

THÈSE

présentée en vue de
l'obtention du titre de

DOCTEUR

de

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE**

SPÉCIALITÉ : SYSTÈMES AUTOMATIQUES

par

Sihem TEBBANI

Optimisation de transferts quasi-circulaires par approche directe

Soutenue le 30 novembre 2001 devant la Commission d'Examen :

MM.	J.B. HIRIART-URRUTY	Président
	C. AUMASSON	Rapporteur
	J. BERNUSSOU	
Mme	B. ESCUDIER	
Mlle	S. GEFFROY	
M.	J. NOAILLES	Rapporteur
Mlle	I. QUEINNEC	

THESE

Préparée au LAAS-CNRS

en vue de l'obtention du
Doctorat de SUPAERO

spécialité: Automatique

par

Sihem TEBBANI

Ingénieur SUPAERO

**OPTIMISATION DE TRANSFERTS QUASI-CIRCULAIRES PAR
APPROCHE DIRECTE**

soutenue le 30 novembre 2001

Rapporteurs	C. Aumasson J. Noailles
Examineurs	J.B. Hiriart-Urruty B. Escudier S. Geffroy I. Queinnec
Directeur de thèse	J. Bernussou

Remerciements

Le travail réalisé durant cette thèse a été réalisé au sein du groupe Méthode et Algorithmes en Commande du Laboratoire d'Analyse et d'architecture des Systèmes du CNRS. Je remercie son directeur M. J.C. Laprie de m'avoir accueilli dans ce laboratoire durant ces trois années de thèse.

Je souhaite remercier Monsieur J.B. Hiriart-Urruty, professeur à l'Université Paul Sabatier d'avoir accepté de présider le jury de thèse. Je remercie également les rapporteurs, Messieurs C. Aumasson, directeur de recherche à l'ONERA Châtillon et J. Noailles professeur à l'institut National Polytechnique de Toulouse pour leur lecture attentive du manuscrit.

Je souhaiterais également remercier Mesdames B. Escudier, professeur à SUPAERO et S. Geffroy, ingénieur au CNES-Toulouse pour l'intérêt qu'elles ont porté à ce travail en faisant partie du jury.

Je souhaiterais exprimer ma gratitude à Madame I. Queinnec chercheur du CNRS, qui m'a soutenu durant la rédaction du manuscrit et qui m'a fait l'honneur de faire partie du jury.

Je remercie Monsieur J. Bernussou, directeur de recherche au CNRS et directeur de thèse pour son encadrement, son soutien et la confiance qu'il m'a accordé tout au long de ce travail. Je le remercie d'avoir su m'orienter vers les meilleures pistes et de m'avoir encouragé tout au long de cette thèse.

Je remercie également Monsieur A.J. Fossard, professeur à SUPAERO pour son grand soutien durant cette thèse. Je le remercie également de m'avoir transmis sa passion pour l'automatique.

Je tiens à remercier mes collègues du LAAS qui ont permis mon épanouissement professionnel et ont facilité mon intégration. Je remercie plus particulièrement les membres du groupe MAC qui m'ont soutenu, aidé et ont fait de ces trois années au LAAS, des années chaleureuses et inoubliables : Christelle, Sophie, Dimitri, Denis, Didier, Filipe, Badis, Yann, Patrice, Christian ... Sans oublier Régis, compagnon de bureau et collaborateur hors pair.

Enfin, je remercie mes parents, à qui je dédie ce travail, qui ont toujours cru en moi. Leurs encouragement et soutien tout au long de mes études m'ont permis de mener à bien cette thèse de doctorat.

Un grand merci à toutes ces personnes et à tous ceux que j'ai omis de mentionner.

Table des matières

Introduction Générale	15
I Les orbites basses terrestres	19
I.1 Introduction	19
I.2 Rappels de mécanique spatiale	19
I.2.1 Le mouvement képlérien	20
I.2.2 Les trajectoires képlériennes	20
I.2.3 Les paramètres orbitaux	22
I.3 Le mouvement perturbé	26
I.3.1 Paramètres orbitaux osculateurs	26
I.3.2 Le repère orbital local	26
I.3.3 Les équations de Gauss	27
I.4 Les perturbations orbitales	28
I.5 Perturbation due à l'effet du J_2	28
I.6 Perturbation due au frottement atmosphérique	30
I.7 Effet des propulseurs	31
I.7.1 Modélisation des poussées	31
I.7.2 Effet des poussées sur les paramètres orbitaux	32
I.8 Les modèles d'évolution dynamique utilisés	34
I.8.1 Modèle dynamique dans le cas de poussées impulsionnelles	34
I.8.2 Modèle dynamique dans le cas de poussées continues	35
I.9 Conclusion	37
II Présentation de la problématique	39
II.1 Introduction	39
II.2 Présentation du problème	40
II.2.1 La commande du système	40
II.3 Stratégie de commande	42
II.3.1 Quelques stratégies "optimales" de phasage	42
II.3.2 Stratégie de mise à poste développée	45
II.4 Modélisation du problème	46
II.4.1 Modélisation du problème dans le cas de poussées impulsionnelles	47
II.4.2 Modélisation du problème dans le cas de poussées continues	48
II.5 Stratégie de résolution	49

II.5.1	Approches de résolution des problèmes d'optimisation	50
II.5.2	Présentation de la stratégie de résolution utilisée	51
II.6	Méthodes de résolution	53
II.6.1	Méthode de résolution d'un système d'équation	53
II.6.2	Méthode d'optimisation	53
II.7	Conclusion	54
III	Résolution du problème impulsif	55
III.1	Introduction	55
III.2	Recherche d'une initialisation au problème	56
III.2.1	Hypothèses de travail	56
III.2.2	Détermination de la première orbite de dérive	57
III.2.3	Détermination de la deuxième orbite de dérive	58
III.2.4	Détermination des modules de poussées hors-plan	58
III.2.5	Détermination des durées des deux phases de dérives	59
III.3	Recherche d'une solution 2D	59
III.4	Optimisation du transfert avec rendez-vous en (a, α, Ω)	61
III.4.1	Modélisation des contraintes	61
III.4.2	"Couche de base" de résolution à durées de transfert fixées	63
III.4.3	"Couche supérieure" de résolution : relaxation des durées de dérives	66
III.5	Prise en compte d'un transfert de Hohmann	66
III.6	Optimisation du transfert avec rendez-vous en (a, Ω, α, e)	68
III.7	Optimisation du transfert avec rendez-vous en (a, Ω, α, i)	71
III.8	Optimisation du transfert avec rendez-vous en $(a, \Omega, \alpha, i, e)$	73
III.9	Affinement de la solution	75
III.9.1	Modélisation du système	76
III.9.2	Résolution du problème d'optimisation	77
III.9.3	Schéma logiciel	83
III.10	Résolution d'un cas d'étude	85
III.10.1	Introduction	85
III.10.2	Présentation du cas d'étude	85
III.10.3	Solution initiale	86
III.10.4	Solution optimale du rendez-vous (a, Ω, α)	87
III.10.5	Raffinement de la solution	89
III.11	Conclusion	92
IV	Résolution du problème électrique	93
IV.1	Problème multi-impulsif	94
IV.1.1	Modélisation du problème	95
IV.1.2	Fractionnement des poussées	96
IV.1.3	Résolution du problème avec rendez-vous en (a, Ω, α)	103
IV.1.4	Résolution du problème avec rendez-vous en (a, Ω, α, i)	103
IV.2	Etalement des poussées	104

IV.2.1	Principe de l'étalement	104
IV.2.2	Application au système	108
IV.2.3	Raccordement des poussées	111
IV.3	Résolution du problème continu avec rendez-vous en (a, Ω, α)	112
IV.3.1	Recherche de solution initiale au problème continu	113
IV.3.2	Modélisation du problème d'optimisation	113
IV.3.3	Résolution	115
IV.4	Résolution du problème continu avec rendez-vous en (a, Ω, α, i)	119
IV.4.1	Recherche d'une solution initiale	119
IV.4.2	Modélisation et résolution du problème d'optimisation	120
IV.5	Optimalité des solutions par l'approche indirecte	122
IV.5.1	Rendez-vous (a, Ω, α)	123
IV.5.2	Rendez-vous (a, Ω, α, i)	126
IV.6	Application à un cas d'étude	127
IV.6.1	Fractionnement des poussées	127
IV.6.2	Etalement des poussées	130
IV.6.3	Résolution du problème à trois poussées continues	134
IV.7	Conclusion	149
Conclusion Générale		151
Références bibliographiques		155
A	Modèle analytique simplifié	161
A.1	Evolution de la masse	162
A.2	Evolution du demi-grand axe	162
A.3	Evolution de l'anomalie	162
A.3.1	Intégration des termes d'évolution naturelle	163
A.3.2	Intégration du terme traduisant l'effet d'une poussée	165
A.4	Evolution de l'ascension droite du noeud ascendant :	166
B	Répartition optimale des poussées hors-plan	167
B.1	Répartition optimale au premier ordre:	167
B.2	Répartition optimale plus exacte	168
B.3	Quelques résultats numériques	169
C	Méthodes de résolution utilisées	173
C.1	La méthode Hybrid-Powell	173
C.2	Le simplexe de Nelder-Mead	174
C.3	La méthode Hooke-Jeeves	175
C.4	La méthode du Gradient Réduit Généralisé	175
C.5	La méthode Sequential Quadratic Programming	176
C.6	La méthode Feasible Sequential Quadratic Programming	177

Table des figures

I.1	Intégration de la trajectoire	21
I.2	Positionnement de l'orbite dans le repère galiléen	24
I.3	Paramètres orbitaux dans le plan orbital	24
I.4	Repères locaux	27
I.5	Définition des instants pour le cas de poussées continues	36
II.1	Dérive naturelle de l'ascension droite du noeud ascendant pour diverses inclinaisons et altitudes	42
II.2	Phasage coplanaire	43
II.3	Phasage en 3D	44
II.4	Stratégie de mise à poste dans le cas impulsif	46
III.1	La variation du demi-grand axe de dérive en fonction de la durée	58
III.2	Principe de la méthode GRG	65
III.3	Principe de résolution du problème $(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega})$	65
III.4	stratégie de mise à poste avec six poussées	67
III.5	Les deux cas de figure de prise en compte de l'excentricité	71
III.6	Principe de résolution du problème avec rendez-vous en (a, α, Ω, i)	74
III.7	Structure générale de l'algorithme d'optimisation (modèle analytique)	75
III.8	Anomalie d'application des poussées	77
III.9	Résolution du problème avec rendez-vous en (a, Ω, α) (modèle numérique)	79
III.10	Correction de l'excentricité dans le cas numérique	80
III.11	Résolution du problème avec rendez-vous en (a, Ω, α, i) (modèle numé- rique)	82
III.12	Structure générale de l'optimisation (avec modèle numérique)	84
IV.1	Structure de l'algorithme de résolution	94
IV.2	Stratégie de mise à poste multi-impulsionnelle.	95
IV.3	Fractionnement des poussées tangentielles ($N = 4$).	98
IV.4	Etalement des poussées élémentaires.	99
IV.5	Algorithme de recherche d'une solution admissible multi-impulsionnelle.	100
IV.6	Algorithme de recherche d'une solution initiale au problème multi-impulsionnel avec rendez-vous en (a, Ω, α, i)	102
IV.7	Etalement d'une poussée élémentaire, sans correction de l'inclinaison.	106
IV.8	Etalement d'une poussée élémentaire, avec correction de l'inclinaison.	107

IV.9	Étalement d'une poussée élémentaire dans le cas général.	107
IV.10	Exemple d'étalement de poussée ($N=4$).	109
IV.11	Algorithme de recherche de solution initiale, à multi-poussées étalées, et avec rendez-vous en (a, Ω, α)	110
IV.12	Algorithme de recherche de solution initiale, à multi-poussées étalées, et avec rendez-vous en (a, Ω, α, i)	111
IV.13	Raccordement des poussées ($N = 4$).	112
IV.14	Raccordement des poussées.	112
IV.15	Structure générale du problème de mise à poste continu.	114
IV.16	Illustration de la méthode de collocation directe.	116
IV.17	Illustration de la méthode de discrétisation de la commande.	117
IV.18	Résolution multi-impulsionnel sans correction de l'inclinaison (avec zoom de la première phase de poussée).	129
IV.19	Résolution du problème multi-impulsionnel avec correction de l'inclinaison (avec zoom de la première phase de poussée)	130
IV.20	Niveau du module de poussée après étalement (avec zoom sur la première phase de poussée).	132
IV.21	Variation du demi-grand axe (avec zoom sur la première phase de poussée).	132
IV.22	Déclinaison de poussée sur la première phase de poussée, pour la solution optimale de $(\mathcal{PE}_{a,\alpha,\Omega}^m)$	133
IV.23	Variation de l'inclinaison (avec zoom de la première phase de poussée).	134
IV.24	Allure de la déclinaison de poussée de la solution optimale de $(\mathcal{PE}_{a,\alpha,\Omega})$, avec discrétisation, et zoom sur la première phase de poussée.	136
IV.25	Caractéristiques de la solution optimale de $(\mathcal{PE}_{a,\alpha,\Omega})$, avec discrétisation.	137
IV.26	Allure de la déclinaison de poussée de la solution optimale de $(\mathcal{PE}_{a,\alpha,\Omega})$, avec loi préfixée, et zoom sur la première phase de poussée.	138
IV.27	Caractéristiques de la solution optimale de $(\mathcal{PE}_{a,\alpha,\Omega})$, avec loi prédéterminée.	139
IV.28	Déclinaison de la première poussée, pour les deux cas de loi de commande.	140
IV.29	Déclinaison de la première poussée, pour les deux solutions, directe et indirecte, sans correction de l'inclinaison.	141
IV.30	Caractéristiques de la solution optimale de $(\mathcal{PE}_{a,\alpha,\Omega,i})$, avec discrétisation.	143
IV.31	Allure de la déclinaison de poussée de la solution optimale de $(\mathcal{PE}_{a,\alpha,\Omega,i})$, avec discrétisation, et zoom sur la première phase de poussée.	144
IV.32	Caractéristiques de la solution optimale de $(\mathcal{PE}_{a,\alpha,\Omega,i})$, avec loi prédéterminée.	145
IV.33	Déclinaison de la première poussée, pour les deux cas de loi de commande.	146
IV.34	Déclinaison de la deuxième poussée, pour les deux cas de loi de commande.	146
IV.35	Déclinaison de la première poussée, pour les deux solutions, directe et indirecte, avec correction de l'inclinaison.	148
IV.36	Déclinaison de la première poussée, pour les trois solutions, avec correction de l'inclinaison.	148

B.1	déclinaison optimale dans le cas d'orbites circulaires	168
B.2	Modules des poussées hors-plan pour différentes lois de répartition (N=10)	170

Liste des tableaux

I.1	les ordres de grandeur des perturbations	28
III.1	Solution initiale découplant les dynamiques	86
III.2	Solution du problème avec rendez-vous en (a, Ω, α) (modèle analytique) . .	87
III.3	Solution du problème avec utilisation de transfert de Hohmann (modèle analytique)	88
III.4	Solution du problème avec utilisation du transfert de Hohmann (modèle numérique)	89
III.5	Solution du problème avec rendez-vous en (a, Ω, α, e) (modèle numérique) .	90
III.6	Solution du problème avec rendez-vous en (a, Ω, α, i) , avec transfert de Hohmann (modèle numérique)	91
III.7	Solution du problème avec rendez-vous en $(a, \Omega, \alpha, i, e)$ (modèle numérique)	91
IV.1	Nombre de poussées fractionnées pour divers niveaux de poussée - sans correction de l'inclinaison.	127
IV.2	Nombre de poussées fractionnées pour divers niveaux de poussée - avec correction de l'inclinaison.	127
IV.3	Caractéristiques de la solution optimale du problème $(\mathcal{P}^m_{a,\alpha,\Omega})$	128
IV.4	Caractéristiques de la solution optimale du problème $(\mathcal{P}^m_{a,\alpha,\Omega,i})$	130
IV.5	Caractéristiques des solutions du problème $(\mathcal{PE}^m_{a,\alpha,\Omega})$	131
IV.6	Caractéristiques des solutions du problème $(\mathcal{PE}^m_{a,\alpha,\Omega,i})$	134
IV.7	Solution à commande discrétisée.	135
IV.8	Solution à commande préfixée.	138
IV.9	Recouvrement de la position initiale, sans rendez-vous en inclinaison. . . .	140
IV.10	Solution à commande discrétisée.	142
IV.11	Solution à commande préfixée.	144
IV.12	Recouvrement de la position initiale, avec rendez-vous en inclinaison. . . .	147
B.1	Coût du transfert pour diverses lois de répartition des poussées (N=3) . .	170
B.2	Coût du transfert pour diverses lois de répartition des poussées	171

Introduction Générale

Depuis le début de la conquête de l'espace, diverses disciplines intéressent les scientifiques du domaine spatial. Deux thématiques sont toutefois prépondérantes : celle de la découverte de l'espace lointain et celle liée à la Terre et aux exigences qu'impose l'avancée technologique. En effet, les nouveaux besoins engendrés par l'essor des domaines des télécommunications et du multimédia ont conduit au développement et à l'utilisation de constellations de satellites. Ces dernières permettent de fournir divers services et missions dans différents secteurs : météorologie (METEOSAT), localisation (GPS, EIGNOS), observation (SPOT, LANDSAT), Télécommunication (Skybridge, Globalstar)...[CNES 95]. Ces constellations sont constituées de plusieurs dizaines de satellites, décrivant des orbites circulaires ou elliptiques. Le choix de la forme de l'orbite dépend de la nature de la mission ainsi que de l'altitude de la constellation. Généralement, les orbites quasi-circulaires sont utilisées à basses altitudes (de 200 à 2000 km) ou pour des constellations à hautes altitudes (au delà de 10000 km), et ceci afin d'éviter les ceintures de radiations qui détériorent les équipements. Ce type d'orbite est notamment utilisé dans le cas de constellations pour l'observation de la Terre (SPOT, LANDSAT, RADARSAT...).

L'étude qui fait l'objet de cette thèse s'intéresse à la première catégorie d'orbites circulaires, à savoir les orbites à basses altitudes. Les intérêts majeurs de ces orbites sont d'être atteignables en lancement direct et de diminuer considérablement le temps de transmission des signaux. Elles peuvent également offrir des redondances de couverture de la Terre, ce qui peut être très utile en cas de panne d'un satellite.

Jusqu'à présent, c'est la propulsion chimique classique qui était généralement utilisée pour équiper les satellites, ce qui permet de construire la constellation en un temps de transfert relativement court [Battin 87, Enjalbert 89, Dufour 93]. Cependant, une autre tendance technologique du secteur spatial commence à se développer : l'utilisation de moteurs électro-ioniques qui présentent l'avantage d'effectuer un gain en masse assez conséquent. Pour ce type de propulsion, les moteurs délivrent des poussées de faibles amplitudes, ce qui a pour conséquence de nécessiter des temps de transfert importants, comportant un grand nombre de révolutions autour de la Terre [Cadiou 96, Geffroy 97]. Il existe donc un compromis durée de transfert/gain en masse, le choix du critère dépendant essentiellement du cahier des charges de la mission.

Cette étude s'inscrit dans le cadre d'une longue collaboration entre la division mathématique spatiale du Centre National des Etudes Spatiales (CNES) et le groupe Méthodes et Algorithmes en Commande du Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des

Systèmes (LAAS) du CNRS. Cette collaboration a permis par le passé de traiter divers problèmes qui portent essentiellement sur l’optimisation de mise et de maintien à poste de constellations de satellites. Ces études ultérieures, basées sur l’utilisation de poussées chimiques, ont porté sur l’optimisation de constellations géostationnaires [Desroches 88, Enjalbert 89], de problèmes de phasage orbital [Dufour 93], ou de construction de constellations à basses altitudes [Lasserre 98]. Plus récemment, quelques travaux ont permis d’étudier des systèmes à propulsions électriques [Bertrand 01, Tebbani 01b].

Ce travail qui se situe dans la continuité du travail réalisé dans [Lasserre 98], s’intéresse à l’optimisation de transferts quasi-circulaires en se basant sur une stratégie de mise à poste dite passive : utilisation de la dérive naturelle induite par l’aplatissement terrestre aux pôles pour apporter quelques corrections. Une telle stratégie suppose une durée de transfert suffisante, ce qui limite son utilisation à des transferts de petites amplitudes (de l’ordre de 500 km d’altitude).

La stratégie de transfert développée dans [Tebbani 98] avec hypothèses chimiques est étendue dans un deuxième temps au problème avec utilisation de propulseurs électriques. Lors de la résolution de ce deuxième type de problème, une difficulté consiste à trouver une bonne initialisation. Une alternative consiste à rechercher ce point de départ par une recherche aléatoire, ce qui augmente considérablement le temps de calcul [Bertrand 01].

Outre la particularité d’utiliser la stratégie passive pour le transfert orbital, cette étude se distingue en proposant une stratégie d’étalement des poussées, ce qui permet d’initialiser le problème à poussées continues par le problème à poussées impulsives [Tebbani 01a]. Ainsi, il est possible de calculer de façon simple et rapide une solution au problème traité, qui pourrait servir d’initialisation à un processus de résolution par approche indirecte.

Ce mémoire débute avec quelques rappels de mécanique spatiale qui permettront la mise en équation de la dynamique du système. Le mouvement du satellite sera modélisé par un mouvement képlérien perturbé. Seuls l’aplatissement terrestre aux pôles et l’effet des propulseurs seront pris en compte. Les deux cas de figure de poussées chimiques et poussées électriques seront traités. Dans le dernier cas, quelques développements analytiques seront effectués afin de simplifier le modèle d’évolution du satellite.

Dans le deuxième chapitre, la stratégie de mise à poste sera détaillée. Elle consiste à effectuer la mise à poste du satellite en trois phases de poussées. Le satellite est transféré vers deux orbites intermédiaires de dérive dans l’optique d’utiliser les effets bénéfiques de l’aplatissement terrestre pour apporter des corrections au système et notamment pour effectuer le changement de plan. Cette stratégie de transfert dite passive présente l’avantage de diminuer considérablement le coût relatif au transfert mais au détriment de la durée de mise à poste. L’efficacité de l’utilisation de l’effet du J_2 suppose que la durée de mise à poste soit suffisante pour apporter les corrections nécessaires sur l’ascension droite du noeud ascendant (l’anomalie peut être corrigée via des stratégies de phasage classique). Le problème d’optimisation à résoudre dépend de la nature de la propulsion utilisée (chi-

mique ou électrique) et donc du modèle dynamique du système (discret ou continu). La stratégie de résolution de ce problème, qui est de type approche directe, est ensuite présentée. Elle consiste à diviser le problème global en sous-problèmes plus simples, et de les résoudre successivement. Cette stratégie à multi-niveaux et à complexité croissante permet non seulement d'augmenter la robustesse de la résolution mais apporte également une flexibilité vis à vis du cahier des charges et des cas d'études traités.

Le cas d'utilisation de poussées impulsionnelles instantanées fait l'objet du troisième chapitre. La stratégie de résolution à multi-niveaux et la spécification des différents sous-problèmes seront détaillées. La complexification du problème se fait sur le modèle et sur la nature du rendez-vous final imposé. En effet, au départ un modèle analytique simplifié sera utilisé, ce qui permettra de rechercher une solution via des méthodes analytiques. Ensuite, un modèle numérique plus précis sera pris en compte, ce qui permettra d'affiner la recherche de la solution. Le problème de base impose un rendez-vous sur trois paramètres : l'altitude, l'ascension droite du noeud ascendant et l'anomalie. Ensuite, l'excentricité et sa variation seront prises en compte, en appliquant soit des transferts de Hohmann pour ne pas affecter ce paramètre, soit en appliquant des transferts de type Hohmann pour effectuer un rendez-vous. Enfin, le rendez-vous en inclinaison sera imposé et sa correction combinée avec celle de l'ascension droite du noeud ascendant. La solution de chaque étape permettra d'initialiser le problème lui succédant.

Au quatrième chapitre, le problème à poussées électriques est abordé. Pour ce faire, une solution initiale devra être calculée en partant de la solution du problème impulsionnel. Le calcul de cette solution initiale se fait en trois étapes : fractionnement des poussées, étalement des différentes poussées puis raccordement des multiples poussées continues.

Ainsi, chaque poussée sera fractionnée en un train d'impulsions espacées d'une demi-période et dont le nombre est un paramètre à déterminer. La solution relative à ce type de transfert sera recherchée. Ensuite, chaque poussée sera étalée autour de son point d'application et les différentes poussées continues sont raccordées pour obtenir une solution à trois poussées continues. La deuxième partie du quatrième chapitre s'intéresse à l'optimisation du transfert à trois poussées continues. Pour ce faire, deux méthodes ont été principalement testées. La première consiste à discrétiser les phases de poussées en un nombre donné d'intervalles et optimiser les modules des déclinaisons de poussées ainsi que les instants de début et de fin de poussées. La deuxième méthode consiste à prédéfinir une loi de poussée, en l'occurrence une loi sinusoïdale, et optimiser la direction de poussée et les instants de commutation. La résolution de ces deux problèmes utilise une méthode de programmation non linéaire qui fournira les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes imposées. Ces multiplicateurs serviront à évaluer les états adjoints à l'état final. A partir du système issu de l'application du principe du maximum, l'optimalité de la solution sera testée en comparant la commande issue de l'approche directe à celle issue de l'approche indirecte.

Un cas d'étude permettra de vérifier l'efficacité de cette stratégie de résolution et les gains en terme de consommation en ergols qu'elle permet d'effectuer.

Après une conclusion du travail effectué, nous donnerons quelques pistes et perspectives qui s'inscrivent dans la continuité de cette étude.

Chapitre I

Les orbites basses terrestres

I.1 Introduction

Ce travail s'intéresse à la mise à poste de constellations¹ de satellites. Les orbites d'une constellation peuvent être de trois types :

- Orbites à basse altitude ou LEO (Low Earth Orbits) : leur altitude est inférieure à 1500 km.
- Orbites moyennes ou MEO (Medium Earth Orbits) : leur altitude est comprise entre 1500 et 21000 km.
- Orbites à haute altitude, ou HEO (High Earth Orbits) : leur altitude est supérieure à 21000 km. Cette catégorie contient les orbites géostationnaires ou GEO (Geostationary Earth Orbits) dont l'altitude est de 36000 km.

Les orbites peuvent être excentriques ou circulaires et la géométrie de la constellation homogène ou hétérogène. Ce travail s'intéresse essentiellement aux constellations homogènes, à orbites circulaires à basse altitude. Cependant, il peut se généraliser à toute autre constellation hétérogène puisqu'il traite essentiellement le problème de mise à poste comme un problème de transfert orbital.

I.2 Rappels de mécanique spatiale

L'objectif de cette partie est de rappeler quelques notions de mécanique spatiale, qui sont utilisées par la suite comme base pour établir le modèle du système étudié.

1. groupe de satellites sur orbites terrestres

I.2.1 Le mouvement képlérien

Le mouvement des planètes a été décrit par Képler au début du *XVII*^{ème} siècle. Il utilisa les observations de Tycho-Brahé pour établir les trois lois de Képler :

- Les planètes décrivent des ellipses planes dont l'un des foyers est occupé par le soleil.
- Ces ellipses obéissent à la loi des aires : par unité de temps, l'aire balayée par le rayon vecteur est constante.
- Le rapport du carré de la période orbitale sur le cube du demi-grand axe de l'orbite est identique pour toutes les planètes.

Newton modélisa le mouvement des planètes et l'expliqua à l'aide de la loi de la gravitation universelle.

Deux corps ponctuels de masses m_1 et m_2 s'attirent avec une force F proportionnelle à leurs masses, mais inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare :

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

où G est la constante de gravitation universelle

et r est la distance liant m_1 à m_2

L'application de la loi fondamentale de la dynamique ($\vec{F} = m\vec{\gamma}$) avec la loi de Newton sous sa forme vectorielle permet d'établir les équations de mouvement d'un système constitué de **N corps** (ici notre système global est constitué du satellite, de la Terre, du soleil et de toutes les planètes du système solaire). Cependant, dans le cadre de cette étude, l'évolution du système peut se réduire à un **problème à deux corps**. En effet, étant donné les distances entre les différents corps célestes et le satellite, ainsi que leurs proportions en masse, il s'avère judicieux et légitime de réduire le système en un système à deux corps, constitué du satellite et de la Terre. L'influence des autres corps peut éventuellement être modélisée à l'aide de la théorie des perturbations.

Le mouvement képlérien peut donc être défini comme étant **le mouvement non perturbé d'une masse ponctuelle (i.e le satellite) dans le champ gravitationnel créé par une autre masse immobile et ponctuelle (ou de symétrie sphérique)(i.e la Terre)**.

I.2.2 Les trajectoires képlériennes

Le mouvement képlérien

Dans ce paragraphe, seuls quelques rappels relatifs aux trajectoires képlériennes sont fournis. Le détail de ces notions est donné dans [Zarrouati 87], [CNES 95], [Chobotov 96]. Le mouvement képlérien d'un satellite gravitant autour de la Terre est donné via l'intégration de l'équation de dynamique, à savoir :

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{I.1}$$

où

μ est la constante d'accélération terrestre ($\mu = Gm_{Terre} = 398600.64 km^3/s^2$),

\vec{r} est le vecteur position du satellite par rapport au centre de gravité de la Terre,

$\ddot{\vec{r}}$ est l'accélération du satellite.

Le moment cinétique du satellite par rapport au centre d'attraction est constant et est donné par :

$$\vec{C} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (I.2)$$

où :

$\dot{\vec{r}}$: vitesse du satellite

\vec{C} : moment cinétique du satellite

D'après l'équation I.2, le mouvement du satellite sera donc toujours situé dans le plan perpendiculaire au vecteur du moment cinétique (dit le plan orbital).

Afin de modéliser le mouvement du satellite, les paramètres sont exprimés dans ce plan dit orbital. Pour ce faire, un repère inertiel géocentrique (\vec{x}, \vec{y}) dont l'origine coïncide avec le centre de la Terre est utilisé (figure I.1).

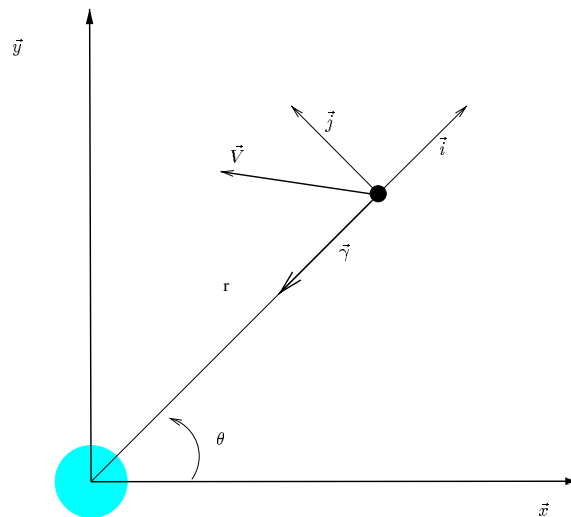


FIG. I.1 – Intégration de la trajectoire

Le positionnement du satellite est donné soit par son vecteur vitesse ($\dot{\vec{r}}$), soit par ses coordonnées polaires (r, θ) . L'intégration des équations de mouvement permet d'exprimer la variation temporelle de la position du satellite :

$$r(t) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta(t) - \theta_0)} \quad (I.3)$$

avec :

p : paramètre de la conique, $p = \frac{C^2}{\mu}$

e : excentricité de la conique

L'énergie totale de l'orbite est donnée par :

$$E = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} \quad (\text{I.4})$$

L'excentricité e de la conique permet de connaître la classe de la trajectoire du satellite :

- $e < 1$, $V < \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$, la trajectoire est une **ellipse**
- $e = 1$, $V = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$, la trajectoire est une **parabole**
- $e > 1$, $V > \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$, la trajectoire est une **hyperbole**

V désigne la vitesse du satellite. Cette étude s'intéresse exclusivement aux trajectoires elliptiques et plus particulièrement aux orbites quasi-circulaires ($e \approx 0$).

Cas des orbites elliptiques

Dans le cas des orbites elliptiques, le mouvement du satellite est périodique. La période orbitale peut être déterminée à l'aide des caractéristiques de la conique. Deux paramètres sont nécessaires : l'excentricité de la conique et son demi-grand axe. Le demi-grand axe d'une ellipse est la moitié de la distance entre le point le plus proche et le plus éloigné de son foyer (respectivement périégée et apogée pour les trajectoires spatiales liées à la Terre). La période orbitale est donnée par :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (\text{I.5})$$

où a est le demi-grand axe.

La distance de l'apogée (resp. périégée) du centre de la Terre est définie par :

$$r_a = a(1 + e)$$

$$r_p = a(1 - e)$$

En ces deux points de l'orbite, la vitesse du satellite est normale au rayon vecteur.

I.2.3 Les paramètres orbitaux

Afin de définir l'état du système dans l'espace, il est nécessaire de connaître six paramètres (trois coordonnées de position et trois coordonnées de vitesse). Cependant, par la suite, seules des trajectoires circum-terrestres sont étudiées. Dans ce cas, le jeu de paramètres cartésiens est mal adapté au cas d'études dans lequel se situe ce travail (tous

les paramètres évoluent rapidement dans le temps, ce qui complexifie le problème à résoudre). D'autre part, étant donné que la nature de la trajectoire est connue, il est plus intéressant de positionner le satellite sur son orbite elliptique. C'est pourquoi, il est préférable d'introduire un nouveau jeu de six paramètres, dit **paramètres orbitaux**. Ces paramètres permettent de définir la position et la vitesse du satellite et ceci à partir de la connaissance de :

- la position du plan de l'orbite,
- la position de l'orbite dans son plan,
- les dimensions et la forme de la conique,
- la position du satellite sur l'orbite.

Comme mentionné précédemment, l'excentricité et le demi-grand axe suffisent à définir la forme de l'orbite. Il reste donc à introduire d'autres paramètres permettant de positionner le plan de l'orbite dans l'espace et le satellite sur son orbite.

La position de l'orbite

Afin de repérer l'orbite du satellite dans l'espace, il suffit de déterminer trois angles (angles d'Euler) qui sont définis dans un repère galiléen dont l'origine est le centre de la Terre (T). L'axe z est l'axe des pôles orienté positivement vers le Nord. Le plan principal (T x y) est le plan équatorial où la direction x est l'axe vernal (intersection du plan équatorial terrestre et du plan de l'écliptique : le plan orbital de la terre autour du soleil). La direction y sera, quant à elle, définie pour compléter le trièdre. La ligne des noeuds est la droite d'intersection entre le plan équatorial et le plan orbital. Les trois angles définissant le plan orbital sont :

- l'**ascension droite du noeud ascendant**, notée Ω : cet angle repère la ligne des noeuds (orienté positivement vers le point où le mobile passe du sud au nord).
- l'**inclinaison**, notée i : l'angle entre le plan équatorial et le plan orbital
- l'**argument du périégée**, noté ω : il correspond à l'angle entre le noeud ascendant et le périégée de l'orbite.

Le schéma I.2 permet de visualiser ces trois paramètres.

Le positionnement du mobile sur l'orbite

L'orbite du satellite étant définie par les paramètres précédemment présentés, il reste à repérer le satellite sur son orbite. Pour ce faire, il suffit de donner une origine sur l'orbite et un angle depuis cette origine. Le périégée est habituellement choisi comme étant cette origine. En ce qui concerne l'angle pour repérer le satellite, plusieurs possibilités existent :

- l'**anomalie vraie**, notée ν : elle correspond à l'angle entre le périégée et l'engin,

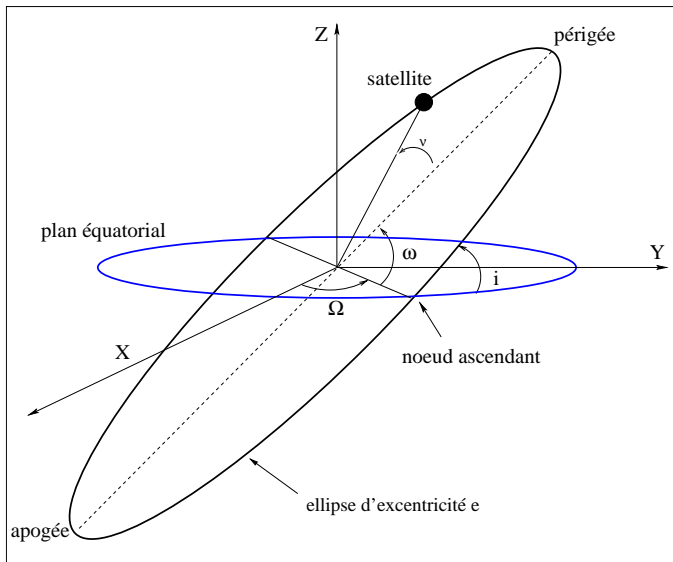


FIG. I.2 – *Positionnement de l'orbite dans le repère galiléen*

- l'**anomalie excentrique**, notée E : obtenue en projetant l'engin sur le cercle principal de l'ellipse (cf figure I.3).
- l'**anomalie moyenne**, notée M : définie par l'équation de Képler $M = E - e \sin E$. Ce paramètre dépend linéairement du temps, en effet : $M = n(t - t_0)$. Où n , le moyen mouvement, est donné par :

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

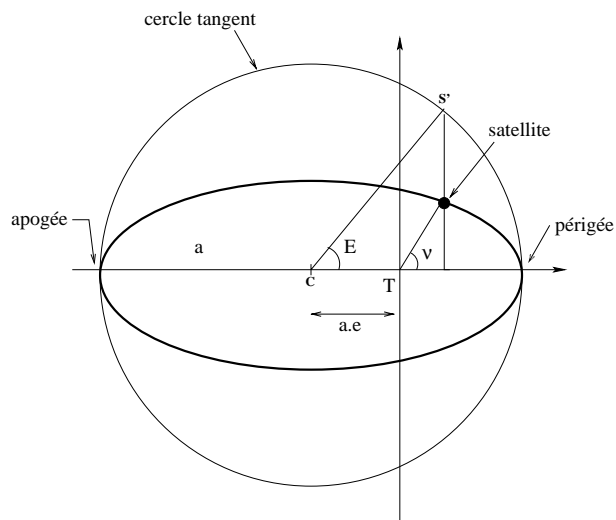


FIG. I.3 – *Paramètres orbitaux dans le plan orbital*

En résumé, la position du satellite est parfaitement définie à l'aide de ses paramètres képlériens :

- a : le demi-grand axe,
- e : l'excentricité,
- ω : l'argument du périégée,
- i : l'inclinaison,
- Ω : l'ascension droite du noeud ascendant,
- v : l'anomalie vraie (ou bien M l'anomalie moyenne, ou bien E l'anomalie excentrique).

Cas des orbites circulaires

Dans le cas d'orbites quasi-circulaires, l'excentricité est quasi nulle, et de ce fait, l'argument du périégée ω est mal défini. Il est donc préférable dans ce cas de figure d'utiliser un autre jeu de paramètres, mieux adapté. Les paramètres orbitaux adaptés aux orbites quasi-circulaires sont :

$$[a, e_x, e_y, i, \Omega, \alpha] \quad (\text{I.6})$$

où :

- e_x, e_y représentent les composantes du vecteur excentricité $\vec{e} = (e \cos \omega, e \sin \omega)$,
- α est l'anomalie du satellite ($\alpha = \omega + M$). Elle correspond à l'angle compris entre le satellite et le noeud ascendant.

Dans le cas d'orbites à faible excentricité, il est intéressant de les considérer comme étant circulaires et ceci en posant les hypothèses:

$$e = 0$$

$$\frac{r}{a} = 1$$

$$V = a \cdot n = \text{cste}$$

$$\alpha_v = \alpha, \text{ où } \alpha_v = \omega + v \text{ est l'anomalie vraie du satellite.}$$

Cas des orbites à faible inclinaison

Le plan équatorial et le plan orbital peuvent être identiques. Dans ce cas, l'ascension droite du noeud ascendant n'est plus définie. Cefola et Broucke ont introduit dans [Broucke 72] les paramètres équinoxiaux. Ces éléments présentent l'avantage d'être toujours valides, quelque soit la nature de l'orbite considérée (circulaire ou équatoriale). Ces éléments sont définis à partir des éléments orbitaux classiques par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = a \\ e_x = e \cos(\omega + \Omega) \\ e_y = e \sin(\omega + \Omega) \\ h_x = \tan \frac{i}{2} \cos \Omega \\ h_y = \tan \frac{i}{2} \sin \Omega \\ L = v + \omega + \Omega \end{array} \right. \quad (\text{I.7})$$

où L représente l'argument de longitude vraie du satellite et (e_x, e_y) représente le vecteur excentricité.

I.3 Le mouvement perturbé

Les éléments présentés précédemment s'appliquent au satellite dans le cas d'un mouvement képlérien non perturbé (cas idéal où seule l'accélération issue de la gravitation de la Terre, supposée sphérique et homogène, est considérée). Or, dans la réalité, un certain nombre de forces perturbatrices agissent sur le satellite. Ces accélérations peuvent être d'origine gravitationnelle ou non. Pour un satellite à orbite basse, ces perturbations peuvent être causées par la dissymétrie du potentiel terrestre, le frottement atmosphérique, la poussée des propulseurs, l'attraction de la lune... Ces différents types de perturbations agissent sur le mouvement du satellite à différentes échelles temporelles et à des niveaux d'importance différents. Dans ce qui suit, les équations d'évolution du système sont présentés, avec prise en compte de certaines perturbations.

I.3.1 Paramètres orbitaux osculateurs

Les accélérations perturbatrices γ_p s'ajoutent à l'accélération newtonienne et l'équation du mouvement I.1 devient :

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{\gamma}_p(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, t) \quad (\text{I.8})$$

La solution est du même type que celle du problème non perturbé, à ceci près que les paramètres orbitaux sont variables dans le temps.

$$[a(t), e_x(t), e_y(t), i(t), \Omega(t), \alpha(t)] \quad (\text{I.9})$$

Ces nouveaux paramètres sont appelés les **paramètres osculateurs**.

I.3.2 Le repère orbital local

Un repère rattaché au satellite est utilisé pour exprimer les accélérations perturbatrices. Ce repère dépend de la position du satellite contrairement au repère inertiel utilisé dans le cas cartésien. Il existe deux types de repères :

- le repère $(\vec{r}, \vec{s}, \vec{w})$ où \vec{r} est le vecteur unitaire de la direction centre Terre-satellite, \vec{w} est la direction du moment cinétique de l'orbite osculatrice (et de ce fait perpendiculaire au plan orbital) et \vec{s} complète le trièdre.

- le repère $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{w})$ où \vec{t} est le vecteur unitaire de la vitesse, \vec{w} est la direction du moment cinétique de l'orbite osculatrice et \vec{n} complète le trièdre.

Le choix du repère est lié à la nature de la force perturbatrice. On choisit le repère où l'expression de cette accélération est la plus simple. Dans ce cadre d'études, il est plus judicieux d'utiliser le repère tangentiel/normal $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{w})$.

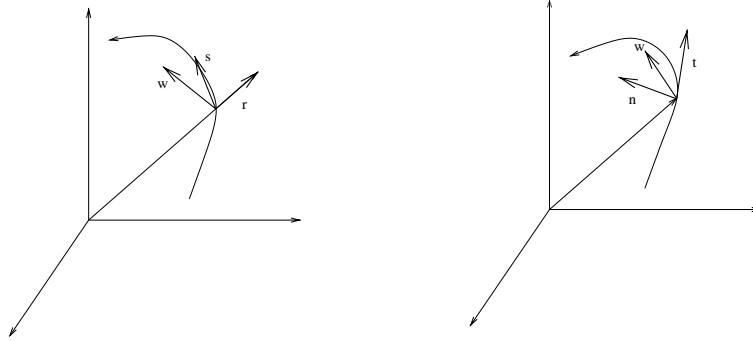


FIG. I.4 – Repères locaux

I.3.3 Les équations de Gauss

Les équations de Gauss permettent de décrire le mouvement du satellite suite à des forces perturbatrices (le cas de forces non conservatives peut être résolu via les équations dites de Legendre). Dans le cas général, il convient d'exprimer directement les composantes des accélérations perturbatrices et, par application de la méthode de la variation de la constante, d'exprimer la variation des paramètres osculateurs suite à cette perturbation (cf [Zarrouati 87, CNES 95]).

La formulation de ces équations de Gauss dépend du choix de paramètres adopté.

Dans le cas d'une orbite quasi-circulaire, elles sont données par :

$$\frac{da}{dt} = 2a \frac{\gamma_t}{V} \quad (\text{I.10})$$

$$\frac{de_x}{dt} = \frac{2\gamma_t}{V} \cos \alpha - \frac{\gamma_n}{V} \sin \alpha \quad (\text{I.11})$$

$$\frac{de_y}{dt} = \frac{2\gamma_t}{V} \sin \alpha + \frac{\gamma_n}{V} \cos \alpha \quad (\text{I.12})$$

$$\frac{di}{dt} = \cos \alpha \frac{\gamma_w}{V} \quad (\text{I.13})$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\sin \alpha}{\sin i} \frac{\gamma_w}{V} \quad (\text{I.14})$$

$$\frac{d\alpha_v}{dt} = n - \frac{\sin \alpha}{\tan i} \frac{\gamma_w}{V} + 2 \frac{\gamma_n}{V} \quad (\text{I.15})$$

où n le moyen mouvement est donné par : $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ et $(\gamma_t, \gamma_n, \gamma_w)$ sont les composantes de l'accélération perturbatrice, dans le repère (t, n, w) .

I.4 Les perturbations orbitales

Comme énoncé précédemment, il existe plusieurs perturbations qui agissent sur le satellite. Elles peuvent être classées en deux catégories :

Les perturbations gravitationnelles : elles sont indépendantes de la masse et de la géométrie de l'engin. Elles dérivent d'un potentiel U et sont donc conservatives. Elles sont engendrées par exemple par la dissymétrie du potentiel terrestre, les marées, l'attraction de la lune, du soleil et des autres planètes.

Les perturbations non gravitationnelles : elle dépendent des caractéristiques de l'engin. Elles expriment par exemple l'effet des radiations solaires, du frottement atmosphérique et également celui de la poussée des propulseurs.

Dans ce cadre d'études, seules trois forces perturbatrices sont considérées :

- l'effet de l'irrégularité de potentiel terrestre (avec prise en compte uniquement du terme du J_2 , cf. paragraphe suivant),
- l'effet du frottement atmosphérique,
- l'effet des poussées des propulseurs. Les deux cas de poussées chimiques et électriques seront traités.

Ces trois perturbations représentent les accélérations perturbatrices les plus prépondérantes qui agissent sur le satellite. Le tableau I.1 donne l'ordre de grandeur des perturbations que subit un satellite de type SPOT (à 830 km d'altitude), utilisé pour des missions d'observation de la Terre.

perturbations	ordre de grandeur (m/s^2)
attraction terrestre	10
terme J_2	10^{-2}
potentiel luni-solaire	10^{-6}
pression solaire	10^{-6}
frottement atmosphérique	10^{-7} (10^{-3} si $h=150$ km)

TAB. I.1 – les ordres de grandeur des perturbations

Le frottement atmosphérique devient plus important aux basses altitudes. Donc, selon les cas de figure, il peut être intéressant ou non de le prendre en considération.

I.5 Perturbation due à l'effet du J_2

Lors de l'établissement du mouvement képlérien des planètes, la Terre a été supposée sphérique et homogène. Cependant, la réalité est toute autre : elle présente notamment

un aplatissement aux pôles de l'ordre de 22 km par rapport à l'équateur. Cet aplatissement se traduit par l'existence d'un terme J_2 dans le potentiel terrestre. La perturbation induite par l'aplatissement terrestre aux pôles est prépondérante par rapport aux autres perturbations gravitationnelles. Il est donc fréquent de simplifier le potentiel perturbateur à sa seule composante issue de l'harmonique zonal d'ordre 2, le J_2 :

$$U_{J_2} = -\mu \frac{a_e^2 J_2}{r^3} \frac{1}{2} (3 \sin^2 \phi - 1) \quad (\text{I.16})$$

où :

ϕ : latitude du satellite

$$J_2 = 0.0010826626836$$

a_e est le rayon terrestre.

Il existe diverses méthodes pour calculer les perturbations orbitales dues au J_2 et en particulier les développements de Kozai [CNES 95]. Les effets perturbateurs se décomposent en termes séculaires et en termes périodiques. Cependant, étant donné que le système considéré est simplifié, seuls les effets séculaires dûs au J_2 sont pris en considération. Ces dérivées naturelles des paramètres orbitaux induites par le J_2 dépendent de l'horizon temporel considéré. Elles s'ajoutent au second membre des équations de Gauss, ce qui permet d'obtenir les variations séculaires des paramètres orbitaux :

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{\Delta i}{\Delta t} = 0 \quad (\text{I.17})$$

$$\frac{\Delta \Omega}{\Delta t} = -\frac{3}{2} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{J_2 n}{(1-e^2)^2} \cos i \quad (\text{I.18})$$

$$\frac{\Delta \omega}{\Delta t} = -\frac{3}{4} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{J_2 n}{(1-e^2)^2} (1 - 5 \cos^2 i) \quad (\text{I.19})$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = n - \frac{3}{4} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{J_2 n}{(1-e^2)^{3/2}} (1 - 3 \cos^2 i) \quad (\text{I.20})$$

où a_e est le rayon terrestre ($a_e = 6378.140 \text{ km}$).

Il est à remarquer que les paramètres (a, e, i) ne subissent pas, à long terme, de variations dues à l'aplatissement terrestre aux pôles. Par ailleurs, les trois angles (Ω, ω, M) varient linéairement avec le temps. Ces dérivées naturelles dépendent de l'inclinaison de l'orbite et de son altitude. Par exemple, sur un jour, pour une orbite circulaire à 500 km d'altitude et d'inclinaison de 30 degrés, l'effet du J_2 induit :

- une rotation du plan orbital autour de l'axe polaire de l'ordre de - 6.62 degrés, ce qui correspond à une variation de l'ascension droite du noeud ascendant.
- une rotation de l'orbite dans son plan de 10.52 degrés, ce qui correspond à la variation de l'argument du périégée.

- et une variation de l'anomalie moyenne du satellite de -4.78 degrés, ce qui correspond à un variation de 5.73 degrés sur l'anomalie α .

Par la suite, non seulement cet effet séculaire du J_2 sera pris en compte, mais il sera également pris comme un moyen de commande sur le système. Cet aspect sera explicité plus en détail au chapitre II.

I.6 Perturbation due au frottement atmosphérique

Le frottement atmosphérique est une perturbation de type non gravitationnel. Elle est la plus notable pour les orbites à basse altitude (altitude comprise entre 100 et 1000 km). Afin de modéliser la traînée atmosphérique, un modèle de Jacchia [Zarrouati 87] qui tient compte de l'activité solaire a été utilisé. La traînée atmosphérique dépend des caractéristiques du satellite :

$$\vec{\gamma}_f = -\frac{1}{2}\rho\frac{SC_D}{m}\vec{V}^*|\vec{V}^*| \quad (\text{I.21})$$

avec :

ρ : la densité atmosphérique

$\frac{SC_D}{m}$: le coefficient balistique

\vec{V}^* désigne la vitesse du satellite dans l'atmosphère (la différence entre la vitesse propre du satellite et la vitesse des vents en hautes altitudes).

La vitesse du satellite dans l'atmosphère est déterminée en tenant compte de la super-rotation de la Terre et ceci selon la relation :

$$\vec{V}^* = \vec{V} - \vec{\omega}^* \times \vec{r} \quad (\text{I.22})$$

où :

$$\omega^* = \Lambda \omega$$

ω est la vitesse de rotation de la Terre autour de son axe ($\omega = 7.9210^{-5} \text{ rad/s}$).

Λ est le taux de super-rotation de la Terre (compris entre 1 et 1.5).

Cette perturbation est assez complexe à traiter analytiquement. Cependant, dans le cas d'orbites quasi-circulaires à basses altitudes, quelques simplifications peuvent être effectuées. En effet, la vitesse relative du satellite peut être approximée par son développement au premier ordre en $\frac{\omega^*}{n}$:

$$V^* = an \left(1 - \frac{\omega^*}{n} \right) \quad (\text{I.23})$$

Ainsi, les effets du frottement atmosphérique sont plus simples à traiter. L'accélération perturbatrice s'écrit dans le repère (t,n,w) :

$$\gamma_{ft} = -\frac{1}{2}\rho_0 \frac{SC_D}{m} a^2 n^2 \left(1 - 2\frac{\omega^*}{n} \cos i\right) \quad (\text{I.24})$$

$$\gamma_{fn} = 0 \quad (\text{I.25})$$

$$\gamma_{fw} = -\frac{1}{2}\rho_0 \frac{SC_D}{m} a^2 n \omega^* \sin i \cos i \quad (\text{I.26})$$

Donc, au regard des équations de Gauss (I.10-I.15), il vient que le frottement atmosphérique affecte surtout le demi-grand axe et l'excentricité de l'orbite. Sur un horizon de temps donné, une intégration des équations de Gauss permet de connaître les variations séculaires des éléments dues au frottement atmosphérique. Dans le cas d'orbites quasi-circulaires, la variation la plus notable est celle du demi-grand axe :

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = -\rho_0 \frac{SC_D}{m} (\sqrt{\mu a} - 2a^2 \omega^* \cos i) \quad (\text{I.27})$$

L'effet du frottement dépend bien évidemment de l'altitude de l'orbite : plus l'orbite est basse, plus l'effet de cette perturbation est important. La variation du demi-grand axe est de l'ordre de la centaine de mètres par an. Par ailleurs, il peut exister un couplage entre l'effet du J_2 et celui du frottement atmosphérique. Mais étant donnés les ordres de grandeur de précisions imposées dans ce travail, ce couplage ne sera pas pris en considération. Il est par ailleurs possible d'effectuer un post-traitement de la solution optimale, en introduisant cette perturbation supplémentaire afin d'évaluer les erreurs commises du fait de la négligence de cet effet.

I.7 Effet des propulseurs

Une autre perturbation pouvant affecter le mouvement de l'engin spatial : les manœuvres appliquées pour le contrôler. Leurs effets sur les différents paramètres font l'objet de ce paragraphe.

I.7.1 Modélisation des poussées

Dans ce travail, des propulseurs à éjection constante sont considérés. Leur principe de fonctionnement est celui de l'action-réaction. La vitesse d'éjection des gaz à la sortie des propulseurs, communément notée c , est définie comme étant le rapport entre la poussée et le débit massique :

$$c = V_{\text{éjection}} = \frac{F}{\dot{m}} = g_0 I_{sp} \quad (\text{I.28})$$

où :

- F : poussée des propulseurs (en N)
- \dot{m} : débit massique (en kg/s)

- g_0 : accélération au niveau de la mer ($9.81m/s^2$)
- I_{sp} : impulsion spécifique.

L'intégration de l'accélération sur l'intervalle de temps d'allumage des moteurs, permet de déterminer la variation de la vitesse appliquée au satellite :

$$\Delta V = \int_{t_0}^{t_f} \gamma dt = \int_{m_0}^{m_f} \frac{g_0 \cdot I_{sp}}{m} dm \quad (\text{I.29})$$

et donc :

$$\Delta V = g_0 I_{sp} \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right) \quad (\text{I.30})$$

Inversement, afin d'obtenir une variation ΔV sur la vitesse du satellite, il est possible de déterminer la consommation du satellite en terme de masse, ainsi que la durée d'application de la manoeuvre :

$$\Delta t = \frac{g_0 \cdot I_{sp} \cdot m_0}{F} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta V}{g_0 \cdot I_{sp}}\right) \right) \quad (\text{I.31})$$

$$\Delta m = m_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta V}{g_0 \cdot I_{sp}}\right) \right) \quad (\text{I.32})$$

Il existe deux types de propulsions :

la propulsion chimique : les moteurs à propulsion chimique équipent la majorité des engins spatiaux. Leur principe de fonctionnement consiste à éjecter des gaz chauds dans l'espace. Ils délivrent des poussées de grande amplitude et de courte durée devant la période orbitale. Ce type de poussées est assimilé à des impulsions de Dirac. En effet, il est d'usage de les assimiler à des poussées impulsives qui opèrent des modifications instantanées sur les paramètres orbitaux.

la propulsion électrique : De nouvelles technologies de propulsion semblent être intéressantes, notamment les propulsions électro-ioniques qui permettent d'opérer un gain en masse du fait du poids des composants nécessaires. La propulsion électrique, qui consiste à éjecter des ions à grande vitesse intéresse grandement la communauté spatiale. Ce type de moteur délivre des poussées de faible amplitude nécessitant un temps d'application plus important que dans le cas de la propulsion chimique. Dans ce cas, les poussées étant de faible amplitude, elles sont quasiment continues et induisent des variations faibles et continues sur les paramètres du satellite.

I.7.2 Effet des poussées sur les paramètres orbitaux

Comme énoncé précédemment, selon que les moteurs soient équipés de propulseurs chimiques ou électriques, les effets des poussées diffèrent. Deux modèles d'évolution ont

donc été considérés. Seuls le cas d'orbites quasi-circulaires a été étudié. Dans le cas général, une intégration numérique (à l'aide de méthodes telle que Runge Kutta) semble être la plus appropriée du fait de la complexité des équations d'évolution.

Effets de poussées impulsionnelles

L'intégration des équations de Gauss I.15 permet de déterminer la variation des états du satellite suite à une poussée impulsionnelle :

$$\Delta a = 2a \frac{\Delta V_t}{V} \quad (\text{I.33})$$

$$\Delta e_x = \frac{2\Delta V_t}{V} \cos \alpha - \frac{\Delta V_n}{V} \sin \alpha \quad (\text{I.34})$$

$$\Delta e_y = \frac{2\Delta V_t}{V} \sin \alpha + \frac{\Delta V_n}{V} \cos \alpha \quad (\text{I.35})$$

$$\Delta i = \cos \alpha \frac{\Delta V_w}{V} \quad (\text{I.36})$$

$$\Delta \alpha_v = 2 \frac{\Delta V_n}{V} - \frac{\sin \alpha}{\tan i} \frac{\Delta V_w}{V} \quad (\text{I.37})$$

$$\Delta \Omega = \frac{\sin \alpha}{\sin i} \frac{\Delta V_w}{V} \quad (\text{I.38})$$

Il est à noter que l'incrément en vitesse apparaît en $\frac{\Delta V}{V}$. Ainsi l'efficacité de la poussée dépend de l'altitude de l'orbite : plus l'orbite est basse plus les manoeuvres sont coûteuses en terme de consommation en ergols. D'après les équations ci-dessus, il apparaît que l'efficacité de la poussée dépend également de l'instant (et donc de l'endroit sur l'orbite) où elle est appliquée. Il faudra donc jouer sur ce degré de liberté afin de maximiser au mieux l'efficacité des poussées à appliquer. De plus, il est préférable de combiner les corrections en ascension droite du noeud ascendant et en inclinaison et de combiner celles qui ont pour but de corriger le demi-grand axe et l'excentricité. Enfin, l'excentricité peut être corrigée de deux manières : soit avec des poussées normales, soit avec des poussées tangentielles. Ceci dit, les poussées tangentielles sont deux fois plus efficaces que les poussées normales (comme le montrent les équations (I.34) et (I.35)). L'utilisation exclusive de poussées tangentielles pour corriger ce paramètre est donc à privilégier puisqu'elles sont moins coûteuses et peuvent également servir à corriger l'altitude du satellite.

Effets des poussées continues

Dans le cas où des poussées de faible amplitude sont appliquées, le modèle est plus complexe que dans le cas de poussées impulsionnelles. En effet, la variation des différents paramètres est continue et dépend de l'accélération de l'engin. Dans ce cas, la masse du satellite doit être rajoutée comme un état supplémentaire du satellite. Les équations de variation des paramètres orbitaux du fait de l'application d'une poussée s'écrivent dans le repère (t,n,w) sous la forme :

$$\begin{aligned}
\Delta m &= \int_{t_0}^{t_f} -\frac{F}{g_0 I_{sp}} dt \\
\Delta a &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{2}{\sqrt{\mu}} \cdot a^{1.5} \frac{F}{m} u_t dt \\
\Delta e_x &= \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{2}{\sqrt{\mu}} \sqrt{a} \cos \alpha \cdot \frac{F}{m} u_t - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}} \sin \alpha \cdot \frac{F}{m} u_n \right] dt \\
\Delta e_y &= \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{2}{\sqrt{\mu}} \sqrt{a} \sin \alpha \cdot \frac{F}{m} u_t + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}} \cos \alpha \cdot \frac{F}{m} u_n \right] dt \\
\Delta \Omega &= \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin i} \cdot \frac{F}{m} u_w dt \\
\Delta \alpha &= \int_{t_0}^{t_f} \left[2 \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{F}{m} u_n - \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \frac{\sin \alpha}{\tan i} \cdot \frac{F}{m} u_w \right] dt \\
\Delta i &= \int_{t_0}^{t_f} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \cos \alpha \cdot \frac{F}{m} u_w dt
\end{aligned} \tag{I.39}$$

où (u_t, u_n, u_w) représentent les composantes de la direction de poussée dans le repère (t, n, w) .

I.8 Les modèles d'évolution dynamique utilisés

Ce travail s'intéresse essentiellement aux transferts orbitaux à basses altitudes (orbites de types LEO). Les altitudes sont donc comprises entre 500 et 1500 km. D'autre part, les durées des phases de transfert sont assez longues (de quelques mois à une année). Au vu de ces hypothèses de travail, les perturbations influant sur la dynamique du satellite peuvent se restreindre à l'effet du J_2 , éventuellement celui du frottement, et enfin celui des poussées qui lui sont appliquées. La prise en compte restrictive de ces effets est tout à fait suffisante étant données les précisions visées lors de l'acquisition de la position finale.

Dans le cas où une meilleure précision est imposée, il est tout à fait possible d'effectuer un post-traitement de la solution du problème étudié, avec prise en compte d'une dynamique d'évolution du système plus rigoureuse et plus précise et ce pour affiner au "second ordre" la solution finale. Selon que l'engin est équipé de propulseurs chimiques ou électriques, le modèle d'évolution varie.

I.8.1 Modèle dynamique dans le cas de poussées impulsionnelles

Tout d'abord, le modèle dynamique dans le cas de poussées impulsionnelles est pris en compte. Dans ce cas, le mouvement képlérien définit l'évolution des paramètres (explicité

en I.2.2), tout en rajoutant les effets séculaires perturbateurs du J_2 (cf. I.5) et les effets instantanés dûs à l'application de manoeuvres (cf. I.7.2). L'extrapolation du modèle s'effectue en prenant en compte une succession de deux phases : une phase de poussée et une phase balistique où seules les dérivées naturelles agissent sur le satellite. Donc, si l'état du système à l'instant t_k est connu et que la durée de la phase balistique est définie (notée Δt_k), alors son état final (à l'instant $t_k + \Delta t_k$) est donné par :

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_k + 2a_k \frac{\Delta V_t}{V_k} \\
e_{x_{k+1}} &= e_{x_k} + \frac{2\Delta V_t}{V_k} \cos \alpha_k - \frac{\Delta V_n}{V_k} \sin \alpha_k \\
e_{y_{k+1}} &= e_{y_k} + \frac{2\Delta V_t}{V_k} \sin \alpha_k - \frac{\Delta V_n}{V_k} \cos \alpha_k \\
i_{k+1} &= i_k + \cos \alpha_k \frac{\Delta V_w}{V_k} \\
\Omega_{k+1} &= \Omega_k + \mathcal{C}_{J_2}^\Omega(i_k) \frac{\Delta t_k}{a_k^{3.5}} + \frac{\sin \alpha_k}{\sin i_k} \frac{\Delta V_w}{V_k} \\
\alpha_{k+1} &= \alpha_k + n_k \Delta t_k + \mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i_k) \frac{\Delta t_k}{a_k^{3.5}} - \frac{\sin \alpha_k}{\tan i_k} \frac{\Delta V_w}{V_k} + 2 \frac{\Delta V_n}{V_k}
\end{aligned} \tag{I.40}$$

Où :

$\mathcal{C}_{J_2}^\Omega(i) = -\frac{3}{2} \cdot a_e^2 \cdot \sqrt{\mu} \cdot J_2 \cdot \cos(i)$. Ce coefficient traduit l'effet du J_2 sur la longitude du noeud ascendant.

$\mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i) = \frac{3}{2} \cdot a_e^2 \cdot \sqrt{\mu} \cdot J_2 \cdot (4\cos(i)^2 - 1)$. Ce coefficient traduit l'effet du J_2 sur l'anomalie.

I.8.2 Modèle dynamique dans le cas de poussées continues

Les poussées étant supposées continues, l'évolution des différents paramètres est continue dans le temps. Dans ce cas, il s'avère très complexe, voire impossible de déterminer la variation du vecteur état de façon analytique. Il existe deux manières de traiter ce problème : soit par une intégration numérique des équations, soit analytiquement, moyennant quelques hypothèses simplificatrices. Nous avons développé un modèle analytique simplifié qui permet de modéliser le système et son évolution temporelle, suite à l'application d'une poussée continue. Ainsi, à partir de la connaissance de la variation du demi-grand axe, l'évolution des autres paramètres est déterminée analytiquement, ce qui présente l'énorme avantage de réduire le temps de calcul. Le détail des calculs est donné en annexe A. Seules les composantes tangentielles et hors-plan de la poussée sont considérées.

Une difficulté rencontrée est celle de la détermination de l'effet du J_2 lors d'une phase de poussée. En effet, puisque le demi-grand axe varie continuellement durant la poussée,

l'effet du J_2 varie également continuellement (puisque l'effet du J_2 dépend de l'altitude de l'orbite). La variation du demi-grand axe est donnée par :

$$a(t) = a(t_0) \left(1 + \frac{\cos \delta \cdot c \cdot \sqrt{a(t_0)}}{\sqrt{\mu}} \ln \left(1 - \frac{F}{c \cdot m_0} (t - t_0) \right) \right)^{-2} \quad (\text{I.41})$$

où δ est la direction de poussée ($\tan \delta = \frac{u_w}{u_t}$).

L'intégration de l'évolution des paramètres du fait de la variation due au J_2 durant les phases de poussées donne :

$$\Delta \alpha_{J_2}^F(t) = -\frac{\mu}{\gamma_0 \cdot \cos(\delta)} \left(\frac{c \cdot \cos(\delta)}{\sqrt{\mu}} \right)^4 (P(\eta) - P(\eta_0)) \exp(\eta - \eta_0) - \frac{\sqrt{\mu} \cdot \mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i)}{\gamma_0 \cos(\delta)} \left(\frac{c \cdot \cos(\delta)}{\sqrt{\mu}} \right)^8 (G(\eta) - G(\eta_0)) \exp(\eta - \eta_0)$$

$$\Delta \Omega_{J_2}^F(t) = -\frac{\sqrt{\mu} \cdot \mathcal{C}_{J_2}^\Omega(i)}{\gamma_0 \cos(\delta)} \left(\frac{c \cdot \cos(\delta)}{\sqrt{\mu}} \right)^8 (G(\eta) - G(\eta_0)) \exp(\eta - \eta_0)$$

Où

P et G sont deux polynômes définis par :

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6$$

$$G(x) = x^7 - 7x^6 + 42x^5 - 210x^4 + 840x^3 - 2520x^2 + 5040x - 5040$$

η est une variable définie par : $\eta(t) = \frac{\sqrt{\mu}}{\cos \delta \cdot c \sqrt{a(t)}}$.

l'inclinaison est supposée constante (une correction de l'inclinaison complexifie énormément les équations comme ce sera explicité par la suite).

A partir des équations I.39 de l'évolution des paramètres (α, Ω) , l'évolution des différents paramètres suite à l'application d'une poussée (de durée $t_{off}^k - t_{on}^k$), suivie d'une phase balistique de durée Δt_k est donnée par le système d'équation I.42. La définition des instants d'allumage et d'extinction des moteurs est résumée par la figure I.5.

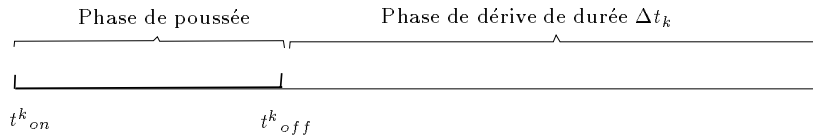


FIG. I.5 – Définition des instants pour le cas de poussées continues

$$\begin{aligned}
m_{k+1} &= m_k - \frac{F}{c}(t_{off}^k - t_{on}^k) \\
a_{k+1} &= a_k + a_k \left(1 + \frac{\cos \delta \cdot c \cdot \sqrt{a_k}}{\sqrt{\mu}} \ln \left(1 - \frac{F}{c \cdot m_k} (t_{off}^k - t_{on}^k) \right) \right)^{-2} \\
i_{k+1} &= i_k + \int_{t_{on}^k}^{t_{off}^k} \frac{\sin \alpha \sin \delta}{\sin i} \frac{F}{V} \frac{F}{m(t)} u_w dt \\
\Omega_{k+1} &= \Omega_k + \mathcal{C}_{J_2}^\Omega(i_{k+1}) \frac{\Delta t_k}{a_{k+1}^{3.5}} + \Delta \Omega_{J_2}^F(t_{off}^k) + \int_{t_{on}^k}^{t_{off}^k} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin i} \cdot \frac{F}{m(t)} u_w dt \\
\alpha_{k+1} &= \alpha_k + n \Delta t_k + \mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i_{k+1}) \frac{\Delta t_k}{a_{k+1}^{3.5}} + \Delta \alpha_{J_2}^F(t_{off}^k) + \\
&\quad \int_{t_{on}^k}^{t_{off}^k} \left[-\sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \frac{\sin \alpha}{\tan i} \cdot \frac{F}{m(t)} u_w \right] dt
\end{aligned} \tag{I.42}$$

Les intégrales (qui expriment l'effet de la composante hors-plan de la poussée) sont calculées soit numériquement, soit via une moyennation de la variation de cet effet sur une orbite. Ce calcul fera l'objet d'un paragraphe par la suite et est explicité en annexe A. La variation de l'anomalie et de l'ascension droite du noeud ascendant suite à l'application d'une poussée est approximée par :

$$\int_{t_{on}^k}^{t_{off}^k} -\sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \frac{\sin \alpha}{\tan i} \cdot \frac{F}{m} u_w dt \simeq \frac{-g_0 I_{sp}}{F/m_k} \sqrt{\frac{a_k \sin \delta}{\mu \tan i}} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{\eta_k} \ln \left(1 + \frac{1}{\eta_k} \ln \left(1 - \frac{F}{c \cdot m_k} (t_{off}^k - t_{on}^k) \right) \right) \right] \tag{I.43}$$

où η_k est donné par : $\eta_k = \eta(t_{on}^k) = \frac{\sqrt{\mu}}{\cos \delta \cdot c \sqrt{a_k}}$.

Bien entendu, ces équations sont valables dans le cas sans correction de l'inclinaison. Dans le cas contraire, il est possible de supposer que sur de petits intervalles de temps, la variation de l'inclinaison est assez faible, et donc les formules ci-dessus restent applicables. Il suffit de diviser la durée totale de l'application de la poussée en plusieurs petits intervalles élémentaires, sur lesquels les variations de l'anomalie et de l'ascension droite du noeud ascendant sont approximées par les équations I.43.

I.9 Conclusion

Dans ce chapitre ont été rappelées quelques notions de bases de la mécanique spatiale. Ceci a permis de définir le système étudié et d'établir sa dynamique de mouvement qui

consiste en un mouvement képlérien perturbé. Seuls les effets perturbateurs de l'aplatissement terrestre, du frottement atmosphérique et de l'application des poussées ont été pris en compte. Les deux cas de propulsion chimique et électrique ont été étudiés et un modèle analytique d'évolution a été fourni pour les deux types de propulsion (impulsionnelle-chimique, continue-électrique). A partir de ces résultats de base, il est à présent possible d'aborder le problème de mise à poste proposé. Pour ce faire, une stratégie de mise à poste et une méthode d'optimisation ont été développées.

Chapitre II

Présentation de la problématique

II.1 Introduction

La construction d'une constellation est réalisée selon plusieurs étapes (le lancement, la mise et le maintien à poste...). A chaque étape sont optimisées les manoeuvres à réaliser et la géométrie de la constellation afin de garantir la qualité du service nominale de chaque satellite composant la constellation, tout en réduisant les coûts. Ce travail s'intéresse à la phase de mise à poste qui est la plus coûteuse et la plus contraignante des phases de construction. En effet, il est nécessaire de déplacer chaque satellite de sa position initiale en fin de lancement vers sa position finale, en minimisant sa consommation ou le temps de transfert (selon le cahier des charges imposé). Les transferts à effectuer pendant cette phase sont les plus importants et, de ce fait, les plus pénalisants car ils vont déterminer la durée de vie des satellites. En effet, moins le satellite consomme d'ergols pour la phase de mise à poste, plus la phase de maintien à poste peut être prolongée dans le temps.

Cette étude s'intéresse à l'optimisation de la mise à poste de satellite en terme de minimisation de la consommation. Elle traite du problème de rendez-vous orbital (et non de transfert simple dans lequel aucune contrainte sur la position angulaire finale n'est imposée).

Ce chapitre permet de présenter et d'explicitier la stratégie de transfert mise au point pour réaliser le rendez-vous orbital. Une fois défini, le problème de commande optimale est résolu à l'aide d'une approche **de multi-niveaux** d'approximations successives à **complexité croissante**. Divers modèles dynamiques et cas d'études sont envisagés.

II.2 Présentation du problème

Il faut déterminer les différentes manoeuvres à appliquer à chaque satellite (dates et directions). Il existe diverses stratégies de transferts orbitaux, selon les caractéristiques du transfert à effectuer. Elles peuvent se classer en deux catégories:

- le problème plan (dit 2D): dans ce cas, le rendez-vous orbital (ou le transfert dans le cas général) se déroule dans le même plan orbital. Les orbites initiale et finale sont contenues dans le même plan. Les seuls paramètres à corriger éventuellement sont l'altitude, l'excentricité, l'argument du périégée et l'anomalie. Donc, seules les poussées tangentielles et/ou normales sont utilisées.
- le problème à trois dimensions (dit 3D): des manoeuvres pour modifier le plan orbital sont nécessaires dans ce cas. Ceci consiste à apporter des corrections sur l'inclinaison et/ou l'ascension droite du noeud ascendant, en addition à un transfert orbital dans le plan et peut impliquer la nécessité de composantes hors-plan pour la poussée.

Cette étude s'intéresse au problème à trois dimensions, sachant que le problème à deux dimensions peut être considéré comme un cas particulier.

II.2.1 La commande du système

Au regard de la dynamique d'évolution du système (cf. chapitre I), il est possible de conclure sur la nature des manoeuvres à appliquer.

Correction des paramètres orbitaux par l'application des manoeuvres

Comme présenté au §I.7, les corrections à effectuer sur les paramètres orbitaux sont réalisées, dans le cas général, via l'application de manoeuvres. Il est à noter que :

- Le demi-grand axe ne peut être modifié que via l'application d'une poussée tangentielle.
- l'inclinaison ne peut être modifiée que via l'application d'une poussée hors-plan (normale au plan orbital). Cette manoeuvre est la plus efficace si elle est appliquée aux noeuds de l'orbite (i.e. $\alpha = 0 \bmod(\pi)$).
- l'ascension droite du noeud ascendant est modifiée via l'application d'une poussée hors plan. Elle est la plus efficace si elle est appliquée aux anti-noeuds de l'orbite (i.e. $\alpha = \frac{\pi}{2} \bmod(\pi)$).
- Cependant, lorsque des corrections sur les deux paramètres (i, Ω) sont simultanément nécessaires, il est préférable de combiner les deux poussées hors-plan afin de diminuer la consommation globale. Le module de cette poussée et l'anomalie où elle doit être appliquée sont donnés par le système d'équations :

$$\Delta V_w = \pm V \sqrt{\Delta i^2 + (\Delta \Omega \sin i)^2} \quad (\text{II.1})$$

$$\alpha = \arctan \frac{\Delta i}{\Delta \Omega \sin i} \quad (\text{II.2})$$

où :

V : vitesse circulaire du satellite,

$(\Delta \Omega, \Delta i)$ sont les corrections à effectuer.

En fait, il existe deux anomalies solutions de ce système (l'arctangente est définie à π près). Ces deux anomalies définissent la ligne des noeuds d'intersection qui représente l'axe d'intersection des deux plans orbitaux.

- l'anomalie est corrigée via la modification de son moyen mouvement n et donc par la modification du demi-grand axe de l'orbite. En effet, selon l'altitude de l'orbite, le satellite décrira son orbite plus ou moins vite.
- les orbites sont supposées quasi-circulaires. Il faut donc respecter cette hypothèse, chose qui est faite uniquement à l'aide de poussées tangentielles, par l'application de stratégies de poussées de type de Hohmann. Cette stratégie et ses caractéristiques seront détaillées plus tard.

En résumé, seules des poussées tangentielles et hors-plan sont utilisées. Leurs nombres, modules et instants d'application dépendent des corrections à effectuer. Elles sont combinées afin de diminuer le module total correspondant.

Correction de la longitude du noeud ascendant par des effets naturels

Il a été établi, au vu des équations de Gauss, que l'ascension droite du noeud ascendant peut être corrigée à l'aide de poussées hors-plan. Ces poussées sont cependant assez coûteuses. D'autre part, il a été établi que ce paramètre varie du fait d'un effet naturel : la dérive naturelle due à l'aplatissement terrestre (§I.5). En effet, cette perturbation induit une modification naturelle (et donc gratuite) du paramètre Ω . Cet effet dépend de l'altitude et de l'inclinaison de l'orbite (cf. équation I.20). La figure II.1 permet de visualiser la variation de la longitude du noeud ascendant induite par le J_2 .

Il est à noter que plus l'orbite est basse, plus la dérive de ce paramètre est importante. Elle reste néanmoins limitée sur l'horizon temporel d'une journée. Donc, si les corrections globales à apporter en ascension droite du noeud ascendant sont assez élevées, utiliser cette dérive naturelle requiert une durée globale de l'ordre de la centaine de jours. L'existence d'une solution ne faisant pas intervenir de composante hors-plan pour la poussée fait l'objet d'un paragraphe dans le chapitre suivant. De plus, la durée globale de mise à poste peut être bornée, ce qui exige l'introduction de poussées hors-plan.

Il est possible de diminuer le temps de dérive en programmant des poussées hors-plan en plus de l'effet du J_2 . Ces manoeuvres sont plus petites que celles nécessaires si ces dérives ne sont pas utilisées. D'autre part, il est possible de modifier les effets naturels en changeant l'altitude des orbites. Ces remarques représentent la base du scénario mis au point et testé.

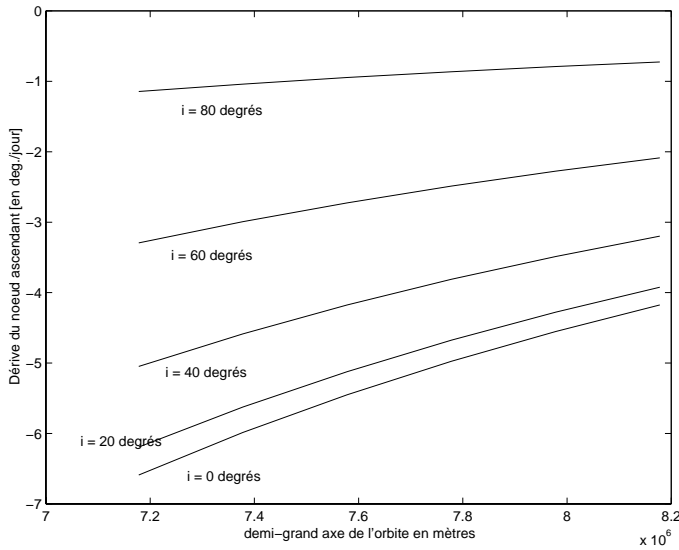


FIG. II.1 – Dérive naturelle de l’ascension droite du noeud ascendant pour diverses inclinaisons et altitudes

II.3 Stratégie de commande

II.3.1 Quelques stratégies “optimales” de phasage

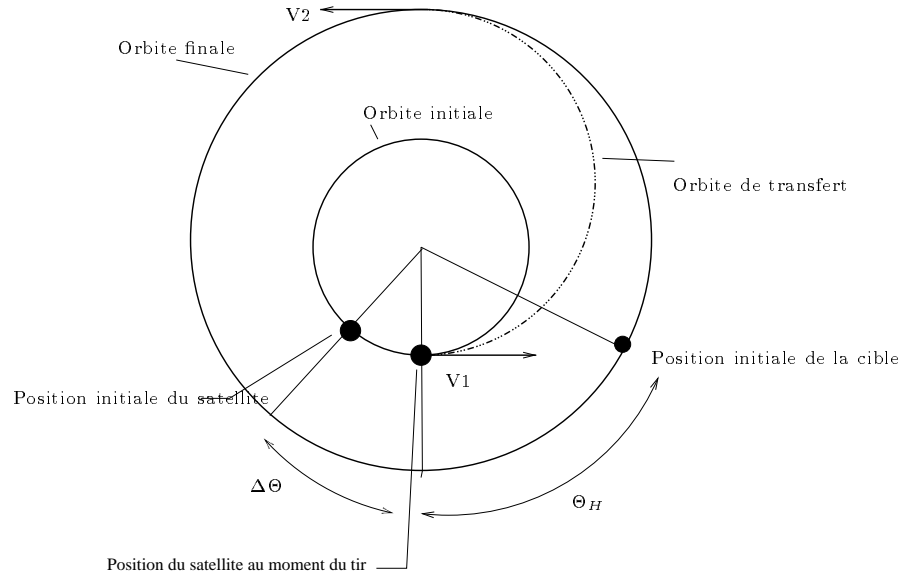
Avant de présenter la stratégie de commande développée dans [Lasserre 98, Tebbani 98] et utilisée dans ce travail, il est intéressant de présenter quelques stratégies de transferts et rendez-vous orbitaux communément utilisés. Les poussées sont supposées impulsives et instantanées. Le cas de poussées continues sera traité plus en détail dans le chapitre IV.

Un rendez-vous sur la position et la vitesse, entre le satellite et la cible, est imposé. Il faut donc déterminer les manoeuvres et leurs instants d’application. Le problème de phasage dans le cas général d’orbites elliptiques a été abordé dans [Dufour 93]. Dans ce qui suit, seront rappelées deux méthodes optimales de phasage basées sur le transfert de Hohmann. En effet, étant donné que cette étude s’intéresse essentiellement aux orbites circulaires, la stratégie du transfert de Hohmann est la mieux adaptée.

Phasage dans le plan : transfert de Hohmann

Dans un premier temps, le problème de rendez-vous coplanaire est étudié. Dans ce cas, aucune poussée hors plan n’est appliquée, ce qui revient à libérer la contrainte sur l’ascension droite du noeud ascendant et sur l’inclinaison. L’étude de ce transfert est approfondie dans [Marec 83]. Initialement, le satellite décrit une orbite de demi-grand axe a_i . La cible quant à elle décrit une orbite de demi-grand axe a_f , décalée de la position initiale d’un angle Θ_H comme le montre la figure II.2.

Le satellite est transféré vers sa position cible en appliquant un transfert de Hohmann (qui est le plus économique dans le cas d’un transfert coplanaire). Ce transfert permet

FIG. II.2 – *Phasage coplanaire*

au satellite de passer d'une orbite circulaire vers une autre orbite circulaire, en passant par une orbite elliptique bitangente aux deux orbites extrémales. La première impulsion est fournie tangentiellement, puis une deuxième permet de circulariser l'orbite. Les deux anomalies d'application des poussées sont espacées de π . Le demi-grand axe de l'orbite intermédiaire est donné par :

$$a_{tr} = \frac{a_i + a_f}{2} \quad (\text{II.3})$$

Les modules des deux poussées sont donnés par la loi de conservation de l'énergie (définie par I.4):

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{2\mu \cdot a_f}{a_i(a_i + a_f)}} - \sqrt{\frac{\mu}{a_i}} \quad (\text{II.4})$$

$$\Delta V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{a_f}} - \sqrt{\frac{2\mu \cdot a_i}{a_f(a_i + a_f)}} \quad (\text{II.5})$$

Si un rendez-vous est imposé, alors l'instant de rencontre (qui est au niveau de la deuxième manoeuvre) est caractérisé par :

$$\frac{T_{tr}}{2} = \frac{\pi - \Theta_H}{2\pi} T_f \quad (\text{II.6})$$

où :

- T_{tr} : période de l'orbite de transfert.
- T_f : période de l'orbite finale.

Cette relation permet de déduire la valeur de Θ_H :

$$\Theta_H = \pi \left[1 - \left(\frac{1 + r_i/r_f}{2} \right)^{3/2} \right] \quad (\text{II.7})$$

Donc, si l'écart angulaire initial entre la cible et le satellite est égal à Θ_H , la première poussée est appliquée immédiatement. Sinon, si cet écart est de $\Theta_H + \Delta\Theta$, alors il faut décaler la première poussée de $\Delta\Theta$. La durée d'attente t_w , relative à ce décalage est donnée par :

$$t_w = \frac{\Delta\Theta}{n_i - n_f} \quad (\text{II.8})$$

où n_i (respectivement n_f) représente le moyen mouvement de l'orbite initiale (respectivement l'orbite finale).

Au maximum, l'angle de décalage $\Delta\Theta$ est de 2π , ce qui permet de calculer le maximum de temps d'attente.

Il existe par ailleurs d'autres stratégies de transfert qui permettent de diminuer le temps d'attente, mais qui, en contre partie, augmentent la consommation du satellite (telle que la stratégie bi-elliptique ou la stratégie semi-tangentielle qui sont explicitées dans [Chobotov 96]).

Phasage en 3D

Dans le cas le plus général, des corrections sur le plan orbital sont nécessaires. Il faut donc inclure des poussées hors-plan en addition aux poussées tangentielles. Une stratégie possible, détaillée en [Chobotov 96, Baker 66], est celle du *transfert de Hohmann modifié* (Modified Hohmann-transfer strategy). Ce transfert utilise la démarche de la stratégie de phasage coplanaire à laquelle s'ajoute l'application de poussées hors-plan. En effet, dans un premier temps, un transfert de Hohmann avec phasage est réalisé, puis une poussée hors plan est appliquée sur la ligne des noeuds (cf. équation II.2) afin de corriger simultanément l'inclinaison et l'ascension droite du noeud ascendant.

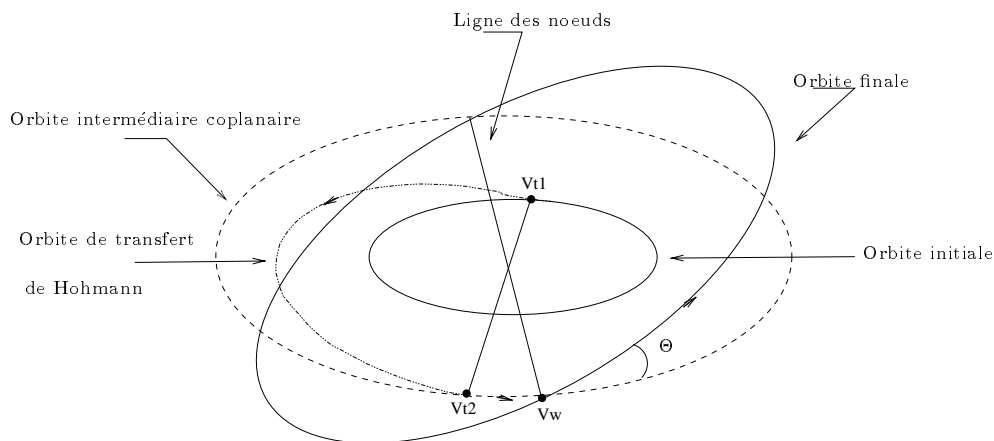


FIG. II.3 – Phasage en 3D

Donc, le satellite est d'abord transféré vers une orbite coplanaire de rayon égal à celui de l'orbite cible, et ceci en appliquant deux manoeuvres tangentielles (comme expliqué ci-dessus). Ensuite, le satellite décrit l'orbite jusqu'au point de rendez-vous avec la cible (qui correspond à la ligne des noeuds d'intersection). A ce niveau, une poussée hors-plan est appliquée ce qui permet de rejoindre la position cible visée.

La durée globale de ce transfert est la somme de :

- la durée d’attente avant d’appliquer la première poussée tangentielle.
- la durée de la phase de transfert (i.e. la demi période de l’orbite de transfert de Hohmann).
- et enfin, la durée nécessaire au satellite pour rejoindre la ligne des noeuds.

La solution ainsi calculée vérifie certes les contraintes de rendez-vous, mais s’avère être sous-optimale. En effet, il est moins coûteux de combiner les poussées tangentielles et hors-plan que de les appliquer séparément.

II.3.2 Stratégie de mise à poste développée

Comme suggéré précédemment, il est intéressant d’utiliser les dérives naturelles dues au J_2 pour apporter quelques corrections sur les paramètres et notamment sur l’ascension droite du noeud ascendant. Cette stratégie d’acquisition du plan orbital est utilisée dans la pratique, et notamment pour peupler par un même lancement plusieurs plans orbitaux, dans le cas de mise à poste de constellations de satellites [CNES 98, Zaoui 95]. Chaque satellite est transféré vers une orbite de dérive qui permet d’apporter les corrections sur le plan orbital et ceci via les effets bénéfiques du J_2 . Cependant, généralement, un rendez-vous orbital est également imposé au temps final. Il faut donc effectuer le phasage du satellite et ceci en appliquant par exemple une stratégie de phasage de type Hohmann (présentée ci-dessus). Il est donc nécessaire d’appliquer, au minimum, quatre phases de poussées pour transférer le satellite vers sa position cible. Ceci dit, dans la pratique, les manoeuvres d’arrêt de dérive du plan et celle du phasage sont couplées afin de diminuer le coût relatif au transfert, ce qui revient à effectuer trois phases de manoeuvres.

La stratégie développée et appliquée s’inspire de cette stratégie déjà mise au point [Lasserre 98, Tebbani 98]. Elle consiste à transférer le satellite à des altitudes intermédiaires avant qu’il ne rejoigne sa position cible. En effet, la mise à poste est effectuée en trois phases de poussées :

- **Mise en dérive du satellite :** Le satellite est tout d’abord transféré vers une orbite intermédiaire de dérive, qui va lui permettre d’effectuer essentiellement les corrections en ascension droite du noeud ascendant. Cette correction est faite grâce à la dérive différentielle sur ce paramètre entre la cible et le satellite. Il faut donc optimiser le demi-grand axe, l’inclinaison de cette orbite, ainsi que la durée de cette phase. L’orbite est par ailleurs supposée circulaire. L’anomalie reste libre pendant cette phase.
- **Phasage dans le plan :** Dans un deuxième temps, le satellite rejoint une deuxième orbite de dérive qui permet de corriger l’anomalie du satellite. Cette orbite est généralement proche de l’orbite cible et de ce fait, la dérive différentielle en ascension

droite du noeud ascendant est freinée. Comme pour la première phase, il faut déterminer l'altitude et l'inclinaison de l'orbite de dérive ainsi que la durée de cette phase.

- **Gel de la position du satellite :** Enfin, le satellite rejoint sa position cible et donc la dérive différentielle s'annule. L'instant de cette dernière manoeuvre est contraint d'être inférieur à la durée de la mise à poste qui est imposée par le cahier des charges.

A chaque phase de manoeuvre, il faut également appliquer des manoeuvres hors-plan visant à corriger l'inclinaison et à affiner le rendez-vous en ascension droite du noeud ascendant.

Ainsi, la différence de cette stratégie par rapport à celle utilisée dans [CNES 98] est qu'une deuxième phase de dérive est introduite. Ainsi, les effets naturels du J_2 sur l'anomalie sont utilisés afin d'apporter quelques corrections. Une stratégie à trois phases de poussées peut être sous-optimale. En effet, comme il sera établi par la suite (en annexe B), le fractionnement de poussées permet de diminuer la consommation mais en augmentant le temps de mise à poste. Dans l'absolu, il faudrait optimiser le nombre de poussées à appliquer au satellite. Ceci dit, dans notre étude, nous nous sommes fixé un scénario prédéfini constitué de trois phases de poussées et qui correspond au nombre minimal de poussées à appliquer. Une fois ce problème résolu, il peut servir de point de départ pour une recherche de solution à scénario avec un nombre supérieur de poussées.

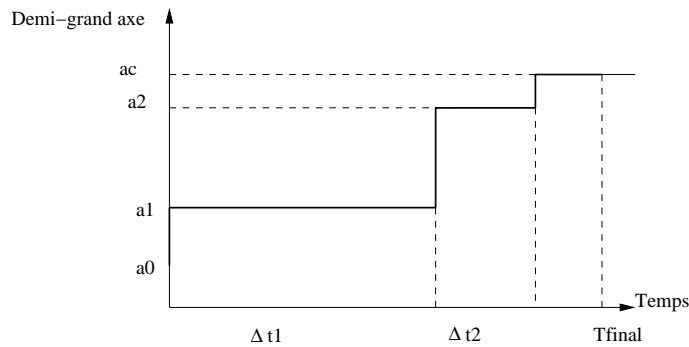


FIG. II.4 – Stratégie de mise à poste dans le cas impulsif

En résumé, il faut optimiser les caractéristiques des deux orbites de dérive, leurs inclinaisons et leur durées, ainsi que les composantes hors-plan des poussées. Le modèle d'extrapolation, le critère à minimiser et les contraintes à respecter dépendent du cahier des charges imposé. Dans le cas de poussées électriques, les durées des phases de dérive peuvent être remplacées par les durées des phases d'allumage des moteurs (ces durées sont nulles dans le cas de poussées impulsives).

II.4 Modélisation du problème

A partir de la stratégie de mise à poste adoptée, la modélisation du problème de contrôle optimal peut être établie. Les deux cas de moteurs chimiques et électriques sont distingués.

En effet, la formulation du problème diffère entre les deux cas puisque l'évolution de l'état est discrète dans le premier cas et continue dans le deuxième.

II.4.1 Modélisation du problème dans le cas de poussées impulsives

Dans le cas de poussées impulsives, l'évolution de l'état (défini au §I.7.2) est discrète. Les variables de commande sont les modules des poussées et leurs instants d'application. Par la suite, deux cas de figure sont distingués :

- L'excentricité est négligée: seuls les sauts d'énergie sont pris en compte. Dans ce cas, une seule poussée est appliquée à chaque phase de manoeuvre. Au global, il faut optimiser les modules des trois poussées, leur direction et leur instant d'application.
- Une contrainte sur l'excentricité est imposée: à chaque phase de manoeuvre, un transfert "pseudo-Hohmann" est appliqué, ce qui revient à appliquer deux poussées. Au global, il faut optimiser les modules des six poussées, leur direction et leur instant d'application.

Le premier cas est un cas particulier du deuxième. Il est donc possible de généraliser le problème discret et de le modéliser sous la forme suivante :

Variables de commande : les variables à optimiser sont donc :

$$Vt_{1..6}, Vw_{1..6}, t_{1..6} \quad (\text{II.9})$$

D'autres jeux de variables sont également possibles, par exemple le jeu :

$$a_k, i_k, \Delta t_k, \Delta \Omega_{j=1..6} \quad \text{pour } k=1,2 \quad (\text{II.10})$$

où

- $\Delta \Omega_j$ est la correction en ascension droite du noeud ascendant à apporter, via des poussées, à chaque phase de manoeuvre,
- a_k, i_k sont le demi-grand axe et l'inclinaison de la $k^{\text{ème}}$ orbite de dérive,
- Δt_k est la durée de la $k^{\text{ème}}$ orbite de dérive.

Comme mentionné précédemment, les poussées normales ne sont pas utilisées dans le cadre de ce travail.

Critère : Le critère à minimiser est la consommation du satellite. Puisque cette consommation est directement liée au module des poussées, il est plus simple de résoudre :

$$\min \sum_{k=1}^{k=6} \sqrt{Vt_k^2 + Vw_k^2} \quad (\text{II.11})$$

Dynamique d'évolution : L'état du système est défini par les paramètres képlériens :

$$x = (a, i, e_x, e_y, \Omega, \alpha) \quad (\text{II.12})$$

Les équations de Gauss (cf. équation I.40) donnent l'évolution de l'état :

$$x_{k+1} = x_k + f_k(x_k, Vt_k, Vw_k, t_k) \text{ pour } k = 0 \dots 6 \quad (\text{II.13})$$

Contraintes : Les états initial et final sont fixés puisqu'il faut, dans le cas général, résoudre un problème de rendez-vous :

$$\psi_0(x_0, t_0) = 0 \quad (\text{II.14})$$

où t_0 représente l'instant initial et ψ_0 représente la contrainte sur la position initiale du satellite.

$$\psi_f(x_f, t_f) = 0 \quad (\text{II.15})$$

où t_f est l'instant final de mise à poste et ψ_f donne les contraintes sur l'état final.

La contrainte initiale est un vecteur d'ordre six puisque tous les paramètres initiaux du satellite sont fixés. Par contre, la dimension de ψ_f dépend de la nature du problème de rendez-vous à résoudre. Au plus, elle est de dimension six, et au moins de dimension trois (au minimum, un rendez-vous en (a, α, Ω) est résolu dans cette étude).

Le détail des contraintes et des variables de commande sera explicité dans les chapitres suivants, selon le cas d'étude traité.

II.4.2 Modélisation du problème dans le cas de poussées continues

Sous hypothèse de poussées continues, le problème à résoudre change de nature puisqu'il devient un problème continu. Ceci induit une nouvelle formulation et donc, sa résolution nécessite un algorithme différent. La modélisation de ce problème est définie via :

Variables de commande : Les variables de commande du système sont les directions des poussées, leur instant d'application ainsi que leur durée. Le nombre de poussées est prédéfini dans un premier temps (à partir de la solution initiale) mais peut également être optimisé de telle sorte que l'optimum soit rejoint. Si l'on note δ la direction de poussée, pour chaque étape de poussée d'indice k , il faut déterminer la commande optimale :

$$\delta(t), t_k^{on}, t_k^{off} \quad (\text{II.16})$$

où t_k^{on}, t_k^{off} sont les instants d'allumage et d'extinction du moteur.

Critère : Il faut minimiser la consommation du satellite, ce qui revient à maximiser la masse finale de l'engin.

$$\min(-m(t_f)) \quad (\text{II.17})$$

Cette écriture permet par la suite de mettre le problème sous forme de Mayer [Cesari 83] (puisque le critère ne dépend que des états à l'instant final). Il est toutefois possible de le mettre sous forme intégrale (afin de le modéliser sous la forme de Bolza [Cesari 83]). Dans ce cas, le critère à minimiser s'écrit :

$$\min \int_{t_0}^{t_f} \epsilon dt \quad (\text{II.18})$$

où ϵ définit l'état du moteur, à savoir :

$$\begin{cases} \epsilon = 0 & \text{si moteur éteint} \\ \epsilon = 1 & \text{si moteur allumé} \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

Dynamique d'évolution : Le système d'équations I.42 donne l'évolution temporelle du système. Aux paramètres képlériens s'ajoute l'état supplémentaire qu'est la masse. L'évolution du système s'écrit donc sous la forme :

$$\dot{x} = f(x, \delta, \epsilon, t) \quad (\text{II.20})$$

où $x = (m, a, e_x, e_y, i, \Omega, \alpha)$.

Contraintes : Comme pour le cas discret, le problème étudié présente des contraintes aux deux extrémités temporelles :

$$\psi_0(x(t_0), t_0) = 0 \quad (\text{II.21})$$

$$\psi_f(x(t_f), t_f) = 0 \quad (\text{II.22})$$

où ψ_0 est de dimension six et la dimension de ψ_f dépend de la nature du problème à résoudre.

II.5 Stratégie de résolution

Le problème à résoudre consiste à rechercher la trajectoire optimale pour chaque satellite constituant la constellation, dans un horizon de temps fixé et sous des contraintes aux deux bouts. Les deux types de poussées chimiques et continues sont traités. Cette étude permet de rechercher une solution au problème avec hypothèse de poussée impulsionnelle dans un premier temps. Dans le cas où le cahier des charges impose l'utilisation de poussées continues, la solution impulsionnelle permettra d'initialiser le problème à faible poussée qui est résolu dans un deuxième temps. Par ailleurs, tout au long du travail accompli, le problème a été abordé à plusieurs niveaux. Non seulement ce séquençement permet de diminuer la complexité du problème à résoudre, mais permet également de répondre aux divers cas d'études traités.

II.5.1 Approches de résolution des problèmes d'optimisation

L'optimisation de trajectoires spatiales a fait l'objet d'une multitude d'études et de travaux. Diverses approches de résolution ont été développées. Elles sont détaillées dans [Betts 98]. Ces approches peuvent globalement être classées en trois catégories :

Approche directe

Elle consiste à paramétrer la commande et à rechercher la solution optimale à l'aide de méthodes de programmation non linéaire. Diverses études utilisent cette approche pour optimiser des trajectoires spatiales et notamment dans le cas de poussées impulsives. Dans ce cas, l'évolution du système est discrète et l'utilisation de l'approche directe est assez simple. Elle consiste à optimiser les caractéristiques des manoeuvres et leurs dates d'application et ceci afin de minimiser un critère donné. Dans le cas de poussées continues, la difficulté du problème d'optimisation à résoudre augmente et notamment pour des transferts circum-terrestres à multiples révolutions. Dans ce cas, l'évolution du système est continue et des problèmes d'intégration numérique apparaissent. Pour contourner les difficultés lors de l'intégration numérique, plusieurs méthodes ont été testées : la collocation directe [Hargraves 87, Herman 96, Scheel 94], la *direct transcription* [Enright 92, Betts 94] et la méthode de *differential inclusion* [Coverstone-Carroll 94, Seywald 94]. Le détail de ces différentes méthodes est résumé dans [Betts 98]. Les problèmes de PNL induits par ce type de méthodes peuvent être de dimension très élevée et notamment dans le cas où la dynamique du système est mal conditionnée.

Approche indirecte

Elle consiste à formuler le problème optimal sous la forme d'un problème aux deux bouts (Two Point Boundary Value Problem), issu de l'application du principe du maximum de Pontryagin [Colasurdo 00, Geffroy 97]. Cette approche est la plus répandue pour la résolution de problème à faibles poussées et diverses méthodes ont été utilisées pour résoudre le TPBVP (tir simple, tirs multiples ...). Afin de restreindre les difficultés d'intégration numérique, diverses techniques ont été utilisées : par moyennation sur la variable rapide [Geffroy 97] (cette technique est également utilisée dans l'approche directe [Kluever 00a]), la collocation directe appliquée au problème indirect [Enright 91a], par application d'une méthode d'optimisation itérative [Aumasson 86] ... Les problèmes à consommation minimum s'avèrent plus difficiles à résoudre que les problèmes à temps minimum, du fait de la difficulté de détermination des instants de commutation. Pour contourner cette difficulté, une alternative est d'appliquer la méthode de *lissage* [Bertrand 01]. L'inconvénient de cette approche réside dans la difficulté d'estimation des paramètres adjoints initiaux et à la grande sensibilité du problème optimal à leurs valeurs. Quelques méthodes d'estimation de ces variables adjointes ont été développées [Yan 99, Fahroo 01].

Approche hybride

elle est combinaison des deux approches précédentes et consiste à libérer une contrainte imposée par l'approche indirecte et à la remplacer par l'optimisation d'une contrainte équivalente sur les paramètres non contraints. Ces méthodes sont notamment utilisées dans le cas de problèmes de transfert à multiples poussées continues. Elles résolvent le problème de contrôle optimal en se basant sur des méthodes directes : les paramètres adjoints initiaux peuvent être optimisés afin de résoudre le problème de contrôle optimal traité (via les conditions de transversalité) [Bertrand 01]; les instants de commutation peuvent être optimisés directement [Zondervan 84]; les arcs de poussées peuvent être optimisés séparément selon une approche directe ou indirecte et en couche supérieure, une approche directe permet d'optimiser la totalité du problème [Goodson 99], le vecteur de pointage est optimisée directement [Ilgen 94].

II.5.2 Présentation de la stratégie de résolution utilisée

Le problème global à résoudre est assez complexe du fait de la dynamique fortement non linéaire du système. En effet, la prise en compte de l'effet perturbateur du J_2 non seulement augmente la non linéarité des dynamiques, mais introduit également un assez fort couplage entre l'anomalie et l'ascension droite du noeud ascendant (cf. §I.5).

C'est ce qui justifie le choix de la stratégie de résolution mise au point dans ce travail. Cette stratégie consiste à diviser le problème d'optimisation global en sous-problèmes plus simples. La solution de chaque sous-problème permet d'initialiser le sous-problème englobant. Ainsi, par complexification progressive, la solution optimale du problème global est approchée. Cette méthodologie présente le mérite supplémentaire de s'adapter aux différents cas de figure de problèmes de rendez-vous à résoudre, et permet donc de calculer assez rapidement une solution à des problèmes de rendez-vous simples (seule une partie des paramètres doit être corrigée).

Le séquençement du problème global intervient à plusieurs niveaux :

Sur la nature des contraintes : Le problème général consiste à effectuer un rendez-vous sur les six paramètres képlériens du satellite. Cependant, étant donné la complexité des équations, il s'avère intéressant de procéder par étape et cela en résolvant successivement les problèmes avec :

1. rendez-vous en (a, α, Ω) où les corrections du plan sont uniquement réalisées grâce à l'effet du J_2 .
2. rendez-vous en (a, α, Ω) avec utilisation de poussées hors plan pour affiner le rendez-vous en ascension droite du noeud ascendant.
3. rendez-vous en (a, α, Ω, e) . Deux cas de figures à ce niveau : soit avec rendez-vous en excentricité, soit avec prise en compte de la contrainte de ne pas trop dégrader l'excentricité de l'orbite.
4. rendez-vous en (a, α, Ω, i) .

5. rendez-vous en $(a, \alpha, \Omega, i, e)$, ce qui revient à résoudre le problème global de mise à poste.

La solution de chaque étape permet d'initialiser l'étape lui succédant. L'enchaînement des étapes dépend des caractéristiques du problème traité. Systématiquement, le cas de figure de base (à savoir le cas (2)) est résolu. Ceci permet de calculer assez rapidement une initialisation au problème de rendez-vous. Si l'inclinaison doit être corrigée, il est recommandé d'initialiser le cas (4) par la solution du cas (2). Si un rendez-vous supplémentaire sur l'excentricité est imposé (comme pour les cas (3) et le cas (5)), la recherche de l'optimum est initialisée avec la solution du problème amont (respectivement les cas (2) et (4)). L'utilisation de la solution de chaque sous-problème comme initialisation du sous-problème aval s'avère efficace dans le cadre de cette étude du fait de la nature des problèmes traités. En effet, les orbites sont considérées quasi-circulaires et les corrections en inclinaison sont supposées de faible amplitude. De ce fait, la solution de chaque sous-problème reste assez proche de la solution des autres problèmes. Ce séquençement permet de simplifier la résolution du problème global et donne la possibilité de traiter plusieurs cas de figure de rendez-vous sans avoir à résoudre le problème global.

Sur le type de la poussée : Comme évoqué précédemment, les deux cas de poussées impulsionnelles et continues sont considérés. La résolution du problème dit continu est effectuée par étapes :

- Problème avec poussées impulsionnelles : l'effet des poussées est supposé immédiat et la capacité des moteurs infinie [Tebbani 99b, Tebbani 99a, Tebbani 00].
- Fractionnement des poussées : une contrainte supplémentaire sur le module maximal de la poussée est rajoutée. Chaque poussée du problème impulsionnel est fractionnée en un train d'impulsions élémentaires [Tebbani 01a].
- Étalement des poussées : prise en compte des réelles capacités des moteurs. Chaque poussée du problème fractionné est étalée, puis raccordée aux autres poussées [Tebbani 01c].
- Problème avec des poussées électriques et utilisation d'un modèle d'évolution continu [Tebbani 01c, Tebbani 01b].

Sur le modèle d'évolution : Bien évidemment, le type de moteur utilisé détermine la nature du modèle d'évolution à prendre en compte (i.e. modèle continu ou discret). Cependant, dans chaque cas de figure, il s'avère utile d'utiliser deux niveaux de complexité pour le modèle d'évolution. Dans un premier temps, un modèle analytique simplifié permet de calculer une solution approchée au problème traité. Puis, cette solution est affinée par la prise en compte d'un modèle plus rigoureux mais nécessitant des méthodes numériques de résolution et d'intégration.

Ainsi, le problème global est divisé selon divers niveaux, ce qui permet en outre de répondre à divers cas d'études. Ces niveaux de séquençement de nature différente interfèrent et chaque problème correspondant à plusieurs hypothèses de travail est résolu. Le détail des modules du logiciel développé en vue d'implémenter cette stratégie et de la vérifier est donné en annexe B.

II.6 Méthodes de résolution

Dans la section précédente, la structure générale de la résolution du problème traité a été présentée. Afin de résoudre les différents sous-problèmes, différentes méthodes numériques ont été utilisées. Le choix de la méthode de résolution à utiliser est induit par les propriétés du sous-problème à résoudre : facilité ou non d'une dérivation, problème d'optimisation bien ou mal conditionné, connaissance ou non d'une initialisation. Un aperçu rapide sur les principales méthodes d'optimisation utilisées est donné en annexe C. Dans cette section, les justifications du choix de quelques méthodes utilisées sont données.

II.6.1 Méthode de résolution d'un système d'équation

Avant de rechercher la solution optimale minimisant le coût, il est parfois nécessaire de calculer une solution initiale respectant les contraintes imposées. Dans ce cas, le problème de rendez-vous se traduit par un système d'équations non linéaires (dans le cas de n équations à n inconnues). Pour le résoudre, des méthodes de type gradient sont à privilégier. Nous utiliserons une méthode de Newton, ou dans le cas de problèmes mal conditionnés, la méthode Hybrid-Powell qui combine une méthode quasi-Newton et une méthode Newton. Elle présente des vitesses de convergences et une robustesse meilleure que les méthodes plus classiques. Dans le cas général où le nombre d'équations ne correspond pas aux nombres de variables, des méthodes géométriques (explicitées dans le paragraphe suivant) sont utilisées. Les contraintes sont combinées en une fonction objectif, avec rajout éventuel de pondération.

II.6.2 Méthode d'optimisation

Méthodes analytiques

Ces méthodes recherchent les directions les plus favorables en se basant sur le calcul des dérivées premières. Elles présentent l'avantage de converger rapidement. Cependant, leur utilisation est restreinte aux fonctions différentiables. D'autre part, elles nécessitent la connaissance d'une initialisation qui conditionne la convergence vers un optimum intéressant. Ces méthodes sont utilisées dans ce travail dans le cas d'utilisation de modèle analytique simplifié (notamment dans le cas impulsionnel où les dérivées sont calculées analytiquement). Plusieurs méthodes de ce type peuvent être utilisées. Dans un premier temps, la méthode du Gradient Réduit Généralisé est utilisée, pour laquelle le pas de déplacement est optimisé afin d'accélérer la vitesse de convergence (au chapitre III). Par la

suite, le modèle analytique s'est complexifié, ce qui augmente la difficulté de calculer simplement les dérivées. La méthode de Sequential Quadratic Programming est à privilégier puisqu'elle approxime les calculs des dérivées et permet de converger assez rapidement. De plus, elle fournit une estimation des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes qui nous permettront de tester l'optimalité de la solution (au chapitre IV).

Méthodes géométriques ou heuristiques

Il existe des cas où les méthodes analytiques ne peuvent être utilisées (pour les cas utilisant un modèle numérique par exemple). Des méthodes ne nécessitant pas le calcul de dérivées sont utilisées et notamment des méthodes géométriques : le simplexe de Nelder & Mead et la méthode de Hooke & Jeeves. Ce sont des méthodes de minimisation sans contraintes, et il faudra donc inclure les éventuelles contraintes à respecter dans la fonction objectif (sous formes de fonctions de pénalité ou de fonctions barrières). Le simplexe est généralement utilisé dans notre étude puisqu'une recherche aléatoire est intégrée (utilisation d'un *multi-start*). Ceci présente l'avantage d'augmenter le bassin de recherche et d'estimer une solution même en l'absence de bonnes initialisation. Cependant, cette méthode nécessite un temps de calcul important (et notamment pour plus de trois variables). Dans les cas où une initialisation est disponible et où le nombre de variables est supérieure à trois, la méthode de Hooke & Jeeves est privilégiée. Elle s'avère être assez rapide, sous condition de partir d'un point initial proche de la solution recherchée.

II.7 Conclusion

Cette étude s'intéresse au problème d'optimisation de trajectoires quasi-circulaires circum-terrestres avec rendez-vous à trois dimensions. Une nouvelle stratégie de mise à poste a été mise au point. Elle consiste à effectuer le transfert en trois phases de poussées, et ceci en transférant le satellite vers deux orbites intermédiaires de dérive avant qu'il ne rejoigne sa position cible. Cette stratégie permet d'utiliser les effets bénéfiques de l'aplatissement terrestre afin d'apporter quelques corrections sur l'anomalie et surtout sur l'ascension droite du noeud ascendant. En effet, puisque les poussées hors-plan sont assez coûteuses en terme de consommation en ergols, une telle stratégie permet de réduire considérablement les modules de ce type de poussées. La stratégie de mise à poste étant définie, le problème d'optimisation est modélisé avec diverses hypothèses de travail. Sa résolution utilise plusieurs approches et est effectuée selon plusieurs étapes. En effet, une stratégie de résolution de complexité croissante et à multi-niveaux permet de résoudre le problème traité.

Chapitre III

Résolution du problème impulsionnel

Ce chapitre traite du problème de mise à poste de satellite à basses altitudes, sous hypothèse de poussées impulsionnelles instantanées. La recherche de la solution optimale est effectuée par étapes, en complexifiant au fur et à mesure le problème étudié. Dans un premier temps, la stratégie de mise à poste en trois poussées est mise en équation et une solution initiale admissible au problème de rendez-vous est calculée. Ensuite, la solution permettant de minimiser la consommation est recherchée dans le voisinage de la solution initiale, et ceci à l'aide de méthodes d'optimisation non linéaires sous contraintes d'égalités. Enfin, la méthode proposée est illustrée par la présentation d'un cas d'étude. L'analyse des résultats obtenus permet de montrer l'apport de la stratégie développée et son efficacité.

III.1 Introduction

En préambule, il paraît important de situer ce travail dans son cadre d'études, afin de faciliter sa compréhension (notamment les “partis pris” utilisés tout au long de ce travail). Cette étude s'inscrit dans la continuité du travail réalisé dans [Lasserre 98], qui s'intéressait à l'optimisation de la mise à poste de constellations de satellites. La stratégie de mise à poste était constituée de trois phases de poussées, et utilisait les effets différentiels du J_2 pour apporter quelques corrections au système, notamment, pour celles qui étaient connues pour être les plus consommatrices.

Ce travail s'intéressait essentiellement à la construction de constellations de géométrie dite de Walker¹. La position cible de chaque satellite (et donc l'affectation des différents satellites) devait être optimisée. Donc, le problème abordé consistait à déterminer la commande optimale pour la mise à poste d'une constellation où la durée de mise à poste,

1. des constellations de géométrie symétrique et homogène.

les positions initiales et la géométrie de la constellation cible étaient fixées. Lors de cette étude préliminaire, les durées des phases de dérive étaient optimisées et étaient fixées pour l'ensemble des satellites. En effet, les durées des deux phases balistiques étaient déterminées selon un critère de minimisation de la consommation sur l'ensemble de la constellation. Ceci a permis d'estimer l'ordre de grandeur de ces deux inconnues.

L'étude qui fait l'objet de ce mémoire se situe en aval et constitue un affinement de la solution calculée en [Lasserre 98]. En effet, le transfert de chaque satellite est traité séparément, indépendamment de la consommation globale de la constellation. Cela revient à résoudre des sous-problèmes de rendez-vous orbitaux où les positions initiales et finales sont supposées fixées par la résolution du problème d'affectation amont. Le lien entre ces deux travaux est explicité en [Tebbani 98]. Dans ce chapitre, nous nous intéressons donc successivement à déterminer une solution initiale au problème puis des solutions optimales aux différents problèmes décrits dans le chapitre II (section II.5.2).

III.2 Recherche d'une initialisation au problème

Dans un premier temps, il est intéressant, voire indispensable pour une approche directe d'optimisation, de pouvoir trouver une solution initiale qui respecte les contraintes imposées au système. La stratégie de mise à poste en trois phases de poussées étant retenue, le problème associé (le plus simple) de rendez-vous est résolu à l'aide d'hypothèses simplificatrices. Pour ce faire, quelques hypothèses utilisées dans [Lasserre 98] sont réutilisées et notamment celle qui consiste à découpler les dynamiques d'évolution de l'anomalie et de l'ascension droite du noeud ascendant. Cela se justifie par la grande disparité de ces deux dynamiques : rapide pour l'anomalie en comparaison de celle du noeud ascendant. Cela permet de simplifier considérablement le problème à résoudre et d'approcher la solution. Dans ce paragraphe, les hypothèses de travail et la démarche de résolution sont présentées.

III.2.1 Hypothèses de travail

Le problème à résoudre consiste à réaliser le transfert orbital défini sous les hypothèses suivantes :

- Une position initiale donnée par $(a_0, i_0, \Omega_0, \alpha_0)$ (l'orbite est supposée circulaire : $e_x = 0, e_y = 0$).
- Une position cible finale définie par $(a_c, i_c, \Omega_c, \alpha_c)$ (l'orbite cible est également supposée circulaire et l'inclinaison reste libre).
- les durées des deux phases balistiques (notées respectivement Δt_1 et Δt_2) sont fixées (par un module en amont qui fera l'objet d'un paragraphe ultérieur, §III.2.5). La première durée est la plus importante. C'est durant cette phase qu'est faite utilisation de la dérive différentielle entre la cible et le satellite pour tenter de diminuer les corrections actives de plan (en i et en Ω) qui sont les plus coûteuses. Comme nous le verrons par la suite, ceci permet de supposer que lors de la deuxième phase, le

satellite rejoint son altitude cible et de ce fait, de découpler les dynamiques des deux paramètres (α, Ω) durant la mise à poste.

La difficulté du problème traité est due au couplage entre les dynamiques en anomalie et en ascension droite du noeud ascendant (cf §I.40). Néanmoins, pour contourner cette difficulté, l'hypothèse de découplage entre les deux dynamiques est dans un premier temps utilisée. Ensuite, un post-traitement de la solution ainsi calculée permet de corriger les erreurs induites par cette simplification. Il est procédé par étapes pour déterminer la solution du problème.

III.2.2 Détermination de la première orbite de dérive

Comme expliqué au §II.3.2, la première phase de dérive permet essentiellement de corriger l'ascension droite du noeud ascendant. La première orbite de dérive est donc déterminée en fonction des corrections à réaliser sur ce paramètre. Pour ce faire, il faut connaître la valeur de cette correction à l'instant initial. Elle est donnée directement via l'effet séculaire du J_2 et ceci par l'équation :

$$\Omega_c^0 = \Omega_c - \Delta\Omega_c = \Omega_c - \frac{\mathcal{C}_{J_2}^\Omega(i_c)}{a_c^{3.5}} \cdot (\Delta t_1 + \Delta t_2) \quad (\text{III.1})$$

$\Delta\Omega_c$ est la variation naturelle en Ω que va subir le satellite virtuel cible durant l'horizon de rendez-vous $(\Delta t_1 + \Delta t_2)$. La correction à réaliser sur l'ascension droite du noeud ascendant (si possible via l'effet du J_2) vaut donc :

$$\Delta\Omega = \Omega_c^0 - \Omega_0 \quad (\text{III.2})$$

La différence de dérive entre la cible et le satellite doit donc compenser cette erreur initiale, ce qui s'écrit sous la forme :

$$\Delta\Omega = \Delta t_1 \left[\frac{\mathcal{C}_{J_2}^\Omega(i_0)}{a_1^{3.5}} - \frac{\mathcal{C}_{J_2}^\Omega(i_c)}{a_c^{3.5}} \right] \quad (\text{III.3})$$

Soit, pour a_1 demi-grand axe de la première orbite de dérive,

$$a_1 = \left[\frac{\mathcal{C}_{J_2}^\Omega(i_0) \cdot \Delta t_1}{\mathcal{C}_{J_2}^\Omega(i_c) \cdot \Delta t_1 \cdot a_c^{-3.5} + \Delta\Omega} \right]^{2/7} \quad (\text{III.4})$$

Donc, en fonction de la correction à effectuer en ascension droite du noeud ascendant, et pour un temps de dérive donné, il est possible de déterminer l'altitude de l'orbite de dérive correspondante. La figure III.1 permet de visualiser la variation du demi-grand axe en fonction du temps de dérive Δt_1 , et ceci pour diverses corrections en ascension droite du noeud ascendant. Il est à noter qu'il existe une borne inférieure sur le temps, en-deçà de laquelle cette stratégie ne peut être applicable (du moins les corrections qu'elle permet d'apporter sont insuffisantes, ce qui est visualisé sur la figure III.1). Par contre, pour un temps de dérive important, ce demi-grand axe tend vers le demi-grand axe cible, ce qui permet de limiter la dérive différentielle entre le satellite et la cible.

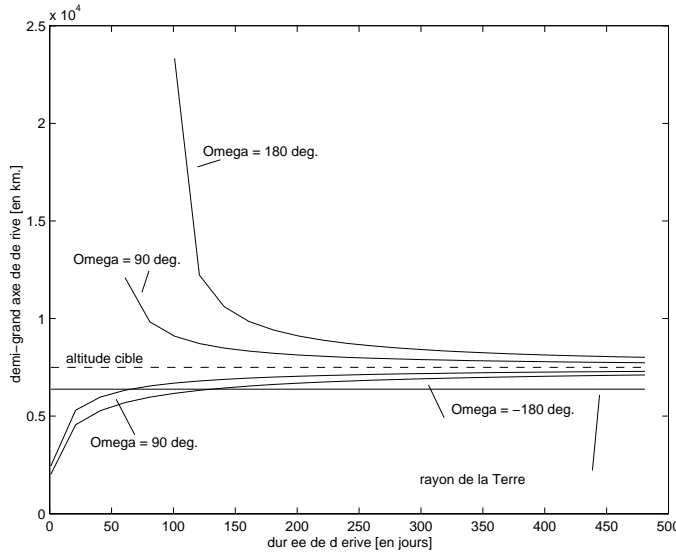


FIG. III.1 – La variation du demi-grand axe de dérive en fonction de la durée

III.2.3 Détermination de la deuxième orbite de dérive

Lors de la première phase de dérive, l'anomalie est restée libre. La deuxième phase de dérive permet essentiellement d'effectuer le phasage entre le satellite et la cible. Comme pour le cas de l'ascension droite du noeud ascendant, l'altitude de la deuxième orbite de dérive est déterminée de façon à apporter les corrections nécessaires sur ce paramètre. Le moyen mouvement est ce qui permet d'apporter la correction la plus importante. L'effet du J_2 est également utilisé pour réaliser le phasage du satellite.

La correction à réaliser est donnée par l'écart entre la position de la cible et celle du satellite au début de la deuxième phase de dérive :

$$\Delta\alpha = \left[\alpha_c - \left(\sqrt{\frac{\mu}{a_c^3}} + \mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i_c) \frac{1}{a_c^{3.5}} \right) \Delta t_2 \right] - \left[\alpha_0 + \left[\sqrt{\frac{\mu}{a_1^3}} + \mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i_0) \frac{1}{a_1^{3.5}} \right] \Delta t_1 \right] \quad (\text{III.5})$$

Cette erreur est donc compensée via la dérive différentielle entre la cible et le satellite durant la deuxième phase de dérive :

$$\Delta t_2 \left[\sqrt{\mu} \left(\frac{1}{a_2^{1.5}} - \frac{1}{a_c^{1.5}} \right) + \frac{\mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i_0)}{a_2^{3.5}} - \frac{\mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i_c)}{a_c^{3.5}} \right] = \Delta\alpha \quad (\text{III.6})$$

où a_2 désigne le demi-grand axe de la deuxième phase de dérive. Il est déterminé en résolvant l'équation III.6.

III.2.4 Détermination des modules de poussées hors-plan

Dans ce qui précède, l'hypothèse de découplage des deux dynamiques est faite pour pouvoir calculer le deuxième demi-grand axe de dérive. Or, pendant cette deuxième phase, l'ascension droite du noeud ascendant subit une dérive supplémentaire puisque le deuxième

demi-grand axe est différent de celui de la cible (contrairement à ce qui a été supposé au §III.2.2). Une erreur supplémentaire sur le paramètre Ω est donc induite, elle est supposée faible car il sera imposé que Δt_1 soit plus grand que Δt_2 . Pour la corriger, il faut appliquer des poussées hors plan, qui sont réparties sur les trois phases de poussées. Dans [Lasserre 98], la répartition se faisait selon un taux fixé au préalable. Cependant, il est possible de répartir ces poussées de “façon optimale”, ce qui permet d’aboutir à une solution qui respecte les contraintes du problème et qui soit peu coûteuse. Cette répartition peut se faire selon deux méthodes (qui sont détaillées dans l’annexe B) :

- au premier ordre, en imposant une direction de poussée constante sur les différentes phases de poussées;
- selon une loi de répartition issue d’un calcul d’optimisation.

III.2.5 Détermination des durées des deux phases de dérives

Pour ce problème simplifié à l’extrême (sans correction d’inclinaison, d’excentricité et sous hypothèse de découplage des dynamiques en (α, Ω)), un problème d’optimisation peut être défini. Il concerne la minimisation de la consommation, les variables étant les durées de dérive Δt_1 et Δt_2 sous la contrainte que leur somme n’excède pas l’horizon de mise à poste prévu. Le problème à résoudre (noté (\mathcal{P}_{3D})), est défini par :

$$(\mathcal{P}_{3D}) \left\{ \begin{array}{l} \min \left[\mathcal{J}(\Delta t_1, \Delta t_2) = \sum_{k=1}^{k=3} \sqrt{Vt_k^2 + Vw_k^2} \right] \\ \varepsilon_a(\Delta t_1, \Delta t_2) = 0 \\ \varepsilon_\Omega(\Delta t_1, \Delta t_2) = 0 \\ \varepsilon_\alpha(\Delta t_1, \Delta t_2) = 0 \\ \Delta t_1 + \Delta t_2 - \Delta t \leq 0 \\ \Delta t_1, \Delta t_2 \in [0, \Delta t] \end{array} \right. \quad (\text{III.7})$$

Pour chaque couple $(\Delta t_1, \Delta t_2)$, les orbites de dérives et les composantes hors-plan des poussées sont déterminées afin de réaliser le rendez-vous en anomalie et en ascension droite du noeud ascendant (à l’aide de la stratégie de découplage des dynamiques). Ce problème est résolu à l’aide d’une méthode d’optimisation multidimensionnelle géométrique, le simplexe de Nelder & Mead [Nelder 65]. Les contraintes à respecter sont traitées sous la forme de pénalités (pénalité intérieure ajoutée à la fonction objectif).

III.3 Recherche d’une solution 2D

Le plus coûteux pour le problème de transfert orbital sont les poussées hors-plan. Le rendez-vous en altitude induit des modules de poussées tangentielles qui sont imposées. Le rendez-vous en ascension droite du noeud ascendant pour sa part, peut être réalisé “naturellement” via l’effet du J_2 . L’élimination des poussées hors-plan correspond, dans le cas général, à l’optimum recherché. Il est donc intéressant de rechercher une solution

au problème de rendez-vous sans application de poussées hors-plan. Ce qui correspond à un transfert en deux dimensions avec phasage, dans lequel l'ascension droite du noeud ascendant est acquise à l'aide de la dérive différentielle entre le satellite et la cible. Ceci revient à trouver une solution pour le système algébrique :

$$(\mathcal{P}_{2D}) \begin{cases} \varepsilon_\alpha(a_1, a_2, \Delta t_1, \Delta t_2) = 0 \\ \varepsilon_\Omega(a_1, a_2, \Delta t_1, \Delta t_2) = 0 \\ V w_{1..3} = 0 \\ a_0 < a_1 < a_2 < a_c \\ \Delta t_1 + \Delta t_2 - \Delta t \leq 0 \\ \Delta t_1, \Delta t_2 \in [0, \Delta t] \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

Les conditions d'inégalité faisant intervenir les demi-grands axes de dérive a_1 et a_2 sont introduites pour éliminer des solutions correspondant à des poussées tangentielles de signe opposé qui correspondent à des solutions dites avec "sur-coût". Elles traduisent des scénarios où il faut aller chercher des orbites de dérive à altitude supérieure à celle de la cible, sachant, bien sur, qu'il sera nécessaire de "redescendre" à l'altitude cible. Un tel scénario peut être induit par le fait d'un horizon temporel de la mise à poste trop court. La dérive différentielle entre la cible et le satellite peut être insuffisante sur des altitudes inférieures à celles de la cible. Dans ce cas, il sera plus intéressant d'introduire des poussées hors-plan. Les contraintes que doit respecter la solution recherchée sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_\Omega(\Delta t_{1..2}, a_{1..2}) = \mathcal{C}_{J_2}^\Omega(i) \frac{\Delta t_1}{a_1^{7/2}} + \mathcal{C}_{J_2}^\Omega(i) \frac{\Delta t_2}{a_2^{7/2}} + \mathcal{C}_{J_2}^\Omega(i) \frac{\Delta t - \Delta t_1 - \Delta t_2}{a_c^{7/2}} \\ -\mathcal{C}_{J_2}^\Omega(i) \frac{\Delta t}{a_c^{7/2}} - \Delta\Omega = 0 \\ \varepsilon_\alpha(\Delta t_{1..2}, a_{1..2}) = \Delta t_1 \left(\frac{\sqrt{\mu}}{a_1^{3/2}} + \frac{\mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i)}{a_1^{7/2}} \right) + \Delta t_2 \left(\frac{\sqrt{\mu}}{a_2^{3/2}} + \frac{\mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i)}{a_2^{7/2}} \right) \\ + (\Delta t - \Delta t_1 - \Delta t_2) \left(\frac{\sqrt{\mu}}{a_c^{3/2}} + \frac{\mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i)}{a_c^{7/2}} \right) - \Delta t \left(\frac{\sqrt{\mu}}{a_c^{3/2}} + \frac{\mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i_c)}{a_c^{7/2}} \right) - \Delta\alpha = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.9})$$

où :

- $\Delta\alpha = \alpha_{cible}^0 - \alpha^0 + 2k_\alpha\pi$ est l'erreur initiale en anomalie entre la cible et le satellite avec prise en compte de la différence en nombre de tours entre la cible et le satellite.
- $\Delta\Omega = \Omega_{cible}^0 - \Omega^0 + 2k_\Omega\pi$ est l'erreur initiale en Ω entre la cible et le satellite avec prise en compte de la différence en nombre de tours entre la cible et le satellite.
- La prise en compte de la différence en nombre de tours effectués par la cible et le satellite sera détaillée par la suite (au §III.4).

III.4 Optimisation du transfert avec rendez-vous en (a, α, Ω)

La résolution du deuxième problème défini en II.5.2 fait l'objet de ce paragraphe. Il faut déterminer les durées de dérive ainsi que les orbites des phases balistiques qui permettent de minimiser la consommation du satellite tout en respectant des contraintes de rendez-vous sur l'altitude, l'anomalie et l'ascension droite du noeud ascendant. Il est fait l'hypothèse que l'inclinaison ainsi que l'excentricité ne sont pas contrôlées. La prise en compte de ces états supplémentaires ainsi que leurs corrections fera l'objet de paragraphes ultérieurs.

Ainsi, le problème d'optimisation à résoudre s'écrit sous la forme :

$$(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega}) \left\{ \begin{array}{l} \min \mathcal{J}(\Delta t_1, \Delta t_2, a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = \sum_{k=1}^{k=3} \sqrt{Vt_k^2 + Vw_k^2} \\ \varepsilon_a(\Delta t_1, \Delta t_2, a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \varepsilon_\Omega(\Delta t_1, \Delta t_2, a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \varepsilon_\alpha(\Delta t_1, \Delta t_2, a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \Delta t_1 + \Delta t_2 - \Delta t \leq 0 \\ (a_2 - a_1) \cdot (a_c - a_2) > 0 \end{array} \right.$$

$(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega})$ est un problème de minimisation d'un critère non linéaire, sous deux contraintes d'inégalité et trois contraintes non linéaires et possédant sept variables d'optimisation. Du fait de la grande non linéarité des contraintes et du couplage des dynamiques, sa résolution directe présente des problèmes de convergence. Afin de remédier à cette difficulté, ce problème est résolu selon deux niveaux :

- en couche de base, pour des durées de phases balistiques fixées, le transfert du satellite est optimisé en déterminant les modules des poussées ainsi que leurs directions.
- en couche supérieure, les durées des phases de dérives sont optimisées de façon à minimiser le coût du transfert.

III.4.1 Modélisation des contraintes

Avant de présenter la méthode de résolution du problème, la modélisation des contraintes est présentée dans ce paragraphe. Les contraintes relatives au problème traité sont les erreurs d'acquisition des trois paramètres (a, α, Ω) . Donc, il faut comparer les valeurs finales de ces paramètres par rapport à ceux de la cible. Cependant, du fait de l'effet séculaire du moyen mouvement et de celui de l'aplatissement terrestre, le satellite effectue plusieurs tours avant d'atteindre sa position finale. Il existe donc deux variables indéterminées supplémentaires qui sont les nombres de tours différentiels pour l'anomalie et l'ascension droite du noeud ascendant entre la cible et le satellite. L'ordre de grandeur de ces nombres de tours est grossièrement déterminé par la durée globale de la mise à poste. Cependant, leur valeur exacte est liée aux altitudes empruntées par le satellite à mettre à poste. A

chaque nombre de tours correspond une solution du problème. Il serait bien évidemment, plus intéressant de se libérer de ces inconnues et ceci en comparant tout simplement les paramètres angulaires initiaux et finaux (sans se préoccuper du nombre de tours effectués par la cible ou par le satellite). Cependant, cela introduit une discontinuité sur les contraintes qui détériore considérablement les vitesses de convergence des méthodes d'optimisation utilisées. Une alternative pour contourner ce problème est celle de préfixer les nombres de tours différentiels entre la cible et le satellite, en anomalie et en ascension droite du noeud ascendant. Dans un premier temps, ils sont pris égaux à ceux de la solution du problème avec hypothèse de découplage des dynamique (présentée au §(III.2)). De ce fait, le processus d'optimisation recherche une solution dans une famille de solutions respectant les contraintes et définie par ces nombres de tours. Cette approche permet de garder la propriété de continuité des contraintes et de ce fait, permet d'utiliser des méthodes d'optimisation analytiques. On peut ensuite faire une recherche discrète sur le nombre de tour. La modélisation sans prise en compte du nombre de tours (en exprimant les erreurs dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$) permet de rechercher une solution optimale qui peut être éloignée de la solution initiale découplant les deux dynamiques (et donc est plus robuste quant à l'initialisation). Du fait que cette approche rend les contraintes discontinues, la résolution du problème utilise des méthodes géométriques multidimensionnelles.

La première formulation est généralement utilisée. Ceci dit, la formulation discontinue s'avère intéressante lors de la recherche de solutions admissibles.

Dans ce qui suit, les contraintes sont données dans les deux cas de figures.

Modélisation continue des contraintes

L'utilisation des dérivées différentielles entre la cible et le satellite pour corriger les erreurs sur l'acquisition des paramètres angulaires, permet d'exprimer les contraintes sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\Omega}(\Delta t_{1\dots 2}, a_{1\dots 2}, Vw_{1\dots 3}, i_{1\dots 3}) = \mathcal{C}_{J_2}^{\Omega}(i_1) \frac{\Delta t_1}{a_1^{7/2}} + \mathcal{C}_{J_2}^{\Omega}(i_2) \frac{\Delta t_2}{a_2^{7/2}} + \mathcal{C}_{J_2}^{\Omega}(i_3) \frac{\Delta t - \Delta t_1 - \Delta t_2}{a_c^{7/2}} \\ - \mathcal{C}_{J_2}^{\Omega}(i_c) \frac{\Delta t}{a_c^{7/2}} + \frac{\sqrt{a_0} \cdot Vw_1}{\sqrt{\mu} \cdot \sin(i_1)} + \frac{\sqrt{a_1} \cdot Vw_2}{\sqrt{\mu} \cdot \sin(i_2)} + \frac{\sqrt{a_2} \cdot Vw_3}{\sqrt{\mu} \cdot \sin(i_3)} - \Delta\Omega = 0 \\ \\ \varepsilon_{\alpha}(\Delta t_{1\dots 2}, a_{1\dots 2}, Vw_{1\dots 3}, i_{1\dots 3}) = \Delta t_1 \left(\frac{\sqrt{\mu}}{a_1^{3/2}} + \frac{\mathcal{C}_{J_2}^{\alpha}(i_1)}{a_1^{7/2}} \right) + \Delta t_2 \left(\frac{\sqrt{\mu}}{a_2^{3/2}} + \frac{\mathcal{C}_{J_2}^{\alpha}(i_2)}{a_2^{7/2}} \right) + \\ (\Delta t - \Delta t_1 - \Delta t_2) \left(\frac{\sqrt{\mu}}{a_c^{3/2}} + \frac{\mathcal{C}_{J_2}^{\alpha}(i_3)}{a_c^{7/2}} \right) - \Delta t \left(\frac{\sqrt{\mu}}{a_c^{3/2}} + \frac{\mathcal{C}_{J_2}^{\alpha}(i_c)}{a_c^{7/2}} \right) - \Delta\alpha = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.10})$$

Les corrections Δ à apporter sont données par :

- $\Delta\alpha = \alpha_c^0 - \alpha_0 + 2N_{\alpha}\pi$ qui est l'erreur initiale en anomalie entre la cible et le satellite avec prise en compte de la différence en nombre de tours N_{α} , entre la cible et le satellite (fixée par la solution initiale découplant les dynamiques).

- $\Delta\Omega = \Omega_c^0 - \Omega_0 + 2N_\Omega\pi$ qui est l'erreur initiale en Ω entre la cible et le satellite avec prise en compte de la différence en nombre de tours N_Ω entre la cible et le satellite sur l'ascension droite du noeud ascendant.

Ces contraintes sont écrites dans le cas général où les orbites de dérives possèdent des inclinaisons qui peuvent être différentes (notées i_1, i_2, i_3). Dans un premier temps, ces inclinaisons sont prises égales à l'inclinaison initiale du satellite puisque la correction sur ce paramètre n'est pas prise en compte.

Modélisation discontinue des contraintes

La deuxième façon d'exprimer les contraintes est celle qui supprime l'information sur le nombre de tours effectués par le satellite. Ainsi, les paramètres angulaires de la cible et du satellite sont comparés et la modélisation suivante est obtenue :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_\Omega(\Delta t_{1\dots 2}, a_{1\dots 2}, Vw_{1\dots 3}, i_{1\dots 3}) = \left(\Omega_0 + \mathcal{C}_{J_2}^\Omega(i_1) \frac{\Delta t_1}{a_1^{7/2}} + \mathcal{C}_{J_2}^\Omega(i_2) \frac{\Delta t_2}{a_2^{7/2}} + \mathcal{C}_{J_2}^\Omega(i_3) \frac{\Delta t - \Delta t_1 - \Delta t_2}{a_c^{7/2}} \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{a_0} \cdot Vw_1}{\sqrt{\mu} \cdot \sin(i_1)} + \frac{\sqrt{a_1} \cdot Vw_2}{\sqrt{\mu} \cdot \sin(i_2)} + \frac{\sqrt{a_2} \cdot Vw_3}{\sqrt{\mu} \cdot \sin(i_3)} \right)_{[0, 2\pi]} - (\Omega_c)_{[0, 2\pi]} = 0 \\ \\ \varepsilon_\alpha(\Delta t_{1\dots 2}, a_{1\dots 2}, Vw_{1\dots 3}, i_{1\dots 3}) = \left(\alpha_0 + \frac{\sqrt{\mu} \Delta t_1}{a_1^{3/2}} + \mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i_1) \frac{\Delta t_1}{a_1^{7/2}} + \frac{\sqrt{\mu} \Delta t_2}{a_2^{3/2}} + \mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i_2) \frac{\Delta t_2}{a_2^{7/2}} + \right. \\ \left. \frac{\sqrt{\mu} (\Delta t - \Delta t_1 - \Delta t_2)}{a_c^{3/2}} + \mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i_3) \frac{(\Delta t - \Delta t_1 - \Delta t_2)}{a_c^{7/2}} \right)_{[0, 2\pi]} - (\alpha_c)_{[0, 2\pi]} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.11})$$

III.4.2 “Couche de base” de résolution à durées de transfert fixées

Dans un premier temps, les instants d'application des manoeuvres sont supposés fixés par un module en couche supérieure qui sera explicité dans le §III.4.3. Il faut donc optimiser les variables $(a_{1\dots 2}, Vw_{1\dots 3})$ solution du problème $(\tilde{\mathcal{P}}_{a, \alpha, \Omega})$ défini par :

$$(\tilde{\mathcal{P}}_{a, \alpha, \Omega}) \left\{ \begin{array}{l} \min \mathcal{J}(a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = \sum_{k=1}^{k=3} \sqrt{Vt_k^2 + Vw_k^2} \\ \varepsilon_a(a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \varepsilon_\Omega(a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \varepsilon_\alpha(a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ a_0 < a_1 < a_2 < a_c \end{array} \right. \quad (\text{III.12})$$

Les poussées tangentielles permettent de respecter la contrainte sur l'altitude. Les contraintes à respecter $(\varepsilon_\Omega, \varepsilon_\alpha)$ utilisent la première formulation (donnée par le système

d'équation III.10). La contrainte inégalité sur les demi-grands axes des orbites de dérives exprime la contrainte de ne pas rechercher des solutions avec sur-coût et peut être directement prise en compte dans une approche directe où les domaines admissibles devront satisfaire $a_0 < a_1 < a_2 < a_c$. Ainsi, la nature analytique et continue de la formulation du problème permet d'utiliser des méthodes en programmation non linéaire.

Résolution

Le problème $(\tilde{\mathcal{P}}_{a,\alpha,\Omega})$ est un problème de minimisation d'une fonction objectif non linéaire sous des contraintes non linéaires (le rendez-vous sur la position). Du fait de la modélisation analytique et continue adoptée, la méthode du *Gradient Réduit Généralisé* (notée **GRG** et détaillée en [Minoux 83, Fletcher 87]) est utilisée. Cette méthode combine des méthodes de linéarisation et de gradient réduit de Wolfe afin d'optimiser un critère donné à l'aide de variables positives. Les directions hors-plan des poussées pouvant être négatives, quelques modifications classiques ont été apportées au problème initial $(\tilde{\mathcal{P}}_{a,\alpha,\Omega})$. Pour que cette méthode puisse être appliquée, chaque variable susceptible d'être négative est décomposée en deux variables :

Le nombre de variables d'optimisation est alors de huit variables :

$$(a_1, a_2, Vw^+_{1\dots 3}, Vw^-_{1\dots 3}) \quad (\text{III.13})$$

Le critère et les contraintes sont écrits selon ce nouveau jeu de paramètres et la méthode du **GRG** peut à présent être appliquée. Cette méthode consiste à utiliser les méthodes d'optimisation sans contraintes et à les adapter au problème traité en projetant, à chaque itération le déplacement optimal obtenu sur la frontière du domaine définissant les contraintes. Pour ce faire, il faut définir, parmi les variables d'optimisation, un sous-ensemble qui soit de dimension égale au nombre des contraintes, et tel que le jacobien des contraintes dans cette base soit une matrice régulière. Ces variables dites *variables dépendantes*, constituent la base de la variété V , définie par :

$$V = \{x/h_i(x) = 0, i = 0 \dots m\} \quad (\text{III.14})$$

où les h_i représentent les contraintes à respecter (au nombre m). Puisque les contraintes sont au nombre de deux, il est préférable de choisir les deux demi-grands axes comme variables de base étant donné que ces variables sont toujours non nulles. Les variables restantes sont dites *variables hors base* et sont prises égales aux composantes des poussées hors-plan. Ainsi, à partir d'un point x_k de la variété V , le déplacement permettant de diminuer la fonction objectif tout en respectant les contraintes est calculé. Ce déplacement est la projection du gradient de la fonction objectif (noté $-\nabla f(x_k)$) sur l'hyperplan tangent à la variété au point initial x_k . Le pas peut être adapté afin d'améliorer la vitesse de convergence de la méthode (à l'aide de méthodes unidimensionnelles : méthode de Fibonacci, du nombre d'or \dots [Minoux 83]).

Etant donné que les contraintes sont fortement non linéaires, la solution précédente doit être modifiée afin que les contraintes soient satisfaites. Pour cela, pour des valeurs de variables hors base fixées à leurs valeurs données par le déplacement optimal, les

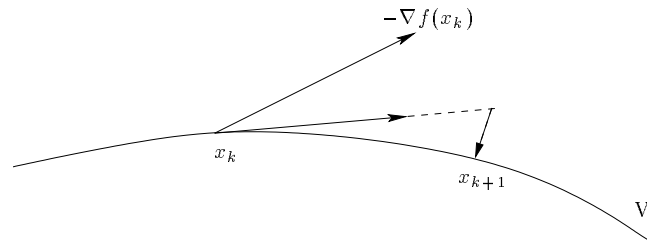


FIG. III.2 – Principe de la méthode **GRG**

deux variables de bases sont calculées à l'aide d'une méthode de Newton. A ce niveau du processus de résolution, un nouveau point x_{k+1} est obtenu. En ce point, la valeur de la fonction objectif est en général meilleure et les contraintes sont respectées. Selon la précision imposée, soit il faut réitérer, soit le processus s'arrête puisqu'un optimum a été trouvé.

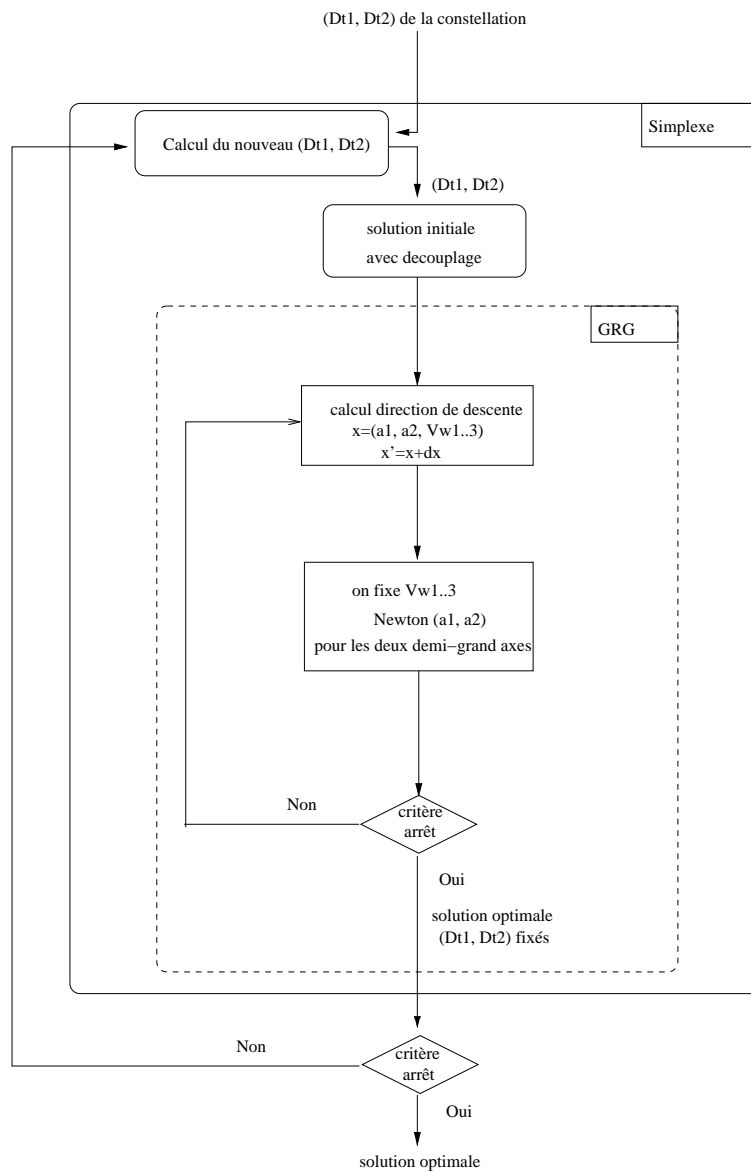


FIG. III.3 – Principe de résolution du problème $(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega})$

III.4.3 “Couche supérieure” de résolution : relaxation des durées de dérives

Dans le paragraphe précédent, les durées des deux phases balistiques ont été supposées fixées. Il est cependant important d’optimiser ces deux variables puisqu’elles conditionnent également la qualité de la solution optimale obtenue. Il faut donc résoudre un nouveau problème d’optimisation (noté $(\bar{\mathcal{P}}_{a,\alpha,\Omega})$) qui est défini par :

$$(\bar{\mathcal{P}}_{a,\alpha,\Omega}) \left\{ \begin{array}{l} \min \mathcal{J}(\Delta t_1, \Delta t_2) = \sum_{k=1}^{k=3} \sqrt{Vt_k^2 + Vw_k^2} \\ \varepsilon_a(\Delta t_1, \Delta t_2) = 0 \\ \varepsilon_\Omega(\Delta t_1, \Delta t_2) = 0 \\ \varepsilon_\alpha(\Delta t_1, \Delta t_2) = 0 \\ \Delta t_1 + \Delta t_2 - \Delta t \leq 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.15})$$

Le problème $(\bar{\mathcal{P}}_{a,\alpha,\Omega})$ est équivalent au problème (\mathcal{P}_{3D}) résolu au préalable (défini par le système d’équation III.7). La différence entre ces deux problèmes est que le nouveau problème $(\bar{\mathcal{P}}_{a,\alpha,\Omega})$ optimise le transfert entre la position initiale et la cible pour un couple de durées de dérives données, en utilisant le processus de résolution présenté au §III.4.2.

La résolution de ce problème se fait à l’aide d’une méthode géométrique (Nelder & Mead, Hooke & Jeeves). Les contraintes imposées sur les variables temporelles sont traduites sous formes de pénalités rajoutées à la fonction objectif :

$$\mathcal{J}(\Delta t_1, \Delta t_2) = \begin{cases} \text{coût optimal } GRG(a_1, a_2, Vw_{1..3}) & \text{si } \Delta t_1, \Delta t_2 \in [0, \Delta t] \\ \text{et } \Delta t_1 + \Delta t_2 \leq \Delta t & \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

La figure III.3 montre la structure de l’algorithme d’optimisation de ce type de rendez-vous ainsi que l’emboîtement des deux niveaux de résolution.

III.5 Prise en compte d’un transfert de Hohmann

Dans la section précédente, le problème de rendez-vous a été résolu en se basant sur un modèle analytique simplifié pour lequel les orbites ont été supposées circulaires. L’incidence de l’application de poussées sur l’excentricité a été négligée. La correction éventuelle de ce paramètre est ici prise en compte. Lors de la résolution du problème $(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega})$, une seule poussée par phase de manoeuvre est réalisée afin de transférer le satellite d’une orbite vers une autre. Or, il a été établi que le nombre minimal de poussées tangentielles pour transférer un satellite d’une orbite circulaire vers une autre orbite circulaire est au nombre de deux ([Marec 83, Hohmann 25]). Cette stratégie est d’ailleurs utilisée dans les exemples de transferts orbitaux présentés au §II.3.1. Dans ce qui suit, à chaque phase de poussée, un transfert bi-impulsionnel est considéré. La mise à poste étant donc réalisée avec six poussées. Deux stratégies sont considérées :

- application du transfert de Hohmann afin de perturber le moins possible la nature

quasi-circulaire des orbites : stratégie “passive” dans le cas où aucune valeur finale en excentricité n’est spécifiée.

- optimisation du transfert bi-impulsionnel à chaque phase de manoeuvre dans le cas de rendez-vous en excentricité : stratégie “active” où sont optimisées les deux impulsions par phase.

Donc, à chaque phase de manoeuvre sont appliquées deux poussées tangentielles dont l’amplitude et l’écart entre leurs dates d’application sont données par la nature de la correction en excentricité à effectuer. La figure III.4 résume le principe de cette stratégie à six poussées.

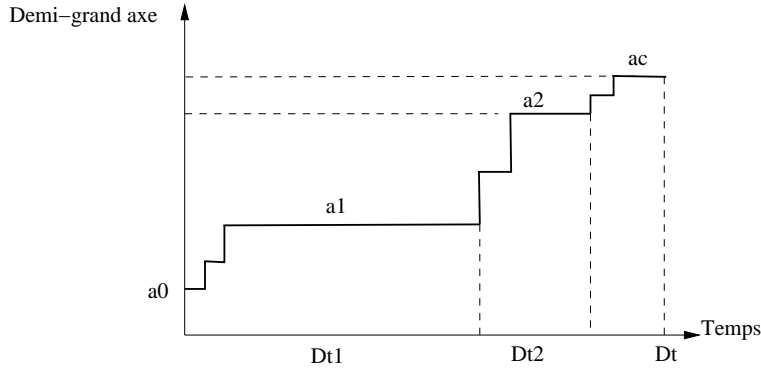


FIG. III.4 – stratégie de mise à poste avec six poussées

Aucun rendez-vous final sur l’excentricité n’étant imposé, la seule contrainte est de respecter l’hypothèse de circularité des orbites. Pour ce faire, à chaque phase de poussée, un transfert de Hohmann est appliqué (ce transfert a été présenté au §II.3.1). Le satellite est ainsi transféré au total sur cinq orbites intermédiaires : sur une orbite de transfert de Hohmann entre chaque orbite intermédiaire, et sur deux orbites de dérives pendant les deux phases balistiques. Le problème d’optimisation est équivalent à celui du problème à trois phases de poussée ($\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega}$) où seules la dynamique et la fonction objectif changent. En effet, en ce qui concerne la dynamique d’évolution, il faut tenir compte de la variation des paramètres (α, Ω) pendant les orbites de transfert de Hohmann du fait de l’effet du J_2 . En ce qui concerne la fonction objectif, elle doit être la somme des six modules des poussées appliquées au satellite. Dans le cas général, il existe donc six poussées tangentielles, combinées à six poussées hors-plan. Cependant, dans cette étude, seules trois poussées hors-plan sont prises en compte. En effet, l’apport d’une répartition optimale de la poussée hors-plan sur les deux phases de poussées de Hohmann s’avère assez faible. Il est donc suffisant de prendre en compte uniquement trois poussées hors plan, chacune d’elles est combinée avec la première poussée de Hohmann de chaque phase de poussée. Ainsi, la fonction objectif s’écrit sous la forme:

$$\mathcal{J}(a_1, a_2, V w_{1\dots 3}) = \sum_{k=1}^{k=3} \left(\sqrt{V t_{1k}^2 + V w_k^2} + |V t_{2k}| \right) \quad (\text{III.17})$$

avec Vt_{jk} la $j^{\text{ième}}$ poussée tangentielle du $k^{\text{ième}}$ transfert de Hohmann (pour $j = 1, 2, k = 1 \dots 3$).

Afin d'initialiser ce processus d'optimisation, la stratégie découplant les dynamiques est utilisée et appliquée à un problème de rendez-vous avec application de la stratégie de transfert de Hohmann. La technique de résolution développée dans la section (III.4) est utilisée pour résoudre ce problème.

III.6 Optimisation du transfert avec rendez-vous en (a, Ω, α, e)

Dans la section précédente, nous avons vu qu'une stratégie de transfert de Hohmann est suffisante lorsque nous voulons simplement ne pas trop détériorer l'excentricité des orbites. Cependant, il est possible qu'un rendez-vous sur ce paramètre soit imposé (par exemple pour corriger des erreurs d'injection liées au lanceur). Nous proposons dans ce cas une stratégie de correction de l'excentricité similaire à un transfert de Hohmann. La différence réside dans le fait que les modules des poussées et leur espacement doivent être déterminés par les corrections en altitude et en excentricité à effectuer [Tebbani 99a]. Le vecteur d'état du système est maintenant constitué des six variables : $(a, \Omega, \alpha, i, e_x, e_y)$ (l'inclinaison est encore supposée constante pendant toute la durée de la mise à poste).

Stratégie de correction de l'excentricité

Les corrections en altitude et en excentricité sont donc effectuées à l'aide de l'application de deux poussées tangentielles. Afin d'établir les équations caractérisant ce type de correction, les équations de Gauss sont utilisées.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_{int} - a_i}{a_i} = 2\sqrt{\frac{a_i}{\mu}}\Delta V_1 \\ \frac{a_f - a_{int}}{a_{int}} = 2\sqrt{\frac{a_{int}}{\mu}}\Delta V_2 \\ \Delta \vec{e}_1 = 2\sqrt{\frac{a_i}{\mu}}\Delta \vec{V}_1 \\ \Delta \vec{e}_2 = 2\sqrt{\frac{a_{int}}{\mu}}\Delta \vec{V}_2 \\ (\Delta \vec{e})^2 = (\Delta \vec{e}_1 + \Delta \vec{e}_2)^2 = \\ = \left(2\sqrt{\frac{a_0}{\mu}}\Delta V_1\right)^2 + \left(2\sqrt{\frac{a_{int}}{\mu}}\Delta V_2\right)^2 \\ + 2\left(2\sqrt{\frac{a_0}{\mu}}\Delta V_1\right)\left(2\sqrt{\frac{a_{int}}{\mu}}\Delta V_2\right)\cos(\alpha_2 - \alpha_1) \end{array} \right. \quad (\text{III.18})$$

où :

- a_i , a_{int} et a_f sont les demi-grand axes de l'orbite initiale, de l'orbite de transfert et de l'orbite cible.
- α_1 et α_2 sont les anomalies d'application des deux poussées.
- ΔV_1 et ΔV_2 sont les modules des deux poussées à appliquer.
- $\Delta \vec{e}_1$ et $\Delta \vec{e}_2$ sont les variations du vecteur excentricité à chaque phase de manoeuvre à deux impulsions.

Une condition nécessaire pour pouvoir appliquer cette stratégie est donnée par :

$$\left((\Delta \vec{e})^2 - \left(\frac{a_f - a_{int}}{a_{int}} + \frac{a_{int} - a_i}{a_i} \right)^2 \right) \leq 0 \quad (\text{III.19})$$

Cette condition est utilisée comme un test pour savoir si une stratégie de correction de l'excentricité combinée avec une correction d'altitude est faisable ou non. Dans le cas contraire, des poussées normales doivent impérativement être rajoutées. Il est à noter que cette condition généralise celle proposée dans [Legenne 95], la condition donnée dans [Legenne 95] n'étant valable que pour des transferts avec de petites variations des demi-grand axes.

Le système d'équations III.18 est un système de huit équations à neuf inconnues

$(a_{int}, \Delta V_1, \Delta V_2, \alpha_1, \alpha_2, \Delta e_{x1}, \Delta e_{y1}, \Delta e_{x2}, \Delta e_{y2})$. Il existe donc un degré de liberté qui est choisi comme étant l'anomalie d'application de la première poussée. Il est préférable de choisir l'anomalie d'application de la première poussée de façon à pouvoir la fixer en fonction de l'application d'une poussée hors plan. Le système III.18 est résolu en prenant comme variable principale le module de la première poussée ΔV_1 . La solution est de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{int} = a_0 \left(2 \frac{\Delta V_1}{V_0} + 1 \right) \\ \Delta V_2 = \sqrt{\mu} \frac{a_c - a_0 - 2 \frac{\Delta V_1}{V_0} a_0}{2 a_0^{1.5} \left(2 \frac{\Delta V_1}{V_0} + 1 \right)^{1.5}} \\ \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{a_{int}}{\mu}} \Delta V_2} \left(\Delta e_x \cos \alpha_1 + \Delta e_y \sin \alpha_1 - \left(2 \frac{\Delta V_1}{V_0} \right) \right) \end{array} \right. \quad (\text{III.20})$$

La variable principale ΔV_1 est calculée en résolvant le polynôme P, défini par :

$$\begin{aligned} P(X) = & X^4 + 2(1 - \cos(\alpha_0 - \alpha_1))X^3 + ((\Delta \vec{e})^2 - 4 \cos(\alpha_0 - \alpha_1)) X^2 \\ & + 2 \left((\Delta \vec{e})^2 - \cos(\alpha_0 - \alpha_1) + \frac{a_c - a_0}{a_0} \right) X + \left((\Delta \vec{e})^2 - \left(\frac{a_c - a_0}{a_0} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

tel que :

$$X = 2 \frac{\Delta V_1}{V_0} \quad (\text{III.22})$$

et

$$\alpha_0 = \arctan \frac{\Delta e_y}{\Delta e_x} \quad (\text{III.23})$$

Dans le cas de transfert sans sur-coût, i.e. $a_i < a_{int} < a_f$, le terme constant de $P(X)$ est négatif. Cela se montre aisément en majorant $\frac{1}{a_{int}}$ par $\frac{1}{a_i}$ dans la condition III.19.

Donc, comme le terme constant de $P(X)$ est négatif, P possède au moins une racine réelle négative ainsi qu'une racine réelle positive (degré pair). Cette dernière correspond à un module de poussée positif. Dans la pratique, les racines de ce polynôme sont calculées et on retient celle qui appartient à l'intervalle $[0, \frac{a_c - a_0}{a_0}]$ (donc celle qui correspond à des modules de poussées positifs).

Application de la stratégie de correction de l'excentricité au système étudié

La stratégie de correction de l'excentricité présentée au paragraphe précédent est appliquée au système global, constitué des trois phases de manoeuvres. Il faut donc déterminer les six poussées tangentielles et leurs dates d'application afin de satisfaire le rendez-vous en altitude et en excentricité. Il s'agit donc de déterminer la répartition des corrections de l'excentricité à chaque phase de manoeuvre. Il est à rappeler qu'à chaque phase de manoeuvre, il faut respecter la condition III.19. Les excentricités des orbites intermédiaires de dérive deviennent des inconnues à intégrer dans le processus global d'optimisation. Dans le cas où cette stratégie de correction de l'excentricité n'est pas applicable, les modules des poussées et leurs espacements sont calculés de façon à apporter le maximum de correction possible. Des poussées normales peuvent éventuellement être rajoutées pour affiner le rendez-vous. Donc, le problème d'optimisation à résoudre est de la forme :

$$(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega,\epsilon}) \left\{ \begin{array}{l} \min \mathcal{J}(\Delta t_1, \Delta t_2, e_1, e_2, a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = \sum_{k=1}^{k=3} \left(\sqrt{Vt_{1k}^2 + Vw_k^2} + |Vt_{2k}| \right) \\ \varepsilon_a(\Delta t_1, \Delta t_2, e_1, e_2, a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \varepsilon_\Omega(\Delta t_1, \Delta t_2, e_1, e_2, a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \varepsilon_\alpha(\Delta t_1, \Delta t_2, e_1, e_2, a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \varepsilon_\epsilon(\Delta t_1, \Delta t_2, e_1, e_2, a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \Delta t_1 + \Delta t_2 - \Delta t \leq 0 \\ a_0 < a_1 < a_2 < a_c \end{array} \right. \quad (\text{III.24})$$

e_1, e_2 correspondent aux excentricités des deux orbites de dérives. Elles doivent respecter les conditions d'application de la stratégie de correction combinée des deux paramètres (a, ϵ) . Il est à noter que ce problème englobe également la stratégie d'application de transferts de Hohmann. En effet, le transfert de Hohmann est un cas particulier de ce type de transfert bi-impulsionnel (il suffit de prendre le même module des poussées séparées d'une demi-orbite). Ces deux stratégies sont résumées par la figure III.5.

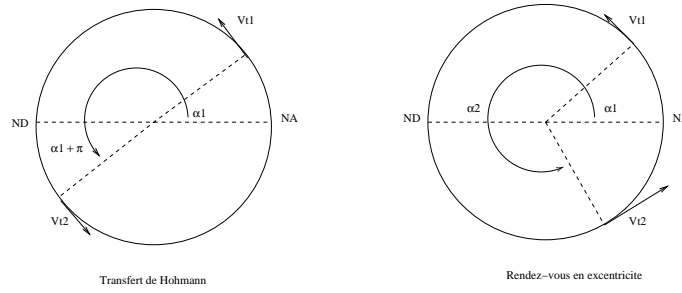


FIG. III.5 – Les deux cas de figure de prise en compte de l'excentricité

Le problème $(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega,\epsilon})$ est résolu selon la même démarche que celle utilisée pour résoudre le problème $(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega})$: une couche de base à durées de transfert fixées et une autre, l'englobant, permettant d'optimiser les durées des phases balistiques. Les mêmes méthodes d'optimisation sont utilisées. L'initialisation se fait par la solution avec intégration d'un transfert de Hohmann et avec découplage des dynamiques en (α, Ω) . En effet, même si un rendez-vous en excentricité est imposé, il faut toutefois que les excentricités restent faibles (pour garantir la validité du modèle dynamique utilisé). De ce fait, les solutions avec transfert de Hohmann et celles avec correction de l'excentricité sont assez proches.

III.7 Optimisation du transfert avec rendez-vous en (a, Ω, α, i)

Dans les sections précédentes, le rendez-vous en inclinaison a été négligé. Cependant, afin de garantir la qualité du service fourni par la constellation (par exemple pour préserver une bonne couverture de la Terre), il est indispensable de corriger ce paramètre. Comme expliqué dans le chapitre II, avant de résoudre le problème global, le problème intermédiaire où l'excentricité est négligée et la correction en inclinaison imposée est résolu. La solution du problème traité dans cette section servira d'initialisation au problème complet (qui fera l'objet du §III.8). Donc, dans cette section, le rendez-vous orbital sur les quatre paramètres (a, Ω, α, i) est réalisé tout en minimisant la consommation. Pour ce faire, les durées des phases balistiques, les altitudes et inclinaisons des orbites intermédiaires et les modules des composantes hors-plan des poussées sont optimisés. Comme précédemment, les corrections tangentielles permettent de corriger l'altitude. La dérive différentielle due au J_2 permet d'apporter des corrections à l'ascension droite du noeud ascendant. Les poussées hors-plan permettent de corriger simultanément l'inclinaison et l'ascension droite du noeud ascendant. Comme évoqué au §II.2.1, les positions d'application de ces manoeuvres sur les orbites sont déterminées par les taux de corrections à effectuer à chaque phase de manoeuvres.

En résumé, le problème à résoudre s'exprime sous la forme :

$$(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega,i}) \left\{ \begin{array}{l} \min \mathcal{J}(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = \sum_{k=1}^{k=3} \sqrt{Vt_k^2 + Vw_k^2} \\ \varepsilon_a(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \varepsilon_\Omega(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \varepsilon_\alpha(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \varepsilon_i(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \Delta t_1 + \Delta t_2 - \Delta t \leq 0 \\ (a_2 - a_1) \cdot (a_c - a_2) > 0 \\ \text{si } i_0 < i_c \text{ alors } i_0 < i_1 < i_2 < i_c \\ \text{si } i_0 > i_c \text{ alors } i_c < i_2 < i_1 < i_0 \end{array} \right. \quad (\text{III.25})$$

Les deux dernières conditions sur les inclinaisons des orbites de dérive traduisent le fait que les cas de sur-coût sur les poussées hors-plan sont éliminés, en contraignant les composantes hors-plan à conserver le même signe. Les contraintes sur les précisions d'acquisition des différents paramètres ont été données au §III.4.1. La prise en compte de la variation de l'inclinaison complexifie considérablement le problème à résoudre. En effet, puisque les dérives naturelles du satellite, du fait de l'aplatissement terrestre, dépendent directement de l'inclinaison, une variation de cette dernière modifie la dynamique du satellite et crée un couplage très important entre les différentes dynamiques du système. De ce fait, il n'est pas aisé de trouver une solution respectant les contraintes et qui ne soit pas trop coûteuse. Dans cette partie, la méthode de résolution développée est présentée. Elle est analogue à celle utilisée dans le problème amont (présenté à la section III.4). Ainsi, le problème est fractionné en deux couches d'optimisation :

- en couche de base, les durées des phases balistiques ainsi que les inclinaisons des deux orbites intermédiaires sont fixées. Le transfert du satellite est optimisé selon le même principe de résolution qu'au §III.4.3. Les modules des poussées hors-plan nécessaires pour corriger l'inclinaison sont négligés à ce niveau, ce qui revient à changer de dynamique d'évolution d'une phase à une autre (via la variation instantanée de l'inclinaison). Les composantes hors-plan des poussées ainsi calculées ne servent donc qu'à corriger l'ascension droite du noeud ascendant. Cette optimisation est initialisée par une solution basée sur le principe du découplage des dynamiques (avec prise en compte de la modification des inclinaisons). Le problème résolu à ce niveau est noté $(\tilde{\mathcal{P}}_{a,\alpha,\Omega,i})$.

$$(\tilde{\mathcal{P}}_{a,\alpha,\Omega,i}) \left\{ \begin{array}{l} \min \mathcal{J}(a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = \sum_{k=1}^{k=3} \sqrt{Vt_k^2 + Vw_k^{\Omega^2}} \\ \varepsilon_a(a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \varepsilon_\Omega(a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \varepsilon_\alpha(a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \varepsilon_i(a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ (a_2 - a_1) \cdot (a_c - a_2) > 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.26})$$

– en couche supérieure, les quatre variables qui étaient fixées dans la couche de base sont relaxées et optimisées afin de diminuer la consommation. Donc, pour chaque $(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2)$, un passage par la couche de base permet de déterminer les altitudes des orbites intermédiaires et les corrections en ascension droite du noeud ascendant à effectuer via l'application de poussées (ces poussées sont notées Vw_k^Ω et sont appliquées aux anti-noeuds). En combinant ces poussées avec celles nécessaires pour corriger l'inclinaison (notées Vw_k^i et appliquées aux noeuds), il est possible de calculer le vrai coût correspondant à ce transfert. Les contraintes d'inégalité à respecter sur les variables sont traduites sous forme de pénalités dans la fonction objectif. Une méthode géométrique est utilisée pour résoudre ce problème qui est noté $(\bar{\mathcal{P}}_{a,\alpha,\Omega,i})$.

$$(\bar{\mathcal{P}}_{a,\alpha,\Omega,i}) \left\{ \begin{array}{l} \min \mathcal{J}(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2) = \sum_{k=1}^{k=3} \sqrt{Vt_k^2 + Vw_k^{\Omega,i^2}} \\ \varepsilon_a(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2) = 0 \\ \varepsilon_\Omega(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2) = 0 \\ \varepsilon_\alpha(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2) = 0 \\ \varepsilon_i(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2) = 0 \\ \Delta t_1 + \Delta t_2 - \Delta t \leq 0 \\ \text{si } i_0 < i_c \text{ alors } i_0 < i_1 < i_2 < i_c \\ \text{si } i_0 > i_c \text{ alors } i_c < i_2 < i_1 < i_0 \end{array} \right. \quad (\text{III.27})$$

La structure globale de la résolution de ce problème est définie par la figure III.6.

III.8 Optimisation du transfert avec rendez-vous en $(a, \Omega, \alpha, i, e)$

Après résolution des différents sous-problèmes, nous nous intéressons à présent au problème avec rendez-vous sur le système global. Ce problème global peut s'écrire sous la forme :

$$(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega,i,e}) \left\{ \begin{array}{l} \min \mathcal{J}(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2, e_1, e_2, Vw_{1\dots 3}) = \sum_{k=1}^{k=3} \left(\sqrt{Vt_{1k}^2 + Vw_k^2} + |Vt_{2k}| \right) \\ \varepsilon_a(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2, e_1, e_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \varepsilon_\Omega(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2, e_1, e_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \varepsilon_\alpha(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2, e_1, e_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \varepsilon_i(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2, e_1, e_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \varepsilon_e(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2, e_1, e_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \Delta t_1 + \Delta t_2 - \Delta t \leq 0 \\ a_0 < a_1 < a_2 < a_c \\ \text{si } i_0 < i_c \text{ alors } i_0 < i_1 < i_2 < i_c \\ \text{si } i_0 > i_c \text{ alors } i_c < i_2 < i_1 < i_0 \end{array} \right. \quad (\text{III.28})$$

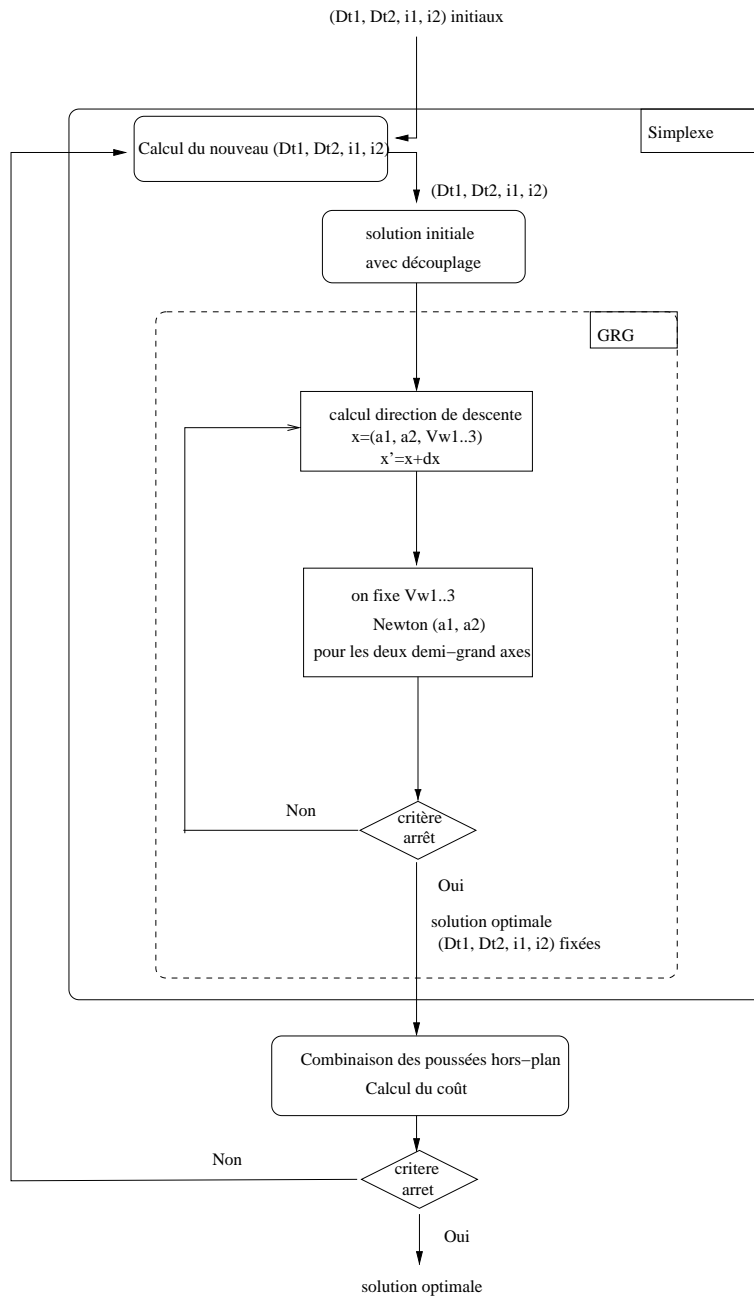


FIG. III.6 – Principe de résolution du problème avec rendez-vous en (a, α, Ω, i)

Les stratégies développées précédemment sont utilisées pour réaliser le rendez-vous global sur les six paramètres. Donc, les poussées tangentielles permettent de corriger l'altitude et l'excentricité. A chaque phase de manoeuvres, deux poussées tangentielles sont appliquées, leurs modules et espacements sont déterminés par la correction en demi-grand axe et en excentricité à effectuer. Les poussées hors-plan permettent de corriger simultanément l'inclinaison et l'ascension droite du noeud ascendant. Les anomalies d'application des poussées hors-plan servent à fixer l'anomalie α_1 pour la correction de l'excentricité (i.e. l'anomalie d'application de la première poussée tangentielle pour chaque phase de manoeuvre).

Ce problème est également fractionné en deux couches d'optimisation :

- en couche de base : pour $(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2)$ fixé, le transfert avec rendez-vous en (a, e) est résolu à l'aide de méthode analytique d'optimisation (méthode du **GRG**). Donc, les altitudes et excentricités des orbites intermédiaires ainsi que les modules des poussées hors-plan (servant uniquement à corriger l'ascension droite du noeud ascendant) sont optimisés.
- en couche supérieure : les inclinaisons des orbites et les durées des phases balistiques sont déterminées afin de minimiser la consommation du satellite. Les poussées hors-plan sont recalculées afin de corriger également les inclinaisons, de ce fait, les instants d'application des poussées changent.

Ce problème est initialisé avec la solution correspondant au problème de rendez-vous en (a, Ω, α, i) . D'autre part, étant donné les faibles excentricités visées, il est quelque fois intéressant de rechercher une solution utilisant le principe du transfert de Hohmann afin d'initialiser le problème global. Le schéma III.7 résume la structure générale du processus d'optimisation.

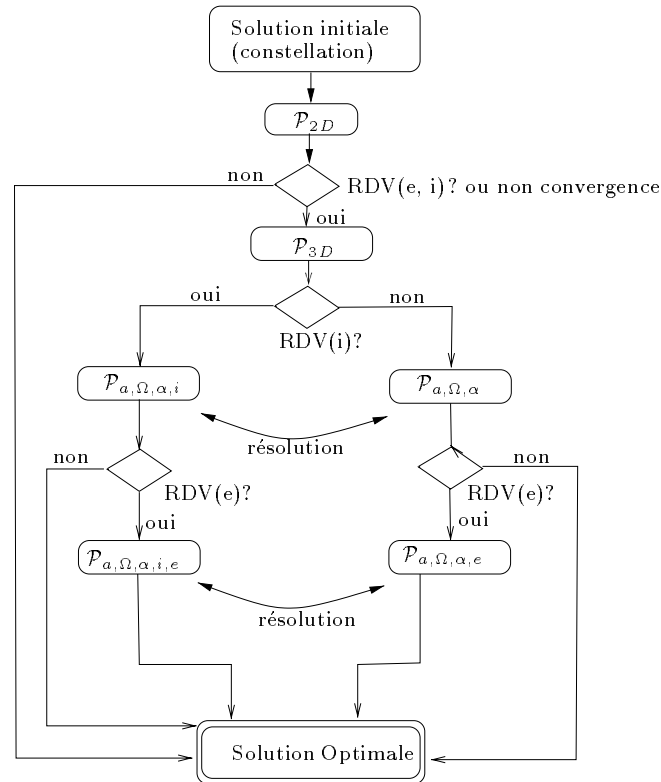


FIG. III.7 – Structure générale de l'algorithme d'optimisation (modèle analytique)

III.9 Affinement de la solution

Dans ce qui précède, le problème de rendez-vous a été résolu en se basant sur des hypothèses simplificatrices. En effet, un modèle analytique d'évolution simplifié a été considéré,

ce qui a permis d'utiliser des méthodes analytiques pour résoudre le problème d'optimisation. Les orbites ont été supposées quasi-circulaires et l'évolution réelle de l'excentricité du fait de l'application de poussées tangentielles a été négligée. D'autre part, les positions sur les orbites relatives à l'application des poussées ont été déterminées sans les répercuter sur les durées des phases balistiques.

Ces approximations permettent de trouver assez rapidement une solution au problème traité, mais elles induisent des erreurs sur la précision d'acquisition de la position cible.

Après le traitement analytique du problème, la solution peut être affinée à l'aide d'un "post-traitement" basé sur une modélisation plus fine. Un modèle analytique plus précis est utilisé, du fait de sa complexité, comme une boîte noire mais aux prix de divers problèmes lors de l'optimisation (notamment pour le calcul des dérivées). Dans ce qui suit, l'application du nouveau modèle est présentée ainsi que la résolution du problème de rendez-vous considéré.

III.9.1 Modélisation du système

La modélisation du système est donc affinée à l'aide de l'utilisation d'un modèle d'évolution plus précis. En particulier, l'excentricité est prise en compte à chaque instant et sa variation, du fait d'une éventuelle erreur lors de l'application des poussées, est modélisée. D'autre part, du fait que les orbites possèdent une excentricité non nulle, l'efficacité des poussées diffèrent selon le rayon à l'endroit de leur application. Le module de chaque poussée doit être ajusté selon l'endroit où elle est appliquée et selon la correction qu'elle doit apporter au système. Les instants d'application des différentes poussées doivent également être déterminés et pris en considération. La formulation dite discontinue des contraintes (présentée au §III.4.1) est utilisée.

Détermination des instants des manoeuvres

Comme dans le cas analytique, les instants d'application des poussées dépendent de la nature des corrections à effectuer et des durées totales des deux phases balistiques. Ainsi, pour les corrections en ascension droite du noeud ascendant uniquement, les poussées doivent être appliquées aux anti-noeuds. Dans le cas général, les poussées doivent être appliquées sur la ligne des noeuds, ce qui correspond à deux valeurs possibles pour la position sur l'orbite (notées $(\alpha_d, \alpha_d + \pi)$). Le choix du noeud d'application des manoeuvres se fait comme suit :

- Puisque l'instant initial de la mise à poste est imposé par le cahier des charges, l'anomalie d'application de la première manoeuvre est celle que rencontre le satellite en premier (cf. la figure III.9.1). Il faut donc un temps d'attente δt qui correspond au plus à une demi-orbite. Il est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta t = \frac{\alpha_d + \pi - \alpha_{sat}}{n + \mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i) * a^{-3.5}} \quad \text{si } \alpha_{sat} \in [\alpha_d, \alpha_d + \pi] \\ \delta t = \frac{\alpha_d - \alpha_{sat}}{n + \mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i) * a^{-3.5}} \quad \text{sinon} \end{array} \right. \quad (\text{III.29})$$

- Par la suite, les poussées sont appliquées au noeud le plus proche. Une rétropolation (extrapolation en temps négatif) est donc autorisée. Donc, la poussée est soit retardée soit avancée d'un laps de temps δt (qui correspond au plus à un quart d'orbite). Il est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta t = \frac{\alpha_d - \alpha_{sat}}{n + \mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i) * a^{-3.5}} \quad \text{si } \alpha_{sat} \in [\alpha_d - \frac{\pi}{2}, \alpha_d + \frac{\pi}{2}] \\ \delta t = \frac{\alpha_d + \pi - \alpha_{sat}}{n + \mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i) * a^{-3.5}} \quad \text{sinon} \end{array} \right. \quad (\text{III.30})$$

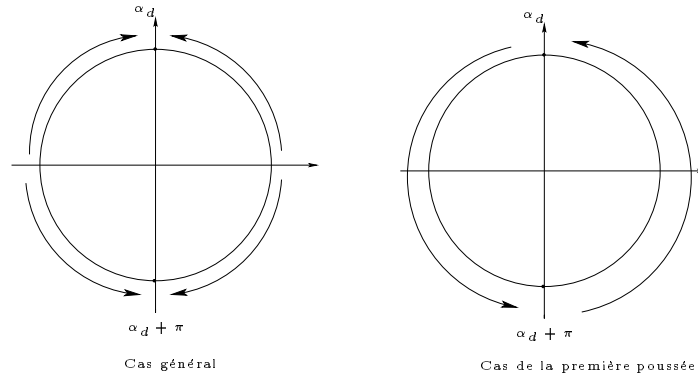


FIG. III.8 – Anomalie d'application des poussées

Comme le montrent les équations (III.29) et (III.30), les instants d'application des poussées dépendent des altitudes des orbites où elles sont appliquées, ce qui rajoute une difficulté lors de l'extrapolation de l'évolution du satellite. En effet, pour des corrections données sur les paramètres, du fait de la prise en compte de l'anomalie de l'application des poussées permettant de réaliser ces corrections, des erreurs sur la position finale sont induites. Il faudra donc tenir compte de ces erreurs lors de la recherche d'une solution admissible au problème. D'autre part, afin de préserver la validité de l'hypothèse de quasi-circularité des orbites, il est nécessaire d'appliquer des séries de transferts bi-impulsionnels (soit des transferts de Hohmann, soit des transferts de type-Hohmann permettant de corriger l'excentricité).

III.9.2 Résolution du problème d'optimisation

A partir de cette nouvelle modélisation, le problème de rendez-vous est résolu. La stratégie en deux étapes utilisée dans le cas analytique est réutilisée. Quelques modifications sur la nature des méthodes d'optimisation utilisées sont donc nécessaires. Par exemple, il

n'est plus possible de calculer des dérivées analytiques et une approximation des dérivées est utilisée (par la méthode des différences finies, le pas de dérivation devant être bien choisi). Ce processus de résolution est initialisé avec la solution du problème amont basé sur la modélisation analytique simplifiée. Dans la section IV.6, il sera constaté que ces deux solutions sont assez proches. En effet, puisque le décalage des instants de poussées ne dépasse pas les demi-orbités, les erreurs induites restent limitées. Le rappel des différents problèmes et leur résolution sont détaillés dans ce qui suit.

Problème de rendez-vous en (a, Ω, α)

L'inclinaison et l'excentricité cible sont libres mais des transferts de Hohmann sont appliquées à chaque phase de manoeuvres. Ce problème s'écrit donc :

$$(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega}) \left\{ \begin{array}{l} \min \mathcal{J}(\Delta t_1, \Delta t_2, a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = \sum_{k=1}^{k=3} \left(\sqrt{Vt_{1k}^2 + Vw_k^2} + |Vt_{2k}| \right) \\ \underline{\varepsilon}_a(\Delta t_1, \Delta t_2, a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \underline{\varepsilon}_\Omega(\Delta t_1, \Delta t_2, a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \underline{\varepsilon}_\alpha(\Delta t_1, \Delta t_2, a_1, a_2, Vw_{1\dots 3}) = 0 \\ \Delta t_1 + \Delta t_2 - \Delta t \leq 0 \\ a_0 < a_1 < a_2 < a_c \end{array} \right. \quad (\text{III.31})$$

Comme pour le cas du problème $(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega})$, la résolution de ce problème se fait sur deux niveaux : à durées $(\Delta t_1, \Delta t_2)$ fixées, puis avec relaxation de ces deux variables. Une méthode de type gradient est utilisée dans la couche de base, et une optimisation géométrique pour la couche supérieure. Cependant, du fait de la grande sensibilité du calcul des contraintes, et du fait de l'utilisation de dérivées numériques, quelques problèmes de convergence se posent. Pour y remédier, il s'avère nécessaire de rechercher une initialisation qui respecte les contraintes. Pour ce faire, une solution admissible est approchée à partir de la solution optimale analytique. Ainsi, pour des poussées hors-plan fixées, les deux demi-grand axes de dérives sont déterminés afin de respecter les contraintes (en utilisant une méthode de Newton). La figure III.9 résume le principe de la résolution du problème $(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega})$.

Problème de rendez-vous en (a, Ω, α, e)

Dans le paragraphe précédent, des transferts de Hohmann sont utilisés pour ne pas affecter l'excentricité. Il est par ailleurs possible d'imposer une valeur finale sur ce paramètre. Comme pour le cas analytique, un transfert bi-impulsionnel est utilisé. Les excentricités des deux orbites de dérives sont optimisées pour déterminer l'optimum. Il est à rappeler qu'au §III.6, les équations de Gauss ont été utilisées pour le calcul des modules des poussées tangentiels et de leur espacement. Ceci induit des erreurs et il aurait fallu utiliser des équations de Gauss générales, ce qui complexifie les calculs et nous n'avons pas pu trouver de solution analytique dans ce cas. Pour remédier à cette erreur, un calcul itératif est utilisé pour déterminer plus rigoureusement les modules des poussées et leur

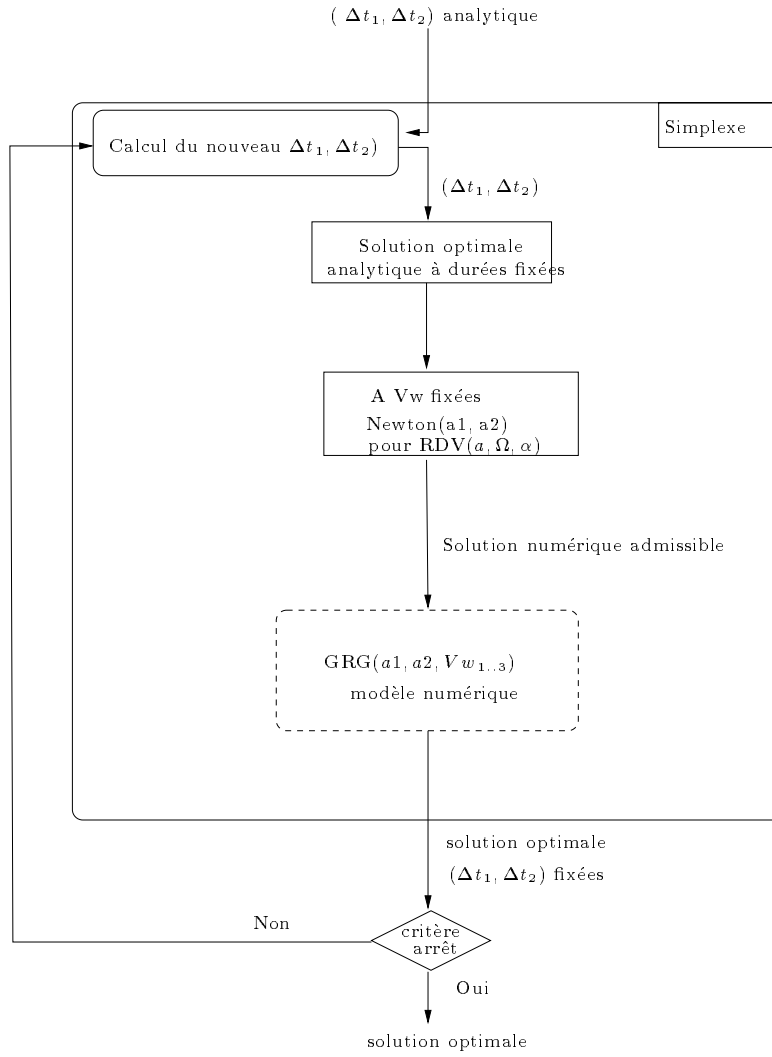


FIG. III.9 – Résolution du problème avec rendez-vous en (a, Ω, α) (modèle numérique)

espacement. Il consiste à injecter, à chaque étape, les erreurs commises du fait du passage de l'analytique au numérique, jusqu'à ce que la précision finale souhaitée soit atteinte.

Donc, à chaque phase de manoeuvre, le transfert de type-Hohmann présenté au §III.6 est remplacé par le calcul itératif illustré par la figure III.10. Le nouveau problème à résoudre s'écrit selon la forme donnée par l'équation III.32.

$$(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega,e}) \left\{ \begin{array}{l} \min \mathcal{J}(\Delta t_1, \Delta t_2, e_1, e_2, a_1, a_2, Vw_{1..3}) = \sum_{k=1}^{k=3} \left(\sqrt{Vt_{1k}^2 + Vw_k^2} + |Vt_{2k}| \right) \\ \underline{\varepsilon}_a(\Delta t_1, \Delta t_2, e_1, e_2, a_1, a_2, Vw_{1..3}) = 0 \\ \underline{\varepsilon}_\Omega(\Delta t_1, \Delta t_2, e_1, e_2, a_1, a_2, Vw_{1..3}) = 0 \\ \underline{\varepsilon}_\alpha(\Delta t_1, \Delta t_2, e_1, e_2, a_1, a_2, Vw_{1..3}) = 0 \\ \underline{\varepsilon}_e(\Delta t_1, \Delta t_2, e_1, e_2, a_1, a_2, Vw_{1..3}) = 0 \\ \Delta t_1 + \Delta t_2 - \Delta t \leq 0 \\ a_0 < a_1 < a_2 < a_c \end{array} \right. \quad (\text{III.32})$$

Afin de résoudre ce problème, nous le partitionnons, comme pour le cas sans rendez-vous en excentricité, en deux niveaux d'optimisation. En couche de base, la recherche de l'optimum se fait pour des durées de phases balistiques fixées. Puis, en couche supérieure vient une optimisation directe géométrique sur ces deux variables. Les modules des poussées et leur instants d'application sont déterminés par le calcul itératif présenté ci-dessus. Ce processus est initialisé par la solution du problème $(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega})$ (ces deux problèmes sont assez proches puisque l'étude se limite au cas de petites excentricités).

Problème de rendez-vous en (a, Ω, α, i)

Une contrainte sur la valeur finale de l'inclinaison est rajoutée. Ce problème est équivalent au problème $(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega})$, auquel des transferts de Hohmann sont appliqués à chaque phase de manoeuvre. Il est défini par l'équation III.33.

Les poussées hors-plan permettent de corriger simultanément l'inclinaison et l'ascension droite du noeud ascendant. Cependant, du fait de la variation de l'inclinaison d'une phase de dérive à une autre, la dérive différentielle due au J_2 varie, et de ce fait, l'erreur finale sur l'ascension droite du noeud ascendant change. Du fait de la complexité du modèle choisi, il est assez difficile de prédire la correction à effectuer à l'aide de poussées sur ce paramètre. Il est nécessaire, devant l'échec de la stratégie adoptée en III.7, de mettre au point une nouvelle stratégie de résolution du problème proposé. En effet, du fait du fort couplage des différentes dynamiques du système ainsi que de sa grande sensibilité, le problème peut s'avérer mal conditionné. Pour y remédier, la solution optimale est recherchée en utilisant une méthode d'optimisation géométrique.

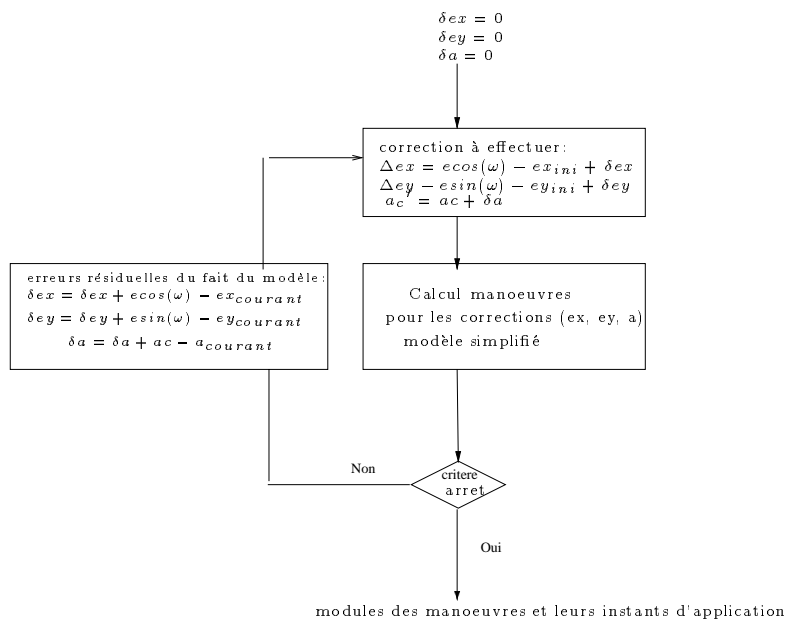


FIG. III.10 – Correction de l'excentricité dans le cas numérique

$$(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega,i}) \left\{ \begin{array}{l} \min \mathcal{J}(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2) = \sum_{k=1}^{k=3} \left(\sqrt{Vt_{1k}^2 + Vw_k^2} + |Vt_{2k}| \right) \\ \underline{\varepsilon}_a(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2) = 0 \\ \underline{\varepsilon}_\Omega(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2) = 0 \\ \underline{\varepsilon}_\alpha(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2) = 0 \\ \underline{\varepsilon}_i(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2) = 0 \\ \text{si } i_0 < i_c \text{ alors } i_0 < i_1 < i_2 < i_c \\ \text{si } i_0 > i_c \text{ alors } i_c < i_2 < i_1 < i_0 \\ \Delta t_1 + \Delta t_2 - \Delta t \leq 0 \\ (a_2 - a_1) \cdot (a_c - a_2) > 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.33})$$

Les durées des phases balistiques et les inclinaisons et altitudes des deux orbites intermédiaires sont choisies comme étant les variables principales d'optimisation. Les poussées hors-plan sont calculées intrinsèquement de façon à réaliser le rendez-vous sur l'inclinaison et sur l'ascension droite du noeud ascendant. La détermination des poussées hors-plan se fait itérativement, en injectant l'erreur commise en (i, Ω) dans le processus d'extrapolation. Il est à noter que l'anomalie reste libre pendant ce processus d'extrapolation. L'erreur commise sur ce paramètre doit être corrigée à l'aide des variables principales d'optimisation. La figure III.9.2 permet de visualiser le processus de recherche de la solution optimale du problème traité.

Une méthode géométrique du type Hooke & Jeeves est utilisée (elle donne de meilleurs résultats de convergence qu'une méthode de Nelder & Mead). La fonction objectif est de la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2) &= \sum_{k=1}^{k=3} \left(\sqrt{Vt_{1k}^2 + Vw_k^2} + |Vt_{2k}| \right) * \exp(\max[|\varepsilon_\alpha|, |\varepsilon_\Omega|, |\varepsilon_i|]) \\ &+ \mathbb{P}(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2) \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

Il est à noter que les contraintes sur les variables d'optimisation (leur appartenance à un intervalle prédéfini) sont exprimées par l'ajout de fonctions de pénalité à la fonction objectif à minimiser (noté $\mathbb{P}()$ dans l'équation III.34). Cette écriture du critère à minimiser s'avère plus performante qu'une écriture où les précisions sont rajoutées comme des fonctions de pénalités. En effet, il est assez difficile d'estimer les coefficients de pondération puisque la consommation et les précisions d'acquisition sont de natures différentes. Ce critère d'optimisation permet non seulement de minimiser l'erreur finale mais aussi de prendre en compte la consommation. En effet, pour de grandes erreurs, la consommation est surévaluée par sa multiplication par la fonction exponentielle qui devient prépondérante. Par contre, lorsque les erreurs sont très faibles, la consommation devient le terme d'optimisation prépondérant. Ceci nous permet de converger vers des solutions ne consommant pas énormément de carburant avec des précisions raisonnables sur l'acquisition de l'anomalie et de la longitude du noeud ascendant. Bien sûr, le nombre assez élevé de variables d'optimisation peut entraîner un grand temps de calcul.

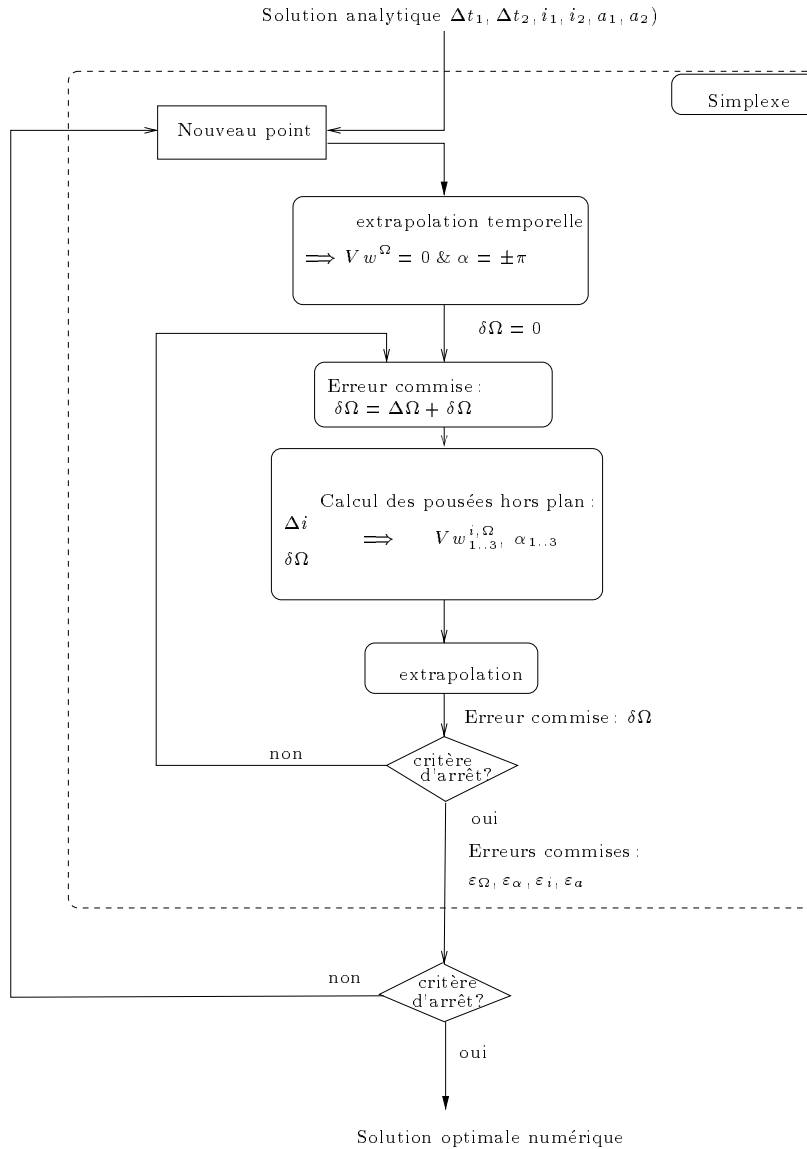


FIG. III.11 – Résolution du problème avec rendez-vous en (a, Ω, α, i) (modèle numérique)

Problème de rendez-vous en $(a, \Omega, \alpha, i, e)$

Enfin, le rendez-vous général est résolu, en reprenant les stratégies présentées pour les problèmes de rendez-vous partiels. En effet, des transferts bi-impulsionnels doivent être appliqués et un calcul itératif permet d'affiner leur calcul (comme présenté pour le rendez-vous en (a, α, Ω, e)). Ce nouveau problème, noté $(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega,i,e})$, est résolu de la même manière que le problème $(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega,i})$, la différence apparaît lors du calcul des poussées tangentielles et de leurs instants d'application. D'autre part, il faut également optimiser les excentricités des deux orbites intermédiaires de dérives. Ce problème est initialisé soit par la solution du problème $(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega,i})$ (dont la solution est assez proche de celle du nouveau problème puisque seules les orbites quasi-circulaires font l'objet de cette étude), soit par la solution du problème analytique $(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega,i,e})$.

III.9.3 Schéma logiciel

Le problème de rendez-vous tridimensionnel est donc résolu suivant plusieurs étapes, selon un processus de multi-niveaux. Un logiciel a été mis au point afin de valider cette stratégie de résolution et de répondre à divers cahiers des charges de problèmes de mise à poste. La structure générale se compose de deux niveaux différents qui correspondent à ceux présentés dans ce chapitre. En effet, deux options fondamentales sont prises en compte :

- Exploitation maximale du modèle simplifié de l'évolution du satellite par approche multi-niveaux et à complexité croissante. Comme détaillé dans ce qui précède, on a résolu successivement les problèmes :

$$2D \rightarrow (a, \Omega, \alpha) \rightarrow (a, \Omega, \alpha, e) \rightarrow (a, \Omega, \alpha, i) \rightarrow (a, \Omega, \alpha, e, i) \quad (\text{III.35})$$

La solution de chaque problème permet d'initialiser le problème aval.

- Utilisation d'un modèle d'évolution numérique plus précis, initialisé par certaines solutions de l'approche analytique et conservant l'approche multi-niveau.

La figure III.12 permet de visualiser la structure globale de l'optimisation et notamment le lien entre les différents modules développés (il est à noter que sur la structure de la partie analytique vient se greffer les modules utilisant une modélisation numérique).

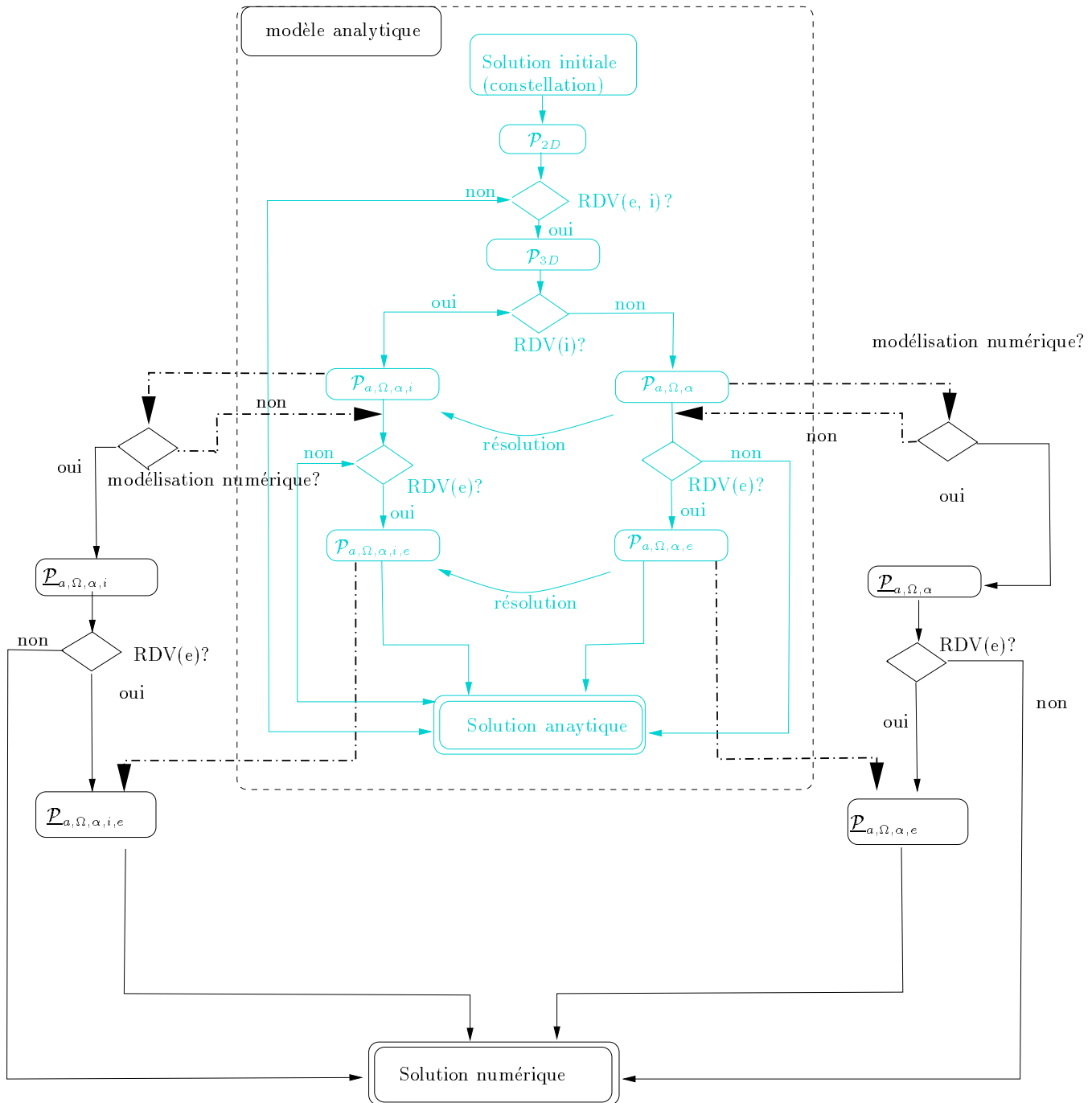


FIG. III.12 – Structure générale de l'optimisation (avec modèle numérique)

III.10 Résolution d'un cas d'étude

III.10.1 Introduction

Dans ce qui précède, la méthodologie de résolution du problème de mise à poste avec hypothèses de poussées impulsionnelles est présentée. Afin d'illustrer cette stratégie multi-niveaux, elle est appliquée à un cas d'étude. Il est à rappeler que ce travail s'intéresse à la mise à poste de constellation de satellites, en traitant le transfert de chaque satellite séparément.

Dans cette section, les résultats numériques relatifs à la mise à poste d'un seul satellite sont présentés. Ce satellite fait partie d'une constellation dont la géométrie a été déterminée afin de garantir un service donné. L'affectation des différents satellites est optimisée par le module amont [Lasserre 98].

Dans ce qui suit, les résultats relatifs à chaque problème sont donc résolus et analysés.

Les constellations de satellites à basses altitudes font l'objet de divers études et projets, notamment afin de faire face aux besoins grandissants des secteurs du multimédia et de la téléphonie. L'intérêt majeur de ce type de constellations par rapport aux constellations de type géostationnaire est le gain considérable en terme de coût financier. En effet, les coûts relatifs au lancement et à la mise à poste de ce type de constellations se trouvent réduits du fait de la taille des satellites (on s'oriente vers l'utilisation de micro-satellites) et de l'altitude des orbites (de type LEO). On peut citer plusieurs exemples de constellations de satellites à basses altitudes. Par exemple :

- Skybridge : c'est une constellation composée de 80 satellites à 1469 km d'altitude. Elle possède une géométrie bi-walker et doit assurer une couverture terrestre de 4 satellites. Elle doit fournir des services dans le domaine des télécommunications.
- Globalstar : c'est une constellation composée de 48 satellites à 1414 km d'altitude, qui offre un service de téléphonie mondiale.
- Teledesic : c'est une constellation de 288 satellites à 1375 km d'altitude. Elle offre des services de communication de multimédia.

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'optimisation de la trajectoire de chaque satellite pris séparément au sein de la constellation. Plus particulièrement, nous nous intéressons à la résolution du problème de rendez-vous pour un satellite exemple.

III.10.2 Présentation du cas d'étude

Un exemple de transfert orbital LEO-LEO est résolu en utilisant les méthodes de résolution présentées dans ce chapitre. Les conditions initiale et finale (i.e. la position

initiale du satellite et sa position cible) sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 7300 \text{ km} \\ \Omega_0 = 140.0 \text{ degrés} \\ \alpha_0 = 0.016 \text{ degrés} \\ i_0 = 53.0 \text{ degrés} \\ e_0 = 5.3810^{-3} \end{array} \right. \quad (\text{III.36})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_c = 7834.55 \text{ km} \\ \Omega_c = 204.6 \text{ degrés} \\ \alpha_c = 28.07 \text{ degrés} \\ i_c = 54.0 \text{ degrés} \\ e_c = 10^{-6} \end{array} \right. \quad (\text{III.37})$$

La durée totale de la mise à poste est fixée à :

$$\Delta t = 300 \text{ jours} \quad (\text{III.38})$$

Cette durée est assez longue et de ce fait, la stratégie utilisant les dérives du J_2 peut être bénéfique.

III.10.3 Solution initiale

Dans un premier temps, une solution initiale au problème est calculée (sans couplage dynamique comme expliqué dans la section III.2). Dans ce cas, la correction de l'excentricité et celle de l'inclinaison sont négligées. Le tableau III.1 donne les modules des poussées ainsi que leurs instants d'application. Les valeurs intermédiaires des différents paramètres képlériens sont également donnés afin de visualiser leur évolution.

	instants (jours)	a (km)	Ω (deg.)	α (deg.)	i (deg.)	e	ΔV_t (m/s)	ΔV_w (m/s)	ΔV (m/s)
poussée #1	0.0	7300	140.00	0.016	53.0	-	104.31	9.16	104.71
poussée #2	296.25	7506.10	215.39	10.86	53.0	-	154.34	18.07	155.40
poussée #3	300.0	7824.07	204.61	28.08	53.0	-	4.78	2.95	5.61
total							263.43	30.18	265.72

TAB. III.1 – *Solution initiale découplant les dynamiques*

Ainsi, le module total de la poussée est de 265.72 m/s. Cette consommation est très proche de la solution avec uniquement un rendez-vous en altitude (qui est de 256.46 m/s avec application d'un transfert de Hohmann). En effet, grâce à la stratégie de mise à poste en trois phases de poussée, la poussée hors-plan ne représente que 11% de la poussée totale. Il est à noter que la première phase de dérive est de durée beaucoup plus longue que celle de la deuxième, ce qui était prévisible étant données les hypothèses de travail. En effet, à la fin de la première phase de dérive, la majeure partie de la correction en ascension droite du noeud ascendant a été effectuée. La deuxième phase permet essentiellement

d'effectuer le phasage du satellite. La précision d'acquisition des deux paramètres (α, Ω) est de 10^{-2} degrés. Il est assez difficile, par l'application de l'hypothèse de découplage des dynamiques, d'obtenir une grande précision sur la position finale du fait de leur fort couplage.

III.10.4 Solution optimale du rendez-vous (a, Ω, α)

Solution de $\mathcal{P}_{(a, \Omega, \alpha)}$ (modèle analytique)

Avant de calculer la solution optimale où des poussées hors-plan sont utilisées, la solution sans poussées hors-plan (présentée au §III.3) est recherchée en vain. Le processus de résolution du problème (\mathcal{P}_{2D}) échoue. En effet, le processus converge vers une solution qui permet d'effectuer le rendez-vous en (a, α) mais avec une erreur sur l'acquisition de la longitude du noeud ascendant assez élevée (de l'ordre de 0.1 degrés). Comme la durée globale de mise à poste est assez longue, on aurait pu croire que la dérive suffirait pour apporter les corrections nécessaires sur le plan orbital. En fait le fort couplage des dynamiques (Ω, α) , a nécessité le rajout des poussées hors-plan pour affiner l'acquisition de la position cible. Selon le processus de résolution proposé (cf. la figure III.7), le problème ($\mathcal{P}_{a, \alpha, \Omega}$) est ensuite résolu (présenté au §III.4). Les résultats sont donnés par le tableau III.2.

	instants (jours)	a (km)	Ω (deg)	α (deg)	i (deg)	e	ΔV_t (m/s)	ΔV_w (m/s)	ΔV (m/s)
poussée #1	0.0	7300	140.00	0.016	53.0	-	104.32	-8.08	104.63
poussée #2	294.97	7506.12	219.56	10.86	53.0	-	89.35	-10.62	89.98
poussée #3	295.43	7690.18	210.01	28.08	53.0	-	67.57	-7.87	69.03
	300.0	7834.55	204.6	28.07	53.0	-	-	-	-
total							261.24	-26.57	263.64

TAB. III.2 – Solution du problème avec rendez-vous en (a, Ω, α) (modèle analytique)

La consommation est maintenant réduite et sa valeur est de l'ordre de 263.64 m/s. Les durées des deux phases balistiques sont optimisées (notamment par la relaxation de l'instant d'application de la dernière manoeuvre). Ceci a permis de diminuer la consommation totale du satellite de l'ordre de 3 m/s. D'autre part la précision d'acquisition de la position cible est améliorée (elle est de l'ordre de 10^{-5} degrés). Au regard des résultats donnés par les tableaux III.1 et III.2, il est à noter que la valeur du premier demi-grand axe varie peu. C'est essentiellement la modification du deuxième (qui s'éloigne du demi-grand axe cible) qui permet d'affiner le rendez-vous tout en diminuant les modules des poussées hors-plan. Cette nouvelle solution reste néanmoins assez proche de la solution initiale ce qui s'explique par le fait que les nombres de tours différentiels entre le satellite et la cible ont été fixés et que des méthodes locales d'optimisation ont été utilisées.

Solution avec transfert de Hohmann (analytique)

Dans ce qui précède, l'excentricité est négligée. Des transferts de Hohmann sont alors pris en compte. La nouvelle solution est calculée et est résumée par le tableau III.3 (avec P. désigne la poussée et O.T. l'orbite de transfert). Dans ce tableau, les modules et instants d'application des six poussées sont donnés ainsi que les caractéristiques des trois orbites de transfert de Hohmann (demi-grand axe et excentricité).

La consommation totale du satellite diminue (de l'ordre de 4 m/s par rapport à la solution optimale à trois phases de poussées). En effet, puisque l'efficacité de la poussée tangentielle augmente avec l'altitude, le fait de diviser chaque poussée en deux poussées de Hohmann permet de diminuer la somme totale de poussées tangentielles à appliquer. Il est à noter que la première orbite de dérive reste assez proche de celle de la solution à trois poussées. Les modifications les plus importantes sont au niveau des modules des poussées et de la deuxième orbite. Ainsi, il a été possible de calculer assez rapidement une solution pour le rendez-vous imposé.

	instants (jours)	a (km)	Ω deg.	α deg.	i deg.	e	ΔV_t (m/s)	ΔV_w (m/s)	ΔV (m/s)
P. #1	0.0	7300	140.0	0.016	53.0	-	51.24	-10.56	52.31
O.T. #1	-	7403.04			53.0	0.013	-	-	-
P. #2	0.036	7506.12	139.75	180.016	53.0	-	50.89	0.0	50.89
P. #3	294.91	7506.12	219.52	346.37	53.0	-	49.24	-9.48	50.22
O.T. #2	-	7609.27			53.0	0.013	-	-	-
P. #4	294.95	7712.45	219.29	166.37	53.0	-	48.90	0.0	48.90
P. #5	295.35	7712.45	218.00	147.93	53.0	-	28.17	-6.47	28.90
O.T. #3	-	7773.50			53.0	0.007	-	-	-
P. #6	295.39	7834.55	217.8	327.93	53.0	-	28.06	0.0	28.06
total							256.51	-26.41	259.28

TAB. III.3 – Solution du problème avec utilisation de transfert de Hohmann (modèle analytique)

Solution avec transfert de Hohmann (numérique)

L'utilisation d'un modèle numérique (comme présenté au §III.9.2) permet de tenir compte de l'influence de la valeur réelle de l'excentricité et d'affiner la détermination de la solution. Le tableau III.4 résume les caractéristiques de la solution. Grâce à l'application de transfert de Hohmann, on peut vérifier que l'excentricité finale du satellite n'est pas affectée (la variation de l'excentricité est de 0.08 %). D'autre part, il est à remarquer que la solution du problème avec utilisation d'un modèle numérique est de nature différente par rapport à celle se basant sur un modèle analytique simplifié. Ceci s'explique par le fait que dans cette formulation, le nombre de tours n'a pas à être imposé. Ainsi, le processus converge vers une solution locale qui peut être éloignée de l'initialisation.

	instants (jours)	a (km)	Ω deg.	α deg.	i deg.	e	ΔV_t (m/s)	ΔV_w (m/s)	ΔV (m/s)
P #1	0.018	7300	139.93	90.0	53.0	$5.30 \cdot 10^{-3}$	51.22	- 8.09	51.85
O.T. #1	-	7403.51			53.0	0.019	-	-	-
P #2	0.054	7506.37	139.72	270.04	53.0003	$5.25 \cdot 10^{-3}$	51.05	0.0	51.05
P #3	294.97	7506.37	219.62	270.0	53.0003	$5.25 \cdot 10^{-3}$	9.47	-1.69	9.61
O.T. #2	-	7525.92			53.0001	$4.8 \cdot 10^{-3}$	-	-	-
P #4	295.01	7547.48	219.48	90.01	53.0001	$5.2 \cdot 10^{-3}$	9.43	0.0	9.43
P #5	295.42	7547.48	218.1	270	52.999	$5.2 \cdot 10^{-3}$	67.79	-12.13	67.98
O.T. #3	-	7689.31			52.999	0.016	-	-	-
P #6	295.46	7834.55	217.86	90.07	52.999	$5.1 \cdot 10^{-3}$	67.53	0.0	67.53
total							256.49	-21.91	257.41

TAB. III.4 – *Solution du problème avec utilisation du transfert de Hohmann (modèle numérique)*

III.10.5 Raffinement de la solution

Dans ce qui précède, la solution du problème de base a été présentée et ceci pour divers modèles dynamiques. A présent, un affinement de la solution est proposé et ceci en imposant les rendez-vous en excentricité et/ou en inclinaison. Dans cette section, seuls les résultats relatifs au modèle numérique sont présentés. L'évolution de l'ascension droite du noeud ascendant n'est pas décrite. Elle est similaire à celle du cas précédent, à savoir que les majeures parties des corrections sur ce paramètre sont effectuées durant la première phase de dérive. Comme précédemment, les solutions sont résumées dans des tableaux qui donnent les modules des poussées, leurs dates d'application et les caractéristiques des orbites intermédiaires.

Solution du problème avec rendez-vous en excentricité

La solution du problème avec transfert de Hohmann et utilisation de modèle numérique sert d'initialisation au problème aval ($\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega,e}$). Ce problème prend en compte le rendez-vous sur l'excentricité. Sa solution est résumée dans le tableau III.5. Il est à remarquer que la correction de l'excentricité a été effectuée lors de la première phase de manoeuvre. Les deux autres phases de poussées préservent cette valeur de l'excentricité (ce sont des transferts de type Hohmann). La somme totale des poussées tangentielles est sensiblement la même que dans le cas d'application des poussées de Hohmann (représenté par le tableau III.4). En effet, la correction en excentricité est assez faible, et de ce fait, les poussées tangentielles corrigent essentiellement l'altitude du satellite.

	instants (jours)	a (km)	Ω deg.	α deg.	i deg.	e	ΔV_t (m/s)	ΔV_w (m/s)	ΔV (m/s)
P #1	0.018	7300	139.93	90.0	53.0	$5.30 \cdot 10^{-3}$	41.66	- 6.85	42.22
O.T. #1	-	7383.92			53.002	0.016	-	-	-
P #2	0.054	7505.21	139.74	263.22	53.002	$2.99 \cdot 10^{-6}$	60.11	0.0	60.11
P #3	294.26	7505.21	221.54	90.0	53.002	$2.99 \cdot 10^{-6}$	77.75	-18.55	79.93
O.T. #2	-	7669.78			53.003	0.021	-	-	-
P #4	294.30	7834.36	221.24	270.19	53.003	$2.99 \cdot 10^{-6}$	76.94	0.0	76.94
P #5	296.10	7834.36	215.99	90.0	53.003	$2.99 \cdot 10^{-6}$	0.043	0.003	0.043
O.T. # 3	-	7834.46			53.003	$1.32 \cdot 10^{-5}$	-	-	-
P #6	296.14	7834.55	215.87	270.08	53.003	$2.99 \cdot 10^{-6}$	0.043	0.0	0.043
total							256.50	-25.40	259.28

TAB. III.5 – Solution du problème avec rendez-vous en (a, Ω, α, e) (modèle numérique)

Solution du problème avec rendez-vous en inclinaison

Dans un deuxième temps, le rendez-vous en inclinaison est considéré. Comme expliqué précédemment, les poussées hors-plan corrigent les deux paramètres (i, Ω) . Le tableau III.6 donne la solution relative à ce type de problème, avec utilisation d'un modèle numérique. Il est à remarquer que les poussées hors-plan servent essentiellement à corriger l'inclinaison (les anomalies d'application sont proches des noeuds). Donc, l'ascension droite du noeud ascendant est corrigée de façon passive (i.e. avec l'effet du J_2). Comme le montre la figure (II.1), l'effet du J_2 dépend de l'inclinaison de l'orbite de dérive. Le fait de modifier ce paramètre d'une orbite à une autre permet d'avoir une variable de commande supplémentaire. En addition à l'effet de la modification des altitudes, la modification des inclinaisons et des durées des phases de dérive permet de mieux contrôler les dérives différentielles entre la cible et le satellite, et de ce fait, de diminuer les modules des poussées hors-plan à appliquer.

Solution du problème avec rendez-vous en (i, e)

Le problème avec le rendez-vous global est résolu, et ceci en se basant sur les solutions précédentes pour l'initialiser. Ainsi, les deux contraintes de rendez-vous finaux sur l'inclinaison et l'excentricité. La solution de ce problème est résumée par le tableau III.7. Cette solution combine les caractéristiques des deux solutions précédentes, à savoir :

- la correction en excentricité est effectuée durant la première phase de poussée et les deux autres manoeuvres permettent de ne pas détériorer sa valeur,
- les poussées hors-plan permettent essentiellement de corriger l'inclinaison, ce qui se traduit pas une anomalie d'application de poussée proches des noeuds,
- les corrections à apporter sur l'ascension droite du noeud ascendant sont essentiellement effectuées via la stratégie passive, dont l'efficacité est meilleure du fait de la

	instants (jours)	a (km)	α (deg)	i (deg)	e	ΔV_t (m/s)	ΔV_w (m/s)	ΔV (m/s)
P #1	0.07	7300.00	-1.02	53.00	$5.3 \cdot 10^{-3}$	44.36	76.69	88.59
O.T #1		7389.17		53.58	0.0149			
P #2	0.106	7478.34	178.98	53.58	$5.35 \cdot 10^{-3}$	43.87	0.0	43.87
P #3	295.88	7478.34	-4.89	53.58	$5.35 \cdot 10^{-3}$	23.19	29.42	37.47
O.T #2		7526.11		53.81	0.0117			
P #4	295.91	7573.88	175.11	53.81	$5.4 \cdot 10^{-3}$	22.93	0.0	22.93
P #5	298.30	7573.88	-15.20	53.81	$5.4 \cdot 10^{-3}$	61.40	23.88	65.89
O.T #3		7704.21		53.997	0.022			
P #6	298.34	7834.55	164.8	53.997	$5.5 \cdot 10^{-3}$	60.24	0.0	60.24
	300.0	7834.55	27.12	53.99	$5.5 \cdot 10^{-3}$	-	-	-
total						255.99	127.04	319.01

TAB. III.6 – *Solution du problème avec rendez-vous en (a, Ω, α, i) , avec transfert de Hohmann (modèle numérique)*

modification de l'inclinaison des orbites de dérive.

Il est à noter par ailleurs que les erreurs d'acquisition de la position finale sont plus importantes que précédemment (près de 0.9 degrés sur l'anomalie). Ceci s'explique par la nature de la fonction objectif considérée pour ce problème (donnée par l'équation III.34 et qui tient compte simultanément des erreurs et du coût).

	instants (jours)	a (km)	α (deg)	i (deg)	e	ΔV_t (m/s)	ΔV_w (m/s)	ΔV (m/s)
P #1	0.001	7300.00	6.02	53.00	$5.3 \cdot 10^{-3}$	40.70	45.91	61.37
O.T #1		7382.04		53.35	0.014			
P #2	0.041	7488.28		53.35	$2.99 \cdot 10^{-6}$	52.68	0.0	52.68
P #3	294.83	7488.28	25.07	53.35	$2.99 \cdot 10^{-6}$	53.06	31.2	61.55
O.T #2		7599.35		53.57	0.014			
P #4	294.87	7710.43	205.07	53.57	$2.99 \cdot 10^{-6}$	52.74	0.0	52.74
P #5	299.03	7710.43	3.00	53.57	$2.99 \cdot 10^{-6}$	28.45	53.77	60.84
O.T #3		7772.51		53.998	0.0079			
P #6	299.07	7834.55	183.03	53.998	$2.99 \cdot 10^{-6}$	28.52	0.0	28.52
	300.0	7834.55	28.64	53.998	$2.99 \cdot 10^{-6}$	-	-	-
total						256.15	130.88	317.71

TAB. III.7 – *Solution du problème avec rendez-vous en $(a, \Omega, \alpha, i, e)$ (modèle numérique)*

Remarque III.1 *La comparaison des solutions relatives aux deux cas de figures avec modèle numérique et modèle analytique montre que les deux solutions sont assez proches. Ainsi, la solution basée sur le modèle analytique s'avère être une bonne initialisation au problème basé sur le modèle numérique.*

III.11 Conclusion

Ce chapitre résout le premier problème de mise à poste optimale d'un satellite à basse altitude avec hypothèse de poussées impulsionnelles. La recherche de la solution optimale est procédée selon un processus de résolution multi-niveaux et à complexité croissante. Plusieurs problèmes ont été successivement résolus, en utilisant la solution du problème amont pour initialiser le problème aval. Outre l'amélioration de la convergence du processus, cette stratégie de résolution présente l'avantage de répondre à divers cahiers des charges avec différentes contraintes. Après la mise en équations de la stratégie de mise à poste à trois phases de poussées, plusieurs contraintes finales et divers modèles d'évolution sont considérés. Le problème se complexifie au fur et à mesure. Dans un premier temps, un modèle analytique simplifié permet de rechercher la solution du problème de rendez-vous étudié. Ensuite, une modélisation plus précise du système est considérée. Ceci permet d'affiner la recherche de l'optimum du problème étudié. La résolution de ce problème se fait, globalement, selon la même stratégie que celle utilisée dans le cas analytique. En effet, le problème global est fractionné en plusieurs sous-problèmes, ce qui permet d'améliorer la convergence du processus. Pour chaque type de problème, une solution a été calculée, et à partir d'une initialisation approchée, une solution optimale locale a été calculée en résolvant plusieurs sous-problèmes de complexité croissante. Globalement, les solutions des différents problèmes restent assez proches.

La solution quasi-optimale du problème de mise à poste impulsionnelle peut servir d'initialisation au problème de mise à poste avec des poussées électriques. Le passage de la propulsion impulsionnelle à la propulsion continue, ainsi que la stratégie de résolution du problème de mise à poste électrique fera l'objet des chapitres suivants.

Chapitre IV

Résolution du problème électrique

Dans le chapitre précédent, l'hypothèse de poussées impulsionnelles instantanées a été émise et la solution optimale du problème considéré a été calculée à l'aide d'une stratégie de calcul multi-niveaux avec approximations successives. Dans ce chapitre, nous allons faire l'hypothèse de poussées faibles, pouvant correspondre à un nouveau type de propulsion, la propulsion électrique. Cette propulsion présente l'avantage de consommer très peu, ce qui se traduit par un gain de masse non négligeable par rapport à la propulsion chimique classique. L'utilisation de ce type de propulsion se traduit par des durées d'application de poussées élevées (comme explicité au chapitre I). Le traitement numérique et, en particulier, l'intégration numérique nécessaire pour décrire l'évolution continue des variables d'état s'avère très complexe du fait de l'existence d'échelles de temps très différentes : plus rapide pour la variation de l'anomalie que pour les autres paramètres.

On propose dans ce chapitre, la recherche d'une solution quasi-circulaire, à poussées continues, suivant une approche multi-étapes. A partir de la solution impulsionnelle du chapitre précédent, des solutions à grand nombre d'impulsions sont déterminées par fractionnement successif des impulsions. L'idée consiste à obtenir des manoeuvres de type train d'impulsions pouvant fournir, après étalement des impulsions d'amplitude relativement faible, une solution continue admissible et satisfaisante du point de vue du critère de consommation et des contraintes de rendez-vous. La figure IV.1 résume la structure générale de la méthodologie de résolution développée qui se résume comme suit :

- à partir de la solution impulsionnelle calculée précédemment, les poussées sont fractionnées en plusieurs poussées élémentaires (en section IV.1).
- ensuite, chaque poussée impulsionnelle est étalée selon une stratégie qui sera présentée ultérieurement (au paragraphe IV.2). Durant ces deux étapes, un modèle analytique simplifié est utilisé étant donné qu'elle ne sont que des étapes intermédiaires permettant d'initialiser le problème à poussées continues.

- enfin, le problème à trois poussées continues est résolu en utilisant deux stratégies pour représenter la loi de commande (qui feront l’objet des section IV.3 et IV.4).

Comme précédemment, les cas avec et sans correction de l’inclinaison sont traités séparément. Cependant, dans le cas où ces corrections sont assez faibles (de l’ordre de 0.1 degrés), la solution sans correction de l’inclinaison peu servir d’initialisation au problème avec correction de l’inclinaison.

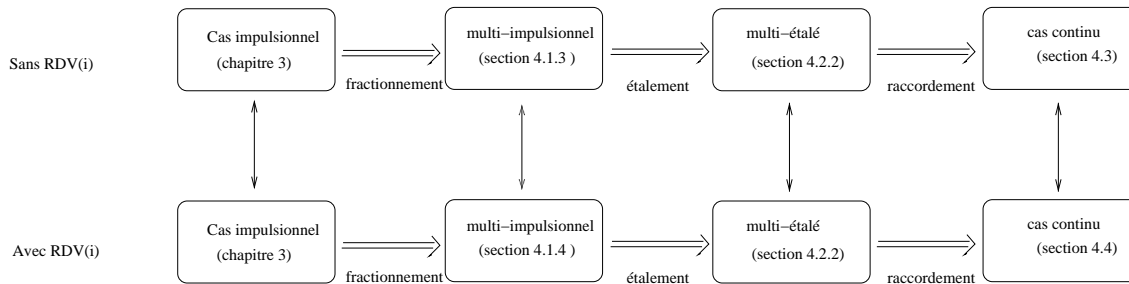


FIG. IV.1 – Structure de l’algorithme de résolution

IV.1 Problème multi-impulsionnel

L’idée du fractionnement de poussées a déjà fait l’objet d’études, notamment dans le cas de transferts vers des orbites géostationnaires. La manoeuvre est fractionnée en une multitude de poussées appliquées aux apogées des orbites [Enjalbert 89, Desroches 88]. Dans [Marec 83], le fractionnement aux apogées est étudié et sa limitation par rapport à la contrainte temporelle a été mise en évidence.

Dans cette étude qui traite d’orbites quasi-circulaires, le fractionnement sera effectué en plusieurs points de l’orbite (deux en fait), afin de limiter la variation de l’excentricité. La stratégie globale en trois phases de poussées et utilisant les effets bénéfiques du J_2 est encore retenue. Les trois (ou six) poussées impulsives sont fractionnées en plusieurs poussées élémentaires (comme le montre la figure IV.2). Une contrainte supplémentaire sur le module maximal de chaque poussée élémentaire est rajoutée pour tenir compte de l’énergie maximale que peut fournir la poussée électrique sur une durée de temps fixée, ce qui permettra de déterminer le nombre de fractionnements à effectuer. Dans ce qui suit, la stratégie de fractionnement de chaque poussée est présentée puis appliquée à l’ensemble du système étudié. Ensuite, le problème de minimisation de la consommation avec la contrainte d’un rendez-vous orbital est résolu [Tebbani 01a]. Les deux cas avec ou sans correction de l’inclinaison sont pris en compte. Les orbites sont supposées circulaires et ainsi la variation de l’excentricité n’est pas considérée. En effet, comme le problème multi-impulsionnel sert essentiellement d’étape intermédiaire pour initialiser le problème à poussées continues, le choix a été fait de ne pas affiner la recherche de la solution optimale

relative à ce problème. Le même principe de complexification du modèle et du problème est adopté pour le problème multi-impulsionnel.

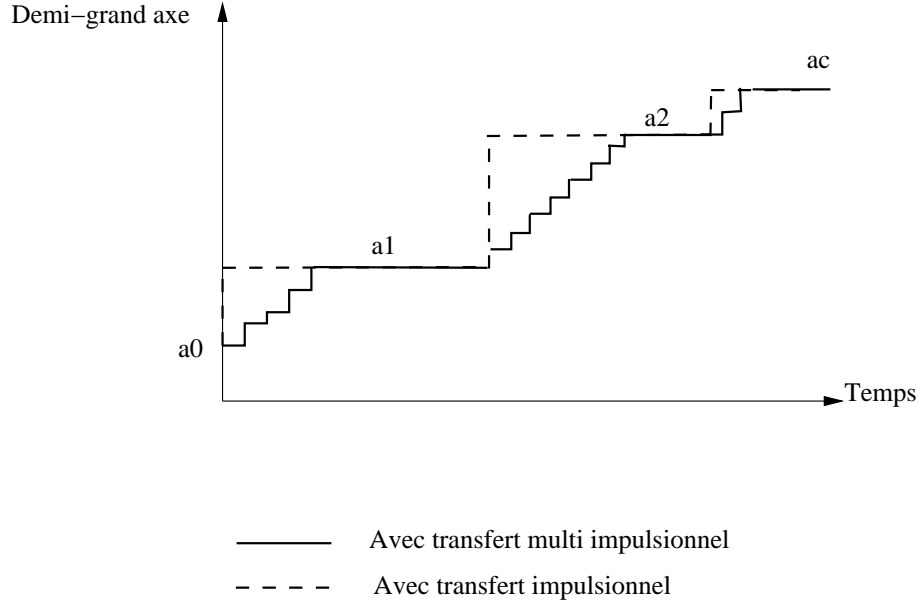


FIG. IV.2 – *Stratégie de mise à poste multi-impulsionnelle.*

IV.1.1 Modélisation du problème

Le problème multi-impulsionnel est une généralisation du problème à trois phases de poussées. Le transfert du satellite vers sa position cible se fait via une stratégie en trois phases de manoeuvre. A chaque phase de manoeuvre, plusieurs poussées élémentaires espacées d'une demi-orbite les unes des autres, sont appliquées au satellite. Il faudra donc déterminer les modules, les directions et les instants d'application de ces poussées ainsi que leur nombre : $N, Vt_{1\dots N}, Vw_{1\dots N}, t_{1\dots N}$.

Le problème s'écrit donc :

$$(\mathcal{P}^m_{3D}) \left\{ \begin{array}{l} \min \mathcal{J}(N, Vt_{1\dots N}, Vw_{1\dots N}, t_{1\dots N}) = \sum_{k=1}^{k=N} \sqrt{Vt_k^2 + Vw_k^2} \\ \varepsilon_a(N, Vt_{1\dots N}, Vw_{1\dots N}, t_{1\dots N}) = 0 \\ \varepsilon_\Omega(N, Vt_{1\dots N}, Vw_{1\dots N}, t_{1\dots N}) = 0 \\ \varepsilon_\alpha(N, Vt_{1\dots N}, Vw_{1\dots N}, t_{1\dots N}) = 0 \\ \varepsilon_i(N, Vt_{1\dots N}, Vw_{1\dots N}, t_{1\dots N}) = 0 \\ |V_k| < V_{max}^k \end{array} \right. \quad (IV.1)$$

Les contraintes se composent de contraintes d'égalité sur la précision de l'acquisition de la position cible, et d'une contrainte d'inégalité sur le module des poussées. La détermination de la poussée maximale (V_{max}^k) sera explicitée par la suite. Afin d'évaluer les erreurs d'acquisition, le modèle analytique simplifié est utilisé (étant donné le niveau de

précision considéré pour le cas multi-impulsionnel). La valeur du vecteur d'état à l'instant final est donnée par le système IV.2, qui est écrit dans le cadre de l'hypothèse de stratégie de mise à poste adoptée.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_f = a_0 + \sum_{k=1}^{k=N} 2a_{k-1} \frac{Vt_k}{V_{k-1}} \\ \Omega_f = \Omega_0 + \sum_{k=1}^{k=N} \left(\mathcal{C}_{J_2}^\Omega(i_k) \frac{\Delta t_k}{a_k^{7/2}} + \sin(\alpha_k) \frac{Vw_k}{\sin i_{k-1}} \frac{\sqrt{a_{k-1}}}{\sqrt{\mu}} \right) \\ \alpha_f = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{k=N} \left(\frac{\sqrt{\mu} \Delta t_k}{a_k^{3/2}} + \mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i_k) \frac{\Delta t_k}{a_k^{7/2}} - \sin(\alpha_k) \frac{Vw_k}{\tan i_{k-1}} \frac{\sqrt{a_{k-1}}}{\sqrt{\mu}} \right) \\ i_f = i_0 + \sum_{k=1}^{k=N} \left(\cos(\alpha_k) Vw_k \frac{\sqrt{a_{k-1}}}{\sqrt{\mu}} \right) \end{array} \right. \quad (\text{IV.2})$$

Δt_k est la durée de l'arc appartenant à l'orbite de demi-grand axe a_k : elle est soit égale à une demi-orbite, soit à la durée d'une phase balistique (sur la figure IV.2, elle représente la durée des "paliers" où l'altitude reste constante).

La résolution du problème (\mathcal{P}_{3D}^m) se fait par étapes successives. A partir de la solution à trois poussées, une stratégie de fractionnement des poussées permet de rechercher une solution respectant les contraintes, en considérant successivement :

- Un rendez-vous en (a, Ω, α) ,
- Un rendez-vous en (a, Ω, α, i) .

IV.1.2 Fractionnement des poussées

Avant de présenter la méthodologie de résolution du problème d'optimisation multi-impulsionnel, une solution initiale satisfaisant les contraintes imposées est recherchée. A partir de la solution optimale à trois phases de poussées, une initialisation au processus d'optimisation est calculée et ceci en fractionnant chaque poussée impulsionnelle en plusieurs poussées élémentaires.

Dans ce paragraphe, la stratégie de fractionnement des poussées est présentée. Cette stratégie se base sur des transferts de type-Hohmann, à savoir que des séries de deux poussées équivalentes, espacées d'une demi-orbite sont appliquées au satellite. De ce fait, la dégradation de l'excentricité est limitée (garantie de l'hypothèse de quasi-circularité des orbites). Il existe plusieurs possibilités pour fractionner une poussée en un nombre donné de poussées :

- soit elle est divisée de façon équitable entre les différentes poussées,
- soit c'est la correction qu'elle permet d'effectuer qui est divisée équitablement,

- soit sa répartition est optimisée.

A ce niveau de l'étude, puisque seule une initialisation est recherchée, il s'avère suffisant de considérer une répartition prédéfinie pour les poussées. Par la suite, l'optimalité de la solution du problème considéré peut être vérifiée, en étudiant la répartition des poussées sur les phases de manoeuvres (et notamment en la comparant à la loi de répartition optimale établie en annexe B) .

Les stratégies de fractionnement adoptées dans les deux cas de poussées tangentielles et hors-plan sont présentées dans ce qui suit.

Fractionnement des poussées tangentielles

Les poussées tangentielles ne servent qu'à effectuer des corrections sur l'altitude. Soit V_t une poussée tangentielle permettant de passer d'une orbite initiale de demi-grand axe a_i vers une orbite finale de demi-grand axe a_f . Afin de fractionner cette poussée en N poussées élémentaires, il est possible de :

- fixer le module des poussées, ce qui revient à appliquer au satellite N poussées de module :

$$Vt_k = \frac{Vt}{N} \quad (\text{IV.3})$$

- fixer la correction en altitude à chaque phase de poussée, ce qui revient à effectuer la même correction en altitude (i.e. $\Delta a = \frac{a_f - a_i}{N}$) à chaque phase de manoeuvre. Ainsi les orbites intermédiaires du satellite sont définies par :

$$a_k = a_{k-1} + \frac{a_f - a_i}{N} \quad k \in [1 \cdots N] \quad (\text{IV.4})$$

A partir des équations de Gauss, les modules des poussées sont donnés par :

$$Vt_k = \frac{\mu}{2N} \cdot \frac{a_f - a_i}{a_{k-1}^{1.5}} \quad (\text{IV.5})$$

Dans le premier cas, l'altitude de l'orbite finale sera supérieure à celle visée puisque les poussées sont surévaluées. Vu que l'efficacité des poussées dépend de l'altitude d'application de la manoeuvre, la deuxième stratégie de répartition est à privilégier. Cette répartition est bien évidemment sous-optimale. Le gain en terme de consommation d'une répartition optimale des poussées n'est cependant pas significatif et peu intéressant, étant donné l'inconvénient de l'augmentation du temps de calcul. La figure IV.13 visualise le principe de ce fractionnement.

Fractionnement des poussées hors-plan

Les poussées hors-plan permettent de corriger l'ascension droite du noeud ascendant et l'inclinaison, ce qui complexifie le calcul de leur répartition optimale sur les différentes phases. De ce fait, le module de chaque poussée hors-plan est simplement réparti équitablement sur les différentes phases de poussées, à savoir :

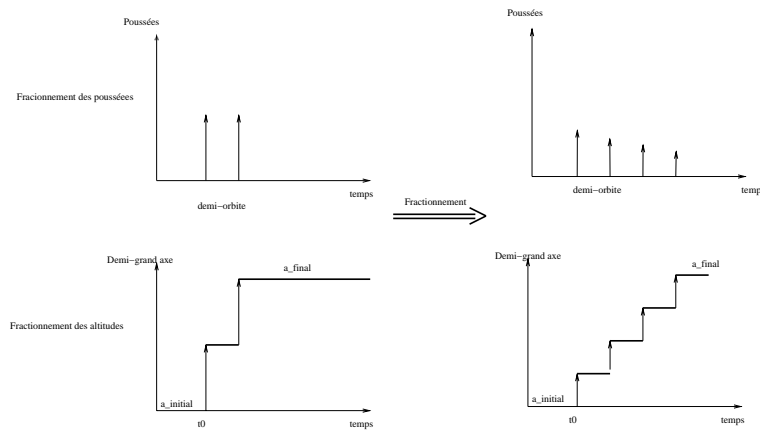


FIG. IV.3 – *Fractionnement des poussées tangentielles* ($N = 4$).

$$Vw_k = \frac{Vw}{N} \quad (\text{IV.6})$$

Il sera mis en évidence par la suite, que cette répartition initiale est cependant assez proche de la répartition optimale. Chaque poussée hors-plan est combinée avec une poussée tangentielle. L'endroit de son application sur l'orbite est déterminé par la nature de la correction à effectuer (aux noeuds d'intersection dans le cas général).

Détermination du nombre des poussées

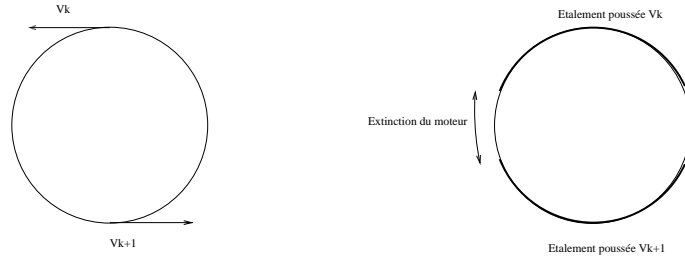
La stratégie de fractionnement des poussées étant bien définie, il reste à fixer le nombre de ces poussées. Ce nombre peut être impliqué par le cahier des charges (par exemple, par une limitation sur le module maximal des poussées). Cependant, comme il est envisagé d'utiliser cette solution multi-impulsionnelle pour rechercher une solution étalée, ce nombre de poussées est directement déterminé par les durées d'allumage des moteurs. En effet, il est à rappeler qu'à chaque orbite, deux poussées sont appliquées (espacées d'une demi-orbite). La capacité réelle des moteurs étant prise en compte, la condition à respecter est qu'après étalement des impulsions, il n'y ait pas chevauchement des poussées (ce qui revient à imposer que les durées d'extinction des moteurs soient positives). La figure IV.4 visualise le processus d'étalement des poussées, qui fera l'objet d'un paragraphe ultérieur.

Donc, si T_{off}^k désigne l'instant d'extinction du moteur correspondant à la $k^{\text{ième}}$ poussée et T_{on}^{k+1} l'instant d'allumage du moteur correspondant à la $(k+1)^{\text{ième}}$ poussée, alors la condition à satisfaire est de la forme :

$$T_{off}^k \leq T_{on}^{k+1} \quad (\text{IV.7})$$

Application au système

La stratégie globale de mise à poste consiste à transférer le satellite vers sa position cible en trois phases de manoeuvres. Pour chaque poussée, la stratégie de fractionnement présentée ci-dessus est appliquée. De ce fait, les trois nombres de poussées (notés

FIG. IV.4 – *Etagement des poussées élémentaires.*

N_1, N_2, N_3 doivent être déterminés en addition aux orbites intermédiaires (a_1, a_2) et aux durées des phases balistiques. A partir de la solution optimale du problème $(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega})$, étudié au §III.9.2 (ou de celle du problème $(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega,i})$ dans le cas où l'inclinaison finale est imposée), le fractionnement des poussées donne :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_k = a_{k-1} + \frac{a_1 - a_0}{N_1} & k \in [1, N_1] \\ a_k = a_{k-1} + \frac{a_2 - a_1}{N_2} & k \in [N_1 + 1, N_1 + N_2] \\ a_k = a_{k-1} + \frac{a_c - a_2}{N_3} & k \in [N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + N_3] \\ Vt_k = \frac{\mu}{2} \frac{a_1 - a_0}{N_1 \cdot a_{k-1}^{1.5}} & k \in [1, N_1] \\ Vt_k = \frac{\mu}{2} \frac{a_2 - a_1}{N_2 \cdot a_{k-1}^{1.5}} & k \in [N_1 + 1, N_1 + N_2] \\ Vt_k = \frac{\mu}{2} \frac{a_c - a_2}{N_3 \cdot a_{k-1}^{1.5}} & k \in [N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + N_3] \\ Vw_k = \frac{Vw_1}{N_1} & k \in [1, N_1] \\ Vw_k = \frac{Vw_2}{N_2} & k \in [N_1 + 1, N_1 + N_2] \\ Vw_k = \frac{Vw_3}{N_3} & k \in [N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + N_3] \end{array} \right. \quad (\text{IV.8})$$

où $(a_1, a_2, Vw_{1..3})$ caractérise la solution à trois poussées impulsionnelles. Par la suite, la recherche de la solution initiale respectant les contraintes est détaillée.

Calcul d'une solution admissible au rendez-vous (a, Ω, α)

Pour déterminer la solution multi-impulsionnelle respectant les contraintes, une stratégie itérative a été mise au point. Elle est résumée par la figure IV.5.

A partir de la solution tri-impulsionnelle, le nombre de poussées est déterminé par "continuation". Pour un nombre de poussées donné, le problème de rendez-vous en (a, Ω, α) est résolu comme dans le cas du problème $(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega})$, à savoir : les modules des poussées

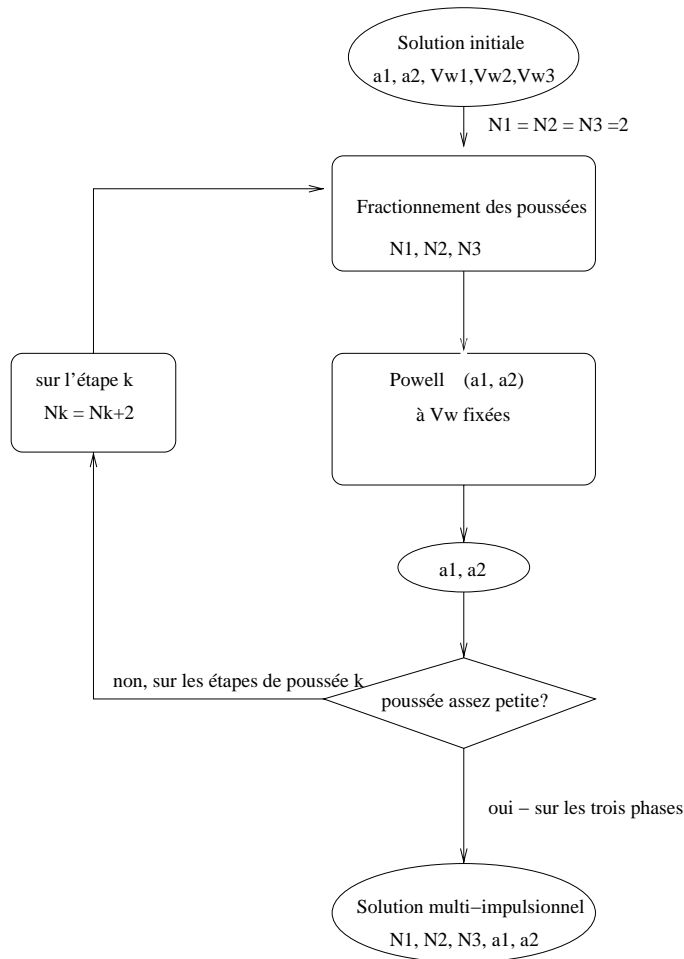


FIG. IV.5 – *Algorithme de recherche d'une solution admissible multi-impulsionnelle.*

hors-plan sont fixés et les altitudes des orbites de dérives déterminées pour respecter les contraintes. La méthode de Powell est utilisée et la solution à chaque étape sert d'initialisation à la résolution de l'étape lui succédant. Le critère d'arrêt sur l'incrément du nombre de poussées est donné par le module maximal des poussées. Tant que la contrainte n'est pas satisfaite, le nombre N_k est incrémenté de deux, ce qui permet de garantir l'hypothèse de quasi-circularité des orbites. Une optimisation du pas d'incrément aurait pu être effectuée. Ceci dit, dans la pratique, la convergence de ce processus de recherche d'une solution initiale est assez médiocre. Afin d'améliorer la robustesse et d'agrandir le bassin de convergence de cet algorithme, il s'est avéré nécessaire d'augmenter le nombre de poussée par deux, ce qui garantie une convergence dans la quasi-totalité des cas d'études.

Ainsi, une solution multi-impulsionnelle respectant les contraintes peut être calculée à partir de la solution tri-impulsionnelle.

Calcul d'une solution admissible au rendez-vous (a, Ω, α, i)

La prise en compte du rendez-vous en inclinaison complexifie le problème d'optimisation à résoudre. En effet, puisque les corrections sur ce paramètre sont opérées simultanément avec celles portant sur l'ascension droite du noeud ascendant, il faut déterminer non seulement les modules des poussées hors-plan mais également l'endroit de leur application sur l'orbite. Ainsi, dans le cas général, il faut déterminer :

$$(a_1, a_2, i_1, i_2, Vw_{1\dots N_1+N_2+N_3}, \alpha_{1,1\dots N_1}, \alpha_{2,1\dots N_2}, \alpha_{3,1\dots N_3}) \quad (\text{IV.9})$$

Les corrections en inclinaison et en ascension droite du noeud ascendant sont réparties équitablement sur les différentes phases de poussées. Le nombre de ces poussées peut être soit déterminé par continuation selon le même principe que celui défini par la figure IV.5, soit en le fixant égal à sa valeur issue de la résolution du problème précédent (sans prise en compte de la correction en inclinaison).

La deuxième possibilité est possible si la correction sur l'inclinaison reste limitée (erreur de type dispersion du lanceur) puisque le sur-coût induit par la prise en compte de cette nouvelle contrainte reste assez faible. Dans le cas le plus général où cette correction est élevée (de l'ordre de la dizaine de degrés), il est souhaitable de choisir la première option.

Du fait du couplage des différentes dynamiques, il s'avère difficile de faire converger le processus de recherche d'une solution. Pour y remédier, un processus de résolution a été mis au point. Il consiste à traduire le problème traité en un problème de minimisation, initialisé par la solution du problème multi-impulsionnel avec rendez-vous en (a, Ω, α) . Le critère à minimiser est de la forme :

$$J(\Delta t_1, \Delta t_2, a_1, a_2, i_1, i_2) = \max(|\varepsilon_\Omega|, |\varepsilon_\alpha|, |\varepsilon_i|) + \mathbb{P}(\Delta t_1, \Delta t_2, a_1, a_2, i_1, i_2) \quad (\text{IV.10})$$

Où le terme $\mathbb{P}()$ représente un terme de pénalité pour tenir compte des contraintes imposées sur les variables d'optimisation.

Une méthode d'optimisation géométrique (Hooke & Jeeves) est utilisée pour résoudre ce problème de programmation non linéaire. Afin de calculer les modules des poussées hors-plan et de leurs anomalies d'application, un processus itératif est mis au point. Il est équivalent à celui utilisé dans le cas du problème tri-impulsionnel et est résumé par la figure IV.6. Donc, Au départ, les poussées hors-plan ne servent qu'à corriger l'inclinaison, puis, l'erreur commise sur l'ascension droite du noeud ascendant est prise en compte et réinjectée dans le processus et ceci jusqu'à ce que l'erreur finale sur l'ascension droite du noeud ascendant soit tolérable.

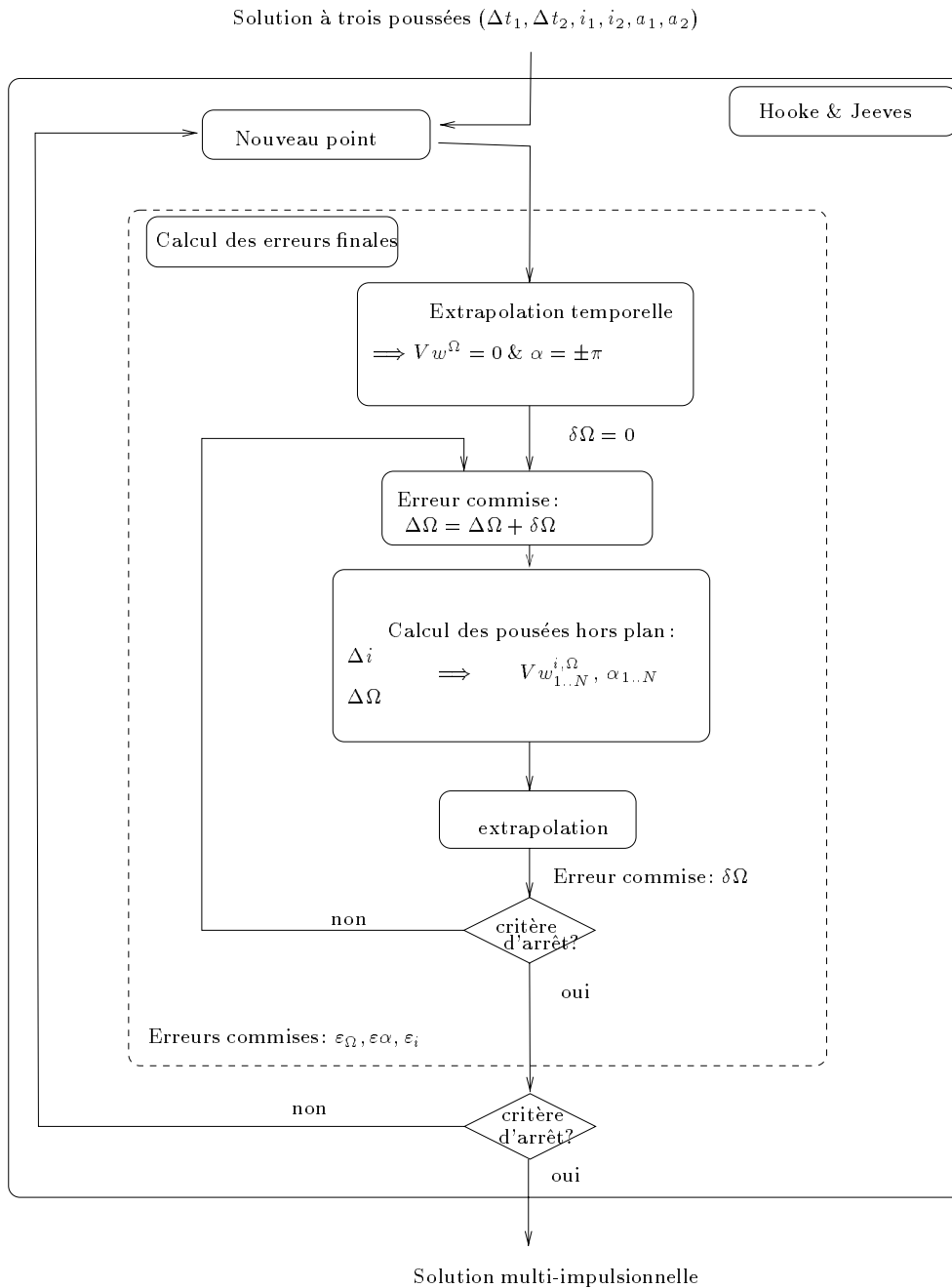


FIG. IV.6 – Algorithme de recherche d'une solution initiale au problème multi-impulsionnel avec rendez-vous en (a, Ω, α, i) .

IV.1.3 Résolution du problème avec rendez-vous en (a, Ω, α)

La solution optimale correspondant au problème multi-impulsionnel est recherchée en partant de la solution initiale calculée ci-dessus. Comme pour le cas tri-impulsionnel, les poussées hors-plan et les orbites de dérives sont à déterminer afin de diminuer la consommation du satellite tout en respectant les contraintes finales imposées. Les instants d'application des poussées ne sont pas optimisés à ce niveau de l'étude (ils seront fixés à leurs valeurs issues de la solution tri-impulsionnelle), puisque le but est de rechercher une initialisation pour le problème continu. L'optimisation des nombres de poussées en addition aux modules des poussées et à leurs directions s'avère très complexe et l'apport en terme de minimisation du coût reste restreint. De ce fait, le nombre total de poussées n'est pas optimisé, mais sera un paramètre du problème d'optimisation à résoudre. Etant donné que la recherche de l'optimum utilisée reste locale, les nombres de poussées par phases de manoeuvre sont fixés et égaux à ceux de la solution initiale calculée précédemment. Il est toutefois possible de vérifier la validité de cette hypothèse sur la solution optimale. Donc, pour des nombres de poussées imposés (notés respectivement N_1, N_2, N_3), il reste à déterminer les altitudes des deux orbites intermédiaires de dérive ainsi que les $N_1 + N_2 + N_3$ poussées hors-plan. Le problème s'écrit donc sous la forme :

$$(\mathcal{P}^m_{a,\alpha,\Omega}) \begin{cases} \min \mathcal{J}(a_1, a_2, Vw_{1\dots N_1+N_2+N_3}) = \sum_{k=1}^{k=N_1+N_2+N_3} \sqrt{Vt_k^2 + Vw_k^2} \\ \varepsilon_a(a_1, a_2, N_1, N_2, N_3, Vw_{1\dots N_1+N_2+N_3}) = 0 \\ \varepsilon_\Omega(a_1, a_2, N_1, N_2, N_3, Vw_{1\dots N_1+N_2+N_3}) = 0 \\ \varepsilon_\alpha(a_1, a_2, N_1, N_2, N_3, Vw_{1\dots N_1+N_2+N_3}) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.11})$$

$(\mathcal{P}^m_{a,\alpha,\Omega})$ est mis sous la forme d'un problème de programmation non linéaire et est résolu à l'aide d'une méthode lagrangienne de Sequential Quadratic Programming (noté **SQP**, détaillée dans [NAG , Fletcher 87]).

La solution optimale est donc recherchée au voisinage de la solution initiale calculée précédemment et l'on pourra comparer le profil de la répartition des corrections ainsi obtenu avec celui de la loi optimale calculée en annexe B.

IV.1.4 Résolution du problème avec rendez-vous en (a, Ω, α, i)

Un rendez-vous sur l'inclinaison est imposé. Pour ce faire, les poussées hors-plan vont être déterminées de façon à corriger simultanément l'ascension droite du noeud ascendant et l'inclinaison. Le problème à résoudre se traduit sous la forme d'un problème de programmation non linéaire qui s'écrit sous la forme :

$$(\mathcal{P}^m_{a,\alpha,\Omega,i}) \left\{ \begin{array}{l} \min \mathcal{J}(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2) = \sum_{k=1}^{k=N_1+N_2+N_3} \sqrt{Vt_k^2 + Vw_k^2} \\ \varepsilon_a(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2) = 0 \\ \varepsilon_\Omega(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2) = 0 \\ \varepsilon_\alpha(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2) = 0 \\ \varepsilon_i(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2) = 0 \\ \Delta t_1 + \Delta t_2 - \Delta t \leq 0 \\ i_0 < i_1 < i_2 < i_c \\ a_0 < a_1 < a_2 < a_c \end{array} \right. \quad (\text{IV.12})$$

Les poussées hors-plan sont calculées selon la même stratégie que celle utilisée lors du calcul de la solution initiale (visualisée par la figure IV.6). La seule différence est le critère que doit minimiser la procédure. La fonction objectif tient simultanément compte de la consommation et des erreurs finales commises, à savoir :

$$\mathcal{J}(\Delta t_1, \Delta t_2, i_1, i_2, a_1, a_2) = \left(\sum_{k=1}^{k=N_1+N_2+N_3} \sqrt{Vt_k^2 + Vw_k^2} \right) * \exp(\max[|\varepsilon_\alpha|, |\varepsilon_\Omega|, |\varepsilon_i|]) \quad (\text{IV.13})$$

Comme pour le cas tri-impulsionnel avec modèle numérique (traité au §III.9.2), l'avantage de ce critère est de privilégier soit le coût, soit la précision selon les ordres de grandeurs des deux quantités. Un terme de pénalité peut être rajouté à cette fonction objectif afin de tenir compte des contraintes éventuelles sur les variables d'optimisation. Le nombre de poussées par phase de manoeuvre est maintenu constant (et égal à celui de la solution initiale).

IV.2 Etalement des poussées

Dans ce qui précède, les poussées étaient supposées impulsionnelles et instantanées. Les capacités réelles des moteurs sont prises en compte. Les durées d'application des manoeuvres ainsi que l'évolution du système durant les phases de poussées sont prises en compte. Au chapitre I, nous avons développé les calculs nous permettant de prendre en compte l'évolution continue approchée du système. Le passage du multi-impulsionnel vers le problème continu est détaillé dans ce qui suit. Dans un premier temps, le principe d'étalement des poussées est présenté, puis appliqué au système complet. Ensuite, les différentes poussées étalées sont raccordées, ce qui permet de calculer une solution admissible au problème à trois poussées continues.

IV.2.1 Principe de l'étalement

Il faut étaler chaque poussée impulsionnelle appliquée au système, ce qui revient à déterminer le début et la durée d'allumage des moteurs. Selon l'équation I.31, la durée

de la poussée est donnée directement par la valeur de l'incrément de vitesse ΔV que l'on souhaite apporter au satellite. La direction de poussée est donnée par la direction de la poussée impulsionnelle. Cette direction est maintenue constante le long d'une poussée. En fait, cette stratégie d'étalement s'inspire de celle présentée par Edelbaum [Edelbaum 61], à savoir que lors de l'étalement, la déclinaison de poussée est maintenue constante (en valeur absolue), mais elle change de signe selon l'endroit sur l'orbite où le satellite se trouve. Ce changement de signe permet de restreindre la variation des paramètres qui ne doivent pas être corrigés. Par exemple, si aucun rendez-vous en inclinaison n'est imposé, l'étalement des poussées doit se faire de façon à ne pas trop modifier ce paramètre.

Dans ce qui suit, trois cas de figures sont traités :

- **Sans rendez-vous en inclinaison** où les poussés hors plan ne servent qu'à corriger l'ascension droite du noeud ascendant.
- **Avec rendez-vous en inclinaison** où les poussées hors-plan ne corrigent que ce paramètre (l'ascension droite du noeud ascendant est corrigée par la stratégie dite "passive").
- **Avec rendez-vous en inclinaison** où les poussées hors-plan corrigent simultanément l'ascension droite du noeud ascendant et l'inclinaison.

Étalement sans rendez-vous en inclinaison

Lorsque la poussée est étalée, l'inclinaison varie selon la loi (issue des équations de Gauss):

$$\frac{di}{dt} = \cos \alpha \cdot \sin \delta \cdot \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \frac{F}{m} \quad (\text{IV.14})$$

Au regard de l'équation IV.14, il vient que pour annuler la variation de l'inclinaison, il faudrait annuler la moyenne de cette variation sur la demi-orbite d'étalement. Or, la moyennation de cette variation sur l'intervalle d'étalement $[\alpha_0, \alpha_1]$ donne :

$$\left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle = \frac{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} \sin \delta \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{F}{m} \quad (\text{IV.15})$$

Pour annuler cette variation, il faut prendre les anomalies de début et de fin de poussée symétrique par rapport aux anti-noeuds (i.e $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_0$). Puisque la durée de poussée est donnée par le module de la poussée à étaler, l'anomalie de début d'allumage suffit pour paramétrer la poussée étalée. Le modèle d'évolution du système est présenté en annexe A. Ainsi, selon l'endroit sur l'orbite, l'anomalie de début d'allumage des moteurs est calculée en conséquence. Elle est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = \frac{\pi - [\sqrt{\mu} K_3 L_3 + C_{J_2}^\alpha(i) K_7 L_7]_{-\pi}^\pi}{2} \quad \text{si centré autour de } \frac{\pi}{2} \quad (a) \\ \alpha_0 = \frac{3\pi - [\sqrt{\mu} K_3 L_3 + C_{J_2}^\alpha(i) K_7 L_7]_{-\pi}^\pi}{2} \quad \text{si centré autour de } \frac{-\pi}{2} \quad (b) \end{array} \right. \quad (\text{IV.16})$$

$K_{3,7}$ et $L_{3,7}$ sont donnés en annexe A. Ils permettent de calculer, de façon simple, la variation de l'anomalie pendant les phases de poussées (elles correspondent à l'intégration de l'effet du moyen mouvement et de celui du J_2).

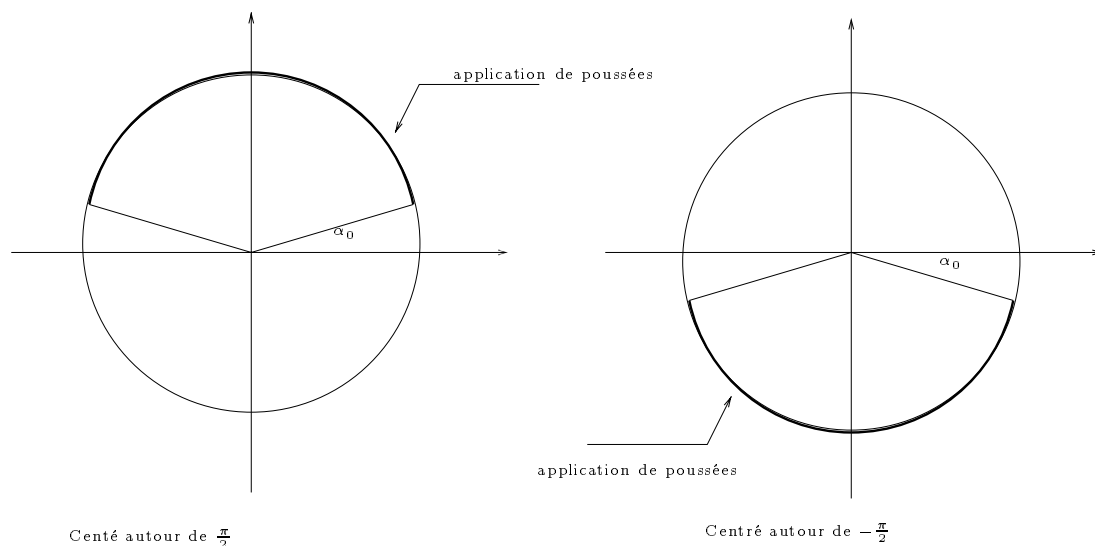


FIG. IV.7 – *Étalement d'une poussée élémentaire, sans correction de l'inclinaison.*

Du fait de l'étalement de la poussée, la correction sur l'ascension droite du noeud ascendant n'est pas entièrement satisfaite. En effet, l'étalement induit une perte d'efficacité des poussées et, de ce fait, les poussées impulsionnelles s'avèrent sous-dimensionnées une fois leur étalement effectué.

Étalement avec rendez-vous en inclinaison uniquement

Dans le cas où une correction en inclinaison est nécessaire, et sous l'hypothèse que les poussées hors-plan ne servent qu'à corriger ce paramètre, les anomalies de début d'application d'une poussée sont définies de telle sorte que la variation de l'ascension droite du noeud ascendant soit négligeable. La variation moyenne de l'ascension droite du noeud ascendant est donnée par :

$$\left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle = \frac{\cos \alpha_1 - \cos \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} \cdot \frac{\sin \delta}{\sin i} \cdot \sqrt{\frac{a}{\mu m}} F \quad (\text{IV.17})$$

Il en vient que pour annuler cette variation, il faut que les anomalies de début et de fin d'application de la poussée soient telles que : $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_0$. Ainsi, la poussée est centrée autour du noeud où la poussée impulsionnelle était appliquée.

Comme pour le cas précédent, les poussées ainsi étalées perdent de leur efficacité et ne permettent pas d'apporter toute la correction souhaitée au système.

Étalement dans le cas général

Dans le cas le plus général, les poussées hors-plan corrigent simultanément les deux paramètres (i, Ω) . Dans le cas impulsionnel, ces poussées étaient appliquées aux noeuds d'intersection qui sont définis par les taux de corrections à apporter sur chaque paramètre.

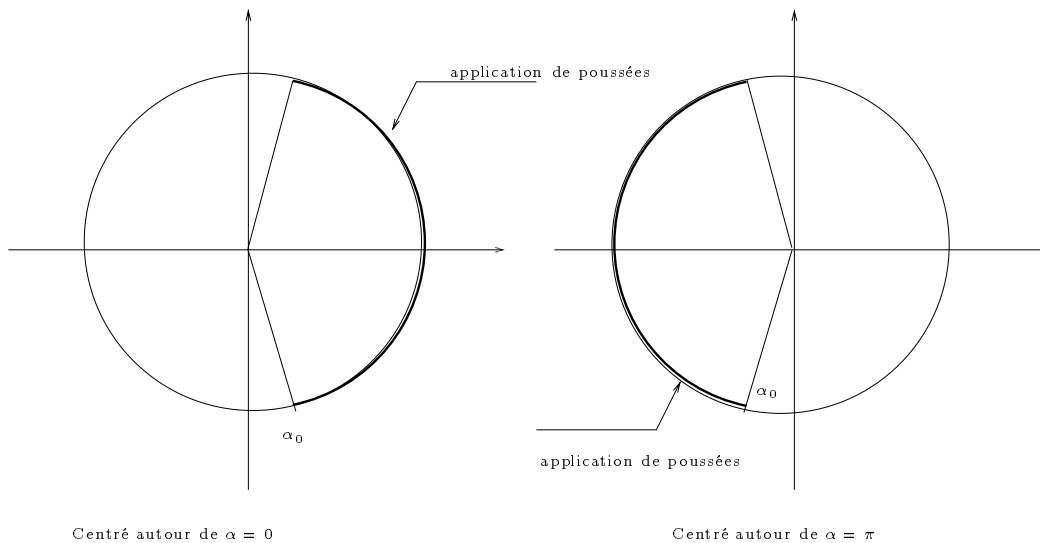


FIG. IV.8 – *Étalement d'une poussée élémentaire, avec correction de l'inclinaison.*

Le choix de l'anomalie de début de poussée est fait de telle sorte que la poussée étalée soit centrée autour du noeud d'application de la poussée impulsionnelle. Ce choix s'inspire de la stratégie d'étalement de la poussée hors-plan permettant de corriger un seul paramètre (ce qui correspond aux deux cas précédents). Il s'inspire également du calcul optimal de changement de plan développé dans [Marec 83, Huynh 76, Mainguy 82]. La figure IV.9 permet de visualiser cette stratégie de poussée.

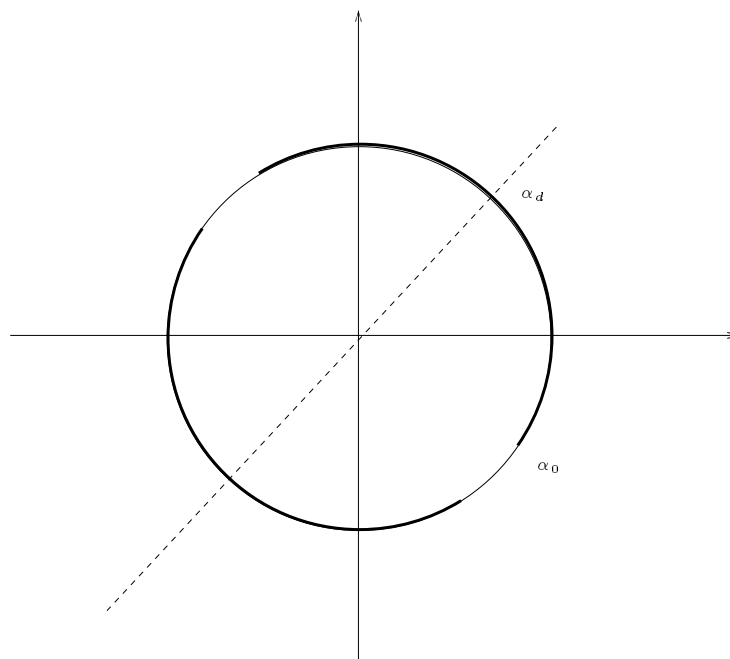


FIG. IV.9 – *Étalement d'une poussée élémentaire dans le cas général.*

Donc, si le noeud d'application de la poussée impulsionnelle est notée α_n , l'anomalie de début de poussée α_0 est donnée par :

$$\alpha_0 = \frac{2\alpha_n - [\sqrt{\mu}K_3L_3 + C_{J_2}^\alpha(i)K_7L_7]_{-\pi}^\pi}{2} \quad (\text{IV.18})$$

Le calcul de la variation approchée des paramètres (i, Ω) suite à l'application de la poussée étalée est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle = \cos \alpha_n \left(\frac{\sin \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2}}{\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2}} \right) \sin \delta \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{F}{m} \\ \left\langle \frac{d\Omega}{dt} \right\rangle = \sin \alpha_n \left(\frac{\sin \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2}}{\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2}} \right) \cdot \frac{\sin \delta}{\sin i} \cdot \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{F}{m} \end{array} \right. \quad (\text{IV.19})$$

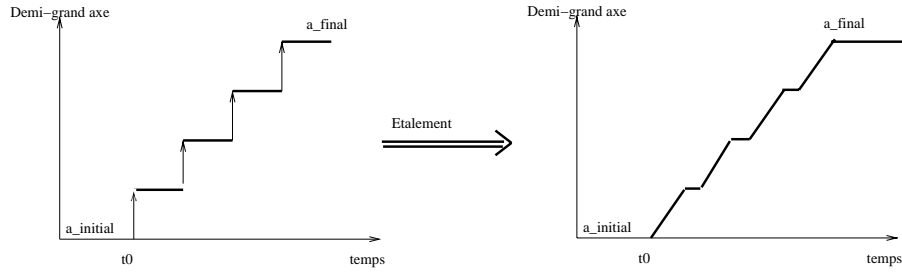
Comme dans les deux cas particuliers précédents, il existe une perte d'efficacité induite par l'étalement de la poussée. Dans le cas où la durée de la poussée tend vers zéro (i.e. poussée du moteur tend vers l'infini), les effets de la poussée tendent vers ceux de la poussée impulsionnelle (puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$). Cette perte d'efficacité suite à l'étalement était prévisible et a été mise en évidence par [Mainguy 82].

En résumé, l'étalement de chaque poussée se fait autour de l'anomalie de son application dans le cas impulsionnel : autour des anti-noeuds pour les poussées hors-plan permettant de corriger exclusivement l'ascension droite du noeud ascendant, aux noeuds pour celles corrigeant exclusivement l'inclinaison et aux noeuds d'intersection pour celles combinant les corrections entre ces deux paramètres. Cet étalement induit une perte d'efficacité des manoeuvres sur les corrections sur l'inclinaison et l'ascension droite du noeud ascendant . L'acquisition de l'altitude est quant à elle non affectée. L'application de séries de poussées symétriques permet de limiter les dégradations sur la variable excentricité.

IV.2.2 Application au système

La stratégie d'étalement de chaque poussée étant définie, il faut l'appliquer à toutes les manoeuvres effectuées. Ainsi, le transfert du satellite se fait en trois phases de manoeuvres, constituées d'une succession d'arcs de poussée maximale ($F = F_{max}$) et d'arcs balistiques ($F = 0$).

La solution issue de l'étalement de la solution multi-impulsionnelle ne permet pas de réaliser exactement le rendez-vous orbital imposé. En effet, du fait de la perte de l'efficacité des poussées suite à leur étalement, les poussées calculées dans le cas impulsionnel se trouvent sous-dimensionnées après leur étalement. Une modification des caractéristiques de la solution est donc nécessaire pour pouvoir trouver une solution initiale respectant les contraintes. Les deux cas avec ou sans correction de l'inclinaison sont considérés. Dans un premier temps, aucune contrainte finale sur l'inclinaison n'est imposée. La stratégie utilisée dans le cas tri-impulsionnel est réutilisée, à savoir, fixer les corrections apportées

FIG. IV.10 – Exemple d'étalement de poussée ($N=4$).

par les composantes hors-plan des poussées et rechercher le couple (a_1, a_2) qui permet d'affiner l'acquisition finale de la position du satellite. Puisque les poussées sont étalées, les composantes hors-plan des différentes poussées sont exprimées via les déclinaisons de poussées (notées $\delta_k = \frac{V w_k}{V t_k}$). Ainsi, la solution multi-impulsionnelle fournit les déclinaisons de poussées que l'on fixe lors de l'étalement et de la recherche d'une solution initiale satisfaisant les contraintes. Le système à résoudre est un système de trois équations (les erreurs en (a, α, Ω)) à deux inconnues. Pour pouvoir le résoudre, il faut combiner les erreurs angulaires (introduction de coefficients de pondération $(\lambda_\Omega, \lambda_\alpha)$ sur les erreurs commises sur (α, Ω)) et ainsi résoudre un problème à deux équations, défini par le système IV.20.

$$(\mathcal{PE}^{m,ini}_{a,\Omega,\alpha}) \begin{cases} \varepsilon_a(a_1, a_2) = 0 \\ \lambda_\Omega \cdot |\varepsilon_\Omega(a_1, a_2)| + \lambda_\alpha \cdot |\varepsilon_\alpha(a_1, a_2)| = 0 \\ N, \delta_{1..N} \text{ fixés} \end{cases} \quad (\text{IV.20})$$

La figure IV.11 résume l'algorithme de résolution du problème multi-poussées étalées avec rendez-vous en (a, Ω, α) .

Il est ensuite possible d'optimiser la solution (en terme de meilleure fonction coût), et ceci à partir d'un calcul d'optimisation du problème à multi-poussées étalées. Ce problème est défini par le système IV.21.

$$(\mathcal{PE}^m_{a,\Omega,\alpha}) \begin{cases} \max \mathcal{J}(a_1, a_2, \delta_{1..N}) = m(t_f) \\ \varepsilon_a(a_1, a_2, \delta_{1..N}) = 0 \\ \varepsilon_\Omega(a_1, a_2, \delta_{1..N}) = 0 \\ \varepsilon_\alpha(a_1, a_2, \delta_{1..N}) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.21})$$

La fonction objectif est à présent une fonction de l'état final du satellite (i.e maximisation de la masse finale du satellite). Ce problème est résolu à l'aide de la méthode Feasible Sequential Quadratic Programming **FSQP** (détaillée dans [More 93, Lawrence 97]). Cette méthode est une dérivée de la méthode **SQP**, mais avec la contrainte supplémentaire de rechercher une solution respectant les contraintes à chaque itération. Ceci présente l'avantage de converger vers une solution qui viole le moins possible les contraintes imposées, chose qui n'est pas toujours possible avec la méthode **SQP**.

Dans un deuxième temps, une contrainte supplémentaire sur l'inclinaison peut être prise en compte. A partir de la solution multi-impulsionnelle avec rendez-vous en (a, Ω, α, i) ,

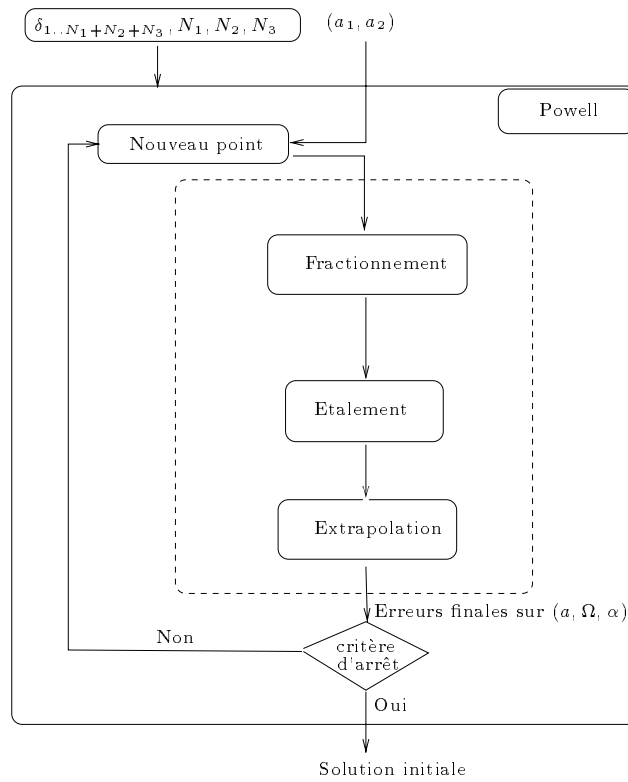


FIG. IV.11 – *Algorithme de recherche de solution initiale, à multi-poussées étalées, et avec rendez-vous en (a, Ω, α) .*

une solution initiale au problème à multi-poussées étalées est recherchée. Pour ce faire, le principe d'étalement des poussées développé est appliqué. Chaque poussée élémentaire est étalée autour de son anomalie d'application. Comme pour le cas précédent, il est possible de modifier cette solution afin d'améliorer la précision d'acquisition de la position cible du satellite. Pour ce faire, il est possible de modifier (a_1, a_2, i_1, i_2) , tel que les erreurs finales sur (a, Ω, α, i) soient assez faibles. Le même principe de calcul des erreurs finales que celui illustré par la figure IV.11 est utilisé. A savoir, pour des valeurs données de (a_1, a_2, i_1, i_2) , le fractionnement puis l'étalement des poussées est effectué. Les anomalies d'étalement des poussées sont soit données par la solution initiale, soit selon le principe utilisé dans l'algorithme illustré par la figure IV.6. L'algorithme de recherche de cette solution est illustré par la figure IV.12.

Ensuite, cette solution initiale peut être améliorée et ceci en recherchant la solution optimale à multi-poussées étalées avec le rendez-vous en (a, Ω, α, i) . Ceci dit, du fait de la complexité du problème, il s'avère que le processus d'optimisation peine généralement à améliorer cette solution initiale. Mais étant donné que cette solution n'est qu'une étape permettant d'initialiser une phase finale d'amélioration de la solution, le choix a été fait de ne pas approfondir la recherche d'une solution pour ce problème.

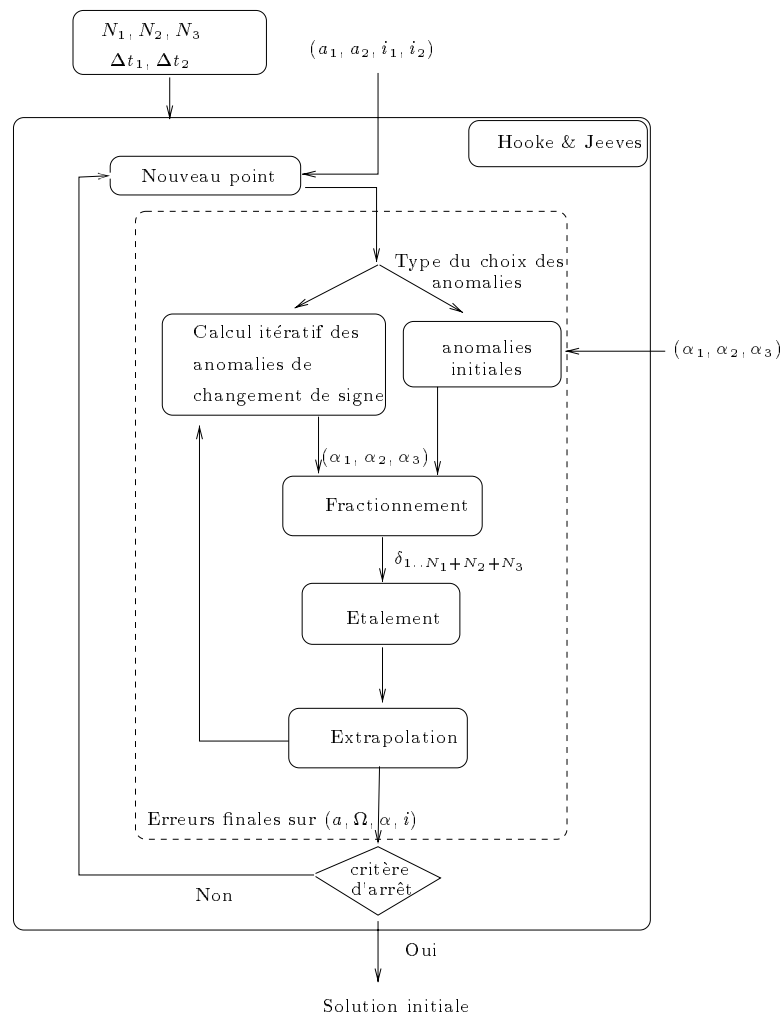
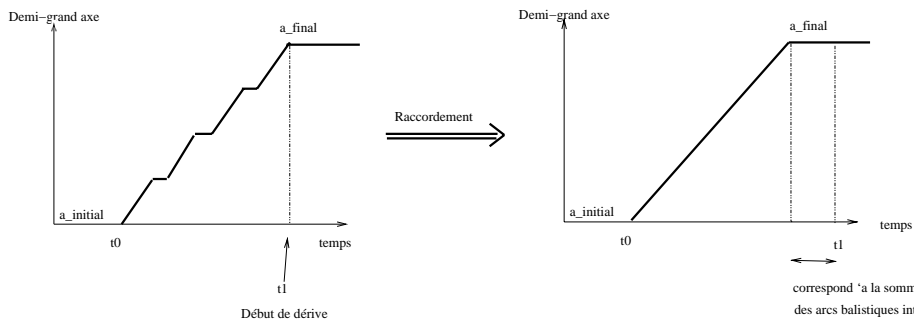
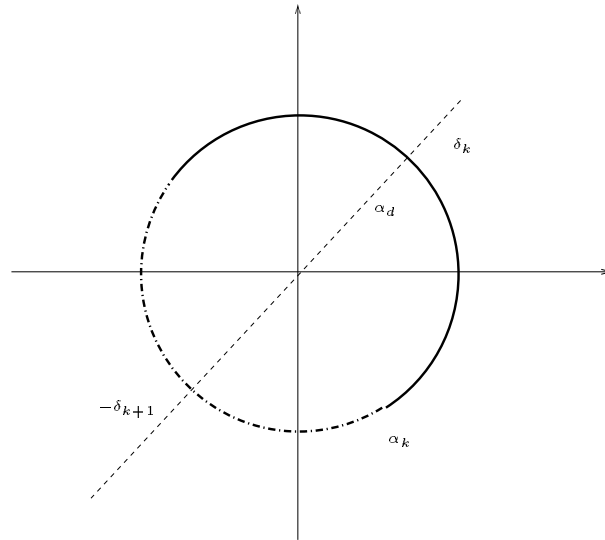


FIG. IV.12 – *Algorithme de recherche de solution initiale, à multi-poussées étalées, et avec rendez-vous en (a, Ω, α, i) .*

IV.2.3 Raccordement des poussées

A ce niveau du processus de résolution, une solution à multi-poussées étalées est calculée. Les phases d'extinction des moteurs d'une poussée à une autre sont assez courtes (de l'ordre de la dizaine de minutes). Afin de tendre vers une solution initiale pour le problème à trois poussées étalées, il faut supprimer ces arcs balistiques. Pour ce faire, la solution initiale est modifiée en remplaçant ces arcs balistiques par des arcs de poussée. Donc, la stratégie de poussée consiste à appliquer une poussée selon une direction donnée sur une demi-orbite puis, de changer de sens de poussée (le signe est inversé) sur l'autre demi-orbite et ceci pour chaque couple de poussées constituant les différentes manoeuvres de type Hohmann (cf. la figure IV.14).

Du fait de ce raccordement, des erreurs sont induites sur l'acquisition de la position cible du satellite. Toutefois, les erreurs étant faibles, cette solution approchée sert d'initialisation au processus de recherche de solution initiale au problème à trois poussées

FIG. IV.13 – *Raccordement des poussées* ($N = 4$).FIG. IV.14 – *Raccordement des poussées*.

continues.

IV.3 Résolution du problème continu avec rendez-vous en (a, Ω, α)

Dans ce paragraphe, le problème de rendez-vous orbital avec application de la stratégie de trois phases de manoeuvres continues est résolu. La stratégie d'utilisation des effets bénéfiques de l'aplatissement terrestre aux pôles est appliquée. Dans un premier temps, une solution initiale au problème est recherchée et ceci en partant de la solution issue du raccordement de la solution à multi-poussées étalées.

Ensuite, la modélisation du problème d'optimisation est présentée (en se basant sur la modélisation présentée au paragraphe II.4.2). Enfin, plusieurs cas de figure de résolution du problème sont proposés [Tebbani 01c]. Dans un premier temps, le modèle d'évolution dynamique du système est un modèle analytique simplifié. Ensuite, un modèle numérique

plus précis peut être pris en compte, ce qui permet de vérifier la validité des hypothèses simplificatrices effectuées (et notamment l'hypothèse de quasi-circularité des orbites).

IV.3.1 Recherche de solution initiale au problème continu

A partir de la solution à poussées raccordées, une solution initiale respectant les contraintes imposées est recherchée. Pour ce faire, à chaque phase de manoeuvre, il faut déterminer la direction de poussée ainsi que les durées des phases de poussées. La solution initiale est recherchée dans une classe donnée de solution, à savoir dans la classe de solutions à direction de poussée constante. D'autre part, les instants de début d'application des poussées sont supposés constants (ils sont toutefois légèrement modifiés afin de tenir compte de l'anomalie de début d'application des manoeuvres). Donc, il faut déterminer les cinq variables :

$$(a_1, a_2, \delta_{1..3}) \quad (\text{IV.22})$$

Où

- (a_1, a_2) sont les demi-grand axes des deux orbites intermédiaires de dérive,
- $\delta_{1..3}$ sont les déclinaisons de poussées. La direction de poussée reste donc constante le long d'une phase de poussée, avec le changement de signe aux anti-noeuds.

Les contraintes finales à respecter sont les rendez-vous : en altitude, en ascension droite du noeud ascendant et en anomalie. Pour résoudre ce problème, la même stratégie que celle utilisée pour le problème $(\mathcal{PE}^{m,ini}_{a,\Omega,\alpha})$ (donné par l'équation §IV.20) est utilisée (les deux problèmes sont équivalents). Seuls les modèles d'extrapolation diffèrent.

$$(\mathcal{PE}^{ini}_{a,\Omega,\alpha}) \begin{cases} \varepsilon_a(a_1, a_2) = 0 \\ \lambda_\Omega \cdot |\varepsilon_\Omega(a_1, a_2)| + \lambda_\alpha \cdot |\varepsilon_\alpha(a_1, a_2)| = 0 \\ \delta_{1..3} \text{ fixés} \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

Ainsi, les directions de poussées sont fixées et les caractéristiques des orbites de dérives sont déterminées afin d'apporter les corrections nécessaires aux différents paramètres du satellite. Le modèle analytique simplifié est utilisé, ce qui permet de simplifier la résolution de ce problème. Le problème $(\mathcal{PE}^{ini}_{a,\Omega,\alpha})$ est un système de deux équations à deux inconnues, qui peut être résolu à l'aide d'une méthode de Powell par exemple.

IV.3.2 Modélisation du problème d'optimisation

Avant de présenter la stratégie de résolution du problème d'optimisation considéré, sa modélisation est présentée et notamment les modifications apportées au modèle d'évolution du système. Il faut déterminer les caractéristiques des trois phases de poussées, ce qui revient à déterminer pour chaque phase :

- l'instant d'allumage des moteurs, noté t_{on}^k ,
- l'instant d'extinction des moteurs, noté t_{off}^k ,

– la direction de poussée durant cette phase $\delta_k(t)$.

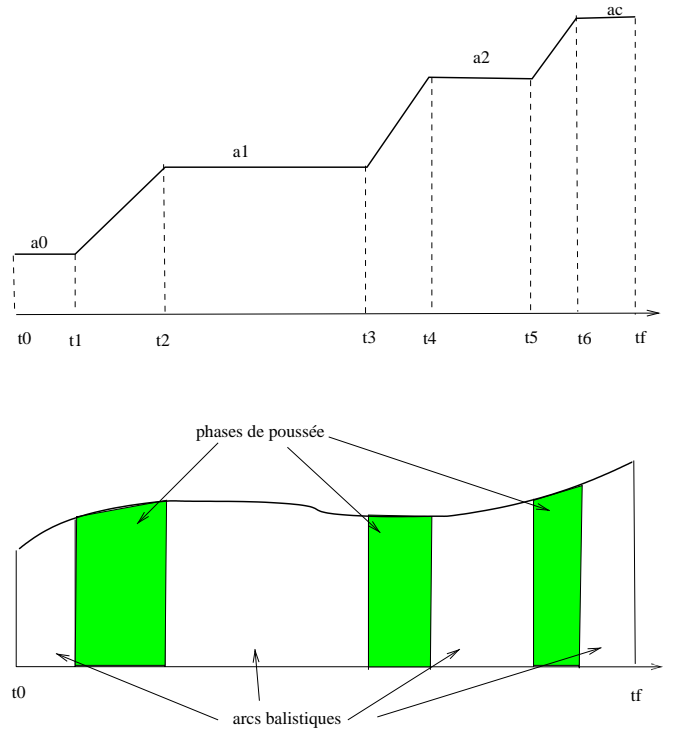


FIG. IV.15 – Structure générale du problème de mise à poste continu.

Au global, il faut optimiser les six instants de commutation de l'état du moteur, ainsi que les directions de poussées le long des phases de poussées. Le problème global s'écrit donc :

$$(\mathcal{PE}) \begin{cases} \min -m(t_f) \\ \frac{dx}{dt} = f(x, \delta, t) \\ x(t_0) = x_0 \\ \psi(x(t_f), t_f) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.24})$$

Le long des phases balistiques, un modèle analytique est utilisé, ce qui permet de réduire le temps de calcul. La résolution de ce problème est effectuée par étapes. Dans un premier temps, comme présenté ci-dessus, l'évolution du système est décrite via le modèle analytique développé pour la recherche d'une solution initiale au problème. Ensuite, une intégration numérique des équations est effectuée, ce qui engendre des problèmes de convergence des méthodes d'optimisation utilisées, ainsi que des problèmes de précision d'intégration numérique.

La différence d'évolution des différents paramètres et leur ordre de grandeur respectif engendrent ces difficultés. Pour y remédier, une mise à l'échelle des variables d'état est effectuée, à savoir, qu'on procède à une "normalisation" du système étudié [Chuang 99]. Les transformations suivantes sont appliquées au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{t} = t \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a_c^3}} \\ \hat{a} = \frac{a}{a_c} \\ \hat{m} = \frac{m}{m_0} \\ \hat{g}_0 \hat{I}_{sp} = g_0 I_{sp} \cdot \sqrt{\frac{a_c}{\mu}} \\ \hat{F}_{max} = \frac{F_{max}}{m} \cdot \frac{a_c^2}{\mu} \\ \hat{a}_e = \frac{a_e}{a_c} \end{array} \right. \quad (\text{IV.25})$$

Suite à cette normalisation, les équations d'évolution du système sont équivalentes à celles du système initial décrite au chapitre I, en remplaçant μ par $\hat{\mu} = 1$. Lors de la résolution numérique du problème étudié, une amélioration de convergence et de robustesse du processus, grâce à cette normalisation, a été constatée.

Le problème à trois poussées continues, avec rendez-vous en (a, Ω, α) s'écrit sous la forme :

$$(\mathcal{PE}_{\hat{a}, \Omega, \alpha}) \left\{ \begin{array}{l} \min \mathcal{J}(\hat{t}_{1..6}, \delta_{1..3}(t)) = -m(\hat{t}_f) \\ \varepsilon_a(\hat{t}_{1..6}, \delta_{1..3}(\hat{t})) = 0 \\ \varepsilon_\Omega(\hat{t}_{1..6}, \delta_{1..3}(\hat{t})) = 0 \\ \varepsilon_\alpha(\hat{t}_{1..6}, \delta_{1..3}(\hat{t})) = 0 \\ \hat{t}_0 < \hat{t}_1 < \hat{t}_2 < \hat{t}_3 < \hat{t}_4 < \hat{t}_6 < \hat{t}_f \\ -\frac{\pi}{2} < \delta_{1..3}(\hat{t}) < \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad (\text{IV.26})$$

où $\hat{t}_{1..6}$ désigne les instants normalisés de commutation de l'état du moteur et $\delta_{1..3}(t)$ sont les déclinaisons de poussées sur les trois phases de manoeuvres. Le critère d'optimisation peut être exprimé soit sur la masse finale, soit sur les durées de poussées. Les deux formulations sont équivalentes, mais la deuxième est plus simple à traduire en terme de problème de programmation non linéaire (et notamment pour le calcul du gradient de la fonction objectif).

IV.3.3 Résolution

A partir de cette nouvelle modélisation, le problème à trois poussées continues est résolu. Diverses lois de commandes et méthodes sont testées. En effet, dans un premier temps, les lois de variation de direction de poussées ont été optimisées en discrétisant l'évolution du satellite dans le temps. Dans un deuxième temps, le problème est résolu en prédéfinissant une loi de variation de direction. Les résultats issus des différentes stratégies

sont comparés en les appliquant à un cas d'étude. Lors de la résolution des différents problèmes, des méthodes lagrangiennes sont utilisées. Ceci se justifie non seulement par le fait que l'on dispose de moyens d'estimation des dérivées, mais aussi par le test d'optimalité qui sera effectué sur la solution ainsi calculée. En effet, par la suite (au paragraphe §IV.5), une stratégie de vérification de l'optimalité de la solution est présentée et appliquée dans le cadre de cette étude.

Collocation directe

Cette méthode a été utilisée pour la résolution de problèmes de transferts orbitaux interplanétaires [Hargraves 87, Tang 92, Enright 91b]. Elle consiste à discrétiser le problème d'optimisation étudié et à le transformer en un problème de programmation non linéaire. Elle présente l'avantage de supprimer l'intégration des équations d'évolution du système en les remplaçant par des approximations (trapézoïdale, Simpson, Gauss-Lobatto) [Enright 91a, Herman 96]. La prise en compte de la précision de l'intégration se traduit par l'ajout de contraintes aux extrémités des intervalles de discrétisation (dit les noeuds). Ces contraintes sont les erreurs entre l'état (qui est une variable d'optimisation) et sa valeur issue de l'intégration approchée de sa valeur à l'instant amont. La figure IV.16 permet de visualiser ce type de méthode.

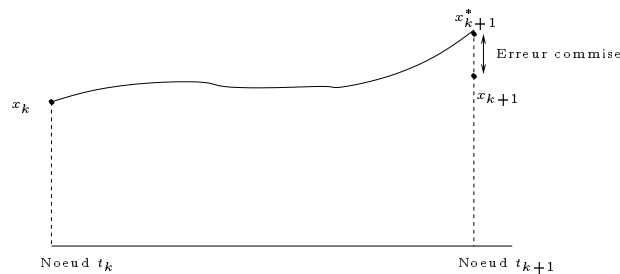


FIG. IV.16 – *Illustration de la méthode de collocation directe.*

Ainsi les variables d'optimisation sont les états et la commande à chaque noeud (dans le cas de rendez-vous en $(\hat{a}, \alpha, \Omega)$, il faut déterminer les cinq variables $(\hat{m}, \hat{a}, \Omega, \alpha, u)$). Cette méthode de résolution est très robuste et permet de converger vers la solution optimale, indépendamment de la qualité de la solution initiale. Cependant, son efficacité dépend de la nature des équations dynamiques régissant le système (la convergence est meilleure si le système est bien conditionné). Pour avoir une meilleure convergence, il est nécessaire d'augmenter le nombre d'intervalles de discrétisation sur les phases de poussées. Dans le cas de transferts interplanétaires, les dynamiques des différentes variables d'état sont de même nature, ce qui permet de prendre un pas de discrétisation assez élevé. Dans le cas de transfert circum-terrestre, et du fait de l'évolution rapide de l'anomalie, l'application de cette méthode nécessite un grand nombre de variables (i.e. un pas de discrétisation assez faible). De ce fait, le nombre de variables et de contraintes augmente considérablement. Quelques études ont toutefois appliqué cette méthode pour les transferts terrestres à faible poussée. Le problème de transfert orbital LEO-GEO en temps minimum a été étudié par

[Scheel 94]. Le problème de PNL était constitué de 60 intervalles de discrétisation, ce qui induit 1027 variables d'optimisation et 300 contraintes (la méthode de tir multiple était utilisée). La résolution de ce problème a nécessité près d'une heure de calcul sur un CRAY. Pour le problème de transfert orbital à consommation minimale, l'étude réalisée par [Betts 00] utilise 416123 variables d'optimisation et 249674 contraintes et nécessite près d'une heure de calcul sur un Origin 2000. Donc, l'utilisation de cette méthode suppose que l'on dispose d'une puissance de calcul suffisamment élevée. Dans notre cas, le problème avec 30 intervalles de discrétisation par poussée a été abordé. Malheureusement, le processus a échoué. Cette méthode, bien qu'elle soit performante et robuste pour les systèmes bien conditionnés, s'avère mal adaptée pour le cas de transferts à multiples révolutions. Suite à cette constatation, d'autres pistes ont été explorées pour rechercher la solution optimale du problème étudié.

Discrétisation de la commande

Au regard de la méthode de collocation directe, il s'avère que la difficulté que rencontre l'algorithme à converger réside essentiellement dans les approximations lors de l'intégration de la dynamique du système. Pour y remédier, une nouvelle stratégie de résolution est utilisée. Elle consiste à se libérer des variables sur l'état et à ne discrétiser que la commande du système. Donc, les valeurs de l'état du système aux différents noeuds de discrétisation sont données par la propagation des équations, et ceci à partir des différentes valeurs de la commande sur les différents intervalles.

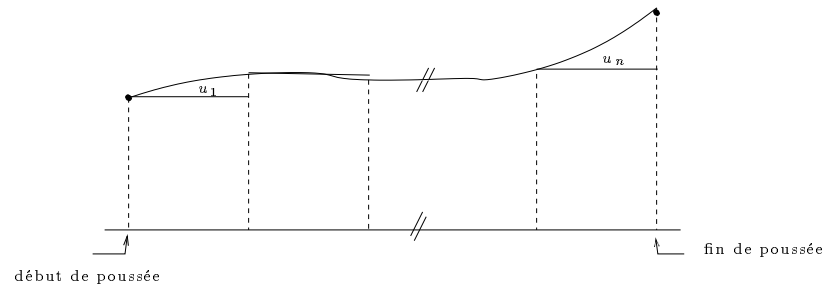


FIG. IV.17 – *Illustration de la méthode de discrétisation de la commande.*

Cette méthode a été utilisée par [Kelley 87] pour résoudre des problèmes de trajectoires spatiales (appelée *State Elimination*).

Ainsi, chaque phase de poussée est discrétisée en un nombre d'intervalles donné, et les valeurs de la direction de poussées sont optimisées. Ce problème d'optimisation s'écrit donc :

$$(\mathcal{PE}_{\hat{a}, \Omega, \alpha}^{\mathcal{D}}) \left\{ \begin{array}{l} \min \mathcal{J}(\hat{t}_{1..6}, \delta_{1..3N}) = -m(\hat{t}_f) \quad \text{ou} \quad \min [(\hat{t}_2 - \hat{t}_1) + (\hat{t}_4 - \hat{t}_3) + (\hat{t}_6 - \hat{t}_5)] \\ \varepsilon_a(\hat{t}_{1..6}, \delta_{1..3N}) = 0 \\ \varepsilon_{\Omega}(\hat{t}_{1..6}, \delta_{1..3N}) = 0 \\ \varepsilon_{\alpha}(\hat{t}_{1..6}, \delta_{1..3N}) = 0 \\ \hat{t}_0 < \hat{t}_1 < \hat{t}_2 < \hat{t}_3 < \hat{t}_4 < \hat{t}_6 < \hat{t}_f \\ -\frac{\pi}{2} < \delta_{1..3N} < \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad (\text{IV.27})$$

où N représente le nombre d'intervalles de discrétisation. Puisque la direction de poussée doit changer de signe (au regard des résultats de [Marec 83]), le changement de signe de la direction de poussée aux anti-noeuds est pris en compte. Pour ce faire, la commande du système est donnée par :

$$\delta_{1..3N}(\hat{t}) = \delta_{1..3N} \cdot \text{sign}(\sin \alpha(\hat{t})) \quad (\text{IV.28})$$

Le problème $(\mathcal{PE}_{a, \Omega, \alpha}^{\mathcal{D}})$ est initialisé avec la solution à direction de poussée constante. Ce problème est constitué de $3N+6$ variables (N commandes sur les trois phases de poussée et les six instants de commutation), de trois contraintes d'égalité (le rendez-vous orbital) et de $6N+6$ contraintes d'inégalité. Il est résolu avec une méthode de type gradient (**SQP** par exemple) puisqu'il est possible de déterminer les dérivées des contraintes par la méthode des différences finies. La propagation de l'évolution du système se fait via une intégration de type Runge-Kutta sur le modèle de Gauss. Par ailleurs, l'extrapolation du système sur les arcs balistiques se fait via la modélisation analytique, ce qui permet de diminuer le temps de calcul. La normalisation des états permet d'améliorer les performances et la précision de ce type de méthode. La méthode de *Différenciation automatique* permet d'améliorer le calcul des dérivées [Caillau 00]. Dans ce cadre d'étude, seule la méthode des différences finies a été testée.

Loi de commande prédéterminée

Dans ce qui précède, la discrétisation de la commande a permis de modéliser le problème d'optimisation et de rechercher la commande optimale. Cependant, il est également possible d'imposer une loi de commande et de rechercher la solution optimale relative à cette loi de commande prédéterminée [Herbinier 00]. Dans le paragraphe précédent, la direction de poussée est supposée constante le long de chaque intervalle de discrétisation, avec un changement de signe aux anti-noeuds. Au regard de l'équation IV.17, il s'avère que la poussée hors-plan est inefficace aux noeuds de l'orbite. Il est donc préférable de concentrer l'application de la composante hors-plan de la poussée vers les anti-noeuds et de la limiter aux endroits où elle est la moins efficace. Ainsi, une loi possible consiste à imposer la loi sous-optimale, sur la direction de poussée de la forme :

$$\delta(t) = \delta_{max} \cdot \sin(\alpha) \quad (\text{IV.29})$$

où δ_{max} représente la direction de poussée maximale, qui correspond à la direction de poussée constante du cas précédent. Selon l'équation IV.29, la poussée est maximale aux anti-noeuds et s'annule aux noeuds. De ce fait, puisque la correction tangentielle est effectuée simultanément, l'intégralité de la poussée vers les noeuds est utilisée pour corriger l'altitude. Cette loi de poussée est équivalente à celle adoptée pour la correction de l'inclinaison uniquement dans [Kluever 00b]. Par la suite, cette loi de direction de poussée sera généralisée dans le cas de correction hors-plan quelconque.

Le problème d'optimisation se simplifie. En effet, pour chaque phase de manoeuvre, il suffit de déterminer sa date de début, sa durée et la valeur de la déclinaison maximale. Donc, le problème $(\mathcal{PE}_{a,\Omega,\alpha}^{\mathcal{P}})$ s'écrit sous la forme :

$$(\mathcal{PE}_{\hat{a},\hat{\Omega},\hat{\alpha}}^{\mathcal{P}}) \left\{ \begin{array}{l} \min \mathcal{J}(\hat{t}_{1\dots 6}, \delta_{1\dots 3}) = -m(\hat{t}_f) \\ \text{ou bien } \min [(\hat{t}_2 - \hat{t}_1) + (\hat{t}_4 - \hat{t}_3) + (\hat{t}_6 - \hat{t}_5)] \\ \varepsilon_a(\hat{t}_{1\dots 6}, \delta_{1\dots 3}) = 0 \\ \varepsilon_{\Omega}(\hat{t}_{1\dots 6}, \delta_{1\dots 3}) = 0 \\ \varepsilon_{\alpha}(\hat{t}_{1\dots 6}, \delta_{1\dots 3}) = 0 \\ \hat{t}_0 < \hat{t}_1 < \hat{t}_2 < \hat{t}_3 < \hat{t}_4 < \hat{t}_6 < \hat{t}_f \\ -\frac{\pi}{2} < \delta_{1\dots 3} < \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad (\text{IV.30})$$

Ce problème est constitué de 9 variables d'optimisation (les six instants de commutation et les trois amplitudes maximales de déclinaison), de trois contraintes d'égalité (le rendez-vous orbital) et de douze contraintes d'inégalité (contraintes sur les variables d'optimisation). Une méthode de type gradient est utilisée pour le résoudre (la méthode **SQP** par exemple).

IV.4 Résolution du problème continu avec rendez-vous en (a, Ω, α, i)

La contrainte supplémentaire de rendez-vous en inclinaison est ici rajoutée. Ce nouveau problème est équivalent au problème précédent. Il faut donc déterminer les instants de commutation de l'état du moteur ainsi que les directions de poussées. Comme pour le cas précédent, plusieurs possibilités de modélisation de la commande sont possibles : par collocation directe, discrétisation ou par une loi de commande imposée. A ce nouveau problème se rajoute également trois nouvelles variables qui sont les anomalies de changement de signe de la direction de poussée. Elles sont soit égales aux noeuds (si seule l'inclinaison est corrigée via les composantes hors-plan), ou alors elles doivent être optimisées pour combiner les corrections en (i, Ω) .

IV.4.1 Recherche d'une solution initiale

La solution issue du raccordement des poussées de la solution à multi-poussées étalées sert d'initialisation à ce nouveau problème. Pour ce faire, deux cas de figures sont

possibles :

- soit les anomalies de changement de signe sont fixées à leur valeurs issues de la solution avec raccordement des multi-poussées.
- soit elles sont déterminées pour affiner le rendez-vous en (Ω, i) .

La première solution est préférable puisque généralement, la solution à multi poussées étalées est assez proche de la solution à trois phases de poussées continues. Ce problème s'écrit donc :

$$(\mathcal{PE}^{ini}_{a,\Omega,\alpha,i}) \begin{cases} \varepsilon_a(a_1, a_2, i_1, i_2) = 0 \\ \varepsilon_\Omega(a_1, a_2, i_1, i_2) = 0 \\ \varepsilon_\alpha(a_1, a_2, i_1, i_2) = 0 \\ \varepsilon_i(a_1, a_2, i_1, i_2) = 0 \\ \alpha_{1\dots 3} \text{ fixés} \end{cases} \quad (\text{IV.31})$$

Dans le cas où la solution du problème $(\mathcal{PE}^{ini}_{a,\Omega,\alpha,i})$ est difficile à calculer, les trois anomalies $\alpha_{1\dots 3}$ sont libérées et le problème à résoudre devient un problème de minimisation de quatre contraintes (résolu par la méthode **FSQP**).

IV.4.2 Modélisation et résolution du problème d'optimisation

Une normalisation du problème est effectuée selon les transformations introduites précédemment (cf. l'équation IV.25). Comme pour le cas sans correction d'inclinaison, cette transformation permet d'améliorer le traitement numérique et la convergence du processus d'optimisation. Les trois méthodes de résolution appliquées précédemment peuvent être appliquée à ce nouveau problème.

Méthode de collocation directe

La méthode de collocation peut être appliquée pour résoudre ce problème. Il est donc constitué de $18(N+1)+9$ variables (les commandes et les variables d'état à chaque noeud, les instants de commutation, les trois anomalies de changement de signe de la commande), de quatre contraintes d'égalité (le rendez-vous orbital) et de $21 \cdot (N+1) + 12$ contraintes d'inégalité (les sept contraintes aux extrémités des N intervalles de discrétisation, les six conditions sur les instants de commutation et les six conditions sur les anomalies de changement de signe). Cette méthode n'a pas été testée dans le cadre de cette étude. En effet, devant l'échec de la méthode de collocation directe dans le cas sans correction de l'inclinaison, et étant donné la taille plus élevée du nouveau problème, nous avons préféré explorer les deux autres méthodes qui se sont avérées plus performantes.

Discrétisation de la commande

La deuxième méthode consiste donc à discrétiser la loi de commande sur des intervalles à pas fixe. Les états du système sont déterminés par propagation des équations (intégration

numérique Runge-Kutta). Ainsi, la direction de poussée est constante sur chaque intervalle de discrétisation, avec le changement de signe à des anomalies données par les corrections à effectuer en (Ω, i) . La loi de direction de poussée, sur chaque phase de manoeuvre est donnée par :

$$\delta_{1\dots 3N}(t) = \delta_{1\dots 3N} \cdot \text{sign}(\cos(\alpha - \alpha_{1\dots 3})) \quad (\text{IV.32})$$

avec :

- δ_k direction de poussée sur le $k^{\text{ième}}$ intervalle de discrétisation,
- α_k noeud d'intersection. Trois cas de figures sont possibles, selon l'utilisation souhaitée de la composante hors-plan de la poussée :

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si seul } \Omega \text{ est corrigé} \\ 0 & \text{si seul } i \text{ est corrigé} \\ \text{autre} & \text{si } (i, \Omega) \text{ corrigés simultanément} \end{cases} \quad (\text{IV.33})$$

Dans le cas général, cette anomalie devra être optimisée pour que les contraintes finales soient respectées.

Le problème d'optimisation s'écrit donc sous la forme :

$$(\mathcal{PE}_{\hat{a}, \Omega, \alpha, i}^{\mathcal{D}}) \left\{ \begin{array}{l} \min \mathcal{J}(\hat{t}_{1\dots 6}, \delta_{1\dots 3N}, \alpha_{1\dots 3}) = -m(\hat{t}_f) \quad \text{ou} \quad \min [(\hat{t}_2 - \hat{t}_1) + (\hat{t}_4 - \hat{t}_3) + (\hat{t}_6 - \hat{t}_5)] \\ \varepsilon_a(\hat{t}_{1\dots 6}, \delta_{1\dots 3N}, \alpha_{1\dots 3}) = 0 \\ \varepsilon_{\Omega}(\hat{t}_{1\dots 6}, \delta_{1\dots 3N}, \alpha_{1\dots 3}) = 0 \\ \varepsilon_{\alpha}(\hat{t}_{1\dots 6}, \delta_{1\dots 3N}, \alpha_{1\dots 3}) = 0 \\ \varepsilon_i(\hat{t}_{1\dots 6}, \delta_{1\dots 3N}, \alpha_{1\dots 3}) = 0 \\ \hat{t}_0 < \hat{t}_1 < \hat{t}_2 < \hat{t}_3 < \hat{t}_4 < \hat{t}_6 < \hat{t}_f \\ -\frac{\pi}{2} < \delta_{1\dots 3N} < \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \alpha_{1\dots 3} \leq \pi \end{array} \right. \quad (\text{IV.34})$$

Ce problème est constitué de $3N + 9$ variables d'optimisation, de quatre contraintes d'égalité et de $6N + 12$ contraintes d'inégalité. Il est résolu par une méthode lagrangienne (**SQP** ou bien **FSQP** s'il existe des problèmes de convergence vers une solution respectant les contraintes). La grande difficulté de ce problème réside dans la détermination des anomalies de changement de signe (et donc des noeuds d'intersection). En effet, le problème est très sensible à ces trois variables, ce qui rend essentielle la qualité de la solution initiale.

Loi de commande prédéterminée

Il est également possible de prédéfinir une loi de commande sous-optimale, ce qui permet de simplifier le problème d'optimisation à résoudre. Puisque la composante hors-plan est inefficace aux noeuds pour la correction de l'ascension droite du noeud ascendant

et aux anti-noeuds pour celle de l'inclinaison, il est bien évidemment "optimal" de la centrer autour du noeud d'intersection qui permet de combiner les deux corrections.

La loi quasi-optimale qui en découle s'écrit sous la forme :

$$\delta(t) = \delta_{max} \cdot (\cos(\alpha - \alpha_n)) \quad (\text{IV.35})$$

Où :

- δ_{max} est l'amplitude maximale de la composante hors-plan,
- α_n est l'anomalie correspondant au noeud d'intersection. Trois cas de figures sont possibles, selon l'utilisation souhaitée de la composante hors-plan de la poussée :

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si seul } \Omega \text{ est corrigé} \\ 0 & \text{si seul } i \text{ est corrigé} \\ \text{autre} & \text{si } (i, \Omega) \text{ corrigés simultanément} \end{cases} \quad (\text{IV.36})$$

Cette loi est la généralisation de celle donnée par l'équation IV.29 (pour la correction uniquement de l'ascension droite du noeud ascendant) et de celle utilisée dans [Kluever 00b](pour la correction exclusive de l'inclinaison).

Ainsi, sur chaque phase de poussée, l'amplitude maximale de poussée et l'anomalie de changement de signe suffisent pour modéliser la commande. Le problème à résoudre se voit donc simplifié et s'écrit sous la forme :

$$(\mathcal{P}\mathcal{E}_{\hat{a}, \Omega, \alpha, i}^{\mathcal{P}}) \left\{ \begin{array}{l} \min \mathcal{J}(\hat{t}_{1..6}, \delta_{1..3}, \alpha_{1..3}) = -m(\hat{t}_f) \quad \text{ou} \quad \min [(\hat{t}_2 - \hat{t}_1) + (\hat{t}_4 - \hat{t}_3) + (\hat{t}_6 - \hat{t}_5)] \\ \varepsilon_a(\hat{t}_{1..6}, \delta_{1..3}, \alpha_{1..3}) = 0 \\ \varepsilon_{\Omega}(\hat{t}_{1..6}, \delta_{1..3}, \alpha_{1..3}) = 0 \\ \varepsilon_{\alpha}(\hat{t}_{1..6}, \delta_{1..3}, \alpha_{1..3}) = 0 \\ \hat{t}_0 < \hat{t}_1 < \hat{t}_2 < \hat{t}_3 < \hat{t}_4 < \hat{t}_6 < \hat{t}_f \\ -\frac{\pi}{2} < \delta_{1..3} < \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \alpha_{1..3} \leq \pi \end{array} \right. \quad (\text{IV.37})$$

Ce problème est résolu avec une méthode de type gradient (la méthode **SQP**).

IV.5 Optimalité des solutions par l'approche indirecte

Dans ce qui précède, le problème de détermination d'une solution comportant trois phases de poussées continues a été résolu par une approche directe. Des méthodes d'optimisation locale ont été utilisées pour rechercher une telle solution. L'optimalité de la solution ainsi calculée n'est pas garantie. Par ailleurs, l'optimalité d'une solution peut être testée dans l'approche indirecte (se basant sur l'application du principe du maximum par exemple [Bryson 75]). En effet, cette approche dite indirecte permet d'écrire

des conditions nécessaires d'optimalité en se basant sur le calcul de variables adjointes. Il n'est pas aisé de déterminer ces variables, notamment à cause de la grande sensibilité du problème à ces états adjoints.

Plusieurs stratégies d'estimation de ces paramètres ont été mises au point. Dans ce paragraphe, seule celle issue de la résolution du problème optimal via la méthode de collocation directe est utilisée. En effet, il a été établi des relations liant les paramètres adjoints et les paramètres Karush, Kuhn et Tucker (KKT) du problème de PNL associé [Fahroo 01, Enright 92, Von Stryck 93, Büskens 00]. Ainsi, selon la méthode de collocation choisie, une relation est établie entre l'approche directe et indirecte. Dans [Enright 91a, Enright 91b], la méthode de Runge-Kutta est utilisée pour réaliser l'intégration des équations. Il a été établi que les paramètres de KKT à chaque noeud (i.e. extrémité d'un intervalle de discrétisation) représentent la discrétisation de l'état adjoint à cet instant. Le même résultat est élargi au cas de collocation avec la règle de Gauss-Lobatto [Von Stryck 93, Enright 91b]. De meilleurs résultats sont obtenus dans le cas de collocation basée sur l'approche pseudo-spectrale de Legendre [Fahroo 01].

Dans le cas où les états ne sont plus des variables de discrétisation (ce qui correspond à l'approche adoptée dans cette étude), il a été établi en [Büskens 00] que les états adjoints au temps final sont calculés directement en fonction des multiplicateurs de KKT associés au problème optimal. Ainsi, si λ désigne l'état adjoint au temps final et σ les multiplicateurs de KKT, alors :

$$\lambda(t_N) = \partial_x g(x_N) + \sigma^T \frac{\partial \psi_f}{\partial x}(x_N) \quad (\text{IV.38})$$

où g est la fonction coût et ψ_f la contrainte sur l'état final. Ainsi, les paramètres de KKT donnés par la méthode de programmation non linéaire utilisée (la **SQP** dans cette étude) approximent les valeurs des multiplicateurs de Lagrange associés au problème étudié. A partir de ces valeurs des états adjoints et en se basant sur la connaissance de la commande optimale (issue de la minimisation de l'Hamiltonien), les équations sont intégrées de l'instant final jusqu'à l'instant initial. La précision avec laquelle l'état initial est reconstitué permet de conclure sur l'optimalité de la solution. Il est également possible d'introduire la fonction de commutation [Bryson 75], ce qui permet de conclure sur l'optimalité de la structure de poussée imposée (i.e. la stratégie de trois phases de poussée). Dans ce qui suit, le principe du maximum de Pontryagin est appliqué au système étudié, ce qui permet d'établir les équations d'évolution des états et états adjoints et de la commande optimale du système.

IV.5.1 Rendez-vous (a, Ω, α)

Dans un premier temps, le problème $(\mathcal{PE}_{\hat{a}, \Omega, \alpha}^{\mathcal{D}})$ est résolu par l'approche indirecte. Le problème de contrôle optimal étudié s'écrit sous la forme :

$$\min(-\hat{m}(\hat{t}_f)) = \min(g(\hat{x}(\hat{t}), \hat{t})) \quad (\text{IV.39})$$

$$\frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} = f(\hat{x}, \mathbf{u}, \hat{F}, \hat{t}) \quad (\text{IV.40})$$

$$\hat{x}(\hat{t}_0) = \hat{x}_0 \quad (\text{IV.41})$$

$$\psi(\hat{x}(\hat{t}_f), \hat{t}_f) = 0 \quad (\text{IV.42})$$

où

- le critère ne porte que sur l'état final du satellite et de ce fait le problème est sous forme Bolza.
- la condition IV.41 représente les conditions sur l'état initial $(\hat{m}, \hat{a}, \Omega, \alpha)$.
- f est donnée par les équations de Gauss.
- ψ représente la condition sur l'état final. Elle est de la forme :

$$\psi = \begin{pmatrix} \hat{a} - \hat{a}_c \\ \Omega - \Omega_c \\ \alpha - \alpha_c \end{pmatrix} \quad (\text{IV.43})$$

le vecteur de commande $\mathbf{u} = [u_t, u_w]$ est constitué de deux composantes puisque la direction normale de poussée est supprimée. Ce vecteur est unitaire et le module de poussée est donné par :

$$\hat{F} = \begin{cases} 0 & \text{si } \epsilon = 0 \\ \hat{F}_{max} & \text{si } \epsilon = 1 \end{cases} \quad (\text{IV.44})$$

avec ϵ est l'état du moteur (cf. §II.4.2).

L'équation IV.40 s'écrit également sous la forme :

$$\frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} = f_0 + \mathcal{M}\hat{F}\mathbf{u} \quad (\text{IV.45})$$

avec :

$$f_0 = \begin{pmatrix} -\frac{\hat{F}}{\hat{g}_0 \hat{I}_{sp}} \\ 0 \\ \mathcal{C}_{J_2}^\Omega(i) \frac{1}{\hat{a}^{3.5}} \\ \frac{1}{\hat{a}^{1.5}} + \frac{\mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i)}{\hat{a}^{3.5}} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.46})$$

et

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 \cdot \hat{a}^{1.5} \frac{1}{\hat{m}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\hat{a}} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin i} \cdot \frac{1}{\hat{m}} \\ 0 & -\sqrt{\hat{a}} \cdot \frac{\sin \alpha}{\tan i} \cdot \frac{1}{\hat{m}} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.47})$$

L'Hamiltonien associé à ce problème est donné à partir de l'application du principe du maximum de Pontryagin [Pontryagin 64]:

$$H = \lambda^T f \quad (\text{IV.48})$$

La commande optimale est obtenue en minimisant l'Hamiltonien :

$$\mathbf{u}^* = \underset{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{ad}}{\text{arg min}} H \quad (\text{IV.49})$$

L'Hamiltonien étant linéaire par rapport à la commande, sa minimisation donne :

$$\mathbf{u}^* = -\frac{\mathcal{M}^T \lambda}{\|\mathcal{M}^T \lambda\|} \quad (\text{IV.50})$$

En ce qui concerne la commande supplémentaire qui est la poussée du moteur (état éteint ou allumé), la minimisation de l'Hamiltonien conduit à une commande de type Bang-Bang :

$$\hat{F} = \begin{cases} 0 & 0 \text{ si } S > 0 \\ \hat{F}_{max} & 0 \text{ si } S < 0 \end{cases} \quad (\text{IV.51})$$

où S est la fonction de commutation qui est donnée par :

$$S = \frac{\lambda_m}{\hat{g}_0 \hat{I}_{sp}} - \|\mathcal{M}^T \lambda\| \quad (\text{IV.52})$$

Le cas où cette fonction est nulle sur un intervalle est appelé arc singulier. Dans ce cas, les conditions d'optimalité du premier ordre ne sont pas suffisantes pour déterminer la commande optimale. Il sera supposé dans cette étude qu'aucun arc singulier n'existe.

Les états adjoints sont donnés par :

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \cdot \lambda \quad (\text{IV.53})$$

Les équations de transversalité permettent de compléter le système d'équations à résoudre. En plus des conditions IV.41 et IV.42, il est possible d'écrire :

$$\lambda(\hat{t}_0) = -\left[g_{\hat{x}}(\hat{t}_0) + \sigma_0^T \frac{\partial \psi_f}{\partial \hat{x}}(\hat{x}(\hat{t}_f), \mathbf{u}^*(\hat{t}_0), \hat{t}_0) \right] \quad (\text{IV.54})$$

$$\lambda(\hat{t}_f) = g_{\hat{x}}(\hat{x}(\hat{t}_f), \mathbf{u}^*(\hat{t}_f), \hat{t}_f) + \sigma^T \frac{\partial \psi_f}{\partial \hat{x}}(\hat{x}(\hat{t}_f), \mathbf{u}^*(\hat{t}_f), \hat{t}_f) \quad (\text{IV.55})$$

où σ_0 et σ sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux deux contraintes extrémales. Notamment, la valeur finale de l'état adjoint associé à la masse vaut 1.

Donc, le système à résoudre est constitué des équations (IV.40, IV.53), sous les conditions aux deux bouts (IV.41, IV.42, IV.54, IV.55). La commande optimale est donnée par l'équation IV.50 et l'état du moteur par l'équation IV.51.

Les équations du système étant établies, il est à présent possible de vérifier l'optimalité de la solution issue de l'approche directe. Donc, à partir de la position finale du satellite et des valeurs des multiplicateurs de KKT, les équations (IV.40, IV.53) sont intégrées vers l'instant initial. La commande utilisée est celle minimisant l'Hamiltonien (donnée par l'équation IV.50). Les instants de commutation sont définis par les instants issus de l'approche directe. La précision avec laquelle la condition IV.41 est respectée donne une idée sur l'optimalité de la solution trouvée. Cette méthodologie est appliquée à un cas numérique et expliqué dans le paragraphe IV.6. Puisque les instants de commutation sont imposés, des discontinuités sur la dynamiques du système à de points intérieurs sont introduites, ce qui correspond à l'extinction ou l'allumage des moteurs.

Par exemple, la modélisation d'une phase de poussée suivie d'un arc balistique se fait par :

$$\dot{x} = f^{(1)}(x, u, t) \quad (\text{IV.56})$$

à partir de l'instant \hat{t}^* issu de l'optimisation par approche directe, la dynamique du système devient :

$$\dot{x} = f^{(2)}(x, u, t) \quad (\text{IV.57})$$

Où $f^{(1)}$ (respectivement $f^{(2)}$) est la dynamique avec $\epsilon = 1$ (respectivement $\epsilon = 0$).

Dans [Bryson 75], ce type de discontinuité et son influence sur le problème optimale est traité. Dans notre cas, puisque les instants de commutation ne dépendent pas explicitement des variables d'états, ce type de discontinuité induit une discontinuité sur l'Hamiltonien (les variables adjointes sont quant à elles continues à l'instant de commutation). Cette propriété a pu être vérifiée à posteriori, en traçant l'Hamiltonien relatif à la solution obtenue.

IV.5.2 Rendez-vous (a, Ω, α, i)

Dans ce qui précède, l'inclinaison a été supposée constante. Ce paramètre peut être pris en considération en rajoutant son équation d'évolution. Globalement, les équations restent valables, avec le rajout de l'état adjoint associé à cette variable. L'ordre du système global augmente, mais la stratégie de résolution reste la même.

Généralement, il est possible d'écrire le système global avec toutes les variables du système (sans aucune simplification comme celle faite dans le paragraphe précédent). Le fait de se libérer d'une variable d'état revient à imposer des valeurs finales ou initiales nulles pour l'état adjoint associé.

Dans le cas sans rendez-vous en inclinaison, ce paramètre est pris comme paramètre du problème d'optimisation. Par contre, dans le cas où sa valeur finale est fixée, il est considéré comme une variable, ce qui nécessite l'introduction de sa variable adjointe associée.

IV.6 Application à un cas d'étude

Le cas d'étude présenté dans le cas impulsif (cf. §III.10.2) est à nouveau résolu dans ce paragraphe. Ce satellite est supposé équipé d'un moteur dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$\begin{cases} m = 1000 \text{ kg} \\ F = 3 \text{ Newton} \\ I_{sp} = 2000 \text{ s} \end{cases} \quad (\text{IV.58})$$

L'accélération initiale est donc de $3 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$, ce qui correspond à un niveau de poussée moyen.

IV.6.1 Fractionnement des poussées

A partir de la solution tri-impulsionnelle, le fractionnement des poussées est effectué. Le nombre des poussées dépend de la valeur de la poussée du moteur. Le tableau IV.1 donne le nombre de poussées appliquées à chaque phase de manoeuvre et ceci pour différentes valeurs de la poussée, pour un transfert avec rendez-vous en (a, Ω, α) .

F_{max} (Newton)	60	10	3	1	0.5
N_1	2	4	12	34	68
N_2	2	4	8	8	8
N_3	2	4	10	50	98
coût (m/s)	260.29	259.1373	258.439	258.06	270.23

TAB. IV.1 – Nombres de poussées fractionnées pour divers niveaux de poussée - sans correction de l'inclinaison.

F_{max} (Newton)	60	10	3	1	0.5
N_1	2	4	12	36	72
N_2	2	4	14	36	72
N_3	2	2	8	20	42
coût (m/s)	289.93	287.19	287.19	286.53	288.92

TAB. IV.2 – Nombres de poussées fractionnées pour divers niveaux de poussée - avec correction de l'inclinaison.

Le fractionnement et donc la multiplication des poussées doit avoir un effet bénéfique sur la consommation car leur composante tangentielle voit son efficacité augmenter avec

l'altitude. Ceci se vérifie sur les quatre premières colonnes du tableau IV.1 et pas sur la dernière.

Lorsque l'amplitude maximale devient très faible ($F_{max} = 0.5 N$), le coût devient plus important. Ceci se justifie par le fait que les durées des phases de dérives sont devenues insuffisantes pour apporter les corrections nécessaires sur Ω et de ce fait, les composantes hors-plan des poussées sont plus importantes. Cette situation peut être contournée si la durée totale de mise à poste est prolongée. En effet, la recherche de solution pour le même niveau de poussée et pour une durée plus longue (400 jours au lieu de 300 jours) permet de converger vers une solution moins coûteuse (le coût est de l'ordre de 259 m/s pour un transfert sans rendez-vous en inclinaison).

D'autre part, les coûts relatifs au problème avec correction de l'inclinaison sont plus faibles que ceux de la solution tri-impulsionnelle, ce qui se justifie par le fait que dans le cas multi-impulsionnel, le nombre de tours différentiels entre la cible et le satellite est libéré. Ainsi, l'algorithme converge vers des solutions de nature différente par rapport à l'initialisation.

Résolution du problème ($\mathcal{P}^m_{a,\alpha,\Omega}$)

La valeur de la poussée est fixée à 3 Newton. Le fractionnement des poussées conduit à une stratégie de transfert constituée de 30 poussées dont la répartition entre les trois phases est donnée dans le tableau IV.1. Les deux dernières phases de manoeuvres se situent vers la fin de l'horizon temporel de mise à poste. La figure IV.18 résume les caractéristiques de la solution. Les poussées relatives aux trois phases de poussées ne sont pas représentées selon la variable temporelle du fait des ordres de grandeur des durées de dérive. Un zoom est effectué sur la première phase de poussées (sur l'altitude, la déclinaison). Les modules des poussées ne dépassent pas les 10 m/s. Les modules des poussées tangentielle et hors-plan diminuent avec l'altitude, ce qui se justifie par l'augmentation de l'efficacité des poussées avec l'altitude. La visualisation des déclinaisons de poussées permet de conclure que la répartition des poussées de la solution optimale est inversement proportionnelle à l'altitude. Le tracé de la variation de $\frac{\sin(\delta)}{\sqrt{a}}$ (cf. figure IV.18), ce qui correspond à la constante K introduite en annexe A, montre que cette valeur est approximativement constante (à 10^{-3} près) sur une même phase de poussée. Ainsi, la condition d'optimalité de la répartition des poussées hors-plan (donnée par l'équation B.6) est vérifiée.

Les caractéristiques du transfert sont données par le tableau IV.3. Ainsi, cette solution est moins coûteuse que la solution tri-impulsionnelle (cf. tableau III.2). Les orbites de dérive sont cependant équivalentes entre les deux solutions. Du fait de leur fractionnement, les poussées sont plus efficaces avec l'altitude et ainsi, le coût global se voit amélioré.

	a [km]	durée [jours]
O. dérive #1	7506.34	293.63
O. dérive #2	7630.07	1.47

TAB. IV.3 – Caractéristiques de la solution optimale du problème ($\mathcal{P}^m_{a,\alpha,\Omega}$).

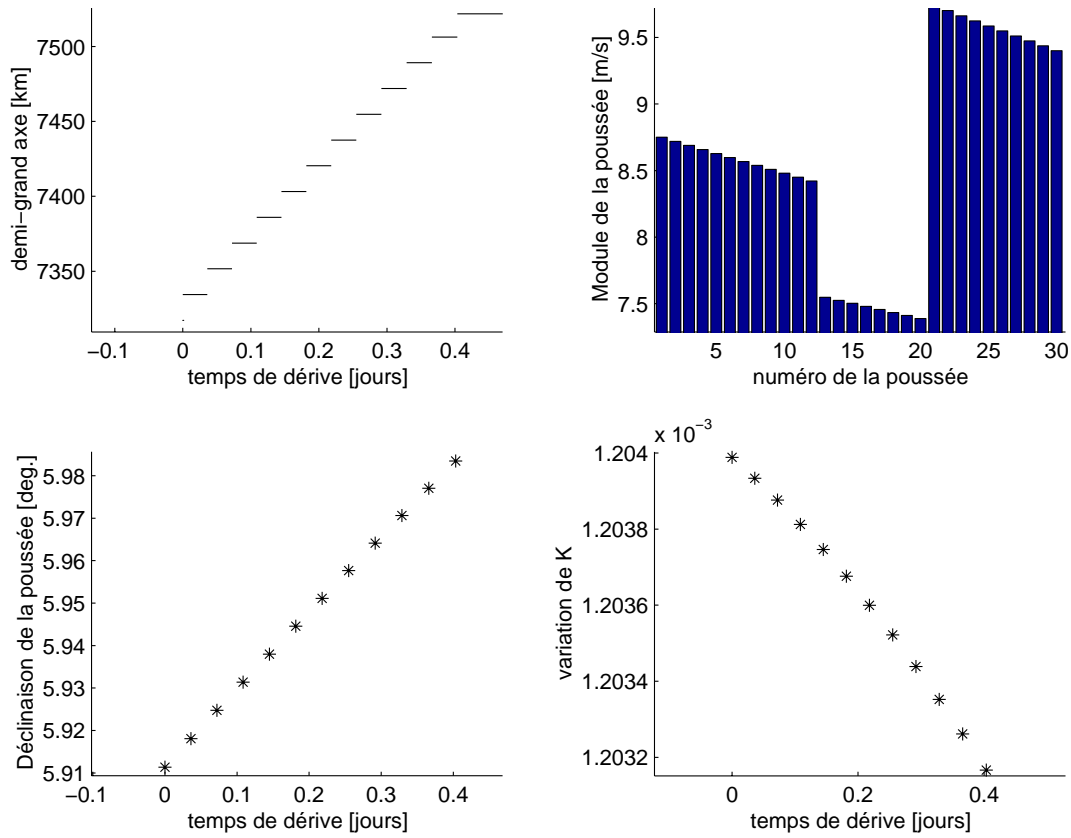


FIG. IV.18 – Résolution multi-impulsionnel sans correction de l’inclinaison (avec zoom de la première phase de poussée).

Résolution du problème ($\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega,i}^m$)

Le problème avec rendez-vous en (a, α, Ω, i) est résolu pour $F_{max} = 3$ Newton. Le nombre total de poussées est de 34 poussées (cf. tableau IV.2). Ce problème est assez proche de la solution sans correction de l’inclinaison, puisque la correction totale sur ce paramètre est de 1 degré. En effet, plus la correction est importante, plus le nombre total de poussées est grand. Comme précédemment, la solution est résumée par la figure IV.19. La déclinaison de poussée est proportionnelle à l’altitude et les poussées, sur une même phase de manoeuvre, sont décroissantes avec l’altitude puisque leur efficacité augmente. Le tracé de la constante K (cf. figure IV.19) permet de remarquer qu’elle reste approximativement constante le long d’une phase de manoeuvre. Les anomalies d’application des poussées sont de 0.69 , 0.3 et 0.57 degrés, c’est à dire pratiquement aux noeuds. Ainsi, les composantes hors-plan des poussées servent essentiellement à corriger l’inclinaison. Les orbites de dérive, données par le tableau IV.4, possèdent approximativement les mêmes caractéristiques que celles de la solution tri-impulsionnelle. Le gain constaté sur le coût provient principalement du fractionnement des poussées (et non de la nature différente de la solution calculée).

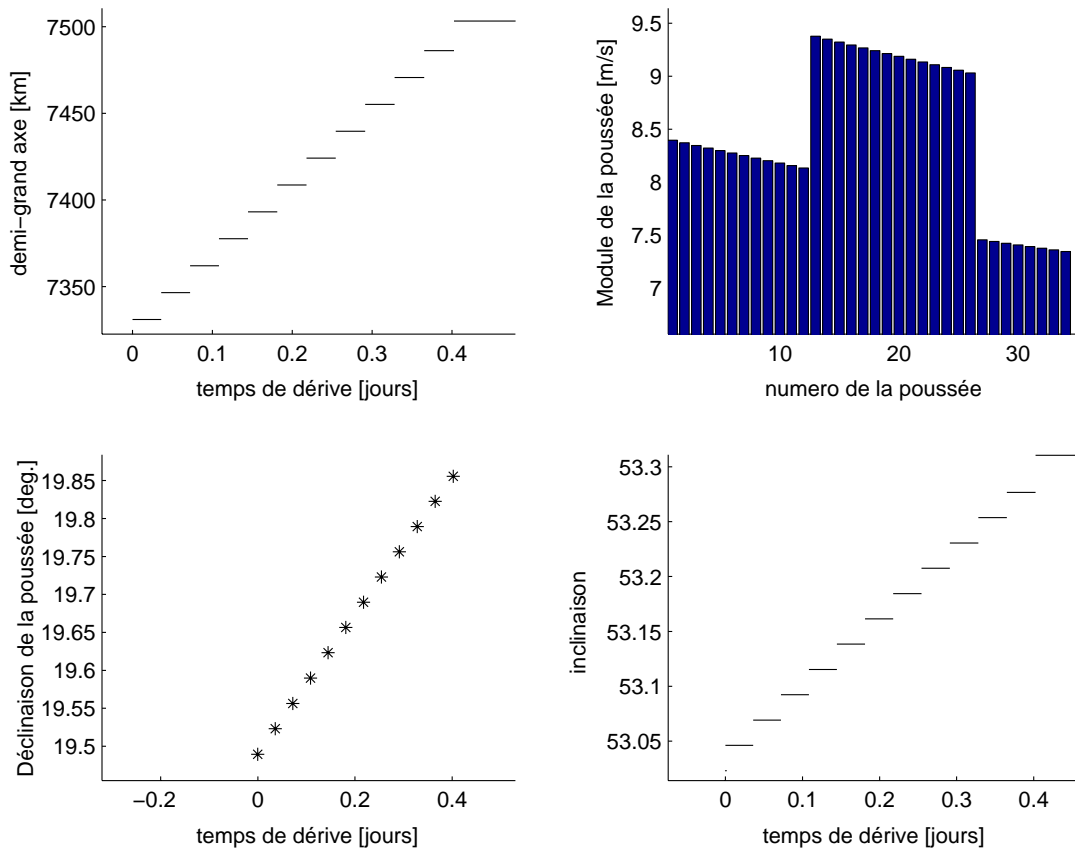


FIG. IV.19 – Résolution du problème multi-impulsionnel avec correction de l'inclinaison (avec zoom de la première phase de poussée)

	a [km]	durée [jours]	i [deg]
O. dérive #1	7486.18	289.55	53.31
O. dérive #2	7725.58	2.55	53.74

TAB. IV.4 – Caractéristiques de la solution optimale du problème $(\mathcal{P}_{a,\alpha,\Omega,i}^m)$.

IV.6.2 Etalement des poussées

L'étalement de chaque poussée élémentaire est effectué selon le processus présenté au §IV.2. Les résultats relatifs à chaque problème sont présentés dans ce qui suit.

Résolution du problème $(\mathcal{PE}_{a,\Omega,\alpha}^m)$

L'étalement de la solution optimale du problème multi-impulsionnel conduit à un transfert dont l'erreur finale est de :

$$\begin{cases} \varepsilon_a = 10^{-9} \text{ m} \\ \varepsilon_\Omega = 0.1 \text{ deg.} \\ \varepsilon_\alpha = 14 \text{ deg.} \end{cases} \quad (\text{IV.59})$$

La masse finale du satellite est de 986.897 kg (ce qui est équivalent à un incrément de vitesse de 258.7611 m/s).

Pour corriger ces erreurs issues de l'étalement (et donc de la perte d'efficacité des poussées), une solution initiale à multi-poussées étalées est recherchée. Elle est assez proche de l'initialisation, en terme de coût, comme le montre le tableau IV.5. En effet, puisque les composantes hors-plan des poussées sont fixées, seules des modifications sur les altitudes de dérive permettent d'affiner le rendez-vous final imposé. Ainsi, l'altitude de la deuxième orbite de dérive augmente pour réduire l'écart entre l'anomalie cible et l'anomalie réelle du satellite. Cette modification des altitudes a de faibles répercussions sur la consommation du satellite. Cependant, une modification des altitudes de dérive peut être insuffisante pour apporter toutes les corrections nécessaires. En effet, l'erreur sur l'ascension droite du noeud ascendant reste du même ordre de grandeur que celle de l'initialisation.

La solution optimale permet d'améliorer la précision sur les différents paramètres acquis, sans toutefois améliorer de façon significative la consommation du satellite (le gain est de 95 g). En effet, cette solution possède des déclinaisons plus importantes qui lui permettent de corriger l'ascension droite du noeud ascendant. De ce fait, le coût augmente et donc le gain entre les deux solutions n'est pas considérable.

	a_1 km	a_2 km	$m(t_f)$ kg	ε_a m	ε_Ω deg.	ε_α deg.
Solution multi impulsionnelle	7506.34	76300.06	986.89	10^{-8}	0.1	14
Solution initiale multi-étalée	7506.07	7665.17	986.895	10^{-8}	-0.07	-10^{-4}
Solution optimale multi-étalée	7506.071	7665.17	986.80	10^{-8}	$3 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$

TAB. IV.5 – Caractéristiques des solutions du problème ($\mathcal{PE}_{a,\alpha,\Omega}^m$).

Le transfert est donc effectué par une succession d'arcs de poussées maximales et d'arcs balistiques. Les durées des arcs balistiques intermédiaires (qui correspondent aux arcs entre des phases de poussées pendant une phase de manoeuvre) sont de l'ordre de quelques minutes (cf. figure IV.20). La variation de l'altitude est constituée d'une succession de paliers et de variations continues (cf. figure IV.21). La masse du satellite possède ce même type de variation.

L'allure des répartitions des poussées hors-plan est donnée par la figure IV.22. La loi de répartition est croissante avec l'altitude, ce qui coïncide avec la loi de répartition optimale.

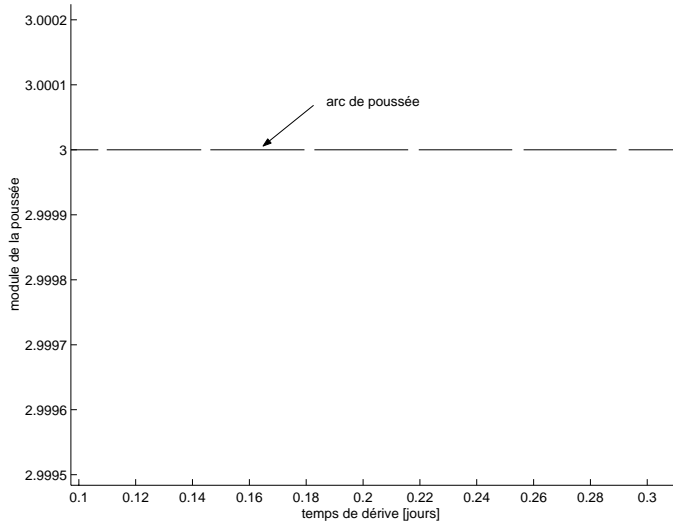


FIG. IV.20 – Niveau du module de poussée après étalement (avec zoom sur la première phase de poussée).

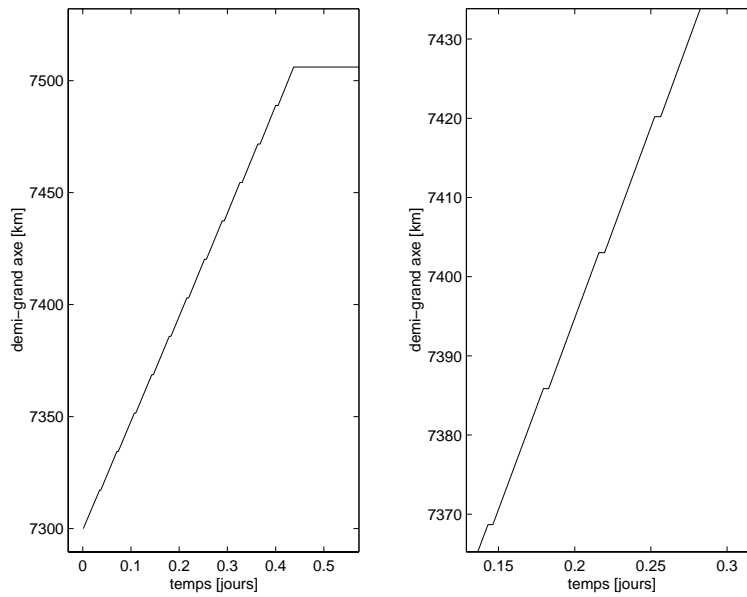


FIG. IV.21 – Variation du demi-grand axe (avec zoom sur la première phase de poussée).

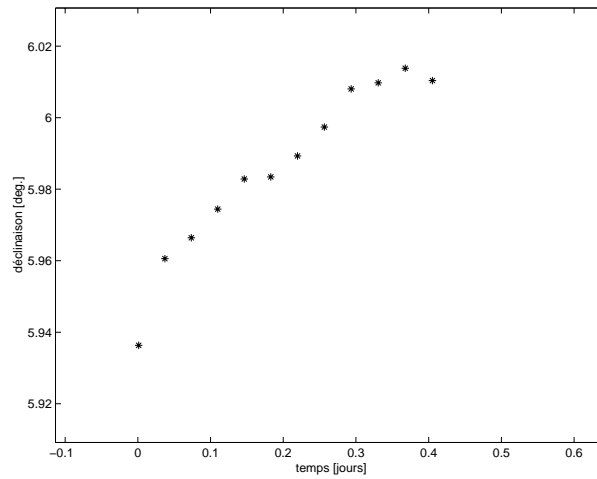


FIG. IV.22 – *Déclinaison de poussée sur la première phase de poussée, pour la solution optimale de $(\mathcal{PE}^m_{a,\alpha,\Omega})$.*

Résolution du problème $(\mathcal{PE}^m_{a,\Omega,\alpha,i})$

À présent, la correction de l'inclinaison est prise en compte. L'étalement de la solution multi-impulsionnelle permet d'obtenir une solution à multi-poussées étalées qui n'est pas précise pour les rendez-vous imposés (cf. tableau IV.6). Ceci était prévisible étant donnée la perte d'efficacité des poussées suite à leur étalement. Dans un premier temps, une solution au problème $(\mathcal{PE}^{m,ini}_{a,\Omega,\alpha,i})$ est recherchée. L'erreur sur l'acquisition de l'inclinaison est assez élevée (par rapport à la solution impulsionnelle), ce qui se justifie par le fait que les poussées étalées sont moins efficaces que les poussées impulsionnelles. En effet, si l'on désire effectuer une correction donnée sur ce paramètre, la déclinaison de la poussée en est déduite, mais du fait de la perte de l'efficacité de la poussée, une erreur finale est induite. Comme le montrent les résultats numériques, du fait de la stratégie de résolution utilisée, il s'avère difficile d'annuler l'erreur en inclinaison. La précision sur l'ascension droite du noeud ascendant est meilleure. En effet, une modification des inclinaisons des orbites de dérive permet de modifier la dérive naturelle due au J_2 et donc d'affiner l'acquisition de ce paramètre.

Ces différentes solutions restent assez proches puisque les méthodes de résolution sont des méthodes locales (utilisation du simplexe de Nelder & Mead).

Comme pour le cas impulsionnel, les composantes hors-plan servent essentiellement à corriger l'inclinaison. De ce fait, les anomalies d'intersection des noeuds sont donc aux alentours des noeuds de l'orbite. Similairement à l'altitude, l'inclinaison augmente par paliers (cf. figure IV.23).

Cette solution est utilisée, une fois les poussées raccordées, pour initialiser la recherche de la solution à trois poussées continues.

	a_1 km	a_2 km	i_1 deg.	i_2 deg.	$m(t_f)$ kg	ε_a m	ε_Ω deg.	ε_α deg.	ε_i deg.
Solution multi impulsionnelle	7486.18	7725.58	53.25	53.80	985.45	10^{-8}	2.0	-21.9	0.3
Solution initiale multi-étalée	7488.89	7727.59	53.43	53.72	985.40	10^{-8}	0.28	-0.2	0.28
Solution optimale multi-étalée	7488.24	7728.54	53.35	53.71	985.45	10^{-8}	0.00037	-0.20	0.27

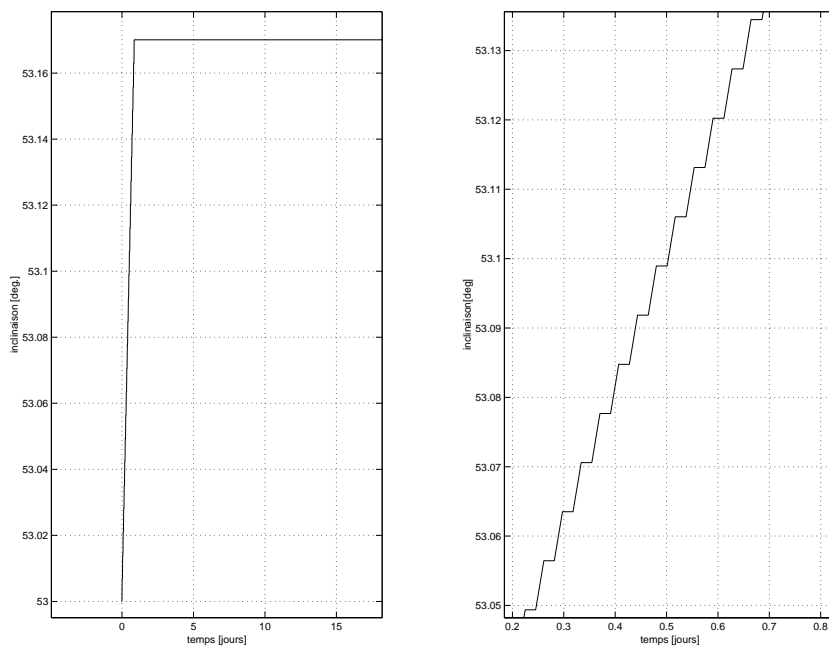
TAB. IV.6 – Caractéristiques des solutions du problème $(\mathcal{PE}_{a,\alpha,\Omega,i}^m)$.

FIG. IV.23 – Variation de l'inclinaison (avec zoom de la première phase de poussée).

IV.6.3 Résolution du problème à trois poussées continues

A présent, le problème à trois poussées continues est résolu. Les deux cas avec et sans correction de l'inclinaison sont traités et ceci pour les deux cas de figure de résolution, à savoir soit par discrétisation de la loi de commande, soit en imposant une loi prédéterminée. Comme énoncé précédemment, une normalisation des variables d'état est effectuée. Les résultats numériques présentés dans les paragraphes suivants sont donnés en fonction de ces valeurs normalisées. Le problème normalisé est donné par :

$$\begin{cases} \hat{t}_0 = 0 \\ \hat{t}_f = 0.2731[\text{jours}] = 23595.8[\text{secondes}] \\ \hat{m}_0 = 1 \\ \hat{a}_0 = 0.9317 \\ \hat{a}_c = 1 \end{cases} \quad (\text{IV.60})$$

Résolution du problème ($\mathcal{PE}_{a,\Omega,\alpha}$)

Dans ce paragraphe, le problème de mise à poste à trois poussées continues est résolu. Les deux cas de figure de résolution présentés précédemment sont pris en compte.

Discretisation de la commande Sur chaque phase de poussée, la direction de poussée est discrétisée. Le nombre d'intervalles de discrétisation est fixé à 30 (ce qui correspond à 96 variables d'optimisation). Plus le nombre d'intervalles de discrétisation est élevé, plus la solution est précise mais plus le temps de calcul est important, de même qu'augmente la difficulté pour la convergence vers une solution. Il existe donc un compromis temps de calcul/qualité de la solution d'où le choix effectué pour cet exemple.

A partir de la solution à multi poussées étalées puis raccordées, les solutions initiale et optimale du problème sont recherchées. La figure IV.25 résume la variation du vecteur état du système (la colonne de gauche donne les états et celle de droite, un zoom sur les dernières phases de poussées). La masse et le demi-grand axe varient continuellement sur les trois phases de poussées. Les angles (Ω, α) varient linéairement avec le temps (du fait du J_2 et du moyen mouvement pour l'anomalie). La variation de ces deux angles suite à la poussée n'est pas perceptible, puisqu'elle est du même ordre de grandeur que les dérivées naturelles.

Une vérification sur les valeurs finales des deux paramètres négligés (e, i) peut être réalisée. En effet, quelques erreurs sont induites sur ces deux paramètres (du fait des hypothèses simplificatrices et des erreurs induites par l'intégration numérique). Ceci dit, les ordres de grandeur de ces paramètres demeurent semblables à leurs valeurs initiales. Il est à remarquer, effectivement, que leur variation est quasi-sinusoïdale et ainsi les erreurs induites sur une demi-orbite sont corrigées sur la demi-orbite suivante. Les erreurs sur l'inclinaison ne s'annulent pas puisque la valeur de la déclinaison de poussée change d'un intervalle à un autre.

Par ailleurs, la visualisation de la déclinaison de poussée (cf. figure IV.24) montre qu'elle converge vers une déclinaison à variation sinusoïdale. Ainsi, on peut s'attendre à ce que cette solution se rapproche de la solution à loi prédéterminée.

Les instants de commutation sont donnés par (en temps réel) :

	Début [jours]	durée [h.]
Poussée # 1	0.001	9.51
Poussée # 2	294.00	7.098
Poussée # 3	295.81	7.255

TAB. IV.7 – Solution à commande discrétisée.

La consommation du satellite est de 13.179 kg (équivalent à $\Delta V = 260.02 m/s$).

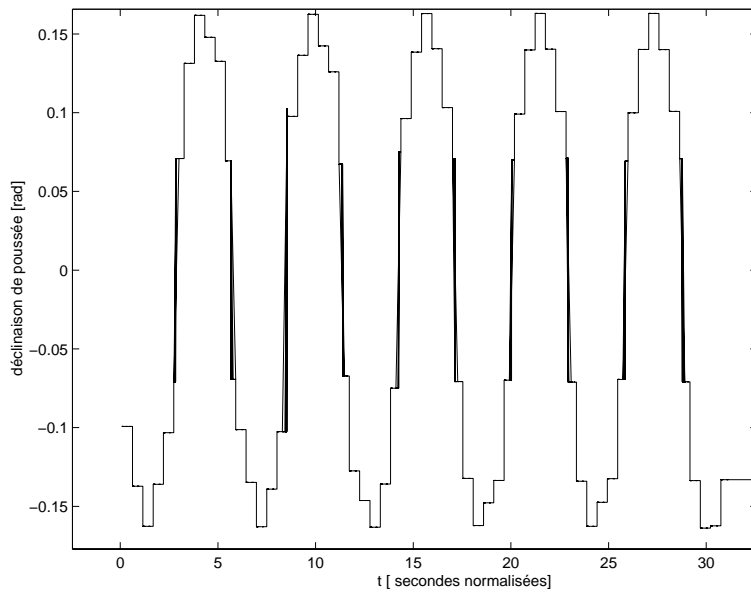


FIG. IV.24 – Allure de la déclinaison de poussée de la solution optimale de $(\mathcal{PE}_{a,\alpha,\Omega})$, avec discrétisation, et zoom sur la première phase de poussée.

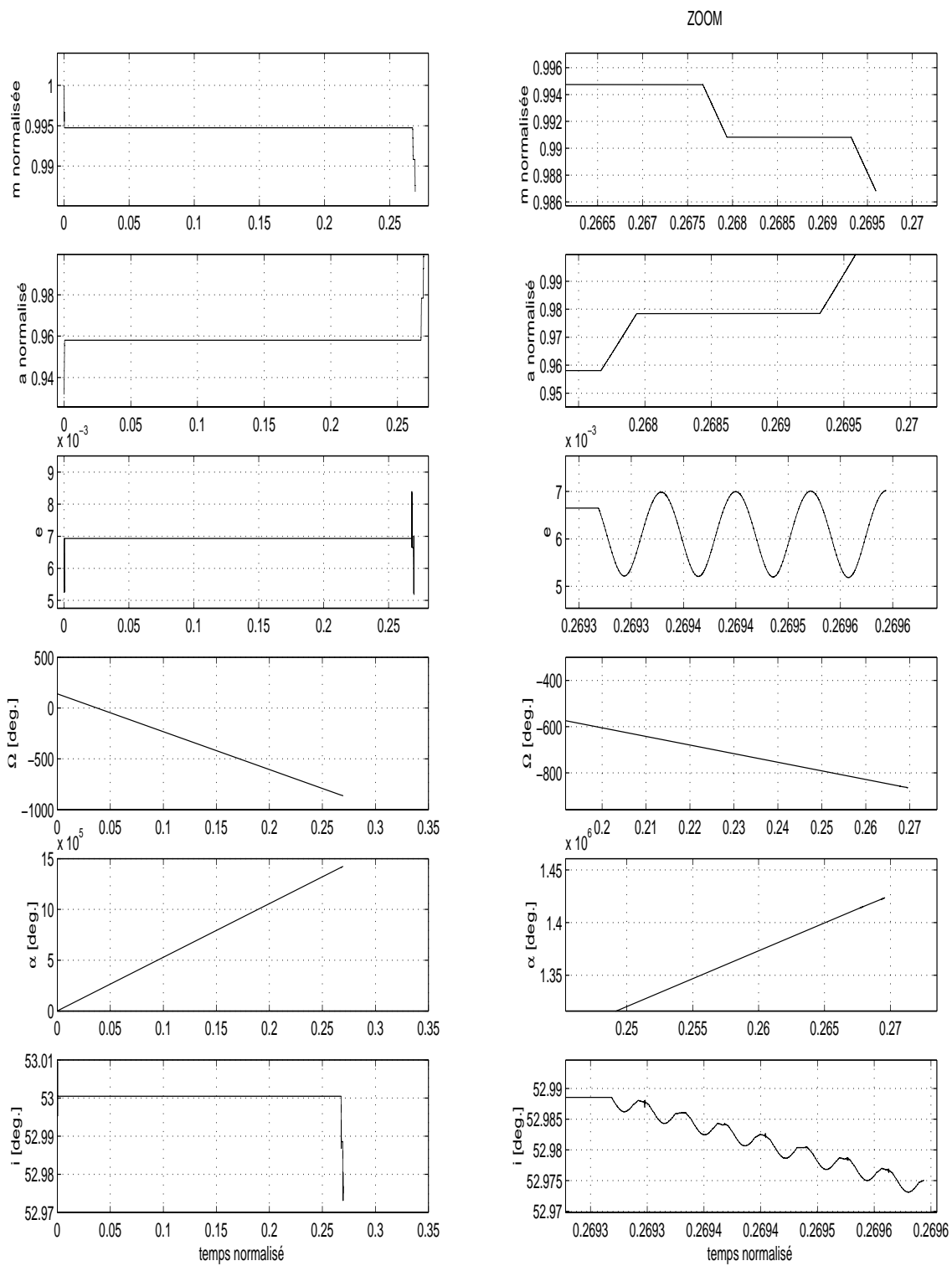


FIG. IV.25 – Caractéristiques de la solution optimale de $(\mathcal{PE}_{a,\alpha,\Omega})$, avec discrétisation.

Loi de commande prédéterminée Une loi est donc préfixée pour la variation de la déclinaison de poussée (cf. figure IV.26). Seules les amplitudes des déclinaisons sur les trois phases de manoeuvre sont à optimiser, ainsi que les six instants de commutation. Comme le montre la figure IV.27, la solution à commande prédéterminée est assez proche de celle obtenue par discrétisation. La variation de l'inclinaison est sinusoidale. De ce fait, l'erreur commise sur ce paramètre est limitée (de l'ordre de 10^{-3} degrés).

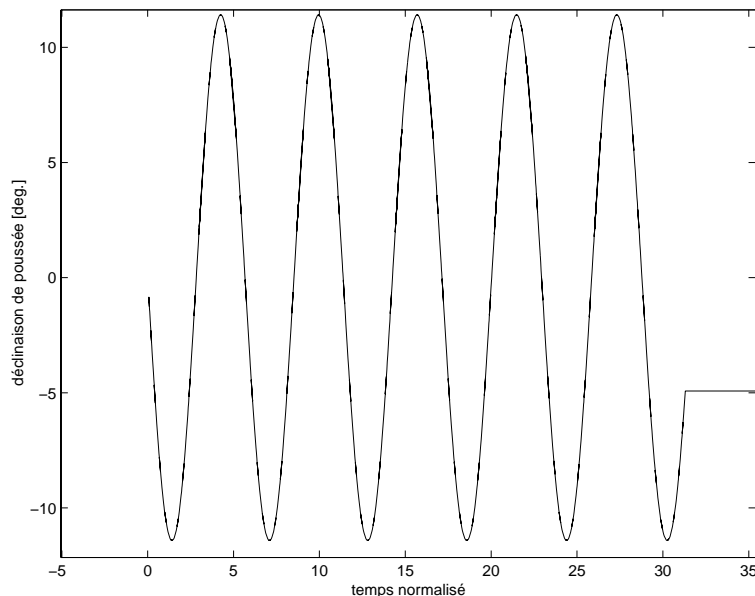


FIG. IV.26 – Allure de la déclinaison de poussée de la solution optimale de $(\mathcal{PE}_{a,\alpha,\Omega})$, avec loi préfixée, et zoom sur la première phase de poussée.

Les instants de commutation sont donnés par (en temps classique) :

	Début [jours]	durée [h.]
Poussée # 1	0.0008	9.53
Poussée # 2	294.00	7.08
Poussée # 3	295.81	7.23

TAB. IV.8 – Solution à commande préfixée.

La consommation du satellite est de 13.16 kg (équivalent à $\Delta V = 259.8 m/s$). Cette solution est assez proche de la solution à commande discrétisée. En effet, si l'on superpose les deux solutions (cf. figure IV.28 pour la superposition des déclinaisons sur la première phase de manoeuvre), il s'avère que la solution discrète converge vers une solution à déclinaison sinusoidale. Ceci permet de supposer que les deux processus convergent vers une solution optimale locale (l'optimalité globale n'est pas garantie du fait des méthodes d'optimisation utilisées).

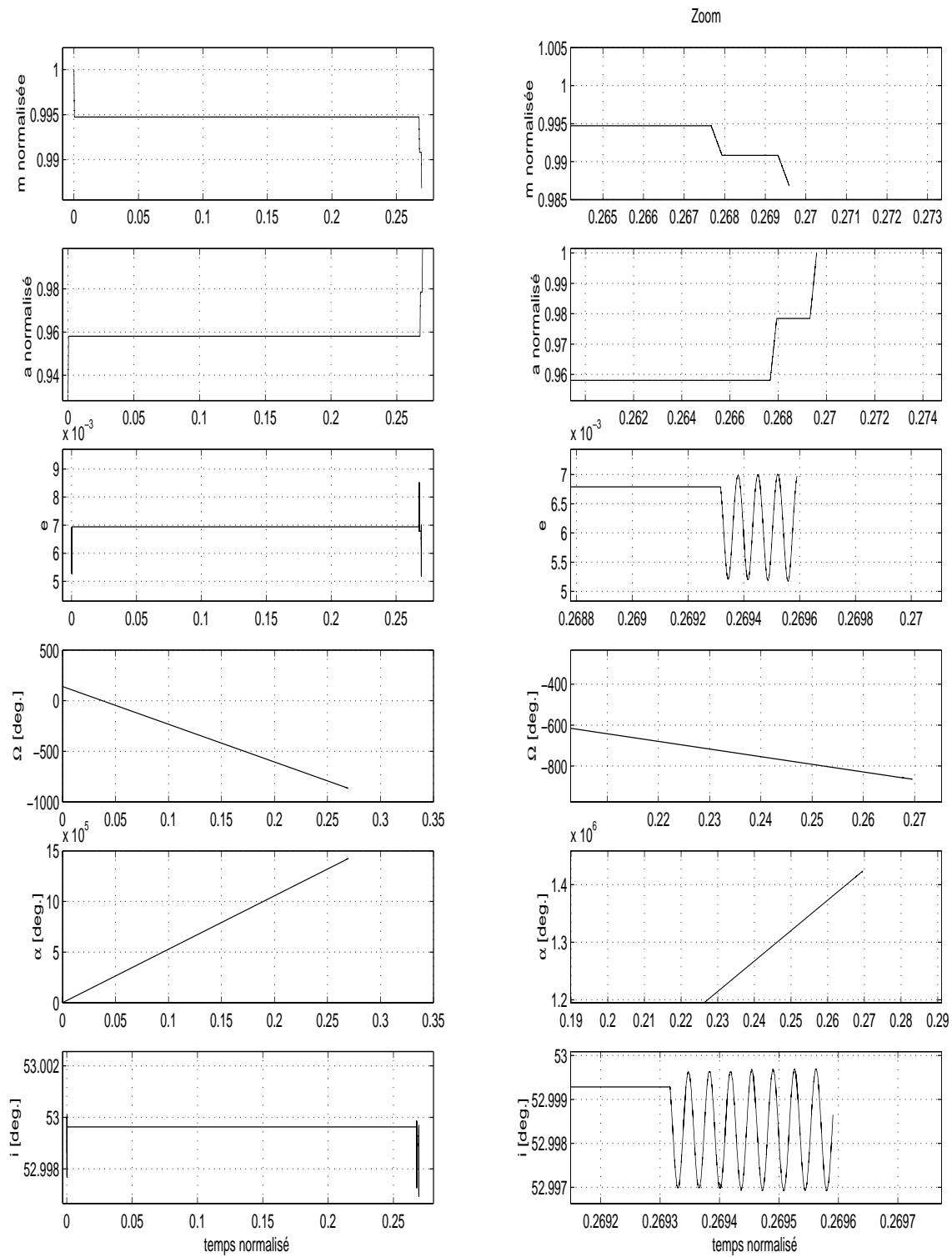


FIG. IV.27 – Caractéristiques de la solution optimale de $(\mathcal{PE}_{a,\alpha,\Omega})$, avec loi prédéterminée.

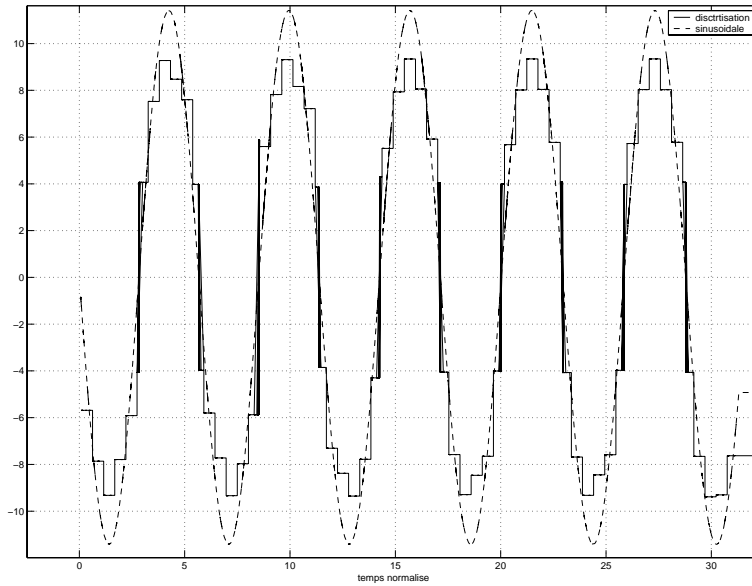


FIG. IV.28 – *Déclinaison de la première poussée, pour les deux cas de loi de commande.*

Test d’optimalité Comme présenté au §IV.5, il est possible de vérifier l’optimalité de la solution ainsi obtenue. Seuls les résultats relatifs à la solution préfixée sont utilisés (étant donné que les deux solutions sont assez proches comme le montre la figure IV.28). La solution du problème $(\mathcal{PE}_{a,\alpha,\Omega})$ est recherchée à l’aide d’une méthode **SQP**. Cette méthode donne les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes d’égalités imposées.

$$\begin{cases} \lambda_a = -1023.05 \\ \lambda_\Omega = 353.61 \\ \lambda_\alpha = 0.58 \end{cases} \quad (\text{IV.61})$$

A partir de ces valeurs à l’instant final, les équations d’évolution du vecteur d’état et de celui de l’état adjoint sont intégrées jusqu’à l’instant initial. La commande optimale permettant de minimiser l’Hamiltonien est utilisée lors de cette intégration. L’état à l’instant initial est reconstitué avec des erreurs (qui correspondent aux erreurs dues à la quasi-optimalité de la solution). Le tableau IV.9 donne ces erreurs de recouvrement.

Etat	valeur exacte (t=0)	valeur réelle (t=0)
a	7300 km	7300.261 km
Ω	140.0 deg.	140.01 deg.
α	0.016 deg.	-1.51 deg.

TAB. IV.9 – *Recouvrement de la position initiale, sans rendez-vous en inclinaison.*

La position initiale est reconstituée avec quelques erreurs. En effet, l’écart sur le demi-grand axe est de l’ordre de la centaine de mètres, ce qui induit une erreur sur l’anomalie.

La précision d'acquisition est cependant acceptable et donc la solution du problème issue de l'approche directe est assez proche de la solution optimale. La figure IV.29 permet de visualiser les déclinaisons de poussées de la commande issue de l'optimisation directe et celle de la commande minimisant l'Hamiltonien. Les deux lois de variation de la direction de poussées sont assez proches. Cependant, la visualisation de la fonction de commutation S (cf. §IV.51) montre que sa variation ne respecte pas les conditions établies au §IV.51. Ainsi, pour un scénario à trois phases de poussée, le processus d'optimisation converge vers une solution quasi-optimale. Cependant, ce scénario prédéterminé s'avère être non optimal. Il est donc prévisible que le scénario optimal comporte plus que trois phases de poussées (s'il en comportait moins de trois, une phase de poussée aurait été éliminée par le processus d'optimisation). Comme mentionné au chapitre III, l'approche directe adoptée dans ce travail nécessite que le scénario de poussée soit imposé (l'optimisation du nombre de phase de poussée complexifie considérablement le problème d'optimisation). Il faut partir d'un nombre de poussées restreint, puis augmenter le nombre de poussées successivement jusqu'à ce que l'optimalité (via l'étude de la fonction de commutation) soit prouvée.

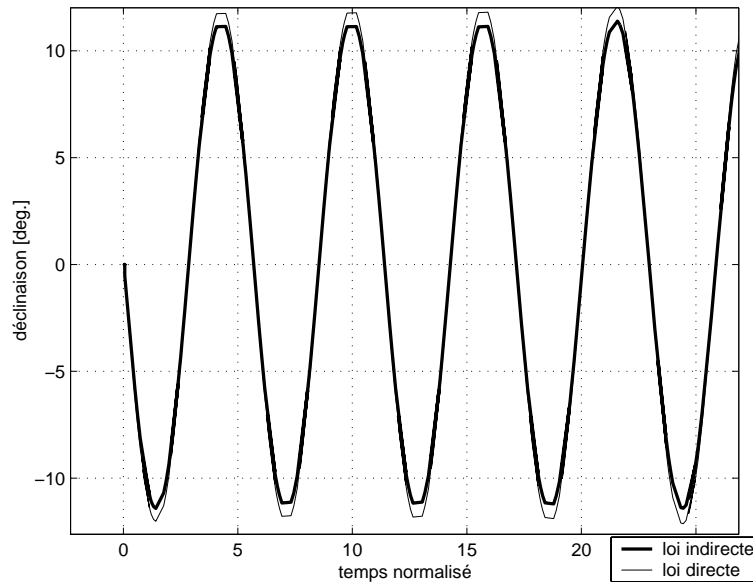


FIG. IV.29 – Déclinaison de la première poussée, pour les deux solutions, directe et indirecte, sans correction de l'inclinaison.

Résolution du problème ($\mathcal{PE}_{a,\Omega,\alpha,i}$)

Discrétisation de la commande Comme pour le cas précédent, la commande du système est discrétisée sur 30 intervalles. Le problème d'optimisation est donc constitué de 99 variables. Ce problème est plus difficile à résoudre que celui sans correction de l'inclinaison du fait de la sensibilité de la dynamique devant une variation de l'inclinaison et/ou des anomalies de changement de direction. La figure IV.30 résume la variation

des différentes variables d'état du système. Les anomalies de changement de signe des composantes hors-plan des poussées sont proches des anti-noeuds. De ce fait, la majeure partie de ces corrections servent à corriger l'inclinaison. Cependant, l'acquisition de ce paramètre se fait avec une erreur importante (de l'ordre de 0.2 degrés). Le processus a convergé difficilement (près de 5 heures de calcul sur une Spark Ultra 30) du fait du nombre important de variables et de la dynamique non linéaire du système. L'étude de la variation de l'excentricité montre que ce paramètre varie légèrement et que l'hypothèse de quasi circularité des orbites est respectée.

La déclinaison de poussée est donc optimisée. Son allure est donnée par la figure IV.31. Il est à remarquer qu'elle tend vers une loi d'évolution sinusoïdale.

Les caractéristiques de la solution sont données par le tableau IV.10.

	Début [jours]	durée [h.]
Poussée # 1	0.00023	9.42
Poussée # 2	295.78	11.36
Poussée # 3	299.71	6.89

TAB. IV.10 – *Solution à commande discrétisée.*

La masse finale est de 984.714 kg (ce qui correspond à un incrément de vitesse de 301.92 m/s). Cette consommation est légèrement inférieure à celle trouvée dans le cas multi-impulsionnel étalé. Par ailleurs, les orbites intermédiaires de dérive de la solution de ce dernier sont assez proches de celles de la solution. Ainsi, la solution du problème multi-impulsionnel étalé s'avère être une bonne initialisation au problème à trois poussées étalées. Puisque la précision sur l'inclinaison n'est pas très élevée, il est prévisible que la solution optimale sera à déclinaison plus élevée.

Loi de commande prédéterminée Une variation selon une loi sinusoïdale est à présent imposée à la déclinaison de poussée. Comme expliqué dans le §IV.4.2, il faut déterminer l'anomalie noeud et l'amplitude maximale à chaque phase de poussée. Les caractéristiques de la solution optimale sont données par la figure IV.32. L'excentricité varie du fait de l'application de la poussée mais reste assez proche de sa valeur initiale et ainsi, ce paramètre n'est pas trop dégradé. Il est également possible de vérifier la variation de l'inclinaison, et de constater qu'au temps final, ce paramètre atteint sa valeur cible.

Les déclinaisons de poussées sont d'amplitudes assez importantes (de l'ordre de 50 degrés), ce qui se justifie par le taux de la correction en inclinaison à apporter. D'autre part, les anomalies noeuds sont assez proches des noeuds des orbites. Ainsi, la majeure partie des composantes hors-plan des poussées servent à corriger l'inclinaison. Contrairement à la solution à commande discrétisée, l'acquisition de l'inclinaison cible est assez précise puisque les corrections hors-plan sont plus importantes (notamment sur la première phase de dérive).

La superposition des déclinaisons de poussée des deux solutions (cf. figure IV.33) montre que l'allure des deux solutions sont assez proches (du point de vue noeud d'in-

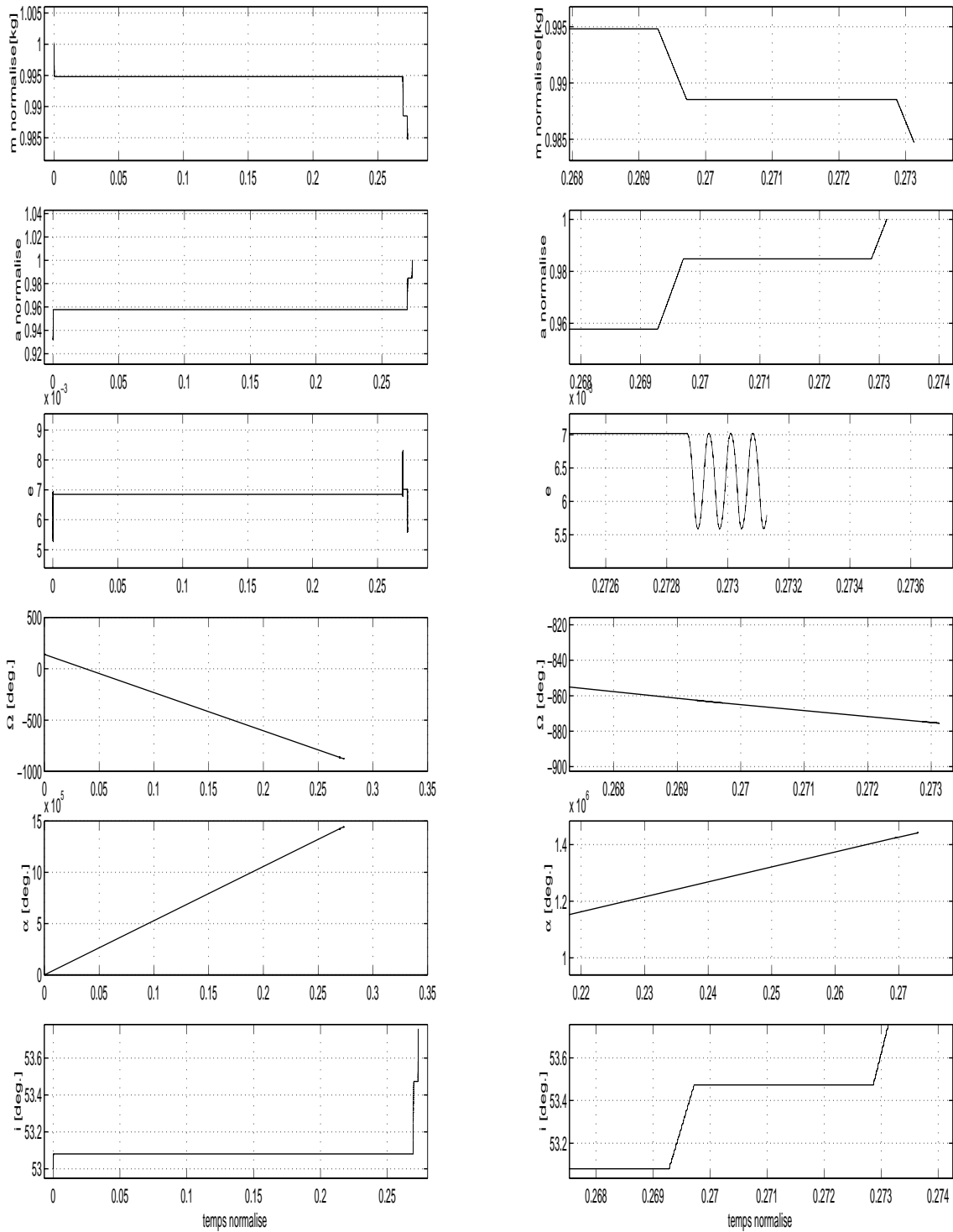


FIG. IV.30 – Caractéristiques de la solution optimale de $(\mathcal{PE}_{a,\alpha,\Omega,i})$, avec discrétisation.

tersection). Ceci dit, les amplitudes ne sont pas les mêmes. En effet, la solution avec loi de commande discrétisée est sous-dimensionnée (puisque le processus converge vers une solution locale qui est sous-optimale). Ceci explique l'erreur commise sur l'inclinaison.

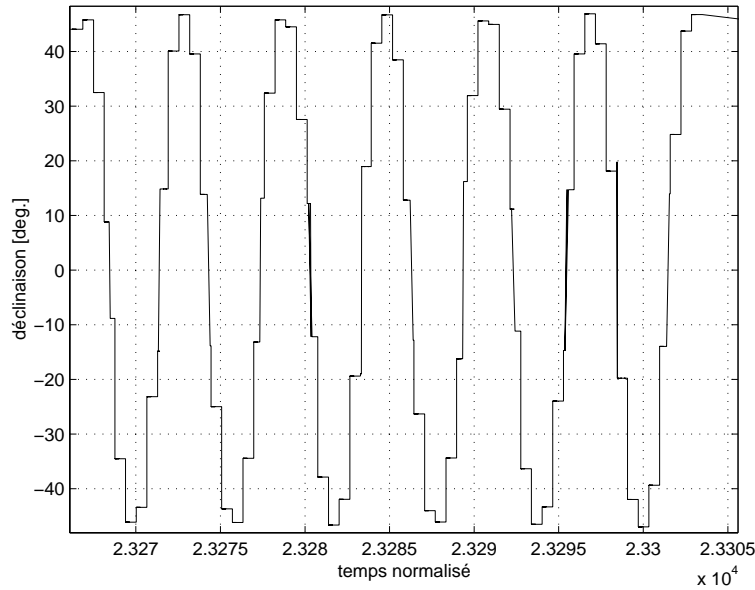


FIG. IV.31 – Allure de la déclinaison de poussée de la solution optimale de $(\mathcal{PE}_{a,\alpha,\Omega,i})$, avec discrétisation, et zoom sur la première phase de poussée.

Les déclinaisons sont par ailleurs assez proches pour les deux autres phases de poussée (cf figure IV.34 pour la deuxième phases de poussées). Les trois anomalies noeuds sont de 0.5 , 0.85 et 1.39 degrés. Elles sont quasi-identiques à celles du problème discrétisé. Ainsi, la connaissance du système et de son évolution nous a permis de prédéfinir une loi de commande qui s'avère être sous-optimal (et probablement proche de l'optimum recherché). De ce fait, le complexité du problème d'optimisation a pu être réduite considérablement (de 99 variables d'optimisation, le problème est restreint à 9 variables) et le temps de calcul a diminué en conséquence.

	Début [jours]	durée [h.]
Poussée # 1	0.0052	10.60
Poussée # 2	295.73	12.49
Poussée # 3	299.76	5.79

TAB. IV.11 – Solution à commande préfixée.

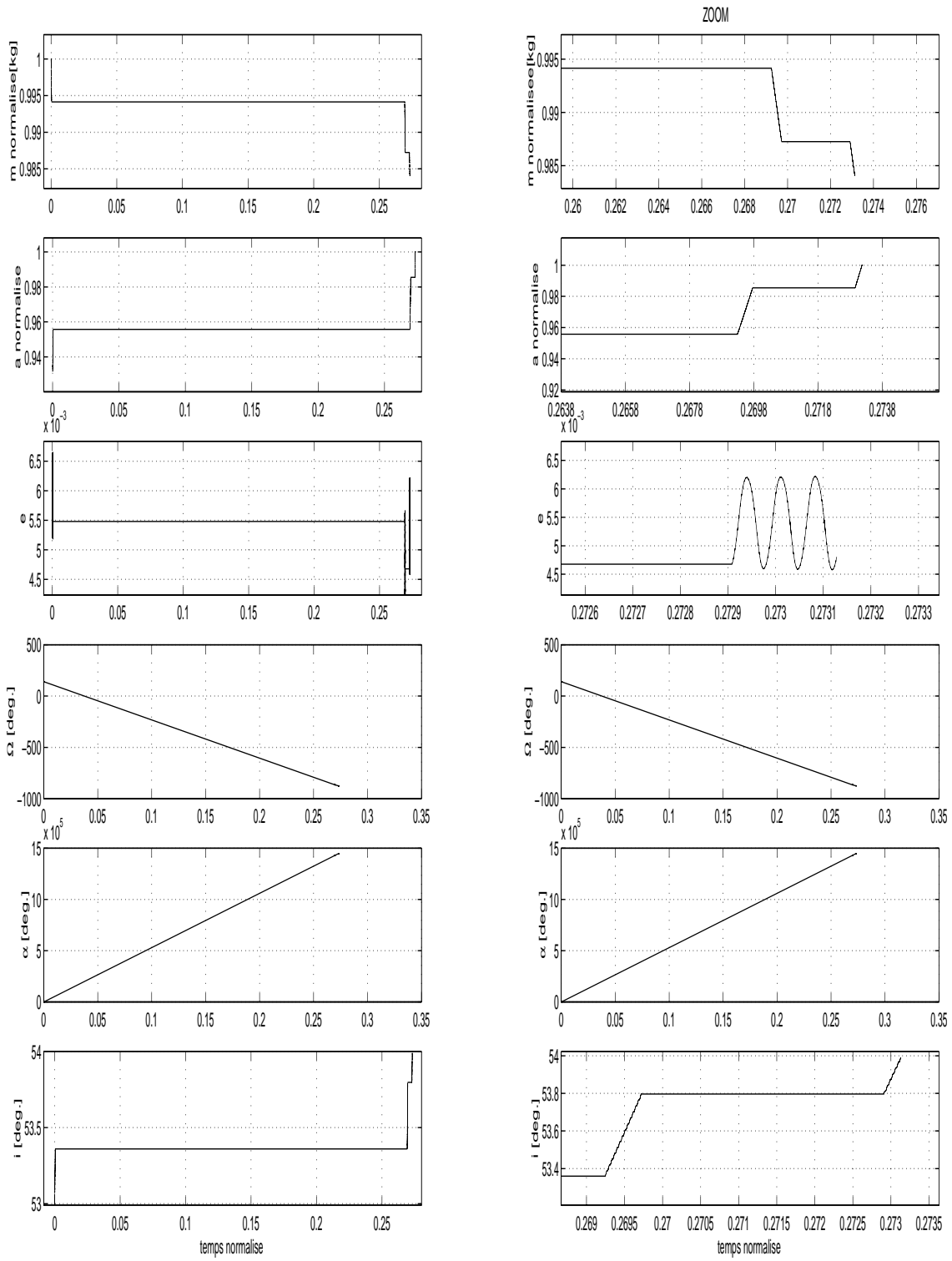


FIG. IV.32 – Caractéristiques de la solution optimale de $(\mathcal{PE}_{a,\alpha,\Omega,i})$, avec loi prédéterminée.

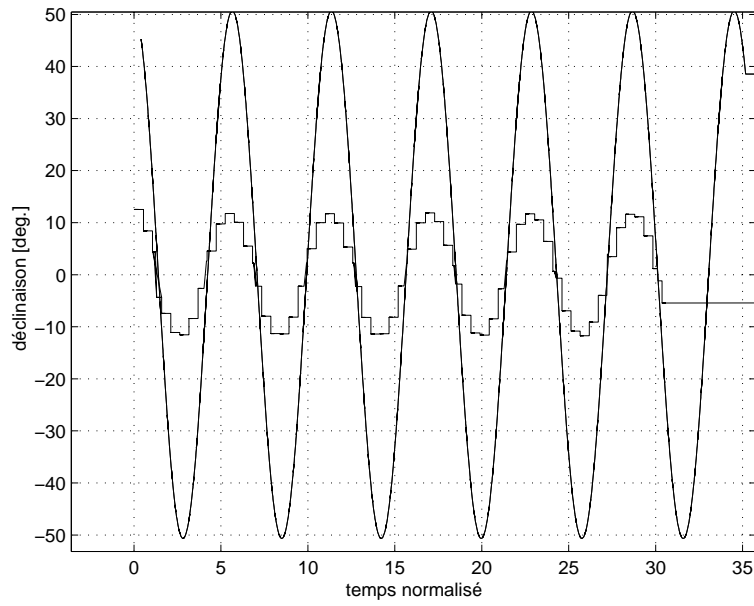


FIG. IV.33 – Déclinaison de la première poussée, pour les deux cas de loi de commande.

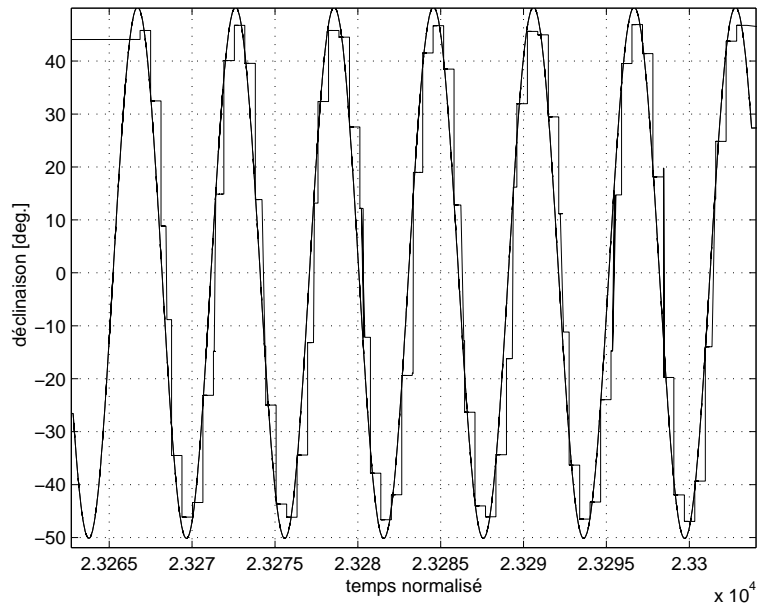


FIG. IV.34 – Déclinaison de la deuxième poussée, pour les deux cas de loi de commande.

Test d'optimalité Comme pour le cas sans correction en inclinaison, les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes non linéaires approximent les états adjoints à l'instant final. Les valeurs de ces multiplicateurs sont :

$$\begin{cases} \lambda_a = -729.06 \\ \lambda_i = -1791.85 \\ \lambda_\Omega = 34.23 \\ \lambda_\alpha = 0.27 \end{cases} \quad (\text{IV.62})$$

A partir de la commande minimisant l'Hamiltonien, les dynamiques des états et des états adjoints sont intégrés jusqu'à l'instant initial. La précision du recouvrement de la position initiale du satellite permet de conclure sur la qualité de la solution obtenue par le processus d'optimisation par approche directe.

Le tableau IV.12 donne les erreurs commises lors de la reconstitution de l'état initial. Elles restent acceptables, ce qui laisse supposer que cette solution n'est pas trop éloignée de l'optimum. La visualisation des directions de poussées montre qu'elles sont assez similaires (cf. figure IV.35). Les anomalies des noeuds d'intersection sont quasi-identiques. Sur les deux dernières poussées, les déclinaisons de poussées issues de l'approche directe et indirecte sont assez proches. Par contre, il existe un écart sur la première phase de poussée (cf. figure IV.35). Il est à noter que la solution minimisant l'Hamiltonien est proche de la solution du problème à loi de commande discrétisée cf. figure IV.36. L'erreur d'acquisition de l'inclinaison est néanmoins importante dans ce cas (de l'ordre de 0.07 degrés). La solution obtenue est relativement proche de l'optimum. Par ailleurs, la visualisation de la variation de la fonction de commutation permet de conclure que le scénario à trois phases de poussées est sous optimal. Ceci dit, la solution calculée pour ce scénario est quant à elle proche de l'optimum (pour ce scénario imposé). Comme le montre cette section, la prise en compte de la contrainte sur l'inclinaison complexifie considérablement le problème d'optimisation à résoudre.

Etat	valeur exacte (t=0)	valeur réelle (t=0)
a	7300 km	7298 km
i	53.0 deg.	53.07 deg.
Ω	140.0 deg.	139.67 deg.
α	0.016 deg.	355.09 deg.

TAB. IV.12 – *Recouvrement de la position initiale, avec rendez-vous en inclinaison.*

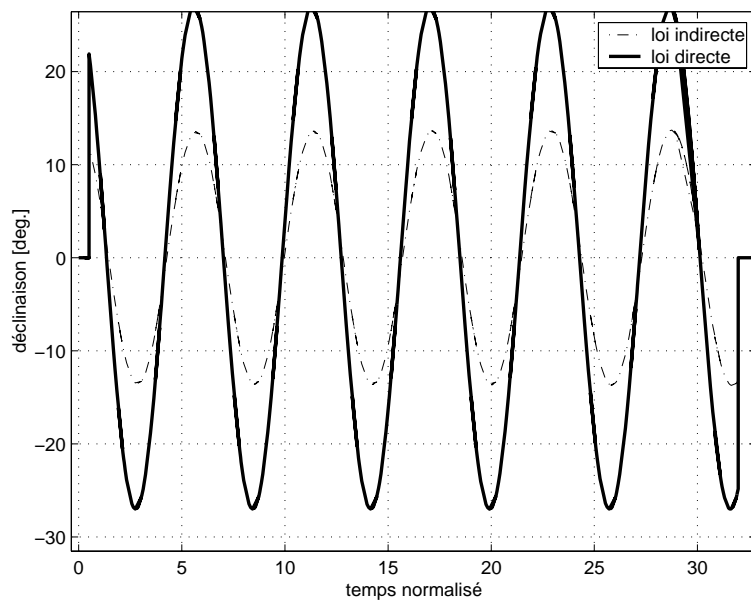


FIG. IV.35 – Déclinaison de la première poussée, pour les deux solutions, directe et indirecte, avec correction de l'inclinaison.

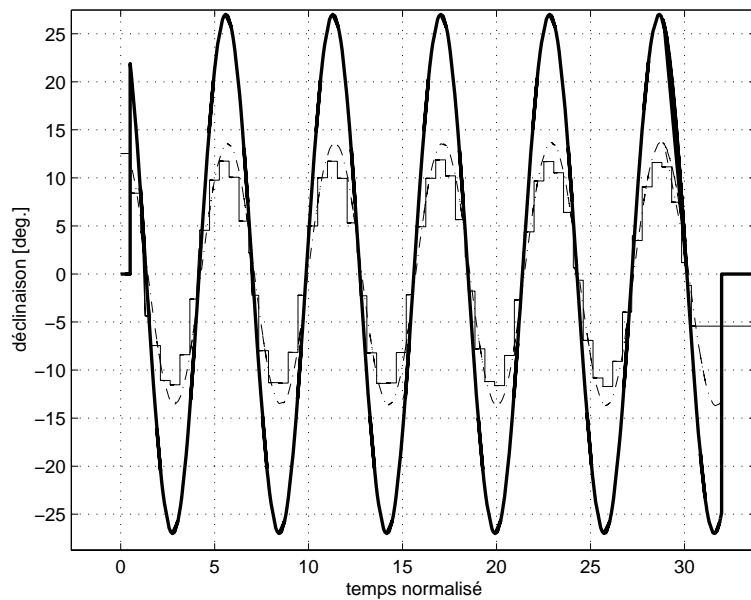


FIG. IV.36 – Déclinaison de la première poussée, pour les trois solutions, avec correction de l'inclinaison.

IV.7 Conclusion

Dans ce chapitre, les capacités réelles du moteur ont été prises en compte. A partir de la solution du problème impulsif, une solution au problème étalé a été calculée selon une stratégie à étapes successives. Dans un premier temps, les trois poussées sont fractionnées en un nombre donné de petites poussées élémentaires. Ce scénario de transfert orbital à train d'impulsions a été appliqué au système et sa solution optimale calculée. Ensuite, l'étalement des différentes poussées a été effectué. Pour ce faire, une stratégie d'étalement des poussées a été mise au point. Une fois les poussées étalées de cette solution raccordées, le problème à trois poussées continues a été résolu. Deux stratégies ont été testées : soit la direction de poussée a été discrétisée le long des phases de poussées, soit sa loi de variation a été préfixée. De la stratégie adoptée dépend la complexité du problème de programmation non linéaire à résoudre. L'application de ces deux stratégies à un cas d'étude a permis de constater que les deux méthodologies conduisent à la même loi de commande qui est donc une solution sous optimale du problème considéré. Ainsi, le problème de rendez-vous orbital, à scénario préfixé à trois phases de poussées, est résolu selon l'approche directe, par itérations et étapes successives. La solution ainsi obtenue est quasi-optimale et peut servir d'initialisation au problème traité par approche indirecte. Cette dernière permettra d'optimiser également le nombre de phases de poussées, en addition à la direction de poussée.

Conclusion Générale

Le travail présenté dans ce mémoire a consisté à optimiser des transferts orbitaux quasi-circulaires, en se basant sur une stratégie à multi-niveaux et à complexité croissante. Il a permis d'explorer et d'approfondir la stratégie de mise à poste dite passive, en l'appliquant à des problèmes de rendez-vous orbitaux de plus en plus complexes. Deux types de propulsions ont été traités, se traduisant par deux thématiques différentes qui ont fait l'objet de diverses études. Par ce travail, nous avons établi un lien entre ces deux problématiques, en utilisant les solutions relatives au premier afin d'initialiser la recherche de la solution du deuxième. Nous avons développé un modèle analytique simplifié qui s'avère très proche de la réalité, et qui nous a permis d'alléger les calculs et d'obtenir une stratégie de résolution robuste et performante.

La motivation première de ce travail se situait dans le problème de la construction d'une constellation de type LEO, constellations pour lesquelles existaient divers projets au début de cette thèse. Le développement rapide de la téléphonie mobile, l'échec commercial de la constellation Iridium... ont fait que le secteur spatial adopte une attitude de prudence vis-à-vis de ce type de constellations. Ceci dit, les résultats et stratégies proposés tout au long de ce travail peuvent se généraliser à n'importe quel transfert orbital et l'abandon, certainement momentané, de constellations de type LEO n'affecte en rien son apport et son originalité.

Pour chaque satellite constituant la constellation, la trajectoire optimale permettant de minimiser sa consommation a été déterminée via une approche de multi-niveaux et à complexité croissante, tant sur le modèle d'évolution utilisé que sur la nature des contraintes à respecter. Tout d'abord, le scénario de mise à poste a été défini. Il consiste à transférer le satellite vers deux orbites intermédiaires de dérive avant d'atteindre sa position cible, et ceci en lui appliquant trois phases de manoeuvres. Cette stratégie est motivée par la connaissance d'effets perturbateurs agissant sur le système étudié et notamment celui dû à l'aplatissement terrestre aux pôles. En effet, cette irrégularité du potentiel terrestre induit une dérive naturelle sur l'ascension droite du noeud ascendant et sur l'anomalie du satellite. De ce fait, la dérive naturelle différentielle entre la cible et le satellite apporte des corrections "gratuites".

Le scénario de mise à poste étant défini, le problème d'optimisation a été résolu. Pour ce faire, plusieurs cas de figures ont été considérés. Dans un premier temps, les moteurs

équipant les satellites ont été supposés chimiques et les poussées délivrées impulsionnelles instantanées, ce qui induit une variation discrète de l'état du système. Les modules des poussées et leurs instants d'application ont été optimisés afin de minimiser la consommation. Du fait de la complexité du problème et de la non linéarité des équations, le problème global de mise à poste a été divisé en sous-problèmes plus simples. La solution de chaque sous-problème a permis d'initialiser le sous-problème lui succédant. Cette complexification progressive des problèmes s'est faite sur le modèle d'évolution utilisé (analytique simplifié puis numérique plus précis) et sur le type de rendez-vous orbital imposé (le problème de base impose un rendez-vous en ascension droite du noeud ascendant, en demi-grand axe et en anomalie, puis l'excentricité est rajoutée afin de préserver l'hypothèse de quasi-circularité des orbites pour enfin rajouter le rendez-vous en inclinaison qui complexifie la résolution du problème). Une stratégie de correction de l'excentricité a été développée. Elle consiste à corriger ce paramètre exclusivement via des poussées tangentielles, par des transferts de type Hohmann. Les différents modules constituant la résolution de ce problème ont été présentés et un cas d'étude a permis d'illustrer l'efficacité des stratégies de transfert et de résolution adoptées. Cependant, du fait de la stratégie développée, les durées de mise à poste sont assez importantes ce qui peut être un inconvénient devant les contraintes commerciales et industrielles imposées par la constitution de la constellation. Il existe donc un compromis coût/durée et le choix dépend de la nature des contraintes opérationnelles imposées par le cahier des charges. D'autre part, il est également envisageable de libérer les conditions initiales ou du moins, d'utiliser plusieurs lanceurs pour mettre en orbite les différents satellites. Ceci permettra de réduire les corrections en ascension droite du noeud ascendant à effectuer et de ce fait, de réduire les durées des phases de dérives.

Dans un deuxième temps, des moteurs à poussées électriques délivrant des poussées continues ont été considérés. Le modèle d'évolution du système est continu et l'intégration de la trajectoire induit des problèmes numériques. Pour surmonter cette difficulté, un modèle analytique a été développé. Il permet de calculer facilement et rapidement une solution initiale au problème de base à trois contraintes. Afin d'initialiser ce nouveau problème, la solution du problème impulsionnel a été utilisée. Une stratégie de fractionnement des trois phases de poussées en un train de petites impulsions a été développée et ce type de transfert optimisé. Les différentes poussées sont espacées d'une demi-période orbitale afin de limiter les variations du paramètre excentricité. Le nombre de poussées est imposé soit par le cahier des charges, soit par les capacités des moteurs.

L'étalement des différentes poussées élémentaires autour des anomalies de leur application en impulsionnel a ensuite été effectué. Le raccordement de ces poussées continues a permis d'obtenir une initialisation au problème à trois poussées continues. Ce nouveau problème est plus complexe que le problème précédent du fait de la nature de la variation temporelle du système. Pour le résoudre, nous avons principalement testé deux approches : par discrétisation de la commande et en préfixant une loi de commande au système. La résolution du problème a montré que les deux approches convergent vers une même loi de

variation de la déclinaison de poussée. Ceci laisse supposer que la solution ainsi obtenue est proche de l'optimum. Pour vérifier son optimalité, les multiplicateurs de Lagrange issus de la méthode de résolution par approche directe ont été utilisés pour déterminer les valeurs des paramètres adjoints à l'instant final. La comparaison de la commande optimale issue du processus d'optimisation et celle issue de l'application du principe du maximum montre que ces deux lois de commande sont très proches. Cependant, il s'avère que la variation de la fonction de commutation ne coïncide pas avec la théorie. Ainsi, il est probable que le scénario à trois phases de poussées soit sous-optimal.

Le travail accompli tout au long de cette thèse a été accompagné de l'élaboration et la réalisation d'un logiciel permettant d'optimiser les transferts étudiés, tout en respectant les contraintes imposées par l'utilisateur. Cet outil permet d'optimiser aussi bien l'affectation et la géométrie d'une constellation (module développé par [Lasserre 98]), que de calculer les trajectoires optimales pour chaque satellite. L'effort a été fait de réaliser un outil le plus souple et le plus complet possible, afin de tenir compte de plusieurs cas de figures et contraintes imposés par l'utilisateur. Ainsi, à partir des spécifications du cahier des charges, il met en oeuvre la stratégie de résolution mise au point et détermine la trajectoire optimale avec hypothèse de poussées continues ou de poussées chimiques. Il fournit également les caractéristiques des différents problèmes intermédiaires afin de donner la possibilité d'étudier les répercussions de changements de stratégies et de modèles (par exemple, les écarts entre la solution du problème avec un modèle analytique et celle avec un modèle numérique ce qui permet de conclure sur l'intérêt ou non d'un tel affinement). Cet outil a été testé dans le cadre de ce mémoire dans le cas d'orbites à basses altitudes, mais peut également être utilisé dans le cas d'orbites à plus grandes altitudes (transfert LEO-GEO par exemple).

Ouvertures et prospectives

Cette étude ouvre des perspectives pour les deux cas : impulsif et électrique. Dans le premier cas, il serait intéressant de généraliser la stratégie de correction du cas quasi-circulaire au cas elliptique et au cas de transferts plus importants (et notamment considérer des orbites géostationnaires). Ainsi, il serait intéressant de prendre en compte des jeux de paramètres plus généraux (paramètres équinoxiaux) afin d'aboutir à un outil d'optimisation plus général.

Pour le cas de poussées continues, il ressort de cette étude que la stratégie à trois phases de poussées est sous-optimale. Il faudrait donc optimiser le nombre optimal de poussées à appliquer, de façon à converger vers l'optimum recherché. Pour ce faire, deux moyens sont possibles. La première possibilité est d'adopter la même démarche que dans cette étude, en augmentant au fur et à mesure le nombre de poussées. La solution de chaque problème amont permet d'initialiser le problème aval. L'approche directe est donc utilisée, et à chaque itération, le test sur la fonction de commutation est effectué jusqu'à ce que

sa variation corresponde aux tests d'optimalité. Cela nécessite un temps de calcul qui peut être trop important, ce qui rend donc cette méthode peu attrayante. Une alternative consiste à résoudre ce problème avec une méthode hybride du même type que celle développée dans [Goodson 99], ce qui permettra d'améliorer la convergence de la solution vers une solution optimale. Elle consiste à optimiser chaque arc de poussées avec une approche indirecte, en résolvant le problème aux deux bouts associé. Une couche supérieure (avec une méthode de PNL) permet d'optimiser les instants de commutation, en addition à d'éventuels paramètres supplémentaires.

La deuxième possibilité est de déterminer le nombre de poussées par une approche indirecte. Pour ce faire, la fonction objectif est modifiée (via l'introduction d'un paramètre noté ε), ce qui permet de transformer la commande *bang-bang* en une commande plus régulière. Par continuation sur la variable ε , on résout successivement les différents sous-problèmes pour, in fine, résoudre le problème à commande *bang-bang* qui nous intéresse. Cette approche dite *lissage* a été testée dans le cas de transferts interplanétaires [Bertrand 01]. Son application au problème circum-terrestre a donné des résultats prometteurs pour le cas de rendez-vous LEO-GEO en (a, e, i) [Tebbani 01b]. L'application de cette stratégie au problème d'orbites elliptiques pour un rendez-vous en altitude uniquement montre que la solution optimale consiste à centrer les différentes poussées autour des apogées et périgées des orbites (le nombre dépend de la durée totale de mise à poste). Ceci est prévisible puisque l'efficacité des poussées est proportionnelle à l'altitude. Il faudra imposer des contraintes supplémentaires (notamment des corrections sur l'orientation de l'orbite) et affiner le modèle dynamique du système en intégrant des contraintes supplémentaires (frottement atmosphérique, éclipses solaires...).

Références bibliographiques

- [**Abadie 69**] J. Abadie et J. Carpentier. Optimization, chapitre Generalisation of the Wolfe reduced gradient method to the case of nonlinear programming. Academic Press, 1969.
- [**Aumasson 86**] C. Aumasson, T. Donath et A.M. Mainguy. *Optimisation itérative de trajectoires soumises à des contraintes et applications à la mise à poste de satellites géostationnaires*. Dans Colloque SMAI, Paris, 1986.
- [**Baker 66**] J.M. Baker. *Orbit transfer and rendezvous maneuvers between inclined circular orbits*. Journal of Spacecraft and Rockets, vol. 3, no. 8, pages 1216–1220, 1966.
- [**Battin 87**] R.H. Battin. An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics. AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics, New York, 1987.
- [**Bertrand 01**] R. Bertrand. *Optimisation de trajectoires interplanétaires sous hypothèses de faible poussée*. Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, 2001.
- [**Betts 94**] J.T. Betts. *Optimal interplanetary orbit transfers by direct transcription*. Journal of the Astronautical Sciences, vol. 42, no. 3, pages 247–268, 1994.
- [**Betts 98**] J.T. Betts. *Survey of numerical methods for Trajectory optimization*. Journal of Guidance, Control and Dynamics, vol. 21, no. 2, pages 193–207, 1998.
- [**Betts 00**] J.T. Betts. *Very low-thrust trajectory optimization using a direct SQP method*. Journal of Computational and Applied Mathematics, pages 27–40, 2000.
- [**Broucke 72**] R.A. Broucke et P.J. Cefola. *On the equinoctial orbital elements*. Celestial Mechanics, vol. 5, no. 3, pages 303–310, 1972.
- [**Bryson 75**] A.E. Bryson et Y.C. Ho. Applied optimal control. Wiley & Sons, 1975.
- [**Büskens 00**] C. Büskens et H. Maurer. *SQP-methods for solving optimal control problems with control and state constraints: adjoint variables, sensitivity analysis and real-time control*. Journal of Computational and applied mathematics, vol. 120, pages 85–108, 2000.

- [Cadiou 96] A. Cadiou. *Evaluation de la proposition SEP d'étude pour la mise en orbite géostationnaire avec la propulsion plasmique*. Rapport technique, CNES, 1996.
- [Caillau 00] J.B. Caillau et J. Noailles. *Continuous optimal control sensitivity analysis with AD*. Dans Proceedings of the 3rd International Conference on Automatic Differentiation. INRIA, juin 2000.
- [Cesari 83] L. Cesari. *Optimization-theory and applications*. Springer-Verlag, 1983.
- [Chobotov 96] , editeur V.A Chobotov. *Orbital mechanics*, second edition. AIAA education series, , American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996.
- [Chuang 99] J.C. Chuang, T.D. Goodson et J. Hanson. *Multiple-burn families of optimal low-and-medium-thrust orbit transfers*. Journal of Spacecraft and Rockets, vol. 36, no. 6, pages 866–874, 1999.
- [CNES 95] , editeur CNES. *Mécanique spatiale*, tome i et ii. CNES Cépadués-Éditions, 1995.
- [CNES 98] , editeur CNES. *Techniques & technologies des véhicules spatiaux*, volume 1, généralités et contraintes de développement. Cépadués Éditions, 1998.
- [Colasurdo 00] G. Colasurdo et L. Casalino. *Indirect optimization method for interplanetary trajectories using electric propulsion and gravity assist*. Dans Optimisation des trajectoires à poussée faible, Cnes workshop, mars 2000.
- [Coverstone-Caroll 94] V. Coverstone-Caroll et S.N. Williams. *Optimal low-thrust trajectories using differential inclusion concepts*. Journal of the Astronautical Sciences, vol. 42, no. 4, pages 379–393, 1994.
- [Desroches 88] Ph. Desroches. *Optimisation de la mise à poste de satellites géostationnaires avec manoeuvre d'apogée fractionnée*. Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, 1988.
- [Dufour 93] F. Dufour. *Optimisation des manoeuvres de phasage d'une navette spatiale*. Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, 1993.
- [Edelbaum 61] T.N. Edelbaum. *Propulsion Requirements for Controllable Satellites*. ARSJ, pages 1079–1089, août 1961.
- [Enjalbert 89] J.M. Enjalbert. *Optimisation des manoeuvres orbitales pour la mise à poste des satellites géostationnaires. Approche déterministe*. Thèse de Doctorat, INSA de Toulouse, 1989.
- [Enright 91a] P.J. Enright. *Optimal finite-thrust spacecraft trajectories using direct transcription and nonlinear programming*. Thèse de Doctorat, Université d'Illinois, Urbana-Champaign, 1991.

- [**Enright 91b**] P.J. Enright et B.A. Conway. *Optimal finite-thrust spacecraft trajectories using collocation and nonlinear programming*. Journal of Guidance Control and Dynamics, vol. 14, no. 5, pages 981–985, 1991.
- [**Enright 92**] P.J. ans B.A. Conway Enright. *Discrete approximations to optimal trajectories using direct transcription and nonlinear programming*. Journal of Guidance Control and Dynamics, vol. 15, no. 4, pages 994–1002, 1992.
- [**Fahroo 01**] F. Fahroo et I.M. Ross. *Costate estimation by a Legendre pseudospectral method*. Journal of Guidance Control and Dynamics, vol. 24, no. 2, pages 270–277, 2001.
- [**Fletcher 87**] R. Fletcher. Practical methods of optimization. Wiley & Sons, 1987.
- [**Geffroy 97**] S. Geffroy. *Généralisation des techniques de moyennation en contrôle optimal - application aux problèmes de transfert et rendez-vous orbitaux à poussées faible*. Thèse de Doctorat, ENSEEIHT, 1997.
- [**Goodson 99**] T. Goodson et C.H. Chuang. *Optimal finite thrust orbit transfers with large numbers of burns*. Journal of Guidance Control and Dynamics, vol. 22, no. 1, pages 139–148, 1999.
- [**Hargraves 87**] C.R. Hargraves et S.W. Paris. *Direct trajectory optimization using nonlinear programming and collocation*. Journal of Guidance Control and Dynamics, vol. 10, no. 4, pages 338–342, 1987.
- [**Herbiniere 00**] S. Herbiniere, V. Martinot, S. Geffroy et P. Brousse. *Low-thrust eccentricity and out-of-plane corrections*. Dans AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, Clearwater, Florida, janvier 2000.
- [**Herman 96**] A.L. Herman et B.A. Conway. *Direct optimization using collocation based on high-order Gauss-Lobatto quadrature rules*. Journal of Guidance Control and Dynamics, 1996.
- [**Hiebert 82**] K.L. Hiebert. *An evaluation of mathematical software that solves systems of nonlinear equations*. ACM Transactions on Mathematical Software, vol. 8, no. 1, pages 5–20, 1982.
- [**Hohmann 25**] W. Hohmann. Die erreichbarkeit der himmels körper. Oldenbourg, 1925.
- [**Hooke 60**] R. Hooke et T.A. Jeeves. *Direct search: solution of numerical and statistical problems*. Rapport technique, Westinghouse Research Laboratories, 1960.
- [**Huynh 76**] H.T. Huynh, A.M. Mainguy, C. Marchal et J.P. Marec. *Etude d'un satellite de navigation à traînée compensée. Contrôle d'orbite*. Rapport technique 1976-11, ONERA, 1976.
- [**Ilgen 94**] M.R. Ilgen. *A hybrid method for computing optimal OTV trajectories slow-thrust*. Dans AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, Floride, 1994.

- [**Kelley 87**] C.T. Kelley et E.W. Sachs. *Quasi-Newton methods and unconstrained optimal control problems*. SIAM Journal of Control and Optimization, vol. 25, no. 6, pages 1503–1516, 1987.
- [**Kluever 00a**] C.A. Kluever. *Optimal low-thrust transfers to geostationary orbit using a direct method*. Dans Optimisation des trajectoires à poussée faible, Cnes workshop, mars 2000.
- [**Kluever 00b**] C.A. Kluever et D.J. O’Shaughnessy. *Trajectory-tracking guidance law for low-thrust Earth-orbit transfers*. Journal of Guidance Control and Dynamics, vol. 23, no. 4, 2000.
- [**Lasserre 98**] E. Lasserre. *Sur l’optimisation de la mise et du maintien à poste de constellations de satellites*. Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, 1998.
- [**Lawrence 97**] C. Lawrence, J.L. Zhou et A.L. Tits. *User’s Guide for CFSQP Version 2.5: a C Code for solving (Large Scale) Constrained Nonlinear (Minmax) Optimization Problems, Generating Iterates Satisfying All Inequality Constraints*, April 1997.
- [**Legenne 95**] J. Legenne. Mécanique spatiale, tome i et ii, chapitre Le rendez-vous orbital. CNES Cépadues-Editions, 1995.
- [**Mainguy 82**] A.M. Mainguy et J.P. Marec. *Résultats sur les manoeuvres optimales en orbite d’un satellite d’observation*. Dans 33e Congrès International d’Astronautique, 1982.
- [**Marec 83**] J.P. Marec. Trajectoires spatiales optimales. Ecole Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace, Toulouse, 1983.
- [**McInnes 94**] C.R. McInnes. *Compact analytical solutions for a decaying, precessing circular orbit*. The Aeronautical Journal, pages 357–360, 1994.
- [**McInnes 97a**] C.R. McInnes. *Low-thrust orbit raising with coupled plane change and J_2 regression*. Journal of Guidance Control and Dynamics, vol. 20, no. 3, pages 607–609, 1997.
- [**McInnes 97b**] C.R. McInnes. *Low thrust orbit raising with J_2 regression*. The Aeronautical Journal, pages 295–298, 1997.
- [**Minoux 83**] M. Minoux. Programmation mathématique, théorie et algorithmes. DUNOD, 1983.
- [**More 93**] J.J. More et S.J. Wright. *Optimization Software Guide*, siam publication edition, 1993.
- [**NAG**] NAG. *Fortran Library Manual Mark 17*. The Numerical Algorithms Group Inc.
- [**Nelder 65**] J.A. Nelder et R. Mead. *A simplex method for function minimization*. Computer Journal, vol. 7, pages 308–313, 1965.

- [**Pontryagin 64**] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyansky, R.V. Gamkrelidze et E.F. Mishchenko. The mathematical theory of optimal processes. Pergamon Press LTD, Londres, 1964.
- [**Scheel 94**] W.A. Scheel et B.A. Conway. *Optimization of very-low-thrust many-revolution spacecraft trajectories*. Journal of Guidance Control and Dynamics, vol. 17, no. 6, pages 1275–1282, 1994.
- [**Seywald 94**] H. Seywald. *Trajectory optimization based on differential inclusion*. Journal of Guidance Control and Dynamics, vol. 17, no. 3, pages 480–487, 1994.
- [**Sukhanov 00**] A.A. Sukhanov. *Analytical formulation of constant tangential low-thrust trajectories near oblate planet*. Dans Optimisation des trajectoires à poussée faible, Cnes workshop, mars 2000.
- [**Tang 92**] S. Tang. Optimization of interplanetary trajectories using direct collocation and nonlinear programming. Master's thesis, université d'Illinois, Urbana-Champaign, 1992.
- [**Tebbani 98**] S. Tebbani. Commande optimale : application à la mise à poste de constellation de satellites. Rapport de dea, SUPAERO, 1998.
- [**Tebbani 99a**] S. Tebbani, J. Bernussou et E. Lasserre. *Near circular orbital transfer optimization of impulsive thrusts*. Dans 50th International Astronautical Congress, Amsterdam, Octobre 1999.
- [**Tebbani 99b**] S. Tebbani, J. Bernussou, E. Lasserre et F. Dufour. *Station acquisition of a homogeneous constellation bu linear and nonlinear optimization*. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences, vol. XXI, pages 40–51, 1999.
- [**Tebbani 00**] S. Tebbani et J. Bernussou. *Stratégie de transfert impulsif pour la mise à poste de constellations de satellites*. Dans Congrès de l'Ecole Doctorale Systèmes, Toulouse, 2000.
- [**Tebbani 01a**] S. Tebbani et J. Bernussou. *Quasi-circular orbit transfer by means of impulsive thrusts*. Dans Second International Workshop On Satellite Constellation and Formation Flying, Haifa, février 2001.
- [**Tebbani 01b**] S. Tebbani, R. Bertrand et J. Bernussou. *Comparison of direct and indirect methods in optimizing multiple-burn low-thrust orbit transfer*. Dans 52th International Astronautical Congress. International Astronautical Federation, 2001. accepté.
- [**Tebbani 01c**] S. Tebbani, I. Queinnec et J. Bernussou. *Optimal finite thrust rendezvous using beneficial effects of the earth oblateness*. Dans AAS/AIAA Astrodynamics Specialists Conference, Québec, juillet 2001. accepté.

- [**Von Stryck 93**] O. Von Stryck. *Numerical solution of optimal control problems by direct collocation* Dans *Optimal Control*. , editeurs R. Burlisch, A. Miele, J.Stoer et K.H. Well, pages 129–143. 1993.
- [**Yan 99**] Hui Yan et Hongxin Wu. *Initial adjoint-variable guess techniques and its application in optimal transfer*. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 22, no. 3, pages 490–492, 1999.
- [**Zaoui 95**] L. Zaoui. *Optimisation des phases balistiques et des phases propulsées pour le mise à poste de constellations*. Dans *Colloque de mécanique spatiale du CNES*, Toulouse, juin 1995.
- [**Zarrouati 87**] O. Zarrouati. *Trajectoires spatiales*. CNES Cepadues-Editions, 1987.
- [**Zondervan 84**] K.P. Zondervan, L.J Wood et T.K. Caughey. *Optimal low-thrust, three-burn orbit transfers with large plane changes*. *Journal of the Astronautical Sciences*, vol. 32, no. 3, pages 407–427, 1984.

Annexe A

Modèle analytique simplifié

Dans cette annexe, quelques développements personnels concernant la modélisation du système et de son évolution lors de la phase de poussée continue. Ces calculs permettent de simplifier le problème à résoudre et de déterminer de façon simple, une initialisation du problème à poussées continues. Dans ce cas d'étude, la variation de la masse suite à une poussée est pris en compte. Des développements analytiques simplificateurs avec hypothèses de masse constante ont été établis dans [McInnes 97b]. Les développements effectués lors de ce travail généralisent ceux effectués dans [McInnes 97a, Sukhanov 00], à savoir qu'ils traitent de transferts quasi-circulaires à direction de poussées constante non nulle et à masse variable.

Dans ce qui suit, nous décrivons l'évolution du système dans l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$ lors de l'application d'une poussée selon une déclinaison constante (noté δ). Dans cette annexe, la correction de l'inclinaison n'est pas prise en compte. Ainsi, la direction de poussée est constante avec un changement de signe aux noeuds.

Le modèle d'évolution est un modèle képlérien, auquel sera rajouté l'effet perturbateur du J_2 (la prise en compte du frottement atmosphérique est traité par [McInnes 94]). Les notations introduites au chapitre I sont reprises dans cette annexe.

Il est à rappeler que l'évolution du système lors de l'allumage des moteurs est donnée par :

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{F}{c} \tag{A.1}$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{\sqrt{\mu}} \cos \delta \cdot a^{1.5} \frac{F}{m(t)} \tag{A.2}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \sin \delta \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin i} \cdot \frac{F}{m(t)} + \mathcal{C}_{J_2}^\Omega(i) \frac{1}{a^{3.5}} \tag{A.3}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{1.5}} + \frac{C_{J_2}^\alpha(i)}{a^{3.5}} - \sin \delta \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \frac{\sin \alpha}{\tan i} \cdot \frac{F}{m(t)} \quad (\text{A.4})$$

où c est défini par $c = g_0 \cdot I_{sp}$.

A.1 Evolution de la masse

La masse est donnée par :

$$m(t) = m(t_0) - \frac{F}{c}(t - t_0) \quad (\text{A.5})$$

Soit γ_0 l'accélération initiale du satellite ($\gamma_0 = \frac{F}{m_0}$). D'après l'équation A.5, il vient :

$$\frac{F}{m(t)} = \frac{\gamma_0}{1 - \frac{\gamma_0}{c}t} \quad (\text{A.6})$$

A.2 Evolution du demi-grand axe

En remplaçant l'expression de la variation de la masse (équation A.6) dans celle de la variation du demi-grand axe (équation A.2), et après intégration, il vient :

$$a(t) = a(t_0) \left(1 + \frac{\cos \delta \cdot c \cdot \sqrt{a(t_0)}}{\sqrt{\mu}} \ln \left(1 - \frac{\gamma_0}{c}(t - t_0) \right) \right)^{-2} \quad (\text{A.7})$$

Inversement, il est possible de déterminer la durée d'une poussée afin d'effectuer une correction donnée en altitude. En effet, si l'on désire transférer le satellite d'une orbite initiale de demi-grand axe a_0 vers une orbite finale de demi-grand axe a_f , avec une déclinaison de poussée constante, il faut allumer les moteurs pendant le laps de temps δt :

$$\delta t = \frac{c \cdot m(t_0)}{F} \left(1 - \exp \left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a_f} \cdot \cos \delta \cdot c} - \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a_0} \cdot \cos \delta \cdot c} \right) \right) \quad (\text{A.8})$$

ou encore :

$$1 - \frac{\gamma_0}{c} \delta t = \exp \left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a_f} \cdot \cos \delta \cdot c} - \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a_0} \cdot \cos \delta \cdot c} \right) \quad (\text{A.9})$$

Dans ce qui suit, on introduit la variable η définie par :

$$\eta(t) = \frac{\sqrt{\mu}}{\cos \delta \cdot c \sqrt{a(t)}}$$

L'expression du demi-grand axe donnée par l'équation A.7 généralise celle donnée par [Sukhanov 00] (qui ne s'intéresse qu'aux transferts tangentiels).

A.3 Evolution de l'anomalie

Au regard de l'équation d'évolution de ce paramètre (équation A.4), il est à noter qu'il existe trois termes : un traduisant le moyen mouvement, un l'effet du J_2 et enfin l'effet d'une poussée. Dans ce qui suit, chacun de ces termes est calculé séparément.

A.3.1 Intégration des termes d'évolution naturelle

Les deux premiers termes traduisent une évolution naturelle de ce paramètre. Plusieurs techniques sont possibles pour calculer ces termes [Sukhanov 00, McInnes 97b, McInnes 97a, McInnes 94]. Nous avons repris les modélisations développées par ces deux auteurs afin de les généraliser au cas de transfert à direction de poussée quelconque. Selon le problème à traiter, la méthode d'intégration est choisie.

Première formulation (version de Sukhanov)

Le moyen mouvement et l'effet du J_2 sont des termes en, respectivement, $\frac{1}{a^{1.5}}$ et en $\frac{1}{a^{3.5}}$. Dans le cas général, il faut donc calculer les intégrales de la forme :

$$I_k = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{a(t)^{\frac{k}{2}}} dt = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{a(t_0)^{\frac{k}{2}}} \left(1 + \frac{1}{\eta(t_0)} \ln \left(1 - \frac{\gamma_0}{c} (t - t_0) \right) \right)^k dt \quad (\text{A.10})$$

Nous allons donc généraliser ce calcul en calculant l'intégrale I_k définie par :

$$I_k = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{a(t)^{\frac{k}{2}}} dt = \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{a(t_0)^{\frac{k}{2}}} \left(1 + \frac{\cos \delta \cdot c \cdot \sqrt{a(t_0)}}{\sqrt{\mu}} \ln \left(1 - \frac{\gamma_0}{c} (t - t_0) \right) \right)^k dt$$

Soit la variable x définie par :

$$x(t) = \frac{m(t)}{m_0} = 1 - \frac{\gamma_0}{c} (t - t_0) \quad (\text{A.11})$$

ou encore : $\ln(x) = \eta - \eta_0$. L'intégrale L_k peut s'écrire en fonction de cette variable x :

$$I_k = \int_{x_0}^{x_f} \frac{1}{a(t_0)^{\frac{k}{2}}} \left(1 + \frac{\cos \delta \cdot c \cdot \sqrt{a(t_0)}}{\sqrt{\mu}} \ln(x) \right)^k \frac{-c}{\gamma_0} dx \quad (\text{A.12})$$

Ou encore :

$$I_k = - \left(\frac{c \cdot \cos \delta}{\sqrt{\mu}} \right)^k \frac{L_k}{F/c} \quad (\text{A.13})$$

Où L_k est définie par :

$$L_k = m_0 \int_1^{x_f} (\eta_0 + \ln(x))^k dx \quad (\text{A.14})$$

Cette suite L_k est similaire à celle dans le cas tangentielle pure établie dans [Sukhanov 00]. Elle est définie par (suite à une intégration par partie) :

$$\begin{aligned} L_k &= m(t_f) \cdot \left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a(t_f)} \cdot c} \right)^k - m(t_0) \cdot \left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{a(t_0)} \cdot c} \right)^k - k L_{k-1} \\ L_0 &= m(t_f) - m(t_0) \end{aligned}$$

A partir de ces équations, il est possible d'en déduire les variations naturelles de l'anomalie :

$$\Delta\alpha = \sqrt{\mu}K_3 \cdot L_3 + \mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i)K_7 \cdot L_7 \quad (\text{A.15})$$

$$\text{avec : } K_j = - \left(\frac{c \cdot \cos \delta}{\sqrt{\mu}} \right)^j \cdot \frac{c}{F}.$$

Deuxième formulation (version de McInnes)

Lors du calcul de l'évolution naturelle de ce paramètre, nous avons généralisé le calcul et l'avons obtenu en fonction des valeurs de la suite L_k . La modélisation du système se complexifie considérablement, d'où notre choix d'utiliser un modèle analytique à chaque étape. Il serait donc intéressant de pouvoir modéliser l'évolution des différents paramètres via des fonctions analytiques simples, ce qui nous permettra d'utiliser des méthodes d'optimisation analytiques (et notamment des méthodes se basant sur le calcul du gradient). L'idée est d'intégrer ces évolutions en fonction du demi-grand axe et non en fonction du temps. Etant donné que ce dernier est directement lié à la durée de poussée, le changement de variable s'effectue assez facilement.

Une intégration directe (avec l'aide du logiciel Maple) nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \Delta\alpha^{F_{J_2}} = & -\frac{\mu}{\gamma_0 \cdot \cos(\delta)} \left(\frac{c \cdot \cos(\delta)}{\sqrt{\mu}} \right)^4 (P(\eta) - P(\eta_0)) \exp(\eta - \eta_0) - \\ & \frac{\sqrt{\mu} \cdot \mathcal{C}_{J_2}^\alpha(i)}{\gamma_0 \cos(\delta)} \left(\frac{c \cdot \cos(\delta)}{\sqrt{\mu}} \right)^8 (Q(\eta) - Q(\eta_0)) \exp(\eta - \eta_0) \end{aligned}$$

Où P et Q sont deux polynômes définis par :

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6 \quad (\text{A.16})$$

$$Q(x) = x^7 - 7x^6 + 42x^5 - 210x^4 + 840x^3 - 2520x^2 + 5040x - 5040 \quad (\text{A.17})$$

Ces deux polynômes sont identiques à ceux établis dans [McInnes 97b].

Cette nouvelle expression de la variation naturelle de anomalie est équivalente à celle donnée par la première formulation. En effet, le calcul de la valeur des intégrales L_k (de proche en proche) permet d'écrire :

$$L_N = m_0 \exp(\eta - \eta_0) \sum_{k=0}^{k=N} (-1)^k * \frac{N!}{(N-k)!} \eta^{N-k} - m_0 \cdot \sum_{k=0}^{k=N} (-1)^k * \frac{N!}{(N-k)!} \eta_0^{N-k} \quad (\text{A.18})$$

et nous retrouvons bien les polynômes P et Q, qui sont des cas particuliers de cette forme générale (resp. pour N=3 et N=7).

A.3.2 Intégration du terme traduisant l'effet d'une poussée

Maintenant, nous allons intégrer l'effet d'une poussée sur l'anomalie (du fait du changement du repère). Nous devons donc calculer les variations :

$$\left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_F = -\sin \delta \sqrt{\frac{a(t)}{\mu}} \cdot \frac{\sin \alpha(t)}{\tan i} \cdot \frac{F}{m(t)}$$

La difficulté réside dans le fait que l'anomalie varie également en fonction du temps (via le moyen mouvement et l'effet du J2) et donc il n'est pas facile d'intégrer analytiquement ce terme. D'autre part, une intégration numérique complexifie le modèle et augmente le temps de calcul. Une alternative possible est de calculer une approximation à ce terme et ceci moyennant quelques approximations.

La variation de l'anomalie est **moyennée** sur un intervalle d'anomalie $[\alpha_0, \alpha_1]$.

$$\left\langle \left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_F \right\rangle = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_0} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} -\sin \delta \sqrt{\frac{a(t)}{\mu}} \cdot \frac{\sin \alpha}{\tan i} \cdot \frac{F}{m(t)} d\alpha \quad (\text{A.19})$$

Dans ce cadre d'étude, l'intervalle de moyennation considéré est généralement de l'ordre de la demi orbite (i.e. $|\alpha_1 - \alpha_0| \leq \pi$).

Sur cet intervalle, le vecteur état caractérisant le système varie très peu. D'où l'hypothèse que le demi-grand axe a et la masse sont constants sur cet intervalle. Ceci permet d'écrire :

$$\left\langle \left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_F \right\rangle = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_0} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \frac{1}{\tan i} \cdot \frac{F}{m(t)} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \sin(\alpha) d\alpha \quad (\text{A.20})$$

Et donc :

$$\left\langle \left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_F \right\rangle = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_0} \sqrt{\frac{a}{\mu}} \cdot \frac{\sin \delta}{\tan i} \cdot \frac{F}{m(t)} [\cos(\alpha_0) - \cos(\alpha_1)] \quad (\text{A.21})$$

L'intégration de cette variation durant une poussée permet d'écrire :

$$\Delta\alpha = \sqrt{\frac{a_0}{\mu}} \frac{\sin \delta}{\tan i} \frac{[\cos(\alpha_0) - \cos(\alpha_1)]}{\alpha_1 - \alpha_0} \int_1^{x(t_f)} \frac{1}{\left(1 + \frac{\cos \delta \cdot c \cdot \sqrt{a(t_0)}}{\sqrt{\mu}} \ln(x)\right)} \frac{-c dx}{\gamma_0 x}$$

avec $x(t) = 1 - \frac{\gamma_0}{c}(t - t_0)$.

Donc, la variation de l'anomalie est approximée par :

$$\Delta\alpha = \frac{-c}{\gamma_0} \sqrt{\frac{a_0}{\mu}} \frac{\sin \delta}{\tan i} \frac{[\cos(\alpha_0) - \cos(\alpha_1)]}{\alpha_1 - \alpha_0} \left[\frac{1}{\eta_0} \ln \left(1 + \frac{1}{\eta_0} \ln(x(t_f)) \right) \right] \quad (\text{A.22})$$

A.4 Evolution de l'ascension droite du noeud ascendant :

Au regard des équations d'évolution de l'ascension droite du noeud ascendant, il est à noter qu'elle est similaire à celle de l'anomalie (à des facteurs multiplicateurs près pour les effets du J_2 et de celui de la poussée).

Les calculs développés pour le cas de l'anomalie sont utilisés pour ce paramètres. Ainsi, dans le cas des effets naturels, la première formulation donne :

$$\Delta\Omega^F_{J_2} = \mathcal{C}_{J_2}^\Omega(i) K_7 \cdot L_7 \quad (\text{A.23})$$

La deuxième quant à elle permet d'écrire la variation naturelle de l'ascension droite du noeud ascendant sous la forme :

$$\Delta\Omega^F_{J_2} = -\frac{\sqrt{\mu} \cdot \mathcal{C}_{J_2}^\Omega(i)}{\gamma_0 \cos \delta} \left(\frac{c \cdot \cos(\delta)}{\sqrt{\mu}} \right)^8 (G(\eta) - G(\eta_0)) \exp(\eta - \eta_0) \quad (\text{A.24})$$

L'effet de l'application d'une poussée continue donne :

$$\Delta\Omega = \frac{c}{\gamma_0} \sqrt{\frac{a_0}{\mu}} \frac{\sin \delta}{\sin i} \frac{[\cos(\alpha_0) - \cos(\alpha_1)]}{\alpha_1 - \alpha_0} \left[\frac{1}{\eta_0} \ln \left(1 + \frac{1}{\eta_0} \ln(x(t_f)) \right) \right] \quad (\text{A.25})$$

Ces développements analytiques ont permis de simplifier considérablement le modèle du système, et de ce fait d'alléger les temps de calcul. Ceci a permis de modéliser l'étalement des poussées et, à terme, de calculer de façon simple une initialisation au problème à poussées continues.

Annexe B

Répartition optimale des poussées hors-plan

Lors de la réalisation d'un transfert orbital, il est quelques fois nécessaire de réaliser des poussées hors-plan et notamment de les répartir sur les différentes phases de poussées, et ceci dans le cas d'orbites quasi-circulaires. Dans ce chapitre, deux méthodes de répartitions possibles sont présentées.

B.1 Répartition optimale au premier ordre :

Dans [Dufour 93], il a été établi qu'il est possible d'améliorer le rendement des poussées hors-plan en les répartissant sur les différentes phases de poussées de telle sorte que les déclinaisons de poussées soient identiques pour toutes les poussées. La déclinaison optimale est donnée par :

$$\delta = \arctan \left(\frac{\sum_{k=1}^N |Vw_k|}{\sum_{k=1}^N |Vt_k|} \right) \quad (\text{B.1})$$

où

Vw_k désigne la $k^{\text{ème}}$ poussée hors-plan

Vt_k désigne la $k^{\text{ème}}$ poussée tangentielle

N est le nombre de phases de poussées

La figure B.1 permet de visualiser le principe de cette répartition.

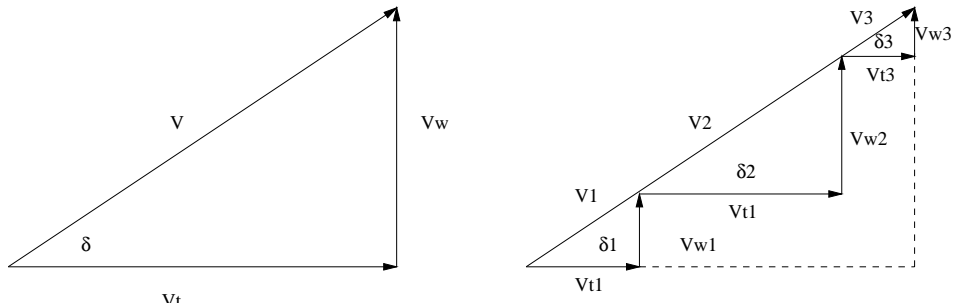


FIG. B.1 – déclinaison optimale dans le cas d'orbites circulaires

B.2 Répartition optimale plus exacte

Le répartition précédente est une solution au premier ordre. Cette répartition peut être améliorée par un calcul d'optimisation simplifié. Les hypothèses simplificatrices sont :

- Il faut répartir les poussées hors-plan sur N phases de poussées.
- Les poussées tangentielles à réaliser sont définies et fixées.
- Ces poussées hors-plan permettent d'apporter une correction sur l'ascension droite du noeud ascendant (notée $\Delta\Omega$).
- Les poussées hors-plan sont appliquées aux anti-noeuds (i.e. $\cos \alpha = 0$), et de ce fait l'inclinaison, i , est constante le long du transfert.

Dans ce cas, chaque poussée Vw_k permet d'apporter la correction $\delta\Omega_k$, donnée par:

$$\delta\Omega_k = \frac{1}{\sin i} \cdot \frac{Vw_k}{Vc_k} \quad (\text{B.2})$$

où Vc_k est la vitesse circulaire du satellite (i.e. $Vc_k = a_k \cdot n_k$).

Il faut déterminer les N variables $\delta\Omega_k$ qui permettent de minimiser le coût global du transfert :

$$\min \sum_{k=1}^{k=N} \sqrt{Vt_k^2 + Vw_k^2} \quad (\text{B.3})$$

Ces variables d'optimisation doivent respecter la contrainte d'égalité:

$$\Delta\Omega - \sum_{k=1}^N \delta\Omega_k = 0 \quad (\text{B.4})$$

La condition d'optimalité $\frac{\partial V}{\partial(\delta\Omega_k)} = 0$ permet d'écrire (après simplification):

$$\sin \delta_k \cdot Vc_k = \sin \delta_N \cdot Vc_N \quad \text{pour } k = 1..N - 1 \quad (\text{B.5})$$

où δ_k représente la $k^{\text{ième}}$ déclinaison.

Ainsi la répartition des déclinaisons de poussées suit la loi :

$$\left| \frac{\sin \delta_k}{\sqrt{a_k}} \right| = cste = K \quad (\text{B.6})$$

où a_k représente le k^{ieme} demi-grand axe intermédiaire (résultat de la k^{ieme} poussée tangentielle).

Le calcul pratique des déclinaisons se fait par la détermination de la constante K qui est solution de l'équation :

$$\Delta\Omega - \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sin i} \cdot \frac{K \cdot a_k \cdot V t_k}{\sqrt{\mu} \sqrt{1 - K^2 a_k}} = 0 \quad (\text{B.7})$$

La solution de cette équation est calculée à l'aide d'un algorithme de recherche unidimensionnelle (cf. [Minoux 83]). Il est à noter que pour de petites variations du demi-grand axe, la condition B.6 peut être approximée par :

$$\sin \delta_k = cste \quad (\text{B.8})$$

Cette répartition n'est autre que celle du premier ordre présentée en B.1. Ainsi, la répartition constante sur les différentes phases de poussées est l'approximation, au premier ordre, de la répartition optimale des poussées hors-plan.

B.3 Quelques résultats numériques

Afin de quantifier et d'illustrer l'apport de chaque méthode de répartition des poussées hors-plan, il est intéressant de les appliquer à un cas d'étude de transfert orbital. Le transfert traité est défini comme suit :

- La position initiale du satellite est définie par son demi-grand axe ($a = 7000$ km) et son inclinaison ($i = 60.0$ degrés).
- La correction à réaliser en ascension droite du noeud ascendant est fixée à 5 degrés.
- La correction à réaliser en demi-grand axe est de 300 km. Elle est équitablement répartie sur les différentes phases de poussée. Les poussées tangentielles correspondantes sont calculées à l'aide des équations de Gauss (leurs modules est décroissant selon l'altitude).
- Différentes valeurs du nombre de poussées sont considérés.

Le coût du transfert considéré est calculé pour différentes lois de répartition des poussées hors-plan :

- Selon une répartition prédéterminée : La poussée hors-plan globale est répartie équitablement sur les différentes poussées.
- Selon une répartition à déclinaison constante,

	Poussée No.1 (m/s)	Poussée No.2 (m/s)	Poussée No.3 (m/s)	coût total (m/s)
Répartition pré-déterminée	190.09	190.09	190.09	591.87
Répartition à déclinaison constante	194.13	190.05	186.10	591.86
Répartition à déclinaison optimisée	175.00	187.21	203.53	587.61

TAB. B.1 – Coût du transfert pour diverses lois de répartition des poussées ($N=3$)

– Selon une répartition à déclinaison optimisée.

Les résultats du tableau B.1 montrent que l'optimisation de la répartition permet de diminuer la consommation globale du satellite (de l'ordre de 5 m/s). Ce gain varie selon le cas de figure étudié. En effet, dans certains cas, ou notamment la correction en demi-grand axe est assez faible, il s'avère inutile d'optimiser la répartition des corrections hors-plan du fait que l'apport, en terme de diminution de la consommation, est trop faible. Dans ce travail, selon l'ordre de précision requis sur l'optimum, le type de répartition (constante ou optimisée) est choisi en conséquence. Généralement, cette optimisation permet d'améliorer l'estimation d'un point initial satisfaisant les contraintes.

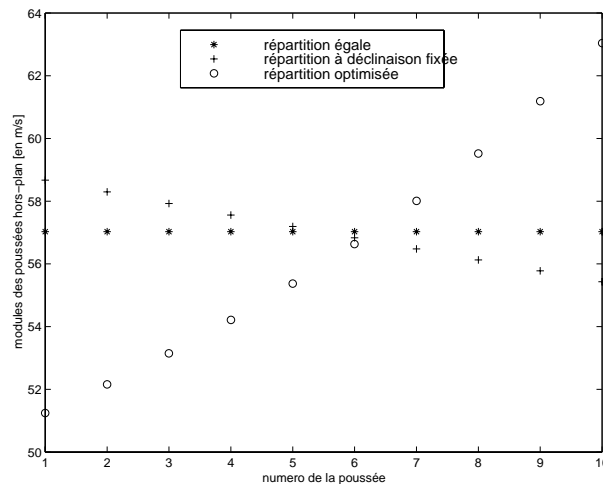


FIG. B.2 – Modules des poussées hors-plan pour différentes lois de répartition ($N=10$)

La figure B.2 montre la variation de la composante hors-plan avec l'indice la poussée optimale et ce pour les trois stratégies de répartition (constante, à déclinaison constante et à déclinaison optimisée). Le profil des poussés associé à la stratégie optimisée est croissante avec l'altitude (comme le montre la condition (B.6), le sinus de la déclinaison est proportionnel à la racine carré de l'altitude). Ce résultat est en opposition avec celui issu d'une approche simplifiée du premier ordre (comme celle présentée dans B.1).

D'autre part, il est à noter que plus le nombre de poussées est important, plus la consommation du satellite diminue (cf. tableau B.2). Ceci est lié, en partie à l'efficacité des poussées. En effet, plus l'altitude est élevée, plus les poussées tangentielles sont efficaces.

	coût total N=3	coût total N=10	coût total N=100
Répartition prédéterminée	591.87 m/s	591.56 m/s	591.44 m/s
Répartition à déclinaison constante	591.86 m/s	591.55 m/s	591.43 m/s
Répartition à déclinaison optimisée	587.61 m/s	586.13 m/s	585.48 m/s

TAB. B.2 – *Coût du transfert pour diverses lois de répartition des poussées*

Dans notre cas d'étude, la limitation de l'horizon temporelle impose une limite inférieure au coût. En effet, puisque l'effet du J_2 est utilisé pour apporter des corrections en anomalie et en ascension droite du noeud ascendant, les durées de dérive peuvent être insuffisantes. De ce fait, les poussées hors-plan augmentent et ainsi le coût augmente.

Annexe C

Méthodes de résolution utilisées

Dans cette annexe, le rappel des principales méthodes de résolution utilisées est donné. Comme expliqué au paragraphe II.6, selon la nature du problème à résoudre (optimisation ou résolution d'un système d'équations...) et de ses propriétés (continuité, dérivation...) la méthode de résolution est choisie.

C.1 La méthode Hybrid-Powell

Cette méthode permet de résoudre un système de n équation à n inconnues. C'est une méthode analytique itérative, qui combine le principe de la méthode du gradient avec celle de la méthode Quasi-Newton [Minoux 83]. Rappelons que la méthode du gradient permet de se déplacer vers la solution via la relation C.1.

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k J^{-1} f(x_k) \quad (\text{C.1})$$

où :

- J la matrice jacobienne,
- f la fonction pour laquelle les zéros sont recherchée,
- λ_k est le pas de déplacement qui peut être optimisé (sinon, il est pris égal à l'unité).
Ce paramètre permet d'augmenter la vitesse de convergence de la méthode.

Les méthodes quasi-Newtoniennes permettent d'approximer la matrice jacobienne. Celle de Broyden est utilisée dans ce cadre d'étude (cf équation C.2). A chaque pas d'itération, la matrice approximant la matrice jacobienne est recalculée.

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y - B_k s)s^T}{s^T s} \quad (\text{C.2})$$

où : $y = f(x_{k+1}) - f(x_k)$ et $s = x_{k+1} - x_k$

La combinaison de ces deux méthodes donne la relation reliant le pas de déplacement (noté Δx_k) de la méthode Hybrid-Powell [Hiebert 82] :

$$[\gamma \mathbb{1} + B_k^T B_k] \Delta x_k = -B_k f_k \quad (\text{C.3})$$

Dans la pratique, cette méthode s'avère plus efficace qu'une méthode de gradient classique.

C.2 Le simplexe de Nelder-Mead

Le simplexe est une méthode de minimisation locale, non linéaire, sans contraintes et sans gradient [Nelder 65]. Les contraintes à vérifier sur le domaine de recherche de la solution seront modélisées sous formes de fonctions de pénalité intégrées dans la fonction coût. Soit n le nombre de variables à optimiser. Le simplexe est une figure géométrique formée de $n+1$ points dans un espace de dimension n . A chaque itération, le sommet dont le coût est le plus élevé est déplacé (dans le domaine de recherche) vers un meilleur sommet. En fin d'itération, le simplexe converge vers l'optimum. Cette convergence peut être lente lorsque le nombre de variables est important. Le déplacement des sommets se base sur les transformations suivantes :

- la réflexion, caractérisée par son coefficient α ($\alpha > 0$),
- l'expansion, caractérisée par son coefficient γ ($\gamma > 0$),
- la contraction, caractérisée par son coefficient β ($0 < \beta < 1$),
- la réduction sur les n plus mauvais sommets.

Nous pouvons définir mathématiquement ces transformations. En effet, soit $(X_i)_{i=1..n+1}$ les sommets du simplexe. A chaque itération, nous devons identifier trois sommets importants :

- X_r est le sommet qui possède le coût le plus élevé,
- X_l est le sommet qui possède le coût le moins élevé,
- X_0 est le barycentre des n sommets $(X_i)_{i \neq h}$ (c'est-à-dire $X_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1, i \neq h}^{n+1} X_i$).

A partir de ces trois sommets importants, nous pouvons procéder aux transformations du simplexe qui sont définies par :

- **la réflexion** : X_h est remplacé par $X_r = (1 + \alpha)X_0 - \alpha X_h$. C'est la première transformation à tester au début de l'itération.

- **l'expansion** : Si la réflexion donne de bons résultats, on tente une expansion. X_h est remplacé par $X_e = \gamma X_r + (1 - \gamma)X_0$
- **la contraction** : elle est utilisée lorsque la réflexion est incapable d'améliorer aucun sommet sauf X_h . Dans ce cas, X_h est remplacé par $X_c = \beta X_h + (1 - \beta)X_0$
- **la réduction** : elle intervient en dernier recours, lorsque toutes les autres transformations ont échouées. Dans ce cas, Tous les sommets sauf le minimum X_l sont recalculés selon la relation : $X'_i = \frac{1}{2}(X_i + X_l)$.

L'algorithme fait appel à ces transformations jusqu'à ce que la méthode converge vers un minimum, ce qui se traduit par la satisfaction d'un critère d'arrêt. Ce critère est une condition sur l'écart type des coûts des différents sommets qui doit être inférieur à la précision souhaitée ε :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n+1} \frac{(\text{coût}(X_i) - \text{coût}(X_0))^2}{n+1}} \leq \varepsilon$$

C.3 La méthode Hooke-Jeeves

C'est une méthode d'optimisation sans contraintes [Hooke 60]. Elle consiste à rechercher l'optimum à l'aide de deux séries de mouvements :

- mouvement d'exploration (*exploratory move*) : à partir d'une point de départ donné, cette phase effectue des perturbations successives, le long des différents axes. Si le coût est meilleur, les incréments effectués sur cette phase sont conservés. Dans le cas contraire, l'exploration est reprise en réduisant l'amplitude des perturbations.
- mouvement d'extrapolation (*pattern move*) : un déplacement est effectué dans le direction obtenue par la phase d'exploration. Le nouveau point obtenu étant le nouveau point de référence.

L'algorithme est exécuté jusqu'à ce que les pas de déplacement deviennent inférieurs à une précision donnée.

C.4 La méthode du Gradient Réduit Généralisé

Cette méthode [Abadie 69] combine les méthodes de linéarisation et de celle du gradient réduit de *Wolfe*. Elle permet de résoudre des problèmes de minimisation sous contraintes :

$$\begin{cases} \min f(x) \\ g(x) = [g_1 \cdots g_m]^T = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Cette méthode consiste à diviser les variables d'optimisation en deux sous-ensembles :

- variables de base (de dimension b et notées x_B) : elles sont choisies tel que la matrice jacobienne définie par l'équation C.5 soit régulière.

$$\frac{\partial g}{\partial x_B}(x) = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right]_{i=1 \dots m, j=1 \dots b} \quad (\text{C.5})$$

- variables hors-base (de dimension $n - b$ et notées x_N) complètent donc l'ensemble des variables.

Le calcul de la solution de fait en trois étapes :

- Le calcul de la direction de déplacement (noté (y_B, y_N)) : il est donné par le système d'équation (C.7,C.6) issu de la linéarisation des contraintes.

$$y_N = - \left[\frac{\partial f}{\partial x_N} - \left(\frac{\partial f}{\partial x_N} \right) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x_B} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x_N} \right) \right] \quad (\text{C.6})$$

$$y_B = - \left(\frac{\partial g}{\partial x_B} \right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial x_N} y_N \quad (\text{C.7})$$

- optimisation du pas de déplacement : afin d'augmenter la vitesse de convergence de la méthode, ce pas peut être optimisé à l'aide d'une méthode d'optimisation unidimensionnelle du paramètre $\hat{\Theta}$.

$$\hat{x} = x_0 + \hat{\Theta}y \quad (\text{C.8})$$

- Le point calculé précédemment ne satisfait pas les contraintes. Il faut donc effectuer une projection sur la variété engendrée par les variables de base. Une méthode Newton peut être utilisée. Pour ce faire, les variables hors-base sont fixées et les variables de base déterminées tel que les contraintes soient satisfaites.

Ce processus est réitéré jusqu'à ce que la précision souhaitée soit satisfaite.

C.5 La méthode Sequential Quadratic Programming

Cette méthode est une généralisation de la méthode de Newton pour la minimisation sans contraintes. Son principe est de linéariser les contraintes du système et de remplacer la fonction objectif par une approximation quadratique. Par exemple, si le problème à résoudre, noté P , est de la forme :

$$(P) \begin{cases} \min f(x) \\ g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

Alors, ce problème est résolu de façon itérative. Les directions de déplacement $d_k = x_{k+1} - x_k$, et les multiplicateurs de Lagrange μ_{k+1} et λ_{k+1} sont obtenus en résolvant le sous-problème quadratique P_{QP} donné par :

$$(P_{QP}) \begin{cases} \min \frac{1}{2} H_k d \cdot d + \nabla f(x_k) \cdot d \\ Dg(x_k) d + g(x_k) \leq 0 \\ Dh(x_k) d + h(x_k) = 0 \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

où

- le Hessien vaut $H_k = \nabla_x^2 L(x, \lambda)$,
- le lagrangien vaut $L(x, \lambda) = f(x) + g(x) \cdot \mu + h(x) \cdot \lambda$.

Donc, à chaque itération, il faut résoudre un sous-problème quadratique (défini par l'équation C.10), et ceci par des méthodes basées sur les conditions de KKT (Karush Kuhn et Tucker) du style méthodes de surface actives.

C.6 La méthode Feasible Sequential Quadratic Programming

Cette méthode est similaire à la méthode **SQP** avec la condition supplémentaire de satisfaire les contraintes à chaque itération [Lawrence 97]. Elle est particulièrement intéressante dans le cas où la fonction objectif est mal définie à l'extérieur du domaine de recherche ou si la méthode **SQP** converge vers un point ne respectant pas les contraintes imposées (et notamment son domaine d'appartenance). La modification de cette méthode par rapport à la méthode précédente réside dans le calcul du pas de déplacement. En effet, il est maintenant défini comme une combinaison de la direction déterminée par la **SQP** et celle de la direction "faisable" (appartenance dans le domaine de points possibles).

Résumé

La thèse traite du problème de transfert orbital d'engins spatiaux sous l'hypothèse d'orbite basse quasi circulaire avec contraintes de rendez vous final et horizon temporel borne. Le critère d'optimisation est celui de la consommation, ce qui entraîne le fait que la stratégie optimale intègre l'utilisation de dérives naturelles découlant de la non homogénéité du potentiel terrestre pour apporter des corrections gratuites. Le problème d'optimisation global est abordé par une approche séquentielle à multi niveaux procédant par approximations successives à complexité croissante du point de vue modélisation et nature du transfert. Dans un premier temps, le problème du transfert par utilisation de poussées "chimiques" impulsives est résolu dans sa généralité. Les résultats obtenus servent de socle à la recherche de la solution au problème sous hypothèse de faibles poussées "électriques", ce qui implique des solutions de type continu. Une solution admissible par rapport à ces hypothèses est élaborée par étalement et raccordement d'impulsions élémentaires contenues dans un train d'impulsions, lui même obtenu récursivement par fractionnement successif d'impulsions. Cette solution est alors optimisée au moyen de méthodes locales et paramétriques.

Mots clés : rendez-vous orbital, aplatissement terrestre, optimisation, programmation non linéaire, propulsion chimique, propulsion électrique.

Abstract

This work deals with the optimization of minimum-fuel quasi-circular low-Earth spacecraft orbital transfers, under imposed final rendez-vous constraints and bounded transfer duration. As the optimization criterion is the maximization of the spacecraft final mass, the optimal transfer strategy benefits from natural drift due to the Earth oblateness in order to have some costless corrections of the free orbit. The proposed method solves the optimization problem by a multi-level multi-step strategy, where the problem complexity is successively increased with respect to the system modelization and the transfer characteristics. In a first step, the impulsive problem is considered by assuming the use of instantaneous chemical high-level thrusts. The solution of this problem is then used as an initial point for the low-thrust electrical thrust problem. This initial solution is computed by splitting up each impulsive thrust into a multiple low-thrust elementary thrusts and then by connecting the burn arcs. The optimal solution is finally determined after performing local parameterical optimization .

Keys words: orbital rendezvous, Earth oblateness, optimization, nonlinear programming, impulsive propulsion, electrical propulsion.