

# THÈSE

présentée en vue de  
l'obtention du titre de

**DOCTEUR**

de

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE**

**SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE**

par

**Karine CHAMPION-RÉAUD**

**MÉTHODE D'ÉTUDE DES VIBRATIONS D'UN SYSTÈME MÉCANIQUE  
NON BASÉE SUR LE CALCUL DE SES MODES PROPRES**

Soutenue le 10 juillet 2002 devant la Commission d'Examen :

<b>MM.</b>	<b>S. LAROZE</b>	<b>Président</b>
	<b>D. BELLET</b>	
	<b>D. CHEVALLIER</b>	
<b>Mme</b>	<b>D. FORTUNÉ</b>	
<b>MM.</b>	<b>A. GIRARD</b>	
	<b>Q.-C. HÉ</b>	<b>Rapporteur</b>
	<b>R. OHAYON</b>	<b>Rapporteur</b>
	<b>C. VALLÉE</b>	<b>Directeur de thèse</b>
	<b>A. FOSSARD</b>	<b>Membre invité</b>

# THÈSE

présentée en vue de  
l'obtention du titre de

**DOCTEUR**

de

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE**

**SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE**

par

**Karine CHAMPION-RÉAUD**

**MÉTHODE D'ÉTUDE DES VIBRATIONS D'UN SYSTÈME  
MÉCANIQUE NON BASÉE SUR LE CALCUL DE SES MODES PROPRES**

*Thèse réalisée au Laboratoire de Modélisation Mécanique et Mathématiques Appliquées  
de L'Université de Poitiers.*

Soutenue le 10 JUILLET 2002 devant la commission d'examen :

<b>M. R. OHAYON</b>	Professeur, CNAM, Paris	<b>Rapporteur</b>
<b>M. Q.-C. HÉ</b>	Professeur, Université de Marne la Vallée	<b>Rapporteur</b>
<b>M. D. BELLET</b>	Professeur, Institut National Polytechnique de Toulouse	
<b>M. D. CHEVALLIER</b>	Directeur de Recherche, E.N.P.C., Paris	
<b>Mme. D. FORTUNÉ</b>	Maître de Conférence, Université de Poitiers	
<b>M. A. FOSSARD</b>	Professeur	<b>Invité</b>
<b>M. A. GIRARD</b>	Ingénieur Expert, Intespace, Toulouse	
<b>M. S. LAROZE</b>	Professeur, École Nationale de l'Aéronautique et de l'Espace	
<b>M. C. VALLÉE</b>	Professeur, Université de Poitiers	<b>Directeur de thèse</b>

# Remerciements

Si j'ai adopté l'emploi de la première personne du pluriel tout au long de la rédaction de ce mémoire c'est parce qu'une thèse n'est jamais le seul fait d'un individu mais d'une équipe. Je souhaiterais, dans ces quelques lignes, témoigner ma reconnaissance à ceux qui y ont contribué ...

Pour m'avoir accueillie au sein de son équipe, pour la confiance qu'il n'a cessé de me témoigner, pour sa patience, sa disponibilité exceptionnelle et sa direction scientifique avisée qui a guidé le développement de ce travail, j'exprime mes remerciements les plus vifs et les plus sincères à Monsieur Claude Vallée, Professeur à l'Université de Poitiers. Il est, je pense, le directeur de thèse rêvé de tout doctorant !

Pour avoir toujours laissé sa porte ouverte tout au long de cette thèse et même de mes études "mécaniciennes", je remercie vivement Madame Danielle Fortuné, Maître de conférences à l'Université de Poitiers. J'espère avoir su tirer profit de ses conseils éclairés en matière de recherche et de son expérience en matière d'enseignement.

Je tiens à remercier Messieurs Kerbrat et Bascary, Directeurs de Supaéro, pour m'avoir accueillie au sein de leur établissement et permis, grâce à une aide financière de participer au congrès de l'A.S.M.E. à Pittsburgh ... un certain 11 septembre 2001 notamment.

Sans lui, cette thèse n'existerait pas, je remercie très chaleureusement Monsieur André Fosard, Professeur de Supaéro, pour la confiance indéfectible qu'il m'a témoignée, son soutien et ses conseils. Ce manuscrit doit beaucoup à ses relectures attentives.

Très sensible à l'attention qu'ils ont apporté à mon travail en acceptant de le juger et d'en être rapporteurs, malgré leurs nombreuses activités, j'exprime ma très respectueuse gratitude à Monsieur Roger Oyahon, Professeur et Titulaire de la chaire de mécanique du C.N.A.M. et à Monsieur Qi-Chang Hé, Professeur à l'Université de Marne-la-Vallée.

Son soutien et son aide me furent des plus précieux, j'adresse mes remerciements à Monsieur Didier Bellet, Président de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, pour avoir bien voulu me consacrer de son temps et accepté de juger ce travail.

Je remercie Monsieur Dominique Chevallier, Directeur de Recherche à l'École Nationale des Ponts et Chaussées, pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse et, m'avoir permis, avec Madame Madeleine Pascal, Professeur à l'Université de Paris VI, de présenter mes travaux dans leur séminaire.

Mes remerciements iront naturellement à Monsieur Alain Girard, Ingénieur Expert à Intespace pour m'avoir fait l'honneur de participer au jury.

Pour avoir su me faire partager un peu de son expérience par ses conseils, je remercie Monsieur Serge Laroze, Professeur à Supaéro qui a, en outre, accepté de présider mon jury.

Je remercie Monsieur Sylvain Prudhomme, ingénieur expert chez Airbus Industrie, qui a été le correspondant Supéro de cette thèse, pour ses remarques pertinentes et ses conseils judicieux.

Je remercie aussi très chaleureusement Annie Bailhé, Responsable des études doctorales à Supaéro, pour avoir patiemment et avec beaucoup de gentillesse géré ma situation un peu particulière de doctorante toulousaine expatriée dans le Poitou!

Je remercie Monsieur Gilles Raby, Doyen de la Faculté des Sciences de Poitiers, dont l'aide m'a été très précieuse pour régler notamment quelques difficultés administratives ...

Pour l'intérêt qu'il a porté à cette étude, je remercie vivement Fabrice Laurent, Ingénieur à Alstom Moteur à Nancy.

Messieurs Salvy, Weil, Yakoubson, Mourrain et Ruatta m'ont permis de découvrir le monde passionnant du calcul formel et ont assisté mes balbutiements dans le langage Maple qu'ils trouvent ici l'expression de mes remerciements les plus vifs.

Autre langage, autres Maîtres : pour leurs conseils avisés dans l'utilisation du langage Fortran je remercie Messieurs Morgenthaler et Schott qui ont toujours pris la peine de répondre à mes questions aussi "sottes et grenues" soient elles.

Je suis très reconnaissante à Monsieur Mihaï Arghir, Maître de Conférences à l'Université de Poitiers, pour ses conseils et ses encouragements constants si amicalement prodigués.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur Martin, Maître de Conférence à l'Université de Poitiers, qui a toujours pris le temps de répondre à mes questions, posées le plus souvent dans l'urgence.

Grâce à lui, j'ai pu me rendre au XV-ème Congrès Français de Mécanique à Nancy, je remercie Jean-Claude Grandidier, Professeur à l'Université de Poitiers, pour son aide financière.

Je remercie Françoise Foures, Responsable de la bibliothèque du S.P.2M.I. pour sa présence amicale et nos discussions quotidiennes, passionnantes et passionnées!

Merci aussi à tous ceux que j'ai cotoyés durant ces quelques années, à Toulouse ou à Poitiers, et qui ont contribué au bon déroulement de ma thèse, par leur aide, leur bonne humeur et/ou leur soutien moral, je leur témoigne ici toute mon amitié : Corine, Isabelle, Jan, Sanih, Dan, Laurence, sans oublier Finette.

Enfin, puisqu'il faut bien clore cette page je tiens à exprimer ma reconnaissance à tout ceux qui ont apporté une aide, manifeste ou subtile, à la réalisation de ce travail.

À cause de lui je suis partie à Toulouse et pour lui je suis revenue à Poitiers, j'exprime toute ma gratitude à celui qui est devenu mon mari Jean-Louis Champion-Réaud, il m'a supporté (dans les deux sens du terme!) patiemment au cours de ce long chemin qu'a été la préparation de cette thèse.

# Sommaire

<b>1</b>	<b>Introduction Générale</b>	<b>7</b>
1.1	Contexte général . . . . .	7
1.2	Intérêt de l'étude . . . . .	9
1.3	Présentation de l'étude . . . . .	10
1.4	Plan du mémoire . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Méthodes de Le Verrier et de Souriau</b>	<b>13</b>
2.1	Notations . . . . .	14
2.2	Introduction . . . . .	14
2.3	Le Verrier . . . . .	14
2.3.1	Un peu d'histoire ... . . . .	14
2.3.2	Méthode de Le Verrier . . . . .	16
2.3.3	Algorithme de Le Verrier . . . . .	18
2.3.4	Avantages et inconvénients . . . . .	19
2.4	Méthode de Horst . . . . .	19
2.5	Souriau . . . . .	19
2.5.1	Méthode de Souriau . . . . .	20
2.5.2	Algorithme de Souriau . . . . .	24
2.6	Extraction des vecteurs propres . . . . .	25
2.6.1	Premier cas : $Q(\lambda_i)$ est non nulle . . . . .	26
2.6.2	Deuxième cas : $Q(\lambda_i)$ est nulle et $Q'(\lambda_i)$ est non nulle . . . . .	27
2.6.3	Troisième cas : $Q(\lambda_i)$ est nulle, $Q'(\lambda_i)$ est nulle et $Q''(\lambda_i)$ est non nulle . . . . .	28
2.7	Exemples . . . . .	29
2.7.1	Matrice ayant toutes ses valeurs propres simples . . . . .	29
2.7.2	Matrice ayant une valeur propre simple et une double . . . . .	31
2.7.3	Matrice ayant une valeur propre triple . . . . .	32
2.7.4	Matrice ayant deux valeurs propres complexes et conjuguées . . . . .	33
2.8	Conclusion . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Equations différentielles linéaires du 1er ordre</b>	<b>35</b>
3.1	Notations . . . . .	36

3.2	Transposition de la méthode de Souriau à la résolution du système $\frac{dX}{dt} = AX$	37
3.2.1	Elaboration de la partie algébrique de l'algorithme résolvant le système	37
3.2.2	Elaboration de la partie différentielle de l'algorithme . . . . .	37
3.2.3	Choix des conditions initiales relatives à la fonction $\gamma$ . . . . .	38
3.2.4	Algorithme de résolution du système $\frac{dX}{dt} = AX$ . . . . .	39
3.3	Résolution de $A\frac{dX}{dt} + BX = 0$ . . . . .	39
3.3.1	Définitions . . . . .	40
3.3.2	Élaboration de la partie algébrique . . . . .	40
3.3.3	Première interprétation : méthode itérative ascendante . . . . .	42
3.3.4	Deuxième interprétation : méthode itérative descendante . . . . .	42
3.3.5	Initialisation des coefficients de l'algorithme ascendant . . . . .	43
3.3.6	Initialisation des coefficients de l'algorithme descendant . . . . .	43
3.3.7	Algorithme linealg1 ascendant . . . . .	44
3.3.8	Algorithme linealg1 descendant . . . . .	44
3.3.9	Élaboration de la partie différentielle . . . . .	44
3.3.10	Choix des conditions initiales satisfaites par $\gamma$ . . . . .	45
3.4	Algorithme ascendant . . . . .	47
3.5	Algorithme descendant . . . . .	47
3.6	Comparaison avec les méthodes numériques classiques . . . . .	48
3.6.1	Méthodes itératives . . . . .	49
3.6.2	Méthodes de transformation . . . . .	51
3.6.3	Méthodes basées sur le développement du polynôme caractéristique .	54
3.6.4	Quelle méthode pour quelle classe? . . . . .	55
3.6.5	Conclusion . . . . .	56
3.7	Conclusion . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Vibrations linéaires libres - Méthodes classiques de résolution</b>	<b>59</b>
4.1	Systèmes conservatifs . . . . .	60
4.1.1	Systèmes conservatifs à un degré de liberté . . . . .	61
4.1.2	Systèmes conservatifs à plusieurs degrés de liberté . . . . .	61
4.1.3	Analyse modale des systèmes conservatifs . . . . .	64
4.2	Systèmes non-conservatifs . . . . .	65
4.2.1	Position du problème . . . . .	65
4.2.2	Systèmes différentiels adjoints . . . . .	66
4.2.3	Transformation du système du second ordre en un système du premier ordre . . . . .	68
4.3	Systèmes linéaires classiquement amortis et non classiquement amortis . . .	69
4.3.1	Hypothèse de Rayleigh . . . . .	70
4.3.2	Hypothèse de Caughey et O'Kelly . . . . .	71
4.4	Analyse modale des systèmes classiquement amortis . . . . .	71

4.4.1	Introduction . . . . .	71
4.4.2	Définitions . . . . .	72
4.4.3	Méthode des déplacements modaux . . . . .	72
4.4.4	Conclusion . . . . .	73
4.5	Méthodes de condensation . . . . .	74
4.5.1	Méthode de Guyan . . . . .	74
4.6	Analyse modale des systèmes non-classiquement amortis . . . . .	75
4.6.1	Hypothèse d'amortissement modal diagonal . . . . .	75
4.6.2	Méthode de découplage approchée . . . . .	77
4.7	Conclusion . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Vibrations linéaires - Nouvelle méthode de résolution</b>	<b>79</b>
5.1	Généralisation de la méthode du premier ordre . . . . .	80
5.2	Élaboration de la partie algébrique de l'algorithme . . . . .	81
5.2.1	Première interprétation : méthode itérative ascendante . . . . .	82
5.2.2	Deuxième interprétation : méthode itérative descendante . . . . .	83
5.2.3	Initialisation des coefficients de l'algorithme ascendant . . . . .	83
5.2.4	Initialisation des coefficients de l'algorithme descendant . . . . .	84
5.2.5	Algorithme Linealg2 . . . . .	85
5.3	Élaboration de la partie différentielle de l'algorithme . . . . .	86
5.3.1	Choix des conditions initiales relatives à la fonction $\gamma$ . . . . .	87
5.3.2	Méthode de résolution de $M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0$ . . . . .	88
5.4	Algorithme de résolution de $M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0$ . . . . .	90
5.4.1	Algorithme ascendant . . . . .	90
5.4.2	Algorithme descendant . . . . .	91
5.5	Méthodes numériques de résolution des équations différentielles . . . . .	92
5.5.1	Principe . . . . .	92
5.5.2	Méthode d'Euler . . . . .	93
5.5.3	Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 . . . . .	93
5.5.4	Méthode retenue dans le code de calcul . . . . .	94
5.6	Validation de la méthode : cas des <i>vibrations libres non amorties</i> d'un véhicule automobile . . . . .	94
5.6.1	Position du problème . . . . .	94
5.6.2	Résolution . . . . .	97
5.6.3	Comparaison des résultats obtenus dans les cas symétriques et non symétriques . . . . .	98
5.6.4	Analyse des résultats . . . . .	98
5.7	Validation de la méthode : cas des <i>vibrations libres amorties</i> d'un véhicule automobile . . . . .	100
5.7.1	Position du problème . . . . .	100

5.7.2	Comparaison des résultats obtenus dans les cas symétriques et non symétriques . . . . .	101
5.7.3	Analyse des résultats . . . . .	102
5.8	Étude des vibrations forcées . . . . .	104
5.9	Algorithme pour les vibrations forcées . . . . .	106
5.10	Application au cas de l'avion souple amorti . . . . .	108
5.10.1	Modélisation de l'avion souple amorti . . . . .	108
5.10.2	Analyse des résultats . . . . .	109
5.11	Conclusion . . . . .	110
<b>6</b>	<b>Extraction des fréquences et des formes propres</b>	<b>111</b>
6.1	Transformée de Fourier : définitions et propriétés . . . . .	112
6.1.1	Des coefficients de Fourier à la transformée de Fourier . . . . .	112
6.1.2	Densité spectrale d'énergie . . . . .	113
6.1.3	Transformée de Fourier Discrète (TFD) . . . . .	114
6.1.4	Résolution spectrale de la FFT . . . . .	114
6.1.5	Transformée de Fourier Rapide . . . . .	115
6.1.6	Filtrage temporel . . . . .	116
6.2	Extraction des fréquences propres de $X(t)$ par FFT . . . . .	117
6.2.1	Choix de la fenêtre de filtrage . . . . .	117
6.2.2	Analyse des Densités Spectrales d'Énergie (DSE) . . . . .	119
6.2.3	Critères de détection d'un pic de fréquence . . . . .	121
6.2.4	Optimisation de la résolution fréquentielle . . . . .	122
6.3	Perspectives . . . . .	127
6.4	Détermination des vecteurs propres . . . . .	127
6.4.1	Premier cas : $Q(\lambda_i)$ est non nulle . . . . .	127
6.4.2	Deuxième cas : $Q(\lambda_i)$ est nulle et $Q'(\lambda_i)$ est non nulle . . . . .	129
6.5	Conclusion . . . . .	131
<b>7</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>133</b>
7.1	Conclusion . . . . .	133
7.2	Perspectives . . . . .	135
	<b>Bibliographie</b>	<b>137</b>



# Chapitre 1

## Introduction Générale

Une étape cruciale des algorithmes permettant d'étudier les vibrations d'un système mécanique discret est la détermination des pulsations et des formes propres. La précision des résultats est primordiale puisque l'étude de la stabilité du système en dépend. Si les pulsations propres peuvent être déterminées avec une grande précision, il n'en va pas de même pour les modes propres dont la direction peut présenter une grande instabilité. Nous proposons une méthode qui évite la recherche des modes propres et donc les instabilités qui y sont liées. Elle est inspirée de l'algorithme de Le Verrier-Souriau habituellement réservé à la résolution des systèmes algébriques linéaires.

### 1.1 Contexte général

Encore une thèse sur les vibrations me direz vous! He oui! Et en plus sur les vibrations linéaires mais je croyais qu'on savait tout faire et qu'il y a longtemps qu'il n'y avait plus de recherche la dessus me direz vous encore! Eh bien si, il y a encore des choses à faire et même beaucoup! Actuellement des problèmes subsistent encore lorsque l'on considère des problèmes proches de la réalité, c'est-à-dire prenant en compte des amortissements et ou bien encore lorsqu' on calcule les vecteurs propres.

Tout d'abord que désigne le terme "vibrations"? On peut définir une vibration comme un phénomène périodique d'oscillation autour d'une position de repos. La physique nous enseigne que des phénomènes tels que la lumière, les ondes radio, le courant alternatif, les sons, les mouvements des pendules, etc ... entrent dans cette définition et qu'ils peuvent être désignés sous le terme de vibrations. Dans ce mémoire, nous nous bornerons à étudier les vibrations dans les structures, qui sont souvent qualifiées de vibrations mécaniques.

On dit qu'un système mécanique est le siège de vibrations s'il est animé d'un mouvement de va et vient autour d'une position d'équilibre permanente, statique ou non. Ce mouvement résulte du conflit entre les forces d'inertie, qui tendent à éloigner le système de l'état d'équilibre permanent, et les efforts de raideur qui tendent à l'y ramener. Lorsque les structures sont soumises à des sollicitations dynamiques créées par des forces, il peut apparaître des phénomènes vibratoires, le plus souvent préjudiciables. Sous réserve que certaines

conditions entre la masse et la raideur des éléments soient remplies, certaines vibrations s'auto-amplifient jusqu'à la rupture. C'est l'instabilité dynamique qui peut entraîner par une amplitude croissante des déformations, la ruine des constructions. Ce phénomène est susceptible de se produire si la fréquence de l'énergie apportée par l'excitation correspond à l'une des fréquences de vibrations naturelles de la structure. Les images du pont de Tacoma sur l'Hudson, dans l'état de Washington, en 1940 se balançant jusqu'à la rupture sous l'effet d'un vent soufflant à la vitesse de  $18m.s^{-1}$  sont restées dans les mémoires. A Angers, dans un accident similaire, en 1840, l'effondrement d'un pont fut causé par une colonne d'infanterie marchant au pas ; cet accident a d'ailleurs conduit à une modification des règlements militaires, en interdisant de marcher au pas sur un pont.

En outre, des sollicitations de faible amplitude peuvent conduire à la rupture par fatigue. La prise en compte de ces phénomènes est récente et le fait, là encore, d'accidents aux conséquences dramatiques. Ainsi, en Janvier 1951, la société britannique de construction aéronautique De Havilland, commercialisa le premier avion de ligne à réaction : Le Comet. Quatre ans plus tard, il sera interdit d'exploitation après que 8 exemplaires se soient désintégrés en vol sans raisons apparentes. Des études diligentées par les services officiels mettront en évidence la rupture en fatigue des renforts structuraux au niveau des hublots.

Ainsi, les vibrations sont généralement considérées comme perturbatrices, gênantes ou même dangereuses. Elles sont la cause de bruit, d'usure prématurée et de fatigue des composants, appareils, machines ou installations. Elles sont responsables de la diminution d'efficacité et de performances des équipements, et peuvent même entraîner une dégradation de la sécurité du travail en provoquant accidents et maladies professionnelles. Elles sont aussi génératrices d'inconfort et de fatigue accrus des passagers de véhicules ou d'engins, amenant à une réduction grave de la sécurité de conduite.

Le développement des moyens de calculs ces 30 dernières années a permis une optimisation des structures mécaniques qui a conduit tout naturellement à une réduction de masse substantielle. La mise en oeuvre de matériaux nouveaux, tels les composites, a aussi contribué pour une part notable à la réduction de masse des structures, en particulier dans le secteur de la construction aéronautique. Il s'en suit une augmentation de la souplesse de ces structures qui conduit, dès la conception, à la détermination précise des caractéristiques vibratoires de la structure. L'étude des phénomènes vibratoires voit donc son importance croître à mesure que les problèmes de dynamique dans le dimensionnement des structures se développent.

Les vibrations ne sont néanmoins pas toutes nuisibles et, au contraire, peuvent revêtir un rôle actif dans certains équipements pour lesquels la source de vibrations est primordiale pour remplir une fonction donnée par exemple les rasoirs électriques. C'est par exemple le cas dans les domaines de l'électromagnétisme et de l'électro-acoustique.

## 1.2 Intérêt de l'étude

Une structure performante est une structure légère, mais une structure légère est aussi une structure souple. Dans bien des cas, connaître son spectre de vibration en basse fréquence, de même que les formes propres associées, est d'une importance fondamentale. Étant donné leur objectif constant de construire le plus léger possible, les avionneurs ont été les premiers concepteurs de structures à devoir maîtriser les problèmes de vibrations et de dynamique des structures. Dès les années 1920, les ingénieurs de la construction aéronautique furent amenés à reconnaître l'importance de la mécanique des vibrations pour la prédiction du comportement aéroélastique des avions.

L'étude des phénomènes vibratoires associés aux systèmes mécaniques nécessite l'établissement du "modèle spatial". C'est le système d'équations différentielles dont les variables sont les déplacements généralisés discrets issus d'une division de la structure en éléments finis. La résolution de ce système conduit à la détermination des modèles :

- temporel (ensemble des réponses dans le temps à des excitations)
- modal (ensemble des fréquences propres, vecteurs propres et coefficients d'amortissement)
- fréquentiel (ensemble des fonctions de réponse en fréquence entre certains points discrets de la structure)

La linéarisation du système d'équations différentielles amène à résoudre un système différentiel linéaire du second ordre à coefficients constants. Cette question, qui concerne les réponses harmoniques de structures mécaniques, est d'actualité dans les domaines de l'aéronautique, du ferroviaire et de l'automobile. La méthode classique revient à tenter de découpler les équations en recherchant une base modale. Si le calcul des pulsations propres s'effectue avec une bonne stabilité numérique, il n'en va pas de même pour la détermination des formes propres.

L'étude des équations différentielles est un domaine de l'analyse numérique qui a fait l'objet de nombreuses recherches. Mais, intéressant de nombreuses disciplines comme la mécanique, les sciences physiques, les sciences économiques, la biologie, elle continue d'être d'actualité. En effet, de nombreux modèles conduisent à des problèmes mathématiques de ce type. L'étude de la majorité des problèmes de vibration implique la résolution d'un ensemble d'équations différentielles linéaires à coefficients constants.

La solution générale des vibrations libres est une combinaison linéaire de tous les modes propres. Sur un mode propre, tous les paramètres ont même pulsation, même phase, seules les amplitudes diffèrent. Pour prévoir et comprendre le comportement d'une structure, la connaissance de ses paramètres modaux, à savoir ses fréquences et modes propres ainsi qu'éventuellement ses coefficients modaux d'amortissement, est essentielle. En analyse modale, les méthodes numériques utilisées sont itératives. Elles donnent des solutions numériques approchées des valeurs propres et les vecteurs propres. L'adoption d'une démarche

semi-algébrique telle que la notre, offre l'avantage de mettre en valeur des structures caractéristiques de la dynamique. A titre d'exemple, l'analyse du comportement dynamique de la structure d'un avion (fuselage plus aile) est une étape incontournable à la détermination de ses performances.

### 1.3 Présentation de l'étude

Pour atteindre cet objectif (i.e. la résolution des équations différentielles du mouvement des systèmes vibratoires), nous nous sommes intéressés à l'algorithme de Jean-Marie Souriau qui a redécouvert et amélioré, un siècle plus tard, la méthode de Le Verrier. Afin de résoudre un système algébrique linéaire  $AX=B$  avec  $A$  matrice  $n \times n$  et  $X$  et  $B$  vecteurs de  $\mathbb{R}_n$ , ce dernier a proposé de calculer successivement non plus les traces des différentes puissances de la matrice  $A$ , mais les traces d'autres matrices. Cette technique permet de calculer les coefficients scalaires du polynôme caractéristique ainsi que les coefficients de la matrice adjuguée de  $A$ . La méthode que nous développons est une adaptation de l'algorithme de Souriau dont nous proposons une transposition aux systèmes différentiels linéaires, dans le but de l'appliquer aux systèmes vibratoires. Dans une étape ultérieure nous rêvons de l'appliquer au flottement ou flutter, en particulier dans le cas de l'avion souple.

La méthode, que nous proposons, présente l'avantage de ne nécessiter ni le calcul d'inverse, opération coûteuse numériquement, ni celui des vecteurs propres, souvent instables numériquement. Elle présente aussi l'avantage de n'exiger aucune hypothèse particulière sur les matrices considérées. L'algorithme permet la résolution des systèmes différentiels du premier ordre à coefficients constants et par suite celle des systèmes différentiels du second ordre à coefficients constants.

Dans ce mémoire nous nous limiterons à l'étude des vibrations des structures mécaniques en nous bornant aux petites oscillations. Cependant, même si notre approche est celle de mécaniciens, la méthode mise en oeuvre n'en demeure pas moins généralisable à tout phénomène vibratoire linéaire : mécanique, acoustique, électronique, électromagnétique, électroacoustique ...

### 1.4 Plan du mémoire

Dans le *chapitre II*, nous rappelons quelques éléments d'algèbre linéaire nécessaires à la compréhension de la suite du mémoire. Dans les problèmes de résolution de systèmes linéaires du type  $AX = B$ , nous focalisons notre attention sur les méthodes qui mettent en jeu le polynôme caractéristique de la matrice  $A$ . Ces méthodes nécessitent une détermination efficace des coefficients du polynôme caractéristique. Parmi d'autres, nous nous intéresserons tout particulièrement à la méthode de Le Verrier, puis à celle de Souriau. Enfin, nous introduirons une technique d'extraction des vecteurs propres par l'examen des colonnes de la matrice adjuguée associées à la valeur propre correspondante.

Dans le *chapitre III*, nous proposons une transposition de la méthode de Souriau à la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants. Ensuite nous rappelons brièvement les méthodes classiques de recherche des valeurs propres et des vecteurs propres.

Le *chapitre IV*, présente une analyse non exhaustive des méthodes classiques de résolution des problèmes de vibrations linéaires libres dans le cas de systèmes classiquement amortis ou non-classiquement amortis.

Dans le *chapitre V*, nous étendons la méthode présentée au chapitre III à la résolution de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants du second ordre. Nous proposons deux algorithmes : le premier sera utilisé lorsque le déterminant de la matrice des masses est voisin du zéro machine et le second lorsque c'est le déterminant de la matrice des raideurs qui est voisin du zéro machine. L'exemple de l'étude des vibrations libres d'un véhicule automobile simplifié est introduit ici et traité au moyen de cette méthode. Enfin, nous présentons la dernière adaptation de notre méthode aux vibrations forcées.

Dans le *chapitre VI*, nous déterminons les fréquences propres associées aux systèmes précédemment étudiés au cours du chapitre V par une analyse fréquentielle de la réponse temporelle. Nous adaptons au second ordre la technique d'extraction présentée au chapitre 2 pour obtenir les formes propres une fois les fréquences propres connues.

Enfin, dans le *chapitre VII* nous concluons et nous présenterons les perspectives envisageables de notre travail .



## Chapitre 2

# Méthodes de Le Verrier et de Souriau

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Notations</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>2.2</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>14</b>
<b>2.3</b>	<b>Le Verrier</b> . . . . .	<b>14</b>
2.3.1	Un peu d'histoire ... . . . .	14
2.3.2	Méthode de Le Verrier . . . . .	16
2.3.3	Algorithme de Le Verrier . . . . .	18
2.3.4	Avantages et inconvénients . . . . .	19
<b>2.4</b>	<b>Méthode de Horst</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>2.5</b>	<b>Souriau</b> . . . . .	<b>19</b>
2.5.1	Méthode de Souriau . . . . .	20
2.5.2	Algorithme de Souriau . . . . .	24
<b>2.6</b>	<b>Extraction des vecteurs propres</b> . . . . .	<b>25</b>
2.6.1	Premier cas : $Q(\lambda_i)$ est non nulle . . . . .	26
2.6.2	Deuxième cas : $Q(\lambda_i)$ est nulle et $Q'(\lambda_i)$ est non nulle . . . . .	27
2.6.3	Troisième cas : $Q(\lambda_i)$ est nulle, $Q'(\lambda_i)$ est nulle et $Q''(\lambda_i)$ est non nulle . . . . .	28
<b>2.7</b>	<b>Exemples</b> . . . . .	<b>29</b>
2.7.1	Matrice ayant toutes ses valeurs propres simples . . . . .	29
2.7.2	Matrice ayant une valeur propre simple et une double . . . . .	31
2.7.3	Matrice ayant une valeur propre triple . . . . .	32
2.7.4	Matrice ayant deux valeurs propres complexes et conjuguées . . . . .	33
<b>2.8</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>34</b>

---

### Résumé

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques éléments d'algèbre linéaire nécessaires à la compréhension de la suite du mémoire. Dans les problèmes de résolution de systèmes linéaires du type  $AX = B$ , nous focalisons notre attention sur les méthodes qui mettent en jeu le polynôme caractéristique. Ces méthodes nécessitent une détermination efficace des coefficients du polynôme caractéristique de la matrice  $A$ . Parmi

d'autres, nous nous intéresserons tout particulièrement à la méthode de Le Verrier, puis à celle de Souriau. Enfin, nous introduirons une technique d'extraction des vecteurs propres par l'examen des colonnes de la matrice adjuguée associées à la valeur propre correspondante.

## 2.1 Notations

Tout d'abord introduisons quelques notations que nous allons utiliser dans la suite du mémoire.

Nous noterons :

- $A$  une matrice carrée réelle d'ordre  $n$  (i.e.  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ) et  $a_{ij}$  ses coefficients, le premier indice désignant la ligne et le second la colonne,
- $I$ , la matrice identité,
- $V$ , un vecteur et  $v_i$  sa  $i$ -ème composante,
- $\lambda$ , un scalaire réel ou complexe,
- $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ , le produit mixte dans  $\mathbb{R}^n$ .

## 2.2 Introduction

Les coefficients du polynôme caractéristique peuvent être déterminés par de nombreuses méthodes citons celle de Samuelson, celle dite du partitionnement, celle de Le Verrier, celle de Souriau, la méthode de transmutation ou de réduction à la forme de Frobenius. On peut citer encore les méthodes de transformation en triples diagonales de Householder [Hou64], de Lanczos [LT94], de Givens [Wil65], ... Ces trois dernières seront développées au chapitre 3 §3.6.2. Nous nous bornerons dans ce chapitre à détailler les méthodes dérivées de Le Verrier.

## 2.3 Le Verrier

### 2.3.1 Un peu d'histoire ...

Urbain Jean-Joseph Le Verrier, élu à l'Académie des Sciences en 1846 et nommé titulaire de la chaire de Mécanique Céleste qui venait d'être créée à la Sorbonne, doit sa célébrité à la détermination de l'orbite et au calcul de la position d'une planète encore inconnue à l'époque : Neptune (qui a d'ailleurs porté le nom de Le Verrier pendant quelques temps). Il prédit la position et la masse de la planète, uniquement par le calcul, à l'aide de la loi de Newton, à partir des irrégularités observées dans le mouvement d'Uranus. En effet les positions réelles d'Uranus ne s'accordaient jamais précisément avec celles que



lui assignaient les tables astronomiques calculées d'après la théorie de l'époque. Camille Flammarion [Fla12] dira de Le Verrier :

Ce savant, ce génie, qui avait découvert un astre au bout de sa plume, sans instrument, par la seule puissance du calcul et avait reculé par un trait de plume les frontières du système du monde, de 2 milliards 800 millions à 4 milliards 400 millions de kilomètres ...

A la suite de cette découverte, Le Verrier entreprend un travail gigantesque, qui consiste à refaire plus précisément les théories des mouvements de toutes les planètes. Il achèvera ce travail juste avant sa mort survenue le 23 septembre 1877 (jour anniversaire de la vérification au vu de ses calculs de l'emplacement de la planète Neptune par Johann Gottfried Galle, astronome à l'observatoire de Berlin). Adams<sup>1</sup> a dit de lui :

Qu'un seul homme ait eu assez de force et de persévérance pour parcourir ainsi la totalité du système solaire en calculant avec la dernière exactitude, et sans en oublier aucune, toutes les perturbations qui peuvent exercer une influence sur chaque planète, c'est ce qu'on aurait cru impossible, si le résultat n'était aujourd'hui sous nos yeux.

C'est aussi à Urbain Le Verrier que nous devons la centralisation et la diffusion des informations météorologiques en France et en Europe.



FIG. 2.1 – *Urbain Joseph Le Verrier*

Mais c'est en 1840, avant sa célébrité, qu'il a inventé la méthode qui permet de calculer les coefficients du polynôme caractéristique d'une matrice  $A$  donnée et de résoudre les systèmes linéaires associés. On obtient les coefficients du polynôme caractéristique d'une matrice à partir du calcul des traces de ses puissances. Pour ce faire on utilise le fait que les sommes des puissances des racines du polynôme caractéristique sont liées à ses

1. dans un discours prononcé en février 1876 lors de la remise de médaille d'honneur à Urbain Le Verrier par la Société Royale d'Astronomie de Londres, dont il était rapporteur

coefficients par les relations de Newton [LV40]. Selon Householder, ce procédé est la plus ancienne méthode pratique de calcul des coefficients du polynôme caractéristique [Hou64]. Ensuite, vint la méthode de Krylov, en 1931, basée sur le théorème d'Hamilton-Cayley qui prouve que toute matrice annule son polynôme caractéristique. La méthode de Le Verrier a été redécouverte, plusieurs fois, un siècle plus tard et a servi de base à l'élaboration de nombreuses autres : Horst ([Hor35]) en 1935, Souriau ([Sou48]) en 1948, Frame ([Fra49]) en 1949 et Faddeev et Sominskii ([FS72]) en 1949. Les trois dernières citations font en fait référence à la même méthode dite de Souriau-Frame-Faddeev que nous nommerons par respect d'antériorité : Méthode de Souriau. Celle-ci permet le calcul simultané des coefficients scalaires du polynôme caractéristique  $\det(\lambda I - A)$  et des coefficients matriciels de la matrice caractéristique adjuguée  $\text{adj}(\lambda I - A)$ . La méthode de Souriau, plus générale que celle de Krylov, implique des calculs plus nombreux mais, contrairement à celle-ci, elle est utilisable dans tous les cas.

### 2.3.2 Méthode de Le Verrier

**Définition 1** On appelle *polynômes de Newton à  $n$  indéterminées*  $X_1 \dots X_n$  les polynômes

$$S_k(X) = \sum_{i=1}^n X_i^k = X_1^k + X_2^k + \dots + X_n^k, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

Ces polynômes sont symétriques par permutation de  $X_1, \dots, X_n$ . Or tout polynôme symétrique s'exprime de manière unique comme polynôme en  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  où les  $\sigma_p$  sont les *polynômes symétriques élémentaires*.

$$\sigma_p(X) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_p, \text{ tous distincts}) \in 1..n, p \leq n} X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_p}$$

Par exemple si  $n = 4$  :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \\ \sigma_2 &= X_1 X_2 + X_1 X_3 + X_1 X_4 + X_2 X_3 + X_2 X_4 \\ \sigma_3 &= X_1 X_2 X_3 + X_1 X_3 X_4 + X_2 X_3 X_4 \\ \sigma_4 &= X_1 X_2 X_3 X_4 \end{aligned}$$

Les polynômes de Newton à  $n$  indéterminées  $S_k$  sont reliés aux  $n$  polynômes symétriques élémentaires  $\sigma_k$  par les relations suivantes dites de *relations de Newton* :

i)  $S_0 = n$

ii)  $S_1 = \sigma_1$

iii) pour  $2 \leq k \leq n$  :  $S_k + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \sigma_i S_{k-i} + (-1)^k k \sigma_k = 0$

iv) pour  $k \geq n$  :  $S_k + \sum_{i=1}^n (-1)^i \sigma_i S_{k-i} = 0$

Considérons un polynôme de degré  $n$  :  $P(X) = k_0X^n + k_1X^{n-1} + \dots + k_{n-1}X + k_n$ . Notons  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ses racines. Avec ces racines nous pouvons construire les polynôme de Newton  $S_k$ . Les coefficients  $k_0, k_1, \dots, k_{n-1}$  du polynôme  $P(X)$  sont liés aux  $S_k$  par les *relations de Newton* :

$$\begin{cases} S_1k_0 + k_1 = 0 \\ S_2k_0 + S_1k_1 + 2k_2 = 0 \\ \vdots \\ S_nk_0 + S_{n-1}k_1 + \dots + S_1k_{n-1} + nk_n = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

**Définition 2** : Le déterminant d'une matrice  $n \times n$   $A$ , noté  $\det A$ , est défini de manière intrinsèque par

$$(AV_1, AV_2, \dots, AV_n) = (\det A)(V_1, V_2, \dots, V_n)$$

(voir par exemple Jean-Marie Souriau [Sou64a])

**Définition 3** : Nous appellerons matrice caractéristique de  $A$  la matrice :  $\lambda I - A$

**Définition 4** : Le polynôme caractéristique d'une matrice  $A$  est le déterminant de sa matrice caractéristique  $(\lambda I - A)$ , ce polynôme admet  $n$  racines, réelles ou complexes, distinctes ou non :

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

$P(\lambda)$  est développable en puissance de  $\lambda$ . Nous noterons  $k_0, k_1, \dots, k_n$  ses coefficients scalaires [Sou64a] :

$$P(\lambda) = k_0\lambda^n + k_1\lambda^{n-1} + k_2\lambda^{n-2} + \dots + k_{n-1}\lambda + k_n$$

**Remarque 1** Le polynôme caractéristique est un polynôme unitaire : le coefficient  $k_0$  du terme de plus haut degré vaut 1.

**Remarque 2** Le dernier coefficient,  $k_n$ , fournira le déterminant de  $A$  au signe près :

$$k_n = (-1)^n \det A$$

**Remarque 3** Nous suivrons maintenant l'usage en calcul matriciel consistant à noter  $\lambda$  les valeurs propres de  $A$ . La variable naturelle du polynôme caractéristique est donc  $\lambda$  plutôt que  $X$ .

**Définition 5** : L'équation  $P(\lambda) = 0$  est connue sous le nom d'équation caractéristique ou d'équation séculaire (ce nom est dû au fait que cette équation apparaît dans l'étude des perturbations séculaires des planètes [Gan59a]) de la matrice  $A$ .

**Définition 6** : Un scalaire  $\lambda$ , réel ou complexe, est une valeur propre de  $A$  si et seulement s'il existe un vecteur  $V$  non nul tel que :

$$AV = \lambda V$$

On dit que  $V$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**Propriété 1** : *Tout zéro du polynôme caractéristique est une valeur propre de  $A$*

**Définition 7** : *Un élément propre de  $A$  est un couple  $(\lambda, V)$  où  $\lambda$  est une valeur propre et  $V$  un vecteur propre associé à cette valeur propre.*

Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  les  $n$  racines du polynôme caractéristique, il s'agit des valeurs propres de  $A$ , répétées si elles sont multiples. Si on définit les sommes de Newton  $s_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$  pour  $1 \leq k \leq n$  et que l'on applique les formules (iii) de la proposition précédente

$$\begin{cases} s_1 + k_1 = 0 \\ s_2 + s_1 k_1 + 2k_2 = 0 \\ \vdots \\ s_n + s_{n-1} k_1 + \dots + s_1 k_{n-1} + n k_n = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Les relations de Newton peuvent s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_{n-2} & \dots & \dots & n-1 & 0 \\ s_{n-1} & s_{n-2} & \dots & s_1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-1} \\ k_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{n-1} \\ s_n \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

On voit bien ici que les coefficients  $k_1 \dots k_n$  du polynôme  $P$  sont déterminés de manière unique par la donnée des sommes de Newton. Il s'agit d'un système triangulaire de  $n$  équations à  $n$  inconnues facile à résoudre.

**Définition 8** : *La trace de  $A$ , notée  $tr A$ , est définie par :*

$$(A V_1, V_2, \dots, V_n) + (V_1, A V_2, \dots, V_n) + (V_1, V_2, \dots, A V_n) = (tr A) (V_1, V_2, \dots, V_n)$$

*Nous avons utilisé une définition empruntée à Jean-Marie Souriau [Sou64a]. On démontre que  $tr A$  est la somme des éléments de la diagonale principale de  $A$  et aussi la somme de ses valeurs propres.*

La méthode de Le Verrier consiste à déduire les coefficients du polynôme caractéristique du calcul des sommes de Newton de ses racines. Or celles ci se ramènent au calcul des traces des puissances de  $A$  : si les  $\lambda_i$  désignent les valeurs propres de  $A$  alors les  $(\lambda_i)^k$  sont les valeurs propres de  $A^k$  et  $s_k = \lambda_1^k + \dots + \lambda_n^k = tr(A^k)$  pour  $1 \leq k \leq n$ .

### 2.3.3 Algorithme de Le Verrier

L'algorithme mettant en œuvre la méthode de Le Verrier s'organise de la façon suivante :

**Entrées :**

$n$  et  $A$

**Étapes :**

- Pour  $i$  allant de 2 à  $n$  calculer  $A^i$
- Pour  $i$  allant de 1 à  $n$  calculer  $s_i = \text{tr}(A^i)$
- Pour  $i$  allant de 1 à  $n$  calculer les coefficients  $k_i$  en utilisant les équations suivantes :

$$\begin{cases} s_1 + k_1 = 0 \\ s_2 + s_1 k_1 + 2k_2 = 0 \\ \vdots \\ s_n + s_{n-1} k_1 + \cdots + s_1 k_{n-1} + n k_n = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

**Sorties :**

$k_i$ , pour  $i$  de 1 à  $n$

**2.3.4 Avantages et inconvénients**

Cette méthode présente l'inconvénient d'imposer le calcul des puissances de la matrice  $A$  (qui peuvent être élevées suivant la taille de cette matrice). En revanche, il s'agit d'un algorithme simple, où il n'y a pas lieu d'envisager de cas particulier.

**2.4 Méthode de Horst**

Urbain Le Verrier n'a bien évidemment pas écrit son algorithme dans le langage du calcul linéaire moderne, il ne maîtrisait pas vraiment les notions de matrice, de déterminant et de sous-déterminant. C'est Paul Horst qui l'a redécouvert indépendamment et l'a énoncé dans un langage matriciel [Hor35].

**2.5 Souriau**

Jean-Marie Souriau, mécanicien, Normalien, est surtout connu pour ses travaux en mécanique symplectique, dont il est un des pères fondateurs. Il a publié plusieurs ouvrages dont un manuel de calcul linéaire ([Sou64a], [Sou64b]). Il a été directeur du centre de Physique Théorique de Marseille dans les années 1980.

En 1948, dans un article publié dans les Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences ([Sou48]), il propose d'améliorer la méthode d'Urbain Le Verrier (permettant de calculer les coefficients du polynôme caractéristique d'une matrice  $A$  donnée) en déterminant, non plus

les traces des différentes puissances de la matrice  $A$ , mais celles de matrices plus adéquates. Ceci a le mérite de rendre plus simple le procédé de Le Verrier tout en fournissant plus d'informations sur la matrice  $A$ . A chaque itération on obtient un coefficient du polynôme caractéristique. L'algorithme qui découle de cette méthode et qui porte son nom a été utilisé sur les premiers ordinateurs aux États-Unis.

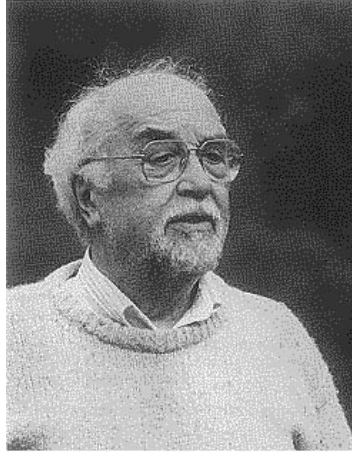


FIG. 2.2 – *Jean-Marie Souriau*

Cet algorithme permet d'obtenir facilement pour une matrice  $A$  carrée réelle  $n \times n$  :

- les coefficients scalaires de son polynôme caractéristique,
- les coefficients matriciels de l'adjuguée de sa matrice caractéristique,
- le déterminant de  $A$ ,
- la matrice adjuguée de  $A$ ,
- l'inverse de  $A$  si elle existe.

Nous allons maintenant développer la méthode dite de Souriau.

### 2.5.1 Méthode de Souriau

**Définition 9** : Soit  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , supprimons la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de  $A$  en laissant les autres lignes et colonnes inchangées. On obtient une nouvelle matrice  $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ . On dit que  $\det A_{ij}$  est le mineur associé à  $a_{ij}$  et que :  $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$  est le cofacteur de  $a_{ij}$ .

**Définition 10** : A la matrice  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  on peut associer la matrice  $[\Delta_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui est appelée comatrice de  $A$  et notée  $Com A$

**Définition 11** : L'adjuguée de  $A$ , notée  $\text{adj } A$ , est définie de manière intrinsèque par

$$(A V_1, A V_2, \dots, A V_{n-1}, V_n) = (V_1, V_2, \dots, (\text{adj } A) V_n)$$

Elle est aussi appelée "adjointe de  $A$ " en français et "adjoint" en anglais. Cependant, en anglais le terme "adjugate" est souvent utilisé pour éviter toute confusion avec la notion d'adjoint associée à un produit scalaire. C'est pourquoi nous avons choisi d'utiliser le terme adjuguée dans ce mémoire.

**Définition 12** : La transposée de  $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , notée  $A^T$ , est la matrice  $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par :

$$b_{ij} = a_{ji}$$

**Proposition 1** : Si une matrice carrée  $A$  coïncide avec sa transposée, elle est dite symétrique et cela signifie que  $a_{ij} = a_{ji}$

**Proposition 2** : La transposée de la comatrice est l'adjuguée.

$$\text{adj } A = (\text{Com } A)^T$$

Il est préférable de ne pas utiliser cette propriété pour calculer l'adjuguée puisque cela induit de nombreux calculs de déterminants. Nous utiliserons avantageusement l'algorithme itératif de Jean-Marie Souriau qui permet un calcul rapide et simultané du déterminant et de la matrice adjuguée d'une matrice.

**Proposition 3** Soit  $A$  une matrice carrée, on a :

$$A (\text{adj } A) = (\text{adj } A) A = (\det A) I$$

**Définition 13** : On appelle matrice régulière (ou non singulière) une matrice dont le déterminant est non nul.

**Proposition 4** : Toute matrice régulière est inversible.

**Définition 14** : On appelle matrice singulière une matrice dont le déterminant est nul.

**Proposition 5** : Si la matrice  $A$  n'est pas singulière, l'adjuguée est liée à l'inverse de  $A$  par la relation suivante :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$$

Preuve :

Cette propriété se déduit de la propriété 3

**Notation 1** : Nous appellerons polynôme matriciel un polynôme à coefficients matriciels. Lorsqu'il sera nécessaire de différencier un polynôme matriciel d'un polynôme ordinaire à coefficients scalaires, ce dernier pourra être appelé polynôme scalaire.

**Définition 15** : L'adjuguée de la matrice caractéristique est :

$$Q(\lambda) = \text{adj}(\lambda I - A)$$

C'est un polynôme matriciel en  $\lambda$  de degré  $n-1$  dont les coefficients sont des matrices. Nous les noterons  $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$  [Sou64a]

$$Q(\lambda) = \lambda^{n-1} B_0 + \lambda^{n-2} B_1 + \dots + \lambda B_{n-2} + B_{n-1}$$

**Remarque 4** Le coefficient matriciel  $B_0$  du terme de plus haut degré est égal à la matrice unité  $I$

La méthode de Souriau [Sou48] associe à chaque matrice carrée  $A$  son polynôme caractéristique et sa matrice caractéristique adjuguée :

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) \quad (2.5)$$

$$Q(\lambda) = \text{adj}(\lambda I - A) \quad (2.6)$$

Ces deux polynômes, l'un scalaire l'autre matriciel, se développent en puissance de  $\lambda$  (définition 4 et 15):

$$P(\lambda) = k_0 \lambda^n + k_1 \lambda^{n-1} + \dots + k_{n-1} \lambda + k_n$$

$$Q(\lambda) = \lambda^{n-1} B_0 + \lambda^{n-2} B_1 + \dots + \lambda B_{n-2} + B_{n-1}$$

Cette méthode est basée sur le calcul simultané des coefficients scalaires et matriciels des polynômes  $P(\lambda)$  et  $Q(\lambda)$ . Ces calculs sont possibles principalement grâce à l'identité algébrique suivante, liant l'adjuguée et le déterminant (proposition 3):

$$A (\text{adj } A) = (\text{adj } A) A = (\det A) I$$

Appliquée à la matrice caractéristique  $\lambda I - A$ , elle conduit à :

$$(\lambda I - A) (\text{adj} (\lambda I - A)) = (\text{adj} (\lambda I - A)) (\lambda I - A) = (\det (\lambda I - A)) I$$

soit en utilisant les notations précédentes :

$$[\lambda I - A] Q(\lambda) = Q(\lambda) [\lambda I - A] = P(\lambda) I \quad (2.7)$$

En identifiant les termes de même degré en  $\lambda$  dans cette identité, on aboutit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_0 = k_0 I \\ B_1 = B_0 A + k_1 I \\ \vdots \\ B_i = B_{i-1} A + k_i I \\ \vdots \\ B_{n-1} = B_{n-2} A + k_{n-1} I \\ 0 = B_{n-1} A + k_n I \end{array} \right. \quad (2.8)$$

La première ligne de ses relations vérifie bien  $B_0 = I$  et  $k_0 = 1$  La première équation souligne les faits que  $k_0$  et  $B_0$  sont respectivement égaux au nombre 1 et à la matrice unité



I. Nous introduirons une matrice supplémentaire  $B_n = 0$ . En prenant la trace de chacune de ces relations, on obtient le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} tr(B_0) = n \\ tr(B_1) = tr(B_0 A) + n k_1 \\ \vdots \\ tr(B_i) = tr(B_{i-1} A) + n k_i \\ \vdots \\ tr(B_{n-1}) = tr(B_{n-2} A) + n k_{n-1} \\ 0 = tr(B_{n-1} A) + n k_n \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Les systèmes (2.8) et (2.9) ne permettent toujours pas de déterminer les coefficients scalaires  $k_0, k_1, \dots, k_n$  et les coefficients matriciels  $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$  mais la proposition suivante va fournir un argument supplémentaire

**Proposition 6** *Si  $A$  est une matrice dépendant d'un paramètre  $\lambda$ , on a :*

$$\frac{d}{d\lambda}(\det A) = tr[adj(A) \frac{dA}{d\lambda}]$$

Appliquons cette proposition à la matrice caractéristique :

$$\frac{d}{d\lambda}(\det(\lambda I - A)) = tr[adj(\lambda I - A) \frac{d}{d\lambda}(\lambda I - A)]$$

ce qui lie la dérivée  $P'(\lambda)$  du polynôme caractéristique à la trace de l'adjuguée de la matrice caractéristique :

$$P'(\lambda) = tr[Q(\lambda)]$$

En identifiant les termes de même degré dans cette identité, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} tr(B_0) = n k_0 \\ tr(B_1) = (n-1) k_1 \\ \vdots \\ tr(B_i) = (n-i) k_i \\ \vdots \\ tr(B_{n-2}) = 2 k_{n-2} \\ tr(B_{n-1}) = k_{n-1} \end{array} \right. \quad (2.10)$$

En comparant les systèmes 2.9 et 2.10 on trouve le système de relations (2.11) qui permet

de calculer successivement les couples  $(k_1, B_1), (k_2, B_2), \dots, (k_n, B_n)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = -\text{tr}(A) \\ B_1 = A + k_1 I \\ k_2 = \frac{-1}{2} \text{tr}(B_1 A) \\ B_2 = B_1 A + k_2 I \\ \vdots \\ k_j = \frac{-1}{j} \text{tr}(B_{j-1} A) \\ B_j = B_{j-1} A + k_j I \\ \vdots \\ k_{n-1} = \frac{-1}{n-1} \text{tr}(B_{n-2} A) \\ B_{n-1} = B_{n-2} A + k_{n-1} I \\ k_n = \frac{-1}{n} \text{tr}(B_{n-1} A) \\ B_n = 0 = B_{n-1} A + k_n I \end{array} \right. \quad (2.11)$$

D'autres preuves de cette méthode se trouvent dans l'article de S. Barnett [Bar89] ainsi que dans celui de M.D. Tong et W.K. Chen [TC93].

### 2.5.2 Algorithme de Souriau

L'algorithme de Souriau s'articule de la façon suivante :

#### Entrées

$n$  et  $A$

#### Étapes

- Faire  $B_0 = I$
- Pour  $i$  allant de 1 à  $n$  calculer :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i = B_{i-1} A \\ k_i = \frac{-1}{i} \text{tr}(A_i) \\ B_i = A_i + k_i I \end{array} \right. \quad (2.12)$$

#### Sorties

$k_i$  et  $B_i$  pour  $i$  de 0 à  $n$

#### Commentaires :

- Le déterminant de  $A$  est obtenu par :

$$k_n = (-1)^n \det A$$

- La matrice adjuguée de  $A$  est obtenue par :

$$B_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{adj}(A)$$

- Le dernier couple  $(k_n, B_n)$  démontre le théorème d'Hamilton-Cayley (toute matrice annule son polynôme caractéristique) :  $B_{n-1} A + k_n I = 0$

## 2.6 Extraction des vecteurs propres

En calcul de vibrations il est nécessaire de connaître les pulsations et les formes propres d'un système différentiel du second ordre. Commençons par déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres d'un système algébrique. Une fois connus les  $k_i$  (et les  $B_i$ ) par la méthode de Souriau décrite au §2.5.1, il faut chercher à calculer les racines de l'équation :

$$\det(\lambda I - A) = P(\lambda) = 0$$

afin d'obtenir les valeurs propres,  $\lambda_i$ , de la matrice  $A$ . Cherchons maintenant à déterminer les vecteurs propres  $V_i$  associés à chaque valeur propre  $\lambda_i$ .

Pour se faire, on peut utiliser les méthodes numériques générales de recherche des racines d'un polynôme. Nous reviendrons sur les méthodes spécialement adaptées au polynôme caractéristique d'une matrice au chapitre 3 §3.6.3

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons essentiellement à la détermination numérique des vecteurs propres, les valeurs propres étant connues. Nous proposons une alternative à la détermination des vecteurs propres par la résolution directe de :

$$A V = \lambda_i V$$

qui a en général l'inconvénient d'être instable numériquement. Même si on peut déterminer les valeurs propres avec une très grande précision, une petite incertitude sur les coefficients de la matrice  $A$  peut entraîner des rotations importantes des vecteurs propres [LT93], en particulier si la matrice considérée est mal conditionnée.

Introduisons tout d'abord quelques définitions :

**Définition 16** : La multiplicité géométrique d'une valeur propre  $\lambda$ , notée  $g$ , est le nombre maximal de vecteurs propres indépendants qu'on peut lui associer :

$$g = \dim \text{Ker}(\lambda I - A)$$

**Définition 17** : La multiplicité algébrique d'une valeur propre  $\lambda$ , notée  $m$ , est égale à sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

Rappelons comment les vecteurs propres associés peuvent être déduits de l'examen des colonnes de la matrice caractéristique adjuguée  $Q(\lambda_i)$  ou de ses dérivées  $Q'(\lambda_i)$ ,  $Q''(\lambda_i)$ , ... selon que la valeur propre  $\lambda_i$  soit simple, double, triple, ... On pourra se rapporter à [Bro91], [Hou64], [Abd97] et [Gan59a].

Regardons successivement les différents cas possibles.

### 2.6.1 Premier cas : $Q(\lambda_i)$ est non nulle

**Proposition 7** Si  $\lambda_i$  est racine simple de  $P(\lambda)$  alors  $Q(\lambda_i)$  est non nulle

Preuve :

Suivons un raisonnement par l'absurde ; supposons  $Q(\lambda_i)$  nul.  $Q(\lambda)$  étant de degré  $n - 1$ , cela signifie qu'il existe un polynôme matriciel  $R(\lambda)$  de degré  $n - 2$  en  $\lambda$  tel que :

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)R(\lambda)$$

en conséquence

$$P(\lambda)I = (\lambda - \lambda_i)R(\lambda)(\lambda I - A)$$

d'après la formule (2.7). Dérivons cette expression par rapport à  $\lambda$ , on obtient alors

$$P'(\lambda)I = R(\lambda)(\lambda I - A) + (\lambda - \lambda_i)R'(\lambda)(\lambda I - A) + (\lambda - \lambda_i)R(\lambda)$$

Choisissons  $\lambda = \lambda_i$

$$P'(\lambda_i)I = R(\lambda_i)(\lambda_i I - A)$$

Soit  $V$  un vecteur propre associé à  $\lambda_i$  c'est-à-dire que  $(\lambda_i I - A)V = 0$ . L'identité précédente appliquée à  $V$  conduit à :

$$P'(\lambda_i)V = 0$$

Comme  $V$  a au moins une composante non nulle,  $P'(\lambda_i)$  serait donc nul ce qui contredit l'hypothèse que  $\lambda_i$  soit une racine simple. Il n'est pas possible que  $Q(\lambda_i)$  soit nul lorsque  $\lambda_i$  est une racine simple.

**Proposition 8** : Si  $\lambda_i$  est une racine simple, toutes les colonnes non nulles de  $Q(\lambda_i) = \text{adj}(\lambda_i I - A)$  sont des vecteurs propres associés à la valeur propre  $\lambda_i$ .

**Remarque 5**  $Q(\lambda_i)$  est déterminé sans difficulté par :

$$Q(\lambda_i) = \lambda_i^{n-1} B_0 + \dots + \lambda_i B_{n-2} + B_{n-1}$$

puisque les  $B_i$  sont connues, le seul travail numérique pour déterminer les colonnes de  $Q(\lambda_i)$  est de déterminer  $\lambda_i$ .

Preuve de la proposition 8 :

Appliquons la propriété liant l'adjuguée au déterminant de la matrice caractéristique en une valeur propre  $\lambda_i$  de  $A$ , nous obtenons :

$$(\lambda_i I - A)Q(\lambda_i) = \det(A - \lambda_i I)I = 0$$

Si  $e_j$  est le  $j$ -ième vecteur de la base canonique nous avons :

$$(\lambda_i I - A)Q(\lambda_i)e_j = \det(A - \lambda_i I)e_j = 0$$

or  $Q(\lambda_i)e_j$  est la  $j$ -ième colonne de  $Q(\lambda_i)$  que nous nommerons  $c$ . Toute colonne  $c$  de  $Q(\lambda_i)$  satisfait donc :

$$(\lambda_i I - A)c = 0$$

ce qui prouve que  $c$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_i$  lorsqu'il est non nul.

**Remarque 6** Si  $\lambda_i$  est racine simple alors toutes les colonnes non nulles de  $Q(\lambda_i)$  sont parallèles. Un bon test numérique de validation de la direction des vecteurs propres est de vérifier le parallélisme des colonnes de  $Q(\lambda_i)$ .

### 2.6.2 Deuxième cas : $Q(\lambda_i)$ est nulle et $Q'(\lambda_i)$ est non nulle

**Proposition 9** Si  $Q(\lambda_i)$  est nul alors  $\lambda_i$  est au moins racine double.

Preuve : la preuve de la proposition 7 montre que  $Q(\lambda_i) = 0$  implique  $P'(\lambda_i) = 0$

**Proposition 10** Dans le cas où  $Q(\lambda_i)$  est nul, des vecteurs propres associés à la valeur propre  $\lambda_i$  sont donnés par les colonnes non nulles de  $Q'(\lambda_i)$ .

**Remarque 7**  $Q'(\lambda_i)$  ne se calcule pas par dérivation numérique, par exemple :

$$Q'(\lambda_i) = (n-1)\lambda_i^{n-2}B_0 + \dots + 2\lambda_i B_{n-3} + B_{n-2}$$

se calcule connaissant les matrices  $B_0, \dots, B_{n-2}$  et le scalaire  $\lambda_i$

Preuve de la proposition 10 : Appliquons la propriété liant l'adjuguée au déterminant de la matrice caractéristique en

$$(\lambda I - A)Q(\lambda) = P(\lambda)I$$

et dérivons cette expression, on a :

$$Q(\lambda) + (\lambda I - A)Q'(\lambda) = P'(\lambda)I$$

Si  $\lambda_i$  est une valeur propre, nous obtenons :

$$Q(\lambda_i) + (\lambda_i I - A)Q'(\lambda_i) = P'(\lambda_i)I = 0$$

Mais  $Q(\lambda_i)$  ainsi que  $P'(\lambda_i)$  étant nuls (proposition 9), l'équation précédente se réduit à :

$$(\lambda_i I - A)Q'(\lambda_i) = 0$$

Si  $e_j$  est le  $j$ -ième vecteur de la base canonique, nous avons :

$$(\lambda_i I - A)Q'(\lambda_i)e_j = 0$$

or  $Q'(\lambda_i)e_j$  est la  $j$ -ième colonne de  $Q'(\lambda_i)$  que nous nommerons  $c$ . Toute colonne  $c$  de  $Q'(\lambda_i)$  satisfait donc :

$$(\lambda_i I - A)c = 0$$

ce qui prouve que  $c$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_i$  lorsqu'il est non nul.

### 2.6.3 Troisième cas : $Q(\lambda_i)$ est nulle, $Q'(\lambda_i)$ est nulle et $Q''(\lambda_i)$ est non nulle

**Proposition 11** Si  $Q(\lambda_i)$  et  $Q'(\lambda_i)$  sont nulles alors  $\lambda_i$  est au moins racine triple de  $P(\lambda)$

*Preuve :* Puisque  $Q(\lambda_i) = 0$  on sait déjà que  $P'(\lambda_i) = 0$  d'après la preuve de la proposition 7. Par hypothèse  $Q(\lambda)$  étant de degré  $n - 1$ , cela signifie qu'il existe un polynôme matriciel  $R(\lambda)$  de degré  $n - 3$  en  $\lambda$  tel que :

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^2 R(\lambda)$$

en conséquence

$$(\lambda - \lambda_i)^2 R(\lambda)(\lambda I - A) = P(\lambda)I$$

Dérivons cette expression par rapport à  $\lambda$ , on obtient alors

$$2(\lambda - \lambda_i)R(\lambda)(\lambda I - A) + (\lambda - \lambda_i)^2 R'(\lambda)(\lambda I - A) + (\lambda - \lambda_i)^2 R(\lambda) = P'(\lambda)I$$

Dérivons une deuxième fois par rapport à  $\lambda$  :

$$2R(\lambda)(\lambda I - A) + 4(\lambda - \lambda_i)R'(\lambda)(\lambda I - A) + 4(\lambda - \lambda_i)R(\lambda) + (\lambda - \lambda_i)^2 R''(\lambda)(\lambda I - A) + 2(\lambda - \lambda_i)^2 R'(\lambda) = P''(\lambda)I$$

Choisissons  $\lambda = \lambda_i$ , l'équation précédente se réduit à :

$$2R(\lambda_i)(\lambda_i I - A) = P''(\lambda_i)I$$

Soit  $V$  un vecteur propre associé à  $\lambda_i$  c'est-à-dire que  $(\lambda_i I - A)V = 0$ . L'identité précédente appliquée à  $V$  conduit à :

$$0 = P''(\lambda_i)V$$

Comme  $V$  a au moins une composante non nulle c'est que  $P''(\lambda_i) = 0$

**Proposition 12** Si  $Q(\lambda_i)$  est nulle ainsi que  $Q'(\lambda_i)$ , les vecteurs propres sont donnés par l'examen des colonnes de  $Q''(\lambda_i)$ .

*Preuve :* Dérivons maintenant l'identité :

$$(\lambda I - A)Q(\lambda) = P(\lambda)I$$

une première fois :

$$Q(\lambda) + (\lambda I - A)Q'(\lambda) = P'(\lambda)I$$

puis une seconde fois

$$2Q'(\lambda) + (\lambda I - A)Q''(\lambda) = P''(\lambda)I$$

si  $\lambda_i$  est une valeur propre, nous obtenons :

$$2Q'(\lambda_i) + (\lambda_i I - A)Q''(\lambda_i) = P''(\lambda_i)I$$

nous avons supposé  $Q(\lambda_i)$  nul et  $Q'(\lambda_i)$  nuls, la proposition précédente devient donc :

$$(\lambda_i I - A)Q''(\lambda_i) = P''(\lambda_i)I = 0$$

Si  $e_j$  est le  $j$ -ième vecteur de la base canonique nous avons :

$$(\lambda_i I - A) Q''(\lambda_i) e_j = 0$$

or  $Q''(\lambda_i) e_j$  est la  $j$ -ième colonne de  $Q''(\lambda_i)$  que nous nommerons  $c$ . Toute colonne  $c$  de  $Q''(\lambda_i)$  satisfait donc :

$$(\lambda_i I - A)c = 0$$

ce qui prouve que  $c$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_i$  lorsqu'il est non nul.

Si toutes les colonnes de  $Q''(\lambda_i)$  sont nulles c'est que  $Q''(\lambda_i) = 0$ , il faut alors examiner les colonnes de  $Q'''(\lambda_i)$  et ainsi de suite ....

### Résumé :

- 1er cas:  $Q(\lambda_i) \neq 0$ , les vecteurs propres sont obtenus par l'examen des colonnes de  $Q(\lambda_i)$
- 2ème cas:  $Q(\lambda_i) = 0$  et  $Q'(\lambda_i) \neq 0$ , les vecteurs propres sont obtenus par l'examen des colonnes de  $Q'(\lambda_i)$
- 3ème cas:  $Q(\lambda_i) = 0$ ,  $Q'(\lambda_i) = 0$  et  $Q''(\lambda_i) \neq 0$ , les vecteurs propres sont obtenus par l'examen des colonnes de  $Q''(\lambda_i)$
- 4ème cas:  $Q(\lambda_i) = 0$ ,  $Q'(\lambda_i) = 0$ ,  $Q''(\lambda_i) = 0$  et  $Q'''(\lambda_i) \neq 0$ , les vecteurs propres sont obtenus par l'examen des colonnes de  $Q'''(\lambda_i)$
- et ainsi de suite ...

## 2.7 Exemples

### 2.7.1 Matrice ayant toutes ses valeurs propres simples

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Les couples  $(k_i, B_i)$  calculés par l'algorithme de Souriau sont :

$$k_0 = 1, \quad B_0 = I$$

$$k_1 = -2, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$k_2 = -1, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -8 \\ -4 & -1 & -7 \\ +4 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$k_3 = 2 \quad B_3 = 0$$

Le polynôme caractéristique de la matrice  $A$  est donc :

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$$

Les racines de ce polynôme dans ce cas très simple sont faciles à trouver. Elles sont distinctes: -1,1 et 2. Ce sont les valeurs propres de la matrice  $A$ . L'adjuguée de la matrice caractéristique est :

$$Q(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + \lambda - 6 & 0 & -8 + 4\lambda \\ 2\lambda - 4 & \lambda^2 - 1 & 5\lambda - 7 \\ -2\lambda + 4 & 0 & \lambda^2 - 5\lambda + 6 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Calculons  $Q(-1)$ , nous obtenons :

$$Q(-1) = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -12 \\ -6 & 0 & -12 \\ 6 & 0 & 12 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Nous constatons qu'une des trois colonnes de  $Q(-1)$  est nulle. Dans les applications il faut veiller à choisir une colonne non-nulle pour vecteur propre, comme nous l'avons précisé dans ce chapitre à la proposition 8.

Les colonnes

$$\begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} -12 \\ -12 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

sont parallèles. On peut choisir comme vecteur propre associé à la valeur propre -1 le vecteur :

$$\begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Calculons  $Q(1)$ , nous obtenons :

$$Q(1) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

encore une fois une colonne est nulle. On peut choisir comme vecteur propre associé à la valeur propre 1 le vecteur :

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Calculons  $Q(2)$ , nous obtenons :

$$Q(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$



On peut choisir comme vecteur propre associé à la valeur propre 2 le vecteur :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

### 2.7.2 Matrice ayant une valeur propre simple et une double

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Les couples  $(k_i, B_i)$  calculés par l'algorithme de Souriau sont :

$$k_0 = 1, \quad B_0 = I$$

$$k_1 = -4, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$k_2 = 5, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$k_3 = -2, \quad B_3 = 0$$

Le polynôme caractéristique de la matrice  $A$  est donc :

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)$$

Les racines de ce polynôme sont : 1 (racine double) et 2 (racine simple). Ce sont les valeurs propres de la matrice  $A$ . L'adjuguée de la matrice caractéristique est :

$$Q(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 3\lambda + 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda + 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda^2 - 3\lambda + 2 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Calculons  $Q(2)$ , nous obtenons :

$$Q(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Un vecteur propre associé à la valeur propre 2 est le vecteur :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

La valeur propre 1 est double, la théorie prévoit que la matrice  $Q(1)$  est nulle comme on le vérifie numériquement. Intéressons nous donc à la dérivée  $Q'(\lambda)$  de sa matrice caractéristique adjuguée pour la valeur 1 de  $\lambda$  :

$$Q'(1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

La première et la deuxième colonne de la matrice  $Q'(1)$  fournissent deux vecteurs propres distincts et non parallèles entre eux :

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

La troisième colonne ne fournit pas d'information supplémentaire, elle est parallèle à la deuxième.

### 2.7.3 Matrice ayant une valeur propre triple

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Les couples  $(k_i, B_i)$  calculés par l'algorithme de Souriau sont :

$$k_0 = 1, \quad B_0 = I$$

$$k_1 = -6, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$k_2 = 12, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$k_3 = 8, \quad B_3 = 0$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est donc :

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3$$

La racine 2 de ce polynôme est triple. L'adjugué de la matrice caractéristique est :

$$Q(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 4\lambda + 4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 4\lambda + 4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 4\lambda + 4 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$Q(2)$  est nulle ainsi que  $Q'(2)$  puisque 2 est racine triple du polynôme caractéristique. Calculons alors  $Q''(2)$ , nous obtenons :

$$Q''(2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Les 3 colonnes

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

fournissent trois vecteurs propres distincts et non parallèles entre eux.

#### 2.7.4 Matrice ayant deux valeurs propres complexes et conjuguées

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Les couples  $(k_i, B_i)$  calculés par l'algorithme de Souriau sont :

$$k_0 = 1, \quad B_0 = I$$

$$k_1 = -3, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$k_2 = +3, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$k_3 = -9 \quad B_3 = 0$$

Le polynôme caractéristique de la matrice  $A$  est donc :

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 9$$

Les racines de ce polynôme dans ce cas très simple sont faciles à trouver. Elles sont distinctes : 3,  $i\sqrt{3}$  et  $-i\sqrt{3}$ . Ce sont les valeurs propres de la matrice  $A$ . L'adjuguée de la matrice caractéristique est :

$$Q(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 - 2\lambda + 1 & 2\lambda - 2 & 4 \\ 4 & \lambda^2 - 2\lambda + 1 & 2\lambda - 2 \\ 2\lambda - 2 & 4 & \lambda^2 - 2\lambda + 1 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Calculons  $Q(3)$ , nous obtenons :

$$Q(3) = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

La colonne

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

Calculons  $Q(i\sqrt{3})$ , nous obtenons :

$$Q(i\sqrt{3}) = \begin{bmatrix} -2 - 2i\sqrt{3} & 2i\sqrt{3} - 2 & 4 \\ 4 & -2 - 2i\sqrt{3} & 2i\sqrt{3} - 2 \\ 2i\sqrt{3} - 2 & 4 & -2 - 2i\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

On peut choisir comme vecteur propre associé à la valeur propre  $i\sqrt{3}$  le vecteur :

$$\begin{bmatrix} -2 - 2i\sqrt{3} \\ 4 \\ 2i\sqrt{3} - 2 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Calculons  $Q(-i\sqrt{3})$ , nous obtenons :

$$Q(-i\sqrt{3}) = \begin{bmatrix} 2i\sqrt{3} - 2 & -2 - 2i\sqrt{3} & 4 \\ 4 & 2i\sqrt{3} - 2 & -2 - 2i\sqrt{3} \\ -2 - 2i\sqrt{3} & 4 & 2i\sqrt{3} - 2 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

On peut choisir comme vecteur propre associé à la valeur propre  $-i\sqrt{3}$  le vecteur :

$$\begin{bmatrix} 2i\sqrt{3} - 2 \\ 4 \\ -2 - 2i\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

## 2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, après avoir énoncé quelques définitions et notations d'algèbre linéaire, nous avons présenté Urbain Le Verrier et sa méthode éponyme permettant le calcul des coefficients du polynôme caractéristique ainsi que les méthodes qui découlent de ce procédé. Nous nous sommes particulièrement intéressés à l'algorithme de Jean-Marie Souriau. Puis nous avons vu qu'une conséquence de l'algorithme de Souriau permettait d'obtenir les vecteurs propres d'une matrice carrée  $A$  à partir des colonnes de sa matrice adjuguée. La méthode de Souriau comme cette technique d'extraction des vecteurs propres seront transposées dans le chapitre 3 à la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre. La technique d'extraction des vecteurs propres sera étendue dans le chapitre 6 aux systèmes vibratoires régis par des équations différentielles du second ordre.

## Chapitre 3

# Application à la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Notations</b> . . . . .	<b>36</b>
<b>3.2</b>	<b>Transposition de la méthode de Souriau à la résolution du système <math>\frac{dX}{dt} = AX</math></b> . . . . .	<b>37</b>
3.2.1	Elaboration de la partie algébrique de l'algorithme résolvant le système . . . . .	37
3.2.2	Elaboration de la partie différentielle de l'algorithme . . . . .	37
3.2.3	Choix des conditions initiales relatives à la fonction $\gamma$ . . . . .	38
3.2.4	Algorithme de résolution du système $\frac{dX}{dt} = AX$ . . . . .	39
<b>3.3</b>	<b>Résolution de <math>A\frac{dX}{dt} + BX = 0</math></b> . . . . .	<b>39</b>
3.3.1	Définitions . . . . .	40
3.3.2	Élaboration de la partie algébrique . . . . .	40
3.3.3	Première interprétation : méthode itérative ascendante . . . . .	42
3.3.4	Deuxième interprétation : méthode itérative descendante . . . . .	42
3.3.5	Initialisation des coefficients de l'algorithme ascendant . . . . .	43
3.3.6	Initialisation des coefficients de l'algorithme descendant . . . . .	43
3.3.7	Algorithme linealg1 ascendant . . . . .	44
3.3.8	Algorithme linealg1 descendant . . . . .	44
3.3.9	Élaboration de la partie différentielle . . . . .	44
3.3.10	Choix des conditions initiales satisfaites par $\gamma$ . . . . .	45
<b>3.4</b>	<b>Algorithme ascendant</b> . . . . .	<b>47</b>
<b>3.5</b>	<b>Algorithme descendant</b> . . . . .	<b>47</b>
<b>3.6</b>	<b>Comparaison avec les méthodes numériques classiques</b> . . . . .	<b>48</b>
3.6.1	Méthodes itératives . . . . .	49
3.6.2	Méthodes de transformation . . . . .	51

3.6.3	Méthodes basées sur le développement du polynôme caractéristique	54
3.6.4	Quelle méthode pour quelle classe? . . . . .	55
3.6.5	Conclusion . . . . .	56
<b>3.7</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>56</b>

---

## Résumé

Dans ce chapitre, nous introduisons notre méthode qui est une adaptation aux systèmes différentiels de la méthode de Souriau initialement développée pour les systèmes d'algèbre linéaire. Ensuite, nous présentons les différentes méthodes de résolution des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants du premier ordre.

## 3.1 Notations

Si on regroupe les déplacements généralisés et les vitesses généralisées en un même vecteur, les équations différentielles du second ordre de la dynamique peuvent se mettre sous la forme d'équations différentielles du premier ordre. Il n'existe pas d'outils analytiques généraux permettant la résolution des problèmes non-linéaires c'est pourquoi la modélisation de tout problème mécanique aboutit souvent à la linéarisation, autour de la position d'équilibre, des équations qui le régissent. En préférant la notation matricielle à la notation indicelle, commençons par étudier un système linéaire du premier ordre de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $A$  est une matrice carrée  $n \times n$ ,

$X$ , un *vecteur colonne* à  $n$  lignes (en mécanique ses composantes seraient les *paramètres de configuration* et leurs dérivées),

$X_0$  est la condition initiale.

La solution analytique du système (3.1) peut s'exprimer sous la forme d'une exponentielle de matrice :

$$X(t) = e^{At} X_0$$

On connaît une expression de la matrice  $e^{At}$  comme la somme d'une série convergente  $e^{At} = I + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n$  Cette expression est souvent utilisée numériquement avec une troncature à partir d'un certain ordre. Toutefois, cette représentation n'est pas exploitable pour des grandes valeurs de  $t$ . C'est pourquoi nous nous sommes intéressés à la recherche d'une expression de cette exponentielle par une somme finie.

## 3.2 Transposition de la méthode de Souriau à la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre du type : $\frac{dX}{dt} = AX$

Dans cette section, nous allons présenter une transposition à la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre de la méthode de Souriau initialement développée pour l'algèbre linéaire et présentée au chapitre précédent (§2.5.1).

### 3.2.1 Elaboration de la partie algébrique de l'algorithme résolvant le système

L'algorithme de Souriau, initialisé par  $k_0 = 1$  fournit numériquement tous les coefficients  $k_i$  et  $B_i$  du polynôme caractéristique :

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = k_0 \lambda^n + k_1 \lambda^{n-1} + \dots + k_{n-1} \lambda + k_n \quad (3.2)$$

et de l'adjuguée de la matrice caractéristique :

$$Q(\lambda) = \text{Adj}(\lambda I - A) = \lambda^{n-1} B_0 + \lambda^{n-2} B_1 + \dots + \lambda B_{n-2} + B_{n-1} \quad (3.3)$$

définit dans le chapitre précédent consacré à l'algèbre linéaire. Nous allons nous servir de ces pré-requis pour construire l'algorithme de résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires.

### 3.2.2 Elaboration de la partie différentielle de l'algorithme

Dans ce paragraphe nous cherchons à résoudre le système linéaire du premier ordre de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $A$  est une matrice carrée  $n \times n$ ,  
 $X$ , un *vecteur colonne* de dimension  $n$ .  
 $X_0$  est la condition initiale.

La propriété d'algèbre linéaire liant les notions de déterminant et d'adjuguée :

$$A \text{ Adj } A = (\det A) I,$$

appliquée à la matrice caractéristique de  $A$  :  $\lambda I - A$  conduit à l'identité polynômiale suivante liant le polynôme caractéristique et la matrice caractéristique adjuguée :

$$(\lambda I - A) \text{ Adj}(\lambda I - A) = [\det(\lambda I - A)] I$$

qui peut s'écrire aussi :

$$(\lambda I - A) Q(\lambda) = P(\lambda) I \quad (3.5)$$

en adoptant les notations et définitions du §3.2.1 et comme vu au paragraphe §2.5.1.

Remplaçons formellement  $\lambda$  par  $\frac{d}{dt}$ , dans l'identité 3.5 ; nous obtenons alors l'identité entre opérateurs différentiels :

$$\left(I \frac{d}{dt} - A\right) Q \left(\frac{d}{dt}\right) = IP \left(\frac{d}{dt}\right).$$

Cette identité est la clé de la construction de notre algorithme.

Soit  $\gamma(t)$  une fonction numérique satisfaisant :

$$P \left(\frac{d}{dt}\right) \gamma(t) = 0$$

$\gamma$  est solution de l'équation différentielle (en notant  $\gamma^{(i)}$  la dérivée i-ème de  $\gamma$ ) :

$$k_0 \gamma^{(n)} + k_1 \gamma^{(n-1)} + \dots + k_{n-1} \gamma^{(1)} + k_n \gamma = 0 \quad (3.6)$$

que nous nommerons *équation différentielle caractéristique*. Alors la fonction matricielle :

$$\phi(t) = Q \left(\frac{d}{dt}\right) \gamma(t)$$

qui se développe sous la forme :

$$\phi(t) = B_0 \gamma^{(n-1)}(t) + B_1 \gamma^{(n-2)}(t) + \dots + B_{n-2} \gamma^{(1)}(t) + B_{n-1} \gamma(t) \quad (3.7)$$

est solution de l'équation différentielle matricielle :

$$\frac{d\phi}{dt} = A \phi(t)$$

### 3.2.3 Choix des conditions initiales relatives à la fonction $\gamma$

Pour que  $\phi(t)$  soit exactement l'exponentielle  $e^{At}$  il est nécessaire que  $\phi(0)$  soit la matrice unité  $I$ .

Au regard de (3.7) et puisque  $B_0$  est la matrice unité, il suffit de choisir comme conditions initiales de l'équation différentielle linéaire du n-ième ordre (3.6) :

$$\begin{cases} \gamma^{n-1}(0) = 1 \\ \gamma^{n-2}(0) = 0 \\ \vdots \\ \gamma^{(1)}(0) = 0 \\ \gamma(0) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Résumé : si  $\gamma$  est une solution de l'équation différentielle caractéristique (3.6) satisfaisant la condition initiale (3.8), alors :

$$\phi(t) = \gamma^{(n-1)}(t) B_0 + \gamma^{(n-2)}(t) B_1 + \dots + \gamma^{(1)}(t) B_{n-2} + \gamma(t) B_{n-1}$$

est la solution de :

$$\frac{d\phi}{dt} = A \phi(t)$$



satisfaisant  $\phi(0) = I$ . Autrement dit,  $\phi(t)$  est l'exponentielle de  $tA$  exprimée sous forme finie.

La solution de  $\frac{dX}{dt} = AX$  satisfaisant la condition initiale:  $X(0) = X_0$  est alors

$$X(t) = \phi(t) X_0$$

### 3.2.4 Algorithme de résolution du système $\frac{dX}{dt} = AX$

(1) Calcul des couples  $(k_i, B_i)$  pour l'algorithme de Souriau :

(a) Entrer  $n, A$

(b) Algorithme de Souriau :

– Faire  $B_0 = I$

– Pour  $i$  allant de 1 à  $n$  calculer :

$$\begin{cases} A_i = B_{i-1} A \\ k_i = \frac{1}{i} \text{tr}(A_i) \\ B_i = A_i + k_i I \end{cases} \quad (3.9)$$

(2) Déterminer  $\gamma$ , solution de l'équation différentielle (3.6) en respectant les conditions initiales :

$$\begin{cases} \gamma(0) = 0; \frac{d\gamma}{dt}(0) = 0; \gamma^{(2)}(0) = 0; \dots \gamma^{(n-3)}(0) = 0; \gamma^{(n-2)}(0) = 0; \\ \gamma_1^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases} \quad (3.10)$$

(3) Tabuler  $\phi$

$$\phi(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_i \gamma^{(n-1-i)}(t)$$

(4) Tabuler la solution  $X(t) = \phi(t) X_0$

## 3.3 Résolution de $A \frac{dX}{dt} + BX = 0$

Souvent, les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants provenant d'un problème physique sont, ou se ramènent par la transformation de Duncan par exemple, à un problème de la forme :

$$A \frac{dX}{dt} + BX = 0 \quad (3.11)$$

où  $A$  et  $B$  sont deux matrices  $n \times n$ .  $A$  est supposée inversible.

Bien sûr, puisque  $A$  est inversible, nous pouvons remplacer l'équation (3.11) par :

$$\frac{dX}{dt} = -A^{-1} B X \quad (3.12)$$

Mais, le fait d'inverser  $A$  est une technique très coûteuse en temps de calcul. De plus, elle est peu précise, dans le cas de systèmes mal conditionnés.

En outre, les propriétés éventuelles que pourraient avoir les matrices  $A$  et  $B$  comme la symétrie (très fréquente dans les problèmes de mécanique et permettant de réduire, dans certains cas, les temps de calculs de manière significative) seraient perdues. Évitions l'inversion de  $A$  et reprenons la méthode du paragraphe précédent en nous intéressant à la matrice  $\lambda A + B$ .

### 3.3.1 Définitions

**Définition 18** : La matrice  $\lambda A + B$  est dite matrice caractéristique du premier ordre.

**Définition 19** : Le déterminant de la matrice caractéristique du premier ordre est dit polynôme caractéristique du premier ordre. C'est un polynôme à coefficients scalaires de degré  $n$  en  $\lambda$ . Nous le noterons :

$$P(\lambda) = \det(\lambda A + B) = k_0 \lambda^n + k_1 \lambda^{n-1} + \dots + k_{n-1} \lambda + k_n \quad (3.13)$$

en indexant ses coefficients  $k_0, k_1, k_2, \dots$  de la plus haute puissance en  $\lambda$  à la plus basse.

**Définition 20** : L'adjuguée de la matrice caractéristique est dite matrice adjuguée caractéristique du premier ordre. C'est un polynôme à coefficients matriciels de degré  $n - 1$  en  $\lambda$ . Nous le noterons :

$$Q(\lambda) = \text{adj}(\lambda A + B) = \lambda^{n-1} B_0 + \lambda^{n-2} B_1 + \dots + \lambda B_{n-2} + B_{n-1} \quad (3.14)$$

en indexant ses coefficients  $B_0, B_1, B_2, \dots$  de la plus haute puissance en  $\lambda$  à la plus basse.

### 3.3.2 Élaboration de la partie algébrique

La propriété d'algèbre linéaire :

$$A(\text{adj } A) = (\det A) I \quad (3.15)$$

appliquée à la matrice caractéristique du premier ordre  $\lambda A + B$  conduit à l'identité polynomiale suivante :

$$(\lambda A + B) \text{adj}(\lambda A + B) = \det(\lambda A + B) I \quad (3.16)$$

que l'on peut écrire aussi en adoptant les notations du paragraphe §3.3.1 :

$$(\lambda A + B) Q(\lambda) = P(\lambda) I \quad (3.17)$$

L'identité (3.17) développée en puissances de  $\lambda$  grâce aux notations (3.13) et (3.14) conduit par identification, aux  $n + 1$  relations entre les coefficients  $k_i$  et  $B_i$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} AB_0 = k_0 I \\ AB_1 + BB_0 = k_1 I \\ AB_2 + BB_1 = k_2 I \\ \vdots \\ AB_i + BB_{i-1} = k_i I \\ AB_{i+1} + BB_i = k_{i+1} I \\ \vdots \\ AB_{n-1} + BB_{n-2} = k_{n-1} I \\ BB_{n-1} = k_n I \end{array} \right. \quad (3.18)$$

**Remarque 8** : La dernière relation  $BB_{n-1} = k_n I$  constitue une généralisation du théorème d'Hamilton-Cayley

Prendre la trace des matrices présentes dans les relations matricielles (3.18), conduit à  $n + 1$  relations scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} tr(AB_0) = nk_0 \\ tr(AB_1) + tr(BB_0) = nk_1 \\ tr(AB_2) + tr(BB_1) = nk_2 \\ \vdots \\ tr(AB_i) + tr(BB_{i-1}) = nk_i \\ tr(AB_{i+1}) + tr(BB_i) = nk_{i+1} \\ \vdots \\ tr(AB_{n-1}) + tr(BB_{n-2}) = nk_{n-1} \\ tr(BB_{n-1}) = nk_n \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Notre but est de trouver un schéma itératif permettant de calculer explicitement les couples  $(k_i, B_i)$ . Les relations (3.18) et (3.19) doivent être complétées. Nous disposons encore d'un argument : la dérivée du déterminant d'une matrice  $A$  dépendant d'un paramètre  $\lambda$  est liée à son adjuguée par la formule :

$$\frac{d}{d\lambda} \det A = tr[adj(A) \frac{dA}{d\lambda}]$$

Appliquons cette propriété à la matrice caractéristique du premier ordre  $\lambda A + B$  :

$$\frac{d}{d\lambda} (\det(\lambda A + B)) = tr\left(\frac{d}{d\lambda}(\lambda A + B) adj(\lambda A + B)\right)$$

que nous pouvons écrire sous la forme d'une relation entre les polynômes  $P$  et  $Q$

$$P'(\lambda) = tr(AQ(\lambda))$$

soit en utilisant les notations (3.13) et (3.14) :

$$\begin{aligned} & n k_0 \lambda^{n-1} + (n-1) k_1 \lambda^{n-2} + \dots + k_{n-2} \lambda + k_{n-1} \\ & = tr(\lambda^{n-1} AB_0 + \lambda^{n-2} AB_1 + \dots + \lambda AB_{n-2} + AB_{2n-1}) \end{aligned}$$

La trace est un opérateur linéaire, une identification des coefficients de même degré en  $\lambda$  aboutit à  $n$  relations scalaires supplémentaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} n k_0 = \text{tr}(AB_0) \\ (n-1) k_1 = \text{tr}(AB_1) \\ \vdots \\ (n-i) k_i = \text{tr}(AB_i) \\ (n-(i+1)) k_{i+1} = \text{tr}(AB_{i+1}) \\ \vdots \\ 2k_{n-2} = \text{tr}(AB_{n-2}) \\ k_{n-1} = \text{tr}(AB_{n-1}) \end{array} \right. \quad (3.20)$$

### 3.3.3 Première interprétation : méthode itérative ascendante

Les systèmes (3.19) et (3.20), permettent la détermination de manière itérative des coefficients  $k_i$  du polynôme caractéristique connaissant les  $B_i$  jusqu'au rang  $i-1$ . Soustrayons à la  $(i+1)$ -ème relation du système (3.19) celle du système (3.20) et divisons le résultat par  $i$  (pour  $i$  supérieur ou égal à 1, donc non nul) pour exprimer  $k_i$  :

$$k_i = \frac{1}{i} \text{tr}(B B_{i-1}) \quad (3.21)$$

Si les coefficients tant scalaires que matriciels ont été calculés jusqu'au rang  $i-1$ , le coefficient  $k_i$  se trouve donc déterminé. Reste à exprimer  $B_i$  connaissant  $k_i$ . Le coefficient matriciel  $B_i$  se déduit directement du système (3.18) en fonction de  $k_i$  et du coefficient matriciel précédent

$$AB_i = k_i I - B B_{i-1}$$

Mais d'après la première relation du système (3.18), l'inverse de la matrice  $A$  n'est autre que  $\frac{1}{k_0} B_0$

$$B_i = \frac{B_0}{k_0} (k_i I - B B_{i-1}) \quad (3.22)$$

Les relations (3.21) et (3.22) permettent de construire un algorithme ascendant qui déterminera tous les couples  $(k_i, B_i)$  si on connaît  $k_0$  et  $B_0$ .

### 3.3.4 Deuxième interprétation : méthode itérative descendante

On détermine le coefficient  $k_{i+1}$  directement de la  $(i+2)$ -ème relation du système (3.20) :

$$k_{i+1} = \frac{1}{n-(i+1)} \text{tr}(A B_i) \quad (3.23)$$

Quant au coefficient matriciel  $B_i$ , il s'obtient directement grâce à la  $(i+2)$ -ème relation du système (3.18) en fonction de  $k_{i+1}$  et du coefficient matriciel suivant :

$$B B_i = k_{i+1} I - A B_{i+1}$$

Mais d'après la dernière relation du système (3.18), l'inverse de la matrice  $B$  n'est autre que  $\frac{1}{k_n} B_{n-1}$ . On aboutit donc à :

$$B_i = \frac{B_{n-1}}{k_n} (k_{i+1} I - A B_{i+1}) \quad (3.24)$$

Les relations (3.23) et (3.24) permettent de construire un algorithme descendant qui déterminera tous les couples  $(k_i, B_i)$  si on connaît  $k_n$  et  $B_{n-1}$ .

### 3.3.5 Initialisation des coefficients de l'algorithme ascendant

Pour initialiser l'algorithme ascendant, il faut se donner le couple  $(k_0, B_0)$ . Divisons la relation (3.13) par  $\lambda^n$  et faisons tendre  $\lambda$  vers l'infini nous voyons que :

$$k_0 = \det A$$

De même, il suffit de diviser la relation (3.14) par  $\lambda^{n-1}$  pour voir que :

$$B_0 = \text{adj } A$$

Ces deux coefficients sont facilement calculables en appliquant à la matrice  $A$  l'algorithme de Souriau présenté au chapitre 2, §2.5.2.

### 3.3.6 Initialisation des coefficients de l'algorithme descendant

Le polynôme matriciel  $Q(\lambda)$  est un polynôme de degré  $n-1$  en  $\lambda$ , son dernier coefficient est  $B_{n-1}$ . Cependant, par commodité nous compléterons l'écriture des  $B_i$  jusqu'à  $i = n$  en convenant que :

$$B_n = 0$$

l'initialisation de l'algorithme descendant nécessite de connaître le couple  $(k_n, B_{n-1})$ . Faisons tendre  $\lambda$  vers zéro dans les relations (3.13) et (3.14) :

$$k_n = \det B$$

$$B_{n-1} = \text{adj } B$$

L'algorithme de Souriau présenté au chapitre 2 §2.5.2 permet le calcul de l'adjuguée de la matrice  $B$  et de son déterminant.

Au vu des deux suites de récurrence  $(k_i, B_i)$  et  $(k_{i+1}, B_i)$  décrites précédemment, nous construisons deux algorithmes itératifs : le premier est dit algorithme ascendant et le second algorithme descendant.

### 3.3.7 Algorithme linealg1 ascendant

- (a) Entrer  $n, A, B$   
 (b) Calculer, par l'algorithme de Souriau :

$$\begin{cases} k_0 = \det A, \\ B_0 = \text{adj } A \end{cases} \quad (3.25)$$

- (c) Pour  $i$  allant de 1 à  $n - 1$  faire

$$\begin{cases} k_i = \frac{1}{i} \text{tr}(B B_{i-1}) \\ B_i = \frac{B_0}{k_0} (k_i I - B B_{i-1}) \end{cases} \quad (3.26)$$

- (d) Pour  $i = n$  faire

$$\begin{cases} k_i = \frac{1}{i} (\text{tr}(B B_{i-1})) \\ B_i = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

### 3.3.8 Algorithme linealg1 descendant

- (a) Entrer  $n, A, B$   
 (b) Calculer, par l'algorithme de Souriau :

$$\begin{cases} k_n = \det B \\ B_{n-1} = \text{adj } B \end{cases} \quad (3.28)$$

- (d) Pour  $i$  allant de  $n - 1$  à 0 faire

$$\begin{cases} k_{i+1} = \frac{1}{n-(i+1)} \text{tr}(A B_i) \\ B_i = \frac{B_{n-1}}{k_n} (k_{i+1} I - A B_{i+1}) \end{cases} \quad (3.29)$$

- (e) Calculer par l'algorithme de Souriau :

$$k_0 = \det A$$

**Remarque 9** *L'algorithme ascendant sera utilisé lorsque le déterminant de la matrice  $A$  n'est pas trop petit puisqu'il nécessite une division par  $k_0$  qui n'est autre que le déterminant de cette matrice. L'algorithme descendant quant à lui sera utilisé lorsque le déterminant de la matrice  $B$  n'est pas trop petit puisqu'il nécessite une division par  $k_n$  qui n'est autre que le déterminant de cette matrice.*

### 3.3.9 Élaboration de la partie différentielle

Tout le fondement de la méthode se trouve dans l'analogie entre la propriété algébrique

$$[\lambda A + B] Q(\lambda) = P(\lambda) I$$

et la propriété différentielle

$$\left[ A \frac{d}{dt} + B \right] Q\left(\frac{d}{dt}\right) = P\left(\frac{d}{dt}\right) I.$$

S'il existe une fonction numérique  $\gamma$  vérifiant :

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\gamma = 0$$

$\gamma$  est une solution de l'équation différentielle :

$$k_0 \gamma^{(n)} + k_1 \gamma^{(n-1)} + \dots + k_{n-1} \gamma^{(1)} + k_n \gamma = 0 \quad (3.30)$$

Alors, la fonction matricielle

$$\phi(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right)\gamma(t)$$

qui se développe sous la forme :

$$\phi(t) = \gamma^{(n-1)}(t)B_0 + \gamma^{(n-2)}(t)B_1 + \dots + \gamma B_{n-1}(t) \quad (3.31)$$

est solution de l'équation différentielle

$$A \frac{d\phi}{dt} + B\phi(t) = 0$$

### 3.3.10 Choix des conditions initiales satisfaites par $\gamma$

Considérons l'équation différentielle vectorielle :

$$A \frac{dX}{dt} + B X = 0 \quad (3.32)$$

où  $X(t)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . Trouver une solution et ensuite l'adapter à la condition initiale :

$$X(0) = X_0$$

se ramène à trouver une solution de (3.31). Pour cela, il suffit de sélectionner une solution  $\gamma$  de l'équation (3.30) assortie de conditions initiales convenablement choisies.

#### Méthode ascendante

Nous pouvons choisir pour conditions initiales :  $\gamma^{(1)}(0), \gamma^{(2)}(0), \dots, \gamma^{(n-3)}(0), \gamma^{(n-2)}(0)$  toutes nulles et, seule  $\gamma^{(n-1)}$  est non nulle.

Définissons la solution  $\gamma$  solution de l'équation (3.30) et satisfaisant les conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma(0) = 0, \gamma^{(1)}(0) = 0, \gamma^{(2)}(0) = 0, \dots, \gamma_1^{(n-2)}(0) = 0, \gamma^{(n-1)}(0) = 1 \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Associions lui la solution matricielle :

$$\phi = Q\left(\frac{d}{dt}\right)\gamma$$

Soit  $V$  un vecteur constant de  $\mathbb{R}^n$ , cherchons à adapter ce vecteur pour que la solution du système :

$$X(t) = \phi V \quad (3.34)$$

satisfasse la condition initiale du système. Le choix de  $\gamma$  implique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(0) = B_0 \end{array} \right. \quad (3.35)$$

Le vecteur  $V$  doit être choisi en tenant compte de la condition initiale  $X(0) = X_0$  de sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_0 V = X_0 \end{array} \right. \quad (3.36)$$

En utilisant les relations  $k_0 = \det A$ ,  $B_0 = \text{adj } A$  et la propriété (5.5) on détermine le vecteur  $V$  par la formule :

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \frac{1}{k_0} A X_0 \end{array} \right. \quad (3.37)$$

et ensuite  $X(t)$  par la formule (3.34). La division par  $k_0$  ne pose pas de problème si le déterminant de  $A$  n'est pas trop petit.

### Méthode descendante

Nous pouvons opter pour les conditions initiales suivantes :  $\gamma^{(0)}$ ,  $\gamma^{(1)}(0)$ ,  $\gamma^{(2)}(0)$ ,  $\dots$ ,  $\gamma^{(n-2)}(0)$ ,  $\gamma^{(n-1)}(0)$  toutes nulles et, seule  $\gamma^{(0)}$  non nulle.

Définissons la solution  $\gamma$  satisfaisant les conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma^{(1)}(0) = 0, \gamma^{(2)}(0) = 0, \dots, \gamma_1^{(n-2)}(0) = 0, \gamma^{(n-1)}(0) = 0 \\ \gamma^{(0)} = 1 \end{array} \right. \quad (3.38)$$

Associons lui la solution matricielle :

$$\phi = Q\left(\frac{d}{dt}\right)\gamma$$

Soit  $V$  un vecteur constant de  $\mathbb{R}^n$ , cherchons à adapter ce vecteur pour que la solution du système :

$$X(t) = \phi V \quad (3.39)$$

satisfasse la condition initiale du système. Le choix de  $\gamma$  implique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(0) = B_{n-1} \end{array} \right. \quad (3.40)$$

Le vecteur  $V$  doit être choisi en tenant compte de la condition initiale  $X(0) = X_0$  de sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{n-1} V = X_0 \end{array} \right. \quad (3.41)$$

En utilisant les relations  $k_n = \det B$ ,  $B_{n-1} = \text{adj } B$  et la propriété (5.5) on détermine le vecteur  $V$  par la formule :

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \frac{1}{k_n} B X_0 \end{array} \right. \quad (3.42)$$

et ensuite  $X(t)$  par la formule (3.39). La division par  $k_n$  ne pose pas de problème si le déterminant de  $B$  n'est pas trop petit.



### 3.4 Algorithme de résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants : Algorithme ascendant

(1) Algorithme Linealg ascendant :

- (a) Entrer  $n$ ,  $A$ ,  $B$   
 (b) Calculer, avec l'algorithme de Souriau :

$$\begin{cases} k_0 = \det A \\ B_0 = \text{adj } A \end{cases} \quad (3.43)$$

(d) Pour  $i$  allant de 2 à  $n - 2$  faire

$$k_i = \frac{1}{i}(\text{tr}(B B_{i-1}))$$

et

$$B_i = \frac{B_0}{k_0}[k_i I - B B_{i-1}]$$

(e) Pour  $i = n$  faire

$$k_i = \frac{1}{i}(\text{tr}(B B_{i-1}))$$

et

$$B_i = 0$$

(2) Déterminer  $\gamma$  solution de l'équation différentielle (3.30) en respectant les conditions initiales :

$$\begin{cases} \gamma(0) = 0; \frac{d\gamma}{dt}(0) = 0; \gamma^{(2)}(0) = 0; \dots \gamma^{(n-3)}(0) = 0; \gamma^{(n-2)}(0) = 0; \\ \gamma_1^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases} \quad (3.44)$$

(3) Tabuler  $\phi$

$$\phi(t) = \sum_{i=0}^{2n-2} B_i \gamma_1^{(2n-2-i)}(t)$$

(4) Déterminer  $V$

$$V = \frac{1}{k_0} A X_0 \quad (3.45)$$

(5) Tabuler la solution  $X(t) = \phi(t) V$

### 3.5 Algorithme de résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants : Algorithme descendant

(1) Algorithme linealg descendant

- (a) Entrer  $n$ ,  $A$ ,  $B$   
 (b) Calculer, par l'algorithme de Souriau

$$\begin{cases} k_n = \det B \\ B_{n-1} = \text{adj } B \end{cases} \quad (3.46)$$

(c) Pour  $i$  allant de  $n - 2$  à  $0$  faire

$$k_{i+1} = \frac{1}{n - (i + 1)} \operatorname{tr}(A B_i)$$

puis

$$B_i = \frac{B_{n-1}}{k_n} (k_{i+1} I - A B_{i+1})$$

(d) Calculer, par l'algorithme de Souriau

$$k_0 = \det A$$

(2) Déterminer  $\gamma$  solution de l'équation différentielle (3.30) en respectant les conditions initiales :

$$\begin{cases} \gamma(0) = 1; \\ \frac{d\gamma}{dt}(0) = 0; \dots \gamma^{(n-1)}(0) = 0; \end{cases} \quad (3.47)$$

(3) Tabuler  $\phi$

$$\phi(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_i \gamma^{(n-1-i)}(t)$$

(4) Déterminer  $V$

$$V = \frac{B}{k_n} (X_0) \quad (3.48)$$

(5) Tabuler la solution :  $X(t) = \phi(t) V$

**Remarque 10** *Si on change les conditions initiales, il n'est pas nécessaire de refaire tourner tout le programme, seul le calcul de  $V$  est affecté.*

L'exponentielle de la matrice  $tA$  se trouve donc calculée par la formule (3.31). Les matrices  $B_i$  sont déterminées par les opérations d'algèbre linéaire.

Le seul travail véritablement numérique réside dans la résolution de (3.30) qu'il suffit de résoudre sur un pas de temps  $h$  petit.  $\gamma$  est une fonction entière dont le développement en série s'obtient par une formule de récurrence de même que ses fonctions dérivées. On peut obtenir la précision que l'on souhaite en choisissant le pas  $h$  suffisamment petit. Soit  $q$  un entier, éventuellement grand, et  $p = 2^q$ , si on connaît  $\gamma$  de  $0$  à  $h$  on connaît  $\phi(h)$  par (3.31) mais aussi  $\phi(ph)$  grâce à la propriété de l'exponentielle de matrices  $\exp(phA) = (\exp hA)^p$ , c'est-à-dire  $\phi(ph) = (\phi(h))^p$ .

Remarquons que notre méthode ne nécessite jamais la détermination des vecteurs propres de  $A$ , ce qui présente un grand avantage car en général la direction de ceux-ci est numériquement instable.

### 3.6 Comparaison avec les méthodes numériques classiques de recherche des valeurs propres et des vecteurs propres

Les méthodes classiques de résolution consistent essentiellement à déterminer les valeurs propres  $\lambda_i$  et les vecteurs propres  $V_i$  de la matrice  $A$ . Si les valeurs propres sont

simples, la solution générale est une combinaison linéaire des solutions élémentaires  $e^{\lambda_i t} V_i$ . Sinon il faut multiplier  $e^{\lambda_i t}$  par un polynôme en  $t$  dont le degré dépend de la multiplicité de  $\lambda_i$ . Tout le travail numérique consiste à déterminer les  $\lambda_i$  et les  $V_i$ .

Dans ce qui suit nous présentons quelques méthodes classiques de détermination des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice carrée. Notre ambition n'est pas d'être exhaustif, mais plutôt de préciser les conditions d'application ainsi que les avantages et inconvénients des différentes méthodes présentées.

Rappelons brièvement que le problème posé est le suivant : considérant une matrice  $A$ ,  $n \times n$ , on se propose de déterminer les valeurs propres  $\lambda$  et les vecteurs propres  $V$  associés :

$$AV = \lambda V.$$

Une valeur propre  $\lambda$  est nécessairement solution de l'équation caractéristique :

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Le classement des différentes méthodes est envisageable selon plusieurs critères :

- la potentialité de la méthode : détermination d'une partie des valeurs propres, ou bien de la totalité de celles-ci,
- le type de la méthode : itération sur les vecteurs propres, transformation de la matrice, recherche des racines du polynôme caractéristique.

Dans ce paragraphe, nous privilégierons le second classement, en précisant toutefois les potentialités de la méthode considérée.

### 3.6.1 Méthodes itératives

#### Méthode de la puissance itérée pour les matrices symétriques

L'algorithme de la puissance itérée forme la base de toutes les méthodes d'itération sur les vecteurs propres. Il permet la détermination, par un schéma itératif, de la valeur propre dominante  $\lambda_1$  et du vecteur propre associé. C'est pourquoi il est dit que la méthode de la puissance itérée permet la détermination des hautes fréquences.

Nous indexerons les valeurs propres d'une matrice carrée  $n \times n$   $A$  de la plus grande à la plus petite. Nous les noterons  $\lambda_i$  en convenant que :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$$

L'algorithme de la puissance itérée est mis en œuvre pour déterminer le vecteur propre correspondant à la valeur propre dominante d'une matrice carrée symétrique. Il s'énonce ainsi :

- Initialiser par un vecteur  $V_0$  arbitraire,
- pour  $k$  allant de 1 à  $n$  :  $V_k = \frac{AV_{k-1}}{\|(AV_{k-1})\|}$

La série  $V_k$  converge vers le vecteur propre associé à  $\lambda_1$ .

Si on désire maintenant déterminer une valeur propre de  $A$  autre que  $\lambda_1$ , on peut utiliser la technique de déflation qui consiste à transformer la matrice initiale  $A$  de sorte que la nouvelle matrice possède les mêmes valeurs propres et vecteurs propres que  $A$ , à l'exception de  $\lambda_1$ , remplacée par 0.

La convergence de l'algorithme est linéaire et le facteur de convergence est égal au quotient des deux plus grandes valeurs propres. Ceci peut poser problème lorsque ces dernières sont voisines. En outre, si la valeur propre  $\lambda_1$  est multiple, le vecteur  $V_k$  fournit à la fin de l'itération une seule direction propre.

L'intérêt majeur de la méthode de la puissance itérée est de pouvoir se limiter aux premières valeurs propres, les 10 premières par exemple. Son défaut majeur est que ses propriétés de convergence se détériorent en fonction exponentielle de l'écart entre deux ou plusieurs valeurs propres voisines.

**Remarque 11** : *La méthode de déflation est peu usitée. On a généralement recours aux méthodes du sous-espace ou de Lanczos. On se reportera à P. Lascaux et R. Théodor [LT93] pour un approfondissement de ces méthodes.*

### Méthode de la puissance inverse ou de l'itération inverse pour les matrices symétriques et inversibles

Cette méthode découle directement de la précédente, on considérant, non plus  $A$  mais son inverse, s'il existe. L'algorithme de la puissance inversée est mis en œuvre pour déterminer le vecteur propre correspondant à la valeur propre  $\frac{1}{\lambda_n}$  de  $A^{-1}$  associé à la valeur propre  $\lambda_n$  de  $A$ . Il s'énonce ainsi :

- Initialiser par un vecteur  $V_0$  arbitraire,
- pour  $k$  allant de 1 à  $n$  :

$$V_k = \frac{A^{-1}V_{k-1}}{\|A^{-1}V_{k-1}\|}$$

La série  $V_k$  converge vers le vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_n$  de  $A$

Le vecteur initial  $V_0$  doit être non orthogonal à la forme propre non fondamentale  $V_1$  (i.e. la plus basse fréquence propre du système).

Comme le précédent algorithme, la convergence est linéaire et le facteur de convergence est égal au rapport des deux valeurs propres de plus basse amplitude. Ainsi, la convergence se dégrade-t-elle si ces deux dernières sont proches, nécessitant alors la mise en œuvre d'une méthode de translation spectrale.

### Méthode utilisant le quotient de Rayleigh pour les matrices symétriques

Cette méthode consiste à optimiser le quotient de Rayleigh :

$$R(V) = \frac{V^T A V}{V^T V}$$

Le maximum fournit la plus grande valeur propre et un vecteur propre associé. Le minimum fournit la plus petite valeur propre et un vecteur propre associé.

Sa convergence est cubique, donc beaucoup plus rapide que celles exposées précédemment. Toutefois, ce procédé est coûteux, d'un point de vue numérique, car il nécessite un procédé itératif d'optimisation.

**Remarque 12** : *Si la valeur propre dominante (ou fondamentale) n'est pas unique on n'obtient plus les résultats de convergence annoncés, mais on peut encore, dans certains cas, déterminer des relations autorisant le calcul des valeurs propres dominantes (respectivement fondamentales) ainsi que celui des vecteurs propres. Pour plus de développements on se reportera à P. Lascaux et R. Théodor [LT94].*

### Bilan des Méthodes itératives

Les méthodes itératives sont efficaces lorsque le nombre de paires propres (valeurs propres, vecteurs propres) à extraire n'est pas trop élevé. Elles sont également intéressantes dans le cas des problèmes de grande taille, lorsque les matrices sont éparses, ou à faible largeur de bande.

#### 3.6.2 Méthodes de transformation

Introduisons tout d'abord quelques définitions utiles pour la compréhension de la suite.

**Définition 21** : *A est dite :*

- diagonale si  $a_{ij} = 0$  dès que  $i \neq j$ .
- triangulaire supérieure si  $a_{ij} = 0$  dès que  $i > j$ .
- triangulaire inférieure si  $a_{ij} = 0$  dès que  $i < j$ .
- triangulaire si elle est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure.

**Définition 22** : *Soit T est une matrice inversible, deux matrices A et B liées par :*

$$B = T^{-1}AT,$$

*sont dites semblables.*

**Proposition 13** : *Deux matrices semblables ont le même déterminant et le même polynôme caractéristique.*

**Définition 23** : *Une matrice carrée à coefficient réels A est orthogonale si :*

$$AA^T = A^T A = I$$

**Définition 24** : Une matrice rotation est une matrice orthogonale qui a un déterminant égal à 1

Les méthodes de transformation permettent la détermination de toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique  $A$ . Elles sont basées sur une réduction progressive de la matrice initiale en une matrice diagonale (méthode de Jacobi et méthodes QR et QL) ou une matrice tridiagonale (méthodes de Givens et Householder).

**Définition 25** : une matrice de Hessenberg est une matrice telle que  $a_{ij} = 0$  dès que  $i > j + 1$ .

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} X & X & X & X \\ X & X & X & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & X & X \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

où les  $X$  signalent les éléments non nuls.

**Remarque 13** Dans le cas d'une matrice initiale non symétrique, on transforme celle-ci en une matrice de Hessenberg (définition 25), au moyen de transformations successives de type Householder ou Givens définies ci-après. Nous ne détaillerons pas cette méthode pour laquelle on pourra se reporter avec profit à P.Lascaux et R.Théodor [LT94].

### Méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi permet la détermination simultanée de toutes les valeurs propres d'une matrice réelle symétrique par une suite de rotations. Bien que vieille de plus d'un siècle, elle est encore largement utilisée.

Le principe de la méthode consiste en une diagonalisation progressive de la matrice  $A$  par l'application répétée de rotations.

L'algorithme s'énonce ainsi :

- Initialiser  $A_1 = A$
- Pour  $k$  allant de 2 à  $n$  :  $A_k = Q_k^T A_{k-1} Q_k$

L'idée de Jacobi est de choisir des rotations  $Q_k$  d'angle  $\theta$  dans le plan des  $p$ -ième et  $q$ -ième vecteurs de base ( $1 \leq p < q \leq n$ ). La matrice  $A_k$  diffère alors de  $A_{k-1}$  uniquement par les lignes et les colonnes d'indices  $p$  et  $q$ .

A l'ordre  $k$ , on détermine une matrice de rotation élémentaire  $Q_k$  qui annule un élément non diagonal de l'itération précédente  $A_{k-1}$ , par exemple, celui de plus grand module.

Bien que le degré de convergence soit quadratique, cette méthode, relativement simple à programmer, s'avère difficilement applicable aux problèmes de grande taille. On lui préfère souvent l'algorithme QR (décrit ci-après) dont la convergence, d'ordre cubique à partir d'un certain rang, a un coût moindre.

### Méthode de Householder

La procédure de Householder consiste à mettre la matrice carrée  $A$  sous une forme tridiagonale par une suite de transformations semblables. L'idée de Householder est de choisir pour  $H_k$  des réflexions par rapport à un plan.

L'algorithme s'énonce ainsi :

- Initialiser  $A_1 = A$
- Pour  $k$  allant de 2 à  $n$  :  $A_k = H_k^{-1} A_{k-1} H_k$

Après  $n - 2$  transformations, on obtient une matrice tridiagonale.

Les valeurs propres de la matrice tridiagonale résultante peuvent être ensuite calculées, soit par la méthode de la bisection, soit par l'algorithme QR (décrit ci-après).

### Méthode de Givens

Comme dans le cas de la méthode de Jacobi, on utilise des matrices de rotation. Par un nombre fini de rotations, la matrice  $A$  est réduite à une forme tridiagonale symétrique. Pour plus de détail sur cette méthode on pourra se reporter avec profit à P.Lascaux et R.Théodor [LT94].

La technique de la rotation de Givens peut s'appliquer dans une factorisation QR. Elle revêt un intérêt certain quand la matrice  $A$  comporte un grand nombre de zéros sur la diagonale.

### Méthode de Lanczos

Une alternative aux processus de tridiagonalisation de Householder et Givens est donnée par la méthode Lanczos.

Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  réelle symétrique. On cherche une matrice orthogonale  $Q$  et une matrice tridiagonale réelle symétrique  $T$ , de sorte que  $AQ = QT$ . On obtient un algorithme qui calcule  $Q$  et  $T$  en comparant les colonnes de  $AQ$  et  $QT$ . La matrice  $Q$  n'est pas unique : on fixe alors sa première colonne  $q_1$ . Sa seconde colonne  $q_2$  sera déterminée en comparant  $(AQ)_2$  à  $(QT)_2$ , sans omettre l'orthogonalité de  $q_1$  avec  $q_2$ . Par ce biais, on détermine progressivement les matrices  $Q$  et  $T$ .

Contrairement à celles de Householder ou Givens, la méthode de Lanczos est intéressante dans le cas des matrices de grande taille et creuses.

### Algorithmes QL et QR

Ces schémas, qui tirent leur popularité de leur grande stabilité, sont basés sur une décomposition triangulaire  $R$  pour *recht* et  $L$  pour *links* respectivement *droit* (triangulaire supérieure) et *gauche* (triangulaire inférieure) en allemand.

Les schémas itératifs à l'ordre  $k$  sont les suivants :

$$A_{k-1} = Q_k R_k$$

$$A_k = R_k Q_k$$

pour l'algorithme QR, et

$$A_{k-1} = Q_k L_k$$

$$A_k = L_k Q_k$$

pour l'algorithme QL.

Les matrices orthogonales  $Q_k$  peuvent être obtenues par les méthodes de Householder ou Givens. Les matrices  $R$  et  $L$  sont triangulaires supérieure et inférieure. Les propriétés de convergence des schémas QR et QL sont voisines de celles des méthodes d'itératives. Si  $A$  est symétrique, les  $A_k$  successifs convergent vers la matrice modale de façon linéaire. Les valeurs propres sont rangées par ordre décroissant par l'algorithme QR et par ordre croissant pour le QL.

L'application de ces méthodes à des matrices pleines coûte cher. Par contre, si  $A$  est de type Hessenberg (cf définition 25), on peut montrer que toutes les matrices itérées de l'algorithme QR restent de ce type, le coût de calcul s'en trouve réduit de manière notable.

### Bilan des méthodes de transformation

Les méthodes de transformation sont particulièrement efficaces lorsque les matrices sont de petite taille et fortement peuplées ou à grande largeur de bande.

### 3.6.3 Méthodes basées sur le développement du polynôme caractéristique

#### Méthode de Bairstow

Cette méthode itérative est décrite dans J.-P. Nougier [Nou85]. Elle consiste à écrire le polynôme caractéristique sous la forme :

$$P(\lambda) = (\lambda^2 + p\lambda + q)Q_{n-2}(\lambda) + R\lambda + S$$

A chaque couple de scalaires  $(p, q)$  correspond un polynôme  $Q_{n-2}$ . La méthode consiste à déterminer  $p$  et  $q$  (en développant et en identifiant les deux expressions de  $P(\lambda)$ ) de sorte que  $R = 0$  et  $S = 0$ . Il reste alors à déterminer les racines de  $Q_{n-2}(\lambda)$  selon le même procédé.

#### Méthode de Graeffe

Nous ne détaillerons pas la méthode de Graeffe dont la mise en œuvre est limitée au cas de petits systèmes. On se reportera à M. Gérardin et D. Rixen [GR93] pour plus de détails.



### Méthode des séquences de Sturm

**Définition 26** Soit  $A = a_{i,j}$  une matrice carrée  $n \times n$ . On appelle sous matrice de la matrice  $A$  toute matrice de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_p} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_p,j_1} & a_{i_p,j_2} & \cdots & a_{i_p,j_p} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

les entiers  $i_k$  et  $j_k$  vérifiant :

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$$

et

$$1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq n$$

Cette méthode de détermination des valeurs propres s'applique lorsque  $A$  présente une structure tridiagonale, comme celle issue d'un processus de type Householder.

On désigne par  $P_r(\lambda)$  le polynôme caractéristique de la sous-matrice de  $A$  de dimension  $r$ . Si  $P_r(\lambda_0) = 0$  on montre (cf. [GR93]) que les racines de  $P_{r+1}(\lambda_0)$  encadrent celles de  $P_r(\lambda)$ .

### Bilan des méthodes basées sur le développement du polynôme caractéristique

Aussi séduisante de simplicité qu'elle puisse apparaître, la recherche des valeurs propres comme racines du polynôme caractéristique n'en demeure pas moins de mise en oeuvre délicate. En effet, une faible erreur sur les coefficients du dit polynôme est susceptible d'induire une erreur très importante sur les valeurs propres. De ce fait, se pose au préalable la détermination précise des coefficients du polynôme caractéristique c'est pourquoi les méthodes de ce type sont relativement peu usitées. Ces méthodes ne peuvent rivaliser avec les méthodes itératives si le spectre fréquentiel est dense. De plus, elles ne permettent que la détermination des valeurs propres, les vecteurs propres correspondants devant être calculés par une technique d'itération avec décalage.

#### 3.6.4 Quelle méthode pour quelle classe ?

Dans la littérature, on trouve plusieurs sortes de classement des différentes méthodes de résolution des équations du mouvement des systèmes vibratoires. Un classement apparaît cependant récurrent et nous semble particulièrement intéressant : il s'agit du classement des problèmes suivant leur nombre de degré de liberté [Gmü97],[Gér78],...

#### Problèmes de classe 1 : $0 < n \leq 10$

Nous nommerons problèmes de classe 1 les problèmes dont le nombre de degrés de liberté, est inférieur à 10. Pratiquement toutes les méthodes de calcul aux valeurs propres sont applicables à ce type de problème, en particulier, les méthodes de développement du polynôme caractéristique par calcul direct des coefficients, dont les plus connues sont celles de Krylov et de Souriau.

**Problèmes de classe 2 :  $10 < n \leq 250$** 

Les problèmes de classe 2 correspondent aux problèmes dont le nombre de degrés de liberté se situe entre 10 et 250. Leurs équations aux valeurs propres sont résolubles sur la plupart des ordinateurs modernes en mémoire centrale. Aux problèmes de cette catégorie sont applicables toutes les méthodes dont la précision numérique ne se détériore pas de façon trop sensible en fonction de l'ordre du système. Parmi les mieux conditionnées à cet égard, on notera la méthode de la puissance et ses formes dérivées, la méthode de réduction à la forme diagonale de Jacobi, les méthodes basées sur une réduction à la forme tridiagonale comme la méthode de Givens ou encore celle d'Householder.

**Problèmes de classe 3 :  $250 < n \leq 2500$** 

Les problèmes de classe 3 correspondent aux problèmes ayant entre 250 et 2500 degrés de liberté. Ils restent eux aussi solubles en mémoire centrale d'ordinateur à condition de pouvoir tirer parti du caractère bande des matrices considérées résultant de l'utilisation de la méthode des éléments finis. On peut aussi réduire le système en utilisant par exemple des méthodes de condensation pour se ramener à un système de classe 1 ou 2.

**Problèmes de classe 4 :  $2500 < n \leq 25000$** 

Les problèmes de classe 4 correspondent aux problèmes ayant entre 2500 et 25000 degrés de liberté. Dans ce cas, il faut transformer le problème aux valeurs propres en une séquence de problèmes statiques ( $KX = g$ ) C'est le principe des méthodes dérivées de la méthode de la puissance itérée comme la méthode des sous-espaces ou encore la méthode de Lanczos.

**Problèmes de classe 5 :  $n > 25000$** 

Pour les problèmes de classe 5, c'est-à-dire correspondant aux problèmes ayant un nombre de degrés de liberté supérieur à 25000, il faut utiliser ce que l'on appelle des 'super-ordinateurs' en appliquant les méthodes proposées pour la résolution des problèmes de classe 4 mais en optimisant leur mise en œuvre vis à vis de nombreux paramètres comme l'exploitation de l'architecture parallèle, une gestion optimale des entrées-sorties, ...

**3.6.5 Conclusion**

Les méthodes numériques classiques de recherche des valeurs propres et des vecteurs propres nécessitent très souvent des propriétés sur les matrices considérées.

**3.7 Conclusion**

Les équations différentielles linéaires du second ordre de la dynamique peuvent être ramenées à des équations différentielles linéaires du premier ordre. Nous avons proposé dans ce chapitre des méthodes permettant de résoudre ces systèmes sans calcul de vecteurs

propres ou de valeurs propres suivant le type de systèmes du premier ordre obtenu. La première méthode que nous proposons permet de résoudre un système du type :  $\frac{dX}{dt} = AX$  ; dans ce cas la matrice  $A$  obtenue par transformation du système du second ordre n'est pas symétrique. Cette méthode est une adaptation directe de la méthode Souriau à la résolution des équations différentielles linéaires. La deuxième méthode que nous proposons permet de résoudre un système du type :  $A\frac{dX}{dt} + BX = 0$  comme on en obtient par exemple en utilisant la transformation de Duncan pour passer du second ordre au premier ordre. Si le déterminant de la matrice  $A$  n'est pas trop petit nous proposons un algorithme ascendant. Si c'est le déterminant de la matrice  $B$  qui n'est pas trop petit on pourra utiliser l'algorithme descendant.



## Chapitre 4

# Vibrations linéaires libres - Méthodes classiques de résolution

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Systèmes conservatifs</b> . . . . .	<b>60</b>
4.1.1	Systèmes conservatifs à un degré de liberté . . . . .	61
4.1.2	Systèmes conservatifs à plusieurs degrés de liberté . . . . .	61
4.1.3	Analyse modale des systèmes conservatifs . . . . .	64
<b>4.2</b>	<b>Systèmes non-conservatifs</b> . . . . .	<b>65</b>
4.2.1	Position du problème . . . . .	65
4.2.2	Systèmes différentiels adjoints . . . . .	66
4.2.3	Transformation du système du second ordre en un système du premier ordre . . . . .	68
<b>4.3</b>	<b>Systèmes linéaires classiquement amortis et non classiquement amortis</b> . . . . .	<b>69</b>
4.3.1	Hypothèse de Rayleigh . . . . .	70
4.3.2	Hypothèse de Caughey et O'Kelly . . . . .	71
<b>4.4</b>	<b>Analyse modale des systèmes classiquement amortis</b> . . . . .	<b>71</b>
4.4.1	Introduction . . . . .	71
4.4.2	Définitions . . . . .	72
4.4.3	Méthode des déplacements modaux . . . . .	72
4.4.4	Conclusion . . . . .	73
<b>4.5</b>	<b>Méthodes de condensation</b> . . . . .	<b>74</b>
4.5.1	Méthode de Guyan . . . . .	74
<b>4.6</b>	<b>Analyse modale des systèmes non-classiquement amortis</b> . . . . .	<b>75</b>
4.6.1	Hypothèse d'amortissement modal diagonal . . . . .	75
4.6.2	Méthode de découplage approchée . . . . .	77
<b>4.7</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>77</b>

---

Dans ce chapitre nous aborderons les méthodes classiques de résolution des systèmes conservatifs ainsi que non conservatifs, ceux-ci étant classiquement amortis ou non classiquement amortis.

Les vibrations d'un système mécanique sont dites libres lorsqu'elles résultent d'une perturbation de sa position initiale par rapport à sa position d'équilibre et qu'aucun apport d'énergie ne lui est fourni au cours de son évolution. Nous allons nous intéresser aux systèmes linéaires, c'est-à-dire aux systèmes qui ont été linéarisés autour de la position d'équilibre.

On peut distinguer deux sortes de systèmes libres : les systèmes conservatifs et les systèmes non-conservatifs. Les systèmes conservatifs sont ceux pour lesquels l'énergie mécanique totale du système,  $E_m$ , est conservée au cours du mouvement. Les efforts appliqués dérivent d'une énergie potentielle  $E_p$ . La variation de l'énergie cinétique  $E_c$  est alors exactement compensée par la variation de l'énergie potentielle, i.e.  $E_m = E_c + E_p$ . Les systèmes réels ne sont jamais conservatifs. Jamais parfaitement isolés, ils interagissent avec d'autres systèmes mécaniquement ou thermodynamiquement. Finalement l'énergie mécanique est dissipée de façon irréversible sous forme de chaleur. De tels systèmes sont dits non-conservatifs ou dissipatifs. L'hypothèse de conservation n'est qu'une idéalisation qui, même si elle est utile, est forcément insuffisante du point de vue des bilans d'énergie. Cette déficience peut avoir des conséquences très importantes sur le comportement dynamique des systèmes [Axi01c].

Une étape primordiale dans la conception et l'optimisation des structures complexes (assemblage de poutres, plaques, avions, bateau, ...) est l'établissement d'un modèle numérique de base. Cette phase de modélisation, essentielle pour une compréhension future du comportement du système sous différentes sollicitations, suppose le recours à un outil d'analyse numérique performant et maîtrisable, s'appuyant généralement sur une décomposition de la structure en éléments finis. Ce procédé constitue à l'heure actuelle la technique la plus répandue de discrétisation spatiale permettant d'obtenir une modélisation réaliste de la structure à analyser et permettant de visualiser, après traitement des équations obtenues, les déformations dues aux contraintes imposées subies par les structures. Une fois ce travail fait, le plus souvent par des logiciels (comme par exemple Catia, Abaqus, Nastran, ...), on se retrouve dans le cas d'un système différentiel linéaire du second ordre à coefficients constants comme ceux issus de l'application de la méthode de Lagrange ou des théorèmes généraux de la mécanique aux systèmes discrets. La seule différence est que l'ordre des matrices est devenu grand, voire très grand.

## 4.1 Systèmes conservatifs

Les systèmes conservatifs ont une propriété essentielle : la symétrie par rapport au temps : si  $X(t)$  est solution alors  $X(-t)$  l'est aussi. Ceci résulte du fait qu'il n'y a pas de dissipation de l'énergie et donc pas d'augmentation d'entropie : le système passe successivement d'un état à un autre par des processus réversibles.

### 4.1.1 Systèmes conservatifs à un degré de liberté

Un système conservatif linéaire est dit aussi oscillateur harmonique. Lorsqu'il n'a qu'un seul degré de liberté il est régi par une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$M\ddot{X} + KX = 0 \quad (4.1)$$

les conditions initiales sont données :

$$X(0) = X_0 \text{ et } \dot{X}(0) = \dot{X}_0 \quad (4.2)$$

Les matrices  $M$  et  $K$  sont d'ordre 1. Ce sont respectivement la masse et la raideur du ressort, elles sont strictement positives. La matrice  $X$  est une matrice d'ordre 1, sa composante est le *paramètre de configuration* ou le *déplacement* du système.

Sa dérivée première  $\dot{X}$  est dite *matrice des vitesses* .

Sa dérivée seconde  $\ddot{X}$  est dite *matrice des accélérations* .

La résolution de cette équation est simple : on cherche des solutions élémentaires de la forme exponentielle :

$$X(t) = e^{\lambda t}$$

l'équation (4.1) n'est satisfaite que si le coefficient  $\lambda$  est racine de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 M + K = 0$$

c'est-à-dire si  $\lambda$  vaut  $i\sqrt{\frac{K}{M}}$  ou  $-i\sqrt{\frac{K}{M}}$ .

La pulsation propre  $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$  de l'oscillateur s'exprime en radians par seconde (unité du Système International).

On obtient la solution générale de l'équation (4.1) par une combinaison linéaire de deux solutions élémentaires :

$$X(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)$$

Les constantes  $A$  et  $B$  (ou  $C$  et  $D$ ) sont déterminées par les conditions initiales (4.2).

### 4.1.2 Systèmes conservatifs à plusieurs degrés de liberté

Linéarisé autour d'une position d'équilibre, le mouvement d'un système mécanique discret à  $n$  degrés de liberté (c'est-à-dire dont le nombre minimum de variables permettant de définir sa configuration est égal à  $n$ ) est régi par un système de  $n$  équations différentielles du second ordre qui s'exprime sous la forme matricielle :

$$M\ddot{X} + KX = 0 \quad (4.3)$$

les conditions initiales sont données :

$$X(0) = X_0 \text{ et } \dot{X}(0) = \dot{X}_0 \quad (4.4)$$

$X$  est un vecteur colonne d'ordre  $n$  dont les composantes sont les *paramètres de configuration généralisés* ou *déplacements* du système.

Sa dérivée première  $\dot{X}$  est dite *matrice des vitesses généralisées*.

Sa dérivée seconde  $\ddot{X}$  est dite *matrice des accélérations généralisées*.

Les matrices  $M$  et  $K$  sont respectivement les matrices des masses et des raideurs. Ce sont des matrices carrées d'ordre  $n$ , symétriques, définie positive pour la première, positive pour la seconde.

L'énergie cinétique du système linéaire est la forme quadratique :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{X}^T M \dot{X}$$

elle est positive et ne s'annule que si la vitesse généralisée  $\dot{X}$  est nulle.

L'énergie potentielle du système linéaire est la forme quadratique :

$$E_p = \frac{1}{2} X^T K X$$

elle est positive et il arrive qu'elle s'annule pour des déplacements généralisés  $X$  non nuls.

Généralement, les équations couplent entre elles les composantes des déplacements généralisés. En effet, lorsqu'un système vibratoire possède plus d'un degré de liberté, il est possible qu'une vibration influence les autres. Lorsque le couplage est fort les principales fréquences de vibrations sont très écartées. Un couplage très lâche a pour résultat de très basses et très proches fréquences. Si  $M$  et  $K$  sont diagonales, le système (4.3) est facilement résolu puisqu'il se scinde alors en  $n$  équations d'oscillateur harmonique à un degré de liberté, indépendantes les unes des autres (paragraphe §4.1.1).

Dans le cas conservatif, on peut toujours se ramener au cas où  $M$  et  $K$  sont diagonales par un changement judicieux de paramètres.

Pour découvrir les nouveaux paramètres on cherche des solutions non triviales du système (4.3) de la forme  $V e^{\lambda t}$ . Ce système n'est satisfait que si le coefficient  $\lambda$  et le vecteur  $V$  sont solutions du système algébrique linéaire homogène :

$$(\lambda^2 M + K)V = 0 \tag{4.5}$$

qui n'admet de solutions  $V$  non triviales que si les valeurs de  $\lambda$  sont solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(\lambda^2 M + K) = 0 \tag{4.6}$$

Il s'agit d'une équation polynomiale de degré  $n$ , de la variable  $\lambda^2$ , elle a  $2n$  solutions en  $\lambda$ , certaines pouvant être multiples. Dans la suite de ce mémoire nous considérerons les racines de ce polynôme comme des racines simples sauf mention explicite.

**Proposition 14** *Si les matrices  $M$  et  $K$  sont strictement positives, alors  $\lambda^2$  sera réel et strictement négatif*

Preuve

Posons  $r = \lambda^2$ , on a donc :

$$(rM + K)V = 0 \text{ avec } r \text{ et } V \text{ pouvant être complexes}$$



on multiplie à gauche par  $\bar{V}^T$ ,  $\bar{V}$  étant le conjugué de  $V$  :

$$r\bar{V}^T M V + \bar{V}^T K V = 0$$

$r$  est donc réel puisque

$$\overline{\bar{V}^T M V} = \bar{V}^T M V \text{ et } \overline{\bar{V}^T K V} = \bar{V}^T K V$$

car  $M$  et  $K$  sont symétriques.

Si  $V$  est réel alors  $r$  est bien négatif car  $\bar{V}^T M V$  et  $\bar{V}^T K V$  sont positifs. Supposons maintenant que  $V$  soit complexe, il peut alors s'écrire :

$$V = W + iZ \text{ et par conséquent } \bar{V} = W - iZ$$

on obtient alors :

$$\bar{V}^T M V = (W^T - iZ^T)M(W + iZ) = W^T M W - i(Z^T M W - W^T M Z) - i^2 Z^T M Z$$

or  $Z^T M W = W^T M Z$  puisque  $M$  est symétrique et  $W^T M W - i^2 Z^T M Z$  est positif donc  $\bar{V}^T M V$  est positif et on démontrerait de même que  $\bar{V}^T K V$  est positif aussi. Tout ceci implique que  $r$  est négatif.

Les racines  $\lambda_j$  de 4.6 sont donc imaginaires pures. Elles vont par paires conjuguées. On peut poser :

$$\lambda_j = i\omega_j \text{ et } \bar{\lambda}_j = -i\omega_j$$

avec  $\omega_j$  réel positif. Les solutions  $V_j$  de  $(-\omega_j^2 M + K)V_j = 0$  sont réelles. Nous appellerons  $\omega_j$  les *pulsations propres* et  $V_j$  les *formes modales*.

**Remarque 14** : Si toutes les valeurs propres  $\lambda_j$  sont simples, la solution de (4.3) est de la forme :

$$X(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j V_j e^{i\omega_j t} + \bar{\alpha}_j \bar{V}_j e^{-i\omega_j t}$$

où les  $\alpha_j$  sont des scalaires complexes. On peut donc poser  $\lambda_j^2 = i^2 \omega_j^2$ , avec  $\omega_j$  réel positif, on a alors  $\lambda_j = \pm i\omega_j$ .

**Proposition 15** Si  $V_i$  et  $V_j$  sont deux formes modales correspondant à des pulsations propres distinctes alors elles sont orthogonales entre elles relativement aux matrices des masses et des raideurs. Si  $i$  et  $j$  sont distincts :

$$V_j^T M V_i = 0 \tag{4.7}$$

$$V_j^T K V_i = 0. \tag{4.8}$$

Preuve

Pour chaque forme propre du système (4.3) on peut écrire le problème aux valeurs propres sous la forme :

$$(\omega_i^2 M - K)V_i = 0$$

$$(\omega_j^2 M - K)V_j = 0$$

Si on multiplie à gauche ces deux relations respectivement par  $V_j^T$  et  $V_i^T$  on obtient :

$$V_j^T (\omega_i^2 M - K)V_i = 0 \quad (4.9)$$

$$V_i^T (\omega_j^2 M - K)V_j = 0 \quad (4.10)$$

compte tenu du fait que  $K$  et  $M$  sont symétriques, l'égalité (4.10) équivaut à :

$$V_j^T (\omega_j^2 M - K)V_i = 0$$

en retranchant cette relation à la relation (4.9) :

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2)V_j^T M V_i = 0$$

ce qui démontre quand  $\omega_i$  et  $\omega_j$  sont distincts que :

$$V_j^T M V_i = 0 \text{ pour } i \neq j$$

et donc aussi que

$$V_j^T K V_i = 0 \text{ pour } i \neq j.$$

c'est-à-dire que deux formes propres distinctes sont orthogonales.

### 4.1.3 Analyse modale des systèmes conservatifs

Le principe de la méthode d'analyse modale consiste à rechercher un nouvel ensemble de coordonnées généralisées de manière que le mouvement soit décrit par  $n$  équations différentielles découplées. Ces nouvelles coordonnées  $q_i$ , fonctions du temps seulement, seront des combinaisons linéaires des anciennes coordonnées  $X_i$ , que l'on appellera *coordonnées naturelles*. Pour ce faire, il est astucieux de prendre les formes propres  $V_j$  comme nouveaux vecteurs de base. Cette base est dite *base modale*. Les nouvelles coordonnées seront appelées *coordonnées modales*. La matrice de changement de base  $U$  a ces vecteurs pour colonnes, elle est dite *matrice modale*. C'est une matrice  $n \times n$  assemblée comme suit :

$$U = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n]$$

Elle permet le passage des coordonnées naturelles  $X_i$  aux coordonnées modales  $q_i$ .

$$X = Uq$$

Exprimée dans la base modale, l'équation du mouvement (4.3) prend la forme :

$$MU\ddot{q} + KUq = 0$$

Si on la multiplie à gauche par la transposée de la matrice modale  $U^T$  afin de rétablir la symétrie des nouvelles matrices de masse et de raideur, elle devient :

$$U^T M U \ddot{q} + U^T K U q = 0 \quad (4.11)$$

Compte tenu de la propriété d'orthogonalité des formes propres  $V_j$ , la nouvelle matrice de masse  $M' = U^T M U$  et la nouvelle matrice des raideurs  $K' = U^T K U$  sont des matrices diagonales. Les coefficients des nouvelles matrices de masse et de raideur sont :

$$M'_{ij} = V_j^T M V_i$$

$$K'_{ij} = V_j^T K V_i$$

ils sont nuls si  $i$  et  $j$  sont distincts d'après les équations (4.7) et (4.8).

De plus, d'après la formule (4.10) :

$$\omega_j^2 M'_{jj} = K'_{jj}$$

Compte tenu des propriétés des coefficients des matrices  $M'$  et  $K'$  les équations sont de la forme :

$$\ddot{q}_j + \omega_j^2 q_j = 0$$

Chaque équation ne dépend que de la variable  $q_j$  et de sa dérivée seconde  $\ddot{q}_j$ . Une fois les coordonnées  $q_j$  déterminées, nous sommes ainsi amenés à considérer  $n$  systèmes analogues à l'oscillateur harmonique présenté au paragraphe §4.1.1 ; on dit que le système est entièrement découplé. Les coordonnées naturelles du système sont alors obtenues par la relation linéaire :

$$X = Uq$$

## 4.2 Systèmes non-conservatifs

### 4.2.1 Position du problème

Dans le raisonnement du paragraphe précédent on suppose que l'amplitude des vibrations reste constante de sorte que nous ne tenons pas compte d'un facteur qui ne doit pas toujours être négligé : l'amortissement. On appelle amortissement, la force qui s'oppose au mouvement des masses du système pendant la vibration et qui réduit ainsi le déplacement de façon permanente. En effet, la conséquence la plus fondamentale de la prise en compte de l'amortissement par rapport au temps dans les équations d'un système mécanique est la perte de la symétrie ainsi que la perte de la propriété de conservation de l'énergie. Dans tout mouvement libre réel, le temps s'écoule de façon irréversible, à partir de l'instant initial où l'énergie a été communiquée au système. Dans toutes les vibrations naturelles, il se produit un amortissement sous une forme ou une autre. Cela peut avoir pour cause un frottement entre les particules de l'atmosphère ou des liquides ou un frottement entre un solide et un autre. Un frottement à l'intérieur de la matière des pièces élastiques contribuera lui aussi bien souvent à la production d'amortissement (voir le chapitre IV du livre de G.W. Van Santen [VS57])

Un *oscillateur linéaire amorti* est un système mécanique à  $n$  degrés de liberté, dont le comportement est régi par un système différentiel du type :

$$M \ddot{X} + C \dot{X} + K X = 0 \quad (4.12)$$

Les conditions initiales sont données :

$$X(0) = X_0 \text{ et } \dot{X}(0) = \dot{X}_0 \quad (4.13)$$

$M, C$  et  $K$  sont respectivement les matrices des masses, des amortissements et des raideurs. Ces matrices sont carrées et à coefficients réels et il arrive qu'elles ne soient pas symétriques, par exemple à cause d'effets gyroscopiques..

Les composantes de  $X$  sont, comme précédemment, les *paramètres de configuration*, ou *déplacements* du système. Ils sont calculés à partir de la position d'équilibre choisie comme zéro..

Les dérivées  $\dot{X}$  et  $\ddot{X}$  sont dites *matrices colonnes des vitesses et des accélérations généralisées*.

Dans l'hypothèse de petits déplacements, les amortissements sont modélisés par des forces de rappel  $C\dot{X}$  dépendant linéairement des vitesses  $\dot{X}$ . La matrice carrée  $C$  est dite matrice des amortissements. Ses coefficients sont constants (indépendants du temps), comme ceux des matrices des masses et des raideurs.

La méthode de résolution de (4.12) consiste toujours à chercher des solutions non-triviales de la forme :

$$X(t) = e^{\lambda t} V$$

Le vecteur constant  $V$  et le coefficient scalaire  $\lambda$ , qui peuvent être réels, imaginaires ou complexes, sont solutions du système algébrique linéaire et homogène :

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)V = 0 \quad (4.14)$$

L'équation (4.14) admettra une solution non triviale si  $\lambda$  est racine de l'équation caractéristique :

$$\det(\lambda^2 M + \lambda C + K) = 0 \quad (4.15)$$

Le premier membre de cette équation est un polynôme de degré  $2n$  en  $\lambda$  qui possède  $2n$  racines  $\lambda_i$ , éventuellement complexes auxquelles on peut associer  $2n$  vecteurs  $V_i$  vérifiant l'équation :

$$(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K)V_i = 0 \quad (4.16)$$

Déterminés à un coefficient multiplicatif près, ces  $V_i$  sont les *vecteurs propres* et les  $\lambda_i$  sont les *valeurs propres* du système.

### 4.2.2 Systèmes différentiels adjoints

Il est intéressant de chercher aussi les matrices lignes  $L$  satisfaisant l'équation :

$$L(\lambda^2 M + \lambda C + K) = 0 \quad (4.17)$$

Il revient au même de chercher les vecteurs propres  $L^T$  qui satisfont :

$$(\lambda^2 M^T + \lambda C^T + K^T)L^T = 0 \quad (4.18)$$

ou de s'intéresser au système :

$$M^T \ddot{X} + C^T \dot{X} + K^T X = 0$$

qui est dit *système différentiel adjoint* du système  $M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0$ . L'équation 4.17 n'est satisfaite que si

$$\det(\lambda^2 M^T + \lambda C^T + K^T) = 0 \quad (4.19)$$

ce qui n'est rien d'autre que (4.15), puisque le déterminant d'une matrice est le même que celui de sa transposée. Les racines  $\lambda_i$  de (4.19) sont donc les mêmes que celle de (4.15).

Aux  $2n$  valeurs propres  $\lambda_i$  on associe  $2n$  lignes  $L_i$  d'ordre  $n$  vérifiant l'équation (4.17). Elles sont déterminées à un coefficient multiplicatif près. On dit que les  $L_i$  sont les *lignes propres* du système [WB76].

**Proposition 16** *Si les matrices  $M, C$  et  $K$  sont symétriques, les lignes propres sont simplement les transposées des vecteurs propres.*

Preuve : (4.19) n'est rien d'autre que (4.15)

D'après (4.14) et (4.17) le vecteur  $V_i$ , la ligne  $L_i$  et le scalaire  $\lambda_i$  vérifient les équations suivantes :

$$(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K)V_i = 0 \quad (4.20)$$

$$L_i(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K) = 0 \quad (4.21)$$

**Proposition 17** *Supposons que les valeurs propres  $\lambda_i$  sont simples. Si on note  $\Delta$  la matrice diagonale, dont la diagonale est composée des  $2n$  valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}$  du système,  $\Sigma$  la matrice d'ordre  $n \times 2n$ , dont les colonnes sont les vecteurs propres  $V_1, V_2, \dots, V_{2n}$  du système et  $\Pi$  la matrice d'ordre  $2n \times n$ , dont les lignes sont les lignes propres  $L_1, L_2, \dots, L_{2n}$  du système, alors les équations vectorielles (4.20) et (4.21) prennent les formes matricielles (4.22) et (4.23) [FB76] :*

$$M\Sigma\Delta^2 + C\Sigma\Delta + K\Sigma = 0 \quad (4.22)$$

$$\Delta^2\Pi M + \Delta\Pi C + \Pi K = 0 \quad (4.23)$$

Preuve :

Prouver (4.22) revient à vérifier que pour tout élément  $e_i$  de la base canonique :

$$M\Sigma\Delta^2 e_i + C\Sigma\Delta e_i + K\Sigma e_i = 0$$

c'est-à-dire que :

$$\lambda_i^2 M(\Sigma e_i) + \lambda_i C(\Sigma e_i) + K(\Sigma e_i) = 0$$

ce qui est évident puisque  $\Sigma e_i$  n'est autre que  $V_i$

Si on transpose (4.23) on obtient

$$M^T \Pi^T \Delta^2 + C^T \Pi^T \Delta + K^T \Pi^T = 0$$

Cette propriété n'est autre que la propriété (4.22) appliquée au système adjoint.

### 4.2.3 Transformation du système du second ordre en un système du premier ordre

#### Première méthode

Cette méthode permet de remplacer le système différentiel linéaire du second ordre à coefficients constants (4.12) :

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0$$

par un système du premier ordre du type :

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

à condition de doubler la taille des matrices et des vecteurs.

En effet, le système (4.12) pouvant se mettre sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X \\ \dot{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \dot{X} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (4.24)$$

la solution s'obtient en appliquant les méthodes présentées au chapitre 2. Cela revient à calculer l'exponentielle de la matrice  $tH$  où :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

La recherche des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice carrée  $H$  d'ordre  $2n$  conduit à découpler le système 4.24.

**Remarque 15** *Les valeurs propres de  $H$  sont les  $\lambda_i$  du paragraphe précédent.*

Preuve :

*Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres du système du premier ordre (4.25) revient à résoudre le système :*

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

*qui se sépare en :*

$$\begin{cases} Y = \lambda X \\ -M^{-1}KX - M^{-1}CY = \lambda Y \end{cases} \quad (4.27)$$

*substituons  $\lambda X$  par  $Y$  dans la seconde équation et multiplions la par  $M$ , nous aboutissons à :*

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)X = 0$$

Ce système peut alors être résolu, par exemple grâce à la méthode de résolution que nous avons mis au point pour résoudre ce type de système (voir paragraphe §3.2.2). Toutefois, le calcul de la matrice  $H$  nécessite l'inversion de la matrice  $M$ . Cette opération

peut se révéler coûteuse. Elle est peu précise lorsque le nombre de degrés de liberté  $n$  est grand [Axi01c]. De plus, elle entraîne des pertes de propriétés : les matrices  $M, C$  et  $K$  sont souvent symétriques, positives, quelquefois creuses, . . . , il n'en va pas de même pour la matrice  $H$ . Lorsque les valeurs propres de  $H$  sont simples, les solutions du système différentiel (4.24) sont des combinaisons linéaires de solutions élémentaires du type  $e^{\lambda_i t} V_i$  où  $\lambda_i$  est une valeur propre de  $H$  et  $V_i$  le vecteur propre associé. Si les valeurs propres sont multiples, il est nécessaire de considérer des solutions élémentaires plus sophistiquées.

### Deuxième méthode : transformation de Duncan

Cette transformation consistant à ramener le système de  $n$  équations différentielles du second ordre en un système de  $2n$  équations différentielles du premier ordre a été développée par P.E. Duncan et R. Eatock-Taylor [DET79] et [FWA57].

Le système (4.12)  $M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0$  peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ M & C \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & -K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ X \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Les nouvelles matrices d'ordre  $2n$  ainsi obtenues sont symétriques et constituées de blocs qui sont eux même carrés et symétriques. On peut noter qu'en développant le système (4.28), on obtient deux systèmes de  $n$  équations :

$$\begin{cases} M \frac{d}{dt} X = M \dot{X} \\ M \frac{d}{dt} \dot{X} + C \frac{d}{dt} X = -K X \end{cases} \quad (4.29)$$

Le premier système d'ordre  $n$  est trivial alors que le second représente les équations du mouvement. On se retrouve alors avec un système du type :

$$A \frac{dX}{dt} + BX = 0$$

que l'on peut résoudre, par exemple, grâce à la méthode que nous avons développée au paragraphe §3.3.

## 4.3 Systèmes linéaires classiquement amortis et non classiquement amortis

Dans la littérature concernant la mécanique des vibrations mécaniques linéaires, on distingue deux sortes de systèmes, appelés en anglais *Classically Damped Linear Systems* et *Non-Classically Damped Linear Systems*. Nous les nommerons, par traduction directe, systèmes linéaires classiquement amortis et non-classiquement amortis.

**Définition 27** : Soit  $M$  une matrice symétrique définie positive, un vecteur  $V$  et un vecteur  $W$  sont orthogonaux au sens de  $M$  si  $W^T M V = 0$

**Définition 28** : Un système différentiel linéaire  $M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0$  est dit avoir des modes classiques normaux s'il possède un ensemble de vecteurs propres réels mutuellement orthogonaux au sens de  $M$ . Autrement dit, on peut trouver  $2n$  solutions réelles  $V_i$  de  $(\lambda^2 M + \lambda C + K)V = 0$  qui soient orthogonales entre elles au sens de  $M$  (c'est-à-dire  $\langle MV_i, V_j \rangle = 0$  si  $i$  est différent de  $j$ ). Les modes classiques normaux sont les  $V_i$ .

**Proposition 18** : Un système non amorti possède toujours des modes classiques normaux à cause de la symétrie des matrices  $M$  et  $K$ .

Preuve : Dans le cas de valeurs propres simples

Soient  $V_i$  et  $V_j$ , deux vecteurs propres associés à 2 valeurs propres distinctes  $\lambda_i$  et  $\lambda_j$ . Puisque  $K$  est symétrique :

$$V_j^T K V_i = V_i^T K V_j$$

En utilisant (4.16), cette égalité devient :

$$-\lambda_i^2 V_j^T M V_i = -\lambda_j^2 V_i^T M V_j$$

ou encore puisque  $M$  est symétrique :

$$(\lambda_j^2 - \lambda_i^2) V_j^T M V_i = 0$$

Lorsque les valeurs propres sont toutes simples, on en déduit :

$$V_j M V_i = 0$$

pour  $i$  différent de  $j$ . Preuve : Dans le cas de valeurs propres multiples voir [GR93]

**Définition 29** Si un système amorti présente des modes classiques normaux, il est dit classiquement amorti. Sinon il est dit système non-classiquement amorti [HM93].

### 4.3.1 Condition suffisante d'amortissement classique : Hypothèse de Rayleigh

L'hypothèse de Lord Rayleigh [GR93],[Cau60], retrouvée ensuite par Basile s'énonce ainsi : Si la matrice des amortissements est une combinaison linéaire de la matrice des raideurs et de la matrice d'inertie (i.e. il existe  $\alpha$  et  $\beta$  réels, tels que  $C = \alpha M + \beta K$ ), alors le système amorti admet des modes classiques normaux. Ceci revient à dire que la matrice des amortissements est diagonale dans la base des modes propres de  $M$  et  $K$ . La preuve sera donnée dans un cas plus général dans le paragraphe suivant. Cette hypothèse est cohérente avec celle de faible dissipation [GR93]. Rayleigh [Ray45] n'utilise pas les notations d'algèbre matricielle, mais ses résultats peuvent être interprétés de la sorte. Dans ce cas  $C$  est appelé frottement proportionnel ou encore frottement ou amortissement de Rayleigh. Elle est symétrique car formée par deux matrices symétriques.



### 4.3.2 Conditions nécessaire et suffisante d'amortissement classique : Condition de Caughey

Dans le cas d'un système amorti, Caughey et O'Kelly ([Cau60] et [COK65]), en 1965, ont établi une condition nécessaire et suffisante d'existence de modes classiques normaux. Elle est appelée condition de Caughey. Il s'agit d'une hypothèse moins forte que celle de Lord Rayleigh, on l'appelle quelquefois *généralisation du critère de Rayleigh*. Elle s'énonce ainsi : *Le système :*

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0$$

*est classiquement amorti si et seulement si  $M^{-1}C$  et  $M^{-1}K$  commutent*

$$M^{-1}CM^{-1}K = M^{-1}KM^{-1}C$$

*c'est-à-dire*

$$CM^{-1}K = KM^{-1}C$$

Preuve [Cau60] et [Bel91] pages 56-59

**Remarque 16** *Si l'hypothèse de Basile est satisfaite :*

$$CM^{-1}K = \alpha K + \beta KM^{-1}K$$

*et*

$$KM^{-1}C = \alpha K + \beta KM^{-1}K$$

*sont égaux.*

**Définition 30** *On appelle système conservatif associé au système non-conservatif*

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0,$$

*le système :*

$$M\ddot{X} + KX = 0$$

Si la condition de Caughey est satisfaite, le système différentiel relatif au système dissipatif peut être découpé en  $n$  équations élémentaires par un changement de base dont la matrice correspondante est, tout simplement, la matrice modale du système sans amortissement. Lorsque cette diagonalisation simultanée des matrices  $M$ ,  $C$  et  $K$  est possible, les  $2n$  vecteurs modaux  $V_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2n$ , solutions du problème aux vecteurs propres généralisés  $(\lambda^2 M + \lambda C + K)V = 0$ , sont identiques aux formes propres du système conservatif associé. Les composantes des vecteurs modaux  $V_j$  s'appellent aussi les *modes propres amortis*.

## 4.4 Analyse modale des systèmes classiquement amortis

### 4.4.1 Introduction

L'analyse modale est l'étude des pulsations et des formes propres d'un système vibratoire. Une méthode permettant de caractériser les mouvements d'une structure issue

de cette analyse est très souvent utilisée lorsque la condition de Caughey (cf. §4.3.2) est vérifiée. On l'appelle la *méthode des déplacements modaux*. Elle s'appuie sur les hypothèses de linéarité des déformations et consiste à substituer à la *base naturelle* dans laquelle les matrices de masse, d'amortissement et de raideur sont exprimées, celle des formes propres dite *base modale*. L'équation différentielle du mouvement devient alors découplée.

La matrice de passage de la base naturelle à la base modale est nommée matrice modale. Ses colonnes sont les vecteurs propres du système conservatif associé ( $M\ddot{X} + KX = 0$ ) Cette matrice est régulière et notée  $U$ . Elle permet de découpler non seulement le système non amorti associé, mais aussi le système amorti.

#### 4.4.2 Définitions

Avant d'aller plus loin, définissons quelques termes que nous utiliserons par la suite.

**Définition 31** Deux matrices carrées  $A$  et  $B$  sont équivalentes s'il existe 2 matrices inversibles  $U$  et  $V$  telles que

$$B = UAV$$

**Propriété 2** Deux matrices équivalentes  $A$  et  $B$  sont de même rang.

**Définition 32** Deux matrices carrées  $A$  et  $B$  sont semblables s'il existe une matrice inversible  $P$  telle que :

$$B = P^{-1}AP$$

**Définition 33** Deux matrices carrées  $A$  et  $B$  sont congruentes s'il existe une matrice inversible  $U$  telle que :

$$B = UAU^T$$

**Propriété 3** Une congruence est aussi une similitude si  $U$  est une matrice orthogonale :

$$V = U^T = U^{-1}$$

#### 4.4.3 Méthode des déplacements modaux

Cherchons à caractériser la réponse du mouvement régi par le système suivant :

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0 \quad (4.30)$$

En adoptant la même démarche qu'au paragraphe (4.1.3), nous allons déterminer de nouvelles coordonnées  $q_i$  que nous appellerons *coordonnées modales* ; elles sont liées aux anciennes coordonnées  $X_i$  que nous appellerons *coordonnées naturelles* par la relation linéaire :

$$X = Uq \quad (4.31)$$

La matrice  $U$  est la matrice modale du système conservatif associé. Elle permet de découpler le système différentiel (4.30) lorsque la condition de Caughey (cf. §4.3.2) est vérifiée.

Multiplions par le système (4.30) par la transposée de la matrice modale  $U$ . Le système devient :

$$(U^T M U) \ddot{q} + (U^T C U) \dot{q} + (U^T K U) q = 0 \quad (4.32)$$

Les trois nouvelles matrices :

$$M' = U^T M U, \quad C' = U^T C U \text{ et } K' = U^T K U$$

sont congruentes aux matrices  $M$ ,  $C$  et  $K$ . Elles sont diagonales. Cette méthode de diagonalisation simultanée des trois matrices est dite *méthode des déplacements modaux*. Insistons bien sur la fait que cette diagonalisation n'est possible que si la condition de Caughey est réalisée c'est-à-dire que si le système est classiquement amorti. Le système (4.30) s'écrit alors :

$$M' \ddot{q} + C' \dot{q} + K' q = 0 \quad (4.33)$$

**Remarque 17** *Un cas particulier est la condition de Basile :  $C$  est une combinaison linéaire de  $M$  et  $K$*

$$C = \lambda M + \mu K$$

en effet on a alors :

$$M^{-1} C = \lambda I + \mu M^{-1} K$$

et la commutation de  $M^{-1} C$  avec  $M^{-1} K$  est évidente.

Si de plus  $M$  est définie positive on peut choisir  $U$  de façon que  $U^T M U$  soit la matrice unité.

#### 4.4.4 Conclusion

La méthode des déplacements modaux est une technique très efficace pour évaluer la réponse d'un système dynamique linéaire ayant des modes classiques normaux (i.e. possédant un ensemble complet de vecteurs propres orthonormés, voir définition 28). Grâce à sa simplicité, elle constitue le procédé d'analyse dynamique le plus couramment utilisé ([Gmü97] et [Imb84]). Lorsque le système provient d'une discrétisation par éléments finis la difficulté principale de résolution du système d'équations réside dans son ordre élevé ; en effet les modélisations par éléments finis entraînent couramment des nombres de degrés de liberté de quelques milliers voire quelques dizaines de milliers. Malgré les ressources informatiques actuellement disponibles, une résolution satisfaisante n'est possible qu'en utilisant des méthodes performantes, particulièrement adaptées à ce genre de problèmes. Lors de la résolution des problèmes dynamiques par déplacement modaux c'est la recherche des solutions propres qui constitue la phase de calcul la plus difficile et qui nécessite le plus long temps de calcul. Généralement on s'intéresse aux premiers modes propres correspondant à la partie basse fréquence du spectre. J.F. Imbert [Imb84] explique que dans le cas d'un problème à 5000 degrés de liberté on ne s'intéresse généralement qu'aux 50 premiers modes. C'est pour cela qu'il conseille pour la résolution des problèmes aux valeurs propres de grande taille l'utilisation des méthodes de condensation (voir dans la suite de ce mémoire §4.5) ou des méthodes de résolution directe. C'est pour cette raison que la méthode des déplacements modaux est particulièrement efficace lorsque les modes propres fondamentaux et les premiers harmoniques (les plus petites pulsations propres et leurs vecteurs

propres associés) de la structure sont dominants dans la réponse dynamique, c'est-à-dire si seuls les premiers modes propres sont susceptibles d'être excités. Dans le cas contraire, elle est moins performante que les techniques de résolution directe d'équations différentielles [Imb84]. Les méthodes d'intégration directes font l'objet d'une discussion détaillée au chapitre 7 du livre de M. Géradin et D. Rixen [GR93] auquel on pourra se reporter utilement.

Cependant, en présence de forces dissipatives, le système peut avoir ou pas des modes normaux classiques. Si les forces dissipatives sont non-classiques, il est généralement difficile d'analyser le système dynamique à cause du caractère complexe des solutions propres.

## 4.5 Méthodes de condensation

Le principe de ces méthodes consiste à réduire la taille du problème initiale sans altérer son spectre en basses fréquences. En général on choisit la taille du problème réduit (ou condensé) équivalent de manière à permettre la résolution du problème en mémoire centrale du calculateur. Ces techniques sont utilisées lorsque la discrétisation de la structure étudiée amène à considérer un grand nombre de degré de liberté ; c'est généralement le cas lorsque la discrétisation est réalisée à l'aide de la méthode des éléments finis. Le temps de calcul et la taille mémoire nécessaire à la résolution d'un problème dynamique augmentant plus que linéairement avec le nombre de degré de liberté (proportionnellement au carré ou au cube du nombre de degré de liberté suivant la méthode de résolution utilisée et le type de structure considéré), il est donc souvent nécessaire de réduire la taille du problème pour satisfaire aux contraintes informatiques et économiques imposées. La réduction d'un modèle analytique consiste à utiliser un nombre réduit de variables dans la phase de résolution du problème. Un exemple consiste à ne retenir qu'un sous-ensemble particulièrement actif des degrés de liberté physiques du problème, on dit que le système est condensé. C'est le cas de la résolution de Guyan. Il existe plusieurs méthodes de condensation et nous ne détaillerons ici à titre d'exemple que la méthode de Guyan car ce n'est pas le propos de ce mémoire.

### 4.5.1 Méthode de Guyan

Le principe de base de la méthode de condensation de Guyan [Guy64] consiste à obtenir un problème aux valeurs propres de taille réduite en altérant le moins possible le spectre en basse fréquence du système initial. Elle procède par condensation parallèle et cohérente des rigidités et des masses ; c'est la méthode la plus utilisée [Imb84] malgré l'importance du temps de calcul nécessaire et le caractère déterminant pour la précision, de la qualité du choix des degrés de liberté retenus pour la condensation. La matrice de masse résultant d'une condensation de Guyan étant pleine, on a souvent recourt à certaines méthodes permettant de ramener le problème aux valeurs propres condensé à une forme standard, en calculant une matrice de flexibilité dynamique (i.e.  $K^{-1}M$ ) par décomposition de Cholesky de la matrice de masse ou de rigidité. On procède à la résolution en mémoire centrale en utilisant des méthodes classiques : méthode d'itération directe (voir paragraphe §3.6.1), si l'on s'intéresse seulement à un petit nombre de modes, méthode de transformation si l'on désire tous les modes du problème condensé.

## 4.6 Analyse modale des systèmes non-classiquement amortis

Lorsque l'amortissement est non-classique, il est généralement difficile d'analyser le système dynamique à cause de la nature complexe des solutions propres. Un amortissement non-classique résulte généralement des très fortes variations du taux d'absorption d'énergie des matériaux constituant les différentes parties de la structure. Un système non classique peut être découpé uniquement s'il possède  $n$  modes complexes indépendants.

Dans le cas de systèmes non-classiquement amortis, lorsqu'on applique la méthode des déplacements modaux la matrice des amortissements du nouveau système exprimé dans la base modale du système conservatif associé n'est pas diagonale : les équations restent couplées. L'approche modale perd alors beaucoup de son intérêt pour atteindre une solution numérique des équations du mouvement à moins de faire des hypothèses restrictives sur l'amortissement.

Dans le cas où les termes d'amortissement ne relèvent pas d'hypothèse simplificatrice, l'approche modale ne peut se justifier que si l'on restreint la représentation des déplacements à un nombre limité de modes. La taille du système à intégrer est alors réduite au nombre de modes que l'on retient dans le développement spectral de la solution. Si l'on applique la méthode des déplacements modaux (cf. §4.4.3) on reconstruit simplement la solution par l'équation (4.31) après avoir résolu le système réduit à la dimension  $m < n$  en négligeant la contribution des modes inconnus.

La pratique la plus couramment utilisée [Imb84] actuellement pour l'analyse des systèmes non-classiquement amortis est d'appliquer la méthode des déplacements modaux en ne retenant pour le calcul de la réponse dynamique que les termes diagonaux de la matrice d'amortissement.

### 4.6.1 Hypothèse d'amortissement modal diagonal

La répartition de l'amortissement est presque toujours mal connue et généralement il est nécessaire de faire des hypothèses sur cette répartition. L'hypothèse la plus simple et la plus courante consiste à admettre que la matrice des amortissement est diagonale dans la base modale. Cette hypothèse est justifiée lorsque la structure est faiblement amortie.

#### Preuve

*Faisons l'hypothèse que la structure considérée est faiblement amortie, c'est à dire supposons que les termes d'amortissement sont d'un ordre de grandeur inférieur aux termes de raideur et d'inertie. Etudions les vibrations libres du système :*

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0$$

*Ce système admet des solutions de la forme générale :*

$$X = e^{\lambda t} V$$

*vérifiant pour chaque couple  $(\lambda_i, V_i)$  de valeur propre et de vecteur propre :*

$$(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K)V_i = 0 \tag{4.34}$$

Notons  $\lambda_{0i}$  et  $V_{0i}$  les valeurs de  $\lambda_i$  et  $V_i$  en l'absence d'amortissement.  $\lambda_{0i}$  et  $V_{0i}$  sont donc les pulsations propres et les formes propres du système conservatif associé :

$$(\lambda_{0i}^2 M + K)V_{0i} = 0 \quad (4.35)$$

Le système étant supposé faiblement amorti admettons que  $\lambda_i$  et  $V_i$  diffèrent peu de  $\lambda_{0i}$  et  $V_{0i}$  respectivement :

$$\begin{cases} \lambda_i = \lambda_{0i} + \Delta\lambda \\ V_i = V_{0i} + \Delta V \end{cases} \quad (4.36)$$

avec  $\Delta\lambda$  et  $\Delta V$  petits et de l'ordre de  $C$ . Lorsque l'on néglige les termes du second ordre on aboutit grâce à la relation 4.35 à :

$$(\lambda_{0i}^2 M + K)\Delta V + \lambda_{0i}(C + 2(\Delta\lambda)M)V_{0i} = 0$$

Multiplions par  $V_{0i}^T$  et une fois de plus grâce à la relation 4.35 nous obtenons :

$$\lambda_{0i} V_{0i}^T (C + 2\Delta\lambda M)V_{0i} = 0$$

$$V_{0i}^T C V_{0i} + 2\Delta\lambda V_{0i}^T M V_{0i} = 0$$

d'où la correction sur la valeur propre :

$$\Delta\lambda = -\frac{V_{0i}^T C V_{0i}}{2V_{0i}^T M V_{0i}}$$

Si  $C'$  et  $M'$  sont les matrices  $C$  et  $M$  exprimées dans la base modale on a :

$$\Delta\lambda = -\frac{C'_{ii}}{2M'_{ii}}$$

ce qui fournit l'expression approchée :

$$\lambda_i = \lambda_{0i} - \frac{C'_{ii}}{2M'_{ii}}$$

cette correction au premier ordre ne fait intervenir que les termes diagonaux d'amortissement dans la base modale et montre que l'influence des termes non diagonaux ne peut être que du second ordre.

Intéressons nous maintenant à la correction sur le vecteur propre :

$$(\lambda_{0i}^2 M + K)\Delta V + \lambda_{0i}(C + 2(\Delta\lambda)M)V_{0i} = 0$$

et multiplions cette expression par  $\text{adj}(\lambda_{0i}^2 M + K)$ , on aboutit à :

$$\det(\lambda_{0i}^2 M + K)\Delta V = -\lambda_{0i} \text{adj}(\lambda_{0i}^2 M + K)(C + 2(\Delta\lambda)M)V_{0i}$$

et à une évaluation de  $\Delta V$ .

### 4.6.2 Méthode de découplage approchée

Une approximation, commune dans ce cas, consiste à négliger les termes d'amortissement qui sont non-classiques et à ne retenir que les termes classiques. La solution des équations découplées sera proche de la solution exacte si les termes non-classiques sont suffisamment faibles. Une discussion à ce sujet a été menée par L. Meirovitch [Mei67], W.T. Thomson, Calkin T et P. Caravani [TCC74] ainsi que D.L. Cronin [Cro76].

## 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une étude bibliographique détaillée des techniques employées pour calculer la réponse temporelle de systèmes vibratoires. Deux catégories apparaissent, les vibrations non amorties et les vibrations amorties. Dans cette dernière catégorie, plus proche de la réalité, on distingue deux sous catégories : les systèmes dit classiquement amortis ou non classiquement amortis. Les systèmes entrant dans la deuxième sous catégorie s'avèrent difficiles à résoudre. Plusieurs techniques ont été mises au point mais elles résolvent seulement quelques cas particuliers. Dans le chapitre suivant nous présenterons la méthode que nous avons mis au point et qui permet la détermination de la réponse temporelle même lorsque la condition de Caughey n'est pas vérifiée et sans calcul de solutions propres.





## Chapitre 5

# Vibrations linéaires - Nouvelle méthode de résolution

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Généralisation de la méthode du premier ordre . . . . .</b>	<b>80</b>
<b>5.2</b>	<b>Élaboration de la partie algébrique de l'algorithme . . . . .</b>	<b>81</b>
5.2.1	Première interprétation : méthode itérative ascendante . . . . .	82
5.2.2	Deuxième interprétation : méthode itérative descendante . . . . .	83
5.2.3	Initialisation des coefficients de l'algorithme ascendant . . . . .	83
5.2.4	Initialisation des coefficients de l'algorithme descendant . . . . .	84
5.2.5	Algorithme Linealg2 . . . . .	85
<b>5.3</b>	<b>Élaboration de la partie différentielle de l'algorithme . . . . .</b>	<b>86</b>
5.3.1	Choix des conditions initiales relatives à la fonction $\gamma$ . . . . .	87
5.3.2	Méthode de résolution de $M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0$ . . . . .	88
<b>5.4</b>	<b>Algorithme de résolution de <math>M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0</math> . . . . .</b>	<b>90</b>
5.4.1	Algorithme ascendant . . . . .	90
5.4.2	Algorithme descendant . . . . .	91
<b>5.5</b>	<b>Méthodes numériques de résolution des équations différentielles</b>	<b>92</b>
5.5.1	Principe . . . . .	92
5.5.2	Méthode d'Euler . . . . .	93
5.5.3	Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 . . . . .	93
5.5.4	Méthode retenue dans le code de calcul . . . . .	94
<b>5.6</b>	<b>Validation de la méthode : cas des <i>vibrations libres non amorties</i> d'un véhicule automobile . . . . .</b>	<b>94</b>
5.6.1	Position du problème . . . . .	94
5.6.2	Résolution . . . . .	97
5.6.3	Comparaison des résultats obtenus dans les cas symétriques et non symétriques . . . . .	98
5.6.4	Analyse des résultats . . . . .	98
<b>5.7</b>	<b>Validation de la méthode : cas des <i>vibrations libres amorties</i> d'un véhicule automobile . . . . .</b>	<b>100</b>

5.7.1	Position du problème . . . . .	100
5.7.2	Comparaison des résultats obtenus dans les cas symétriques et non symétriques . . . . .	101
5.7.3	Analyse des résultats . . . . .	102
<b>5.8</b>	<b>Étude des vibrations forcées . . . . .</b>	<b>104</b>
<b>5.9</b>	<b>Algorithme pour les vibrations forcées . . . . .</b>	<b>106</b>
<b>5.10</b>	<b>Application au cas de l'avion souple amorti . . . . .</b>	<b>108</b>
5.10.1	Modélisation de l'avion souple amorti . . . . .	108
5.10.2	Analyse des résultats . . . . .	109
<b>5.11</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>110</b>

---

### Résumé

Dans ce chapitre nous présentons une extension de notre méthode de résolution des systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants, présentée au chapitre 3, aux systèmes différentiels du second ordre obtenus lors de l'étude du mouvement de systèmes mécaniques. Cette extension sera réalisée dans les cas de vibrations libres et de vibrations forcées. Un exemple permettant de valider la méthode sera présenté dans chacun des cas.

## 5.1 Généralisation de la méthode du premier ordre

Dans le cadre de la mécanique vibratoire linéaire, on se trouve naturellement confronté à des systèmes linéaires à coefficients constants du second ordre, plutôt que du premier ordre. Les équations du mouvement apparaissent sous la forme vectorielle :

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} + C \frac{dX}{dt} + K X = 0 \quad (5.1)$$

Elles régissent le vecteur déplacement  $X(t)$  qui est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ , dépendant du temps.  $M$  est la matrice des masses et  $K$  la matrice des raideurs ; en général ce sont des matrices  $n \times n$  symétriques et définies positives et dans la suite nous les considérerons comme telles sauf mention explicite.  $C$  est la matrice des amortissements, c'est une matrice  $n \times n$  a priori sans propriété particulière de symétrie.

L'équation (5.1) est accompagnée de conditions initiales :

$$X(0) = X_0 \quad \text{et} \quad \frac{dX}{dt}(0) = \dot{X}_0 \quad (5.2)$$

Bien sûr, il serait possible de substituer à ce système du second ordre un système du premier ordre en doublant la taille des matrices et des vecteurs (§4.2.3). Mais ce calcul nécessiterait des inversions de matrices et entraînerait des pertes de propriétés inhérentes à la mécanique (matrices symétriques, positives, creuses, . . .). Aussi, nous préférons généraliser l'esprit plutôt que la lettre de la méthode de Souriau et traiter les matrices  $n \times n$  plutôt que de transformer le système en introduisant des matrices  $2n \times 2n$ .

Commençons par préciser quelques aspects linéaires algébriques.

### Définitions et notations

Afin de garder l'esprit de la méthode développée au chapitre 3 dans le cas du premier ordre, nous adopterons les définitions et les notations suivantes :

**Définition 34** : La matrice  $\lambda^2 M + \lambda C + K$  est dite matrice caractéristique du second ordre

**Définition 35** Le déterminant de la matrice caractéristique du second ordre est dit polynôme caractéristique du second ordre. C'est un polynôme à coefficients scalaires de degré  $2n$  en  $\lambda$  et nous le noterons :

$$P(\lambda) = \det(\lambda^2 M + \lambda C + K) = k_0 \lambda^{2n} + k_1 \lambda^{2n-1} + \dots + k_{2n-1} \lambda + k_{2n} \quad (5.3)$$

en indexant ses coefficients  $k_0, k_1, k_2, \dots$  de la plus haute puissance en  $\lambda$  à la plus basse.

**Définition 36** : L'adjuguée de la matrice caractéristique du second ordre est dite matrice adjuguée caractéristique du second ordre. C'est un polynôme à coefficients matriciels de degré  $2n - 2$  en  $\lambda$  et nous le noterons :

$$Q(\lambda) = \text{adj}(\lambda^2 M + \lambda C + K) = \lambda^{2n-2} B_0 + \lambda^{2n-3} B_1 + \dots + \lambda B_{2n-3} + B_{2n-2} \quad (5.4)$$

en indexant ses coefficients  $B_0, B_1, B_2, \dots$  de la plus haute puissance en  $\lambda$  à la plus basse .

## 5.2 Élaboration de la partie algébrique de l'algorithme

La propriété :

$$A \text{adj} A = (\det A) I \quad (5.5)$$

appliquée à la matrice caractéristique du second ordre  $\lambda^2 M + \lambda C + K$  conduit à l'identité polynomiale suivante :

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K) \text{adj}(\lambda^2 M + \lambda C + K) = \det(\lambda^2 M + \lambda C + K) I \quad (5.6)$$

L'identité (5.6) développée en puissances de  $\lambda$  grâce aux notations (5.3) et (5.4) conduit par identification aux  $(2n + 1)$  relations entre les coefficients  $B_i$  et  $k_i$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} M B_0 = k_0 I \\ M B_1 + C B_0 = k_1 I \\ M B_2 + C B_1 + K B_0 = k_2 I \\ \vdots \\ M B_i + C B_{i-1} + K B_{i-2} = k_i I \\ M B_{i+1} + C B_i + K B_{i-1} = k_{i+1} I \\ M B_{i+2} + C B_{i+1} + K B_i = k_{i+2} I \\ \vdots \\ M B_{2n-2} + C B_{2n-3} + K B_{2n-4} = k_{2n-2} I \\ C B_{2n-2} + K B_{2n-3} = k_{2n-1} I \\ K B_{2n-2} = k_{2n} I \end{array} \right. \quad (5.7)$$

Prendre la trace des matrices présentes dans les relations matricielles précédentes, conduit à  $(2n + 1)$  relations scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} tr(M B_0) = n k_0 \\ tr(M B_1) + tr(C B_0) = n k_1 \\ tr(M B_2) + tr(C B_1) + tr(K B_0) = n k_2 \\ \vdots \\ tr((M B_i) + tr(C B_{i-1}) + tr(K B_{i-2}) = n k_i \\ tr((M B_{i+1}) + tr(C B_i) + tr(K B_{i-1}) = n k_{i+1} \\ tr((M B_{i+2}) + tr(C B_{i+1}) + tr(K B_i) = n k_{i+2} \\ \vdots \\ tr(M B_{2n-2}) + tr(C B_{2n-3}) + tr(K B_{2n-4}) = n k_{2n-2} \\ tr(C B_{2n-2}) + tr(K B_{2n-3}) = n k_{2n-1} \\ tr(K B_{2n-2}) = n k_{2n} \end{array} \right. \quad (5.8)$$

A l'exemple du système du premier ordre, notre but est de trouver un schéma itératif permettant de calculer explicitement les couples  $(k_i, B_i)$  ; pour cela les  $(2n + 1)$  relations (5.7) doivent être complétées. Nous disposons encore de l'argument :

$$\frac{d}{d\lambda}(\det A) = tr\left(\frac{dA}{d\lambda} adj A\right) \quad (5.9)$$

Appliquons cette propriété au cas où la matrice  $A(\lambda)$  est la matrice caractéristique du second ordre :

$$P'(\lambda) = tr[(2\lambda M + C)Q(\lambda)]$$

ou encore en utilisant les relations 5.3 et 5.4 :

$$\begin{aligned} & 2nk_0\lambda^{2n-1} + (2n - 1)k_1\lambda^{2n-2} + \dots + 2k_{2n-2}\lambda + k_{2n-1} \\ & = tr[(2MB_0)\lambda^{2n-1} + (2MB_1 + CB_0)\lambda^{2n-2} + \dots + (2MB_{2n-2} + CB_{2n-3})\lambda + CB_{2n-2}] \end{aligned}$$

La trace est un opérateur linéaire, une identification des coefficients de même degré en  $\lambda$  aboutit à  $2n$  relations scalaires supplémentaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2n k_0 = 2 tr(M B_0) \\ (2n - 1) k_1 = 2 tr(M B_1) + tr(C B_0) \\ \vdots \\ (2n - i) k_i = 2 tr(M B_i) + tr(C B_{i-1}) \\ (2n - (i + 1)) k_{i+1} = 2 tr(M B_{i+1}) + tr(C B_i) \\ \vdots \\ 2 k_{n-2} = 2 tr(M B_{2n-2}) + tr(C B_{2n-3}) \\ k_{2n-1} = tr(C B_{2n-2}) \end{array} \right. \quad (5.10)$$

### 5.2.1 Première interprétation : méthode itérative ascendante

Les systèmes (5.8) et (5.10) permettent la détermination de manière itérative des coefficients  $k_i$  du polynôme caractéristique connaissant les  $B_j$  jusqu'au rang  $i - 1$ . En effet,

multiplions la  $(i+1)$ -ème relation du système (5.8) par 2 et soustrayons lui celle du système (5.10); il suffit alors de diviser le résultat par  $i$  (pour  $i$  supérieur ou égal à 1, donc non nul) pour exprimer  $k_i$

$$k_i = \frac{1}{i} [tr(C B_{i-1}) + 2 tr(K B_{i-2})]$$

Si les coefficients tant scalaires que matriciels ont été calculés jusqu'au rang  $i - 1$ , le coefficient  $k_i$  se trouve donc déterminé. Reste à exprimer  $B_i$  connaissant  $k_i$ . Le coefficient matriciel  $B_i$  se déduit directement du système (5.7); il s'exprime en fonction de  $k_i$  et des deux coefficients matriciels précédents.

$$M B_i = k_i I - C B_{i-1} - K B_{i-2}$$

Mais, d'après la première relation du système (5.7), l'inverse de la matrice  $M$  n'est autre que  $\frac{1}{k_0} B_0$ , ainsi :

$$B_i = \frac{B_0}{k_0} (k_i I - C B_{i-1} - K B_{i-2})$$

La connaissance de  $(k_0, B_0)$  et de  $(k_1, B_1)$  permet d'initialiser un schéma itératif qui détermine, par une méthode ascendante, tous les couples  $(k_i, B_i)$ .

### 5.2.2 Deuxième interprétation : méthode itérative descendante

On détermine le coefficient matriciel  $B_i$  directement grâce à la  $(i+3)$ -ème relation du système (5.7) en fonction de  $k_{i+2}$  et des deux coefficients matriciels suivants

$$K B_i = k_{i+2} I - C B_{i+1} - M B_{i+2}$$

Or d'après la dernière relation du système (5.7), l'inverse de la matrice  $K$  n'est autre que  $\frac{1}{k_{2n}} B_{2n-2}$ . On aboutit donc à :

$$B_i = \frac{B_{2n-2}}{k_{2n}} (k_{i+2} I - C B_{i+1} - M B_{i+2})$$

Le coefficient  $k_{i+1}$  s'obtient directement à partir de la  $(i+2)$ -ème relation du système (5.10) :

$$k_{i+1} = \frac{1}{2n - (i + 1)} (tr(C B_i) + 2 tr(M B_{i+1}))$$

La connaissance de  $(B_{2n-1}, k_{2n})$  et de  $(B_{2n-2}, k_{2n-1})$  permet d'initialiser un algorithme itératif qui gère la méthode descendante des couples  $(B_i, k_{i+1})$ .

### 5.2.3 Initialisation des coefficients de l'algorithme ascendant

Comment initialiser la suite des  $k_i$  et des  $B_i$ ? Il faut se donner  $(k_0, B_0)$  et  $(k_1, B_1)$ . Divisons la relation (5.3) par  $\lambda^{2n}$  et faisons tendre  $\frac{1}{\lambda}$  vers zéro nous voyons que :

$$k_0 = \det M$$

De même, en divisant la relation (5.4) par  $\lambda^{2n-2}$  et en faisant tendre  $\frac{1}{\lambda}$  vers zéro on s'aperçoit que :

$$B_0 = \text{adj } M$$

Ces deux coefficients sont facilement calculables par l'algorithme de Souriau présenté au chapitre 2 §2.5.2.

Le coefficient  $k_1$  s'obtient en multipliant par 2 la deuxième relation du système (5.8) et en la soustrayant à la deuxième relation du système (5.10), on a alors :

$$k_1 = \text{tr}(C \text{adj} M)$$

et finalement, on obtient  $B_1$  grâce à la deuxième ligne du système (5.7) :

$$B_1 = \frac{B_0}{k_0} (k_1 I - C B_0)$$

#### 5.2.4 Initialisation des coefficients de l'algorithme descendant

Le polynôme matriciel  $Q(\lambda)$  est un polynôme de degré  $2n - 2$  en  $\lambda$  ; cependant, par commodité, nous compléterons les  $B_i$  jusqu'à  $i = 2n$  en convenant que :

$$B_{2n} = B_{2n-1} = 0$$

L'initialisation de l'algorithme descendant, nécessite de connaître  $(B_{2n-1}, k_{2n})$  et  $(B_{2n-2}, k_{2n-1})$ . Faisons tendre  $\lambda$  vers zéro dans les relations (5.3) et (5.4) :

$$k_{2n} = \det K$$

$$B_{2n-2} = \text{adj} K$$

L'algorithme de Souriau présenté au chapitre 2 §2.5.2 permet le calcul de l'adjuguée de la matrice des raideurs  $K$  et de son déterminant.

De plus, la dérivée de  $P(\lambda)$  en  $\lambda = 0$  vaut :

$$P'(0) = \text{tr}(Q(0)C) = \text{tr}((\text{adj} K)C) = k_{2n-1}$$

fournit la valeur de  $k_{2n-1}$

$$k_{2n-1} = \text{tr}(C \text{adj} K)$$

**Remarque 18** : les fonctions  $\frac{1}{\lambda^{2n}}P(\lambda)$  et  $\frac{1}{\lambda^{2n-2}}Q(\lambda)$  sont respectivement des polynômes en  $\frac{1}{\lambda}$  de degré  $2n$  et  $2n - 2$ . Cette remarque permet d'obtenir des informations sur l'initialisation de la suite  $(k_i, B_i)$  à partir des termes de plus haut degré en échangeant  $M$  et  $K$ .

Puisque :

$$k_{2n} = \det K$$

$$B_{2n-2} = \text{adj} K$$

$$k_{2n-1} = \text{tr}(C \text{adj} K)$$

il en résulte :

$$k_0 = \det M$$

$$B_0 = \text{adj} M$$

$$k_1 = \text{tr}(C \text{adj} M)$$

Cette propriété de "symétrie" mise en évidence nous permet de diviser le temps de calcul par deux, grâce à l'utilisation d'un logiciel de calcul formel.

### 5.2.5 Algorithme Linealg2

Les deux suites de récurrence  $(k_i, B_i)$  et  $(B_i, k_{i+1})$  précédentes, nous conduisent à construire les deux algorithmes itératifs ascendant et descendant suivants :

#### Algorithme linealg2 ascendant

(a) Entrer  $n, M, K, C$

(b) Calculer, par l'algorithme de Souriau :

$$\begin{cases} k_0 = \det M, \\ B_0 = \text{adj } M \end{cases} \quad (5.11)$$

(c) Calculer :

$$\begin{cases} k_1 = \text{tr}(C B_0) \\ B_1 = \frac{B_0}{k_0} (k_1 I - C B_0) \end{cases} \quad (5.12)$$

(d) Pour  $i$  allant de 2 à  $2n - 2$  faire

$$\begin{cases} k_i = \frac{1}{i} (\text{tr}(C B_{i-1}) + 2 \text{tr}(K B_{i-2})) \\ B_i = \frac{B_0}{k_0} [k_i I - C B_{i-1} - K B_{i-2}] \end{cases} \quad (5.13)$$

(e) Pour  $i$  allant de  $2n - 1$  à  $2n$  faire

$$\begin{cases} k_i = \frac{1}{i} (\text{tr}(C B_{i-1}) + 2 \text{tr}(K B_{i-2})) \\ B_i = 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

#### Algorithme linealg2 descendant

(a) Entrer  $n, M, K, C$

(b) Calculer, par l'algorithme de Souriau :

$$\begin{cases} k_{2n} = \det K \\ B_{2n-2} = \text{adj } K \end{cases} \quad (5.15)$$

(c) Calculer :

$$\begin{cases} k_{2n-1} = \text{tr}(C B_{2n-2}) \\ B_{2n} = B_{2n-1} = 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

(d) Pour  $i$  allant de  $2n - 3$  à 0 faire

$$\begin{cases} B_i = \frac{B_{2n-2}}{k_{2n}} (k_{i+2} I - C B_{i+1} - M B_{i+2}) \\ k_{i+1} = \frac{1}{2n-(i+1)} (\text{tr}(C B_i) + 2 \text{tr}(M B_{i+1})) \end{cases} \quad (5.17)$$

(e) Calculer par l'algorithme de Souriau :

$$k_0 = \det M$$

**Remarque 19** L'algorithme ascendant sera utilisé lorsque le déterminant de la matrice  $M$  n'est pas trop petit puisqu'il nécessite une division par  $k_0$  qui n'est autre que le déterminant de la matrice des masses. L'algorithme descendant quant à lui sera utilisé lorsque le déterminant de la matrice  $K$  n'est pas trop petit puisqu'il nécessite une division par  $k_{2n}$  qui n'est autre que le déterminant de la matrice des raideurs.

### 5.3 Élaboration de la partie différentielle de l'algorithme

Nous adoptons une démarche similaire à celle présentée au premier ordre. Remplaçons formellement  $\lambda$  par  $\frac{d}{dt}$  dans l'identité :

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K) Q(\lambda) = P(\lambda) I$$

Nous obtenons une identité entre opérateurs différentiels :

$$\left(M \frac{d^2}{dt^2} + C \frac{d}{dt} + K\right) Q\left(\frac{d}{dt}\right) = I P\left(\frac{d}{dt}\right)$$

Cette identité est la clé de la construction de notre algorithme.

Soit  $\gamma$  une fonction numérique satisfaisant :

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\gamma = 0$$

$\gamma$  est solution de l'équation différentielle :

$$k_0 \gamma^{(2n)} + k_1 \gamma^{(2n-1)} + k_2 \gamma^{(2n-2)} + \dots + k_{2n-2} \gamma^{(2)} + k_{2n-1} \gamma^{(1)} + k_{2n} \gamma = 0 \quad (5.18)$$

que nous nommerons *équation différentielle caractéristique*. Alors, la fonction matricielle :

$$\phi(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right)\gamma \quad (5.19)$$

se développe sous la forme :

$$\phi(t) = B_0 \gamma^{(2n-2)}(t) + B_1 \gamma^{(2n-3)}(t) + \dots + B_{2n-3} \gamma^{(1)}(t) + B_{2n-2} \gamma(t) \quad (5.20)$$

est solution de l'équation différentielle matricielle :

$$M \frac{d^2 \phi}{dt^2} + C \frac{d\phi}{dt} + K \phi = 0 \quad (5.21)$$

**Vérification 1** Vérifions que  $\phi$  défini par 5.19 est bien solution de l'équation matricielle (5.21) quand  $\gamma$  est solution de l'équation scalaire (5.18). Calculons les dérivées première et seconde de  $\phi$  par rapport au temps.

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dt} = B_0 \gamma^{(2n-1)} + B_1 \gamma^{(2n-2)} + \dots + B_{2n-3} \gamma^{(2)} + B_{2n-2} \gamma^{(1)} \\ \frac{d^2 \phi}{dt^2} = B_0 \gamma^{(2n)} + B_1 \gamma^{(2n-1)} + \dots + B_{2n-3} \gamma^{(3)} + B_{2n-2} \gamma^{(2)} \end{cases} \quad (5.22)$$

Remplaçons dans (5.21),  $\phi$  et ses dérivées par leurs formes développées (5.20) et (5.22), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & M \frac{d^2 \phi}{dt^2} + C \frac{d\phi}{dt} + K \phi \\ = & MB_0 \gamma^{(2n)} + MB_1 \gamma^{(2n-1)} + \dots + MB_{2n-3} \gamma^{(3)} + MB_{2n-2} \gamma^{(2)} \\ + & CB_0 \gamma^{(2n-1)} + CB_1 \gamma^{(2n-2)} + \dots + CB_{2n-3} \gamma^{(2)} + CB_{2n-2} \gamma^{(1)} \\ + & KB_0 \gamma^{(2n-2)} + KB_1 \gamma^{(2n-3)} + \dots + KB_{2n-3} \gamma^{(1)} + KB_{2n-2} \gamma \\ = & MB_0 \gamma^{(2n)} + (MB_1 + CB_0) \gamma^{(2n-1)} + (MB_2 + CB_1 + KB_0) \gamma^{(2n-2)} \\ + & \dots + (MB_{2n-2} + CB_{2n-3} + KB_{2n-4}) \gamma^{(2)} + (CB_{2n-2} + KB_{2n-3}) \gamma^{(1)} + KB_{2n-2} \gamma \end{aligned} \quad (5.23)$$



D'après le système (5.7) cette expression équivaut à :

$$[k_0 \gamma^{(2n)} + k_1 \gamma^{(2n-1)} + k_2 \gamma^{(2n-2)} + \cdots + k_{2n-2} \gamma^{(2)} + k_{2n-1} \gamma^{(1)} + k_{2n} \gamma]I = 0.$$

Elle est nulle grâce à (5.18).

### 5.3.1 Choix des conditions initiales relatives à la fonction $\gamma$

La solution générale de l'équation différentielle vectorielle :

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} + C \frac{dX}{dt} + K X = 0 \quad (5.24)$$

est une combinaison linéaire de deux solutions indépendantes de cette équation.

Trouver deux solutions indépendantes de (5.24) puis les adapter aux conditions initiales :

$$X(0) = X_0 \text{ et } \dot{X}(0) = \dot{X}_0$$

revient à trouver deux solutions indépendantes de (5.21). Pour cela, il nous suffira de sélectionner deux solutions indépendantes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de l'équation (5.18) assorties de conditions initiales convenablement choisies.

#### Méthode ascendante

Guidés par le cas du premier ordre, nous pouvons opter pour les conditions initiales suivantes :  $\gamma^{(2n-3)}(0)$ ,  $\gamma^{(2n-4)}(0)$ ,  $\dots$ ,  $\gamma^{(1)}(0)$ ,  $\gamma(0)$  toutes nulles et, seules  $\gamma^{(2n-1)}(0)$  et  $\gamma^{(2n-2)}(0)$  non nulles éventuellement.

Définissons alors la fonction  $\gamma_1$  solution de l'équation (5.18) et satisfaisant les conditions initiales :

$$\begin{cases} \gamma_1(0) = 0, \gamma_1^{(1)}(0) = 0, \gamma_1^{(2)}(0) = 0, \dots, \gamma_1^{(2n-3)}(0) = 0, \gamma_1^{(2n-1)}(0) = 0 \\ \gamma_1^{(2n-2)}(0) = 1 \end{cases} \quad (5.25)$$

et la fonction  $\gamma_2$  solution de l'équation (5.18) et satisfaisant les conditions initiales :

$$\begin{cases} \gamma_2(0) = 0, \gamma_2^{(1)}(0) = 0, \gamma_2^{(2)}(0) = 0, \dots, \gamma_2^{(2n-3)}(0) = 0, \gamma_2^{(2n-2)}(0) = 0 \\ \gamma_2^{(2n-1)}(0) = 1 \end{cases} \quad (5.26)$$

puis, associons leur les fonctions matricielles :

$$\phi_1(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right) \gamma_1$$

et

$$\phi_2(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right) \gamma_2.$$

Les fonctions matricielles  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont deux solutions indépendantes du système (5.24).

### Méthode descendante

Si le déterminant de  $M$  est très petit nous utiliserons avantageusement l'algorithme descendant. On peut adapter la méthode ascendante, si le déterminant de  $K$  n'est pas trop petit; cette fois les coefficients  $(k_i, B_i)$  se détermineront à l'aide d'un schéma algébrique descendant.

Dans ce cas, nous choisirons pour conditions initiales:  $\gamma^{(2n-1)}(0), \gamma^{(2n-2)}(0), \dots, \gamma^{(3)}(0), \gamma^{(2)}(0)$  nulles, et seulement  $\gamma^{(1)}(0)$  et  $\gamma(0)$  non nulles. Définissons alors la solution  $\gamma_3$  adaptée aux conditions initiales:

$$\begin{cases} \gamma_3(0) = 1 \\ \gamma_3^{(1)}(0) = 0, \dots, \gamma_3^{(2n-1)}(0) = 0 \end{cases} \quad (5.27)$$

et la solution  $\gamma_4$  adaptée aux conditions initiales:

$$\begin{cases} \gamma_4^{(1)}(0) = 1 \\ \gamma_4(0) = 0, \gamma_4^{(2)}(0) = 0, \dots, \gamma_4^{(2n-1)}(0) = 0 \end{cases} \quad (5.28)$$

Nous leur associons les solutions matricielles indépendantes:

$$\phi_3(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right)\gamma_3$$

et

$$\phi_4(t) = Q\left(\frac{d}{dt}\right)\gamma_4$$

Ce sont deux solutions indépendantes du système (5.24).

### 5.3.2 Méthode de résolution de $M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0$

#### Méthode ascendante

Les fonctions matricielles  $\phi_1(t)$  et  $\phi_2(t)$  permettent de construire la solution générale de (5.24). Elle est de la forme:

$$X(t) = \phi_1(t)V_1 + \phi_2(t)V_2 \quad (5.29)$$

où  $V_1$  et  $V_2$  désignent deux vecteurs constants de  $\mathbb{R}^n$ . Reste à adapter ces deux vecteurs aux conditions initiales.

Les choix de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  impliquent que les valeurs initiales de  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont:

$$\begin{cases} \phi_1(0) = B_0 \\ \phi_1^{(1)}(0) = B_1 \\ \phi_2(0) = 0 \\ \phi_2^{(1)}(0) = B_0 \end{cases} \quad (5.30)$$

Les conditions initiales  $X(0) = X_0$  et  $\dot{X}(0) = \dot{X}_0$  seront respectées si on choisit les vecteurs  $V_1$  et  $V_2$  de telle sorte que:

$$\begin{cases} \phi_1(0) V_1 + \phi_2(0) V_2 = X_0 \\ \phi_1^{(1)}(0) V_1 + \phi_2^{(1)}(0) V_2 = \dot{X}_0 \end{cases} \quad (5.31)$$

c'est-à-dire en tenant compte de (5.30)

$$\begin{cases} B_0 V_1 = X_0 \\ B_1 V_1 + B_0 V_2 = \dot{X}_0 \end{cases} \quad (5.32)$$

ou

$$\begin{cases} (\det M) V_1 = M X_0 \\ B_0 V_2 = (\dot{X}_0 - B_1 V_1) \end{cases} \quad (5.33)$$

En utilisant les relations  $k_0 = \det M$ ,  $B_0 = \text{adj } M$  et la propriété (5.5), on détermine définitivement les vecteurs  $V_1$  et  $V_2$  par les formules :

$$\begin{cases} V_1 = \frac{1}{k_0} M X_0 \\ V_2 = \frac{M}{k_0} (\dot{X}_0 - B_1 V_1) \end{cases} \quad (5.34)$$

ce qui achève la détermination de  $X(t)$ . Cette méthode sera utilisée lorsque la division par  $k_0$  ne pose pas de problème c'est-à-dire lorsque le déterminant de  $M$  est voisin du zéro machine.

### Méthode descendante

Les fonctions matricielles  $\phi_3(t)$  et  $\phi_4(t)$  permettent de construire la solution générale de (5.24). Elle est de la forme :

$$X(t) = \phi_3(t) V_3 + \phi_4(t) V_4 \quad (5.35)$$

où  $V_3$  et  $V_4$  désignent deux vecteurs constants de  $\mathbb{R}^n$ . Reste à adapter ces deux vecteurs aux conditions initiales.

Le choix de  $\gamma_3$  et  $\gamma_4$  implique :

$$\begin{cases} \phi_3(0) = B_{2n-2} \\ \phi_3^{(1)}(0) = 0 \\ \phi_4(0) = B_{2n-3} \\ \phi_4^{(1)}(0) = B_{2n-2} \end{cases} \quad (5.36)$$

Les conditions initiales  $X(0) = X_0$  et  $\dot{X}(0) = \dot{X}_0$  imposent pour les vecteurs  $V_3$  et  $V_4$  :

$$\begin{cases} B_{2n-2} V_4 = \dot{X}_0 \\ B_{2n-2} V_3 = (X_0 - B_{2n-3} V_4) \end{cases} \quad (5.37)$$

Les relations  $k_{2n} = \det K$ ,  $B_{2n-2} = \text{adj } K$  et la propriété 5.5 finissent de caractériser les vecteurs  $V_3$  et  $V_4$  :

$$\begin{cases} V_4 = \frac{1}{k_{2n}} K \dot{X}_0 \\ V_3 = \frac{K}{k_{2n}} (X_0 - B_{2n-3} V_4) \end{cases} \quad (5.38)$$

et achevant ainsi la détermination de  $X(t)$  par la formule 5.35. La division par  $k_{2n}$  ne pose pas de problème si le déterminant de  $K$  est voisin du zéro machine.

## 5.4 Algorithme de résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Les deux algorithmes, ascendant et descendant, s'explicitent sous les schémas itératifs repris ci-dessous.

### 5.4.1 Algorithme ascendant

(1) Algorithme Linealg2 ascendant :

- (a) Entrer  $n, M, K, C$
- (b) Calculer, avec l'algorithme de Souriau :

$$\begin{cases} k_0 = \det M \\ B_0 = \text{adj } M \end{cases} \quad (5.39)$$

(c) Calculer

$$\begin{cases} k_1 = \text{tr}(C \text{Adj } M) \\ B_1 = \frac{B_0}{k_0} (k_1 I - C B_0) \end{cases} \quad (5.40)$$

(d) Pour  $i$  allant de 2 à  $2n - 2$  faire

$$k_i = \frac{1}{i} (\text{tr}(C B_{i-1}) + 2 \text{tr}(K B_{i-2}))$$

et

$$B_i = \frac{B_0}{k_0} [k_i I - C B_{i-1} - K B_{i-2}]$$

(e) Pour  $i$  allant de  $2n - 1$  à  $2n$  faire

$$k_i = \frac{1}{i} (\text{tr}(C B_{i-1}) + 2 \text{tr}(K B_{i-2}))$$

et

$$B_i = 0$$

(2) Déterminer  $\gamma_1$ , solution de l'équation différentielle (5.18) en respectant les conditions initiales :

$$\begin{cases} \gamma_1(0) = \frac{d\gamma_1}{dt}(0) = \gamma_1^{(2)}(0) = \dots = \gamma_1^{(2n-3)}(0) = \gamma_1^{(2n-1)}(0) = 0 \\ \gamma_1^{(2n-2)}(0) = 1 \end{cases} \quad (5.41)$$

(3) Déterminer  $\gamma_2$ , solution de l'équation différentielle (5.18) en respectant les conditions initiales :

$$\begin{cases} \gamma_2(0) = \frac{d\gamma_2}{dt}(0) = \gamma_2^{(2)}(0) = \dots = \gamma_2^{(2n-3)}(0) = \gamma_2^{(2n-2)}(0) = 0 \\ \gamma_2^{(2n-1)}(0) = 1 \end{cases} \quad (5.42)$$

(4) Tabuler  $\phi_1$

$$\phi_1(t) = \sum_{i=0}^{2n-2} B_i \gamma_1^{(2n-2-i)}(t)$$

(5) Tabuler  $\phi_2$

$$\phi_2(t) = \sum_{i=0}^{2n-2} B_i \gamma_2^{(2n-2-i)}(t)$$

(6) Déterminer  $V_1$  et  $V_2$

$$\begin{cases} V_1 = \frac{1}{k_0} M X_0 \\ V_2 = \frac{M}{k_0} (\dot{X}_0 - B_1 V_1) \end{cases} \quad (5.43)$$

(7) Tabuler la solution  $X(t) = \phi_1(t) V_1 + \phi_2(t) V_2$

### 5.4.2 Algorithme descendant

(1) Algorithme linealg2 descendant

- (a) Entrer  $n, M, K, C$
- (b) Calculer, par l'algorithme de Souriau

$$\begin{cases} k_{2n} = \det K \\ B_{2n-2} = \text{adj } K \end{cases} \quad (5.44)$$

(c) Calculer

$$\begin{cases} k_{2n-1} = \text{tr}(C \text{Adj } K) \\ B_{2n} = B_{2n-1} = 0 \end{cases} \quad (5.45)$$

(d) Pour  $i$  allant de  $2n-3$  à  $0$  faire

$$B_i = \frac{B_{2n-2}}{k_{2n}} (k_{i+2} I - C B_{i+1} - M B_{i+2})$$

puis

$$k_{i+1} = \frac{1}{2n - (i+1)} (\text{tr}(C B_i) + 2 \text{tr}(M B_{i+1}))$$

(e) Calculer, par l'algorithme de Souriau

$$k_0 = \det M$$

(2) Déterminer  $\gamma_3$ , solution de l'équation différentielle (5.18) en respectant les conditions initiales :

$$\begin{cases} \gamma_3(0) = 1 \\ \frac{d\gamma_3}{dt}(0) = \dots = \gamma_3^{(2n-1)}(0) = 0 \end{cases} \quad (5.46)$$

(3) Déterminer  $\gamma_4$ , solution de l'équation différentielle (5.18) en respectant les conditions initiales :

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_4}{dt}(0) = 1 \\ \gamma_4(0) = \frac{d^2\gamma_4}{dt^2}(0) = \dots = \gamma_4^{(2n-1)}(0) = 0 \end{cases} \quad (5.47)$$

(4) Tabuler  $\phi_3$

$$\phi_3(t) = \sum_{i=0}^{2n-2} B_i \gamma_3^{(2n-2-i)}(t)$$

(5) Tabuler  $\phi_4$

$$\phi_4(t) = \sum_{i=0}^{2n-2} B_i \gamma_4^{(2n-2-i)}(t)$$

(6) Déterminer  $V_3$  et  $V_4$

$$\begin{cases} V_3 = \frac{K}{k_{2n}} (X_0 - B_{2n-3} V_4) \\ V_4 = \frac{1}{k_{2n}} K \dot{X}_0 \end{cases} \quad (5.48)$$

(7) Tabuler la solution :  $X(t) = \phi_3(t) V_3 + \phi_4(t) V_4$

**Remarque 20** *Si on change les conditions initiales, il n'est pas nécessaire de refaire tourner tout le programme ; seul le calcul de  $V_1$  et de  $V_2$  (ou de  $V_3$  et de  $V_4$ ) est affecté.*

## 5.5 Méthodes numériques de résolution des équations différentielles

La difficulté d'analyse de l'algorithme proposé est concentrée dans la recherche de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  (ou  $\gamma_3$  et  $\gamma_4$ ). L'algorithme que nous venons de développer comporte essentiellement des opérations élémentaires d'algèbre linéaire. Une partie plus délicate est la recherche des fonctions  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  comme solutions de l'équation différentielle 5.18. C'est pourquoi nous rappellerons ici brièvement les différents schémas classiquement adoptés pour la résolution des équations différentielles. Une littérature abondante aborde ce sujet ; on pourra se reporter à J.-P. Nougier [Nou85] ou à A. Ralston [Ral65] pour plus de détails.

### 5.5.1 Principe

Le système d'équations différentielles du premier ordre à résoudre se présente sous la forme :

$$\dot{X}(t) = F(t, X(t)).$$

Il est à intégrer sur l'intervalle  $[t_a, t_b]$  avec des conditions initiales :  $X(t_0) = X_0$  (avec  $t_0 \in [t_a, t_b]$ ).

Les méthodes numériques suggèrent de remplacer l'équation différentielle par une équation intégrale :

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{X}(t)dt = X(t_0) + \int_{t_0}^t F(t, X(t))dt$$

On partage ensuite l'intervalle de définition de  $x(t)$  en intervalles de largeur

$$h = t_{j+1} - t_j$$

. La relation précédente se généralise donc à :

$$X_{t_{j+1}} = X_{t_j} + \int_{t_j}^{t_{j+1}} F(t, X(t))dt$$

L'intégrale se calcule par différentes méthodes approchées comme celle des rectangles par exemple.

### 5.5.2 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est la plus simple. En négligeant le terme d'ordre  $h^2$  et en itérant sur l'intervalle  $[t_a, t_b]$ , on obtient un ensemble de valeurs discrètes en  $X(t)$  :

$$X(t+h) = X(t) + hF(t, X(t)) + O(h^2)$$

Cette méthode est simple, peu précise mais elle est à la base du développement de méthodes plus complexes avec estimation de l'erreur commise. La méthode d'Euler est d'ordre 1.

### 5.5.3 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

Les formulations de type Runge-Kutta sont parmi les plus utilisées. Elles présentent de nombreux avantages : elles sont faciles à programmer, généralement stables, la largeur de pas peut être modifiée sans difficulté et la connaissance du "point de départ" suffit à lui seul à itérer le calcul. Cependant, la méthode de Runge-Kutta nécessite un temps de calcul nettement supérieur aux autres méthodes pour un résultat de précision équivalente. Comme la relation est obtenue en prenant les différences finies au premier ordre, la méthode est dite d'ordre 2. La formulation la plus utilisée est certainement celle d'ordre 4 à pas fixe, qui nécessite 4 évaluations de la fonction à chaque pas.

On pose :

$$X_j = X(t_j) \text{ pour } t_j \text{ un point de } [t_a, t_b]$$

et l'on construit quatre valeurs :

$$\begin{aligned} \nu_1 &= h F(t_j, X_j) \\ \nu_2 &= h F\left(t_j + \frac{h}{2}, X_j + \frac{\nu_1}{2}\right) \\ \nu_3 &= h F\left(t_j + \frac{h}{2}, X_j + \frac{\nu_2}{2}\right) \\ \nu_4 &= h F(t_j + h, X_j + \nu_3) \end{aligned}$$

alors :

$$X_{j+1} = X_j + \frac{1}{6}(\nu_1 + 2\nu_2 + 2\nu_3 + \nu_4)$$

Si l'erreur locale est en  $h^5$ , l'erreur globale est en  $h^4$ .

La méthode de Runge-Kutta "classique" que nous venons de rapeller est à pas unique. Il existe cependant une version à pas adaptatif dite "Cash-Karp" [PTVF92] plus rapide que celle à pas fixe.

#### 5.5.4 Méthode retenue dans le code de calcul

Le seul travail véritablement numérique réside dans la résolution de (5.18) avec les conditions initiales (5.25) et (5.26) d'une part et (5.27) et (5.28) d'autre part selon que l'on prend la méthode ascendante ou la méthode descendante. Comme dans le cas du premier ordre, il suffit de résoudre l'équation (5.18) sur un petit pas de temps  $h$ . Si on connaît  $\gamma_1(0)$  et  $\gamma_2(0)$  ( respectivement  $\gamma_3(0)$  et  $\gamma_4(0)$ ) de 0 à  $h$  on connaît donc les valeurs de  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sur ce même pas de temps (respectivement  $\phi_3$  et  $\phi_4$ ) et par suite sans jamais à avoir exprimer  $H$  :

$$\exp(hH) = \frac{1}{k_0} \begin{bmatrix} \phi_1(h) & \phi_2(h) \\ \phi_1^{(1)}(h) & \phi_2^{(1)}(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & 0 \\ -\frac{1}{k_0}MB_1M & M \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

respectivement

$$\exp(hH) = \frac{1}{k_{2n}} \begin{bmatrix} \phi_3(h) & \phi_4(h) \\ \phi_3^{(1)}(h) & \phi_4^{(1)}(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & -KB_{2n-3}K \\ 0 & K \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

en ré-utilisant les résultats des formules (5.29) (respectivement (5.35)), et (5.34) (respectivement (5.38)). On aura donc les valeurs de  $X$  et  $\dot{X}$  en  $ph$ ,  $p$  étant un entier éventuellement grand par :

$$\begin{bmatrix} X(ph) \\ \dot{X}(ph) \end{bmatrix} = (\exp hH)^p \begin{bmatrix} X_0 \\ \dot{X}_0 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

et ainsi la connaissance de  $X$  et  $\dot{X}$  sur  $[0, h]$  s'étend par simple produit matriciel à l'intervalle  $[0, ph]$ . Dans le code de calcul que nous avons développé en langage Fortran 77 pour résoudre les équations de l'exemple présenté ci-après nous avons choisi d'utiliser la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 sur un pas de temps petit pour résoudre les étapes (4) et (5) de l'algorithme (cf § 5.4).

## 5.6 Validation de la méthode : cas des vibrations libres non amorties d'un véhicule automobile

### 5.6.1 Position du problème

En nous inspirant de [Che] nous avons modélisé grossièrement une voiture comme un ensemble rigide relié au sol par douze ressorts élastiques. Les suspensions avant et arrière



sont modélisées globalement par 4 ressorts verticaux de raideur  $k_1$ , tandis que la rigidité latérale des pneumatiques est modélisée par 8 ressorts horizontaux de raideur  $k_2$  comme on peut le voir sur la figure suivante :

FIG. 5.1 – Modélisation d'un véhicule automobile sans prise en compte des amortissements

Les distances entre les différents points du système sont données ci-dessous :

$$\begin{aligned} AB &= CD = 2l \\ AC &= BD = a + b \\ \overrightarrow{CG} &= a\vec{x} + l\vec{y} + c\vec{z} \end{aligned}$$

L'automobile est de masse  $m_v$ . Le repère  $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est lié à la voiture dont le mouvement est repéré par 6 paramètres de configuration  $x, y, z, \alpha, \beta$  et  $\gamma$  par rapport au référentiel galiléen  $(O, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$ . Nous noterons  $X$  le vecteur de composantes  $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$ . Les paramètres  $x, y, z$  sont les coordonnées de  $G$  dans  $R_g$

Compte tenu des symétries, la matrice d'inertie au centre d'inertie  $G$  s'exprime :

$$J_G = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (5.52)$$

Les angles  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont définis comme indiqué sur la figure précédente.

On se limite à l'étude des petits mouvements du véhicule autour de la position d'équilibre. Le déplacement d'un point  $P$  de la caisse peut s'obtenir de façon simple à partir du déplacement de  $G$  par la relation :

$$\vec{U}_P = \vec{U}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{GP}$$

où  $\vec{\omega}$  est le vecteur rotation instantanée de la caisse du véhicule.  $z_g$  est vertical ascendant. L'intensité de la pesanteur est notée  $g$ .

L'équation régissant le mouvement de la voiture est celle d'un système vibratoire conservatif :

$$M\ddot{X} + KX = 0 \quad (5.53)$$

nous avons choisi pour conditions initiales :

- $x(0) = 1 \text{ m}$ , les autres composantes de position étant nulles,
- $\dot{y}(0) = 1 \text{ ms}^{-1}$ , les autres paramètres de vitesse étant également nuls.

### Cas des matrices $M$ et $K$ symétriques

Nous avons utilisé la méthode de Lagrange pour décrire l'évolution du système. Les matrices  $M$  et  $K$  ainsi calculées sont donc naturellement symétriques. Nous nous sommes limités aux termes du premier ordre pour la vitesse de rotation et à l'ordre deux pour l'expression de l'énergie cinétique. Ceci nous permet d'extraire directement les composantes de la matrice des masses  $M$  du système :

$$M = \begin{bmatrix} m_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & -E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E & 0 & C \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

En supposant que l'amplitude des mouvements du véhicule reste faible, on en déduit les composantes de la matrice des raideurs :

$$K = \begin{bmatrix} 4k_2 & 0 & 0 & 0 & 4k_2c & 0 \\ 0 & 4k_2 & 0 & 4k_2c & 0 & 2k_2(b-a) \\ 0 & 0 & 4k_1 & 0 & 2k_1(a-b) & 0 \\ 0 & 4k_2c & 0 & 4k_2c^2 + 4k_1l^2 & 0 & 2k_2c(b-a) \\ 4k_2c & 0 & 2k_1(a-b) & 0 & 4k_2c^2 + 2k_1(a^2 + b^2) & 0 \\ 0 & 2k_2(b-a) & 0 & 2k_2c(b-a) & 0 & 2k_2(a^2 + b^2 + 2l^2) \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

Nous nous plaçons dans les conditions suivantes :

$$\begin{array}{llll} a = 1,60 \text{ m} & b = 0,80 \text{ m} & c = 0,20 \text{ m} & l = 1 \text{ m} \\ A = 250 \text{ kgm}^2 & B = 450 \text{ kgm}^2 & C = 550 \text{ kgm}^2 & E = 550 \text{ kgm}^2 \\ m_v = 900 \text{ kg} & k_1 = 18\,000 \text{ Nm}^{-1} & k_2 = 24\,000 \text{ Nm}^{-1} & \end{array}$$

Nous obtenons donc comme matrices des masses et des raideurs :

$$M = \begin{bmatrix} 900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 900 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 900 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 250 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 450 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 0 & 550 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

$$K = \begin{bmatrix} 96000 & 0 & 0 & 0 & 19200 & 0 \\ 0 & 96000 & 0 & 19200 & 0 & -38400 \\ 0 & 0 & 72000 & 0 & 28800 & 0 \\ 0 & 19200 & 0 & 75840 & 0 & -7680 \\ 19200 & 0 & 28800 & 0 & 39840 & 0 \\ 0 & -38400 & 0 & -7680 & 0 & 249600 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

### Cas des matrices $M$ et $K$ non symétriques

Détruisons artificiellement la symétrie des matrices  $M$  et  $K$  en multipliant une des équations par un coefficient multiplicatif. Dans l'exemple qui va suivre, c'est la 4ème équation qui a été modifiée :

$$M = \begin{bmatrix} 900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 900 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 900 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 450 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 0 & 550 \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

$$K = \begin{bmatrix} 96000 & 0 & 0 & 0 & 19200 & 0 \\ 0 & 96000 & 0 & 19200 & 0 & -38400 \\ 0 & 0 & 72000 & 0 & 28800 & 0 \\ 0 & 76.8 & 0 & 303.36 & 0 & -30.72 \\ 19200 & 0 & 28800 & 0 & 39840 & 0 \\ 0 & -38400 & 0 & -7680 & 0 & 249600 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

### 5.6.2 Résolution

Le problème de vibrations libres s'écrit :

$$M\ddot{X} + KX = 0$$

Pour le résoudre, nous avons utilisé la méthode présentée. Nous avons développé un code de calcul en langage Fortran 77 et en utilisant l'algorithme ascendant présenté au paragraphe §5.4.1. Pour résoudre l'équation différentielle en  $\gamma$ , représentant l'étape (5) de l'algorithme, nous avons utilisé la méthode Runge Kutta d'ordre 4 sur un pas de temps petit afin d'utiliser les propriétés de l'exponentielle proposées au paragraphe §5.5.4. Les deux

cas symétriques et non-symétriques ont été envisagés, afin de valider les capacités de la méthode de résolution quelles que soient les propriétés de symétrie des matrices du système.

Pour cet exemple, sur un ordinateur Origin 200 cadencé à 180 Mhz, le temps de calcul a été de 5.325 secondes dans le cas des matrices symétriques et de 5.332 secondes dans le cas des matrices non-symétriques. Une précision de  $10^{-3}$  dans la détermination des valeurs de  $\gamma$  a été imposée.

### 5.6.3 Comparaison des résultats obtenus dans les cas symétriques et non symétriques

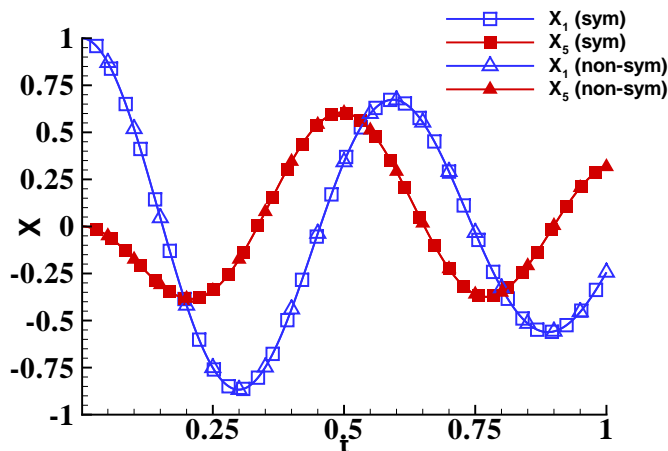


FIG. 5.2 – Vibrations *libres non amorties* d'un modèle de véhicule automobile. Comparaison des résultats selon le cas : matrices symétriques et matrices non symétriques.

Nous avons calculé l'évolution temporelle de  $X$ , pour chacun des deux cas, sur une durée de 10 secondes, avec une discrétisation temporelle de  $10^{-3}$ s. Comme le montre la figure 5.2, sur une durée limitée à 1s pour une plus grande lisibilité, dans l'un et l'autre cas (symétrique ou non-symétrique) les résultats sont identiques. C'est pourquoi, dans l'analyse qui suit, nous ne présentons plus qu'un seul jeu de résultats  $x_i$ .

### 5.6.4 Analyse des résultats

Guidés par l'amplitude des oscillations et pour faciliter la lecture nous avons présenté les 1ère, 3ème et 5ème coordonnées sur la figure 5.3 et les 2ème, 4ème et 6ème coordonnées sur la figure 5.4. Par ailleurs nous avons représenté, sur une durée totale de 50 secondes, avec une échelle temporelle logarithmique, l'évolution des coordonnées impaires et paires respectivement sur les figures 5.5 et 5.6.

Ces deux figures mettent clairement en évidence l'absence d'amortissement du système,

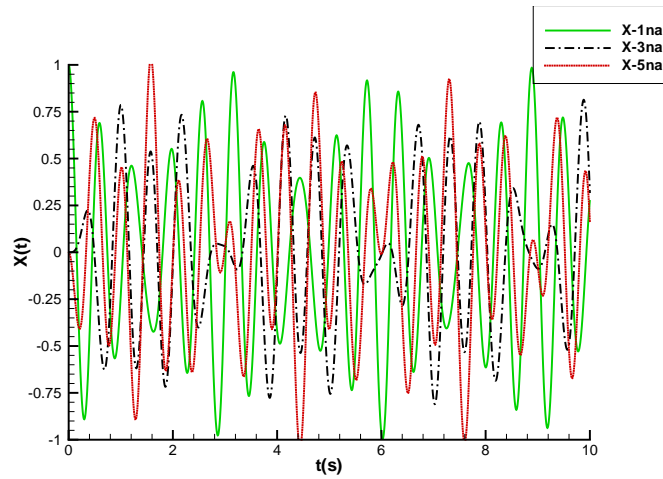


FIG. 5.3 – Vibrations *libres non amorties* d'un modèle de véhicule automobile, évolution temporelle des composantes 1,3 et 5 sur 10 secondes.

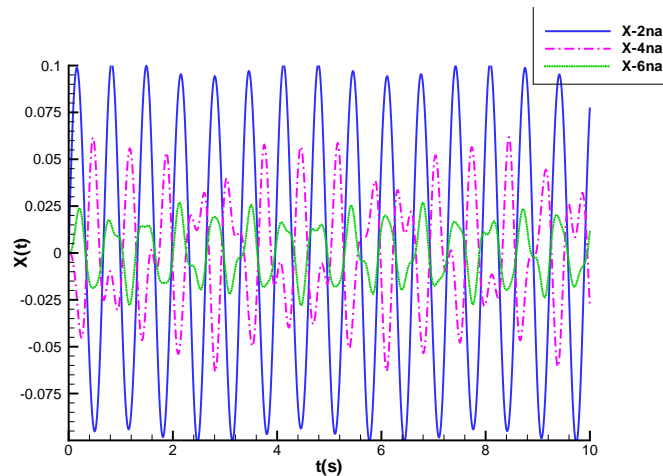


FIG. 5.4 – Vibrations *libres non amorties* d'un modèle de véhicule automobile, évolution temporelle des composantes 2,4 et 6 sur 10 secondes.

tout au moins sur les 50 secondes calculées. De plus, les figures 5.3 et 5.4 montrent que chaque composante de  $X(t)$  est la somme de plusieurs fonctions sinusoïdales montrant ainsi l'existence de plusieurs fréquences propres associées à chaque composante. Ainsi, par exemple pour  $x_1$ , il apparaît clairement une basse fréquence de période de l'ordre de 6 secondes et une haute fréquence de période de l'ordre de 0.6 seconde. On remarque de plus le déphasage qui existe entre les différentes composantes du vecteur position  $X(t)$ . L'extraction des fréquences au moyen d'une analyse fréquentielle de  $X(t)$  par transformée de Fourier fera l'objet du prochain chapitre.

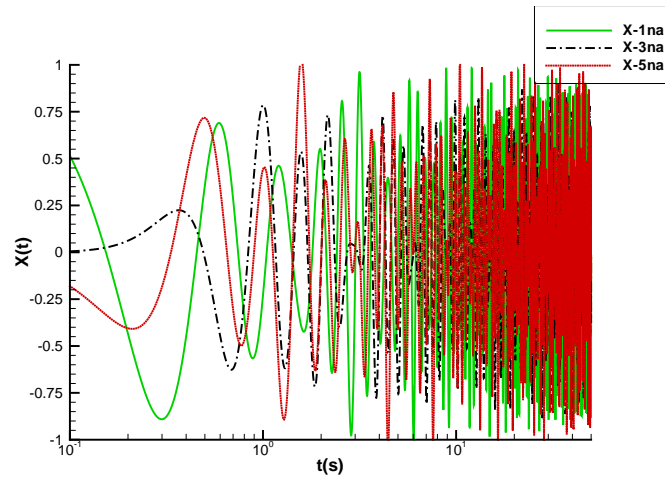


FIG. 5.5 – Vibrations *libres non amorties* d'un modèle de véhicule automobile, évolution temporelle des composantes 1,3 et 5 sur 50 secondes, échelle logarithmique.

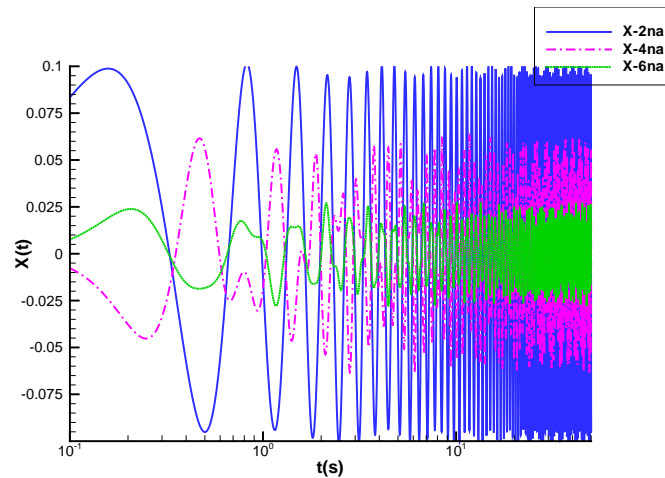


FIG. 5.6 – Vibrations *libres non amorties* d'un modèle de véhicule automobile, évolution temporelle des composantes 2,4 et 6 sur 50 secondes, échelle logarithmique.

## 5.7 Validation de la méthode : cas des *vibrations libres amorties* d'un véhicule automobile

### 5.7.1 Position du problème

Les constructeurs automobiles, pour augmenter la stabilité des véhicules ont placé des amortisseurs en différents endroits de la voiture. L'amortissement d'une voiture se modélise sous la forme de 8 amortisseurs horizontaux et 4 amortisseurs verticaux. Les amortisseurs exercent des forces de rappels proportionnelles aux vitesses d'élongation ce qui conduit à

introduire dans les équations du mouvement un terme linéaire en  $\dot{X}$  que nous noterons  $C\dot{X}$ . Les expressions des matrices d'amortissement  $C$  sont données au paragraphe suivant.

L'évolution de l'équation de mouvement d'un système vibratoire non-conservatif est modélisée par :

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0 \quad (5.60)$$

Nous avons choisi arbitrairement les conditions initiales suivantes :

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \dot{X}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

### Matrice $C$ symétrique

La matrice  $C$  est symétrique et s'exprime :

$$C = \begin{bmatrix} 190 & 0 & 0 & 0 & -38 & 0 \\ 0 & 190 & 0 & 38 & 0 & -76 \\ 0 & 0 & 322 & 0 & 128.8 & 0 \\ 0 & 38 & 0 & 329.608 & 0 & -15.2 \\ -38 & 0 & 128.8 & 0 & 522.8 & 0 \\ 0 & -76 & 0 & -15.2 & 0 & 494 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

### Matrice $C$ non symétrique

La matrice  $C$  des amortissements prend une forme non symétrique lorsqu'on modifie la 4ème équation. Elle est donnée par :

$$C = \begin{bmatrix} 190 & 0 & 0 & 0 & -38 & 0 \\ 0 & 190 & 0 & 38 & 0 & -76 \\ 0 & 0 & 322 & 0 & 128.8 & 0 \\ 0 & 0.152 & 0 & 1.3184 & 0 & -0.0608 \\ -38 & 0 & 128.8 & 0 & 522.8 & 0 \\ 0 & -76 & 0 & -15.2 & 0 & 494 \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

#### 5.7.2 Comparaison des résultats obtenus dans les cas symétriques et non symétriques

Les résultats obtenus pour chacun des deux cas envisagés, dans le cas des vibrations **amorties**, sont similaires comme nous pouvons le constater sur le graphique 5.7 présentant l'évolution temporelle des première et cinquième composantes de  $X$ , sur une durée limitée à

1 s pour une plus grande lisibilité. C'est pourquoi dans l'analyse qui suit, nous ne présentons plus qu'un seul jeu de résultats  $x_i$  avec  $i = 1..6$ ) sur une durée limitée à 1 seconde. Ceci démontre clairement que notre méthode ne nécessite pas de condition particulière de symétrie sur les matrices  $M$ ,  $C$  et  $K$ .

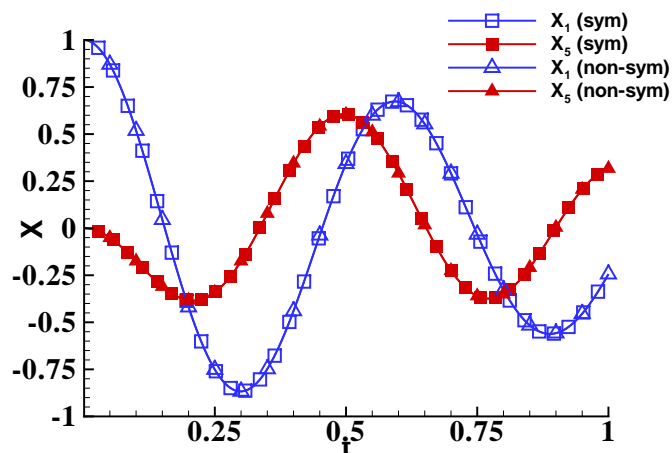


FIG. 5.7 – Vibrations *libres amorties* d'un modèle de véhicule automobile. Comparaison des résultats selon le cas considéré : matrices symétriques et matrices non symétriques

### 5.7.3 Analyse des résultats

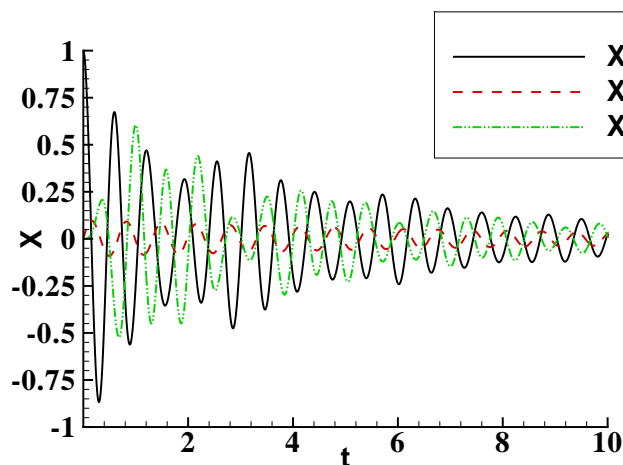


FIG. 5.8 – Vibrations *libres amorties* d'un modèle de véhicule automobile, évolution temporelle des composantes 1, 3 et 5 sur 10 secondes.

L'évolution temporelle entre 0 et 10 secondes de la réponse  $X(t)$  de la voiture soumise



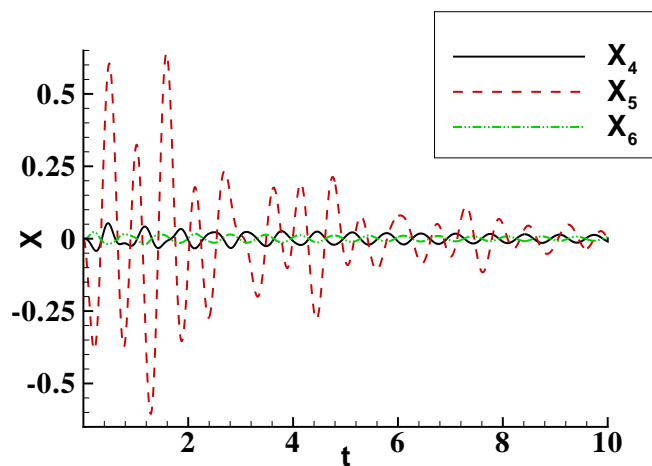


FIG. 5.9 – Vibrations *libres amorties* d'un modèle de véhicule automobile, évolution temporelle des composantes 2,4 et 6 sur 10 secondes.

à des vibrations libres amorties est représentée figures 5.8 et 5.9, pour les composantes paires et impaires de  $X(t)$ , respectivement.

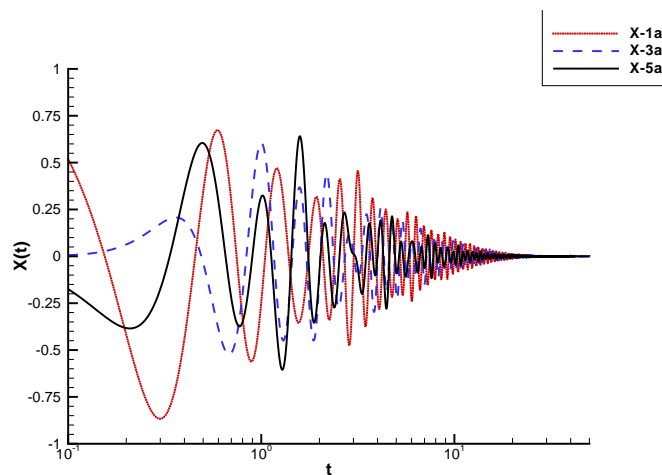


FIG. 5.10 – Vibrations *libres amorties* d'un modèle de véhicule automobile, évolution temporelle des composantes 1,3 et 5 sur 50 secondes, échelle logarithmique.

Puis, nous avons calculé  $X(t)$  sur un intervalle de 50 secondes. L'évolution temporelle des composantes paires et impaires de  $X(t)$  est présentée sur cette durée, respectivement sur les figures 5.10 et 5.11. L'utilisation d'une échelle temporelle logarithmique permet de mettre en évidence l'amortissement. Comme précédemment (cf cas sans amortissement), la distinction paire-impair provient des amplitudes de variations des différentes composantes. Les figures 5.8 et 5.9 montrent visiblement l'amortissement du signal ce qui rend

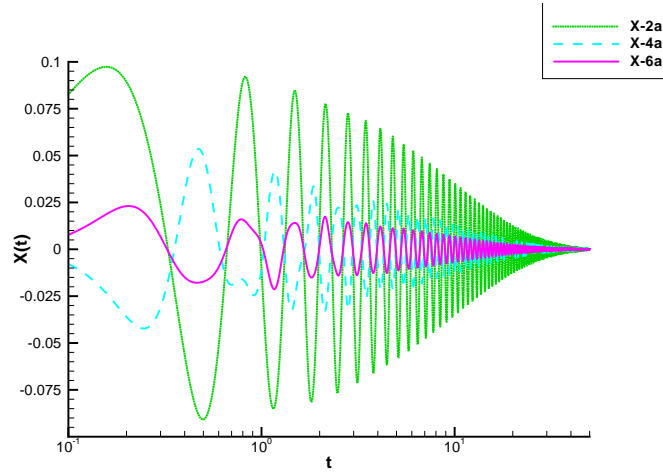


FIG. 5.11 – Vibrations **libres amorties** d'un modèle de véhicule automobile, évolution temporelle des composantes 2,4 et 6 sur 50 secondes, échelle logarithmique.

plus délicate une approche fréquentielle '*de visu*'. Au vu de l'évolution de chaque composante, il est encore relativement facile d'estimer la haute fréquence. En revanche, une estimation des basses fréquences requiert une méthode adaptée. C'est ce que nous ferons par la suite en proposant une analyse fréquentielle des composantes  $x_i(t)$ .

## 5.8 Étude des vibrations forcées

Dans ce paragraphe nous allons étudier le mouvement forcé d'un système mécanique discret linéaire à  $n$  degrés de liberté amorti et excité par des efforts extérieurs variables  $F(t)$ . Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, son mouvement est régi par un ensemble d'équations différentielles du second ordre à coefficients constants nantis de conditions initiales. Ces équations s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$M \ddot{X} + C \dot{X} + K X = F(t) \quad (5.64)$$

avec des conditions initiales données :

$$\begin{cases} X(0) = X_0 \\ \dot{X}(0) = \dot{X}_0 \end{cases} \quad (5.65)$$

Comme précédemment les matrices  $M$ ,  $C$  et  $K$  sont respectivement la matrice de masse, la matrice des amortissements et la matrice des raideurs. Ce sont des matrices carrées d'ordre  $n$  qui sont composées d'éléments constants connus.

Le régime forcé d'un oscillateur généralisé correspond à la solution complète de l'équation différentielle (5.64). Il est la somme d'une solution particulière de l'équation avec second

membre et de la solution générale de l'équation sans second membre. Sur le plan mathématique, un problème de régime forcé peut être classiquement abordé de diverses façons :

- recherche directe de solutions particulières
- transformation de Laplace qui permet de remplacer le problème différentiel par un problème algébrique
- transformation de Fourier
- analyse numérique

On peut se reporter, par exemple, aux ouvrages [Axi01c], [GR93] et [LJ80] où ces différentes méthodes sont présentées.

Nous utiliserons les mêmes notations et la même méthode que pour les vibrations libres jusqu'aux étapes (4) et (5) de l'algorithme ascendant présenté au paragraphe §5.4.1 où  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont calculés. Ensuite nous adoptons la méthode de variation des constantes initiée par Lagrange. Nous recherchons une solution du type :

$$X(t) = \phi_1(t)V_1(t) + \phi_2(t)V_2(t) \quad (5.66)$$

Cette fois les vecteurs  $V_1$  et  $V_2$  ne sont plus constants, mais dépendent du temps. Nous imposons sur  $V_1$  et  $V_2$  la condition supplémentaire.

$$\phi_1 \dot{V}_1 + \phi_2 \dot{V}_2 = 0 \quad (5.67)$$

la dérivée première de  $X$  est alors simplement :

$$\dot{X}(t) = \dot{\phi}_1(t)V_1(t) + \dot{\phi}_2(t)V_2(t) \quad (5.68)$$

En la dérivant, la condition (5.67) implique aussi :

$$\phi_1 \ddot{V}_1 + \phi_2 \ddot{V}_2 = -\dot{\phi}_1 \dot{V}_1 - \dot{\phi}_2 \dot{V}_2$$

Par suite :

$$\ddot{X}(t) = \ddot{\phi}_1 V_1 + \ddot{\phi}_2 V_2 + \dot{\phi}_1 \dot{V}_1 + \dot{\phi}_2 \dot{V}_2$$

Les conditions initiales que nous avons fixées précédemment imposent :

$$\begin{aligned} \phi_1(0) &= B_0, \dot{\phi}_1(0) = B_1 \\ \phi_2(0) &= 0, \dot{\phi}_2(0) = B_0. \end{aligned}$$

En prenant  $t = 0$  dans (5.66) et dans (5.68) on peut relier les conditions initiales sur  $V_1$  et  $V_2$  à celles sur  $X$  :

$$\begin{cases} X_0 = B_0 V_1(0) \\ \dot{X}_0 = B_1 V_1(0) + B_0 V_2(0) \end{cases} \quad (5.69)$$

Ce système linéaire peut facilement s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} V_1(0) = \frac{1}{k_0} M X_0 \\ V_2(0) = \frac{M}{k_0} (\dot{X}_0 - B_1 V_1). \end{cases} \quad (5.70)$$

La recherche de  $X$  satisfaisant (5.64) se ramène à trouver  $V_1$  et  $V_2$  solutions du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \phi_1 \dot{V}_1 + \phi_2 \dot{V}_2 = 0 \\ M \phi_1 \dot{V}_1 + M \phi_2 \dot{V}_2 = F(t) \end{cases} \quad (5.71)$$

qui peut s'écrire sous la forme matricielle  $2n \times 2n$ ,

$$G \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

en introduisant la matrice carrée  $2n \times 2n$ ,

$$G = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ M \phi_1 & M \phi_2 \end{bmatrix}. \quad (5.73)$$

Les notions d'adjugée et de déterminant, en dimension  $2n$ , nous conduisent à :

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \frac{Adj G}{det G} \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

et, par intégration,

$$\begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(0) \\ V_2(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \frac{Adj G(s)}{det G(s)} \begin{bmatrix} 0 \\ F(s) \end{bmatrix} ds \quad (5.75)$$

Finalement,

$$X(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

est la solution cherchée.

## 5.9 Algorithme pour les vibrations forcées

(1) Algorithme Linealg2 ascendant :

- (a) Entrer  $n, M, K, C$
- (b) Calculer, par l'algorithme de Souriau :

$$\begin{cases} k_0 = det M \\ B_0 = adj M \end{cases} \quad (5.77)$$

(c) Calculer

$$\begin{cases} k_1 = tr(C Adj M) \\ B_1 = \frac{B_0}{k_0} (k_1 I_n - C B_0) \end{cases} \quad (5.78)$$

(d) Pour  $i$  allant de 2 à  $2n - 2$  faire

$$k_i = \frac{1}{i}(\text{tr}(C B_{i-1}) + 2 \text{tr}(K B_{i-2}))$$

et

$$B_i = \frac{B_0}{k_0}[k_i I - C B_{i-1} - K B_{i-2}]$$

(e) Pour  $i$  allant de  $2n - 1$  à  $2n$  faire

$$k_i = \frac{1}{i}(\text{tr}(C B_{i-1}) + 2 \text{tr}(K B_{i-2}))$$

et

$$B_i = 0$$

(2) Déterminer  $\gamma_1$  solution de l'équation différentielle (5.18) en respectant les conditions initiales :

$$\begin{cases} \gamma_1(0) = \gamma_1^{(1)}(0) = \gamma_1^{(2)}(0) = \dots = \gamma_1^{(2n-3)}(0) = \gamma_1^{(2n-1)}(0) = 0 \\ \gamma_1^{(2n-2)}(0) = 1 \end{cases} \quad (5.79)$$

(3) Déterminer  $\gamma_2$  solution de l'équation différentielle (5.18) en respectant les conditions initiales :

$$\begin{cases} \gamma_2(0) = \gamma_2^{(1)}(0) = \gamma_2^{(2)}(0) = \dots = \gamma_2^{(2n-3)}(0) = \gamma_2^{(2n-2)}(0) = 0 \\ \gamma_2^{(2n-1)}(0) = 1 \end{cases} \quad (5.80)$$

(4) Tabuler  $\phi_1$

$$\phi_1(t) = \sum_{i=0}^{2n-2} B_i \gamma_1^{(2n-2-i)}(t)$$

(5) Tabuler  $\phi_2$

$$\phi_2(t) = \sum_{i=0}^{2n-2} B_i \gamma_2^{(2n-2-i)}(t)$$

(6) Déterminer les conditions initiales sur  $V_1$  et  $V_2$

$$\begin{cases} V_1(0) = \frac{1}{k_0} M X_0 \\ V_2(0) = \frac{M}{k_0} (\dot{X}_0 - B_1 V_1(0)) \end{cases} \quad (5.81)$$

(7) Dériver  $\phi_1$  et  $\phi_2$

(8) Tabuler la matrice  $G$

$$G(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ M\dot{\phi}_1(t) & M\dot{\phi}_2(t) \end{bmatrix}. \quad (5.82)$$

(9) Tabuler par l'algorithme de Souriau le déterminant et l'adjuguée de  $G$

(10) intégrer de 0 à  $t$  par la méthode des trapèzes

$$\int_0^t \frac{Adj G(s)}{det G(s)} \begin{bmatrix} 0 \\ F(s) \end{bmatrix} ds \quad (5.83)$$

(11) Calculer :

$$\begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(0) \\ V_2(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \frac{Adj G(s)}{det G(s)} \begin{bmatrix} 0 \\ F(s) \end{bmatrix} ds \quad (5.84)$$

(12) Calculer

$$X(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

**Remarque 21** *Un raisonnement similaire peut se développer pour l'algorithme descendant.*

## 5.10 Application au cas de l'avion souple amorti

### 5.10.1 Modélisation de l'avion souple amorti

Afin de tester notre algorithme nous avons considéré un modèle simplifié d'avion souple possédant 5 modes de fuselage pour lequel les matrices de masse  $M$ , d'amortissement  $C$  et de raideur  $K$  sont congruentes (définition 33) à des matrices diagonales connues.

$$M = Q^{-1T} M_q Q^{-1};$$

$$C = 4\pi Q^{-1T} C_q Q^{-1};$$

$$K = 4\pi^2 Q^{-1T} K_q Q^{-1}$$

Les trois matrices  $M_q$ ,  $C_q$  et  $D_q$  sont diagonales, de diagonales respectives :

$$[1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8], [0.1, 0.125, 0.15, 0.175, 0.2], [4, 6.25, 9, 12.25, 16] \quad (5.86)$$

La matrice  $5 \times 5$   $Q$ , liée à la forme de l'avion souple amorti a pour coefficients :

$$\begin{bmatrix} -0.049 & 0.6284 & 0.6708 & -0.2236 & 0.3206 \\ 0.654 & -0.0799 & 0.2236 & 0.6708 & 0.2567 \\ 0.3738 & 0.4445 & 0 & 0 & -0.8141 \\ 0.6540 & -0.0799 & -0.2236 & -0.6708 & 0.2567 \\ -0.049 & 0.6284 & -0.6708 & 0.2236 & 0.3206 \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

Nous supposons que l'avion est soumis à une force  $F$  constante et égale à  $Q^{-1T} F_q$  où toutes les composantes du vecteur  $F_q$  sont égales à 1.

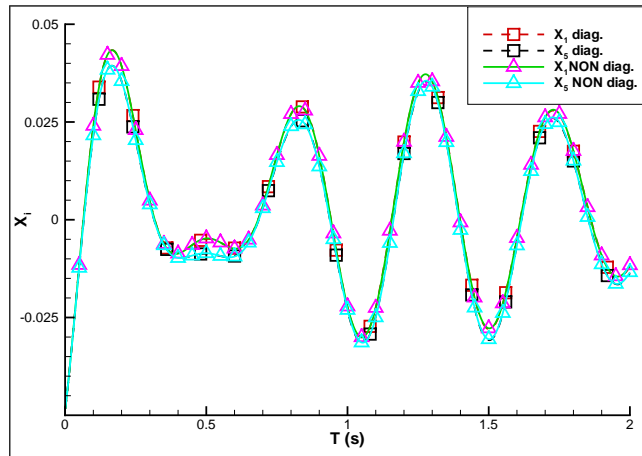


FIG. 5.12 – Comparaison de  $X$  obtenu par l'algorithme ascendant avec  $QX_q$  obtenu par Maple pour la 1ère et la 5ème composante

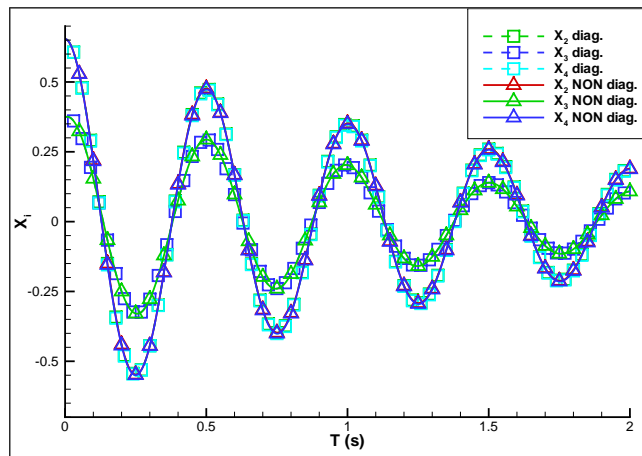


FIG. 5.13 – Comparaison de  $X$  obtenu par l'algorithme ascendant avec  $QX_q$  obtenu par Maple pour la 2ème, la 3ème et la 4ème composante

### 5.10.2 Analyse des résultats

La solution  $X$  de (5.64) est l'image par  $Q$  de la solution  $X_q$  du système découplé :

$$M_q \frac{d^2 X_q}{dt^2} + 4\pi C_q \frac{dX_q}{dt} + 4\pi^2 K_q X_q = F_q \quad (5.88)$$

A cause de la diagonalité des trois matrices  $M_q$ ,  $C_q$  et  $K_q$  la solution de ce système est très simple à obtenir. Nous l'avons obtenue par Maple. Nous avons choisi les conditions

initiales :

$$X(0) = QX_q(0) = Q \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \dot{X}(0) = Q\dot{X}_q(0) = Q \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.89)$$

nous avons comparé la solution numérique  $X(t)$  obtenue directement par notre méthode à partir du système couplé avec la solution  $QX_q$  obtenue par Maple à partir du système découplé. La comparaison des deux solutions est très satisfaisante. Ces résultats valident la méthode que nous avons développée pour déterminer la réponse d'un système vibratoire à une sollicitation forcée constante. Le cas de sollicitations non constantes n'a pas posé plus de difficultés.

## 5.11 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé deux méthodes pour résoudre les équations du mouvement des systèmes vibratoires en régime libre. La méthode ascendante qui est réservée au cas où le déterminant de la matrice des masses n'est pas trop petit et la méthode descendante qui s'applique lorsque c'est le déterminant de la matrice des raideurs qui n'est pas trop petit. Ces méthodes ne nécessitent pas que la condition de Caughey soit vérifiée et peuvent donc être utilisées même dans le cas d'un amortissement non classique. Nous avons illustré cette méthode en développant l'exemple d'un véhicule automobile simplifié. Enfin nous avons proposé un prolongement de ces méthodes au cas des vibrations forcées que nous avons validé par l'exemple d'un modèle simplifié d'avion souple possédant 5 modes de fuselage.



## Chapitre 6

# Extraction des fréquences et des formes propres

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Transformée de Fourier : définitions et propriétés . . . . .</b>	<b>112</b>
6.1.1	Des coefficients de Fourier à la transformée de Fourier . . . . .	112
6.1.2	Densité spectrale d'énergie . . . . .	113
6.1.3	Transformée de Fourier Discrète (TFD) . . . . .	114
6.1.4	Résolution spectrale de la FFT . . . . .	114
6.1.5	Transformée de Fourier Rapide . . . . .	115
6.1.6	Filtrage temporel . . . . .	116
<b>6.2</b>	<b>Extraction des fréquences propres de <math>X(t)</math> par FFT . . . . .</b>	<b>117</b>
6.2.1	Choix de la fenêtre de filtrage . . . . .	117
6.2.2	Analyse des Densités Spectrales d'Énergie (DSE) . . . . .	119
6.2.3	Critères de détection d'un pic de fréquence . . . . .	121
6.2.4	Optimisation de la résolution fréquentielle . . . . .	122
<b>6.3</b>	<b>Perspectives . . . . .</b>	<b>127</b>
<b>6.4</b>	<b>Détermination des vecteurs propres . . . . .</b>	<b>127</b>
6.4.1	Premier cas : $Q(\lambda_i)$ est non nulle . . . . .	127
6.4.2	Deuxième cas : $Q(\lambda_i)$ est nulle et $Q'(\lambda_i)$ est non nulle . . . . .	129
<b>6.5</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>131</b>

---

### Résumé

La méthode de résolution des équations du mouvement que nous avons mise en œuvre fournit l'évolution temporelle du vecteur position  $X(t)$ , sans jamais recourir à la recherche des fréquences et des formes propres du système mécanique étudié. Ces données caractéristiques du système peuvent être déduites *a posteriori* du vecteur  $X(t)$  par une analyse fréquentielle comme la transformée de Fourier. Qui plus est, cette méthode d'analyse permet la détermination de la densité d'énergie associée à chaque fréquence. Connaissant les fréquences propres du système, nous déterminons les vecteurs propres associés en les identifiant aux colonnes de la matrice adjuguée.

Dans ce chapitre, nous allons détailler l'analyse spectrale des fonctions  $X(t)$  au moyen de la Transformée de Fourier Discrète. Solution d'une équation différentielle,  $X(t)$  est une fonction déterministe du temps assimilable à un signal échantillonné  $X(n\delta t)$ ,  $\delta t$  désignant l'incrément temporel. Ce dernier est, au mieux, le pas de temps du processus numérique itératif de résolution de l'équation différentielle caractéristique dont la fonction  $\gamma$  est solution. Appliquant le théorème de Parseval-Plancherel (voir plus loin dans ce mémoire §6.1.3), nous pouvons déterminer la densité spectrale d'énergie de  $X(n\delta t)$  et, par la même, identifier les fréquences caractéristiques de ce spectre. Nous examinerons avec quelle précision la fréquence propre est susceptible d'être déterminée, ainsi que les conséquences éventuelles sur la précision des vecteurs propres associés.

## 6.1 Transformée de Fourier : définitions et propriétés

Nous ne nous étendrons pas sur les propriétés de la Transformée de Fourier. Pour plus de détails on pourra se reporter utilement à [Bel81], [Rei95], [Tho94], [Sur00] par exemple

### 6.1.1 Des coefficients de Fourier à la transformée de Fourier

La décomposition en série de Fourier est l'opération mathématique permettant d'exprimer une fonction périodique quelconque sous la forme d'une somme de fonctions harmoniques de différentes fréquences (exponentielles complexes). En modifiant d'une part, *l'amplitude* des sinusoïdes en les multipliant par des coefficients qui leur confèrent plus ou moins de "poids", et d'autre part, leurs *phases*, de manière à ce qu'elles s'additionnent ou se compensent, on restitue la fonction initiale. Ainsi, le développement en **série de Fourier** d'une fonction périodique  $x(t)$  de période  $T$  s'exprime :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}t}$$

le coefficient de la série de Fourier  $c_n$  associé à la composante  $n$  s'obtient par l'intégrale :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dt$$

La suite des coefficients complexes  $c_n$  constitue le spectre de la fonction périodique  $x(t)$ .

La décomposition en série de Fourier est un changement de base orthonormale : on remplace  $x(t)$  par une représentation  $(\mathcal{F}x)(f)$  sur la base  $f$ . On dit quelquefois que l'on passe de *l'espace des temps* à *l'espace des fréquences*.

Pour introduire la **Transformée de Fourier** examinons ce que devient le coefficient de Fourier  $c_n$  lorsque la fonction  $x(t)$  devient non périodique (c'est-à-dire lorsque la période  $T$  devient infinie). Notons  $f_e = \frac{1}{T}$  la distance spectrale entre 2 valeurs successives de  $c_n$ . Lorsque  $T$  tend vers  $+\infty$  cette distance tend vers 0 et  $c_n$  tend aussi vers 0. Une fonction non périodique aurait donc un spectre continu si celui-ci n'était pas identiquement nul.

Pour contourner cette difficulté, on considère :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} T c_n = \int_{-T}^{+T} x(t) e^{-\frac{i\pi n t}{T}} dt = (\mathcal{F}x)(f)$$

qui constitue la définition de la **Transformée de Fourier** de  $x(t)$  et s'interprète donc comme une densité de coefficient de Fourier [Tho94].

**Définition 37** : Par la transformée de Fourier, on peut associer à une fonction temporelle à valeurs complexes  $x(t)$ , une fonction  $(\mathcal{F}x)(f)$  à valeurs complexes, que l'on appelle *spectre* de  $x(t)$  et qui contient le "poids" de chacune des fréquences  $f$  présente dans la fonction initiale.

$$(\mathcal{F}x)(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2i\pi f t} dt$$

**Remarque 22** Il s'agit là d'une expression continue de la transformée de Fourier, qui sera redéfinie dans le cas d'un signal échantillonné périodiquement ou non.

### 6.1.2 Densité spectrale d'énergie

De manière générale, une fonction périodique du temps (un signal) est parfaitement décrite par la donnée de son intensité, sa fréquence et sa phase. En mécanique, c'est essentiellement le caractère énergétique du signal qui retient l'attention. L'énergie d'un signal réel continu  $x(t)$  sur l'intervalle de temps  $[t_1, t_2]$  est l'intégrale de son carré :

$$W_{t_1 t_2} = \int_{t_1}^{t_2} x(t)^2 dt$$

Si  $x(t)$  est complexe, l'énergie est donnée par l'intégrale du carré de son module :

$$W_{t_1 t_2} = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

L'énergie totale de la fonction temporelle (le signal) s'obtient en étendant l'intervalle d'intégration à l'ensemble de la droite réelle. Dans le cas d'une fonction du temps à valeurs complexes, cela conduit à :

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Si cette intégrale existe c'est-à-dire si  $x(t)$  est de carré sommable, on parle de fonction périodique à énergie totale finie. On appelle  $|x(t)|^2$  la *densité d'énergie de signal* ou de la *fonction temporelle*.

### 6.1.3 Transformée de Fourier Discrète (TFD)

**Théorème 6.1** : *Théorème de Parseval-Plancherel*

Soit  $x$  une fonction périodique supposée à énergie totale finie et  $(\mathcal{F}x)$  sa transformée de Fourier, alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |(\mathcal{F}x)(f)|^2 df$$

La quantité  $|(\mathcal{F}x)(f)|^2$  peut s'interpréter comme *une densité spectrale d'énergie*. Elle exprime comment l'énergie de la fonction temporelle se distribue sur les fréquences. On parle de "**spectre énergétique**".

L'utilisation des ordinateurs amène désormais à considérer des signaux ou fonctions temporelles  $x(t)$  échantillonné(e)s périodiquement. La variable de temps est dite *discrète* ou *discrétisée*. Il en est ainsi de la réponse  $X(t)$  que nous calculons numériquement par notre méthode. L'incrément temporel le plus petit correspond au pas de temps du processus numérique d'intégration de l'équation différentielle en  $\gamma$ .

Pour ce type de fonctions, on définit la Transformée de Fourier Discrète (**TFD**) par :

$$(\mathcal{F}x)(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{i2\pi nk}{N}}$$

Calculer la **TFD** d'une série de  $N$  valeurs échantillonnées d'une fonction  $x(t)$  correspond, à un facteur près, à calculer les  $N$  premiers coefficients de la série de Fourier de l'échantillonnage.

### 6.1.4 Résolution spectrale de la transformée de Fourier rapide

#### Fréquence de coupure : Théorème de Shannon

**Théorème 6.2** *Le théorème de Shannon (découvert indépendamment et simultanément par Nyquist) s'énonce ainsi : si on veut échantillonner, une fonction à spectre limité sans perdre d'information, il faut le faire à une fréquence au moins égale au double de la plus haute fréquence qu'elle contient.*

Ainsi, en échantillonnant une fonction temporelle à une fréquence  $f_e$  donnée, par exemple 20 kHz, les fréquences supérieures à 10 kHz seront en quelque sorte perdues.

#### Résolution fréquentielle

Considérons une fonction du temps  $X(t)$  échantillonnée de manière régulière au pas  $\delta t$  et dont nous connaissons  $N$  valeurs successives. Une représentation schématique en est donnée sur la figure 6.1. Si nous cherchons à présent à déterminer le spectre de cette

fonction au moyen de la Transformée de Fourier Discrète **TFD** :

- la valeur de la fréquence maximale  $f_{max}$  ou fréquence de coupure, directement reliée à l'incrément temporel de la discrétisation  $\delta t$  est, en application du théorème de Shannon :  $f_{max} = \frac{1}{2\delta t}$
- la résolution fréquentielle  $\delta f$ , et donc la plus petite fréquence ( $f_{min}$ ) du spectre qu'il est donné de mesurer, est :  $\delta f = \frac{f_{max}}{N} = \frac{1}{2N\delta t}$ .

**Remarque 23** La valeur de la résolution fréquentielle énoncée plus haut n'est qu'approchée ; selon la parité de  $N$ , elle prend la valeur  $\frac{1}{2N\delta t}$  ou  $\frac{1}{2(N+1)\delta t}$ . Cependant,  $N$  est en général élevé et il y a peu de différence entre les deux expressions. Aussi, dans la suite de ce mémoire, nous ne retiendrons que la première des deux valeurs.

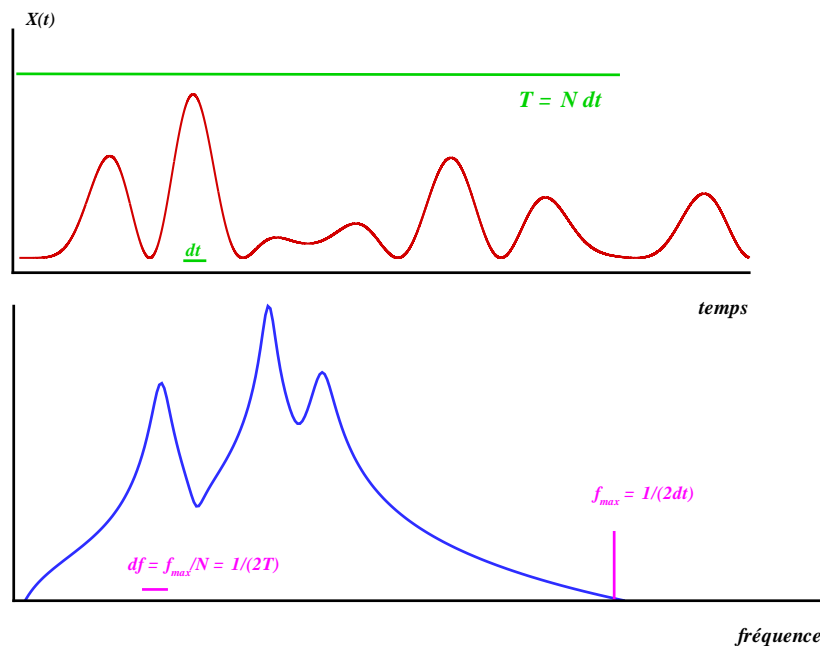


FIG. 6.1 – Représentation schématique d'une fonction continue  $x(t)$  et de sa transformée de Fourier  $\Xi(f)$ . Liens entre les paramètres de la discrétisation temporelle ( $N$  et  $\delta t$ ) de  $x(t)$ , et ceux,  $f_{max}$  et  $\delta f$ , de la représentation fréquentielle  $\Xi(f)$ .

### 6.1.5 Transformée de Fourier Rapide

La Transformation de Fourier Discrète requiert  $N^2$  additions et  $2N^2$  multiplications. Cela induit un temps de calcul prohibitif pour les  $N$  grands. Cependant, il existe un algorithme astucieux, l'algorithme du "papillon", qui permet de réduire le temps de calcul si le nombre d'échantillons  $N$  est une puissance de 2. Si  $N$  vaut  $2^k$  le calcul ne requiert que  $Nk$  additions et  $\frac{N}{2}(k-1)$  multiplications.

L'idée fondamentale de la Transformée de Fourier Rapide, ou *Fast Fourier Transform* (**FFT** en anglais) fut pressentie par Carl Friedrich Gauss. Celui-ci l'a conçue probablement en 1805, deux ans avant que Fourier ne présente son mémoire à l'Académie des Sciences de Paris. En 1965, Cooley et Tuckey [CT65] ont décrit et mis en pratique pour la première fois l'algorithme de la Transformée de Fourier Rapide, désormais très largement diffusé.

### 6.1.6 Filtrage temporel

Nous ne connaissons pas la fonction que nous étudions de  $-\infty$  à  $+\infty$ , mais de 0 à  $N\delta t$ . Si  $f(0) \neq f(N\delta t)$  il apparaît une discontinuité car la transformée de Fourier rend artificiellement périodique  $x(t)$ . Cette discontinuité disparaîtra si on multiplie  $x(t)$  par une fonction de fenêtrage s'annulant au début et à la fin de la durée totale d'échantillonnage.

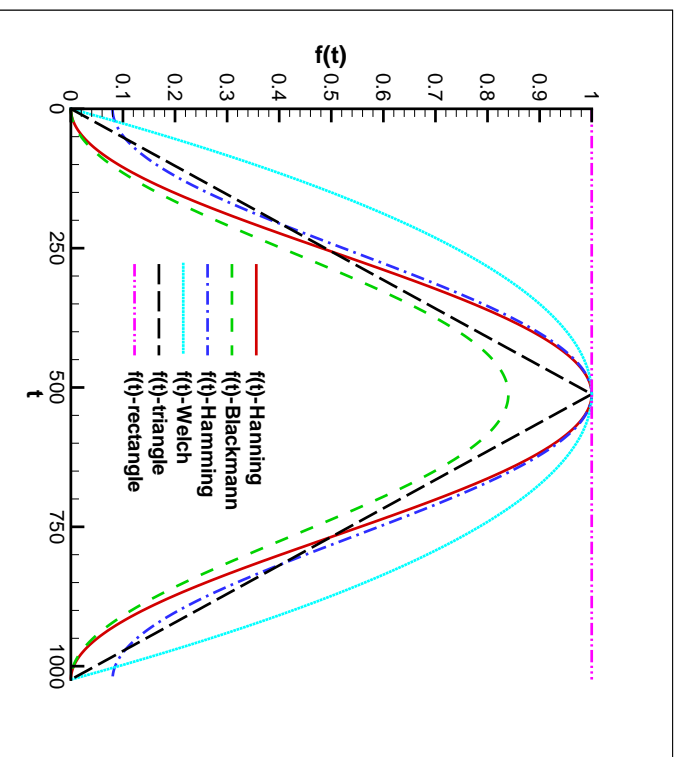


FIG. 6.2 – Représentation des différentes fenêtres de filtrage utilisées.

Parmi les fenêtres  $F_n$  les plus courantes, nous retiendrons les suivantes (cf figure 6.2):

- Rectangulaire :  $F_n = 1$
- de Bartlett (de forme triangulaire)
- de Hamming : 
$$F_n = 0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \text{ pour } |n| \leq \frac{N}{2}$$

(Dans une représentation fréquentielle, cette fenêtre présente un pic central ou premier lobe, de largeur double de celui de la fenêtre rectangulaire mais l'atténuation des oscillations est sensiblement plus importante que celle de la fenêtre rectangulaire.)

– de Hamming :

$$F_n = 0.54 + 0.54 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \text{ pour } |n| \leq \frac{N}{2}$$

(Cette fenêtre a un pic central comme celle de Hanning de largeur double de celui de la fenêtre rectangulaire. Par rapport à la fenêtre de Hanning, le paramètre de la fenêtre de Hamming est ajusté pour engendrer une annulation du spectre au milieu ( $f = 2.5$ ) du second lobe. Ceci a pour effet d'augmenter l'atténuation.)

– de Blackman : il s'agit d'une extension de l'idée de Hamming

$$F_n = 0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right) \text{ pour } |n| \leq \frac{N}{2}$$

$$F_n = 0 \text{ ailleurs}$$

– de Welch :

$$F_n = 1 - \frac{n - \frac{1}{2}(N - 1)}{\frac{1}{2}N + 1}$$

## 6.2 Extraction des fréquences propres de $X(t)$ par FFT

### 6.2.1 Choix de la fenêtre de filtrage

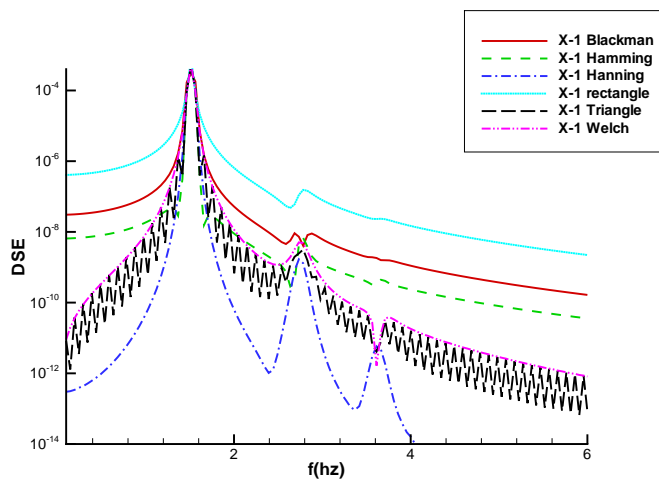


FIG. 6.3 – Densité spectrale d'énergie de la première composante  $X_1$  : comparaison des résultats obtenus pour différentes fenêtres.

Reprenons l'exemple de la voiture avec amortissement. Sur les figures 6.3 et 6.4 nous avons représenté les Transformées de Fourier de la première  $X_1$  et de la sixième  $X_6$  composante du vecteur déplacement. Ces densités spectrales d'énergie ont été obtenues avec  $10^{12}$

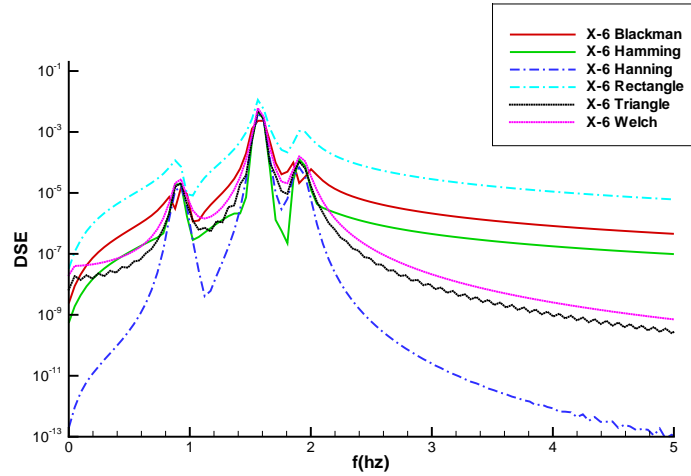


FIG. 6.4 – Densité spectrale d'énergie de la sixième composante  $X_6$  : comparaison des résultats obtenus pour différentes fenêtres.

échantillons de l'évolution temporelle de  $X$  sur 10s, calculée avec une précision de  $10^{-3}$  sur  $\gamma$ .

**Remarque 24** Nous verrons par la suite que les valeurs des fréquences  $f$  déduites de la TFD correspondent effectivement aux pulsations  $\omega$ , racines du polynôme caractéristique, fréquences et pulsations étant reliées par :

$$f = \frac{2\pi}{\omega}$$

Selon la fenêtre de filtrage utilisée, la densité spectrale d'énergie de chaque composante fait apparaître clairement au plus 3 pics. Tout dépend de l'intensité des différents pics. S'ils sont d'intensité sensiblement identique, comme dans le cas de la composante  $X_6$ , toutes les fenêtres de filtrage que nous avons testées mettent en évidence les trois fréquences marquées. A contrario, si l'énergie se répartit de manière privilégiée sur un pic, comme dans le cas de la composante  $X_2$ , seule la fenêtre de Hanning permet de mettre les trois fréquences en évidence. Ainsi, compte tenu de la dynamique du spectre calculé après filtrage avec la fenêtre de Hanning, celle-ci semble la plus appropriée dans le cas présent.

L'analyse des densités spectrales d'énergie des 6 composantes de  $X$  montre l'existence de 6 fréquences, distribuées à raison de 3 par composante. Pour chaque composante, les valeurs approchées des fréquences propres sont proposées dans la matrice d'interaction présentée dans le tableau 6.1.

L'existence de 3 fréquences par composante s'explique par le couplage des équations du système :

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = 0$$



. Si ce n'était pas le cas, comme par exemple si  $M, C$  et  $K$  étaient diagonales, chaque fréquence serait alors associée à une composante unique.

	$f_1(Hz)$	$f_2(Hz)$	$f_3(Hz)$	$f_4(Hz)$	$f_5(Hz)$	$f_6(Hz)$
$X_i$	0.907	1.511	1.571	1.907	2.746	3.631
$X_1$	✓		✓	✓		
$X_2$		✓			✓	✓
$X_3$	✓		✓	✓		
$X_4$		✓			✓	✓
$X_5$	✓		✓	✓		
$X_6$		✓			✓	✓

TAB. 6.1 – Matrice d'interaction fréquence propre / composante.

### 6.2.2 Analyse des Densités Spectrales d'Énergie (DSE)

Nous proposons une comparaison des densités spectrales d'énergie (DSE), dans les cas avec et sans amortissement, sur  $X_2$  et  $X_3$ . Bien que basées sur l'analyse de ses deux cas, les propriétés déduites sont applicables à l'ensemble des autres composantes de  $X$ . Dans le cas non amorti, les densités spectrales d'énergie sont présentées sur les figures 6.5 et 6.7 ; et avec amortissement, sur les figures 6.6 et 6.8.

Dans tous les cas, l'évolution temporelle d'une composante de  $X$  sur une durée allant de 5s à 1000s, a été calculée avec une précision de  $10^{-3}$  sur la fonction  $\gamma$ . La FFT d'une composante a, pour sa part, été calculée sur un nombre variable d'échantillons dépendant de la durée. Les conditions de calcul sont précisées dans le tableau 6.5.

L'analyse des quatre figures suggère quelques remarques :

- Pour une composante donnée, les fréquences propres sont clairement mises en évidence. L'énergie associée demeure la même, puisque la DSE opère sur la même fonction temporelle.
- La prise en compte de l'amortissement n'affecte en rien ni les valeurs des fréquences propres d'une composante donnée, ni la répartition de l'énergie sur les fréquences.
- Dans les cas avec amortissement (cf. figures 6.6 et 6.8) les DSE diffèrent seulement par l'intensité des pics de fréquence. Celle ci va décroître à mesure que la durée sur laquelle est calculée la DSE s'allonge. À titre d'exemple, considérons la composante  $X_2$  (cf.6.6). Le pic de plus grande intensité, qui correspond à la fréquence de  $1.511Hz$ , décroît dans un rapport  $10^5$  quand la durée sur laquelle est calculée la DSE de la composante, passe de 100 s à 1000s. Ce phénomène trahit la dissipation de l'énergie initiale par le système amorti. En l'absence d'amortissement, les pics conservent la même intensité, l'énergie initialement communiquée au système n'étant pas dissipée au cours du temps.
- Un échantillonnage relativement faible ne permet pas la discrimination des fréquences propres rapprochées. Ainsi, dans le cas de la composante  $X_3$  (cf figure 6.7), il est

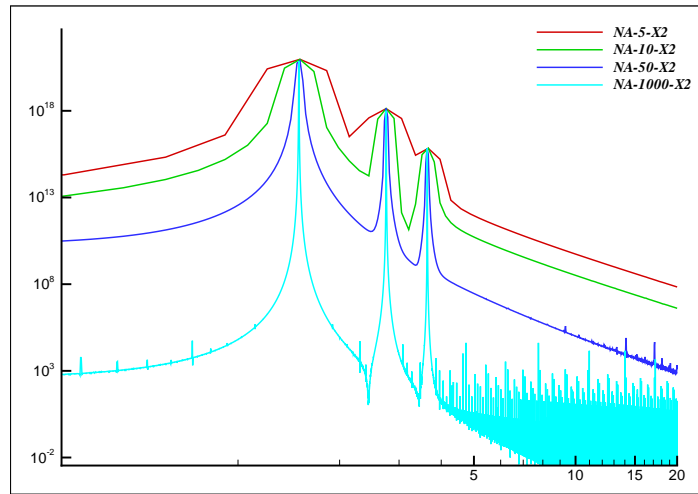


FIG. 6.5 – Comparaison des DSE de la composante  $X_2$ , cas sans amortissement ( $NA$ ), pour différentes conditions de calcul indiquées dans le tableau 6.5.

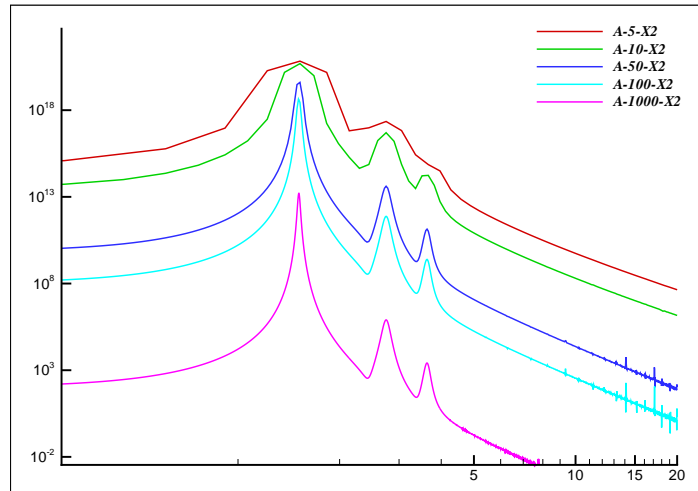


FIG. 6.6 – Comparaison des DSE de la composante  $X_2$ , cas avec amortissement ( $A$ ), pour différentes conditions de calcul indiquées dans le tableau 6.5.

nécessaire de calculer la DSE sur  $2^{14}$  échantillons (courbe  $NA - 50 - X3$ ) pour faire ressortir les deux fréquences différenciées :  $1.571$  et  $1.907Hz$

- Dans le cas où le nombre d'échantillons  $N$  est élevé (tableau 6.5), (courbe  $NA - 1000 - X2$  de la figure 6.5) un phénomène de repliement apparaît. Il se traduit par la présence de *fréquences parasites* sur le spectre. Ce phénomène, qui diffère en intensité suivant la composante considérée, est moins marqué dans le cas d'un système amorti (figures 6.6 et 6.8)

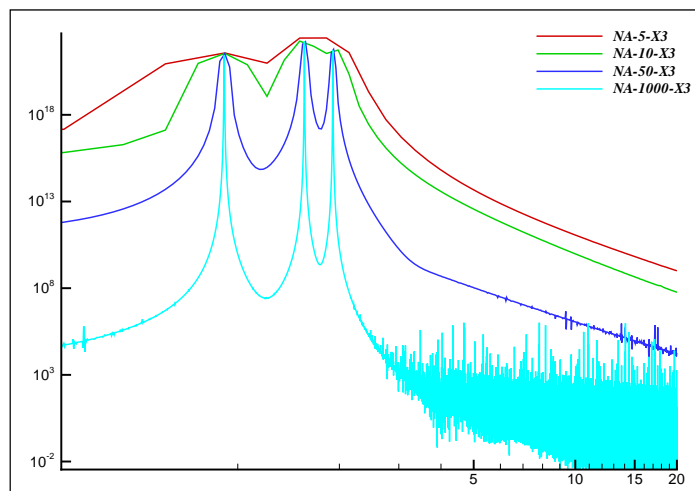


FIG. 6.7 – Comparaison des DSE de la composante  $X_3$ , cas sans amortissement (NA), pour différentes conditions de calcul indiquées dans le tableau 6.5.

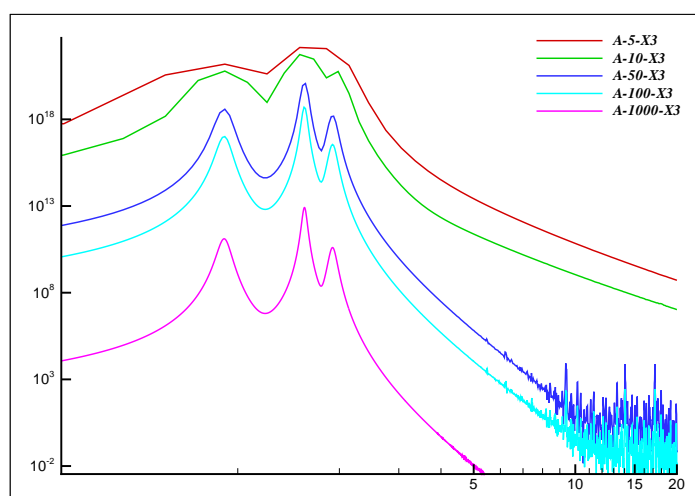


FIG. 6.8 – Comparaison des DSE de la composante  $X_3$ , cas avec amortissement (A), pour différentes conditions de calcul indiquées dans le tableau 6.5.

### 6.2.3 Critères de détection d'un pic de fréquence

A partir des DSE, nous avons cherché à extraire les pics de fréquence. Dans l'absolu, il s'agit tout simplement de la recherche des maxima d'une fonction. Pour s'affranchir des effets de repliement du spectre aux "hautes" fréquences, nous avons limité notre recherche au moyen de deux critères :

- par réduction de la plage de fréquence,
- par un critère sur la contribution du pic à l'énergie totale de la fonction  $X(t)$ .

Dans le cas présent, ces deux critères sont largement suffisants. Cependant, ils peuvent s'avérer nécessaires, sinon suffisants, pour peu que la résolution fréquentielle de la FFT soit médiocre et les pics de fréquence peu marqués et nombreux. Il peut en être ainsi dans le cas des problèmes réels qui possèdent un grand nombre de degrés de liberté et donc de fréquences propres.

Même si nous n'avons pas eu l'opportunité dans le cadre de ce travail d'appliquer notre méthode à un exemple comportant beaucoup de degrés de liberté, nous avons pensé intéressant de mettre en œuvre une méthode d'interpolation. Notre objectif est d'obtenir une estimation de la fréquence propre afin de voir dans quelle mesure elle diffère sensiblement de la valeur associée au pic de fréquence. Bien sûr, nous n'ignorons pas qu'il existe un grand nombre de méthodes d'interpolation plus ou moins sophistiquées. Mais, dans le cas présent, nous avons utilisé deux méthodes simples, en ne retenant pour le calcul que le pic d'intensité maximale ( $p_m$ ) et ses deux voisins immédiats ( $p_{m-1}$  et  $p_{m+1}$ ):

- *L'interpolation barycentrique* donne une estimation de la fréquence propre en calculant le barycentre de  $p_m$ ,  $p_{m-1}$  et  $p_{m+1}$
- *L'interpolation parabolique* donne une estimation de la fréquence propre comme sommet de la parabole passant par les pics  $p_m$ ,  $p_{m-1}$  et  $p_{m+1}$

Les valeurs des fréquences propres sont proposées dans le cas non amorti (NA) (tableau 6.2) et amorti (A) (tableau 6.3), pour un calcul de  $X(t)$  sur 10s avec une précision de  $10^{-3}$  sur la détermination des fonctions  $\gamma$ . Nous avons choisi d'échantillonner la fonction de manière relativement médiocre,  $2^{12}$  échantillons, soit une résolution spectrale  $df$  attendue de  $\frac{1}{20}$ . Ce choix est délibéré, afin de mettre en évidence l'influence de la méthode d'extraction des pics.

Dans le tableau 6.3, nous avons fait figurer la contribution relative de chaque fréquence propre à l'énergie associée à la composante considérée. Le chiffre en exposant entre parenthèses exprime le degré d'intensité de l'énergie associée à la fréquence, par exemple  $X_2^{(3)}$  correspond à la troisième fréquence propre en intensité de la deuxième composante de la réponse temporelle. A la lecture des tableaux 6.2 et 6.3, il apparaît que les pics de fréquence sont mis en évidence de manière approximative. Les deux approximations obtenues ne donnent satisfaction que lorsque la contribution du pic à l'énergie totale est suffisamment forte. Dans ce cas, l'approximation barycentrique semble offrir un degré de précision plus grand que celle parabolique. Il faut cependant relativiser ce résultat. Une étude beaucoup plus approfondie serait nécessaire pour dégager des conclusions. Le recours à des méthodes d'interpolation plus évoluées de type polynômial (Newton par exemple) devrait être mis en œuvre.

#### 6.2.4 Optimisation de la résolution fréquentielle

Le paragraphe précédent a déjà montré la dégradation des résultats quand le degré d'échantillonnage est faible. L'influence de la résolution fréquentielle de la FFT est évidente si l'on compare les graphes 6.9 et 6.10 qui montrent respectivement les DSE calculées à partir de l'évolution de  $X(t)$  sur une durée de 10 secondes (correspondant à  $2^{12}$  échantillons) et celle sur une durée de 1000 secondes (correspondant à  $2^{19}$  échantillons). Même si ces

Pic num.	Contrib. énergie totale en %	Max (Hz)	Para. (Hz)	Bary. (Hz)
$X_1^{(1)}$	43.0	1.58	1.568	1.611
$X_1^{(2)}$	0.0	0.91	0.915	0.923
$X_2^{(1)}$	66.0	1.52	1.520	1.514
$X_2^{(2)}$	0.0	2.74	2.748	2.747
$X_2^{(3)}$	0.0	3.66	3.648	3.637
$X_3^{(1)}$	41.9	1.52	1.549	1.596
$X_3^{(2)}$	12.6	1.91	1.949	1.918
$X_3^{(3)}$	0.0	0.91	0.913	0.912
$X_4^{(1)}$	44.9	1.52	1.520	1.514
$X_4^{(2)}$	20.9	2.74	2.748	2.749
$X_4^{(3)}$	0.4	3.66	3.649	3.637
$X_5^{(1)}$	35.7	1.98	1.931	1.910
$X_5^{(2)}$	10.0	0.91	0.914	0.912
$X_5^{(3)}$	0.0	1.52	1.536	1.542
$X_6^{(1)}$	59.4	1.52	1.520	1.514
$X_6^{(2)}$	3.5	2.74	2.748	2.749
$X_6^{(3)}$	3.1	3.66	3.649	3.637

TAB. 6.2 – Pics de fréquence extraits de la densité spectrale d'énergie cas Non Amorti (NA), 10 s précision de  $10^{-3}$  sur  $\gamma$ ,  $2^{12}$  échantillons (Para. : Approximation parabolique, Bary. : Approximation barycentrique).

Pic num.	Contrib.en %	pic (Hz)	para. (Hz)	Bary. (Hz)
$X_1^{(1)}$	45.7	1.83	1.802	1.749
$X_1^{(2)}$	0.0	0.91	0.992	1.289
$X_1^{(3)}$	64.7	1.52	1.520	1.514
$X_2^{(1)}$	65.9	1.52	1.521	1.514
$X_2^{(2)}$	0.0	2.74	2.745	2.744
$X_2^{(3)}$	0.0	3.66	3.597	3.601
$X_3^{(1)}$	51.1	1.52	1.552	1.576
$X_3^{(2)}$	0.0	0.91	0.912	0.912
$X_3^{(3)}$	5.3	1.98	1.965	1.738
$X_4^{(1)}$	63.6	1.52	1.520	1.514
$X_4^{(2)}$	2.1	2.75	2.747	2.748
$X_4^{(3)}$	0.3	3.66	3.652	3.639
$X_5^{(1)}$	24.4	1.93	1.937	1.889
$X_5^{(2)}$	0.0	1.55	1.539	1.659
$X_5^{(3)}$	0.0	0.91	0.914	0.912
$X_6^{(1)}$	65.4	1.52	1.520	1.514
$X_6^{(2)}$	0.2	2.75	2.748	2.749
$X_6^{(3)}$	0.1	3.66	3.645	3.634

TAB. 6.3 – Pics de fréquence extraits de la densité spectrale d'énergie cas Amorti, 10 s, précision de  $10^{-3}$  sur  $\gamma 2^{12}$  échantillons (Para. : Approximation parabolique, Bary. : Approximation barycentrique).

résultats concernant le cas avec amortissement, une évolution similaire est obtenue pour le cas sans amortissement.

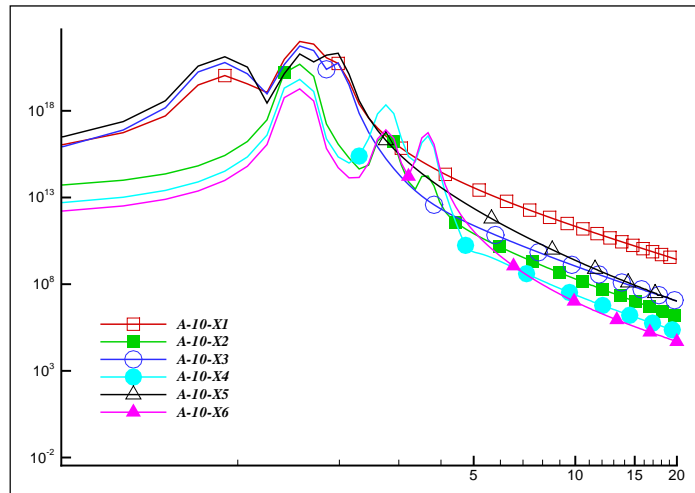


FIG. 6.9 – Comparaison des DSE des composantes de  $X$  dans le cas avec amortissement ( $A$ ), pour la condition de calcul sur 10 s.

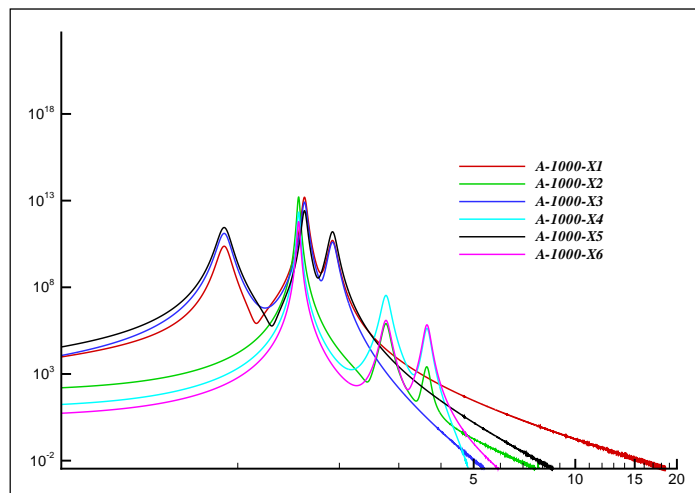


FIG. 6.10 – Comparaison des DSE des composantes de  $X$  dans le cas avec amortissement ( $A$ ), pour la condition de calcul sur 1000 s.

Nous avons cherché à préciser le nombre d'échantillons nécessaires pour satisfaire une précision voulue sur la détermination des pics de fréquence. Dans le tableau 6.5, nous présentons les valeurs des pics déterminées en fonction du nombre d'échantillons sur lequel a été calculée la DSE.

L'analyse du tableau 6.5 montre clairement la dégradation de la précision sur la valeur estimée des fréquences propres quand l'échantillonnage est limité à  $2^{12}$  valeurs. Au delà,

$T(s)$	5	5	5	10	20	40	70	100	200	500	1000
$n$	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\delta f$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{2000}$

TAB. 6.4 – Conditions de calcul détaillées de la FFT.  $T$ : durée totale sur laquelle est déterminée  $X_i(t)$ ,  $\delta t$ : précision requise sur le calcul des fonctions gamma,  $N = 2^n$  nombre d'échantillons sur lequel est calculée la FFT,  $\delta f$ : résolution spectrale attendue  $\delta f = \frac{1}{2N\delta t}$

*	$2^9$	$2^{10}$	$2^{11}$	$2^{12}$	$2^{13}$	$2^{14}$	$2^{15}$	$2^{16}$	$2^{17}$
$X_1^{(3)}$					0,97	0,91	0,9155	0,9155	0,91553
$X_3^{(2)}$		0.9		0.97	0,85	0,91	0,9155	0,9155	0,91553
$X_5^{(2)}$				0.97	0,97	0,91	0,9155	0,9155	0,91553
$X_2^{(1)}$	1.9	1.6	1.5	1.46	1,46	1,526	1,5259	1,5106	1,51060
$X_4^{(1)}$	1.9	1.9	1.5	1.46	1,46	1,526	1,5259	1,5106	1,51060
$X_6^{(1)}$	1.9	1.9	1.5	1.46	1,46	1,526	1,5259	1,5106	1,51060
$X_1^{(1)}$	1.9	1.9	1.5	1.46	1,59	1,587	1,5869	1,5717	1,57170
$X_3^{(1)}$			1.5	1.71	1,59	1,587	1,5869	1,5717	1,57170
$X_5^{(1)}$					1,59	1,587	1,5869	1,5717	1,57170
$X_1^{(2)}$	1.9	1.9	1.5	1.46	1,46	1,892	1,9226	1,9073	1,90730
$X_3^{(3)}$					1,95	1,892	1,9226	1,9073	1,90730
$X_5^{(3)}$	1.8	1.9	1.9	1.79	1,95	1,892	1,9226	1,9073	1,90730
$X_2^{(2)}$				2.68	2,68	2,746	2,7466	2,7466	2,74660
$X_4^{(2)}$	1.9	1.9	2.9	2.68	2,81	2,746	2,7466	2,7466	2,74660
$X_6^{(2)}$			2.9	2.68	2,81	2,746	2,7466	2,7466	2,74660
$X_2^{(3)}$	1.9	1.6	4.4		3,54	3,601	3,6316	3,6316	3,63160
$X_4^{(3)}$				3.66	3,66	3,662	3,6316	3,6316	3,63160
$X_6^{(3)}$				3.66	3,66	3,662	3,6316	3,6316	3,63160

TAB. 6.5 – Pics de fréquence extraits de la densité spectrale d'énergie cas non amorti, évolution de la valeur en fonction du nombre d'échantillons sur lequel est calculé la TFD de  $X_i(t)$  L'exposant désigne le degré d'intensité du pic pour un  $X_i$  considéré.



le gain en précision est faible mais peut s'avérer nécessaire. Pour mieux préciser le degré de précision nécessaire sur les fréquences propres, il reste à quantifier l'influence de la résolution fréquentielle  $df$  sur les vecteurs propres.

## 6.3 Perspectives

Les fréquences du comportement vibratoire obtenues par l'analyse de Fourier peuvent servir à initialiser un algorithme du type Newton-Raphson permettant de trouver les racines de l'équation caractéristique :  $P(\lambda) = 0$  et d'améliorer les valeurs propres. Dans le cas où les matrices de masses et de raideurs sont symétriques et définies positives et en l'absence d'amortissement, la transformée de Fourier nous permet d'obtenir les valeurs propres qui sont imaginaires pures.

L'algorithme pourrait être de la forme :

- (1) Transformation de Fourier Rapide
- (2) Recherche des pics de fréquences
- (3) Initialisation de l'algorithme de Newton-Raphson pour la recherche des racines de  $P(\lambda) = 0$

Lorsque les matrices  $M$  et  $K$  ne possèdent pas ces propriétés et en présence d'amortissement, il serait plus judicieux d'utiliser une transformée en  $Z$  à la place de la transformée de Fourier car elle permettrait d'obtenir à la fois la partie réelle et la partie imaginaire des valeurs propres.

La détermination précise des  $\lambda_i$  est importante car comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, des renseignements sur les vecteurs propres proviennent de l'examen des colonnes de  $Q(\lambda_i)$ ,  $Q'(\lambda_i)$ , ...

## 6.4 Détermination des vecteurs propres

Dans le deuxième chapitre, nous avons extrait les vecteurs propres d'une matrice des colonnes de sa matrice caractéristique adjuguée. Nous allons adopter une démarche similaire mais cette fois en raisonnant sur la matrice caractéristique du second ordre  $\lambda^2 M + \lambda C + K$  associée au système différentiel du second ordre. Notons  $\lambda_i$  les racines du polynôme caractéristique du second ordre  $P(\lambda) = 0$ . Regardons les différents cas possibles.

### 6.4.1 Premier cas : $Q(\lambda_i)$ est non nulle

**Proposition 19** *Si  $\lambda_i$  est racine simple du polynôme caractéristique, alors  $Q(\lambda_i) = \text{adj}(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K)$  est une matrice non nulle.*

Preuve :

*Effectuons un raisonnement par l'absurde. Supposons  $Q(\lambda_i)$  nul, cela signifie qu'il existe*

un polynôme matriciel  $R(\lambda)$  tel que  $Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)R(\lambda)$ . En conséquences

$$(\lambda - \lambda_i)R(\lambda)(\lambda^2 M + \lambda C + K) = P(\lambda)I$$

Dérivons cette expression, nous obtenons alors :

$$R(\lambda)(\lambda^2 M + \lambda C + K) + (\lambda - \lambda_i)R'(\lambda)(\lambda^2 M + \lambda C + K) + (\lambda - \lambda_i)R(\lambda)(2\lambda M + C) = P'(\lambda)I$$

Choisissons  $\lambda = \lambda_i$ , il vient :

$$R(\lambda_i)(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K) = P'(\lambda_i)I$$

Appliquons à l'identité matricielle précédente un vecteur propre non nul  $V$  associé à  $\lambda_i$  c'est-à-dire un vecteur satisfaisant à  $(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K)V = 0$ , on obtient :

$$0 = P'(\lambda_i)V$$

Comme  $V$  a au moins une composante non nulle,  $P'(\lambda_i)$  serait donc nul, en contradiction avec l'hypothèse de départ :  $\lambda_i$  est une racine simple. Il n'est donc pas possible que  $Q(\lambda_i)$  soit nul lorsque  $\lambda_i$  est une racine simple.

**Proposition 20** Si  $\lambda_i$  est racine simple toutes les colonnes non nulles de la matrice caractéristique adjuguée du second ordre sont des vecteurs propres associés à la valeur propre  $\lambda_i$ .

**Remarque 25**  $Q(\lambda_i)$  est déterminé sans difficulté par :

$$Q(\lambda_i) = \lambda_i^{2n-2} B_0 + \dots + \lambda_i B_{2n-3} + B_{2n-2}$$

Preuve de la proposition 20 :

Appliquons la propriété liant l'adjuguée et le déterminant à la matrice caractéristique et prenons  $\lambda = \lambda_i$  où  $\lambda_i$  est une valeur propre, on obtient :

$$(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K)Q(\lambda_i) = \det(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K)I = 0$$

si  $e_j$  est le  $j$ -ième vecteur de la base canonique on a :

$$(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K)Q(\lambda_i) e_j = 0$$

or  $Q(\lambda_i) e_j$  est la  $j$ -ième colonne de  $Q(\lambda_i)$  que nous nommerons  $c$ . Toute colonne  $c$  de  $Q(\lambda_i)$  satisfait donc :

$$(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K)c = 0$$

ce qui prouve que  $c$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_i$  lorsqu'il est non nul.

**Remarque 26** Si  $\lambda_i$  est racine simple alors toutes les colonnes de  $Q(\lambda_i)$  sont parallèles. Un bon test numérique de validation de la direction des vecteurs propres est de vérifier le parallélisme des colonnes de  $Q(\lambda_i)$ .

### 6.4.2 Deuxième cas : $Q(\lambda_i)$ est nulle et $Q'(\lambda_i)$ est non nulle

**Proposition 21** Si  $Q(\lambda_i)$  est nulle, alors  $\lambda_i$  est au moins racine double.

Preuve : la preuve de la proposition 20 montre que  $Q(\lambda_i) = 0$  implique  $P(\lambda_i) = 0$

**Proposition 22** Dans le cas où  $Q(\lambda_i)$  est nul, des vecteurs propres sont donnés par les colonnes non nulles de  $Q'(\lambda_i)$ .

**Remarque 27**  $Q'(\lambda_i)$  ne se calculera pas par dérivation numérique, en effet :

$$Q'(\lambda_i) = (2n - 2)\lambda_i^{2n-3}B_0 + \dots + 2\lambda_i B_{2n-4} + B_{2n-3}$$

il se calcule donc à l'aide des matrices  $B_0, \dots, B_{2n-3}$  et du scalaire  $\lambda_i$ .

Preuve de la proposition 22 : Appliquons la propriété liant l'adjuguée au déterminant de la matrice caractéristique

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)Q(\lambda) = P(\lambda)I$$

et dérivons cette expression, on a :

$$(2\lambda M + C)Q(\lambda) + (\lambda^2 M + \lambda C + K)Q'(\lambda) = P'(\lambda)I$$

si  $\lambda_i$  est une valeur propre, nous obtenons :

$$(2\lambda_i M + C)Q(\lambda_i) + (\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K)Q'(\lambda_i) = P'(\lambda_i)I$$

or d'après la proposition 9 comme nous avons supposé  $Q(\lambda_i)$  nul, on a aussi  $P'(\lambda_i) = 0$ , nous obtenons donc :

$$(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K)Q'(\lambda_i) = 0$$

si  $e_j$  est le  $j$ -ième vecteur de la base canonique nous avons :

$$(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K)Q'(\lambda_i)e_j = 0$$

or  $Q'(\lambda_i)e_j$  est la  $j$ -ième colonne de  $Q'(\lambda_i)$  que nous nommerons  $c$ . Toute colonne  $c$  de  $Q'(\lambda_i)$  satisfait donc :

$$(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K)c = 0$$

ce qui prouve que  $c$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_i$  lorsqu'il est non nul.

### Troisième cas : $Q(\lambda_i)$ est nulle, $Q'(\lambda_i)$ est nulle et $Q''(\lambda_i)$ est non nulle

**Proposition 23** Si  $Q(\lambda_i)$  et  $Q'(\lambda_i)$  sont nulles alors  $\lambda_i$  est au moins racine triple

Preuve :

Puisque  $Q(\lambda_i)$  est nulle on sait déjà que  $P'(\lambda_i) = 0$  d'après la proposition 21.  $Q(\lambda)$  étant

de degré  $2n - 2$  alors il existe un polynôme matriciel  $R(\lambda)$  de degré  $2n - 4$  tel que  $Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^2 R(\lambda)$ . En conséquence

$$(\lambda - \lambda_i)^2 R(\lambda)(\lambda^2 M + \lambda C + K) = P(\lambda)I$$

Dérivons cette expression par rapport à  $\lambda$ , on obtient alors

$$2(\lambda - \lambda_i)R(\lambda)(\lambda^2 M + \lambda C + K) + (\lambda - \lambda_i)^2 R'(\lambda)(\lambda^2 M + \lambda C + K) + (\lambda - \lambda_i)^2 R(\lambda)(2\lambda M + C) = P'(\lambda)I$$

Dérivons une deuxième fois par rapport à  $\lambda$ :

$$2R(\lambda)(\lambda^2 M + \lambda C + K) + 4(\lambda - \lambda_i)R'(\lambda)(\lambda^2 M + \lambda C + K) + 4(\lambda - \lambda_i)R(\lambda)(2\lambda M + C) + (\lambda - \lambda_i)^2 R''(\lambda)(\lambda^2 M + \lambda C + K) + 2(\lambda - \lambda_i)^2 R'(\lambda)(2\lambda M + C) + 2(\lambda - \lambda_i)^2 R(\lambda)M = P''(\lambda)I$$

Choisissons  $\lambda = \lambda_i$ , l'équation précédente se réduit à :

$$2R(\lambda_i)(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K) = P''(\lambda_i)I$$

Soit  $V$  un vecteur propre associé à  $\lambda_i$ , c'est-à-dire que  $(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K)V = 0$ . L'identité précédente appliquée à  $V$  conduit à :

$$0 = P''(\lambda_i)V$$

Comme  $V$  a au moins une composante non nulle, c'est que  $P''(\lambda_i) = 0$ .

**Proposition 24** Si  $Q(\lambda_i)$  est nulle ainsi que  $Q'(\lambda_i)$ , il faut alors examiner  $Q''(\lambda_i)$  pour obtenir des vecteurs propres.

Preuve : Dérivons maintenant l'identité :

$$(\lambda^2 M + \lambda C + K)Q(\lambda) = P(\lambda)I$$

une première fois :

$$(2\lambda M + C)Q(\lambda) + (\lambda^2 M + \lambda C + K)Q'(\lambda) = P'(\lambda)I$$

puis une seconde fois

$$2MQ(\lambda) + 2(2\lambda M + C)Q'(\lambda) + (\lambda^2 M + \lambda C + K)Q''(\lambda) = P''(\lambda)I$$

Si  $\lambda_i$  est une valeur propre, nous obtenons :

$$2MQ(\lambda_i) + 2(2\lambda_i M + C)Q'(\lambda_i) + (\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K)Q''(\lambda_i) = P''(\lambda_i)I$$

mais nous avons supposé  $Q(\lambda_i)$  nul et  $Q'(\lambda_i)$  nul, dont une conséquence (proposition 23) est  $P''(\lambda_i) = 0$ , l'équation précédente devient donc :

$$(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K)Q''(\lambda_i) = P''(\lambda_i)I = 0$$

Si  $e_j$  est le  $j$ -ième vecteur de la base canonique nous avons :

$$(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K) Q''(\lambda_i) e_j = 0$$

or  $Q''(\lambda_i) e_j$  est la  $j$ -ième colonne de  $Q''(\lambda_i)$  que nous nommerons  $c$ . Toute colonne  $c$  de  $Q''(\lambda_i)$  satisfait donc :

$$(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K)c = 0$$

ce qui prouve que  $c$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_i$  lorsqu'il est non nul.

Si toutes les colonnes de  $Q''(\lambda_i)$  sont nulles c'est que  $Q''(\lambda_i) = 0$ , il faut alors examiner les colonnes de  $Q'''(\lambda_i)$  et ainsi de suite ....

#### Résumé :

- 1er cas :  $Q(\lambda_i) \neq 0$ , les vecteurs propres sont obtenus par l'examen des colonnes de  $Q(\lambda_i)$
- 2ème cas :  $Q(\lambda_i) = 0$  et  $Q'(\lambda_i) \neq 0$ , les vecteurs propres sont obtenus par l'examen des colonnes de  $Q'(\lambda_i)$
- 3ème cas :  $Q(\lambda_i) = 0$ ,  $Q'(\lambda_i) = 0$  et  $Q''(\lambda_i) \neq 0$ , les vecteurs propres sont obtenus par l'examen des colonnes de  $Q''(\lambda_i)$
- 4ème cas :  $Q(\lambda_i) = 0$ ,  $Q'(\lambda_i) = 0$ ,  $Q''(\lambda_i) = 0$  et  $Q'''(\lambda_i) \neq 0$ , les vecteurs propres sont obtenus par l'examen des colonnes de  $Q'''(\lambda_i)$
- et ainsi de suite ...

## 6.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons utilisé la transformation de Fourier rapide pour initialiser un algorithme itératif de recherche de racine comme celui de Newton Raphson pour le calcul des valeurs propres appliqué à l'exemple du véhicule automobile proposé au chapitre précédent. Ensuite nous avons présenté une adaptation au second ordre de la méthode proposée au chapitre deux pour extraire les vecteurs propres de l'examen des colonnes de la matrice caractéristique adjuguée du second ordre ou de ses dérivées.



## Chapitre 7

# Conclusion et perspectives

### 7.1 Conclusion

L'objectif premier de ce mémoire était de présenter une nouvelle méthode de calcul de la réponse temporelle des équations du mouvement de systèmes vibratoires, non basée sur le calcul de valeurs propres et de vecteurs propres. Les équations du mouvement des systèmes vibratoires peuvent être étudiées sous deux angles différents :

- le système différentiel linéaire du second ordre est transformé en un système différentiel linéaire du premier ordre,
- le système d'équations différentielles linéaires du second ordre est traité directement.

Dans le premier cas qui transforme le système du second ordre en un système du premier ordre, deux options se présentent. Les transformations en systèmes différentiels du premier ordre sont de deux types. Ou bien on aboutit à un système :

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

ou bien à un système :

$$A\frac{dX}{dt} + BX = 0$$

Un inconvénient des transformations du premier type est qu'en général la matrice  $A$  n'est pas symétrique. Un avantage des transformations du second type comme celle de Duncan est que les matrices  $A$  et  $B$  sont symétriques.

Les systèmes du premier type sont examinés dans la première partie du paragraphe §4.2.3. Nous appliquons alors la méthode développée au paragraphe §3.2. Les systèmes du second type sont examinés dans la deuxième partie du paragraphe §4.2.3. Deux méthodes de résolution sont alors envisageables. Si le déterminant de la matrice  $A$  n'est pas trop petit nous utilisons la méthode ascendante du premier ordre présentée au paragraphe §3.4. Si c'est le déterminant de la matrice  $B$  qui n'est pas trop petit, la méthode descendante du premier ordre proposée au paragraphe §3.5 est mise en œuvre.

Dans le cas où l'on traite directement le système linéaire différentiel du second ordre, nous proposons deux techniques de résolution :

- si le déterminant de la matrice des masses  $M$  n'est pas trop petit, la méthode ascendante développée au paragraphe §5.4.1 est mise en œuvre
- si le déterminant de la matrice  $K$  n'est pas trop petit, c'est la méthode descendante développée au paragraphe §5.4.2 qui est mise en œuvre

Toutes les méthodes que nous avons mises au point pour atteindre la réponse temporelle présentent l'avantage de ne nécessiter ni la recherche des valeurs propres ni celle des vecteurs propres du système.

Dans les méthodes classiques, la difficulté principale réside dans la détermination des vecteurs propres. Cette détermination se révèle instable numériquement : une modification même très légère des coefficients des matrices  $M$ ,  $C$  et  $K$  peut entraîner des rotations importantes des vecteurs propres.

De plus, notre méthode ne modifie pas les matrices de départ, elles gardent leurs propriétés éventuelles de symétrie, de positivité,  $\dots$ . La conservation de la symétrie peut être important par exemple pour réduire l'espace de stockage.

Toutefois, comme nous l'avons montré au chapitre 6, les valeurs propres du système pourront être déterminées en effectuant une analyse fréquentielle de la réponse temporelle au moyen de la transformée de Fourier.

Ensuite, les vecteurs propres peuvent être extraits

- des colonnes de la matrice adjuguée de la matrice caractéristique, si la valeur propre associée est simple,
- des colonnes des dérivées de la matrice adjuguée de la matrice caractéristique, si la valeur propre associée est multiple.

Une validation peut être réalisée en comparant le parallélisme des colonnes si la valeur propre est simple ou l'orthogonalité des colonnes si la valeur propre est multiple.

Nous avons proposé une technique d'intégration temporelle évitant la détermination des modes propres. La technique classique de superposition modale a été présentée au chapitre 4 pour les systèmes discrets. Elle est basée sur les résultats de l'analyse modale et consiste à exprimer la réponse dynamique sous forme d'un développement en série suivant les modes propres, tronqué ou non. La méthode est efficace pour autant que les modes fondamentaux soient dominants dans la réponse et que les systèmes soient bien conditionnés et ne créent pas d'instabilité sur la direction des vecteurs propres. De plus le problème des valeurs propres quasi-confondues est très délicat d'un point de vue numérique. Il se présente très fréquemment pour des structures présentant de nombreuses symétries ou résultant de la répétition d'un même composant de base. La convergence des méthodes de recherche des valeurs propres et des modes propres est extrêmement affectée par l'existence de solutions propres voisines. Pour tous les problèmes de vibrations mécaniques ce sont les fréquences



les plus basses du spectre qui présentent en général le plus d'intérêt. Par contre pour les problèmes d'acoustique, on est davantage intéressé par un domaine de plus haut spectre. Notre méthode n'est pas assujettie à cette distinction.

## 7.2 Perspectives

Lorsque les matrices des masses, des amortissements et des raideurs ne sont plus constantes mais dépendent du temps, il est possible d'envisager de faire tourner le code de calcul en incrémentant le temps.

Certaines interactions impliquant le couplage entre une structure et un fluide comme le flutter peuvent conduire à la construction d'un problème de type :

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F(t)$$

où la matrice des amortissements dépend du temps et où la matrice des raideurs est singulière. Le traitement de problèmes de cette nature a des implications sur le choix de l'algorithme et sur sa mise en œuvre. Les algorithmes que nous avons présentés ne nécessitent aucune propriété particulière des matrices considérées, excepté que le déterminant de la matrice des masses et celui de la matrice des raideurs ne soient pas tous les deux petits en même temps ; ils nous paraissent assez adaptés à la résolution de ce type de problèmes.



# Bibliographie

- [Abd97] J. Abdeljaoued. *Algorithmes rapides pour le calcul de Polynôme caractéristique*. Thèse de l'U.F.R. des Sciences et Techniques de l'Université de Franche-Comté, Mars 1997.
- [AM84] D.J. Ahmadian M., Inman. Classical normal modes in asymmetric nonconservative dynamic systems. *A.I.A.A., Journal*, 22:1012–1015, 1984.
- [Axi01a] F. Axisa. *Interaction Fluide-Structure*. Hermes, 2001.
- [Axi01b] F. Axisa. *Systèmes Continus*. Hermes, 2001.
- [Axi01c] F. Axisa. *Systèmes Discrets*. Hermes, 2001.
- [Axi01d] F. Axisa. *Vibrations sous écouements*. Hermes, 2001.
- [Bar89] S. Barnett. Leverrier's algorithm new proof extensions. *SIAM Journal on Matrix Analysis and its Applications*, 10:551–556, 1989.
- [Bar91] J. Baranger. *Analyse Numérique*. Hermann, 1991.
- [BB88] D. Bellet and J.J. Barrau. *Cours d'élasticité*. Cépadues, 1988.
- [Bel81] M. Bellanger. *Traitement Numérique du signal*. Masson, 1981.
- [Bel88] D. Bellet. *Cours de mécanique générale*. Cépadues, 1988.
- [Bel91] R. Bellman. *Introduction to Matrix Analysis*. Mc Graw Hill Book compagny, Inc, New-York, 1991.
- [BI90] J. Bellos and D.J. Inman. Frequency response of nonproportionally damped, lumped parameter, linear dynamic systems. *A.S.M.E., Journal of Vibration and Acoustics*, 112:194–201, 1990.
- [BP79] R.E.D. Bishop and W.G. Price. An investigation into the linear theory of ship response to waves. *Journal of Sound and Vibration*, 62:353–363, 1979.
- [Bro91] W.L. Brogan. *Modern control theory. Third edition*. Prentice Hall, 1991.
- [Cau60] T.K. Caughey. Classical normal modes in damped linear dynamic systems. *A.S.M.E., Journal of Applied Mechanics*, 27:269–271, 1960.

- [Che] L. Chevalier. *Exercices et problèmes corrigés de Mécanique des systèmes et des milieux déformables*. Ellipse, ???
- [Cia82] P.G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson, 1982.
- [CL86] K.R. Chung and C.W. Lee. Dynamic reanalysis of weakly non-proportionally damped systems. *Journal of sound and vibration*, 111(1):37–50, 1986.
- [COK65] T.K. Caughey and M.E.J. O' Kelly. Classical normal modes in damped linear dynamic systems. *A.S.M.E., Journal of Applied Mechanics*, 62:583–588, 1965.
- [CR82] G. Chen and D.L. Russel. A mathematical model for linear elastic systems with structural damping. *Quarterly of applied Mathematics*, 39:433–454, 1982.
- [Cro76] D.L. Cronin. Approximation for determining harmonically excited response of nonclassically damped systems. *Journal of engineering for industry*, 98:43–47, 1976.
- [CT65] T.W. Cooley and J.W. Tuckey. An algorithm for the machine computation of complex fourier series. *Mathematics of computation*, 19:297–301, 1965.
- [DDCC92] A. Dahan Dalmedico, J-L. Chabert, and K. Chemla. *Chaos et déterminisme*. Editions Seuil, points, 1992.
- [Dem91] J.-P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. Presses Universitaires de Grenoble, 1991.
- [Des74] M. Desdouits. *Leçon élémentaires d'astronomie*. Alfred Mame et Fils Editeurs, 1874.
- [DET79] P.E. Duncan and R. Eatock-Taylor. A note on the dynamic analysis of non-proportionally damped systems. *Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 7:99–105, 1979.
- [Faw77] I. Fawzy. Orthogonality of generally normalized eigenvectors and eigenrows. *A.I.A.A. Journal*, 15:276–278, 1977.
- [FB76] I. Fawzy and R.E.D. Bishop. On the dynamics of linear nonconservative systems. *Proceedings of the Royal Society of London*, A 352:25–40, 1976.
- [FF63] D.K. Faddeev and V.N. Faddeeva. *Computational Methods of Linear Algebra*. W.H. Freeman and Compagny, San Francisco and London, 1963.
- [Fla12] C. Flammarion. *Mémoires biographiques et philosophiques d'un astronome*. Editions Flammarion, 1912.
- [Fos58] K.A. Foss. Co-ordinates which uncouple the equations of motion of damped linear dynamic systems. *Journal of applied mechanics*, 25:361–364, 1958.
- [Fra49] J.S. Frame. A simple recursion formula for inverting a matrix (abstract). *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:1045, 1949.

- [FS72] D. Faddeev and I. Sominski. *Recueil d'exercices d'algèbre supérieure*. Edition Mir, Moscou, 1972.
- [FWA57] R.A. Frazer, Duncan W.J., and Collar A.R. *Elementary Matrices*. Cambridge University Press, New York, Mars 1957.
- [Gan59a] F.R. Gantmacher. *Matrix Theory, Volume 1*. Chelsea Publishing Compagny, New York, Mars 1959.
- [Gan59b] F.R. Gantmacher. *Matrix Theory, Volume 2*. Chelsea Publishing Compagny, New York, Mars 1959.
- [Gir] A. Girard. Dynamique des structures : Techniques d'analyse et d'essai. *Techniques de l'ingénieur, traité mécanique*, B 5 150:1–22,????
- [Gmü97] T. Gmür. *Dynamique de structures : analyse modale numérique*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 1997.
- [Gou01] Y. Gourinat. *Introduction à la dynamique de structures*. Cépadues Edition, 2001.
- [Gér78] M. Géradin. Etude comparative des méthodes numériques en analyse dynamique des structures. *Bulletin de l'association technique maritime et aéronautique*, 78:167–198, 1978.
- [GR93] M. Géradin and D. Rixen. *Théorie des vibrations : application à la dynamique des structures*. Masson, 1993.
- [GSZ94] Cl. Gomez, B. Salvy, and P. Zimmermann. *Calcul formel : mode d'emploi. Exemples en Maple*. Masson, 1994.
- [Gup74] K.K. Gupta. Eigenproblem solution of damped structural systems. *International journal for numerical methods in engineering*, 8:877–911, 1974.
- [Guy64] R.J. Guyan. Reduction of stiffness and mass matrix. *A.I.A.A. Journal*, 3:380, 1964.
- [Has76] T.K. Hasselman. Modal coupling in lightly damped structures. *A.I.A.A. Journal*, 14:162–163, 1976.
- [HJ85] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, 1985.
- [HL73] K. Huseyin and H.H.E. Leipholz. Divergence instability of multiple parameter circulatory systems. *Quarterly of Applied Mathematics*, 31:185–197, 1973.
- [HM93] J.H. Hwang and F. Ma. On the approximate solution of nonclassically damped linear systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 60:695–701, 1993.
- [Hor35] P. Horst. A method of determining the coefficients of a characteristic equation. *Ann. Math.Statist.*, 6:83–84, 1935.

- [Hou64] A.S. Householder. *The theorie of matrices in numerical analysis*. Dover, New-York, 1964.
- [HWV93] G. Helmberg, P. Wagner, and G. Veltkamp. On faddeev leverrier 's method for computation characteristic polynomial matrix eigenvectors. *Linear algebra and its applications*, 185:219–233, 1993.
- [Imb84] J.F. Imbert. *Analyse des structures par éléments finis*. Cépadues Editions, 1984.
- [Inm83] D.J. Inman. Dynamics of asymmetric nonconservative systems. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 50:199–203, 1983.
- [Lar83] S. Laroze. *Mécanique des structures Tome1*. Eyrolles Masson, 1983.
- [Lar88] S. Laroze. *Mécanique des structures Tome2*. Eyrolles Masson, 1988.
- [Leb99] E. Lebon. *Histoire abrégée de l'astronomie*. Editions Gauthier-villars, 1899.
- [LJ80] M. Lalanne and Berthier P.and Der Hagopian J. *Mécanique des vibrations linéaires*. Masson, 1980.
- [LT93] P. Lascaux and R. Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur : Méthodes directes*. Masson, 1993.
- [LT94] P. Lascaux and R. Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur : Méthodes itératives*. Masson, 1994.
- [LV40] U.-J. Le Verrier. Variations séculaires des éléments elliptiques des sept planètes principales : Mercure, vénus, la terre, mars, jupiter, saturne et uranus. *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, V:220–254, juillet, 1840.
- [LV48] U.-J. Le Verrier. la planète neptune. *Institut de France, Comptes rendus des scéances de l'Académie des Sciences*, XXVII:220–254, 11 septembre, 1848.
- [MC95] F. Ma and T.K. Caughey. Analysis of linear nonconservative vibrations. *Journal of Applied Mechanics*, 62:685–691, 1995.
- [Mei67] L. Meirovitch. *Analytical methods in vibrations*. Mac Millan, New York, 1967.
- [MO92] J.-P. Morand and R. Ohayon. *Interactions fluides-structures*. Masson, 1992.
- [MO95] J.-P. Morand and R. Ohayon. *Fluids-structure interactions : Applied Numerical Methods*. Ed. John Wiley, 1995.
- [Mon85] D. Monasse. Un algorithme de calcul du polynôme caractéristique. *Revue de Mathématiques Spéciales*, 6:225–227, 1985.
- [Nic87] D.W. Nicholson. Response bounds for nonclassically damped mechanical systems under transient loads. *Journal of Applied Mechanics*, 54:430–433, 1987.
- [Nou85] J.-P. Nougier. *Méthodes de calcul numérique*. Masson, 1985.

- [Oha97] R. Ohayon. *Structural acoustics and Vibration*. Harcourt Publishers, 1997.
- [PDSCR95] S.S. Peres-Da-Sylva, D.L. Cronin, and T.W. Randolph. Computation of eigenvalues and eigenvectors of nonclassically damped systems. *Computers and Structures*, 57:883–891, 1995.
- [PTVF92] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran. The Art of Scientific Computing Second Edition*. Cambridge University Press, 1992.
- [Ral65] A. Ralston. *A first course in numerical analysis*. Mac Graw Hill, 1965.
- [Ray45] J.W.S. Rayleigh. *The theory of sound, volume 1*. Dover Publications, Inc, New-York, 1945.
- [RB95] F. Rotella and P. Borne. *Théorie et Pratique du calcul Matriciel*. Edition Technip, 1995.
- [Rei95] H. Reinhard. *Éléments de mathématiques du signal. Tome 1 : Signaux déterministes*. Dunod, 1995.
- [RFPV01] K. Réaud, D. Fortuné, S. Prudhomme, and Cl. Vallée. Méthode d'étude des vibrations d'un système mécanique non basée sur le calcul de ses modes propres. *XVème Congrès Français de Mécanique*, Nancy, 3-7 Septembre 2001.
- [RSVF00] K. Réaud, J.M. Souriau, Cl. Vallée, and D. Fortuné. Méthode de le verrier-souriau et équations différentielles linéaires. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série Iib*, 328:773–778, 2000.
- [RVF01] K. Réaud, Cl. Vallée, and D. Fortuné. Closed form solutions to the equations of motion avoiding mass matrix inversion and eigenvectors decomposition. *2001 ASME International Design Engineering Technical Conferences: 18th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, DETC2001/VIB-21358*, Pittsburgh, September 9-12, 2001.
- [SB95] C.T. Sun and J.M. Bai. Vibrations of multi-degree of freedom systems with non-proportional viscous damping. *International Journal of mechanical Science*, 37:441–455, 1995.
- [Sch73] P.D Schmitz. Normal mode solution to the equations of motion of a flexible airplane. *Journal of aircraft*, 10:318–320, 1973.
- [Ser99] G. Serra. Résolution des équations différentielles par les méthodes de l'analyse numérique. *Bulletin de l'Union des Physiciens*, 815:965–976, 1999.
- [SM88] S.M. Shahruz and F. Ma. Approximate decoupling of the equations of motion of linear underdamped systems. *Journal of Applied Mechanics*, 55:716–720, 1988.
- [Sou48] J.M. Souriau. Une méthode pour la décomposition spectrale et l'inversion des matrices. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, 227:1010–1011, 1948.

- [Sou64a] J.M. Souriau. *Calcul Linéaire, Tome 1*. Presses Universitaires de France, 1964.
- [Sou64b] J.M. Souriau. *Calcul Linéaire, Tome 2*. Presses Universitaires de France, 1964.
- [SS87] L.E. Suarez and M.P. Singh. Eigenproperties of nonclassically damped primary structure and oscillator systems. *Journal of Applied Mechanics*, 54:668–673, 1987.
- [Sur00] Y. Surrel. Propriétés fondamentales des instruments et acquisition du signal. instrumentation scientifique. Cours B1 Conservatoire National des Arts et Métiers, 1999-2000.
- [TC93] M.D. Tong and W.K. Chen. A novel proof of the souriau-frame-faddeev algorithm. *I.E.E.E., Transactions on automatic control*, 38:1447–1448, 1993.
- [TCC74] W.T. Thomson, T. Calkin, and P. Caravani. A numerical study of damping. *Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 3:97–103, 1974.
- [Tho94] Y. Thomas. *Signaux et systèmes linéaires*. Masson, 1994.
- [Tho98] F. Thomas. Nouvelle méthode de résolution des équations du mouvement de systèmes vibratoires linéaires discrets. Rapport de D.E.A., 1998.
- [Tis89] F.F. Tisserand. *Perturbations des planètes d'après la méthode de variation des constantes arbitraires*. Editions Gauthier-villars et fils, 1889.
- [Tsa98] .H.C. Tsai. Modal superposition method for dynamic analysis of structures excited by prescribed support displacements. *Computers and structures*, 66:675–683, 1998.
- [UE90] F.E. Udwadia and R.S. Eshandari. Nonclassically damped dynamic systems: an iterative approach. *Journal of AppliedMechanics*, 57:423–433, 1990.
- [Vig86] F.R. Vigneron. A natural modes model and modal identities for damped linear structures. *Journal of AppliedMechanics*, 53:33–38, 1986.
- [VS57] G.W. Van Santen. *Introduction à une étude des vibrations mécaniques*. Bibliothèque Technique Philips, 1957.
- [WB76] I.F.A. Wahed and R.E.D. Bishop. On the equations governing free forced vibrations general non conservative system. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 18:6–10, 1976.
- [Wil65] J.H. Wilkinson. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford Science Publications, 1965.
- [WL93] G. Wang and Y. Lin. A new extension of leverrier's algorithm. *Linear algebra and its applications*, 180:227–238, 1993.
- [Woo63] D.L. Woodcock. On the interpretation of the vector plots of forced vibrations of a linear system with viscous damping. *The aeronautical Quaterly*, pages 45–62, 1963.



- [WS77] G.B. Warburton and S.R. Soni. Errors in response calculations for non-classically damped structures. *Earthquake engineering and structural dynamics*, 5:365–376, 1977.
- [Ziv93] T.P. Zivkovic. Evaluation of the characteristic polynomial of a graph. *Mathematical and computer modelling*, 17:145–149, 1993.

## Résumé

Ce travail traite de la mise en œuvre et de la validation d'une méthode d'étude du mouvement de systèmes vibratoires non basée sur le calcul numérique de ses modes propres. Les instabilités liées au calcul des vecteurs propres sont ainsi évitées. Nous proposons d'abord une méthode de résolution des systèmes différentiels linéaires du premier ordre. Cette méthode met en œuvre essentiellement la notion d'adjuguée d'une matrice. Elle accompagne toujours la considération du polynôme caractéristique d'une matrice de la considération de sa matrice caractéristique adjuguée. Le seul travail véritablement numérique est alors concentrée dans la résolution d'une seule équation différentielle dite équation différentielle caractéristique. Le reste de l'algorithme est uniquement composé d'opérations simples d'algèbre linéaire. Cette technique est ensuite généralisée au second ordre pour résoudre les systèmes différentiels inhérents à la mécanique. Elle permet le calcul de la réponse temporelle en vibration libre ou forcée d'un système mécanique linéarisé et s'applique sans aucune condition sur la matrice des amortissements telles que celle de Basile ou celle de Caughey. De même, les matrices de masses et de raideurs ne doivent pas nécessairement satisfaire des propriétés particulières comme la symétrie ou la positivité. Une fois la réponse temporelle obtenue, les premières fréquences du comportement vibratoire sont déterminées par une analyse de Fourier qui permet d'initialiser la mise en œuvre d'un algorithme du type Newton-Raphson pour préciser les racines du "polynôme caractéristique du second ordre". La précision sur les valeurs propres est ainsi augmentée. L'examen des colonnes de la matrice caractéristique adjuguée et de ses dérivées fournit les vecteurs propres associés aux fréquences propres calculées. Une validation de l'algorithme est réalisée en testant le parallélisme ou l'orthogonalité des différentes colonnes.

**Mots clefs :** Vibrations Linéaires, Mode propre, Méthode de Le Verrier-Souriau, Amortissement non classique.

## Abstract

This work deals with the development and the validation of a method aimed to analyse vibratory systems without calculating the eigenmodes. The instabilities due to the eigenmodes is thus avoided. We start by introducing a method solving first order linear ordinary differential systems. This method essentially uses the notion of adjugate matrix. It always accompanies the consideration of the characteristic polynomial of a matrix of the consideration of its characteristic adjugate matrix. The only real numerical work is concentrated in the resolution of only one ordinary differential equation called the characteristic equation. The rest of the algorithm is composed of simple linear algebra operations. This method is then generalized to second order for solving ordinary differential systems of mechanics. It allows the calculation of the temporal response for free or forced vibrations of a linearized mechanical system and can be applied without any assumption on damping matrix like Basile's or Caughey's. Likewise, the mass and the stiffness matrices must not necessary satisfy peculiar properties as symmetry or positive-ness. Once the response is obtained, the first frequencies are determined by using a Fourier analysis that enables initializing an algorithm of Newton-Raphson type applied to find the roots of the "second order characteristic polynomial". The accuracy of the eigenvalues is thus enhanced. The columns of adjugate characteristic matrix and of its derivatives with respect to time give the eigenvectors associated to the calculated eigenfrequencies. A validation is performed by testing the parallelism and the orthogonality of the different columns.

**Keywords :** Linear Vibrations, Eigenmode, Le Verrier-Souriau Method, Non classically Damped Systems.