

# THÈSE

présentée en vue de  
l'obtention du titre de

**DOCTEUR**

de

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE**

**SPÉCIALITÉ : SYSTÈMES AUTOMATIQUES**

par

**Paulo César PELLANDA**

**COMMANDE DE SYSTÈMES INSTATIONNAIRES.  
Séquencement de Compensateurs et Commande LPV**

Soutenue le 14 septembre 2001 devant la Commission d'Examen :

<b>MM.</b>	<b>D.</b>	<b>NOLL</b>	<b>Président</b>
	<b>D.</b>	<b>ALAZARD</b>	
	<b>P.</b>	<b>APKARIAN</b>	<b>Directeur de thèse</b>
	<b>G.</b>	<b>DUC</b>	<b>Rapporteur</b>
	<b>M.</b>	<b>M'SAAD</b>	<b>Rapporteur</b>

*Este trabalho, eu dedico à minha  
esposa **Marilena** e aos meus  
filhos **Andressa** e **Anderson***



# Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire, financés par le Ministère de la Défense du Brésil, ont été effectués au Département Commande de Systèmes et Dynamique du vol (DCSD) de l'Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales (ONERA) – Centre de Toulouse, dans le cadre de la formation doctorale de l'École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (ENSAE).

Je remercie Monsieur Jean-Pierre Jung, directeur de l'ONERA-Toulouse, et Monsieur Pierre Bascary, directeur de l'ENSAE, pour m'avoir accueilli dans leurs établissements.

Je tiens à exprimer ma gratitude au Général Ingénieur Luiz Augusto C. Moniz de Aragão, directeur du *Centro Tecnológico do Exército* et *Secretário Interino de Ciência e Tecnologia*, et au Général Ingénieur José Carlos A. do Amarante, directeur de l'*Instituto Militar de Engenharia (IME)*, lors de mon départ du Brésil, pour m'avoir confié cette mission. Je ne saurais oublier le Colonel Ingénieur Geraldo Magela Pinheiro Gomes, chef du *Departamento de Engenharia Elétrica do IME* lorsque j'ai commencé ma thèse, pour m'avoir donné le goût pour l'automatique, pour sa confiance qu'il m'a toujours accordée et pour son encouragement et son soutien, sans lesquels mon séjour en France n'aurait sûrement pas été possible. Qu'il y voit ici le témoignage de toute ma reconnaissance.

Mes remerciements vont également à Monsieur Claude Barrouil, responsable du DCSD, et à Monsieur André Fossard, ancien responsable de la formation doctorale en Automatique de l'ENSAE, qui m'ont permis de réaliser cette étude au sein du Département. Je remercie particulièrement Madame Caroline Chiappa, professeur à l'ENSAE et actuelle responsable de cette formation doctorale, pour la confiance qu'elle m'a accordée en me donnant l'occasion d'enseigner à l'ENSAE durant la réalisation de ce travail.

J'exprime ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, Pierre Apkarian, avec qui j'ai eu l'honneur et le plaisir de travailler durant ces trois années. Pour son accueil, sa bonne humeur, son encadrement hors pair, sa disponibilité, son encouragement et optimisme, ses conseils et sa confiance qu'il m'a accordée en partageant ses nombreuses connaissances, ses travaux scientifiques et ses heures d'enseignement à l'ENSAE, je le remercie sincèrement. Son enthousiasme pour l'automatique, son expérience dans les domaines de la recherche et de l'enseignement et sa rigueur théorique dont il a su me faire profiter me furent très précieux tout au long de ce travail et me le seront sans doute dans l'avenir.

Je remercie Messieurs Mohammed M'Saad, professeur au Laboratoire d'Automatique

de Procédés de l'Institut des Sciences de la Matière et du Rayonnement de Caen, et Gilles Duc, professeur à l'École Supérieure de l'Électricité, d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je leur suis très reconnaissant de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et de leurs remarques judicieuses et constructives. Je remercie également Monsieur Dominikus Noll, professeur au Laboratoire de Mathématique pour l'Industrie et la Physique de l'Université Paul Sabatier, pour m'avoir fait l'honneur d'être président du jury, ainsi que Monsieur Daniel Alazard, professeur à l'ENSAE, pour avoir accepté de juger mon travail en participant au Jury.

Mes remerciements s'adressent aussi au Général de Brigade Lúcio Mário de Barros Góes, attaché militaire lorsque j'ai commencé ma mission, et au Colonel Tennyson de Oliveira Ribeiro Neto, l'attaché actuel, ainsi qu'à l'ensemble du Bureau de l'Armée de Terre à l'Ambassade du Brésil à Paris, pour l'aide qu'ils m'ont apportée durant ces quelques années en France.

Je remercie tous les ingénieurs et collègues du DCSD, dont les noms constitueraient une liste trop longue, pour l'ambiance cordiale dans laquelle ce travail s'est déroulé. J'en profite pour remercier tout particulièrement Christelle Cumer, qui a pris de son temps pour relire une partie de ce mémoire et m'aider à réduire le nombre d'erreurs dans cette dissertation, et Frank Jouhaud, pour la bonne ambiance dans notre bureau.

Enfin, je tiens aussi à associer à ces remerciements l'ensemble du secrétariat, spécialement Liliane Arendo et Michelle Dupuy, et le responsable informatique du DCSD Monsieur Michel Grau, pour leurs disponibilité et efficacité à résoudre les soucis administratifs et informatiques, ainsi que le service d'édition, pour la qualité du travail fournie.

# Sommaire

<b>Résumé</b>	<b>xi</b>
<b>Abstract</b>	<b>xii</b>
<b>Notations et symboles</b>	<b>xiii</b>
<b>Liste des algorithmes</b>	<b>xvii</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>xix</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xxiii</b>
<b>I Préliminaires</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction générale</b>	<b>3</b>
1.1 Contexte et motivations . . . . .	4
1.2 Objectifs de la thèse . . . . .	8
1.3 Travaux réalisés – Organisation du mémoire . . . . .	9
<b>2 Éléments fondamentaux des techniques de séquencement</b>	<b>13</b>
2.1 Systèmes instationnaires . . . . .	14
2.1.1 Modélisation . . . . .	14
2.1.2 Stabilité et performance robuste . . . . .	17
2.2 Inégalités matricielles linéaires . . . . .	20
2.3 Séquencement de compensateurs . . . . .	22

2.3.1	Structure . . . . .	22
2.3.2	Caractéristiques . . . . .	23
2.3.3	Principes méthodologiques . . . . .	24
2.3.4	Illustration . . . . .	26
2.4	Conclusion . . . . .	31
 <b>II Algorithmes avancés pour le séquençement de compensateurs</b>		<b>33</b>
<b>3</b>	<b>Séquençement de structures estimation/commande pour des compensateurs <math>H_\infty</math> et <math>\mu</math></b>	<b>35</b>
3.1	Introduction . . . . .	36
3.2	Structures estimation/commande . . . . .	38
3.2.1	Formulation du problème . . . . .	39
3.2.2	La structure estimation/commande équivalente . . . . .	43
3.2.3	Sélection des valeurs propres et restrictions . . . . .	44
3.2.4	Algorithme pour le calcul de compensateurs équivalents . . . . .	52
3.2.5	Cas discret . . . . .	55
3.3	Une méthode de séquençement continu . . . . .	57
3.3.1	Continuation des sous-espaces invariants sélectionnés . . . . .	58
3.3.2	Interpolation . . . . .	63
3.4	Applications . . . . .	64
3.4.1	Un exemple du deuxième ordre . . . . .	64
3.4.2	Un exemple de pilotage d'un missile . . . . .	68
3.5	Conclusion . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Interpolation de compensateurs <math>H_\infty</math> par fonctions de LYAPUNOV continues par morceaux</b>	<b>81</b>
4.1	Introduction . . . . .	82
4.2	Présentation du problème et résultats antérieurs . . . . .	84
4.3	Synthèse $H_\infty$ de compensateurs interpolés . . . . .	88

4.3.1	Interpolation de variables de LYAPUNOV . . . . .	88
4.3.2	Continuité du compensateur interpolé . . . . .	91
4.3.3	Réduction à un problème de dimension finie . . . . .	94
4.3.4	Algorithme pour la synthèse de compensateurs interpolés . . . . .	96
4.4	Exemples . . . . .	106
4.5	Conclusion . . . . .	112
<b>5</b>	<b>Commande multi-canal mixte <math>H_2/H_\infty</math> de systèmes LPV en temps discret</b>	<b>115</b>
5.1	Introduction . . . . .	116
5.2	Analyse de performance . . . . .	117
5.2.1	Performance $H_2$ robuste . . . . .	118
5.2.2	Performance $H_\infty$ robuste . . . . .	121
5.3	Synthèse LPV $H_2/H_\infty$ mixte multi-transfert . . . . .	121
5.3.1	Présentation du problème . . . . .	122
5.3.2	Caractérisation LMI . . . . .	122
5.3.3	Construction du correcteur LPV . . . . .	128
5.4	Exemples illustratifs . . . . .	129
5.4.1	Comparaisons avec un seul objectif . . . . .	130
5.4.2	Un exemple multi-objectif . . . . .	131
5.5	Conclusion . . . . .	132
<b>6</b>	<b>Applications de la technique de commande LPV multi-canal</b>	<b>133</b>
6.1	Introduction . . . . .	134
6.2	Synthèse LPV/LFT multi-objectif . . . . .	134
6.3	Discrétisation et coordonnées polytopiques . . . . .	138
6.3.1	Discrétisation . . . . .	138
6.3.2	Coordonnées polytopiques et hypercubes . . . . .	140
6.4	Problème de commande d'un missile . . . . .	143
6.4.1	Structures de synthèse et de commande et objectifs de performance	144
6.4.2	Résultats et simulations . . . . .	146

6.4.3	Séquencement de structures estimation/commande . . . . .	153
6.5	Suivi d'une dynamique implicite pour des systèmes LPV . . . . .	157
6.5.1	Un critère $H_2$ pour le suivi de modèle – Extension au cas LPV . . .	158
6.5.2	Exemple illustratif . . . . .	160
6.6	Conclusion . . . . .	164
<b>III</b>	<b>Conclusion</b>	<b>167</b>
<b>7</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>169</b>
7.1	Résumé de la contribution . . . . .	170
7.1.1	D'un point de vue méthodologique . . . . .	170
7.1.2	D'un point de vue applicatif . . . . .	171
7.2	Étude comparative et critiques . . . . .	171
7.3	Perspectives . . . . .	174
<b>IV</b>	<b>Annexes</b>	<b>177</b>
<b>A</b>	<b>Modèle d'un missile dépendant de paramètres</b>	<b>179</b>
A.1	Modèle non linéaire . . . . .	180
A.2	Modèle LFT . . . . .	181
A.3	Modèle linéaire . . . . .	184
A.4	Validation . . . . .	185
<b>B</b>	<b>Formulation LMI pour la synthèse LPV multi-canal mixte <math>H_2/H_\infty</math></b>	<b>191</b>
B.1	Performance $H_2$ . . . . .	192
B.2	Performance $H_\infty$ . . . . .	194
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>197</b>
	<b>Index</b>	<b>205</b>

# Résumé

CETTE thèse s’inscrit dans le domaine de la commande de systèmes instationnaires, avec une orientation particulière vers la commande robuste  $H_2$  et  $H_\infty$  et la commande de systèmes variants paramétriquement. Trois techniques nouvelles pour la synthèse de correcteurs séquencés sont proposées.

La première méthode concerne le séquençement classique d’un ensemble arbitraire de compensateurs dynamiques stabilisants prédéterminés qui correspond à une séquence donnée de points de fonctionnement. Nous proposons une démarche systématique pour le calcul d’une famille de compensateurs équivalents sous forme estimation/commande qui se prête à l’interpolation.

Dans un deuxième temps, nous exploitons des fonctions de LYAPUNOV dépendantes des paramètres de séquençement et continues par morceaux pour la synthèse de correcteurs LPV satisfaisant une contrainte de gain  $\mathcal{L}_2$ . Nous introduisons un algorithme itératif permettant de construire des bases de fonctions pour les variables de LYAPUNOV interpolées qui sont suffisamment riches pour assurer un niveau strict de performance  $H_\infty$  pour des systèmes LPV généraux.

En dernier lieu, nous développons une méthode de synthèse multi-canal mixte  $H_2/H_\infty$  en temps discret pour des systèmes LPV/LFT. De nouvelles caractérisations LMI pour les performances  $H_2$  et  $H_\infty$  sont introduites. Elles permettent non seulement de traiter un ensemble de spécifications  $H_2$  ou  $H_\infty$  définies sur des transferts différents mais aussi d’utiliser différentes variables de LYAPUNOV et de *scalings* pour chaque spécification/transfert. Ces fonctionnalités sont nouvelles et offrent des libertés supplémentaires pour réduire le “conservatisme” et pondérer des critères à la fois exigeants et de nature contradictoire. Une formulation pour résoudre le problème du suivi d’une dynamique implicite est aussi adaptée aux systèmes LPV dans le contexte de cette méthode.

Toutes ces techniques sont testées et validées sur des exemples académiques ou sur un problème réaliste de commande d’un missile.

**Mot-clés :** Systèmes instationnaires, Commande LPV, Commande robuste,  $H_2$ ,  $H_\infty$ , Séquençement de gains, LMI.

# Abstract

This thesis deals with the control of non-stationary systems. The main focus is on the  $H_2$  and  $H_\infty$  robust control and on the control of parameter-varying systems. Three new techniques for the synthesis of gain-scheduled controllers are proposed.

The first method concerns the conventional gain scheduling of a predetermined arbitrary set of stabilizing dynamic compensators which corresponds to a given sequence of operating points. We propose a systematic procedure for computing an equivalent family of observer-based controllers that are amenable to interpolation.

In the second approach, we exploit piecewise parameter-dependent Lyapunov functions for the synthesis of LPV controllers satisfying an  $\mathcal{L}_2$ -gain constraint. We introduce an iterative algorithm which allows to build up basis functions for the interpolated Lyapunov variables that are rich enough to ensure a strict level of  $H_\infty$  performance for general LPV systems.

In the last approach, we develop a mixed  $H_2/H_\infty$  multi-channel synthesis method in discrete time for LFT/LPV systems. New LMI characterizations for the  $H_2$  and  $H_\infty$  performances are introduced. They allow not only to handle a set of  $H_2/H_\infty$  specifications that can be defined channel-wise but also to consider different Lyapunov variables and scalings for each channel/specification. These new capabilities offer additional flexibility to reduce conservatism and to tradeoff conflicting and demanding performance and robustness specifications. A formulation to solve the implicit model following problem is also extended to the LPV systems in the context of this method.

All these techniques are tested and validated on academic examples or on a realistic missile control problem.

**Keywords:** Non-stationary systems, LPV control, Robust control,  $H_2$ ,  $H_\infty$ , Gain scheduling, LMI.

# Notations et symboles

## Notations et symboles courants

$\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}$	ensemble des complexes et ensemble des réels
$\mathbf{C}^n$ et $\mathbf{R}^n$	ensemble des vecteurs complexes et réels de dimension $n$
$\mathbf{C}^{m \times n}$ et $\mathbf{R}^{m \times n}$	ensemble des matrices complexes et réelles $m \times n$
$j$	index ou $j = \sqrt{-1}$
$\in$ et $\notin$	appartenant et n'appartenant pas à
$\ni$	contenant
$\cup$ et $\cap$	union et intersection
$\{\phi\}$	ensemble vide ou nul
$\overline{\mathcal{S}}$	complément de $\mathcal{S}$
$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ , $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$	$\mathcal{A}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{B}$
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ , $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$	$\mathcal{A}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{B}$ pouvant être équivalent à $\mathcal{B}$
$\text{length}(\mathcal{S})$	nombre d'éléments appartenant à $\mathcal{S}$
co	enveloppe convexe : pour $S_i \in \mathbf{R}^{m \times n}$ , $i = 1, 2, \dots, N$ , $\text{co}\{S_1, S_2, \dots, S_N\} := \{\sum_{i=1}^N \alpha_i S_i : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1\}$
$:=$	défini(e) comme
$\approx$	approximativement égal(e) à
$\times$	produit cartésien
$\exists$	existe
$\cdot^*$	multiplication élément par élément
$\star$	terme induit par symétrie
$\gg$ et $\ll$	beaucoup plus grand(e) et beaucoup plus petit(e) que
$a \leftarrow b$	attribution de la valeur $b$ à la variable $a$
$\rightarrow$	tendant vers
$\implies$ et $\impliedby$	implication logique
■	fin de démonstration
$\bar{\alpha}$	complexe conjugué de $\alpha \in \mathbf{C}$
$ \alpha $	valeur absolue de $\alpha \in \mathbf{R}$ ou de $\alpha \in \mathbf{C}$
$\exp(\alpha)$	$e^\alpha$
$\max(\alpha)$ et $\min(\alpha)$	valeur maximale et valeur minimale de la variable $\alpha \in \mathbf{R}$

$\text{par}(n)$	parité du nombre entier $n$ : $\text{par}(n) = 0$ , si $n$ est pair ; $\text{par}(n) = 1$ , si $n$ est impair
$\text{Re}(\alpha)$	partie réelle de $\alpha \in \mathbf{C}$
$\text{sign}(\alpha)$	signe de $\alpha \in \mathbf{R}$ : $\text{sign}(\alpha) = -1, 0$ ou $1$ , si $\alpha < 0$ , $\alpha = 0$ ou $\alpha > 0$
$x(t)$	signal continu $x \in \mathbf{R}^n$
$x(k)$	signal $x \in \mathbf{R}^n$ à l'instant (discret) $k$
$\hat{x}(k/k-1)$	estimé a priori de $x(k)$ ou prédiction de $x(k)$
$\hat{x}(k/k)$	estimé de $x(k)$ à l'instant $k$ ou correction de la prédiction de $x$
$\bar{\theta}$ et $\underline{\theta}$	bornes supérieure et inférieure de la variable $\theta$
$\mathcal{L}_2$	$\{w(t) \in \mathbf{R}^n : \int_0^\infty w^T(\tau)w(\tau)d\tau < \infty\}$
$\sup(x(t))$	borne supérieure du signal $x(t)$
$I_n$	matrice identité $n \times n$
$0_n$ ou $0_{n \times m}$	matrices nulles $n \times n$ ou $n \times m$
$[m_{ij}]$	matrice $M$ ayant $m_{ij}$ comme élément à la $i$ -ème ligne et $j$ -ème colonne
$M^T$	transposée de la matrice $M$
$M^{-1}$	inverse de $M$
$M^{-T}$	$(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$
$M > N$ et $M \geq N$	pour les matrices Hermitiennes ou réelles symétriques $M$ et $N$ : $M - N$ est définie positive et $M - N$ est semi-définie positive
$\sigma_i(M)$	$i$ -ème valeur singulière de $M$
$\underline{\sigma}(M)$ et $\bar{\sigma}(M)$	valeur singulière minimale et valeur singulière maximale de $M$
$\lambda_i(M)$	$i$ -ème valeur propre de $M$
$\bar{\lambda}(M)$	$\max\{\lambda_i(M)\}$ , pour une matrice $M$ réelle symétrique
$\text{diag}(m_1, \dots, m_n)$	matrice diagonale $n \times n$ ayant $m_{ii} = m_i$ comme $i$ -ème élément de sa diagonale
$\text{diag}(M_1, \dots, M_n)$	matrice bloc-diagonale ayant $M_i$ comme $i$ -ème bloc
$\det(M)$	déterminant de $M$
$\text{rang}(M)$	dimension de l'espace image de $M$
$\text{Tr}(M)$	trace de $M \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$
$\text{spec}(M)$	spectre de la matrice $M \in \mathbf{R}^{n \times n}$ : $\{\lambda_i(M) : i = 1, \dots, n\}$
$[x; y]$	$[x^T, y^T]^T$ , pour $x \in \mathbf{R}^n$ et $y \in \mathbf{R}^m$ ou pour $x \in \mathbf{C}^n$ et $y \in \mathbf{C}^m$
$[M; N]$	$\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$ , pour des matrices $M$ et $N$ de dimensions compatibles
$\ x\ $ , $\ x\ _2$	norme-2 Euclidienne du vecteur $x \in \mathbf{R}^n$ ou $x \in \mathbf{C}^n$
$\ M\ $ , $\ M\ _2$	norme-2 induite (norme spectrale $\bar{\sigma}(M)$ ) de la matrice $M$

## Acronymes

IMF	<i>Implicit Model Following</i>
LFT	Transformation Linéaire Fractionnaire
LMI	Inégalité Matricielle Linéaire
LPV	Linéaire à Paramètre Variant
LTI	Linéaire à Temps Invariant
LTV	Linéaire à Temps Variant
LQ	Linéaire Quadratique
LQG	Linéaire Quadratique Gaussien
SVD	Décomposition en Valeurs Singulières

## Notations système

$s$	variable de Laplace
$z$	variable de la transformée $z$ pour les systèmes à temps discret ou variable contrôlée ou de performance
$\omega$	fréquence (ou pulsation) en rad/s
$T_{uy}$	transfert entre les signaux d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$
$T_{uy}(s)$ et $T_{uy}(z)$	fonction de transfert entre les signaux d'entrée $u(s)$ ( $u(z)$ ) et de sortie $y(s)$ ( $y(z)$ )
$\ T_{wz}\ _{\infty}$	norme $H_{\infty}$ du transfert $T_{wz}$
$\ T_{wz}\ _2$	norme $H_2$ du transfert $T_{wz}$
$\mathcal{RH}_{\infty}$	ensemble des matrices rationnelles qui ont des coefficients réels et qui sont analytiques en $Re(s) > 0$
$G(s) = \left[ \begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$	réalisation d'état du transfert $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$
$G(z) = \left[ \begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$	réalisation d'état du transfert $G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$
$\mathcal{F}_u(M, K)$	LFT supérieure pour des matrices réelles ou complexes, $K$ et $M = [M_{11}, M_{12}; M_{21}, M_{22}]$ , de dimensions compatibles (en supposant que l'inverse existe) : $M_{22} + M_{21}K(I - M_{11}K)^{-1}M_{12}$
$\mathcal{F}_l(M, K)$	idem, pour une LFT inférieure : $M_{11} + M_{12}K(I - M_{22}K)^{-1}M_{21}$
$\theta(t)$	variables d'interpolation (ou de séquençement)
$\Delta(\theta(t))$	bloc (ou fonction) d'interpolation (ou de séquençement)

## Notes sur la terminologie et sur la notation

Bien que la terminologie en français ne soit pas complètement établie dans la littérature, nous utiliserons, selon le contexte, les termes “compensateur (correcteur) interpolé” ou “compensateur (correcteur) séquencé”, lesquels seront considérés équivalents, à la place des termes *gain-scheduled controller*, amplement utilisés en anglais. Également, les termes “interpolation” et “séquencement” seront utilisés pour désigner *scheduling*.

Le concept de fonction de transfert dépendante de paramètres n’a pas de sens quand ceux-ci varient dans le temps. La notation  $G(s, \theta)$ , où le paramètre  $\theta$  peut assumer plusieurs valeurs dans un domaine donné, sera donc utilisée pour indiquer qu’un système  $G$  de type LPV a comme modèle fréquentiel

$$G(s, \theta) = C(\theta)[sI - A(\theta)]^{-1}B(\theta) + D(\theta) = N_{um}(s, \theta)D_{en}^{-1}(s, \theta) = \tilde{D}_{en}^{-1}(s, \theta)\tilde{N}_{um}(s, \theta),$$

pour des valeurs stationnaires de  $\theta$ , c’est-à-dire telles que  $d\theta/dt = 0$ , et comme modèle d’état

$$G(s, \theta) = \left[ \begin{array}{c|c} A(\theta) & B(\theta) \\ \hline C(\theta) & D(\theta) \end{array} \right] : \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix},$$

pour des trajectoires instationnaires  $\theta(t)$ .

# Liste des algorithmes

3.1	Calcul de compensateurs équivalents . . . . .	53
3.2	Continuation des sous-espaces invariants . . . . .	62
4.1	Synthèse LPV générale par des variables de LYAPUNOV indépendantes du paramètre . . . . .	97
4.2	Synthèse de compensateurs $H_\infty$ par interpolation de variables de LYAPUNOV . . . . .	101
6.1	Synthèse LPV/LFT multi-objectif . . . . .	136
6.2	Calcul de coordonnées polytopiques . . . . .	141



# Liste des figures

1.1	Schéma d'obtention de correcteurs séquencés . . . . .	11
2.1	Modélisation de systèmes instationnaires . . . . .	15
2.2	Structure du séquençement . . . . .	22
2.3	Interconnexions pour le séquençement . . . . .	23
2.4	Localisation des pôles en fonction de la valeur du paramètre . . . . .	27
2.5	Réponse à l'échelon unitaire en boucle ouverte (paramètre figé et variant) et fermée (paramètre figé) . . . . .	27
2.6	Réponse instationnaire en boucle fermée à l'échelon unitaire pour $\theta = \cos(2t)$ et pour les différentes lois d'interpolation . . . . .	30
2.7	Performance pour l'interpolation de deux familles différentes de compensateurs de structure estimation/commande . . . . .	31
3.1	Systèmes en boucle fermée . . . . .	39
3.2	Paramétrisation de YOULA sur la structure estimation/commande . . . . .	41
3.3	Localisation des pôles en boucle fermée sur l'intervalle de transition . . . . .	66
3.4	Réponse des systèmes non stationnaires . . . . .	67
3.5	États des systèmes non stationnaires . . . . .	67
3.6	L'erreur d'estimation d'état $ x - \hat{x} $ . . . . .	68
3.7	Structure de commande pour l'exemple du missile . . . . .	69
3.8	Réponse fréquentielle en boucle ouverte: $CG(s,\alpha)$ , $C_{e1}G(s,\alpha)$ et $C_{e2}G(s,\alpha)$ . . . . .	74
3.9	Réponse à l'échelon du système linéarisé en boucle fermée pour les correcteurs $C(s)$ , $C_{e1}(s)$ et $C_{e2}(s)$ – Accélération . . . . .	75
3.10	Réponse à l'échelon du système en boucle fermée linéarisé en $\alpha = 0$ – Angle d'incidence . . . . .	75

3.11 Réponse à l'échelon du système en boucle fermée linéarisé en $\alpha = 0$ – Vitesse angulaire en tangage . . . . .	76
3.12 Réponse à l'échelon du système en boucle fermée linéarisé en $\alpha = 0$ – Angle d'empennage . . . . .	76
3.13 Réponse du système non linéaire en boucle fermée à une séquence d'entrées en échelon – Accélération . . . . .	77
3.14 Réponse du système non linéaire en boucle fermée à une séquence d'entrées en échelon pour $K_{e1}(s,\alpha)$ – Angle d'incidence . . . . .	77
3.15 Localisation des pôles dominants en boucle fermée sur la trajectoire de $\alpha(t)$ pour $K_{e1}(s,\alpha)$ – Interpolation de matrices d'espace d'état . . . . .	78
3.16 Localisation des pôles dominants en boucle fermée sur la trajectoire de $\alpha(t)$ pour $K_{e1}(s,\alpha)$ – Interpolation de gains . . . . .	78
4.1 Régions d'influence des variables d'interpolation supplémentaires . . . . .	91
4.2 Exemple de maillage de $\mathcal{P}_{\Theta}$ . . . . .	95
4.3 Maillages d'interpolation, de synthèse et de vérification . . . . .	96
4.4 Algorithme pour la synthèse de compensateurs $H_{\infty}$ via interpolation de variables de LYAPUNOV . . . . .	100
4.5 Régions de trajectoires irréalistes pour un domaine paramétrique non- rectangulaire . . . . .	105
4.6 Forme standard du problème de modelage de valeurs singulières $H_{\infty}$ . . . . .	107
4.7 Résultat obtenu point par point . . . . .	109
4.8 Performance temporelle du système en boucle fermée . . . . .	110
4.9 Configuration pour la synthèse LPV/LFT . . . . .	111
5.1 Interconnexion LPV multi-canal mixte $H_2/H_{\infty}$ . . . . .	123
5.2 Courbe de compromis $H_2/H_{\infty}$ dans la synthèse LPV . . . . .	131
6.1 Domaine paramétrique dans l'espace $\mathbf{R}^2$ . . . . .	141
6.2 Interconnexions de translation et de <i>scaling</i> . . . . .	143
6.3 Structure de commande et interconnexions de synthèse . . . . .	144
6.4 Réponses fréquentielles des fonctions de pondérations . . . . .	146
6.5 Simulations non linéaires en boucle fermée pour des valeurs fixes de $M$ : $K_{\Delta_1}(s,\theta)$ à gauche et $K_{\Delta_2}(s,\theta)$ à droite . . . . .	150

6.6	Simulations non linéaires en boucle fermée en utilisant $K_{\Delta_2}(s, \theta)$ , pour $M$ variant dans le temps . . . . .	151
6.7	Réponse fréquentielle du compensateur $K_2(s)W(s)$ . . . . .	152
6.8	Réponse non linéaire en boucle fermée pour un échelon de $1g$ en $\eta_c$ – Vitesse de déflexion de l’empennage, $\dot{\delta}(t)$ , pour $K_{\Delta_2}(s, \theta)$ avec $\Delta_K = 0$ ( $\alpha = 15, M = 3$ ) . . . . .	152
6.9	Réponse à l’échelon unitaire du système en boucle fermée pour $M = 3$ et pour $\theta$ figé ( $\alpha = 0, 15, 30$ ) . . . . .	155
6.10	Performances pour le séquençement LFT et pour l’interpolation des structures estimation/commande équivalentes ( $M$ constant) . . . . .	156
6.11	Performances pour le séquençement LFT et pour l’interpolation des structures estimation/commande équivalentes ( $M$ variable) . . . . .	156
6.12	Diagramme de simulation utilisé pour le système masse-ressort . . . . .	161
6.13	Réponses à l’échelon du système masse-ressort en boucle ouverte pour des valeurs constantes et variables du paramètre . . . . .	162
6.14	Réponses à l’échelon du système masse-ressort en boucle fermée pour plusieurs pondérations de la commande: $\Delta(t) = \theta(t) = \cos(t)$ colonne gauche et $\Delta(t) = \theta(t) = 1$ colonne droite . . . . .	163
A.1	Diagramme physique du missile . . . . .	180
A.2	Représentation LFT du missile . . . . .	182
A.3	Schéma de simulation pour la validation du modèle LFT du missile . . . . .	186
A.4	Validation du modèle LFT du missile: simulations pour les modèles non linéaires initial et LFT, à gauche; différence entre les simulations des deux modèles, à droite . . . . .	187
A.5	Trajectoire dans le plan $\alpha(t) \times M(t)$ pour la validation du modèle LFT . . . . .	188
A.6	Validation du modèle linéaire du missile: $\bar{\sigma}_m(\alpha, M)$ . . . . .	188
A.7	Validation du modèle linéaire du missile: réponse à un échelon unitaire au point central $\alpha = 15, M = 3$ . . . . .	189



# Liste des tableaux

2.1	Réalisations d'état des correcteurs $K_0(s, \theta)$ et $K_b(s, \theta)$ . . . . .	29
2.2	Pôles, zéros et gains de $K_{tf}(s, \theta)$ . . . . .	29
2.3	Coefficients de $K_{ob1}(s, \theta)$ . . . . .	29
3.1	Données en boucle fermée en $t = 0$ . . . . .	65
3.2	Paramètres du filtre $W(s)$ . . . . .	69
3.3	Gains de commande et d'estimation augmentée . . . . .	72
3.4	Gains de commande et d'estimation physique . . . . .	72
3.5	Coefficients du paramètre de YOULA . . . . .	73
3.6	Pôles en boucle fermée . . . . .	73
3.7	Distribution des pôles en boucle fermée . . . . .	74
4.1	Résumé des maillages . . . . .	95
4.2	Données de synthèse pour $K(s, \theta)$ . . . . .	108
4.3	Performance $H_\infty$ pour différents correcteurs séquencés . . . . .	112
5.1	Performance $H_\infty$ obtenue par différentes méthodes . . . . .	130
6.1	Variables de décision . . . . .	138
6.2	Performances $H_2$ et $H_\infty$ . . . . .	149
6.3	Choix des modes de la boucle fermée pour $\alpha = 0$ . . . . .	153
6.4	Performance $H_2$ du système masse-ressort pour plusieurs pondérations de la commande . . . . .	163



# Première partie

## Préliminaires



# Chapitre 1

## Introduction générale

CETTE thèse s'inscrit dans le domaine de la commande de systèmes instationnaires, avec une orientation particulière vers la commande robuste  $H_2$  et  $H_\infty$  et la commande de systèmes variants paramétriquement.

Ce chapitre introductif donne une brève description des problèmes considérés dans ce mémoire, du travail réalisé, des résultats et contributions principaux et de l'enchaînement des différentes parties de ce manuscrit.

## 1.1 Contexte et motivations

Un nombre important de problèmes actuels dans le domaine de l'automatique exige des niveaux de performance et de manœuvrabilité très stricts pour des systèmes physiques naturellement ou artificiellement sophistiqués. Les solutions envisagées pour la synthèse des correcteurs et le réglage des systèmes en boucle fermée sont complexes et demandent une masse de calculs importante. Par conséquent, un modèle mathématique d'un système réel à commander doit être, d'une part, assez riche pour bien représenter les dynamiques les plus importantes d'un point de vue de la commande et, d'autre part, suffisamment simple pour permettre sa manipulation au plan numérique, par des techniques de plus en plus raffinées. Un modèle viable pour la commande contient, donc, des imperfections dues à la négligence de certaines dynamiques ou non-linéarités jugées a priori anodines. Cependant, sous l'influence de perturbations externes inattendues, ces erreurs peuvent prendre de l'ampleur et donc compromettre la performance et la stabilité escomptées pour le système bouclé. Cette problématique met en évidence la nécessité, non seulement de bien définir la frontière entre le système et l'environnement avec lequel il va interagir, mais aussi d'identifier précisément les interférences externes importantes que le système peut subir durant son fonctionnement.

Aujourd'hui, un modèle idéal pour la commande est celui capable, à la fois, de bien représenter le comportement interne du système avec ses incertitudes et d'établir des voies possibles d'échanges d'énergie avec le milieu où il est inséré, c'est-à-dire, des chemins pour les perturbations externes. Alors que la dynamique importante est détaillée par une partie Linéaire à Temps Invariant (LTI) du modèle, dite nominale, les incertitudes sont représentées séparément par des blocs dont la connaissance est restreinte à des mesures de leurs grandeurs maximales, exprimées, en générale, par des bornes supérieures d'une norme choisie. Les modèles qui traduisent les erreurs de modélisation par des incertitudes, tout en permettant l'analyse des effets des perturbations externes, sont appelés "modèles incertains". Quant aux incertitudes et perturbations, elles peuvent être de natures différentes : fréquentielles ou complexes (incertitudes non structurées traduisant des approximations de modélisation ou d'identification, des perturbations externes, des bruits de mesures,...), paramétriques ou réelles (incertitudes généralement structurées provenant d'imprécisions numériques ou de petites variations de certains paramètres physiques par l'usure de pièces mécaniques, consommation de lubrifiants ou de carburants,...) ou mixtes.

La commande robuste est une branche de l'automatique qui, en tant que science de l'ingénieur, étudie la problématique d'analyse et de synthèse de correcteurs pour des modèles incertains. Les méthodes de synthèse robuste sont capables de concevoir des compensateurs LTI qui maintiennent les conditions de stabilité et de performance nominales pour le système bouclé face aux perturbations et aux incertitudes. Ces techniques ont évolué énormément dans les vingt dernières années, dans différentes directions, selon la nature des incertitudes traitées. Le développement et l'évolution des nouvelles approches robustes ont été stimulé, avant tout, par l'épuisement des capacités offertes par les théories de commande optimale multivariable. Ces théories, dont la majorité a été conçue dans une période précédente, n'ont pas l'aptitude de traiter des systèmes complexes en

manipulant des modèles incertains. Bien au contraire, elles sont fondées essentiellement sur la conception de lois optimales qui supposent une connaissance parfaite du système, c'est-à-dire, qui n'utilisent que la partie nominale du modèle.

Aux méconnaissances du système peuvent encore s'ajouter d'autres difficultés, non moins importantes, provoquées par des phénomènes liés à la non-stationnarité. Le caractère instationnaire provient, en général, des non-linéarités ou des variations paramétriques importantes subies par le système physique. La dissimulation de telles propriétés en les traitant comme des incertitudes constitue une démarche extrêmement conservatrice. Cela veut dire que, dans ces situations, les compensateurs robustes LTI garantissent généralement des performances nominales faibles pour des trajectoires réalistes des systèmes non linéaires, Linéaires à Paramètre Variant (LPV), ou Linéaires à Temps Variant (LTV). La synthèse de correcteurs qui varient dans le temps selon l'évolution du système, tout en considérant les incertitudes présentes dans le modèle, est donc une philosophie de commande plus appropriée à ce genre de problème.

Les conditions d'équilibre ou de fonctionnement d'un système instationnaire sont normalement paramétrées par certaines variables dynamiques qui les définissent complètement. Lorsque ces paramètres sont disponibles en temps réel, soit par l'intermédiaire d'une procédure d'identification, soit par l'installation de capteurs supplémentaires, ils sont exploitables par des lois de commande variantes dans les temps. Les correcteurs dits auto-adaptatifs sont ceux fondés sur l'application, en temps réel, d'algorithmes d'identification [49]. Ils sont particulièrement utiles quand une mesure directe de tels paramètres est difficile ou impossible à obtenir en pratique. Il s'avère que les méthodologies auto-adaptatives se trouvent souvent confrontées au conflit entre une bonne commande et une bonne qualité d'identification. L'incompatibilité entre la robustesse aux variations des conditions de fonctionnement du système et la fiabilité des estimations est bien connue dans le domaine de l'identification de systèmes. Ce dilemme, loin de constituer une grosse difficulté, peut être bénéfique dans le sens où il donne certains indices sur le besoin d'adaptation et le moment où la dynamique du compensateur doit être modifiée pour maintenir ses bonnes propriétés de robustesse et performance. Toutefois, les algorithmes d'identification sont en général complexes et demandent des temps importants pour la convergence des estimations, ce qui est prohibitif lorsqu'une mise à jour rapide du correcteur est demandée. Cette difficulté restreint l'application de ce type d'approche à des systèmes dont la dynamique varie lentement dans le temps.

Une situation plus favorable est notamment rencontrée lorsque les paramètres qui expriment les conditions de fonctionnement du système non stationnaire sont complètement mesurés en temps réel. La disponibilité de mesures fiables de ces signaux, qui peuvent être aussi bien endogènes qu'exogènes en ce qui concerne le système, permet l'utilisation des méthodes de séquençement de compensateurs. Ces approches sont fondées sur la conception de correcteurs dont les coefficients sont séquençés ou varient continûment selon les valeurs courantes des paramètres du système et sont donc mieux adaptées aux problèmes causés par de fortes non-stationnarités. Dans cette situation particulière, mais fréquente en pratique, les paramètres variants sont nommés, pour des raisons évidentes, "variables de séquençement" ou "variables d'interpolation".

La méthode de séquençement la plus répandue dans le milieu industriel est celle qu'on appelle aujourd'hui de "classique", "conventionnelle" ou "traditionnelle". Elle est basée sur un ensemble de modèles LTI issus du gel du paramètre d'un modèle LPV ou sur une linéarisation Jacobienne du modèle non linéaire autour d'une famille de points de fonctionnement [87, 77, 44, 75, 40, 64, 43, 50, 94]. Cela aboutit à un ensemble de modèles LTI paramétrés par les variables de séquençement. Un arsenal de techniques de commande linéaire ( $H_2$ ,  $H_\infty$ ,  $\mu$ -synthèse, etc., et leurs variantes) est donc disponible pour concevoir une famille de correcteurs LTI qui offrent un compromis raisonnable entre performance et robustesse autour des conditions de fonctionnement données. Quant aux stratégies utilisées pour les interpoler, elles varient énormément selon la méthode de synthèse linéaire choisie et sont souvent intuitives et basées sur une directive heuristique principale :

"Les compensateurs linéaires sont supposés suffisamment proches pour permettre des transitions douces et pour saisir les non-linéarités du système."

L'interpolation peut impliquer aussi bien les coefficients que les signaux de sorties des correcteurs LTI et peut être linéaire ou non linéaire. Parmi les stratégies de séquençement les plus couramment utilisées se trouvent celles qui consistent à interpoler, soit les coefficients de fonctions de transfert [64], soit les coefficients des réalisations d'états [44, 40], ou quand il s'agit d'un ensemble de correcteurs linéaires robustes  $H_2$  où  $H_\infty$ , de solutions d'équations de RICCATI [75]. Le compensateur interpolé est donc un système non stationnaire (LPV ou non linéaire) obtenu par interpolation simple de correcteurs LTI vis-à-vis des variables de séquençement.

Le séquençement classique se heurte à des difficultés théoriques concernant notamment des questions délicates au sujet de la stabilité et de la performance durant la transition entre les correcteurs locaux. Les étapes de synthèse et d'interpolation sont menées séparément et les effets instationnaires de la seconde, provenant d'évolutions rapides et/ou de non-linéarités de deuxième ordre, sont souvent négligés dans la première. Cette démarche ne garantit ni la stabilité ni la performance du système bouclé. Une procédure de type essais/erreurs qui consiste à placer un ensemble de correcteurs LTI et à simuler le système instationnaire bouclé est souvent adoptée. Le nombre de compensateur est donc augmenté jusqu'à ce que les conditions de stabilité et performance souhaitées soient atteintes. Ces questions sont d'autant plus critiques quand les techniques modernes de synthèse LTI robustes sont utilisées, car les compensateurs à interpoler qui en résultent sont, en général, complexes et d'ordre élevé. Malgré ces difficultés, quelques résultats théoriques dans le domaine de l'interpolation conventionnelle ont été publiés. Un algorithme pour interpoler linéairement les gains de retour d'état est proposé en [86], dans un contexte de placement de pôles. Dans [96], deux méthodes pour l'interpolation non linéaire de compensateurs sont présentées : la première utilise la factorisation "coprime" de fonctions de transfert, et la seconde est basée sur les descriptions en espace d'état. Dans [95], les gains de retour et d'observation d'état sont interpolés. Ces approches assurent, avec un certain conservatisme et sous la condition de variations lentes des variables d'interpolation, la stabilité du système instationnaire en boucle fermée.

Le séquençement de compensateurs trouve aussi des motivations dans le contexte de la commande LPV, où des fonctions de LYAPUNOV sont utilisées pour définir la stabilité

et la performance pour une plage de variation donnée du paramètre. Ces approches se distinguent des techniques classiques beaucoup plus par leur façon systématique de traiter le problème que par leur objectif. D'un point de vue conceptuel, le séquençement LPV est très différent, puisque les questions de stabilité/performance à temps variant sont prises en compte, par une analyse judicieuse, directement dans la synthèse des compensateurs LPV. La tâche la plus exigeante consiste à résoudre des problèmes d'optimisation convexe sous contraintes d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI). Cela est relativement facile en utilisant les codes de programmation semi-définie disponibles actuellement [18, 33]. Il s'agit, en réalité, d'une extension des méthodes de commande robustes LTI, de type  $H_2$  et  $H_\infty$ , aux systèmes instationnaires. Bien que la commande LPV soit mieux adaptée aux systèmes linéaires, elle peut aussi traiter, avec un certain conservatisme, les systèmes non linéaires, en utilisant une description quasi-LPV de leur dynamique. Dans un modèle quasi-LPV les non-linéarités sont dissimulées par un choix approprié des variables de séquençement et aucune linéarisation n'est impliquée. En somme, les techniques LPV sont également applicables à des modèles par nature LTV ou LPV, à des modèles linéarisés (paramétrés par des variables de séquençement) ou à des modèles quasi-LPV. Tous ces avantages expliquent le soudain et croissant intérêt de ces dernières années pour les approches LPV [13, 65, 6, 81, 41].

Nonobstant les efforts et développements théoriques récents, quelques problèmes délicats persistent dans le domaine, non seulement du séquençement conventionnel, mais aussi du séquençement LPV. Notons que, parmi les rares approches classiques qui garantissent théoriquement la stabilité instationnaire, une bonne partie est essentiellement fondée sur l'interpolation de matrices d'états ou de gains de structures/estimation commande de correcteurs LTI robustes optimaux. Or, une difficulté importante demeure dans le fait que le comportement dynamique des compensateurs interpolés dépend de manière critique des représentations d'état adoptées pour la famille de correcteurs linéaires conçue sur un ensemble de points de fonctionnement. Donc, les deux premières questions que l'on peut se poser sont :

- Comment choisir un ensemble de bases dans l'espace d'état qui conduise à des réalisations des correcteurs locaux appropriées pour l'interpolation ?
- Les solutions numériques optimales issues des synthèses robustes LTI sont-elles toujours le meilleur choix pour l'interpolation ?

Quant aux techniques LPV, certaines sont potentiellement très conservatives car elles utilisent des fonctions de LYAPUNOV indépendantes des paramètres du système, acceptent des taux arbitraires de variation de ces paramètres et demandent des classes spécifiques et restrictives de représentations LPV [56, 65, 57, 6, 13, 7]. D'autres, en revanche, utilisent des fonctions de LYAPUNOV dépendantes des paramètres, considèrent des bornes réalistes du taux de variation du paramètre et tolèrent une dépendance paramétrique générale du système [105, 11, 5, 10, 98]. Celles-ci sont très peu conservatives, mais entraînent une complexité importante dans la mise en œuvre du compensateur interpolé. Un autre problème qui n'a pas été complètement résolu concerne la question suivante :

- Comment construire de façon systématique des bases de fonctions pour les variables

de LYAPUNOV dépendantes du paramètre, tout en permettant la recherche d'un compromis adéquat entre le conservatisme du correcteur interpolé et la complexité de la fonction de séquencement ?

Finalement, une classe importante de modèles qui joue un rôle essentiel dans la représentation des non-stationnarités des systèmes LPV et suscitent donc un réel intérêt, est celle du type Transformation Linéaire Fractionnaire (LFT). Un nombre non négligeable de problèmes LPV, parmi lesquels sont incluses des applications représentatives du domaine aérospatial, peut être représenté par une structure LFT de dépendance paramétrique. De plus, dans la pratique, le façonnement du comportement dynamique en boucle fermée face à des incertitudes constitue essentiellement un problème multi-objectif. Pourtant, à l'heure actuelle, il n'existe aucune méthode capable de traiter le problème de synthèse LPV multi-canal mixte  $H_2/H_\infty$  pour des modèles LFT. Toutes ces problématiques ont motivé le travail présenté dans ce mémoire.

## 1.2 Objectifs de la thèse

Les objectifs de cette étude sont triples :

- Développer de nouvelles formulations et méthodologies de synthèse de compensateurs séquencés pour bien répondre aux demandes et aux problématiques posées précédemment.
- Appliquer ces techniques à des exemples académiques ou réalistes où les problèmes associés à des non-stationnarités sont particulièrement pertinents, afin de valider les méthodologies développées.
- Comparer les performances de ces nouvelles approches entre elles et à d'autres, apparaissant dans la littérature.

Les méthodologies originales développées dans ce travail constituent essentiellement des améliorations ou des raffinements significatifs de techniques préexistantes. L'objectif principal est de proposer des algorithmes pour résoudre des problèmes intéressants d'un point de vue pratique et relativement complexes, dont les solutions ne sont pas envisageables dans l'état actuel d'avancement de ces approches. Pour se faire, nous allons tirer parti de certains avantages et propriétés complémentaires de méthodes récentes et par fois différentes dans leur principe, mais aussi introduire quelques idées novatrices d'importance capitale pour aboutir à de nouvelles fonctionnalités des correcteurs interpolés. Il faut, pourtant, être conscient que, étant données la diversité de techniques récemment développées et la complexité et la généralité des problèmes que se posent actuellement dans ce domaine, quelle que soit la démarche suivie, les solutions proposées se heurtent, en général, au moins à l'une des difficultés suivantes :

- complexité algorithmique ;
- l'ordre du système ainsi que du vecteur de variables d'interpolation sont bornés, respectivement, à 20 et à 4 (approximativement), à cause des limitations éventuelles de mémoire ou des capacités des méthodes d'optimisation disponibles ;

- complexité du codage, lorsque des programmes applicables à des modèles variés (en ordre, nombre de transferts, nombre de spécifications,...) sont envisagés.

## 1.3 Travaux réalisés – Organisation du mémoire

Ce mémoire est organisé en quatre parties qui rassemblent sept chapitres et deux annexes :

- Cette Première Partie inclut, outre ce chapitre introductif, le Chapitre 2, où nous rappelons brièvement quelques éléments et outils de base et les concepts fondamentaux des techniques de séquençement.
- La Deuxième Partie englobe les quatre chapitres principaux de cette thèse et constitue le “noyau” du travail réalisé. Dans cette partie, nous décrivons et validons les algorithmes avancés pour le séquençement de compensateurs, développés le long des Chapitres 3 à 6.
- Dans la Troisième Partie, constituée d’un seul (et dernier) chapitre (7), nous concluons en mettant en avant les apports de notre travail, mais aussi en faisant un bilan des approches développées et en considérant les possibilités de recherches futures.
- Les deux annexes sont regroupées dans la Quatrième Partie. Dans l’Annexe A, nous présentons un modèle non linéaire (quasi-LPV) pour le pilotage en incidence d’un missile air-air, emprunté à la littérature et utilisé pour la validation des approches décrites dans la Deuxième Partie. Des modèles linéarisés et LFT sont aussi obtenus et validés. L’Annexe B présente la formulation LMI de la technique du Chapitre 5.

Notre contribution est concentrée dans la Deuxième Partie de ce mémoire. Des motivations spécifiques, dans des contextes particuliers à chaque problème traité, ainsi que des descriptions concises (mais plus détaillées que celles ci-après) des apports principaux, sont présentées aux sections introductives de ses quatre chapitres (pages 36, 82, 116 et 134<sup>1</sup>). Une lecture préalable et indépendante de ces sections offre une vision plus approfondie du contenu de cette partie centrale du manuscrit et est recommandée lors d’un premier abord. Néanmoins, les résumés de chaque contribution sont répertoriés comme suit :

- Dans le Chapitre 3, on s’intéresse au développement d’une méthodologie générale pour la commande d’un système sur un grand domaine de fonctionnement en effectuant une interpolation classique de compensateurs dynamiques prédéterminés. La technique proposée utilise une séquence de transformations d’état linéaires permettant d’aboutir à une famille cohérente et interprétable d’un point de vue physique de compensateurs équivalents qui se prêtent à l’interpolation. Après la transformation, ces compensateurs présentent une structure estimation/commande, facilitant l’interpolation et la mise en œuvre. Cette méthode s’applique aux compensateurs discrets ou continus, d’ordre augmenté ou plein et en particulier, aux correcteurs issus d’une synthèse  $H_\infty$  ou d’une  $\mu$ -synthèse, dont le séquençement est en général

---

1. Le lecteur pourra se reporter aussi aux paragraphes initiaux des deux sections qui décrivent les applications du Chapitre 6, aux pages 143 et 157.

délicat. Des exemples numériques sont présentés pour illustrer les avantages de cette approche.

- Nous exploitons, dans le Chapitre 4, des fonctions de LYAPUNOV dépendantes du paramètre continues par morceau pour la synthèse de compensateurs  $H_\infty$  interpolés pour des systèmes LPV. Des lois d'interpolation pour les variables de LYAPUNOV, associées à des sous-régions de l'espace paramétrique, sont introduites et combinées avec une technique LPV générale basée sur un maillage de l'espace paramétrique. Un algorithme pratique est proposé pour obtenir les coefficients matriciels de ces fonctions et pour déterminer les variables de LYAPUNOV pour les correcteurs aux points extrêmes des intervalles d'interpolation. Le compensateur interpolé résultant garantit non seulement la performance  $H_\infty$  du système bouclé sur un domaine paramétrique très large, mais offre également un compromis raisonnable entre le conservatisme des techniques qui utilisent des variables de LYAPUNOV indépendantes du paramètre et la complexité calculatoire en ligne des correcteurs LPV généraux. L'utilisation de cet algorithme est illustrée par un exemple de commande d'un missile. Nous montrons aussi qu'un ensemble de compensateurs  $H_\infty$  LTI sous-optimaux, issus d'un compensateur LPV synthétisé, par le gel du paramètre, est mieux adapté à l'interpolation classique.
- Une nouvelle méthode pour la synthèse de compensateurs LPV en temps discret est développée dans le Chapitre 5. Les systèmes LPV considérés ont une représentation de type LFT par rapport aux paramètres. La méthode proposée peut traiter un ensemble de spécifications  $H_2/H_\infty$  qui sont définies sur des transferts différents. Cela n'est pas possible en utilisant les résultats antérieurs, car ils sont restreints essentiellement aux problèmes LPV à un seul objectif. Cette extension, attractive du point de vue pratique, est obtenue, d'une part, grâce à des transformations spécifiques des variables de LYAPUNOV et de *scaling* et, d'autre part, grâce à des transformations appropriées de linéarisation des données et de la fonction de séquençement du compensateur. Il est montré que cette fonction peut être construite comme une fonction matricielle affine ayant les mêmes coordonnées polytopiques que celles du paramètre d'interpolation, ce qui rend facile sa mise en œuvre. Finalement, ces manipulations engendrent une formulation LMI du problème de commande LPV de type multi-objectif. Celui-ci peut donc être résolu numériquement par des codes de programmation semi-définie.
- Une attention spéciale est dédiée, dans le Chapitre 6, à des questions pratiques sur l'applicabilité de la nouvelle approche LPV développée dans le chapitre précédent. Nous décrivons, dans la partie initiale, les étapes principales d'une synthèse de type multi-objectif et montrons la limitation imposée par le nombre de variables impliquées dans le problème. Dans un deuxième temps, nous montrons que la méthode peut être utilisée pour des systèmes LPV à temps discret ou continu. Une procédure simple de calcul de coordonnées polytopiques en temps réel est aussi discutée. Ensuite, le problème de commande en incidence d'un modèle de missile air-air est revisité en utilisant cette nouvelle méthode. Le modèle du missile est caractérisé par une représentation LFT et la conception de l'autopilote est conduite en exploitant les nouvelles capacités de synthèse LPV. Nous montrons que la méthode offre une flexibilité supplémentaire pour pondérer des critères à la fois exigeants

et de nature contradictoire, tout en préservant l'avantage pratique des méthodes LPV précédentes à un seul objectif. Les résultats du séquençement LPV/LFT sont alors confrontés à ceux obtenus par la méthode de séquençement de structures estimation/commande du Chapitre 3. Finalement, une formulation pour résoudre le problème du suivi d'une dynamique implicite est adaptée aux systèmes LPV dans le contexte de notre technique de type mixte multi-objectif. Cette application potentielle de la méthode représente une bonne alternative au placement de pôles, utilisé souvent pour les systèmes LTI pour satisfaire des spécifications dans le domaine temporel.

Pour illustrer les différents chemins d'obtention de correcteurs séquençés proposés ici et pour mieux situer les approches développées, les unes par rapport aux autres, nous nous servons du schéma de la Figure 1.1. Il offre aussi une vue de l'ensemble de notre travail. Trois voies principales pour la définition d'une loi de séquençement sont envisagées, à partir d'un modèle incertain et instationnaire (non linéaire ou LPV), selon les trois méthodologies proposées (Chapitres 3, 4 et 5).

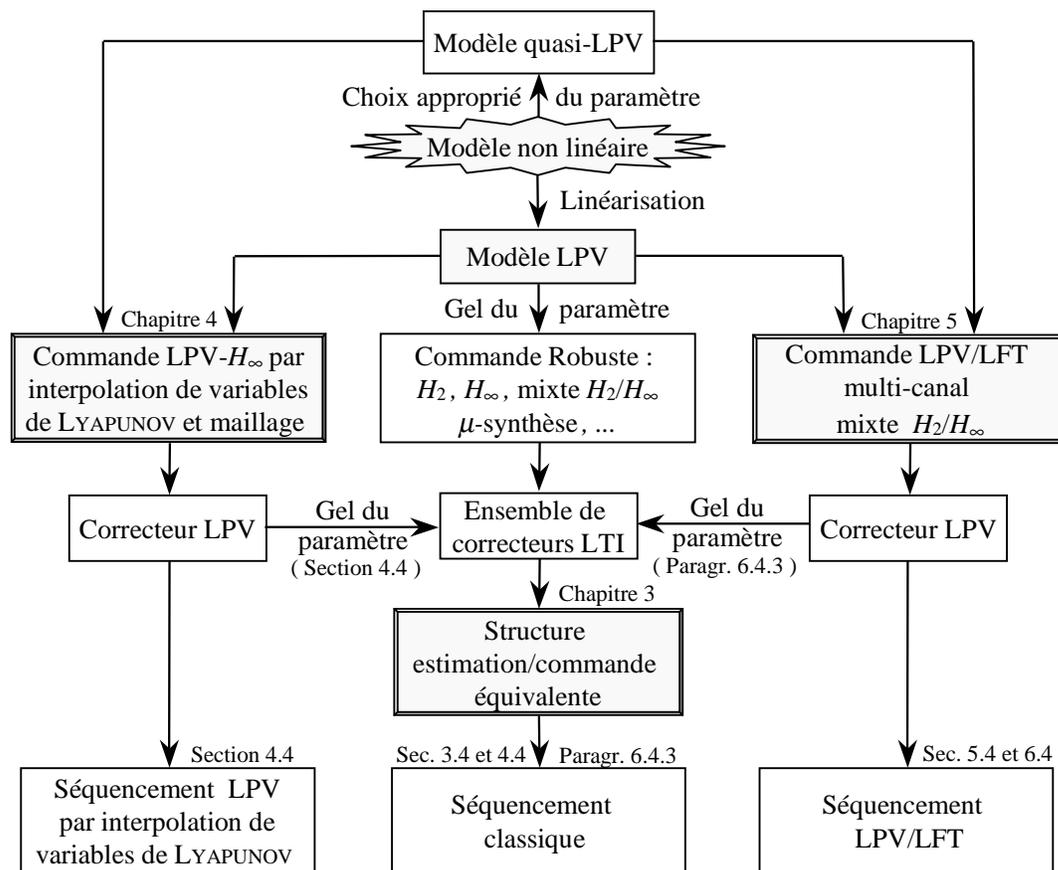


FIG. 1.1 – Schéma d'obtention de correcteurs séquençés

Un chemin alternatif qui s'est avéré très satisfaisant consiste à mettre en œuvre un séquençement classique de structures estimation/commande équivalentes à des familles de

correcteurs LTI issus des compensateurs LPV. L'intérêt de cette pratique est de surmonter la complexité inhérente aux fonctions de séquençement LPV. Toutefois, la simplicité offerte par cette loi de séquençement classique (une simple interpolation des gains de retour et d'observation d'état) va au détriment de la garantie théorique de la stabilité et de la performance. Enfin, les différents chemins sont illustrés dans les sections et paragraphes indiqués sur les blocs du diagramme.

## Chapitre 2

# Éléments fondamentaux des techniques de séquençement

LA popularité des théories de commande robuste, notamment des méthodes  $H_2$ ,  $H_\infty$  et  $\mu$ , commence à gagner le milieu industriel. Une attention spéciale est dédiée actuellement à la conception de correcteurs interpolés qui assurent des niveaux de performances de type  $H_2$  et/ou  $H_\infty$ . On peut donc considérer que l'essence de ces techniques est relativement bien connue des automaticiens. Pour cette raison et par souci de simplicité, nous ne reviendrons pas sur la base de cette théorie. Le lecteur peu familiarisé avec ces approches se reportera, par exemple, aux références [101, 100, 27, 3] qui en donnent une vue générale, allant de la définition de normes (de signaux, matrices et systèmes) et de la représentation d'incertitudes jusqu'à des descriptions méthodologiques plus détaillées.

Dans le contexte du séquençement de compensateurs et de la commande LPV, quelques thèses ont été récemment publiées [15, 92, 22, 38]. Outre les descriptions des apports qu'elles procurent, une étude de base des méthodes classiques ou par LMI (LPV) y est fournie. Cela englobe les lemmes techniques les plus importants et des aspects de modélisation, stabilité et performance de systèmes instationnaires. Deux autres articles importants sur ce sujet [78, 54], publiés au cours du déroulement de ce travail, ont mis l'accent non seulement sur les aspects historiques, mais aussi théoriques et méthodologiques, et fournissent une vue critique ainsi qu'un répertoire des résultats significatifs de la littérature. Pour ne pas alourdir davantage la lecture de ce manuscrit, nous n'allons pas réitérer ici tous ces aspects. Néanmoins, pour un meilleur discernement des différentes méthodologies que nous allons proposer, il est de toute évidence nécessaire de rappeler sommairement les fondements sur lesquels elles s'appuient.

Dans ce chapitre, nous rappelons brièvement certains éléments et résultats techniques de base, ainsi que des concepts fondamentaux et surtout les principes méthodologiques des techniques de séquençement de compensateurs. L'objectif est de clarifier les idées générales exposées au chapitre précédent et, par conséquent, rendre la compréhension des techniques développées dans la suite plus facile.

## 2.1 Systèmes instationnaires

### 2.1.1 Modélisation

Une classe importante de systèmes dynamiques instationnaires peut être représentée par un ensemble d'équations différentielles non linéaires d'ordre quelconque. Par un choix approprié des vecteurs des variables d'état  $x(t) \in \mathbf{R}^n$ , des variables d'entrée  $u(t) \in \mathbf{R}^m$  et des variables de sortie  $y(t) \in \mathbf{R}^p$ , on peut souvent se ramener à un modèle<sup>1</sup> non linéaire en l'état, mais linéaire en l'entrée, qui implique une seule équation matricielle différentielle du premier ordre et une seule équation matricielle algébrique :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta_x, \theta_p)x + B(\theta_x, \theta_p)u \\ y &= C(\theta_x, \theta_p)x + D(\theta_x, \theta_p)u. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Les fonctions matricielles réelles  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$ ,  $C(\cdot)$ , et  $D(\cdot)$  sont supposées continues et bornées, ont des dimensions compatibles avec les signaux et définissent complètement la dynamique du système. Celle-ci a un caractère non linéaire et instationnaire originaire des variables  $\theta_x$  et  $\theta_p$  :

- $\theta_x(x(t)) \in \mathbf{R}^{r_1}$  est une variable endogène, c'est-à-dire, qui dépend de la dynamique interne du système ce qui le rend non linéaire ;
- $\theta_p(t) \in \mathbf{R}^{r_2}$  est un paramètre exogène, c'est-à-dire, qui évolue dans le temps de manière indépendante de la dynamique interne du système.

Comme il a été déjà indiqué à l'Introduction Générale, la première étape de la synthèse de correcteurs séquencés correspond à l'obtention d'une description linéaire approximative du système non linéaire (2.1) qui implique un ensemble convenable des variables de séquençement  $\theta(t)$ . Le moyen le plus répandu en pratique consiste à :

- obtenir via une linéarisation Jacobienne classique du modèle (2.1) autour d'un ensemble de points d'équilibre  $x_o^{(i)}(u_o^{(i)})$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , un modèle linéarisé

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta_i)x + B(\theta_i)u \\ y &= C(\theta_i)x + D(\theta_i)u \end{aligned}$$

paramétré par

$$\theta_i(t) = \begin{bmatrix} \theta_x(x_0^{(i)}) \\ \theta_p(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^r, \quad r = r_1 + r_2 ;$$

- définir une trajectoire nominale  $x_0(t)$  pour le système et, en supposant que  $\theta_x(t)$  et  $d\theta_x(t)/dt$  sont bornés et indépendants de  $x_0(t)$  et  $dx_0(t)/dt$ , aboutir à un modèle de type LPV

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta)x + B(\theta)u \\ y &= C(\theta)x + D(\theta)u, \end{aligned} \quad (2.2)$$

---

1. Par abus de langage, on utilise indifféremment les termes modèle et système. Aussi, afin de rendre les formules plus lisibles, la dépendance temporelle est souvent omise dans les modèles.

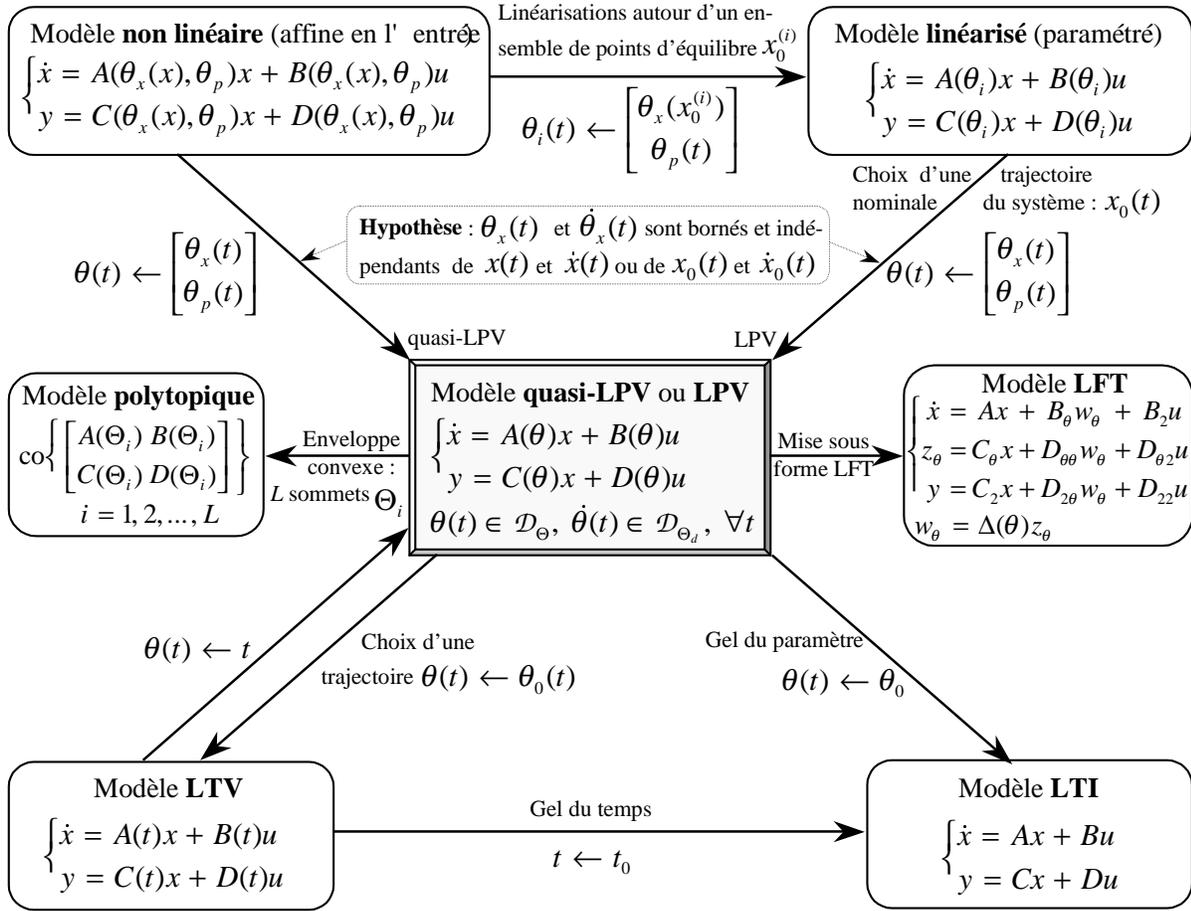


FIG. 2.1 – Modélisation de systèmes instationnaires

où le paramètre et son taux de variation évoluent dans des domaines compacts<sup>2</sup>,  $\theta(t) \in \mathcal{D}_\Theta \subset \mathbf{R}^r, \dot{\theta}(t) \in \mathcal{D}_{\Theta_d} \subset \mathbf{R}^r, \forall t$ ;

- éventuellement, choisir une trajectoire  $\theta(t) \leftarrow \theta_0(t)$  ou figer le paramètre en un point donné  $\theta(t) \leftarrow \theta_0$ , pour obtenir, respectivement, un modèle LTV ou LTI.

Notons que les fonctions matricielles  $A(\cdot), B(\cdot), \dots$  dans ces dernières représentations sont en général différentes de celles de (2.1). Cette voie de construction des différents types de modèles linéaires, ainsi que d'autres formes possibles pour passer de l'un à l'autre, sont illustrées à la Figure 2.1.

Une autre façon plus récente et plus directe pour arriver à un modèle similaire à celui de (2.2), à partir de (2.1), est aussi schématisée à la Figure 2.1. Cela consiste, tout simplement, à ignorer l'étape de linéarisation. En choisissant convenablement la fonction  $\theta_x(x(t))$ , on réécrit le modèle dans une forme où les termes non linéaires puissent être dissimuler par un paramètre variant uniquement en fonction du temps  $\theta_x(t)$ . De façon

2. Lorsque le domaine  $\mathcal{D}_\Theta$  est considéré convexe de type polytopique il est noté  $\mathcal{P}_\Theta$ .

similaire au cas antérieur, on considère que les trajectoires de ce paramètre sont bornées et indépendantes des trajectoires de  $x(t)$ , ce qui déconnecte les fonctions matricielles  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$ , ... de l'espace d'état. Il est alors inclus dans la variable de séquençement, en s'ajoutant au paramètre  $\theta_p(t)$  :

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} \theta_x(t) \\ \theta_p(t) \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Cela veut dire que certains états, ou des fonctions des états, sont "classés" comme variables exogènes dans certaines parties du modèle, alors qu'ils demeurent des variables endogènes dans d'autres. Cette hypothèse entraîne un certain conservatisme, plus ou moins important, dans l'étape de synthèse des correcteurs. Dans ce cas particulier, le modèle (2.2) est nommé quasi-LPV.

Si une loi de séquençement est satisfaisante pour toutes les trajectoires dans le domaine  $\mathcal{D}_\theta \times \mathcal{D}_{\theta_d}$ , elle sera également satisfaisante pour les trajectoires réalistes des états qui interviennent en  $\theta$ . Toutefois, le conservatisme introduit par la modélisation quasi-LPV est d'autant moins négligeable que le nombre d'états impliqués dans le paramètre est important. Considérons, par exemple, le système non linéaire [78]

$$\dot{x}_1 = \sin x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 x_2 + u.$$

Une représentation quasi-LPV est

$$\dot{x} = A(x)x + Bu = \begin{bmatrix} (\sin x_1)/x_1 & 1 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

avec  $\theta_x(x) = x := [x_1, x_2]^T$ . Cette représentation est certainement plus conservatrice que celle ci-dessous

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} (\sin x_1)/x_1 & 1 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

où seulement une variable d'état est impliqué dans le paramètre ( $\theta_x(x) = x_1$ ) et, donc, la dimension de l'espace qui peut inclure des trajectoires irréalistes est plus petite. Enfin, un système peut encore être, par sa propre nature, LPV ou LTV et aucune approximation ou linéarisation supplémentaire n'est requise pour construire le modèle (2.2).

Le modèle LPV ou quasi-LPV (2.2) tolère une dépendance paramétrique très générale qui englobe la plupart des situations pratiques. Cette généralité demande l'utilisation et le développement d'approches sophistiquées et complexes d'analyse et de synthèse des lois de commande par séquençement. Les techniques décrites dans les Chapitres 3 et 4 de cette thèse sont bien adaptées à cette classe de modèle. Néanmoins, deux autres classes plus restrictives de modèles LPV, issues de la forme générale (2.2), sont parfois admissibles (partie centrale de la Figure 2.1) et sont plus adaptées à certaines approches spécifiques de séquençement LPV.

L'une de ces classes concerne les modèles LFT. Une dépendance LFT du système (2.2) par rapport au paramètre  $\theta(t)$  est définie comme suit

$$\begin{bmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\theta \\ D_{2\theta} \end{bmatrix} \Delta(\theta) (I - D_{\theta\theta} \Delta(\theta))^{-1} [C_\theta \quad D_{\theta 2}], \quad (2.4)$$

où  $\Delta(\theta)$  est une fonction matricielle linéaire en  $\theta$ . Celui-ci est supposé appartenant à un domaine polytopique

$$\mathcal{P}_{\Theta} := \text{co}\{\Theta_1, \dots, \Theta_i, \dots, \Theta_L\}, \quad (2.5)$$

où les  $\Theta_i$  désignent les sommets du polytope  $\mathcal{P}_{\Theta}$ . Des tels modèles exigent, en général, des hypothèses qui simplifient leur obtention et peuvent donc être conservatifs. Ils sont considérés dans les problèmes de commande des Chapitres 5 et 6.

L'autre classe de représentations LPV est celle des modèles polytopiques. Si la fonction matricielle

$$S(\theta) := \begin{bmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{bmatrix}$$

est affine en  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r]^T$ , c'est-à-dire,

$$S(\theta) = S_0 + \sum_{l=1}^r \theta_l S_l$$

et les composantes scalaires  $\theta_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, r$ , évoluent (par hypothèse) indépendamment dans un domaine borné  $\mathcal{D}_{\Theta}$  qui est un sous-ensemble du domaine polytopique (2.5),  $\mathcal{D}_{\Theta} \subseteq \mathcal{P}_{\Theta}$ , alors le modèle (2.2) admet une représentation polytopique

$$S(\theta) = \text{co}\{S_1, \dots, S_L\} = \text{co}\{S(\Theta_1), \dots, S(\Theta_L)\}. \quad (2.6)$$

Ce modèle n'entraînera aucun conservatisme si la condition  $\mathcal{D}_{\Theta} = \mathcal{P}_{\Theta}$  est satisfaite. Au contraire, si  $\mathcal{P}_{\Theta}$  représente un recouvrement polytopique de  $\mathcal{D}_{\Theta}$  le modèle sera forcément conservatif. Aucune attention spéciale ne sera dédiée à ce type de représentation dans notre étude. Du fait que la dépendance affine (2.6) est un cas particulier de la dépendance LPV général (2.2) et de la dépendance LFT (2.4), elle est abordable par toutes les approches présentées dans la Deuxième Partie de cette thèse.

Un exemple complet d'obtention des modèles quasi-LPV, LPV (par linéarisation), LTI et LFT, à partir d'un modèle non linéaire réaliste, est fourni dans l'Annexe A.

## 2.1.2 Stabilité et performance robuste

### Stabilité globale

Considérons les systèmes instationnaires non linéaire (2.1) et LPV (2.2) et des paires entrée-sortie  $(w_j, z_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , qui définissent des canaux supplémentaires de performance  $T_{w_j z_j}$ . Dans notre étude, l'objectif primordial d'une loi de commande  $u = Ky$  est d'assurer la stabilité et la performance robuste du système bouclé. En d'autres termes, le système doit être stable et les gains des transferts  $T_{w_j z_j}$ , définis par des normes de type  $H_2$  et/ou  $H_{\infty}$ , doivent demeurer dans des limites acceptables, pour toute la plage de fonctionnement du système.

De toutes les notions de stabilité qui existent, nous allons retenir les suivantes, qui se trouvent dans plusieurs références comme, par exemple, celle en [45]. Ces définitions

sont valables pour des systèmes quasi-LPV ou originalement LPV (2.2) ainsi que pour le système non linéaire (2.1)<sup>3</sup> avec une condition initiale  $x(0) = x_0$  quelconque.

**Définition 2.1 (Stabilité exponentielle globale)** *Les systèmes (2.1) et (2.2) sont stables et l'origine  $x = 0$  est globalement exponentiellement stable s'il existe des valeurs constantes  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  telles que, pour une condition initiale quelconque  $x_0$ , pour tout  $\theta \in \mathcal{D}_\Theta$  et pour  $u = 0$ , la trajectoire de l'état  $x$  satisfait*

$$\|x\|_2 \leq \beta e^{-\alpha t} \|x_0\|_2, \quad \forall t > 0.$$

Remarquons que la stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique uniforme et la stabilité entrée-sortie. Lorsque la notion de stabilité exponentielle est appliquée aux systèmes (2.1) et (2.2) bouclés par un compensateurs  $K$ , elle implique aussi la stabilité interne.

**Définition 2.2 (Stabilité exponentielle globale via une fonction de LYAPUNOV)** *L'origine  $x = 0$  des systèmes (2.1) et (2.2) est exponentiellement globalement stable s'il existe une fonction scalaire continue  $V(x(t), \theta(t))$  et des constantes scalaires positives  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  telles que*

- (i) :  $\alpha_1 \|x(t)\|_2^2 \leq V(x, \theta) \leq \alpha_2 \|x_{cl}\|_2^2, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}_\Theta, \quad \forall t \geq 0,$
- (ii) :  $\frac{dV(x, \theta)}{dt} \leq -\alpha_3 \|x(t)\|_2^2, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}_\Theta, \quad \forall t \geq 0,$
- (iii) :  $V(x, \theta) \rightarrow \infty, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}_\Theta$  lorsque  $\|x(t)\|_2 \rightarrow \infty.$

Une fonction  $V(x, \theta)$  qui satisfait les conditions ci-dessus est nommée fonction de LYAPUNOV. Notons qu'une fonction de LYAPUNOV peut être constante par rapport à  $\theta$ . S'il existe une telle fonction quadratique par rapport l'état  $x$ ,

$$V(x) = x^T P x,$$

où la variable de LYAPUNOV  $P$  est constante, on dit que les systèmes analysés sont quadratiquement stable sur  $\mathcal{D}_\Theta$ . Cette notion de stabilité quadratique est plus forte que la notion de stabilité exponentielle.

Enfin, dans le cas où le modèle (2.2) est une représentation quasi-LPV du système non linéaire (2.1), la stabilité de (2.2) au sens global implique la stabilité globale de (2.1) si l'état  $x(t)$  demeure dans la région considérée de l'espace d'état. Cela est dû au fait que toute solution  $x(t)$  du modèle non linéaire dans cette région bornée est aussi une solution du modèle quasi-LPV. Puisque le paramètre  $\theta_x$  peut varier arbitrairement dans le modèle quasi-LPV, l'affirmative inverse n'est pas vraie, d'où le conservatisme de cette représentation. Dans certains exemples, notamment ceux où le taux de variation de  $\theta_x$  est important, cet inconvénient est tolérable si l'on compare avec l'approche de modélisation par linéarisation où la stabilité du modèle LPV n'implique pas la stabilité du système non linéaire.

---

3. Dans ces définitions, le paramètre  $\theta$  doit être interprété comme  $\theta_p$  pour le système non linéaire (2.1).

## Stabilité locale $\times$ stabilité globale

On sait que les modèles LTI issus d'un modèle LPV par le gel du paramètre (voir Figure 2.1) sont stables si

$$\operatorname{Re}(\lambda_i(A(\theta))) < 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}_{\Theta}.$$

Il est facile de montrer, par des exemples simples, que la conjecture réciproque n'est pas valable. C'est-à-dire, la stabilité de l'ensemble continu de modèles LTI pour tout  $\theta \in \mathcal{D}_{\Theta}$  n'implique pas la stabilité globale du système instationnaire (LPV ou quasi-LPV). Une autre notion intuitive qui est fautive est celle qui présume que la stabilité du système instationnaire sur une trajectoire  $\theta(t)$  garantit la stabilité au sens LTI le long de cette trajectoire.

Pour compléter la discussion au sujet de la stabilité, nous présentons deux théorèmes, dont les démonstrations se trouvent aux références indiquées, reliant la stabilité locale (LTI) à la stabilité globale (LPV ou quasi-LPV) dans le cas de variation lente du paramètre.

### **Théorème 2.3 (Stabilité globale à partir de la stabilité locale)** [76]

*Le système LPV (ou quasi-LPV) (2.2) est stable au sens global si les conditions suivantes sont valables :*

- (i) :  $\operatorname{Re}(\lambda_i(A(\theta))) < 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}_{\Theta},$
- (ii) : *il existe un scalaire  $\alpha$  suffisamment petit tel que  $\|\frac{d}{dt}\theta(t)\| < \alpha, \forall \theta \in \mathcal{D}_{\Theta}, \forall t \geq 0.$*

### **Théorème 2.4 (Instabilité globale à partir de l'instabilité locale)** [91]

*Le système LPV (ou quasi-LPV) (2.2) est instable si les conditions suivantes sont valables :*

- (i) :  $\operatorname{Re}(\lambda_i(A(\theta))) < 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}_{\Theta},$
- (ii) :  $\operatorname{Re}(\lambda_i(A(\theta))) > 0, \quad i = k + 1, \dots, n, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}_{\Theta},$
- (iii) : *les valeurs propres stables et instables ne se mélangent pas pour toutes les trajectoires du système instationnaires,*
- (iv) : *il existe un scalaire  $\alpha$  suffisamment petit tel que  $\|\frac{d}{dt}\theta(t)\| < \alpha, \forall \theta \in \mathcal{D}_{\Theta}, \forall t \geq 0.$*

Ces théorèmes montrent qu'on ne peut tirer des conclusions sur la stabilité LPV, à partir de la stabilité LTI, que pour des variations lentes du paramètre. On trouve dans la littérature plusieurs études dans cette voie, mais elles n'exploitent que cette même notion clef, bien connue dans le cadre du séquençage classique de compensateurs, de variation lente du paramètre. Malheureusement, aucune de ces théories n'est constructive pour l'évaluation d'un taux de variation tolérable du paramètre. L'outil d'analyse présenté au Chapitre 4 semble très utile à cet égard.

## Performance robuste

Dans le cadre des systèmes LTI, on relie couramment la notion de performance à l'existence d'une borne sur des normes d'une fonction de transfert définies dans les espaces

de HARDY  $H_2$  et/ou  $H_\infty$ . En revanche, lorsqu'on s'intéresse à la classe de systèmes LPV ou LTV, la notion de fonction de transfert n'est plus valable, ni par conséquent celle des normes  $H_2$  et  $H_\infty$ . Les résultats d'analyse en performance présentés dans les chapitres de la Deuxième Partie s'appuieront sur des extensions des normes  $H_\infty$  et  $H_2$ , que l'on définira exclusivement dans le domaine temporel.

On parlera plus précisément de la norme  $\mathcal{L}_2$ -induite d'un système LPV (2.2) avec la paire entrée-sortie supplémentaire  $(w, z)$ . Cette norme est bornée par  $\gamma$  si pour toute trajectoire paramétrique dans le domaine  $\mathcal{D}_\Theta \times \mathcal{D}_{\Theta_d}$

$$\int_0^T z^T z d\tau \leq \gamma^2 \int_0^T w^T w d\tau, \quad \forall T \geq 0, \quad \forall w \in \mathcal{L}_2. \quad (2.7)$$

Cette définition coïncide parfaitement avec la norme  $H_\infty$  du cas LTI classique. On remarque ici simplement l'absence d'interprétation dans le domaine fréquentiel. La norme  $\mathcal{L}_2$ -induite du canal  $T_{wz}$ , nommée parfois performance de type  $H_\infty$  (ou simplement performance  $H_\infty$ ), est la plus petite valeur de  $\gamma$  telle que la relation (2.7) soit encore vérifiée :

$$\gamma := \sup_{w \in \mathcal{L}_2, \theta(t) \in \mathcal{D}_\Theta} \frac{\int_0^\infty z^T z d\tau}{\int_0^\infty w^T w d\tau}.$$

La performance  $H_\infty$  définie ci-dessus donne le gain du transfert  $T_{wz}$  lorsque l'entrée  $w$  et la sortie  $z$  sont mesurées en terme d'énergie ou de la norme  $\mathcal{L}_2$ . Toutefois, il est parfois préférable de garder l'amplitude maximale de la composante  $z_j$  de la sortie au-dessous d'un certain niveau, plutôt que de borner son énergie. Si l'entrée  $w_j$  reste encore quantifié par son énergie, on peut définir la norme  $H_2$  généralisée

$$\nu := \sup_{\forall j, \theta(t) \in \mathcal{D}_\Theta} \{ \|z_j\| : x(0) = 0, \forall T \geq 0, \int_0^T \|w_j\|^2 d\tau \leq 1 \}.$$

Cette norme mesure l'amplitude maximale du signal  $z_j(t)$  pour l'ensemble des entrées  $z_j(t)$  d'énergie unitaire, c'est-à-dire, l'amplitude maximale des réponses impulsionnelles. Elle a une interprétation purement temporelle dans le cadre des systèmes instationnaires et est également caractérisé par la covariance du bruit de mesure lorsque l'entrée est un bruit blanc Gaussian normalisé.

Ces deux mesures de performance ( $H_2$  et  $H_\infty$ ) peuvent être associées à la stabilité quadratique dans le cadre des LMI (Section 2.2), respectivement, du lemme borné réel et des grammians de gouvernabilité et d'observabilité [18, 31, 83] pour des systèmes continus ou discrets. Ces propriétés seront exploitées plus loin dans le contexte des techniques LPV de la Deuxième Partie de ce mémoire.

## 2.2 Inégalités matricielles linéaires

Une LMI est une contrainte de la forme

$$\mathcal{L}(v) := L_0 + v_1 L_1 + v_2 L_2 + \dots + v_N L_N < 0, \quad (2.8)$$

où

- $v = [v_1, \dots, v_N]^T$  est un vecteur de variables scalaires inconnues (variables de décision ou d'optimisation) ;
- $L_0, \dots, L_N$  sont des matrices réelles et symétriques données ;
- $\bar{\lambda}(\mathcal{L}(v)) < 0$ .

La LMI (2.8) est une contrainte convexe en  $v$  puisque les conditions  $A(r) < 0$  et  $A(s) < 0$  impliquent que  $A(\frac{r+s}{2}) < 0$ . Par conséquent, l'ensemble de solutions de (2.8), dite solutions faisables, est un sous-ensemble convexe de  $\mathbf{R}^N$ . Trouver une solution  $v$  pour (2.8), s'il en existe une, est donc un problème d'optimisation convexe, appelé problème de faisabilité. Ce problème peut être résolu en cherchant le vecteur  $v$  qui minimise le scalaire  $t$  sous la contrainte :

$$\mathcal{L}(v) + tI < 0.$$

Si la valeur minimale de  $t$  est positive, le problème est faisable.

La convexité est une propriété importante pour deux raisons principales :

- bien que, en général, le problème de faisabilité de (2.8) n'ait pas de solution analytique, il peut être résolu numériquement avec des garanties de trouver une solution dès qu'il en existe une ;
- un système de LMI

$$\mathcal{L}_1(v) < 0, \quad \mathcal{L}_2(v) < 0, \quad \dots, \quad \mathcal{L}_M(v) < 0$$

peut être traité comme une LMI simple construite par empilement des contraintes

$$\mathcal{L}(v) := \text{diag}(\mathcal{L}_1(v), \dots, \mathcal{L}_M(v)),$$

ce qui permet d'imposer un nombre arbitraire de contraintes sur le vecteur de variables de décision sans que la convexité soit détruite.

Dans la plupart des applications, la structure naturelle des contraintes LMI n'apparaît pas dans la forme canonique (2.8), mais plutôt dans une forme plus convenable,

$$\mathcal{L}(V_1, \dots, V_M) < \mathcal{R}(V_1, \dots, V_M), \quad (2.9)$$

où  $\mathcal{L}(\cdot)$  et  $\mathcal{R}(\cdot)$  sont des fonctions affines des variables matricielles symétriques  $V_1, \dots, V_M$ . Un exemple simple est l'inégalité de LYAPUNOV

$$A^T V < -V A \quad \text{ou} \quad A^T V + V A < 0.$$

Supposons que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

et définissons les scalaires indépendants  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  comme les composantes de  $V = V^T$ , c'est-à-dire

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix}.$$

Il est facile de montrer, en développant l'inégalité ci-dessus, qu'elle est équivalente à

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + v_1 \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} < 0$$

qui est bien de la forme (2.8).

Minimiser un objectif convexe sous contrainte LMI est aussi un problème convexe. En particulier, un problème de minimisation d'un objectif linéaire de type

$$\min c^T v : \mathcal{L}(v) < 0, \quad (2.10)$$

où  $c$  est un vecteur réel de même dimension que  $v$ , joue un rôle important dans notre étude. Un grand nombre de problèmes d'analyse de stabilité et de performance de systèmes dynamiques, ainsi que de synthèse de lois de commande robustes, peut être formulé comme un problème d'optimisation sous contrainte LMI. La référence [18] donne une vue générale des applications des techniques LMI dans la théorie de la commande. En plus, nous disposons aujourd'hui d'algorithmes efficaces, comme ceux décrits en [63, 99, 62] et mis en œuvre en [33, 4], pour résoudre numériquement ces problèmes.

## 2.3 Séquencement de compensateurs

### 2.3.1 Structure

Le principal objectif des techniques de séquencement de compensateurs est de commander un système sur une plage de fonctionnement donnée. Outre la propriété de robustesse par rapport aux variations du système, les correcteurs séquencés ont une particularité favorable qui est l'adaptation en temps réel de leur comportement dynamique selon l'évolution du paramètre qui les caractérise. Ces approches élargissent la portée et l'impact des méthodes classiques de commande robuste LTI qui ne tiennent compte que des caractéristiques linéaires locales et des conditions particulières de fonctionnement du système. Ce bénéfice substantiel de la structure de commande par séquencement est une conséquence de l'exploitation explicite des informations de la dynamique du système basée sur la mesure de certains signaux, comme illustre la Figure 2.2.

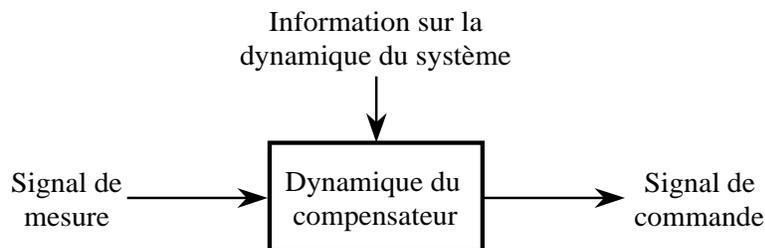


FIG. 2.2 – Structure du séquencement

Le correcteur séquencé traite les signaux mesurés (sorties), mais aussi tire parti d'informations (endogènes et/ou exogènes) supplémentaires du système pour mettre à jour sa dynamique en temps réel. Notons que ces informations modifient directement le signal de commande ainsi que la façon par laquelle le signal de mesure est traité par le compensateur. Par conséquent, les compensateurs séquencés présentent des propriétés de performance et robustesse meilleures que celles des correcteurs fixes qui ignorent la nature non stationnaire du système.

Dans cette étude, nous nous sommes particulièrement intéressés à la structure de commande illustrée à la Figure 2.3. Les systèmes (2.1) ou (2.2), avec la paire entrée-sortie supplémentaire  $(w, z)$ , sont représentés par  $P(s, \theta)$ . Les informations additionnelles sont prises en compte par la mesure de la variable de séquencement  $\theta(t)$ , tandis que des spécifications de performance  $H_2$  et/ou  $H_\infty$  sont définies pour le transfert  $T_{wz}$ . En traitant le signal de mesure  $y(t)$ , le correcteur  $K(s, \theta)$  produit un signal de commande qui, éventuellement, est additionné à une consigne  $r(t)$ .

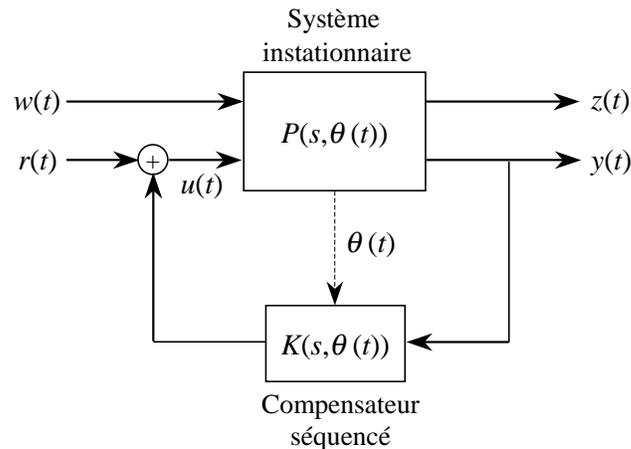


FIG. 2.3 – Interconnexions pour le séquencement

### 2.3.2 Caractéristiques

Plusieurs aspects qui caractérisent les techniques de séquencement sont listés ci-après. Parmi eux, certains ont stimulé leur développement au plan applicatif tout au long des trente dernières années, tandis que d'autres sont reconnus comme des limitations de l'approche et ont motivé des recherches récentes.

- Les correcteurs séquencés offrent des libertés supplémentaires pour atteindre des objectifs de performance et robustesse.
- Certains systèmes LPV ne sont pas stabilisables via un correcteur fixe, d'où le besoin pratique du séquencement.
- Le séquencement utilise des outils puissants de synthèse linéaire pour résoudre des problèmes non linéaires difficiles. Cela est vrai pour les approches conventionnelles

ainsi que pour les méthodes LPV plus récentes. Étant donné que ces techniques sont des extensions directes des techniques bien connues de type LTI, elles ont l'avantage de préserver certaines intuitions de conception et certains mécanismes d'analyse couramment utilisés.

- Les spécifications de performance, dans le domaine temporel ou fréquentiel, sont exprimées en termes linéaires et sont prises en compte directement dans la synthèse, au moins dans un sens local.
- Les correcteurs séquencés répondent rapidement aux changements des conditions de fonctionnement du système. Pour cette raison, il est important de choisir des variables de séquencement qui traduisent complètement les changements de la dynamique du système.
- Le comportement instationnaire du système bouclé est généralement très sensible à la stratégie d'interpolation utilisée (voir l'exemple illustratif au Paragraphe 2.3.4).
- Les méthodes classiques (par linéarisation) utilisent des règles heuristiques et exigent un nombre considérable de simulations pour évaluer la stabilité et la performance à temps variant. Typiquement, il n'y a pas de garantie de performance et la stabilité n'est assurée que localement et dans un contexte particulier de variation lente du paramètre d'interpolation.
- La charge calculatoire des méthodes classiques est relativement petite. Par contre, les techniques LPV sont plus chères en calcul, mais offrent des garanties théoriques de stabilité et performance.
- Les correcteurs LPV sont plus ou moins conservatifs selon la méthode utilisée. Les sources de conservatisme importantes les plus fréquemment rencontrées en pratique sont :
  - prise en compte de trajectoires irréalistes due à l'utilisation des classes restrictives de modèles ou à la négligence éventuelle de fortes corrélations entre le paramètre et la dynamique interne du système ;
  - prise en compte de taux de variations paramétriques illimités ;
  - utilisation de fonctions de LYAPUNOV quadratiques et indépendantes du paramètre et/ou communes à plusieurs canaux de performance ;
  - utilisation de classes restrictives de *scalings* ;
  - des conditions suffisantes de stabilité et de performance.

### 2.3.3 Principes méthodologiques

Les approches de séquencement conventionnelles construisent des correcteurs non linéaires  $K(s, \theta)$  en reliant les membres des familles appropriées de compensateurs LTI par une loi d'interpolation choisie :

1. Les conditions de fonctionnement du système  $P(s)$  en (2.1) et Figure 2.3 sont paramétrées par une variable d'interpolation appropriée  $\theta$ .
2. La dynamique du système est approximée aux voisinages d'un nombre de points d'équilibre  $\theta_i$  par des modèles LTI obtenus par expansion en séries de TAYLOR

(Figure 2.1).

3. Un ensemble de correcteurs LTI,  $u = K(s, \theta_i)y$ , est conçu par des techniques de commande linéaires pour assurer des conditions de performance appropriées autour des points de synthèse. La famille de correcteurs LTI correspondant à l'ensemble de points d'équilibre doit avoir des structures compatibles pour permettre une interpolation douce.
4. Une loi d'interpolation continue des compensateur LTI est choisie. Plusieurs schémas sont proposés dans la littérature, allant d'une simple interpolation linéaire de leurs coefficients jusqu'à l'utilisation d'une logique floue [78, 54].
5. La performance du système instationnaire bouclé est analysée sur un nombre assez riche de trajectoires potentielles. Si elle n'est pas satisfaisante, un nombre plus grand de points de synthèse LTI est requis à l'Étape 1.

Les étapes 3 et 4 sont d'une importance considérable, car le choix des réalisations d'état des correcteurs LTI (ou des coefficients à interpoler) et du schéma de séquencement peut influencer énormément la performance du système instationnaire bouclé (voir l'exemple illustratif au Paragraphe 2.3.4). Un mauvais choix peut exiger un nombre de correcteurs LTI impraticable. Cette problématique est discutée au Chapitre 3.

Dans le cadre de la commande LPV, la détermination de la loi de séquencement est impliquée directement dans la synthèse du correcteur et peut être du type LFT ou polytopique ou entraîner des dépendances paramétriques plus complexes. Il existe trois méthodes fondamentales : l'approche par petit gain ou la commande LPV de systèmes LFT, la commande LPV de systèmes polytopiques et la commande LPV de systèmes ayant une dépendance paramétrique générale. Les deux premières sont des méthodes par fonction de LYAPUNOV quadratique, tandis que la dernière permet d'utiliser des fonctions de LYAPUNOV dépendantes du paramètre. Pour ces approches, les besoins pratiques de l'interpolation de compensateurs (stabilité et performance instationnaires) sont satisfaits d'une façon algorithmique dans un contexte d'optimisation convexe sous contraintes de type LMI. En somme, l'utilisation des techniques LMI pour la synthèse de correcteurs séquencés nécessite une démarche définie essentiellement en cinq étapes qui peut exiger des manipulations matricielles relativement sophistiquées selon le problème traité :

1. Formulation du problème en terme du critère à optimiser.
2. Mise sous forme d'inégalités matricielles des contraintes qui ne sont pas forcément linéaires en les variables de décision.
3. Linéarisation des matrices en fonction des paramètres. Cette étape consiste à mettre les contraintes établies à l'étape précédente sous la forme LMI (2.9) en utilisant [18, 31, 83] :
  - des changements de variables plus ou moins complexes selon le critère et la structure de commande ;
  - le complément de SCHUR et ses variants ;
  - le lemme de projection pour l'élimination de variables ; ...
4. Résolution numérique du problème formulé (2.10) en utilisant des outils informatique disponibles.

5. Construction du correcteur séquencé<sup>4</sup> en fonction de la solution  $v$  du problème d'optimisation.

Cette procédure constitue la base des techniques proposées et discutées dans les Chapitres 4-6. On s'y intéresse notamment à la synthèse de correcteurs séquencés qui satisfont des contraintes de stabilité et de performance robuste exprimées par des LMI de type (2.8). Pour les systèmes instationnaires, ces contraintes peuvent naturellement impliquer des matrices  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_M$  dépendantes du paramètre  $\theta$  et, éventuellement, de sa dérivée  $\dot{\theta}$ , qui doivent être satisfaites pour toutes les trajectoires admissibles, c'est-à-dire, celles dans le domaine  $\mathcal{D}_{\Theta} \times \mathcal{D}_{\Theta_d}$ .

### 2.3.4 Illustration

En préalable à la présentation des techniques de séquencement proposées dans cette thèse, considérons une illustration simple qui met en lumière la problématique impliquée dans ces méthodes. Partons d'un système LPV,  $P(s, \theta)$ , défini par la réalisation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta)x + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - \theta/2 & -0.1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \theta \in [-1, 1], \\ y &= Cx = [1 \quad 0]x. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Pour la plage de variation considérée du paramètre, les deux pôles de ce système linéaire sont complexes et stables, mais très peu amortis. Leur partie réelle se maintient constante à  $-0.05$ , tandis que leur partie imaginaire varie de  $0.71$  à  $1.22$  rad/s (Figure 2.4). La stabilité est aussi vérifiée pour des variations suffisamment lente du paramètre comme, par exemple, celle entraînée par la fonction  $\theta(t) = \cos(\omega t)$ , avec  $\omega = 1$  rad/s. Mais, comme nous le savons, ces conditions ne garantissent pas la stabilité pour des taux de variation arbitraires de  $\theta(t)$ . On constate à la Figure 2.5-(a) que, pour  $\omega = 2$  rad/s dans cette même fonction, le système devient instable.

En supposant que  $\theta(t) = \cos(2t)$ ,  $t > 0$ , on souhaite que le système (2.11) réponde à une entrée de type échelon avec un dépassement maximal de 5%, un temps de montée plus petit que 3s, un temps de stabilisation plus petit que 5s et une précision en régime permanent de 2%. Évidemment, ces spécifications ne sont pas complètes et n'impliquent pas des canaux supplémentaires de performance pour les exprimer en forme d'un critère à optimiser. Mais elles sont suffisantes dans ce contexte illustratif. De plus, étant donnée la simplicité de cet exemple, un seul compensateur LTI robuste paramétriquement pourrait, peut-être, accomplir de manière satisfaisante ces exigences. Néanmoins, pour mieux illustrer le problème d'interpolation de compensateurs, nous optons pour la conception de trois correcteurs LTI d'ordre 2 qui satisfont les spécifications pour trois valeurs fixes du paramètre, à savoir  $\theta = -1, 0$ , et  $+1$  (Figure 2.5-(b)). On utilise la structure de commande schématisée à la Figure 2.3. En fait, les correcteurs LTI,  $K(s, \theta)$ , placent les pôles dominants sur les points  $-0.8 \pm j1.08$  du plan complexe, pour chaque valeur figée

4. Dit correcteur LPV dans ce contexte particulier des LMI.

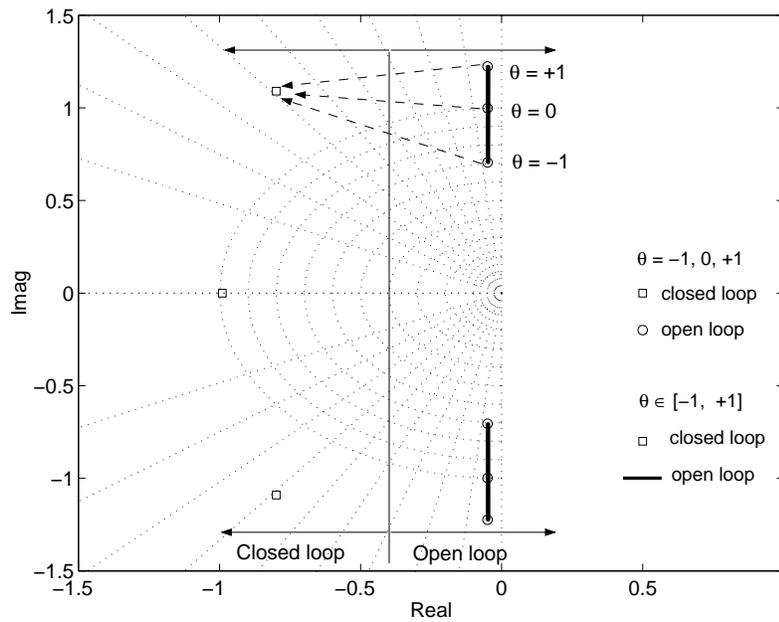


FIG. 2.4 – Localisation des pôles en fonction de la valeur du paramètre

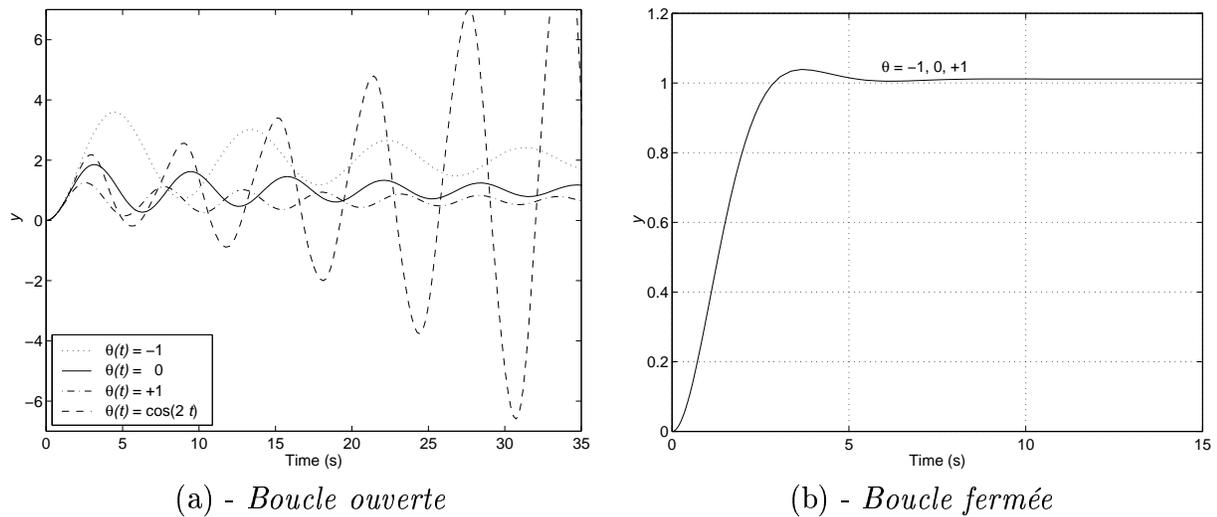


FIG. 2.5 – Réponse à l'échelon unitaire en boucle ouverte (paramètre figé et variant) et fermée (paramètre figé)

de  $\theta$  (Figure 2.4). Les deux pôles en boucle fermée restants sont réels et fixes en  $-0.98646$  et  $-167.15$  pour les trois correcteurs aux trois points de synthèse.

L'objectif est de maintenir la réponse instationnaire du système ( $\theta = \cos(2t)$ ) le plus proche possible des trois réponses (identiques) vérifiées aux points de synthèse (Figure 2.5-(b)). Pour se faire, on propose d'utiliser cinq stratégies différentes de séquençement :

1. La première consiste à interpoler linéairement en  $\theta$  les matrices de réalisations d'état des compensateur initiaux  $K_0(s, \theta)$ , issues de la procédure de synthèse (Tableau 2.1).
2. La deuxième implique également une interpolation linéaire en  $\theta$ , mais des matrices de réalisations d'état balancées, basées sur les Gramiens de commandabilité et d'observabilité. Celles-ci sont listées au Tableau 2.1 et correspondent aux correcteurs  $K_b(s, \theta)$ , équivalents à  $K_0(s, \theta)$ .
3. Dans la troisième, il s'agit d'une interpolation linéaire en  $\theta$ , des gains, pôles et zéros (Tableau 2.2) des fonctions de transfert issues de  $K_0(s, \theta)$  et/ou  $K_b(s, \theta)$  :

$$K_{tf}(s, \theta) = \frac{g(\theta)[s - z_1(\theta)][s - z_2(\theta)]}{[s - p_1(\theta)][s - p_2(\theta)]}. \quad (2.12)$$

4. Des structures estimation/commande équivalentes avec un paramètre de YOULA statique sont utilisées dans la quatrième stratégie :

$$K_{obl}(s, \theta) = \left[ \frac{A(\theta) - BK_c(\theta) - K_f(\theta)C - BD_q(\theta)C}{-K_c(\theta) - D_q(\theta)C} \mid \frac{K_f(\theta) + BD_q(\theta)}{D_q(\theta)} \right]. \quad (2.13)$$

Alors que la matrice  $A(\theta)$  est supposée connue en temps réel, les gains  $K_c(\theta)$  et  $K_f(\theta)$  et le paramètre de YOULA  $D_q(\theta)$  (Tableau 2.3) sont interpolés linéairement en  $\theta$ .

5. La dernière stratégie est radicalement différente et consiste en une structure de dépendance de type LFT du correcteur par rapport au paramètre :

$$K_{lft}(s, \theta) = \mathcal{F}_l \left( \left( \left[ \begin{array}{cc|cc} -167.92 & -1.4474 & 1909.8 & 0.0004 \\ 10.114 & -1.7192 & -114.47 & 0 \\ \hline 10.128 & 1.0713 & -115.48 & 0.0084 \\ 0.1241 & 0.0036 & 70.676 & 0 \end{array} \right], \Delta(\theta) \right), \quad (2.14)$$

avec  $\Delta(\theta) = 0.83\theta$ .

TAB. 2.1 – Réalisations d'état des correcteurs  $K_0(s,\theta)$  et  $K_b(s,\theta)$ 

$\theta$	$K_0(s,\theta)$	$K_b(s,\theta)$
-1	$\begin{bmatrix} -158.03 & 49.210 & 2985.3 \\ 31.109 & -11.607 & -592.90 \\ \hline 6.2905 & -0.7399 & -115.97 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -167.77 & 3.1865 & 138.62 \\ 3.1865 & -1.8685 & -1.3273 \\ \hline 138.62 & -1.3273 & -115.97 \end{bmatrix}$
0	$\begin{bmatrix} -167.92 & -1.4474 & 1909.8 \\ 10.114 & -1.7192 & -114.47 \\ \hline 10.128 & 1.0713 & -115.48 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -167.77 & 3.1876 & 138.63 \\ 3.1888 & -1.8686 & -1.3278 \\ \hline 138.63 & -1.3278 & -115.48 \end{bmatrix}$
+1	$\begin{bmatrix} -164.43 & -24.072 & 1336.9 \\ -22.978 & -5.2086 & 191.13 \\ \hline 13.966 & 2.8828 & -114.99 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -167.77 & 3.1888 & 138.64 \\ -22.978 & -5.2086 & -1.3284 \\ \hline 138.64 & -1.3284 & -114.99 \end{bmatrix}$

TAB. 2.2 – Pôles, zéros et gains de  $K_{tf}(s,\theta)$ 

$\theta$	$g$	$z_1$	$z_2$	$p_1$	$p_2$
-1	-115.97	-3.5658	-0.3585	-167.83	-1.8073
0	-115.48	-3.2157	0.0108	-167.83	-1.8073
+1	-114.99	-2.9415	0.4619	-167.83	-1.8073

TAB. 2.3 – Coefficients de  $K_{obl}(s,\theta)$ 

$\theta$	$K_c$	$K_f$	$D_q$
-1	[1.3152 1.5042]	[168.04; 147.90]	-115.97
0	[0.8154 1.5063]	[168.03; 147.00]	-115.48
+1	[0.3156 1.5084]	[168.03; 146.20]	-114.99

Notons que le correcteur central  $K_{lft}(s,0)_{11}$  en (2.14) est égal à  $K_0(s,0)$  (Tableau 2.1). D'ailleurs, il est facile de vérifier que tous les schémas d'interpolation reconstruisent des correcteurs LTI équivalents, d'un point de vue entrée-sortie, aux points de synthèse ( $\theta = -1, 0$ , et  $+1$ ). Remarquons aussi que la fonction  $A(\theta)$  est linéaire en (2.13) et que le terme de transmission directe ( $D_{22}$ ) de  $K_{lft}(s,0)$  en (2.14) est nul. Par conséquent, toutes les stratégies impliquent des lois de séquencement linéaires en  $\theta$ . Malgré cela, elles mènent à des lois de commande et à des comportements instationnaires radicalement différents. Alors que la première stratégie conduit à une réponse instable, les réponses associées aux quatre dernières sont stables et illustrées à la Figure 2.6.

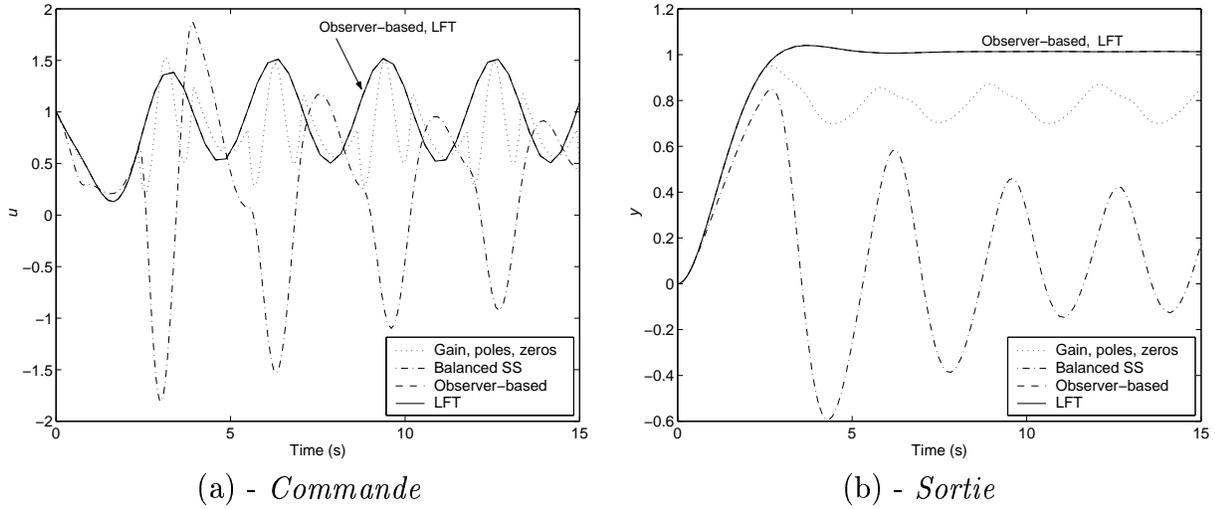


FIG. 2.6 – Réponse instationnaire en boucle fermée à l'échelon unitaire pour  $\theta = \cos(2t)$  et pour les différentes lois d'interpolation

On constate d'après le Tableau 2.1 que les coefficients des réalisations d'état des correcteurs initiaux  $K_0(s, \theta)$  sont relativement distants entre points de fonctionnement, ce qui explique la perte de stabilité lors de la transition instationnaire. Dans ce même tableau, on peut vérifier que les réalisations balancées,  $K_b(s, \theta)$ , ont des coefficients beaucoup plus compatibles pour les différents points de synthèse. Pourtant, cela ne suffit pas pour éviter une perte de performance considérable (Figure 2.6). Un phénomène similaire, mais un peu moins délicat, apparaît pour l'interpolation de coefficients des fonctions de transfert  $K_{ft}(s, \theta)$ . Donc, ces structures ne sont pas adaptées à l'interpolation dans ce cas particulier. Au contraire, les conceptions de séquençement basées sur les structures estimation/commande et LFT évoluent d'une manière synchronisée avec le système, car elles exploitent le fait que les variables de séquençement permettent la reconstitution de la dynamique du système dans le correcteur. En plus, les valeurs des coefficients interpolés sont compatibles pour les trois points de synthèse. Ces approches font objet de notre étude et, pour cet exemple, n'entraînent aucune perte de performance par rapport aux comportements dynamiques localisés.

Pour conclure, nous insistons sur le fait (déjà vérifié pour la première stratégie d'interpolation) que des variations rapides du compensateur peuvent avoir une influence non négligeable sur la dynamique instationnaire du système bouclé. Modifions, par exemple, les gains de retour et d'observation d'état du correcteur central  $K_{ob1}(s, \theta)$ , tout en préservant l'équivalence entrée-sortie, par rapport aux autres compensateurs LTI en ce point :

$$K_{ob2}(s, \theta) : \begin{cases} K_c(\theta), K_f(\theta) \text{ et } D_q(\theta), \theta = -1 \text{ et } +1, \text{ idem } K_{ob1}(s, \theta) , \\ K_c(0) = [163.88, 168.03] , \\ K_f(0) = [1.5063; 0.66479] , \\ D_q(0) = -115.48 . \end{cases} \quad (2.15)$$

Cette nouvelle famille de correcteurs semble avoir une structure également adéquate pour l'interpolation, puisque la philosophie du séquençement est identique à celle adoptée pour

$K_{ob1}(s, \theta)$ . Toutefois, la différence entre les gains au point central ( $\theta = 0$ ) par rapport à ceux des points extrêmes ( $\theta = -1, +1$ ) est plus évidente pour ce deuxième ensemble de correcteurs de structure estimation/commande. Les résultats de la simulation instationnaire, présentés à la Figure 2.7, montrent que cette modification se traduit par une détérioration de la performance, laquelle n'est plus compatible avec le cahier des charges. En général, l'introduction artificielle de variations structurelles importantes dans la boucle peut détériorer la performance ou rendre le système instable.

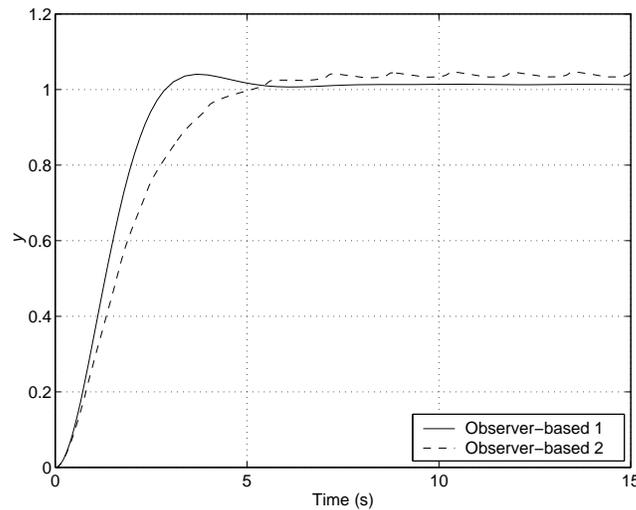


FIG. 2.7 – Performance pour l'interpolation de deux familles différentes de compensateurs de structure estimation/commande

Cet exemple simple montre clairement l'intérêt de notre étude. D'après ce qui précède, on peut conclure que le correcteur séquencé doit, non seulement évoluer de façon synchronisée avec les changements de la dynamique du système, mais aussi préserver une structure cohérente sur tout le domaine de fonctionnement. Ce fait a déjà été mis en évidence dans plusieurs travaux apparaissant dans la littérature. Enfin, cette problématique devient plus critique lorsque le système est non linéaire et d'ordre plus élevé et lorsque des techniques modernes de commande robuste sont utilisées pour la synthèse LTI.

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé certains aspects de la modélisation de systèmes instationnaires et certains principes de base des techniques normalement utilisées en pratique pour les commander. Un exemple servant à illustrer les difficultés inhérentes au séquencement de compensateurs a été présenté.



## Deuxième partie

### Algorithmes avancés pour le séquençement de compensateurs



## Chapitre 3

# Séquencement de structures estimation/commande pour des compensateurs $H_\infty$ et $\mu$

DANS ce chapitre, nous développons une méthodologie générale pour la commande d'un système sur un grand domaine de fonctionnement en effectuant une interpolation classique de compensateurs dynamiques prédéterminés [67, 69, 71]. Une difficulté importante de l'interpolation classique réside dans le fait que le comportement dynamique des compensateurs interpolés dépend de manière critique des représentations d'état adoptées pour la famille de correcteurs linéaires conçue sur un ensemble de points de fonctionnement. La technique que nous proposons utilise une séquence de transformations d'état linéaires permettant d'aboutir à une famille cohérente et interprétable d'un point de vue physique de compensateurs équivalents qui se prêtent à l'interpolation. Après la transformation, ces compensateurs présentent une structure estimation/commande, facilitant l'interpolation et la mise en œuvre. Cette méthode s'applique aux compensateurs discrets ou continus, d'ordre augmenté ou plein et en particulier, aux correcteurs issus d'une synthèse  $H_\infty$  ou d'une  $\mu$ -synthèse, dont le séquencement est en général délicat. Des exemples numériques sont présentés pour illustrer les avantages de cette approche.

## 3.1 Introduction

### Problématique

Dans les références [95, 96]<sup>1</sup>, les auteurs donnent des conditions suffisantes et théoriquement justifiées sur le “placement” de compensateurs LTI pour qu’il existe toujours un correcteur interpolé classique qui préserve la stabilité. Leurs résultats montrent clairement que des transitions satisfaisantes dépendent non seulement de la vitesse de variation du paramètre du système et de la “distance” entre points de fonctionnement mais aussi de la “proximité” entre les coefficients des compensateurs LTI à interpoler. On doit signaler que l’interpolation de ces coefficients représente aussi une variation paramétrique pour le système bouclé, et plus l’écart entre eux est grand, plus la vitesse de cette variation est importante. En somme, si les compensateurs linéaires à interpoler changent considérablement d’un point de fonctionnement à l’autre, une variation rapide de la dynamique en boucle fermée est introduite artificiellement et cela peut produire un effet déstabilisant ou une perte de performance.

La dégradation des performances dans la zone de transition est pourtant maintenue dans des limites acceptables si les facteurs suivants sont considérés :

- les variations rapides ou les non-linéarités significatives du système doivent être compensées par des ajustements adéquats dans le compensateur et par un choix convenable de points de synthèse et d’une fonction d’interpolation continue ;
- les correcteurs LTI conçus en ces points doivent avoir des structures compatibles pour éviter les variations rapides des coefficients interpolés.

Le premier point est pris partiellement en compte en [95, 96] dans le sens où seules, des conditions sur le choix de l’ensemble des points d’équilibre sont discutées. La loi d’interpolation considérée permet de déterminer, de manière conservatrice et dans une phase post-synthèse, une borne supérieure du taux de variation des paramètres, au-delà de laquelle le système bouclé est instable, mais ne s’intéresse pas explicitement au comportement physique du modèle. Or, les ajustements de la dynamique du correcteur peuvent ne pas être synchronisés avec les évolutions des différentes dynamiques du système. En outre, ces travaux sont restreints aux compensateurs d’ordre plein, dans le contexte de l’interpolation en espace d’état.

Puisque les dynamiques des correcteurs interpolés peuvent être fortement dépendantes des réalisations adoptées, les problèmes structurels évoqués dans le second point deviennent particulièrement critiques lorsque des données d’espace d’état sont utilisées pour l’interpolation [52]. Outre le fait qu’un choix convenable de points de fonctionnement est le premier problème à résoudre, établir un ensemble de réalisations d’état leur correspondant et bien adaptées à l’interpolation est une question délicate qui reste ouverte dans le domaine de l’interpolation classique.

Les structures estimation/commande présentent des caractéristiques importantes qui deviennent particulièrement intéressantes dans le problème d’interpolation pour des ap-

---

1. Voir aussi [93, 94] et les exemples numériques inclus.

plications réalistes. Des techniques modernes de conception comme la synthèse  $H_\infty$  et la  $\mu$ -synthèse et leurs variantes produisent des correcteurs d'ordre élevé dont la dynamique reste obscure au concepteur et peut changer considérablement avec les conditions de fonctionnement. L'interpolation de représentations d'état générales de ces correcteurs est discutable d'un point de vue de la mise en œuvre et, dans un grand nombre de cas, elle peut conduire à un effort calculatoire insurmontable, en particulier, pour les problèmes qui nécessitent un ajustement rapide des données du compensateur en temps réel. Au contraire, pour les structures estimation/commande, en supposant que le modèle linéaire est disponible en temps réel, il n'est requis que le stockage de deux gains statiques et d'un paramètre de YOULA pour mettre à jour la dynamique du correcteur à chaque instant de l'échantillonnage. D'autre part, le modèle linéaire du système fait partie du correcteur interpolé et évolue conformément à la dynamique du système, ce qui traduit son comportement non linéaire autour de sa trajectoire. De plus, dans la pratique, le paramètre d'interpolation est généralement choisi comme une fonction des mesures et/ou des états du système physique. Il est donc intéressant d'estimer efficacement les états pour tout le domaine de variation du paramètre.

Des techniques pratiques pour calculer les formes estimation/commande pour des compensateurs arbitraires ont été proposées notamment en [2, 14] et les références incluses. Néanmoins, ces méthodes traitent les compensateurs LTI d'une façon séparée et déconnectée ce qui conduit à un ensemble de transformations d'état qui n'est pas toujours adapté au contexte de l'interpolation.

## Contribution

Dans cette étude, nous proposons une méthode pour dériver un ensemble de transformations linéaires d'espace d'état qui transforme la famille initiale de correcteurs LTI arbitraires en une autre famille (équivalente) de structure estimation/commande telle que :

- les différences de dynamiques entre les compensateurs sont minimisées, tout en respectant la dynamique physique du système ;
- il existe une trajectoire continue de ces transformations qui connecte les réalisations d'état des compensateurs LTI.

Ces propriétés conduisent à des coefficients plus faciles à interpoler. Cette question délicate a déjà été soulignée dans [52]. Mais le choix approprié de réalisation d'état pour une partie linéaire du correcteur interpolé qui y est fourni nécessite des manipulations algébriques non généralisables. Notre méthode, par contre, a l'avantage de s'appliquer à une large gamme de systèmes et diffère de l'approche précédente en trois points principaux :

- les compensateurs équivalents ne sont calculés que pour l'ensemble de correcteurs linéaires ;
- des structures estimation/commande sont obtenues ;
- il n'y a pas de restrictions particulière sur la stratégie pour les interpoler, à condition que les coefficients interpolés soient choisis comme fonctions continues du paramètre.

Ce dernier point devient intéressant lorsque des correcteurs d'ordre augmenté sont considérés. Dans ce cas, notre méthodologie a la propriété de produire un ensemble de paramètres de YOULA stables ayant une structure particulière qui tolère une simple interpolation linéaire. Les méthodes d'interpolation qui préservent la stabilité, proposées en [95] et [96], applicables seulement aux compensateurs d'ordre plein, peuvent être utilisées dans notre contexte et sont donc généralisées pour des compensateurs d'ordre augmenté.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la Section 3.2, nous présentons un algorithme fondé sur les techniques proposées en [2] pour le calcul de compensateurs équivalents du point de vue entrée-sortie. Toutefois, nous utilisons une décomposition de SCHUR particulière de la matrice dynamique en boucle fermée qui conduit à des transformations d'état plus adaptées et numériquement plus stables pour les techniques d'interpolation et est, donc, essentiellement différente de celle utilisée en [2]. Les difficultés numériques inhérentes au calcul de ces transformations sont aussi discutées et des solutions sont proposées. Dans la Section 3.3, nous proposons une méthode pour construire des compensateurs adjacents ayant la même structure d'observateur et conservant un comportement dynamique continu pour chacun de leurs éléments, indépendamment de la stratégie d'interpolation adoptée. Un ensemble de transformations d'espace d'état des compensateurs est obtenu par continuation d'une partition choisie des pôles de la boucle fermée. Dans la Section 3.4, les techniques sont illustrées par des exemples numériques empruntés à la littérature.

## 3.2 Structures estimation/commande

Dans cette section, nous rappelons les techniques proposées en [2] (Paragraphe 3.2.1 et 3.2.2) permettant de calculer des représentations équivalentes de type estimation/commande d'un compensateur stabilisant arbitraire associé à un système donné. Ces techniques sont générales. Elles s'appliquent aussi bien à des systèmes et des correcteurs propres que non strictement propres et peuvent prendre en compte des compensateurs à temps discret, continu, d'ordre réduit, plein ou augmenté. Mais comme nous nous intéressons surtout aux correcteurs de type  $H_\infty$  et  $\mu$ , notre étude se limite aux compensateurs dont les ordres sont égaux ou plus grands que l'ordre du système. Dans un premier temps, nous étudions le cas continu. Nous proposons ensuite un algorithme original<sup>2</sup> pour le calcul de compensateurs équivalents du point de vue entrée-sortie, bien adaptés aux techniques d'interpolation (Paragraphe 3.2.3 et 3.2.4). Enfin la technique développée pour les systèmes continus est étendue au cas discret dans le Paragraphe 3.2.5.

On peut trouver dans la littérature plusieurs expressions utilisées souvent comme termes équivalents pour "compensateur de structure estimation/commande": *observer-based structure*, *observer state (feedback) controller*, *LQG (form) controller*, *estimator/controller structure (or form)*, *observer/controller structure*, *state estimator-state feedback structure*, entre autres.

---

2. Une variante d'une méthode présentée en [2].

**Définition 3.1 (Compensateur de structure estimation/commande)** [101]

Étant donné un système générique  $(A, B, C)$  avec  $(A, B)$  stabilisable et  $(C, A)$  détectable, alors, il existe des matrices réelles  $K_c$  et  $K_f$  telles que les valeurs propres de  $A - BK_c$  et  $A - K_f C$  sont stables. Le compensateur noté  $u = \overline{K}(s)y$  où

$$\overline{K}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A - BK_c - K_f C & K_f \\ \hline -K_c & 0 \end{array} \right] \quad (3.1)$$

est appelé “compensateur de structure estimation/commande”.

**3.2.1 Formulation du problème**

Considérons les systèmes en boucle fermée représentés à la Figure 3.1, où

$$G(s) = \left[ \begin{array}{cc} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{array} \right] \quad (3.2)$$

et

$$P(s) = \left[ \begin{array}{cc} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{array} \right] \quad (3.3)$$

sont, respectivement, les modèles de synthèse nominal et augmenté. Le signal  $r$  est la consigne et les signaux  $w$ ,  $e$ ,  $z$  et  $y$  sont, respectivement, l’entrée exogène, la commande, la sortie commandée et la mesure de  $P(s)$ .

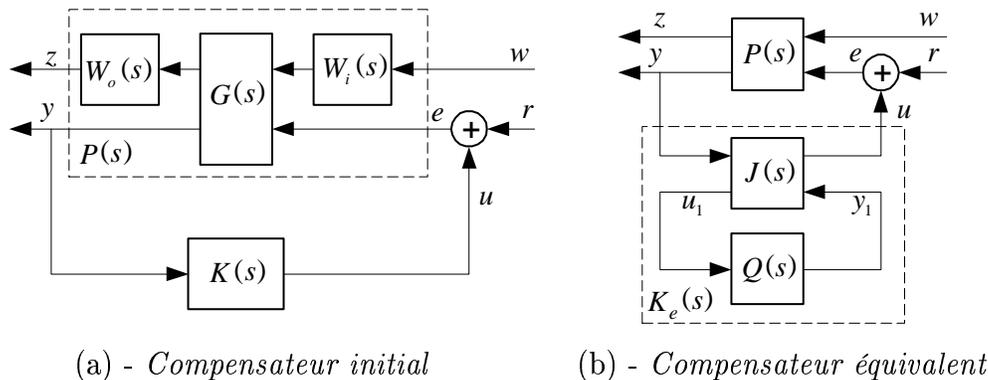


FIG. 3.1 – Systèmes en boucle fermée

Le système nominal  $G_{22}(s)$ , supposé strictement propre, est défini par la représentation d’état stabilisable et détectable suivante :

$$G_{22}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right], \quad (3.4)$$

avec  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$  et  $C \in \mathbf{R}^{p \times n}$ . Nous supposons aussi que le système augmenté

$$P_{22}(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_p & B_p \\ \hline C_p & 0 \end{array} \right], \quad (3.5)$$

où  $\text{spec}(A_p) \supseteq \text{spec}(A)$ , est stabilisable et détectable et contient des dynamiques fictives supplémentaires, notamment les pondérations fréquentielles et/ou les multiplicateurs dynamiques stables  $W_i(s)$  et  $W_o(s)$ . Le système  $G_{22}(s)$  correspond à la dynamique physique<sup>3</sup> que nous souhaitons stabiliser par un compensateur de structure estimation/commande.  $P_{22}(s)$  se distingue de  $G_{22}(s)$  par la présence possible de modes inobservables et/ou ingouvernables. Bien que ces deux systèmes soient équivalents du point de vue entrée-sortie, nous allons préserver, au cours de ce chapitre, les notations en (3.4) et (3.5) pour distinguer les dynamiques physique et augmentée.

Notons bien, qu'il n'y a pas de perte de généralité en supposant  $D = 0$ . En effet, si  $D \neq 0$ , il est facile de former un problème équivalent avec  $D = 0$  par une transformation fractionnaire sur le correcteur. Supposons que  $K(s)$  soit un compensateur pour  $G_{22}(s)$  avec  $D = 0$ . Le correcteur pour  $D \neq 0$  se déduit de la manière suivante :

$$K(s) (I + DK(s))^{-1}. \quad (3.6)$$

Le problème que nous allons traiter peut être énoncé comme suit.

---

**Étant donnés** les systèmes  $G_{22}(s)$  et  $P_{22}(s)$  et un compensateur stabilisant initial (Figure 3.1-(a))

$$K(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right], \quad (3.7)$$

où  $A_K \in \mathbf{R}^{n_K \times n_K}$ ,  $n_K \geq n$ ,  $D_K \in \mathbf{R}^{m \times p}$  et  $B_K, C_K$  sont des matrices réelles de dimensions compatibles,

**calculer** une transformation linéaire inversible,  $T$ ,

**telle que** le compensateur

$$K_e(s) = \left[ \begin{array}{c|c} T^{-1}A_K T & T^{-1}B_K \\ \hline C_K T & D_K \end{array} \right], \quad (3.8)$$

équivalent à (3.7) du point de vue entrée-sortie, présente une structure séparée explicite (Figure 3.1-(b))

**et que**  $J_{11}(s)$  ait une structure estimation/commande par rapport au système physique  $G_{22}(s)$  (Figure 3.2).

---

Le schéma fonctionnel de la Figure 3.2 explicite la structure recherchée. Il s'agit donc de chercher, à travers le calcul de  $T$ , un compensateur équivalent qui présente une structure de type LFT inférieure en ce qui concerne le paramètre de YOULA  $Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty$  :

$$K_e(s) = J_{11}(s) + J_{12}(s)Q(s) [I + J_{22}(s)Q(s)]^{-1} J_{21}(s),$$

---

3. Éventuellement incluant la dynamique des actionneurs et des détecteurs.

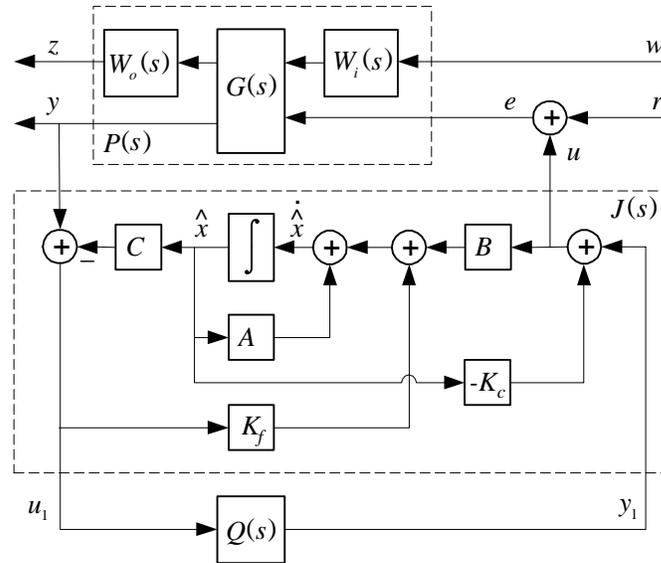


FIG. 3.2 – Paramétrisation de YOULA sur la structure estimation/commande

où les coefficients  $J_{11}(s)$ ,  $J_{12}(s)$ ,  $J_{21}(s)$ ,  $J_{22}(s)$  sont les éléments de la matrice de transfert entre  $[y; y_1]$  et  $[u; u_1]$ ,

$$J(s) := \begin{bmatrix} J_{11}(s) & J_{12}(s) \\ J_{21}(s) & J_{22}(s) \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|cc} A - BK_c - K_f C & K_f & B & \\ \hline -K_c & 0 & I_{m \times m} & \\ -C & I_{p \times p} & 0 & \end{array} \right]. \quad (3.9)$$

Les gains  $K_c$ ,  $K_f$  sont choisis tels que  $A - BK_c$  et  $A - K_f C$  soient stables<sup>4</sup>. La représentation d'état de  $J_{11}(s)$  est bien de la forme (3.1) et a  $\hat{x}$  pour état, où  $\hat{x}$  est un estimé asymptotique de l'état réel  $x$  de  $G_{22}(s)$ .  $x - \hat{x}$  tend vers 0 lorsque le temps  $t$  tend vers l'infini, pour des entrées exogènes nulles  $w = 0$ .

Si nous notons

$$Q(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_q & B_q \\ \hline C_q & D_q \end{array} \right] \quad (3.10)$$

une réalisation minimale de  $Q$ , où  $A_q \in \mathbf{R}^{n_q}$ ,  $n_q = n_K - n$  et  $B_q, C_q, D_q$  ont des dimensions compatibles, il vient

$$K_e(s) = \left[ \begin{array}{cc|cc} A - BK_c - K_f C - BD_q C & BC_q & K_f + BD_q & \\ \hline -B_q C & A_q & B_q & \\ -(K_c + D_q C) & C_q & D_q & \end{array} \right] \quad (3.11)$$

4. Il convient de remarquer que ces contraintes de stabilité sont toujours satisfaites s'il existe une telle matrice  $T$ , c'est-à-dire, si l'équivalence entre (3.7) et (3.8) est assurée.

et la fonction de transfert en boucle fermée entre  $r$  et  $y$  devient

$$T_{ry}(s) = (I - G_{22}K_e)^{-1}G_{22} = \left[ \begin{array}{ccc|c} A + BD_qC & -B(K_c + D_qC) & BC_q & B \\ (K_f + BD_qC)C & A - BK_c - K_fC - BD_qC & BC_q & 0 \\ B_qC & -B_qC & A_q & 0 \\ \hline C & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.12)$$

Le vecteur d'état de (3.12) contient les états du système (ou états physiques), les états de l'observateur et les états du paramètre de YOULA :  $[x; \hat{x}; x_q]$ .

Par abus de langage, on qualifie également les représentations d'état de  $J(s)$  et  $K_e(s)$ , (3.9) et (3.11), de structure estimation/commande.

Pour faciliter l'interprétation de la dynamique en boucle fermée, nous appliquons à (3.12) la transformation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} x \\ x_q \\ \hat{x} - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ -I & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \\ x_q \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

La nouvelle représentation d'état en boucle fermée (3.14) fait donc intervenir l'erreur d'estimation  $\hat{x} - x$  :

$$T_{ry}(s) = \left[ \begin{array}{ccc|c} A - BK_c & BC_q & -B(K_c + D_qC) & B \\ 0 & A_q & -B_qC & 0 \\ 0 & 0 & A - K_fC & -B \\ \hline C & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.14)$$

À partir de cette représentation, le principe de séparation apparaît clairement. Les valeurs propres de la boucle fermée peuvent être séparées selon les  $n$  valeurs propres du retour d'état, les  $n$  valeurs propres du filtre d'estimation et les  $n_q$  valeurs propres du paramètre de YOULA :  $\text{spec}(A - BK_c)$ ,  $\text{spec}(A - K_fC)$  et  $\text{spec}(A_q)$ , respectivement.

La fonction de transfert en boucle fermée peut aussi être représentée à partir du compensateur initial (3.7) :

$$T_{ry}(s) = (I - G_{22}K)^{-1}G_{22} = \left[ \begin{array}{cc|c} A + BD_KC & BC_K & B \\ BK_C & A_K & 0 \\ \hline C & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & 0 \end{array} \right], \quad (3.15)$$

dont le vecteur d'état est  $[x; T_1\hat{x}; T_2x_q]$ , avec

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} = T. \quad (3.16)$$

À l'aide de ces définitions et notations, nous allons pouvoir écrire des conditions qui assurent l'équivalence entrée-sortie des représentations (3.7) et (3.8).

### 3.2.2 La structure estimation/commande équivalente

À partir de (3.8) et (3.11), on peut déduire :

$$A_K T - T \begin{bmatrix} A + BD_K C & 0 \\ 0 & A_q \end{bmatrix} - T \begin{bmatrix} BC_K \\ 0 \end{bmatrix} T + \begin{bmatrix} B_K C & 0 \end{bmatrix} = 0, \quad (3.17)$$

$$T^{-1} B_K = \begin{bmatrix} K_f + BD_q \\ B_q \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

$$C_K T = \begin{bmatrix} -(K_c + D_q C) & C_q \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

et

$$D_K = D_q. \quad (3.20)$$

Le problème se réduit donc à résoudre en  $T \in \mathbf{R}^{n_K \times n_K}$  l'équation (3.17) et ensuite à calculer  $K_c$ ,  $K_f$ ,  $B_q$ ,  $C_q$  et  $D_q$  en utilisant les relations (3.18), (3.19) et (3.20). Remarquons que  $A_q$  est inconnue en (3.17) et correspond donc à une variable supplémentaire. Il convient aussi de remarquer que la solution théorique de (3.17) est simplifiée si nous la partageons en deux problèmes dissociés.

En adoptant une partition appropriée de  $T$  en (3.16), on obtient donc :

$$T_1(A + BD_K C) - A_K T_1 + T_1 BC_K T_1 - B_K C = 0 \quad (3.21)$$

et

$$(A_K - T_1 BC_K) T_2 = T_2 A_q. \quad (3.22)$$

L'équation de RICCATI généralisée, non symétrique et rectangulaire (3.21) peut être encore reformulée :

$$\begin{bmatrix} -T_1 & I \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} A + BD_K C & BC_K \\ B_K C & A_K \end{bmatrix}}^H \begin{bmatrix} I \\ T_1 \end{bmatrix} = 0. \quad (3.23)$$

Par conséquent, la matrice Hamiltonienne  $H$  associée à l'équation de RICCATI (3.21) n'est autre que la matrice dynamique du système en boucle fermée  $A_{cl}$ , exprimée en (3.15). L'équation de RICCATI (3.21) peut donc être résolue en  $T_1 \in \mathbf{R}^{n_K \times n}$  par des techniques classiques de calcul d'espaces invariants qui consistent à :

- Trouver un sous-espace invariant associé à un ensemble de  $n$  valeurs propres,  $\text{spec}(\Lambda_n)$ , choisies parmi  $2n + n_q$  valeurs propres dans  $\text{spec}(A_{cl})$ , c'est à dire,

$$\begin{bmatrix} A + BD_K C & BC_K \\ B_K C & A_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \Lambda_n, \quad (3.24)$$

où  $U_1 \in \mathbf{R}^{n \times n}$  et  $U_2 \in \mathbf{R}^{n_K \times n}$ . De tels sous-espaces peuvent être calculés aisément par une décomposition de SCHUR de la matrice  $A_{cl}$ .

– Calculer la solution

$$T_1 = U_2 U_1^{-1}, \quad (3.25)$$

dont l'existence est garantie lorsque les valeurs propres de la boucle fermée sont distinctes.

En utilisant ce dernier résultat et de façon similaire, le calcul de la solution  $T_2 \in \mathbf{R}^{n_K \times n_q}$  de l'équation de SYLVESTER (3.22) se réduit à trouver un sous-espace invariant associé à un ensemble de  $n_q$  valeurs propres,  $\text{spec}(A_q)$ , choisies parmi  $n + n_q$  valeurs propres de  $\text{spec}(A_K - T_1 B C_K)$ .

À partir de (3.8), (3.11) et (3.19), on peut vérifier aussi que

$$A_K - T_1 B C_K = T \begin{bmatrix} A - K_f C & 0 \\ -B_q C & A_q \end{bmatrix} T^{-1}. \quad (3.26)$$

Nous pouvons donc établir la proposition suivante :

**Proposition 3.2** *Les  $n$  valeurs propres choisies pour le calcul de la solution  $T_1$  de l'équation (3.21), en utilisant l'approche Hamiltonienne, sont les  $n$  valeurs propres du retour d'état associé à la structure estimation/commande équivalente, c'est-à-dire,  $\text{spec}(A - B K_c)$ . De plus, la dynamique en boucle fermée restante<sup>5</sup> contient la dynamique d'estimation  $(A - K_f C)$  augmentée de la dynamique du paramètre de YOULA  $(A_q)$ .*

Cette proposition est une conséquence directe de (3.14) et (3.26) et constitue le cœur de notre technique. À partir de ce résultat, nous établirons, dans le Paragraphe 3.2.4, un algorithme pour la sélection des valeurs propres.

Il existe une combinatoire de solutions selon le choix de la partition des valeurs propres en boucle fermée, premièrement pour le calcul de  $T_1$ , et deuxièmement, pour le calcul de  $T_2$ . Dans le Paragraphe 3.2.3 quelques considérations supplémentaires à propos des solutions possibles de (3.21) et de (3.22) sont présentées et discutées.

Ainsi, étant donné un système d'ordre  $n$  et un correcteur d'ordre  $n_K$ , on peut calculer une transformation linéaire  $T^{-1} x_K$  des états du compensateur qui les sépare en deux parties : l'estimation des états physiques et les états du paramètre de YOULA.

### 3.2.3 Sélection des valeurs propres et restrictions

#### Gouvernabilité et observabilité

Il existe plusieurs solutions admissibles pour (3.21) et (3.22). Chaque solution correspond, respectivement, à un choix particulier de  $n$  et  $n_q$  valeurs propres parmi l'ensemble de valeurs propres de la boucle fermée. Cependant, certaines sélections de modes ne sont pas admissibles, selon les propositions suivantes :

---

5. Celle qui n'est pas choisie pour la solution de (3.21), c'est-à-dire, la dynamique de  $A_K - T_1 B C_K$ .

**Proposition 3.3** *Considérons l'équation (3.24). Les propriétés duales suivantes sont valables :*

- (i) *Si  $\exists \lambda \notin \text{spec}(\Lambda_n)$  telle que  $\lambda$  est ingouvernable par  $(A,B)$ , alors  $U_1$  est singulière.*
- (ii) *Si  $\exists \lambda \in \text{spec}(\Lambda_n)$  telle que  $\lambda$  est inobservable par  $(A,C)$ , alors  $U_2$  présente une déficience de rang de colonne.*

**Proposition 3.4** *Considérons les équations (3.21) et (3.22). Si  $\exists \lambda \in \text{spec}(A_q)$  telle que  $\lambda$  est inobservable par  $(A,C)$  ou ingouvernable par  $(A,B)$ , alors  $[T_1 \ T_2]$  est singulière.*

Les preuves de ces propositions sont directes en utilisant les relations précédentes et les propriétés de gouvernabilité ou d'observabilité.

### Pôles auto-conjugués

Une autre restriction qui peut réduire le nombre de choix admissibles concerne la non-séparation des paires de pôles auto-conjugués, c'est-à-dire que ces paires doivent rester dans la même partition de l'ensemble de valeurs propres de la boucle fermée, si nous cherchons des compensateurs équivalents n'ayant que des coefficients réels. Notons qu'un tel choix n'est pas toujours possible. Par exemple, si l'on considère les cas où les pôles de la boucle fermée sont tous complexes et  $n$  est impair, alors les gains auront des coefficients complexes. Pour résoudre ce problème il est impératif d'augmenter la dynamique du modèle du système avec quelques modes réels (stables) ingouvernables ou inobservables ou de changer judicieusement son ordre avant de concevoir le correcteur. On peut montrer qu'une condition nécessaire pour l'existence d'une paramétrisation réelle est : le nombre de valeurs propres réelles de la boucle fermée doit être plus grand ou égal à  $2(\text{par}(n)) + \text{par}(n_K - n)$ .

### Modes doubles

D'après les Propositions 3.3 et 3.4, la sélection des valeurs propres de  $\text{spec}(A_{cl})$ , pour désigner  $\Lambda_n$  en (3.24) et, ensuite,  $A_q$  en (3.22), est basée sur une analyse de gouvernabilité et d'observabilité modale. Comme nous allons en discuter plus loin, une telle analyse peut exploiter les vecteurs propres associés aux modes de la matrice dynamique  $A_{cl}$ , ce qui exige le calcul d'une forme diagonale  $\Lambda_{cl}$  de cette matrice. Un autre intérêt à utiliser la forme diagonale est la diminution du nombre de coefficients de  $A_q$  à interpoler.

Cependant, un problème difficile apparaît lorsque le spectre de la boucle fermée contient des modes doubles ou "presque" doubles. Dans ce cas,  $A_{cl}$  peut être (presque) non diagonalisable et avoir une matrice de vecteurs propres mal conditionnée. Par conséquent,  $U = [U_1; U_2]$  en (3.24) et/ou  $T_2$  en (3.22) peuvent avoir une déficience de rang de colonne, selon les partitions de  $\text{spec}(A_{cl})$  choisies pour composer  $\Lambda_n$  et  $A_q$ .

La structure de bloc de Jordan offre une base de vecteurs bien conditionnée et son calcul pour  $A_{cl}$  serait une solution à ce problème. Toutefois, une telle structure est numéri-

quement difficile à déterminer. A contrario, le calcul des sous-espaces invariants associés à des formes bloc-diagonales devient extrêmement stable numériquement en manipulant des décompositions de SCHUR [34]. Cette démarche consiste à échanger, systématiquement, les positions des valeurs propres adjacentes, au moyen des rotations de Givens. Ainsi, il est possible de déplacer chaque valeur propre distincte, ou chaque paire de modes doubles, d'une forme de SCHUR triangulaire supérieure, aux premières lignes de  $\Lambda_{cl}$ <sup>6</sup>. Ceci permet de déterminer, un par un, leurs vecteurs propres associés et les éléments hors diagonale pour les blocs non diagonalisables. Nous exécutons alors, une séquence de décompositions de SCHUR, chacune d'elles ayant des valeurs propres ordonnées de façon appropriée, pour diagonaliser  $A_{cl}$  par bloc et obtenir une transformation linéaire bien conditionnée :

$$A_{cl}U_{sc} = U_{sc}\Lambda_{cl}, \quad (3.27)$$

avec

$$\Lambda_{cl} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \Lambda_r, \dots, \Lambda_c, \dots, \lambda_{n_K+n-6}), \quad (3.28)$$

où les  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n_K+n-6$ ) correspondent aux valeurs propres distinctes et/ou répétées qui ont des vecteurs propres indépendants, et

$$\Lambda_r = \begin{bmatrix} \lambda_r & r \\ 0 & \lambda'_r \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

et

$$\Lambda_c = \begin{bmatrix} \lambda_c & 0 & c & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_c & 0 & \bar{c} \\ 0 & 0 & \lambda'_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda}'_c \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

sont des blocs non diagonalisables qui correspondent, respectivement, à deux valeurs propres répétées réelles,  $\lambda_r \approx \lambda'_r$ , et deux complexes,  $\lambda_c \approx \lambda'_c$ , avec leurs conjugués,  $\bar{\lambda}_c \approx \bar{\lambda}'_c$ . Notons qu'il est possible d'avoir des valeurs propres répétées, réelles ou complexes, de multiplicité plus grande que 2.

Les colonnes de  $U_{sc}$  en (3.27) qui correspondent aux valeurs propres  $\lambda_i$  et aux valeurs propres répétées,  $\lambda_r$ ,  $\lambda_c$  et  $\bar{\lambda}_c$ , sont leurs vecteurs propres associés. Les colonnes qui restent, c'est-à-dire, celles qui correspondent aux valeurs propres répétées,  $\lambda'_r$ ,  $\lambda'_c$  et  $\bar{\lambda}'_c$ , sont appelées vecteurs propres généralisés. Un sous-ensemble quelconque de vecteurs propres forme, toujours, une base pour un sous-espace invariant associé de  $A_{cl}$ . En revanche, cette propriété n'est conservée pour un ensemble de colonnes contenant des vecteurs généralisés qu'à condition que les vecteurs propres respectifs soient inclus dans l'ensemble. Autrement dit, un ensemble qui contient des vecteurs propres généralisés associés à  $\lambda'_r$ ,  $\lambda'_c$  et/ou  $\bar{\lambda}'_c$ , devrait contenir aussi les vecteurs propres respectifs, associés à  $\lambda_r$ ,  $\lambda_c$  et/ou  $\bar{\lambda}_c$ . Néanmoins, un bon conditionnement numérique de  $T$  est obtenu généralement si nous ne sélectionnons aucun vecteur propre généralisé pour composer  $U$  en (3.24) et aucun mode double de la boucle fermée pour composer  $\text{spec}(A_q)$  en (3.22). Cela veut dire qu'il convient de laisser les valeurs propres relatives aux vecteurs propres généralisés dans l'ensemble des pôles de l'observateur. Ce résultat peut être généralisé pour des valeurs propres multiples.

6. Pour les détails voir l'Algorithme 7.6.1 de [34].

Puisque la plupart des colonnes de  $U_{sc}$  sont des vecteurs propres, la forme bloc-diagonale (3.28) facilite énormément l'analyse de gouvernabilité et d'observabilité modale. Par contre, une telle analyse serait beaucoup plus compliquée en utilisant, par exemple, une forme de SCHUR classique de type triangulaire ou quasi-triangulaire supérieure.

### Calcul de la forme réelle

Le calcul de sous-espaces invariants exige de manipuler des grandeurs complexes lorsque les spectres de l'Hamiltonienne contiennent des modes complexes. Dans ces cas, la propagation d'erreurs d'arrondis peut conduire à des matrices de transformation qui ne sont pas rigoureusement réelles. C'est pour cette raison qu'une forme réelle de (3.27) est préférable. Une alternative aux formes de SCHUR réordonnées réelles est d'appliquer à (3.27) la transformation suivante :

$$A_{cl}U_{sc}J = U_{sc}JJ^{-1}\Lambda_{cl}J, \quad (3.31)$$

où  $J$  est une matrice bloc-diagonale dont la diagonale comporte un 1 pour un mode réel et un bloc

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -j1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & j1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

pour un mode complexe (répété ou distinct). En supposant que

$$\Lambda_{cl} = \text{diag} \left( \lambda_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2, \begin{bmatrix} \lambda_3 & r_3 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_4 & 0 & \bar{c}_4 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda}_4 \end{bmatrix}, \dots \right), \quad (3.32)$$

où les valeurs propres  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  et  $\lambda_4$  sont, respectivement, réelle distincte, complexe distincte, réelle répétée et complexe répétée, on obtient alors :

$$W_{sc} = U_{sc}J = [u_1 \quad u_2^R \quad u_2^I \quad u_3 \quad u_3' \quad u_4^R \quad u_4^I \quad u_4^{R'} \quad u_4^{I'} \quad \dots], \quad (3.33)$$

où l'exposant  $R$  indique la partie réelle et l'exposant  $I$  indique la partie imaginaire, et

$$\tilde{\Lambda}_{cl} = J^{-1}\Lambda_{cl}J = \text{diag} \left( \lambda_1, \begin{bmatrix} \lambda_2^R & \lambda_2^I \\ -\lambda_2^I & \lambda_2^R \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_3 & r_3 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_4^R & \lambda_4^I & c_4^R & c_4^I \\ -\lambda_4^I & \lambda_4^R & -c_4^I & c_4^R \\ 0 & 0 & \lambda_4^R & \lambda_4^I \\ 0 & 0 & -\lambda_4^I & \lambda_4^R \end{bmatrix}, \dots \right). \quad (3.34)$$

Les matrices transformées ne font donc intervenir que des grandeurs réelles.

### Un problème d'identification de mode

Pour résoudre (3.17), il est nécessaire de partitionner  $\text{spec}(A_{cl})$  en trois sous-ensembles, à savoir, l'ensemble des modes de retour d'état, l'ensemble des modes du paramètre de

YOULA et l'ensemble des modes d'estimation, conformément aux contraintes présentées dans les paragraphes précédents. La deuxième étape est le calcul de deux sous-espaces invariants : un sous-espace invariant de dimension  $n$  de la matrice  $A_{cl}$  et un sous-espace invariant de dimension  $n_q$  de la matrice  $A_K - T_1 BC_K$ . Ces sous-espaces sont associés, respectivement, à l'ensemble des  $n$  pôles de retour d'état en (3.24) et à l'ensemble des  $n_q$  pôles du paramètre de YOULA en (3.22).

Si cette approche facilite la compréhension conceptuelle du problème, il n'en reste pas moins qu'une difficulté numérique peut se poser à cause de la différence entre les dimensions de  $A_{cl}$  et de  $A_K$ . Cette difficulté apparaît notamment lors de l'identification de certains modes doubles de  $A_{cl}$ , associés ou non à des vecteurs propres généralisés, qui sont dans  $\text{spec}(A_K - T_1 BC_K)$ . L'identification de ces modes demande une étude du parallélisme des vecteurs propres respectifs. Néanmoins, la différence entre la dimension des vecteurs propres en (3.22) et la dimension de vecteurs propres en (3.24) rend cette étude impossible et pose un problème pour la distinction des modes répétés. En fait, le calcul de  $T$  en deux étapes,  $T_1$  et  $T_2$ , est un facteur d'ambiguïté lorsque deux modes sont proches l'un de l'autre, même s'ils sont diagonalisables. La propagation d'erreurs d'arrondis pendant le calcul de  $T_1$  peut aussi compromettre le bon choix de  $\text{spec}(A_q)$ .

Si l'on réécrit (3.17) comme suit, on trouve une autre façon de le partager en deux problèmes dissociés, tout en surmontant cette difficulté :

$$\left[ -T \mid I \right] \left[ \begin{array}{cc|c} A + BD_K C & 0 & BC_K \\ 0 & A_q & 0 \\ \hline B_K C & 0 & A_K \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} I \\ T \end{array} \right] = 0. \quad (3.35)$$

Notons qu'un sous-espace invariant de dimension  $n_K$  est caractérisé par

$$\left[ \begin{array}{ccc} A + BD_K C & 0 & BC_K \\ 0 & A_q & 0 \\ B_K C & 0 & A_K \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} V_{11} \\ V_{12} \\ V_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} V_{11} \\ V_{12} \\ V_2 \end{array} \right] \Lambda_K, \quad (3.36)$$

où  $\Lambda_K$  est une sous-matrice de  $\Lambda_{cl}$  en (3.32) ou de  $\tilde{\Lambda}_{cl}$  en (3.34). La matrice  $\Lambda_K$  est associée à un ensemble de  $n + n_q$  pôles, choisis parmi ceux de la matrice Hamiltonienne, qui correspondent à l'ensemble des pôles de retour d'état et du paramètre de YOULA. L'ensemble des valeurs propres de  $\text{spec}(\Lambda_K)$  ne doit pas contenir de valeurs propres de  $\Lambda_{cl}$  associées à des vecteurs propres généralisés.

La résolution de (3.36) implique la résolution de deux sous-problèmes :

$$\left[ \begin{array}{cc} A + BD_K C & BC_K \\ B_K C & A_K \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} V_{11} \\ V_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} V_{11} \\ V_2 \end{array} \right] \Lambda_K \quad (3.37)$$

et

$$A_q V_{12} = V_{12} \Lambda_K. \quad (3.38)$$

Le premier problème, (3.37), est similaire à (3.24) et consiste à trouver un sous-espace invariant de  $A_{cl}$ , de dimension  $n_K$ , associé à  $\text{spec}(\Lambda_K)$ . Et le problème (3.38) consiste à trouver un espace invariant de  $A_q$  de dimension  $n_K$ . Or, l'espace invariant de dimension

maximale de  $A_q$  est naturellement l'espace tout entier qui est de dimension  $n_q < n_K$ . En respectant la partition choisie des spectres de l'Hamiltonienne, on fera donc le choix d'une base de dimension  $n_q$  pour former un tel espace que l'on complétera par des vecteurs nuls afin de satisfaire la contrainte de dimension imposée par  $\Lambda_K$ . C'est-à-dire,

$$V_{12} = [0 \cdots 0 \quad e_1 \quad 0 \cdots 0 \quad e_2 \quad 0 \cdots 0 \quad e_{n_q} \quad 0 \cdots 0], \quad (3.39)$$

où la sous-matrice  $[e_1, \dots, e_{n_q}]$  peut être choisie comme base canonique de  $\mathbf{R}^{n_q}$  de façon à réduire le nombre de coefficients de  $Q(s)$  à interpoler. Cet arrangement revient à séparer  $n_q$  pôles du paramètre de YOULA parmi les  $n_K$  pôles choisis en (3.37). Puisque les positions des valeurs propres sont complètement définies par  $\Lambda_K$  en (3.37) et (3.38), il devient facile de les identifier et, par conséquent, de placer les colonnes  $e_i$  de  $V_{12}$  en (3.39).

Finalement, le changement de base  $T$  est obtenu, sans ambiguïté, par

$$T = V_2 \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \end{bmatrix}^{-1}. \quad (3.40)$$

Étant données la nouvelle formulation (3.37) à (3.40), les conditions établies dans les Propositions 3.3 et 3.4 deviennent :

### Proposition 3.5

- (i) Si  $\exists \lambda \notin \text{spec}(\Lambda_K)$  telle que  $\lambda$  est ingouvernable par  $(A,B)$ , alors  $[V_{11}; V_{12}]$  est singulière.
- (ii) Si  $\exists \lambda \in \text{spec}(\Lambda_K)$  telle que  $\lambda$  est inobservable par  $(A,C)$ , alors  $V_2$  est singulière.
- (iii) Si  $\exists \lambda \in \text{spec}(A_q)$  telle que  $\lambda$  est inobservable par  $(A,C)$  ou ingouvernable par  $(A,B)$ , alors  $[V_{11}; V_{12}]$  est singulière.

Les propriétés énoncées dans cette proposition fournissent des contraintes qui doivent être satisfaites pour la construction d'une solution inversible  $T$ .

### Des règles supplémentaires de sélection

Des tests numériques ont montré qu'on obtenait de meilleurs résultats dans la procédure d'interpolation et d'estimation physique si l'on respectait des règles heuristiques supplémentaires pour sélectionner la partition des valeurs propres de la boucle fermée :

- Affecter à  $\text{spec}(A - BK_c)$  les pôles qui sont les moins gouvernables afin de réduire les gains de retour d'état.
- Affecter à  $\text{spec}(A - K_f C)$  les pôles les plus rapides et les moins observables afin d'avoir une estimation d'état efficace et réduire les gains de l'observateur.
- Affecter à  $\text{spec}(A_q)$  des pôles rapides de telle façon que le paramètre de YOULA se comporte comme une transmission directe dans le compensateur.

Nous allons ici revenir sur deux points particuliers. Le premier concerne la manière de classer les modes d'après leur gouvernabilité et leur observabilité. Une méthode utile pour

mesurer la gouvernabilité d'un mode  $\lambda_i$  par rapport à une entrée  $j$  d'un système  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  consiste à calculer

$$c_{ij} = \frac{|v_i^T b_j|}{\|v_i\| \|b_j\|},$$

où  $v_i$  est le vecteur propre à gauche associé à  $\lambda_i$ ,  $b_j$  est la  $j$ -ème colonne de  $\tilde{B}$  et  $v_i^T b_j$  est appelé le facteur de gouvernabilité de  $\lambda_i$ . Cette méthode a été appliquée à des systèmes physiques, d'ordre faible comme élevé [36, 60]. La gouvernabilité globale de  $\lambda_i$  peut être mesurée par

$$c_i = \frac{\|v_i^T \tilde{B}\|}{\|v_i\|}.$$

Si  $\tilde{A}$  n'a que des valeurs propres distinctes et si l'on suppose que  $A_{cl} = \tilde{A}$  en (3.27), alors chaque colonne  $u_i$  de  $U_{sc}$  et chaque colonne  $v_i$  de  $U_{sc}^{-T}$  est, respectivement, un vecteur propre normalisé à droite et à gauche associé à la valeur propre  $\lambda_i$ . Donc,  $c_i$  vaut :

$$c_i = \|\mathcal{B}(i, :)\|, \quad (3.41)$$

où  $\mathcal{B} = U_{sc}^{-1} \tilde{B}$ .

Nous avons aussi des coefficients pour mesurer l'observabilité modale :

$$o_i = \|\mathcal{C}(:, i)\|, \quad (3.42)$$

où  $\mathcal{C} = \tilde{C} U_{sc}$ .

La matrice  $\mathcal{B}$  ( $\mathcal{C}$ ) est appelée la matrice de gouvernabilité (observabilité) de mode. Si la  $i$ -ème ligne (colonne) de  $\mathcal{B}$  ( $\mathcal{C}$ ) est nulle, alors  $\lambda_i$  est ingouvernable (inobservable). En examinant ces matrices on peut donc classer les modes en gouvernables et observables, en gouvernables et inobservables, en ingouvernables et observables, et en ingouvernables et inobservables. Ainsi, la gouvernabilité et l'observabilité absolues des modes sont complètement définies par  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ . Ces matrices permettent également de classer les modes selon leur gouvernabilité (observabilité) relative puisque : moins  $\lambda_i$  est gouvernable (observable), plus le coefficient  $c_i$  ( $o_i$ ) est petit.

En supposant que  $\tilde{A}$  a un mode double réel (ou complexe)  $\lambda_i = \lambda'_i$  comme en (3.29) (ou (3.30)), on peut dire que :

- $c'_i$  ( $o'_i$ ) "grand"  $\iff \lambda_i$  et  $\lambda'_i$  sont gouvernables (observables) ;
- $c'_i$  ( $o'_i$ ) "petit"  $\iff \lambda'_i$  est ingouvernable (inobservable) ;
- $c'_i$  ( $o'_i$ ) "petit" et  $c_i$  ( $o_i$ ) "grand"  $\implies \lambda_i$  est gouvernable (observable) ;
- $c'_i$  ( $o'_i$ ) "petit" et  $c_i$  ( $o_i$ ) "petit"  $\iff \lambda_i$  est ingouvernable (inobservable).

Ce résultat se déduit facilement par l'analyse des relations de dépendance linéaire des vecteurs propres associés à  $\lambda_i$  et  $\lambda'_i$ . Une analyse similaire pour des pôles multiples serait une tâche plus difficile, mais des extensions sont possibles. Toutefois, l'existence de pôles multiples dans la dynamique de la boucle fermée est un phénomène plus rare.

Le deuxième point consiste à faire une analyse de gouvernabilité et d'observabilité modale des pôles de la boucle fermée de façon à respecter les contraintes imposées sur le système en boucle ouverte. C'est-à-dire, comment définir  $\tilde{B}$  et  $\tilde{C}$  pour calculer  $c_i$  et  $o_i$  en utilisant (3.41) et (3.42). En effet, d'après la Proposition 3.5, aucune restriction sur la gouvernabilité et l'observabilité en boucle fermée n'est imposée. De plus, un problème numérique peut se produire pour identifier quelle valeur propre en boucle fermée correspond exactement à un certain pôle ingouvernable ou inobservable en boucle ouverte, notamment lorsque les spectres en boucle fermée contiennent des modes (presque) doubles.

En considérant les réalisations d'état de la boucle ouverte et fermée, (3.4) et (3.15), nous pouvons établir la proposition suivante dont la preuve est triviale :

**Proposition 3.6** *Supposons que  $C_K$  et  $B_K$  soient de rang plein et considérons que*

$$\tilde{A} = A_{cl}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I_{n_K \times n_K} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_{n_K \times n_K} \end{bmatrix},$$

alors, nous avons les propriétés duales suivantes :

- (i)  $\lambda_i$  est ingouvernable par  $(A, B) \iff \lambda_i$  est ingouvernable par  $(\tilde{A}, \tilde{B})$ .
- (ii)  $\lambda_i$  est inobservable par  $(A, C) \iff \lambda_i$  est inobservable par  $(\tilde{A}, \tilde{C})$ .

Une analyse de l'observabilité et de la gouvernabilité des modes de la boucle fermée vis-à-vis des entrées et sorties fictives établies par les matrices  $\tilde{B}$  et  $\tilde{C}$  est donc justifiée dans notre contexte.

Mis à part les concepts de gouvernabilité et d'observabilité relatives, nous pouvons utiliser aussi une mesure de la contribution de chaque mode en boucle fermée aux états du système bouclé pour choisir ceux qui affectent le plus les états du système physique pour composer le spectre de l'observateur. Le  $i$ -ème élément du vecteur propre à gauche  $v_j$  mesure l'impact du mode  $\lambda_j$  sur la  $i$ -ème variable d'état, et le  $j$ -ème élément du vecteur propre à droite  $u_i$  pondère cette contribution. Le produit de ces deux éléments est adimensionnel, c'est-à-dire, indépendant du choix d'unités, et mesure la participation nette. Ainsi, la matrice (3.43), appelée matrice de participation, combine les vecteurs propres normalisés à droite et à gauche et fournit une façon efficace et pratique de mesurer l'association entre les modes et les variables d'état de la boucle fermée :

$$P = U_{sc} \cdot *U_{sc}^{-T} = [p_{ij}], \quad (3.43)$$

où  $*$  désigne la multiplication élément par élément et  $p_{ij}$  est une mesure de la participation relative du  $j$ -ème mode dans la  $i$ -ème variable d'état. Le coefficient  $p_{ij}$  est appelé facteur de participation [1, 48]. La somme des facteurs de participation associés à une variable d'état ou à un mode quelconque est égale à 1 :  $\sum_{j=1}^{n+n_K} p_{ij} = 1, \forall i$ ; et  $\sum_{i=1}^{n+n_K} p_{ij} = 1, \forall j$ . Il est facile de montrer que  $p_{ij}$  est égal à la sensibilité de la valeur propre  $\lambda_j$  à l'élément  $a_{ii}$  de la diagonale de la matrice d'état en boucle fermée,  $\frac{\partial \lambda_j}{\partial a_{ii}}$ .

Si les états de la boucle fermée sont ordonnés comme en (3.15), la somme des amplitudes des  $n$  premiers éléments de la  $j$ -ème colonne de  $P$  donne la participation totale de

$\lambda_j$  dans les  $n$  états de  $G(s)$  :

$$p_j = \sum_{i=1}^n |p_{ij}|, \quad j = 1, \dots, n + n_K. \quad (3.44)$$

Ainsi, le concept de participation modal peut être utilisé, à la place des concepts de gouvernabilité et d'observabilité modales relatives, pour un choix approprié de la partition des valeurs propres en boucle fermée qui respecte le plus la dynamique naturelle du système physique.

### 3.2.4 Algorithme pour le calcul de compensateurs équivalents

L'Algorithme 3.1 (page suivante) résume les points présentés et discutés dans les paragraphes précédents et décrit les étapes principales du calcul d'un compensateur équivalent.

Notons que le choix de la partition des valeurs propres est fondé essentiellement sur leurs gouvernabilité et observabilité absolues et relatives et sur leurs atténuations (partie réelle). Cependant, si l'on classe les valeurs propres de l'Hamiltonienne selon leurs facteurs de participation (3.44) dans l'Étape 2, et si l'on définit

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_c &= \{n_c \text{ valeurs propres de } \overline{\mathcal{U}_c \cup \mathcal{U}_o \cup \mathcal{U}_g} \text{ qui affectent le moins les états physiques}\}, \\ \mathcal{S}_o &= \overline{\mathcal{U}_c \cup \mathcal{U}_o \cup \mathcal{U}_g}, \end{aligned}$$

dans les Étapes 4 et 6, cet algorithme sera capable de sélectionner les valeurs propres en n'utilisant que leurs gouvernabilité et observabilité absolues, leurs facteurs de participation et leurs atténuations.

Une mise en œuvre de cet algorithme devrait considérer aussi le fait que certaines règles conflictuelles ne sont pas obligatoires, alors que d'autres sont indispensables. Par exemple, on peut jouer sur les relations établies pour le choix de  $\mathcal{P}_c$  et  $\mathcal{P}_y$ <sup>7</sup>, dans les Étapes 5 et 7, de façon à obtenir les égalités  $\text{length}(\mathcal{P}_c) = n$  et  $\text{length}(\mathcal{P}_y) = n_q$ . En revanche, les conditions sur les pôles auto-conjugués, sur la gouvernabilité et l'observabilité absolues ( $\mathcal{U}_c$  et  $\mathcal{U}_o$ ), et sur les modes doubles ( $\mathcal{U}_g$ ), doivent être respectées strictement. Comme nous l'avons déjà mentionné, les contraintes sur les modes complexes (conjugués) peuvent être évitées par l'insertion de dynamiques fictives dans le modèle. Mais, la présence de certains modes qui sont à la fois ingouvernables et inobservables ( $\mathcal{U}_c \cap \mathcal{U}_o \neq \{\phi\}$ ) rend la résolution du problème énoncé dans le Paragraphe 3.2.1 impossible en utilisant l'approche Hamiltonienne. La matrice  $T$  peut aussi être mal conditionnée dans les cas où certains modes inobservables sont associés à des vecteurs propres généralisés ( $\mathcal{U}_o \cap \mathcal{U}_g \neq \{\phi\}$ ).

Une autre difficulté d'ordre numérique concerne les termes "presque" et "faiblement". En effet, le concepteur doit définir des tolérances, premièrement pour détecter le parallélisme de vecteurs propres et, deuxièmement, pour vérifier les gouvernabilité et observabilité absolues ( $c_i, o_i \approx 0$ ).

7. Notamment pour les choix de  $\mathcal{S}_c$ ,  $\mathcal{S}_o$  et  $\mathcal{S}_r$ , fondés sur les règles supplémentaires de sélection.

**Algorithme 3.1** Calcul de compensateurs équivalents

**Étape 1 :** Calculer la matrice Hamiltonienne,  $A_{cl}$ , d'après (3.15), et la diagonaliser par bloc selon (3.27).

**Étape 2 :** Classer les modes de la boucle fermée d'après leur gouvernabilité et leur observabilité en utilisant (3.41) et (3.42) sur le triplé  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  défini dans la Proposition 3.6.

**Étape 3 :** Classer les modes de la boucle fermée d'après leurs atténuations (partie réelle).

**Étape 4 :** En se basant sur les résultats des Étapes 1, 2 et 3, définir les ensembles de valeurs propres en boucle fermée suivants, tels que les paires auto-conjuguées ne soient pas séparées :

- $\mathcal{U}_c := \{\text{valeurs propres ingouvernables+faiblement gouvernables}\}$  ;
- $\mathcal{U}_o := \{\text{valeurs propres inobservables+faiblement observables}\}$  ;
- $\mathcal{U}_g := \{\text{valeurs propres relatives aux vecteurs propres généralisés}\}$  ;
- $\mathcal{S}_c := \{n_c \text{ valeurs propres les moins gouvernables de } \overline{\mathcal{U}_c \cup \mathcal{U}_o \cup \mathcal{U}_g}\}$ , où le nombre entier  $n_c$  est initialisé tel que  $\text{length}(\mathcal{S}_c) + \text{length}(\mathcal{U}_c) \approx n$  ;
- $\mathcal{S}_o := \{n_o \text{ valeurs propres les plus observables de } \overline{\mathcal{U}_c \cup \mathcal{U}_o \cup \mathcal{U}_g}\}$ , où le nombre entier  $n_o$  est initialisé tel que  $\text{length}(\mathcal{S}_o) + \text{length}(\mathcal{U}_c) \approx n$  ;
- $\mathcal{S}_r := \{n_r \text{ valeurs propres les plus lentes de } \overline{\mathcal{U}_c \cup \mathcal{U}_o \cup \mathcal{U}_g}\}$ , où le nombre entier  $n_r$  est initialisé tel que  $\text{length}(\mathcal{S}_r) + \text{length}(\mathcal{U}_c) \approx n$ .

**Étape 5 :** Choisir l'ensemble des pôles de retour d'état  $\mathcal{P}_c = \{\mathcal{S}_c \cap \mathcal{S}_o \cap \mathcal{S}_r \cup \mathcal{U}_c\}$  :

- Si  $\text{length}(\mathcal{P}_c) < n$ , augmenter alternativement  $n_c$ ,  $n_o$  et  $n_r$ , et retourner à l'Étape 4 ; c'est-à-dire, augmenter, un à la fois, les ensembles  $\mathcal{S}_c$ ,  $\mathcal{S}_o$  et  $\mathcal{S}_r$ , d'une ou deux valeurs propres, de façon à ne pas séparer les paires auto-conjuguées, et répéter les Étapes 4 et 5 jusqu'à ce que  $\text{length}(\mathcal{P}_c) = n$  ;
- Si  $\text{length}(\mathcal{P}_c) > n$ , répéter le procédé ci-dessus, mais en diminuant  $n_c$ ,  $n_o$  et  $n_r$ .

**Étape 6 :** En utilisant seulement les  $n_K$  valeurs propres restantes,  $\overline{\mathcal{P}_c}$ , redéfinir  $\mathcal{S}_c$ ,  $\mathcal{S}_o$  et  $\mathcal{S}_r$ , comme dans l'Étape 4, mais de façon que leur taille soit proche de  $n_q$ .

**Étape 7 :** Choisir l'ensemble des pôles du paramètre de YOULA  $\mathcal{P}_y = \{\mathcal{S}_c \cap \mathcal{S}_o \cap \mathcal{S}_r\}$  :

- Si  $\text{length}(\mathcal{P}_y) < n_q$ , augmenter alternativement le nombre d'éléments dans  $\mathcal{S}_c$ ,  $\mathcal{S}_o$  et  $\mathcal{S}_r$ , (de façon similaire à l'Étape 5), et retourner à l'Étape 6 ; répéter jusqu'à ce que  $\text{length}(\mathcal{P}_y) = n_q$  ;
- Si  $\text{length}(\mathcal{P}_y) > n_q$ , répéter le procédé ci-dessus, mais en diminuant  $n_c$ ,  $n_o$  et  $n_r$ .

**Étape 8 :** Calculer la forme réelle (3.31) et séparer le sous-espace invariant de dimension  $n_K$  (3.37) associé aux  $n_K$  valeurs propres  $\{\mathcal{P}_y \cup \mathcal{P}_c\} = \text{spec}(\Lambda_K)$ .

**Étape 9 :** D'après les positions de  $\mathcal{P}_y$  en  $\Lambda_K$ , former l'espace invariant de dimension  $n_K$  de  $A_q$ , (3.39), et calculer  $A_q$  en utilisant :

$$A_q = V_{12} \Lambda_K V_{12}^{-1}. \quad (3.45)$$

**Étape 10 :** Calculer  $T$  (3.40) et ensuite calculer  $K_c$ ,  $K_f$ ,  $B_q$ ,  $C_q$  et  $D_q$  en utilisant (3.18), (3.19) et (3.20).

### Paramètre de YOULA dynamique $\times$ statique

Remarquons aussi que lorsque  $n_K$  est strictement plus grand que  $n$ , le compensateur équivalent comprend un paramètre de YOULA dynamique et un estimateur physique. Mais, lorsque  $n_K = n$ ,  $A_q$  et  $T_2$  sont vides en (3.22) et le problème se réduit à la résolution de (3.21) en  $T_1 = T$  et au calcul  $K_f$ ,  $K_c$  et  $D_q$  en utilisant les relations (3.18)-(3.20), c'est-à-dire,

$$K_f = T^{-1}B_K - BD_K, \quad (3.46)$$

$$K_c = -C_K T - D_K C, \quad (3.47)$$

et

$$Q(s) = D_q = D_K. \quad (3.48)$$

Nous avons donc un paramètre de YOULA statique et une structure estimation/commande qui peut être interprétée de deux façons différentes :

- Estimation augmentée : le système augmenté  $P_{22}$  remplace le système nominal  $G_{22}$  ; la dynamique du système physique est incluse en  $P_{22}$  ; et l'état de  $G_{22}$  sera estimé si le sens physique est conservé dans l'état augmenté.
- Estimation physique :  $P_{22}$  remplace  $G_{22}$  avec  $W_i(s)$  et  $W_o(s)$  statiques (ou nulles) et  $A_p \in \mathbf{R}^n$  (ou  $P_{22}=G_{22}$ ).

Enfin, il est également intéressant de remarquer que le paramètre de YOULA dynamique peut être envisagé comme un paramètre de YOULA statique avec une estimation augmentée. En effet, si nous calculons un compensateur équivalent comprenant un  $Q$ -paramètre dynamique,  $(A_q, B_q, C_q, D_q)$ , et une structure estimation/commande,  $J(s) = f(A, B, C, K_c, K_f)$ , nous pouvons l'interpréter comme un compensateur ayant un  $Q$ -paramètre statique,  $D_q$ , et une structure estimation/commande augmentée [101]

$$\tilde{J}(s) = f(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{K}_c, \tilde{K}_f), \quad (3.49)$$

où  $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_q \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{C} = [C \ 0]$ ,  $\tilde{K}_c = [K_c \ -C_q]$ , et  $\tilde{K}_f = \begin{bmatrix} K_f \\ B_q \end{bmatrix}$ .

Ici  $\tilde{J}(s)$  est un compensateur équivalent avec une structure estimation/commande pour le système fictif augmenté

$$\tilde{P}(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} A & 0 & B \\ 0 & A_q & 0 \\ \hline C & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.50)$$

Si l'on considère qu'un compensateur équivalent pour  $P_{22}(s)$  est aussi un compensateur équivalent pour  $\tilde{P}(s)$ , que les deux systèmes incluent des dynamiques fictives ( $W_i(s)$  et  $W_o(s)$  dans le premier et  $A_q$  dans le deuxième) et que généralement  $A_p$  a  $n_K$  comme dimension (en particulier dans les synthèses  $H_\infty$  et  $\mu$ ), cela suggère de remplacer  $G_{22}(s)$  par  $P_{22}(s)$  dans l'Algorithme 3.1. Certainement, quelques inconvénients, comme le calcul de  $A_q$ ,  $B_q$  et  $C_q$ , sont évités en utilisant  $P_{22}(s)$ . De plus, le calcul d'un compensateur équivalent pour  $\tilde{P}(s)$  serait impossible en utilisant l'approche Hamiltonienne<sup>8</sup>. Cependant,

8. Voir les Propositions 3.3, 3.4 et 3.5.

les compensateurs équivalents ayant  $Q(s)$  dynamique présentent aussi quelques avantages qui justifient l'utilisation de l'approche plus générale adoptée :

- Alors que le paramètre  $A_q$  est construit en vue d'une estimation physique efficace, les filtres  $W_i(s)$  et  $W_o(s)$  sont déterminés indépendamment de ces considérations. En d'autres termes, un compensateur équivalent pour  $P_{22}(s)$  considérerait l'identification de la dynamique fictive aussi importante que l'identification de la dynamique physique.
- Alors que  $G_{22}(s)$  est, en général, complètement gouvernable et observable,  $P_{22}(s)$  a  $n_K - n$  pôles inobservables ou ingouvernables, ce qui restreint les possibilités de choix de modes.
- Puisque le modèle du système est utilisé pour construire le compensateur équivalent, nous avons besoin aussi d'interpoler la dynamique fictive. Comme nous le montrons dans la prochaine section, la matrice  $A_q$ , calculée pour cette approche, a des propriétés qui assurent sa stabilité sur les intervalles d'interpolation linéaire.

Nous avons introduit un algorithme pour calculer un compensateur ayant une structure estimation/commande équivalent à un compensateur stabilisant associé à un système donné, où l'ordre du correcteur est égal ou supérieur à l'ordre du système ( $n_K \geq n$ ). Le compensateur résultant offre une estimation physique efficace. Une autre propriété qui le rend bien adapté à l'interpolation est son nombre réduit de coefficients à interpoler.

### 3.2.5 Cas discret

D'une façon similaire aux techniques en [2], toutes les approches développées dans ce chapitre pour le cas continu ainsi que toute la discussion autour de la sélection de valeurs propres sont applicables directement au cas discret. Toutefois, on souligne que les deux structures d'implantation usuelles pour des correcteurs discrets peuvent être utilisées dans notre contexte.

#### Forme prédicteur

Étant données les représentations d'état du système nominal discret  $G_{22}(z)$ ,

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ e(k) \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

et du correcteur discret initial,

$$K(z) = \left[ \begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right], \quad (3.52)$$

la forme prédicteur du compensateur équivalent discret  $K_e(z)$ , incluant le coefficient  $J(z)$  et le paramètre de YOULA  $Q(z)$ , est décrite par

$$\begin{aligned}
\hat{x}(k/k) &= A\hat{x}(k/k-1) + Bu(k) && \text{(estimation)} \\
u_1(k) &= y(k) - C\hat{x}(k/k-1) && \text{(innovation)} \\
\hat{x}(k+1/k) &= \hat{x}(k/k) + K_f u_1(k) && \text{(prédiction)} \\
x_q(k+1) &= A_q x_q(k) + B_q u_1(k) && \text{(paramètre de YOULA)} \\
y_1(k) &= C_q x_q(k) + D_q u_1(k) \\
u(k) &= -K_c \hat{x}(k/k-1) + y_1(k) && \text{(commande)},
\end{aligned} \tag{3.53}$$

ou par la forme d'état unifiée

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1/k) \\ x_q(k+1) \\ u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_c - K_f C - BD_q C & BC_q & K_f + BD_q \\ -B_q C & A_q & B_q \\ -(K_c + D_q C) & C_q & D_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k/k-1) \\ x_q(k) \\ y(k) \end{bmatrix}, \tag{3.54}$$

qui est analogue à (3.11).

Pour la construction du compensateur équivalent discret on peut, donc, adopter une procédure identique à celle utilisée dans le cas du système continu, aussi bien pour le choix de modes, que pour le calcul de la forme prédicteur.

### Forme estimateur

La forme estimateur du compensateur équivalent discret est décrite par

$$\begin{aligned}
\hat{x}(k+1/k) &= A\hat{x}(k/k) + Bu(k) && \text{(prédiction)} \\
u_1(k) &= y(k) - C\hat{x}(k/k-1) && \text{(innovation)} \\
\hat{x}(k+1/k+1) &= \hat{x}(k+1/k) + K'_f u_1(k+1) && \text{(estimation)} \\
x_q(k+1) &= A'_q x_q(k) + B'_q u_1(k) && \text{(paramètre de YOULA)} \\
y_1(k) &= C'_q x_q(k) + D'_q u_1(k) \\
u(k) &= -K'_c \hat{x}(k/k) + y_1(k) && \text{(commande)},
\end{aligned} \tag{3.55}$$

qui peut être réécrite comme :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1/k) \\ x_q(k+1) \\ u(k) \end{bmatrix} = A'_k \begin{bmatrix} \hat{x}(k/k-1) \\ x_q(k) \\ y(k) \end{bmatrix}, \tag{3.56}$$

où

$$A'_k = \begin{bmatrix} A - BK'_c - (AK'_f)C - B(D'_q - K'_c K'_f)C & BC'_q & AK'_f + B(D'_q - K'_c K'_f) \\ -B'_q C & A'_q & B'_q \\ -(K'_c + (D'_q - K'_c K'_f)C) & C'_q & D'_q - K'_c K'_f \end{bmatrix}$$

Si l'on compare cette dernière expression avec (3.54) et (3.11), on remarquera que les changements de variables

$$\begin{aligned}
K_c &:= K'_c, & K_f &:= AK'_f, \\
A_q &:= A'_q, & B_q &:= B'_q, & C_q &:= C'_q, & D_q &:= D'_q - K'_c K'_f,
\end{aligned} \tag{3.57}$$

rendent ce problème analogue au cas discret et au cas continu précédents. Le principe de séparation reste donc valable et le calcul des matrices  $K_c$ ,  $K_f$ ,  $A_q$ ,  $B_q$ ,  $C_q$  et  $D_q$  demande exactement les mêmes étapes. Les coefficients du correcteur discret sous forme estimateur,  $K'_c$ ,  $K'_f$ ,  $A'_q$ ,  $B'_q$ ,  $C'_q$  et  $D'_q$ , s'obtiennent en inversant ces transformations, sous la contrainte de non singularité de la matrice  $A$ .

### 3.3 Une méthode de séquençement continu

Les méthodes classiques d'interpolation décomposent la synthèse d'un compensateur non linéaire en plusieurs synthèses de compensateurs linéaires [52, 53]. Ces approches offrent des structures de conception ouvertes dans le sens où il n'y a aucune restriction inhérente à une méthodologie particulière de synthèse des compensateurs linéaires et, généralement, le concepteur est libre d'utiliser les méthodes d'analyse de stabilité et de performance qui sont les plus convenables à une application particulière.

Bien que la variable d'interpolation soit une fonction du temps dans la mise en œuvre des compensateurs interpolés, elle est considérée comme un paramètre stationnaire dans l'étape de synthèse. Considérons un ensemble de points de fonctionnement, paramétré par une variable d'interpolation  $\theta \in \mathbf{R}$ , laquelle évolue dans un ensemble compact  $\mathcal{D}_\Theta \subset \mathbf{R}$ . Supposons que  $A(\theta)$ ,  $B(\theta)$  et  $C(\theta)$  en (3.4) et  $A_p(\theta)$ ,  $B_p(\theta)$  et  $C_p(\theta)$  en (3.5) soient des fonctions continues en  $\mathcal{D}_\Theta$ . Admettons aussi que  $K(s, \theta_i)$  en (3.7) soient des compensateurs LTI stabilisants conçus pour  $\theta = \theta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ . Le principal objectif d'une procédure d'interpolation est de fournir une loi de transition continue et régulière entre des points de fonctionnement adjacents,  $\theta_i$  et  $\theta_{i+1}$ ,  $\forall i = 1, \dots, r-1$ , de façon à préserver la performance obtenue par les compensateurs LTI dans leur voisinage.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, les lois de transition introduisent toujours des distorsions quant à la dégradation de la stabilité/performance dans les zones intermédiaires. Toutefois, lorsque les coefficients du compensateur évoluent de façon continue et que leurs amplitudes de variation sont aussi faibles que possible, les distorsions sont gardées dans des limites acceptables si le paramètre du système varie lentement. Cette section propose une méthode efficace, basée sur des représentations estimation/commande, pour faire face à ce problème.

Plus précisément, le problème étudié dans cette section est :

---

**Étant donnés** les systèmes  $G_{22}(s, \theta)$  (3.4) et  $P_{22}(s, \theta)$  (3.5), maintenant considérés dépendants du paramètre, et un ensemble initial de compensateurs stabilisants  $K(s, \theta_i)$  (3.7),

**calculer** un ensemble de compensateurs équivalents de structures estimation/commande  $K_e(s, \theta_i)$  (3.8),

**tel qu'il** existe un chemin continu reliant la structure propre du système en boucle fermée entre points de fonctionnement.

---

Cela est réalisé par une technique de continuation de type EULER-NEWTON (Paragraphe 3.3.1). Cette procédure permet de calculer un ensemble de compensateurs LTI équivalents et compatibles dynamiquement et d'assurer qu'il existe une trajectoire continue qui connecte leurs réalisations de type estimation/commande.

### 3.3.1 Continuation des sous-espaces invariants sélectionnés

Considérons  $\tilde{\theta}$  le paramètre normalisé,  $\tilde{\theta} := (\theta - \theta_i)/|\theta_{i+1} - \theta_i|$ . Alors pour  $\theta \in [\theta_i, \theta_{i+1}]$  nous avons  $\tilde{\theta} \in [0, 1]$ .

Dans [58], les auteurs présentent une méthode pour calculer les valeurs propres d'une matrice  $H(\tilde{\theta} = 1) = H(1)$  donnée et les vecteurs propres associés. À partir des valeurs et vecteurs propres connus d'une matrice  $H(0)$  réelle, les valeurs et vecteurs propres de la matrice paramétrée

$$H(\tilde{\theta}) := (1 - \tilde{\theta})H(0) + \tilde{\theta}H(1) \quad (3.58)$$

sont calculés séparément de  $\tilde{\theta} = 0$  à  $\tilde{\theta} = 1$  et leurs trajectoires sont suivies en utilisant des techniques de continuation. En  $\tilde{\theta} = 1$  on obtient donc les données pour  $H(1)$ . Le suivi continu des chemins des valeurs et des vecteurs propres (*eigenpath*) le long de la trajectoire de  $H(\tilde{\theta})$  permet d'établir une correspondance entre les structures propres de  $H(0)$  et  $H(1)$ ; d'où l'intérêt de cette technique.

Les valeurs propres de  $H(\tilde{\theta})$  sont des fonctions analytiques de  $\tilde{\theta}$  sauf pour un nombre fini de points où quelques valeurs propres peuvent avoir une singularité algébrique. Loin de ces singularités, les vecteurs propres peuvent être choisis comme fonctions analytiques de  $\tilde{\theta}$ . Ces singularités se produisent lorsque des valeurs propres se croisent ou subissent des bifurcations sur le chemin  $\tilde{\theta} \in [0,1]$ . Des bifurcations sont rencontrées typiquement lorsqu'un mode fait une transition entre réel et complexe ou devient double et posent des difficultés calculatoires, si elles ne sont pas manipulées convenablement. Quelques techniques pour traiter ces problèmes numériques, selon la nature de la singularité, sont aussi présentées en [58]. Mais, le mauvais conditionnement dû à des vecteurs propres presque colinéaires apparaît d'une manière fréquente pendant le processus de continuation. Cela vient du fait que les valeurs et vecteurs propres sont calculés et suivis indépendamment et constitue un inconvénient de cette méthode de continuation.

Nous proposons l'utilisation d'une méthode similaire pour obtenir les ensembles correspondants des valeurs propres de matrices Hamiltoniennes adjacentes. Au lieu de suivre chaque mode indépendamment, l'idée est de suivre séparément chaque sous-espace invariant sélectionné correspondant à chaque partition choisie du spectre de l'Hamiltonienne. C'est une façon indirecte de suivre un ensemble de modes simultanément. Dans le contexte applicatif de commande de cette étude, cette approche est plus fiable d'un point de vue calculatoire puisque le nombre de problèmes de bifurcation et de mauvais conditionnement dus à des vecteurs propres presque colinéaires est considérablement réduit. Le seul problème, qui réside, se pose lorsque les croisements impliquent des modes appartenant à des partitions différentes, ce qui est rare en pratique.

Considérons la matrice Hamiltonienne

$$H := \begin{bmatrix} F & R \\ S & M \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

où  $F \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $M \in \mathbf{R}^{n_K \times n_K}$  et  $R, S$  sont réelles de dimensions compatibles. Considérons aussi les ensembles d'équations suivants :

$$\begin{bmatrix} F & R \\ S & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \Lambda_n, \quad (3.60)$$

et

$$\begin{bmatrix} F & R \\ S & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Lambda_K, \quad (3.61)$$

où  $\Lambda_n \in \mathbf{R}^{n \times n}$  et  $\Lambda_K \in \mathbf{R}^{n_K \times n_K}$  sont réelles et bloc-diagonales comme en (3.34),  $U_1 \in \mathbf{R}^{n \times n}$  et  $V_2 \in \mathbf{R}^{n_K \times n_K}$  sont inversibles,  $U_2 \in \mathbf{R}^{n_K \times n}$  et  $V_1 \in \mathbf{R}^{n \times n_K}$ . Supposons que les colonnes de  $\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix}$  et de  $\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}$  forment une base pour un sous-espace de  $H$ , respectivement, de dimension  $n$  et  $n_K$ . Alors,  $T_1 = U_2 U_1^{-1}$  ( $\in \mathbf{R}^{n_K \times n}$ ) et  $T_3 = V_1 V_2^{-1}$  ( $\in \mathbf{R}^{n \times n_K}$ ) sont, respectivement, les solutions des équations de RICCATI généralisées, non symétriques et rectangulaires

$$T_1 F - M T_1 + T_1 R T_1 - S = 0 \quad (3.62)$$

et

$$T_3 M - F T_3 + T_3 S T_3 - R = 0. \quad (3.63)$$

Il faut ajouter que les colonnes de  $\begin{bmatrix} I & T_1 \end{bmatrix}$  et de  $\begin{bmatrix} T_3 & I \end{bmatrix}$  engendrent aussi des sous-espaces invariants de  $H$ , de dimensions  $n$  et  $n_K$ , respectivement. Alors, étant données  $H$ ,  $T_1$  et  $T_3$  on peut déterminer  $\Lambda_n$  et  $\Lambda_K$ . Par conséquent, si nous avons

$$\begin{aligned} H(\theta_i) &= A_{cl}(\theta_i), \\ \text{spec}(\Lambda_n(\theta_i)) &= \text{spec}(A(\theta_i) - B(\theta_i)K_c(\theta_i)), \\ \text{spec}(\Lambda_K(\theta_i)) &= \text{spec}(A(\theta_i) - B(\theta_i)K_c(\theta_i)) \cup \text{spec}(A_q(\theta_i)) \text{ et} \\ H(\theta_{i+1}) &= A_{cl}(\theta_{i+1}), \end{aligned}$$

il suffit d'exécuter une continuation de  $T_1(\theta_i)$  et de  $T_3(\theta_i)$ , calculées au point de fonctionnement  $\theta_i$ , pour déterminer les dynamiques correspondantes,  $\Lambda_n(\theta_{i+1})$  et  $\Lambda_K(\theta_{i+1})$ , au point de fonctionnement adjacent  $\theta_{i+1}$ .

Admettons que (3.58) soit la matrice paramétrée associée à deux points de fonctionnement adjacents,  $H(\tilde{\theta} = 0) = H(0)$  et  $H(\tilde{\theta} = 1) = H(1)$ . L'équation de RICCATI

$$\mathcal{F}(T, \tilde{\theta}) = T(\tilde{\theta})X(\tilde{\theta}) - Y(\tilde{\theta})T(\tilde{\theta}) + T(\tilde{\theta})Z(\tilde{\theta})T(\tilde{\theta}) - W(\tilde{\theta}) = 0, \quad (3.64)$$

où  $\tilde{\theta} \in [0, 1]$ , correspond à (3.62) si

$$\begin{cases} T(\tilde{\theta}) := T_1(\tilde{\theta}) \\ X(\tilde{\theta}) := (1 - \tilde{\theta})X(0) + \tilde{\theta}X(1) = F(\tilde{\theta}) := A(\tilde{\theta}) + B(\tilde{\theta})D_K(\tilde{\theta})C(\tilde{\theta}) \\ Y(\tilde{\theta}) := (1 - \tilde{\theta})Y(0) + \tilde{\theta}Y(1) = M(\tilde{\theta}) := A_K(\tilde{\theta}) \\ Z(\tilde{\theta}) := (1 - \tilde{\theta})Z(0) + \tilde{\theta}Z(1) = R(\tilde{\theta}) := B(\tilde{\theta})C_K(\tilde{\theta}) \\ W(\tilde{\theta}) := (1 - \tilde{\theta})W(0) + \tilde{\theta}W(1) = S(\tilde{\theta}) := B_K(\tilde{\theta})C(\tilde{\theta}) \end{cases} \quad (3.65)$$

et à (3.63) si

$$\begin{cases} T(\tilde{\theta}) := T_3(\tilde{\theta}) \\ X(\tilde{\theta}) := (1 - \tilde{\theta})X(0) + \tilde{\theta}X(1) = M(\tilde{\theta}) := A_K(\tilde{\theta}) \\ Y(\tilde{\theta}) := (1 - \tilde{\theta})Y(0) + \tilde{\theta}Y(1) = F(\tilde{\theta}) := A(\tilde{\theta}) + B(\tilde{\theta})D_K(\tilde{\theta})C(\tilde{\theta}) \\ Z(\tilde{\theta}) := (1 - \tilde{\theta})Z(0) + \tilde{\theta}Z(1) = S(\tilde{\theta}) := B_K(\tilde{\theta})C(\tilde{\theta}) \\ W(\tilde{\theta}) := (1 - \tilde{\theta})W(0) + \tilde{\theta}W(1) = R(\tilde{\theta}) := B(\tilde{\theta})C_K(\tilde{\theta}) \end{cases} \quad (3.66)$$

En effectuant la continuation de  $T$  en (3.64) on effectue donc la continuation de  $T_1$  ou de  $T_3$ , selon les choix (3.65) ou (3.66). Pour effectuer la continuation de  $T$  sur l'intervalle  $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ , il est nécessaire d'abord de le subdiviser en sous-intervalles sous la forme

$$0 = \tilde{\theta}_0 < \tilde{\theta}_1 < \tilde{\theta}_2 < \dots < \tilde{\theta}_L = 1.$$

On utilise ensuite une méthode de continuation d'EULER-NEWTON pour calculer la solution  $T(\tilde{\theta}_{l+1})$ , ( $l = 0, \dots, L - 1$ ), de  $\mathcal{F}(T, \tilde{\theta}_{l+1}) = 0$ , en considérant que  $T(\tilde{\theta}_l)$  est une solution connue de  $\mathcal{F}(T, \tilde{\theta}_l) = 0$  en (3.64).

### Approximation d'EULER

Pour obtenir la solution de RICCATI en  $\tilde{\theta}_{l+1}$ , nous appliquons la méthode de NEWTON à l'équation  $\mathcal{F}(T, \tilde{\theta}_{l+1}) = 0$  avec l'approximation initiale  $T(\tilde{\theta}_{l+1})^{(0)} = T(\tilde{\theta}_l) + (\tilde{\theta}_{l+1} - \tilde{\theta}_l)\dot{T}(\tilde{\theta}_l)$ , où le point désigne la dérivée par rapport au paramètre. Ainsi, en différenciant (3.64) en  $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_l$ , nous obtenons l'équation de SYLVESTER suivante :

$$\begin{aligned} & \left[ T(\tilde{\theta}_l)Z(\tilde{\theta}_l) - Y(\tilde{\theta}_l) \right] \dot{T}(\tilde{\theta}_l) + \dot{T}(\tilde{\theta}_l) \left[ X(\tilde{\theta}_l) + Z(\tilde{\theta}_l)T(\tilde{\theta}_l) \right] + \\ & \left[ T(\tilde{\theta}_l)\dot{X} - \dot{Y}T(\tilde{\theta}_l) + T(\tilde{\theta}_l)\dot{Z}T(\tilde{\theta}_l) - \dot{W} \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.67)$$

où

$$\begin{cases} \dot{X} = X(1) - X(0) \\ \dot{Y} = Y(1) - Y(0) \\ \dot{Z} = Z(1) - Z(0) \\ \dot{W} = W(1) - W(0) \end{cases} \quad (3.68)$$

La première itération de NEWTON  $T(\tilde{\theta}_{l+1})^{(0)}$  est donc obtenue en résolvant en  $\dot{T}(\tilde{\theta}_l)$  l'équation de SYLVESTER (3.67) et ensuite en calculant l'échelon d'EULER  $(\tilde{\theta}_{l+1} - \tilde{\theta}_l)\dot{T}(\tilde{\theta}_l)$ .

### Algorithme de NEWTON

L'objectif ici est de résoudre itérativement l'équation algébrique

$$\mathcal{F}(T, \tilde{\theta}_{l+1}) = TX(\tilde{\theta}_{l+1}) - Y(\tilde{\theta}_{l+1})T + TZ(\tilde{\theta}_{l+1})T - W(\tilde{\theta}_{l+1}) = 0 \quad (3.69)$$

à partir d'une condition initiale  $T = T(\tilde{\theta}_{l+1})^{(0)}$ . L'équation (3.69) peut être développée en utilisant le théorème de TAYLOR. En négligeant les termes d'ordre plus élevé, la forme étendue de (3.69) à la  $k$ -ème itération a pour approximation au premier ordre :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left( T(\tilde{\theta}_{l+1})^{(k)} + \Delta T, \tilde{\theta}_{l+1} \right) &\approx \left[ T(\tilde{\theta}_{l+1})^{(k)} Z(\tilde{\theta}_{l+1}) - Y(\tilde{\theta}_{l+1}) \right] \Delta T + \\ \Delta T \left[ X(\tilde{\theta}_{l+1}) + Z(\tilde{\theta}_{l+1}) T(\tilde{\theta}_{l+1})^{(k)} \right] + \mathcal{F}(T(\tilde{\theta}_{l+1})^{(k)}, \tilde{\theta}_{l+1}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Si  $T(\tilde{\theta}_{l+1})^{(k)}$  était exacte, alors  $\mathcal{F}$  et  $\Delta T$  seraient nulles. Néanmoins, comme  $T(\tilde{\theta}_{l+1})^{(k)}$  n'est qu'une approximation de  $T(\tilde{\theta}_{l+1})$ , l'erreur  $\mathcal{F}$  est finie. Les valeurs de la mise à jour sont donc calculées par

$$T(\tilde{\theta}_{l+1})^{(k+1)} = T(\tilde{\theta}_{l+1})^{(k)} + \Delta T,$$

où  $\Delta T$  est la solution de l'équation de SYLVESTER (3.70). Le processus est répété jusqu'au moment où l'erreur  $\|\mathcal{F}\|$  est inférieure à une tolérance spécifiée par l'utilisateur.

L'itération de NEWTON converge quadratiquement vers  $T(\tilde{\theta}_{l+1})$  sous deux conditions :  $\tilde{\theta}_{l+1} - \tilde{\theta}_l$  soit suffisamment petit ; et les chemins des valeurs et vecteurs propres qui appartiennent à des partitions différentes soient assez séparés pour tous les points de la trajectoire de continuation.

Si l'échantillonnage est trop ambitieux il se peut que l'algorithme converge vers une autre solution. Cette situation est possible même lorsque les chemins des structures propres sont apparemment bien séparés. Ceci caractériserait un saut de chemin et compromettrait la compatibilité entre les dynamiques des compensateurs LTI voisins.

Supposons finalement que le nombre de sous-intervalles ait été choisi convenablement, mais que certains modes, correspondant à des partitions différentes, se croisent ou se rapproche considérablement en un point donné de la trajectoire de continuation. Alors, le système linéaire impliqué dans la solution de l'itération de NEWTON (3.70) peut être mal conditionné en ce point et, par conséquent, la convergence de l'algorithme de NEWTON n'est pas assurée. La probabilité qu'une telle situation se produise dans la pratique est faible. Néanmoins, si elle se produit, elle est transparente pour notre méthode de continuation dans le sens où le point de croisement est facilement repérable. Puisque la partition des modes relative au choix initial est récupérable en calculant les matrices  $\Lambda_n$  et  $\Lambda_K$  au cours d'une continuation, ce point sera traité de la même façon qu'un mode double au point de départ.

### Algorithme global

Une procédure globale pour le calcul d'un correcteur ayant une structure estimation/commande au point de fonctionnement  $\theta_{i+1}$ , à partir d'un point voisin  $\theta_i$ , se décompose comme suit :

**Algorithme 3.2** Continuation des sous-espaces invariants

**Étape 1 :** Choisir une partition de  $\text{spec}(H(\theta_i))$ ,  $\Lambda_n(\theta_i)$ ,  $A_q(\theta_i)$  et  $\Lambda_K(\theta_i)$ , et calculer un compensateur équivalent de structure estimation/commande (Algorithme 3.1) au point de fonctionnement  $\theta_i$ .

**Étape 2 :** Calculer les solutions  $T_1(\theta_i)$  et  $T_3(\theta_i)$  pour les équations de RICCATI (3.62) et (3.63), d'après la partition choisie de  $\text{spec}(H(\theta_i))$ .

**Étape 3 :** Exécuter une continuation d'EULER-NEWTON de  $T_1(\theta_i)$  et  $T_3(\theta_i)$  pour obtenir  $T_1(\theta_{i+1})$  et  $T_3(\theta_{i+1})$  qui leur correspondent.

**Étape 4 :** Calculer

$$\Lambda_n(\theta_{i+1}) = \begin{bmatrix} I \\ T_1(\theta_{i+1}) \end{bmatrix} H(\theta_{i+1}) \begin{bmatrix} I \\ T_1(\theta_{i+1}) \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.71)$$

et

$$\Lambda_K(\theta_{i+1}) = \begin{bmatrix} T_3(\theta_{i+1}) \\ I \end{bmatrix} H(\theta_{i+1}) \begin{bmatrix} T_3(\theta_{i+1}) \\ I \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.72)$$

et ensuite les diagonaliser par bloc comme  $\tilde{\Lambda}_{cl}$  en (3.34).

**Étape 5 :** Séparer  $A_q(\theta_{i+1})$  de  $\Lambda_K(\theta_{i+1})$  en comparant les vecteurs propres  $u_p$  et  $v_j$  associés à  $\Lambda_n(\theta_{i+1})$  et  $\Lambda_K(\theta_{i+1})$ , respectivement. C'est-à-dire, calculer

$$\cos(\theta_{pj}) = \frac{|u_p^T v_j|}{\|u_p\| \|v_j\|}$$

pour tout  $p, j$  ( $p = 1, 2, \dots, n$  et  $j = 1, 2, \dots, n_K$ ) pour séparer les  $v_j$  qui n'ont pas un  $u_p$  parallèle correspondant.

**Étape 6 :** En utilisant  $A_q(\theta_{i+1})$  et  $\Lambda_K(\theta_{i+1})$ , calculer le correcteur équivalent au point de fonctionnement  $\theta_{i+1}$  (Exécuter seulement l'Étape 10 de l'Algorithme 3.1).

Notons qu'ici  $T_1(\theta_{i+1})$  correspond exactement à la première partition de  $T(\theta_{i+1})$  en (3.16), tandis que la deuxième partition  $T_2(\theta_{i+1})$  est déterminée par  $A_q(\theta_{i+1})$ . D'autre part, comme la solution d'une équation de RICCATI est indépendante de l'ordre des vecteurs et valeurs propres, les gains  $K_c(\theta_{i+1})$  et  $K_f(\theta_{i+1})$  sont indépendants de l'arrangement de  $\Lambda_n(\theta_{i+1})$  et  $\Lambda_K(\theta_{i+1})$ . Un possible changement d'ordre des valeurs propres dans la procédure de diagonalisation (Étape 4) affecterait juste les positions des colonnes de  $T_2(\theta_{i+1})$ . Pourtant, l'ordre correct est facilement retrouvé en analysant la proximité entre les valeurs propres de  $A_q(\theta_i)$  et de  $A_q(\theta_{i+1})$ .

Remarquons aussi que si  $n_K = n$ , alors  $T_3(\theta) = T_1^{-1}(\theta)$ . Il suffit donc d'exécuter un prolongement continu de  $T_1(\theta)$ . En outre, quand il s'agit d'un ensemble de plus de deux compensateurs LTI, une fois que l'Étape 1 a été exécutée au début du processus (par exemple,  $i = 1$ ), seulement les Étapes 2 et 3 sont nécessaires pour déterminer la famille entière de transformations linéaires d'état ( $i = 2, \dots, r$ ). Cette procédure permet de calculer tout un ensemble de compensateurs équivalents à partir d'un choix unique de la

partition de valeurs propres en boucle fermée et assure qu'il existe une trajectoire continue de transformations qui connecte leurs réalisations d'état de type estimation/commande.

### 3.3.2 Interpolation

Le sujet principal de cette étude est l'interpolation de correcteurs  $H_\infty$  et  $\mu$ . Notre approche permet toutefois de considérer une classe plus large de compensateurs. Comme nous l'avons mentionné plus haut, elle est applicable à condition que les compensateurs soient d'ordre plein ou augmenté.

La méthode proposée produit un ensemble de réalisations d'état adéquat à l'interpolation de compensateurs. Lorsque l'ensemble de points de fonctionnement est convenablement choisi, une bonne proximité entre les coefficients correspondants des correcteurs est, en général, obtenue comparativement aux réalisations génériques. Ceci assure, pendant la transition, un comportement régulier des gains d'estimation et de commande ainsi que du paramètre de YOULA. Donc, on peut espérer qu'une interpolation linéaire soit suffisante pour assurer la stabilité locale en boucle fermée pour chaque valeur intermédiaire du paramètre d'interpolation. Cependant, il n'y a aucune restriction à l'utilisation d'une autre stratégie d'interpolation.

Comme les variables d'interpolation comportent généralement les sorties et/ou les états du système, un autre intérêt pratique de cette approche est l'estimation effective de l'état sur tout le domaine de transition. En outre, en supposant que le modèle linéaire est disponible en temps réel, il n'est requis que le stockage de deux gains statiques et d'un nombre réduit de coefficients du paramètre de YOULA pour mettre à jour la dynamique du correcteur à chaque instant de l'échantillonnage.

Par rapport aux paramètres de YOULA, cette méthodologie produit des matrices dynamiques  $A_q$  bloc-diagonales et stables à chaque point de fonctionnement. Il est facile de montrer que, dans notre contexte, l'interpolation linéaire des réalisations de  $Q(s)$  est stable. Supposons que  $A_q^k(\theta_i)$  et  $A_q^k(\theta_{i+1})$  soient les  $k$ -èmes blocs composant la diagonale de  $A_q(\theta)$  en deux points de fonctionnement consécutifs. Considérons le cas général où :

$$A_q^k(\tilde{\theta} = 0) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a' \end{bmatrix}, \quad a < 0, \quad a' < 0, \quad (3.73)$$

et

$$A_q^k(\tilde{\theta} = 1) = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c' \end{bmatrix}, \quad c < 0, \quad c' < 0. \quad (3.74)$$

L'équation caractéristique de la matrice bloc-diagonale linéairement interpolée

$$A_q^k(\tilde{\theta}) = (1 - \tilde{\theta})A_q^k(0) + \tilde{\theta}A_q^k(1), \quad \tilde{\theta} \in [0, 1], \quad (3.75)$$

est

$$\lambda^2 + \lambda \left\{ \left[ (\tilde{\theta} - 1)a - \tilde{\theta}c \right] + \left[ (\tilde{\theta} - 1)a' - \tilde{\theta}c' \right] \right\} + \left\{ \left[ (\tilde{\theta} - 1)a - \tilde{\theta}c \right] \left[ (\tilde{\theta} - 1)a' - \tilde{\theta}c' \right] + \left[ (\tilde{\theta} - 1)b - \tilde{\theta}d \right]^2 \right\} = 0. \quad (3.76)$$

Puisque  $(\tilde{\theta} - 1)x - \tilde{\theta}y > 0$ ,  $\forall x, y < 0$  et  $\forall \tilde{\theta} \in [0, 1]$ , alors tous les coefficients de (3.76) sont positifs et ses racines sont toujours stables. Seulement trois situations particulières distinctes pour (3.73) et (3.74) sont possibles : les deux matrices  $A_q^k(0)$  et  $A_q^k(1)$  n'ont que des valeurs propres réelles ( $b = 0$  et  $d = 0$ ) ; les deux  $A_q^k(0)$  et  $A_q^k(1)$  n'ont que des valeurs propres complexes ( $a = a'$  et  $c = c'$ ) ; et  $A_q^k(0)$  n'a que des valeurs propres réelles et  $A_q^k(1)$  n'a que des valeurs propres complexes ou vice versa ( $b = 0$  et  $c = c'$  ou  $d = 0$  et  $a = a'$ ). Une interpolation linéaire des réalisations des  $Q$ -paramètres produits par les méthodes décrites dans les sections précédentes est donc suffisante pour assurer que  $Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty$  sur un intervalle de transition tout entier.

Enfin, la structure estimation/commande  $J_{11}(s)$  en (3.9) est aussi un correcteur stabilisant d'ordre plein pour un système générique  $(A, B, C)$ . Ainsi, ce dernier résultat généralise, pour les compensateurs d'ordre augmenté, les méthodes d'interpolation proposées en [95] et [96], où respectivement, les réalisations d'état et les gains de commande et d'estimation de compensateurs d'ordre plein sont interpolés de façon à préserver la stabilité locale du système bouclé.

## 3.4 Applications

Dans cette section, nous illustrons les Algorithmes 3.1 et 3.2, présentés dans les Paragraphes 3.2.4 et 3.3.1, par un système simple du deuxième ordre. Un problème plus réaliste de pilotage automatique d'un missile est considéré ensuite.

### 3.4.1 Un exemple du deuxième ordre

Considérons le système du deuxième ordre présenté dans [94]. Le système LPV est défini par

$$P(s, \theta) = G(s, \theta) = \left[ \begin{array}{cc|c} 2 & -\theta & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 0 \end{array} \right], \quad (3.77)$$

où la variable d'interpolation  $\theta \in [5/6, 7/6]$ . Supposons que la dépendance de  $\theta$  par rapport au temps est exprimé par :

$$\theta(t) = (1 - t)7/6 + t5/6, \quad t \in [0, 1]. \quad (3.78)$$

Les correcteurs stabilisants conçus en  $t = 0$  et  $t = 1$  et connectés au système selon la Figure 3.1-(a) sont, respectivement,

$$K_0(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} -80 & -90900 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 89100 & -18711 & 0 \end{array} \right] \quad \text{et} \quad K_1(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} -4.2 & -1478 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1355 & -460.7 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.79)$$

Avec ces correcteurs, quand le temps évolue de 0 à 1, le système bouclé démarre d'une condition de fonctionnement très stable pour aboutir à une condition de fonctionnement en limite de stabilité.

TAB. 3.1 – Données en boucle fermée en  $t = 0$ 

$i$	$\lambda_i$	$c_i$	$o_i$	$p_i$	$\sigma_i$
1, 2	$-6.16 \pm j7.41$	$1.04e+7$	1.39	139.0	6.16
3	-51.26	$5.40e+6$	1.04	61.86	51.3
4	-14.42	$2.58e+7$	1.14	324.2	14.4

Le Tableau 3.1 montre les données en  $t = 0$  considérées pour le choix de la partition des pôles en boucle fermée, où  $c_i$ ,  $o_i$ ,  $p_i$  et  $\sigma_i$  sont, respectivement, les facteurs de gouvernabilité, d'observabilité et de participation et l'atténuation de  $\lambda_i$  (valeur absolue de la partie réelle).

En utilisant l'Algorithme 3.1 on obtient la transformation d'état suivante :

$$T(0) = \begin{bmatrix} -1.5838e-4 & -1.0334e-3 \\ +1.1130e-5 & -2.1254e-5 \end{bmatrix}. \quad (3.80)$$

En appliquant cette transformation linéaire à la réalisation initiale  $K_0$ , en (3.79), on obtient :

$$K_{e0}(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} 1417.2 & -2951.9 & -1429.5 \\ 749.59 & -1497.2 & -748.59 \\ \hline -14.32 & -91.68 & 0 \end{array} \right], \quad (3.81)$$

avec

$$K_c(0) = [14.32 \quad 91.68], \quad K_f(0) = [-1429.5; \quad -748.59], \quad (3.82)$$

$\lambda_{1,2} \in \text{spec}(A - BK_c(0))$  et  $\lambda_{3,4} \in \text{spec}(A - K_f(0)C)$ .

La transformation linéaire d'état en  $t = 1$ , obtenue par continuation, est

$$T(1) = \begin{bmatrix} -2.6751e-3 & -1.8865e-3 \\ +6.8196e-4 & -1.3528e-3 \end{bmatrix}, \quad (3.83)$$

laquelle, appliquée à la réalisation initiale  $K_1$ , produit

$$K_{e1}(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} 273.84 & -554.32 & -275.78 \\ 140.02 & -278.04 & -139.02 \\ \hline -3.94 & -1.93 & 0 \end{array} \right], \quad (3.84)$$

avec

$$K_c(1) = [3.939 \quad 1.933] \quad \text{et} \quad K_f(1) = [-275.78; \quad -139.02]. \quad (3.85)$$

Comme en [94], nous allons aussi considérer les réalisations balancées des compensateurs :

$$K_{b0}(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} -9.7e-6 & 301.5 & 0.104 \\ -301.5 & -80.0 & 298.5 \\ \hline -0.104 & 298.5 & 0 \end{array} \right] \quad \text{et} \quad K_{b1}(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} -8.2e-5 & 38.4 & 0.163 \\ -38.4 & -4.2 & 36.8 \\ \hline -0.163 & 36.8 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.86)$$

La Figure 3.3 montre la localisation des pôles en boucle fermée sur l'intervalle de transition pour l'interpolation linéaire de  $K_c$  et  $K_f$  (ou pour les réalisations de  $K_{e0}$  et  $K_{e1}$ ) et des

réalisations balancées ( $K_{b0}$  et  $K_{b1}$ ). Elle illustre le fait que le comportement dynamique, aux points intermédiaires, du système stationnaire bouclé peut être très dépendant de la réalisation d'état adoptée pour les correcteurs aux points extrêmes. Remarquons que les trajectoires des pôles sont complètement distinctes, à l'exception des points terminaux. Ce phénomène affecte aussi le système non stationnaire en boucle fermée qui peut avoir une performance et une stabilité à temps variant très distinctes.

Les Figures 3.4, 3.5 et 3.6 montrent les réponses temporelles du système non stationnaire bouclé à une perturbation  $r(t)$  qui comprend des signaux rectangulaires d'amplitude unitaire et de durée 0.1s appliquées en  $t = 0$  et  $t = 0.4$ . Pour l'interpolation des réalisations balancées, les évolutions des états du correcteur,  $\hat{x}_1$  et  $\hat{x}_2$ , ne sont montrés qu'à titre d'illustration, puisqu'ils ne représentent pas les estimés asymptotiques des états de  $P$ . Les performances entrée-sortie sont assez semblables pour les deux interpolations, mais les états du compensateur formé par l'interpolation de structures estimation/commande convergent asymptotiquement aux états du système.

Il est facile de montrer que les stratégies qui considèrent l'interpolation linéaire des pôles, zéros et gains ou des réalisations canoniques initiales (3.79) ne garantissent pas la stabilité. Autrement dit, en utilisant ces approches, le système linéaire bouclé n'est pas stable pour certaines valeurs "figées" de  $\theta \in [5/6, 7/6]$  et le système non stationnaire est instable.

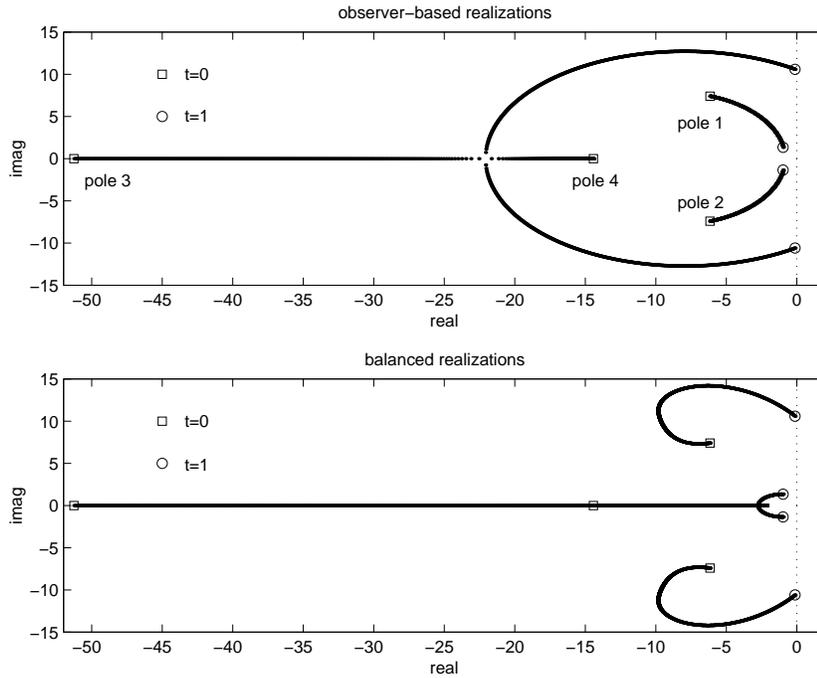


FIG. 3.3 – Localisation des pôles en boucle fermée sur l'intervalle de transition

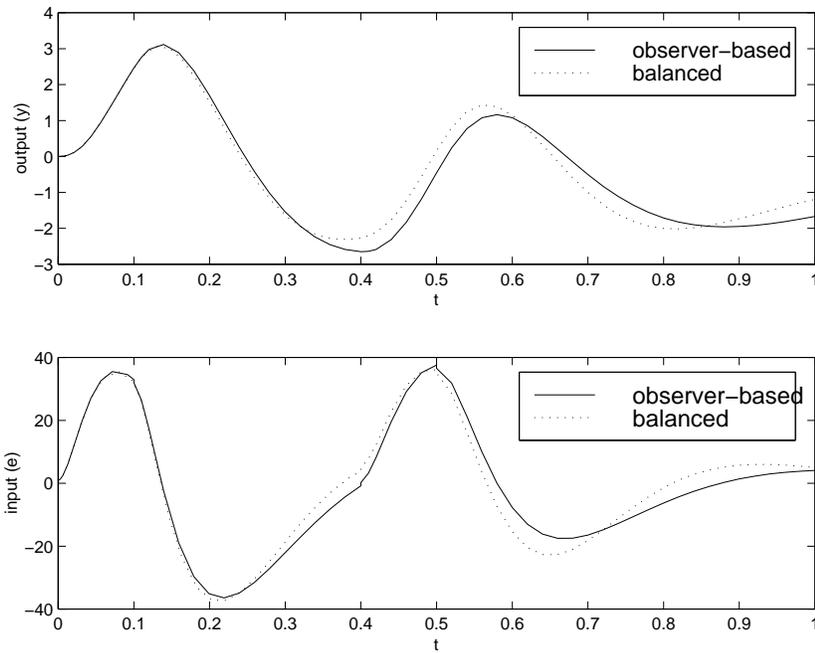


FIG. 3.4 – Réponse des systèmes non stationnaires

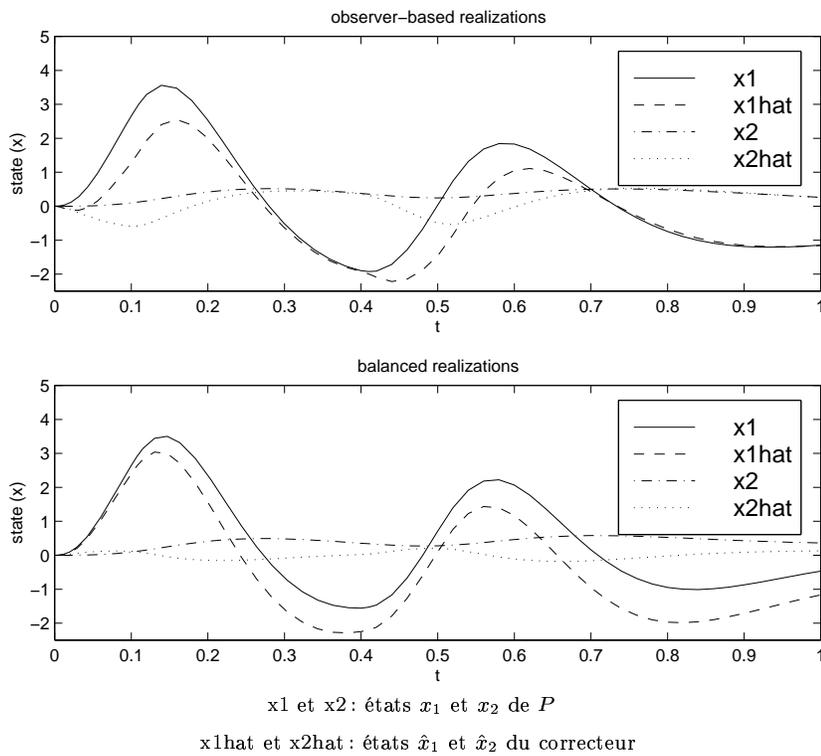
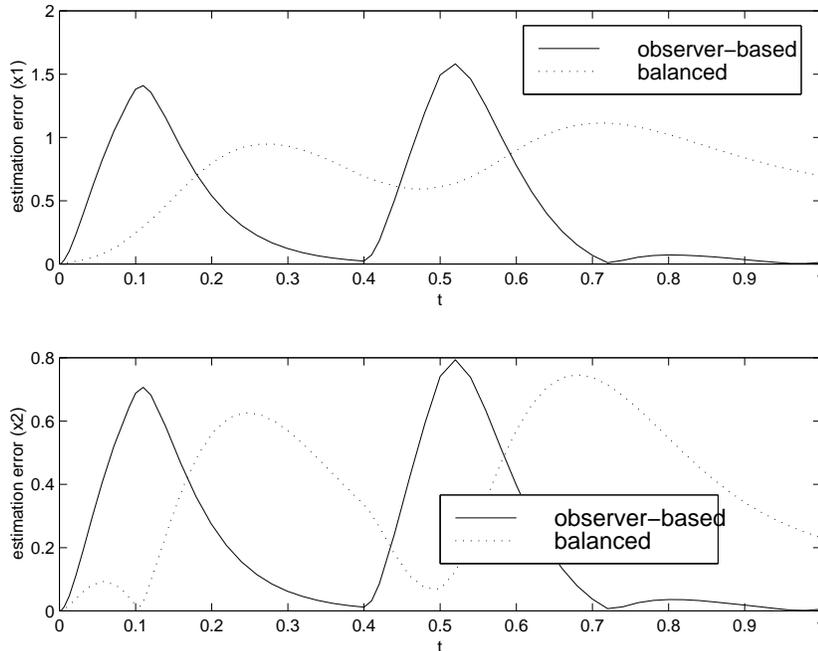


FIG. 3.5 – États des systèmes non stationnaires

FIG. 3.6 – L'erreur d'estimation d'état  $|x - \hat{x}|$ 

### 3.4.2 Un exemple de pilotage d'un missile

Dans ce paragraphe, nous considérons le problème d'interpolation pour le pilotage en incidence d'un modèle de missile. Le problème consiste à commander un missile pour suivre l'accélération verticale commandée  $\eta_c(t)$  en produisant un signal de commande à l'actionneur  $\delta_c(t)$ . Le modèle non linéaire du missile, la dynamique de l'actionneur et les spécifications pour la conception des correcteurs LTI sont ceux considérés en [64] et utilisés en [93, 95]. Les données numériques sont disponibles en [64] et dans l'Annexe A. Quelques difficultés majeures de conception d'un compensateur pour cette application sont mises en évidence en [89] et [90].

La structure de commande en boucle fermée est représentée à la Figure 3.7. La représentation d'état du système linéarisé  $G(s, \theta)$  est donnée en (A.11). L'état du missile comporte l'angle d'incidence  $\alpha(t)$ , la vitesse angulaire en tangage  $q(t)$ , l'angle de l'empennage  $\delta(t)$  et sa dérivée  $\dot{\delta}(t)$ . L'accélération verticale  $\eta(t)$  et la vitesse angulaire en tangage sont les mesures. Les conditions d'équilibre du système sont paramétrées par l'angle d'incidence ( $\theta = |\alpha|$ ) car nous supposons la vitesse du missile constante et égale à Mach 3. Étant donné que le modèle linéaire du missile est symétrique par rapport à  $\alpha = 0$ , les compensateurs linéaires  $K(s)$  sont conçus pour  $\alpha \geq 0$  et interpolés en  $|\alpha|$ .

Dans les références [93, 95], STILWELL et RUGH ont considéré l'approche de modelage de valeurs singulières  $H_\infty$  ( $H_\infty$  loop shaping), introduit en [59], qui incorpore des compromis performance/stabilité robuste pour concevoir des compensateurs LTI ayant une structure estimation/commande. Les gains augmentés de retour et d'estimation

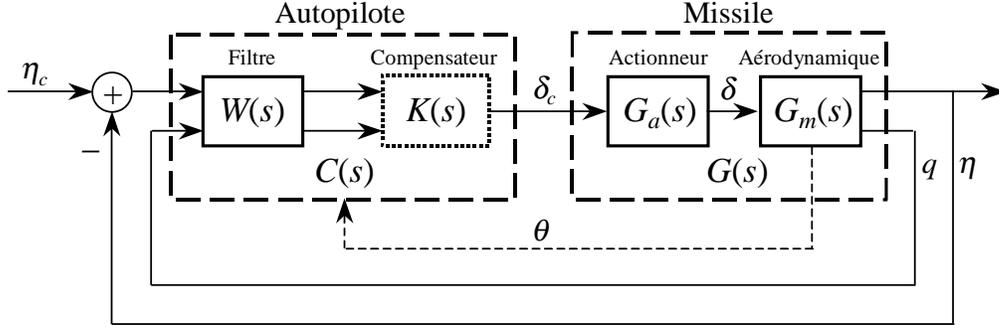


FIG. 3.7 – Structure de commande pour l'exemple du missile

d'état produits par cette méthode sont déjà appropriés pour l'interpolation [40]. Alors, nous les comparerons avec les gains obtenus en appliquant notre approche à des réalisations d'état génériques des compensateurs initiaux. Cet exemple permet aussi d'illustrer d'autres aspects de notre méthode, car la structure du pilote automatique n'est pas montrée explicitement dans le diagramme de la Figure 3.1-(a).

Les compensateurs globaux  $C(s, \alpha) := K(s, \alpha)W(s, \alpha)$  (Figure 3.7) sont construits en combinant les fonctions de pondération  $W(s, \alpha)$  et les correcteurs  $H_\infty$  initiaux  $K(s, \alpha)$ . Nous considérons des synthèses LTI pour  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 15$  et  $\alpha = 30$ . Les correcteurs  $K(s, \alpha)$ , conçus par la technique de synthèse  $H_\infty$  en [59], dépendent du point de fonctionnement paramétré par  $\alpha$  et sont de la forme

$$K(s, \alpha) = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{A_p(\alpha) + B_p(\alpha)K_{c0}(\alpha) + K_{f0}(\alpha)C_p(\alpha)}{K_{c0}(\alpha)} & -K_{f0}(\alpha) \\ \hline & 0 \end{array} \right], \quad (3.87)$$

où  $(A_p, B_p, C_p)$  sont les matrices d'espace d'état du système pondéré (*shaped plant*)  $P(s, \alpha) = W(s, \alpha)G(s, \alpha)$  et  $(K_{c0}, K_{f0})$  sont les gains originaux de retour et d'estimation d'état. La fonction de transfert du filtre est analogue à celles considérées en [93, 95],

$$W(s, \alpha) = \left[ \begin{array}{cc|c} g_1 \frac{s-z_1}{s} & 0 & \\ \hline 0 & g_2 \frac{s-z_2}{s-p_2} & \end{array} \right], \quad (3.88)$$

dont les paramètres dépendent de  $\alpha$  et sont listés dans le Tableau 3.2.

TAB. 3.2 – Paramètres du filtre  $W(s)$ 

$\alpha$ (degrees)	$g_1$	$z_1$	$g_2$	$z_2$	$p_2$
0	0.16	-169.5	0.16	-7.6	-0.63
15	0.17	-150.5	0.27	-3.0	-1.00
30	0.33	-105.4	0.43	-4.0	-0.89

Pour l'application de notre méthode, nous considérons d'abord le système pondéré  $P(s, \alpha)$  et calculons des transformations d'état linéaires  $T(\alpha)$  ( $\alpha = 0, 15, 30$ ). Nous obtenons alors des compensateurs augmentés  $K_{e1}(s)$  qui sont équivalents aux compensateurs  $H_\infty$  initiaux  $K(s)$  ( $n = n_K = 6$  et  $Q(s) = 0$ ). Les correcteurs globaux  $C(s)$  et

$C_{e1}(s) = K_{e1}(s)W(s)$  sont d'ordre 8. Les gains des compensateurs initiaux,  $K_{c0}$  et  $K_{f0}$ , et équivalents,  $K_{c1}$  et  $K_{f1}$ , pour ce cas, sont présentés dans le Tableau 3.3. Les gains initiaux ont été conçus à chaque point de fonctionnement en utilisant la méthode de synthèse, tandis que l'ensemble de gains équivalents ont été obtenus en choisissant une partition des modes en boucle fermée pour  $\alpha = 0$  (Algorithme 3.1) et en exécutant une procédure de continuation (Algorithme 3.2) pour les points restants. Plusieurs réalisations d'état des correcteurs  $K(s)$  ont été considérées pour le calcul des compensateurs équivalents  $K_{e1}(s)$ : celles issues de la synthèse (3.87) puis, à partir de celles-ci, d'autres obtenues par des transformations linéaires aléatoires. Dans tous les cas les mêmes ensembles de gains équivalents ont été obtenus. On peut remarquer que, avec quelques exceptions pour les gains d'estimation, les coefficients sont assez proches pour des points de fonctionnement différents.

Notons que le filtre  $W(s)$  est connecté en cascade avec le système et fait partie de la transmission directe. Donc, il convient de conserver sa structure pour préserver les propriétés de synthèse LTI lors de l'interpolation. Ceci est le cas pour  $C_{e1}(s)$  puisque le filtre est incorporé à posteriori au compensateur équivalent augmenté.

Par contre, dans cet exemple, des correcteurs LTI équivalents qui comportent des paramètres de YOULA dynamiques et des estimateurs physiques ne peuvent être calculés que pour les compensateurs globaux  $C(s, \alpha)$ , avec  $n_K = 8$ ,  $n = 4$  et  $n_q = 4$ . La structure du filtre est, dans ce cas particulier, perdue dans la procédure d'interpolation des gains et de  $Q(s)$ . Un correcteur interpolé basé sur un tel ensemble de compensateurs n'est pas approprié pour être inséré dans la boucle. Cependant, une telle structure peut être exploitée indirectement pour améliorer l'estimation physique.

Nous avons donc calculé des correcteurs équivalents  $C_{e2}(s)$  à partir de  $C(s)$  en considérant le système (physique) non pondéré  $G(s, \alpha)$ , ce qui aboutit à des paramètres de YOULA dynamiques. Cette procédure nous offre la possibilité de calculer une famille de transformations  $T'(\alpha)$  qui convertit  $C_{e1}(s)$  en  $C_{e2}(s)$ . Ces derniers correcteurs ne sont pas explicitement utilisés dans la boucle mais leurs transformations associées,  $T'(\alpha)$ , constituent un moyen d'estimer les états du système physique plus efficacement. Les gains ( $K_{c2}, K_{f2}$ ) et les réalisations d'état des paramètres de YOULA pour le compensateur équivalent  $C_{e2}(s, \alpha)$  sont présentés dans les Tableaux 3.4 et 3.5.

Les valeurs des pôles en boucle fermée et leur distribution pour tous les compensateurs et tous les points de fonctionnement sont présentées dans les Tableaux 3.6 et 3.7, avec les définitions

$$\begin{aligned} C_{tr0} &:= \text{spec}(A_p + B_p K_{c0}), & O_{bs0} &:= \text{spec}(A_p + K_{f0} C_p), \\ C_{tr1} &:= \text{spec}(A_p - B_p K_{c1}), & O_{bs1} &:= \text{spec}(A_p - K_{f1} C_p), \\ C_{tr2} &:= \text{spec}(A - B K_{c2}), & O_{bs2} &:= \text{spec}(A - K_{f2} C), \end{aligned}$$

où  $(A, B, C)$  sont les matrices de la représentation d'état de  $G(s)$ . Quelques modes presque doubles ont interféré dans le choix de la partition initiale des pôles. Leur distribution est, pourtant, cohérente pour tous les points de fonctionnement.

Les réponses fréquentielles en boucle ouverte et les réponses temporelles à l'échelon unitaire en boucle fermée pour les compensateurs LTI, initiaux et équivalents, sont montrées,

respectivement, par les Figures 3.8 et 3.9 à 3.12. Puisque l'équivalence des compensateurs est exacte, les réponses fréquentielles et les comportements consigne-sortie (Figures 3.8 et 3.9) sont identiques pour tous les correcteurs. On constate aussi une amélioration considérable de l'estimation d'état pour  $K_{e2}(s)$  (Figures 3.10-3.12).

Nous avons adopté des structures de commande non stationnaire pour  $C_{e1}(s,\alpha) = K_{e1}(s,\alpha)W(s,\alpha)$ . Une interpolation linéaire des pôles, zéros, et gains de  $W(s,\alpha)$  a été utilisée de manière à conserver les propriétés du modelage des valeurs singulières  $H_\infty$  dans les zones de transitions. Deux stratégies ont été utilisées pour l'interpolation de  $K_{e1}(s,\alpha)$  :

1. Les gains  $(K_{c1}(\alpha), K_{f1}(\alpha))$  ont été linéairement interpolés, tandis que les autres coefficients matriciels de  $K_{e1}(s,\alpha)$ ,  $(A_p(\alpha), B_p(\alpha), C_p(\alpha))$ , ont été calculés via la connexion en série  $P(s,\alpha) = W(s,\alpha)G(s,\alpha)$ . Le modèle d'état  $(A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha))$  de  $G(s,\alpha)$  a été supposé disponible en temps réel et calculé en utilisant (A.11) sur la trajectoire du paramètre  $\alpha$ .
2. Puisque les compensateurs LTI sont stables pour tous les points de fonctionnement, on a pu utiliser une interpolation linéaire des matrices des réalisations d'état balancées basées sur les Gramiens de commandabilité et d'observabilité.

Remarquons que le filtre  $W$  intervient doublement dans  $C_{e1}$ .

Les Figures 3.13 et 3.14 montrent les réponses du système non linéaire, bouclé par ces deux compensateurs interpolés, à une séquence d'entrées en échelon. La perte de performance par rapport au comportement stationnaire de la Figure 3.9 est nette, mais elle est plus importante pour le pilote automatique qui utilise l'interpolation des matrices. Pour ceci, les réponses temporelles présentent un plus grand dépassement et un plus petit facteur d'amortissement. Des propriétés d'estimation plus faibles sont obtenues pour le correcteur  $C_{e1}(s,\alpha)$  qui a un paramètre de YOULA statique (estimation 1). Bien que le système soit non linéaire, l'estimation 2, obtenue en appliquant aux états du correcteur  $C_{e1}(s,\alpha)$  une transformation  $T'(\alpha)$  interpolée linéairement, est beaucoup plus précise. De meilleures performances globales seraient obtenues pour les deux stratégies de séquençement si un nombre plus grand de correcteurs LTI était utilisé. Toutefois, l'interpolation des gains serait toujours plus avantageuse dans ce cas.

Les Figures 3.15 et 3.16 montrent la migration des pôles dominants en boucle fermée (3 et 5 ou 4 et 6) d'après les trajectoires de  $\alpha$  dans la Figure 3.14. Pour l'interpolation des gains  $K_{c1}$  et  $K_{f1}$  (Figure 3.16) ce lieu des racines est moins dispersé et présente de plus petites variations sur la fréquence naturelle non amortie ( $\omega_n$ ) et sur l'amortissement ( $\zeta$ ). Il faut ajouter que les pôles n'ont pas de sens pour les systèmes non linéaires instationnaires, mais ce résultat donne une idée approximative sur la différence de dynamiques des deux compensateurs. Cette notion du comportement dynamique du système en boucle fermée sera d'autant plus précise que le paramètre varie lentement.

TAB. 3.3 – Gains de commande et d'estimation augmentée

$\alpha$	$[K_{c0}]^T$	$K_{f0}$	$[-K_{c1}]^T$	$-K_{f1}$		
0	$\begin{bmatrix} -27.76 \\ 0.0292 \\ 5.187 \\ 0.407 \\ -0.420 \\ -0.0018 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.936 & 0.952 \\ 11.07 & -23.91 \\ 11.16 & -24.26 \\ 103.14 & -398.90 \\ -5.21 & 34.57 \\ -200.45 & -1125.0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -27.84 \\ 0.0293 \\ 5.194 \\ 0.407 \\ -0.415 \\ -0.0016 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.919 & 0.907 \\ 11.04 & -23.81 \\ 11.14 & -24.19 \\ 113.78 & -426.63 \\ 5.229 & 7.144 \\ -501.98 & -312.61 \end{bmatrix}$		
	15	$\begin{bmatrix} -25.87 \\ 0.0107 \\ 4.014 \\ 0.456 \\ -0.485 \\ -0.0021 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.540 & 0.694 \\ 9.744 & -10.12 \\ 9.785 & -10.31 \\ 56.8 & -221.15 \\ -11.17 & 39.43 \\ 119.76 & -1816.9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -25.91 \\ 0.0107 \\ 4.035 \\ 0.455 \\ -0.472 \\ -0.0018 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.516 & 0.655 \\ 9.727 & -10.10 \\ 9.782 & -10.31 \\ 72.09 & -246.69 \\ 5.032 & 12.64 \\ -568.8 & -704.1 \end{bmatrix}$	
		30	$\begin{bmatrix} -34.55 \\ 0.0289 \\ 5.812 \\ 0.650 \\ -0.689 \\ -0.0028 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.01 & 0.559 \\ 5.401 & -7.900 \\ 5.425 & -8.086 \\ 35.02 & -238.85 \\ -10.31 & 64.68 \\ 121.62 & -2367.2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -37.74 \\ 0.0316 \\ 6.490 \\ 0.702 \\ -0.760 \\ -0.0025 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.974 & 0.461 \\ 5.211 & -7.393 \\ 5.240 & -7.594 \\ 40.93 & -257.68 \\ 7.614 & 14.95 \\ -863.95 & 127.36 \end{bmatrix}$

TAB. 3.4 – Gains de commande et d'estimation physique

$\alpha$	$[K_{c2}]^T$	$K_{f2}$		
0	$\begin{bmatrix} -7.05e-3 \\ -1.78e-3 \\ -9.70e-1 \\ -7.44e-3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0242 & 1.091 \\ 27.73 & 99.26 \\ 0.293 & -0.952 \\ -127.97 & 15.43 \end{bmatrix}$		
	15	$\begin{bmatrix} 4.90e-2 \\ 1.97e-3 \\ -9.72e-1 \\ -7.08e-3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0214 & 1.075 \\ 23.81 & 84.92 \\ 0.525 & -2.967 \\ -187.59 & 110.00 \end{bmatrix}$	
		30	$\begin{bmatrix} 1.03e-1 \\ 4.81e-3 \\ -9.58e-1 \\ -6.17e-3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.00695 & 1.102 \\ -8.30 & 128.08 \\ -0.975 & -5.449 \\ -33.80 & -197.01 \end{bmatrix}$

TAB. 3.5 – Coefficients du paramètre de YOULA

$\alpha$	$Q(s)$					
0	-102.36	110.08	0	0	6451.5	-16470.0
	-110.08	-102.36	0	0	-3872.1	8821.4
	0	0	-12.64	9.051	5273.9	271.91
	0	0	-9.051	-12.64	-427.97	1431.1
	-3.694e-3	-7.994e-4	5.294e-5	1.803e-5	0	0
15	-100.16	112.06	0	0	5967.9	-15983.0
	-112.06	-100.16	0	0	-3330.6	8349.0
	0	0	-15.98	11.71	5700.5	-262.66
	0	0	-11.71	-15.98	1809.3	889.86
	-3.524e-3	-7.599e-4	5.878e-5	4.526e-5	0	0
30	-98.24	123.43	0	0	155.84	-4322.6
	-123.43	-98.24	0	0	9918.8	-39712.0
	0	0	-16.06	11.26	4872.3	83.31
	0	0	-11.26	-16.06	-2035.4	1150.8
	1.730e-3	-3.179e-3	1.555e-4	-6.156e-5	0	0

TAB. 3.6 – Pôles en boucle fermée

Pôles	$\alpha = 0$	$\alpha = 15$	$\alpha = 30$
1	-0.6347	-1.0438	-0.88975
2	-0.6347	-1.0438	-0.88975
3,4	-10.534±j8.2879	-12.397±j9.7124	-11.404±j8.5548
5,6	-12.636±j9.0509	-15.984±j11.708	-16.063±j11.259
7	-21.547	-26.064	-48.670
8	-100.17	-87.787	-134.86
9,10	-102.36±j110.08	-100.16±j112.06	-98.243±j123.43
11,12	-104.49±j107.75	-103.60±j108.76	-101.86±j111.39

TAB. 3.7 – Distribution des pôles en boucle fermée

Pôles	$C_{tr0}$	$O_{bs0}$	$C_{tr1}$	$O_{bs1}$	$C_{tr2}$	$O_{bs2}$	$\text{spec}(A_q)$
1	*		*		*		
2		*		*		*	
3,4	*		*		*		
5,6		*		*			*
7	*		*		*		
8		*		*		*	
9,10		*	*				*
11,12	*			*		*	

$$C_{tr0} := \text{spec}(A_p + B_p K_{c0})$$

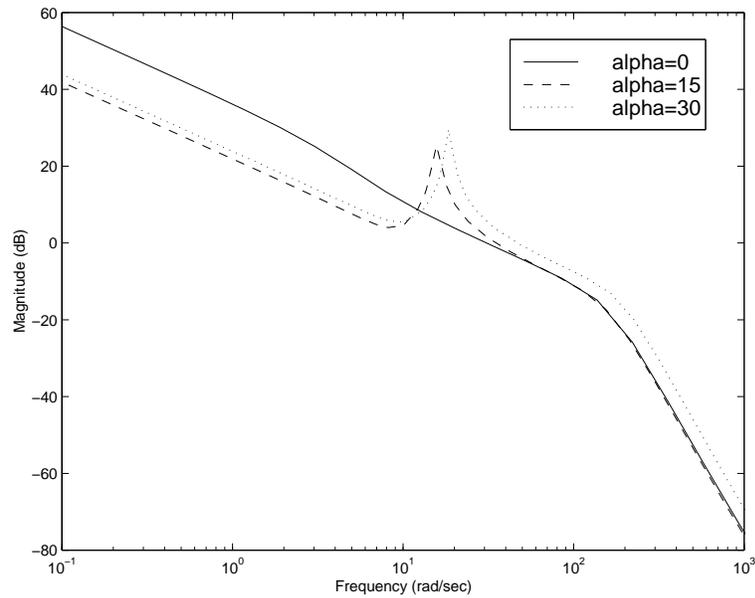
$$C_{tr1} := \text{spec}(A_p - B_p K_{c1})$$

$$C_{tr2} := \text{spec}(A - B K_{c2})$$

$$O_{bs0} := \text{spec}(A_p + K_{f0} C_p)$$

$$O_{bs1} := \text{spec}(A_p - K_{f1} C_p)$$

$$O_{bs2} := \text{spec}(A - K_{f2} C)$$

FIG. 3.8 – Réponse fréquentielle en boucle ouverte :  $CG(s,\alpha)$ ,  $C_{e1}G(s,\alpha)$  et  $C_{e2}G(s,\alpha)$

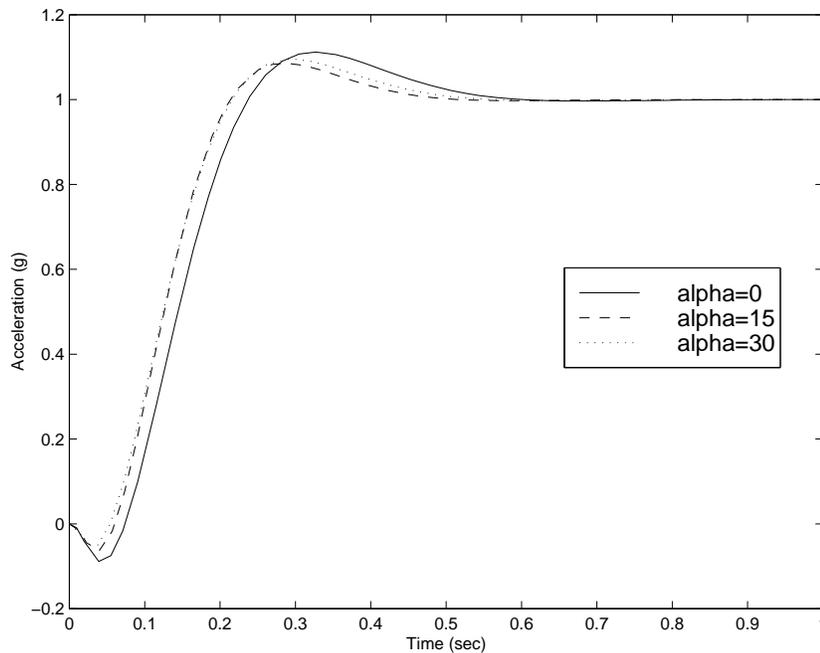


FIG. 3.9 – Réponse à l'échelon du système linéarisé en boucle fermée pour les correcteurs  $C(s)$ ,  $C_{e1}(s)$  et  $C_{e2}(s)$  – Accélération

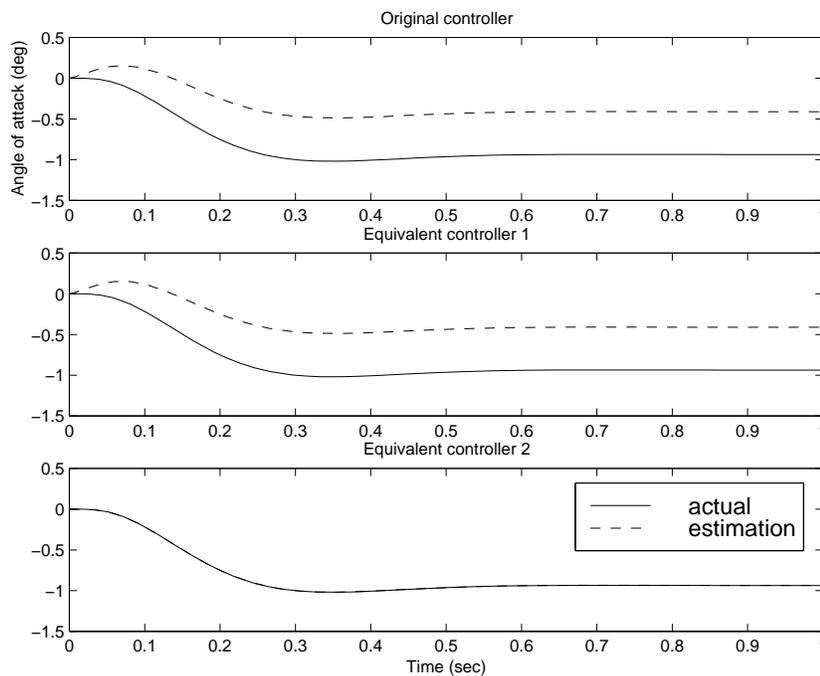


FIG. 3.10 – Réponse à l'échelon du système en boucle fermée linéarisé en  $\alpha = 0$  – Angle d'incidence

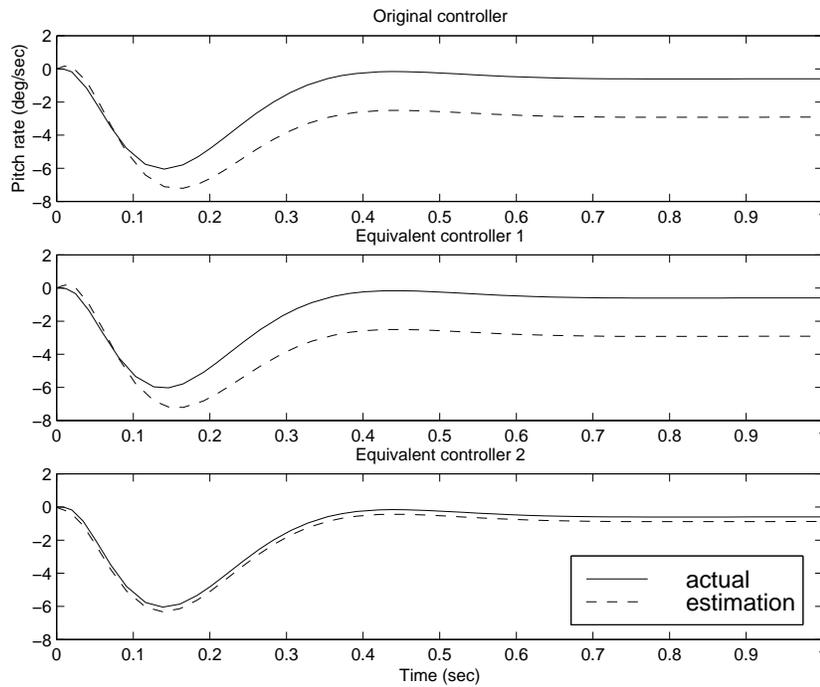


FIG. 3.11 – Réponse à l'échelon du système en boucle fermée linéarisé en  $\alpha = 0$  – Vitesse angulaire en tangage

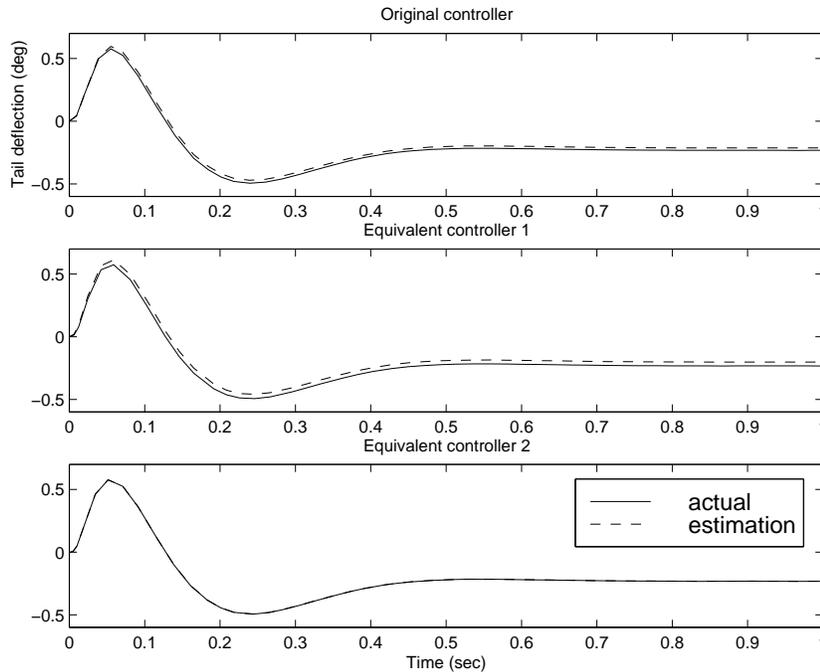


FIG. 3.12 – Réponse à l'échelon du système en boucle fermée linéarisé en  $\alpha = 0$  – Angle d'empennage

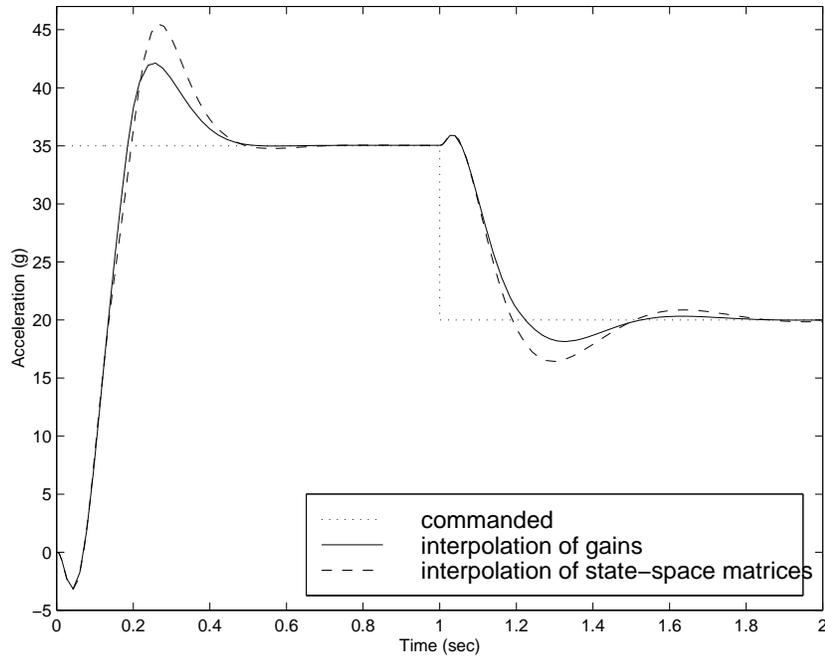


FIG. 3.13 – Réponse du système non linéaire en boucle fermée à une séquence d'entrées en échelon – Accélération

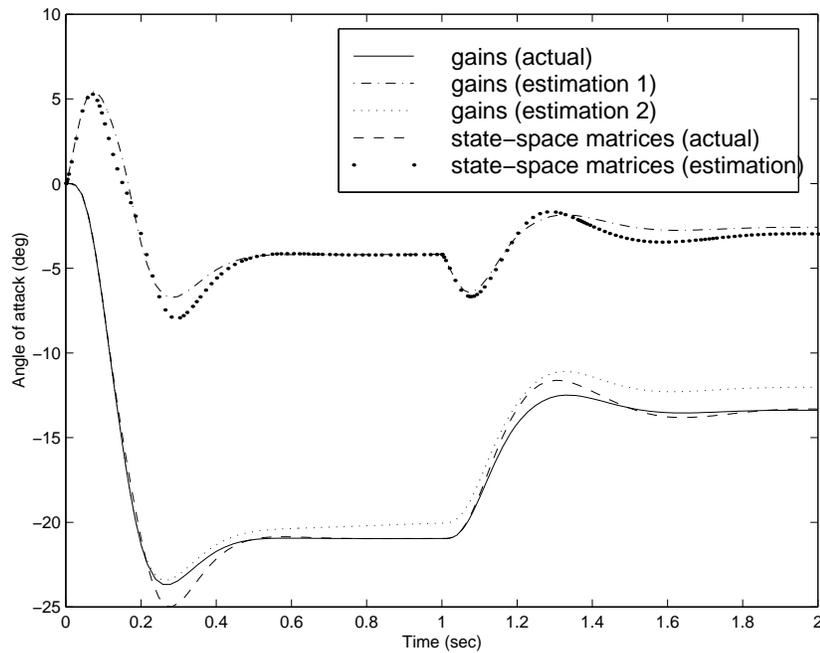


FIG. 3.14 – Réponse du système non linéaire en boucle fermée à une séquence d'entrées en échelon pour  $K_{e1}(s, \alpha)$  – Angle d'incidence

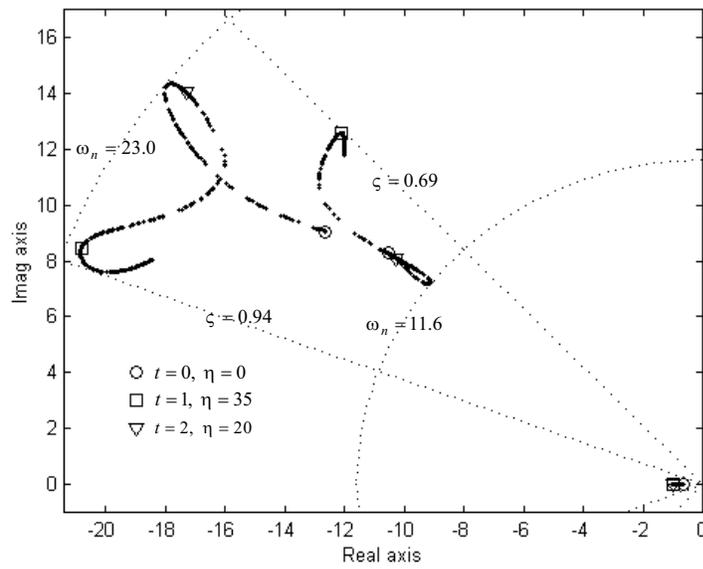


FIG. 3.15 – Localisation des pôles dominants en boucle fermée sur la trajectoire de  $\alpha(t)$  pour  $K_{e1}(s, \alpha)$  – Interpolation de matrices d'espace d'état

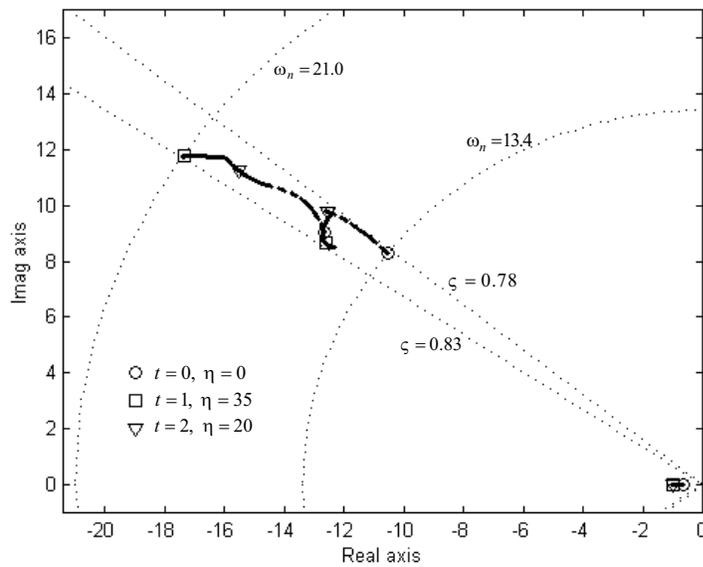


FIG. 3.16 – Localisation des pôles dominants en boucle fermée sur la trajectoire de  $\alpha(t)$  pour  $K_{e1}(s, \alpha)$  – Interpolation de gains

## 3.5 Conclusion

Cette étude a considéré le calcul d'un ensemble de transformations linéaires d'espace d'état pour une famille de correcteurs LTI à interpoler. L'ensemble des compensateurs transformés assurent un comportement régulier du correcteur interpolé, car ils présentent une structure estimation/commande où les différences de dynamiques sont minimisées. Cela permet une interpolation continue entre points de fonctionnement et aboutit à des restrictions plus faibles sur la limite supérieure du taux de variation du paramètre pour garantir la stabilité. Cette approche est exécutée en deux étapes. Dans un premier temps, des sous-espaces invariants associés aux valeurs propres de la boucle fermée sont sélectionnés de façon que l'état du compensateur conçu en un point de fonctionnement donné soit séparé en deux parties : une estimation de l'état du système et l'état du paramètre de YOULA. Un algorithme simple et stable numériquement est introduit dans ce but. Dans un second temps, un prolongement continu des sous-espaces invariants sélectionnés est exécuté pour obtenir une famille homogène de transformations d'état. Un algorithme fondé sur une technique de continuation d'EULER-NEWTON de deux équations de RICCATI généralisées, non symétriques et rectangulaires a été construit. Des problèmes numériques sont aussi discutés et des solutions sont proposées pour une mise en œuvre systématique de l'algorithme global.

Un exemple simple et un problème plus réaliste de pilotage d'un missile ont été présentés pour démontrer les avantages de la méthode : en utilisant une stratégie d'interpolation linéaire simple, nous avons obtenu des transitions régulières entre correcteurs et une bonne estimation physique. Si le modèle instationnaire commandé est de type LPV, l'état estimé converge asymptotiquement vers l'état réel. Mais si le modèle est de type non linéaire ou quasi-LPV, l'erreur d'estimation tend vers une constante qui est, en général, beaucoup plus petite que celles obtenues par d'autres méthodes. Une fois que le "placement" des compensateurs LTI et la stratégie d'interpolation ont été déterminés, ces avantages sont généralement indépendants des représentations d'état initiales mais peuvent être très dépendants d'autres propriétés des correcteurs initiaux. Par exemple, un grand nombre de modes doubles en boucle fermée, résultant de compensateurs peu appropriés, peuvent défavoriser la performance de l'approche.

Lorsque des compensateurs  $H_\infty$  d'ordre augmenté sont synthétisés, cette approche offre une façon particulière de construire leurs réalisations d'état où l'interpolation linéaire des paramètres de YOULA est stable au sens local. Par conséquent, les méthodes d'interpolation de compensateur d'ordre plein qui assurent la stabilité locale peuvent être appliquées dans ce contexte sans perte de leurs propriétés. Cependant, les schémas de commande où les fonctions de pondération sont dans la boucle, posent quelques limitations pour l'utilisation de l'approche du paramètre de YOULA dynamique. Dans ce cas, la fonction de pondération devient implicite dans les réalisations des compensateurs transformés et sa structure est perdue dans la procédure d'interpolation. Donc, la méthode proposée doit être utilisée avec précaution dans cette situation particulière.

Les résultats obtenus par cette méthode sur d'autres exemples seront confrontés aux résultats des approches LPV développées dans la suite de cette Deuxième Partie.



## Chapitre 4

# Interpolation de compensateurs $H_\infty$ par fonctions de LYAPUNOV continues par morceaux

DANS ce chapitre, nous abordons le problème de synthèse de compensateurs  $H_\infty$  interpolés pour des systèmes LPV en utilisant des fonctions de LYAPUNOV dépendantes du paramètre et continues par morceaux. Des lois d'interpolation pour les variables de LYAPUNOV, associées à des sous-régions de l'espace paramétrique, sont introduites et combinées avec une technique LPV générale basée sur un maillage de l'espace paramétrique. Un algorithme pratique et numériquement réalisable est proposé [68, 70] pour obtenir les coefficients matriciels de ces fonctions et pour déterminer les variables de LYAPUNOV pour les correcteurs aux points extrêmes des intervalles d'interpolation. Le compensateur interpolé résultant garantit non seulement la performance  $H_\infty$  du système bouclé sur tout le domaine paramétrique, mais offre également un compromis raisonnable entre le conservatisme des techniques qui utilisent des variables de LYAPUNOV indépendantes du paramètre et le calcul en ligne de compensateurs LPV. La méthode proposée est illustrée par un exemple de commande d'un missile.

## 4.1 Introduction

### Problématique

Pour les approches de séquençement conventionnelles, bien que les correcteurs LTI stabilisent le système autour des conditions de fonctionnement données, il n'existe pas de garantie de stabilité ou de performance pour toutes les trajectoires admissibles du système. En pratique, la perte de performance dans la région de transition ne peut pas être mesurée dans l'étape de synthèse et un nombre important de simulations est nécessaire pour évaluer la performance du système bouclé sur un ensemble assez riche de trajectoires potentielles. Le nombre de compensateurs LTI est donc augmenté jusqu'à ce que les qualités souhaitées soient obtenues pour les trajectoires représentatives de l'ensemble du domaine de variation de la variable d'interpolation.

Un nombre très réduit de résultats théoriques [86, 95, 96], dans le domaine de l'interpolation classique, offre des conditions pour l'interpolation de correcteurs LTI optimaux, qui assurent la stabilité locale<sup>1</sup> dans la zone de transition. La définition d'une méthodologie "explicite" qui garantirait la stabilité et la performance  $H_\infty$  instationnaire constitue un problème difficile qui reste à résoudre dans le domaine de l'interpolation conventionnelle. Par ailleurs, si l'on reste dans le contexte  $H_\infty$ , la famille de compensateurs LTI utilisée par ces méthodes classiques, est généralement constituée de correcteurs optimaux. On peut se demander si les solutions numériques optimales  $H_\infty$  sont toujours le meilleur choix pour l'interpolation. De plus, la discussion au sujet du choix de l'ensemble des points de synthèse LTI dans [95, 96], ne donne que des conditions suffisantes sur le "placement" des compensateurs linéaires pour la garantie de la stabilité locale dans la zone de transition. Des méthodes de systématisation de leur sélection demeurent encore à explorer.

Le grand avantage des techniques de séquençement LPV par rapport aux approches classiques est la prise en compte des questions de stabilité/performance à temps variant. Les méthodes LPV dans [56, 65, 57, 6] et celles dans [13, 7] sont, pourtant, potentiellement très conservatives [105], puisqu'elles utilisent des fonctions de LYAPUNOV indépendantes des paramètres du système, et autorisent des taux arbitraires de variation de ces paramètres. En outre, elles requièrent aussi des classes spécifiques de représentation LPV du système telles que LFT ou polytopique. Cette exigence peut être restrictive pratiquement ou peut imposer la prise en compte de trajectoires irréalistes. En revanche, les méthodes LPV basées sur un maillage de l'espace paramétrique [105, 11, 5, 10, 98] permettent de considérer des fonctions de LYAPUNOV quadratiques dépendantes du paramètre,  $x_{cl}^T P(\theta) x_{cl}$ , où  $x_{cl}$  est l'état du système bouclé. Les bornes sur la vitesse du paramètre, supposées connues<sup>2</sup>, sont alors incorporées dans la synthèse, ce qui aboutit à des compensateurs beaucoup moins conservatifs. Une qualité intéressante est la possibilité de traiter des systèmes qui ont une dépendance paramétrique générale. En retour, ces techniques entraînent des difficultés pratiques supplémentaires associées au nombre infini de contraintes qui doivent être satisfaites pour la synthèse LPV et à la nature continue de

1. Sous la condition de variation lente du paramètre d'interpolation.

2. Ce qui est généralement le cas dans la pratique.

la fonction de dépendance paramétrique de la variable de LYAPUNOV  $P$ . Cela augmente le coût calculatoire global de synthèse et, comme la mise à jour des données du compensateur exige la connaissance des variables de LYAPUNOV à chaque point de la trajectoire du système, des questions concernant la mise en œuvre doivent être examinées. Un autre point important concerne le choix des fonctions de dépendance paramétrique des variables de LYAPUNOV. Nonobstant les schémas commentés en [105, 5, 10, 98], il n'y a pas de règle systématique pour les sélectionner.

Dans cette voie, une technique d'analyse de systèmes LPV est présentée dans [55]. Elle utilise des fonctions de LYAPUNOV quadratiques spécifiques, où  $P(\theta)$  est une fonction affine et continue par morceaux. Des exemples numériques simples montrent que la technique peut offrir des garanties de robustesse moins conservatives par rapport aux techniques précédentes dans les références [32, 103], quand celles-ci sont utilisées pour l'analyse. En fait, le conservatisme est réduit, car l'analyse est réalisée sur plusieurs sous-régions de l'espace paramétrique plutôt que sur le domaine entier. Dès que les matrices d'état du système sont des fonctions affines par morceaux du paramètre, ce résultat peut être utilisé pour la sélection des bases de fonctions pour les variables de LYAPUNOV dans les méthodes générales de synthèse LPV annoncées ci-dessus.

## Contribution

Cette idée de partager le domaine paramétrique en sous-régions est exploitée ici afin de réduire le conservatisme, mais sans la contrainte de dépendance affine du paramètre. Ces sous-régions sont considérées comme des sous-intervalles pour l'interpolation non-linéaire des variables de LYAPUNOV en leurs points extrêmes. Lorsqu'on considère l'ensemble connecté des sous-régions, les variables de LYAPUNOV deviennent des fonctions continues par morceaux, ce qui est aucunement restrictif pour la stabilité du système bouclé. Enfin, nous montrons dans ce chapitre que les techniques LPV générales et les techniques d'interpolation conventionnelles peuvent être utilisées conjointement pour profiter de leurs propriétés complémentaires.

D'une part, nous montrons que les méthodes classiques offrent des règles pratiques pour sélectionner les fonctions de dépendance paramétrique des variables de LYAPUNOV utilisées dans les caractérisations LMI des techniques LPV. Le calcul de ces variables pour une valeur donnée du paramètre peut être exécuté aisément en temps réel par une simple interpolation des valeurs prédéterminées de ces variables aux points extrêmes des sous-régions du domaine paramétrique. Ceci restreint leur calcul et leur stockage à un nombre très réduit de points<sup>3</sup>, donc l'effort calculatoire n'est pas seulement réduit dans la synthèse, mais aussi dans la mise en œuvre de ce type de compensateur. Nous proposons un algorithme original permettant, à la fois, d'obtenir les coefficients matriciels de ces fonctions d'interpolation et de déterminer les variables de LYAPUNOV pour les correcteurs aux points extrêmes des intervalles. Les compensateurs interpolés obtenus assurent une borne supérieure pour la performance  $H_\infty$  du système non-stationnaire bouclé.

---

3. Notamment, aux points extrêmes des intervalles d'interpolation.

D'autre part, nous utilisons des approches LPV pour doter une technique d'interpolation classique d'une procédure pratique et théoriquement justifiée pour :

- choisir l'ensemble des points de fonctionnement ;
- calculer l'ensemble correspondant des compensateurs  $H_\infty$  ; et
- établir la stabilité et la performance à temps variant avec peu de conservatisme.

L'algorithme proposé exploite le degré d'optimalité des compensateurs à interpoler et la "distance" entre eux, c'est-à-dire, la taille des sous-intervalles d'interpolation, pour obtenir ces propriétés. En effet, nous montrons ici que la performance globale (instationnaire) en boucle fermée peut être améliorée quand des compensateurs LTI sous-optimaux sont interpolés. L'idée clef est donc de relaxer le degré d'optimalité des compensateurs  $H_\infty$  extrêmes pour faciliter la tâche d'interpolation.

Dans la suite nous présentons le problème et faisons une brève révision de quelques résultats pertinents (Section 4.2). Un nouvel algorithme pour la synthèse et l'interpolation de compensateurs séquencés avec performance  $H_\infty$  garantie est décrit dans la Section 4.3. Dans la Section 4.4, son utilisation est illustrée par un exemple réaliste.

## 4.2 Présentation du problème et résultats antérieurs

Il s'agit ici de présenter le problème de séquencement  $H_\infty$  et de rappeler quelques résultats connus sur les techniques LPV qui exploitent le fait que les évolutions des paramètres physiques ont, en général, une plage limitée en vitesse. Les outils dans cette section sont empruntés essentiellement de [5], mais le lecteur se rapportera aux références [105, 11, 12] pour des techniques de séquencement LPV analogues.

Spécifiquement, notre méthodologie est fondée sur la formulation appelée "caractérisation projetée" [5]. Cette technique projetée est moins conservative et moins chère en temps de calcul que la caractérisation appelée "caractérisation de base" [5], où la solution implique non seulement des variables de LYAPUNOV, mais aussi des matrices intermédiaires du correcteur. Nous l'avons jugée plus appropriée à cause du caractère itératif de l'algorithme proposé, où la répétition de certains calculs est inévitable. La formulation de base est toutefois utile pour traiter les problèmes de spécifications multi-objectif, puisqu'elle peut être étendue à ce genre de problème. La prise en compte d'un critère multi-objectif est intéressante et utile. Mais cela implique de considérer aussi des lois d'interpolation pour les variables intermédiaires du compensateur, ce qui restreint l'application de la méthode aux systèmes de très faible ordre et avec très peu de paramètres<sup>4</sup>. Le problème concernant les spécifications multi-canal/objectif sera abordé dans le Chapitre 5, dans un contexte de dépendance paramétrique de type LFT, où le processus d'interpolation est beaucoup plus simple.

---

4. En utilisant les codes de programmation semi-définie disponibles aujourd'hui.

Considérons un système LPV  $P(s, \theta)$  ayant la réalisation d'état

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\theta)x + B_1(\theta)w + B_2(\theta)u \\ z &= C_1(\theta)x + D_{11}(\theta)w + D_{12}(\theta)u \\ y &= C_2(\theta)x + D_{21}(\theta)w, \end{aligned} \quad (4.1)$$

où

$$A \in \mathbf{R}^{n \times n}, \quad D_{12} \in \mathbf{R}^{p_1 \times m_2}, \quad \text{et} \quad D_{21} \in \mathbf{R}^{p_2 \times m_1}$$

définissent la dimension du problème. Les matrices d'espace d'état dépendant du paramètre  $\theta$ ,  $A(\theta)$ ,  $B_1(\theta)$ , ... sont supposées fonctions continues et bornées. Nous supposons aussi que le paramètre variable ou la variable d'interpolation,  $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_r)^T$ , ainsi que son taux de variation  $\dot{\theta} := \frac{d\theta}{dt}$  sont bornés :

- chaque paramètre  $\theta_l$ ,  $l = 1, \dots, r$ , varie dans un intervalle compact dont les valeurs extrêmes,  $\underline{\theta}_l$  et  $\bar{\theta}_l$ , sont connues

$$\theta_l(t) \in [\underline{\theta}_l, \bar{\theta}_l], \quad \forall t \geq 0; \quad (4.2)$$

- la vitesse de variation  $\dot{\theta}_l$  du paramètre est supposée bien définie dans le temps et satisfait

$$\dot{\theta}_l(t) \in [\underline{\nu}_l, \bar{\nu}_l], \quad \forall t \geq 0, \quad (4.3)$$

où les bornes inférieures et supérieures de  $\dot{\theta}_l$  sont connues.

La première hypothèse signifie que le vecteur paramétrique  $\theta$  évolue dans un hyper-rectangle  $\mathcal{P}_{\Theta}$  de  $\mathbf{R}^r$  avec les sommets en

$$\mathcal{G}_v := \{\Theta_1, \dots, \Theta_L\}, \quad (4.4)$$

où  $L = 2^r$ . De façon similaire, (4.3) définit un hyper-rectangle  $\mathcal{P}_{\Theta_d}$  de  $\mathbf{R}^r$  avec les sommets en

$$\mathcal{G}_d := \{\Theta_{d_1}, \dots, \Theta_{d_L}\}. \quad (4.5)$$

Le problème de commande  $H_\infty$  que l'on se propose de résoudre consiste à

**calculer** un compensateur LPV d'ordre plein,  $K(s, \theta, \dot{\theta})$ , avec la représentation d'état

$$\begin{aligned} \dot{x}_K &= A_K(\theta, \dot{\theta})x_K + B_K(\theta, \dot{\theta})y, \quad A_K \in \mathbf{R}^{n \times n}, \\ u &= C_K(\theta, \dot{\theta})x_K + D_K(\theta, \dot{\theta})y, \end{aligned} \quad (4.6)$$

**tel que** la stabilité interne et une borne supérieure  $\gamma$  du gain  $\mathcal{L}_2$ -induit, du signal de perturbation  $w$  au signal d'erreur  $z$ , soient assurées pour le système en boucle fermée (4.1) et (4.6), pour toutes les trajectoires admissibles  $(\theta, \dot{\theta})$  et pour des conditions initiales nulles sur les états. C'est-à-dire, tel que

$$\int_0^T z^T z d\tau \leq \gamma^2 \int_0^T w^T w d\tau, \quad \forall T \geq 0, \quad \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \mathcal{P}_{\Theta} \times \mathcal{P}_{\Theta_d}.$$

Une caractérisation de tels compensateurs est présentée dans le théorème ci-après. Le lecteur se rapportera aux travaux [5, 30, 32, 79, 105] pour les détails. Il est supposé que  $D_{12}$  et  $D_{21}$  sont, respectivement, de rangs pleins en colonne et en ligne. Cette hypothèse est sans restriction et simplifie énormément la présentation. Aussi, les dépendances en  $\theta$  et  $\dot{\theta}$  ont été supprimées pour une meilleure lisibilité.

**Théorème 4.1** *Considérons le système LPV (4.1) dont la trajectoire du paramètre est soumise aux contraintes (4.2) et (4.3) et supposons que les variables  $\theta$  et  $\dot{\theta}$  soient indépendantes. Il existe un compensateur interpolé de retour dynamique de sortie (4.6), qui impose la stabilité interne et une borne supérieure  $\gamma$  sur le gain  $\mathcal{L}_2$  du système bouclé (4.1) et (4.6), s'il existe des matrices symétriques  $X(\theta)$  et  $Y(\theta)$  dépendantes du paramètre telles que, pour toutes les paires  $(\theta, \dot{\theta})$  dans  $\mathcal{P}_\Theta \times \mathcal{P}_{\Theta_d}$ , les contraintes LMI de dimension infinie suivantes soient satisfaites :*

$$\mathcal{L}_1(\theta, \dot{\theta}, \gamma) := \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{N}_X & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{cc|c} \dot{X} + XA + A^T X & XB_1 & C_1^T \\ B_1^T X & -\gamma I & D_{11}^T \\ \hline C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{N}_X & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] < 0, \quad (4.7)$$

$$\mathcal{L}_2(\theta, \dot{\theta}, \gamma) := \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{N}_Y & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{cc|c} -\dot{Y} + YA^T + AY & YC_1^T & B_1 \\ C_1 Y & -\gamma I & D_{11} \\ \hline B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{N}_Y & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] < 0, \quad (4.8)$$

$$\mathcal{L}_3(\theta) := \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0, \quad (4.9)$$

où  $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$ ,  $\dot{Y} = \frac{dY}{dt}$ , et  $\mathcal{N}_X$ ,  $\mathcal{N}_Y$  désignent les noyaux de  $[C_2 \ D_{21}]$  et  $[B_2^T \ D_{12}^T]$ , respectivement. Dans ce cas, un compensateur interpolé de la forme (4.6) est obtenu par le schéma séquentiel suivant :

– calculer une solution  $D_K$  pour

$$\sigma_{\max}(D_{11} + D_{12}D_K D_{21}) < \gamma, \quad (4.10)$$

et définir  $D_{cl} := D_{11} + D_{12}D_K D_{21}$  ;

– calculer  $\hat{B}_K$  et  $\hat{C}_K$ , les solutions des équations matricielles linéaires

$$\hat{B}_K^T = \hat{\Delta}_B^{-1} \left\{ C_2 - [D_{21} \ 0] \begin{bmatrix} -\gamma I & D_{cl}^T \\ D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1^T X \\ C_1 + D_{12}D_K C_2 \end{bmatrix} \right\}, \quad (4.11)$$

$$\hat{C}_K = \hat{\Delta}_C^{-1} \left\{ B_2^T - [D_{12}^T \ 0] \begin{bmatrix} -\gamma I & D_{cl} \\ D_{cl}^T & -\gamma I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_1 Y \\ (B_1 + B_2 D_K D_{21})^T \end{bmatrix} \right\}, \quad (4.12)$$

où

$$\hat{\Delta}_B = -D_{21} (\gamma I - \gamma^{-1} D_{cl}^T D_{cl})^{-1} D_{21}^T,$$

$$\hat{\Delta}_C = -D_{12}^T (\gamma I - \gamma^{-1} D_{cl} D_{cl}^T)^{-1} D_{12};$$

– calculer

$$\hat{A}_K = -(A + B_2 D_K C_2)^T + [X B_1 + \hat{B}_K D_{21} \quad (C_1 + D_{12} D_K C_2)^T] \begin{bmatrix} -\gamma I & D_{cl}^T \\ D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (B_1 + B_2 D_K D_{21})^T \\ C_1 Y + D_{12} \hat{C}_K \end{bmatrix}; \quad (4.13)$$

– résoudre pour  $N$ ,  $M$ , le problème de factorisation

$$I - XY = NM^T; \quad (4.14)$$

– calculer  $A_K$ ,  $B_K$  et  $C_K$  en utilisant

$$A_K = N^{-1}(X\dot{Y} + N\dot{M}^T + \hat{A}_K - X(A - B_2 D_K C_2)Y - \hat{B}_K C_2 Y - X B_2 \hat{C}_K)M^{-T}, \quad (4.15)$$

$$B_K = N^{-1}(\hat{B}_K - X B_2 D_K), \quad (4.16)$$

$$C_K = (\hat{C}_K - D_K C_2 Y)M^{-T}. \quad (4.17)$$

**Démonstration** : La démonstration est disponible dans les références [5, 19, 79]. ■

Les conditions (4.7)-(4.9) sont suffisantes pour l'existence d'un compensateur stabilisant de la forme (4.6). Ces conditions deviennent aussi nécessaires dans le cas particulier où le correcteur LPV est construit par (4.10)-(4.17). Ceci caractérise la stabilité quadratique en boucle fermée par le choix d'une fonction de LYAPUNOV dépendante du paramètre de la forme :

$$V(x_{cl}, \theta) := x_{cl}^T P(\theta) x_{cl}, \quad (4.18)$$

où

$$x_{cl} := \begin{bmatrix} x \\ x_K \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P(\theta) := \begin{bmatrix} X(\theta) & I \\ N^T(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Y(\theta) \\ 0 & M^T(\theta) \end{bmatrix}^{-1}. \quad (4.19)$$

Ainsi, le théorème est constructif dans le sens où  $X(\theta)$ ,  $Y(\theta)$ ,  $M(\theta)$  et  $N(\theta)$  déterminent une matrice  $P(\theta)$  définie positive unique.

Considérons la notation simple

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, \gamma) := \text{diag}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, -\mathcal{L}_3) < 0 \quad (4.20)$$

pour représenter les contraintes LMI en (4.7), (4.8) et (4.9). Dorénavant, pour des raisons évidentes, le problème d'optimisation convexe qui consiste à minimiser  $\gamma$  soumis à cette contrainte sera appelé "problème de synthèse", tandis que l'étape de construction du correcteur LPV, qui correspond à la solution des Équations (4.10)-(4.17), sera désignée "étape de séquençement".

Notons que le correcteur (4.6) a des matrices d'espace d'état dépendantes du paramètre  $\theta$  et de sa dérivée  $\dot{\theta}$ , donc sa mise en œuvre exige que ces grandeurs soient mesurées en temps réel. Cette dépendance générale permet d'aboutir à des compensateurs moins conservatifs mais représente souvent une exigence supplémentaire indésirable. En pratique, la dérivée du paramètre, soit n'est pas mesurable, soit est difficile à estimer en temps réel. À l'heure actuelle, il n'y a pas d'approche directe capable de supprimer la dépendance en

$\dot{\theta}$ , sans une augmentation de la charge calculatoire et/ou une certaine perte de la généralité du Théorème 4.1. Néanmoins, dans [102], il est suggéré une méthode permettant d'éliminer cette dépendance pour certains cas particuliers sans aucune perte de performance, mais qui implique la solution d'une équation différentielle supplémentaire.

Quelques schémas simples pour enlever la dépendance en  $\dot{\theta}$  dans l'étape de séquençement, notamment dans (4.15), mais en la préservant dans la synthèse, ont été discutées en [12, 5]. Il est suggéré de fixer les valeurs d'une ou de l'autre variable de LYAPUNOV,  $X$  ou  $Y$ , voire, des deux à la fois. Ces opérations mènent à des correcteurs plus ou moins conservatifs mais, dans certains exemples, la perte de performance est presque négligeable. Le correcteur le plus conservatif est obtenu quand  $X$  et  $Y$  sont toutes les deux considérées fixes et indépendantes du paramètre<sup>5</sup>.

L'hypothèse restrictive de variation lente du paramètre ( $\dot{\theta} \approx 0$ ) élimine la dépendance en la dérivée du paramètre aussi bien dans la synthèse que dans le séquençement du correcteur. Toutefois, une telle hypothèse ignore les variations possibles du paramètre et n'offre de garanties théoriques ni de stabilité ni de performance pour le système bouclé, face à des variations dans le temps. Cependant, la performance  $\gamma$  obtenue par une synthèse réaliste ( $\dot{\theta}$  limitée et différente de zéro) est, dans certains cas, assez proche de celle vérifiée sous l'hypothèse de variation lente [5].

Finalement, le cas où seulement quelques paramètres  $\theta_i$  sont soumis à des contraintes sur leurs dérivées, est aisément traité, sans conservatisme additionnel, en éliminant les paramètres libres des fonctions matricielles  $X(\cdot)$  et  $Y(\cdot)$ .

### 4.3 Synthèse $H_\infty$ de compensateurs interpolés

Dans cette section, nous développons une procédure systématique et numériquement viable, pour sélectionner les dépendances fonctionnelles des matrices  $X$  et  $Y$  en  $\theta$ . Un schéma intuitif d'interpolation des ces variables de LYAPUNOV, associé à des sous-intervalles de l'espace paramétrique, est utilisé afin d'aboutir à un compromis raisonnable entre l'effort calculatoire dans la mise en œuvre des compensateurs caractérisés par le Théorème 4.1 et le niveau  $\gamma$  de performance  $H_\infty$  instationnaire global.

#### 4.3.1 Interpolation de variables de LYAPUNOV

Partons de l'idée qu'un maillage d'interpolation  $\mathcal{G}_I$  partage le domaine  $\mathcal{P}_\Theta$  en plusieurs régions. Ces régions, considérées ici comme des sous-intervalles d'interpolation, sont aussi des hyper-rectangles notés  $\mathcal{P}_{\Theta_\ell}$ ,  $\ell \in I_\ell = \{1, 2, \dots, n_\ell\}$ . Donc,  $\mathcal{G}_I := \{\mathcal{G}_{v_\ell}\}$  définit l'ensemble des points aux sommets des intervalles  $\mathcal{P}_{\Theta_\ell}$ .

Soient  $\epsilon > 0$  réel et arbitrairement petit,  $\ell_1$  et  $\ell_2 \in I_\ell$ , avec  $\ell_1 \neq \ell_2$ , et une trajectoire quelconque,  $\theta(t)$ , qui croise la frontière de deux régions adjacentes  $\mathcal{P}_{\Theta_{\ell_1}}$  et  $\mathcal{P}_{\Theta_{\ell_2}}$ . L'hyper-

5. Dans ce cas,  $\dot{\theta}$  est considérée non contrainte.

surface de transition  $\Lambda_{\ell_1\ell_2}$  entre ces deux régions, est définie comme l'ensemble des points de cette frontière :

$$\begin{aligned} \Lambda_{\ell_1\ell_2} &:= \mathcal{P}_{\Theta_{\ell_1}} \cap \mathcal{P}_{\Theta_{\ell_2}} \\ &= \{ \theta(t) \in \mathcal{P}_{\Theta} \mid \exists t = t_i > 0 \text{ pour lequel } \theta(t_i) \in \mathcal{P}_{\Theta_{\ell_1}}, \theta(t_i) \in \mathcal{P}_{\Theta_{\ell_2}} \\ &\quad \text{et au moins une des deux conditions est forcément valable :} \\ &\quad (i) \theta(t_i - \epsilon) \in \mathcal{P}_{\Theta_{\ell_1}} \text{ et } \theta(t_i - \epsilon) \notin \mathcal{P}_{\Theta_{\ell_2}}; \\ &\quad (ii) \theta(t_i + \epsilon) \in \mathcal{P}_{\Theta_{\ell_2}} \text{ et } \theta(t_i + \epsilon) \notin \mathcal{P}_{\Theta_{\ell_1}} \}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Les deux situations énoncées dans la définition ci-dessus sont valables, par exemple, pour une trajectoire rectiligne qui passe d'un intervalle à l'autre et donc qui contient un seul point de  $\Lambda_{\ell_1\ell_2}$ .

Considérons, pour simplifier, un problème avec une seule variable d'interpolation,  $r = 1$ , et une succession de sous-intervalles normalisés de  $\mathcal{P}_{\Theta}$ ,  $\mathcal{P}_{\Theta_{\ell}}$ , telle que  $\theta(t) \in [0,1]$ ,  $\forall t \geq 0$ . Supposons que les paires  $(X_i, Y_i)_{\ell}$ ,  $\ell \in I_{\ell}$ ,  $i = 1, 2$ , satisfont des contraintes de performance  $H_\infty$  nominales aux sommets des sous-intervalles,  $\theta \in \mathcal{G}_I$ . C'est-à-dire que le gain  $\mathcal{L}_2$ -induit  $\gamma$  en boucle fermée a une borne finie quand on considère le paramètre fixe ou des variations suffisamment lentes ( $\dot{\theta} \approx 0$ ) autour des points  $\theta = \Theta_1 = 0$  et  $\theta = \Theta_2 = 1$ . Si  $f(\cdot)$  est une fonction différentiable quelconque, avec  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ , et  $X_t^s$  et  $Y_t^s$  sont des matrices arbitraires, alors les matrices dépendantes du paramètre  $X(\theta)$  et  $Y(\theta)$  définies par

$$\begin{aligned} X(\theta) &:= [1 - f(\theta)]X_1 + f(\theta)X_2 + [1 - f(\theta)]f(\theta)X_t^s \\ Y(\theta) &:= [1 - f(\theta)]Y_1 + f(\theta)Y_2 + [1 - f(\theta)]f(\theta)Y_t^s \end{aligned} \quad (4.22)$$

sont des fonctions d'interpolation admissibles pour chaque intervalle.

Comme nous allons montrer dans le Paragraphe 4.3.2, une première qualité de ces fonctions est le fait qu'on peut facilement imposer, sur leurs coefficients matriciels, des conditions qui garantissent la continuité du compensateur interpolé associé, dans les frontières  $\Lambda_{\ell_1\ell_2}$  des sous-intervalles d'interpolation. Les commutations (instantanées) indésirables de correcteurs interpolés voisins, qui peuvent déstabiliser le système, sont ainsi évitées. Ceci permet de traiter les systèmes dont les paramètres ont une plage de variation très large, tout en gardant une borne supérieure  $\gamma$  stricte.

Il s'avère qu'il n'est pas toujours possible de dériver de telles conditions. Par exemple, les techniques LPV qui utilisent des fonctions de LYAPUNOV fixes, notamment celles qui considèrent les modèles de type LFT ou polytopiques, n'offrent pas cette possibilité. Pour ces méthodes, l'espace entier d'évolution du paramètre doit être traité comme un seul intervalle, ce qui peut conduire à de faibles garanties de performance.

Une autre propriété importante des variables de LYAPUNOV  $X(\theta)$  et  $Y(\theta)$  en (4.22) est le fait qu'elles satisfont déjà des exigences de performance  $H_\infty$  pour les points extrêmes des intervalles. Donc, les seuls besoins sont de garantir une limite tolérable pour la perte de performance quand les points à l'intérieur de ces intervalles sont considérés et de prendre en compte également le caractère non stationnaire du paramètre. Ce deuxième besoin apparaît lorsqu'on considère un taux de variation du paramètre différent de zéro aussi

bien aux points extrêmes qu'à l'intérieur des intervalles. La fonction  $f(\cdot)$  et les variables supplémentaires  $X_t^s$  et  $Y_t^s$  offrent des degrés de liberté pour atteindre ces objectifs. Nous verrons plus loin que ces matrices sont calculées au cours de la synthèse tandis que  $f(\cdot)$  doit être déterminée a priori. Les fonctions suivantes sont des candidates possibles pour celle-ci :

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= \beta\theta^2 + (1 - \beta)\theta, & \beta \in \mathbf{R}, \\ f_2(\theta) &= \frac{1}{1 + \exp[-\beta(2\theta - 1)]}, & \beta \gg 1, \\ f_3(\theta) &= \sin[\theta(1 + 4\beta)\pi/2], & \beta = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.23)$$

La liberté offerte par  $X_t^s$  et  $Y_t^s$  est proportionnelle à la dimension  $n$  du système. Pour les systèmes de dimension 1 ou 2, le concepteur peut examiner plusieurs possibilités pour  $f(\cdot)$  et choisir la plus convenable. Toutefois, pour les problèmes de commande réalistes, où les systèmes pondérés sont généralement de dimension plus grande ou égale à 3, la liberté apportée par  $X_t^s$  et  $Y_t^s$  est beaucoup plus importante que celle entraînée par la fonction  $f(\cdot)$ , et il est suffisant de choisir  $f(\theta) := [f_1(\theta)]_{\beta=0} = \theta$ .

Avec ce choix de  $f(\cdot)$ , une extension directe et assez générale de (4.22) pour le cas bi-dimensionnel,  $\theta := [\theta_1 \quad \theta_2]^T$ , s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} X(\theta) &:= (1 - \theta_2) [(1 - \theta_1)X_1 + \theta_1 X_2] &+ \theta_2 [(1 - \theta_1)X_3 + \theta_1 X_4] \\ &+ (1 - \theta_1)\theta_1 [(1 - \theta_2)X_1^s + \theta_2 X_2^s] &+ (1 - \theta_2)\theta_2 [(1 - \theta_1)X_3^s + \theta_1 X_4^s] \\ &+ (1 - \theta_2)\theta_2(1 - \theta_1)\theta_1 X_t^s, \\ Y(\theta) &:= (1 - \theta_2) [(1 - \theta_1)Y_1 + \theta_1 Y_2] &+ \theta_2 [(1 - \theta_1)Y_3 + \theta_1 Y_4] \\ &+ (1 - \theta_1)\theta_1 [(1 - \theta_2)Y_1^s + \theta_2 Y_2^s] &+ (1 - \theta_2)\theta_2 [(1 - \theta_1)Y_3^s + \theta_1 Y_4^s] \\ &+ (1 - \theta_2)\theta_2(1 - \theta_1)\theta_1 Y_t^s, \end{aligned} \quad (4.24)$$

où :

- $\theta_1(t)$  et  $\theta_2(t) \in [0, 1], \forall t \geq 0$  ;
- $(X_i, Y_i), i = 1, \dots, 4$ , sont les variables de LYAPUNOV (à interpoler) pour les sommets  $\Theta_i \in \{[0, 0]^T, [1, 0]^T, [0, 1]^T, [1, 1]^T\}$  ;
- $(X_i^s, Y_i^s), i = 1, \dots, 4$ , sont les variables supplémentaires pour les interpolations dans les directions de  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , aux frontières<sup>6</sup> des sous-intervalles ;
- $(X_t^s, Y_t^s)$  est un degré de liberté supplémentaire pour l'interpolation bi-dimensionnelle, à l'intérieur des sous-intervalles.

La Figure 4.1 illustre les régions d'influence de ces variables pour un sous-intervalle donné. Mise à part la variable scalaire de performance  $\gamma$ , le nombre total de variables (matricielles) dans le problème est toujours égal à  $2(3^r)$  pour un sous-intervalle d'interpolation. Bien que la complexité augmente considérablement, des extensions pour le cas multi-dimensionnels ( $r > 2$ ) sont possibles. Néanmoins, beaucoup de problèmes réalistes peuvent être paramétrés par un nombre réduit de variables d'interpolation. C'est en particulier le cas pour les problèmes de l'aéronautique.

---

6. Ces variables offrent aussi quelques libertés à l'intérieur du domaine. Cependant, leurs influences diminuent à mesure qu'on se rapproche du bord opposé.

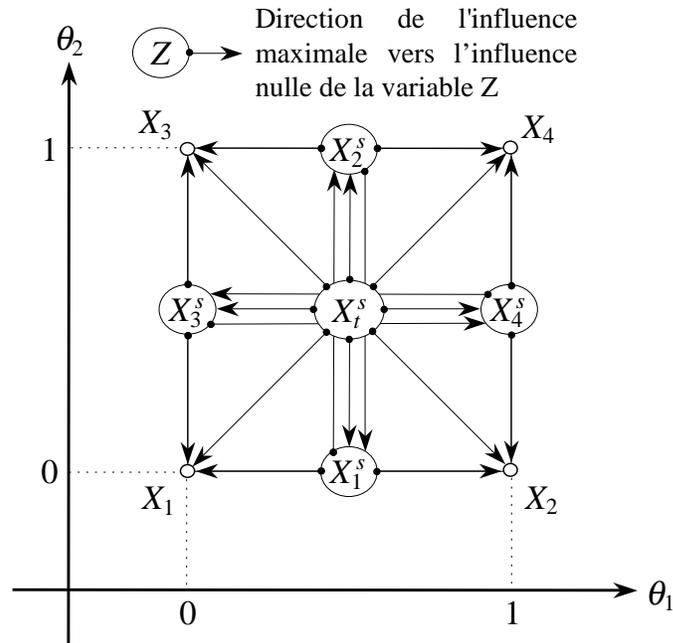


FIG. 4.1 – Régions d'influence des variables d'interpolation supplémentaires

### 4.3.2 Continuité du compensateur interpolé

On peut vérifier, à travers les Équations (4.14), (4.15), (4.18) et (4.19), qu'un compensateur caractérisé par le Théorème 4.1 dépend de la dérivée du paramètre par l'intermédiaire de la dérivée des variables de LYAPUNOV. Nous avons, cependant, un intérêt pratique d'éliminer cette dépendance. Lorsque le compensateur LPV dépend uniquement de  $\theta$ , on dit qu'il est "valable" en pratique [5]. Cette situation est souhaitable pour deux raisons. Premièrement, comme nous l'avons souligné plus haut, la mise en œuvre de tels correcteurs est plus simple. Deuxièmement, on peut réduire le conservatisme en utilisant des fonctions de LYAPUNOV continues par morceaux, dont les dérivées sont discontinues, sans détruire la continuité possible des correcteurs LPV.

Si l'on adopte une procédure, parmi celles signalées dans la section précédente, pour rendre le compensateur interpolé  $K$  indépendant de  $\theta$ , il devient une fonction exclusive de  $\gamma$  et de  $\theta$ ; ceci par l'intermédiaire des matrices d'état du système  $(A, B_1, B_2, \dots)$  et des variables de LYAPUNOV ( $X$  et/ou  $Y$ ). Or, nous avons supposé que  $\theta$  est une fonction continue du temps et que les matrices d'état sont elles-mêmes des fonctions continues du paramètre et nous allons considérer une performance garantie  $\gamma$  constante pour tout le domaine paramétrique<sup>7</sup>. Afin d'assurer la continuité du compensateur interpolé,

$$\begin{aligned} \dot{x}_K &= A_K(\theta)x_K + B_K(\theta)y, \\ u &= C_K(\theta)x_K + D_K(\theta)y, \end{aligned} \quad (4.25)$$

7. Il se peut que le critère de performance soit choisi dépendant du paramètre, comme il est suggéré dans [51]. Une fonction d'interpolation pour  $\gamma$  serait analogue à celles de  $X$  et  $Y$ . Toutefois, la liberté supplémentaire apportée ne serait pas considérable dans notre contexte.

il ne nous reste donc qu'à imposer des contraintes de continuité aux variables de LYAPUNOV dépendantes du paramètre.

Les fonctions d'interpolation  $X(\theta)$  et  $Y(\theta)$  en (4.22) et (4.24) sont déjà continues pour chaque partition séparée du domaine paramétrique. Alors, la seule contrainte à satisfaire pour qu'elles soient continues pour tout  $\theta$  appartenant à  $\mathcal{P}_\Theta$  est leur unicité dans les interfaces  $\Lambda_{\ell_1\ell_2}$  de deux régions d'interpolation adjacentes,  $\mathcal{P}_{\Theta_{\ell_1}}$  et  $\mathcal{P}_{\Theta_{\ell_2}}$ ,  $\forall \ell_1, \ell_2 \in I_\ell$ ,  $\ell_1 \neq \ell_2$ . Les variables de LYAPUNOV  $(X_i, Y_i, X_i^s, Y_i^s)$ , qui interviennent à ces frontières, doivent donc être les mêmes pour les fonctions d'interpolation de l'un ou l'autre côté des interfaces, tandis que les variables  $(X_t^s, Y_t^s)$ , intervenant uniquement à l'intérieur des régions, demeurent toujours libres. Par ailleurs, les contraintes imposées sur les bords des régions jouent favorablement pour le temps de calcul. La diminution de la quantité de variables dans le problème d'optimisation convexe devient considérable à mesure qu'un nombre important de sous-intervalles est requis. Lorsque l'hypothèse de variation lente du paramètre est valable, on peut utiliser  $X$  et  $Y$  dépendantes du paramètre et ces contraintes s'appliquent également à toutes les deux. Cependant, si l'indépendance de  $K$  par rapport à  $\theta$  est obtenue en fixant une des deux variables,  $X(\theta) = X_0$  ou  $Y(\theta) = Y_0$ , évidemment ces contraintes sont satisfaites, pour celle qui a été choisie constante, à condition que sa valeur soit la même pour tous les intervalles.

Pour illustrer tout ceci d'une manière simple, prenons la fonction (4.22) pour un seul paramètre, avec  $f(\theta) = \theta$  et deux intervalles successives,  $\mathcal{P}_{\Theta_{\ell_1}}$  et  $\mathcal{P}_{\Theta_{\ell_2}}$ . Pour la continuité des variables de LYAPUNOV, les égalités

$$(X_2)_{\ell_1} = (X_1)_{\ell_2} \quad \text{et} \quad (Y_2)_{\ell_1} = (Y_1)_{\ell_2} \quad (4.26)$$

s'imposent en les points extrêmes communs alors qu'en dehors de l'intersection il n'y a pas de contrainte et les variables  $(X_1, Y_1, X_t^s, Y_t^s)_{\ell_1}$  et  $(X_2, Y_2, X_t^s, Y_t^s)_{\ell_2}$  restent libres.

Il convient de remarquer que les conditions en (4.26) n'assurent pas la continuité de la dérivée des variables de LYAPUNOV. Considérons, par exemple, la dérivée de  $X(\theta(t))$  pour les deux intervalles considérés :

$$\left[ \frac{dX(\theta(t))}{dt} \right]_{\ell_1, \ell_2} = \left\{ [X_2 - X_1 + (-2\theta(t) + 1)X_t^s] \frac{d\theta(t)}{dt} \right\}_{\ell_1, \ell_2}, \quad \theta \in [0, 1] \quad \forall t \geq 0. \quad (4.27)$$

Pour que la continuité de  $\dot{X}(\theta)$  soit assurée, il faut que l'égalité

$$\left[ \dot{X}(\theta = 1) \right]_{\ell_1} = \left[ \dot{X}(\theta = 0) \right]_{\ell_2} \quad (4.28)$$

soit satisfaite, ce qui équivaut à

$$\left\{ (X_2 - X_1 - X_t^s) \left[ \frac{d\theta(t)}{dt} \right]_{\theta=1} \right\}_{\ell_1} = \left\{ (X_2 - X_1 + X_t^s) \left[ \frac{d\theta(t)}{dt} \right]_{\theta=0} \right\}_{\ell_2}. \quad (4.29)$$

En prenant en compte les conditions (4.26), il vient

$$(X_t^s)_{\ell_2} = \left[ \dot{\theta}^{-1}(t = 0) \right]_{\ell_2} \left[ (X_2 - X_1 - X_t^s) \dot{\theta}(t = 1) \right]_{\ell_1} + (X_2)_{\ell_1} - (X_2)_{\ell_2}. \quad (4.30)$$

Même si la dérivée  $\dot{\theta}(t)$  est considérée continue dans le temps, c'est-à-dire,  $[\dot{\theta}(1)]_{\ell_1} = [\dot{\theta}(0)]_{\ell_2}$ , la satisfaction de (4.30) est trop contraignante lorsqu'une succession de sous-intervalles est en question. Notons que, dans une telle situation, les variables de LYAPUNOV en les points de  $\mathcal{G}_I$ ,  $(X_i, Y_i)_\ell$ ,  $\ell \in I_\ell$ , et les variables  $(X_t^s, Y_t^s)_{\ell_1}$ , calculées pour le premier intervalle  $\mathcal{P}_{\Theta_{\ell_1}}$ , déterminent tout l'ensemble de variables supplémentaires  $(X_t^s, Y_t^s)_\ell$ ,  $\ell \in I_\ell$ . Le lemme suivant nous montre que, en réalité, la contrainte (4.30) peut être relaxée et que le degré de liberté supplémentaire apporté par  $X_t^s$  et/ou  $Y_t^s$  peut être conservé, tout en maintenant la stabilité et la performance  $\gamma$  du système en boucle fermée.

**Lemme 4.2** *Considérons le système en boucle fermée  $T_{wz}$ , (4.1) et (4.25),*

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cl} &= \mathcal{A}(\theta)x_{cl} + \mathcal{B}(\theta)w \\ z &= \mathcal{C}(\theta)x_{cl} + \mathcal{D}(\theta)w, \end{aligned} \quad (4.31)$$

où les matrices sont continues en  $\theta$ . S'il existe une fonction continûment différentiable par morceaux,  $V(x_{cl}, \theta)$ , où  $x_{cl}$  est régi par (4.31), et des constantes scalaires positives  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  et  $\gamma$ , telles que

- (i) :  $\alpha_1 \|x_{cl}\|_2^2 \leq V(x_{cl}, \theta) \leq \alpha_2 \|x_{cl}\|_2^2$ ,  $\forall w \in \mathcal{L}_2$ ,  $\forall x_{cl} \neq 0$ ,  $\forall \theta \in \mathcal{P}_\Theta$ ,  $V(0, \theta) = 0$ ,
- (ii) :  $\frac{dV(x_{cl}, \theta)}{dt} + z^T z - \gamma^2 w^T w \leq -\alpha_3 \|x_{cl}\|_2^2$ ,  $\forall w \in \mathcal{L}_2$ ,  $\forall x_{cl} \neq 0$ ,  $\forall \theta \in \mathcal{P}_\Theta$  où la dérivée de  $V$  existe,

alors, le point d'équilibre  $x_{cl} = 0$  est globalement asymptotiquement stable pour  $w = 0$  (système autonome), et le système (4.31) a  $\gamma$  comme borne supérieure de la norme  $\mathcal{L}_2$ -induite pour tout  $w \in \mathcal{L}_2$ . En plus, ces conditions sont satisfaites, s'il existe des matrices  $X(\theta)$  et  $Y(\theta)$ , continues  $\forall \theta \in \mathcal{P}_\Theta$  et différentiables  $\forall \theta \in \mathcal{P}_{\Theta_\ell}$ ,  $\forall \ell \in I_\ell$ , qui satisfont, pour chaque sous-région  $\mathcal{P}_{\Theta_\ell}$ , les conditions du Théorème 4.1.

**Démonstration** : Le fait qu'une fonction,  $V(x_{cl}, \theta)$ , continûment différentiable par morceaux, qui satisfait les contraintes (i) et (ii), implique la  $\mathcal{L}_2$ -stabilité, est un résultat standard de la théorie de LYAPUNOV et est trouvé, par exemple, dans les références [45, 74]. Le Théorème 4.1 montre que : étant données  $X(\theta)$  et  $Y(\theta)$  continûment différentiables par morceaux et satisfaisant les conditions (4.7)-(4.9) pour une certaine performance  $\gamma > 0$  (si elles existent), on peut construire une fonction quadratique en  $x_{cl}$ ,  $V(x_{cl}, \theta)$ , qui est définie positive, radialement illimitée et décroissante. En effet, la fonction (4.18), candidate pour fonction de LYAPUNOV, où la variable continue par morceaux  $P(\theta)$  est déterminée par (4.19) et satisfait

$$0 < \alpha_1 I \leq P(\theta) \leq \alpha_2 I, \quad \forall \theta \in \mathcal{P}_\Theta,$$

pour certains  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  positifs, satisfait elle-même les contraintes (i) et (ii) pour un certain  $\alpha_3 > 0$ . ■

En résumé, la stabilité quadratique et la performance  $H_\infty$  du système (4.1), bouclé par un correcteur LPV (4.6) qui est caractérisé par le Théorème 4.1 et qui est une fonction continue de  $\theta$  et de  $\dot{\theta}$ , sont garanties si, et seulement si, il existe une variable de LYAPUNOV  $P(\theta)$ , définie en (4.18) et (4.19), continûment différentiable. En revanche, pour le système

en boucle fermée (4.31) qui dépend seulement de  $\theta$ , les conditions de stabilité quadratique et de performance du Théorème 4.1 ne deviennent que suffisantes, si l'on considère une variable de LYAPUNOV  $P(\theta)$  continûment différentiable par morceaux.

### Remarque

L'ambiguïté qui existe pour les dérivées de  $X$  et de  $Y$  dans les interfaces  $\Lambda_{\ell_1\ell_2}$  de deux régions adjacentes,  $\mathcal{P}_{\Theta_{\ell_1}}$  et  $\mathcal{P}_{\Theta_{\ell_2}}$ , ne pose aucun problème pour la synthèse. Au contraire, elle garantit que les LMI (4.7)-(4.9) du Théorème 4.1 et (ii) du Lemme 4.2 sont satisfaites lorsque  $\theta$  tend vers la frontière par ses deux côtés. En outre, si le correcteur LPV ne dépend pas de  $\dot{\theta}$ , cette ambiguïté n'intervient pas dans le séquençement.

### 4.3.3 Réduction à un problème de dimension finie

La caractérisation dans le Théorème 4.1 implique la solution d'un problème d'optimisation de nature convexe mais de dimension infinie et infiniment contraint. Autrement dit,  $X(\theta)$  et  $Y(\theta)$  évoluent dans un espace de fonctions de dimension infinie et le nombre de LMI en  $\theta$  est aussi infini. C'est le prix à payer pour admettre une dépendance paramétrique générale dans le système (4.1). La dépendance de  $X$  et  $Y$  en  $\theta$  étant fixée comme des fonctions d'interpolation, (4.22) ou (4.24) ou d'autres extensions possibles, les matrices  $(X_i, Y_i, X_i^s, Y_i^s, X_t^s, Y_t^s)_\ell$  jouent le rôle de variables de décision dans le problème, ce qui limite la dimension de l'espace fonctionnel. Donc, il ne nous reste plus qu'à restreindre le nombre de contraintes LMI en (4.7)-(4.9) pour pouvoir traiter numériquement le problème.

Une procédure simple pour convertir ce problème en un ensemble fini d'inégalités consiste à "quadriller" l'espace  $\mathcal{P}_\Theta$  d'évolution du paramètre  $\theta$ . L'ensemble de points défini pour ce maillage est noté  $\mathcal{G}_s$ . Comme la dérivée  $\dot{\theta}$  apparaît linéairement dans les LMI (4.7)-(4.9), il suffit de considérer les points extrêmes de l'ensemble  $\mathcal{P}_{\Theta_d}$  en (4.5),  $\mathcal{G}_d := \{\Theta_{d_1}, \dots, \Theta_{d_L}\}$ , pour toutes les valeurs de  $\theta$  en  $\mathcal{G}_s$ . Cela veut dire que tous les points en  $\mathcal{G}_s \times \mathcal{G}_d$  doivent être pris en compte "simultanément" pour la synthèse du compensateur interpolé. La Figure 4.2 illustre ces maillages pour le cas de dimension 2 ( $r = 2$ ) où le paramètre  $\theta_1$  est borné en vitesse par  $\underline{\nu}_1$  et  $\bar{\nu}_1$ , et  $\theta_2$  varie très lentement ( $\dot{\theta}_2 \approx 0$ ).

Il faut préciser qu'une telle procédure de synthèse ne satisfait les contraintes que pour les points en  $\mathcal{G}_s \times \mathcal{P}_{\Theta_d}$ <sup>8</sup>. L'intérêt est donc d'augmenter le plus possible le nombre de points en  $\mathcal{G}_s$ . Le coût du calcul en ce qui concerne la synthèse est d'autant plus élevé que la densité du maillage  $\mathcal{G}_s$  est importante, ce qui empêche de considérer un nombre de points suffisamment grand dans cet ensemble. Ainsi, il devient absolument nécessaire de vérifier les performances et les contraintes LMI pour un maillage en  $\theta$  beaucoup plus fin, noté  $\mathcal{G}_f \times \mathcal{G}_d$ , en utilisant une démarche plus simple et beaucoup moins chère en terme d'effort calculatoire. La Figure 4.3 illustre ces maillages sur le plan  $\mathbf{R}^2$ , pour le

---

8. Une fois que le compensateur LPV associé aux variables de LYAPUNOV calculées sur ces points est robuste, il tolère une certaine variation du modèle du système et, en pratique, les contraintes sont satisfaites aussi pour leurs voisinages.

domaine paramétrique partagé en 4 sous-intervalles ( $\ell = 4$ ). Bien que  $\mathcal{G}_s$  et  $\mathcal{G}_f$  ne soient illustrés que pour  $\mathcal{P}_{\Theta_4}$ , ils sont considérés pour le domaine paramétrique entier. Puisque les contraintes LMI sont déjà satisfaites pour les points de synthèse dans  $\mathcal{G}_s \times \mathcal{G}_d$ , il n'est pas nécessaire de les inclure dans  $\mathcal{G}_f \times \mathcal{G}_d$ , donc on considère

$$\mathcal{G}_s \cap \mathcal{G}_f = \phi.$$

Un résumé de tous les maillages considérés se trouve dans le Tableau 4.1.

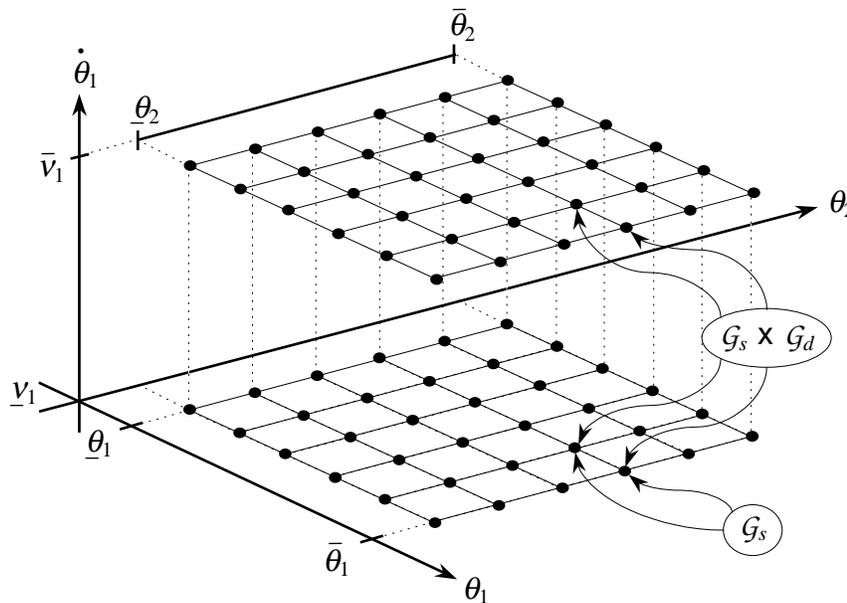


FIG. 4.2 – Exemple de maillage de  $\mathcal{P}_\Theta$

TAB. 4.1 – Résumé des maillages

Ensemble	Description
$\mathcal{G}_v$	Sommets du domaine paramétrique $\mathcal{P}_\Theta$ , selon (4.4)
$\mathcal{G}_d$	Sommets du domaine de la dérivée du paramètre $\mathcal{P}_{\Theta_d}$ , selon (4.5)
$\mathcal{G}_I$	Sommets des sous-intervalles d'interpolation $\mathcal{P}_{\Theta_\ell}$ , $\mathcal{G}_{v_\ell}$
$\mathcal{G}_s$	Points de synthèse
$\mathcal{G}_f$	Points de vérification

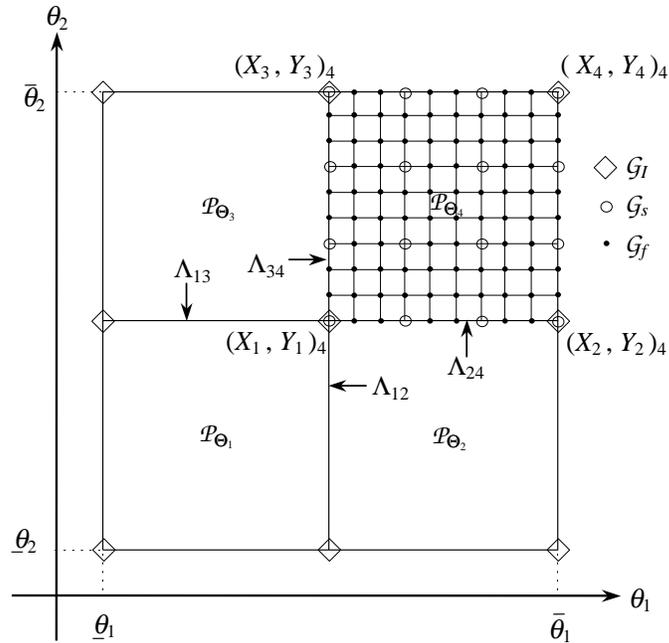


FIG. 4.3 – Maillages d'interpolation, de synthèse et de vérification

### 4.3.4 Algorithme pour la synthèse de compensateurs interpolés

#### Préliminaires

Nous partons du principe que le maillage de vérification  $\mathcal{G}_f$  est choisi suffisamment fin pour assurer la performance instationnaire  $\gamma$  pour l'espace continu de variation paramétrique  $\mathcal{P}_{\Theta}$ . Plus précisément, on admet que, si un correcteur LPV (4.6), caractérisé par le Théorème 4.1, assure la performance  $\gamma \forall (\theta, \hat{\theta}) \in \{\mathcal{G}_f \times \mathcal{G}_d\}$ , elle sera assurée aussi pour un maillage arbitrairement dense et, à la limite,  $\forall (\theta, \hat{\theta}) \in \{\mathcal{P}_{\Theta} \times \mathcal{P}_{\Theta_d}\}$ <sup>9</sup>. Puisque l'on présuppose que l'étape de vérification (post-synthèse) peut être réalisée grâce à une procédure simple en calcul, le fait de choisir  $\mathcal{G}_f$  suffisamment dense ne pose aucun problème<sup>10</sup>.

Nous prenons en compte aussi des informations préalables au sujet de  $\gamma$ , notamment sur ses bornes (inférieure et supérieure), qui servent à nous guider dans la détermination d'un niveau raisonnable de performance finale. En réalité,  $\gamma$  a une borne inférieure définie par

$$\underline{\gamma} := \max(\gamma_j), \quad j = 1, \dots, n_f, \quad (4.32)$$

où  $n_f$  est le nombre de points dans  $\mathcal{G}_f$  et la valeur optimale  $\gamma_j$  est la performance  $H_\infty$  LTI en boucle fermée pour le paramètre figé au point  $j$  de  $\mathcal{G}_f$ . L'ensemble  $\{\gamma_j\}$  peut être

9. Ou, de façon équivalente,  $\in \{\mathcal{P}_{\Theta} \times \mathcal{G}_d\}$ .

10. Évidemment, cela n'était pas le cas si l'on considérait un maillage  $\mathcal{G}_f$  excessivement dense, ce qui serait inutile en pratique.

obtenu en résolvant, pour chaque valeur “isolée” de  $\theta$  en  $\mathcal{G}_f$  et pour  $\dot{\theta} = 0$ , un problème de commande  $H_\infty$  standard :

$$- \text{ minimiser } \gamma \text{ soumis à la contrainte (4.20), } \mathcal{L}(\theta, \dot{\theta} = 0, \gamma) < 0. \quad (4.33)$$

Si, d’une part, la borne inférieure (4.32) est intrinsèque au système, d’autre part, l’établissement d’une limite supérieure raisonnable  $\bar{\gamma}$ , fait l’objet de quelques heuristiques et d’une analyse judicieuse du compromis existant entre la moindre perte de performance et la complexité du correcteur LPV. En effet, il se peut que, pour atteindre un niveau de performance à paramètre variable très proche de  $\underline{\gamma}$ ,  $\mathcal{P}_\Theta$  doit être partagé en un nombre considérable de sous-intervalles d’interpolation. À la limite, un maillage d’interpolation égal à  $\mathcal{G}_f$  peut être exigé si l’on choisit un  $\bar{\gamma}$  trop petit, ce qui serait prohibitif en terme de temps de calcul. La valeur optimale  $\gamma_{fix}$  ( $> \underline{\gamma}$ ), obtenue par une synthèse LPV qui considère des variables de LYAPUNOV indépendantes du paramètre, est une bonne référence pour choisir la borne  $\bar{\gamma}$ . L’algorithme suivant décrit une telle procédure de synthèse :

---

**Algorithme 4.1** Synthèse LPV générale par des variables de LYAPUNOV indépendantes du paramètre

---

**Étape 1 :** Définir le maillage initial de synthèse comme  $\mathcal{G}_s := \mathcal{G}_v$  et un maillage de vérification  $\mathcal{G}_f$  suffisamment dense.

**Étape 2 :** Définir  $\gamma_{fix}$  comme la solution du problème d’optimisation convexe :

- Minimiser  $\gamma$  soumis à la contrainte  $\mathcal{L}(\theta, \gamma) < 0, \forall \theta \in \mathcal{G}_s$ , en considérant  $X$  et  $Y$  indépendants de  $\theta$ .

**Étape 3 :** Vérifier la contrainte  $\mathcal{L}(\theta, \gamma = \gamma_{fix}) < 0, \forall \theta \in \mathcal{G}_f$  et pour  $X$  et  $Y$  obtenus à la solution de l’étape 2 :

- Vérifier la condition  $\bar{\lambda}(\theta, \gamma_{fix}) < -\epsilon, 0 < \epsilon \ll 1, \forall \theta \in \mathcal{G}_f$ , où

$$\bar{\lambda}(\theta, \gamma_{fix}) = \max_{\theta} \{ \lambda [ \mathcal{L}(\theta, \gamma_{fix}) ] \} \quad (4.34)$$

est la valeur propre maximale de  $\mathcal{L}$  et  $\epsilon$  est un seuil prédéterminé.

**Étape 4 :** Si la vérification de l’Étape 3 échoue, augmenter la densité de  $\mathcal{G}_s$  et retourner à l’Étape 2. Sinon, confirmer  $\gamma_{fix}$  comme la solution du problème de l’Étape 2.

---

Si la différence entre  $\gamma_{fix}$  et  $\underline{\gamma}$  est petite, la complexité induite par des variables de LYAPUNOV dépendantes du paramètre n’est pas compensée par des améliorations considérables en performance/conservatisme et il suffit de considérer le correcteur synthétisé par l’algorithme ci-dessus. Au contraire, si cette différence est importante, on peut concevoir un compensateur LPV beaucoup plus performant en considérant  $X$  et  $Y$  variables et en mettant en place la procédure d’interpolation décrite ci-après. Dès que  $\gamma_{fix} \geq 1.4\underline{\gamma}$ , on peut considérer comme raisonnable une borne supérieure de  $\gamma$  comprise dans l’intervalle

$$1.2\underline{\gamma} \leq \bar{\gamma} \leq (\underline{\gamma} + \gamma_{fix})/2. \quad (4.35)$$

### Construction itérative des variables de LYAPUNOV

Supposons maintenant que les bornes  $\underline{\gamma}$  et  $\overline{\gamma}$  aient été déterminées et qu'il existe une solution admissible pour le problème de synthèse initial. C'est-à-dire, on admet qu'il existe une performance  $\gamma$ ,  $\underline{\gamma} < \gamma < \overline{\gamma}$ , et des bases de fonctions assez riches pour  $X(\theta), Y(\theta)$ , telles que la contrainte (4.20) soit satisfaite  $\forall (\theta, \dot{\theta}) \in \{\mathcal{P}_\Theta \times \mathcal{G}_d\}$ . La question que se pose est comment construire des telles bases.

Soit  $\delta > 0$  un coefficient de relaxation de  $\gamma$  par rapport à  $\underline{\gamma}$  tel que la performance relaxée  $\gamma_r$ , à atteindre, ne dépasse pas la borne supérieure  $\overline{\gamma}$ :

$$\gamma_r := (1 + \delta)\underline{\gamma} < \overline{\gamma}. \quad (4.36)$$

Alors, la procédure itérative, décrite d'une façon concise par le diagramme de la Figure 4.4 et détaillée dans l'Algorithme 4.2, aboutit à une telle solution du problème de synthèse du correcteur  $H_\infty$  interpolé. Elle construit, d'une manière systématique et intéressante, des bases de fonctions pour les variables de LYAPUNOV interpolées dépendantes du paramètre,  $X(\theta)$  et  $Y(\theta)$ , tout en préservant la moindre perte de performance possible  $\delta$ .

Le processus itératif utilise essentiellement quatre boucles qui ont des objectifs bien définis :

- A -** La densité du maillage d'interpolation  $\mathcal{G}_I$  est réglée par la limite supérieure de  $\gamma$ . La quantité  $n_\ell$  de sous-régions de la partition de l'espace paramétrique et, par conséquent, la liberté pour atteindre la solution sont augmentées si la performance relaxée  $\gamma_r$  en (4.36), déterminée par  $\delta$  dans l'Étape 2, dépasse sa valeur maximale admissible. On cherche, pour simplifier le correcteur LPV, le maillage  $\mathcal{G}_I$  le moins dense possible tel qu'une valeur  $\gamma < \overline{\gamma}$  soit faisable. Ainsi,  $\mathcal{G}_I$  est initialisé avec un nombre de points proche au nombre de sommets en  $\mathcal{G}_v$ .
- B -** Le but dans l'Étape 3 est de calculer les variables de LYAPUNOV pour les points de  $\mathcal{G}_I$  et de les rapprocher au détriment d'un critère  $\gamma$  plus grand. Ce préjudice sera compensé par une interpolation plus facile dans l'Étape 4. Il s'agit donc d'une synthèse LPV qui considère seulement les modèles aux sommets des sous-intervalles. Des variables de LYAPUNOV différentes sont considérées pour chaque modèle et la dérivée du paramètre n'est pas prise en compte. La contrainte

$$\gamma < (1 + \delta - \delta_d)\underline{\gamma}, \quad (4.37)$$

est imposée, où  $\delta_d$  est une petite parcelle du coefficient de relaxation  $\delta$  réservée pour atteindre la performance souhaitée  $\gamma_r$  lorsque des variables de LYAPUNOV interpolées et des bornes de  $\dot{\theta}$  sont considérées en les points de  $\mathcal{G}_I$  dans la synthèse LPV de l'Étape 4. Notons que, pour les valeurs de  $\theta$  appartenant à  $\mathcal{G}_I$ , les variables interpolées  $X(\theta)$  et  $Y(\theta)$  valent  $(X_i, Y_i)_\ell$  calculées dans l'Étape 3. Donc, si  $\delta_d$  est considéré nul dans l'Étape 3, il est fort probable que la condition  $\gamma < \gamma_r$  ne soit pas faisable pour tous les points  $\theta \in \mathcal{G}_I$  quand des bornes de  $\dot{\theta}$  différentes de zéro sont prises en compte en ces points dans l'Étape 4. C'est-à-dire, les variables supplémentaires  $(X_i^s, Y_i^s, X_t^s, Y_t^s)_\ell$  n'interviennent que pour les points  $\theta \notin \mathcal{G}_I$ , et n'offrent pas de liberté pour atteindre la performance instationnaire  $\gamma_r$  en les sommets des sous-intervalles.

Cette boucle consiste à trouver le plus petit  $\delta_d$  tel que  $\gamma < \gamma_r$  soit faisable dans le problème de synthèse de l'Étape 4. Le coefficient  $\delta_d$  est donc initialisé proche de zéro et augmenté d'une grandeur  $\Delta\delta_d$  jusqu'à ce qu'une proportion  $\rho_d < 1$  de  $\delta$ , définie par le concepteur, soit atteinte.

- C** - La densité du maillage de synthèse  $\mathcal{G}_s$  est augmentée si la solution admissible obtenue dans l'Étape 4 ne satisfait pas les contraintes LMI pour le maillage fin  $\mathcal{G}_f$ . L'ensemble  $\mathcal{G}_s$  est initialisé petit afin de minimiser l'effort calculatoire dans la synthèse.
- D** - L'objectif est de trouver le niveau de relaxation de performance  $\delta$ , le plus petit possible, pour lequel le problème LPV de l'Étape 4 est faisable. Le coefficient  $\delta$  est initialisé petit et, une fois que  $\gamma < \gamma_r$  a été trouvé admissible (Étapes 4 et 5) et que  $\delta_d$  a atteint sa valeur maximale (Étape 6), il est incrémenté de  $\Delta\delta$  jusqu'à ce que le problème de synthèse LPV de l'Étape 4 soit faisable pour un maillage  $\mathcal{G}_I$  suffisamment dense. Si au moins une solution admissible pour ce problème a été trouvée pour  $\mathcal{G}_I$  et  $\mathcal{G}_s$  suffisamment denses (Étape 7), une procédure du type bisection pour  $\delta$  est introduite, après l'Étape 8, entre les deux chemins de la Boucle D. En effet, il se peut que l'incrément  $\Delta\delta$  ait été choisi trop grand et qu'il existe un  $\delta$  plus petit pour lequel le problème LPV est également faisable. Notons que  $\Delta\delta$  est constante jusqu'à la première fois que l'Étape 8 est exécutée. Le début de l'algorithme de bisection entre les deux branches de la Boucle D est ainsi signalé en fixant  $flag_\delta = 1$ . Cet algorithme convergera forcément vers la solution

$$\{\min \gamma := (1 + \min \delta)\underline{\gamma}, X(\theta), Y(\theta)\},$$

s'il en existe une.

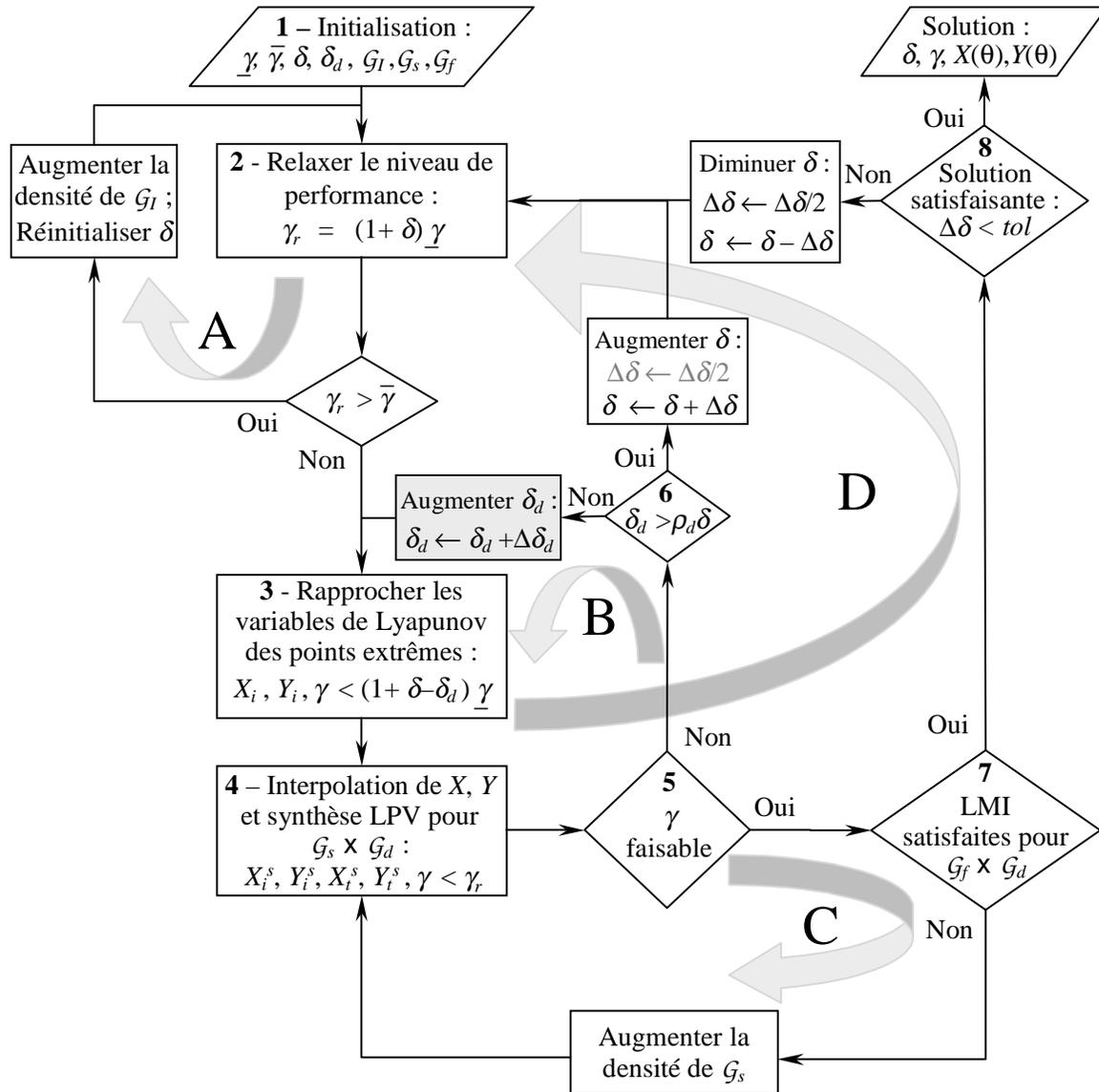


FIG. 4.4 – Algorithme pour la synthèse de compensateurs  $H_\infty$  via interpolation de variables de LYAPUNOV

---

**Algorithme 4.2** Synthèse de compensateurs  $H_\infty$  par interpolation de variables de LYAPUNOV

---

**Étape 1** [INITIALISATION]

- Calculer  $\underline{\gamma}$ , définie par (4.32), et choisir une borne supérieure  $\bar{\gamma}$  raisonnable, basée sur la valeur  $\gamma_{fix}$  obtenue par l’Algorithme 4.1.
- Choisir la valeur initiale de  $\delta$  et de son incrément comme une proportion  $\rho < 1$  de la différence relative entre les bornes  $\bar{\gamma}$  et  $\underline{\gamma}$ :

$$\delta \leftarrow \Delta\delta \leftarrow \rho \left( \frac{\bar{\gamma} - \underline{\gamma}}{\underline{\gamma}} \right). \quad (4.38)$$

- Choisir la valeur initiale de  $\delta_d \ll 1$ , son incrément  $\Delta\delta_d$  et sa limite supérieure  $\rho_d\delta$ , avec  $\rho_d < 1$ .
- Choisir le maillage de vérification  $\mathcal{G}_f$  suffisamment fin et égal à celui utilisé dans l’Algorithme 4.1 et définir le maillage initial d’interpolation  $\mathcal{G}_I := \mathcal{G}_v$  (un seul intervalle  $n_\ell = 1$ ) et le maillage initial de synthèse  $\mathcal{G}_s$  peu dense.
- Attribuer la valeur zéro à la variable  $flag_\delta$ .

**Étape 2** [RELAXATION DU NIVEAU DE PERFORMANCE]

Fixer la valeur du critère de performance relaxé,  $\gamma_r = (1 + \delta)\underline{\gamma}$ ;

SI  $\gamma_r > \bar{\gamma}$ , augmenter la densité de  $\mathcal{G}_I$  (augmenter le nombre  $n_\ell$  de sous-intervalles), réinitialiser  $\delta$  comme en (4.38) et retourner à l’Étape 2.

**Étape 3** [RAPPROCHEMENT DES VARIABLES DE LYAPUNOV]

Résoudre le problème d’optimisation convexe suivant :

$$\min_{\gamma, (X_i, Y_i)_\ell} \{ \sigma : (X_i, Y_i)_\ell, i = 1, 2, \dots, L, \forall \ell \in I_\ell, \text{ est associé à tout } \theta \in \mathcal{G}_I \}$$

soumis aux contraintes de continuité (Paragraphe 4.3.2) et aux contraintes LMI

- $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta} = 0, \gamma) < 0, \quad \forall \theta \in \mathcal{G}_I,$
- $\begin{bmatrix} \sigma I & X_i^T - X_{i-1}^T \\ X_i - X_{i-1} & \sigma I \end{bmatrix} > 0, i = 2, 3, \dots, L,$  qui équivaut à  $\|X_i - X_{i-1}\| < \sigma,$
- $\begin{bmatrix} \sigma I & Y_i^T - Y_{i-1}^T \\ Y_i - Y_{i-1} & \sigma I \end{bmatrix} > 0, i = 2, 3, \dots, L,$  qui équivaut à  $\|Y_i - Y_{i-1}\| < \sigma,$
- $\gamma < (1 + \delta - \delta_d)\underline{\gamma}.$

(Suite à la page suivante)

---

(Suite de l'Algorithme 4.2)

**Étape 4** [FONCTIONS D'INTERPOLATION ET SYNTHÈSE LPV]

Pour chaque sous-intervalle  $\mathcal{P}_{\Theta_\ell}$ , définir les dépendances paramétrique  $[X(\theta), Y(\theta)]_\ell$  comme des fonctions d'interpolation des solutions  $(X_i, Y_i)_\ell$  du problème de l'Étape 3, avec les variables matricielles supplémentaires  $(X_i^s, Y_i^s, X_t^s, Y_t^s)_\ell$ .

Résoudre le problème d'optimisation convexe suivant, séparément pour chaque région  $\mathcal{P}_{\Theta_\ell}$  :

$$\min_{[X(\theta), Y(\theta)]_\ell} \{\gamma : \ell \in I_\ell\}$$

soumis aux contraintes de continuité (Paragraphe 4.3.2) et aux contraintes LMI

- $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, \gamma) < 0, \quad \forall(\theta, \dot{\theta}) \in (\mathcal{G}_s \times \mathcal{G}_d) \cap \mathcal{P}_{\Theta_\ell},$
- $\gamma < (1 + \epsilon)\gamma_r, \quad \text{où } 0 < \epsilon \ll 1 \text{ est un seuil fixé par le concepteur.}$

**Étape 5** [FAISABILITÉ DE  $\gamma$ ]

SI le problème d'optimisation de l'Étape 4 n'est pas faisable pour un  $\ell \in I_\ell$  quelconque, aller à l'Étape 6; SINON, aller à l'Étape 7.

**Étape 6** [VÉRIFICATION DE  $\delta_d$ ]

SI  $\delta_d > \rho_d \delta$  et  $flag_\delta = 0$ , augmenter  $\delta, \delta \leftarrow \delta + \Delta\delta$ , et aller à l'Étape 2;

SINON, SI  $\delta_d > \rho_d \delta$  et  $flag_\delta = 1$ , attribuer  $\Delta\delta \leftarrow \Delta\delta/2$ , augmenter  $\delta, \delta \leftarrow \delta + \Delta\delta$ , et aller à l'Étape 2;

SINON, augmenter  $\delta_d, \delta_d \leftarrow \delta_d + \Delta\delta_d$ , et aller à l'Étape 3.

**Étape 7** [VÉRIFICATION DES CONTRAINTES LMI]

Vérifier la contrainte  $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, \gamma) < 0, \forall(\theta, \dot{\theta}) \in \{\mathcal{G}_f \times \mathcal{G}_d\}$  et pour  $\gamma, X(\theta)$  et  $Y(\theta)$  obtenus à la solution du problème de l'Étape 4 :

- Vérifier la condition  $\bar{\lambda}(\theta, \dot{\theta}, \gamma) < -\mu, 0 < \mu \ll 1, \forall(\theta, \dot{\theta}) \in \{\mathcal{G}_f \times \mathcal{G}_d\}$ , où

$$\bar{\lambda}(\theta, \dot{\theta}, \gamma) = \max_{(\theta, \dot{\theta})} \{\lambda[\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, \gamma)]\} \quad (4.39)$$

est la valeur propre maximale de  $\mathcal{L}$ , et  $\mu$  est un seuil donné.

- SI la vérification échoue, augmenter la densité de  $\mathcal{G}_s$  et aller à l'Étape 4;
- SINON, aller à l'Étape 8.

**Étape 8** [VÉRIFICATION DE LA SOLUTION]

Vérifier s'il existe un  $\delta$  plus petit tel que le problème de synthèse LPV de l'Étape 4 est faisable :

- SI  $\Delta\delta$  est plus petit qu'une tolérance spécifiée par le concepteur, définir  $\gamma$  et  $[X(\theta), Y(\theta)]_\ell$  comme une solution du problème de synthèse du correcteur  $H_\infty$  interpolé;
- SINON, fixer  $flag_\delta = 1$ , attribuer  $\Delta \leftarrow \Delta/2$ , diminuer  $\delta, \delta \leftarrow \delta - \Delta\delta$ , et aller à l'Étape 2.

## Commentaires

1. Cette démarche entraîne un certain degré de complexité, qui est une conséquence naturelle de la généralité des systèmes considérés et du niveau strict de performance  $H_\infty$  que nous souhaitons atteindre. Aussi, cet algorithme ne pourrait pas être établi sans laisser une marge de liberté pour l'intervention du concepteur. Celui-ci peut utiliser ses connaissances du système<sup>11</sup> pour améliorer l'efficacité de l'algorithme proposé, dont la vitesse de convergence dépend du choix initial (Étape 1) et de la stratégie adoptée pour augmenter les densités des maillages  $\mathcal{G}_I$  et  $\mathcal{G}_s$ . Les suggestions suivantes aboutissent, en général, à de bonnes performances de l'algorithme :
  - Choisir  $\bar{\gamma}$  dans l'intervalle défini en (4.35). Comme  $\bar{\gamma}$  règle la densité de  $\mathcal{G}_I$ , sa valeur peut être changée au cours des itérations en fonction de la complexité admissible dans la mise en œuvre du correcteur LPV.
  - Définir  $\rho := 0.2$  dans l'expression (4.38), ce qui limite à 5 le nombre d'itérations de la Boucle D, si une solution  $\gamma < \bar{\gamma}$  n'est pas faisable pour une densité donnée de  $\mathcal{G}_I$ .
  - Choisir  $\rho_d$  petit (proche de 0.2) et définir  $\delta_d$  initial, ainsi que  $\Delta\delta_d$ , 4 ou 5 fois plus petits que  $\rho_d\delta$ .
  - Lors de l'exécution de la Boucle A, définir un maillage  $\mathcal{G}_I$  avec une densité différenciée, admettant des intervalles d'interpolation pas forcément de même taille, de façon à favoriser les zones où le critère LTI  $\gamma(\theta)$  a un profil plus irrégulier. Ainsi, on peut avoir des intervalles d'interpolation plus petits dans ces régions et plus grands dans les régions où  $\gamma$  varie moins autour d'une valeur moyenne.
  - Une stratégie pour sélectionner de nouveaux points à inclure dans  $\mathcal{G}_s$  (Boucle C), sans augmenter considérablement le temps de calcul de synthèse, consiste à choisir jusqu'à environ cinq points correspondant à des maxima locaux de la fonction  $\bar{\lambda}(\theta, \hat{\theta}, \gamma_{l_{pv}})$  en (4.39). En effet, rien n'exige que les points de  $\mathcal{G}_s$  soient distribués de façon homogène dans l'espace des paramètres. Notons aussi que, si nous cherchons des correcteurs qui assurent la stabilité et la performance locales, il suffit de vérifier une condition plus faible qui conduit à des maillages de synthèse moins denses et donc plus favorables d'un point de vue calculatoire. Cela consiste à calculer le compensateur en utilisant (4.10)-(4.17) et à vérifier la norme  $H_\infty$  de la fonction de transfert  $T_{wz}$  en boucle fermée, au lieu de vérifier les contraintes LMI signalées dans l'Étape 7. Précisément, on propose, dans ce cas, de vérifier la condition

$$\bar{\gamma}_{cl}(\theta) < \gamma_{l_{pv}}, \quad \forall \theta \in \mathcal{G}_f,$$

où

$$\bar{\gamma}_{cl}(\theta) := \max_{\theta} \|T_{wz}(s, \theta)\|_\infty. \quad (4.40)$$

---

11. Ces informations peuvent être : la validité de l'hypothèse de variation lente du paramètre, l'hétérogénéité des régions de l'espace paramétrique en ce qui concerne les difficultés d'interpolation, le profil de la fonction  $\gamma(\theta)$  obtenue en résolvant le problème LTI (4.33) pour tout  $\theta$  dans  $\mathcal{G}_f$ , etc.

2. Dans la pratique, des contraintes physiques sur les trajectoires du paramètre existent et sont particulièrement favorables quand il est possible de traiter un domaine  $\mathcal{P}_\Theta$  (entier) comme un seul intervalle d'interpolation. La considération d'une seule partition de  $\mathcal{P}_\Theta$  est valable si la performance  $\gamma$  est maintenue dans un niveau acceptable pour toutes les trajectoires possibles dans ce domaine, en utilisant un seul ensemble de variables  $(X_i, Y_i, X_i^s, Y_i^s, X_t^s, Y_t^s)$ . Étant donnée une valeur  $\gamma_r$  raisonnable, supposons que le problème de synthèse LPV de l'Algorithme 4.2 ait une solution admissible  $\gamma < \gamma_r$  pour  $\mathcal{G}_I = \mathcal{G}_v$ . Alors, outre le fait que les conditions du Théorème 4.1 deviennent nécessaires et suffisantes dans notre contexte, l'influence des variables supplémentaires  $(X_i^s, Y_i^s, X_t^s, Y_t^s)$  tend à être maximale au centre du domaine paramétrique et nulle à ses sommets, ce qui est compatible avec les contraintes physiques du système. Considérons, par exemple, le domaine de variation d'un paramètre physique normalisé  $\theta := [\theta_1 \ \theta_2]^T$  de la Figure 4.1, et une trajectoire continue  $\theta(t)$  réaliste qui contient au moins un point appartenant à l'un des bords de ce domaine. Alors quand  $\theta(t)$  s'en approche, la vitesse de la composante orthogonale au bord tend vers zéro, sous peine d'avoir un "dépassement"<sup>12</sup>. Ceci invaliderait l'hypothèse initiale sur les bornes de  $\theta$ . Les contraintes physiques suivantes sont donc valables quand  $\theta$  tend vers les bords de son domaine :

- (a)  $\dot{\theta}_1 \rightarrow 0$  et  $\dot{\theta}_2 \rightarrow 0$ , quand  $\theta(t)$  s'approche des sommets ;
- (b)  $\dot{\theta}_1 \rightarrow 0$ , quand  $\theta(t)$  s'approche des droites  $\theta_1 = 0$  et  $\theta_1 = 1$  ;
- (c)  $\dot{\theta}_2 \rightarrow 0$ , quand  $\theta(t)$  s'approche des droites  $\theta_2 = 0$  et  $\theta_2 = 1$ .

La prise en compte de la première contrainte rend le problème de synthèse LPV faisable pour une tolérance  $\delta_d$  théoriquement nulle<sup>13</sup>, alors que la considération des deux dernières permettent d'aboutir à des coefficients de relaxation  $\delta$  plus petits. Enfin, si les relations de dépendance des bornes de  $\dot{\theta}$  en  $\theta$  sont connues pour le domaine entier, elles peuvent être prises en compte, dans le contexte du Théorème 4.1, pour améliorer la performance garantie et diminuer le conservatisme.

3. La charge calculatoire augmente avec l'ordre du système et le nombre de points de  $\mathcal{G}_s$ <sup>14</sup>. En effet, le nombre de variables de décision et le nombre de contraintes LMI dans le problème d'optimisation sont fortement affectés par ces deux facteurs. C'est pour cette raison que nous proposons de séparer le problème de synthèse en deux étapes, notamment les Étapes 3 et 4. Dans cette même idée de rendre possible le traitement numérique du problème, les Étapes 3 et 4 peuvent aussi être exécutées séparément pour chaque intervalle  $\mathcal{P}_{\Theta_i}$ , sous les conditions de continuité du correcteur interpolé discutées auparavant. Ainsi, les contraintes de nature calculatoire imposées par les codes de programmation convexe et par des saturations éventuelles de mémoire sont surmontées en détriment du temps de calcul. Lorsque l'ordre du système n'est pas trop important et/ou de faibles densités du maillage de synthèse sont requises dans l'Étape 7, on peut : court-circuiter la phase de rapprochement des variables de LYAPUNOV associées aux points de  $\mathcal{G}_I$  (Étape 3) ainsi que l'Étape

12. Cela n'est pas toujours exact si le paramètre considéré n'est pas le vrai paramètre physique.

13. La boucle B de l'algorithme de la Figure 4.4 n'est pas actionnée, ce qui résulte en un  $\delta_d$  très proche de zéro.

14. Notons aussi que la dimension de  $\theta$  est un des facteurs qui déterminent la taille de l'ensemble de synthèse  $\mathcal{G}_s \times \mathcal{G}_d$ .

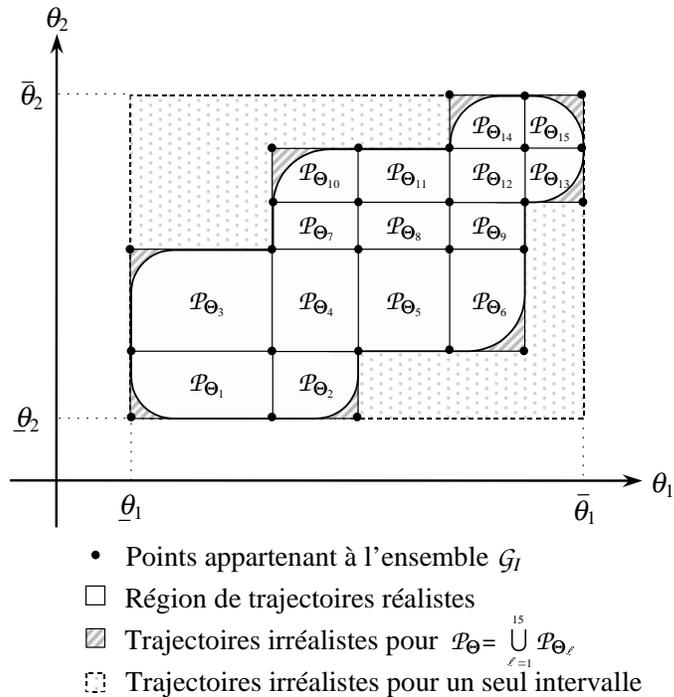


FIG. 4.5 – Régions de trajectoires irréalistes pour un domaine paramétrique non-rectangulaire

6, et ignorer l'étape d'ajustement de  $\delta_d$  (fond gris dans la Figure 4.4) concernant le bouclage B. Dans ces situations, les variables  $(X_i, Y_i)$  sont considérées libres dans l'Étape 4 et l'effet de rapprochement se produit automatiquement.

4. Un certain conservatisme, dû à la prise en compte de trajectoires irréalistes, est toujours introduit lorsque les paramètres évoluent dans un domaine irrégulier et que l'on considère, pour la synthèse, une enveloppe convexe de cet ensemble. La méthode d'interpolation proposée a l'avantage de s'adapter aux domaines irréguliers, une fois qu'on peut diminuer le conservatisme en les partageant convenablement en plusieurs sous-intervalles. Dans l'exemple de la Figure 4.5 on constate que la région de "trajectoires irréalistes" diminue considérablement si le domaine n'est pas traité comme un seul intervalle d'interpolation. On doit signaler que, dans cet exemple, les seuls points irréalistes qui contribuent à l'augmentation du conservatisme sont les points extrêmes appartenant aussi à l'ensemble  $\mathcal{G}_I$ . En fait, on peut ignorer les points irréalistes restants lors de la définition du maillage de synthèse  $\mathcal{G}_s$ .

Nous avons établi un algorithme qui construit, de façon itérative, une fonction d'interpolation de compensateurs  $H_\infty$ , tout en maintenant un niveau très strict de performance, pour un large domaine de fonctionnement du système. Cette fonction a des propriétés intéressantes pour l'application de méthodes d'interpolation conventionnelles plus simples. Elle donne des informations sur un placement approprié de l'ensemble des points de fonctionnement et offre la possibilité de calculer la famille correspondante des compensateurs LTI sous-optimaux, en fixant la valeur du paramètre en ces points. Ces correcteurs sont

adaptés pour le séquençement classique. Leur conception est fondée sur une philosophie qui permet d'atteindre un niveau de performance raisonnable aux points intermédiaires d'un intervalle d'interpolation en dégradant légèrement le degré d'optimalité en ses points extrêmes. Ainsi, l'utilisateur peut choisir une méthode d'interpolation moins coûteuse en calcul, qui convient le mieux pour une application donnée, mais qui entraîne une certaine perte de performance par rapport à celle prédéterminée par la synthèse. L'option d'une mise en œuvre directe de cette fonction est plus complexe, mais garantit le niveau de performance établi par l'algorithme.

## 4.4 Exemples

Dans cette section, nous illustrons l'utilisation de l'Algorithme 4.2. Le problème de commande du missile décrit dans le Paragraphe 3.4.2 est reconsidéré dans ce but. La structure de commande est donc celle représentée à la Figure 3.7, où le modèle du missile  $G(s, \theta)$  est présenté dans l'Annexe A et le filtre  $W(s, \theta)$  est décrit par (3.88).

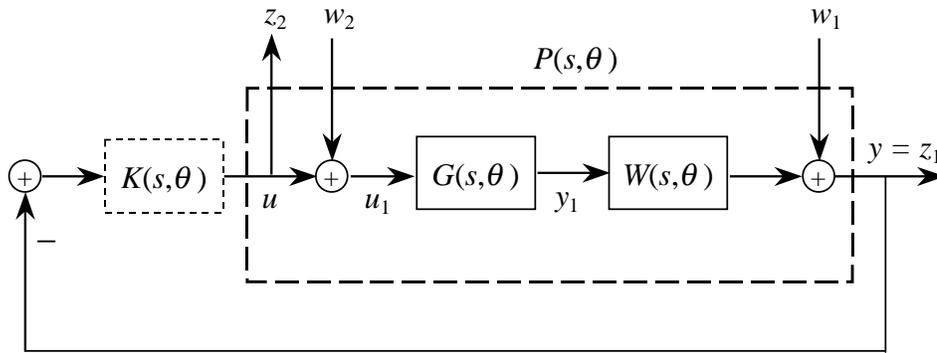
Au Paragraphe 3.4.2, l'approche de modelage de valeurs singulières  $H_\infty$  a été utilisée pour la conception de correcteurs LTI robustes. Des solutions numériques optimales ont été obtenues par factorisations coprimées normalisées qui impliquent la solution d'équations de RICCATI et mènent à des correcteurs de structure estimation/commande (voir [101, p. 477] ou [100, p. 315]). Maintenant, l'objectif est de synthétiser des compensateurs  $H_\infty$  par interpolation de variables de LYAPUNOV en utilisant également le modelage de valeurs singulières. Néanmoins, pour pouvoir traiter ce problème dans le contexte du Théorème 4.1, nous l'interprétons comme un problème  $H_\infty$  standard qui correspond à minimiser la norme  $H_\infty$  du transfert  $T_{wz}$  de la forme standard illustrée à la Figure 4.6 (voir [101, p. 488] ou [100, p. 327] pour les détails), où  $w := [w_1^T \ w_2^T]^T$ ,  $z := [z_1^T \ z_2^T]^T$ ,  $u := \delta_c$  et  $y_1 := [\eta \ q]^T$ . Le problème  $H_\infty$  consiste donc à calculer un correcteur  $K(s, \theta)$  tel que la norme  $\mathcal{L}_2$ -induite,  $\gamma > 0$ , du transfert

$$T_{wz}(s, \theta) = \begin{bmatrix} S(s, \theta) & S(s, \theta)P(s, \theta) \\ K(s, \theta)S(s, \theta) & K(s, \theta)S(s, \theta)P(s, \theta) \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

soit, pour tout  $\theta \in \mathcal{P}_\Theta$ , plus petite qu'une valeur  $\gamma_r$  jugée raisonnable. Le transfert  $S(s, \theta) = [I + P(s, \theta)K(s, \theta)]^{-1}$  est la fonction de sensibilité habituelle. Comme auparavant, le correcteur  $K$  est d'ordre 6 et l'autopilote  $C := KW$  est d'ordre 8.

Pour faciliter la compréhension globale de l'algorithme proposé et pour mieux illustrer ses étapes principales, nous considérons quelques hypothèses simplificatrices :

- le paramètre  $M$  est constant et égal à 3 ;
- $\theta := |\alpha|$  et  $\theta \in \mathcal{P}_\Theta := [0, 30]$  ;
- les coefficients de  $W(s, \theta)$ , listés dans le Tableau 3.2 pour trois valeurs de  $\theta = |\alpha|$ , sont interpolés linéairement en ce paramètre ;
- la fonction d'interpolation des variables de LYAPUNOV est choisie comme en (4.22) avec  $f(\theta) = \theta$  ;

FIG. 4.6 – *Forme standard du problème de modelage de valeurs singulières  $H_\infty$* 

- le taux de variation du paramètre est considéré suffisamment lent pour être négligé, c'est-à-dire,  $\dot{\theta} \approx 0$  et  $\mathcal{G}_d = \{\phi\}$ .

L'algorithme est initialisé comme suit :

- en se basant sur les valeurs calculées  $\underline{\gamma} = 3.69$  (définie par (4.32)) et  $\gamma_{fix} = 6.05$  (via l'Algorithme 4.1), la borne supérieure de  $\gamma$  est choisie comme  $\bar{\gamma} = 1.25\underline{\gamma} = 4.61$  ;
- $\delta_d = \rho_d = 0$  ;
- $\rho = 0.2$ , ce qui conduit, selon (4.38) et les valeurs de  $\bar{\gamma}$  et  $\underline{\gamma}$  ci-dessus, aux valeurs initiales  $\delta = \Delta\delta = 0.05$  ;
- le maillage de vérification  $\mathcal{G}_f$  est composé de 61 points repartis de manière homogène dans le domaine  $\mathcal{P}_\Theta$  ;
- $\mathcal{G}_s = \mathcal{G}_I = \mathcal{G}_v := \{0, 30\}$  et le critère d'augmentation du maillage de synthèse  $\mathcal{G}_s$  consiste à choisir jusqu'à cinq points correspondant à des maxima locaux de la fonction  $\bar{\lambda}(\theta, \dot{\theta}, \gamma_{tpv})$  en (4.39) ;
- puisque les pondérations fréquentielles ont été réglées pour le modèle linéaire du missile, on utilise pour  $G$  le modèle linéarisé  $G_0$  (A.11) paramétré en  $\alpha$ .

Le Tableau 4.2 montre les résultats associés à la séquence d'itérations de l'algorithme pour ces conditions initiales. Les chiffres entre parenthèses dans la colonne relative à l'étape 4 indiquent les valeurs optimales de  $\gamma$  obtenues pour des synthèses ne tenant pas compte de la restriction  $\gamma < \gamma_r$  et, une fois que cette condition n'est pas satisfaite dans les itérations correspondantes, ils ne sont montrés qu'à titre d'illustration. Étant donné que  $\gamma_r$  n'a pas atteint la valeur maximale établie  $\bar{\gamma} = 4.61$  ( $\delta < 0.25$ ) jusqu'à la convergence de l'algorithme, le maillage d'interpolation  $\mathcal{G}_I$  n'a pas été augmenté et un seul intervalle a été suffisant pour atteindre un niveau de performance  $\gamma$  dans la bande souhaitée. Notons qu'à mesure que  $\delta$  augmente, la grandeur

$$\mathcal{N}_m = \max(\|X_2 - X_1\|, \|Y_2 - Y_1\|) \quad (4.42)$$

diminue, ce qui rend l'interpolation des variables de LYAPUNOV plus facile. Au contraire, la densité du maillage de synthèse  $\mathcal{G}_s$  augmente avec le déroulement de l'algorithme, ce qui implique un coût de calcul de plus en plus élevé. Notons, toutefois, que le nombre total d'itérations aurait pu être beaucoup moins important si ce maillage était initialisé plus

TAB. 4.2 – Données de synthèse pour  $K(s, \theta)$ 

Iter.	Points	$\delta$	$\gamma_r$	$\mathcal{N}_m(4.42)$	$\gamma$	Fais. $\gamma$	LMI	Sol.	$\bar{\gamma}_{cl}$
	en $\mathcal{G}_s$	E2	E2	E3	E4	E5	E7	E8	(4.40)
1	2	0.05	3.87	244.25	3.88	Oui	Échec	–	9.60
2	3	0.05	3.87	244.25	3.87	Oui	Échec	–	311.5
3	5	0.05	3.87	244.25	(27.3)	Non	–	–	–
4	5	0.10	4.05	99.73	(11.8)	Non	–	–	–
5	5	0.15	4.24	12.19	(4.41)	Non	–	–	–
6	5	0.20	4.42	0.389	4.42	Oui	Échec	–	4.25
7	6	0.20	4.42	0.389	4.42	Oui	Succès	Échec	4.19
8	6	0.175	4.33	0.752	4.33	Oui	Échec	–	4.10
9	8	0.175	4.33	0.752	4.33	Oui	Échec	–	4.08
10	10	0.175	4.33	0.752	4.33	Oui	Succès	Échec	4.08
11	10	0.163	4.28	2.193	(4.36)	Non	–	–	–
12	10	0.169	4.31	1.148	(4.34)	Non	–	–	–
13	10	0.172	4.32	0.899	4.32	Oui	Échec	–	4.07
14	13	0.172	4.32	0.899	4.32	Oui	Succès	Échec	4.07
15	13	0.17	4.32	1.05	4.32	Oui	Échec	–	4.08
16	18	0.17	4.32	1.05	4.32	Oui	Succès	Succès	4.08

Ei = Étape i

dense. Un meilleur choix initial serait certainement le maillage  $\mathcal{G}_s$  résultant de l'application de l'Algorithme 4.1 à l'Étape 1, car il contient les points les plus importants pour la synthèse LPV conventionnelle.

Le résultat présenté à la Figure 4.7 corrobore celui obtenu par l'utilisation de l'algorithme proposé (Tableau 4.2). Les tracés de  $\gamma$  et de  $\mathcal{N}_m$  correspondent à l'exécution indépendante des processus d'optimisation des Étapes 3 et 4 :

- Soixante valeurs de  $\delta$  dans l'intervalle  $[0, 0.3]$  sont prises en compte.
- L'ensemble  $\mathcal{G}_s$  obtenu dans la dernière itération du Tableau 4.2 est considéré pour chaque valeur de  $\delta$ . Cet ensemble contient les 18 points les plus représentatifs du domaine paramétrique, de sorte que la performance optimale  $\gamma$  est garantie pour l'intervalle continu  $\theta = |\alpha| \in [0, 30]$ . Ceci a été vérifié par une procédure similaire à celle de l'Étape 7.
- Les optimisations numériques de l'Étape 4 sont menées sans restriction sur  $\gamma$ . Les variables de LYAPUNOV obtenues à l'Étape 3 pour les deux points extrêmes  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, 2$ , et les variables supplémentaires libres  $(X_i^s, Y_i^s)$  sont considérées dans cette phase.

On remarque que pour  $\delta < 0.17$  ( $\gamma_r < 4.32$ ) la liberté offerte par  $(X_i^s, Y_i^s)$  aux points intermédiaires ne suffit pas pour atteindre la performance  $(1+\epsilon)\gamma_r$ ,  $\epsilon \ll 1$ , qui est garantie aux points extrêmes. Par contre, pour  $0.17 \leq \delta$ , ce niveau de performance est assuré sur

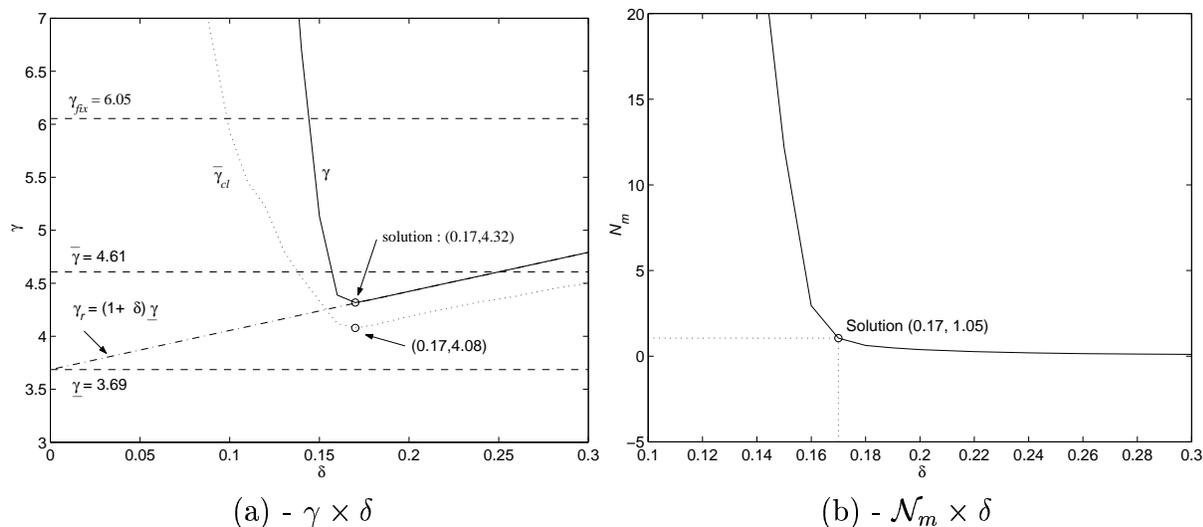


FIG. 4.7 – Résultat obtenu point par point

l'intervalle entier et la courbe de  $\gamma$  suit la droite  $\gamma_r = (1 + \delta)\underline{\gamma}$  avec l'erreur<sup>15</sup>  $\epsilon\gamma_r$ . La performance relaxée  $\gamma_r$ , imposée par les points extrêmes qui sont pris en compte dans  $\mathcal{G}_s$ , joue donc le rôle de borne inférieure pour la valeur optimale  $\gamma$ . Enfin, la solution  $\gamma = 4.32$ , qui correspond à la plus petite valeur optimale satisfaisant  $\gamma < (1 + \epsilon)\gamma_r$ , se trouve autour du point de jonction des courbes  $\gamma(\delta)$  et  $\gamma_r(\delta)$ . Ce point est indiqué à la Figure 4.7 et correspond également au point de convergence de l'algorithme (16<sup>ème</sup> itération) dont l'obtention implique beaucoup moins de calcul. Notons que cette solution est plus proche de la borne inférieure globale  $\underline{\gamma}$  que de la valeur  $\gamma_{fix}$  obtenue en utilisant des variables  $X$  et  $Y$  indépendantes de  $\theta$ . Les différences  $\gamma - \bar{\gamma}_{cl}$ , où  $\bar{\gamma}_{cl}$  est calculé par (4.40), et  $\gamma - \underline{\gamma}$  sont des mesures de conservatisme. Alors, on peut conclure que, à la solution, celui-ci est maintenu dans une limite raisonnable. Un correcteur LPV moins conservatif pouvait être synthétisé en choisissant une borne supérieure  $\bar{\gamma} < 4.32$ , mais cela exigerait au minimum deux intervalles d'interpolation et, par conséquent, des fonction  $X(\theta)$  et  $Y(\theta)$  plus complexes.

Les réponses du système linéaire, bouclé selon le schéma de la Figure 3.7 pour trois valeurs figées du paramètre, sont montrées à la Figure 4.8-(a). Les correcteurs LTI associés sont issus du correcteur LPV construit par interpolation de  $X$  et  $Y$  et ne sont donc pas optimaux. Mais, malgré la relaxation de  $\gamma$ , leur performance temporelle demeure acceptable si l'on compare avec les performances optimales de la Figure 3.9. La Figure 4.8-(b) montre les réponses du système non linéaire bouclé par les correcteurs LPV conçus pour  $X$  et  $Y$  fixes ainsi qu'interpolées et pour une lois de séquençement correspondant à une interpolation de structures estimation/commande. Ces structures ont été construites et interpolées de façon similaire à celle illustrée au Paragraphe 3.4.2. Elles considèrent des paramètres de Youla statiques et sont équivalentes aux correcteurs LTI sous-optimaux dont la performance temporelle est montrée à la Figure 4.8-(a). On remarque un gain

15. Cette erreur est imperceptible à l'échelle de la figure.

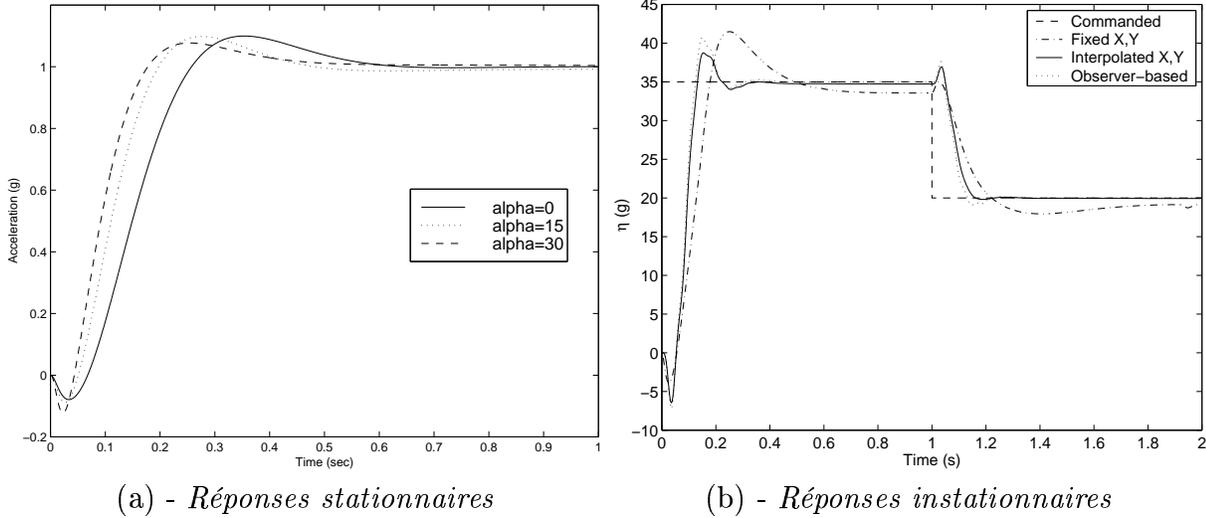


FIG. 4.8 – Performance temporelle du système en boucle fermée

effectif de performance temporelle pour les variables de LYAPUNOV interpolées, lorsque l'on compare les correcteurs LPV entre eux. L'avantage de cette nouvelle méthode est évidente dans ce cas. On vérifie aussi que, pour X et Y interpolées et pour l'interpolation des structures estimation/commande qui en résultent, la perte de performance de la réponse instationnaire par rapport aux réponses localisées est moins importante que celles vérifiées au Chapitre 3 (Figures 3.9 et 3.13). Ces résultats montrent que l'optimalité locale n'est pas essentielle pour aboutir à de bonnes propriétés instationnaires. Finalement, dans certains cas, la faiblesse vérifiée pour l'interpolation de structures estimation/commande, en ce qui concerne la performance temporelle, peut être compensée par la simplicité de sa mise en œuvre.

Dans un deuxième abord, nous considérons des variations simultanées en  $\alpha$  et  $M$  (nombre de Mach). On rajoute donc le paramètre  $M$  à la variable de séquençement,  $\theta = [|\alpha| \quad M]^T$  avec  $\theta \in [0, 30] \times [2, 4]$ , sous l'hypothèse  $\dot{\theta} \approx 0$ . L'objectif est simplement de comparer la performance  $H_\infty$  pour des compensateurs LPV issus de différentes techniques.

Dans l'exemple précédent, nous avons pu utiliser, sans difficulté supplémentaire, un filtre de pondération  $W$  dépendant de  $\alpha$  car la méthode proposée n'exige aucune structure particulière de dépendance paramétrique pour le modèle de synthèse. Bien que les méthodes LPV/LFT permettent de traiter des problèmes similaires, mettre le système pondéré  $P(s, \theta) = W(s, \theta)G(s, \theta)$  sous forme LFT est une tâche délicate qui extrapole l'objectif immédiat de comparer des valeurs de  $\gamma$ . On se limite donc à considérer un filtre fixe  $W(s, \alpha = 15)$  (Tableau 3.2) emprunté à la littérature [93]. Cela permet d'appliquer les techniques LPV/LFT proposées en [65, 6], ainsi que les méthodes des Algorithmes 4.1 et 4.2, sur la même base, c'est-à-dire, en utilisant le modèle LFT  $G_\Delta(s, \theta) = \mathcal{F}_u(G(s), \Delta(\theta))$ , obtenu par les connexions de la Figure A.2 avec le modèle LTI  $G'(s)$  en (A.6). Notons que le modèle LFT  $G_\Delta(s, \theta)$  est, d'un point de vue entrée-sortie, équivalent au modèle

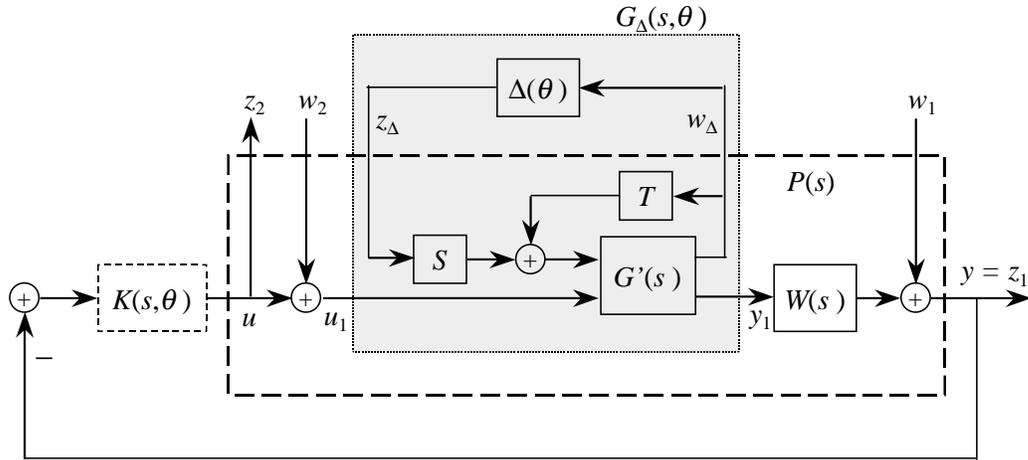


FIG. 4.9 – Configuration pour la synthèse LPV/LFT

quasi-LPV  $G(s, \theta)$  (A.1)<sup>16</sup>. Ainsi, la structure de synthèse de la Figure 4.6 est remplacée par celle de la Figure 4.9 quand il s'agit d'une synthèse de type LPV/LFT.

Le Tableau 4.3 montre les valeurs de synthèse ou d'analyse de la borne supérieure du gain  $\mathcal{L}_2$  du transfert  $T_{wz}$  en boucle fermée, vérifiées pour les correcteurs LPV suivants :

- $K_1(s, \theta)$  : conçu via l'Algorithme 4.2, en considérant  $\bar{\gamma} = 1.25\underline{\gamma} = 4.83$  et la fonction d'interpolation des variables de LYAPUNOV (4.24). Cette conception aboutit à quatre sous-intervalles similaires à ceux illustrés à la Figure 4.3, avec le maillage d'interpolation défini par  $\mathcal{G}_I = \{0, 15, 30\} \times \{2, 3, 4\}$ .
- $K_2(s, \theta)$  : correcteur LPV conventionnel ( $X$  et  $Y$  fixes), conçu via l'Algorithme 4.1 sur le domaine entier de variation paramétrique.
- $K_3(s, \theta)$  : correcteur LPV/LFT conçu par les techniques proposées en [65, 6] sur le domaine entier de variation paramétrique.
- $K_4(s, \theta)$  : synthèse LPV de l'Étape 4 de l'Algorithme 4.2 pour la fonction d'interpolation (4.24), avec le maillage d'interpolation  $\mathcal{G}_I = \{0, 15, 30\} \times \{2, 3, 4\}$  et les valeurs à interpoler  $(X_i, Y_i)_\ell$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ,  $\ell = 1, \dots, 4$ , obtenues par des synthèses  $H_\infty$  LTI optimales.
- $K_5(s, \theta)$  : interpolation linéaire des variables de LYAPUNOV  $(X_i, Y_i)_\ell$  ci-dessus.
- $K_6(s, \theta)$  : interpolation linéaire des matrices de réalisation d'état des correcteurs  $H_\infty$  optimaux relatifs aux variables de LYAPUNOV  $(X_i, Y_i)_\ell$  utilisées pour  $K_4(s, \theta)$ .

Les conceptions des correcteurs  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_4$  ont été menées en considérant les mêmes 28 points de synthèse qui définissent un maillage  $\mathcal{G}_s$  suffisamment dense. Les compensateurs  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_5$  et  $K_6$  ont été analysés via (4.39) et/ou (4.40) en 651 points définis pour le maillage  $\mathcal{G}_f$ . Des résultats similaires pour  $K_1$  ont été obtenus via le modèle quasi-LPV  $G(s, \theta)$  (structure de la Figure 4.6) ou LFT  $G_\Delta(s, \theta)$  (structure de la Figure 4.9), ce qui confirme la validation du modèle LFT de l'Annexe A.

16. En fait, il existe une erreur négligeable introduite dans la procédure de mise sous forme LFT. Cette erreur est analysée dans la Section A.4.

TAB. 4.3 – Performance  $H_\infty$  pour différents correcteurs séquencés

Correcteur	Performance garantie ( $\gamma$ )
$H_\infty$ LTI	3.86 <sup>(1)</sup>
$K_1(s, \theta)$	4.73
$K_2(s, \theta)$	8.96
$K_3(s, \theta)$	10.11
$K_4(s, \theta)$	Infaisable
$K_5(s, \theta)$	857.43 <sup>(2)</sup>
$K_6(s, \theta)$	3370.99 <sup>(2)</sup>

Données incluses à titre de comparaison :

<sup>(1)</sup> Borne inférieure ( $\gamma$ ) calculée par (4.32)<sup>(2)</sup>  $\bar{\gamma}_{cl}(\theta)$  calculée par (4.40)

Notons que le correcteur  $K_1$ , fondé sur l'interpolation de correcteurs sous-optimaux convenablement choisis, présente la meilleure performance. Les stratégies utilisées pour la conception des compensateurs  $K_4$  à  $K_6$ , basées sur l'interpolation de correcteurs optimaux, demandent certainement un nombre de sous-intervalles d'interpolation beaucoup plus important pour aboutir à des performances  $\gamma$  similaires à celle de  $K_1$ . Notons que ce raisonnement n'est pas valable pour  $K_2$  et  $K_3$  dont la synthèse conduit à des variables de LYAPUNOV fixes sur chaque intervalle et ne garantit pas la continuité du correcteur pour plus qu'une région d'interpolation. Enfin, une différence importante entre les valeurs de  $\gamma$  pour  $K_5$  et  $K_6$  est vérifiée. Bien que ces correcteurs ont été analysés localement et ne garantissent pas la stabilité instationnaire, cette différence indique que l'évolution de la dynamique du correcteur  $K_5$  est mieux synchronisée avec les changements du système. En d'autres termes, la fonction de séquencement (4.10)-(4.17) qui implique la reconstruction de la dynamique du système et l'interpolation linéaire de  $X$  et  $Y$  s'est montrée plus adaptée sur cet exemple qu'une simple interpolation linéaire de réalisations d'état.

## 4.5 Conclusion

Nous avons proposé une nouvelle méthode de synthèse de correcteurs  $H_\infty$  séquencés. L'idée de relaxer l'optimalité de correcteurs  $H_\infty$  extrêmes pour faciliter la tâche d'interpolation est très générale et peut être utilisée dans des contextes différents. Cette démarche est donc utilisée conjointement avec une technique de commande LPV récemment disponible pour assurer la stabilité et la performance à temps variant sur une plage d'évolution donnée du système. Un avantage de l'approche est qu'elle ne suppose pas une structure particulière du système LPV et, par conséquent, est applicable avec peu de restriction. Aussi, les fonctions de LYAPUNOV sont déterminées par un cheminement naturel qui exploite des informations de synthèses  $H_\infty$  localisées.

En ce qui concerne les variables de LYAPUNOV, l'algorithme proposé construit de manière systématique des bases de fonctions suffisamment riches pour assurer un niveau

de performance raisonnable défini par le concepteur. En plus, étant donné que la technique permet, si nécessaire, le traitement indépendant d'un nombre important de sous-intervalles d'interpolation<sup>17</sup>, elle est numériquement viable pour un domaine paramétrique très large. Toutefois, en pratique, la complexité algorithmique restreint la portée de la méthode à des systèmes paramétrés par un nombre réduit de variables.

---

17. Sous la condition de continuité du correcteur.



## Chapitre 5

# Commande multi-canal mixte $H_2/H_\infty$ de systèmes LPV en temps discret

UNE nouvelle méthode pour la synthèse de compensateurs LPV en temps discret est développée dans ce chapitre. Notons que ce travail a fait l'objet de deux publications [8, 9]. Les systèmes LPV considérés ont une représentation de type LFT par rapport aux paramètres de séquençement. La méthode proposée peut traiter un ensemble de spécifications  $H_2/H_\infty$  qui sont définies sur des transferts différents. Cela n'est pas possible en utilisant les résultats antérieurs, car ils sont restreints essentiellement aux problèmes LPV à un seul objectif. Cette extension, attractive du point de vue pratique, est obtenue, d'une part, grâce à des transformations spécifiques des variables de LYAPUNOV et de *scaling* et, d'autre part, grâce à des transformations appropriées qui linéarisent les contraintes du problème. Le compensateur solution est du type LFT et on montre que sa fonction de séquençement peut être construite comme une fonction matricielle affine ayant les mêmes coordonnées polytopiques que celles du paramètre d'interpolation, ce qui rend facile sa mise en œuvre. Finalement, ces manipulations engendrent une formulation LMI du problème de commande LPV de type multi-objectif. Ceci peut donc être résolu numériquement par des codes de programmation semi-définie disponibles.

## 5.1 Introduction

### Problématique

Les méthodes LPV ont été constamment raffinées et améliorées. Dans [81] des classes généralisées de *scalings* sont introduites, résultant en caractérisations moins conservatives. En [105, 5, 10, 98], les auteurs emploient des fonctions de LYAPUNOV dépendant du paramètre dont les évolutions ont une gamme limitée de vitesse. Dans [46], une technique mixte, traitant à la fois des paramètres d'interpolation et des paramètres incertains, est proposée. Cependant, sauf quelques travaux isolés [80, 5, 41] qui discutent des approches impliquant une grande masse de calcul ou proposent des schémas conservatifs, la définition d'une méthodologie des types  $H_2/H_\infty$  mixte et LPV multi-transfert reste une problématique très délicate, notamment dans le contexte des représentations LFT et des caractérisations par multiplicateurs. Comme la plupart des problèmes pratiques comportent un grand nombre de contraintes, le développement d'une telle méthodologie est sûrement d'importance cruciale. Tous ces aspects ont motivé la discussion dans ce chapitre.

### Contribution

Ce chapitre est donc consacré au développement d'une méthode pour résoudre le problème LPV multi-canal mixte  $H_2/H_\infty$  en temps discret. Cette méthode est une extension des résultats antérieurs : d'un côté, des approches LPV qui traitent les problèmes à un seul objectif [65, 6] ; de l'autre côté, des techniques multi-objectif nominales (LTI) [26, 83]. Notre contribution comporte deux aspects :

- Nous montrons que les transformations des variables de LYAPUNOV introduites en [25], et utilisées en [26] pour le cas des problèmes de commande robuste multi-objectif, peuvent être appliquées de façon similaire aux systèmes LPV/LFT pour une classe spécifique de *scalings* symétriques et non structurés. Ces transformations permettent de court-circuiter les corrélations inhérentes entre les variables de LYAPUNOV et les variables de *scaling*, d'une part, et les variables du correcteur LPV, d'autre part. Une conséquence importante est que, de façon similaire au cas nominal, différentes variables de LYAPUNOV et de *scaling* peuvent être utilisées pour chaque transfert/spécification, ce qui réduit le conservatisme.
- Nous établissons aussi, de nouvelles transformations de linéarisation des données de l'espace d'état et de la fonction d'interpolation du correcteur LPV, pour arriver à une description LMI complète du problème de synthèse LPV de type multi-canal mixte  $H_2/H_\infty$ . Ces transformations sont nouvelles et ne sont pas possibles avec les techniques développées antérieurement telles que celles en [83]. Ces méthodes utilisent des variables de LYAPUNOV communes à tous les canaux de façon à préserver la convexité. Pour cette raison, elles sont connues comme restrictives quelle que soit la classe de *scalings* utilisée : de bloc plein généralisé ou diagonaux plus simples. Quant aux techniques en [65, 6, 82, 37, 85], elles dépendent essentiellement de l'utilisation du Lemme de Projection [31], un outil qui est restreint aux problèmes de synthèse à un seul transfert et à un seul objectif et n'est donc pas utilisable pour

le problème que nous intéresse. À part ces nouvelles transformations de linéarisation, nous montrons aussi que la fonction de séquençement du correcteur peut être construite comme une fonction matricielle qui dépend, de façon linéaire, des coordonnées polytopiques du paramètre d'interpolation (du système), ce qui rend facile sa mise en œuvre. La caractérisation proposée offre une souplesse considérable pour construire la fonction de séquençement du compensateur. Cependant, l'utilisation de fonctions plus riches et complexes, telles que des fonctions polynômiales d'ordre élevé, peut jouer de façon défavorable quant au temps de calcul nécessaire pour résoudre le problème LMI.

Il découle un cas particulier qui est une démonstration différente du problème de synthèse LPV  $H_\infty$  à un seul objectif [65, 6].

Le reste du chapitre est structuré comme suit. Des outils mathématiques qui constituent la base pour des constructions futures sont développés dans la Section 5.2. Une description complète du problème  $H_2/H_\infty$  mixte multi-transfert, allant des caractérisations de synthèse LMI jusqu'à la construction du correcteur LPV, est fournie dans la Section 5.3. Des exemples illustratifs sont présentés dans la Section 5.4.

## 5.2 Analyse de performance

Cette section développe des tests d'analyse pour les performances  $H_2$  et  $H_\infty$  robustes qui sont d'une importance capitale pour la construction des correcteurs LPV de type multi-objectif. Nous nous sommes intéressés ici au problème d'analyse robuste d'un système incertain à temps discret où les incertitudes peuvent être représentées sous forme LFT. Autrement dit, le système incertain est décrit par :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ z_\Delta(k) \\ z(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B_\Delta & B_1 \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta 1} \\ C_1 & D_{1\Delta} & D_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w_\Delta(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \\ w_\Delta(k) &= \Delta(k) z_\Delta(k), \quad \Delta(k) \in \mathbf{R}^{N \times N}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

où  $\Delta(k)$  est une matrice à temps variant qui dépend du paramètre et évolue dans un ensemble polytopique  $\mathcal{P}_\Delta$ , avec

$$\mathcal{P}_\Delta := \text{co} \{ \Delta_1, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_L \} \ni 0, \quad (5.2)$$

où  $\text{co}$  représente une enveloppe convexe et les  $\Delta_i$  désignent les sommets du polytope  $\mathcal{P}_\Delta$ . Notons bien, que le paramètre  $\Delta$  est considéré comme une incertitude dans l'ensemble de cette section. Il ne sera supposé mesuré que pour le contexte de synthèse LPV de la Section 5.3.

Si l'on ferme la boucle d'incertitude  $w_\Delta(k) = \Delta(k)z_\Delta(k)$ , une autre représentation en espace d'état est obtenue :

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ z(k) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & D_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\Delta \\ D_{1\Delta} \end{bmatrix} \Delta(k) (I - D_{\Delta\Delta} \Delta(k))^{-1} \begin{bmatrix} C_\Delta & D_{\Delta 1} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix}.$$

À partir de cette dernière expression, nous observons que le système avec les entrées  $w$  et les sorties  $z$  a une représentation en espace d'état qui est une fonction fractionnaire du paramètre à temps variant  $\Delta(k)$ . Comme dans les chapitres précédents, nous utilisons ici la notation suivante :

- $x$  pour le vecteur de l'état,
- $w$  pour les entrées exogènes,
- $z$  pour les variables contrôlées ou de performance.

### 5.2.1 Performance $H_2$ robuste

On peut interpréter la performance  $H_2$  garantie de différentes façons : elle fournit une borne supérieure de la variance de la sortie pour toutes les trajectoires admissibles du paramètre ou bien, elle donne une limite supérieure du pire cas de l'énergie de sortie (en ce qui concerne  $\Delta$ ) en réponse à des entrées impulsionnelles. Le lecteur se reportera au document [42] et à ses références pour une discussion détaillée. Une caractérisation de performance  $H_2$  garantie est fournie dans la proposition suivante.

**Proposition 5.1 (Performance  $H_2$  robuste)** *Les affirmations suivantes impliquant les variables de LYAPUNOV  $X$  et  $Z$ , les paires de scalings  $(Q_1, R_1)$  et  $(Q_2, R_2)$ , et les variables matricielles auxiliaires  $V, H_1, F_1, H_2, F_2$  sont équivalentes et imposent une borne  $\nu$  sur la variance de la sortie  $z$  pour toutes les trajectoires du paramètre  $\Delta(k) \in \mathcal{P}_\Delta$  :*

$$\begin{aligned}
(i) : & \begin{bmatrix} -X & \star & \star & \star & \star \\ 0 & Q_1 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & -\nu I & \star & \star \\ A & B_\Delta & B_1 & -X^{-1} & 0 \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta 1} & 0 & -R_1^{-1} \end{bmatrix} < 0, \\
& \begin{bmatrix} -X & \star & \star & \star & \star \\ 0 & Q_2 & \star & \star & \star \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} & -R_2^{-1} & \star & \star \\ C_1 & D_{1\Delta} & 0 & -Z & \star \\ 0 & 0 & 0 & D_{11}^T & -\nu I \end{bmatrix} < 0, \quad \text{Tr}(Z) < 1, \\
& \begin{bmatrix} R_1 & \Delta^T \\ \Delta & -Q_1^{-1} \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} R_2 & \Delta^T \\ \Delta & -Q_2^{-1} \end{bmatrix} > 0, \quad \forall \Delta = \Delta_i. \tag{5.3} \\
(ii) : & \begin{bmatrix} -X & \star & \star & \star & \star \\ 0 & Q_1 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & -\nu I & \star & \star \\ V^T A & V^T B_\Delta & V^T B_1 & X - (V + V^T) & 0 \\ H_1^T C_\Delta & H_1^T D_{\Delta\Delta} & H_1^T D_{\Delta 1} & 0 & R_1 - (H_1 + H_1^T) \end{bmatrix} < 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -X & \star & \star & \star & \star \\ 0 & Q_2 & \star & \star & \star \\ H_2^T C_\Delta & H_2^T D_{\Delta\Delta} & R_2 - (H_2 + H_2^T) & \star & \star \\ C_1 & D_{1\Delta} & 0 & -Z & \star \\ 0 & 0 & 0 & D_{11}^T & -\nu I \end{bmatrix} < 0, \quad \text{Tr}(Z) < 1,$$

$$\begin{bmatrix} R_1 & \Delta^T F_1 \\ F_1^T \Delta & Q_1 + F_1 + F_1^T \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} R_2 & \Delta^T F_2 \\ F_2^T \Delta & Q_2 + F_2 + F_2^T \end{bmatrix} > 0, \quad \forall \Delta = \Delta_i. \quad (5.4)$$

**Démonstration** : Le fait que (i) impose une borne  $\nu$  sur la variance de la sortie  $z$  pour toutes les trajectoires admissibles du paramètre  $\Delta(k)$  est un résultat classique [18, 81, 42]. Donc, il suffit de prouver l'équivalence entre (i) et (ii).

- (5.3)  $\implies$  (5.4) :

La nécessité de (5.4) vient du choix  $V := X$ ,  $H_1 := R_1$ ,  $H_2 := R_2$ ,  $F_1 := -Q_1$  et  $F_2 := -Q_2$  dans les conditions (5.4). Plus précisément, si l'on applique la transformation de congruence

$$\text{diag}(I, I, I, X, R_1) \quad (5.5)$$

à la première contrainte de (5.3), on vérifie la contrainte respective de (5.4) après les changements de variables précisés ci-dessus pour  $V$  et  $H_1$ .

- (5.3)  $\longleftarrow$  (5.4) :

La suffisance est obtenue en notant que (5.4) implique que  $V$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  sont non singulières. Ainsi, on peut appliquer la transformation de congruence

$$\text{diag}(I, I, I, W, G_1), \quad W := V^{-1}, \quad G_1 := H_1^{-1},$$

à la première LMI de (5.4). Cela produit la condition équivalente

$$\begin{bmatrix} -X & \star & \star & \star & \star \\ 0 & Q_1 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & -\nu I & \star & \star \\ A & B_\Delta & B_1 & W^T X W - (W + W^T) & 0 \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta 1} & 0 & G_1^T R_1 G_1 - (G_1 + G_1^T) \end{bmatrix} < 0. \quad (5.6)$$

Donc, on déduit facilement (5.3) à partir des inégalités

$$W^T X W - (W + W^T) \geq -X^{-1}, \quad G_1^T R_1 G_1 - (G_1 + G_1^T) \geq -R_1^{-1},$$

qui sont valables dès que  $X > 0$  et  $R_1 > 0$ .

L'équivalence entre les dernières contraintes en (5.3) et (5.4) est obtenue par des arguments similaires.

Ceci complète la preuve de la proposition. ■

Il faut ajouter que les conditions dans la Proposition 5.1 sont conservatives pour deux raisons. Tout d'abord, une fonction de LYAPUNOV fixe<sup>1</sup>  $V(x) := x^T X x$  est employée

---

1. Qui ne dépend pas des paramètres.

pour établir la performance  $H_2$  du système incertain. Cela constitue une source bien reconnue de conservatisme [24, 35, 32]. Deuxièmement, nous utilisons une sous-classe de *scalings* généralisés de type bloc-diagonal plein à la place des classes généralisées de *scalings* ou de multiplicateurs introduites en [82]. Par conséquent, ces tests doivent être raffinés lorsqu'ils sont utilisés dans le but de validation. Cependant, cette sous-classe est plus générale que la sous-classe de *scalings* symétriques structurés utilisés en [65, 6]. En plus, comme nous allons voir dans la Section 5.3, ces nouvelles caractérisations offrent aussi de nouvelles possibilités pour dériver des caractérisations capables de traiter les problèmes de commande LPV de type multi-objectif à temps discret. Ceci paraît délicat en utilisant les techniques précédentes.

Il y a quelques points à retenir pour comprendre les conditions (5.3) et (5.4) et leur utilité.

- Remarquons que les termes de LYAPUNOV standards  $XA$ ,  $XB_1$ , ... et les termes de *scalings*  $R_1C_\Delta$ ,  $R_1D_{\Delta 1}$ , ... sont implicites en (5.3) et apparaissent quand on applique des transformations de congruence à toutes les contraintes<sup>2</sup>, afin d'éliminer les matrices inverses  $X^{-1}$ ,  $R_1^{-1}$ ,  $R_2^{-1}$ ,  $Q_1^{-1}$  et  $Q_2^{-1}$ . Ces termes imposent généralement de fortes limitations dans les problèmes de commande de type multi-objectif puisqu'ils empêchent l'utilisation de fonctions de LYAPUNOV ou de *scaling* multiples. En (5.4), nous nous en débarrassons au moyen de variables intermédiaires (auxiliaires)  $V$ ,  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $F_1$  et  $F_2$ . Des idées similaires ont été présentées en [25, 26] pour la synthèse LTI de type multi-objectif.
- La condition LMI (5.4) est considérablement plus coûteuse en calcul que sa forme originale (5.3) à cause de ces variables matricielles générales supplémentaires. Nous verrons cependant que ce coût calculatoire supplémentaire est compensé largement par de nouvelles capacités dans la synthèse LPV de type multi-objectif. D'une part, parce que de multiples fonctions de LYAPUNOV  $X_j$  et de *scaling*  $R_j, Q_j$  sont employées pour chaque transfert et spécification. D'autre part, parce que, d'un point de vue de la synthèse, de nouvelles transformations de linéarisation des données du correcteur LPV sont introduites, ce qui mène à une caractérisation LMI complète du problème de commande.
- Il peut apparaître au lecteur que l'introduction des variables auxiliaires  $F_i$ ,  $i = 1, 2$  dans les LMI impliquant  $\Delta$  (5.4) est superflue. Ce serait juste si l'analyse était le seul intérêt. Cependant, pour la synthèse de commande LPV considérée ultérieurement, la partie de  $\Delta$  qui correspond au bloc de séquençement devient une vraie variable et les matrices auxiliaires sont encore nécessaires pour la linéarisation du problème.

Finalement, les conditions en (5.3) et (5.4) garantissent que la représentation LFT en (5.1) est bien posée. Cette propriété est assurée dans tous les résultats de ce chapitre et ne sera pas discutée ici. Voir par exemple [6, 82] pour des discussions sur cette propriété.

---

2. Comme celle en (5.5), pour la première LMI.

### 5.2.2 Performance $H_\infty$ robuste

Le résultat qui suit pour la performance  $H_\infty$ , est à mettre en parallèle avec ceux pour la performance  $H_2$  dans la Proposition 5.1.

**Proposition 5.2 (Performance  $H_\infty$  robuste)** *Les LMI suivantes impliquant une variable de LYAPUNOV  $X$ , une paire de scalings  $(Q,R)$  et les variables matricielles auxiliaires  $V$ ,  $H$  et  $F$  imposent une borne  $\gamma$  sur le gain  $\mathcal{L}_2$  induit du transfert entre  $w$  et  $z$ . Autrement dit, la performance  $H_\infty$  pour ce transfert est garantie pour toutes les trajectoires  $\Delta(k) \in \mathcal{P}_\Delta$ .*

$$\begin{bmatrix} -X & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & Q & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & -\gamma I & \star & \star & \star \\ V^T A & V^T B_\Delta & V^T B_1 & X - (V + V^T) & \star & \star \\ H^T C_\Delta & H^T D_{\Delta\Delta} & H^T D_{\Delta 1} & 0 & R - (H + H^T) & \star \\ C_1 & D_{1\Delta} & D_{11} & 0 & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (5.7)$$

$$\begin{bmatrix} R & \Delta^T F \\ F^T \Delta & Q + F + F^T \end{bmatrix} > 0, \quad \forall \Delta = \Delta_i.$$

**Démonstration :** La démonstration est similaire à celle de la proposition 5.1 ; elle n'est donc pas rappelée ici. Des détails supplémentaires peuvent être trouvés en [26, 82]. ■

À nouveau, la condition (5.7) dispose d'une structure séparée qui joue un rôle clé dans les résultats de synthèse présentés dans la suite. Finalement, nous insistons sur le fait important que lorsque des contraintes de performance  $H_2$  et  $H_\infty$  multi-canal sont spécifiées, différentes variables de LYAPUNOV  $X_j$  et des paires de scalings  $(Q_j, R_j)$  peuvent être utilisées pour chaque canal/spécification.

## 5.3 Synthèse LPV $H_2/H_\infty$ mixte multi-transfert

Avant d'aller plus loin, nous insistons sur le fait que, contrairement au cas multi-objectif nominal [19, 83, 26], le problème de commande LPV mixte  $H_2/H_\infty$  multi-canal est très délicat et reste irrésolu pour les systèmes décrits par des représentations LFT. Le but de cette section est de dériver une caractérisation pratique et facile à traiter de ce problème.

### 5.3.1 Présentation du problème

Tout d'abord, nous allons introduire le problème de commande mixte  $H_2/H_\infty$  multi-canal ainsi que quelques notations utiles. Considérons un système LPV avec la structure LFT

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ z_\Delta(k) \\ z(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_\Delta & B_1 & B_2 \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta 1} & D_{\Delta 2} \\ C_1 & D_{1\Delta} & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{2\Delta} & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w_\Delta(k) \\ w(k) \\ u(k) \end{bmatrix}, \quad A \in \mathbf{R}^{n \times n} \quad (5.8)$$

$$w_\Delta(k) = \Delta(k) z_\Delta(k), \quad \Delta(k) \in \mathbf{R}^{N \times N},$$

où  $\Delta$  est défini en (5.2). Ici  $x$ ,  $w$ ,  $w_\Delta$ ,  $z$ , et  $z_\Delta$  ont la même signification que dans la Section 5.2,  $u$  est le signal de commande, et  $y$  le signal mesuré. Le transfert  $T_{w_\Delta z_\Delta}$  est maintenant considérée comme le canal d'interpolation, autrement dit, le paramètre  $\Delta(k)$  est mesuré en temps réel et donc est exploitable par le correcteur.

Pour le système LPV (5.8) le problème de commande consiste à

**calculer** un correcteur LPV avec la structure LFT

$$\begin{bmatrix} x_K(k+1) \\ u(k) \\ z_K(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & B_{K1} & B_{K\Delta} \\ C_{K1} & D_{K11} & D_{K1\Delta} \\ C_{K\Delta} & D_{K\Delta 1} & D_{K\Delta\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_K(k) \\ y(k) \\ w_K(k) \end{bmatrix}, \quad A_K \in \mathbf{R}^{n \times n} \quad (5.9)$$

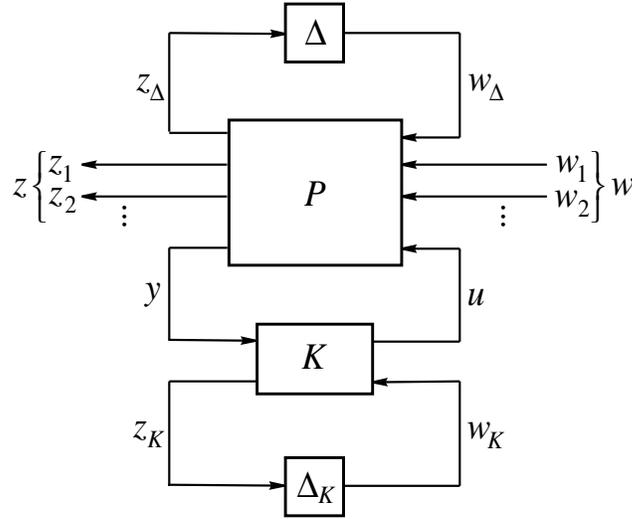
$$w_K(k) = \Delta_K(k) z_K(k), \quad \Delta_K \in \mathbf{R}^{N \times N}$$

**tel que** les spécifications  $H_2$  et  $H_\infty$  soient atteintes pour une famille de transferts  $T_{w_1 z_1}$ ,  $T_{w_2 z_2}$ , etc., où les  $w_j$  et  $z_j$  sont, respectivement, sous-vecteurs de  $w$  et  $z$  (Figure 5.1).

La notation  $\Delta_K$  est utilisée pour la fonction d'interpolation du correcteur qui est une fonction du paramètre du système  $\Delta$ , soit,  $\Delta_K := \Delta_K(\Delta)$ . Cette fonction de séquençement fait partie de la procédure de conception et sera déterminée au cours du développement ci-après.

### 5.3.2 Caractérisation LMI

Pour aboutir à des caractérisations de performance  $H_2$  et  $H_\infty$  en boucle fermée, une procédure standard consiste à réécrire le système LPV (5.8) comme un système LPV augmenté avec des blocs d'opérateurs de retard  $z^{-1}I_n$  répétés et un bloc d'interpolation augmenté,  $\text{diag}(\Delta, \Delta_K(\Delta))$  [65, 6]. Les données en boucle fermée résultantes sont alors

FIG. 5.1 – Interconnexion LPV multi-canal mixte  $H_2/H_\infty$ 

décrites ainsi :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}_\Delta & \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{C}_\Delta & \mathcal{D}_{\Delta\Delta} & \mathcal{D}_{\Delta 1} \\ \mathcal{C}_1 & \mathcal{D}_{1\Delta} & \mathcal{D}_{11} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A & 0 & B_\Delta & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_\Delta & 0 & D_{\Delta\Delta} & 0 & D_{\Delta 1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & 0 & D_{1\Delta} & 0 & D_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_2 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & D_{\Delta 2} & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & D_{12} & 0 \end{bmatrix} \mathcal{K} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & D_{2\Delta} & 0 & D_{21} \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

avec la définition

$$\mathcal{K} := \begin{bmatrix} A_K & B_{K1} & B_{K\Delta} \\ C_{K1} & D_{K11} & D_{K1\Delta} \\ C_{K\Delta} & D_{K\Delta 1} & D_{K\Delta\Delta} \end{bmatrix}.$$

La nouvelle structure du paramètre ou de l'incertitude associée aux données en boucle fermée (5.10) est donc donnée par

$$\begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_K(\Delta) \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Une contrainte LMI de la forme rencontrée dans les Propositions 5.1 et 5.2, LMI (5.4) et (5.7), est associée à chaque spécification/canal. La caractérisation d'une synthèse LPV de retour dynamique de sortie avec des spécifications de type multi-objectif/canal

se déduit en quatre phases :

- 1- Introduire différentes variables de LYAPUNOV et des *scalings*,  $(X_j, Z_j)$  et  $(Q_j, R_j)$ , pour chaque spécification/canal. Notons qu'une spécification  $H_2$  exige deux paires de *scalings* alors que seulement une est impliquée dans une spécification  $H_\infty$ .
- 2- Introduire les variables auxiliaires  $V$ ,  $H$  et  $F$  qui sont communes à tous les canaux et spécifications de façon à garantir la convexité<sup>3</sup>.
- 3- Écrire les expressions qui caractérisent les performances  $H_2$  et  $H_\infty$  pour chaque canal en utilisant les Propositions 5.1 et 5.2 avec les données en boucle fermée  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}_\Delta$ , ... en (5.10).
- 4- Appliquer des transformations de congruence adéquates pour chaque inégalité matricielle et utiliser des changements de variable de linéarisation spécifiques pour trouver les conditions de synthèse LMI.

L'obtention des caractérisations finales est fastidieuse et longue. Aussi, nous allons juste clarifier les étapes principales de la procédure proposée ci-dessus. En retenant que tous les canaux  $(w_1, z_1)$ ,  $(w_2, z_2)$ , etc. peuvent être traités exactement de la même façon, nous considérerons seulement le cas d'une spécification de performance  $H_2$  et  $H_\infty$  pour le canal unique  $(w, z)$ . Cela simplifie énormément la présentation ci-après. Lorsque plusieurs canaux sont considérés, on peut tout simplement "empiler" les contraintes LMI correspondantes, qui correspondent à des spécifications  $H_2$  et/ou  $H_\infty$  et qui introduisent des variables de LYAPUNOV et des *scalings* supplémentaires.

Dans la première étape, pour la définition des variables de LYAPUNOV et les variables de *scaling*, on doit respecter les dimensions imposées par le système bouclé en (5.10). Ainsi,  $X \in \mathbf{R}^{2n \times 2n}$  a la même dimension que  $\mathcal{A}$ .  $Z \in \mathbf{R}^{p_1 \times p_1}$  respecte la dimension  $p_1$  de la variable de performance  $w$ . Et  $Q, R \in \mathbf{R}^{2N \times 2N}$  ont un ordre imposé par le bloc paramétrique augmenté (5.11).

Nous introduisons, dans un deuxième temps, une partition de  $V$  et de  $W := V^{-1}$ , selon la partition de  $\mathcal{A}$  en (5.10), et une partition de  $H$  et de  $G := H^{-1}$  et une partition de  $F$  et de  $E := F^{-1}$ , conformément à la partition de  $\mathcal{D}_{\Delta\Delta}$  en (5.10) :

$$\begin{aligned} V &:= \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}, & W &:= \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}, & H &:= \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}, \\ G &:= \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, & F &:= \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}, & E &:= \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Par la nature stricte des contraintes LMI impliquées et par l'argument de perturbation, il n'y a aucune perte de généralité si l'on suppose que  $V_{21}$ ,  $W_{21}$ ,  $H_{21}$ ,  $G_{21}$ ,  $F_{21}$  et  $E_{21}$  sont inversibles. Voir par exemple [19] pour une justification détaillée. Nous introduisons donc

---

3. Cette étape est conservative.

les notations

$$\begin{aligned}\Pi_V &:= \begin{bmatrix} V_{11} & I \\ V_{21} & 0 \end{bmatrix}, & \Pi_W &:= \begin{bmatrix} I & W_{11} \\ 0 & W_{21} \end{bmatrix}, & \Pi_H &:= \begin{bmatrix} H_{11} & I \\ H_{21} & 0 \end{bmatrix}, \\ \Pi_G &:= \begin{bmatrix} I & G_{11} \\ 0 & G_{21} \end{bmatrix}, & \Pi_F &:= \begin{bmatrix} F_{11} & I \\ F_{21} & 0 \end{bmatrix}, & \Pi_E &:= \begin{bmatrix} I & E_{11} \\ 0 & E_{21} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ces matrices sont inversibles, de par les hypothèses sur  $V_{21}$ ,  $W_{21}$ ,  $H_{21}$ ,  $G_{21}$ ,  $F_{21}$  et  $E_{21}$ . On peut facilement vérifier les identités

$$V\Pi_W = \Pi_V, \quad W\Pi_V = \Pi_W, \quad H\Pi_G = \Pi_H, \quad G\Pi_H = \Pi_G, \quad F\Pi_E = \Pi_F, \quad E\Pi_F = \Pi_E.$$

Avec ces notations et définitions, nous pouvons réécrire les conditions des Propositions 5.1 et 5.2 pour les données en boucle fermée en (5.10). Ceci constitue la troisième étape qui est omise par simplicité.

Étant données ces nouvelles conditions, il ne nous reste qu'à développer la dernière phase, la plus laborieuse. Pour une spécification  $H_2$ , nous appliquons les transformations de congruence

$$\text{diag}(\Pi_W, \Pi_E, I, \Pi_W, \Pi_G), \quad \text{diag}(\Pi_W, \Pi_E, \Pi_G, I, I),$$

respectivement, sur la première et la deuxième inégalités en (ii) de la Proposition 5.1. Pour une spécification  $H_\infty$ , nous appliquons la transformation de congruence

$$\text{diag}(\Pi_W, \Pi_E, I, \Pi_W, \Pi_G, I)$$

sur la première inégalité en (5.7) de la Proposition 5.2. Pour les dernières inégalités en (5.4) et (5.7) impliquant des blocs d'incertitude, nous appliquons la transformation de congruence

$$\text{diag}(\Pi_G, \Pi_E).$$

Cela produit des inégalités matricielles qui impliquent uniquement les termes

$$\begin{bmatrix} \Pi_V^T \mathcal{A} \Pi_W & \Pi_V^T \mathcal{B}_\Delta \Pi_E & \Pi_V^T \mathcal{B}_1 \\ \Pi_H^T \mathcal{C}_\Delta \Pi_W & \Pi_H^T \mathcal{D}_{\Delta\Delta} \Pi_E & \Pi_H^T \mathcal{D}_{\Delta 1} \\ \mathcal{C}_1 \Pi_W & \mathcal{D}_{1\Delta} \Pi_E & \mathcal{D}_{11} \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \Pi_W^T X_j \Pi_W, & \quad \Pi_E^T Q_j \Pi_E, & \quad \Pi_G^T R_j \Pi_G, \\ \Pi_W^T V \Pi_W, & \quad \Pi_G^T H \Pi_G, & \quad \Pi_E^T F \Pi_E \end{aligned} \quad (5.13)$$

et

$$\Pi_G^T \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_K \end{bmatrix}^T \Pi_F. \quad (5.14)$$

Les variables  $(X_j, Z_j, Q_j, R_j)$  sont attachées à une spécification ou canal  $H_2$  ou  $H_\infty$  donné, tandis que  $(V, W, H, G, F, E)$  sont des variables auxiliaires communes à toutes les spécifications et tous les canaux.

Un développement et une inspection de ces termes révèlent que par inversibilité de  $V_{21}$ ,  $W_{21}$ ,  $H_{21}$ ,  $G_{21}$ ,  $F_{21}$  et  $E_{21}$ , on peut appliquer les changements de variables de linéarisation suivants :

### Changements de variables de linéarisation

---


$$\mathbf{D}_{K11} := D_{K11}, \quad (5.15)$$

$$\mathbf{B}_{K1} := V_{21}^T B_{K1} + V_{11}^T B_2 D_{K11}, \quad (5.16)$$

$$\mathbf{C}_{K1} := D_{K11} C_2 W_{11} + C_{K1} W_{21}, \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_K &:= V_{11}^T A W_{11} + V_{21}^T A_K W_{21} + V_{21}^T B_{K1} C_2 W_{11} \\ &\quad + V_{11}^T B_2 C_{K1} W_{21} + V_{11}^T B_2 D_{K11} C_2 W_{11}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{D}_{K1\Delta} := D_{K11} D_{2\Delta} E_{11} + D_{K1\Delta} E_{21}, \quad (5.19)$$

$$\mathbf{D}_{K\Delta 1} := H_{11}^T D_{\Delta 2} D_{K11} + H_{21}^T D_{K\Delta 1}, \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{K\Delta} &:= V_{11}^T B_{\Delta} E_{11} + V_{21}^T B_{K1} D_{2\Delta} E_{11} + V_{11}^T B_2 D_{K11} D_{2\Delta} E_{11} \\ &\quad + V_{21}^T B_{K\Delta} E_{21} + V_{11}^T B_2 D_{K1\Delta} E_{21}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{K\Delta} &:= H_{11}^T C_{\Delta} W_{11} + H_{11}^T D_{\Delta 2} D_{K11} C_2 W_{11} + H_{21}^T D_{K\Delta 1} C_2 W_{11} \\ &\quad + H_{11}^T D_{\Delta 2} C_{K1} W_{21} + H_{21}^T C_{K\Delta} W_{21}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{K\Delta\Delta} &:= H_{11}^T D_{\Delta\Delta} E_{11} + H_{11}^T D_{\Delta 2} D_{K11} D_{2\Delta} E_{11} + H_{21}^T D_{K\Delta 1} D_{2\Delta} E_{11} \\ &\quad + H_{11}^T D_{\Delta 2} D_{K1\Delta} E_{21} + H_{21}^T D_{K\Delta\Delta} E_{21}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\mathbf{X}_j := \Pi_W^T X_j \Pi_W, \quad (5.24)$$

$$\mathbf{Q}_j := \Pi_E^T Q_j \Pi_E, \quad \mathbf{R}_j := \Pi_G^T R_j \Pi_G, \quad (5.25)$$

$$\mathbf{U} := V_{11}^T W_{11} + V_{21}^T W_{21}, \quad \mathbf{M} := H_{11}^T G_{11} + H_{21}^T G_{21}, \quad \mathbf{N} := F_{11}^T E_{11} + F_{21}^T E_{21}, \quad (5.26)$$

$$\mathbf{\Delta}_K := F_{11}^T \Delta G_{11} + F_{21}^T \Delta_K G_{21}. \quad (5.27)$$


---

Nous adoptons une notation en gras pour les nouvelles variables. On remarque que ces transformations sont réversibles à cause de la non singularité de  $V_{21}$ ,  $W_{21}$ ,  $H_{21}$ ,  $G_{21}$ ,  $F_{21}$  et  $E_{21}$ . Les termes des inégalités matricielles en (5.12)-(5.14) deviennent linéaires par rapport aux nouvelles variables :

$$\begin{aligned}
\Pi_V^T \mathcal{A} \Pi_W &:= \begin{bmatrix} V_{11}^T A + \mathbf{B}_{K1} C_2 & \mathbf{A}_K \\ A + B_2 \mathbf{D}_{K11} C_2 & A W_{11} + B_2 \mathbf{C}_{K1} \end{bmatrix}, \\
\Pi_V^T \mathcal{B}_\Delta \Pi_E &:= \begin{bmatrix} V_{11}^T B_\Delta + \mathbf{B}_{K1} D_{2\Delta} & \mathbf{B}_{K\Delta} \\ B_\Delta + B_2 \mathbf{D}_{K11} D_{2\Delta} & B_\Delta E_{11} + B_2 \mathbf{D}_{K1\Delta} \end{bmatrix}, \\
\Pi_V^T \mathcal{B}_1 &:= \begin{bmatrix} V_{11}^T B_1 + \mathbf{B}_{K1} D_{21} \\ B_1 + B_2 \mathbf{D}_{K11} D_{21} \end{bmatrix}, \\
\Pi_H^T \mathcal{C}_\Delta \Pi_W &:= \begin{bmatrix} H_{11}^T C_\Delta + \mathbf{D}_{K\Delta 1} C_2 & \mathbf{C}_{K\Delta} \\ C_\Delta + D_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K11} C_2 & C_\Delta W_{11} + D_{\Delta 2} \mathbf{C}_{K1} \end{bmatrix}, \\
\Pi_H^T \mathcal{D}_{\Delta 1} &:= \begin{bmatrix} H_{11}^T D_{\Delta 1} + \mathbf{D}_{K\Delta 1} D_{21} \\ D_{\Delta 1} + D_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K11} D_{21} \end{bmatrix}, \\
\Pi_H^T \mathcal{D}_{\Delta\Delta} \Pi_E &:= \begin{bmatrix} H_{11}^T D_{\Delta\Delta} + \mathbf{D}_{K\Delta 1} D_{2\Delta} & \mathbf{D}_{K\Delta\Delta} \\ D_{\Delta\Delta} + D_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K11} D_{2\Delta} & D_{\Delta\Delta} E_{11} + D_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K1\Delta} \end{bmatrix}, \\
\mathcal{C}_1 \Pi_W &:= [C_1 + D_{12} \mathbf{D}_{K11} C_2 \quad C_1 W_{11} + D_{12} \mathbf{C}_{K1}], \\
\mathcal{D}_{11} &:= D_{11} + D_{12} \mathbf{D}_{K11} D_{21}, \\
\mathcal{D}_{1\Delta} \Pi_E &:= [D_{1\Delta} + D_{12} \mathbf{D}_{K11} D_{2\Delta} \quad D_{1\Delta} E_{11} + D_{12} \mathbf{D}_{K1\Delta}], \\
\Pi_W^T \Pi_V &:= \begin{bmatrix} V_{11} & I \\ \mathbf{U}^T & W_{11}^T \end{bmatrix}, \quad \Pi_G^T \Pi_H := \begin{bmatrix} H_{11} & I \\ \mathbf{M}^T & G_{11}^T \end{bmatrix}, \quad \Pi_E^T \Pi_F := \begin{bmatrix} F_{11} & I \\ \mathbf{N}^T & E_{11}^T \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Grâce à ces transformations, les inégalités des Propositions 5.1 et 5.2 qui n'impliquent pas le bloc paramétrique  $\Delta$  deviennent des LMI.

D'autre part, les inégalités associées au bloc paramétrique sont réécrites

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{j,1} & \mathbf{R}_{j,2} & \Delta^T F_{11} & \Delta^T \\ \mathbf{R}_{j,2}^T & \mathbf{R}_{j,3} & \mathbf{\Delta}_K^T & G_{11}^T \Delta^T \\ F_{11}^T \Delta & \mathbf{\Delta}_K & \mathbf{Q}_{j,1} + F_{11} + F_{11}^T & \mathbf{Q}_{j,2} + I + \mathbf{N} \\ \Delta & \Delta G_{11} & \mathbf{Q}_{j,2}^T + \mathbf{N}^T + I & \mathbf{Q}_{j,3} + E_{11}^T + E_{11} \end{bmatrix} > 0, \quad \forall \Delta \in \mathcal{P}_\Delta, j = 1, \dots, \quad (5.28)$$

où les sous-matrices  $\mathbf{R}_{j,\ell}$  et  $\mathbf{Q}_{j,\ell}$ ,  $\ell = 1, 2, 3$ , forment des partitions de  $\mathbf{R}_j$  et  $\mathbf{Q}_j$ , respectivement. Elles consistent en un ensemble indexé par  $j$  d'inégalités paramétriques par rapport à  $\Delta$ . On rappelle que  $\Delta(k)$  évolue dans un ensemble polytopique  $\mathcal{P}_\Delta$ , c'est-à-dire,

$$\Delta := \sum_{i=1}^L \alpha_i \Delta_i, \quad \sum_{i=1}^L \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0. \quad (5.29)$$

Les fonctions d'interpolation sous la forme

$$\mathbf{\Delta}_K(\Delta) := \sum_{i=1}^L \alpha_i \mathbf{\Delta}_{K,i}, \quad (5.30)$$

où les  $\Delta_{\mathbf{K},i}$  sont variables de décision et les  $\alpha_i$  sont les coordonnées polytopiques de  $\Delta$  en  $\mathcal{P}_\Delta$ , sont donc solutions potentielles (voir [10] pour d'autres méthodes). Sous cette restriction, les contraintes (5.28) sont converties en un ensemble fini de LMI

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{j,1} & \mathbf{R}_{j,2} & \Delta_i^T F_{11} & \Delta_i^T \\ \mathbf{R}_{j,2}^T & \mathbf{R}_{j,3} & \Delta_{\mathbf{K},i}^T & G_{11}^T \Delta_i^T \\ F_{11}^T \Delta_i & \Delta_{\mathbf{K},i} & \mathbf{Q}_{j,1} + F_{11} + F_{11}^T & \mathbf{Q}_{j,2} + I + \mathbf{N} \\ \Delta_i & \Delta_i G_{11} & \mathbf{Q}_{j,2}^T + \mathbf{N}^T + I & \mathbf{Q}_{j,3} + E_{11}^T + E_{11} \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, L, j = 1, \dots, \quad (5.31)$$

ou  $i$  indexe les sommets de  $\mathcal{P}_\Delta$  et  $j$  indexe les canaux et les spécifications.

Puisque pour chaque canal et pour chaque spécification  $H_2$  et  $H_\infty$ , les termes sont de la forme précédente, nous concluons que les conditions suffisantes d'existence pour le problème de commande LPV de type multi-canal/objectif peuvent être réécrites comme un programme LMI en les variables  $V_{11}$ ,  $W_{11}$ ,  $H_{11}$ ,  $G_{11}$ ,  $F_{11}$ ,  $E_{11}$ ,  $\Delta_{\mathbf{K},i}$  et les variables (en gras) définies en (5.15)-(5.26). Pour une meilleure lisibilité, nous avons reporté en Annexe B les caractérisations LMI de performance  $H_2$  et  $H_\infty$ .

### Remarque

Lorsque le polytope matriciel  $\mathcal{P}_\Delta$  est un hypercube centré en 0, ce qui peut toujours être réalisé pour un hyper-rectangle quelconque par translation et changement d'échelle si nécessaire, il est facile de montrer à partir des conditions LMI (5.31) que les solutions  $\Delta_{\mathbf{K},i}$  associées à des points opposés du polytope sont aussi opposées les unes des autres. En conséquence, la famille de solutions  $\{\Delta_{\mathbf{K},i}\}_{i=1,\dots,L}$  détermine un hypercube avec un arrangement similaire à l'hypercube original  $\{\Delta_i\}_{i=1,\dots,L}$ . En vertu de ce résultat, le nombre de LMI indexées par  $i$  en (5.31) et le nombre de variables matricielles  $\Delta_{\mathbf{K},i}$  peuvent être réduits d'un facteur 2. Cette propriété sera illustrée plus loin, dans le Chapitre 6, où nous en profiterons dans le contexte du problème de pilotage d'un missile.

### 5.3.3 Construction du correcteur LPV

Une fois qu'une solution des contraintes LMI (Annexe B) a été calculée, les données en espace d'état (5.9) du correcteur LPV sont aisément obtenues comme indiqué ci-dessous :

- Calculer une factorisation SVD de  $\mathbf{U} - V_{11}^T W_{11}$  et déduire des matrices inversibles  $V_{21}$  et  $W_{21}$  d'après (5.26). D'une manière analogue, calculer une factorisation SVD de  $\mathbf{M} - H_{11}^T G_{11}$  et de  $\mathbf{N} - F_{11}^T E_{11}$  et déduire des matrices inversibles  $H_{21}$ ,  $G_{21}$ ,  $F_{21}$  et  $E_{21}$  d'après (5.26).
- Calculer les données du compensateur LPV en inversant les changements de variable séquentiellement comme spécifié en (5.15)-(5.23).
- Déduire la fonction de séquençement du correcteur

$$\begin{aligned} \Delta_K(\Delta) &:= F_{21}^{-T} \left( \sum_{i=1}^L \alpha_i \Delta_{\mathbf{K},i} - F_{11}^T \sum_{i=1}^L \alpha_i \Delta_i G_{11} \right) G_{21}^{-1} \\ &:= \sum_{i=1}^L \alpha_i \left( F_{21}^{-T} \Delta_{\mathbf{K},i} G_{21}^{-1} - F_{21}^{-T} F_{11}^T \Delta_i G_{11} G_{21}^{-1} \right). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Donc, la fonction d'interpolation est affine par rapport aux coordonnées polytopiques du bloc paramétrique  $\Delta$ . Dans une mise en œuvre pratique, il n'y a aucun besoin de calculer en temps réel les termes impliquant des produits de matrices en (5.32). En effet,  $\Delta_K(\Delta)$  peut être réécrite comme suit :

$$\Delta_K(\Delta) := \sum_{i=1}^L \alpha_i \Phi_i, \quad \text{avec } \Phi_i := \left( F_{21}^{-T} \mathbf{\Delta}_{\mathbf{K},i} G_{21}^{-1} - F_{21}^{-T} F_{11}^T \Delta_i G_{11} G_{21}^{-1} \right), \quad (5.33)$$

où les  $\Phi_i$  peuvent être calculées hors ligne.

### Remarque

Une classe plus riche de fonctions d'interpolation  $\mathbf{\Delta}_K(\Delta)$  peut être utilisée à la place d'une simple expression linéaire en (5.30). Cependant, cela peut jouer de façon défavorable quant au temps de calcul puisque des variables supplémentaires sont introduites. Si des *scalings* symétriques structurés sont utilisés, et si le bloc paramétrique du système est reproduit dans le correcteur, c'est-à-dire,  $\Delta_K := \Delta$ , on peut montrer que les LMI impliquant des blocs  $\Delta$  disparaissent. Cette caractérisation plus simple est donc équivalente à celles en [65, 6] pour le problème de commande  $H_\infty$  à un seul objectif. Elle est cependant plus conservatrice que celle proposée ici.

## 5.4 Exemples illustratifs

Dans cette section, nous illustrons la méthode proposée et présentons des résultats comparatifs avec les techniques évoquées plus haut. Cet exemple sert à valider la formulation développée dans la section précédente. Nous considérons un système LFT (emprunté à [26]) de la forme décrite en (5.1), (5.2) et (5.8). Nous utiliserons les notations suivantes pour indiquer les partitions des transferts de performance et du paramètre :

$$\overbrace{\begin{bmatrix} w_{\delta_1} \\ w_{\delta_2} \\ w_{\delta_3} \end{bmatrix}}^{w_\Delta} = \overbrace{\begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{bmatrix}}^{\Delta} \overbrace{\begin{bmatrix} z_{\delta_1} \\ z_{\delta_2} \\ z_{\delta_3} \end{bmatrix}}^{z_\Delta},$$

$$z := \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}.$$

Les données en espace d'état du système LFT sont les suivantes :

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c} A & B_\Delta & B_1 & B_2 \\ \hline C_\Delta & D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta 1} & D_{\Delta 2} \\ \hline C_1 & D_{1\Delta} & D_{11} & D_{12} \\ \hline C_2 & D_{2\Delta} & D_{21} & 0 \end{array} \right] := \left[ \begin{array}{ccc|ccc|cc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

### 5.4.1 Comparaisons avec un seul objectif

Il est supposé dans un premier temps que  $\delta_i, i = 1, 2, 3$  sont des variables d'interpolation avec

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3, \quad |\delta_i| \leq 0.2.$$

En utilisant différentes techniques, nous avons synthétisé des correcteurs LPV qui minimisent la performance  $H_\infty, \gamma$ , du transfert  $(w, z)$ . Les résultats sont présentés dans le Tableau 5.1.

TAB. 5.1 – Performance  $H_\infty$  obtenue par différentes méthodes

	méthode [65, 6]	méthode [37, 85]	méthode proposée	méthode [82]
$\gamma$	22.07	21.98	21.98	21.98

On peut remarquer que les niveaux de performance sont presque les mêmes pour toutes les méthodes utilisées. Comme prévu par la théorie, la méthode proposée atteint un niveau de performance qui est meilleur que celui de la méthode [65, 6] (*scalings* symétriques structurés), et ne donne pas mieux (ici résultats identiques) que la méthode [82] (*scalings* de bloc plein). On ne peut pas tirer de conclusions définitives des comparaisons avec la méthode [37, 85] puisqu'il n'y a aucun rapport d'inclusion entre les ensembles de *scalings* utilisés. Donc, l'avantage de l'une ou l'autre méthode dépend essentiellement du problème.

### 5.4.2 Un exemple multi-objectif

Dorénavant, nous allons traiter une application de type multi-objectif. Ici,  $\delta_1, \delta_2$  sont considérées variables d'interpolation avec la contrainte de normalisation  $|\delta_i| \leq 0.2, i = 1, 2$ . La paire d'entrée-sortie  $(w_{\delta_3}, z_{\delta_3})$  est maintenant regardée comme un transfert de performance  $H_\infty$ , qui est mesurée par  $\gamma$ . La Figure 5.2 montre la courbe de compromis entre la performance  $H_2, \nu$ , de la fonction de transfert entre  $w$  et  $z$ , et la performance  $H_\infty, \gamma$ . Ce résultat a été obtenu en minimisant  $\nu$  soumis aux contraintes LMI et à plusieurs contraintes sur la borne supérieure de  $\gamma$ . En d'autres termes, on a résolu le problème de synthèse

$$\min_{(K, \Delta_K)} \{\nu : \gamma < \bar{\gamma}\} \quad (5.34)$$

pour plusieurs valeurs de  $\bar{\gamma} > 29.6$ , où la valeur minimale 29.6 a été obtenue en résolvant le problème d'optimisation

$$\min_{(K, \Delta_K)} \gamma$$

soumis aux contraintes LMI. La valeur minimale de  $\nu$ , 18.1, correspond à une borne  $\bar{\gamma} \rightarrow \infty$  en (5.34) ou, d'une façon équivalente, à la solution de ce problème sans aucune contrainte sur la performance  $H_\infty$ .

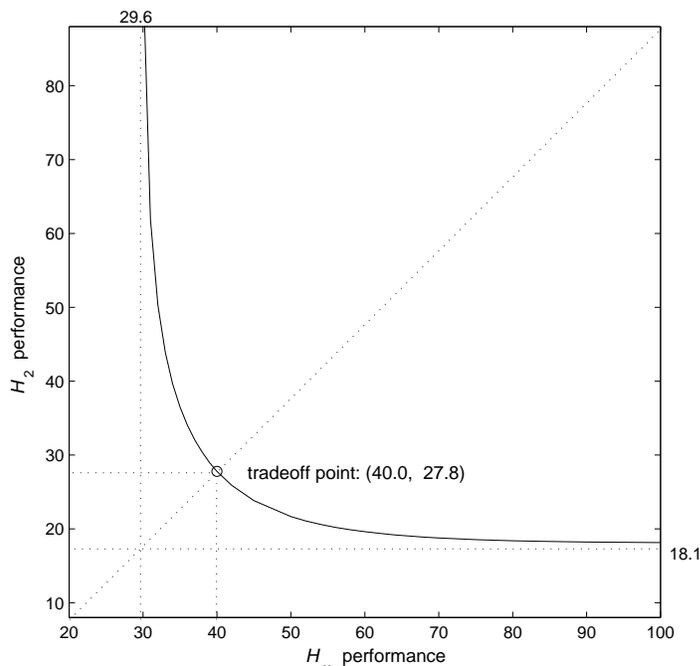


FIG. 5.2 – Courbe de compromis  $H_2/H_\infty$  dans la synthèse LPV

Il convient d'ajouter que, à l'exception de très grandes valeurs des contraintes  $H_\infty$  associées à  $\delta_3$ , le problème devient infaisable lorsque les paramètres  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont considérés comme paramètres incertains plutôt que variables d'interpolation. Cela met en évidence la caractéristique positive de la nature LPV du correcteur. Un point qui fournit un compromis assez satisfaisant entre les critères  $H_2$  et  $H_\infty$  est indiqué à la Figure 5.2.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé une nouvelle méthode de commande LPV multi-canal mixte  $H_2/H_\infty$  en temps discret. Nous avons introduit de nouvelles conditions pour les performances  $H_2$  et  $H_\infty$  de systèmes LPV. Ces conditions sont combinées à des transformations appropriées des données et de la fonction de séquençement du correcteur pour engendrer une description du problème sous forme de programme LMI. Une caractéristique très favorable est que différentes paires de variables de LYAPUNOV et de *scalings* peuvent être utilisées pour chaque spécification et transfert. Le conservatisme est donc immédiatement réduit si l'on compare avec les méthodes précédentes. Le développement d'une extension de cette méthode au cas continu et aux classes plus générales de fonctions de LYAPUNOV ou de *scalings* reste encore délicat et sera à considérer dans des travaux de recherche ultérieurs. Toutefois, dans le Chapitre 6 nous montrerons que des compensateurs continus peuvent être aisément obtenus par cette technique, bien qu'elle ait été développée a priori pour des systèmes en temps discret.

## Chapitre 6

# Applications de la technique de commande LPV multi-canal

UNE attention spéciale est dédiée, dans ce dernier chapitre de la Deuxième Partie, à des questions pratiques sur l'applicabilité de la nouvelle approche LPV développée dans le Chapitre 5 et récemment disponible en [8, 9]. Nous décrivons, dans la partie initiale, les étapes principales d'une synthèse de type multi-objectif et montrons la limitation imposée par le nombre de variables impliquées dans le problème. Dans un deuxième temps, nous montrons que la méthode peut être utilisée pour des systèmes LPV à temps discret ou continu. Une procédure simple de calcul de coordonnées polytopiques en temps réel est aussi discutée. Ensuite, le problème de commande en incidence d'un modèle de missile air-air est revisité en utilisant cette nouvelle méthode. Les résultats de cette application ont été publiés en [73]. Le modèle du missile est caractérisé par une représentation LFT et la conception de l'autopilote est conduite en exploitant les nouvelles capacités de synthèse LPV déjà annoncées : en premier lieu, un ensemble de critères  $H_2/H_\infty$  définis sur de différents transfert est considéré ; deuxièmement, différentes variables de LYAPUNOV et de *scaling* sont utilisées pour chaque canal/spécification pour réduire le conservatisme ; et finalement, la fonction de séquençement du compensateur est construite comme une fonction matricielle affine ayant les mêmes coordonnées polytopiques que celles du paramètre variable. Toutes ces caractéristiques sont examinées et évaluées vis-à-vis du problème de commande du missile. Nous montrons que la méthode offre une flexibilité supplémentaire pour pondérer des critères à la fois exigeants et de nature contradictoire, tout en préservant l'avantage pratique des méthodes LPV précédentes à un seul objectif. Nous montrons également que le correcteur LPV synthétisé accomplit d'une manière très satisfaisante les exigences du cahier des charges pour une large plage de vol. Les résultats du séquençement LPV/LFT sont alors confrontés à ceux obtenus par la méthode de séquençement de structures estimation/commande du Chapitre 3. Finalement, une formulation pour résoudre le problème du suivi d'une dynamique implicite est adaptée aux systèmes LPV dans le contexte de notre technique de type mixte multi-objectif.

## 6.1 Introduction

La contribution de ce chapitre est présentée en cinq parties. Dans la première (Section 6.2), le but est de mettre en relief les étapes principales de synthèse de l'approche du Chapitre 5 et d'adapter ces résultats aux applications envisagées dans ce chapitre. Nous discutons ensuite (Section 6.3) quelques techniques utiles et pratiques pour la discrétisation de systèmes continus et pour le calcul de coordonnées polytopiques. Dans la Section 6.4, nous développons l'application au problème de pilotage automatique du missile, dont le modèle LFT est dérivé dans l'Annexe A. Nous montrons que le caractère multi-objectif/canal de notre méthode LPV est central pour aboutir à de bonnes propriétés de synthèse. La performance temporelle du séquençement LFT est alors comparée à celle obtenue par un séquençement de structures estimation/commande équivalentes issues du gel du paramètre du compensateur LPV/LFT. On verra que cette démarche peut mener à de performance instationnaires comparables aux précédentes, en utilisant un nombre réduit de correcteurs LTI. La Section 6.5 est consacrée au développement d'une méthode alternative aux approches par placement de pôles et par modèle de référence, mieux adaptée aux systèmes LPV et aux problèmes de type multi-critère. Nos réflexions sur les techniques de ce chapitre sont résumées dans la Section 6.6.

## 6.2 Synthèse LPV/LFT multi-objectif

Dans un premier temps, nous allons faire une brève récapitulation de la méthode proposée, de façon à retenir les étapes principales de synthèse<sup>1</sup> et donner une "vue d'ensemble" de l'approche. Quelques formules sont ici répétées pour une meilleure lisibilité.

Nous considérons de nouveau un système à temps discret avec une structure LFT identique à celle de (5.8)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ z_{\Delta}(k) \\ z(k) \\ y(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B_{\Delta} & B_1 & B_2 \\ C_{\Delta} & D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta 1} & D_{\Delta 2} \\ C_1 & D_{1\Delta} & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{2\Delta} & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w_{\Delta}(k) \\ w(k) \\ u(k) \end{bmatrix}, \\ w_{\Delta}(k) &= \Delta(k) z_{\Delta}(k), \end{aligned} \quad (6.1)$$

où  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $\Delta(k) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ ,  $D_{12} \in \mathbf{R}^{p_1 \times m_2}$  et  $D_{21} \in \mathbf{R}^{p_2 \times m_1}$  définissent la dimension du problème. Nous conservons la notation standard pour les signaux :

- $x$  pour le vecteur d'état,
- $w$  pour les entrées exogènes,
- $z$  pour les variables contrôlées ou de performance,
- $u$  pour la commande, et
- $y$  pour la mesure.

---

1. Ces étapes sont peut-être masquées par les développements théoriques plus détaillés – mais certainement nécessaires – du Chapitre 5.

La matrice dépendante du paramètre variable  $\Delta(k)$  est défini en (5.2), évolue dans un ensemble convexe  $\mathcal{P}_\Delta$  avec les sommets en  $\Delta_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ , et a comme coordonnées polytopiques les  $\alpha_i$  définies en (5.29). Ces coordonnées sont calculées en temps réel comme une fonction des variables d'interpolation (Section 6.3) et sont exploitables par le correcteur. D'après ces définitions, le transfert  $T_{w_\Delta z_\Delta}$  est regardé comme un canal de séquençement.

On rappelle le problème de commande à résoudre :

---

**Calculer** un correcteur LPV ayant une structure de séquençement de type LFT de la Figure 5.1 et de l'expression (5.9) :

$$\begin{bmatrix} x_K(k+1) \\ u(k) \\ z_K(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & B_{K1} & B_{K\Delta} \\ C_{K1} & D_{K11} & D_{K1\Delta} \\ C_{K\Delta} & D_{K\Delta 1} & D_{K\Delta\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_K(k) \\ y(k) \\ w_K(k) \end{bmatrix}, \quad A_K \in \mathbf{R}^{n \times n} \quad (6.2)$$

$$w_K(k) = \Delta_K(k)z_K(k), \quad \Delta_K \in \mathbf{R}^{N \times N},$$

**tel que** les spécifications  $H_2$  et/ou  $H_\infty$  soient atteintes pour une famille de transferts  $T_{w_j z_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , où les  $w_j$  et  $z_j$  sont, respectivement, des sous-vecteurs de  $w$  et  $z$ .

---

Autrement dit, des bornes  $\nu_j$  de la variance des sorties  $z_j$  et/ou des bornes  $\gamma_j$  du gain induit  $\mathcal{L}_2$  pour les transferts  $T_{w_j z_j}$  sont garanties pour toutes les trajectoires  $\Delta(k) \in \mathcal{P}_\Delta$ . La variable de séquençement  $\Delta_K$  est une fonction du paramètre du système  $\Delta$ , et sera déterminée au cours de la synthèse.

Pour les applications de ce chapitre, nous considérons la situation spéciale où  $\Delta$  a une structure bloc-diagonale déterminée par un vecteur de paramètres  $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_r)^T$

$$\Delta = \text{diag}(\theta_1 I_{s_1}, \dots, \theta_r I_{s_r}). \quad (6.3)$$

Nous partons aussi du principe que  $\theta$  évolue dans un ensemble borné défini dans le Chapitre 4 comme

$$\theta_i \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i], \quad \underline{\theta}_i < \bar{\theta}_i, \quad \forall i \geq 0. \quad (6.4)$$

Les hypothèses (6.3) et (6.4) signifient :

- le paramètre variable  $\theta$  évolue dans un hyper-rectangle  $\mathcal{P}_\Theta$  de  $\mathbf{R}^r$ , avec

$$\mathcal{P}_\Theta := \text{co} \{ \Theta_1, \dots, \Theta_L \}, \quad (6.5)$$

où les  $\Theta_i$  sont les sommets de  $\mathcal{P}_\Theta$  ;

- $\Delta$  et  $\theta$  ont les mêmes coordonnées polytopiques  $\{\alpha_i\}$  ;
- $L = 2^r$  et  $N = \sum_{l=1}^r s_l$ .

Désormais,  $i$  ( $= 1, \dots, L$ ) indexe les sommets  $\Theta_i$  et  $\Delta_i$ ,  $j$  ( $= 1, 2, \dots$ ) indexe les transferts et spécifications, et  $l$  ( $= 1, \dots, r$ ) indexe les paramètres.

Dans le Chapitre 5 nous avons montré que des conditions suffisantes pour l'existence d'une solution pour le problème de commande LPV multi-canal/objectif peuvent être écrites comme un programme LMI. Le schéma de synthèse général est décrit ci-après.

---

**Algorithme 6.1** Synthèse LPV/LFT multi-objectif
 

---

**Étape 1 :** Définir les variables de décision non symétriques suivantes qui sont communes à toutes les spécifications et tous les canaux (Tableau 6.1) :

- l'ensemble  $\mathbf{S}_v$  des variables auxiliaires ;
- l'ensemble  $\mathbf{K}_v$  des variables transformées du correcteur, dont les dimensions doivent être définies selon les dimensions du correcteur ; et
- l'ensemble  $\Delta_{\mathbf{K}_v}$  des coefficients de la fonction de séquencement  $\Delta_K(\Delta)$ .

**Étape 2 :** Pour chaque canal  $H_2$ , définir l'ensemble  $\mathbf{H}_{2v}$  des variables de décision symétriques suivantes :

- des variables de LYAPUNOV,  $\mathbf{X}_{2j}$  et  $Z_j$  ;
- des variables de *scaling*,  $\mathbf{Q}_{1j}$ ,  $\mathbf{Q}_{2j}$ ,  $\mathbf{R}_{1j}$  et  $\mathbf{R}_{2j}$  ; et
- une variable de performance,  $\nu_j$ .

**Étape 3 :** Pour chaque canal  $H_\infty$ , définir l'ensemble  $\mathbf{H}_{\infty v}$  des variables de décision symétriques suivantes :

- une variable de LYAPUNOV,  $\mathbf{X}_{\infty j}$  ;
- des variables de *scaling*,  $\mathbf{Q}_{\infty j}$  et  $\mathbf{R}_{\infty j}$  ; et
- une variable de performance,  $\gamma_j$ .

**Étape 4 :** Pour chaque canal/spécification, construire le système de contraintes (B.1)-(B.2) de l'Annexe B que nous représentons ici par la notation simplifiée ci-dessous :

- performance  $H_2$  :

$$\text{diag}(\mathcal{L}^{21}, \mathcal{L}^{22}, \mathcal{L}^{23}, -\mathcal{L}^{24}, -\mathcal{L}^{25}) := \mathcal{L}_{H_2}(\mathbf{S}_v, \mathbf{K}_v, \Delta_{\mathbf{K}_v}, \mathbf{H}_{2v}, \Delta_i, P_j) < 0, \quad (6.6)$$

- performance  $H_\infty$  :

$$\text{diag}(\mathcal{L}^{\infty 1}, -\mathcal{L}^{\infty 2}) := \mathcal{L}_{H_\infty}(\mathbf{S}_v, \mathbf{K}_v, \Delta_{\mathbf{K}_v}, \mathbf{H}_{\infty v}, \Delta_i, P_j) < 0, \quad (6.7)$$

où  $P_j$  est l'ensemble de matrices d'espace d'état représentant le système LPV (6.1) avec seulement le canal/spécification  $(w_j, z_j)$  en considération.

(Suite à la page suivante)

---

(Suite de l'Algorithme 6.1)

**Étape 5 :** *Problèmes d'optimisation LMI* - Trois types de problèmes sont envisageables :

- *Synthèse  $H_2$  ou  $H_\infty$  soumise à plusieurs contraintes  $H_2$  ou  $H_\infty$*  - Minimiser une variable de performance spécifique  $\gamma_j$  ou  $\nu_j$ , soumis aux contraintes LMI (6.6) et (6.7), en fixant les variables de performance restantes à un certain ensemble adéquat de valeurs ;
- *Synthèse mixte  $H_2/H_\infty$  pondérée* - Minimiser le critère

$$\sum_j (\alpha_j \gamma_j + \beta_j \nu_j) ,$$

où les  $\alpha_j$  et  $\beta_j$  sont des pondérations scalaires, soumis aux contraintes LMI (6.6) et (6.7), pour tous les transferts ou seulement pour certains, en imposant ou non des contraintes  $\gamma_j < \bar{\gamma}_j$  et/ou  $\nu_j < \bar{\nu}_j$ .

- *Problème de faisabilité* - Calculer simplement une solution faisable pour les contraintes LMI (6.6) et (6.7) en fixant ou en laissant libres certaines (ou toutes les) variables de performance.

**Étape 6 :** Comme il est décrit dans le Paragraphe 5.3.3, calculer les données du compensateur LPV (6.2) qui sont des fonctions des variables de décision (Tableau 6.1) dont les solutions sont obtenues dans l'Étape 5. Il faut bien remarquer que l'ensemble  $\mathbf{K}_v$  (notation en gras) ne représente pas l'ensemble de données du correcteur. La fonction de séquençement est déterminée par

$$\Delta_K(\Delta) := \sum_{i=1}^L \alpha_i \Phi_i, \quad (6.8)$$

où les  $\Phi_i$  sont des fonctions des variables de décision et peuvent être calculés hors ligne, comme il est indiqué par l'expression (5.33).

## Remarque

Nous avons vu que l'introduction de variables matricielles ( $\mathbf{S}_v$ ) et de variables de linéarisation ( $\mathbf{K}_v$ ) permet l'utilisation de multiples fonctions de LYAPUNOV et de *scaling* et aboutit à une caractérisation LMI complète du problème de commande LPV. Le prix à payer pour ces nouvelles possibilités se traduit par un coût calculatoire supplémentaire dans la synthèse, notamment dans le processus d'optimisation de l'Étape 5. En effet, les variables matricielles dont les dimensions dépendent de  $n$  et  $N$  augmentent considérablement la dimension du vecteur de décision global<sup>2</sup> dans le problème LMI (voir le Tableau 6.1) et apparaissent comme une limitation pour des problèmes de grandes dimensions en utilisant les codes de programmation semi-définie disponibles actuellement.

2. Les variables de décision scalaires sont les composantes de ce vecteur.

TAB. 6.1 – Variables de décision

Ensemble	Variables	Dimension	Nombre de variables scalaires
$S_v$	$U, V_{11}, W_{11}$	$n \times n$	$3n^2$
	$M, N, E_{11}, F_{11}, G_{11}, H_{11}$	$N \times N$	$6N^2$
$K_v$	$A_K, B_{K1}, B_{K\Delta}, C_{K1}, C_{K\Delta}, D_{K11}, D_{K1\Delta}, D_{K\Delta1}, D_{K\Delta\Delta}$	Appropriée	$n^2 + N^2 + 2nN + (n + N)(m_2 + p_2) + m_2p_2$
$\Delta_{Kv}$	$\Delta_{K,i}, i = 1, \dots, L$	$N \times N$	$LN^2$
$H_{2v}$	$X_{2j}$	$2n \times 2n$	$n(2n + 1)$
	$Z_j$	$p_{1j} \times p_{1j}$	$p_{1j}(p_{1j} + 1)/2$
	$Q_{1j}, Q_{2j}, R_{1j}, R_{2j}$	$2N \times 2N$	$4N(2N + 1)$
	$\nu_j$	Scalaire	1
$H_{\infty v}$	$X_{\infty j}$	$2n \times 2n$	$n(2n + 1)$
	$Q_{\infty j}, R_{\infty j}$	$2N \times 2N$	$2N(2N + 1)$
	$\gamma_j$	Scalaire	1

### 6.3 Discrétisation et coordonnées polytopiques

Dans cette section, des techniques pour la discrétisation de systèmes à temps continu et pour le calcul de coordonnées polytopiques sont discutées. Elles seront utilisées dans dans les applications des Sections 6.4 et 6.5.

#### 6.3.1 Discrétisation

Alors que des extensions de la méthode précédente pour le cas de temps continu demeurent délicates, elle peut être appliquée aux systèmes continus avec l'aide d'une transformation bilinéaire formelle. Des correcteurs à temps continu peuvent être synthétisés dès que les problèmes  $H_2$  sont correctement posés en temps continu.

La transformation bilinéaire entre le domaine  $s$  et le domaine  $z$

$$\frac{1}{s} = \frac{z + 1}{z - 1} \quad (6.9)$$

peut être écrite dans une forme LFT standard

$$s^{-1}I = I + \sqrt{2}I z^{-1}I (I - z^{-1}I)^{-1} \sqrt{2}I := \mathcal{F}_u(\mathcal{B}, z^{-1}I),$$

où  $\mathcal{F}_u$  est la notation habituelle pour des LFT supérieures et

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} I & \sqrt{2}I \\ \sqrt{2}I & I \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Considérons maintenant un système continu

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \tilde{A}x(t) + \tilde{B}\xi(t) \\ \psi(t) &= \tilde{C}x(t) + \tilde{D}\xi(t), \end{aligned} \quad (6.11)$$

dont la matrice de transfert est

$$\tilde{P}(s) = \tilde{D} + \tilde{C} (sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} := \mathcal{F}_u(\tilde{G}, s^{-1}I), \quad (6.12)$$

avec

$$\tilde{G} := \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix}.$$

Le système discret qui lui correspond est obtenu par

$$P(z) = \mathcal{F}_u\left(\tilde{G}, \frac{z+1}{z-1}I\right) = \mathcal{F}_u(\tilde{G}, \mathcal{F}_u(\mathcal{B}, z^{-1}I)) = \mathcal{F}_u(G, z^{-1}I), \quad (6.13)$$

où

$$G := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \mathcal{F}_u(\tilde{G}, \mathcal{B}) \quad (6.14)$$

représente une réalisation d'espace d'état de  $P(z)$ . Une transformation du domaine  $z$  au domaine  $s$  peut être obtenue d'une façon similaire. Effectivement, un système à temps discret représenté par  $G$  a un système à temps continu correspondant représenté par

$$\tilde{G} = \mathcal{F}_u(G, \tilde{\mathcal{B}}), \quad \tilde{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -I & \sqrt{2}I \\ \sqrt{2}I & -I \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

En supposant que

$$\xi(t) := [w_{\Delta}^T(t), w^T(t), u^T(t)]^T \quad \text{et} \quad \psi(t) := [z_{\Delta}^T(t), z^T(t), y^T(t)]^T \quad (6.16)$$

dans le système (6.11), un système discret correspondant de la forme (6.1) est aisément obtenu en appliquant la transformation bilinéaire (6.14). Dès que des problèmes  $H_2$  sont correctement formulés dans le domaine de temps continu, la méthodologie décrite dans la section précédente peut être appliquée au système transformé sans restrictions. Pour que l'indice  $\nu_j$  de performance  $H_2$  soit bien défini en temps continu, les données en espace d'état doivent être telles que le terme de transmission directe en boucle fermée du transfert/spécification  $j$  soit nul. Sans imposer de restrictions au correcteur, ceci est accompli dès que

$$\tilde{D}_{11j} = 0 \quad (6.17)$$

et, ou l'un ou l'autre,

$$\tilde{D}_{1\Delta j} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{D}_{12j} = 0 \quad (6.18)$$

ou

$$\tilde{D}_{\Delta 1j} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{D}_{21j} = 0. \quad (6.19)$$

Il s'avère que des transformations bilinéaires appliquées à des fonctions de transfert rationnelles strictement propres produisent des fonctions de transfert non strictement propres. Il suffit de vérifier, par exemple, le cas d'une intégration pure en (6.9). Cependant, il n'y a pas de restrictions sur les matrices de transmission directe pour définir des spécifications  $H_2$  en temps discret et la méthode du Chapitre 5 reste applicable.

Une fois qu'un compensateur LFT à temps discret a été calculé, on peut utiliser la transformation (6.15) pour retrouver un correcteur à temps continu qui lui correspond. Il convient d'ajouter que seulement les composants LTI du système LFT et du correcteur LFT sont modifiés par ces transformations, alors que les blocs  $\Delta$  et  $\Delta_K$  demeurent inchangés.

Finalement, la mise en œuvre directe d'un correcteur discret pour un système continu doit tenir compte d'une étude préalable pour le choix d'une fréquence d'échantillonnage adéquate  $f_s := 1/T_s$ . Le temps d'échantillonnage  $T_s$  doit être tel qu'il n'y ait des pertes considérables d'information, ni du signal  $y(t)$ , ni du paramètre  $\theta(t)$ . Une fois que  $T_s$  a été déterminé, on peut utiliser une nouvelle transformation bilinéaire définie par

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} I & \sqrt{T_s}I \\ \sqrt{T_s}I & \frac{T_s}{2}I \end{bmatrix},$$

qui correspond à une discrétisation de type "approximation trapézoïdale" de la dynamique mesurée, à la place de (6.10) en (6.14).

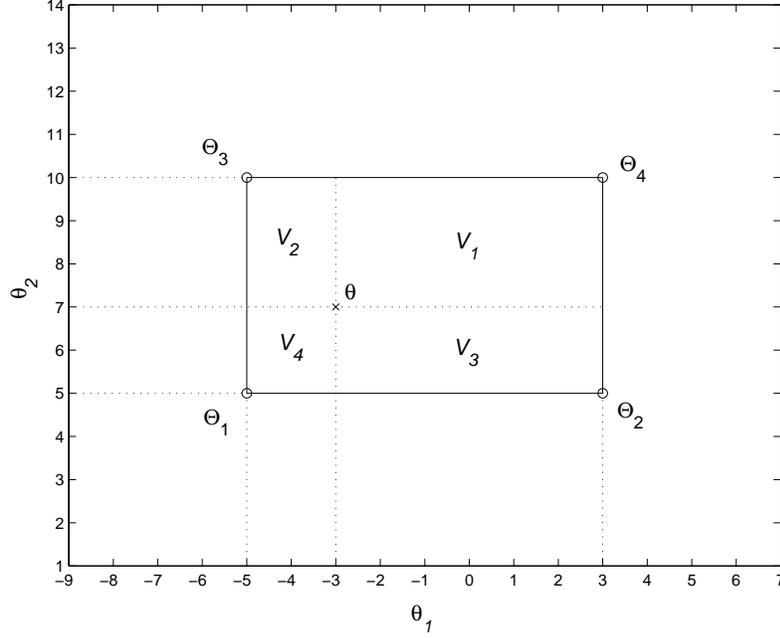
### 6.3.2 Coordonnées polytopiques et hypercubes

Les systèmes de commande modernes, particulièrement les système de pilotage dans le domaine aéronautique, subissent des trajectoires de plus en plus délicates qui exigent une mise à jour rapide du correcteur. Les compensateurs conçus par des techniques LPV générales basées sur un quadrillage de l'espace paramétrique, comme celles dans [11, 105, 5] et les raffinement présentés dans le Chapitre 4 de ce mémoire, sont peu conservatifs, mais ils exigent des calculs beaucoup plus complexes en ce qui concerne l'interpolation. À l'opposé, les compensateurs LPV/LFT sont souvent plus conservatifs mais leurs structures de type LFT sont plus favorables aux ajustements en ligne et offrent des avantages évidents en ce qui concerne la mise en œuvre. On sait déjà que, en comparaison avec les méthodes de commande LPV/LFT mono-objectif  $H_\infty$  [6, 65], l'approche multi-objectif mixte  $H_2/H_\infty$  précédente permet de considérer une classe plus riche de fonctions de séquençement (6.8), au lieu de reproduire le bloc paramétrique du système. Par ailleurs, ceci est un autre facteur qui réduit le conservatisme et qui est pénalisé directement par une augmentation de complexité des calculs en temps réel. Par conséquent, des algorithmes rapides pour l'obtention des coordonnées polytopiques sont nécessaires pour surmonter cette difficulté .

Pour un paramètre qui évolue dans un hyper-rectangle, les coordonnées barycentriques peuvent être calculées d'une façon directe et rapide en utilisant des rapports d'hyper-volumes. Considérons l'exemple à deux dimensions représenté à la Figure 6.1, où  $\theta_1 \in [-5, 3]$  et  $\theta_2 \in [5, 10]$ . Les sommets du rectangle représentatif du domaine d'évolution du paramètre sont

$$\{\Theta_1, \dots, \Theta_4\} = \{[-5, 5]^T, [3, 5]^T, [-5, 10]^T, [3, 10]^T\}.$$

Un point  $\theta$  quelconque dans ce domaine peut être utilisé pour définir des sous-rectangles dont les surfaces sont  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Notons que  $V_i$  correspond au sous rectangle opposé

FIG. 6.1 – *Domaine paramétrique dans l'espace  $\mathbf{R}^2$* 

à  $\Theta_i$ . Les coordonnées polytopiques de  $\theta$  sont donc calculées en termes des rapports entre chaque surface  $V_i$  et la surface totale  $V = \sum_{i=1}^4 V_i$ . Cela veut dire que

$$\alpha_i = \frac{V_i}{V}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad \text{with} \quad \theta = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \Theta_i.$$

Pour exemple, le point  $\theta = [-3, 7]^T$  peut être représenté par ses coordonnées polytopiques

$$\alpha = \left[ \frac{18}{40}, \frac{6}{40}, \frac{12}{40}, \frac{4}{40} \right]^T = [0.45, 0.15, 0.3, 0.1]^T.$$

L'algorithme suivant étend cette procédure pour des hyper-rectangles généraux (6.4) avec des sommets en (6.5) :

---

**Algorithme 6.2** Calcul de coordonnées polytopiques
 

---

**Étape 1 :** Étant donné un paramètre  $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_r)^T$ , calculer ses coordonnées rectangulaires normalisées

$$\vartheta_l := \frac{(\bar{\theta}_l - \theta_l)}{(\bar{\theta}_l - \underline{\theta}_l)}, \quad l = 1, \dots, r.$$

**Étape 2 :** Pour chaque sommet  $\Theta_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ , calculer les coordonnées polytopiques qui leur correspondent

$$\alpha_i = \prod_{l=1}^r \tilde{\vartheta}_l, \quad \text{où} \quad \tilde{\vartheta}_l = \begin{cases} \vartheta_l, & \text{si } \frac{\theta_l}{\bar{\theta}_l} \text{ est une coordonnée de } \Theta_i; \\ 1 - \vartheta_l, & \text{si } \frac{\theta_l}{\underline{\theta}_l} \text{ est une coordonnée de } \Theta_i. \end{cases}$$


---

D'après ce résultat, on conclut que le calcul des coordonnées polytopiques à partir des coordonnées rectangulaires mesurées n'est pas une procédure coûteuse. En réalité, il peut être exécuté promptement en temps réel au moyen d'opérations simples qui consistent essentiellement en  $(r)$  normalisations scalaires et en  $(Lr - L)$  multiplications scalaires.

Dans le Paragraphe 5.3.2, nous avons mis en lumière l'intérêt pratique de transformer un domaine paramétrique du type hyper-rectangle en un hypercube centré en 0: le nombre de variables matricielles  $\Delta_{\mathbf{K},i}$  dans le problème d'optimisation et le nombre de contraintes LMI indexées par  $i$  en (6.6) et (6.7) peuvent être réduits de moitié. S'il est certain qu'une réduction du nombre de variables de décision et de contraintes est d'une importance capitale dans l'étape de synthèse, surtout pour des problèmes où la dimension  $N$  du paramètre  $\Delta$  est considérable, il n'en reste pas moins vrai qu'il serait également intéressant si l'on pouvait diminuer aussi l'effort calculatoire en temps réel. Il s'avère qu'une deuxième conséquence favorable peut être obtenue si l'on considère un domaine paramétrique normalisé et centré en l'origine: en vertu de la linéarité des matrices  $\Phi_i$  par rapport à  $\Delta_i$  et à  $\Delta_{\mathbf{K},i}$  en (6.8) et (5.32), elles jouissent des mêmes propriétés que  $\Delta_{\mathbf{K},i}$  et seulement la moitié d'entre elles doit être stockée pour l'interpolation. Autrement dit, les matrices  $\Phi_i$  associées à des points opposés sont elles aussi opposées les unes aux autres et s'excluent mutuellement en valeurs absolues. Puisque le polytope matriciel  $\mathcal{P}_\Delta$  est ici considéré comme un hyper-rectangle, nous pouvons donc nous prévaloir de tous ces avantages.

En effet, un hyper-rectangle quelconque peut être transformé en un hypercube centré en 0 par translation et homothétie. Il est facile de montrer que pour tout paramètre en (6.4) défini comme

$$\theta'_l = (S_l)\theta_l + T_l, \quad (6.20)$$

avec l'homothétie  $S_l$  et la translation  $T_l$  donnés, respectivement, par

$$S_l = \frac{\bar{\theta}'_l - \theta'_l}{2} \quad \text{et} \quad T_l = \frac{\bar{\theta}'_l + \theta'_l}{2},$$

un paramètre correspondant

$$\theta_l = \frac{\theta'_l - T_l}{S_l} \quad (6.21)$$

varie entre  $-1$  et  $1$ . Puisque  $\Delta$  est diagonale et linéaire en  $\theta_l$ , on peut déduire de (6.20) et (6.21):

$$\Delta' z_\Delta = S \Delta z_\Delta + T z_\Delta \quad \text{ou} \quad w'_\Delta = S w_\Delta + T z_\Delta, \quad (6.22)$$

où

$$\begin{aligned} \Delta' &= S \Delta + T = \text{diag}(\theta'_1 I_{s_1}, \dots, \theta'_r I_{s_r}), \\ S &= \text{diag}(S_1 I_{s_1}, \dots, S_r I_{s_r}) \quad \text{et} \quad T = \text{diag}(T_1 I_{s_1}, \dots, T_r I_{s_r}). \end{aligned}$$

L'équation (6.22) est représentée graphiquement par les interconnexions indiquées à la Figure 6.2. La LFT  $\mathcal{F}_u(P'(s), \Delta')$ , où  $\Delta'$  évolue dans un hyper-rectangle quelconque, peut ainsi être transformée en la LFT  $\mathcal{F}_u(P(s), \Delta)$ , où toutes les trajectoires du paramètre se trouvent dans un hypercube centré en l'origine. En fait,  $\Delta$  dépend de  $\theta$  qui a des coordonnées  $\theta_l \in [-1, 1]$ .

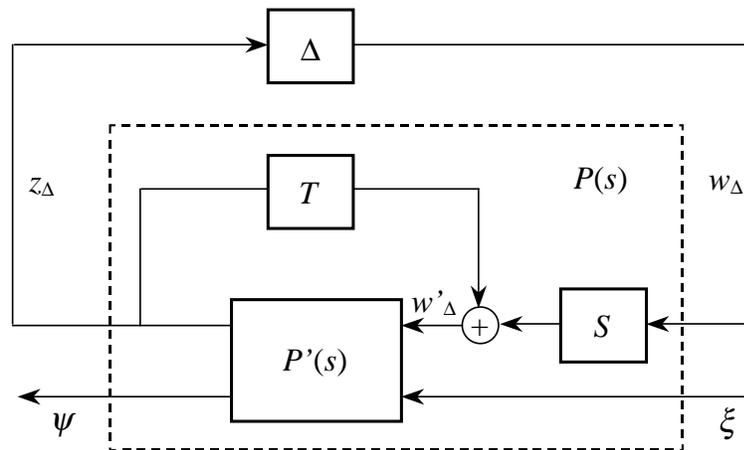


FIG. 6.2 – Interconnexions de translation et de scaling

## 6.4 Problème de commande d'un missile

Les techniques classiques de séquençement de compensateurs et la théorie de commande LPV ont été aussi largement utilisées pour la synthèse d'autopilotes de missiles [75, 84, 93, 95, 88, 104, 16, 39, 97]. Malgré ces efforts, le problème de commande de missiles reste complexe puisque des spécifications de performance sévères sont généralement prescrites sur un large domaine de vol pour des modèles fortement non linéaires. Il est donc nécessaire de réaliser un ajustement en temps réel rapide du correcteur pour atteindre la performance souhaitée. Cela peut être très restrictif pour la mise en œuvre d'une loi de séquençement issue directement d'une technique classique puisque, en général, une grande quantité de correcteurs LTI est requise pour assurer une performance non stationnaire satisfaisante. Dans le cadre LPV, le séquençement de type LFT est relativement plus simple, d'où l'avantage pratique de son utilisation dans ce genre de problème.

La technique développée dans le Chapitre 5 possède à la fois l'aptitude de traiter les problèmes LFT multi-objectif/transfert et de garder la nature LPV du correcteur. Cette possibilité nouvelle ne faisait pas partie des attributs des approches LPV développées auparavant. Un autre aspect important à souligner est que l'avantage pratique de la dépendance LFT du correcteur est associé au fait que le conservatisme est maintenu dans un niveau acceptable. Ces propriétés sont très utiles pour la commande de systèmes dans le domaine aéronautique. On discute ici l'applicabilité de cette méthodologie au problème réaliste de synthèse d'un autopilote de missile. Nous nous servons des outils présentés dans les Sections 6.2 et 6.3. Une attention spéciale est portée sur la construction du correcteur et sur sa mise en œuvre qui sont d'une importance prioritaire dans ce problème.

La nature du problème de séquençement d'un pilote automatique est similaire à celle

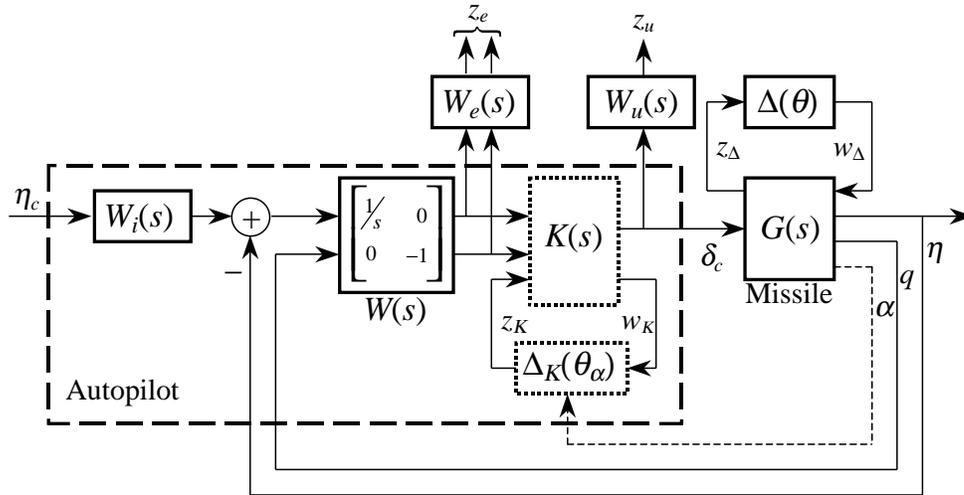


FIG. 6.3 – Structure de commande et interconnexions de synthèse

considérée dans les Chapitres 3 et 4. Le modèle représentant la dynamique du missile et de l'actionneur est celui de (A.1) de l'Annexe A. Cette dynamique peut être paramétrée par  $\theta(t) = [\alpha(t), M(t)]^T$ . Le nombre de Mach  $M(t)$  est une variable exogène qui est traitée ici comme une incertitude. Nous considérons que seulement la variable d'état  $\alpha(t)$  est disponible pour le séquençage. En fait, le transfert du paramètre peut être partagé en deux canaux en définissant  $z_\Delta := [z_\alpha^T, z_M^T]^T$  et  $w_\Delta := [w_\alpha^T, w_M^T]^T$ . Dû à la symétrie du missile par rapport à  $\alpha = 0$ , les compensateurs sont conçus pour  $\alpha \geq 0$  et séquençés en  $|\alpha|$ .

### 6.4.1 Structures de synthèse et de commande et objectifs de performance

Les spécifications de robustesse en performance et en stabilité pour le système bouclé sont similaires à celles de [104, 64]. Le but est d'assurer la stabilité et la performance de l'engin pour toutes les valeurs prises par l'incidence et la vitesse sur leurs domaines de fonctionnement,  $\alpha \in [-30, 30]$  degrés et  $M \in [2, 4]$ . Les objectifs de robustesse en performance sont liés au suivi de consigne pour l'accélération normale  $\eta_c(t)$ . Il est exigé que la réponse à un échelon ait un temps de réponse meilleur que 0.35s, un dépassement maximal de 10% et une précision de 1% en régime permanent. Pour faire face aux bruits de mesures et aux incertitudes fréquentielles<sup>3</sup>, les hautes fréquences doivent être convenablement atténuées par le compensateur pour des valeurs figées des paramètres. Pour éviter la saturation des actionneurs, la valeur maximale de la vitesse de déflexion de l'empennage pour un échelon de 1g en  $\eta_c$ , ne doit pas excéder 25°/s.

La Figure 6.3 montre la structure de commande et de synthèse utilisée dans cette

3. Des dynamiques de haute fréquence négligées et des modes flexibles.

application. Le modèle LFT du missile

$$G_{\Delta}(s, \theta) = \mathcal{F}_u(G(s), \Delta(\theta))$$

est dérivé de (A.1) et de (A.2) (Annexe A). Pour utiliser l'approche discutée dans ce chapitre, nous exprimons les objectifs de performance en choisissant des fonctions de pondération appropriées. Le pré-compensateur  $W_i(s)$  est utilisé pour bloquer les changements rapides de la consigne, évitant la saturation de l'actionneur. Les fonctions de pondération  $W(s)$  et  $W_e(s) := \text{diag}(W_e'(s), 0.01)$  pénalisent l'erreur de précision en régime permanent et  $W_u(s)$  incorpore des bornes aux normes des dynamiques non modélisées et des restrictions sur l'amplitude de la commande. Contrairement à  $W_e(s)$  et  $W_u(s)$  qui ne sont utilisés que pour le modèle de synthèse, les filtres  $W_i(s)$  et  $W(s)$  sont implantés dans la structure de commande.

Ainsi, les spécifications précitées peuvent être satisfaites par un compensateur  $K(s)$  avec la fonction de séquencement  $\Delta_K(\theta_\alpha)$  qui :

- minimise le gain  $\mathcal{L}_2$ -induit  $\gamma_M$  de l'application de  $z_M$  vers  $w_M$  (robustesse par rapport à  $M$ ),
- maintient la variance de  $z_e$  due à des perturbations en  $\eta_c$  en dessous d'une borne appropriée  $\nu_e$ , et
- garantit une borne supérieure  $\gamma_u$  du gain  $\mathcal{L}_2$ -induit de l'application  $\eta_c$  sur  $z_u$ ,

pour toutes les trajectoires  $\alpha(t) \in [-30, 30]$  degrés.

Ce problème peut être résolu en exécutant l'Algorithme 6.1 et consiste à trouver un compromis raisonnable entre trois objectifs de nature contradictoire, sur une large plage de vol : un critère  $H_2$  et deux spécifications  $H_\infty$ . Notons qu'un tel problème ne peut pas être résolu par les méthodologies LPV développées auparavant pour des systèmes avec une dépendance LFT du paramètre.

Le modèle de synthèse à temps discret  $P(z)$  et le compensateur final à temps continu  $K(s)$  sont calculés en utilisant les transformations bilinéaires, respectivement, à partir de  $P(s)$  et du correcteur synthétisé  $K(z)$ , comme il est indiqué dans le Paragraphe 6.3.1.

Le modèle de synthèse continu  $P(s)$ , obtenu aisément par les connexions schématisées à la Figure 6.3, englobe le modèle du missile  $G(s)$  et les fonctions de pondérations,  $W_i(s)$ ,  $W(s)$ ,  $W_e(s)$ ,  $W_u(s)$ . Ces pondérations fréquentielles ont été réglées (par essais/erreurs) en exécutant quelques synthèses et simulations pour le système nominal. Autrement, un modèle LTI obtenu par le "gel" du paramètre au point central  $\theta = [0, 0]^T$ , ( $\alpha = 15$ ,  $M = 3$ ), et un compromis approprié entre  $\nu_e$  et  $\gamma_u$  ont guidé la sélection des pondérations. Ce réglage a été mené en utilisant la même méthodologie de synthèse décrite dans la Section 6.2 avec  $\Delta = 0$ . On peut vérifier, à la Figure 6.4, que les profils fréquentiels des fonctions de pondérations sont relativement classiques. Leurs représentations en espace

d'état sont données ci-après :

$$\begin{aligned}
 W_i(s) &: \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.0 & 1.0 \\ 14.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \eta_c \end{bmatrix}, \\
 W_e'(s) &: \begin{bmatrix} \dot{x}_{e1} \\ \dot{x}_{e2} \\ z_{e1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -138.42 & -604.32 & 128.0 \\ 16.00 & 0.00 & 0.00 \\ 2.142 & 193.12 & 0.106 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \\ u_{e1} \end{bmatrix}, \\
 W_u(s) &: \begin{bmatrix} \dot{x}_{u1} \\ \dot{x}_{u2} \\ z_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.9132e+5 & -4.923e+6 & 2.0972e+6 \\ 8192.0 & 0.00 & 0.00 \\ -1.2742e+5 & -2.154e+6 & 9.1757e+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{u1} \\ x_{u2} \\ \delta_c \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

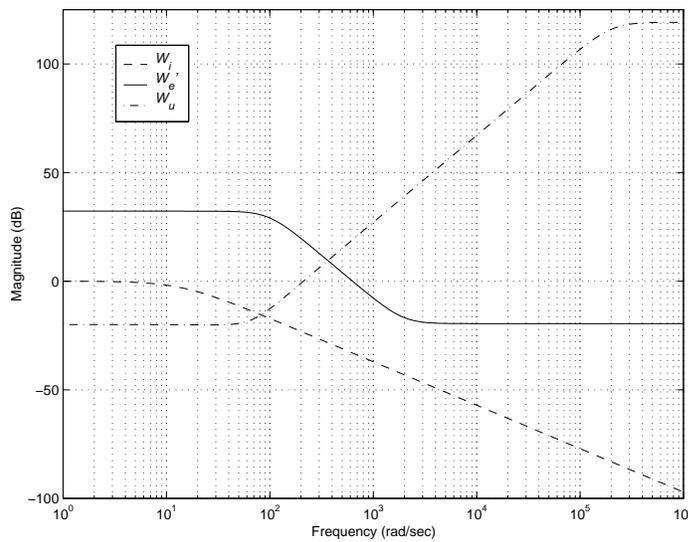


FIG. 6.4 – Réponses fréquentielles des fonctions de pondérations

## 6.4.2 Résultats et simulations

Afin de mettre en évidence les capacités de la méthode LPV utilisée et permettre des comparaisons, nous avons considéré deux conceptions. Le premier compensateur LPV,

$$K_{\Delta_1}(s, \theta) = \mathcal{F}_l(K_1(s), \Delta_{K_1}(\theta_\alpha)),$$

a été conçu en considérant  $M$  comme une constante ( $= 3$ ); le second,

$$K_{\Delta_2}(s, \theta) = \mathcal{F}_l(K_2(s), \Delta_{K_2}(\theta_\alpha)),$$

considère  $M$  comme un paramètre incertain borné ( $M \in [2, 4]$ ). En somme, nous avons utilisé la stratégie suivante pour le calcul de ces compensateurs :

- $K_{\Delta_1}(s, \theta)$  :
  - Synthétiser des compensateurs qui minimisent la performance  $H_\infty$ ,  $\gamma_u$ , soumis à des contraintes  $H_2$ ,  $\sqrt{\nu_e}$ . Commencer par de petites valeurs de  $\nu_e$ .

- Trouver un compromis raisonnable entre ces objectifs en appliquant des relaxations successives sur  $\nu_e$ . Pour vérifier si un bon équilibre a été atteint, exécuter des simulations non stationnaires ( $\alpha(t)$ ) et non linéaires pour  $M = 3$  et pour chaque synthèse et évaluer la performance en boucle fermée dans le domaine du temps.
- $K_{\Delta_2}(s, \theta)$  :
  - De façon similaire à  $K_{\Delta_1}(s, \theta)$ , minimiser  $\gamma_M$  soumis à des contraintes  $\gamma_u$  et  $\nu_e$ .
  - En initialisant avec les valeurs finales de  $\gamma_u$  et  $\nu_e$ , obtenues dans la synthèse de  $K_{\Delta_1}(s, \theta)$ , les relâcher alternativement de façon à trouver un équilibre adéquat entre les trois critères.

Il faut ajouter que la représentation LFT du missile dérivée dans l'Annexe A n'est pas minimale par rapport à l'incidence  $\alpha$ . En effet, le bloc  $\Delta$  peut être réduit de l'ordre 12 à l'ordre 10 ( $\Delta = \text{diag}(\theta_\alpha I_4, \theta_M I_6)$ ) sans aucune perte de précision dans le modèle. Nous avons donc utilisé les techniques numériques basées sur des conditions de gouvernabilité et observabilité et sur des décompositions de valeurs singulières proposées en [23, 17] pour obtenir une telle représentation LFT minimale.

Un autre aspect important à considérer est la présence possible de dynamiques rapides dans le correcteur synthétisé. Remarquons que, dans notre exemple, le modèle de synthèse  $P(s)$  est d'ordre 10 et engendre des compensateurs  $K_\Delta(s, \theta) = \mathcal{F}_l(K(s), \Delta_K(\theta_\alpha))$  de même ordre et, par conséquent, des autopilotes d'ordre 12 (voir Figure 6.3). Pour cette application, la composante LTI,  $K(s)$ , des correcteurs LPV obtenus, est stable mais présente des modes très rapides, gênants pour la mise en œuvre.  $K(s)$  est donc décomposé en la somme de deux sous-systèmes : un sous-système de dynamique rapide, représenté par les matrices d'état

$$(A_f, B_f, C_f, 0), \quad (6.24)$$

et l'autre de dynamique lente, représenté par

$$(A_s, B_s, C_s, D_s). \quad (6.25)$$

La partie de dynamique rapide peut être approchée par un gain statique de la forme d'une matrice de transmission directe

$$D_f = -C_f(A_f)^{-1}B_f. \quad (6.26)$$

Par conséquent,  $K(s)$  a comme représentation d'état

$$(A_s, B_s, C_s, D_s - D_f). \quad (6.27)$$

En adoptant cette procédure après la synthèse, le correcteur continu final  $K_{\Delta_2}(s, \theta)$  est d'ordre 7 et a la forme (6.2) décrite par les données en espace d'état et la fonction de

séquencement suivantes :

$$A_{K_2} = \begin{bmatrix} -35.369 & -164.39 & 0.3279 & -29.321 & -48.583 & -4.6766 & 0.6184 \\ 164.48 & -96.323 & 7.2159 & -37.636 & -136.86 & -10.861 & 1.3651 \\ 0.2290 & -7.1549 & -0.0112 & 0.4713 & 0.6386 & 0.0497 & -0.0040 \\ 29.701 & -39.039 & -0.5076 & -18.542 & -112.53 & -7.3457 & 0.9094 \\ -48.626 & 137.32 & 0.5342 & 113.98 & -307.74 & -54.307 & 7.4718 \\ -5.0085 & 11.760 & 0.0613 & 7.9718 & -58.257 & -99.534 & 67.391 \\ -1.7821 & 4.1619 & 0.0240 & 2.8059 & -21.310 & -87.785 & -49.757 \end{bmatrix},$$

$$B_{K_2} = \begin{bmatrix} 956.21 & -4.4202 & | & 0.0001 & 0.00003 & -0.0004 & 0.0062 \\ -1114.6 & 6.3520 & | & 0.0006 & 0.0007 & -0.0008 & 0.0164 \\ -4.9757 & 10.074 & | & 0.0031 & 0.0046 & 0.0028 & -0.0271 \\ -317.93 & -1.4891 & | & -0.0014 & -0.0017 & 0.0018 & -0.0392 \\ 697.47 & -3.5028 & | & -0.0002 & -0.0002 & 0.0003 & -0.0063 \\ 67.814 & -0.7953 & | & 0.0002 & 0.0002 & -0.0003 & 0.0067 \\ 24.080 & -1.4741 & | & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0004 \end{bmatrix},$$

$$C_{K_2} = \begin{bmatrix} 17.078 & -39.016 & 0.4518 & -18.593 & 39.561 & 9.7018 & -2.9175 \\ -34.502 & -49.971 & -6.2874 & -50.521 & -25.923 & -6.3236 & 1.1467 \\ -108.53 & -141.61 & -4.6665 & -72.008 & -81.963 & 0.6421 & -11.448 \\ 944.96 & 1098.2 & -6.1213 & 304.84 & 687.50 & 65.171 & -11.355 \\ 90.247 & 111.18 & -5.2219 & 8.2498 & 69.762 & -14.754 & 17.669 \end{bmatrix},$$

$$D_{K_2} = \begin{bmatrix} 0.6781 & -0.0031 & | & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ -211.02 & 0.5030 & | & 0.0381 & -0.0221 & -0.0099 & -0.2526 \\ -167.65 & 0.6268 & | & 1.2180 & -0.0884 & 0.0027 & 0.0710 \\ -1067.8 & 1.4150 & | & -0.4489 & 0.1926 & -0.4524 & 11.267 \\ -179.32 & 0.0247 & | & -0.0355 & 0.0109 & 0.0103 & 0.0097 \end{bmatrix},$$

et

$$\Delta_{K_2}(\Delta) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \Phi_i,$$

où

$$\Phi_1 = -\Phi_2 = \begin{bmatrix} -0.8162 & -0.0536 & -0.0310 & -0.4511 \\ -0.0921 & -0.9155 & -0.0556 & -0.4774 \\ -0.0715 & 0.0268 & -0.8941 & -0.5415 \\ -0.0049 & 0.0017 & 0.0096 & -0.9759 \end{bmatrix}$$

et  $\alpha_1, \alpha_2$  sont calculés en temps réel en utilisant l'Algorithme 6.2.

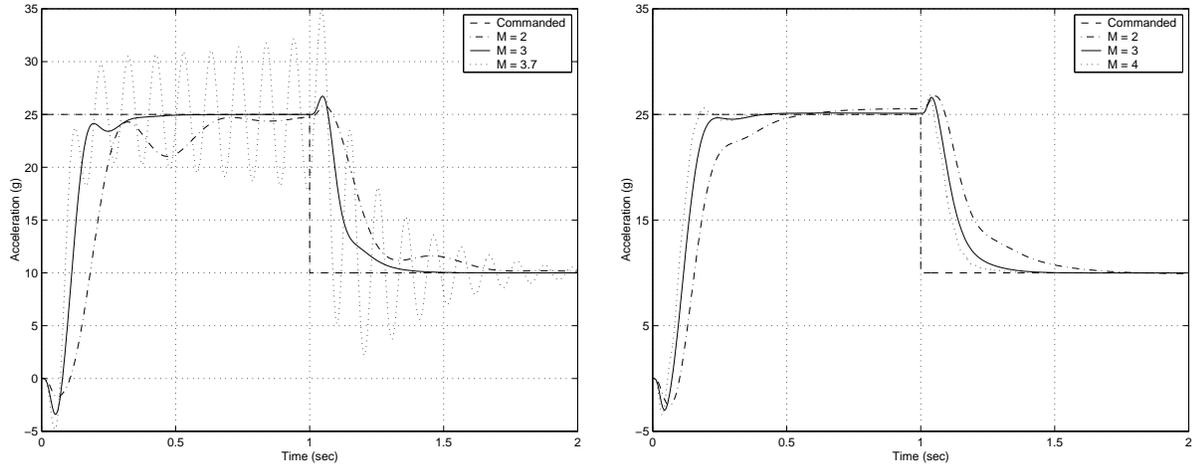
TAB. 6.2 – Performances  $H_2$  et  $H_\infty$

Contr.	$\sqrt{\nu_e}$	$\gamma_u$	$\gamma_M$
$K_{\Delta_1}(s, \theta)$	6.0	0.85	–
$K_{\Delta_2}(s, \theta)$	15.0	3.0	6.56

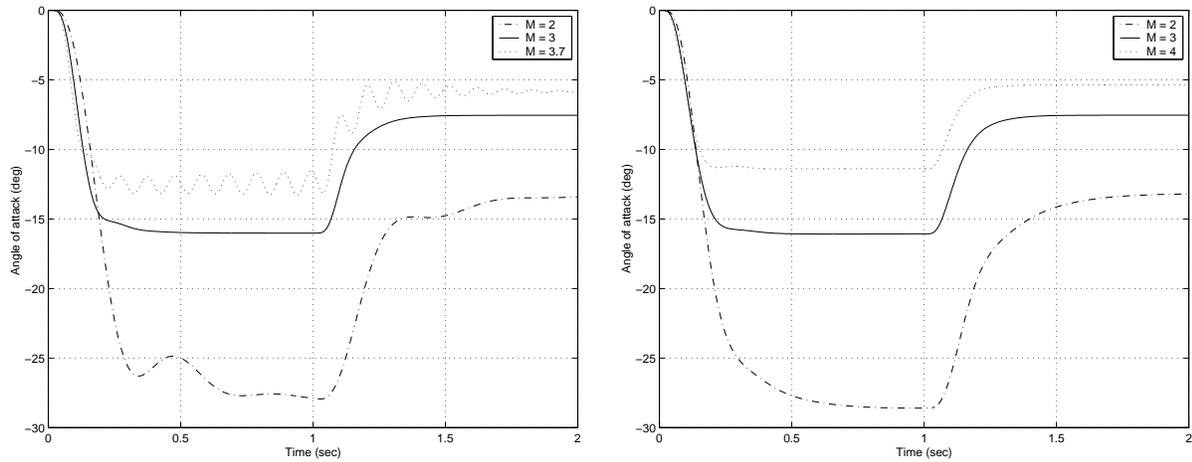
Le Tableau 6.2 présente les valeurs de performance  $H_2$  and  $H_\infty$  pour les deux compensateurs LPV synthétisés. Les résultats des simulations non linéaires pour des valeurs fixes de  $M$  sont illustrés par la Figure 6.5. Tous les objectifs de performances sont satisfaits pour toutes les trajectoires quand  $K_{\Delta_2}(s, \theta)$  est utilisé pour la commande. Par contre, le comportement souhaité en boucle fermée n'est atteint qu'au point central ( $M = 3$ ) pour  $K_{\Delta_1}(s, \theta)$ . Nous rappelons que  $K_{\Delta_2}(s, \theta)$  a été conçu de façon à assurer la robustesse aux variations du nombre de Mach, en prenant en compte une contrainte  $H_\infty$  supplémentaire sur le transfert  $T_{w_M z_M}$ . Ce résultat met en évidence les avantages de la nature multi-objectif de cette méthode de synthèse LPV.

La Figure 6.6 montre les simulations non linéaires pour la vitesse  $M(t)$  variant dans le temps. La consigne pour l'accélération normale  $\eta_c$  est une séquence d'échelons dont les amplitudes ont été choisies pour que la trajectoire du paramètre  $\alpha$  couvre une grande partie de son domaine de variation, donc de façon à produire des variations considérables des coefficients aérodynamiques. Comme en [64, 104], la trajectoire du nombre de Mach dans le temps a été générée par (A.3) avec  $M(0) = 4$ . Ces simulations corroborent les résultats ci-dessus relatifs au correcteur  $K_{\Delta_2}(s, \theta)$ .

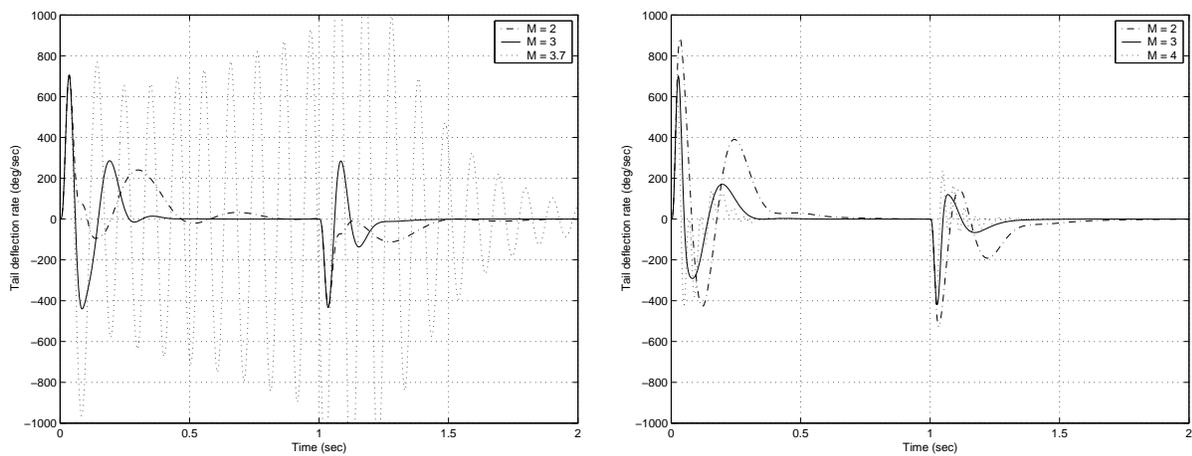
Finalement, on peut vérifier aux Figures 6.7 et 6.8, que la réduction du gain du compensateur aux hautes fréquences et la contrainte de saturation des actionneur sont respectées pour le point central ( $\Delta_K = 0$ ) en utilisant le correcteur  $K_{\Delta_2}(s, \theta)$ .



(a) - Accélération,  $\eta(t)$



(b) - Angle d'incidence,  $\alpha(t)$



(c) - Vitesse de déflexion de l'empennage,  $\dot{\delta}(t)$

FIG. 6.5 – Simulations non linéaires en boucle fermée pour des valeurs fixes de  $M$  :  $K_{\Delta_1}(s, \theta)$  à gauche et  $K_{\Delta_2}(s, \theta)$  à droite

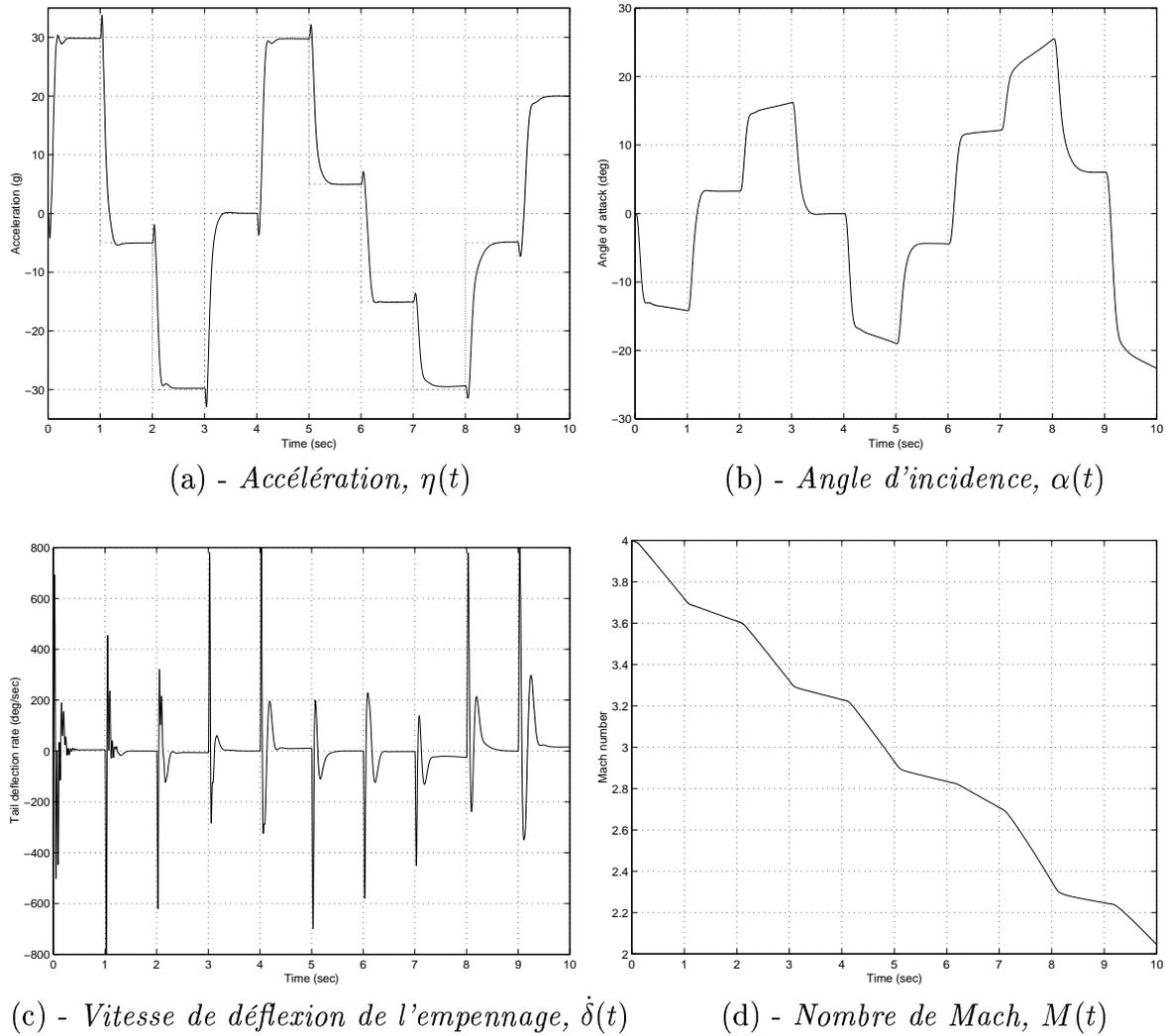


FIG. 6.6 – Simulations non linéaires en boucle fermée en utilisant  $K_{\Delta_2}(s, \theta)$ , pour  $M$  variant dans le temps

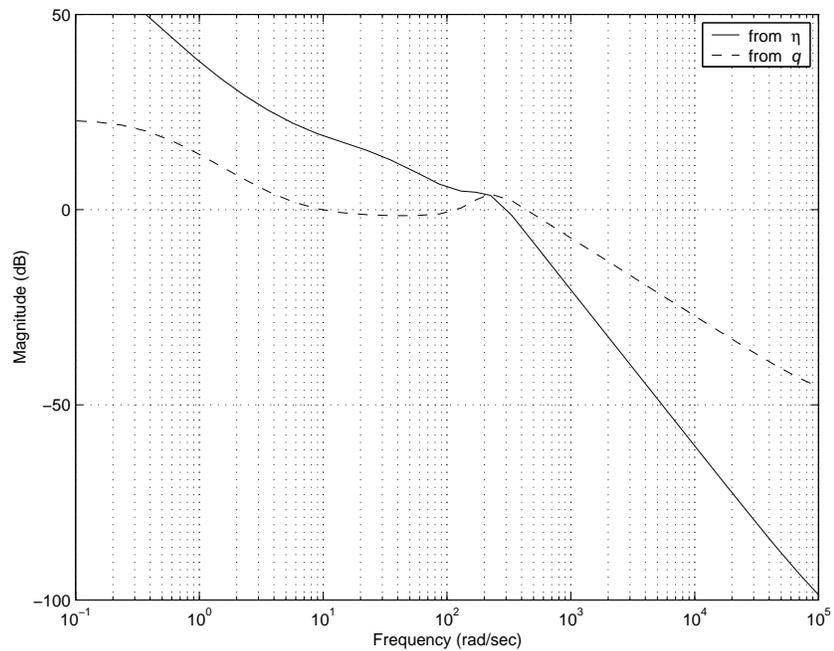


FIG. 6.7 – Réponse fréquentielle du compensateur  $K_2(s)W(s)$

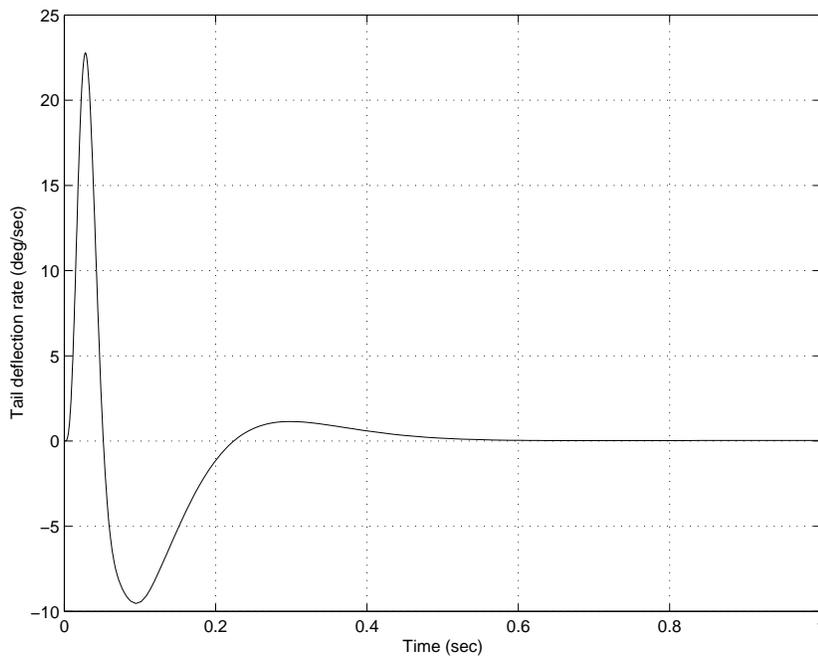


FIG. 6.8 – Réponse non linéaire en boucle fermée pour un échelon de 1g en  $\eta_c$  – Vitesse de déflexion de l'empennage,  $\dot{\delta}(t)$ , pour  $K_{\Delta_2}(s, \theta)$  avec  $\Delta_K = 0$  ( $\alpha = 15$ ,  $M = 3$ )

### 6.4.3 Séquencement de structures estimation/commande

La performance dans le temps pour le séquencement LPV/LFT de  $K_{\Delta_2}(s, \theta)$  est ici comparée à celle obtenue par un séquencement de structures estimation/commande équivalentes. Ces structures sont construites en appliquant l'approche présentée dans le Chapitre 3 sur un ensemble de compensateurs LTI. Cet ensemble est obtenu, à partir du correcteur LPV  $K_{\Delta_2}(s, \theta)$  (paragraphe précédent), en figeant le paramètre  $\alpha$  en trois valeurs, à savoir, 0, 15 et 30 degrés. Nous montrons que cette démarche peut mener à des performances instationnaires comparables aux précédentes, en utilisant un nombre réduit de correcteurs LTI.

Pour la composition de la matrice Hamiltonienne, définie en (3.23), on considère seulement les éléments appartenant à la boucle du diagramme de la Figure 6.3. Le modèle du système  $W(s)G_{\Delta}(s, \theta)$ , d'ordre  $n = 5$ , correspond à celui de  $G_{22}(s, \theta)$  en (3.4), et le modèle du correcteur  $K_{\Delta_2}(s, \theta)$ , d'ordre  $n_k = 7$ , à celui de  $K(s, \theta)$  en (3.7). Ces modèles sont calculés aux trois points figés du paramètre. Le but est d'obtenir un ensemble de compensateurs  $K_e(s, \theta)$ , définis en (3.11), équivalents, pour chaque valeur de  $\theta$ , aux correcteurs initiaux  $K_{\Delta_2}(s, \theta)$ . Les réalisations d'état des compensateurs  $K_e(s, \theta)$  sont des fonctions des matrices  $(A(\theta), B(\theta), C(\theta))$  du système  $W(s)G_{\Delta}(s, \theta)$ , des paramètres de YOULA,  $Q(s, \theta)$ , et des gains  $(K_c(\theta), K_f(\theta))$ . Le calcul de ces derniers coefficients pour les trois points de fonctionnement remonte à l'application de l'Algorithme 3.2. On commence par les déterminer au point  $\alpha = 0$  (Étapes 1 et 2) et ensuite, par continuation (Étapes 3 à 6), aux points restants. Le Tableau 6.3 montre les modes du système bouclé, figé en  $\alpha = 0$ , les coefficients utilisés dans l'Algorithme 3.1 pour le choix automatique de la partition des modes et la distribution finale obtenue, où  $C_{tr} := \text{spec}(A - BK_c)$  et  $O_{bs} := \text{spec}(A - K_f C)$ . Cette distribution est obtenue aussi bien en utilisant les atténuations  $\sigma_i$  et les facteurs de participations  $p_i$  qu'en utilisant les atténuations et les facteurs de gouvernabilité  $c_i$  et d'observabilité  $o_i$ .

TAB. 6.3 – *Choix des modes de la boucle fermée pour  $\alpha = 0$*

$i$	Pôles	$\sigma_i$	$p_i$	$c_i$	$o_i$	$C_{tr}$	$O_{bs}$	$\text{spec}(A_q)$
1	-0.9407	0.941	0.11	1.2052	1.0000	*		
2,3	-11.271±j7.9328	11.27	2.54	61.672	0.6750	*		
4	-32.628	32.63	4.53	881.73	0.1322		*	
5,6	-71.034±j65.935	71.03	1.51	6627.7	0.0141	*		
7,8	-72.872±j125.86	72.87	11.0	81542.0	0.0062			*
9,10	-105.00±j107.12	105.0	20.6	2.3e+05	0.0058		*	
11,12	-133.57±j91.399	133.6	18.0	1.8e+05	0.0050		*	

Les résultats numériques pour les paramètres de YOULA (réalisation balancées) et pour les gains de retour et d'observation d'état, issus de cette procédure, sont listés ci-après :

$$Q(s,0) = \left[ \begin{array}{cc|cc} -141.73 & 143.46 & -261.86 & 1.1995 \\ -143.46 & -4.0185 & -37.365 & 0.1668 \\ \hline -261.87 & 37.366 & 0.6781 & -0.0031 \end{array} \right],$$

$$Q(s,15) = \left[ \begin{array}{cc|cc} -110.48 & 134.47 & 234.95 & -1.0745 \\ -134.47 & -23.714 & 75.039 & -0.3518 \\ \hline 234.96 & -75.039 & 0.6781 & -0.0031 \end{array} \right],$$

$$Q(s,30) = \left[ \begin{array}{cc|cc} -106.54 & 134.20 & 210.39 & -0.9630 \\ -134.20 & -24.320 & 69.381 & -0.3285 \\ \hline 210.39 & -69.382 & 0.6781 & -0.0031 \end{array} \right],$$

$$K_c(0) = [ 0.5343 \quad -0.7704 \quad -0.0845 \quad -0.4279 \quad -0.0020 ],$$

$$K_c(15) = [ 1.3824 \quad -1.6198 \quad -0.1492 \quad -0.3170 \quad -0.0013 ],$$

$$K_c(30) = [ 1.4569 \quad -1.6980 \quad -0.1484 \quad -0.3204 \quad -0.0014 ],$$

$$K_f(0) = \begin{bmatrix} 4562.1 & -21.469 \\ -75842.6 & 354.84 \\ 1.0387e+6 & -4861.2 \\ 2.2154 & -0.0104 \\ -21.961 & 0.1508 \end{bmatrix},$$

$$K_f(15) = \begin{bmatrix} 2645.8 & -12.343 \\ -28759.7 & 131.83 \\ 6.3511e+5 & -2938.2 \\ 1.2963 & -0.0060 \\ -7.8668 & 0.0871 \end{bmatrix},$$

$$K_f(30) = \begin{bmatrix} 5043.2 & -23.263 \\ -65064.3 & 297.07 \\ 1.1621e+6 & -5339.2 \\ 2.1650 & -0.0100 \\ 32.728 & -0.0981 \end{bmatrix}.$$

La structure du correcteur non stationnaire est similaire à celle adoptée dans le Paragraphe 3.4.2 : les matrices  $(A(\theta), B(\theta), C(\theta))$  sont calculées pour des valeurs intermédiaires

(fixes) de  $\theta$  et les gains et les matrices de  $Q(s, \theta)$  sont linéairement interpolés en  $\theta$ . La Figure 6.9 montre les performances stationnaires du système en boucle fermée de la Figure 6.3 aux trois points considérés. Les performances non linéaires et instationnaires ( $\alpha(t)$ ), à vitesse constante ( $M = 3$ ) et variable, pour le séquençement LFT et pour le séquençement des structures estimation/commande, sont comparées aux Figures 6.10 et 6.11. Ces données nous mènent à faire les commentaires suivants :

- Des performances instationnaires quasiment identiques découlent des deux lois d'interpolation lorsque  $M$  est maintenue constante.
- Pour l'interpolation de structures estimation/commande à vitesse constante, la perte de performance, quand on sort de la situation stationnaire, est dérisoire (voir Figures 6.9 et 6.10). Il faut remarquer que les correcteurs LTI issus du "gel" des compensateurs LPV sont des correcteurs sous-optimaux et, donc, plus appropriés à l'interpolation classique. Notons que ce phénomène ne s'est pas produit, dans l'exemple du Paragraphe 3.4.2, pour une famille de correcteurs LTI optimaux placés aux mêmes points (Figures 3.9 et 3.13). Dans cet exemple, la perte de performance était considérable et un nombre plus grand de correcteurs LTI était demandé pour une meilleure performance globale.
- La performance instationnaire à vitesse variable (Figure 6.11) pour l'interpolation de structures estimation/commande se dégrade légèrement, dans les régions de basse vitesse, par rapport au séquençement LPV/LFT. Mais, les bonnes performances sont préservées sur l'intervalle  $\alpha \times M = [-30, 30] \times [2.7, 4]$ , ce qui représente un grand domaine de fonctionnement.

Compte tenu de ces résultats, nous concluons sur la généralité de la méthode de séquençement de structures estimation/commande du Chapitre 3. Bien que la stabilité instationnaire ne soit pas théoriquement garantie, l'approche s'est montrée performante pour l'interpolation des compensateurs issus d'une synthèse de type multi-canal mixte  $H_2/H_\infty$ .

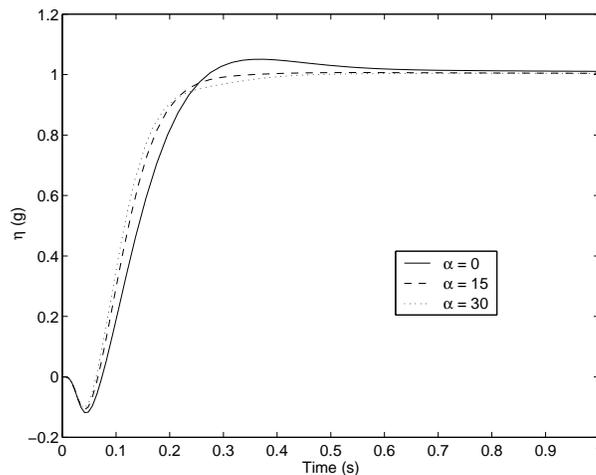


FIG. 6.9 – Réponse à l'échelon unitaire du système en boucle fermée pour  $M = 3$  et pour  $\theta$  figé ( $\alpha = 0, 15, 30$ )

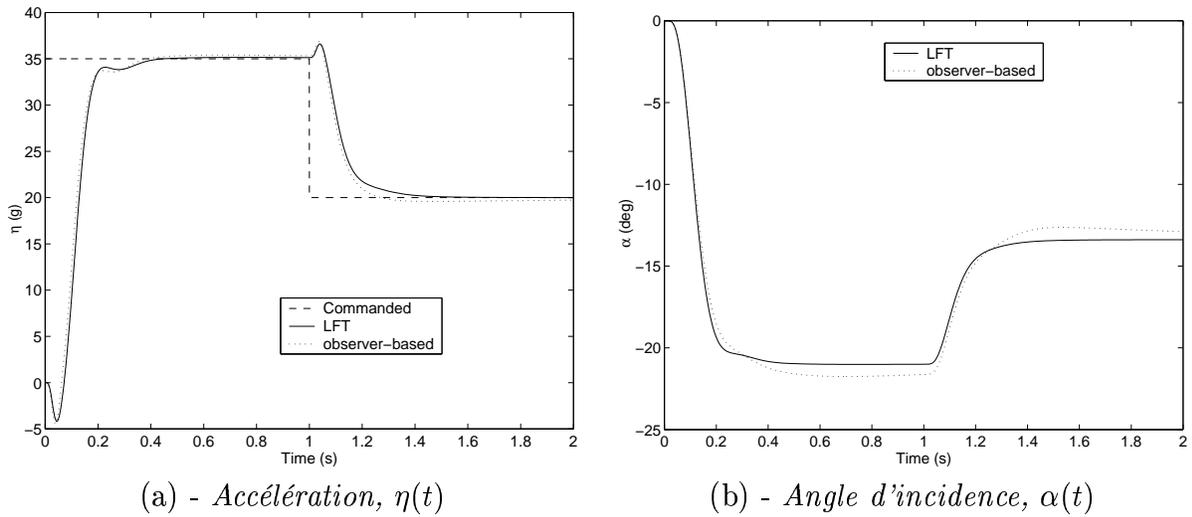


FIG. 6.10 – Performances pour le séquençement LFT et pour l'interpolation des structures estimation/commande équivalentes ( $M$  constant)

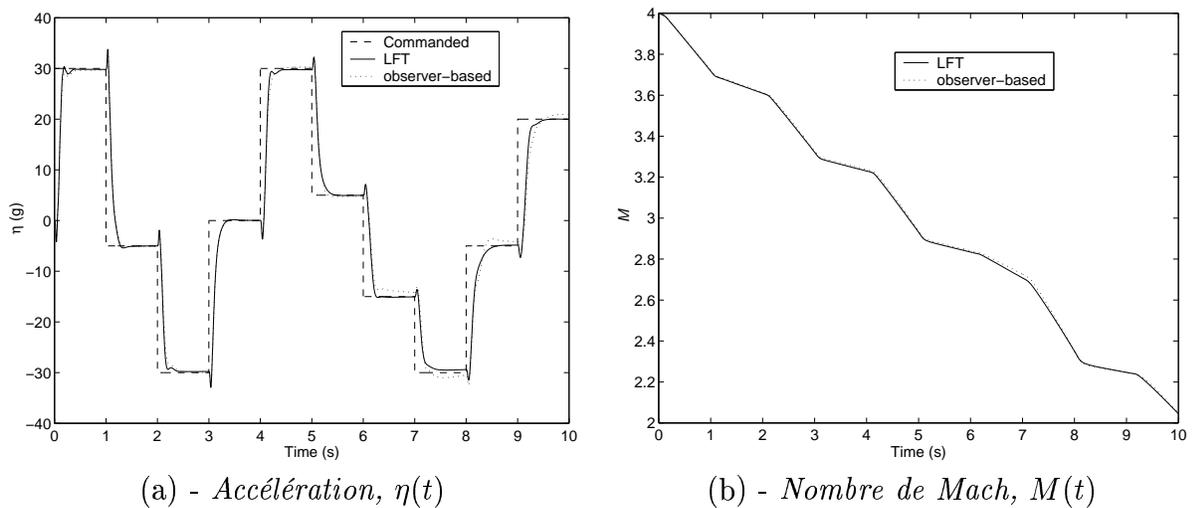


FIG. 6.11 – Performances pour le séquençement LFT et pour l'interpolation des structures estimation/commande équivalentes ( $M$  variable)

## 6.5 Suivi d'une dynamique implicite pour des systèmes LPV

Alors que la plupart des méthodes pour la commande robuste LTI sont fondées sur des spécifications dans le domaine fréquentiel, dans un grand nombre d'applications, y compris celles du domaine aérospatial, les spécifications sont énoncées explicitement dans le domaine temporel, en terme de qualité du régime transitoire de la réponse et du découplage des états du système. Les approches fondées sur le placement de pôles, ou celles basées sur des modèles de références ( *$H_\infty$  model matching*), tiennent compte de ces spécifications d'une façon indirecte. Elles permettent l'ajustement du comportement dynamique d'un système LTI et évitent, dans certains cas, l'utilisation de fonctions de pondérations fréquentielles. Cette caractéristique est souhaitable quand il s'agit de spécifications temporelles car le réglage des filtres constitue, en général, une étape laborieuse qui demande un certain nombre d'essais avant d'aboutir à des propriétés temporelles satisfaisantes.

La méthode de synthèse discutée en [20] traite de la commande par placement robuste de pôles dans des régions convexes du plan complexe, introduites dans la référence [19]. Elle est particulièrement intéressante car le problème est formulé dans le contexte LMI. Les correcteurs synthétisés garantissent que les pôles du système en boucle fermée demeurent dans la région stable, pré-déterminée par le concepteur, pour toutes les valeurs du paramètre (réelles ou complexes) dans un domaine normalisé d'incertitude. Bien que la notion de pôle disparaisse pour les systèmes instationnaires, les propriétés du transitoire, acquises par le bouclage, sont préservées quand le paramètre est considéré variant dans le temps plutôt qu'incertain. Ces propriétés sont, toutefois, rarement suffisantes d'un point de vue pratique, puisque la plupart des problèmes de commande sont essentiellement multi-objectifs. La synthèse devient, malheureusement, très conservative lorsqu'une variété riche d'autres spécifications en boucle fermée, comme celles dans [83], sont considérées. Comme nous l'avons déjà souligné, les formulations LMI en temps continu de [83] demandent l'utilisation de variables de LYAPUNOV communes à tous les canaux/spécifications. Les transformations de linéarisation présentées dans le chapitre précédent, qui permettent de surmonter ce problème en temps discrets, ne sont pas applicables sur ces contraintes de placement de pôles. D'ailleurs, pour certaines régions d'intérêt, ou pour des intersections de ces régions, la convexité qui les caractérise dans le plan  $s$  n'est pas préservée pour les régions correspondantes dans le plan  $z$ .

Au contraire, les approches de type modèle de référence prennent en compte les spécifications temporelles dans un critère  $H_\infty$  et sont alors abordables par la technique LPV multi-objectif du Chapitre 5. La stratégie de synthèse consiste en la minimisation de la norme  $H_\infty$  de la différence entre le modèle du système bouclé et le modèle de référence dont le comportement temporel doit être rapproché par celui du système bouclé. La structure de synthèse contient donc plusieurs dynamiques : celle du modèle du système en boucle ouverte ; celle du modèle de référence ; et, éventuellement, celles des filtres de pondération. Pour cette raison, les compensateurs qui en résultent sont souvent d'ordre très élevé. À cet inconvénient s'ajoute le fait que, dans le contexte LPV multi-transfert, l'ordre  $n$  du modèle de synthèse augmente le nombre de variables dans le problème d'optimisation

d'autant plus que la quantité de canaux/spécifications est importante (voir Tableau 6.1). Ceci restreint l'applicabilité de cette démarche à des problèmes d'ordre très réduit et avec peu de transferts de performance.

Dans la référence [61], les auteurs présentent une méthode alternative aux approches par placement de pôles et par modèle de référence. La formulation originale de [47], pour le problème LTI de suivi optimal d'une dynamique implicite, dit *quadratic Implicit Model Following (IMF) problem*, est étendue au cas LTI de retour dynamique de sortie et reformulée dans le contexte  $H_2$ . Le problème est, donc, également abordable par notre technique de type multi-objectif. En fait, les spécifications de performance dans le domaine du temps sont prises en compte directement dans un critère  $H_2$  qui pénalise l'erreur entre le comportement dynamique du système en boucle fermée et celui du modèle implicite. Ce qui permet d'imposer un profil d'évolution dans le temps aux états ou à une association des états du système. Le réglage de fonctions de pondérations fréquentielles est aussi évité car le critère est essentiellement temporel et la seule exigence est le choix d'une pondération relative réelle de type Linéaire Quadratique (LQ). Un autre avantage intéressant, qui rend cette formulation attractive d'un point de vue applicatif et adaptable aux systèmes variant dans le temps et, particulièrement, aux problèmes de type multi-objectif, est le fait qu'elle n'entraîne aucune augmentation d'ordre du modèle de synthèse.

Nous allons, dans un premier temps, étendre la formulation IMF/ $H_2$  de [61] au cas LPV et, dans un deuxième temps, en nous appuyant sur les résultats des sections et du chapitre précédents, montrer son applicabilité dans un contexte multi-objectif.

### 6.5.1 Un critère $H_2$ pour le suivi de modèle – Extension au cas LPV

Considérons le système continu (6.11), avec les hypothèses (6.16) et la boucle paramétrique  $\Delta(t)$  fermée :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left[ \tilde{A} + \tilde{B}_\Delta \hat{\Delta}(t) \tilde{C}_\Delta \right] x(t) + \left[ \tilde{B}_2 + \tilde{B}_\Delta \hat{\Delta}(t) \tilde{D}_{\Delta 2} \right] u(t), \\ y(t) &= \left[ \tilde{C}_2 + \tilde{D}_{2\Delta} \hat{\Delta}(t) \tilde{C}_\Delta \right] x(t), \end{aligned} \quad (6.28)$$

où

$$\hat{\Delta}(t) = \Delta(t) \left[ I - \tilde{D}_{\Delta\Delta} \Delta(t) \right]^{-1} \quad (6.29)$$

et les matrices sont de dimensions compatibles avec celles du système (6.1). Supposons, aussi, que  $\eta(t) \in \mathbf{R}^q$  soit une variable supplémentaire à contrôler et que la matrice  $\mathcal{H} \in \mathbf{R}^{q \times n}$  soit choisie de rang plein pour sélectionner, à partir du vecteur d'état, certaines dynamiques à contrôler :

$$\eta(t) = \mathcal{H}x(t). \quad (6.30)$$

Le problème traité ici consiste à

**calculer** un correcteur LPV à temps continu de type retour dynamique de sortie et analogue à celui de (6.2),  $u(t) = K_\Delta(s, \Delta_K(\Delta))y(t)$ , pour le système (6.28)-(6.29),  
**tel que** la dynamique en boucle fermée de la variable contrôlée  $\eta(t)$  soit aussi proche que possible de celle choisie pour le système de référence

$$\dot{\eta}(t) = A_d \eta(t), \quad (6.31)$$

pour toutes les trajectoires possibles  $\Delta(t)$ .

Notons que  $A_d$  est normalement choisi de façon à respecter les spécifications dans le domaine du temps, telles que : temps de réponse, dépassement maximal, amortissement, découplage des états, etc.

À partir de (6.28), (6.30) et (6.31) on peut calculer la dérivée de l'erreur

$$\begin{aligned} \dot{e} &:= \mathcal{H}\dot{x} - \dot{\eta} \\ &= \left[ \mathcal{H} \left( \tilde{A} + \tilde{B}_\Delta \hat{\Delta} \tilde{C}_\Delta \right) - A_d \mathcal{H} \right] x + \mathcal{H} \left( \tilde{B}_2 + \tilde{B}_\Delta \hat{\Delta} \tilde{D}_{\Delta 2} \right) u, \end{aligned} \quad (6.32)$$

où  $\hat{\Delta}$  est donnée en (6.29). Le problème énoncé ci-dessus peut être formulé en termes quadratiques, en forme d'un critère de performance à minimiser, comme suit

$$J_{H_2} := \int_0^\infty (\dot{e}^T R_0 \dot{e} + u^T R_1 u) dt. \quad (6.33)$$

Une pondération d'entrée  $R_1$  a été introduite comme un degré de liberté supplémentaire. En substituant (6.32) en (6.33), ce critère devient

$$J_{H_2} = \int_0^\infty [x^T R_x x + 2x^T R_{xu} u + u^T R_u u] dt, \quad (6.34)$$

où

$$\begin{aligned} R_x &= \left[ \mathcal{H} \left( \tilde{A} + \tilde{B}_\Delta \hat{\Delta} \tilde{C}_\Delta \right) - A_d \mathcal{H} \right]^T R_0 \left[ \mathcal{H} \left( \tilde{A} + \tilde{B}_\Delta \hat{\Delta} \tilde{C}_\Delta \right) - A_d \mathcal{H} \right], \\ R_{xu} &= \left[ \mathcal{H} \left( \tilde{A} + \tilde{B}_\Delta \hat{\Delta} \tilde{C}_\Delta \right) - A_d \mathcal{H} \right]^T R_0 \left[ \mathcal{H} \left( \tilde{B}_2 + \tilde{B}_\Delta \hat{\Delta} \tilde{D}_{\Delta 2} \right) \right], \\ R_u &= \left[ \mathcal{H} \left( \tilde{B}_2 + \tilde{B}_\Delta \hat{\Delta} \tilde{D}_{\Delta 2} \right) \right]^T R_0 \left[ \mathcal{H} \left( \tilde{B}_2 + \tilde{B}_\Delta \hat{\Delta} \tilde{D}_{\Delta 2} \right) \right] + R_1. \end{aligned}$$

Ainsi, le problème LPV de type IMF/ $H_2$  optimal revient à minimiser un critère quadratique standard ayant un terme de pondération croisée  $x^T R_{xu} u$ . Si l'on réécrit la représentation LFT du système continu (6.28) de façon analogue à celle du système discret (6.1),

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z_\Delta(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B}_\Delta & \tilde{B}_1 & \tilde{B}_2 \\ \tilde{C}_\Delta & \tilde{D}_{\Delta\Delta} & \tilde{D}_{\Delta 1} & \tilde{D}_{\Delta 2} \\ \tilde{C}_1 & \tilde{D}_{1\Delta} & \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} \\ \tilde{C}_2 & \tilde{D}_{2\Delta} & \tilde{D}_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w_\Delta(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \\ w_\Delta(t) &= \Delta(t) z_\Delta(t), \end{aligned} \quad (6.35)$$

où le transfert  $T_{wz}$  représente maintenant un canal de performance  $H_2$  avec les matrices

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{\Delta 1} \\ D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{N \times n} \\ 0_{(q+m_2) \times n} \\ 0_{p_2 \times n} \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

et

$$[C_1 \quad D_{1\Delta} \quad D_{11} \quad D_{12}] = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} R_0^{1/2}(\mathcal{H}\tilde{A} - A_d\mathcal{H}) & R_0^{1/2}\mathcal{H}\tilde{B}_\Delta & 0_{q \times n} & R_0^{1/2}\mathcal{H}\tilde{B}_2 \\ \hline 0_{m_2 \times n} & 0_{m_2 \times N} & 0_{m_2 \times n} & R_1^{1/2} \end{array} \right], \quad (6.37)$$

alors, le problème de minimisation du critère quadratique (6.34) peut être énoncé comme un problème de commande LPV. Ce problème consiste à calculer un correcteur LPV,  $K_\Delta(s, \Delta_K)$ , qui minimise la variable  $\nu$  de performance  $H_2$  du transfert  $T_{wz}$  du système (6.35)-(6.37) en boucle fermée. Le processus de calcul de ce compensateur peut être mené dans le contexte multi-objectif de l'Algorithme 6.1 et de la technique de discrétisation discutée dans le Paragraphe 6.3.1. Notons que, lorsque le système est bouclé par un tel correcteur, la transmission directe du transfert  $T_{wz}$  est nulle car les contraintes (6.17) et (6.19) sont respectées et, par conséquent, le problème  $H_2$  est bien posé. Ce résultat était déjà prévu, car il est bien connu qu'un critère quadratique peut être formulé comme une spécification de type  $H_2$ . Finalement, Il faut signaler aussi que si le bloc  $\Delta(t)$  est considéré nul ou inexistant cette formulation est identique à celle de la référence [61] pour le problème LTI .

### 6.5.2 Exemple illustratif

Pour illustrer et pour montrer l'efficacité de la méthode LPV/IMF développée dans le paragraphe précédent, nous allons nous servir d'un système simple du type masse-ressort :

$$G_\Delta(s, \Delta(t)) : \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-k(\Delta(t))}{m} & \frac{-f}{m} & \frac{1}{m} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ u(t) \end{bmatrix}. \quad (6.38)$$

Les états  $x_1$  et  $x_2$  sont, respectivement, le déplacement autour de la position d'équilibre et la vitesse de la masse  $m$ . Le système est commandé par une force  $u$  appliquée sur la masse. Le déplacement de la masse est la sortie mesurée  $y$ . Le coefficient de frottement  $f$  est considéré fixe, tandis que la raideur  $k$  du ressort est variable dans le temps et dépend du paramètre  $\Delta(t) = \theta(t)$  :

$$k = k_0 + \frac{\Delta(t)}{2} \text{ Nm}^{-1}, \quad \Delta(t) \in [-1, 1].$$

Une représentation LFT exacte et minimale de ce système s'écrit ainsi :

$$G(s) : \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ z_\Delta(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k_0}{m} & \frac{-f}{m} & \frac{-1}{2m} & \frac{1}{m} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ w_\Delta(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad (6.39)$$

Bloc  $\Delta$  :  $w_\Delta(t) = \Delta(t)z_\Delta(t)$ .

Supposons les valeurs numériques suivantes :

$$m = 1 \text{ Kg}, \quad f = 1.2 \text{ Nsm}^{-1}, \quad k_0 = 1 \text{ Nm}^{-1}.$$

Ce qui détermine l'intervalle de variation du coefficient  $k$  :  $k \in [0.5, 1.5]$ . Avec ces données numériques et l'aide du diagramme de simulation SIMULINK® illustré à la Figure 6.12, on obtient les réponses à l'échelon unitaire, en boucle ouverte, décrites à la Figure 6.13. On peut remarquer que le comportement dynamique du système est très sensible aux changements du paramètre.

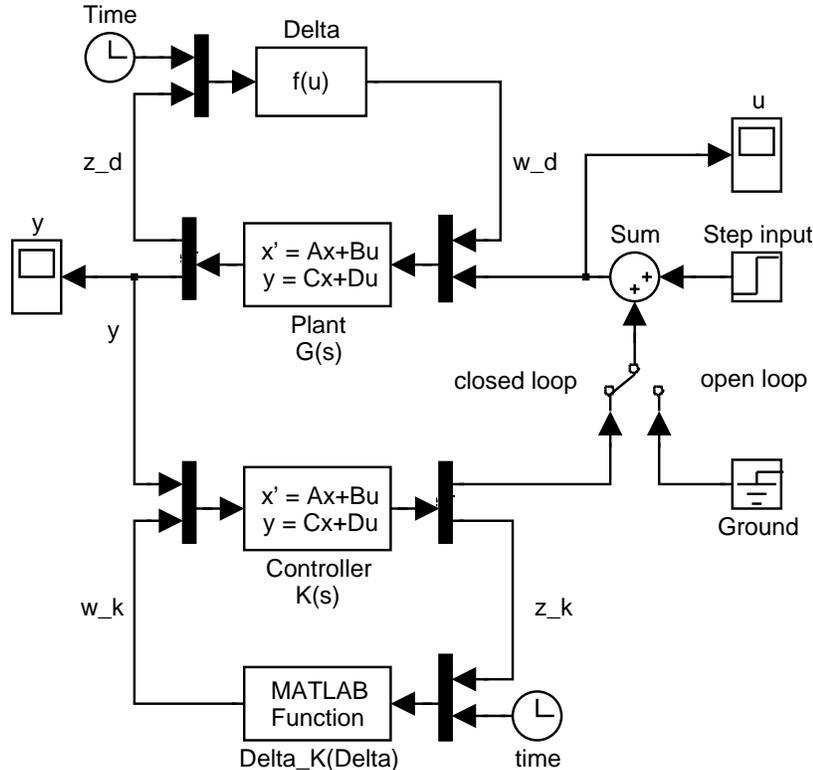


FIG. 6.12 – Diagramme de simulation utilisé pour le système masse-ressort

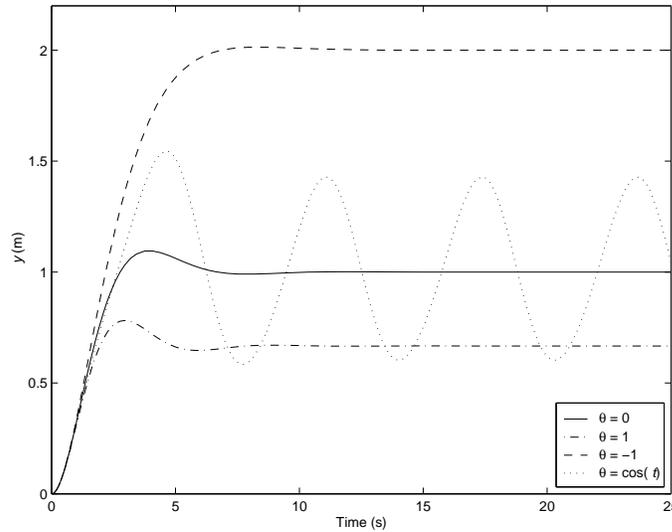


FIG. 6.13 – Réponses à l'échelon du système masse-ressort en boucle ouverte pour des valeurs constantes et variables du paramètre

Dans cette application, nous nous intéressons uniquement au problème d'une seule spécification  $H_2$  qui correspond au problème de suivi d'une dynamique donnée. Néanmoins, dans une situation plus générale, des spécifications mixtes  $H_2/H_\infty$  supplémentaires peuvent être considérées. Le but ici est donc de calculer, en rajoutant au système (6.39) un canal  $(w,z)$  défini par les matrices d'entrée (6.36) et de sortie (6.37), un correcteur LPV qui minimise la variable  $\nu$  de performance  $H_2$  de  $T_{wz}$  et, donc, qui minimise la sensibilité paramétrique du système. Autrement dit, nous voulons que la réponse nominale du système, celle obtenue pour  $\Delta = \theta = 0$  dans la Figure 6.13, soit préservée pour n'importe quelle valeur du paramètre dans son domaine et pour un taux de variation paramétrique quelconque. On doit, d'abord, choisir les matrices réelles  $\mathcal{H}$ ,  $A_d$ ,  $R_0$  et  $R_1$  qui composent la matrice de sortie (6.37) du canal de performance  $H_2$  et qui définissent le critère à minimiser (6.34). Une bonne démarche à suivre est de choisir  $\mathcal{H} = I_2$ , ce qui permet de contrôler le comportement dynamique global, et  $A_d$  égale à la matrice dynamique du système (6.38),  $G_\Delta(s,\Delta)$ , en le point central  $\Delta = \theta = 0$ . En ce point, le système figé présente des pôles bien amortis ( $s_{1,2} = -0.6 \pm j0.8$ ) avec une fréquence naturelle  $\omega_n = 1$  et un facteur de amortissement  $\zeta = 0.6$ . Donc, on choisit :

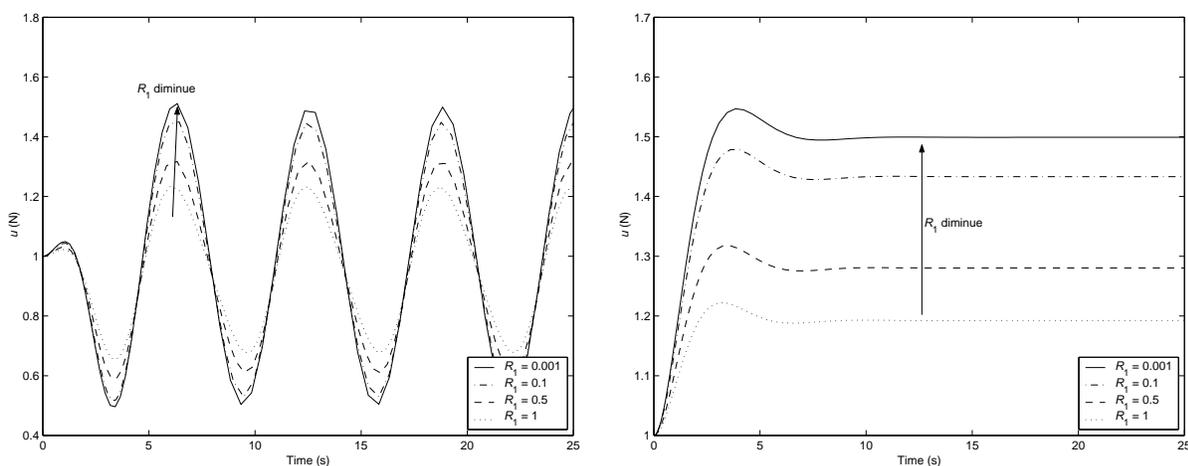
$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1.2 \end{bmatrix}.$$

Ces matrices étant fixées, il reste à établir quel est le meilleur rapport  $R_0/R_1$  qui permet d'obtenir le résultat souhaité. En fixant  $R_0 = I_2$  et en jouant sur la valeur de  $R_1$ , on obtient, avec l'aide des algorithmes 6.1 et 6.2 et de la technique de discrétisation du Paragraphe 6.3.1, des correcteurs LPV ayant les propriétés de performance présentées dans le Tableau 6.4 et à la Figure 6.14. On remarque que la diminution de  $R_1$  provoque une diminution de la valeur optimale  $\nu$ , une augmentation de l'énergie de commande et un rapprochement du comportement dynamique souhaité. Ce résultat est parfaitement

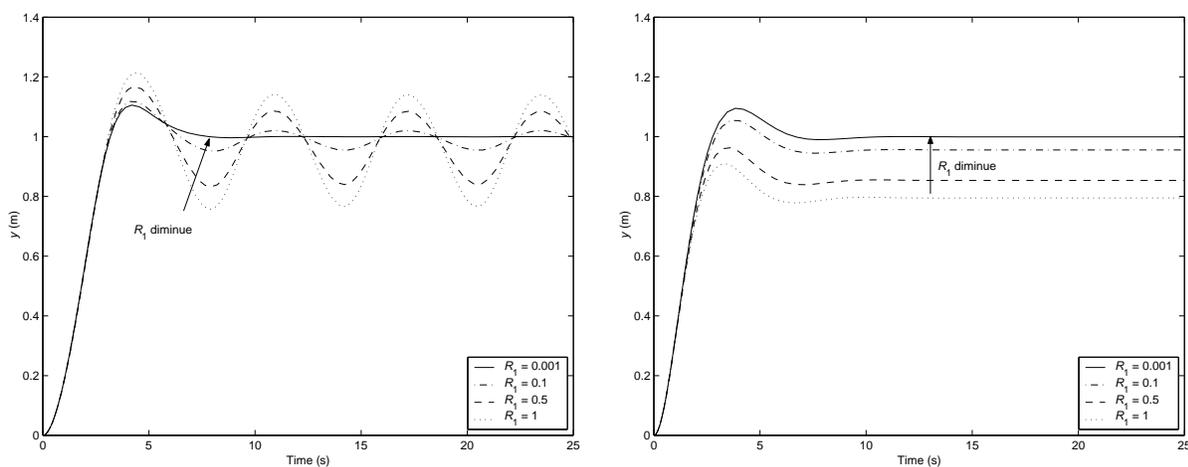
naturel, une fois que la diminution de  $R_1$  signifie qu'un poids plus important est alloué, dans le critère, à l'erreur dynamique.

TAB. 6.4 – Performance  $H_2$  du système masse-ressort pour plusieurs pondérations de la commande

$R_1$	0.001	0.1	0.5	1.0
$\sqrt{\nu}$	0.021	0.203	0.410	0.525



(a) - Commande,  $u(t)$



(a) - Mesure,  $y(t)$

FIG. 6.14 – Réponses à l'échelon du système masse-ressort en boucle fermée pour plusieurs pondérations de la commande:  $\Delta(t) = \theta(t) = \cos(t)$  colonne gauche et  $\Delta(t) = \theta(t) = 1$  colonne droite

Finalement, si l'on choisit  $R_1 = 0.001$ , on obtient le correcteur LPV

$$K(s) \quad : \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_K(t) \\ u(t) \\ z_K(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.4557 & -0.00955 & 0 \\ 0.00955 & 0 & 0.000595 \\ 0 & 917.73 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_K(t) \\ y(t) \\ w_K(t) \end{bmatrix},$$

$$\text{Bloc } \Delta_K \quad : \quad \Delta_K(\Delta(t)) = -0.9151\alpha_1(\Delta(t)) + 0.9151\alpha_2(\Delta(t)),$$

qui est composé d'une partie LTI  $K(s)$ , de laquelle on a éliminé un mode rapide en utilisant (6.24)-(6.27), et d'une fonction de séquençement  $\Delta_K(\Delta)$ . On rappelle que les coefficients  $\alpha_{1,2}$  sont calculés en temps réel via l'Algorithme 6.2. Ce compensateur séquencé est théoriquement capable de maintenir une réponse très proche de la réponse centrale du système, même si le paramètre évolue à une très grande vitesse, pour toutes la gamme de valeurs dans le domaine paramétrique considéré. Il existe, évidemment, une limite pratique pour la mise à jour du correcteur qui étroitement lié aux cadences d'échantillonnage du système de commande.

## 6.6 Conclusion

Nous avons utilisé une nouvelle technique de commande LPV  $H_2/H_\infty$  multi-objectif/canal présentée dans le Chapitre 5 pour la synthèse d'un autopilote d'un missile performant dans un large domaine de fonctionnement en incidence et vitesse. La méthode proposée offre une flexibilité supplémentaire pour traiter des spécifications strictes et variées, liées au problème du missile, tout en maintenant la simplicité opératoire des techniques LPV à un seul objectif développées auparavant :

- les non-linéarités du modèle du missile sont prises en compte dans une représentation LFT du paramètre ;
- différents transferts sont définis pour traduire les performances de poursuite, les limitations de commande et les propriétés de robustesse ;
- un équilibre des différentes exigences du cahier des charges est obtenu par un chemin très naturel dans la structure et la procédure de synthèse proposées. L'utilisation de variables de LYAPUNOV et *scalings* différents pour chaque canal/spécification conduit à un conservatisme raisonnable de la méthode ;
- en outre, nous décrivons des procédures simples pour construire la fonction de séquençement du contrôleur et montrons comment les transférer au cas continu.

De bons résultats ont été également obtenus en utilisant le séquençement d'un nombre petit de compensateurs LTI équivalents, de structure estimation/commande, construits via la technique développée dans le Chapitre 3, à partir du correcteur LPV mixte  $H_2/H_\infty$  synthétisé.

Finalement, une formulation  $H_2$  pour le problème de suivi d'une dynamique implicite a été étendue pour pouvoir traiter des systèmes LPV dans le contexte multi-objectif. La méthode constitue une bonne alternative aux techniques de commande par placement de

pôles et par modèle de référence. Elle a été validée et son efficacité a été vérifiée sur un exemple académique. Elle fera prochainement l'objet d'une application plus réaliste dans le contexte de systèmes de puissance [72].



## Troisième partie

### Conclusion



## Chapitre 7

### Conclusion générale

DANS cette partie conclusive de la thèse, nous mettons en avant les apports de notre travail, faisons un bilan des approches développées et présentons quelques possibilités de recherches futures.

## 7.1 Résumé de la contribution

Nous soulignons notre contribution en faisant une synthèse des résultats annoncés à l'Introduction Générale et des conclusions partielles présentées à la fin des chapitres de la Deuxième Partie de cette thèse.

### 7.1.1 D'un point de vue méthodologique

Au Chapitre 3, nous avons développé une méthodologie générale pour transformer une famille arbitraire de correcteurs LTI prédéterminés en un ensemble équivalent et homogène de compensateurs de structure estimation/commande. Une procédure originale pour la sélection et le prolongement continu de structures propres du système bouclé, qui respecte ses propriétés fondamentales, a été introduite dans le but d'établir une cohérence entre les différentes dynamiques pour tout l'ensemble de points de fonctionnements. Des transitions plus douces entre ces points sont obtenues par une interpolation classique de cette nouvelle structure, ce qui réduit la perte de performance en présence des non-stationnarités. Il découle un résultat particulier qui est la généralisation, aux correcteurs d'ordre augmenté, des méthodes d'interpolation proposées en [95] et [96] qui préservent la stabilité du système instationnaire (linéaire) bouclé par des compensateurs d'ordre plein.

La méthode élaborée dans le Chapitre 4 permet de surmonter le problème d'absence de garanties théoriques de stabilité et de performance  $H_\infty$  vérifiée pour les méthodes d'interpolation conventionnelles, tout en préservant leur généralité en ce qui concerne la dépendance paramétrique du système et en prenant en compte également un domaine de variation très large des variables de séquençement. Une procédure itérative de synthèse, combinée à une technique LPV fondée sur un maillage de l'espace paramétrique, a été proposée dans ce but. Il s'agit d'un procédé systématique de construction des bases de fonctions pour les variables de LYAPUNOV interpolées qui sont suffisamment riches pour assurer le niveau de performance défini par le concepteur. Celui-ci peut donc régler le compromis existant entre le conservatisme et la complexité du correcteur LPV résultant.

Dans le Chapitre 5, nous avons développé une nouvelle méthode de synthèse LPV multi-canal mixte  $H_2/H_\infty$  en temps discret pour des systèmes qui présentent une description de type LFT de dépendance paramétrique. Ce problème de synthèse demeurerait délicat face aux outils techniques disponibles. Nous avons donc introduit de nouvelles conditions pour les performances  $H_2$  et  $H_\infty$  des systèmes LPV/LFT. Une caractéristique très favorable est que différentes paires de variables de LYAPUNOV et de *scalings* peuvent être utilisées pour chaque spécification et transfert pour réduire le conservatisme. Il résulte aussi une démonstration différente de la caractérisation LMI du problème de synthèse  $H_\infty$  LPV/LFT à un seul objectif présentée en [65, 6].

Au Chapitre 6, nous avons mis en lumière des applications potentielles de la méthode LPV multi-canal mixte  $H_2/H_\infty$  introduite dans le chapitre précédent. Les résultats numériques qui y sont présentés montrent clairement les avantages des nouvelles fonctionnalités de cette classe de correcteurs. Une procédure simple pour le calcul de coordonnées

polytopiques et pour la discrétisation de systèmes sont aussi discutées. Finalement, une formulation originale de type  $H_2$  pour le problème LPV de suivi optimal d'une dynamique implicite a été développée. Cette formulation semble mieux adaptée aux systèmes LPV et aux problèmes multi-critère que les approches similaires par placement de pôles et par modèle de référence.

### 7.1.2 D'un point de vue applicatif

Il va de soi que la validation des formulations développées et la comparaison de résultats ont fait l'objet d'un soucis constant au cours du déroulement de cette étude. Cela s'est effectué en appliquant toutes les nouvelles méthodes et certaines techniques déjà existantes à quelques exemples académiques pertinents mais aussi à un problème réaliste représentatif du domaine aéronautique. Un travail important de codage a été mené pour la construction d'un ensemble de programmes MATLAB<sup>®</sup> généraux pour permettre le traitement de systèmes instationnaires variés. Le traitement numérique a été approfondi non seulement dans les étapes initiale et finale, de modélisation et de simulation, mais surtout dans les étapes de synthèse. Celles-ci correspondent aux algorithmes listés à la page xvii, relatifs aux méthodes développées, et à d'autres qui n'ont pas été explicités dans ce mémoire, relatifs aux techniques avec lesquelles on a comparé des résultats.

Enfin, les différentes techniques occultent un certain nombre de problèmes liés à la définition de seuils et/ou de tolérances ou encore à des difficultés numériques ou méthodologiques parfois discutées tout au long de ce manuscrit. Cette problématique a été naturellement considérée et traitée d'une façon adéquate dans les phases de programmation calculatoire.

## 7.2 Étude comparative et critiques

De par les caractéristiques des approches impliquées dans les différentes voies d'obtention de correcteurs interpolés proposées dans cette étude (Figure 1.1) et d'après les résultats numériques présentés, nous pouvons tirer quelques conclusions à propos des leurs avantages et inconvénients :

### **Structures estimation/commande équivalentes** (Chapitre 3) :

- La procédure de conception est ouverte dans le sens où il n'y a aucune restriction inhérente à une méthodologie particulière de synthèse LTI des compensateurs initiaux ou d'interpolation des correcteurs équivalents. Le concepteur est donc libre d'utiliser les méthodes d'analyse de stabilité et de performance et une loi classique de séquençement qui sont les plus adaptées à une application particulière. Cette liberté permet, par exemple, de mettre en œuvre une fonction d'interpolation simple pour des compensateurs LTI sous-optimaux plus appropriés, comme ceux issus des techniques LPV qui entraînent, en général, des lois de séquençement complexes.

Cependant, le nombre disponible de techniques d'interpolation classique qui garantissent théoriquement la stabilité instationnaire est très réduit.

- Des estimations asymptotiques précises des états du système physique sont disponibles pour le cas de systèmes instationnaires linéaires (LTV ou LPV). Dans le contexte non linéaire (modèles linéarisés ou quasi-LPV), les estimations sont seulement des approximations des états réels, d'autant plus grossières que les non-linéarités ou le taux de variation du paramètre sont importants.
- Les différentes dynamiques (linéaires ou linéarisées) du système sont reconstruites dans le correcteur d'une façon compatible pour tout l'ensemble de points de fonctionnement, ce qui permet des ajustements synchronisés avec leur évolution et évite des variations rapides des coefficients interpolés (gains de retour et d'observation d'états). Des bonnes propriétés instationnaires en boucle fermée sont donc obtenues lorsque les points de fonctionnement sont convenablement choisis, pour des variations suffisamment lentes du paramètre.
- L'application de la technique est restreinte à des systèmes dont les conditions de fonctionnement peuvent être paramétrées par une variable scalaire. Les systèmes de type multi-paramètre sont abordables si leurs trajectoires nominales sont connues en avance, comme il est le cas, par exemple, du problème de pilotage des lanceurs.

#### **Commande LPV $H_\infty$ par interpolation de variables de LYAPUNOV et maillage de l'espace paramétrique (Chapitre 4) :**

- La méthode est applicable à des problèmes de type  $H_\infty$  à un seul transfert de performance pour de systèmes continus ou discrets<sup>1</sup> ayant une dépendance paramétrique générale. En plus, des taux de variations réalistes de ces variables sont pris en compte. Par conséquent, la stabilité quadratique et la performance  $H_\infty$  sont assurées avec peu de conservatisme.
- Le conservatisme est réglé en fonction du nombre de sous-intervalles d'interpolation des variables de LYAPUNOV et, donc, de la complexité du séquençement. Toutefois, un bon compromis entre ces objectifs conflictuels n'est pas suffisant pour rendre la mise en œuvre plus simple que celle des correcteurs LPV/LFT ou si simple que certaines stratégies classiques d'interpolation.
- Une alternative systématique pour le placement et synthèse de correcteurs  $H_\infty$  LTI est offerte aux techniques de séquençement classiques.
- Le nombre de variables et de contraintes LMI impliquées dans le problème d'optimisation est constant pour les différents intervalles. Comme chaque sous-région est manipulée séparément, tout en assurant la continuité du correcteur LPV en leurs interfaces, des domaines de variation paramétrique très larges peuvent être considérés en ce qui concerne la synthèse. Néanmoins, la complexité algorithmique restreint la portée de la méthode à des systèmes paramétrés par un nombre réduit de variables.

---

1. Bien que le Théorème 4.1 présente la caractérisation LMI et la procédure de construction du correcteur dans le contexte du temps continu, son équivalent discret est obtenu de façon analogue à celle de [5], en utilisant la caractérisation projetée pour le problème  $H_\infty$  discret présenté en [31].

- Les conditions nécessaires et suffisantes pour la  $\mathcal{L}_2$ -stabilité, fournies par cette approche pour un intervalle d'interpolation isolé, ne deviennent que suffisantes lorsqu'une succession de sous-régions du domaine paramétrique est considérée. Ces conditions associées au fait que la stabilité d'un système n'implique pas sa stabilité quadratique forment une source reconnue de conservatisme.

### Commande LPV/LFT multi-canal mixte $H_2/H_\infty$ (Chapitre 5) :

- L'approche permet de traiter plusieurs objectifs de synthèse  $H_2$  et/ou  $H_\infty$  définis sur de transferts différents pour de systèmes continus ou discrets, ce qui justifie un grand intérêt pratique. Le problème de suivi d'une dynamique implicite, plus adapté aux systèmes instationnaires que le problème similaire de placement de pôles, peut être considéré dans une formulation  $H_2$  (Section 6.5).
- La fonction de séquençement est relativement simple en comparaison de celle des méthodes LPV générales.
- L'utilisation possible de différentes variables de LYAPUNOV et de *scaling* est un facteur qui réduit le conservatisme. Toutefois, la méthode reste conservative pour plusieurs raisons principales, à savoir : les conditions de stabilité et de performance ne sont pas nécessaires ; utilisation de fonctions de LYAPUNOV quadratiques et indépendantes du paramètre ; prise en compte d'un taux de variation paramétrique illimité ; utilisation d'une classe restrictive de *scalings* ; utilisation de variables auxiliaires communes à tous les canaux/spécifications<sup>2</sup> ; approximations possibles lors de la mise sous forme LFT.
- Le grand nombre de variables impliquées dans la solution du problème d'optimisation convexe limite l'applicabilité de la technique à des systèmes d'ordre faible et avec peu de variables de séquençement.

Compte tenu de l'analyse précédente, on conclut que les résultats méthodologiques et numériques de cette thèse atteignent de façon satisfaisante les objectifs particuliers énoncés à l'Introduction Générale, mais ne prétendent nullement à répondre à toutes les questions qui se posent aujourd'hui dans le domaine de la commande de systèmes instationnaires. En s'ajoutant à une longue liste de résultats antérieurs, ils apportent cependant des procédures nouvelles pour traiter certains caractères antagonistes éminemment présents dans les solutions de problèmes actuels de cette branche de l'automatique :

- l'optimalité locale versus de bonnes propriétés de performance globale ;
- la simplicité dans la mise en œuvre opposée à un faible conservatisme ou à des garanties théoriques de performance et stabilité ;
- des spécifications de performance mixtes et de natures contradictoires.

Enfin, il faut garder à l'esprit que certaines faiblesses des approches proposées ici sont aussi inhérentes à la majorité des méthodes actuelles de commande de systèmes instationnaires, LPV ou conventionnelles. Comme exemple, on peut citer la limitation pratique im-

---

2. En [26], les auteurs montrent cependant que cette condition est beaucoup moins contraignante que l'utilisation de variables de LYAPUNOV et de *scaling* communes à tous les canaux/spécifications.

posé au nombre de paramètres et/ou à l'ordre du système. Aussi, des conditions seulement suffisantes pour l'existence de solutions sont très fréquentes pour les techniques basées sur la théorie de stabilité de LYAPUNOV<sup>3</sup> et constituent des facteurs de conservatisme souvent acceptable pour la plupart des problèmes pratiques.

### 7.3 Perspectives

Certains prolongements et améliorations de notre étude semblent à rechercher dans différentes directions. Tout d'abord, pour la méthode classique de structures estimation/commande équivalentes, le choix de modes est une question qui mérite des réponses supplémentaires plus approfondies en ce qui concerne le cas particulier des correcteurs de type  $H_\infty$ . Un problème  $H_2$  est analogue au problème LQG, dont la solution produit des correcteurs ayant la structure cherchée. Une synthèse  $H_2$  appliquée à la même forme standard du problème  $H_\infty$  initial peut donc donner de bonnes indications sur une partition appropriée des modes de la boucle fermée initiale. Dans ce même contexte, des chemins différents pour l'interpolation des gains, qui mènent à une certaine insensibilité à leur variation vis-à-vis la dynamique entrée-sortie, sont à définir.

Le grand inconvénient des méthodes LPV qui tolèrent des dépendances paramétriques générales est la difficulté à contourner les problèmes numériques causés par le maillage de l'espace des paramètres, une étape inévitable jusqu'à présent. La solution à ce problème semble être dans le domaine de l'optimisation. En particulier l'optimisation de type "bundle" sur le cône des matrices symétriques.

Le développement d'une extension de la méthode LPV/LFT multi-canal mixte  $H_2/H_\infty$  au cas continu et aux classes plus générales de fonctions de LYAPUNOV ou de *scalings* reste encore délicat. Aussi, une méthode capable de synthétiser directement des structures estimation/commande aurait un intérêt pratique immédiat. L'obtention de variables intermédiaires du correcteur LPV dans la solution du problème donne un indice de la possibilité d'une telle extension. Néanmoins, tous les essais que nous avons fait dans ces deux directions ont mené à des contraintes de nature bilinéaire dont la convexité paraît difficile à obtenir en utilisant les outils techniques disponibles aujourd'hui.

Une direction qui paraît prometteuse pour la synthèse de compensateur de structures estimation/commande par LMI est celle proposée en [21] pour le cas LTI. La stratégie consiste à établir d'abord les gains de retour et d'estimation d'état de façon à atteindre certains objectifs. L'obtention de ces gains peut être directe ou par équivalence à partir d'un compensateur initial quelconque (Chapitre 3). Dans une deuxième étape le paramètre de Youla joue un rôle essentiel dans un problème LMI multi-critère, mais dont la solution semble encore conservative. Outre le fait que la définition de la dimension du  $Q$ -paramètre est le premier problème qui se pose, la présence de non-stationnarités dans le système constituerait une deuxième question délicate. Le problème qui apparaît est lié à la non séparation des trois dynamiques impliquées dans la structure de la boucle

---

3. Dans le contexte LPV/LFT, cette règle est générale.

fermée si un caractère non linéaire est à l'origine des non-stationnarités. Dans ce cas, la stabilité des différentes dynamiques n'implique pas la stabilité globale, sauf pour des variations suffisamment lentes des variables de séquençement, et rien n'est assuré quant aux performances.

Un grand obstacle au développement d'approches plus puissantes dans le domaine de la commande de systèmes instationnaires, à l'heure actuelle, est l'inexistence de méthodologies d'optimisation capables de résoudre efficacement les problèmes sous contraintes d'Inégalités Matricielles Bilinéaires. Des solutions sous-optimales adéquates à ces problèmes semblent compenser le conservatisme des techniques LMI. Toutes ces problématiques pourraient être reconsidérées dans des travaux de recherche ultérieurs, comme ceux élaborés dans [29, 28].

Finalement, il est difficile de prévoir des voies de recherches plus générales pour l'avenir proche dans le domaine du séquençement de compensateurs. Mais, les nombreuses applications potentielles de ces méthodes constituent certainement une force motrice puissante pour le développement de nouvelles idées et théories. Le Professeur Keith Glover et ses collaborateurs ont donné un exemple concret de ces potentialités en relatant, dans la référence [66], leurs expériences sur le plan applicatif dans le domaine aéronautique. À l'occasion de sa présentation à la CDC/2000, il a énoncé la phrase suivante, avec laquelle nous concluons ce manuscrit :

“Automatically scheduled control laws are a strong and very likely candidate for the next generation of flight control systems.”



## Quatrième partie

### Annexes



## Annexe A

# Modèle d'un missile dépendant de paramètres

LE problème de pilotage en incidence d'un missile air-air, considéré à plusieurs reprises dans ce mémoire, est basé sur le système non linéaire présenté en [75, 64]. Nous dérivons ici, une modélisation LPV non linéaire de type LFT ainsi qu'un modèle linéaire valable autour d'un point de fonctionnement donné. Ces modèles se prêtent aux synthèses de lois de commande par les techniques développées au cours de cette thèse.

## A.1 Modèle non linéaire

Dans notre contexte, le pilotage de l'engin consiste à élaborer un signal de commande à l'actionneur (vérins de gouverne de profondeur) pour contrôler les mouvements en tangage autour de son centre de gravité, tout en assurant les performances spécifiées dans tout le domaine de vol. La position relative du centre de pression détermine les conditions de stabilité du système. La Figure A.1 illustre le problème de commande en incidence du missile.

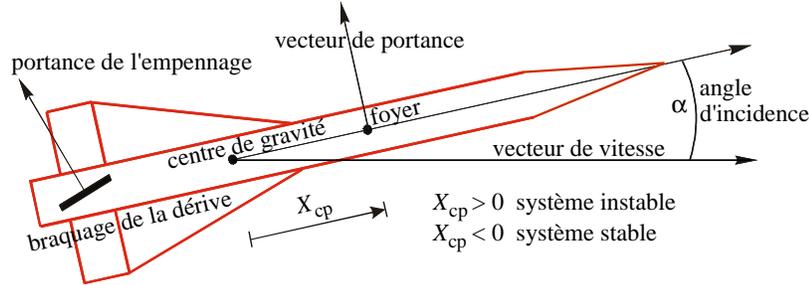


FIG. A.1 – Diagramme physique du missile

Une description quasi-LPV de la dynamique du missile et de l'actionneur dans le plan longitudinal<sup>1</sup> est donnée par [75, 64]

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\alpha & 1 & Z_\delta & 0 \\ M_\alpha & 0 & M_\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_a^2 & -2\zeta\omega_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_a^2 \end{bmatrix} \delta_c \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{bmatrix} \eta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_\alpha & 0 & N_\delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned} Z_\alpha &= K_\alpha M \cos \alpha [a_n \alpha^2 + b_n |\alpha| + c_n (2 - M/3)] \\ Z_\delta &= K_\alpha M d_n \cos \alpha \\ M_\alpha &= K_q M^2 [a_m \alpha^2 + b_m |\alpha| + c_m (-7 + 8M/3)] \\ M_\delta &= K_q M^2 d_m \\ N_\alpha &= K_z M^2 [a_n \alpha^2 + b_n |\alpha| + c_n (2 - M/3)] \\ N_\delta &= K_z M^2 d_n, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

où les états  $\alpha(t)$ ,  $q(t)$ ,  $\delta(t)$  et  $\dot{\delta}(t)$  correspondent respectivement à l'angle d'incidence (en  $^\circ$ ), la vitesse angulaire en tangage (en  $^\circ/\text{s}$ ), l'angle de l'empennage (en  $^\circ$ ) et sa dérivée (en  $^\circ/\text{s}$ ). L'accélération verticale  $\eta(t)$  (en g) et la vitesse angulaire en tangage sont les mesures tandis que  $\delta_c(t)$  représente le braquage commandé (en  $^\circ$ ).

1. On suppose légitime un découplage de l'axe de tangage des axes de lacet et de roulis.

Pour les simulations non stationnaires à vitesse variable, la trajectoire du nombre de Mach  $M(t)$  dans le temps est générée par

$$\dot{M} = \frac{1}{v_s} [-|\eta|g \sin(|\alpha|) + A_x M^2 \cos(\alpha)] \quad (\text{A.3})$$

qui donne un profil de vitesse assez réaliste.

Le modèle non linéaire (A.1)-(A.3) représente un missile qui vole à une altitude de 20000 pieds. Notons qu'il est complètement caractérisé par la variable externe  $M(t)$  et par l'incidence  $\alpha(t)$ , qui est responsable de la non-linéarité. Ce modèle est aussi symétrique par rapport à  $\alpha = 0$ . Les descriptions et les valeurs numériques des autres constantes sont fournies ci-dessous :

$K_\alpha$	$= 0.7P_0 \frac{180S}{\pi m v_s}$	
$K_q$	$= 0.7P_0 \frac{180Sd}{\pi I_y}$	
$K_z$	$= 0.7P_0 \frac{S}{mg}$	
$A_x$	$= 0.7P_0 \frac{SC_\alpha}{m}$	
$P_0$	$= 973.3 \text{ lbs/ft}^2$	- pression statique à 20 000 ft
$S$	$= 0.44 \text{ ft}^2$	- surface de référence
$m$	$= 13.98 \text{ slugs}$	- masse
$v_s$	$= 1036.4 \text{ ft/s}$	- vitesse du son à 20 000 ft
$d$	$= 0.75 \text{ ft}$	- diamètre
$I_y$	$= 182.5 \text{ slug.ft}^2$	- moment d'inertie en tangage
$C_a$	$= -0.3$	- coefficient de traînée
$\zeta$	$= 0.7$	- facteur d'amortissement de l'actionneur
$\omega_a$	$= 150 \text{ rad/s}$	- pulsation naturelle non amortie de l'actionneur
$g$	$= 32.2 \text{ ft/s}^2$	- constante de gravité
$a_n$	$= 0.000103 \text{ degré}^{-3}$	$a_m = 0.000215 \text{ degré}^{-3}$
$b_n$	$= -0.00945 \text{ degré}^{-2}$	$b_m = -0.0195 \text{ degré}^{-2}$
$c_n$	$= -0.1696 \text{ degré}^{-1}$	$c_m = 0.051 \text{ degré}^{-1}$
$d_n$	$= -0.034 \text{ degré}^{-1}$	$d_m = -0.206 \text{ degré}^{-1}$

## A.2 Modèle LFT

Le modèle du missile en (A.1) peut être approché par la LFT supérieure dépendante du paramètre  $\mathcal{F}_u(G(s), \Delta(\theta))$  de la Figure A.2, où  $G(s)$  est le système LTI englobant le corps rigide du missile  $G'(s)$  et les matrices réelles

$$T = \begin{bmatrix} T_\alpha I_6 & 0 \\ 0 & T_M I_6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{bmatrix} S_\alpha I_6 & 0 \\ 0 & S_M I_6 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

qui correspondent respectivement à une translation et à une homothétie déterminées par le concepteur<sup>2</sup>. Donc,  $\Delta(\theta(t))$  est un opérateur diagonal qui spécifie comment le paramètre

<sup>2</sup>. Le calcul des matrices  $S$  et  $T$  est détaillé dans le Paragraphe 6.3.2, pour des domaines paramétriques de type hyper-rectangle.

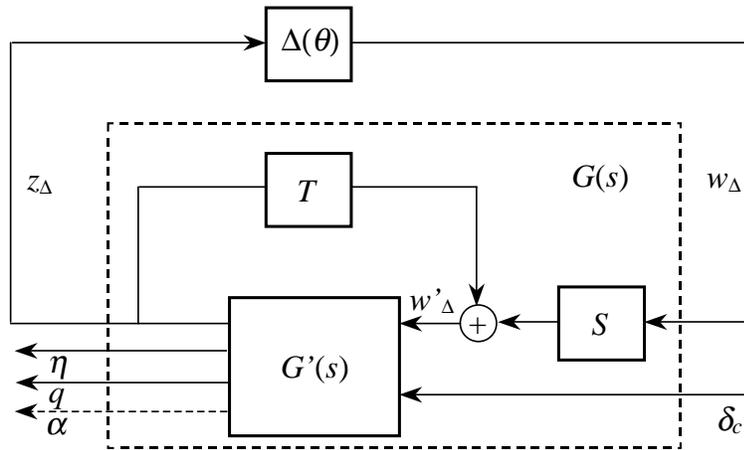


FIG. A.2 – Représentation LFT du missile

normalisé  $\theta$  s'inscrit dans la dynamique du système :

$$\Delta(\theta(t)) = \begin{bmatrix} \theta_\alpha(t)I_6 & 0 \\ 0 & \theta_M(t)I_6 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Les hypothèses suivantes ont été considérées pour obtenir un tel modèle LFT du système :

- l'angle d'incidence  $|\alpha(t)| = S_\alpha\theta_\alpha(t) + T_\alpha$ , où  $|\theta_\alpha(t)| \leq 1$ ,  $\forall t \geq 0$ , et les constantes  $T_\alpha \geq 0$  et  $S_\alpha > 0$  (en  $^\circ$ ) sont utilisées pour restreindre la gamme de variation du paramètre d'une manière convenable comme en (6.20) ;
- d'une façon similaire, le nombre de Mach  $M(t) = S_M\theta_M(t) + T_M$ , avec  $|\theta_M(t)| \leq 1$ ,  $\forall t \geq 0$ ,  $T_M \geq 0$  et  $S_M > 0$  ;
- comme en (6.21), le paramètre normalisé est

$$\theta(t) = [\theta_\alpha(t), \theta_M(t)]^T = \left[ \frac{|\alpha(t)| - T_\alpha}{S_\alpha}, \frac{M(t) - T_M}{S_M} \right]^T ;$$

- $\cos(\alpha)$  est approché par  $1 - \alpha^2/2$  avec une erreur maximale de 0.36% sur la gamme  $|\alpha| \leq 30^\circ$ .

Avec ces hypothèses et simplifications, le transfert  $G'(s)$  est complètement décrit par :

$$G'(s) := \begin{bmatrix} C_\theta \\ C_g \end{bmatrix} (sI - A_g)^{-1} \begin{bmatrix} B_\theta & B_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{\theta\theta} & D_{\theta g} \\ D_{g\theta} & D_{gg} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

avec le vecteur d'état  $x_g = [\alpha, q, \delta, \dot{\delta}]^T$  et les matrices de la représentation d'état

$$\begin{aligned}
 A_g &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_a^2 & -2\zeta\omega_a \end{bmatrix}, \\
 B_\theta &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & B_g &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_a^2 \end{bmatrix}, \\
 C_\theta &= \begin{bmatrix} \text{sign}(\alpha)b_n & 0 & 0 & 0 \\ a_n - 2c_n K_\pi & 0 & -d_n K_\pi & 0 \\ -\text{sign}(\alpha)b_n K_\pi & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sign}(\alpha)b_m & 0 & 0 & 0 \\ \text{sign}(\alpha)b_n & 0 & 0 & 0 \\ 2c_n & 0 & d_n & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7c_m & 0 & d_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2c_n & 0 & d_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 C_g &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 D_{\theta\theta} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_\pi c_n/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_n K_\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_n/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8c_m/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -c_n/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & D_{\theta g} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 D_{g\theta} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & D_{g g} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

où

$$K_\pi = \frac{\pi^2}{2(180^2)}.$$

Le modèle du système  $G(s)$  est donc déterminé par les interconnexions et les valeurs numériques.

### A.3 Modèle linéaire

Pour développer une linéarisation du modèle du système autour d'un point d'équilibre donné,

$$\begin{aligned} x_0 &= [\alpha_0, q_0, \delta_0, \dot{\delta}_0]^T, \\ u_0 &= \delta_{c0} = \delta_0, \end{aligned}$$

nous développons les équations non linéaires de (A.1),

$$\dot{\alpha} = \mathbf{f}(\alpha, q, \delta, M) = \alpha Z_\alpha + \delta Z_\delta + q, \quad (\text{A.7})$$

$$\dot{q} = \mathbf{g}(\alpha, \delta, M) = \alpha M_\alpha + \delta M_\delta, \quad (\text{A.8})$$

$$\eta = \mathbf{h}(\alpha, \delta, M) = \alpha N_\alpha + \delta N_\delta, \quad (\text{A.9})$$

en utilisant le théorème de TAYLOR. En négligeant les termes d'ordre plus grand ou égal à 2 et considérant que  $\dot{q}_0 = 0$  et, par conséquent, que<sup>3</sup>

$$\delta_0 = \frac{-1}{d_m} [a_m \alpha_0^3 + \text{sign}(\alpha_0) b_m \alpha_0^2 + c_m (-7 + 8M/3) \alpha_0], \quad (\text{A.10})$$

on obtient la représentation d'état linéaire

$$\dot{x}_\delta = \begin{bmatrix} A_{11} & 1 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & 0 & A_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_a^2 & -2\zeta\omega_a \end{bmatrix} x_\delta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_a^2 \end{bmatrix} \delta_c \quad (\text{A.11})$$

$$y_\delta = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_\delta.$$

Dans ce modèle, les nouvelles variables,  $x_\delta$  et  $y_\delta$ , traduisent des variations relatives,

$$x_\delta = \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_0 \\ q - q_0 \\ \delta - \delta_0 \\ \dot{\delta} - \dot{\delta}_0 \end{bmatrix} = x - x_0, \quad y_\delta = \begin{bmatrix} \eta - \eta_0 \\ q - q_0 \end{bmatrix} = y - y_0,$$

et les éléments des matrices sont déterminés par  $\alpha_0$  et  $M$  uniquement :

---

3. Notons que  $\delta_0$  est une fonction de  $\alpha_0$  et de  $M$  et sa valeur est obtenue à partir de (A.8) en considérant la condition de régime permanent,  $\dot{q}_0 = 0$ .

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha} \right]_{x_0, u_0} = K_\alpha M \cos \alpha_0 [3a_n \alpha_0^2 + 2b_n |\alpha_0| + c_n (2 - M/3)] - \\
&\quad K_\alpha M \frac{\pi}{180} \sin \alpha_0 [a_n \alpha_0^3 + \text{sign}(\alpha_0) b_n \alpha_0^2 + c_n (2 - M/3) \alpha_0] + \\
&\quad K_\alpha M \frac{\pi}{180} \sin \alpha_0 \frac{d_n}{d_m} [a_m \alpha_0^3 + \text{sign}(\alpha_0) b_m \alpha_0^2 + c_m (-7 + 8M/3) \alpha_0], \\
A_{13} &= \left[ \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \delta} \right]_{x_0, u_0} = K_\alpha M d_n \cos \alpha_0, \\
A_{21} &= \left[ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \alpha} \right]_{x_0, u_0} = K_q M^2 [3a_m \alpha_0^2 + 2b_m |\alpha_0| + c_m (-7 + 8M/3)], \\
A_{23} &= \left[ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \delta} \right]_{x_0, u_0} = K_q M^2 d_m, \\
C_{11} &= \left[ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \alpha} \right]_{x_0, u_0} = K_z M^2 [3a_n \alpha_0^2 + 2b_n |\alpha_0| + c_n (2 - M/3)], \\
C_{13} &= \left[ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \delta} \right]_{x_0, u_0} = K_z M^2 d_n.
\end{aligned}$$

## A.4 Validation

Cette section est consacrée à la validation du modèle LFT,  $G_\Delta(s, \theta) = \mathcal{F}_u(G(s), \Delta(\theta))$ , obtenu par les connexions de la Figure A.2 et le modèle LTI (A.6), et du modèle linéaire,  $G_0(s)$ , en (A.11). Ces modèles doivent être valables pour les gammes de variation du paramètre,  $\alpha \in [-30, 30]$  et  $M \in [2, 4]$ , considérées dans toutes les synthèses de correcteurs séquencés dans ce mémoire.

Puisque le bloc paramétrique  $\Delta(\theta)$  comporte l'état  $\alpha$ , le modèle  $G_\Delta(s, \theta)$  est une approximation (non linéaire) du vrai modèle non linéaire (A.1) et doit être valable pour une trajectoire quelconque du système dans le domaine considéré. On compare donc certaines variables, notamment les sorties et les paramètres, calculées pour chacun de ces modèles, via une simulation instationnaire (voir le schéma SIMULINK<sup>®</sup> à la Figure A.3). Ces résultats sont montrés aux Figures A.4 et A.5. Les trajectoires de la variable exogène  $M(t)$  ont été générées en incorporant l'Expression (A.3) dans chaque modèle, avec  $M(0) = 4$ . Les signaux d'erreur résultent de l'approximation  $\cos(\alpha) \approx 1 - \alpha^2/2$  et demeurent dans des limites tolérables. Notons que la trajectoire du paramètre (Figure A.5) est assez représentative de son domaine de variation.

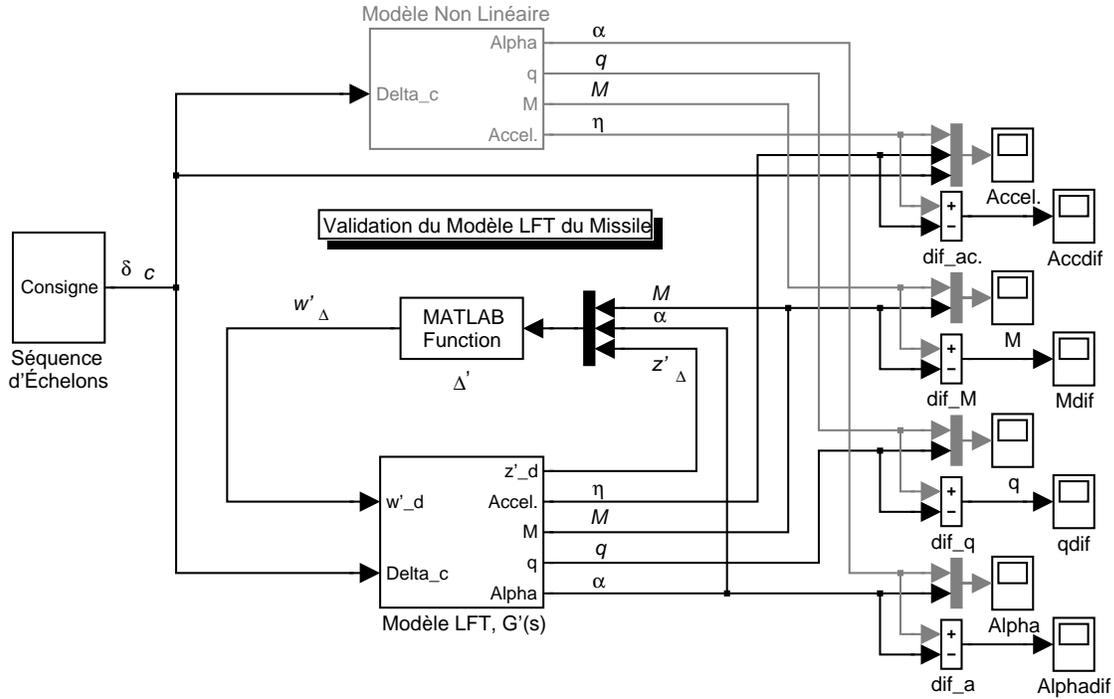


FIG. A.3 – Schéma de simulation pour la validation du modèle LFT du missile

Le modèle linéaire est symétrique par rapport à  $\alpha = 0$ . Donc, il suffit de le valider pour des valeurs positives de  $\alpha$ . Dans ce but nous avons calculé des modèles linéaires par deux approches, pour un nombre très grand de paires  $(\alpha, M)$  dans la région  $[0, 30] \times [2, 4]$  :

- $G_0(s, \theta)$ , via l'approche analytique (A.11) ;
- $G_\delta(s, \theta)$ , issus du modèle non linéaire (A.1) par de petites perturbations numériques autour des points de fonctionnement  $(x_0, u_0)$ .

La Figure A.6 montre les valeurs de

$$\bar{\sigma}_m(\alpha, M) := \sup_{\omega \in \mathbf{R}} \{ \bar{\sigma}[G_\delta(j\omega) - G_0(j\omega)] \},$$

qui équivaut à la norme  $H_\infty$

$$\|G_\delta(s) - G_0(s)\|_\infty$$

lorsque les modèles sont stables, pour tout le domaine paramétrique. Remarquons que  $\bar{\sigma}_m$  est très petit pour les points qui n'appartiennent pas à la droite séparant les domaines stable et instable, où la différence  $G_\delta(s) - G_0(s)$  a des pôles imaginaires purs. Cela signifie que les deux modèles sont très proches et, comme ils sont issus d'approches distinctes, on conclut qu'ils sont suffisamment précis pour représenter la dynamique linéaire du missile pour  $M$  constant. On constate par simulation temporelle que, pour le point central (15,3), les deux modèles sont pratiquement identiques (voir Figure A.7).

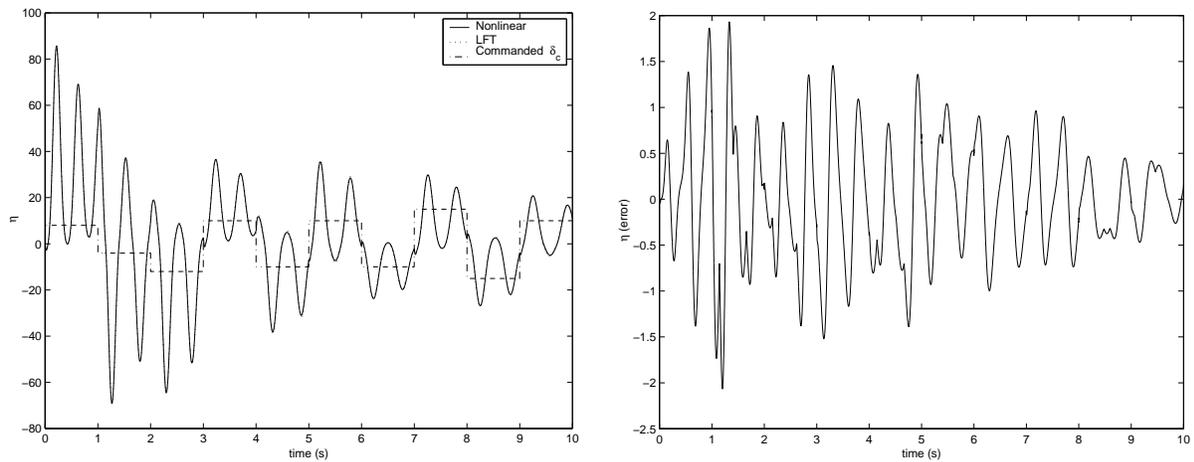
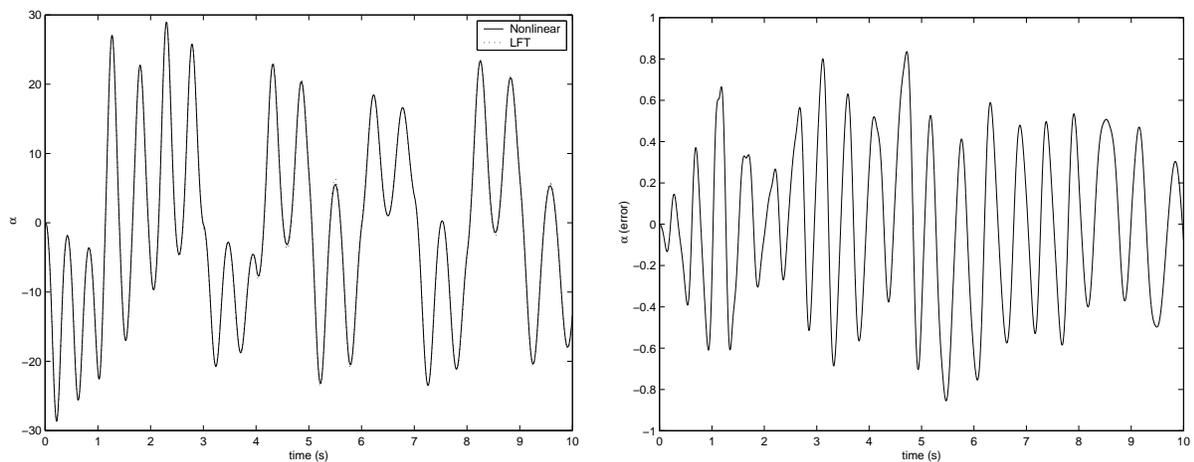
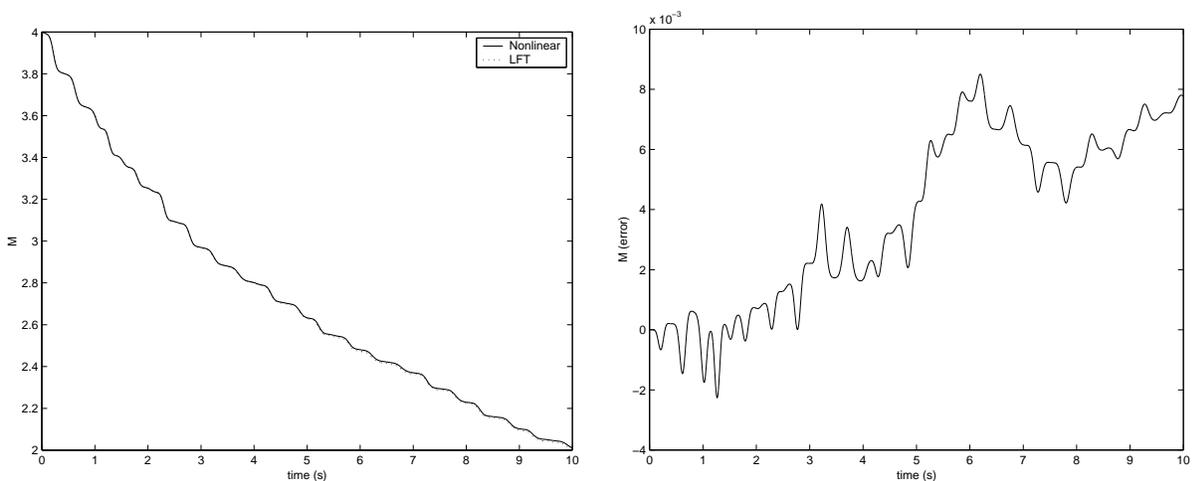
(a) - Accélération,  $\eta(t)$ (b) - Angle d'incidence,  $\alpha(t)$ (c) - Nombre de Mach,  $M$ 

FIG. A.4 – Validation du modèle LFT du missile : simulations pour les modèles non linéaires initial et LFT, à gauche ; différence entre les simulations des deux modèles, à droite

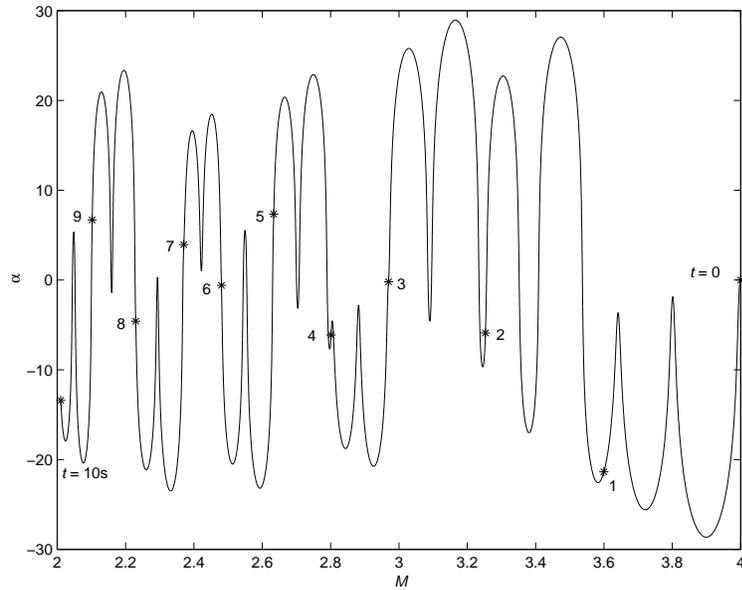


FIG. A.5 – Trajectoire dans le plan  $\alpha(t) \times M(t)$  pour la validation du modèle LFT

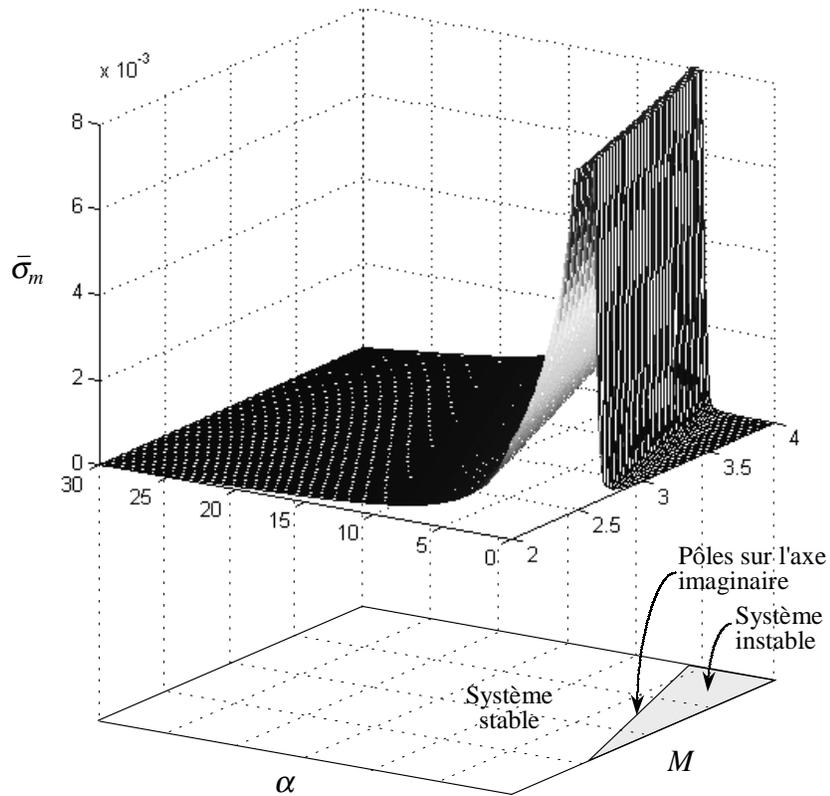
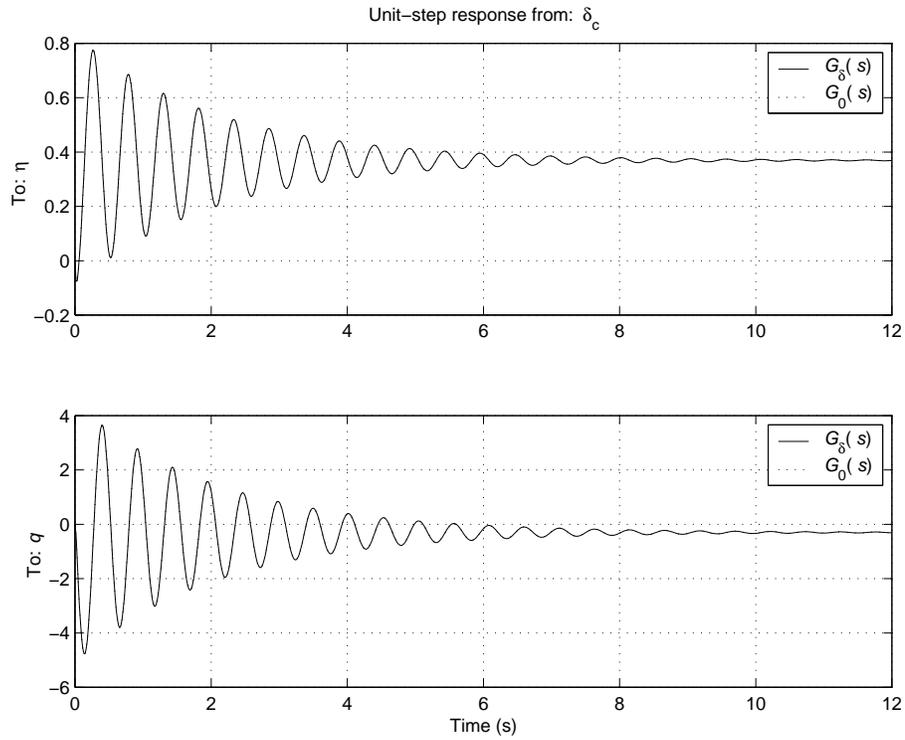
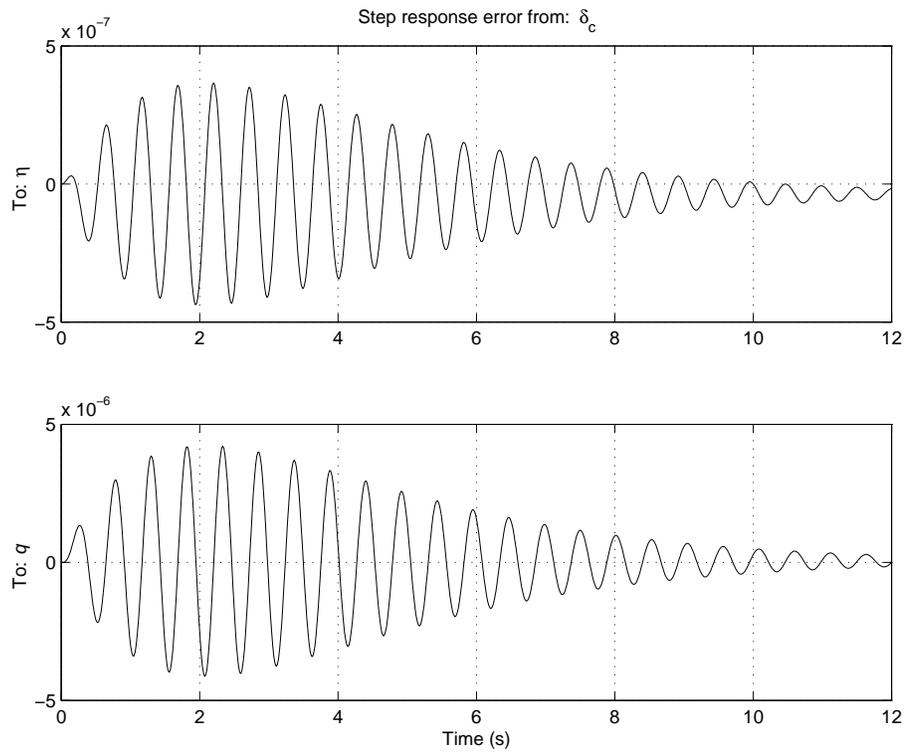


FIG. A.6 – Validation du modèle linéaire du missile :  $\bar{\sigma}_m(\alpha, M)$



(a) - Réponse de  $G_\delta(s)$  et de  $G_0(s)$



(b) - Réponse de  $G_\delta(s) - G_0(s)$

FIG. A.7 – Validation du modèle linéaire du missile : réponse à un échelon unitaire au point central  $\alpha = 15$ ,  $M = 3$



## Annexe B

# Formulation LMI pour la synthèse LPV multi-canal mixte $H_2/H_\infty$

LES formules ci-après décrivent la structure des contraintes LMI qui doivent être codées pour l'utilisation de la technique du Chapitre 5. Remarquons que pour des spécifications de transferts multiples, les matrices

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{\Delta 1} \\ D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix}, \quad [C_1 \quad D_{1\Delta} \quad D_{11} \quad D_{12}]$$

qui apparaissent dans les descriptions du Chapitre 5 doivent être modifiées de façon appropriée. De plus, les variables  $\mathbf{X}_j$ ,  $Z_j$ ,  $\mathbf{Q}_j$ ,  $\mathbf{R}_j$ ,  $\nu_j$  et  $\gamma_j$  doivent être introduites pour chaque canal et chaque spécification indexés par  $j$ , ce qui réduit le conservatisme. Toutes les autres variables sont communes à tous les canaux et spécifications.

## B.1 Performance $H_2$

$$\mathcal{L}^{21} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{11}^{21} & \star \\ \mathcal{L}_{21}^{21} & \mathcal{L}_{22}^{21} & \star \\ 0 & 0 & \mathcal{L}_{33}^{21} & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \mathcal{L}_{43}^{21} & \mathcal{L}_{44}^{21} & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{L}_{55}^{21} & \star & \star & \star & \star \\ \mathcal{L}_{61}^{21} & \mathcal{L}_{62}^{21} & \mathcal{L}_{63}^{21} & \mathcal{L}_{64}^{21} & \mathcal{L}_{65}^{21} & \mathcal{L}_{66}^{21} & \star & \star & \star \\ \mathcal{L}_{71}^{21} & \mathcal{L}_{72}^{21} & \mathcal{L}_{73}^{21} & \mathcal{L}_{74}^{21} & \mathcal{L}_{75}^{21} & \mathcal{L}_{76}^{21} & \mathcal{L}_{77}^{21} & \star & \star \\ \mathcal{L}_{81}^{21} & \mathcal{L}_{82}^{21} & \mathcal{L}_{83}^{21} & \mathcal{L}_{84}^{21} & \mathcal{L}_{85}^{21} & 0 & 0 & \mathcal{L}_{88}^{21} & \star \\ \mathcal{L}_{91}^{21} & \mathcal{L}_{92}^{21} & \mathcal{L}_{93}^{21} & \mathcal{L}_{94}^{21} & \mathcal{L}_{95}^{21} & 0 & 0 & \mathcal{L}_{98}^{21} & \mathcal{L}_{99}^{21} \end{bmatrix} < 0,$$

$$\mathcal{L}^{22} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{11}^{22} & \star \\ \mathcal{L}_{21}^{22} & \mathcal{L}_{22}^{22} & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \mathcal{L}_{33}^{22} & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \mathcal{L}_{43}^{22} & \mathcal{L}_{44}^{22} & \star & \star & \star & \star \\ \mathcal{L}_{51}^{22} & \mathcal{L}_{52}^{22} & \mathcal{L}_{53}^{22} & \mathcal{L}_{54}^{22} & \mathcal{L}_{55}^{22} & \star & \star & \star \\ \mathcal{L}_{61}^{22} & \mathcal{L}_{62}^{22} & \mathcal{L}_{63}^{22} & \mathcal{L}_{64}^{22} & \mathcal{L}_{65}^{22} & \mathcal{L}_{66}^{22} & \star & \star \\ \mathcal{L}_{71}^{22} & \mathcal{L}_{72}^{22} & \mathcal{L}_{73}^{22} & \mathcal{L}_{74}^{22} & 0 & 0 & \mathcal{L}_{77}^{22} & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{L}_{87}^{22} & \mathcal{L}_{88}^{22} \end{bmatrix} < 0,$$

$$\mathcal{L}^{23} = \text{Tr}(Z) < 1,$$

$$\mathcal{L}^{24} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \star \\ \begin{bmatrix} F_{11}^T \Delta_i & \Delta_{\mathbf{K},i} \\ \Delta_i & \Delta_i G_{11} \end{bmatrix} & \mathbf{Q}_1 + \begin{bmatrix} F_{11} + F_{11}^T & \star \\ (\mathbf{N} + I)^T & E_{11} + E_{11}^T \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, L,$$

$$\mathcal{L}^{25} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 & \star \\ \begin{bmatrix} F_{11}^T \Delta_i & \Delta_{\mathbf{K},i} \\ \Delta_i & \Delta_i G_{11} \end{bmatrix} & \mathbf{Q}_2 + \begin{bmatrix} F_{11} + F_{11}^T & \star \\ (\mathbf{N} + I)^T & E_{11} + E_{11}^T \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, L, \quad (\text{B.1})$$

où

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \star \\ \mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,1} & \star \\ \mathbf{R}_{1,2} & \mathbf{R}_{1,3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{1,1} & \star \\ \mathbf{Q}_{1,2} & \mathbf{Q}_{1,3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{2,1} & \star \\ \mathbf{R}_{2,2} & \mathbf{R}_{2,3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{2,1} & \star \\ \mathbf{Q}_{2,2} & \mathbf{Q}_{2,3} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{11}^{21} &= -\mathbf{X}_1, & \mathcal{L}_{21}^{21} &= -\mathbf{X}_2, \\
\mathcal{L}_{22}^{21} &= -\mathbf{X}_3, & \mathcal{L}_{33}^{21} &= \mathbf{Q}_{1,1}, \\
\mathcal{L}_{43}^{21} &= \mathbf{Q}_{1,2}, & \mathcal{L}_{44}^{21} &= \mathbf{Q}_{1,3}, \\
\mathcal{L}_{55}^{21} &= -\nu I, & \mathcal{L}_{61}^{21} &= V_{11}^T A + \mathbf{B}_{K1} C_2, \\
\mathcal{L}_{62}^{21} &= \mathbf{A}_K, & \mathcal{L}_{63}^{21} &= V_{11}^T B_\Delta + \mathbf{B}_{K1} D_{2\Delta}, \\
\mathcal{L}_{64}^{21} &= \mathbf{B}_{K\Delta}, & \mathcal{L}_{65}^{21} &= V_{11}^T B_1 + \mathbf{B}_{K1} D_{21}, \\
\mathcal{L}_{66}^{21} &= \mathbf{X}_1 - V_{11} - V_{11}^T, & \mathcal{L}_{71}^{21} &= A + B_2 \mathbf{D}_{K11} C_2, \\
\mathcal{L}_{72}^{21} &= A W_{11} + B_2 \mathbf{C}_{K1}, & \mathcal{L}_{73}^{21} &= B_\Delta + B_2 \mathbf{D}_{K11} D_{2\Delta}, \\
\mathcal{L}_{74}^{21} &= B_\Delta E_{11} + B_2 \mathbf{D}_{K1\Delta}, & \mathcal{L}_{75}^{21} &= B_1 + B_2 \mathbf{D}_{K11} D_{21}, \\
\mathcal{L}_{76}^{21} &= \mathbf{X}_2 - \mathbf{U}^T - I, & \mathcal{L}_{77}^{21} &= \mathbf{X}_3 - W_{11} - W_{11}^T, \\
\mathcal{L}_{81}^{21} &= H_{11}^T C_\Delta + \mathbf{D}_{K\Delta 1} C_2, & \mathcal{L}_{82}^{21} &= \mathbf{C}_{K\Delta}, \\
\mathcal{L}_{83}^{21} &= H_{11}^T D_{\Delta\Delta} + \mathbf{D}_{K\Delta 1} D_{2\Delta}, & \mathcal{L}_{84}^{21} &= \mathbf{D}_{K\Delta\Delta}, \\
\mathcal{L}_{85}^{21} &= H_{11}^T D_{\Delta 1} + \mathbf{D}_{K\Delta 1} D_{21}, & \mathcal{L}_{88}^{21} &= \mathbf{R}_{1,1} - H_{11} - H_{11}^T, \\
\mathcal{L}_{91}^{21} &= C_\Delta + D_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K11} C_2, & \mathcal{L}_{92}^{21} &= C_\Delta W_{11} + D_{\Delta 2} \mathbf{C}_{K1}, \\
\mathcal{L}_{93}^{21} &= D_{\Delta\Delta} + D_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K11} D_{2\Delta}, & \mathcal{L}_{94}^{21} &= D_{\Delta\Delta} E_{11} + D_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K1\Delta}, \\
\mathcal{L}_{95}^{21} &= D_{\Delta 1} + D_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K11} D_{21}, & \mathcal{L}_{98}^{21} &= \mathbf{R}_{1,2} - \mathbf{M}^T - I, \\
\mathcal{L}_{99}^{21} &= \mathbf{R}_{1,3} - G_{11} - G_{11}^T, & & \\
\\
\mathcal{L}_{11}^{22} &= -\mathbf{X}_1, & \mathcal{L}_{21}^{22} &= -\mathbf{X}_2, \\
\mathcal{L}_{22}^{22} &= -\mathbf{X}_3, & \mathcal{L}_{33}^{22} &= \mathbf{Q}_{2,1}, \\
\mathcal{L}_{43}^{22} &= \mathbf{Q}_{2,2}, & \mathcal{L}_{44}^{22} &= \mathbf{Q}_{2,3}, \\
\mathcal{L}_{51}^{22} &= H_{11}^T C_\Delta + \mathbf{D}_{K\Delta 1} C_2, & \mathcal{L}_{52}^{22} &= \mathbf{C}_{K\Delta}, \\
\mathcal{L}_{53}^{22} &= H_{11}^T D_{\Delta\Delta} + \mathbf{D}_{K\Delta 1} D_{2\Delta}, & \mathcal{L}_{54}^{22} &= \mathbf{D}_{K\Delta\Delta}, \\
\mathcal{L}_{55}^{22} &= \mathbf{R}_{2,1} - H_{11} - H_{11}^T, & \mathcal{L}_{61}^{22} &= C_\Delta + D_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K11} C_2, \\
\mathcal{L}_{62}^{22} &= C_\Delta W_{11} + D_{\Delta 2} \mathbf{C}_{K1}, & \mathcal{L}_{63}^{22} &= D_{\Delta\Delta} + D_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K11} D_{2\Delta}, \\
\mathcal{L}_{64}^{22} &= D_{\Delta\Delta} E_{11} + D_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K1\Delta}, & \mathcal{L}_{65}^{22} &= \mathbf{R}_{2,2} - \mathbf{M}^T - I, \\
\mathcal{L}_{66}^{22} &= \mathbf{R}_{2,3} - G_{11} - G_{11}^T, & \mathcal{L}_{71}^{22} &= C_1 + D_{12} \mathbf{D}_{K11} C_2, \\
\mathcal{L}_{72}^{22} &= C_1 W_{11} + D_{12} \mathbf{C}_{K1}, & \mathcal{L}_{73}^{22} &= D_{1\Delta} + D_{12} \mathbf{D}_{K11} D_{2\Delta}, \\
\mathcal{L}_{74}^{22} &= D_{1\Delta} E_{11} + D_{12} \mathbf{D}_{K1\Delta}, & \mathcal{L}_{77}^{22} &= -Z, \\
\mathcal{L}_{87}^{22} &= D_{11}^T + D_{21}^T \mathbf{D}_{K11}^T D_{12}^T, & \mathcal{L}_{88}^{22} &= -\nu I.
\end{aligned}$$

## B.2 Performance $H_\infty$

$$\mathcal{L}^{\infty 1} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{11}^{\infty 1} & \star \\ \mathcal{L}_{21}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{22}^{\infty 1} & \star \\ 0 & 0 & \mathcal{L}_{33}^{\infty 1} & \star \\ 0 & 0 & \mathcal{L}_{43}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{44}^{\infty 1} & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{L}_{55}^{\infty 1} & \star & \star & \star & \star & \star \\ \mathcal{L}_{61}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{62}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{63}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{64}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{65}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{66}^{\infty 1} & \star & \star & \star & \star \\ \mathcal{L}_{71}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{72}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{73}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{74}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{75}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{76}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{77}^{\infty 1} & \star & \star & \star \\ \mathcal{L}_{81}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{82}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{83}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{84}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{85}^{\infty 1} & 0 & 0 & \mathcal{L}_{88}^{\infty 1} & \star & \star \\ \mathcal{L}_{91}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{92}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{93}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{94}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{95}^{\infty 1} & 0 & 0 & \mathcal{L}_{98}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{99}^{\infty 1} & \star \\ \mathcal{L}_{101}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{102}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{103}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{104}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{105}^{\infty 1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{L}_{1010}^{\infty 1} \end{bmatrix} < 0,$$

$$\mathcal{L}^{\infty 2} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \star \\ \begin{bmatrix} F_{11}^T \Delta_i & \Delta_{\mathbf{K},i} \\ \Delta_i & \Delta_i G_{11} \end{bmatrix} & \mathbf{Q} + \begin{bmatrix} F_{11} + F_{11}^T & \star \\ (\mathbf{N} + I)^T & E_{11} + E_{11}^T \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0, i = 1, \dots, L, \quad (\text{B.2})$$

où

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \star \\ \mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \star \\ \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \star \\ \mathbf{Q}_2 & \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11}^{\infty 1} &= -\mathbf{X}_1, & \mathcal{L}_{21}^{\infty 1} &= -\mathbf{X}_2, \\ \mathcal{L}_{22}^{\infty 1} &= -\mathbf{X}_3, & \mathcal{L}_{33}^{\infty 1} &= \mathbf{Q}_{,1}, \\ \mathcal{L}_{43}^{\infty 1} &= \mathbf{Q}_{,2}, & \mathcal{L}_{44}^{\infty 1} &= \mathbf{Q}_{,3}, \\ \mathcal{L}_{55}^{\infty 1} &= -\gamma I, & \mathcal{L}_{61}^{\infty 1} &= V_{11}^T A + \mathbf{B}_{K1} C_2, \\ \mathcal{L}_{62}^{\infty 1} &= \mathbf{A}_K, & \mathcal{L}_{63}^{\infty 1} &= V_{11}^T B_\Delta + \mathbf{B}_{K1} D_{2\Delta}, \\ \mathcal{L}_{64}^{\infty 1} &= \mathbf{B}_{K\Delta}, & \mathcal{L}_{65}^{\infty 1} &= V_{11}^T B_1 + \mathbf{B}_{K1} D_{21}, \\ \mathcal{L}_{66}^{\infty 1} &= \mathbf{X}_1 - V_{11} - V_{11}^T, & \mathcal{L}_{71}^{\infty 1} &= A + B_2 \mathbf{D}_{K11} C_2, \\ \mathcal{L}_{72}^{\infty 1} &= A W_{11} + B_2 \mathbf{C}_{K1}, & \mathcal{L}_{73}^{\infty 1} &= B_\Delta + B_2 \mathbf{D}_{K11} D_{2\Delta}, \\ \mathcal{L}_{74}^{\infty 1} &= B_\Delta E_{11} + B_2 \mathbf{D}_{K11} \Delta, & \mathcal{L}_{75}^{\infty 1} &= B_1 + B_2 \mathbf{D}_{K11} D_{21}, \\ \mathcal{L}_{76}^{\infty 1} &= \mathbf{X}_2 - U^T - I, & \mathcal{L}_{77}^{\infty 1} &= \mathbf{X}_3 - W_{11} - W_{11}^T, \\ \mathcal{L}_{81}^{\infty 1} &= H_{11}^T C_\Delta + \mathbf{D}_{K\Delta 1} C_2, & \mathcal{L}_{82}^{\infty 1} &= \mathbf{C}_{K\Delta}, \\ \mathcal{L}_{83}^{\infty 1} &= H_{11}^T D_{\Delta\Delta} + \mathbf{D}_{K\Delta 1} D_{2\Delta}, & \mathcal{L}_{84}^{\infty 1} &= \mathbf{D}_{K\Delta\Delta}, \\ \mathcal{L}_{85}^{\infty 1} &= H_{11}^T D_{\Delta 1} + \mathbf{D}_{K\Delta 1} D_{21}, & \mathcal{L}_{88}^{\infty 1} &= \mathbf{R}_1 - H_{11} - H_{11}^T, \\ \mathcal{L}_{91}^{\infty 1} &= C_\Delta + D_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K11} C_2, & \mathcal{L}_{92}^{\infty 1} &= C_\Delta W_{11} + D_{\Delta 2} \mathbf{C}_{K1}, \\ \mathcal{L}_{93}^{\infty 1} &= D_{\Delta\Delta} + D_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K11} D_{2\Delta}, & \mathcal{L}_{94}^{\infty 1} &= D_{\Delta\Delta} E_{11} + D_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K11} \Delta, \\ \mathcal{L}_{95}^{\infty 1} &= D_{\Delta 1} + D_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K11} D_{21}, & \mathcal{L}_{98}^{\infty 1} &= \mathbf{R}_2 - M^T - I, \\ \mathcal{L}_{99}^{\infty 1} &= \mathbf{R}_3 - G_{11} - G_{11}^T, & \mathcal{L}_{101}^{\infty 1} &= C_1 + D_{12} \mathbf{D}_{K11} C_2, \\ \mathcal{L}_{102}^{\infty 1} &= C_1 W_{11} + D_{12} \mathbf{C}_{K1}, & \mathcal{L}_{103}^{\infty 1} &= D_{1\Delta} + D_{12} \mathbf{D}_{K11} D_{2\Delta}, \\ \mathcal{L}_{104}^{\infty 1} &= D_{1\Delta} E_{11} + D_{12} \mathbf{D}_{K11} \Delta, & \mathcal{L}_{105}^{\infty 1} &= D_{11} + D_{12} \mathbf{D}_{K11} D_{21}, \\ \mathcal{L}_{1010}^{\infty 1} &= -\gamma I. \end{aligned}$$



# Références bibliographiques

- [1] E. H. Abed, D. Lindsay, and W. A. Hashlamoun. On Participation Factors for Linear Systems. *Automatica*, 36:1489–1496, 2000.
- [2] D. Alazard and P. Apkarian. Exact Observer-Based Structures for Arbitrary Compensators. *Int. J. Robust Nonlinear Contr.*, 9:101–118, 1999.
- [3] D. Alazard, C. Cumer, P. Apkarian, M. Gauvrit, and G. Ferreres. *Robustesse et Commande Optimale*. Cépaduès-Éditions, Toulouse, France, 1999.
- [4] F. Alizadeh, J.-P. Haerberly, M. V. Nayakkankuppam, M. L. Overton, and S. Schmieta. *SDPpack Version 0.9 Beta for Matlab 5.0 - Semidefinite-Quadratic-Linearly Constrained Programs*. 1997.
- [5] P. Apkarian and R. Adams. Advanced Gain-Scheduling Techniques for Uncertain Systems. *IEEE Trans. Contr. Syst. Technology*, 6:21–32, 1998.
- [6] P. Apkarian and P. Gahinet. A Convex Characterization of Gain-Scheduled  $H_\infty$  Controllers. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 40(5):853–864. See also pp. 1681, 1995.
- [7] P. Apkarian, P. Gahinet, and G. Becker. Self-Scheduled  $H_\infty$  Control of Linear Parameter-Varying Systems: A Design Example. *Automatica*, 31(Sept.):1251–1261, 1995.
- [8] P. Apkarian, P. C. Pellanda, and H. D. Tuan. Mixed  $H_2/H_\infty$  Multi-Channel Linear Parameter-Varying Control in Discrete Time. *Syst. & Contr. Letters*, 41:333–346, 2000.
- [9] P. Apkarian, P. C. Pellanda, and H. D. Tuan. Mixed  $H_2/H_\infty$  Multi-Channel Linear Parameter-Varying Control in Discrete Time. *in Proc. Amer. Contr. Conf., Chicago, Illinois*, pages 1322–1326, 2000.
- [10] P. Apkarian and H. D. Tuan. Parameterized LMIs in Control Theory. *SIAM J. on Control and Optimization*, 38:1241–1264, 1998.
- [11] G. Becker. Parameter-Dependent Control of an Under-Actuated Mechanical System. *in Proc. IEEE Conf. Decision Contr., LA*, 1995.
- [12] G. Becker. Additional Results on Parameter-Dependent Controllers for LPV Systems. *IFAC World Congress, San Francisco, USA*, 1996.
- [13] G. Becker, A. Packard, D. Philbrick, and G. Balas. Control of Parametrically-Dependent Linear Systems: A Single Quadratic Lyapunov Approach. *in Proc. Amer. Contr. Conf., San Francisco, CA*, pages 2795–2799, 1993.
- [14] D. J. Bender and R. A. Fowell. Computing the Estimator-Controller form of a compensator. *Int. J. Contr.*, 41(6):1565–1575, 1985.

- [15] J.-M. Biannic. *Commande Robuste de Systèmes à Paramètres Variables*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, France, Octobre 1996.
- [16] J.-M. Biannic and P. Apkarian. Missile Autopilot Design via a modified LPV Synthesis Technique. *Aerospace Science and Technology*, 3:153–160, 1999.
- [17] G. E. Boukarim and J. H. Chow. Modeling of Nonlinear System Uncertainties Using a Linear Fractional Transformation Approach. *in Proc. Amer. Contr. Conf.*, 1998.
- [18] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, volume 15. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
- [19] M. Chilali and P. Gahinet.  $H_\infty$  Design with Pole Placement Constraints: an LMI Approach. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 41(March):358–367, 1995.
- [20] M. Chilali, P. Gahinet, and P. Apkarian. Robust Pole Placement in LMI Regions. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 44(12):2257–2270, 1999.
- [21] B. Clement and G. Duc. Flexible Arm Multiobjective Control via Youla Parameterization and LMI Optimization. *in Proc. 4th IFAC Symposium on Robust Control Design, Prague, June, 2000*.
- [22] C. Courties. *Sur la Commande Robuste et LPV de Systèmes à Paramètres Lentement Variables*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, Toulouse, France, Octobre 1999.
- [23] R. D'Andrea and S. Khatri. Kalman Decomposition of Linear Fractional Transformation Representations and Minimality. *in Proc. Amer. Contr. Conf.*, pages 3557–3561, 1997.
- [24] S. Dasgupta, G. Chockalingam, B. D. O. Anderson, and M. Fu. Lyapunov Functions for Uncertain Systems with Applications to the Stability of Time Varying Systems. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 41:93–106, 1994.
- [25] M. C. de Oliveira, J. Bernussou, and J. C. Geromel. A New Discrete-Time Robust Stability Condition. *Syst. Control Letters*, 37:261–265, 1999.
- [26] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, and J. Bernussou. An LMI Optimization Approach to Multiobjective Controller Design for Discrete-Time Systems. *in Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, Phoenix, AZ*, pages 3611–3616, 1999.
- [27] G. Duc and S. Font. *Commande  $H_\infty$  et  $\mu$ -Analyse: des Outils pour la Robustesse*. Editions Hermès, 1998.
- [28] B. Fares, P. Apkarian, and D. Noll. An Augmented Lagrangian Method for a Class of LMI-Constrained Problems in Robust Control Theory. *Int. J. Contr.*, 74(4):348–360, 2001.
- [29] B. Fares, D. Noll, and P. Apkarian. Robust Control via Sequential Semidefinite Programming. *to appear in SIAM Journal on Control and Optimization*, 2001.
- [30] E. Feron, P. Apkarian, and P. Gahinet. Analysis and Synthesis of Robust Control Systems via Parameter-Dependent Lyapunov Functions. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 41:1041–1046, 1996.
- [31] P. Gahinet and P. Apkarian. A Linear Matrix Inequality Approach to  $H_\infty$  Control. *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 4:421–448, 1994.

- [32] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. Affine Parameter-Dependent Lyapunov Functions and Real Parametric Uncertainty. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 41(3):437–442, 1996.
- [33] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali. *The LMI Control Toolbox for Use with Matlab*. The MathWorks Inc., 1994.
- [34] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations*. J. Hopkins University Press, 1996.
- [35] W. Haddad and D. Bernstein. Parameter-Dependent Lyapunov Functions and the Discrete-Time Popov Criterion for Robust Analysis. *Automatica*, 30:1015–1021, 1994.
- [36] A. M. A. Hamdan and A.H. Nayfeh. Measures of Modal Controllability and Observability for First- and Second-Order Linear Systems. *J. of Guid. Contr. and Dyn.*, may-june, 1989.
- [37] A. Helmersson. *Methods for Robust Gain-Scheduling*. PhD thesis, Linköping University, Sweden, 1995.
- [38] A. Hired. *Pilotage Robuste d'un Missile Sur un Large Domaine de Vol - Synthèse et Analyse dans le Cadre  $H_\infty$  et LPV*. PhD thesis, Université de Paris-Sud Orsay, Paris, France, 1999.
- [39] A. Hired, G. Duc, and J. P. Friang. Self-Scheduled  $H_\infty$  Loop-Shaping Control of a Missile. in *Proc. 5th European Control Conference, Karlsruhe*, Sept., 1999.
- [40] R. A. Hyde and K. Glover. The Application of Scheduled  $H_\infty$  Controllers to a VSTOL Aircraft. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 38(7):1021–39, 1993.
- [41] H. Kajiwarra, P. Apkarian, and P. Gahinet. LPV Techniques for Control of an Inverted Pendulum. *IEEE Control Systems Magazine*, 19:44–54, 1999.
- [42] I. Kaminer, P. P. Khargonekar, and M. A. Rotea. Mixed  $H_2/H_\infty$  Control for Discrete-time Systems via Convex Optimization. *Automatica*, 29:57–70, 1993.
- [43] I. Kaminer, A. M. Pascoal, P. P. Khargonekar, and E. E. Coleman. A Velocity Algorithm for the Implementation of Gain-Scheduled Controllers. *Automatica*, 31(8):1185–1191, 1995.
- [44] M. Kellet. *Continuous Scheduling of  $H_\infty$  Controllers for a MS760 Paris Aircraft, in Robust Control Systems Design Using  $H_\infty$  and Related Methods*, pages 197–219. P. H. Hammond, London, 1991.
- [45] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1996.
- [46] I. E. Kose and F. Jabbari. Control of LPV Systems with Partly Measured Parameters. *IEEE Trans. Aut. Control*, 44:658–663, 1999.
- [47] E. Kreindler and D. Rothschild. Model Following in Linear-Quadratic-Optimization. *J. of Guidance, Control and Dynamics*, 14(7):835–842, 1976.
- [48] P. Kundur. *Power System Stability and Control*. McGraw-Hill, Inc, 1994.
- [49] I. D. Landau, R. Lozano, and M. M'Saad. *Adaptive Control*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [50] D. A. Lawrence and W. J. Rugh. Gain Scheduling Dynamic Linear Controllers for a Nonlinear Plant. *Automatica*, 31(3):381–390, 1995.

- [51] L. H. Lee and M. Spillman. A Parameter-Dependent Performance Criterion for Linear Parameter-Varying Systems. *in Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, San Diego, California, USA*, pages 984–989, 1997.
- [52] D. J. Leith and W. E. Leithead. Appropriate Realization of MIMO Gain Scheduled Controllers. *Int. J. Contr.*, 70:13–50, 1998.
- [53] D. J. Leith and W. E. Leithead. Gain-Scheduled & Nonlinear Systems: Dynamic Analysis by Velocity Based Linearization Families. *Int. J. Contr.*, 70:289–317, 1998.
- [54] D. J. Leith and W. E. Leithead. Survey of Gain-Scheduling Analysis and Design. *Int. J. Contr.*, 73(11):1001–1025, 2000.
- [55] S. Lim and J. P. How. Analysis of LPV Systems Using a Piecewise Affine Parameter-Dependent Lyapunov Function. *in Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, San Diego, California, USA*, pages 978–983, 1997.
- [56] W. M. Lu and J. C. Doyle.  $H_\infty$  Control of LFT Systems: An LMI Approach. *in Proc. IEEE Conf. Decision Contr., Tucson, AR*, pages 1997–2001, 1992.
- [57] W. M. Lu and J. C. Doyle.  $H_\infty$  Control of Nonlinear Systems: A Convex Characterization. *IEEE Trans. Aut. Control*, 40:1668–1674, 1995.
- [58] S. H. Lui, H. B. Keller, and T. W. C. Kwok. Homotopy Method for the Large, Sparse, Real Nonsymmetric Eigenvalue Problem. *SIAM, J. Matrix Anal. Appl.*, 18(2):312–333, 1997.
- [59] D. C. MacFarlane and K. Glover. *Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions*, volume 138, Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, 1990.
- [60] N. Martins and L. T. G. Lima. Determination of Suitable Location for Power System Stabilizers and Static VAR Compensator for Damping Electromechanical Oscillations in Large Scale Power Systems. *IEEE Trans. Power Systems*, 5(4):1455–1469, 1990.
- [61] J. C. Morris, P. Apkarian, and J. C. Doyle. Synthesizing Robust Mode Shapes with  $\mu$  and Implicit Model Following. *in Proc. IEEE Conf. on Control Applications, Dayton, Ohio, Sept.*, 1992.
- [62] A. Nemirovskii and P. Gahinet. The Projective Method for Solving Linear Matrix Inequalities. *Math. Programming Series B*, 77:163–190, 1997.
- [63] Y. Nesterov and A. Nemirovskii. Interior Point Algorithms in Convex Programming: Theory and Applications. *SIAM Studies in Applied Mathematics*, 13, 1994.
- [64] R. A. Nichols, R. T. Reichert, and W. J. Rugh. Gain Scheduling for  $H_\infty$  Controllers: a Flight Control Example. *IEEE Trans. Contr. Systems Technology*, 1(2):69–79, 1993.
- [65] A. Packard. Gain-Scheduling via Linear Fractional Transformations. *System & Control Letters*, 22:79–92, 1994.
- [66] G. Papageorgiou, K. Glover, G. D’Mello, and Y. Patel. Taking Robust LPV Control into Flight on the VAAC Harrier. *in Proc. 39th IEEE Conf. on Decision and Control, Sydney*, 2000.
- [67] P. C. Pellanda and P. Apkarian. Algorithmes Avancés pour l’Interpolation de Compensateurs. Technical Report RT 6/7602.10 DCSD, ONERA-Centre de Toulouse, Toulouse, France, Mar. 2000.

- [68] P. C. Pellanda and P. Apkarian. Interpolated Gain-Scheduled Controllers with Guaranteed  $H_\infty$  Performance. *in Proc. XIII Brazilian Automatic Control Conference, Florianópolis*, pages 26–31, 2000.
- [69] P. C. Pellanda and P. Apkarian. Une Méthode d'Interpolation de Structures Estimation/Commande pour des Compensateurs  $H_\infty$  et  $\mu$ . *in Proc. 1<sup>er</sup> Congrès des Doctorants - Ecole Doctorale Systèmes, Toulouse*, 2000.
- [70] P. C. Pellanda and P. Apkarian. Interpolated Gain-Scheduled  $H_\infty$  Controllers Using Piecewise Quadratic Lyapunov Functions. *submitted paper*, 2001.
- [71] P. C. Pellanda, P. Apkarian, and D. Alazard. Gain-Scheduling Through Continuation of Observer-Based Realizations - Applications to  $H_\infty$  and  $\mu$  Controllers. *in Proc. 39th IEEE Conf. on Decision and Control, Sydney*, pages 2787–2792, 2000.
- [72] P. C. Pellanda, P. Apkarian, L. T. G. Lima, and G. N. Taranto. Application of Mixed  $H_2/H_\infty$  LPV Controllers to Power System Damping Problems. *in preparation*, 2001.
- [73] P. C. Pellanda, P. Apkarian, and H. D. Tuan. Missile Autopilot Design Via a Multi-Channel LFT/LPV Control Method. *to appear in Int J. Robust and Nonlinear Control*, 2001.
- [74] S. Pettersson and B. Lennartson. A Converse Theorem for Exponential Stability using Piecewise Quadratic Lyapunov Functions. Technical Report CTH/RT/I-97/008, Control Engineering Lab, Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden, Dec. 1997.
- [75] R. T. Reichert. Dynamic Scheduling of Modern-Robust-Control Autopilot Designs for Missiles. *IEEE Contr. Syst. Magazine*, 12(5):35–42, 1992.
- [76] H. H. Rosenbrock. The Stability of Linear Time-Dependent Control Systems. *Int. J. Electronics and Control*, 15:73–80, 1963.
- [77] W. J. Rugh. Analytical Framework for Gain Scheduling. *IEEE Contr. Syst. Mag.*, 11(2):79–84, 1991.
- [78] W. J. Rugh and J. S. Shamma. Research on Gain Scheduling. *Automatica*, 36:1401–1425, 2000.
- [79] C. Scherer. *Mixed  $H_2/H_\infty$  Control*. SIAM Studies in Applied Mathematics, volume of the Special Contribution to the ECC 95, 1995.
- [80] C. Scherer. Mixed  $H_2/H_\infty$  Control for Linear Parametrically Varying Systems. *in Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, New Orleans, LA*, pages 3182–3187, 1995.
- [81] C. Scherer. Robust Generalized  $H_2$  Control for Uncertain and LPV Systems with General Scalings. *in Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, Kobe, JP*, pages 3970–3975, 1996.
- [82] C. Scherer. A Full Block  $\mathcal{S}$ -Procedure with Applications. *in Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, San Diego, USA*, pages 2602–2607, 1997.
- [83] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multi-Objective Output-Feedback Control via LMI Optimization. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 42:896–911, 1997.
- [84] C. Schumacher and P. P. Khargonekar. Missile Autopilot Designs Using  $H_\infty$  Control with Gain Scheduling and Dynamic Inversion. *AIAA J. Guidance, Contr., and Dynamics*, 21(2):234–243, 1998.

- [85] G. Scorletti and L. E. Ghaoui. Improved Linear Matrix Inequality Conditions for Gain-Scheduling. *in Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, New Orleans, LA*, pages 3626–3631, 1995.
- [86] S. M. Shahruz and S. Behtash. Design of Controllers for Linear Parameter Varying Systems by the Gain Scheduling Technique. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 168(1):195–217, 1992.
- [87] J. S. Shamma and M. Athans. Analysis of Gain Scheduled Control for Nonlinear Plants. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 35(8):898–907, 1990.
- [88] J. S. Shamma and J. Cloutier. Gain-Scheduled Missile Autopilot Design Using Linear Parameter Varying Transformations. *AIAA J. Guidance, Contr., and Dynamics*, 16(2):256–263, 1993.
- [89] H. Siguerdidjane and E. Davaud. Nonlinear Missile Autopilot Design Based on Angle of Attack Normal Form. *European J. Contr.*, 6:154–164, 2000.
- [90] H. Sira-Ramirez and M. Lovera. Discussion on : 'Nonlinear Missile Autopilot Design Based on Angle of Attack' by H. Siguerdidjane and E. Davaud. *European J. Contr.*, 6:165–169, 2000.
- [91] R. A. Skoog and C. G. Y. Lau. Instability of Slowly Varying Systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 17:86–92, 1972.
- [92] D. J. Stilwell. *Interpolation Methods for Synthesis of Gain Scheduled Controllers*. PhD thesis, Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland, USA, 1998.
- [93] D. J. Stilwell and W. Rugh. Interpolation of Observer State Feedback Controllers for Gain Scheduling. Johns Hopkins Univ., Department of Electrical and Computer Engineering, Baltimore, Tech. Rep. JHU/ECE 97-09, 1997.
- [94] D. J. Stilwell and W. Rugh. Stability Preserving Interpolation Methods for the Synthesis of Gain Scheduled Controllers. Johns Hopkins Univ., Department of Electrical and Computer Engineering, Baltimore, Tech. Rep. JHU/ECE 97-18, 1997.
- [95] D. J. Stilwell and W. Rugh. Interpolation of Observer State Feedback Controllers for Gain Scheduling. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 44(6):1225–1229, June 1999.
- [96] D. J. Stilwell and W. Rugh. Stability Preserving Interpolation Methods for the Synthesis of Gain Scheduled Controllers. *Automatica*, 36(5):665–671, May 2000.
- [97] W. Tan, A. Packard, and G. Balas. Quasi-LPV Modeling and LPV Control of a Generic Missile. *in Proc. Amer. Contr. Conf., Chicago, Illinois*, pages 3692–3696, 2000.
- [98] H. D. Tuan and P. Apkarian. Relaxations of Parameterized LMIs with Control Applications. *Int J. Robust and Nonlinear Control*, 9:59–84, 1999.
- [99] L. Vandenberghe and S. Boyd. Primal-Dual Potential Reduction Method for Problems Involving Matrix Inequalities. *Math. Programming Series B*, 36:205–236, 1995.
- [100] K. Zhou with J. C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, New Jersey, 1998.
- [101] K. Zhou with J. C. Doyle and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, New Jersey, 1996.

- 
- [102] G. D. Wood. *Control of Parameter-Dependent Mechanical Systems*. PhD thesis, St. John's College, Cambridge University, 1995.
- [103] F. Wu. *Control of Linear Parameter Varying Systems*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 1995.
- [104] F. Wu, A. Packard, and G. Balas. LPV Control Design for Pitch-Axis Missile Autopilots. *in Proc. IEEE Conf. Decision Contr., New Orleans, LA*, 1:188–193, 1995.
- [105] F. Wu, X. Yang, A. Packard, and G. Becker. Induced  $\mathcal{L}_2$ -Norm Control for LPV System with Bounded Parameter Variations Rates. *Int J. Robust and Nonlinear Control*, 6:983–998, 1996.



# Index

- **A** –
- algorithmes
  - liste des ..... xvii
- amortissement
  - facteur d' ..... 71
- analyse de performance ..... 117
- approximation
  - d'EULER ..... 60
- atténuation ..... 52, 53, 65
- **B** –
- barycentriques
  - coordonnées ..... 140
- bilinéaire
  - transformation ..... 138
- bissection
  - algorithme de ..... 99
- **C** –
- commande
  - en temps discret ..... 115
  - $H_\infty$  ..... 81
  - LPV ..... 81, 115, 133, 134
  - mixte  $H_2/H_\infty$  ..... 115, 133
  - multi-canal ..... 115, 133, 158
- compensateurs
  - de structure estimation/commande 39
  - équivalents ..... 39, 52, 57
  - $H_2$  ..... voir  $H_2$
  - $H_\infty$  ..... voir  $H_\infty$
  - interpolés ..... 88, 96
  - $\mu$  ..... voir  $\mu$
  - séquencement de ..... 22, 35
- continuité
  - du compensateur interpolé ... 57, 90
- convexité ..... 21
- coordonnées
  - barycentriques ..... 140
  - polytopiques ..... 135, 137, 140, 141
- correcteur LPV
  - construction du ..... 128
- **D** –
- décomposition
  - de SCHUR ..... 43, 46
- Décomposition en Valeurs Singulières voir SVD
- discret
  - commande en temps ..... 115
- discrétisation ..... 137
- dynamique
  - implicite ..... 157
  - lente ..... 147
  - rapide ..... 147
  - suivi de ..... 157
- **E** –
- équation
  - de RICCATI ..... 43, 59, 62
  - de SYLVESTER ..... 44, 60
- estimateur ..... 56
- EULER
  - approximation d' ..... 60
- **F** –
- facteur
  - d'amortissement ..... 71
- figures
  - liste des ..... xix–xxi
- fonction
  - de LYAPUNOV ..... 18, 87, 119, 120
  - continue par morceaux ..... 81, 93
  - dépendante du paramètre .. 81, 93
  - de pondération ..... 145
  - de séquencement ..... 122, 128, 137
- forme
  - bloc-diagonale ..... 46

- estimateur ..... 56  
 LFT ..... 117  
 prédicteur ..... 55  
 réelle ..... 47
- **G** –
- gain  $\mathcal{L}_2$  ..... voir  $\mathcal{L}_2$   
 gouvernabilité ..... 44  
   facteur de ..... 50  
   matrice de ..... 50  
   modale ..... 45, 49
- **H** –
- $H_2$  ..... 118, 158  
 $H_2/H_\infty$  ..... 115, 121, 133, 136  
 $H_\infty$  ..... 35, 38, 88, 96, 120  
   *loop shaping* ..... 68  
   modélage de valeurs singulières .. 68  
 hypercubes ..... 140
- **I** –
- identification de modes ..... 47  
 IMF ..... 158, 159  
*Implicit Model Following* ..... voir IMF  
 interpolation  
   de compensateurs ..... 57, 63  
   de compensateurs  $H_\infty$  ..... 81  
   de paramètres de YOULA ..... 63  
   de variables de LYAPUNOV ..... 88  
   variables d' ..... 5, 57, 63  
 Inégalités Matricielles Linéaires voir LMI
- **L** –
- $\mathcal{L}_2$  ..... 20, 86, 93, 121  
 LFT ..... 8, 16, 40  
   forme ..... 117  
   modèle d'un missile ..... 181  
   structure ..... 122  
 linéarisation ..... 14  
 Linéaire Quadratique ..... voir LQ  
 Linéaire Quadratique Gaussien ..... voir LQG  
 Linéaire à Paramètre Variant . voir LPV  
 Linéaire à Temps Invariant .... voir LTI  
 Linéaire à Temps Variant ..... voir LTV  
 liste
- des algorithmes ..... xvii  
 des figures ..... xix–xxi  
 des symboles ..... xiii–xvi  
 des tableaux ..... xxiii  
 LMI ..... 7, 20, 116, 119–122, 191  
   caractérisation ..... 122  
*loop shaping* ..... 68  
 LPV .. 5, 14, 97, 115, 121, 133, 134, 136  
   commande ..... 81, 115, 133, 134  
   correcteur ..... 85  
   système ..... 85  
 LQ ..... 158  
 LQG ..... 38  
 LTI ..... 4, 15, 57  
 LTV ..... 5, 15  
 LYAPUNOV  
   fonction de ..... 18, 81, 87, 93, 119  
   variables de 18, 88, 97, 116, 118, 124, 136
- **M** –
- matrice  
   bloc-diagonale ..... 47  
   de gouvernabilité ..... 50  
   d'observabilité ..... 50  
   Hamiltonienne ..... 43, 47, 59  
 missile  
   modèle LFT ..... 181  
   modèle linéaire ..... 184  
   modèle non linéaire ..... 180  
   pilotage automatique .. 68, 133, 143  
 mixte  $H_2/H_\infty$  ..... 115, 121, 133, 136  
 modélage de valeurs singulières ..... 68  
 modèle  
   de référence ..... 157  
   LFT ..... 16  
   LPV ..... 14  
   LTI ..... 15  
   LTV ..... 15  
   polytopique ..... 17  
   quasi-LPV ..... 16  
   suivi de ..... 158  
 modélisation  
   de systèmes instationnaires ..... 14  
 modes

- doubles ..... 45
- identification de ..... 47
- $\mu$  ..... 35, 38
- multi-canal ..... 115, 133, 136
- multi-objectif ..... 121, 134, 136
- multi-transfert ..... 121, 136
- **N** –
- NEWTON
  - algorithme de ..... 60
  - norme  $\mathcal{L}_2$ -induite ..... voir  $\mathcal{L}_2$
  - notations ..... xiii–xvi
- **O** –
- observabilité ..... 44
  - facteur de ..... 50
  - matrice de ..... 50
  - modale ..... 45, 49
- **P** –
- paramètre
  - de YOULA ..... 40, 54, 56
- paramétrisation
  - de YOULA ..... 40
- performance
  - analyse de ..... 117
  - $H_2$  ..... 20, 117, 118, 136, 192
  - $H_\infty$  ..... 20, 117, 120, 136, 194
- placement
  - de pôles ..... 157
- pôles
  - auto-conjugués ..... 45
  - placement de ..... 157
- polytopiques
  - coordonnées ..... 135, 137, 140, 141
  - modèles ..... 17
- pondération
  - fonction de ..... 145
  - fréquentielle ..... 145
- prédicteur ..... 55
- principe de séparation ..... 42, 57
- problème
  - d'optimisation convexe ..... 21
  - de faisabilité ..... 21
- **Q** –
- quasi-LPV ..... 7, 16
- **R** –
- RICCATI
  - équation de ..... 43, 59, 62
- **S** –
- homothétie* ..... 142
- scalings* ..... 116, 118, 120, 124, 136
  - multiples ..... 120
- SCHUR
  - décomposition de ..... 43, 46
- séparation
  - principe de ..... 42, 57
- séquencement
  - fonction de ..... 122, 128, 137
  - variables de ..... 5
- séquencement de compensateurs ..... 22, 35
- sous-espaces invariants ..... 43, 46–48
  - continuation de ..... 58, 61
- stabilité
  - exponentielle ..... 18
  - quadratique ..... 18, 87
- structure
  - LFT ..... 122
- structures estimation/commande 35, 36, 38–57
  - équivalentes ..... 42
- suivi
  - de dynamique ..... 157
  - de modèle ..... 158
- SVD ..... 128
- SYLVESTER
  - équation de ..... 44, 60
- symboles
  - liste des ..... xiii–xvi
- synthèse
  - $H_\infty$  ..... 88, 96
  - LPV ..... 97, 121, 134, 136
  - mixte  $H_2/H_\infty$  ..... 121, 136
- systèmes instationnaires ..... 14
- **T** –
- tableaux
  - liste des ..... xxiii
- transformation
  - bilinéaire ..... 138

Transformation Linéaire Fractionnaire voir  
 LFT  
 translation ..... 142

– **V** –

valeurs propres  
   sélection de ..... 44  
 validation  
   de modèles ..... 185  
 variables  
   d'interpolation ..... 5, 57, 63  
   de décision ..... 21, 137  
   de LYAPUNOV ..... 88, 116, 118, 136  
     indépendantes du paramètre ... 97  
     multiples ..... 124  
     rapprochement des ..... 101  
   de séquençement ..... 5  
 variance ..... 118

– **Y** –

YOULA  
   interpolation de paramètres de ... 63  
   paramètre de ..... 40, 54, 56  
   paramétrisation de ..... 40