

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

de

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE DES FLUIDES

par

Jérôme GRIFFOND

Instabilité pariétale et accrochage aéroacoustique
dans les conduits à parois débitantes
simulant les moteurs à propergol solide d'Ariane 5

présentée et soutenue publiquement le 21 septembre 2001

MM.	R.	BEC	
	A.	BOTTARO	
	G.	CASALIS	Directeur de thèse
	P.	HUERRE	Président du jury
	F.	VUILLOT	
	J.E.	WESFREID	Rapporteur
	S.	ZALESKI	Rapporteur

RESUME en français

L'objectif de cette thèse est de permettre une meilleure compréhension du mécanisme physique supposé être à la source d'un couplage aéroacoustique survenant dans les moteurs à propergol solide tels que ceux du lanceur Ariane 5.

Le phénomène est une instabilité, dite "pariétale", particulière aux écoulements en conduite induits par injection pariétale.

Des analyses linéaires sont d'abord menées sur une solution analytique auto-semblable des équations d'Euler qui indiquent la présence d'ondes instables convectives spatialement amplifiées vers l'aval selon un mécanisme non visqueux lié à la courbure des lignes de courant. Les résultats sont favorablement comparés à ceux obtenus expérimentalement.

Des écoulements plus proches de ceux des moteurs à propergol solide sont ensuite étudiés avec la prise en compte de géométries plus complexes et d'effets de compressibilité.

Puis, des développements non linéaires sont proposés par application de la théorie de la stabilité secondaire et par recherche d'états quasi-saturés selon une forme spécifique de ces écoulements linéairement accélérés, retrouvée par simulation numérique directe.

Enfin, la place de l'instabilité pariétale dans la boucle d'interactions conduisant au couplage aéroacoustique est discutée, ainsi que les pistes possibles de prédiction de ce dernier.

MOTS-CLES en français

stabilité hydrodynamique - instabilité pariétale - instabilité non-linéaire - effets non-parallèles - écoulement de Taylor - moteur à propergol solide - couplage aéroacoustique

TITRE en anglais

Parietal instability and aeroacoustic coupling inside channels with blowing walls simulating the solid propellant motors of Ariane 5.

RESUME en anglais

The purpose of this thesis is the understanding of a physical mechanism which is believed to cause an aeroacoustic coupling in solid propellant motors such as those of the launcher Ariane 5.

The phenomenon is a so-called "parietal" instability occurring in injection induced channel flows.

Firstly, linear analyses are applied to an analytical self-similar solution of the Euler equations. They show the existence of convective unstable waves spatially amplified by an inviscid mechanism originating from the streamlines curvature. Results compares well to experimental material.

Flows closer to those in solid propellant motors are then studied by taking into account more complex geometries and compressibility effects.

Secondly, some insights are given about the nonlinear evolution thanks to the secondary instability theory and thanks to computations of quasi-saturated states specific to linearly accelerated flows. A good agreement is obtained between the latter and direct numerical simulations.

Finally, the role of the parietal instability inside the interaction loop leading to aeroacoustic coupling is discussed together with the ways of predicting the latter.

MOTS-CLES en anglais

hydrodynamical stability - parietal instability - nonlinear instability - nonparallel effects - Taylor flow - solid propellant motors - aeroacoustic coupling

Remerciements

Je remercie M. Cousteix, directeur du Département Modèles pour l'Aérodynamique et l'Energétique de l'ONERA-CERT, de m'avoir accueilli au sein de son département.

Je remercie également M. Arnal, chef de l'unité TRansition et INstabilités du DMAE pour ses encouragements prodigués tout au long de ma thèse.

Cette étude n'aurait pu être réalisée sans le soutien du CNES, représenté par M. Bec à qui je tiens à exprimer toute ma gratitude.

Je suis très reconnaissant à Messieurs Wesfreid et Zaleski d'avoir accepté la lourde tâche de rapporteurs, à M. Huerre de m'avoir fait l'honneur de présider le jury ainsi qu'à Messieurs Bottaro et Vuillot celui d'y avoir participé.

Je souhaite remercier M. Casalis, mon directeur de thèse, pour la confiance qu'il m'a témoignée durant ces trois années.

Un merci particulier à M. Avalon à qui je dois l'essentiel des travaux expérimentaux présentés dans cette thèse. Sa disponibilité et sa gentillesse ont permis l'obtention des divers résultats encourageants de ce manuscrit.

Un grand merci également pour Messieurs Prévost, Ugurtas et Antoine qui m'ont transmis le reste des données expérimentales exploitées dans ce document et dont les idées et recherches m'ont été d'un grand profit.

Une pensée pour M. Lupoglazoff qui a réalisé, parmi d'autres calculs essentiels à la compréhension du phénomène étudié, les simulations numériques utilisées au chapitre III.

Je tiens enfin à dire combien j'ai apprécié le programme ASSM tant pour la stimulation intellectuelle liée aux brillantes études menées en son sein que pour les qualités humaines de l'ensemble de ses participants qui ont contribué à créer l'ambiance très agréable de chacune de ses réunions.

D'une manière générale, cette thèse est dédiée à l'ensemble des acteurs du petit monde de la mécanique des fluides et de la propulsion solide avec qui mes rapports furent aussi divers qu'enrichissants...

Table des matières

Introduction	5
I Du problème complet à l'instabilité pariétale	9
I.1 Le moteur à propergol solide P230	9
I.2 Mesures sur le MPS P230 et à échelle réduite	11
I.2.1 Difficulté de la mesure et de son interprétation	11
I.2.2 Mise en évidence de l'accrochage aéroacoustique	11
I.3 Sources d'énergie acoustique	12
I.3.1 Instabilités de combustion	12
I.3.2 Le détachement tourbillonnaire	13
I.3.3 Conséquence sur la simulation expérimentale	13
I.4 Trois instabilités hydrodynamiques suspectées	13
I.4.1 Instabilité d'angle au point C	14
I.4.2 Instabilité d'obstacle pénétrant au point PT	15
I.4.3 Instabilité pariétale	16
I.5 Objectif de la thèse	18
I.6 Le montage VECLA	19
I.6.1 Dispositif d'essai	20
I.6.2 Typologie des comportements observés	21
I.7 Modélisation de l'écoulement de base	23
I.7.1 Hypothèses	23
I.7.2 Notations	24
I.7.3 Conditions aux limites	25
I.7.4 Solutions sous forme auto-semblable	26
I.7.5 Unicité de l'écoulement de base?	27
I.7.6 La solution de Taylor	28
II Stabilité linéaire de l'écoulement de Taylor	31
II.1 Introduction	31
II.2 Démarche de stabilité linéaire	31
II.2.1 Méthode des petites perturbations	32
II.2.2 Forme de la perturbation	35
II.3 Stabilité linéaire en approche inconsistante	38
II.3.1 Equations	38
II.3.2 Problème aux valeurs propres	40
II.3.3 Stabilité de l'écoulement de Taylor plan	40
II.3.4 Stabilité de l'écoulement de Taylor axisymétrique	44
II.3.5 Rôle de la viscosité	47
II.4 Comparaison aux mesures expérimentales	48
II.4.1 Hypothèses	48
II.4.2 En canal rectangulaire	48

II.4.3	En canal axisymétrique	52
II.5	Sur la dépendance vis-à-vis de la formulation de quelques approches non-parallèles . . .	58
II.5.1	Différents choix de formulation	59
II.5.2	Choix des formes de perturbation	59
II.5.3	Application à l'écoulement de Taylor et dépendance de la formulation	60
II.5.4	Conclusion sur la dépendance à la formulation	63
II.6	Sur la stabilité non-parallèle de l'écoulement de Taylor	63
II.6.1	Limites de l'approche inconsistante	63
II.6.2	Traitement de la coordonnée x	64
II.6.3	Conséquences de l'équation d'ordre 0	65
II.6.4	Analyse asymptotique	66
II.6.5	Résultats et discussion	68
II.7	Conclusion sur le non-parallélisme	72
II.8	Comparaison à des simulations numériques	73
II.8.1	Mode d'utilisation de SIERRA	73
II.8.2	Sortie à pression imposée	74
II.8.3	Condition de non-réflexion	78
II.9	Conclusion sur la stabilité linéaire de l'écoulement de Taylor	82
III	Vers un écoulement moyen plus réaliste	83
III.1	Les calculs en configurations LP3d et LP3e	83
III.1.1	Présentation	83
III.1.2	Traitement des fichiers	85
III.1.3	Utilisation de polynômes de Chebichev	85
III.2	Effet de la géométrie interne	85
III.2.1	Comparaison à l'écoulement de Taylor	85
III.2.2	Sens et limites de l'analyse	87
III.2.3	Analyse incompressible des écoulements LP3e et LP3d	87
III.2.4	Stabilité incompressible du LP3d	88
III.2.5	Stabilité incompressible du LP3e	89
III.3	Effet de compressibilité	90
III.4	Effet de l'acoustique sur la stabilité linéaire	91
III.4.1	Modélisation	92
III.4.2	Analyse basée sur la théorie de Floquet	93
III.4.3	Développement asymptotique en amplitude	95
III.4.4	L'approche à haute fréquence	97
III.4.5	Effet de l'acoustique sur l'instabilité pariétale	98
III.4.6	Conclusion sur la prise en compte de l'acoustique dans l'écoulement de base . . .	104
III.5	Les effets instationnaires lents	105
III.6	Conclusion sur la représentativité de l'écoulement de Taylor	106
IV	Effets non-linéaires	107
IV.1	Analyse de stabilité secondaire	108
IV.1.1	Théorie de l'instabilité secondaire	108
IV.1.2	Principe de résolution	110
IV.1.3	Interprétation physique	111
IV.1.4	Mise en œuvre numérique	113
IV.1.5	Application à l'écoulement de Taylor	114
IV.1.6	Résultats de stabilité secondaire sur la courbe neutre primaire	114
IV.1.7	Résultats de stabilité secondaire hors de la courbe neutre primaire	118
IV.2	Systèmes non-linéaires d'amplitude finie	128
IV.2.1	Etats d'équilibre non-linéaires pour un écoulement parallèle	128

IV.2.2	Application à l'écoulement de Taylor	128
IV.2.3	Forme de perturbation à l'ordre principal	129
IV.2.4	Problème non-linéaire aux valeurs propres	130
IV.2.5	Procédure numérique	131
IV.2.6	Validation	132
IV.2.7	Vers un domaine de validité étendu	133
IV.2.8	Limitations numériques	135
IV.2.9	Résultats de l'approche non-linéaire	136
IV.2.10	Comparaison à des simulations numériques	140
IV.2.11	Comparaison aux expériences	146
IV.2.12	Conclusion sur les états d'équilibre	146
IV.3	Stabilité secondaire des états d'équilibre	147
IV.3.1	Principe	147
IV.3.2	Résultats	148
IV.3.3	Conclusion sur la stabilité secondaire des états d'équilibre	150
IV.4	Conclusion sur les effets non-linéaires	150
V	Retour au problème global	153
V.1	Nécessité de coupler acoustique et stabilité	153
V.2	Excitation de l'acoustique	154
V.3	Notions de réceptivité	156
V.3.1	Méthode de Hill [Hil95] par système adjoint pour la couche limite	156
V.3.2	Identification des sources	156
V.3.3	Remarques sur les résultats expérimentaux	160
V.4	Scénario explicatif du comportement de VECLA	161
V.4.1	Proposition de scénario	161
V.4.2	Justifications et quantification	162
V.4.3	Liaison à l'instabilité pariétale	164
V.4.4	Difficulté de la prédiction	169
V.4.5	Critères	170
V.5	Passage au cas axisymétrique	171
V.6	Passage aux essais en gaz chaud et au cas réel	173
V.6.1	Essais en gaz chaud avec chargement régulier : LP9	173
V.6.2	Essais en gaz chaud avec chargement segmenté : LP3-LP6	174
V.6.3	Synthèse des différentes échelles	174
V.7	Conclusion	176
	Synthèse et perspectives	177
	Références	179
A	Acoustique en conduit à parois débitantes	189
A.1	Construction de la solution de Majdalani	189
A.1.1	Système acoustique et système rotationnel	189
A.1.2	Partie principale en onde plane	190
A.1.3	Résolution de la couche limite acoustique	191
A.2	Relations entre analyse acoustique et analyse de stabilité	191
A.3	Solution de Majdalani	192

B	Méthodes de discrétisation employées	195
B.1	Le schéma compact d'ordre 4 de Malik	195
B.2	La méthode de collocation spectrale basée sur les polynômes de Chebichev	197
B.3	Avantages et inconvénients	198
B.3.1	Recherche de spectre	198
B.3.2	Méthode itérative	198
C	Résolution numérique de problèmes linéaires aux valeurs propres	201
C.1	Méthode itérative	201
C.2	Recherche de spectre	202
C.3	Choix de la méthode	203
D	Traitement de l'axe en coordonnées cylindriques	205
D.1	Avec le schéma compact d'ordre 4	206
D.1.1	Principe	206
D.1.2	Equations	207
D.2	Avec la collocation spectrale	208
E	Solution linéaire en série asymptotique divergente	211
E.1	Système de définition de la série	211
E.2	Réordonnement de la série	212
F	Analyse de stabilité compressible	215
F.1	Hypothèses et équations de départ	215
F.2	Méthode des petites perturbations	215
F.3	Réduction à un problème du premier ordre en différenciation	217
F.4	Conditions aux limites	221
F.5	Traitement de l'axe	221
G	Mise en œuvre numérique de la stabilité secondaire	225
G.1	Equations	225
G.2	Remarque sur le non-parallélisme	228
H	Réceptivité par la méthode de Hill	231
H.1	Méthode de Hill par système adjoint pour la couche limite	231
H.2	Modifications pour l'écoulement de Taylor	233
H.3	Cas des rugosités de parois et des défauts d'injection	234
I	Relation de Rossiter	237
I.1	Forme et signification de la relation de Rossiter [Ros64]	237
I.2	Utilisation de la relation dans VECLA	238
J	Le bilan acoustique	241

Introduction

Une innovation importante d'Ariane 5 en comparaison des précédentes versions du lanceur européen réside dans l'utilisation de *moteurs à propergol solide* MPS P230 de très grande taille aussi appelés *étages d'accélération à poudre*. Ces deux moteurs latéraux fournissent l'essentiel de la poussée lors du décollage puis dans les premières minutes du tir, après quoi la propulsion se fait entièrement par combustible liquide comme sur les versions antérieures de la fusée.

L'utilisation de cette technologie répond à un besoin important de puissance pour embarquer des satellites de plus en plus lourds et semble, par son apparente simplicité, assurer une grande fiabilité au lanceur spatial. En effet, le principe de fonctionnement est basé sur la combustion du propergol solide, à la fois combustible et oxydant, produisant un fort volume de gaz ensemencé de gouttes-particules qui, ne pouvant s'échapper du moteur que par la tuyère à l'aval, entraîne la fusée par action-réaction. Il ne pose donc aucun des problèmes complexes d'alimentation des moteurs cryogéniques nécessitant le stockage des ergols et la réalisation au cours du vol du mélange entre oxygène et hydrogène.

Pourtant, des difficultés sont survenues à l'expérience parmi lesquelles subsistent les deux suivantes :

- il se forme à l'aval, autour de la tuyère intégrée, une flaque liquide constituée principalement d'aluminium présent initialement dans le propergol. Or, cette flaque s'échappe par bouffées pouvant atteindre des masses importantes de l'ordre de la centaine de kilogrammes ce qui risque de déstabiliser la fusée.
- on observe, pendant quelques secondes vers la fin du fonctionnement des moteurs P230, des fluctuations de pression de l'ordre de 0.5% (zéro-crête), amplifiées en fluctuations de poussée d'environ 3% par la tuyère, selon un mode acoustique longitudinal des moteurs. Ces oscillations provoquent des vibrations dans la partie haute du lanceur contenant le(s) satellite(s) transporté(s). Afin d'éviter tout risque d'endommagement de ce(s) dernier(s), des dispositifs assouplisseurs (DIAS) sont installés entre le haut de chaque Etage d'Accélération à Poudre et le corps central. Reste le problème de la pénalité en terme de poids des DIAS au détriment de la charge utile.

Ces deux dangers constituent les points de recherche majeurs d'un programme désigné par la suite sous l'acronyme ASSM pour "Aerodynamics of Segmented Solid Motors" conduit et financé par le



FIG. 1 – Ariane 5 au décollage

CNES (Centre National d'Etudes Spatiales) auquel participent de multiples partenaires industriels et laboratoires universitaires et dont la coordination scientifique est assurée par l'ONERA (Office National d'Etudes et de Recherche Aérospatiale).

Les études menées durant cette thèse s'inscrivent dans le cadre du programme ASSM et s'attachent à la deuxième question. En effet, bien que les oscillations ne soient pas jugées critiques pour le fonctionnement du lanceur, la bonne compréhension des mécanismes qui en sont à l'origine ouvrirait la voie pour les atténuer, ou tout du moins les contrôler. Cela pourrait se traduire par un gain, en performances (masse de charge utile) et en marges d'utilisation, jugé significatif.

Un consensus s'est établi pour affirmer que le phénomène d'oscillations observé résulte du couplage d'un mode acoustique longitudinal de la chambre de combustion avec une instabilité hydrodynamique de l'écoulement à l'intérieur du P230. Ici s'arrêtent les certitudes; en effet, plusieurs sources d'instabilités hydrodynamiques coexistent dans les moteurs à propergol solide parmi lesquelles trois sont suspectées d'être à l'origine des oscillations. Cette thèse porte exclusivement sur l'une d'entre elles désignée sous le terme d'"*instabilité pariétale*" dont la mise en cause est la plus récente (1996) mais qui semble actuellement le responsable le plus probable du couplage. C'est ce que rappelle le premier chapitre de ce manuscrit dont le but est de situer l'instabilité pariétale qui constitue l'objet de cette thèse dans le contexte du problème global d'accrochage aéroacoustique rencontré dans les moteurs à propergol solide. Il est important d'insister sur le caractère partiel du problème d'instabilité pariétale traité dans les quatre premiers chapitres par opposition au caractère global de l'accrochage abordé seulement à la fin du manuscrit. Cependant, même si le cadre de la modélisation peut sembler fruste au vu de la complexité du problème réel, les choix effectués qui réduisent l'étude à celle de l'instabilité pariétale sont justifiés dans ce premier chapitre.

La stabilité linéaire de l'écoulement dit "*de Taylor*", modèle très simplifié de l'écoulement en moteur à propergol solide, fait l'objet du deuxième chapitre. On montre que cette solution des équations d'Euler écrites pour un écoulement incompressible en canal régulier semi-infini à paroi débitante développe l'instabilité pariétale mentionnée ci-dessus. Ses caractéristiques, calculées selon une méthode classique, sont présentées tant en configuration plane qu'en configuration axisymétrique et comparées avec plus ou moins de succès aux mesures disponibles issues de divers montages de simulation. On se penche ensuite plus précisément sur une spécificité de l'écoulement de Taylor, son *non-parallélisme*, dont la méthode employée en premier lieu ne rend pas bien compte et on propose diverses approches pour y remédier. L'utilisation d'un code numérique de résolution des équations de Navier-Stokes vient enfin valider les améliorations ainsi apportées.

Dans la partie suivante, on tente de se rapprocher de l'écoulement du problème réel en analysant la stabilité linéaire d'écoulements plus complexes que celui de Taylor, obtenus en relaxant certaines hypothèses de la modélisation effectuée. Ainsi, la stabilité de profils issus de simulations numériques est calculée afin de prendre en compte l'*effet des irrégularités de la géométrie interne* de la chambre de combustion et celui de la *compressibilité* de l'écoulement. L'*effet d'ondes acoustiques* est aussi estimé afin de justifier la validité des approches précédentes lors de l'accrochage aéroacoustique, de même que l'effet de la modification continue de la géométrie due à la régression du propergol au cours de sa combustion.

Les niveaux théoriques d'amplification de l'instabilité pariétale ainsi que les observations expérimentales indiquent cependant que les hypothèses de linéarités qui supposent des instabilités de faible amplitude ne demeurent pas valables sur toute la longueur des chambres de combustion ou des montages les simulant. Il faut donc recourir à de nouvelles théories visant à prévoir l'*évolution non-linéaire* des fluctuations. Deux d'entre elles sont mises en œuvre au quatrième chapitre correspondant à deux évolutions possibles: d'abord la théorie de la *stabilité secondaire* qui permet de détecter une éventuelle *tridimensionnalisation* des instabilités puis une recherche d'*états d'équilibre* de systèmes d'ondes bidimensionnelles potentiellement représentatifs de phénomènes de *saturation*.

Le dernier chapitre tente un retour au problème de l'accrochage aéroacoustique à partir de l'instabilité pariétale. Le phénomène global met en jeu les deux champs fluctuants, *acoustique* (présenté

en annexe d'après des travaux d'acousticiens) et de *stabilité hydrodynamique* (étudié aux précédents chapitres), ainsi que les deux *interactions* de l'un sur l'autre. Les grands traits de ces interactions sont brossés à l'aide de résultats de la littérature et d'une théorie de *réceptivité* dont on donne les implications qualitatives. Tous les éléments du problème ayant été abordés, un *scénario explicatif* du comportement complexe d'un montage de simulation en veine rectangulaire est proposé et quantifié dont le mécanisme principal est l'instabilité pariétale. Malheureusement, il ne se révèle ni prédictif ni entièrement extrapolable en configuration réelle car basé sur de nombreuses expériences irréalisables dans ce dernier cas. On s'en sert néanmoins pour synthétiser les résultats disponibles dans les diverses situations testées par ordre de complexité croissante jusqu'aux essais du P230.



Chapitre I

Du problème complet à l'instabilité pariétale

I.1 Le moteur à propergol solide P230

Les moteurs à propergol solide, ou étages d'accélération à poudre, d'Ariane 5 sont les deux cylindres fixés sur les côtés du corps central de la fusée qui lui donnent une allure si différente des précédentes évolutions du lanceur Ariane (voir figure I.1). D'une hauteur de plus de 30 m et d'un diamètre de plus de 3 m, ils contiennent chacun environ 230 tonnes de propergol, d'où leur nom P230. Ils assurent l'essentiel de la poussée (plus de 90%) lors du décollage jusqu'à une altitude de 60 km où la combustion s'achève après environ deux minutes. Ils sont alors éjectés du corps central et retombent dans l'océan. La poussée est ensuite assurée par le moteur à hydrogène liquide/oxygène liquide Vulcain.

Le P230 se compose principalement d'un chargement de propergol solide cylindrique creux, comme indiqué en figure I.2, et d'une tuyère intégrée par où sont éjectés les produits de combustion. La tuyère est dite "intégrée" au sens où sa jonction à la structure du moteur est réalisée à l'intérieur de la chambre de combustion comme on peut le voir sur le schéma I.4. Le propergol se consume, à une vitesse de l'ordre de 7.4 mm/s , sur la surface cylindrique intérieure dont le rayon croît au cours du temps jusqu'à atteindre celui de la structure lorsque tout le combustible a brûlé. Pour des raisons techniques, il n'est pas possible de fabriquer un seul bloc de propergol de la taille du P230, aussi le chargement se compose-t-il de trois segments mesurant (du segment amont au segment aval) 3.5, 10.2 et 11.1 m de long. Afin que le propergol ne se consume que sur sa surface interne des protections thermiques sont collées sur les faces amont de chaque bloc.

Le propergol solide se compose de combustible et d'oxydant mélangés de façon mécanique et moulés en chargements solides stables à température ambiante. Le combustible est de la poudre d'aluminium et l'oxydant du perchlorate d'ammonium (NH_4ClO_4), un liant donne sa cohésion au mélange

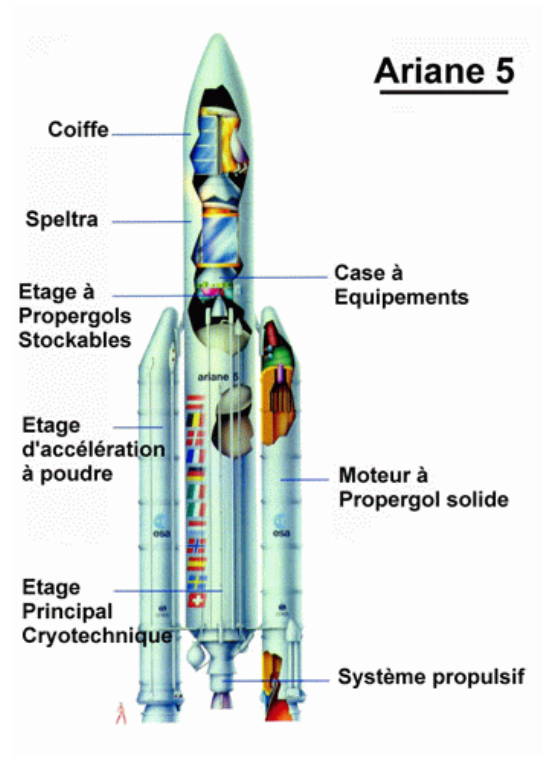


FIG. I.1 – Schéma du lanceur Ariane 5.

tout en servant également de combustible, dans Ariane 5, c'est du HTPB (hydroxy-terminated polybutadiène). Divers additifs permettent de régler les paramètres physiques (vitesse de combustion...), mécaniques (plasticité des segments...) ou d'améliorer la conservation durant le stockage (absorption de l'humidité)...

La combustion se produit essentiellement à la surface du propergol qui régresse régulièrement avec le temps, mais des gouttes d'aluminium éjectées de la paroi se consomment aussi dans l'ensemble du volume fluide de l'écoulement.

Les avantages de la propulsion par propergol solide résident dans une moindre complexité par rapport aux systèmes cryotechniques comme le moteur Vulcain, associée à un coût inférieur pour des performances comparables en terme d'impulsion spécifique (poussée par unité de masse de combustible) et de domaine de poussée. Ses inconvénients proviennent de l'impossibilité de contrôler la combustion une fois le moteur allumé. Le moteur brûle jusqu'à épuisement du propergol sans qu'un rallumage soit envisageable et la poussée délivrée au cours du temps n'est fonction que de paramètres définis avant le décollage (géométrie du chargement, composition du propergol), elle ne peut donc pas être pilotée durant le vol.

De ce fait, ce type de propulsion est particulièrement adapté pour fournir la poussée nécessaire au décollage mais ne peut remplacer l'étage principal cryotechnique lors des phases demandant un contrôle précis.

Le P230 constitue une évolution technologique importante puisque sa masse est près de dix fois supérieure à celle des précédents moteurs à propergol solide européens. Les seuls engins comparables sont ceux qui permettent le décollage de la navette spatiale américaine et du lanceur lourd Titan IV.

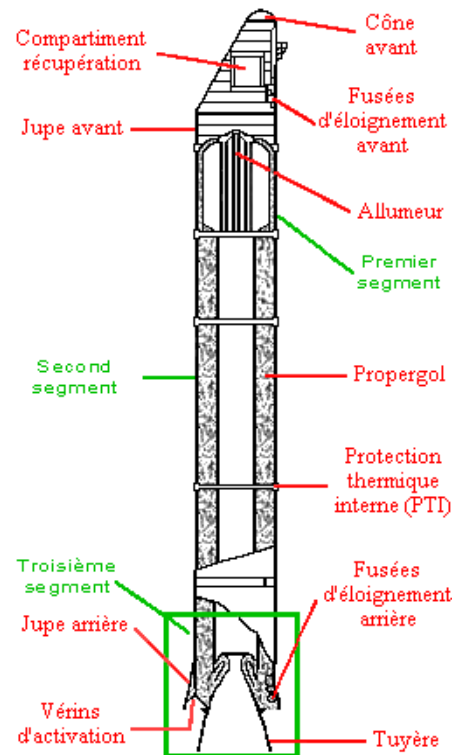


FIG. I.2 – Schéma du moteur à propergol solide P230.

MPS P230 (chacun)	
Dimensions	
Longueur	31.6 m
Diamètre	3.05 m
Masse	
Masse de propergol	237.7 t
Masse inerte	39.8 t
Propulsion	
Blocs de propergol	3
Poussée moyenne	5000 kN
Impulsion spécifique	275 s
Pression interne	61×10^5 Pa
Durée de combustion	129 s
Altitude de largage	60 km

TAB. I.1 – Caractéristiques du moteur à propergol solide P230

Malheureusement, ils constituent une masse supplémentaire qui se révélerait superflue si les

Ces différents moteurs à propergol solide présentent tous un même défaut qui fait l'objet, très en amont, de ce manuscrit : des oscillations des premiers modes acoustiques longitudinaux se produisent durant quelques secondes lors des tirs. Le tableau I.2, tiré de Dotson *et al.* [DKP97], donne les caractéristiques des oscillations mesurées.

On constate que les oscillations de pression sont amplifiées par la tuyère en oscillations de poussée environ dix fois plus élevées. Heureusement, l'amplitude de celles-ci reste faible et ne met pas le lanceur en péril; néanmoins sur Ariane 5, elles risqueraient d'endommager les satellites placés dans la coiffe. Des systèmes d'amortissement sont prévus à cet effet, les dispositifs assouplisseurs DIAS qui relient le haut de chaque étage d'accélération à poudre au corps central et permettent d'amortir le choc de leur allumage et les vibrations du moteur.

oscillations des moteurs étaient maîtrisées.

Par ailleurs, les basses fréquences générées sont proches de certains modes de structure et doivent donc être surveillées même si un tel couplage n'est jamais survenu jusqu'ici.

Moteur à propergol solide	Long. [m]	Diam. [m]	Nb. seg.	Durée comb. [s]	n° mode acoustq. excité	Max. oscill. de pression (0-crête) [kPa]	Max. oscill. de pression /press. moy. [%]	Instants du max. [s]	Max. oscill. de poussée /pous. moy. [%]
SRMU (TitanIV)	34.3	3.2	3	138	1	16.2	0.27	57-64	1.5-2
SRB (Navette)	45.5	3.8	4	123	1	-	0.25	70-75	-
P230 (Ariane 5)	31.2	3.0	3	123	1	25.5	0.5	90-95	2-4
					2	-	0.2	65-70	-

TAB. I.2 – *Comparaison des oscillations dans les grands moteurs à propergol solide : longueur, diamètre, nombre de segments de propergol, durée de combustion, numéro des modes acoustiques longitudinaux excités, maximum d'oscillation de pression (0-crête), maximum d'oscillation de pression sur pression moyenne, instants d'occurrence du maximum, maximum d'oscillation de poussée sur poussée moyenne. D'après Dotson et al. [DKP97]*

Toute la problématique consiste donc à comprendre l'origine des oscillations observées en vue d'un éventuel contrôle ou tout du moins d'une prévision fiable.

I.2 Mesures sur le MPS P230 et à échelle réduite

I.2.1 Difficulté de la mesure et de son interprétation

Un des principaux problèmes de l'étude de l'écoulement des moteurs à propergol solide est la difficulté d'effectuer des mesures à l'intérieur du domaine fluide. En effet, l'environnement y est particulièrement agressif avec des températures de l'ordre de 3000K, des pressions de l'ordre de 50 bars, des produits très réactifs et des particules en combustion. De ce fait, les seules mesures disponibles pour caractériser l'écoulement interne sont des mesures de pressions situées sur des parois inertes des moteurs. En pratique, les seules données expérimentales portant sur les fluctuations sont la pression au fond avant et la pression au fond arrière.

Or, sans risque de se tromper, on peut dire que ces deux grandeurs résultent de plusieurs phénomènes en interaction les uns avec les autres et qu'une prédiction précise nécessite au moins la compréhension et la quantification de chacun d'eux pris séparément.

Malheureusement, il n'est pas possible de séparer les contributions de chacun ce qui complique singulièrement la validation de modèles donnant des informations partielles et non globales telles que les théories de stabilité présentées dans la suite.

I.2.2 Mise en évidence de l'accrochage aéroacoustique

En analysant les spectres de pression obtenus à partir des signaux temporels du tir d'un moteur à propergol solide, on observe que l'énergie des fluctuations se concentre principalement autour des fréquences des modes acoustiques longitudinaux. Par exemple, dans la figure I.3, on voit les trois premiers modes acoustiques du moteur P230 d'Ariane 5 (à gauche) et les quatre premiers du moteur LP6 simulant le P230 à l'échelle 1/15^e (à droite). Or, l'énergie contenue autour du premier ou du deuxième mode longitudinal (respectivement dénommés par la suite 1L et 2L) présente au cours du tir des maxima dont l'amplitude est nuisible au fonctionnement optimal du lanceur spatial. En regardant attentivement les instants correspondant à ces maxima, on constate qu'au lieu de rester

fixe à la valeur de la fréquence acoustique, la fréquence d'amplitude maximale subit des périodes de glissement entrecoupées de sauts (sur la figure I.3, on peut compter trois périodes de glissement et deux sauts pour le mode 1L), c'est-à-dire une évolution monotone et lente vers des fréquences plus faibles entrecoupées de discontinuités au cours desquelles la fréquence remonte.

Ce type de comportement est caractéristique d'un phénomène d'accrochage aéroacoustique. Il indique qu'une source d'instabilité dont la fréquence évolue dans le temps entre en interaction avec l'acoustique de cavité de fréquence constante au cours du temps.

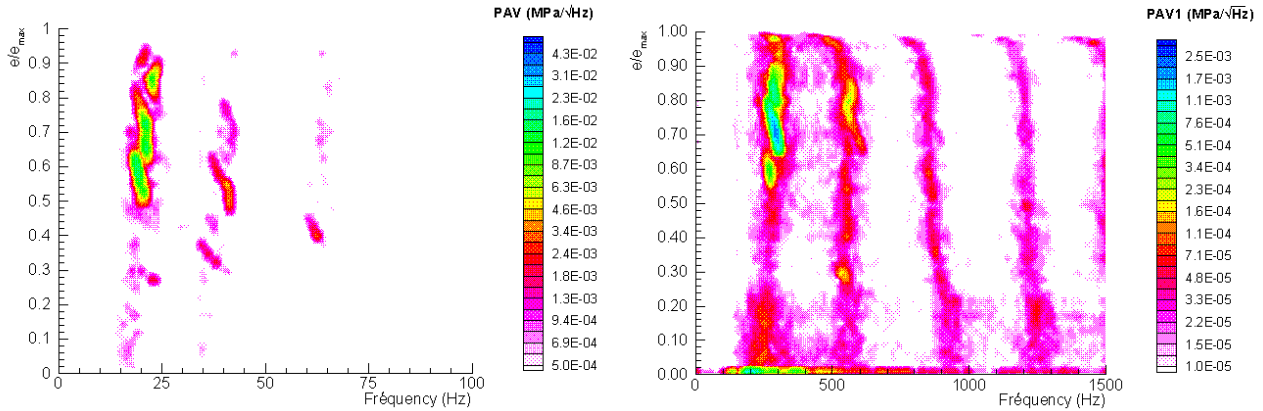


FIG. I.3 – Evolution des densités spectrales de puissance de la pression instationnaire au fond avant de deux moteurs à propergol solide : le P230 à gauche et le LP6 (échelle 1/15 du P230) à droite. Le paramètre en ordonnée est le rapport du rayon fluide instantané au rayon fluide maximal qui croît avec le temps. Les figures donnent donc l'évolution des spectres de pression au cours du tir (de bas en haut).

La question qui se pose alors est la suivante : *quel type d'instabilité est à l'origine de l'accrochage aéroacoustique ?*

La réponse à cette question n'est à ce jour pas tranchée et plusieurs voies sont explorées qui vont être mentionnées ci-dessous.

Signalons cependant qu'il n'est pas sûr qu'une seule instabilité soit à l'œuvre car même si des accrochages ont pu être observés sur des essais à échelle réduite avec certaines des instabilités qui vont être présentées, leur faible amplitude ne semble pas pouvoir expliquer les niveaux obtenus à l'échelle 1. Ceci laisse supposer soit qu'il existe des phénomènes amplificateurs spécifiques mal simulés, soit qu'un couplage se produit entre les instabilités qui vient renforcer leur niveau. En effet, le propergol n'est pas mis à l'échelle au sens où les particules d'aluminium qu'il contient sont soit supprimées, soit de même taille que dans le P230. Or, Lupoglazoff *et al.* [LVDF00] montrent que la combustion distribuée de ces particules joue un rôle crucial sur les niveaux d'oscillation et sur le couplage de deux instabilités hydrodynamiques parmi les trois qui vont être distinguées plus loin.

I.3 Sources d'énergie acoustique

I.3.1 Instabilités de combustion

Les sources d'excitation acoustique les mieux connues dans les moteurs à propergol solide sont les instabilités de combustion.

Les paramètres de la combustion sont liés aux caractéristiques du fluide environnant, et en particulier à la pression. Des fluctuations du champ hydrodynamique entraînent donc des fluctuations des taux de combustion qui, sous certaines conditions de phase, peuvent amplifier les premières en retour. Un tel couplage est possible soit sur une surface comme celle du propergol encore imbrûlé, soit en

volume à cause de la combustion distribuée dans l'écoulement des gouttelettes d'aluminium.

Cependant, la bonne connaissance de ce type d'instabilité a permis de les exclure au profit des instabilités d'origine purement hydrodynamique.

I.3.2 Le détachement tourbillonnaire

Les premières hypothèses sur l'importance de l'excitation de l'acoustique par un détachement tourbillonnaire dans les moteurs à propergol solide ont été émises en 1973 par Flandro et Jacobs [FJ73].

Depuis lors, trois instabilités hydrodynamiques (décrites ci-après) se sont révélées susceptibles de produire l'accrochage aéroacoustique. Toutes trois ne mettent en jeu que des mécanismes d'origine purement hydrodynamique c'est-à-dire indépendants des caractéristiques thermiques, chimiques ou multiphasiques de l'écoulement. Mais attention, ceci ne signifie pas que l'étude quantitative des instabilités en question soit indépendante de ces paramètres mais seulement que l'étude qualitative peut être menée en les négligeant.

On verra au chapitre III que les effets thermiques ou de compressibilité peuvent *a priori* raisonnablement être négligés. Par contre, l'effet de la présence de plusieurs phases avec des particules en combustion dans l'écoulement même semble devoir jouer un rôle quantitatif non-négligeable. Pour un complément d'information sur ce sujet, on pourra se reporter aux considérations théoriques et numériques de Goncalves [Gon00] ou à l'étude de stabilité diphasique d'Isakov et Rudnyak [IR95] (sur un écoulement de Poiseuille) ou à celle de Feraille [Fer01] (sur un écoulement plus représentatif du P230).

I.3.3 Conséquence sur la simulation expérimentale

Une conséquence importante du mécanisme purement hydrodynamique est que des expérimentations peuvent être conduites sur des montages dits "en gaz froid" qui simulent la combustion du propergol par l'injection d'un gaz au travers de parois poreuses. Plus précisément, des montages différents peuvent être employés afin de découpler les phénomènes et d'étudier séparément ou non chaque instabilité. On verra ainsi que, dans le cadre du programme ASSM, des installations différentes ont été mises sur pied afin d'étudier chacune des trois instabilités suspectées à ce jour.

L'intérêt scientifique de tels montages est évident puisque, fonctionnant à température ambiante dans un milieu chimiquement neutre, ils peuvent être instrumentés de façon beaucoup plus simple et plus complète donnant ainsi accès, en principe, à l'ensemble du champ hydrodynamique alors que les tirs en gaz chaud ne fournissent que quelques mesures de pression.

Par ailleurs, ils sont nettement plus modulables et permettent de faire varier certains paramètres importants difficilement réglables en gaz chaud. Enfin, le coût financier de leur exploitation est faible en regard des prix élevés du propergol.

I.4 Trois instabilités hydrodynamiques suspectées

Le schéma I.4 représente de façon très simplifiée un moteur à propergol solide avec les principales particularités géométriques du chargement à savoir :

- un angle au point C, destiné à permettre l'intégration de la tuyère, dont les deux faces amont et aval sont constituées de propergol et sont donc débitantes.
- un obstacle inerte qui devient pénétrant lors de la régression du propergol, la protection thermique PT, situé sur la face amont du bloc de propergol suivant l'intersegment et destiné à l'empêcher de se consumer par l'avant.

L'allure de la géométrie suggère la possibilité de trois instabilités hydrodynamiques.

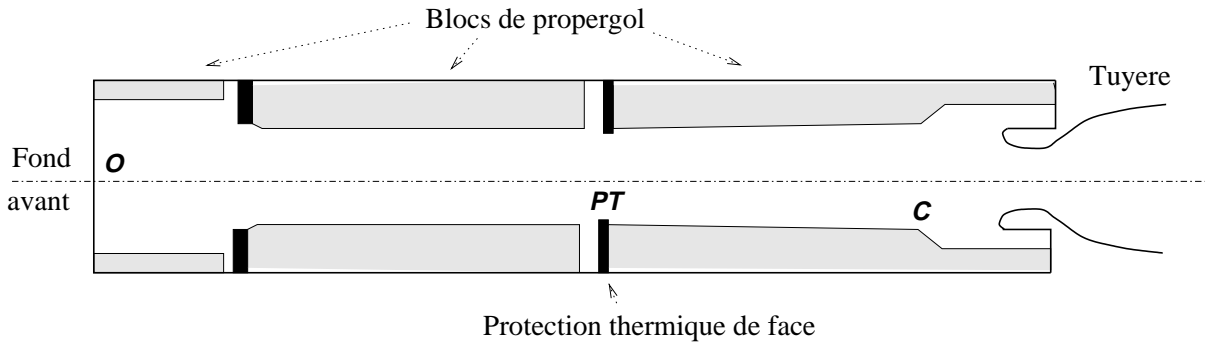


FIG. I.4 – Représentation schématique des particularités géométriques du moteur MPS P230. Attention, la figure n'est pas à l'échelle.

I.4.1 Instabilité d'angle au point C

L'angle du propergol au point C crée une couche cisailée avec un profil inflexionnel de vitesse axiale. Comme on sait par expérience que ce type de profil est couramment instable, l'idée d'étudier en détail cette zone de l'écoulement s'est naturellement imposée très tôt.

Flandro [Fla86] propose en 1986 un scénario d'accrochage dont la source d'instationnarité est une instabilité due à une couche cisailée créée par l'angle du propergol au point C qui provoque l'apparition de structures tourbillonnaires. Ces structures impactent la tuyère intégrée et émettent de ce fait une onde acoustique qui à son tour vient exciter la couche cisailée. La connaissance de la longueur d'onde de l'instabilité lui permet alors d'aboutir à une relation de phase et d'amplitude, fonction de la distance du point d'émission tourbillonnaire à la surface d'impact, entre l'instabilité et l'acoustique.

Dans le cadre du programme ASSM, plusieurs installations expérimentales ont été construites afin d'étudier précisément cette instabilité. De ce fait, leurs caractéristiques géométriques ne sont pas exactement celles des moteurs réels afin d'isoler le phénomène intéressant :

- le montage VIOLETTE (pour Vortex Internal Organisation Leading to Experimental Turbulent Trajectory Evaluation) à l'ONERA dont un schéma est présenté en figure I.5. Il s'agit d'un montage axisymétrique constitué d'un tube poreux augmenté d'une partie tronconique poreuse, représentative de l'angle au point C du cas réel, raccordée à un tube non-débitant en plexiglas terminé par une tuyère. De l'air ambiant est entraîné au travers du tube poreux par aspiration au niveau de la tuyère aval. Dédié à l'étude de la dispersion des particules par les structures issues de l'angle, le montage est équipé d'un hublot dans la partie en plexiglas qui permet des visualisations.

L'accrochage aéroacoustique a pu être mis en évidence mais son amplitude est demeurée très faible. Des résultats expérimentaux détaillés sur VIOLETTE ainsi que des simulations numériques diphasiques peuvent être trouvées dans la thèse de Goncalves [Gon00] en 2000.

- les cas tests C1 à l'ONERA. Ce sont des tirs de moteurs à propergol solide de géométrie axisymétrique simplifiée conçus pour permettre l'accrochage selon le scénario de Flandro et qui produisent effectivement ce phénomène. Ils servent de référence pour évaluer la capacité des codes de calculs à capter le phénomène d'accrochage provoqué par l'instabilité d'angle. Méthodes expérimentales, résultats et calculs numériques sont fournis de manière détaillée dans la thèse de Dupays [Dup96] en 1996.
- une maquette originale à l'ESPCI (Ecole Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles) schématisée en figure I.6. Elle est de type bidimensionnelle plane avec une section horizontale comparable aux sections radiales des deux montages précédents. L'écoulement y est créé par injection d'eau au travers d'un réservoir de billes de 3 mm dans un canal noyé. L'exploitation de cette maquette a fait l'objet de la thèse de Favray [Fav99] en 1999.

Signalons enfin l'existence d'un article de Vuillot [Vui95] en 1995 qui reprend la théorie de Flandro

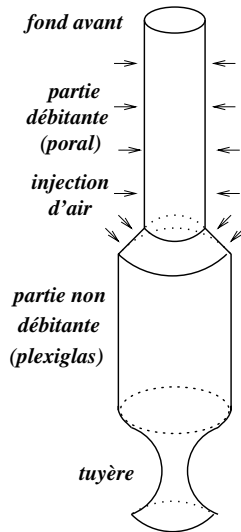


FIG. I.5 – Schéma du montage VIO-LETTE.

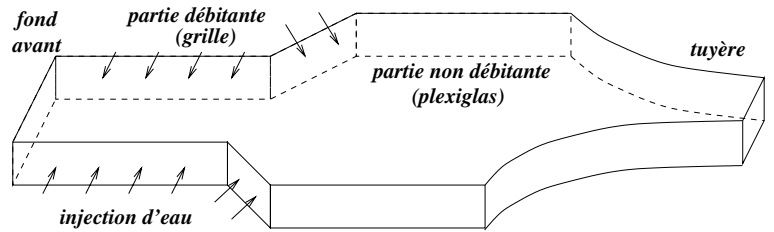


FIG. I.6 – Schéma du montage de l'ESPCI.

à la lumière de l'expérience acquise au cours des premières années du programme ASSM.

I.4.2 Instabilité d'obstacle pénétrant au point PT

La protection thermique indiquée sur le schéma I.4 est elle aussi à l'origine d'une couche cisailée associée à un profil de vitesse inflexionnel. Or dans le cas d'un écoulement axial, la configuration avec deux diaphragmes est l'un des systèmes auto-entretenus proposés par Rockwell et Naudascher [RN79] et Rockwell [Roc83].

Les moteurs à propergol solide de grande taille sont généralement constitués de plus de segments que le P230 d'Ariane 5, ils présentent donc une série de protections thermiques qui jouent le rôle de diaphragmes régulièrement espacés. Comme les prédictions standards de stabilité¹, présentées en annexe J, se révélaient inexactes, ces protections thermiques ont rapidement été incriminées.

Citons en particulier l'article de Brown *et al.* [BDYW81] en 1980 qui consigne des résultats de tirs de moteurs de fusée Titan à échelle 1/6.55. Ces moteurs comptent cinq segments et subissent l'accrochage aéroacoustique alors qu'ils sont prédits stables par les méthodes standards. Brown *et al.* [BDYW81] concluent de leurs mesures que la présence des protections thermiques constitue une source importante d'énergie acoustique et donnent une explication qualitative des écarts entre théorie et expérience.

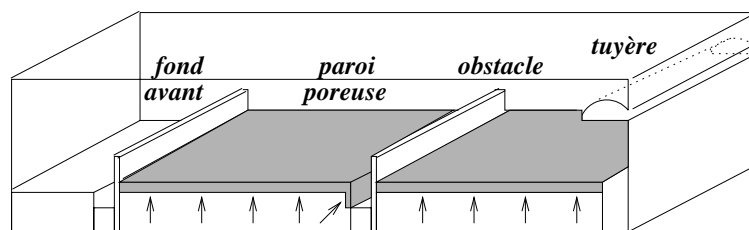


FIG. I.7 – Schéma du montage MICAT.

1. Attention, ces méthodes reposent sur le bilan des apports et des pertes d'énergie de chaque mode acoustique et sont foncièrement différentes des analyses de stabilité du champ hydrodynamique qui seront menées par la suite.

Des expériences en gaz froid ont aussi été mises sur pied dans le cadre du programme ASSM :

- le montage MICAT, schématisé en figure I.7 à l'ENSMA (Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique) est une veine rectangulaire comprenant une paroi poreuse par laquelle de l'air est soufflé avec un obstacle pénétrant à mi-veine et une paroi opposée lisse. Il a été conçu afin d'étudier à la fois les résonances pouvant résulter de l'instabilité derrière l'obstacle et le couplage avec l'instabilité pariétale présentée ci-dessous. Le montage et ses objectifs font l'objet d'un article de Couton *et al.* [CPDK96] et une première série de mesures sont rapportées par Doan-Kim *et al.* dans la référence [DKVPC99].
- un montage axisymétrique en gaz froid au VKI (Von Karman Institute) formé d'un tube poreux dans lequel un diaphragme peut être inséré. Deux versions ont été testées, dans un cas l'écoulement est axial avec des parois latérales non-débitantes, dans l'autre, l'écoulement est créé par injection par les parois latérales poreuses. Des différences importantes ont été obtenues selon que l'injection était axiale ou radiale, preuves de la spécificité des moteurs à propergol solide par rapport aux cas de Rockwell [Roc83].

Une étude particulièrement intéressante a aussi été menée sur la forme et surtout le volume de la cavité de la tuyère intégrée. Antoine *et al.* [ABG00] montrent expérimentalement et numériquement la sensibilité de l'amplitude de la résonance acoustique vis-à-vis du volume de cette cavité.

Les nombreux résultats d'exploitation sont consignés dans la thèse d'Antoine [Ant00].

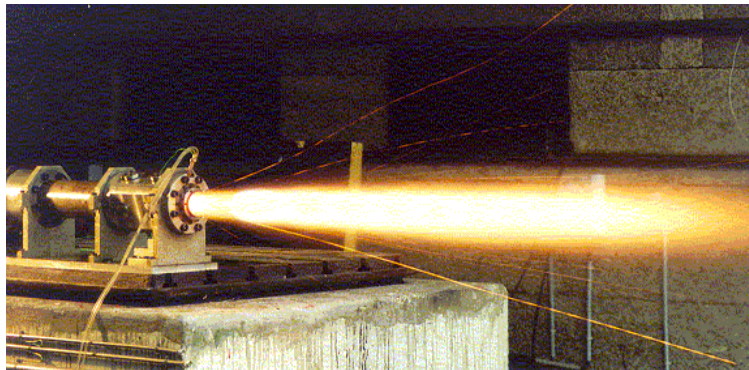


FIG. I.8 – Moteur LP10 au banc d'essai (échelle 1/35^e du P230) au centre du Fauga-Mauzac de l'ONERA.

- des séries de moteurs à échelle réduite 1/15^e ou 1/35^e ont été tirées à l'ONERA, voir figures I.8 et I.9. Toutes sortes de matériaux et de formes de protections thermiques (PT) ont été testées. En effet, la question de l'état de la PT (rigide, déformable et oscillante, ou érodée) et de son allure (courbée ou droite) n'est actuellement pas tranchée alors qu'elle joue un rôle prépondérant dans l'estimation quantitative du détachement tourbillonnaire qui en est issu.

On peut enfin mentionner une étude de stabilité linéaire à l'aval du diaphragme de Casalis [Cas00] appliquée à un écoulement numérique simulant la maquette du VKI dans des configurations testées expérimentalement.

I.4.3 Instabilité pariétale

Le candidat le plus récemment découvert à la déstabilisation des moteurs à propergol solide est l'instabilité pariétale. Cette instabilité n'ayant pas pour origine une couche fortement cisillée mais seulement la courbure des lignes de courant, elle a souvent été intuitivement et faussement jugée comme un mécanisme faible.

Pourtant, sa découverte remonte à Varapaev et Yagodkin [VY69] en 1969. A l'époque, l'article des deux russes ne semble pas attirer l'attention. Tout au plus, l'instabilité est considérée comme un

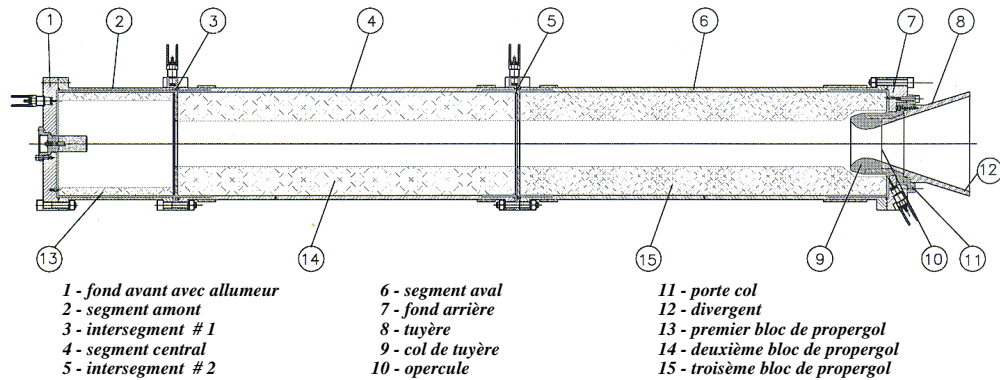


FIG. I.9 – Schéma du moteur LP3 (échelle 1/15^e du P230). Tiré de Prévost et al. [PDM⁺ 00].

précurseur à la turbulence comme par exemple chez Beddini [Bed85] en 1985. Ce sont Lupoglazoff et Vuillot [LV96b] qui mettent en lumière un phénomène de "détachement tourbillonnaire pariétal" susceptible de provoquer la résonance acoustique. Cette découverte est obtenue par simulation numérique mais elle est rapidement reliée à l'instabilité de Varapaev et Yagodkin. La dénomination utilisée vient de ce que la vorticité instationnaire s'organise en structures qui semblent émerger de la paroi lors des simulations comme on le voit sur la figure I.10.

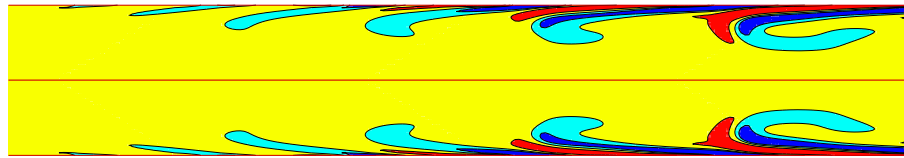


FIG. I.10 – Champ de vorticité instationnaire liée à l'instabilité pariétale. Ce type de simulations numériques justifie la dénomination de cette dernière.

Les montages ayant une géométrie parfaitement régulière permettent tous d'étudier ce phénomène. Cependant, seuls quelques-uns ont été exploités spécifiquement à cette fin. Les autres ne servent qu'à la détermination de l'écoulement moyen et de la transition à la turbulence tels que ceux décrits par Olson et Eckert [OE66], Huesmann et Eckert [HE68], Raithby et Knudsen [RK74], Yamada *et al.* [YGI76], Traineau *et al.* [THK86].

Parmi les montages utilisés ou utilisables pour vérifier le rôle de l'instabilité pariétale dans l'ac-crochage aéroacoustique on peut citer :

- une série de cylindres de divers diamètres (30 à 90 mm), longueurs (jusqu'à 1 m) et matériaux (graphite, métal, céramique) utilisés par Yagodkin [Yag67] dès 1967. L'instrumentation est faible mais compensée par la variété des configurations, et les observations, très instructives, sont guidées par des principes de stabilité. Yagodkin met ainsi en évidence l'instabilité de l'écoulement et propose même une courbe d'évolution de l'abscisse critique de l'écoulement (où celui-ci devient instable) en fonction de \mathcal{R}_{inj} , nombre de Reynolds basé sur la vitesse d'injection. Malheureusement, les nombres de Reynolds considérés (100 à 350) sont très faibles par rapport à ceux des moteurs à propergol solide. Signalons enfin que Yagodkin [Yag67] commente des visualisations en combustion obtenues par injection pariétale d'un mélange propane-air, expérience unique à notre connaissance. Cependant, Yagodkin ne fait pas mention de phénomène

d'accrochage aéroacoustique dans la référence [Yag67].

- un montage axisymétrique américain à la Chemical Systems Division de la United Technologies Corporation. Prévu initialement pour l'étude de la couche limite acoustique, voir Schaeffer et Brown [SB92], il a aussi produit les premiers résultats expérimentaux montrant des spectres d'instabilité dans ce type d'écoulement. L'article de Dunlap *et al.* [DBW⁺90] en 1990 donne quelques-unes des rares mesures disponibles permettant des comparaisons avec les théories de stabilité.
- le montage du VKI déjà mentionné qui a été utilisé sans diaphragme. Ces résultats peuvent à nouveau être trouvés chez Antoine [Ant00].
- des essais en gaz chaud à l'ONERA de la série LP9 ("Laboratoire Propulsion numéro 9"). Conçus spécialement comme "démonstrateurs du détachement tourbillonnaire pariétal", ces moteurs à l'échelle 1/35 par rapport au P230 ont un chargement parfaitement régulier, cylindrique du fond avant jusqu'à la tuyère. Ils présentent comme escompté un accrochage aéroacoustique (de faible amplitude) du même type que celui des autres moteurs à propergol solide ce qui confirme l'efficacité du phénomène en tant que source d'énergie acoustique. L'analyse des résultats de la campagne est consignée dans un rapport de Prévost *et al.* [PMP00] de 2000.

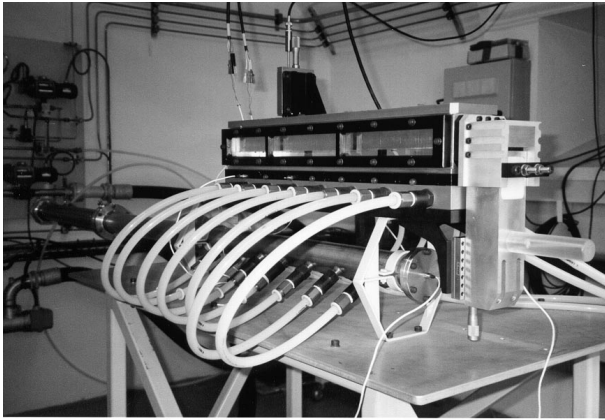


FIG. I.11 – *Le montage VECLA*

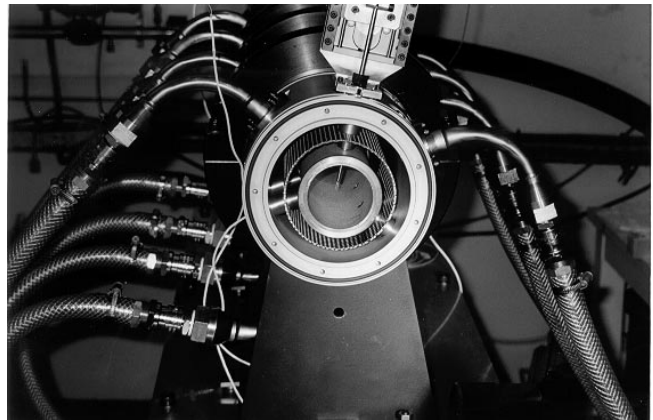


FIG. I.12 – *Le montage VALDO*

- le très récent montage VALDO (pour Veine Axisymétrique pour Limiter le Développement des Oscillations), axisymétrique comme son nom l'indique. La photographie I.12 montre l'extrémité d'un des quatre modules accolés formant VALDO avec les tubes d'alimentation d'air, des plaques perforées à l'intérieur des préchambres et le cylindre poreux au centre. L'accrochage aéroacoustique y est aussi observé comme le montrent les premiers résultats contenus dans un rapport d'Avalon [AL00].
- le canal à section rectangulaire VECLA (pour Veine d'Essai de la Couche Limite Acoustique) photographié en figure I.11. Il a fait l'objet d'une exploitation très complète fournissant de nombreux résultats en raison des multiples configurations de veine utilisables. Par ailleurs, la variété des comportements observés d'une configuration à l'autre ainsi que sa qualité de seul montage ayant permis une réelle validation de la théorie de stabilité linéaire liée à l'instabilité pariétale justifient qu'on lui consacre la section suivante. Son exploitation a été assurée par Avalon et Ugurtas, elle fait l'objet des références [Ava94], [Ava97], [ACG98], [Ava99], [UAL⁺00], [VCAL99], [AUGB00], [GCA⁺00] et [Ugu00]

I.5 Objectif de la thèse

Expérimentalement, *les trois instabilités suspectées ont donc prouvé leur capacité à entraîner l'accrochage aéroacoustique* avec un ou plusieurs des premiers modes acoustiques longitudinaux tant lors de simulations à froid, voir Favray [Fav99], Antoine [Ant00] et Avalon *et al.* [AUGB00], que lors

de tirs en gaz chaud à échelle réduite, voir Dupays [Dup96], Brown *et al.* [BDYW81], Prévost *et al.* [PMP00]. Cependant, les niveaux d'oscillation atteints lors de ces essais restent d'une amplitude relative faible comparée à celle observée à l'échelle 1 sans qu'une explication convaincante à cet écart ait été avancée.

Bien que les trois mécanismes soient potentiellement responsables des oscillations observées, il est probable que seul l'un d'entre eux pilote l'accrochage. En effet, une condition *a priori* nécessaire d'accrochage est la coïncidence de la fréquence associée au mode hydrodynamique et de celle associée au mode acoustique longitudinal. Il faudrait donc connaître dans le cas réel la fréquence associée à chacune des trois instabilités à chaque instant du tir. Sachant à quels instants les oscillations sont les plus fortes, on pourrait alors déterminer quelle instabilité "croise" la fréquence acoustique à ces instants.

Une telle démarche nécessite cependant une compréhension approfondie des trois instabilités mises en jeu. *L'objectif de cette thèse est de contribuer à l'amélioration de cette compréhension dans le seul cas de l'instabilité pariétale.* Cela signifie qu'on étudie essentiellement dans ce manuscrit la stabilité intrinsèque des écoulements induits par injection pariétale dans des canaux réguliers en l'absence d'acoustique. Lorsqu'on prendra en compte les irrégularités de la géométrie ou l'influence de l'acoustique, on se focalisera sur leur effet sur l'instabilité pariétale et non pas sur les instabilités inhérentes à ces modifications.

L'outil principal de cette étude est *la théorie de la stabilité* (linéaire et non-linéaire, parallèle et non-parallèle) mais on fait aussi appel à la simulation numérique des équations de Navier-Stokes et, surtout, on se laisse guider dans la modélisation par les résultats expérimentaux fournis par divers montages.

Afin d'introduire un peu plus précisément l'étude et sa finalité par le biais d'observations, on va d'abord présenter le montage VECLA dont l'exploitation est assurée par G. Avalon de l'ONERA à qui on doit les résultats utilisés dans ce manuscrit. On va ensuite introduire les solutions stationnaires qui serviront d'écoulement de base par la suite. Tout sera alors prêt pour l'étude des champs fluctuants qui sera menée dans les chapitres suivants.

I.6 Le montage VECLA

Le montage VECLA (pour Veine d'Essai de la Couche Limite Acoustique) consiste en une veine d'essai de section rectangulaire alimentée en air ambiant injecté au travers d'une paroi poreuse. Il est conçu pour simuler le fonctionnement instationnaire du P230 au sens des hypothèses successivement introduites, à savoir :

1. la part du fonctionnement qu'on désire mieux comprendre est l'accrochage aéroacoustique,
2. son origine est purement hydrodynamique et ne repose ni sur les caractéristiques thermiques ni sur les caractéristiques multiphasiques ou réactives du moteur, ce qui permet de modéliser la combustion du propergol par une injection d'air ambiant,
3. son origine est l'instabilité pariétale, ce qui permet de se contenter d'une géométrie régulière.

Rappelons qu'il ne s'agit là que d'hypothèses qui ne font pas l'unanimité dans la communauté scientifique mais qui sous-tendent l'ensemble du travail de cette thèse puisqu'elles lui donnent son sens.

Une fois ces hypothèses admises, ce qui revient à modéliser le problème initial, VECLA est représentatif du P230... à un détail plus important qu'il n'y paraît, à savoir la géométrie plane de la maquette au lieu de la géométrie axisymétrique du P230.

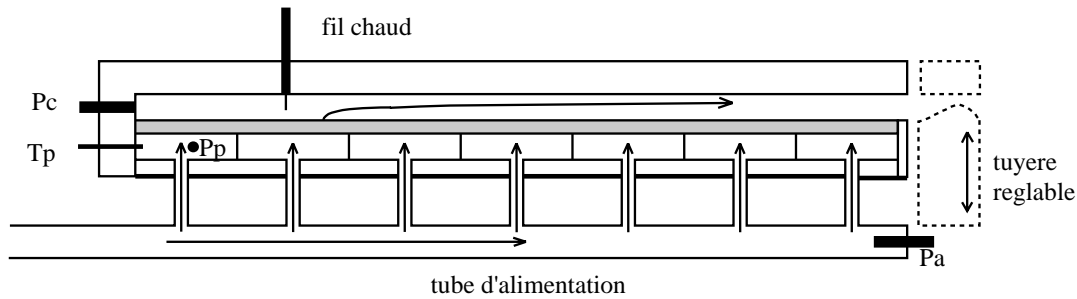


FIG. I.13 – Schéma du montage expérimental en gaz froid VECLA

I.6.1 Dispositif d'essai

Description

La veine est parallélépipédique, de 603 mm de long, 60 mm de large et $10, 20$ ou 30 mm de haut (seules ces trois hauteurs ont été utilisées). Elle est fermée à son extrémité amont, quant à l'extrémité aval, on peut la laisser libre ou y adapter une tuyère.

Seule la paroi inférieure, constituée d'un matériau poreux appelé "poral" sur 581 mm à partir du fond avant, est débitante, les parois supérieure et latérales étant lisses. L'écoulement étant fortement accéléré, les couches limites se développant sur les parois lisses sont très fines et seront complètement négligées dans la suite.

Le système en amont de la plaque poreuse est constitué de préchambres cloisonnées pour éviter d'influer sur l'acoustique de la veine et alimentées par des cols soniques identiques pour assurer l'homogénéité de l'injection.

Par ailleurs, deux porosités de poral ont été employées : $18\ \mu\text{m}$ et $8\ \mu\text{m}$.²

Un schéma du montage est donné en figure I.13.

Mesures

Des capteurs de pression et de température (maintenue constante) sont disposés comme indiqué sur la figure (I.13), à savoir : dans le tube d'alimentation (P_a) et dans les préchambres (P_p et T_p) pour vérifier que l'injection se fait dans les conditions prévues, et au fond avant de la veine (P_c) pour l'étude de l'écoulement lui-même.

Les mesures de vitesse sont effectuées par anémométrie à fil chaud à l'aide d'une sonde mono-fil pour laquelle huit passages, correspondant à huit abscisses longitudinales, sont disposés dans le plan médian de la paroi supérieure lisse. De ce fait, on ne dispose que d'un point de mesure dans la direction transversale ce qui ne permet pas de vérifier la bidimensionnalité de l'écoulement. Il n'est pas non plus possible d'avoir accès à des points de mesures intermédiaires (autres que les huit passages prévus) ce qui introduit une limitation sévère dans l'étude des évolutions spatiales de l'amont à l'aval. La sonde est introduite verticalement en direction de la paroi débitante comme indiqué sur le schéma I.13. Le caractère intrusif de ce mode de mesure est difficile à juger. Enfin, la sonde mono-fil ne donne accès qu'au module de la vitesse normale à la sonde. Hormis près de la paroi vers l'amont, la vitesse moyenne longitudinale est nettement plus grande que la vitesse moyenne radiale. On considère donc que le signal fluctuant observé n'est sensible qu'à la vitesse fluctuante axiale et pas à la vitesse fluctuante verticale.

Configurations testées

Plusieurs paramètres peuvent être modifiés ce qui permet de balayer une large plage de modes de fonctionnement : la hauteur, la vitesse d'injection, la présence ou non d'une tuyère à l'aval et la

². Cette longueur utilisée comme unité de porosité correspond à un diamètre de filtration de particules sphériques d'un écoulement ensemencé traversant le poral.

porosité.

Deux types d'essais complémentaires ont eu lieu : des essais en configuration fixée jouant sur les différents paramètres avec quatre vitesses d'injection testées : $V_{inj} = 1.02, 1.36, 1.70$ et 2.04 m/s et des essais à vitesse d'injection variable. Les essais à configuration fixée autorisent une étude complète du champ aérodynamique (mesures au fil chaud de la plupart des points accessibles) tandis que les essais à vitesse d'injection variable servent à suivre l'évolution du comportement global de la veine avec un faible nombre de capteurs (pressions aux fonds avant et arrière et vitesse en un point unique).

La variation de la vitesse d'injection a été opérée pour les essais avec tuyère par valeurs discrètes en faisant varier la hauteur du col de la tuyère par pas successifs. Pour les essais sans tuyère, la variation est réalisée en agissant sur la vanne pilotable qui commande le débit d'air.

Visualisations

Les parois latérales de VECLA sont en plexiglas et ont rendu possibles des visualisations par méthode PLIF (Planar Laser Induced Fluorescence). De l'acétone est injectée dans certains caissons d'alimentation et une nappe laser éclaire le plan médian de VECLA. Les visualisations indiquent les différentes concentrations de l'acétone dans la veine. Les résultats, très instructifs, ont été présentés par Avalon *et al.* [AUGB00] et Ugurtas [Ugu00].

Des structures tourbillonnaires sont nettement visibles dans le dernier tiers de la veine pour les essais avec la hauteur $h = 20$ mm . La figure I.14 présente un montage de photos prises à différentes abscisses entre le premier tiers et la sortie de VECLA. Les abscisses sont indiquées sous forme adimensionnelle avec la hauteur de VECLA comme longueur de référence (les notations et les adimensionnements sont précisés à la section suivante). Comme ces photos ne sont pas prises au même instant, les lignes de courant ne se raccordent pas. De plus les caissons d'alimentation ensemencés avec l'acétone ne sont pas identiques pour chaque image. Les trois montages photographiques utilisent des images prises à des instants différents ce qui montre au passage que l'abscisse d'apparition des structures varie peu.

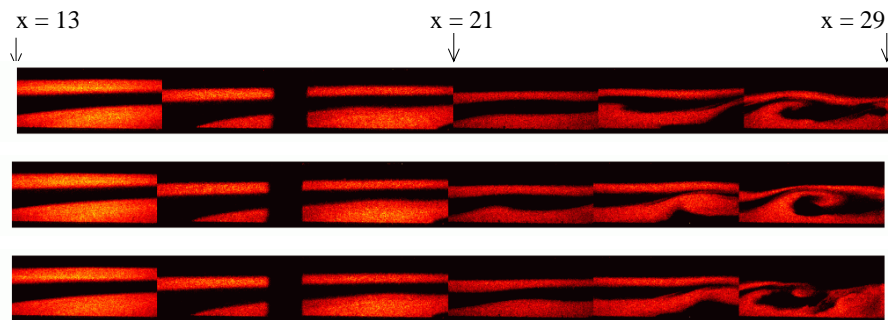


FIG. I.14 – Visualisation dans VECLA par méthode PLIF entre le premier tiers et la sortie pour une hauteur de veine de 20 mm . Mise en évidence de l'apparition de grosses structures.

I.6.2 Typologie des comportements observés

Les observations effectuées sur VECLA ont pour une large part guidé le travail effectué au cours de cette thèse. En effet, les recherches ont souvent été entreprises afin de répondre à une question précise soulevée par le montage. Il est naturel de présenter dès maintenant les divers comportements observés qui vont motiver les études théoriques suivantes.

Malgré l'apparente simplicité du montage et de la géométrie, on peut distinguer au moins cinq types d'écoulement dans la veine d'essai lorsque les divers paramètres sont modifiés. Ces types sont observés pour des configurations fixées dans lesquelles les effets d'histoire n'interviennent pas, mais des phénomènes d'hystérésis ont aussi été mis en évidence par Avalon [Ava99].

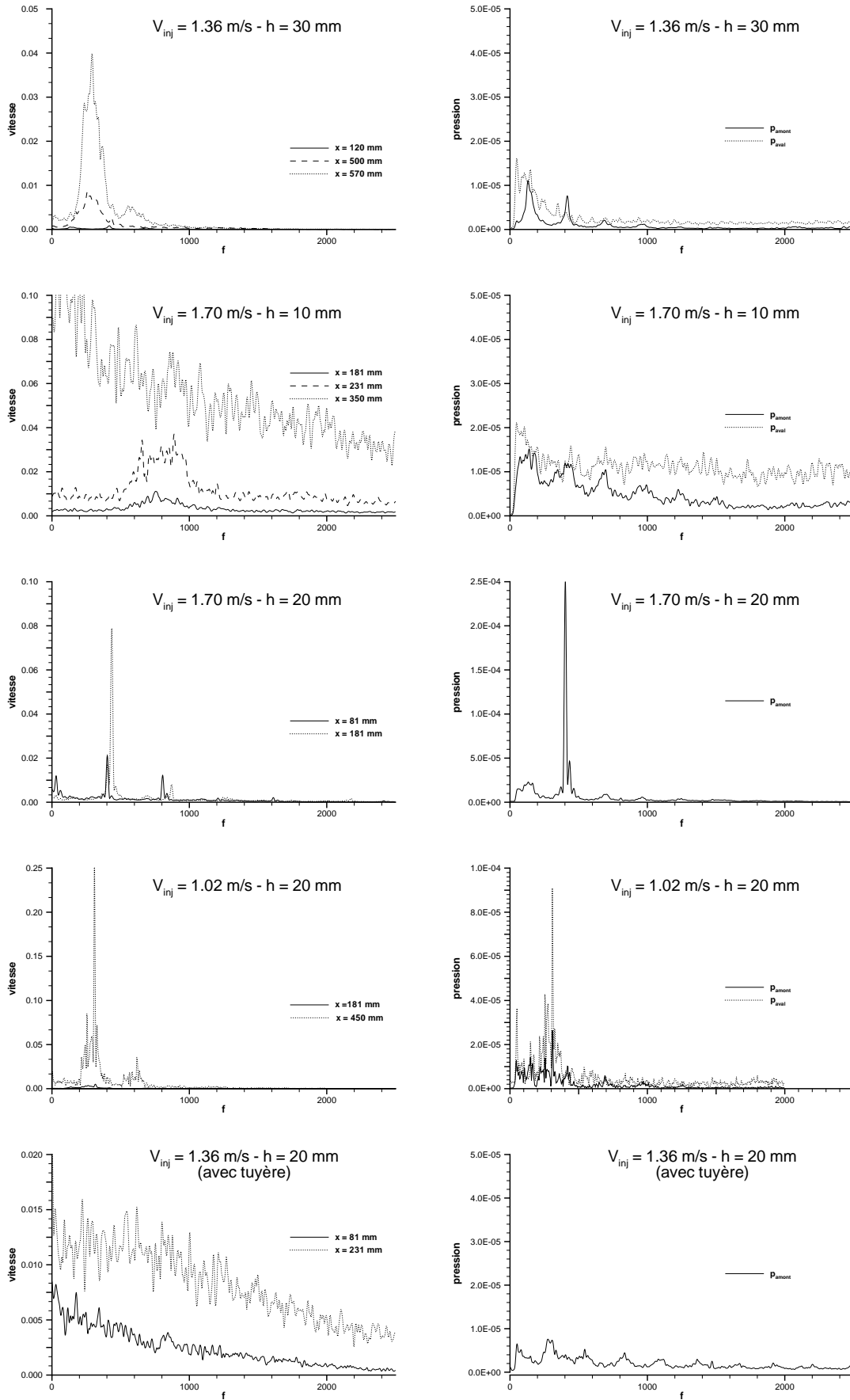


FIG. I.15 – Spectres de vitesses à diverses abscisses et de pressions aux fonds avant et arrière pour chacun des cinq comportements observés dans le canal VECLA.

Les numéros suivants associés à chaque type seront conservés dans la suite.

1. l'écoulement est laminaire dans toute la veine avec une bande de fréquences spatialement amplifiées (vers l'aval) jusqu'à la sortie;
2. l'écoulement est laminaire à l'amont de la veine avec une bande de fréquences spatialement amplifiées jusqu'à une transition à la turbulence;
3. une résonance acoustique se produit sur un mode acoustique longitudinal de cavité. Les spectres, quelle que soit la position de la sonde, présentent un fort pic à la fréquence de résonance et des pics faibles sur les harmoniques;
4. comme dans le cas précédent, les spectres du fond avant au fond arrière montrent principalement une seule fréquence mais cette fréquence n'est pas celle d'un mode acoustique de cavité;
5. l'écoulement est turbulent dans toute la veine.

La fréquence observée dans le cas 4 va bien sûr être spécialement considérée dans les calculs effectués par la suite. Elle correspond à une pulsation adimensionnelle $\omega \sim 38$ (les adimensionnements sont définis au paragraphe suivant).

On donne en tableau I.3 les types d'écoulement observés pour les diverses configurations testées au cours d'essais avec conditions fixées. Dans le cas d'une résonance acoustique, on indique $n\lambda/m$ pour signifier que la longueur du canal est de l'ordre de n/m fois la longueur d'onde acoustique.³ Des spectres de vitesse et de pression correspondant aux cinq types sont fournis en figure I.15.

	$h = 10 \text{ mm}$		$h = 20 \text{ mm}$		$h = 30 \text{ mm}$
	avec tuyère	sans tuyère	avec tuyère	sans tuyère	sans tuyère
$V_{inj} = 1.02 \text{ m/s}$	2	2	$3 (\frac{\lambda}{2})$	4	$3 (\frac{\lambda}{4})$
$V_{inj} = 1.36 \text{ m/s}$	2	2	5	$3 (\frac{3\lambda}{4})$	1
$V_{inj} = 1.70 \text{ m/s}$	2	2	5	$3 (\frac{3\lambda}{4})$	1
$V_{inj} = 2.04 \text{ m/s}$		5		5	

TAB. I.3 – Types d'écoulement observés dans VECLA pour les différentes configurations testées avec tous les paramètres maintenus constants au cours d'un essai.

La multiplicité des comportements de ce montage pourtant simple soulève évidemment des questions délicates auxquelles cette thèse s'efforce d'apporter des éléments de réponse. Le premier objectif est d'expliquer qualitativement d'où peuvent provenir les différences de comportement global; le second consiste à tenter de prévoir ce comportement à partir de la donnée de la configuration.

On va d'abord mettre en place des éléments théoriques ayant trait au phénomène principal à savoir l'instabilité locale de l'écoulement, puis, au dernier chapitre, on essaiera de remonter jusqu'au problème global.

I.7 Modélisation de l'écoulement de base

Les théories de stabilité qui vont être utilisées dans la suite nécessitent la définition et la connaissance d'un écoulement de base. On va conserver l'ensemble des simplifications proposées et justifiées depuis le début du chapitre et en ajouter quelques autres pour parvenir à des solutions simples et aisément calculables.

I.7.1 Hypothèses

- les hypothèses déjà présentées suggèrent de considérer un écoulement *monophasique, incompressible, non-réactif, dans un canal de géométrie régulière*;

3. Comme l'écoulement n'est pas uniforme, l'acoustique ne s'organise pas exactement en modes de cavité classiques mais la correction sur la longueur d'onde reste suffisamment faible pour qu'on puisse identifier clairement et numéroter les modes longitudinaux.

- on suppose que l'écoulement de base est *bidimensionnel*, c'est-à-dire qu'il est invariant selon la coordonnée azimutale si la géométrie est axisymétrique, invariant selon la coordonnée transversale si la géométrie est plane et que sa vitesse selon cette direction est nulle dans les deux cas.
- on suppose que l'effet de la sortie n'est pas ressenti par l'écoulement de base en dehors de l'extrémité aval. Le canal est donc représenté par un *conduit cylindrique semi-infini* dans le cas axisymétrique ou par un *conduit rectangulaire semi-infini* (et d'étendue transversale infinie) dans le cas plan;
- on modélise la combustion du propergol ou l'injection de gaz à travers un poreux par une injection supposée *normale* à la paroi de vitesse V_{inj} supposée *uniforme et constante*;
- on néglige l'action des forces volumiques extérieures, en particulier, *on néglige la pesanteur*;
- on cherche comme écoulement de base un écoulement *stationnaire*;
- on néglige les couches limites sur les parois non-débitantes.

I.7.2 Notations

Dans le cas axisymétrique, on se place dans un repère de coordonnées cylindriques $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ où

- le point O est le centre du fond avant (cf fig. (I.16))
- \vec{e}_x est colinéaire à l'axe du demi-cylindre, orienté dans le sens de l'écoulement moyen
- \vec{e}_r est normal aux parois débitantes, orienté vers l'extérieur
- \vec{e}_θ est la direction azimutale (telle que le repère soit direct).

Pour les diverses dénominations, voir figure (I.16). On note h le rayon du cylindre et $(U_x^*, U_r^*, U_\theta^*)$ les composantes de la vitesse.

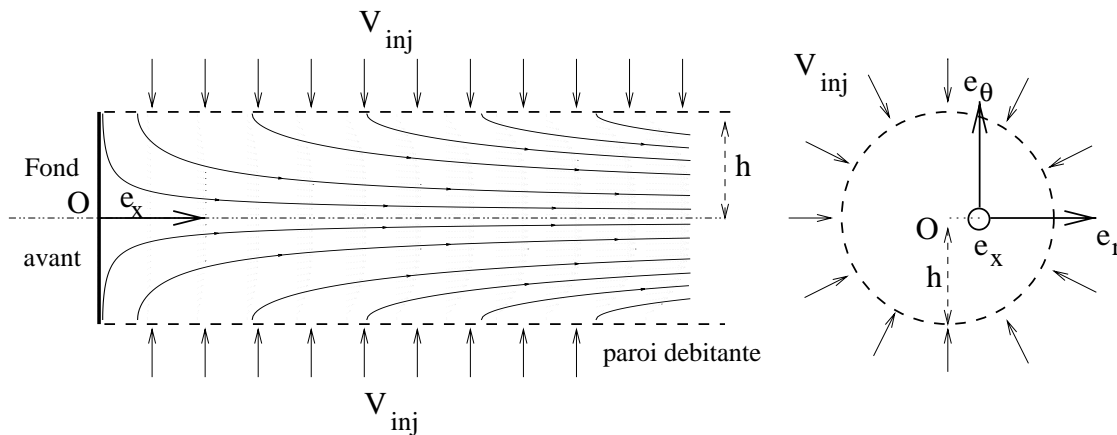


FIG. I.16 – Lignes de courant de l'écoulement de Taylor axisymétrique, repère de travail et notations utilisées

Dans le cas plan, on se place dans un repère de coordonnées cartésiennes $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ où

- le point O est le centre du fond avant
- \vec{e}_x est orthogonal au fond avant, orienté dans le sens de l'écoulement moyen
- \vec{e}_y est normal aux parois débitantes, orienté vers le haut
- \vec{e}_z est la direction transversale (telle que le repère soit direct).

Pour les diverses dénominations, voir figures (I.16) ou (I.17). On note h la demi-distance entre parois débitantes et (U, V, W) les composantes de la vitesse.

Pour les comparaisons avec VECLA, on considère que la veine est assimilable au problème de la figure I.17 en supposant ce problème symétrique et en identifiant la paroi supérieure lisse de VECLA

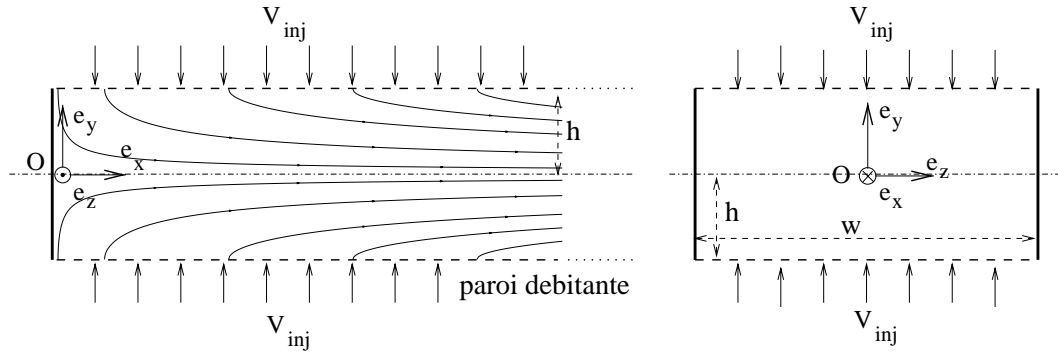


FIG. I.17 – Lignes de courant de l'écoulement de Taylor plan, repère de travail et notations utilisées

à l'axe de symétrie. La distance h des notations (demi-distance entre parois débitantes) est donc égale à la hauteur h de VECLA (distance entre paroi débitante et paroi lisse). La paroi débitante est située en $y^* = -h$ et la paroi lisse en $y^* = 0$.

Mise sous forme adimensionnelle

Ainsi modélisé, le problème ne fait apparaître en tout et pour tout que quatre paramètres : h , V_{inj} , μ (viscosité dynamique) et ρ_0 (masse volumique uniforme et constante en incompressible).

Un seul choix d'adimensionnement est alors raisonnable.

- la longueur de référence est h ,
- la vitesse de référence est V_{inj} .

Les temps sont donc adimensionnés par h/V_{inj} , les pressions par $\rho_0 V_{inj}^2$. Il apparaît un nombre de Reynolds d'injection

$$\mathcal{R}_{inj} = \frac{V_{inj} h}{\nu}$$

avec ν la viscosité cinématique égale à la viscosité dynamique μ divisée par la masse volumique ρ_0 .

Par la suite, sauf mention expresse du contraire, les coordonnées et toutes les grandeurs sont données sous forme adimensionnelle avec cet adimensionnement.

On rappelle que par hypothèse

$$U_\theta = 0 \text{ et } \frac{\partial X}{\partial \theta} = 0 \text{ (cas axisymétrique)}$$

$$W = 0 \text{ et } \frac{\partial X}{\partial z} = 0 \text{ (cas plan)}$$

où X est une grandeur moyenne. Comme on suppose en plus la stationnarité, on a pour l'écoulement de base

$$\vec{U}(x, r, \theta, t) = (U_x, U_r, 0)(x, r) \text{ (cas axisymétrique)}$$

$$\vec{U}(x, y, z, t) = (U, V, 0)(x, y) \text{ (cas plan)}$$

I.7.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites à imposer ne concernent donc que les deux premières composantes de la vitesse et ne dépendent que des deux premières coordonnées.

La modélisation de la combustion du propergol ou du soufflage à travers un poreux, entraîne les conditions suivantes aux parois débitantes (situées en $r = 1$ ou $y = \pm 1$ à cause de l'adimensionnement)

$$\forall x, \begin{cases} U_x(x, r = 1) = 0 \\ U_r(x, r = 1) = -1 \end{cases} \text{ (cas axisymétrique)} \quad (I.1) \quad \forall x, \begin{cases} U(x, y = \pm 1) = 0 \\ V(x, y = 1) = -1 \\ V(x, y = -1) = 1 \end{cases} \text{ (cas plan)} \quad (I.2)$$

Au fond avant, on impose des conditions de non-pénétration de la paroi à savoir

$$U_x(x = 0, r) = 0 \quad \forall r \text{ (cas axisymétrique)}, \quad U(x = 0, y) = 0 \quad \forall y \text{ (cas plan)}$$

Une condition d'adhérence au fond avant ne serait pas compatible avec l'hypothèse d'une injection appliquée jusqu'au fond avant.

I.7.4 Solutions sous forme auto-semblable

Les premiers résultats sur l'écoulement de base en géométrie plane remontent à Berman [Ber53] en 1953. Celui-ci introduit la fonction de courant ϕ définie par

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = U, \quad -\frac{\partial \phi}{\partial x} = V$$

pour laquelle il suppose la forme suivante

$$\phi(x, y) = [\bar{u}(0) - x]f(y)$$

où $\bar{u}(0)$ est la moyenne de la vitesse axiale à travers la section d'entrée du canal ($\bar{u}(0) = 0$ pour le cas avec un fond avant non-débitant). Le problème se ramène alors à

$$\frac{f^{(4)}}{\mathcal{R}_{inj}} + f f''' - f' f'' = 0 \tag{I.3}$$

avec les conditions aux limites

$$f(0) = f'(1) = f''(0) = 0, \quad f(1) = 1$$

Berman construit alors des solutions de cette équation par une méthode perturbative dans la limite des faibles⁴ nombres de Reynolds \mathcal{R}_{inj} .

La solution la plus utilisée dans ce manuscrit est à mettre au crédit de l'anglais Taylor [Tay56] en 1955 et sera donc dénommée écoulement de Taylor. Signalons que les auteurs américains en attribuent généralement la paternité à leur compatriote Culick [Cul66] qui les redécouvre une dizaine d'années plus tard. Elle est donc référencée comme "Culick flow" ou, au mieux, "Taylor-Culick flow".

L'étude de Taylor est motivée par un procédé de fabrication de la pâte à papier obtenue par drainage de fibres en suspension dans une solution aqueuse au travers d'une couche poreuse. Comme géométries simplifiées du problème industriel, il choisit des cônes poreux (cas axisymétrique) et des conduits formés de deux demi-plans délimités par la même droite (cas plan). Dans les cas limites où l'angle du cône ou des demi-plans tend vers 0, il dérive les formules analytiques

$$\begin{cases} U_x = \pi x \cos\left(\frac{\pi}{2}r^2\right) \\ U_r = -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{\pi}{2}r^2\right) \\ U_\theta = 0 \end{cases} \tag{I.4} \quad \begin{cases} U = \frac{\pi}{2}x \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \\ V = -\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \\ W = 0 \end{cases} \tag{I.5}$$

pour le cas axisymétrique

pour le cas plan.

Ces solutions sont obtenues en négligeant la viscosité; on peut le constater dans le cas plan en remarquant qu'elles ne vérifient l'équation de Berman (I.3) qu'à la limite où \mathcal{R}_{inj} tend vers l'infini.

En même temps⁵ que Taylor, Yuan [Yua56] applique à l'équation de Berman une approche perturbative dans la limite des grands nombres de Reynolds. Il obtient la solution analytique de Taylor

4. Les cas pratiques étudiés dans cette thèse se situent plutôt dans la limite des forts nombres de Reynolds, la solution de Berman n'est donc pas utilisée

5. Pour la petite histoire, la date de réception de l'article de Yuan est le 31 août 1955 alors que celui de Taylor est reçu le 23 août de la même année, c'est donc le nom de ce dernier que nous retiendrons.

à l'ordre le plus bas et propose une correction analytique en $1/\mathcal{R}_{inj}$. Soit

$$f(y) = \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) + \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left([1.438 + \frac{\pi^3}{16} \int_1^y \frac{\xi d\xi}{\sin(\frac{\pi\xi}{2})}] \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) + [0.6622 + \frac{\pi^2}{8} \log \left| \tan\left(\frac{\pi y}{4}\right) \right|] \left[\frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) - y \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \right] - \frac{1.324}{\pi} \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \right)$$

Divers raffinements sont proposés par Terril⁶ [Ter86] afin d'améliorer la modélisation de l'injection. En effet, critiquée dans le détail, l'hypothèse de vitesse d'injection constante est irréaliste. Dans le cas du soufflage au travers d'un poreux, il est plus raisonnable de supposer une vitesse d'injection dépendant de la différence de pression locale d'un côté de la paroi poreuse à l'autre. C'est d'ailleurs le type de conditions limites utilisées dans les simulations en gaz chaud où la vitesse de combustion du propergol dépend de la pression.

Parmi les améliorations proposées, on peut aussi citer Cox et King [CK97] qui introduisent des développements asymptotiques raccordés pour décrire un canal plan avec une seule paroi débitante ou aspirante (comme le montage VECLA).

I.7.5 Unicité de l'écoulement de base?

Moyennant l'hypothèse de solution auto-semblable et celle d'injection uniforme sur les parois latérales, l'écoulement moyen est défini à partir de l'équation de Berman dans le cas plan par :

$$\begin{aligned} \Phi = xf(y) \quad U = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad V = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{f^{(4)}}{\mathcal{R}_{inj}} + ff''' - f'f'' = 0 \\ f(0) = f'(1) = f''(0) = 0, \quad f(1) = 1 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (I.6)$$

et dans le cas axisymétrique

$$\begin{aligned} \Phi = xf(r) \quad U = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad V = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left[\frac{1}{r} \left\{ r \left(\frac{f'}{r} \right)' \right\}' \right]' + \left[\left(\frac{f}{r} \right) \left(\frac{f'}{r} \right)' - \left(\frac{f'}{r} \right)^2 \right]' = 0 \\ \left(\frac{f'}{r} \right)'(0) = \frac{f}{r}(0) = f'(1) = 0, \quad f(1) = 1 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (I.7)$$

Ces équations sont valables à la fois pour le cas de l'injection et pour celui de l'aspiration. On les désignera comme les "équations de Berman" par la suite bien que celui-ci ne se soit intéressé qu'au cas plan et pas au cas axisymétrique.

Une question a interpellé de nombreux auteurs : pour un nombre de Reynolds donné, combien de solutions possèdent ces équations?

Les éléments de réponse suivants concernent uniquement le cas plan. En 1976, Robinson [Rob76] décrit trois branches de solutions symétriques par rapport à l'axe du canal dans le cas limite de l'aspiration à nombre de Reynolds tendant vers l'infini. Zaturka *et al.* [ZDB88] montrent en 1988 que des solutions asymétriques peuvent apparaître d'une bifurcation de la branche principale. Lorsqu'une seule paroi est débitante, Cox [Cox91] démontre qu'en dehors d'un étroit intervalle de nombres de Reynolds, correspondant à un cas avec aspiration et non avec injection, le problème (I.6) n'admet qu'une seule solution. Sa démonstration s'appuie sur une intéressante transformation de Terril [Ter64] visant à remplacer le problème (I.6) aux conditions limites en deux points par un problème aux valeurs initiales.

6. De nombreuses autres références du même auteur peuvent être trouvées à partir de celle indiquée

Au total, si on ne considère que les solutions symétriques, il semble qu'il n'existe qu'une branche de solutions continue s'étendant de $\mathcal{R}_{inj} \rightarrow -\infty$ à $\mathcal{R}_{inj} \rightarrow +\infty$. Deux branches supplémentaires apparaissent à $\mathcal{R}_{inj} = -12.165$ et s'étendent jusqu'à $\mathcal{R}_{inj} \rightarrow -\infty$ (le signe négatif indique qu'il y a aspiration du fluide vers l'extérieur du canal).

Pour l'application concernant les moteurs à propergol solide ou les montages les simulant, on a injection de fluide dans le canal avec des nombres de Reynolds supérieurs à plusieurs centaines. Dans ces conditions, il n'existe qu'une seule solution symétrique pour un nombre de Reynolds fixé.

Diverses études de stabilité ont été menées sur les équations (I.6) et (I.7). L'hypothèse de similarité n'y est pas remise en cause mais des perturbations de toutes formes sont superposées à f directement dans (I.6) et (I.7). Les perturbations sont purement spatiales chez Durlofsky et Brady [DB84], purement temporelles chez Zaturka *et al.* [ZDB88] et chez Watson *et al.* [WBZD88]. Lorsque le fluide est injecté par la paroi, l'unique solution est trouvée stable par ces approches tandis que des situations complexes apparaissent si le fluide est aspiré vers l'extérieur.

Cette démarche est foncièrement différente de celle mise en œuvre dans ce manuscrit qui consiste à superposer des perturbations dans les équations de Navier-Stokes elles-mêmes⁷.

I.7.6 La solution de Taylor

Comme on l'a vu, l'écoulement de Taylor est solution des équations d'Euler. Ses champs de vitesse et de pression sont définis pour le cas axisymétrique par :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_x = \pi x \cos\left(\frac{\pi}{2}r^2\right) \\ U_r = -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{\pi}{2}r^2\right) \\ U_\theta = 0 \\ P = -\frac{\pi^2 x^2}{2} - \frac{1}{2r^2} \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2}r^2\right) \right\}^2 + P_0 \end{array} \right. \quad \text{(I.8)}$$

et pour le cas plan par :

$$\left\{ \begin{array}{l} U = \frac{\pi}{2}x \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \\ V = -\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \\ W = 0 \\ P = -\frac{\pi^2 x^2}{8} - \frac{1}{2} \left\{ \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \right\}^2 + P_0 \end{array} \right. \quad \text{(I.9)}$$

L'utilisation courante de cette solution dans le manuscrit appelle un commentaire sur sa nature non-visqueuse. L'équation de Berman (I.6) et (I.7) est du quatrième ordre d'où la nécessité d'imposer quatre conditions aux limites pour avoir une solution unique. L'élimination des parties visqueuses de (I.6) et (I.7) réduit le problème au troisième ordre, on ne peut donc *a priori* lui imposer que trois des conditions aux limites. Or, il se trouve que, contrairement à ce qui se produit dans les écoulements de couche limite, la solution non-visqueuse de Taylor vérifie automatiquement les quatre conditions aux limites. Ceci explique qu'il n'apparaisse pas de couche limite liée aux effets visqueux en proche paroi.

Il semble que dans les solutions de (I.6) les configurations avec injection ne développent pas de couches limites, tandis que les configurations avec aspiration sont plus complexes et développent des couches limites vers l'axe du canal. Comme point de départ d'une recherche bibliographique sur le sujet, citons Cox [CK97].

La viscosité n'a pour effet que de modifier légèrement la forme des profils de façon régulière sur toute une section. Pour juger de cette correction, il suffit de résoudre numériquement (I.6) et (I.7).

A titre d'exemple, la figure I.18, tirée de Griffond [Gri98], donne les pourcentages d'erreur commise sur u_x et u_r en prenant la solution en fluide parfait de Taylor au lieu de l'écoulement réel dans le cas axisymétrique. L'écart est inférieur à 10% pour $\mathcal{R}_{inj} = 10$, à 1% pour $\mathcal{R}_{inj} = 100$, et à 0.1% pour $\mathcal{R}_{inj} = 1000$; il est du même ordre sur une section complète ce qui confirme l'absence de couche limite. La résolution numérique de l'équation différentielle ordinaire non-linéaire avec conditions aux limites en deux points se fait par une méthode itérative démarrante avec la solution de Taylor. Pour

⁷ La forme utilisée par Durlofsky et Brady [DB84] serait proche de l'une des nôtres s'ils ajoutaient une dépendance périodique en temps, mais on peut remarquer de toute façon qu'ils ne considèrent qu'une équation de quantité de mouvement et se gardent bien de signaler que leur forme de perturbation est incompatible avec l'autre...

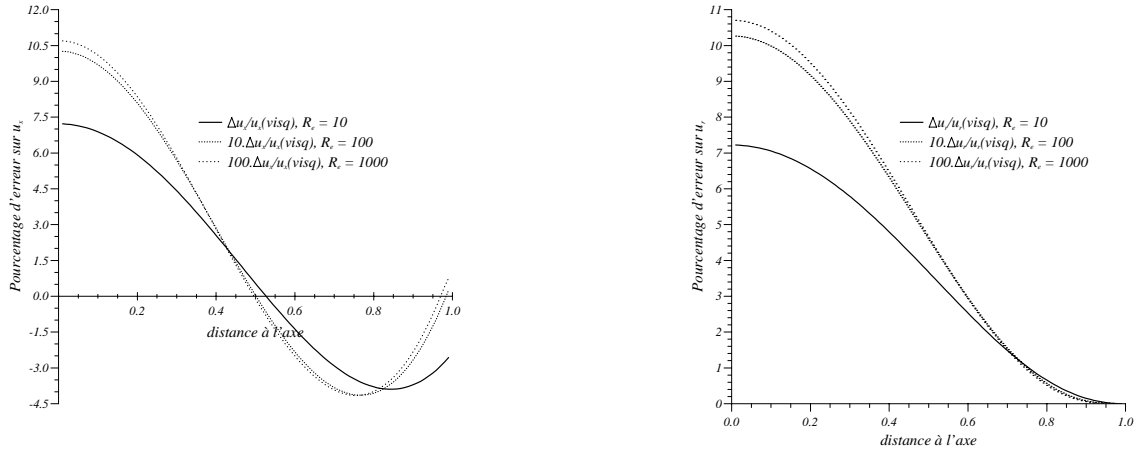


FIG. I.18 – Pourcentage d'erreur commise sur u_x et u_r en prenant la solution en fluide parfait de Taylor au lieu de l'écoulement réel dans le cas axisymétrique

remédier à la singularité à l'origine, la résolution dans le cas axisymétrique nécessite le déplacement de la limite $r = 0$ à $r = \varepsilon \ll 1$ à l'aide de développements limités au voisinage de l'axe, donnés dans la référence [Gri98]. Des comparaisons analogues peuvent être trouvées dans le cas plan chez Pineau [Pin97] ou chez Griffond [Gri98].

Remarquons que le profil de vitesse axiale ne comporte pas de point d'inflexion (en dehors de la paroi) ni dans le cas plan ni dans le cas axisymétrique. Du point de vue des analyses de stabilité, *il ne peut donc se rattacher ni aux écoulements à profils inflexionnels (dont on sait qu'ils peuvent être le siège d'instabilités non-visqueuses dues au point d'inflexion) ni aux écoulements de couche limite (dont on sait qu'ils peuvent être déstabilisés par un mécanisme subtil lié à la viscosité).*

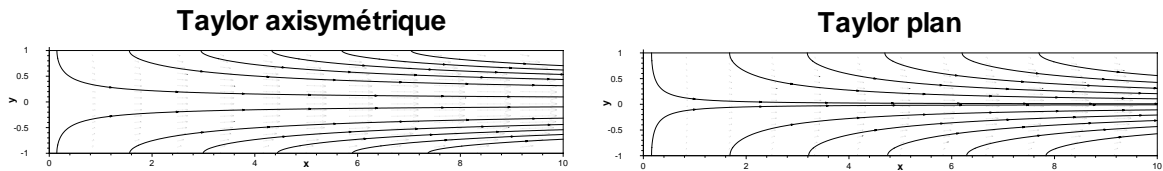


FIG. I.19 – Lignes de courant et vecteurs vitesse de l'écoulement de Taylor en configuration plane et axisymétrique.

Enfin, la figure I.19 permet de comparer l'écoulement de Taylor plan et l'écoulement de Taylor axisymétrique. Le repère est orthonormal, la longueur des vecteurs vitesse est calculée avec le même coefficient de proportionnalité. Bien que d'allures similaires, on va voir que les deux ont des caractéristiques de stabilité qualitativement identiques mais quantitativement très différentes. Tout ce qu'on peut remarquer est que la courbure des lignes de courant au voisinage de la paroi est plus forte dans le cas axisymétrique.

Chapitre II

Stabilité linéaire de l'écoulement de Taylor

II.1 Introduction

Les premiers travaux concernant la stabilité de l'écoulement de Taylor remontent à 1969 et sont à mettre au crédit de deux russes, Varapaev et Yagodkin [VY69]. Ceux-ci montrent, par une approche linéarisée utilisant une forme de mode normal que l'écoulement de Taylor est stable à l'amont puis se déstabilise à partir d'une abscisse critique. Leur théorie avait été précédée d'observations expérimentales de Yagodkin [Yag67] mettant en évidence un phénomène d'instabilité hydrodynamique.

Curieusement, leurs résultats restent sans écho et ne sont associés qu'au problème de la transition à la turbulence chez Beddini [Bed85] en 1985. Il faut attendre 1996 pour que Lupoglazoff et Vuillot [LV96b] relancent l'intérêt pour la stabilité de l'écoulement de Taylor en mettant en évidence un phénomène de "détachement tourbillonnaire pariétal" par simulation numérique. La théorie Varapaev et Yagodkin [VY69] est alors reprise, résultats expérimentaux à l'appui, par Casalis *et al.* [CAP98] et Favray [Fav99] dans le cas plan puis par Pineau [Pin97] et Griffond *et al.* [GCP00] dans le cas axisymétrique.

L'objet de ce chapitre est la stabilité *linéaire* de l'écoulement de *Taylor*. Le plan est le suivant. On commence par exposer la démarche de stabilité linéaire utilisée et par restreindre la modélisation des ondes d'instabilité en fonction des observations expérimentales. On présente alors les résultats de l'approche, dite "inconsistante" car mathématiquement illégitime, initiée par Varapaev et Yagodkin [VY69] dans les cas plan et axisymétrique. Puis on compare, avec plus ou moins de succès, les prévisions théoriques de cette approche aux mesures disponibles. En raison de désaccords constatés dans les résultats des différents auteurs cités et encore une fois soulignés par Lee et Beddini [LB99] en 1999, on explique ensuite les écarts par le caractère injustifié de la forme de perturbation employée. Malheureusement, on montre au passage que les théories classiques ne peuvent être appliquées à l'écoulement de Taylor qui requiert un traitement différent. On propose alors un changement de variable dont résulte une approche asymptotiquement valable dans la limite des abscisses élevées. Les résultats liés à cette analyse demeurent trop proches des résultats inconsistants pour que les mesures puissent les mettre clairement en évidence. Aussi, afin de vérifier si les caractéristiques particulières des instabilités prévues par cette approche sont effectivement retrouvées, on se lance alors dans des simulations numériques qui malgré quelques difficultés de méthodologie confirment la validité de l'approche asymptotique.

II.2 Démarche de stabilité linéaire

Cette section n'a pas pour objet de proposer un cours sur la stabilité linéaire mais plus modestement d'introduire la démarche appliquée à notre écoulement. Le lecteur novice intéressé pourra

trouver des considérations beaucoup plus générales et plus complètes dans des ouvrages de références tels que celui de Drazin et Reid [DR85] ou celui édité par Godrèche et Manneville [GM98].

La question posée en stabilité linéaire est la suivante : si des perturbations infinitésimales sont ajoutées à l'écoulement de base (*i.e.* celui dont on étudie la stabilité), vont-elles s'atténuer sans le modifier ou au contraire s'amplifier et donner naissance à des oscillations mesurables expérimentalement, voire transformer l'écoulement moyen ?

La question est insoluble dans le cas général, c'est-à-dire qu'on ne sait prévoir théoriquement les propriétés de stabilité que de certains écoulements particuliers en exploitant des caractéristiques bien spécifiques telles que des invariances ou des symétries.

II.2.1 Méthode des petites perturbations

Equations linéarisées

La première étape consiste à superposer à l'écoulement de base supposé connu de petites perturbations. Ces dernières influencent *a priori* chaque grandeur ; toutes les grandeurs physiques sont décomposées en

$$G = \bar{G} + g$$

avec \bar{G} connu venant de l'écoulement de base et g inconnu venant de la perturbation.

Cette décomposition est injectée dans le système d'équations définissant le problème, à savoir les équations de Navier-Stokes écrites pour un écoulement incompressible dans notre cas. Ces équations étant quadratiques, il en résulte trois types de termes :

1. des termes ne contenant que des grandeurs liées à l'écoulement de base
2. des termes dépendant linéairement des grandeurs fluctuantes
3. des termes dépendant des grandeurs fluctuantes de façon quadratique

En y regardant de plus près, on s'aperçoit que les premiers s'organisent en un système d'équations qui n'est autre que le système initial. Comme l'écoulement de base vérifie ce système, ces termes s'annulent entre eux. En fait, dans notre cas, la solution de Taylor ne vérifie qu'approximativement les équations de Navier-Stokes à cause de la viscosité, mais on s'en contentera et on montrera que l'effet de cette imprécision est faible.

De plus, les perturbations sont supposées petites, c'est-à-dire que le rapport d'amplitudes g/\bar{G} est d'un ordre de grandeur très faible devant l'unité. Dès lors les combinaisons quadratiques de grandeurs fluctuantes sont elles-mêmes très faibles devant les termes linéaires vis-à-vis de ces mêmes grandeurs (*i.e.* du deuxième type). Le troisième type de termes peut être légitimement négligé tant que les amplitudes des perturbations restent faibles.

Seul reste le deuxième type de termes qui donne lieu aux problèmes linéarisés suivants. Dans le cas axisymétrique, les solutions de l'équation de Berman (I.7), ont des champs de vitesse de la forme

$$\vec{U} = (\bar{U}_x(x, r), \bar{U}_r(r), 0)$$

dont les trois composantes sont indépendantes de θ et la seconde composante indépendante de x ,

propriétés utilisées pour écrire le système de Navier-Stokes linéarisé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} + \bar{U}_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_x \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x} + \bar{U}_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + u_r \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial x} = \\ \quad \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta^2} \right) \\ \frac{\partial u_r}{\partial t} + \bar{U}_x \frac{\partial u_r}{\partial x} + \bar{U}_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_r \frac{\partial \bar{U}_r}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} = \\ \quad \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \bar{U}_x \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \bar{U}_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta \bar{U}_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \\ \quad \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \end{array} \right. \quad (\text{II.1})$$

Dans le cas plan, les solutions de l'équation de Berman (I.6), ont des champs de vitesse de la forme

$$\vec{U} = (\bar{U}(x, y), \bar{V}(y), 0)$$

dont les trois composantes sont indépendantes de z et la seconde composante indépendante de x . On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial v}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{array} \right. \quad (\text{II.2})$$

On va généralement considérer des cas bidimensionnels où $w = 0$ et l'invariance en z est vérifiée également par les grandeurs fluctuantes. L'équation de la fonction de courant linéarisée sera alors utile

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\Delta}{\mathcal{R}_{inj}} \right) (\Delta \phi) - \Delta \bar{V} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \Delta \bar{U} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.3})$$

où Δ est le Laplacien.

Conditions aux limites

Conditions homogènes Les conditions aux limites associées s'obtiennent de la même manière. L'injection est supposée uniforme, constante et normale à la paroi donc dans le cas axisymétrique

$$\forall t, x, \theta \left\{ \begin{array}{l} U_x(r=1) = \bar{U}_x(r=1) + u_x(r=1) = 0 \\ U_r(r=1) = \bar{U}_r(r=1) + u_r(r=1) = -1 \\ U_\theta(r=1) = \bar{U}_\theta(r=1) + u_\theta(r=1) = 0 \end{array} \right.$$

comme l'écoulement de base \vec{U} vérifie les mêmes conditions, il reste

$$\forall t, x, \theta \begin{cases} u_x(r=1) = 0 \\ u_r(r=1) = 0 \\ u_\theta(r=1) = 0 \end{cases}$$

De même, dans le cas plan, le raisonnement s'applique à chaque paroi d'où

$$\forall t, x, z \begin{cases} u(y=\pm 1) = 0 \\ v(y=\pm 1) = 0 \\ w(y=\pm 1) = 0 \end{cases}$$

et dans le cas bidimensionnel où la fonction de courant est utilisée

$$\forall x, z \frac{\partial \phi}{\partial x}(y=\pm 1) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(y=\pm 1) = 0$$

Ainsi, malgré l'injection à la paroi, la vitesse radiale fluctuante à la paroi est supposée nulle.

Réponse de la paroi Cette démarche, classique pour les problèmes de stabilité, doit être distinguée de celle qui consisterait à supposer une fluctuation prescrite de l'injection à la paroi. Ce dernier serait un problème de réponse à un forçage et non pas de stabilité intrinsèque. L'existence d'un tel forçage dans des moteurs à propergol solide ou des montages en gaz froid n'est pas claire, par contre, selon les motoristes un paramètre essentiel de stabilisation ou de déstabilisation d'une chambre de combustion est la réponse (ou l'admittance) de la paroi, voir par exemple Culick [Cul75] ou l'annexe J. Cette réponse exprime le fait que la vitesse de combustion du propergol dépend de la pression ou que l'injection au travers d'un poreux dépend de la différence de pression entre ses deux côtés. Les fluctuations de pression et de débit injecté à la paroi (\dot{m}) peuvent être couplées par la réponse définie, en grandeurs dimensionnelles (que dénote la présence de l'astérisque) comme

$$R = \frac{\dot{m}^*/\bar{m}^*}{p^*/\bar{p}^*}$$

Puisqu'on néglige les effets de compressibilité et que l'injection est normale à la paroi, le rapport des débits se ramène à un rapport des vitesses radiales, d'où la condition limite sur les fluctuations adimensionnelles

$$v(\text{paroi}) - \frac{R}{\bar{p}^*/(\rho V_{inj}^2)} p(\text{paroi}) = 0 \quad (\text{II.4})$$

qui peut être substituée à la condition $v(\text{paroi}) = 0$. La relation (II.4) a été testée dans des calculs de stabilité menés selon la démarche présentée dans la suite mais *l'effet obtenu est complètement négligeable* en raison d'une valeur très faible¹ de $R/[\bar{p}^*/(\rho V_{inj}^2)]$. Ceci n'est pas forcément en désaccord avec les résultats de Culick [Cul75] puisque celui-ci s'intéresse uniquement à la partie acoustique alors qu'on la néglige entièrement. Or, s'il faut en croire les acousticiens, voir annexe A par exemple, les fluctuations de pression seraient principalement d'origine acoustique avec une très faible part associée à la vorticité. L'essentiel des analyses de stabilité effectuées par la suite s'attachent spécifiquement à décrire la part associée à la vorticité en excluant toute influence de l'acoustique², de ce fait seule la part associée à la vorticité peut intervenir dans (II.4) et il est probable que l'effet majeur de la réponse, lié à l'acoustique, ne soit pas capté.

Remarquons tout de même que si on souhaite prendre cet effet en compte, on peut introduire une acoustique, supposée connue *a priori* dans (II.4). Les conditions aux limites ne sont alors plus homogènes et on n'a plus affaire à un problème de stabilité mais   un problème dit de "réceptivité" dont on touchera quelques mots au chapitre V. D'ici là, on abandonne complètement la relation (II.4).

1. L'ordre de grandeur du module de la réponse est typiquement inférieur à 10. Celle-ci est complexe car elle induit à la fois une amplification (ou une atténuation) et un déphasage.

2. La séparation entre acoustique et stabilité n'est en fait pas strictement établie, voir annexe A mais on considère que les instabilités qu'on étudie par la suite sont bien distinctes des premiers modes acoustiques longitudinaux qui interviennent dans le problème réel.

Symétrie Par ailleurs, dans le cas plan, pour les comparaisons avec les résultats expérimentaux du montage VECLA qui ne compte qu'une paroi débitante, on spécifie des conditions particulières à la paroi lisse. En effet, on va supposer que VECLA représente un demi-problème de Berman et que la paroi supérieure constitue un axe de symétrie³. Dans un canal plan avec deux parois débitantes, deux types de fluctuations possédant une parité sont possibles :

- des fluctuations variqueuses telles que

$$\frac{\partial u}{\partial y}(y = 0) = 0 \text{ et } v(y = 0) = 0 \quad (\text{II.5})$$

- des fluctuations sinueuses telles que

$$u(y = 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial y}(y = 0) = 0 \quad (\text{II.6})$$

ainsi nommées en raison des figures II.1 obtenues en traçant deux lignes de courant de part et d'autre de l'axe.

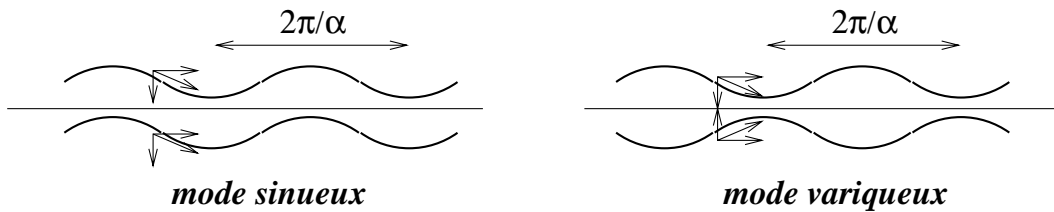


FIG. II.1 – Modes d'oscillation symétriques en canal plan

La présence de la paroi lisse dans VECLA impose une condition de non-pénétration qui interdit les solutions telles que $v(y = 0) \neq 0$ ce qui est *a priori* le cas des fluctuations sinueuses. C'est pourquoi *seules les perturbations variqueuses seront étudiées dans le cas plan.*

II.2.2 Forme de la perturbation

Le problème auquel on a abouti est un problème linéaire aux dérivées partielles. Pour répondre à la question posée initialement, il faudrait pouvoir le résoudre pour tout jeu de conditions initiales. Cette tâche est généralement impossible et on va y substituer l'étude de perturbations de formes particulières et de dépendance spécifiée vis-à-vis de toutes les variables sauf une. On les appellera des modes par la suite.

Deux critères de choix vont nous guider pour la sélection de ces formes :

- les modes doivent être le plus consistant possible avec les équations de Navier-Stokes linéarisées;
- les modes doivent pouvoir représenter des fluctuations observées expérimentalement.

Pour satisfaire le premier critère, il faut d'abord exploiter les invariances de l'écoulement; pour la solution de Taylor, sont vérifiées exactement :

- la stationnarité;
- l'indépendance en la coordonnée transversale z ou azimutale θ ;

Le problème étant linéaire, on peut légitimement chercher des solutions de la forme

$$g(x, y, z, t) = \hat{g}(x, y) \exp\{i(\beta z - \omega t)\}$$

ou

$$g(x, r, \theta, t) = \hat{g}(x, r) \exp\{i(q\theta - \omega t)\} \quad (\text{II.7})$$

3. Ceci suppose de négliger la couche limite de cette paroi, mais dans ce cas une simple condition de glissement ne fournit pas assez de conditions aux limites pour le problème visqueux. Cette hypothèse de symétrie est plus forte que la condition de glissement et donne suffisamment de conditions aux limites.

A priori, ω est complexe, par ailleurs, on impose que β soit réel et q est entier pour assurer l'univocité de la définition de g quand on ajoute 2π à θ .

Si on injecte ces formes dans les équations linéaires (II.1) et (II.2) et dans les conditions aux limites du paragraphe précédent, on obtient un *problème linéaire homogène* dont on vérifie aisément qu'il admet comme solution la solution dite "triviale" pour laquelle on a $g = 0$ quelle que soit la grandeur que g représente. S'il possède une autre solution que cette solution triviale, on dit que l'opérateur linéaire qui lui est associé est *singulier*. Or l'ensemble des opérateurs linéaires singuliers est de mesure nulle dans l'ensemble des opérateurs linéaires ce qui signifie que si les paramètres définissant le problème sont pris au hasard, ce dernier est *a priori* inversible. Pour qu'il possède une autre solution que la solution triviale il faut qu'une certaine relation, appelée *relation de dispersion*, entre les paramètres, en l'occurrence $\omega, \beta, \mathcal{R}_{inj}$ ou $\omega, q, \mathcal{R}_{inj}$, soit satisfaite. La recherche des paramètres rendant l'opérateur singulier constitue ce qu'on appelle un *problème aux valeurs propres*.

Les formes de modes (II.7) sont valables mais elles restent trop complexes. En effet, alors qu'on va se ramener par la suite à des problèmes mono-dimensionnels aux valeurs propres (au sens où \hat{g} ne va dépendre que d'une variable), elles nécessitent la résolution de problèmes bidimensionnels aux valeurs propres (au sens où \hat{g} dépend de deux variables) dont le coût numérique est important et dont l'écriture des conditions aux limites en x est peu claire. Citons cependant d'intéressantes tentatives dans cette voie par Lin et Malik [LM96b] dans le cas d'un écoulement de Hiemenz sur aile en flèche qui présente des caractéristiques tout à fait comparables à celles des solutions de similitude de Berman, à savoir une vitesse axiale linéairement accélérée et les autres composantes de la vitesse indépendantes de x .

Dorénavant, on ne va plus s'occuper que de perturbations dont seule la dépendance en y ou r n'est pas prescrite (*i.e.* $\hat{g}(y)$ ou $\hat{g}(r)$) et on abandonne les perturbations telles que $\hat{g}(x, y)$ ou $\hat{g}(x, r)$.

Modes de Görtler-Hämmerlin

Une seule classe de modes a été obtenue qui soit une solution exacte des équations de Navier-Stokes linéarisées. Elle est basée sur des perturbations proposées originellement par Görtler [Gör55] et Hämmerlin [Häm55] dans l'étude de points de stagnation.

Elle postule vitesse et pression fluctuante de la forme

$$(\vec{u}, p) = ((x\hat{u}(y), \hat{v}(y), \hat{w}(y), p(y)) \cdot \exp\{i(\beta z - \omega t)\}$$

ou

$$(\vec{u}, p) = ((x\hat{u}(r), \hat{v}(r), \hat{w}(r), p(r)) \cdot \exp\{i(n\theta - \omega t)\}$$

dont la particularité est la dépendance linéaire de la vitesse fluctuante axiale vis-à-vis de x .

Le système (II.2) s'écrit alors pour la solution de Taylor dans le cas plan, en simplifiant par $\exp\{i(\beta z - \omega t)\}$, avec $D \equiv \frac{\partial}{\partial y}$

$$\begin{cases} \hat{u} + D\hat{v} + i\beta\hat{w} = 0 \\ -i\omega\hat{u} + \pi \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)\hat{u} - \frac{\pi^2}{4}\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)\hat{v} - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)D\hat{u} - \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}}(D^2\hat{u} - \beta^2\hat{u}) = 0 \\ -i\omega\hat{v} - \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)\hat{v} - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)D\hat{v} + D\hat{p} - \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}}(D^2\hat{v} - \beta^2\hat{v}) = 0 \\ -i\omega\hat{w} - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)D\hat{w} + i\beta\hat{p} - \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}}(D^2\hat{w} - \beta^2\hat{w}) = 0 \end{cases}$$

associé aux conditions aux limites

$$\hat{u}(\pm 1) = \hat{v}(\pm 1) = \hat{w}(\pm 1) = 0$$

Il s'agit d'un problème linéaire homogène. Il ne possède d'autre solution que la solution triviale $u = v = w = p = 0$ que si une relation de dispersion, entre les paramètres $\omega, \beta, \mathcal{R}_{inj}$ est satisfaite.

Il faut donc résoudre un problème aux valeurs propres. Les méthodes de résolution seront exposées plus loin, on se contente ici du résultat.

Les calculs menés sur cette forme de modes de Görtler-Hämmerlin ont montré l'existence de fluctuations stationnaires (d'interprétation physique claire indiquée par la suite, voir figure II.2), *i.e.* avec $\omega_r = 0$ pour toutes les valeurs de β , néanmoins ces fluctuations sont toutes temporellement stables *i.e.* avec $\omega_i < 0$. Il en va de même de toutes les autres fluctuations obtenues, à savoir les fluctuations instationnaires.

On constate cependant que, lorsque le nombre de Reynolds d'injection tend vers l'infini, la valeur de ω_i semble tendre vers 0, les modes deviennent alors marginalement stables. Dans ce dernier cas, on sait que l'étude de stabilité linéaire est insuffisante et qu'il faut examiner les premiers termes faiblement non-linéaires pour décider de la stabilité de l'écoulement vis-à-vis de ces modes. Il n'est donc pas exclu que de tels modes puissent exister en réponse à des perturbations d'amplitude finie. Mais aucune analyse faiblement non-linéaire n'a été entreprise dans ce sens.

Restriction sur le type de modes

Les modes de Görtler-Hämmerlin peuvent être interprétés comme des tourbillons stationnaires s'enroulant autour d'un axe orienté selon les abscisses, représentés sur le schéma II.2. Or, les mesures indiquent l'existence d'oscillations instationnaires subissant une rapide croissance en x correspondant⁴ plutôt à des rouleaux de tourbillons convectés vers l'aval comme sur l'autre partie du schéma II.2.

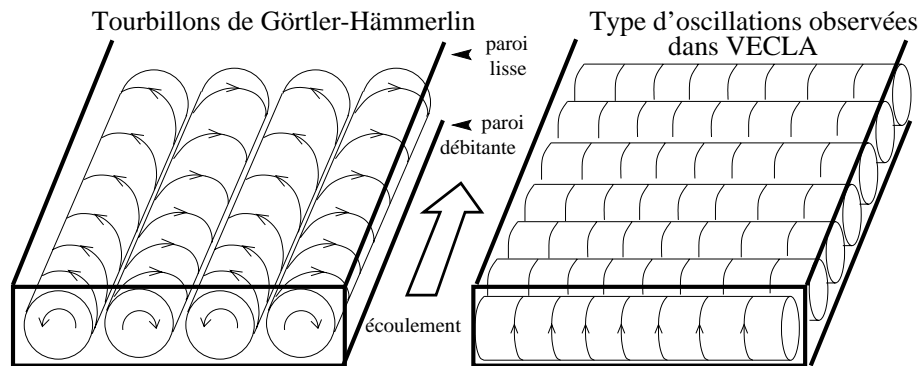


FIG. II.2 – Schéma des tourbillons résultant de la forme de Görtler-Hämmerlin et des types d'oscillations observés dans VECLA.

Rappelons cependant que les sondes ne sont placées que sur le plan médian en envergure dans les montages plans et sur des rayons particuliers dans les montages axisymétriques ce qui ne facilite pas la détection de tourbillons de Görtler-Hämmerlin. Signalons que des mesures d'Avalon [Ava94] dans VECLA (hauteur 10 mm et plaque poreuse de porosité 100 μm différente de celle utilisée dans la suite de ce manuscrit) à l'aide de bi-films indiquent une vitesse verticale de direction opposée à celle de l'injection sur une moitié de la hauteur de veine environ. Cette observation semble ne pouvoir s'expliquer que par la présence de tourbillons stationnaires contrarotatifs induisant une vitesse négative sur le plan médian...

Mais en définitive, l'objectif étant la compréhension du couplage aéroacoustique, les modes de Görtler-Hämmerlin ne présentent peut-être pas un grand intérêt car on peut douter de l'efficacité de ces structures stationnaires en tant qu'excitateurs de l'acoustique longitudinale des chambres de combustion.

Dans le cas plan, on choisit finalement de ne représenter que des rouleaux d'instabilité s'enroulant autour d'un axe orienté selon la coordonnée transverse c'est-à-dire avec $\beta = 0$ et $w = 0$. Dans le cas

4. Cette interprétation n'est pas purement expérimentale mais plutôt basée sur la comparaison avec les approches de stabilité.

axisymétrique on conserve aussi les modes non-axisymétriques sans pour autant considérer dans la suite les modes de Görtler-Hämmerlin.

Modes normaux

Les écoulements dits parallèles possèdent en plus des invariances déjà exploitées l'invariance selon la coordonnée axiale x . Pour ces écoulements, il est légitime d'utiliser la forme dite de *mode normal* suivante,

$$g = \hat{g}(y). \exp\{i(\alpha x + \beta z - \omega t)\}$$

dans le cas plan ou

$$g = \hat{g}(r). \exp\{i(\alpha x + q\theta - \omega t)\}$$

dans le cas axisymétrique.

Les équations résultant des systèmes (II.2) et (II.1) deviennent alors des équations aux dérivées ordinaires ce qui facilite grandement leur résolution. De nombreux résultats existent concernant ces écoulements parallèles qui permettent de donner la réponse à la question initiale.

D'autres écoulements, comme les couches limites, ne vérifient pas exactement l'invariance en x mais subissent des variations beaucoup plus rapides selon la coordonnée verticale ou la coordonnée radiale que selon la coordonnée axiale. Ils sont dits faiblement non-parallèles. Leur propriété de faible dépendance en x autorise des développements asymptotiques vis-à-vis d'un petit paramètre caractérisant cette faible dépendance tel que l'inverse du nombre de Reynolds dans les couches limites ou l'angle d'expansion dans un jet. Le problème peut alors être résolu à l'ordre d'approximation désiré (généralement l'ordre 1) à l'aide de formes de modes se réduisant à des modes normaux à l'ordre 0.

En première approximation, on pourrait penser au vu de l'allure des lignes de courant de l'écoulement de Taylor, voir figures I.16 et I.17 qu'il est faiblement non-parallèle. On verra par la suite qu'il n'en est rien, pourtant, l'approche initiée par Varapaev et Yagodkin [VY69] utilise la forme de mode normal et ses résultats sont vérifiés expérimentalement, c'est donc avec elle qu'on va présenter les caractéristiques de stabilité linéaire de l'écoulement.

II.3 Stabilité linéaire en approche inconsistante

II.3.1 Equations

En suivant Varapaev et Yagodkin [VY69], les perturbations sont choisies sous la forme de modes normaux

$$g(x, y, z, t) = \hat{g}(y) \exp\{i(\alpha x + \beta z - \omega t)\} \quad \text{ou} \quad g(x, r, \theta, t) = \hat{g}(r) \exp\{i(\alpha x + q\theta - \omega t)\} \quad (\text{II.8})$$

Cette forme est appliquée à toutes les grandeurs fluctuantes : vitesse, pression, fonction de courant...

Le point de vue spatial est adopté, on suppose

$$\alpha \in \mathbb{C} \text{ et } \omega \in \mathbb{R}$$

car on veut modéliser des ondes qui s'amplifient avec x dans un problème disposant d'une origine spatiale clairement définie. La théorie spatiale n'est valable que pour des instabilités convectives, voir Huerre et Monkewitz [HM90], mais aucune observation expérimentale ou simulation numérique ne suggère l'existence d'une instabilité absolue. Par ailleurs, Favray [Fav99] s'est penché sur cette question et conclut que *l'écoulement de Taylor est convectivement instable*, conclusion que nous faisons nôtre pour la suite.

L'insertion dans les systèmes (II.2) et (II.1) conduit, après élimination des parties exponentielles présentes en facteur de tous les termes, à

$$\left\{ \begin{array}{l}
 i\alpha\hat{u}_x + \frac{\partial\hat{u}_r}{\partial r} + \frac{\hat{u}_r}{r} + \frac{iq}{r}\hat{u}_\theta = 0 \\
 -i\omega\hat{u}_x + i\alpha\bar{U}_x\hat{u}_x + \hat{u}_x\frac{\partial\bar{U}_x}{\partial x} + \bar{U}_r\frac{\partial\hat{u}_x}{\partial r} + \hat{u}_r\frac{\partial\bar{U}_x}{\partial r} + i\alpha\hat{p} \\
 \quad = \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(-\alpha^2\hat{u}_x + \frac{\partial^2\hat{u}_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\hat{u}_x}{\partial r} - \frac{q^2}{r^2}\hat{u}_x \right) \\
 -i\omega\hat{u}_r + i\alpha\bar{U}_x\hat{u}_r + \hat{u}_x\frac{\partial\bar{U}_r}{\partial x} + \bar{U}_r\frac{\partial\hat{u}_r}{\partial r} + \hat{u}_r\frac{\partial\bar{U}_r}{\partial r} + \frac{\partial\hat{p}}{\partial r} \\
 \quad = \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(-\alpha^2\hat{u}_r + \frac{\partial^2\hat{u}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\hat{u}_r}{\partial r} - \frac{\hat{u}_r}{r^2} - \frac{q^2}{r^2}\hat{u}_r - \frac{2iq}{r^2}\hat{u}_\theta \right) \\
 -i\omega\hat{u}_\theta + i\alpha\bar{U}_x\hat{u}_\theta + \bar{U}_r\frac{\partial\hat{u}_\theta}{\partial r} + \frac{\hat{u}_\theta\bar{U}_r}{r} + \frac{iq}{r}\hat{p} \\
 \quad = \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(-\alpha^2\hat{u}_\theta + \frac{\partial^2\hat{u}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\hat{u}_\theta}{\partial r} - \frac{\hat{u}_\theta}{r^2} - \frac{q^2}{r^2}\hat{u}_\theta + \frac{2iq}{r^2}\hat{u}_r \right)
 \end{array} \right. \quad (II.9)$$

dans le cas axisymétrique et

$$\left\{ \begin{array}{l}
 i\alpha\hat{u} + \frac{\partial\hat{v}}{\partial y} + i\beta\hat{w} = 0 \\
 -i\omega\hat{u} + i\alpha\bar{U}\hat{u} + \hat{u}\frac{\partial\bar{U}}{\partial x} + \bar{V}\frac{\partial\hat{u}}{\partial y} + \hat{v}\frac{\partial\bar{U}}{\partial y} + i\alpha\hat{p} = \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial y^2} - \alpha^2\hat{u} - \beta^2\hat{u} \right) \\
 -i\omega\hat{v} + i\alpha\bar{U}\hat{v} + \hat{u}\frac{\partial\bar{V}}{\partial x} + \bar{V}\frac{\partial\hat{v}}{\partial y} + \hat{v}\frac{\partial\bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial\hat{p}}{\partial y} = \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial y^2} - \alpha^2\hat{v} - \beta^2\hat{v} \right) \\
 -i\omega\hat{w} + i\alpha\bar{U}\hat{w} + \bar{V}\frac{\partial\hat{w}}{\partial y} + i\beta\hat{p} = \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial y^2} - \alpha^2\hat{w} - \beta^2\hat{w} \right)
 \end{array} \right. \quad (II.10)$$

dans le cas plan.

Et les conditions aux limites pour une injection imposée s'écrivent

$$\hat{u}_x(1) = \hat{u}_r(1) = \hat{u}_\theta(1) = 0 \quad \text{et} \quad \hat{u}(\pm 1) = \hat{v}(\pm 1) = \hat{w}(\pm 1) = 0 \quad (II.11)$$

Dans le cas bidimensionnel en fonction de courant on tire de l'équation (II.3)

$$\left(-i\omega + i\alpha\bar{U} + \bar{V}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 \right) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 \right) \hat{\phi} - \frac{\partial^2\bar{V}}{\partial y^2} \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial y} - i\alpha \frac{\partial^2\bar{U}}{\partial y^2} \hat{\phi} = 0 \quad (II.12)$$

avec les conditions aux limites

$$\hat{\phi}(\pm 1) = \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial y}(\pm 1) = 0$$

L'approche est inconsistante en ceci que les systèmes (II.9) et (II.10) font apparaître explicitement la variable x via \bar{U} (linéaire en x) alors que les fonctions sont supposées ne dépendre que de y ou r d'après (II.8) et que les paramètres α, ω, β, q sont supposés constants.

Pour résoudre ce problème, l'abscisse x est donc considérée comme un paramètre et les calculs repris à chaque position en x . La méthode n'est pas originale en soi; elle est couramment utilisée pour les écoulements faiblement non-parallèles où les termes non-consistants n'apportent qu'une faible

correction et peuvent être supprimés sans profonds changements des résultats, mais ici on verra que les termes non-consistants sont essentiels. Pour cette raison, Varapaev et Yagodkin conservent tous les termes de ces équations.

II.3.2 Problème aux valeurs propres

La solution triviale $\hat{u}_x = \hat{u}_r = \hat{u}_\theta = 0$ (resp. $\hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = 0$) vérifie à la fois les équations (II.9) (resp. (II.10)) et les conditions aux limites (II.11), elle est donc solution du problème. Ceci était évident d'emblée puisque la fluctuation est justement ajoutée à une solution du problème, si la fluctuation est nulle, on retrouve la solution initiale...

Le problème constitué de (II.9) (resp. II.10) et (II.11) peut s'écrire formellement à l'aide d'un opérateur différentiel aux dérivées ordinaires

$$\mathcal{NSL}(\hat{u}_x, \hat{u}_r, \hat{u}_\theta, p) = 0 \quad (\text{resp. } \mathcal{NSL}(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, p) = 0)$$

où l'opérateur de Navier-Stokes linéarisé \mathcal{NSL} dépend explicitement de $\vec{U}, \alpha, \omega, q, \mathcal{R}_{inj}$ (resp. $\vec{U}, \alpha, \omega, \beta, \mathcal{R}_{inj}$).

Les systèmes d'équations étant linéaires vis-à-vis de la perturbation et les conditions aux limites étant homogènes, l'opérateur \mathcal{NSL} est linéaire. Il s'agit à nouveau d'un problème aux valeurs propres : pour qu'une solution autre que la solution triviale existe, il faut que l'opérateur soit non-inversible ce qui n'est le cas que si les paramètres vérifient la *relation de dispersion*

$$\mathcal{F}(\alpha, \omega, q, \mathcal{R}_{inj}, x) = 0 \quad (\text{resp. } \mathcal{F}(\alpha, \omega, \beta, \mathcal{R}_{inj}, x) = 0)$$

En pratique, la résolution ne peut généralement se faire que de façon numérique. La première étape consiste donc à discrétiser le problème. Deux discrétisations sont utilisées dans ce manuscrit :

- le schéma compact aux différences finies d'ordre 4 de Malik, voir Malik *et. al.* [MCH82]
- la méthode de collocation spectrale basée sur un polynôme interpolant de Chebichev aux points de Gauss-Lobatto, voir Canuto *et. al.* [CHQZ88]

elles sont rapidement rappelées avec leurs avantages et leurs défauts en annexe B.

Dans le cas axisymétrique, la singularité sur l'axe liée au système des coordonnées cylindriques nécessite de plus un traitement particulier décrit en annexe D.

L'opérateur linéaire différentiel aux dérivées ordinaires s'écrit alors comme une matrice dont les coefficients dépendent des paramètres et ces derniers vérifient la relation de dispersion si le déterminant de cette matrice est nul.

Si on fixe tous les paramètres sauf α , il existe de multiples valeurs de α rendant la matrice non-inversible. Parmi elles se trouvent les modes physiques potentiellement observables.

A ce niveau de la résolution, deux types de calculs ont été utilisés :

- des calculs utilisant des méthodes itératives et visant à suivre l'évolution d'un mode (donc une valeur de α) lorsque les autres paramètres varient;
- des calculs visant à connaître l'ensemble des valeurs de α annulant le déterminant de la matrice.

Celles-ci sont obtenues par recherche du spectre de matrices déduites de la matrice de l'opérateur \mathcal{NSL} discrétisé selon une méthode de Bridges et Morris [BM84].

Ces deux types de calculs sont rapidement décrits avec leurs avantages et leurs défauts en annexe C.

II.3.3 Stabilité de l'écoulement de Taylor plan

Comme annoncé précédemment, on ne considère pas d'onde oblique *i.e.* on impose $\beta = 0$. Les calculs ont quand même été menés avec $\beta \neq 0$ mais ils conduisent à des ondes plus stables selon une évolution tout à fait similaire à celle du cas axisymétrique pour $q \neq 0$ qui sera étudié par la suite.

Choix d'un mode

Les résultats ne vont être donnés par la suite que pour un seul mode de la forme (II.8). Cela signifie que pour des valeurs particulières fixées des paramètres $\omega_0, x_0, \mathcal{R}_{inj_0}$ on choisit une valeur de α_0 et une seule parmi l'ensemble des valeurs propres. La valeur α_1 à laquelle on s'intéresse pour des paramètres $\omega_1, x_1, \mathcal{R}_{inj_1}$ est celle qui peut être obtenue en suivant α à partir de α_0 lorsque $\omega, x, \mathcal{R}_{inj}$ passent continûment de $\omega_0, x_0, \mathcal{R}_{inj_0}$ à $\omega_1, x_1, \mathcal{R}_{inj_1}$.

Si deux jeux de paramètres $\alpha, \omega, x, \mathcal{R}_{inj}$ vérifient la relation de dispersion et peuvent être reliés continûment de la manière indiquée, on dira qu'il s'agit d'un seul mode⁵.

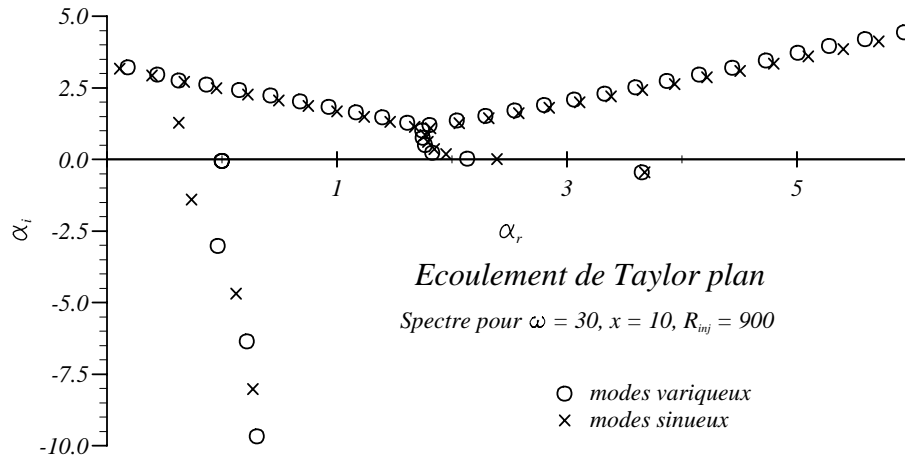


FIG. II.3 – Spectre spatial de l'écoulement de Taylor plan à $\omega = 30, x = 10, \mathcal{R}_{inj} = 900$.

Le spectre de l'écoulement de Taylor à $\omega = 30, x = 10, \mathcal{R}_{inj} = 900$ est représenté en figure II.3. Il est obtenu par deux calculs de spectre sur une demi-veine ($y \in [0, 1]$) en cherchant soit des modes sinueux, soit des modes variqueux grâce aux conditions aux limites (II.5) et (II.6). On a vérifié en effectuant le calcul sur une veine complète ($y \in [-1, 1]$) que tous les modes sont soit sinueux, soit variqueux donc qu'il n'existe pas de mode asymétrique. La discrétisation est faite à l'aide du schéma de Malik avec 100 points régulièrement espacés.

Trois types de modes peuvent être distingués sur cette figure II.3

- une branche de modes issus de la couche critique où la vitesse de phase est égale la vitesse locale du fluide. Elle part des points situés vers les coordonnées (2,0) et se prolonge vers le haut avant de séparer en deux branches dépendant fortement des paramètres numériques du calcul. La couche critique se manifeste dans le cas parallèle non-visqueux par une singularité due à l'annulation de $(U - \omega/\alpha)$ qui se trouve en facteur dans la relation de dispersion. Dans le cas visqueux non-parallèle, la singularité est moins clairement visible mais elle laisse des traces;
- une branche presque verticale vers $\alpha_r \sim 0.5$ de modes de fonctions propres quasi-sinusoïdales en y . Ces modes sont en fait peu dépendants de l'écoulement de base et se retrouvent dans l'écoulement de Poiseuille par exemple. Ils correspondent à des cas limites où l'équation (II.12) se réduit à son terme principal

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 \right)^2 \hat{\phi} = 0$$

- deux modes isolés, l'un variqueux, l'autre sinueux. Les valeurs sont données en table II.1

5. Attention, les situations ne sont pas toujours claires et des coalescences de modes peuvent se produire. Cependant, pour la stabilité linéaire de l'écoulement de Taylor, ce problème ne se pose pas.

	α_r	α_i
mode variqueux	3.6511	-0.38398
mode sinueux	3.6739	-0.39791

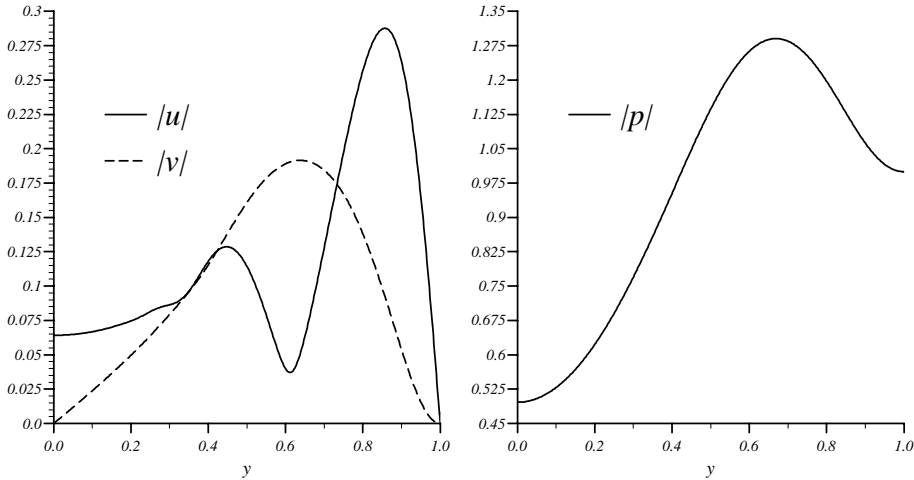
 TAB. II.1 – Deux modes isolés, $\omega = 30$, $x = 10$, $\mathcal{R}_{inj} = 900$.

Seuls les modes isolés sont considérés en vue de comparaisons aux mesures. Comme on rappelle, de plus, que VECLA n'autorise que les modes variqueux, les résultats présentés dans cette section ne concernent que le mode variqueux du tableau (II.1).

Les calculs ont aussi été menés avec le mode sinueux. Les résultats obtenus sont qualitativement identiques et quantitativement similaires, voir Casalis *et al.* [CAP98].

Résultats

Fonctions propres Les fonctions propres du mode pour $\omega = 30$, $x = 10$, $\mathcal{R}_{inj} = 900$ sont tracées sur la figure II.4. Les amplitudes n'ont pas de signification absolue puisque la théorie linéaire ne donne de résultats qu'à une constante multiplicative près, mais une signification relative une fois qu'une normalisation est choisie, en l'occurrence $\hat{p}(1) = 1$.


 FIG. II.4 – Fonctions propres $\omega = 30$, $x = 10$, $\mathcal{R}_{inj} = 900$.

La caractéristique principale des fonctions propres est la présence d'un maximum marqué proche de la paroi qui a suggéré la dénomination *instabilité pariétale* puisque de ce fait, les fluctuations semblent émerger de la paroi dans les simulations numériques. Ce maximum est encore plus marqué pour des abscisses plus élevées mais moins pour des pulsations plus faibles (qui présentent des valeurs du même ordre vers la paroi et vers l'axe). La distance du maximum à la paroi varie typiquement comme l'inverse de la pulsation.

Les fluctuations de vitesse axiale et verticale sont du même ordre de grandeur. Ceci est habituel en stabilité mais se distingue de l'approche acoustique du problème qui résout à peu de choses près les mêmes équations mais suppose des fluctuations de vitesse verticale négligeables devant les fluctuations axiales. Le lecteur est engagé à se reporter à l'annexe A concernant cette approche et ses rapports avec l'analyse de stabilité.

On trace aussi la fonction propre de pression pour rappeler qu'aux ondes de stabilité sont associées des fluctuations de pression qui ne sont pas l'apanage de l'acoustique. Cette remarque n'est pas sans incidence sur les possibilités de couplage entre stabilité et acoustique comme on le verra par la suite, au moins en ce qui concerne la simulation numérique.

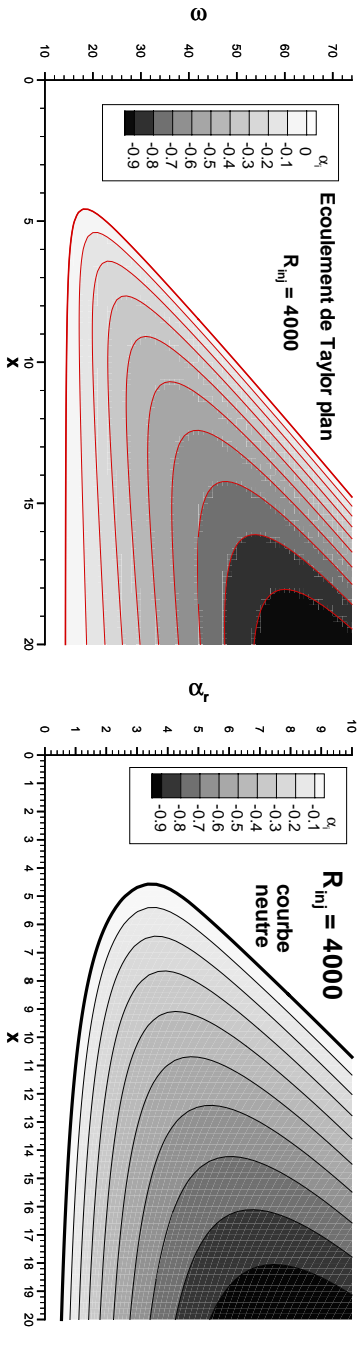


FIG. II.5 – Iso-valeurs du taux d'accroissement α_i de l'écoulement de Taylor plan dans un diagramme abscisse-pulsation à gauche et abscisse-nombre d'onde à droite.

Taux d'accroissement et longueur d'onde Selon l'approche de stabilité décrite, l'écoulement de Taylor plan est stable à l'amont jusqu'à une abscisse, dépendant de la viscosité, de l'ordre de 5 (c'est-à-dire 5 fois la demi-distance entre parois débitantes) où il devient instable pour des pulsations de l'ordre de 20 et des nombres d'onde de l'ordre de 3. La gamme des pulsations amplifiées croît ensuite avec x de façon quasi-linéaire mais les faibles pulsations (inférieures à 14 environ et ceci indépendamment de x) demeurent toujours atténuées. Si à chaque abscisse on regarde la fréquence la plus amplifiée localement, on constate que cette fréquence augmente quasi-linéairement avec x et que le taux d'amplification qui lui est associé ne cesse de croître (au moins dans l'intervalle des abscisses calculées).

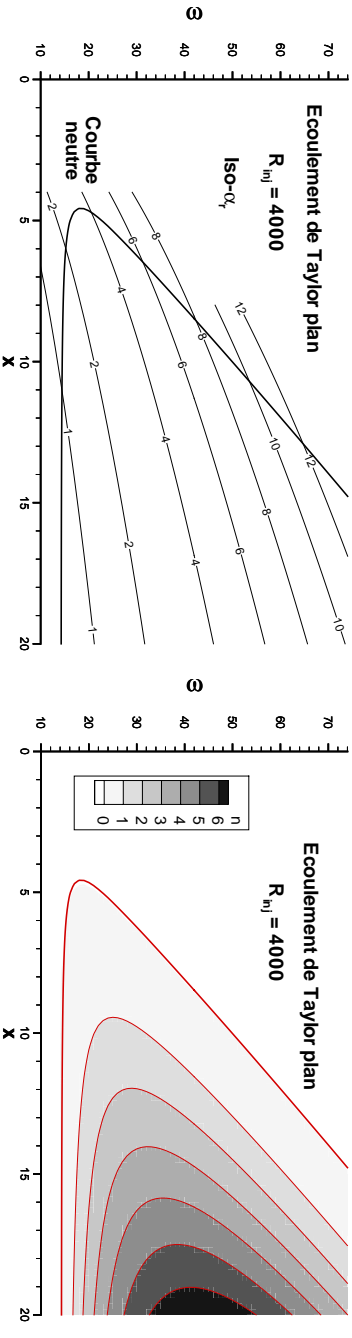


FIG. II.6 – Iso-valeurs du nombre d'onde α_r de l'écoulement de Taylor plan dans un diagramme abscisse-pulsation.

FIG. II.7 – Iso-valeurs du facteur n de l'écoulement de Taylor plan dans un diagramme abscisse-pulsation.

Ce comportement est clairement visible sur la figure II.5. Les nombres d'onde correspondants font l'objet de la figure II.6.

On a choisi de donner les taux d'accroissement et nombre d'onde en fonction de l'abscisse plutôt que d'un nombre de Reynolds car la viscosité n intervient quasiment pas dans le problème et le véritable paramètre important est x .

Dans les figures II.5 et II.6, ce qu'on appelle *courbe neutre* est l'ensemble des jeux de paramètres tels que $\alpha_i = 0$. On définit alors le *point critique* correspondant à la première abscisse où l'écoulement devient *marginalelement stable* c'est-à-dire atteint la courbe neutre. Pour le mode variquex choisi, à un nombre de Reynolds d'injection de 4000, ce point critique se situe en

$$x = 4.56, \quad \omega = 18.39, \quad \alpha_r = 3.47, \quad \alpha_i = 0$$

On introduit aussi une grandeur intéressante dénommée *facteur n* qui est l'intégrale, à \mathcal{R}_{inj} fixé, du taux d'accroissement à partir de la courbe neutre.

$$n(x, \omega) = \int_{x_{CN}(\omega)}^x -\alpha_i(\xi, \omega) d\xi \quad (\text{II.13})$$

avec $x_{CN}(\omega)$ abscisse de la courbe neutre à la pulsation ω . Le facteur n donne une information globale, alors que le taux d'accroissement est purement local. Si on suppose que toutes les pulsations ont la même amplitude initiale A_0 (*i.e.* à la courbe neutre), le spectre fréquentiel à une abscisse donnée s'écrit directement comme

$$A(x, \omega) = A_0 e^{n(x, \omega)}$$

L'observation du facteur n en figure II.7 par comparaison à la figure II.5 montre que, pour une abscisse donnée, la pulsation la plus amplifiée depuis la courbe neutre est plus faible que celle qui possède l'amplification locale la plus importante. Ceci exprime simplement le fait que les fréquences plus basses s'amplifient plus précocement. Pour la comparaison aux expériences où seules des amplitudes peuvent être mesurées et non pas des amplifications, c'est la figure II.7 des facteurs n qui est la plus significative.

II.3.4 Stabilité de l'écoulement de Taylor axisymétrique

Modes axisymétriques ($q = 0$)

Commençons par les résultats relatifs aux modes axisymétriques *i.e.* avec $q = 0$. Les spectres obtenus sont similaires à ceux du cas plan (figure II.3) à ceci près qu'il n'existe plus deux classes de solutions, variqueuse et sinueuse, mais une seule. On obtient donc un seul mode isolé qui est choisi dans toute la suite.

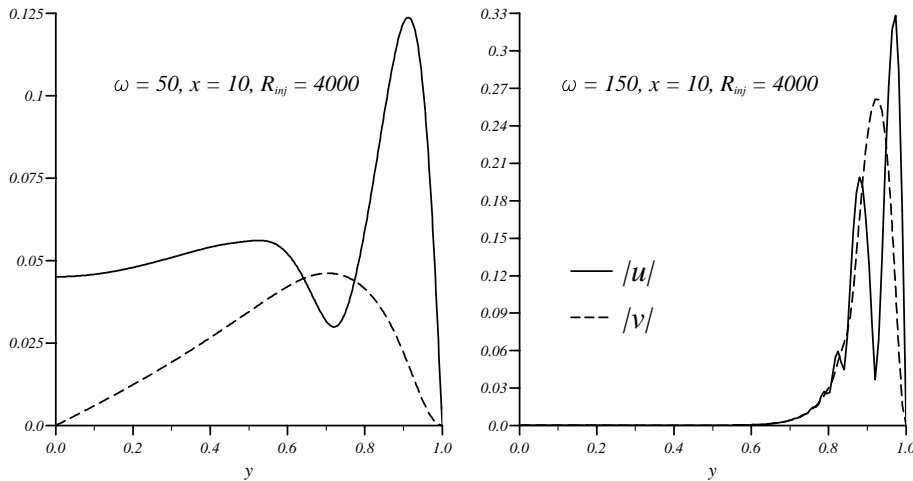


FIG. II.8 – *Fonctions propres des vitesses axiale et radiale dans le cas axisymétrique avec $q = 0$, $x = 10$, $\mathcal{R}_{inj} = 4000$ et deux valeurs de ω : 50 et 150.*

Les fonctions propres qui lui sont associées sont elles aussi similaires au cas plan comme on s'en rend compte sur la figure II.8 où elles sont données à $x = 10$ et $\mathcal{R}_{inj} = 4000$ pour deux pulsations $\omega = 50$ et $\omega = 150$. La migration du maximum vers la paroi débitante lorsque ω croît y est nettement visible.

Les iso-valeurs de taux d'accroissement sont représentées dans le plan (x, ω) en figure II.9. L'évolution qualitative est identique à celle du cas plan. L'écoulement est trouvé stable jusqu'à une abscisse critique à partir de laquelle une bande de fréquences de largeur quasi-linéairement croissante avec x

s'amplifie tandis que les basses fréquences, situées sous une valeur limite indépendante de x demeurent atténuées. Enfin la fréquence d'amplification maximale est quasi-linéairement croissante avec x et le taux d'amplification qui lui est associé ne cesse de croître.

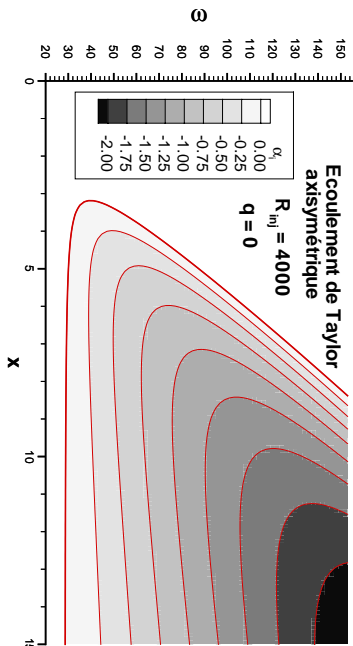


FIG. II.9 – Iso-valeurs du taux d'accroissement α_i de l'écoulement de Taylor axisymétrique dans un diagramme abscisse-pulsation.

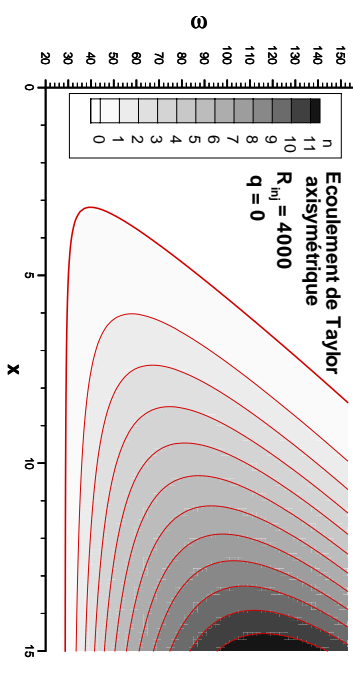


FIG. II.10 – Iso-valeurs du facteur n de l'écoulement de Taylor axisymétrique dans un diagramme abscisse-pulsation.

Pourtant, les résultats sont quantitativement très différents de ceux du cas plan. En effet, pour le même nombre de Reynolds de 4000, le point critique est désormais tel que

$$x = 3.18, \quad \omega = 39.75, \quad \alpha_r = 5.49, \quad \alpha_i = 0$$

au lieu de

$$x = 4.56, \quad \omega = 18.39, \quad \alpha_r = 3.47, \quad \alpha_i = 0$$

dans le cas plan.

Par ailleurs, la limite inférieure de la courbe neutre est désormais de l'ordre de $\omega = 28$ au lieu de 14. Enfin, alors que pour $x = 15$ l'amplification maximale dans le cas plan est $\alpha_i \approx -0.7$, on atteint $\alpha_i \approx -2.22$ dans le cas axisymétrique.

Ainsi, l'écoulement de Taylor axisymétrique est beaucoup plus instable que l'écoulement de Taylor plan et les fréquences concernées sont environ deux fois plus élevées.

Ce constat se retrouve évidemment sur le facteur n représenté en figure II.10. Si on suppose que les ondes associées à toutes les fréquences ont la même amplitude initiale A_0 lorsqu'elles atteignent la courbe neutre, alors l'onde de plus forte amplitude à $x = 15$ a pour pulsation $\omega \approx 120$ et pour amplitude environ $A_0 e^{12} \approx 10^5 A_0$ tandis que dans le cas plan à la même abscisse, d'après la figure II.7, la pulsation principale est $\omega \approx 30$ et son amplitude vaut environ $A_0 e^{4.5} \approx 10^2 A_0$ soit mille fois moins que dans le cas axisymétrique !

Les longueurs d'onde $\lambda = 2\pi/\alpha_r$ sont reportées sur la figure II.11 avec la courbe des lieux (ω_{max}, x) des facteurs n maximaux définis par

$$n_{max}(x) = \max_{\omega \in \mathbb{R}^+} \{n(\omega, x)\}$$

et

$$\omega_{max}(x) \text{ tel que } n(\omega_{max}(x), x) = n_{max}(x)$$

Ceci permet de voir que la longueur d'onde associée à la fréquence la plus amplifiée reste toujours proche de 1. Les instabilités potentiellement observables dans un écoulement de Taylor axisymétrique sont donc typiquement d'une longueur d'onde de l'ordre du rayon du cylindre.

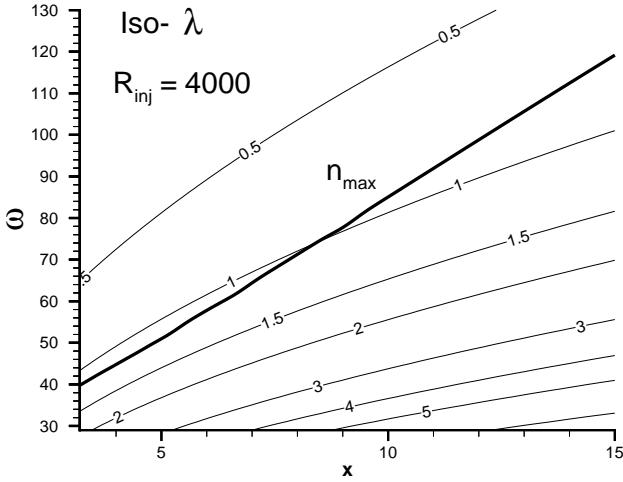


FIG. II.11 – Iso-valeurs de la longueur d'onde de l'écoulement de Taylor axisymétrique dans un diagramme abscisse-pulsation avec le lieu des maxima n_{max} en ω du facteur n .

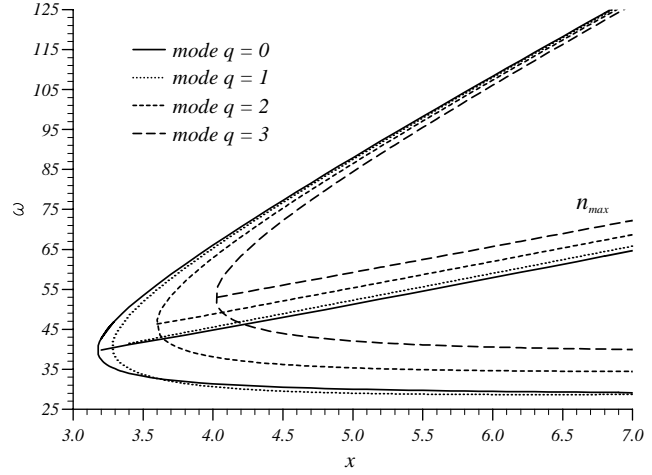


FIG. II.12 – Courbes neutres et lieux des maxima n_{max} en ω du facteur n pour les premiers modes azimutaux. $\mathcal{R}_{inj} = 4500$.

Modes non-axisymétriques ($q \neq 0$)

Par opposition aux modes axisymétriques dont les visualisations laissent voir des structures toroïdales, on peut s'intéresser aux modes hélicoïdaux correspondant à des nombres d'onde azimutaux non-nuls.

Il découle immédiatement du système (II.9) que

$$\text{si } (\hat{u}_x, \hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{p}) \text{ avec } q, \alpha, \omega, x, \mathcal{R}_{inj} \text{ est solution de (II.9)}$$

$$\text{alors } (\hat{u}_x, \hat{u}_r, -\hat{u}_\theta, \hat{p}) \text{ avec } -q, \alpha, \omega, x, \mathcal{R}_{inj} \text{ l'est aussi}$$

Il suffit donc d'étudier les nombres d'onde $q \geq 0$. Ceci vient de ce que rien ne privilégie les hélices droites ou les hélices gauches.

Les courbes neutres et les lieux des maxima du facteur n pour les premiers nombres d'onde azimutaux sont tracés sur la figure II.12. On constate que les courbes neutres sont "emboîtées" les unes dans les autres et contenues dans la courbe des nombres azimutaux inférieurs, hormis pour $q = 1$ qui sort légèrement de $q = 0$ pour les basses fréquences. Plus précisément, pour des nombres d'onde croissants supérieurs à 1, les courbes neutres se décalent vers l'aval et vers des fréquences plus élevées, les branches supérieures sont presque inchangées à l'aval tandis que les branches inférieures se déplacent vers des fréquences plus élevées.

Quant aux courbes " n_{max} ", elles forment des quasi-droites parallèles se translatant vers les fréquences plus élevées à mesure que le nombre d'onde azimutal croît.

Au final, pour une position et une fréquence fixées le facteur n diminue quand q augmente (à part à quelques endroits particuliers pour $q = 1$) ce qui justifie qu'on ne considère pas les modes de nombre d'onde azimutal élevé. Par contre, il n'est pas légitime d'éliminer *a priori* tous les modes non-axisymétriques puisque si on examine l'amplification totale maximale à $x = 10$, à savoir $e^{n_{max}(10)}$ on trouve seulement deux fois plus pour $q = 3$ ($e^{n_{max}(10)} \approx 50$) que pour $q = 0$ ($e^{n_{max}(10)} \approx 100$).

Signalons par ailleurs que l'étude des modes tels que $\beta \neq 0$ dans le cas plan conduit à des courbes neutres "emboîtées" de la même façon que celles de la figure II.12.

II.3.5 Rôle de la viscosité

Le traitement de la viscosité effectué jusqu'à présent est ambigu puisque d'un côté on la néglige pour établir l'écoulement de base alors que d'un autre, on la conserve dans le système des équations. En toute rigueur, cette approche n'est pas cohérente. Deux possibilités cohérentes se présentent

1. calculer l'écoulement de base visqueux et lui appliquer le système (II.10)
2. garder la solution de Taylor et éliminer les termes visqueux de (II.10)

La deuxième solution est séduisante mais possède deux défauts. D'abord, si on suppose l'invariance en z en posant $\beta = 0$ et $\hat{w} = 0$ dans (II.10), ce système est du quatrième ordre ce qui est compatible avec le nombre de conditions aux limites : $\hat{u}(\pm 1) = \hat{v}(\pm 1) = 0$. Par contre, si on élimine les termes en $1/\mathcal{R}_{inj}$ dans (II.10), le système devient d'ordre trois ce qui ne permet *a priori* plus de vérifier les quatre conditions aux limites.

Des calculs de ce type ont tout de même été menés en imposant les conditions linéarisées d'injection fixée à la paroi et la condition de glissement sur l'axe de symétrie : $\hat{u}(1) = \hat{v}(1) = \hat{v}(0) = 0$ (compatible avec le montage VECLA).

Le deuxième défaut apparaît alors. Tant que l'onde est amplifiée *i.e.* $\alpha_i < 0$, la solution a un bon comportement vers l'axe ($y = 0$) mais dès que l'onde est atténuée, des divergences sur l'axe sont obtenues. Ces divergences seront clairement mises en évidence par la suite dans un cas particulier.

Pour cette raison, on garde dans la suite les termes visqueux. On donne néanmoins en figure II.13 les taux d'amplification de l'approche strictement non-visqueuse comparée au cas $\mathcal{R}_{inj} = 4000$. Les deux calculs utilisent la solution de Taylor comme écoulement de base.

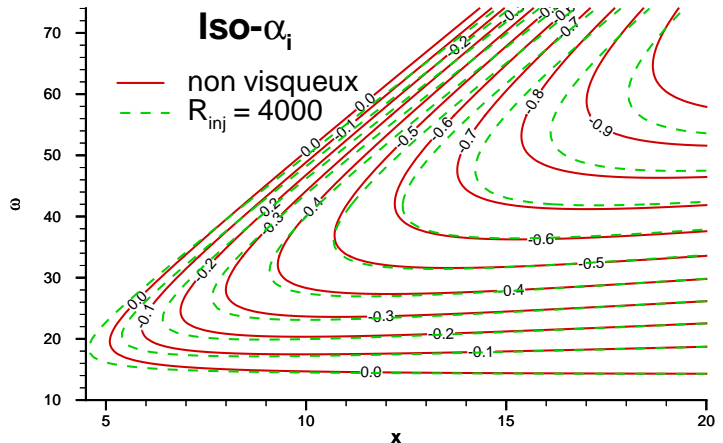


FIG. II.13 – Taux d'amplification par approche strictement non-visqueuse et avec $\mathcal{R}_{inj} = 4000$. L'écoulement de base est la solution de Taylor en canal plan dans les deux cas.

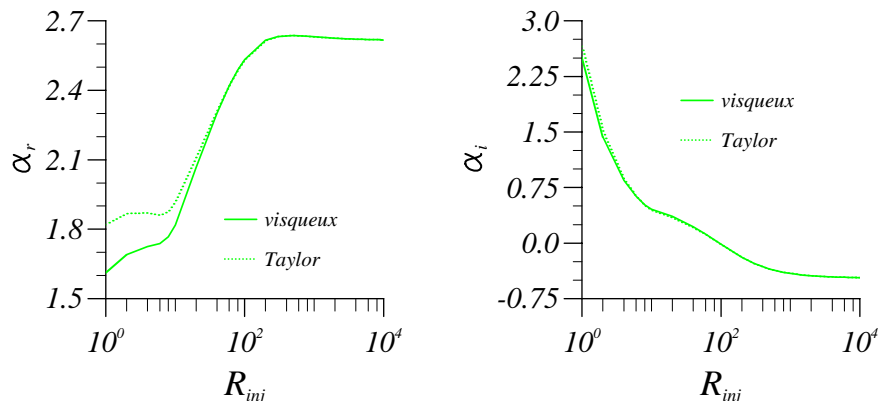


FIG. II.14 – Effet du nombre de Reynolds sur la stabilité de l'écoulement de Taylor axisymétrique et l'écoulement de similitude visqueux. $x = 10$, $\omega = 50$, $q = 0$.

La première solution permet d'estimer l'erreur commise en choisissant l'écoulement de Taylor. Elle est mise en œuvre dans la figure II.14 obtenue dans le cas axisymétrique. L'écoulement de base est obtenu par résolution de l'équation de Berman axisymétrique (I.7). La comparaison des résultats

obtenus avec la solution de Taylor et avec la solution visqueuse y est donnée en fonction du nombre de Reynolds d'injection pour $\omega = 50$, $x = 10$ et $q = 0$. Deux conclusions peuvent en être tirées :

- choisir la solution de Taylor plutôt que la solution visqueuse n'a pas d'incidence sur la stabilité dès que le nombre de Reynolds d'injection devient de l'ordre de 100. Une conclusion similaire est tirée de Casalis *et al.* [CAP98] dans le cas plan.
- le nombre de Reynolds n'a plus d'influence sur la stabilité dès que le nombre de Reynolds d'injection devient de l'ordre de 1000 ce qui est encore une fois confirmé dans le cas plan, voir Casalis *et al.* [CAP98].

Par ailleurs, une très forte viscosité joue comme attendu un rôle stabilisant. Pour l'écoulement plan, le point critique évolue rapidement quand la viscosité devient telle que $\mathcal{R}_{inj} \leq 200$ comme le montre le tableau II.2.

\mathcal{R}_{inj}	x	ω	α_r	α_i
1000	4.73	18.49	3.38	0
500	4.97	18.65	3.27	0
200	5.81	19.21	2.95	0
100	7.83	20.49	2.43	0
50	16.552	25.38	1.59	0

TAB. II.2 – *Points critiques de l'écoulement auto-semblable solution de l'équation de Berman dans le cas plan.*

II.4 Comparaison aux mesures expérimentales

II.4.1 Hypothèses

Pour se comparer à l'expérience, de nouvelles hypothèses sont ajoutées à celles de la modélisation du problème de base (injection normale uniforme et constante...)

- on suppose que l'écoulement est proche de celui de Taylor;
- on suppose que l'instabilité pariétale est le seul mécanisme à l'œuvre. De ce fait, on élimine les cas où l'acoustique est clairement visible;
- on suppose qu'un seul mode est à l'origine des oscillations et qu'il est tel que $\beta = 0$ dans le cas plan;
- on suppose que les amplitudes initiales $A_0(\omega)$ de toutes les pulsations sont égales à A_0 . Par définition du facteur n voir (II.13), le spectre en x_0 prédit par le calcul est donné par

$$A_0(\omega)e^{n(\omega, x_0)} = A_0e^{n(\omega, x_0)}$$

donc le spectre est connu à une constante multiplicative près.

II.4.2 En canal rectangulaire

Toutes les comparaisons utilisent des mesures effectuées sur le montage VECLA, présenté à la section I.6, par G. Avalon.

Si on se reporte à la typologie des comportements observés établie dans la même section I.6, on se rend aisément compte qu'on ne peut espérer retrouver directement les instabilités que dans les écoulements de type 1 ou 2.

D'après le tableau I.3, seules les configurations

- avec et sans tuyère pour $h = 10 \text{ mm}$ avec $V_{inj} \leq 1.7 \text{ m/s}$
- et sans tuyère pour $h = 30 \text{ mm}$ avec $V_{inj} \geq 1.36 \text{ m/s}$

sont utilisables à une fin de validation de la stabilité linéaire.

VECLA, $h = 10 \text{ mm}$

Les premières mesures dans VECLA avec une hauteur de 10 mm ont été effectuées en 1997. Leur comparaison avec la stabilité fait l'objet d'un article de Casalis *et al.* [CAP98]. La plaque poreuse

employée a une porosité de $18 \mu\text{m}$ et parmi les essais *a priori* intéressants, seules les configurations sans tuyère avec $V_{inj} = 1.36 \text{ m/s}$ et 1.70 m/s sont rappelées ici.

Parmi les trois vitesses d'injection exploitables, le meilleur accord est obtenu pour $V_{inj} = 1.36 \text{ m/s}$ comme l'indique la figure II.15. Trois spectres y sont superposés correspondant aux abscisses adimensionnelles $x = 3.1$, 8.1 et 12 . Ils sont obtenus avec une sonde placée à 1 mm de la paroi débitante soit $y = -0.9$ afin de profiter du maximum de la fonction propre pour avoir un signal moins bruité.

On voit nettement sur cette figure II.15 qu'une gamme de fréquences ne semblant contenir que du bruit à l'amont, s'amplifie rapidement vers l'aval. La gamme correspond à peu près à celle prévue par la théorie, surtout à $x = 12$, de même que l'amplification entre les deux dernières abscisses puisque les deux résultats de calcul utilisent la même valeur pour A_0 à savoir $1/400$. Le spectre plus aval à $x = 13.1$, non-tracé ici, montre une décroissance des niveaux qui laisserait supposer le déclenchement d'autres mécanismes.

La configuration avec $V_{inj} = 1.70 \text{ m/s}$ présente quant à elle des niveaux de bruit élevés qui permettent seulement d'imaginer un dôme d'instabilité compatible avec les prédictions à l'abscisse $x = 8.1$.

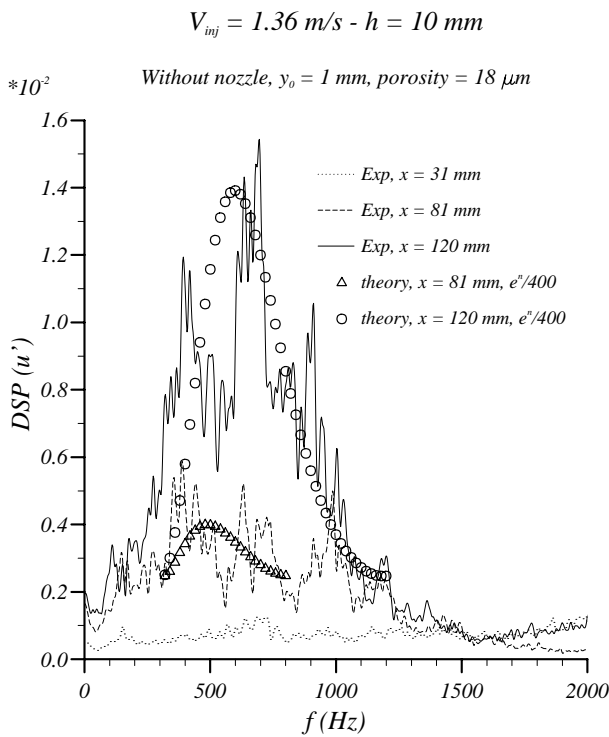


FIG. II.15 – Spectres des fluctuations avec le poral de $18 \mu\text{m}$.

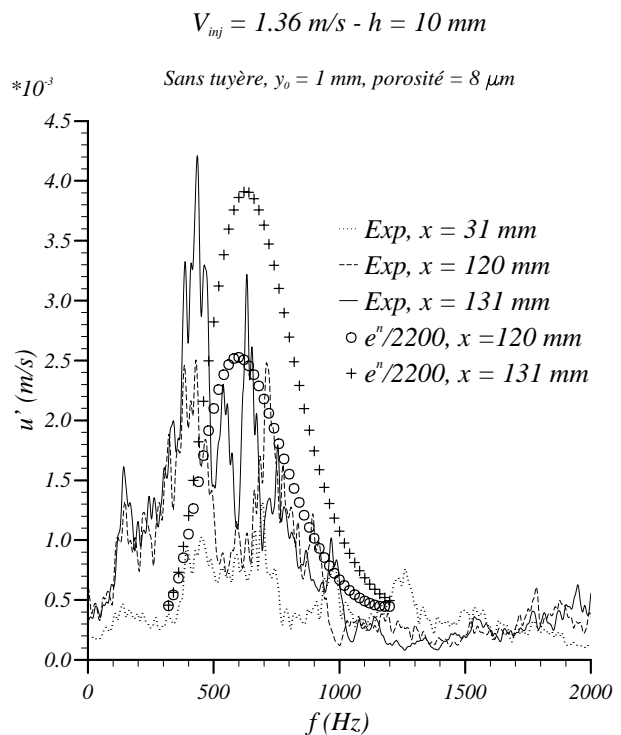


FIG. II.16 – Evolution spatiale de l'écoulement pour une porosité de $8 \mu\text{m}$.

Une nouvelle campagne de mesures a été menée en 1998 avec une nouvelle plaque poreuse de porosité $8 \mu\text{m}$. L'exploitation de ces résultats vis-à-vis de la stabilité est donnée par l'auteur dans la référence [Gri98].

Les six cases du tableau I.3 contenant un écoulement de type 2 ont été remplies lors de cette campagne. La figure II.16 reprend la même configuration que la figure II.15 à la porosité du poral près. Les abscisses et les échelles sont différentes.

On constate que certaines fréquences s'amplifient rapidement vers l'aval mais elles ne forment plus un dôme mais plutôt une série de pics. Cette série de pics n'est même pas vraiment centrée sur les valeurs prévues par la théorie, quant aux amplifications, elles ne concordent pas avec la théorie. Les conclusions sont du même genre pour toutes les configurations.

En somme, cette campagne d'essais ne fournit aucune validation des résultats théoriques et serait même plutôt inquiétante pour l'applicabilité de la stabilité.

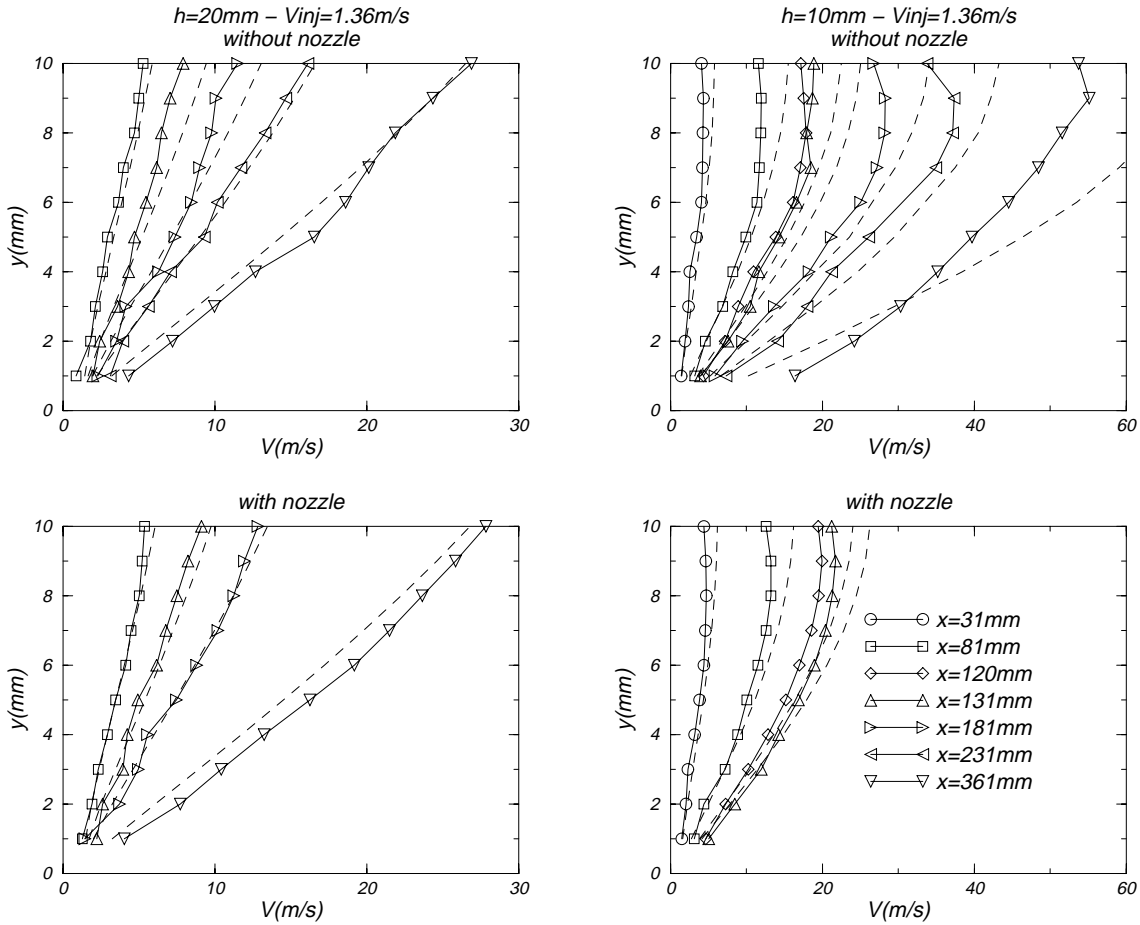


FIG. II.17 – Profils expérimentaux et profils de Taylor.

Les raisons de ces désaccords restent méconnues et on ne se hasarde pas à risquer une explication. On remarque seulement sur la figure II.17 extraite d'Avalon *et al.* [ACG98] que l'écoulement moyen n'est pas toujours très proche de celui de Taylor. On signale aussi que la configuration $h = 10 \text{ mm}$, $V_{inj} = 1.36 \text{ m/s}$ sans tuyère avec une plaque de porosité $8 \mu\text{m}$ a été testée à nouveau, encore une année plus tard, et que les résultats se sont révélés remarquablement reproductibles : même répartition en pics des spectres avec même amplification de chacun de ces pics en x .

VECLA, $h = 30 \text{ mm}$

Restent les écoulements de type 1 obtenus pour une hauteur de $h = 30 \text{ mm}$. Ces mesures sont plus récentes puisqu'elles datent de 1999. Seules des configurations sans tuyère ont été testées et la plaque en poral a une porosité de $8 \mu\text{m}$.

Un avantage de cette hauteur est que, comme les distances réelles entre les passages pour la sonde sont fixées, la distance adimensionnelle entre les points de mesure est trois fois plus faible que pour $h = 10 \text{ mm}$ ce qui permet une description beaucoup plus fine de l'amplification.

Par contre un inconvénient est que le rapport d'aspect largeur sur hauteur ne vaut que deux ce qui est trop peu pour assurer la bidimensionnalité de l'écoulement. Pourtant, les profils moyens sont plus proches de la solution de Taylor que la figure II.17.

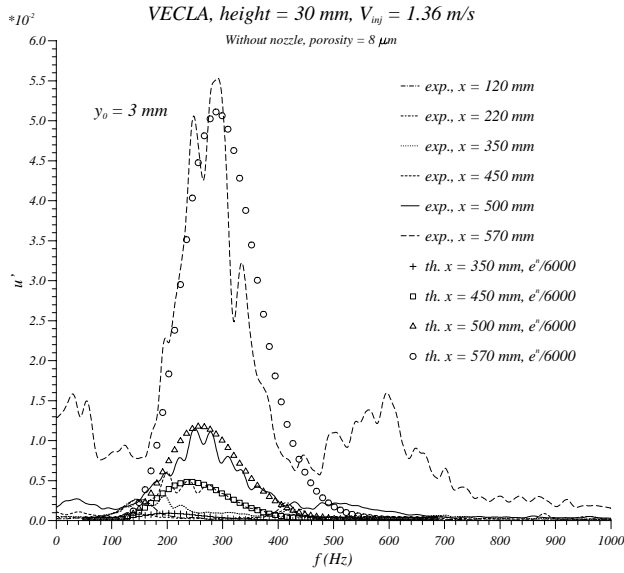


FIG. II.18 – Comparaison des spectres de vitesse fluctuante axiale expérimentaux et théoriques pour différentes abscisses. $V_{inj} = 1.36$ m/s.

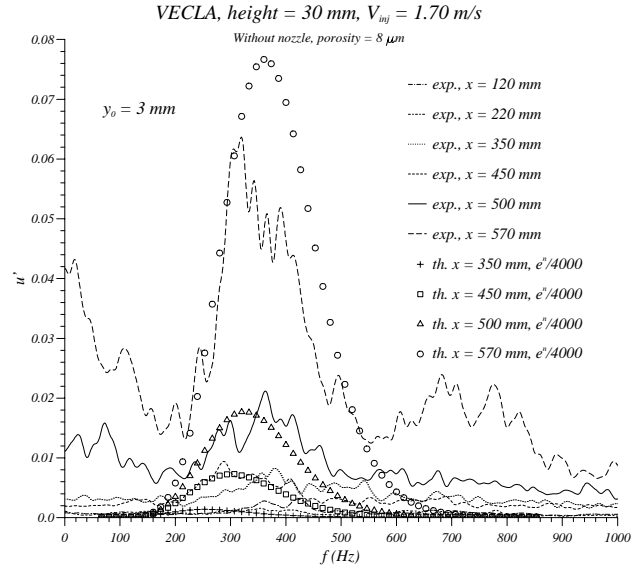


FIG. II.19 – Comparaison des spectres de vitesse fluctuante axiale expérimentaux et théoriques pour différentes abscisses. $V_{inj} = 1.70$ m/s.

Un excellent accord avec la théorie est obtenu pour les deux cas comparables à savoir $V_{inj} = 1.36$ et 1.7 m/s. Les figures II.18 et II.19 comparent les spectres de vitesse axiale mesurée à 3 mm de la paroi débitante, soit $y = -0.9$ avec les spectres prédits par la théorie pour différentes abscisses. En adimensionnant comme d'habitude par la hauteur de VECLA, la dernière abscisse mesurée est $x = 19$ alors que la section de sortie est située à $x = 20$.

Toutes les caractéristiques prédites sont visibles à savoir : accord sur les fréquences amplifiées, sur le décalage de la bande de fréquences amplifiées avec x et sur l'amplification spatiale.

L'invariance de la forme des spectres en fonction de y est aussi vérifiée dans la moitié de VECLA située vers la paroi débitante, mais dans l'autre moitié les spectres deviennent plus bruités. De ce fait, seule l'allure du pic en proche paroi de la fonction propre est retrouvée. La différence de comportement entre la région proche de la paroi débitante et le reste du canal est constamment observée lorsque l'écoulement est de type 1 ou 2. Lors des essais à $h = 10$ mm la région située vers l'axe est parfois quasiment turbulente alors que la proche paroi demeure laminaire.

Néanmoins, les résultats à $h = 30$ mm valident l'analyse de stabilité : l'instabilité existe bien et elle est correctement prévue par les calculs.

Les figures II.18 et II.19 montrent aussi des phénomènes non-linéaires très intéressants qui vont motiver les études du chapitre IV.

Tout d'abord les fréquences obtenues par combinaison quadratique des ondes linéaires (les termes quadratiques mettant en jeu des ondes linéaires de pulsations ω_1 et ω_2 (mode 1) produisent des termes de pulsation $|\omega_1 - \omega_2|$ (mode 0) et $\omega_1 + \omega_2$ (mode 2)) sont nettement visibles aux deux dernières abscisses : il s'agit des deux "bosses" situées autour de la fréquence nulle et de la fréquence double.

De plus, il semble sur la figure II.19, où les niveaux de ces "bosses" sont les plus élevés, que les ondes primaires subissent un phénomène de saturation. En effet, en ajustant la constante A_0 sur les pénultième et antépénultième abscisses, on prédit un niveau trop élevé pour la dernière. On peut penser qu'un phénomène de saturation et de transfert d'énergie depuis le mode 1 vers les modes 0 et 2 se produit et nécessite l'abandon de la théorie linéaire au profit d'une approche non-linéaire. Il ne s'agit cependant que d'une interprétation incertaine qui demanderait à être confirmée par d'autres mesures.

II.4.3 En canal axisymétrique

Peu de données sont exploitables dans un but de validation de la théorie de stabilité pour deux raisons. La configuration axisymétrique est souvent traitée par des tirs en gaz chaud peu instrumentés où elle fait apparaître un couplage aéroacoustique qui masque la stabilité, c'est-à-dire un comportement analogue au type 3 rencontré dans le canal rectangulaire VECLA, voir paragraphe I.6.2. Il en est de même dans le montage cylindrique en gaz froid VALDO.

Expériences de Yagodkin [Yag67]

Les premières expériences menées en canal axisymétrique avec la volonté de chercher une instabilité hydrodynamique sont le fait de Yagodkin [Yag67] dont on a évoqué les études au chapitre précédent. Il utilise différents cylindres réguliers avec des vitesses d'injection faibles lui donnant des nombres de Reynolds d'injection allant de 100 à 350. Dans cette gamme, les effets visqueux ne sont pas négligeables ce qui lui permet de montrer une transition avec une sonde fixe en augmentant \mathcal{R}_{inj} . (Au contraire, pour les valeurs de $\mathcal{R}_{inj} > 1000$, la transition se produit à une certaine valeur de x et ne dépend plus de \mathcal{R}_{inj} .)

En plaçant un fil chaud à l'abscisse adimensionnelle 55 (valeur énorme par rapport à celles considérées ailleurs), Yagodkin [Yag67] dénombre 4 types de comportement

1. pour $\mathcal{R}_{inj} \lesssim 105$, il ne voit pas de fluctuations;
2. pour $105 \lesssim \mathcal{R}_{inj} \lesssim 130$, il observe des fluctuations périodiques;
3. pour $130 \lesssim \mathcal{R}_{inj} \lesssim 155$, il rapporte des fluctuations périodiques et turbulentes par intermittence;
4. pour $155 \lesssim \mathcal{R}_{inj}$ l'écoulement est turbulent.

Il en tire la conclusion importante que *l'écoulement en cylindre régulier à paroi débitante est sujet à une instabilité hydrodynamique*. Il observe par ailleurs, dans les divers tubes qu'il utilise, un maximum de fluctuations à $r = 0.8$ et rapporte que la fréquence observée avant la transition à la turbulence évolue à nombre de Strouhal constant pour \mathcal{R}_{inj} allant de 100 à 300 et correspond à $\omega = 70$.

Il propose aussi une courbe d'évolution du point critique (abscisse la plus faible de la courbe neutre) en fonction du nombre de Reynolds d'injection à partir de la collecte des points obtenus lors de multiples expériences. Pour $\mathcal{R}_{inj} \sim 300$, l'abscisse critique varie de 1 à 5 selon l'essai considéré, par contre l'abscisse critique recule nettement pour des nombres de Reynolds plus faibles, à savoir $x_{critique} \gtrsim 10$ pour $\mathcal{R}_{inj} = 200$, $x_{critique} \sim 30$ pour $\mathcal{R}_{inj} = 150$ et $x_{critique} \sim 50$ pour $\mathcal{R}_{inj} = 100$.

Les calculs menés sur la solution des équations (I.7) pour ces faibles nombres de Reynolds donnent des points critiques qui reculent beaucoup plus lentement de 3 à moins de 6 dans le même intervalle et n'apportent donc aucune validation.

On peut proposer deux raisons aux écarts importants obtenus (de 5 à 50 pour $\mathcal{R}_{inj} = 100$!)

- la détermination expérimentale du point critique est particulièrement difficile puisque par définition les fluctuations n'évoluent pas à cet endroit et sont à leur niveau le plus bas. L'abscisse où des instabilités observables apparaissent est donc toujours supérieure à l'abscisse critique;
- les hypothèses (fausses partout comme on va le voir plus loin) de quasi-parallélisme de l'écoulement moyen sont d'autant plus fausses que l'abscisse est faible, on ne peut donc pas prétendre prévoir de façon sûre le point critique. A la fin de cette thèse, on ne peut même pas affirmer que la courbe neutre existe vraiment !

On retient cependant des expériences de Yagodkin la preuve de l'existence d'instabilités hydrodynamiques bien qu'on ne puisse savoir si elles sont correctement prévues par la théorie.

Mesures de Dunlap *et al.* [DBW⁺90]

L'utilisation des mesures de Dunlap *et al.* [DBW⁺90] fait l'objet de l'article de Griffond *et al.* [GCP00] qui est ici directement traduit.

Résultats disponibles Les expérimentations de Dunlap *et al.* [DBW⁺90] ont été menées pour trois combinaisons de nombre de Mach d'injection $M_w = V_{inj}/a_s$ (avec a_s la vitesse du son) et de ratio de la longueur au diamètre L/D (mais avec le même diamètre) : $M_w = 0.0018$ et $L/D = 14.3$ (cas 1), $M_w = 0.0027$ et $L/D = 9.5$ (cas 2) et $M_w = 0.0036$ et $L/D = 14.3$ (cas 3), voir table II.3. Dans chaque cas, les fluctuations axiales, radiales et azimutales sont tracées à plusieurs positions en x en fonction du rayon mais la précision des tracés ne permet pas de comparaison précise du taux d'accroissement spatial des ondes d'instabilité. A l'abscisse adimensionnelle⁶ $x = 10.92$, les spectres de vitesse axiale sont donnés à trois distances de la paroi.

La principale difficulté pour la comparaison est la mesure de la fluctuation : la théorie prédit le comportement d'ondes isolées correspondant à une fréquence unique, alors que le signal du fil chaud est intégré sur une large bande fréquentielle. Seuls les spectres peuvent être directement comparés avec les résultats.

De plus, pour chaque fréquence, toutes les mesures donnent probablement une combinaison de modes azimutaux mais il est difficile de savoir quels modes azimutaux sont réellement présents dans l'écoulement et quelle est leur amplitude initiale. De ce fait, la comparaison n'est pas simple.

	M_w	L/D
Cas 1	0.0018	14.3
Cas 2	0.0027	9.5
Cas 3	0.0036	14.3

TABLE II.3 – Configurations expérimentales du montage en gaz froid présenté par Dunlap *et al.* [DBW⁺90] et utilisées pour comparaison.

Sur le re-dimensionnement Il faut insister sur le fait que les trois cas considérés correspondent seulement à un calcul de stabilité pour les raisons suivantes.

Premièrement, on analyse la stabilité de l'écoulement de Taylor qui est une solution des équations d'Euler valable seulement dans un cylindre semi-infini si bien que l'extrémité aval du canal n'est pas prise en compte par la théorie. Cela signifie qu'il n'y a théoriquement pas de différence entre les cas 1 et 3. Deuxièmement, après adimensionnement, les différences dues aux trois nombres de Mach d'injection résultent seulement en un écart de nombre de Reynolds allant de 4.5×10^3 à 9×10^3 . Mais comme mentionné précédemment, dans cette gamme de valeurs, les résultats de stabilité sont quasiment indépendants du nombre de Reynolds, voir figure II.14. De plus, les spectres sont donnés à la même abscisse adimensionnelle si bien qu'on a juste besoin d'un calcul à $\mathcal{R}_{inj} = 4.5 \times 10^3$ et qu'on obtient les trois cas par re-dimensionnalisation.

Le rayon h est de $h = 5.1$ cm. Pour la vitesse d'injection, on se base sur le nombre de Mach, voir table II.3, et on sait que les expériences sont menées avec de l'azote à une pression de 0.21 MPa avec une température variant de -16 à $+13$ °C, donc nous choisissons pour la vitesse du son 340 m/s, d'où des vitesses d'injection de 0.61 , 0.92 , et 1.22 m/s.

Comparaison des spectres Les spectres sont donnés à l'abscisse $x = 10.92$. Pour chaque nombre d'onde azimutal q , le calcul des facteurs n conduit à une fonction $n(\omega)$. Puis les spectres⁷ de vitesse sont exprimés en terme de la fréquence physique $f^* = \omega V_{inj}/(2\pi h)$ par

$$S(f^*) = \left(A_0 e^{n(f^*)} \right)^2$$

Comme le rayon du canal est le même pour les trois spectres, la théorie prévoit que les fréquences dimensionnelles amplifiées sont proportionnelles à la vitesse d'injection. Les mesures pas trop proches de la paroi (les spectres proches de la paroi semblent modifiés par des phénomènes non-linéaires discutés plus tard, ils ne sont pas utilisés directement) confirment cette attente : pour un nombre de Mach d'injection $M_w = 0.0018$ la fréquence la plus amplifiée est 140 Hz, elle est aux alentours de

6. adimensionnement basé comme d'habitude sur le rayon du tube et non pas sur le diamètre comme le font Dunlap *et al.* [DBW⁺90]

7. Attention, au contraire des spectres dans VECLA exprimés en racine de densité spectrale de puissance, les spectres de Dunlap *et al.* [DBW⁺90] donnent directement la densité spectrale de puissance de la vitesse fluctuante axiale.

230 Hz pour $M_w = 0.0027$ et de 280 Hz pour $M_w = 0.0036$. La fréquence du cas 2 pour lequel le canal est plus court n'est pas exactement proportionnelle sans qu'on puisse donner à cela d'explication convaincante.

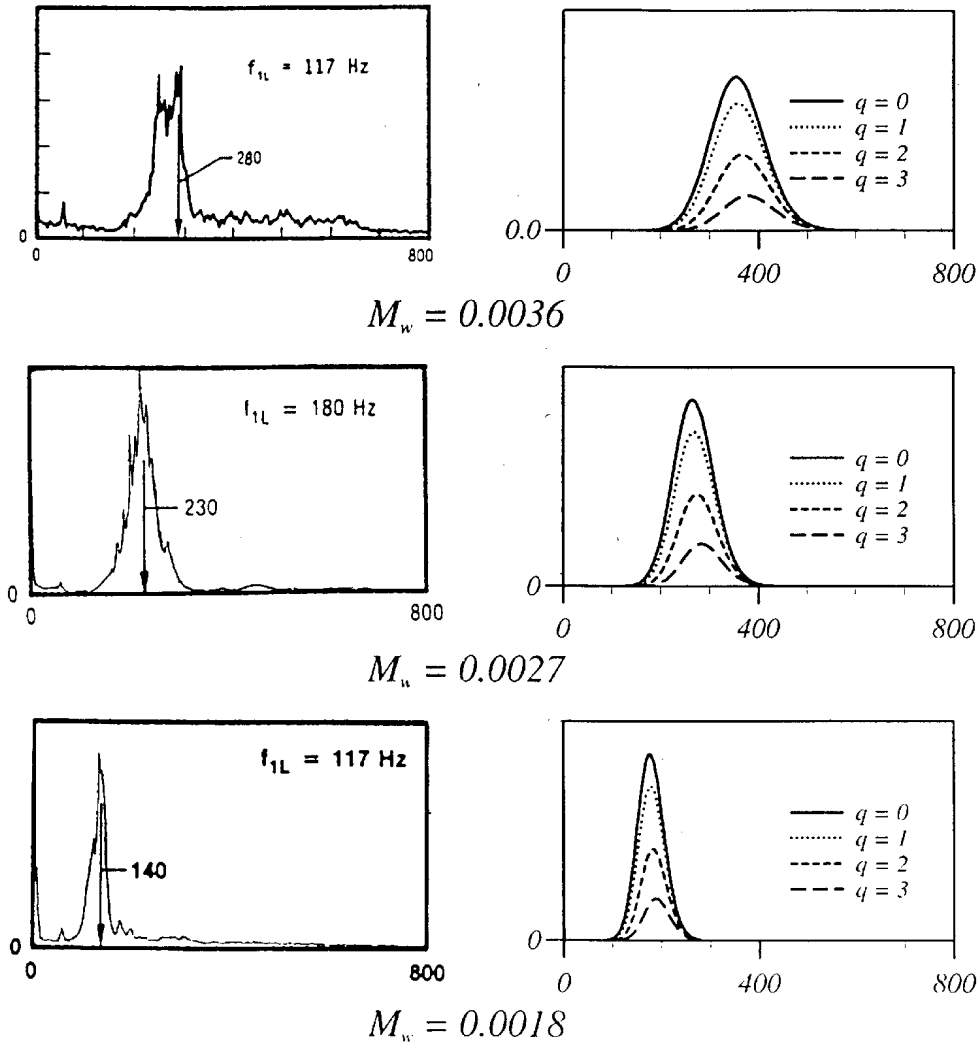


FIG. II.20 – Comparaison entre les spectres expérimentaux et théoriques de la densité spectrale de puissance de la fluctuation de vitesse axiale pour $x = 10.92$ and $r = 0.75$ ($r = 1$ correspond à la paroi) pour trois nombres de Mach d'injection. Les fréquences sont dimensionnelles (en Hz).

La comparaison du spectre expérimental du cas 1 avec les amplitudes théoriques pour différents nombres d'onde azimutaux q est donnée en figure II.20. Comme la constante A_0 est inconnue, l'amplitude absolue est inutile. Par ailleurs, la figure est tracée avec une même constante A_0 pour chaque q .

Dans le cas 1, la figure II.20 indique un décalage en fréquence de presque 35 Hz (25%) entre la valeur expérimentale de la fréquence la plus amplifiée $f^* = 140$ Hz et la valeur théorique pour $q = 0$ (175 Hz). Cet écart augmente très faiblement avec q . Plusieurs causes sont possibles : le léger phénomène de "swirl" de l'écoulement moyen observé vers l'axe, l'influence de l'acoustique, les imprécisions sur la vitesse du son et le nombre de Mach, *etc.* De plus, la bande de fréquences théoriquement amplifiée est un peu plus large que l'expérimentale.

Comme prévu, les deux autres comparaisons pour les cas 2 et 3 mènent aux mêmes conclusions. Il faut insister sur le fait que les spectres montrent un dôme de fréquences amplifiées comme celui d'un mécanisme d'instabilité et non pas des pics comme on l'attendrait d'un phénomène acoustique. Les

résultats sont donc qualitativement encourageants.

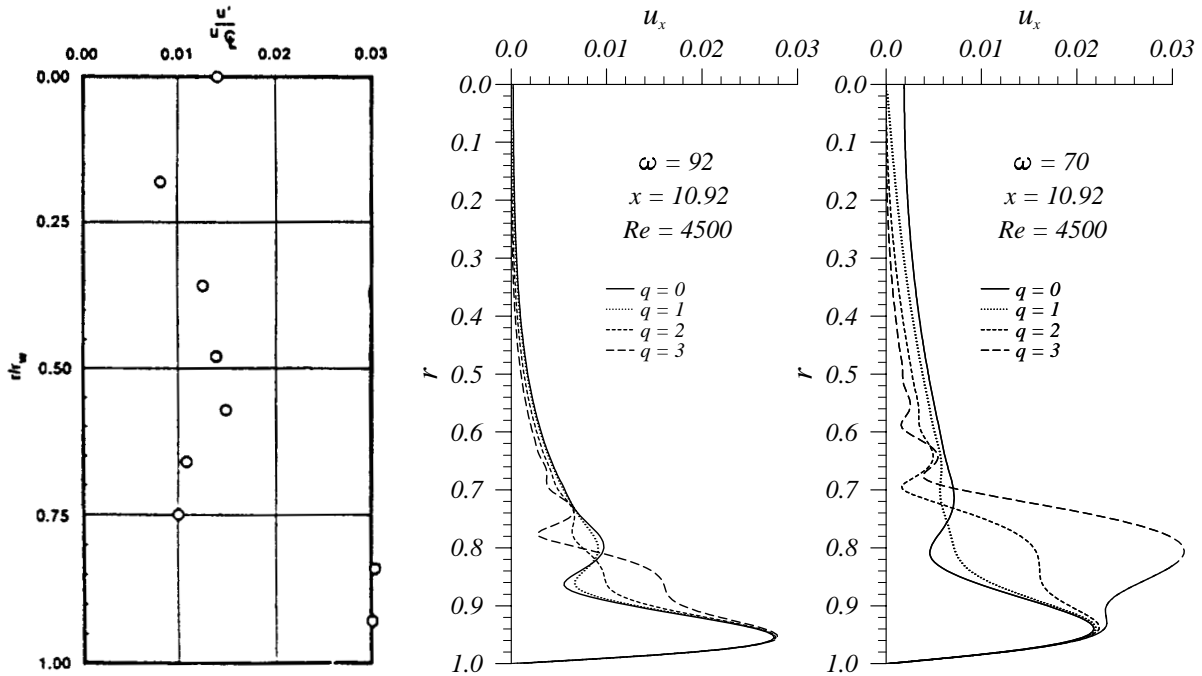


FIG. II.21 – Comparaison entre les profils expérimentaux de fluctuations rms de vitesse axiale divisées par la vitesse axiale sur l'axe et les fonctions propres des fréquences les plus amplifiées correspondant à $\omega=92$ et d'une fréquence moins amplifiée correspondant à $\omega=70$. $x = 10.92$, $\mathcal{R}_{inj} = 4500$, $M_w = 0.0018$ (cas 1).

Fonctions propres de vitesse axiale, radiale et azimutale Toujours à l'abscisse $x = 10.92$, Dunlap *et al.* [DBW⁺90] donnent les fluctuations rms de vitesse axiale. Comme expliqué précédemment, les fluctuations de vitesse ne sont pas mesurées pour une fréquence (ou une étroite bande de fréquences) mais pour une large gamme de fréquences. De toute façon, pour chaque fréquence, il n'est pas possible de distinguer expérimentalement les modes azimutaux. Mais bien que toutes les fréquences et tous les modes soient présents dans les graphes des fluctuations de vitesse, on peut essayer de les comparer avec les fonctions propres des fréquences les plus amplifiées pour chaque nombre d'onde azimutal q . On trace les fonctions propres $\vec{u}(r)$ (et pas $A_0\vec{u}(r)e^n$) et la normalisation choisie est $\hat{p}(1) = 0.15$ de telle façon que l'amplitude de $\hat{u}_x(r)$ pour $\omega = 92$, $q = 0$ coïncide avec la fluctuation rms. Bien sûr, la même normalisation est utilisée pour toutes les fonctions propres des figures II.21 et II.22.

Premièrement, la caractéristique principale des fonctions propres semble apparaître sur les graphes des fluctuations rms de vitesse axiale, radiale et azimutale des figures II.21 et II.22 à savoir un maximum d'amplitude élevée vers la paroi débitante.

Deuxièmement, les ratio expérimentaux et théoriques des amplitudes axiales, radiales et azimutales, qui sont indépendants de la normalisation pour ω , q fixés, sont en accord.

Troisièmement, comme expliqué précédemment, les fluctuations de vitesse doivent avoir la même forme dans les trois cas (seule l'amplitude A_0 change). Ceci est bien confirmé dans les trois cas.

Enfin, Dunlap *et al.* [DBW⁺90] notent à la section $x = 10.92$ un phénomène qui ne peut être expliqué par la présente théorie linéaire. Pour les cas 1 et 3, la fréquence la plus amplifiée (f_{max}^{paroi}) mesurée près de la paroi ($r \approx 0.9$) est double de celle mesurée (f_{max}^m) dans le reste de la section ($r \leq 0.75$), *i.e.* $f_{max}^{paroi} = 2f_{max}^m$. Des phénomènes non-linéaires sont légitimement suspectés dans la mesure où les amplitudes des cas 1 et 3 sont très élevées près de la paroi: 3% de la vitesse moyenne sur l'axe (égale à $\pi x V_{inj}$) ce qui, à $x \approx 10$ conduit à des fluctuations de vitesse axiale de l'ordre de la

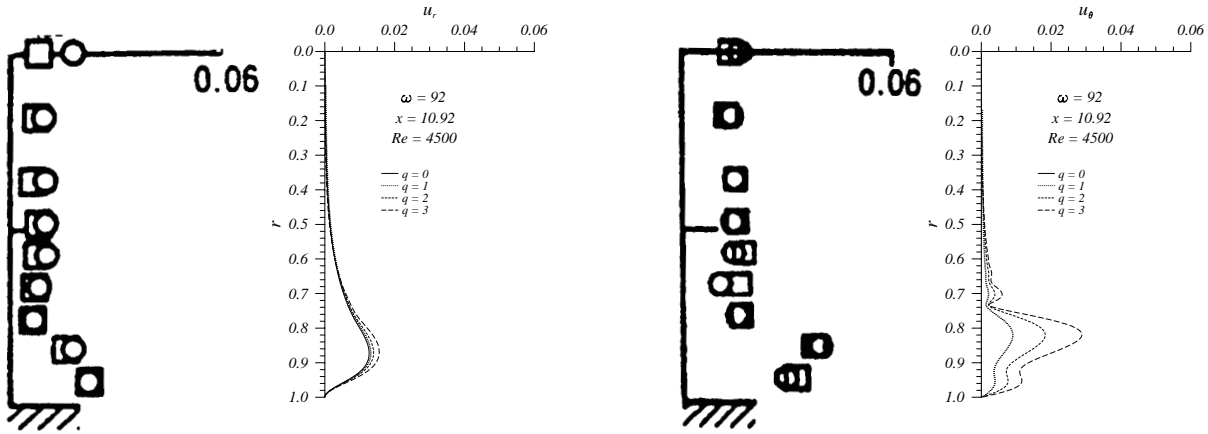


FIG. II.22 – Comparaison entre les profils expérimentaux de fluctuations rms de vitesse radiale (à gauche) et azimutale (à droite) divisées par la vitesse axiale sur l'axe et les fonctions propres des fréquences les plus amplifiées correspondant à $\omega = 92$, $x = 10.92$. Les symboles circulaires sont les résultats expérimentaux obtenus pour $M_w = 0.0018$ (cas 1) tandis que les symboles carrés correspondent à $M_w = 0.0036$ (cas 3).

vitesse d'injection.

Amplification spatiale Les figures 8-10 et 16-18 de l'article [DBW⁺90] doivent aussi être discutées. La forme de mode normal II.8 implique que toutes les composantes de la vitesse fluctuante ont la même évolution exponentielle par rapport à x dans la zone linéaire. Pour le confirmer, on regarde les points les plus proches de la paroi où l'onde d'instabilité a l'amplitude la plus importante et peut être distinguée du bruit de fond. La figure II.23 collecte dans le cas 3 les évolutions en x des fluctuations à $r = 0.95$ extraites des figures de l'article [DBW⁺90].

Premièrement, il est clair que les trois composantes de la vitesse fluctuante se comportent de la même manière à partir d'amplitudes différentes.

Comme pour les autres figures, les fluctuations sont obtenues par intégration sur les fréquences et sur les nombres d'onde azimutaux. Pourtant, il se peut que l'amplification spatiale de la fréquence la plus amplifiée (qui change avec x) pour $q = 0$ soit représentative. On trace donc $A_0 \exp(n_{max}(x))/x$ avec $A_0 = 1/2000$ (on divise $\exp(n_{max}(x))$ par x parce que les vitesses dans [DBW⁺90] sont rendues adimensionnelles à l'aide de la vitesse sur l'axe qui est linéairement croissante). Il faut rappeler que les mesures ne donnent pas seulement la réponse propre mais aussi des fluctuations qui ne sont pas des ondes de stabilité. Les résultats théoriques montrent une croissance très rapide avec une forte amplification qui est à mettre en liaison avec la transition laminaire-turbulent puisque les mesures de Dunlap *et al.* [DBW⁺90] montrent que l'écoulement est laminaire pour $x \leq 10.92$ et turbulent pour $x \geq 13.28$.

Les résultats expérimentaux tracés en figure II.23 semblent indiquer que les fluctuations présentes près du fond avant s'atténuent avec x jusqu'à une région située au voisinage de la courbe neutre théorique.

Finalement, l'accord entre théorie et expérience n'est pas frappant mais le domaine linéaire où la loi exponentielle peut être validée est court et le début de l'amplification semble correctement prévu.

Montage du VKI

Parmi les configurations testées sur le montage du VKI présenté au chapitre I, l'une peut être utilisée à des fins de comparaison à la stabilité pariétale. Les mesures sont réalisées par Antoine [Ant00] avec injection pariétale sans restricteur (*i.e.* tube régulier) et sans tuyère en sortie (à la différence de Dunlap *et al.* [DBW⁺90]). Le fil chaud est introduit dans la veine par le fond arrière

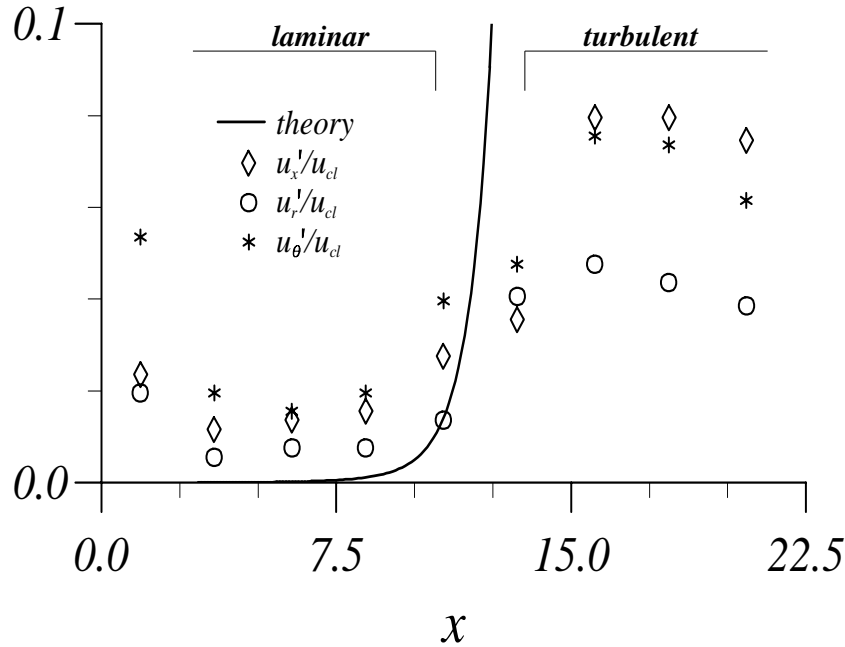


FIG. II.23 – Evolution spatiale expérimentale du ratio de l'amplitude de la fluctuation à la vitesse sur l'axe pour $M_w = 0.0036$ (cas 3) et $r = 0.95$. Comparaison avec $1/2000 \cdot \exp(n_{max}(x))/x$ pour $q = 0$. Pour $x \leq 10.92$, l'écoulement est laminaire tandis que pour $x \geq 13.28$, il est turbulent.

alors qu'il passe par des trous aménagés à travers la paroi poreuse dans VECLA et chez Dunlap. (Cette distinction n'est pas anodine puisqu'il semble que dans le montage VALDO, l'introduction de la sonde par la paroi provoque des perturbations de l'écoulement visibles par des dissymétries des profils moyens. Le procédé employé au VKI est *a priori* moins intrusif, de plus il autorise des points de mesure beaucoup plus serrés en x .)

La vitesse d'injection vaut 0.88 m/s et le rayon de la maquette est de 38 mm d'où un nombre de Reynolds d'injection de 2230. La longueur totale débitante est de 630 mm soit une section de sortie adimensionnelle à $x = 16.6$. Le tube est donc encore plus court que le cas 2 de Dunlap *et al.* qui sort à $x = 19$.

Pour une raison qui demeure mystérieuse, l'écoulement moyen ne coïncide pas exactement avec l'écoulement de Taylor comme le montre la figure II.24 (donnée en grandeurs dimensionnées). Au contraire, chez Dunlap, l'écoulement est très proche de celui de Taylor tant que la turbulence n'est pas atteinte, c'est-à-dire avant une abscisse de 12 environ pour la vitesse d'injection la plus élevée à 15 environ pour l'injection la plus faible. Ce défaut de l'écoulement au VKI limite bien évidemment la portée des validations possibles.

La figure II.25 représente les spectres expérimentaux et théoriques pour $q = 0$. La partie gauche met en évidence la présence d'une instabilité avec la croissance rapide d'une gamme de fréquence de l'amont vers l'aval. Les premières fréquences amplifiées correspondent à celles prévues pour $q = 0$ comme on le voit sur la partie droite qui contient les spectres entre les abscisses adimensionnelles de 7.4

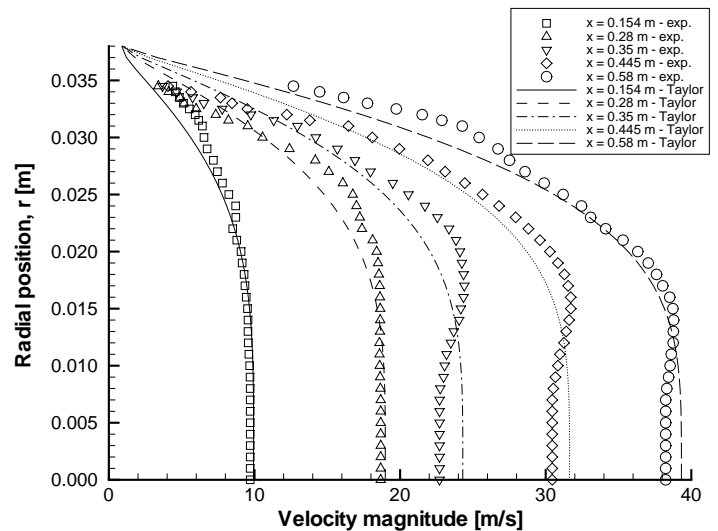


FIG. II.24 – Profils de l'écoulement moyen dans le montage du VKI comparés à l'écoulement de Taylor. D'après Anthoine [Ant00]

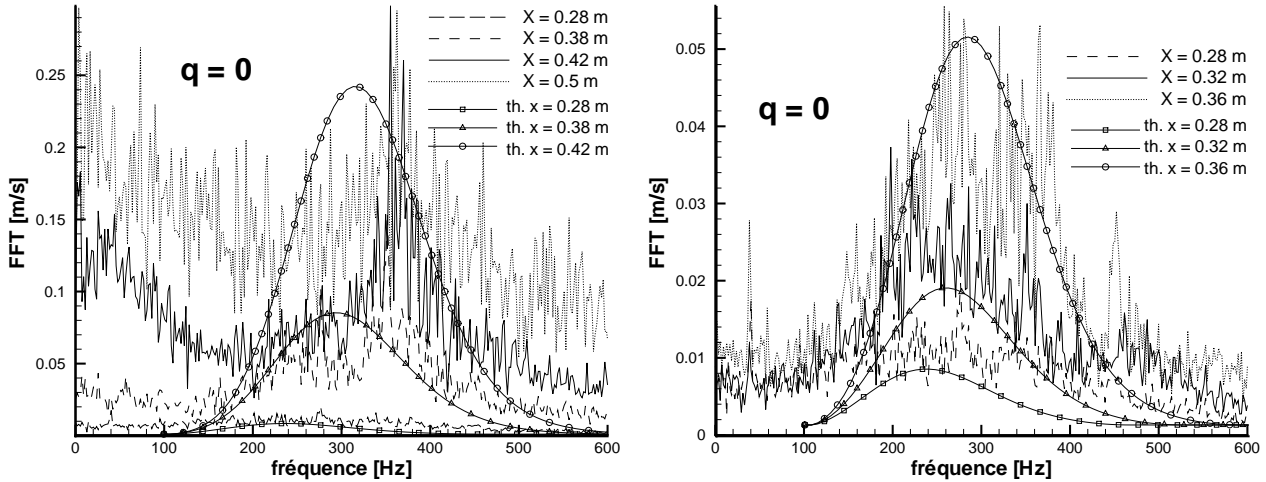


FIG. II.25 – Comparaison entre spectres expérimentaux et théoriques de fluctuations de vitesse axiale. La partie droite concerne la zone linéaire tandis que la partie gauche présente des spectres sur des abscisses plus éloignées les unes des autres.

à 9.5. Dans cette zone, l'amplification théorique est trop forte mais du même ordre que l'amplification expérimentale. Plus à l'aval, vers $x = 11.05$ (soit $0.42 m$ en dimensionné comme sur la figure II.25 de gauche), la fréquence la plus amplifiée saute vers des valeurs plus élevées décalées par rapport à la théorie. On peut remarquer que la fréquence théorique est maintenant trop basse vers $x = 11.05$ alors qu'elle était trop élevée vers $x = 10.92$ chez Dunlap *et al.* [DBW+90].

Les dernières abscisses représentées sur la figure II.25 laissent entrevoir un remplissage du spectre dans les basses fréquences, signe précurseur de la transition à la turbulence. Celle-ci est mise en évidence par une brusque croissance des niveaux de fluctuation rms autour de $x = 12$ suivie d'une saturation,⁸ de façon analogue à la figure II.23.

Conclusion

Pour les deux montages, les comparaisons des spectres montrent un accord relativement correct, avec tout de même des décalages en fréquence de signe opposé d'un montage à l'autre. Les principales caractéristiques expérimentales des fonctions propres et des amplifications spatiales sont les mêmes que celles de la théorie, mais si les prévisions sont qualitativement vérifiées, les données manquent pour tirer une conclusion quantitative définitive. On peut donc penser que le mécanisme d'instabilité intrinsèque est à l'œuvre dans le problème axisymétrique et qu'il explique le comportement observé dans l'expérience de la même façon que dans les canaux rectangulaires.

II.5 Sur la dépendance vis-à-vis de la formulation de quelques approches non-parallèles

Dans une étude de stabilité de l'écoulement de Taylor en 1999, Lee et Beddini [LB99] rapportent des différences entre leurs résultats et ceux de Casalis *et al.* [CAP98] alors qu'ils coïncident parfaitement avec ceux de Varapaev et Yagodkin [VY69]. La même remarque avait précédemment été faite par Favray [Fav99]. Dans l'article de Casalis *et al.* [CAP98], la différence avec Varapaev et Yagodkin [VY69] n'avait pas été clarifiée si bien qu'il semble important d'expliquer que ces écarts ne proviennent pas d'une erreur mais d'un choix différent de formulation. Par ailleurs, on va montrer que ces écarts sont liés à la nature inconsistante de l'approche de stabilité utilisée par tous ces auteurs.

8. L'abscisse dimensionnelle $0.5 m$ de la partie gauche de la figure II.25 correspond à $x = 13.1$. Malgré l'apparition de la turbulence, les traces de l'instabilité de la zone laminaire sont encore clairement visibles et les amplitudes qui y sont associées sont presque inchangées entre $0.42 m$ et $0.5 m$ soit $x = 11.05$ et $x = 13.1$.

Cette mise au point a fait l'objet de la publication référencée [GC00a], dont on donne essentiellement ici une traduction.

II.5.1 Différents choix de formulation

On considère pour l'instant l'écoulement de Taylor plan comme un écoulement faiblement non-parallèle. On compare deux formulations possibles : la formulation en variables primitives (vitesse axiale, verticale et pression) notée (FPV) et la formulation en fonction de courant notée (FSF). La formulation utilisée par Varapaev et Yagodkin [VY69], Lee et Beddini [LB99] et Favray [Fav99] est FSF alors celle de Casalis *et al.* [CAP98] est FPV. On peut vérifier que le choix d'autres formulations, comme avec la vorticité, conduirait au même genre de problème.

On applique la méthode classique de décomposition en petites perturbations en décomposant chaque quantité (la vitesse et la pression dans le cas FPV et la fonction de courant dans le cas FSF) en une partie moyenne et une partie fluctuante. L'écoulement moyen satisfait les équations non-linéaires et chaque quantité fluctuante est supposée petite devant les quantités moyennes. Les équations non-linéaires peuvent donc être linéarisées vis-à-vis de la fluctuation. Ceci mène à des équations linéaires qui sont bien sûr indépendantes de la formulation.

On suppose que l'écoulement de base est seulement faiblement non-parallèle. Ceci suppose l'existence d'un petit paramètre $\varepsilon \ll 1$ qui définit des ordres d'approximation. Une grandeur est dite d'ordre n si elle est de l'ordre de ε^n . Si on note par (U, V, P) la vitesse axiale, verticale et la pression, alors dans une approche faiblement non-parallèle classique, U et P sont supposés d'ordre 0, V d'ordre 1 et la dérivation par rapport à x fait croître d'une unité l'ordre de la quantité dérivée.

II.5.2 Choix des formes de perturbation

On considère quatre approches de stabilité.

1. une approche locale strictement parallèle dénotée (OSE) pour équation d'Orr-Sommerfeld, où seuls les termes moyens d'ordre 0 sont conservés. La forme de mode normal est choisie

$$g(x, y) = \hat{g}(y) \exp\{i(\alpha x - \omega t)\}$$

2. l'approche non-parallèle inconsistante dénotée (LNP), présentée précédemment, où les termes d'ordre 1 sont gardés dans les mêmes équations que ceux d'ordre 0. La forme de mode normal est choisie

$$g(x, y) = \hat{g}(y) \exp\{i(\alpha x - \omega t)\}$$

Cette approche est celle de Varapaev et Yagodkin [VY69], Lee et Beddini [LB99], Favray [Fav99] et Casalis *et al.* [CAP98];

3. une approche locale non-parallèle, l'analyse par échelle multiple à l'ordre 1 dénotée (MSA), voir⁹ Bridges et Morris [BM87], où chaque ordre est résolu séparément. Avec $X = \varepsilon x$, la perturbation est de la forme

$$g(x, y) = (\hat{g}_0(X, y) + \varepsilon \hat{g}_1(X, y)) \exp\{i[\int (\alpha_0(X) + \varepsilon \alpha_1(X)) dx - \omega t]\}$$

4. une approche non-locale non-parallèle appelée "équations de stabilité parabolisées" (PSE), voir Herbert et Bertolotti [HB87]. La perturbation est de la forme

$$g(x, y) = \hat{g}(x, y) \exp\{i(\int_{x_0}^x \alpha(\xi) d\xi - \omega t)\}$$

avec une condition de normalisation appliquée à \hat{g} .

⁹ Saric et Nayfeh [SN75] sont généralement considérés comme les initiateurs de la méthode mais leur travail étant entaché d'erreurs relevées par Bridges et Morris [BM87], cette dernière référence est plus appropriée.

II.5.3 Application à l'écoulement de Taylor et dépendance de la formulation

On va montrer que l'approche LNP (non-parallèle inconsistante) dépend de la formulation puis on va essayer d'appliquer des méthodes non-parallèles plus satisfaisantes après avoir examiné leur propre dépendance vis-à-vis de la formulation; enfin, on justifiera l'utilisation de LNP pour l'étude de l'écoulement de Taylor.

Inconsistance de LNP

Pour calculer la différence entre LNP avec FPV et LNP avec FSF, on peut obtenir une équation sur la fonction propre fluctuante de deux manières.

1. d'abord on introduit la forme de mode normal dans MCE , Qmx et Qmy (équations linéarisées de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement selon x et de la quantité de mouvement selon y). Les seuls termes contenant \hat{p} sont $\frac{\partial \hat{p}}{\partial y}$ dans Qmy et $i\alpha\hat{p}$ dans Qmx . Ensuite, on élimine \hat{p} en calculant $\frac{\partial}{\partial y}(Qmx) - i\alpha(Qmy)$. Enfin, on obtient l'équivalent de la fonction de courant en écrivant $\hat{u} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y}$ et $\hat{v} = -i\alpha\hat{\phi}$
2. ou d'abord on élimine p en calculant $\frac{\partial}{\partial y}(Qmx) - \frac{\partial}{\partial x}(Qmy)$ et on utilise la définition usuelle de la fonction de courant. Ensuite, on introduit la forme de mode normal.

On se rend facilement compte que les deux calculs ne mènent pas au même résultat. Ecrivons Qmy formellement $L_{(x,y)}(u, v, p) = 0$ où $L_{(x,y)}(\cdot, \cdot, \cdot)$ est un opérateur dépendant de x et y à travers le profil de vitesse moyenne. Avec le premier calcul, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial y}(Qmx) - [i\alpha L_{(x,y)}(u, v, p) = 0]$$

alors qu'avec le second on obtient

$$\frac{\partial}{\partial y}(Qmx) - \left[\frac{\partial L_{(x,y)}}{\partial x}(u, v, p) = 0 \right] - [i\alpha L_{(x,y)}(u, v, p) = 0]$$

Comme tous les termes de l'opérateur $\frac{\partial L_{(x,y)}}{\partial x}$ sont d'ordre 1 ou plus élevés, les résultats sont les mêmes à l'ordre 0 mais ils sont différents au premier ordre. Cela signifie que contrairement à (OSE) qui néglige tous les termes d'ordre 1, les résultats (LNP) dépendent de la formulation.

Finalement, en manipulant FPV, l'approche (LNP) peut être transformée (au premier ordre), en

$$\left(-i\omega + i\alpha U + V \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 \right) \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \alpha^2 \phi \right) - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} - i\alpha \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \phi + \frac{\partial U}{\partial x} \alpha^2 \phi = 0$$

où le dernier terme constitue la seule différence (au premier ordre) avec FSF :

$$\left(-i\omega + i\alpha U + V \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 \right) \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \alpha^2 \phi \right) - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} - i\alpha \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \phi = 0$$

Dans le cas de la solution auto-semblable visqueuse du système de Berman (I.6) pour un nombre de Reynolds d'injection $\mathcal{R}_{inj} = 100$, la figure II.26 et le tableau II.4 montrent les résultats obtenus par LNP avec FPV et FSF pour les deux modes de symétrie opposée (variqueux et sinueux) et les comparent avec FSF de Varapaev et Yagodkin [VY69] et de Lee et Beddini [LB99] qui coïncident. L'accord des trois FSF est bon et la comparaison entre FSF et FPV fait apparaître quelques différences, principalement pour le mode sinueux, pour les faibles abscisses où les effets non-parallèles sont plus forts.

Cette dépendance non-physique vis-à-vis de la formulation amène à appliquer deux autres méthodes non-parallèles : PSE et MSA.

	mode variqueux		mode sinueux	
	FPV	FSF	FPV	FSF
abscisse	7.829	8.710	3.750	6.237
pulsation	20.58	21.31	13.47	17.71
nombre d'onde	2.451	2.328	2.988	2.627

TAB. II.4 – Comparaison des points critiques obtenus par l'approche LNP avec les deux formulations FPV et FSF. La solution auto-semblable de Berman pour $\mathcal{R}_{inj} = 100$ est utilisée.

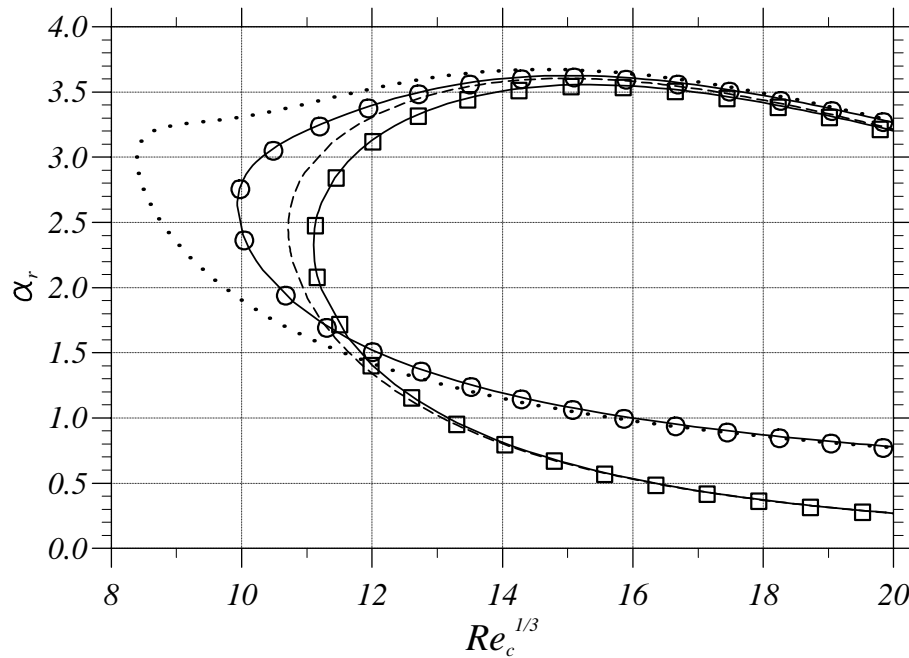


FIG. II.26 – Nombre d'onde fonction de la racine cubique du nombre de Reynolds basé sur la vitesse sur l'axe Re_c . La solution auto-semblable de Berman est utilisée avec un nombre de Reynolds basé sur la vitesse d'injection \mathcal{R}_{inj} égal à 100. Les résultats obtenus avec FSF pour les modes sinueux (traits pleins) coïncident avec les résultats de Varapaev and Yagodkin [VY69] et Lee and Beddini [LB99] (cercles) et les résultats obtenus avec FSF pour les modes variqueux (traits pleins) coïncident avec les résultats de Lee and Beddini [LB99] (carrés). Ils sont comparés aux résultats obtenus avec FPV pour les modes variqueux (traits tiretés) et sinueux (pointillés).

Influence de la formulation sur les PSE

Les PSE dépendent aussi de la formulation. Cette dépendance a été montrée par Airiau [Air94] qui a prouvé que la nature des "parabolized stability equations" dépend de la formulation. Grâce à une méthode de caractéristiques, il a trouvé que les PSE avec FSF sont paraboliques alors que les PSE avec FPV ne le sont pas à cause du terme $\partial\hat{p}/\partial x$. Des investigations plus précises sur la nature du système PSE ont été menées par Li et Malik [LM96a].

Pourtant, l'équation finale en fonction de courant écrite avec les hypothèses PSE, après simplification de la partie exponentielle, est exactement contenue dans le système final constitué de MCE , Qmx et Qmy avec la même procédure. Cela signifie qu'en manipulant ce dernier système, on retrouve exactement les PSE avec FSF. De plus, les conditions de normalisation écrites avec FPV ou FSF sont équivalentes.

La différence de nature indique que les transitoires dans la méthode numérique de marche en espace dépendent de la formulation mais après les transitoires, les deux formulations doivent donner les mêmes résultats. Cependant, afin d'avoir un système quasi-parabolique, certains termes sont généralement éliminés comme $\partial\hat{p}/\partial x$. Après cette simplification, les équations ne sont plus indépendantes de la formulation. Heureusement, cette dépendance demeure faible comme le montrent Li et Malik [LM96a].

Indépendance de la MSA vis-à-vis de la formulation

Finalement, parmi les trois approches non-parallèles étudiées, seule la MSA est totalement cohérente et ne dépend pas du tout de la formulation. Avec cette approche, le taux d'accroissement de chaque quantité est différent mais chaque formulation donne le même résultat comme démontré par Bridges et Morris [BM87].

Commentaires sur le non-parallélisme de l'écoulement de Taylor

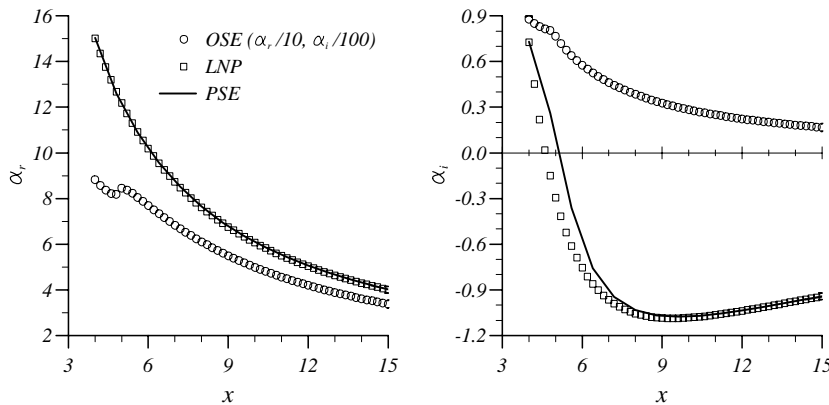


FIG. II.27 – Comparaison des nombres d'onde et taux d'accroissement en fonction de l'abscisse obtenue par l'équation d'Orr-Sommerfeld (OSE), l'approche locale non-parallèle (LNP) et l'approche non-locale des équations de stabilité parabolisées (PSE). Écoulement de Taylor axisymétrique, $\omega = 80$, $q = 0$, $\mathcal{R}_{inj} = 4500$.

Concernant l'écoulement de Taylor, une grosse difficulté se produit vers la paroi débitante. Dans une étroite région, la vitesse axiale s'annule tandis que la vitesse verticale a une valeur finie non-nulle. En conséquence, dans cette région, les termes parallèles sont négligeables devant les termes non-parallèles. Aussi, à l'ordre 0, les OSE ne sont pas uniformément valables dans la direction y et les PSE ou la MSA ne peuvent pas être utilisées en toute sûreté (parce que les deux méthodes utilisent

les résultats des OSE : comme initialisation pour les PSE et comme solution d'ordre 0 pour la MSA). En pratique les calculs ont montré que les OSE, la MSA et les PSE (initialisées avec une solution des OSE) soit prédisent l'écoulement de Taylor toujours stable, soit donnent des solutions non-physiques tandis que LNP et les PSE (si elles sont initialisées avec une solution de LNP) prévoient les instabilités observées dans les expériences, voir section II.4 et dans les simulations numériques d'Ugurtas *et al.* [UAL⁺00]. La figure II.27 extraite de Griffond *et al.* [GCP00] compare les résultats des OSE, de LNP et des PSE¹⁰ initialisés avec LNP pour le problème axisymétrique¹¹. Elle permet de constater que les résultats n'ont plus rien à voir lorsque les termes non-parallèles sont négligés.

II.5.4 Conclusion sur la dépendance à la formulation

On a prouvé que les courbes neutres présentées par Varapaev et Yagodkin [VY69], par Lee et Beddini [LB99] et par Casalis *et al.* [CAP98] sont correctement calculées mais que les différences observées viennent des différents choix de formulation avec une approche inconsistante non-parallèle : une formulation avec les variables primitives et une avec la fonction de courant.

Puis pour donner une idée de la dépendance de la formulation des différentes théories non-parallèles testées sur l'écoulement de Taylor, on mentionne le fait que les échelles multiples sont totalement cohérentes à l'ordre d'approximation souhaité pour les écoulements quasi-parallèles et que la nature des équations de stabilité parabolisées dépend de la formulation.

Cependant, on remarque que le non-parallélisme de l'écoulement de Taylor vers la paroi débitante empêche une utilisation saine de l'équation d'Orr-Sommerfeld et donc des échelles multiples mais que l'approche locale non-parallèle qui conserve ensemble tous les termes prévoit des instabilités en accord avec la simulation numérique et les expériences bien qu'elle ne soit mathématiquement pas justifiée. Il reste à prouver que cette approche dans le cas de l'écoulement de Taylor représente en un certain sens une solution d'ordre 0.

II.6 Sur la stabilité non-parallèle de l'écoulement de Taylor

La recherche d'une prise en compte mieux justifiée du non-parallélisme de l'écoulement de Taylor fait l'objet de cette section. Il s'agit à nouveau principalement de la traduction de l'article référencé [GC01].

II.6.1 Limites de l'approche inconsistante

On a vu à la section précédente que l'approche inconsistante donne des résultats dépendant de la formulation ce qui n'est pas physique. Mais ce n'est pas le seul problème.

En effet, on a vu que l'instabilité pariétale est essentiellement non-visqueuse puisque les résultats de stabilité pour une abscisse et une fréquence fixées deviennent indépendants du nombre de Reynolds si ce dernier est suffisamment grand. Mais le profil vitesse axiale de Taylor en cosinus n'a pas de point d'inflexion si bien qu'il ne satisfait pas le critère de Rayleigh¹². Cela signifie que *l'instabilité vient essentiellement du non-parallélisme de l'écoulement*. C'est pourquoi une approche dérivée d'une théorie parallèle ou faiblement non-parallèle ne semble pas avoir de justification.

Plus de détails peuvent être donnés pour expliquer la source du problème, déjà évoqué ci-dessus. Pour un écoulement faiblement non-parallèle (comme une couche limite ou un jet) la vitesse axiale est supposée d'ordre 0 partout et la vitesse verticale d'ordre 1 partout *i.e.*

$$\forall y \quad \bar{V} = \mathcal{O}(\varepsilon) \ll 1, \text{ et } \bar{U} = \mathcal{O}(1)$$

10. On utilise une norme basée sur l'énergie cinétique sur une section du canal

11. On peut noter la ressemblance frappante avec la figure 11 de Casalis *et al.* [CAP98] dans le cas plan, y compris en ce qui concerne la curieuse irrégularité du résultat OSE.

12. Les calculs avec l'équation d'Orr-Sommerfeld indiquent effectivement que l'écoulement demeure toujours stable, comme on peut le voir sur la figure II.27.

où \mathcal{O} est la relation d'ordre (notation de Landau usuelle). A l'inverse, pour l'écoulement de Taylor, la vitesse axiale s'annule à la paroi où la vitesse verticale est non-nulle soit

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\bar{V}}{\bar{U}} = 0 \text{ et } \lim_{y \rightarrow \pm 1} \frac{\bar{U}}{\bar{V}} = 0$$

C'est pourquoi il n'y a pas de petit paramètre basé sur les ordres relatifs des vitesses axiale et verticale qui soit uniformément valide selon y .

Remarquons cependant que d'autres écoulements possédant la même propriété ont été étudiés sans difficulté particulière selon leurs auteurs, par exemple Garg [Gar89] pour le jet de Bickley¹³.

II.6.2 Traitement de la coordonnée x

Une autre forme de perturbation

La forme de mode normal $\exp[i(\alpha x - \omega t)]$ représente des ondes convectées avec une vitesse de phase constante $v_\phi = \omega/\alpha_r$. Comme la vitesse de référence est la vitesse d'injection uniforme, la vitesse de phase est supposée constante alors que la vitesse axiale est linéairement dépendante de la coordonnée x .

Ceci suggère de chercher une autre forme de perturbations conduisant à une vitesse de phase linéairement accélérée. La forme $x^\lambda \exp(-i\omega t)$ avec $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ complexe satisfait cette propriété.

Pour la fonction de courant ϕ , si $\phi(x, y, t) = \hat{\phi}(y)x^\lambda \exp(-i\omega t)$, on peut alors définir

$$v_\phi = \frac{\omega}{\left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i} = x \frac{\omega}{\lambda_i}$$

et on obtient des ondes voyageant dans la direction axiale à une fraction constante de la vitesse axiale.

Contrairement au cas de la forme de mode normal, les composantes axiale et verticale de la vitesse ne subissent pas la même évolution avec cette forme de perturbation. Si u évolue comme x^λ alors v évolue comme $x^{(\lambda-1)}$. Pourtant, l'équation de quantité de mouvement selon x requiert que p évolue comme x^λ alors que l'équation de quantité de mouvement selon y requiert que p évolue comme $x^{(\lambda-2)}$. Cette non-unicité montre que cette forme ne satisfait pas exactement le système des équations de Navier-Stokes linéarisées. Pour éviter le problème du choix *a priori* de la pression fluctuante, on va travailler avec l'équation sur la fonction de courant.

Changement de variable

Il est plus pratique pour les développements suivants d'introduire la nouvelle variable $\xi = \ln x$ et de chercher ensuite une forme de mode normal $\exp(\lambda\xi - i\omega t)$ que de chercher un mode de la forme $x^\lambda \exp(-i\omega t)$.

Avec la nouvelle variable et en substituant l'expression de la solution de Taylor, l'équation de fonction de courant pour l'écoulement de Taylor

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \right) - i\omega \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \\ & + \left[\frac{\pi}{2} x \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x} - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} \right] \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \phi \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

13. Solution de similitude d'un jet laminaire plan en milieu infini $U = f^{1/2} \text{sech}^2 f y$, $V = 2fR^{-1/2}(2fy \text{sech}^2 f y - \tanh f y)$, avec $f = (1 + 6x/R^{1/2})^{-2/3}$. La vitesse axiale décroît comme $x^{-1/3}$.

devient

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} - i\omega \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left[\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} \right] \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \phi \right) \\
 & + \frac{1}{x^2} \left[-2 \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - i\omega + \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - 2 \right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} \right] \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \\
 & - \frac{1}{x^4 \mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial \xi^4} - 6 \frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^3} + 11 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - 6 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{II.15}$$

Si on étudie la stabilité locale vers un point x_0 , on peut définir un petit paramètre $\varepsilon = \frac{1}{x_0^2}$ dès que $x_0 \gg 1$. Ainsi, l'opérateur peut être décomposé en trois opérateurs agissant sur différentes échelles

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \varepsilon \frac{x_0^2}{x^2} \mathcal{L}_1 + \varepsilon^2 \frac{x_0^4}{x^4} \mathcal{L}_2$$

où $\frac{x_0^2}{x^2} \sim 1$ et $\frac{x_0^4}{x^4} \sim 1$ puisqu'on travaille au voisinage de x_0 .

Finalement, l'introduction de la nouvelle variable fournit un cadre rigoureux pour l'utilisation de la forme de mode normal puis de méthodes asymptotiques classiques dans la limite des abscisses élevées.

II.6.3 Conséquences de l'équation d'ordre 0

Une justification à l'utilisation de l'approche inconsistante

On a suggéré précédemment que l'approche inconsistante doit être en un certain sens une solution d'ordre 0 pour l'écoulement de Taylor. Grâce à l'introduction d'un petit paramètre valide, la justification peut maintenant être donnée.

L'ordre 0 de l'équation (II.15) ne contient pas explicitement la coordonnée axiale et la séparation des ordres est valide pour une gamme d'abscisses allant de l'ordre de x_0 à l'infini si bien que la forme de mode normal $\exp(\lambda\xi - i\omega t)$ est valable (moyennant $x_0 \gg 1$). Le problème aux valeurs propres suivant est obtenu à l'ordre 0

$$-\frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} - i\omega \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left[\lambda \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} \right] \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \phi \right) = 0 \tag{II.16}$$

avec $\phi(1) = \phi'(1) = 0$ et $\phi(0) = \phi''(0) = 0$ pour les modes variqueux.

Il faut remarquer que les contributions de \bar{U} et \bar{V} qui apparaissent seulement dans les termes entre crochets sont maintenant du même ordre.

L'équation (II.16) doit être comparée d'abord à l'équation d'Orr-Sommerfeld obtenue en éliminant les termes \bar{V} et $\partial^2 \bar{V} / \partial y^2$ dans l'équation (II.12) et en substituant l'expression de Taylor pour \bar{U} ,

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} - i\omega \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left[(i\alpha x) \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \right] \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \phi \right) \\
 & + \frac{1}{x^2} \left(-\frac{2(i\alpha x)^2}{\mathcal{R}_{inj}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + (i\alpha x)^3 \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \phi \right) - \frac{1}{x^4} \frac{(i\alpha x)^4}{\mathcal{R}_{inj}} \phi = 0
 \end{aligned} \tag{II.17}$$

puis à l'équation inconsistante de Varapaev et Yagodkin [VY69]

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} - i\omega \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left[(i\alpha x) \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} \right] \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \phi \right) \\
 & + \frac{1}{x^2} \left(-\frac{2(i\alpha x)^2}{\mathcal{R}_{inj}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left[(i\alpha x) \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} \right] (i\alpha x)^2 \phi \right) - \frac{1}{x^4} \frac{(i\alpha x)^4}{\mathcal{R}_{inj}} \phi = 0
 \end{aligned} \tag{II.18}$$

Pour ces deux dernières équations, la valeur de α est recalculée à chaque abscisse. Si on suppose que $i\alpha x$ demeure d'ordre 0, les équations (II.17) et (II.18) s'écrivent à l'ordre 0

$$-\frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} - i\omega \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left[(i\alpha x) \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \right] \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \phi \right) = 0 \tag{II.19}$$

et

$$-\frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} - i\omega \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left[(i\alpha x) \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} \right] \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \phi \right) = 0 \quad (\text{II.20})$$

La comparaison entre (II.20) et (II.16) montre que l'ordre 0 de l'approche inconsistante est équivalent à l'ordre 0 de l'équation asymptotiquement justifiée si on pose

$$\alpha = \frac{\lambda}{ix} \quad (\text{II.21})$$

(ce qui justifie *a posteriori* l'hypothèse concernant l'ordre de $i\alpha x$).

Au contraire, l'équation d'Orr-Sommerfeld reste différente jusqu'à la limite $x \rightarrow \infty$.

Finalement, l'approche inconsistante est solution d'ordre 0 au sens d'un développement en série en $1/x^2$ alors que l'équation d'Orr-Sommerfeld ne l'est pas.

Une meilleure approche inconsistante

Puisque la forme de la perturbation est x^λ dans la limite de grandes abscisses, il semble utile de modifier l'approche inconsistante pour assurer cette dernière évolution plutôt que $\exp(i\alpha x)$. Cela signifie qu'on garde les termes d'ordre plus élevés avec ceux d'ordre 0 et qu'on calcule une nouvelle valeur de λ à chaque abscisse x_0 bien que l'équation soit obtenue en supposant que λ est constant. Cette procédure est analogue à l'approximation quasi-parallèle qui suppose qu'un profil de vitesse local est valable dans une petite région autour de l'abscisse considérée.

Le problème aux valeurs propres à résoudre est

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} - i\omega \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left[\frac{\pi}{2} \lambda(x_0) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} \right] \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \phi \right) \\ & + \frac{1}{x_0^2} \left[-2 \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - i\omega + \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) (\lambda(x_0) - 2) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} \right] \lambda(x_0) [\lambda(x_0) - 1] \phi \\ & - \frac{1}{x_0^4 \mathcal{R}_{inj}} \lambda(x_0) [\lambda(x_0) - 1] [\lambda - 2] [\lambda(x_0) - 3] \phi = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

avec des conditions aux limites homogènes inchangées.

Si les formes de perturbation en $\exp(i\alpha x)$ ou x^λ étaient des solutions exactes, α ou λ seraient réellement indépendants de x_0 . Donc on peut voir si la nouvelle méthode inconsistante constitue une amélioration de la précédente en comparant $\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dx_0}$ et $\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dx_0}$. La méthode qui minimise ces termes est regardée comme la plus valide.

La comparaison entre $x_0 \left| \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dx_0} \right|$ et $x_0 \left| \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dx_0} \right|$ est tracée en figure II.28 pour deux fréquences. La raison de la multiplication par x_0 est donnée juste ci-dessous. Les différences graphiques entre la formulation en fonction de courant et celle en variables primitives sont faibles donc on ne trace que les résultats en fonction de courant. D'abord, la figure II.28 montre que la nouvelle approximation est meilleure que la précédente à toutes les abscisses. Ensuite, de (II.21), on tire

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dx} - \frac{1}{x}$$

Cette dernière équation explique le comportement asymptotique des solutions en $e^{i\alpha x}$ quand x devient grand. Enfin, la forme de mode x^λ semble être plus valable pour les basses fréquences que pour les hautes.

II.6.4 Analyse asymptotique

Même si les méthodes inconsistantes sont utiles d'un point de vue pratique, des résultats théoriquement justifiés semblent intéressants pour les valider et mieux appréhender le comportement de l'instabilité pariétale dans la limite des grandes abscisses. Pour cela, on va poursuivre le développement dont l'ordre 0 a été présenté au paragraphe II.6.3.

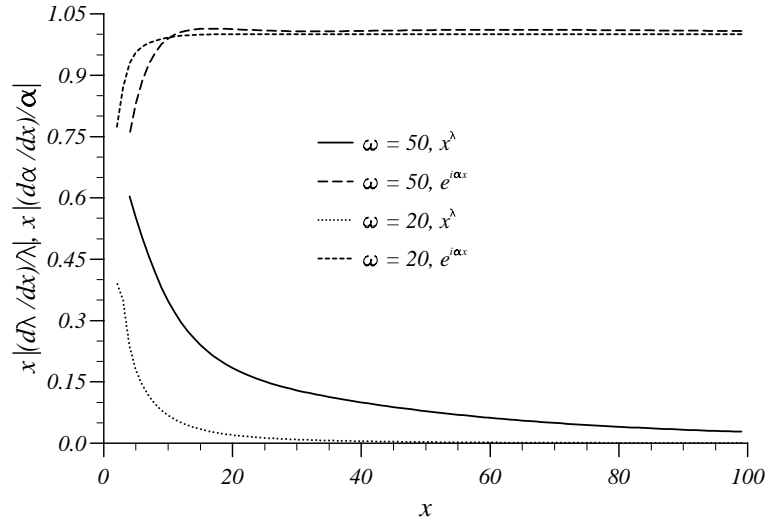


FIG. II.28 – Comparaison de la variation en x , multipliée par l'abscisse, des paramètres supposés constants dans les approches inconsistantes pour deux fréquences avec $\mathcal{R}_{inj} = 900$.

Construction d'une série

Développons la solution en $\tilde{\phi}(\xi, y) = \tilde{\phi}_0(\xi, y) + \varepsilon \tilde{\phi}_1(\xi, y) + \dots$ où $\varepsilon = \frac{1}{x_0^2}$ comme précédemment.

De la séparation des ordres, on tire

$$\text{Ordre 0 : } L_0 \tilde{\phi}_0 = 0$$

$$\text{Ordre 1 : } \hat{L}_0 \tilde{\phi}_1 = -L_1 \tilde{\phi}_0$$

avec les mêmes conditions aux limites homogènes pour $\tilde{\phi}_0$ et $\tilde{\phi}_1$.

L'ordre 0 est l'équation (II.16) qui implique que

$$\tilde{\phi}_0(\xi, y) = \phi_0(y) \exp(\lambda \xi - i\omega t)$$

Alors dans l'équation d'ordre 1, \hat{L}_0 (différent de L_0) est un opérateur qui ne dépend pas explicitement de ξ tandis que

$$L_1 = \frac{1}{x^2} \hat{L}_1 = \exp(-2\xi) \hat{L}_1$$

avec \hat{L}_1 un opérateur qui ne dépend pas explicitement de ξ ; si bien que $-L_1 \tilde{\phi}_0$ est une fonction de y multipliée par $\exp([\lambda - 2]\xi - i\omega t)$. Ceci suggère de choisir pour $\tilde{\phi}_1(\xi, y)$ la forme

$$\tilde{\phi}_1(\xi, y) = \phi_1(y) \exp([\lambda - 2]\xi - i\omega t)$$

De la même façon on peut montrer que pour les ordres plus élevés, on a

$$\tilde{\phi}_n(\xi, y) = \phi_n(y) \exp([\lambda - 2n]\xi - i\omega t)$$

Ceci fournit la base de construction d'une solution en série de l'équation (II.15).

Une série divergente solution du problème

En fait, la série peut être obtenue directement sans introduire de petit paramètre. En terme des coordonnées initiales, l'équation (II.14) peut être écrite

$$\mathcal{M}_y^\lambda(\phi) \cdot x^\lambda + \mathcal{N}_y^\lambda(\phi) \cdot x^{\lambda-2} + \mathcal{P}_y^\lambda(\phi) \cdot x^{\lambda-4} = 0$$

avec

$$\mathcal{M}_y^\lambda(\phi) = -\frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \phi^{(4)} - i\omega \phi'' + \left[\frac{\pi}{2} \lambda \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{d}{dy} \right] \left(\phi'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \phi \right)$$

$$\mathcal{N}_y^\lambda(\phi) = \lambda(\lambda - 1) \left\{ -\frac{2}{\mathcal{R}_{inj}} \phi'' - i\omega \phi + \left[\frac{\pi}{2}(\lambda - 2) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{d}{dy} \right] \phi \right\}$$

$$\mathcal{P}_y^\lambda(\phi) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) \frac{\phi}{\mathcal{R}_{inj}}$$

La série est maintenant

$$\tilde{\phi}(x, y) = x^\lambda \left(g_0(y) + 2! \frac{g_1(y)}{x^2} + \dots + (2n)! \frac{g_n(y)}{x^{2n}} + \dots \right)$$

La nullité de chaque puissance de x requiert que le système d'équations suivant soit satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_y^\lambda(g_0) = 0 \\ \mathcal{M}_y^{\lambda-2}(2!g_1) = -\mathcal{N}_y^\lambda(g_0) \\ \mathcal{M}_y^{\lambda-4}(4!g_2) = -\mathcal{N}_y^{\lambda-2}(2!g_1) - \mathcal{P}_y^\lambda(g_0) \\ \vdots \\ \mathcal{M}_y^{\lambda-2n}((2n)!g_n) = -\mathcal{N}_y^{\lambda-2(n-1)}((2n-2)!g_{n-1}) - \mathcal{P}_y^{\lambda-2(n-2)}((2n-4)!g_{n-2}) \\ \vdots \end{array} \right.$$

avec les conditions aux limites $g_n(\pm 1) = g_n'(\pm 1) = 0$

L'annexe E.1 fournit le système complet qui permet de voir que $|g_n|$ ne croît probablement pas plus vite que ρ^n quand n tend vers l'infini avec ρ un nombre réel inconnu.

Les équations se résolvent successivement jusqu'à un ordre arbitraire de troncature. La première équation associée aux conditions aux limites est un problème aux valeurs propres (c'est exactement l'équation d'ordre 0) tandis que les autres sont inhomogènes et directement solubles puisque $\mathcal{M}_y^{\lambda-2n}$ est *a priori* inversible pour $n \neq 0$.

Pourtant, il semble que des problèmes se produisent vers $y = 0$ quand $\lambda_r - 2n < 0$. La raison n'en est pas évidente mais dans le cas particulier non-visqueux pour $\omega = 0$, on devine aisément que les solutions de

$$\left[\frac{\pi}{2}(\lambda - 2n) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{d}{dy} \right] \left(f'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 f \right) = \text{second membre inhomogène}$$

impliquent des termes du type $(\sin(\frac{\pi y}{2}))^{(\lambda-2n)}$ qui divergent vers $y = 0$ dès que $\lambda_r - 2n < 0$. On retrouve là la limitation à l'utilisation des équations purement non-visqueuses dans les régions stables annoncée au paragraphe II.3.5. Pour cette raison, les fonctions propres sont tracées avec un nombre de termes tel que $\lambda_r - 2n > 0$ afin d'éviter des oscillations vers l'axe.

Malheureusement, il y a un problème à l'utilisation de cette série. Pour un nombre fixé de termes dans la série, il est clair que la série est une approximation de la solution lorsque x tend vers l'infini, mais pour une valeur fixée de x il est aussi clair que la série est divergente lorsque le nombre de termes tend vers l'infini. Il faut insister sur le fait que ce comportement n'est pas rare et ne montre pas une contradiction. Il indique seulement que les limites en n et en x ne peuvent pas être inversées.

Notons tout de même l'existence d'un réordonnement possible de la série permettant de la rendre convergente sous certaines hypothèses. L'implémentation numérique de ce réordonnement n'atteignant pas l'efficacité escomptée, on le relègue à l'annexe E.2.

II.6.5 Résultats et discussion

Les résultats donnés dans cette section sont obtenus en cherchant seulement des modes variqueux avec un nombre de Reynolds d'injection de 900. Comme mentionné précédemment, le mécanisme de

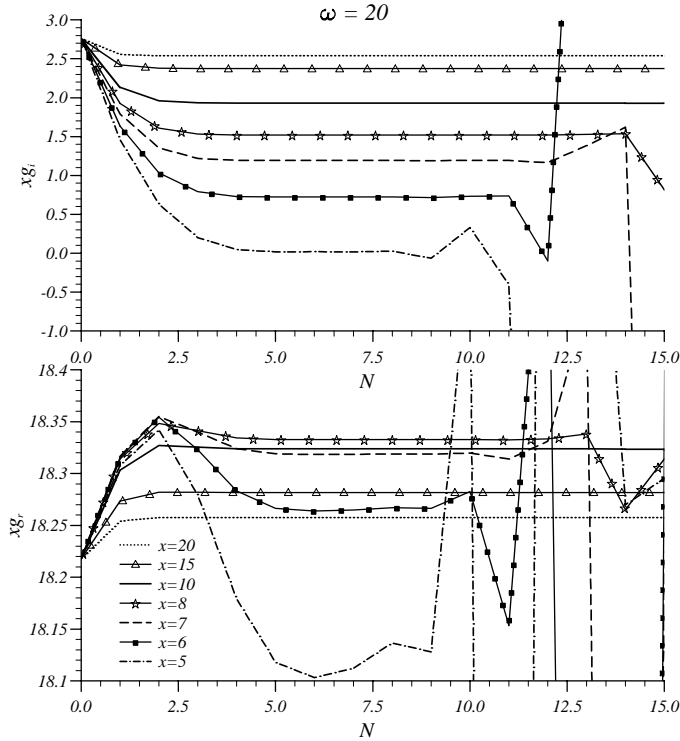


FIG. II.29 – Parties réelle et imaginaire de xg_ϕ obtenues par la série en fonction de la troncature $N = \text{nombre de termes} - 1$ pour $\omega = 20$.

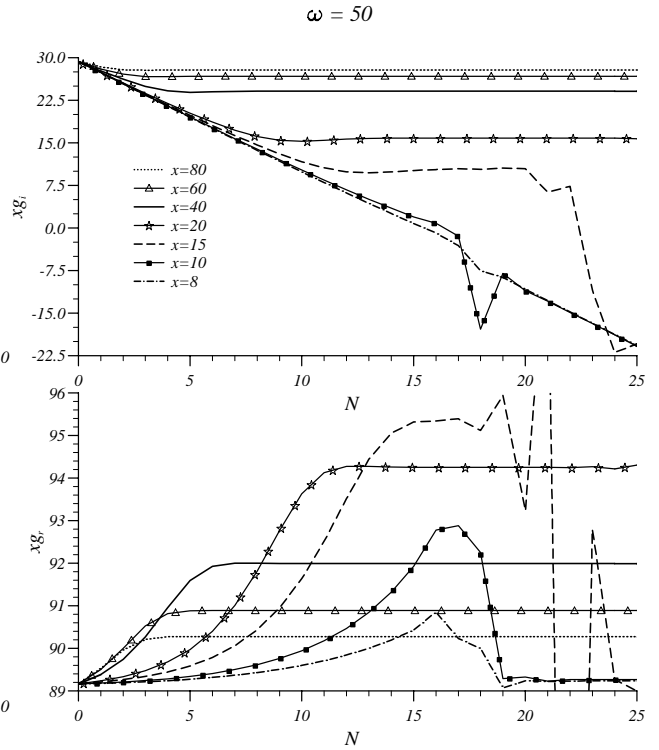


FIG. II.30 – Parties réelle et imaginaire de xg_ϕ obtenues par la série en fonction de la troncature $N = \text{nombre de termes} - 1$ pour $\omega = 50$.

l'instabilité pariétale est non-visqueux si bien que les résultats ne sont pas changés significativement lorsque le nombre de Reynolds est augmenté.

L'évolution de la fonction de courant ϕ est choisie comme indicateur de l'évolution de l'instabilité, on définit le nombre complexe

$$g_\phi = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}$$

dont la partie imaginaire est un nombre d'onde et la partie réelle un taux d'accroissement. Comme on l'a déjà écrit, puisque l'écoulement est fortement non-parallèle, les différentes quantités n'ont pas les mêmes taux d'accroissement. De plus, à cause des formes de mode choisies, g_ϕ est indépendant de y pour les méthodes inconsistantes et pour l'ordre 0 mais dépend de y lorsque le calcul est effectué grâce à la série. Dans ce dernier cas, on choisit de tracer $g_\phi(y = 0.5)$.

Mais puisque la série est divergente, la troncature joue bien sûr un rôle important. Dans les figures II.29 et II.30, on trace les parties réelle et imaginaire de xg_ϕ pour $\omega = 20$ et $\omega = 50$ comme fonctions du rang de troncature N tel que la série soit

$$\tilde{\phi}(x, y) = x^\lambda \sum_{n=0}^N (2n)! \frac{g_n(y)}{x^{2n}}$$

On peut constater que la série atteint un palier si l'abscisse est suffisamment grande (la valeur limite dépend de ω) avant de diverger. On utilise la valeur de ce palier pour définir la valeur de g_ϕ : pour $\omega = 20$, on prend $N = 5$ et pour $\omega = 50$, on prend $N = 15$ mais on ne considère pas les résultats pour $x = 8$ et $x = 10$ dans ce dernier cas.

Caractéristiques de l'instabilité de l'écoulement de Taylor

Les principales caractéristiques de l'instabilité pariétale de l'écoulement de Taylor sont données par l'équation d'ordre 0 de la forme $\phi_0(y)x^\lambda$. Elle montre que, pour des abscisses suffisamment grandes, l'écoulement est partout instable si $\lambda_r(\omega) > 0$ et partout stable si $\lambda_r(\omega) < 0$. Comme on s'y attendait d'après les calculs inconsistants à des abscisses finies, la figure II.31 confirme l'existence d'une valeur limite ω_t pour la pulsation.

La branche inférieure¹⁴ de la courbe neutre est donc une droite ($\omega = cste$) dans un diagramme abscisse-pulsation et une hyperbole ($\alpha_r \propto 1/x$) dans un diagramme abscisse-nombre d'onde, voir figure II.5.

Les fréquences plus basses que $\omega_t/(2\pi)$ sont atténuées jusqu'à l'infini tandis que les fréquences plus hautes sont instables quand x tend vers l'infini. De plus, comme $g_\phi = \frac{\lambda}{x}$ le taux d'accroissement (ou d'atténuation) décroît avec x et la longueur d'onde ainsi que la vitesse de phase croissent linéairement avec x .

Il est aussi important de remarquer que la forme des fonctions propres n'évolue plus quand x tend vers l'infini si bien que la distance à la paroi du maximum des fluctuations tend vers une valeur finie donnée par la fonction propre d'ordre 0.

Comparaison avec les méthodes inconsistantes

Les comparaisons faites ici concernent seulement des théories non-parallèles. Il faut souligner qu'une approche strictement parallèle appliquée aux mêmes cas donne des résultats très différents et prévoit que l'écoulement reste toujours stable comme montré par la figure II.27.

Le nombre d'onde g_i et le taux d'accroissement g_r multipliés par l'abscisse sont comparés aux résultats correspondants obtenus par les méthodes inconsistantes. Deux domaines de pulsation doivent être distingués.

Pour les basses fréquences, illustrées par la figure II.32, les méthodes inconsistantes donnent des résultats assez différents les uns des autres mais un bon accord est obtenu avec l'ordre 0 quand x croît. Les résultats de la série confirment que la nouvelle approche inconsistante est meilleure que les autres.

Pour les hautes fréquences, voir figure II.33, les résultats des méthodes inconsistantes sont superposés mais l'accord avec l'ordre 0 est seulement obtenu pour des valeurs plus élevées de l'abscisse. Il faut remarquer que les échelles des figures II.32 et II.33 sont très différentes. De plus, de légers écarts sont obtenus avec les résultats de la série. Comme g_ϕ dépend de y , les résultats sont un peu différents pour d'autres valeurs de y que 0.5. C'est pourquoi la figure II.33 contient les barres indiquant les extrema de g_ϕ par rapport à y . On peut voir que les résultats inconsistants restent en dehors de ces barres et que la dépendance de g_ϕ en y décroît avec x . Cela montre que la correction du comportement en x^λ diminue lorsque x augmente.

Concernant les fonctions propres, la même remarque peut être faite. La figure II.34 représente le module de la fonction propre de vitesse axiale $\frac{d\phi}{dy}$ obtenue avec la nouvelle méthode inconsistante, l'ordre 0 et la série. Pour $\omega = 20$, à $x = 10$ où la convergence sur le nombre d'onde et le taux d'accroissement n'est pas précise, la fonction propre d'ordre 0 présente toutes les caractéristiques de l'inconsistante et la série avec $N = 1$ donne des résultats encore plus proches de la précédente. Comme

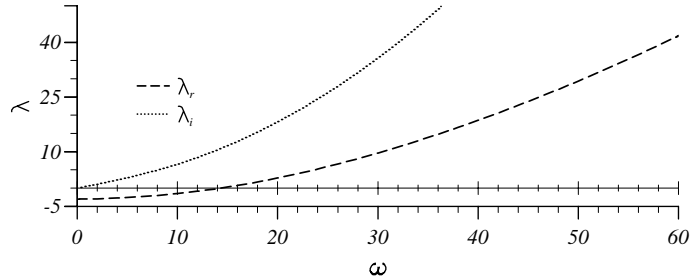


FIG. II.31 – Partie réelle et imaginaire du coefficient λ de l'expression asymptotique $g_\phi = \frac{\lambda}{x}$ (g_r est le taux d'amplification de la fonction de courant et g_i son nombre d'onde) en fonction de la pulsation adimensionnelle pour $\mathcal{R}_{inj} = 900$.

14. L'équation d'ordre 0 ne donne en revanche aucune information sur l'allure de la branche supérieure

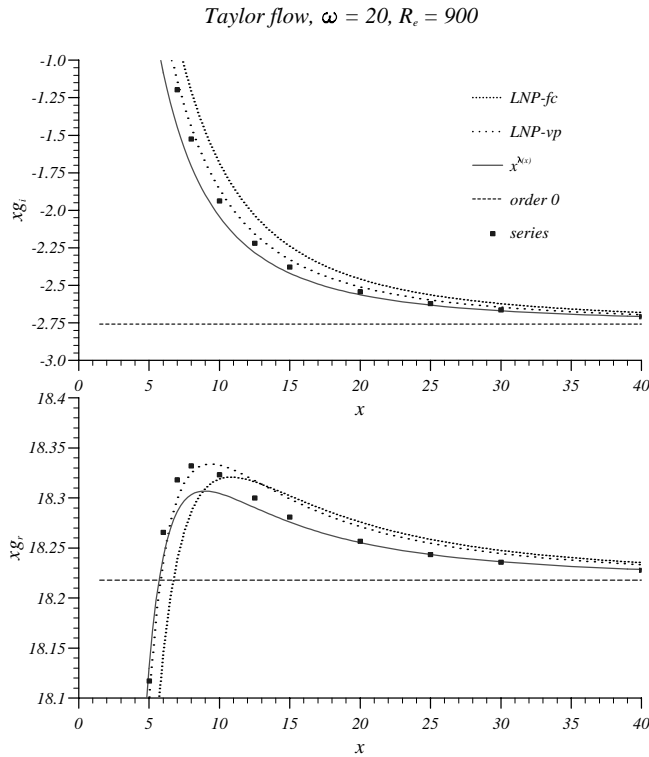


FIG. II.32 – Nombre d'onde (en haut) et taux d'accroissement (en bas) multipliés par l'abscisse pour $\omega = 20$. Comparaison entre les différentes approches : inconsistante avec formulation en fonction de courant (LNP-fc), inconsistante avec formulation en variable primitive (LNP-vp), inconsistante basée sur la forme de mode x^λ , ordre 0 et série avec $N = 5$.

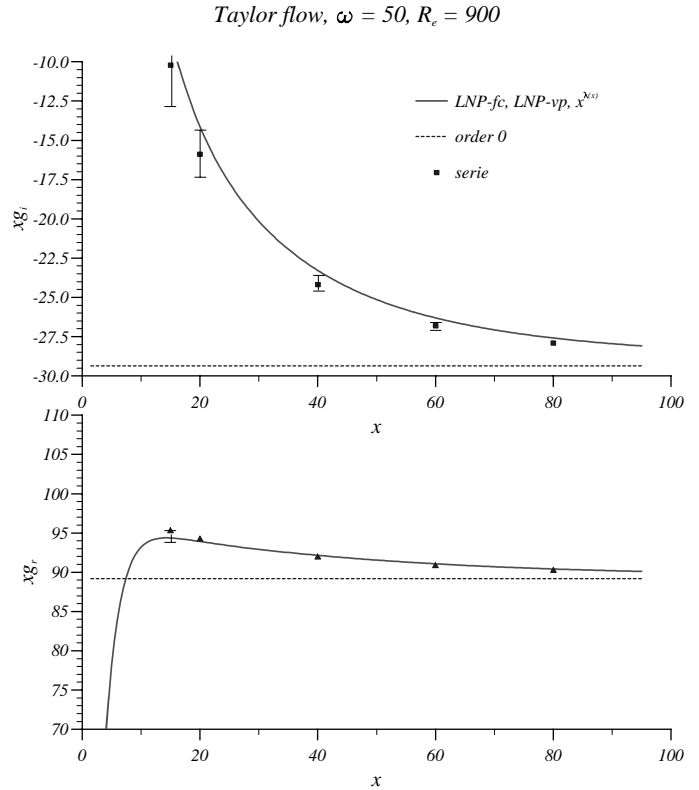


FIG. II.33 – Nombre d'onde (en haut) et taux d'accroissement (en bas) multipliés par l'abscisse pour $\omega = 50$. Comparaison entre les différentes approches : inconsistante avec formulation en fonction de courant (LNP-fc), inconsistante avec formulation en variable primitive (LNP-vp), inconsistante basée sur la forme de mode x^λ , ordre 0 et série avec $N = 15$ dont les variations en y sont limitées par les barres verticales.

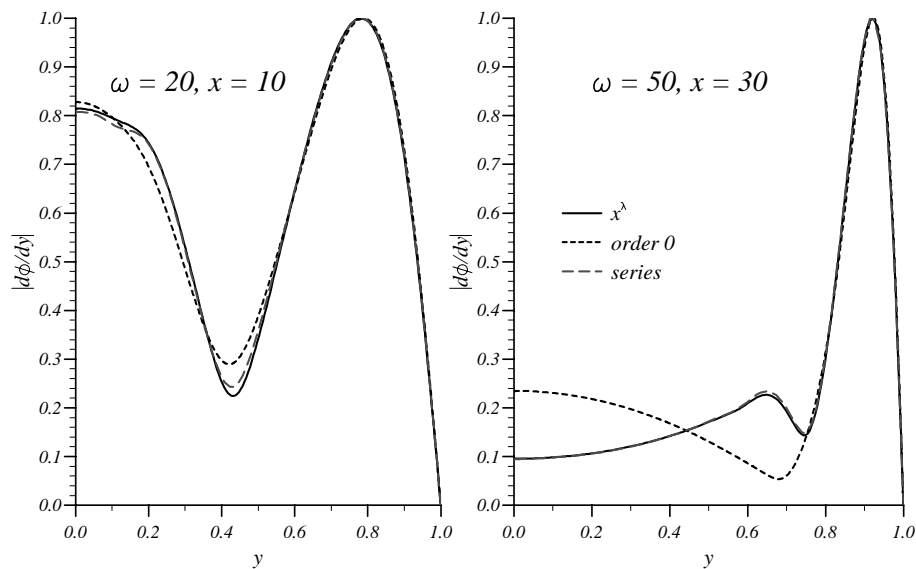


FIG. II.34 – Module de la dérivée première de la fonction propre ϕ obtenue avec l'approche inconsistante basée sur la forme x^λ , avec l'équation d'ordre 0 et avec la série ($N = 1$ pour $\omega = 20$ et $N = 15$ pour $\omega = 50$). Les fonctions propres sont normalisées à leur maximum.

expliqué ci-dessus, une troncature plus élevée produit des oscillations vers l'axe. Au contraire pour $\omega = 50$, à $x = 30$, l'ordre 0 est loin de l'approche inconsistante mais celle-ci est presque superposée à la série avec $N = 10$.

II.7 Conclusion sur le non-parallélisme

Bien que la première approche inconsistante présentée se compare favorablement à l'expérience, elle est théoriquement inacceptable. *Le mécanisme d'instabilité non-visqueux est essentiellement dû aux effets non-parallèles.* Un changement de la coordonnée axiale fournit un ensemble asymptotique d'équations ordonnées dans la limite des abscisses élevées. L'ordre 0 conduit à une justification de l'utilisation de l'approche inconsistante à la place de l'équation d'Orr-Sommerfeld classique. Le changement montre aussi que *la vitesse de phase de l'instabilité est linéairement accélérée* quand x tend vers l'infini comme on pouvait s'y attendre puisque la vitesse axiale de l'écoulement de base est linéairement accélérée. Cela suggère une meilleure approche inconsistante qui satisfait le comportement asymptotique. Le traitement des ordres plus élevés produit un développement en série qui se révèle malheureusement divergent mais peut être utilisé pour une large gamme d'abscisse. Pourtant, cette gamme pour laquelle les résultats de la série sont précis n'atteint pas la courbe neutre si bien que les méthodes inconsistantes demeurent nécessaires pour se comparer aux résultats expérimentaux. Signalons d'ailleurs qu'en raison de la précision possible de ces comparaisons à mettre en regard des faibles corrections constatées au changement de méthode, il est inutile de reprendre les validations expérimentales proposées.

Il faut souligner encore une fois que l'écoulement de Taylor n'est pas un écoulement faiblement non-parallèle car le changement de variable a pour effet de rendre les vitesses moyennes axiale et verticale du même ordre.

Finalement, cette section donne des résultats théoriques et des justifications de l'étude de la stabilité non-parallèle de l'écoulement de Taylor. Même si ces considérations ne semblent pas utiles pour se comparer aux résultats expérimentaux dans la zone linéaire, leurs implications concernant la structure des ondes d'instabilité pariétale et particulièrement la différence linéaire d'amplification entre les fluctuations de vitesse axiale et verticale va se révéler utile pour prévoir le comportement non-linéaire qui est nécessaire à la compréhension du comportement oscillatoire des moteurs à propergol solide.

Dénomination	forme de perturbation ^a	validité	taux d'accroiss ^t unique ^b	taux d'accroiss ^t indép. de y	Commodité d'emploi
LNP-FPV	$(\hat{u}, \hat{v}, \hat{p})_x(y)e^{i(\alpha_x x - \omega t)}$	inconsistante	oui	oui	oui
LNP-FSF	$\hat{\phi}_x(y)e^{i(\alpha_x x - \omega t)}$	inconsistante	oui	oui	oui
"inconsistante x^λ "	$\hat{\phi}_x(y)x^\lambda e^{-i\omega t}$	inconsistante	non	oui	oui
"ordre 0"	$\hat{\phi}(y)x^\lambda e^{-i\omega t}$	quand $x \rightarrow \infty$	non	oui	oui
série divergente	$\left(\sum_{n=0}^N \frac{\hat{\phi}_n(y)}{x^{2n}}\right)x^\lambda e^{-i\omega t}$	quand $x \rightarrow \infty$ et N fixé	non	non	non

TAB. II.5 – Bilan des perturbations étudiées.

^a l'indice x indique les grandeurs paramétrées par x sans être supposées dépendantes de x , c'est ce qui fait l'inconsistance des méthodes.

^b *i.e.* même taux d'accroissement pour toutes les grandeurs (vitesse axiale, verticale...)

Le tableau II.5 dresse un bilan des formes de perturbation étudiées avec leurs caractéristiques : validité, unicité du taux d'accroissement (*i.e.* même forme de perturbation pour toutes les grandeurs), indépendance du taux d'accroissement vis-à-vis de y (elle n'est acquise que si la perturbation est sous

forme de variables séparables), et commodité d'emploi (dont seule la série divergente est exclue à cause de la nécessité de définir une troncature optimale, et du côté arbitraire de son choix en particulier lorsque x est faible).

Même si aucune justification définitive des approches employées n'a pu être fournie au sens où aucun résultat ne se présente comme la solution de référence dont il faudrait s'approcher, on est tout de même parvenu à les justifier dans la limite des abscisses élevées.

Pour les abscisses plus faibles, la question de la réalité des corrections non-parallèles reste posée; l'objet de la section suivante est justement d'apporter d'autres arguments en leur faveur.

II.8 Comparaison à des simulations numériques

Les expériences ne pouvant permettre de comparaisons fines sur des problèmes aussi pointus que celui de la stabilité non-parallèle, on s'est tourné vers la simulation numérique.

Le code utilisé est SIERRA (Simulation Instationnaire d'Écoulements et de Régimes Réputés Acoustiques), dans une version fournie par Ugurtas [Ugu00] dont les travaux nous ont été particulièrement utiles. Pour une description de SIERRA, le lecteur est prié de se reporter à Vuillot [Vui91a] et [Vui91b].

II.8.1 Mode d'utilisation de SIERRA

Le programme de calcul SIERRA de l'ONERA permet la résolution des équations de *Navier-Stokes compressibles 2D instationnaires* au moyen d'un schéma de type "*Mac Cormack prédicteur/correcteur explicite à volumes finis*".

Le code autorise les calculs bidimensionnels cartésiens ou axisymétriques mais la seule géométrie traitée est la *géométrie plane*. Il est doté de modèles de turbulence mais ceux-ci ne sont pas utilisés lors de cette thèse où on effectue seulement des *calculs instationnaires laminaires*. Il contient aussi un schéma de viscosité artificielle reposant sur la méthode de Jameson *et al* [JST81], [JS85] qui n'est pas utilisé dans les résultats présentés afin de réduire les interrogations sur les biais numériques.

On ne s'occupe que de l'écoulement plan dans un canal régulier du type VECLA avec une paroi débitante (située en $y = -1$) et une paroi lisse (située en $y = 0$), les maillages sont donc simplement constitués de rectangles. Ils sont réguliers en y et aussi en x à part vers le fond avant où ils sont parfois rendus plus lâches car l'instabilité étant convectée vers l'aval, cette région n'a pas d'intérêt¹⁵.

La méthodologie est celle d'Ugurtas [Ugu00]. On calcule d'abord un écoulement stationnaire en utilisant des niveaux de viscosité artificielle élevés, on retrouve ainsi de façon précise l'écoulement de Taylor comme il l'a montré [Ugu00]. On coupe alors la viscosité artificielle et on introduit une perturbation. Le calcul est ensuite conduit jusqu'à l'atteinte d'un régime oscillatoire établi aisément identifiable puisqu'on va travailler en imposant des signaux sinusoïdaux mono-fréquentiels.

La perturbation est imposée en ajoutant un débit sinusoïdal en temps sur une section complète (*i.e.* à toutes les mailles en y pour une abscisse x fixée). Ce débit n'est ajouté qu'en une maille en x et on lui donne la forme en y de la fonction propre de vitesse correspondant à la fréquence choisie, ainsi on impose une perturbation des deux composantes de la vitesse mais pas de la pression. Enfin, la perturbation est appliquée avec une certaine période de rafraîchissement et pas nécessairement à chaque itération. Cette méthodologie est l'une de celles d'Ugurtas qui a testé de multiples formes de perturbation mais dans une optique différente de celle de ce manuscrit.

Signalons que la perturbation est imposée en permanence, y compris durant les périodes de calcul des coefficients de Fourier temporels du champ instationnaire.

Les conditions aux limites sont les suivantes. A la paroi débitante, on impose un débit massique uniforme et constant, à la paroi lisse une condition de symétrie (il ne s'y développe pas de couche

¹⁵. Attention, la problématique est ici différente de celle d'Ugurtas qui étudie l'accrochage et pour qui la réflexion acoustique au fond avant est évidemment importante

limite) et au fond avant, une condition de paroi réfléchissante.

La difficulté provient de la condition aval. Deux types de conditions ont été utilisées : sortie à pression imposée et conditions de non-réflexion. Toutes deux ont leurs inconvénients.

II.8.2 Sortie à pression imposée

Combinaison d'acoustique et d'instabilité

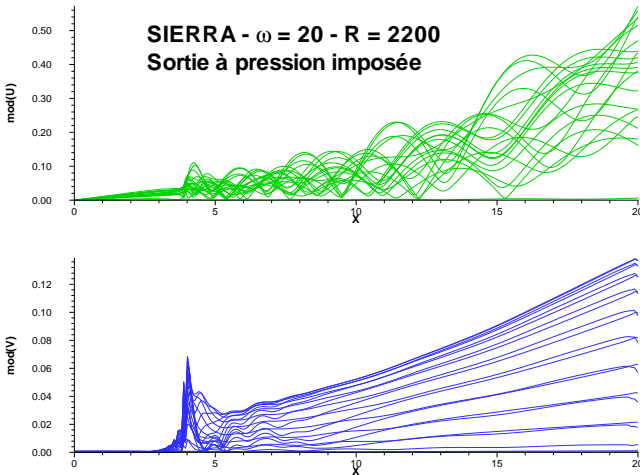


FIG. II.35 – Modules des coefficients de Fourier (de la fréquence imposée) de la vitesse axiale (en haut) et de la vitesse verticale (en bas) sur des lignes $y = \text{constante}$ avec y allant de -1 à 0 . Perturbation appliquée sur $\omega = 20$ à $x = 4$, $\mathcal{R}_{inj} = 2200$, maillage régulier 300×101 , sortie à pression imposée en $x = 20$, fond avant réfléchissant.

qui entre dans le domaine de calcul, se réfléchit au fond avant pour finalement créer une sorte d'acoustique de cavité. Il ne s'agit pas à proprement parler d'un mode de cavité car la longueur d'onde n'est pas un sous-multiple de la longueur de la cavité. En fait, de par son origine, cette acoustique a la même pulsation ω que l'instabilité et donc une longueur d'onde de l'ordre de $2\pi a_s / \omega$, avec a_s la vitesse du son, donc décorrélée de la longueur du canal.

Le système d'onde constitué de l'instabilité pariétale et de l'acoustique s'établit sur un régime permanent tant que le canal n'est pas trop long (auquel cas d'autres phénomènes se produisent comme on va le mentionner plus loin).

Le problème est de distinguer la partie "instabilité" de la partie "acoustique". En effet, toujours à cause de l'origine de l'acoustique, les amplitudes des fluctuations associées aux deux ondes sont du même ordre de grandeur.

Ceci est illustré par la figure II.35 qui montre l'évolution en x des modules des coefficients de Fourier (de la fréquence imposée) de la vitesse axiale (en haut) et de la vitesse verticale (en bas) sur des lignes $y = \text{constante}$ avec y allant de -1 à 0 . Pour cette figure la perturbation est appliquée sur $\omega = 20$ à $x = 4$, on a $\mathcal{R}_{inj} = 2200$, la sortie à pression imposée est en $x = 20$ (les adimensionnements sont les mêmes que d'habitude) et le fond avant est réfléchissant. Le maillage est régulier avec 300 mailles en x et 101 en y .

La figure II.35 appelle de nombreux commentaires. La perturbation appliquée en $x = 4$ est nettement visible sur le module des coefficients de Fourier de la vitesse verticale. Les instabilités excitées ne "remontent" presque pas l'écoulement ou plutôt s'atténuent rapidement dans le sens des x décroissants à partir de 4 comme on le voit sur le bas de la figure. Dans le sens des x croissants, on constate

La sortie à pression imposée est la première condition aval utilisée pour deux raisons. Premièrement, c'était la seule raisonnable parmi celles disponibles dans le code. Deuxièmement, c'était celle utilisée par Ugurtas [Ugu00] qui en tire des résultats intéressants.

Les conditions aux deux limites en x (sortie à pression imposée et fond avant réfléchissant) sont reprises d'Ugurtas. Elles sont bien adaptées à l'obtention d'un accrochage aéroacoustique mais rendent difficile une vérification de la stabilité.

En effet, la pression étant fixée en sortie, sa fluctuation est nécessairement nulle. Lorsque les ondes de stabilité atteignent la section de sortie, comme elles transportent une fluctuation de pression, la condition de pression imposée entraîne la création d'une onde de pression qui vient annuler celle de l'instabilité pariétale. Cette onde de pression est une onde acoustique

sur la vitesse verticale une diminution après $x = 4$ du niveau de fluctuations suivie d'une croissance correspondant à l'instabilité pariétale jusqu'à la sortie. L'abscisse $x = 4$ est située juste à l'amont de la courbe neutre pour $\omega = 20$ mais la diminution initiale du niveau provient d'un problème mal compris dans la façon d'imposer la forme du mode propre. Le calcul requiert en fait une certaine distance (correspondant à la zone de diminution) pour faire réellement émerger le mode propre. Au delà de cette zone d'adaptation, on voit que la vitesse verticale s'amplifie et que cette amplification est quasi-indépendante de l'ordonnée. On peut vérifier par ailleurs que la forme des fluctuations et leur taux d'amplification sont bien ceux prévus par la théorie.

La partie supérieure de II.35 montre un comportement de la vitesse fluctuante axiale *a priori* plus complexe et moins ordonné. En fait, la différence de comportement s'explique par le fait que l'acoustique a des caractéristiques semblables à l'acoustique des modes longitudinaux de cavité; en particulier, on sait que les fluctuations de vitesse verticale acoustique sont négligeables devant les fluctuations de vitesse axiale acoustique. Au contraire, les vitesses axiale et verticale mises en jeu par l'instabilité pariétale sont du même ordre. L'explication des écarts entre partie haute et partie basse de la figure II.35 est que les vitesses axiales acoustique et de stabilité sont du même ordre, donc que la vitesse verticale acoustique est négligeable devant la vitesse verticale de stabilité. De ce fait, la partie basse de la figure II.35 ne montre que le module vitesse verticale fluctuante de stabilité tandis que la partie haute est une combinaison de la vitesse axiale acoustique de grande longueur d'onde avec la vitesse axiale de stabilité de courte longueur d'onde d'où les oscillations apparentes du module de période proche de la longueur d'onde de stabilité. A l'amont de l'abscisse de forçage $x = 4$ on voit que le comportement dans la partie haute de la figure II.35 est différent puisque c'est l'instabilité qui est cette fois absente. On observe donc uniquement le module de vitesse axiale acoustique.

Elimination de la partie acoustique

Des comparaisons sont cependant possibles si on suppose que la solution acoustique de cavité de Majdalani exposée en annexe A est une bonne estimation de l'acoustique résultante.

Pour obtenir cette comparaison, la partie acoustique est calculée de la façon suivante

- la fréquence acoustique est celle du forçage;
- le nœud de vitesse est fixé par la condition de non-pénétration au fond avant qui impose une vitesse axiale nulle¹⁶;
- l'amplitude (inconnue *a priori* puisque l'acoustique est linéaire) est mesurée dans la partie située en amont du forçage.

La figure II.36, tirée du même calcul que II.35, montre la comparaison de la solution de Majdalani au calcul SIERRA dans la partie située en amont du forçage. On y représente le module des profils de vitesse transversale des deux composantes de la vitesse. La vitesse axiale calculée par SIERRA est en trait plein, et la vitesse verticale en traits tiretés. La solution de Majdalani est en pointillés. Son amplitude est choisie de manière à avoir l'égalité des maxima de vitesses axiales à la dernière abscisse de la figure. La croissance étant linéaire dans cette zone à la fois pour SIERRA et pour la solution théorique, l'accord sur l'amplitude du pic en proche paroi est bien sûr vérifié. Par contre, ce choix d'amplitude ne convient pas parfaitement pour représenter la croissance vers l'axe¹⁷. L'accord sur la vitesse axiale est jugé plutôt bon : les oscillations sont correctement retrouvées ainsi que leur atténuation. Les niveaux de fluctuation de vitesse verticale sont compatibles mais des oscillations sont présentes dans SIERRA qui n'apparaissent pas dans la solution de Majdalani. De toute façon, cette composante de la vitesse n'est ici visible que parce qu'on est juste au fond avant où la vitesse axiale est très faible.

16. Attention, les conditions de modes de cavité au fond arrière ne sont pas satisfaites sans quoi il est impossible d'annuler la pression fluctuante liée à l'instabilité pariétale

17. On peut remédier à cela et obtenir un accord quasi-parfait en jouant légèrement sur les trois paramètres de la solution de Majdalani, la pulsation, le nombre de Reynolds d'injection et le nombre de Mach d'injection, mais on a préféré s'en tenir aux valeurs nominales du calcul.

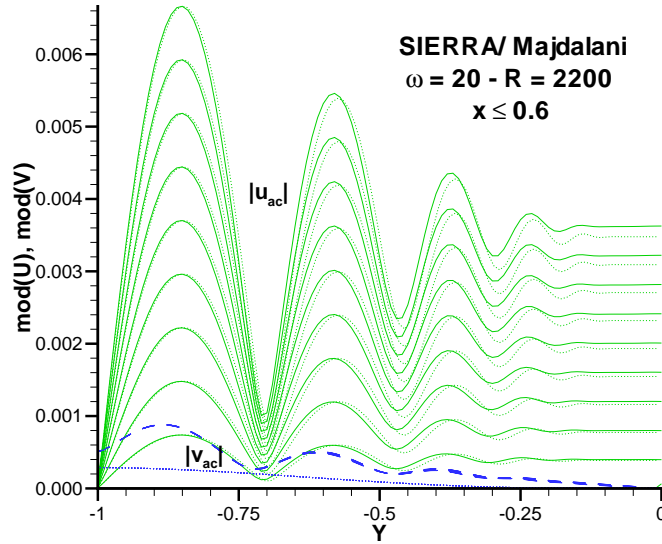


FIG. II.36 – Module de vitesse acoustique axiale et verticale à différentes abscisses vers le fond avant. Comparaison entre SIERRA et la solution acoustique de Majdalani [Maj99], $\omega = 20$ à $x \leq 0.6$, $\mathcal{R}_{inj} = 2200$.

Comparaison à la stabilité

Une fois la partie acoustique calculée, on fait l'hypothèse que les deux composantes des fluctuations n'interagissent que par le biais de la condition à la limite aval. Moyennant cela, on calcule l'instabilité pariétale comme la différence du champ fluctuant total et du champ acoustique.

L'écart sur la fluctuation de vitesse axiale avant et après l'élimination de la solution de Majdalani est indiqué sur la figure II.37 pour cinq sections comprises entre 7 et 20 (sortie). Il s'agit toujours du même calcul avec le même choix d'amplitude pour l'acoustique. On constate que la correction est importante et modifie fortement les fonctions propres (elles seules doivent rester après élimination de l'acoustique) sur l'ensemble de la zone instable.

On compare enfin ces mêmes résultats avec l'analyse de stabilité en figure II.38 pour deux abscisses vers la section de sortie $x = 19$ et $x = 20$. Les résultats directs de SIERRA sont en lignes pointillées; après élimination de l'acoustique, la vitesse fluctuante axiale est en traits pleins, la vitesse radiale en traits tiretés. Les symboles donnent la solution de l'équation (II.16) de stabilité non-parallèle d'ordre 0. Rappelons que la fonction de courant associée à (II.16) est de la forme $x^\lambda f(y)$ ce qui permet de déduire l'amplitude relative et la forme des deux composantes de la vitesse. L'amplitude absolue étant indéterminée, on la choisit pour correspondre au mieux à celle de SIERRA¹⁸ (qui dépend pour sa part de l'amplitude initiale de la perturbation). Bien sûr, une seule constante multiplicative est choisie pour les quatre courbes théoriques proposées. La coïncidence de courbes de II.38 après élimination de l'acoustique et de stabilité confirme la linéarité des phénomènes et l'absence d'interaction entre acoustique et instabilité hors de la condition limite aval sur la pression. L'accord est jugé satisfaisant puisque la forme générale des fonctions propres, le pic vers la paroi débitante, l'amplification entre $x = 19$ et $x = 20$ et l'amplitude relative des fluctuations de vitesse axiale et radiale sont retrouvées. On constate toutefois des écarts vers l'axe et sur le minimum vers $y = -0.5$.

Une vérification de l'accord sur la phase de la vitesse fluctuante axiale, en plus du module, est

18. On impose que les maxima de fluctuation de vitesse axiale à $x = 20$ aient même amplitude

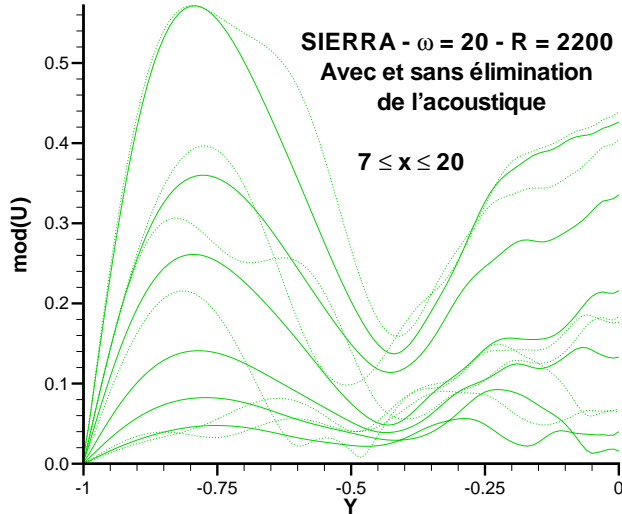


FIG. II.37 – Module de la fluctuation vitesse axiale par SIERRA avant (lignes pointillées) et après (lignes pleines) élimination de la solution acoustique de Majdalani. x varie entre 7 et 20. $\omega = 20$, $\mathcal{R}_{inj} = 2200$.

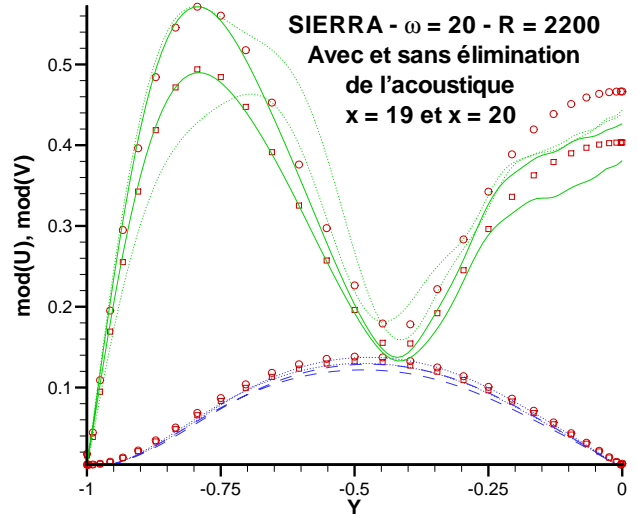


FIG. II.38 – Module des fluctuations de vitesse par SIERRA avant (lignes pointillées) et après (lignes pleines) élimination de la solution acoustique de Majdalani, comparé avec la solution de stabilité à l'ordre 0 en $f(y)x^\lambda$. $\omega = 20$, $x = 19$ et $x = 20$, $\mathcal{R}_{inj} = 2200$.

donnée en figure II.39 sous forme de contours iso-valeurs. La solution de stabilité d'ordre 0 est représentée sous le résultat SIERRA après élimination de l'acoustique. A gauche se trouvent les modules, à droite les arguments. A un déphasage près¹⁹, l'allure générale est bien similaire même si des écarts sont observés vers l'axe.

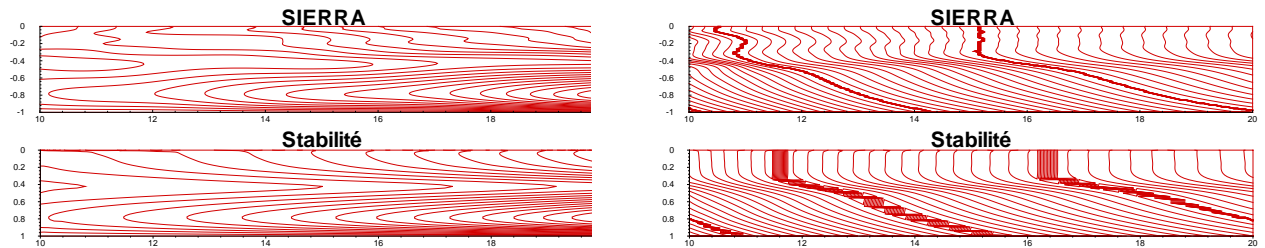


FIG. II.39 – Contours de modules (à gauche) et argument (à droite) des fluctuations de vitesse axiale par SIERRA après élimination de la solution acoustique de Majdalani, comparé avec la solution de stabilité à l'ordre 0 en $f(y)x^\lambda$. $\omega = 20$, $\mathcal{R}_{inj} = 2200$.

Finalement, les résultats sont plutôt satisfaisants pour les basses fréquences comme $\omega = 20$ présentées ici mais on ne parvient pas à éliminer complètement la partie acoustique pour n'observer que la stabilité lorsque des fréquences plus élevées sont considérées, or la courbe des iso-valeurs des facteurs n , figure II.7, rappelle que $\omega = 20$ n'appartient pas à la gamme des fréquences les plus amplifiées pour les longueurs habituelles des montages.

Par ailleurs, l'utilisation de SIERRA a initialement été motivée par la volonté de vérifier des résultats non-linéaires exposés au chapitre IV. Or, cette vérification met en jeu des niveaux plus élevés obtenus en allongeant le canal simulé pour laisser l'instabilité s'amplifier plus longuement et en choisissant des fréquences de taux d'accroissement plus fort. Les quelques calculs de ce type menés avec une sortie à pression imposée n'ont pas permis d'atteindre un régime établi identifiable comme

¹⁹. Rappelons que la phase est arbitraire au même titre que l'amplitude puisque la constante arbitraire de la théorie linéaire est complexe.

tel. En effet, les fortes non-linéarités font émerger les véritables modes acoustiques de cavité en plus des faux modes de cavité dus à la condition aval. Ils influencent à leur tour la stabilité et il devient illusoire d'espérer extraire un comportement de stabilité des systèmes d'ondes résultantes.

On s'est donc tourné vers une autre condition à la limite aval.

II.8.3 Condition de non-réflexion

Un moyen classique d'éviter un retour acoustique est d'imposer des conditions de non-réflexion. De telles conditions étaient implémentées au fond avant²⁰, et on les a transposées au fond arrière.

Ecriture des conditions de non-réflexion

Elles sont écrites à partir des relations caractéristiques des équations d'Euler compressibles (et non pas de Navier-Stokes). Les relations utilisées sont tirées de l'ouvrage de Hirsch [Hir90]. Parmi les quatre caractéristiques de ce système bidimensionnel, une seule est entrante à la sortie du canal. La condition de non-réflexion impose que les perturbations locales se propageant selon cette caractéristique s'annulent donc que la valeur de la variable caractéristique associée ($\delta U - \delta P/\rho c$ avec c la vitesse du son) soit constante, c'est-à-dire à l'aval et *dans le cas mono-dimensionnel*

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.23})$$

(Toutes les grandeurs sont les grandeurs totales (et non pas seulement la partie fluctuante).)

A l'amont, une seule caractéristique est entrante ($\delta U + \delta P/\rho c$) et la condition de non-réflexion s'y écrit

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

Par rapport au problème à résoudre, ces conditions ont deux défauts : elles ne tiennent compte ni de la viscosité, ni de la bidimensionnalité de l'écoulement. L'erreur provenant de la viscosité est probablement très faible par contre, on a vainement essayé de résoudre le problème lié à la bidimensionnalité.

En effet, la condition (II.23) n'est strictement valable que dans le cas où la pression et la vitesse verticale sont uniformes sur la section de sortie ce qui n'est pas du tout le cas de l'écoulement de Taylor.

Dans le cas bidimensionnel, Hirsch [Hir90] propose de substituer à (II.23)

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial P}{\partial t} = c \frac{\partial V}{\partial y} \quad (\text{II.24})$$

Le problème est qu'il n'existe de solution stationnaire avec cette condition que si V est uniforme en section de sortie donc pas pour l'écoulement de Taylor. Donc au départ des calculs on modifie l'écoulement moyen et l'écoulement analysé n'est alors plus celui de Taylor.

C'est pourquoi, malgré un inconvénient notable indiqué ci-dessous, on se contente de la condition mono-dimensionnelle (II.23) qui s'avère compatible avec l'écoulement de Taylor stationnaire.

Améliorations et désagréments

Les améliorations et les désagréments de la condition de non-réflexion sont illustrés par la figure II.40. Comme sur la figure II.35, on a l'évolution en x des modules des coefficients de Fourier (de la fréquence imposée) de la vitesse axiale (en haut) et de la vitesse verticale (en bas) sur des lignes $y = \text{constante}$ avec y allant de -1 à 0. Pour cette figure aussi, avec $\mathcal{R}_{inj} = 2200$, la perturbation est appliquée sur $\omega = 20$ à $x = 4$ et le maillage est régulier avec 300 mailles en x et 101 en y . Par contre, les conditions de non-réflexion sont imposées à la sortie, située $x = 30$, et au fond avant.

²⁰. Il s'agissait en fait de conditions d'excitation acoustique par le fond avant

L'amélioration escomptée se produit bien : les oscillations du module de la vitesse axiale ont disparu par suite de la suppression de l'acoustique qui s'y surajoutait. On retrouve des taux d'accroissement constants en y et très proches de la théorie comme on va le voir.

Le défaut, certainement dû à l'absence de prise en compte des gradients transversaux de vitesse verticale en sortie, consiste en une variation rapide des modules vers la limite aval. La vitesse fluctuante verticale est très fortement amplifiée en cinq mailles environ tandis que la vitesse fluctuante axiale est rapidement atténuée. La même observation a été faite pour toutes les fréquences et tous les maillages. Signalons que la vitesse moyenne reste pendant ce temps celle de l'écoulement de Taylor : la condition de non-réflexion ne pose problème que sur le champ fluctuant.

Cette brusque variation de comportement n'est pas dramatique si elle demeure confinée à l'aval. Trois résultats de calculs sont superposés dans la figure II.41 pour vérifier que la condition de non-réflexion n'influence pas le champ fluctuant trop à l'amont. La sortie est située en $x_s = 20$, $x_s = 21$ et $x_s = 22$, les maillages sont réguliers et de taille respective 200×61 , 210×61 et 220×61 , tous les autres paramètres sont similaires. Les modules de vitesse fluctuante sont très proches tant que $x \lesssim x_s - 1$. D'autres calculs tendent à montrer que la zone affectée diminue quand le nombre de mailles augmente. Faute de mieux, on va donc se satisfaire de cette condition de non-réflexion et supposer qu'elle n'induit aucune erreur dans l'essentiel du domaine de calcul.

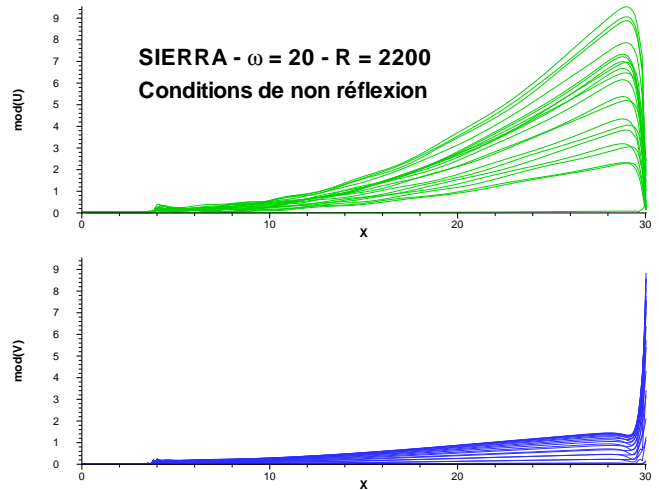


FIG. II.40 – Modules des coefficients de Fourier (de la fréquence imposée) de la vitesse axiale (en haut) et de la vitesse verticale (en bas) sur des lignes $y = \text{constante}$ avec y allant de -1 à 0 . Perturbation appliquée sur $\omega = 20$ à $x = 4$, $\mathcal{R}_{inj} = 2200$, maillage régulier 300×101 , conditions de non-réflexion en sortie à $x = 30$ et au fond avant.

Comparaison à la stabilité pour les basses fréquences Les simulations pour $\omega = 20$ et $\mathcal{R}_{inj} = 2200$ retrouvent de façon très satisfaisante les prédictions théoriques. Les figures II.42 et II.43 proviennent d'un calcul sur un maillage régulier de 300×101 mailles avec conditions de non-réflexion au fond avant et au fond arrière situé à $x = 30$ et forçage à $x = 4$. On présente les modules des coefficients de Fourier des vitesses axiale et verticale entre $x = 15$ et $x = 25$, abscisses où la transformation du forçage en mode propre est réalisée mais où l'influence du fond arrière ne se fait pas sentir.

En figure II.42, on compare les modules des fonctions propres de vitesse obtenues par SIERRA (lignes pleines) et par la solution de l'équation (II.16) de stabilité non-parallèle d'ordre 0 (symboles). La méthode est la même que pour la figure II.38; l'amplitude absolue étant indéterminée, on la choisit pour correspondre au mieux à celle de SIERRA et on ne prend qu'une seule constante multiplicative pour les quatre courbes théoriques proposées. La figure II.42 parle d'elle-même, l'accord est satisfaisant tant pour la forme des fonctions propres que pour l'amplification elle-même. Notons tout de même un léger écart entre SIERRA et l'ordre 0 sur le rapport entre le premier maximum de "mod(U)" (à partir de la paroi) et le premier minimum. L'utilisation de la solution de stabilité inconsistante basée sur la même forme de mode n'améliore pas nettement ce petit défaut.

On tire la figure II.43 des mêmes calculs de SIERRA et de stabilité. La partie droite est un zoom de la partie gauche. On adopte la représentation permettant de montrer que la forme de la fonction

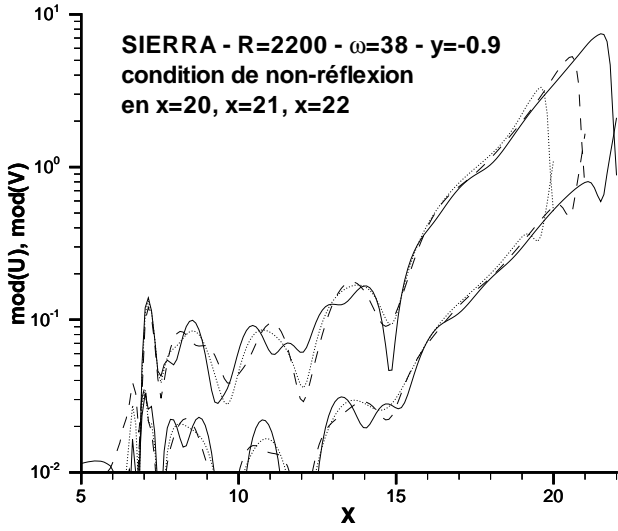


FIG. II.41 – Effet de la condition de non-réflexion : trois calculs avec la sortie située en $x = 20$, $x = 21$ et $x = 22$. Maillages 200×61 , 210×61 et 220×61 . (Modules des coefficients de Fourier des vitesses fluctuantes axiale et radiale.)

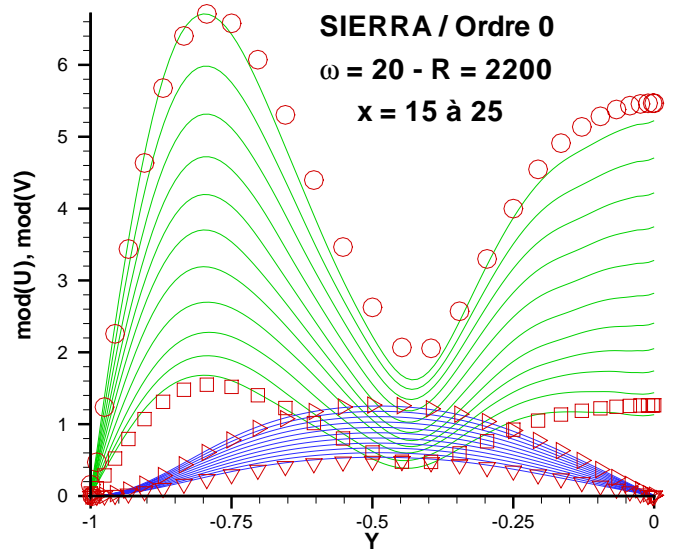


FIG. II.42 – Lignes pleines : modules des coefficients de Fourier de la vitesse sur des sections $x = \text{constante}$ avec x allant de 15 à 25. Perturbation appliquée sur $\omega = 20$ à $x = 4$, $\mathcal{R}_{inj} = 2200$, maillage régulier 300×101 , conditions de non-réflexion en sortie à $x = 30$ et au fond avant. Symboles : solution de stabilité $x^\lambda f(y)$ d'ordre 0.

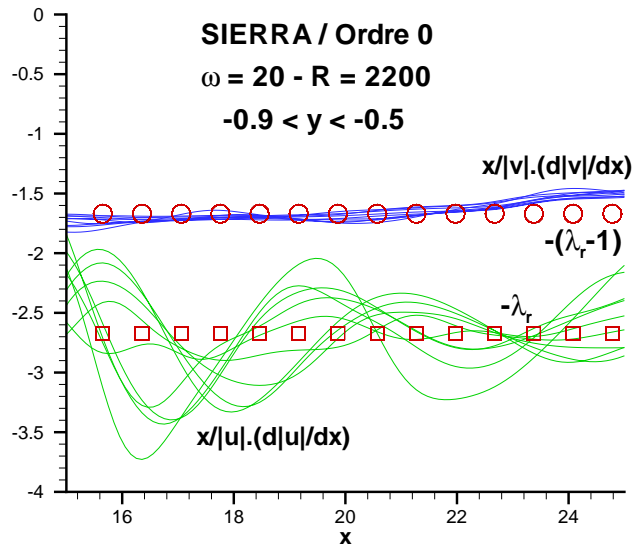
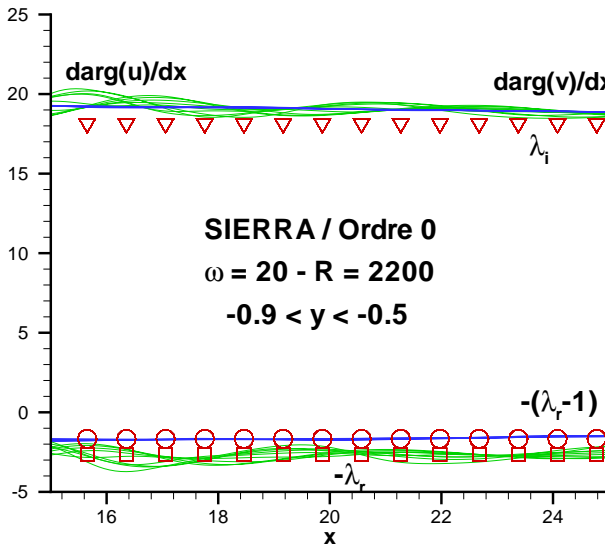


FIG. II.43 – Opposé du taux d'accroissement et nombre d'onde multipliés par l'abscisse pour chacune des composantes de la vitesse. Lignes pleines : Calcul SIERRA, perturbation appliquée sur $\omega = 20$ à $x = 4$, $\mathcal{R}_{inj} = 2200$, maillage régulier 300×101 , conditions de non-réflexion en sortie à $x = 30$ et au fond avant. Symboles : solution de stabilité $x^\lambda f(y)$ d'ordre 0.

de courant des modes d'instabilité est $x^\lambda f(y)$, à savoir : (opposé du) taux d'accroissement et nombre d'onde multipliés par x (respectivement notés sur la figure $x/|u|(d|u|/dx)$ et $(-\lambda_r)$ pour l'opposé du taux d'accroissement de la vitesse axiale multiplié par x , $x/|v|(d|v|/dx)$ et $(-\lambda_r - 1)$ pour l'opposé du taux d'accroissement de la vitesse verticale multiplié par x , et $darg(u)/dx$, $darg(v)/dx$ et λ_i pour le nombre d'onde multiplié par x). Ces grandeurs doivent être des constantes si la forme est celle annoncée. Cette propriété se vérifie bien tant pour l'amplification que pour la longueur d'onde.

L'autre prévision importante de la stabilité est l'écart linéaire d'amplification entre la vitesse fluctuante axiale et la vitesse fluctuante verticale. Cet écart est bien vérifié sur la partie droite de la figure II.43 même si les résultats de SIERRA sur la vitesse axiale oscillent légèrement. Au contraire, sur la partie gauche, on voit que la longueur d'onde des deux composantes de la vitesse est identique comme prévu par la théorie. Le seul défaut est une légère surévaluation de la longueur d'onde prévue par la stabilité par rapport à celle de SIERRA.

Ce calcul *valide les effets non-parallèles* mis en évidence dans le cas des basses fréquences.

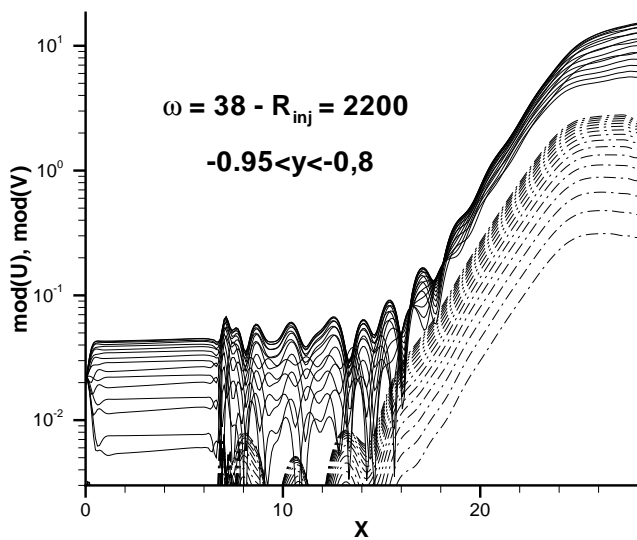


FIG. II.44 – *Fluctuations de vitesse axiale (lignes pleines) et verticale (lignes tiretées) sur des lignes $y = \text{constante}$. Perturbation appliquée sur $\omega = 38$ à $x = 7$, $R_{inj} = 2200$, maillage régulier 300×101 , conditions de non-réflexion en sortie à $x = 30$ et au fond avant.*

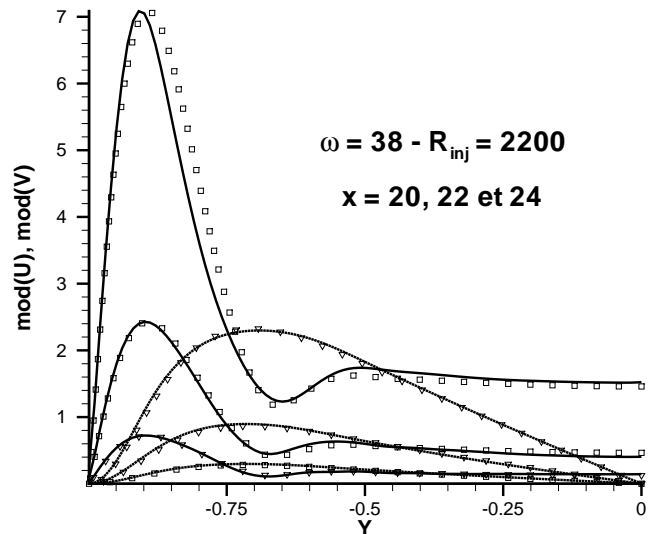


FIG. II.45 – *Fonctions propres de vitesse axiale et radiale.*

Comparaison à la stabilité pour les fréquences plus élevées La pulsation deux fois plus élevée $\omega = 38$ admet selon les calculs de stabilité linéaire une amplification nettement plus forte que celle de $\omega = 20$, voir figure II.5. Les niveaux atteints par les fluctuations sont tels que des phénomènes non-linéaires apparaissent vers le fond arrière. Ceux-ci, qui font l'objet d'une partie du chapitre IV, se manifestent sur la figure II.44, tracée en échelle logarithmique, par la stagnation des amplitudes au-delà de $x = 24$ qui succède à l'amplification entre $x = 15$ et $x = 24$. On constate qu'à la fois sur la partie linéaire et sur la partie non-linéaire les différentes ordonnées entre -0.95 et -0.8 obéissent à la même évolution ce qui est conforme à la modélisation par une fluctuation à variables séparées.

Taux d'accroissement et nombre d'onde sont comparés en figure II.46. Attention, il ne s'agit pas des parties réelle et imaginaire de λ mais bien de α (calculé comme $1/|u|(d|u|/dx)$ et $1/|v|(d|v|/dx)$), il y a donc une multiplication par ix d'écart entre les deux. On voit comme en figure II.44 que les taux d'accroissements s'écartent des valeurs linéaires au delà de $x = 24$. Des oscillations relativement importantes pour les grandeurs calculées à partir de la vitesse axiale ne permettent pas de vérifier de façon convaincante l'écart d'amplification entre fluctuation de vitesse axiale et radiale. Dans la zone

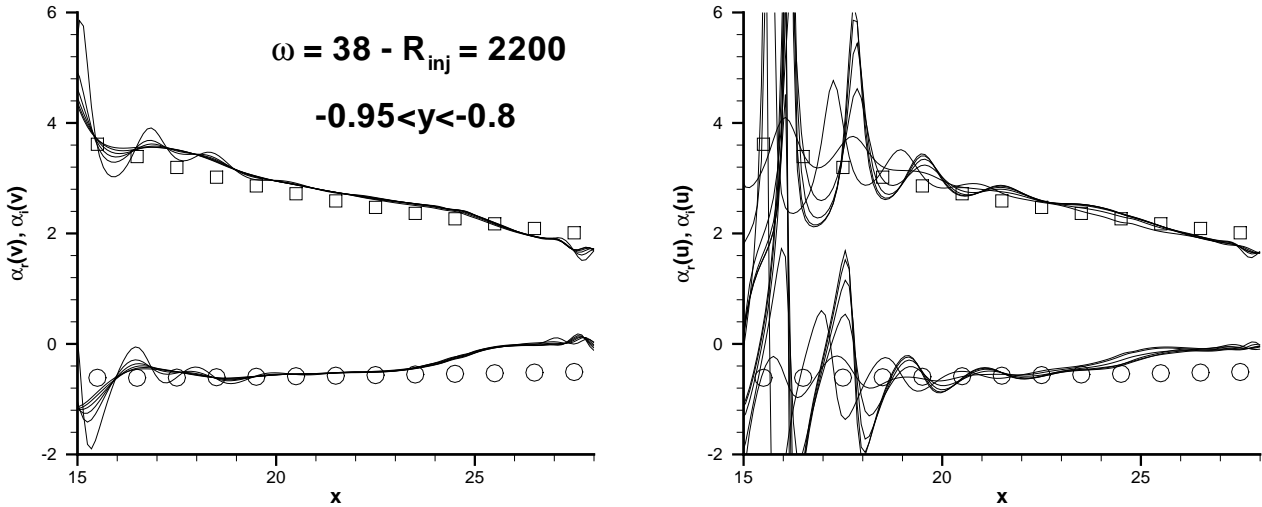


FIG. II.46 – Nombre d'onde (courbes du haut) et opposé du taux d'accroissement (courbes du bas) calculé d'après les fluctuations de vitesse axiale (à gauche) et de vitesse verticale (à droite) sur des lignes $y = \text{constante}$. Perturbation appliquée sur $\omega = 38$ à $x = 7$, $R_{inj} = 2200$, maillage régulier 300×101 , conditions de non-réflexion en sortie à $x = 30$ et au fond avant. Symboles : solution de stabilité sous forme de mode normal.

linéaire (de $x = 16$ à $x = 24$), les prévisions sont bien vérifiées même si SIERRA surévalue légèrement le nombre d'onde par rapport à la stabilité.

Quant aux fonctions propres, la figure II.45 montre qu'elles sont précisément vérifiées en $x = 20$ et $x = 22$. En $x = 24$, un léger décalage sur le maximum de la vitesse axiale est observé. (Attention, la constante arbitraire est choisie indépendamment pour les trois abscisses. Elle a été prise un peu plus faible pour $x = 24$ que si elle avait été déduite des abscisses précédentes par calcul d'amplification.)

II.9 Conclusion sur la stabilité linéaire de l'écoulement de Taylor

Dans ce chapitre, on a montré que l'écoulement de Taylor est sujet à une instabilité de mécanisme non-visqueux lié à la courbure de ses lignes de courant. *Les ondes d'instabilités*, suffisamment loin de l'origine de l'écoulement, *sont convectées par l'écoulement moyen avec une vitesse linéairement croissante avec l'abscisse, leur longueur d'onde est également une fonction linéaire de l'abscisse tandis que leur taux d'accroissement diminue comme l'inverse de celle-ci.*

Bien que le non-parallélisme soit le moteur de cette instabilité, la décomposition en modes normaux, issue des théories de stabilité linéaire parallèles, donne des résultats suffisamment précis pour les applications au problème pratique. Les efforts portant sur la prise en compte des effets non-parallèles, dont les faibles corrections sont confirmées par simulations numériques, apparaissent importants pour vérifier cette précision mais ne sont plus nécessaires une fois cette vérification faite.

Les écoulements de Taylor *plan et axisymétrique* ont des caractéristiques de stabilité *qualitativement identiques*, avec une abscisse critique à partir de laquelle ils deviennent instables pour une gamme de pulsations croissantes, mais *quantitativement très différentes* puisque les fréquences les plus amplifiées sont plus élevées et admettent des taux d'accroissement beaucoup plus forts dans le cas axisymétrique que dans le cas plan.

Les comparaisons aux expériences donnent des résultats disparates. En veine de section rectangulaire, certaines sont tout à fait probantes et valident les calculs mais d'autres se révèlent beaucoup moins convaincantes. En canal cylindrique, elles semblent compatibles avec les prévisions mais la faible étendue de la zone linéaire n'autorise pas de preuve définitive de la justesse de la modélisation de l'instabilité pariétale.

Chapitre III

Vers un écoulement moyen plus réaliste

Dans ce chapitre, on va tenter de remettre en cause certaines des hypothèses simplificatrices de la modélisation proposée précédemment afin d'en tester la validité.

Précisons d'emblée que cet objectif ne concerne que l'instabilité pariétale à l'exclusion des instabilités spécifiques des effets pris en compte. Ainsi, par exemple, lorsqu'on introduit une irrégularité de la géométrie, on étudie son effet sur l'instabilité pariétale et non pas les instabilités de couche cisailée qui y sont associées.

Par ailleurs, on se contente de calculs de stabilité locale, c'est-à-dire que seul l'écoulement moyen à l'abscisse considérée intervient. On ne prétend pas appréhender par là tous les phénomènes supplémentaires potentiels mais il s'agit tout de même d'une information importante. Par contre, le fait qu'une irrégularité géométrique puisse, par exemple, fixer la phase des ondes et avoir ainsi une influence sur le comportement global du moteur n'a aucune chance d'être mis à jour par l'analyse proposée.

Le chapitre se décompose de la façon suivante. On présente d'abord deux configurations géométriques pour lesquelles des simulations des équations de Navier-Stokes axisymétriques compressibles ont été réalisées. Les champs moyens obtenus sont ensuite utilisés pour des analyses de stabilité. Une analyse incompressible du champ compressible est menée en premier lieu puis une analyse compressible. On abandonne ensuite les champs simulés pour revenir dans le cas plan où on étudie la stabilité de l'écoulement de Taylor auquel on ajoute une onde acoustique. Enfin, on rappelle des résultats concernant la lente instationnarité de l'écoulement dans le cas réel, due à la régression de la paroi par combustion du propergol.

III.1 Les calculs en configurations LP3d et LP3e

III.1.1 Présentation

Des campagnes d'essais de moteurs à propergol solide à échelle réduite ont été menées dans le cadre du programme ASSM en faisant varier quantité de paramètres afin de juger de leur influence. Parmi les diverses configurations testées, on retient dans ce chapitre les LP3d et LP3e pour la simple raison qu'on dispose de l'écoulement moyen de ces deux cas. Les deux fichiers, fournis par le département DSNA de l'ONERA, sont le résultat de simulations numériques effectuées pour des géométries de LP3d et LP3e présentées par Lupoglazoff et Vuillot [LV96a] et [LV98].

Le programme utilisé est SIERRA déjà évoqué précédemment. Rappelons qu'il permet la résolution des équations de Navier-Stokes 2D instationnaires au moyen d'un schéma de type "Mac Cormack prédicteur/correcteur explicite à volumes finis" utilisé ici dans sa version axisymétrique multidomaine avec un maillage de plus de 80000 mailles pour le LP3e.

Le LP3d est un moteur à l'échelle 1/15^e du P230 d'Ariane 5 mais sans segmentation de bloc de propergol. A l'allumage, le bloc principal présente une surface cylindrique de 90 mm de diamètre avec

une portion aval tronconique au niveau du chambrage arrière. La tuyère est intégrée avec un diamètre de col de 56.5 mm . La longueur totale prévue pour les simulations numériques est de 1650 mm . Le LP3d a un petit bloc de propergol cylindrique à l'avant mais ce bloc a totalement brûlé à l'instant où l'écoulement moyen est calculé.

La durée de l'essai est de $6,4\text{ s}$ et une instabilité dont la fréquence avoisine le premier mode acoustique longitudinal se produit entre 5 et $5,5\text{ s}$ environ. La fréquence s'écarte par valeur inférieure de la fréquence acoustique puis s'y raccroche brusquement ce qui indique la nature aéroacoustique du phénomène. L'écoulement moyen est calculé à un instant de l'accrochage.

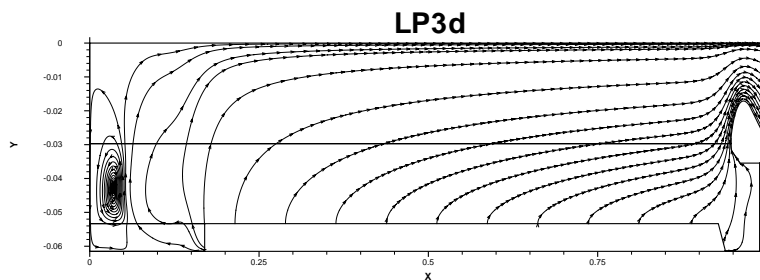


FIG. III.1 – Lignes de courant et domaine de calcul du LP3d.

La figure III.1 représente les lignes de courant de l'écoulement simulé ainsi que les frontières des trois domaines utilisés. Attention, l'échelle verticale est dilatée par rapport à l'échelle horizontale. On conserve dans cette figure l'adimensionnement utilisé dans SIERRA qui prend pour longueur de référence la longueur totale L du montage. Par la suite, on notera explicitement les abscisses adimensionnées de cette façon par x/L .

La figure III.1 permet de bien voir les principales caractéristiques du LP3d : un fond avant libre, puisqu'à l'instant considéré le bloc avant est consumé, une portion aval tronconique au niveau du chambrage arrière et une tuyère intégrée.

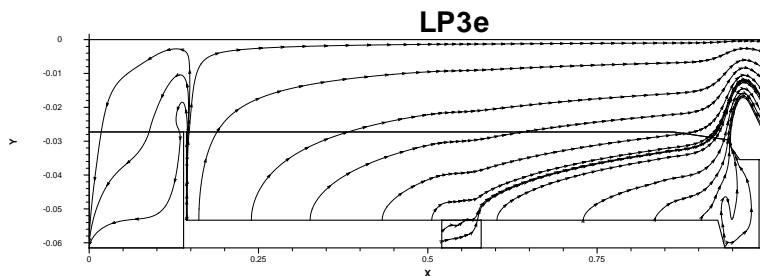


FIG. III.2 – Lignes de courant et domaine de calcul du LP3e.

Le LP3e, lui aussi à l'échelle $1/15^e$ présente une géométrie plus complexe puisqu'à l'instar du P230, son chargement de propergol est segmenté. Mais contrairement au moteur d'Ariane 5, le dernier bloc n'est pas protégé par une protection thermique de face, comme on peut le voir sur la figure III.2. De ce fait, ce bloc débite aussi par l'avant. La simulation est à nouveau réalisée à l'aide de SIERRA avec quatre domaines pour un total de plus de 60000 mailles. L'instant choisi correspond encore à un accrochage d'après les essais en gaz chaud.

L'intérêt de l'utilisation de ces fichiers par rapport à la solution de Taylor réside donc dans la prise en compte dans l'écoulement moyen

- d'une zone non-débitante au fond avant
- d'un intersegment dans le LP3e
- de la longueur finie des moteurs¹

1. par opposition au caractère infini présupposé par la solution auto-semblable de Taylor

– de la compressibilité

Par contre, les calculs supposent toujours un mono-gaz équivalent (*i.e.* un écoulement monophasique) ainsi qu'un écoulement non-réactif.

Enfin, la donnée des grandeurs moyennes telles que les gradients de température permet aussi d'appliquer une analyse de stabilité compressible à l'écoulement.

III.1.2 Traitement des fichiers

Les deux fichiers utilisés pour l'analyse de stabilité ont été fournis par le département DSNA de l'ONERA. Ils contiennent la vitesse axiale U et radiale V , la masse volumique ρ , la pression P , la température T . Pour l'analyse de stabilité, on doit calculer en plus $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial y}$ et éventuellement d'autres termes *a priori* moins importants dans le cas compressible qui sera présenté plus loin.

L'analyse de stabilité étant locale, on cherche seulement à restituer les profils des différentes grandeurs pour une valeur de x fixée.

III.1.3 Utilisation de polynômes de Chebichev

Le traitement des données est le suivant. Les fichiers donnent l'ensemble des points du maillage puis les valeurs des grandeurs physiques U, V, ρ, P, T au centre des cellules définies par ces points. On commence par interpoler (ou extrapoler au bord) les valeurs des grandeurs aux points du maillage.

Ensuite, x étant fixé, on calcule par interpolation linéaire une valeur des grandeurs physiques pour chacune des n_y lignes du fichier initial en y .

On fabrique alors une somme de n_y polynômes de Chebichev prenant chacune des n_y valeurs obtenues aux points lus dans les fichiers. Au final, on ne retient que les n_y coefficients de la décomposition en polynômes de Chebichev qui seront utilisés ensuite par le code de stabilité. Cette dernière étape est décrite en détail dans le rapport technique de de Saint-Victor *et al.* [dSVGC99]

L'intérêt de cette décomposition est de permettre une dérivation facile par rapport à y des grandeurs obtenues et *a priori* plus précise que la dérivation effectuée directement dans l'espace physique. En particulier, on a besoin sur l'axe des premiers termes du développement limité de chacune des grandeurs moyennes. Ces termes s'obtiennent aisément avec cette méthode. De plus, la reconstruction du profil, et surtout de ses dérivées en y , aux points de calcul de stabilité est simple et théoriquement plus précise qu'une interpolation linéaire.

III.2 Effet de la géométrie interne

Les objectifs sont d'abord de prouver la faisabilité d'une analyse de stabilité dans les montages gaz chaud notamment pour étudier la stabilité dans des configurations géométriquement un peu moins idéalisées que précédemment. Un des intérêts est donc d'estimer la représentativité de l'écoulement de Taylor du point de vue de la stabilité et l'effet des irrégularités de la géométrie.

III.2.1 Comparaison à l'écoulement de Taylor

Pour se comparer aux résultats existants pour l'écoulement de Taylor, il faut définir un "cas Taylor équivalent". La manière la plus simple de le définir est de considérer l'écoulement de Taylor obtenu en prenant pour origine l'amont du premier bloc débitant et pour vitesse d'injection la même que celle du fichier numérique. Mais si cette définition est clairement suffisante pour le LP3d qui ne compte qu'un bloc régulier, le cas du LP3e qui présente un intersegment est plus discutable.

On choisit donc plutôt de définir l'écoulement de Taylor équivalent comme l'écoulement de même débit que celui du LP3 à travers la section d'abscisse x ayant les profils sinusoïdaux de Taylor. Par la conservation du débit, cette condition est réalisée en définissant une abscisse de Taylor x_{Taylor} équivalente à l'abscisse x du LP3 de telle sorte que le débit injecté entre le fond avant du LP3 et x soit le même que celui injecté entre le fond avant d'un cylindre débitant partout hors du fond avant

et x_{Taylor} . Comme la vitesse d'injection est supposée uniforme sur les parois débitantes, x_{Taylor} est simplement la somme des longueurs des parois débitantes du LP3 entre le fond avant et x . Pour le LP3e par exemple, si x est au-delà de l'intersegment,

$$x_{Taylor} = x$$

- distance entre fond avant et protection thermique du 1^{er} bloc
- longueur de l'intersegment
- + hauteur du 1^{er} bloc
- + hauteur du 2^e bloc

Par rapport à la définition précédente, l'écart est faible mais bien visible sur une représentation graphique du LP3e après l'intersegment.

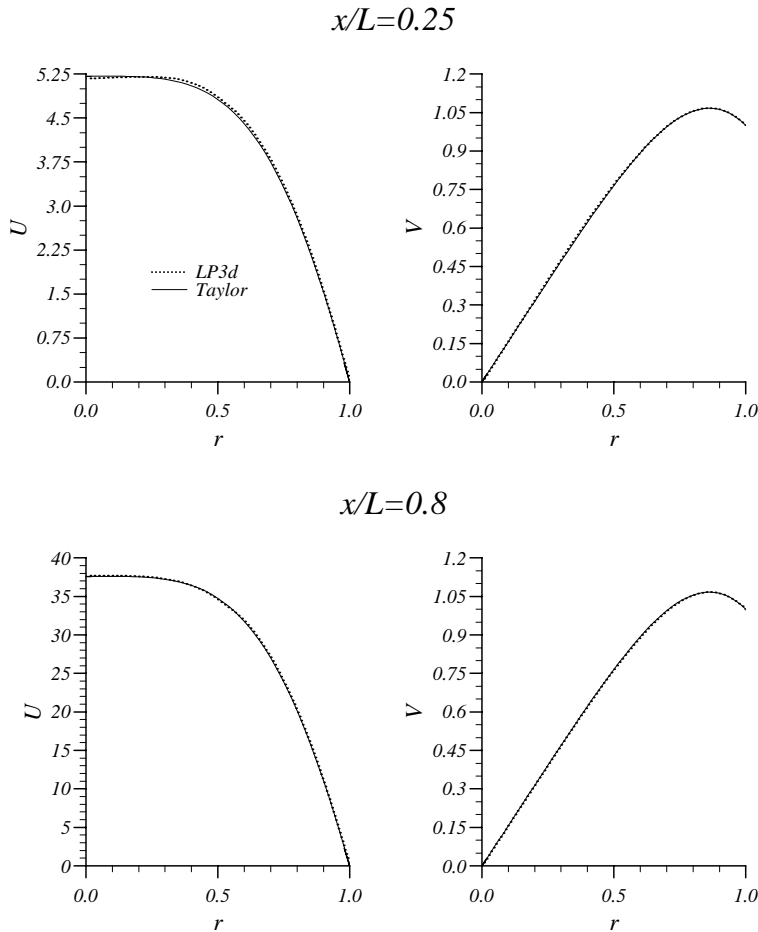


FIG. III.3 – Comparaison des profils de vitesse axiale et radiale du LP3d et du champ de Taylor équivalent à deux abscisses, $x/L = 0.25$ et $x/L = 0.8$. Vitesses adimensionnées par V_{inj} .

Les comparaisons à l'écoulement de Taylor dans le cas du LP3d sont sans surprise : la figure III.3 montre que l'écoulement calculé est proche de celui de Taylor sur une grande longueur. L'effet du fond avant à l'abscisse $x/L = 0.25$ est presque nul et l'effet de la tuyère ne se fait pas encore du tout sentir à $x/L = 0.8$.

On peut se reporter à la figure III.1 pour localiser les abscisses en question sur la représentation complète de l'écoulement.

Les comparaisons à l'écoulement de Taylor dans le cas du LP3e donnent des résultats tout à fait similaires mais on constate de plus à l'abscisse $x/L = 0.6$ située juste en aval de l'intersegment (voir figure III.2), en figure III.4 que l'effet de l'intersegment se résorbe très rapidement et se présente principalement sous la forme d'une survitesse radiale qui ne subsiste pas à l'aval.

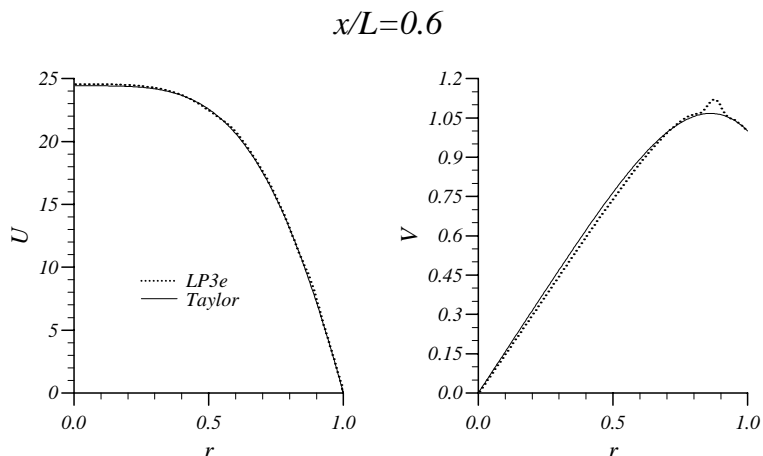


FIG. III.4 – Comparaison des profils de vitesse axiale et radiale du LP3e et du champ de Taylor équivalent juste à l'aval de l'intersegment.

III.2.2 Sens et limites de l'analyse

Au contraire de la section suivante, on applique pour l'instant une analyse incompressible à l'écoulement compressible lu dans les fichiers. Cela signifie qu'on utilise pour la perturbation le système des équations de Navier-Stokes incompressibles (II.9) déjà présenté alors que l'écoulement de base est en fait compressible. Cette approche semble légitime si on suppose que le mécanisme de l'instabilité est incompressible.

Il est malheureusement difficile de découpler les divers effets. En particulier, l'analyse incompressible n'implique pas que seuls les effets liés à la géométrie seront ressentis puisque le caractère compressible influe aussi sur l'écoulement moyen.

Ensuite, comme on l'a déjà signalé, la théorie de stabilité utilisée n'est strictement applicable qu'à des écoulements dits "parallèles", strictement indépendants de la coordonnée axiale et donc, par continuité, tels que $V = 0$. Elle peut être étendue aux écoulements "quasi-parallèles" faiblement dépendants de la coordonnée axiale et donc, par continuité, tels que V soit petit, ceci vis-à-vis d'un petit paramètre à préciser qui définit l'ordre de chaque terme. Le cas de l'écoulement de Taylor est en fait plus compliqué comme on l'a vu précédemment. Pour l'analyse des LP3d et LP3e ces hypothèses sont encore plus fortement mises en défaut dans les zones qui sont justement intéressantes telles que l'intersegment.

Comme aucune justification théorique ne semble asseoir la validité de l'approche, on ne s'acharnera pas à décrire dans le détail l'effet des irrégularités géométriques et il sera nécessaire de garder du recul vis-à-vis des résultats.

Enfin, pour cette même raison et parce que c'est l'instabilité pariétale qui est le seul objet de l'étude, on ne s'efforcera pas d'obtenir des résultats dans l'intersegment ou à l'aval du chambrage arrière : l'instabilité pariétale y est mal calculée et les autres instabilités qui s'y développent sortent du cadre de l'étude.

III.2.3 Analyse incompressible des écoulements LP3e et LP3d

Validation de la procédure

La procédure de décomposition en polynômes de Chebichev est extérieure au code de stabilité axisymétrique déjà validé par ailleurs sur le cas de l'écoulement de Poiseuille. Les coefficients de Chebichev sont lus dans le code numérique et les profils y sont recomposés.

Cette méthode a été testée en remplaçant les valeurs lues dans les fichiers sources par les valeurs de l'écoulement de Taylor (on conserve donc la même grille). Les valeurs propres de l'écoulement de Taylor sont alors retrouvées de façon précise.

Enfin, les résultats donnés dans la suite utilisent 50 polynômes de Chebichev. Leur indépendance vis-à-vis du nombre de polynômes est très bien vérifiée dès qu'on atteint environ 40 polynômes.

III.2.4 Stabilité incompressible du LP3d

Le LP3d ayant une géométrie régulière ne pose pas de difficulté particulière.

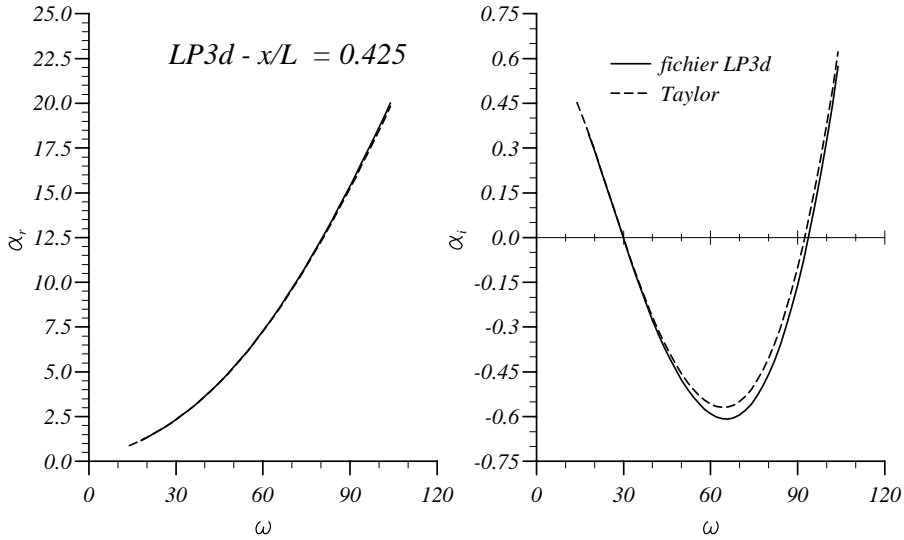


FIG. III.5 – Comparaison des nombres d'onde et opposé du taux d'accroissement spatial en fonction de la pulsation obtenus pour le LP3d et pour l'écoulement de Taylor équivalent. Toutes les grandeurs (hormis x/L) sont adimensionnées à partir de la vitesse d'injection et du rayon fluide.

Les profils étant très proches de ceux de Taylor, une bonne estimation est donnée par la valeur propre du cas Taylor équivalent. Avec cette estimation, la méthode itérative de l'annexe C converge sans difficulté.

Les résultats de stabilité du LP3d sont présentés en figures III.5 et III.6. On y donne les taux d'accroissement ainsi que les nombres d'onde locaux que l'on compare à ceux obtenus à partir de l'écoulement de Taylor.

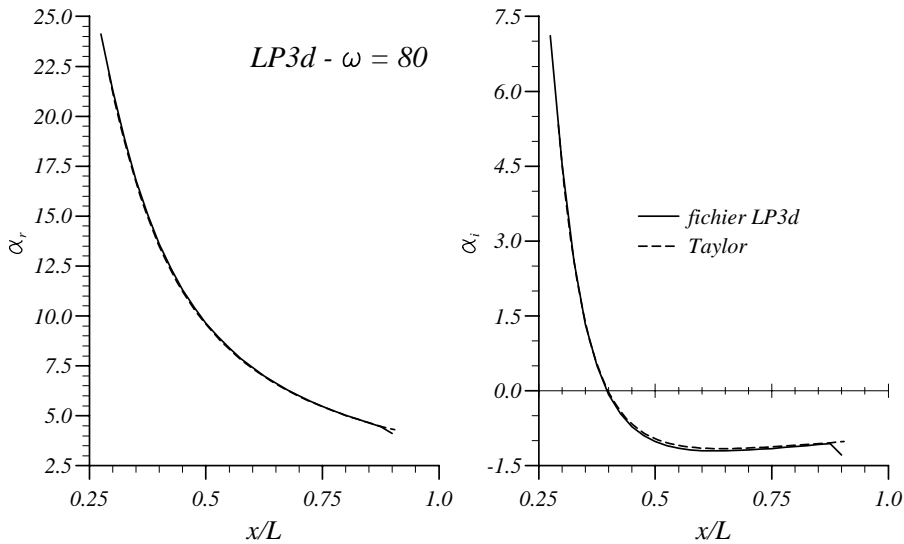


FIG. III.6 – Comparaison des nombre d'onde et opposé du taux d'accroissement spatial en fonction de l'abscisse obtenus pour le LP3d et pour l'écoulement de Taylor équivalent. Toutes les grandeurs (hormis x/L) sont adimensionnées à partir de la vitesse d'injection et du rayon fluide.

Les courbes de la figure III.5, calculées à mi-longueurs, sont sans surprise. Comme le laissait

supposer la similitude des profils de l'écoulement moyen en figure III.3, les paramètres de stabilité sont quasiment inchangés hormis un écart négligeable sur le taux d'accroissement vers $\omega = 70$ (de l'ordre de 5 à 10%).

La figure III.6 donne les nombres d'onde et taux d'accroissement locaux à la pulsation adimensionnelle $\omega = 80$ (pulsation où l'écart est le plus important vers $x/L = 0.425$). Les points importants sont les suivants :

- les différences avec la stabilité de l'écoulement de Taylor sont négligeables dans la plus grande partie du domaine.
- le fond avant étant situé dans la zone stable, son influence ne se fait pas sentir sur la stabilité.
- l'influence de la tuyère remonte jusque vers $x/L = 0.85$ où l'approximation par la solution de Taylor ne semble plus être valable.

Par ailleurs, les fonctions propres sont visuellement identiques à celles de l'écoulement de Taylor.

III.2.5 Stabilité incompressible du LP3e

L'intérêt supplémentaire du LP3e est la présence de l'intersegment. On trace en figures III.7 et

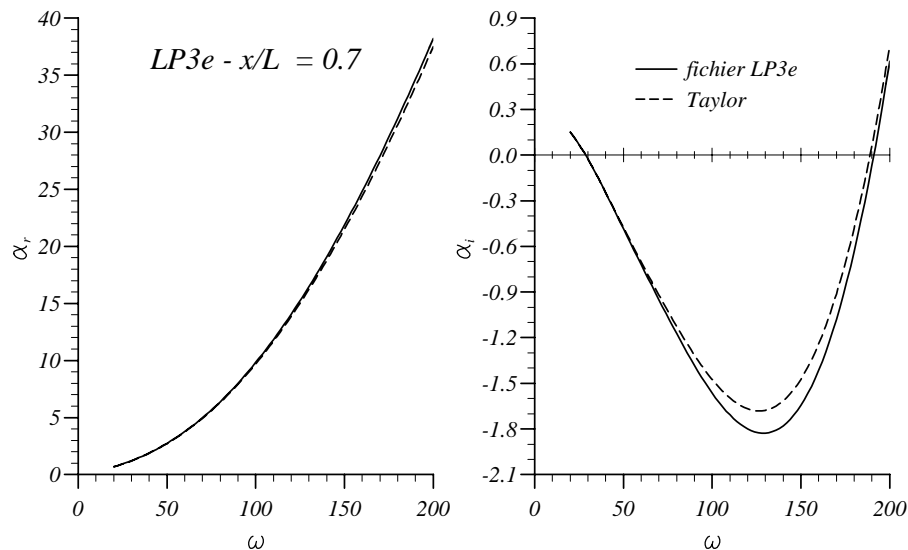


FIG. III.7 – Comparaison des nombre d'onde et opposé du taux d'accroissement spatial en fonction de la pulsation obtenus pour le LP3e et pour l'écoulement de Taylor équivalent. Toutes les grandeurs (hormis x/L) sont adimensionnées à partir de la vitesse d'injection et du rayon fluide.

III.8 le même type de courbes et de comparaisons que pour le LP3d. Les variations de α à abscisse fixée en fonction de la pulsation, représentées en figure III.7, sont très semblables à celles du LP3d avec le même genre d'écart sur le taux d'accroissement pour les fréquences les plus élevées. L'abscisse concernée $x/L = 0.7$ est à l'aval de l'intersegment.

L'évolution de α pour $\omega = 130$ (qui correspond à une fréquence parmi les plus amplifiées à la sortie du LP3 si on intègre les taux d'amplification selon x) vis-à-vis de x/L (la distance au fond avant) est plus instructive (figure III.8) :

- le fond avant ne modifie rien à la stabilité (comme pour le LP3d).
- l'écart avec la stabilité de l'écoulement de Taylor est négligeable sur toute la longueur du premier bloc hormis à l'extrême fin du bloc.
- l'influence de l'intersegment est négligeable.
- l'influence de la tuyère semble se faire sentir jusqu'à $x/L = 0.8$ c'est-à-dire un peu plus tôt que pour le LP3d. L'effet du fond arrière est tantôt atténuateur et tantôt amplificateur. (Attention, aucun calcul n'est mené jusqu'à la tuyère ni même jusqu'à l'aval du chambrage arrière)

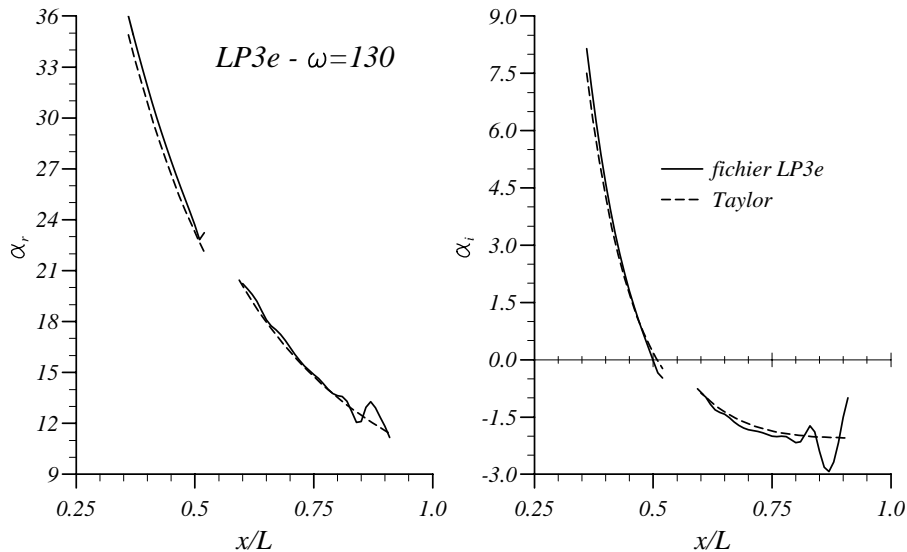


FIG. III.8 – Comparaison des nombre d'onde et opposé du taux d'accroissement spatial en fonction de l'abscisse obtenus pour le LP3e et pour l'écoulement de Taylor équivalent. Toutes les grandeurs (hormis x/L) sont adimensionnées à partir de la vitesse d'injection et du rayon fluide.

III.3 Effet de compressibilité

On peut s'interroger *a priori* sur la nécessité de prendre la compressibilité en compte. Les fortes températures des moteurs à propergol solide, ainsi que la combustion se produisant vers la paroi inciteraient à croire à la présence de forts gradients thermiques et donc d'importants effets de compressibilité.

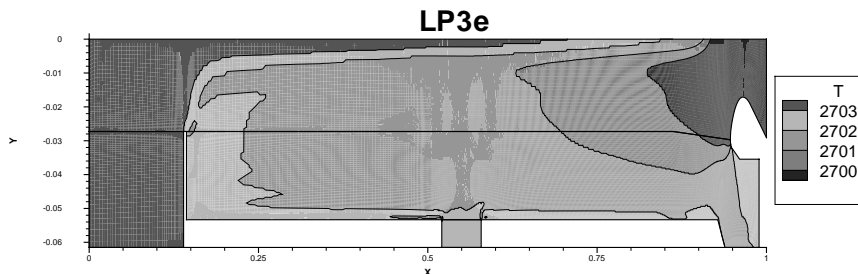


FIG. III.9 – Champ de température dans le LP3e.

La figure III.9 qui indique le champ de température dans le LP3e contredit cette impression et révèle un champ quasiment uniforme de température. Le champ de nombre de Mach (figure III.10) dans le LP3e confirme que les effets de compressibilité sont faibles sur l'écoulement moyen presque jusqu'à l'entrée de la tuyère. Les effets sur la stabilité sont donc *a priori* faibles.

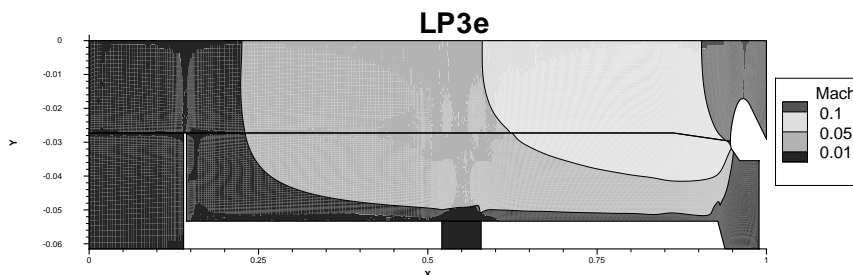


FIG. III.10 – Champ de nombre de Mach dans le LP3e.

Un code de stabilité compressible a néanmoins été écrit pour le vérifier. Les équations et la

méthode mise en œuvre sont présentées en annexe F. Les équations sont désormais compressibles en pleine cohérence avec l'écoulement de base.

Les calculs de stabilité confirment sans surprise l'absence d'influence directe de la compressibilité. On se contente pour l'illustrer de la figure III.11 obtenue dans le LP3e qui reprend la figure III.8 en y ajoutant le résultat par analyse compressible du LP3e.

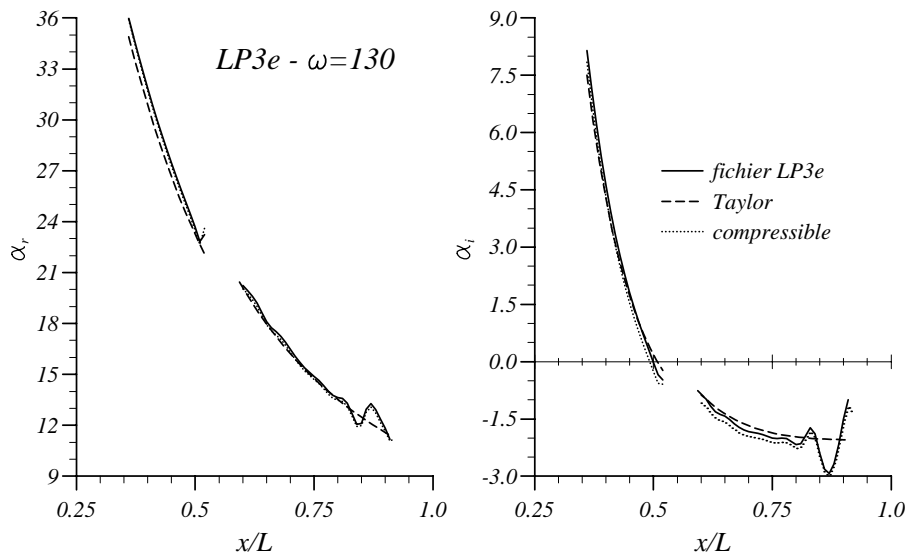


FIG. III.11 – Comparaison des nombre d'onde et opposé du taux d'accroissement spatial en fonction de l'abscisse obtenus pour le LP3e par une analyse compressible et incompressible ainsi que pour l'écoulement de Taylor équivalent.

Les résultats obtenus par analyse compressible et ceux obtenus par analyse incompressible sont superposés. On en conclut que *les effets de compressibilité n'ont pas d'influence directe sur la stabilité* des LP3e et LP3d.

III.4 Effet de l'acoustique sur la stabilité linéaire

Les mesures d'Avalon [AUGB00] dans VECLA indiquent des niveaux de fluctuations acoustiques allant jusqu'à 138 dB acoustiques soit 200 Pa au fond avant dans les cas résonnants. Si on suppose que ces fluctuations sont principalement liées à une onde quasi-plane, voir annexe A, elles entraînent des fluctuations de vitesse axiale de l'ordre de 0.5 m/s. Si on ajoute la couche limite acoustique nécessaire à la satisfaction des conditions aux limites, voir Majdalani [Maj99] et l'annexe A, on obtient des pics de vitesse axiale de l'ordre de 1 m/s vers la paroi, c'est-à-dire de l'ordre de la vitesse d'injection. Il est alors légitime de se demander si ces fluctuations, principalement localisées vers la paroi, de même que l'instabilité pariétale, n'influent pas sur cette dernière.

Les relations entre l'acoustique et la stabilité sont complexes mais en ce qui concerne l'influence de la première sur la seconde, on peut envisager deux types de mécanismes :

- les mécanismes dits "de réceptivité" qui seront rapidement évoqués au dernier chapitre. Ils créent des ondes d'instabilité à partir d'ondes acoustiques de même fréquence par des biais variés permettant la transformation des grandes longueurs d'onde acoustiques en courtes longueurs d'onde de stabilité. Un cas très étudié est celui de la création d'ondes de Tollmien-Schlichting dans une couche limite par le passage d'une onde acoustique sur une rugosité, voir par exemple Crouch [Cro92].
- une influence par le biais de l'écoulement de base dont le profil change au cours du temps sans que l'instabilité doive nécessairement s'accorder sur sa fréquence, voir Von Kerczek et Davis [vKD74]

Le problème de la réceptivité consiste en quelque sorte en la réponse d'un système linéaire à un forçage tandis l'autre ne fait que modifier les coefficients de ce même système linéaire.

L'objet de cette section est uniquement le second. On va chercher à calculer l'instabilité pariétale lorsque l'écoulement moyen ne consiste plus seulement en l'écoulement de Taylor mais fait aussi apparaître une onde acoustique.

III.4.1 Modélisation

On ne s'intéresse qu'aux instabilités dont le mécanisme est incompressible. De ce fait, on va supposer que les perturbations sont régies par les équations de Navier-Stokes linéarisées incompressibles. C'est-à-dire que le caractère compressible de l'écoulement de base nécessaire à la présence des ondes acoustiques n'est pas pris en compte et que l'acoustique n'intervient dans l'analyse que par le biais de la vitesse².

Supposons un écoulement de base (\bar{U}_B, \bar{V}_B) qui se décompose de la façon suivante :

$$(\bar{U}_B, \bar{V}_B) = (U, V, P) + A(u_{ac}, v_{ac})$$

où (U, V, P) sont stationnaires et (u_{ac}, v_{ac}) sont $\frac{2\pi}{\omega_{ac}}$ périodiques.

On ajoute l'hypothèse déjà discutée précédemment que les composantes de l'écoulement de base ne dépendent que faiblement de x et on se place par commodité dans un cas bidimensionnel plan. Le traitement du cas axisymétrique serait d'ailleurs identique.

Il faut remarquer que plusieurs ordres de grandeurs interviennent dans le problème qui ne peuvent pas être supposés indépendants. L'écoulement total est $\vec{U} + A\vec{u}_{ac} + \varepsilon\vec{u}$ où \vec{u} est le champ de vitesse associé à l'instabilité. Si on suppose $|\vec{U}|$ d'ordre de grandeur³ x , $|\vec{u}_{ac}|$ et $|\vec{u}|$ d'ordre⁴ 1, on doit avoir

- $\varepsilon \ll 1$ pour pouvoir linéariser par rapport à la petite perturbation.
- $\varepsilon^2 \ll \varepsilon A$ soit $\varepsilon \ll A$ pour que les termes quadratiques négligés du type $\varepsilon\vec{u}\varepsilon\vec{u}$ soient effectivement négligeables devant les termes en $A\vec{u}_{ac}\varepsilon\vec{u}$ qui sont conservés et portent toute l'information nouvelle par rapport au cas stationnaire.
- $A^2 \ll x$ et $A^2 \ll Ax$ soit $A, A^2 \ll x$ puisque la solution acoustique dont on dispose est linéaire, voir annexe A
- $A^2 \ll \varepsilon$ puisque la solution acoustique dont on dispose est linéaire, voir annexe A et que les termes négligés de ce fait ne doivent pas apparaître à l'ordre de résolution du problème qui est ε
- $M_{inj} \ll \varepsilon$ où M_{inj} est le nombre de Mach d'injection puisque la solution acoustique dont on dispose n'est valable qu'à des termes en $\mathcal{O}(M_{inj})$ près, voir annexe A et que les termes négligés de ce fait ne doivent pas apparaître à l'ordre de résolution du problème qui est ε

Ces conditions se condensent en

$$A^2 \ll \varepsilon \ll A \ll \sqrt{x} \text{ et } M_{inj} \ll \varepsilon \ll 1$$

Ces hypothèses sont très restrictives puisqu'on a vu expérimentalement que A peut devenir de l'ordre de 0.5. Il faudrait alors examiner précisément chaque condition et ne plus se contenter d'ordres de grandeurs. Dans toute la suite, on fera comme si aucun problème ne se posait.

Trois méthodes d'analyse de la stabilité de cet écoulement sont possibles. La première, basée sur la théorie de Floquet, est celle utilisée pour obtenir les résultats qui seront présentés par la suite. La deuxième repose sur un développement asymptotique vis-à-vis du paramètre A qui représente

2. En effet, la pression de l'écoulement de base, et donc celle des ondes acoustiques, n'apparaît pas dans les équations de Navier-Stokes incompressibles linéarisées.

3. La dépendance linéaire de $|\vec{U}|$ par rapport à x empêche de lui donner un ordre indépendant de l'abscisse.

4. En fait ces hypothèses ne peuvent être strictement vraies puisqu'on a vu au sujet du non-parallélisme que les relations d'ordre ne sont pas uniformément valables en y

l'amplitude de l'onde acoustique. Utilisée par Von Kerczek [vK82] dans le cas de l'écoulement de Poiseuille oscillant, elle permet de valider nos résultats. La troisième, employée par Lee et Beddini [LB99] suppose une fréquence acoustique très faible devant celle des ondes de stabilité étudiées.

III.4.2 Analyse basée sur la théorie de Floquet

L'insertion de l'écoulement de base dans les équations de Navier-Stokes linéarisées conduit à un système à coefficients indépendants (ou en fait faiblement dépendants) de x dont on peut chercher des solutions sous la forme d'une fonction de t et y et d'un terme $\exp(i\alpha x)$ soit pour chaque quantité q :

$$q(x, y, t) = \tilde{q}(y, t) \exp(i\alpha x)$$

De plus, les coefficients du système sont $2\pi/\omega_{ac}$ -périodiques. La théorie de Floquet, présentée au paragraphe suivant, suggère de chercher la fonction de t et y sous la forme suivante

$$\tilde{q}(y, t) = \hat{q}(y, t) \exp(-i\omega t)$$

où $\hat{q}(y, t)$ est $2\pi/\omega_{ac}$ -périodique et ω est un nombre complexe⁵. Par décomposition de $\hat{q}(y, t)$ en série de Fourier, on aboutit à la forme de mode utilisée numériquement dans la suite

$$q(x, y, t) = \sum_{m=-N}^N q_m(y) \exp\{i[\alpha x - (\omega - m\omega_{ac})t]\} \quad (\text{III.1})$$

On injecte cette forme de mode dans le système des équations de Navier-Stokes linéarisées incompressibles. On décompose la vitesse acoustique sous la forme

$$(u_{ac}, v_{ac}) = (u_{ac}^+, v_{ac}^+) e^{i\omega_{ac} t} + (u_{ac}^-, v_{ac}^-) e^{-i\omega_{ac} t}$$

Comme les vitesses acoustiques sont réelles, on a

$$(u_{ac}^+, v_{ac}^+) = (\overline{u_{ac}^-}, \overline{v_{ac}^-})$$

On sépare alors les équations concernant les différents coefficients des termes en $\exp\{i[\alpha x - (\omega - m\omega_{ac})t]\}$ et on obtient pour $-N \leq m \leq N$

$$\left\{ \begin{array}{l} i\alpha u_m + \frac{dv_m}{dy} = 0 \\ -i(\omega - m\omega_{ac})u_m + \frac{\partial U}{\partial x} u_m + \frac{\partial U}{\partial y} v_m + i\alpha U u_m + V \frac{du_m}{dy} + i\alpha p_m - \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{d^2 u_m}{dy^2} - \alpha^2 u_m \right) \\ \quad = - \left(\frac{\partial u_{ac}^+}{\partial x} u_{m-1} + \frac{\partial u_{ac}^-}{\partial x} u_{m+1} + \frac{\partial u_{ac}^+}{\partial y} v_{m-1} + \frac{\partial u_{ac}^-}{\partial y} v_{m+1} \right. \\ \quad \quad \left. + i\alpha u_{ac}^+ u_{m-1} + i\alpha u_{ac}^- u_{m+1} + v_{ac}^+ \frac{\partial u_{m-1}}{\partial y} + v_{ac}^- \frac{\partial u_{m+1}}{\partial y} \right) \\ -i(\omega - m\omega_{ac})v_m + \frac{\partial V}{\partial x} u_m + \frac{\partial V}{\partial y} v_m + i\alpha U v_m + V \frac{dv_m}{dy} + \frac{dp_m}{dy} - \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{d^2 v_m}{dy^2} - \alpha^2 v_m \right) \\ \quad = - \left(\frac{\partial v_{ac}^+}{\partial x} u_{m-1} + \frac{\partial v_{ac}^-}{\partial x} u_{m+1} + \frac{\partial v_{ac}^+}{\partial y} v_{m-1} + \frac{\partial v_{ac}^-}{\partial y} v_{m+1} \right. \\ \quad \quad \left. + i\alpha u_{ac}^+ v_{m-1} + i\alpha u_{ac}^- v_{m+1} - i\alpha v_{ac}^+ u_{m-1} - i\alpha v_{ac}^- u_{m+1} \right) \end{array} \right. \quad (\text{III.2})$$

Ce système peut aisément se récrire sous la forme discrétisée par le schéma de Malik [MCH82], voir annexe B

$$\frac{dZ}{dy} = AZ \text{ avec } Z = [Z_{-N} \dots Z_0 \dots Z_N] \text{ où } Z_i = [u_i \quad \frac{du_i}{dy} \quad v_i \quad p_i]$$

5. en fait, ceci suppose une hypothèse supplémentaire explicitée au paragraphe suivant.

où les u_i, v_i, p_i sont les valeurs des grandeurs continues aux points du maillage. La matrice A a alors la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_{-N} & A_{-N}^{c,+} & 0 & 0 & 0 \\ A_{-N+1}^{c,-} & A_{-N+1} & A_{-N+1}^{c,+} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_{N-1}^{c,-} & A_{N-1} & A_{N-1}^{c,+} \\ 0 & 0 & 0 & A_N^{c,-} & A_N \end{pmatrix}$$

Chaque matrice A_j de la diagonale est la matrice associée au problème sans acoustique de valeur propre temporelle $\omega - j\omega_{ac}$. Seules les matrices de couplage $A_j^{c,-}$ et $A_j^{c,+}$ sur- et sous-diagonales font apparaître la vitesse acoustique, de plus elles en dépendent linéairement. De ce fait,

$$A_j^{c,+} = \overline{A_j^{c,-}}$$

et ces matrices dépendent linéairement de l'amplitude acoustique.

La théorie de Floquet

Dans ce qui précède, l'outil essentiel et original (par rapport à l'instabilité d'un écoulement stationnaire) est la théorie de Floquet. Il paraît utile de la rappeler brièvement. On en reprend ici l'énoncé proposé par Casalis [Cas90], lui-même basé sur le livre de Coddington et Levinson [CN65].

L'espace vectoriel de travail E est \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n suivant les cas. Dans cet espace E , on considère le système différentiel homogène :

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad (\text{III.3})$$

où $X' = dX/dt$ et où $A(t)$ est une matrice (n, n) , à coefficients dans E , fonction de la variable t . Rappelons que l'ensemble des solutions de (III.3) est un espace vectoriel de dimension n , on définit alors la matrice fondamentale de (III.3), Φ dont les colonnes sont les coordonnées, dans la base de référence de E , des n vecteurs indépendants solutions de (III.3). La théorie de Floquet s'applique au cas où la matrice A est une fonction périodique. Suivant la nature de l'espace E , on a alors les deux théorèmes suivants.

1. Si A est complexe :

Si la fonction complexe A est T -périodique, alors, il existe une matrice P (complexe) T -périodique et une matrice R (complexe) à coefficients constants telles que l'on ait :

$$\Phi(t) = P(t)e^{tR} \quad (\text{III.4})$$

2. Si A est réelle, il y a deux possibilités :

(a) *On considère ce cas comme un cas particulier du précédent et on écrit (III.4) avec bien sûr $P(t)$ et R complexes.*

(b) *Si la fonction réelle A est T -périodique, alors il existe une matrice P (réelle) $2T$ -périodique et une matrice R (réelle) à coefficients constants telles que l'on ait :*

$$\Phi(t) = P(t)e^{tR} \quad (\text{III.5})$$

La différence essentielle entre les deux cas est que dans le second, le fait de se restreindre à \mathbb{R} nécessite, dans le cas général, un doublement de la période pour la fonction $P(t)$. On trouvera une démonstration très claire de ces deux théorèmes dans le livre référencé [CN65].

Remarque Si la matrice R est diagonale, $R = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, alors la matrice $\exp(tR)$ s'écrit simplement :

$$e^{tR} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Les nombres λ_i sont dits coefficients de Floquet. Comme $\Phi(t) = P(t) \exp(tR)$, chaque colonne de Φ , $X(t)$, peut donc s'écrire sous la forme :

$$X(t) = e^{\delta t} f(t) \quad (\text{III.6})$$

De même, si la matrice R est diagonalisable, on peut faire un changement de base et chercher une base de solutions sous la forme (III.6). En revanche, si R n'est pas diagonalisable, on ne peut rien dire.

III.4.3 Développement asymptotique en amplitude

Procédure

Une autre méthode d'analyse est proposée par Von Kerczek [vK82] qui s'intéresse à la stabilité de l'écoulement de Poiseuille oscillant. Elle utilise aussi la théorie de Floquet mais dans un cadre moins général puisque le développement asymptotique entraîne des limitations en amplitude. Par contre, elle donne directement certains résultats d'interprétation physique claire et autorise une meilleure compréhension de l'approche précédente.

Von Kerczek montre d'abord que pour un écoulement strictement parallèle l'équation d'Orr-Sommerfeld dépendante du temps s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}\phi - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \mathcal{L}^2 \phi + i\alpha(U\mathcal{L}\phi - \frac{d^2 U}{dy^2} \phi) = -i\alpha A(u_{ac}\mathcal{L}\phi - \frac{\partial^2 u_{ac}}{\partial y^2} \phi) \quad (\text{III.7})$$

avec $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2$ où $\phi(y, t) \exp i\alpha x$ est la fluctuation de la fonction de courant. Les conditions aux limites pour l'écoulement confiné entre deux parois situées en $y = \pm 1$ sont

$$\phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \text{ en } y = \pm 1$$

Von Kerczek procède alors à des développements asymptotiques vis-à-vis de l'amplitude A . Si on suppose $A \ll 1$, l'équation à l'ordre 0 n'est autre que l'équation d'Orr-Sommerfeld dont la solution est de la forme

$$\phi(y, t) = \tilde{\phi}_0(y) \exp(-i\omega_0 t)$$

Von Kerczek pose donc un développement du type

$$\phi(y, t) = \tilde{\phi}(y, t) \exp(-i\omega t)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \tilde{\phi}(y, t) &= \tilde{\phi}_0(y, t) + A\tilde{\phi}_1(y, t) + A^2\tilde{\phi}_2(y, t) + \dots \\ \omega &= \omega_0 + A\omega_1 + A^2\omega_2 + \dots \end{cases}$$

où $\phi(y, t)$ et les termes de son développement sont supposés $2\pi/\omega_{ac}$ -périodiques grâce à la théorie de Floquet.

De la séparation des ordres découle alors le système d'équations

$$\begin{cases} L_{OS}\tilde{\phi}_0 &= 0 \\ L_{OS}\tilde{\phi}_1 &= (M_{ac}^{(1)} e^{i\omega_{ac}t} + M_{ac}^{(-1)} e^{-i\omega_{ac}t})\tilde{\phi}_0 - \omega_1\tilde{\phi}_0 \\ L_{OS}\tilde{\phi}_2 &= (M_{ac}^{(1)} e^{i\omega_{ac}t} + M_{ac}^{(-1)} e^{-i\omega_{ac}t})\tilde{\phi}_1 - \omega_1\tilde{\phi}_1 - \omega_2\tilde{\phi}_0 \\ L_{OS}\tilde{\phi}_j &= (M_{ac}^{(1)} e^{i\omega_{ac}t} + M_{ac}^{(-1)} e^{-i\omega_{ac}t})\tilde{\phi}_{j-1} - \sum_{m=0}^{j-1} \omega_{j-m}\tilde{\phi}_m \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

où L_{OS} est l'opérateur d'Orr-Sommerfeld, $(M_{ac}^{(1)}e^{i\omega_{ac}t} + M_{ac}^{(-1)}e^{-i\omega_{ac}t})$ est l'opérateur associé au membre de droite de (III.7) décomposé de telle sorte que $M_{ac}^{(1)}$ et $M_{ac}^{(-1)}$ ne dépendent pas du temps.

Le produit scalaire suivant est introduit

$$(f|g) = \frac{\omega_{ac}}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_{ac}}} \left[\int_{-1}^1 f(y, t) \bar{g}(y, t) dy \right] dt$$

où \bar{g} dénote le complexe conjugué de g .

Le système peut être résolu successivement à partir de l'ordre 0. Supposons le problème déterminé jusqu'à l'ordre $j - 1$ c'est-à-dire supposons ω_k et $\tilde{\phi}_k$ connus pour $k \leq j - 1$. L'opérateur L_{OS} étant rendu non-inversible par la résolution de l'ordre 0, la condition de solvabilité

$$\left(\left[(M_{ac}^{(1)}e^{i\omega_{ac}t} + M_{ac}^{(-1)}e^{-i\omega_{ac}t})\tilde{\phi}_{j-1} - \sum_{m=0}^{j-1} \omega_{j-m}\tilde{\phi}_m \right] \middle| \phi^* \right) = 0$$

(où ϕ^* est la fonction propre de l'adjoint de l'opérateur L_{OS} associée à la valeur propre $\bar{\omega}_0$, conjuguée de ω_0) doit être imposée pour rendre soluble le problème associé à chaque ordre supérieur. La seule inconnue de cette condition étant la correction ω_j d'ordre le plus élevé, celle-ci est alors déterminée de manière unique. Les $\tilde{\phi}_j$ sont ensuite obtenus en résolvant chaque équation après décomposition en série de Fourier. Ils sont déterminés de manière unique si on choisit d'éliminer les composantes arbitraires selon $\tilde{\phi}_0$ qui apparaissent à chaque ordre.

Grâce au choix de la base des vecteurs propres de l'ordre 0 (qui représente la partie la plus longue du calcul), Von Kerczek établit des formules simples pour le calcul des coefficients de Fourier des $\tilde{\phi}_j$, rendant ainsi sa procédure aisément implémentable. Notons que sa méthode lui permet de travailler avec des systèmes $2N - 1$ fois plus petits que ceux utilisés dans la précédente.

Conséquences du développement

Un des premiers intérêts du développement est de montrer que la correction de l'exposant de Floquet est en fait une fonction paire de A c'est-à-dire

$$\omega = \omega_0 + A^2\omega_2 + A^4\omega_4 + \dots$$

La première correction est donc quadratique. La nullité de ω_1 s'obtient immédiatement à partir de la condition de solvabilité à l'ordre 1 en se rappelant que le produit scalaire est intégré sur une période de $2\pi/\omega_{ac}$. La nullité des autres termes impairs se vérifie simplement elle-aussi mais requiert un peu plus d'attention.

La procédure permet aussi de préciser le nombre de coefficients de Fourier nécessaires à la résolution complète jusqu'à l'ordre de précision souhaité. Ainsi, avec une série de Fourier de la forme $\sum_{k=-N}^N \exp(ik\omega_{ac}t)$, la valeur $N = 1$ suffit au calcul de ω_2 et plus généralement $N = 2j + 1$ suffit au calcul de ω_{2j} . Cette propriété se retrouve bien sûr dans le cas de la première méthode et donne une idée *a priori* de la troncature à imposer dans la forme de mode (III.1).

Ensuite, le développement asymptotique donne un élément de réponse à la question suivante : la comparaison visuelle des fonctions propres de vitesse axiale de l'instabilité sans acoustique et de la couche limite acoustique indique un maximum d'amplitude en proche paroi dans les deux cas. Il est donc tentant de se demander si la coïncidence des deux maxima pour des jeux de paramètres bien choisis ne correspond pas à un optimum d'efficacité de l'excitation acoustique sur la stabilité.

La méthode de Von Kerczek montre qu'une telle recherche est vaine puisque la correction principale due à l'acoustique et contenue dans le coefficient ω_2 fait intervenir un produit du profil de vitesse acoustique, de la fonction propre adjointe et de la fonction $\tilde{\phi}_1$ dont il semble illusoire de vouloir déterminer un maximum *a priori* (c'est-à-dire en faisant l'économie de la résolution du premier ordre

du système (III.8)).

Enfin, les résultats publiés par Von Kerczek [vK82] ont servi à valider l'implémentation numérique de la méthode directe présentée précédemment. La dépendance paire de la correction de l'exposant de Floquet vis-à-vis de A et la valeur du coefficient ω_2 ont été vérifiées ainsi que le fait que la troncature $N = 1$ suffise à le retrouver.

Le seul inconvénient de cette méthode est la limitation en amplitude inhérente au développement asymptotique qui suppose la vitesse fluctuante générée par l'onde acoustique faible devant la vitesse caractéristique de l'écoulement moyen. Or, dans le cas de l'écoulement de Taylor, la question se pose de la définition d'une vitesse caractéristique parmi les deux possibles : la vitesse d'injection et la vitesse axiale. Laquelle des deux est pertinente ? La question s'est déjà posée au sujet des effets non-parallèles et se posera encore plus loin. Si la vitesse axiale est préférée, l'approche de Von Kerczek est justifiée, sinon, le "petit" paramètre peut devenir non-négligeable. Plutôt qu'employer une approche éventuellement non-valable vers la paroi, le choix s'est porté sur la méthode directe présentée en premier.

III.4.4 L'approche à haute fréquence

La dernière possibilité consiste en une "méthode d'échelles multiples à l'ordre 0" pour reprendre l'expression pompeuse de Lee et Beddini [LB99]. Si on ne s'intéresse qu'à des instabilités de fréquence élevée devant celle de l'acoustique, on peut faire à chaque instant l'hypothèse que l'écoulement est "figé", du moins du point de vue de l'onde d'instabilité. Lee et Beddini superposent donc à chaque instant la vitesse acoustique à l'écoulement de Taylor et résolvent le problème comme si l'écoulement était stationnaire. Il s'agit effectivement de l'étape d'ordre 0 de la procédure des échelles multiples ; Lee et Beddini s'en contentent. En intégrant les résultats obtenus sur une période acoustique, ils retrouvent l'équivalent du coefficient de Floquet des approches précédentes, c'est-à-dire

$$\omega = \int_t^{t + \frac{2\pi}{\omega_{ac}}} \omega_{inst}(\tau) d\tau$$

où ω est le coefficient de Floquet et $\omega_{inst}(\tau)$ la valeur propre associée à l'écoulement $\vec{U}_{Taylor} + \vec{u}_{ac}(\tau)$.

Cette méthode a l'avantage de fournir des indications sur l'évolution des paramètres d'oscillations à l'intérieur d'un cycle acoustique auxquelles la théorie de Floquet ne peut pas donner accès. Or Merkli et Thomann [MT75] rapportent que l'écoulement purement oscillant dans un tube présente des périodes de "bouffées turbulentes" suivies de relaminarisations durant le même cycle mais qu'en moyenne l'écoulement est stable comme le prédit la théorie de Floquet de Von Kerczek et Davis [vKD74]. Pour expliquer le comportement à l'intérieur d'un cycle, il faut faire appel au découplage des échelles de temps caractéristiques des instabilités et du forçage acoustique pour analyser l'écoulement instantané figé.

Dans ce sens, l'analyse de Lee et Beddini [LB99] est légitime puisqu'ils s'intéressent à la transition à la turbulence vers la paroi induite par l'acoustique. Néanmoins, les auteurs présentent leurs résultats même pour des fréquences d'instabilité inférieures à la fréquence acoustique et vont jusqu'à évoquer de possibles résonances sur la foi de ces calculs. Aucune justification claire n'étant fournie à l'outre-passement des hypothèses de départ, il semble que les courbes proposées doivent être interprétées avec soin et que seules certaines parties soient *a priori* valides.

Un des intérêts du travail de Lee et Beddini [LB99] est de présenter les uniques résultats, à notre connaissance, concernant l'effet de l'acoustique sur la stabilité de l'écoulement de Taylor. Leur objectif est de comprendre des résultats d'essais en gaz chaud publiés par Blomshield *et al.* [BBS97]. Trois tirs ont été effectués à des pressions différentes autour de 35, 70 et 140 bars au cours desquels ont été envoyées des impulsions d'amplitude contrôlée. Les mesures de pressions au fond avant montrent que

- les impulsions induisent une réponse sur le premier mode acoustique longitudinal atténuée conformément aux prédictions des modèles standards, voir annexe J, ou au contraire amplifiée

selon le niveau de la pression moyenne. L'évolution temporelle des amplitudes est exponentielle jusqu'à ce qu'elles saturent ou ne soient plus mesurables.

- des modes acoustiques tangentiels se déclenchent de façon spontanée selon Blomshield *et al.* [BBS97] et atteignent des niveaux très élevés pour le tir de plus haute pression. L'évolution temporelle des amplitudes est du même type que celle des modes longitudinaux.

Une des raisons invoquées pour expliquer l'instabilité observée est un comportement non-linéaire de la réponse du propergol qui présenterait un seuil dépendant de la pression. Pour une amplitude acoustique supérieure à ce seuil, la réponse deviendrait élevée, voir par exemple les travaux de Baum et Levine [BL82]. Le mécanisme entraînant cet effet de seuil proviendrait de la diffusion thermique causée par une transition à la turbulence en proche paroi due à la couche limite acoustique, voir Beddini [Bed98]. Aussi l'enjeu pour Lee et Beddini [LB99] est-il de déterminer les conditions dans lesquelles la couche limite acoustique peut induire la turbulence.

Leur principal résultat est de montrer l'existence d'une gamme de nombres d'onde élevés (supérieurs à 30) qui réagissent violemment à la présence de l'acoustique et atteignent des amplifications temporelles ω_i de plusieurs centaines pour l'amplitude la plus élevée à comparer avec des amplifications usuelles de l'instabilité pariétale d'ordre unité!

Cependant, se plaçant dans les conditions testées par Blomshield *et al.* [BBS97] qui provoquent des impulsions d'une amplitude Π de 2% à 5% de la pression de la chambre, Lee et Beddini imposent un champ acoustique dont l'amplitude $A = \Pi/(\gamma M_{inj})$ va de 10 à 25. Cette amplitude implique que le maximum de vitesse acoustique selon y , situé près de la paroi en combustion, atteint 20 à 50 fois la vitesse d'injection. Dans la référence [LB99] en 1999, Lee et Beddini constatent, pour les nombres d'onde élevés, un comportement symétrique par rapport à l'abscisse située au milieu du moteur et en déduisent la faible dépendance du résultat vis-à-vis de l'écoulement de Taylor. Ils se rendent compte en 2000 dans la référence [LB00] que cette indépendance provient de ce que l'écoulement en proche paroi est entièrement dominé par l'acoustique pour les niveaux élevés d'amplitude employés et poursuivent leur analyse en négligeant l'écoulement de Taylor pour ne conserver qu'un écoulement purement oscillant représentatif de la couche limite acoustique en proche paroi. Ils obtiennent finalement l'effet souhaité de la pression principalement par des considérations de dimensionnement. Leur conclusion est que les modes qu'ils considèrent sont déstabilisés par la croissance de la pression ce qui va effectivement dans le sens des observations de Blomshield si on admet le rôle des modes considérés sur la turbulence, le rôle de la turbulence sur la réponse du propergol et le rôle de la réponse sur la stabilité globale.

La problématique de Lee et Beddini est intéressante mais elle est foncièrement différente de la nôtre qui consiste à étudier l'effet de l'acoustique sur la stabilité du mode présenté au chapitre précédent dans des gammes de fréquences du même ordre que les modes de cavité.

III.4.5 Effet de l'acoustique sur l'instabilité pariétale

Pour modéliser l'acoustique dans l'écoulement de Taylor, on va utiliser la solution acoustique proposée par Majdalani [Maj99]. Le lecteur est invité à consulter l'annexe A pour un résumé de l'obtention de la solution et la représentation des profils de vitesse axiale résultants. On rappelle que ceux-ci sont constitués de deux parties superposées

- une onde plane acoustique, donc compressible et irrotationnelle qui n'est pas strictement valable puisque l'écoulement n'est pas uniforme et qui ne satisfait pas la condition de nullité de la vitesse axiale à la paroi. L'erreur commise à l'intérieur du domaine fluide est cependant de l'ordre du nombre de Mach qui est effectivement très faible dans toutes les applications.
- une couche limite acoustique rotationnelle et supposée incompressible qui compense l'onde plane à la paroi pour satisfaire les conditions aux limites.

Une première remarque importante est que l'onde plane ne joue aucun rôle sur la stabilité et que tout l'effet de l'acoustique sur l'instabilité pariétale est contenu dans la couche limite acoustique.

On peut s'en convaincre en dérivant l'équation sur la fonction de courant à partir du système incompressible linéarisé. En séparant les contributions de l'écoulement stationnaire et de l'écoulement

acoustique, on trouve

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{OS}^{ac}\psi &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x} + V\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}}\Delta\right)(\Delta\psi) + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) \\ &+ \left(u_{ac}\frac{\partial}{\partial x} + v_{ac}\frac{\partial}{\partial y} - \left(\frac{\partial u_{ac}}{\partial x} + \frac{\partial v_{ac}}{\partial y}\right)\right)(\Delta\psi) \\ &+ \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_{ac}}{\partial x} - \frac{\partial u_{ac}}{\partial y}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_{ac}}{\partial x} - \frac{\partial u_{ac}}{\partial y}\right) = 0\end{aligned}$$

Si on ne considère que la partie irrotationnelle de la solution acoustique, les deux derniers termes en $(\frac{\partial v_{ac}}{\partial x} - \frac{\partial u_{ac}}{\partial y})$ sont nuls. Puisqu'il s'agit d'une onde plane, $v_{ac} = 0$, et si on suppose la longueur d'onde acoustique grande devant celle des instabilités, on peut négliger $\frac{\partial u_{ac}}{\partial x}$. Les termes des coefficients instationnaires se réduisent alors à $(u_{ac}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial u_{ac}}{\partial x})(\Delta\psi)$ puis à $(i\alpha u_{ac} - \frac{\partial u_{ac}}{\partial x})(\Delta\psi)$ si on ajoute l'hypothèse que les perturbations peuvent être représentées sous forme de mode normal.

Il est alors possible de trouver une fonction $f(t)$ ne dépendant que du temps telle que

$$\mathcal{L}_{OS}(f(t)\psi) = f\mathcal{L}_{OS}^{ac}(\psi)$$

où \mathcal{L}_{OS} est l'opérateur d'Orr-Sommerfeld généralisé

$$\mathcal{L}_{OS}\psi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x} + V\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}}\Delta\right)(\Delta\psi) + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

Il suffit pour cela que

$$\frac{df}{dt} = i\alpha u_{ac}f$$

soit

$$f(t) = \exp\left(\frac{\alpha A \sin(k_mx)}{\omega_{ac}} \cos(\omega_{ac}t)\right) \text{ puisque } u_{ac} = A \sin(k_mx) \sin(\omega_{ac}t)$$

Bien qu'un terme en $\sin(k_mx)$ soit présent dans l'expression de $f(t)$ on ne considère pas que f dépende de x puisqu'il ne s'agit que d'une dépendance faible ou supposée telle lors des précédentes hypothèses visant à négliger $\frac{\partial u_{ac}}{\partial x}$ et à utiliser la forme de mode normal.

Comme par ailleurs ψ vérifie, entre autres, les conditions aux limites homogènes du cas avec écoulement de base stationnaire, $f(t)\psi$ les vérifie également. Le problème avec une onde plane acoustique

$$\mathcal{L}_{OS}^{ac}(\psi) = 0 + \text{conditions aux limites homogènes}$$

peut se récrire comme le problème

$$\mathcal{L}_{OS}(f(t)\psi) = 0 + \text{conditions aux limites homogènes}$$

où \mathcal{L}_{OS} est l'opérateur d'Orr-Sommerfeld généralisé habituel. On en déduit que les modes propres du problème obtenu en ajoutant une onde plane acoustique à autre écoulement de base sont les mêmes que ceux du problème initial.

Ce résultat n'est strictement valable que pour des écoulements parallèles avec une acoustique de longueur d'onde infinie mais il est très bien vérifié numériquement dans le cas de l'écoulement de Taylor avec les modes de cavité de Majdalani.

On ne s'intéresse donc plus désormais qu'à l'instabilité de l'écoulement de Taylor en présence de la couche limite acoustique de Majdalani. Au vu de la forme de mode (III.1), il est clair que dans le cas idéal où N est infini, les indices des modes peuvent être renumérotés sans conséquence sur le résultat. Ceci indique que la résolution du spectre de l'opérateur linéaire associé au système (III.2) doit fournir des séries de valeurs $(\omega - m\omega_{ac})$ avec $-N \leq m \leq N$, espacées d'un nombre entier de pulsations acoustiques, qui reflètent seulement l'existence de multiples coefficients de Fourier attachés à un unique mode.

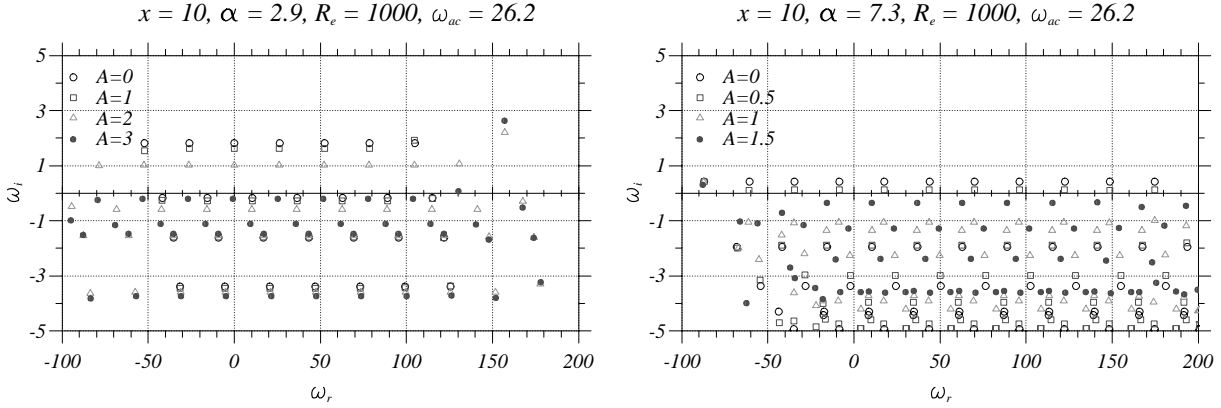


FIG. III.12 – Valeurs propres temporelles du problème (III.2) avec un écoulement de base composé de l'écoulement de Taylor et de la solution acoustique de Majdalani.

La figure III.12 montre un tel spectre dans le plan (ω_r, ω_i) à la position $x = 10$ pour deux valeurs différentes du nombre d'onde $\alpha = 2.9$ et $\alpha = 7.3$ et pour plusieurs amplitudes de l'onde acoustique.

On constate d'abord que conformément à notre attente, on trouve des séries de valeurs de même ω_i et de ω_r séparés d'un nombre entier de pulsations acoustiques. Cependant, en raison de la troncature à une valeur N finie, la renumérotation des modes dans l'expression (III.1) n'est pas strictement possible, on observe donc un effet de troncature visible sur les derniers coefficients de Fourier pour les amplitudes les plus élevées qui se traduit par une valeur légèrement différente du ω_i . Cet effet est plus important, pour une troncature fixée, lorsque l'amplitude croît ce qui confirme les indications tirées de la procédure asymptotique de Von Kerczek : pour calculer précisément des amplitudes croissantes, un ordre plus élevé du développement est nécessaire, or le nombre de coefficients de Fourier nécessaires au calcul du coefficient en A^{2n} est $2n + 1$. Ainsi, sur la figure III.12, la troncature va de $N = 3$ pour les plus faibles amplitudes à $N = 5$ pour les plus élevées.

Ensuite, on observe une nette différence de comportement vis-à-vis de A entre les deux parties de la figure correspondant à $\alpha = 2.9$ et $\alpha = 7.3$. Alors qu'à faible nombre d'onde, l'effet de l'acoustique est peu important et va dans le même sens pour les différentes valeurs propres visibles sur la figure III.12, cet effet est nettement plus important à fort nombre d'onde (on s'arrête à l'amplitude $A = 1.5$ au lieu de 3) et l'ordre des valeurs propres classées selon la valeur ω_i est changé. Ainsi, on trace en figure III.13 l'évolution des trois premières valeurs propres du cas sans acoustique lorsque l'amplitude A est augmentée. Le seul mode instable à $A = 0$ est celui correspondant à l'instabilité pariétale. On constate, pour les paramètres choisis, qu'il est stabilisé jusqu'à devenir stable ($\omega_i < 0$) alors que les deux autres modes voient leur ω_i croître régulièrement avec A entraînant une permutation de l'ordre des valeurs propres tandis que la fréquence du mode central (associé à l'indice $m = 0$) est très peu affectée par l'évolution de l'amplitude.

D'après la figure III.13, le spectre de l'opérateur de stabilité en présence d'acoustique peut devenir complexe lorsque l'amplitude acoustique croît et nécessite une analyse détaillée afin de déterminer la nature physique des valeurs propres obtenues. Néanmoins, contrairement à Lee et Beddini [LB99], on ne s'intéresse pas à des déclenchements d'instabilité par des impulsions de forte amplitude mais à des cas de résonance d'amplitude bien moins élevée (de l'ordre de $A = 0.5$ dans VECLA), par ailleurs, l'objectif de l'étude n'est pas de découvrir de nouveaux modes spécifiques de la couche limite acoustique mais d'évaluer l'effet de celle-ci sur l'instabilité déjà mise en évidence. Par la suite, on ne va donc travailler qu'à des amplitudes modérées où l'écoulement n'est pas dominé par la couche limite mais reste principalement proche de celui de Taylor et on ne s'occupera que du mode correspondant à l'instabilité pariétale.

Commençons par observer en figure III.14 la modification de l'allure de la courbe neutre en présence d'acoustique d'amplitude variable. Les deux parties de la figure représentent la pulsation et le nombre d'onde à la courbe neutre en fonction de x .

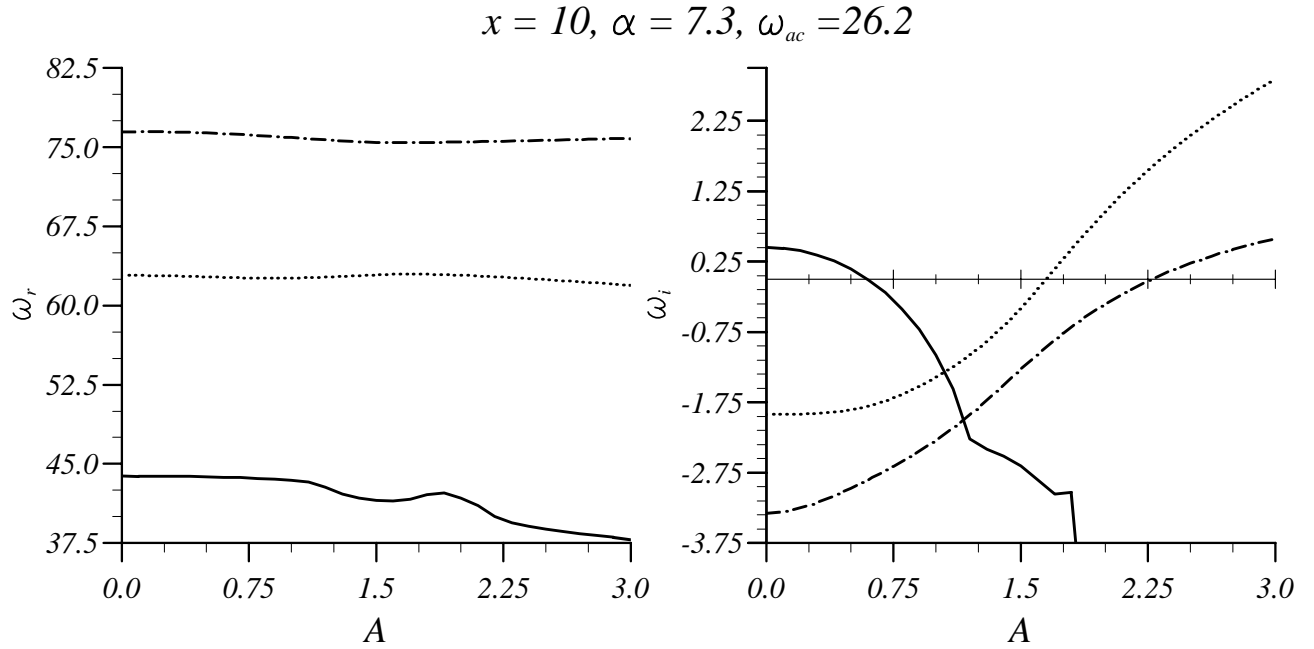


FIG. III.13 – Evolution avec l'amplitude acoustique des trois valeurs propres les moins stables de l'écoulement de Taylor. Le mode usuel est instable en $A = 0$.

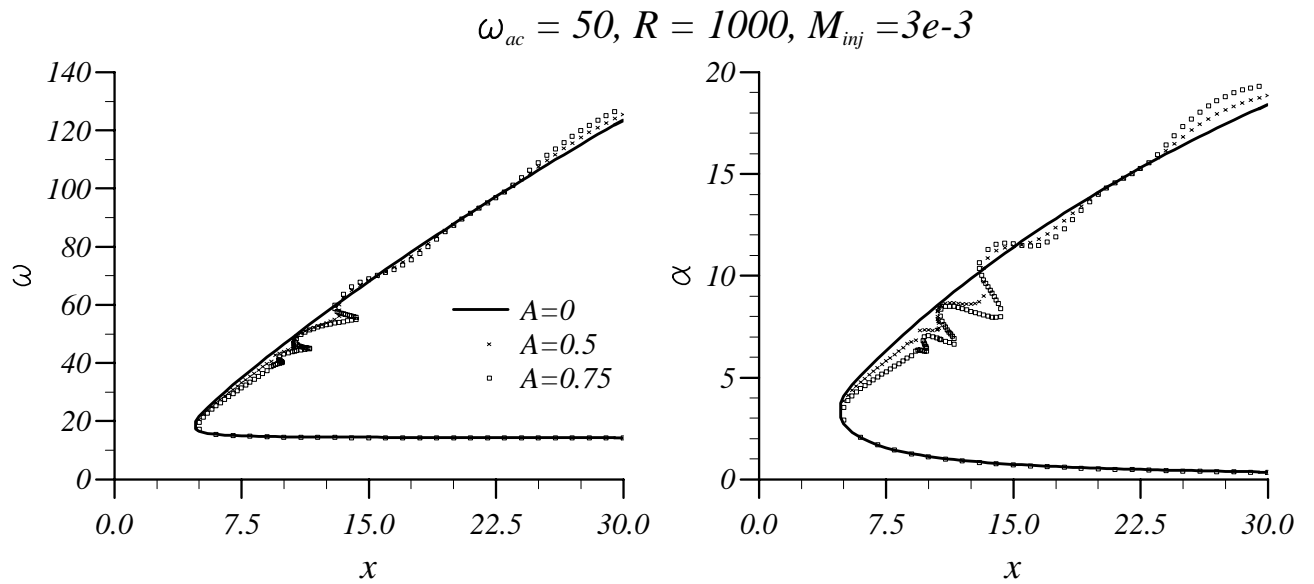


FIG. III.14 – Evolution de la courbe neutre en présence d'acoustique vis-à-vis de l'amplitude.

L'amplitude A de l'onde plane donnant naissance à la couche limite acoustique est fixée et l'amplitude de la couche limite acoustique s'en déduit par la solution de Majdalani. Cela signifie qu'on n'introduit pas de normalisation du profil acoustique à chaque x pour la simple raison que ce profil n'a pas une simple dépendance sinusoidale en x . Une normalisation n'aurait donc pas d'intérêt. Il faut aussi noter qu'en raison de cette dépendance non-triviale, il n'existe pas à proprement parler de nœud de vitesse, en ce qui concerne la couche limite, au sens où la vitesse acoustique considérée dans les équations ne s'annule pas strictement; néanmoins, vers les nœuds de l'onde plane (situés en $x = n\lambda/2$ avec $n \in \mathbb{N}$ et λ la longueur d'onde acoustique adimensionnelle) l'amplitude de la couche limite reste faible.

En grandeurs dimensionnelles, la longueur d'onde acoustique λ^* est reliée à la période T^* par la vitesse du son a_s^* comme $\lambda^* = a_s^* T^*$. En récrivant ces grandeurs avec l'adimensionnement usuel pour l'écoulement de Taylor basé sur la demi-hauteur h et la vitesse d'injection V_{inj} , on trouve la longueur d'onde adimensionnelle

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega_{ac} M_{inj}}$$

où M_{inj} est le nombre de Mach d'injection, les "nœuds" de vitesse acoustique se situent donc vers

$$x_{nœud} = \frac{n\pi}{\omega_{ac} M_{inj}}$$

Dans le cas de la figure III.14, $\lambda \approx 42$, puisque l'acoustique se comporte principalement comme une onde plane ayant un nœud de vitesse en $x = 0$, l'abscisse $x \approx 21$ correspond également à un nœud de vitesse. Il est donc naturel que la courbe neutre soit pratiquement inchangée à cette position.

La branche basse de la courbe neutre ne semble pas non plus affectée par l'acoustique ce qui rejoint les observations effectuées sur les nombres d'onde faibles d'après la figure III.12.

Sur la branche haute, l'écoulement est tantôt stabilisé tantôt déstabilisé. Ce comportement semble qualitativement indépendant de l'amplitude comme on pouvait s'y attendre puisqu'il est *a priori* directement relié au signe et à la valeur du coefficient ω_2 de la méthode de Von Kerczek, par contre l'effet quantitatif de l'amplitude est visuellement très net. On peut remarquer une zone d'oscillation rapide de la courbe pour des pulsations allant de 40 à 60 c'est-à-dire autour de la fréquence acoustique.

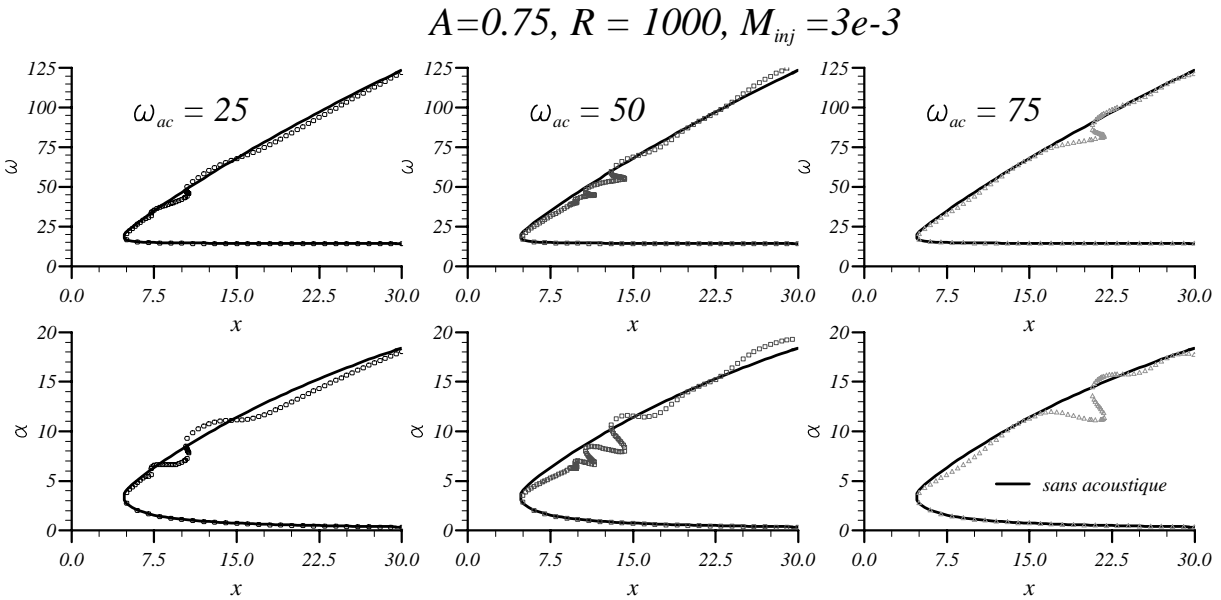


FIG. III.15 – Evolution de la courbe neutre en présence d'acoustique vis-à-vis de la fréquence.

Cette remarque n'est pas vraiment confirmée par la figure III.15 qui représente les pulsations et nombres d'onde sur la courbe neutre pour différentes fréquences acoustiques. La gamme de fréquences où la correction apportée à la courbe neutre évolue rapidement se déplace dans le même sens que la

fréquence acoustique mais semble plutôt plus élevée en particulier à $\omega_{ac} = 25$. Ceci paraît contraire à une impression intuitive qui laisserait supposer une possibilité de résonance lorsque la fréquence acoustique coïncide avec la fréquence propre de l'instabilité pariétale.

Pour le reste, on retrouve sur la figure III.15 l'invariance de la branche basse de la courbe neutre ainsi que l'inefficacité de l'acoustique vers les nœuds de vitesses situés vers $x \approx 14$ et $x \approx 28$ pour $\omega_{ac} = 75$ mais au-delà de $x = 30$ pour $\omega_{ac} = 25$.

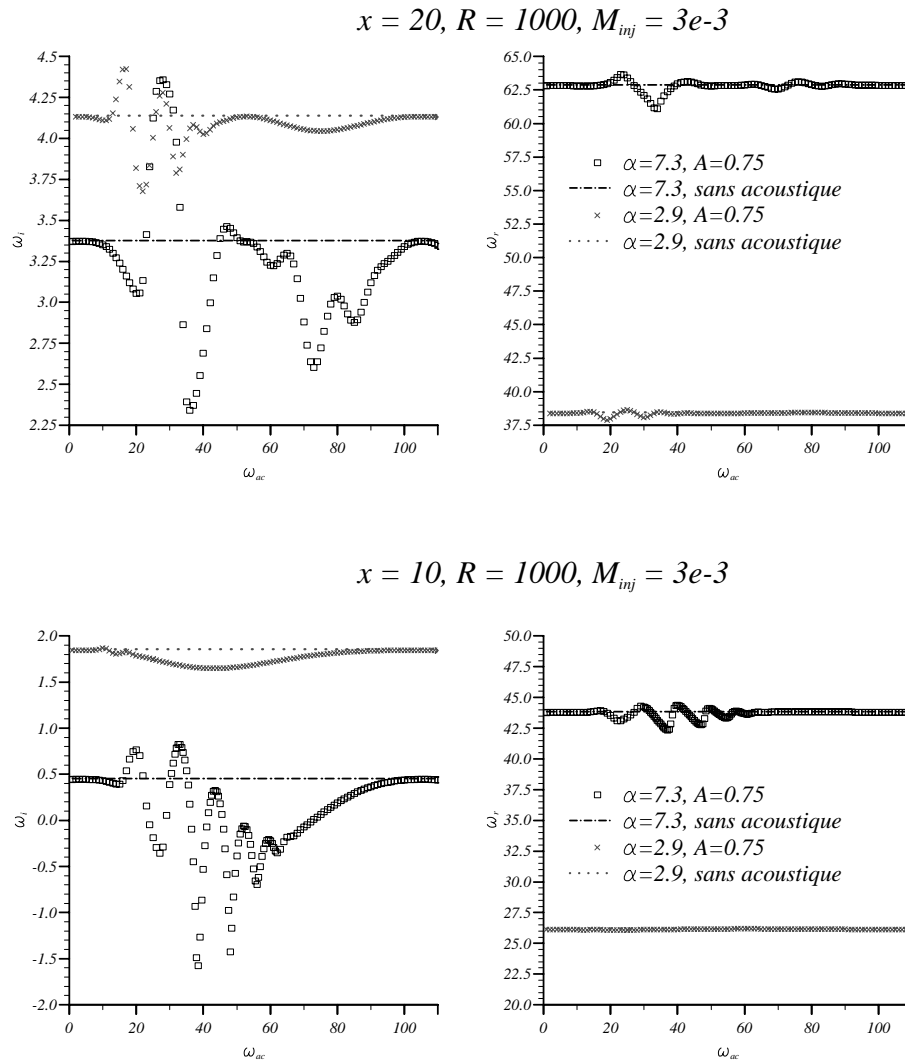


FIG. III.16 – Evolution de l'instabilité pariétale vis-à-vis de la fréquence d'une onde acoustique superposée à l'écoulement de Taylor.

Afin de vérifier l'effet de la coïncidence des fréquences propre et acoustique, on trace en figure III.16 l'évolution des parties réelle et imaginaire de ω vis-à-vis de la fréquence acoustique pour les mêmes nombres d'onde élevé $\alpha = 7.3$ et faible $\alpha = 2.9$ que précédemment et à deux positions en x à savoir 10 et 20. Les lignes donnent la valeur sans acoustique qui est donc indépendante de ω_{ac} tandis que les symboles sont obtenus pour $A = 0.75$.

Il peut sembler curieux de faire varier la fréquence acoustique puisque celle-ci ne peut prendre que des valeurs discrètes définies par la longueur du canal. Néanmoins, la condition d'adhérence au fond avant suffit à définir entièrement la solution de Majdalani pour des valeurs données de ω_{ac} , M_{inj} et \mathcal{R}_{inj} , c'est-à-dire que la longueur n'intervient pas dans la solution, elle permet seulement de savoir si la couche limite acoustique envisagée peut exister ou non sur un montage réel.

Aux deux limites $\omega_{ac} \rightarrow 0$ et $\omega_{ac} \rightarrow \infty$ l'instabilité pariétale n'est pas influencée par l'acoustique. En effet, à la limite $\omega_{ac} \rightarrow 0$ la couche limite acoustique dégénère en onde plane dont on a vu qu'elle

n'avait pas d'influence. A la limite $\omega_{ac} \rightarrow \infty$, la couche limite acoustique oscille et s'atténue de plus en plus rapidement selon y à partir de la paroi et finit par ne plus influencer la stabilité.

La limite $\omega_{ac} \rightarrow 0$ est visible sur la figure III.16, par contre l'annulation de la correction vers $\omega_{ac} = 104$ provient de la présence d'un nœud de vitesse à la fois en $x = 10$ et en $x = 20$ pour cette pulsation. De même, un nœud de vitesse se trouve en $\omega_{ac} = 52$ pour $x = 20$.

On retrouve un effet plus faible sur le nombre d'onde le plus bas surtout à $x = 10$. La correction par rapport au cas sans acoustique varie rapidement à la fois en signe et en amplitude quand ω_{ac} varie et ne conserve pas non plus son signe entre $x = 10$ et $x = 20$. On rappelle que le développement asymptotique a montré qu'aucun critère simple ne permet *a priori* de connaître la correction par simple comparaison des profils de la couche limite acoustique et de l'instabilité pariétale. On constate en outre sur la figure III.16 que la coïncidence des fréquences propre et acoustique ne se distingue par aucun effet particulier.

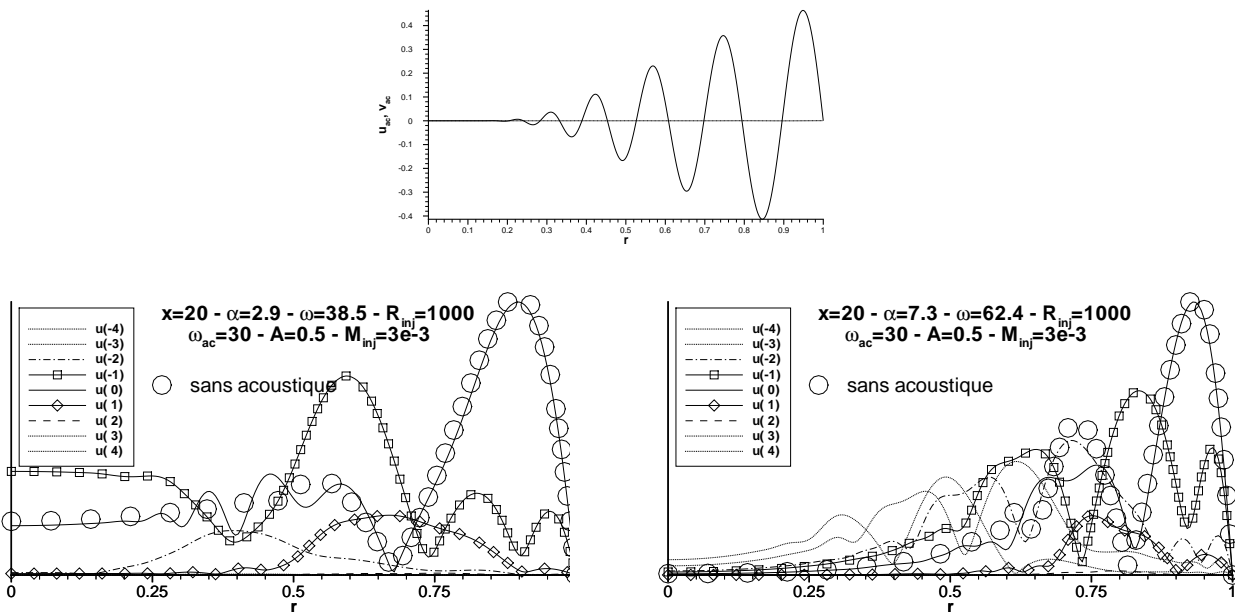


FIG. III.17 – En bas : fonctions propres de vitesse axiale associées aux termes de -4 à 4 de la série de Fourier comparées au cas sans acoustique pour un nombre d'onde faible à gauche et fort à droite. En haut : profil axial et radial de couche limite acoustique pour les mêmes paramètres.

On observe enfin au bas de la figure III.17 l'allure des modules des fonctions propres de vitesse axiale pour les deux nombres d'ondes précédemment utilisés et pour les termes de $m = -4$ à 4 du développement en série de Fourier. Tous les autres paramètres sont identiques. La correction sur le mode central $m = 0$ est faible sauf pour le deuxième pic à $\alpha = 7.3$. Les termes d'indices de valeur absolue croissante diminuent très vite pour $\alpha = 2.9$ ce qui justifie la troncature, mais ils restent importants en milieu de veine pour $\alpha = 7.3$ bien qu'une troncature plus élevée n'ait plus d'effet sur la valeur propre ω_i . La partie supérieure de la figure III.17 est le profil de couche limite acoustique pour les paramètres utilisés. La vitesse verticale acoustique est très faible devant la vitesse axiale, c'est pourquoi elle semble nulle sur la figure.

III.4.6 Conclusion sur la prise en compte de l'acoustique dans l'écoulement de base

Finalement, on a montré que seule la partie rotationnelle de la solution dite "acoustique" a une influence sur la stabilité, c'est-à-dire seule la couche limite acoustique à l'exclusion de la partie en onde plane. A faible amplitude, la dépendance en A est quadratique donc très faible. L'effet stabilisant ou déstabilisant de l'acoustique sur l'instabilité pariétale varie en fonction du nombre d'onde et de

l'abscisse en plus de tous les paramètres de la couche limite; il est donc peu probable que ce phénomène produise une forte sélection de la fréquence dans le système global.

Aucun effet de résonance entre stabilité et acoustique n'a été constaté. Enfin, un examen rapide et non-systématique des valeurs de la vitesse de groupe $\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}$ a été mené en vue de chercher d'éventuelles instabilités absolues mais aucune annulation n'a été obtenue dans la zone instable pour des amplitudes acoustiques réalistes.

Rappelons à nouveau que la prise en compte de l'acoustique ne s'est ici faite que par le biais de l'écoulement de base et que les effets de réceptivité sont *a priori* plus susceptibles d'avoir de l'importance.

III.5 Les effets instationnaires lents

Parmi les différences existant entre les simulations en gaz froid et les moteurs à propergol solide, on n'a pas jusqu'ici fait mention de la lente instationnarité due à la régression de la paroi de propergol sous l'effet de la combustion.

Dans tout ce qui précède, on choisit un instant pour adimensionner avec les paramètres rayon et vitesse d'injection de cet instant et on analyse ensuite l'écoulement de Taylor (stationnaire) en supposant que rien ne dépend plus du temps.

On peut bien sûr s'interroger sur la légitimité de cette démarche et sur les corrections à apporter. Cette étude a fait l'objet du DEA de l'auteur, cité en référence [Gri98], dont on rapporte seulement ici les principales conclusions.

Trois effets instationnaires peuvent être examinés séparément. On note \dot{h} la dérivée temporelle du rayon fluide c'est-à-dire la vitesse de régression de la paroi.

- **Effet sur l'écoulement de base** : L'écoulement de Taylor utilisé jusqu'à présent est stationnaire. Il n'est valable que pour des conditions aux limites fixes, ce qui n'est pas le cas ici puisque les limites latérales s'éloignent du fait de la régression de la paroi due à la combustion du propergol. La première correction consiste donc à trouver l'écoulement réel qui dépend du temps.

Cette correction n'est cependant utile que si la particule fluide entraînée par l'écoulement de Taylor ressent la variation de la géométrie c'est-à-dire si le temps caractéristique d'évolution de la géométrie (h/\dot{h}) n'est pas trop grand devant le temps caractéristique de convection lié à l'écoulement de Taylor (h/V_{inj})

- **Effet de la vitesse finie de l'onde** : Le calcul de l'amplitude de l'onde par un facteur n repose sur l'intégration en x des taux d'amplification à un instant donné. Cependant, sous l'effet des instationnarités, cette amplitude ne peut être calculée qu'en suivant l'onde dans sa convection et en intégrant les nombres d'onde locaux et *instantanés*.

Cet effet ne peut cependant se faire sentir que si le temps caractéristique d'évolution de la géométrie (h/\dot{h}) n'est pas trop grand devant le temps de convection de l'onde d'instabilité ($h/(\partial\omega/\partial\alpha)$).

- **Effet sur la forme de perturbation** : Les formes employées supposent toutes une dépendance sinusoïdale en temps de la perturbation. Cette dépendance est légitime tant que les coefficients des systèmes (II.1) et (II.2) sont stationnaires mais elle ne l'est plus dès que l'écoulement devient instationnaire.

Néanmoins, la prise en compte de l'instationnarité dans l'analyse n'est *a priori* utile que si le temps caractéristique d'évolution de la géométrie (h/\dot{h}) n'est pas trop grand devant le temps caractéristique de l'onde ($1/\omega$)

Les approximations employées jusqu'à présent pour négliger toute évolution temporelle de l'écoulement sont indépendantes les unes des autres et reposent sur des hypothèses distinctes. On peut les résumer par les trois relations :

$$\frac{\dot{h}}{v_{inj}} \ll 1 \quad (\text{écoulement de base stationnaire})$$

$$\frac{\dot{h}}{\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}} \ll 1 \quad (\text{vitesse de propagation infinie})$$

$$\frac{\dot{h}}{h\omega} \ll 1 \quad (\text{analyse de stabilité stationnaire})$$

Dans les cas pratiques, ces trois conditions sont bien réalisées ce qui justifie les hypothèses effectuées jusqu'ici. La prise en compte des effets correspondants dans des cas extrêmes où ils ne seraient plus négligeables est effectuée dans la référence [Gri98].

Il faut cependant insister sur la portée réelle de ces résultats. En effet, on a seulement montré que le calcul de l'instabilité pariétale effectué à l'aide de l'hypothèse de stationnarité de l'écoulement de base est valable, cela ne signifie en aucune façon que les instationnarités lentes n'ont pas d'effet. Ceci serait d'ailleurs faux puisque les glissements et les sauts de fréquence apparaissant dans les essais en gaz chaud soulignent le rôle des évolutions lentes. Une étude numérique sur le sujet par Mombelli et Guéry est proposée en référence [MG98].

III.6 Conclusion sur la représentativité de l'écoulement de Taylor

Il ressort de l'étude des diverses corrections sur l'écoulement de base que *l'instabilité pariétale est un phénomène robuste*, peu sensible aux différences entre l'écoulement réel et l'écoulement de Taylor équivalent. Ceci confirme la représentativité de l'écoulement de Taylor pour la prévision de l'instabilité pariétale et rassure quant à la possibilité d'appliquer directement les résultats déjà obtenus aux écoulements réels en gaz chaud. Il faut signaler au passage que la définition de l'écoulement de Taylor équivalent indique que le paramètre important (pour l'instabilité pariétale) n'est pas le rapport d'aspect impliquant la longueur totale du moteur mais celui impliquant la longueur de propergol en combustion (aussi appelée *longueur sur poudre* par les motoristes).

Reste tout de même un effet potentiellement important et non-pris en compte à savoir le caractère diphasique de l'écoulement. En effet, des simulations numériques de Lupoglazoff *et al.* [LVDF00] montrent que les particules d'aluminium en combustion qui s'échappent de la paroi du propergol interagissent avec l'instabilité pariétale. Leur combustion se déroulant principalement à une faible distance de la paroi, elle est généralement considérée comme sans effet majeur sur les instabilités issues de la protection thermique qui se développent à l'intérieur de l'écoulement. Puisqu'au contraire l'instabilité pariétale se développe à la paroi elle est plus susceptible de ressentir la combustion distribuée de particules d'aluminium. Les résultats de Lupoglazoff *et al.* [LVDF00] indiquent un effet important sur les niveaux de l'oscillation globale, soit stabilisant, soit déstabilisant selon le diamètre des particules d'aluminium.

Chapitre IV

Effets non-linéaires

On s'est jusqu'ici concentré sur la stabilité linéaire de l'écoulement de Taylor, c'est-à-dire sur l'évolution de perturbations d'amplitude infinitésimale. Néanmoins, il est évident qu'en raison de l'amplification spatiale, cette amplitude va devenir non-négligeable lorsque l'abscisse croît et l'hypothèse de linéarité va tomber. L'objet de ce chapitre est de décrire le comportement ultérieur de l'instabilité pariétale, c'est-à-dire lorsqu'elle n'obéit plus aux équations de la stabilité linéaire.

Des pistes de recherche sont données par les observations effectuées dans VECLA. En effet, les figures II.18 et II.19 indiquent que des phénomènes non-linéaires se produisent dès $x \sim 19$ ce que confirment les visualisations I.14 où les structures observées entre $x \sim 20$ et $x = 30$ sont le signe d'amplitudes non-négligeables. Le développement encore ultérieur est sans surprise puisque l'écoulement transitionne vers la turbulence pour les expériences menées avec $h = 10 \text{ mm}$ où la sortie est à l'abscisse $x = 60$. La question qui se pose est celle de l'interprétation des visualisations. En effet, les structures observées sont soit bidimensionnelles, auquel cas elles ne sont que l'évolution non-linéaire des instabilités pariétales, soit tridimensionnelles, auquel cas elles proviennent d'une nouvelle instabilité de l'écoulement dite *instabilité secondaire*, étape vers la transition à la turbulence.

Selon l'interprétation choisie, des théories différentes doivent être mises en œuvre. On va commencer par l'hypothèse selon laquelle les structures sont tridimensionnelles et faire appel à la théorie de la stabilité secondaire. Ensuite, l'hypothèse où le problème reste bidimensionnel va être examinée. La stabilité non-linéaire est complexe avec des scénarios multiples mais les théories susceptibles de la prévoir dans le cas de l'écoulement de Taylor sont peu nombreuses. On a d'abord envisagé d'employer les méthodes PSE non-linéaires à cette fin, voir Herbert [Her97], mais elles ont été rapidement abandonnées¹. Une autre stratégie a été mise en œuvre, guidée par l'idée que la figure II.19 suggère une saturation non-linéaire. Plutôt qu'essayer de suivre l'instabilité dans sa croissance, on peut chercher directement des états d'équilibre non-linéaires vers lesquels elle pourrait tendre. C'est l'idée qui va être développée dans la deuxième partie du chapitre. Enfin, bien que ces états bidimensionnels soient en équilibre, rien ne garantit qu'ils soient stables vis-à-vis de perturbations tridimensionnelles. C'est ce qu'on cherche à déterminer en troisième partie.

Le plan du chapitre est donc le suivant :

1. application de la théorie de l'instabilité secondaire à l'écoulement de Taylor augmenté d'une onde primaire issue de la théorie linéaire;
2. recherche de systèmes d'ondes en équilibre non-linéaire dans l'écoulement de Taylor;
3. application de la théorie de l'instabilité secondaire à l'écoulement de Taylor augmenté d'un système d'ondes en équilibre non-linéaire.

1. L'utilisation des PSE linéaires dans le cas de l'écoulement de Taylor s'est révélée fortement dépendante de l'abscisse initiale du calcul. De plus, en non-linéaire, l'écriture d'une équation parabolisée pour le mode de distorsion (dont il sera question plus loin) pose problème. Enfin, on sait que les résultats non-linéaires dépendent des amplitudes initiales respectives des différents modes introduits.

Dans tout le chapitre, on ne s'occupe que du cas plan et pas du cas axisymétrique. Il y a deux raisons à ce choix : la commodité car les équations planes sont plus simples que les équations axisymétriques et ne présentent pas de singularité à l'origine; et le fait que les observations ont été faites en canal rectangulaire alors que rien n'assure que l'écoulement axisymétrique obéit au même comportement.

IV.1 Analyse de stabilité secondaire

IV.1.1 Théorie de l'instabilité secondaire



FIG. IV.1 – *Instabilité secondaire sur une couche limite. Résonance fondamentale dite de type K. (D'après Saric [SLK84])*

Perte de symétrie

Considérons un écoulement stationnaire bidimensionnel quasi-parallèle, solution exacte ou approchée des équations d'Euler ou de Navier-Stokes; typiquement l'écoulement de Poiseuille, un écoulement de couche limite, de couche cisailée ou l'écoulement en conduit à parois débitantes étudié dans le présent rapport. Par définition, cet écoulement possède les propriétés d'invariance en t (le temps), en z (la variable transversale) et en x (la variable longitudinale), cette dernière invariance n'étant d'ailleurs qu'une approximation pour les exemples d'écoulements cités (d'où le terme "quasi-parallèle"). L'analyse de stabilité primaire consiste à rechercher la première brisure de symétrie du système, c'est-à-dire la perte d'une ou plusieurs invariances du système.

Dans le cas d'une couche limite, par exemple, on peut observer la transition d'un écoulement possédant toutes les invariances citées à l'amont vers un écoulement organisé en rouleaux bidimensionnels d'instabilités convectés. Si on se place dans le repère galiléen en translation uniforme dans la direction et à la vitesse de phase de l'onde d'instabilité (voir plus loin IV.2), la nouvelle solution est "stationnaire", bidimensionnelle, et périodique dans une direction de l'espace. Elle a donc perdu un seul degré de symétrie.

Mais plus loin à l'aval, de nouveaux phénomènes apparaissent : l'écoulement ne présente plus des rouleaux d'instabilités bidimensionnels mais des structures tridimensionnelles nettement visibles sur la photographie IV.1 réalisée par Saric [SLK84]. Il a perdu un autre degré de symétrie, l'invariance suivant z . Cette nouvelle brisure de symétrie est l'objet de l'analyse de stabilité secondaire.

Démarche théorique

L'analyse de stabilité secondaire mise en œuvre durant cette thèse est celle introduite par Herbert dont une revue peut être trouvée en référence [Her88].

La démarche est formellement identique à celle de la stabilité primaire. Cependant au lieu de l'écoulement de base stationnaire monodimensionnel (en fait bidimensionnel quasi-parallèle), on va étudier la stabilité de l'écoulement qui contient l'onde d'instabilité primaire (bidimensionnelle) d'amplitude A . Cette amplitude n'est définie qu'une fois qu'une normalisation est choisie. Dans la suite, on impose comme normalisation²

$$u_1(y_{max}) = 1 \text{ avec } y_{max} \text{ tel que } |u_1(y)| \leq |u_1(y_{max})| \forall y$$

où u_1 est la composante longitudinale de la vitesse primaire.

Soit \vec{U}_2 la vitesse du nouvel écoulement de base :

$$\vec{U}_2 = \vec{U}_0 + A\vec{u}_1 + A\vec{u}_1 \tag{IV.1}$$

(\vec{u}_1 dénote le conjugué de \vec{u}_1) dont on étudie la stabilité en lui superposant un mouvement de vitesse $\varepsilon\vec{u}_3$. On reporte $\vec{U}_2 + \varepsilon\vec{u}_3$ dans les équations de Navier-Stokes en ne conservant que les termes d'ordre 1 en ε (ce qui suppose $\varepsilon \ll 1$). En fait, il y a certaines hypothèses sous-jacentes ; en particulier, on suppose \vec{U}_2 solution de ces équations à l'ordre d'approximation. Comme \vec{u}_1 n'est solution que du problème linéarisé, il faut que les termes quadratiques en \vec{u}_1 soient négligeables d'où

$$A^2 \ll \varepsilon$$

cf [Cas90]. Et, de même qu'on avait pu donner une forme particulière (II.8) à la fluctuation primaire en utilisant les propriétés de symétrie de \vec{U}_0 et aboutir finalement à des équations différentielles ordinaires, on peut ici aussi y parvenir en profitant des propriétés de \vec{U}_2 .

On considère désormais le problème de l'instabilité primaire résolu, c'est-à-dire que les grandeurs \vec{U}_0 , A , \vec{u}_1 (donc α , β , ω) sont fixées. De plus, on fait l'hypothèse fondamentale que l'onde primaire est sur la courbe neutre (c'est-à-dire que l'on part d'un écoulement presque périodique, on reviendra sur cette hypothèse par la suite) :

$$\alpha, \beta, \omega \in \mathbb{R}$$

Il convient aussi d'insister sur la problématique du linéaire et du non-linéaire dans l'étude de la stabilité secondaire. En effet, la théorie de l'instabilité secondaire est linéaire (car linéarisée en ε) pourtant elle dépend de l'amplitude de la perturbation primaire et donne accès par ce biais à des caractéristiques de phénomènes non-linéaires.

D'un point de vue physique, cela signifie que la stabilité secondaire modélise l'*action* de l'onde primaire *sur* les autres ondes mais pas l'*interaction* de l'onde primaire *avec* les autres ondes. C'est-à-dire qu'il n'y a pas prise en compte de la rétroaction des ondes secondaires sur l'onde primaire.

2. Attention, la normalisation n'est pas la même pour tous les auteurs, Herbert dans la référence [Her83] utilise comme normalisation $\max_{-1 \leq y \leq 1} |u_1(y)|^2 = \frac{1}{2}$ d'où un facteur $1/\sqrt{2}$ d'écart.

IV.1.2 Principe de résolution

Quatre étapes sont nécessaires. Les notations et le formalisme sont repris de Casalis [Cas90].

1. On commence par faire un changement de référentiel pour simplifier l'expression de l'exponentielle de l'onde primaire (cf (II.8)) : on pose

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \bar{X} &= \frac{\alpha}{\gamma}x + \frac{\beta}{\gamma}z - \frac{\omega}{\gamma}t \\ \bar{Z} &= -\frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha}{\gamma}z \\ \bar{T} &= t \quad Y = y\end{aligned}\tag{IV.2}$$

en effectuant formellement un changement de référentiel galiléen pour “voyager” avec l'onde primaire. \vec{U}_2 s'écrit alors :

$$\vec{U}_2 = \vec{U}_2(\bar{X}, y) = \vec{U}_0(y) + A \left[\vec{u}_1 e^{i\gamma\bar{X}} + \text{c.c.} \right]\tag{IV.3}$$

(c.c. désigne le complexe conjugué de l'expression précédente.)

2. Les équations que satisfait \vec{u}_3 sont linéaires et leurs coefficients ne sont fonctions, d'après (IV.3), que de y et de \bar{X} , la dépendance en \bar{T} et \bar{Z} peut donc être prise sous la forme d'une exponentielle (mode normal) :

$$\vec{u}_3 = \vec{V}_3(\bar{X}, y) e^{i(\sigma\bar{T} + \mu\bar{Z})}\tag{IV.4}$$

suivant la même démarche qu'avec l'instabilité primaire.

3. Le nombre γ étant réel, la dépendance en \bar{X} de \vec{U}_2 est périodique (c'est ici qu'intervient l'hypothèse que l'onde primaire est sur la courbe neutre), on utilise alors la théorie dite de Floquet, détaillée précédemment au paragraphe III.4.2. Cette théorie permet de spécifier un peu la dépendance en \bar{X} de \vec{V}_3 : il existe δ , complexe, coefficient de Floquet et $\vec{W}_3(\bar{X}, y)$ fonction $2\pi/\gamma$ -périodique de \bar{X} (on travaille en fait à une certaine valeur de y fixée) tels que

$$\vec{V}_3(\bar{X}, y) = e^{i\delta\bar{X}} \vec{W}_3(\bar{X}, y)\tag{IV.5}$$

4. Enfin, comme $\vec{W}_3(\bar{X}, y)$ est une fonction $2\pi/\gamma$ -périodique de \bar{X} , on peut la décomposer en série de Fourier (c'est la même démarche qu'au paragraphe III.4.2) :

$$\vec{W}_3(\bar{X}, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \vec{W}_m(y) e^{im\gamma\bar{X}}\tag{IV.6}$$

En décomposant $\vec{W}_m = (g_u^{(m)}, g_w^{(m)}, g_v^{(m)})$ dans le repère initial, on peut écrire l'expression simplifiée finale de la perturbation secondaire :

$$\vec{u}_3 = e^{i(\sigma\bar{T} + \mu\bar{Z} + \delta\bar{X})} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\gamma\bar{X}} \left(g_u^{(m)}(y), g_w^{(m)}(y), g_v^{(m)}(y) \right)\tag{IV.7}$$

Avec les anciennes variables, on a aussi :

$$\vec{u}_3 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(g_u^{(m)}(y), g_w^{(m)}(y), g_v^{(m)}(y) \right) E \quad \text{avec}\tag{IV.8}$$

$$E = e^{\frac{i}{\gamma}[(\alpha\delta - \mu\beta + m\alpha\gamma)x + (\beta\delta + \alpha\mu + m\beta\gamma)z + (\sigma\gamma - \delta\omega - m\omega\gamma)t]}$$

Joint à des conditions aux limites homogènes (identiques à celles utilisées pour l'instabilité primaire), \vec{u}_3 satisfait un système différentiel homogène ; de la même façon que dans le cas de l'instabilité primaire, le problème de l'instabilité secondaire se réduit finalement à un problème aux valeurs propres : il existe \vec{u}_3 non-identiquement nul si (δ, μ, σ) satisfait une certaine relation de dispersion :

$$\mathcal{G}(\delta, \mu, \sigma) = 0 \quad (\text{IV.9})$$

IV.1.3 Interprétation physique

De même que pour l'instabilité primaire, les paramètres δ, μ, σ sont *a priori* complexes mais si on veut pouvoir les interpréter physiquement de façon simple, on dispose à nouveau de deux possibilités :

- **Théorie temporelle** : on suppose que, dans le repère initial, les ondes secondaires oscillent selon x, z et t mais ne croissent ou ne s'atténuent que selon le temps. La forme des modes (IV.8) impose alors :

$$\forall m \in \mathbb{Z} \begin{cases} (\alpha\delta - \mu\beta + m\alpha\gamma) \text{ et } (\beta\delta + \alpha\mu + m\beta\gamma) & \in \mathbb{R} \\ (\sigma\gamma - \delta\omega - m\omega\gamma) & \in \mathbb{C} \end{cases}$$

où on rappelle $\alpha, \beta, \omega \in \mathbb{R}$. Cela impose de chercher

$$\delta, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \sigma \in \mathbb{C}$$

La fluctuation varie donc en $e^{-\sigma_i t}$.

Si $\sigma_i < 0$, le nouvel écoulement de base est temporellement instable vis-à-vis de perturbations tridimensionnelles. L'onde primaire se déforme.

Si $\sigma_i > 0$, il est stable et conserve son caractère bidimensionnel décrit par la stabilité primaire.

- **Théorie spatiale** : on suppose que, dans le repère initial, les ondes secondaires oscillent selon x, z et t mais ne croissent ou ne s'atténuent que selon les abscisses (x). La forme des modes (IV.8) impose alors :

$$\forall m \in \mathbb{Z} \begin{cases} (\alpha\delta - \mu\beta + m\alpha\gamma) & \in \mathbb{C} \\ (\beta\delta + \alpha\mu + m\beta\gamma) \text{ et } (\sigma\gamma - \delta\omega - m\omega\gamma) & \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où on rappelle $\alpha, \beta, \omega \in \mathbb{R}$. Cela impose de chercher δ, μ, σ tels que

$$\delta \in \mathbb{C}, \quad \sigma_i = \frac{\omega}{\gamma} \delta_i \quad \text{et} \quad \mu_i = -\frac{\beta}{\alpha} \delta_i \quad (\text{IV.10})$$

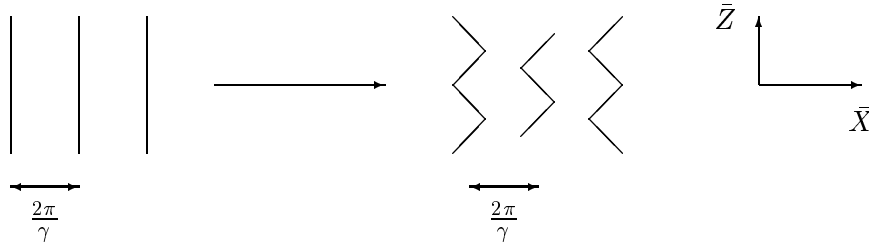
La fluctuation varie alors en $\exp(-\frac{\gamma}{\alpha} \delta_i x)$.

Si $\delta_i < 0$, le nouvel écoulement de base est spatialement instable vis-à-vis de perturbations tridimensionnelles. L'onde primaire se déforme.

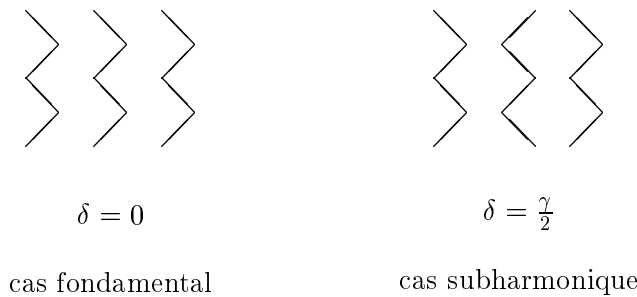
Si $\delta_i > 0$, il est stable et conserve son caractère bidimensionnel décrit par la stabilité primaire.

Pour l'instabilité secondaire, la théorie temporelle permet d'appréhender plus aisément la signification physique des différents paramètres (d'ailleurs moins nombreux qu'en théorie spatiale), à savoir $\mu, \delta, \sigma_r, \sigma_i$.

Les deux premiers paramètres ont chacun une signification physique claire quand on considère l'expression (IV.7). Si $\mu \neq 0$, à chaque onde primaire bidimensionnelle se superpose une perturbation tridimensionnelle mais dont la dépendance en la troisième variable (à savoir z si l'onde primaire est bidimensionnelle) est périodique (de période $2\pi/\mu$) : chaque onde primaire se déforme de façon périodique.



On retrouve la structure pic-vallées, bien connue expérimentalement en couche limite et qui apparaît comme véritable signature de l'instabilité secondaire. De plus, la succession de pics-vallées d'une onde à l'autre (à une valeur de \bar{Z} fixée) peut se déduire de la valeur de δ . Remarquons d'abord que, quitte à faire une renumérotation en m dans la série écrite dans (IV.7), il suffit d'étudier le paramètre δ dans l'intervalle $[0, \gamma[$. Regardons d'abord le cas $\delta = 0$. \vec{u}_3 est $2\pi/\gamma$ -périodique, on a donc la même périodicité que l'onde primaire : pics et vallées sont alignés d'une onde primaire à l'autre ; c'est le cas de la *résonance fondamentale*. Supposons maintenant que l'on ait : $\delta \neq 0$. Par rapport à \bar{X} (y est fixé implicitement), \vec{u}_3 est le produit de deux fonctions périodiques de période $2\pi/\gamma$ et $2\pi/\delta$. Par conséquent, \vec{u}_3 ne sera périodique en \bar{X} que si δ/γ est rationnel. Comme $\delta \in]0, \gamma[$, la période la plus petite (parmi toutes celles possibles pour δ/γ rationnel) sera obtenue pour $\delta = \gamma/2$. Dans ce dernier cas, la période de l'onde secondaire est double de celle de l'onde primaire : pics et vallées sont en exacte alternance d'une onde primaire à l'autre ; c'est le cas de la *résonance subharmonique*. Schématiquement, on donne la représentation suivante :



Il est à remarquer que ces deux cas ont été observés expérimentalement en couche limite (cf [ST83]) et sont souvent dénotés par le type **K** (Klebanoff) pour le cas fondamental et le type **C** ou **H** (Craik, Herbert) pour le cas subharmonique.

La partie imaginaire de σ représente le taux d'amplification temporelle des ondes secondaires.

L'interprétation du terme σ_r est un peu plus délicate dans le cas général. Il se présente comme un terme de décalage de fréquence qui tend à "désaccorder" les ondes primaire et secondaire. Pour avoir une résonance forte entre deux ondes, il semble favorable qu'elles "voyagent" à la même vitesse de phase et que le rapport des fréquences soit entier. Si on suppose l'onde primaire longitudinale $\beta = 0$, la condition $\sigma_r = 0$ permet d'assurer dans les cas de résonance fondamentale ou subharmonique que tous les termes de la décomposition (IV.8) voyagent à la même vitesse de phase ω/α que l'onde primaire et oscillent selon des fréquences harmoniques ou subharmoniques. Sous ces hypothèses, *a priori* optimales, l'interprétation physique des résultats secondaires est claire. De plus, ce jeu de conditions

$$\delta = 0 \text{ ou } \gamma/2 \quad \text{et} \quad \sigma_r = 0 \tag{IV.11}$$

semble le plus naturel car il provient de considérations physiques visant à maximiser les phénomènes de résonance. C'est pourquoi on privilégiera ce type de solutions par la suite lorsque des solutions "accordées" ($\sigma_r = 0$) et "désaccordées" ($\sigma_r \neq 0$) seront simultanément rencontrées.

	Stabilité primaire	Stabilité secondaire
écoulement de base	\vec{U}_0	$\vec{U}_0 + A\vec{u}_1 + A\vec{u}_1$
référentiel d'étude	(x, y, z, t) fixe	$(\bar{X}, y, \bar{Z}, \bar{T})$ voyage avec l'onde primaire
propriétés de l'écoulement de base	invariance en x, z et t	invariance en \bar{Z} et \bar{T} $2\pi/\gamma$ -périodicité en \bar{T}
à résoudre ^a	$\mathcal{NS}(\vec{U}_0 + A\vec{u}_1)$ $= 0 + o(A)$	$\mathcal{NS}(\vec{U}_0 + A(\vec{u}_1 + \vec{u}_1) + \varepsilon\vec{u}_3)$ $= 0 + o(\varepsilon)$
hypothèses	$A \ll 1$	$A^2 \ll \varepsilon \ll 1$
forme de perturbation	$\vec{u}_1(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}$	$\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \vec{u}_3(y)e^{im\gamma\bar{X}} \right) e^{i(\delta\bar{X} + \mu\bar{Z} + \sigma\bar{T})}$
théorie temporelle	$\omega \in \mathbb{C} \alpha, \beta \in \mathbb{R}$	$\sigma \in \mathbb{C} \mu, \delta \in \mathbb{R}$
théorie spatiale	$\alpha \in \mathbb{C} \omega, \beta \in \mathbb{R}$	$\delta \in \mathbb{C} \mu_i = -\frac{\beta}{\alpha}\delta_i, \sigma_i = \frac{\omega}{\gamma}\delta_i$
instable si	$\alpha_i < 0$ ou $\omega_i > 0$	$\sigma_i < 0$ ou $\delta_i < 0$

TAB. IV.1 – Comparaison et synthèse des stabilités primaire et secondaire.

^aLa notation \mathcal{NS} désigne l'opérateur de Navier-Stokes (ou d'Euler).

Le tableau IV.1 donne une synthèse de la théorie de la stabilité secondaire ainsi qu'un parallèle avec la stabilité primaire.

IV.1.4 Mise en œuvre numérique

La mise en œuvre numérique de la stabilité secondaire fait l'objet de l'annexe G. On y donne les équations effectivement résolues en signalant succinctement que du fait du non-parallélisme de l'écoulement de Taylor, les formes de mode normal supposées depuis le début du chapitre ne sont pas valides. Comme noté en section II.5, le problème dépend alors de la formulation utilisée.

Du système linéaire obtenu associé à des conditions aux limites homogènes précisées dans l'annexe G résulte un problème aux valeurs propres. Le code numérique écrit pour l'occasion résout ce problème discrétisé à l'aide du schéma compact d'ordre 4 de Malik [MCH82] après troncature de la série (IV.8) à N , comme indiqué dans la même annexe. Pour des raisons de coût numérique ces troncatures sont très faibles. Ainsi, la majorité des résultats présentés sont obtenus avec $N = 1$ ou $N = 2$ c'est-à-dire qu'on considère 3 ou 5 termes de la série de Fourier. Une telle troncature n'est justifiée que si la série converge extrêmement vite.

Les deux méthodes présentées en annexe C de résolution itérative et de calcul de spectre ont été utilisées pour l'approche temporelle afin de déterminer la valeur de σ avec l'ensemble des autres paramètres fixés.

Le temps de calcul du spectre croît très rapidement avec la taille de la matrice de l'opérateur discrétisé. Ceci explique pourquoi la troncature avec cette méthode n'est jamais supérieure à $N = 2$ et le nombre de points de l'ordre de 40. On vérifie *a posteriori* à l'aide de la méthode itérative, pour laquelle on peut prendre plus de points et une troncature plus élevée, que ces valeurs autorisent une précision suffisante.

Les calculs en approche spatiale n'utilisent quant à eux que la méthode itérative car la dépendance de la matrice de l'opérateur discrétisé vis-à-vis de δ n'est pas aussi claire à cause des conditions (IV.10). Au lieu de chercher δ avec tous les autres paramètres fixés, on recalcule les paramètres σ et μ en fonction de (IV.10) à chaque itération jusqu'à convergence.

La validation du code s'est faite sur l'écoulement de Poiseuille par comparaison avec les résultats d'Herbert [Her83] et de Casalis [Cas90].

IV.1.5 Application à l'écoulement de Taylor

On s'intéresse au problème plan dont la géométrie a été représentée en figure I.17. On choisit comme écoulement de base la solution de Taylor, et pour la stabilité primaire on se contente d'étudier des modes de la forme

$$\vec{u}_1(x, y, z, t) = \vec{u}_1(x, y, t) = \vec{u}_1(y).e^{i(\alpha x - \omega t)}$$

c'est-à-dire des modes normaux longitudinaux (avec $\beta = 0$)³. De plus, on se restreint à l'étude de modes primaires variqueux c'est-à-dire tels que les fluctuations sur le plan de symétrie (O,x,z) soient purement longitudinales. Cette dernière limitation provient des caractéristiques du montage expérimental VECLA qui autorise les modes variqueux mais pas les modes sinueux.

Dans la suite, on va négliger l'effet des parois latérales non-débitantes. Pour justifier cette simplification, on pourrait faire l'hypothèse que le rapport d'aspect h/w hauteur sur largeur est suffisamment faible pour que l'étendue transverse puisse être considérée comme infinie, cependant dans les cas expérimentaux qui motivent l'étude ce rapport h/w vaut $1/3$. En fait, on peut surtout penser que les conditions aux limites sur les parois latérales n'autorisent que des valeurs discrètes du paramètre μ , telles que la largeur w corresponde à un nombre entier de périodes transverses⁴ $2\pi/\mu$. Quitte à ne retenir *a posteriori* que certaines valeurs discrètes parmi les résultats, on peut raisonnablement mener l'analyse en milieu d'étendue infinie.

IV.1.6 Résultats de stabilité secondaire sur la courbe neutre primaire

Il faut commencer par le cas des calculs de stabilité secondaire avec une onde primaire située sur la courbe neutre, c'est-à-dire telle que $\alpha_i = 0$. En effet, comme on l'a signalé en IV.1.1, la théorie de Floquet s'applique aux écoulements périodiques mais l'onde primaire n'est localement strictement périodique que sur la courbe neutre. Ailleurs, elle est soit atténuée soit amplifiée. La région de la courbe neutre est donc la seule où la théorie puisse être rigoureusement utilisée.

Modes variqueux et modes sinueux

Ainsi qu'il a été expliqué en section II.2.1, on ne considère que les ondes primaires variqueuses, c'est-à-dire avec une fluctuation de vitesse longitudinale $\hat{u}_1(y)$ paire et une fluctuation de vitesse normale $\hat{v}_1(y)$ impaire. Comme pour l'écoulement de Taylor la vitesse axiale $U_0(y)$ est aussi paire, la superposition des deux admet la même parité.

Il est alors naturel de chercher des solutions secondaires de deux types particuliers : variqueux ou sinueux. Comme dans VECLA (qui n'a qu'une paroi débitante et une paroi lisse assimilable au plan de symétrie de l'écoulement de Taylor), seuls les modes variqueux ont *a priori* une chance d'apparaître (à cause de la condition de non-pénétration dans la paroi lisse qui impose $g_v^{(m)}(0) = 0$), les résultats qui seront présentés par la suite ne concernent que ces derniers. Néanmoins, les mêmes études ont été menées sur les modes sinueux et elles donnent lieu à des résultats tout à fait similaires, à la fois qualitativement et quantitativement.

L'intérêt de cette décomposition en modes variqueux et sinueux est évidemment de diviser par deux la taille du domaine de calcul, avantage appréciable étant donnée la longueur de certains calculs.

Enfin, signalons que les calculs globaux, effectués en supposant chacune des deux parités et sans hypothèse de parité, montrent que tous les modes propres sont soit pairs soit impairs. On n'oubliera

3. De toute façon, les calculs montrent que les modes avec $\beta \neq 0$ sont moins instables que ceux avec $\beta = 0$.

4. On aurait les mêmes conditions sur β si on voulait considérer des ondes primaires obliques

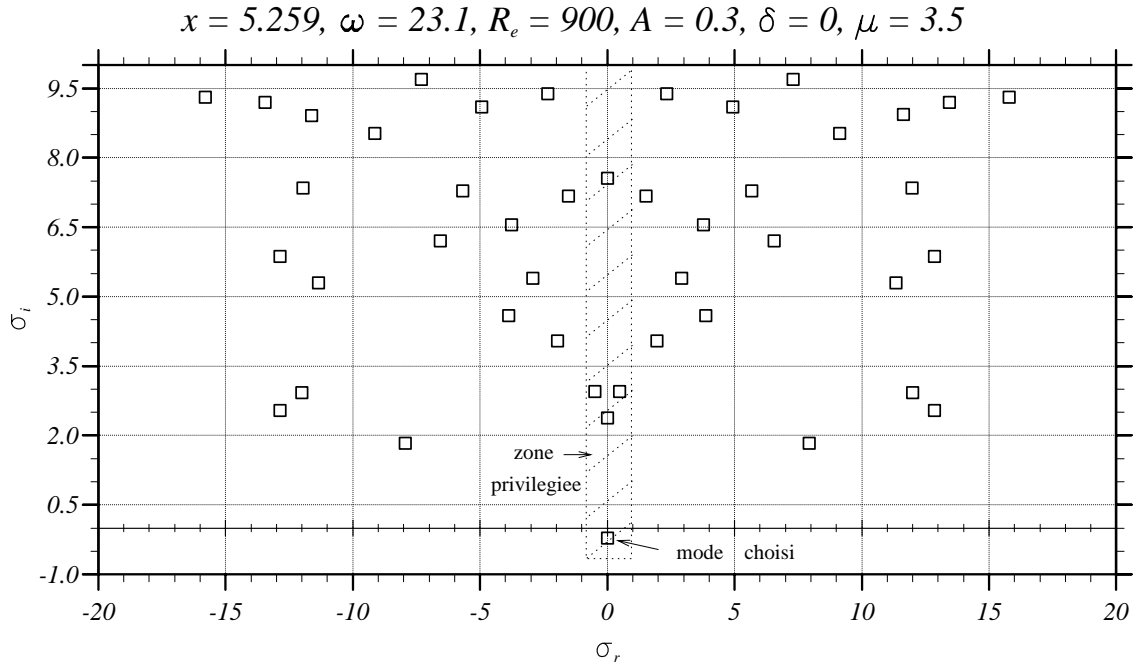


FIG. IV.2 – Spectre de l'opérateur de stabilité secondaire sur la courbe primaire. Le mode présenté dans la section précédente est le seul instable pour le jeu de paramètres choisi. Il est indiqué sur la figure par la mention "mode choisi".

donc aucun mode en se restreignant à des demi-domaines. Ce résultat n'était pas évident *a priori* selon nous.

Choix d'un mode

La première étape consiste à choisir des valeurs propres potentiellement intéressantes parmi celles du spectre de l'opérateur défini par les équations (G.14) associées aux conditions aux limites homogènes habituelles exprimées pour chaque terme de Fourier.

La figure IV.2 montre ce spectre pour l'onde primaire située sur la courbe neutre primaire. On impose $\delta = 0$ et on choisit $\mu = 3.5$. On représente dans le plan (σ_r, σ_i) l'ensemble des valeurs propres possibles (tout du moins pour cette partie du plan) qui contient l'ensemble des modes propres secondaires.

On constate d'abord que le spectre est symétrique par rapport à $\sigma_r = 0$. Cette propriété clairement visible sur les équations pour $\beta = 0$ vient du fait que si \vec{u}_3 est solution du problème secondaire, *i.e.*

$$(\sigma, \delta, \mu) \text{ est un mode propre de fonctions propres } (g_u^{(m)}, g_w^{(m)}, g_v^{(m)}),$$

\vec{u}_3 l'est aussi car

$$\mathcal{NS}(\vec{U}_0 + A(\vec{u}_1 + \vec{\bar{u}}_1) + \vec{u}_3) = 0 \Rightarrow \overline{\mathcal{NS}(\vec{U}_0 + A(\vec{u}_1 + \vec{\bar{u}}_1) + \vec{u}_3)} = 0 \Rightarrow \mathcal{NS}(\vec{U}_0 + A(\vec{\bar{u}}_1 + \vec{u}_1) + \vec{\bar{u}}_3) = 0$$

alors, si $\beta = 0$, l'écriture de $\vec{\bar{u}}_3$ sous la forme (IV.8) montre aisément que

$$(-\bar{\sigma}, -\bar{\delta}, -\mu) \text{ est un mode propre de fonctions propres } (\bar{g}_u^{(-m)}, \bar{g}_w^{(-m)}, \bar{g}_v^{(-m)}).$$

Comme, par ailleurs, on a la symétrie par rapport au plan (O, x, y) si $\beta = 0$,

$$(-\bar{\sigma}, -\bar{\delta}, \mu) \text{ est un mode propre de fonctions propres } (\bar{g}_u^{(-m)}, -\bar{g}_w^{(-m)}, \bar{g}_v^{(-m)}).$$

Pour l'approche temporelle avec $\delta = 0$, on en conclut que si (σ_r, σ_i) appartient au spectre alors $(-\sigma_r, \sigma_i)$ y appartient aussi ce qui justifie la symétrie du spectre IV.2 par rapport à l'axe imaginaire.

$$x = 5.259, \omega = 23.1, \mathcal{R}_e = 900, \alpha_r = 4.3408, |\alpha_i| < 10^{-5}$$

$$A = 0.3, \mu = 3.5, \delta = 0$$

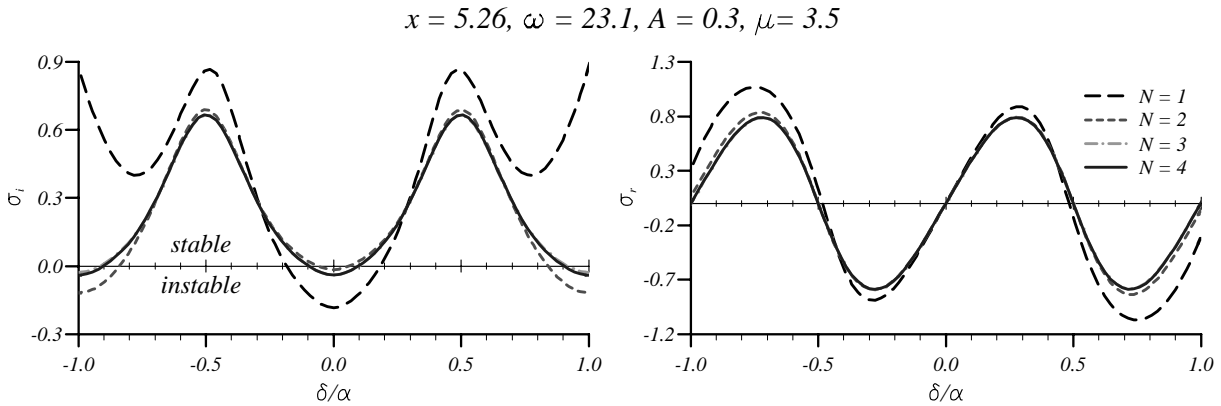
Rang N de troncature	$ \sigma_r $	σ_i
1	$< 10^{-9}$	-0.181
2	$< 10^{-9}$	-0.013
3	$< 10^{-9}$	-0.037
4	$< 10^{-9}$	-0.036
5	$< 10^{-9}$	-0.037
6	$< 10^{-9}$	-0.037

TAB. IV.2 – Valeurs du mode choisi en fonction du rang de troncature de la série de Fourier (IV.8).

Ensuite, on voit que le nombre de modes est élevé ce qui ne permet pas de tous les suivre lorsqu'on fait varier les nombreux paramètres du problème. On utilise donc les conditions physiques (IV.11) pour restreindre les recherches (dans le cas $\delta = 0$) à la partie du plan telle que $\sigma_r \ll 1$ que l'on note "zone privilégiée" sur la figure.

Les calculs font apparaître un mode temporellement instable (*i.e.* $\sigma_i < 0$) *a priori* acceptable, indiqué sur la figure IV.2. La suite du paragraphe se rapporte exclusivement à ce mode.

On constate d'abord sur la figure IV.3 que la périodicité des résultats vis-à-vis du paramètre γ est respectée, au moins lorsque le rang N de troncature de la série de Fourier (IV.8) est suffisant. Au passage, la même figure et le tableau IV.2 permettent de juger la validité de la troncature sur le calcul de l'amplification secondaire. Le mode satisfait les conditions (IV.11) proposées en IV.1.3, à savoir que son maximum d'instabilité se produit pour $\delta = 0$ et $\sigma_r = 0$. Il s'agit donc d'une résonance fondamentale d'un mode accordé. (On peut d'ailleurs noter qu'en $\delta = \gamma/2$ on trouve bien $\sigma_r = 0$, mais il s'agit d'un maximum de stabilité.)


 FIG. IV.3 – Evolution des parties réelle et imaginaire de σ par rapport à δ/γ pour différents rangs N de troncature de la série de Fourier. Pour l'onde primaire choisie, ici sur la courbe neutre primaire, $\gamma = 4.341$, on vérifie que les courbes sont γ -périodiques et que $\sigma_r = 0$ pour $\delta = 0$ et $\delta = \gamma/2$.

De plus, si on fait varier l'amplitude de l'onde primaire A , la figure IV.4 indique que l'onde secondaire devient instable lorsque l'amplitude de l'onde primaire franchit un certain seuil. Ceci s'accorde bien avec l'idée intuitive que l'écoulement perd l'invariance en x , puis après croissance de la première instabilité, perd l'invariance en z . Quand l'amplitude de l'onde primaire croît, l'onde secondaire se déstabilise encore. Ce comportement semble naturel puisque l'instabilité secondaire provient justement de la présence de l'onde primaire.

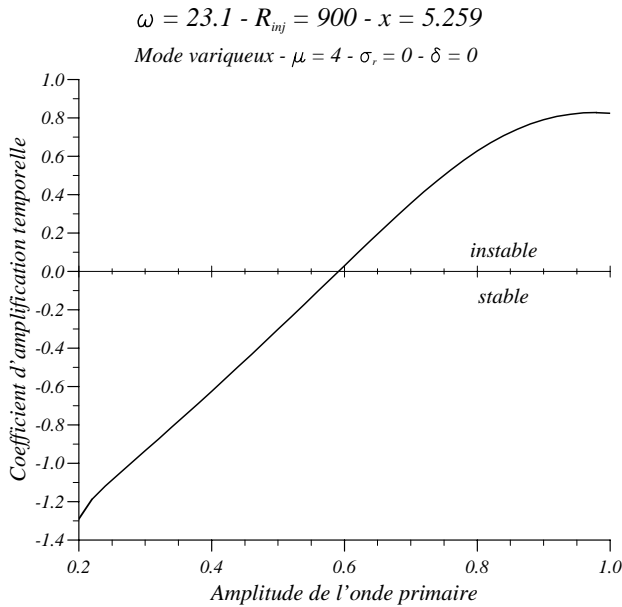


FIG. IV.4 – Evolution du coefficient d'amplification temporelle secondaire $-\sigma_i$ en fonction de l'amplitude de l'onde primaire. Le mode secondaire devient instable lorsque l'amplitude de l'onde primaire franchit un seuil.

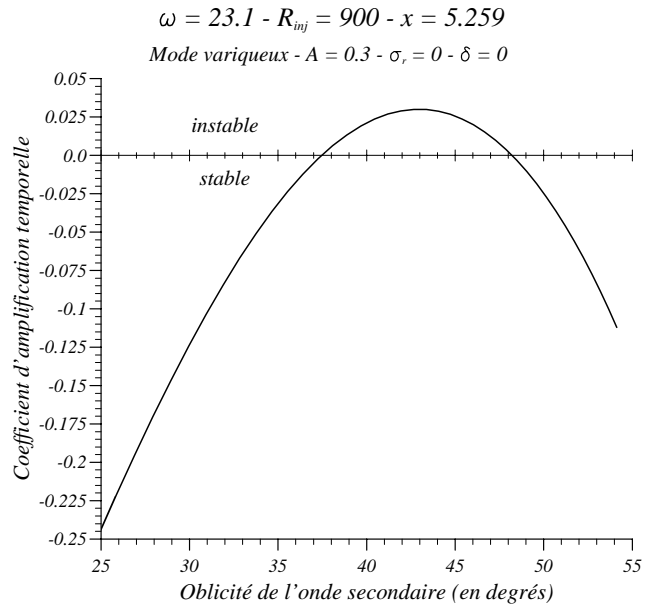


FIG. IV.5 – Evolution du coefficient d'amplification temporelle secondaire $-\sigma_i$ en fonction de l'oblicité de l'onde secondaire par rapport à l'onde primaire. La direction secondaire privilégiée est de l'ordre de 45° .

Par ailleurs, le balayage en μ donné en figure IV.5 montre que, pour une amplitude fixée, seule une bande de μ est amplifiée. Cela indique la tridimensionnalisation de l'écoulement selon une bande de longueurs d'onde transversales privilégiée et bien déterminée. Si on calcule l'oblicité des ondes secondaires par rapport à l'onde primaire longitudinale,

$$\theta_m = \arctan\left(\frac{\beta\delta + \alpha\mu + m\beta\gamma}{\alpha\delta - \mu\beta + m\alpha\gamma}\right) = \arctan\left(\frac{\mu}{m\alpha}\right)$$

on trouve des valeurs de l'ordre de grandeur de $\pi/4$ pour les termes *a priori* prépondérants de la série (IV.8) : $m = \pm 1$. L'oblicité, qui définit l'angle des chevrons observés sur la vue IV.1 en couche limite, semble donc physiquement convenable. Elle indique que la résonance implique une onde primaire longitudinale et deux ondes obliques de l'ordre $\pm 45^\circ$

Enfin, il reste à observer les fonctions propres de l'onde secondaire données en figures IV.6 et IV.7. On ne montre ici que des termes $m \geq 0$ car pour une onde secondaire accordée ($\sigma_r = 0$) avec $\delta = 0$, les fonctions propres des termes m et $-m$ sont superposées en module.

L'allure des fonctions propres est physiquement acceptable, seul le terme $m = 0$ présente des oscillations vers l'axe avec passage par des valeurs nulles mais ces oscillations, un peu curieuses, ne semblent pas impossibles.

Au contraire des fonctions propres primaires qui présentent un maximum en proche paroi (d'où leur dénomination d'"instabilités pariétales"), les maxima secondaires se situent vers le milieu de la demi-veine.

Par ailleurs, le rapport des amplitudes de fluctuations normales et longitudinales est de l'ordre de $1/50$, ce qui indique que l'oscillation secondaire a principalement lieu dans la direction longitudinale.

Le terme $m = 1$ est prépondérant. Il s'agit d'un terme dont les caractéristiques, fréquence et longueur d'onde, sont identiques à celles du primaire. Par contre, on constate que contrairement à la condition (G.17), les modules des termes successifs de la série de Fourier ne décroissent pas rapidement (au moins en ce qui concerne les fonctions propres longitudinales). Ce qui laisse planer le doute sur la validité de la troncature. Cependant, la figure IV.3 et le tableau IV.2 montrent que la valeur du

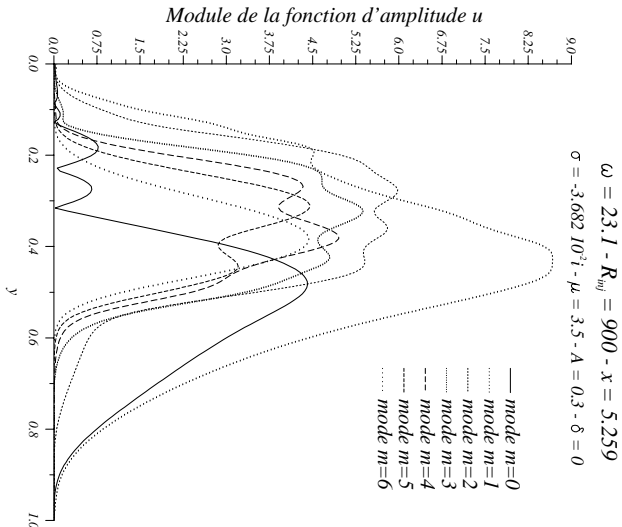


FIG. IV.6 – Fonctions propres des premiers termes de la série de Fourier définissant la fluctuation secondaire longitudinale.

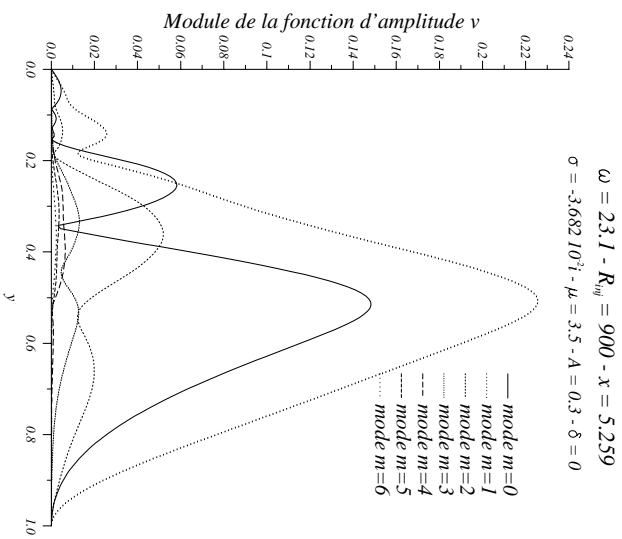


FIG. IV.7 – Fonctions propres des premiers termes de la série de Fourier définissant la fluctuation secondaire normale.

coefficient d'amplification converge rapidement avec N . Faute de mieux, on supposera donc que le problème est correctement résolu.

Nécessité de s'éloigner de la courbe neutre

Au total, on a obtenu le résultat suivant. Si une onde primaire atteint la courbe neutre avec une amplitude suffisante, l'écoulement devient tridimensionnel et on peut prédire la direction oblique privilégiée des structures tridimensionnelles qui vont apparaître.

Cette conclusion est intéressante mais elle est insuffisante pour l'application que l'on cherche. En effet, sur la courbe neutre primaire on a supposé que l'amplitude de tous les modes était A_0 . Dans le cadre d'instabilités "naturelles" (par opposition à "excitées") cette valeur est en principe très faible et en particulier plus faible *a priori* que l'amplitude critique pour le déclenchement de l'instabilité secondaire. Cela signifie que le résultat obtenu n'est utile que si on excite une fréquence dont on peut faire varier l'amplitude.

De plus, expérimentalement on a vu que la partie amont de la veine relève de la stabilité primaire jusque bien au-delà de la courbe neutre. Ainsi, ce que l'on cherche est précisément l'abscisse à partir de laquelle une onde devient secondairement instable pour une onde primaire amplifiée naturellement à partir de A_0 et non pas le niveau d'excitation à partir duquel l'onde excitée est secondairement instable à l'abscisse $x_{CN}(\omega)$ de la courbe neutre. Il est donc nécessaire de "suivre" un mode dans son amplification longitudinale.

IV.1.7 Résultats de stabilité secondaire hors de la courbe neutre primaire

Hypothèses et critère de validité

Hors de la courbe neutre primaire, on ne peut plus appliquer rigoureusement la théorie de Floquet. En effet, le nouvel écoulement de base n'est plus périodique car l'onde primaire ne l'est plus. Néanmoins, si l'échelle de longueur caractéristique de variation de l'amplitude du primaire ($1/|\alpha_i|$)

est grande devant l'échelle de longueur caractéristique de variation du résultat secondaire ($1/|\delta_i|$ pour une analyse spatiale), on pourra considérer que, du point de vue de l'onde secondaire, l'onde primaire est quasi-périodique. Le critère de validité d'un résultat secondaire en théorie spatiale s'écrit donc

$$|\alpha_i| \ll |\delta_i|$$

De même si on utilisait la théorie temporelle à la fois pour le primaire et pour le secondaire, le même raisonnement sur les temps caractéristiques conduirait à

$$|\omega_i| \ll |\sigma_i| \tag{IV.12}$$

avec ω_i le coefficient primaire d'amplification temporelle.

Comme ici, on combine théorie spatiale pour le primaire et temporelle pour le secondaire, il faut relier les coefficients spatiaux et temporels. Dans le cas de la théorie primaire, on peut utiliser la relation de Gaster

$$\tilde{\alpha}_i = -\frac{\omega_i}{v_g}$$

qui signifie qu'en calculant en théorie temporelle la vitesse de groupe $v_g = \frac{\partial \omega_r}{\partial \alpha_r}$, on peut donner une estimation $\tilde{\alpha}_i$ de l'amplification α_i qu'on obtiendrait en théorie spatiale. La formule n'est exacte que sur la courbe neutre mais elle donne généralement des résultats satisfaisants hors de la courbe neutre.

Une relation analogue en stabilité secondaire a été proposée par Bertolotti [Ber85] dont on verra plus loin qu'elle est bien vérifiée

$$\tilde{\delta}_i = \frac{\sigma_i}{\frac{\omega}{\alpha_r} - \frac{\partial \sigma_r}{\partial \delta_r}}$$

On en conclut le critère de validité des résultats secondaires temporels calculés à partir d'une onde primaire spatiale

$$|\alpha_i| \ll \left| \frac{\sigma_i}{\frac{\omega}{\alpha_r} - \frac{\partial \sigma_r}{\partial \delta_r}} \right|$$

Ainsi, pour la résolution numérique du secondaire, on prendra $\alpha_i = 0$ ce qui permet d'utiliser la théorie de Floquet, mais il faut valider *a posteriori* cette simplification. Précisons tout de même que l'amplification du primaire n'est pas complètement négligée pour autant puisqu'on utilise en pratique $A = A_0 e^{\int -\alpha_i dx}$ mais on suppose que pour une abscisse fixée et avec une amplitude donnée la stabilité secondaire ne "voit" pas l'amplification locale de l'onde primaire déterminée par la valeur de α_i .

Principe de recherche de la transition secondaire

Le principe adopté pour répondre à la question posée : "Quelles sont l'abscisse et l'obliquité de la première onde qui devient secondairement amplifiée dans VECLA?", est le suivant.

On se donne une fréquence parmi les fréquences linéairement amplifiées. On choisit une amplitude initiale $A_0 = 10^{-3}$, à l'aide des résultats expérimentaux, et on avance en x en réactualisant l'amplitude de l'onde primaire à chaque pas par la formule

$$A(x + \Delta x) = A(x) e^{-\alpha_i \Delta x}$$

On espère alors atteindre, pour chaque valeur de μ , une abscisse $x_T(\omega, \mu)$ où σ_i s'annule avant de devenir négatif. Il faudrait aussi vérifier que le facteur d'accord $\delta = 0$ reste le plus favorable à l'instabilité secondaire pour chaque abscisse et pour chaque valeur de μ . Devant la lourdeur des calculs, on se place toujours dans des cas de résonance fondamentale.

Si on balaie l'ensemble des ω et l'ensemble des μ , le point x_{IS} défini par

$$x_{IS} = \min_{\omega} \min_{\mu} (x_T(\omega))$$

donne l'abscisse critique de la stabilité secondaire.

On aurait alors l'abscisse à laquelle l'écoulement devient tridimensionnel. Malheureusement, on va voir que la situation est moins nette.

Relation entre le mode secondaire et l'instabilité primaire

En y regardant de plus près, on s'aperçoit que le mode secondaire obtenu s'identifie à l'instabilité primaire lorsque l'amplitude A décroît. En effet,

$$\mathcal{N}\mathcal{S}(\vec{U}_0 + A(\vec{u}_1 + \vec{v}_1) + \vec{u}_3) = 0$$

admet $\vec{u}_3 = \vec{v}_1$ quand $A \rightarrow 0$ comme solution particulière

car l'équation se réduit alors au problème primaire. Ceci est vrai que μ soit nul, auquel cas on retrouve des ondes primaires longitudinales, ou que μ soit différent de 0, auquel cas on retrouve des ondes primaires obliques de la forme $\exp(i[\alpha x + \beta z - \omega t])$ avec $\beta = \mu$.

Or, le mode présenté au paragraphe IV.1.6 est justement cette solution particulière lorsque A tend vers 0. La figure IV.8 représente l'opposé des taux d'accroissement temporels secondaire et primaire en fonction de l'obliquité. Avec les notations précédemment introduites, les résultats secondaires donnent en symboles circulaires la valeur de σ_i en fonction de μ pour les modes accordés c'est-à-dire les valeurs propres telles que $\sigma_r \ll 1$. L'amplitude A vaut 2.3×10^{-3} qui correspond, pour $x = 10$ à une amplitude A_0 de 10^{-3} à la courbe neutre. Les résultats primaires, en trait plein concernent le mode d'instabilité pariétale d'obliquité $\beta = \mu$ pour une approche temporelle, afin de pouvoir se comparer, avec α supposé réel et ω complexe. Le taux d'accroissement temporel est donc ω_i .

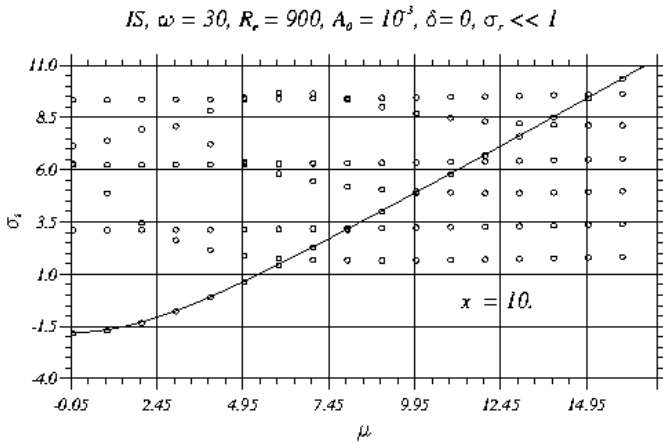


FIG. IV.8 – *Opposé du taux d'accroissement temporel des valeurs propres secondaires (symboles) et d'une onde primaire oblique (trait plein) en fonction de l'obliquité.*

On constate que pour cette faible amplitude, mais à peu près représentative des amplitudes mesurées dans le montage VECLA, les résultats primaires et secondaires se confondent ce qui signifie qu'on n'a pas d'instabilité secondaire bien qu'on trouve $\sigma_i < 0$. Bien entendu, cette situation évolue lorsque l'amplitude A devient élevée comme on l'a vu sur les figures IV.4 et IV.5 qui concernaient le même mode secondaire.

Néanmoins, ceci soulève une difficulté de définition de la transition à l'instabilité secondaire puisque le critère $\sigma_i < 0$ est insuffisant. Ce seul critère indiquerait en effet que la transition secondaire se produit en même temps que la transition primaire même pour des amplitudes très faibles puisque les taux d'accroissement sont identiques.

Recherche d'un point critique secondaire

On conserve l'idée de partir d'une onde primaire d'amplitude raisonnable et de la laisser s'amplifier jusqu'à ce que des phénomènes secondaires apparaissent.

Pour essayer de discerner cette apparition, on va comparer l'évolution en x des taux d'amplification secondaires avec celle des taux d'amplification primaires de même obliquité.

La figure IV.9 représente cette évolution (en fait, celle de l'opposé du taux d'accroissement temporel) pour différentes valeurs de l'obliquité. L'onde primaire considérée est d'amplitude $A_0 = 10^{-3}$

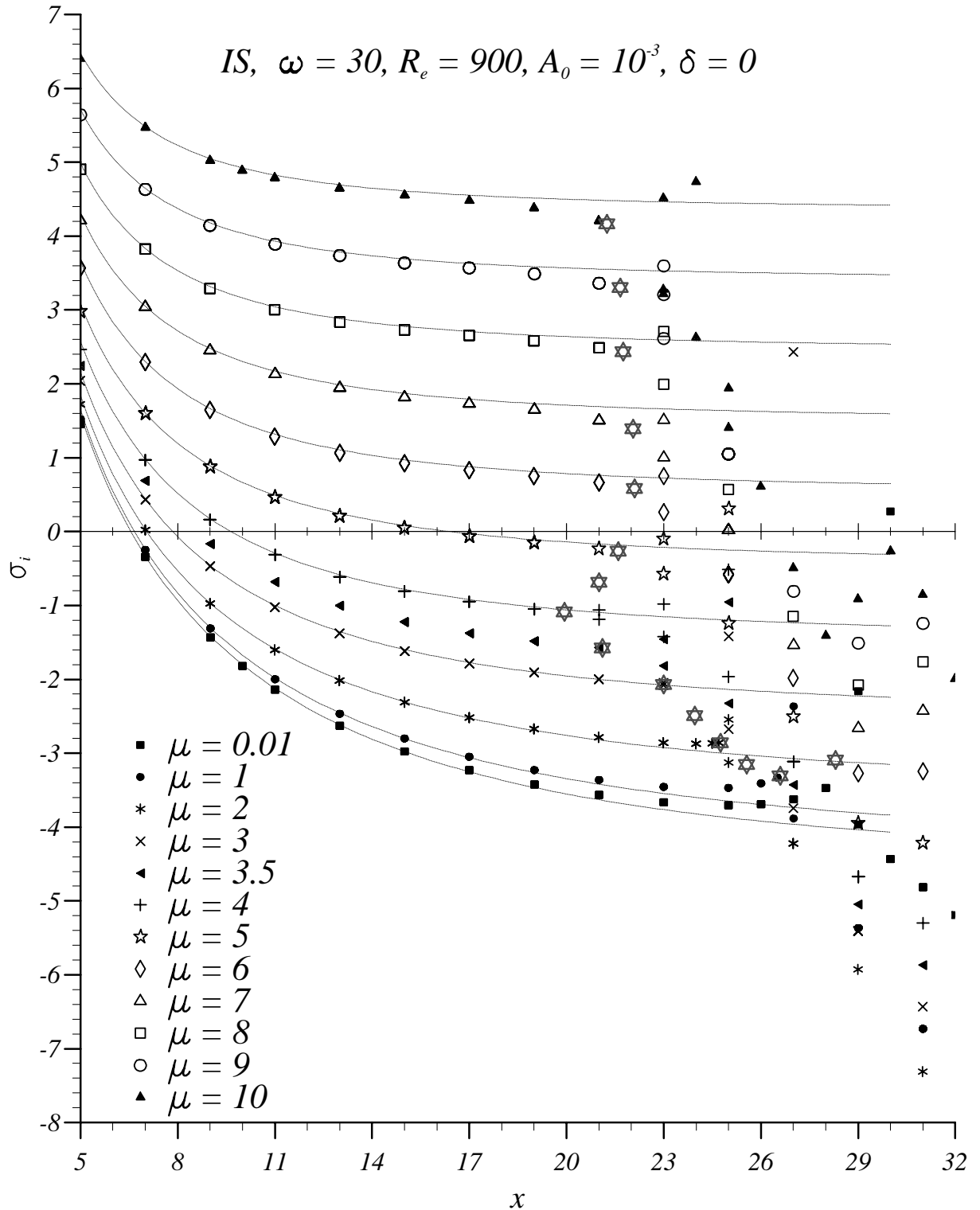


FIG. IV.9 – Evolution avec l'abscisse des taux d'accroissement temporel pour différents nombres d'onde transversaux (symboles). L'amplitude primaire est déduite de la théorie linéaire primaire avec une amplitude initiale de l'onde primaire de $A_0 = 10^{-3}$ (à la courbe neutre). Les lignes représentent le taux d'accroissement temporel des modes primaires obliques de même obliquité. Les grosses étoiles dénotent la position de la bifurcation qui peut être vue comme une transition secondaire.

sur la courbe neutre, avec $\omega = 30$ et $\mathcal{R}_{inj} = 900$. On suppose comme dans le cas de la figure IV.3 que $\delta = 0$ (nécessaire à la résonance fondamentale) est la valeur la plus favorable à une transition secondaire. Les résultats secondaires sont donnés sous forme de symboles tandis que les résultats primaires d'oblicité correspondante sont sous forme de traits.

Jusqu'à une abscisse de l'ordre de 20, les ondes secondaires calculées ne sont autres que des ondes primaires. Ensuite, interviennent des transitions qualitatives du comportement des modes secondaires pour les différents μ sur lesquelles on reviendra plus précisément au paragraphe suivant. Les points critiques définis par ces bifurcations sont repérés sur la figure IV.9 par des grosses étoiles à six branches. Cependant, jusqu'à une abscisse d'environ 26, les modes les plus amplifiés restent les modes primaires longitudinaux, c'est-à-dire avec $\mu \approx 0$. On peut donc penser qu'avant cette seconde abscisse seule l'instabilité primaire a une chance d'être observée expérimentalement et que la tridimensionnalisation de l'écoulement ne peut se produire qu'au-delà.

Bifurcation

La figure IV.9 peut laisser croire, à tort, qu'on passe d'une valeur propre à deux valeurs propres distinctes au franchissement de la transition repérée par les étoiles. Il n'en est rien.

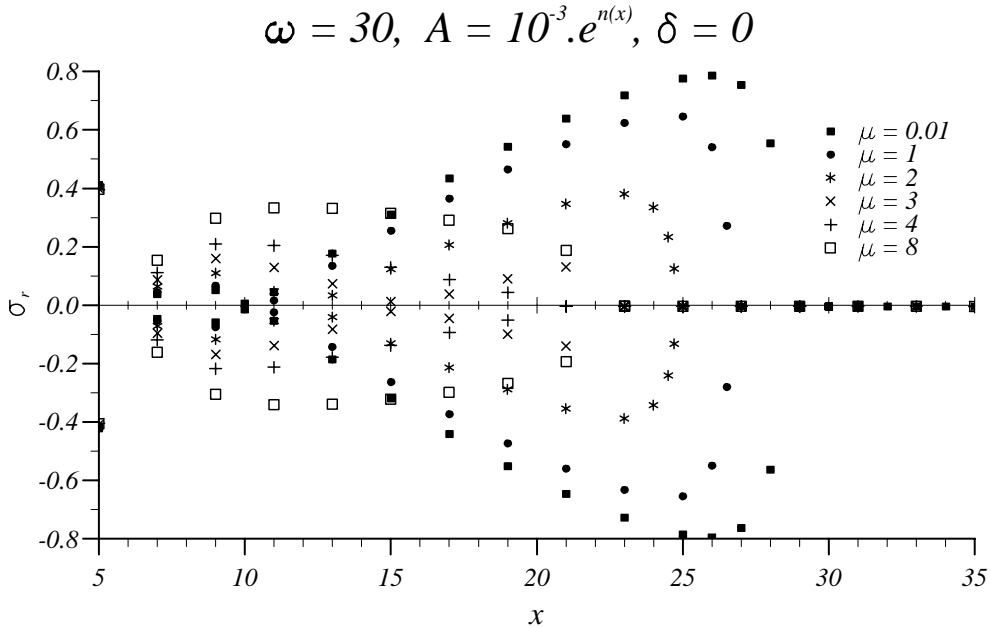


FIG. IV.10 – Evolution de σ_r lors des mêmes calculs qu'à la figure IV.9.

En fait, en amont de la transition, chaque point dénote la présence de deux modes très proches l'un de l'autre avec $\sigma_r < 1$ mais non-nul, comme le montre la figure IV.10 qui regroupe les valeurs des σ_r correspondant aux σ_i de la figure IV.9. Plus précisément, si pour l'un d'eux on a

$$\sigma = \sigma_r^1 + i\sigma_i^1 \text{ et } \hat{q}^{(m)} = \hat{q}_1^{(m)}$$

alors l'autre obéit aux relations

$$\sigma = -\sigma_r^1 + i\sigma_i^1 \text{ et } \hat{q}^{(m)} = \hat{q}_1^{(-m)} \quad (\text{IV.13})$$

mais pour chacun

$$\hat{q}^{(m)} = \hat{q}_1^{(-m)}$$

La figure IV.11 montre les fonctions propres des termes tels que $|m| \leq 4$ pour l'un des deux modes à $x = 15$. Comme on pouvait s'y attendre d'après la comparaison avec les ondes primaires obliques, le terme $m = 1$ (de même oblicité) est bien plus grand que les autres. Cela confirme qu'à cette abscisse,

la série de Fourier (IV.8) se réduit à un seul mode comme dans le cas de la stabilité primaire. (Si on traçait les fonctions propres de l'autre mode avec σ_r opposé, le terme principal serait $m = -1$ comme indiqué par la relation (IV.13).)

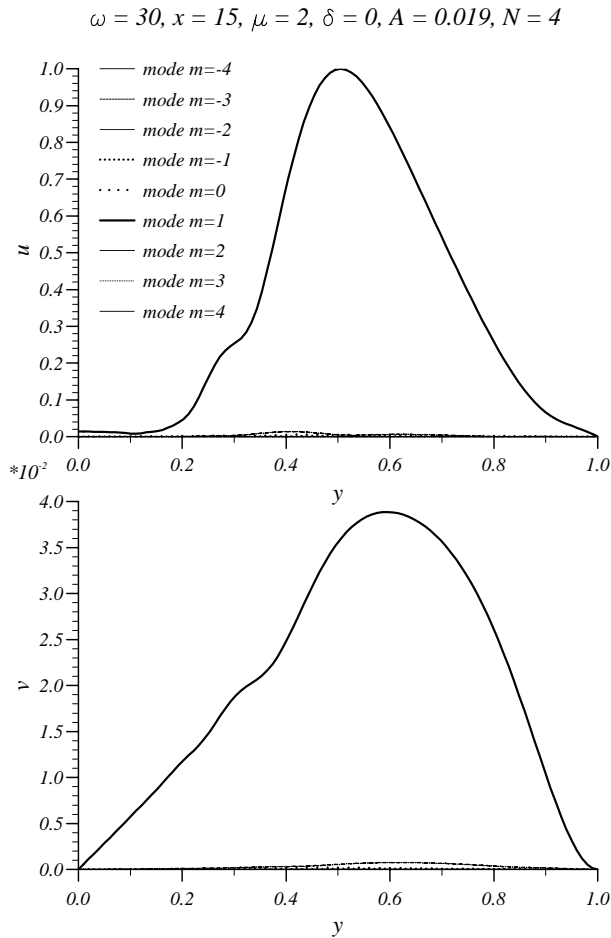


FIG. IV.11 – Fonctions propres de vitesse axiale (u) et verticale (v) pour les différents termes de Fourier à l'amont de la bifurcation.

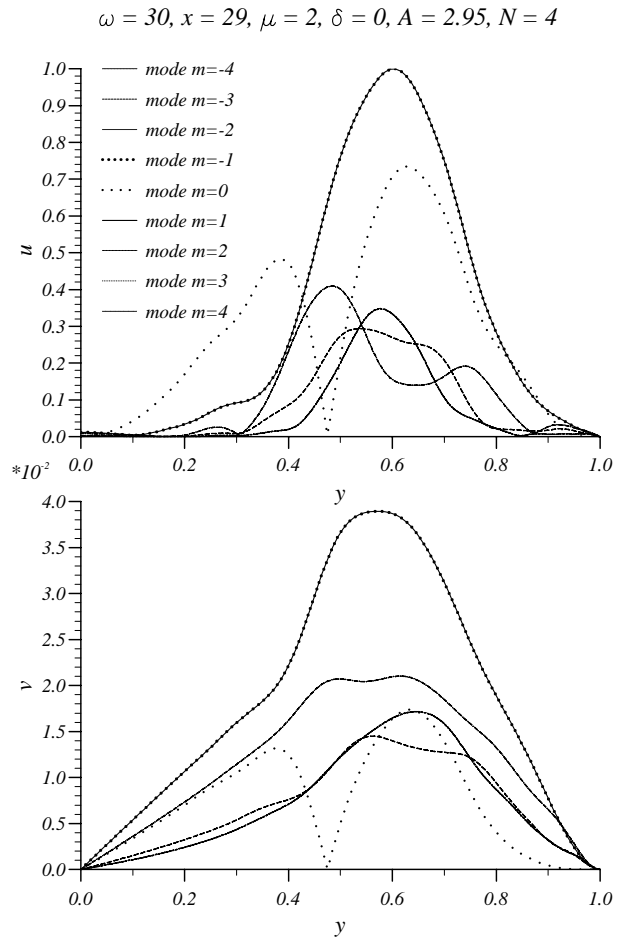


FIG. IV.12 – Fonctions propres de vitesse axiale (u) et verticale (v) pour les différents termes de Fourier à l'aval de la bifurcation.

Au contraire, au-delà de la transition, σ_r vaut exactement zéro (à la précision numérique) et

$$\hat{q}^{(m)} = \hat{q}^{(-m)} \quad (\text{IV.14})$$

pour chacun des deux modes mais les fonctions propres et les taux d'accroissement varient d'un mode à l'autre. La figure IV.12 montre les termes tels que $|m| \leq 4$ pour le moins stable des deux à $x = 29$. La relation (IV.14) est satisfaite et les termes principaux sont $m = \pm 1$ mais les autres termes sont du même ordre. De ce fait, le comportement est clairement différent de l'instabilité primaire.

Le schéma IV.13 représente l'évolution des positions respectives des deux valeurs propres avant et après la bifurcation. Remarquons qu'un tel passage d'une paire de modes complexes conjugués désaccordés à deux modes accordés n'a rien d'exceptionnel et se retrouve chez Ehrenstein et Koch [EK91] ainsi que chez Pugh et Saffman [PS88].

Résultats en théorie spatiale

Comme les observations expérimentales se font à abscisses fixées sans origine des temps clairement définie, la question se pose naturellement de savoir si les tendances obtenues en théorie temporelle sont significatives pour les mesures spatiales.

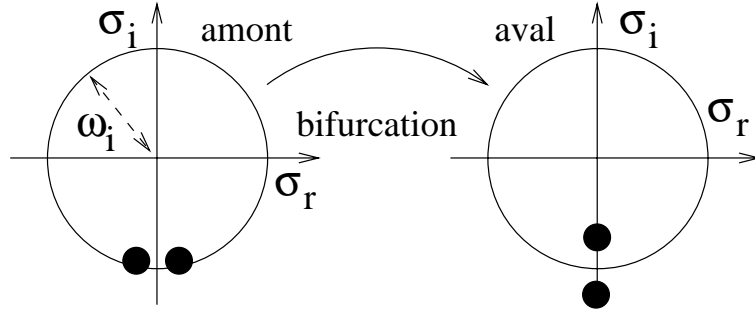


FIG. IV.13 – Evolution des positions respectives des deux valeurs propres avant et après la bifurcation.

Si par exemple, la vitesse de groupe des ondes secondaires diminuait fortement après la bifurcation, ces ondes pourraient devenir spatialement très instables par rapport à l'instabilité primaire et devenir de ce fait expérimentalement observables.

Les calculs montrent en fait que les rapports des amplifications spatiales primaires et secondaires sont tout à fait semblables à ceux des amplifications temporelles primaires et secondaires.

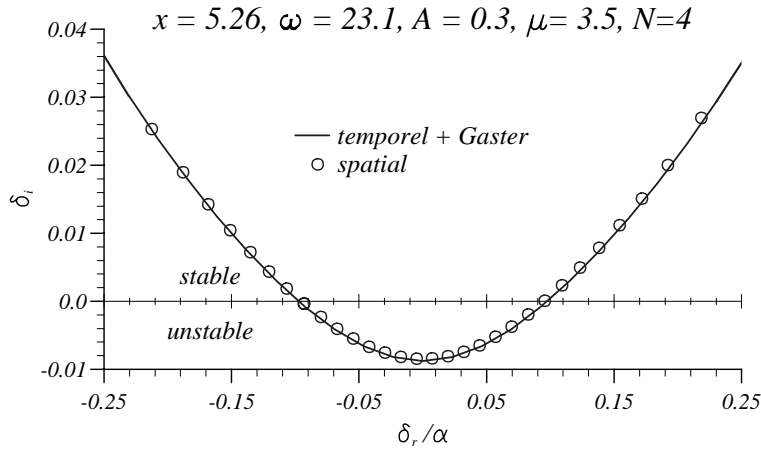


FIG. IV.14 – Comparaison des résultats de l'analyse spatiale et des résultats temporels transformés par la relation de Gaster étendue à l'instabilité secondaire.

On a d'ailleurs pu vérifier au passage que la relation de Gaster étendue par Bertolotti [Ber85] à l'instabilité secondaire donne des résultats très satisfaisants. Elle relie les taux d'accroissement spatiaux et temporels par

$$\delta_i = \frac{\sigma_i}{C + c_g} = \frac{\sigma_i}{\frac{\omega}{\alpha} - \frac{\partial \sigma_r}{\partial \delta_r}}$$

avec C la vitesse de phase de l'onde primaire et c_g la vitesse de groupe de l'onde secondaire dans le repère en translation (donc $C + c_g$ est la vitesse de groupe de l'onde secondaire dans le repère fixe). Une illustration en est donnée en figure IV.14 où la relation est appliquée à des taux d'accroissement temporels tirés de la figure IV.3 avec $N = 4$. Les symboles donnent les taux d'amplification secondaires obtenus directement par approche spatiale.

La vitesse de groupe ne subissant pas d'évolution rapide à la transition, les résultats temporels sont suffisants.

Position de la bifurcation

La question suivante qui se pose naturellement concerne la position de cette transition. La figure IV.15 donne les premières tendances. On y représente le taux d'amplification temporel du mode secondaire avec $\mu = 4$ (on choisit le plus amplifié au-delà de la bifurcation) en fonction de l'abscisse pour deux amplitudes initiales et pour deux valeurs de la pulsation primaire. Comme précédemment, l'amplitude de l'onde primaire croît selon l'amplification prévue par la théorie primaire à partir de la valeur A_0 sur la courbe neutre.

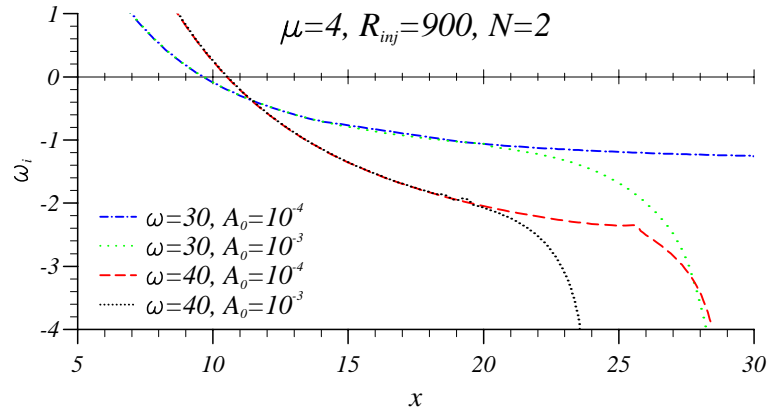


FIG. IV.15 – Taux d'amplification temporel fonction de x pour deux amplitudes initiales $A_0 = 10^{-3}$ et $A_0 = 10^{-4}$ et deux pulsations $\omega = 30$ et $\omega = 40$.

Les deux valeurs d'amplitude initiale A_0 sont représentatives de celles estimées dans VECLA mais correspondent à des comportements différents du montage comme on va le voir plus loin.

L'effet de l'amplitude initiale est très net sur la figure IV.15 où on constate à $\omega = 30$ que la bifurcation ne se produit pas en deçà de $x = 30$ quand $A_0 = 10^{-4}$ alors qu'elle intervient vers $x = 20$ quand $A_0 = 10^{-3}$. La situation est moins tranchée à $\omega = 40$ puisque la bifurcation avance de 5 lorsque l'amplitude est multipliée par 10. Cette différence s'explique probablement par le fait que l'onde primaire croît beaucoup plus vite pour $\omega = 40$ et compense donc rapidement l'écart d'amplitude initial.

Remarque sur la validité des résultats

Avec $A_0 = 10^{-3}$, l'abscisse $x = 20$ de transition correspond à une amplitude raisonnable de $A \approx 0.2$, mais à l'abscisse $x = 26$ (où les modes tridimensionnels deviennent plus amplifiés que les modes bidimensionnels) l'amplitude $A \approx 1.6$ semble beaucoup trop élevée puisqu'on a fait l'hypothèse $A \ll 1$ pour avoir $A^2 \ll \varepsilon < A$.

Cependant, il faut signaler qu'on suppose en fait que les termes quadratiques primaires sont négligeables par rapport aux termes linéaires primaires. Cela signifie que A^2 doit être bien plus petit que $A\bar{U}$, $A\frac{\partial\bar{U}}{\partial y}$, $A\bar{V}$ et $A\frac{\partial\bar{V}}{\partial y}$. Dans une analyse de stabilité parallèle classique, les deux derniers termes sont supprimés et les seuls termes restants sont $A\bar{U}$, $A\frac{\partial\bar{U}}{\partial y}$. La condition devient

$$A \ll \bar{U}, \quad A \ll \frac{\partial\bar{U}}{\partial y}$$

Cela conduit pour l'écoulement de Taylor à

$$A \ll x$$

qui est vérifié à l'abscisse de transition obtenue. Le problème est que pour l'écoulement de Taylor près de la paroi, les termes $A\bar{V}$ et $A\frac{\partial\bar{V}}{\partial y}$ ne peuvent être négligés comme on l'a vu sur l'étude du non-parallélisme. L'analyse n'est justifiée pour toutes les valeurs de y que si $A \ll 1$.

Ainsi, on pourrait croire que si une fine couche vers la paroi est négligée, l'analyse secondaire est à peu près justifiée jusqu'à l'abscisse de transition. Mais en fait, de même que le retrait des équations des termes non-parallèles rend stable l'écoulement de Taylor, la suppression de ces mêmes termes fausse complètement le comportement non-linéaire puisqu'on verra à la section suivante que l'abscisse de transition ne peut pas être légitimement calculée à partir de résultats de stabilité linéaire.

Une autre difficulté provient de l'hypothèse (IV.12) qui exprime que l'onde primaire n'apparaît périodique, donc d'amplitude constante, du point de vue de l'onde secondaire que si cette dernière a un taux d'amplification nettement plus élevé. Or ces deux taux d'amplification peuvent être comparés sur la figure IV.9. Comme l'onde primaire utilisée est longitudinale, il ne faut considérer que la courbe primaire ayant le taux d'amplification le plus élevé. Il apparaît alors clairement que l'hypothèse (IV.12) n'est jamais vérifiée hormis loin à l'aval où la condition $A \ll 1$ n'est plus satisfaite. Les résultats obtenus sortent donc du cadre des hypothèses de validité, on ne sait donc quelle confiance leur accorder.

Comparaison à l'expérience

Les phénomènes de type non-linéaires apparaissent sur les spectres expérimentaux II.18 et II.19 vers l'abscisse $x = 19$ et probablement dans les visualisations I.14 à partir de $x = 20$ environ. Ces observations correspondent cependant à des comportements foncièrement différents, présentés au paragraphe I.6.2, qui doivent ici être distingués.

Les spectres II.18 et II.19 sont obtenus pour un écoulement de type 1 c'est-à-dire laminaire jusqu'à la sortie avec une bande de fréquences spatialement amplifiées relativement large. On trouve dans ce cas une amplitude initiale A_0 de l'ordre de 0.6×10^{-4} une fois rendue sans dimension.⁵ Les courbes $A_0 = 10^{-4}$ de la figure IV.15 s'appliquent donc à ce cas. Vers $x = 19$, l'amplitude primaire typique vaut $A \approx 3 \times 10^{-2}$ pour ω de l'ordre de 30 à 40. Cette faible valeur, ainsi que la figure IV.15 permettent de conclure que les phénomènes non-linéaires visibles sur les spectres à $x = 19$ ne relèvent pas de la stabilité secondaire. Ainsi, le défaut d'amplitude fluctuante, par rapport aux prédictions, en $x = 19$ pour les spectres II.19 qui sont ceux qui indiquent les non-linéarités les plus importantes, peut être interprété comme le début d'une saturation. Si cette hypothèse est vérifiée, cela signifie que dans le cas où la tridimensionnalisation se produirait plus à l'aval (si on allongait VECLA par exemple), il ne serait pas possible de la prévoir en considérant des ondes primaires indépendantes mais il serait nécessaire de modéliser d'abord la saturation avec une approche de stabilité non-linéaire. Des tentatives dans ce sens seront faites à la section suivante.

Les visualisations I.14 montrant des structures tourbillonnaires ont été réalisées sur deux sortes d'écoulements : les écoulements de type 3 *i.e.* en résonance aéroacoustique, et les écoulements de type 4 *i.e.* laminaires de spectres dominés par un pic de fréquence étroit distinct des modes acoustiques de cavité. Chacun d'eux est visuellement similaire sur les images réalisées. Néanmoins, les amplitudes des oscillations produites diffèrent d'un facteur 2 environ, la résonance ayant bien sûr les niveaux les plus forts. On dispose dans les deux cas de mesures au point $x = 22.5$ et $y = -0.9$ (*i.e.* à un dixième de hauteur de la paroi) qui permettent d'estimer les fluctuations rms adimensionnelles ($\sqrt{(u_{exp} - \bar{u}_{exp})^2}/V_{inj}$) à 0.8 pour le type 4 et à 2 pour le type 3. Les spectres étant quasi-monofréquentiels, avec $\omega \sim 38$ pour le type 4 et ω variant par sauts de 38 à 29 pour le type 3, on peut en déduire une amplitude primaire respective d'environ⁶ 0.6 et 1.4 pour les pulsations indiquées, c'est-à-dire une amplitude initiale respectivement de l'ordre de $A_0 \sim 10^{-3}$ et $A_0 \sim 2 \times 10^{-3}$.

Comme les visualisations sont effectuées avec une veine débouchant à l'abscisse $x = 30$, la figure IV.15 montre qu'il est possible qu'un début de tridimensionnalisation se produise pour l'écoulement

5. On tient compte dans le calcul de la définition IV.1 de l'amplitude, associée à la normalisation de u_1 , qui montre que l'amplitude mesurée à la position y_{max} du maximum de fluctuation vaut $2A$ et non pas A en raison de la somme $u_1(y_{max}) + \bar{u}_1(y_{max}) = 2$.

6. On tient compte du facteur $\sqrt{2}$ du passage des amplitudes rms aux amplitudes 0-crête, et du facteur 2 de la précédente note de bas de page.

de type 4 puisque la courbe correspondante ($A_0 = 10^{-3}$, $\omega = 40$) indique la bifurcation vers l'abscisse $x = 20$. Mais attention, on rappelle que celle-ci n'est qu'un précurseur de la tridimensionnalisation qui n'intervient que plus à l'aval, vers $x = 26$ si on extrapole les résultats de la figure IV.9. De plus, les amplitudes atteintes à cette dernière abscisse sont très élevées et l'utilisation de la théorie linéaire pour le calcul de l'onde primaire n'est plus du tout légitime comme on le verra à la section suivante. On en conclut donc que les structures mises en évidence par les visualisations I.14 sont bidimensionnelles au moins entre $x = 20$ et $x = 26$. De ce fait, l'émission de structures peut être correctement prédite par des calculs bidimensionnels.

La tridimensionnalisation est plus probable lors des résonances (type 3) puisque celles-ci admettent des amplitudes initiales plus élevées et existent aussi pour des pulsations plus faibles; néanmoins, la légitimité d'un calcul linéaire pour l'obtention de l'onde primaire est à nouveau en doute et la présence d'acoustique avec des niveaux importants ne permet pas de garantir la fiabilité de résultats qui n'en tiennent pas compte.

Conclusion sur la stabilité secondaire

La théorie de la stabilité linéaire est un outil utile à la compréhension des différents comportements expérimentaux observés dans VECLA mais des investigations dans le domaine non-linéaire sont cependant nécessaires. La théorie de l'instabilité secondaire n'est pas à proprement parler une théorie non-linéaire mais elle donne certaines informations dépendant de l'amplitude des ondes primaires et constitue de ce fait une première étape.

L'écoulement de Taylor peut être le siège de résonances fondamentales pour des amplitudes élevées de l'onde primaire. Pour des amplitudes plus proches de certaines conditions expérimentales, une bifurcation ne se produit que pour des abscisses plus grandes que 20. Cependant, son effet sur l'écoulement ne peut se ressentir qu'encore plus à l'aval car les taux d'amplification secondaires restent inférieurs aux taux d'amplification de l'onde primaire. Dans cette zone à l'aval où les effets secondaires pourraient intervenir, les critères de validité de l'approche utilisée sont pris en défaut, on ne peut donc pas garantir la fiabilité des résultats. Une analyse non-linéaire serait en toute rigueur nécessaire pour calculer les ondes primaires dont les amplitudes ne sont plus infinitésimales lorsque la transition secondaire est susceptible de se produire. Une telle analyse, mais de portée limitée, va être mise en œuvre dans la section suivante.

Si on suppose tout de même les résultats justifiés en ce qui concerne VECLA, on tire les conclusions suivantes dépendant du type de comportement parmi ceux distingués au paragraphe I.6.2.

- les effets non-linéaires visibles sur les spectres expérimentaux II.18 et II.19 d'écoulements de type 1 ne relèvent pas d'une tridimensionnalisation de l'écoulement;
- les écoulements de type 4 de spectres à bande étroite dominés par la seule pulsation $\omega \sim 38$ présentent peut-être des caractéristiques tridimensionnelles au fond arrière mais les structures mises en évidence par les visualisations I.14 sont bidimensionnelles à leur apparition et sur plusieurs longueurs d'ondes à l'aval;
- les résonances aéroacoustiques (type 3) impliquent probablement un écoulement tridimensionnel à l'aval mais la présence de fluctuations acoustiques d'amplitude importante rend les résultats incertains.

Un intérêt de l'étude, *a priori*, consiste à justifier, ou à invalider, les simulations numériques 2D. Les résultats sont cependant mitigés puisqu'on peut dire que ces simulations sont suffisantes pour prévoir un écoulement de type 1, tout à fait susceptibles de décrire correctement l'écoulement de type 4 mais relativement incertaines pour l'écoulement de type 3 (résonance) qui constitue l'objectif principal du programme ASSM.

IV.2 Systèmes non-linéaires d'amplitude finie

IV.2.1 Etats d'équilibre non-linéaires pour un écoulement parallèle

Avant d'exposer le cas de l'écoulement de Taylor, on va s'intéresser à celui des écoulements parallèles tels que celui de Poiseuille. L'idée de la recherche de fluctuations non-linéaires saturées dans ce type d'écoulement remonte au moins à 1974 avec Zahn *et al.* [ZTSG74]. Une forme mathématiquement acceptable de perturbation non-linéaire bidimensionnelle longitudinale est

$$q(x, y, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{q}_n(y) \exp[in(\alpha x - \omega t)] \quad (\text{IV.15})$$

qui représente une somme d'ondes harmoniques de même vitesse de phase. Cependant, si $\alpha_i \neq 0$ on constate que lorsque n tend vers $\pm\infty$ les modes s'amplifient infiniment vite ce qui n'est pas physiquement acceptable.

Reste un cas mathématiquement et physiquement valable : celui où $\alpha_i = 0$, c'est-à-dire le cas d'un *système d'ondes en équilibre*. Il représente le cas observable sur certains écoulements d'une *saturation non-linéaire* succédant à une amplification linéaire. Ainsi, l'idée de l'étude est non pas de calculer l'évolution non-linéaire à partir d'une onde linéaire (problème qui soulève d'importantes difficultés et dépend fortement des conditions initiales) mais de calculer directement un résultat possible sinon probable de cette évolution (problème mathématiquement bien posé et indépendant de conditions initiales).

Rien ne permet cependant d'affirmer qu'un tel état puisse réellement exister car d'autres phénomènes, comme une transition secondaire ou la transition à la turbulence, peuvent se produire avant que les amplitudes requises pour la saturation ne soient atteintes. De plus, l'écriture IV.15 suppose une allure particulière du spectre avec une fréquence fondamentale $\omega/2\pi$ et ses harmoniques ce qui limite sa portée.

IV.2.2 Application à l'écoulement de Taylor

En raison du non-parallélisme de l'écoulement de Taylor, la forme (IV.15) de système d'ondes en équilibre n'est pas valable. On va donc réutiliser le même changement de variable que celui qui a permis des avancées sur le non-parallélisme linéaire.

On se limite au cas plan bidimensionnel. On décompose la fonction de courant en une partie connue correspondant à l'écoulement de Taylor et une perturbation inconnue (Attention, il ne s'agit plus d'une décomposition en partie moyenne et partie fluctuante car la perturbation n'est pas de moyenne nulle)

$$\Phi = \bar{\Phi} + \phi$$

Après injection dans les équations de Navier-Stokes et prise en compte de ce que la solution de Taylor les vérifie (aux termes visqueux près qui sont négligés⁷), l'équation sur la partie inconnue de la fonction de courant s'écrit

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \Delta \right) (\Delta \phi) - \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) (\Delta \phi)$$

soit avec la forme analytique de la solution de Taylor

$$-\frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} (\Delta^2 \phi) + \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \phi) + \left[\frac{\pi}{2} x \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x} - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} \right] (\Delta \phi + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \phi) = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) (\Delta \phi)$$

Par analogie avec le cas linéaire, on introduit la variable $\xi = \ln x$. L'équation de fonction de courant devient

7. Cette imprécision sur l'écoulement de base pourrait toutefois se révéler gênante pour le calcul et la comparaison des termes de distorsion q_0 mais aucune étude approfondie n'a été menée à ce sujet.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \left[\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} \right] \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \phi \right) \\
 & + \frac{1}{x^2} \left[-2 \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial t} + \pi \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} - 1 \right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} \right] \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \\
 & - \frac{1}{x^4 \mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial \xi^4} - 6 \frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^3} + 11 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - 6 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \\
 & = -\frac{1}{x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi \partial y^2} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} \right) - \frac{1}{x^3} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^3} - 3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^2 \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial y} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{IV.16}$$

L'intérêt du changement de variable est que l'équation semble maintenant faiblement dépendante de x , au moins pour les grandes valeurs de l'abscisse si bien que des méthodes classiques peuvent être employées.

IV.2.3 Forme de perturbation à l'ordre principal

Afin d'obtenir une forme de perturbation simple, on propose une analyse locale de l'équation non-linéaire pour les abscisses élevées telles que $x/x_0 = \mathcal{O}(1)$ où la quantité $1/x_0^2$ est supposée petite et utilisée comme petit paramètre de développements asymptotiques. Ainsi, les résultats seront valables dans la limite des abscisses élevées.

Le développement suivant est introduit :

$$\phi(\xi, y, t) = \phi^{(0)}(\xi, y, t) + \frac{1}{x_0^2} \phi^{(1)}(\xi, y, t) + \dots = \sum_{p=0}^P \frac{1}{x_0^{2p}} \phi^{(p)}(\xi, y, t) \tag{IV.17}$$

En gardant seulement les ordres les plus bas de la partie linéaire (membre de gauche) et de la partie non-linéaire (membre de droite) de (IV.16), l'équation non-linéaire suivante est obtenue

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \frac{\partial^4 \phi^{(0)}}{\partial y^4} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \phi^{(0)}}{\partial y^2} \right) + \left[\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{\partial}{\partial \xi} - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} \right] \left(\frac{\partial^2 \phi^{(0)}}{\partial y^2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \phi^{(0)} \right) \\
 & = -\frac{1}{x} \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial y} \frac{\partial^3 \phi^{(0)}}{\partial \xi \partial y^2} - \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial \xi} \frac{\partial^3 \phi^{(0)}}{\partial y^3} \right)
 \end{aligned} \tag{IV.18}$$

Puisqu'on cherche des solutions non-linéaires, *les termes linéaires d'ordre le plus bas et les termes non-linéaires d'ordre le plus bas doivent être d'amplitude comparable* donc de même évolution en x . Cette condition est satisfaite si l'amplitude de ϕ est linéaire en x . Dans ce cas, l'équation à l'ordre le plus bas ne dépend plus explicitement de x si bien que la forme classique (IV.15) de système d'ondes en équilibre (avec la coordonnée ξ) peut être appliquée à l'ordre 0.

En revenant, à la coordonnée x initiale, la forme de perturbation choisie à l'ordre 0 est

$$\phi^{(0)} = \varepsilon \sum_{n=-N}^N \hat{\phi}_n^{(0)}(y) x^{in\lambda_i + 1} e^{-in\omega t} \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{R} \tag{IV.19}$$

Dans cette expression, la constante multiplicative représentant l'amplitude ε (éventuellement grande devant 1) reste arbitraire tant qu'une normalisation n'est pas choisie. La normalisation adoptée est précisée plus loin. On note λ_i le paramètre réel définissant le nombre d'onde pour souligner qu'il a la même signification que la partie imaginaire du complexe λ des analyses linéaires utilisant la forme en x^λ .

La forme de perturbation non-linéaire (IV.19), asymptotiquement valide pour les grandes abscisses correspond à un système d'ondes linéairement accélérées de même vitesse de phase $\omega x/\lambda_i$, de

fréquences $n\omega/2\pi$, de longueurs d'onde linéairement croissantes $2\pi x/(n\lambda_i)$ et d'amplitude en croissance linéaire avec l'abscisse. Elle représente une perturbation convectée avec l'écoulement moyen se propageant de façon telle que

$$\frac{\text{vitesse axiale de perturbation}}{\text{vitesse axiale de base}} = \text{constante}$$

$$\frac{\text{vitesse verticale de perturbation}}{\text{vitesse verticale de base}} = \text{constante}$$

C'est pourquoi on va parler de ce type de solutions comme d'un *système d'ondes en équilibre*. Bien qu'il ne soit pas tout à fait approprié, on va aussi utiliser le mot *saturation* pour désigner le passage des fortes amplifications prévues par la stabilité linéaire à la faible croissance (linéaire vis-à-vis de l'abscisse pour la vitesse axiale mais nulle pour la vitesse verticale) des solutions non-linéaires.

IV.2.4 Problème non-linéaire aux valeurs propres

En introduisant la forme de perturbation (IV.19) dans (IV.16) et en séparant chaque terme en $x^{in\lambda_i+1}e^{-in\omega t}$, on obtient le système suivant pour chaque n tel que $-N \leq n \leq N$ où N est un rang de troncature nécessaire à la mise en forme numérique du problème.

$$-\frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \frac{d^4 \hat{\phi}_n^{(0)}}{dy^4} - in\lambda_i C \frac{d^2 \hat{\phi}_n^{(0)}}{dy^2} + \left[\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) (in\lambda_i + 1) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{d}{dy} \right] \left(\frac{d^2 \hat{\phi}_n^{(0)}}{dy^2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \hat{\phi}_n^{(0)} \right) = -\varepsilon NL_n^\phi \quad (\text{IV.20})$$

où $C = \frac{\omega}{\lambda_i}$ et

$$NL_n^\phi = \sum_{k=-N}^N \left((i(n-k)\lambda_i + 1) \frac{d\hat{\phi}_k^{(0)}}{dy} \frac{d^2 \hat{\phi}_{n-k}^{(0)}}{dy^2} - (ik\lambda_i + 1) \hat{\phi}_k^{(0)} \frac{d^3 \hat{\phi}_{n-k}^{(0)}}{dy^3} \right)$$

Les conditions aux limites sont imposées avec les mêmes arguments que dans le cas linéaire. Comme l'injection est supposée uniforme, constante et normale à la paroi, et puisque l'écoulement de base satisfait ces conditions, les perturbations de vitesse axiale et de vitesse verticale doivent être nulles à la paroi. Il en résulte⁸

$$\forall n, \quad \frac{d\hat{\phi}_n^{(0)}}{dy}(1) = \hat{\phi}_n^{(0)}(1) = 0 \quad (\text{IV.21})$$

Comme on s'intéresse seulement aux modes variqueux (parce que VECLA n'a qu'une paroi débitante), la symétrie⁹ impose que tous les $\hat{\phi}_n^{(0)}$ soient impairs

$$\forall n, \quad \frac{d^2 \hat{\phi}_n^{(0)}}{dy^2}(0) = \hat{\phi}_n^{(0)}(0) = 0 \quad (\text{IV.22})$$

Comme la solution doit être réelle (et non complexe)

$$\hat{\phi}_{-n}^{(0)} = \overline{\hat{\phi}_n^{(0)}} \quad (\text{IV.23})$$

si bien qu'il suffit de considérer les modes $n \geq 0$. La relation (IV.23) entraîne aussi que $\hat{\phi}_0^{(0)}$ est réel (ce terme n'est autre que la perturbation stationnaire de vitesse radiale).

8. Attention, ici s'introduit une différence avec le cas de la forme (IV.15). En effet, avec cette dernière il n'y a pas de perturbation de vitesse verticale associée au terme 0 puisque $v_0 = \frac{\partial}{\partial x}(\hat{\phi}_0 \exp[i0\lambda_i x]) = 0$. La condition à la limite correspondante est donc naturellement vérifiée, ce qui n'est pas le cas avec (IV.19).

9. Pour la validation effectuée sur l'écoulement de Poiseuille, on utilise aussi la symétrie de l'écoulement mais comme $\hat{\phi}_1^{(0)}$ est pair pour le premier mode linéairement instable, on a $\hat{\phi}_n^{(0)}$ pair si n est impair et $\hat{\phi}_n^{(0)}$ impair si n est pair.

Chaque équation de (IV.20) est du 4^e ordre¹⁰ complexe (en différenciation et pas en ordre de grandeur) si $n \neq 0$ et réelle si $n = 0$. On dispose de deux conditions aux limites de chaque côté du domaine, paroi et axe, qui sont complexes si $n \neq 0$ et réelles si $n = 0$ (car $\hat{\phi}_0^{(0)} \in \mathbb{R} \Rightarrow u_0^{(0)}, v_0^{(0)} \in \mathbb{R}$), on a donc suffisamment de conditions pour l'ordre du système complet.

Le système non-linéaire (IV.20) associé aux conditions aux limites homogènes (IV.21) et (IV.22) admet la solution triviale $\phi = 0$ parmi ses solutions. Ainsi, une solution non-triviale n'existe que si l'opérateur appliqué à ϕ devient non-inversible. Il s'agit d'un *problème aux valeurs propres non-linéaire*.

IV.2.5 Procédure numérique

Méthode

La procédure employée est celle d'Ehrenstein et Koch [EK91].

La discrétisation est réalisée à l'aide de la méthode de collocation spectrale, voir annexe B, en $M + 1$ points. La valeur de $\hat{\phi}_n^{(0)}$ au i^e point de collocation est notée $\hat{\phi}_n^i$ et i varie de 0 à M .

Une condition de normalisation doit encore être choisie pour définir la valeur de ε de façon unique. Dans la suite, la normalisation est

$$\frac{d\hat{\phi}_1^{(0)}}{dy}(0) = 1 \quad (\text{IV.24})$$

Les paramètres λ_i , \mathcal{R}_{inj} sont choisis et fixés.

Le vecteur d'inconnues se compose alors de

$$\vec{V}_{inc} = \left[(\hat{\phi}_0^i)_{i=[0,M]}; \{ \mathcal{R}(\hat{\phi}_n^i), \mathcal{I}(\hat{\phi}_n^i) \}_{n=[1,N], i=[0,M]}, C, \varepsilon \right]^t \quad (\text{IV.25})$$

dont les $M + 1 + 2N(M + 1) + 2 = (2N + 1)(M + 1) + 2$ termes sont réels. Les notations $\mathcal{R}(\hat{\phi}_n^i)$ et $\mathcal{I}(\hat{\phi}_n^i)$ désignent respectivement les parties réelle et imaginaire du complexe $\hat{\phi}_n^i$. La décomposition en parties réelle et imaginaire, bien que compliquant fortement l'implémentation, est rendue nécessaire par la volonté d'exploiter¹¹ (IV.23).

Chaque relation complexe de (IV.20) (de même que les conditions aux limites¹²) donne deux relations réelles pour chaque mode $n \neq 0$ à chaque point de collocation i soit $2N(M + 1)$ relations réelles. Le système (IV.20) ne donne pour $n = 0$ qu'une équation réelle (avec des conditions aux limites réelles) soit $(M + 1)$ relations réelles. Enfin la condition de normalisation (IV.24), complexe, donne 2 relations réelles supplémentaires. On a alors autant d'équations que d'inconnues.

Le problème peut s'écrire formellement

$$\vec{\mathcal{F}}(\vec{V}_{inc}) = \vec{0} \quad (\text{IV.26})$$

avec $\vec{\mathcal{F}}$ un opérateur réel, quadratique vis-à-vis du vecteur \vec{V}_{inc} de taille $(2N + 1)(M + 1) + 2$, tel que le vecteur $\vec{\mathcal{F}}(\vec{V}_{inc})$ soit de taille $(2N + 1)(M + 1) + 2$.

10. Si la forme (IV.15) est employée l'équation du terme 0 dégénère et devient d'ordre 2 (si l'écoulement de base est strictement parallèle, sinon le problème devient inextricable mais de toute façon injustifié) appliquée à $\frac{d^2 \hat{\phi}_0}{dy^2}$, ce qui compense la disparition des 2 conditions sur la vitesse verticale évoquée ci-dessus. La dégénérescence vient de ce que l'équation de quantité de mouvement selon y est trivialement vérifiée et la manipulation habituelle pour obtenir l'équation en fonction de courant se résume à une dérivation inutile. La solution la plus simple consiste à conserver $u_0^{(0)}$ plutôt que $\hat{\phi}_0^{(0)}$ comme inconnue. L'équation de quantité de mouvement selon x où $v_0^{(0)} = \frac{\partial}{\partial x}(\hat{\phi}_0^{(0)} \exp[i0\alpha x]) = 0$ est d'ordre 2 en $u_0^{(0)}$ et il suffit d'imposer comme conditions aux limites $u_0^{(0)}(\text{paroi}) = 0$ et $\frac{\partial u_0^{(0)}}{\partial y}(axe) = 0$.

11. Plus précisément, c'est en raison du choix de la méthode numérique exposée plus loin que l'utilisation de (IV.23) rend nécessaire la décomposition en parties réelle et imaginaire. En effet, si on garde des variables complexes et qu'on ne considère que les termes de 0 à N en espérant utiliser (IV.23), la méthode de Newton nécessite le calcul d'une matrice jacobienne faisant intervenir des termes en $\frac{d\bar{z}}{dz}$ qui n'existent pas du fait de la non-analyticité de l'application $z \rightarrow \bar{z}$.

12. Voir l'annexe B pour la substitution des conditions aux limites dans les relations tirées des équations

Remarquons que $\vec{V}_{inc} = \vec{0}$ n'est plus solution de (IV.26) puisque la condition de normalisation (IV.24) est incluse dans ce système ce qui permet de déshomogénéiser le problème.

La résolution de (IV.26) est effectuée par une méthode itérative de Newton qui nécessite le calcul de la matrice jacobienne $\frac{d\vec{\mathcal{F}}}{d\vec{V}_{inc}}$. Signalons que pour des raisons de temps de calcul et de précision, l'expression exacte de cette matrice jacobienne est entièrement programmée et n'utilise aucune approximation par différence finie. Cette méthode, lourde à implémenter est rendue possible par le caractère quadratique de $\vec{\mathcal{F}}$ vis-à-vis de \vec{V}_{inc} .

On fixe pour l'ensemble du calcul les paramètres de l'écoulement moyen x et \mathcal{R}_{inj} ainsi que le paramètre λ_i lié à la longueur d'onde. On se donne une estimation initiale $\vec{V}^{(0)}$ de \vec{V}_{inc} c'est-à-dire une estimation des fonctions propres, de la vitesse de phase et de l'amplitude. A chaque itération it , la nouvelle estimation $\vec{V}^{(it+1)}$ est obtenue par la formule de Newton

$$\vec{V}^{(it+1)} = \vec{V}^{(it)} - \left(\frac{d\vec{\mathcal{F}}}{d\vec{V}^{it}} \right)^{-1} \vec{\mathcal{F}}(\vec{V}^{it})$$

On interrompt le processus lorsque les vecteurs $\vec{V}^{(it)}$ n'évoluent plus (*i.e.* lorsqu'une mesure de l'écart entre deux vecteurs successifs passe en-dessous d'une certaine valeur choisie de convergence).

Les itérations de Newton nécessitent une bonne estimation initiale du résultat. En pratique, les calculs démarrent de la courbe de stabilité linéaire dont le taux d'accroissement est linéaire¹³ donnée par le lieu de $\lambda_r = 1$ avec l'approche linéaire basée sur la forme de mode en $x^\lambda f(y)$. En effet, ces résultats linéaires constituent une solution de (IV.20) avec $\varepsilon \approx 0$. Ensuite les balayages sont effectués à partir des états d'amplitude finie précédemment calculés.

D'après cette façon de faire, on conçoit bien qu'il est possible d'obtenir des résultats non-linéaires à partir de tous les modes linéaires atteignant une amplification linéaire. Rien n'exclut d'ailleurs que des modes qui ne sont jamais linéairement amplifiés par des mécanismes de stabilité linéaire puissent l'être par des mécanismes non-linéaires. Cependant, on s'est restreint à l'étude des états non-linéaires obtenus à partir du même mode que celui conservé dans le cas linéaire.

IV.2.6 Validation

La validation de la procédure numérique a été effectuée par comparaison avec les résultats de Herbert [Her77] et de Zahn *et al.* [ZTSG74] obtenus pour l'écoulement de Poiseuille plan.

Par une analyse linéaire, l'écoulement de Poiseuille plan est prédit stable jusqu'à un nombre de Reynolds de 5772. Mais la *bifurcation* se produisant à la perte de stabilité est de type *sous-critique*, cela signifie que pour un nombre de Reynolds inférieur à 5772, il existe des écoulements stables en conduit bidimensionnel plan autres que celui de Poiseuille. L'écoulement de Poiseuille plan est donc linéairement stable pour $\mathcal{R} \leq 5772$ (car les perturbations infinitésimales sont atténuées) mais il est non-linéairement instable (car des perturbations d'amplitude finie peuvent installer un autre régime d'écoulement). La figure IV.16 tirée de Zahn *et al.* [ZTSG74] illustre cette métastabilité. Zahn *et al.* [ZTSG74] y représentent le lieu des solutions stationnaires bidimensionnelles d'amplitude finie. L'axe vertical E donne l'énergie de l'écart à la solution Poiseuille, l'intersection de la surface avec le plan $E = 0$ n'est autre que la courbe neutre linéaire. La projection orthogonale de la surface (la surface qui s'appuie sur les courbes tracées dans le plan (E, α) à \mathcal{R} fixé) sur le plan $E = 0$ est aussi représentée. On constate qu'elle englobe entièrement la courbe neutre linéaire (qui entoure la zone grisée du plan $E = 0$), en particulier pour les faibles valeurs du nombre de Reynolds ce qui prouve la sous-criticité de la bifurcation à l'instabilité de l'écoulement de Poiseuille plan.

Cette propriété est connue depuis longtemps grâce à des analyses de la bifurcation au point critique linéaire. Mais quel est le nombre de Reynolds minimal à partir duquel l'instabilité non-linéaire se produit? La réponse à cette question est donnée par Zahn *et al.* [ZTSG74] si on ne considère que

13. Les calculs démarrent de la courbe neutre linéaire si la forme (IV.15) est employée

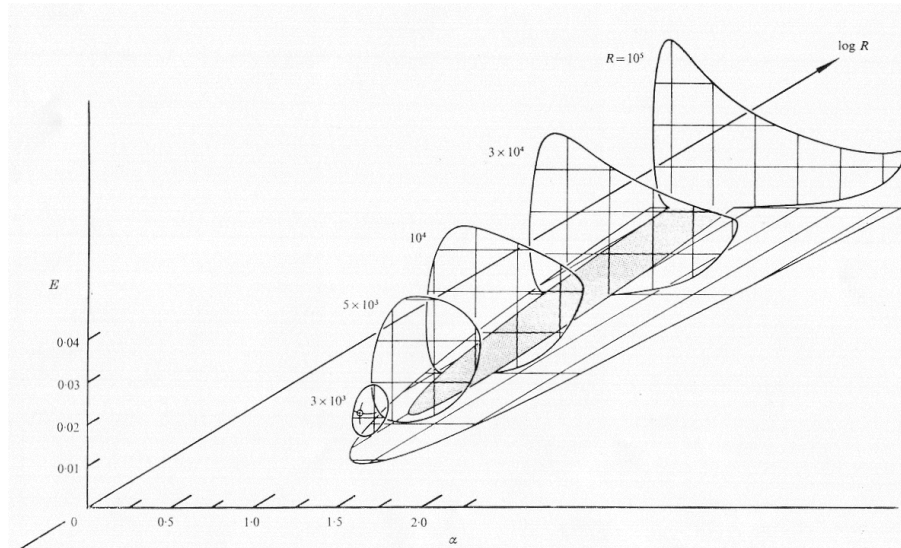


FIG. IV.16 – Lieu des solutions stationnaires bidimensionnelles d’amplitude finie pour le problème de Poiseuille. E est l’énergie de l’écart à la solution de Poiseuille, R est le nombre de Reynolds, α est le nombre d’onde (fondamental). La courbe neutre linéaire (entourant la zone grisée) sur le plan $E = 0$ ainsi que la projection orthogonale de la surface ($E \neq 0$) sur le plan $E = 0$ sont représentées. Tiré de Zahn *et al.* [ZTSG74].

des perturbations bidimensionnelles d’amplitude finie. Ces auteurs montrent que l’écoulement de Poiseuille plan est non-linéairement instable à partir de $\mathcal{R} \sim 2700$ (cette valeur dépend de la troncature utilisée dans la série (IV.15)), valeur qui demeure trop élevée pour expliquer certaines observations expérimentales telles que celles de Patel et Head [PH69]. L’étude des perturbations tridimensionnelles, traitée par Ehrenstein et Koch [EK91], abaisse encore le nombre de Reynolds critique jusque vers 1000.

L’article d’Herbert [Her77] liste tous les paramètres (\mathcal{R} , α , C , énergie) du point critique non-linéaire (vis-à-vis de perturbations bidimensionnelles) pour une troncature de (IV.15) de $N = 1$ à $N = 4$. Zahn *et al.* [ZTSG74] se limitent à $N = 1$ et $N = 2$. On retrouve précisément les résultats d’Herbert pour les 4 troncatures, par contre ceux de Zahn *et al.* [ZTSG74] en diffèrent très légèrement (en effet, Zahn *et al.* et Herbert [Her77] ne s’accordent pas tout à fait).

IV.2.7 Vers un domaine de validité étendu

Une fois l’ordre 0 connu par résolution de (IV.20) qui donne $\phi^{(0)}$, ε et C , on va évidemment s’intéresser aux ordres suivants du développement (IV.17).

Correction de premier ordre

De façon analogue au cas linéaire de la sous-section II.6.4, l’équation de premier ordre obtenue de (IV.16) est de la forme

$$L_0 \phi^{(1)} = \frac{1}{x^2} Q_1 \phi^{(0)}$$

où ni l’opérateur différentiel L_0 ni Q_1 ne sont explicitement dépendants de x . L’opérateur L_0 est linéaire et dépend de $\phi^{(0)}$ qui est connu d’après la résolution de l’ordre 0.

Aussi une forme exacte de la correction $\phi^{(1)}$ peut être obtenue, différente de celle de $\phi^{(0)}$, à savoir (IV.19)

$$\phi^{(1)} = \frac{\varepsilon}{x^2} \sum_{n=-N}^N \hat{\phi}_n^{(1)}(y) x^{in\lambda_i+1} e^{-in\omega t} = \varepsilon \sum_{n=-N}^N \hat{\phi}_n^{(1)}(y) x^{in\lambda_i-1} e^{-in\omega t}$$

Par ailleurs $\phi^{(1)}$ admet les mêmes conditions aux limites homogènes que $\phi^{(0)}$.

Finalement, le problème à résoudre pour avoir la correction au premier ordre est linéaire inhomogène et peut être aisément inversé¹⁴.

L'expression complète de l'équation d'ordre 1 s'écrit

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \frac{d^4 \hat{\phi}_n^{(1)}}{dy^4} - in\omega \frac{d^2 \hat{\phi}_n^{(1)}}{dy^2} + \left[\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) (in\lambda_i - 1) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{d}{dy} \right] \left(\frac{d^2 \hat{\phi}_n^{(1)}}{dy^2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \hat{\phi}_n^{(1)} \right) \\
 & + \varepsilon \sum_{k=-N}^N \left((i(n-k)\lambda_i + 1) \frac{d\hat{\phi}_k^{(1)}}{dy} \frac{d^2 \hat{\phi}_{n-k}^{(0)}}{dy^2} + (i(n-k)\lambda_i - 1) \frac{d\hat{\phi}_k^{(0)}}{dy} \frac{d^2 \hat{\phi}_{n-k}^{(1)}}{dy^2} \right. \\
 & \quad \left. - (ik\lambda_i - 1) \hat{\phi}_k^{(1)} \frac{d^3 \hat{\phi}_{n-k}^{(0)}}{dy^3} - (ik\lambda_i + 1) \hat{\phi}_k^{(0)} \frac{d^3 \hat{\phi}_{n-k}^{(1)}}{dy^3} \right) \\
 & + x_0^2 \left[-2 \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \frac{d^2}{dy^2} - in\omega + \pi \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \left(\frac{1}{2}(in\lambda_i - 1)\right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{d}{dy} \right] in\lambda_i (in\lambda_i + 1) \hat{\phi}_n^{(0)} \\
 & + \varepsilon x_0^2 \sum_{k=-N}^N \left(((i(n-k)\lambda_i + 1)^3 - 3(i(n-k)\lambda_i + 1)^2 + 2(i(n-k)\lambda_i + 1)) \frac{d\hat{\phi}_k^{(0)}}{dy} \hat{\phi}_{n-k}^{(0)} \right. \\
 & \quad \left. - (ik\lambda_i + 1)((i(n-k)\lambda_i + 1)^2 - (i(n-k)\lambda_i + 1)) \hat{\phi}_k^{(0)} \frac{d\hat{\phi}_{n-k}^{(0)}}{dy} \right) = 0
 \end{aligned}$$

L'équation étant linéaire en $\phi^{(1)}$ et inhomogène avec un second membre proportionnel à x_0^2 , on trouve

$$\phi^{(1)} = x_0^2 \tilde{\phi}^{(1)}$$

Le terme arbitraire x_0^2 s'élimine lorsqu'on reprend la définition

$$\phi = \phi^{(0)} + \frac{1}{x_0^2} \phi^{(1)} + \dots = \phi^{(0)} + \frac{1}{x_0^2} x_0^2 \tilde{\phi}^{(1)} + \dots = \phi^{(0)} + \tilde{\phi}^{(1)} + \dots$$

Construction d'une série

L'étude des ordres supérieurs montre qu'une série d'équations satisfaisant (IV.16) à chaque ordre peut être construite de la même façon que dans le cas linéaire (comme en linéaire, l'introduction du petit paramètre $1/x_0^2$ est en fait inutile). Sa forme jusqu'à l'ordre P est

$$\phi = \varepsilon \sum_{n=-N}^N \sum_{p=0}^P \frac{\hat{\phi}_n^{(p)}(y)}{x_0^{2p}} x^{in\lambda_i + 1} e^{-in\omega t}$$

Cependant, par analogie avec le cas linéaire on peut penser que cette série diverge quand l'abscisse est fixée et que P tend vers l'infini.

Aussi, il est inutile (et long à programmer!) de calculer de nombreux termes, on s'est donc contenté¹⁵ des deux premiers ordres (0 et 1) qui sont une approximation asymptotique quand x tend vers l'infini.

Une méthode inconsistante

Comme dans le cas linéaire, une autre méthode, pratique mais inconsistante, peut être appliquée. On garde simplement les (petits) termes dépendant de x avec les termes d'ordre inférieur et on suppose la forme de mode (IV.19). L'inconsistance vient de ce que la forme (IV.19) n'est pas strictement valide.

14. Ceci provient de la différence de forme entre la correction et l'ordre 0 de forme (IV.19). Si $\phi^{(1)}$ de même que $\phi^{(0)}$ satisfaisait (IV.19), le problème linéaire L_0 résultant ne serait plus inversible.

15. Dans le cas linéaire, l'implémentation est beaucoup plus simple et les calculs sont menés jusqu'à des ordres arbitrairement grands. Par exemple, le calcul des mille premiers termes ne requiert que quelques secondes.

L'équation devient

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \frac{d^4 \hat{\phi}_n}{dy^4} - in\lambda_i C \frac{d^2 \hat{\phi}_n}{dy^2} + \left[\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) (in\lambda_i + 1) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{d}{dy} \right] \left(\frac{d^2 \hat{\phi}_n}{dy^2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \hat{\phi}_n \right) \\
 & + \frac{1}{x^2} \left[-2 \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \frac{d^2}{dy^2} - in\omega + \pi \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \left(\frac{1}{2}(in\lambda_i - 1)\right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{d}{dy} \right] in\lambda_i (in\lambda_i + 1) \hat{\phi}_n \\
 & - \frac{1}{x^4 \mathcal{R}_{inj}} \left[(in\lambda_i + 1)^4 - 6(in\lambda_i + 1)^3 + 11(in\lambda_i + 1)^2 - 6(in\lambda_i + 1) \right] \hat{\phi}_n = -\varepsilon NL_n^\phi
 \end{aligned} \tag{IV.27}$$

avec

$$\begin{aligned}
 NL_n^\phi = \sum_{n=-N}^N & \left((i(n-k)\lambda_i + 1) \frac{d\hat{\phi}_k}{dy} \frac{d^2 \hat{\phi}_{n-k}}{dy^2} - (ik\lambda_i + 1) \hat{\phi}_k \frac{d^3 \hat{\phi}_{n-k}}{dy^3} \right) \\
 & + \frac{1}{x^2} \left([(i(n-k)\lambda_i + 1)^3 - 3(i(n-k)\lambda_i + 1)^2 + 2(i(n-k)\lambda_i + 1)] \frac{d\hat{\phi}_k}{dy} \hat{\phi}_{n-k} \right. \\
 & \left. - (ik\lambda_i + 1)[(i(n-k)\lambda_i + 1)^2 - (i(n-k)\lambda_i + 1)] \hat{\phi}_k \frac{d\hat{\phi}_{n-k}}{dy} \right)
 \end{aligned}$$

et les mêmes conditions aux limites que précédemment.

Il s'agit à nouveau d'un problème non-linéaire aux valeurs propres comme à l'ordre 0 et la procédure numérique est la même à ceci près que x devient un paramètre comme λ_i ou \mathcal{R}_{inj} et les calculs doivent être effectués à chaque valeur de x .

IV.2.8 Limitations numériques

Difficultés de convergence

La procédure numérique s'est révélée très efficace pour le calcul de l'écoulement de Poiseuille mais des difficultés¹⁶ sont apparues au passage à l'écoulement de Taylor. En effet, pour les valeurs usuelles de \mathcal{R}_{inj} de l'ordre de 2000, le code ne converge correctement, avec la méthode inconsistante, que pour des valeurs de l'abscisse inférieures à 12 environ, or il ne s'agit justement pas des régions intéressantes de l'écoulement puisqu'il y est régi par des phénomènes linéaires. Pour la résolution de l'ordre 0, la convergence n'est réalisée qu'immédiatement à côté de la zone linéaire

La solution retenue a consisté à travailler à plus faible nombre de Reynolds, à savoir $\mathcal{R}_{inj} = 500$ où l'ordre 0 ne soulève pas de problème et la méthode inconsistante converge pour toutes les abscisses souhaitées. Les comparaisons effectuées entre les valeurs disponibles à $\mathcal{R}_{inj} = 2000$ et à $\mathcal{R}_{inj} = 500$ n'indiquent qu'une différence de l'ordre de 1% sur la valeur du coefficient C de la vitesse de phase mais d'environ 5% sur l'amplitude ε .

Comparaison des résultats des deux approches

Définition de quantités intrinsèques La quantité choisie pour la comparaison est la dérivée par rapport à y du terme $n = 1$ de la fonction de courant complète à $y = 0$. Son module sert de mesure de l'amplitude de l'onde et sa vitesse de phase sert de mesure de la vitesse de phase de l'onde.

Les résultats obtenus avec le développement asymptotique aux ordres 0 et 1 sont donnés en comparaison avec les résultats de l'approche inconsistante. Pour l'ordre 0 et l'approche inconsistante, le module et la vitesse de phase de la quantité choisie sont simplement εx , Cx en raison du choix de la normalisation (IV.24). Par contre, à l'ordre 1, ils valent

$$\varepsilon x \sqrt{\left(1 + \frac{R}{x^2}\right)^2 + \left(\frac{I}{x^2}\right)^2} \quad \text{et} \quad \frac{x C}{1 - \frac{1}{\lambda_i x^2} \frac{2I}{\left(1 + \frac{R}{x^2}\right)^2 + \left(\frac{I}{x^2}\right)^2}}$$

avec $R = \mathcal{R}\left(\frac{d\hat{\phi}_1^{(1)}}{dy}(0)\right)$ et $I = \mathcal{I}\left(\frac{d\hat{\phi}_1^{(1)}}{dy}(0)\right)$

16. Celles-ci ne sont pas liées au changement de forme de perturbation puisqu'on a aussi testé la forme (IV.15) plutôt que (IV.19) avec les mêmes limitations.

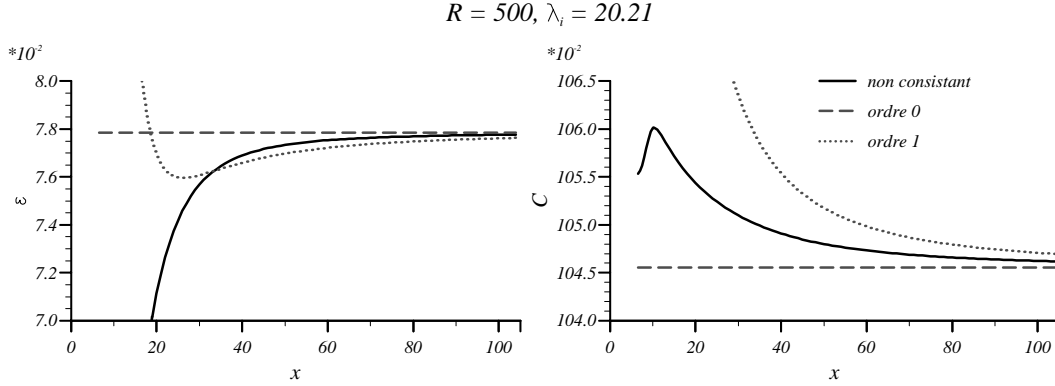


FIG. IV.17 – Amplitude et vitesse de phase non-linéaire obtenues aux ordres 0 et 1 et par la méthode inconsistante. $\lambda_i = 20.21$ et $\mathcal{R}_{inj} = 500$.

Comparaison La comparaison du coefficient C de la vitesse de phase (égale à xC) obtenue par les deux approches est montrée en figure IV.17, ainsi que le coefficient ε de l'amplitude linéaire croissante. Sur la figure IV.17, on peut estimer que l'erreur relative tombe en dessous de 2% dès que $x \geq 30$ et ne cesse de décroître. L'accord est acceptable mais la valeur $\lambda_i = 20.21$ correspond à une fréquence faible $\omega \sim 21$. Or, de même que pour les résultats linéaires, voir chapitre II, les comparaisons entre approches se dégradent lorsque la pulsation augmente.

Comme la longueur totale des veines pour les expériences et les applications pratiques sont typiquement plus faibles que 50 fois la demi-hauteur entre parois débitantes, ces résultats montrent que la méthode inconsistante doit être utilisée pour la comparaison avec les expériences. Ils montrent aussi que bien que cette dernière approche ne puisse être justifiée rigoureusement, elle adopte un bon comportement asymptotique lorsque x tend vers l'infini. Il s'agit du même genre de résultat qu'en théorie linéaire.

IV.2.9 Résultats de l'approche non-linéaire

Les résultats sont donnés pour un nombre de Reynolds $\mathcal{R}_{inj} = 500$ en raison des difficultés numériques évoquées ci-dessus.

Caractéristiques générales

Les figures IV.18, IV.19, IV.20 et IV.21 sont des représentations des mêmes résultats issus de la méthode inconsistante pour une troncature $N = 2$ avec 100 points de collocation. Elles donnent le lieu des états d'équilibre non-linéaires d'amplitude finie (caractérisée par l'amplitude du module du premier terme de la vitesse fluctuante axiale ou verticale sous la forme (IV.19), soit $\max_{y \in [0,1]}(\varepsilon|u_1|/x)$ ou $\max_{y \in [0,1]}(\varepsilon|v_1|)$) en fonction de l'abscisse et de C , ω et λ_i . Rappelons qu'en raison du choix de la forme (IV.19) λ_i n'est pas directement le nombre d'onde mais celui-ci multiplié par x . Dès lors, $C = \omega/\lambda_i$ n'est pas directement la vitesse de phase mais la vitesse de phase divisée par l'abscisse.

Comme on l'a dit, la courbe $\lambda_r = 1$ de la stabilité linéaire calculée avec la forme $x^\lambda f(y)$ constitue une solution particulière d'amplitude infinitésimale ($\varepsilon \approx 0$) du problème d'équilibre non-linéaire. Les surfaces d'équilibre s'appuient donc sur elle et on la retrouve dans les quatre figures à l'intersection du plan ($\varepsilon \approx 0$).

On voit que les surfaces constituant le lieu des solutions non-linéaires prennent assez rapidement une allure constante en x (proche de la limite asymptotique déterminée par l'ordre 0). On a donc deux zones à commenter : le "nez" de la courbe (faibles abscisses) d'une part et la région auto-semblable (abscisses élevées) d'autre part.

Bifurcation super-critique La première différence importante avec l'écoulement de Poiseuille plan en figure IV.16 est que la projection de la surface obtenue pour l'écoulement de Taylor coïncide par-

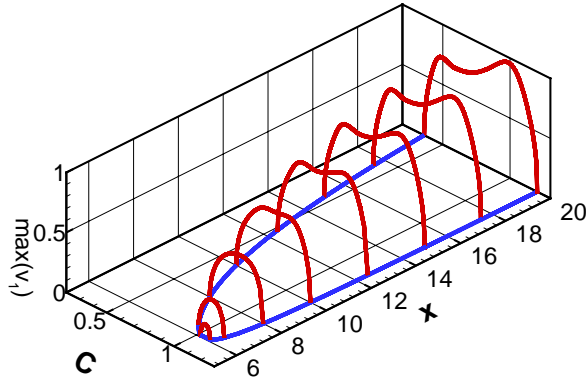


FIG. IV.18 – Amplitude des états non-linéaires en équilibre (maximum de $\varepsilon|v_1|$) en fonction de l'abscisse et la vitesse de phase divisée par l'abscisse.

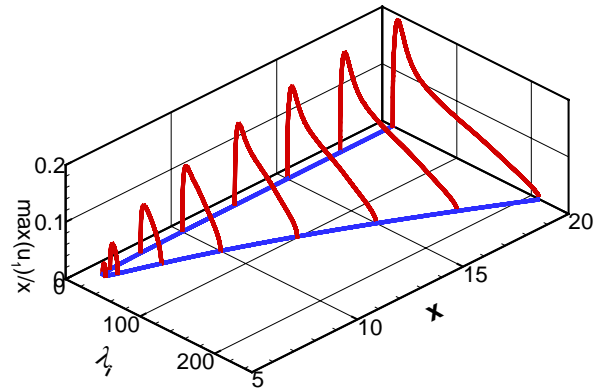


FIG. IV.19 – Amplitude des états non-linéaires en équilibre (maximum de $\varepsilon|u_1|/x$) en fonction de l'abscisse et du nombre d'onde (fondamental) multiplié par l'abscisse.

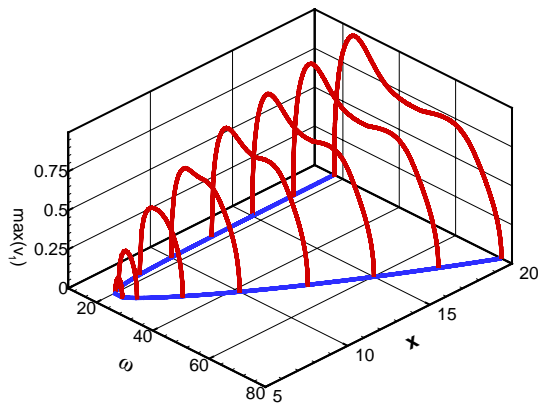


FIG. IV.20 – Amplitude des états non-linéaires en équilibre (maximum de $\varepsilon|v_1|$) en fonction de l'abscisse et de la pulsation (fondamentale).

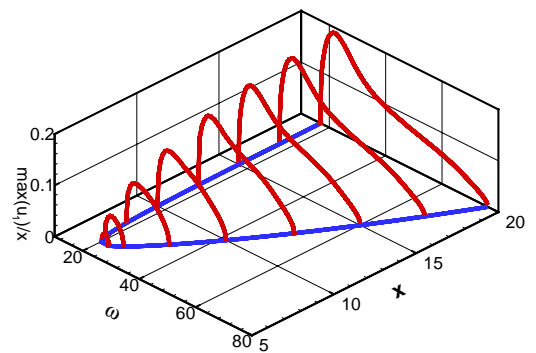


FIG. IV.21 – Amplitude des états non-linéaires en équilibre (maximum de $\varepsilon|u_1|/x$) en fonction de l'abscisse et de la pulsation (fondamentale).

tout (et pour les quatre figures IV.18, IV.19 et IV.20 IV.21) avec la courbe de croissance $\lambda_r = 1$ de la stabilité linéaire, y compris pour le point critique linéaire. Ceci indique que la bifurcation est de type *super-critique* : en dessous de l'abscisse critique linéaire, il n'existe pas de solution en équilibre¹⁷, ni d'amplitude infinitésimale, ni d'amplitude finie. De même, les basses fréquences linéairement stables ne peuvent pas bifurquer vers un état d'équilibre même sous l'effet d'une perturbation importante puisque la figure (IV.20) montre qu'un tel état n'existe pas.

Le résultat sur la super-criticité de l'écoulement de Taylor est cependant anecdotique puisqu'en raison du non-parallélisme de l'écoulement, on ne peut prétendre modéliser correctement la zone critique avec les formes de perturbation employées. Il n'est même pas certain qu'une abscisse critique linéaire existe vraiment, le résultat non-linéaire doit donc être considéré avec prudence aux faibles abscisses.

Ce manque de fiabilité n'est cependant pas gênant puisqu'on souhaite comprendre un comportement d'instabilités naturelles qui ne saturent que vers l'aval et non des instabilités forcées qui auraient une énergie suffisante pour saturer dès l'amont. Il s'agit du même argument que celui qui remet en cause l'utilité de la théorie de l'instabilité secondaire sur la courbe neutre primaire. Aucune observation ne laisse supposer un "saut" sur un état d'équilibre sans passage par une zone relevant de la stabilité linéaire.

Saturation à l'aval Les niveaux de saturation les plus élevés sont obtenus pour $C \sim 1$, voir figure IV.18, donc la vitesse de phase Cx est égale à la vitesse axiale moyenne de l'écoulement de base ($\int_0^1 (\pi/2)x \cos(\pi y/2) dy = x$), et pour $\lambda_i \sim 21$ et $\omega \sim 21$, voir figures IV.19 et IV.20. Or, d'après la figure II.5, ces fréquences ne connaissent que des taux d'amplification linéaires faibles.

Par ailleurs, le maximum du module de la fluctuation de vitesse verticale en $e^{-i\omega t}$ atteint 1 c'est-à-dire la valeur de la vitesse d'injection. Pour obtenir la totalité de la correction non-linéaire à l'écoulement de Taylor, il faut y ajouter les autres termes de la série (IV.19), et en particulier le terme -1 ce qui multiplie par 2 l'amplitude réelle. Ainsi, les états d'équilibre induisent des oscillations de vitesse verticale de l'ordre de deux fois la vitesse d'injection.

Le maximum du module de la fluctuation de vitesse axiale en $e^{-i\omega t}$ atteint $0.2x$ d'où une amplitude réelle de l'ordre de $0.4x$ fois la vitesse d'injection c'est-à-dire 25% de la vitesse axiale maximale de l'écoulement de Taylor (égale à $\pi x V_{inj}/2$) ou encore 40% de la vitesse axiale moyenne (égale à $x V_{inj}$).

En revanche, pour la pulsation $\omega = 38$ qui semble jouer un rôle particulier dans le montage VECLA, les amplitudes de vitesse fluctuante axiale sont divisées par 2 environ et les fluctuations de vitesse verticale par 1.5. Il faut d'ailleurs observer que la courbe IV.19 n'indique pas une forte sélectivité en fréquence de la saturation non-linéaire et en particulier rien ne distingue la zone de pulsations autour de $\omega = 38$.

Comparaison aux solutions linéaires Les deux différences principales entre stabilité linéaire et stabilité non-linéaire résultant du formalisme sont l'existence d'une amplitude bien définie en non-linéaire au lieu d'une amplitude arbitraire en linéaire et un taux d'amplification fixé d'emblée au lieu d'être un résultat de calcul.

Par contre, certaines prédictions peuvent être comparées comme la vitesse de phase une fois que la pulsation ou le nombre d'onde sont fixés et l'allure des fonctions propres puisque le terme numéro 1 du système non-linéaire correspond à une onde possédant les caractéristiques d'une onde linéaire de même pulsation.

Le tableau IV.3 consigne deux résultats de calculs linéaire et non-linéaire d'ordre 0 (asymptotiquement valables aux grandes abscisses) pris dans chacune des deux régions définies au chapitre I. On constate que l'écart dans la zone des basses fréquences est inférieur à 1% et qu'il reste de l'ordre de 3% pour les fréquences plus élevées. On en conclut que les ondes linéaires et les ondes saturées

17. Attention, on rappelle que ces conclusions ne concernent que le mode le plus instable linéairement, il n'est pas exclu qu'il existe des solutions en équilibre correspondant à un autre mode qui connaîtrait une bifurcation *sous-critique*.

	basses fréquences			hautes fréquences		
	ω	λ_i	C	ω	λ_i	C
Stabilité linéaire	21.28	20.21	1.05	36.96	51.71	0.715
Stabilité non-linéaire	21.28	20.21	1.05	38.21	51.71	0.739

TAB. IV.3 – Comparaison des pulsations, nombre d'onde et vitesse de phase linéaires et non-linéaires à l'ordre 0.

sont tout à fait semblables (à l'amplification près). Cette conclusion est en partie corroborée par la simulation numérique effectuée à l'aide du code SIERRA présentée au chapitre II en figure II.46. En effet, la saturation non-linéaire clairement visible d'après la chute rapide des taux d'accroissement vers $x = 25$ ne semble pas accompagnée d'une évolution spectaculaire de la longueur d'onde même si cette dernière augmente un peu par rapport aux prévisions linéaires.

La faible dépendance du nombre d'onde vis-à-vis du régime (linéaire ou non-linéaire) est intéressante en ce qu'elle permet d'estimer la variation de phase de l'onde ainsi que sa vitesse de groupe sans avoir à savoir précisément si elle est saturée ou non. Ainsi, si on interprète les structures visualisées dans VECLA en figure I.14 comme des ondes d'instabilité bidimensionnelles, leur vitesse de convection peut être approximée par la vitesse de groupe des instabilités, qu'on les suppose saturées ou non.

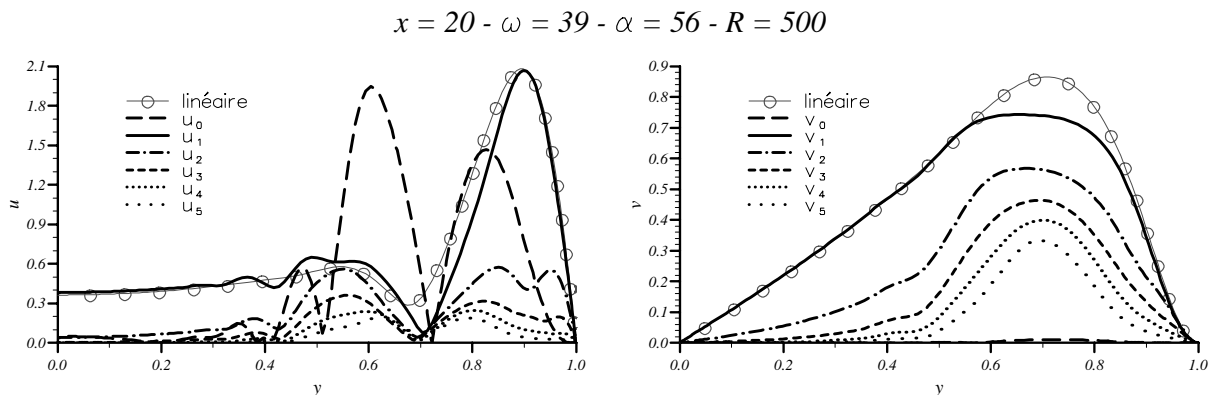


FIG. IV.22 – Fonctions propres de vitesse axiale et verticale à $x = 20$, $\omega = 39$, et $\mathcal{R}_{inj} = 500$. L'amplitude de l'onde linéaire est choisie pour correspondre au maximum de la fonction propre axiale saturée.

Fonctions propres La figure IV.22 montre les fonctions propres non-linéaires de vitesse axiale et verticale à l'abscisse $x = 20$, pour $\omega = 39$, et avec $\mathcal{R}_{inj} = 500$. Les fonctions propres linéaires correspondantes y sont superposées. L'amplitude arbitraire pour la partie linéaire est choisie de telle sorte que le maximum de vitesse axiale linéaire ait le même niveau que le maximum de vitesse axiale non-linéaire qui est pour sa part un résultat de calcul.

La comparaison du linéaire et du terme numéro 1 du système d'onde en équilibre montre des fonctions propres très voisines même si un défaut de vitesse verticale d'environ 20% du non-linéaire est noté en $y = 0.7$ et même si le pic non-linéaire en proche paroi est légèrement plus étroit.

Les fonctions propres non-linéaires méritent à elles seules quelques remarques. La pulsation choisie est $\omega = 39$ située à la limite des deux zones distinguées entre niveaux de saturation. Elle correspond aussi à la fréquence dont le rôle particulier dans VECLA a été signalé en section I.6.2. Les amplitudes de vitesse axiale et verticale sont du même ordre avec environ 2 pour la première et 1 pour la seconde. Or, du fait de l'adimensionnement, la vitesse d'injection est 1 et la vitesse axiale maximale (à $x = 20$) est de l'ordre de 30. Les fluctuations liées au terme numéro 1 sont donc inférieures à 10% de l'écoulement moyen mais environ deux fois plus fortes que la vitesse d'injection.

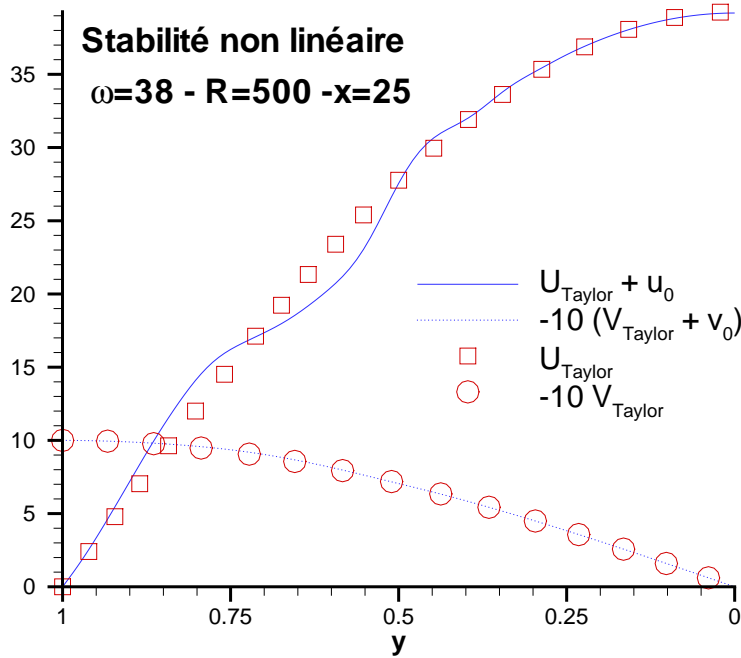


FIG. IV.23 – Profils moyens résultant de l'état d'équilibre comparés aux profils de base de Taylor. $x = 25$, $\omega = 38$, et $\mathcal{R}_{inj} = 500$.

Les termes u_0 et v_0 représentent la distorsion stationnaire due au système d'ondes en équilibre. Le terme v_0 demeure faible, en comparaison de u_0 ce qui montre que la distorsion principale porte sur la vitesse axiale et non sur la vitesse verticale. Cette remarque est illustrée par la figure IV.23 qui montre l'effet sur les profils moyens comparés aux profils de base de Taylor. La figure IV.23 permet de voir que le signe de la correction u_0 s'inverse ce qui n'est pas évident sur la figure IV.22 où seuls les modules sont donnés (c'est-à-dire la valeur absolue pour le mode 0 qui est réel).

Hormis le terme de distorsion (numéro 0), les fonctions propres ont des allures assez semblables avec un module de vitesse axiale s'annulant presque vers $y = 0.7$. Les modules des fonctions propres décroissent régulièrement d'un terme de la série au suivant mais cette décroissance est lente puisque le module de vitesse verticale du 5^e terme de la série est de l'ordre de la moitié de celui du premier, heureusement, ce rapport passe à $1/10^e$ pour la vitesse axiale. Or, pour pouvoir justifier la troncature effectuée (à $N = 5$ en l'occurrence), il faut que les termes situés au-delà de la troncature soient négligeables. Si on en croit les fonctions propres, la légitimité de la troncature à $N = 5$ est juste suffisante, néanmoins, on ne constate aucun changement significatif de la vitesse de phase et surtout de l'amplitude dès $N \geq 2$, c'est pourquoi les figures précédentes n'usaient que de cette faible troncature.

IV.2.10 Comparaison à des simulations numériques

En raison du manque de résultats expérimentaux susceptibles de confirmer ou d'infirmer la théorie, on s'est tourné vers la simulation numérique. Il s'agit même de la motivation première à l'utilisation de cet outil.

Définition des simulations

Méthode Comme à la section II.8, le code de calcul est SIERRA. On reprend la méthodologie décrite précédemment avec introduction d'une perturbation mono-fréquentielle en forme de mode propre sur une section en x . La perturbation est appliquée en continu y compris pendant le calcul des coefficients de Fourier. Ces derniers sont déterminés sur une fenêtre démarrant après l'établissement

d'un régime périodique (fin du transitoire lié à l'"allumage" du forçage) et s'étendant sur plus d'une quinzaine de périodes.

Conditions aux limites La seule condition utilisée en sortie est la *condition de non-réflexion*. En effet, si on impose la pression en sortie, on observe deux cas de figures :

- soit les fluctuations sont faibles et on n'a pas de problème de calcul mais on ne note aucun phénomène de stabilité non-linéaire;
- soit les fluctuations sont suffisamment fortes pour provoquer des non-linéarités des instabilités et toutes sortes de fréquences apparaissent (et pas seulement des harmoniques du forçage). Ce cas est gênant car on ne discerne pas vraiment de régime établi et parce qu'il ne semble plus possible de retirer la partie acoustique qui conduit certainement à des combinaisons non-linéaires avec les instabilités.

C'est donc d'abord afin de voir de la stabilité non-linéaire sans acoustique dans SIERRA qu'on a décidé d'implémenter une condition de non-réflexion au fond arrière.

Les conditions aux frontières sont donc

- condition de non-réflexion au fond avant et au fond arrière;
- débit massique constant à la paroi débitante (située en $y = -1$);
- symétrie sur l'axe (situé en $y = 0$);

Paramètres de calcul Pour pouvoir atteindre les amplitudes nécessaires à l'apparition d'effets non-linéaires, on choisit un canal suffisamment long avec une sortie à $x = 30$ et une pulsation fortement amplifiée à savoir $\omega = 38$ qui correspond de surcroît à la fréquence privilégiée par VECLA dans son comportement de type 4, voir section I.6.2. Le forçage est effectué juste en amont de la courbe neutre linéaire à $x = 7$. Le forçage se fait par des grandeurs réelles ce qui signifie qu'on force à la fois les termes 1 et -1 de la série. On se place au même nombre de Reynolds $\mathcal{R}_{inj} = 500$ que pour les calculs non-linéaires.

Le maillage utilisé pour les résultats présentés dans cette section est différent de celui du chapitre II, il est plus resserré en x et plus lâche en y . Il est orthogonal et compte 550×61 mailles. Il est régulier en y d'où une hauteur de maille de 0.016 et régulier entre $x = 5$ et $x = 30$ avec 500 mailles soit une longueur de maille de 0.05. Il est géométrique entre 0 et 5 où il compte 50 mailles. Cette zone amont n'intervient pas sur le champ fluctuant puisque l'instabilité est convective et que la condition de non-réflexion empêche la remontée de l'acoustique.

On rappelle enfin qu'on n'utilise ni modèle de turbulence ni viscosité artificielle¹⁸.

Dans cette section¹⁹, l'adimensionnement des vitesses issues de SIERRA est le même que celui de la stabilité non-linéaire afin de comparer les amplitudes; la vitesse de référence est V_{inj} .

Le calcul du champ fluctuant sur chacune des fréquences bien séparées composant le spectre se fait par calcul des coefficients de Fourier. Mais attention, les coefficients de Fourier sont initialement calculés dans SIERRA sur une base de cosinus d'où la formule suivante pour le coefficient de Fourier de la vitesse axiale U à chaque point en x, y

$$\frac{2\Delta T}{T_{final} - T_{initial}} \sum_{it_{initial}}^{it_{final}} U_{it} e^{-i\omega_{Fourier}(t_{it} - T_{initial})}$$

où ΔT est le pas de temps entre deux itérations, $T_{initial}$ et T_{final} sont les instants initial et final du calcul des coefficients de Fourier et $it_{initial}, it_{final}$ les numéros d'itération correspondants. La fenêtre

18. C'est-à-dire qu'on fixe à 0 les constantes du schéma de viscosité artificielle de Jameson implanté dans SIERRA.

19. Ce n'est pas le cas au chapitre II où les vitesses sont dimensionnelles et la vitesse d'injection vaut 1.65 m/s. Comme les comparaisons concernent la phase linéaire, les constantes multiplicatives n'ont pas d'intérêt au chapitre II.

d'intégration $[T_{initial}, T_{final}]$ est choisie par l'utilisateur et correspond à un nombre entier de périodes $2\pi/\omega_{Fourier}$. La fréquence d'analyse $\omega_{Fourier}$ est choisie comme $\omega_{forçage}$ pour avoir le fondamental et $n\omega_{forçage}$ pour avoir le $n - 1^e$ harmonique.

Cependant, pour se comparer aux amplitudes prévues par la stabilité non-linéaire, on a besoin des coefficients de Fourier sur une base d'exponentielles complexes. Dans la suite²⁰, les valeurs tracées des coefficients de Fourier correspondent donc à la formule

$$\frac{\Delta T}{T_{final} - T_{initial}} \sum_{it_{initial}}^{it_{final}} U_{it} e^{-i\omega_{Fourier}(t_{it} - T_{initial})}$$

qui possède un facteur 2 d'écart avec la précédente.

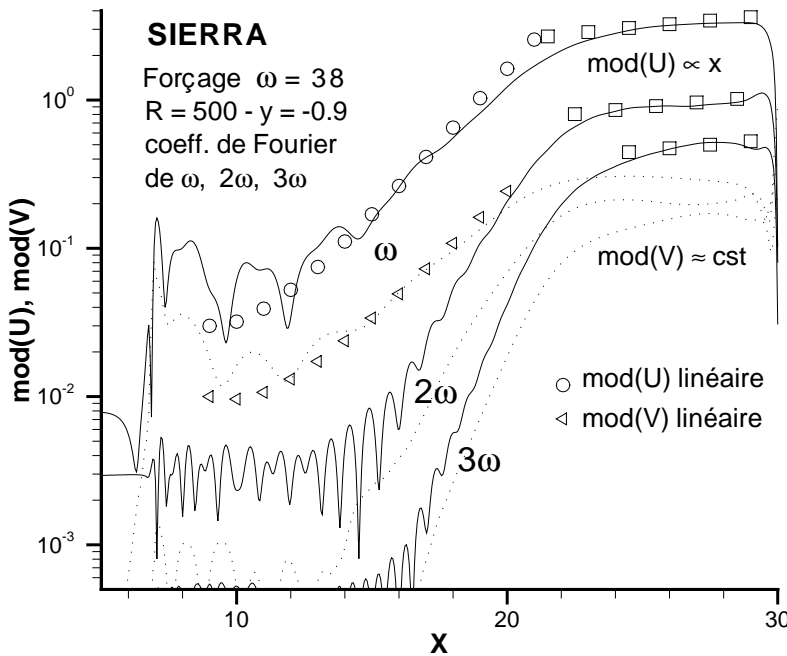


FIG. IV.24 – Fluctuations de vitesse axiale (lignes pleines) et verticale (lignes pointillées) sur la ligne $y = -0.9$. Perturbation appliquée sur $\omega = 38$ à $x = 7$, $\mathcal{R}_{inj} = 500$, maillage 550×61 , conditions de non-réflexion en sortie à $x = 30$ et au fond avant.

Amplification et saturation Les premiers résultats indiquant une saturation non-linéaire ont déjà été donnés à la fin du chapitre II en figure II.44 dans un cas proche mais avec un autre maillage et un nombre de Reynolds $\mathcal{R}_{inj} = 2200$.

On retrouve les mêmes constats sur la figure IV.24. Cette dernière représente l'amplitude des fluctuations de vitesse axiale (lignes pleines) et verticale (lignes pointillées) sur la ligne $y = -0.9$. Les trois séries de courbes correspondent à la fréquence fondamentale (celle du forçage) qui a l'amplitude la plus élevée, à la fréquence double (premier harmonique) d'amplitude intermédiaire, et à la fréquence triple (deuxième harmonique) avec l'amplitude la plus faible.

La figure IV.24 contient aussi des résultats linéaires représentés en symboles circulaires et triangulaires. L'amplitude de chaque série de symboles est fixée arbitrairement, seule l'amplification est un résultat de calcul. Les trois séries de symboles carrés sont des courbes $y = ax$ avec a arbitraire. Elles permettent de se comparer à la prédiction d'une croissance linéaire pour la vitesse axiale une fois la saturation atteinte, comparaison rendue peu aisée par l'utilisation de l'échelle logarithmique.

20. Attention, ce n'est pas le cas au chapitre II.

On distingue clairement plusieurs zones :

- la perturbation est introduite à $x = 7$ et elle est convectée vers l'aval. La région amont ne contient donc que de très faibles fluctuations.
- l'organisation de la fluctuation en mode propre requiert une certaine distance en x (et ceci bien que la perturbation de vitesse ait la forme du mode propre de la fréquence longitudinale, il y a là un point peu clair). Les fréquences harmoniques mettent une distance encore plus importante que le fondamental pour émerger du bruit.
- la zone linéaire est visible de $x \sim 12$ à $x \sim 18$ pour le fondamental. Son amplification linéaire est retrouvée de manière satisfaisante. Dans cette zone, l'amplitude du premier harmonique résulte de combinaisons quadratiques du fondamental. Comme les vitesses axiale et verticale de ce dernier évoluent respectivement comme x^λ et $x^{\lambda-1}$, celles du premier harmonique croissent comme $x^{2\lambda-1}$ et $x^{2\lambda-2}$ et celles du deuxième comme $x^{3\lambda-2}$ et $x^{3\lambda-3}$ pour les mêmes raisons. Ces résultats sont retrouvés sur la figure IV.24 même si l'amplification du deuxième harmonique devient un peu moins forte dès que ce dernier atteint une amplitude de l'ordre de 10^{-2} .
- un phénomène de saturation se produit clairement à partir de $x = 20$. Avec "les yeux de la foi", il semble que les caractéristiques des états d'équilibre non-linéaires soient retrouvées pour les trois fréquences, à savoir : amplitude constante de la vitesse fluctuante verticale et amplitude linéairement croissante de la composante axiale. Par ailleurs, on va voir plus loin que le niveau de saturation est très proche de celui prédit par la théorie.
- au fond arrière, on retrouve l'évolution rapide et non-physique liée à l'utilisation de la condition de non-réflexion exposée à la section II.8.

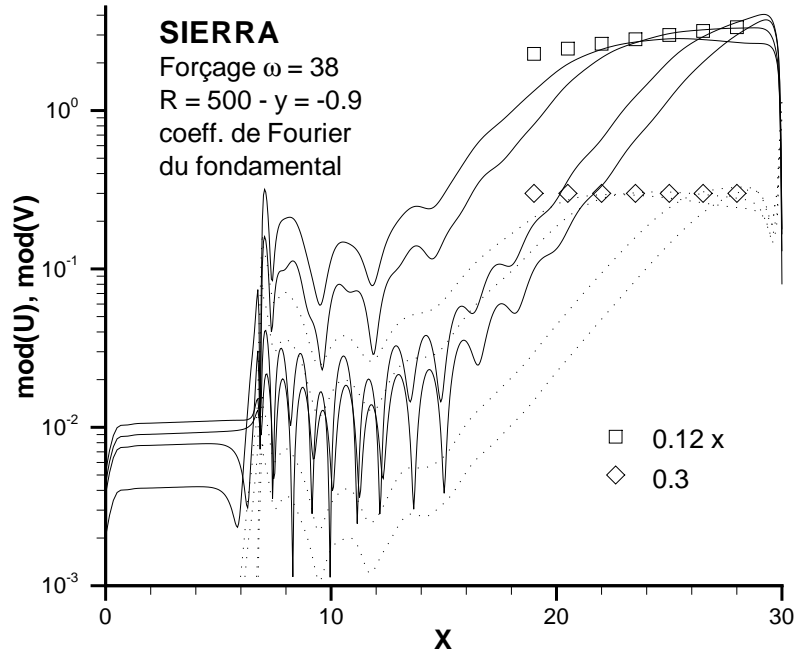


FIG. IV.25 – *Fluctuations de vitesse axiale (lignes pleines) et verticale (lignes pointillées) sur la ligne $y = -0.9$ pour plusieurs niveaux de forçage.*

Afin de vérifier qu'il s'agit bien d'une saturation non-linéaire, on présente en figure IV.25 l'évolution du fondamental pour différentes amplitudes initiales de perturbation. Le même maillage est utilisé pour les quatre calculs proposés. Les différentes zones distinguées sur la figure IV.24 sont retrouvées pour chaque niveau d'amplitude initiale.

Dans la figure IV.25, la saturation de la fluctuation de vitesse verticale se produit comme prévu à une amplitude indépendante de x et celle de la fluctuation de vitesse axiale se produit, comme prévu également, à une amplitude linéairement croissante avec x .

On constate cependant que pour les deux amplitudes initiales les plus élevées, l'état d'équilibre théorique ne se maintient pas puisque les fluctuations axiales et verticales se mettent à décroître peu après la saturation. La raison de cette décroissance demeure inexpliquée.

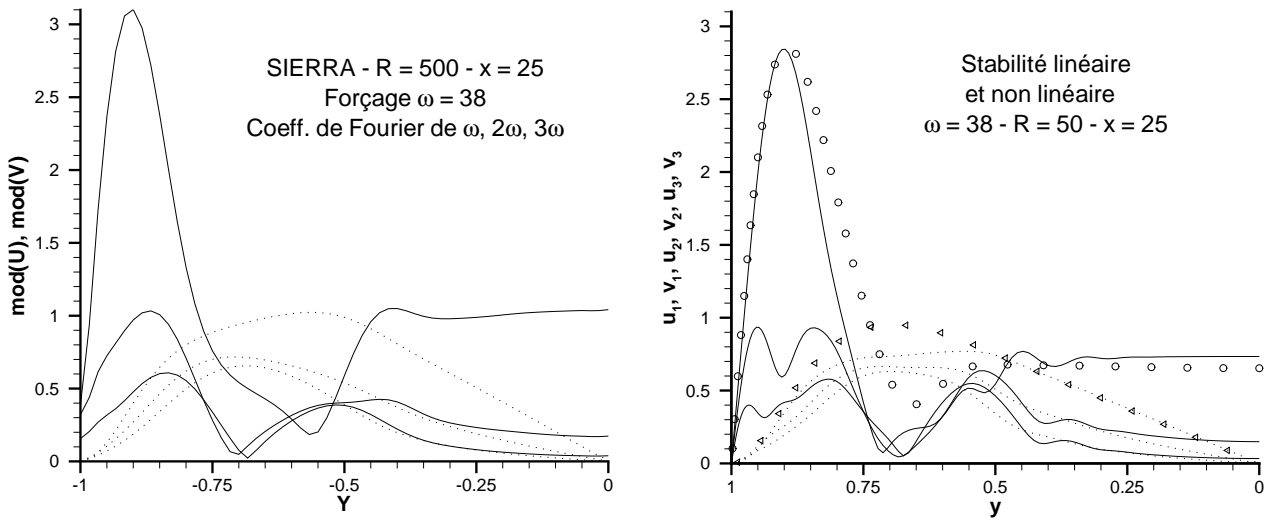


FIG. IV.26 – Fonctions propres de vitesse axiale (lignes pleines) et verticale (lignes pointillées) à $x = 25$. Les symboles représentent les fonctions propres linéaires à la même abscisse avec une amplitude choisie arbitrairement.

La comparaison des fonctions propres proposée en figure IV.26 est, elle aussi, instructive. Elle est tirée du même calcul que la figure IV.24. A gauche, on représente les profils de module de vitesse fluctuante axiale et verticale calculés par SIERRA pour le fondamental et les deux premiers harmoniques. A droite, on trace les fonctions propres pour les termes correspondants de la série non-linéaire. On y ajoute le résultat linéaire de la fréquence fondamentale. L'amplitude du linéaire est calée sur l'amplitude du maximum de la vitesse axiale non-linéaire du fondamental.

Les aspects positifs de la figure IV.26 sont

- allure générale des fonctions propres respectée;
- amplitude relative des trois termes respectée, ainsi que l'amplitude relative des vitesses axiale et verticale pour chacun des termes (le maximum de vitesse verticale est plus important que le maximum de vitesse axiale pour le deuxième harmonique);
- amplitudes absolues très proches;
- bonne localisation du point d'annulation de la vitesse axiale (au moins pour les harmoniques);
- déplacement vers la paroi du maximum de fluctuation de vitesse verticale quand le numéro du terme de la série augmente;
- meilleure représentation du fondamental par le premier terme non-linéaire que par les fonctions propres linéaires.

Le seul aspect négatif de la figure IV.26 est l'absence dans SIERRA du double pic en proche paroi qui caractérise les harmoniques de la stabilité non-linéaire.

Deux remarques doivent être faites concernant ce point. D'abord, on peut constater que la vitesse axiale fluctuante dans SIERRA ne s'annule pas exactement à la paroi. On ne sait pas fournir d'explication à cela mais un effet sur le double pic est possible. Ensuite, le double pic a été observé

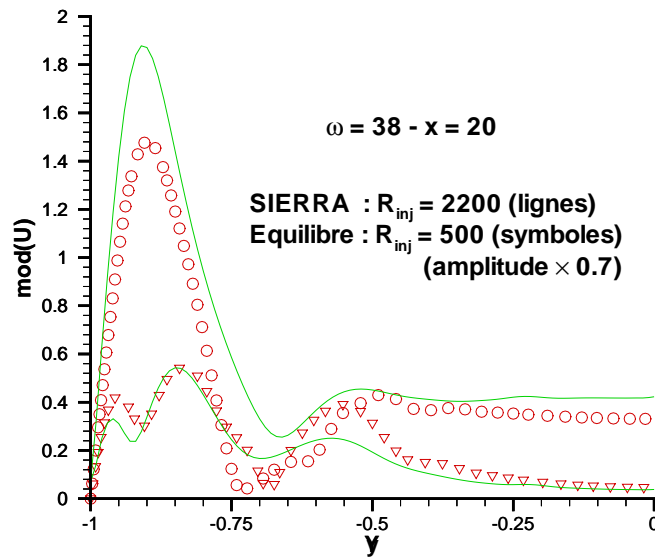


FIG. IV.27 – Fonctions propres de vitesse axiale à $x = 20$ pour le fondamental et le premier harmonique. Pour SIERRA (lignes) $\mathcal{R}_{inj} = 2200$. Les états d'équilibre non-linéaires (symboles) sont calculés avec $\mathcal{R}_{inj} = 500$, leur amplitude est multipliée par 0.7.

dans SIERRA pour des calculs avec $\mathcal{R}_{inj} = 2200$ comme l'indique la figure IV.27 (obtenue avec un maillage régulier de 300×101 mailles du type utilisé au chapitre II).

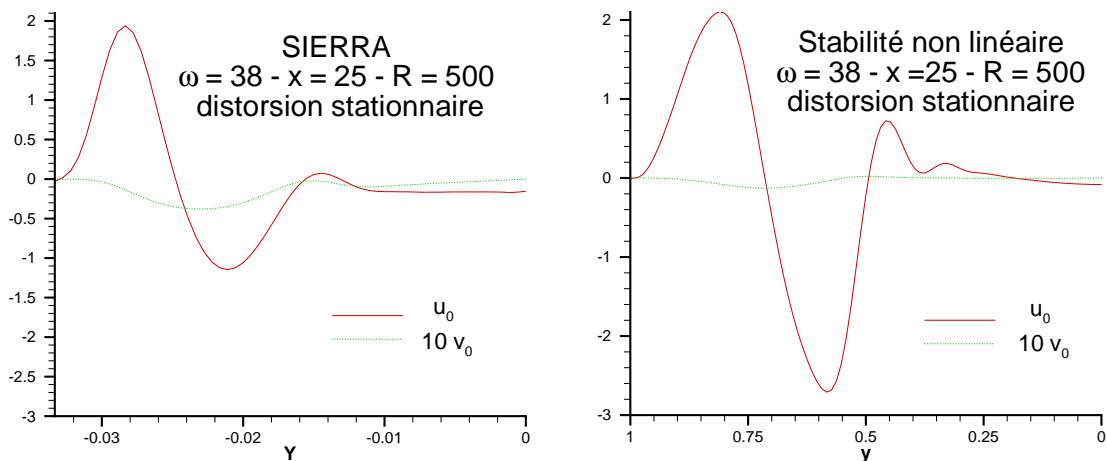


FIG. IV.28 – Distorsion stationnaire à $x = 25$ calculée par SIERRA et par la stabilité.

On complète la comparaison des fonctions propres par celle de la distorsion en figure IV.28. Il s'agit du terme 0 dans la série non-linéaire. Pour SIERRA, il est obtenu en soustrayant un résultat stationnaire de simulation sans perturbation (mais avec exactement les mêmes paramètres et les mêmes conditions aux limites que lors des calculs de coefficients de Fourier) à la moyenne du champ utilisé pour tracer les figures IV.24 et IV.26. Ce terme étant réel dans la série non-linéaire, on peut le comparer directement en valeur relative plutôt qu'en module.

A nouveau on peut noter sur la figure IV.28 des aspects positifs

- accord sur le signe de la correction stationnaire avec un faible décalage des zéros;
- amplitude comparable du maximum en proche paroi;

et des aspects négatifs

- forte différence sur l'amplitude du minimum;
- correction relative sur la vitesse verticale plus faible pour les états d'équilibre que pour SIERRA.

Les conclusions suivantes s'imposent à la suite de la confrontation des simulations numériques et des calculs de stabilité non-linéaire. L'accord obtenu confirme à la fois la validité de l'approche de stabilité et la capacité de SIERRA à représenter correctement les évolutions non-linéaires des fluctuations.

La principale différence est celle mentionnée au sujet de la figure IV.25 qui indique que les états "d'équilibre" ne se maintiennent pas dans les simulations SIERRA où une atténuation des fluctuations finit par succéder à la saturation.

IV.2.11 Comparaison aux expériences

Comme on l'a déjà signalé, l'écriture IV.19 suppose une allure particulière du spectre avec une fréquence fondamentale $\omega/2\pi$ et ses harmoniques. Elle n'est donc pas valable dans le cas de l'écoulement de type 1 dont les spectres présentent une bande relativement large, voir figures II.18 et II.19. En effet, les interactions entre les composantes fréquentielles de la bande ne sont pas du tout prises en compte dans l'approche non-linéaire employée. Aussi le défaut de vitesse fluctuante de la figure II.19 par rapport aux prévisions théoriques ne peut-il pas s'expliquer ainsi. La faiblesse du niveau de saturation sur les spectres II.19 en comparaison de la prévision théorique, amplitude 40 fois plus faible que les calculs en non-linéaire, laisse penser à un effet très fort des interactions entre fréquences voisines.

Seuls les écoulements de type 3 et 4 possèdent des spectres auxquels la méthode est susceptible d'être appliquée. Pour ces deux écoulements, on rappelle qu'on dispose de mesures à $x = 22.5$ permettant d'estimer les fluctuations rms adimensionnelles ($\sqrt{(u_{exp} - \bar{u}_{exp})^2}/V_{inj}$) à 0.8 (fluctuations quasi-monofréquentielles de pulsation 38) pour le type 4 et à 2 pour le type 3 (fluctuations quasi-monofréquentielles de pulsation entre 38 et 29, avec des harmoniques). Or, d'après la figure IV.19, pour $\omega \sim 38$, on a $\max(\varepsilon|u_1|/x) \approx 0.1$, on en déduit que l'amplitude de saturation à $x = 22.5$ pour $\omega \sim 38$ vaut environ²¹ $2 \times 22.5 \times 0.1 = 4.5$ fois la vitesse d'injection. Comme il s'agit d'une amplitude 0-crête, on doit diviser cette valeur par $\sqrt{2}$ pour obtenir une amplitude rms d'à peu près 3.2.

Ainsi, les amplitudes mesurées à $x = 22.5$ sont 4 fois plus faibles que le niveau de saturation théorique pour l'écoulement de type 4 et 1.6 fois plus faibles pour l'écoulement de type 3. La résonance impliquant une forte interaction entre acoustique et stabilité, on se gardera de toute spéculation supplémentaire sur son caractère saturé ou non plus à l'aval. Mais bien que l'écoulement de type 4 soit loin de la saturation à $x = 22.5$, la courbe de son amplitude linéaire $A_0 e^n$ avec $A_0 = 10^{-3}$ (0-crête) (amplitude initiale permettant de retrouver l'amplitude rms mesurée à $x=22.5$) intersecte la courbe de saturation non-linéaire, $0.2 \times x$ vers $x = 27$ ce qui laisse supposer que la saturation non-linéaire est atteinte vers la sortie de VECLA puisque les configurations présentant le comportement 4 ont une sortie située à $x = 30$.

IV.2.12 Conclusion sur les états d'équilibre

Finalement, la recherche de systèmes d'onde en équilibre a permis

- de montrer la super-criticité de la transition à l'instabilité de l'écoulement de Taylor;
- de donner une estimation de l'amplitude de saturation des ondes d'instabilité pour les écoulements de VECLA de type 3 ou 4.

Les amplitudes mesurées à la résonance (type 3) sont proches des amplitudes de saturation mais l'acoustique n'étant pas incluse dans les calculs non-linéaires, on ne se prononce pas sur la pertinence du régime saturé dans ce cas.

21. On tient compte du facteur 2 dû à la somme de u_1 et de $u_{-1} = \bar{u}_1$.

L'extrapolation des mesures en écoulement de type 4 suggère une saturation non-linéaire qui se produirait vers $x = 27$. Si on se remémore les conclusions de l'étude de stabilité secondaire, on constate qu'il s'agit d'une abscisse voisine de celle de la transition secondaire qui ne peut donc pas être légitimement calculée à partir d'une onde primaire issue de la stabilité linéaire.

En revanche, la possible saturation que semble indiquer la figure II.19 ne relève pas du mécanisme proposé dans cette section probablement en raison de la largeur des bandes spectrales en interaction qui sont incompatibles avec la modélisation effectuée.

IV.3 Stabilité secondaire des états d'équilibre

Puisque pour l'écoulement de type 4, l'instabilité pariétale relève plutôt du système d'ondes en équilibre que de l'onde linéaire lorsque la transition secondaire potentielle est susceptible de se produire, il est naturel de chercher à reprendre l'analyse secondaire en substituant un état saturé à la solution linéaire.

IV.3.1 Principe

On reprend l'analyse de stabilité secondaire de la section IV.1.1 en choisissant les états d'équilibre comme écoulement de base au lieu de la somme de l'écoulement de Taylor et d'une onde primaire d'amplitude arbitraire.

Les états d'équilibre ne peuvent *a priori* pas faire l'objet d'une analyse de stabilité secondaire parce qu'ils ne sont pas strictement périodiques à cause de l'amplification linéaire de leur vitesse axiale et de la croissance linéaire de leur nombre d'onde. Néanmoins, on va considérer qu'ils sont localement assimilables à des écoulements périodiques de même qu'on l'a fait, sans plus de légitimité, pour l'écoulement de Taylor augmenté de l'onde primaire.

On a donc comme écoulement de base

$$\begin{aligned}\vec{U}_2 &= (U_2^{(n)}, V_2^{(n)}, 0) \\ &= (U_{Taylor}, V_{Taylor}, 0) + \sum_{n=-N}^N \left(x \frac{d\hat{\phi}^{(n)}}{dy}, -(i\lambda_i + 1)\hat{\phi}^{(n)}, 0 \right) x^{in\lambda_i} e^{-in\omega t} \\ &\sim (U_{Taylor}, V_{Taylor}, 0) + \sum_{n=-N}^N \left(x \frac{d\hat{\phi}^{(n)}}{dy}, -(i\lambda_i + 1)\hat{\phi}^{(n)}, 0 \right) e^{in(\alpha x - \omega t)}\end{aligned}$$

avec $\alpha = \lambda_i/x$ de sorte que la dérivée de la phase de $x^{in\lambda_i}$ soit égale à celle de $e^{in\alpha x}$. Ecrit sous cette forme, l'écoulement est $2\pi/\alpha$ -périodique (puisque la $2\pi/(n\alpha)$ -périodicité implique la $2\pi/\alpha$ -périodicité).

La perturbation secondaire est cherchée sous la forme, identique à (IV.8) avec $\beta = 0$

$$\vec{u}_3 = \exp\{i[\sigma t + \mu z + \delta(x - \frac{\omega}{\alpha}t)]\} \sum_{m=-M}^M \vec{u}_3^{(m)} \exp\{im\alpha(x - \frac{\omega}{\alpha}t)\}$$

On substitue l'écoulement de base et la perturbation secondaire dans les équations linéarisées (II.2) (car on rappelle que la théorie de l'instabilité secondaire est linéaire vis-à-vis de la petite perturbation

secondaire) et en identifiant les termes exponentiels on obtient le système couplé suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} it_m u_3^{(m)} + \frac{dv^{(m)}}{dy} + i\mu w_3^{(m)} = 0 \\ -id_m u_3^{(m)} + it_m p_3^{(m)} - \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{d^2}{dy^2} - t_m^2 - \mu^2 \right) u_3^{(m)} \\ \quad + \sum_{n=-M}^M \left(U_2^{(n)} it_{m-n} u_3^{(m-n)} + \frac{\partial U_2^{(n)}}{\partial x} u_3^{(m-n)} + V_2^{(n)} \frac{du_3^{(m-n)}}{dy} + \frac{\partial U_2^{(n)}}{\partial y} v_3^{(m-n)} \right) = 0 \\ -id_m v_3^{(m)} + \frac{dp_3^{(m)}}{dy} - \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{d^2}{dy^2} - t_m^2 - \mu^2 \right) v_3^{(m)} \\ \quad + \sum_{n=-M}^M \left(U_2^{(n)} it_{m-n} v_3^{(m-n)} + \frac{\partial V_2^{(n)}}{\partial x} u_3^{(m-n)} + V_2^{(n)} \frac{dv_3^{(m-n)}}{dy} + \frac{\partial V_2^{(n)}}{\partial y} v_3^{(m-n)} \right) = 0 \\ -id_m w_3^{(m)} + i\mu p_3^{(m)} - \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{d^2}{dy^2} - t_m^2 - \mu^2 \right) w_3^{(m)} \\ \quad + \sum_{n=-M}^M \left(U_2^{(n)} it_{m-n} w_3^{(m-n)} + V_2^{(n)} \frac{dw_3^{(m-n)}}{dy} \right) = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{où } t_m = m\alpha + \delta \quad \text{et} \quad d_m = \frac{\omega}{\alpha}(m\alpha + \delta) - \sigma$$

système qui se met aisément sous la forme nécessaire à l'utilisation du schéma de Malik, voir annexe B

$$\frac{d\vec{Z}}{dy} = \mathcal{A}\vec{Z} \quad \text{avec} \quad \vec{Z} = [Z^{(-M)} \dots Z^{(M)}]^t \quad \text{et} \quad Z^{(m)} = [u_3^{(m)} \ v_3^{(m)} \ w_3^{(m)} \ p_3^{(m)} \ \frac{du_3^{(m)}}{dy} \ \frac{dw_3^{(m)}}{dy}]^t$$

IV.3.2 Résultats

Un premier constat rend incertaine l'exploitation des résultats : les troncatures des séries, tant N pour l'état d'équilibre que M pour l'onde secondaire, jouent un rôle important si bien qu'on n'atteint pas de convergence très nette vis-à-vis de ces paramètres, comme on peut le constater d'après les tableaux IV.4 et IV.5. On se contente donc de commenter les tendances bien marquées.

La première question qui se pose consiste à savoir si les états d'équilibre ont des caractéristiques de stabilité secondaire proches des ondes primaires. Pour cela, on compare en table IV.4 les modes secondaires les plus amplifiés pour un écoulement de base constitué d'un système d'onde ($x = 20$, $\lambda_i = 56$ correspondant à $\omega \sim 39$) et pour un écoulement de base formé à partir d'une onde primaire linéaire d'amplitude $A = 2$ correspondant à celle du mode 1 des états d'équilibre (avec également $x = 20$, $\omega = 39$). A cette amplitude élevée, les oblicités les plus amplifiées pour le calcul basé sur l'onde primaire linéaire se situent autour de $\mu \sim 4$, c'est donc à cette oblicité qu'on effectue la comparaison. Par ailleurs, comme on sait d'après le début du chapitre que la résonance fondamentale est privilégiée, on prend $\delta = 0$.

Troncature	linéaire, $M \geq 3$	$N=M=5$	$N=M=6$	$N=M=7$	$N=M=8$	$N=M=9$	$N=M=10$
σ	(0,-6.0)	(0,-0.44)	(0,-0.86)	(0,-0.89)	(0,-0.83)	(0,-0.76)	(0,-0.77)

TAB. IV.4 – Valeurs propres σ d'amplification secondaire la plus importante pour un écoulement de base calculé à partir d'une onde primaire linéaire ou d'un système de N ondes en équilibre. La troncature M de l'onde secondaire est égale à celle de l'état d'équilibre. L'amplitude de l'onde primaire linéaire est $A = 2$ correspondant à celle du mode 1 des états d'équilibre. Paramètres : $x = 20$, $\lambda_i = 56$, $\mathcal{R}_{inj} = 500$, $\mu = 4$, $\delta = 0$.

Du tableau IV.4, on tire les indications suivantes

- dépendance déjà mentionnée vis-à-vis de la troncature;

- états d'équilibre instables vis-à-vis de perturbations tridimensionnelles puisque $\sigma_i < 0$;
- états d'équilibre beaucoup moins instables que l'onde primaire linéaire de même amplitude puisque $|\sigma_i|$ est plus de 6 fois plus faible

Pour préciser ces résultats, on effectue des calculs, rapportés dans le tableau IV.5, où on découple les troncatures N et M . Prendre $M < N$ revient à ne considérer que les termes de $-M$ à M parmi les $2N$ termes du système d'ondes. Ainsi, dans les calculs avec $M = 1$, seuls interviennent la distorsion et le premier terme ce qui permet un parallèle immédiat avec l'onde primaire puisque l'écoulement de base est dans les deux cas du type écoulement stationnaire plus écoulement sinusoïdal en $\alpha x - \omega t$. Enfin, dans les trois dernières lignes du tableau IV.5, on élimine artificiellement la distorsion stationnaire des états d'équilibre de telle sorte que l'écoulement moyen soit à nouveau l'écoulement de Taylor. Ainsi, les calculs avec $M = 1$ sont quasi-identiques aux calculs avec onde primaire linéaire à ceci près que la forme des fonctions propres de l'unique terme restant est légèrement différente.

On tire du tableau IV.5 les enseignements suivants

- dépendance déjà mentionnée vis-à-vis de la troncature pour les états d'équilibre mais indépendance rapide ($M \geq 3$ déjà constatée également) pour l'onde primaire linéaire;
- la prise en compte des seuls termes de distorsion et terme numéro 1 des systèmes d'onde conduit à un résultat moins instable que l'onde primaire linéaire mais seulement dans un rapport 1.6;
- l'effet de la distorsion stationnaire est prépondérant puisque sans ce terme, avec $M = 1$, on retrouve le résultat calculé à partir d'une onde primaire linéaire;
- la prise en compte de chaque harmonique supplémentaire des systèmes d'onde conduit à une stabilisation (jusqu'à $M = 5$), qu'on conserve ou non le terme de distorsion.

	linéaire	N=5	N=8	N=10
M=1	(0,-6.1)	(0,-3.7)	(0,-3.8)	(0,-3.8)
M=2	(0,-6.1)	(0,-2.0)	(0,-2.2)	(0,-2.2)
M=3	(0,-6.0)	(0,-1.2)	(0,-1.65)	(0,-1.6)
M=4	(0,-6.0)	(0,-0.65)	(0,-0.81)	(0,-0.81)
M=5	(0,-6.0)	(0,-0.44)	(0,-0.72)	(0,-0.70)
M=6	(0,-6.0)	(0,-0.74)	(0,-0.79)	(0,-0.72)
M=7	(0,-6.0)	(0,-0.73)	(0,-0.84)	(0,-0.75)
M=8	(0,-6.0)	(0,-0.48)	(0,-0.83)	(0,-0.77)
M=9	(0,-6.0)	(0,-0.40)	(0,-0.82)	(0,-0.77)
M=10	(0,-6.0)	(0,-0.42)	(0,-0.79)	(0,-0.77)
Distorsion artificiellement supprimée :				
M=1		(0,-5.8)	(0,-6.0)	(0,-6.0)
M=2		(0,-5.6)	(0,-5.9)	(0,-5.8)
M=3		(0,-3.0)	(0,-3.3)	(0,-3.2)

TAB. IV.5 – Valeurs propres σ d'amplification secondaire la plus importante pour un écoulement de base calculé à partir d'une onde primaire linéaire ou d'un système de N ondes en équilibre pour une troncature M , variable, de l'onde secondaire. L'amplitude de l'onde primaire linéaire est $A = 2$ correspondant à celle du mode 1 des états d'équilibre. Paramètres : $x = 20$, $\lambda_i = 56$, $\mathcal{R}_{inj} = 500$, $\mu = 4$, $\delta = 0$.

Enfin, les balayages en μ situent le maximum d'instabilité vers $\mu \sim 5$ correspondant à des oblicités d'environ 60° . Ils font également apparaître un seuil d'oblicité d'environ 40° sous lequel le système d'onde est stable. Cela signifie que les perturbations de vecteur d'onde proche de l'axe des abscisses sont atténuées ce qui semble rassurant pour un état "d'équilibre" bidimensionnel.

IV.3.3 Conclusion sur la stabilité secondaire des états d'équilibre

Les états d'équilibre bidimensionnels sont instables vis-à-vis de perturbations tridimensionnelles d'obliquité supérieure à 40° . Néanmoins, cette instabilité est très faible comparée à celle obtenue pour une onde primaire linéaire, c'est-à-dire que les taux d'amplification temporels sont plus de 6 fois plus faibles. Comme l'amplification se calcule comme l'exponentielle du taux, la différence est importante. Pour le système d'ondes utilisé, les taux d'amplification temporelle les plus importants correspondent à un taux d'amplification spatiale (grâce à la relation de Gaster) d'environ 0.06.

Les écoulements de VECLA susceptibles de produire une instabilité secondaire sont la résonance acoustique (type 3) et l'écoulement dominé par une fréquence unique distincte de l'acoustique de cavité (type 4). Si on suppose que la saturation de l'écoulement de type 4 intervient vers $x = 27$ comme indiqué précédemment, pour une sortie située à $x = 30$, la valeur 0.06 du taux d'amplification conduit à une amplitude des modes secondaires multipliée par seulement 1.2 entre $x = 27$ et $x = 30$. Finalement, même si des perturbations tridimensionnelles peuvent se développer dans l'écoulement de type 4, elles restent d'un niveau très faible et ne jouent *a priori* pas de rôle dans les cas observés sur VECLA.

IV.4 Conclusion sur les effets non-linéaires

Trois sortes d'observations sur VECLA relèvent *a priori* de non-linéarités liées à l'instabilité de l'écoulement :

- pour l'écoulement de type 1 (écoulement laminaire dans toute la veine avec une bande de fréquences spatialement amplifiées (vers l'aval) jusqu'à la sortie), l'apparition des fréquences "doubles" et "nulles" sur les spectres II.18 et II.19 plus un défaut de vitesse semblable à une saturation sur la figure II.19;
- pour les écoulements de type 3 (résonance acoustique) et 4 (dominé par une seule fréquence distincte de celle des modes acoustiques de cavité), l'apparition de structures bien formées sur les visualisations I.14;
- pour l'écoulement de type 2 (écoulement laminaire à l'amont de la veine avec une bande de fréquences spatialement amplifiées jusqu'à une transition à la turbulence), la transition à la turbulence.

On a montré que l'évolution de l'écoulement de type 1 vers l'aval de VECLA (sortie à l'abscisse $x = 20$) ne relève pas de la stabilité secondaire car les amplitudes atteintes sont trop faibles. La modification des spectres II.19 n'est donc pas due à une tridimensionnalisation de l'écoulement. Néanmoins, à supposer que les spectres indiquent effectivement une saturation bidimensionnelle, celle-ci ne relève pas de la théorie proposée dans ce chapitre puisque les amplitudes prévues sont bien plus élevées. La raison de ce désaccord vient probablement de ce que la forme présumée du spectre du système d'ondes non-linéaire théorique (une seule fréquence fondamentale et ses harmoniques) ne coïncide pas avec le spectre large bande mesuré en réalité.²²

L'écoulement de type 4 possède pour sa part un spectre compatible avec la modélisation proposée. On a montré qu'il est susceptible à la fois d'atteindre la saturation loin vers l'aval de VECLA (vers $x = 27$ pour une sortie située à $x = 30$) et de connaître une transition secondaire puisque les états d'équilibre bidimensionnels sont instables vis-à-vis de perturbations tridimensionnelles.²³ Néanmoins, les faibles taux d'amplification calculés laissent penser que la tridimensionnalisation peut être négligée

22. Le même argument peut malheureusement être opposé à l'étude de stabilité secondaire de l'onde primaire linéaire. En effet, bien que la théorie soit linéaire vis-à-vis de l'onde primaire, la séparation en modes normaux à la fois de l'onde primaire et de l'onde secondaire n'est valide *a priori* que si le spectre des perturbations primaires est mono-fréquentiel (ce qui n'est pas le cas) ou si celui des perturbations secondaires est mono-fréquentiel (ce qui n'a pas de raison de se produire). Si l'une de ces conditions n'est pas réalisée, le traitement des termes quadratiques des équations de Navier-Stokes par transformée de Fourier pose problème.

23. On peut d'ailleurs penser que la transition secondaire se produirait dans le raccord entre zone linéaire et zone saturée ce qui ne change probablement rien aux conclusions.

tant que la sortie est à $x = 30$. On en déduit que les structures observées dans les visualisations I.14 sont bidimensionnelles.

Les amplitudes plus élevées des écoulements résonnants de type 3, ainsi que la présence d'acoustique de fort niveau non-prise en compte dans les modélisations ne permettent pas de conclure clairement dans ces cas.

Enfin, rien dans ce chapitre ne permet de se prononcer sur la localisation de la transition à la turbulence des écoulements de type 2, par ailleurs mal connue expérimentalement, ou même sur le scénario de cette transition.

Chapitre V

Retour au problème global

V.1 Nécessité de coupler acoustique et stabilité

Pour bien comprendre le problème global, et le traitement qu'on en propose, il faut établir nettement la distinction entre l'instabilité des moteurs à propergol solide, au sens des motoristes, et l'instabilité pariétale abordée dans les trois précédents chapitres.

Comme on l'a expliqué au chapitre I, le phénomène gênant qui se produit dans les P230 d'Ariane 5 est un accrochage aéroacoustique entre un mode de cavité longitudinal et une instabilité hydrodynamique. L'hypothèse sous-jacente de cette thèse consiste à dire que l'instabilité hydrodynamique en question est l'instabilité pariétale. Mais lorsque les motoristes parlent d'instabilité, ou d'instabilité du mode acoustique, ils désignent l'accrochage aéroacoustique. En effet, il faut insister sur le fait que l'instabilité pariétale n'est jamais directement visible dans les mesures d'un tir de moteur réel (par opposition aux simulations en gaz froid) en raison de ses faibles amplitudes en comparaison du bruit ambiant. Sa présence est seulement soupçonnée par son effet sur l'acoustique. Il est donc naturel que l'ambiguïté s'installe dans l'utilisation du terme instabilité qui désigne soit les fluctuations mesurables résultant d'un couplage soit l'instabilité hydrodynamique, invisible dans les mesures.

Par la suite, on va désigner par "instabilité globale" l'instabilité au sens des motoristes *i.e.* le résultat du couplage aéroacoustique, et on conserve "instabilité pariétale" pour le phénomène étudié aux chapitres précédents. Le terme "globale" signifie que divers mécanismes concernant l'ensemble de l'écoulement sont mis en jeu, il n'a rien à voir avec son utilisation consacrée en théorie de la stabilité, voir Huerre et Monkewitz [HM90].

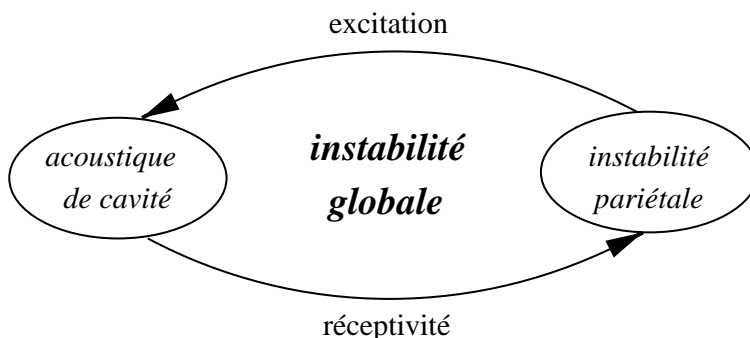


FIG. V.1 – Couplage aéroacoustique

Le couplage donnant lieu à l'instabilité globale est sommairement schématisé en figure V.1. Les deux types de fluctuations en présence sont l'acoustique de cavité, présentée en annexe A, dont la connaissance est suffisamment précise pour ne pas nécessiter d'études supplémentaires, et l'instabilité

pariétale dont la phase linéaire semble maintenant bien connue mais dont les développements ultérieurs (instabilité secondaire, saturation non-linéaire...) méritent encore des efforts de modélisation.

Même si on suppose bien connue chacune des deux parties, la question des deux interactions n'a pas été abordée du tout dans ce manuscrit jusqu'à présent. En effet, la prise en compte de l'acoustique effectuée au chapitre III justifie seulement la validité des résultats de stabilité en présence d'acoustique mais ne constitue pas une évaluation de l'excitation de l'instabilité pariétale par l'acoustique au sens où il ne s'agit pas d'un forçage.

Les deux sections suivantes sont donc consacrées successivement à un succinct état des connaissances concernant l'excitation de l'acoustique par l'onde d'instabilité puis à l'application d'une théorie de réceptivité à la création d'instabilité pariétale par l'acoustique de cavité des écoulements induits par injection latérale.

V.2 Excitation de l'acoustique

L'excitation de l'acoustique par l'instabilité pariétale est un problème complexe qui dépasse nettement le cadre de cette thèse. Une formule simple est néanmoins proposée par Howe [How80] et [How84] pour calculer les transferts d'énergie entre champ acoustique et champ de vorticité. La puissance acoustique moyenne (moyenne notée par $\langle \cdot \rangle$) est donnée par

$$\mathcal{P} = -\rho_0 \left\langle \int_V (\vec{\omega} \wedge \vec{U}) \cdot \vec{u}_{ac} dV \right\rangle \quad (\text{V.1})$$

où \vec{U} est le champ de vitesse de l'écoulement convectif (champ de vitesse qui transporte les tourbillons ou du moins la vorticité instationnaire), $\vec{\omega}$ la vorticité instationnaire et \vec{u}_{ac} le champ potentiel c'est-à-dire la vitesse acoustique définie à partir de la décomposition d'Helmholtz. Si \mathcal{P} est positif, l'énergie est transférée du champ de vorticité au champ acoustique. Sinon, le transfert s'effectue en sens inverse. La plupart des raisonnements suivants étant basés sur la direction relative de \vec{U} et \vec{u}_{ac} , il est bon d'insister tout de suite sur le fait que \mathcal{P} est un produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux, donc nul, si \vec{U} et \vec{u}_{ac} sont colinéaires alors que \mathcal{P} est maximal si \vec{U} et \vec{u}_{ac} sont orthogonaux (car $\vec{\omega}$ leur est orthogonal si on suppose l'écoulement bidimensionnel).

Deux modes d'excitation sont possibles *a priori*: interaction en volume (  l'intérieur même du moteur) ou interaction par le biais d'une condition à une limite (vers la tuyère ou la section de sortie lorsqu'aucune tuyère n'y est adaptée). Les interactions en volume sont généralement très faibles par rapport au second type et aucun résultat expérimental ou numérique ne suggère de trop s'y attacher. La formule de Howe (V.1) suffit à s'en convaincre puisque dans les zones débitantes le champ convectif \vec{U} et le champ potentiel \vec{u}_{ac} sont colinéaires à \vec{e}_x sauf très près de la paroi où $\vec{\omega}$ tend vers zéro, les deux termes du produit scalaire sont donc presque orthogonaux. Comme de plus, l'instabilité a une courte longueur d'onde à l'échelle de l'acoustique, l'intégrale tend de toute façon vers zéro puisque les contributions des zones en opposition de phase se compensent.

L'interaction par le biais d'une condition à une limite est un mécanisme beaucoup plus puissant. Ainsi, dans les simulations de VECLA réalisées par Ugurtas [Ugu00], l'excitation de l'acoustique est assurée par la condition de pression imposée à la sortie. Comme on l'a expliqué en section II.8, le passage des ondes d'instabilité pariétale (auxquelles est associée une fluctuation de pression) par la section de sortie provoque en retour l'émission d'une onde acoustique afin de maintenir la pression constante. Les simulations d'Ugurtas [Ugu00] ont montré leur capacité à discerner les écoulements dans VECLA de type 3 ou de type 4; néanmoins, la condition de pression imposée en sortie semble trop forte pour représenter correctement VECLA sans tuyère. La formule de Howe (V.1) permet à nouveau de se représenter le mécanisme à l'œuvre dans ce cas, comme le montrent Hirschberg *et al.* [HHvHA98]. L'écoulement convectif et la vorticité qu'il transporte sont peu modifiés par le passage de la section de sortie mais au contraire les lignes de courant de l'écoulement potentiel ressentent immédiatement la sortie en atmosphère libre et se séparent en éventail, voir figure V.2, formant ainsi

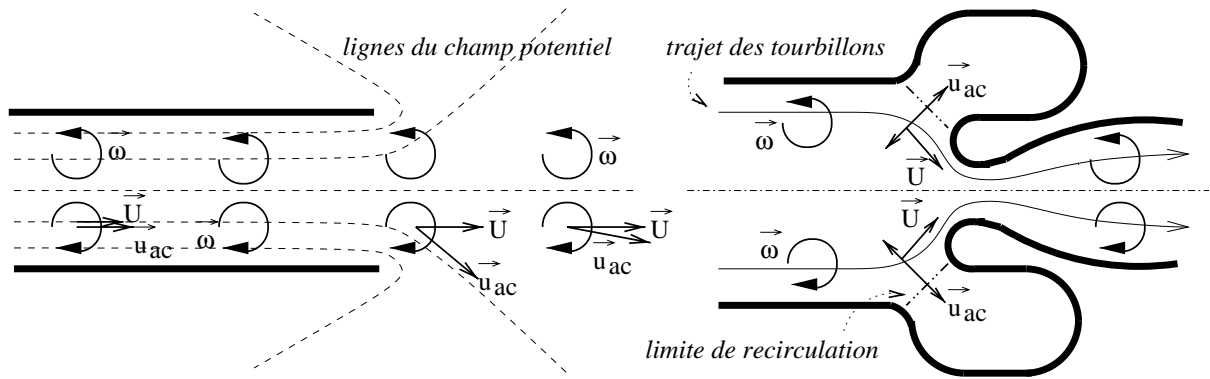


FIG. V.2 – Interprétation de l'excitation de l'acoustique par des instabilités selon le mécanisme de Howe [How80] et [How84] pour un fond arrière muni ou non d'une tuyère intégrée.

un angle important avec l'écoulement convectif au niveau de la section de sortie. L'intégrale sur le volume donnant la puissance acoustique moyenne \mathcal{P} se ramène donc à une intégrale sur un petit volume localisé autour de la section de sortie. Le rapport précis entre cette intégrale et l'excitation acoustique liée à la condition de pression imposée reste cependant incertain.

Lorsqu'une tuyère est adaptée à la section de sortie, l'excitation de l'acoustique est généralement associée à l'"impact de tourbillons sur le nez de la tuyère" qui se réduit à une condition sur la tuyère, voir Flandro [Fla86]. Cette vision du phénomène est, paraît-il, erronée et il est préférable d'y substituer la suivante. La présence du nez de la tuyère provoque une déviation du champ convectif (donc les tourbillons évitent la tuyère) qui n'est de ce fait plus colinéaire au champ potentiel et crée une excitation acoustique selon le mécanisme de Howe (V.1).

Un rôle prépondérant semble joué par l'intégration de la tuyère. Anthoine [ABG00] met en évidence une *relation linéaire entre le volume de la cavité de la tuyère intégrée et l'amplitude acoustique de la résonance* par des essais avec injection axiale dans la maquette du VKI munie d'un diaphragme. Il propose dans sa thèse [Ant00] un modèle explicatif basé sur la formule de Howe (V.1) où la tuyère dévie le champ convectif vers l'axe tandis que la cavité dévie le champ potentiel vers l'extérieur, voir figure V.2. Il montre cependant que dans le cas de l'injection radiale, l'amplitude acoustique n'est plus reliée de manière aussi simple au volume de la cavité.

Ces découvertes ont été précédées par des études de Sukhinin et Akhmadeev [Suk93] sur la stabilité des moteurs à propergol où les auteurs attribuent un rôle majeur à l'intégration de la tuyère. Plus précisément, ils mettent en cause la surface délimitant la zone de recirculation contenue dans la cavité de la tuyère.

Si leur théorie est fondée, les niveaux d'oscillation pourraient être diminués en organisant un écoulement non-axisymétrique dans la cavité de telle sorte que l'écoulement y entre pour une valeur de l'angle azimutal θ et s'en échappe pour une autre.¹ On peut se demander s'il ne s'agit pas là d'un effet observé sur un essai effectué à l'ONERA-CFM (essai LP6 17/96). Lors de cet essai, le chambrage arrière du segment de propergol aval a été volontairement décentré afin de provoquer des effets tridimensionnels au niveau de la tuyère. Or, ce tir n'a produit que des amplitudes presque deux fois plus faibles que des tirs similaires (LP6 14-15-16-18-20-21/96) sans modifier l'instant d'accrochage ou provoquer l'apparition d'autres modes acoustiques. Cette voie de recherche semble donc particulièrement intéressante.

1. Pour donner une analogie, les automobiles roulant avec une seule fenêtre ouverte peuvent être le siège d'oscillations acoustiques de basse fréquence très gênantes pour le conducteur mais il lui suffit d'ouvrir légèrement une seconde fenêtre pour les faire disparaître.

V.3 Notions de réceptivité

L'étude de la génération d'ondes d'instabilité à partir d'une onde acoustique est un problème dit de "réceptivité". Il est lui aussi très complexe et on se contente de présenter une méthode relativement générale proposée par Hill [Hil95] pour en tirer quelques enseignements sur le cas des moteurs à propergol solide et des montages les simulant.

Pour donner une idée simple du principe des études de réceptivité linéaire, on peut dire que l'instabilité, oscillation en temps et en espace, est directement produite par la combinaison de l'acoustique qui apporte l'échelle temporelle (par le biais de sa fréquence) sans introduire d'échelle de longueur (supposée infinie ou, du moins, très grande devant celle de l'instabilité) et d'une perturbation stationnaire du problème initial qui apporte l'échelle de longueur (parce que supposée localisée en espace) sans introduire d'échelle de temps (puisqu'elle est stationnaire).

V.3.1 Méthode de Hill [Hil95] par système adjoint pour la couche limite

Au lieu de suivre les équations linéaires homogènes considérées précédemment, l'instabilité dans sa phase de réceptivité est directement influencée par des termes sources. Ceux-ci consistent *a priori* (une difficulté majeure est l'identification précise de ces termes qu'on suppose connus) en

- des sources de quantité de mouvement oscillantes notées $\vec{q}(x, y; \omega)e^{-i\omega t}$,
- des sources de masse oscillantes notées $\psi(x, y; \omega)e^{-i\omega t}$
- des conditions oscillantes à la paroi $y = 0$ données par $\vec{v}_b(x; \omega)e^{-i\omega t}$.

L'instabilité obéit donc à un système du type

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \psi(x, y; \omega) \\ -i\omega \vec{u} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} - \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \vec{\nabla}^2 \vec{u} + \vec{\nabla} p = \vec{q}(x, y; \omega) \\ \vec{u} = \vec{v}_b(x; \omega) \quad \text{à la paroi} \end{cases} \quad (\text{V.2})$$

qui se réduit au système habituel de la stabilité (II.2) en l'absence de source.

L'analyse de Hill [Hil95], rappelée en annexe H, quantifie l'amplitude de l'instabilité créée par ces sources supposées localisées à l'intérieur d'un intervalle $[x_1, x_2]$. En notant $a^{(2)}$ l'amplitude de l'instabilité à l'aval des sources (x_2) et $a^{(1)}$ l'amplitude à l'amont (x_1), la méthode de Hill montre que la variation de l'amplitude s'écrit

$$\begin{aligned} a^{(2)} - a^{(1)} = & \int_{x_1}^{x_2} \int_0^1 \vec{q}(x, y; \omega) \cdot \vec{u}_{\alpha\omega}(y) e^{-i\alpha x} dy dx \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \int_0^1 \psi(x, y; \omega) \tilde{p}_{\alpha\omega}(y) e^{-i\alpha x} dy dx \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \vec{v}_b(x; \omega) \cdot \tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\omega}(y) e^{-i\alpha x} dx \end{aligned} \quad (\text{V.3})$$

où \tilde{g} est la grandeur adjointe de la grandeur g pour une définition du problème adjoint donnée en annexe H. La même annexe H précise également la normalisation du mode propre permettant la quantification ainsi que les hypothèses nécessaires à l'application de la méthode de Hill, formulée par l'auteur dans le cas des couches limites, à l'écoulement de Taylor, et enfin certaines simplifications possibles des calculs dans le cas d'une réceptivité liée à des rugosités de paroi ou à un défaut de la vitesse d'injection.

V.3.2 Identification des sources

Grâce à la méthode de Hill, toute la difficulté se ramène à écrire le problème sous la forme (V.2). Cette écriture repose sur la décomposition de l'écoulement en quatre parties superposées. Ceci suppose évidemment des hypothèses de linéarité qui limitent la portée de la méthode. Pour déterminer

l'évolution de l'amplitude d'une instabilité de pulsation ω et de nombre d'onde α , les quatre parties de l'écoulement distinguées sont

- l'écoulement de base, à savoir l'écoulement de Taylor \vec{U}_{Taylor} , solution du problème non-linéaire;
- une partie oscillante supposée indépendante de x (*i.e.* de grande longueur d'onde) $\varepsilon_{ac}\vec{u}_{ac}(x, y, t) = u_{ac}(y)e^{-i\omega t}\vec{x}$, à savoir la solution acoustique, voir annexe A, solution du problème linéarisé instationnaire avec la solution de Taylor comme écoulement de base;
- une partie stationnaire perturbée significative seulement dans une région bien localisée $\varepsilon'\vec{U}'$, solution du problème linéarisé stationnaire avec la solution de Taylor comme écoulement de base;
- une partie fluctuante $\varepsilon\vec{u}$ sous forme de mode normal de pulsation ω et de nombre d'onde α , c'est l'onde d'instabilité qui va obéir à un système linéaire d'équations du type (V.2).

La linéarité du problème impose la petitesse des fluctuations acoustiques et des ondes de stabilité, ce qui ne constitue qu'une très faible limitation, mais aussi celle de la perturbation stationnaire ce qui va poser plus de difficultés.

Puisque l'instabilité est créée par la combinaison quadratique de l'acoustique qui apporte l'échelle temporelle et de la perturbation stationnaire qui apporte l'échelle de longueur, il est naturel de supposer que pour le mécanisme de réceptivité on ait

$$\varepsilon = \varepsilon_{ac}\varepsilon'$$

L'insertion de la décomposition $\vec{U}_{Taylor} + \varepsilon_{ac}\vec{u}_{ac} + \varepsilon'\vec{U}' + \varepsilon_{ac}\varepsilon'\vec{u}$ dans les équations de Navier-Stokes donne

- des termes de l'ordre de 1 qui n'impliquent que \vec{U}_{Taylor} et s'annulent car \vec{U}_{Taylor} est solution du problème non-linéaire;
- des termes d'ordre ε_{ac} (resp. ε') qui font intervenir \vec{u}_{ac} (resp. \vec{U}') et \vec{U}_{Taylor} et qui s'annulent car ces champs sont solutions des problèmes linéaires avec l'écoulement de Taylor comme écoulement de base;
- des termes d'ordre ε_{ac}^2 (resp. ε'^2) qui sont indépendants de x (resp. de t) et ne contribuent donc pas à créer du mode propre;
- des termes d'ordre $\varepsilon_{ac}\varepsilon'$ qui donnent lieu au système du type (V.2).

A l'ordre $\varepsilon_{ac}\varepsilon'$, on a donc

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \\ -i\omega\vec{u} + (\vec{U}_{Taylor} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{U}_{Taylor} - \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}}\vec{\nabla}^2 u + \vec{\nabla} p &= -\vec{x} \left(V' \frac{du_{ac}}{dy} + u_{ac} \frac{\partial U'}{\partial x} \right) - \vec{y} u_{ac} \frac{\partial V'}{\partial x} \end{aligned}$$

(où on rappelle que $\vec{u}_{ac} = \vec{x}u_{ac}(y)e^{-i\omega t}$ est supposé ne pas dépendre de x) ce qui permet de voir que

$$\psi(x, y; \omega) = 0 \quad \text{et} \quad \vec{q}(x, y; \omega) = -\vec{x} \left(V' \frac{du_{ac}}{dy} + u_{ac} \frac{\partial U'}{\partial x} \right) - \vec{y} u_{ac} \frac{\partial V'}{\partial x} \quad (\text{V.4})$$

L'absence de source de masse provient ici de l'absence de termes quadratiques dans l'équation de continuité incompressible.

Il n'en serait pas de même si on considérait les équations en régime compressible. Par ailleurs, si on voulait tenir compte du caractère diphasique de l'écoulement et de la combustion distribuée des gouttelettes d'aluminium, les fluctuations de pression acoustique influenceraient certainement les échanges de masse entre phases créant ainsi des sources de masse instationnaires.

Admittance de la paroi

Dans le cas de VECLA, l'influence la plus plausible de l'acoustique sur la stabilité est liée à l'admittance de la paroi poreuse déjà évoquée au paragraphe II.2.1.

En effet, l'onde acoustique impose une pression $p_{ac}e^{-i\omega t}$ à la paroi qui entraîne, à cause de la réponse de la paroi, une fluctuation de vitesse verticale $ve^{-i\omega t}$ à la paroi telle que

$$v = \frac{R}{\bar{p}^*/(\rho V_{inj}^2)} p_{ac} = R' p_{ac}$$

avec les notations de II.2.1. Cela donne le terme "source" en paroi

$$\vec{v}_b(x, \omega) \cdot \vec{y} = R' p_{ac}$$

Cette démarche est foncièrement différente de celle dont on mentionne au paragraphe II.2.1 qu'elle n'a aucun effet et qui consiste à relier la vitesse verticale de l'instabilité à la pression créée par cette même instabilité au lieu de la relier à la pression acoustique.

L'introduction d'une admittance de paroi n'entraîne pas de modification de l'écoulement moyen, donc aucune source de quantité de mouvement n'en résulte et la réceptivité ne se produit que par la condition à la limite.

D'après la relation (V.3) et la définition de la contrainte adjointe $\tilde{S}_{\alpha\omega}$, l'admittance de la paroi entre deux abscisses x_1 et x_2 induit une onde d'instabilité d'amplitude

$$\int_{x_1}^{x_2} \vec{v}_b(x; \omega) \cdot \tilde{S}_{\alpha\omega}(y) e^{-i\alpha x} dx = \int_{x_1}^{x_2} R' p_{ac} \tilde{p}_{\alpha\omega}(y=1) e^{-i\alpha x} dx \quad (V.5)$$

Malheureusement l'hypothèse la plus raisonnable qui consiste à dire que l'admittance est constante sur toute la plaque poreuse a deux défauts. D'abord, la "source" n'est plus localisée (hypothèse nécessaire à l'utilisation de la méthode de Hill) puisqu'elle s'étend sur tout le canal, le choix des abscisses x_1 et x_2 semble donc arbitraire. Ensuite, comme $\tilde{p}_{\alpha\omega}(y=1)$ et p_{ac} sont par hypothèse indépendants de x , on trouve $\int_{x_1}^{x_2} e^{-i\alpha x}$ à une constante multiplicative près c'est-à-dire un résultat entièrement dépendant de la longueur (arbitraire) de l'intervalle choisi.

Pour réduire le caractère arbitraire du choix et retrouver une source d'étendue finie, on peut rendre à la pression acoustique sa dépendance (lente) en x et supposer que la *zone importante pour la réceptivité* est confinée vers les maxima de pression acoustique puisque la formule (V.5) met p_{ac} en jeu, c'est-à-dire les *ventres de pression* des modes de cavité. L'hypothèse consiste à prendre l'intervalle $[x_1, x_2]$ juste autour de la zone importante ainsi déterminée alors qu'il est en toute rigueur de même taille que la paroi poreuse, donc que le montage.

Par exemple, dans VECLA sans tuyère, le mode acoustique le plus souvent excité a une longueur d'onde égale à 4/3 de la longueur L de la veine. Deux ventres de pressions s'y trouvent, l'un au fond avant, zone où les instabilités sont théoriquement atténuées, l'autre aux 2/3 de la veine. Pour mesurer l'effet de l'admittance autour du deuxième ventre, on peut prendre par exemple

$$R' \tilde{p}_{\alpha\omega}(y=1) \int_{2L/3-l}^{2L/3+l} p_{ac} \cos\left(\frac{3\pi}{2L}x\right) e^{-i\alpha x} dx \quad (V.6)$$

où la longueur $2l$ d'intégration demeure arbitraire.

Ce résultat est quelque peu surprenant si on le compare aux résultats expérimentaux de Ugurtas [Ugu00] sur lesquels on va revenir par la suite. Ce dernier s'appuie sur des théories de Rossiter impliquant un critère de phase entre un point d'émission tourbillonnaire et un point d'excitation de l'acoustique par les tourbillons. La relation de Rossiter ainsi que son utilisation par Ugurtas font l'objet de l'annexe I. L'analyse des sauts en fréquence lors d'accrochages obtenus au cours d'essais sur VECLA avec vitesse d'injection variable lui permet de déterminer un "point de référence hydrodynamique" correspondant assez précisément au seul ventre de vitesse acoustique de la veine. Ce résultat semble contredire l'hypothèse que la réceptivité dans VECLA n'est liée qu'à l'admittance de la paroi poreuse puisque cette dernière implique que seuls les ventres de pression acoustique, et non de vitesse, entrent en jeu.

Défaut de l'injection

Une autre source possible dans VECLA consiste en un défaut de l'injection (survitesse, sousvitesse ou vitesse non-normale à la paroi). Durant les tirs du P230, les inhomogénéités du propergol, liées au mode de remplissage des moules par coulées, sont également susceptibles de produire cet effet. Si on suppose que le défaut est de faible amplitude, on peut appliquer l'analyse linéaire proposée.

Le défaut de l'injection (supposé stationnaire) n'intervient que par la condition à la paroi de la perturbation stationnaire \vec{U}' , mais ne modifie pas la condition à la limite sur le champ fluctuant \vec{u} donc $v_b(x; \omega) = 0$ et on a seulement des sources de quantité de mouvement.² On suppose le défaut de l'injection localisé entre les abscisses x_1^I et x_2^I .

L'amplitude des instabilités créées est alors donnée par la relation (V.3) avec (V.4) et $v_b = 0$. Mais Hill propose une méthode décrite en annexe H plus élégante et plus pratique que l'intégration directe de (V.3). Avec sa méthode, en notant $\vec{U}_s(x) = \vec{U}'(x, 1)$ le défaut d'injection, localisé entre x_1^I et x_2^I , l'amplitude de l'onde d'instabilité s'écrit simplement

$$\left(\tilde{P}\vec{y} + \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \frac{d\tilde{U}}{dy} \vec{x} \right) \cdot \int_{x_1}^{x_2} dx \vec{U}_s(x) e^{-i\alpha x} = \left(\tilde{P}\vec{y} + \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \frac{d\tilde{U}}{dy} \vec{x} \right) \cdot \int_{x_1^I}^{x_2^I} dx \vec{U}_s(x) e^{-i\alpha x} \quad (\text{V.7})$$

où \tilde{U} et \tilde{P} sont solutions d'un problème de résolution aisée décrit en annexe H.

Dans l'écriture (V.7), \vec{U} et \tilde{P} ne sont plus directement les fonctions propres adjointes du problème de stabilité mais dépendent linéairement de l'acoustique via le vecteur \vec{Q} défini en annexe H. Par ailleurs la définition (H.11) de ce dernier fait intervenir uniquement u_{ac} et non pas p_{ac} , cela tend à dire que l'instabilité créée sera *plus forte* si le défaut de vitesse est situé vers un *ventre de vitesse*.³

Intersegment et protection thermique

Dans le moteur d'Ariane 5, les ondes acoustiques peuvent aussi engendrer des instabilités pariétales lors de leur passage vers l'intersegment ou vers la protection thermique. Ces deux irrégularités de la géométrie produisent en effet une distorsion stationnaire de l'écoulement qui, combinée à l'acoustique, sert de source de quantité de mouvement aux ondes d'instabilité selon la formule (V.4).

Cette source semble même essentielle d'après des simulations numériques de Lupoglazoff et Vuillot [LV00] qui montrent que la présence de l'intersegment favorise l'accrochage aéroacoustique par l'instabilité pariétale.

Plusieurs difficultés se présentent pour estimer la réceptivité liée à l'intersegment ou à la protection thermique. D'abord, la perturbation stationnaire semble difficile à estimer sans recours à des simulations numériques du problème complet. Ensuite, il est peu probable que les hypothèses de linéarisation soient applicables dans un cas représentatif de la réalité car la protection thermique constitue un obstacle très pénétrant aux instants de l'accrochage⁴. De plus, l'écriture des conditions en $y = 1$ n'a rien d'aisé puisque dans le cas de l'intersegment, l'ordonnée de la paroi est strictement plus grande que 1 (car le rayon utilisé pour l'adimensionnement est le rayon hors de l'intersegment), il faut donc "transporter" les conditions aux limites de la paroi à $y = 1$ par un développement de Taylor qui n'est valable que pour un intersegment de très faible profondeur.

En raison de l'absence de possibilité de validation on n'a entrepris aucune étude des effets liés à l'intersegment ou à la protection thermique. On se contentera des quelques remarques suivantes sur les travaux de Lupoglazoff et Vuillot [LV00].

2. C'est la situation inverse de la prise en compte de la réponse de la paroi

3. Attention, Hill suppose dans toute son approche l'indépendance en x de l'acoustique qu'on remet ici en cause en considérant la structure spatiale du mode de cavité. Il s'agit donc d'une extrapolation osée des résultats de la théorie qui n'est grossièrement justifiable que par le découplage des échelles en x entre acoustique et stabilité.

4. A titre d'exemple, le restricteur (simulant la protection thermique) utilisé dans le montage MICAT mesure 1/3 de la hauteur de veine et celui utilisé au VKI mesure 1/4 de la hauteur de veine.

D'abord, la réceptivité liée à la présence de l'intersegment semble plus efficace que celle liée à un défaut de vitesse puisque les auteurs rapportent qu'une interruption de débit ne parvient pas à provoquer l'accrochage.

Ensuite, Lupoglazoff et Vuillot [LV00] observent que la longueur de l'intersegment présente un effet négligeable au contraire de sa position. Ceci permet d'éliminer deux modes d'action de l'intersegment : ce dernier ne peut être représenté ni par un défaut de vitesse dû à l'absence d'injection dans cette zone, ni par une forme de réponse de la cavité constituée par l'intersegment. En effet, en raison du terme en $e^{i\alpha x}$, les amplitudes (V.6) et (V.7) dépendent cruciallement de la longueur de la paroi présentant une admittance ou un défaut d'injection.

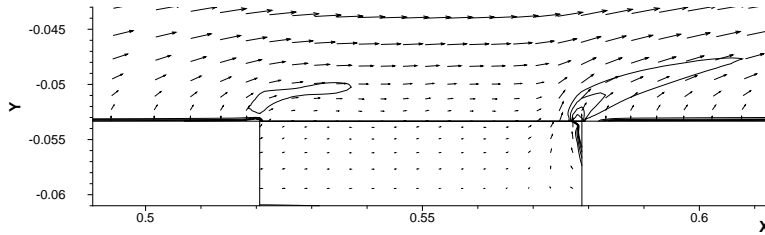


FIG. V.3 – Isovaleurs de la vorticité autour de l'intersegment du LP3e et vecteurs vitesse.

Pour expliquer l'indépendance vis-à-vis de la longueur, on peut supposer que l'effet principal est lié à la vorticité créée au coin aval de l'intersegment (nettement plus forte que celle du coin amont) et visible sur la figure V.3 tirée du calcul sur le LP3e utilisé à la section III.2.

La question du type de source que constituent l'intersegment ou la protection thermique est importante en ce qu'elle permet de savoir si on doit les placer plutôt vers des nœuds de vitesse ou vers des nœuds de pression pour réduire le niveau des instabilités pariétales engendrées. Comme, d'après les paramétrages de Lupoglazoff et Vuillot [LV00] sur la longueur de l'intersegment, on peut négliger les sources du type "condition limite" (*i.e.* $\vec{v}_b \sim 0$), seules restent les sources de quantité de mouvement qui selon l'expression (V.4) mettent la vitesse acoustique en jeu. Donc *pour réduire les mécanismes de réceptivité*, on a intérêt à placer l'intersegment ou la protection thermique vers un *nœud de vitesse acoustique*.

Il faut cependant bien comprendre que cette condition ne concerne pas directement le problème global de l'accrochage mais seulement celui de l'instabilité pariétale puisqu'elle ne contient aucun critère de mise en phase des instabilités ainsi créées et du retour acoustique provoqué par l'interaction des instabilités avec la section de sortie (libre ou munie d'une tuyère).

Remarquons enfin que cette conclusion rejoint celle d'Anthoine [Ant00] basée sur l'utilisation de la formule de Howe V.1 d'après laquelle les transferts d'énergie entre champ acoustique et champ rotationnel (dans un sens ou dans l'autre à la différence de l'approche de réceptivité qui n'étudie que le transfert de l'acoustique vers l'instabilité) sont maximaux vers les ventres de vitesses acoustiques. Anthoine [Ant00] en conclut que la protection thermique doit se situer à un ventre de vitesse pour favoriser le couplage.

V.3.3 Remarques sur les résultats expérimentaux

On ne dispose pas de mesures permettant l'étude systématique de la réceptivité dans VECLA. Mais on peut cependant établir des relations intéressantes entre les amplitudes initiales estimées grâce à la stabilité linéaire et les amplitudes de pression instationnaire au fond avant.

En effet, on a déjà utilisé aux paragraphes IV.1.7 et IV.2.11 des mesures de vitesses permettant d'estimer l'amplitude initiale des instabilités de pulsation $\omega \sim 38$ pour des écoulements de type 2, 3 et 4. Si on note $A_0(\text{type } j)$ l'amplitude initiale de cette instabilité pour l'écoulement de type j ,

adimensionnée par la vitesse d'injection, on trouve

$$\frac{A_0(\text{type 4})}{A_0(\text{type 2})} \sim 17 \quad \frac{A_0(\text{type 3})}{A_0(\text{type 2})} \sim 40$$

Or, si on compare les rapports de la pression fluctuante adimensionnelle au fond avant pour la même pulsation $p_{av}(\omega \sim 38)/(\rho V_{inj}^2)$, on trouve des résultats du même ordre de grandeur, à savoir aux alentours⁵ de 17 pour le rapport entre écoulements de type 4 et 2 et aux alentours de 40 pour le rapport entre écoulements de type 3 et 2.

Cette observation est naturelle d'après la théorie de la réceptivité. En effet, la pression fluctuante au fond avant est une mesure directe de l'amplitude acoustique alors que l'amplitude initiale des instabilités A_0 est le résultat du mécanisme de réceptivité. Comme ce dernier a été supposé linéairement dépendant de l'amplitude acoustique, la théorie implique l'égalité des rapports de A_0 et de pression fluctuante au fond avant d'un cas à un autre. Les observations justifient donc cette hypothèse de linéarité.

V.4 Scénario explicatif du comportement de VECLA

Puisqu'on connaît désormais, plus ou moins bien, les deux parties du champ fluctuant, celle liée à l'acoustique et celle liée à l'instabilité, ainsi que leurs modes d'interaction, on peut tenter d'expliquer l'origine des cinq comportements observés sur le montage VECLA et décrits à la section I.6.

V.4.1 Proposition de scénario

Parmi les cinq comportements, on peut d'abord isoler le dernier (type 5) où tout l'écoulement est turbulent car il répond à un mécanisme indépendant de l'instabilité pariétale. En effet, Avalon *et al.* [ACG98] ont montré qu'au-dessus d'une valeur seuil de la vitesse d'injection le niveau de turbulence injectée, dont l'origine est liée aux micro-jets issus des pores du matériaux poreux, devient élevé. Pour cette raison, le dernier cas (numéro 5) se produit principalement à forte vitesse d'injection. La présence d'une tuyère semble aussi favoriser ce type de cas. Comme dans les cas où l'acoustique domine, l'écoulement est toujours laminaire, il est possible que l'injection d'un fort taux de turbulence empêche la résonance acoustique⁶.

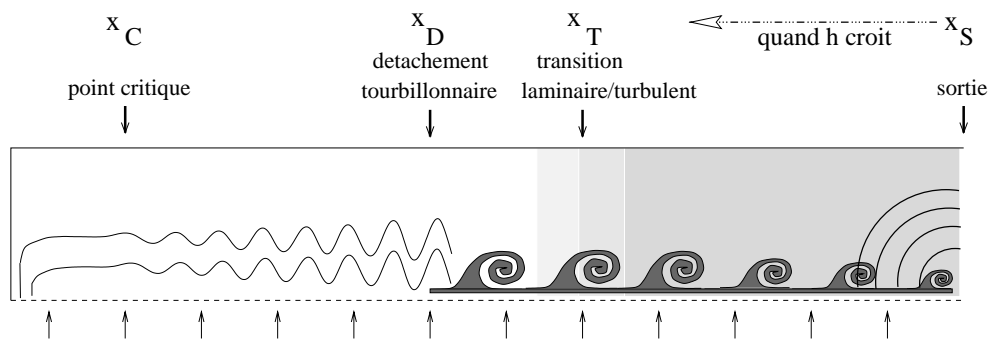


FIG. V.4 – Schéma de la proposition de scénario explicatif du comportement de VECLA.

Une fois ce cas mis à part, les quatre autres comportements peuvent s'expliquer de la façon suivante.

5. Les amplitudes des composantes spectrales de pression fluctuante varient assez fortement selon les séries de mesures retenues (jusqu'à 100%) mais il en est de même des amplitudes de vitesse. Les valeurs données correspondent à des estimations "à la louche" de la moyenne avec une incertitude élevée mais les tendances sont tout de même très nettes.

6. Mais attention, on pourrait aussi imaginer que la résonance acoustique inhibe la turbulence.

Lorsqu'un faible niveau de turbulence est injecté au travers de la paroi débitante, l'écoulement est laminaire à l'amont et une gamme de fréquences est amplifiée par un mécanisme de stabilité intrinsèque jusqu'à une abscisse où des structures apparaissent à la fréquence la plus amplifiée. Quand elles atteignent la section de sortie, des perturbations acoustiques sont émises. Cependant, dans la région turbulente, la turbulence tend à dissiper les structures si bien que leur taille et donc l'amplitude des perturbations acoustiques émises dépend de l'étendue de la zone turbulente.

Un schéma de ce scénario est proposé en figure V.4. En terme d'abscisse adimensionnelle, c'est (principalement) l'abscisse de la section de sortie qui évolue lorsque la hauteur de la veine h change⁷.

Les modifications de la configuration de VECLA (hauteur, vitesse d'injection...) changent les positions relatives des abscisses de section de sortie x_S , d'émission de structures x_D et de transition à la turbulence x_T (supposée ponctuelle par souci de simplicité). Plus précisément, on suppose que x_D et x_T varient peu vis-à-vis des paramètres tandis que $x_S = x_S^*/h$ change rapidement (où x_S^* est l'abscisse dimensionnelle de sortie *i.e.* la longueur de VECLA : 600 mm) puisqu'inversement proportionnel à la hauteur.

Les derniers paramètres sont la fréquence adimensionnelle de passage des structures par la section de sortie f_S et la fréquence du (premier, deuxième...) mode acoustique longitudinal f_{ac} .

En supposant $x_D < x_T$ dans tous les cas (ce qui n'est pas évident à cause de la dépendance éventuelle de x_T vis-à-vis des paramètres de l'injection), les quatre cas laminaires à l'amont se distinguent de la manière suivante :

- si $x_T \ll x_S$, on observe le cas 2;
- si $x_D < x_S \lesssim x_T$ et $f_S \sim f_{ac}$, on observe le cas 3;
- si $x_D < x_S \lesssim x_T$ et $f_S \neq f_{ac}$, on observe le cas 4;
- si $x_S < x_D$, on observe le cas 1;

On constate que la vitesse d'injection, dont dépend seulement la fréquence, joue beaucoup moins dans ce scénario que la hauteur de veine (qui définit x_S puisque la longueur de VECLA est fixe). C'est pourquoi les essais à vitesse d'injection variable ne présentent pas des comportements foncièrement différents tandis que le passage d'une hauteur de veine à l'autre change complètement le régime d'écoulement comme on le constate en regardant le tableau I.3.

Ce scénario est en fait exagérément simplifié par rapport à la réalité comme on va le voir par la suite et l'introduction de l'abscisse x_D est peut-être artificielle. Cependant, il suffit à expliquer presque toutes les observations effectuées dans VECLA⁸. De plus, l'introduction d'un mécanisme global de comportement de VECLA permet de resituer l'instabilité pariétale dans son contexte et de remettre les éléments de théorie introduits précédemment à leur place. Enfin, elle donne une idée des phénomènes complexes nécessitant encore des efforts théoriques si on souhaite appréhender complètement le comportement d'un montage aussi simple que VECLA.

V.4.2 Justifications et quantification

Les différents points-clés du scénario doivent être justifiés.

L'existence de structures est déduite des visualisations I.14 effectuées sur des écoulements de type 1 (sans structures visibles), de type 3 et de type 4 (visuellement identiques). Leur abscisse d'apparition reste constante au cours du temps et vaut environ $x_D \sim 20$. On peut aussi définir x_D d'une autre manière grâce à la figure V.5. Celle-ci est réalisée par Ugurtas [Ugu00] lors d'un essai VECLA avec $h = 20$ mm à vitesse d'injection variable. La pression au fond avant est mesurée et les nombres

7. Le nombre de Reynolds d'injection évolue aussi mais on sait qu'il n'a que peu d'effet dans les gammes de \mathcal{R}_{inj} auxquelles fonctionne VECLA.

8. Il faut tout de même ajouter le fait que le mode acoustique de plus basse fréquence est plus facile à exciter que les autres, car moins énergétique, pour expliquer la résonance sur le mode en $\lambda/4$ pour le test sans tuyère avec $V_{inj} = 1.02$ m/s et $h = 30$ mm.

de Strouhal⁹ ($f^*h/v_{inj} = \omega/(2\pi)$) des premier et second maxima des spectres du signal sont reportés en figure V.5. Les lignes tiretées donnent le lieu des deux premiers modes acoustiques longitudinaux. La ligne pleine correspond à la fréquence dont le facteur- n est maximum à $x = 18.7$ (abscisse choisie arbitrairement pour coïncider avec les mesures), elle change légèrement avec la vitesse d'injection à cause de l'évolution de \mathcal{R}_{inj} . Au cours de l'essai, l'écoulement est de type 4 jusqu'à $V_{inj} = 1.3$ m/s, puis de type 3 jusqu'à $V_{inj} = 2$ m/s et enfin d'un type pour lequel les données manquent au-delà de $V_{inj} = 2$ m/s (probablement type 2). Si on interprète l'écoulement de type 4 comme indiquant une forte action de l'instabilité sur l'acoustique mais peu de rétroaction de l'acoustique sur la stabilité, les Strouhal observés au fond avant sont ceux privilégiés par l'hydrodynamique, ils correspondent donc à la fréquence des structures. En admettant que cette dernière corresponde à la fréquence privilégiée par l'instabilité pariétale dans la zone d'émission des structures, on en déduit que $x_D = 18.7$ et que la pulsation adimensionnelle privilégiée vaut $\omega \sim 38$ (même si l'accrochage peut se produire sur d'autres valeurs). Un argument en la faveur de cette hypothèse est donné par l'évolution du Strouhal en fonction du nombre de Reynolds puisque, bien que faible, elle semble suivre la tendance donnée par la stabilité linéaire.

Le passage très net sur la figure V.5 de l'écoulement de type 4 à l'écoulement de type 3 (accrochage aéroacoustique) se produit au moment où la fréquence hydrodynamique f_S (égale à $38/(2\pi)$) croise la fréquence f_{ac} du 2^e mode acoustique longitudinal (en $3\lambda/4$) ce qui confirme le critère intuitif de coïncidence des fréquences $f_S \sim f_{ac}$ pour l'accrochage aéroacoustique. Néanmoins, cet accrochage se maintient même pour des écarts élevés entre f_S et f_{ac} (à $V_{inj} \sim 2$ m/s, on a $f_S - f_{ac} \sim 4\pi$ soit 40% d'écart relatif). Or les phénomènes d'hystérésis ne peuvent pas être mis en cause car d'après la figure 4.12 de la thèse d'Ugurtas [Ugu00] le type d'écoulement est inchangé que la variation de V_{inj} soit effectuée dans le sens croissant ou dans le sens décroissant (en partant de situations non-accrochées).

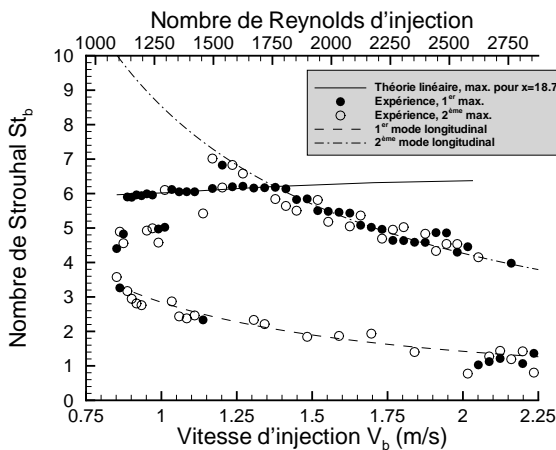


FIG. V.5 – Nombre de Strouhal (f^*h/V_{inj}) des premier et second maxima des spectres de pression au fond avant. Essai VECLA à vitesse d'injection variable avec $h = 20$ mm. D'après Ugurtas [Ugu00].

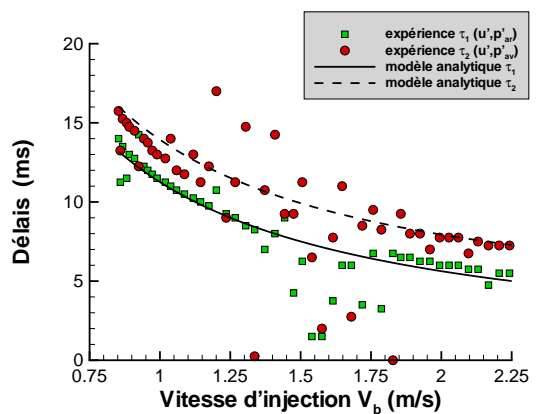


FIG. V.6 – Maxima d'intercorrélations entre mesures de vitesse aux trois quarts de VECLA et mesures de pression soit au fond avant, soit au fond arrière. D'après Ugurtas [Ugu00].

L'émission de perturbations acoustiques lors du passage des tourbillons par la section de sortie dans les cas sans tuyère est attestée par des intercorrélations entre des mesures de vitesse aux trois quarts de la veine et la pression au fond avant. Ces résultats obtenus par Ugurtas [Ugu00] pour $h = 20$ mm (même configuration que la figure V.5) sont reproduits en figure V.6. Ils montrent que

9. Le nombre de Strouhal défini par Ugurtas [Ugu00] est identique à la fréquence adimensionnelle pour les adimensionnements choisis dans ce manuscrit, la pulsation adimensionnelle ω s'en déduit donc en le multipliant par 2π .

le délai τ_2 pour lequel la corrélation est maximale correspond à la somme du temps τ_1 mis pour parcourir la distance entre le fil chaud et le fond arrière à 0.42 fois la vitesse moyenne de l'écoulement (c'est ce que montrent les intercorrélations entre vitesse et pression au fond arrière) et du temps mis pour remonter l'écoulement à la vitesse du son diminuée de celle de l'écoulement. Ceci prouve que le passage des tourbillons par la section de sortie influence la pression au fond avant. De plus, des essais identiques menés par Avalon en ajoutant un prolongateur non-débitant de longueur adimensionnelle 4.5 à l'extrémité aval de VECLA (*i.e.* entre $x = 30$ et $x = 34.5$) effacent toute trace de remontée acoustique au fond avant en créant un écoulement de type 2. L'atténuation des structures dans la zone non-débitante suffit donc à supprimer la résonance¹⁰.

L'effet stabilisant de la turbulence sur la résonance est déduit des essais avec $h = 10 \text{ mm}$ où l'écoulement est turbulent en sortie à $x = 60$ et qui ne présentent jamais de résonance acoustique. Si on admet que la résonance est due aux structures cohérentes qui atteignent la sortie, cette stabilisation n'a rien de surprenant puisqu'on sait que la turbulence tend à dissiper les structures; on peut penser qu'il s'agit du même effet que celui du prolongateur dans l'expérience décrite ci-dessus. L'estimation quantitative d'une position de transition est quant à elle bien incertaine. En effet, les écoulements induits par injection pariétale ne connaissent pas une transition en profil moyen très nette comme les couches limites par exemple. Le critère le plus utilisé est basé sur l'évolution du flux de quantité de mouvement, voir Huesmann et Eckert [HE68], qui s'infléchit généralement lentement dans une gamme d'abscisse. De plus, pour une abscisse donnée, les niveaux des fluctuations peuvent être faibles vers la paroi débitante et forts au cœur de la veine conduisant à définir une abscisse de transition dépendant de y , voir Chaouat et Schiestel [CS00] par exemple. Les mesures consignées par Traineau *et al.* [THK86] sur le montage PST (Propulseur Sans Tuyère) à l'ONERA indiquent une transition en profil moyen située vers $x = 22$. Sur VECLA, les spectres à 1 mm de la paroi pour $h = 10 \text{ mm}$ prennent une allure de spectres turbulents (spectre large bande, maximal pour des fréquences basses, en décroissance continue vis-à-vis de la fréquence) vers une abscisse $x = 30$ mais qui varie fortement selon les conditions d'injection. Dans l'autre moitié de VECLA (côté de la paroi non-débitante) les spectres sont toujours très bruités et il est difficile d'y distinguer une "allure de spectre d'instabilité" ou une "allure de spectre de turbulence".

V.4.3 Liaison à l'instabilité pariétale

Les théories de stabilité proposées interviennent *a priori* à deux niveaux. D'une part, les instabilités qui se développent pour $x < x_D$ peuvent être identifiées aux instabilités pariétales. D'autre part, il est raisonnable de penser que l'abscisse x_D correspond soit à une transition secondaire, soit à des effets non-linéaires qui deviendraient importants. C'est la deuxième possibilité qu'on va retenir dans la suite car les abscisses de transition secondaire estimées au chapitre précédent sont trop élevées. Il en est de même de la saturation mais il est probable que le raccord entre la zone linéaire et la zone saturée se fait sur plusieurs longueurs d'ondes ce qui signifie que les effets non-linéaires apparaissent bien en amont de l'abscisse théorique de saturation. La position x_D ne marque pas alors l'apparition d'un nouveau phénomène mais seulement le fait que l'instabilité pariétale atteint des niveaux élevés.

Dans les cas relevant clairement de la stabilité à savoir les écoulements de type 1 et 2 qui ne mettent en jeu aucune rétroaction de l'acoustique sur les instabilités, des comparaisons ont été effectuées au chapitre II avec les résultats linéaires.

Reste à voir si ces mêmes résultats sont encore valides lorsque l'acoustique intervient à savoir dans les écoulements de type 3 et 4. Un élément de réponse a été donné par la section III.4, néanmoins, la nature des phénomènes non-linéaires qui se manifestent demeure incertaine. La question est d'importance puisque la motivation de l'étude des instabilités pariétales est la prévision de l'accrochage

¹⁰. Il est peu probable que la très légère variation de la fréquence acoustique liée au prolongateur ait une quelconque influence.

(type 3). Elle perdrait donc son intérêt si elle n'était utilisable qu'en dehors de ce type d'écoulement.

Peu de prévisions théoriques de stabilité sont directement comparables aux mesures dominées par l'acoustique. En effet, de la combinaison de la stabilité et de l'acoustique pour un écoulement de type 4 résulte une évolution spatiale du module de vitesse axiale irrégulière semblable à celle de la figure II.35. La poignée d'abscisses où on dispose de mesures ne permet donc plus de conclure quoi que ce soit. De plus, l'hypothèse d'une amplitude initiale indépendante de la fréquence n'étant plus valable, l'allure des spectres (quasi monofréquentiels et non plus large bande) n'autorise pas de comparaison du type de celle de la figure II.18.

Vitesse de convection des structures

Restent deux mesures ne faisant apparaître que des caractéristiques de l'instabilité. Les premières sont les intercorrélations entre mesures de vitesse aux trois quarts de la veine et de pression au fond arrière tracées en figure V.6 (symboles carrés). On rappelle que lors de l'essai à vitesse d'injection variable utilisé pour réaliser la figure V.6, l'écoulement est de type 4 jusqu'à $V_{inj} = 1.3 \text{ m/s}$, puis de type 3 jusqu'à $V_{inj} = 2 \text{ m/s}$ et enfin d'un type pour lequel les données manquent au-delà de $V_{inj} = 2 \text{ m/s}$ (probablement type 2). Hormis lors de l'accrochage aéroacoustique, les corrélations sont très nettes et permettent de déterminer la vitesse de convection des structures comme étant $0.42x$. Cette vitesse de convection est compatible avec la vitesse de groupe linéaire des ondes d'instabilités ayant une fréquence de l'ordre de celle des structures. Plus précisément, la vitesse de groupe varie de $0.35x$ pour $\omega = 40$ à $0.45x$ pour $\omega = 30$ avec une valeur de $0.36x$ pour les pulsations correspondant aux vitesses d'injection entre 1.2 et 1.3 m/s sur la figure V.5. Comme on a montré dans le tableau IV.3 que ω , λ_i , C varient peu de la théorie linéaire à la théorie non-linéaire, il en va de même de la vitesse de groupe¹¹ $x(d\omega/d\lambda_i)$ (ou $d\omega/d\alpha_r$ si on utilise la première méthode inconsistante). Donc bien qu'on ne sache pas vraiment jusqu'où s'étend la zone linéaire, l'emploi de la théorie linéaire donne une estimation suffisante de la vitesse de convection de structures. *L'écart d'environ 15% sur la vitesse de groupe est plutôt élevé* mais n'implique pas l'incapacité de la théorie à décrire une part des écoulements de type 4.

V_{inj} (m/s)	Strouhal résonnant	ω résonnant	nb. tourb. (Ugurtas)	correction de bout	vitesse de groupe	point de réf. (x_h)	nb. tourbillons $\frac{\omega}{2\pi} \int_{x_h}^{29} 1/\frac{d\omega}{d\alpha_r} dx$
1.38	6.18	38.83	15	0.40	$0.36x$	11.8	15.6
1.47	5.84	36.69	14	0.55	$0.385x$	11.1	14.8
1.55	5.48	34.43	13	0.66	$0.41x$	10.4	13.8
1.70	5.02	31.54	12	0.51	$0.455x$	9.5	12.7
1.86	4.59	28.84	11	0.44	$0.49x$	8.5	11.7

TAB. V.1 – Paramètres de l'accrochage lors d'essais sur VECLA avec $h = 20 \text{ mm}$ et vitesse d'injection variable : vitesse d'injection, nombre de Strouhal résonnant, pulsation adimensionnelle résonnante, nombre de tourbillons entre le point de référence hydrodynamique $x = 10.2$ et la sortie de VECLA déterminés par Ugurtas [Ugu00] selon une approche de Rossiter [Ros64] (avec une vitesse de convection de $0.42x$), correction de bout déterminée par Ugurtas, vitesse de groupe déterminée par l'analyse de stabilité linéaire, point de référence hydrodynamique calculé à l'aide de la vitesse de groupe précédente, nombre de tourbillons entre le point de référence hydrodynamique et la sortie de VECLA déterminés par la stabilité linéaire.

11. Remarquons qu'en toute rigueur, il n'est pas possible de définir la vitesse de groupe non-linéaire avec la théorie utilisée au chapitre IV puisque celle-ci n'est valable que pour une fréquence fondamentale seule avec ses harmoniques.

Nombre de tourbillons dans VECLA

L'autre comparaison possible concerne l'écoulement de type 3. Elle exploite des résultats déduits par Ugurtas [Ugu00] à partir des mesures de l'accrochage obtenu entre $V_{inj} = 1.3 \text{ m/s}$ et $V_{inj} = 2 \text{ m/s}$ dans l'expérience donnant les figures V.5 et V.6. Comme on l'a évoqué plus haut et comme on l'explique en annexe I, ce dernier s'appuie sur des théories de Rossiter [Ros64] impliquant un critère de phase entre un point d'émission tourbillonnaire et un point d'excitation de l'acoustique par les tourbillons. Moyennant l'hypothèse que la vitesse de convection des tourbillons est toujours égale à $0.42x$, l'analyse des sauts en fréquence lors d'accrochages obtenus au cours des essais sur VECLA avec vitesse d'injection variable lui permet de déterminer pour chaque plage de l'accrochage à la fois un nombre de tourbillons et un "point de référence hydrodynamique" estimé à $x_h = 10.2$. En assimilant les tourbillons à des paquets d'onde (comme on l'a fait en identifiant leur vitesse de convection à la vitesse de groupe), la distance $l(x)$ locale entre deux tourbillons vaut leur vitesse de convection $U_c(x) = d\omega/d\alpha_r$ multipliée par la période, inverse de la fréquence $2\pi/\omega$ soit $l(x) = 2\pi/\omega \times d\omega/d\alpha_r$. Le nombre de tourbillons entre le point de référence hydrodynamique et l'abscisse $x = 29$ d'excitation de l'acoustique par les instabilités s'écrit donc comme

$$\int_{x_h}^{29} 1/l(x)dx = \omega/(2\pi) \int_{x_h}^{29} 1/(d\omega/d\alpha_r)(x)dx$$

Du fait que λ_i (assimilable à $x\alpha_r$) évolue peu entre théorie linéaire et théorie non linéaire, on peut à nouveau se contenter du calcul de α_r linéaire pour estimer les nombres de tourbillons théoriques.

La comparaison du nombre de tourbillons obtenu par Ugurtas et par l'intégrale précédente en posant $x_h = 10.2$ est très décevante et ne coïncide pas. Or, l'hypothèse employée par Ugurtas pour obtenir cette valeur $x_h = 10.2$, voir annexe I, consiste à supposer une vitesse des tourbillons constante et égale à la valeur $0.42x$ déterminée hors de l'accrochage quelle que soit la phase de l'accrochage considérée. Si on remplace cette vitesse par la vitesse de groupe de la fréquence mesurée (qui varie en fonction de la fréquence), on peut reprendre les calculs d'Ugurtas et déterminer un point de référence hydrodynamique x_h différent pour chaque phase de l'accrochage. Cette modification est sans effet sur le calcul expérimental du nombre de tourbillons¹² mais améliore fortement la comparaison aux résultats théoriques.

Les résultats de l'approche de Rossiter employée par Ugurtas (tirés du tableau 4.3 de son mémoire de thèse) et du calcul de stabilité font l'objet du tableau V.4.3. La correction de bout est simplement le complément à ajouter au nombre de tourbillons pour obtenir le résultat du calcul qui n'a pas de raison d'être entier. La comparaison doit donc être menée entre $\omega/(2\pi) \int_{x_h}^{29} 1/(d\omega/d\alpha_r)(x)dx$ d'une part, et la somme du nombre de tourbillons et de la correction de bout obtenu par Ugurtas avec la méthode de Rossiter d'autre part. Elle donne *un écart presque constant de 0.2 pour chaque phase de l'accrochage soit un accord tout à fait satisfaisant* qui justifie la pertinence de l'approche de stabilité pour l'écoulement de type 3, donc durant l'accrochage.

Résonance hors mode de cavité

Les mécanismes donnant lieu à l'écoulement de type 4 demeurent cependant mystérieux au sens où la très nette sélectivité sur la pulsation $\omega \sim 38$ ne s'explique ni par la stabilité linéaire (qui prévoit une pulsation plus élevée à l'abscisse $x_S = 30$ des configurations exhibant le type 4), ni par la stabilité non-linéaire (qui n'entraîne presque aucune sélectivité en fréquence), ni par la réceptivité, et encore moins par l'acoustique puisque le type 4 se distingue justement du type 3 en ceci que les fréquences ne sont pas celles de modes de cavité.

12. Avec les hypothèses d'Ugurtas comme on le signale en annexe I, le nombre de tourbillons à un instant donné se ramène au nombre de Strouhal à cet instant divisé par le saut de nombre de Strouhal lors du passage d'une phase de l'accrochage à la suivante, voir figure V.5. Il est donc indépendant de la vitesse de convection et de l'abscisse de référence hydrodynamique.

On peut toutefois proposer un mécanisme temporel susceptible de provoquer la résonance en dehors du mode de cavité. On le construit itérativement en choisissant une pulsation ω_0 et une abscisse x_0 ($= x_{CN}(\omega_0)$) prise sur la courbe neutre pour se fixer les idées)

- à un instant t_0 , on suppose que l'amplitude initiale de l'onde de pulsation ω_0 vaut $A_0(\omega_0)$;
- l'onde partie de x_0 à t_0 atteint la sortie x_s avec l'amplitude $A_0(\omega_0)e^{n(x_s, \omega_0)}$;
- elle produit une onde acoustique d'amplitude proportionnelle (dans le cas simple utilisé numériquement où on fixe la pression en sortie, on voit nettement qu'une fraction de l'onde d'instabilité atteignant la sortie est réfléchiée en onde acoustique)

$$A_{ac}(\omega_0) = \gamma_{ac}(\omega_0)A_0(\omega_0)e^{n(x_s, \omega_0)};$$

- à l'instant $t_0 + \Delta t$ avec Δt correspondant environ¹³ au temps pour l'onde d'instabilité d'aller de x_0 à x_S augmenté du temps pour l'onde acoustique de revenir de x_S à x_0 , l'amplitude initiale de l'onde de pulsation ω_0 vaut par réceptivité linéaire

$$\gamma_{recept}(\omega_0)A_{ac}(\omega_0) = \gamma_{recept}(\omega_0)\gamma_{ac}(\omega_0)A_0(\omega_0)e^{n(x_s, \omega_0)};$$

(où on ne tient pas compte du niveau de bruit ambiant)

- l'onde partie de x_0 à $t_0 + \Delta t$ atteint la sortie x_s avec l'amplitude

$$\gamma_{recept}(\omega_0)\gamma_{ac}(\omega_0)A_0(\omega_0) \left[e^{n(x_s, \omega_0)} \right]^2$$

– ...

- à l'instant $t_0 + m\Delta t$, l'amplitude initiale de l'onde de pulsation ω_0 vaut

$$[\gamma_{recept}(\omega_0)\gamma_{ac}(\omega_0)]^m A_0(\omega_0) \left[e^{n(x_s, \omega_0)} \right]^m$$

Les hypothèses faites jusqu'ici sont toutes des hypothèses de linéarité, à savoir : linéarité du comportement de l'instabilité pariétale, linéarité du retour acoustique vis-à-vis de la vorticité instationnaire crée par l'instabilité pariétale, linéarité de la réceptivité vis-à-vis de l'amplitude acoustique.

Notons $\gamma = \gamma_{recept}(\omega_0)\gamma_{ac}(\omega_0)$ le produit du coefficient de transfert de l'instabilité à l'acoustique par le coefficient de réceptivité et $e^{n_s} = e^{n(x_s, \omega_0)}$ l'amplification totale entre la courbe neutre et la sortie. Le mécanisme indique une évolution exponentielle (en fait bornée inférieurement par le niveau de bruit ambiant) vis-à-vis du temps de l'amplitude initiale du type

$$A_0(t) = A_0(t_0) \exp at \quad \text{avec} \quad a = \frac{n_s + \ln \gamma}{\Delta t}$$

Deux cas se présentent, schématisés par les courbes d'amplitude des écoulements de type 1 et 4 de la figure V.7 :

- si $\gamma e^{n_s} < 1$ (*i.e.* $a < 0$), il n'y a pas croissance d'un cycle au suivant, l'amplitude initiale reste au niveau du bruit inhérent au système;
- si $\gamma e^{n_s} > 1$ (*i.e.* $a > 0$), il y a croissance exponentielle en fonction du nombre de cycles. La croissance ne peut cesser que lorsqu'une des hypothèses de linéarité n'est plus vérifiée. Ainsi, pour l'écoulement de type 4 dans VECLA, on peut imaginer que *le phénomène se stabilise lorsque la saturation non-linéaire est juste atteinte au niveau de la section de sortie* puisque dans ce cas, la croissance de l'amplitude initiale n'entraîne plus la croissance du niveau acoustique. Ceci correspondrait aux mesures présentées en conclusion du chapitre précédent.

13. Comme le mécanisme de réceptivité ne se produit pas en x_0 exactement mais de façon délocalisée, le temps au bout duquel l'effet de l'onde acoustique se fait ressentir est incertain.

Plusieurs remarques méritent l'attention.

Dans ce scénario, l'acoustique n'intervient que pour assurer le couplage entre amplitude d'instabilité en sortie et amplitude initiale, les modes acoustiques de cavité et la résonance acoustique ne jouent aucun rôle. Ce scénario ne permet donc pas *a priori* de décrire les résonances sur un mode de cavité.

Il manque des considérations sur l'accord de phase entre les différents phénomènes mais celles-ci sont en fait à déduire de la relation de Rossiter présentée en annexe I puisque le mécanisme n'est autre que celui de Rossiter considéré du point de vue de l'amplitude plutôt que de celui de la phase.

Aucune sélection en fréquence n'apparaît clairement puisqu'il est naturel que si une fréquence est telle que $a(\omega) > 0$ alors l'inégalité est vérifiée pour toute une gamme de fréquences qui devraient donc s'accroître également.

Si on suppose ce scénario fondé, on peut penser interpréter les essais VECLA de la façon suivante

- lorsque $x_s = 20$ (*i.e.* $h = 30$ mm) le taux d'accroissement temporel $a < 0$ est négatif car n_s est trop faible. Les amplitudes initiales $A_0(\omega)$ sont donc directement liées au niveau de bruit ambiant peu dépendant de la fréquence. Ceci justifie les bonnes comparaisons des spectres des figures II.18 et II.19 qui utilisent l'hypothèse $A_0(\omega) = \text{constante}$;
- lorsque $x_s = 30$ (*i.e.* $h = 20$ mm) le taux d'accroissement temporel $a > 0$ est positif donc l'instabilité pariétale est saturée vers la section de sortie pour l'écoulement de type 4. L'amplitude initiale de la fréquence saturée (ω_0) est indépendante du niveau de bruit initial, elle est déterminée par la relation

$$A_0(\omega_0)e^{n(x_s, \omega_0)} = A_s(x_s, \omega_0)$$

avec $A_s(x_s, \omega_0)$ l'amplitude de saturation non-linéaire pour la pulsation ω_0 en x_s (déterminée au chapitre précédent). L'écoulement de type 3 qui met en jeu des phénomènes plus complexes est évoqué au paragraphe suivant concernant la résonance sur un mode de cavité;

- lorsque $x_s = 60$ (*i.e.* $h = 10$ mm) les relations de linéarité ne sont pas valides en raison de la transition à la turbulence, les amplitudes initiales sont à nouveau liées au niveau de bruit ambiant, ce qui justifie la bonne comparaison de la figure II.15 qui utilise l'hypothèse $A_0(\omega) = \text{constante}$.

Ces interprétations restent cependant hypothétiques en l'absence de quantification du facteur γ . Les mesures plaident en leur faveur sont celles qui montrent des spectres plats de niveau constant en amont de la courbe neutre quand $x_s = 20$ ou $x_s = 60$ et des spectres piqués en amont de la courbe neutre quand $x_s = 30$. Un autre argument favorable déjà mentionné vient de ce que l'amplitude à la sortie pour l'écoulement de type 4 est compatible avec une saturation non-linéaire.

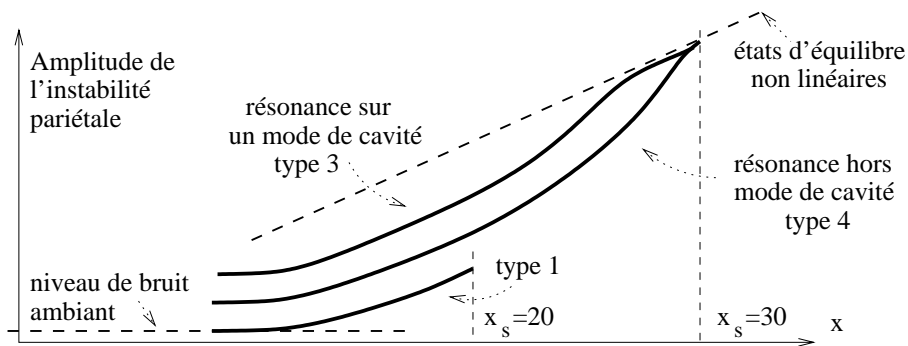


FIG. V.7 – Evolution avec l'abscisse de l'amplitude de l'instabilité pariétale pour trois types d'écoulement observés dans VECLA.

Résonance sur un mode de cavité

Supposons désormais, comme cela se produit dans l'essai à vitesse d'injection variable de la figure V.5 que la fréquence dimensionnelle de l'écoulement de type 4 (saturé juste à la sortie aval) atteigne la fréquence d'un mode acoustique de cavité.

Si une nouvelle résonance (cette fois, sur un mode de cavité) s'ensuit, l'amplitude acoustique va croître; par réceptivité, l'instabilité pariétale va atteindre la saturation avant la sortie mais son niveau en sortie va demeurer inchangé égal à $A_s(x_s, \omega_0)$, comme on le représente sur la figure V.7. Si l'interaction de l'acoustique et de l'instabilité est supposée survenir vers la sortie, comme les forces exercées par l'instabilité sont constantes dans cette zone, *la puissance \mathcal{P}_{IP} transférée de l'instabilité pariétale au champ acoustique est directement proportionnelle à l'amplitude de ce dernier*. C'est ce qu'indiquent la formule de Howe V.1 ou le résultat de Flandro exposé dans l'annexe J.

Par ailleurs, la méthode standard du bilan acoustique, présentée en annexe J, montre que les pertes sont également linéairement dépendantes de l'amplitude acoustique. C'est-à-dire que *la puissance de dissipation \mathcal{P}_D de l'énergie acoustique est proportionnelle à cette amplitude*. Tant qu'on reste dans le cadre d'une analyse linéaire, si à un instant donné, on a une inégalité $\mathcal{P}_D > \mathcal{P}_{IP}$ ou $\mathcal{P}_D < \mathcal{P}_{IP}$ alors cette inégalité est vérifiée à tous les instants ultérieurs. On a donc deux possibilités.

1. si à un instant donné, $\mathcal{P}_D > \mathcal{P}_{IP}$ alors la puissance dissipée est toujours supérieure à la puissance reçue. La résonance ne se produit pas; l'écoulement conserve la même amplitude que lorsqu'il est de type 4 (hors mode de cavité).
2. si à un instant donné, $\mathcal{P}_{IP} > \mathcal{P}_D$ alors la puissance reçue de l'instabilité pariétale est toujours supérieure à la puissance dissipée. La résonance se produit, *la croissance temporelle de l'amplitude est exponentielle et rien ne vient la limiter tant que des phénomènes non-linéaires n'entrent pas en jeu*.

Le deuxième cas montre que *l'amplitude de l'acoustique dans les configurations résonnant sur un mode de cavité est indépendante de celle de l'instabilité pariétale*. En effet, l'instabilité pariétale fournit l'énergie permettant d'enclencher le processus de résonance mais les facteurs limitant qui provoquent la saturation acoustique sont d'origine non-linéaire et n'ont pas de raison d'être liés à l'instabilité.

Il faut insister sur le fait qu'il s'agit d'un comportement de *seuil*: soit l'énergie fournie par l'instabilité pariétale ne compense pas les pertes prévues par les méthodes standards de bilan acoustique et la résonance ne se produit pas; soit elle les dépasse, et la résonance s'enclenche jusqu'à des niveaux *a priori* décorrélés de l'instabilité pariétale. De ce fait, une diminution de l'amplitude de l'instabilité pariétale n'a d'intérêt pour le problème de l'instabilité globale que si le seuil est franchi, sinon, aucune diminution des niveaux d'accrochage n'est à attendre.

Signalons enfin que les résonances sur ou hors mode de cavité sont foncièrement différentes pour les raisons suivantes. Hors des modes de cavité, les fluctuations de type acoustique ne sont pas stationnaires et s'échappent par la sortie de VECLA. La résonance n'intervient que par l'interaction permanente de l'instabilité et de l'acoustique. Au contraire, les modes de cavité sont stationnaires, et à quelques pertes près, ils conservent leur énergie. Dans le second type de résonance, on peut donc voir l'acoustique comme un système accumulant l'énergie fournie par l'instabilité pariétale et on a seulement action de la seconde sur la première. On peut donner comme analogie (à ne pas développer trop loin) celle d'un oscillateur excité hors de sa fréquence propre pour la résonance hors mode de cavité et excité sur sa fréquence propre pour la résonance sur un mode de cavité.

V.4.4 Difficulté de la prédiction

Le scénario proposé permet d'expliquer les comportements observés sur VECLA mais il est loin d'être prédictif en raison des multiples zones d'ombre qui subsistent dans la prévision quantitative des différents phénomènes. On reprend en figure V.8 le scénario en y indiquant les principaux points dont la compréhension est nécessaire.

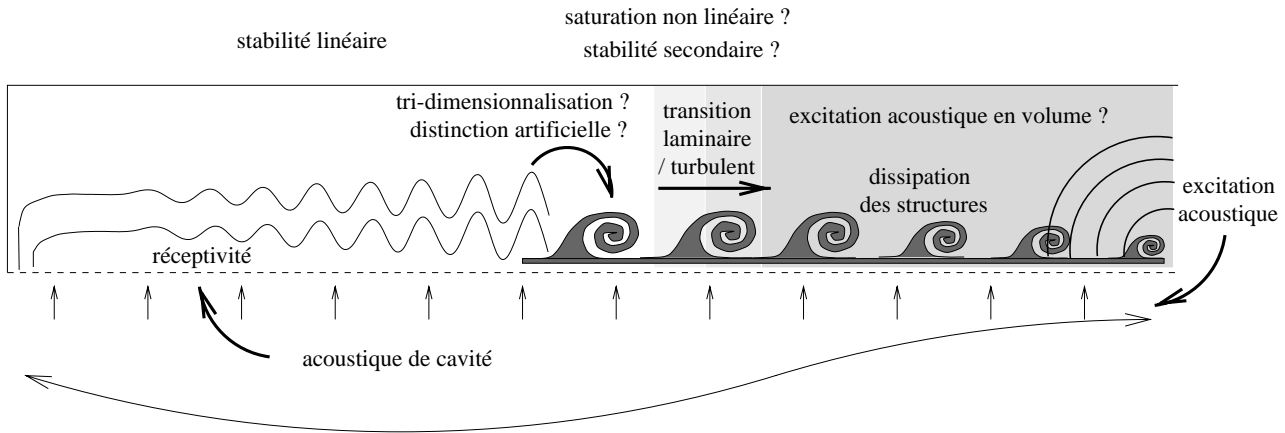


FIG. V.8 – Phénomènes à comprendre pour prévoir le comportement de VECLA

Pour être prédictif, on doit d'abord calculer la stabilité linéaire de l'écoulement (seul point qu'on considère acquis) puis savoir jusqu'où s'étend la zone linéaire et quels sont les développements ultérieurs des instabilités ("saturation" non-linéaire, transition secondaire...). Il faut ensuite connaître la localisation de la transition de la laminarité à la turbulence puis quantifier la dissipation de l'instabilité par la turbulence. Les transferts d'énergie du champ d'instabilité au champ acoustique doivent être modélisés soit par des méthodes simples mais peu fiables comme imposer une condition de pression fixée à la sortie, soit par des méthodes un peu mieux établies mais nécessitant des calculs supplémentaires comme la formule de Howe (V.1). Les transferts en sens inverses qui relèvent de la théorie de la réceptivité nécessitent aussi une prise en compte complexe puisqu'ils se produisent probablement tout au long de la paroi et ne restent pas confinés dans une région bien localisée. Enfin, l'apport d'énergie acoustique provoqué par les phénomènes décrits doit être intégré dans une méthode standard de bilan acoustique, voir Culick [Cul75], Dupays [Dup96] ou l'annexe J, pour savoir s'il suffit à déstabiliser un mode acoustique de cavité et à entraîner la résonance ou l'accrochage sur ce mode. En effet, les pertes d'énergie acoustique par le fond arrière (équipé ou non d'une tuyère) ou à travers la paroi poreuse doivent être prises en compte pour des prévisions quantitatives.

En conclusion, le scénario proposé pose peut-être plus de questions qu'il n'apporte de réponses. Il est probable que seules des simulations numériques puissent les résoudre toutes; néanmoins, c'est grâce à la compréhension des mécanismes qu'on pourra mener ces simulations et envisager à terme de contrôler ou d'éviter les oscillations et c'est ce qui donne son sens à ce manuscrit.

V.4.5 Critères

Au final, le principal paramètre intervenant dans le scénario pour estimer la déstabilisation d'un mode acoustique par l'instabilité pariétale est l'amplitude des structures de vorticité de fréquence correspondante vers la section de sortie. De ce fait, on peut retenir deux critères pour juger *a priori* de la probabilité d'accrochage :

- abscisse adimensionnelle de la section de sortie
- amplification de la fréquence acoustique par l'instabilité pariétale

Contrairement à certaines idées reçues, le plus important est le premier car il définit l'amplitude des fluctuations au fond arrière et donc l'amplitude de l'excitation acoustique. La position optimale pour favoriser l'accrochage est celle à partir de laquelle l'instabilité cesse de s'amplifier pour se dissiper sous l'effet de la turbulence. Sa prévision théorique soulève l'ensemble des problèmes exposés précédemment mais elle peut être déterminée expérimentalement. Ainsi, sur VECLA, on peut estimer cette abscisse de l'ordre de 30 ou un peu plus.

Une fois ce critère satisfait, l'accrochage a toutes les chances de se produire en raison de la largeur de la bande de fréquences fortement amplifiées par l'instabilité pariétale. En effet, il suffit que la

fréquence acoustique se situe dans cette bande et il est inutile d'avoir coïncidence exacte avec la fréquence hydrodynamique privilégiée. La définition même de la fréquence privilégiée pose d'ailleurs problème puisqu'elle croît de façon non-négligeable en fonction de x . L'existence des écoulements de type 4 montre toutefois que le deuxième critère intervient puisque, dans ces cas-là, la fréquence hydrodynamique se trouve être trop basse par rapport à l'acoustique. Cette situation ne va pas se retrouver dans les cas axisymétriques puisque les fréquences hydrodynamiques sont environ deux fois plus élevées (voir chapitre II) alors que les fréquences acoustiques sont pratiquement inchangées (montages de longueur dimensionnelle similaire).

V.5 Passage au cas axisymétrique

Maintenant que la simulation plane en gaz froid est relativement bien comprise, la première étape à franchir pour se rapprocher du cas réel est le passage de la configuration plane à la configuration axisymétrique.

D'un point de vue théorique, on a vu au chapitre II que les écoulements de Taylor plan et axisymétrique ont des caractéristiques de stabilité qualitativement identiques mais quantitativement très différentes puisque le second est beaucoup plus instable que le premier ce qui laisse présager que les différents phénomènes se produisent pour des abscisses beaucoup plus faibles en canal cylindrique qu'en canal rectangulaire.

On dispose de beaucoup moins de résultats en configuration axisymétrique. De ce fait, les interprétations sont incertaines; de plus, les distinctions entre types de comportement semblent moins nettes qu'en configuration plane.

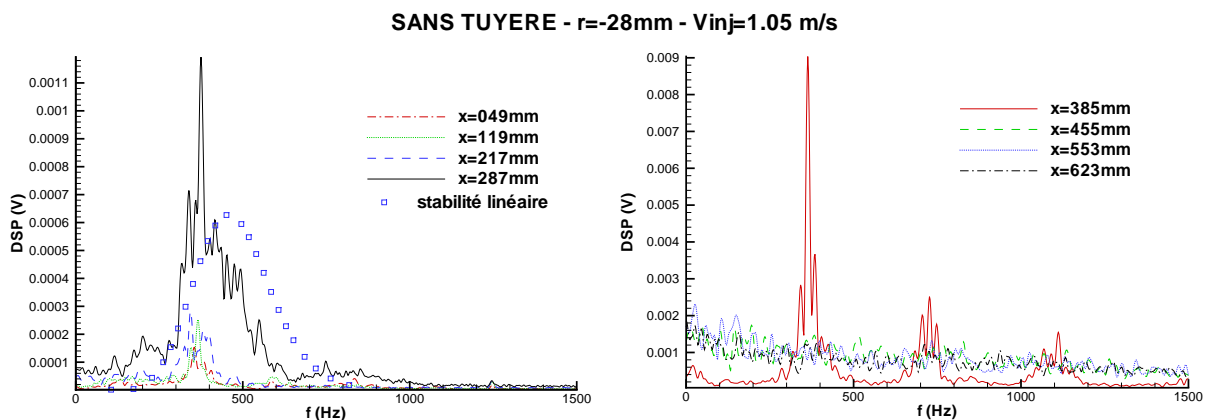


FIG. V.9 – Spectres des fluctuations de vitesse axiale à 2 mm de la paroi à diverses abscisses du montage VALDO, moitié amont à gauche et moitié aval à droite. D'après Avalon *et al.* [AL00]. Attention, à la différence d'échelle entre les deux parties de la figure. Les résultats de stabilité linéaire (symboles) correspondent à l'abscisse 287 mm

Les mesures les plus détaillées sont celles effectuées sur le montage VALDO par Avalon *et al.* [AL00]. Lors d'un essai à vitesse d'injection variable entre 0.8 et 2 m/s, les mesures de pression au fond avant et de vitesse vers le fond arrière ne mettent qu'un seul type de comportement en évidence durant tout le test, à savoir un accrochage d'abord sur le mode en $3\lambda/4$ puis sur celui en $5\lambda/4$ lorsque la vitesse d'injection s'élève. Pourtant, l'étude des spectres de vitesse dans VALDO indique que l'écoulement est très différent du type 3 observé dans VECLA. En effet, dans VECLA, la fréquence acoustique domine tout le champ fluctuant dans l'ensemble de la veine et l'écoulement demeure laminaire. Au contraire, dans VALDO, une transition très nette à la turbulence est observée, voir figure V.9. Dans la zone turbulente, la fréquence acoustique est invisible et dans la zone laminaire, les spectres sont relativement large bande avec une influence de l'acoustique. Les fréquences sont en

accord approximatif avec la stabilité comme on le voit en figure V.9 pour l'abscisse dimensionnelle $x^* = 287 \text{ mm}$ soit $x = 9.6$, mais attention, pour tracer le spectre théorique, on utilise à nouveau l'hypothèse selon laquelle l'amplitude initiale des ondes est indépendante de la fréquence. Or, cette hypothèse est certainement fautive dans les cas accrochés puisque les mécanismes de réceptivité vus précédemment favorisent l'émergence de la fréquence acoustique. L'accrochage ne se voit vraiment sur les spectres de vitesse que vers l'abscisse $x^* = 385 \text{ mm}$ soit $x = 12.8$, située un peu avant la transition à la turbulence, où les deux premiers harmoniques sont nettement visibles.

	Avalon <i>et al.</i> [AL00] (montage VALDO)	Anthoine [Ant00] (montage du VKI)	Dunlap <i>et al.</i> [DBW ⁺ 90]
abscisse de sortie	$x_S = 22.4$	$x_S = 21.2$	$x_S = 28.6$ et $x_S = 19$
vitesse d'injection	V_{inj} de 0.8 à 2 m/s	$V_{inj} = 0.88 \text{ m/s}$	$V_{inj} = 0.6, 0.9$ et 1.2 m/s
fond arrière	sans tuyère	sans tuyère	avec tuyère
turbulence	$12.8 < x_T < 15.1$	$x_T \sim 13$	x_T de 12 à 15 selon V_{inj}
accrochage	oui ($3\lambda/4$ et $5\lambda/4$)	non?	non?

TAB. V.2 – Tests en canaux cylindriques réguliers avec injection de gaz à la paroi.

Curieusement, l'accrochage ne semble être observé ni par Anthoine [Ant00] sur le montage du VKI ni par Dunlap *et al.* [DBW⁺90] dont les résultats sont présentés au chapitre II. En effet, rien dans les spectres de vitesse ne distingue la fréquence acoustique des autres fréquences bien que les configurations testées soient proches, en particulier celles de VALDO et celles du VKI, comme le montre le tableau V.2. Les comportements observés par Anthoine et Dunlap *et al.* semblent être analogues au type 2 de VECLA avec une zone laminaire où les instabilités s'amplifient suivie d'une zone turbulente qui dissipe les éventuelles structures créées. On peut même ajouter grâce aux nombreuses abscisses mesurées par Anthoine¹⁴ que les instabilités atteignent un état saturé juste à l'amont de la transition à la turbulence.

Il est tout de même permis de se demander si l'allure des spectres de vitesse suffit à exclure l'hypothèse d'un accrochage. En effet, celui-ci apparaît dans VALDO plutôt grâce aux spectres de pression au fond avant que grâce aux mesures de vitesse. Comme ni Anthoine ni Dunlap *et al.* ne donnent ce type d'information, le doute reste possible.

Remarquons enfin que contrairement au cas plan, les mesures autorisent un encadrement assez précis de l'abscisse de transition à la turbulence. Pour les trois montages, cette dernière semble évoluer de $x_T \sim 12$ pour les plus fortes vitesses d'injection à $x_T \sim 15$ pour les plus faibles vitesses d'injection. Ces valeurs constituent donc une borne supérieure au domaine de validité des études de stabilité linéaire.

Il n'est pas possible de proposer un critère d'accrochage à partir d'aussi peu de données. Néanmoins, si on admet que les mécanismes à l'œuvre sont les mêmes que dans le cas plan, à savoir croissance de la vorticité instationnaire dans la zone laminaire et dissipation dans la zone turbulente, on peut noter deux points importants :

- les longueurs qui maximisent l'amplitude des instabilités pariétales en sortie sont telles que $x_S^{max} \gtrsim x_T$ (abscisse de sortie égale ou légèrement supérieure à l'abscisse de transition); elles sont nettement diminuées par rapport au cas plan ($x_S^{max} \sim 30$) puisque la connaissance de x_T suggère $x_S^{max} \sim 15$.
- le critère d'accord fréquentiel qui veut que la fréquence acoustique appartienne aux fréquences amplifiées par l'instabilité pariétale ne peut être appliqué qu'en considérant des abscisses inférieures à x_T en raison de la limitation de validité de la théorie linéaire. Ainsi, dans VALDO, bien que la section de sortie x_S soit à 22.4, les prévisions de stabilité ne sont pas justifiées au-delà de $x_T \in [13, 15]$. Il ne faut donc surtout pas déduire que la fréquence hydrodynamique

14. Seule une partie des spectres mesurés est présentée dans son manuscrit de thèse [Ant00]

privilegiée est celle de $x = 22.4$, à savoir $\omega \gtrsim 150$, puisqu'en fait l'accrochage se produit sur une pulsation ω allant¹⁵ de 50 à 80 correspondant aux fréquences hydrodynamiques privilégiées entre les abscisses 5 et 10.

V.6 Passage aux essais en gaz chaud et au cas réel

V.6.1 Essais en gaz chaud avec chargement régulier : LP9

Partant de la géométrie plane avec injection d'air, on est d'abord passé à une géométrie cylindrique avec injection d'air; l'étape suivante dans le retour au cas réel consiste à conserver la géométrie régulière et axisymétrique mais dans un montage en combustion plutôt qu'une simulation en gaz froid.

Comme on l'a indiqué au chapitre I, les moteurs LP9 de l'ONERA sont des moteurs à propergol solide de chargement mono-bloc parfaitement réguliers à l'échelle 1/35^e du P230. Leur conception particulièrement simple a pour but de prouver l'efficacité de l'instabilité pariétale (seule instabilité hydrodynamique possible dans ce type de configuration) dans la déstabilisation d'un véritable moteur, voir Prévost et Vuillot [PV98].

Les résultats se sont révélés concluants au sens où des instabilités globales sont observées vers la fin des tirs sur le premier mode acoustique longitudinal et parfois vers le milieu des tirs sur le deuxième mode acoustique, voir Prévost *et al.* [PMP99] et [PMP00]. Cependant, les amplitudes atteintes sont restées faibles. Cette dernière constatation n'invalide en rien l'efficacité de l'instabilité pariétale à entraîner l'instabilité globale. En effet, au contraire de tous les autres essais en gaz chaud, les LP9 ne possèdent ni tuyère intégrée ni cavité non-débitante au fond avant. Or, ces deux éléments sont suspectés de jouer un rôle majeur dans l'établissement du niveau des oscillations comme on l'a indiqué à la section V.2. On peut en prendre pour preuve les mesures du LP3D fournies par Vuillot *et al.* [VTPL93]. Ce moteur, après combustion de son premier segment, peut se décrire comme un LP9 muni d'une tuyère intégrée et d'une cavité au fond avant, à l'échelle 1/15^e par rapport au P230. Or, il présente en fin de tir les instabilités les plus fortes de la série de LP3¹⁶ observées sur le premier mode acoustique longitudinal.

Il est d'ailleurs bon d'insister à nouveau sur le fait que l'instabilité pariétale déstabilise le moteur mais ne joue *a priori* qu'un rôle réduit dans le niveau des oscillations qui s'établissent.

Trois configurations ont été testées qui diffèrent seulement par le diamètre du col de la tuyère et donc par la vitesse d'injection (par le biais de la pression moyenne). Les résultats de Prévost *et al.* [PMP99] et [PMP00] permettent d'établir le tableau V.3 pour caractériser la résonance du LP9. On y consigne pour chaque diamètre de col les rayons internes correspondant aux instants de l'accrochage, la longueur sur poudre (longueur de la surface de propergol en combustion), l'abscisse de sortie définie comme L/R de même que dans VECLA, la pulsation adimensionnelle sur laquelle se produit l'accrochage (calculée à partir de la fréquence acoustique dont la valeur dimensionnelle f_{ac}^* est supposée constante bien que l'accrochage se produise en fait à des fréquences variables autour de la fréquence de cavité) et l'amplitude maximale des perturbations de pression au fond avant.

Il ressort nettement du tableau V.3 que le critère principal d'accrochage ne porte pas sur une coïncidence de fréquences, puisque les pulsations observées durant l'accrochage ne se recouvrent même pas, mais bien plutôt sur la longueur adimensionnelle L/R du montage. L'accrochage se produit toujours pour une valeur de cette dernière comprise entre¹⁷ 15 et 18 ce qui correspond à la zone

15. Ces deux limites ne sont fixées que par les limites de la plage de vitesses d'injection testées et non par une interruption de l'accrochage.

16. Les configurations autres que la configuration D possèdent des intersegments ou des protections thermiques. La référence [VTPL93] contient les mesures des configurations A, B, C et D ainsi que leurs caractéristiques géométriques.

17. La valeur 14.7 obtenue pour le diamètre 28 mm est incertaine car la fin de l'accrochage intervient dans la queue de poussée qui marque l'extinction de certaines zones du moteur.

	Diamètre du col 22 mm	Diamètre du col 24 mm	Diamètre du col 28 mm
rayons R durant l'accrochage	32 à 37 mm	32 à 38 mm	33 à 40 mm
longueur sur poudre L	582 mm	582 mm	589 mm
abscisse de sortie L/R	15.7 à 18.2	15.3 à 18.2	14.7 à 17.8
pulsation à l'accrochage $\omega = 2\pi f_{ac}^* R/V_{inj}$	90 à 120	76 à 107	60 à 87
P_{av} inst. max. ^a	15 mbar	22.5 mbar	27.5 mbar

TAB. V.3 – Grandeurs caractéristiques lors de l'accrochage au cours des essais LP9.

^a Amplitude maximale de la pression instationnaire au fond avant en mbar.

déterminée par les simulations en gaz froid à l'aide de l'abscisse de transition à la turbulence. Au-dessus de 18, on peut penser que la turbulence atténue suffisamment les instabilités pariétales; en dessous de 15, ces dernières n'atteignent pas une amplitude suffisante pour déclencher l'instabilité globale.

V.6.2 Essais en gaz chaud avec chargement segmenté : LP3-LP6

La dernière étape à franchir en terme de complexité croissante est le passage à des géométries comprenant trois segments séparés par des intersegments et d'éventuelles protections thermiques.

De nombreux essais à échelle 1/15^e ont été réalisés à l'ONERA dans la série des LP3 et LP6 en faisant varier les paramètres de la protection thermique, de l'intersegment, du propergol... Ils ont donné lieu à des comportements variés tant en terme d'amplitude d'oscillations qu'en terme de modes excités, même si une excellente reproductibilité est obtenue à configuration constante. Les tendances générales sont les suivantes :

- les tirs à échelle réduite utilisant le même propergol métallisé qu'Ariane 5 sont stables sur le premier mode acoustique. Les tirs dont il est question ci-dessous sont donc effectués avec un propergol non-métallisé *i.e.* sans particules d'aluminium ajoutées. Cette différence montre le rôle prépondérant joué par la taille des particules, voir Lupoglazoff *et al.* [LVDF00], puisque ces dernières ne sont pas mises à l'échelle lors du passage du P230 aux LP3 et LP6.
- l'utilisation de protections thermiques très pénétrantes entraîne des niveaux peu élevés sur le premier mode longitudinal mais semble favoriser l'accrochage aéroacoustique sur des fréquences plus élevées (2L et 3L).
- les niveaux les plus forts sur le premier mode acoustique longitudinal sont obtenus en l'absence de protection thermique, voire d'intersegment (cas du LP3D déjà cité). Ce résultat confirme des observations effectuées à grande échelle sur le moteur SRMU des lanceurs Titan IV.
- les essais les plus représentatifs de l'échelle 1 (évolution similaire des fréquences excitées au cours du temps) ne sont pas ceux qui respectent la configuration d'Ariane 5 avec une protection thermique sur la face avant du 3^e bloc de propergol mais ceux où aucune protection thermique n'est placée entre les 2^e et 3^e blocs.

V.6.3 Synthèse des différentes échelles

Puisque l'importance du rapport longueur sur rayon a été mise en évidence, il est naturel d'utiliser ce paramètre pour tenter de faire la synthèse des essais aux différentes échelles. La figure V.10, tirée de Prévost *et al.* [PDM⁺00], propose cette comparaison pour les trois échelles disponibles :

- l'échelle 1 avec le test Q2, deuxième test statique de qualification du moteur P230. La courbe correspondante est celle qui présente les plus fortes amplitudes d'oscillation.
- l'échelle 1/15^e avec deux essais LP6 de configuration représentative du P230.

- l'échelle $1/35^e$ avec deux essais LP10, qui ont eux aussi une configuration représentative du P230, et un essai LP9 avec un chargement parfaitement régulier. Les amplitudes d'oscillations du LP9 sont les plus faibles de cette série d'essais, probablement pour les raisons évoquées précédemment.

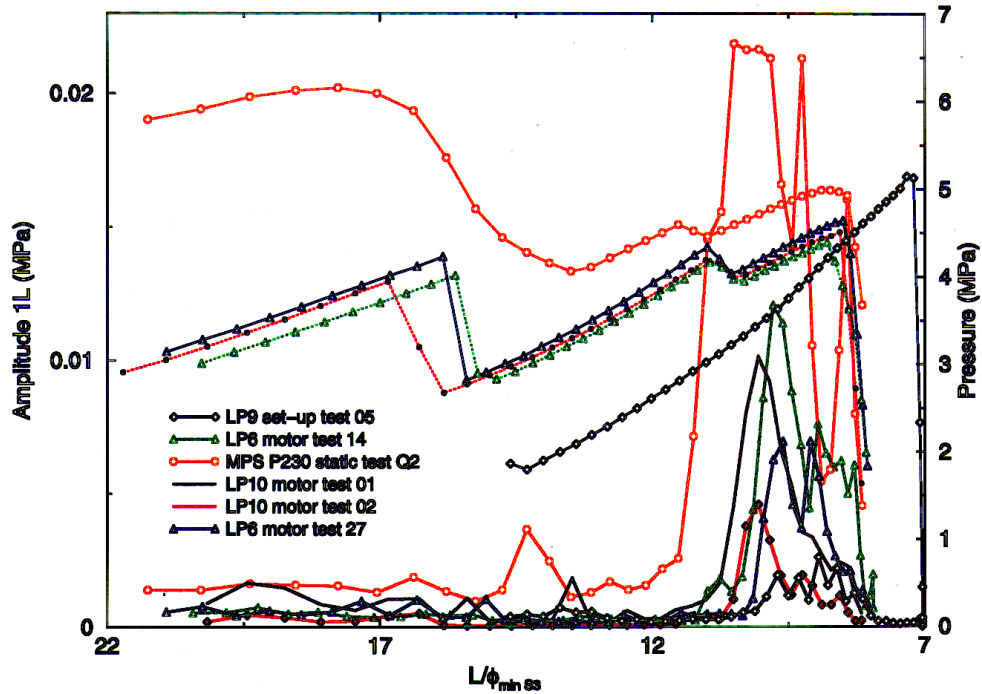


FIG. V.10 – Synthèse des essais en gaz chaud aux échelles 1, $1/15^e$ et $1/35^e$. Pressions stationnaires et instationnaires en fonction du rapport longueur totale sur diamètre fluide au niveau du segment aval.

Le paramètre représenté en abscisse $L/\phi_{min S3}$ est défini comme le rapport de la longueur totale, du fond avant au col de la tuyère, sur le diamètre minimal du bloc de propergol aval (car les différents segments sont légèrement coniques), ces définitions sont schématisées en figure V.11. Il n'est pas directement relié au paramètre L/R défini précédemment comme le rapport de la longueur sur poudre (longueur de propergol en combustion) sur le rayon. En effet, aux instants où se déclenchent les instabilités sur le premier mode acoustique, le petit segment amont présent dans tous les essais, sauf le LP9 qui n'est pas segmenté, est entièrement consommé, voir figure V.11. De ce fait, la différence entre longueur sur poudre et longueur totale est égale à la longueur du premier segment augmentée de la taille des intersegments. Sur le P230 cette différence représente environ 15% de la longueur totale. De plus, aux mêmes instants, le chambrage arrière est découvert (sauf dans le LP9 qui n'en possède pas), voir figure V.11, ce qui réduit encore la longueur sur poudre à considérer. Au contraire, sur le LP9 seules les couches d'inhibiteur protégeant la structure aux fonds avant et arrière distinguent longueur totale et longueur sur poudre d'où un écart inférieur à 5%, voir figure V.11. Les courbes doivent donc être décalées d'environ 1.5 vers la droite (sens décroissant correspondant à un temps croissant) pour que L représente la longueur sur poudre, hormis celle du LP9 qui ne doit être décalée que de 0.5.

Deux types d'informations sont superposés en figure V.10 :

- les pressions stationnaires, vers le haut de la figure dans la moitié gauche et dont l'échelle est donnée à droite, varient de 20 bars (pression à l'allumage du LP9) à 60 bars (pression maximale dans le P230).

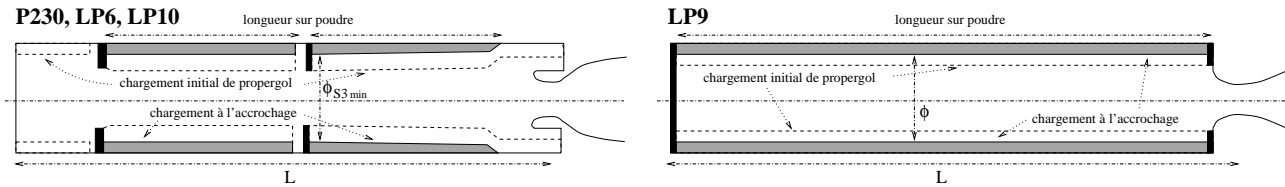


FIG. V.11 – Représentation schématique des moteurs testés en figure V.10 avec les définitions des grandeurs L et Φ_{S3min} lors de l'accrochage. Attention, la figure n'est pas à l'échelle.

- les pressions instationnaires qui présentent des pics vers la fin des tirs (à droite) et dont l'échelle est donnée à gauche, atteignent de 20 *mbars* (dans le LP9) à plus de 200 *mbars* (dans le P230 qui oscille avec des amplitudes nettement plus élevées que les essais à échelle réduite).

Les pressions stationnaires connaissent deux sauts au cours des tirs. Le premier, situé vers $L/\phi_{minS3} = 16$, correspond à la fin de combustion du petit segment amont tandis que le second, situé vers $L/\phi_{minS3} = 11$, est dû au découvrément du chambrage arrière permettant l'intégration de la tuyère. Dans les deux cas, la diminution soudaine de la surface de combustion entraîne une chute de pression interne. Au contraire, la courbe de pression du LP9 est régulière parce que ce moteur ne compte qu'un seul segment et ne dispose pas d'une tuyère intégrée.

Cette caractéristique est intéressante car elle permet d'éviter une interprétation erronée des autres essais. En effet, sur la figure V.10 les instabilités globales des LP6, LP10 et P230 semblent apparaître à peu près avec le découvrément du chambrage arrière marqué par le deuxième saut de pression stationnaire. Il serait donc tentant d'en déduire une corrélation si les résultats du LP9 ne venaient pas indiquer que le découvrément n'a rien d'une condition nécessaire au déclenchement.

Les pressions instationnaires sont corrélées de façon très satisfaisante par le paramètre L/ϕ_{minS3} . La corrélation s'améliore encore pour le LP9 si on prend en compte la différence de décalage d'une unité vers la droite destinée à utiliser la longueur sur poudre plutôt que la longueur totale. Malheureusement, le comportement de l'échelle 1 est le seul à se démarquer d'environ une unité avec des oscillations se produisant plus tôt *i.e.* pour un diamètre interne plus faible.

V.7 Conclusion

A partir des observations expérimentales sur VECLA, des calculs des chapitres précédents et de divers résultats de la bibliographie, on a pu proposer un scénario explicatif des différents comportements de la veine d'essai rectangulaire, mais dont l'extrapolation au cas axisymétrique demeure incertaine en raison du manque de données. Le rôle déstabilisant y est joué par l'instabilité pariétale, l'effet atténuateur par la turbulence et l'excitation acoustique est produite par le passage des structures pariétales au travers de la section de sortie. Ce scénario rend compte des observations effectuées mais n'autorise pas de prédiction en raison des incertitudes sur le comportement non-linéaire de l'instabilité pariétale, l'apparition de la turbulence, l'effet dissipatif de la turbulence sur les structures... Le principal paramètre décidant du comportement semble être l'abscisse adimensionnelle de la section de sortie qui pilote l'amplitude des instabilités pariétales à cet endroit et donc l'amplitude de l'excitation acoustique.

L'impossibilité de détecter autre chose que l'instabilité globale au cours des essais en gaz chaud ne permet pas d'en tirer de conclusion claire puisque nos études ne fournissent pas d'information sur le phénomène complet mais seulement sur certaines parties de la boucle du couplage. Néanmoins, malgré la complexité supplémentaire liée aux irrégularités des chargements de propergol, aux possibles couplages de l'instabilité pariétale avec les instabilités de couche cisailée évoquées au chapitre I et surtout à la combustion des particules d'aluminium dont Lupoglazoff *et al.* [LVDF00] montrent le rôle majeur, l'abscisse adimensionnelle de sortie reste, comme dans les simulations planes en gaz froid, le paramètre principal permettant de relier entre eux les accrochages aéroacoustiques observés aux différentes échelles.

Synthèse et perspectives

Synthèse

L'objet de cette thèse a consisté à étudier un phénomène d'accrochage aéroacoustique dans les moteurs du lanceur Ariane 5 en partant de l'hypothèse que l'instabilité hydrodynamique à l'origine du couplage n'est pas liée aux couches cisillées issues des régularités de la géométrie interne du chargement mais à une instabilité intrinsèque des écoulements induits par injection pariétale.

Cette instabilité constitue un puissant moteur de déstabilisation qu'on a d'abord étudié dans le cadre d'une théorie linéaire de stabilité spatiale appliquée à un écoulement modèle de ceux rencontrés en conduits à parois débitantes : l'écoulement de Taylor. L'instabilité pariétale, ainsi dénommée parce que les fluctuations qui la caractérisent sont maximales près de la paroi débitante, est de nature convective avec un mécanisme non-visqueux lié à la courbure des lignes de courant issues de la paroi. De ce fait, une attention particulière a été portée aux termes dits "non-parallèles" et une forme de mode mieux adaptée aux écoulements linéairement accélérés que les modes normaux d'abord employés a été proposée, conduisant à des améliorations confirmées par des simulations numériques des équations de Navier-Stokes. Les comparaisons avec des montages soufflant de l'air dans une veine d'essai au travers de plaques poreuses ont conduit à des conclusions diverses : dans le canal rectangulaire VECLA, certains essais valident complètement l'approche utilisée mais d'autres sont moins convaincants; dans les canaux cylindriques, les prévisions théoriques semblent suivies mais aucune preuve définitive ne permet de conclure.

L'instabilité pariétale s'est révélée un phénomène robuste dont les caractéristiques locales sont peu affectées par les effets des irrégularités de la géométrie, de la compressibilité liée à la combustion, de l'acoustique présente à des niveaux élevés, de la régression de la paroi de propergol, de l'admittance de cette dernière et de la viscosité du fluide. Reste l'effet non-étudié des particules d'aluminium dont la zone de combustion coïncide avec les maxima de l'instabilité pariétale.

Deux évolutions non-linéaires possibles des instabilités dans l'écoulement de Taylor ont été étudiées dans le cas plan

- la "saturation" sur un état d'équilibre, vis-à-vis de l'écoulement de base, d'un système d'ondes bidimensionnelles constitué d'une fréquence fondamentale et de ses harmoniques;
- la tridimensionnalisation, sous l'effet d'une instabilité secondaire, de l'écoulement de base augmenté soit d'une unique onde primaire linéaire, soit d'un système d'ondes en équilibre;

On a montré que la tridimensionnalisation ne se produit que pour des amplitudes élevées de l'ordre de celles des états d'équilibre et que ces derniers sont instables vis-à-vis de perturbations tridimensionnelles mais avec de faibles taux d'accroissement. Les deux phénomènes peuvent donc se produire en même temps : saturation des instabilités pariétales longitudinales accompagnée d'une lente tridimensionnalisation.

On a montré que certains phénomènes non-linéaires observés dans VECLA se produisent à des amplitudes trop faibles pour relever de ce scénario ce qui n'est guère surprenant puisqu'ils présentent des spectres large bande à la différence des hypothèses employées. En revanche, les cas expérimentaux dont les spectres sont constitués d'une fréquence fondamentale et de ses harmoniques indiquent des amplitudes compatibles avec les niveaux théoriques vers le fond arrière, voire plus élevées lors des résonances sur des modes acoustiques de cavité non-prises en compte dans la modélisation.

En s'appuyant sur les nombreuses expériences et visualisations menées dans VECLA, on propose un scénario explicatif des différents comportements observés. La source d'oscillations serait l'instabilité pariétale, le phénomène atténuateur serait la dissipation par la turbulence et le transfert d'énergie du champ hydrodynamique au champ acoustique se ferait lors du passage par la section de sortie des structures pariétales créées par l'instabilité du même nom. Il en résulte que le paramètre principal est le rapport d'aspect (longueur sur rayon) plutôt qu'un critère d'accord fréquentiel entre l'acoustique de cavité et une fréquence hydrodynamique privilégiée puisqu'une large bande de fréquences est en fait amplifiée. L'étude des différents essais disponibles, simulations en gaz froid et tirs de moteurs à propergol solide de toutes tailles confirme la prépondérance du rapport d'aspect, calculé comme la longueur débitante sur une méridienne (appelée longueur sur poudre par les motoristes) divisée par le rayon fluide (distance de l'axe à la surface débitante), sur l'accord fréquentiel.

Perspectives

Les perspectives se décomposent en deux catégories : les propositions d'études visant à une meilleure compréhension du phénomène et les pistes à envisager pour une meilleure sécurité de conception des moteurs à propergol solide vis-à-vis des oscillations considérées.

Il est clair que de nombreuses questions restent en suspens qui nuisent à l'élaboration de critères prédictifs. On retiendra trois directions de recherches principales :

- la prévision de la transition à la turbulence et de la dissipation des structures cohérentes par la turbulence puisque ce phénomène semble jouer un rôle majeur;
- l'intrigant mécanisme de sélection en fréquence pour les résonances hors modes de cavité de VECLA même si son utilité pour l'application sur les moteurs à propergol solide est incertaine;
- et surtout le mécanisme de transfert du champ hydrodynamique à l'acoustique interne du moteur dont la compréhension est fondamentale tant pour la recherche de critères simples que pour guider les simulations numériques.

Pour une application plus directe à la conception de moteurs, on peut proposer d'intégrer les résultats de stabilité non-linéaire dans les méthodes standards de bilan acoustique actuellement utilisées pour prédire la stabilité des modes acoustiques. En effet, puisque le transfert de l'instabilité à l'acoustique semble se produire au fond arrière, seule cette zone importe pour l'instabilité pariétale; or, les solutions non-linéaires calculées au cours de cette thèse représentent à la fois un état possible sinon probable des instabilités pariétales en sortie (d'après le scénario de résonance hors mode de cavité) et une sorte de "pire cas" puisque la dissipation par la turbulence n'y est pas prise en compte. L'intégration de leur contribution au bilan acoustique donnerait donc la prévision du cas le plus défavorable ce qui constitue déjà une information importante.

Outre la prévision, quelques pistes d'études concernant la conception seraient les bienvenues. L'instabilité pariétale est un phénomène robuste, insensible aux différentes influences envisagées (hormis peut-être la combustion des particules d'aluminium); de plus, elle ne fait que provoquer la déstabilisation des modes acoustiques longitudinaux mais ne pilote *a priori* pas l'amplitude de saturation; il me paraît donc illusoire de vouloir contrôler l'accrochage aéroacoustique en agissant sur elle. Les fréquences relativement constantes du champ acoustique autorisent quant à elles des modes de contrôle passif usuels peu risqués. La réceptivité de l'instabilité pariétale à l'acoustique offre peu de prises pour une atténuation mais l'autre interaction me semble constituer le point faible de la boucle de rétroaction. En effet, différentes études théoriques et expérimentales montrent l'importance prépondérante de la zone de recirculation située autour de l'intégration de la tuyère dans l'établissement des niveaux de résonance. Bien que les modifications de cette zone apparaissent technologiquement complexes, cette piste semble la plus prometteuse¹⁸ non pas pour éviter l'accrochage aéroacoustique mais pour

18. Signalons toutefois que des essais à échelle réduite à pression stationnaire plus élevée (80 bars au lieu de 50)

le ramener à des amplitudes plus faibles.

indiquent une nette baisse des niveaux; cette constatation reste pour l'instant inexplicée et demande à être confirmée. Une telle stabilisation serait particulièrement bienvenue puisque les évolutions futures du P230 tendent à l'augmentation des pressions stationnaires afin de satisfaire aux objectifs de gain de puissance.



Bibliographie

- [ABG00] Anthoine J., Buchlin J.-M., and Guéry J.-F. Experimental and numerical investigations of nozzle geometry effect on the instabilities in solid propellant boosters. In *36th Joint Propulsion Conference and Exhibit*. AIAA/ASME/ASEE, AIAA 2000-3560, 16-19 July, Huntsville, Alabama 2000.
- [ACG98] Avalon G., Casalis G., and Griffond J. Flow instabilities and acoustic resonance of channels with wall injection. In *Joint Propulsion Conference and Exhibit*. AIAA/ASME/ASEE, AIAA 98-3218, July 13-15, Cleveland, OH 1998.
- [Air94] Airiau C. *Stabilité linéaire et faiblement non-linéaire d'une couche limite incompressible par un système d'équations parabolisé (PSE)*. PhD thesis, ENSAE, Toulouse, June 1994.
- [AL00] Avalon G. and Lambert D. Montage valdo: premiers essais de mise au point et de qualification. Technical Report RF 5/00064 DEFA, ONERA, Septembre 2000.
- [Ant00] Anthoine J. *Experimental and numerical study of aeroacoustic phenomena in large solid propellant boosters*. PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, october 2000.
- [AUGB00] Avalon G., Ugurtas B., Grisch F., and Bresson A. Numerical computations and visualization tests of the flow inside a cold gas simulation with characterization of a parietal vortex-shedding. In *36th Joint Propulsion Conference and Exhibit*. AIAA/ASME/ASEE, AIAA 2000-3387, 16-19 July, Huntsville, Alabama 2000.
- [Ava94] Avalon G. Etude de la turbulence des écoulements avec injection aux parois sur le montage vecla. Technical Report RTS 8/2486 EY, ONERA, Décembre 1994.
- [Ava97] Avalon G. Caractérisation des phénomènes liés à l'instabilité naturelle de l'écoulement dans le montage VECLA - Etude des conditions permettant de réaliser l'accrochage acoustique. Rapport final CNES 90/6133EY, ONERA, juillet 1997.
- [Ava99] Avalon G. Etude expérimentale des instabilités naturelles d'un écoulement avec injection à la paroi. Campagne d'essais VECLA ASSM7. Rapport technique RT 4/6163 DSNA/Y/DEFA, ONERA, mars 1999.
- [BBS97] Blomshield F., Bicker C., and Stalnaker R. High pressure pulsed motor firing combustion instability investigations. In *33rd Joint Propulsion Conference and Exhibit*. AIAA/ASME/SAE/ASEE, AIAA 97-3253 1997.
- [BDYW81] Brown R., Dunlap R., Young S., and Waugh R. Vortex shedding as a source of acoustic energy in segmented solid rockets. *J. spacecraft*, 18(4), July-August 1981.
- [Bed85] Beddini R. A. Injection induced flows in porous-walled ducts. *AIAA Paper 85-1406*, Jul. 1985.
- [Bed98] Beddini R. The role of turbulence interactions in solid propellant combustion instability. In *34th Joint Propulsion Conference and Exhibit*. AIAA/ASME/SAE/ASEE, AIAA 98-3703, July 13-15, Cleveland, OH 1998.
- [Ber53] Berman A. Laminar flow in channels with porous walls. *Journal of applied physics*, 24(9), september 1953.
- [Ber85] Bertolotti F. Temporal and spatial growth of subharmonic disturbances in falkner-skane flows. Master's thesis, Virginia Polytechnic Institute, 1985.

- [BL82] Baum J. and Levine J. Numerical techniques for solving non-linear instability problems in solide rocket motors. *AIAA Journal*, 20:955–961, 1982.
- [BM84] Bridges T. and Morris P. Differential eigenvalue problems in which the parameter appears nonlinearly. *J. Comput. Phys.*, 55:437–460, 1984.
- [BM87] Bridges T. and Morris P. Boundary layer stability calculations. *Phys. Fluids*, 30(11):3351, november 1987.
- [CAP98] Casalis G., Avalon G., and Pineau J. P. Spatial instability of planar channel flow with fluid injection through porous walls. *Physics of Fluids*, 10(10):2558–2568, October 1998.
- [Cas90] Casalis G. *Instabilités primaire et secondaire dans la couche limite laminaire pour un fluide incompressible*. PhD thesis, Université Paris VI, 25 juin 1990.
- [Cas00] Casalis G. ASSM8- projet 3- participation du DMAE sur le suivi des travaux sur l’instabilité de type inflexionnel. Technical Report RT 3/00064-16F DEFA/Y/DMAE, ONERA, août 2000.
- [CHQZ88] Canuto C., Hussaini M., Quarteroni A., and Zang T. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer, 1988.
- [CK58] Chu B. and Kovasnay L. Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas. *J. Fluid Mech.*, 3:494–514, 1958.
- [CK97] Cox S. and King A. On the asymptotic of a high-order nonlinear ordinary differential equation. *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, 29:245–283, 1997.
- [Cla96] Clavin P. Etude analytique de l’amortissement des ondes acoustiques longitudinales dans une chambre avec injection pariétale. Technical Report Contrat n 22.77DA.B2/MA, IRPHE, novembre 1996. Programme ASSM5.
- [CN65] Coddington E. and N.Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. Mc Graw Hill, 1965.
- [Cox91] Cox S. Analysis of steady flow in a channel with one porous wall, or with accelerating walls. *SIAM J. Appl. Math.*, 51(2):429–438, 1991.
- [CPDK96] Couton D., Plourde F., and Doan-Kim S. Cold gas simulation of a solid propellant rocket motor. *AIAA Journal*, 34(12):1462–1464, 1996.
- [Cro92] Crouch J. Localized receptivity of boundary layers. *Physics of Fluids*, A 4(7), july 1992.
- [CS00] Chaouat B. and Schiestel R. Turbulence stress transport modeling for flow prediction in solid rocket motors. In *2nd European Conference on Launcher Technology, Space Solid Propulsion*, Rome, Italy, 21-24 November 2000.
- [Cul66] Culick F. Rotational axisymmetric mean flow and damping of acoustic waves in a solid propellant rocket. *AIAA J.*, 4(8):1462–1464, 1966.
- [Cul75] Culick F. Stability of three-dimensional motions in a combustion chamber. *Combust. Sci. and Tech.*, 10:109–124, 1975.
- [DB84] Durlofsky L. and Brady J. The spatial stability of a class of similarity solutions. *Phys. Fluids*, 27(5):1068–1076, 1984.
- [DBW⁺90] Dunlap R., Blackner A., Waugh R., Brown R., and Willoughby P. Internal flow field studies in a simulated cylindrical port rocket chamber. *J. Propulsion*, vol. 6(No. 6):pp. 690, 1990.
- [DKP97] Dotson K., Koshigoe S., and Pace K. Vortex shedding in a large solid rocket motor without inhibitors at the segment interfaces. *Journal of Propulsion and Power*, 13(2):197–206, March-April 1997.
- [DKVPC99] Doan-Kim S., Vetel J., Plourde F., and Couton D. Rapport intermédiaire MICAT-1 - ASSM8. Technical report, ENSMA - U.M.R CNRS 6608, octobre 1999. Convention n°23.493/DA.B1/DC.
- [DR85] Drazin P. and Reid W. *Hydrodynamic stability*. Cambridge University, 1985.

- [dSVG99] de Saint-Victor X., Griffond J., and Casalis G. Instabilités linéaires des écoulements appliquées aux montages VIOLETTE et VECLA mis en œuvre dans le cadre des études ASSM. Technical Report RF 1/5100.03 DMAE, ONERA, février 1999.
- [Dup96] Dupays J. *Contribution à l'étude du rôle de la phase condensée dans la stabilité d'un propulseur à propergol solide pour lanceur spatial*. PhD thesis, INPT, Toulouse, 12 novembre 1996.
- [EK91] Ehrenstein U. and Koch W. Three-dimensional wavelike equilibrium states in plane Poiseuille flow. *J. Fluid. Mech.*, vol. 228:pp. 111–148, 1991.
- [Fav99] Favray F. *Etude de l'instabilité d'un écoulement confiné. Application à un modèle hydrodynamique de propulseur à propergol solide*. PhD thesis, Université Paris VI, 18 janvier 1999.
- [Fer01] Feraille T. De la stabilité des écoulements diphasiques à phase condensée diluée. - Application à l'écoulement de Taylor. Rapport de DEA, ONERA, Toulouse, septembre 2001.
- [FJ73] Flandro G. A. and Jacobs H. Vortex generated sound in cavities. *AIAA Paper 73-1014*, 1973.
- [Fla86] Flandro G. A. Vortex driving mechanism in oscillatory rocket flows. *J. Propulsion*, Vol. 2(No. 3), 1986.
- [Fla95] Flandro G. A. Effects of vorticity on rocket combustion stability. *JPP*, 11(4), July-August 1995.
- [Gar89] Garg V. Spatial stability of the non-parallel Bickley jet. *J. Fluid Mech.*, 102:127–140, 1989.
- [GC99] Griffond J. and Casalis G. Linear stability of injection induced flows: effect of weak unsteadiness. In *International Conference on Stability and Turbulence of Homogeneous and Heterogeneous Flows*, 21-23 April 1999, Novosibirsk 1999.
- [GC00a] Griffond J. and Casalis G. On the dependence on the formulation of some nonparallel stability approaches applied to the Taylor flow. *Physics of Fluids*, 12(2), February 2000.
- [GC00b] Griffond J. and Casalis G. Secondary instability of the planar Taylor flow. In *36th Joint Propulsion Conference and Exhibit*. AIAA/ASME/ASEE, AIAA 2000-3806, 16-19 July, Huntsville, Alabama 2000.
- [GC01] Griffond J. and Casalis G. On the nonparallel stability of the injection induced two-dimensional Taylor flow. *Physics of Fluids*, 13(6):1635–1644, June 2001.
- [GCA⁺00] Griffond J., Casalis G., Avalon G., Ugurtas B., and Vuillot F. Instability and resonance in a system simulating the solid propellant motors behaviour. In *2nd European Conference on Launcher Technology, Space Solid Propulsion*, Rome, Italy, 21-24 November 2000.
- [GCP00] Griffond J., Casalis G., and Pineau J.-P. Spatial instability of flow in a semiinfinite cylinder with fluid injection through its porous walls. *EJM-B/Fluids*, 19:69, January 2000.
- [GM98] Godreche C. and Manneville P., editors. *Hydrodynamics and nonlinear instabilities*. Cambridge University Press, 1998.
- [Gon00] Goncalves F. *Etudes numériques de l'écoulement instationnaire diphasique dans les propulseurs à propergol solide d'Ariane 5*. PhD thesis, ENSAE, 30 novembre 2000.
- [Gör55] Görtler H. *Dreidimensionale Instabilität der ebenen Staupunkt-Strömung gegenüber wirbelartigen Störungen*. Fifty years of boundary layer research. Vieweg und Sohn, 1955.
- [Gri98] Griffond J. Stabilité linéaire dans un conduit à parois débitantes. Effet de la régression de la paroi. Rapport de DEA, 21 septembre 1998. ONERA.
- [Häm55] Hämmerlin G. *Zur Instabilitätstheorie der ebenen Staupunktströmung*. Fifty years of boundary layer research. Vieweg und Sohn, 1955.

- [Han95] Hanifi A. *Local and Non-local Stability Analysis and Transition Prediction in Compressible Boundary Layer Flows*. PhD thesis, KTH, Royal Institute of Technology, Department of Mechanics, November 1995.
- [HB87] Herbert T. and Bertolotti F. P. Stability analysis of non-parallel boundary layers. *Bull. Am. Phys. Soc.*, 32:2079, 1987.
- [HE68] Huesmann K. and Eckert E. Untersuchungen über die laminare Strömung und den Umschlag zur Turbulenz in porösen Rohren mit gleichmässiger Einblasung durch die Rohrwand. *Wärme und Stoffübertragung*, 1(1):2–9, 1968.
- [Her77] Herbert T. Finite amplitude stability of plane parallel flows. In *AGARD Conference Proceedings, CP-224, 3/1-10*, 1977.
- [Her83] Herbert T. Subharmonic three-dimensional disturbances in unstable plane shear flows. In *16th AIAA Fluid and Plasma Dynamics Conference*, AIAA-83-1759, 12-14 July, Danvers, Massachusetts 1983.
- [Her88] Herbert T. Secondary instability of boundary layers. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 20:487–526, 1988.
- [Her97] Herbert T. Parabolized stability equations. *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, 29:245–283, 1997.
- [HHvHA98] Hirschberg A., Hulshoff S., van Hassel R., and Anthoine J. Vortex-acoustic interaction in internal flows: the whistler-nozzle human whistling and the solid-propellant rocket motor. In *3^e colloque R&T CNES/ONERA "Ecoulements internes en Propulsion Solide.*, volume 3, ENSMA, Poitiers, France, 25-27 mars 1998.
- [Hil95] Hill D. Adjoint systems and their role in the receptivity problem for boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 292:183–204, 1995.
- [Hir90] Hirsch C. *Numerical computation of internal and external flows. Volume 2: Computational methods for inviscid and viscous flows*. Wiley and sons, 1990.
- [HM90] Huerre P. and Monkewitz P. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, 22:473–537, 1990.
- [How80] Howe M. The dissipation of sound at an edge. *Journal of Sound and Vibration*, 70:407–411, 1980.
- [How84] Howe M. On the absorption of sound by turbulence and other hydrodynamic flows. *I.M.A. Journal of Applied Mathematics*, 32:187–203, 1984.
- [IR95] Isakov E. B. and Rudnyak V. Y. Stability of rarefied dusty gas and suspension flows in a plane channel. *Fluid Dynamics*, 30(5), 1995.
- [JS85] Jameson A. and Schmidt W. Some recent development in numerical methods for transonic flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51:467–493, 1985.
- [JST81] Jameson A., Schmidt W., and Turkel E. Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using runge-kutta time stepping schemes. In *14th Fluid and Plasma Dynamic Conference*, 1981.
- [LB99] Lee Y. and Beddini R. Acoustically-induced turbulent transition in solid propellant rocket chamber flowfields. In *35th AIAA/ASME/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, AIAA-99-2508, 20-24 June, Los Angeles, California 1999.
- [LB00] Lee Y. and Beddini R. Effect of solid rocket chamber pressure on acoustically-induced turbulent transition. In *36th AIAA/ASME/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, AIAA-2000-3802, 16-19 July, Huntsville, Alabama 2000.
- [LM96a] Li F. and Malik M. On the nature of the pse approximation. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 8:pp 253–273, 1996.
- [LM96b] Lin R. and Malik M. Stability of attachment-line boundary layers. part 1. *J. Fluid Mech.*, 311:239–255, 1996.
- [LV96a] Lupoglazoff N. and Vuillot F. Détachement tourbillonnaire pariétal comme cause d'instabilité pour des moteurs à propergols allongés. Simulation numérique et comparaisons avec des essais. Technical Report RT 76/6133 EY, ONERA, février 1996.

- [LV96b] Lupoglazoff N. and Vuillot F. Parietal vortex shedding as a cause of instability for long solid propellant motors. Numerical simulations and comparisons with firing tests. *AIAA paper 96-0761*, 1996.
- [LV98] Lupoglazoff N. and Vuillot F. Simulations numériques du fonctionnement instationnaire du MPS LP3D avec bruit: étude du vortex-shedding pariétal. Technical Report RT 106/6133 DSNA/N, ONERA, janvier 1998.
- [LV00] Lupoglazoff N. and Vuillot F. Simulations numériques du moteur LP9 et influence de divers paramètres sur la résonance acoustique. Rapport technique RTS 6/6182 DSNA/Y, ONERA, juin 2000.
- [LVDF00] Lupoglazoff N., Vuillot F., Dupays J., and Fabignon Y. Numerical simulations of the unsteady flow inside ariane 5 p230 srm booster with burning aluminium particles. In *2nd European Conference on Launcher Technology, Space Solid Propulsion*, Rome, Italy, 21-24 November 2000.
- [Maj99] Majdalani J. Basic vorticity dynamics in a porous channel of closed-open type. part 1: a standard perturbation treatment. In *35th AIAA/ASME/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, AIAA-99-2503, 20-24 June, Los Angeles, California 1999.
- [MCH82] Malik M., Chuang S., and Hussaini M. Accurate numerical solution of compressible, linear stability equations. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 33:189–201, March 1982.
- [MG98] Mombelli C. and Guéry J. ASSM7 - projet stabilité - étude par simulation numérique de phénomènes lents: glissement et saut en fréquence. Technical report, SNPE, décembre 1998. contrat 97/CNES/5541 Bdc n°1.
- [MM98] Majdalani J. and Moorhem W. V. Improved time-dependent flowfield solution for solid rocket motors. *AIAA J.*, 36(2):241–248, February 1998.
- [MR99] Majdalani J. and Roh T.-S. Basic vorticity dynamics in a porous channel of closed-open type. part 2: a space-reductive perturbation treatment. In *35th AIAA/ASME/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit*, AIAA-99-2504, 20-24 June, Los Angeles, California 1999.
- [MT75] Merkli P. and Thomann H. Transition to turbulence in oscillating pipe flow. *J. Fluid Mech.*, 68:567–575, 1975.
- [OE66] Olson R. and Eckert E. Experimental studies of turbulent flow in a porous circular tube with uniform fluid injection through the tube wall. *J. Applied Mech.*, 33(4):7–17, march 1966.
- [PDM⁺00] Prevost M., Dommée Y., Maunoury J., Traineau J., Vuillot F., and Duval P. On the representativity of small scale motor tests. In *2nd European Conference on Launcher Technology, Space Solid Propulsion*, Rome, Italy, 21-24 November 2000.
- [PH69] Patel V. and Head M. Some observations on skin friction and velocity profiles in fully developed pipe and channel flows. *J. Fluid Mech.*, 38:181–201, 1969.
- [Pin97] Pineau97. Stabilité linéaire d' un écoulement dans un conduit cylindrique à paroi débitante. Rapport de DEA, 11 septembre 1997. ONERA.
- [PMP99] Prévost M., Manaury J., and Prévôt P. Campagne d'essai du montage LP9 démonstrateur du vortex-shedding pariétal (vsp). Technical Report RF 2/5500.12 DMAE/Y, ONERA, fév. 1999.
- [PMP00] Prévost M., Manaury J., and Prévôt P. Assm8. 2^e campagne d'essai du montage LP9 démonstrateur du vortex-shedding pariétal. Technical Report RF 9/6182/DSNA/DMAE (5500.29), ONERA, Octobre 2000.
- [PS88] Pugh J. and Saffman P. Two-dimensional superharmonic stability of finite amplitude waves in plane Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 194:295–307, 1988.

- [PV98] Prévost M. and Vuillot F. Dossier de justification du montage LP9. futur démonstrateur du vortex-shedding pariétal (vsp). Technical Report RT 1/5500.12 DMAE/Y, ONERA, sept. 1998.
- [RK74] Raithby G. and Knudsen D. Hydrodynamic development in a duct with suction and blowing. *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of the ASME, 1974.
- [RN79] Rockwell D. and Naudascher E. Self-sustained oscillations of impinging free shear layers. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 11:67–94, 1979.
- [Rob76] Robinson W. The existence of multiple solutions for the laminar flow in a uniformly porous channel with suction at both walls. *J. Engng Math.*, 10:23–40, 1976.
- [Roc83] Rockwell D. Oscillations of impinging shear layers. *AIAA Journal*, 21(5):645–664, 1983.
- [Ros64] Rossiter J. Wind-tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds. Technical Report Rap. tech. 3438, Aeronautical Research Council, Ministry of Aviation, London, 1964.
- [SB92] Schaeffer C. and Brown R. Oscillatory internal flow fields studies. Technical report, United Technologies, Chemical Systems Div., aug. 1992.
- [SG81] Salwen H. and Grosch C. The continuous spectrum of the Orr-Sommerfeld equation. Part 2. Eigenfunctions expansions. *J. Fluid Mech.*, 104:445–465, 1981.
- [SLK84] Saric W., Levchenko V., and Kozlov V. Forced and unforced subharmonic resonance in boundary layer transition. *AIAA*, 84-0007, 1984.
- [SN75] Saric W. and Nayfeh A. Non parallel stability of boundary layer flows. *Physics of Fluids*, 18(8), août 1975.
- [ST83] Saric W. and Thomas A. Experiments on the subharmonic route to turbulence in boundary layers. *IUTAM symposium on Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids*, 5-10 Septembre, Kyoto, Japon 1983.
- [Suk93] Sukhinin. Hydrodynamic sources of oscillations in combustion chambers. *Combustion Explosion and Shock Waves*, 29(6):699–705, 1993.
- [Tay56] Taylor G. I. Fluid flow in regions bounded by porous surfaces. *Proc. of the Royal Soc. Series A, London*, Vol. 234(No. 1199):pp. 456–475, 1956.
- [Ter64] Terril R. Laminar flow in a uniformly porous channel. *Aeronaut. Q.*, 15:299–310, 1964.
- [Ter86] Terrill R. Fluid flow in a region bounded by a porous cylindrical pipe. *Phys. Fluids*, 29(3):625–627, 1986.
- [THK86] Traineau J., Hervat P., and Kuentzmann P. Cold flow simulation of a two-dimensional nozzleless solid rocket motor. In *22th Joint Propulsion Conference and Exhibit*. AIAA/SAE/ASME, 16-18 June, Huntsville, Alabama 1986.
- [UAL⁺00] Ugurtas B., Avalon G., Lupoglazoff N., Vuillot F., and Casalis G. Stability and acoustic resonance of internal flows generated by side injection. *Solid Propellant Chemistry, Combustion, and Motor Interior Ballistics, AIAA Progress in Astronautics and Aeronautics Series*, 185, July 2000.
- [Ugu00] Ugurtas B. *Etudes numérique et expérimentale des instabilités hydrodynamiques et du couplage aéro-acoustique dans un écoulement de Taylor*. PhD thesis, Université Paris VI, 11 décembre 2000.
- [VCAL99] Vuillot F., Casalis G., Avalon G., and Lupoglazoff N. Mise en résonance acoustique d’une cavité par l’instabilité naturelle d’un écoulement généré par injection pariétale. *CR Acad. Sci, Paris, Serie Iib*, pages p. 77–83, 1999.
- [vK82] von Kerczek C. The instability of the oscillatory plane Poiseuille flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 116:91–114, 1982.
- [vKD74] von Kerczek C. and Davis S. Linear stability theory of oscillatory stokes layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 62:438–448, 1974.

-
- [VTPL93] Vuillot F., Traineau J., Prévost M., and Lupoglazoff N. Experimental validation of stability assessment methods for segmented solid propellant motors. In *29th Joint Propulsion Conference and Exhibit*. AIAA/SAE/ASME/ASEE, 28-30 June, Monterey, CA (USA) 1993.
- [Vui91a] Vuillot F. Numerical computations of acoustic boundary layers in large solid propellant space booster. In *29th Aerospace Sciences Meeting*, AIAA 91-0206, January, Reno, Nevada 1991.
- [Vui91b] Vuillot F. Programme assm, axe de stabilité de fonctionnement: présentation et synthèse des résultats obtenus sur le cas test "c0"de couche limite acoustique. Technical Report RT 16/6133 EY, ONERA, novembre 1991.
- [Vui95] Vuillot F. Vortex shedding phenomena in solid propellant motors. *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 11(No. 4):pp. 626–639, July-August 1995.
- [VY69] Varapaev V. and Yagodkin V. Flow stability in a channel with porous wall. *Izv. AN SSSR. Mekhanika Zhidkosi i Gaza.*, Vol. 4(No. 5):91, 1969.
- [WBZD88] Watson E., Banks W., Zaturka M., and Drazin P. On transition to chaos in two-dimensional channel flow symmetrically driven by accelerating walls. *J. Fluid Mech.*, 212:451–485, 1988.
- [Yag67] Yagodkin V. Use of channels with porous walls for studying flows which occur during combustion of solid propellants. In *Transactions of 18th International Astronautical Congress*, 1967.
- [YGI76] Yamada K., Goto M., and Ishikawa N. Simulative study on the erosive burning of solid rocket motors. *AIAA Journal*, 14(9):1170–1176, 1976.
- [Yua56] Yuan S. Further investigations of laminar flow in channels with porous walls. *Journal of Applied Physics*, 27(3):267–269, 1956.
- [ZDB88] Zaturka M., Drazin P., and Banks W. On the flow of a viscous fluid driven along a channel by suction at porous walls. *Fluid Dyn. Res.*, 4:151–178, 1988.
- [ZSKK00] Zhao Q., Staab P., Kassoy D., and Kirkkopru K. Acoustically generated vorticity in an internal flow. *J. Fluid Mech.*, 413:247–285, 2000.
- [ZTSG74] Zahn J.-P., Toomre J., Spiegel E., and Gough D. Nonlinear cellular motions in Poiseuille channel flow. *J. Fluid Mech.*, 64:319–345, 1974.

Annexe A

Acoustique en conduit à parois débitantes

Le comportement oscillatoire global des moteurs à propergol solide ou des montages les simulant tels que VECLA est lié à l'interaction encore mal comprise de l'acoustique et des instabilités. Une étude basée sur les seules fluctuations dues aux instabilités est totalement insuffisante pour en rendre compte. C'est pourquoi l'acoustique apparaît à plusieurs occasions dans ce manuscrit. Les nombreuses approches supposant que les seules fluctuations existantes sont de type acoustique sont d'ailleurs tout aussi vaines.

On doit cependant bien avouer qu'on est incapable de distinguer précisément onde acoustique et onde de vorticité. Cette séparation, telle que proposée par exemple chez Chu et Kovasnay [CK58], n'est strictement valable que dans un écoulement uniforme en l'absence de conditions aux limites ailleurs qu'à l'infini. On se contente donc de la distinction basée sur le découplage des échelles entre des faibles longueurs d'onde pour les instabilités (liées à la hauteur de la veine) et des fortes longueurs d'onde pour l'acoustique longitudinale (liée à la longueur de la veine). Cette distinction est floue, mais faute de mieux, elle permet à plusieurs reprises dans le manuscrit de supposer l'acoustique indépendante de x du point de vue des instabilités, hypothèse entraînant des simplifications importantes.

L'étude de l'acoustique en conduit à parois débitantes a fait l'objet de multiples travaux parmi lesquels on citera ceux de Flandro [Fla95], Clavin [Cla96], ou Zhao *et al.* [ZSKK00] pour la théorie et ceux de Schaeffer et Brown [SB92] pour l'expérience.

On leur préfère cependant la solution de Majdalani [Maj99] et Majdalani et Roh [MR99] dans le cas plan avec sortie sans tuyère en raison de sa simplicité et de son caractère analytique. Une solution basée sur le même principe existe dans le cas axisymétrique, voir Majdalani et Van Moorhem [MM98].

A.1 Construction de la solution de Majdalani

A.1.1 Système acoustique et système rotationnel

Le problème acoustique considéré est linéaire. La première étape est donc une décomposition des grandeurs en une partie moyenne g_0 d'ordre unité et une petite perturbation g_1 d'ordre ε avec $\varepsilon \ll 1$ (On définit ε comme le rapport du maximum de pression fluctuante à la pression moyenne).

La vitesse est adimensionnée par la célérité du son a_s , les longueurs par h , le temps par h/a_s et la pression et la densité sont adimensionnées à l'aide des conditions de stagnation : γp_s pour la pression et ρ_s pour la masse volumique. On définit alors le nombre de Reynolds acoustique $\mathcal{R} = a_s h / \nu$.

On isole la vitesse d'injection dans l'expression de la vitesse moyenne, de sorte que la vitesse totale s'écrit

$$M_{inj} \vec{u}_0 + \varepsilon \vec{u}_1 \tag{A.1}$$

où

$$M_{inj} = \frac{V_{inj}}{a_s}$$

est le nombre de Mach d'injection. L'écoulement de base \vec{u}_0 prend alors la même expression qu'avec l'adimensionnement utilisé pour l'écoulement de Taylor.

Les équations linéarisées vis-à-vis de ε s'écrivent alors

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_1 = -M_{inj} \vec{\nabla} \cdot (\rho_1 \vec{u}_0) \\ \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -M_{inj} \left[\vec{\nabla}(\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_1) - \vec{u}_1 \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_0) - \vec{u}_0 \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_1) \right] - \vec{\nabla} p_1 + \frac{1}{\mathcal{R}} \left[\frac{4}{3} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_1) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_1) \right] \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

où $\mathcal{R} = a_s h / \nu$ et $\vec{a} \wedge \vec{b}$ désigne le produit vectoriel de \vec{a} et \vec{b} .

La petite perturbation de vitesse est à son tour décomposée en une partie irrotationnelle¹ \vec{u} que l'auteur qualifie d'acoustique et une partie solénoïdale $\vec{\tilde{u}}$

$$\vec{u}_1 = \vec{\tilde{u}} + \vec{u}$$

Majdalani impose par ailleurs qu'à la partie rotationnelle ne soit associée aucune fluctuation de pression ni de masse volumique. On a donc, avec ω désignant la vorticité (qui n'a qu'une composante en écoulement bidimensionnel)

$$\omega_1 = \vec{\nabla} \wedge \vec{u}_1 = \vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\tilde{u}}, \quad p_1 = \hat{p}, \quad \rho_1 = \hat{\rho}$$

De l'insertion de la décomposition dans (A.2), Majdalani [Maj99], suivant en cela Flandro [Fla95], déduit deux systèmes d'équations indépendantes mais couplées via les conditions aux limites.

– le système acoustique (compressible)

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{u}} = -M_{inj} \vec{\nabla} \cdot (\hat{\rho} \vec{u}_0) \\ \frac{\partial \vec{\tilde{u}}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \hat{p} - M_{inj} \left[\vec{\nabla}(\vec{u}_0 \cdot \vec{\tilde{u}}) - \vec{\tilde{u}} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_0) \right] + \frac{4}{3\mathcal{R}} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{u}}) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

– le système rotationnel (incompressible)

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{u}} = 0 \\ \frac{\partial \vec{\tilde{u}}}{\partial t} = -\frac{1}{\mathcal{R}} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{\tilde{u}}) - M_{inj} \left[\vec{\nabla}(\vec{u}_0 \cdot \vec{\tilde{u}}) - \vec{\tilde{u}} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_0) - \vec{u}_0 \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{\tilde{u}}) \right] \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Les conditions aux limites imposent, comme au paragraphe II.2.1, l'absence de fluctuations à la paroi.

$$\vec{u}_1(\text{paroi}) = \vec{\tilde{u}} + \vec{u} = \vec{0}$$

Elles couplent vitesse acoustique et vitesse rotationnelle.

A.1.2 Partie principale en onde plane

Le système acoustique (A.3) se condense de façon standard en

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \hat{p} = -M_{inj} \left[\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_0 \frac{\partial \hat{p}}{\partial t}) + \vec{\nabla}^2 (\vec{\tilde{u}} \cdot \vec{u}_0 - \vec{\tilde{u}} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}_0)) \right]$$

où les termes visqueux ont été négligés.

Majdalani se contente alors d'une solution à l'ordre du nombre de Mach d'injection $\mathcal{O}(M_{inj})$. La solution de l'équation sans second membre dans une chambre rectangulaire émergeant sans tuyère dans un milieu infini est alors une simple onde plane longitudinale

$$\hat{p}(x, t) = \cos(k_m x) \exp(-ik_m t) + \mathcal{O}(M_{inj})$$

1. Attention, les notations sont celles de Majdalani et ne doivent pas être confondues avec celle de la stabilité utilisées dans le manuscrit.

où

$$k_m = \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l} \quad (\text{A.5})$$

avec m un nombre entier et l la longueur adimensionnelle du tube (supposée grande devant 1). On rappelle que les longueurs sont adimensionnées par h et le temps par h/a_s . La présence du fond avant se traduit par un nœud de vitesse acoustique et la sortie libre en atmosphère infinie à pression ambiante entraîne la présence d'un nœud de pression.

La vitesse acoustique associée est

$$\hat{u}(x, t) = i \sin(k_m x) \exp(-ik_m t) \vec{e}_x + \mathcal{O}(M_{inj})$$

La vitesse radiale est nulle partout ce qui est compatible avec les conditions aux limites, par contre la vitesse axiale est constante sur chaque section d'abscisse fixée, y compris à la paroi. Il faut alors imposer la présence d'une *couche limite acoustique* qui va assurer le passage de l'onde plane au cœur de l'écoulement à l'absence de fluctuation à la paroi. Mais attention, les couches limites acoustiques dans les conduits à parois débitantes se trouvent être en fait d'une épaisseur d'un ordre de grandeur conséquent qui peut aller jusqu'au rayon de la chambre, il n'est donc pas question de l'aborder en supposant des séparations d'échelles.

A.1.3 Résolution de la couche limite acoustique

La couche limite acoustique apparaît comme la solution du problème rotationnel (A.4) avec les conditions aux limites permettant d'annuler la vitesse au bord

$$\tilde{u}(\text{paroi}) = -\hat{u}(\text{paroi}), \quad \tilde{v}(\text{paroi}) = 0 \quad (\text{A.6})$$

La solution du système linéaire (A.4) de condition aux limites inhomogènes (A.6) est recherchée avec la même dépendance temporelle $\exp(-ik_m t)$ que celle de l'onde plane.

Majdalani effectue ensuite l'hypothèse, vérifiée *a posteriori*

$$\frac{\tilde{v}}{\tilde{u}} = \mathcal{O}(M_{inj}) \quad (\text{A.7})$$

Il parvient ensuite à résoudre analytiquement son problème.

Au final, la construction de la solution acoustique se résume à deux étapes successives (alors que le problème est couplé) : définition d'une onde plane satisfaisant la structure de l'acoustique longitudinale dans le sens des abscisses, correction par une couche limite acoustique permettant d'annuler les fluctuations de vitesse axiale en paroi. Grâce à l'indépendance des jeux d'équations acoustiques et rotationnelles, le premier système est encore vérifié après ajout de la correction.

A.2 Relations entre analyse acoustique et analyse de stabilité

La ressemblance entre certaines équations résolues par le procédé de Majdalani et celles de l'analyse de stabilité est telle qu'il faut s'interroger sur les relations entre les deux méthodes.

En effet, la décomposition en fluctuations acoustiques et rotationnelles semble tout à fait naturelle (sinon générale dans le cas linéaire grâce à la décomposition d'Helmholtz). Il est donc normal de chercher où se situe l'instabilité pariétale dans (A.1)

Si on regarde le système rotationnel (A.4), on constate qu'il ne s'agit de rien d'autre que du système (II.10) dans lequel on a supposé que la pression fluctuante serait nulle, hypothèse qui, dans le cas de la stabilité est injustifiée et conduit à un problème mal posé. On peut d'ailleurs s'interroger sur la légitimité de la décomposition en (A.3) et (A.4) et surtout sur l'hypothèse que la fluctuation de pression associée à la partie rotationnelle est nulle.

Si on suppose, que (A.4) n'est qu'une forme exagérément simplifiée de (II.10), la décomposition des petites perturbations peut se faire en

$$\vec{u} + \vec{u}^{\text{hom}} + \vec{u}^{\text{inhom}}$$

où \vec{u} est toujours la solution de la partie acoustique mais où la solution de la partie rotationnelle se décompose en deux termes. Rappelons que le problème rotationnel à la deuxième étape de la construction de la solution de Majdalani est linéaire inhomogène. Le résultat se compose alors des solutions éventuelles du problème homogène (si celui-ci est rendu non-inversible *i.e.* les instabilités) et de celles du problème inhomogène (*i.e.* la couche limite acoustique), soit

$$\vec{u}_{op} + \vec{u}_{cla} + \vec{u}_{inst} \quad (\text{A.8})$$

avec \vec{u}_{op} due à l'onde plane, \vec{u}_{cla} due à la couche limite acoustique, \vec{u}_{inst} due à l'instabilité.

Cette décomposition est en particulier celle utilisée en section II.8 pour séparer l'instabilité dans les simulations numériques effectuées avec SIERRA.

On concilie ainsi la décomposition de Majdalani et la stabilité. La partie rotationnelle de la solution de Majdalani ayant une origine clairement différente de l'instabilité, il n'y a pas *a priori* de vice de logique à considérer l'effet de l'une sur l'autre, par exemple dans la section III.4.

La question se pose du couplage entre instabilité pariétale et l'acoustique de Majdalani. De la décomposition (A.8) résultent trois systèmes linéaires d'équations indépendantes². Les couplages en volume ne peuvent donc apparaître que par des termes non-linéaires et sont donc faibles *a priori*.

Par contre, les conditions aux limites peuvent fournir des couplages directs des termes linéaires.

A l'aval, si comme Ugurtas [Ugu00] ou comme à la section II.8 on choisit d'imposer une sortie à pression imposée, la fluctuation de pression transportée par l'instabilité doit être compensée par une fluctuation opposée. Mais comme la fluctuation de pression acoustique est nulle au fond arrière (choisi pour être un nœud de pression), ceci n'est pas possible avec la décomposition (A.8). De nombreuses explications peuvent résoudre la question mais il est clair qu'une telle condition de sortie couple fortement acoustique et stabilité et expliquerait aisément la possibilité d'accrochage. Reste à savoir si elle a une réalité physique?

A la paroi débitante, c'est par le biais d'une condition d'admittance que l'acoustique peut influencer la stabilité via des mécanismes de réceptivité évoqués au chapitre V.

A.3 Solution de Majdalani

La pression est donnée par l'onde plane, Majdalani ne résout pas le problème acoustique (A.3) au-delà de l'ordre 0 en M_{inj} et la partie rotationnelle n'admet pas de fluctuation de pression par hypothèse, aucune correction n'est donc apportée à cette grandeur.

La solution pour la vitesse entre l'axe et la paroi s'écrit de la façon suivante dans le repère avec origine à la paroi, *i.e.* $y' = 0$ à la paroi, $y' = 1$ sur l'axe (c'est l'opposé du repère utilisé dans le manuscrit pour lequel $y = \pm 1$ aux parois, $y = 0$ sur l'axe)

$$\begin{aligned} u_1 &= \sin(k_m x) \sin(k_m t) - (B^r \sin \phi - B^i \cos \phi) \exp \zeta \sin(k_m x \cos \frac{\pi}{2} y') \\ v_1 &= -M_{inj} v_0 (B^r \cos \phi + B^i \sin \phi) \exp \zeta \sin(k_m x \cos \frac{\pi}{2} y') \\ \omega_1 &= -(C^r \cos \phi + C^i \sin \phi) \exp \zeta \sin(k_m x \cos \frac{\pi}{2} y') \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

avec

$$\phi = k_m t - \frac{2}{\pi} S \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} (1 + y') \right), \quad \text{où } S = \frac{k_m}{M_{inj}}$$

2. Elles sont indépendantes si on suppose que toutes trois sont du même ordre de grandeur ε et qu'on linéarise par rapport à ε . Au contraire, au chapitre III, on suppose \vec{u}_{op} et \vec{u}_{cla} d'ordre A , une amplitude non-négligeable et \vec{u}_{inst} d'ordre ε ; la linéarisation vis-à-vis de ε fait alors apparaître un couplage entre les systèmes d'équations.

$$\zeta = \frac{-1}{\pi} \xi \left[\ln \tan \left(\frac{\pi}{4} (1 + y') \right) + \sec \frac{\pi y'}{2} \tan \frac{\pi y'}{2} \right], \quad \text{où } \xi = \frac{k_m^2}{M_{inj}^3 \mathcal{R}}$$

$$C^r = S^3 / (S^2 + \xi^2), \quad C^i = \xi S^2 / (S^2 + \xi^2)$$

$$v_0 = \cos \left(\frac{\pi y'}{2} \right)$$

$$B^r = \frac{1}{S} (C^r v_0 + \xi C^i / (S v_0)), \quad B^i = \frac{1}{S} (C^i v_0 - \xi C^r / (S v_0))$$

et on rappelle $\mathcal{R} = \frac{a_s h}{\nu}$, $M_{inj} = \frac{V_{inj}}{a_s}$

Comme le temps est adimensionné par h/a_s pour la solution acoustique alors que dans le manuscrit il est adimensionné h/V_{inj} , l'acoustique de pulsation ω_{ac} (avec l'adimensionnement du manuscrit) est reliée aux grandeurs de Majdalani par $\omega_{ac} = k_m/M_{inj} = S$.

Pour les études de stabilité, on laisse généralement la longueur du tube arbitraire mais on souhaite fixer la fréquence. La solution acoustique de Majdalani dépend de trois paramètres S , \mathcal{R} , M_{inj} , ou avec les grandeurs du manuscrit ω_{ac} , \mathcal{R}_{inj} , M_{inj} . De plus, si on ne considère pas v_1 qui est effectivement toujours négligeable puisque d'ordre M_{inj} , le profil en y' de la solution ne dépend que de ω_{ac} , \mathcal{R}_{inj} . En effet,

$$S = \omega_{ac} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{k_m^2}{M_{inj}^3 \mathcal{R}} = \frac{(M_{inj} S)^2}{M_{inj}^3 (\mathcal{R}_{inj} / M_{inj})} = \frac{\omega_{ac}}{\mathcal{R}_{inj}}$$

ces deux grandeurs suffisent à déterminer entièrement le profil de la solution. Le paramètre M_{inj} intervient cependant dans la détermination des amplitudes relatives puisqu'il définit les abscisses (avec l'adimensionnement du manuscrit) où se trouvent les nœuds et les ventres de vitesse.

En ce qui concerne l'allure des profils de vitesse acoustique, la période en y des oscillations est déterminée par S *i.e.* ω_{ac} et l'atténuation à partir de la paroi est déterminée par $\xi = \omega_{ac}/\mathcal{R}_{inj}$.

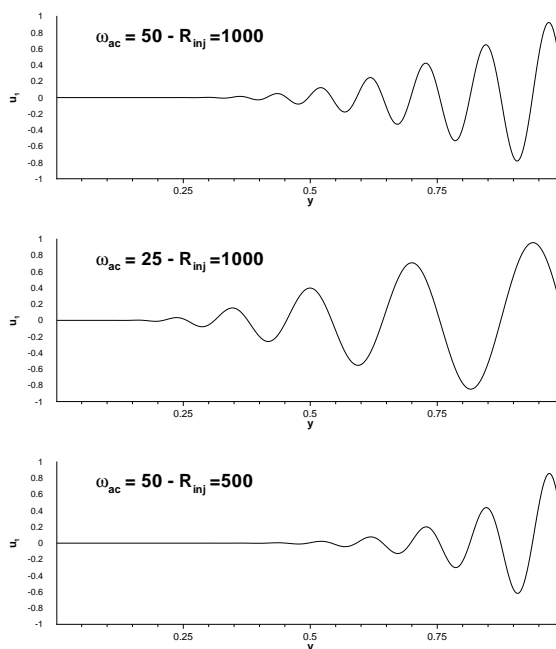


FIG. A.1 – Profil de vitesse axiale acoustique pour différentes valeurs du couple $\omega_{ac}, \mathcal{R}_{inj}$.

On trace en figure A.1 le profil de vitesse axiale acoustique pour différents couples de ces paramètres. On choisit $t = 0$ et on se place à l'abscisse du premier ventre de vitesse acoustique. L'ordonnée

y est l'ordonnée habituelle, la paroi est en $y = 1$ et l'axe en $y = 0$. Les valeurs de ω_{ac} et \mathcal{R}_{inj} sont de l'ordre de celles utilisées dans le manuscrit, elles-mêmes choisies pour correspondre aux valeurs typiques de VECLA.

On voit sur la figure A.1 que la couche limite acoustique oscille plus lentement et occupe une place plus importante quand la fréquence diminue. On constate aussi que son atténuation augmente quand le nombre de Reynolds d'injection diminue, *i.e.* son épaisseur diminue quand la viscosité augmente (attention à ne pas se laisser tromper par la similitude de dénomination avec la couche limite visqueuse qui suit l'évolution inverse!).

Plusieurs remarques doivent encore être faites. Avec le choix de fixer d'abord la pulsation puis de fixer la longueur, on fait disparaître le choix sur le numéro du mode longitudinal. L'équivalent des figures de Majdalani [Maj99] pour les modes $m = 1$, $m = 2$ et $m = 3$ (apparaissant dans la relation (A.5)) s'obtient en traçant les profils de vitesse axiale respectivement aux abscisses des 1^{er}, 2^e, et 3^e ventres de vitesse acoustique. On insiste aussi sur la dépendance en x de la couche limite acoustique par le biais des termes " $\sin(k_m x \cos \frac{\pi}{2} y')$ " qui montre que celle-ci n'est pas constante à un facteur d'échelle près dû à l'onde plane en " $\cos(k_m x)$ " comme on aurait pu le croire. Ceci explique d'ailleurs les différences de comportement entre les 1^{er}, 2^e, et 3^e ventre de vitesse acoustique.

Annexe B

Méthodes de discrétisation employées

Deux méthodes de discrétisation sont employées dans ce manuscrit parmi plusieurs autres répandues en stabilité comme les schémas de Runge-Kutta et les méthodes spectrales (méthode Tau et méthode de Galerkin).

Les problèmes de taille des matrices résultantes sont illustrés sur le cas du problème linéarisé bidimensionnel plan avec la forme de mode normal, voir II. Il s'écrit soit en variables primitives

$$\begin{cases} i\alpha\hat{u} + \frac{\partial\hat{v}}{\partial y} = 0 \\ i\omega\hat{u} + i\alpha\bar{U}\hat{u} + \hat{u}\frac{\partial\bar{U}}{\partial x} + \bar{V}\frac{\partial\hat{u}}{\partial y} + \hat{v}\frac{\partial\bar{U}}{\partial y} + i\alpha\hat{p} = \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial y^2} - \alpha^2\hat{u} - \beta^2\hat{u} \right) \\ i\omega\hat{v} + i\alpha\bar{U}\hat{v} + \hat{u}\frac{\partial\bar{V}}{\partial x} + \bar{V}\frac{\partial\hat{v}}{\partial y} + \hat{v}\frac{\partial\bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial\hat{p}}{\partial y} = \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial y^2} - \alpha^2\hat{v} - \beta^2\hat{v} \right) \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

soit en fonction de courant

$$\left(-i\omega + i\alpha\bar{U} + \bar{V}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 \right) \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 \right) \hat{\phi} - \frac{\partial^2\bar{V}}{\partial y^2} \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial y} - i\alpha \frac{\partial^2\bar{U}}{\partial y^2} \hat{\phi} = 0 \quad (\text{B.2})$$

B.1 Le schéma compact d'ordre 4 de Malik

Ce schéma aux différences finies est proposé par Malik *et al.* [MCH82]. Il s'applique à un système continu présenté sous la forme

$$\frac{d\Psi}{dy} = A_1\Psi + A_2 \quad (\text{B.3})$$

où A_1 et A_2 dépendent de y et Ψ est généralement un vecteur d'inconnues de taille P qui est l'ordre du système. Pour (B.1) il suffit de prendre $\Psi = (\hat{u}, d\hat{u}/dy, \hat{v}, \hat{p})^t$ et pour (B.2) $\Psi = (\hat{\phi}, d\hat{\phi}/dy, d^2\hat{\phi}/dy^2, d^3\hat{\phi}/dy^3)^t$ soit $P = 4$.

Il est basé sur la formule d'Euler-Maclaurin

$$\Psi^k - \Psi^{k-1} = \frac{h_k}{2} \left(\frac{d\Psi^k}{dy} + \frac{d\Psi^{k-1}}{dy} \right) - \frac{h_k^2}{12} \left(\frac{d^2\Psi^k}{dy^2} - \frac{d^2\Psi^{k-1}}{dy^2} \right) + \mathcal{O}(h_k^5) \quad (\text{B.4})$$

où $\Psi^k = \Psi(y_k)$ et $h_k = y_k - y_{k-1}$ avec y_k les $N_p + 1$ points de discrétisation.

En introduisant (B.3) et sa dérivée par rapport à y dans (B.4), on obtient

$$E^k \Psi^k + G^k \Psi^{k-1} = F^k$$

c'est-à-dire une *matrice tridiagonale par blocs* de taille $P \times (N_p + 1)$ (où chaque bloc est de taille $P \times P$) soit $4 \times (N_p + 1)$ pour notre exemple.

B.2 La méthode de collocation spectrale basée sur les polynômes de Chebichev

Un ouvrage utile sur cette méthode est celui de Canuto *et al.* [CHQZ88]. Il ne s'agit pas d'une méthode spectrale à proprement parler puisqu'on ne manipule que des grandeurs de l'espace physique et pas de l'espace spectral.

On utilise un polynôme interpolant défini à partir de polynômes de Chebichev sur l'intervalle $[-1, 1]$ (d'autres possibilités existent avec des polynômes de Legendre par exemple).

Si on a N_p valeurs d'une fonction ψ données en des points particuliers dits "de collocation" (ici : $\xi_j = \cos(\frac{\pi j}{N_p})$, $j = 0, 1, \dots, N_p$ ce sont les points de Gauss-Lobatto), on peut interpoler cette fonction par le polynôme suivant

$$\psi(\xi) = \sum_{k=0}^{N_p} \lambda_k(\xi) \psi(\xi_k)$$

$$\text{avec } \lambda_k(\xi) = \left(\frac{1 - \xi_k^2}{\xi - \xi_k} \right) \frac{T'_{N_p}(\xi)}{N_p^2 c_k} (-1)^{k+1}$$

où $c_0 = c_{N_p} = 2$ et $c_k = 1$ pour $0 < k < N_p$ et T'_{N_p} est la dérivée du N_p^e polynôme de Chebichev. Si on utilise l'équation (B.1) Ψ est le vecteur $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{p})$ et si on utilise l'équation (B.2) Ψ est la fonction de courant $\hat{\phi}$.

La dérivée de ψ aux points de collocation d'indice j s'écrit alors

$$\frac{d\psi}{d\xi} \Big|_j = \sum_{k=0}^{N_p} E_{jk} \psi_k$$

où on note $\psi_k = \psi(\xi_k)$ et les éléments de la matrice E sont donnés par

$$E_{jk} = \frac{c_j (-1)^{k+j}}{c_k \xi_j - \xi_k}; \quad j \neq k$$

$$E_{jj} = -\frac{\xi_j}{2(1 - \xi_j^2)}$$

$$E_{00} = \frac{2N_p^2 + 1}{6} = -E_{N_p N_p}$$

En fait, le domaine physique, dans cette thèse, étant le plus souvent $y \in [0, 1]$ on doit d'abord se ramener à l'intervalle $\xi \in [-1, 1]$ par un changement de variable, pris comme $y = (\xi + 1)/2$.

Après changement de variable, la dérivée du vecteur Ψ des valeurs de ψ dans l'espace physique aux points de Gauss-Lobatto s'écrit

$$\frac{d\Psi}{dy} = 2E\Psi$$

(Notons, pour les problèmes où on impose une symétrie, qu'il est aussi possible de définir une matrice de dérivation sur $[0, 1]$ symétrique et une antisymétrique comme le font Ehrenstein et Koch [EK91], on n'a plus alors à effectuer de changement de variable. Cette possibilité n'a pas été utilisée dans cette thèse.)

L'implémentation des conditions aux limites peut se faire de plusieurs manières. Comme on a autant de relations en chaque point de collocation que d'équations continues, il faut supprimer certaines

de ces relations pour les remplacer par les conditions aux limites. Soit P l'ordre du système et N_e le nombre d'équations continues du système. Trois cas se présentent

- $P > 2N_e$, c'est toujours le cas dans cette thèse puisqu'on applique la méthode à des équations en fonction de courant. Pour l'équation d'Orr-Sommerfeld par exemple, on a $P = 4$ et $N_e = 1$. Pour imposer les 4 conditions aux limites nécessaires, il faut remplacer les relations écrites en 4 points. On choisit généralement les deux points frontière et le premier point du domaine fluide à chaque extrémité.
En fait un meilleur choix, testé durant la thèse, consiste alors à utiliser le changement de variable $y = \left(\xi / \cos\left(\frac{\pi}{N_p}\right) + 1 \right) / 2$ ce qui revient à introduire de chaque côté un point fictif qui ne sert qu'à écrire la condition limite, et conserve la régularité des points où les équations continues sont retranscrites.
- $P < 2N_e$, se produit par exemple dans le système de Navier-Stokes incompressible linéarisé en variables primitives (II.9) ou (II.10) où $P = 6$ et $N_e = 4$. Après avoir remplacé 6 relations parmi les 8 des points frontière par les 6 conditions aux limites nécessaires, il reste 2 relations à exprimer sur la frontière. De multiples choix des deux relations conservées sont possibles mais pas toujours équivalents.
- $P = 2N_e$, ne pose pas de problème.

Le système s'écrit au final

$$M\Psi = N$$

où M est cette fois une *matrice pleine*. S'il est écrit à partir de (B.1), il est de taille $3 \times (N_p + 1)$; par contre, s'il est écrit à partir de (B.2), il est seulement de taille $N_p + 1$

B.3 Avantages et inconvénients

Chacune des deux méthodes est plutôt adaptée à l'un des deux problèmes présentés dans l'annexe C avec une écriture du problème continu choisie en fonction.

B.3.1 Recherche de spectre

La recherche du spectre nécessite la décomposition en valeurs propres des matrices du problème discrétisé. Bien qu'il semble en exister, on ne dispose pas d'algorithmes de ce type susceptibles d'exploiter la forme tridiagonale par blocs des matrices issues du schéma de Malik. Les calculs supposent donc les matrices quelconques.

Sur notre exemple, la matrice issue du schéma de Malik est d'une taille typique¹ de $4 \times (N_p + 1)$ tandis que celle de la collocation est de taille $N_p + 1$ si on choisit la formulation en fonction de courant.

De plus, le procédé même de construction du schéma de Malik introduit des combinaisons quadratiques de telle sorte que si le problème continu dépend de la valeur propre de façon polynomiale d'ordre n , la matrice discrétisée par le schéma de Malik en dépend à l'ordre $2n$. D'où la nécessité de grossir encore la matrice à décomposer si on souhaite une résolution exacte.

Par ailleurs, la collocation spectrale est d'une très bonne précision avec une convergence de type exponentiel meilleure que l'ordre 4 du schéma de Malik. Il suffit donc *a priori* d'un plus faible nombre de points de collocation pour parvenir à un résultat équivalent.

On a donc tout intérêt à utiliser la collocation spectrale appliquée à l'équation sur la fonction de courant pour la recherche de spectre.

B.3.2 Méthode itérative

La méthode itérative, voir annexe C, requiert de multiples inversions de systèmes $M\Phi = N$ où M a soit une structure tridiagonale par blocs pour le schéma de Malik, soit une structure pleine avec la

1. La taille change selon qu'on cherche un spectre temporel ou spatial

collocation.

Dans ce cas, l'existence d'algorithmes particulièrement efficaces dans le traitement de la première structure² compense la différence de taille, vue ci-dessus, des matrices mises en jeu.

Par ailleurs, il suffit de stocker les blocs non-nuls avec le schéma compact ce qui conduit à un gain de place-mémoire en comparaison de la matrice pleine de collocation.

Le plus grave inconvénient de la collocation est qu'on a rencontré des difficultés de convergence en méthode itérative appliquée à l'équation (B.2) se manifestant lorsque le nombre de points de collocation augmente (mais à des valeurs où la convergence en nombre de points n'est pas nécessairement atteinte) et dont on pense qu'elles proviennent des différences de valeurs très élevées entre les termes de E^4 . Au contraire, le schéma de Malik présente une très bonne convergence quel que soit le nombre de points. Attention, pour les deux schémas, la variable sur laquelle s'effectue la convergence a parfois son importance.

En somme, le schéma de Malik est mieux adapté aux calculs en méthode itérative.

2. En fait, dans cette thèse, on considère seulement la matrice M comme une matrice bande ce qui est moins spécifique mais suffit à l'utilisation d'algorithmes rapides

Annexe C

Résolution numérique de problèmes linéaires aux valeurs propres

Après discrétisation les problèmes linéaires étudiés dans cette thèse s'écrivent comme

$$M\Psi = 0 \tag{C.1}$$

où M dépend d'un paramètre inconnu, par exemple α dans le cas de la stabilité primaire spatiale ou ω dans le cas de la stabilité primaire temporelle, tous les autres paramètres étant fixés.

Le problème aux valeurs propres consiste à trouver une valeur du paramètre inconnu (α ou $\omega\dots$) telle qu'il existe un vecteur Ψ non-identiquement nul vérifiant $M\Psi = 0$.

C.1 Méthode itérative

On déshomogénéise le problème en remplaçant une ligne de la matrice par une condition non-homogène *a priori* compatible. Pour se fixer les idées sur un cas particulier, disons qu'on remplace la condition physique sur la vitesse verticale

$$\hat{v}(\text{paroi}) = 0$$

par la condition sur la pression

$$\hat{p}(\text{paroi}) = 1$$

Comme le problème est linéaire, donc défini à une constante multiplicative près, il est équivalent de choisir $\hat{p}(\text{paroi}) = 1$ ou $\hat{p}(\text{paroi}) = a$ avec a un complexe quelconque non-nul, on ne perd donc aucune généralité. La seule restriction est que s'il existe un mode tel que $\hat{v}(\text{paroi}) = \hat{p}(\text{paroi}) = 0$, la déshomogénéisation n'est pas compatible.

Le problème (C.1) s'écrit maintenant

$$\tilde{M}\Psi = N \tag{C.2}$$

avec \tilde{M} égale à M à une ligne près et N un vecteur de 0 avec un élément égal à 1. Il s'agit maintenant d'un système inhomogène *a priori* inversible puisque l'ensemble des matrices inversibles est dense dans celui des matrices.

La résolution de (C.2), pour une valeur particulière du paramètre inconnu, α_0 , donne un vecteur Ψ et donc une valeur de la condition non-imposée, par exemple $\hat{v}(\text{paroi})$ *a priori* non-nulle.

On va alors corriger de façon itérative la valeur du paramètre inconnu α de façon à satisfaire la condition physique non-imposée, c'est-à-dire à annuler $\hat{v}(\text{paroi})$. Toutes les relations contenues dans (C.1) sont alors vérifiées, donc le problème (C.1) est résolu.

La méthode de convergence employée est la méthode de Newton-Raphson qui s'écrit, avec α le paramètre inconnu, α_{it} son estimation à l'itération numéro it , et α_r la partie réelle de la variable complexe α

$$\alpha_{N+1} = \alpha_N - \frac{f(\alpha_N)}{\frac{\partial f}{\partial \alpha_r}(\alpha_N)}$$

où $f(\alpha_{it})$ est la valeur de la condition non-imposée ($\hat{v}(\text{paroi})$) calculée par résolution de (C.2) en donnant à α la valeur α_N dans l'expression de \tilde{M} .

Cette formule utilise les relations de Cauchy et suppose donc l'analyticité de f . Ceci permet de n'effectuer que deux calculs de (C.2) pour passer d'une itération à la suivante. Cette hypothèse est généralement vérifiée mais ce n'est pas le cas par exemple pour l'instabilité secondaire en théorie spatiale, vue en IV.1.7. Il faut alors écrire

$$\alpha_{N+1} = \alpha_N + \frac{-p \frac{\partial q}{\partial \alpha_i} + q \frac{\partial p}{\partial \alpha_i} + ip \frac{\partial q}{\partial \alpha_r} - iq \frac{\partial p}{\partial \alpha_r}}{\frac{\partial q}{\partial \alpha_r} \frac{\partial p}{\partial \alpha_r} + \frac{\partial q}{\partial \alpha_i} \frac{\partial p}{\partial \alpha_i}}$$

avec $p = \text{Re}(f)$ et $q = \text{Im}(f)$ ce qui nécessite trois calculs de (C.2) pour l'estimation des différentes dérivées.

C.2 Recherche de spectre

Commençons par le cas le plus simple où la dépendance de M vis-à-vis du paramètre inconnu est affine. Cela se produit par exemple pour les problèmes temporels où le paramètre inconnu est ω .

On peut alors écrire (C.1) comme

$$(M_0\omega + N_0)\Psi = 0 \quad \text{ou encore} \quad (M_0(\omega - c) + (N_0 + M_0c))\Psi = 0$$

En prenant $c \neq 0$ quelconque (en dehors d'un ensemble discret de valeurs), on rend $(N_0 + M_0c)$ inversible. Donc (C.1) est équivalent à

$$\left[(N_0 + M_0c)^{-1}M_0 - \frac{1}{\omega - c}I \right] \Psi = 0$$

Si on calcule le spectre $\mathcal{S} = \{s_0, s_1, \dots, s_{\text{card}(\mathcal{S})}\}$ de la matrice $(N_0 + M_0c)^{-1}M_0$, on obtient alors toutes les solutions $\omega_{(k)}$ du système discrétisé par

$$\omega_{(k)} = \frac{1}{s_k} + c$$

Plus simplement, il existe des algorithmes numériques qui résolvent directement le problème aux valeurs propres généralisé $M_0\omega + N_0$ sans passer par une inversion.

Attention, le problème continu a une infinité de solutions, lorsqu'on dit qu'on a toutes les solutions on parle du problème discrétisé pour un nombre donné de points de discrétisation (car le nombre de valeurs propres dépend directement de la taille de la matrice).

Le cas des spectres spatiaux est un peu plus compliqué puisque la dépendance en α est polynomiale. La méthode employée est celle de la matrice compagnon proposée par Bridges et Morris [BM84]

Si on cherche le spectre spatial de l'équation d'Orr-Sommerfeld, on peut écrire

$$M = \alpha^4 C_4 + \alpha^3 C_3 + \alpha^2 C_2 + \alpha C_1 + C_0$$

ou encore avec un décalage nécessaire pour éviter des problèmes numériques dans une inversion ultérieure

$$M = (\alpha - g)^4 M_4 + (\alpha - g)^3 M_3 + (\alpha - g)^2 M_2 + (\alpha - g) M_1 + M_0$$

Le problème $M\Psi = 0$ peut alors se récrire en notant $\tilde{\alpha} = \alpha - g$

$$(\tilde{\alpha}^4 M_4 + \tilde{\alpha}^3 M_3 + \tilde{\alpha}^2 M_2 + \tilde{\alpha} M_1 + M_0)\Psi = 0$$

ou encore

$$\tilde{\alpha} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ -I_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \tilde{\alpha}\Psi \\ \tilde{\alpha}^2\Psi \\ \tilde{\alpha}^3\Psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi \\ \tilde{\alpha}\Psi \\ \tilde{\alpha}^2\Psi \\ \tilde{\alpha}^3\Psi \end{pmatrix} = 0$$

avec I_N la matrice identité de taille $N \times N$ où N est la dimension de la matrice initiale M .

Comme M_0 est inversible, la matrice de droite s'inverse et on peut écrire

$$\left[\tilde{\alpha} \begin{pmatrix} M_0^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ -I_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_N & 0 \end{pmatrix} + I_{4N} \right] \begin{pmatrix} \Psi \\ \tilde{\alpha}\Psi \\ \tilde{\alpha}^2\Psi \\ \tilde{\alpha}^3\Psi \end{pmatrix} = 0$$

soit

$$\left[\tilde{\alpha} \begin{pmatrix} M_0^{-1}M_1 & M_0^{-1}M_2 & M_0^{-1}M_3 & M_0^{-1}M_4 \\ -I_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_N & 0 \end{pmatrix} + I_{4N} \right] \begin{pmatrix} \Psi \\ \tilde{\alpha}\Psi \\ \tilde{\alpha}^2\Psi \\ \tilde{\alpha}^3\Psi \end{pmatrix} = 0$$

En supposant $\tilde{\alpha} \neq 0$, le problème est de la forme

$$(\hat{M} + \frac{1}{\tilde{\alpha}}I)X = 0$$

qui n'est autre qu'un problème de calcul de valeurs propres d'une matrice.

Notons v_k une valeur propre de la matrice \hat{M} , la valeur propre α du problème de stabilité s'en déduit par

$$\alpha = g - \frac{1}{v_k}$$

qui donne l'ensemble des valeurs propres du problème spatial.

On remarque qu'à nombre égal de points, le spectre spatial nécessite la décomposition en valeurs propres d'une matrice plus grosse, ce qui implique un temps de calcul plus élevé.

C.3 Choix de la méthode

L'intérêt de la méthode itérative est sa rapidité, en particulier pour effectuer des balayages en fonction des paramètres puisque par extrapolation on peut lancer la procédure de Newton à partir d'une estimation correcte de la valeur propre. Ses désavantages sont de ne suivre qu'un mode à la fois et de ne pas toujours réussir à converger. De plus, si on démarre un calcul sans aucune connaissance *a priori* des modes existants, la recherche d'un mode convergé est aléatoire et peut se révéler longue et fastidieuse.

L'intérêt de la recherche de spectre est de donner toutes les solutions (du problème discrétisé seulement car le problème continu en a une infinité) sans supposer une connaissance approximative préalable du résultat et de toujours donner un résultat puisqu'il n'y a pas de procédure itérative devant converger.

Son seul inconvénient est le temps de calcul des décompositions en valeurs propres de matrices qui peut rapidement devenir rhédibitoire pour les tailles de matrices utilisées.

Les deux méthodes sont en fait complémentaires. La plupart des calculs utilisent la méthode itérative pour deux applications

- balayages vis-à-vis de divers paramètres qui nécessitent beaucoup de rapidité;
- recherche de valeurs précises requérant des nombres de points élevés incompatibles avec une décomposition en valeurs propres.

Des calculs sporadiques mais nécessaires utilisent la recherche de spectre afin

- de sélectionner des modes intéressants pour initialiser la méthode itérative à un jeu de paramètres donnés;
- de vérifier que les modes sélectionnés demeurent les plus intéressants pour d'autres jeux de paramètres;
- de mettre en évidence des comportements particuliers tels que des coalescences modales.

Annexe D

Traitement de l'axe en coordonnées cylindriques

Dans le cas de l'écoulement de base axisymétrique, le problème de stabilité quasi-parallèle incompressible est constitué du système (II.9) d'ordre 6 associé aux 3 conditions aux limites (II.11).

Il peut s'écrire soit sous la forme utilisable par le schéma compact

$$\frac{d\vec{Z}}{dr} = A\vec{Z}$$

où \vec{Z} a 6 composantes, par exemple

$$\vec{Z} = \left(\hat{u}_x(r), \hat{u}_r(r), \hat{u}_\theta(r), \hat{p}(r), \frac{d\hat{u}_x}{dr}(r), \frac{d\hat{u}_\theta}{dr}(r) \right)^t$$

dans ce cas la matrice \mathcal{L} s'écrit

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} & \mathcal{L}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \mathcal{L}_{41} & \mathcal{L}_{42} & \mathcal{L}_{43} & 0 & \mathcal{L}_{45} & \mathcal{L}_{46} \\ \mathcal{L}_{51} & \mathcal{L}_{52} & 0 & \mathcal{L}_{54} & \mathcal{L}_{55} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{62} & \mathcal{L}_{63} & \mathcal{L}_{64} & 0 & \mathcal{L}_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

$$\mathcal{L}_{21} = -i\alpha, \quad \mathcal{L}_{22} = -\frac{1}{r}, \quad \mathcal{L}_{23} = -\frac{iq}{r}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{41} &= \bar{U}_r i\alpha, & \mathcal{L}_{42} &= -\frac{\gamma'}{\mathcal{R}_{inj}} - \frac{\partial \bar{U}_r}{\partial r} + \frac{\bar{U}_r}{r} \\ \mathcal{L}_{43} &= -\frac{iq}{\mathcal{R}_{inj} r^2} + \bar{U}_r \frac{iq}{r}, & \mathcal{L}_{45} &= -\frac{i\alpha}{\mathcal{R}_{inj}}, & \mathcal{L}_{46} &= -\frac{iq}{\mathcal{R}_{inj} r} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{51} &= \gamma' + \mathcal{R}_{inj} \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x}, & \mathcal{L}_{52} &= \mathcal{R}_{inj} \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial r}, \\ \mathcal{L}_{54} &= \mathcal{R}_{inj} i\alpha, & \mathcal{L}_{55} &= \mathcal{R}_{inj} \bar{U}_r - \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{62} = -\frac{2iq}{r^2} \mathcal{L}_{63} = \gamma' + \frac{1}{r^2} + \frac{\mathcal{R}_{inj}}{r} \bar{U}_r, \quad \mathcal{L}_{64} = \frac{\mathcal{R}_{inj} iq}{r}, \quad \mathcal{L}_{66} = \mathcal{R}_{inj} \bar{U}_r - \frac{1}{r}$$

avec $\gamma' = \alpha^2 + \frac{q^2}{r^2} + \mathcal{R}_{inj}i(\alpha\bar{U}_x - \omega)$.

soit être utilisé tel quel par la méthode de collocation spectrale avec comme inconnue le vecteur $(\hat{u}_x, \hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{p})^t$.

L'utilisation du schéma compact requiert l'estimation de la matrice \mathcal{L} en chaque point de la grille de discrétisation. La matrice \mathcal{L} n'étant pas définie en $r = 0$, la grille ne peut s'étendre jusqu'à l'axe d'où la nécessité d'un traitement particulier.

La collocation spectrale permet un traitement beaucoup plus simple puisque les équations sur l'axe peuvent être remplacées par les conditions aux limites (si on en connaît suffisamment).

D.1 Avec le schéma compact d'ordre 4

Les équations de cette section ainsi que la méthode sont reprises du manuscrit de DEA de Pineau [Pin97].

D.1.1 Principe

Le problème de stabilité¹ est constitué du système (II.9) d'ordre 6 associé aux 3 conditions aux limites (II.11). Trois conditions semblent manquer mais, en fait, la singularité des équations sur l'axe $r = 0$ induite par le choix des coordonnées cylindriques entraîne 3 relations de "compatibilité". En exprimant le fait que la singularité n'est pas physique mais due au choix des coordonnées si bien que les quantités physiques ont des valeurs finies et admettent un développement limité vers l'axe, 3 conditions additionnelles peuvent être trouvées. L'ensemble du problème devient alors bien posé.

En dessous d'un rayon critique r_c , l'écoulement de base et les fonctions inconnues qui ont des valeurs finies dans tout le canal sont écrites sous forme de développement de Taylor. Ces développements sont introduits dans le système (II.9). Comme montré au paragraphe suivant, tous les coefficients peuvent être obtenus en fonction de trois constantes arbitraires, correspondant aux trois conditions aux limites physiques à la paroi qui ne sont pas prises en compte dans le développement près de l'axe.

Dans le domaine $r \leq r_c$, les 6 composantes du vecteur d'inconnues \vec{Z} sont calculées en fonction de 3 constantes a_c , b_c , c_c . De plus, comme indiqué au paragraphe suivant, la dépendance vis-à-vis de ces coefficients est linéaire, on peut donc écrire

$$\vec{Z}(r) = a_c \vec{F}(r) + b_c \vec{G}(r) + c_c \vec{H}(r)$$

Cette forme représente six équations scalaires. L'élimination des trois constantes arbitraires a_c , b_c , c_c parmi ces 6 équations implique trois relations de compatibilité, linéairement indépendantes, entre les coefficients de $\vec{Z}(r)$. Ces trois conditions sont écrites en $r = r_c$.

Les développements de Taylor ont été utilisés jusqu'à l'ordre 20 au voisinage $r = 0$ mais les deux premiers termes non-nuls (leur ordre dépend du nombre d'onde azimutal q , dépendance donnée dans le cas plus général des équations compressibles en annexe F) de chaque fonction inconnue suffisent à obtenir le même résultat que les ordres les plus élevés tant que r_c reste petit (de l'ordre de 10^{-3} si la paroi est en 1) et si la grille contient suffisamment de points.

Pour $r \in [r_c, 1]$, le système (II.9) d'ordre 6 est résolu avec les 3 conditions de compatibilité en r_c et les 3 conditions physiques en $r = 1$.

1. Le cas compressible, d'ordre 8 est traité d'une manière complètement analogue en annexe F.

D.1.2 Equations

Le détail du traitement de l'axe est le suivant. Les fonctions inconnues sont développées en série de Taylor.

$$\begin{cases} \hat{u}_x = \sum_{n=0}^{\infty} u_n r^n \\ \hat{u}_r = \sum_{n=0}^{\infty} v_n r^n \\ \hat{u}_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} w_n r^n \\ \hat{p} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n r^n \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

De la même manière, l'écoulement de base, connu, est développé en

$$\begin{cases} \bar{U}_x = f(x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \\ \bar{U}_r = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^n \\ \bar{U}_\theta = 0 \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

(Ces expressions peuvent être utilisées pour l'écoulement de Poiseuille qui sert à valider la procédure et pour l'écoulement de Taylor.)

Les développements sont introduits dans (II.9). Pour chaque ordre, les 4 équations tirées de (II.9) s'écrivent

– Système S_0 :

$$\begin{cases} -q^2 u_0 = 0 \\ v_0 + i q w_0 = 0 \\ -(1 + q^2) v_0 - 2 i q w_0 = 0 \\ 2 i q v_0 - (1 + q^2) w_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

– Système S_1 :

$$\begin{cases} (1 - q^2) u_1 = 0 \\ 2 v_1 + i q w_1 = -i \alpha u_0 \\ -q^2 v_1 - 2 i q w_1 = 0 \\ 2 i q v_1 - q^2 w_1 - \mathcal{R}_{inj} i q p_0 = \mathcal{R}_{inj} w_0 B_0 \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

– Système S_{n+2} , pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{cases} (\alpha^2 - i \mathcal{R}_{inj} \omega) u_n + i \mathcal{R}_{inj} \alpha p_n + \mathcal{R}_{inj} \sum_{j=0}^n \left((f'(x) + i \alpha f(x)) A_j u_{n-j} \right. \\ \quad \left. + (n+1-j) B_j u_{n+1-j} + f(x) (j+1) v_{n-j} A_{j+1} \right) = ((n+2)^2 - q^2) u_{n+2} \\ (n+3) v_{n+2} + i q w_{n+2} = -i \alpha u_{n+1} \\ ((n+2)^2 - (1+q^2)) v_{n+2} - 2 i q w_{n+2} - \mathcal{R}_{inj} (n+1) p_{n+1} = \mathcal{R}_{inj} \left(\left(\frac{\alpha^2}{\mathcal{R}_{inj}} - i \omega \right) v_n \right. \\ \quad \left. + \sum_{j=0}^n (i \alpha f(x) A_j v_{n-j} + (n+1) B_j v_{n+1-j}) + (n+1) v_0 B_{n+1} \right) \\ 2 i q v_{n+2} + ((n+2)^2 - (1+q^2)) w_{n+2} - \mathcal{R}_{inj} i q p_{n+1} = \mathcal{R}_{inj} \left(\left(\frac{\alpha^2}{\mathcal{R}_{inj}} - i \omega \right) w_n \right. \\ \quad \left. + \sum_{j=0}^n (i \alpha f(x) A_j w_{n-j} + (n+2-j) B_j w_{n+1-j}) + w_0 B_{n+1} \right) \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

Plusieurs remarques sont à faire sur ces systèmes.

- Chaque système S_i contient les coefficients u_i , v_i , w_i et p_{i-1} et d'autres d'ordre plus faible. Donc chaque S_i donne accès à u_i , v_i , w_i et p_{i-1} .
- Le système obtenu de (D.7) avec les coefficients inconnus (u_i, v_i, w_i and p_{i-1}) a un déterminant de valeur

$$\Delta = (i^2 - q^2) (i^2 - (q+1)^2) (i^2 - (q-1)^2)$$

qui implique que quel que soit le nombre d'onde azimutal q le système devient singulier pour trois ordres. Ceci montre que le problème entier constitué par les seuls développements est singulier. Aux 3 ordres singuliers, les systèmes S_i sont de rang 3 (= 4 - 1) si bien que 3 coefficients du développement en tout et pour tout restent nécessairement arbitraires. Comme les 3 conditions physiques à la paroi n'ont pas été prises en compte dans le développement, il est normal que 3 coefficients prennent des valeurs arbitraires.

Avec q comme paramètre, les calculs donnent

- $q = 0$
 - * (D.5) $\Rightarrow u_0$ arbitraire, $v_0 = w_0 = 0$.
 - * (D.6) $\Rightarrow u_1 = 0$, p_0 et w_1 arbitraires et $v_1 = -i\alpha u_0/2$.
 - * $\forall n \geq 0$: $u_{n+2}, v_{n+2}, w_{n+2}$ et p_{n+1} solutions de (D.7).
- $q = 1$
 - * (D.5) $\Rightarrow u_0 = 0$, v_0 et w_0 reliés par $v_0 + iq w_0 = 0$: v_0 ou w_0 arbitraire.
 - * (D.6) $\Rightarrow u_1$ arbitraire, $v_1 = w_1 = 0$, p_0 satisfait $p_0 = iw_0 B_0$.
 - * (D.7) pour $n = 0 \Rightarrow u_2$ donné par la première équation, p_1 arbitraire, v_2 et w_2 reliés par :

$$\begin{cases} 5v_2 + iw_2 = -i\alpha u_1 \\ 2v_2 - 2iw_2 = \mathcal{R}_{inj} [(\frac{\alpha^2}{\mathcal{R}_{inj}} - i\omega)v_0 + v_0 B_1] \end{cases} \quad (D.8)$$

- * $\forall n \geq 1$: $u_{n+2}, v_{n+2}, w_{n+2}$ et p_{n+1} solutions de (D.7).

- $q \geq 2$
 - * $\forall n, n+2 \leq q-2$, $u_{n+2} = v_{n+2} = w_{n+2} = 0$ et $p_{n+1} = 0$.
 - * $u_{q-1} = 0$ et $p_{q-2} = 0$; v_{q-1} et w_{q-1} reliés $v_{q-1} + iq w_{q-1} = 0$: v_{q-1} or w_{q-1} arbitraire.
 - * u_q arbitraire, $v_q = w_q = 0$, p_{q-1} satisfait $p_{q-1} = iw_0 B_{q-1}$
 - * u_{q+1} donné par la première équation de (D.7), p_q arbitraire, v_{q+1} et w_{q+1} reliés par :

$$\begin{cases} (q+4)v_{q+1} + iq w_{q+1} = -i\alpha u_q \\ 2qv_{q+1} - 2iq w_{q+1} = \mathcal{R}_{inj} \left((\frac{\alpha^2}{\mathcal{R}_{inj}} - i\omega)v_{q-1} \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^{q-1} (i\alpha f(x)A_j v_{q-1-j} + qB_j v_{q-j}) + qv_0 B_q \right) \end{cases} \quad (D.9)$$

- * $\forall n, n+2 \geq q+2$: $u_{n+2}, v_{n+2}, w_{n+2}$ et p_{n+1} solutions de (D.7).

Finalement, comme prévu, 3 coefficients restent arbitraires dans tous les cas. De plus, tous les coefficients dépendent linéairement du vecteur constitué de ces trois constantes arbitraires.

Ceci permet de déterminer les premiers termes non-nuls des développements limités de chacune des variables. Ceux-ci sont donnés pour le cas plus général de l'écoulement compressible en annexe F.

D.2 Avec la collocation spectrale

L'établissement de ces conditions sur l'axe peut aussi se faire de la manière suivante. Les fluctuations de vitesse et de pression s'écrivent :

$$(\hat{u}_x, \hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{p})(x, r, \theta, t) = (u, v, w, p)(r).e^{i(\alpha x + q\theta - \omega t)}$$

On peut écrire les conditions

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} = \vec{0} \text{ et } \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \theta} = 0$$

$$\text{où } \vec{u}_x = \hat{u}_x \cdot \vec{e}_x + \hat{u}_r \cdot \vec{e}_r + \hat{u}_\theta \cdot \vec{e}_\theta$$

En effet, à la limite r tend vers 0, le point origine n'est pas défini par une valeur unique de θ (singularité du système de coordonnées axisymétriques). Si les limites de la condition n'étaient pas nulles, les grandeurs physiques ne seraient pas définies de manière univoque au point origine, ce qui n'est pas acceptable.

Or, on a

$$\frac{d\vec{e}_x}{d\theta} = \vec{0}, \quad \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r$$

d'où

$$\lim_{r \rightarrow 0} iq\hat{u}_x \vec{e}_x + (iq\hat{u}_r - \hat{u}_\theta) \vec{e}_r + (iq\hat{u}_\theta + \hat{u}_r) \vec{e}_\theta = \vec{0}$$

$$\text{et } \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \theta} \propto \lim_{r \rightarrow 0} iq\hat{p} = 0$$

soit

- si $q = 0$: $\hat{u}_r(0) = \hat{u}_\theta(0) = 0$ et $\hat{u}_x(0), \hat{p}(0)$ finis
- si $q = 1$: $\hat{u}_x(0) = \hat{p}(0) = 0, \hat{u}_r(0) + \hat{u}_\theta(0) = 0$
- si $q > 1$: $\hat{u}_x(0) = \hat{u}_r(0) = \hat{u}_\theta(0) = \hat{p}(0) = 0$

De plus dans le cas $q = 0$, les équations de Navier-Stokes entraînent, en tenant compte des conditions précédentes :

$$\frac{d\hat{u}_x}{dr}(0) = \frac{d\hat{p}}{dr}(0) = 0 \quad (q = 0)$$

Au final, on dispose de 4 conditions sur l'axe (à part pour $q = 1$) qui peuvent se substituer aux 4 équations de (II.9) au point de collocation correspondant à $r = 0$. Comme tous les autres points de collocation correspondent à $r \neq 0$, la singularité sur l'axe ne s'y fait pas sentir. La méthode de collocation spectrale permet donc dans ce cas un traitement simplifié de la singularité des coordonnées cylindriques.

Annexe E

Solution linéaire en série asymptotique divergente

L'équation linéaire aux dérivées partielles régissant les petites perturbations superposées à l'écoulement de Taylor en formulation fonction de courant et en incompressible s'écrit

$$-\frac{1}{\mathcal{R}_{inj}}\left(\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}\right) - i\omega\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) + \left[\frac{\pi}{2}x\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x} - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right]\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\phi\right) = 0$$

On introduit en II.6.4 une solution formellement convenable mais malheureusement divergente

$$\phi(x, y) = x^\lambda \left(g_0(y) + 2!\frac{g_1(y)}{x^2} + \dots + (2n)!\frac{g_n(y)}{x^{2n}} + \dots \right)$$

E.1 Système de définition de la série

Les relations complètes définissant les termes de la série sont les suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\mathcal{R}_{inj}}g_0^{(4)} - i\omega g_0'' + \left[\frac{\pi}{2}\lambda\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)\frac{d}{dy}\right]\left(g_0'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2g_0\right) = 0 \\ -\frac{1}{\mathcal{R}_{inj}}g_1^{(4)} - i\omega g_1'' + \left[\frac{\pi}{2}(\lambda-2)\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)\frac{d}{dy}\right]\left(g_1'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2g_1\right) = \\ \quad -\frac{1}{2}\lambda(\lambda-1)\left\{-\frac{2}{\mathcal{R}_{inj}}g_0'' - i\omega g_0 + \left[\frac{\pi}{2}(\lambda-2)\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)\frac{d}{dy}\right]g_0\right\} \\ -\frac{1}{\mathcal{R}_{inj}}g_2^{(4)} - i\omega g_2'' + \left[\frac{\pi}{2}(\lambda-4)\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)\frac{d}{dy}\right]\left(g_2'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2g_2\right) = \\ \quad -\frac{(\lambda-3)(\lambda-2)}{3*4}\left\{-\frac{2}{\mathcal{R}_{inj}}g_1'' - i\omega g_1 + \left[\frac{\pi}{2}(\lambda-4)\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)\frac{d}{dy}\right]g_1\right\} \\ \quad + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}{2*3*4}\frac{g_0}{\mathcal{R}_{inj}} \\ \vdots \end{array} \right. \quad (\text{E.1})$$

d'où un terme général de définition de la série :

$$-\frac{1}{\mathcal{R}_{inj}}g_n^{(4)} - i\omega g_n'' + \left[\frac{\pi}{2}(\lambda - 2n) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{d}{dy} \right] \left(g_n'' + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 g_n \right) =$$

$$-\frac{(\lambda - 2n + 2)(\lambda - 2n + 1)}{(2n - 1)2n} \left\{ -\frac{2}{\mathcal{R}_{inj}}g_{n-1}'' - i\omega g_{n-1} + \left[\frac{\pi}{2}(\lambda - 2n) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \frac{d}{dy} \right] g_{n-1} \right\}$$

$$+ \frac{(\lambda - 2n + 4)(\lambda - 2n + 3)(\lambda - 2n + 2)(\lambda - 2n + 1)}{(2n - 3)(2n - 2)(2n - 1)2n} \frac{g_{n-2}}{\mathcal{R}_{inj}}$$

Quand n tend vers l'infini, la dépendance en n des deux membres de chaque équation est la même. Ceci explique pourquoi on fait apparaître les termes $(2n)!$.

E.2 Réordonnement de la série

Le théorème suivant suggère un espoir de rendre convergente la série divergente :

Soit $\rho < 3/\pi$ et soit $\alpha < \pi/2$ un angle positif tel que

$$2 \cos\left(\frac{\sin \alpha}{\rho}\right) = \exp\left(-\frac{\cos \alpha}{\rho}\right)$$

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans la région $D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < \gamma, |\arg z| < (\pi/2) + \alpha + 2\delta, \delta > 0, \gamma < \infty\}$.

Si $f(z)$ a dans D le développement asymptotique suivant

$$f(z) \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

quand $z \rightarrow \infty$, tel que

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} + R_n$$

où $|a_n| < A\rho^n n!$ et $|R_n z^{n+1}| < B\sigma^n n!$ où A, B et σ sont indépendants de n , alors, si $Re(z) > \gamma + 1$, $Re(z) > 2$, $f(z)$ peut être développé en une série convergente

$$f(z) \sim b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z(z+1)} + \frac{b_3}{z(z+1)(z+2)} + \dots$$

Or, la série du problème de stabilité linéaire $\left(g_0(y) + 2! \frac{g_1(y)}{x^2} + \dots + (2n)! \frac{g_n(y)}{x^{2n}} + \dots \right)$ est du type $\left(a_0(y) + \frac{a_1(y)}{x} + \frac{a_2(y)}{x^2} + \dots + \frac{a_n(y)}{x^n} + \dots \right)$ avec $\forall y |a_n(y)| < An!\rho^n$ et même $a_{2i}(y) \equiv 0$, où l'assertion $|a_n(y)| < An!\rho^n$ n'est motivée que par la forme E.1 et où la question de l'évaluation de ρ reste ouverte. On va supposer que $\rho < 1$. Les développements effectués pour tenter de démontrer cette hypothèse n'ont pas abouti, quant aux tests numériques, ils semblent indiquer qu'on peut effectivement trouver ρ plus petit que 1 mais cependant proche de 1.

On montre ci-dessous le principe de réordonnement du développement asymptotique en utilisant la série proposée dans le théorème

$$\phi(x, y) = x^\lambda \left(b_0(y) + \frac{b_1(y)}{x} + \frac{b_2(y)}{x(x+1)} + \dots + \frac{b_n(y)}{x(x+1)\dots(x+n)} + \dots \right)$$

Soit $h(t) = a_0 + \frac{a_1 t}{1!} + \frac{a_2 t^2}{2!} + \dots + \frac{a_n t^n}{n!} + \dots$. Calculons $\int_0^{+\infty} x h(t) e^{-xt} dt$ par deux intégrations par parties.

D'abord

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} xh(t)e^{-xt} dt &= [-h(t)e^{-xt}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} h'(t)e^{-xt} dt \\
 &= a_0 + [-\frac{h'(t)}{x}e^{-xt}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{h''(t)}{x}e^{-xt} dt \\
 &\quad \vdots \\
 &= a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots
 \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} xh(t)e^{-xt} dt &= [-h(t)e^{-xt}]_0^{+\infty} + \left[-\frac{h'(t)}{x}e^{-xt}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} h''(t)e^t e^{-(x+1)t} dt \\
 &= [] + [] + \frac{1}{x} \left[-h''(t)e^t \frac{e^{-(x+1)t}}{x+1}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{x(x+1)} \int_0^{+\infty} (h'''e^t + h''e^t)e^{-(x+1)t} dt \\
 &= [] + [] + [] + \frac{1}{x(x+1)} \int_0^{+\infty} (h''' + h'')e^{2t} e^{-(x+2)t} dt \\
 &= [] + [] + \frac{1}{x(x+1)} \left[-(h''' + h'')e^{2t} \frac{e^{-(x+2)t}}{x+2}\right]_0^{+\infty} \\
 &\quad + \frac{1}{x(x+1)(x+2)} \int_0^{+\infty} (h^{(4)} + 3h''' + 2h'')e^{3t} e^{-(x+3)t} dt \\
 &\quad \vdots \\
 &= [] + \dots + \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \left[-\left(\sum_{i=2}^{n+1} c_n^i h^{(i)}\right)e^{nt} \frac{e^{-(x+n)t}}{x+n}\right]_0^{+\infty} \\
 &\quad + \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=2}^{n+2} c_{n+1}^i h^{(i)}\right)e^{(n+1)t} e^{-(x+n+1)t} dt
 \end{aligned}$$

d'où on déduit $b_{n+1} = \sum_{i=2}^{n+1} c_n^i a_i$ qui permet l'implémentation numérique de la méthode. Les coefficients c_n^i sont définis par récurrence à partir de $n > 2$ par la relation

$$c_n^i = c_{n-1}^{i-1} + (n-2)c_{n-1}^i$$

$$\text{avec } c_n^i = 0 \text{ pour } n \leq 2 \text{ hormis } c_0^0 = c_1^1 = c_2^2 = 1$$

Notons V_{max}^n la valeur maximale possible de $|b_n|$.

Avec $|a_i| < A\rho^i i!$ où $\rho < 1$, et comme les c_n^i sont positifs ou nuls, on trouve

$$V_{max}^n = A \sum_{i=2}^{n+1} c_n^i \rho^i i!$$

Par construction, on a

$$b_{n+1} = \sum_{i=2}^{n+1} (n-1)c_n^i a_i + \sum_{i=3}^{n+2} c_n^{i-1} a_i$$

d'où

$$|b_{n+1}| \leq \sum_{i=2}^{n+1} n c_n^i |a_i| + \sum_{i=3}^{n+2} c_n^{i-1} |a_i|$$

$$\begin{aligned}
 &< A \sum_{i=2}^{n+1} n c_n^i \rho^i i! + A \sum_{i=3}^{n+2} c_n^{i-1} \rho^i i! \\
 &< A \sum_{i=2}^{n+1} n c_n^i \rho^i i! + A \sum_{i=2}^{n+1} \rho(i+1) c_n^i \rho^i i!
 \end{aligned}$$

Or, comme les a_i d'indice impair sont nuls, seuls les termes d'indice pair de la première somme sont non-nuls et seuls les termes d'indice impair de la deuxième somme sont non-nuls. Par ailleurs, chaque terme i de la première somme est inférieur à $(n+1)c_n^i \rho^i i!$ et chaque terme de la deuxième somme est inférieur à $\rho(n+2)c_n^i \rho^i i!$ avec $\rho < 1$ donc à $(n+1)c_n^i \rho^i i!$ (au moins à partir d'un certain n).

Finalement,

$$|b_{n+1}| < (n+1)A \sum_{i=2}^{n+1} c_n^i \rho^i i! = (n+1)V_{max}^n$$

d'où $V_{max}^{n+1} < (n+1)V_{max}^n$ donc

$$V_{max}^n < n!$$

On en déduit

$$\sum \frac{|b_n|}{x(x+1)\dots(x+n)} < \sum \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

Or, en choisissant $x = i$ entier,

$$\sum \frac{n!}{i(i+1)\dots(i+n)} = \sum \frac{i!n!}{n!(n+1)\dots(n+i)} = i! \sum \frac{1}{(n+1)\dots(n+i)} < i! \sum \frac{1}{n^i}$$

qui converge quand $n \rightarrow \infty$ pour $i \geq 2$.

Donc $\sum \frac{|b_n|}{x(x+1)\dots(x+n)}$ est une série convergente au moins pour $x \geq 2$.

Cependant, l'utilisation pratique du réordonnement soulève des difficultés mal cernées qui conduisent à une divergence de la série pour des troncatures plus élevées que la série directe mais avec une moins bonne convergence initiale. La présence de grandeurs intermédiaires faisant intervenir des produits de factorielles pouvant dépasser les valeurs limites stockables en machine est soupçonnée d'être à l'origine de ces problèmes.

Annexe F

Analyse de stabilité compressible

Dans cette annexe, on écrit le jeu d'équations de stabilité linéaire pour un fluide monophasique compressible en écoulement axisymétrique. On indique aussi toutes les étapes nécessaires à sa résolution numérique par un schéma compact d'ordre 4 de Malik [MCH82] ainsi que le traitement de la singularité sur l'axe.

F.1 Hypothèses et équations de départ

On utilise les équations compressibles avec les hypothèses suivantes :

1. les champs moyens sont indépendants du temps
2. les grandeurs thermodynamiques λ , μ , λ_c et C_v ne dépendent que de la température
3. l'écoulement est monophasique non-réactif, absence de gravité
4. on prend la loi des gaz parfaits et la loi de Fourier

On part des équations de Navier-Stokes sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) &= 0 \\ \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} &= -\vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \vec{I} + \mu ([\vec{\nabla} \vec{V}] + [\vec{\nabla} \vec{V}]^t) \right) \\ \rho \frac{\partial (C_v T)}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} (C_v T) \cdot \vec{V} &= -P \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \\ &\quad + \left(\lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \vec{I} + \mu ([\vec{\nabla} \vec{V}] + [\vec{\nabla} \vec{V}]^t) \right) \cdot \vec{\nabla} \vec{V} - \vec{\nabla} \cdot (-\lambda_c \vec{\nabla} T) \\ P &= \rho r T\end{aligned}$$

Soit sous forme développée :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{\nabla} \rho) \cdot \vec{V} + \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) &= 0 \\ \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} &= \\ &\quad -\vec{\nabla} P + \left((\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \vec{\nabla} \lambda + (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{V} + \vec{\nabla} \mu \cdot ([\vec{\nabla} \vec{V}] + [\vec{\nabla} \vec{V}]^t) \right) \\ \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho T \frac{\partial C_v}{\partial t} + \rho C_v \vec{\nabla} T \cdot \vec{V} + \rho T \vec{\nabla} C_v \cdot \vec{V} &= \\ &\quad -P \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + (\lambda (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})^2 + \mu ([\vec{\nabla} \vec{V}] + [\vec{\nabla} \vec{V}]^t)) \cdot \vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \lambda_c \cdot \vec{\nabla} T + \lambda_c \Delta T\end{aligned}$$

F.2 Méthode des petites perturbations

On applique la technique classique des petites perturbations : chaque grandeur est décomposée en une grandeur moyenne et une grandeur fluctuante supposée petite devant la grandeur moyenne. De façon plus formelle, les grandeurs moyennes sont supposées d'ordre 0 et les grandeurs fluctuantes d'ordre 1.

A partir d'ici, on note $\vec{V}, \bar{P}, \bar{\rho}, \bar{T}$ les vitesse, pression, masse volumique et température moyenne et \vec{v}, p, ρ, θ les fluctuations de ces mêmes grandeurs.

Soit \mathcal{D} un opérateur de dérivation (spatiale ou temporelle), alors d'après l'hypothèse 2, en notant θ la fluctuation de température et χ l'un des coefficients thermodynamiques λ, μ, λ_c ou C_v , on obtient au premier ordre d'approximation (ce qui est consistant avec la linéarisation qui va être effectuée par la suite) :

$$\chi = \chi|_{\bar{T}+\theta} \approx \chi + \frac{d\chi}{dT}\theta$$

$$\mathcal{D}\chi = \frac{d\chi}{dT}\mathcal{D}T = \frac{d\chi}{dT}|_{\bar{T}+\theta} \mathcal{D}(\bar{T} + \theta) \approx \frac{d\chi}{dT}\mathcal{D}\bar{T} + \frac{d\chi}{dT}\mathcal{D}\theta + \frac{d^2\chi}{dT^2}(\mathcal{D}\bar{T})\theta$$

On introduit la décomposition en petites perturbations dans les équations. Les termes d'ordre 0 se simplifient du fait que l'écoulement moyen est solution de ces équations et on effectue une linéarisation vis-à-vis de la perturbation, c'est-à-dire qu'on néglige les termes d'ordre 2, à savoir les termes quadratiques en la perturbation. Le système obtenu est alors linéaire vis-à-vis de cette dernière.

Il se compose des 4 relations suivantes :

$$\star \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\rho}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + (\vec{\nabla} \bar{\rho}) \cdot \vec{v} + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + (\vec{\nabla} \rho) \cdot \vec{V} = 0$$

$$\star \quad \bar{\rho} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \bar{\rho}(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \bar{\rho}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} + \rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = -\vec{\nabla} p + \frac{d\lambda}{dT}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\vec{\nabla} \bar{T} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})\left(\frac{d^2\lambda}{dT^2}\theta\vec{\nabla} \bar{T} + \frac{d\lambda}{dT}\vec{\nabla}\theta\right) + (\lambda + \mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \left(\frac{d\lambda}{dT} + \frac{d\mu}{dT}\right)\theta\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \mu\vec{\nabla}^2\vec{v} + \frac{d\mu}{dT}\theta\vec{\nabla}^2\vec{V} + \frac{d\mu}{dT}\vec{\nabla} \bar{T} \cdot (\vec{\nabla} \vec{v} + \vec{\nabla} \vec{v}^t) + \left(\frac{d^2\mu}{dT^2}\theta\vec{\nabla} \bar{T} + \frac{d\mu}{dT}\vec{\nabla}\theta\right) \cdot (\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V}^t)$$

$$\star \quad (C_v + \frac{dC_v}{dT}\bar{T})\left(\bar{\rho}\frac{\partial \theta}{\partial t} + \bar{\rho}\vec{\nabla} \bar{T} \cdot \vec{v} + \bar{\rho}\vec{\nabla}\theta \cdot \vec{V} + \rho\vec{\nabla} \bar{T} \cdot \vec{V}\right) + \bar{\rho}\left(2\frac{dC_v}{dT} + T\frac{d^2C_v}{dT^2}\right)(\vec{\nabla} \bar{T} \cdot \vec{V})\theta = (-\bar{P} + 2\lambda\vec{\nabla} \cdot \vec{V})(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - p\vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \frac{d\lambda}{dT}\theta(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})^2 + 2\mu(\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V}^t) \cdot \vec{\nabla} \vec{v} + \frac{d\mu}{dT}\theta(\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V}^t) \cdot \vec{\nabla} \vec{V} + 2\frac{d\lambda_c}{dT}(\vec{\nabla} \bar{T} \cdot \vec{\nabla}\theta) + \lambda_c\Delta\theta + \frac{d^2\lambda_c}{dT^2}\theta(\vec{\nabla} \bar{T} \cdot \vec{\nabla} \bar{T}) + \frac{d\lambda_c}{dT}\theta\Delta\bar{T}$$

$$\star \quad \frac{p}{\bar{P}} = \frac{\theta}{\bar{T}} + \frac{\rho}{\bar{\rho}}$$

On se place alors en coordonnées cylindriques (r, ϕ, x) et on suppose un écoulement moyen à symétrie axiale :

$$\vec{V} = (V_r, 0, V_x)$$

En supposant toutes les grandeurs moyennes indépendantes de la coordonnée azimutale, on a : $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$

On choisit de façon habituelle en stabilité de chercher des perturbations sous forme de modes normaux. Chaque grandeur fluctuante est supposée de la forme

$$g(r) \exp(i[\alpha x + q\phi - \omega t])$$

En introduisant cette forme, le système devient :

$$\star \quad -i\omega\rho + \bar{\rho}\left(\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \frac{iq}{r}u_\theta + i\alpha u_x\right) + \left(\frac{d\bar{\rho}}{dr}u_r + \frac{d\bar{\rho}}{dx}u_x\right) + \text{div}\vec{V}\rho + \left(\frac{d\rho}{dr}V_r + i\alpha V_x\rho\right) = 0$$

$$\star \quad \bar{\rho}\left[-i\omega u_r + (V_r\frac{du_r}{dr} + i\alpha V_x u_r) + \frac{dV_r}{dr}u_r + \frac{dV_r}{dx}u_x\right] + (V_r\frac{dV_r}{dr} + V_x\frac{dV_r}{dx})\rho + \frac{dp}{dr} - \frac{d\lambda}{dT}\frac{dT}{dr}\left(\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \frac{iq}{r}u_\theta + i\alpha u_x\right) - \text{div}\vec{V}\left(\frac{d^2\lambda}{dT^2}\frac{dT}{dr}\theta + \frac{d\lambda}{dT}\frac{d\theta}{dr}\right) - (\lambda + \mu)\left(\frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{iq}{r}\frac{du_\theta}{dr} - \frac{iq}{r^2}u_\theta + \right)$$

$$i\alpha \frac{du_x}{dr} - \left(\frac{d\lambda}{dT} + \frac{d\mu}{dT} \right) \frac{d\text{div}\vec{V}}{dr} \theta - \mu \left(\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} - \frac{q^2}{r^2} u_r - \frac{2iq}{r^2} u_\theta - \alpha^2 u_r \right) - \frac{d\mu}{dT} (\Delta_r V) \theta - \frac{d\mu}{dT} \left(2 \frac{dT}{dr} \frac{du_r}{dr} + \frac{dT}{dx} \left[\frac{du_x}{dr} + i\alpha u_r \right] \right) - \frac{d^2 \mu}{dT^2} \left(2 \frac{dT}{dr} d_{rr} + 2 \frac{dT}{dx} d_{rx} \right) \theta - \frac{d\mu}{dT} \left(2 d_{rr} \frac{d\theta}{dr} + 2 d_{rx} i\alpha \theta \right) = 0$$

$$\star \quad \bar{\rho} \left[-i\omega u_\theta + \left(V_r \frac{du_\theta}{dr} + i\alpha V_x u_\theta \right) + \frac{V_r}{r} u_\theta \right] + \frac{iq}{r} p - \text{div}\vec{V} \frac{d\lambda}{dT} \frac{iq}{r} \theta - (\lambda + \mu) \frac{iq}{r} \left(\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \frac{iq}{r} u_\theta + i\alpha u_x \right) - \mu \left(\frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r^2} - \frac{q^2}{r^2} u_\theta + \frac{2iq}{r^2} u_r - \alpha^2 u_\theta \right) - \frac{d\mu}{dT} \left(\frac{dT}{dr} \left[\frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{iq}{r} u_r \right] + \frac{dT}{dx} \left[\frac{iq}{r} u_x + i\alpha u_\theta \right] \right) - 2 \frac{d\mu}{dT} \frac{iq}{r} d_{\theta\theta} \theta = 0$$

$$\star \quad \bar{\rho} \left[-i\omega u_x + \left(V_r \frac{du_x}{dr} + i\alpha V_x u_x \right) + \frac{dV_x}{dr} u_r + \frac{dV_x}{dx} u_x \right] + \left(V_r \frac{dV_x}{dr} + V_x \frac{dV_x}{dx} \right) \rho + i\alpha p - \frac{d\lambda}{dT} \frac{dT}{dx} \left(\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \frac{iq}{r} u_\theta + i\alpha u_x \right) - \text{div}\vec{V} \left(\frac{d^2 \lambda}{dT^2} \frac{dT}{dx} \theta + \frac{d\lambda}{dT} i\alpha \theta \right) - (\lambda + \mu) i\alpha \left(\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \frac{iq}{r} u_\theta + i\alpha u_x \right) - \left(\frac{d\lambda}{dT} + \frac{d\mu}{dT} \right) \frac{d\text{div}\vec{V}}{dx} \theta - \mu \left(\frac{d^2 u_x}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_x}{dr} - \frac{q^2}{r^2} u_x - \alpha^2 u_x \right) - \frac{d\mu}{dT} (\Delta_x V) \theta - \frac{d\mu}{dT} \left(\frac{dT}{dr} \left[\frac{du_x}{dr} + i\alpha u_r \right] + 2 \frac{dT}{dx} i\alpha u_x \right) - \frac{d^2 \mu}{dT^2} \left(2 \frac{dT}{dr} d_{rx} + 2 \frac{dT}{dx} d_{xx} \right) \theta - \frac{d\mu}{dT} \left(2 d_{rx} \frac{d\theta}{dr} + 2 d_{xx} i\alpha \theta \right) = 0$$

$$\star \quad \left(C_v + \frac{dC_v}{dT} T \right) \left(\bar{\rho} \left[-i\omega \theta + \frac{dT}{dr} u_r + \frac{dT}{dx} u_x + V_r \frac{d\theta}{dr} + V_x i\alpha \theta \right] + \left[\frac{dT}{dr} V_r + \frac{dT}{dx} V_x \right] \rho \right) + \bar{\rho} \left(2 \frac{dC_v}{dT} + T \frac{d^2 C_v}{dT^2} \right) \left(\frac{dT}{dr} V_r + \frac{dT}{dx} V_x \right) \theta + (P - 2\lambda \text{div}\vec{V}) \left(\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \frac{iq}{r} u_\theta + i\alpha u_x \right) + \text{div}\vec{V} p - \frac{d\lambda}{dT} (\text{div}\vec{V})^2 \theta - 2\mu \left(2 d_{rr} \frac{du_r}{dr} + 2 d_{\theta\theta} \left[\frac{iq}{r} u_\theta + \frac{u_r}{r} \right] + 2 d_{xx} i\alpha u_x + 2 d_{rx} \left[\frac{du_x}{dr} + i\alpha u_r \right] \right) - \frac{d\mu}{dT} \left(2 d_{rr}^2 + 2 d_{\theta\theta}^2 + 2 d_{xx}^2 + 4 d_{rx}^2 \right) \theta - 2 \frac{d\lambda_c}{dT} \left(\frac{dT}{dr} \frac{d\theta}{dr} + \frac{dT}{dx} i\alpha \theta \right) - \lambda_c \left(\frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} - \frac{q^2}{r^2} \theta - \alpha^2 \theta \right) - \frac{d^2 \lambda_c}{dT^2} \left(\left[\frac{dT}{dr} \right]^2 + \left[\frac{dT}{dx} \right]^2 \right) \theta - \frac{d\lambda_c}{dT} (\Delta T) \theta = 0$$

$$\text{avec } \text{div}\vec{V} = \frac{dV_r}{dr} + \frac{V_r}{r} + \frac{dV_x}{dx}$$

$$d_{rr} = \frac{dV_r}{dr}, \quad d_{\theta\theta} = \frac{V_r}{r}, \quad d_{xx} = \frac{dV_x}{dx} \text{ et } d_{rx} = \frac{1}{2} \left(\frac{dV_x}{dr} + \frac{dV_r}{dx} \right)$$

$$\Delta_r V = \frac{d^2 V_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_r}{dr} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{d^2 V_r}{dx^2}, \quad \Delta_x V = \frac{d^2 V_x}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_x}{dr} + \frac{d^2 V_x}{dx^2}$$

$$\Delta T = \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{d^2 T}{dx^2}$$

F.3 Réduction à un problème du premier ordre en différenciation

On choisit de résoudre ce système à l'aide du schéma compact d'ordre 4 de Malik [MCH82] qui s'applique à un système du premier ordre en différenciation, c'est-à-dire du type

$$\frac{dZ}{dr} = A(r).Z + B(r)$$

avec Z et $B(r)$ des vecteurs de taille N , et $A(r)$ une matrice de taille $N \times N$.

On va essayer de se ramener à cette forme. A ce stade, le système s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_\rho \rho + a_{u_r} u_r + a_{d_{u_r}} \frac{du_r}{dr} + a_{u_\theta} u_\theta + a_{u_x} u_x = -a_\rho \frac{d\rho}{dr} \\ b_\rho \rho + b_{u_r} u_r + b_{d_{u_r}} \frac{du_r}{dr} + b_{u_\theta} u_\theta + b_{d_{u_\theta}} \frac{du_\theta}{dr} + b_{u_x} u_x + b_{d_{u_x}} \frac{du_x}{dr} + b_\theta \theta + b_{d_\theta} \frac{d\theta}{dr} + b_{dp} \frac{dp}{dr} = -b_\rho \frac{d^2 u_r}{dr^2} \\ c_{u_r} u_r + c_{d_{u_r}} \frac{du_r}{dr} + c_{u_\theta} u_\theta + c_{d_{u_\theta}} \frac{du_\theta}{dr} + c_{u_x} u_x + c_\theta \theta + c_p p = -c_\rho \frac{d^2 u_\theta}{dr^2} \\ d_\rho \rho + d_{u_r} u_r + d_{d_{u_r}} \frac{du_r}{dr} + d_{u_\theta} u_\theta + d_{u_x} u_x + d_{d_{u_x}} \frac{du_x}{dr} + d_\theta \theta + d_{d_\theta} \frac{d\theta}{dr} + d_p p = -d_\rho \frac{d^2 u_x}{dr^2} \\ e_\rho \rho + e_{u_r} u_r + e_{d_{u_r}} \frac{du_r}{dr} + e_{u_\theta} u_\theta + e_{u_x} u_x + e_{d_{u_x}} \frac{du_x}{dr} + e_\theta \theta + e_{d_\theta} \frac{d\theta}{dr} + e_p p = -e_\rho \frac{d^2 \theta}{dr^2} \end{array} \right.$$

$$a_\rho = -i\omega + \text{div}\vec{V} + i\alpha V_x$$

$$a_{u_r} = \frac{\bar{\rho}}{r} + \frac{d\bar{\rho}}{dr}$$

$$\begin{aligned}
 a_{du_r} &= \bar{\rho} \\
 a_{u_\theta} &= \frac{iq}{r} \bar{\rho} \\
 a_{u_x} &= \frac{d\bar{\rho}}{dx} + i\alpha \bar{\rho} \\
 a_{d\rho} &= \bar{V}_r \\
 b_\rho &= V_r \frac{dV_r}{dr} + V_x \frac{dV_r}{dx} \\
 b_{u_r} &= \bar{\rho}(-i\omega + i\alpha V_x + \frac{dV_r}{dr}) - \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dT} \frac{dT}{dr} + \frac{\lambda + \mu}{r^2} + \mu(\frac{1+q^2}{r^2} + \alpha^2) - i\alpha \frac{d\mu}{dT} \frac{dT}{dx} \\
 b_{du_r} &= \bar{\rho} V_r - \frac{d\lambda}{dT} \frac{dT}{dr} - \frac{\lambda + 2\mu}{r} - 2 \frac{d\mu}{dT} \frac{dT}{dr} \\
 b_{u_\theta} &= -\frac{iq}{r} \frac{d\lambda}{dT} \frac{dT}{dr} + \frac{iq}{r^2} (\lambda + 3\mu) \\
 b_{du_\theta} &= -\frac{iq}{r} (\lambda + \mu) \\
 b_{u_x} &= \bar{\rho} \frac{dV_r}{dx} - i\alpha \frac{d\lambda}{dT} \frac{dT}{dr} \\
 b_{du_x} &= -i\alpha (\lambda + \mu) - \frac{d\mu}{dT} \frac{dT}{dx} \\
 b_\theta &= -\operatorname{div} \vec{V} \frac{d^2 \lambda}{dT^2} \frac{dT}{dr} - (\frac{d\lambda}{dT} + \frac{d\mu}{dT}) \frac{d \operatorname{div} \vec{V}}{dr} - \frac{d\mu}{dT} (\Delta_r V) - 2 \frac{d^2 \mu}{dT^2} (\frac{dT}{dr} d_{rr} + \frac{dT}{dx} d_{rx}) - 2 \frac{d\mu}{dT} i\alpha d_{rx} \\
 b_{d\theta} &= -\operatorname{div} \vec{V} \frac{d\lambda}{dT} - 2 \frac{d\mu}{dT} d_{rr} \\
 b_{dp} &= 1 \\
 b_{d^2 u_r} &= -(\lambda + 2\mu) \\
 c_{u_r} &= -\frac{iq}{r^2} (\lambda + 3\mu) - \frac{iq}{r} \frac{d\mu}{dT} \frac{dT}{dr} \\
 c_{du_r} &= -\frac{iq}{r} (\lambda + \mu) \\
 c_{u_\theta} &= \bar{\rho}(-i\omega + i\alpha V_x + \frac{V_r}{r}) + \frac{q^2}{r^2} (\lambda + \mu) + \mu(\frac{1+q^2}{r^2} + \alpha^2) + \frac{1}{r} \frac{d\mu}{dT} \frac{dT}{dr} - i\alpha \frac{d\mu}{dT} \frac{dT}{dx} \\
 c_{du_\theta} &= \bar{\rho} V_r - \frac{\mu}{r} - \frac{d\mu}{dT} \frac{dT}{dr} \\
 c_{u_x} &= \frac{\alpha q}{r} (\lambda + \mu) - \frac{iq}{r} \frac{d\mu}{dT} \frac{dT}{dx} \\
 c_\theta &= -\operatorname{div} \vec{V} \frac{d\lambda}{dT} \frac{iq}{r} - 2 \frac{d\mu}{dT} \frac{iq}{r} d_{\theta\theta} \\
 c_p &= \frac{iq}{r} \\
 c_{d^2 u_\theta} &= -\mu \\
 d_\rho &= V_r \frac{dV_x}{dr} + V_x \frac{dV_x}{dx} \\
 d_{u_r} &= \bar{\rho} \frac{dV_x}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dT} \frac{dT}{dx} - \frac{i\alpha}{r} (\lambda + \mu) - i\alpha \frac{d\mu}{dT} \frac{dT}{dr} \\
 d_{du_r} &= -\frac{d\lambda}{dT} \frac{dT}{dx} - i\alpha (\lambda + \mu) \\
 d_{u_\theta} &= -\frac{iq}{r} \frac{d\lambda}{dT} \frac{dT}{dx} + \frac{\alpha q}{r} (\lambda + \mu) \\
 d_{u_x} &= \bar{\rho}(-i\omega + i\alpha V_x + \frac{dV_x}{dx}) - i\alpha \frac{d\lambda}{dT} \frac{dT}{dx} + \alpha^2 (\lambda + 2\mu) + \mu \frac{q^2}{r^2} - 2i\alpha \frac{d\mu}{dT} \frac{dT}{dx} \\
 d_{du_x} &= \bar{\rho} V_r - \frac{\mu}{r} - \frac{d\mu}{dT} \frac{dT}{dr} \\
 d_\theta &= -\operatorname{div} \vec{V} (\frac{d^2 \lambda}{dT^2} \frac{dT}{dx} + i\alpha \frac{d\lambda}{dT}) - (\frac{d\lambda}{dT} + \frac{d\mu}{dT}) \frac{d \operatorname{div} \vec{V}}{dx} - \frac{d\mu}{dT} (\Delta_x V) - 2 \frac{d^2 \mu}{dT^2} (\frac{dT}{dr} d_{rx} + \frac{dT}{dx} d_{xx}) - 2i\alpha \frac{d\mu}{dT} d_{xx} \\
 d_{d\theta} &= -2 \frac{d\mu}{dT} d_{rx} \\
 d_p &= i\alpha
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{d^2 u_x} &= -\mu \\
 e_\rho &= (C_v + \frac{dC_v}{dT}T)(\frac{dT}{dr}V_r + \frac{dT}{dx}V_x) \\
 e_{u_r} &= (C_v + \frac{dC_v}{dT}T)\bar{\rho}\frac{dT}{dr} + \frac{1}{r}(P - 2\lambda\text{div}\vec{V}) - \frac{4\mu}{r}d_{\theta\theta} - 4\mu i\alpha d_{rx} \\
 e_{du_r} &= P - 2\lambda\text{div}\vec{V} - 4\mu d_{rr} \\
 e_{u_\theta} &= \frac{iq}{r}(P - 2\lambda\text{div}\vec{V}) - \frac{4iq}{r}\mu d_{\theta\theta} \\
 e_{u_x} &= (C_v + \frac{dC_v}{dT}T)\bar{\rho}\frac{dT}{dx} + i\alpha(P - 2\lambda\text{div}\vec{V}) - 4\mu i\alpha d_{xx} \\
 e_{du_x} &= -4\mu d_{rx} \\
 e_\theta &= (C_v + \frac{dC_v}{dT}T)\bar{\rho}(i\alpha V_x - i\omega) + \bar{\rho}(2\frac{dC_v}{dT} + T\frac{d^2 C_v}{dT^2})(\frac{dT}{dr}V_r + \frac{dT}{dx}V_x) - \frac{d\lambda}{dT}(\text{div}\vec{V})^2 \\
 &\quad - 2\frac{d\mu}{dT}(d_{rr}^2 + d_{\theta\theta}^2 + d_{xx}^2 + 2d_{rx}^2) - 2i\alpha\frac{d\lambda_c}{dT}\frac{dT}{dx} + \lambda_c(\frac{q^2}{r^2} + \alpha^2) - \frac{d^2\lambda_c}{dT^2}([\frac{dT}{dr}]^2 + [\frac{dT}{dx}]^2) - \frac{d\lambda_c}{dT}(\Delta T) \\
 e_{d\theta} &= (C_v + \frac{dC_v}{dT}T)\bar{\rho}V_r - 2\frac{d\lambda_c}{dT}\frac{dT}{dr} - \frac{\lambda_c}{r} \\
 e_p &= \text{div}\vec{V} \\
 e_{d^2\theta} &= -\lambda_c
 \end{aligned}$$

Si on utilise l'hypothèse 4 :

$$p = \frac{P}{T}\theta + \frac{P}{\bar{\rho}}\rho \quad \text{et} \quad \frac{dp}{dr} = \frac{d(P/T)}{dr}\theta + \frac{P}{T}\frac{d\theta}{dr} + \frac{d(P/\bar{\rho})}{dr}\rho + \frac{P}{\bar{\rho}}\frac{d\rho}{dr}$$

on peut récrire le système sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a'_\rho \rho + a'_{d\rho} \frac{d\rho}{dr} + a'_{u_r} u_r + a'_{du_r} \frac{du_r}{dr} + a'_{u_\theta} u_\theta + a'_{u_x} u_x = 0 \\
 b'_\rho \rho + b'_{d\rho} \frac{d\rho}{dr} + b'_{u_r} u_r + b'_{du_r} \frac{du_r}{dr} + b'_{u_\theta} u_\theta + b'_{du_\theta} \frac{du_\theta}{dr} + b'_{u_x} u_x + b'_{du_x} \frac{du_x}{dr} + b'_\theta \theta + b'_{d\theta} \frac{d\theta}{dr} = -b'_{d^2 u_r} \frac{d^2 u_r}{dr^2} \\
 c'_\rho \rho + c'_{u_r} u_r + c'_{du_r} \frac{du_r}{dr} + c'_{u_\theta} u_\theta + c'_{du_\theta} \frac{du_\theta}{dr} + c'_{u_x} u_x + c'_\theta \theta = -c'_{d^2 u_\theta} \frac{d^2 u_\theta}{dr^2} \\
 d'_\rho \rho + d'_{u_r} u_r + d'_{du_r} \frac{du_r}{dr} + d'_{u_\theta} u_\theta + d'_{u_x} u_x + d'_{du_x} \frac{du_x}{dr} + d'_\theta \theta + d'_{d\theta} \frac{d\theta}{dr} = -d'_{d^2 u_x} \frac{d^2 u_x}{dr^2} \\
 e'_\rho \rho + e'_{u_r} u_r + e'_{du_r} \frac{du_r}{dr} + e'_{u_\theta} u_\theta + e'_{u_x} u_x + e'_{du_x} \frac{du_x}{dr} + e'_\theta \theta + e'_{d\theta} \frac{d\theta}{dr} = -e'_{d^2 \theta} \frac{d^2 \theta}{dr^2}
 \end{array} \right.$$

$$\text{où } b'_\rho = b_\rho + \frac{d(P/\bar{\rho})}{dr} b_{dp}, \quad b'_{d\rho} = \frac{P}{\bar{\rho}} b_{dp}, \quad b'_\theta = b_\theta + \frac{d(P/T)}{dr} b_{dp}, \quad b'_{d\theta} = b_{d\theta} + \frac{P}{T} b_{dp}$$

$$c'_\rho = \frac{P}{\bar{\rho}} c_p, \quad c'_\theta = c_\theta + \frac{P}{T} c_p$$

$$d'_\rho = d_\rho + \frac{P}{\bar{\rho}} d_p, \quad d'_\theta = d_\theta + \frac{P}{T} d_p$$

$$e'_\rho = e_\rho + \frac{P}{\bar{\rho}} e_p, \quad e'_\theta = e_\theta + \frac{P}{T} e_p$$

et les autres coefficients sont inchangés.

Si on néglige $a'_{d\rho} b'_{d^2 u_r} / a'_{du_r} = -V_r(\lambda + 2\mu) / \bar{\rho}$, on peut remplacer la deuxième équation en éliminant $\frac{d^2 u_r}{dr^2}$ grâce à la dérivée de la première équation.

Négliger $a'_{d\rho} b'_{d^2 u_r} / a'_{du_r}$ permet de ne pas faire apparaître de terme en $\frac{d^2 p}{dr^2}$. Ceci est plus important qu'il n'y paraît. Grâce à cette simplification, on va faire apparaître un système différentiel continu d'ordre 8 parfaitement compatible avec les 4 conditions aux limites physiques dont on dispose à chaque extrémité d'un diamètre. Si on conserve $a'_{d\rho} b'_{d^2 u_r} / a'_{du_r}$, le système semble être d'ordre 9, il faudrait donc une condition aux limites supplémentaire alors que toutes les conditions physiques ont déjà été exprimées. Cette apparente impasse est probablement liée à l'inconsistance de la modélisation : en effet, le terme en cause est d'origine non-parallèle, or la forme de mode normal n'est valable que pour un écoulement strictement parallèle, il n'y a donc aucune difficulté lorsque la forme de mode normal peut être légitimement utilisée mais rien n'exclut des paradoxes lorsque forme de mode et écoulement sont incompatibles.

Le constat de l'ordre 9 du système semble aussi avoir été fait par Hanifi [Han95] dans le cas de l'étude de la stabilité linéaire d'une couche limite, il ne propose cependant aucune explication.

Néanmoins, ce terme dans le cas des études de couche limite est d'ordre 2 si on suppose que l'inverse du nombre de Reynolds est d'ordre 1. Pour l'écoulement de Taylor, l'ordre de V_r est plus

difficile à estimer puisque la vitesse radiale est prépondérante à la paroi et négligeable ailleurs. On supposera quand même qu'on peut négliger $-V_r(\lambda + 2\mu)/\bar{\rho}$.

La deuxième équation est remplacée par

$$b''_{\rho}\rho + b''_{d\rho}\frac{d\rho}{dr} + b''_{u_r}u_r + b''_{du_r}\frac{du_r}{dr} + b''_{u_\theta}u_\theta + b''_{du_\theta}\frac{du_\theta}{dr} + b''_{u_x}u_x + b''_{du_x}\frac{du_x}{dr} + b''_{\theta}\theta + b''_{d\theta}\frac{d\theta}{dr} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{où } b''_{\rho} &= b'_{\rho} - \frac{b'_{d^2u_r} da'_{\rho}}{a'_{du_r} dr}, & b''_{d\rho} &= b'_{d\rho} - \frac{b'_{d^2u_r} (a'_{\rho} + \frac{da'_{d\rho}}{dr})}{a'_{du_r}}, & b''_{u_r} &= b'_{u_r} - \frac{b'_{d^2u_r} da'_{u_r}}{a'_{du_r} dr}, \\ b''_{du_r} &= b'_{du_r} - \frac{b'_{d^2u_r} (a'_{u_r} + \frac{da'_{du_r}}{dr})}{a'_{du_r}}, & b''_{u_\theta} &= b'_{u_\theta} - \frac{b'_{d^2u_r} da'_{u_\theta}}{a'_{du_r} dr}, & b''_{du_\theta} &= b'_{du_\theta} - \frac{b'_{d^2u_r} a'_{u_\theta}}{a'_{du_r}}, \\ b''_{u_x} &= b'_{u_x} - \frac{b'_{d^2u_r} da'_{u_x}}{a'_{du_r} dr}, & b''_{du_x} &= b'_{du_x} - \frac{b'_{d^2u_r} a'_{u_x}}{a'_{du_r}}, \end{aligned} \text{ et les autres coefficients sont inchangés.}$$

Le système se met alors sous la forme :

$$\mathcal{G} \frac{d\vec{Z}}{dr} + \mathcal{A}\vec{Z} = 0 \text{ avec } \vec{Z} = \left(u_x, u_r, u_\theta, \rho, \theta, \frac{du_x}{dr}, \frac{du_\theta}{dr}, \frac{d\theta}{dr} \right)^t$$

où

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ a'_{u_x} & a'_{u_r} & a'_{u_\theta} & a'_{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ b''_{u_x} & b''_{u_r} & b''_{u_\theta} & b''_{\rho} & b''_{\theta} & b''_{du_x} & b''_{du_\theta} & b''_{d\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ d'_{u_x} & d'_{u_r} & d'_{u_\theta} & d'_{\rho} & d'_{\theta} & d'_{du_x} & 0 & d'_{d\theta} \\ c'_{u_x} & c'_{u_r} & c'_{u_\theta} & c'_{\rho} & c'_{\theta} & 0 & c'_{du_\theta} & 0 \\ e'_{u_x} & e'_{u_r} & e'_{u_\theta} & e'_{\rho} & e'_{\theta} & e'_{du_x} & 0 & e'_{d\theta} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{du_r} & 0 & a'_{d\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b''_{du_r} & 0 & b''_{d\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d'_{du_r} & 0 & 0 & 0 & d'_{d^2u_x} & 0 & 0 \\ 0 & c'_{du_r} & 0 & 0 & 0 & 0 & c'_{d^2u_\theta} & 0 \\ 0 & e'_{du_r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e'_{d^2\theta} \end{pmatrix}$$

or

$$\mathcal{G}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b''_{d\rho}}{det} & 0 & -\frac{a'_{d\rho}}{det} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b''_{du_r}}{det} & 0 & \frac{a'_{du_r}}{det} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d'_{du_r} b''_{d\rho}}{d'_{d^2u_x} det} & 0 & \frac{d'_{du_r} a'_{d\rho}}{d'_{d^2u_x} det} & 0 & \frac{1}{d'_{d^2u_x}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c'_{du_r} b''_{d\rho}}{c'_{d^2u_\theta} det} & 0 & \frac{c'_{du_r} a'_{d\rho}}{c'_{d^2u_\theta} det} & 0 & 0 & \frac{1}{c'_{d^2u_\theta}} & 0 \\ 0 & -\frac{e'_{du_r} b''_{d\rho}}{e'_{d^2\theta} det} & 0 & \frac{e'_{du_r} a'_{d\rho}}{e'_{d^2\theta} det} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{e'_{d^2\theta}} \end{pmatrix}$$

$$\text{où } det = a'_{du_r} b''_{d\rho} - b''_{du_r} a'_{d\rho}$$

$$\text{soit } \boxed{\frac{d\vec{Z}}{dr} + \mathcal{G}^{-1} \mathcal{A} \vec{Z} = 0}$$

On s'est donc ramené à la forme utilisable par le schéma compact d'ordre 4 de Malik [MCH82].

F.4 Conditions aux limites

Ce système de 8 équations du premier ordre en différenciation nécessite 8 conditions aux limites pour être *a priori* soluble. Si on considère un diamètre, les deux extrémités de ce diamètre étant la même paroi avec les mêmes caractéristiques, il suffit d'être capable d'exprimer 4 conditions à la paroi pour avoir (théoriquement) les 8 conditions aux limites.

Les conditions à la paroi pour les grandeurs fluctuantes s'obtiennent par linéarisation des conditions à la paroi du problème complet.

Or, on impose une injection à vitesse fixée orthogonale à la paroi (située en $r = 1$). La linéarisation de cette condition entraîne

$$u_r(1) = u_x(1) = u_\theta(1) = 0$$

Par ailleurs, si on impose la température fixée, on obtient

$$\theta(1) = 0$$

et si on impose le flux de chaleur à la paroi, on trouve

$$\frac{d\theta}{dr}(1) = 0$$

Théoriquement, il suffirait donc de résoudre le problème entre $r = -1$ et $r = 1$. On aurait bien alors les 8 conditions aux limites nécessaires. Néanmoins, une telle résolution est impossible parce que le choix de coordonnées suppose que $r \in [0, +\infty[$ (donc n'est pas négatif) et parce que l'axe présente de toute façon une singularité qui ne peut pas être traversée sans précaution.

F.5 Traitement de l'axe

On utilise la même démarche que celle explicitée dans le cas incompressible en annexe D. Elle consiste à résoudre le problème écrit sous forme de développement limité aux premiers ordres d'approximation afin de "transporter" la limite du domaine intégré par le schéma de Malik hors de la singularité.

Comme la singularité n'est pas physique mais seulement due au choix de coordonnées, toutes les grandeurs admettent des développements limités au voisinage de l'axe.

Pour l'écoulement moyen :

$$V_x = f_U(x) \sum_{n=0}^{\infty} U_n r^n, \quad V_r = \sum_{n=0}^{\infty} V_n r^n,$$

$$\bar{\rho} = f_R(x) \sum_{n=0}^{\infty} R_n r^n, \quad T = f_T(x) \sum_{n=0}^{\infty} T_n r^n, \quad P = f_P(x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n r^n$$

et pour les fluctuations :

$$u_x = \sum_{n=0}^{\infty} u_n r^n, \quad u_r = \sum_{n=0}^{\infty} v_n r^n, \quad u_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} w_n r^n,$$

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} t_n r^n, \quad \rho = \sum_{n=0}^{\infty} s_n r^n$$

On veut assurer sur l'axe que $\text{div} \vec{V}, \Delta_x V, \Delta T$, sont des grandeurs finies, il faut alors que $V_0 = T_1 = U_1 = 0$.

Si on injecte ces développements dans les équations linéarisées, on obtient une succession de systèmes algébriques pour les différentes puissances r^n du développement.

Système S_0 correspondant aux termes en r^{-2}

$$\begin{cases} (v_0 + iqw_0) = 0 \\ (\lambda + \mu)(v_0 + iqw_0) + \mu((1 + q^2)v_0 + 2iqw_0) = 0 \\ -(\lambda + \mu)(iqv_0 - q^2w_0) + \mu((1 + q^2)w_0 - 2iqv_0) = 0 \\ \mu q^2 u_0 = 0 \\ \lambda_c q^2 t_0 = 0 \end{cases}$$

Système S_1 , correspondant aux termes en r^{-1} en utilisant $v_0 + iqw_0 = 0$, $qu_0 = qt_0 = 0$

$$\begin{cases} -i\omega s_0 + f_R(x)R_0(2v_1 + iqw_1 + i\alpha u_0) + f_R(x)R_1v_0 + f'_R(x)R_0u_0 + (2V_1 + f'_U(x)U_0)s_0 \\ \quad + i\alpha f_U(x)U_0s_0 = 0 \\ \mu(q^2v_1 + 2iqw_1) = 0 \\ iqC_{\frac{E_0}{\rho}}s_0 - (\lambda + \mu)iq(2v_1 + iqw_1) - \mu(2iqv_1 - q^2w_1) = 0 \\ -\mu(1 - q^2)u_1 = 0 \\ -\lambda_c(1 - q^2)t_1 = 0 \end{cases}$$

où $C_{\frac{E_0}{\rho}}$ est le premier terme du développement limité du rapport de la pression de base sur la masse volumique de base.

En supposant $s_0 \dots s_n, u_0 \dots u_{n+1}, v_0 \dots v_{n+1}, w_0 \dots w_{n+1}, t_0 \dots t_{n+1}$ connus, on a le système S_{n+2} correspondant aux termes en r^n

$$\begin{cases} (-i\omega + (n + 3)V_1 + (i\alpha f_U(x) + f'_U(x)U_0)s_{n+1} + f_R(x)R_0((n + 3)v_{n+2} + iqw_{n+2})) = \text{connu} \\ (n + 1)C_{\frac{E_0}{\rho}}s_{n+1} - (\lambda + \mu)([(n + 2)^2 - 1]v_{n+2} + (n + 1)iqw_{n+2}) \\ \quad - \mu([(n + 2)^2 - (1 + q^2)]v_{n+2} - 2iqw_{n+2}) = \text{connu} \\ iqC_{\frac{E_0}{\rho}}s_{n+1} - (\lambda + \mu)(iq[n + 3]v_{n+2} - q^2w_{n+2}) \\ \quad - \mu([(n + 2)^2 - (1 + q^2)]w_{n+2} + 2iqv_{n+2}) = \text{connu} \\ -\mu((n + 2)^2 - q^2)u_{n+2} = \text{connu} \\ -\lambda_c((n + 2)^2 - q^2)t_{n+2} = \text{connu} \end{cases}$$

Ce système compte deux "équations" dont la résolution est généralement évidente mais qui dégénèrent en équations triviales lorsque $n + 2 = q$ (on ne considère que des nombres d'onde azimutaux positifs). Cela signifie que u_q et t_q ne peuvent pas être déterminés.

Par commodité, on transforme $n + 2$ en n . Alors, pour connaître s_{n-1}, v_n, w_n il faut inverser la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & f_R(x)R_0(n + 1) & f_R(x)R_0iq \\ C_{\frac{E_0}{\rho}}(n + 1) & -(\lambda + \mu)[n^2 - 1] - \mu[n^2 - (1 + q^2)] & -(\lambda + \mu)iq(n - 1) + \mu 2iq \\ C_{\frac{E_0}{\rho}}iq & -(\lambda + \mu)iq(n + 1) - \mu 2iq & (\lambda + \mu)q^2 - \mu[n^2 - (1 + q^2)] \end{pmatrix}$$

où $a = -i\omega + (n + 1)V_1 + (i\alpha f_U(x) + f'_U(x)U_0)$

Or, cette matrice n'est pas toujours inversible. Il suffit d'en calculer le déterminant. Si on introduit

$$c_n = C_{\frac{E_0}{\rho}} \frac{f_R(x)R_0}{i\omega - (n + 1)V_1 - (i\alpha f_U(x) + f'_U(x)U_0)}$$

le déterminant vaut simplement :

$$-\mu(c_n - \lambda - 2\mu)(n^2 - (q + 1)^2)(n^2 - (q - 1)^2)$$

Il s'annule pour $n = q + 1$ et pour $n = q - 1$. En y regardant de plus près, on constate que pour $n = q - 1$, le problème se résout en prenant comme variables s_{q-2} et $v_{q-1} + iw_{q-1}$, ce qui signifie qu'on peut choisir arbitrairement soit v_{q-1} soit w_{q-1} . Pour $n = q + 1$, on peut choisir arbitrairement l'un des trois éléments s_q, v_{q+1}, w_{q+1} .

On a donc montré que le problème de stabilité peut se résoudre sous forme de développements limités jusqu'à l'ordre souhaité mais en laissant 4 constantes arbitraires : u_q, t_q , soit v_{q-1} soit w_{q-1} et

soit s_q soit v_{q+1} soit w_{q+1} . (Dans le cas particulier $q = 0$ on constate aisément que les 4 constantes arbitraires sont u_0, t_0, w_1 et soit s_0 soit v_1 .)

Par ailleurs, des récurrences simples montrent que tant que les systèmes ne dégènèrent pas, comme les deuxièmes membres sont des fonctions linéaires des coefficients précédents, la solution nulle est la seule qui convienne. C'est seulement lorsque les systèmes dégènèrent que les développements limités prennent des valeurs non-nulles.

On peut ainsi se convaincre que les développements limités des diverses grandeurs ont la forme suivante :

$$\begin{aligned} u_x &= u_q r^q + \mathcal{O}(r^{q+2}) \\ \theta &= t_q r^q + \mathcal{O}(r^{q+2}) \\ u_r &= v_{q-1} r^{q-1} + v_{q+1} r^{q+1} + \mathcal{O}(r^{q+2}) \\ u_\theta &= w_{q-1} r^{q-1} + w_{q+1} r^{q+1} + \mathcal{O}(r^{q+2}) \\ \rho &= s_q r^q + \mathcal{O}(r^{q+1}) \end{aligned}$$

C'est la forme des deuxièmes membres qui permet de voir que les termes u_{q+1}, t_{q+1}, v_q et w_q sont nuls. On voit que l'évolution des profils de fluctuation au voisinage de l'origine dépend directement du nombre d'onde azimutal q considéré.

Le problème est donc résolu au voisinage de l'axe en fonction de quatre constantes arbitraires qui correspondent en fait aux quatre conditions limites à la paroi qui n'ont pas été utilisées dans la résolution.

Les 8 grandeurs constituant le vecteur inconnu $\vec{Z} = \left(u_x, u_r, u_\theta, \rho, \theta, \frac{du_x}{dr}, \frac{du_\theta}{dr}, \frac{d\theta}{dr} \right)^t$ peuvent s'écrire en n'importe quel point r_c à la précision r_c^p souhaitée à l'aide des développements limités. On a alors 8 équations fonctions de 4 constantes arbitraires. On peut éliminer ces 4 constantes pour obtenir 4 relations dites de "compatibilité", voir l'annexe D ou les références [GCP00] ou [Pin97]. Ce sont ces relations qui sont utilisées en remplacement des conditions aux limites sur l'axe.

Annexe G

Mise en œuvre numérique de la stabilité secondaire

G.1 Equations

On part des équations de Navier-Stokes sous la forme suivante utilisant le rotationnel des équations de quantité de mouvement.

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{U}) + \vec{\nabla} \wedge [(\vec{\nabla} \wedge \vec{U}) \wedge \vec{U}] - \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \vec{\nabla}^2 (\vec{\nabla} \wedge \vec{U}) = 0 \end{cases} \quad (\text{G.1})$$

On adopte les notations suivantes :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\alpha}{\gamma} \\ b &= \frac{\beta}{\gamma} \\ c &= \frac{\omega}{\gamma} \\ q_m &= \gamma m + \delta \\ d_m &= c q_m - \sigma \\ p_m &= a \mu + b q_m \\ t_m &= a q_m - b \mu \\ k_m^2 &= \mu^2 + q_m^2 = p_m^2 + t_m^2 \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

de sorte que la perturbation secondaire \vec{U}_3 s'écrive :

$$\vec{U}_3 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i(t_m X + p_m Z - d_m t)} \left(g_u^{(m)}(y), g_w^{(m)}(y), g_v^{(m)}(y) \right) \quad (\text{G.3})$$

On reporte alors $\vec{U}_2 + \varepsilon \vec{U}_3$ dans les équations en ne conservant que les termes d'ordre 1 en ε . Les équations reproduites ici sont principalement tirées d'une annexe de la thèse de Casalis [Cas90] où les détails des calculs peuvent être trouvés. Ses résultats ont été vérifiés et complétés avec les termes non-parallèles nécessaires au traitement de l'écoulement de Taylor. Les différences se situent seulement dans les parties faisant intervenir l'écoulement de base, c'est-à-dire le système (G.4) dans la suite, et pas dans les termes de couplages entre modes de Fourier qui ne dépendent que de l'onde primaire.

Notons d'abord les trois opérateurs liés uniquement au mouvement de base¹ $\vec{U}_0 = (U_0(x, y), V_0(y), 0)^t$ (avec les notations (G.2)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_u^{(m)} = iRt_m \frac{\partial^2 U_0}{\partial y \partial x} \\ S_v^{(m)} = (D^2 - k_m^2)^2 - iR(D^2 - k_m^2)(t_m U_0 - d_m - iV_0 D) \\ \quad + iRt_m \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + Rp_m^2 \frac{\partial V_0}{\partial y} \\ S_w^{(m)} = -iRp_m \frac{\partial U_0}{\partial x} D \\ T^{(m)} = D^2 - k_m^2 - iR(t_m U_0 - d_m - iV_0 D) - R \frac{\partial U_0}{\partial x} \\ P^{(m)} = Rp_m \frac{\partial U_0}{\partial y} \end{array} \right. \quad (\text{G.4})$$

Puis les douze opérateurs où n'intervient que l'onde primaire \vec{U}_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_u^{(m)} = -t_m^2 f'_u - (p_m t_m + \gamma \mu) f'_w + \alpha i k_m^2 f_v \\ \quad + (-t_m^2 f_u - (p_m t_m + \gamma \mu) f_w + i t_m f'_v) D + i t_m f_v D^2 \\ L_w^{(m)} = -p_m^2 f'_w - (p_m t_m - \gamma \mu) f'_u + \beta i k_m^2 f_v \\ \quad + (-p_m^2 f_w - (p_m t_m - \gamma \mu) f_u + i p_m f'_v) D + i p_m f_v D^2 \\ L_v^{(m)} = i t_m f''_u + i p_m f''_w + k_m^2 f'_v + i k_m^2 t_{m-1} f_u + i k_m^2 p_{m-1} f_w \\ \quad + (i t_m f'_u + i p_m f'_w + k_m^2 f_v) D \end{array} \right. \quad (\text{G.5})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_u^{(m)} = -t_m^2 \bar{f}'_u - (p_m t_m - \gamma \mu) \bar{f}'_w - \alpha i k_m^2 \bar{f}_v \\ \quad + (-t_m^2 \bar{f}_u - (p_m t_m - \gamma \mu) \bar{f}_w + i t_m \bar{f}'_v) D + i t_m \bar{f}_v D^2 \\ M_w^{(m)} = -p_m^2 \bar{f}'_w - (p_m t_m + \gamma \mu) \bar{f}'_u - \beta i k_m^2 \bar{f}_v \\ \quad + (-p_m^2 \bar{f}_w - (p_m t_m + \gamma \mu) \bar{f}_u + i p_m \bar{f}'_v) D + i p_m \bar{f}_v D^2 \\ M_v^{(m)} = i t_m \bar{f}''_u + i p_m \bar{f}''_w + k_m^2 \bar{f}'_v + i k_m^2 t_{m+1} \bar{f}_u + i k_m^2 p_{m+1} \bar{f}_w \\ \quad + (i t_m \bar{f}'_u + i p_m \bar{f}'_w + k_m^2 \bar{f}_v) D \end{array} \right. \quad (\text{G.6})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_u^{(m)} = -p_m t_m f_u - (p_m^2 - \gamma q_m) f_w + i p_m f_v D \\ N_w^{(m)} = p_m t_m f_w + (t_m^2 - \gamma q_m) f_u - i t_m f_v D \\ N_v^{(m)} = i(-t_m f'_w + p_m f'_u) \end{array} \right. \quad (\text{G.7})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_u^{(m)} = -p_m t_m \bar{f}_u - (p_m^2 + \gamma q_m) \bar{f}_w + i p_m \bar{f}_v D \\ K_w^{(m)} = p_m t_m \bar{f}_w + (t_m^2 + \gamma q_m) \bar{f}_u - i t_m \bar{f}_v D \\ K_v^{(m)} = i(-t_m \bar{f}'_w + p_m \bar{f}'_u) \end{array} \right. \quad (\text{G.8})$$

1. On prend un mouvement de base particulier ayant les mêmes caractéristiques que l'écoulement de Taylor. A savoir, U_0 dépendant de x mais V_0 n'en dépendant pas, et $W_0 = 0$. Les dérivées partielles appliquées à l'écoulement de base sont écrites avec le repère initial fixe.

Rappelons que D désigne ici la dérivation par rapport à y . Ainsi, les équations déterminant le problème de l'instabilité secondaire se mettent sous la forme :

$$\begin{aligned} S_u^{(m)} g_u^{(m)} + S_v^{(m)} g_v^{(m)} + S_w^{(m)} g_w^{(m)} = \\ -AR \left[L_u^{(m)} g_u^{(m-1)} + L_w^{(m)} g_w^{(m-1)} + L_v^{(m)} g_v^{(m-1)} \right. \\ \left. + M_u^{(m)} g_u^{(m+1)} + M_w^{(m)} g_w^{(m+1)} + M_v^{(m)} g_v^{(m+1)} \right] \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

$$\begin{aligned} T^{(m)}(t_m g_w^{(m)} - p_m g_u^{(m)}) + P^{(m)} g_v^{(m)} = \\ iAR \left[N_u^{(m)} g_u^{(m-1)} + N_w^{(m)} g_w^{(m-1)} + N_v^{(m)} g_v^{(m-1)} \right. \\ \left. + K_u^{(m)} g_u^{(m+1)} + K_w^{(m)} g_w^{(m+1)} + K_v^{(m)} g_v^{(m+1)} \right] \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

$$it_m g_u^{(m)} + ip_m g_w^{(m)} + Dg_v^{(m)} = 0 \quad (\text{G.11})$$

où (G.11) n'est que l'équation de continuité. Dans ces équations, les membres de gauche correspondent au cas primaire : ils sont nuls si $A = 0$, c'est-à-dire si l'onde primaire est nulle (n'existe pas), auquel cas, l'instabilité secondaire devient primaire. Par exemple, $S_v^{(m)}$ est l'opérateur d'Orr-Sommerfeld et (G.10) sans second membre revient à l'équation qui permet la détermination des fluctuations horizontales de la vitesse. On remarque par ailleurs, que le système (G.9), (G.10), (G.11) s'applique à tout m , $m \in \mathbb{Z}$. On a donc un système infini d'équations couplées à résoudre. On constate cependant d'une part que le couplage n'intervient que sur trois termes consécutifs et d'autre part que quel que soit l'ordre N où l'on tronque la série dans (G.3), on obtiendra un système de $3(2N + 1)$ équations couplées mais qui aura la propriété essentielle d'être fermé.

En fait, en tenant compte de la simplicité de l'équation de continuité, il est possible de diminuer le nombre d'inconnues. Pour conserver la symétrie entre les deux directions parallèles à la paroi, on pose :

$$\theta^{(m)} = t_m g_w^{(m)} - p_m g_u^{(m)} \quad (\text{G.12})$$

comme nouvelle fonction inconnue et on pose (les nombres k_m^2 ne s'annulent jamais en théorie temporelle) :

$$\begin{aligned} E_\theta^{(m)} &= iR \left(\frac{p_{m-1}}{k_{m-1}^2} N_u^{(m)} - \frac{t_{m-1}}{k_{m-1}^2} N_w^{(m)} \right) \\ E_v^{(m)} &= iR \left(-\frac{it_{m-1}}{k_{m-1}^2} N_u^{(m)} D - \frac{ip_{m-1}}{k_{m-1}^2} N_w^{(m)} D - N_v^{(m)} \right) \\ F_\theta^{(m)} &= iR \left(\frac{p_{m+1}}{k_{m+1}^2} K_u^{(m)} - \frac{t_{m+1}}{k_{m+1}^2} K_w^{(m)} \right) \\ F_v^{(m)} &= iR \left(-\frac{it_{m+1}}{k_{m+1}^2} K_u^{(m)} D - \frac{ip_{m+1}}{k_{m+1}^2} K_w^{(m)} D - K_v^{(m)} \right) \\ G_\theta^{(m)} &= -R \left(\frac{p_{m-1}}{k_{m-1}^2} L_u^{(m)} - \frac{t_{m-1}}{k_{m-1}^2} L_w^{(m)} \right) \\ G_v^{(m)} &= -R \left(-\frac{it_{m-1}}{k_{m-1}^2} L_u^{(m)} D - \frac{ip_{m-1}}{k_{m-1}^2} L_w^{(m)} D - L_v^{(m)} \right) \\ H_\theta^{(m)} &= -R \left(\frac{p_{m+1}}{k_{m+1}^2} M_u^{(m)} - \frac{t_{m+1}}{k_{m+1}^2} M_w^{(m)} \right) \\ H_v^{(m)} &= -R \left(-\frac{it_{m+1}}{k_{m+1}^2} M_u^{(m)} D - \frac{ip_{m+1}}{k_{m+1}^2} M_w^{(m)} D - M_v^{(m)} \right) \end{aligned} \quad (\text{G.13})$$

de sorte que, finalement, les équations de l'instabilité secondaire se mettent sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} T^{(m)}\theta^{(m)} + P^{(m)}g_v^{(m)} \\ \quad + A \left[E_\theta^{(m)}\theta^{(m-1)} + E_v^{(m)}g_v^{(m-1)} + F_\theta^{(m)}\theta^{(m+1)} + F_v^{(m)}g_v^{(m+1)} \right] = 0 \\ \frac{1}{k_m^2}(t_m S_w^{(m)} - p_m S_u^{(m)})\theta^{(m)} + \left[\frac{i}{k_m^2}(t_m S_u^{(m)} + p_m S_w^{(m)})D + S_v^{(m)} \right] g_v^{(m)} \\ \quad + A \left[G_\theta^{(m)}\theta^{(m-1)} + G_v^{(m)}g_v^{(m-1)} + H_\theta^{(m)}\theta^{(m+1)} + H_v^{(m)}g_v^{(m+1)} \right] = 0 \end{array} \right. \quad (\text{G.14})$$

Ainsi, le système général ne compte plus que $2(2N + 1)$ équations. On constate aussi une structure tridiagonale de ce système, les éléments non-diagonaux étant proportionnels à A , l'amplitude de l'onde primaire. En particulier, quand $A = 0$, il n'y a plus que des blocs diagonaux (2,2) indépendants (différents problèmes d'instabilité primaire suivant les valeurs de m). Réciproquement, l'influence du couplage entre les termes est d'autant plus importante que A est grand.

Enfin, ce système s'accompagne de valeurs aux limites homogènes : dans son ensemble, (G.14) et les conditions aux limites constituent un problème aux valeurs propres : il n'existe une solution non-identiquement nulle que si l'opérateur tridiagonal ci-dessus est singulier ce qui se traduit par la relation de dispersion annoncée précédemment (IV.9). Numériquement, on va transformer le système différentiel (G.14) en un système algébrique, dont on cherchera les combinaisons en δ , μ , σ pour qu'il soit singulier.

G.2 Remarque sur le non-parallélisme

L'analyse de stabilité secondaire appliquée à l'écoulement de Taylor utilise l'approche classique qui suppose une onde primaire sous forme de mode normal alors qu'on a vu au chapitre II que cette forme n'est pas correcte pour cet écoulement. Le changement de variable proposé pour la stabilité linéaire n'a pas été testé pour la stabilité secondaire en raison de la lourdeur des calculs pour un gain incertain. Cependant, en raison de la non-consistance de l'approche sous forme de mode normal, il n'est pas équivalent d'écrire les équations sous la forme (G.1) puis d'introduire la forme de mode normal ou de les écrire à l'aide de toutes les variables primitives, y compris la pression, puis d'introduire la forme de mode normal.

Afin de pouvoir se comparer aux résultats primaires obtenus à partir des variables primitives on modifie en fait l'écriture en sorte que la formulation soit cohérente avec l'approche primaire écrite à partir des variables primitives (de même que dans la section II.5 on a obtenu deux équations sur la fonction de courant de deux manières différentes). Soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_v^{(m)} = (D^2 - k_m^2)^2 - iR(D^2 - k_m^2)(t_m U_0 - d_m - iV_0 D) \\ \quad + Rk_m^2 \frac{\partial V_0}{\partial y} + iRt_m \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} - R \frac{t_m^2}{k_m^2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} D - R \frac{p_m^2}{k_m^2} \frac{\partial V_0}{\partial y} D^2 \\ S_\theta^{(m)} = iR \frac{p_m t_m}{k_m^2} \left(\frac{\partial V_0}{\partial y} D - \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} \right) \\ T^{(m)} = D^2 - k_m^2 - iR(t_m U_0 - d_m - iV_0 D) - R \frac{p_m^2}{k_m^2} \frac{\partial U_0}{\partial x} \\ P^{(m)} = Rp_m \frac{\partial U_0}{\partial y} + iR \frac{p_m t_m}{k_m^2} \frac{\partial U_0}{\partial x} D \end{array} \right. \quad (\text{G.15})$$

au lieu de (G.4) avec

$$\hat{S}_v^{(m)} = \left[\frac{i}{k_m^2}(t_m S_u^{(m)} + p_m S_w^{(m)})D + S_v^{(m)} \right] \quad \text{et} \quad S_\theta^{(m)} = \frac{1}{k_m^2}(t_m S_w^{(m)} - p_m S_u^{(m)})$$

qui donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_v^{(m)} = (D^2 - k_m^2)^2 - iR(D^2 - k_m^2)(t_m U_0 - d_m - iV_0 D) \\ \quad + Rp_m^2 \frac{\partial V_0}{\partial y} + iRt_m \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} - R \frac{t_m^2}{k_m^2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} D - R \frac{p_m^2}{k_m^2} \frac{\partial V_0}{\partial y} D^2 \\ S_\theta^{(m)} = iR \frac{p_m t_m}{k_m^2} \left(\frac{\partial V_0}{\partial y} D - \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} \right) \\ T^{(m)} = D^2 - k_m^2 - iR(t_m U_0 - d_m - iV_0 D) - R \frac{\partial U_0}{\partial x} \\ P^{(m)} = Rp_m \frac{\partial U_0}{\partial y} \end{array} \right.$$

Discrétisation et troncature

En tronquant la série (IV.8) à N , le système (G.14) peut s'écrire comme un système différentiel du premier ordre en y

$$\frac{d\vec{Z}}{dy} = \mathcal{A} \cdot \vec{Z}$$

avec

$$\vec{Z} = \left[\theta_{-N} \theta'_{-N} v_{-N} v''_{-N} v'_{-N} v_{-N}^{(3)} \dots \theta_0 \theta'_0 v_0 v'_0 v''_0 v_0^{(3)} \dots \theta_N \theta'_N v_N v'_N v''_N v_N^{(3)} \right]^t$$

où pour alléger les notations, on a pris $v_m = g_v^m$, $\theta^{(m)} = \theta_m$ et $x' = \frac{dx}{dy}$. Ce vecteur \vec{Z} est de taille $6(2N + 1)$.

Les conditions aux limites homogènes découlent du fait que les fluctuations de vitesses sont nulles à la paroi débitante et qu'on ne va chercher que des modes variqueux. Elles s'expriment par

$$\forall m \quad \theta_m(1) = v_m(1) = v'_m(1) = 0 \quad \text{et} \quad \forall m \quad \theta'_m(0) = v_m(0) = v''_m(0) = 0$$

Dans le code de calcul écrit pour l'occasion, on utilise alors le schéma compact d'ordre 4 de Malik, voir [MCH82], pour discrétiser le système qui devient du type

$$\mathcal{A}Z = B \text{ avec } B = 0 \tag{G.16}$$

Ce système, bloc-diagonal, contient à la fois le système discrétisé et les conditions aux limites homogènes. La matrice \mathcal{A} dépend de tous les paramètres physiques du problème mais le vecteur B est nul car le système est linéaire et les conditions aux limites sont homogènes.

Le problème aux valeurs propres sous sa forme discrétisée consiste donc à chercher un jeu de paramètres physiques tels que \mathcal{A} soit non-inversible et qu'il existe donc $Z \neq 0$ vérifiant le système. En pratique, l'onde primaire est une donnée du problème et, pour l'analyse temporelle, on choisit μ et δ puis on cherche σ complexe pour rendre \mathcal{A} non-inversible.

Il faut dire ici quelques mots sur la troncature car en pratique pour des raisons de coût numérique les rangs de troncature sont très faibles. Ainsi, la majorité des résultats présentés sont obtenus avec $N = 1$ ou $N = 2$ c'est-à-dire qu'on considère 3 ou 5 termes de la série de Fourier. Une telle troncature n'est justifiée que si la série converge extrêmement vite. Il faudra donc, dans la mesure du possible, essayer de vérifier que

$$\|v_{m+1}\| \ll \|v_m\|, \|\theta_{m+1}\| \ll \|\theta_m\|, \|v_{-m-1}\| \ll \|v_{-m}\|, \|\theta_{-m-1}\| \ll \|\theta_{-m}\| \tag{G.17}$$

pour m de l'ordre de N .

Annexe H

Réceptivité par la méthode de Hill

H.1 Méthode de Hill par système adjoint pour la couche limite

Hill étudie la réceptivité de couches limites et se place donc sur un domaine en y allant de 0 à l'infini. Par ailleurs, le problème est supposé parallèle. La méthode utilisée par Hill [Hil95] est la suivante.

Le système des équations de Navier-Stokes linéarisées est écrit sous la forme

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + L(\vec{U})\vec{u} + \vec{\nabla} p = 0 \end{cases} \quad (\text{H.1})$$

où la i^e composante de $L(\vec{U})$ est telle que

$$(L(\vec{U})\vec{u})_i = \bar{U}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

en convention de sommation sur l'indice répété avec x_1, x_2, x_3 les coordonnées cartésiennes et u_i la perturbation de vitesse selon la direction x_i .

Une identité de Lagrange peut toujours être écrite entre deux champs $s = (\vec{u}, p)$ et $\tilde{s} = (\vec{\tilde{u}}, \tilde{p})$ même si ceux-ci ne vérifient pas (H.1) :

$$\left[\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + L(\vec{U})\vec{u} + \vec{\nabla} p \right) \cdot \vec{\tilde{u}} + \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \tilde{p} \right] + \left[\vec{\tilde{u}} \cdot \left(\frac{\partial \vec{\tilde{u}}}{\partial t} + \tilde{L}(\vec{U})\vec{\tilde{u}} + \vec{\nabla} \tilde{p} \right) + p \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{u}} \right] = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\tilde{u}} \cdot \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot J(s, \tilde{s}) \quad (\text{H.2})$$

où $\tilde{L}(\vec{U})$ est un opérateur adjoint de composantes

$$(\tilde{L}(\vec{U})\vec{\tilde{u}})_i = \bar{U}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \tilde{u}_j \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathcal{R}_e} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j^2}$$

et le vecteur $J(s, \tilde{s})$ a pour composantes

$$(J(s, \tilde{s}))_j = u_i \tilde{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} \tilde{u}_i$$

$$\text{où } \sigma_{ij} = p \delta_{ij} - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \bar{U}_j u_i, \quad \text{et } \tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{p} \delta_{ij} + \frac{1}{\mathcal{R}_e} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}.$$

avec δ_{ij} le symbole de Kronecker. L'écriture de l'identité de Lagrange et la définition de \tilde{L} et $\tilde{\sigma}$ ne sont pas uniques.

L'examen du second terme entre crochets de (H.2) suggère de définir les équations adjointes de (H.1) :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{u}} = 0 \\ \frac{\partial \vec{\tilde{u}}}{\partial t} + \tilde{L}(\vec{U})\vec{\tilde{u}} + \vec{\nabla} \tilde{p} = 0 \end{cases} \quad (\text{H.3})$$

Si l'écoulement de base est strictement parallèle, on peut introduire deux champs

$$s = (\vec{u}, p) = (\vec{u}_{\alpha\omega}, p_{\alpha\omega})e^{i(\alpha x - \omega t)} = s_{\alpha\omega}e^{i(\alpha x - \omega t)} \text{ et } \tilde{s} = (\vec{u}, \tilde{p}) = (\vec{u}_{\tilde{\alpha}\tilde{\omega}}, \tilde{p}_{\tilde{\alpha}\tilde{\omega}})e^{-i(\tilde{\alpha}x - \tilde{\omega}t)} = \tilde{s}_{\tilde{\alpha}\tilde{\omega}}e^{-i(\tilde{\alpha}x - \tilde{\omega}t)} \quad (\text{H.4})$$

respectivement solutions du problème homogène direct (H.1) et du problème homogène adjoint (H.3).

Puisque ces champs sont solutions de (H.1) et (H.3), la substitution dans (H.2) conduit à un premier membre nul. Après intégration selon y , et moyennant que les vitesses fluctuantes directe et adjointe¹ s'annulent aux extrémités du domaine, il vient

$$-(\omega - \tilde{\omega})\langle s_{\alpha\omega}, s_{\tilde{\alpha}\tilde{\omega}} \rangle + (\alpha - \tilde{\alpha})[s_{\alpha\omega}, s_{\tilde{\alpha}\tilde{\omega}}] = 0 \quad (\text{H.5})$$

avec

$$\langle s_{\alpha\omega}, s_{\tilde{\alpha}\tilde{\omega}} \rangle = \int_0^\infty \vec{u} \cdot \vec{u} dy, \text{ et } [s_{\alpha\omega}, s_{\tilde{\alpha}\tilde{\omega}}] = \int_0^\infty \vec{x} \cdot J(s, \tilde{s}) dy$$

avec \vec{x} le vecteur directeur de l'axe des abscisses; dans la suite, on notera \vec{y} celui des ordonnées.

Si on considère un problème de stabilité spatiale, ω et $\tilde{\omega}$ sont choisis réels et égaux.

L'équation d'Orr-Sommerfeld pour la couche limite de Blasius (*i.e. en milieu semi-infini*) admet un nombre fini de modes propres discrets $s_{\alpha_n\omega}(y)$, $n = 1, \dots, N(\omega)$ de nombres d'onde spatiaux α_n et quatre branches continues de solutions $s_{k\omega}^{(\nu)}(y)$, $\nu = 1, \dots, 4$ de nombres d'onde spatiaux $\alpha_k^{(\nu)}$ paramétrés par $0 \leq k < \infty$.

Les fonctions propres constituent un système bi-orthogonal

$$\begin{aligned} [s_{\alpha_n\omega}, \tilde{s}_{\alpha_m\omega}] &= \delta_{nm}, \quad n, m = 1, \dots, N(\omega) \\ [s_{k\omega}^{(\nu)}, \tilde{s}_{\alpha_n\omega}] &= [s_{\alpha_n\omega}, \tilde{s}_{k\omega}^{(\nu)}] = 0, \quad \nu = 1, \dots, 4 \\ [s_{k\omega}^{(\nu)}, \tilde{s}_{k'\omega}^{(\mu)}] &= \delta(k - k')\delta_{\nu\mu}, \quad \nu, \mu = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

pour des champs normalisés par la condition $[s, \tilde{s}] = 1$.

En effet, la relation (H.5) écrite avec $\omega = \tilde{\omega}$ implique immédiatement l'orthogonalité si $\alpha \neq \tilde{\alpha}$. L'hypothèse implicite que si $\alpha = \tilde{\alpha}$ alors $[s_{\alpha\omega}, \tilde{s}_{\alpha\omega}] \neq 0$ n'est valable qu'en dehors des points de branchements avec $d\omega/d\alpha = 0$ qu'il faut donc éviter. Par ailleurs, le fait qu'un couple (ω, α) soit à la fois solution du problème direct et du problème adjoint découle des relations habituelles entre valeurs propres des problèmes adjoints entre eux.

Hill affirme alors que si $s(x, y)e^{-i\omega t}$ est solution des équations homogènes (H.1), il peut s'exprimer comme

$$s(x, y)e^{-i\omega t} = \sum_{n=1}^{N(\omega)} a_n s_{\alpha_n\omega}(y) e^{i(\alpha_n x - \omega t)} + \sum_{\nu=1}^4 \int_0^\infty A_k^\nu s_{k\omega}^{(\nu)}(y) e^{i(\alpha_k^{(\nu)} x - \omega t)} dk$$

où a_n et $A_k^{(\nu)}$ sont des constantes. Cette écriture suppose que les modes propres (branches continues + modes discrets) constituent un ensemble complet de solutions du problème homogène².

Pour déterminer la constante a_m , il suffit d'utiliser la fonction propre adjointe correspondante $\tilde{s}_m(y)e^{-i(\alpha_m x - \omega t)}$ et de calculer $[s, \tilde{s}_m]$ soit

$$\int_0^\infty \vec{x} \cdot J(s, \tilde{s}_m) dy = \sum_{n=1}^{N(\omega)} a_n [s_{\alpha_n\omega}, \tilde{s}_{\alpha_m\omega}] e^{i(\alpha_n - \alpha_m)x} + \sum_{\nu=1}^4 \int_0^\infty A_k^\nu [s_{k\omega}^{(\nu)}, \tilde{s}_{\alpha_m\omega}] e^{i(\alpha_k^{(\nu)} - \alpha_m)x} dk = a_m \quad (\text{H.6})$$

Ceci permet à Hill de résoudre de façon générale des problèmes de réponse forcée. Ceux-ci contiennent *a priori* (une difficulté majeure est l'identification précise de ces termes qu'on suppose connus)

– des sources de quantité de mouvement oscillantes notées $\vec{q}(x, y; \omega)e^{-i\omega t}$;

1. Ceci permet de connaître, par une simple intégration par partie, les conditions aux limites à associer au problème (H.3).

2. Cette propriété n'a rien d'évident mais Salwen et Grosch [SG81] affirment qu'elle est vérifiée.

- des sources de masse oscillantes notées $\psi(x, y; \omega)e^{-i\omega t}$;
- des conditions oscillantes à la paroi $y = 0$ données par $\vec{v}_b(x; \omega)e^{-i\omega t}$.

Toutes ces sources sont supposées n'exister que dans une région bornée strictement comprise entre deux abscisses x_1 et x_2 .

Les équations linéarisées des fluctuations de pulsation ω pour un écoulement parallèle sont

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \psi(x, y; \omega) \\ -i\omega \vec{u} + L(\vec{U}\vec{x})\vec{u} + \vec{\nabla} p = \vec{q}(x, y; \omega) \\ \vec{u} = \vec{v}_b(x; \omega) \quad \text{en } y = 0 \\ \vec{u} \rightarrow \vec{0} \quad \text{quand } y \rightarrow \infty \end{cases} \quad (\text{H.7})$$

Soit $s = (\vec{u}, p)e^{-i\omega t}$ une solution du système inhomogène (H.7) et $\tilde{s}_{\alpha\omega} = (\vec{u}_{\alpha\omega}, p_{\alpha\omega})e^{-i(\alpha x - \omega t)}$ l'adjoint du mode de nombre d'onde α dont on souhaite déterminer l'amplitude à l'aval du forçage. Si on introduit ces deux champs dans l'identité de Lagrange (H.2) et qu'on intègre selon y , il vient (en constatant que le produit des vitesses fluctuantes est stationnaire donc de dérivée temporelle nulle et en tenant compte des conditions à la limite infinie)

$$\int_0^\infty \vec{q}(x, y; \omega) \cdot \vec{u}_{\alpha\omega}(y) e^{-i\alpha x} dy + \int_0^\infty \psi(x, y; \omega) \tilde{p}_{\alpha\omega}(y) e^{-i\alpha x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\infty J(s, \tilde{s}_{\alpha\omega}) dy \right) - \{ \vec{y} \cdot J(s, \tilde{s}_{\alpha\omega}) \}_{y=0} \quad (\text{H.8})$$

D'après la définition de J , comme $\vec{u}_{\alpha\omega}(0) = 0$ et $\vec{u}(x, 0; \omega) = \vec{v}_b(x; \omega)$, la composante de J selon y en $y = 0$ est

$$\vec{v}_b(x; \omega) \cdot \tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\omega} e^{-i\alpha x} \quad \text{où} \quad \tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\omega} = \left(\tilde{p}_{\alpha\omega} \vec{y} + \frac{1}{\mathcal{R}_e} \frac{\partial \vec{u}_{\alpha\omega}}{\partial y} \vec{x} \right)_{y=0}$$

Hill appelle $\tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\omega}$ la contrainte adjointe.

L'équation (H.8) est ensuite intégrée entre x_1 et x_2 . Comme ces abscisses sont en dehors du domaine des sources (l'une à l'amont et l'autre à l'aval), les perturbations satisfont les équations homogènes, elles peuvent donc se décomposer en une somme de modes purement spatiaux ce qui justifie l'utilisation de la relation (H.6)

$$\left[\int_0^\infty \vec{x} \cdot J(s, \tilde{s}) dy \right]_{x_1}^{x_2} = (a^{(2)} - a^{(1)})$$

pour un mode propre normalisé avec $[s_{\alpha\omega}, \tilde{s}_{\alpha\omega}] = 1$. La substitution de ce terme dans l'équation (H.8) intégrée donne alors

$$\begin{aligned} a^{(2)} - a^{(1)} = & \int_{x_1}^{x_2} \int_0^\infty \vec{q}(x, y; \omega) \cdot \vec{u}_{\alpha\omega}(y) e^{-i\alpha x} dy dx \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \int_0^\infty \psi(x, y; \omega) \tilde{p}_{\alpha\omega}(y) e^{-i\alpha x} dy dx \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \vec{v}_b(x; \omega) \cdot \tilde{\mathcal{S}}_{\alpha\omega}(y) e^{-i\alpha x} dx \end{aligned} \quad (\text{H.9})$$

L'équation (H.9) est importante puisqu'elle permet d'estimer l'efficacité de chaque type de source à créer du mode propre. Il suffit pour cela de calculer le problème adjoint ce qui est aussi simple que le calcul du problème direct. En fait, la complexité réside plutôt dans l'estimation des sources \vec{q} , ψ et \vec{v}_b .

H.2 Modifications pour l'écoulement de Taylor

Les définitions de l'identité de Lagrange (H.2) et du système adjoint (H.3) sont générales et n'ont pas à être modifiées si on veut appliquer la méthode à l'écoulement de Taylor.

Le problème crucial qui se pose est celui du non-parallélisme puisqu'il remet en question l'utilisation de la forme de mode normal qui apparaît chez Hill dès la relation (H.4). Comme on a vu au chapitre II que cette forme donne des résultats satisfaisants à condition de conserver les termes non-parallèles de l'écoulement de base, on va admettre qu'on peut faire de même pour calculer la réceptivité. Ce choix injustifié est principalement motivé par l'absence d'alternative³...

Le passage d'un milieu semi-infini à un milieu borné $y \in [0, 1]$ (ou $y \in [-1, 1]$ si on n'impose pas de symétrie) change les caractéristiques du spectre de l'opérateur de stabilité. On sait que le spectre de l'opérateur d'Orr-Sommerfeld en milieu borné contient une infinité de modes propres discrets mais pas de partie continue, on admet sans grand risque qu'il en est de même pour l'opérateur non-parallèle.

L'ensemble des modes propres du problème homogène est $s_{\alpha_n \omega}(y)$, $n \in \llbracket 1, \infty \llbracket$ avec

$$[s_{\alpha_n \omega}, \bar{s}_{\alpha_m \omega}] = \delta_{nm}, \quad n, m \in \llbracket 1, \infty \llbracket$$

Si on suppose que cet ensemble est complet, les résultats de Hill s'appliquent directement à l'écoulement de Taylor. Les seules différences viennent du fait que la paroi est désormais en $y = 1$ d'où un léger changement dans la contrainte adjointe

$$\tilde{S}_{\alpha \omega} = \left(\tilde{p}_{\alpha \omega} \vec{y} + \frac{1}{\mathcal{R}_e} \frac{\partial \tilde{u}_{\alpha \omega}}{\partial y} \vec{x} \right)_{y=1}$$

et des conditions aux limites sur l'axe qui ne sont pas du même type que celles imposées à l'infini. Pour le problème direct, on cherche des modes variqueux d'où sur l'axe $v(0) = \frac{\partial u}{\partial y}(0) = 0$. Pour pouvoir écrire (H.5), il faut prendre les mêmes conditions pour le problème adjoint⁴ $\tilde{v}(0) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(0) = 0$ (ce que montre l'intégration par partie de (H.2)). Les conditions à la paroi sont inchangées et restent identiques pour le problème direct et pour le problème adjoint $u(1) = v(1) = \tilde{u}(1) = \tilde{v}(1) = 0$.

Par ailleurs, toutes les fonctions propres adjointes sont en fait paramétrées par x de même que α .

Finalement, moyennant plusieurs hypothèses injustifiées, on peut tenter d'étudier la réceptivité de l'écoulement de Taylor à l'aide de la formule (H.9) de Hill.

H.3 Cas des rugosités de parois et des défauts d'injection

Une idée simple du principe de réceptivité liée à une perturbation stationnaire (ce n'est pas toujours le cas, comme l'indique l'exemple de l'admittance de paroi) est la suivante: l'instabilité est créée par la combinaison quadratique de l'acoustique, notée (\vec{u}_{ac}, p_{ac}) , qui apporte l'échelle temporelle (par le biais de sa fréquence) sans introduire d'échelle de longueur (supposée infinie ou, du moins, très grande devant celle de l'instabilité) et de la perturbation stationnaire, notée (\vec{U}', P') , qui apporte l'échelle de longueur (puisque'elle est supposée localisée en espace) sans introduire d'échelle de temps (puisque stationnaire).

La prise en compte de cette combinaison quadratique dans les équations linéaires définissant l'évolution de l'instabilité donne

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \\ -i\omega \vec{u} + L(\vec{U}')\vec{u} + \vec{\nabla} p &= -\vec{x} \left(V' \frac{du_{ac}}{dy} + u_{ac} \frac{\partial U'}{\partial x} \right) - \vec{y} u_{ac} \frac{\partial V'}{\partial x} \end{aligned}$$

(où on rappelle que $\vec{u}_{ac} = \vec{x} u_{ac}(y) e^{-i\omega t}$ est supposé ne pas dépendre de x) ce qui permet de voir que

$$\psi(x, y; \omega) = 0 \quad \text{et} \quad \vec{q}(x, y; \omega) = -\vec{x} \left(V' \frac{du_{ac}}{dy} + u_{ac} \frac{\partial U'}{\partial x} \right) - \vec{y} u_{ac} \frac{\partial V'}{\partial x} \quad (\text{H.10})$$

3. Il est peu utile d'imposer une forme $x^\lambda f(y)$ puisqu'on souhaite appliquer les résultats de réceptivité à des abscisses faibles où cette forme est presque aussi injustifiée que la forme de mode normal.

4. Ceci est valable même en tenant compte de la vitesse verticale moyenne parce qu'elle s'annule sur l'axe.

Dès lors, la formule (H.9) permet théoriquement le calcul de réceptivité. Néanmoins, ce calcul est peu commode en pratique et Hill lui substitue une approche beaucoup plus élégante et efficace dans le cas de la réceptivité liée à une rugosité de surface ou à un défaut de vitesse d'injection⁵ supposés tous deux connus et décrits par une loi de hauteur $h(x)$ pour la rugosité et une loi de défaut d'injection à la paroi $\vec{U}_s(x)$.

On suppose la rugosité ou le défaut de l'injection localisé entre les abscisses x_1^I et x_2^I . On se place à nouveau en milieu semi-infini comme dans le cas de la couche limite et la paroi est située en $y = 0$. Le champ de perturbation stationnaire est décrit par

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{U}' = 0 \\ L(\vec{U})\vec{U}' + \vec{\nabla} P' = \vec{0} \\ \vec{U}' = -h(x) \frac{du_{ac}}{dy} \vec{x} & \text{en } y = 0 \text{ (rugosité de paroi)} \\ \vec{U}' = \vec{U}_s(x) & \text{en } y = 0 \text{ (défaut de l'injection)} \\ \vec{U}' \rightarrow 0 & \text{quand } y \rightarrow \infty \text{ et quand } x \rightarrow \pm\infty \end{cases}$$

Les équations donnant naissance à l'instabilité s'écrivent pour leur part

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ -i\omega \vec{u} + L(\vec{U})\vec{u} + \vec{\nabla} p = -\vec{x} \left(V' \frac{du_{ac}}{dy} + u_{ac} \frac{\partial U'}{\partial x} \right) - \vec{y} u_{ac} \frac{\partial V'}{\partial x} \\ \vec{u} = -h(x) \frac{du_{ac}}{dy} \vec{x} & \text{en } y = 0 \text{ (rugosité de paroi)} \\ \vec{u} = \vec{0} & \text{en } y = 0 \text{ (défaut de l'injection)} \\ \vec{u} = \vec{0} & \text{quand } y \rightarrow \infty \end{cases}$$

L'insertion des termes sources dans (H.9) suivie d'une intégration par partie entraîne

$$a^{(2)} - a^{(1)} = A_1 + A_2$$

avec

$$A_1 = - \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^\infty dy \vec{U}'(x, y) \vec{Q}(y) e^{-i\alpha x} + \Gamma'(x_1, x_2)$$

$$\text{où } \vec{Q}(y) = i\alpha u_{ac} \tilde{u}_{\alpha\omega} \vec{x} + \left(i\alpha u_{ac} \tilde{v}_{\alpha\omega} + \tilde{u}_{\alpha\omega} \frac{du_{ac}}{dy} \right) \vec{y} \quad (\text{H.11})$$

et Γ' contient les termes de bords $(- \left[\int_0^\infty (\vec{U}' u_{ac}) \cdot \vec{u}_{\alpha\omega} e^{-i\alpha x} dy \right]_{x_1}^{x_2})$;

$$A_2 = - \left(\frac{du_{ac}}{dy} \right)_{y=0} (\vec{x} \cdot \vec{\mathcal{S}}_{\alpha\omega}) \int_{x_1}^{x_2} h(x) e^{-i\alpha x} dx \quad (\text{rugosité de paroi})$$

$$A_2 = 0 \quad (\text{défaut de l'injection})$$

Plutôt qu'intégrer directement ces contributions, Hill définit alors un nouveau problème adjoint (stationnaire)

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot (\vec{U}(y) e^{-i\alpha x}) = 0 \\ \tilde{L}(\vec{U})(\vec{U}(y) e^{-i\alpha x}) + \vec{\nabla}(\vec{P}(y) e^{-i\alpha x}) = \vec{Q}(y) e^{-i\alpha x} \\ \vec{U} = 0 \quad \text{en } y = 0, y = \infty \end{cases} \quad (\text{H.12})$$

Le problème est inhomogène aux dérivées ordinaires et se résout numériquement par une simple inversion de matrice. En remplaçant \vec{Q} dans l'expression de A_1 , puis en appliquant l'identité de

5. Hill prend comme cas de référence le cas sans injection/succion à la paroi et étudie l'effet de celle-ci. Mais comme pour l'écoulement de Taylor le cas de base est l'injection, c'est le défaut/excès d'injection qui constitue la déformation stationnaire.

Lagrange (H.2),

$$\begin{aligned}
A_1 &= - \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^\infty dy \vec{U}'(x, y) \cdot \left\{ \tilde{L}(\vec{U})(\vec{U}(y)e^{-i\alpha x}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{P}(y)e^{-i\alpha x}) \right\} + \Gamma'(x_1, x_2) \\
&= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^\infty dy \left\{ (L(\vec{U})(\vec{U}') + \vec{\nabla} \cdot (\vec{P}')) \cdot \vec{U} e^{-i\alpha x} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{J}(S', \tilde{S})) \right\} + \Gamma'(x_1, x_2) \\
&= \left(\tilde{P}\vec{y} + \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{d\tilde{U}}{dy} \vec{x} \right)_{y=0} \cdot \int_{x_1}^{x_2} dx \vec{U}'(x, 0) e^{-i\alpha x} + \Gamma(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

$$\text{avec } \Gamma = \Gamma' - \int_0^\infty [\vec{x} \cdot \vec{J}(S', \tilde{S})]_{x_1}^{x_2} dy$$

Le terme $\Gamma(x_1, x_2)$ représente la contribution des effets de réceptivité hors de l'intervalle $[x_1, x_2]$. Si on suppose que l'effet de la perturbation n'est pas ressenti loin la source, $\Gamma(x_1, x_2)$ peut être négligé quand x_2 devient grand *i.e.* quand on calcule la contribution totale de la source à l'amplitude de l'instabilité.

Avec l'hypothèse que la rugosité de paroi ou le défaut d'injection est localisé entre x_1^I et x_2^I , l'amplitude de l'onde d'instabilité s'écrit

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{P}\vec{y} + \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{d\tilde{U}}{dy} \vec{x} \right)_{y=0} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \vec{U}'(x, 0) e^{-i\alpha x} dx &= -\frac{1}{\mathcal{R}} \frac{d\tilde{U}}{dy} \frac{du_{ac}}{dy} \int_{x_1^I}^{x_2^I} h(x) e^{-i\alpha x} dx \quad (\text{rugosité de paroi}) \\
&= \left(\tilde{P}\vec{y} + \frac{1}{\mathcal{R}_{inj}} \frac{d\tilde{U}}{dy} \vec{x} \right)_{y=0} \cdot \int_{x_1^I}^{x_2^I} \vec{U}_s(x) e^{-i\alpha x} dx \quad (\text{défaut de l'injection})
\end{aligned} \tag{H.13}$$

L'hypothèse que $\Gamma(x_1, x_2)$ peut être négligé quand x_2 devient grand entraîne que la connaissance du défaut sur l'intervalle $[x_1^I, x_2^I]$ est suffisante. Ceci doit être compris de la façon suivante. Pour connaître l'amplitude de l'instabilité très loin à l'aval, il suffit d'intégrer sur l'intervalle $[x_1^I, x_2^I]$ mais l'amplitude juste au-delà de x_2^I distincte de celle (H.13) est pour sa part inconnue, la différence entre les deux étant justement $\Gamma(x_1, x_2^I)$. En effet, la perturbation stationnaire s'étend au-delà de la zone du défaut de vitesse d'injection, *i.e.* U' n'est pas nul partout pour $x > x_2^I$, donc la contribution de l'intervalle $[x_2^I, x_2]$ de l'intégrale (H.11) est non-nulle. Mais pour connaître la contribution globale du défaut de l'injection, il suffit de considérer le défaut de vitesse à la paroi $[x_1^I, x_2^I]$ grâce à (H.13). Cette information est moins riche que celle de (H.11) mais son obtention est aisée alors que (H.11) est très peu utilisable en pratique.

Annexe I

Relation de Rossiter

I.1 Forme et signification de la relation de Rossiter [Ros64]

En 1964, Rossiter [Ros64] propose une relation décrivant les boucles d'auto-oscillation de systèmes impliquant un couplage entre un détachement tourbillonnaire et une onde acoustique. Cette relation, bien que simple, donne des informations intéressantes exploitées par Ugurtas [Ugu00] dans le montage VECLA.

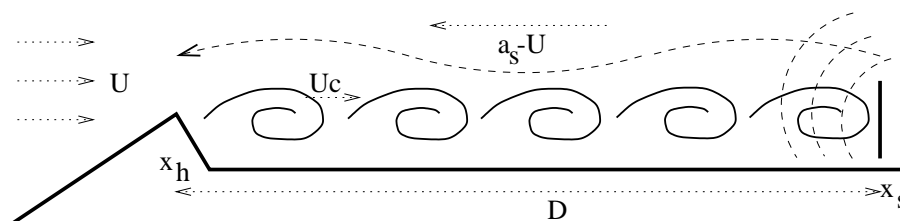


FIG. I.1 – Schéma d'un système en oscillations auto-entretenues avec des tourbillons issus d'une couche cisailée impactant sur un obstacle.

On suppose un système en oscillations auto-entretenues du type de la figure I.1. Des tourbillons sont émis sous l'action d'une onde acoustique en un point x_h , dénommé point de référence hydrodynamique (émission liée à l'instabilité d'une couche cisailée dans le cas de la figure I.1). Ils sont advectés par l'écoulement à une vitesse U_c . A chaque passage au point x_s (surface d'impact dans le cas de la figure I.1) situé à une distance D de x_h , une onde acoustique est produite en x_s qui remonte l'écoulement à la vitesse $a_s - U$ avec a_s la vitesse du son et U la vitesse de l'écoulement. Lorsque cette onde atteint le point x_h , elle provoque le détachement d'un nouveau tourbillon.

La relation de Rossiter exprime que le retour acoustique engendré par l'impact du tourbillon doit être en phase avec l'accrochage d'où un critère qui requiert qu'un nombre entier de périodes de l'accrochage doit s'écouler entre l'émission du tourbillon et le retour au point de référence hydrodynamique de l'onde qu'il produit. Soit τ_h le temps correspondant à la convection des tourbillons de x_h à x_s , puis Δt un délai entre l'impact du tourbillon et la création de l'onde acoustique, et τ_r le temps de voyage de l'onde acoustique de x_s à x_h . Le critère de phase s'exprime

$$mT = \tau_h + \Delta t + \tau_r$$

où T est la période de résonance. Le paramètre m est supposé entier, c'est un mode d'oscillation qui peut être assimilé à un nombre de tourbillons présents entre x_h et x_s . Le délai est généralement

supposé proportionnel¹ à la période d'accrochage

$$\Delta t = -\epsilon T$$

où le terme empirique ϵ est appelé "correction de bout".

La relation de Rossiter s'écrit alors, pour des vitesses d'écoulement U et de convection U_c indépendantes de x ,

$$T(m + \epsilon) = \tau_h + \tau_r = \frac{D}{U_c} + \frac{D}{a_s - U} \quad (\text{I.1})$$

Il ne s'agit pas d'une formule établie de façon très rigoureuse (en particulier à cause de la correction de bout qui contient les inexactitudes du scénario de résonance) mais bien plutôt d'une corrélation permettant une description efficace des phénomènes d'auto-oscillation.

Une remarque importante doit être faite sur le rôle de l'acoustique dans le mécanisme de Rossiter. Les ondes acoustiques qui assurent la fermeture de la boucle d'auto-oscillation n'ont rien à voir *a priori* avec d'éventuels modes de cavité. Elles sont supposées exciter les instabilités à leur passage au point hydrodynamique de référence puis se propager jusqu'à l'infini amont. Les résonances aéroacoustiques étudiées dans ce manuscrit sont probablement plus complexes puisque des réflexions sur le fond avant sont à envisager, en particulier lorsque la résonance se produit sur un mode de cavité. Néanmoins, dans un souci de simplicité, on s'en tient au seul couplage de Rossiter sans chercher à l'intégrer dans un scénario plus complexe prenant en compte les modes de cavité.

I.2 Utilisation de la relation dans VECLA

L'utilisation de (I.1) par Ugurtas [Ugu00] pour corréler les mesures de l'accrochage dans VECLA a deux intérêts majeurs pour notre étude

- la détermination du nombre de tourbillons qu'on compare aux prévisions de stabilité à la sous-section V.4.3
- la détermination d'un point de référence hydrodynamique x_h . En effet, ce dernier est clairement défini par l'origine de la couche cisailée dans la figure I.1 mais on n'a aucune idée de sa localisation dans VECLA. La signification de l'abscisse x_h n'a d'ailleurs rien évident mais si on admet qu'il s'agit de l'endroit où les phases de l'acoustique et de l'instabilité s'accordent car leur interaction est maximale (ce qui se produit dans le cas d'une couche cisailée), on peut admettre que x_h correspond à une zone de réceptivité maximale de l'instabilité vis-à-vis de l'acoustique. C'est l'hypothèse effectuée à la sous-section V.3.2 avec un résultat peu probant.

La relation de Rossiter n'est utilisée que pour décrire l'accrochage aéroacoustique observé dans VECLA à vitesse d'injection variable. La signature de l'accrochage est visible sur la figure V.5 qui montre une évolution fréquentielle constituée de plages de nombres de Strouhal constants (définis ci-dessous) entrecoupées de sauts. C'est de la mesure des fréquences et de leurs sauts associée à la relation de Rossiter qu'Ugurtas tire des renseignements précieux.

Rappelons la démarche d'Ugurtas [Ugu00] et l'utilisation des mesures. L'hypothèse principale consiste à poser que chaque saut de fréquence observé lors de l'accrochage aéroacoustique correspond au passage d'un mode d'oscillation m au mode d'oscillation voisin $m + 1$ ou $m - 1$ (selon le sens de variation des paramètres). Cela s'interprète par l'apparition (ou la disparition) d'un tourbillon entre x_h et x_s , phénomène observé dans le cas de la figure I.1, par exemple, lorsque la vitesse U est modifiée.

1. On choisit la relation $\Delta t = -\epsilon T$ avec $\epsilon \geq 0$ pour être cohérents avec les notations d'Ugurtas auquel on se compare mais comme Δt est *a priori* positif, il serait plus naturel de prendre $\Delta t = \epsilon T$ avec $\epsilon \geq 0$ comme le font Dotson *et al.* [DKP97].

La vitesse de convection est supposée égale à une fraction de la vitesse moyenne

$$U_c(x) = \gamma \bar{U}(x) \quad \text{avec } \bar{U}(x) = x$$

où $\bar{U}(x)$ est la vitesse moyenne sur une section selon y . Ugurtas suppose le paramètre γ constant avec $\gamma = 0.42$ mesuré hors accrochage. Il est obligé de faire cette hypothèse car la mesure de γ par intercorrélations n'est pas possible lors de l'accrochage comme on peut le voir sur la figure V.6. Néanmoins, elle est remise en cause à la sous-section V.4.3 où on suggère d'utiliser plutôt la vitesse de groupe de la stabilité.

La dernière simplification, très pratique pour les calculs, consiste à négliger le temps de retour acoustique τ_r devant le temps de convection des tourbillons τ_h .

Dans ces conditions, la formule de Rossiter transformée par Ugurtas pour l'écoulement de Taylor linéairement accéléré devient

$$T(m + \epsilon) = \tau_h + \tau_r \approx \tau_h = \int_{x_h}^{x_s} \frac{1}{U_c(x)} dx = \frac{1}{\gamma} \ln \left[\frac{x_s}{x_h} \right]$$

Si on définit, ainsi qu'Ugurtas, le nombre de Strouhal comme la fréquence adimensionnelle pour l'adimensionnement habituel de cette thèse (utilisé dans les formules ci-dessus)

$$St = f^* h / V_{inj} \quad \text{avec } f^* \text{ fréquence dimensionnelle}$$

alors le nombre de Strouhal associé à une plage de l'accrochage sur le mode d'oscillation m vaut (puisque $T = 1/St$ car la période adimensionnelle est l'inverse de la fréquence adimensionnelle c'est-à-dire du nombre de Strouhal)

$$St_m = \frac{\gamma(m + \epsilon)}{\ln \left[\frac{x_s}{x_h} \right]}$$

Dès lors, le saut de nombre de Strouhal d'une plage à la suivante (*i.e.* de m à $m \pm 1$) s'écrit

$$\Delta St = \frac{\gamma}{\ln \left[\frac{x_s}{x_h} \right]}$$

L'abscisse de référence hydrodynamique s'écrit donc

$$x_h = \frac{x_s}{\exp \left(\frac{\gamma}{\Delta St} \right)}$$

Dans ce manuscrit, on prend toujours la valeur moyenne $\Delta St \sim 0.4$ mesurée par Ugurtas, par contre la valeur $\gamma = 0.42$ mesurée hors accrochage est parfois remplacée par la vitesse de groupe prévue par la stabilité pour la pulsation sur laquelle l'accrochage se produit. La valeur de x_s est choisie égale à 29 comme le fait Ugurtas en raison de la présence d'une marche à l'aval de VECLA alors que le canal débouche à $x = 30$ mais les calculs montrent que la différence est très faible.

Remarquons également qu'on a

$$m + \epsilon = \frac{St_m}{\Delta St}$$

ainsi les nombres de tourbillons et correction de bout d'Ugurtas auxquels on se compare à la sous-section V.4.3 ne dépendent que du nombre de Strouhal mesuré pendant la plage d'accrochage et du saut de nombre de Strouhal au changement de plage. Ils sont donc indépendants² du paramètre γ dont la détermination est incertaine.

2. Disons plutôt que la dépendance est très faible car les formules utilisées précédemment supposent déjà γ indépendant du mode d'oscillation m .

Au final, les deux informations comparées dans ce manuscrit sont

- la somme $m + \epsilon$ du nombre de tourbillons et de la correction de bout dont la détermination expérimentale est fiable puisqu'elle ne nécessite que la mesure de la fréquence de chaque plage d'accrochage qui donne le saut de fréquence d'une plage à la suivante;
- le point hydrodynamique de référence x_h dont la détermination expérimentale est incertaine puisqu'elle nécessite l'estimation de la vitesse de convection des tourbillons qui n'est connue qu'en dehors de l'accrochage. Ceci explique la discussion sur la valeur de γ dans la sous-section V.4.3

Annexe J

Le bilan acoustique

La méthode du bilan acoustique est la plus répandue pour la prévision de la stabilité des modes acoustiques internes des moteurs à propergol solide. Citons comme références sur le sujet : Culick [Cul75], Flandro [Fla95] et Dupays [Dup96].

Malgré ses limites et ses défauts, elle permet la prise en compte de multiples phénomènes qui n'ont pas été abordés dans ce manuscrit mais qui sont nécessaires à une prévision complète de la stabilité des moteurs. Il est important de noter que cette analyse de stabilité n'a rien à voir avec celle du champ hydrodynamique puisqu'elle vise à jauger l'évolution temporelle des modes acoustiques de cavité amplifiés par certains mécanismes (dont les instabilités hydrodynamiques) et atténués par d'autres.

On rappelle ici la démarche de Flandro [Fla95] pour l'écoulement sans détachement tourbillonnaire avant de parler de l'intégration de ce dernier dans le bilan acoustique effectuée à nouveau par Flandro dans la référence [Fla86]. On utilise ses notations pour l'essentiel.

La méthode est linéaire : les différentes grandeurs sont décomposées en une partie moyenne G et une partie fluctuante g' supposée petite devant G . Les équations de Navier-Stokes sont linéarisées vis-à-vis de la partie fluctuante puis combinées entre elles de la façon usuelle pour obtenir une équation des ondes acoustiques. Les fluctuations étant recherchées sous une forme sinusoïdale en temps " $g' \exp(ikt)$ ", l'équation résultante sur la pression est mise sous la forme

$$\vec{\nabla}^2 p' + k^2 p' = h \quad (\text{J.1})$$

avec les conditions aux limites

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla} p' = -f \quad (\text{J.2})$$

où \vec{n} est la normale extérieure aux limites du domaine acoustique et

$$\begin{aligned} h &= -ikM_{inj}\vec{U} \cdot \vec{\nabla} p' - M_{inj}\vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla}(\vec{u}' \cdot \vec{U}) - \vec{u}' \wedge \vec{\Omega} - \vec{U} \wedge \vec{\omega}'] \\ f &= -ik\vec{n} \cdot \vec{u}' + M_{inj}\vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \vec{u}' \cdot \vec{U} - \vec{u}' \wedge \vec{\Omega} - \vec{U} \wedge \vec{\omega}') + \delta^2 \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{\omega}' \end{aligned}$$

avec M_{inj} le nombre de Mach d'injection et δ^2 le nombre de Reynolds acoustique $a_s L / \nu$ basé sur la vitesse acoustique a_s et la longueur de la cavité L . Ces équations sont valables au premier ordre vis-à-vis du nombre de Mach de l'écoulement, supposé petit devant 1 pour toute la théorie du bilan acoustique. Les adimensionnements utilisent la vitesse du son a_s comme vitesse de référence et le rayon R de la chambre comme longueur de référence.

La fluctuation de pression va être décomposée sur la famille infinie des fluctuations purement acoustiques dans le milieu au repos; c'est-à-dire

$$p' = \sum_{i=1}^{\infty} A_i p'_i = p'_m + \sum_{i=1; i \neq m}^{\infty} A_i p'_i \quad (\text{J.3})$$

où p'_m est le mode d'oscillation dont on veut estimer la stabilité, défini par

$$\vec{\nabla}^2 p'_m + k_m^2 p'_m = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{n} \cdot \vec{\nabla} p'_m = 0 \quad (\text{J.4})$$

Cette décomposition élimine d'office les contributions d'origine non-acoustique et en particulier les fluctuations de pression liées aux instabilités hydrodynamiques.

Le bilan acoustique, dans sa forme la plus simple présentée ici, porte uniquement sur un mode acoustique de cavité, le mode m , supposé proche du mode correspondant en milieu au repos. Cette hypothèse impose que h et f soient de petits paramètres, ce qui nécessite, entre autres, que le nombre de Mach demeure inférieur à 0.4 environ.

On effectue quelques manipulations : l'équation (J.1) est multipliée par p'_m et diminuée de l'équation (J.4) multipliée par p' , le résultat est intégré sur le volume acoustique puis la formule de Green est utilisée avec les conditions aux limites (J.2) et (J.4) avant substitution par la décomposition (J.3) dont seul le terme p'_m apporte une contribution non-négligeable. C'est-à-dire

$$\begin{aligned} \int_V \left([\vec{\nabla}^2 p' + k^2 p'] p'_m - [\vec{\nabla}^2 p'_m + k_m^2 p'_m] p' \right) dV &= \int_V h p'_m dV \\ (k^2 - k_m^2) \int_V p' p'_m dV + \int_S (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} p') p'_m dS - \int_S (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} p'_m) p' dS &= \int_V h p'_m dV \\ (k^2 - k_m^2) \int_V p' p'_m dV &= \int_V h p'_m dV + \int_S f p'_m dS \\ (k^2 - k_m^2) \int_V p_m'^2 dV &= \int_V h p_m' dV + \int_S f p_m' dS \end{aligned}$$

Comme on suppose le mode proche du cas au repos, le nombre d'onde k se décompose en

$$k = k_m + (\omega_m + i\alpha_m) + \mathcal{O}(M_{inj}^2)$$

où k_m , ω_m , α_m sont des réels. La fréquence k_m est celle du mode en l'absence d'écoulement, ω_m est la correction de fréquence due à l'écoulement et le paramètre essentiel α_m est le taux d'accroissement (ou d'atténuation) temporel du mode acoustique de cavité en présence de l'écoulement. L'hypothèse de faible correction due à l'écoulement entraîne que ω_m et α_m sont de petits paramètres (*i.e.* du premier ordre en M_{inj}). Dès lors à l'ordre dominant

$$(k^2 - k_m^2) \approx 2k_m(\omega_m + i\alpha_m)$$

Par ailleurs on pose

$$\int_V p_m'^2 dV = E_m^2$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \omega_m &= \frac{1}{2k_m E_m^2} \mathcal{R} \left(\int_V h p'_m dV + \int_S f p'_m dS \right) \\ \alpha_m &= \frac{1}{2k_m E_m^2} \mathcal{I} \left(\int_V h p'_m dV + \int_S f p'_m dS \right) \end{aligned}$$

où $\mathcal{R}(z)$ (resp. $\mathcal{I}(z)$) est la partie réelle (resp. imaginaire) de z .

L'insertion des formules de h et f dans l'équation de α_m avec quelques manipulations et applications de l'identité de Green permettent à Flandro d'estimer les contributions de multiples phénomènes rappelés ci-dessous. Les taux temporels sont donnés en grandeurs adimensionnelles, il suffit de les multiplier par a_s/R pour retrouver des grandeurs dimensionnées.

Dans les formules ci-dessous, Flandro décompose la vitesse fluctuante en une partie irrotationnelle (qui n'apparaît pas dans les relations) et une partie rotationnelle \vec{u} qui constitue un des apports majeurs de son article [Fla95]. Cette partie rotationnelle est la couche limite acoustique présentée en annexe A qui n'est pas confinée à la paroi mais pénètre largement dans la cavité.

Les contributions distinguées sont

- α_{C_1} couplage pression dû à l'admittance de paroi avec effet de l'écoulement moyen

$$\alpha_{C_1} = \frac{1}{2E_m^2} \int \int_{S_b} [A_b + M_{inj}] p_m'^2 dS$$

où A_b est l'admittance de la paroi débitante et S_b la surface débitante.

- α_{C_2} correction due au caractère rotationnel de l'écoulement induit par injection radiale

$$\alpha_{C_2} = \frac{1}{2E_m^2} \int \int_{S_b} M_{inj} p_m'^2 dS$$

- α_{N_1} atténuation classique due à la tuyère

$$\alpha_{N_1} = -\frac{1}{2E_m^2} \int \int_{S_N} [A_N + M_{inj} U_x] p_m'^2 dS$$

où U_x est la composante axiale de la vitesse moyenne, A_N est l'admittance d'entrée de tuyère et S_N la section d'entrée de tuyère.

- α_{N_2} atténuation supplémentaire de tuyère due au caractère rotationnel de l'écoulement fluctuant

$$\alpha_{N_2} = -\frac{1}{2E_m^2} \mathcal{R} \left(\int \int_{S_N} (\vec{e}_x \cdot \vec{u}) p_m' dS \right)$$

où \vec{e}_x est le vecteur directeur de la coordonnée axiale, \vec{u} est la composante rotationnelle de l'écoulement fluctuant

- α_{NC_2} correction liée à la vitesse normale à la paroi (similaire à un couplage vitesse)

$$\alpha_{NC_2} = \frac{M_{inj}}{\pi^2 E_m^2} R_b \int \int_{S_b} \Omega_{surface} p_m' \frac{dp_m'}{dx} dS$$

où R_b est la réponse de la paroi.

- α_{FT} atténuation par "flow-turning" d'origine physique mal comprise

$$\alpha_{FT} = -\frac{M_{inj}}{2k_m E_m^2} \mathcal{I} \left(\int \int \int_V (\vec{U} \wedge \vec{\omega}') \cdot \vec{\nabla} p_m' dV \right)$$

- α_{VI} interaction de l'écoulement moyen et de la composante rotationnelle de la fluctuation de vitesse

$$\alpha_{VI} = \frac{k_m M_{inj}}{2E_m^2} \mathcal{I} \left(\int \int \int_V (\vec{u} \cdot \vec{U}) p_m' dV \right)$$

- α_{FD} atténuation par effet de viscosité

$$\alpha_{FD} = -\frac{\delta^2}{2k_m E_m^2} \mathcal{I} \left(\int \int_S \frac{\partial \omega'}{\partial x} p_m' dS \right)$$

où on rappelle que δ^2 est le nombre de Reynolds acoustique.

Pour chaque mode acoustique de cavité m , l'évolution temporelle de l'amplitude est donnée par $e^{\alpha_m t}$ où α_m est simplement la somme de toutes les contributions distinguées

$$\alpha_m = \alpha_{C_1} + \alpha_{C_2} + \alpha_{N_1} + \alpha_{N_2} + \alpha_{NC_2} + \alpha_{FT} + \alpha_{VI} + \alpha_{FD}$$

Signalons que Dupays [Dup96] inclut une contribution α_P supplémentaire liée au caractère diphasique de l'écoulement et plus précisément aux pertes d'énergie acoustique par échange de quantité de mouvement et de chaleur entre le gaz et les particules. On trouvera aussi dans sa thèse des tableaux des valeurs de α_{C_1} , α_{N_1} et α_P à différents instants dans le Titan 34D et dans le P230.

Sur les moteurs à propergol solide, le principal terme déstabilisant, parmi ceux considérés, est le couplage pression α_{C_1} d'où son importance aux yeux des motoristes.

Néanmoins, les excitations liées aux détachements tourbillonnaires ne sont pas prises en compte. Or, l'incapacité des méthodes standards de bilan acoustique à prédire certaines instabilités rencontrées sur les fusées Titan et le P230 montre que ce terme doit y être intégré.

En référence [Fla86], Flandro effectue cette intégration dans le cas de tourbillons impactant sur une surface rigide, représenté en figure I.1 de l'annexe I.

Il montre d'abord que les contributions à l'excitation de l'acoustique des différents termes impliquant les tourbillons sont négligeables hormis l'impact des tourbillons sur la frontière rigide, étudié seulement dans un deuxième temps, qui apparaît comme le mécanisme principal de production acoustique. Le principe de son raisonnement est le suivant. Les équations de Navier-Stokes sont séparées en deux parties indépendantes, une partie acoustique et une partie rotationnelle (il s'agit de la même décomposition que celle de Majdalani dans l'annexe A). Toutes deux font apparaître le même terme $\vec{\mathcal{F}}$ de force volumique qui va au final permettre le couplage. La partie rotationnelle est d'abord résolue selon les méthodes de stabilité hydrodynamique présentées au chapitre II (cette fois, la couche limite acoustique est négligée). L'instabilité hydrodynamique s'accompagne de fluctuations de pression que Flandro désigne comme une onde pseudo-acoustique. Cette onde exerce une force sur la surface d'impact rigide et fixe, donc par action-réaction la surface exerce une force sur le fluide que Flandro écrit

$$\vec{\mathcal{F}} = \tilde{p}\delta(n)\vec{n}$$

où $\delta(n)$ vaut 1 sur la surface d'impact et 0 ailleurs. Selon lui, cette force s'applique en particulier sur le champ acoustique. Il en déduit une contribution α_V à l'évolution temporelle du mode acoustique donnée par

$$\alpha_V = \frac{1}{2E_m^2} \int \int \int_V \vec{u}' \cdot \vec{\mathcal{F}} dV = \frac{1}{2E_m^2} \int \int \int_V \vec{u}' \cdot \tilde{p}\delta(n)\vec{n} dV = \frac{1}{2E_m^2} \int \int_{S_i} \tilde{p}\vec{u}' \cdot d\vec{S}$$

où S_i est la surface d'impact. On rappelle que \tilde{p} est la pression associée à l'instabilité hydrodynamique et \vec{u}' la vitesse acoustique.

Le signe et la valeur de cette contribution dépendent de la géométrie (en particulier de la distance D dans la figure I.1 de l'annexe I) ce qui indique que le détachement tourbillonnaire peut être soit stabilisant, soit déstabilisant.

Bien que ce modèle soit plutôt fruste puisque les tourbillons ne sentent pas la présence de la surface d'impact et que la réalité physique de cette surface d'impact puisse être critiquable, le modèle de Flandro constitue une piste intéressante pour l'intégration des instabilités hydrodynamiques dans le bilan acoustique pouvant conduire à terme à une véritable prise en compte de ces phénomènes dans les moteurs à propergol solide.