

Le calcul d'une composante du vecteur gradient $(\nabla f_{k,n})$ pour une seule paire OD requiert de l'ordre de $I \times T \times J \times I \times J$ opérations. Pour calculer les vecteurs gradient de toutes les paires OD, il faut donc un nombre d'opérations proportionnel à $\overline{nb_g}$:

$$\overline{nb_g} = N \times (I^2 T J^2 S T') \quad (7.29)$$

7.5.3 Calcul des écarts

Dans la deuxième et troisième version du recuit (correspondant à des définitions de voisinage différentes), il faut calculer l'écart $\lambda_{k,n}$ entre le nombre de vols estimés et le nombre de vols désirés pour chaque secteur k en période n (voir équation 7.24). A ce stade, le nombre de vols estimés a déjà été calculé. L'ordre de grandeur $\overline{nb_e}$ du nombre d'opérations pour le calcul des écarts est :

$$\overline{nb_e} = N \times (ISTT') \quad (7.30)$$

7.6 Tests et résultats

7.6.1 Exemple 1

Les algorithmes précédemment décrits sont testés sur un premier exemple [DFD00a] avec 4 paires OD et 23 secteurs (voir description de l'exemple en annexe F). Pour cet exemple, les contraintes de prix maximal définies en 4.16 ne sont pas activées.

Temps de calcul

Pour comparer les deux méthodes, il faut examiner la valeur du critère d'optimisation à temps de calcul égal. Pour cela, il faut mesurer le temps de calcul d'une itération de l'algorithme du gradient et d'une itération de l'algorithme du recuit simulé. Dans l'algorithme du gradient, une itération correspond au calcul d'une valeur de gradient et au calcul de dix valeurs en moyenne du critère d'optimisation (correspondant à la recherche du pas de déplacement par la méthode du nombre d'or). Pour l'algorithme du recuit simulé, une itération correspond à une évaluation de critère et pour les stratégies de voisinage 2 et 3, au calcul des écarts du nombre de vols (voir équation 7.24). Le tableau 7.3 présente un récapitulatif des temps de calcul, mesurés sur une station ULTRA SPARC II (440 MH), pour les deux horizons de temps (pointe du matin et journée entière).

Temps de calcul (en secondes)	Pointe du matin	Journée entière
du critère : T_c	0.02	0.06
du gradient : T_g	0.54	10.6
des écarts : T_e	0.03	0.36

TAB. 7.3 – Temps de calcul sur ULTRA SPARC II (440 MH)

Pour comparer les deux algorithmes, il faut effectuer $\frac{T_g+10T_c}{T_c}$ fois plus d'itérations pour la version 1 du recuit simulé que pour le gradient. Ce rapport est égal à 37 pour la pointe du matin et à 186 pour la journée entière. Pour les deux autres versions du recuit, le nombre d'itérations doit être $\frac{T_g+10T_c}{T_c+T_e}$ fois supérieur. Les valeurs de ce rapport sont respectivement 14.8 et 26 pour la pointe du matin et la journée entière.

Méthode du gradient

Les différentes cibles choisies sont désignées par MP1 et MP2 pour la pointe du matin, et par AD1 et AD2 pour la journée entière. Ces abréviations sont utilisées dans la suite. La figure 7.4 décrit l'évolution du critère d'optimisation pendant 2000 itérations de l'algorithme du gradient pour les 4 cibles. La distance à la cible décroît de manière significative pendant les 100 premières itérations puis le critère d'optimisation diminue continûment mais très lentement. Le tableau 7.4 présente les valeurs du critère avant et après optimisation.

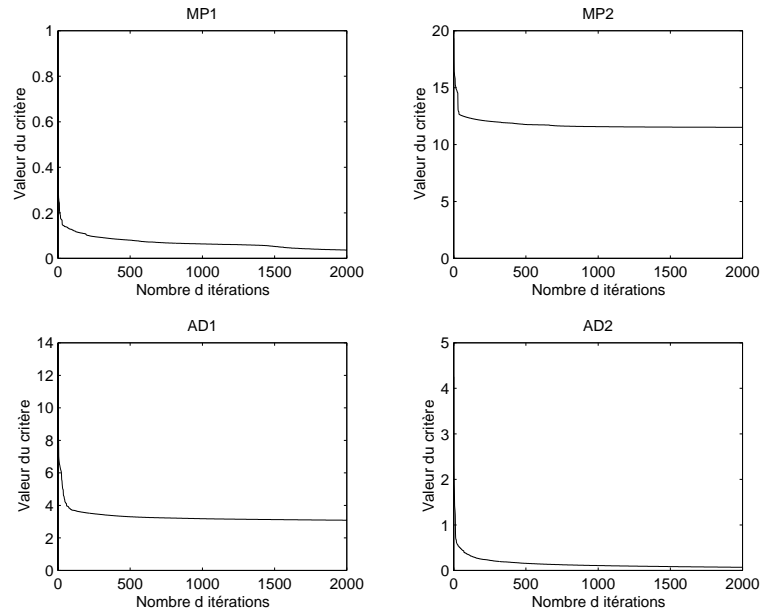


FIG. 7.4 – Méthode du gradient : Évolution du critère d'optimisation pour les 4 cibles

	MP1	MP2	AD1	AD2
Critère avant optimisation (prix de secteurs nuls)	0.62	19	13	4.3
Critère après optimisation	0.036	12	3.1	0.069

TAB. 7.4 – Valeurs du critère avec la méthode du gradient

Méthode du recuit simulé

Pour obtenir un temps d'exécution équivalent à celui de l'algorithme du gradient, il faut effectuer 74000 (2000×37) itérations de l'algorithme du recuit simulé avec la première version pour la pointe du matin, et 372000 (2000×186) itérations pour la journée entière. Pour les autres versions du recuit, il faut 29600 (2000×14.8) itérations pour la pointe du matin et 52000 (2000×26) itérations pour la journée entière.

Pour cet exemple, la température initiale θ_0 de l'algorithme du recuit simulé est soit nulle (toute dégradation du critère est refusée), soit choisie de manière à ce qu'une dégradation du critère d'optimisation de 0.001 soit acceptée avec la probabilité P_a . La température initiale est choisie dans l'ensemble $\Gamma = \{0.0002, 0.0005, 0.002, 0.005, 0.02, 0.05, 0.2, 0.5\}$. Par exemple, une dégradation de 0.001 est acceptée avec la probabilité 0.6 pour une température initiale égale à 0.002.

$$\theta_0 = -\frac{0.001}{\ln P_a} \quad (7.31)$$

Le nombre de paliers à température constante est fixé à 10. On calcule le facteur de décroissance linéaire de la température de manière à obtenir une température finale θ_f proche de 0.0001 :

$$\beta = \exp\left(\frac{\ln \frac{\theta_f}{\theta_0}}{10}\right) \quad (7.32)$$

La valeur du pas de déplacement δ est fixé à 0.1.

Pour chaque couple (θ_0, δ) possible, 10 tests avec différentes initialisations du générateur aléatoire sont réalisés. Les meilleurs résultats obtenus sont reportés dans le tableau 7.5.

Cible	MP1	MP2	AD1	AD2
Critère initial	0.62	19	13	4.3
Version 1				
$\theta_0 = 0$	0.095	12	3.7	0.32
$\theta_0 \in \Gamma$	0.069	12	3.3	0.078
Version 2				
$\theta_0 = 0$	0.16	15	8.9	3.0
$\theta_0 \in \Gamma$	0.16	16	6.3	0.0060
Version 3				
$\theta_0 = 0$	0.18	16	6.0	0.013
$\theta_0 \in \Gamma$	0.18	16	6.2	0.010

TAB. 7.5 – Meilleures valeurs du critère avec la méthode du recuit simulé

La figure 7.5 présente l'évolution du critère d'optimisation obtenue avec la première version de l'algorithme du recuit simulé et une température initiale θ_0 égale à 0.002.

Commentaires

Les résultats obtenus sur cet exemple conduisent aux commentaires suivants :

- L'optimisation par les deux types d'algorithmes permet de réduire très largement la distance à la cible. Ceci laisse supposer que le flux de trafic est contrôlable par les prix.
- Comme il est mentionné dans l'annexe F, les cibles construites ne sont pas forcément atteignables. Ceci explique des valeurs du critère encore élevées, même après optimisation.

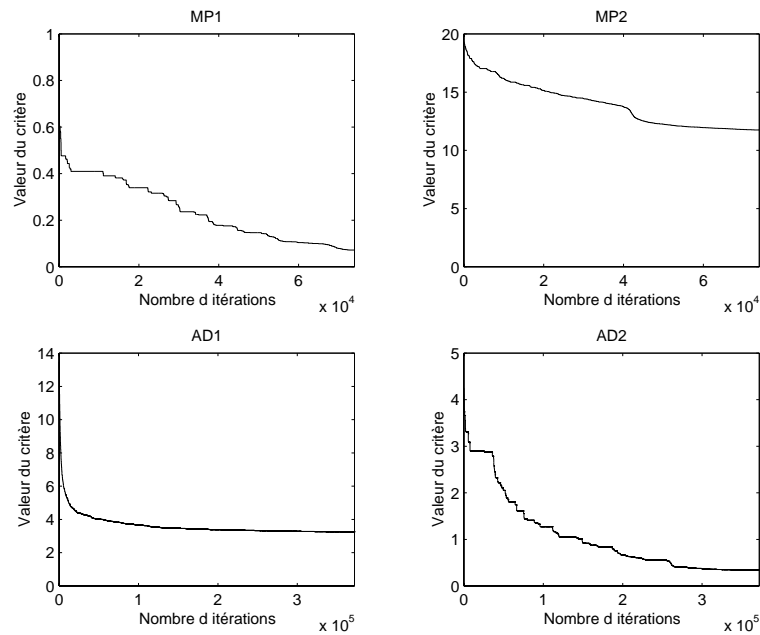


FIG. 7.5 – Méthode du recuit simulé : Évolution du critère pour les 4 cibles

- De manière générale, l’algorithme du gradient est plus efficace que celui du recuit simulé. En effet pour les 3 premières cibles et quelque soit la stratégie employée, la valeur du critère d’optimisation obtenue avec la méthode du gradient est inférieure ou égale à celle obtenue avec le recuit simulé. Pour la cible AD2, les versions 2 et 3 de l’algorithme du recuit simulé donnent de meilleurs résultats que la méthode du gradient.
- Pour toutes les cibles, la décroissance du critère est plus rapide dans les premières itérations avec la méthode du gradient. Pour cet exemple, il n’y a pas de problème de minimum local qui pourrait donner l’avantage au recuit simulé.
- La convergence de la méthode du gradient est très lente: le critère d’optimisation diminue de façon significative dans les premières itérations puis l’amélioration du critère est obtenue de manière asymptotique.

7.6.2 Exemple 2

Les deux méthodes d’optimisation, le gradient et le recuit simulé, sont testées sur un exemple académique ([DFD00b],[DFD01b]) avec 2 paires OD et 13 secteurs (voir description de l’exemple en annexe G). Les tests effectués vont permettre d’infirmier, de confirmer ou d’affiner les constats établis avec l’exemple précédent.

Détermination du prix maximal

La valeur du prix maximal \bar{x} est calculée de manière à ce que le prix d’achat de chaque option ait de l’impact sur les décisions des compagnies tout en représentant un coût rai-

sonnable par rapport au coût d'exploitation du vol. Dans l'exemple, comme chaque route traverse 5 secteurs, le prix maximal est fixé en prenant une certaine proportion γ du coût de route le plus petit divisé par cinq :

$$\bar{x} = \gamma \frac{\min_{\omega, i} c^{\omega}(i)}{5} \quad (7.33)$$

Les prix de secteurs sont optimisés avec la troisième version du recuit simulé pour différentes valeurs de γ et pour la cible 1. La figure 7.6 présente l'évolution du critère à minimiser et l'évolution de l'indice de charge (voir équation 4.5 du chapitre 4 avec $p_I = 1$, $p_O = 0$ et $p_M = 0$) du secteur 4 (secteur le plus critique) en fonction de la proportion γ . Les résultats montrent qu'il faut que le prix maximal \bar{x} soit suffisamment élevé ($\gamma \geq 0.35$) pour que la cible puisse être atteinte. Dans la suite, les prix sont optimisés en prenant $\gamma = 0.5$, ce qui correspond à un prix maximal de 67.5 euros.

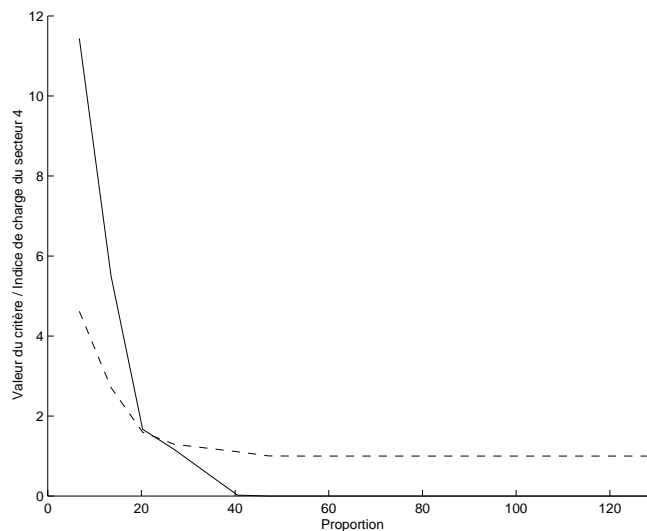


FIG. 7.6 – Relation entre un prix maximal de secteur (donné comme une proportion du coût de la route la moins chère) et les résultats de l'optimisation : critère (trait plein) et indice de charge du secteur 4 (trait pointillé)

Comparaison des méthodes d'optimisation

Le tableau 7.6 présente les résultats obtenus avec la méthode du gradient et avec la méthode du recuit simulé. Pour la méthode du gradient, l'algorithme est arrêté si la cible est atteinte ou après 10000 itérations. La cible est supposée être atteinte si le critère de minimisation est strictement inférieur à 0.001.

Pour la méthode du recuit simulé, l'algorithme est arrêté si la solution ne s'améliore pas pendant 20000 itérations successives ou si la cible est atteinte. Un pré-traitement permet de déterminer une température initiale de manière à ce que le rapport entre le nombre de configurations acceptées et le nombre de configurations générées soit supérieur à 0.8. La

température décroît linéairement par palier avec un facteur de décroissance égal à 0.9. Un palier compte 5000 itérations. Le pas de déplacement δ est fixé à 0.1. Pour tester la méthode du recuit simulé, 100 tests avec des initialisations différentes du générateur aléatoire sont effectués. Les valeurs “Min” et “Max” reportées dans le tableau 7.6 correspondent à la valeur minimale et maximale du critère obtenue après optimisation. “Moy” indique la valeur moyenne du critère pour l’ensemble des 100 tests.

		Cible 1	Cible 2	Cible 3	Cible 4	Cible 5
Critère initial (prix nuls)		17.00	17.00	22.71	11.19	1.78
Gradient		1.10	0.0026	0.0038	0.0017	0.0012
Recuit simulé - Version 1	Min	7.07	5.92	4.92	3.07	0.61
	Moy	12.50	12.26	14.68	8.10	1.39
	Max	16.49	16.57	22.20	10.93	1.74
Recuit simulé - Version 2	Min	$5.33E^{-4}$	$5.59E^{-4}$	$6.36E^{-4}$	$6.72E^{-4}$	$5.36E^{-4}$
	Moy	$8.75E^{-4}$	$8.70E^{-4}$	$8.79E^{-4}$	$8.76E^{-4}$	$8.72E^{-4}$
	Max	$9.97E^{-4}$	$9.98E^{-4}$	$1.00E^{-3}$	$9.93E^{-4}$	$9.99E^{-4}$
Recuit simulé - Version 3	Min	$9.99E^{-4}$	$1.00E^{-3}$	$1.00E^{-3}$	$9.99E^{-4}$	$9.98E^{-4}$
	Moy	$9.99E^{-4}$	$1.00E^{-3}$	$1.00E^{-3}$	$9.99E^{-4}$	$9.99E^{-4}$
	Max	$1.00E^{-3}$	$1.00E^{-3}$	$1.00E^{-3}$	$1.00E^{-3}$	$1.00E^{-3}$

TAB. 7.6 – Critère d’optimisation avec la méthode du gradient et du recuit simulé

Ces premiers résultats amènent les remarques suivantes :

- Avec la méthode du gradient, un minimum est atteint dans les 1000 premières itérations. Au delà, le gradient est nul. Ceci laisse supposer qu’un minimum local est atteint. La figure 7.7 présente la courbe de la fonction $K(u)$ sur $[0,1]$ avec :

$$K(u) = F(uX_R + (1 - u)X_G) \quad (7.34)$$

où X_R est une solution obtenue avec la version 2 du recuit simulé et X_G le minimum obtenu avec la méthode du gradient pour la cible 1. L’allure de la courbe tend à confirmer la présence d’un minimum local au point X_G .

- La première version du recuit simulé est moins performante que les deux autres versions. En effet, avec la première version, la cible n’est jamais atteinte. Pour les deux autres versions, le tableau 7.7 établit un comparatif du nombre moyen d’itérations nécessaires pour atteindre la cible avec un pas de déplacement δ égal à 0.1, 1 ou 10. On constate que la version 2 du recuit simulé avec un pas égal à 0.1 est en moyenne plus rapide que les autres possibilités pour atteindre les différentes cibles.

Examen des solutions

Les matrices de prix de secteurs obtenues par optimisation en vue d’atteindre la cible ne sont pas toutes identiques. Il n’y a donc pas unicité des solutions. Pour éviter d’établir des prix trop élevés, il paraît judicieux de commencer la procédure d’optimisation avec des

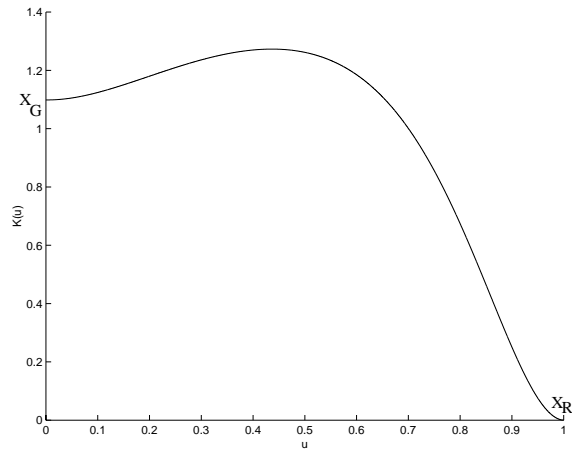


FIG. 7.7 – Fonction $K(u) = F(uX_R + (1 - u)X_G)$, X_R minimum obtenu avec le recuit simulé, X_G minimum obtenu avec la méthode du gradient pour la cible 1

Version	Pas δ	Cible 1	Cible 2	Cible 3	Cible 4	Cible 5
2	0.1	900	716	877	658	265
	1.0	5327	6414	9972	7068	35
	10	-	-	-	-	91
3	0.1	15974	11018	12195	10571	7135
	1.0	1585	1102	1226	1054	709
	10	6182	108	4099	103.4	66

- : cible non atteinte en moins de 20000 itérations

TAB. 7.7 – Nombre moyen d'itérations nécessaires pour atteindre les cibles avec les versions 2 et 3 de l'algorithme du recuit simulé

prix nuls et de choisir un pas de déplacement suffisamment petit. La version 3 du recuit simulé conduit à des matrices de prix avec un plus grand nombre de composantes nulles par rapport à la version 2. Le tableau 7.8 donne un exemple de matrice de prix optimisée pour la cible 1 avec la version 3 du recuit simulé.

Secteur	Période							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0	#	3.47	2.51	12.88	17.38	#	#	#
1	#	32.21	19.29	10.11	32.96	0.00	#	#
2	#	18.91	18.17	2.98	0.00	0.03	0.00	#
3	#	7.35	27.66	5.01	13.10	17.43	#	#
4	#	#	38.75	46.45	12.92	33.06	#	#
5	#	#	18.86	25.91	18.95	0.00	0.06	#
6	#	2.83	0.41	23.29	0.00	13.24	17.24	#
7	#	#	2.88	31.48	41.86	5.07	32.32	#
8	#	#	#	19.99	18.56	14.08	0.00	0.00
9	0.00	10.86	8.26	0.07	#	#	#	#
10	#	#	#	#	0.00	10.87	8.29	0.07
11	67.50	40.80	31.27	0.00	#	#	#	#
12	#	#	#	#	67.50	41.48	31.71	0.00

: prix sans influence sur le critère d'optimisation

TAB. 7.8 – Table de prix de secteurs indépendants, optimisés pour la cible 1

La figure 7.8 donne les coûts d'options, les prix d'options et les utilités d'options associées au choix de routes et de périodes de décollage pour la cible 1. Les utilités des options qui doivent être choisies (indiquées par un 1 sur la figure G.2 en annexe G) sont égales entre elles et plus petites que les utilités des autres options.

OD ¹	COUT OPTION				PRIX OPTION				UTILITE OPTION						
	Période Route	1	2	3	4	Période Route	1	2	3	4	Période Route	1	2	3	4
	1	1	721	766	811	856	1	26	34	63	18	1	747	800	874
	2	675	720	765	810	2	72	115	35	46	2	747	835	800	856
	3	721	766	811	856	3	26	72	96	6	3	747	838	907	862
OD ²	COUT OPTION				PRIX OPTION				UTILITE OPTION						
	Période Route	1	2	3	4	Période Route	1	2	3	4	Période Route	1	2	3	4
	1	1	721	766	811	856	1	190	90	103	52	1	911	856	914
	2	675	720	765	810	2	237	190	91	98	2	912	910	856	908
	3	721	766	811	856	3	193	145	99	0	3	914	911	910	856

FIG. 7.8 – Coût, prix optimisés et utilités d'options pour la cible 1

Dans l'annexe G, on montre que, pour cet exemple particulier, le calcul des prix de secteurs peut se formuler comme un problème d'optimisation non linéaire (formulation G.2), mais aussi comme un problème d'optimisation linéaire (formulation G.9). Il est intéressant d'examiner les solutions obtenues avec cette seconde formulation. On utilise la fonction LP du logiciel Matlab pour résoudre le problème linéaire. Avec cet outil, il est possible de trouver plusieurs solutions optimales. Il n'y a donc pas unicité des prix de secteurs. En revanche, pour différentes tables de prix de secteurs optimales, les prix d'options restent les mêmes. Pour la cible 1, les prix d'options optimaux conduisent à des utilités minimales égales à 742, pour la paire OD 1, et des utilités minimales égales à 856, pour la paire OD 2. Ces valeurs sont très proches de celles obtenues avec l'algorithme du recuit simulé pour le problème d'optimisation non linéaire.

En conclusion, pour cet exemple, on peut dire qu'il existe plusieurs tables de prix de secteurs qui conduisent aux mêmes prix d'options. Et il existe une seule table de prix d'options qui permet d'atteindre la cible.

Résultats de simulation

Le programme de simulation présenté dans la partie 4.5 du chapitre 4 est utilisé pour analyser l'impact du procédé de tarification sur la congestion. L'état de congestion des secteurs est évalué à partir des indicateurs Q_1 et Q_2 définis par les équations 4.6 et 4.7. L'indice de charge défini en 4.5 est calculé avec $p_I = 1$, $p_O = 0$ et $p_M = 0$. Pour la cible 1, les capacités des secteurs sont fixés à 1 (1 avion par secteur et par période). Les figures 7.9 et 7.10 présentent la charge (nombre de vols entrant dans le secteur) du secteur le plus critique (secteur 4) en l'absence et en présence de tarification pour la cible 1.

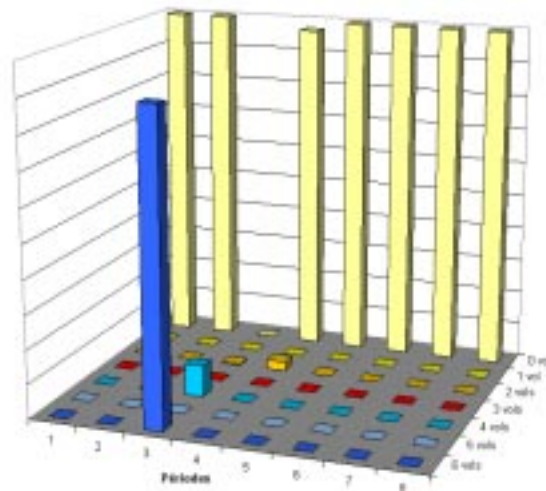


FIG. 7.9 – *Histogramme d'indice de charge du secteur 4 pour 1000 jours de simulation - pas de tarification des secteurs aériens*

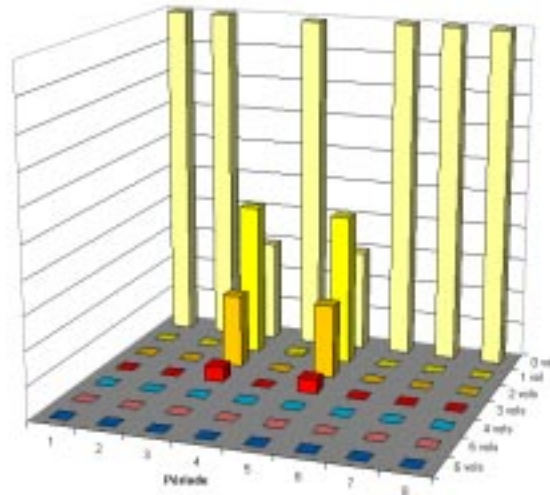


FIG. 7.10 – *Histogramme d'indice de charge du secteur 4 pour 1000 jours de simulation - tarification continue des secteurs aériens*

La tarification des secteurs aériens permet de réduire de manière significative la congestion du secteur le plus critique. En l'absence de prix, le secteur 4 présente un excès de charge tous les jours en période 3, et 4% des jours en période 4. En appliquant une politique de tarification optimisée pour la cible 1, un excès de charge apparaît, en période 3 pour 25% seulement des jours simulés, et en période 5 pour 25% aussi. Le tableau 7.9 donne les moyennes et les écarts-type des indicateurs de congestion obtenus pour 1000 jours de trafic simulé.

		Cible 1	Cible 2	Cible 3	Cible 4	Cible 5
Q_1	Prix nuls	5.1 ± 0.3	5.1 ± 0.3	5.0 ± 0.1	5.0 ± 0.1	0.9 ± 0.3
	Prix optimisés	4.6 ± 2.5	4.6 ± 2.5	3.7 ± 2.1	3.8 ± 2.1	0.3 ± 0.5
Q_2	Prix nuls	12.5 ± 1.5	12.5 ± 1.5	11.4 ± 1.8	11.4 ± 1.8	0.9 ± 0.3
	Prix optimisés	5.2 ± 3.3	5.2 ± 3.3	4.4 ± 3.0	5.2 ± 3.4	0.3 ± 0.5

TAB. 7.9 – *Moyenne \mp écart-type des indicateurs de congestion Q_1 et Q_2 avant et après tarification*

Pour les cinq cibles, l'application d'un mécanisme de tarification des secteurs aériens diminue très nettement la congestion. En effet, les valeurs de l'indicateur Q_1 obtenues par tarification sont inférieures à celles calculées en situation "normale". Ceci indique que la tarification diminue le nombre de situations où les secteurs sont congestionnés. D'autre part, les valeurs de l'indicateur Q_2 d'excès total de charge sont réduites de plus de moitié. Ceci indique que les situations de congestion qui subsistent avec la tarification sont de moindre importance.

7.6.3 Exemple 3

Le scénario de trafic présenté en annexe H est plus complexe et plus réaliste. Il regroupe 52 paires OD pour un espace aérien comptant 35 secteurs. Les capacités des secteurs sont telles qu'il existe des pointes de congestion dans certains secteurs à certains moments de la journée. L'état de congestion est caractérisé par les indicateurs Q_1 et Q_2 dont les valeurs moyennes pour 1000 jours de simulation valent respectivement 26.89 et 44.19. La cible est construite manuellement, elle correspond à une situation de trafic pour laquelle la congestion des secteurs est faible ($Q_1 = 2$ et $Q_2 = 1$). On cherche à mesurer l'efficacité de la tarification dynamique des secteurs aériens sur la diminution de la congestion.

Détermination du prix maximal

Le prix maximal \bar{x} des prix de secteurs est fixé en prenant une certaine proportion γ du minimum des quotients (coût de route / nombre de secteurs traversés par cette route) :

$$\bar{x} = \gamma \min_{\omega, i} \frac{c^\omega(i)}{\text{nombre de secteurs traversés par la route } i} \quad (7.35)$$

Cette contrainte est nécessaire pour éviter que les prix d'options représentent une part trop importante du coût total du vol.

Résultats de l'optimisation

Pour calculer les prix de secteurs qui conduisent à la cible, la méthode d'optimisation retenue est le recuit simulé. Seules les versions 2 et 3 sont testées car elles se sont montrées plus performantes pour traiter le problème de tarification dans l'exemple précédent. Les tableaux 7.10 et 7.11 rassemblent les résultats obtenus avec les deux versions et pour différentes valeurs de γ . Le nombre maximal d'itérations de l'algorithme est fixé à 2000, ce qui représente un temps d'exécution d'environ une heure et demi sur une station ULTRA SPARC II (450 MH). Les paramètres du recuit simulé sont les mêmes pour les deux versions : longueur du palier=500, facteur de décroissance de la température=0.9, pas de déplacement=10. Dans les tableaux 7.10 et 7.11, les valeurs des colonnes nommées "Proportion moyenne" et "Proportion maximale" sont relatives aux quotients q_{ij}^ω :

$$q_{ij}^\omega = \frac{\text{Prix de l'option } (i, j) \text{ de la paire OD } \omega}{\text{Coût de la route } i} \quad (7.36)$$

$$\text{Proportion moyenne} = \frac{1}{I \times T} \sum_{\omega \in W} \sum_{i \in R_\omega} \sum_{j=1}^{j=T} q_{ij}^\omega \quad (7.37)$$

avec I le nombre total de routes reliant les différentes paires OD.

$$\text{Proportion maximale} = \max_{\omega, i, j} \sum_{\omega \in W} \sum_{i \in R_\omega} \sum_{j=1}^{j=T} q_{ij}^\omega \quad (7.38)$$

Ces valeurs donnent une idée de la part que représente le prix d'achat d'une option dans le coût total d'exploitation du vol pour les compagnies aériennes.

γ	Prix maximal \bar{x}	Critère	Proportion moyenne	Proportion maximale
0.0	0	107.23	0.00	0.00
0.2	168	61.51	0.07	0.19
0.4	337	18.90	0.14	0.38
0.5	421	8.05	0.17	0.48
0.6	505	4.28	0.21	0.54
0.8	673	0.82	0.27	0.73
1.0	842	0.30	0.31	0.84
1.2	1010	0.27	0.32	0.91

TAB. 7.10 – Résultats de l'optimisation des prix de secteurs avec la version 2 de l'algorithme du recuit simulé

γ	Prix maximal \bar{x}	Critère	Proportion moyenne	Proportion maximale
0.0	0	107.23	0.00	0.00
0.2	168	60.06	0.03	0.16
0.4	337	18.69	0.06	0.29
0.5	421	7.74	0.09	0.35
0.6	505	4.56	0.07	0.41
0.8	673	1.24	0.07	0.48
1.0	842	0.54	0.07	0.48
1.2	1010	0.51	0.07	0.49

TAB. 7.11 – Résultats de l'optimisation des prix de secteurs avec la version 3 de l'algorithme du recuit simulé

Ces résultats amènent les commentaires suivants :

- La valeur du critère d'optimisation décroît quand la valeur de γ augmente. Ceci indique qu'il est nécessaire de fixer des prix suffisamment élevés pour influencer le choix des compagnies aériennes.
- Pour des valeurs de γ supérieures à 0.5, le coût d'achat d'une option peut représenter plus de 50% des frais totaux d'exploitation du vol. Une telle tarification n'est donc pas envisageable. Il est donc préférable de se limiter à des valeurs de γ inférieures à 0.5.
- L'algorithme du recuit simulé fournit des prix secteurs qui permettent de se rapprocher de la cible mais sans jamais l'atteindre. Les prix de secteurs optimaux sont trouvés très rapidement. La figure 7.11 présente l'évolution du critère d'optimisation en fonction du temps d'exécution de l'algorithme avec la version 2 et $\gamma = 0.5$. En

moins de 5 minutes (avec une station ULTRA SPARC II - 450 MH), il est possible d'obtenir les prix de secteurs optimaux.

Les deux versions du recuit simulé donnent des valeurs similaires du critère d'optimisation pour des temps de calcul égaux. En revanche, la version 3 du recuit simulé conduit à des tables de prix avec un plus grand nombre de prix nuls. Pour donner un ordre d'idée, une solution obtenue avec la version 2 comporte environ 100 prix significatifs nuls (il y a 1953 prix significatifs), et une solution obtenue avec la version 3 compte environ 600 prix significatifs nuls. L'avantage est donc donné à la version 3 du recuit simulé qui permet de tarifier moins fortement les secteurs et d'obtenir les mêmes effets.

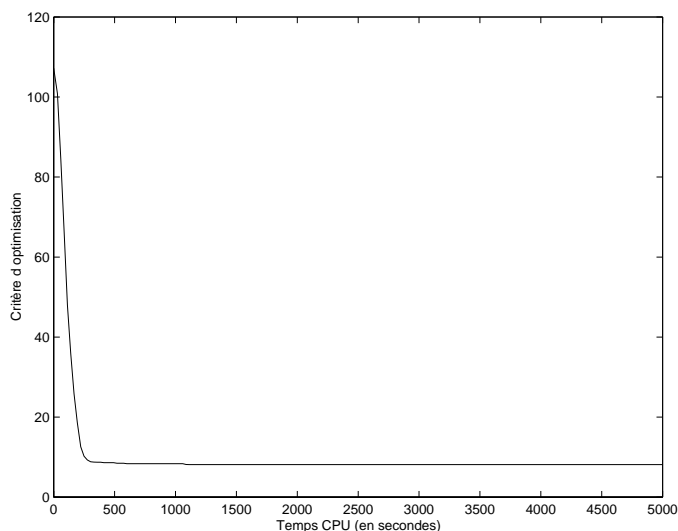


FIG. 7.11 – Évolution du critère d'optimisation en fonction du temps d'exécution de l'algorithme sur une station ULTRA SPARC II (450 MH)

Résultats de simulation

L'état de congestion résultant de la tarification mise en place est caractérisé par les indicateurs Q_1 et Q_2 . Les résultats obtenus pour 1000 jours de simulation sont reportés dans les tableaux 7.12 et 7.13. La moyenne et l'écart-type des indicateurs de congestion sont mesurés pour différentes tarifications (correspondant à différentes valeurs de γ et différentes tables de prix de secteurs). Pour calculer les valeurs de Q_1 et Q_2 , on utilise les équations 4.6 et 4.7. L'indice de charge défini en 4.5 est calculé avec $p_I = 0.5$, $p_O = 0.5$ et $p_M = 0.5$. Les capacités du secteur 7 est égale à 12, la capacité des autres secteurs est limitée à 6.

Les commentaires relatifs à ces résultats sont les suivants :

- La diminution du critère d'optimisation se traduit par une diminution des indicateurs de congestion. Même si la cible ne peut être atteinte, la tarification appliquée a un effet bénéfique sur l'état de congestion des secteurs.
- Pour des prix de secteurs "raisonnables" ($\gamma = 0.5$), la congestion des secteurs est fortement réduite. L'indicateur Q_1 passe de 27 à 19, et l'indicateur Q_2 de 44 à 17.

γ	Critère	$\overline{Q_1} \pm \sigma_{Q_1}$	$\overline{Q_2} \pm \sigma_{Q_2}$
0.0	107.23	26.89 \pm 1.76	44.19 \pm 2.03
0.2	61.51	25.47 \pm 2.08	36.95 \pm 3.28
0.4	18.90	21.45 \pm 2.72	22.50 \pm 4.17
0.5	8.05	19.33 \pm 3.41	17.54 \pm 4.18
0.6	4.28	17.55 \pm 3.80	15.07 \pm 4.18
0.8	0.82	15.85 \pm 4.06	12.89 \pm 4.08
1.0	0.30	14.96 \pm 3.93	11.90 \pm 3.80
1.2	0.27	15.03 \pm 4.04	11.78 \pm 3.81

TAB. 7.12 – *Moyenne et écart-type des indicateurs de congestion pour des prix de secteurs optimisés avec la version 2 du recuit simulé*

γ	Critère	$\overline{Q_1} \pm \sigma_{Q_1}$	$\overline{Q_2} \pm \sigma_{Q_2}$
0.0	107.23	26.89 \pm 1.76	44.19 \pm 2.03
0.2	60.06	25.48 \pm 2.10	36.44 \pm 3.29
0.4	18.69	21.62 \pm 2.78	22.51 \pm 4.18
0.5	7.74	19.36 \pm 3.41	17.29 \pm 4.15
0.6	4.56	18.28 \pm 3.88	15.75 \pm 4.32
0.8	1.24	16.78 \pm 4.11	13.70 \pm 4.27
1.0	0.54	16.11 \pm 4.18	12.89 \pm 4.21
1.2	0.51	16.08 \pm 4.17	12.82 \pm 4.18

TAB. 7.13 – *Moyenne et écart-type des indicateurs de congestion pour des prix de secteurs optimisés avec la version 3 du recuit simulé*

La tarification des secteurs oriente le trafic et conduit à une réduction du nombre de pointes de congestion et à une diminution de leurs amplitudes. Ces résultats peuvent être visualisés sur les figures 7.12 et 7.13.

La figure 7.12 présente les dépassements de capacité moyens observés pour 1000 jours de trafic simulé en l'absence de tarification. La congestion est maximale dans le secteur 21 en période 8, le dépassement moyen de capacité est égal à 3.52. La figure 7.13 présente les dépassements de capacité moyens observés pour 1000 jours de trafic simulé en présence de tarification. Les prix fixés sont ceux obtenus avec la version 3 du recuit simulé pour $\gamma = 0.5$. Le dépassement moyen de capacité est maximal dans le secteur 28 en période 52, et vaut seulement 1.22. La congestion est nulle dans le secteur 21 en période 8. La figure 7.14 présente l'ensemble des couples (secteur, période) où un dépassement de capacité peut être observé. De manière générale, la mise en place d'une politique de tarification réduit les dépassements de capacité dans tous les secteurs congestionnés. De plus, la diminution de la congestion dans ces secteurs n'a pas engendré d'augmentation notable du trafic dans les autres secteurs. La nouvelle répartition de trafic induite par les prix permet de réduire la congestion des secteurs sans pour toutefois l'éliminer totalement.

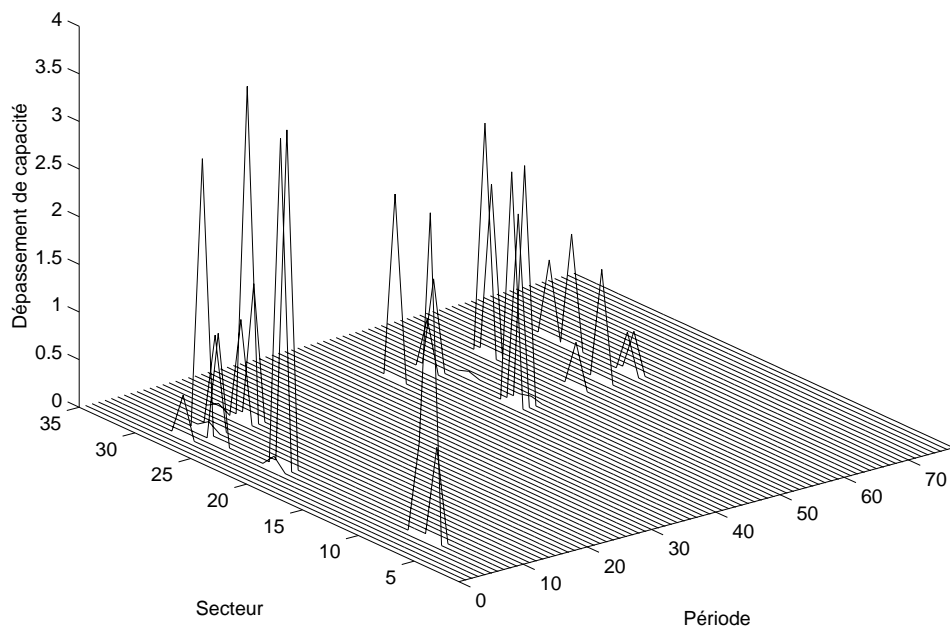


FIG. 7.12 – *Dépassement moyen de capacité des secteurs aériens en l'absence de tarification*

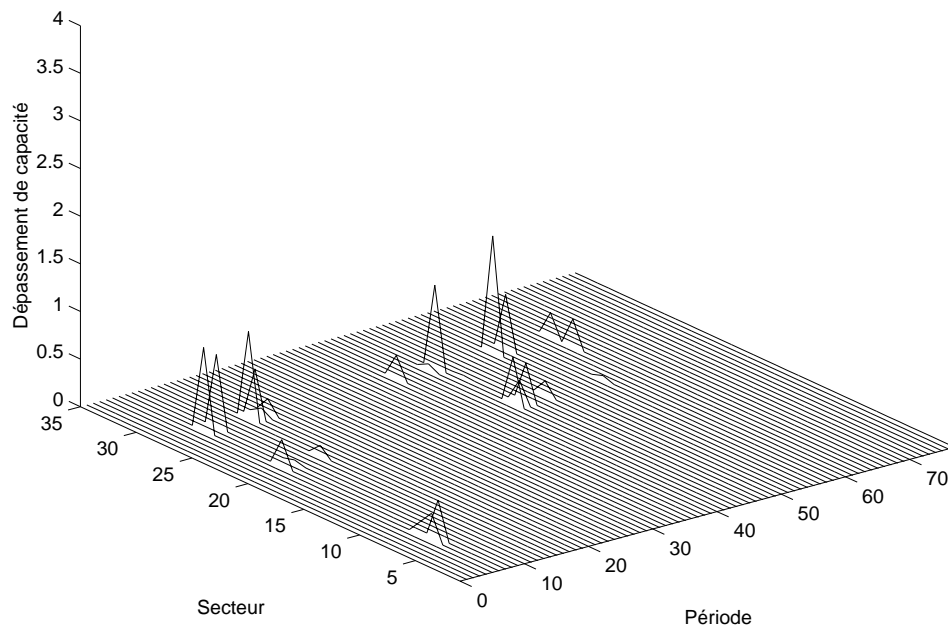


FIG. 7.13 – *Dépassement moyen de capacité des secteurs aériens en présence de tarification*

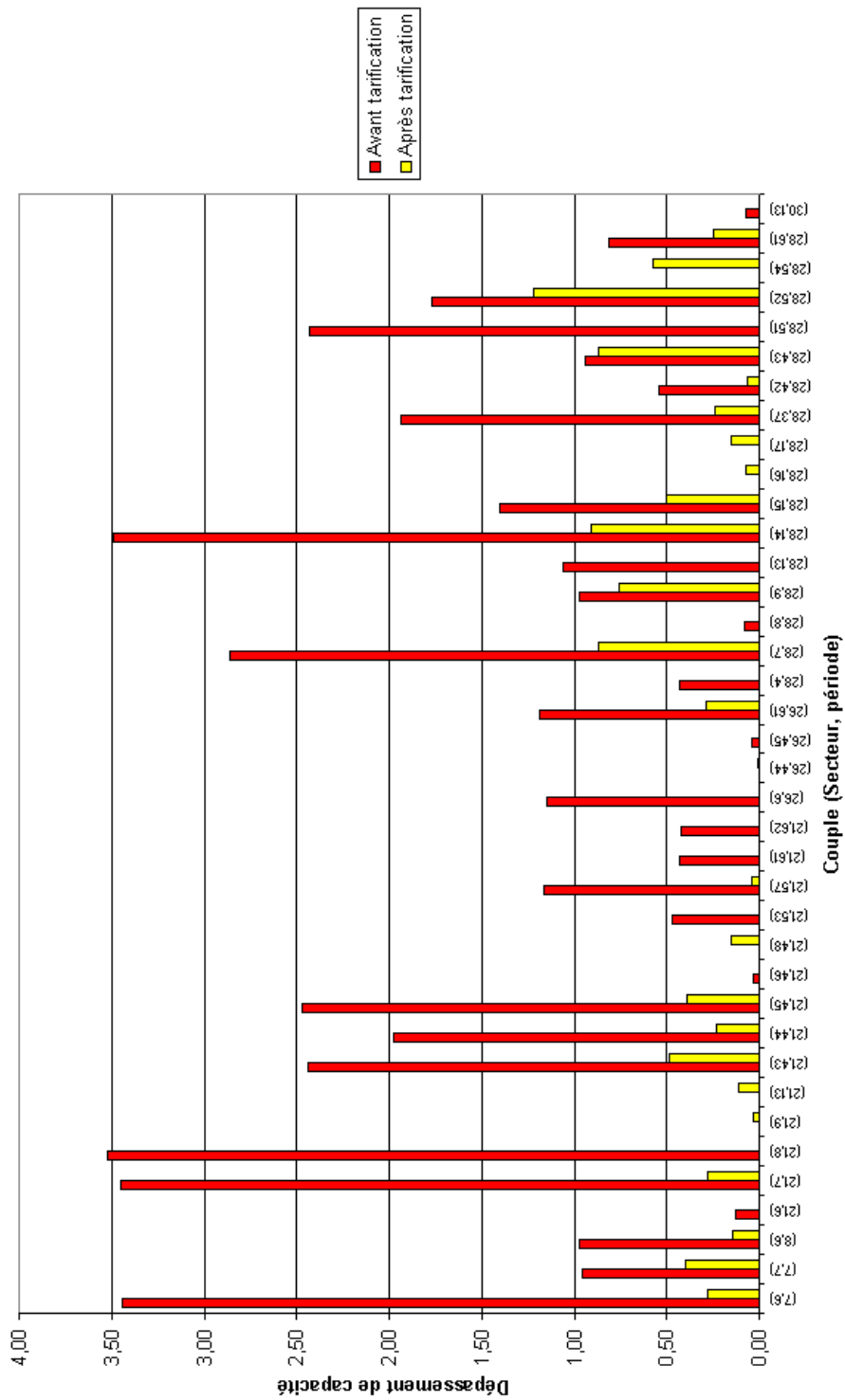


FIG. 7.14 – Couples (secteur, période) avec dépassement de capacité avant et après tarification

Les prix d'utilisation de l'espace aérien

La partie 3.4.2 du chapitre 3 décrit le système actuel de redevances aériennes. Il paraît intéressant de comparer les prix fixés par le système actuel aux prix fixés par optimisation en vue d'atteindre une cible. Les premiers dépendent uniquement de la distance et de la masse de l'avion. Le prix à payer PA pour un avion qui parcourt D kilomètres et qui a une masse M (en tonnes) au décollage est donné par la formule 3.10. Le prix PA moyen est calculé en prenant un avion ayant les caractéristiques suivantes :

Vitesse moyenne V 850 km/heure

Masse au décollage M 70 tonnes

Le taux unitaire de redevance est fixé à 52.42 euros. La formule du prix pour l'utilisation d'une route i d'une paire OD ω devient :

$$\begin{aligned} PA^\omega(i) &= 52.42 \times \frac{d^\omega(i) \times V}{60 \times 100} * \sqrt{\frac{70}{50}} \\ PA^\omega(i) &= 8.79d^\omega(i) \end{aligned} \quad (7.39)$$

où $d^\omega(i)$ désigne la durée du vol en minutes par la route i de la paire OD ω .

Le programme de simulation défini dans la partie 4.5 du chapitre 4 est utilisé pour le calcul des prix d'options payés par les compagnies. De cette manière, il est possible de comparer pour chaque vol, le prix de la redevance actuelle et le prix établi par le nouveau principe de tarification. On suppose que les prix d'options sont optimisés avec la version 3 du recuit simulé en prenant un prix maximal de secteur égal à 421 euros (ce qui correspond à $\gamma = 0.5$). La figure 7.15 présente les prix de redevances et les prix issus du nouveau principe de tarification pour une journée de trafic simulée de la paire OD Paris-Marseille qui compte 32 vols. Pour les deux derniers vols, le prix de la redevance est plus élevé car la route utilisée est plus longue.

Pour toutes les paires OD, les prix fixés par optimisation sont en général moins élevés que les prix de redevance du système actuel. D'ailleurs, pour une journée de trafic simulé (soit 433 vols), la somme des redevances est égale à 275590 euros et la somme des prix d'options achetées à 195900 euros. Ces chiffres montrent que la valeur 0.5 pour le coefficient γ intervenant dans la détermination du prix maximal est relativement bien choisie. On pourrait travailler avec des valeurs de γ légèrement supérieures, autour de 0.6 sans risquer d'établir des prix trop élevés par rapport à la tarification actuelle. Mais il faut prendre garde de ne pas établir des prix d'achat d'options trop élevés par rapport aux coûts d'exploitation des vols. L'idéal serait de pouvoir traiter une contrainte supplémentaire dans l'optimisation des prix, cette contrainte indiquant que la somme des prix d'options doit être proche de la somme des redevances actuelles. Par exemple, on pourrait ajouter au critère d'optimisation un terme de la forme :

$$\mu \sum_{\omega \in W} \sum_{\ell} \sum_{i \in R_{\omega, \ell}} \sum_{j=1}^{j=T} \left[P^{\omega, \ell}(i, j) N E^{\omega, \ell}(i, j) - PA^{\omega, \ell}(i) \right]^2 \quad (7.40)$$

où $\mu \in \mathfrak{R}$ représente le poids associé à cette contrainte.

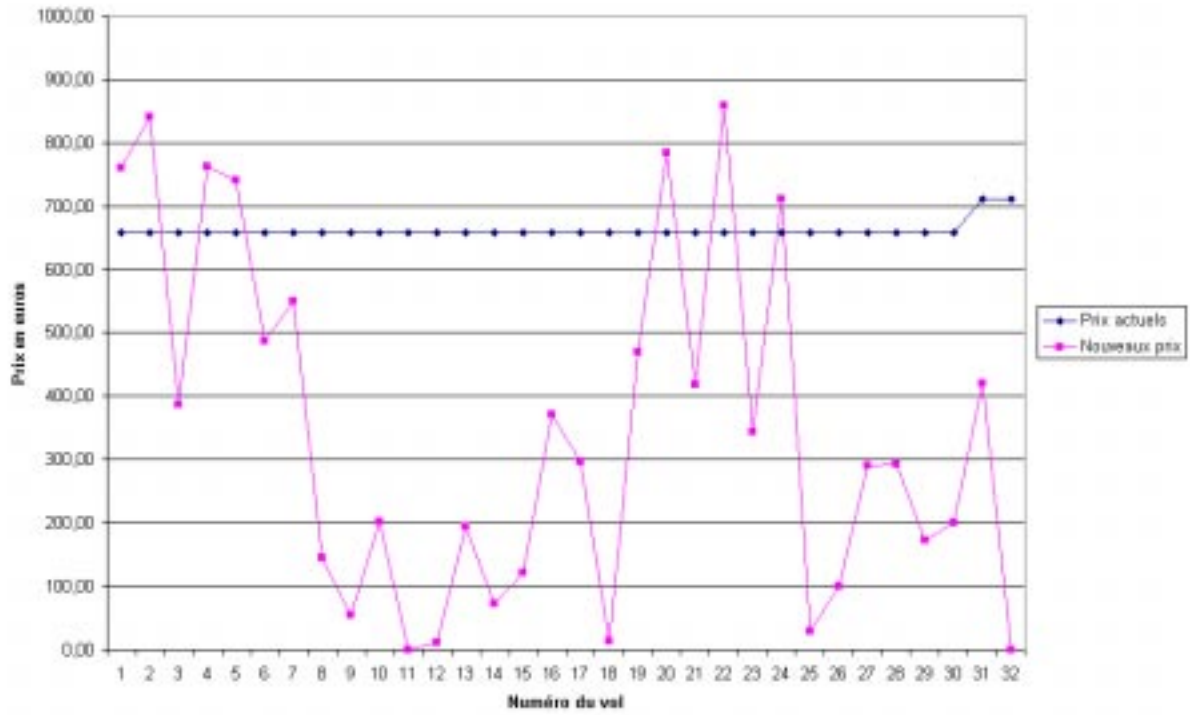


FIG. 7.15 – Prix d'utilisation de l'espace aérien avec le système actuel et le nouveau système de tarification pour les vols de la paire OD Paris-Marseille

7.7 Conclusion

La mise en place d'un mécanisme de tarification pour orienter les décisions des compagnies aériennes concernant leur utilisation de l'espace aérien nécessite le calcul de prix de secteurs. Connaissant une répartition de trafic "cible", ce calcul se présente sous la forme d'un problème de minimisation quadratique entre les nombres de vols issus du modèle d'affectation et les nombres de vols définis par la cible. Cette minimisation correspond à un problème d'optimisation continu non linéaire et à priori non convexe.

Un algorithme de descente par le calcul du gradient et un algorithme de recuit simulé ont été développés pour résoudre ce problème. Ces deux algorithmes ont été testés sur deux exemples simples. Il ressort que l'algorithme du gradient n'est pas adapté à l'optimisation des prix de secteurs puisque, dans certains cas, il ne permet pas de trouver le minimum global. L'algorithme du recuit simulé fournit des tables de prix optimales en un temps de calcul réduit à condition que la recherche soit orientée, c'est le cas avec la version 2 ou 3. D'ailleurs, ces deux versions se sont montrées performantes pour traiter un troisième exemple relatif à l'espace aérien français. La distance à la cible peut être fortement réduite, il est donc possible de contrôler le flux de trafic par les prix.

Pour mesurer les effets de la tarification sur la congestion de l'espace aérien, le programme de simulation de trafic décrit dans la partie 4.5 du chapitre 4 a été utilisé. Ce programme fournit des indicateurs concernant les dépassements de capacité dans les secteurs aériens, leurs fréquences et leurs amplitudes. La mise en place d'une tarification, pour laquelle les prix de secteurs ont été optimisés en vue d'atteindre une cible, modifie la répartition du trafic dans l'espace et dans le temps. Même si la cible n'est pas complètement atteinte, la nouvelle répartition entraîne une diminution de la congestion. Il y a moins de dépassements de capacité et les amplitudes des pointes de congestion sont réduites. De plus, la congestion s'est très peu déplacée sur d'autres secteurs.

Pour mettre en place cette politique de tarification, il faut s'assurer que les prix applicables ne représentent pas une part trop importante des coûts opérationnels des compagnies. Cette contrainte a été prise en compte en fixant un prix maximal de secteur. A terme, ce principe de tarification pourrait remplacer le système actuel des redevances à condition que les recettes générées soient du même ordre de grandeur. Pour cela, il faudrait ajouter une contrainte supplémentaire dans la formulation du problème d'optimisation.

Chapitre 8

Tarification par niveau des secteurs aériens

8.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, le principe de tarification adopté consiste à établir des prix pour chaque secteur à chaque période. Une telle tarification peut paraître très complexe pour les compagnies aériennes qui doivent prendre en compte tous ces prix pour faire leurs choix de routes et de périodes de décollage. En effet, la table de prix résultante est difficilement lisible. Il est donc intéressant d'envisager une tarification par niveau de prix, avec par exemple, un niveau de prix faible, moyen et fort. Le problème d'optimisation consiste alors à trouver des valeurs de prix associées à chaque niveau et d'affecter un niveau de prix à chaque secteur à chaque période. La première partie de ce chapitre donne une formulation mathématique de ce problème. Les parties suivantes sont consacrées au développement d'algorithmes de résolution et à leurs applications sur des exemples numériques.

8.2 Formulation mathématique

Le modèle mathématique utilisé pour décrire le problème de tarification est semblable à celui décrit dans le chapitre précédent à la différence près que les prix de secteurs sont limités à un ensemble \mathbf{V} ordonné de $M + 1$ valeurs [DFD01a]. La plus petite valeur de cet ensemble est la valeur nulle. A priori, les autres valeurs ne sont pas connues mais ne doivent pas dépasser \bar{x} , la valeur de prix maximale.

$$\mathbf{V} = \{v_0 = 0, v_1, v_2, \dots, v_M\} \quad (8.1)$$

L'affectation d'une valeur de \mathbf{V} à un secteur k en période n est donnée par un entier $a_{k,n}$ qui représente l'ordre de l'élément dans \mathbf{V} . Pour $k = 1, S$ et $n = 1, T'$,

$$0 \leq a_{k,n} \leq M \quad (8.2)$$

et

$$x_{k,n} = v_{a_{k,n}} \quad (8.3)$$

On note \mathbf{A} , la matrice d'affectation de composantes $a_{k,n}$ qui indique pour chaque composante de prix $x_{k,n}$ la valeur de prix qui lui est associée. La fonction $\mathbf{X} = \text{Affecte}(\mathbf{A}, \mathbf{V})$ construit la matrice de prix \mathbf{X} à partir de la matrice d'affectation \mathbf{A} et de l'ensemble \mathbf{V} en respectant les règles décrites précédemment.

Le problème de tarification par niveau consiste à trouver une affectation optimale \mathbf{A}^* et un ensemble de valeurs optimales \mathbf{V}^* tels que $\mathbf{X}^* = \text{Affecte}(\mathbf{A}^*, \mathbf{V}^*)$ minimise la fonction $F(\mathbf{X})$ (voir équation 4.15).

Pour ce problème, trois approches de résolution sont présentées. La première utilise la méthode du gradient pour déterminer les valeurs de prix et le recuit simulé pour affecter les niveaux de prix. Dans la seconde approche, la recherche des valeurs de prix et l'affectation des niveaux se fait conjointement par un algorithme de recuit simulé. La troisième méthode appliquée est la méthode Tabou. Ces trois méthodes sont testées et comparées.

8.3 Algorithmes de résolution

8.3.1 Première approche : Recuit simulé + Gradient

Pour résoudre ce problème de minimisation, l'heuristique envisagée consiste en une succession d'itérations d'algorithme du recuit simulé et d'algorithme du gradient. Le recuit simulé fournit une affectation optimale \mathbf{A} pour un ensemble \mathbf{V} de valeurs de prix et l'algorithme du gradient calcule les nouvelles valeurs de prix. Le schéma de la procédure est donné par la figure 8.1. La procédure est arrêtée après un nombre fixe d'itérations ou si la solution n'est pas améliorée. Les algorithmes de recherche utilisés dans la procédure sont décrits dans la suite.

Recherche-affectation-optimale

Cette fonction donne la meilleure affectation possible \mathbf{A}^* pour un ensemble \mathbf{V} de valeurs de prix. La recherche de cette affectation optimale se fait par un recuit simulé. Les étapes de l'algorithme du recuit simulé sont décrites de manière générale par le schéma 5.4 du chapitre 5. Pour choisir une matrice d'affectation \mathbf{D} voisine de \mathbf{A} , on adopte une stratégie prenant en compte l'écart $\lambda_{k,n}[E, \mathbf{X}]$ entre le nombre de vols désirés, dans un secteur sur une période, et le nombre de vols calculés (voir équation 7.24).

Si $\lambda_{k,n}[E, \mathbf{X}] > 0$, le secteur k est saturé durant la période n . Le prix associé au couple (secteur k , période n) doit être augmenté de manière à inciter les compagnies à ne pas traverser ce secteur pendant cette période. La matrice \mathbf{D} est générée à partir de \mathbf{A} de la façon suivante :

- $u = \text{Random}(0,1)$
- Si $(u < \rho_1)$, $d_{k,n} = \min(a_{k,n} + 1, M)$
- Si $(u \geq \rho_1)$ et $(u < \rho_1 + \rho_2)$, $d_{k,n} = \max(a_{k,n} - 1, 0)$

ρ_1, ρ_2 sont deux probabilités avec $\rho_1 > \rho_2$ et $\rho_1 + \rho_2 \leq 1$.

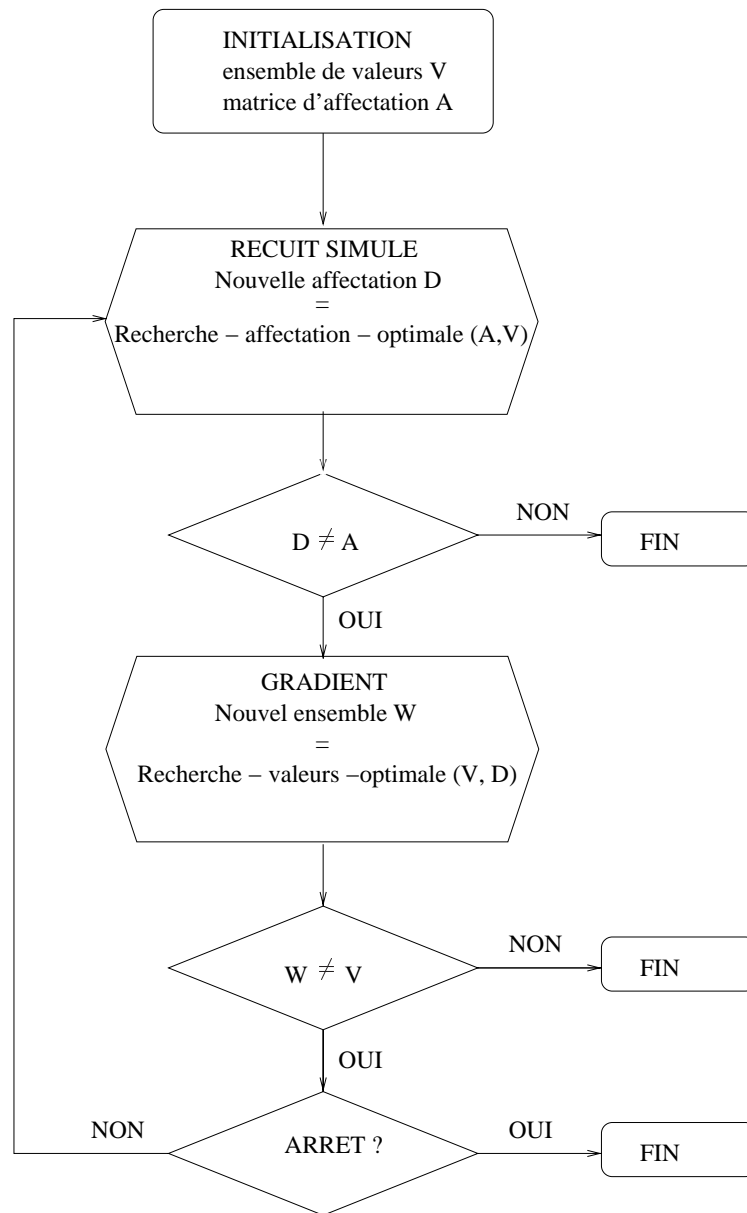


FIG. 8.1 – Schéma algorithmique pour la première approche de résolution : recuit + gradient

Au contraire, si plus de trafic peut être accepté dans un secteur, ce qui correspond à $\lambda_{k,n}[E, \mathbf{X}] < 0$, il est préférable de baisser le prix associé au couple (secteur k , période n). La matrice \mathbf{D} est générée à partir de \mathbf{A} de la façon suivante :

- $u = \text{Random}(0,1)$
- Si $(u < \rho_1)$, $d_{k,n} = \max(a_{k,n} - 1, 0)$
- Si $(u \geq \rho_1)$ et $(u < \rho_1 + \rho_2)$, $d_{k,n} = \min(a_{k,n} + 1, M)$

L'algorithme est arrêté si le critère d'optimisation atteint une certaine valeur ou s'il n'y a pas d'amélioration de la solution pendant un nombre fixe d'itérations successives.

Recherche-valeurs-optimales

Cette fonction recherche, pour une matrice d'affectation donnée \mathbf{A} , l'ensemble \mathbf{V}^* de valeurs de prix optimales. Cette recherche se fait par la méthode du gradient :

Initialisation :

- Partir d'un ensemble de valeurs de prix : \mathbf{V}^0
- $\mathbf{X}^0 = \text{Affecte}(\mathbf{A}, \mathbf{V}^0)$
- Nombre d'itérations $q = 0$

Tant que le critère d'arrêt est non vérifié :

- Calculer pour tout $m = 1, M$

$$\nabla f_m^q = \sum_{k=1}^{k=S} \sum_{n=1}^{n=T'} \delta_{k,n}^m \frac{\partial F(\mathbf{X})}{\partial x_{k,n}} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^q} \text{ avec : } \delta_{k,n}^m = 1 \text{ si } a_{k,n} = m, 0 \text{ sinon.}$$
- Choisir un pas de déplacement λ_q
- Faire $v_m^{q+1} = \min(\max(v_m^q - \lambda_q \nabla f_m^q, 0), \bar{x}) \quad \forall m = 1, M$
- $\mathbf{X}^{q+1} = \text{Affecte}(\mathbf{A}, \mathbf{V}^{q+1})$
- $q \leftarrow q + 1$

Fin Tant que

L'algorithme est arrêté si le critère d'optimisation atteint une certaine valeur ou après un nombre fixe d'itérations. A chaque itération, le pas de déplacement λ_q est obtenu en minimisant le critère vis à vis de ce paramètre avec la méthode du nombre d'or.

8.3.2 Deuxième approche : Recuit simulé à variables mixtes

Comme rien ne garantit la convexité du problème de recherche d'un ensemble \mathbf{V} de valeurs de prix pour une affectation donnée \mathbf{A} , un algorithme de recuit simulé à variables mixtes pour rechercher simultanément une matrice d'affectation et un ensemble de valeurs de prix est développé. Le schéma algorithmique de cette procédure est donné par la figure 8.2.

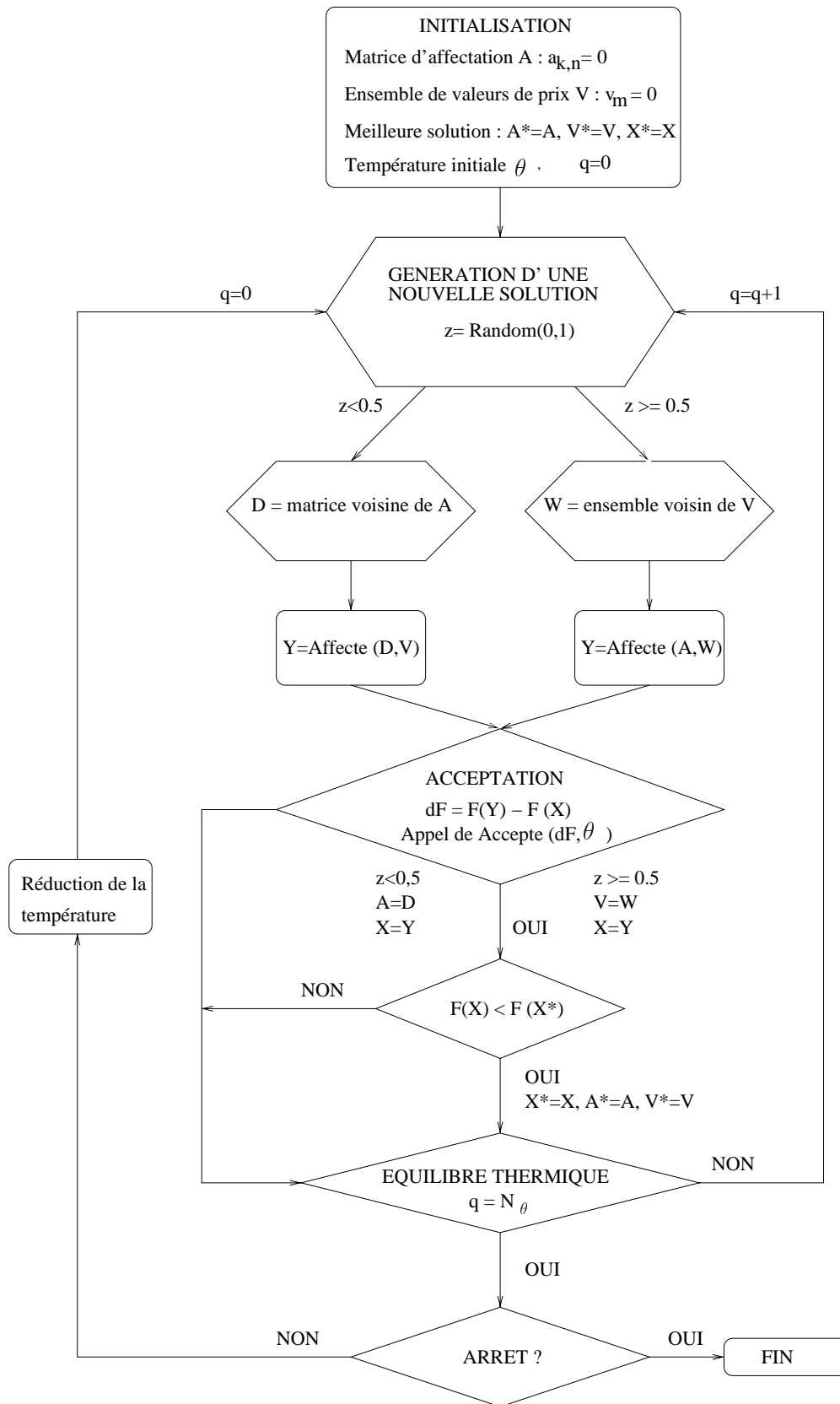


FIG. 8.2 – Schéma algorithmique du recuit simulé pour la recherche simultanée d'une matrice d'affectation et d'un ensemble de valeurs de prix

Pour choisir une matrice d'affectation \mathbf{D} voisine de \mathbf{A} , la stratégie décrite précédemment est utilisée. Pour obtenir un ensemble de prix \mathbf{W} voisin de \mathbf{V} , la première valeur reste nulle $w_0 = v_0 = 0$. Chaque autre nouvelle valeur est tirée dans l'intervalle $[v_m - \delta, v_m + \delta]$ (δ pas de déplacement) et projetée sur l'intervalle $[0, \bar{x}]$. Les nouvelles valeurs obtenues sont triées par ordre croissant et forment le nouvel ensemble \mathbf{W} .

8.3.3 Troisième approche : Méthode Tabou

La méthode Tabou (voir partie 5.6.3 du chapitre 5) semble être adaptée à la recherche conjointe d'une matrice d'affectation et d'un ensemble de valeurs de prix, car elle facilite la prise en compte d'informations sur la structure du problème. Pour appliquer la méthode Tabou à ce problème d'optimisation, il faut choisir une solution initiale, et définir des structures de voisinages et de mouvements.

Solution initiale

Pour débiter la recherche avec tabous, la solution initiale est obtenue en prenant une matrice d'affectation \mathbf{A} initiale nulle ($a_{k,n} = 0$ pour $k = 1, S$ et $n = 1, T'$) et en fixant aléatoirement la valeur du prix de plus haut niveau v_M de l'ensemble \mathbf{V} . Les autres valeurs de prix initiales sont obtenues à partir de V_M proportionnellement à leur ordre.

- $a_{k,n} = 0$
- $v_M = \text{Random}(0,1) \times \bar{x}$
- $v_0 = 0$ et $v_m = \frac{m}{M}v_M$ pour $m = 1, M - 1$

Mouvements

Pour se déplacer d'une solution à l'autre, trois types de mouvements peuvent s'appliquer. Le premier consiste à augmenter le niveau de prix d'un secteur à une période donnée. Ce mouvement correspond à augmenter d'une unité une des composantes de la matrice d'affectation \mathbf{A} . Nous appellerons "mouvement *add*" ce type de transformation. Le deuxième type de mouvement envisageable consiste à diminuer le niveau de prix d'un secteur à une période donnée. Ce mouvement correspond à diminuer d'une unité une des composantes de la matrice d'affectation \mathbf{A} . Nous appellerons "mouvement *drop*" ce type de transformation. Le troisième mouvement possible consiste à modifier une des valeurs de l'ensemble \mathbf{V} , en l'augmentant ou en la diminuant d'un millièème du prix maximal. Nous appellerons "mouvement *val*" ce type de transformation.

Voisinage

- **Voisinage *add***

L'ensemble des matrices d'affectation pouvant être atteintes à partir de la matrice d'affectation courante par un mouvement *add* constitue le voisinage *add*. Il serait trop long en temps de calcul d'évaluer toutes les solutions de ce voisinage. L'exploration est donc limitée à une fraction de ce voisinage. Pour cela, le passage à un niveau de prix supérieur ne se fait que sur certains couples (secteur, période). Les couples (secteur k , période n) sont choisis en fonction de l'écart $\lambda_{k,n}$, défini par l'équation

7.24, et du niveau de prix $a_{k,n}$ déjà affecté.

– Notations :

Ei_{add} : Ensemble des couples (secteur k , période n) pour lesquels l'écart $\lambda_{k,n}$ est supérieur à $(10E - 6)$ et le niveau de prix $a_{k,n}$ est inférieur à M

Ni_{add} : Cardinal de Ei_{add}

p_{add} : Pourcentage de couples sélectionnés

Ef_{add} : Ensemble des couples susceptibles de subir un mouvement add

Nf_{add} : Cardinal de Ef_{add}

– Principe :

– $Nf_{add} = E(p_{add} \times Ni_{add})$

– Dans l'ensemble Ei_{add} , retenir les Nf_{add} couples de plus grand écart. Ils forment l'ensemble Ef_{add} . L'ensemble des matrices d'affectation pouvant être atteintes en appliquant un mouvement add aux couples de l'ensemble Ef_{add} forment le voisinage V_{add} .

– **Voisinage drop**

Le principe de formation du voisinage $drop$ est semblable à celui du voisinage add .

– Notations :

Ei_{drop} : Ensemble des couples (secteur k , période n) pour lesquels l'écart $\lambda_{k,n}$ est inférieur à $(-10E - 6)$ et le niveau de prix $a_{k,n}$ est supérieur à 0

Ni_{drop} : Cardinal de Ei_{drop}

p_{drop} : Pourcentage de couples sélectionnés

Ef_{drop} : Ensemble des couples susceptibles de subir un mouvement $drop$

Nf_{drop} : Cardinal de Ef_{drop}

– Principe :

– $Nf_{drop} = E(p_{drop} \times Ni_{drop})$

– Dans l'ensemble Ei_{drop} , retenir les Nf_{drop} couples de plus petit écart. Ils forment l'ensemble Ef_{drop} . L'ensemble des matrices d'affectation pouvant être atteintes en appliquant un mouvement $drop$ aux couples de l'ensemble Ef_{drop} forment le voisinage V_{drop} .

– **Voisinage val**

En pratique, le nombre de niveaux de prix est réduit. Toutes les solutions pouvant être atteintes par un mouvement val peuvent donc être examinées. Le voisinage val V_{val} est formé par tous les ensembles de valeurs de prix obtenus par l'augmentation ou la diminution d'une des valeurs de prix de l'ensemble courant. A chaque fois, les valeurs du nouvel ensemble sont triées par ordre croissant.

Mouvements tabous

Pour éviter de retourner vers des solutions déjà rencontrées, le passage à un prix de niveau supérieur ne peut pas s'appliquer à un couple (secteur, période) ayant fait récemment l'objet d'un mouvement $drop$. De la même façon, le passage à un prix de niveau inférieur sur

un couple (secteur, période) qui vient de subir un mouvement *add* est considéré comme tabou. Il est aussi tabou d'augmenter (resp. de diminuer) la valeur d'un niveau de prix qui a été récemment diminuée (resp. augmentée). La maintenance de ces principes est assurée par trois listes tabou. La première liste contient les k_{drop} derniers couples (secteur, période) qui ont subi un mouvement *drop*, la seconde les k_{add} derniers couples (secteur, période) qui ont subi un mouvement *add*. La troisième liste contient les k_{val} dernières valeurs qui ont été modifiées avec le sens de leur modification (+1 pour une augmentation, -1 pour une diminution). La gestion de listes tabou permet d'éviter des cycles, c'est-à-dire d'augmenter puis de diminuer le prix affecté à un couple (secteur, période).

Algorithme

Le schéma algorithmique de la recherche Tabou pour la tarification par niveau est donné par la figure 8.3. Les probabilités ρ_1, ρ_2 (telles que $\rho_1 + \rho_2 = 1$) déterminent la proportion de mouvements de chaque type et rendent le processus de recherche stochastique. La recherche est arrêtée après un nombre fixe d'itérations.

8.4 Tests et résultats

Les trois approches de résolution au problème de tarification par niveau sont testées sur l'exemple académique (exemple 2). Le nombre de niveaux de prix est limité à 4 ($M \leq 3$). Ces tests vont permettre de sélectionner les méthodes les plus efficaces à appliquer sur l'exemple 3, plus complexe.

8.4.1 Exemple 2

Résultats de l'optimisation

Première approche

Pour cette approche, l'algorithme du gradient est stoppé après 300 itérations. L'algorithme du recuit simulé est stoppé si le nombre d'itérations excède 200000 ou si le critère ne s'améliore pas pendant 25000 itérations successives. Un pré-traitement permet de déterminer une température initiale de manière à ce que le nombre de configurations acceptées sur le nombre de configurations générées (500) soit supérieur à 0.8. Une décroissance linéaire de la température est choisie : $\theta_{l+1} = \beta^l \theta_0$ avec $\beta = 0.9$. Le nombre d'itérations à température constante est égal à 5000. Des tests préliminaires ont permis de régler la valeur des probabilités ρ_1 et ρ_2 à 0.7 et 0.2. La figure 8.4 présente l'évolution de la distance à la cible 1 pendant l'optimisation avec quatre niveaux de prix pour une initialisation donnée du générateur aléatoire. Le temps reporté en abscisse correspond au temps CPU mesuré sur une ULTRA SPARC II (440 MH).

Le tableau 8.1 présente les valeurs du critère $F(\mathbf{X})$ (voir équation 4.15) avant et après optimisation. Les résultats sont obtenus pour 100 initialisations différentes du générateur aléatoire.

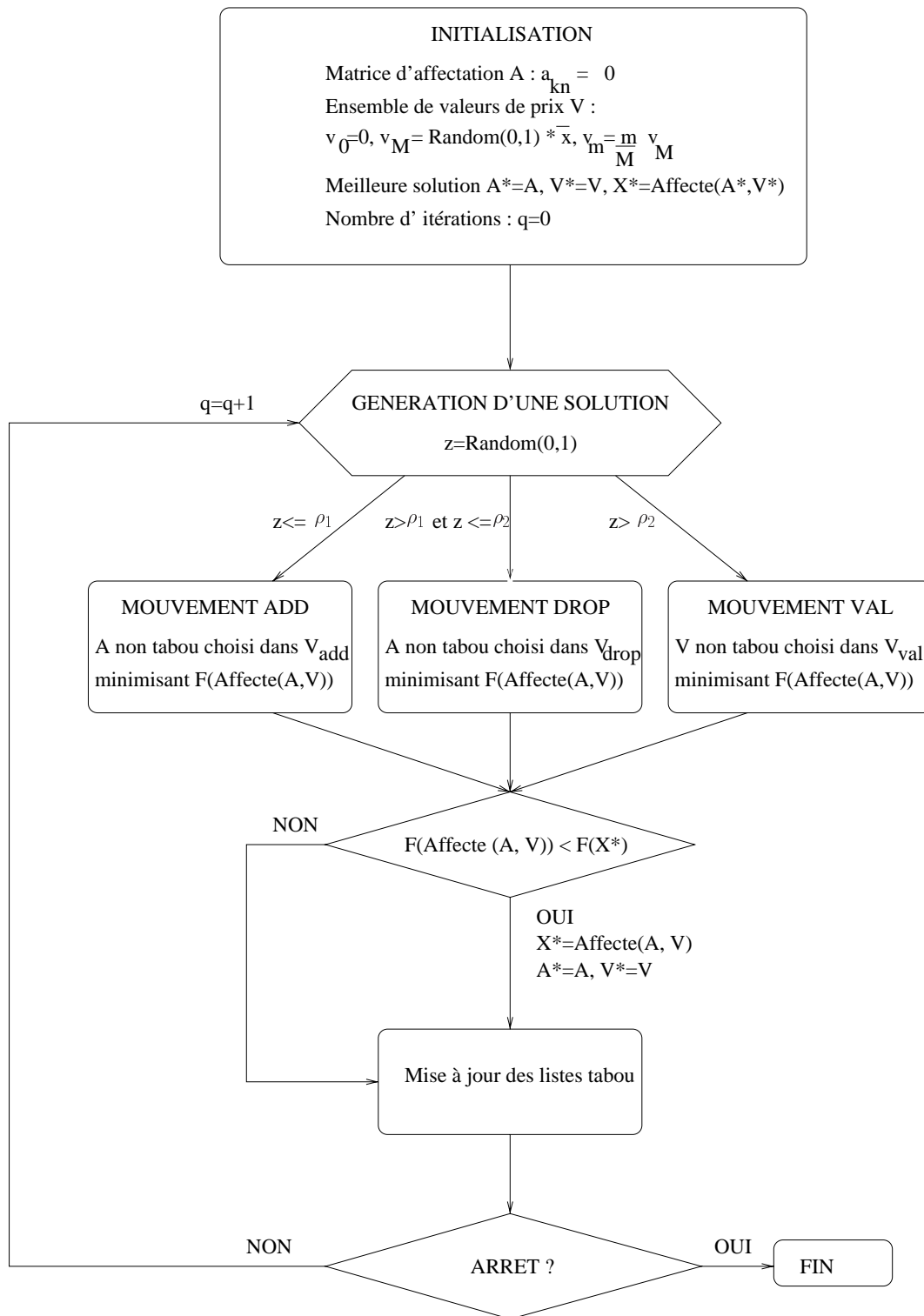


FIG. 8.3 – Schéma algorithmique de la méthode Tabou pour la recherche simultanée d'une matrice d'affectation et d'un ensemble de valeurs de prix

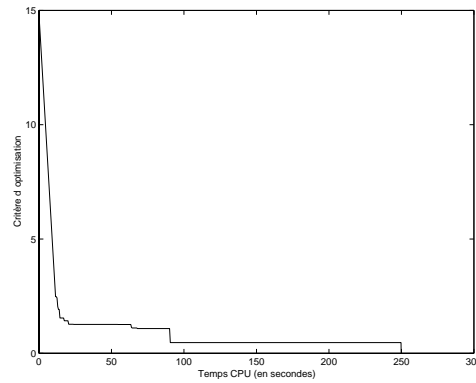


FIG. 8.4 – Évolution du critère pour la cible 1 avec 4 niveaux de prix

	Critère	Cible 1	Cible 2	Cible 3	Cible 4	Cible 5
Critère avant optimisation						
Prix nuls		17.01	17.01	22.71	11.19	1.78
Critère après optimisation						
2 niveaux de prix ($M = 1$)	minimal	0.014	0.022	0.0061	0.0055	0.00
	moyen	0.67	0.87	0.94	0.83	0.33
	maximal	1.39	4.63	2.58	6.28	1.58
3 niveaux de prix ($M = 2$)	minimal	0.00077	0.00022	0.000006	0.00022	0.00
	moyen	0.48	0.23	0.24	0.12	0.036
	maximal	1.35	4.43	1.29	1.28	1.78
4 niveaux de prix ($M = 3$)	minimal	0.00002	0.00013	0.000011	0.000011	0.00
	moyen	0.22	0.11	0.058	0.041	0.00006
	maximal	1.30	3.07	2.53	0.95	0.00059

TAB. 8.1 – Critère d'optimisation avec la première approche

Ces résultats indiquent que :

- La valeur du critère d'optimisation décroît avec le nombre de niveaux de prix utilisés.
- La cible n'est pas toujours atteinte. Les valeurs de critère encore très élevées, même après optimisation, laisse à penser que la méthode du gradient est bloquée dans un minimum local. Cette hypothèse peut être vérifiée sur un problème avec deux niveaux de prix. La figure 8.5 donne les variations du critère d'optimisation en fonction des variations de la valeur v_1 de l'ensemble $\mathbf{V} = \{v_0 = 0, v_1\}$ pour une affectation de prix donnée. Sur cette figure, la présence d'un minimum local est visible. Pour tenter d'obtenir le minimum global, il est donc préférable d'utiliser d'autres heuristiques d'optimisation n'utilisant pas d'algorithme du gradient.
- L'utilisation de seulement trois niveaux de prix ($M = 2$), en comparaison avec une tarification continue des secteurs aériens (voir résultats du tableau 7.6 du chapitre 7) ne semble pas affecter les performances du système. En effet, d'aussi petites valeurs

du critère peuvent être atteintes avec une tarification par niveau de prix.

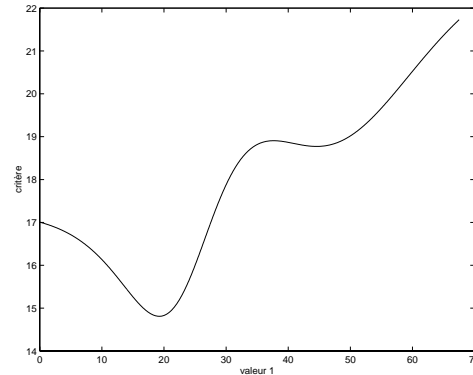


FIG. 8.5 – Évolution du critère en fonction des variations de prix v_1 pour une matrice d'affectation donnée

Deuxième approche

Pour cette approche, les paramètres de contrôle du recuit simulé (température initiale, facteur de décroissance, nombre de paliers) sont les mêmes que ceux utilisés dans la première approche. Le pas de déplacement δ d'une valeur de prix à une autre est fixé à 0.1. L'algorithme du recuit simulé est arrêté si le critère de minimisation est inférieur à 0.001 ou après 200000 itérations. Le tableau 8.2 présente les valeurs du critère de minimisation en fonction du nombre de niveaux de prix utilisés. Les résultats sont obtenus pour 50 initialisations différentes du générateur aléatoire.

M	Critère	Cible 1	Cible 2	Cible 3	Cible 4	Cible 5
1	minimal	0.014	0.022	0.0061	0.0055	0.00000
	moyen	0.014	0.022	0.0064	0.0056	0.00059
	maximal	0.014	0.022	0.0068	0.0068	0.00098
2	minimal	0.00043	0.00020	0.00040	0.00046	0.00000
	moyen	0.0038	0.0016	0.0014	0.0012	0.00055
	maximal	0.020	0.0058	0.0062	0.0049	0.00099
3	minimal	0.00036	0.00020	0.000040	0.00016	0.00000
	moyen	0.0021	0.0015	0.0011	0.0011	0.00062
	maximal	0.0084	0.0056	0.0058	0.0034	0.00097

TAB. 8.2 – Critère d'optimisation avec la méthode du recuit simulé à variables mixtes

Le tableau 8.3 donne un exemple de matrice de prix optimisée pour la cible 1 avec 4 niveaux de prix (niveau 0 : $v_0 = 0.0$, niveau 1 : $v_1 = 13.4$, niveau 2 : $v_2 = 30.4$, niveau 3 : $v_3 = 46.2$). La figure 8.6 donne les utilités des douze options proposées à un vol programmé en période 1. On peut noter que, pour une même cible, la stratégie de tarification par niveau induit toujours des utilités d'options (coût fixe + prix d'achat) plus élevées qu'une tarification où les prix sont indépendants les uns des autres. D'autres recherches doivent

Secteur	Période							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0	#	2	0	3	3	#	#	#
1	#	3	3	2	3	1	#	#
2	#	3	3	0	0	3	0	#
3	#	3	3	1	3	3	#	#
4	#	#	3	2	0	3	#	#
5	#	#	2	2	3	0	1	#
6	#	2	3	3	0	3	3	#
7	#	#	0	3	2	2	3	#
8	#	#	#	3	3	3	0	#
9	0	3	3	3	#	#	#	#
10	#	#	#	#	0	3	3	3
11	3	2	0	0	#	#	#	#
12	#	#	#	#	3	3	2	0

: prix sans influence sur le critère d'optimisation

TAB. 8.3 – Table de prix de secteurs à 4 niveaux, optimisés pour la cible 1

être conduites pour déterminer si cette augmentation de l'utilité associée à une structure de prix par niveau est spécifique à cet exemple.

Troisième approche

Le tableau 8.4 présente les résultats obtenus avec une recherche Tabou pour 50 initialisations différentes du générateur aléatoire. Pour avoir des temps de calcul comparables à ceux de l'algorithme du recuit simulé à variables mixtes, 30000 itérations de recherche Tabou sont exécutées. La recherche est arrêtée avant si la cible est atteinte, c'est-à-dire si le critère de minimisation est inférieur à 0.001. Les trois types de mouvement ont même probabilité de réalisation : $\rho_1 = \frac{1}{3}$ et $\rho_2 = \frac{2}{3}$. Les paramètres de la recherche sont fixés aux valeurs suivantes : $p_{add} = 0.5$, $p_{drop} = 0.5$, $k_{add} = 10$, $k_{drop} = 10$, $k_{val} = 4$.

Comparaison de performances

Les résultats obtenus avec le recuit simulé à variables mixtes et la méthode Tabou sont du même ordre de grandeur. A partir de 3 niveaux de prix ($M \geq 2$), la cible est atteinte. Le tableau 8.5 donne les temps de calcul (temps CPU pour une ULTRA SPARC II - 440 MH) pour atteindre les cibles (critère < 0.001), avec quatre niveaux de prix, avec la méthode du recuit simulé et avec la méthode Tabou.

A la vue de ces résultats, il est difficile de se prononcer sur l'efficacité d'une méthode par rapport à l'autre. Il faudrait pouvoir comparer les méthodes sur d'autres scénarios de trafic.

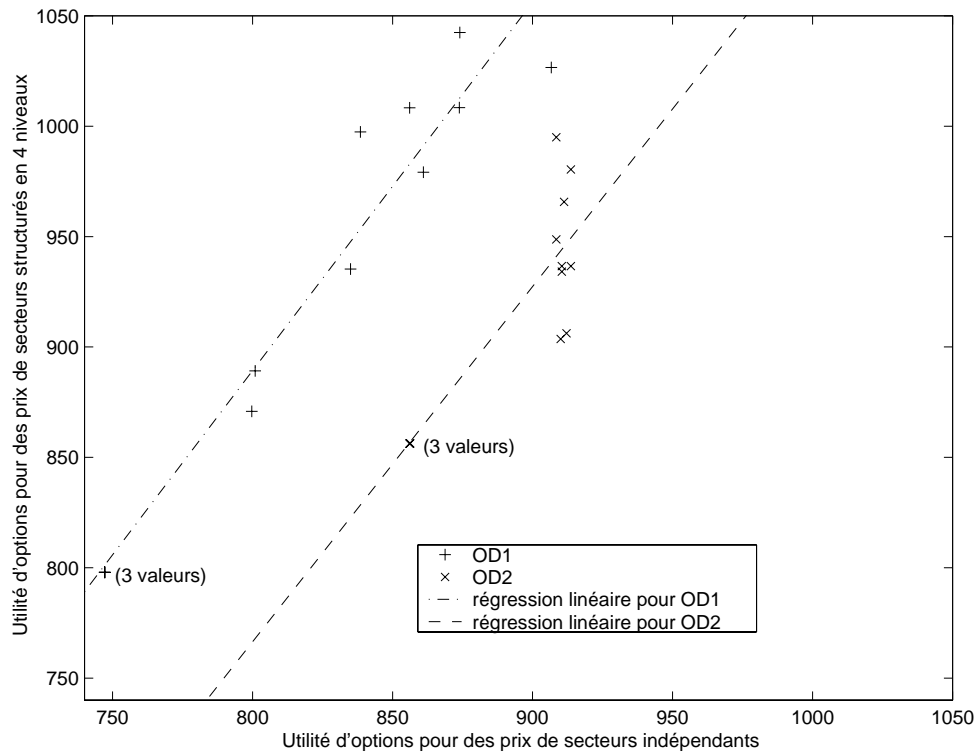


FIG. 8.6 – *Comparaison des utilités entre une tarification continue et une tarification par niveau - Cible 1*

M	Critère	Cible 1	Cible 2	Cible 3	Cible 4	Cible 5
1	minimal	0.014	0.022	0.0061	0.0055	0.00022
	moyen	0.014	0.022	0.0062	0.0057	0.00056
	maximal	0.016	0.023	0.0067	0.0058	0.0010
2	minimal	0.00068	0.00061	0.00077	0.00036	0.00022
	moyen	0.0034	0.0018	0.00078	0.00078	0.00069
	maximal	0.0092	0.0080	0.00098	0.0010	0.0010
3	minimal	0.00033	0.00014	0.000035	0.00019	0.000001
	moyen	0.00082	0.00071	0.00085	0.00074	0.00060
	maximal	0.0020	0.0010	0.0044	0.0010	0.0010

TAB. 8.4 – *Critère d'optimisation avec la méthode Tabou*

	Temps CPU	Cible 1	Cible 2	Cible 3	Cible 4	Cible 5
Recuit simulé à variables mixtes	minimal	84	73	110	76	5
	moyen	195	117	139	108	11
	maximal	761	151	198	166	27
Méthode Tabou	minimal	136	77	30	30	11
	moyen	405	240	42	53	13
	maximal	916	738	82	116	16

TAB. 8.5 – Temps CPU (en secondes) pour atteindre la cible (critère <0.001) avec le recuit simulé à variables mixtes ou la méthode Tabou

Résultats de simulation

Les résultats précédents montrent qu'il est possible d'atteindre une cible au moyen d'une tarification par niveau en optimisant les prix, soit par un recuit simulé à variables mixtes, soit par une méthode Tabou. Il faut maintenant s'assurer que la tarification par niveau des secteurs aériens est aussi performante en terme de réduction de la congestion qu'une tarification continue. Pour cela, on reproduit les mêmes simulations que celles décrites dans la partie 7.6.2, mais pour une tarification à quatre niveaux de prix. La figure 8.7 présente la charge (nombre de vols entrant dans le secteur) du secteur le plus critique (secteur 4) obtenue pour la cible 1 avec ce type de tarification. Les résultats des simulations sont

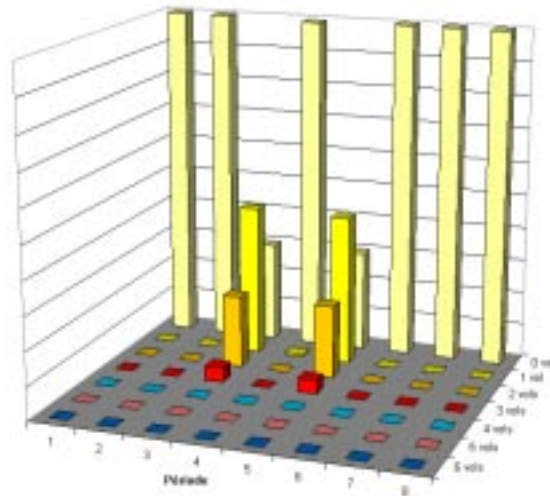


FIG. 8.7 – Histogramme d'indice de charge du secteur 4 pour 1000 jours de simulation - tarification à quatre niveaux de prix de secteurs

identiques à ceux obtenus avec une tarification continue. Une tarification par niveau de prix est aussi efficace qu'une tarification continue pour réduire la congestion des secteurs aériens. Le tableau 8.6 qui donne les moyennes et les écarts-type des indicateurs de congestion obtenus pour 1000 jours de trafic simulé renforce cette affirmation.

		Cible 1	Cible 2	Cible 3	Cible 4	Cible 5
Q_1	Prix nuls	5.1±0.3	5.1±0.3	5.0±0.1	5.0±0.1	0.9±0.3
	Prix indépendants	4.6±2.5	4.6±2.5	3.7±2.1	3.8±2.1	0.3±0.5
	Quatre niveaux de prix	4.6±2.5	4.6±2.5	3.7±2.1	3.9±2.1	0.3±0.5
Q_2	Prix nuls	12.5±1.5	12.5±1.5	11.4±1.8	11.4±1.8	0.9±0.3
	Prix indépendants	5.2±3.3	5.2±3.3	4.4±3.0	5.2±3.4	0.3±0.5
	Quatre niveaux de prix	5.2±3.3	5.2±3.3	4.4±3.0	5.2±3.4	0.3±0.5

TAB. 8.6 – Moyenne \mp écart-type des indicateurs de congestion Q_1 et Q_2 avant et après tarification

8.4.2 Exemple 3

L'exemple précédent a permis de comparer différentes approches d'optimisation pour établir une tarification par niveau. L'utilisation d'un recuit simulé ou d'une méthode Tabou s'est révélée efficace. La limitation du nombre de valeurs de prix n'affecte pas les performances du système de tarification en terme de diminution de la congestion. L'exemple 3 décrit en annexe H va permettre d'infirmer ou de confirmer ces résultats pour un scénario de trafic plus réaliste.

Résultats de l'optimisation

Les deux dernières approches, recuit simulé à variables mixtes et méthode Tabou sont employées pour l'optimisation des prix de secteurs en se limitant à 4 niveaux de prix ($M = 3$). La valeur du prix maximal est déterminé à partir de l'équation 7.35 en prenant un coefficient γ égal à 0.5.

L'algorithme du recuit simulé est arrêté après 20000 itérations, ce qui correspond à un temps d'exécution égal à environ 10 heures avec une station ULTRA SPARC II (450 MH). Les paramètres de contrôle du recuit sont fixés aux mêmes valeurs que précédemment. Pour modifier les valeurs de prix, le pas de déplacement est égal à 100. Les probabilités de passage d'un niveau de prix à un autre sont fixées à 0.7 pour ρ_1 et 0.2 pour ρ_2 .

Dans l'algorithme de la méthode Tabou, les trois mouvements ont même probabilité de réalisation. En revanche, les pourcentages de couples sélectionnés pour subir un mouvement sont réduits par rapport à l'exemple précédent pour éviter d'explorer des voisinages trop grands. Dans ce cas, $p_{add} = 0.02$, $p_{drop} = 0.2$. Les autres paramètres conservent leurs valeurs : $k_{add} = 10$, $k_{drop} = 10$, $k_{val} = 4$. Pour obtenir un temps d'exécution comparable à celui du recuit simulé, 2500 itérations de la méthode Tabou sont réalisées.

Le tableau 8.7 présente les résultats obtenus en indiquant les valeurs de proportion moyenne et maximale définie dans la partie 7.6.3 du chapitre 7 et les valeurs des 4 niveaux de prix.

- L'utilisation de seulement quatre niveaux de prix conduit à des critères d'optimisation plus élevés. Il paraît donc plus difficile d'orienter la répartition du trafic en appliquant une tarification par niveau.
- Les temps de calcul des deux méthodes sont très importants comparativement au

	Critère	Proportion moyenne	Proportion maximale	v_0	v_1	v_2	v_3
Avant optimisation	107.23	0.00	0.00	0	0	0	0
Recuit simulé	39.09	0.18	0.43	0	113	269	421
Méthode Tabou	21.28	0.03	0.32	0	351	413	421

TAB. 8.7 – Critère d'optimisation avec la méthode du recuit simulé à variables mixtes et la méthode Tabou pour 4 niveaux de prix

temps de calcul nécessaire pour établir des prix de secteurs en tarification continue.

- Pour des temps d'exécution équivalents, la méthode Tabou se révèle être plus efficace que la méthode du recuit simulé, puisqu'elle conduit à un critère d'optimisation plus petit.
- Les valeurs des proportions sont cohérentes avec celles calculées en tarification continue. En effet, l'utilisation d'un coefficient γ de 0.5 est correcte pour établir un rapport acceptable entre les prix d'options et les coûts d'options.
- La méthode du recuit simulé à variables mixtes fournit une table de prix avec 477 prix significatifs nuls pour 1953 prix significatifs. La table de prix obtenue avec la méthode Tabou comporte 1771 prix significatifs nuls, ce qui indique que seuls 182 couples (secteur, période) sont tarifés.

Résultats de simulation

Pour connaître les effets de la tarification par niveau sur la congestion des secteurs, les simulations décrites dans la partie 7.6.3 concernant la tarification continue sont reproduites. Les résultats sont présentés dans le tableau 8.8. Ils sont conformes aux prévisions : dans les deux cas, la tarification mise en place modifie la répartition du trafic et entraîne une réduction de la congestion totale. L'indicateur Q_2 d'excès total de charge passe de 44 à 27 pour des prix établis avec le recuit simulé, et de 44 à 22 pour des prix établis avec la méthode Tabou. Cependant, les effets de cette tarification sur la congestion sont moindres par rapport à ceux apportés par une tarification continue des secteurs aériens.

	$\overline{Q_1} \pm \sigma_{Q_1}$	$\overline{Q_2} \pm \sigma_{Q_2}$
Prix nuls	26.89 ± 1.76	44.19 ± 2.03
Prix optimisés avec le recuit simulé	25.28 ± 2.76	27.01 ± 3.34
Prix optimisés avec la méthode Tabou	22.28 ± 3.38	22.00 ± 4.22

TAB. 8.8 – Moyenne et écart-type des indicateurs de congestion pour une tarification par niveau

La figure 8.8 présente les dépassements de capacité moyens observés pour 1000 journées de trafic simulé si une tarification par niveau est mise en place. Les prix fixés sont ceux obtenus avec la méthode Tabou pour $\gamma = 0.5$. Le dépassement moyen de capacité est

maximal dans le secteur 28 en période 52, il est égal à 1.84. C'est une valeur supérieure au dépassement mesuré dans le même secteur à la même période en l'absence de tarification.

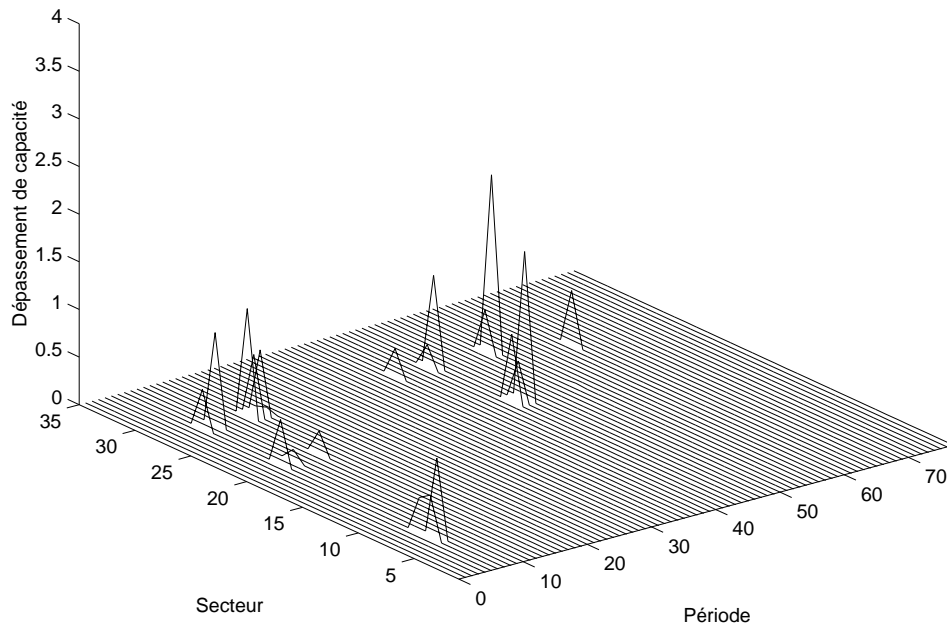


FIG. 8.8 – *Dépassement moyen de capacité des secteurs aériens (prix établis avec la méthode Tabou)*

La figure 8.9 présente l'ensemble des couples (secteur, période) où un dépassement de capacité peut être observé. Même si globalement la tarification par niveau permet de diminuer les amplitudes de dépassement de capacité, elle peut engendrer des effets contraires à ceux attendus. Par exemple, dans le secteur 28 en période 15, la congestion est réduite de moitié mais le surplus de demande s'est reporté sur les périodes 16 et 17.

Pour des scénarios de trafic plus complexes, la tarification par niveau est moins performante qu'une tarification où les prix sont fixés indépendamment les uns des autres. En effet, il est plus difficile d'orienter le trafic en utilisant seulement quatre niveaux de prix.

Les prix d'utilisation de l'espace aérien

Comme en tarification continue, il est nécessaire de fixer un prix maximal de secteur pour éviter que le prix d'achat des options de route et de période de décollage soit trop important par rapport au coût d'exploitation du vol. Une valeur de 0.5 pour le coefficient γ intervenant dans le calcul du prix maximal (équation 7.35) s'avère judicieux.

On peut comparer les prix d'utilisation de l'espace aérien établis par une tarification par niveau avec ceux fixés par le système actuel de redevances. La méthode de comparaison

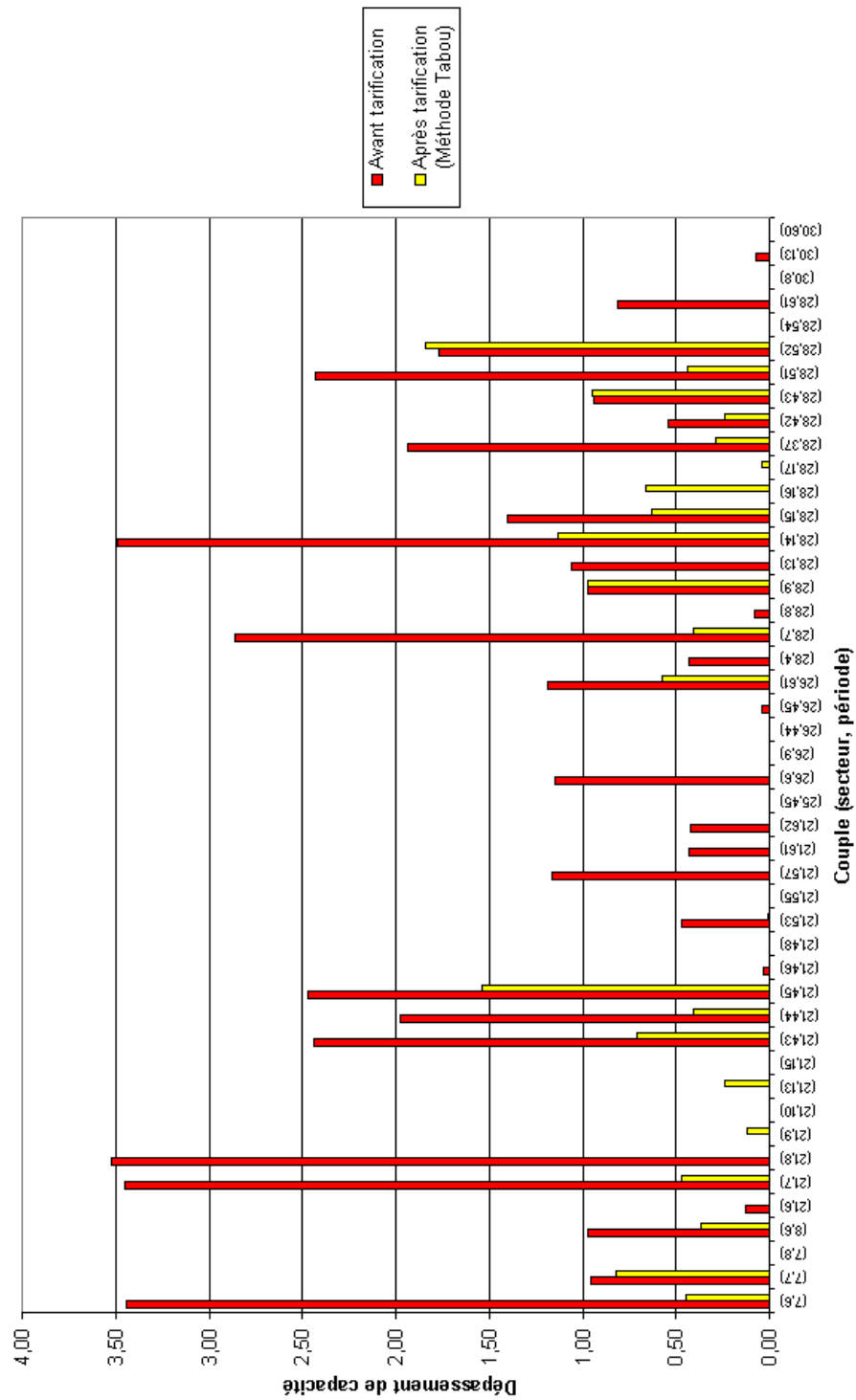


FIG. 8.9 – Couples (secteur, période) avec dépassement de capacité avant et après tarification (prix établis avec la méthode Tabou)

est la même que celle décrite dans la partie 7.6.3 du chapitre 7. Si les prix d'options sont optimisés avec la méthode du recuit à variables mixtes, ils sont généralement plus élevés que les prix des redevances actuelles. D'ailleurs, la recette totale s'élève à 347712 euros contre 195900 euros pour le système actuel. Si les prix d'options sont optimisés avec la méthode Tabou, la plupart d'entre eux sont nuls et dans ce cas l'espace aérien n'est pas suffisamment tarifé pour couvrir les coûts du contrôle aérien.

Dans les deux cas, les utilités d'options qui résultent d'une tarification par niveau sont différentes de celles obtenues avec une tarification où les prix sont indépendants les uns des autres, et cela dépend de la méthode d'optimisation utilisée. L'augmentation des utilités constatée dans l'exemple précédent est donc un fait non généralisable.

8.5 Conclusion

La deuxième stratégie de tarification des secteurs aériens consiste à limiter le nombre de valeurs de prix. Le calcul des prix de secteurs est alors formulé comme un problème d'optimisation mixte à variables continues et discrètes. Il s'agit de calculer des valeurs de prix et d'affecter un niveau de prix à chaque couple (secteur, période). Pour résoudre ce problème, trois approches ont été envisagées. Elles ont été testées sur un exemple académique. Il ressort que la première approche qui utilise une méthode de gradient pour calculer les valeurs de prix n'est pas performante. En effet, pour une affectation de prix donnée, le critère d'optimisation n'est pas convexe et le méthode se heurte au problème de minimums locaux. La recherche conjointe d'un ensemble de prix et d'une affectation, avec un algorithme de recuit simulé, ou une méthode Tabou, s'avère être plus efficace.

Ces deux approches ont été retenues pour être appliquées à un exemple plus réaliste. Les résultats montrent qu'il est plus difficile de s'approcher de la cible avec une tarification par niveau qu'avec une tarification où les prix sont fixés indépendamment les uns des autres. Le critère d'optimisation décroît avec le nombre de valeurs de prix utilisées. C'est un résultat tout à fait compréhensible. En effet, limiter le nombre de valeurs de prix revient à ajouter des contraintes au problème d'optimisation. Plus ce nombre est petit, plus il y a de contraintes et plus le critère optimum est élevé.

En limitant le nombre de valeurs de prix, les possibilités d'atteindre la cible sont réduites, et logiquement, les effets sur la congestion des secteurs sont moins importants voire contraires aux espérances. Cette différence n'est pas visible pour l'exemple académique mais apparaît plus nettement pour un réseau aérien plus complexe. Les mesures de congestion issues des simulations de trafic en présence de tarification indiquent que l'amplitude des dépassements de capacité a baissé, mais que leur nombre est resté quasiment le même. Il arrive, que dans certains secteurs, la congestion ait augmentée ou se soit reportée sur des périodes voisines. Comme en tarification continue, il est nécessaire de fixer un prix maximal de secteur pour éviter d'établir des prix d'options trop grands. Et une contrainte sur le montant des recettes pourrait être ajoutée. La mise en place d'une tarification par niveau propose une lecture plus simple des prix de secteurs mais les gains en terme de diminution de la congestion sont plus faibles. Il y a donc un compromis à faire entre le nombre de niveaux de prix utilisés et les gains souhaités.

Conclusion

8.6 Contributions

Pour réduire la congestion de l'espace aérien, il faudrait que le trafic soit mieux étalé dans l'espace et dans le temps. Des études ont montré qu'il est possible de trouver une affectation de routes et de créneaux de décollage qui favorise une meilleure répartition de la charge de travail entre les contrôleurs des différents secteurs aériens. Pour orienter le trafic et parvenir à cette cible, deux types de mesures peuvent être prises, une mesure arbitraire qui consiste à imposer aux compagnies aériennes les routes et les horaires de leurs vols, ou une mesure incitative qui passe par un processus de tarification.

Notre travail a été de construire un système de tarification de l'espace aérien, de mesurer son influence sur l'orientation du trafic et son efficacité sur la réduction de la congestion. Pour établir un système de tarification induisant une diminution de la congestion, nous avons examiné les principes d'affectation de trafic et de tarification développés en transport. Le mode de tarification retenu consiste à faire payer aux compagnies aériennes des taxes d'entrées dans les secteurs aériens, ces taxes étant modulables dans le temps. Ainsi, à la définition du plan de vol, la compagnie prend en compte les différents prix appliqués suivant la route et la période de décollage choisie et elle porte son choix sur une option qui répond le mieux à ses intérêts pratiques et financiers.

Pour parvenir à une tarification adéquate des secteurs aériens, la première étape a consisté à modéliser le processus de décision des compagnies aériennes en fonction des prix de secteurs. Le modèle adopté a été le modèle Logit, c'est un modèle probabiliste de choix discrets. Il suppose que les décisions des compagnies concernant leurs vols dépendent d'utilités associées à chaque option de route et de période de décollage. Chaque utilité est la somme d'un coût de route, d'un coût de retard et d'un prix d'achat d'option. Ce prix d'option est lui-même la somme des prix d'entrée dans les différents secteurs traversés par la route.

La première étape de modélisation a permis la construction d'une procédure de simulation de trafic et a conduit à la définition de deux problèmes :

- Un problème d'identification pour estimer les différents paramètres du modèle en s'appuyant sur des statistiques d'observation du trafic.
 - Un problème de calcul de prix de secteurs pour orienter les décisions des compagnies vers la cible.
-

Ces deux problèmes ont été formulés comme des problèmes de minimisation d'écart quadratique. Nous avons dressé un bilan des méthodes d'optimisation existantes pour sélectionner celles qui sont les plus appropriées aux problèmes posés.

Pour l'identification des paramètres, il s'agit de minimiser l'écart, pour chaque option, entre un nombre moyen de vols observés et un nombre de vols calculés à partir du modèle. Une structure pour les utilités du modèle permettant de réduire le nombre de paramètres a été proposée. Sur cette base, une méthode de recuit simulé permet de résoudre le problème d'optimisation et, dans la mesure où le nombre de jours observés est suffisamment grand, d'obtenir des valeurs de paramètres proches des valeurs réelles. De plus, une analyse de la sensibilité des prix et de la réduction de la congestion aux erreurs d'estimation a été réalisée à l'aide des programmes de simulation et de calcul de prix.

Pour fixer des prix de secteurs, il s'agit de minimiser l'écart entre un nombre de vols définis par une cible et un nombre de vols issus du modèle.

Dans un premier temps, nous avons établi des prix par secteur et par période indépendamment les uns des autres. Pour ce faire, la méthode du gradient et la méthode du recuit simulé ont été adaptées au calcul des prix et enrichies par des procédés visant à améliorer leurs performances au niveau de la vitesse de convergence (deuxième et troisième version de l'algorithme du recuit simulé). Les résultats obtenus sur trois scénarios de trafic ont donné l'avantage aux versions 2 et 3 du recuit simulé qui fournissent des prix pour lesquels la distance à la cible est fortement réduite. Ceci indique qu'il y a possibilité de réguler partiellement et non totalement le flux de trafic par les prix.

Dans un deuxième temps, nous avons rendu le système de tarification plus simple, en limitant le nombre de valeurs de prix. Pour trouver un ensemble de valeurs de prix et affecter un niveau de prix à chaque couple (secteur, période), trois approches ont été envisagées. Les méthodes stochastiques telles que le recuit simulé et la méthode Tabou se sont révélées être les plus efficaces pour traiter le problème. Mais on a vu qu'il est plus difficile d'orienter le trafic en ajoutant de telles contraintes sur les prix.

Enfin, pour évaluer les impacts du système de tarification sur la congestion aérienne, nous avons construit deux indicateurs de congestion qui concernent le nombre de dépassements de capacité dans les secteurs aériens et leurs amplitudes. Nous avons intégré le calcul de ces deux indicateurs pour mesurer l'état de congestion de l'espace aérien. En comparant les mesures obtenues pour deux scénarios de trafic, on a constaté que la mise en application du système de tarification dynamique des secteurs aériens permettrait de réduire en grande partie les problèmes de congestion sans pour toutefois les éliminer.

Ce système pourrait se substituer au système actuel de redevances aériennes à condition de respecter deux conditions essentielles. La première, déjà prise en compte, consiste à fixer un prix de secteur maximal pour que les prix d'achat des options ne représentent pas une trop grande part des coûts de vol. La deuxième condition repose sur l'équilibre entre les recettes dégagées par les redevances actuelles et celles du nouveau système.

8.7 Perspectives

La recherche d'une politique de tarification pour la réduction de la congestion en transport aérien est un domaine nouveau et de nombreuses voies peuvent être explorées. En ce qui concerne l'approche proposée dans cette thèse, les efforts doivent se poursuivre dans plusieurs directions.

Au niveau de la modélisation, il faudrait pouvoir intégrer des contraintes opérationnelles plus spécifiques telles que le respect des connexions entre les vols. Les coûts de routes pourraient inclure des coûts de congestion correspondant aux retards imposés aux avions en route, à cause d'une congestion résiduelle dans certains secteurs. Le modèle devrait aussi prendre en compte les vols qui ne suivent pas de calendriers horaires comme les vols charters.

Le problème d'identification des paramètres du modèle nécessite des améliorations autant dans sa formulation que dans sa résolution. Il reste à préciser, dans les cas réels, les conséquences d'une identification imparfaite des paramètres sur la tarification.

En examinant le contexte opérationnel, on remarque que les algorithmes développés pour l'optimisation des prix de secteurs ont besoin d'adaptation pour envisager leur utilisation sur le réseau aérien réel. En effet, les temps d'exécution, notamment pour la tarification par niveau, sont déjà importants pour un scénario de trafic incluant seulement 433 vols (contre 7000 vols enregistrés en moyenne par jour sur le territoire français). Une idée serait de décomposer le problème en plusieurs sous problèmes en découpant l'horizon de temps et en travaillant avec une fenêtre temporelle glissante.

Pour mesurer les effets de la tarification sur la congestion, la métrique utilisée est très simple, elle est seulement liée au nombre d'avions dans le secteur, et au nombre d'avions entrant et sortant. Il est tout à fait envisageable de la modifier pour tenir compte des conflits aériens potentiels. En disposant d'un meilleur modèle de congestion, il serait intéressant d'optimiser les prix de secteurs pour minimiser directement la congestion sans passer par l'intermédiaire d'une cible.

Jusqu'à présent, les résultats obtenus concernent des scénarios de trafic avec une structure de réseau simplifiée et les cibles sont construites de manière ad hoc. Il faudrait maintenant travailler avec des données réelles de trafic et des cibles issues d'un processus d'optimisation pour savoir jusqu'à quel point une tarification dynamique des secteurs aériens permet de réduire la congestion.

Annexe A

Modèles probabilistes de choix discrets

A.1 Introduction

Depuis une vingtaine d'année, les modèles de choix discrets jouent un rôle important dans la prédiction du comportement pour les choix individuels. Ces modèles ont révélé leur intérêt dans plusieurs domaines tels que le marketing, la psychologie comportementale, et les études sur le transport. En transport, ils se présentent comme des outils d'analyse de la demande. Ils caractérisent le processus de décision portant sur le choix d'une destination, d'un mode de transport, d'une heure de départ, d'une route, etc. La base théorique à tous ces modèles repose sur une quantité appelé utilité qui exprime la préférence de l'individu. Les différentes parties de cette annexe sont inspirées des travaux de Ben-Akiva et Bierlaire [AB99].

A.2 Principe général

Dans les modèles de choix discrets, le preneur de décisions est supposé être un individu (une seule personne ou un groupe de personnes, dans ce dernier cas, les décisions internes au groupe sont ignorées, seule la décision du groupe compte). L'individu est confronté à un choix parmi un ensemble fini d'alternatives. Chaque alternative de choix est caractérisée par un ensemble d'attributs. Il s'agit, par exemple pour le choix d'une route, du temps de parcours, ou d'une fonction relative à ce temps de parcours. L'individu examine les différentes options qui s'offrent à lui et prend une décision. Dans les modèles de choix discrets, le processus de décision est basé sur la théorie de l'utilité : une valeur de préférence (utilité) est associée à chaque alternative et l'individu sélectionne l'option avec la plus forte utilité. Cette vision du processus de décision est trop restrictive. Pour prendre en compte la complexité du comportement humain, les modèles doivent inclure une dimension probabiliste. Selon les hypothèses faites sur le processus de décision, on distingue deux familles de modèle : certains modèles considèrent que la règle de décision est probabiliste, d'autres considèrent des règles de décision déterministes et l'incertitude repose sur l'incapacité de

l'individu à avoir une connaissance complète du problème. L'utilité est alors modélisée par une variable aléatoire reflétant les incertitudes liées aux caractéristiques des alternatives. Ces modèles intégrant des utilités aléatoires sont les plus répandus dans le domaine du transport. Mathématiquement, l'utilité que l'individu i associe à l'alternative a s'écrit :

$$U_a^i = V_a^i + \varepsilon_a^i \quad (\text{A.1})$$

où V_a^i désigne la partie déterministe de l'utilité et ε_a^i le terme stochastique. La probabilité que l'alternative a soit choisie par l'individu i parmi un ensemble C d'alternatives est :

$$P_C^i(a) = P[U_a^i = \max_{b \in C} U_b^i] \quad (\text{A.2})$$

Suivant la densité de probabilité choisie pour les variables aléatoires ε_a , et les hypothèses faites sur la partie déterministe, on distingue plusieurs familles de modèles.

A.2.1 Le terme aléatoire de l'utilité

Pour introduire les principaux modèles obtenus à partir de lois de distribution différentes, on s'intéresse au choix binaire. La probabilité qu'un individu donné choisisse l'alternative (1) parmi deux alternatives (1) et (2) est :

$$\begin{aligned} P_{(1,2)}(1) &= P[U_1 \geq U_2] \\ &= P[V_1 + \varepsilon_1 \geq V_2 + \varepsilon_2] \\ &= P[V_1 - V_2 \geq \varepsilon_2 - \varepsilon_1] \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Le modèle linéaire

Les variables aléatoires suivent une densité de probabilité uniforme f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2L} & \text{si } x \in [-L, L] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

avec $L \in \mathfrak{R}_+$ une constante arbitraire. Dans ce cas, la probabilité de choisir l'alternative (1) est donnée par :

$$P_{(1,2)}(1) = \begin{cases} 0 & \text{si } V_1 - V_2 < -L \\ \frac{V_1 - V_2 + L}{2L} & \text{si } -L \leq V_1 - V_2 \leq L \\ 1 & \text{si } V_1 - V_2 > L \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Le modèle linéaire pose problème pour des applications réelles car il ne tient pas compte des valeurs extrêmes d'utilités.

Le modèle Probit (Normal Probability Unit)

Les variables aléatoires sont normalement distribuées. La densité de probabilité f est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma} \right)^2 \quad (\text{A.6})$$

Par exemple, pour le modèle de choix binaire, si ε_1 et ε_2 sont normalement distribuées, de moyenne nulle, de variances respectives σ_1^2 et σ_2^2 , et de covariance σ_{12} , la probabilité de choisir l'alternative 1 s'écrit :

$$P_{(1,2)}(1) = \int_{-\infty}^{V_1 - V_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} dx \quad (\text{A.7})$$

avec $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}$ la variance de $(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$. Cette fonction de probabilité n'a pas de forme analytique explicite. A cause de sa complexité, très peu d'applications utilisant le modèle Probit ont été développées.

Le modèle Logit (Logistic Probability Unit)

Le modèle Logit est le modèle le plus largement utilisé en pratique. Les variables aléatoires ε_a sont des variables de Gumbel indépendantes et identiquement distribuées. La densité de Gumbel est définie par :

$$f(x) = \mu e^{-\mu(x-\eta)} e^{-e^{-\mu(x-\eta)}} \quad (\text{A.8})$$

avec $\eta \in \Re$ un paramètre de localisation et $\mu \in \Re$, $\mu > 0$, un paramètre d'échelle. La moyenne de la distribution de Gumbel est :

$$\eta + \frac{\gamma}{\mu} \quad (\text{A.9})$$

où $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} - \ln(n) \approx 0.5772$ est la constante d'Euler. La variance est :

$$\sigma^2 = \frac{\pi^2}{6\mu^2} \quad (\text{A.10})$$

La distribution de Gumbel est une approximation de la loi Normale. Si ε_1 (resp. ε_2) est une variable de Gumbel de paramètres η_1 (resp. η_2) et μ , $\varepsilon = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$ suit une loi de distribution "logistique" de paramètres $(\eta_2 - \eta_1)$ et μ . La densité de probabilité g de la distribution "logistique" (avec $\eta_1 = \eta_2 = 0$) est :

$$g(x) = \frac{\mu e^{-\mu x}}{(e^{-\mu x} + 1)^2} \quad (\text{A.11})$$

avec $\mu \in \Re$, $\mu > 0$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} P_{(1,2)}(1) &= \int_{-\infty}^{V_1 - V_2} g(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{e^{-\mu} + 1} \right]_{-\infty}^{V_1 - V_2} \\ &= \frac{1}{e^{-\mu(V_1 - V_2)} + 1} \\ &= \frac{e^{\mu V_1}}{e^{\mu V_1} + e^{\mu V_2}} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Le modèle Logit pour un choix non binaire, le modèle Logit emboîté sont deux modèles dérivés du modèle Logit. Une description de ces modèles est donné par la suite.

A.2.2 Le terme déterministe de l'utilité

L'utilité associée à chaque alternative est une fonction des attributs de cette alternative et du preneur de décisions. Ainsi, la part déterministe de l'utilité que l'individu i associe à l'alternative a est :

$$V_a^i = V_a^i(x_a^i) \quad (\text{A.13})$$

où x_a^i est un vecteur contenant tous les attributs relatifs à l'individu i pour l'alternative a . En général, l'utilité est une fonction linéaire des attributs :

$$V_a^i(x_a^i) = \beta_1 x_a^i(1) + \beta_2 x_a^i(2) + \dots + \beta_n x_a^i(n) = \sum_{k=1}^n \beta_k x_a^i(k) \quad (\text{A.14})$$

où $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ sont des paramètres à estimer.

A.3 Le modèle Logit pour un choix non binaire

Le modèle Logit est construit à partir de l'hypothèse que les termes aléatoires des utilités sont des variables de Gumbel indépendantes, identiquement distribuées, de paramètre de localisation nul et de paramètre d'échelle μ . Introduit dans le contexte d'un choix binaire, il peut être étendu au choix parmi plusieurs alternatives. Dans ce cas, on parle de modèle Logit Multinominal. Pour plus de détails, il est préférable de se référer aux travaux de Ben-Akiva et Lerman [AL85]. La probabilité qu'un individu donné choisisse l'alternative i parmi un ensemble C d'alternatives est :

$$P_C(i) = \frac{e^{\mu V_i}}{\sum_{k \in C} e^{\mu V_k}} \quad (\text{A.15})$$

Ce modèle possède une propriété qui peut se formuler ainsi : le quotient des probabilités de deux alternatives est indépendant de l'ensemble d'alternatives. Par exemple, pour deux ensembles d'alternatives S et Z tels que $S \subset Z \subset C$, et pour deux alternatives a_1 et a_2 dans S , on a :

$$\frac{P_S(a_1)}{P_S(a_2)} = \frac{P_Z(a_1)}{P_Z(a_2)} \quad (\text{A.16})$$

Pour certaines applications, cette propriété peut poser problème. Nous prenons l'exemple d'un choix entre 3 routes $\{1, 2a, 2b\}$ (voir figure A.1) pour illustrer les limitations du modèle Logit. L'utilité associée à chaque route correspond à l'opposée des temps de parcours de chaque route : $V_1 = V_{2a} = V_{2b} = -T$, le temps de parcours sur les portions de route a et b est égal à δ , supposé négligeable par rapport à T . Pour cet exemple,

$$P_{\{1, 2a, 2b\}}(1) = P_{\{1, 2a, 2b\}}(2a) = P_{\{1, 2a, 2b\}}(2b) = \frac{e^{-\mu T}}{\sum_{k \in \{1, 2a, 2b\}} e^{-\mu T}} = \frac{1}{3} \quad (\text{A.17})$$

Ce résultat est contraire à l'intuition. Pour des valeurs de δ suffisamment petites, on s'attend à des probabilités proches de 50% (1), 25% (2a) et 25% (2b). En fait, les alternatives 2a et 2b sont trop similaires et l'hypothèse d'indépendance des termes aléatoires des utilités n'est plus valide. Le modèle Logit par emboîtement ou Nested Logit permet de tenir compte des corrélations entre les alternatives.

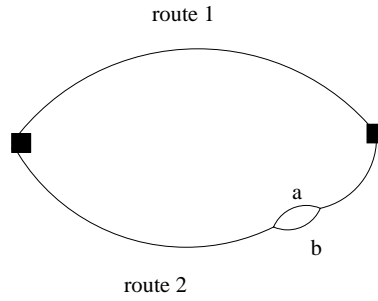


FIG. A.1 – Exemple de choix entre 3 routes

A.4 Le modèle Logit emboîté

Ce modèle issu du modèle Logit est basé sur la partition de C en m sous-ensembles C_k tels que :

$$C = \bigcup_{k=1}^m C_k \quad (\text{A.18})$$

et $C_k \cap C_l = \emptyset \quad \forall k \neq l$.

La fonction d'utilité associée à chaque alternative est composée d'un terme spécifique à l'alternative et d'un terme relatif au sous-ensemble d'appartenance. Si $i \in C_k$,

$$U_i = V_i + \varepsilon_i + V_{C_k} + \varepsilon_{C_k} \quad (\text{A.19})$$

Les termes ε_i et ε_{C_k} sont supposés indépendants. Comme pour le modèle Logit Multinomial, les variables ε_i sont des variables de Gumbel indépendantes et identiquement distribuées de paramètre d'échelle σ_k . Les variables ε_{C_k} suivent une loi de distribution telle que la variable $\max_{j \in C_k} U_j$ est une variable de Gumbel de paramètre d'échelle μ . Une utilité dite "composite" est associée à chaque sous-ensemble, elle est définie pour le sous-ensemble C_k par :

$$V'_{C_k} = V_{C_k} + \frac{1}{\sigma_k} \ln \left(\sum_{j \in C_k} e^{\sigma_k V_j} \right) \quad (\text{A.20})$$

où V_{C_k} est la composante de l'utilité commune à toutes les alternatives du sous-ensemble C_k . Le modèle probabiliste est défini par :

$$P_C(i) = P_C(C_k) P_{C_k}(i) \quad (\text{A.21})$$

$P_C(i)$ est la probabilité que l'alternative $i \in C_k$ soit choisie. $P_C(C_k)$ désigne la probabilité de choisir une alternative de l'ensemble C_k et $P_{C_k}(i)$ la probabilité que l'alternative i soit choisie sachant que le sous-ensemble C_k a été sélectionné.

$$P_C(C_k) = \frac{e^{\mu V'_{C_k}}}{\sum_{l=1}^m e^{\mu V'_{C_l}}} \quad (\text{A.22})$$

$$P_{C_k}(i) = \frac{e^{\sigma_k V_i}}{\sum_{j \in C_k} e^{\sigma_k V_j}} \quad (\text{A.23})$$

Les paramètres μ et σ_k reflètent la corrélation entre les alternatives d'un même sous-ensemble. Si $i, j \in C_k$,

$$\frac{\mu}{\sigma_k} = \sqrt{(1 - \text{corr}(U_i, U_j))} \quad (\text{A.24})$$

Par conséquent : $0 \leq \frac{\mu}{\sigma_k} \leq 1$

Dans le modèle, seul le quotient $\frac{\mu}{\sigma_k}$ est significatif. Il n'est pas possible d'identifier μ et σ_k séparément. Dans les applications, il est commode de fixer l'un ou l'autre des paramètres à une valeur arbitraire. Nous revenons sur l'exemple présenté en figure A.1 pour illustrer l'utilisation du modèle Logit emboîté. L'ensemble de choix $\{1, 2a, 2b\}$ est divisé en deux sous-ensembles : $C_1 = \{1\}$ et $C_2 = \{2a, 2b\}$. Les composantes déterministes des utilités sont : $V_{C_1} = -T$, $V_1 = 0$, $V_{C_2} = -T + \delta$ et $V_{2a} = V_{2b} = -\delta$. Pour les sous-ensembles, les utilités composites sont : $V'_{C_1} = V_{C_1}$ et $V'_{C_2} = V_{C_2} + \frac{1}{\sigma_2} \ln(e^{\sigma_2 V_{2a}} + e^{\sigma_2 V_{2b}}) = -T + \delta + \frac{1}{\sigma_2} \ln(2e^{-\sigma_2 \delta}) = -T + \frac{1}{\sigma_2} \ln 2$. Les probabilités de choisir l'un des sous-ensembles sont :

$$P_C(C_1) = \frac{e^{-T}}{e^{-T} + e^{(-T + \frac{\ln 2}{\sigma_2})}} = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{\sigma_2}}} \quad (\text{A.25})$$

et

$$P_C(C_2) = 1 - P_C(C_1) = \frac{2^{\frac{1}{\sigma_2}}}{1 + 2^{\frac{1}{\sigma_2}}} \quad (\text{A.26})$$

où la valeur de μ est fixée à 1. Les probabilités de choix de chacune des routes sont :

$$P_C(1) = P_C(C_1)P_{C_1}(1) = P_C(C_1) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{\sigma_2}}} \quad (\text{A.27})$$

et

$$P_C(2a) = P_C(C_2)P_{C_2}(2a) = \frac{e^{-\sigma_2 \delta}}{e^{-\sigma_2 \delta} + e^{-\sigma_2 \delta}} P_C(C_2) = \frac{1}{2} \frac{2^{\frac{1}{\sigma_2}}}{1 + 2^{\frac{1}{\sigma_2}}} = P_C(2b) \quad (\text{A.28})$$

Les probabilités $P_C(1), P_C(2a)$ et $P_C(2b)$ sont des fonctions de $\frac{1}{\sigma_2}$ avec $0 \leq \frac{1}{\sigma_2} \leq 1$. Pour $\frac{1}{\sigma_2} = 1$, on retrouve les mêmes résultats qu'avec le modèle Logit Multinomial. Quand on fait tendre σ_2 vers l'infini, la probabilité de choisir l'un ou l'autre des sous-ensembles est égale à $1/2$. Le modèle devient un modèle de choix binaire où les petits détours par a et b sont ignorés dans le processus de décision.

Le modèle Logit emboîté peut être facilement étendu si les sous-ensembles sont à leur tour divisés en sous-ensembles et ainsi de suite. Dans ce cas, la structure complexe du modèle est représentée sous forme d'un arbre orienté. S'il est impossible de séparer les alternatives en sous-ensembles distincts non corrélés, le modèle Logit emboîté est inapproprié. D'autres modèles prenant en compte les corrélations entre les alternatives ont été développés. Par exemple, Vovsha [Vov97] a proposé un modèle d'emboîtements croisés (cross-nested) dans lequel les alternatives peuvent appartenir à plusieurs sous-ensembles. En fait, ce modèle, tout comme les modèles Logit et Logit emboîté sont des cas particuliers d'un modèle général présenté par McFadden [McF78] et appelé modèle "Valeur extrême généralisée" (VEG) .

A.5 Le modèle : Valeur extrême généralisée

Dans ce modèle issu de la théorie de l'utilité, la probabilité de choisir l'alternative i dans un ensemble C de n alternatives est donnée par :

$$P_C(i) = \frac{e^{V_i} \frac{\partial G}{\partial x_i}(e^{V_1}, \dots, e^{V_n})}{\mu G(e^{V_1}, \dots, e^{V_n})} \quad (\text{A.29})$$

où G est une fonction différentiable de \mathfrak{R}_+^n dans \mathfrak{R} avec les propriétés suivantes :

1. $G(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathfrak{R}_+^n$
2. G est homogène de degré $\mu > 0$, c'est-à-dire $G(\alpha x) = \alpha^\mu G(x)$ pour tout $x \in \mathfrak{R}_+^n$, et $\alpha \in \mathfrak{R}$
3. $\lim_{x_i \rightarrow +\infty} G(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = +\infty$ pour tout i ($1 \leq i \leq n$)
4. Les dérivées partielles distinctes d'ordre k sont positives si k est impair, négatives sinon. $\forall i_1, \dots, i_k$ distincts $\in \{1, \dots, n\}$,

$$(-1)^k \frac{\partial^k G}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathfrak{R}_+^n \quad (\text{A.30})$$

Le modèle Logit est obtenu avec :

$$G(x) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^\mu \quad (\text{A.31})$$

Le modèle Logit emboîté est un cas particulier du modèle (VEG) pour :

$$G(x) = \sum_k \left(\sum_{i \in C_k} x_i^{\sigma_k} \right)^{\frac{\mu}{\sigma_k}} \quad (\text{A.32})$$

Le modèle VEG offre un cadre théorique au développement de nouveaux modèles de choix discrets.

A.6 Application aux choix de routes et d'heures de départ

En transport, les modèles de choix sont utilisés pour prédire la répartition du trafic sur le réseau. Il peut s'agir d'une répartition de trafic dans l'espace ou dans le temps. Le problème de choix d'une route et d'une heure de départ peut être traité séparément ou conjointement.

A.6.1 Problème de choix de routes

Pour construire un modèle de choix de routes, la première étape consiste à définir l'ensemble de routes possibles. Dans un réseau de transport routier, on peut imaginer qu'un utilisateur puisse emprunter n'importe quel chemin reliant l'origine à sa destination. Dans ce cas, le

nombre de routes possibles est calculable mais très élevé. En général, seul un ensemble restreint de routes est retenu. Les routes sélectionnées sont les routes les plus courtes et préférées par les utilisateurs. Dans une seconde étape, il faut choisir les attributs à inclure dans la fonction d'utilité associée aux routes. Les attributs généralement utilisés sont :

- Le temps de parcours
- La longueur de la route
- Les coûts de péage
- Les attributs liés aux conditions de trafic (nombre de feux de croisement, nombre de virages en trafic routier, type de la route, niveau de congestion,...)

Pour obtenir une formulation homogène de la fonction d'utilité, il est commode d'évaluer les attributs en terme de coût (coût d'une minute de trajet, coût du kilomètre parcouru). Si l'utilité est supposée être déterministe, le problème de maximisation de l'utilité est résolu par un algorithme de plus courts chemins dans un graphe (algorithme de Dijkstra). Dans le cas contraire, les modèles stochastiques (modèle Probit, modèle Logit et dérivés) sont utilisés.

A.6.2 Problème de choix d'heures de départ

La modélisation du choix d'une heure de départ apparaît dans les problèmes d'affectation dynamique du trafic. Dans la construction d'un tel modèle, la définition de l'ensemble de choix s'avère difficile. Premièrement, le temps doit être discrétisé. Il ne s'agit pas d'un choix d'une date précise mais plutôt d'un intervalle de temps (par exemple, départ entre 8h et 8h15). Il faut réaliser un compromis entre la finesse de la discrétisation et la complexité du modèle. Tout dépend de l'application traitée. Par exemple, pour des trajets de longue durée, le raffinement au quart d'heure est suffisant. L'ensemble de choix est donc constitué d'un nombre fini de créneaux horaires. Les créneaux horaires de départ acceptables sont en général dépendant de l'heure d'arrivée souhaitée et de la longueur des trajets. Les attributs associés à un créneau horaire sont généralement le temps de parcours et le retard par rapport à une heure préférée d'arrivée. Small [Sma82] et Cascetta [CNB92] utilisent un modèle Logit Multinomial pour le choix d'heures de départ. Ben-Akiva et al [BAPK86] propose un modèle Logit emboîté pour traduire le processus de choix simultané d'une route et d'une date de départ, l'utilité associée à ce choix est une fonction linéaire du temps de parcours, du montant du péage prélevé et du retard (exprimé comme la différence entre l'heure d'arrivée réelle et celle désirée).

A.7 Conclusion

Dans cette annexe, les principaux aspects de la théorie des choix discrets ont été présentés. Les modèles probabilistes de choix discrets et plus particulièrement, les modèles intégrant des utilités aléatoires se révèlent très intéressants pour décrire des processus de choix. Ils sont largement exploités, dans le domaine du transport routier, notamment pour les problèmes d'affectation dynamique et stochastique, où les utilisateurs sont confrontés à un choix de routes et d'heure de départ. Parmi ces modèles, le modèle Logit Multinomial

présente l'avantage d'être facile à construire et à utiliser. Adapté pour les problèmes de transport, c'est celui que nous avons retenu pour modéliser le choix de routes et de périodes de décollage par les compagnies aériennes en fonction des prix d'entrée de secteurs.

Annexe B

Modèle de tarification pour la congestion aéroportuaire (Daniel)

Dans cette annexe, les travaux de Daniel [Dan97], concernant le calcul d'une taxe de congestion, sont présentés de manière synthétique. Le modèle utilisé reflète plutôt une situation de hub : les avions ont tous le même horaire préférentiel d'arrivée et de départ à l'intérieur d'une courte période pendant laquelle s'effectuent toutes les correspondances. Ce modèle s'inspire des travaux de Vickrey [Vic69] étendus par Arnott, de Palma et Lindsey [APL94].

B.1 Formulation mathématique

On considère que sur une certaine période $[t_q, t'_q]$, N avions doivent atterrir. Supposons qu'au plus s avions peuvent atterrir par unité de temps. Si le taux d'arrivée des avions dépasse le taux de service, les avions en attente d'atterrir forment une queue. Un avion qui rejoint la queue à la date t a une durée totale d'attente en queue égale à $T(t)$.

Ce temps d'attente est égal à :

$$T(t) = D(t)/s \tag{B.1}$$

où $D(t)$ est le nombre d'avions en queue. Notons t^* l'heure préférée d'atterrissage et \tilde{t} la date à laquelle l'avion rejoint la queue pour atterrir à t^* . On a :

$$\tilde{t} + T(\tilde{t}) = t^* \tag{B.2}$$

Si un avion arrive en queue à la date $t < \tilde{t}$, il est en avance de $t^* - t - T(t)$ par rapport à l'heure préférée d'atterrissage. Si un avion arrive en queue à la date $t > \tilde{t}$, il est en retard de $t + T(t) - t^*$ par rapport à l'heure préférée d'arrivée. Le coût d'atterrissage comprend l'attente dans la queue et le coût d'un atterrissage prématuré ou tardif par rapport à l'horaire désiré. Le coût total d'atterrissage est égal à C :

$$C = \alpha(\text{temps de l'attente en queue}) + \beta(\text{temps d'avance}) + \gamma(\text{temps de retard}) \tag{B.3}$$

où α, β, γ sont des coefficients réels. Une arrivée en avance est supposée être moins coûteuse que l'attente en queue : $\alpha > \beta$.

Les avions qui arrivent entre t_q et \tilde{t} subissent de l'attente et arrivent en avance (Rappel : t_q désigne la date à laquelle le premier avion arrive pour atterrir et t_q' la date d'arrivée du dernier avion). Leur coût d'atterrissage est égal à :

$$\alpha T(t) + \beta(t^* - t - T(t)) \quad (\text{B.4})$$

Les avions arrivant en queue à la date \tilde{t} subissent de l'attente mais arrivent à l'heure. Leur coût d'atterrissage est égal à :

$$\alpha T(\tilde{t}) \quad (\text{B.5})$$

Les avions qui arrivent entre \tilde{t} et t_q' subissent de l'attente et arrivent en retard. Leur coût d'atterrissage est égal à :

$$\alpha T(t) + \gamma(t + T(t) - t^*) \quad (\text{B.6})$$

A l'équilibre, tous les avions subissent le même coût d'atterrissage. On a donc les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \alpha T(t) + \beta(t^* - t - T(t)) = \alpha T(\tilde{t}) & \forall t_q \leq t < \tilde{t} \\ \alpha T(t) + \gamma(t + T(t) - t^*) = \alpha T(\tilde{t}) & \forall \tilde{t} < t \leq t_q' \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Pour $t = t_q$, $T(t_q) = 0$, on a :

$$\beta(t^* - t_q) = \alpha(t^* - \tilde{t}) \quad (\text{B.8})$$

Pour $t = t_q'$, $T(t_q') = 0$, on a :

$$\gamma(t_q' - t^*) = \alpha(t^* - \tilde{t}) \quad (\text{B.9})$$

En admettant que les avions atterrissent les uns à la suite des autres sans interruption, la relation $t_q' = t_q + \frac{N}{s}$ est satisfaite. On en déduit :

$$t_q = t^* - \frac{\gamma}{\gamma + \beta} \frac{N}{s} \quad (\text{B.10})$$

$$t_q' = t^* + \frac{\beta}{\gamma + \beta} \frac{N}{s} \quad (\text{B.11})$$

$$\tilde{t} = t^* - \frac{\beta\gamma}{\alpha(\gamma + \beta)} \frac{N}{s} \quad (\text{B.12})$$

B.2 Calcul des taxes de congestion

A partir des relations précédentes, il est possible de construire un graphique B.1 représentant les arrivées et les atterrissages en fonction du temps. Comme tous les avions subissent le même coût d'atterrissage, le coût total, en l'absence de péage, est :

$$TTC = N\alpha T(\tilde{t}) = \alpha(t^* - \tilde{t})N = \frac{\beta\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N^2}{s} \quad (\text{B.13})$$

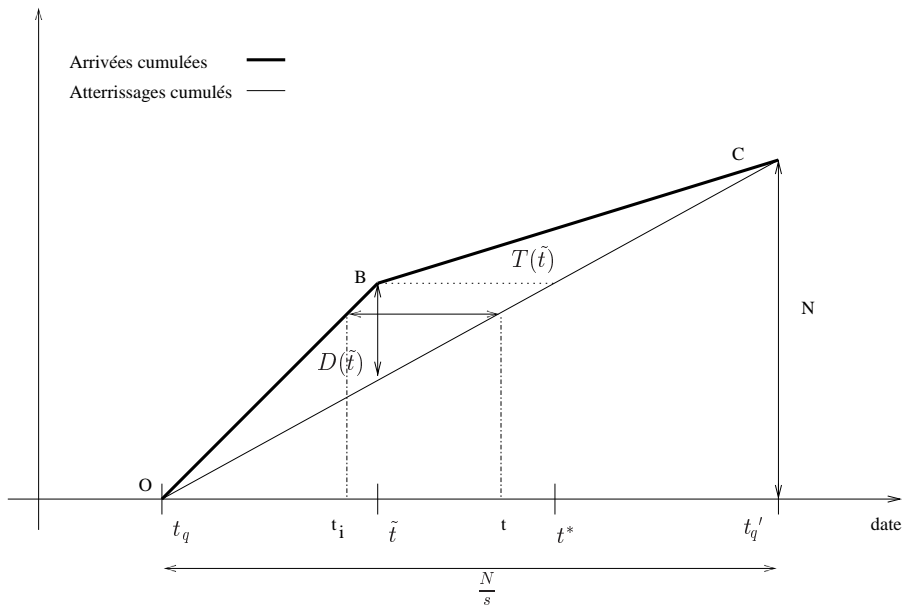


FIG. B.1 – Arrivées et atterrissages cumulés

Du point de vue social, le coût d'attente des avions souhaitant atterrir est une “perte” qui peut être recouverte en imposant une taxe modulable dans le temps égale au coût d'attente que l'avion aurait subi en l'absence de péage. Avec une telle structure de péage, le taux d'arrivée égalise le taux d'atterrissage. Il n'y a plus de file d'attente. Il suffit de calculer le montant de la taxe ρ pour un atterrissage à la date t . En l'absence de péage, un avion qui atterrit avant t_q ou après t_q' n'a pas subi d'attente donc :

$$\begin{aligned} \rho(t) &= 0 & t < t_q \\ \rho(t) &= 0 & t > t_q' \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

En l'absence de péage, un avion qui arrive à la date t_i et atterrit à la date t comprise entre t_q et t_q' subit un coût d'attente égal à :

$$\alpha T(t_i) = \alpha(t - t_i) \quad (\text{B.15})$$

On déduit graphiquement l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{t - t_i}{t^* - \tilde{t}} &= \frac{t - t_q}{t^* - t_q} \\ t - t_i &= \frac{(t - t^*) + (t^* - t_q)}{t^* - t_q} \times (t^* - \tilde{t}) \\ T(t_i) &= \left[\frac{s(\gamma + \beta)}{\gamma N} \times (t - t^*) + 1 \right] \times \frac{\beta\gamma}{\alpha(\gamma + \beta)} \frac{N}{s} \\ T(t_i) &= \frac{\beta\gamma}{\alpha(\gamma + \beta)} \frac{N}{s} + \frac{\beta}{\alpha}(t - t^*) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

On en déduit le montant de la taxe à appliquer :

$$\rho(t) = a - (t^* - t)\beta \quad t_q < t \leq t^* \quad (\text{B.17})$$

avec

$$a = \frac{\beta\gamma}{(\beta + \gamma)} \frac{N}{s} \quad (\text{B.18})$$

De la même manière, on peut calculer le montant de la taxe pour un avion qui atterrit à la date t comprise entre t^* et $t_{q'}$:

$$\rho(t) = a - (t - t^*)\gamma \quad t^* \leq t < t_{q'} \quad (\text{B.19})$$

Annexe C

Modèle de tarification pour la congestion aéroportuaire (Jansson)

Jansson [Jan98] examine le principe de tarification au coût marginal pour l'appliquer aux problèmes de congestion aéroportuaire. Il modélise l'atterrissage (ou le décollage) des avions sur une piste d'aéroport par un modèle de file d'attente. Cette annexe synthétise le travail de Jansson.

C.1 Formulation mathématique

La notation usuelle pour désigner un modèle de file d'attente est : $A/B/m$.

- A indique la distribution de probabilité utilisée pour décrire l'arrivée (ou le départ) des avions sur l'aéroport
- B la distribution de probabilité utilisée pour décrire le temps de service (le temps d'atterrissage ou de décollage)
- m le nombre de serveurs disponibles (ici, le nombre de pistes libres)

Les deux modèles traités utilisent une loi de Poisson pour la loi d'arrivée. Le modèle d'arrivée poissonnien traduit relativement bien l'arrivée des avions sur un aéroport durant les périodes où la demande moyenne est assez constante et élevée. Dans le premier modèle, la loi de service est une loi de Poisson, dans le second, elle est quelconque. On suppose qu'une seule piste est utilisée ($m = 1$). Pour ces deux modèles, différentes classes d'utilisateurs sont distinguées (avion privé, petit avion commercial, avion de plus grosse taille). Chaque type i d'utilisateur a un taux d'arrivée λ_i avec $\lambda = \sum_i \lambda_i$, et un taux de service égal à μ_i avec $\frac{1}{\mu} = \sum_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda} \frac{1}{\mu_i} \right)$. Le coût d'attente en queue par unité de temps d'un utilisateur de type i est égal à c_i . Le coût moyen d'attente par unité de temps et par utilisateur est égal à c avec :

$$c = \sum_i \frac{\lambda_i}{\lambda} c_i \tag{C.1}$$

Le coût total d'attente par unité de temps vaut donc :

$$C = c\overline{L}_q \quad (\text{C.2})$$

où \overline{L}_q représente l'espérance de longueur de queue. Jansson utilise la loi de Little [Lit61] pour écrire :

$$C = c\lambda\overline{W}_q \quad (\text{C.3})$$

où \overline{W}_q est l'espérance du temps d'attente en queue. Pour le modèle de queue M/M/1,

$$\overline{W}_q = \frac{\lambda/\mu}{\mu - \lambda} \quad (\text{C.4})$$

C.2 Calcul des taxes de congestion

Le coût marginal social pour un utilisateur additionnel de type i est égal à :

$$CMS(i) = \frac{dC}{d\lambda_i} = c_i\overline{W}_q + c\lambda\frac{d\overline{W}_q}{d\lambda_i} \quad (\text{C.5})$$

Pour le modèle de queue M/M/1,

$$\frac{d\overline{W}_q}{d\lambda_i} = \frac{\left(\frac{2\mu-\lambda}{\mu_i}\right) - \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}{(\mu - \lambda)^2} \quad (\text{C.6})$$

Le coût marginal social est la somme de deux termes, le premier correspond au coût marginal privé. Le coût marginal privé est en fait le coût d'attente existant ressenti par l'utilisateur additionnel. Le second terme correspond au coût supplémentaire qu'il impose aux autres utilisateurs. L'idée générale de la tarification au coût marginal consiste à faire payer une taxe à l'utilisateur égale à ce second terme. Mais l'introduction d'une taxe de congestion modifie la demande et présente donc des effets sur les taux d'arrivée. Il faut donc calculer la nouvelle taxe de congestion en tenant compte des modifications des taux d'arrivée et ainsi de suite jusqu'à ce qu'un équilibre s'installe. Si on connaît la fonction de demande pour chaque type d'utilisateur, le point d'équilibre peut être calculé directement. C'est le point d'intersection entre la courbe de demande inverse et la courbe du coût total représentées sur la figure(C.1). L'équilibre est unique. En effet, le coût total est la somme du coût de retard et de la taxe d'atterrissage. Ce coût augmente avec la demande. C'est une fonction croissante de la demande. Le nombre d'avions souhaitant atterrir sur l'aéroport diminue si les coûts d'atterrissage augmentent. La demande est une fonction décroissante du coût total. Si on note x_i , le coût d'atterrissage d'un avion de type i , son taux d'arrivée $\lambda_i(x_i)$ est fonction de ce coût. Le taux d'arrivée total s'écrit :

$$\lambda(x) = \sum_i \lambda_i(x_i) \quad (\text{C.7})$$

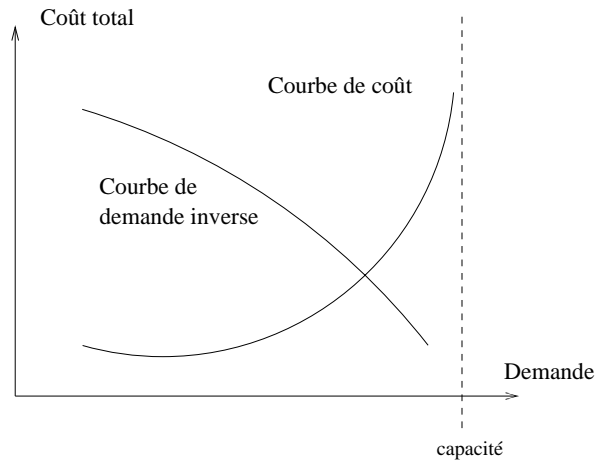


FIG. C.1 – Courbes de demande inverse et de coût

où $x = (x_1, x_2, \dots)^T$ représente le vecteur coût. Le point d'équilibre pour chaque type i d'utilisateur est déterminé à partir de l'équation :

$$\begin{aligned} x_i &= \text{Coût d'attente} + \text{Taxe de congestion} \\ x_i &= c_i \overline{W}_q(x) + \left(\sum_j c_j \lambda_j(x_j) \right) \frac{d\overline{W}_q(x)}{d\lambda_i(x_i)} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Pour le modèle de queue M/M/1, et s'il n'y a qu'un seul type d'utilisateur, la recherche d'équilibre correspond au calcul du point fixe x^* qui vérifie :

$$x = c \frac{\lambda(x)/\mu(x)}{\mu(x) - \lambda(x)} + \frac{c\lambda(x)}{(\mu(x) - \lambda(x))^2} \quad (\text{C.9})$$

La taxe d'atterrissage doit être égale à :

$$\frac{c\lambda(x^*)}{(\mu(x^*) - \lambda(x^*))^2} \quad (\text{C.10})$$

Jansson utilise cette approche pour calculer, sur des exemples simples, et pour les deux modèles de queue, les taxes de congestion aéroportuaires. Plus le taux de service d'un type d'avion est faible, plus la taxe de congestion appliquée est élevée. De cette manière, les avions, qui participent le plus à la congestion, sont les plus fortement taxés.

Annexe D

Principaux résultats de convergence du recuit simulé en optimisation discrète

D.1 Modélisation de l'algorithme

Le mécanisme du recuit simulé qui consiste à transformer la configuration courante par une configuration voisine est décrit au moyen de chaînes de Markov [AL93]. Une chaîne de Markov est définie à travers une matrice P de probabilité conditionnelle. $P_{ij}(k)$ est la probabilité de se trouver dans l'état j à l'itération k en étant dans l'état i à l'itération $k-1$. Dans le cas du recuit simulé, la probabilité $P_{ij}(k)$ traduit une probabilité de transition de la configuration i vers la configuration j à l'itération k . Si la probabilité de transition est indépendante de k , la chaîne de Markov est dite homogène, in-homogène dans le cas contraire. Les probabilités de transition pour l'algorithme du recuit simulé sont définies par :

$$\forall i, j \in X, \quad P_{ij}(k) = \begin{cases} G_{ij}(\theta_k)A_{ij}(\theta_k) & \text{si } i \neq j \\ 1 - \sum_{l \in X, l \neq i} G_{il}(\theta_k)A_{il}(\theta_k) & \text{si } i = j \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

où $G_{ij}(\theta_k)$ est la probabilité de générer l'état j à partir de l'état i à la température θ_k , et $A_{ij}(\theta_k)$ la probabilité d'accepter l'état j généré à partir de l'état i . $G(\theta_k)$ ainsi définie est appelé matrice de génération et $A(\theta_k)$ matrice d'acceptation. Le paramètre de contrôle θ décroît au cours de l'algorithme. Le schéma de décroissance conduit à deux formulations distinctes de l'algorithme :

- un algorithme homogène : l'algorithme est décrit par une séquence de chaînes de Markov homogènes. Chaque chaîne est générée à une température fixée de valeur θ et θ décroît entre chaque chaîne de Markov.
- un algorithme in-homogène : l'algorithme est décrit par une seule chaîne de Markov de longueur infinie. La valeur du paramètre de contrôle θ décroît par palier.

Sous certaines conditions, l'algorithme du recuit simulé converge en probabilité vers l'ensemble des solutions optimales. En d'autres termes, le recuit simulé trouve une solution

optimale avec la probabilité 1. Le résultat de convergence asymptotique s'écrit :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \text{Proba} \{x(k) \in X^*\} = 1 \quad (\text{D.2})$$

où $x(k)$ désigne la solution obtenue après k itérations et X^* l'ensemble des solutions optimales.

D.2 Modèle homogène

Pour l'algorithme homogène, ce résultat est vérifié si :

- chaque chaîne de Markov est de longueur infinie
- certaines conditions sur les matrices $A(\theta_l)$ et $G(\theta_l)$ sont satisfaites
- $\lim_{l \rightarrow +\infty} c_l = 0$

avec c_l valeur du paramètre de contrôle de la l^{ieme} chaîne de Markov.

Les conditions décrites ci-dessous forment un ensemble de conditions suffisantes de convergence asymptotique :

1. $\forall \theta > 0 \quad \forall i, j \in X, \quad \exists p \geq 1, \quad \exists l_0, l_1, \dots, l_p \in X$ avec $l_0 = i, l_p = j$,
et $G_{l_v l_{v+1}}(\theta) > 0 \quad v = 0, 1, \dots, p-1$
2. $\forall \theta > 0 \quad \forall i, j \in X, \quad G_{ij}(\theta) = G_{ji}(\theta)$
3. $\forall \theta > 0 \quad \forall i, j \in X \quad A_{ij}(\theta) = 1$ si $f(i) \geq f(j)$
 $A_{ij}(\theta) \in [0, 1[$ si $f(i) < f(j)$
4. $\forall \theta > 0 \quad \forall i, j, l \in X, \quad A_{ij}(\theta)A_{jl}(\theta)A_{li}(\theta) = A_{il}(\theta)A_{lj}(\theta)A_{ji}(\theta)$
5. $\forall i, j \in X$ avec $f(i) < f(j) : \lim_{\theta \downarrow 0} A_{ij}(\theta) = 0$

La condition (1) garantit que la chaîne de Markov est irréductible¹ apériodique² et donc qu'il existe une unique distribution stationnaire \vec{q} ³. Cette condition signifie que chaque solution peut être atteinte à partir de n'importe quelle autre solution en générant une séquence finie de solutions voisines. Les conditions (2),(3) et (4) assurent la réversibilité du processus: $q_i P_{ij} = q_j P_{ji} \quad \forall i, j \in X$. La condition (5) assure la convergence de la distribution stationnaire vers l'ensemble des solutions optimales quand θ tend vers 0. Les conditions (3) et (4) sont satisfaites pour des matrices d'acceptation pour lesquelles les améliorations de la solution sont toujours acceptées et les détériorations acceptées avec une certaine probabilité dépendante du paramètre θ . Par exemple, la fonction **Accepte** définie dans la partie 5.6.2 du chapitre 5 se traduit par la matrice d'acceptation :

$$A_{ij}(\theta_k) = \exp\left(-\frac{(f(j) - f(i))^+}{\theta_k}\right) \quad \forall i, j \in X \quad (\text{D.3})$$

1. Une chaîne de Markov avec une matrice de transition P est irréductible si $\forall i, j \in X, \exists n > 1$ tel que $[P^n]_{ij} > 0$.

2. Une chaîne de Markov est apériodique si $\forall i \in X$, le plus grand diviseur commun des $n \geq 1$ tels que $[P^n]_{ii} > 0$ vaut 1.

3. La distribution stationnaire d'une chaîne de Markov homogène avec la matrice de transition P est définie par le vecteur \vec{q} tel que: $q_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Proba}\{x(k) = i | x(0) = j\} \quad \forall j \in X$.

où, pour tout $a \in \mathfrak{R}$, $a^+ = a$ si $a > 0$ et $a^+ = 0$ sinon. Cette matrice vérifie les conditions (3) et (4). Les conditions de (1) à (5) sont suffisantes mais non nécessaires à la convergence en probabilité de l'algorithme homogène du recuit simulé. Dans la littérature, on trouve des exemples de matrices de génération et d'acceptation ne satisfaisant pas ces conditions mais conduisant à une preuve de convergence. Les résultats théoriques ne sont pas applicables directement au recuit simulé car ils supposent un nombre infini d'itérations pour chaque valeur de température θ . La modélisation du processus de recuit par une chaîne de Markov in-homogène semble donc plus adaptée. Dans ce cas, la chaîne de Markov in-homogène est constituée d'un nombre infini de chaînes de Markov homogène, chacune de longueur finie.

D.3 Modèle in-homogène

La preuve de convergence et la recherche de conditions que doivent satisfaire les matrices de génération et d'acceptation s'avèrent plus complexes dans le cadre d'une modélisation in-homogène du processus de recuit simulé. Dans la version originale du recuit, la matrice de génération est définie par :

$$\forall i, j \in X, \quad G_{ij}(\theta_k) = \begin{cases} \frac{1}{\Phi} & \text{si } j \in V(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

$V(i)$ désigne le voisinage de i , c'est-à-dire l'ensemble des solutions construites à partir de i . Φ désigne le cardinal de $V(i)$, les tailles des voisinages étant supposées égales pour tout $i \in X$. La matrice d'acceptation courante est :

$$\forall i, j \in X, \quad A_{ij}(\theta_k) = \exp\left(-\frac{(f(j) - f(i))^+}{\theta_k}\right) \quad \forall i, j \in X$$

Pour l'algorithme du recuit simulé ainsi défini, le résultat de convergence existe sous les conditions :

1. $\forall i, j \in X, \quad \exists p \geq 1, \quad \exists l_0, l_1, \dots, l_p \in X$ avec $l_0 = i, l_p = j$,
et $G_{l_v l_{v+1}}(\theta) > 0 \quad v = 0, 1, \dots, p-1$
2. $\theta_k \geq \frac{\Gamma}{\log(k+k_0)}, \quad k = 0, 1, \dots$
pour des valeurs de $\Gamma > 0$ et $k_0 > 2$

Ces deux conditions sont des conditions suffisantes de convergence. La deuxième condition intervient dans la preuve de forte ergodicité de la chaîne de Markov. Cette preuve, très technique, est abordée différemment suivant les auteurs et conduit à différentes estimations de la valeur de Γ . Pour d'autres versions du recuit simulé, la convergence asymptotique a été prouvé sous certaines conditions moins explicites. On peut citer les travaux de Anily et Federgruen [AF87], et de Gelfand et Mitter [GM85].

Annexe E

Un résultat particulier sur l'identification des paramètres

E.1 Énoncé

On veut montrer que s'il existe un ensemble de valeurs de paramètres E^* qui vérifie :

$$NE^{\omega,\ell}(i,j)[E^*,\mathbf{X}] = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{m=M} NO^{(\omega,\ell,m)}(i,j) \quad \forall \omega \in W, \ell, i \in R_\omega, j \in [1,T] \quad (\text{E.1})$$

alors E^* est solution optimale des deux problèmes d'identification qui sont minimisation de l'erreur quadratique (problème E.2) et maximisation de la vraisemblance (problème E.3).

Problème 1 : Minimisation de l'erreur quadratique

$$Min_E \sum_{m=1}^{m=M} \sum_{\omega \in W} \sum_{\ell} \sum_{i \in R_\omega} \sum_{j=1}^{j=T} \left[NO^{(\omega,\ell,m)}(i,j) - NE^{\omega,\ell}(i,j)[E,\mathbf{X}] \right]^2 \quad (\text{E.2})$$

Problème 2 : Maximisation de la vraisemblance

$$Max_E Q \prod_{m=1}^{m=M} \prod_{\omega \in W} \prod_{\ell} \prod_{i \in R_\omega} \prod_{j=1}^{j=T} \left[PR^{\omega,\ell}(i,j)[E,\mathbf{X}] \right]^{NO^{(\omega,\ell,m)}(i,j)} \quad (\text{E.3})$$

Par définition du problème :

$$\sum_i \sum_j NO^{(\omega,\ell,m)}(i,j) = NV_{\omega,\ell} \quad \forall m = 1..M \quad (\text{E.4})$$

$$\sum_i \sum_j NE^{\omega,\ell}(i,j)[E,\mathbf{X}] = NV_{\omega,\ell} \quad (\text{E.5})$$

Sans perte de généralité, on va restreindre la démonstration de ce résultat à un seul type d'avion. Pour aussi faciliter la lecture des calculs, les notations sont simplifiées.

Soit le problème de minimisation :

$$\text{Min}_E G_1(E) = \text{Min}_E \sum_m \sum_\omega \sum_i \sum_j [d_{\omega ij}(m) - y_{\omega ij}(E)]^2 \quad (\text{E.6})$$

avec les fonctions $d_{\omega ij}$ et $y_{\omega ij}$ ayant les propriétés suivantes :

$$\sum_i \sum_j d_{\omega ij}(m) = N_\omega \quad \forall m = 1..M \quad (\text{E.7})$$

$$\sum_i \sum_j y_{\omega ij}(E) = N_\omega \quad (\text{E.8})$$

On va montrer que s'il existe un ensemble de valeurs de paramètres E^* qui vérifie :

$$y_{\omega ij}(E^*) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{m=M} d_{\omega ij}(m) \quad (\text{E.9})$$

alors E^* est solution du problème E.6, et aussi solution du problème d'identification E.10 :

$$\text{Max}_E G_2(E) = \text{Max}_E \prod_m \prod_\omega \prod_i \prod_j [y_{\omega ij}(E)]^{d_{\omega ij}(m)} \quad (\text{E.10})$$

E.2 Démonstration

Pour le problème E.6, on écrit les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre. Si \hat{E} est un minimum local, alors :

$$2 \sum_m \sum_\omega \sum_i \sum_j \frac{\partial y_{\omega ij}}{\partial E}(\hat{E}) [d_{\omega ij}(m) - y_{\omega ij}(\hat{E})] = 0 \quad (\text{E.11})$$

$$2 \sum_\omega \sum_i \sum_j \frac{\partial y_{\omega ij}}{\partial E}(\hat{E}) \left[\sum_m d_{\omega ij}(m) - M y_{\omega ij}(\hat{E}) \right] = 0 \quad (\text{E.12})$$

Pour $\hat{E} = E^*$, cette condition est satisfaite.

Pour le problème E.10, on écrit les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre. Si \hat{E} est un minimum local, alors :

$$\sum_{\omega, i, j} \frac{\partial y_{\omega ij}}{\partial E}(\hat{E}) A_{\omega ij}(\hat{E}) = 0 \quad (\text{E.13})$$

avec :

$$A_{\omega ij}(\hat{E}) = B_{\omega ij}(\hat{E}) \left(\sum_m \left(d_{\omega ij}(m) y_{\omega ij}(\hat{E})^{(d_{\omega ij}(m)-1)} \prod_{l \neq m} y_{\omega ij}(\hat{E})^{d_{\omega ij}(l)} \right) \right) \quad (\text{E.14})$$

$$B_{\omega ij}(\hat{E}) = \left(\prod_m \prod_{(\epsilon, r, s) \neq (\omega, i, j)} y_{\epsilon rs}(\hat{E})^{d_{\epsilon rs}(m)} \right) \quad (\text{E.15})$$

On suppose qu'il existe \hat{E} tel que $A_{\omega ij}(\hat{E}) = 0 \forall \omega, i, j$. On va montrer que $\hat{E} = E^*$. En effet, l'hypothèse précédente implique que pour chaque paire OD ω et pour tous couples (i, j) et (u, v) distincts, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} & B_{\omega ij}(\hat{E}) \left(\sum_m \left(d_{\omega ij}(m) y_{\omega ij}(\hat{E})^{(d_{\omega ij}(m)-1)} \prod_{l \neq m} y_{\omega ij}(\hat{E})^{d_{\omega ij}(l)} \right) \right) \\ &= B_{\omega uv}(\hat{E}) \left(\sum_m \left(d_{\omega uv}(m) y_{\omega uv}(\hat{E})^{(d_{\omega uv}(m)-1)} \prod_{l \neq m} y_{\omega uv}(\hat{E})^{d_{\omega uv}(l)} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

En multipliant les deux membres de l'égalité par le produit $y_{\omega ij}(\hat{E})y_{\omega uv}(\hat{E})$, on obtient :

$$\begin{aligned} & B_{\omega ij}(\hat{E}) \left(\sum_m \left(d_{\omega ij}(m) y_{\omega ij}(\hat{E})^{d_{\omega ij}(m)} \prod_{l \neq m} y_{\omega ij}(\hat{E})^{d_{\omega ij}(l)} \right) \right) y_{\omega uv}(\hat{E}) \\ &= B_{\omega uv}(\hat{E}) \left(\sum_m \left(d_{\omega uv}(m) y_{\omega uv}(\hat{E})^{d_{\omega uv}(m)} \prod_{l \neq m} y_{\omega uv}(\hat{E})^{d_{\omega uv}(l)} \right) \right) y_{\omega ij}(\hat{E}) \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

$$\begin{aligned} & B_{\omega ij}(\hat{E}) \left(\sum_m \left(d_{\omega ij}(m) \prod_l y_{\omega ij}(\hat{E})^{d_{\omega ij}(l)} \right) \right) y_{\omega uv}(\hat{E}) \\ &= B_{\omega uv}(\hat{E}) \left(\sum_m \left(d_{\omega uv}(m) \prod_l y_{\omega uv}(\hat{E})^{d_{\omega uv}(l)} \right) \right) y_{\omega ij}(\hat{E}) \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

$$\begin{aligned} & B_{\omega ij}(\hat{E}) \left(\sum_m d_{\omega ij}(m) \right) \left(\prod_l y_{\omega ij}(\hat{E})^{d_{\omega ij}(l)} \right) y_{\omega uv}(\hat{E}) \\ &= B_{\omega uv}(\hat{E}) \left(\sum_m d_{\omega uv}(m) \right) \left(\prod_l y_{\omega uv}(\hat{E})^{d_{\omega uv}(l)} \right) y_{\omega ij}(\hat{E}) \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

En supprimant les facteurs communs aux deux membres de l'égalité, on a finalement :

$$\left(\sum_m d_{\omega ij}(m) \right) y_{\omega uv}(\hat{E}) = \left(\sum_m d_{\omega uv}(m) \right) y_{\omega ij}(\hat{E}) \quad (\text{E.20})$$

En sommant membre à membre toutes les égalités de ce type pour chaque paire OD ω , on obtient :

$$\sum_u \sum_v \left(\sum_m d_{\omega ij}(m) \right) y_{\omega uv}(\hat{E}) = \sum_u \sum_v \left(\sum_m d_{\omega uv}(m) \right) y_{\omega ij}(\hat{E}) \quad (\text{E.21})$$

$$\left(\sum_m d_{\omega ij}(m) \right) \left(\sum_u \sum_v y_{\omega uv}(\hat{E}) \right) = y_{\omega ij}(\hat{E}) \sum_m \left(\sum_u \sum_v d_{\omega uv}(m) \right) \quad (\text{E.22})$$

En utilisant les propriétés des fonctions $d_{\omega uv}$ et $y_{\omega uv}$, on montre que :

$$\left(\sum_m d_{\omega ij}(m) \right) (N_\omega) = y_{\omega ij}(\hat{E}) M(N_\omega) \quad (\text{E.23})$$

$$y_{\omega ij}(\hat{E}) = \frac{1}{M} \sum_m d_{\omega ij}(m) \quad (\text{E.24})$$

La condition nécessaire d'optimalité associé au problème E.10 est vérifiée pour $\hat{E} = E^*$.
En conclusion, on peut dire qu'un ensemble de paramètres E^* vérifiant :

$$y_{\omega ij}(E^*) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{m=M} d_{\omega ij}(m) \quad (\text{E.25})$$

satisfait aux conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre des problèmes E.6 et E.10.

Annexe F

Exemple 1

F.1 Scénario

F.1.1 Réseau

On considère une partie de l'espace aérien français découpée en 23 secteurs. Le réseau comprend quatre paires OD :

- LFPO-LFBO : Paris Orly - Toulouse
- LFBO-LFPO : Toulouse - Paris Orly
- LFPG-LFBO : Paris Charles de Gaulle - Toulouse
- LFBO-LFPG : Toulouse - Paris Charles de Gaulle

Il y a trois routes possibles pour les trois premières paires OD et quatre routes possibles pour la dernière. Comme plusieurs types d'avions sont pris en compte, il y a plusieurs séquences de secteurs pour une même route. Les figures F.1, F.2, F.3 et F.4 donnent pour chaque paire OD, les suites de balises et les séquences de secteurs correspondant aux différentes routes.

F.1.2 Demande

On s'intéresse à la demande de trafic sur deux horizons de temps qui correspondent à la pointe du matin (de 5h00 à 8h00) et à la journée entière (de 0h00 à 24h00). Ces deux horizons de temps sont découpés en période de $\Delta = 15$ minutes.

Longueur d'une période (en minutes)	Δ	15
Horizon de temps : Pointe du matin	T_{MP}	12
Horizon de temps : Journée entière	T_{AD}	96
Nombre de secteurs	S	23

```

PAIRE OD: LFPO-LFBO
Suite de balises 1
LPO WPO Z5 Z10 RR1 PIROG LCA GUERE BELPA AULON NOPTA
Séquence de secteurs
seq(1): 38 0.00 46 3.28 13 7.41 14 15.02 9 19.34 5 24.23 7 33.16 6 33.52 17 38.25
seq(2): 38 0.00 46 3.32 13 7.56 14 17.19 9 20.38 5 25.49 4 34.43 6 35.16 17 41.15
seq(3): 38 0.00 46 3.50 13 7.50 14 14.50 9 20.20 5 25.30 6 35.00 17 40.40
Suite de balises 2
LPO WPO Z5 Z10 RR1 PIROG CTX GUERE BELPA AULON NOPTA
Séquence de secteurs
seq(1): 38 0.00 46 3.28 13 7.41 14 15.02 9 17.51 5 24.43 7 33.29 6 34.12 17 38.45
seq(2): 38 0.00 46 3.50 13 8.10 8 19.20 9 19.40 5 27.00 4 36.20 6 36.40 17 42.30
seq(3): 38 0.00 46 3.10 13 7.40 14 14.30 9 18.20 5 25.20 4 33.30 6 34.20 17 40.30
seq(4): 38 0.00 46 3.50 13 7.50 14 14.50 9 18.30 5 26.00 6 35.20 17 41.00
Suite de balises 3
LPO WPO Z5 Z10 RR1 CAROS BELPA AULON NOPTA
Séquence de secteurs
seq(1): 38 0.00 46 3.28 13 7.41 14 15.02 9 19.34 5 24.30 7 33.19 6 33.52 17 38.25
seq(2): 38 0.00 46 3.32 13 7.56 14 17.19 9 20.38 5 25.49 4 34.43 6 35.16 17 41.15
seq(3): 38 0.00 46 3.50 13 7.50 14 14.50 9 20.20 5 25.40 6 35.00 17 40.40

```

FIG. F.1 – *Paire OD: LFPO-LFBO*

```

PAIRE OD: LFBO-LFPO
Suite de balises 1
LFBO XTLW FISTO BUGUS LMG BALAN AMB CDN CDEP EPR PO
Séquence de secteurs
seq(1): 16 0.00 17 2.00 10 6.48 4 7.59 8 20.15 53 34.43 48 40.50
seq(2): 16 0.00 17 2.00 10 7.00 4 8.00 5 15.20 9 20.00 35 34.00 53 37.10 48 39.40
Suite de balises 2
NOPTA AULON BELPA GUERE CTX PIROG RR1 Z10 Z5 WPO LPO
Séquence de secteurs
seq(1): 17 0.00 6 6.48 4 10.59 8 19.53 13 27.00 46 36.39 38 40.08
seq(2): 17 0.00 6 7.00 4 11.00 5 15.20 9 19.40 14 26.40 13 31.20 46 35.50 38 39.10
Suite de balises 3
NOPTA AULON BELPA CAROS RR1 Z10 Z5 WPO LPO
Séquence de secteurs
seq(1): 17 0.00 6 6.48 4 10.59 8 19.53 13 24.52 46 36.20 38 39.49
seq(2): 17 0.00 6 7.00 4 11.00 5 15.20 9 19.40 14 24.30 13 31.00 46 35.30 38 38.50

```

FIG. F.2 – *Paire OD: LFBO-LFPO*

```

PAIRE OD: LFPG-LFBO
Suite de balises 1
LPG WDG Z19 RBT1 RR1 PIROG LCA GUERE BELPA AULON NOPTA
Séquence de secteurs
seq(1):41 0.00 43 0.20 46 5.14 54 8.45 13 12.25 14 14.25 9 24.31 5 29.29 7 38.35 6 39.25 17 44.04
seq(2):41 0.00 43 0.20 46 5.33 54 10.15 13 13.25 8 25.40 4 30.38 6 39.45 17 44.52
seq(3):41 0.00 43 0.20 46 5.40 54 9.50 13 13.00 14 16.50 9 24.20 5 28.50 4 36.50 6 37.10 17 42.40
Suite de balises 2
LPO WPO Z5 Z10 RR1 PIROG CTX GUERE BELPA AULON NOPTA
Séquence de secteurs
seq(1): 38 0.00 46 3.05 13 7.24 14 14.25 9 17.32 5 24.49 7 33.46 6 34.36 17 39.15
seq(2): 38 0.00 46 3.35 13 7.53 8 18.45 4 25.50 6 34.58 17 40.02
seq(3): 38 0.00 46 3.40 13 7.50 14 16.50 9 18.00 5 24.30 4 32.20 6 32.40 17 38.10
Suite de balises 3
LPO WPO Z5 Z10 RR1 CAROS BELPA AULON NOPTA
Séquence de secteurs
seq(1): 38 0.00 46 3.05 13 7.24 14 14.25 9 19.21 5 24.29 7 33.35 6 34.16 17 38.55
seq(2): 38 0.00 46 3.35 13 7.53 8 20.23 4 25.30 6 34.38 17 39.42
seq(3): 38 0.00 46 3.40 13 7.50 14 16.50 9 19.30 5 24.10 4 32.00 6 32.30 17 37.50

```

FIG. F.3 – Paire OD: LFPG-LFBO

```

PAIRE OD: LFBO-LFPG
Suite de balises 1
LFBO XTLW LACOU PERIG FOUCC LVX PEROT TERNI CHW CLARA GIRKO SOKMU MERUE PGNR
Séquence de secteurs
seq(1): 16 0.00 17 2.00 10 6.04 4 10.51 2 16.57 8 22.11 53 35.03 50 44.52 54 49.51 45 50.30
seq(2): 16 0.00 17 2.00 10 8.10 4 12.10 2 18.40 8 24.20 53 38.00 50 48.30 43 52.20 45 53.00
Suite de balises 2
NOPTA AULON BELPA GUERE CTX PIROG RR1 Z10 Z5 WPO LPO
Séquence de secteurs
seq(1): 17 0.00 6 6.15 4 10.45 8 19.34 13 26.37 46 36.52 38 42.02
seq(2): 10 0.00 6 0.10 7 0.50 5 8.40 9 17.20 14 24.20 13 31.20 46 34.20 38 39.10
Suite de balises 3
NOPTA AULON BELPA CAROS RR1 Z10 Z5 WPO LPO
Séquence de secteurs
seq(1): 17 0.00 6 6.15 4 10.45 8 19.34 13 24.29 46 36.38 38 41.44
seq(2): 10 0.00 6 0.10 7 0.50 5 8.40 9 17.20 14 22.20 13 31.00 46 34.00 38 38.50
Suite de balises 4
GAI BRIVE LMG BALAN PEROT TERNI CHW CLARA GIRKO SOKMU MERUE PGNR
Séquence de secteurs
seq(1): 6 0.00 7 0.50 5 5.50 9 14.40 35 29.00 28 38.40 50 41.50 54 43.30 45 44.20

```

FIG. F.4 – Paire OD: LFBO-LFPG

F.2 Modèle

F.2.1 Paramètres

Pour cet exemple, les valeurs des paramètres sont arbitraires.

Décalage maximal (en avance)	J_{min}	1
Décalage maximal (en retard)	J_{max}	2
Paramètre de sensibilité	α	0.115
Coût d'une minute de retard	c_{ms}	1 euro
Rapport coût vol/coût sol	η	1
Pénalités des routes	$\rho^{\omega, \ell}(i)$	0.00

F.2.2 Variables

Les variables du modèle d'affectation sont les prix d'options qui sont eux-mêmes des combinaisons linéaires des prix de secteurs. Les prix des secteurs sont établis sur l'horizon de temps découpé en $T' = T_{MP} = 12$ périodes pour la pointe du matin et $T' = T_{AD} = 96$ périodes pour la journée entière. L'espace aérien considéré comprend 23 secteurs. Le nombre de variables de prix de secteurs s'élèvent donc à $23 * 12 = 276$ pour la pointe du matin et à $23 * 96 = 2208$ pour la journée entière. Pour l'ensemble des paires OD, on compte $3 * 3 + 4 = 13$ routes. Au total, pour la pointe du matin, $13 * 12 = 156$ options sont tarifées et pour la journée entière, $13 * 96 = 1248$.

F.3 Cibles

F.3.1 Définition

Pour les deux horizons de temps considérés, deux types de cibles sont construites. Dans le cas précis, les cibles ne sont pas construites en vue de diminuer la congestion des secteurs. Elles correspondent à des répartitions arbitraires du trafic dans le temps ou dans l'espace. Pour la pointe du matin, la première cible correspond à une répartition uniforme du trafic sur les différentes périodes et sur les différentes routes (MP1). La seconde cible correspond à des nombres entiers de vols répartis aléatoirement sur les périodes et les routes (MP2). Pour la journée entière, on choisit pour première cible une répartition uniforme des vols sur les périodes et les routes (AD1). La seconde cible correspond à une répartition uniforme des vols sur les routes (AD2).

F.3.2 Remarques

Il se peut qu'une cible modifiant la répartition des vols dans le temps et l'espace ne soit pas atteignable. Prenons par exemple, la cible 1 de la période du matin. Le tableau F.1 donne le nombre de vols programmés $NP(j)$ et désirés $ND(.,j)$ sur chaque période j pour la paire OD LFPG-LFBO.

<i>Periode</i> j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$NP(j)$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
$ND(.,j)$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00

TAB. F.1 – *Nombre de vols par période pour la paire OD LFPG-LFBO*

Le vol programmé en période 7 a une probabilité μ_6 , respectivement μ_7, μ_8, μ_9 d'être affecté en période 6, respectivement 7, 8, 9. Le vol programmé en période 11 a une probabilité μ_{10} , respectivement $\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}$ d'être affecté en période 10, respectivement 11, 12, 13. Les vols programmés ne peuvent pas être affectés sur d'autres périodes sinon la limite de déplacement de créneau n'est pas respectée (limite : un vol programmé en période u sera affecté en période $u - 1, u, u + 1$ ou $u + 2$). Le nombre de vols estimés par le modèle ne peut pas évaluer le nombre de vols désirés car le système :

$$\begin{aligned} \mu_6 + \mu_7 + \mu_8 + \mu_9 &= 1 \\ \mu_{10} + \mu_{11} + \mu_{12} + \mu_{13} &= 1 \\ \mu_6 = \mu_{12} = \mu_{13} &= 0 \\ \mu_7 = \mu_8 = \mu_9 = \mu_{10} = \mu_{11} &= 0.4 \end{aligned}$$

n'a pas de solution. On pourrait trouver des cibles modifiant la répartition dans le temps mais restant atteignables. On peut ajouter aussi qu'une cible avec un nombre décimal de vols désirés n'est pas réaliste. Pour la cible 2 de la journée entière, la cible est atteignable car la répartition des vols se fait uniquement dans l'espace, c'est-à-dire sur les différentes routes.

Annexe G

Exemple 2 : exemple académique

G.1 Scénario

G.1.1 Réseau

L'espace aérien considéré est formé de 13 secteurs. Le réseau, présenté sur la figure G.1 comprend deux paires OD (OD1 et OD2). Pour chacune des OD, 3 routes sont possibles et il n'y a qu'un seul type d'avion. Pour chaque route, il n'y a donc qu'une seule séquence de secteurs. De plus, la durée de passage à travers chaque secteur est égale à un période de 15 minutes.

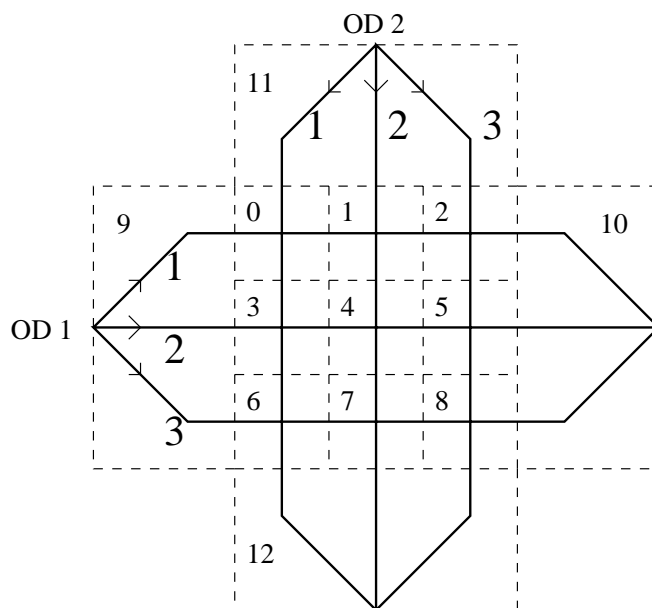


FIG. G.1 – Réseau de l'exemple 2

G.1.2 Demande

La demande correspond au trafic mesuré pour ces paires OD sur un horizon de temps de 8 périodes. Pour chaque OD, 3 décollages sont programmés en période 1.

Horizon de temps	T	8
Longueur d'une période (en mn)	Δ	15
Nombre de secteurs	S	13

Ensemble de paires OD	W	$OD1$	$OD2$
Nombre de vols	N_ω	3	3
Nombre de routes	$I_\omega = R_\omega $	3	3
Nombre de vols programmés (période 1)	$NP^\omega(1)$	3	3
Nombre de vols programmés (période u , $u = 2, T$)	$NP^\omega(u)$	0	0

G.2 Modèle

G.2.1 Paramètres

Pour cet exemple académique, il est nécessaire de fixer les paramètres du modèle. On suppose, et cela se vérifie en pratique, que les vols ne décollent jamais avant l'horaire initialement prévu et ne sont jamais retardés de plus de 3/4 heures. Le coût d'une minute au sol est fixé de manière arbitraire (en réalité, il est en moyenne de 30 euros). Les pénalités sur les routes latérales sont fixées de manière à ce que, en l'absence de tarification, la majorité des vols empruntent les routes centrales.

Décalage maximal (en avance)	J_{min}	0
Décalage maximal (en retard)	J_{max}	3
Paramètre de sensibilité	α	0.1
Coût d'une minute de retard	c_{ms}	3 euros
Rapport coût vol/coût sol	η	3
Pénalités des routes centrales	$\rho^\omega(2)$	0.00
Pénalités des routes latérales	$\rho^\omega(i), i = 1 \text{ et } 3$	5.14

G.2.2 Variables

Les variables du modèle d'affectation sont les prix d'options qui sont eux-mêmes des combinaisons linéaires des prix de secteurs. Comme tous les vols sont programmés en première période et que les avions décollent au plus tard trois périodes après la période initialement prévue, seules les options (route i , période j) avec $i = 1, I_\omega$ et $j = 1, J(= J_{max} + 1)$ peuvent être choisies et ont besoin d'être tarifées. Pour faciliter la lecture, on adopte une notation matricielle pour les variables de prix.

Prix d'options

$$P = \begin{pmatrix} P^1 \\ P^2 \end{pmatrix}$$

$$P^1 = (P^1(1,1), P^1(1,2), P^1(1,3), P^1(1,4), P^1(2,1), \dots, P^1(3,4))^T$$

P^1 vecteur de dimension $(I_1 \times J)$ et de composantes $P^1(i,j)$
 $P^1(i,j)$ prix d'achat de l'option (i,j) pour l'OD 1

$$P^2 = (P^2(1,1), P^2(1,2), P^2(1,3), P^2(1,4), P^2(2,1), \dots, P^2(3,4))^T$$

P^2 vecteur de dimension $(I_2 \times J)$ et de composantes $P^2(i,j)$
 $P^2(i,j)$ prix d'achat de l'option (i,j) pour l'OD 2

Prix de secteurs

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ \cdot \\ x_{1T'} \\ \cdot \\ x_{S1} \\ \cdot \\ x_{ST'} \end{pmatrix}$$

\mathbf{X} vecteur de dimension $(S \times T')$ et de composantes $x_{k,n}$
 $x_{k,n}$ prix d'entrée dans le secteur k en période n

Dans cet exemple, pour chaque OD, et quelque soit la route, la durée du vol est égale à 5 périodes de 15 minutes, soit 75 minutes. Au pire, un avion qui décolle en période 4 atteint le secteur d'arrivée en période 8. La dernière période de secteur à tarifer est donc égale à $T' = 8$. Il y a des périodes pendant lesquelles certains secteurs restent vides (voir partie 7.2 du chapitre 7). Dans ce cas, le prix associé au couple (secteur, période) concerné n'a pas d'influence sur le critère d'optimisation. Dans cet exemple, il y a 44 variables de prix non significatives.

Relation linéaire

Il existe une relation linéaire entre les prix d'options et les prix de secteurs :

$$P = B\mathbf{X} \tag{G.1}$$

avec :

$$B = \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \end{pmatrix}$$

B^1 matrice de dimension $(I_1 \times J) \otimes (S \times T')$ et de composantes $b_{(i,j)}^{(k,n)}$ (pour les routes de l'OD1)

B^2 matrice de dimension $(I_2 \times J) \otimes (S \times T')$ et de composantes $b_{(i,j)}^{(k,n)}$ (pour les routes de l'OD2)

G.3 Cibles

Cinq cibles sont construites manuellement de manière à respecter des capacités de secteur fixées arbitrairement. Pour toutes les cibles, la capacité des secteurs d'aéroports $\{9,10,11,12\}$ n'est pas bornée. Les deux premières cibles correspondent à une situation dans laquelle la capacité des secteurs de 0 à 8 est égale à 1 (1 seul avion par secteur et par période). Pour les cibles 3 et 4, la capacité des secteurs de la seconde diagonale $\{0,4,8\}$ est fixée à 2, les autres secteurs ont une capacité de 1. Pour la cible 5, la capacité du secteur 4 est étendue à 5 et la capacité des autres secteurs à 3. Les différentes cibles sont décrites sur la figure G.2. Par exemple pour la cible 2, le nombre de vols désirés pour l'OD 2 sur l'option (2,4) est égal à 1.

CIBLE 1					CIBLE 2						
	Période Route	1	2	3	4		Période Route	1	2	3	4
OD ¹	1	1	0	0	0	OD ¹	1	1	0	0	0
	2	1	0	0	0		2	1	0	0	0
	3	1	0	0	0		3	1	0	0	0
	Période Route	1	2	3	4		Période Route	1	2	3	4
OD ²	1	0	1	0	0	OD ²	1	0	1	1	0
	2	0	0	1	0		2	0	0	0	1
	3	0	0	0	1		3	0	0	0	0

CIBLE 3					CIBLE 4					CIBLE 5							
	Période Route	1	2	3	4		Période Route	1	2	3	4		Période Route	1	2	3	4
OD ¹	1	1	0	0	0	OD ¹	1	1	1	0	0	OD ¹	1	0	0	0	0
	2	0	0	1	0		2	1	0	0	0		2	3	0	0	0
	3	1	0	0	0		3	0	0	0	0		3	0	0	0	0
	Période Route	1	2	3	4		Période Route	1	2	3	4		Période Route	1	2	3	4
OD ²	1	1	0	0	0	OD ²	1	1	1	0	0	OD ²	1	1	0	0	0
	2	0	0	0	0		2	1	0	0	0		2	2	0	0	0
	3	1	1	0	0		3	0	0	0	0		3	0	0	0	0

FIG. G.2 – Cibles de l'exemple 2

G.4 Calcul des prix de secteurs

En tarification continue, le problème de calcul des prix de secteurs est défini dans le chapitre 7 (voir équations 4.15 et 4.16). Pour cet exemple, ce problème s'écrit :

$$\text{Min}_{\mathbf{X}} F(\mathbf{X}) = \text{Min}_{\mathbf{X}} \sum_{\omega=1}^{\omega=2} \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=4} [ND^{\omega}(i,j) - NE^{\omega}(i,j)[E,\mathbf{X}]]^2 \quad (\text{G.2})$$

sous la contrainte :

$$0 \leq \mathbf{X} \leq \bar{\mathbf{X}}$$

Cette contrainte signifie que les prix $x_{k,n}$ de chaque secteur k en période n sont positifs et bornés par \bar{x} . De plus :

$$NE^{\omega}(i,j)[E,\mathbf{X}] = \sum_{u=j-J_{\max}}^{u=j+J_{\min}} NP^{\omega}(u)PR_u^{\omega}(i,j)[E,\mathbf{X}]$$

Cet exemple a été choisi car le problème d'optimisation associé peut se formuler différemment et conduire à un résultat direct. Cette partie est consacrée à la présentation de cette autre formulation.

Minimiser la fonction $F(\mathbf{X})$, cela peut revenir à chercher une matrice de prix \mathbf{X} qui vérifie, pour chaque OD ω et chaque option (i,j) une relation du type :

$$NE^{\omega}(i,j)[E,\mathbf{X}] = ND^{\omega}(i,j) \quad (\text{G.3})$$

Pour l'exemple, cette égalité s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} NP^{\omega}(1)PR_1^{\omega}(i,j) &= ND^{\omega}(i,j) \\ PR_1^{\omega}(i,j) &= \frac{ND^{\omega}(i,j)}{N^{\omega}} \\ \frac{\exp[-\alpha(C_1^{\omega}(i,j) + P^{\omega}(i,j))]}{\sum_{r=1}^{r=3} \sum_{s=1}^{s=4} \exp[-\alpha(C_1^{\omega}(r,s) + P^{\omega}(r,s))]} &= \frac{ND^{\omega}(i,j)}{N^{\omega}} \quad (N^{\omega} = NP^{\omega}(1) = 3) \\ \frac{\exp[-\alpha(C_1^{\omega}(i,j) + P^{\omega}(i,j))]}{Q^{\omega}} &= \frac{ND^{\omega}(i,j)}{N^{\omega}} \\ \ln(\exp[-\alpha(C_1^{\omega}(i,j) + P^{\omega}(i,j))]) - \ln(Q^{\omega}) &= \ln\left(\frac{ND^{\omega}(i,j)}{N^{\omega}}\right) \\ -\alpha(C_1^{\omega}(i,j) + P^{\omega}(i,j)) &= \ln\left(\frac{ND^{\omega}(i,j)}{N^{\omega}}\right) + \ln(Q^{\omega}) \\ C_1^{\omega}(i,j) + P^{\omega}(i,j) &= -\frac{1}{\alpha} \left(\ln\left(\frac{ND^{\omega}(i,j)}{N^{\omega}}\right) + \ln(Q^{\omega}) \right) \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

Pour chaque paire OD ω , il y a $I_{\omega} \times J$ équations de ce type. On classe ces équations dans le même ordre que celui choisi pour construire le vecteur $P^{\omega}(i,j)$. En soustrayant la première

S'il existe une matrice de prix de secteurs \mathbf{X} qui vérifie, pour chaque paire OD ω , et chaque option (i, j) , l'équation G.3, cette matrice vérifie aussi le système linéaire :

$$DB\mathbf{X} = G - DC \quad (\text{G.8})$$

Le problème d'optimisation décrit en G.2 peut aussi se formuler comme un problème d'optimisation linéaire :

$$\text{Min}_{\mathbf{X}} |\mathbf{X}|_1 \quad (\text{G.9})$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} DB\mathbf{X} &= G - DC \\ 0 &\leq \mathbf{X} \leq \overline{\mathbf{X}} \end{aligned}$$

où $|\mathbf{X}|_1$ désigne la somme des éléments du vecteur \mathbf{X} .

Remarques :

- Le calcul du second membre G est impossible pour des cibles dans lesquelles on trouve $ND^\omega(i, j) = 0$ à cause de l'expression logarithmique. En effet, le modèle d'affectation étant probabiliste, de telles cibles ne peuvent être atteintes. Pour éviter ces situations, il suffit de remplacer, dans l'expression de G , $ND^\omega(i, j)$ par $ND^\omega(i, j) + \varepsilon^\omega(i, j)$ avec $\varepsilon^\omega(i, j)$ suffisamment petit.
- Comme il existe deux formulations distinctes au problème d'optimisation pour cet exemple académique, on peut comparer les solutions obtenues avec ces deux formulations. Voici les étapes de la procédure de comparaison :
 - Calculer un vecteur \mathbf{Y} solution du problème G.2 avec une méthode de résolution (type gradient ou recuit simulé)
 - Calculer, pour ce vecteur \mathbf{Y} , les erreurs $\varepsilon_{\mathbf{Y}}^\omega(i, j) = NE^\omega(i, j)[E, \mathbf{Y}] - ND^\omega(i, j)$
 - Calculer, le second membre G du problème G.9 en remplaçant $ND^\omega(i, j)$ par $ND^\omega(i, j) + \varepsilon_{\mathbf{Y}}^\omega(i, j)$
 - Calculer des prix de secteurs \mathbf{X} , solution du problème G.9 avec, par exemple, la fonction LP du logiciel Matlab
 - Comparer les prix de secteurs et les prix d'options obtenus avec les deux formulations

G.5 Identification des pénalités de route

A la vue des calculs développés dans la partie précédente, on peut remarquer que le problème d'identification des pénalités associées aux routes alternatives peut aussi se formuler sous la forme d'un programme linéaire. On suppose alors que la valeur de α est connue. Notons :

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho^1 \\ \rho^2 \end{pmatrix}$$

ρ^ω vecteur de dimension I_ω de composantes $\rho^\omega(i)$, pénalité de la route i

$$\rho^1 = (\rho^1(1), \rho^1(2), \rho^1(3))^T$$

$$\rho^2 = (\rho^2(1), \rho^2(2), \rho^2(3))^T$$

Le problème d'estimation des pénalités s'écrit :

$$\text{Min}_\rho |\rho|_1 \tag{G.10}$$

sous les contraintes :

$$K\rho = G - R - Kd$$

$$M\rho = V$$

avec :

$$G = \begin{pmatrix} G^1 \\ G^2 \end{pmatrix}$$

$$G^1 = (G^1(1,2), G^1(1,3), G^1(1,4), G^1(2,1), \dots, G^1(3,4))^T$$

$$G^2 = (G^2(1,2), G^2(1,3), G^2(1,4), G^2(2,1), \dots, G^2(3,4))^T$$

$$G^\omega(i,j) = -\frac{1}{\alpha} \left[\ln \left(\frac{NO^\omega(i,j)}{N^\omega} \right) - \ln \left(\frac{NO^\omega(1,1)}{N^\omega} \right) \right]$$

$$K = \begin{pmatrix} K^1 & O^1 \\ O^2 & K^2 \end{pmatrix}$$

K^ω matrice de dimension $((I_\omega \times J) - 1) \otimes I_\omega$

O^ω matrice nulle de dimension $((I_\omega \times J) - 1) \otimes I_\omega$

$$K^1 = K^2 = \eta c_{ms} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} R^1 \\ R^2 \end{pmatrix}$$

R^ω vecteur de dimension $((I_\omega \times J) - 1)$ et de composantes $R^\omega(i,j) = r^\omega(1,j) - r^\omega(1,1)$

$R^\omega(i,j) = r^\omega(1,j) = c_{ms}\Delta(j-1)$, coût du retard pour un vol de l'OD ω programmé en période 1 qui décolle en période j

$$R^1 = R^2 = c_{ms}(\Delta, 2\Delta, 3\Delta, 0, \Delta, 2\Delta, 3\Delta, 0, \Delta, 2\Delta, 3\Delta)^T$$

$$d = \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \end{pmatrix}$$

d^ω vecteur de dimension I_ω et de composantes $d^\omega(i)$, durée du vol par la route i

$$d^1 = d^2 = (75, 75, 75, 75, 75, 75)^T$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La contrainte $M\rho = V$ assure que les pénalités des routes préférées sont nulles.

Annexe H

Exemple 3 : exemple plus réaliste

H.1 Scénario

H.1.1 Réseau

Dans cet exemple, on considère l'espace supérieur aérien français découpé en 35 secteurs numérotés de 1 à 35. On s'intéresse aux liaisons commerciales intérieures entre les principaux aéroports de France : Bordeaux (BO), Lille (LI), Lyon (LY), Marseille (MA), Paris-Orly (PO), Rennes (RE), Strasbourg (ST), Toulouse (TO). Le réseau étudié est formé d'un ensemble de routes reliant ces aéroports. Les routes construites n'ont pas de réalités physiques, elles ont été construites manuellement. La figure H.1 présente l'espace aérien français, et les deux routes construites entre Lyon et Rennes. Pour la route A, la liste des secteurs traversés est : $\{28,14,13,21,20,11\}$. La route B est légèrement plus longue, la liste des secteurs traversés est : $\{28,15,14,13,12,20,11\}$. On considère un seul type d'avion. Les durées de passage dans les secteurs sont arbitraires, les durées de vol aussi, mais en cohérence avec la réalité. Cet exemple permet de travailler sur des scénarios de trafic plus complexes que ceux des exemples précédents, pour évaluer les performances des algorithmes de calcul de prix, et pour mesurer l'efficacité d'une possible tarification de l'espace.

H.1.2 Demande

La demande correspond aux vols planifiés au départ de chacun des aéroports cités précédemment pour une journée de 24 heures. En fait, le décollage des premiers avions est prévue à 6h00 et des derniers à 21h20. En admettant qu'un vol partira jamais avant l'horaire prévu ($J_{min} = 0$) et pas plus de 3/4 heure après ($J_{max} = 3$), on travaille avec un horizon de temps, débutant à 6h00 et se finissant à 22h15, découpé en $T = 65$ périodes de $\Delta = 15$ minutes. Le tableau H.1 présente la demande (nombre de vols planifiés) entre les différentes paires OD sur l'horizon de temps considéré.

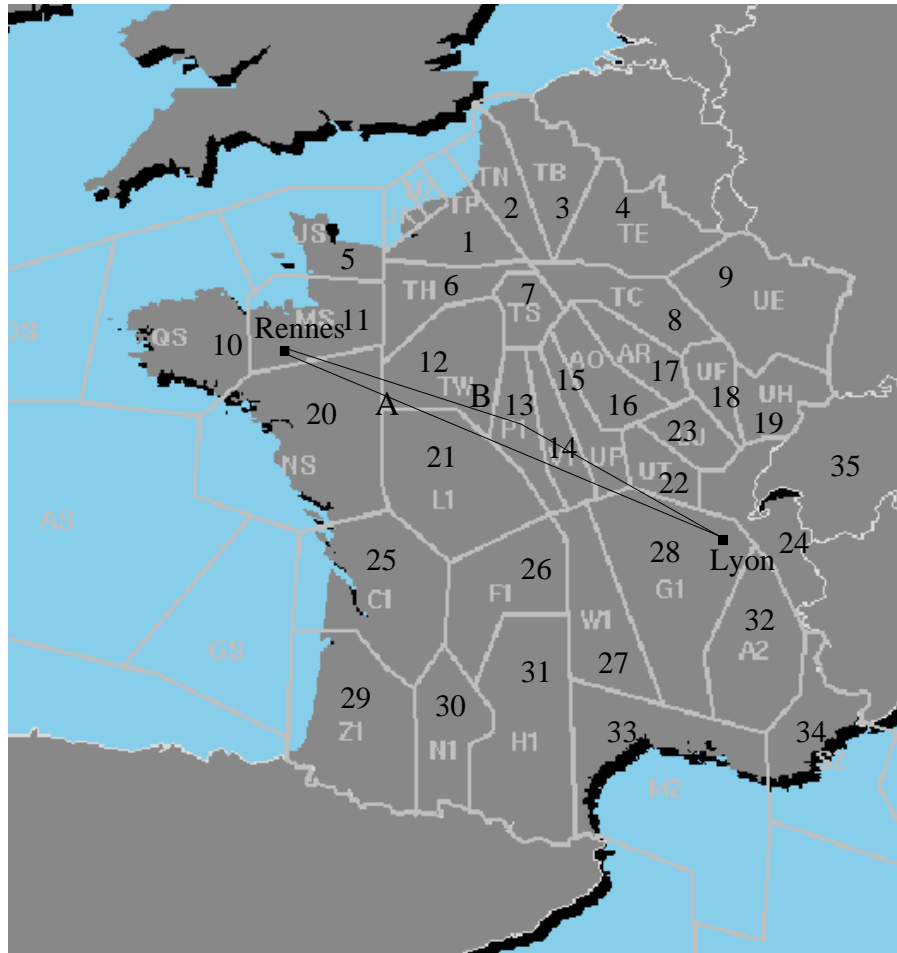


FIG. H.1 – Réseau de l'exemple 3

Horizon de temps	T	65
Longueur d'une période (en mn)	Δ	15
Nombre de secteurs	S	35
Nombre de paires OD	$ W $	52
Nombre de vols		433

	PO	LI	ST	LY	MA	TO	BO	RE
PO	0	0	19	16	32	48	26	5
LI	0	0	3	5	4	3	3	2
ST	19	3	0	5	3	4	3	2
LY	12	5	5	0	3	6	5	3
MA	32	4	3	3	0	6	6	2
TO	48	3	3	6	5	0	0	3
BO	29	3	3	5	6	0	0	1
RE	4	3	2	3	2	3	1	0

TAB. H.1 – Demande pour les paires OD du réseau

H.2 Modèle

H.2.1 Paramètres

Les paramètres du modèle sont fixés arbitrairement :

Décalage maximal (en avance)	J_{min}	0
Décalage maximal (en retard)	J_{max}	3
Paramètre de sensibilité	α	0.01
Coût d'une minute de retard	c_{ms}	30 euros
Rapport coût vol/coût sol	η	3
Pénalités des routes préférées	$\rho^\omega(1)$	0.00
Pénalités des routes alternatives	$\rho^\omega(i)$	$Random(0,1)$

H.2.2 Variables

Les variables du modèle d'affectation sont les prix d'options qui sont eux-mêmes des combinaisons linéaires des prix de secteurs. Pour l'ensemble des paires OD, on compte 103 routes. Au total, $103 * 65 = 6695$ options sont tarifées. Étant donné que la durée de vol maximale est égale à 167 minutes (pour la route 2 de la paire OD "MA-RE"), et qu'un avion décolle, au pire, en période $j = 65$, il faut tarifier les secteurs jusqu'en période $T' = 65 + 12 = 77$. Le nombre de variables de prix de secteurs s'élèvent donc à $35 * 77 = 2695$. Mais il y a des périodes pendant lesquelles des secteurs vont rester vides (voir partie 7.2 du chapitre 7). Pour cet exemple, seuls 1953 prix de couples (période, secteur) sont significatifs.

H.3 Cible

La cible est le résultat d'une affectation de routes et de périodes de décollage qui contribue à la diminution de la congestion des secteurs.

Avant de construire une cible, il faut fixer des capacités de secteurs pour pouvoir calculer des indicateurs de congestion. Pour fixer les capacités de secteurs, on utilise le programme de simulation défini dans la partie 4.5 du chapitre 4. Ce programme permet de calculer des indices de charge $L_{k,n}$ pour chaque secteur k en période n (on prend $p_I = p_O = p_M = 0.5$). Pour l'affectation courante et en l'absence de tarification, certains secteurs doivent être saturés, c'est-à-dire $C_{k,n} < L_{k,n}$, avec $C_{k,n}$ la capacité du secteur k en période n . Les valeurs de $C_{k,n}$ sont fixées de manière à ce que certains secteurs soient congestionnés. Par exemple, on fixe la capacité du secteur 7 (secteur couvrant l'aéroport de Paris-Orly) à 12 et la capacité des autres secteurs à 6. Dans ce cas, les moyennes des indicateurs de congestion Q_1 et Q_2 valent respectivement 26.89 et 44.19 pour 1000 jours de simulation de trafic.

Pour cet exemple, la construction de la cible se fait de manière ad hoc. L'idée est de trouver une nouvelle affectation de trafic pour laquelle les valeurs des indicateurs de congestion sont beaucoup plus faibles. Pour trouver cette nouvelle affectation, on essaie de déplacer la période de décollage ou de modifier la route des vols entrant ou sortant d'un secteur congestionné. Le schéma de la procédure est donné par la figure H.2. Le processus d'affectation est arrêté si l'indicateur de congestion Q (par exemple, $Q = 0.5Q_1 + 0.5Q_2$) passe sous un certain seuil ou si un nombre maximal d'itérations est atteint. L'affectation résultante de cette procédure constitue la cible. Pour la cible ainsi construite, les moyennes des indicateurs de congestion Q_1 et Q_2 valent respectivement 2 et 1.

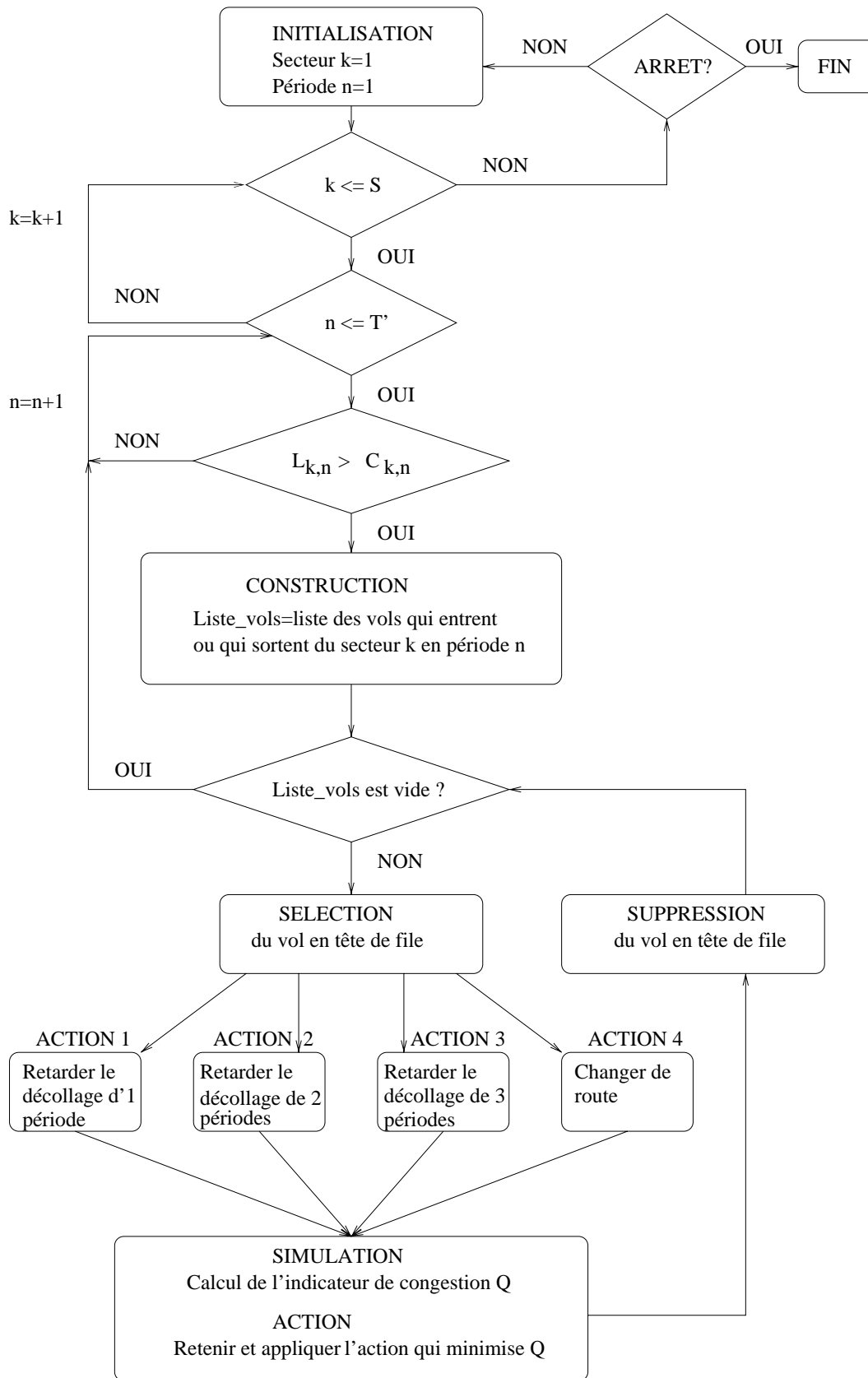


FIG. H.2 – Procédure de construction d'une cible qui minimise la congestion

Bibliographie

- [AB99] M.B. Akiva and M. Bierlaire. Discrete choice methods and their applications to short term travel decisions. In *Handbook of Transportation Science*, volume 23 of *International Series in Operations Research and Management Science*. Kluwer, 1999.
- [AF87] S. Anily and A. Federgruen. Ergodicity in parametric nonstationary markov chains: an application to simulated annealing methods. *Operations Research*, 35:867–874, 1987.
- [Agn77] C.E. Agnew. The theory of congestion tolls. *Journal of Regional Science*, 17:381–393, 1977.
- [Aka97] T. Akamatsu. Decomposition of path choice entropy in general transport network. *Transportation Science*, 31(4), November 1997.
- [AL85] M.B. Akiva and S.R. Lerman. Discrete choice analysis: Theory and application to travel demand. Technical report, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1985.
- [AL93] E.H.L. Aarts and J.K. Lenstra. *Local search in Combinatorial Optimization*. John Wiley and Sons, 1993.
- [APL90a] R. Arnott, A.de Palma, and R. Lindsey. Departure time and route choice for the morning commute. *Transportation Research*, 24:209–228, 1990.
- [APL90b] R. Arnott, A.de Palma, and R. Lindsey. Economics of a bottleneck. *Journal of Urban Economics*, 27:111–130, 1990.
- [APL94] R. Arnott, A.de Palma, and R. Lindsey. The welfare effects of congestion tolls with heterogeneous commuters. *Journal of Transport Economics and Policy*, pages 139–161, 1994.
- [AS94] R. Arnott and K. Small. The economics of traffic congestion. *American Scientist*, 82:446–455, 1994.
- [BACP84] M. Ben-Akiva, M. Cyna, and A.de Palma. Dynamic model of peak period congestion. *Transportation Research*, 18B(4/5), August/October 1984.
- [BAPK86] M.B. Ben-Akiva, A.de Palma, and P. Kanaroglou. Dynamic model of peak period traffic congestion with elastic arrival rates. *Transportation Science*, 20(3), August 1986.
- [BC99] Alain Bonnafous and Yves Crozet. La gestion de la rareté des créneaux aéroportuaires, Janvier 1999.
-

- [BMS⁺] C. Barrett, R.J. Murphy, S.Lewis, M. Drazen, L. Pearson, A.R. Odoni, and W. Hoffman. Peak pricing as it might apply to boston-logan international airport.
- [BMW56] M. Beckmann, C.B. McGuire, and C.B. Winston. *Studies in the Economics of Transportation*. Yale University Press, New Haven, CT, 1956.
- [Bon94] Alain Bonnafous. *Transports : le prix d'une stratégie*, volume 1. Commissariat général du Plan, 1994.
- [BS94] D.J. Bertsimas and S. Stock. The multi-airport flow management problem with en-route capacities. Technical report, Massachusetts Institute of Technology, 1994.
- [Cas91] E. Cascetta. *Concise encyclopedia of traffic and transportation systems*. Pergamon Press, 1991.
- [CC91] E. Cascetta and G.E. Cantarella. A day-to-day and within-day dynamic stochastic assignment model. *Transportation Research*, 25(5), sept 1991.
- [CC95] G.E. Cantarella and E. Cascetta. Dynamic processes and equilibrium in transportation networks: Towards a unifying theory. *Transportation Science*, 29(4), nov 1995.
- [CNB92] E. Cascetta, A. Nuzzolo, and L. Biggiero. Analysis and modeling of commuters' departure time and route choice in urban networks. In *Proceedings of the Second International CAPRI Seminar on Urban Traffic Networks*, 1992.
- [Com98] Commission Européenne. *Des redevances équitables pour l'utilisation des infrastructures : Une approche par étapes pour l'établissement d'un cadre commun en matière de tarification des infrastructures de transport dans l'UE*, juillet 1998.
- [CS93] M. Carey and A. Srinivasan. Externalities, average and marginal costs, and tolls on congested networks with time-varying flows. *Operations Research*, 35:58–69, 1993.
- [CSEL93] R. Cocchi, S. Shenker, D. Estrin, and L.Zhang. Pricing in computer networks: motivation, formulation, and example. In *IEEE/ACM Transactions on Networking*, pages 614–627, 1993.
- [Daf72] S.C. Dafermos. The traffic assignment problem for multiclass-user transportation networks. *Transportation Science*, 6(73-87), 1972.
- [Daf73] S. Dafermos. Toll patterns for multiclass-user transportation networks. *Transportation Science*, 7:211–223, 1973.
- [Daf80] S.C. Dafermos. Traffic equilibrium and variational inequalities. *Transportation Science*, 14(42-54), 1980.
- [Dan63] G.B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, 1963.
- [Dan97] J.I. Daniel. Comparison of three empirical models of airport congestion pricing, 1997.
- [Del95] D. Delahaye. *Optimisation de la sectorisation de l'espace aérien par algorithmes génétiques*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 1995.

- [DFD00a] K. Deschinkel, J.L. Farges, and D. Delahaye. Optimization of prices for air traffic control. In *9th IFAC Symposium on control in Transportation Systems*, 2000.
- [DFD00b] K. Deschinkel, J.L. Farges, and D. Delahaye. Pricing policies for air traffic assignment. In *3rd USA/Europe Air Traffic Management R and D Seminar*, 2000.
- [DFD01a] K. Deschinkel, J.L. Farges, and D. Delahaye. Optimizing and assigning price levels for air traffic management. In *9th World Conference on Transport Research*, 2001.
- [DFD01b] K. Deschinkel, J.L. Farges, and D. Delahaye. Pricing policies for air traffic assignment. In *AIAA Progress in Aeronautics and Astronautics volume, Air Transportation Systems Engineering*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2001.
- [Dia71] R.B. Dial. A probabilistic multipath traffic assignment model which obviates path enumeration. *Transportation Research*, 5(2), June 1971.
- [DS71] S. Dafermos and F.T. Sparrow. Optimal resource allocation and toll patterns in user-optimized transport networks. *Journal of Transport Economics and Policy*, 5 :184–200, 1971.
- [DS72] C.F. Daganzo and Y. Sheffi. On stochastic models of traffic assignment. *Transportation Science*, 6(253-274), 1972.
- [Eur98a] Eurocontrol. Future atfm-ao-airport synergies towards enhanced operations, august 1998.
- [Eur98b] Eurocontrol. Potential applications of collaborative planning and decision making, september 1998.
- [Eur00] Eurocontrol. Stratégie de gestion de la circulation aérienne pour les années 2000+, 2000.
- [FAA] <http://www.metsci.com/cdm/>.
- [FAA94] FAA. Guide for economic analysis of investment and regulatory decisions, 1994.
- [FLTW89] L. Friesz, J. Luque, L. Tobin, and B. Wie. Dynamic network traffic assignment considered as a continuous time optimal control problem. *Operations Research*, 37(6), November/Décember 1989.
- [Fog94] D.B. Fogel. *Evolutionary Computation, toward a new Philosophy of Machine Intelligence*. Wiley and sons, NY, 1994.
- [Fro98a] X. Fron. Atm performance review in europe. In *Proceedings of 2nd USA/Europe Air Traffic Management Seminar*, 1998.
- [Fro98b] X. Fron. Evolution du contrôle du trafic aérien en europe. *La Jaune et La Rouge*, May 1998.
- [GL97] F. Glover and M. Laguna. *Tabu search*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997.
- [GM85] S.B. Gelfand and S.K. Mitter. Analysis of simulated annealing for optimization. In *Proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 779–786, 1985.

- [GMPD00] R. Graham, A. Marsden, I. Pichancourt, and F. Dowling. Controller roles - time to change. In *3rd USA/Europe Air Traffic Management R and D Seminar*, 2000.
- [GPV93] K. Guler, C.R. Plott, and Q.H. Vuong. A study of zero-out auctions: test-bed experiments of a process of allocating private rights to the use of public property. Technical report, California Institut of Technology, 1993.
- [GSW97] A. Gupta, D.O. Stahl, and A.B. Whinston. A stochastic equilibrium model of internet pricing. Technical report, University of Texas, 1997.
- [GTW93] F. Glover, E. Taillard, and D.de Werra. A user's guide to tabu search. *Annals of Operations Research*, 41 :3–28, 1993.
- [Hen74] J.V. Henderson. Road congestion : a reconsideration of pricing theory. *Journal of Urban Economics*, 1 :346–365, 1974.
- [HL95] R. Heckman and T. Lengauer. A simulated annealing approach to the nesting problem in the textile manufacturing industry. In T. Ibaraki R.E. Burkard, P.L. Hammer and M. Queyranne, editors, *Annals of Operations Research*, volume 57, pages 103–133. J.C. Baltazar AG Science Publishers, 1995.
- [Hol75] J. Holland. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan press, 1975.
- [Hor83] Joel L. Horowitz. Statistical comparison of non-nested probabilistic discrete choice models. *Transportation Science*, 17(3), 1983.
- [HY96] H.J. Huang and H. Yang. Optimal variable road-use pricing on a congested network of parallel routes with elastic demand. In *13th International Symposium on the Theory of Traffic flow and Transportation*, pages 479–500, 1996.
- [IAT97] IATA. Cost benefit task force, report of the 7th icbtf meeting, 1997.
- [IR92] L. Ingberg and B. Rosen. Genetic algorithms and very fast simulated re-annealing. In *Mathematical Computer Modeling*, volume 16, pages 87–100, 1992.
- [Jan98] M. Jansson. *Marginal cost congestion pricing under approximate equilibrium conditions*. PhD thesis, Department of Electrical Engineering and Computer Science, May 1998.
- [KGV83] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt, and M.P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, 220 :671–680, 1983.
- [Koz92] J.R. Koza. *Genetic Programming*. MIT press, 1992.
- [LA87] P.J.M Van Laarhoven and E.H.L. Aarts. *Simulated Annealing: Theory and Applications*. D. Reidel Publishing Company, 1987.
- [Len95] N. Lenoir. *Une approche économique de la congestion aérienne*. PhD thesis, Groupe de Recherche en Economie Mathématique et Quantitative (GRE-MAQ), March 1995.
- [Lit61] J.D.C. Little. A proof of the queueing formula $l = \lambda w$. *Operations Research*, pages 383–387, 1961.
- [LLTT98] M. Labbe, G. Laporte, K. Tanczos, and PH. Toint. *Operations Research in Traffic and Transportation Management*, volume 166 of *NATO ASI Series, Series F: Computer and Systems Sciences*. Springer Verlag, 1998.

- [LM91] H. Lutfyya and B. Mc Millin. Composite stock cutting through simulated annealing. Technical Report CSC 91-09 or ISC 91-04, Department of Computer Science, University Missouri at Rolla, 1991.
- [Mau96] L. Maugis. Mathematical programming for the air traffic flow management with en-route capacities. Technical report, IFOR, 1996.
- [McF78] D. McFadden. Modelling the choice of residential location. In A. Karlquist et al., editor, *Spatial interaction theory and residential location*, pages 75–96. 1978.
- [Min90a] M. Minoux. *Programmation mathématique. Théorie et algorithmes. Tome 2*. Dunod, 1990.
- [Min90b] M. Minoux. *Programmation mathématique. Théorie et algorithmes. Tome 2*. Dunod, 1990.
- [MMV95] J.K. MacKie-Mason and H.R. Varian. Pricing the internet. In *Public Access to the Internet*, pages 269–314, 1995.
- [MW89] S. Morisson and C. Winston. Enhancing the performance of the deregulated air transportation system. *Brookings Papers on Economic Activity, Microeconomics*, pages 61–123, 1989.
- [NM65] J.A. Nelder and R. Mead. A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, 7:308–313, 1965.
- [OD98] S. Oussedik and D. Delahaye. Reduction of air traffic congestion by genetic algorithms. In *Fifth International Conference on Parallel Problems Solving from Nature*, 1998.
- [Odo94] A.R. Odoni. Issues in air traffic flow management. Technical report, Massachusetts Institute of Technology, 1994.
- [ODS98a] S. Oussedik, D. Delahaye, and M. Schoenauer. Air traffic management by stochastic optimization. Technical report, CMAP/Eurocontrol, LOG/CENA, 1998.
- [ODS98b] S. Oussedik, D. Delahaye, and M. Schoenauer. Air traffic planning by genetic algorithms. In *Air Traffic Management R and D Seminar. FAA/Eurocontrol*, 1998.
- [OF93] J.F. Oliveira and J.S. Ferreira. Algorithms for nesting problem. In R.V. Vidal, editor, *Applied Simulated Annealing*, pages 255–273. Springer Verlag, 1993.
- [RG86] R.E. Randelman and G.S. Grest. N-city traveling salesman problem - optimization by simulated annealing. *Journal of Statistic Physics*, 45:885–890, 1986.
- [RHB96] B. Ran, R. Hall, and D. Boyce. A link-based variational inequality model for dynamic departure time/route choice. *Transportation Research*, 30B(1), February 1996.
- [RO93] O. Richetta and A.R. Odoni. Solving optimally the static ground-holding policy problem in air traffic control. *Transportation Science*, 27:228–238, August 1993.
- [RO94] O. Richetta and A.R. Odoni. Dynamic solution to the ground-holding policy problem in air traffic control. *Transportation Research*, 28:167–185, May 1994.

- [RSB82] S.J. Rassenti, V.L. Smith, and R.L. Bulfin. A combinatorial auction mechanism for airport time slot allocation. *Bell Journal of Economics*, pages 402–417, 1982.
- [San94] I.M.E. Sanhoury. *Evaluating the joint implementation of congestion pricing and driver information systems*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1994.
- [Sch95] H.P. Schwefel. *Evolution and Optimum Seeking*. New York, 1995.
- [She85] Y. Sheffi. *Urban Transportation Networks*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1985.
- [SHK⁺00] R.H. Smith, R.L. Hoffman, D. Knorr, J. Wetherly, and M. Wambsganss. Assessing the benefits of collaboration decision making in air traffic management. In *3rd USA/Europe Air Traffic Management R and D Seminar*, 2000.
- [Sma82] K. Small. The scheduling of consumer activities : work trip. *The American Economic Review*, pages 467–479, 1982.
- [Smi79] M.J. Smith. The marginal cost taxation of a transportation network. *Transportation Research*, 13 :237–242, 1979.
- [TO93] M. Terrab and A.R. Odoni. Strategic flow control on an air traffic network. *Operations Research*, 41 :138–152, 1993.
- [VBO94a] P. Vranas, D. Bertsimas, and A.R. Odoni. Dynamic ground-holding policies for an network of airports. *Transportation Science*, 28 :275–291, nov 1994.
- [VBO94b] P. Vranas, D. Bertsimas, and A.R. Odoni. The multi-airport ground-holding problem in air traffic control. *Operations Research*, 42 :249–261, march 1994.
- [Vic69] W.S. Vickrey. Congestion theory and transport investment. *American Economic Review*, 59 :251–261, 1969.
- [Vil90] J. Villiers. Le mur de la capacité. *ITA magazine*, (59 et 60), 1990.
- [Vov97] P. Vovsha. Cross-nested logit model: an application to mode choice in the tel-aviv metropolitan area. In *Transportation Research Board, 76th Annual Meeting*, number 970387. Washington DC, January 1997.
- [Wal61] A.A. Walters. The theory and measurement of private and social cost of highway congestion. *Econometrica*, 29 :676–699, 1961.
- [War52] J.C. Wardrop. Some theoretical aspects of road traffic research. *Proc. Inst. Civil Eng.*, Part II 1(2), 1952.
- [WT98] B.W. Wie and R.L. Tobin. Dynamic congestion pricing models for general traffic networks. *Transportation Research*, 32(5) :313–327, 1998.
- [Yan97] H. Yang. Multiple equilibrium behaviors and advanced traveler information systems with endogenous market penetration. *Transportation Research*, 32(3), 1997.
- [Yan00] R.L. Yang. Convergence of the simulated annealing algorithm for continuous global optimization. *Journal of optimization theory and applications*, 104 :691–716, March 2000.
- [YB97] H. Yang and M.G.H. Bell. Traffic restraint, road pricing and network equilibrium. *Transportation Research*, 31 :303–314, august 1997.

- [YL96] H. Yang and W.H.K. Lam. Optimal road tolls under conditions of queueing and congestion. *Transportation Research*, 30 :319–332, september 1996.

Résumé: Le travail développé dans cette thèse porte sur l'élaboration d'un système de tarification dynamique des secteurs aériens pour réduire la congestion de l'espace. Un modèle décrivant la relation entre les prix d'entrée dans les secteurs et le choix des routes et des périodes de décollage par les compagnies aériennes est proposé.

Les paramètres du modèle sont estimés en minimisant la différence entre un nombre de vols observés et un nombre de vols issus du modèle.

Les prix de secteurs sont calculés de manière à minimiser la différence entre un nombre de vols définis par une cible et un nombre de vols issus du modèle. La cible correspond à une répartition du trafic dans le temps et dans l'espace qui conduit à une forte réduction de la congestion.

Deux stratégies de tarification sont envisagées. La première consiste à établir des prix par secteur et par période indépendamment les uns des autres. La deuxième stratégie de tarification consiste à limiter le nombre de valeurs de prix et à affecter un niveau de prix à chaque secteur à chaque période.

Plusieurs algorithmes basés sur la méthode du gradient, le recuit simulé et la méthode Tabou sont développés pour résoudre les problèmes d'optimisation. Tous ces algorithmes sont testés et comparés sur trois scénarios de trafic. Les résultats de l'optimisation et des simulations de trafic montrent que la tarification mise en place permet d'orienter partiellement le choix des compagnies et de diminuer les pointes de congestion.

Mots clés: Trafic aérien , Affectation de trafic, Tarification, Méthode du gradient, Recuit simulé, Méthode Tabou, Simulation.

Air Traffic regulation by dynamic optimisation of network user fees

Abstract: The work carried out in this thesis deals with the elaboration of a dynamic sector pricing system to reduce airspace congestion. A relationship model between taxes charged to aircraft and the choice of routes and departure times is proposed.

Model parameters are tuned by minimizing the difference between a number of observed flights and a number of flights from the model.

Prices of sectors are calculated in order to minimize the difference between a number of flights defined by a target and number of flights from the model. The target corresponds to a traffic allocation which provides a significant reduction of congestion.

Two pricing strategies are envisaged. The first strategy consists of setting prices for each sector and for each period independently. The second strategy consists of limiting the number of price values and in assigning a price level to each sector at each period.

Several algorithms based on the gradient method, the simulated annealing method and the Tabu search are developed to solve the optimization problems. All algorithms are tested and compared on three traffic scenarios. The results of the optimization and of the traffic simulations show that the pricing policy encourages the airlines to modify their choices and reduces congestion peaks.

Keywords: Air traffic, Traffic assignment, Pricing, Gradient method, Simulated annealing, Tabu search , Simulation.