N° d'ordre : 358

Année 2002

THÈSE

présentée en vue de
l'obtention du titre de

DOCTEUR
de
L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE

SPÉCIALITÉ : Systèmes automatiques

par

Fabrice DEMOURANT

Interactions identification-commande robuste : méthodes et applications à l'avion souple

Soutenue le 17 décembre 2002 devant la Commission d'Examen :

MM.	**G.**	**GARCIA**	**Président**
	L.	**DUGARD**	**Rapporteur**
	G.	**FERRERES**	**Directeur de thèse**
	M.	**HUMBERT**	
	M.	**M'SAAD**	**Rapporteur**

Thèse préparée au sein du département Commande des Systèmes et Dynamique du vol de l'ONERA-centre de Toulouse.

Un professeur dit alors :

Parlez nous d'Enseignement.

Il répondit :

"nul ne peut te révéler quoi que ce soit sinon ce qui gît déjà, à moitié réveillé à l'aube de ton savoir.

Le professeur qui marche à l'ombre du temple, parmi ses disciples, ne dispense pas sa sagesse mais plutôt sa foi et son amour.

S'il est sage, il ne t'ordonnera pas d'entrer dans la demeure de sa sagesse, mais te conduira plutôt au seuil de ton propre esprit.

L'astronome te parlera peut-être de sa compréhension de l'espace, mais il ne saurait te donner cette compréhension.

Le musicien te chantera peut-être le rythme qui sous-tend l'espace universel, mais il ne saurait t'offrir l'oreille qui repère ce rythme, ni la voix qui le reproduit.

Et qui maîtrise la science des nombres peut disserter sur le domaine du poids et des mesures, sans pouvoir t'y conduire.

Car la vision d'un homme ne prête pas ses ailes à un autre".

Gibran Khalil Gibran

Remerciements

Les travaux réalisés dans ce mémoire ont été effectués au Département de Commande des Systèmes et Dynamique de vol (DCSD) de l'ONERA-CERT (Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, centre de Toulouse).

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la formation doctorale en automatique de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (SUPAERO).

Je remercie tout d'abord Monsieur François Jouaillec de m'avoir accueilli dans son établissement et Monsieur Jean-Pierre Jung (ancien directeur du DCSD et actuel directeur du centre) de m'avoir accueilli dans son département.

Je remercie également Monsieur Claude Barrouil (directeur du DCSD) de s'être intéressé régulièrement aux travaux de recherche que je menais.

Je tiens à remercier tout particulièrement et très chaleureusement mon directeur de thèse Gilles Ferreres. Il a fait preuve d'une grande disponibilité tout au long de ma thèse, m'a fourni un soutien constant et une aide précieuse. Il a toujours su me conseiller durant mon travail de recherche, me faisant profiter ainsi de ses compétences théoriques et de son expérience.

Je remercie vivement Monsieur Luc Dugard, Directeur de Recherche CNRS au LAG, et Monsieur Mohammed M'Saad, Professeur des Universités à l'ENSI de Caen et directeur du LAPC d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Mohammed M'Saad a été pour moi un professeur dévoué, ouvert et disponible durant mes années d'école d'ingénieurs à l'ENSI de Caen, cherchant à faire passer à ses élèves son goût pour la recherche et l'automatique.

Je tiens à remercier Monsieur Germain Garcia, Professeur à l'INSA Toulouse et chercheur au LAAS, d'avoir accepté d'être président du jury.

J'adresse mes remerciements à Monsieur Marc Humbert, ingénieur à AIRBUS FRANCE à Toulouse, pour l'intéret et l'enthousiasme qu'il a manifestés à l'égard de mes travaux et pour avoir accepté d'être membre du jury.

Mes remerciements vont également aux ingénieurs du DCSD et plus particulièrement ceux que j'ai côtoyés régulièrement comme Jean-Marc Biannic, Alain Bucharles, Bernard Gimonet, Jean-François Magni et Carsten Döll, sans oublier les ingénieurs système Michel Grau et Michel Corrège. Je remercie également Liliane Arendo, secrétaire du département, pour son aide et sa disponibilité pour la gestion efficace des problèmes administratifs et du support logistique.

Je n'oublie pas, bien sûr, la bonne humeur des doctorants du département Karine, Yannick M., Taufic, Laurent, Frédéric, François, Nicolas, Sonstada, Stéphanie, Yannick L., Fabien et Elodie et les stagiaires Tomas, Mathieu et Céline.

Je remercie Philippe Pognant-Gros pour toutes les discussions et réflexions que nous avons eues ainsi que pour ses encouragements.

Je tiens à remercier particulièrement Gérard Scorletti, maître de conférence à l'université de Caen et enseignant à l'ENSI de Caen, qui a été un enseignent chercheur captivant et d'une aide précieuse pour m'aiguillonner vers la thèse de Gilles Ferreres.

Enfin, mes pensées vont tout spécialement vers Anne pour son soutien et ses encouragements durant les derniers de mois de ma thèse ainsi qu'à mes parents.

Table des matières

1 Introduction générale **11**
1.1 Contexte de la thèse 11
1.2 Organisation du mémoire 17

2 Présentation des modèles d'avion. **20**
2.1 Introduction 20
2.2 Principes des commandes de vol électriques 20
2.3 Équations du mouvement 21
2.4 Équations et représentation d'état du modèle latéral 23
2.5 Équations et représentation d'état du modèle longitudinal 25
2.6 Modèle de l'avion souple 27

I Le réajustement de correcteurs. **29**

1 La falsification de correcteurs **31**
1.1 Introduction 31
1.2 Théorèmes et définitions 32
1.2.1 Falsification de correcteurs. 33
1.2.2 Les références fictives 35
1.2.3 Falsification d'une spécification H_∞ 36
1.2.4 Choix des entrées référence 39
1.3 Application à un exemple SISO 42
1.3.1 Système utilisé et conditions générales de falsification 42
1.3.2 Résultats obtenus et interprétation 43
1.3.3 Analyse des résultats sur le système SISO linéaire 48
1.4 Application sur REAL 49
1.4.1 Présentation du modèle 50
1.4.2 Le simulateur nonlinéaire 51
1.4.3 Objectifs de commande 52

1.4.4 Correcteur proposé 53
1.4.5 Les spécifications T_{spec} 54
1.4.6 Ensemble des mesures 55
1.4.7 Références fictives et ensemble des correcteurs admissibles 56
1.4.8 Application linéaire 57
1.4.9 Application nonlinéaire 60
1.4.10 Application nonlinéaire multimodèle 61
1.5 Conclusion 62

2 Le réajustement de correcteurs robustes par optimisation LP/QP 65
2.1 Introduction. 65
2.2 La méthode. 66
2.2.1 Amélioration de la marge de gain MIMO. 66
2.2.2 Amélioration de la marge de phase MIMO. 69
2.3 Description de l'algorithme 72
2.4 Application 73
2.5 Conclusion 77

II Schéma d'identification-commande structuré 79

1 Synthèse convexe par paramétrisation de Youla 81
1.1 Introduction 81
1.2 Principe 82
1.2.1 Q-paramétrisation de l'ensemble des correcteurs stabilisants. 83
1.2.2 Affinité des réponses temporelles et fréquentielles. 86
1.2.3 Choix des spécifications temporelles et fréquentielles 87
1.2.4 Choix de la base 89
1.2.5 Descriptions des différentes étapes de la synthèse convexe 91
1.3 Comparaison avec la synthèse H_∞ pondérée 91
1.3.1 Avantages de la synthèse convexe 91
1.3.2 Inconvénients de la synthèse convexe 92
1.4 Conclusion 93

2 Identification par appartenance à un ensemble 95
2.1 Introduction 95
2.2 Modèle à erreur d'équation 96
2.2.1 Principe de l'identification par appartenance à un ensemble 96
2.2.2 Construction d'un ellipsoïde 98
2.2.3 Construction d'un orthotope 98

2.3 Modèle à erreur de sortie 100
2.3.1 Construction d'un orthotope avec connaissance a priori des signes des paramètres 100
2.3.2 Construction d'un orthotope sans connaissance des signes des paramètres 103
2.4 Conclusion 104

3 Identification d'un modèle LFT **105**
3.1 Introduction 105
3.2 Schéma d'identification 106
3.2.1 Problématique 106
3.2.2 Estimation de v et w 107
3.2.3 Estimation de Δ 109
3.2.4 Synthèse du correcteur 111
3.3 Application à un modèle LFT d'avion 115
3.3.1 Le modèle latéral aérodynamique 115
3.3.2 Le modèle LFT 115
3.3.3 Application 116
3.4 Application sur un exemple SIMO 118
3.5 Conclusion 120

III Schéma d'identification-commande type boite noire **121**

1 Identification par les sous espaces fréquentiels **123**
1.1 Introduction 123
1.2 Approche par les sous espaces 125
1.2.1 Opérations de projection 126
1.2.2 Identification déterministe par la méthode des sous espaces temporels. 127
1.2.3 Identification par les sous espaces fréquentiels. 130
1.2.4 Quelques remarques sur l'analogie entre les domaines temporel et fréquentiel 138
1.3 Application à un avion souple 138
1.3.1 Le modèle identifié. 138
1.3.2 Résultats 140
1.4 Conclusion 146

2 Synthèse H_∞ **147**
2.1 Introduction 147
2.2 Synthèse de loi de commande par une approche H_∞ pondérée. 148

2.2.1 Principe de la synthèse H_∞ 148
2.2.2 Analyse en robustesse de la boucle fermée 150
2.2.3 Choix des pondérations 156
2.2.4 Application à un problème 4 blocs 157
2.2.5 Synthèse d'un correcteur à 2 degrés de liberté 162
2.3 Application à l'avion souple 164
2.3.1 Méthodologie 166
2.3.2 Synthèse du *feedback* K 167
2.3.3 Synthèse de la précommande 169
2.3.4 Résultats 170
2.4 Conclusion 175

Bibliographie **181**

Notations

ACRONYMES

FIR	Finite Impulse Response (filtre à réponse impulsionnelle finie).
FFT	Fast Fourier Transform (transformée de Fourier rapide).
FPS	Feasible Parameter Set (ensemble des paramètres admissibles).
IDFT	Inverse Discrete Fourier Transform (transformée de Fourier inverse discrète).
LFT	Linear Fractional Transformation (transformation linéaire fractionnaire).
LMI	Linear Matrix Inequality (inégalité matricielle linéaire).
LP	Linear Programming (programmation linéaire).
LPV	Linéaire à Paramètres Variants.
LQG	Linear Quadratic Gaussian (linéaire quadratique gaussien).
LS	Least Squares (moindres carrés).
LTI	Linéaire Temps Invariant.
MIMO	Multi-Input Multi-Output (multi-entrées multi-sorties).
PID	Proportionnel Intégrateur Dérivé.
QP	Quadratic Programming (programmation quadratique).
RLS	Robust Least Squares (moindres carrés robustes).
SBPA	Suite Binaire Pseudo Aléatoire.
SISO	Single-Input Single-Output (mono-entrée mono-sortie).
SMI	Set Membership Identification (identification par appartenance à un ensemble).
SVD	Singular Values Decomposition (décomposition en valeurs sigulières).
UBB	Unknown But Bounded (inconnu mais borné).

NOTATIONS GÉNÉRALES

$\mathbf{N}$	Entiers naturels.
$\mathbf{R}$	Corps des réels.
$\mathbf{C}$	Corps des complexes.
j	Imaginaire pur ($j^2 = -1$).
L_2	Espace des fonctions de carré sommable sur $\mathbf{R}$.
$L_{2e[0,\tau]}$	Espace étendu des fonctions de carré sommable sur $[0,\tau]$ et sur $\mathbf{R}$.

I	Matrice identité.
$Re(A)$	Partie réelle de A.
$Im(A)$	Partie imaginaire de A.
$\overline{\sigma}(A)$	Valeur singulière maximale de A.
$\underline{\sigma}(A)$	Valeur singulière minimale de A.
ω	pulsation (rad/s).
$diag(A,B)$	$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$.

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Contexte de la thèse

L'augmentation de la taille des avions de transport pose des problèmes dans la conception des lois de pilotage, du fait de la souplesse croissante de ces avions. Un certain nombre de travaux préliminaires ont été menés au sein du département DCSD de l'ONERA-CERT, concernant la commande et l'identification d'un avion de transport souple. Jusqu'à présent, les deux problèmes ont été traités de façon séparée. Il serait cependant plus efficace de les traiter conjointement. De nombreuses techniques d'identification et de commande ont été développées dans le cadre de la commande et de l'identification [ABF+97c, ABF+98b, ABF+99, ABF+97a, ABF+97b, ABF+98a, Dar98] de l'avion souple au travers des études COVAS. Mais ces différentes techniques n'ont jamais abordé le problème lié à l'interaction entre la commande et l'identification. En d'autres termes lors de l'identification on ne prend pas en compte explicitement les objectifs de commande et lors de la commande les erreurs inévitables liées à la modélisation et à l'identification.

La difficulté est qu'il n'existe pas un "grand" problème d'identification-commande, mais un ensemble de problèmes et d'approches possibles. On peut résumer l'ensemble des techniques d'identification-commande considérées dans cette thèse par la figure 1.1. On part des mesures d'entrées-sorties faites sur le système réel et le but est de synthétiser/réajuster un correcteur à partir de ces données et éventuellement de la connaissance a priori qu'on a du système. On va montrer qu'il en existe un grand nombre, autant qu'il peut y avoir de problèmes d'identification-commande. On peut néanmoins séparer ces approches en deux axes majeurs :

1. Le premier consiste à réajuster le correcteur en utilisant directement les données d'entrées-sorties et en réduisant l'étape d'identification ou de recalage du modèle à son strict minimum. Cette étape doit être réalisée le plus simplement possible et avec un minimum d'efforts.
2. Le deuxième axe consiste à proposer des approches répondant à la problématique suivante : Comment doit on synthétiser un correcteur en prenant en compte la connaissance a priori du système et/ou des incertitudes issues de l'identification et quelles

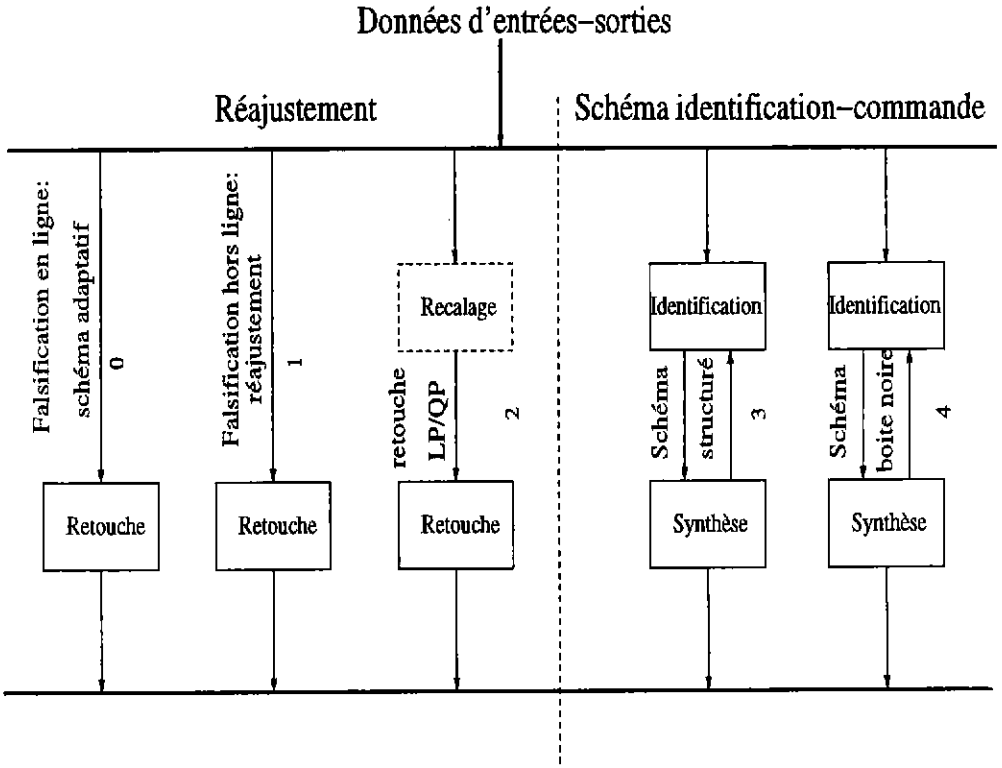


FIG. 1.1 – *Interaction identification-commande*

sont les connaissances qui me sont nécessaires sur le modèle pour satisfaire aux objectifs de commande?

Ces deux axes sont complémentaires. Le premier est basé sur l'idée qu'obtenir un modèle est long et difficile et qu'il est souhaitable d'obtenir un correcteur réajusté sans passer par cette étape fastidieuse d'identification. Mais généralement l'ingénieur connaît bien son système, voire il a une modélisation très structurée. De plus le réajustement de correcteurs ne peut intervenir qu'après une synthèse. Il est donc nécessaire de proposer des schémas d'identification-commande pouvant servir éventuellement de point de départ à un réajustement. C'est en ce sens qu'on introduit de nouveaux schémas d'identification-commande. Si on reprend la figure 1.1 on a deux situations extrêmes. La première (la plus à gauche sur le schéma) consiste à utiliser des données d'entrées-sorties permettant de synthétiser/réajuster un correcteur en ligne dans un cadre adaptatif sans utiliser de modèles du système à commander [TS93b, TS93a, TS96]. L'autre cas extrême (le plus à droite sur le schéma) est un schéma d'identification-commande avec une première étape d'identification et une seconde étape de synthèse. Bien sûr cette dernière approche n'est pas seulement le schéma classique d'une identification suivie d'une synthèse sur le modèle identifié mais c'est surtout une approche combinant l'identification et la commande en utilisant une formulation ou un cadre commun. Entre ces deux approches il existe un grand nombre de schémas suivant les hypothèses et la connaissance que l'on se fixe a priori. L'un des critères fondamental qui permet de séparer ces différentes méthodes représentées sur la figure 1.1 est la "longueur", le travail ou l'investissement consacré à l'étape d'identification. Les méthodes sur la gauche de la figure demandent un investissement quasi nul voire nul pour l'obtention d'un modèle. Les méthodes sur la droite demandent par contre un investissement beaucoup plus long, qui nécessite de développer et maîtriser une ou plusieurs techniques d'identification pour obtenir un modèle exploitable par la commande. On a donc une gradation de la gauche vers la droite sur la "longueur" de l'étape d'identification.
Dès lors on peut constater qu'il n'y pas un « grand » problème unique d'identification-commande à résoudre, mais toute une variété de problèmes en fonction de la nature des données expérimentales, des hypothèses faites sur le système et le modèle etc... Cela signifie que comme il n'y a pas un grand problème unique d'identification-commande, il n'y a pas une approche, une solution unique qui pourrait être appliquée à un problème unique. Nos travaux s'orientent autour des deux axes majeurs, l'identification pour la commande robuste et la retouche d'un correcteur initial après essais sur le système réel.

La problématique du réajustement peut se résumer de la façon suivante. Un correcteur initial est synthétisé sur un modèle (linéaire) initial communément appelé modèle de synthèse. Ce correcteur initial est implémenté sur le procédé physique et les résultats obtenus ne sont pas à la hauteur des espérances. En d'autres termes l'ensemble des spécifications qui étaient satisfaites avec le correcteur initial sur le modèle de synthèse ne le sont pas sur le procédé physique. La question qui se pose est comment on doit modifier le correcteur initial à partir des nouvelles données d'entrées-sorties pour obtenir des performances satisfaisantes sur le véritable système. Toute approche de réajustement suppose implicitement que le modèle de synthèse initial n'est pas très "éloigné" du modèle recalé sur lequel sera

fait le réajustement. Si cet écart est trop important il est illusoire de chercher à réajuster le correcteur. Il sera nécessaire de réaliser une nouvelle identification/modélisation suivie d'une nouvelle synthèse. En d'autres termes on cherche par le réajustement de correcteurs à s'affranchir de diverses étapes d'identification et de commande qui pourraient être longues et fastidieuses.
Nous avons proposé deux techniques pour réajuster un correcteur initial à partir des données d'entrées-sorties. Le réajustement par optimisation LP/QP et le réajustement par la falsification.

- L'approche appelée réajustement de correcteurs par optimisation LP/QP utilise le critère de Nyquist multivariable. Ce critère de Nyquist est le critère de stabilité qui est à la base du théorème du petit gain et de la μ-analyse. Il est d'autant plus intéressant qu'il permet de traiter naturellement les systèmes MIMO. Ce critère suppose que le modèle est LTI. Il fait appel à la réponse fréquentielle de la boucle ouverte. Il s'agit donc dans un premier temps à partir des données d'entrées-sorties de déterminer la réponse fréquentielle du système sur lequel on va faire le réajustement. Recaler la réponse fréquentielle du processus est un problème beaucoup plus simple que l'estimation d'un modèle paramétrique. Cette technique du réajustement est dans l'esprit de [DS81] qui basent leur approche sur la réponse fréquentielle SISO. De plus par rapport à des techniques comme celle des [JOI00] elle est indépendante de la nature du système à commander : notre approche a été appliquée à un problème avion mais elle aurait pu être appliquée à n'importe quel système pourvu que l'on ait une réponse fréquentielle de la boucle ouverte. De même qu'elle est indépendante de la nature du procédé, elle est indépendante de la structure du correcteur initial contrairement à [ZBD88] et les références associées, qui supposent et réduisent le problème en considérant seulement des correcteurs type PID. Mais il nous est tout à fait possible de prendre en compte explicitement cette structure en conservant les pôles du correcteur initial. On peut trouver aussi dans [FG99] une approche similaire à la notre avec le critère de Nyquist SISO et un réajustement de correcteurs en ligne. Son inconvénient comme celui de [ZBD88] est de ne pouvoir considérer que des systèmes SISO. Enfin un dernier élément clef est de pourvoir traiter facilement l'aspect multimodèle ce qui est un élément essentiel dans un cadre non adaptatif.

- Si nous avons insisté sur les hypothèses du critère de Nyquist c'est parce que l'approche de la falsification pour le réajustement de correcteurs est basée sur des concepts qui sont à l'opposé de ceux du réajustement de correcteurs par optimisation LP/QP. L'approche de la falsification est basée exclusivement sur une approche entrées-sorties et des spécifications types H_∞ sans utilisation de modèles. Il n'y a donc plus aucune nécessité de considérer seulement des modèles LTI, LPV ou tout simplement des modèles. On considère le système comme un ensemble continu et fini de données d'entrées-sorties dans l'espace des signaux L_{2e} [ST94, Saf96]. Cela permet de traiter naturellement des modèles nonlinéaires de dimension infinie variant dans le temps, voire un ensemble de modèles. Cet avantage est aussi un inconvénient car le système

n'est vu que du point de vue entrées-sorties. La connaissance complète du système n'est possible que si on est capable d'appliquer tous les signaux d'entrées possibles. De plus, généralement l'ingénieur a une connaissance approfondie du système. Cette connaissance ne peut pas être utilisée directement par la falsification. Nous avons développé notre application dans un contexte différent du contexte originel de la falsification [TS93b, TS93a, TS96] qui est un contexte adaptatif utilisant des données en ligne. Nous l'avons appliqué dans un contexte hors ligne dans le cadre du réajustement de correcteurs. De plus dans de très nombreux cas la falsification a été appliquée sur des systèmes SISO avec des spécification relativement pauvres. Ici l'application est très intéressante car elle correspond à un véritable problème industriel avec un cahier des charges complet et sur un système MIMO. En outre bien qu'il soit impossible d'introduire directement de la connaissance a priori dans la falsification, il est par contre possible d'en introduire indirectement. En d'autres termes on est parti d'un correcteur obtenu par placement de pôles sur un modèle de synthèse précis. Cette approche de la falsification est pleinement justifiée du fait que l'on a une connaissance précise du modèle et des méthodes de synthèse pour résoudre les problèmes de commande dans le domaine aéronautique. Dans le cadre adaptatif de la falsification l'information a priori est quasi nulle tant au niveau du correcteur que du modèle.

Si on revient sur la figure 1.1 l'approche par la falsification est représentée par la branche **1** et par optimisation LP/QP par la branche **2**. La branche **0** représente la falsification dans un cadre adaptatif. En effet les techniques "**0**", "**1**" et "**2**" font progressivement intervenir le modèle et la connaissance du système.

Un autre aspect de l'interaction identification-commande que nous avons déjà présenté est de proposer des schémas d'identification-commande, i.e. un cadre théorique commun entre l'identification et la commande. Nous avons exploré deux voies : le cas structuré et le cas non structuré ou boite noire.

- Le cas structuré fait appel à la connaissance physique du système ce qui est particulièrement approprié pour les systèmes décrits par des équations physiques comme l'avion rigide. Plus précisément un cadre naturel pour mette en évidence cette forme structurée est la mise sous forme LFT. Cette mise sous forme LFT permet de faire apparaître explicitement les paramètres physiques du système. Identifier un modèle LFT revient à identifier ses paramètres physiques. Cette approche a été extraite de [KK90]. Néanmoins telle qu'elle a été présentée elle nécessitait l'inversion d'une dynamique MIMO ce qui est généralement très difficile, voire impossible à réaliser. Nous avons par l'utilisation du domaine fréquentiel contourné cette difficulté. De plus on a établi la sensibilité du schéma d'identification en fonction du correcteur dans le cas d'une identification en boucle fermée et par la suite on établi comment le correcteur pouvait diminuer cette sensibilité. Pour l'identification en elle-même, on identifie ces paramètres à l'aide d'une méthode spécifique que l'on appelle identification par appartenance à un ensemble. Cette technique permet de fournir des intervalles de confiance

sur les paramètres estimés. La mise sous forme LFT est assez peu répandue en identification. Mais elle offre l'avantage, outre de permettre l'identification des paramètres physiques, d'être commune à la commande robuste et à la μ-analyse. A partir des intervalles de confiance sur les paramètres estimés de la LFT, il est possible de synthétiser une loi de commande robuste face à ces incertitudes paramétriques [Fer95], et de faire de la μ-analyse, tout en ayant un schéma d'identification-commande-analyse unique. Cette approche est représentée par la branche **3** : la modélisation est essentielle puisqu'on cherche à recaler des paramètres physiques, voire à déterminer un ensemble continu de modèles linéaires pour la commande robuste. On voit que l'étape d'identification joue un rôle important. De plus il est possible de modifier le correcteur afin d'assurer une meilleure qualité dans le recalage des données d'où le double sens des flèches entre l'identification et la synthèse.

Ce schéma profondément structuré n'est possible que si on est capable d'obtenir une forme LFT qui puisse être exploitable pour recaler les paramètres physiques à l'aide des données d'entrées-sorties. Il est quasiment toujours possible de mettre un système LTI sous forme LFT. Néanmoins la taille de la LFT peut la rendre inexploitable pour la commande et la μ-analyse. De plus l'identification de celle-ci, comme nous le verrons, nécessite une condition de rang qui n'est pas évidente à vérifier.

- Il est alors préférable d'utiliser un schéma d'identification-commande type boite noire. Ce schéma d'identification-commande ne peut alors avoir de sens que si on utilise un critère commun entre l'identification et la commande. Plus précisément on a utilisé une méthode d'identification par les sous espaces fréquentiels [MAL96, LJM96] et une synthèse H_∞ pondérée à deux degrés de liberté dans l'esprit de [Fon95]. Le point clef est d'identifier précisément le modèle dans le domaine de la bande passante et les pics de résonance pour y appliquer un politique de commande active efficace. De plus la synthèse H_∞ permet de prendre en compte explicitement l'erreur d'identification dans le domaine fréquentiel, erreur qui nous est fournie à l'issue de l'identification. C'est véritablement la première application faite de la synthèse H_∞ pondérée sur l'avion souple [ABF+97c, ABF+98b, ABF+99]. De plus [MAL96, LJM96] ont évoqué la possibilité d'un lien entre le problème de commande et l'identification dans le domaine fréquentiel par les sous espaces. Nous avons montré explicitement ce lien, la pertinence et l'efficacité de l'approche par les sous espaces fréquentiels et la synthèse H_∞ au travers d'un problème de commande complexe. Nous avons donc proposé un véritable schéma d'identification-commande type boite noire. Cette approche est représentée par la branche **4** de la figure 1.1. Elle est basée sur une étape fondamentale d'identification. Cette étape a le même "poids" que l'étape de synthèse.
  A ce titre il est intéressant de faire une comparaison avec le réajustement de correcteurs par optimisation LP/QP puisque dans les 2 cas on utilise la réponse fréquentielle du système. Dans le cas du réajustement la partie identification se réduit au recalage d'une simple réponse fréquentielle allégeant ainsi l'étape d'identification. Pour l'approche boite noire il est nécessaire de trouver le modèle linéaire d'ordre réduit qui reproduise le plus fidèlement possible le comportement entrées-sorties. Cette étape là

est cruciale et longue à mettre en oeuvre puisqu'elle nécessite la maîtrise de différents outils d'identification MIMO. Comme pour le cas structuré on a une double flèche entre identification et commande. En effet si à l'issue de la synthèse les spécifications ne sont pas atteintes il est toujours possible de procéder à une nouvelle étape d'identification. On illustre ainsi parfaitement la place respective de chacune des méthodes sur la figure 1.1. Il ne s'agit pas par contre de comparer ces 2 approches mais de montrer leur intérêt respectif en fonction des différentes hypothèses de départ.
Une autre comparaison intéressante est celle entre l'approche boite noire et la falsification. On remarque que dans ces 2 approches ce sont des critères H_∞ qui sont utilisés. Il est très facile alors de combiner le schéma d'identification-commande type boite noire basée sur des critère fréquentiels et plus précisément sur des critères H_∞ et le réajustement de correcteurs par falsification car il suffit d'utiliser directement et explicitement les critères H_∞ de la synthèse pour la falsification. Par exemple à la suite de la synthèse H_∞ on peut appliquer la falsification avec les mêmes critères en utilisant par exemple un modèle nonlinéaire à temps variant pour simuler les données d'entrées-sorties.

S'il est possible de mettre en évidence tous ces liens c'est parce que la cadre unificateur de l'ensemble de ces approches est le domaine fréquentiel. Toutes ces approches utilisent directement ou indirectement les données fréquentielles. Le domaine fréquentiel est présent dans le critère de Nyquist et la μ-analyse (qui permet d'analyser la performance et la robustesse de la boucle fermée), dans la synthèse H_∞, et plus généralement dans l'étude des transferts en boucle fermée telles que la fonction de sensibilité, la fonction de sensibilité complémentaire etc. En remarquant que les techniques d'identification utilisent plutôt le domaine temporel.

1.2 Organisation du mémoire

Le mémoire contient 3 parties traitant le problème de l'interaction identification-commande dans différents contextes, précédées par un chapitre présentant les différents modèles qui ont été utilisés dans les applications de ce mémoire.

La partie I traite du problème de réajustement de correcteurs.
Le chapitre I présente la falsification. Cette présentation se fait d'abord au travers de définitions et de théorèmes qui sont à la base de la falsification. Plus précisément on considère un ensemble de données d'entrées-sorties issu de la boucle fermée ou ouverte, un ensemble de spécifications et un ensemble de correcteurs admissibles. Cet ensemble de correcteurs admissibles est construit à partir d'un correcteur initial dont on a dispersé les paramètres pertinents. Il s'agit par cette technique de déterminer un sous ensemble de l'ensemble des correcteurs admissibles qui satisfait effectivement les spécifications à partir des données d'entrées-sorties. Si on revient au principe du réajustement, le sous ensemble final est un ensemble de correcteurs réajustés à partir de données d'entrées-sorties expérimentales sans utilisation de modèle. Finalement la falsification est appliquée sur un système SISO linéaire pour mettre en évidence les principales caractéristiques de cette approche. Enfin celle-ci

est appliquée sur un exemple réaliste du contrôle de la chaîne de tangage d'un avion de type A330 en phase d'approche.
Le chapitre II présente le réajustement de correcteurs par optimisation LP/QP. En fait cette approche est une extension du cas SISO où le réajustement à l'aide du critère de Nyquist serait plus simple puisque le correcteur apparaît linéairement. Par contre dans le cas MIMO le critère devient nonlinéaire par rapport au correcteur. Par l'utilisation de deux propriétés essentielles (décomposition dyadique du correcteur et transformation d'un problème nonlinéaire en un problème bilinéaire) le problème de réajustement a été ramené à un problème bilinéaire qui se résout, par une heuristique, à l'aide d'une série de problèmes d'optimisation LP/QP, moyennant la transformation d'une condition de stabilité robuste nécessaire et suffisante en une condition seulement suffisante. Nous voyons qu'au travers de cette approche les deux fondements du réajustement de correcteurs : une étape d'identification réduite et un un écart faible entre le modèle et le véritable système. L'étape d'identification est réduite puisqu'elle se résume à un recalage de la réponse fréquentielle. L'écart entre le modèle et le système doit être limité car on a un problème d'optimisation bilinéaire et donc soumis à des minima locaux. Si on est loin du minimum global (i.e. un écart important entre le modèle de synthèse initial et le système) on aura toutes les chances de tomber sur un minimum local et d'obtenir un correcteur réajusté non satisfaisant. Le minimum d'effort s'exprime par le fait que les objectifs du réajustement sont atteints par optimisation LP/QP, routines facilement utilisables avec des temps de calcul réduits, et sur un modèle dont on connaît seulement la réponse fréquentielle. Nous montrerons que l'approche proposée est une extension naturelle de l'approche SISO au cas MIMO. Cette technique sera appliquée sur un modèle aérodynamique latéral d'un avion rigide de transport.

La partie II traite du problème de l'interaction identification-commande dans le cas d'un modèle profondément structuré en utilisant une formulation LFT. Cette approche est pleinement justifiée au problème de l'avion rigide puisque les modèles latéral et longitudinal sont directement issus des équations de la mécanique et du mouvement. La mise sous forme LFT fait donc apparaître explicitement les coefficients aérodynamiques de l'avion que l'on cherche à identifier.
Le chapitre I présente l'outil de la synthèse convexe par paramétrisation de Youla. Cet outil est important dans le cadre de l'identification d'un modèle LFT car il permet de traiter séparément les différents objectifs de commande et d'identification.
Le chapitre II présente le second outil utile à l'identification du modèle LFT : la SMI. Il s'agit à l'aide de la connaissance de la bornitude du bruit d'évaluer des intervalles de confiance sur les paramètres estimés. Ces paramètres estimés étant mis sous forme LFT le but est d'obtenir un continuum de modèles linéaires qui puisse être traité par la commande robuste, commande robuste face aux incertitudes paramétriques.
Le chapitre III donne l'approche pour identifier les paramètres physiques mis sous forme LFT. On montre mathématiquement comment intervient le correcteur dans la sensibilité du schéma d'identification et donc comment il est possible par la synthèse convexe de choisir parmi l'ensemble des correcteurs qui satisfont le cahier des charges celui qui minimise la sensibilité du schéma d'identification. L'application sera faite sur l'identification des co-

efficients aérodynamiques de l'avion et sur une matrice de transfert SIMO du second ordre.

Le schéma profondément structuré de la partie II n'est possible que si on est capable d'obtenir une forme LFT de taille réduite et satisfaisant une condition de rang. Or la modélisation aéroélastique du modèle flexible de l'avion souple est très complexe et de très grande taille pour lequel il est difficile d'obtenir une représentation d'état et donc une LFT de taille réduite. Il existe bien une formulation mathématique de l'aéroélasticité mais qui n'est pas exploitable pour la commande et le recalage des données à partir des entrées-sorties [BG+99]. Entre le modèle physique très structuré et le modèle boite noire on peut élaborer des modèles semi-structurés qui permettent d'avoir des modèles plus facilement exploitables pour le recalage des paramètres physiques. Pour la commande il est très largement préférable de faire appel à un modèle type boite noire comme le montrent les études COVAS. La partie III traite de l'interaction identification-commande pour un modèle type boite noire. L'application est faite sur l'avion souple puisque le modèle utilisé pour la partie flexible est un modèle type boite noire.

Le chapitre I présente les principaux résultats de la technique d'identification par les sous espaces. Le point de départ est la méthode des sous espaces dans le domaine temporel par la projection orthogonale. Nous utilisons l'extension de la technique aux sous espaces fréquentiels et nous montrons l'analogie très forte entre les deux. Nous appliquons les sous espaces fréquentiels sur la partie flexible où nous obtenons un modèle identifié d'ordre réduit. A ce modèle on associe une erreur d'identification dans le domaine fréquentiel.

Le chapitre II traite de la synthèse H_∞ pondérée à deux degrés de liberté appliquée a l'avion souple. Nous montrons comment le critère de synthèse est construit à partir des spécifications fréquentielles et temporelles. Nous mettons en évidence plus particulièrement le problème de contrôle des modes souples et bien sûr la prise en compte explicite de l'erreur d'identification, permettant ainsi d'assurer la stabilité du modèle complet à partir du modèle de synthèse d'ordre réduit.

Chapitre 2

Présentation des modèles d'avion.

2.1 Introduction

Nous présenterons le principe des commandes de vol électriques ainsi que les chaînes de contrôle d'un appareil à savoir la chaîne de roulis, de lacet et de tangage. Nous introduirons brièvement le modèle aérodynamique latéral et longitudinal que nous avons utilisé dans les diverses applications de ce mémoire. Nous donnerons les différents modes qui apparaissent pour chaque modèle et leur interprétation physique. Enfin nous terminerons par la présentation du modèle de l'avion souple.

2.2 Principes des commandes de vol électriques

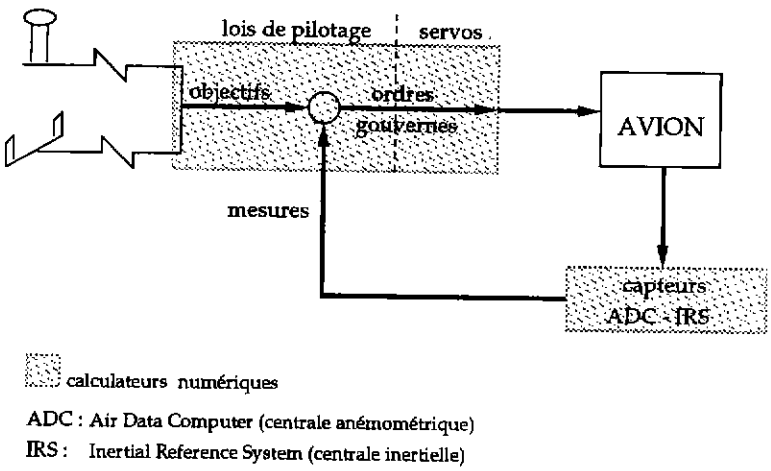


FIG. 2.1 – *Principe des commandes de vol électriques*

Le concept des commandes de vol électriques est résumé par la figure 2.1. On peut distinguer 3 ensembles : les servocommandes, l'avion et les capteurs. Le pilote possède 2 organes de pilotage : le palonnier et le manche. Des capteurs sont situés sur les organes de pilo-

tage pour transformer les ordres du pilote en objectifs de commande. La différence entre ces objectifs et les mesures fournies par les capteurs (capteurs anémométriques et inertiels) permet de déduire l'ordre de commande envoyé aux servocommandes. Ce type de structure permet d'intégrer les techniques modernes de l'automatique pour commander les braquages des gouvernes en fonction des ordres du pilote et de l'état mesuré de l'avion. Généralement le système à commander est un modèle linéaire mis sous forme de représentation d'état. Nous verrons dans les prochains paragraphes que ces modèles linéaires sont obtenus à partir des équations de la mécanique.
On peut distinguer deux pilotages pour un avion : le pilotage latéral et le pilotage longitudinal. Le pilotage latéral consiste à commander simultanément la chaîne de lacet et de roulis, à l'aide du palonnier pour le lacet et du manche pour le roulis. Le pilotage longitudinal consiste à commander la chaîne de tangage à l'aide du manche et de la commande des gaz. Pour un avion de transport civil le roulis est contrôlé par des gouvernes (ailerons) situées aux extrémités des ailes de l'avion. Le lacet est contrôlé par la gouverne de direction situé à l'arrière de l'appareil sur une surface verticale appelée empenage vertical. Le tangage est contrôlé par la gouverne de profondeur située elle aussi à l'arrière de l'appareil sur une surface horizontale appelée empenage horizontal.

2.3 Équations du mouvement

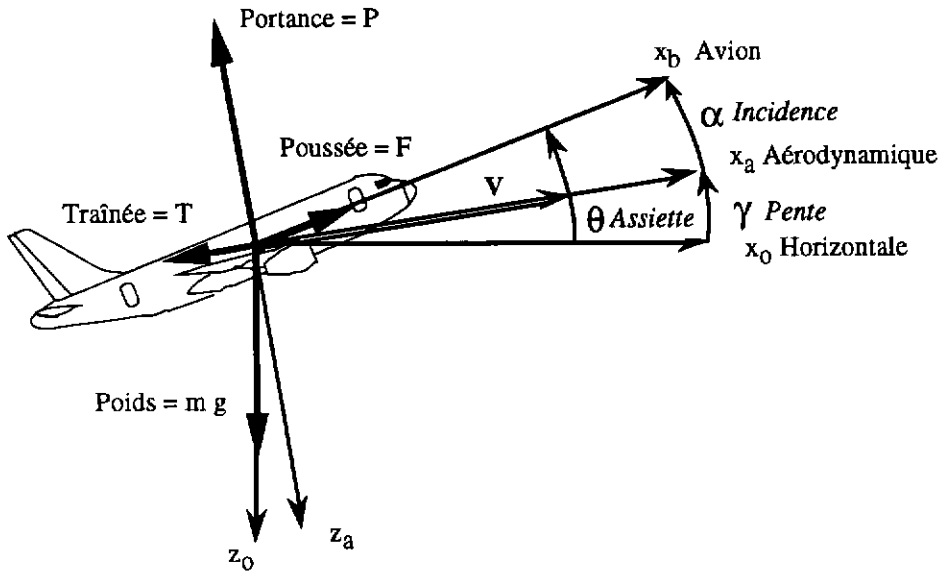


FIG. 2.2 – *Repère aérodynamique et forces extérieures*

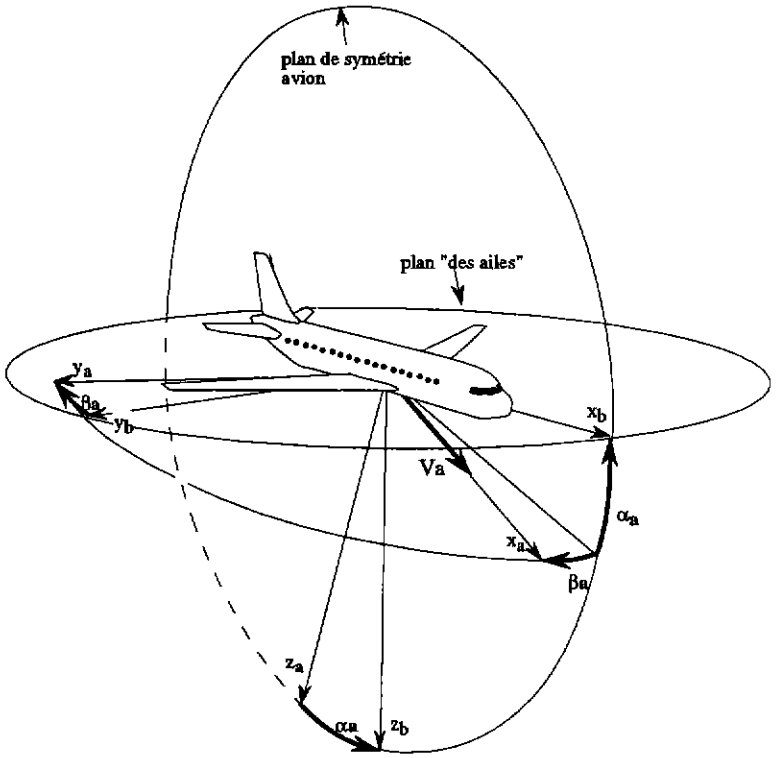


FIG. 2.3 – *Repère aérodynamique repère lié à l'avion*

Les équations générales du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} m\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \sum \vec{F_e} \\ \dfrac{d\vec{C}}{dt} = \sum \vec{M_e} \end{cases} \tag{2.1}$$

où

- $\dfrac{d\vec{V}}{dt}$ représente l'accélération du centre de gravité de l'avion par rapport à un système de référence galiléen.
- $\vec{C}$ représente le moment cinétique de l'avion autour du centre de gravité.
- $\sum \vec{F_e}$ représente la résultante des forces extérieures agissant sur l'avion.
- $\sum \vec{M_e}$ représente le moment résultant des différentes forces agissant sur l'avion (moment des forces aérodynamiques et moment des forces de propulsion).
- m représente la masse de l'avion.

Pour le mouvement longitudinal (i.e. dans le plan vertical) on utilise le schéma donné par la figure 2.2, qui représente les différentes forces projetées dans le repère aérodynamique $R_a = (G,\vec{x_a},\vec{y_a},\vec{z_a})$: c'est un repère dont le centre G est un point de référence de l'avion (souvent choisi comme étant le centre de gravité). L'axe $\vec{x_a}$ est porté par la vitesse aérodynamique de l'avion, $\vec{z_a}$ est dans le plan de symétrie de l'avion et orienté positivement vers le ventre

de l'appareil et $\overrightarrow{y_a}$ complète le trièdre positif. Les équations longitudinales sont projetées dans ce repère.
Pour le cas des mouvements latéraux (i.e. dans le plan horizontal) on considère un autre repère, un repère $R_b = (G,\overrightarrow{x_b},\overrightarrow{y_b},\overrightarrow{z_b})$ lié à l'avion. Le centre du repère est un point fixe de l'avion et généralement on choisit G afin d'avoir le même centre pour tous les repères. Les axes $\overrightarrow{x_b}$ et $\overrightarrow{z_b}$ sont orthogonaux entre eux et contenus dans le plan de symétrie de l'avion. $\overrightarrow{x_b}$ est choisi voisin de l'axe longitudinal de l'avion et orienté positif de l'arrière de l'avion à l'avant. $\overrightarrow{z_b}$ est normal à $\overrightarrow{x_b}$ et orienté vers le bas. Enfin $\overrightarrow{y_b}$ est déterminé de façon à avoir un trièdre positif. La figure 2.3 illustre la position des différents repères R_a et R_b.

2.4 Équations et représentation d'état du modèle latéral

Il est nécessaire de faire quelques hypothèses pour déterminer les équations du mouvement latéral [Boi96]. On considère une vitesse (V_0) et une incidence (α_0) constantes (découplage classique entre longitudinal/latéral), la vitesse de tangage q_0 et le dérapage β sont faibles. En d'autres termes on suppose que le mouvement longitudinal est bien maîtrisé. Nous obtenons dans le repère R_a les équation suivantes :

- Équation de moment de roulis :

$$A\dot{p} - (B-C)q_o r - E(\dot{r} + pq_o) = \frac{1}{2}\rho_o S V_o^2 \ell C_l$$

- Équation de moment de lacet :

$$C\dot{r} - (A-B)q_o p - E(\dot{p} + rq_o) = \frac{1}{2}\rho_o S V_o^2 \ell C_n$$

- Équation de force latérale :

$$mV_o(\dot{\beta} - p\sin\alpha_o + r\cos\alpha_o) = \frac{1}{2}\rho_o S V_o^2 C_y + mg\sin\phi\cos\theta_o$$

- Équation cinématique en roulis :

$$\dot{\phi} = p + \tan\theta_o(q_o sin\phi + r\cos\phi)$$

On obtient 4 équations différentielles régissant le comportement des 4 variables latérales β, p, r et ϕ qui désignent respectivement l'angle de dérapage, la vitesse de roulis, la vitesse de lacet et l'angle de roulis.
La linéarisation se fait pour le point d'équilibre suivant :

$$\beta_{eq} = \phi_{eq} = r_{eq} = p_{eq} = q_{eq} = 0$$

Cela suppose pour que la linéarisation soit valide des faibles écarts autour de ces valeurs d'équilibre. L'hypothèse $\beta \approx 0$ est pleinement justifiée car cet angle varie peu. Par contre pour des manoeuvres impliquant un fort angle de roulis (typiquement supérieur à 30 degrés) on rentrera dans les limites de cette modélisation. On obtient finalement :

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_\beta}{V_o} & \frac{Y_p}{V_o} + \sin\alpha_o & \frac{Y_r}{V_o} - \cos\alpha_o & \frac{g\cos\theta_o}{V_o} \\ l_\beta & l_p & l_r & 0 \\ n_\beta & n_p & n_r & 0 \\ 0 & 1 & \tan\theta_o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Y_{\delta p}}{V_o} & \frac{Y_{\delta r}}{V_o} \\ l_{\delta p} & l_{\delta r} \\ n_{\delta p} & n_{\delta r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_p \\ \delta_r \end{bmatrix}$$

L'accélération au centre de gravité s'écrit :

$$n_y = -\frac{V}{g}(Y_\beta\beta + Y_p p + Y_r r + Y_{\delta p}\delta p + Y_{\delta r}\delta r) \tag{2.2}$$

Les entrées sont les entrées ailerons (δp) et gouverne de direction (δr). L'ordre du modèle est 4, on a donc 4 pôles dont 2 sont réels et 2 sont complexes conjugués. Il apparaît 3 modes que nous allons décrire brièvement :

- Le mode de roulis pur : il s'agit d'un mode apériodique, généralement rapide (autour de 1 rad/s) qui correspond à la mise en vitesse de roulis de l'avion à la suite du braquage des ailerons.
- Le mode spiral : il s'agit d'un mode apériodique très lent. Le pôle associé à ce mode est très proche de 0 (quasi intégrateur). Supposons l'avion en virage stabilisé (ϕ =constante et $p = 0$) et que le pilote remette le manche au neutre. Si le pôle est stable, l'avion revient à un vol en palier ($\phi = 0$). Si le pôle est un intégrateur pur l'appareil maintient son inclinaison. Si le pôle est instable, l'avion augmente son inclinaison.
- L'oscillation de dérapage : ce mode oscillant est aussi appelé roulis hollandais. Il s'agit d'une oscillation entre le dérapage β et la vitesse de lacet r qui provoque un mouvement de roulis durant le vol.

Dans le modèle latéral choisi dans les différentes applications développées dans ce mémoire le pôle du mode spiral est instable. Ce qui signifie que l'avion est instable en boucle ouverte et qu'il est nécessaire d'utiliser des commandes de vol électriques pour stabiliser l'appareil. Le modèle latéral de l'avion de transport rigide utilisé a les pôles suivants :

TAB. 2.1 – *Pôles du modèle d'avion en boucle ouverte.*

Valeurs propres	Amortissements	Pulsations (rad/s)
3.41e-03	1	3.41e-03
-5.01e-02 ± 0.674i	7.41e-02	0.68
-0.86	1	0.86

Les valeurs numériques de la représentation d'état du modèle latéral sont :

$$A = \begin{pmatrix} -0.0820 & 0.1500 & -0.9300 & 0.1464 \\ -0.8400 & -0.7600 & 0.7400 & 0 \\ 0.0920 & -0.2300 & -0.1140 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0.1400 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0.0020 & 0.0118 \\ 0.0950 & 0.0600 \\ 0 & -0.1510 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.0098 & -0.0013 & -0.0072 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -0.0002 & -0.0014 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A ce modèle latéral on rajoute des actionneurs. Un actionneur du deuxième ordre et un autre du troisième ordre sont mis en série respectivement sur δ_p et δ_r. Les fonctions de transfert de ces actionneurs sont respectivement pour δ_p et δ_r :

$$\frac{N_1}{D_1} = \frac{-1.77s + 399}{s^2 + 48.2s + 399} \tag{2.3}$$

$$\frac{N_2}{D_2} = \frac{2.6s^2 - 1185s + 27350}{s^3 + 77.7s^2 + 3331s + 27350} \tag{2.4}$$

TAB. 2.2 – *Pôles des actionneurs.*

Valeurs propres	Amortissements	Pulsations (rad/s)
-10.4	1	10.4
-10.6	1	10.6
-33.7± 38.7i	0.66	51.3
-37.6	1	37.6

On constate que la dynamique des actionneurs est nettement plus rapide que la dynamique de l'avion. On obtient finalement un modèle (avion+actionneurs) d'ordre 9.

2.5 Équations et représentation d'état du modèle longitudinal

On considère un vol longitudinal pur (plan vertical) :

$$\beta = p = r = \phi = 0$$

La projection des équations du mouvement dans le repère aérodynamique R_a fournit les équations suivantes :

- Équation de propulsion sur l'axe $\vec{x_a}$

$$m\,\dot{V} \;=\; -\,\frac{1}{2}\,\rho\,S\,V_a^2\,C_x \;+\; F\,(\cos\alpha_a) \;-\; m\,g\,(\sin\gamma) \tag{2.5}$$

- Équation de sustentation sur l'axe $\vec{z_a}$

$$-m\,V\,\dot{\gamma} \;=\; -\,\frac{1}{2}\,\rho\,S\,V_a^2\,C_z \;-\; F\,(\sin\alpha_a) \;+\; m\,g\,(\cos\gamma) \tag{2.6}$$

- Équation de moment sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$

$$B\,\dot{q} = \frac{1}{2}\,\rho\,S\,\ell\,V_a^2\,C_m + \{MF_G\} \tag{2.7}$$

- Équation cinématique de vitesse de tangage sur l'axe $\overrightarrow{y_a}$

$$\dot{\alpha_a} + \dot{\gamma} = q \tag{2.8}$$

- Équation cinématique d'altitude sur l'axe $\overrightarrow{z_0}$

$$\dot{h} = V\,\sin\gamma \tag{2.9}$$

On obtient donc un système de cinq équations différentielles qui, une fois linéarisées autour d'un point d'équilibre, se mettent sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\bar{\gamma}} \\ \dot{\bar{\alpha}} \\ \dot{q} \\ \dot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_u & A_\gamma & A_\alpha & A_q & A_h \\ B_u & 0 & B_\alpha & B_q & B_h \\ C_u & 0 & C_\alpha & C_q & C_h \\ D_u & 0 & D_\alpha & D_q & D_h \\ 0 & V_e & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \bar{\gamma} \\ \bar{\alpha} \\ q \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{\delta x} & A_{\delta m} \\ 0 & B_{\delta m} \\ C_{\delta x} & C_{\delta m} \\ D_{\delta x} & D_{\delta m} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta m \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Le vecteur d'état longitudinal X est donc composé des termes suivants : la vitesse réduite $u = \frac{V - V_e}{V_e}$ (où V_e est la vitesse à l'équilibre), l'écart de pente par rapport à l'équilibre $\bar{\gamma}$, l'écart d'incidence par rapport à l'équilibre $\bar{\alpha}$, la vitesse de tangage q et l'écart d'altitude par rapport à l'équilibre $\bar{h}$. Les gouvernes longitudinales sont : la commande des gaz δx et la gouverne de profondeur δm. En général l'état est mesuré. De plus, l'utilisation de ces états et la projection des équations dans le repère aérodynamique permet de s'affranchir des transferts directs entre les commandes et les sorties.
Pour plus de précisions concernant les différents coefficients du modèle linéarisé (2.10) ou l'obtention des différentes équations, le lecteur pourra se reporter à [Boi96].
Ce système du cinquième ordre possède donc 5 pôles, correspondant à trois modes décrivant le mouvement longitudinal de l'avion :

- L'oscillation d'incidence : c'est un mode oscillatoire associé aux états α et q et caractérisé par son amortissement ξ et sa pulsation ω (ordres de grandeur : $\xi = 0.5$ et $\omega = 2.2\ rad.s^{-1}$). Il est déterminant pour les qualités de vol longitudinales. Ce mode est un mouvement oscillatoire de rotation en tangage autour d'un point situé devant le centre de gravité de l'avion.

- Le mode phugoïde : c'est également un mode oscillatoire ($\omega \approx 0.1\ rad.s^{-1}$ et $\xi \approx 0.1$), associé pour sa part aux états u et γ. Il ne crée pas de difficultés majeures pour le réglage des qualités de vol puisqu'il est lent et quasiment toujours stable bien que mal amorti. C'est donc un mode facilement pilotable autant par le pilote humain que par un pilote automatique. La phugoïde est un mouvement oscillatoire entre la vitesse et la pente (ou l'altitude) qui s'effectue à incidence constante.

- Le rappel de propulsion : il s'agit d'un mode apériodique associé à l'altitude h. Il est lié à l'étude du vol équilibré en montée. C'est un mouvement très lent ($\omega \approx 0.01\ rad.s^{-1}$) qui ramène la pente à zéro.

2.6 Modèle de l'avion souple

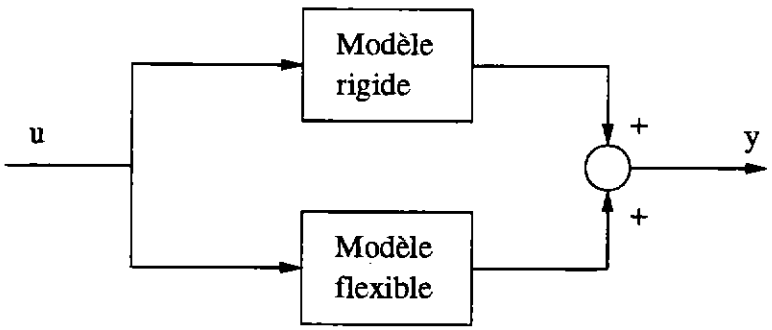


FIG. 2.4 – *Modèle de l'avion souple*

L'avion souple se distingue de l'avion rigide par la prise en compte des déformations aéroélastiques dues au couplage entre les modes structuraux et les efforts aérodynamiques. Ces déformations sont calculées par rapport à une position d'équilibre de l'avion à Mach et vitesse constants. La procédure d'obtention du modèle d'état de l'avion flexible est donnée dans [Dar98]. Le modèle global est obtenu par un couplage par les sorties du modèle rigide et du modèle flexible (figure 2.4).
Si les indices r et f désignent respectivement la représentation d'état du modèle rigide et du modèle flexible on :

$$\dot{X} = AX + Bu \tag{2.11}$$
$$y = CX + Du \tag{2.12}$$

Où :

$$A = \begin{bmatrix} A_r & 0 \\ 0 & A_f \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_r \\ B_f \end{bmatrix}, \quad C = [C_r\, C_f], \quad D = D_r + D_f \tag{2.13}$$

Si (A_r,B_r,C_r,D_r) est la représentation d'état du modèle latérale de la partie rigide, A_r est une matrice de dimension 9×9 (modèle aérodynamique+actionneurs) et A_f contient la dynamique des modes souples de la partie flexible de l'avion.

Première partie

Le réajustement de correcteurs.

Chapitre 1

La falsification de correcteurs

1.1 Introduction

L'utilisation de modèles est essentielle pour la synthèse de correcteurs. Néanmoins l'utilisation d'un modèle et éventuellement la modélisation des incertitudes sont basées sur des hypothèses de type système: LTI, LPV, dynamiques négligées, forme LFT etc. Ces hypothèses sont plus ou moins pertinentes suivant la connaissance que l'on a du modèle et de ses incertitudes. Les modèles utilisés peuvent induire en erreur puisqu'ils peuvent nous faire tirer des conclusions que nous ne pourrions pas tirer si nous nous intéressions seulement aux données expérimentales. Nous avons donc besoin de trouver une formulation mathématique qui nous permette de distinguer clairement les informations déduites des données expérimentales de celles déduites de nos hypothèses de modélisation ou d'identification. Autrement dit la falsification de correcteurs permet de faire la distinction entre les correcteurs falsifiés à cause des hypothèses sur le modèle et ceux falsifiés grâce aux données exclusivement. La distinction est faite en falsifiant seulement à partir des données expérimentales. Ce qui signifie, dans le cadre classique de l'analyse de lois de commande lorsqu'on utilise un modèle, que des correcteurs sont validés ou invalidés à la fois par les données entrées-sorties mais aussi par des données entrées-sorties non "réalisables" par le procédé. En l'absence d'hypothèse, ce que l'on peut apprendre de mieux en utilisant seulement les données expérimentales est qu'une loi de commande est incapable de satisfaire à des spécifications. L'idée clé de la falsification n'est pas de démontrer qu'une loi de commande est robuste, mais seulement que les données expérimentales sont incohérentes avec la performance et la robustesse. En fait la falsification de correcteur pose la question suivante: qu'est ce que je peux apprendre des données mesurées exclusivement?
Donc l'approche par falsification de correcteur consiste à trouver des incohérences entre les contraintes sur les signaux si le correcteur était introduit dans la boucle fermée, les données d'entrées-sorties du procédé, et les contraintes imposées par les spécifications du cahier des charges (ou issues du cahier des charges). Si aucune incohérence existe alors le correcteur n'est pas falsifié.
De plus, il est intéressant de voir qu'il est moins conservatif de valider directement les lois de commande plutôt que de valider les modèles sur lesquels ces lois de commande sont

ensuite synthétisées [BTS01, BS97, ST94]. Enfin, grâce à cette approche entrées-sorties du système, cela permet d'effectuer l'analyse des correcteurs sur des systèmes linéaires/non linéaires, à paramètres variants, sur des ensembles discrets de modèles. Le principe de la falsification de correcteur [BTS01, BS97, Saf96, SC97, BFS98, ST97, ST94] est donc basé sur une approche entrée-sortie exclusivement. On suppose que les seules informations en notre possession sont les mesures d'entrées et de sorties du procédé à contrôler, mesures obtenues à l'issue de plusieurs expériences en boucle ouverte ou fermée. Durant l'expérience # i, si un signal d'entrée $u_i(t)$ est appliqué au procédé, un signal $y_i(t)$ est récupéré à sa sortie. Aucune hypothèse n'est faite a priori sur le système. Au lieu de construire un modèle à partir des signaux $(u_i(t),y_i(t))$, et de synthétiser un correcteur sur ce modèle, le correcteur est directement synthétisé à partir des données. On remarque que dans un contexte nonlinéaire, voire à paramètres variants, construire un modèle pertinent est souvent une tâche difficile ainsi que de synthétiser un correcteur sur un tel modèle.
Plus précisément, soit un correcteur et un ensemble de spécifications pour la boucle fermée, on récupère les entrées et les sorties du système, et on vérifie si celles-ci satisfont les spécifications (remarquons que le correcteur qui est testé n'est pas nécessairement celui qui est inséré dans la boucle fermée durant l'expérience). Le correcteur est dit falsifié quand les signaux reçus montrent que ce correcteur ne peut pas satisfaire les spécifications. L'application développée dans ce chapitre est issue de [DFB02].

1.2 Théorèmes et définitions

On cherche en préambule à falsifier un modèle, i.e. à savoir s'il est cohérent avec les données expérimentales. Un modèle est représenté par un sous-ensemble B de $\mathbf{U}$, ensemble appelé univers, où B représente le comportement du modèle. Un modèle mathématique est une paire $(\mathbf{U},B)$, avec $\mathbf{U}$ l'univers (ses éléments sont appelés résultats) et $B \subset \mathbf{U}$ le comportement. Ainsi, dans le contexte des données expérimentales, celles-ci sont vues comme une source d'informations sur les éléments z_{vrai} de l'ensemble B_{vrai}.

Definition 1.2.1 *Une donnée est un ensemble non vide D de $\mathbf{U}$*

Definition 1.2.2 *Un modèle $(\mathbf{U},B)$ de $(\mathbf{U},B_{vrai})$ est estimé comme valide s'il prédit des résultats dans le sens $B_{vrai} \subset B$, sinon il est dit invalide. De façon équivalente on peut écrire dans le cas où les données consistent en un ensemble D, qu'un modèle mathématique $(\mathbf{U},B)$ est dit infalsifié par les données $D \subset B_{vrai}$ si $D \subset B$.*

Dans le cas où on a accès qu'à une connaissance partielle du signal par l'opérateur troncature $P_\tau : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ (seules les données passées sont accessibles), donc $D \subset P_\tau B_{vrai}$ alors l'ensemble D fournit une information partielle sur le vecteur $z_{vrai} \in B_{vrai}$, i.e. il existe au moins un $z_{vrai} \in P_\tau^{-1}(D)$.

Definition 1.2.3 *Soit un modèle $(\mathbf{U},B)$, un opérateur troncature P_τ, et un ensemble de données $D \subset P_\tau \mathbf{U}$, alors le modèle $(\mathbf{U},B)$ est falsifié si la connaissance de P_τ et D est suffisante pour déduire que le modèle $(\mathbf{U},B)$ est invalide.*

Definition 1.2.4 *Un modèle* (**U**,B) *est infalsifié si pour chaque* $z_{data} = P_\tau z_{vrai} \in D$, *il existe un* $z \in B$ *tel que* $P_\tau z = z_{data}$.

D'où le théorème suivant :

Théorème 1.2.5 *Soit l'ensemble* D, *un modèle* (**U**,B) *de* (**U**,B_{vrai}) *est falsifié par les données* $D \subset P_\tau B_{vrai}$ *si, et seulement si pour tout* $z_{data} \in D$ *on a* $P_\tau^{-1}(z_{data}) \cap B = \emptyset$.

1.2.1 Falsification de correcteurs.

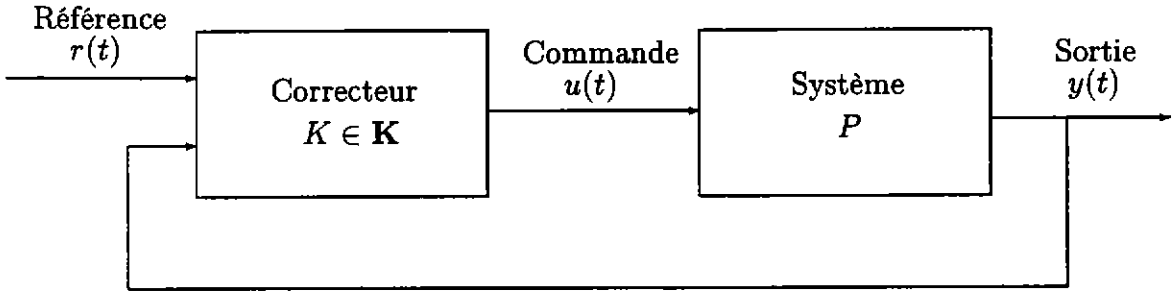


FIG. 1.1 – *Commande en boucle fermée*

Dans cette section nous allons présenter les éléments théoriques de base de la falsification de correcteurs [BTS01, BS97, Saf96, SC97, BFS98, ST97, ST94].

Definition 1.2.6 *Le quadruplet* (**U**,B_p,B_c,P_τ), *où le correcteur et le modèle sont représentés par les sous ensembles respectivement* B_c *et* B_p, *est dit bien posé dans le problème de la falsification de correcteurs si pour chaque donnée* $z_{data} \in P_\tau B_p$ *la relation suivante "*$P_\tau^{-1}(z_{data}) \cap B_p \cap B_c \neq \emptyset$ *si* $P_\tau^{-1}(z_{data}) \cap B_c \neq \emptyset$*" est vérifiée.*

Théorème 1.2.7 *Soit le quadruplet* (**U**,B_c,B_p,P_τ). *Le correcteur* (**U**,B_c) *est falsifié par les données* $D \subset P_\tau B_p$ *si, et seulement si pour tout* $z_{data} \in D$ *on a "*$P_\tau^{-1}(z_{data}) \cap B_c \cap B_p = \emptyset$ *si* $P_\tau^{-1}(z_{data}) \cap B_c \neq \emptyset$*".*

Ce théorème sur la falsification de correcteurs est équivalent à la falsification de modèle en prenant $B_{cl} = B_p \cap B_c$ à la place de B. Ou de façon équivalente en remplaçant D par $D_{cl} = P_\tau^{-1}(D) \cap B_c$, ce qui revient à réduire l'univers **U** à $B_c \cap \mathbf{U}$ (**U** $\leftarrow B_c \cap \mathbf{U}$).

Definition 1.2.8 *Soit* T_{spec} *l'ensemble des signaux satisfaisant les spécifications, un correcteur* K *(voir figure 1.1) est dit falsifié par la mesure, si cette mesure est suffisante pour déduire que les spécifications* $(r,y,u) \in T_{spec} \forall r \in R$ *seraient violées si le correcteur était dans la boucle fermée. Sinon le correcteur* K *est dit non falsifié.*

Dans le cas où on n'a accès qu'à des mesures jusqu'à l'instant τ, l'ensemble M_{data} devient $M_{data} = \left\{(u,y) \in U \times Y | P_\tau \begin{bmatrix} (u - u_{data}) \\ (y - y_{data}) \end{bmatrix} = 0\right\}$ où l'opérateur P_τ est l'opérateur de

troncature tel que :

$$[P_\tau x] = \begin{cases} x(t) & si \quad t \leq \tau \\ 0 & si \quad t > \tau \end{cases} \tag{1.1}$$

Definition 1.2.9 *L'ensemble* $P_{data} = \{(r,y,u) \in R \times Y \times U | (u,y) \in M_{data}\}$ *est appelé ensemble des informations mesurées à l'instant* τ.

Problème 1.2.10 *On a :*

- *un ensemble* $P_{data} \subset R \times Y \times U$
- *un ensemble* $T_{spec} \subset R \times Y \times U$
- *et un ensemble* $\mathbf{K}$ *de correcteurs admissibles*

il s'agit alors de déterminer le sous-ensemble $\mathbf{K_{OK}}$ *capable de satisfaire les spécifications* $(r,y,u) \in T_{spec} \quad \forall r \in \mathbf{R}$ *qui n'est pas falsifié par les mesures* P_{data}.

Le procédé P et le correcteur K peuvent être vus comme des "lieux" dans $R \times Y \times U$ i.e. :

$$P = \{(r,y,u) \in R \times Y \times U \,|\, y = Pu\} \tag{1.2}$$

$$K = \left\{ (r,y,u) \in R \times Y \times U \;\middle|\; u = K \begin{bmatrix} r \\ y \end{bmatrix} \right\} \tag{1.3}$$

P_{data} peut être vu comme une connaissance partielle de la contrainte P. Donc l'ensemble P_{data} représente une *borne inférieure* de la relation entrée-sortie du procédé dans le sens où $P_{data} \subset P$ (sous-ensemble). Inversement la formulation du problème de commande robuste considère une *borne supérieure* P_{unc} de la relation entrée-sortie du procédé dans le sens où $P \subset P_{unc}$ (sur-ensemble). Cette approche est basée sur l'utilisation de bornes qui ne peuvent pas être complètement validées par un nombre fini de données expérimentales.

Théorème 1.2.11 *Considérons le problème 1.2.10. Un correcteur* K *est infalsifié par les mesures* P_{data} *si, et seulement si, pour chaque triplet* $(r_0,u_0,y_0) \in P_{data} \cap K$, *il existe au moins une paire* $(u_1,y_1) \in M_{data}$ *tel que :*

$$(r_0,y_1,u_1) \in P_{data} \cap K \cap T_{spec} \tag{1.4}$$

Ou de façon équivalente cela signifie que le correcteur K *est falsifié par les données* (u_{data},y_{data}) *si, et seulement si la condition suivante n'est pas satisfaite :*

$$P_{data} \cap K \subset T_{spec} \tag{1.5}$$

Le théorème 1.2.11 a les propriétés suivantes :

Propriété 1.2.12 *Le théorème 1.2.11 est non conservatif, i.e. on a une condition nécessaire et suffisante de falsification du correcteur, en utilisant seulement les données passées. Il fournit un "filtre" mathématique qui rejette n'importe quel correcteur, qui suivant les données expérimentales, est incapable de satisfaire aux spécifications de performance et robustesse demandées.*

Propriété 1.2.13 *Le théorème 1.2.11 permet de traiter naturellement l'aspect multimodèle, les modèles nonlinéaires et/ou à paramètres variants dans le cadre de l'analyse et de la retouche de correcteurs.*

Propriété 1.2.14 *Le théorème 1.2.11 est "sans modèle": aucun modèle n'est nécessaire pour testèr la condition de falsification. Il n'y a aucune hypothèse sur le procédé et donc le correcteur est falsifié sur la base exclusivement des données d'entrées-sorties.*

Propriété 1.2.15 *Les mesures P_{data} qui invalident le correcteur K ne sont pas nécessairement générées par le correcteur K dans la boucle fermée ; cela peut être des données en boucle ouverte, ou des données issues d'autres correcteurs pas nécessairement inclus dans* $\mathbf{K}$ *(ceci permet de valider/invalider non seulement le correcteur dans la boucle fermée mais aussi l'ensemble des correcteurs admissibles de* $\mathbf{K}$*).*

Propriété 1.2.16 *Si les ensembles* $\mathrm{P_{data}}$, K *et* $\mathrm{T_{spec}}$ *s'expriment en termes d'égalités et/ou d'inégalités, alors la falsification d'un correcteur peut être traitée comme un problème d'optimisation dans le cadre de la synthèse de correcteur [WHK99] et de la commande adaptative [TS93b, TS93a, TS96]. Pour certains types d'inégalités et d'égalités (linéaires ou quadratiques), ce problème d'optimisation peut être résolu analytiquement ou numériquement.*

Les hypothèses et les modèles sont relégués au rôle plus approprié du choix des spécifications de performance et de robustesse T_{spec} et de l'ensemble des correcteurs admissibles $\mathbf{R}$. En supposant que $u = y = 0$ alors $r = 0$, il devient impossible d'invalider les correcteurs, il apparaît certaines conditions que les données expérimentales doivent satisfaire pour fournir de l'information sur le procédé. On remarque également que dans certains cas [TS96], la méthode de falsification permet d'estimer le système sur lequel on analyse le correcteur. Cela est possible lorsque les paramètres du correcteur sont directement liés aux paramètres physiques du modèle.

1.2.2 Les références fictives

Un aspect important de la falsification est de pouvoir valider/invalider des correcteurs sans les insérer dans la boucle fermée. Pour cela, il suffit de considérer une référence fictive $\tilde{r}$ qui satisfait exactement $u = K \begin{bmatrix} \tilde{r} \\ y \end{bmatrix}$ sachant que K, u et y sont donnés. Une référence fictive $\tilde{r}_{i,K}(t)$ est calculée pour chaque correcteur admissible $K \in \mathbf{K}$ et pour chaque paire $(u_i(t),y_i(t))$ de l'expérience # i. En d'autres termes on associe pour chaque correcteur et pour chaque expérience # i une référence fictive $\tilde{r}_{i,K}(t)$. La signification physique de la référence fictive consiste à dire : si le correcteur K était inséré dans la boucle fermée et si on appliquait la référence $\tilde{r}_{i,K}(t)$, on obtiendrait les signaux d'entrée-sortie $(u_i(t),y_i(t))$ pour le procédé. Pour alléger la notation on omettra les indices i et K de la référence fictive $\tilde{r}$. Plus précisément, pour chaque paire (u,y) avec $y = Pu$, où P est le procédé, et une structure de lois de commande classique qui prend en entrée l'erreur de poursuite $\epsilon = y - r$, i.e. $u = K(r - y)$, $\tilde{r}$ doit être calculé pour satisfaire exactement :

$$\tilde{r} = K^{\dagger}u + y \text{ où } K^{\dagger} = (K^T K)^{-1} K^T. \tag{1.6}$$

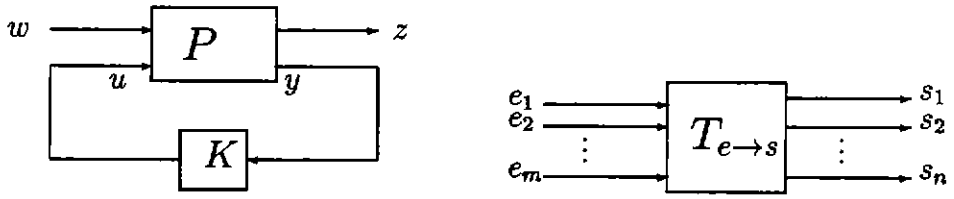
Une condition nécessaire pour l'existence de la référence fictive est que l'inverse à gauche existe, i.e. le nombre de sorties du correcteur doit être supérieur ou égal au nombre d'entrées. De plus $K^\dagger$ doit être causal pour qu'il soit réalisable, donc K doit être propre mais non strictement propre. Généralement on cherche $K^\dagger$ stable bien que cela ne soit pas nécessaire si on considère des signaux L_{2e}, l'espace L_2 étendu. Néanmoins ces conditions (propre et à minimum de phase) ne sont pas suffisantes pour calculer une référence fictive comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} r \quad \text{avec } r \text{ de dimension 1}$$

K est inversible à gauche, son inverse est stable et causal, mais néanmoins la solution obtenue est une solution au sens des LS et non une solution qui satisfait exactement l'équation $u = K \begin{bmatrix} \tilde{r} \\ y \end{bmatrix}$. Donc contrairement à ce qui est communément admis [BTS01, ST97, BFS98, JS99], une structure carrée pour le correcteur est nécessaire pour satisfaire exactement $u = K \begin{bmatrix} \tilde{r} \\ y \end{bmatrix}$ en plus des conditions précédentes donc $r = K^{-1}u + y$.

1.2.3 Falsification d'une spécification H_∞

Les spécifications fréquentielles, et spécialement H_∞, permettent de prendre en compte une large classe de contraintes fréquentielles ou temporelles. De plus on calcule facilement le critère mathématique fréquentiel dans le domaine temporel à l'aide de la propriété de la norme H_∞ comme norme induite l_2.



(a) (b)

FIG. 1.2 – *Mise sous forme standard.*

Soit e et s les signaux d'entrée-sortie à contrôler. Les entrées e sont typiquement les entrées références, perturbations et bruits de mesure et les sorties s sont typiquement les sorties de la boucle fermée que l'on cherche à contrôler. $T_{e\to s}(p)$ représente la matrice de transfert de la boucle fermée pondérée (pondérations correspondant aux gabarits fréquentiels (partie III chapitre 2)) entre $e = [e_1\ e_2 \dots e_k]^T$ et $s = [s_1\ s_2 \dots s_l]^T$. $T_{e_j\to s_i}(p)$ représente la fonction de transfert entre e_j et s_i. Satisfaire la contrainte fréquentielle $\|T_{e_j\to s_i}(p)\|_\infty \leq 1$ est équivalent à satisfaire le critère :

$$J_{i,j} = \|s_i\|_{L_2} - \|e_j\|_{L_2} \leq 0 \quad \forall e_j \in L_2 \tag{1.7}$$

Dès lors 2 possibilités s'offrent à nous pour calculer ce critère. Étant donné que l'on procède à des simulations hors ligne, on peut soit calculer le critère à chaque instant comme si l'expérience était en temps réel, soit calculer le critère à la fin de la simulation. L'intérêt de la seconde approche est d'alléger la charge de calcul, i.e. on fait le calcul du critère une seule fois au lieu de le reproduire à chaque instant. Néanmoins cette approche souffre d'un défaut important puisqu'on "appauvrit" considérablement le domaine fréquentiel étudié comme on va le voir au travers de 2 illustrations, une temporelle et l'autre fréquentielle.
En fait calculer le critère à chaque instant revient à appliquer un signal d'entrée dont la représentation fréquentielle dépend du temps. Par exemple considérons un échelon en entrée d'un système. On va observer un transitoire car l'échelon excite un ensemble de dynamiques du système du fait de la représentation en $1/j\omega$. Le régime stationnaire s'établit et finalement la contribution énergétique de la fréquence nulle pour le signal d'entrée comme pour le signal de sortie devient de plus en plus grande, jusqu'à écraser progressivement toutes les autres contributions énergétiques. Calculer le critère J à chaque instant revient à prendre en compte un spectre qui varie dans le temps. La figure 1.3 représente la Densité Spectrale d'Energie (DSE) du signal d'entrée "perçu" par le système au cours du temps.

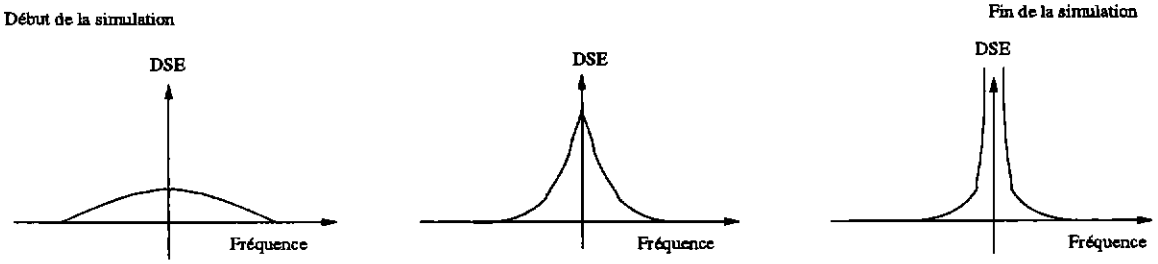


FIG. 1.3 – *Évolution de la représentation fréquentielle du signal de référence*

Une représentation de l'évolution du critère en fonction des données d'entrée et de sortie est donnée par la figure 1.4. Dans cette figure la spécification qui doit être vérifiée est :

$$J(\tau) = \|y\|_{L_{2e}[0,\tau]} - \|u\|_{L_{2e}[0,\tau]} \leq 0 \quad \forall \tau \in \mathbf{R}^+ \tag{1.8}$$

L'équation (1.8) signifie graphiquement que l'aire située sous $y(t)$ doit être inférieure à l'aire sous $u(t)$.
On constate que jusqu'à t_1 le critère J diminue et sa dérivée est négative. A partir de t_1 $y(t)$ dépasse $u(t)$. Le critère augmente progressivement pour atteindre la valeur nulle à l'instant t_2 dés que les 2 aires + et − "parcourues" par les signaux y et u sont égales. Puis de nouveau quand $y(t)$ repasse en dessous de $u(t)$ à t_3, le critère diminue de nouveau jusqu'à t_4. A ce moment là les aires + et − sont égales et par la suite comme dans cet exemple le gain statique du transfert entre u et y est supposé être inférieur à 1, $y(t)$ reste en dessous de $u(t)$ et le critère tend vers $-\infty$ quand $t \to +\infty$. En calculant le critère J à un instant final $T \geq t_4$, le modèle n'est pas invalidé, alors que la spécification n'est pas vérifiée. En calculant à chaque instant, le modèle est invalidé par cette approche car $J(\tau) \geq 0$ pour $\tau \in [t_4,t_5]$.
Comme on peut considérer un échelon comme une sinusoïde de fréquence nulle, le même

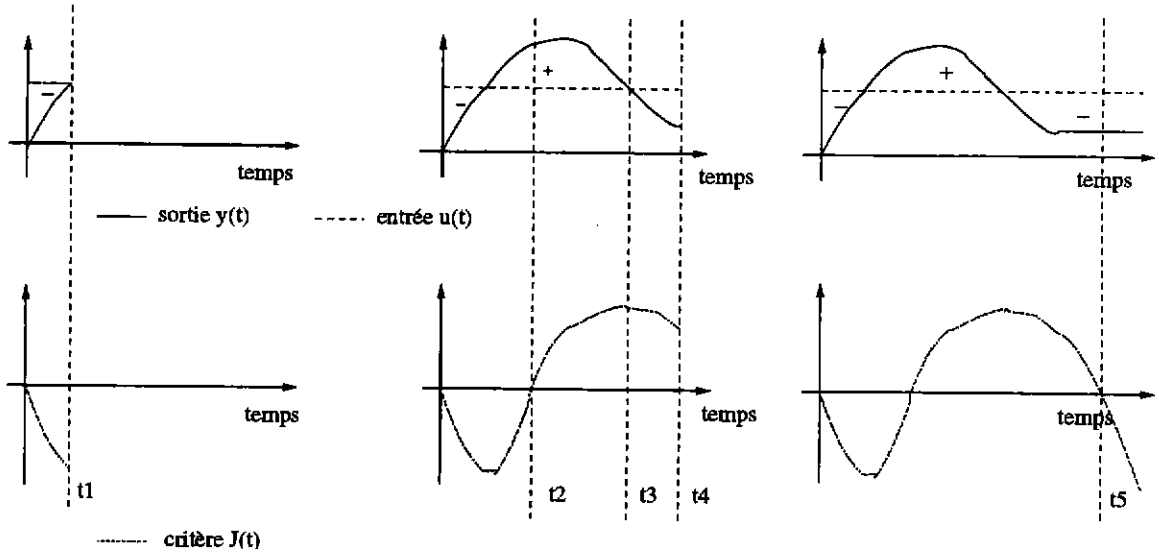


FIG. 1.4 – *Évolution du critère J en fonction des entrées-sorties*

raisonnement peut être appliqué pour une sinusoïde de fréquence ω_0 où progressivement l'énergie de l'harmonique ω_0 augmente avec le temps.
Finalement le calcul de J est réalisé pour chaque instant noté τ. Les spécifications de performance et de robustesse sont transcrites sous la forme de spécifications H_∞ entre chaque entrée e_i et sortie s_j et pour chaque τ, où τ est l'instant présent :

$$T_{spec}(i,j,\tau) = \left((r,u,y) \in R \times U \times Y \,|J_{i,j}(\tau) = \| s_j\|_{L_{2e}[0,\tau]} - \|e_i\|_{L_{2e}[0,\tau]} \leq 0 \quad \forall \tau \in \mathbf{R}^+\right) \tag{1.9}$$

Le correcteur infalsifié doit satisfaire les spécifications ci-dessus.
Un point important concerne la remontée du critère. Elle peut être significative d'un comportement qui ne respecte pas les spécifications. Tout d'abord il est nécessaire de faire une remarque sur l'influence des conditions initiales en prenant un exemple simple. Supposons un système SISO $G(p)$ satisfaisant le gabarit fréquentiel $1/W(p)$, i.e. $\|WG\|_\infty \leq 1$. Supposons que le critère J soit calculé à partir de l'instant initial $\tau = 0$ et qu'à cet instant les conditions initiales associées à G soient non nulles. Cela signifie que si y est la sortie de G on a $y \neq 0$ et $u = 0$, J est donc positif alors que la spécification fréquentielle est satisfaite. En notant qu'effectivement la norme induit l_2 n'est pas définie pour une entrée nulle, néanmoins on peut toujours appliquer un u très faible ($u \neq 0 \ll y$) et dans ce cas la norme induite l_2 est définie et $J > 0$. On constate l'importance des condition initiales. En fait le passage du domaine fréquentiel au domaine temporel est basé sur le lemme réel borné. Celui-ci montre l'équivalence entre le domaine temporel (représenté par l'énergie des signaux d'entrées-sorties) et fréquentiel (représenté par le transfert) *seulement* avec des conditions initiales nulles. Dans le cas contraire ce théorème n'est plus vrai, donc on ne peut pas déduire que $\|WG\|_\infty \geq 1$ même si $J > 0$ avec des conditions initiales non nulles.

Posons :

$$J_0^2(t_0) = \|w * y\|^2_{L_{2e[0,t_0]}} - \|u\|^2_{L_{2e[0,t_0]}} \quad (1.10)$$

$$J_0^2(\Delta t) = \|w * y\|^2_{L_{2e[0,\Delta t]}} - \|u\|^2_{L_{2e[0,\Delta t]}} \quad (1.11)$$

$$J_0^2(t_0 + \Delta t) = \|w * y\|^2_{L_{2e[0,t_0+\Delta t]}} - \|u\|^2_{L_{2e[0,t_0+\Delta t]}} \quad (1.12)$$

J_0 signifie que le système a des conditions initiales en $t = 0$ nulles. On peut montrer que :

$$J_0^2(t_0 + \Delta t) = J_0^2(t_0) + J_{t_0}^2(\Delta t) \quad (1.13)$$

Remarquons que le "2" du J_0^2 n'est pas le carré de l'équation (1.8) mais juste une notation qui indique que l'on prend la norme l_2 au carré des signaux mesurés. L'indice sous J représente l'instant des condition initiales. Cette relation signifie que le critère à l'instant $t_0 + \Delta t$ avec des condition initiales nulles est égal au critère jusqu'à l'instant t_0 pour des conditions initiales nulles plus le critère associé à Δt en repositionnant l'origine des temps à t_0 mais avec des conditions initiales correspondant à l'état du système $X(t_0)$.
De plus supposons que l'on excite le système à partir de l'instant t_0 avec une sinusoïde de fréquence ω_0. L'effet des conditions initiales disparaît au bout d'un temps suffisamment long. On entend par suffisamment long un temps écoulé Δt largement supérieur à la constante de temps la plus lente du système. Ou, du point de vue entrée-sortie, la sortie du système est stationnaire. Dans l'équation (1.13), si Δt est suffisamment grand, l'effet des conditions initiales disparaît et $J_{t_0}^2(\Delta t) \to J_0^2(\Delta t)$. Dès lors l'évolution de $J_{t_0}^2(\Delta t)$ se comporte comme si $X(t_0) = 0$. Si $J_0^2(t_0 + \Delta t)$ est négatif, $J_0^2(t_0)$ l'est aussi, mais $J_{t_0}^2(\Delta t)$ croît (ou $\left(\frac{dJ_{t_0}^2(\Delta t)}{dt}\right)_{t=\Delta t} \geq 0$), alors en stationnaire on peut affirmer qu'à la fréquence ω_0 le critère fréquentiel n'est pas vérifié. En d'autres termes, dans des conditions de stationnarité et d'excitation mono harmonique, la remontée du critère est significative de la falsification d'un correcteur.
On peut néanmoins faire 2 remarques. Dans les simulations on applique des sinusoïdes à fréquence variable. Dans ce cas la remontée du critère est significative si la variation de la fréquence est suffisamment faible pour considérer le système comme stationnaire. Il est néanmoins possible si le critère remonte tout en restant négatif d'appliquer par la suite des sinusoïdes dans le domaine fréquentiel concerné pour invalider/valider le correcteur. La deuxième remarque concerne l'échelon qui peut être assimilé à une sinusoïde de fréquence nulle. Ainsi si on observe une remontée du critère J en stationnaire (sortie y constante), on peut dés lors invalider le correcteur.

1.2.4 Choix des entrées référence

Comme il est impossible d'appliquer le signal pire cas pour falsifier un correcteur car généralement on ne le connait pas a priori, la question est de savoir si des signaux d'entrée générique peuvent efficacement falsifier les lois de commande, ou plus précisément comment choisir des signaux d'entrée génériques pour falsifier des correcteurs. A priori des signaux d'entrée à excitation persistante pourraient être des bons signaux candidats, comme le signal bien connu en identification, la SBPA ([Saf96, BTS01]). En fait ce signal

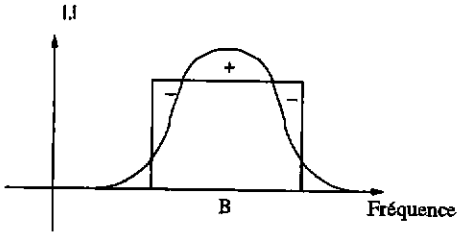


FIG. 1.5 – *Représentation du calcul du critère dans le domaine fréquentiel pour un bruit coloré.*

a une représentation fréquentielle constante et excite simultanément toutes les fréquences. Finalement les fréquences critiques (fréquences où le gabarit est violé) sont noyées dans le domaine fréquentiel entier. En effet en prenant $T(p)$ un transfert SISO entre e et s et la spécification fréquentielle $\|T\|_\infty \leq 1$, la norme H_∞ étant une norme induite L_2 on a :

$$\frac{\|Te\|_{L_2}}{\|e\|_{L_2}} \leq 1 \tag{1.14}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (t*e)(t)(t*e)dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} e(t)e(t)dt \tag{1.15}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (TE)^*(\omega)(TE)(\omega)d\omega \leq \int_{-\infty}^{\infty} E^*(\omega)E(\omega)d\omega \tag{1.16}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} T^*T(\omega)E^*E(\omega)d\omega \leq \int_{-\infty}^{\infty} E^*(\omega)E(\omega)d\omega \tag{1.17}$$

$$\tag{1.18}$$

$E^*E(\omega)$ représente la DSE du signal d'entrée. Cette fonction de ω peut être interprétée comme une pondération sur le transfert considéré. Par le choix du signal d'entrée $e(t)$, on va privilégier le domaine fréquentiel à falsifier. Par exemple si $E(\omega) = \Pi_B(\omega)$ où $\Pi_B(\omega) = 1$ pour $\omega \in [\underline{\omega},\overline{\omega}]$ et $\Pi_B(\omega) = 0$ pour $\omega \notin [\underline{\omega},\overline{\omega}]$ et $\overline{\omega} - \underline{\omega} = B$, alors on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^*(\omega)T(\omega)\Pi_B(\omega)d\omega \leq \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_B(\omega)d\omega \tag{1.19}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |T\Pi_B(\omega)|^2 d\omega \leq B \tag{1.20}$$

$$\Leftrightarrow \|T\Pi_B(\omega)\|_{H_2}^2 \leq \frac{B}{2\pi} \tag{1.21}$$

En remarquant que $\Pi_B^n = \Pi_B$ pour $n \in \mathbf{N}^+\backslash\{0\}$, on voit apparaître ici explicitement la norme H_2 du transfert $T\Pi_B$. Ce résultat peut être interprété comme suit. L'énergie du signal de la sortie s dans le domaine fréquentiel B doit être inférieur à l'énergie du signal d'entrée e qui est B. Si on divise l'équation (1.20) par B on obtient la puissance moyenne du signal de sortie par Hz sur la largeur de bande B. Cette puissance moyenne par fréquence doit être inférieure à 1.
Une interprétation graphique est donnée par la figure 1.5. En appliquant un signal dont le

spectre est constant sur un domaine fréquentiel donné, on moyenne le critère fréquentiel sur ce domaine fréquentiel. Si l'aire représentée par + qui dépasse le gabarit est inférieure aux aires représentées par − alors le modèle n'est pas invalidé. Ce qui signifie en d'autres termes que les fréquences qui ne satisfont pas le gabarit sont noyées dans celles qui le satisfont. Cette interprétation graphique par les aires est tout à fait similaire à celle donnée par la figure 1.4, d'autant plus que les inégalités et égalités des aires sont conservées par le théorème de Parseval.
Si le signal d'entrée $e(t)$ est une sinusoïde de fréquence ω_0, i.e. $E(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$ où δ est la distribution de Dirac, alors $T(\omega)\delta(\omega - \omega_0) = T(\omega_0)\delta(\omega - \omega_0)$. Ce qui signifie que nous avons avec l'équation (1.17) :

$$|T(\omega_0)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0)^* \delta(\omega - \omega_0) d\omega \leq \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0)^* \delta(\omega - \omega_0) d\omega \quad (1.22)$$

$$\Leftrightarrow |T(\omega_0)|^2 \leq 1 \quad (1.23)$$

Donc le bode de $T(\omega)$ doit être inférieur à 1 à la fréquence ω_0, ou de façon équivalente la puissance du transfert $T(p)$ en ω_0 doit être inférieure ou égal à 1.
Si on considère $e(t) = H(t)$, où $H(t)$ est un échelon, $\delta(t) = \frac{dH(t)}{dt} \Leftrightarrow \delta(p) = pH(p)$, en posant $p = j\omega$ on a dans le domaine fréquentiel $E(\omega) = \frac{\delta(\omega)}{j\omega}$, d'où :

$$|T(0)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\omega)^* \delta(\omega)}{\omega^2} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\omega)^* \delta(\omega)}{\omega^2} \quad (1.24)$$

$$\Leftrightarrow |T(0)|^2 \leq 1 \quad (1.25)$$

Ces relations nous montrent l'intérêt de bien choisir les signaux référence à appliquer sur le système. On constate qu'appliquer une sinusoïde ou un échelon ne permet d'évaluer la boucle fermée que sur une seule fréquence. Il faut cependant pondérer les résultats obtenus pour 2 raisons essentielles.
La première raison est que les signaux appliqués ne sont pas des signaux physiques, ce ne sont que des signaux théoriques qui ont une énergie infinie. On n'applique jamais un échelon car expérimentalement le signal a une fin. Dans la réalité on applique un échelon multiplié par une fenêtre temporelle égale à 1 durant la durée de l'expérience. Ce qui revient à convoluer la représentation fréquentielle de l'échelon par la représentation fréquentielle d'une fenêtre, ce qui tend à déformer le spectre. Il en est de même pour une sinusoïde. Dans le domaine fréquentiel on n'a pas un dirac mais la représentation fréquentielle de la fenêtre. Ce qui expliquera qu'expérimentalement même en appliquant une sinusoïde ou un échelon, on parviendra à falsifier des fréquences autres que la fréquence de la sinusoïde ou la fréquence nulle. De plus comme on calcule le critère à chaque instant cela revient à considérer des signaux plus riches en fréquences qu'une sinusoïde ou qu'un échelon même multiplié par une fenêtre temporelle.
La deuxième remarque provient du fait que dans la réalité le système est nonlinéaire, i.e. même dans le cas idéal d'une entrée sinusoïde à une fréquence fixée, cela conduit généralement à une combinaison linéaire de sinusoïdes, voire à une sinusoïde de fréquence différente à la sortie. L'interprétation fréquentielle est beaucoup plus délicate car la violation d'un gabarit à une fréquence donnée n'a plus de sens. Néanmoins le critère J (équation (1.9))

reste tout à fait valide.
De plus ces relations ne sont pas nécessairement vraies dans le cas MIMO. On peut néanmoins faire 2 remarques pour le cas MIMO. Tout d'abord cette analyse nous donne des propriétés dans le cas SISO qui deviennent des heuristiques dans le cas MIMO. Ces heuristiques nous guident dans le choix des différents paramètres à déterminer (comme le choix des entrées références) pour la falsification. De plus avec la falsification de correcteurs et le critère H_∞ choisi, a priori, rien n'empêche, contrairement à la synthèse H_∞, de considérer des critères associés à des sous matrices du transfert MIMO $T_{e\to s}$. Ces sous transferts peuvent se résumer à des transferts SISO, illustrant l'intérêt de l'analyse SISO.

1.3 Application à un exemple SISO

1.3.1 Système utilisé et conditions générales de falsification

Pour illustrer cette approche nous utiliserons un exemple SISO. On travaille en boucle ouverte sur un procédé nommé G. Une seule spécification fréquentielle est utilisée par souci de simplicité :

$$\|WG\|_\infty \leqslant 1 \tag{1.26}$$

Le système considéré est représenté par le schéma bloc 1.6. C'est un système du second ordre avec 2 pôles complexes conjugués stables et bien amortis et un zéro stable :

$$z_0 = -5\ .10^{-3} \quad ; \quad p_{1,2} = -7\ .10^{-3} \pm 7{,}1\ 10^{-3}\ j$$

soit un amortissement de 0.7 et une fréquence de 0.01 rad/s.

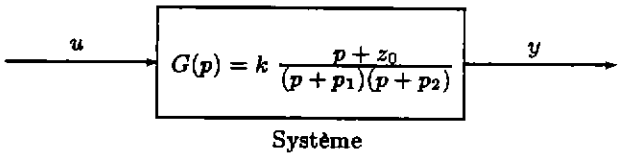


FIG. 1.6 – *Système SISO*

La spécification fréquentielle peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\|WG\|_\infty \leq \gamma \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \tau \in \mathbf{R}^+,\ \forall u \in L_{2e} \quad \text{et } u \neq 0 \\ \|w * y\|^2_{L_{2e}[0,\tau]} - \gamma^2\ \|u\|^2_{L_{2e}[0,\tau]} \leq 0 \\ \text{où } y(t) = g(t) * u(t) \\ \text{et } w \text{ et } g \text{ réponses impulsionnelles respectivement de } W \text{ et } G \end{cases} \tag{1.27}$$

Cette spécification fréquentielle est équivalente à dire que $|G(j\omega)|$ doit satisfaire le gabarit fréquentiel $|1/W(j\omega)| \quad \forall \omega$.

si $\exists u \in L_2[0,\tau]$ et $u \neq 0$ sur $[0,\tau]$ et $\|w * y\|^2_{L_{2e}[0,\tau]} - \gamma^2 \|u\|^2_{L_{2e}[0,\tau]} > 0$
alors $\|WG\|_\infty > \gamma$
donc $|G|$ ne vérifie pas le gabarit $|1/W|$

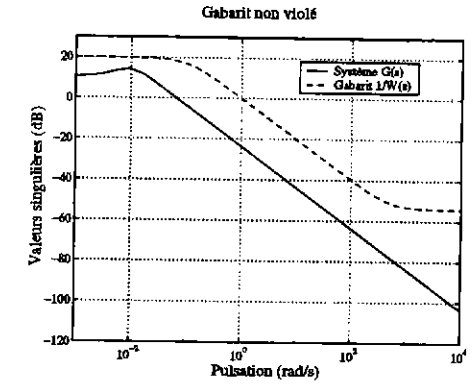
Remarque : idéalement $\gamma = 1$, mais dans le cas où le correcteur n'est pas invalidé par la falsification alors qu'il ne satisfait pas le gabarit, cela signifie que le signal pire-cas n'a pas pu être appliqué. On diminuera alors γ afin d'évaluer "l'optimisme" de la méthode.

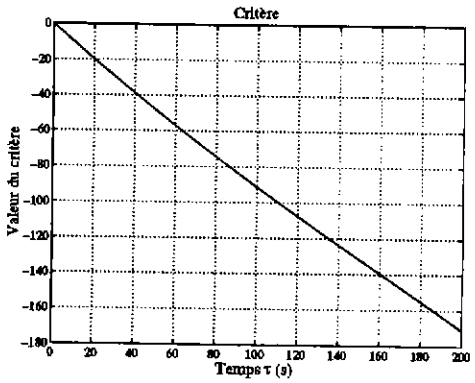
1.3.2 Résultats obtenus et interprétation

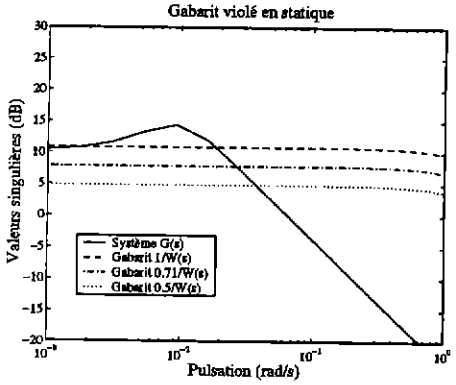
Pour chaque type de signal d'excitation u on compare l'information dans le domaine fréquentiel (diagramme de bode en gain du système et du gabarit) et l'information dans le domaine temporel (critères calculés à chaque instant). On introduit également l'influence du seuil γ pour 3 valeurs différentes :

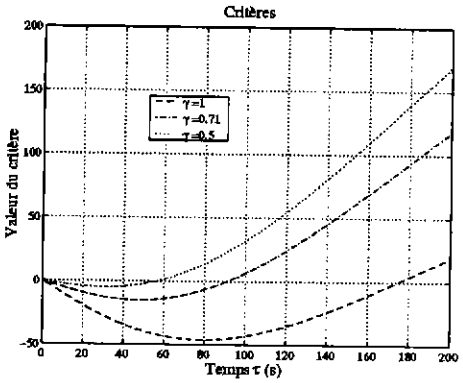
γ	γ_{dB}
1	0
0.71	-3
0.5	-6

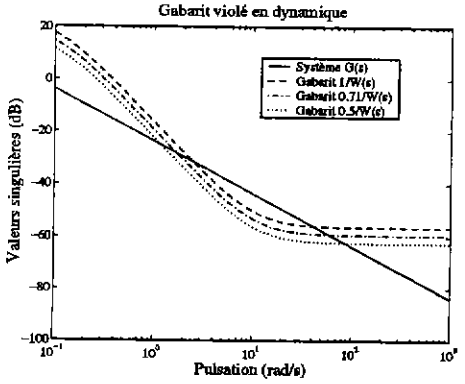
1. Signal d'excitation : $u(t) =$ échelon

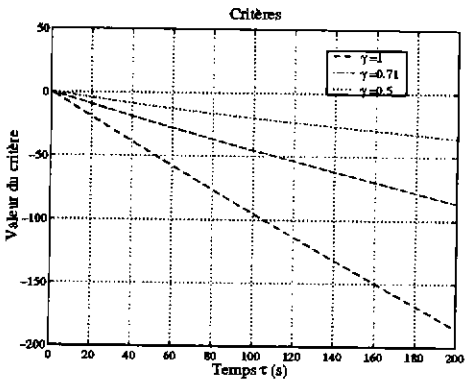








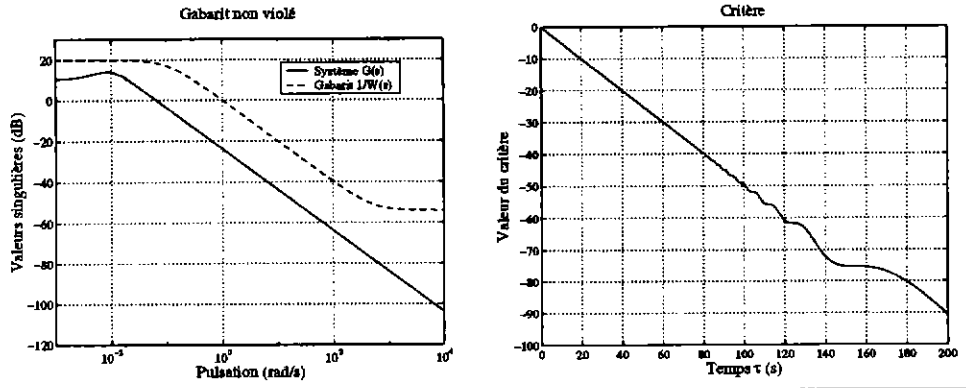


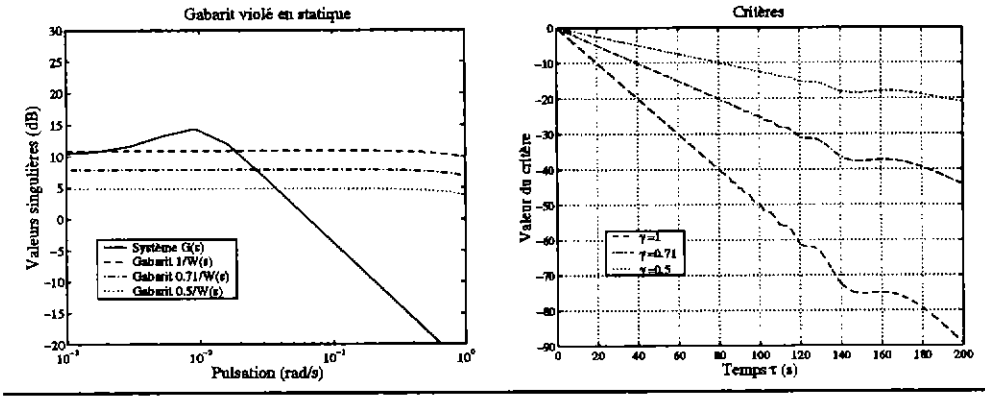


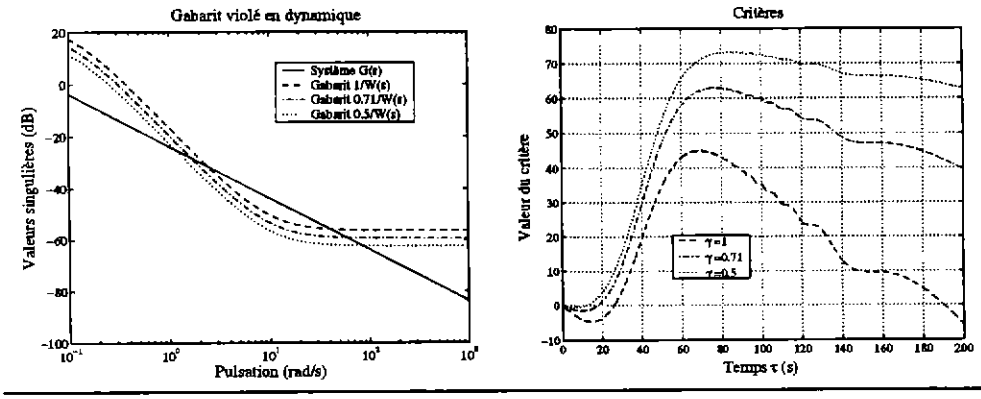
Les résultats obtenus confirment ce que l'on attendait. Dans le cas évident où $|G|$ vérifie pour toutes les fréquences $|1/W|$, le critère J décroît régulièrement.
Dans le cas où G ne vérifie pas le gabarit en basses fréquences, le critère devient positif quelle que soit la valeur de γ. Évidemment plus cette valeur est faible plus le critère monte rapidement. Il monte d'autant plus rapidement avec le temps que la contribution énergétique des basses fréquences et entre autres de la fréquence nulle devient prépondérante avec le temps du fait du choix de l'échelon en entrée.

Dans le cas où G ne vérifie pas le critère en hautes fréquences, le critère ne devient jamais positif, étant donné que les hautes fréquences sont très faiblement présentes dans la représentation fréquentielle du signal d'entrée.

2. Signal d'excitation : $u(t)$ = sinusoïde à fréquence variable descendante (fréquence de départ = 60 $rad.s^{-1}$; vitesse de balayage = $f/4$ *par* 30s, i.e. la fréquence est divisée par 4 toutes les 30 secondes)





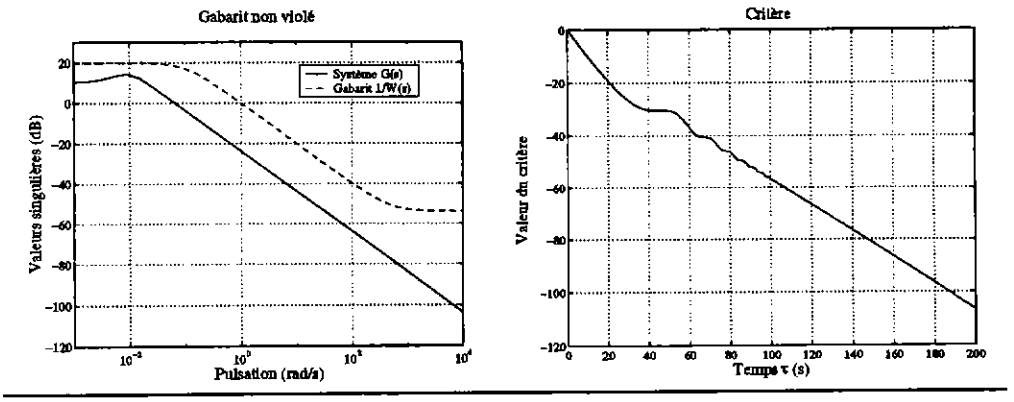


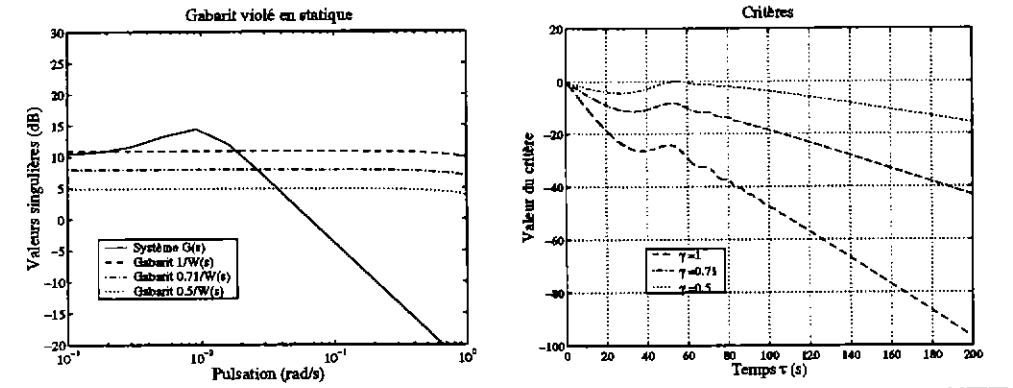
Le signal d'entrée balaie le domaine fréquentiel entier au cours du temps en partant des hautes fréquences. Comme précédemment si G vérifie le gabarit le critère diminue

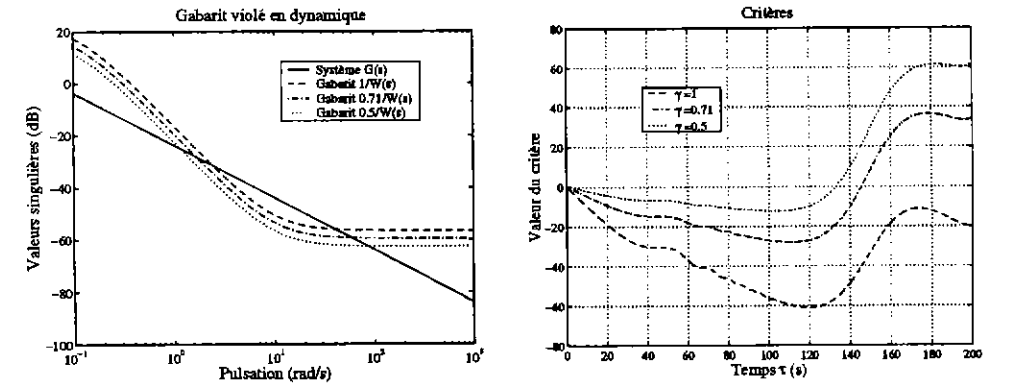
régulièrement. Par contre lorsque les spécifications ne sont pas satisfaites pour les basses fréquences, le critère continue à diminuer ne permettant pas ainsi d'invalider le transfert G. Étant donné que la sinusoïde à fréquence variable commence par les hautes fréquences et que celles-ci vérifient le gabarit, elles font diminuer fortement le critère J. Lorsque la sinusoïde balaie le domaine basses fréquences ne satisfaisant pas le critère, la contribution énergétique de ces fréquences n'est pas suffisante pour rendre le critère positif.

En revanche pour les hautes fréquences qui ne satisfont pas le critère on observe une forte augmentation du critère J qui devient positif invalidant ainsi G. Il est à remarquer que ce critère diminue ensuite au cours du temps car, la sinusoïde balaie alors les basses fréquences. Cela illustre que l'on ne peut pas se contenter de calculer la valeur finale du critère J sous peine de laisser "passer" un trop grand nombre de correcteurs insatisfaisants.

3. signal d'excitation : $u(t)$ = sinusoïde à fréquence variable ascendante
(fréquence de départ = $10^{-2}\ rad.s^{-1}$; vitesse de balayage = $f * 4\ par\ 30s$)





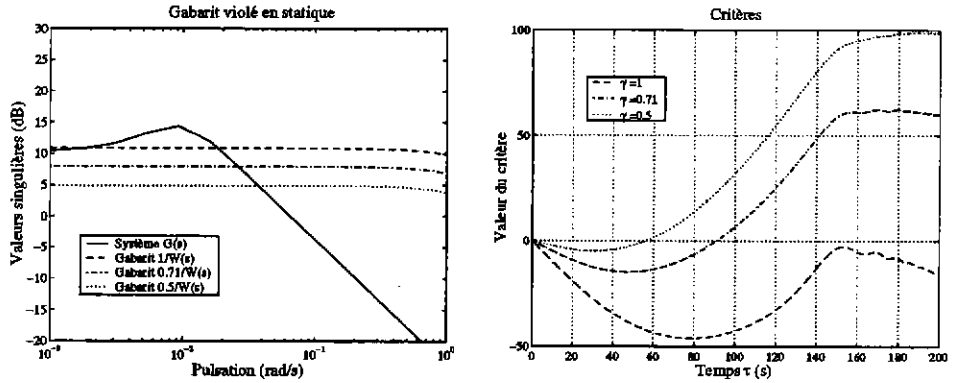


Pour essayer de résoudre le problème concernant les basses fréquences la sinusoïde à fréquence variable commence à partir des basses fréquences. Comme précédemment si la spécification est satisfaite le critère diminue continûment.

On constate que même en commençant en basses fréquences, la contribution énergétique des basses fréquences n'est toujours pas suffisante pour rendre positif le critère J. Deux solutions se présentent pour augmenter la contribution énergétique en basses fréquences : commencer le balayage en fréquences à une fréquence plus basse ou diminuer la vitesse de balayage. Dans les 2 cas l'énergie du signal d'entrée en basses fréquences est plus importante.

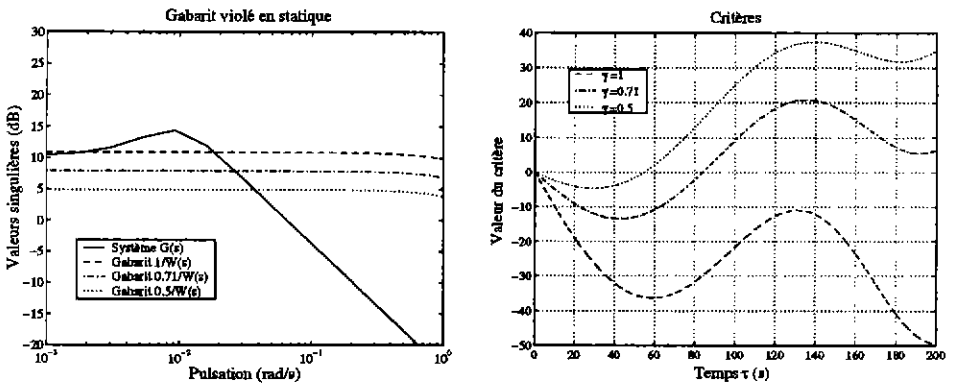
On constate pour les hautes fréquences que le résultat est nettement meilleur puisque l'on arrive, en abaissant très légèrement γ, à invalider G.

4. signal d'excitation : $u(t)$ = sinusoïde à fréquence variable ascendante (fréquence de départ = $10^{-4}\ rad.s^{-1}$; vitesse de balayage = $f * 4\ par\ 30s$)



Dans cette exemple la fréquence de départ est nettement plus faible, et on constate une remontée du critère jusqu'à des valeurs positives pour $\gamma < 1$. Par exemple avec $\gamma = 0.9$ le modèle G est invalidé.

5. Signal d'excitation : $u(t)$ = sinusoïde à fréquence variable ascendante (fréquence de départ = $10^{-2}\ rad.s^{-1}$; vitesse de balayage = $f * 1.2\ par\ 30s$)



Comme indiqué précédemment, une autre approche pour augmenter la contribution énergétique en basses fréquences est de diminuer la vitesse de balayage. On constate des résultats très similaires à l'application précédente.

1.3.3 Analyse des résultats sur le système SISO linéaire

On a pu constater l'intérêt du choix du critère et du type du signal d'entrée à appliquer en fonction du domaine fréquentiel que l'on veut analyser. On constate de bons résultats pour l'échelon en basses fréquences. Et ceci est possible en calculant à chaque instant le critère J enrichissant ainsi le domaine fréquentiel analysé. Dans le cas contraire, i.e. avec

le calcul final du critère J, cela équivaudrait à n'analyser le système que pour la fréquence nulle car cette fréquence aura la contribution énergétique la plus forte (voire infinie dans le cas d'un échelon). On peut faire exactement la même analyse pour le cas des sinusoïdes. Pour analyser un domaine fréquentiel entier, il est important d'analyser le transfert à l'aide d'une sinusoïde à fréquence variable. Une SBPA conduirait à moyenner le critère sur toutes les fréquences et donc à noyer l'énergie des fréquences invalidant le critère dans celles des fréquences satisfaisant le critère. D'où l'intérêt d'analyser "séquentiellement" l'ensemble des fréquences. Néanmoins les applications ont montré qu'il fallait apporter suffisamment d'énergie dans un domaine ne satisfaisant pas le critère pour amener J à des valeurs positives. Dans le cas où le critère reste négatif pour un modèle non valide, on constate qu'une faible diminution de γ amène le critère à des valeurs largement positives. Ce seuil γ avait pour but de montrer que l'optimisme de la méthode induit par l'impossibilité d'appliquer le signal pire-cas est faible.
Par ailleurs comme on le verra, en considérant des transferts à analyser MISO, pour chaque fréquence il existe une direction du vecteur d'entrée qui amène un gain nul et une autre direction qui amène un gain maximum (noté $\overline{\sigma}(\omega)$). Ceci complique légèrement l'analyse puisque le signal pire cas dépend non seulement de la fréquence mais aussi de la direction du vecteur d'entrée. Nous constaterons néanmoins que les résultats obtenus sont très satisfaisants.

1.4 Application sur REAL

Le but initial de la falsification était la commande temps réel d'un système inconnu et nonlinéaire ([BTS01, BFS98, ST97]). Un ensemble fini de correcteurs est falsifié en utilisant des mesures temps réel. Néanmoins cette approche peut aussi être utilisée dans un contexte proche mais différent, à savoir la retouche de correcteurs. Dans le contexte d'un pilote automatique d'avion de transport à l'atterrissage [MB00], on suppose qu'un modèle simple (LTI) d'avion est a priori connu. Un correcteur initial est synthétisé sur ce modèle, correcteur satisfaisant les spécifications en boucle fermée. Néanmoins, en testant le correcteur en vol, on obtient des performances généralement insatisfaisantes, du fait de l'écart inévitable entre le modèle et le procédé. Le correcteur initial doit être retouché en utilisant les données issues des essais en vol. Rappelons que la falsification utilise directement les essais en vol pour retoucher un correcteur sans passer préalablement par une phase de modélisation/identification d'un modèle nonlinéaire d'avion.
Plus précisément, on utilise un simulateur réaliste et complexe d'atterrissage de l'avion (avec saturations, nonlinéarités aérodynamiques, bruit de mesure, perturbations de vent stochastiques et déterministes) pour générer les essais en vol correspondant aux différentes trajectoires de l'avion. De plus un correcteur PI MIMO est initialement synthétisé sur le modèle LTI de l'avion en utilisant une technique modale [MB00]. Les principaux paramètres du correcteur sont dispersés de façon discrète autour de leur valeur nominale correspondant au correcteur initial. On obtient finalement un ensemble discret et fini de correcteurs. Chaque correcteur candidat de cet ensemble est testé à partir de données d'essais en vol.

L'objectif de robustesse est aussi pris en compte. Le comportement de l'appareil, et donc ici le simulateur, dépend par exemple de la masse de l'avion et de la position de son centre de gravité. On réalise différentes simulations d'atterrissage correspondant aux différentes valeurs de ces paramètres, et l'ensemble des correcteurs est falsifié en fonction de ces expériences. L'effet des perturbations du vent latéral et vertical est finalement étudié, ainsi que l'influence des bruits de mesure sur la procédure de falsification. Le résultat, i.e. l'ensemble des correcteurs nonfalsifiés, peut éventuellement être biaisé par de telles sources de perturbations.

1.4.1 Présentation du modèle

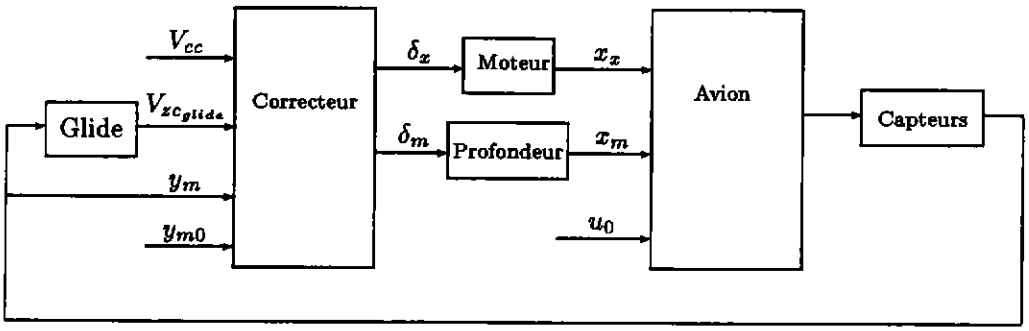


FIG. 1.7 – *Modèle nonlinéaire de l'avion commandé par retour de sorties*

Nous disposons d'un modèle nonlinéaire de l'avion en vol longitudinal. Ce modèle est constitué de l'avion (dynamique longitudinale), des actionneurs sur la profondeur et sur les moteurs (poussée), des capteurs, et du *glide* calculant la consigne de vitesse verticale ($V_{zc_{glide}}$) pour atteindre la pente d'atterrissage (voir figure 1.9). Nous disposons également d'un correcteur initial K_{ini}. Ce correcteur initial intervient comme le pilote automatique servant à l'atterrissage de l'appareil. Il a été obtenu par une synthèse modale après linéarisation du modèle nonlinéaire autour du point de fonctionnement suivant :

Masse de l'avion	$m = 150\ t$
Centrage	$xcg = 0.21$
Vitesse conventionnelle	$V_{c0} = 70\ m.s^{-1}$
Température	$T_0 = 15\ ^oC$
Hauteur centre de gravité/piste	$Z_0 = 500\ m$

Les conditions à l'atterrissage sont les suivantes :

Altitude piste/mer	$H_{piste} = 0\ m$
Pente	$\gamma_0 = -3\ ^o$
Écart au *glide*	$dZ = -50\ m$

Le centrage est la position relative du foyer de l'avion par rapport à son centre de gravité. Le foyer est considéré comme le point d'application de la portance et il s'agit d'un point fixe de l'avion. Modifier le centrage permet de régler la stabilité statique de l'avion. En jouant

sur ce paramètre on modifie la stabilité statique de l'avion et on peut donc le déstabiliser. L'écart au *glide* représente la différence d'altitude entre l'appareil et le *glide*. Ce modèle est représenté par le schéma-bloc 1.7. Sur ce modèle on tient compte des données initiales tant au niveau du retour des sorties (y_{m0}) qu'au niveau des différentes commandes (u_0). Les entrées et sorties u_0 et y_0 correspondent au point de fonctionnement précédemment évoqué. On considère les écarts par rapport à ce point.
Le retour de sorties y_m est composé des quatre mesures suivantes : vitesse conventionnelle V_c, vitesse verticale V_z, vitesse de rotation en tangage q et accélération verticale n_z. Le *glide* utilise en plus les mesures H_{lg} (altitude du train d'atterrissage) et ϵ_{glide} (écart angulaire par rapport au faisceau glide, fourni par l'ILS) pour calculer la consigne de vitesse verticale $V_{zc_{glide}}$. L'ILS (Instruments Landing System) est un système d'aide à l'atterrissage. Pour plus de details sur le modèle longitudinal d'un avion, on peut se réferrer au chapitre 2.

1.4.2 Le simulateur nonlinéaire

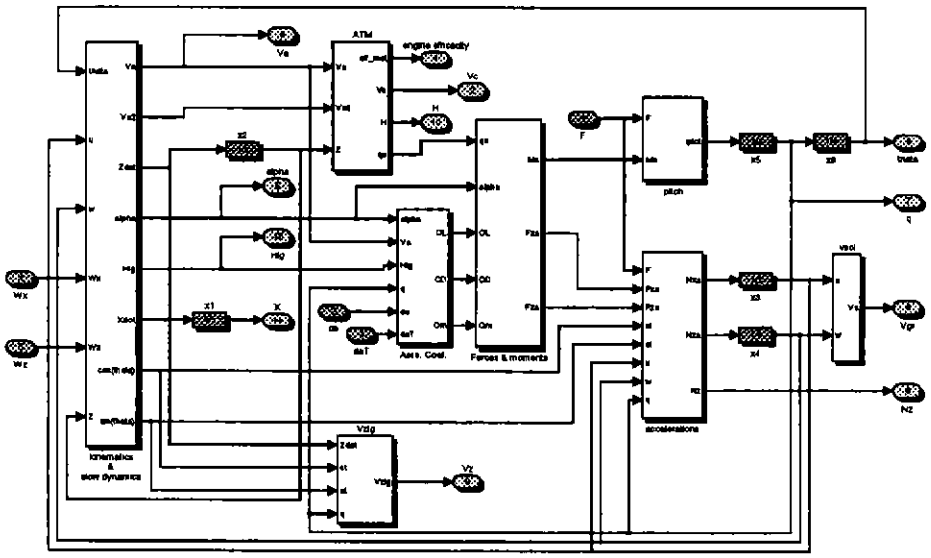


FIG. 1.8 – *Schéma Simulink du modèle nonlinéaire complet.*

Le modèle nonlinéaire qui a été utilisé permet de générer des données d'entrée-sortie reflétant le comportement d'un avion civil de transport durant les phases d'approche et d'atterrissage. Le simulateur a été entièrement développé sous l'environnement Matlab Simulink. Il consiste en un bloc principal contenant le modèle nonlinéaire de l'appareil et des composants additionnels linéaires tels que les capteurs, les actionneurs, la dynamique des moteurs et les turbulences. La description du modèle est complète et reste valide pour un large ensemble de points de fonctionnement. Par exemple l'altitude peut varier entre 0 et 2800 m et la température entre $-55°C$ et $55°C$. De telles variations ont un impact essentiellement sur l'efficacité des moteurs mais néanmoins restent moins critiques que les variations de la masse et de la position du centre de gravité. Ces deux paramètres in-

fluencent fortement la dynamique de l'appareil et seront étudiés précisément dans le cadre de la falsification. Le modèle longitudinal a 2 entrées : δ_x, δ_m. La première est reliée aux moteurs et la seconde à la gouverne de profondeur. Il est important de noter aussi les entrées turbulences W_x et W_z qui perturbent le comportement nominal de l'avion. Les turbulences utilisées sont définies par leur densité spectrale (spectre de Dryden). Les signaux associés sont générés par des bruits blancs entrant dans des filtres linéaires passe-bas du premier ordre.

1.4.3 Objectifs de commande

Le but de la commande est d'assurer de bonnes performances au niveau de l'approche et du maintien de la pente précédant l'arrondi et l'atterrissage.

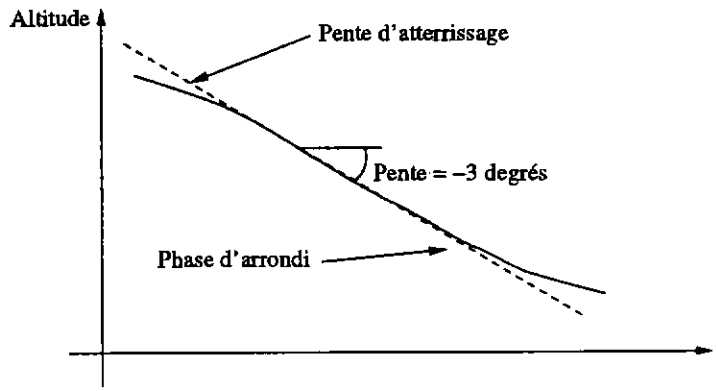


FIG. 1.9 – *Pente d'atterrissage*

Sans entrer dans le détail du cahier des charges, celui-ci contient un certain nombre de spécifications qui sont les suivantes :

- Temps de réponse en V_c de l'ordre de 20 s
- Temps de réponse en V_z de l'ordre de 10 s
- Limiter le dépassement et les oscillations sur V_z
- Dépassement toléré sur V_c
- Bon comportement face aux perturbations externes (perturbations du vent en entrée, bruits de mesure)

Les performances sur la réponse en V_z doivent être atteintes obligatoirement, quitte à dégrader celles sur la réponse en V_c. En effet, c'est le comportement en V_z qui détermine une approche et un maintien de la pente d'approche.
Pour traduire certaines de ces contraintes, on se fixe un modèle de référence T sur les réponses aux consignes V_{cc} et V_{zc}. Il s'agit d'une matrice de transfert composée de deux transferts du second ordre sur la diagonale et sans terme de couplage. La figure 1.10 représente les réponses indicielles du modèle de référence T qui a servi pour la synthèse initiale de K_{init}. On reprend donc le même modèle de référence pour la falsification. On voit

que les temps de réponse sont légèrement différents de ceux spécifiés précédemment. On essaie ainsi d'accélérer la réponse en V_z tout en relâchant la contrainte sur la réponse en V_c.

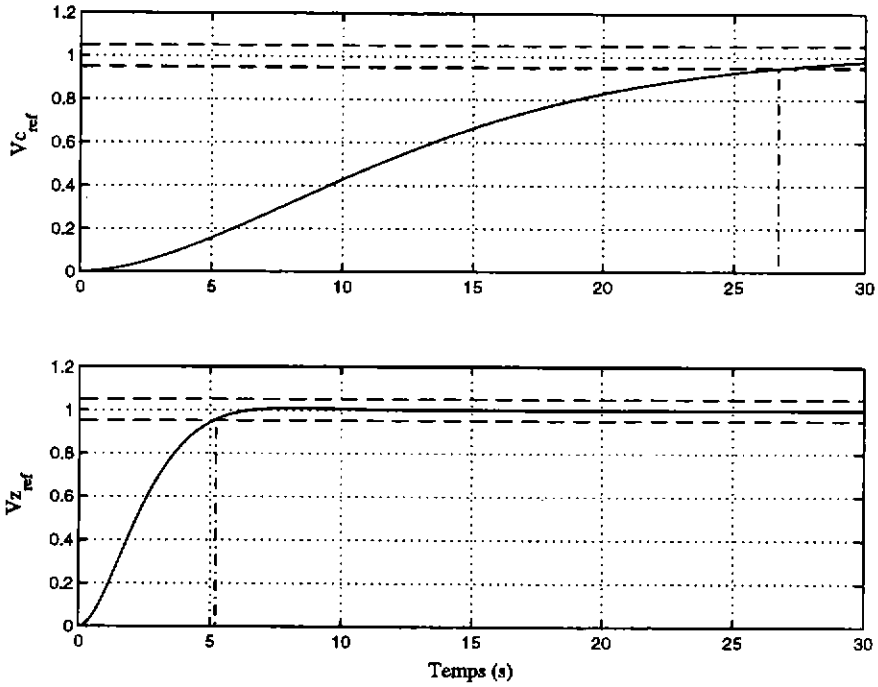


FIG. 1.10 – *Réponses indicielles du modèle de référence*

1.4.4 Correcteur proposé

Durant la phase d'approche, le long de l'axe longitudinal, le principal objectif consiste à poursuivre le chemin indiqué par le *glide* aussi près que possible en dépit des turbulences et des incertitudes paramétriques (sur les coefficients aérodynamiques bien sûr mais aussi sur la masse qui est estimée mais pas parfaitement connue). On désire aussi conserver la vitesse air autour d'une valeur constante. Cette exigence est utile pour éviter des variations importantes de la pression dynamique. La poursuite du *glide* est réalisée en contrôlant la vitesse verticale de l'appareil. Par conséquent, le principal objectif de la boucle interne est de poursuivre indépendamment la vitesse air (V_c) et la vitesse verticale (V_z). Durant l'approche (dont la durée est autour de 140 s), les temps de réponse requis pour V_c et V_z sont respectivement 20 s et 10 s. Aucune erreur statique ne doit apparaître sur chacune des voies et les dépassements doivent être minimisés. Le correcteur K est calculé par placement de structure propre sur le modèle simplifié linéarisé. La structure du correcteur est comme suit :

$$\begin{pmatrix} \delta_x & \delta_m \end{pmatrix}^T = K \begin{pmatrix} \dfrac{V_c - V_{cc}}{p} & V_c - \rho_v V_{cc} \dfrac{V_z - V_{zc}}{p} & V_z - \rho_{vz} V_{zc} & q & n_z \end{pmatrix}^T \qquad (1.28)$$

où V_{cc} et V_{zc} sont respectivement les entrées références de la vitesse air et de la vitesse verticale (générées par la boucle de guidage qui n'est pas détaillée ici), ρ_v et ρ_{vz} sont des paramètres de réglage de la précommande et q et n_z sont respectivement la vitesse de tangage et le facteur de charge. On peut trouver d'autres détails dans [MB00].

1.4.5 Les spécifications T_{spec}

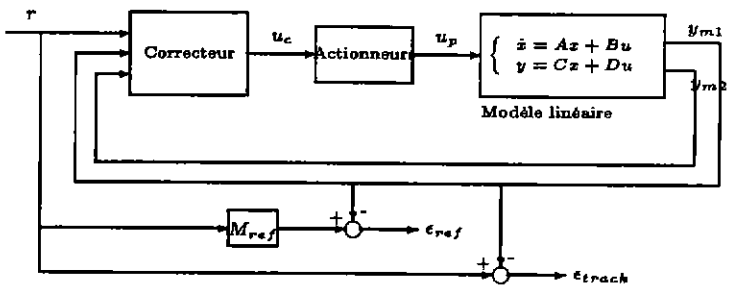


FIG. 1.11 – *Modèle linéaire*

$$r = \begin{pmatrix} V_{cc} \\ V_{zc} \end{pmatrix} ; u_c = \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_m \end{pmatrix} ; u_p = \begin{pmatrix} u_{px} \\ u_{pm} \end{pmatrix} ; y_{m1} = \begin{pmatrix} V_c \\ V_z \end{pmatrix} ; y_{m2} = \begin{pmatrix} q \\ n_z \end{pmatrix}$$

$\epsilon_{ref} = M_{ref} r - y_{m1}$: erreur avec le modèle de référence.

$\epsilon_{track} = r - y_{m1}$: erreur de poursuite.

La boucle fermée linéaire est représentée par la figure 1.11. Les 8 signaux utilisés par la falsification sont V_c, V_z, q, n_z, δ_x, δ_m, u_{px}, u_{pm}. On définit trois matrices de transfert en boucle fermée T_{ref}, T_u, T_{track}, telles que :

$$\epsilon_{ref} = T_{ref}\, r \tag{1.29}$$

$$u_p = T_u\, r \tag{1.30}$$

$$\epsilon_{track} = T_{track}\, r \tag{1.31}$$

T_{ref} et T_{track} assurent un temps de montée satisfaisant et une erreur statique nulle, tandis que T_u donne l'influence des bruits de mesure et des références sur la commande u_p. T_{ref} et T_{track} doivent avoir des gains faibles respectivement en basses et en basses et moyennes fréquences pour assurer une erreur statique faible et un comportement dynamique proche du modèle de référence M_{ref}. Pour T_u le gain doit être faible en hautes fréquences pour assurer une bonne atténuation des bruits de mesure et un effort de commande modéré sur u_p. Pour ces matrices de transfert, trois gabarits fréquentiels sont utilisés, $W_1(p)$, $W_2(p)$ et $W_3(p)$ afin que les spécifications fréquentielles précédentes soient respectées :

$$\begin{cases} \|W_1 T_{ref}\|_\infty \leq 1 \\ \|W_2 T_u\|_\infty \leq 1 \\ \|W_3 T_{track}\|_\infty \leq 1 \end{cases} \tag{1.32}$$

Comme indiqué dans le paragraphe 2.3 a priori il est possible de décomposer le critère MIMO issu de la mise sous forme standard (figure 1.2(a)) en sous critères SISO. C'est ce qui a été fait en partie puisque l'on a éclaté un transfert MIMO à 6 entrées et 6 sorties en 3 transfert MIMO à 2 entrées et 2 sorties (équation (1.32)). Néanmoins il n'est pas possible dans cette application d'éclater ces 3 critères fréquentiels MIMO en 12 critères SISO mais seulement en 6 critères MISO. En effet, comme indiqué dans le paragraphe 1.4.1, l'entrée V_{zc} est fournie par le *glide*, donc elle n'est pas libre. Dans l'application il n'est pas possible d'appliquer 0 à V_{zc}, il devient impossible de séparer la contribution de chacune des composantes de r, V_{cc} et V_{zc}. Dés lors on considérera les critères suivants :

$$\|W_{1_{1,1}} T_{ref_1}\|_\infty \leq 1 \Rightarrow J_1 = \|w_{1_{1,1}} * \epsilon_{ref_1}\|_{L_2}^2 - \|r\|_{L_2}^2 \leq 0 \quad (1.33)$$

$$\|W_{1_{2,2}} T_{ref_2}\|_\infty \leq 1 \Rightarrow J_2 = \|w_{1_{2,2}} * \epsilon_{ref_2}\|_{L_2}^2 - \|r\|_{L_2}^2 \leq 0 \quad (1.34)$$

$$\|W_{2_{1,1}} T_{u_1}\|_\infty \leq 1 \Rightarrow J_3 = \|w_{2_{1,1}} * x_x\|_{L_2}^2 - \|r\|_{L_2}^2 \leq 0 \quad (1.35)$$

$$\|W_{2_{2,2}} T_{u_2}\|_\infty \leq 1 \Rightarrow J_4 = \|w_{2_{2,2}} * x_m\|_{L_2}^2 - \|r\|_{L_2}^2 \leq 0 \quad (1.36)$$

$$\|W_{3_{1,1}} T_{track_1}\|_\infty \leq 1 \Rightarrow J_5 = \|w_{3_{1,1}} * \epsilon_{track_1}\|_{L_2}^2 - \|r\|_{L_2}^2 \leq 0 \quad (1.37)$$

$$\|W_{3_{2,2}} T_{track_2}\|_\infty \leq 1 \Rightarrow J_6 = \|w_{3_{2,2}} * \epsilon_{track_2}\|_{L_2}^2 - \|r\|_{L_2}^2 \leq 0 \quad (1.38)$$

Toutes les fonctions de transfert en boucle fermée, avec K_{ini} inséré dans la boucle fermée, satisfont les gabarits fréquentiels $W_1(p)$, $W_2(p)$ et $W_{3,1}(p)$. Deux gabarits fréquentiels $W_{3,2}$ et $W'_{3,2}$ sont utilisés, où K_{ini} satisfait $W_{3,2}$ mais pas $W'_{3,2}$. Ce gabarit fréquentiel $W'_{3,2}$ a été calculé afin d'assurer un temps de montée pour V_z plus court qu'avec $W_{3,2}$ tout en relâchant la contrainte de robustesse représentée par $\overline{\sigma}(W_{3,2}(j\omega))$.

1.4.6 Ensemble des mesures

Pour construire l'ensemble des mesures $\mathbf{P_{data}}$ nécessaires à l'application de la falsification, on applique sur l'entrée libre V_{cc} un signal choisi préalablement tandis que le glide fournit l'entrée V_{zc}. Pour la simulation linéaire et nonlinéaire les sorties correcteurs δ_x et δ_m et les sorties actionneurs u_{px} et u_{pm} sont calculées et les sorties du système V_c, V_z, q et n_z sont mesurées. Pour évaluer le critère J on a besoin seulement des sorties actionneurs et système, les sorties correcteur servant au calcul des références fictives. On a donc un ensemble de 8 signaux sur une durée de simulation notée t_{simu}.
Ce temps de simulation t_{simu} dépend de la simulation sur le modèle nonlinéaire. En effet, sur ce modèle il y a arrêt de la simulation lorsque l'altitude devient inférieure à un seuil fixé pour le début de la phase d'arrondi. Généralement, on ne peut pas simuler au delà de 140 s.
On se bornera à deux choix pour le signal de consigne V_{cc} :

- un échelon.
- une sinusoïde à fréquence variable descendante pour laquelle on se fixe la fréquence de départ (haute fréquence) et la vitesse de balayage.

La sinusoïde à fréquence variable dont la fréquence commence des hautes fréquences vers les basses fréquences est appelée sinusoïde descendante. La sinusoïde descendante com-

mence à 60 rad/s et la fréquence est divisée par 4 toutes les 30 s. Ce type de sinusoïde à fréquence variable est typique des sinusoïdes utilisées dans le domaine de l'identification fréquentielle. Pour alléger l'écriture le terme sinusoïde sera compris comme sinusoïde descendante.

1.4.7 Références fictives et ensemble des correcteurs admissibles

Le correcteur a la structure suivante :

$$\begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_m \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \frac{V_c - V_{cc}}{s} \\ V_c - \rho_v V_{cc} \\ \frac{V_z - V_{zc}}{s} \\ V_z - \rho_{vz} V_{zc} \\ q \\ n_z \end{pmatrix} \tag{1.39}$$

où $\begin{cases} K \text{ est une matrice statique de dimension } [2 * 6] \\ \rho_v \text{ et } \rho_{vz} \text{ sont des paramètres d'ajustement de la précommande} \end{cases}$

Dans le cadre de la falsification, il est nécessaire de calculer les références fictives pour analyser un ensemble de correcteurs à partir des mesures des entrées-sorties du système. Connaissant la matrice de coefficients K du correcteur à analyser, les commandes (δ_x, δ_m), et les sorties (V_c, V_z, q, n_z) on peut calculer exactement les références fictives $\tilde{V_{cc}}$ et $\tilde{V_{zc}}$:

$$\tilde{r} = \begin{pmatrix} \tilde{V_{cc}} \\ \tilde{V_{zc}} \end{pmatrix} = H^{-1} \begin{bmatrix} -I_2 & G & \underline{K} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_m \\ V_c \\ V_z \\ q \\ n_z \end{pmatrix} \tag{1.40}$$

avec :

$$H = \begin{pmatrix} \frac{K_{1,1}}{s} + \rho_v K_{1,2} & \frac{K_{1,3}}{s} + \rho_{vz} K_{1,4} \\ \frac{K_{2,1}}{s} + \rho_v K_{2,2} & \frac{K_{2,3}}{s} + \rho_{vz} K_{2,4} \end{pmatrix} \tag{1.41}$$

$$G = \begin{pmatrix} \frac{K_{1,1}}{s} + K_{1,2} & \frac{K_{1,3}}{s} + K_{1,4} \\ \frac{K_{2,1}}{s} + K_{2,2} & \frac{K_{2,3}}{s} + K_{2,4} \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

$$\underline{K} = \begin{pmatrix} K_{1,5} & K_{1,6} \\ K_{2,5} & K_{2,6} \end{pmatrix} \tag{1.43}$$

L'ensemble des correcteurs admissibles **K** est obtenu par dispersion des coefficients du correcteur initial $K_{1,1}$, $K_{1,3}$, $K_{2,1}$ et $K_{2,3}$ de $\pm 50\%$, car ce sont les paramètres du correcteur qui agissent directement sur le gain et le zero de l'action PI du correcteur. Nous analysons donc $81 = 3^4$ correcteurs. Ce nombre de correcteurs a été choisi pour permettre de

faire un grand nombre de simulations sans des temps de calcul trop longs (supérieurs à quelques dizaines de minutes). Étudier 81 correcteurs peut paraître faible au regard de la littérature ([BFS98, BS97]) dans le domaine de la falsification. Néanmoins, dans la plupart des exemples présentés, ce sont des système SISO excepté [TS96] avec seulement 1 ou 2 critères. Ici, on a un système MIMO avec un critère H_∞ se décomposant en 6 critères à vérifier, plus 5 modèles d'avion correspondant à différents cas de masse et de centrage. Au total on obtient $81*6*5 = 2430$ critères à vérifier pour la dernière simulation multimodèle. Ce qui correspond généralement au nombre de correcteurs étudiés avec un seul critère et un seul modèle.
Dans toute la suite, on distingue les résultats obtenus avec le gabarit "lent" $1/W_{3_{2,2}}$ de ceux obtenus avec le gabarit "rapide" $1/W'_{3_{2,2}}$.

1.4.8 Application linéaire

Gabarit sur T_{track_2}	$1/W_{3_{2,2}}$ ("lent")		$1/W'_{3_{2,2}}$ ("rapide")	
Type de signal consigne V_{cc}	échelon	sinusoïde "descendante"	échelon	sinusoïde "descendante"
Temps de simulation t_{simu}	2min17	2min19	2min17	2min19
Temps de calcul t_{fals}	4min08	4min49	1min41	1min33
Nombre de correcteurs falsifiés	38	27	70	70
Par : J_1	0	0	0	0
J_2	37	27	0	0
J_3	0	0	0	0
J_4	0	0	0	0
J_5	1	0	1	0
J_6	0	0	69	70
Nombre de correcteurs falsifiés exclusivement avec ce signal	11	0	5	5
Nombre total de correcteurs falsifiés sur les 2 simulations	38		75	
Nombre total de correcteurs violant les gabarits en théorie	48		81	
Différence entre théorie et pratique	10		6	

TAB. 1.1 – *Série de résultats sur le modèle linéaire*

L'application linéaire (tableau 1.1) permet de mettre en évidence les principales caractéristiques de la falsification. De plus il est possible d'évaluer "l'optimisme" de la méthode, puisque dans le cas linéaire les fonctions de transfert en boucle fermée peuvent être représentées et comparées avec les gabarits fréquentiels. Ainsi "le nombre total de correcteurs violant les gabarits en théorie" représente le nombre de correcteurs dont les fonctions de transfert en boucle fermée correspondantes ne satisfont pas les gabarits fréquentiels. "Le nombre de correcteurs falsifiés exclusivement avec ce signal" représente le nombre de cor-

reçteurs falsifiés uniquement par l'échelon ou la sinusoïde. Le "nombre total de correcteurs falsifiés sur les 2 simulations" est l'union des ensembles de correcteurs falsifiés par l'échelon et la sinusoïde. Le "temps de simulation t_{sim}" est la durée correspondant à la phase d'approche de l'appareil : a peu prés $140s$ soit $2min20$. Le "temps de calcul t_{fals}" est le temps nécessaire pour déterminer le sous-ensemble $\mathbf{K_{ok}}$ sur une station *Sun Ultra Sparc 5* et MATLAB 6.

On constate que suivant le gabarit choisi pour T_{track_2} le critère déterminant dans la falsification n'est pas le même. Avec le gabarit "lent" i.e. $W_{3_{2,2}}$, c'est essentiellement le critère J_2 qui va éliminer les correcteurs, i.e. la spécification fréquentielle portant sur l'erreur entre la boucle fermée et le modèle de référence sur la sortie V_z. On constate que c'est avec l'échelon que l'on falsifie le plus de correcteurs mettant en évidence que c'est essentiellement en basses fréquences que le gabarit $1/W_{1_{2,2}}$ n'est pas satisfait par T_{ref_2}. En ce qui concerne l'utilisation du gabarit $W_{3_{2,2}}$ étant donné qu'aucun transfert ne satisfait ce gabarit, les correcteurs sont éliminés en tout premier lieu par le critère J_6. De plus l'étude des transferts montre que c'est dans la bande de fréquence située entre la fréquence de coupure et les basses fréquences que le critère n'est pas vérifié. On constate néanmoins que l'écart des résultats entre ces 2 types de signaux n'est pas très important. Cela provient d'abord du choix du calcul du critère qui est évalué à chaque instant et non pas seulement à la fin de la simulation (voir §2.3), et évidemment du domaine de fréquence concerné puisqu'il s'agit des basses et moyennes fréquences.

La seconde remarque concerne le léger "optimisme" de la falsification. En fait, avec $W_{3,2}$, 10 correcteurs qui ne satisfont pas les spécifications fréquentielles ne sont pas falsifiés. Le résultat est meilleur avec $W'_{3,2}$, puisque seulement 6 correcteurs sont dans ce cas là. L'étude des fonctions de transfert en boucle fermée qui ne satisfont pas les spécifications montre que la contribution énergétique des fréquences qui ne satisfont pas les gabarits fréquentiels est très faible. En d'autres termes, cela signifie que les gabarits fréquentiels sont faiblement violés. Par exemple dans le cas où $\|WT_{e\to s}\|_\infty \geq \gamma$ avec $\gamma = 1$ pour les 6 correcteurs infalsifiés associés, il suffit de prendre $\gamma = 0.9$ pour falsifier les 81 correcteurs avec le gabarit $W'_{3,2}$.

Il est intéressant d'étudier les gabarits et le critère J associé. L'étude des transferts en boucle fermée montre que parmi ces correcteurs, certains correspondent (i) à des gabarits violés en basses fréquences et d'autres (ii) à des gabarits violés en hautes et moyennes fréquences.

Dans le premier cas (i), on constate, en observant les critères correspondants, que le temps de simulation ne permettait pas de falsifier ces correcteurs avec l'échelon. Avec une simulation plus longue les critères seraient devenus positifs et les correcteurs auraient été falsifiés. Cela est clairement visible sur les courbes de la figure 1.12 qui représentent des gabarits violés en basses fréquences et les critères correspondants. En d'autres termes en augmentant la contribution des basses fréquences le critère J serait devenu positif. On peut aussi rajouter qu'au bout d'un temps suffisamment long, le critère aurait été de nouveau négatif car on constate bien que le transfert satisfait le gabarit à la fréquence nulle.

Pour le cas (ii) où seules les moyennes fréquences ne satisfont pas le gabarit, on constate une remontée du critère insuffisante en appliquant une sinusoïde descendante. Cette sinusoïde part des hautes fréquences, le critère diminue, atteint les fréquences qui ne satisfont pas le

gabarit, le critère remonte, mais pas suffisamment, puis finalement redescend. On peut faire la même remarque que précédemment : la contribution énergétique des fréquences qui "dépassent le gabarit" n'était pas suffisante pour rendre positif le critère. D'une façon générale dans les 2 cas on constate que finalement les dépassements des gabarits par les transferts en boucle fermée sont très faibles. Plus précisément l'énergie ou la puissance associée au dépassement (voir figure 1.13) est négligeable par rapport à l'énergie ou la puissance des fréquences qui vérifient le gabarit.
Dans l'application qui nous intéresse cela signifie que si on change les conditions de simulation comme la durée de simulation on pourrait éventuellement falsifier d'autres correcteurs. Néanmoins est-il intéressant de falsifier un correcteur dans des conditions peu réalistes ? Si un correcteur est falsifiée à la $250^{eme}s$ par exemple, est ce que cela est rédhibitoire pour le correcteur sachant que dans tous les cas la durée de l'approche est limitée à $140s$? Physiquement cela signifie que les dynamiques qui ne satisfont pas les spécifications sont faiblement "observables" du point de vue entrée-sortie.
Pour terminer nous pouvons faire une remarque sur les temps de calcul qui diffèrent suivant le signal d'entrée car, les critères associés aux correcteurs falsifiés ne sont plus calculés. Plus il y a de correcteurs falsifiés moins il y a de critères à calculer plus le temps de calcul est court d'où les différences observées.

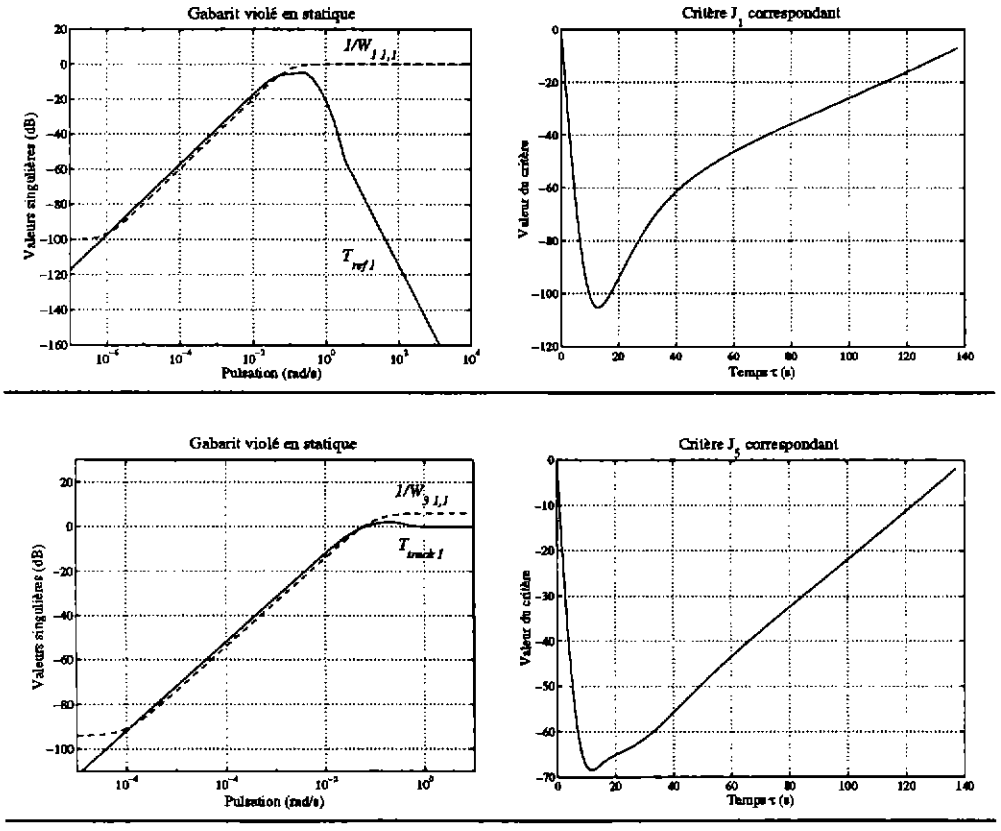


FIG. 1.12 – *Gabarits violés en basses fréquences.*

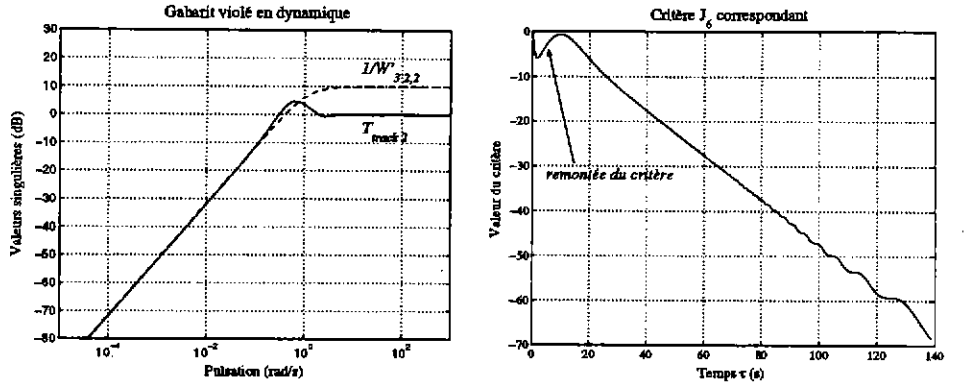


FIG. 1.13 – *Gabarits violés en moyennes fréquences.*

1.4.9 Application nonlinéaire

Gabarit sur T_{track_2}	$1/W_{3_{2,2}}$ ("lent")		$1/W'_{3_{2,2}}$ ("rapide")	
Type de signal consigne V_{cc}	échelon	sinusoïde "descendante"	échelon	sinusoïde "descendante"
Temps de simulation t_{simu}	2min17	2min19	2min17	2min19
Temps de calcul t_{fals}	4min10	4min39	2min35	2min
Nombre de correcteurs falsifiés	36	27	58	64
Par : J_1	0	0	0	0
J_2	36	27	0	0
J_3	0	0	0	0
J_4	0	0	0	0
J_5	0	0	0	0
J_6	0	0	58	64
Nombre de correcteurs falsifiés exclusivement avec ce signal	9	0	4	10
Nombre total de correcteurs falsifiés sur les 2 simulations	36		68	
Nombre de correcteurs non falsifiés ici mais falsifiés en linéaire	2		7	

TAB. 1.2 – *Série de résultats sur le modèle nonlinéaire*

Les résultats dans le cas nonlinéaire sont données par le tableau 1.2. La simulation nonlinéaire sans bruit ni perturbation montre que les résultats dans les cas linéaire et nonlinéaire donnent des résultats proches. Plus précisément, en appliquant des signaux échelons et sinusoïdes sur l'entrée V_{cc}, le point de fonctionnement est différent de celui correspondant au modèle linéarisé de synthèse. C'est pourquoi les résultats sont différents voire même

meilleurs dans le cas nonlinéaire. Il est à noter aussi que le modèle nonlinéaire ne présente pas de nonlinéarités très profondes qui changeraient substantiellement la nature du procédé.
On simule le modèle nonlinéaire avec du bruit de mesure et des perturbations vent en entrée du système (turbulences). Les simulations sont effectuées avec le gabarit "lent".

Type de signal consigne V_{cc}	échelon	sinusoïde "descendante"
Temps de simulation t_{simu}	2min18	2min19
Temps de calcul t_{fals}	4min20	5min20
Nombre de correcteurs falsifiés	30	27
Par : J_1	0	0
J_2	30	27
J_3	0	0
J_4	0	0
J_5	0	0
J_6	0	0
Nombre de correcteurs falsifiés exclusivement avec ce signal	3	0
Nombre total de correcteurs falsifiés sur les 2 simulations	30	
Différence avec les résultats sans bruits	6	

TAB. 1.3 – *Série de résultats sur le modèle nonlinéaire bruité avec gabarit "lent"*

Les résultats avec bruit de mesure et perturbations peuvent apparaître comme surprenants puisque, a priori, le nombre de correcteurs falsifiés devrait augmenter avec les perturbations et le bruit. Néanmoins, 2 types de perturbations sont mélangés : les bruit de mesure et des perturbations en entrée. La falsification est faiblement sensible au bruit de mesure. En fait, comme les entrées références sont reconstruites à partir des données d'entrée-sortie du procédé, la sortie y est vue comme un signal déterministe et finalement le bruit de mesure est transféré sur les références fictives. Le principe des références fictives est de calculer $\bar{r}$ qui produirait u et y. Par contre les perturbations en entrée ne peuvent pas être directement mesurées avec u. Leur action peut être vue par la sortie comme une variation du procédé. C'est pourquoi la falsification, pour ce type de perturbations, est beaucoup plus sensible. Les perturbations en entrée conduisent à falsifier beaucoup plus de correcteurs. Néanmoins avec des valeurs classiques sur les bruits de mesure et les perturbations, les résultats sont similaires au cas sans perturbation ni bruit.

1.4.10 Application nonlinéaire multimodèle

Nous appliquons la falsification sur le même ensemble de 81 correcteurs mais sur 5 modèles non linéaires. Deux paramètres critiques pour la loi de commande, la masse m et

Entrée référence V_{cc}	échelon	sinusoïde
Nombre de correcteurs invalidés	48	81
Sur le modèle :		
1 – $m = 150\ t$, $xcg = 0.21$	0	1
2 – $m = 123\ t$, $xcg = 0.15$	4	0
3 – $m = 123\ t$, $xcg = 0.41$	2	0
4 – $m = 183\ t$, $xcg = 0.15$	38	78
5 – $m = 183\ t$, $xcg = 0.41$	15	56
Nombre de correcteurs invalidés par ce signal exclusivement	0	33
Nombre total de correcteurs invalidés par les 2 signaux	81	

TAB. 1.4 – *Résultats sur le cas multimodèle nonlinéaire avec le gabarit fréquentiel* $W_{3,2}$

la position du centre de gravité x_{cg}, ont été choisis. Ces 2 paramètres prennent chacun 2 valeurs extrêmes. Finalement, avec le modèle nominal nonlinéaire, on considère 5 modèles nonlinéaires :

- la masse m initialement à 150 t qui prendra ici deux valeurs extrêmes : 123 t et 183 t
- le centrage xcg initialement à 0.21 qui prendra ici deux valeurs extrêmes : 0.15 et 0.41.

Le tableau 1.4 donne les résultats pour le cas nonlinéaire multimodèle sans bruit ni perturbation. Un correcteur peut être falsifié sur 2 modèles nonlinéaires au même instant avant d'être supprimé à l'instant suivant, c'est pourquoi la somme des correcteurs falsifiés sur les modèles nonlinéaires est plus grande que 81. Ces résultats montrent qu'aucun correcteur ne peut satisfaire les spécifications de robustesse et de performance pour les 5 modèles nonlinéaires. On constate que la majorité des correcteurs sont falsifiés sur les modèles 4 et 5 (cas critiques). Il s'agit de deux modèles pour lesquels la masse de l'avion est maximale et le centrage atteint les deux extrêmes (0.15 et 0.41). Les résultats obtenus nous permettent de conclure que le correcteur initial synthétisé sur le modèle nominal ne satisfait pas les spécifications initiales. On peut considérer 3 possibilités, relâcher les spécifications fréquentielles, augmenter la taille de l'ensemble des correcteurs admissibles $\mathbf{K}$, ou synthétiser un nouveau correcteur en essayant de prendre en compte explicitement les incertitudes paramétriques.

1.5 Conclusion

Dans le cadre théorique, la falsification fournit une condition nécessaire et suffisante de validation/invalidation des correcteurs. Mais cette condition suppose que l'on puisse appliquer à la boucle fermée tous les signaux possibles, ce qui dans le contexte expérimental est impossible à réaliser. Ainsi, si le correcteur reste infalsifié, cela peut signifier deux faits opposés : le correcteur satisfait effectivement les spécifications (ce qui est équivalent à dire qu'aucun signal d'entrée ou de sortie ne peut les falsifier), ou le signal d'entrée pire cas, signal qui pourrait falsifier le correcteur, n'a pas été appliqué sur le système. Par consé-

quent la falsification fournit une condition nécessaire pour valider/invalider un correcteur satisfaisant un ensemble donné de spécifications. En d'autres termes, si un ensemble de correcteurs est testé, la falsification fournit un surensemble de l'ensemble des correcteurs qui satisfont les spécifications de la boucle fermée. Si tous les signaux possibles pouvaient être appliqués au système, ou s'il était possible de prédire le signal pire-cas, la falsification fournirait alors une condition nécessaire et suffisante, i.e. l'ensemble exact des correcteurs satisfaisants.

La falsification est appliquée avec succès sur le problème d'un pilote automatique d'un avion de transport en phase d'approche. Un ensemble fini et discret de correcteurs a été falsifié. Avant d'utiliser un modèle nonlinéaire complexe, un modèle linéaire est utilisé pour prédire exactement le nombre de correcteurs qui satisfont effectivement les spécifications de la boucle fermée. Ce nombre exact est proche du nombre de correcteurs infalsifiés, i.e. la falsification apparaît comme un outil efficace pour analyser les propriétés de performance et de robustesse des correcteurs à partir de données expérimentales. On a mis en évidence l'importance du signal d'entrée à appliquer en fonction du domaine fréquentiel que l'on cherche à étudier. La dernière application montre tout l'intérêt de cette approche puiqu'elle permet d'étudier le comportement de la boucle fermée avec plusieurs modèles nonlinéaires.

Il est intéressant de noter les différences entre la falsification et la commande robuste. Il serait tentant de faire une comparaison entre les deux. Néanmoins le contexte et les hypothèses de chaque approche sont si différentes qu'il est nettement plus constructif de voir ces méthodes comme complémentaires plutôt que concurrentes.

La première différence réside dans les hypothèse faites pour la commmande robuste et la μ-analyse. Les systèmes sont considérés comme LTI. La falsification ne fait aucune hypothèse sur les modèles. En d'autres termes on peut considérer indifféremment des modèles LPV, nonlinéaires, ce qui est moins le cas de la commande robuste.

La deuxième différence est que l'on intègre la connaissance que l'on a priori du système avec la commande robuste. Par exemple une mise sous LFT des incertitudes sur les paramètres physiques d'un modèle (comme un modèle d'avion) permet d'avoir une description précise des incertitudes du modèle et du continuum de modèles à considérer. A partir de ce modèle on peut synthétiser une loi de commande robuste vis à vis de ces incertitudes et généralement au delà car on n'est pas capable de résoudre exactement le problème de la robustesse paramétrique. Pour la falsification il est impossible d'intégrer cette connaissance physique et pertinente du système, connaissance qui pourrait réduire la taille du surensemble $\mathbf{K_{OK}}$ et donc l'optimisme de la méthode. Mais la mise sous forme LFT suppose la linéarité du modèle ce qui n'est le cas que pour un domaine limité correspondant à l'ensemble des points de fonctionnement.

La troisième différence réside dans la capacité à assurer la stabilité et la performance sur un ensemble continu de modèles linéaires avec la commande robuste. La falsification assure la performance et la robustesse sur un ensemble discret de systèmes, et donc sur un ensemble forcément limité. Pour cela on peut reprendre l'exemple des 5 modèles nonlinéaires du tableau 1.4. Supposons qu'il y ait au moins un correcteur qui ait satisfait les spécifications pour l'ensemble des 5 modèles. Rien ne permet d'affirmer que ce correcteur satisferait les spécifications sur un modèle intermédiaire. Ce sont toutes ces différences qui rendent les

deux approches complémentaires.

Chapitre 2

Le réajustement de correcteurs robustes par optimisation LP/QP

2.1 Introduction.

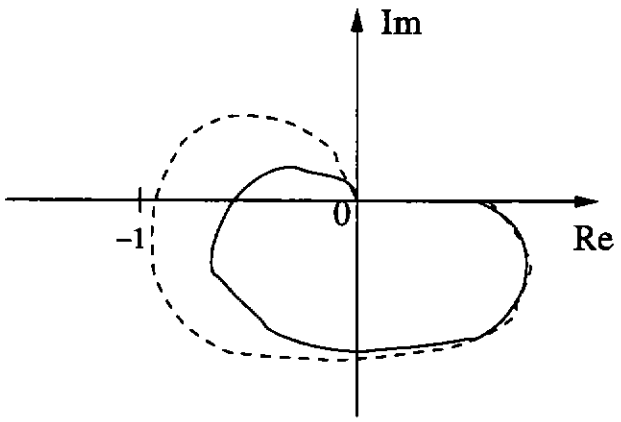


FIG. 2.1 – *Approche SISO du réajustement.*

Considérons le problème suivant d'identification-commande : un modèle initial $G_0(p)$ (obtenu comme un modèle analytique sans étape d'identification) est supposé représenter le véritable système (principe d'équivalence-certaine). Un correcteur $K_0(p)$ est synthétisé sur le modèle $G_0(p)$ puis appliqué sur le véritable système. Les performances obtenues ne sont pas aussi satisfaisantes que celles obtenues sur le modèle $G_0(p)$, du fait de l'écart inévitable entre le modèle et le véritable procédé. En utilisant les données expérimentales en boucle fermée, le modèle initial $G_0(p)$ est réajusté en $G_1(p)$ (voir par exemple [FG99]). Le problème est de réajuster le correcteur initial $K_0(p)$ en $K_1(p)$. Ce réajustement doit se faire avec le minimum d'effort, à l'aide par exemple de la réponse fréquentielle du système. C'est une approche beaucoup plus simple que l'estimation d'un modèle paramétrique, problème qui souvent se ramène à un problème d'optimisation profondément non convexe. De plus

la synthèse initiale doit pouvoir être utilisée autant que possible, si celle-ci est satisfaisante, en supposant que la boucle ouverte $K_0(j\omega)G_0(j\omega)$ (et/ou $G_0(j\omega)K_0(j\omega)$) ait des propriétés de performance et de robustesse satisfaisantes ([DS81, MG90]). Notre objectif de réajustement est de retrouver les propriétés de la boucle ouverte en minimisant la distance entre $K_0(j\omega)G_0(j\omega)$ et $K_1(j\omega)G_1(j\omega)$ sous des contraintes de stabilité nominale et robuste. Cette approche est particulièrement justifiée si les modèles $G_0(p)$ et $G_1(p)$ ne sont pas trop différents, afin qu'un réajustement soit suffisant pour retrouver les performances et la robustesse de la boucle fermée initiale.
En SISO, une solution évidente est d'étudier la réponse fréquentielle de la boucle ouverte $K_0(j\omega)G_1(j\omega)$ (trait pointillé sur la figure 2.1) dans le plan de Nyquist ou de Black-Nichols et de réajuster le correcteur $K_0(j\omega)$ en $K_1(j\omega)$ ($K_1(j\omega)G_1(j\omega)$ trait plein sur la figure 2.1) autour des fréquences critiques afin d'éloigner du point critique la boucle ouverte. Dans l'esprit de [DS81], notre but est d'étendre cette approche au cas MIMO. La difficulté réside dans l'utilisation d'un opérateur nonlinéaire, l'opérateur *déterminant*, dans le critère de Nyquist pour les systèmes MIMO. Il n'existe pas de lien simple entre $det(I - K(j\omega)G(j\omega))$ et la distance de $I - K(j\omega)G(j\omega)$ à la singularité. En remarquant qu'une faible distance à la singularité peut correspondre à des mauvaises marges de gain et de phase en entrée ou en sortie, notre but est d'augmenter les marges MIMO de robustesse en gain et en phase. Il est à remarquer qu'il ne s'agit pas de mettre sous une forme LFT le modèle contenant les incertitudes paramétriques, ce qui peut représenter un travail assez long et difficile [Fer99]. Il s'agit de fournir le minimum d'efforts pour réaliser le réajustement.
Notons finalement que cette approche n'est pas reliée à la parametrisation de Youla ou d'autres paramétrisations convexes de correcteurs stabilisants, contrairement à la plupart des techniques de commande robuste (voir e.g. [Doy85, Kwa93, OMI01] pour quelques exemples) de sorte que l'ordre du correcteurs initial ou réajusté puisse être plus faible que l'ordre du modèle (une matrice de gain statique est utilisée dans le paragraphe de l'application). De fait notre technique de réajustement n'utilise même pas une représentation paramétrique du modèle, mais juste sa réponse fréquentielle. De plus notre approche est indépendante de la nature du système à commander, de la structure du correcteur et est naturellement MIMO (contrairement à [?, ZBD88, FG99]) et peut donc être appliquée sur une large classe de modèles et de correcteurs. Ce chapitre a été développé à partir de [FD00].

2.2 La méthode.

2.2.1 Amélioration de la marge de gain MIMO.

Soit $G(p)$ un modèle MIMO et $K(p)$ un correcteur. Soit $K(p) = K_0(p) + \alpha(p)\beta^T(p)$, où $K_0(p)$ est le correcteur initial, tandis que $\alpha(p)$ et $\beta(p)$ sont des fonctions de transfert asymptotiquement stables correspondant aux paramètres libres de réajustement. Une perturbation de modèle Δ est introduite à l'entrée du procédé afin que la nouvelle boucle ouverte soit $\Delta K(p)G(p)$. Nous allons présenter quelques lemmes et propositions utiles pour expliciter la méthode de réajustement de correcteurs par optimisation LP/QP.

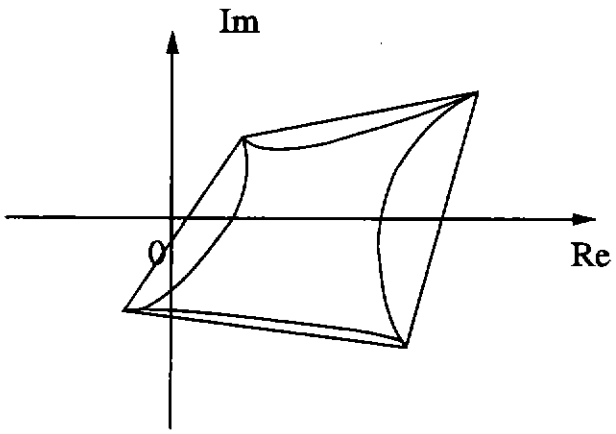


FIG. 2.2 – *Coquille convexe $H(j\omega)$ à une fréquence donnée.*

Lemme 2.2.1 *(marge de gain MIMO)*
Soit $\Delta = diag(\delta_1, \ldots, \delta_N)$, avec $\underline{\delta}_i \leq \delta_i \leq \overline{\delta}_i$ et $\underline{\delta}_i \leq 1 \leq \overline{\delta}_i$. Le vecteur $\delta = (\delta_i)_{i \in [1,\, N]}$ appartient à l'hyperrectangle Q. La boucle fermée nominale, correspondant à $\Delta = I$, est asymptotiquement stable. L'objectif est une boucle fermée stable $\forall \delta \in Q$. Une condition nécessaire et suffisante de stabilité robuste est :

$$\begin{aligned} &det(I - \Delta K(j\omega)G(j\omega)) \neq 0 \\ &\forall \delta \in Q \ \ et \ \ \forall \omega \in [0, \ +\infty] \end{aligned} \tag{2.1}$$

Soit δ^i un des 2^N sommets de Q et $\Delta^i = diag(\delta^i)$. Prenons $p^i(j\omega)$ l'image de δ^i par $det(I - \Delta^i K(j\omega)G(j\omega))$ et $\mathcal{H}$ tel que :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(j\omega) &= conv(p^1(j\omega), \ldots, p^{2^N}(j\omega)) \\ &= \{z \in C \mid \exists \lambda_i \in [0,\, 1] \ s.t. \sum_i \lambda_i = 1, \ z = \sum_i \lambda_i \, p^i(j\omega)\} \end{aligned}$$

$\mathcal{H}(j\omega)$ est la coquille convexe constituée par les $p^i(j\omega)$ (voir figure 2.2). Une condition suffisante de stabilité robuste est $0 \notin \mathcal{H}(j\omega)$, $\forall \omega \in [0, \ +\infty]$.

Preuve : la condition (2.1) est le classique Test d'Exclusion du Zéro [DS88]. Puisque la boucle fermée nominale est asymptotiquement stable, le critère de Nyquist est satisfait par $det(I - K(j\omega)G(j\omega))$. Comme condition nécessaire et suffisante, la stabilité robuste est assurée si ce critère est satisfait par $det(I - \Delta K(j\omega)G(j\omega))$, avec $\Delta = diag(\delta)$ et $\forall \delta \in Q$. En raison de la continuité de $det(I - \Delta K(j\omega)G(j\omega))$ avec δ, ceci est équivalent à la condition (2.1). La deuxième condition, $0 \notin H(j\omega)$, utilise le *Mapping theorem* [ZD63, DS88]. Le *value set* :

$$\bar{H}(j\omega) \ = \ \{z \in C \mid \exists \delta \in Q \ \ s.t. z = det(I - diag(\delta)K(j\omega)G(j\omega))\}$$

est contenu dans la coquille convexe $\mathcal{H}(j\omega)$, grâce à la multilinéarité de la fonction $\det(I - diag(\delta)K(j\omega)G(j\omega))$ en fonction de δ.

Lemme 2.2.2 $0 \notin \mathcal{H}(j\omega)$ *à une fréquence* ω *donnée si et seulement si il existe un angle* $\theta(\omega)$ *tel que :*

$$\sin(\theta(\omega))\ \Re(p^i(j\omega)) - cos(\theta(\omega))\ \Im(p^i(j\omega)) > 0 \quad \forall i \in [1, 2^N] \tag{2.2}$$

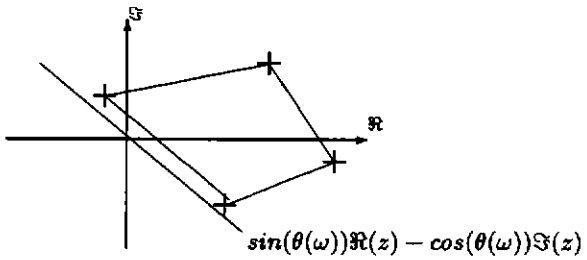


FIG. 2.3 – *Condition suffisante de stabilité.*

Ce lemme affirme que tous les sommets $p^i(j\omega)$ sont du même côté d'une ligne définie par $\sin(\theta(\omega))\ \Re(z) - \cos(\theta(\omega))\ \Im(z) = 0$ (figure 2.3). Maintenant prenons la boucle fermée *initiale* correspondant à l'interconnexion de $K_0(p)$ avec $G(p)$, et la boucle fermée *réajustée* correspondant à l'interconnexion de $K(p) = K_0(p) + \alpha(p)\beta^T(p)$ avec $G(p)$.

Proposition 2.2.3 *Soit*

$$\begin{aligned} & p^i(j\omega,\alpha(j\omega),\beta(j\omega)) \\ & \quad = det(I - \Delta^i(K_0(j\omega) + \alpha(j\omega)\beta^T(j\omega))G(j\omega)) \qquad (2.3) \\ & \quad = det(I - \Delta^i K_0(j\omega)G(j\omega))\Big[1 - \alpha^T(j\omega)\Delta^i \\ & \quad \big(I - \Delta^i K_0(j\omega)G(j\omega)\big)^{-T} G^T(j\omega)\beta(j\omega)\Big] \qquad (2.4) \\ & \bar{p}^i = \frac{p^i(j\omega,\alpha(j\omega),\beta(j\omega))}{det(I - K_0(j\omega)G(j\omega))} \qquad (2.5) \end{aligned}$$

Si la boucle fermée nominale réajustée est asymptotiquement stable, et s'il existe $\alpha(p)$, $\beta(p)$ *et* $\theta(\omega)$ *avec :*

$$\begin{aligned} & \sin(\theta(\omega))\ \Re(\bar{p}^i) - \cos(\theta(\omega))\ \Im(\bar{p}^i) > 0 \qquad (2.6) \\ & \forall i \in [1, 2^N],\ \forall \omega \in [0,\ +\infty] \end{aligned}$$

alors la stabilité robuste est assurée pour la boucle fermée réajustée.

Preuve : L'équation (2.3) utilise la propriété classique $det(I - uv^T) = 1 - u^T v$. En utilisant les lemmes 2.2.1 et 2.2.2, l'équation (2.6) assure que la coquille convexe constituée par

les $p^i(j\omega,\alpha(j\omega),\beta(j\omega))$ (normalisés par $det(I-K_0(j\omega)G(j\omega))$) ne contient pas le point zéro.

Remarque: A cause de l'équation (2.3), la condition (2.6) est un problème LP de dimension infinie en fonction des paramètres libres de réajustement $\alpha(p)$ *ou* $\beta(p)$.

Dans la proposition 2.2.3, la boucle fermée nominale *réajustée* est supposée asymptotiquement stable. La proposition 2.2.4 explique comment assurer cette hypothèse.

Proposition 2.2.4 *Si la boucle fermée nominale initiale est asymptotiquement stable et si :*

$$\Re\left(\frac{det(I-(K_0(j\omega)+\alpha(j\omega)\beta^T(j\omega))G(j\omega))}{det(I-K_0(j\omega)G(j\omega))}\right)>0 \tag{2.7}$$

alors la boucle fermée nominale réajustée est asymptotiquement stable.

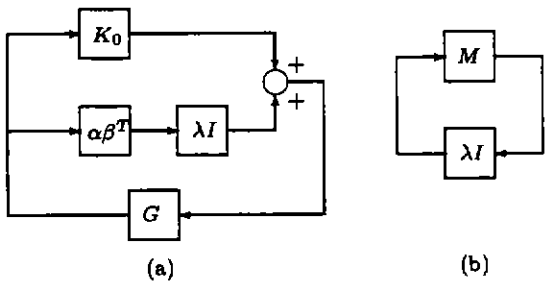


FIG. 2.4 – *Schéma d'interconnexion.*

Preuve: L'interconnexion de $K_0(p)$ avec $G(p)$ est asymptotiquement stable, ainsi que la matrice de transfert $\alpha(p)\beta^T(p)$. Le premier problème est de prouver que si :

$$\begin{aligned} p(j\omega,\alpha(j\omega),\lambda\beta(j\omega)) &= det(I-(K_0(j\omega)+\lambda\alpha(j\omega)\beta^T(j\omega))G(j\omega)) \\ &\neq 0 \qquad \forall\omega,\ \forall\lambda\in[0,1] \end{aligned} \tag{2.8}$$

alors l'interconnexion de $K_0(p)+\alpha(p)\beta^T(p)$ avec $G(p)$ est asymptotiquement stable. Pour cela, considérons les schémas *équivalents* de la figure 2.4. $M(p)$ est asymptotiquement stable. Par conséquent si la boucle fermée de la figure 2.4 est instable pour $\lambda=1$, alors il existe $\lambda\in[0,1]$ et ω satisfaisant $p(j\omega,\alpha(j\omega),\lambda\beta(j\omega))=0$ (ce qui signifie qu'un pôle de la boucle fermée est sur l'axe imaginaire en $j\omega$, grâce à la continuité des pôles en boucle fermée en fonction de λ. Inversement, si l'équation (2.8) est satisfaite, la boucle fermée de la figure 2.4 est asymptotiquement stable pour $\lambda=1$. Remarquons que $p(j\omega,\alpha(j\omega),0)=p(j\omega,0,0)$, et que $det(I-uv^T)=1-u^Tv$ pour prouver que $p(j\omega,\alpha(j\omega),\lambda\beta(j\omega))$ est une fonction affine de λ: la condition (2.7) assure (2.8), comme le montre la figure 3.4.

2.2.2 Amélioration de la marge de phase MIMO.

La méthode est la même que dans le précédent paragraphe, excepté que le bloc de phase $e^{-j\phi}$ doit être mis sous forme LFT, pour obtenir des incertitudes réelles δ_i. Remarquons

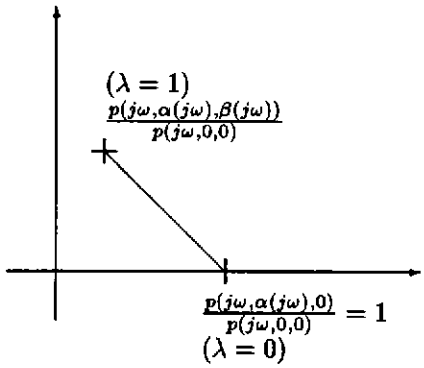


FIG. 2.5 – *Contrainte de stabilité nominale pour la boucle fermée réajustée.*

que l'objectif de robustesse face aux incertitudes du type retard peut être mis, de façon équivalente, sous la forme d'une contrainte sur la valeur minimale de la marge de phase MIMO [FS98, Fer99].

Comme préliminaire, prenons $H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$ et Δ une perturbation de modèle. La LFT $F_u(H,\Delta)$ est définie comme $F_u(H,\Delta) = H_{22} + H_{21}\Delta(I - H_{11}\Delta)^{-1}H_{12}$.

Lemme 2.2.5 *Soit* $e^{-j\phi_i} = \frac{1-j\delta_i}{1+j\delta_i} = F_u(H_0,\delta_i)$, *avec* $H_0 = \begin{bmatrix} -j & j \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.
Si $\delta_i \in [-tan\left(\frac{\Phi_i}{2}\right), tan\left(\frac{\Phi_i}{2}\right)]$, $\phi_i \in [-\Phi_i, \Phi_i]$.

Remarque: la LFT $F_u(H_0,\delta_i)$ décrit exactement le déphasage $e^{-j\Phi_i}$, qui correspond à un arc du *cercle* unité lorsque Φ_i appartient à un intervalle. D'autres solutions seraient d'utiliser des Contraintes Quadratiques Intégral (IQC)[OMI01] ou d'approximer l'ensemble $(e^{-j\Phi_i})_{\Phi\in[\underline{\Phi}_i,\overline{\Phi}_i]}$ par un *piece of cake*, i.e. une partie du disque unité, comme cela est présenté dans [TBL99]. Mais notre technique LFT est plus adéquate puisque c'est une descritption simple et exacte et qu'elle permet une généralisation de notre technique de réajustement, proposée dans le précédent paragraphe pour l'amélioration de la marge de gain MIMO, à l'amélioration de la marge de phase MIMO.

Dans le cas de plusieurs blocs de phase, $\Delta = diag(e^{-j\phi_i})$ peut s'exprimer comme une LFT $F_u(H,\tilde{\Delta})$, où $\tilde{\Delta} = diag(\delta_i)$ et H est déduit de H_0 [FS98, Fer99].

Lemme 2.2.6 *(marge de phase MIMO) Soit* $\Delta = diag(e^{-j\phi_1},\ldots,e^{-j\phi_N}) = F_u(H,\tilde{\Delta})$, *avec* $-\Phi_i \leq \phi_i \leq \Phi_i$, *ou de façon équivalente avec* $\delta_i \in [-tan\left(\frac{\Phi_i}{2}\right), tan\left(\frac{\Phi_i}{2}\right)]$. *Le vecteur* $\delta = (\delta_i)_{i\in[1,N]}$ *appartient à l'hyperrectangle* Q. *La boucle fermée nominale, correspondant à* $\Delta = I$ *ou* $\tilde{\Delta} = 0$ *est asymptotiquement stable. L'objectif est une boule fermée stable* $\forall\phi_i \in [-\Phi_i, \Phi_i]$, *ou de façon équivalente* $\forall\delta \in Q$. *Soit* δ^i *un des* 2^N *sommets de* Q *et* $\tilde{\Delta}^i = diag(\delta^i)$. *Soit:*

$$p^i(j\omega) = det(I - H\begin{bmatrix} \tilde{\Delta}^i & 0 \\ 0 & K(j\omega)G(j\omega) \end{bmatrix}) \tag{2.9}$$

si la coquille convexe constituée par les $p^i(j\omega)$ ne contient pas le point zéro $\forall\omega \in [0, +\infty]$, la stabilité robuste est assurée.

Preuve : La démonstration est essentiellement la même que dans le lemme 2.2.1, avec pour exception l'équation (2.9). Notre but initial est d'assurer :

$$\begin{aligned} &det(I - F_u(H,\tilde{\Delta})K(j\omega)G(j\omega)) \neq 0 \\ &\forall\delta \in Q \ \ et \ \ \forall\omega \in [0, +\infty] \end{aligned} \tag{2.10}$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned} &det(I - H \begin{bmatrix} \tilde{\Delta} & 0 \\ 0 & K(j\omega)G(j\omega) \end{bmatrix}) \\ &\quad = det(I - H_{11}\tilde{\Delta})\ det(I - F_u(H,\tilde{\Delta})K(j\omega)G(j\omega)) \end{aligned}$$

où $H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$ est partitionée de la façon suivante $\begin{bmatrix} \tilde{\Delta} & 0 \\ 0 & K(j\omega)G(j\omega) \end{bmatrix}$ (voir figure 2.6). Puisque $det(I - H_{11}\tilde{\Delta}) \neq 0\ \forall\delta \in Q$ [FS98, Fer99], l'équation (2.10) est équivalente à :

$$\begin{aligned} &det(I - H \begin{bmatrix} \tilde{\Delta} & 0 \\ 0 & K(j\omega)G(j\omega) \end{bmatrix}) \neq 0 \\ &\forall\delta \in Q,\ \forall\omega \in [0, +\infty] \end{aligned} \tag{2.11}$$

Le *Mapping Theorem* peut être appliqué à la relation ci-dessus.

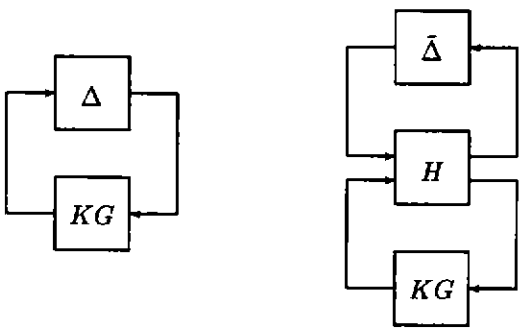


FIG. 2.6 – *Transformation du schéma d'interconnexion, avec $\Delta = F_u(H,\tilde{\Delta})$.*

Le problème est maintenant de déplacer les scalaires $p^i(j\omega)$, dans le but d'améliorer la marge de phase MIMO. Pour y parvenir, la proposition 2.2.3 peut être appliquée avec :

$$\begin{aligned} p^i(j\omega,\alpha(j\omega),\beta(j\omega)) &= \det(I - H \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}^i & 0 \\ 0 & (K_0(j\omega) + \alpha(j\omega)\beta^T(j\omega))G(j\omega) \end{bmatrix}) \\ &= \det(I - HM)\left[1 - U(j\omega)^T H^T (I - HM)^{-T} \times \right. \\ &\quad \left. G_a^T(j\omega)V(j\omega)\right] \end{aligned} \tag{2.12}$$

et :

$$M = \begin{bmatrix} \tilde{\Delta}^i & 0 \\ 0 & K_0(j\omega)G(j\omega) \end{bmatrix}, U(j\omega) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha(j\omega) \end{bmatrix},$$
$$V(j\omega) = \beta(j\omega),\ G_a(j\omega) = \begin{bmatrix} 0 & G(j\omega) \end{bmatrix}$$

2.3 Description de l'algorithme

La première étape consiste à résoudre un problème de faisabilité. Pour des valeurs cibles fixées des marges de gain et de phase MIMO, il s'agit de trouver $\alpha(p)$ et $\beta(p)$ satisfaisant les équations (2.6) et (2.7). Pour cela, on résout un problème bilinéaire de maximisation de γ sous les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} &\sin(\theta(\omega))\ \Re(\vec{p}^i) - \cos(\theta(\omega))\ \Im(\vec{p}^i) > \gamma \\ &\Re\left(\frac{det(I - (K_0(j\omega) + \alpha(j\omega)\beta^T(j\omega))G(j\omega))}{det(I - K_0(j\omega)G(j\omega))}\right) > 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

La solution simple utilisée dans le paragraphe suivant est la résolution d'une série de problèmes LP : $\alpha(p)$ est fixé à une valeur initiale α_0 et γ est maximisé en fonction de $\beta(p)$. On obtient alors la solution optimale pour $\beta(p)$ et maintenant γ est maximisé en fonction de $\alpha(p)$ et ainsi de suite. Cette approche itérative du problème bilinéaire est intéressante car il existe des *solveurs* LP efficaces même pour des problèmes de grande dimension. Puisque un problème d'optimisation non-convexe est résolu, le minimum local obtenu dépend de la valeur initiale α_0 (voir ci dessous pour un choix possible des valeurs initiales).
Si une solution positive de γ est trouvée, le problème de faisabilité est résolu. Alors, sous les contraintes ci-dessus, le problème est de minimiser la distance entre $K_0(j\omega)G_0(j\omega)$ et $(K_0(j\omega) + \alpha(j\omega)\beta^T(j\omega))G_1(j\omega)$ (voir l'introduction). Soit :

$$A(j\omega) = (K_0(j\omega) + \alpha(j\omega)\beta^T(j\omega))G_1(j\omega) - K_0(j\omega)G_0(j\omega)$$

La minimisation de la norme de Frobenius de $A(j\omega)$, sous les contraintes de marges de robustesse, se résout par optimisation QP.
Remarque : à la place d'objectifs de type boucle ouverte, il est aussi possible de prendre en compte un objectif boucle fermée, en minimisant la distance entre par exemple $K_0(j\omega)G_0(j\omega)(I + K_0(j\omega)G_0(j\omega))^{-1}$ et $K_1(j\omega)G_1(j\omega)(I+K_0(j\omega)G_0(j\omega))^{-1}$ où $K_1G_1(I+K_0G_0)^{-1} \approx K_1G_1(I+K_1G_1)^{-1}$. Remarquons que les transferts en boucle fermée peuvent être considérés.
Dans la procédure de synthèse, $\alpha(p)$(ou $\beta(p)$) on réécrit $\alpha(p) = \sum_i \theta_i\alpha_i(p)$ où on fixe les filtres $\alpha_i(p)$ tandis que les θ_i sont les paramètres de synthèse. Un problème classique est de choisir les pôles de la base de filtres, i.e. le dénominateur est généralement fixé tandis que les zéros sont libres. Une solution possible dans le contexte de notre approche est de se rappeler que le correcteur initial K_0 est le correcteur qui doit être réajusté. Dans le but de prendre en compte toutes les informations contenues dans K_0, on peut factoriser K sous la forme $K_0 = \sum_j \alpha_j\beta_j^T$. Donc chaque dyade $\alpha_j\beta_j^T$ est séquentiellement réajustée i.e. les

$n-1$ dyades $K_0(p)$) sont fixées, exéptée la n^{me} qui est réajustée. $\alpha_k(p)\beta_k^T(p)$ représente une valeur intiale et les pôles associés sont choisis comme pôles de la base de filtres.

2.4 Application

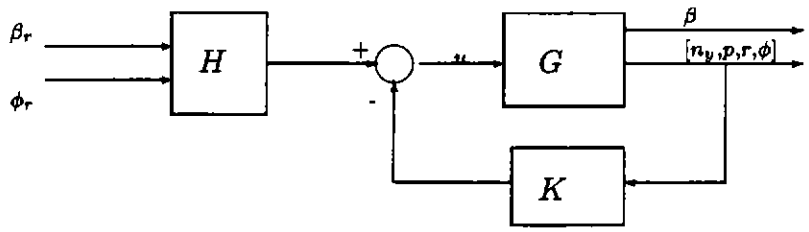


FIG. 2.7 – *Structure de la loi de commande.*

Considérons un avion de transport. Le modèle aérodynamique latéral contient 4 variables d'états β, p, r, ϕ, qui représentent respectivement l'angle de dérapage, la vitesse de roulis et de lacet et l'angle de gîte. Les vecteurs d'entrées et de sortiees sont $y = [n_y, p, r, \phi]$ et $u = [\delta_p,\delta_r]$ avec n_y l'accélération latérale, et δ_p et δ_r les entrées commandes ailerons et direction. Un actionneur d'ordre 2 est rajouté à l'entrée δ_p, et un actionneur d'ordre 3 à l'entrée δ_r. L'ordre du système complet est 9. Le lecteur pourra se réferrer au chapitre 2 pour plus de détails. La structure de la loi de commande est représentée par la figure 2.7. Ce correcteur est un correcteur à 2 degrés de liberté puisqu'il y a un *feedback* K et une précommande H. La précommande H permet d'assurer une erreur statique nulle pour les signaux $\beta - \beta_r$ et $\phi - \phi_r$. H est obtenu par l'inversion du gain de la boucle fermée. Le *feedback* K_0 et la précommande H_0 initiaux sont :

$$K_0 = \begin{bmatrix} -629.89 & 11.525 & 3.311 & 9.4278 \\ 285.95 & 0.36932 & -2.6301 & -0.54892 \end{bmatrix}$$

$$H_0 = \begin{bmatrix} -0.2632 & 14.0646 \\ 2.9979 & -3.2950 \end{bmatrix}$$

G_0 représente le modèle initial. Les marges MIMO associées sont satisfaisantes (voir tableau 1). Le "vrai" modèle $G_1(p)$ est obtenu par une dispersion de 35% sur les coefficients aérodynamiques (i.e les paramètres physiques du modèle latéral). Les nouvelles marges ne sont pas bonnes et K_0 est réajusté en K_1. Pour limiter autant que possible la complexité du correcteur réajusté, α et β sont choisis statiques afin que K_1 reste statique aussi. Plus précisement l'algorithme décrit dans le paragraphe précédent est appliqué deux fois, i.e deux dyades $\alpha_i\beta_i^T$ sont successivement ajoutées à $K_1 = K_0 + \alpha_1\beta_1^T + \alpha_2\beta_2^T$. Les marges associées au correcteur $K_0 + \alpha_1\beta_1^T$ sont déjà satisfaisantes, et finalement les marges associées à K_1 sont aussi bonnes voire meilleures que pour la synthèse initiale. Donc les bonnes propriétés de robustesse de l'interconnexion de $G_0(p)$ avec K_0 sont retrouvées. K_1 et H_1 ont pour valeur :

$$K_1 = \begin{bmatrix} -352.61 & 15.815 & 8.5435 & 13.586 \\ 160.13 & -1.5767 & -5.0043 & -2.4352 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 4.3613 & 8.7930 \\ 2.8455 & -1.2136 \end{bmatrix}$$

Remarquons sur la figure 2.8 que le réajustement a amélioré la forme de la fonction de sensibilité $(I+KG)^{-1}$, puisque la norme $\|(I+KG)^{-1}\|_\infty$ décroît, ce qui correspond à une amélioration de la marge de module.
Le temps de calcul est tout à fait raisonnable, à savoir quelques minutes sur une station *Sun Ultra Sparc 5* pour le réajustement de K_0 en K_1. Les problèmes LP, dont la taille (i.e. la taille de A dans la contrainte LP $A\theta \leq b$) est à peu près 1000*4 ou 1000*2 sont rapidement résolus (quelques secondes) grâce à un petit nombre de paramètres d'optimisation.

TAB. 2.1 – *Marges de robustesse.*

Boucle ouverte	marge de gain [-] MIMO	marge de phase [°] MIMO
$K_0G_0(p)$	[−0.02 2.02]	44.51
$K_0G_1(p)$	[0.36 1.63]	20.62
$(K_0+\alpha_1\beta_1^T)G_1(p)$	[0.10 1.90]	40.00
$K_1G_1(p)$	[0,05 1,95]	48,38

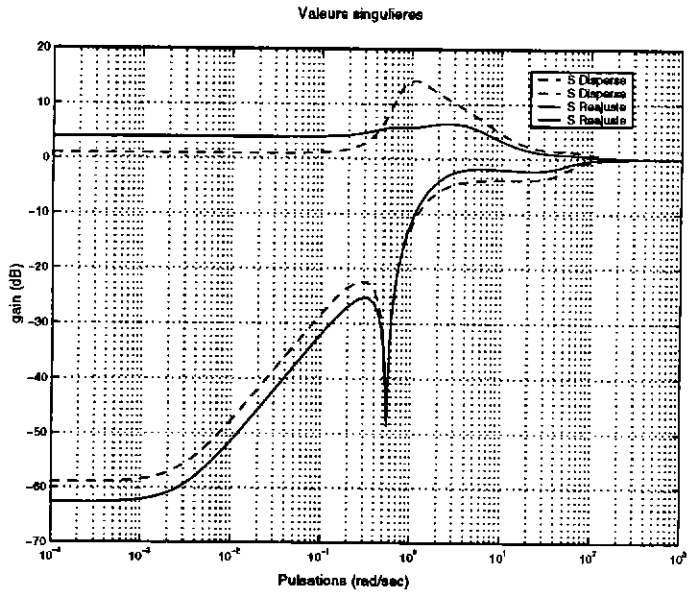


FIG. 2.8 – *Valeurs singulières de* $(I+KG)^{-1}$ *pour* K_0G_1 *et* K_1G_1.

Les pôles de la boucle fermée sont donnés par le tableau 2.2 où les premiers et les seconds nombres représentent respectivement l'amortissement et la fréquences des pôles complexes conjugués.

TAB. 2.2 – *Pôles de la boucle fermée.*

$(I+K_0G_0)^{-1}$	$(I+K_0G_1)^{-1}$	$(I+K_1G_1)^{-1}$
-0.90	-0.37 + 0.80i (42.2%,0.88)	-0.39 + 0.49i (61.7%,0.63)
-0.95	-0.37 - 0.80i (42.2%,0.88)	-0.39 - 0.49i (61.7%,0.63)
-0.70 + 0.70i (71%,0.99)	-0.95 + 0.66i (82.1%,1.16)	-1.15
-0.70 - 0.70i (71%,0.99)	-0.95 - 0.66i (82.1%,1.16)	-3.32 + 1.23i (93.8%,3.54)
-5.14	-4.58	-3.32 - 1.23i (93.8%,3.54)
-8.37	-7.30	-7.94
-36.6	-37.5	-37.8
-36.1 + 46.9i (61%,59.2)	-36.5 + 49.2i (59.6%,61.3)	-35.7 + 45.0i (62.1%,57.4)
-36.1 - 46.9i (61%,59.2)	-36.5 - 49.2i (59.6%,61.3)	-35.7 - 45.0i (62.1%,57.4)

Les figures 2.9,2.10,2.11,2.12 représentent les simulations temporelles pour chaque sortie. On applique un échelon sur l'entrée δ_p à la 1^{ere} seconde et un autre échelon sur l'entrée δ_r à la 21^{eme} seconde.

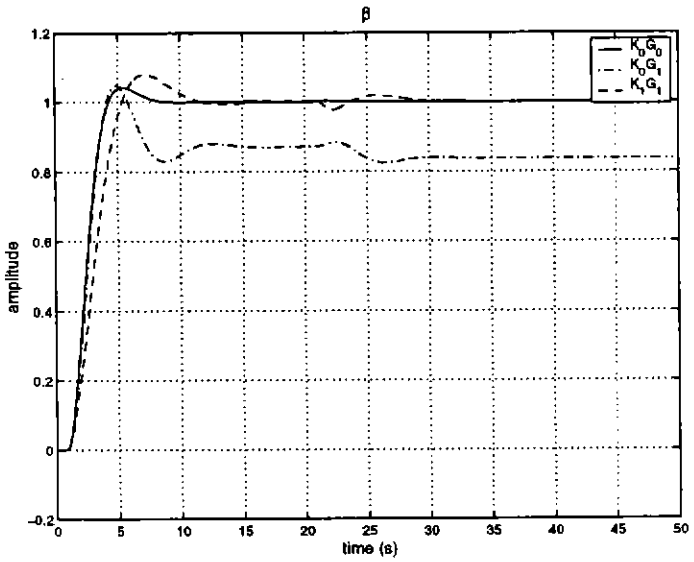


FIG. 2.9 – *Sortie β.*

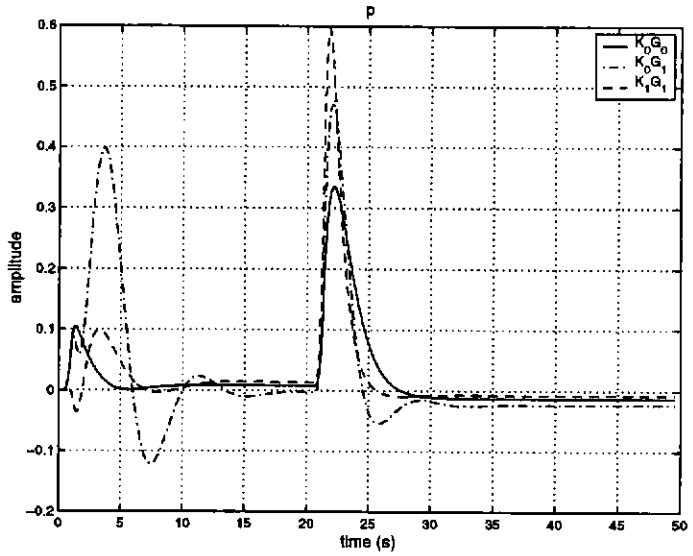


FIG. 2.10 – *Sortie p.*

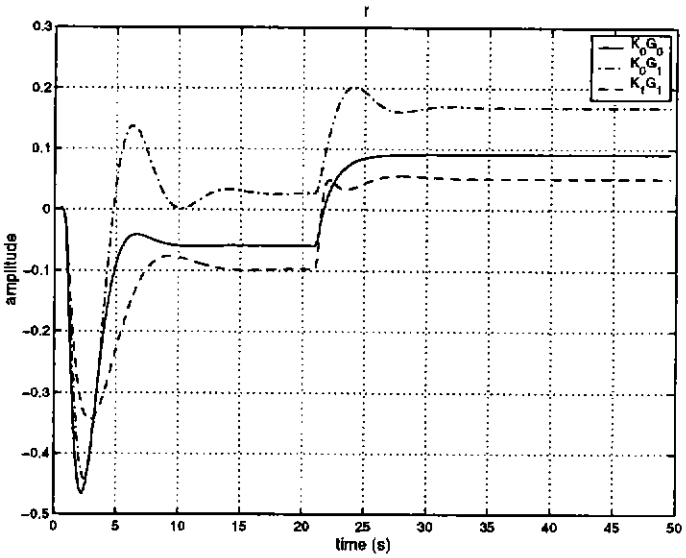


FIG. 2.11 – *Sortie r.*

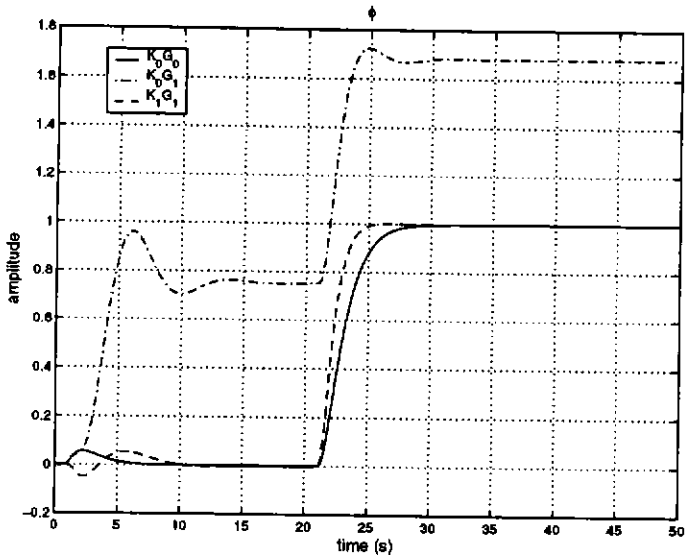


FIG. 2.12 – *Sortie ϕ.*

2.5 Conclusion

Le problème général de robustification d'un correcteur peut être mis sous forme d'un problème d'optimisation profondément non convexe, spécialement quand on prend en compte des incertitudes parametriques et/ou quand l'ordre et la structure du correcteur sont fixés. En utilisant une représentation spécifique du correcteur (i.e. dyadique), ce problème est réduit par cette approche à une série d'optimisations affines. Remarquons premièrement que notre méthode diffère profondément d'une technique d'optimisation basique qui utiliserait une approximation du premier ordre des contraintes. Chaque problème d'optimisation affine, qui est résolu dans notre approche, correspond à une descrition exacte des contraintes et objectif. Plus précisément le correcteur $K(p)$ est décomposé comme $K(p) = \sum_i \alpha_i(p)\beta_i^T(p)$ et la robustesse est maximisée à l'aide de $\alpha_1(p)$, ou $\beta_1(p)$, ou $\alpha_2(p)$ et ainsi de suite.

Même si le problème d'optimisation en fonction d'une fonction de transfert simple $\alpha_i(p)$ ou $\beta_i(p)$ est convexe, le problème d'optimisation global en fonction de $K(p)$ reste non-convexe, et notre méthode fournit un minimum local. Néanmoins, grâce à notre technique spécifique pour résoudre le problème, la qualité du minimum local peut être bien meilleure que celle obtenue par une technique d'optimisation standard comme celle du gradient. Il faut se rappeler en outre que le problème est de réajuster un correcteur à cause de l'écart observé entre le modèle et le système réel. Cet écart est supposé ne pas être trop large, afin qu'une modification locale du correcteur soit suffisante pour le réajuster efficacement. Dans le cas contraire un écart trop important signifierait que le modèle initial est trop mauvais, et il devient nécessaire de réidentifier le modèle et de synthétiser un correcteur sur le nouveau modèle. Le principal avantage de notre méthode est qu'elle est facile à implémenter, puisque un simple problème d'optimisation LP est résolu, pour lequel des

outils numériques performants existent. Même si la taille des problèmes LP est important (e.g. 10000*20 pour la taille de A, si le problème LP est $\min_{A\theta \leq b} c^T\theta$), le facteur le plus critique pour le temps de calcul est le nombre de paramètres à estimer, plus que le nombre de contraintes. Cette application, ainsi que celle dans [FD99] illustrent la faisabilité numérique de cette approche.
[FD99] présente en effet une technique similaire, où la représentation d'état du correcteur est utilisée (à la place de l'approche entrée/sortie présentée ici) et le problème est de placer tous les pôles en boucle fermée malgré des incertitudes paramétriques dans une région du plan complexe.
Remarquons finalement que plusieurs modèles peuvent être simultanément utilisés par cette méthode, i.e. un correcteur unique peut être synthétisé, qui améliore simultanément les propriétés de la boucle fermée sur un ensemble de modèles.

Deuxième partie

Schéma d'identification-commande structuré

Chapitre 1

Synthèse convexe par paramétrisation de Youla

1.1 Introduction

Nous allons présenter dans ce chapitre la synthèse par paramétrisation de Youla que l'on appellera synthèse convexe. Cette approche présente l'avantage de prendre en compte a priori et de façon exacte des contraintes fréquentielles et temporelles. Le caractère convexe du problème d'optimisation permet de dire avec certitude que la solution obtenue correspond bien à un extremum global et non local. Elle est à rapprocher fortement de la synthèse H_∞ puisque la prise en compte des spécifications fréquentielles est tout à fait similaire à la synthèse H_∞. Les gabarits à satisfaire, l'analyse des transferts en boucle fermée et le compromis performance/robustesse sont analogues entre la synthèse convexe et la synthèse H_∞ standard pondérée. Mais comme nous le verrons cette approche présente des avantages et des inconvénients par rapport à la synthèse H_∞ standard.
Nous utiliserons la synthèse convexe dans un contexte de réajustement de correcteurs. On l'appliquera au problème de l'identification d'un modèle LFT en boucle fermée d'un avion rigide. Rappelons ici quelques éléments. Il s'agit d'identifier les paramètres physiques d'un avion rigide dont le modèle peut être mis sous forme LFT. L'intérêt de cette mise sous forme LFT est double : on a un formalisme commun entre l'identification, la commande et l'analyse en robustesse et l'identification fournit directement l'estimation des coefficients aérodynamiques (i.e. on identifie les paramètres physiques plutôt qu'un modèle boîte noire. Comme il existe un fort lien entre la sensibilité du schéma d'identification en boucle fermée et le correcteur, le rôle de la synthèse convexe est de déterminer parmi tous les correcteurs qui satisfont le cahier des charges celui qui assure la plus faible sensibilité du schéma d'identification au bruit de mesure et aux perturbations non mesurées.
Finalement la synthèse convexe apparaît au travers de cette application comme une méthode de réajustement. En tout premier lieu il est nécessaire de préciser par rapport aux techniques de réajustement de correcteurs précédemment présentées, que celle-ci ne suppose pas que les performances du correcteur initial sur le modèle de synthèse soient convenables. C'est à proprement parler une véritable méthode de synthèse [Dar98] qui sera utilisée dans

un contexte de réajustement dans le cadre de l'identification d'un modèle LFT. Néanmoins la synthèse convexe sera d'autant plus facile à mettre en oeuvre que le correcteur initial aura de bonnes performances.

1.2 Principe

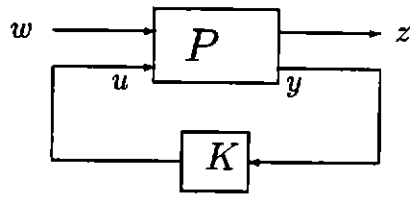


FIG. 1.1 – *Forme standard.*

Considérons la forme standard classique représentée par la figure 1.1. Cette forme standard fait apparaître explicitement les entrées sorties du correcteur ($y(t)$ et $u(t)$) et les entrées sorties à contrôler ($w(t)$ et $z(t)$). Typiquement les entrées $w(t)$ sont les entrées références, les bruits de mesure, les perturbations non mesurées. Les sortie $z(t)$ représentent n'importe quel signal mesuré pondéré de la boucle fermée que l'on cherche à contrôler à l'aide du correcteur.
$P(s)$ représente le modèle de synthèse ainsi que toutes les pondérations choisies à partir des objectifs de performance et de robustesse. K représente le correcteur. Un correcteur initial $K_{ini}(s)$ assure la stabilité de la boucle fermée. Partitionnons la matrice de transfert P sous la forme suivante:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

il est possible d'écrire le transfert reliant w et z en fonction seulement de P et K par la transformation linéaire fractionnaire inférieure, notée $F_l(P,K)$:

$$T_{w\to z} = F_l(P,K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \tag{1.2}$$

Dans un problème de synthèse il s'agit de retranscrire un ensemble de spécifications temporelles et fréquentielles sous la forme de critères mathématiques. Parmi ces critères on peut utiliser des contraintes fréquentielles. Les spécifications fréquentielles s'écrivent naturellement sous la forme de contraintes fréquentielles. Ce que l'on cherche c'est minimiser $\gamma_{i,j}$ sous la contrainte fréquentielle:

$$\|T_{w_i\to z_j}\|_\infty \leq \gamma_{i,j} \Leftrightarrow \|F_l(P,K)_{j,i}\|_\infty \leq \gamma_{i,j} \tag{1.3}$$

Le problème est de déterminer le correcteur K qui satisfait aux spécifications (1.3). On constate que le problème est profondément non linéaire en K. Il est possible de montrer

que la Youla-paramétrisation permet de paramétrer la LFT de façon linéaire par rapport à un paramètre de synthèse noté Q :

$$F_l(P,K) = T_1 - T_2 Q T_3 \tag{1.4}$$

La Youla-paramétrisation ou Q-paramétrisation revient à procéder à un changement de variable de K en Q rendant affine par rapport à l'inconnue Q la contrainte fréquentielle sur $F_l(P,K)$. T_1, T_2 et T_3 contiennent les pôles, donc la dynamique de la boucle fermée initiale. Chercher à minimiser la norme H_∞ de $F_l(P,K)$ devient un problème convexe et permet d'obtenir une solution qui est la solution optimale du problème. La paramétrisation de Youla nous permet d'accéder à tous les correcteurs K qui stabilisent la boucle fermée via le paramètre Q. Ainsi s'il existe un correcteur satisfaisant le cahier des charges on le trouvera par optimisation convexe. Néanmoins l'obtention de l'ensemble des correcteurs stabilisants, i.e. la paramétrisation de l'ensemble des correcteurs par Q n'est pas triviale.

1.2.1 Q-paramétrisation de l'ensemble des correcteurs stabilisants.

Considérons un correcteur initial K_{ini} stabilisant la boucle fermée. On cherche à paramétrer par le paramètre de Youla Q l'ensemble des correcteurs stabilisants. On procède en 2 étapes :

1. On modifie le correcteur initial en rajoutant une entrée v et une sortie e (figure 1.2). v est de même dimension que u et e de même dimension que y. Cette modification du correcteur K_{ini} est réalisée de façon à ce que le transfert $T_{v\to e}$ soit nul.

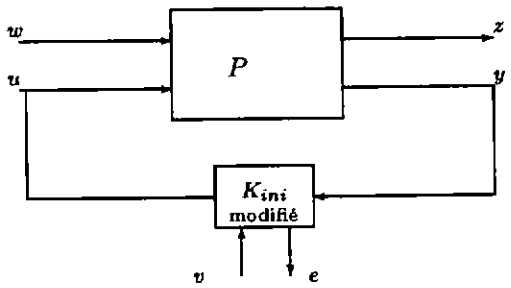


FIG. 1.2 – *Correcteur modifié.*

2. On rajoute entre v et e une matrice de transfert Q stable de dimension $n_u \times n_y$ (figure 1.3). On obtient un nouveau correcteur K construit à partir du correcteur K_{ini} et paramétré par Q. Comme le transfert $T_{v\to e}$ est nul, la boucle fermée initiale et Q étant stables, le nouveau correcteur ne peut déstabiliser la boucle fermée. Par contre Q agit sur le transfert $T_{w\to z}$, ce qui permet d'agir sur les performances et la robustesse du correcteur.

En posant comme transferts :

- U_1 le transfert entre w et z
- U_2 le transfert entre v et z

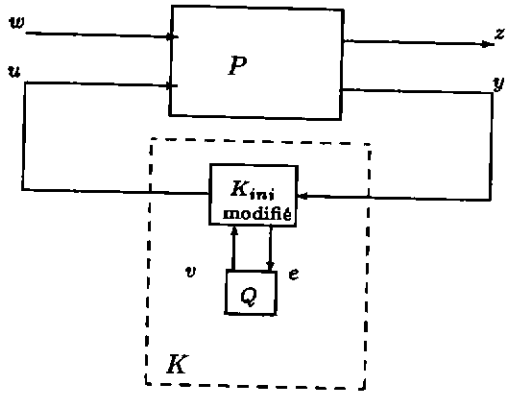


FIG. 1.3 – *Paramétrisation par Q des correcteurs stabilisants.*

– U_3 le transfert entre w et e

on cherche à établir les relations entre T_1, T_2 et T_3 et la dynamique de la boucle fermée initiale.
Considérons le schéma bloc 1.3. Comme le transfert $T_{v\to e} = 0$, on obtient le schéma bloc suivant :

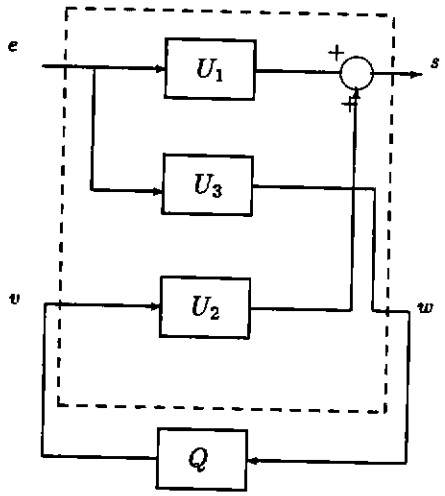


FIG. 1.4 – *Réécriture de la paramétrisation.*

Une représentation simplifiée est donnée par la figure 1.5.
Dès lors le transfert $T_{w\to z}$ se réécrit en fonction de U_1, U_2 et U_3 comme :

$$T_{w\to z} = U_1 + U_2 Q U_3 \tag{1.5}$$

On s'aperçoit que U_1, U_2 et U_3 sont assimilables au signe près à T_1, T_2 et T_3.
Si on considère un correcteur initial K_{ini} sous la forme "retour d'état+observateur", [Doy84]

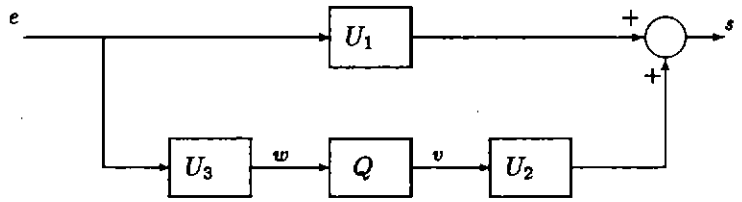


FIG. 1.5 – *Réécriture de la paramétrisation.*

a montré qu'il était possible de le paramétrer à l'aide de Q. Partitionnons P de la façon suivante :

$$P = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right] \tag{1.6}$$

En supposant que P est strictement propre, la matrice D_{22} est nulle, on écrit la représentation d'état du correcteur initial :

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC_2 - B_2F)\hat{x} + Ly \tag{1.7}$$
$$u = -F\hat{x} \tag{1.8}$$

où, L est le gain de l'observateur, F le gain du retour d'état et $\hat{x}$ l'état estimé. Finalement le transfert du correcteur K_{ini} est :

$$K_{ini}(p) = -F(pI - A + B_2F + LC_2)^{-1}L \tag{1.9}$$

Il s'agit maintenant de modifier le correcteur "retour d'état+observateur" afin de faire apparaître les signaux v et e, tout en assurant un transfert $T_{v\to e}$ nul. Une solution est de prendre pour e l'erreur de prédiction $y - \hat{y}$ et en ajoutant v à la commande $-F\hat{x}$. Cette modification du correcteur initial est représentée par la figure 1.6.

Nous obtenons pour le correcteur modifié les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - LC_2 - B_2F)\hat{x} + Ly + B_2v \\ u &= -F\hat{x} + v \\ e &= y - C_2\hat{x} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Il ne reste plus qu'à connecter le paramètre de synthèse Q permettant de paramétrer l'ensemble des boucles fermées stables. L'approche présentée et utilisée est une méthode directe se basant sur une structure de correcteur de type retour d'état estimé. Il suffit d'écrire la représentation d'état de la boucle fermée avant la connection de Q :

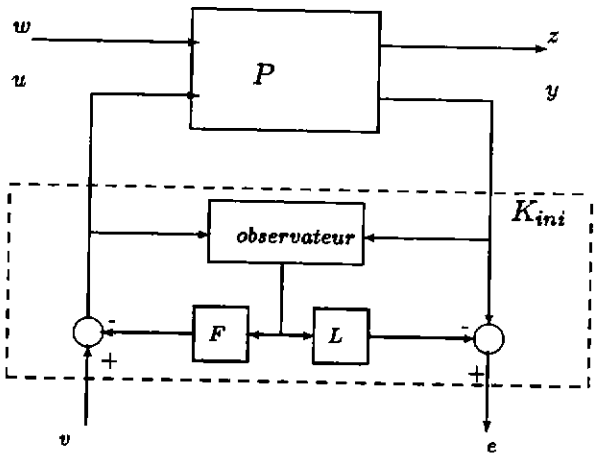


FIG. 1.6 – *Modification du retour d'état estimé.*

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B_2F \\ LC_2 & A - LC_2 - B_2F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ LD_{21} & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

$$\begin{bmatrix} z \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & -D_{12}F \\ C_2 & -C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

On établit les transferts U_1, U_2 et U_3. On est donc capable d'exprimer l'ensemble des transferts en boucle fermée $T_{w\to z}$ en fonction de Q puisque $T_{w\to z} = U_1 + U_2QU_3$.
Une fois que l'on a obtenu Q par optimisation convexe, il s'agit de revenir à K. Pour cela on cherche $K(Q)$. Soit la représentation d'état du paramètre Q :

$$\dot{x}_Q = A_Q x_Q + B_q e \quad (1.13)$$

$$v = C_Q x_Q + D_q e \quad (1.14)$$

En éliminant les variables v et e à l'aide des équations (1.10) on obtient la représentation d'état du nouveau correcteur K en fonction du paramètre de synthèse Q et de K_{ini} :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{x}_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B_2F - LC_2 - B_2D_QC_2 & B_2C_Q \\ -B_QC_2 & A_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ x_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L + B_2D_Q \\ B_Q \end{bmatrix} y$$

$$u = \begin{bmatrix} -F - D_QC_2 & C_Q \end{bmatrix} + D_Q y \quad (1.15)$$

1.2.2 Affinité des réponses temporelles et fréquentielles.

Nous avons montré comment obtenir une forme affine en Q pour la LFT :

$$F_l(P,K) = T_1 - T_2QT_3 \quad (1.16)$$

Cette formulation affine en Q est une condition nécessaire pour avoir un problème d'optimisation convexe mais non suffisante. C'est pour cela que l'on choisit de paramétrer Q sous la forme suivante :

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \theta_i Q_i \tag{1.17}$$

Les Q_i sont des filtres dont les pôles sont fixés a priori et les θ_i les paramètres d'optimisation correspondant aux zéros des filtres. Ces filtres forment une base des matrices de transfert stables et rationnelles. Finalement la LFT s'exprime de la façon suivante :

$$F_l(P,K) = T_1 - \sum_{i=1}^{n} \theta_i T_2 Q_i T_3 \tag{1.18}$$

On constate que les réponses fréquentielles et temporelles sont affines par rapport aux paramètres de synthèses θ_i. Par exemple en considérant la réponse temporelle de la boucle fermée au signal fixé a priori $w(t)$, on obtient :

$$z(t) = z^0(t) + \sum_{i=1}^{n} \theta_i z^i(t) \tag{1.19}$$

où

$$z^0(t) = T_1 w(t) \tag{1.20}$$
$$z^i(t) = T_2 Q_i T_3 w(t) \tag{1.21}$$

Une relation tout à fait similaire peut être obtenue pour la réponse fréquentielle de la boucle fermée. Posons $F_{l_0} = T_1$ et $F_{l_i} = -T_2 Q_i T_3$. Nous obtenons :

$$F_l(P,K)(j\omega) = F_{l_0}(j\omega) + \sum_{i=1}^{n} \theta_i F_{l_i}(j\omega) \tag{1.22}$$

Le problème d'optimisation qui consiste à déterminer les θ_i sous la contrainte :

$$\overline{\sigma}(F_l(P,K)(j\omega)) \leq \gamma \tag{1.23}$$

est un problème d'optimisation convexe.

1.2.3 Choix des spécifications temporelles et fréquentielles

On va montrer comment on peut prendre en compte aisément des contraintes temporelles et fréquentielles par la paramétrisation de Youla.

1.2.3.1 Spécifications temporelles

- Contraintes l_∞.
  Ces contraintes sont très intéressantes puisqu'elles correspondent à des écarts entre un signal de référence, noté $z_r(t)$ et une sortie de la boucle fermée $z(t)$. Ce signal de

référence est déterminé à partir des spécifications du cahier des charges. Dans ce cas, le problème consiste à minimiser α pour tout $t \in [t_1, \ldots, t_N]$ sous la contrainte :

$$-\alpha \leq z(t) - z_r(t) \leq \alpha \tag{1.24}$$

Ce problème peut être réecrit sous la forme d'un problème de programmation linéaire :

$$\text{minimiser } c^T x \text{ sous la contrainte } Ax \leq b \tag{1.25}$$

où $x = \begin{bmatrix} \Theta \\ \alpha \end{bmatrix}$, Θ est un vecteur colonne contenant les paramètres d'optimisation θ_i, $c^T = [0, \ldots, 0, 1]$, et A et b sont connus a priori et dépendent des signaux $z(t)$ et $z_r(t)$.

- Contraintes l_2

  Ces contraintes correspondent à une erreur quadratique entre un signal de la boucle fermée et un signal de référence. Ces contraintes n'étant pas utilisées dans nos problèmes de synthèse, nous ne développerons pas la mise sous forme d'un problème quadratique. Pour plus de détails les lecteurs pourront se référer à [Dar98].

1.2.3.2 Spécifications fréquentielles

- Contraintes H_∞

  Ces contraintes sont particulièrement intéressantes du fait des propriétés de la norme H_∞. Cette norme est une norme induite qui satisfait la propriété multiplicative (la norme d'un produit est inférieure ou égale au produit des normes), permettant d'assurer des propriétés de robustesse par le théorème du petit gain. De plus un grand nombre de spécifications de performance et de robustesse sont facilement retranscrites en spécifications H_∞. Pour résoudre le problème basé sur des contraintes H_∞ présentons 2 propriétés.

Propriété 1.2.1 *Soit une matrice* $M \in \mathbf{R}^{n \times m}$, *alors :*

$$\overline{\sigma}(M) = \sqrt{\lambda_{max}(M^T M)} \leq \alpha \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha I & M \\ M & \alpha I \end{pmatrix} > 0 \tag{1.26}$$

Propriété 1.2.2 *Soit une matrice* $M \in \mathbf{C}^{n \times m}$

$$M > 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Re(M) & Im(M) \\ -Im(M) & Re(M) \end{pmatrix} > 0 \tag{1.27}$$

En appliquant ces deux propriétés à la contrainte suivante :

$$\overline{\sigma}(F_l(P,K)(j\omega)) \leq \alpha(\omega) \quad \forall \omega \in [\omega_1, \ldots, \omega_N] \tag{1.28}$$

on la réecrit sous une formulation LMI. On obtient pour chaque fréquence ω la contrainte LMI suivante :

$$\begin{bmatrix} \alpha I & Re(F_l(P,K)(j\omega)) & 0 & Im(F_l(P,K)(j\omega)) \\ Re(F_l^*(P,K)(j\omega)) & \alpha I & Im(F_l^*(P,K)(j\omega)) & 0 \\ 0 & -Im(F_l^*(P,K)(j\omega)) & \alpha I & Re(F_l(P,K)(j\omega)) \\ -Im(F_l^*(P,K)(j\omega)) & 0 & Re(F_l^*(P,K)(j\omega)) & \alpha I \end{bmatrix} > 0 \tag{1.29}$$

- Contraintes H_2
  Tout comme les contraintes l_2, elle correspondent à la minimisation d'un critère quadratique. Néanmoins, étant donné qu'aucune spécification sur l'identification d'un modèle LFT ne correspond à un critère H_2, nous ne développerons pas ici la mise sous forme d'un problème QP, qui est par ailleurs donnée dans [Dar98].

Si on veut vérifier cette contrainte sur un ensemble discret et fini de fréquences $\omega \in [\omega_1, \ldots, \omega_N]$ il sera nécessaire d'empiler ces contraintes pour chaque fréquence. Il faut remarquer que généralement on désire satisfaire la contrainte (1.28) sur un ensemble continu de fréquences. Néanmoins la transformation de cette contrainte en une contrainte LMI augmentée repose sur le lemme réel borné utilisant la représentation d'état, mais cette contrainte LMI est trop coûteuse en temps de calcul. Pour avoir un problème de dimension finie on utilisera un maillage fréquentiel. Il est nécessaire de procéder à une étape de validation pour vérifier que les spécifications sont bien satisfaites sur le continuum de fréquences.

1.2.4 Choix de la base

Comme l'ordre du correcteur dépend de l'ordre de la base, on choisira une base dont la taille est compatible avec les spécifications et avec le but recherché : synthèse d'un correcteur d'ordre raisonnable ou exploration de compromis sans limite a priori sur l'ordre du correcteur. Dans le cas de l'étude de la faisabilité d'un cahier des charges, pour décrire l'ensemble des fonctions de transfert, il serait nécessaire d'utiliser une base infinie pour couvrir tout l'espace. La difficulté réside dans le choix de la base de filtres et de son ordre. Choisir la base de filtres revient à fixer les pôles et à laisser les zéros libres qui serviront de paramètres d'optimisation. Il est important de remarquer que les pôles de la base de filtres sont des pôles qui vont se retrouver dans la boucle fermée par propriété de la Q-paramétrisation. Il est donc possible, en ayant une bonne expérience du procédé, de les choisir a priori.
Néanmoins pour avoir une approche plus méthodologique et donc plus systématique, il est intéressant de considérer une base de filtres. De nombreux travaux existent dans le domaine de l'identification pour la génération de ces bases de filtres.
Considérons le transfert $G(p)$ que l'on souhaite décomposer sur des matrices de transfert B_i qui forment une base :

$$G = \sum_{i=1}^{N} \theta_i B_i \tag{1.30}$$

Dans le cas d'un tranfert SISO discret, l'idée la plus simple est de considérer la base orthonormale $B_i(z) = z^{-i}$ caractéristique des filtres FIR. Le problème réside dans la taille de G dont l'ordre peut être très important du fait du grand nombre de filtres B_i éventuellement nécessaires pour obtenir un comportement désiré. Une autre solution est de considérer des filtres ayant la structure suivante :

$$B_i(z) = \frac{1}{z - p_i} \tag{1.31}$$

où les p_i sont les pôles de la base de filtres que l'on fixe a priori et qui se retrouvent dans la boucle fermée finale. Néanmoins cette base n'est ni complète ni orthonormale. Il est possible d'introduire de l'information a priori dans la boucle fermée en utilisant des bases orthonormales telles que les bases de Laguerre et Kautz. L'inconvénient de ces bases est de ne pouvoir introduire qu'un seul pôle, i.e. une seule dynamique. Or il est raisonnable de penser que l'on cherche à contrôler un système sur un certain domaine fréquentiel. Ce qui pourrait amener à utiliser des bases de taille importante pour compenser l'introduction d'une seule dynamique dans la base de filtres. Pour autant il est montré qu'à partir de ces bases orthonormales (Laguerre et Kautz) on peut généraliser en construisant d'autres bases orthonormales complètes incluant un ensemble de pôles p_i. On pourra se référer à [Dar98] pour une description plus détaillée de ces bases.
Le choix de la base et de son ordre est un problème difficile qui dépend essentiellement de l'objectif recherché.

- Si l'objectif est d'étudier la faisabilité d'un cahier des charges alors il est permis de prendre un ordre élevé pour la base. Ceci permet de donner un maximum de degrés de liberté au problème d'optimisation et d'être quasiment certain, si le problème n'a pas de solution, de l'infaisabilité du cahier des charges et non d'un mauvais choix de la base.
  En première approche, il est intéressant d'utiliser un FIR de taille importante. Si le problème est faisable, pour affiner la recherche, on peut utiliser une base qui introduit a priori différentes dynamiques pour couvrir le domaine fréquentiel plus rapidement, ce qui permet de réduire l'ordre du correcteur final.
- Si l'objectif est la synthèse de correcteur, i.e. on sait que le problème est faisable ou du moins on le suppose, il s'agit de déterminer la base la plus petite en taille qui permet d'obtenir un correcteur K satisfaisant le cahier des charges. La taille de cette base dépend du choix de la base. Dans ce cadre là, l'utilisation d'un FIR serait assez peu recommandable, si ce n'est en première approximation.
  Pour le paramètre Q, dans le cas multivariable, il est intéressant de considérer une matrice de gain. En effet pour les systèmes MIMO on a un nombre de degrés de liberté égal au nombre de sorties multiplié par le nombre de commandes, donnant ainsi un grand nombre de degrés de libertés au problème d'optimisation tout en limitant considérablement l'ordre du correcteur qui reste égal à l'ordre de P. Plus généralement on introduit une base dynamique dont les pôles correspondent aux dynamiques désirées de la boucle fermée.

1.2.5 Descriptions des différentes étapes de la synthèse convexe

Cette synthèse est faite en 4 étapes principales :

1. On paramétrise le paramètre de synthèse Q sous la forme $Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i \theta_i$, où les Q_i sont des filtres fixés a priori, formant une base.
2. On exprime les spécifications fréquentielles et temporelles en fonction de Q. Q apparaît de façon affine dans les réponses fréquentielles et temporelles. Les contraintes sont convexes, le problème d'optimisation qui consiste à déterminer Q satisfaisant les contraintes est donc un problème convexe.
3. On résout le problème d'optimisation par programmation linéaire, quadratique ou plus généralement par LMI selon le type de problème (la programmation linéaire est un cas particulier des LMI et la programmation quadratique peut être mise sous forme LMI grâce au lemme de Schur).
4. On revient au correcteur K à partir de Q.

1.3 Comparaison avec la synthèse H_∞ pondérée

On considère la résolution de la synthèse H_∞ pondérée donnée par [DGKF89]. Nous allons comparer les intérêts respectifs de ces résolutions.

1.3.1 Avantages de la synthèse convexe

- Cette approche permet de minimiser séparément et simplement chaque transfert $T_{w_i \to z_j}$, tandis que la synthèse H_∞ minimise un transfert MIMO $T_{w \to z}$. Minimiser ce transfert MIMO revient à minimiser des sous transferts qui ne nous intéressent pas forcément et donc à surcontraindre dans une certaine mesure le problème. Prenons par exemple les contraintes fréquentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \|T_{w_1 \to z_1}\|_\infty &\leq 1 \\ \|T_{w_1 \to z_2}\|_\infty &\leq 1 \\ \|T_{w_2 \to z_1}\|_\infty &\leq 1 \end{aligned} \tag{1.32}$$

  Ces contraintes ont été construites à partir des spécifications du cahier des charges. Si on utilise la synthèse H_∞, on cherchera à satisfaire la contrainte fréquentielle suivante :

$$\|T_{w \to z}\|_\infty \leq 1 \tag{1.33}$$

  On s'aperçoit que l'on contraint aussi $T_{w_2 \to z_2}$, i.e. un transfert qui ne nous intéresse pas. Par la synthèse convexe on prend en compte séparément chaque transfert en boucle fermée, i.e. seulement les contraintes (1.32).
- On prend directement en compte des spécifications temporelles type gabarit.

- Le γ obtenu à l'issue de la résolution du problème H_∞ standard est identique pour tous les transferts, par contre on peut obtenir des γ différents en utilisant la Q-paramétrisation. On augmente ainsi le nombre de degrés de liberté du problème d'optimisation. Le problème d'optimisation par synthèse convexe est la minimisation de γ avec $\gamma_{1,1} = \gamma A_{1,1}$, $\gamma_{1,2} = \gamma A_{1,2}$, $\gamma_{2,1} = \gamma A_{2,1}$ où $A_{1,1}$, $A_{1,2}$ et $A_{2,1}$ sont des gains fixés a priori, sous les contraintes suivantes :

$$\|T_{w_1 \to z_1}\|_\infty \leq \gamma_{1,1} \tag{1.34}$$
$$\|T_{w_1 \to z_2}\|_\infty \leq \gamma_{1,2} \tag{1.35}$$
$$\|T_{w_2 \to z_1}\|_\infty \leq \gamma_{2,1} \tag{1.36}$$

- Par rapport à la synthèse H_∞ on s'affranchit de la nécessité d'une forme analytique du gabarit fréquentiel que doit satisfaire le transfert en boucle fermée. Ainsi peut on utiliser des gabarits fréquentiels très complexes sans se soucier de leur forme analytique ou de leur réalisation tout en n'augmentant pas l'ordre du correcteur.

1.3.2 Inconvénients de la synthèse convexe

- En pratique et dans la cadre de la synthèse convexe qui a été présentée précédemment, on doit utiliser un maillage fréquentiel i.e. un ensemble fini de fréquences pour résoudre le problème d'optimisation qui est initialement de taille infinie. En d'autres termes, si le problème est faisable, on est sûr a priori que le transfert $M(j\omega,\theta)$ satisfait la contrainte fréquentielle mais seulement aux fréquences du maillage. On ne peut pas assurer qu'entre ces fréquences cette contrainte sur M est bien satisfaite. Il est alors nécessaire de procéder à une validation fréquentielle pour vérifier que M vérifie bien la contrainte sur un continuum de fréquences. La synthèse H_∞ assure a priori que la solution obtenue vérifie sur toutes les fréquences les contraintes fréquentielles.
- L'ordre du correcteur obtenu peut être élevé puisqu'il est égal à :

$$n_K = n_Q + n_P \tag{1.37}$$

où Q et P sont respectivement d'ordre n_Q et n_P. Si la taille de la base de filtres constituant Q est élevée, cela conduit à un correcteur final K d'ordre très élevé. Généralement l'ordre de P est égal à l'ordre du modèle de synthèse pour la synthèse convexe et donc l'ordre du correcteur obtenu à l'issue de la synthèse convexe est égal à l'ordre du modèle de synthèse plus n_Q. Remarquons que dans le cadre de la synthèse H_∞ l'ordre du correcteur est égal à l'ordre du modèle de synthèse plus l'ordre des pondérations nécessaires à la synthèse H_∞. Comme généralement l'ordre des pondérations n'est pas aussi élevé que l'ordre de la base de filtres, même pour un problème complexe comme celui de l'avion souple (voir dernière partie), l'ordre du correcteur obtenu par synthèse convexe est plus grand que l'ordre du correcteur obtenu par synthèse H_∞.
- Le minimum du problème d'optimisation convexe dépend du choix de la base de Q (qui n'a rien d'évident). Dans le cas de la synthèse H_∞ on s'affranchit totalement du choix de la base.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les principes de la synthèse convexe. Cette synthèse est basée sur la paramétrisation de Youla. Cette paramétrisation permet de rendre affine en Q tout les transferts en boucle fermée alors que ces transferts en boucle fermée s'écrivent sous la forme d'une LFT. Cette LFT est une relation profondément nonlinéaire en K. Ainsi toutes les contraintes sur la LFT, typiquement des contraintes sur sa norme H_∞, se transforment en contraintes convexes grâce à la Q-paramétrisation. Cette paramétrisation peut être vue comme un changement de variable de K en Q, où on est passé de l'espace des correcteurs K à l'espace des boucles fermées stables paramétrées par Q. Une fois Q calculé on peut en déduire K.
La synthèse convexe telle qu'elle a été présentée dans ce chapitre et développée dans [Dar98] suppose l'utilisation d'une base pour Q. On a explicité le choix de cette base en fonction des objectifs : faisabilité du cahier des charges ou synthèse d'un correcteur, voire retouche de correcteurs. En effet puisqu'on doit partir d'un correcteur initial K_{ini} stabilisant, si celui ne satisfait qu'une partie des spécifications du cahier des charges, il est tout à fait possible d'utiliser la synthèse convexe pour agir sur certains transferts en boucle fermée et retoucher certains autres en vue de satisfaire la totalité des spécifications de performance et de robustesse. En ce qui concerne la robustesse il est possible de combiner la technique de synthèse convexe avec celle de la μ-analyse [Dar98].
La synthèse convexe sera utilisée dans le cadre de l'identification d'un modèle LFT pour prendre en compte des objectifs de commande et d'identification simultanément.

Chapitre 2

Identification par appartenance à un ensemble

2.1 Introduction

Cette technique d'identification ne fait aucune hypothèse sur les propriétés statistiques du bruit, i.e. sur la répartition spectrale et la densité de probabilité. La seule hypothèse faite est une hypothèse déterministe sur la bornitude du bruit. On parle d'un bruit inconnu mais borné (UBB). Plus précisément il s'agit d'identifier un ensemble de modèles à partir des données d'entrées-sorties, des bornes associées aux bruits et de la structure du modèle. Comme il est difficile voire impossible de construire l'ensemble exact (polytope) des modèles compatibles avec les bornes, la structure du modèle et les mesures du fait que le nombre de côtés et de sommets du polytope augmente exponentiellement avec le nombre de mesures, on cherche à construire séquentiellement des sur-ensembles de formes simples qui contiennent le polytope. Bien sûr pour limiter le conservatisme de cette approche on cherchera à minimiser la taille de ces sur-ensembles. L'identification par appartenance à un ensemble (SMI) a fourni une abondante littérature. On pourra trouver dans [MT85, MV91] une présentation théorique de la SMI et dans [BT93, KMTV86, Bel95, WPL90a, THL95, BBC90] un certain nombre d'algorithmes permettant l'identification de modèles dans un contexte déterministe. On peut rajouter quelques références comme [YR92, FZ95] qui ont traité et développé des algorithmes pour des cas spécifiques : incertitudes paramétriques/non paramétriques, bruit de mesure. Une illustration de la SMI dans un cadre adaptatif est donnée par [KLB92] ou pour des structures de modèles bien particulières comme les structures flexibles [DA95].
Nous détaillerons dans ce chapitre quelques approches permettant la construction séquentielle de sur-ensembles comme les orthotopes (hyperrectangle dont les côtés sont parallèles aux axes de l'espace des paramètres) et les ellipsoïdes.
Pour l'identification d'un modèle on utilisera l'algorithme extrait de [FM97] qui fournit un orthotope contenant les vraies valeurs des paramètres estimés.

2.2 Modèle à erreur d'équation

Le modèle à erreur d'équation est le modèle le plus simple que l'on puisse considérer. Nous montrerons dans ce cas les diverses méthodes de construction de sur-ensembles, telles que les ellipsoïdes et les orthotopes.

2.2.1 Principe de l'identification par appartenance à un ensemble

Considérons la relation entrées-sorties d'un système dont on a pu mettre le modèle sous une forme linéaire en θ. θ représente les paramètres du modèle à estimer :

$$y = \phi^T \theta + \delta v \tag{2.1}$$

δv représente une perturbation sur le signal de sortie y. Cette perturbation est considérée comme UBB. En d'autres termes, on considère comme connue a priori une borne sur la valeur maximale que peut atteindre δv. Par contre la densité spectrale et la densité de probabilité restent inconnues. On passe d'une approche statistique à une approche déterministe.
Supposons que δv vérifie l'égalité suivante :

$$|\delta v| \leq v \tag{2.2}$$

Il est possible de construire à chaque instant l'ensemble des paramètres admissibles (FPS) Θ_N à l'instant N, i.e. l'ensemble des vecteurs θ compatibles avec :

- la structure du modèle donnée par l'équation 2.1
- les hypothèses faites sur la perturbation δv_k, où δv_k est le bruit à l'instant k
- les mesures présentes et passées (y_k et ϕ_k pour $k = 1, \ldots, N$)

Une illustration de la construction de Θ_N est donnée par la figure 2.1 (la partie hachurée représente le FPS). L'ensemble des paramètres admissible Θ_N est obtenu par l'intersection de N bandes S_k. Chaque bande S_k est l'intersection de 2 demi-plans parallèles H_k^- et H_k^+. Ces demi-plans sont définis comme suit :

$$y_k - \phi_k^T \theta > v_k \tag{2.3}$$
$$y_k - \phi_k^T \theta < v_k \tag{2.4}$$

On construit un polytope S_k séquentiellement. L'inconvénient de cette approche est le nombre très élevé de sommets et de faces qui apparaissent à chaque instant. Il est possible d'utiliser une forme géométrique plus simple qui serait une approximation de S_k. Par exemple on peut utiliser comme approximation de S_k un orthotope. Ce sur-ensemble permet d'assurer que le vrai modèle y est inclus. La figure 2.2 fournit une illustration des orthotopes O_k et O_{k-1} qui constituent des sur-ensembles aux instants k et $k-1$.

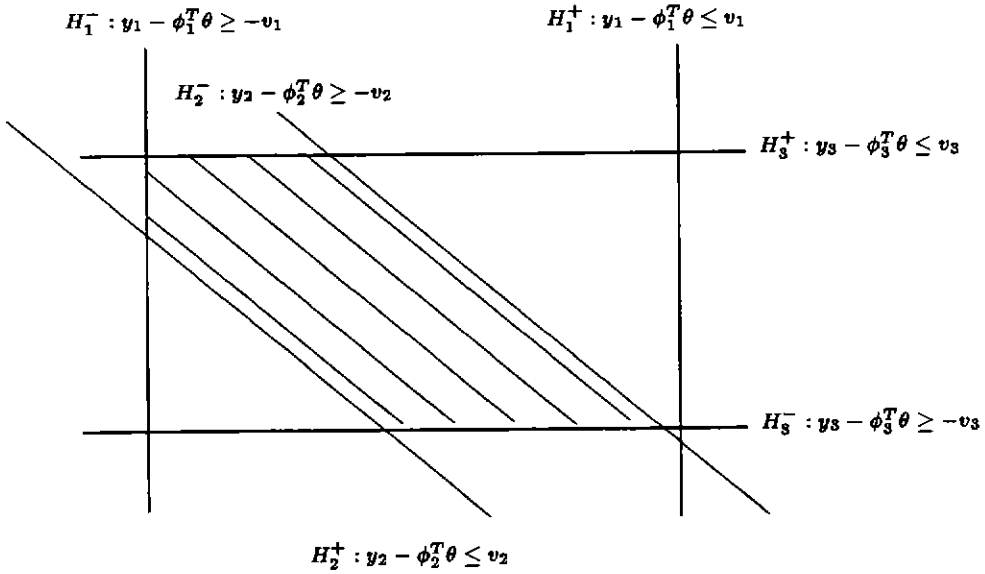


FIG. 2.1 – *Construction du FPS.*

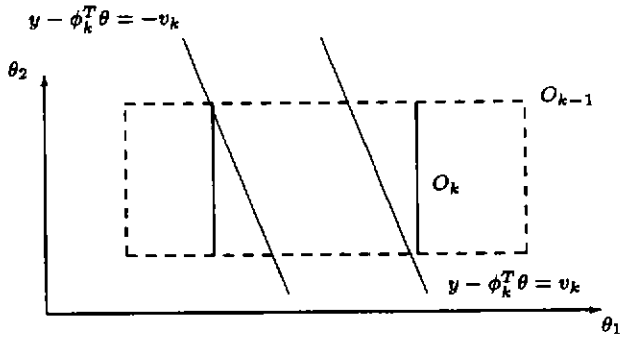


FIG. 2.2 – *Construction d'un orthotope.*

2.2.2 Construction d'un ellipsoïde

La construction d'un ellipsoïde est tirée de [FH82]. Considérons l'ellipsoïde défini par l'équation suivante :

$$E_{k-1} = \{\theta/(\theta - \theta_{k-1})^T P_{k-1}^{-1}(\theta - \theta_{k-1}) \leq 1\} \tag{2.5}$$

Considérons de plus la bande S_k suivante :

$$(y_k - \phi_k^T \theta)^2 \leq v_k^2 \tag{2.6}$$

L'ellipsoïde E_k est choisi parmi l'ensemble des ellipsoïdes d'équation :

$$(\theta - \theta_{k-1})^T P_{k-1}^{-1}(\theta - \theta_{k-1}) + \lambda_k (y_k - \phi_k^T \theta)^2 \leq 1 + \lambda_k v_k^2 \tag{2.7}$$

Chaque ellipsoïde satisfaisant l'équation ci-dessus contient l'intersection de E_{k-1} et de S_k. λ_k est déterminé de façon à minimiser soit le déterminant de P_k et donc le volume de l'ellipsoïde E_k, soit à minimiser la trace de P_k. On peut montrer que l'algorithme de [FH82] peut être interprété comme une technique de moindres carrés pondérés.
Si la bande S_k contient entièrement l'ellipsoïde E_{k-1} on a $E_k = E_{k-1}$ à l'instant $t = k$. Ce qui signifie en d'autres termes que les nouvelles mesures n'apportent pas d'informations supplémentaires. Inversement si l'un des hyperplans $y_k = \phi_k^T \theta \pm v_k$ ne coupe pas l'ellipsoïde E_{k-1}, il est possible de "ramener" cet hyperplan tangent à E_k. Cette modification proposée par [BB85] permet de minimiser la taille du nouvel ellipsoïde E_k. La figure 2.3 illustre cette modification. Il est intéressant de remarquer que l'algorithme de [FH82] muni de la modification de [BB85] est mathématiquement équivalent à calculer l'ellipsoïde de volume minimal contenant l'intersection de E_{k-1} et S_k.

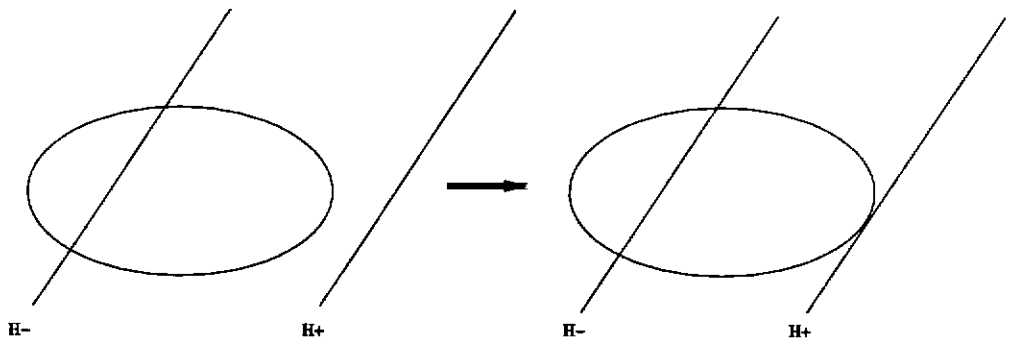


FIG. 2.3 – *Construction modifiée d'un ellipsoïde.*

2.2.3 Construction d'un orthotope

On cherche à construire l'orthotope O_k de taille minimale contenant l'intersection de la bande S_k et de l'orthotope construit à l'instant précédent O_{k-1} (voir figure 2.2). La construction d'un orthotope de taille minimale se fait en 2 étapes [Fer95]. Ces deux étapes

sont tout à fait similaires du point de vue mathématique. La bande S_k est définie comme nous l'avons vu par 2 plans H_k^+ et H_k^- à l'instant k. La première étape consiste à construire l'orthotope O_k' qui correspond à l'orthotope de taille minimale contenant l'intersection de l'orthotope O_{k-1} et du demi-plan H_k^-. La deuxième étape, qui est similaire à la première, consiste à construire l'orthotope O_k de taille minimale contenant l'intersection de O_k' et de l'autre demi-plan H_k^+. Détaillons plus précisément l'algorithme. Prenons l'orthotope O_{k-1} un orthotope dans l'espace des paramètres θ_i. L'orthotope définit pour chaque paramètre θ_i un intervalle de confiance:

$$\underline{\theta_i} \leq \theta_i \leq \overline{\theta_i} \quad \forall i \in [1,n] \tag{2.8}$$

où n est la dimension de l'espace des paramètres. Il s'agit de construire le plus petit orthotope O_k contenant l'intersection de O_{k-1} et du demi-plan H, où H désigne indifféremment H_k^+ ou H_k^-. Ce demi-plan H est défini par la contrainte suivante:

$$f(\theta) = a_0 + \sum_i a_i \theta_i \geq 0 \tag{2.9}$$

Il s'agit dans un premier temps de déterminer les sommets θ_A et θ_B qui maximisent et minimisent la forme linéaire $f(\theta)$. θ_A est déterminé de la façon suivante:

$$\theta_i^A = \overline{\theta_i} \quad \text{si } a_i > 0 \tag{2.10}$$

$$= \underline{\theta_i} \quad \text{si } a_i < 0 \tag{2.11}$$

Deux cas extrêmes peuvent se présenter. Si $f(\theta^B) \geq 0$, l'orthotope est entièrement contenu dans le demi-plan H et dans ce cas $O_k = O_{k-1}$. Si $f(\theta^A) \leq 0$, l'intersection entre le demi-plan H et l'orthotope O_{k-1} est vide. Dans le cas général où $f(\theta^B) < 0 < f(\theta^A)$, le sommet θ_B est l'intersection de n faces F_i de l'orthotope O_{k-1}, faces F_i définies par l'équation $\theta_i = \theta_i^B$

Il est nécessaire maintenant de vérifier si la face F_i est entièrement à l'extérieur du demi-plan H. Pour cela on recherche le maximum de $f(\theta)$ sur F_i et non plus sur l'orthotope O_{k-1}. Si le maximum de la forme linéaire $f(\theta)$ est négatif, cela signifie que F_i est entièrement contenu à l'extérieur du demi-plan H. La recherche du maximum se fait à partir des équations (2.10,2.11). Si la face F_i est entièrement à l'extérieur du demi-plan H, il est possible de la déplacer jusqu'à la frontière de H (voir figure 2.4).

L'approche développée ici avec un demi-plan doit être appliquée une nouvelle fois avec le second demi-plan pour obtenir finalement l'orthotope de volume minimal O_k contenant l'intersection de S_k et de O_{k-1}.

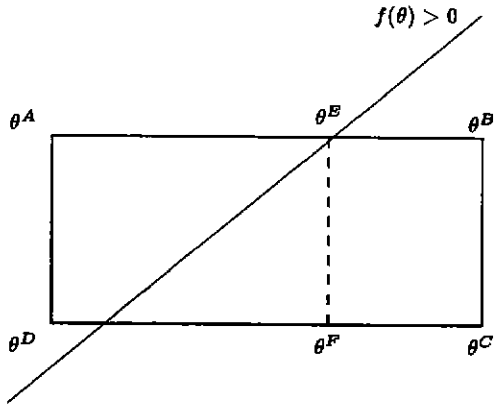


FIG. 2.4 – *Construction d'un orthotope.*

2.3 Modèle à erreur de sortie

2.3.1 Construction d'un orthotope avec connaissance a priori des signes des paramètres

On suppose un modèle à erreur de sortie. Cette modélisation conduit à une représentation différente de la bande S_k puisqu'au lieu d'être limitée par 2 demi-plans parallèles, S_k est limitée par 2 demi-plans non parallèles. Il s'agit donc d'adapter les diverses méthodes de construction des ellipsoïdes et des orthotopes au cas où le régresseur ϕ est bruité.
Le but est d'estimer le vecteur θ défini dans l'équation suivante :

$$y = \phi^T \theta \tag{2.12}$$

Or les mesures accessibles sont :

$$y_{mes} = y + \delta y \tag{2.13}$$
$$\phi_{mes} = \phi + \delta w \tag{2.14}$$

avec les contraintes de bornes :

$$|\delta v| \leq v \quad \text{et} \quad |\delta w_i| \leq w_i \tag{2.15}$$

Le problème est donc d'estimer le vecteur θ dans l'équation linéaire en paramètres :

$$y_{mes} = (\phi_{mes} - \delta w)^T \theta + \delta v \tag{2.16}$$

L'utilisation d'un estimateur comme les LS pour estimer θ donnerait un résultat biaisé sur θ puisque le régresseur ϕ n'est pas parfaitement connu.
L'équation (2.16) se reécrit comme suit :

$$y_{mes} - \phi_{mes}^T \theta = \delta v - \delta w^T \theta = f(\delta w, \delta v) \tag{2.17}$$

On calcule facilement le maximum et le minimum f_{max} et le f_{min} de la fonction linéaire f à l'aide des bornes sur les bruits, ce qui permet d'avoir l'égalité suivante :

$$f_{min} = -v - \sum_i w_i sign(\theta_i)\theta_i = -f_{max} \tag{2.18}$$

On en déduit :

$$f_{min} \leq y - \phi^T \theta \leq f_{max} \tag{2.19}$$

ce qui est équivalent à :

$$y - \phi_1^T \theta \geq -v \tag{2.20}$$
$$y - \phi_2^T \theta \leq v \tag{2.21}$$

où :

$$\phi_{1,i} = \phi_i - w_i sign(\theta_i) \tag{2.22}$$
$$\phi_{2,i} = \phi_i + w_i sign(\theta_i) \tag{2.23}$$

Soient Q et H les ensembles de vecteurs θ vérifiant respectivement les équations (2.15,2.16) et (2.20,2.21). Alors par construction, on a $Q \subset H$. Il s'avère en fait que $Q = H$. Pour la démonstration on pourra se référer à [Fer95]. Ce résultat amène plusieurs remarques :

- Ce résultat montre que l'approche n'est pas conservative dans le cas où le régresseur ϕ est partiellement connu. Cependant dans le cas d'une dépendance temporelle entre les différentes valeurs du régresseur à des instant consécutifs (e.g. les modèles ARX), cette approche devient conservative puisqu'on ne prend pas en compte cette dépendance temporelle.
- En supposant les signes des θ_i connus, les équations (2.20) et (2.21) définissent 2 demi-plans non parallèles dans un quadrant donné de l'espace des paramètres (voir figure 2.5).

La construction d'un orthotope de volume minimal dans le cas d'un modèle à erreur de sortie est tout à fait similaire au cas des modèles à erreur d'équation : c'est en fait une généralisation au cas de demi-plans non parallèles.
Pour cela considérons l'intersection de l'orthotope O_k et de 2 demi-plans H_1 et H_2. L'idée est de déterminer l'intersection $H_1 \cap H_2$ avec chacune des $2n$ faces de l'orthotope. Si l'intersection de $H_1 \cap H_2$ avec l'une des faces définies par $\theta_i = \overline{\theta}_i$ ou $\theta_i = \underline{\theta}_i$ est vide alors il est possible d'améliorer les intervalles de confiance pour θ_i en déplaçant cette face jusqu'à ce qu'elle intercepte $H_1 \cap H_2$. Il est intéressant de faire plusieurs remarques.

- Cette procédure est un généralisation de l'approche présentée dans le cas du modèle

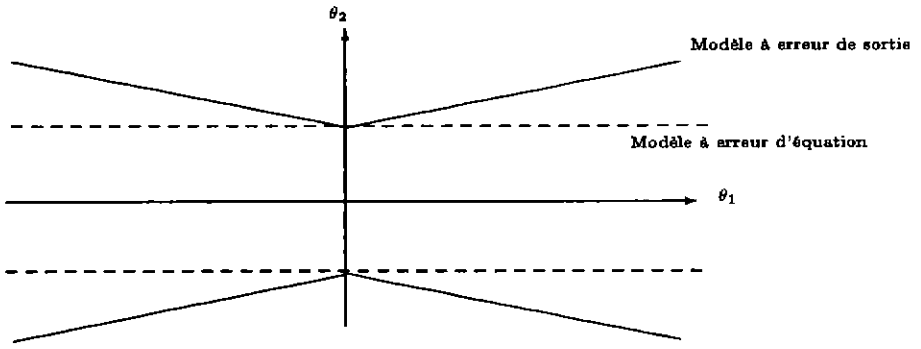


FIG. 2.5 – *Construction des 2 demi-plans pour un modèle à erreur de sortie.*

à erreur d'équation avec un demi-plan H. En fait ici le demi-plan H est remplacé par le plan $H_1 \cap H_2$.

- Il est nettement moins conservatif de traiter simultanément les deux demi-plans H_1 et H_2 à l'aide de leur intersection au lieu de traiter séparément l'intersection de O_k avec H_1 puis H_2. La figure 2.6 montre clairement ce résultat : l'orthotope O_k resterait inchangé en considérant H_1 puis H_2 tandis qu'avec $H_1 \cap H_2$ le nouvel orthotope est A, E, F et D. Il est important de préciser que pour un modèle à erreur d'équation (H_1 et H_2 parallèles) appliquer 2 fois la technique pour obtenir l'orthotope de volume minimal est équivalent à considérer l'intersection de $H_1 \cap H_2$ avec un orthotope.

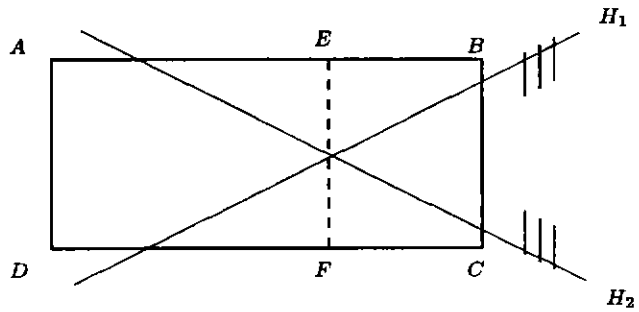


FIG. 2.6 – *Construction d'un orthotope.*

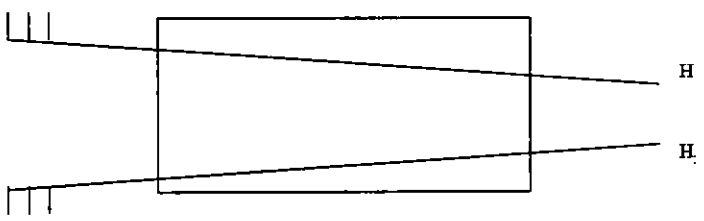


FIG. 2.7 – *Construction d'un orthotope.*

L'approche exposée est basée exclusivement sur une vision géométrique du problème. Néanmoins on peut montrer [Fer95] que le cas présenté par le figure 2.6 ne peut pas se produire, évidemment pour les modèles à erreur d'équation, mais aussi pour les modèles à erreur de sortie. En d'autres termes cela signifie que quel que soit le modèle, si on désigne δH_1 et δH_2 les frontières des demi-plans H_1 et H_2, dans un cadran donné (signes des paramètres connus a priori) on a nécessairement $\delta H_1 \cap \delta H_2 = \oslash$. La figure 2.7 illustre cette caractéristique. Dès lors on constate que l'on peut traiter séparément H_1 et H_2 pour déterminer l'orthotope de volume minimal. Ainsi cet orthotope dans le cas des modèles à erreur de sortie est obtenue de la même façon que pour les modèles à erreur d'équation.

2.3.2 Construction d'un orthotope sans connaissance des signes des paramètres

Il est possible d'étendre encore cette approche au cas où on ne connaît pas le signe a priori des paramètres θ_i. Cette approche a été développée et proposée dans [FM97]. Nous allons présenter un résumé des principaux résultats. Pour cela reprenons l'exemple d'un demi-plan H défini par la contrainte suivante :

$$f(\theta) = a_0 + \sum_i (a_i\theta_i + b_i|\theta_i|) \geq 0 \tag{2.24}$$

Comme précédemment la première étape consiste à déterminer les points θ_A et θ_B qui maximisent et minimisent la fonction f. Le résultat suivant permet de calculer θ_A.
Si $\underline{\theta_i} \geq 0$:

$$\begin{aligned} max_{\theta_i \in [\underline{\theta_i}, \overline{\theta_i}]}(a_i\theta_i + b_i|\theta_i|) &= (a_i + b_i)\overline{\theta_i} \quad \text{si } a_i + b_i > 0 & (2.25)\\ &= (a_i + b_i)\underline{\theta_i} \quad \text{si } a_i + b_i < 0 & (2.26) \end{aligned}$$

Si $\overline{\theta_i} \leq 0$:

$$\begin{aligned} max_{\theta_i \in [\underline{\theta_i}, \overline{\theta_i}]}(a_i\theta_i + b_i|\theta_i|) &= (a_i - b_i)\overline{\theta_i} \quad \text{si } a_i - b_i > 0 & (2.27)\\ &= (a_i - b_i)\underline{\theta_i} \quad \text{si } a_i - b_i < 0 & (2.28) \end{aligned}$$

Si $\underline{\theta_i} \leq 0 \leq \overline{\theta_i}$:

$$max_{\theta_i \in [\underline{\theta_i}, \overline{\theta_i}]}(a_i\theta_i + b_i|\theta_i|) = max(0, (a_i + b_i)\overline{\theta_i}, (a_i - b_i)\underline{\theta_i}) \tag{2.29}$$

Il est donc possible de déterminer un orthotope de volume minimal sans connaître a priori les signes des paramètres θ_i pour un modèle à erreur de sortie.
Il existe d'autres approches permettant de construire des sur-ensembles de polytopes pour le cas des modèles à erreur de sortie. On peut utiliser des ellipsoïdes [CG90] avec des versions optimisées. De même on peut adapter le problème à erreur d'équation à la construction de parallélotope [Fer95]. Si nous nous sommes attachés à présenter la technique des orthotopes c'est parce que c'est celle-ci qui sera utilisée pour l'identification du modèle LFT.

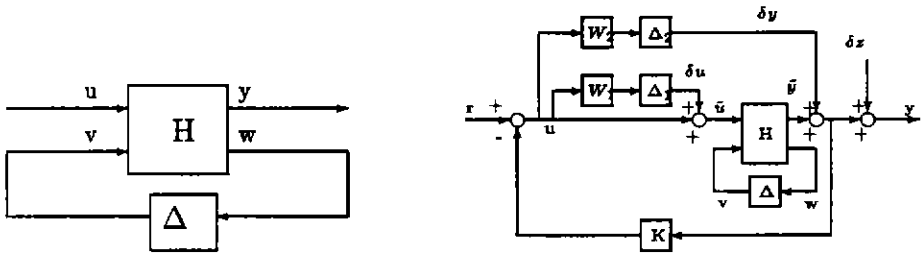
2.4 Conclusion

Cette technique d'identification repose sur une approche déterministe des bruits et perturbations : on ne connait aucune information sur la nature statistique du bruit ou de la perturbation mais seulement une borne. C'est à l'aide de cette borne que l'on pourrait en théorie construire un ensemble de paramètres admissibles compatibles avec la strucure du modèle, les bornes et les mesures passées. Comme cet ensemble admissible, un polytope, possède une forme trop complexe, on l'approxime par des sur-ensembles de formes plus simples : orthotope, parallélotope, ellipsoïde etc. Nous avons donc présenté quelques méthodes permettant de construire ces sur-ensembles de formes simples et de taille minimale (à chaque instant) contenant l'ensemble des paramètres admissibles du modèle à identifier que ce soit pour un modèle à erreur de sortie ou à erreur d'équation. Il est important de noter que si ces méthodes de construction de sur-ensembles sont optimales à chaque instant k au sens de la taille minimale du sur-ensemble, elles ne sont pas optimales globalement. En d'autres termes si on est capable d'avoir le polytope final et si on construisait l'orthotope de taille minimale contenant le polytope, cet orthotope serait plus petit que si on l'avait construit de façon séquentielle. Nous utiliserons pour l'identification d'un modèle LFT l'algorithme présenté dans 2.3.2 et tiré de [FM97].

Chapitre 3

Identification d'un modèle LFT

3.1 Introduction



(a) Un modèle LFT

(b) Un modèle LFT en boucle fermée avec perturbations

FIG. 3.1 – *Identification du modèle LFT.*

Identifier un modèle LFT est un problème difficile qui reste essentiellement non résolu en dépit de son intérêt. En effet, pour proposer un cadre unifié qui combine la commande robuste, l'analyse de robustesse, la validation de modèle, et l'identification [DNPT94], un pré-requis est d'utiliser une forme structurée standard commune. De plus quasiment tous les modèles LTI qui dépendent de paramètres incertains peuvent être mis sous une forme LFT (figure 3.1(a)) : le transfert $H(p)$ est fixé, u et y sont les entrées-sorties physiques, tandis que les incertitudes paramétriques qui sont regroupées à l'intérieur d'une perturbation de modèle Δ (i.e une matrice réelle dont la structure est fixée et les valeurs inconnues) apparaissent comme un retour interne fictif $v = \Delta w$.
Une méthode a déjà été présentée dans [KK90] pour la reconstruction des entrées-sorties fictives du bloc Δ. Mais celle-ci travaille dans le domaine temporel, ce qui implique des contraintes sur l'inversion de la matrice de transferts qui sont difficiles à respecter. Nous proposons une méthode basée sur la reconstruction dans le domaine fréquentiel des entrées-sorties de Δ, méthode imposant moins de contraintes et donc plus facile à mettre en oeuvre. Elle consiste simplement à inverser la réponse fréquentielle d'une matrice de transferts. En

outre notre approche permet d'étudier la sensibilité du schéma d'identification face aux dynamiques négligées, bruits de mesure et autres perturbations agissant sur la boucle fermée. En utilisant une technique de synthèse appelée synthèse convexe (voir partie II chapitre 1), on peut synthétiser un correcteur qui réduit la sensibilité du schéma d'identification tout en satisfaisant les spécifications de performance et robustesse [DF02a].
Cette méthode est appliquée à l'identification d'un modèle aérodynamique fortement structuré, issu de [Fer99]. Le modèle est mis sous la forme LFT standard 3.1(a), où les paramètres incertains (les coefficients aérodynamiques) sont regroupés dans un bloc réel plein Δ. Les entrées et sorties v et w de la perturbation de modèle Δ sont déduites des entrées-sorties u et y, afin que Δ soit identifié [DF01a, DF01b, DF02c].
Pour prendre en compte les bruits de mesure et les dynamiques négligées, deux techniques d'identification ont été utilisées. La première est la technique d'identification par appartenance à un ensemble (SMI)([WPL90b, Nor95, MNPLW96, FM97]. Cette technique a pour but de fournir un ensemble de valeurs des paramètres (FPS) qui sont compatibles avec la structure du modèle, les hypothèses faites sur le bruit de mesure et les dynamiques négligées, ainsi que les mesures des entrées-sorties du procédé. Remarquons que la relation $v = \Delta w$ est un modèle à erreur de sortie, plus précisément un modèle à erreurs en les variables puisque v et w sont corrompus par le bruit, et donc, une technique spécifique extraite de [FM97] est utilisée afin de construire un sur-ensemble du FPS. La seconde solution utilisée est les moindres carrés robustes (RLS). Cette version robuste des moindres carrés (LS) prend en compte des incertitudes bornées sur A et b, tout en minimisant la norme 2 de $Ax - b$.

3.2 Schéma d'identification

3.2.1 Problématique

Considérons la boucle fermée de la figure 3.1(b), où Δ_1 et Δ_2 sont deux dynamiques négligées satisfaisant l'inégalité H_∞, $\|\Delta_i(p)\|_\infty \leq 1$. Les pondérations W_i sont fixées ainsi que le correcteur K. Remarquons que les dynamiques négligées pourraient être situées autre part, le problème est juste d'obtenir des bornes pour les signaux de perturbation δ_u et δ_y sur les entrées et sorties physiques $\tilde{u}$ et $\tilde{y}$ de la LFT. δ_u et δ_y peuvent aussi représenter du bruit de mesure qui est supposé être UBB dans le domaine fréquentiel.
En effet, les mesures dans le domaine fréquentiel des signaux r (entrées référence), u et y (entrées et sorties du procédé) sont supposées accessibles, le problème est d'estimer à partir de ces signaux des paramètres incertains regroupés dans une perturbation de modèle Δ réelle et structurée. C'est un problème d'identification en boucle fermée ou ouverte. Plus précisément l'estimation des valeurs de Δ à l'intérieur du modèle de la LFT peut être réalisée à partir de la LFT en boucle ouverte $y = F_l(H,\Delta)u$ ou de la LFT en boucle fermée $y = F_l(\hat{H},\Delta)r$ [1]. En effet en choisissant $\delta u = \delta y = \delta z = 0$ sur la figure 3.1(b), la matrice de transfert entre r et y peut être réécrite comme un modèle LFT $F_l(\hat{H},\Delta)$. Enfin, δz, qui est introduit après le retour, représente l'effet de la troncature des données et des erreurs

1. Un problème relié mais différent est l'influence des signaux d'entrées et de sorties u et y utilisés pour identifier un modèle en boucle ouverte avec des expériences en boucle ouverte ou fermée.

numériques lors de l'utilisation des FFT pour transformer des mesures dans le domaine temporel vers le domaine fréquentiel.
Nous procéderons en deux étapes. Sous une condition d'inversibilité à gauche que nous préciserons, nous montrerons comment estimer v et w, les entrées et sorties de Δ, à partir des entrées et sorties idéales $\bar{u}$ et $\bar{y}$. Puisque v et w sont estimés dans la pratique avec $u = \bar{u} - \delta u$ et $y = \bar{y} + \delta y + \delta z$, où δu, δy et δz sont UBB, nous montrerons comment estimer Δ à l'aide d'une approche SMI ou RLS. La sensibilité du schéma d'identification sera finalement étudiée.

3.2.2 Estimation de v et w

Le lemme 3.2.1 est à la base de notre approche, ainsi que de celle de [KK90].

Lemme 3.2.1 *Sur la figure 3.1(a), nous avons :*

$$\begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Si H_{12} est inversible à gauche i.e. il existe $H_{12}^{\dagger}$ avec $H_{12}^{\dagger} H_{12} = I$, alors :

$$\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{22} H_{12}^{\dagger} & I \\ H_{12}^{\dagger} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y - H_{11} u \\ H_{21} u \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Preuve : il suffit de remarquer que $y = H_{11} u + H_{12} v$ implique $v = H_{12}^{\dagger}(y - H_{11} u)$.

Considérons l'approche de [KK90], qui nécessite une inversion à gauche du transfert $H_{12}(p)$. De plus $H_{12}^{\dagger}(p)$ doit être stable. Si $H_{12}(p)$ est strictement propre ou possède des zéros instables, une solution proposée par [KK90] est d'introduire un filtre scalaire et propre $F(p)$ dans l'équation (3.1), afin que $F(p)H_{12}(p)$ soit inversible. Néanmoins cette technique n'est pas toujours applicable. Dans le contre exemple suivant aucun filtre scalaire ne peut rendre cette matrice de transfert propre :

$$H_{12}(p) = \begin{bmatrix} (p+2)/p & 0 \\ 0 & 1/(p+1)(p+3) \end{bmatrix}$$

L'idée de base de notre approche est d'inverser à gauche $H_{12}(j\omega)$ à chaque pulsation, ce qui représente un problème beaucoup plus facile[2]. Néanmoins, puisque $H_{12}(p)$ est la matrice de transfert entre v et y (figure 3.1(a)), une condition nécessaire pour inverser à gauche $H_{12}(j\omega)$ est que le nombre n_y de sorties mesurées soit supérieur ou égal au nombre n_v de sorties de Δ. Par conséquent, comme cela est fait dans [WRP97, DF01b], il est plus intéressant, quand c'est possible, d'utiliser un bloc réel plein Δ au lieu d'une classique perturbation de modèle diagonale $diag(\delta_i I_{q_i})$ avec des paramètres incertains δ_i

2. L'inversion d'une représentation fréquentielle sur un ensemble discret et fini de fréquences, i.e. un maillage fréquentiel, ne pose pas de problème même pour un système strictement propre et/ou avec des zéros instables.

éventuellement répétés, puisque un bloc réel plein contient beaucoup plus de paramètres. Remarquons que le lemme 3.2.1 peut être aussi appliqué en utilisant la référence r :

$$\begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}_{11} & \hat{H}_{12} \\ \hat{H}_{21} & \hat{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ v \end{bmatrix}$$

i.e. v est déduit de r et y en utilisant $v = \hat{H}_{12}^{\dagger}(y - \hat{H}_{11}r)$, $w = \hat{H}_{21}r + \hat{H}_{22}v$ et $\hat{H}_{12}^{\dagger} = H_{12}^{\dagger}(I + H_{11}K)$.

Lemme 3.2.2 *La matrice de transfert entre r et y sur la figure 3.1(b) (avec $\delta u = \delta y = \delta z = 0$) peut être réécrite comme un modèle LFT $F_l(\hat{H},\Delta)$ avec :*

$$\begin{aligned} \hat{H}_{11} &= (I + H_{11}K)^{-1}H_{11} \\ \hat{H}_{12} &= (I + H_{11}K)^{-1}H_{12} \\ \hat{H}_{21} &= H_{21}\left[I - K(I + H_{11}K)^{-1}H_{11}\right] = H_{21}(I + KH_{11})^{-1} \\ \hat{H}_{22} &= H_{22} - H_{21}K(I + H_{11}K)^{-1}H_{12} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Le lemme suivant propose une expression de l'erreur d'estimation sur v et w, pour une pulsation donnée ω. La pulsation ω des matrices H_{ij} et $\hat{H}_{ij}$ est omise pour alléger la notation.

Lemme 3.2.3 *Considérons la figure 3.1(b) avec des valeurs non nulles pour δu, δy, δz. En appliquant le lemme 3.2.1 sur le modèle LFT en boucle fermée, les estimées de v et w sont données par :*

$$\begin{aligned} v_e &= \hat{H}_{12}^{\dagger}(y - \hat{H}_{11}r) = H_{12}^{\dagger}(I + H_{11}K)y - H_{12}^{\dagger}H_{11}r \\ w_e &= \hat{H}_{21}r + \hat{H}_{22}v_e \end{aligned} \tag{3.4}$$

L'erreur d'estimation est :

$$\begin{aligned} \delta v &= v_e - v = H_{12}^{\dagger}H_{11}\delta u + H_{12}^{\dagger}\delta y + H_{12}^{\dagger}(I + H_{11}K)\delta z \\ \delta w &= w_e - w = F_l(\mathcal{X}, -K)\begin{bmatrix} \delta u \\ \delta y \\ H_{12}^{\dagger}(I + H_{11}K)\delta z \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.5}$$

où $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_{11} & H_{21} \\ \mathcal{X}_{21} & H_{11} \end{bmatrix}$, $\mathcal{X}_{11} = \begin{bmatrix} (H_{22}H_{12}^{\dagger}H_{11} - H_{21}) & H_{22}H_{12}^{\dagger} & H_{22} \end{bmatrix}$ *et* $\mathcal{X}_{21} = \begin{bmatrix} (H_{12}H_{12}^{\dagger} - I)H_{11} & (H_{12}H_{12}^{\dagger} - I) & H_{12} \end{bmatrix}$.

Preuve : l'équation (3.4) est essentiellement l'application du lemme 3.2.1 à l'équation (1.44), en utilisant $\hat{H}_{12}^{\dagger} = H_{12}^{\dagger}(I + H_{11}K)$. Pour calculer les erreurs d'estimation (3.5), les vraies valeurs v et w sont nécessaires. En utilisant $\tilde{y} = H_{11}\tilde{u} + H_{12}v$ et

$$\tilde{u} = \delta u + r - K(\tilde{y} + \delta y) \tag{3.6}$$

une relation intermédiaire est obtenue pour $\tilde{y}$:

$$\tilde{y} = \hat{H}_{11}r + \hat{H}_{12}v + \hat{H}_{11}\delta u - \hat{H}_{11}K\delta y \tag{3.7}$$

qui est utilisée pour déduire :

$$v = H_{12}^{\dagger}(I + H_{11}K)\tilde{y} - H_{12}^{\dagger}H_{11}r - H_{12}^{\dagger}H_{11}\delta u + H_{12}^{\dagger}H_{11}K\delta y$$

en utilisant alors $w = H_{21}\tilde{u} + H_{22}v$ et les équations (3.6,3.7) :

$$w = \hat{H}_{21}r + \hat{H}_{22}v + \hat{H}_{21}\delta u - H_{21}K(I + H_{11}K)^{-1}\delta y \tag{3.8}$$

δv est simplement calculé comme $\delta v = v_e - v$. Pour w_e nous avons :

$$\begin{aligned} w_e &= \hat{H}_{22}\delta v + \left(\hat{H}_{21}r + \hat{H}_{22}v\right) \\ &= \hat{H}_{22}\delta v + \left(w - \hat{H}_{21}\delta u + H_{21}K(I + H_{11}K)^{-1}\delta y\right) \end{aligned}$$

où $\hat{H}_{21}r + \hat{H}_{22}v$ est calculé avec l'équation (3.8). Donc :

$$\begin{aligned} w_e - w &= (\hat{H}_{22}H_{12}^{\dagger}H_{11} - \hat{H}_{21})\delta u + \hat{H}_{22}H_{12}^{\dagger}(I + H_{11}K)\delta z \\ &\quad +(\hat{H}_{22}H_{12}^{\dagger} + H_{21}K(I + H_{11}K)^{-1})\delta y \\ &= \left(H_{22}H_{12}^{\dagger}H_{11} - H_{21} + H_{21}K(I + H_{11}K)^{-1}(I - H_{12}H_{12}^{\dagger})H_{11}\right)\delta u \\ &\quad + \left(H_{22}H_{12}^{\dagger} + H_{21}K(I + H_{11}K)^{-1}(I - H_{12}H_{12}^{\dagger})\right)\delta y \\ &\quad + \left(H_{22}H_{12}^{\dagger} - H_{21}K(I + H_{11}K)^{-1}H_{12}H_{12}^{\dagger}\right)(I + H_{11}K)\delta z \end{aligned}$$

qui peut être mis sous la forme (3.5).

Remarque 1 : Pour estimer v et w avec le modèle LFT en boucle ouverte (i.e. avec les entrées et sorties du procédé u et y, au lieu de r et y), il suffit de prendre $K = 0$ dans le lemme ci-dessus.
Remarque 2: les estimées de v et w sont non biaisées ($\delta u = \delta y = \delta z = 0$ implique $\delta v = \delta w = 0$).
Remarque 3: L'équation (3.5) décrit une matrice de transfert en boucle fermée entre les perturbations δu et δy et l'erreur d'estimation sur w, ou en d'autres termes les transferts reliant δu et δy et l'erreur d'estimation sur w s'expriment sous la forme d'une LFT.

3.2.3 Estimation de Δ

Le lemme 3.2.4 propose une borne sur δv et δw, tandis que le lemme 3.2.5 montre comment mettre notre problème d'estimation sous la forme standard d'un problème de type SMI ou RLS. Toutes les lignes du bloc réel plein Δ sont estimées indépendamment. Soit δv_i la i^{eme} composante de δv à une pulsation donnée. Δ_j représente la réponse fréquentielle $\Delta_j(j\omega)$ de la dynamique négligée $\Delta_j(p)$ à la pulsation ω. Il en est de même pour W_i. Supposons que $\|\delta z\|_2 \leq Z$.

Lemme 3.2.4 *A partir des équations (3.5) et de la figure 3.1(b) on note* $\delta v_i = \alpha_i^T\Delta_1 W_1 u + \beta_i^T\Delta_2 W_2 u + \gamma_i^T\delta z$ *et* $\delta w = A_1\Delta_1 W_1 u + A_2\Delta_2 W_2 u + A_3\delta z$. *Alors les bornes sur les erreurs d'estimation* δv_i *et* δw *en norme 2 sont données par les équations suivantes :*

$$|\delta v_i| \leq \|\alpha_i\|_2 \|W_1 u\|_2 + \|\beta_i\|_2 \|W_2 u\|_2 + \|\gamma_i\|_2 Z \tag{3.9}$$

et

$$\|\delta w\|_2 \leq \overline{\sigma}(A_1)\ \|W_1 u\|_2 + \overline{\sigma}(A_2)\ \|W_2 u\|_2 + \overline{\sigma}(A_3)\ Z \tag{3.10}$$

Preuve : L'équation (3.10) utilise le fait que $\|\Delta_j(p)\|_\infty \leq 1$ implique $\overline{\sigma}(\Delta_j) \leq 1$ et que $\overline{\sigma}$ est la norme induite 2. Pour simplifier considérons juste $\delta w = A_1 \Delta_1 W_1 u$, donc :

$$\|\delta w\|_2 \leq \overline{\sigma}(A_1)\ \|W_1 u\|_2 \tag{3.11}$$

Lemme 3.2.5 *Considérons la première ligne de* $v_e + \delta v = \Delta(w_e + \delta w)$, *i.e.* :

$$v_{e,1} + \delta v_1 = (w_e + \delta w)^T \theta \tag{3.12}$$

où $v_{e,1}$ *est la première composante de* v_e *et* θ *la première ligne du bloc réel plein* Δ. *Les estimées* $v_e(i)$ *et* $w_e(i)$ *sont accessibles pour* N *pulsations* ω_i, *où* $i = 1,...,N$. *La relation (3.12) peut être empilée pour chaque sortie et chaque fréquence dans l'égalité :*

$$(A + \delta A)\theta = b + \delta b \tag{3.13}$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} w_e^T(1) \\ \dots \\ w_e^T(N) \end{bmatrix},\ \delta A = \begin{bmatrix} \delta w^T(1) \\ \dots \\ \delta w^T(N) \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} v_{e,1}(1) \\ \dots \\ v_{e,1}(N) \end{bmatrix}\quad \delta b = \begin{bmatrix} \delta v_1(1) \\ \dots \\ \delta v_1(N) \end{bmatrix}$$

$$\|\delta b\|_2^2 = \sum_{i=1}^{N} |\delta v_1(i)|^2, \quad \|\delta A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{N} \|\delta w(i)\|_2^2$$

$$et \quad \|\delta A\ \delta b\|_F^2 = \|\delta A\|_F^2 + \|\delta b\|_2^2$$

3.2.3.1 Principes des RLS [EL97]

En utilisant le lemme 3.2.4, il est donc possible de calculer la borne ρ pour $\|\delta A\ \delta b\|_F$ dans le lemme 3.2.5. Pour θ fixé, prenons le résidu pire-cas :

$$r(A,b,\rho,\theta) = \max_{\|\delta A\ \delta b\|_F \leq \rho} \|(A + \delta A)\theta - (b + \delta b)\| \tag{3.14}$$

Les RLS consistent à trouver la solution θ_{RLS} qui minimise $r(A,b,\rho,\theta)$. Soit :

$$\Phi(A,b,\rho) = \min_{\theta} \max_{\|\delta A\ \delta b\|_F \leq \rho} \|(A + \delta A)\theta - (b + \delta b)\| \tag{3.15}$$

comme pour chaque $\rho > 0$, $\Phi(A,b,\rho) = \rho\Phi(A/\rho,b/\rho,1)$ nous prendrons $\rho = 1$. Nous pouvons écrire le problème d'optimisation sous la forme suivante, en supposant $\rho = 1$:

$$r(A,b,\theta) = \|A\theta - b\| + \sqrt{\|\theta\|^2 + 1} \tag{3.16}$$

Minimiser $r(A,b,\theta)$ est équivalent à résoudre le problème LMI "second-order cone program" :

$$\begin{aligned} \textit{minimiser } \lambda \textit{ sous la contrainte } \|Ax-b\|_2 &\leq \lambda - \tau \\ \left\| \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_2 &\leq \tau \end{aligned} \tag{3.17}$$

Les LS minimisent la norme 2 de $\|Ax-b\|_2 = \|\delta b\|_2$, sans prendre en compte l'erreur dans A contrairement aux RLS. Or dans notre problème A est entaché d'erreurs. Les RLS fournissent une solution qui minimise le résidu pire-cas donné par l'équation (3.15). Cette approche consiste à régulariser la solution des LS par rapport aux incertitudes dans A et b. Ce qui signifie que la solution fournie par les LS peut varier très fortement avec la taille des incertitudes, voire présenter des singularités (discontinuité de la solution). En prenant en compte explicitement les incertitudes de A et b dans le critère d'optimisation on désensibilise la solution à ces incertitudes, ce qui amène celle-ci à évoluer de façon régulière avec ρ.

3.2.3.2 Principe de la SMI

L'identification par appartenance à un ensemble a été présentée dans la partie II chapitre 2. On se contentera dans ce paragraphe de rappeler les principes de la SMI et de relier celle-ci au problème qui nous intéresse. Comme alternative aux méthodes classiques d'identification, qui supposent la distribution de probabilité connue, la SMI fait l'hypothèse simplifiée et plus réaliste d'une perturbation inconnue mais bornée. Donc le problème mathématique est d'estimer les paramètres Θ tels que :

$$v_{e,i} + \delta v_i = (w_e + \delta w)^T \Theta \tag{3.18}$$

est vérifié, où δv_i et δw satisfont les bornes données par le lemme 3.2.4. La SMI est une approche qui fournit un intervalle de confiance pour chaque θ_j. L'équation (3.18) est caractéristique des modèles à erreur de sortie. A partir des bornes sur v et w données à chaque pulsation par le lemme 3.2.4, nous pouvons résoudre l'équation (3.12) à l'aide de [FM97] avec ou sans la connaissance a priori des signes des paramètres θ_j.

3.2.4 Synthèse du correcteur

3.2.4.1 Sensibilité du schéma d'identification

Soit un correcteur K donné a priori. Le domaine fréquentiel utilisé pour l'identification doit être déterminé. Avec le lemme 3.2.3, pour une pulsation ω donnée, δv et δw peuvent être réécrits comme :

$$\begin{bmatrix} \delta v \\ \delta w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(\omega) & A_2(\omega) & A_3(\omega) \\ A_4(\omega) & A_5(\omega) & A_6(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix}$$

Il est intéressant de visualiser diverses normes de la matrice $A_i(\omega)$ en fonction de la pulsation. Supposons premièrement que les perturbations δu, δy et δz sont bornées en norme infini (respectivement deux). Pour prédire le comportement pire-cas du schéma d'identification, i.e. l'erreur maximale induite par les perturbations sur les estimées de v et w, les normes induites infini (respectivement deux) de la matrice $A_i(\omega)$ peuvent être visualisées en fonction de la pulsation ω. On sélectionne les pulsations pour lesquelles la norme est minimale, ou du moins raisonnable. Il peut être aussi intéressant d'étudier la sensibilité moyenne du schéma d'identification, avec des normes de matrice qui ne sont pas des normes induites de vecteur, e.g. la norme de Frobenius.

Remarque: Dans le contexte spécifique des dynamiques négligées, e.g. $\delta v = A_1 \Delta_1 W_1 u$ avec $\|\Delta_1(p)\|_\infty \leq 1$ et la valeur du signal d'entrée u ne peut pas être prédite avant l'expérience, il est plus pertinent de visualiser en fonction de la pulsation le produit $\overline{\sigma}(A_1(\omega)W_1(j\omega))$, plutôt que $\overline{\sigma}(A_1(\omega))$, afin de déterminer le domaine fréquentiel utilisé pour l'identification.

3.2.4.2 Un problème d'optimisation convexe en boucle ouverte

Le maillage fréquentiel $(\omega_i)_{i\in[1,N]}$, à l'intérieur duquel l'identification est réalisée, est a priori fixé. Le problème est de minimiser à l'aide du correcteur l'effet des perturbations δu, δy et δz sur les erreurs d'estimation δv et δw. Il semble impossible de minimiser globalement les équations (3.5) i.e. l'ensemble des 6 transferts entre les perturbations et les erreurs d'estimation, d'autant plus si on se limite à la résolution de problèmes d'optimisation convexe. On montrera par la suite que la minimisation des matrices de transfert, soit entre δz et δv, soit entre $(\delta u, \delta y)$ et δw, peut être mise sous la forme d'un problème d'optimisation convexe.
Considérons dans un premier temps l'erreur d'estimation δv dans l'équation (3.5). Seulement l'effet de la perturbation δz peut être minimisé en fonction de K. Sous une contrainte de stabilité de la boucle fermée, une solution est de minimiser γ avec $K(p)$, sous la contrainte convexe :

$$\overline{\sigma}(H_{12}^{\dagger}(j\omega_i)(I + H_{11}(j\omega_i)K(j\omega_i))) \leq \gamma\, \overline{\sigma}(H_{12}^{\dagger}(j\omega_i)) \tag{3.19}$$

Plus précisément, en réecrivant $K(p) = \sum_i \theta_i K_i(p)$, où les filtres $K_i(p)$ sont fixés, l'équation ci-dessus définit une contrainte convexe par rapport aux paramètres de synthèse θ_i. Remarquons aussi qu'une autre norme que $\overline{\sigma}$ pourrait être utilisée et que $\gamma = 1$ et $K = 0$ représente une solution initiale.

3.2.4.3 Paramétrisation de Youla et synthèse convexe en boucle fermée

Nous allons rappeler brièvement le principe de la synthèse convexe qui a été présentée dans la partie II chapitre 1. La synthèse convexe repose sur la paramétrisation de Youla qui consiste à rendre affine en Q (paramètre de Youla) les relations d'entrées-sorties de la boucle fermée qui s'expriment sous la forme d'une LFT. En choisissant une base pour Q il est entre autre possible par la synthèse convexe, de minimiser séparément la norme H_∞ de différents transferts de la boucle fermée dans un domaine fréquentiel limité. Pour l'identification

d'un modèle LFT, la synthèse convexe permet de prendre en compte simultanément des spécifications de la boucle fermée et la désensibilisation du schéma d'identification.

3.2.4.4 Un problème d'optimisation convexe en boucle fermée

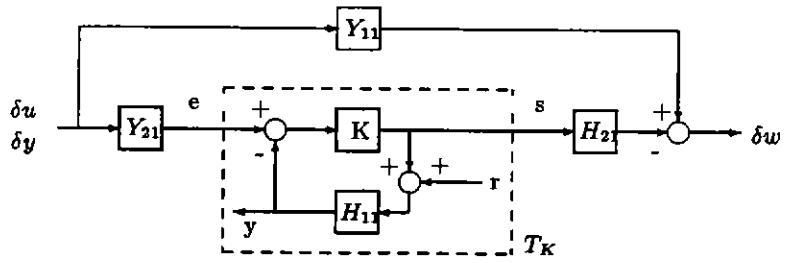


FIG. 3.2 – *Matrices de transfert en boucle fermée fictives et physiques*

Le problème de la minimisation de la matrice de transfert $\mathcal{T}$ entre (δu, δy) et δw dans l'équation (3.5) est particulièrement important. Notons tout d'abord que les perturbations principales dans un problème d'identification sont les bruits de mesure et les dynamiques négligées, i.e. les perturbations δu et δy, plutôt que les perturbations δz apparaissant après le *feedback* (typiquement les effets de troncature des données ou l'utilisation de FFT). De plus dans un contexte stochastique les estimées d'un modèle à erreur de sortie sont généralement biaisées : à cause de la relation $v+\delta v = \Delta(w+\delta w)$, la réduction de l'amplitude de δw conduira à une réduction du biais d'estimation de Δ.
A partir des équations (3.5), $\mathcal{T}$ se réecrit comme :

$$F_l\left(\begin{bmatrix} Y_{11} & H_{21} \\ Y_{21} & H_{11} \end{bmatrix}, -K\right) \tag{3.20}$$

où

$$Y_{11} = \begin{bmatrix} (H_{22}H_{12}^{\dagger}H_{11} - H_{21}) & H_{22}H_{12}^{\dagger} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

$$Y_{21} = \begin{bmatrix} (H_{12}H_{12}^{\dagger} - I)H_{11} & (H_{12}H_{12}^{\dagger} - I) \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

La LFT est représentée par la figure 3.2 (oublions pour l'instant les entrées supplémentaires r et y). Son coeur est l'interconnexion du modèle nominal en boucle ouverte ($y = F_l(H(p),\Delta)u = H_{11}(p)u$ si $\Delta = 0$) avec le correcteur $K(p)$.
Minimiser $\mathcal{T}$ par rapport à K est un problème profondément non convexe, à cause de l'expression non linéaire en K de $\mathcal{T}$. Néanmoins, en utilisant la paramétrisation de Youla, $\mathcal{T}$ se réecrit $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 Q \mathcal{T}_3$, où les transferts $\mathcal{T}_i$ sont fixés et la minimisation de la norme de $\mathcal{T}$ devient une problème d'optimisation convexe.
Pour appliquer la paramétrisation de Youla à $\mathcal{T}$, une représentation d'état est nécessaire pour $Y_{11}(p)$ et $Y_{21}(p)$, et donc pour $H_{12}^{\dagger}(p)$. De plus $H_{21}(p)$ est un transfert en boucle

ouverte et donc éventuellement instable. Pour éviter ces problèmes, la paramétrisation de Youla est juste appliquée à la matrice de transfert $T_K(p)$ entre e et s (voir figure 3.2), i.e. $T_K(p)$ est mis sous la forme $T_1(p) + T_2(p)Q(p)T_3(p)$. Donc pour chaque fréquence ω_i la réponse de $\mathcal{T}$ peut être écrite comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(j\omega_i) &= Y_{11}(j\omega_i) - H_{21}(j\omega_i)\left[T_1(j\omega_i)\right. \\ &\quad \left. + T_2(j\omega_i)Q(j\omega_i)T_3(j\omega_i)\right] Y_{21}(j\omega_i) \end{aligned} \tag{3.23}$$

Cette relation est affine en fonction du paramètre de synthèse Q. Donc contraindre ou minimiser la norme de la réponse en boucle fermée est un problème convexe, ce qui rend possible le calcul du minimum de la sensibilité du schéma d'identification qui est atteignable par le "feedback". Aucun minimum local ne peut être obtenu.

3.2.4.5 Un compromis entre les spécifications d'identification et de commande

En premier lieu il est important de remarquer que la matrice de transfert $\mathcal{T}$ entre $(\delta u,\ \delta y)$ et δw est un transfert en boucle fermée fictif. De nouvelles spécifications sur le transfert en boucle fermée physique peuvent être prises en compte. Par exemple si $T_K(p)$ désigne à présent le transfert entre les entrées (e,r) et les sorties (s,y) où r est la référence et y la sortie mesurée[3], il est possible de réecrire $T_K(p)$ sous la forme $T_1(p) + T_2(p)Q(p)T_3(p)$. Par conséquent, en contraignant simultanément le transfert fictif $\mathcal{T}$ et le transfert physique en boucle fermée $T_K(p)$, il est possible d'étudier rigoureusement le compromis entre la sensibilité du schéma d'identification et les propriétés de performance et de robustesse désirées de la boucle fermée. Plus précisément les spécifications de synthèse sont les suivantes :

1. Stabilité et performances satisfaisantes sur le modèle nominal.
2. Stabilité et performances robustes face aux dynamiques négligées Δ_1 et Δ_2.
3. Stabilité et performances robustes face aux incertitudes paramétriques du bloc réel plein Δ.
4. Réduction de la sensibilité du schéma d'identification par rapport à la sensibilité en boucle ouverte.

Les spécifications 1, 2 et 4 peuvent être résolues sous la forme de la minimisation d'un objectif convexe sous des contraintes convexes. La spécification 3 est non convexe. Une première solution est de résoudre un problème d'optimisation non convexe incluant les spécifications 1 à 4. Néanmoins, une solution pratique est de prendre en compte les spécifications 1, 2 et 4 lors de l'étape de la synthèse et la spécification 3 est vérifiée a posteriori, puisqu'il existe des outils numériques efficaces pour vérifier les propriétés de stabilité et de performance robustes d'une boucle fermée incertaine, voir [Fer99].

3. La matrice de transfert entre r et y est la fonction très classique $(I + H_{11}K)^{-1}H_{11}$ pour le modèle nominal de la boucle fermée.

3.3 Application à un modèle LFT d'avion

3.3.1 Le modèle latéral aérodynamique

Le modèle d'avion de transport rigide est présenté dans le chapitre 2. Rappelons que le modèle latéral aérodynamique contient 4 variables d'état β, p, r, ϕ, que l'on appelle respectivement l'angle de dérapage, les vitesses de roulis et de lacet et l'angle de gîte. Les vecteurs d'entrée et de sortie sont $u = [\delta_p, \delta_r]$ et $y = [n_y, p, r, \phi]$, avec n_y la sortie accélération, et δ_p et δ_r les commandes ailerons et lacet. Aucune incertitude sur les actionneurs n'est considérée de sorte que $\Delta_1 = 0$ sur la figure 3.1(b), car en général ils sont très bien modélisés. Plus précisément leurs incertitudes sont considérées comme négligeables par rapport aux incertitudes liées aux coefficients aérodynamiques. L'ordre du modèle complet (avion + actionneurs) est 9.

3.3.2 Le modèle LFT

Les incertitudes sont introduites sur les 15 coefficients qui caractérisent le modèle aérodynamique. Ces coefficients aérodynamiques sont Y_β, Y_p, Y_r, $Y_{\delta p}$, $Y_{\delta r}$, L_β, L_p, L_r, $L_{\delta p}$, $L_{\delta r}$, N_β, N_p, N_r, $N_{\delta p}$ et $N_{\delta r}$. Par exemple le coefficient Y_β se réécrit $Y_\beta = Y_\beta^0 + \Delta Y_\beta$, où Y_β^0 représente la valeur nominale du coefficient, tandis que ΔY_β représente l'incertitude.
On peut mettre le modèle incertain sous une forme LFT $F_l(H(p),\Delta)$, avec une perturbation de modèle diagonale $\Delta = diag(\delta_i)$ où δ_i (par exemple ΔY_β) est l'incertitude. Cependant la condition $n_v \leq n_y$ signifie que le nombre de paramètres qui peuvent être identifiés est alors très limité. Une façon d'identifier beaucoup plus de paramètres est d'utiliser un bloc réel plein, lorsque c'est possible. Ceci a pu être fait dans le cas de notre modèle. L'ensemble des incertitudes aérodynamiques peuvent être représentées par un bloc réel plein Δ. Pour obtenir ce bloc Δ, prenons le système augmenté suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

où $P = P_0 + \Delta P$, $P_0 = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix}$ et (A_0,B_0,C_0,D_0) est la représentation d'état du modèle nominal. ΔP est décomposé de la façon suivante :

$$\Delta P = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \end{bmatrix} \Delta \tilde{I} \tag{3.25}$$

où $U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -V/g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $U_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $U_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\tilde{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta Y_\beta & \Delta Y_p & \Delta Y_r & \Delta Y_{\delta p} & \Delta Y_{\delta r} \\ \Delta L_\beta & \Delta L_p & \Delta L_r & \Delta L_{\delta p} & \Delta L_{\delta r} \\ \Delta N_\beta & \Delta N_p & \Delta N_r & \Delta N_{\delta p} & \Delta N_{\delta r} \end{bmatrix}$$

Donc le bloc Δ contient toutes les incertitudes paramétriques du modèle latéral de l'avion. La forme LFT est obtenue à partir du nouveau système augmenté :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 & R_1 \\ C_0 & D_0 & R_2 \\ Q_1 & Q_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \\ v \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

où $\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \end{bmatrix}$, et $\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} = \tilde{I}$.

La représentation d'état $(A_{new}, B_{new}, C_{new}, D_{new})$ de $H(p)$ est $A_{new} = A_0$, $B_{new} = \begin{bmatrix} B_0 & R_1 \end{bmatrix}$, $C_{new} = \begin{bmatrix} C_0 \\ Q_1 \end{bmatrix}$, et $D_{new} = \begin{bmatrix} D_0 & R_2 \\ Q_2 & 0 \end{bmatrix}$.

3.3.3 Application

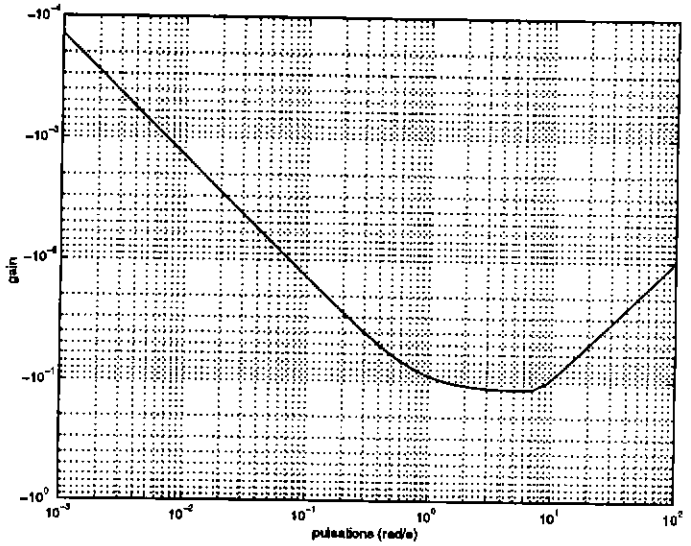


FIG. 3.3 – *Valeur singulière maximale de* $H_{12}^{\dagger}(j\omega)$.

Nous constatons sur la figure 3.3 la grande sensibilité du schéma d'identification en basse fréquence. Cette figure montre que pour un rapport signal/bruit constant avec les fréquences (bruit multiplicatif) il est possible de désensibiliser le schéma d'identification en n'utilisant que les pulsations où $\overline{\sigma}(H_{12}^{\dagger}(j\omega))$ est minimum. Pour réaliser l'identification du modèle LFT d'avion, nous avons procédé de la façon suivante. La bande passante du modèle est typiquement de quelques rad/s. Pour respecter le théorème de Shannon des systèmes à temps discret, la fréquence d'échantillonnage est choisie à $F_e = 5$Hz, avec $N = 1024$, où N est le nombre de fréquences calculées par les algorithmes FFT. Grâce à la périodicité F_e

de la réponse fréquentielle des systèmes à temps discret, il suffit de prendre 512 fréquences parmi les $N = 1024$ pour avoir la totalité de la réponse fréquentielle de la LFT. L'identification s'effectue sur le domaine fréquentiel se situant autour de 1 rad/s du fait du choix de la FFT et surtout de la sensibilité $\overline{\sigma}(H_{12}^{\dagger}(\omega))$.
Dans la suite tous les paramètres estimés sont normalisés par les vraies valeurs des paramètres du bloc Δ. Nous avons choisi des incertitudes paramétriques de 50% pour les coefficients aérodynamiques. Dans le cas de dynamiques négligées, nous avons évalué les bornes de δy. Pour cela, nous ajoutons de façon multiplicative une dynamique négligée (notée $D(p)$) à $G(p)$ qui est le modèle d'avion, i.e. $G(p) = F_l(H(p),\Delta)$(voir figure 3.1(a)). A partir de la figure 3.1(b), nous pouvons écrire $D(p)G(p) = G(p) + \Delta_2(p)W_2(p)$ où Δ_2 est tel que $\|\Delta_2\|_\infty \leq 1$. Cette dernière relation permet d'évaluer $W(p)$ puisque $\Delta_2(p)W_2(p) = (D(p) - I)G(p)$. Pour l'application, les dynamiques négligées $D(p)$ sont modélisées par un pôle réel. Le système complet est $D(p)G(p)$.

3.3.3.1 SMI

TAB. 3.1 – *Estimation des paramètres incertains par SMI.*

	ΔY_β	ΔY_p	ΔY_r	$\Delta Y_{\delta p}$	$\Delta Y_{\delta r}$
δ_{min}	0.97	NA	0.83	0.76	0.94
δ_{est}	1.00	NA	1.00	1.00	1.01
δ_{max}	1.03	NA	1.17	1.24	1.04

	ΔL_β	ΔL_p	ΔL_r	$\Delta L_{\delta p}$	$\Delta L_{\delta r}$
δ_{min}	0.80	NA	0.70	0.87	0.64
δ_{est}	1.07	NA	0.95	1.08	0.93
δ_{max}	1.34	NA	1.20	1.29	1.21

	ΔN_β	ΔN_p	ΔN_r	$\Delta N_{\delta p}$	$\Delta N_{\delta r}$
δ_{min}	0.96	0.68	0.73	0	0.98
δ_{est}	1.00	0.99	1.05	0	1.00
δ_{max}	1.04	1.30	1.38	0	1.02

Dans le cas idéal, i.e. dans le cas sans bruit ni perturbation, le bloc Δ est parfaitement estimé : les paramètres estimés sont strictement égaux aux vrais paramètres avec des intervalles de confiance de largeur nulle.
Avec des dynamiques négligées les résultats avec la SMI sont donnés par le tableau 3.1. δ_{min} et δ_{max} sont les bornes sur les intervalles de confiance des paramètres estimés, et $\delta_{est} = \frac{\delta_{min}+\delta_{max}}{2}$. NA signifie Non Applicable, i.e les intervalles de confiance sont trop larges (>100%) pour être significatifs. De plus, remarquons que $\Delta N_{\delta p} = 0$. En effet, le coefficient aérodynamique $N_{\delta p}$ est connu et est égal à 0 et par conséquent $\Delta N_{\delta p}$ est égal à 0 aussi.

Généralement nous pouvons voir que les coefficients les plus observables, i.e ΔY_β, $\Delta Y_{\delta p}$, $\Delta Y_{\delta r}$, $\Delta L_{\delta p}$, $\Delta L_{\delta r}$, ΔN_β et $\Delta N_{\delta r}$ ont des intervalles de confiance réduits tandis que ΔY_p et ΔL_p qui sont faiblement observables n'ont pas d'intervalles de confiance suffisamment réduits pour être exploitables et donner une idée de la valeur des coefficients. Pour l'exemple qui nous intéresse on entend par faiblement observable, une contribution énergétique négligeable du coefficient aérodynamique sur les signaux de sortie de Δ.

3.3.3.2 RLS

TAB. 3.2 – *Estimation des paramètres incertains par RLS.*

	Y_β	Y_p	Y_r	$Y_{\delta p}$	$Y_{\delta r}$
δ_{est}	1.00	0.94	1.01	0.99	1.01

	L_β	L_p	L_r	$L_{\delta p}$	$L_{\delta r}$
δ_{est}	1.00	1.01	1.00	0.99	0.99

	N_β	N_p	N_r	$N_{\delta p}$	$N_{\delta r}$
δ_{est}	0.93	1.28	0.89	0	0.99

Comme pour la SMI, dans le cas sans perturbations le bloc Δ est parfaitement estimé, i.e. les valeurs des paramètres estimés sont égales aux vraies valeurs.
Contrairement à la SMI, les RLS donnent des résultats pour tous les coefficients aérodynamiques mais sans fournir d'indice de confiance sur les résultats. Finalement nous remarquons que pour la plupart des coefficients aérodynamiques les valeurs des paramètres estimés sont proches des vraies valeurs.

3.4 Application sur un exemple SIMO

On présente un court exemple extrait de [DF02a]. On considère la matrice de transfert suivante :

$$y = \frac{\begin{bmatrix} s \\ s+1 \end{bmatrix}}{s^2 + a_1 s + a_0} u \tag{3.27}$$

où $a_0 = 1+\delta_1$ et $a_1 = 0.4+\delta_2$, i.e. le dénominateur de la matrice de transfert est $s^2+0.4s+1$ (les pôles associés ont un amortissement de 0.2 et une fréquence de 1 rad/s). La matrice de transfert incertaine est mise sous la forme LFT :

$$y = F_l(H(s),[\delta_1\ \delta_2])u \tag{3.28}$$

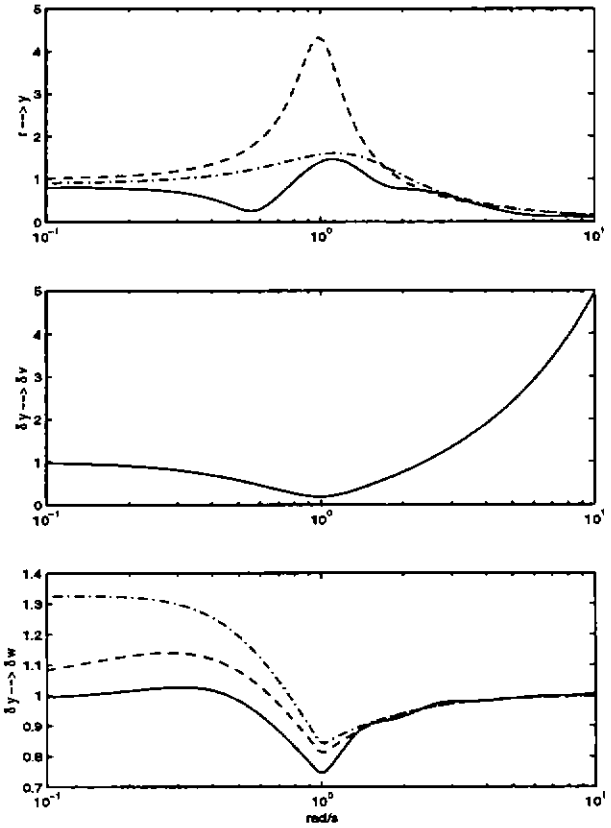


FIG. 3.4 – *L'amplitude de la fonction de transfert physique entre r et y est représentée sur la première figure, et les matrices de transfert fictives entre δy et δv (respectivement δw) sont représentées sur la 2^eme (respectivement 3^eme) figure. La norme matricielle est la norme deux sur la 1^ere figure, et la norme induite infini sur les autres. La ligne en tirés correspond à la boucle ouverte, la ligne en tirés et pointillés correspond au retour d'état estimé initial et la ligne continue au correcteur amélioré.*

Les dimensions des signaux fictifs v et w sont respectivement 1 et 2. Le *feedback* fictif est $v = [\delta_1 \ \delta_2]\, w$.
La figure 3.4 montre en traits pointillés l'amplitude de la fonction de transfert $T_{r\to y}$ (pour la définition de ces signaux voir la figure 3.2 avec $K = 0$), ainsi que l'influence de δy sur δv (qui est indépendante du *feedback*) et sur δw. Pour diminuer le pic de $T_{r\to y}$, un correcteur retour d'état estimé est synthétisé. Ce correcteur améliore l'amortissement des pôles puisque celui-ci devient égal à 0.7. Néanmoins on constate que ce correcteur augmente la sensibilité sur δw (voir la courbe en tirés et pointillés sur la figure 3.4).
La technique présentée dans les paragraphes 3.2.4.4 et 3.2.4.5 est appliquée, i.e. les propriétés de la boucle fermée sont améliorées en rajoutant dans le correcteur retour d'état estimé la matrice de transfert $Q(s) = \sum_i \theta_i Q_i(s)$. Les pôles de $Q(s)$ sont choisis de la façon suivante :

$$-0.5 \pm 0.5j, \quad -1 \pm j, \quad -3 \pm 3j, \quad -7 \pm 7j$$

Le numérateur de $Q(s)$ est libre. Cette base contient 18 filtres $Q_i(s)$. On utilise un maillage fréquentiel de 100 points entre 0.1 et 10 rad/s. L'amplitude de $T_{r\to y}$ est contrainte pour rester en dessous de l'amplitude de $T_{r\to y}$ correspondant au correcteur retour d'état estimé initial. De plus l'amplitude de la matrice de transfert en boucle fermée $T_{\delta y\to\delta w}$ est contrainte pour rester en dessous de l'amplitude du même transfert en boucle ouverte sur tout le maillage fréquentiel (cette contrainte est légérement relâchée d'un facteur de 1 %). Finalement l'amplitude de $T_{\delta y\to\delta w}$ est minimisée entre 0.1 et 1 rad/s (des essais montrent que minimiser $T_{\delta y\to\delta w}$ à des fréquences plus élevées est impossible). Les résultats obtenus sont satisfaisants (trait continu sur la figure 3.4).
En étudiant les 2^{eme} et 3^{eme} figures de la figure 3.4, on choisit d'identifier δ_1 et δ_2 seulement entre 0.1 et 1 rad/s. Un bruit multiplicatif est ajouté à y avec une amplitude maximale de 1 %. Les vraies valeurs sont $\delta_1 = 0.100$ et $\delta_2 = 0.100$ tandis ques les valeurs estimées par RLS sont 0.103 et 0.092.

3.5 Conclusion

Une méthode fréquentielle en deux étapes a été présentée pour identifier un modèle LFT MIMO contenant des paramètres physiques incertains. Les entrées et sorties v et w de la perturbation de modèle réelle et structurée Δ sont déduites des entrées et sorties physiques du modèle LFT en boucle ouverte ou fermée. Donc Δ peut être estimé par les RLS ou la SMI. En effet il est possible de quantifier les effets des dynamiques négligées, des bruits de mesure et autres perturbations sur les valeurs estimées de v et w, et donc d'étudier la sensibilité du schéma d'identification. Cette méthode d'identification est illustrée par une application sur le modèle latéral d'un avion.
Plus généralement cette approche offre l'avantage d'identifier les paramètres physiques d'un système. Cette méthode fonctionne aussi bien pour les systèmes SISO que MIMO. On obtient finalement un cadre unifié utilisant la forme LFT, entre l'identification paramétrique, la synthèse de lois de commande et l'analyse en performance et en robustesse de la boucle fermée. Cette intéraction entre l'identification commmande est d'autant plus présente que la sensibilité du schéma d'identification en boucle fermée dépend fortement du correcteur K. Il devient donc possible de déterminer un correcteur K permettant de désensibiliser le schéma d'identification vis à vis des bruits de mesure, des perturbations, ou de dynamiques négligées en entrées ou en sorties tout en satisfaisant les spécifications du cahier des charges.

Troisième partie

Schéma d'identification-commande type boite noire

Chapitre 1

Identification par les sous espaces fréquentiels

1.1 Introduction

Il existe un grand nombre d'algorithmes d'identification utilisant des mesures temporelles. Parmi ces algorithmes on peut trouver des algorithmes non itératifs comme les méthodes d'identification par les sous espaces. Elles fournissent une représentation d'état du modèle identifié sans utiliser de paramétrisation explicite de modèle. Le nombre de paramètres à ajuster est relativement réduit et surtout il ne dépend pas de la taille supposée du modèle. Comme ces méthodes fournissent une représentation d'état il n'y a pas de différence entre les systèmes MIMO et SISO. De plus la représentation d'état est moins sensible aux erreurs numériques que les fonctions de transfert, ce qui permet d'identifier sans difficulté des systèmes d'ordre élevé. Il est important de distinguer deux types d'algorithmes d'identification pas les sous espaces : l'approche indirecte et l'approche directe. L'approche indirecte ou ERA (Eigensystem Realization Algorithm) [JP85], ERA DC (Data Correlation) [JCW88] utilise les paramètres de Markov, i.e. les coefficients de la réponse impulsionnelle, pour construire la représentation d'état du modèle identifié. Cette approche se fait donc en 2 étapes. La première consiste à partir des données d'entrées-sorties à estimer les paramètres de Markov du système et la deuxième à construire la représentation d'état du modèle identifié. L'approche directe, appelée plus généralement méthode des sous espaces donne directement la représentation d'état du modèle identifié à partir des données d'entrées-sorties sans passer par la réponse impulsionnelle du système. C'est en ce sens que la technique est dite directe par rapport à ERA ou ERA DC. L'inconvénient majeur de ERA et ERA DC est l'estimation des paramètres de Markov à partir des données d'entrées-sorties, estimation qui est une opération généralement non triviale. De plus ces méthodes sont exactes seulement si la réponse impulsionnelle meurt complètement dans la fenêtre temporelle dont la longueur correspond à la durée de l'expérience. Des lors on s'aperçoit que pour les structures flexibles la réponse impulsionnelle peut s'avérer très longue en temps et donc nécessiter un grand nombre de données. Si le nombre d'échantillons n'est pas assez grand la réponse impulsionnelle est tronquée. Cela amène une estimation relativement pauvre. Il

apparaît donc un autre avantage à utiliser des données fréquentielles pour les structures flexibles comme l'avion souple : il suffit d'un petit nombre de données fréquentielles au lieu d'un grand nombre de données temporelles pour avoir un modèle identifié relativement fidèle du point de vue entrées-sorties, diminuant ainsi considérablement les temps de calcul pour une précision accrue.

Néanmoins il est tout à fait possible d'utiliser ERA et ERA DC dans le domaine fréquentiel. Il s'agit à partir de la réponse fréquentielle d'appliquer un algorithme IDFT pour obtenir les paramètres de Markov. Néanmoins il est nécessaire de capturer toute la réponse impulsionnelle temporelle et donc d'avoir un grand nombre d'échantillons temporels. Or l'utilisation des algorithmes IDFT implique deux contraintes : le nombre d'échantillons temporels est égal au nombre d'échantillons fréquentiels, ce qui conduit à un grand nombre de points. De plus, seconde contrainte de la IDFT, on ne peut utiliser que des données fréquentielles espacées uniformément, i.e. de f_e/N où f_e est la fréquence d'échantillonnage et N le nombre d'échantillons fréquentiels. Il n'est donc pas possible par cette approche de pondérer certains régions du domaine fréquentiel afin de réduire l'erreur d'estimation dans ces régions. En d'autres termes, dans le cadre d'une approche d'identification-commande il n'est pas possible de pondérer le domaine fréquentiel utile pour la commande qui correpond typiquement au domaine fréquentiel situé en deçà de la fréquence de coupure. Un autre exemple important est l'estimation des modes souples d'une structure flexible. Il est essentiel d'avoir une (très) bonne précision sur la fréquence et l'amortissement des modes souples. Cette précision peut être obtenue par un maillage fréquentiel serré, i.e. un espacement entre les données fréquentielles réduit. Pour autant cette précision est inutile au delà de la fréquence de coupure. C'est pour cela qu'il est intéressant de jouer sur l'espacement des données fréquentielles. Dans le cas contraire on serait confronté au problème suivant. Un espacement réduit des données fréquentielles pour permettre une identification précise des modes souples mais malheureusement un temps de calcul considérablement allongé du fait que cet espacement est constant entre 0 et $f_e/2$. Ou alors un espacement plus large pour réduire les temps de calcul mais avec le risque de mal estimer les fréquences de résonnance et l'amortissement des pôles.

Il existe un version fréquentielle de ERA, ERA FD (Frequency Domain) [JS88] qui n'utilise pas un algorithme IDFT pour construire la représentation d'état du modèle mais directement les données fréquentielles. Malheureusement ERA FD utilise une forme récursive qui est exacte seulement si la réponse impulsionnelle meurt complètement dans la fenêtre temporelle. Finalement on a exactement les mêmes inconvénients que l'estimation des paramètres de Markov par IDFT. [Bay94] a proposé une méthode appelée SSFD (State-Space Frequency Domain identification algorithm) qui permet d'estimer les paramètres de Markov directement sans passer par IDFT et en ayant la possibilité de pondérer les données fréquentielles. Ensuite on utilise ERA ou ERA DC pour obtenir la représentation d'état. Néanmoins l'obtention des paramètres de Markov se fait par optimisation non linéaire. De plus la paramétrisation d'un modèle en série temporelle est reconnue comme mal conditionné numériquement, spécialement pour les systèmes multivariables et de grande dimension comme l'avion souple.

Une autre approche faisant appel à une décomposition en série temporelle suivie de ERA a été proposée par [CJL93], mais cette approche souffre du même problème que précédem-

ment, à savoir un mauvais conditionnement numérique. En outre le choix de l'ordre du système se fait bien avant l'application de ERA.
On constate donc que l'utilisation d'algorithmes d'estimation dans le domaine temporel tranposés dans le domaine fréquentiel souffre de défauts qui apparaissent comme rédhibitoires pour l'estimation d'un système aussi complexe que l'avion souple.
En résumé le domaine fréquentiel permet avec relativement peu de données de représenter précisément les principales dynamiques d'un système. Ceci est particulièrement vrai pour les modes souples où il est nécessaire d'avoir un très grand nombre de données temporelles pour espérer "capturer" l'ensemble de la dynamique. De plus le domaine fréquentiel est extrêmement intéressant, car dans le cadre d'identification-commande il permet de prendre en compte seulement les dynamiques qui interviennent dans la bande passante et légèrement au delà. Ainsi il est possible de minimiser les temps de calcul et l'ordre du modèle identifié puisque toutes les dynamiques ne nous intéressent pas mais seulement celles qui sont utiles par la commande. Du point de vue de la synthèse et de l'analyse, la synthèse de correcteur et l'analyse de lois de commande des systèmes SISO ou MIMO font appel à l'analyse des réponses fréquentielles. Pour les systèmes SISO, SIMO, classiquement, on peut utiliser la représentation de Nyquist, Black-Nichols ou Bode et la SVD des réponses fréquentielles des transferts en boucle ouverte ou fermée pour les systèmes MIMO. De ce fait il est intéressant et naturel de vouloir identifier un modèle à partir de la représentation fréquentielle, afin d'avoir finalement, un cadre de représentation unifié entre l'identification, la synthèse et l'analyse. De plus les techniques modernes de synthèse, comme la synthèse H_∞, H_2, LQG entre autres, sont MIMO afin d'amener des méthodologies de synthèse faciles à mettre en oeuvre sur des systèmes complexes. Enfin la résolution/implémentation des lois de commande fait essentiellement appel à la représentation d'état des systèmes. On a donc plusieurs caractéristiques, représentation fréquentielle des systèmes unique entre l'identification, la commande et l'analyse, approche MIMO, utilisation de la représentation d'état, qui conduisent à utiliser une méthode d'identification utilisant des données fréquentielles et fournissant un modèle identifié sous la forme d'une représentation d'état permettant ainsi de traiter naturellement les systèmes MIMO.
C'est pour cela que des algorithmes d'identification fréquentielle ont été utilisés pour l'avion souple. Ces algorithmes sont basés sur la méthode des sous espaces (directs), i.e. sans passage par les paramètres de Markov qui sont difficiles à estimer. L'identification de la partie souple est basée sur les algorithmes proposés par [MAL96, LJM96]. Ils fournissent directement une représentation d'état du modèle identifié. Il est possible d'utiliser un domaine fréquentiel non uniforme et de pondérer les données fréquentielles en fonction de la fréquence. Enfin l'erreur d'estimation qui correspond à une erreur dans le domaine fréquentiel peut être prise en compte lors de la synthèse H_∞ comme nous le verrons par la suite.

1.2 Approche par les sous espaces

Le fondement théorique, qui est basé sur des opérations de projection, est identique que ce soit pour les sous espaces temporels ou fréquentiels. Ce sont ces fondements que nous

allons présenter dans le cadre des sous espaces fréquentiels.

1.2.1 Opérations de projection

L'approche des sous espaces est basée sur des concepts géométriques. Plus précisément les éléments d'une ligne d'une matrice donnée peuvent être considérés comme les coordonnées d'un vecteur de l'espace de dimension j. Soient les matrices $A \in \mathbf{R}^{p \times j}$ et $B \in \mathbf{R}^{q \times j}$. Les lignes des matrice A et B constituent donc une base pour l'espace vectoriel de dimension j. Considérons l'opération de projection orthogonale de l'espace vectoriel engendré par les lignes de la matrice A sur l'espace vectoriel engendré par les lignes de la matrice B. Cette opération est définie par la relation suivante :

$$A/B = AB^T(BB^T)^\dagger B \tag{1.1}$$

où $X^\dagger$ est la pseudo inverse de Moore-Penrose de la matrice X. On peut réecrire cette relation en utilisant un opérateur appliqué à droite de A qui est défini comme suit :

$$\Pi_B = B^T(BB^T)^\dagger B \tag{1.2}$$

On obtient la relation suivante :

$$A/B = A\Pi_B \tag{1.3}$$

Comme il s'agit d'une projection dans l'espace ligne de la matrice B le résultat A/B est dans l'espace ligne de B. De même il est possible de projeter l'espace ligne de la matrice A dans l'espace ligne orthogonal de l'espace ligne de la matrice B par l'opérateur noté $\Pi_{B^\perp}$:

$$\Pi_{B^\perp} = I - \Pi_B \Leftrightarrow \Pi_B + \Pi_{B^\perp} = I \tag{1.4}$$

Dans ce cas on a pour A :

$$A = A\Pi_B + A\Pi_{B^\perp} \tag{1.5}$$

Remarque : on constate que $\Pi_B^n = \Pi_B$ où n est un entier strictement positif, ce qui est conforme à toute opération de projection : projeter n fois sur un espace vectoriel est équivalent à projeter une seule fois.

Il est possible de reformuler ces opérations de projection orthogonale en utilisant un opérateur à gauche noté L_B :

$$A/B = L_B B \tag{1.6}$$

De le même façon qu'avec l'opérateur à droite, on a la relation suivante :

$$A = L_B B + L_{B^\perp} B^\perp \tag{1.7}$$

où $B^{\perp}$ est une base de l'espace orthogonal de l'espace ligne de B :

$$B^{\perp}B = 0 \tag{1.8}$$

Il est possible d'étendre cette approche à la projection oblique. Cette projection permet de réaliser l'identification en milieu bruité. Pour plus de détails on peut se référer entre autres à [Geh00, OM99].

1.2.2 Identification déterministe par la méthode des sous espaces temporels.

L'identification par la méthode des sous espaces fournit directement la représentation d'état du modèle identifié à partir des données d'entrées-sorties. Comme cette approche travaille avec la représentation d'état elle est naturellement MIMO, ce qui permet d'avoir un nombre de paramètres de réglage qui est relativement réduit et qui n'augmente pas avec la taille du système identifié et le nombre d'entrées et de sorties. Considérons la représentation d'état d'un système LTI en temps discret :

$$X(t+1) = AX(t) + Bu(t) \tag{1.9}$$
$$y(t) = CX(t) + Du(t) \tag{1.10}$$

où $y(t) \in \mathbf{R}^p$, $X(t) \in \mathbf{R}^n$ et $u(t) \in \mathbf{R}^m$. Pour appliquer les sous espaces il est nécessaire de construire les matrices de Hankel d'entrées-sorties du système. On les construit de la façon suivante :

$$U_i = \left[\begin{array}{cccc} u(0) & u(1) & \dots & u(j-1) \\ u(1) & u(2) & \dots & u(j) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(i-1) & u(i) & \dots & u(i+j-2) \\ \hline u(i) & u(i+1) & \dots & u(i+j-1) \\ u(i+1) & u(i+2) & \dots & u(i+j) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u(2i-1) & u(2i) & \dots & u(2i+j-2) \end{array}\right] \tag{1.11}$$

$$Y_i = \left[\begin{array}{cccc} y(0) & y(1) & \dots & y(j-1) \\ y(1) & y(2) & \dots & y(j) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y(i-1) & y(i) & \dots & y(i+j-2) \\ \hline y(i) & y(i+1) & \dots & y(i+j-1) \\ y(i+1) & y(i+2) & \dots & y(i+j) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y(2i-1) & y(2i) & \dots & y(2i+j-2) \end{array}\right] \tag{1.12}$$

L'index i est un paramètre de réglage pour l'identification par les sous espaces. Il doit être suffisamment grand, i.e. au pire aussi grand que l'ordre maximum estimé du modèle que

l'on cherche à identifier. L'index j correspond au nombre d'échantillons temporels utilisés pour l'identification du modèle, typiquement la taille d'un signal d'excitation persistannte comme une SBPA qui excitera le système.
Dans ces matrices de Hankel on a fait apparaître les données passées et futures :

$$U_i = \left[\frac{U_p}{U_f}\right], \quad Y_i = \left[\frac{Y_p}{Y_f}\right] \tag{1.13}$$

où U_p et Y_p représentent les données d'entrées-sorties passées et U_f et Y_f les données d'entrées-sorties futures. On peut montrer par une relation de récurrence à partir des équations de la représentation d'état, et des matrices de Hankel d'entrées-sorties, les relations suivantes qui sont à la base de la méthode des sous espaces :

$$Y_p = OX_0^p + \Gamma U_p \tag{1.14}$$
$$Y_f = OX_i^f + \Gamma U_f \tag{1.15}$$
$$X_i^f = A^i X_0^p + CU_p \tag{1.16}$$

où O est la matrice d'observabilité étendue, Γ une matrice de Toeplitz contenant les paramètres de Markov du système :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & \dots & D \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{pi*mq}, \quad O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{ip*n} \tag{1.17}$$

$X_0^p = [X(0) \dots X(j-1)]$ (états passés), $X_i^f = [X(i) \dots X(i+j-1)]$ (états futurs), et C la matrice de commandabilité étendue :

$$C = [A^{i-1}B, \dots, B] \tag{1.18}$$

On rappelle que les paramètres de Markov M_k d'un système s'écrivent $M_k = CA^{k-1}B$, $M_0 = D$ et $k = 1, \dots, \infty$. La séquence de Markov est une séquence décroissante en supposant le système stable. Il peut être nécessaire d'avoir un très grand nombre de termes M_k pour avoir $CA^{k-1}B \approx 0$ pour $k \geq k_1$. Ce qui montre la nécessité d'éviter l'utilisation des paramètres de Markov (méthodes ERA, ERA DC, ERA FD) dans l'estimation des structures flexibles car dans ce cas on doit choisir k_1 très élevé, i.e. un très grand nombre d'échantillons temporels ou fréquentiels pour ERA FD. On constate que les sorties passées Y_p (respectivement futures Y_f) dépendent de 2 termes, l'un représentant le régime libre OX_0^p (respectivement OX_i^f) et l'autre le régime forcé ΓU_p (respectivement ΓU_f). La méthode des sous espaces consistera toujours à éliminer le terme de régime forcé et à conserver le terme correspondant au régime libre. En reprenant l'équation matricielle (1.15) et en appliquant à droite de celle-ci l'opérateur de projection $\Pi_{U_f^\perp}$, on obtient :

$$Y_f \Pi_{U_f^\perp} = O X_i^f \Pi_{U_f^\perp} + \Gamma U_f \Pi_{U_f^\perp} \tag{1.19}$$

Or $U_f \Pi_{U_f^\perp} = 0$ puisqu'on projette l'espace ligne de U_f sur un espace ligne orthogonal à U_f. On peut le vérifier matriciellement en utilisant les définitions de l'opérateur de projection à droite (équations (1.2) et (1.4)). D'où la relation suivante :

$$Y_f \Pi_{U_f^\perp} = O X_i^f \Pi_{U_f^\perp} \tag{1.20}$$

L'idée est de décomposer en valeurs singulières le terme matriciel $Y_f \Pi_{U_f^\perp}$ puisque celui-ci correspond à la matrice d'observabilité étendue. Or ce terme ne dépend que des données d'entrées-sorties. La décomposition en valeurs singulières de $Y_f \Pi_{U_f^\perp}$, et donc de O, permet dans ce cas de déterminer l'ordre du modèle identifié et d'extraire les matrices estimées $\hat{A}$ et $\hat{C}$. Néanmoins, comme il peut être coûteux de calculer $Y_f \Pi_{U_f^\perp}$, on utilisera une décomposition QR :

$$\begin{bmatrix} U_f \\ Y_f \end{bmatrix} = R Q^T \tag{1.21}$$

où R est une matrice réelle triangulaire inférieure et Q une matrice réelle orthonormale ($Q^T Q = I$). Ces matrice se décomposent elles mêmes de la façon suivante :

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}, \quad Q^T = \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

En utilisant la relation matricielle (1.4), on obtient :

$$Y_f \Pi_{U_f^\perp} = Y_f - Y_f \Pi_{U_f} \tag{1.23}$$

$$= Y_f - Y_f U_f^T (U_f U_f^T)^\dagger U_f \tag{1.24}$$

A partir de l'équation (1.21) U_f et Y_f sont remplacés respectivement par $R_1 Q$ et $R_2 Q^T$:

$$Y_f \Pi_{U_f^\perp} = R_2 Q^T - R_2 R_1^T (R_1 R_1^T)^\dagger R_1 Q^T \tag{1.25}$$

Enfin, avec $R_1 Q = R_{11} Q_1^T$ et $R_2 Q = R_{21} Q_1^T + R_{22} Q_2^T$, on obtient :

$$Y_f \Pi_{U_f^\perp} = R_{22} Q_2^T \tag{1.26}$$

Donc décomposer en valeurs singulières $Y_f \Pi_{U_f^\perp} = O X_i^f \Pi_{U_f^\perp}$ revient à décomposer $R_{22} Q_2^T$ qui dépend exclusivement des données d'entrées-sorties. Ainsi en ayant :

$$R_{22} Q_2^T = O X_i^f \Pi_{U_f^\perp} = U S V^T \tag{1.27}$$

avec :

$$USV^T = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_s & 0 \\ 0 & \Sigma_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \tag{1.28}$$

et $\Sigma_o = 0$ (cas déterministe), on peut déterminer le rang de la matrice d'observabilité étendue O :

$$O = U_1 \Sigma_1^{1/2} \tag{1.29}$$

$$X_i^f \Pi_{U_f^\perp} = \Sigma_1^{1/2} V_1^T \tag{1.30}$$

La taille de Σ_1 fournit l'ordre n du modèle identifié tandis que U_1 fournit une base orthonormale de l'espace image de la matrice O. On a donc obtenu la matrice d'observabilité du modèle identifié. Par construction de cette matrice O on peut en déduire $\hat{A}$ et $\hat{C}$ qui sont les matrices d'état du modèle identifié. Les matrices $\hat{B}$ et $\hat{D}$ sont obtenues par simple régression linéaire [Geh00]. On verra plus précisément dans les 2 algorithmes des sous espaces fréquentiels qui seront présentés par la suite comment les matrices d'état $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ et $\hat{D}$ sont obtenues.
Il est à remarquer que nous n'avons utilisé qu'une simple projection orthogonale pour obtenir un modèle identifié. Cette projection orthogonale n'est qu'un cas particulier de la résolution basée sur une projection oblique. Cette approche est présentée dans [Geh00, OM99]. La formulation la plus générale englobant la projection orthogonale est la suivante :

$$W_1 O X_i^f W_2 = USV^T \tag{1.31}$$

Ce qui aboutit à la détermination de la matrice O :

$$O = W_1^{-1} U_s \sigma_s^{1/2} \tag{1.32}$$

où W_1 (matrice de rang plein) et W_2 sont des matrices de pondérations introduites afin de recouvrir l'ensemble des algorithmes présents dans la littérature. Dans le cas de la projection orthogonale les matrices de pondération sont $W_1 = I$ et $W_2 = \Pi_{U_f^\perp}$. D'autre algorithmes (N4SID, MOESP, CVA)(voir [Geh00, OM99] pour un descriptif plus détaillé de ces algorithmes et [McK97] pour la version fréquentielle de MOESP), basés sur la projection oblique, conduisent à un choix différent des pondérations W_1 et W_2. La projection oblique n'est pas nécessaire à l'estimation d'un modèle déterministe où une projection orthogonale est suffisante. L'intérêt de la projection oblique est de pouvoir estimer dans une certaine mesure les systèmes perturbés. Si on travaillait sur des mesures bruitées d'expérimentations, on aurait intérêt à utiliser la projection oblique. De plus, dans le domaine aéronautique, la présence de bruit est relativement réduite.

1.2.3 Identification par les sous espaces fréquentiels.

Nous allons présenter deux algorithmes d'identification dans le domaine fréquentiel qui sont extraits chacun de [MAL96] et [LJM96]. Ces deux algorithmes sont à la base de

l'identification de la partie flexible de l'avion souple. Ils permettent d'utiliser des données dont l'espacement dans le domaine fréquentiel est arbitraire et des pondérations sur les données fréquentielles. Ces deux algorithmes présentent les caractéristiques suivantes :

- Les algorithmes fournissent une représentation d'état MIMO minimale.
- Une étape clef est l'extraction d'un sous espace de faible dimension par l'utilisation d'une décomposition tronquée en valeurs singulières d'une matrice de données.
- Ces algorithmes ne sont pas itératifs.
- Ces algorithmes utilisent directement les données fréquentielles.
- Ces algorithmes permettent la pondération des données fréquentielles.

1.2.3.1 Algorithme de McKelvey et *al.*

[MAL96] propose en fait deux algorithmes. Le premier algorithme combine une IDFT et un algorithme de réalisation modifié. Le second est l'équivalent dans le domaine fréquentiel des sous espaces temporels déterministes. Il est applicable pour des données arbitrairement espacées mais il est consistant seulement dans le cas où la fonction de covariance du bruit est connue. Dans le cadre du schéma d'identification-commande d'un avion souple nous avons choisi ce second algorithme pour plusieurs raisons. La première est que l'on ne s'intéresse pas explicitement au problème du bruit comme nous l'avons indiqué plus haut. De plus, l'avion souple est une structure flexible présentant des pôles mal amortis. Il est essentiel d'avoir une bonne résolution fréquentielle, i.e. un nombre d'échantillons fréquentiels important autour des modes souples afin d'avoir un modèle identifié très proche du système réel dans le domaine fréquentiel contenant les modes flexibles. Par contre on peut se contenter d'avoir un nombre d'échantillons plus faible dans le domaine des hautes et basses fréquences grâce à la politique de *roll off* du correcteur et à la présence d'intégrateurs dans le correcteur. Enfin le premier algorithme utilise une IDFT sur la réponse impulsionnelle du système. Cette approche est exacte si la réponse impulsionnelle meurt complètement dans la fenêtre temporelle. Ce qui suppose pour les structures flexibles, soit d'avoir un très grand nombre de données temporelles, mais par propriété de la IDFT, d'avoir un très grand nombre de données fréquentielles ce qui augmente considérablement le temps de résolution surtout pour les systèmes de grande dimension comme l'avion souple. Soit de tronquer la réponse impulsionnelle mais dans ce cas on risque d'avoir un modèle identifié et surtout sa partie souple de qualité médiocre ce qui risque d'être rédhibitoire lors de la synthèse d'une loi de commande ayant une politique active vis à vis de ces modes souples mal identifiés. Nous allons présenter quelques résultats théoriques extraits de [MAL96]. Considérons la représentation d'état du modèle dans le domaine fréquentiel :

$$e^{j\omega}X(\omega) = AX(\omega) + BU(\omega) \tag{1.33}$$

$$Y(\omega) = CX(\omega) + DU(\omega) \tag{1.34}$$

où $X(\omega)$, $U(\omega)$ et $Y(\omega)$ sont respectivement la transformée de Fourier du vecteur d'état $X(t)$, du vecteur d'entrée $U(t)$ et du vecteur de sortie $Y(t)$ et $X(\omega) \in \mathbf{C}^n$, $U(\omega) \in \mathbf{C}^m$ et

$Y(\omega) \in \mathbf{C}^p$. $X^i(\omega_k)$ est l'état à la fréquence ω_k pour un vecteur d'entrée $U(w_k)$ avec 1 à la i^{eme} position et 0 autre part. En notant :

$$X^C(\omega) = [X^1(\omega) \cdots X^m(\omega)] \in \mathbf{C}^{n*m} \tag{1.35}$$

nous pouvons écrire les équations de la représentation d'état sous la forme suivante :

$$e^{j\omega}X(\omega) = AX(\omega) + BU(\omega) \tag{1.36}$$
$$G(e^{j\omega}) = CX^C(\omega) + D \tag{1.37}$$

En utilisant une forme récursive de l'équation précédente on obtient :

$$\begin{bmatrix} G(e^{j\omega}) \\ e^{j\omega}G(e^{j\omega}) \\ \vdots \\ e^{j(q-1)\omega}G(e^{j\omega}) \end{bmatrix} = OX^C(\omega) + \Gamma \begin{bmatrix} I \\ e^{j\omega}I \\ \vdots \\ e^{j(q-1)\omega}I \end{bmatrix} \tag{1.38}$$

où Γ est une matrice de Toeplitz triangulaire inférieure et O la matrice d'observabilité étendue :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{q-2}B & CA^{q-3}B & \dots & D \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{pq*mq}, \quad O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{q-1} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{qp*n} \tag{1.39}$$

Si on considère un ensemble discret de fréquences ω_k où $k \in [1..M]$ et en empilant $G(\omega_k)$ pour chaque fréquence de la façon suivante on a :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G(\omega_1) & \cdots & G(\omega_M) \\ e^{j\omega_1}G(\omega_1) & \cdots & e^{j\omega_M}G(\omega_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(q-1)\omega_1}G(\omega_1) & \cdots & e^{j(q-1)\omega_M}G(\omega_M) \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{qp*mM} \tag{1.40}$$

où M est le nombre d'échantillons dans le domaine fréquentiel. Alors la relation d'entrée sortie (1.38) devient pour un ensemble de fréquences $\omega_1, \dots, \omega_M$:

$$\mathbf{G} = O\mathbf{X}^c + \Gamma\mathbf{W}_m \tag{1.41}$$

où :

$$\mathbf{W}_m = \begin{bmatrix} I_m & \cdots & I_m \\ e^{j\omega_1}I_m & \cdots & e^{j\omega_M}I_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(q-1)\omega_1}I_m & \cdots & e^{j(q-1)\omega_M}I_m \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{qp*mM} \tag{1.42}$$

et

$$\mathbf{X}^C = [X^C(\omega_1) \cdots X^C(\omega_M)] \in \mathbf{C}^{n*mM} \tag{1.43}$$

Puisque O est une matrice réelle, la relation (1.41) est éclatée en parties réelle et imaginaire de la façon suivante :

$$[Re(\mathbf{G}) \quad Im(\mathbf{G})] = O[Re(\mathbf{X^c}) \quad Im(\mathbf{X^c})] + \mathbf{\Gamma}[Re(\mathbf{W}_m) \quad Im(\mathbf{W}_m)] \tag{1.44}$$

Si on note G=$[Re(\mathbf{G}) \quad Im(\mathbf{G})]$, X=$[Re(\mathbf{X^c}) \quad Im(\mathbf{X^c})]$ et W=$[Re(\mathbf{W}_m) \quad Im(\mathbf{W}_m)]$ on obtient finalement :

$$G = OX + \Gamma W \tag{1.45}$$

Quand le nombre d'échantillons fréquentiels augmente, le nombre de colonnes de $\mathbf{G}$ augmente. Si le nombre de colonnes et donc le nombre de fréquences est suffisamment important il existe une matrice, qui appliquée à droite de l'équation (1.45), permet d'extraire l'information importante OX en éliminant le terme ΓW qui correspond au régime forcé. Cette matrice est $W^\perp$:

$$W^\perp = I - W^T(WW^T)^{-1}W \tag{1.46}$$

Cette matrice correspond à une projection sur l'espace ligne $W^\perp$ perpendiculaire à celui de W. On obtient après projection la relation suivante :

$$GW^\perp = OXW^\perp \tag{1.47}$$

La dimension de l'espace image de $GW^\perp$ est égal à celui de O sauf dans le cas ou il se produit une annulation de rang. Une condition suffisante pour que les espaces images soient égaux est que l'intersection entre les espaces lignes de W et X soit nulle. Dans la plupart des analyses des sous espace temporels cette affirmation est considérée comme une hypothèse. Cependant dans [MAL96] on trouvera les conditions suffisantes validant cette hypothèse.
Une méthode numérique efficace pour déterminer la matrice d'observabilité étendue est de passer par une décomposition QR de $GW^\perp$:

$$\begin{bmatrix} W \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix}; \tag{1.48}$$

On obtient de la même façon que pour les sous espaces temporels :

$$GW^\perp = R_{22}Q_2^T \tag{1.49}$$

Il suffit d'utiliser seulement R_{22}, puisque Q_2^T est une matrice de rang plein. On peut résumer l'algorithme de la façon suivante :

1. Utilisons G_k, ω_k formant les matrices $\mathbf{G}$ et $\mathbf{W_m}$.

2. Calculons la factorisation QR :

$$\begin{bmatrix} Re(\mathbf{W_m}) & Im(\mathbf{W_m}) \\ Re(\mathbf{G}) & Im(\mathbf{G}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} \tag{1.50}$$

3. Calculons la SVD :

$$R_{22} = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^T \tag{1.51}$$

4. Déterminons l'ordre du système n en évaluant les valeurs singulières les plus grandes données par $\hat{\Sigma}_s$:

$$R_{22} = [\hat{U}_s \quad \hat{U}_o] \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_s & 0 \\ 0 & \hat{\Sigma}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V}_s^T \\ \hat{V}_o^T \end{bmatrix} \tag{1.52}$$

5. Déterminons les matrices $\hat{A}$ et $\hat{C}$:

$$J_1\hat{U}_s = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}\hat{A} \\ \vdots \\ \hat{C}\hat{A}^{q-2} \end{bmatrix}, \quad J_2\hat{U}_s = \begin{bmatrix} \hat{C}\hat{A} \\ \hat{C}\hat{A}^2 \\ \vdots \\ \hat{C}\hat{A}^{q-1} \end{bmatrix} \tag{1.53}$$

où

$$J_1 = [I_{(q-1)p} \quad 0_{(q-1)p\times p}] \tag{1.54}$$
$$J_2 = [0_{(q-1)p\times p} \times I_{(q-1)p}] \tag{1.55}$$
$$J_3 = [I_p \quad 0_{p\times(q-1)p}] \tag{1.56}$$

En remarquant que $J_1\hat{U}_s\hat{A} = J_2\hat{U}_s$ on obtient :

$$\hat{A} = (J_1\hat{U}_s)^\dagger J_2\hat{U}_s \tag{1.57}$$
$$\hat{C} = J_3\hat{U}_s \tag{1.58}$$

où $X^\dagger = (X^TX)^{-1}X^T$ est la pseudo-inverse de Moore-Penrose, i.e. la solution au sens des LS.

6. Résoudre au sens des moindres carrés la relation d'entrées-sorties suivante pour obtenir $\hat{B}$ et $\hat{D}$:

$$\hat{B}, \hat{D} = arg\ min \sum_{k=1}^{M} \|G_k - D - \hat{C}(e^{j\omega_k}I - \hat{A}^{-1})B\|_F^2 \tag{1.59}$$

7. La fonction de transfert estimée est :

$$\hat{G}^M(z) = \hat{D} + \hat{C}(zI - \hat{A})^{-1}\hat{B} \tag{1.60}$$

Dans le cas où il n'y a pas de coupure nette entre les valeurs singulières de $\hat{\Sigma}_s$ et $\hat{\Sigma}_o$, on choisira la taille de $\hat{\Sigma}_s$ en fonction de la décroissance des valeurs singulières de $\hat{\Sigma}$ et de la connaissance a priori du système que l'on cherche à identifier. Il sera probablement nécessaire d'opérer de façon itérative, i.e. on choisi un ordre q du modèle identifié, on compare la réponse fréquentielle du modèle identifié avec les données fréquentielles et si le résultat n'est pas satisfaisant on diminue ou on augmente q.
Dans le cas non bruité nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.2.1 *Soient un système G stable d'ordre n et G_k, $k = [1,\ldots,M]$ des échantillons non bruités de la matrice de transfert $G(e^{j\omega})$ à M fréquences distinctes ω_k. De plus prenons $q > n$, $M_0 \geq n + q$. Alors si $\hat{G}^M$ est le modèle estimé, on a :*

$$\|\hat{G}^M - G\|_\infty = 0 \tag{1.61}$$

pour tout $M \geq M_0$.

L'algorithme d'estimation est dit correct. Pour le cas bruité l'algorithme d'estimation vérifie le théorème suivant :

Théorème 1.2.2 *Soit un modèle G stable d'ordre n. Soit $G_k = G(e^{j\omega_k}) + n_k$, $k = [1,\ldots,M]$ des échantillons bruités de la fonction de transfert pour les M fréquences distinctes ω_k. Soit n_k un bruit aléatoire de moyenne nulle dont les termes sont indépendants pour chaque fréquence et dont la covariance est uniformément bornée. De plus prenons $q > n$ et $\hat{G}^M$ le modèle identifié alors :*

$$\lim_{M\to\infty} \|\hat{G}^M - G\|_\infty = 0 \tag{1.62}$$

L'algorithme d'estimation est dit consistant. Pour des données fréquentielles espacées arbitrairement il faut supposer connue a priori la fonction de covariance du bruit pour conserver la propriété de consistance de l'algorithme.

1.2.3.2 Algorithme FORSE

Le second algorithme *Frequency domain Observability Range Space Extraction* utilisé pour l'identification de la partie flexible de l'avion est extrait de [LJM96]. L'approche est similaire à celle de [MAL96]. Cet algorithme construit directement une représentation d'état du modèle à partir des données de la réponse fréquentielle. Il utilise une décomposition en valeurs singulières pour l'identification des systèmes multivariables et de grande dimension. La résolution de cet algorithme est directe et non itérative. De plus, comme précédemment, l'algorithme FORSE possède deux caractéristiques essentielles :

1. Il permet la pondération des données fréquentielles ayant de faibles gains.
2. Il permet la pondération des données fréquentielles grâce à une répartition non uniforme des données sur l'axe des fréquences.

La première caractéristique permet de pondérer les données fréquentielles de façon à ce que les zéros soient traités de la même façon que les pôles. Si on a des zéros mal amortis cela se traduit par des anti résonances et donc des "creux" dans la réponse fréquentielle pouvant

être mal identifiés. En utilisant une pondération adéquate il est possible de compenser le faible gain induit par ces zéros et donc de traiter les zéros mal amortis avec la même importance que les pôles mal amortis présentant des gains élevés. Cette caractéristique n'est pas utilisée dans [MAL96] mais elle y est applicable comme on le verra dans l'application à l'avion souple. La seconde caractéristique a déjà été largement présentée.
La différence réside dans la façon de traiter les parties réelles et complexes des données et l'opérateur de projection utilisé pour supprimer le régime forcé. De plus des pondérations sur les données fréquentielles sont prises en compte pour permettre à l'algorithme d'identifier efficacement d'éventuels zéros mal amortis.
Considérons une matrice de pondération R et les poids r_k associés a chaque fréquence w_k où $k = 1, \ldots, M$. La matrice de pondération R est définie comme suit :

$$R = diag(r_1, r_2, \ldots, r_M) \tag{1.63}$$

La relation entrées-sorties donnée par la relation matricielle (1.41) devient alors :

$$\mathbf{G}\sqrt{R} = O\mathbf{X}^c\sqrt{R} + \Gamma\mathbf{W}_m\sqrt{R} \tag{1.64}$$

En notant $\overline{X}$ la matrice obtenue en prenant le conjugué de chaque élément de X on obtient :

$$[\mathbf{G}\sqrt{R} \quad \overline{\mathbf{G}}\sqrt{R}] = O[\mathbf{X}^c\sqrt{R} \quad \overline{\mathbf{X}}^c\sqrt{R}] + \Gamma[\mathbf{W}_m\sqrt{R} \quad \overline{\mathbf{W}}_m\sqrt{R}] \tag{1.65}$$

En utilisant la même notation que pour l'équation (1.45) finalement on a la relation suivante :

$$G = OX + \Gamma W \tag{1.66}$$

avec G=$[\mathbf{G}\sqrt{R} \quad \overline{\mathbf{G}}\sqrt{R}]$, X=$[\mathbf{X}^c\sqrt{R} \quad \overline{\mathbf{X}}^c\sqrt{R}]$ et W=$[\mathbf{W}_m\sqrt{R} \quad \overline{\mathbf{W}}_m\sqrt{R}]$.
Si X^* est la transposée conjuguée de X alors en appliquant à droite de l'équation (1.66) W^* ou G^* on obtient les équations suivantes :

$$GW^* = OXW^* + \Gamma WW^* \tag{1.67}$$
$$GG^* = OXX^*O^T + \Gamma WX^*O^T + OXW^*\Gamma^T + \Gamma WW^*\Gamma^T \tag{1.68}$$

De la même façon que pour l'algorithme précédent, en utilisant le fait que $WW^\perp = 0$, alors :

$$GG^* - GW^*(WW^*)^\dagger(GW^*)^* = O(XX^* - XW^*(WW^*)^\dagger(XW^*)^*)O^T \tag{1.69}$$

Sachant qu'un nombre complexe auquel on ajoute son complexe conjugué est égal à deux fois sa partie réelle. On obtient à partir de l'équation (1.69) l'équation suivante :

$$\begin{aligned} &Re(\mathbf{G}R\mathbf{G}^*) - Re(\mathbf{G}R\mathbf{W_m}^*)(Re(\mathbf{W_m}R\mathbf{W_m}^*)^\dagger)(Re(\mathbf{G}R\mathbf{W_m}^*))^T \\ &= O(Re(\mathbf{X}R\mathbf{X}^*) - Re(\mathbf{X}R\mathbf{W_m}^*)(Re(\mathbf{W_m}R\mathbf{W_m}^*)^\dagger(Re(\mathbf{X}R\mathbf{W_m}^*)^T)))O^T \end{aligned} \tag{1.70}$$

Finalement on obtient :

$$Image(Re(\mathbf{G}R\mathbf{G}^*) - Re(\mathbf{G}R\mathbf{W_m}^*)(Re(\mathbf{W_m}R\mathbf{W_m}^*)^\dagger)(Re(\mathbf{G}R\mathbf{W_m}^*))^T) = Image(O) \tag{1.71}$$

Cette relation montre que le rang de la matrice O peut être obtenu à partir des données d'entrées sorties W et G. Il est donc possible à partir d'une SVD de déterminer O et donc d'extraire dans un premier temps les matrices $\hat{A}$ et $\hat{C}$ de la représentation d'état.
On peut résumer l'algorithme FORSE de la façon suivante :

1. Utilisons G_k, ω_k pour former les matrices $\mathbf{G}$ et $\mathbf{W_m}$.
2. Calculons la SVD :

$$Re(\mathbf{G}R\mathbf{G}^*) - Re(\mathbf{G}R\mathbf{W}^*)(Re(\mathbf{W}R\mathbf{W}^*)^\dagger)(Re(\mathbf{G}R\mathbf{W}^*))^T = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^T \tag{1.72}$$

3. Déterminons l'ordre du système n en évaluant les valeurs singulières les plus grandes dans $\hat{\Sigma}_s$:

$$Re(\mathbf{G}R\mathbf{G}^*) - Re(\mathbf{G}R\mathbf{W}^*)(Re(\mathbf{W}R\mathbf{W}^*)^\dagger)(Re(\mathbf{G}R\mathbf{W}^*))^T = [\hat{U}_s \quad \hat{U}_o] \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_s & 0 \\ 0 & \hat{\Sigma}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V}_s^T \\ \hat{V}_o^T \end{bmatrix} \tag{1.73}$$

4. Déterminons les matrices $\hat{A}$ et $\hat{C}$ de la façon suivante :

$$J_1\hat{U}_s = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}\hat{A} \\ \vdots \\ \hat{C}\hat{A}^{q-2} \end{bmatrix}, \quad J_2\hat{U}_s = \begin{bmatrix} \hat{C}\hat{A} \\ \hat{C}\hat{A}^2 \\ \vdots \\ \hat{C}\hat{A}^{q-1} \end{bmatrix} \tag{1.74}$$

où J_1, J_2 et J_3 sont définis précédemment.
On obtient :

$$\hat{A} = (J_1\hat{U}_s)^\dagger J_2\hat{U}_s \tag{1.75}$$
$$\hat{C} = J_3\hat{U}_s \tag{1.76}$$

5. Résoudre au sens des moindres carrés la relation d'entrées-sorties suivante pour obtenir $\hat{B}$ et $\hat{D}$:

$$\hat{B}, \hat{D} = arg\ min \sum_{k=1}^{M} \|G_k - D - \hat{C}(e^{j\omega_k}I - \hat{A})^{-1}B\|_F^2 \tag{1.77}$$

6. La fonction de transfert estimée est définie comme suit :

$$\hat{G}^M(z) = \hat{D} + \hat{C}(zI - \hat{A})^{-1}\hat{B} \tag{1.78}$$

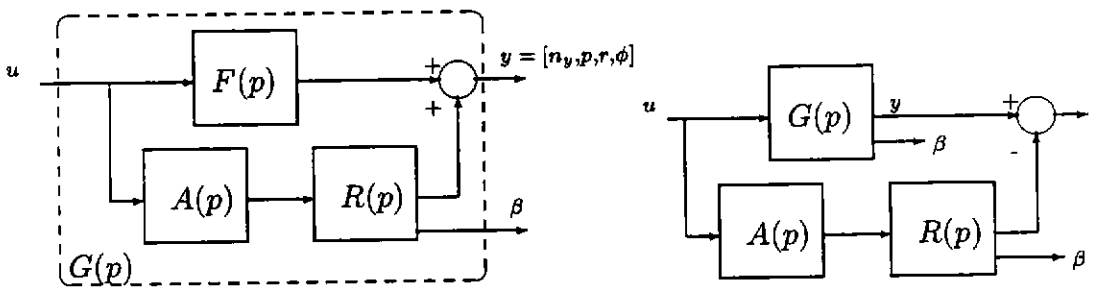
Les différences entre les deux algorithmes résident comme on l'a déjà dit dans la façon de construire la relation d'entrées sorties réelle à partir de données complexes. De plus on constate l'absence de factorisation QR dans le processus de détermination de $\hat{A}$ et $\hat{C}$. Néanmoins les algorithmes restent très proches dans le processus d'identification.

1.2.4 Quelques remarques sur l'analogie entre les domaines temporel et fréquentiel

On peut constater de fortes similitudes entre les sous espace temporels et fréquentiels dans la façon de résoudre le problème. Les matrices Y_i et U_i contiennent des données temporelles et G et W_m des données fréquentielles. Sans calcul il est possible de passer des équations d'entrées-sorties temporelles aux équations d'entrées-sorties fréquentielles. Plus précisément au lieu de considérer des échantillons temporels on considère des échantillons fréquentiels en utilisant un maillage fréquentiel. Il suffit de remplacer pour la première ligne de U_i et Y_i la variable temporelle t par la variable fréquentielle ω. Les autres lignes U_i et Y_i peuvent être perçues comme un décalage temporel de la première ligne. Ce décalage en temps d'une ligne à l'autre est équivalent dans le domaine fréquentiel à un déphasage en z^d où d est le décalage en période d'échantillonnage, et $z = e^{j\omega}$ en fréquence réduite. On obtient une relation qui serait de la forme $Y(\omega) = OX(\omega) + \Gamma U(\omega)$. Or comme on considère des sorties impulsionnelles on remplace $Y(\omega)$ par $G(\omega)$ et $U(\omega)$ par $W_m(\omega)$.
De plus on constate que la résolution proposée par [MAL96] est équivalente à la projection orthogonale suivie de la factorisation QR des sous espaces temporels. En fait du point de vue algébrique la résolution est tout à fait identique. Pour l'algorithme FORSE la construction d'une relation entrées-sorties réelle est plus complexe et il n'y a pas de factorisation QR avant la SVD. C'est ce qui expliquerait peut être des résultats moins bons même dans le cas déterministe par rapport à [MAL96] comme nous le verrons dans l'application pour l'avion souple.

1.3 Application à un avion souple

1.3.1 Le modèle identifié.



(a) Modèle d'avion souple

(b) Partie souple identifiée

FIG. 1.1 – *Modèle d'avion*

On considère un modèle d'avion souple. Ce modèle est représenté par le figure 1.1(a). $G(p)$ représente le modèle de l'avion, $F(p)$ la partie souple de l'avion d'ordre 67, $A(p)$ les actionneurs d'ordre 10 et $R(p)$ la partie rigide d'ordre 4. Le système a 4 entrées et 5 sorties. Si

$y = [n_y, p, r, \phi]$, les sorties du modèle G sont $[y, \beta]$, qui sont respectivement la sortie accélération, les vitesses de roulis et de lacet, l'angle de gîte et l'angle de dérapage. Les entrées δ_p et δ_r sont des entrées doubles qui correspondent à la gouverne verticale et aux ailerons. β est issu seulement de la partie rigide. Le lecteur pourra se réferrer au chapitre 2 pour plus de détails. Pour la partie souple les actionneurs sont inclus directement dans le modèle. En effet la partie souple utilise non seulement les sorties actionneurs mais aussi les dérivées premières et secondes de celles-ci. En fait les actionneurs et la partie rigide sont très bien connus et on peut aisément supposer qu'ils sont obtenus par une autre approche, comme par exemple une approche analytique. Par contre la partie souple est difficile à modéliser. Pour résumer, à partir de u, y, $A(p)$ et $R(p)$ qui sont connus a priori, la partie souple $F(p)$ est identifiée (voir figure 1.1(b)).

Dans l'identification fréquentielle par les sous espaces on a des paramètres de réglages qui sont respectivement le maillage fréquentiel (i.e. la résolution fréquentielle en fonction des régions du domaine fréquentiel qui nous intéressent), la pondération des données fréquentielles, le paramètre q, le nombre total d'échantillons fréquentiels M, et finalement l'ordre estimé n du modèle, tout en sachant que les inégalités suivantes $q > n$ et $M > q+n$ doivent être satisfaites. L'application illustrant l'approche de [LJM96] montre que l'on doit avoir q le plus grand possible afin que la contribution de tous les modes dans les valeurs singulières ne soit pas ignorée. On a un compromis a réaliser puisque plus q est grand plus la charge de calcul sera importante. Il s'agit de choisir $q > n$ et suffisamment grand tout en ayant un temps de résolution de quelques dizaines de minutes. De plus q grand par rapport à l'ordre estimé du modèle est intéressant dans le cas de données bruitées, i.e. dans le cas où certains modes structuraux pourraient être noyés ou distordus par le bruit. Or ici on ne s'intéresse pas spécifiquement à un problème d'identification en milieu bruité (domaine largement traité dans le domaine fréquentiel par [MAL96, McK97]). Dans l'application $q = 100$ car on suppose $n \leq 100$. Le maillage fréquentiel choisi est fourni par le tableau suivant :

TAB. 1.1 – *Maillage fréquentiel.*

Domaine fréquentiel (rad/s)	Nombre d'échantillons fréquentiels
[0 0.3]	100
[0.3 10]	100
[10 22]	200
[22 $\omega_e/2$]	50

Le maillage fréquentiel utilisé est donné par le tableau 1.1. Une attention particulière a été portée dans la région située entre 10 rad/s et 22 rad/s, région qui correspond aux modes souples se situant autour de la fréquence de coupure qui est généralement pour un avion de transport civil autour de $15 - 20$ rad/s. Finalement on a $M = 450$ et $M > q + n$. ω_e est la pulsation d'échantillonnage. Enfin la pondération choisie est extraite de [LJM96] :

$$\sqrt{r_{jk}} = \frac{1}{(\sum_{i=1}^{p} |[G(\omega_k)]_{ij}|)^{7/8}} \tag{1.79}$$

où $j = 1, \ldots, m$ et $k = 1, \ldots, M$. Ces poids ont été choisis de façon à être inversement

proportionnels au gain de la réponse fréquentielle. Cela permet d'identifier avec la même précision les gains importants et les gains faibles qui pourraient par exemple correspondre à des zéros mal amortis. L'exposant 7/8 permet tout de même de donner un poids un peu plus important aux données correspondant aux gains fréquentiels les plus élevés par rapport aux données correspondant aux gains les plus faibles.
L'identification est réalisée sur le modèle discret. Par l'utilisation de la transformée bilinéaire l'identification en continu peut être réalisée en temps discret sans introduire d'erreur d'approximation tout en améliorant le conditionnement numérique [Mck00]. En fait cette transformation conserve la stabilité, les propriétés à non minimum de phase et les réponses fréquentielles en continu et en discret sont exactement les mêmes pour des fréquences ω petites par rapport à ω_e. Comme pour l'application $f_e = 50$ Hz et que la largeur de bande est d'à peu près 20 rad/s, le domaine fréquentiel utile est beaucoup plus réduit que $\omega_e/2 \approx 150$ rad/s.
Les données dans le domaine fréquentiel sont fournies par la partie flexible d'ordre 67. De plus la bande passante est limitée à peu près à 20 rad/s. C'est pourquoi une bonne précision est adoptée entre 0 et 22 rad/s. Au delà de 22 rad/s une faible résolution est permise puisque une politique de *roll off* peut être adoptée par le correcteur pour être robuste vis à vis des dynamiques négligées. Une erreur sur le gain statique est éventuellement autorisée, puisque, comme le nous le verrons, il est nécessaire d'avoir un intégrateur en boucle ouverte pour assurer une erreur de poursuite nulle. Ainsi la connaissance du gain statique n'est pas cruciale.

1.3.2 Résultats

Dans l'application les deux algorithmes ont été utilisés, mais c'est celui de [MAL96] qui a fournit les meilleurs résultats : le modèle identifié est obtenu à l'aide de l'algorithme de [MAL96]. Plus précisément, même si les données n'étaient pas bruitées l'algorithme FORSE fournissait une SVD n'offrant pas une séparation nette entre les valeurs singulières non nulles et les valeur singulières proches de zéro. Dans le cas déterministe on doit s'attendre pour un modèle d'ordre fini à une discontinuité pour la valeur singulière correspondant à l'ordre du système +1. On observe une décroissance continue des valeurs singulières avec l'algorithme FORSE, comportement caractéristique des données bruitées alors que celles-ci ne l'étaient pas. En d'autres termes l'algorithme FORSE ne présente pas un aussi bon conditionnement numérique que l'algorithme de [MAL96]. La décomposition en valeurs singulières de la matrice d'observabilité étendue par l'algorithme de Mackelvey et FORSE sont données respectivement par les figures 1.2 et 1.3. Il ne s'agit pas de tirer une conclusion définitive sur l'algorithme FORSE mais juste de dire que pour l'application de l'avion souple c'est celui de [MAL96] qui a présenté un meilleur conditionnement numérique.
Les réponses fréquentielles du modèle identifié et du modèle complet sont données par les figures 1.4 et 1.5. Les courbes en pointillé et les courbes en trait continu représentent respectivement la partie flexible complète et la partie flexible identifiée d'ordre réduit. Ces résultats montrent clairement que les réponses fréquentielles entre 10 et 20 rad/s sont reproduites précisément. Finalement la partie flexible identifiée est d'ordre 40. Cet ordre permet, comme on le verra dans le chapitre 2, de faire une synthèse H_∞ avec un temps

de résolution de quelques minutes tout en ayant un comportement entrées-sorties proche du modèle complet. La différence entre le modèle continu identifié et le modèle discret équivalent est donnée par la figure 1.6. On constate que l'écart en fréquence en deçà de 30 rad/s est quasi nul, ce qui illustre l'équivalence continu-discret par la transformation bilinéaire de Tustin pour des fréquences (très) inférieures à la fréquence d'échantillonnage. L'erreur d'identification dans le domaine fréquentiel est donnée par la figure 1.7.

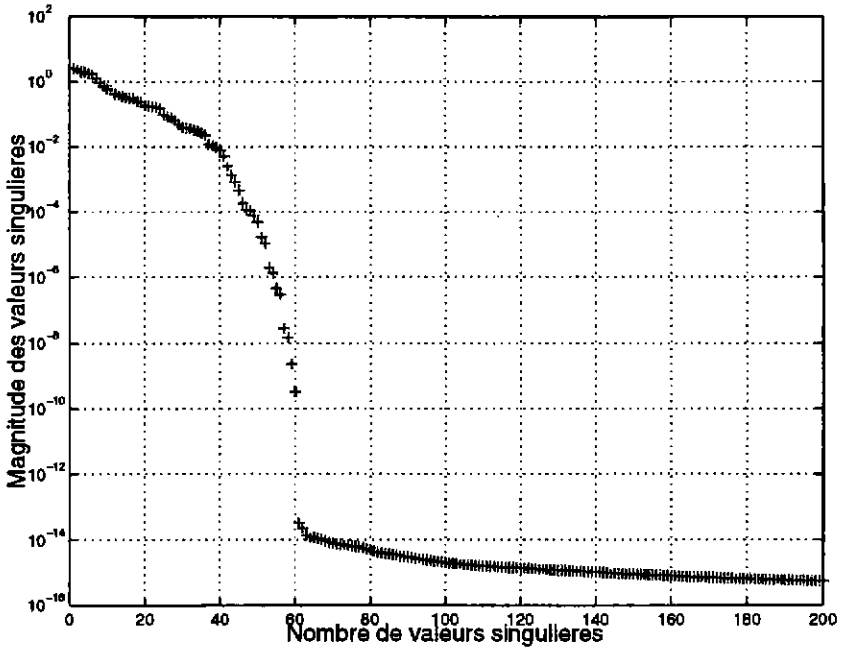


FIG. 1.2 – *SVD de O par l'algorithme de Mackelvey.*

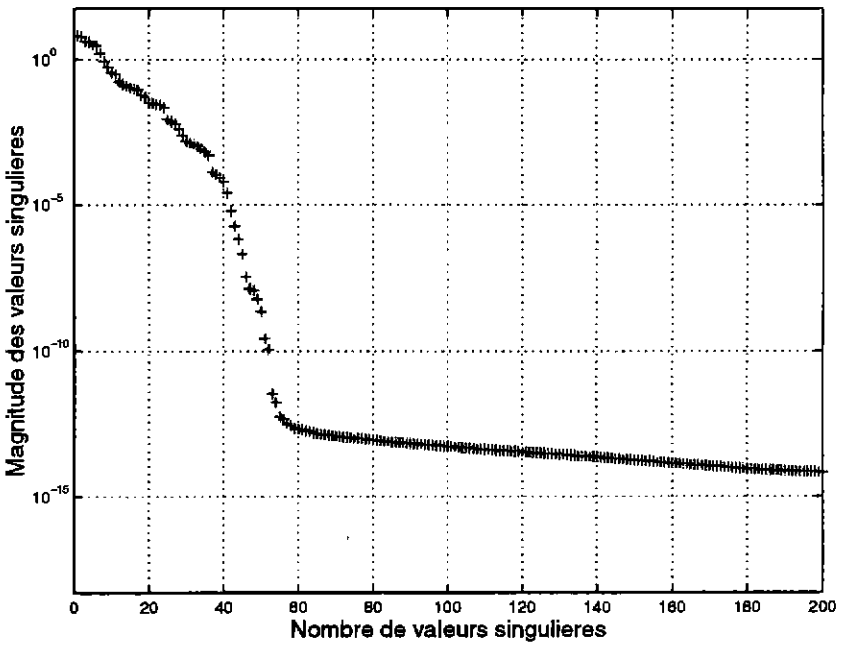


FIG. 1.3 – *SVD de O par l'algorithme FORSE.*

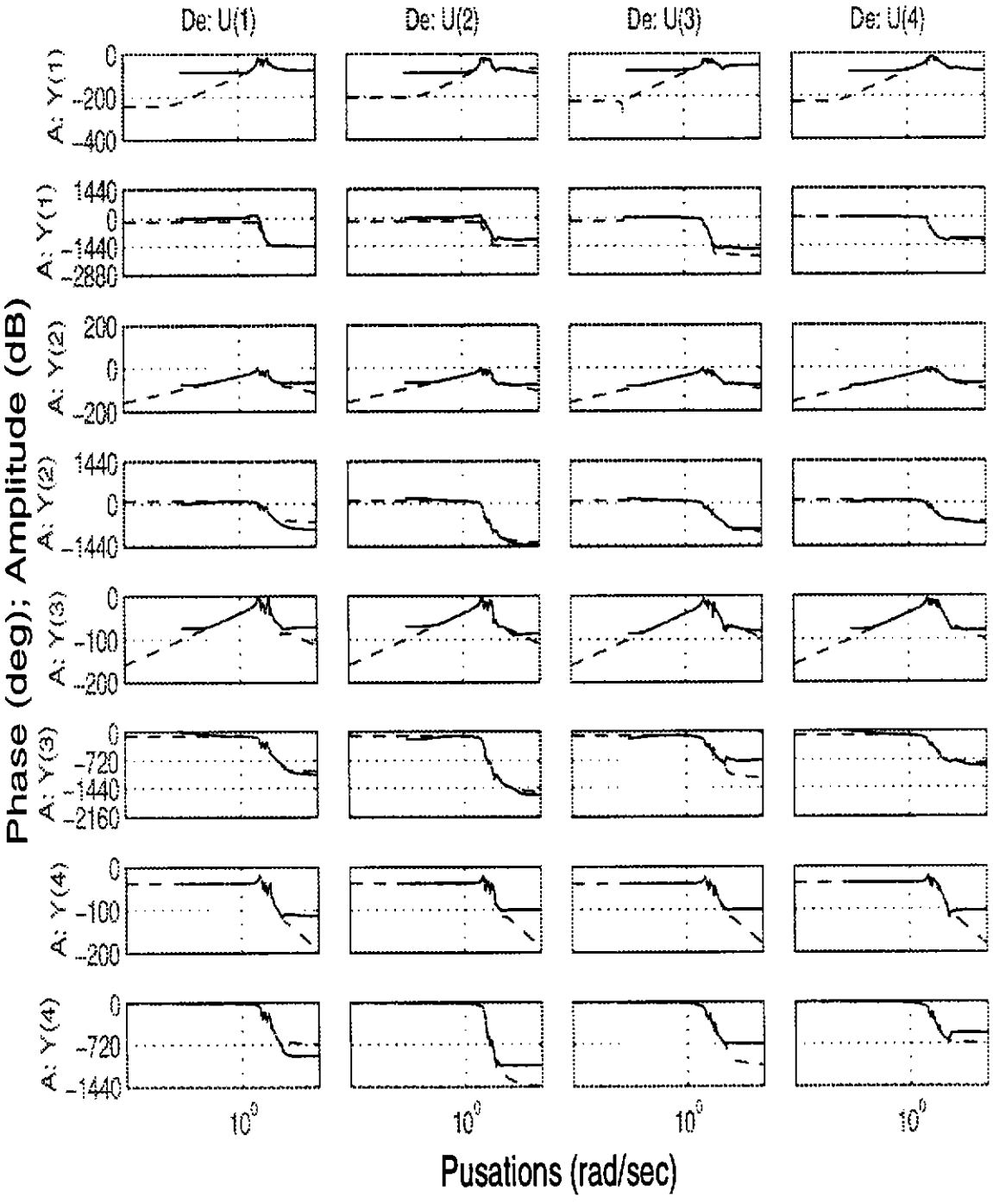


FIG. 1.4 – *Réponse fréquentielle pour chaque entrée et sortie*

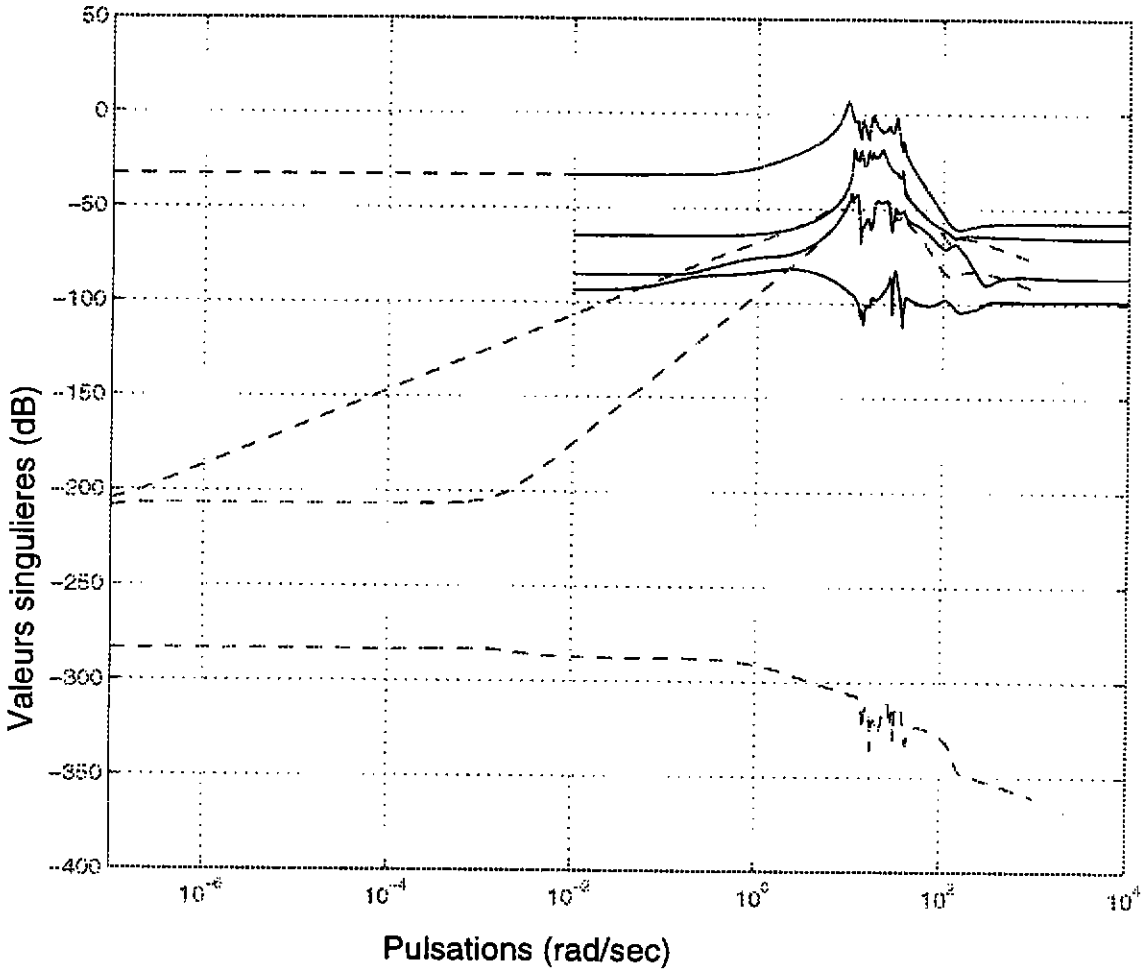


FIG. 1.5 – *Valeurs singulières du modèle identifié et du modèle complet.*

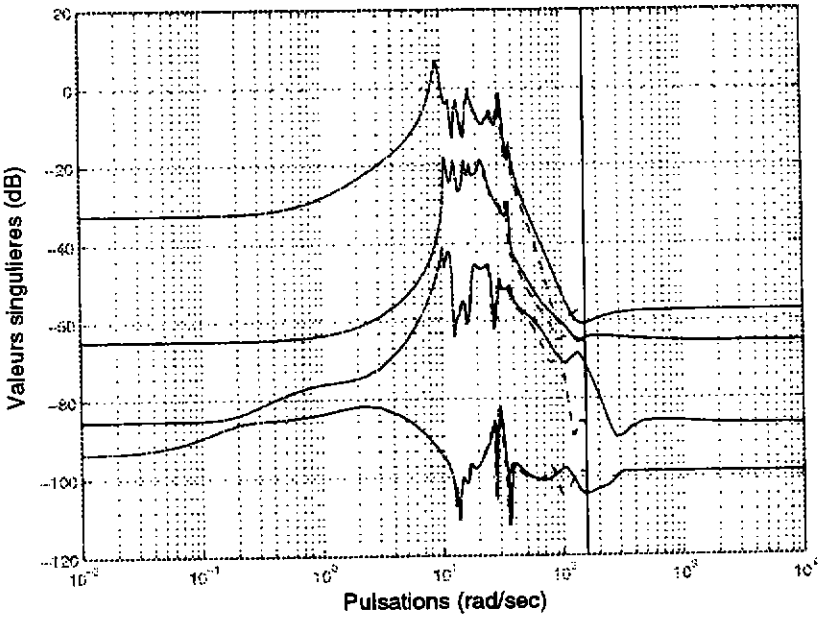


FIG. 1.6 – *Modèle identifié continu et discret.*

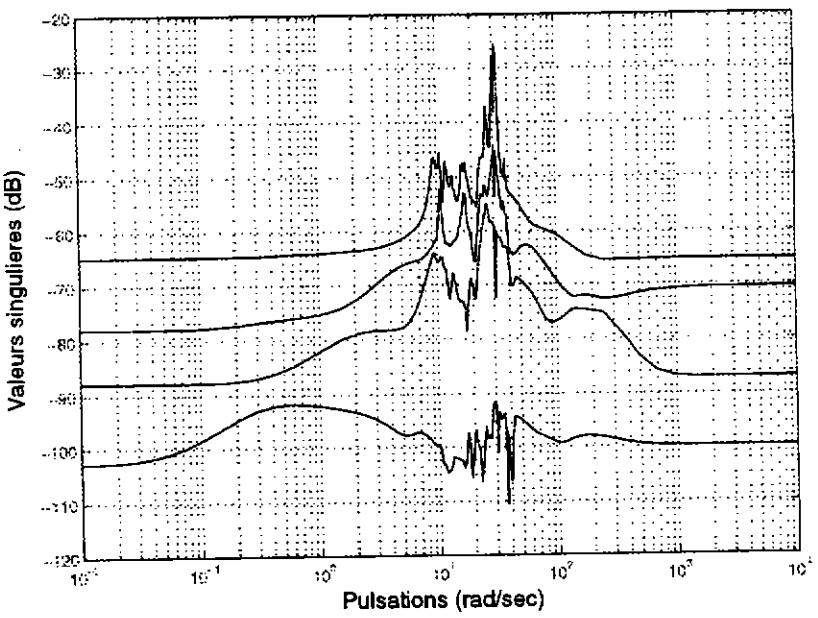


FIG. 1.7 – *Erreur d'identification dans le domaine fréquentiel.*

1.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre deux algorithmes d'identification fréquentielle basés sur les sous espaces. L'approche par les sous espaces offre le grand avantage de traiter de la même façon les systèmes MIMO ou SISO en fournissant directement la représentation d'état du modèle identifié. En d'autres termes le nombre de paramètres de réglage n'augmente pas avec la taille supposée du modèle identifié ce qui permet une méthodologie de mise en oeuvre relativement simple. De plus le domaine fréquentiel nous permet lors de l'identification de prendre en compte les objectifs de commande: typiquement la bande passante et les pics de résonance du système. Avoir une (très) bonne précision dans la bande passante tout en admettant une précision relativement médiocre pour des modes souples au delà de la fréquence de coupure offre l'avantage de réduire le temps de calcul pour estimer le modèle tout en ayant un modèle de bonne qualité dans le domaine fréquentiel qui nous intéresse. Par une politique de *roll off*, on peut assurer la robustesse face à l'erreur d'identification qui apparaît dans les hautes fréquences. Une bonne précision sur les pics de résonance est essentielle pour mener une politique active efficace sur les modes souples que l'on veut contrôler. Plus précisément dans notre application sur l'avion souple on a déterminé une erreur d'identification dans le domaine fréquentiel qui sera prise en compte exactement lors de la synthèse H_∞.

Chapitre 2

Synthèse H_∞

2.1 Introduction

L'identification et la commande d'un avion souple reste une application difficile pour les techniques modernes. Une méthode basée sur les sous espaces a été appliquée avec succès pour identifier l'avion souple avec des données fréquentielles. Cette approche a permis de fournir simultanément un modèle de synthèse qui est le modèle identifié et une erreur associée dans le domaine fréquentiel. Une approche fréquentielle, typiquement H_∞, va être utilisée pour synthétiser un correcteur à 2 degrés de liberté. La synthèse H_∞ est particulièrement intéressante à plus d'un titre. Elle permet de prendre en compte, a priori et explicitement, des spécifications fréquentielles et temporelles du cahier des charges, simplifiant ainsi la synthèse. En effet les spécifications fréquentielles sont naturellement prises en compte par la synthèse H_∞. Les spécifications temporelles classiques (temps de montée, rejection de perturbations, atténuation de bruit, découplage, erreur statique, dépassement) peuvent être facilement interprétées dans le domaine fréquentiel comme nous le verrons au travers d'un exemple simple (4 blocs) et de l'application sur l'avion souple. Le second avantage est un avantage méthodologique. En effet le critère H_∞ est construit directement à partir du cahier des charges, ce qui est particulièrement intéressant pour des spécifications nombreuses et complexes. Or les spécifications sont facilement traduisibles en terme de gabarits fréquentiels. Et les gabarits fréquentiels correspondent aux pondérations en entrée et en sortie que l'on retrouve dans la synthèse H_∞ pondérée. Ainsi le choix des gabarits se fait de façon méthodologique. Le troisième avantage est basé sur la représentation fréquentielle. Or cette représentation fréquentielle est à la base de l'analyse de la robustesse via le théorème du petit gain et son extension à la μ-analyse. La synthèse H_∞ permet de synthétiser des correcteurs robustes en prenant en compte explicitement des incertitudes dynamiques. De plus cette approche peut être étendue à la désensibilisation de la boucle fermée aux incertitudes paramétriques et aux non linéarités [Fon95]. En d'autres termes, on utilise un seul critère, le critère H_∞ pour assurer la performance et la robustesse: un critère unique pour ajuster au mieux le compromis performance/robustesse. Dans le cas de l'avion souple cela signifie que l'on assure a priori la robustesse de la loi de commande sur le modèle complet lors de la synthèse à partir de l'erreur fréquentielle fournie par les

sous espaces. Enfin, l'approche fréquentielle est une approche naturelle pour l'amortissement des modes souples puisqu'il s'agit de contraindre les pics de résonance sur certains transferts de la boucle fermée.
Nous illustrerons dans ce chapitre notre méthode H_∞ dans le même esprit que [Fon95, FF99, FFDM96, DF02b]. Un élément important est que lors de la synthèse on traitera simultanément la partie du correcteur qui correspond au *feedback* et à la précommande. En effet la précommande H est généralement synthétisée après le *feedback* K car celui-ci est habituellement relié aux spécifications de robustesse et la précommande aux spécifications de performance. En d'autres termes, le problème global de synthèse de K et H est ramené à 2 problèmes séparés qui sont traités séquentiellement. Néanmoins ce point de vue n'est pas totalement justifié car on n'optimise pas le compromis entre la robustesse et la performance. Si effectivement la précommande agit seulement sur la performance, cette précommande d'une part dépend des différents transferts en boucle fermée et d'autre part agit directement ou indirectement sur certaines sorties de la boucle fermée que l'on cherche à contrôler. De même le *feedback* joue un rôle important dans la performance de la boucle fermée. Synthétiser un correcteur à 2 degrés de liberté permet de considérer simultanément la précommande et le *feedback*, ce qui conduit à optimiser le compromis entre les spécifications de robustesse et de performance.

2.2 Synthèse de loi de commande par une approche H_∞ pondérée.

2.2.1 Principe de la synthèse H_∞.

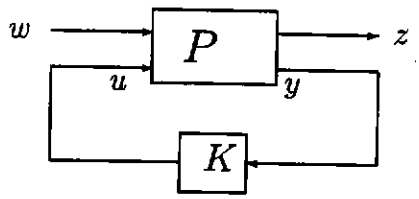


FIG. 2.1 – *Forme standard.*

Considérons la forme standard représentée par la figure 2.1, où $P(p)$ est le modèle de synthèse augmenté des pondérations traduisant les objectifs de performance et de robustesse et $K(p)$ le feedback. z et w sont les entrées et les sorties à contrôler. La synthèse H_∞ consiste à déterminer le correcteur $K(p)$ stabilisant qui maximise la stabilité face à une perturbation non structurée de modèle. Elle cherche à minimiser γ sous la contrainte :

$$\|F_l(P,K)\|_\infty \leq \gamma \tag{2.1}$$

Le γ minimum est noté γ_{opt}. Cette résolution correspond au problème H_∞ standard optimal.
Nous savons par le théorème du petit gain et plus généralement par la μ-analyse que la

boucle fermée est d'autant plus robuste que la norme H_∞ de chaque transfert en boucle fermée est faible. Néanmoins on ne sait pas déterminer le γ_{opt} sous la contrainte (2.1). Par contre en fixant γ, le problème est soluble et convexe. Le problème admet une solution s'il existe un K qui satisfait $\|F_l(P,K)\|_\infty \leq \gamma$. Plus précisément on prend un γ_{sup} qui admet une solution et un γ_{inf} qui n'en admet pas. On prend la moyenne arithmétique $\gamma = \frac{\gamma_{inf}+\gamma_{sup}}{2}$ et γ devient alors γ_{sup} s'il existe une solution, sinon il devient γ_{inf} s'il n'en existe pas. Et le processus est réitéré à nouveau. Cette approche dichotomique permet d'obtenir avec suffisamment d'itérations un γ proche du γ_{opt} : c'est la γ itération ([DGKF89]). La synthèse H_∞ pondérée est basée sur 2 propriétés.

Propriété 2.2.1 *Soit un transfert $T_{e\to s}(p)$ entre les entrées représentées par le vecteur e et les sorties par le vecteur s, et le sous transfert $T_{e_i\to s_j}(p)$ de $T_{e\to s}(p)$, si :*

$$\|T_{e\to s}(p)\|_\infty \leq \gamma \tag{2.2}$$

alors on a :

$$\|T_{e_i\to s_j}(p)\|_\infty \leq \gamma. \tag{2.3}$$

La réciproque n'étant pas vraie. Cette propriété signifie que si on assure la contrainte H_∞ pour un transfert MIMO, chacun des sous transferts respectera cette contrainte de norme.

Propriété 2.2.2 *Considérons une pondération SISO en entrée $W_e(p)$ et une pondération en sorties $W_s(p)$ et un transfert MIMO $T_{e\to s}(p)$.*
Supposons $\|diag(W_e(p),W_e(p),\ldots,W_e(p))T_{e\to s}(p)diag(W_s(p),W_s(p),\ldots,W_s(p))\|_\infty \leq \gamma$, alors on a :

$$\forall\omega \quad |W_e(j\omega)|\overline{\sigma}(T_{e\to s}(j\omega))|W_s(j\omega)| \leq \gamma \tag{2.4}$$

Cette propriété est à la base de la synthèse H_∞ car les pondérations en entrées et en sorties peuvent être interprétées comme des gabarits fréquentiels : $\overline{\sigma}(T_{e\to s}(j\omega)) \leq \frac{\gamma}{|W_e(j\omega)W_s(j\omega)|}$, où $|W_e(j\omega)W_s(j\omega)|^{-1}$ représente le gabarit que doit satisfaire le transfert $|T_{e\to s}(j\omega)|$.
En reprenant la forme standard représentée par la figure 2.1 on a :

$$z = W_o T_{e\to s} W_i w = F_l(P,K)w = T_{w\to z}w \tag{2.5}$$

où $T_{e\to s}$ représente la matrice de transfert en boucle fermée entre le vecteur d'entrée e de la boucle fermée (référence, bruit, perturbations) et le vecteur de sortie s de cette même boucle fermée, W_e et W_s sont respectivement les matrices contenant l'ensemble des pondérations en entrée et en sortie. La notation en p a été volontairement omise afin d'alléger l'écriture. Soit le transfert en boucle fermée $T_{e_n\to s_m}$ entre la n^{eme} entrée et la m^{eme} sortie, alors on a :

$$e_n = W_{e_n} w_n \text{ et } z_m = W_{s_m} s_m = W_{s_m} T_{e_n\to s_m} W_{e_n} w_n. \tag{2.6}$$

Remarque: la minimisation de la norme H_∞ de $F_l(P,K)$ conduit à la minimisation des transferts entre e et s. La norme H_∞ étant une norme induite l_2, la minimisation du transfert entre $e(t)$ et $s(t)$ peut s'interpréter comme la minimisation de la réponse de $s(t)$ à l'entrée $e(t)$.

La synthèse H_∞ est une approche qui permet d'intégrer a priori des spécifications de performance et de robustesse. Plus précisément $F_l(P,K)$ contient l'ensemble des transferts en boucle fermée construits à partir des entrées sorties e et s, augmenté des pondérations servant de gabarits à ces transferts. Il est important de remarquer qu'un grand nombre de spécifications d'un cahier des charges peuvent être traduites sous la forme de contraintes fréquentielles. C'est bien évidemment le cas des spécifications fréquentielles mais aussi des spécifications temporelles relativement courantes comme le temps de montée, le temps de réjection, le couplage, la limitation de l'amplitude d'un signal. La construction du critère H_∞ se fait directement à partir du cahier des charges. En effet contrairement à d'autres approches comme la commande LQG, le critère n'est pas unique, on le choisit en fonction des spécifications de performance et de robustesse. C'est ce qui peut apparaître plus complexe mais néanmoins beaucoup plus adapté à un problème d'automatique qu'un critère unique ne décrivant que très partiellement et imparfaitement ce que l'on recherche. Il apparaît 2 étapes qui sont intimement liées. La première consiste à déterminer les vecteurs d'entrées e et s (ou respectivement w et z). Ce choix se fait très naturellement à partir des spécifications du cahier des charges puisque les entrées e correspondent aux entrées de la boucle fermée et les sorties s aux sorties à contrôler. Le choix des pondérations est moins direct. Néanmoins ce choix se fait lui aussi à partir des spécifications car l'inverse des pondérations correspond à des gabarits que doivent satisfaire les transferts en boucle fermée. Or la forme de ces transferts en boucle fermée est dictée par le cahier des charges. Il apparaît donc un lien direct entre le choix des pondérations et les spécifications du cahier des charges. A priori on peut penser que l'on a un grand nombre de degrés de liberté pour la synthèse H_∞. Néanmoins ces degrés de liberté sont directement associés à des spécifications du cahier des charges. Ils ont donc une interprétation physique qui est liée au comportement désiré de la boucle fermée. Nous illustrerons ces idées par un exemple simple d'un problème de synthèse H_∞ 4 blocs. On peut faire quelques remarques. L'ordre du correcteur est égal à l'ordre du modèle plus l'ordre des pondérations. Pour éviter des problèmes numériques dans la résolution de l'optimisation H_∞, les pondérations sont choisies propres et non strictement propres. Enfin la solution H_∞ est acceptée quand $\gamma \approx 1$.

2.2.2 Analyse en robustesse de la boucle fermée

Nous allons rappeler brièvement dans ce paragraphe les outils d'analyse de la robustesse. Il s'agit seulement de redonner les principaux théorèmes tels que le théorème du petit gain, du petit gain pondéré, le lien entre ces théorèmes et les marges de stabilité MIMO et enfin l'extension de ces théorèmes à la μ-analyse. Nous donnerons simplement quelques références historiques sur le calcul de la $v.s.s$ dans le cas d'incertitudes réelles, complexes et mixtes.

2.2.2.1 Transferts en boucle fermée et incertitudes associées

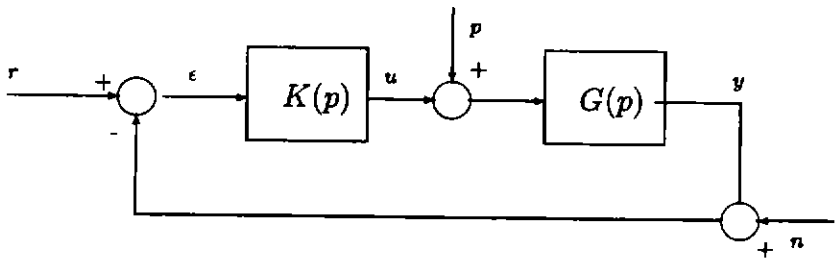


FIG. 2.2 – *Boucle fermée.*

Considérons la boucle fermée représentée par la figure 2.2 où G représente le modèle et K le correcteur. Dans le cas SISO la boucle fermée est complètement définie par 4 transferts que l'on désignera respectivement $S = \epsilon/r$, $T = y/r$, $KS = u/n$, et $GS = \epsilon/p$. Ces transferts s'écrivent en fonction de K et de G de la façon suivante :

$$S = \frac{1}{1+GK} \tag{2.7}$$

$$T = \frac{GK}{1+GK} \tag{2.8}$$

$$KS = \frac{K}{1+GK} \tag{2.9}$$

$$GS = \frac{G}{1+GK} \tag{2.10}$$

On constate que $S + T = I$, où S est appelé communément fonction de sensibilité et T fonction de sensibilité complémentaire. Cette fonction de sensibilité est importante car elle est significative de la réponse de la boucle fermée mais aussi de la MM qui est par définition le minimum de $|1 + GK|$ sur tout le domaine fréquentiel. Pour avoir une MM supérieure à 6 dB il suffit d'avoir $\|S\|_\infty \leq 6$ dB. Dans le cas MIMO, 6 transferts sont nécessaires pour décrire complètement la boucle fermée. Ces transfert s'écrivent de la façon suivante en fonction de K et G :

$$S_y = (I+GK)^{-1} \tag{2.11}$$

$$S_u = (I+KG)^{-1} \tag{2.12}$$

$$T_y = (I+KG)^{-1}KG \tag{2.13}$$

$$T_u = (I+GK)^{-1}GK \tag{2.14}$$

$$KS_y = K(I+GK)^{-1} \tag{2.15}$$

$$GS_u = G(I+KG)^{-1} \tag{2.16}$$

On constate que $KS_y = S_uK$ et $GS_u = S_yG$. On a deux fonctions de sensibilité, une en entrée (S_u) et une en sortie (S_y). Il faut alors considérer les MM en entrée (S_u) et en

sortie (S_y). Il est intéressant de noter que pour chaque transfert en boucle fermée on peut y associer une incertitude. L'ensemble de ces incertitudes peuvent se résumer de la façon suivante :

- KS_y ou S_uK correspond à une incertitude du type additif direct.
- GS_u ou S_yG correspond à une incertitude du type additif inverse.
- T_u et T_y correspondent à une incertitude du type multiplicatif respectivement en entrée et en sortie.
- S_u et S_y correspondent à une incertitude du type multiplicatif inverse respectivement en entrée et en sortie.

Dans le cas SISO, $T_u = T_y$ et $S_u = S_y$ et par conséquent, il est inutile de faire la distinction entre les incertitudes en entrée et en sortie.

2.2.2.2 Théorème du petit gain

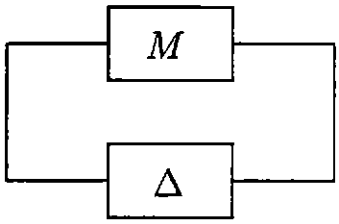


FIG. 2.3 – *Forme* $M - \Delta$.

Théorème 2.2.3 *Théorème du petit gain : considérons la forme* $M - \Delta$ *représentée par la figure 2.3, où* M *et* Δ *sont stables et* Δ *une dynamique négligée. Ce système est stable pour tout* Δ *tel que* $\|\Delta\|_\infty \leq \beta$ *si et seulement si* $\|M\|_\infty \leq \frac{1}{\beta}$.

Ce théorème permet d'étudier la stabilité d'une boucle fermée à partir de la norme H_∞. M désigne un transfert en boucle fermée et Δ une incertitude associée à ce transfert. M représente par exemple KS. Dans ce cas pour assurer la stabilité de la boucle fermée, il est nécessaire que $\|KS\|_\infty \leq 1/\beta$. On peut associer à M n'importe quel transfert de la boucle fermée. On peut de la même façon considérer deux dynamiques négligées Δ_1 et Δ_2 et dans ce cas $\Delta = diag(\Delta_1, \Delta_2)$. M contiendra les transferts en boucle fermée correspondants mais on n'a plus qu'une condition suffisante de stabilité robuste.
Une application intéressante est celle du calcul des marges de gain et de phase MIMO par le théorème du petit gain. Considérons le bloc d'incertitude suivant :

$$\Delta = \begin{pmatrix} k_1 e^{j\phi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 e^{j\phi_2} & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & k_m e^{j\phi_m} \end{pmatrix} \quad k_i \in \mathbf{R} \text{ et } \phi_i \in \mathbf{R} \tag{2.17}$$

Introduisons ce bloc d'incertitudes Δ à l'entrée de G comme sur la figure 2.4.

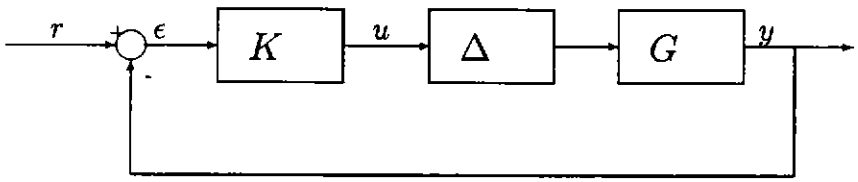


FIG. 2.4 – *Incertitudes en gain et en phase en entrée de G.*

En transformant la boucle fermée de la figure 2.4 avec $\Delta = I + \Delta_M$ on obtient la figure 2.5 :

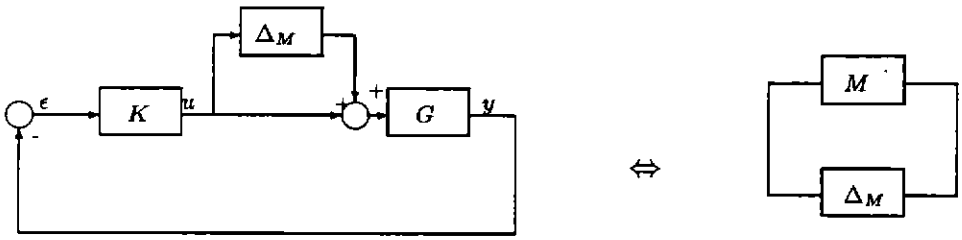


FIG. 2.5 – *Mise sous forme $M - \Delta$.*

On obtient la forme $M - \Delta_M$ où $M(p)$ est T_u et Δ_M représente l'incertitude multiplicative directe en entrée associée à T_u. Le calcul des valeurs minimales de k_i et ϕ_i qui amènent l'instabilité de la boucle fermée est un calcul de marge de gain et de phase MIMO en entrée. La stabilité de la boucle fermée est assurée si :

$$\overline{\sigma}(\Delta_M(j\omega))\overline{\sigma}(M(j\omega)) \leq 1 \quad \forall\omega \tag{2.18}$$

Ce qui est équivalent à :

$$max_i|k_i e^{j\phi_i} - 1| = max_i\sqrt{1 + k_i^2 - 2k_i cos(\phi)} \leq \frac{1}{\overline{\sigma}(M(j\omega))} \tag{2.19}$$

En posant $\alpha(\omega) = \frac{1}{\overline{\sigma}(M(j\omega))}$, on obtient pour :

- la marge de gain, en posant $\phi_i = 0$:

$$|1 - k_i| \leq \alpha(\omega) \quad \forall i = 1, \ldots, m \tag{2.20}$$

- la marge de phase, en posant $k_i = 1$:

$$2|sin(\frac{\phi_i}{2})| \leq \alpha(\omega) \quad \forall i = 1, \ldots, m \tag{2.21}$$

Pour la marge de retard il suffit de remplacer ϕ_i par $\omega\tau_i$. On a donc une condition suffisante de stabilité robuste.

Théorème 2.2.4 *Théorème du petit gain pondéré : considérons la forme $M-\Delta$ représentée par la figure 2.3, où M et $\Delta = W_\Delta\tilde{\Delta}$ sont stables. Ce système est stable pour tout $\tilde{\Delta}$ tel que $\|\tilde{\Delta}\|_\infty \leq 1$ si et seulement si $\|W_\Delta M\|_\infty \leq 1$.*

Dans le cas MIMO on considère $\Delta = W_{1\Delta}\tilde{\Delta}W_{2\Delta}$ i.e. des pondérations à droite et à gauche. La stabilité est assurée si et seulement si $\|W_{2\Delta}MW_{1\Delta}\|_\infty \leq 1$.
Généralement la modélisation des incertitudes par des incertitudes additives ou multiplicatives n'est adaptée que dans un domaine fréquentiel limité. Par exemple les incertitudes additives sont adaptées pour la description d'incertitudes en basses fréquences et inversement pour les incertitudes multiplicatives. Ceci provient du fait que le modèle a généralement un gain élevé en basses fréquences. Pour s'affranchir de cette contrainte, l'utilisation de pondérations sur les incertitudes permet une description plus pertinente de l'incertitude dans tout le domaine fréquentiel. En d'autres termes, la taille de l'incertitude dépend de la fréquence.
En bref le théorème du petit gain fournit une condition nécessaire et suffisante dans le cas d'une seule dynamique négligée. Or comme nous l'avons indiqué précédemment il est tout à fait possible de considérer plusieurs incertitudes dynamiques intervenant dans la boucle fermée. Dans ce cas le bloc d'incertitudes Δ est bloc-diagonal et le théorème du petit gain ne fournit qu'une condition suffisante de stabilité. De plus cette formalisation prend en compte explicitement des incertitudes dynamiques mais difficilement des incertitudes paramétriques. Modéliser une incertitude paramétrique par une incertitude dynamique peut s'avérer très pessimiste. Nous allons donc présenter une extension du théorème du petit gain au cas d'incertitudes mixtes, complexes pour les incertitude dynamiques et réelles pour les incertitudes paramétriques, et structurées, i.e. mises sous forme (bloc) diagonales.

2.2.2.3 Principe de la μ analyse

Considérons l'incertitude $\underline{\Delta}$ ayant la structure suivante :

$$\underline{\Delta} = diag(\delta_1 I_1, \delta_2 I_2, \ldots, \delta_s I_s, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_q) \tag{2.22}$$

où $\delta_i \in \mathbf{R}$ et $\Delta_j \in \mathbf{C}^{\mathbf{k_j}\times\mathbf{k_j}}$.

Definition 2.2.5 *Soit une matrice $M \in \mathbf{C}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$, la valeur singulière structurée (v.s.s) μ de M par rapport à $\underline{\Delta}$ est définie comme suit :*

$$\mu_{\underline{\Delta}}(M) = \frac{1}{\inf_{\Delta\in\underline{\Delta}}(\overline{\sigma}(\Delta)/det(I-\Delta M)=0)} \tag{2.23}$$

$$= 0 \quad si\ \forall\Delta\in\underline{\Delta},\ det(I-\Delta M)\neq 0 \tag{2.24}$$

Théorème 2.2.6 *Théorème du petit gain structuré : considérons la forme $M - \Delta$ représentée par la figure 2.3, où $M(p)$ est une matrice de fonctions de transferts stables et $\Delta(p)$ est une matrice de transferts stables telle que $\Delta \in \underline{\Delta}$, le système bouclé $M - \Delta$ est stable pour tout Δ tel que $\|\Delta\|_\infty \leq \beta$ si et seulement si :*

$$\forall \omega \in [0,\infty], \quad \mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega)) \leq \frac{1}{\beta} \tag{2.25}$$

Ce théorème est une extension du théorème du petit gain au cas d'incertitudes mixtes et structurées. La μ-analyse est basée sur la mise en oeuvre de ce théorème. Dans le cas général il n'est pas possible de calculer μ exactement en un temps qui est une fonction polynomiale de la taille du problème. En revanche le calcul d'une borne supérieure et d'une borne inférieure du μ est généralement un problème plus facile, i.e. qui se résout en un temps qui est une fonction polynomiale de la taille du problème. Le calcul de cet encadrement permet d'évaluer le degré de précision du résultat. Physiquement la borne inférieure correspond à une incertitude qui amène l'instabilité et la borne supérieure à une garantie de robustesse de la boucle fermée reste stable. Si cet encadrement est fin, cela signifie que l'on est proche de la solution exacte du problème. Dans le cas contraire rien ne permet de dire que la borne supérieure et/ou la borne inférieure du μ est proche de la solution exacte. Il existe un certain nombre de méthodes permettant de calculer des bornes du μ suivant qu'il est réel, complexe ou mixte. Dans le cas d'incertitudes réelles scalaires et non répétées l'algorithme de De Gaston et Safonov [DS88] conduit à la solution exacte. Les algorithmes de Dailey [Dai90] et Jones [Jon87] fournissent respectivement une borne inférieure et supérieure. Néanmoins ces 3 algorithmes sont à temps de calcul exponentiel. Pour le μ complexe [Doy82, Saf82] ont été les premiers à proposer une borne supérieure du μ. En pratique dans le cas complexe les résultats sont faiblement conservatifs pour des scalaires faiblement répétés. Dans le cas du μ mixte historiquement on a les méthodes de Fan, Tits et Doyle [FTD91] et de Safonov et Lee [SL93] pour la borne supérieure de μ, et la méthode de Young et Doyle [YD90] pour la borne inférieure. Ces 3 méthodes sont à temps de calcul polynomial.
Ce qui est extrêmement intéressant c'est de constater que l'on utilise exactement le même formalisme pour assurer la performance et la robustesse via le théorème du petit gain : la contrainte sur la norme H_∞. C'est tout l'intérêt d'utiliser la synthèse H_∞ standard car en pondérant chaque transfert on voit apparaître explicitement la performance et la robustesse réunis au sein d'un même critère. C'est là que le compromis performance/robustesse prend toute sa signification car il est est résumé par un seul critère H_∞. Il est important de remarquer que le théorème du petit gain structuré n'utilise pas la valeur singulière maximale $\overline{\sigma}$ mais une extension de celle-ci appelée valeur singulière structurée, notée μ, prenant en compte la structure bloc-diagonale de l'incertitude. Mais la *v.s.s* n'est pas une norme contrairement par exemple à la norme H_∞ utilisée par le théorème du petit gain. Donc là où le théorème du petit gain (pondéré) peut être lié directement à la synthèse H_∞ (obtenue par la γ itération) comme on le verra par la suite avec l'application à l'avion souple, ce n'est pas totalement le cas pour le μ.

2.2.3 Choix des pondérations

Comme indiqué précédemment la synthèse H_∞ utilise la représentation fréquentielle et la norme H_∞. La représentation fréquentielle est extrêmement intéressante car elle permet une description détaillée du comportement de la boucle fermée. Modeler la boucle fermée permet d'avoir une boucle fermée dont le comportement est proche de celui que l'on attend. Modeler les transferts en boucle fermée à l'aide de gabarits permet de spécifier a priori des objectifs de performance et de robustesse. Le choix des pondérations W_e et W_s se fait à partir du choix des gabarits. Ces derniers étant imposés par le cahier des charges, il apparaît que le choix des pondérations se déduit des spécifications issues du cahier des charges.
Les spécifications de performance sont généralement les suivantes :

- gabarit fréquentiel
- gabarit temporel
- amortissement de modes souples
- critères énergétiques (peut être exprimé par une norme H_2)

Les spécifications de robustesse peuvent provenir des problèmes suivants :

- connaissance du modèle sur une plage limitée de fréquence
- erreur d'identification
- erreur de modélisation
- erreur due à la réduction/simplification d'un modèle
- description d'un modèle non linéaire par un modèle linéaire
- description d'un modèle LPV par un modèle LTI

Les spécifications de performance et de robustesse d'un cahier des charges peuvent être souvent prises en compte par les caractéristiques des pondérations fréquentielles suivantes :

- gain en 0
- gain en ∞
- comportement asymptotique en 0
- comportement asymptotique en ∞
- fréquence de coupure à 0 dB
- gain maximum sur une plage de fréquences
- gain minimum sur une plage de fréquences

Plusieurs types de pondérations peuvent être choisis pour décrire correctement les spécifications du cahier des charges. Elles peuvent se résumer à un gain, un filtre du premier ordre, du second ordre etc. On pourra trouver dans [Fon95] une description plus détaillée du choix des pondérations.

2.2.4 Application à un problème 4 blocs

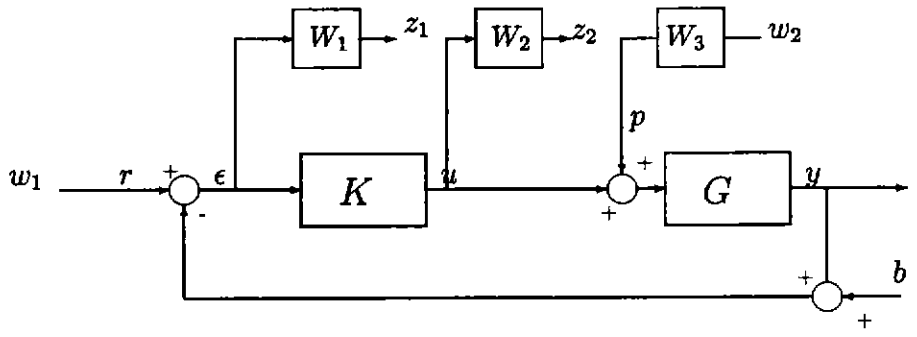


FIG. 2.6 – *Schéma de synthèse pour un 4 blocs.*

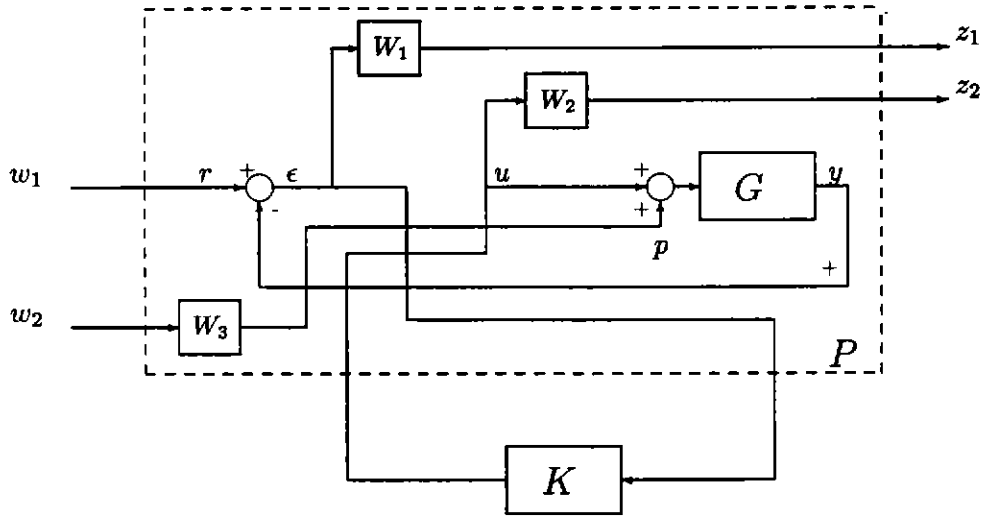


FIG. 2.7 – *Mise sous forme standard du schéma de synthèse 4 blocs.*

Le problème 2 blocs, appelé encore problème de sensibilité mixte, et le problème 4 blocs (figure 2.6) sont abondamment décrits dans la littérature. Nous n'en ferons ici qu'un bref rappel pour illustrer simplement la synthèse H_∞. L'exemple du problème 4 blocs est intéressant car il illustre bien un problème de commande classique MIMO ou SISO où on a des contraintes de performance et de robustesse. Par souci de simplicité nous utiliserons un modèle SISO. L'approche MIMO est tout à fait équivalente, il suffit de remplacer le Bode en gain par la valeur singulière maximale $\overline{\sigma}$. L'application sur l'avion souple montrera la flexibilité du choix du critère en fonction du cahier des charges et la facilité du passage du SISO au MIMO. Les critères 2 blocs et 4 blocs ne sont pas des critères immuables, monolithiques s'imposant pour tous les problèmes de commande. S'il sont souvent utilisés en pratique, c'est parce qu'ils correspondent à des spécifications de cahier des charges relativement classiques. Dans le cas de l'avion souple, le cahier des charges et les contraintes sont telles qu'un critère 4 blocs ne permet pas de traiter l'ensemble des spécifications. On

choisira un critère multi blocs construit à partir des spécifications.
Nous voyons apparaître explicitement sur la figure 2.6 les entrées références $r(t)$, les perturbations non mesurées $p(t)$ sur la commande $u(t)$, les sorties référence $\epsilon(t)$ et le bruit de mesure $b(t)$ sur la sortie $y(t)$. Cependant, du fait de la structure de la loi de commande, on confond les entrées $r(t)$ et $b(t)$. Les entrées-sorties sont pondérées par les transferts $W_1(p)$, $W_2(p)$ et $W_3(p)$. Remarquons que nous pouvons rajouter une pondération $W_0(p)$ sur l'entrée référence. Néanmoins comme on considère un système SISO, il n'est pas nécessaire d'en tenir compte par commutativité des fonctions de transferts. En faisant apparaître explicitement la forme LFT (figure 2.7), on obtient facilement le critère H_∞ à satisfaire :

$$\left\| \begin{array}{cc} W_1S & W_1GSW_3 \\ W_2KS & W_2TW_3 \end{array} \right\|_\infty \leq \gamma \tag{2.26}$$

D'après la propriété 2.2.1, on a :

$$\begin{aligned} \|W_1S\|_\infty &\leq \gamma \\ \|W_1GSW_3\|_\infty &\leq \gamma \\ \|W_2KS\|_\infty &\leq \gamma \\ \|W_2TW_3\|_\infty &\leq \gamma \end{aligned} \tag{2.27}$$

La résolution du problème H_∞ standard suppose que l'on mette le problème sous la forme standard et que celle-ci soit minimale en symboles, i.e. le nombre d'apparitions de chaque symbole doit être minimal dans l'écriture de P. Pour un problème 4 blocs l'écriture de la forme standard sous forme minimale est assez simple. Elle reprend l'approche développée dans [Fon95] pour les critères d'optimisation H_∞. Le transfert P s'écrit :

$$\begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w \\ y \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

$$\begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix} = W_s^A T_{e\to s}^A W_e^A \tag{2.29}$$

où W_s^A et W_e^A sont les matrices de pondération augmentées des entrées et sorties du correcteur K. Il en est de même pour $T_{e\to s}^A$ qui correspond au transfert MIMO des entrées-sorties à pondérer augmenté des entrées-sorties du correcteur. L'écriture (2.29) est minimale si chacun des transferts W_s^A, W_e^A et $T_{e\to s}^A$ est minimal. Ainsi a-t-on :

$$W_s^A = \begin{bmatrix} W_s & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad W_e^A = \begin{bmatrix} W_e & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

Dans le cas SISO, avec $W_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_3 \end{pmatrix}$ et $W_s = \begin{pmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{pmatrix}$, on obtient finalement :

$$W_s^A = \begin{pmatrix} W_1 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, W_e^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & W_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_{e\to s}^A = \begin{bmatrix} 1 & -G & -G \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -G & -G \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

On s'aperçoit que l'écriture de $T^A_{e\to s}$ n'est pas minimale car le symbole G apparaît 4 fois contrairement aux pondérations augmentées dont les symboles n'apparaissent qu'une seule fois chacun. Il suffit d'écrire $T^A_{e\to s}$ sous la forme suivante :

$$T^A_{e\to s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -G & -G \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G & -G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

Finalement $T^A_{e\to s}$, W^A_s et W^A_e sont minimaux et donc l'écriture de P est minimale. À partir de celle-ci on obtient la représentation d'état minimale de P nécessaire à la résolution du problème H_∞.
L'ensemble des problèmes de commande auquel répond le critère 4 blocs est le suivant :

- assurer une erreur de poursuite par rapport à un signal d'entrée (échelon, rampe, sinusoïde etc.).
- assurer une réjection des perturbations.
- limiter l'amplitude des signaux de commande par rapport à la référence et au bruit de mesure.

Ces spécifications concernent plutôt l'aspect performance. L'autre intérêt de la synthèse 4 blocs est de pouvoir pondérer l'ensemble des transferts de la boucle fermée : S, T, GS et KS. Pondérer l'ensemble des transferts permet d'assurer une bonne robustesse vis à vis de l'ensemble des incertitudes pouvant intervenir dans la boucle fermée :

- incertitudes additives directes et inverses
- incertitudes multiplicatives directes et inverses

Ces incertitudes modélisent l'ensemble des incertitudes pouvant intervenir sur les actionneurs, le modèle et les capteurs.
Ce qui a été décrit n'est pas à proprement parler un cahier des charges. Pour illustrer l'efficacité de la méthode on choisira un problème bien particulier parmi l'ensemble des problèmes auquel répond le 4 blocs :

- assurer une erreur de poursuite faible pour une entrée référence échelon.
- assurer la réjection de perturbations basses fréquences type échelon sur la commande.
- limiter l'amplitude du signal de commande u pour des entrées références et des entrées bruits de mesure sur la sortie y.

Le choix des pondérations se fait naturellement à partir du cahier des charges. En effet la plupart des spécifications d'un cahier des charges peuvent être interprétées par des contraintes fréquentielles sur les transferts en boucle fermée. Néanmoins il est important de noter que les transferts en boucle fermée ne sont pas indépendants entre eux et que pour un transfert donné le correcteur ne pourra pas agir sur tout le domaine fréquentiel de ce transfert.
Considérons par exemple les transferts S et T. Dans le critère 4 blocs on a 4 transferts qui apparaissent mais on pondérera seulement 3 transferts car $S + T = I$, et donc une

fois que S (ou T) est fixé T (ou S) l'est aussi. De plus il existe un lien profond entre le comportement de la boucle ouverte et celui de la boucle fermée. Généralement la boucle ouverte doit satisfaire les contraintes suivantes :

- $|GK| \ll 1$ en hautes fréquences pour assurer la robustesse.
- $|GK| \gg 1$ en basses fréquences pour assurer la performance.

Pour un système MIMO, la performance est assurée lorsque $\underline{\sigma}(GK(j\omega))$ est très supérieure à 1 en basses fréquences et $\overline{\sigma}(GK(j\omega))$ très inférieure à 1 en hautes fréquences. Finalement ce type de contrainte conduit à l'analyse suivante :

Fonction	Basses fréquences	Hautes fréquences
GK	$\ll 1$	$\gg 1$
S	$\frac{1}{GK}$	1
GS	$\frac{1}{K}$	G
KS	$\frac{1}{G}$	K
T	1	GK

On constate bien que le correcteur n'a aucune influence sur KS et T en basses fréquences et sur S et GS en hautes fréquences. Il sera donc impossible de pondérer ces transferts à l'aide du correcteur dans tout le domaine fréquentiel. Il est important de noter que cette analyse est utile dans le choix des pondérations dans le cadre de la synthèse H_∞ mais qu'elle est générale à l'analyse de n'importe quel problème de commande (LQG, PID etc.). En d'autres termes quelle que soit la méthode utilisée, il sera impossible d'agir, par exemple sur KS, en basses fréquences à l'aide du correcteur.

2.2.4.1 Les pondérations du 4 blocs

Nous avons 3 pondérations à choisir W_1, W_2 et W_3. On s'aperçoit d'après les équations (2.27) que l'on a 3 pondérations pour 4 transferts en boucle fermée. Nous allons donc procéder de la façon suivante. On va choisir dans un premier temps W_1 pour pondérer S. Dans un deuxième temps on choisira W_2 pour pondérer KS, et dans un troisième temps, on choisira W_3 en fonction de W_1 pour pondérer GS. Finalement il ne reste que T qui est fixé puisqu'il vérifie $S + T = I$.

2.2.4.2 La pondération W_1

On a $|S(j\omega) \leq |W_1(j\omega)|^{-1}$, i.e. $|S(j\omega)|$ doit satisfaire le gabarit $|1/W_1(j\omega)|$. Or S est le transfert en boucle fermée entre l'erreur de poursuite ϵ et l'entrée référence r. De plus la fréquence ω_{inf}, où $|S(j\omega_{inf})| = 1$, correspond à une borne inférieure de la fréquence de coupure ω_c, où $|GK(j\omega_c)| = 1$. En d'autres termes on spécifie par S un temps de montée minimum. De plus par définition $S = \frac{1}{1+GK}$, la norme H_∞ de S correspond à l'inverse de la marge de module. Enfin on détermine la pente de S en fonction du type de signaux de référence à suivre. Par conséquent on choisit pour $1/W_1$:

- le gain statique $1/W_1(j0)$ assure une erreur de poursuite inférieure à $\frac{r}{W_1(j0)}$.

- la pente de 20 dB par décade de $|1/W(p)|$ en basses fréquences assure la poursuite d'une entrée référence échelon.
- le gain maximum de 6 dB de $|1/W(p)|$ assure une marge de module d'au moins 6 dB.
- Le pôle de $1/W(p)$ permet d'agir sur le temps de montée de la boucle fermée.

Ainsi, si on utilise une pondération de la forme $W_1(p) = \frac{kp+\alpha\beta}{p+\alpha}$, donc $W_1^{-1}(p) = \frac{p+\beta}{kp+\alpha\beta}$, on prendra $k = 0.5$ pour une marge de module d'au moins 6 dB, β égal à l'erreur statique souhaitée, et α permettra d'ajuster le temps de montée. Plus α est grand plus le temps de montée est court, plus la boucle fermée est rapide.
Par exemple si $W_1^{-1}(p) = \frac{0.5p+10^{-2}}{p+1}$, la marge de module est contrainte à au moins 6dB, l'erreur statique de ϵ est d'au plus 0.01 pour une entrée échelon unité, la pente est de +20 dB par décade assurant la poursuite d'échelon, et $\omega_{inf} \approx 1.15$ rad/s assurant une fréquence de coupure $\omega_c \geq 1.15$ rad/s.
On voit au travers de cet exemple que les différents degrés de liberté de la pondération W_1 sont déterminés directement à partir du cahier des charges. On pourra par ailleurs faire varier α pour jouer sur la rapidité de la boucle fermée. D'autres pondérations sont possibles pour d'autres spécifications. On aurait utilisé par exemple une pondération W_1 du second ordre pour assurer la poursuite d'une rampe.

2.2.4.3 La pondération W_2

La pondération W_2 agit directement sur le transfert KS qui lie l'entrée référence ou bruit à la commande. On a montré que l'on peut agir sur KS seulement en moyennes et hautes fréquences. Cette pondération est déterminée de façon un peu plus itérative que W_1. En effet on cherche à limiter l'amplitude du signal de commande u. Il apparaît clairement un compromis entre la rapidité de la boucle fermée représentée par S et pondérée par W_1 et l'agitation de la commande représentée par KS et pondérée par W_2. On peut choisir dans un premier temps W_2 comme un gain afin de limiter la complexité du correcteur. On augmentera progressivement le gain $|W_2|$ de façon à satisfaire la spécification sur l'agitation de la commande. Si cela n'est pas suffisant et/ou si on a des contraintes de *roll off* sur KS on peut choisir pour W_2 un filtre du premier ordre. Un filtre du premier ordre assure une politique de *roll off* de $-20dB$ par décade. Si $W_2(p) = \frac{k(p+\beta)}{p+\alpha}$, donc $W_2^{-1}(p) = \frac{p+\alpha}{k(p+\beta)}$, on augmentera le gain k et on diminuera la fréquence du pôle α afin de contraindre l'amplitude du signal u et on choisira β dans les (très) hautes fréquences pour assurer la propreté du filtre.
Il est aussi possible de prendre en compte u et $\frac{du}{dt}$ et de les pondérer par des gains pour agir sur la commande et sa dérivée si on a explicitement des spécifications sur $\frac{du}{dt}$.
On s'aperçoit comme pour le réglage de W_1, que les degrés de liberté de W_2 sont directement reliés à des spécifications du cahier des charges.

2.2.4.4 Choix de la pondération W_3

La pondération W_3 agit sur le transfert W_1GS qui lie la perturbation en entrée du procédé et ϵ pondéré par W_1. Le gabarit que doit satisfaire $|GS(j\omega)|$ est donc $|\frac{1}{W_1W_3(j\omega)}|$. Dans

le cadre de la réjection de perturbations basses fréquences sur la commande, on choisira un gain pour W_3. En augmentant le gain de W_3 on agira sur les basses fréquences de GS au travers de W_1. On abaissera finalement le gabarit $\frac{1}{|W_1 W_3|}$. Le temps de réjection de la perturbation et la sensibilité de l'erreur de poursuite par rapport à une perturbation sur la commande sont liés au gain de W_3. Si ce gain est élevé et donc la contrainte $\frac{1}{|W_1 W_3|}$ forte, le temps de réjection sera court et la sensibilité de ϵ faible par rapport à b. Il est possible d'utiliser un filtre du premier ordre pour W_3. Ce filtre aurait pour objectif par exemple de pondérer les moyennes et dans une certaine mesure les hautes fréquences de GS afin d'assurer une robustesse plus importante sur les incertitudes additives inverses. On pourrait aussi dans le cas de rejet de perturbation sur la commande du type rampe prendre pour W_3 un filtre similaire à W_1 et obtenir une pente dans les basses fréquences de GS de +40 dB par décade.

2.2.4.5 Conclusion sur le 4 blocs

Il est essentiel de remarquer qu'à un schéma de synthèse H_∞ pondéré on associe une classe ou un ensemble de problèmes. Un schéma de synthèse 2 blocs répond à une classe de problèmes bien particulière. La synthèse 4 blocs répond à une autre classe de problèmes plus large qui englobe la classe de problèmes associés au 2 blocs. Et il en est de même pour l'approche multi blocs. Au sein d'un classe ou d'un ensemble de problèmes on en prend un (celui qui répond au cahier des charges), et en fonction de ce problème on définit la structure des pondérations. En résumé le nombre de pondérations et leur positionnement dans la boucle fermée sont déterminés par la classe de problèmes qui contient le problème de commande que l'on cherche à résoudre. Et c'est ce problème qui va déterminer la structure et les degrés de liberté des pondérations.
Dans l'exemple choisi les spécifications sont classiques et se retrouvent dans une majorité de problèmes d'automatique. Pour un problème donné il s'agit de trouver les pondérations les plus simples permettant de satisfaire les spécifications car l'ordre du correcteur dépend de l'ordre des pondérations. Il sera toujours possible d'augmenter l'ordre des pondérations si les spécifications ne sont pas totalement satisfaites.

2.2.5 Synthèse d'un correcteur à 2 degrés de liberté

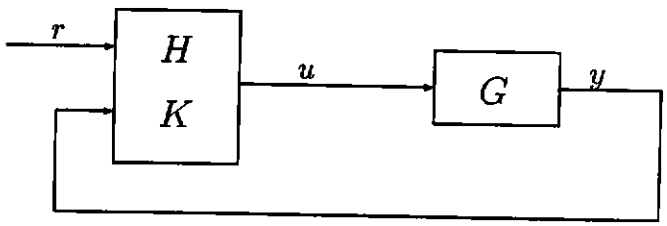


FIG. 2.8 – *Schéma du système de commande à 2 degrés de liberté.*

La synthèse d'un correcteur à deux degrés de liberté permet de synthétiser le feedback simultanément à la précommande. Généralement on cherche une précommande pour amé-

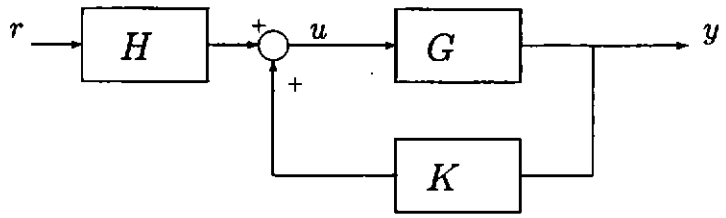


FIG. 2.9 – *Schéma du système de commande à 2 degrés de liberté.*

liorer la performance de la boucle fermée. On parle d'un correcteur à 2 degrés de liberté car celui-ci prend en entrée directement la référence r et la sortie mesurée y et non pas l'écart ϵ. La forme la plus générale est donnée par la figure 2.8. On peut néanmoins éclater le correcteur à 2 degrés de liberté comme indiqué sur la figure 2.9 où on voit apparaître le feedback K et la précommande H. Le feedback a pour but de diminuer la sensibilité de la boucle fermée face aux incertitudes dynamiques et/ou paramétriques tandis que la précommande améliore les performances sur la poursuite d'une référence. Il est optimal de synthétiser un correcteur à 2 degrés de liberté en une seule étape. Par exemple à l'aide de la précommande on peux chercher à améliorer le temps de montée de la sortie y par rapport à une entrée référence r. Néanmoins si on procède de façon séquentielle (i.e. synthèse de K puis de H) on risque d'augmenter l'amplitude du signal de commande u et de ne plus satisfaire la spécification sur l'effort de commande. Il sera alors nécessaire de retravailler la boucle fermée et ainsi de suite. On voit au travers de cet exemple l'intérêt de prendre en compte *simultanément* le *feedback* K et la précommande H. De façon plus formelle nous avons comme transfert entre y et r en SISO :

$$y = H(p)T(p)r = H(p)\frac{KG(p)}{1 - KG(p)}r \tag{2.33}$$

Une illustration simple du choix d'une précommande H est donnée dans [SP96] où on cherche $y = T_{ref}r$ où T_{ref} est un modèle de référence. On obtient alors la précommande H :

$$H(p) = T^{-1}(p)T_{ref}(p) \tag{2.34}$$

Cette approche est difficilement applicable dans un cas pratique puisqu'elle consiste à inverser la dynamique de la boucle fermée T pour déterminer une précommande permettant ainsi de suivre au mieux un modèle de référence. L'inversion d'une dynamique est possible dans le cas SISO même pour un transfert strictement propre. En effet il suffit de ne considérer qu'un "sous" transfert propre et non strictement propre du transfert strictement propre associé et de l'inverser, ce qui revient à inverser seulement un partie de la dynamique. Par contre c'est très difficile dans le cas MIMO même pour des systèmes carrés. Une autre approche utilisant la synthèse convexe précédemment présentée permet de synthétiser H à l'aide d'une base de filtres. C'est une approche beaucoup plus efficace donnant de bons résultats [DF98, Dar98] et permettant de traiter simultanément le feedback K et la précommande H. Néanmoins on doit nécessairement partir d'un correcteur initial stabilisant

la boucle fermée, ce qui revient à synthétiser une précommande H en ayant une partie de la boucle fermée fixée par K_{ini}. Par la synthèse H_∞ on peut déterminer explicitement K et H avec un schéma de synthèse à 2 degrés de liberté. C'est ce qui est présenté dans le paragraphe suivant.

2.3 Application à l'avion souple

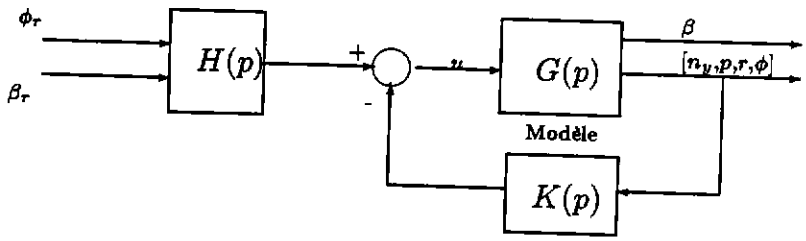


FIG. 2.10 – *Structure de la loi de commande.*

La structure de la loi de commande est représentée par la figure 2.10. K représente le *feedback*, H la précommande et G le modèle de synthèse. Le modèle de synthèse qui correspond à l'avion souple est la "somme" du modèle rigide (A et R) et du modèle flexible (F) (voir chapitre 2).
Le problème de commande est résolu sous la forme d'un problème d'optimisation H_∞ pondéré à 2 degrés de liberté.

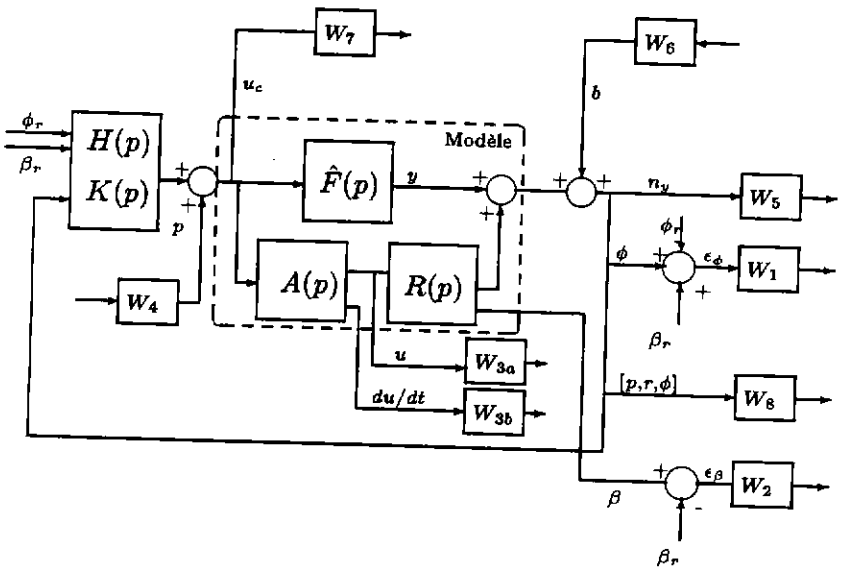


FIG. 2.11 – *Schéma de synthèse H_∞ à 2 degrés de liberté.*

Le modèle de synthèse est un modèle d'ordre 54 (40 pour la partie flexible, 10 pour les actionneurs et 4 pour le modèle rigide). Le temps de montée est défini par le temps mis

par la sortie pour atteindre 90% de la valeur désirée par l'entrée référence du type échelon. Les spécifications sont les suivantes :

1. Le temps de montée de la sortie β doit être inférieur à 6 secondes avec une erreur statique faible pour $\epsilon_\beta = \beta - \beta_r$ et un dépassement inférieur à 20%.
2. Le temps de montée de la sortie ϕ doit être inférieur à 6 secondes pour un échelon sur β_r avec une erreur statique faible pour $\epsilon_\phi = \phi - \phi_r + \beta_r$ et aucun dépassement.
3. Le dérapage induit par ϕ sur β doit être limité (typiquement $\beta \leq 0.5$ degrés pour une pente de la rampe en ϕ_r de 2 degrés/s).
4. Les sorties β et ϕ doivent être à minimum de phase.
5. L'amplitude des sorties des actionneurs u doit être limitée à ± 30 degrés.
6. La dérivée première des sorties actionneurs du/dt doit être limitée à ± 30 degrés/s.
7. La contribution de la partie flexible du modèle G sur n_y doit être minimisée à l'aide du correcteur par rapport à la boucle ouverte pour les entrées vent p.
8. La stabilité robuste doit être assurée sur le modèle de synthèse, i.e. la boucle fermée doit être stable sur le modèle complet d'ordre 81 (67 pour la partie flexible, 10 pour les actionneurs et 4 pour la partie rigide).

La spécification 7 est très importante puisqu'elle correspond au confort passager. Si les pics de résonance ne sont pas atténués, l'appareil entretiendra des oscillations qui pourraient être très inconfortables pour les passagers.
Le schéma de synthèse H_∞ est donné par la figure 2.11. Les entrées p et b représentent respectivement les entrées perturbations basses fréquences et les bruits de mesure hautes fréquences. W et $\hat{F}(p)$ représentent respectivement les gabarits fréquentiels et la partie flexible identifiée d'ordre réduit de l'avion. Le choix des pondérations W et des vecteurs d'entrée et de sortie e et s est fait à partir des spécifications. Plus précisément pour satisfaire la spécification numéro :

- 1 et 3 on considère l'entrée β_r et la sortie ϵ_β.
- 2 et 3 on considère l'entrée β_r et ϕ_r et la sortie ϵ_ϕ.
- 4 on considère l'entrée ϕ_r et la sortie ϵ_β.
- 5 on considère les entrées β_r, ϕ_r p et b et la sortie u.
- 6 on considère les entrées β_r, ϕ_r p et b et la sortie du/dt.
- 7 on considère l'entrée p et la sortie n_y.
- 8 on considère l'entrée b et la sortie u_c.

Ce sont tous les signaux liés explicitement aux spécifications du cahier des charges. On rajoute en sortie du schéma de synthèse les sorties p, r et ϕ pour avoir l'ensemble des signaux de sortie du modèle de synthèse à savoir $y = [n_y,p,r,\phi]$. Ces sorties sont essentielles puisqu'elles permettent de faire apparaître dans le schéma de synthèse les transferts en boucle fermée S_y et $GS_u = S_yG$. Finalement on pondère l'ensemble des transferts en boucle fermée : S_u, S_y, KS_y et GS_u. En d'autres termes on assure la robustesse face à l'ensemble des incertitudes intervenant sur la boucle fermée. Dans le cas où l'on n'aurait

TAB. 2.1 – *Choix des gabarits fréquentiels en fonction des spécifications.*

Spécification numéro	Gabarit
1,3	$W_2(p)$
2,3	$W_1(p)$
4	$W_2(p)$
5	$W_{3a}(p)$
6	$W_{3b}(p)$
7	$W_4(p)$ et $W_5(p)$
8	$W_6(p)$ et $W_7(p)$

pas utilisé la sortie y dans le critère H_∞, on aurait obtenu une solution satisfaisant le cahier des charges, mais la robustesse associée à S_y avec entre autres la MM en sortie et à GS_u aurait été très probablement insuffisante. Il est donc impératif lors de la synthèse et ce quelle que soit la méthode utilisée de prendre en compte a priori ou a posteriori l'ensemble des transferts en boucle fermée même si certains ne correspondent pas explicitement à des spécifications de performance ou de robustesse.

Finalement le vecteur d'entrée $i^T = [\phi_r, \beta_r, p, b]$ et le vecteur de sortie $o^T = [\epsilon_\beta, \epsilon_\phi, u, du/dt, u_c, n_y, p, r, \phi]$ sont respectivement de dimension 4 et 9. Le lien entre les spécifications et les pondérations est résumé dans le tableau 2.1. Les spécifications conduisent à un choix de gabarit spécifique. Le tableau 2.1 montre clairement que ce choix se fait à partir de considérations physiques. En ce sens, il est réellement possible d'élaborer une méthodologie de synthèse. C'est ce qui va être présenté dans l'application à l'avion souple.

2.3.1 Méthodologie

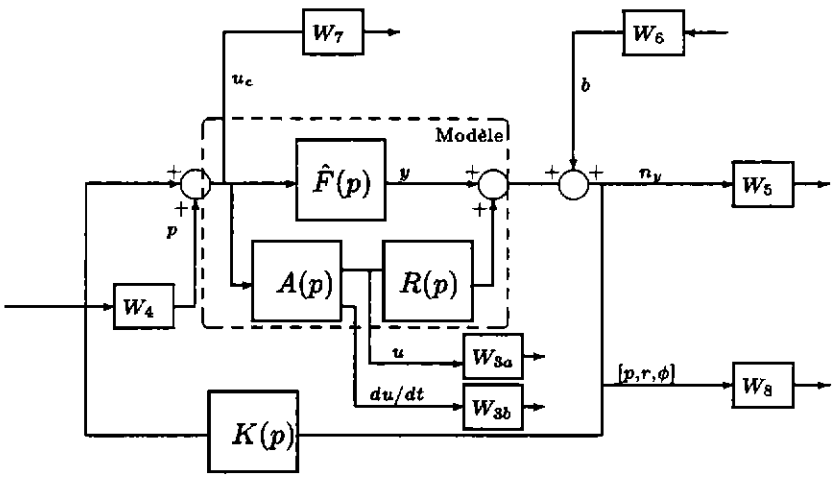


FIG. 2.12 – *Schéma de synthèse H_∞ à 1 degré de liberté.*

Pour faciliter les réglages et étudier les compromis, la synthèse est d'abord réalisée sur un correcteur à 1 degré de liberté puis à 2 degrés de liberté. La synthèse de K est réalisée à

partir du schéma de synthèse donnée par la figure 2.12. Une fois K obtenu on synthétise H et K en utilisant la figure 2.11 respectant donc les spécifications en boucle fermée.

2.3.2 Synthèse du *feedback* K

2.3.2.1 Marge de module et atténuation des pics de résonance.

Une spécification forte est l'atténuation des pics de résonance sur n_y pour les entrées vent notées p. Cette spécification peut être facilement satisfaite à l'aide des pondérations $W_5(p)$ et $W_4(p)$. Néanmoins il est important de mettre en évidence le compromis suivant. La fonction de sensibilité en sortie $S_y = (I + GK)^{-1}$ conditionne l'inverse de la marge de module en sortie. La fonction de sensibilité en entrée $S_u = (I + KG)^{-1}$ conditionne l'inverse de la marge de module en entrée. La matrice de transfert entre p et y est S_yG. En d'autres termes les pics de résonance doivent être atténués sur S_yG, et plus précisément sur la première sortie n_y de ce transfert. Supposons que l'on contraigne fortement la norme H_∞ sur S_y pour obtenir une très bonne marge de module en sortie. Si S_y présente des gains faibles (≈ 0 dB), cela signifie que les zéros de K compensent exactement les pôles de G, ce qui correspond donc à une compensation pôles-zéros mal amortis. Ce qui est généralement fortement déconseillée car elle est très sensible à l'incertitude sur la fréquence des pôles amortis, ce qui peut amener dans le cas où la fréquence des pôles est plus faible que prévue à l'instabilité de la boucle fermée. Donc chercher à trop contraindre la MM conduit à une faible robustesse face à des incertitudes sur la fréquence et l'amortissement des modes souples. De plus, même dans le cas idéal où la fréquence des pôles mal amortis est connue exactement (par une méthode adaptative par exemple), le manque de robustesse apparaît clairement dans le transfert S_yG qui présente des pics de résonance correspondant exactement aux pics de résonance du modèle G puisque les pôles mal amortis sont annulés dans la fonction S_y. A contrario on peut chercher à écraser les pics de résonance sur la fonction S_yG. Dans ce cas c'est le transfert S_y qui annulera les pôles mal amortis de G. C'est ce que l'on appelle une politique active des pôles mal amortis. Néanmoins avoir une politique trop active, i.e. annuler les résonances de G par S_y conduit à une fonction de sensibilité présentant une norme H_∞ très élevée et donc une marge de module trop faible pour pouvoir assurer une robustesse vis à vis des incertitudes. Il apparaît clairement un compromis entre une politique active du correcteur sur les modes souples et une marge de module acceptable, i.e. située entre 6 et 10 dB. Ce compromis est un compromis classique de la commande des structures flexibles. Cette limitation dans la politique active, politique correspondant au confort passager, n'est pas intrinsèque à la méthode H_∞ utilisée mais est une limitation physique de tout système flexible. Ici, ce compromis apparaît de façon explicite lors de la synthèse H_∞ ce qui rend d'autant plus attrayant la méthodologie H_∞. Il s'agit donc dans un premier temps de choisir des pondérations afin d'assurer une MM en sortie d'à peu près 6 dB. L'explication fournie sur le compromis entre S_y et S_yG est tout à fait équivalente pour S_u et $S_yG = GS_u$. En d'autres termes on atténuera les pôles sur S_yG tout en contrôlant les MM en entrée et en sortie représentées par l'inverse de la norme H_∞ de S_y et S_u. La pondération sur le signal de sortie $y = [n_y,p,r,\phi]$ est représentée par $W_s = diag(W_5,W_8)$. Les pondérations associées au transfert S_y sont d'après la figure 2.12

W_s et W_6. La contrainte fréquentielle que doit satisfaire la boucle fermée est la suivante :

$$\|W_s S_y(p) W_6\|_\infty \leq 1 \tag{2.35}$$

Pour assurer une MM en sortie autour de 6 dB il suffit de prendre pour les pondérations de simples gains comme par exemple $W_6 = 1$ et $W_s = 0.5$. Néanmoins pour éviter d'avoir un problème trop contraint (γ trop élevé) on prend finalement $W_6 = 0.5$ et $W_s = 0.5$.

2.3.2.2 Atténuation des pics de résonance sur n_y

Il s'agit d'atténuer les pics de résonance sur le transfert $T_{p \to n_y}$ tout en respectant la contrainte sur les MM. Plus précisément on pondère le transfert entre l'entrée vent et la première sortie de $S_y G$ avec les pondérations $W_5(p)$ et $W_4(p)$. On choisit $W_5 = 1.5$ de façon à limiter l'agitation de n_y. Finalement on a $W_s = diag(1.5, 0.5 I_3)$. On augmente progressivement W_4 de façon à contraindre les pics de résonance entre l'entrée vent p et la sortie n_y. On aboutit finalement à $W_4 = 6$: c'est l'amortissement maximum que l'on obtient tout en maintenant une MM en entrée et en sortie ≈ 10 dB. Il est possible d'augmenter W_4 mais cela conduit à des MM trop faibles.

2.3.2.3 Stabilité robuste

Un aspect tout aussi essentiel que l'amortissement des pôles est celui de la robustesse sur le modèle de synthèse, puisque l'on doit assurer sur celui-ci la stabilité du modèle complet en boucle fermée. Nous avons déjà donné l'erreur d'identification $\Delta(j\omega)$ dans le domaine fréquentiel avec la figure 1.7. La stabilité robuste sur le modèle de synthèse est assurée si $\overline{\sigma}(\Delta K S_y) \leq 1$ puisque le transfert en boucle fermée associé à l'erreur Δ est $K S_y$. Les pondérations correspondant au transfert $K S_y$, i.e. aux entrées b et aux sorties u_c sont W_6 et W_7. W_6 est fixé, il ne reste plus qu'à déterminer W_7. Il suffit de prendre un gain pour $W_7 = 0.03$ pour satisfaire la contrainte de robustesse $\overline{\sigma}(\Delta K S_y) \leq 1$. Il est important de remarquer que la spécification de robustesse sur la boucle fermée a été réalisée facilement. Cela provient du fait que $K S_y$ dépend entre autres de S_y. Ce qui signifie que si on a une norme H_∞ relativement modérée pour S_y il sera d'autant plus facile à l'aide de K de contrôler la norme H_∞ de $K S_y$. Ici on propose une explication quantitative de la pondération de $K S_y$ car S_y dépend aussi de K et finalement on a une relation profondément non linéaire en K de $K S_y$ (il est à noter que K intervient dans le dénominateur de S_y et donc lorsque le gain de K diminue, S_y aurait tendance à augmenter, ce qui montre clairement que S_y et $K S_y$ sont intimement liés et qu'il est nécessaire de régler S_y et $K S_y$ simultanément pour obtenir le meilleur compromis possible). Pour illustrer cette explication, il est possible d'atténuer fortement les pics de résonance de $G S_y$, ce qui va se traduire, comme on l'a expliqué précédemment, par une faible MM, i.e. une norme H_∞ pour S_y élevée (>20 dB). Dans ce cas on constate qu'il est certes possible de pondérer le transfert $K S_y$ de façon à diminuer sa norme H_∞ mais qu'il n'est pas possible de satisfaire la spécification de robustesse, à savoir $\overline{\sigma}(\Delta K S_y) \leq 1$.
Il est important ici de mettre en évidence les compromis auxquels on a à faire. Comme dans

beaucoup de cas les premiers transferts en boucle fermée à pondérer sont les fonctions de sensibilité S_u et S_y. Elles permettent d'assurer une robustesse minimale par rapport aux MM. Une fois que celles-ci sont fixées on cherche à atténuer les pics de résonance sur $T_{p\to n_y}$, i.e sur la première sortie de S_yG. On diminuera les pics jusqu'au moment où l'on atteint des MM acceptables, typiquement inférieures ou égales à 10 dB. Ces deux transferts étant fixés, on pondère KS_y afin d'assurer la stabilité robuste, étape d'autant plus facile à réaliser que les réponses fréquentielles de S_y et S_u sont modérées.
Il est important de noter que W_4 et W_7 agissent sur S_u qui représente la MM en entrée. Malheureusement on n'a pas de pondération supplémentaire pour agir indépendamment sur S_u. Or W_4 et W_7 sont déjà fixés. Il est donc essentiel de tenir compte de S_u lorsqu'on augmente W_4 et W_7. Pour $W_4 = 6$ et $W_7 = 0.03$ on contraint efficacement KS_y (stabilité robuste assurée) tout en obtenant une MM en entrée ≈ 10 dB.

2.3.3 Synthèse de la précommande

2.3.3.1 Spécifications de performance

Les fonctions de transfert pondérées en boucle fermée associées aux spécifications de performance sont $T_{\beta_r,\phi_r\to\epsilon_\beta}W_2$ et $T_{\beta_r,\phi_r\to\epsilon_\phi}W_1$. A partir du schéma de synthèse donné par la figure 2.11 les gabarits fréquentiels sont $|W_1(j\omega)^{-1}|$ et $|W_2(j\omega)^{-1}|$. Plus précisément les zéros de $W_1(p)$ et $W_2(p)$ agissent directement sur le temps de montée. Plus les zéros sont situés en hautes fréquences plus le temps de montée sera court et plus l'effort de commande sera significatif et inversement. De plus, plus la fréquence des pôles de $W_1(p)$ et $W_2(p)$ est faible, plus l'erreur de poursuite est faible sur ϵ_β et ϵ_ϕ. Le gain en hautes fréquences est déterminé pour limiter un éventuel dépassement de la sortie. Donc pour satisfaire des temps de montée inférieurs à $6s$, avec un dépassement limité de β et ϕ et un effort de commande limité, les gabarits fréquentiels choisis sont $W_1 = \frac{0.5\times(p+0.7)}{p+10^{-3}}$ et $W_2 = \frac{0.5\times(p+0.8)}{p+10^{-1}}$. On peut remarquer qu'une erreur de poursuite maximum de 10^{-3} est assurée sur ϕ mais seulement de 10^{-1} sur β car il n'a pas été possible d'imposer une contrainte plus forte sur l'erreur statique. Néanmoins le transfert $T_{\beta_r\to\epsilon_\beta}$ possède un gain statique de -30 dB soit une erreur de poursuite d'à peu près 5%.
On constate que la pondération W_2 agit entre l'entrée ϕ_r et la sortie ϵ_β. Ce qui signifie qu'assurer un faible gain en basses fréquences sur le transfert $T_{\phi_r\to\epsilon_\beta}$ permet d'avoir une erreur statique faible dans le cas de consigne échelon sur ϕ_r et une erreur statique modérée dans le cas d'une consigne rampe sur ϕ_r.
De plus on remarque que $W_2(p)$ agit aussi sur $T_{p\to\epsilon_\beta}$ et $W_1(p)$ sur $T_{p\to\epsilon_\phi}$. Ainsi de faibles gains pour $W_1(j0)$ et $W_2(j0)$ permettent d'assurer une certaine insensibilisation des sorties ϕ et β par rapport aux perturbations en entrée. Cette caractéristique n'est pas exigée explicitement dans le cahier des charges, néanmoins il est nécessaire d'avoir une influence modérée de p sur les sorties ϕ et β pour le confort du pilote et lui éviter des corrections trop importantes pour des pertubations p qui seraient faibles.

2.3.3.2 Effort de commande

La contrainte sur l'amplitude des signaux de commande est prise en compte lors de la synthèse de la précommande H du fait que l'on synthétise un correcteur à 2 degrés de liberté. Donc pour contrôler l'amplitude maximum de u et du/dt, les fonctions de pondérations W_{3a} et W_{3b} sont utilisées puisque les transferts pondérés en boucle fermé sont $T_{\phi,\beta\to u,du/dt}W_{3a,3b}$ et $W_4T_{p\to u,du/dt}W_{3a,3b}$. W_4 est fixé, donc les dernières pondérations à ajuster sont W_{3a} et W_{3b}. W_{3a} et W_{3b} agissent sur l'effort de commande dû aux entrées référence et aux entrées vent. Comme précédemment pour limiter la complexité de la loi de commande obtenue on utilise seulement des gains. Ces gains sont augmentés jusqu'à ce que les valeurs maximales de u et du/dt soient limitées. Les pondérations obtenues sont $W_{3a} = 0.01$ et $W_{3b} = 0.001$. Notons que durant la synthèse de K, $W_{3a} \approx 0$ et $W_{3b} \approx 0$. De plus les 2 commandes en β et les 2 commande en ϕ (modèle à 4 entrées) ont été réunies pour n'avoir plus qu'une seule commande en β et une seule commande en ϕ et ceci sans perte de généralités.

2.3.4 Résultats

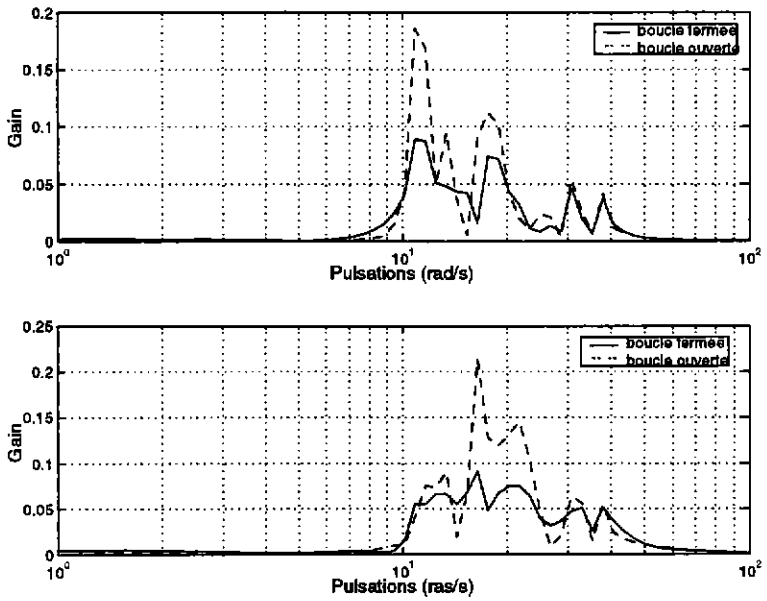


FIG. 2.13 – *Spécifications de confort sur n_y*

Les figures 2.13 et 2.14 montre bien le compromis entre l'amortissement des modes souples sur n_y et les fonctions de sensibilité S_u et S_y. On constate que les pics de résonance en boucle fermée sont nettement atténués par rapports aux pics de résonance du même transfert en boucle ouverte: le confort passager a été nettement amélioré par rapport à ce qu'il était en boucle ouverte. On constate que les MM en entrée et sortie sont très convenables puisqu'elles se situent autour de -10 dB.

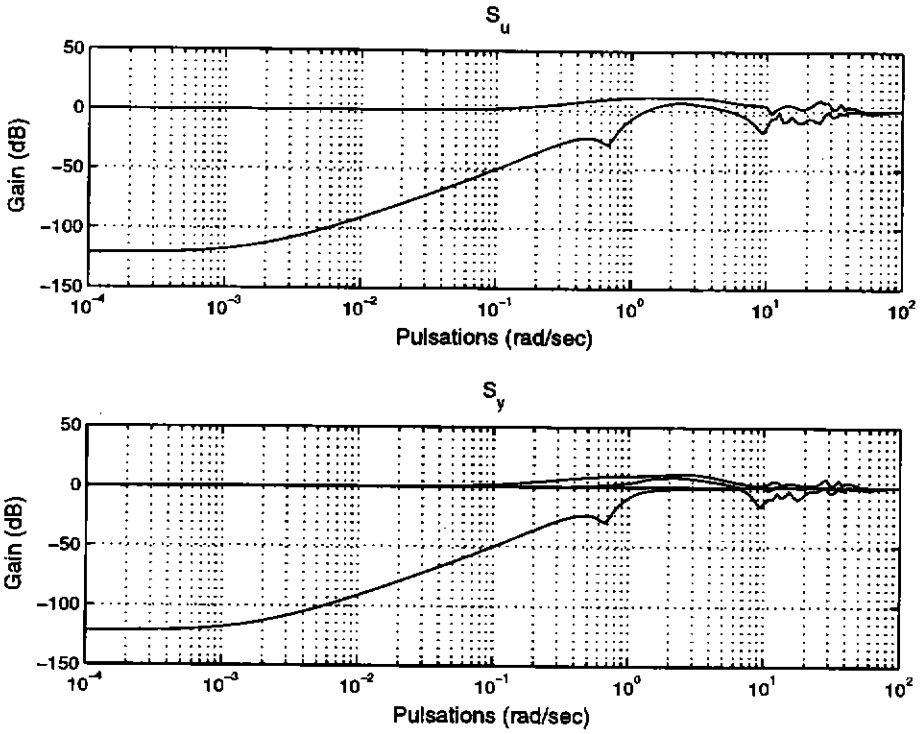


FIG. 2.14 – *Fonctions de sensibilité en entrée (S_u) et en sortie (S_y)*

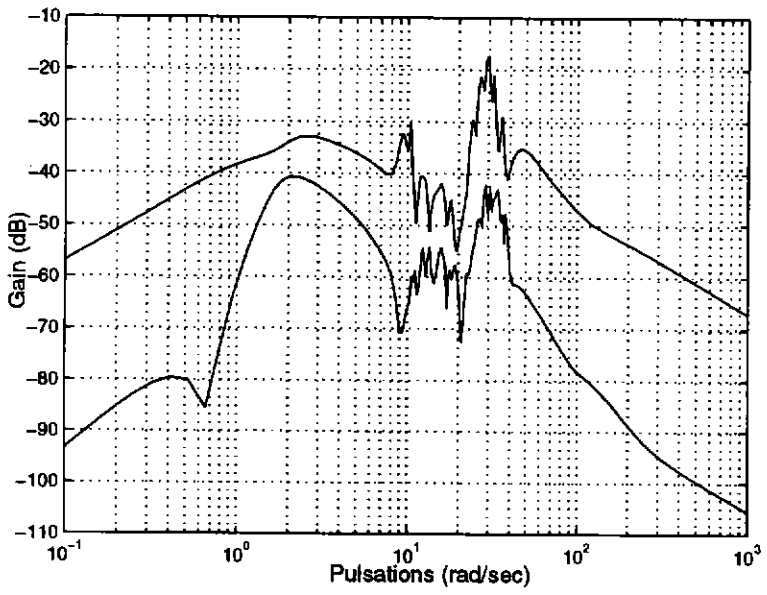
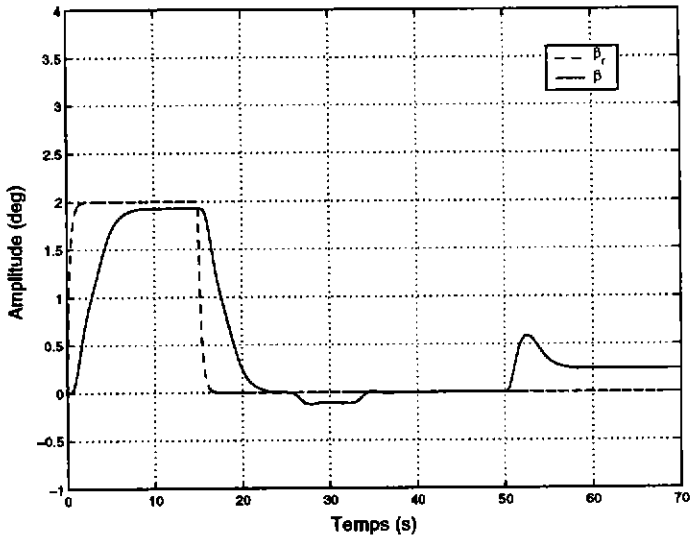
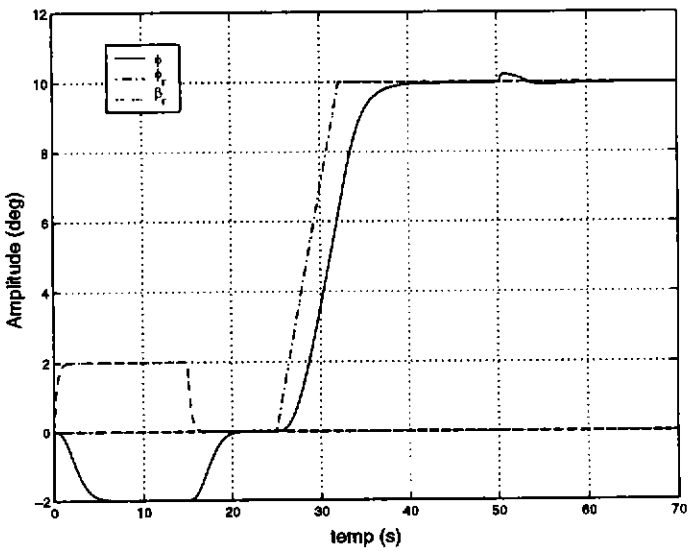


FIG. 2.15 – *Valeurs singulières de $\overline{\sigma}(\Delta K S_y)$*

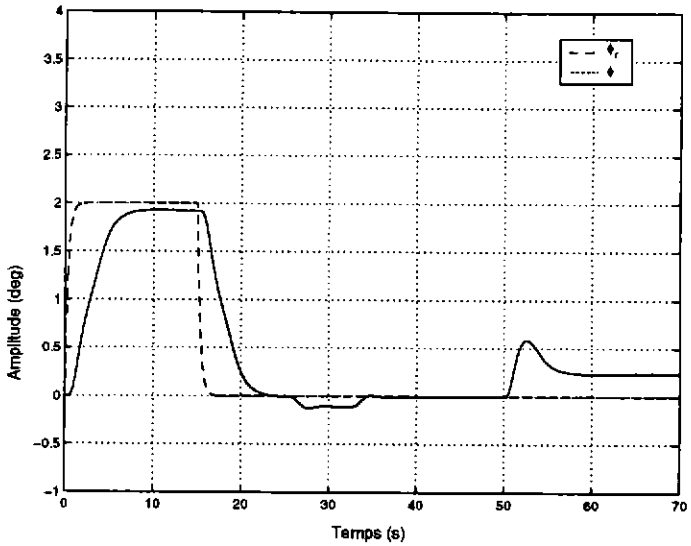


(a) La sortie β

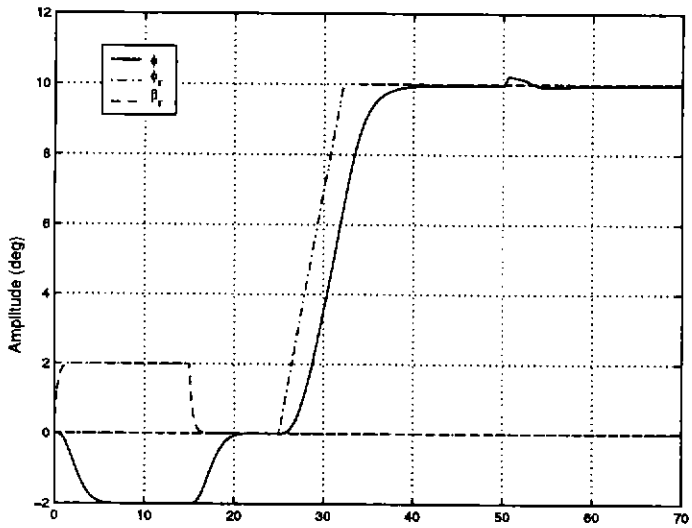


(b) La sortie ϕ

FIG. 2.16 – *Spécifications de performance sur le modèle de synthèse*

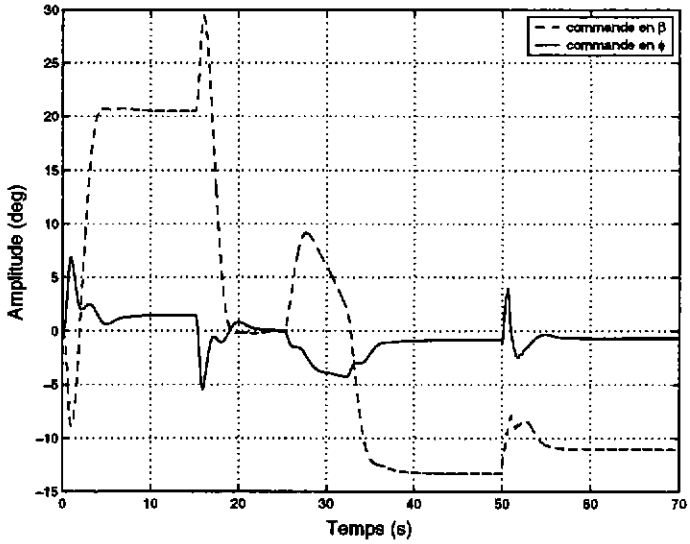


(a) La sortie β

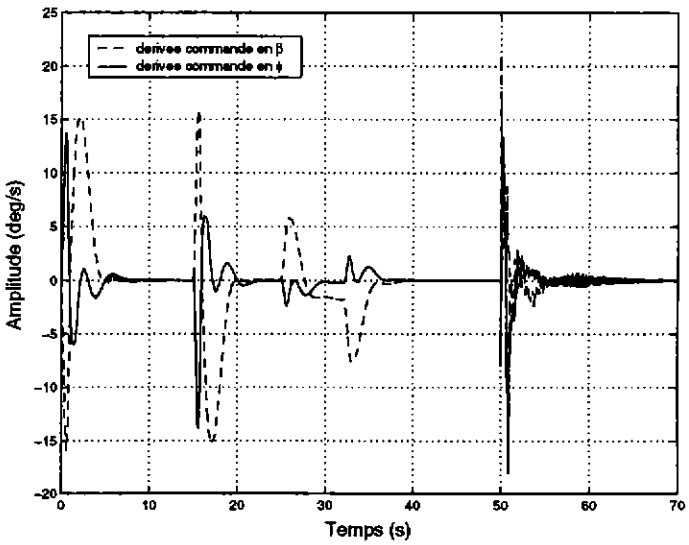


(b) La sortie ϕ

FIG. 2.17 – *Spécifications de performance sur le modèle complet*



(a) Effort de commande u



(b) Effort de commande du/dt

FIG. 2.18 – *Spécifications de commande*

La robustesse en stabilité est donnée par la figure 2.15. Comme $\overline{\sigma}(\Delta K S_y(j\omega)) \leq 1$ la stabilité robuste est assurée sur le modèle complet.
La simulation temporelle pour les spécifications de performance est donnée par la figure 2.16. Pour l'entrée référence β_r on utilise un échelon filtré pour tester les sorties β et ϕ. Ce signal est appliqué à l'instant initial de la simulation. Le filtre utilisé est $(p/3+1)^{-1}$. La simulation temporelle est aussi réalisée avec une entrée rampe sur ϕ_r à la $25^{eme}s$. C'est une entrée référence typique pour tester la sortie ϕ. L'entrée perturbation p est un échelon de 2 degrés sur les entrées commande appliqué à la $50^{eme}s$. Les résultats dans le domaine temporel satisfont les spécifications de performance puisque les temps de montée sont inférieurs à 6 s pour ϕ et β. On ne constate aucun effet à non minimum de phase et aucun dépassement sur les sorties β et ϕ n'est observé. Enfin les perturbations en entrée p sont efficacement "traitées". On remarque pour la sortie ϕ que la boucle fermée est insensibilisée par rapport aux perturbations en entrée p et que pour la sortie β la perturbation p est fortement atténuée puisque l'erreur statique sur ϵ_β n'est que de 0.3 degrés pour une perturbation échelon de 2 degrés.
On remarque de plus le faible couplage entre β et ϕ puisque β ne varie que de 0.1 degré lorsque la référence rampe est appliquée sur ϕ_r. Le dérapage induit par ϕ sur β est faible, permettant ainsi un découplage entre les deux chaînes de commande et donc au pilote de gérer ces deux chaînes de façon indépendante. Globalement on constate que les spécifications de performance sont entièrement satisfaites et même au delà (rejet/atténuation des perturbations en entrée et très faible couplage entre ϕ et β). Les résultats sur le modèle complet sont donnés par la figure 2.17. On constate bien que la stabilité est assurée avec un comportement très proche du modèle de synthèse.
Les résultats sur l'effort de commande sont donnés par la figure 2.18. On constate que l'amplitude de u et de du/dt ne dépassent pas les valeurs maximales données dans les spécifications.

2.4 Conclusion

Nous avons considéré le domaine fréquentiel à la fois pour l'identification et la commande. Grâce à cette approche on a pu utiliser l'erreur d'identification dans le domaine fréquentiel lors de la synthèse pour assurer a priori la robustesse sur le modèle complet mettant en avant ainsi une approche d'identification-commande type boite noire. Lors de l'identification on a pris en compte l'objectif de commande (bande passante et pics de résonance) et lors de la synthèse on a pris en compte l'erreur d'identification. De plus la synthèse H_∞ offre l'avantage de traiter naturellement les problèmes concernant l'amortissement des modes souples. Enfin la synthèse d'un correcteur à 2 degrés de liberté (synthèse du *feedback* K et de la précommande H) se fait de façon très naturelle.
Il est important de noter que la synthèse H_∞ pondérée permet véritablement une synthèse méthodologique. On s'est attaché à montrer que ce sont les spécifications du cahier des charges qui conduisent à construire le critère H_∞. Ce critère H_∞ est maléable et adaptable à un très grand nombre de problèmes de commande. Il ne s'agit en aucun d'utiliser un critère mathématique unique pour résoudre des problèmes différents comme c'est le cas

dans de nombreuses méthodes de synthèse. En contrepartie la construction de ce critère demande un effort d'analyse du problème de commande et augmente le nombre de paramètres de réglage lors de la synthèse au travers du choix des pondérations. Mais le point essentiel, crucial, est que ces degrés de liberté sont directement interprétables en termes de comportement entrées-sorties et ont véritablement un sens physique. La synthèse H_∞ fait appel à l'analyse fréquentielle des différents transferts en boucle fermée. A partir d'un comportement désiré de la boucle fermée on agit sur les différents degrés de liberté des pondérations. En d'autres termes le critère H_∞ est construit pour résoudre un problème de commande particulier et prendre en compte explicitement un ensemble de spécifications de performance et de robustesse.

Conclusion générale

Les travaux que nous avons menés au cours de cette thèse ont eu pour but de proposer de véritables méthodologies combinant l'identification et la commande. Le terme méthodologie est essentiel car l'un des intérêts fondamental de ces diverses techniques est de ne pas être spécifique aux problèmes aéronautiques. Nous avons développé différentes approches dans un contexte applicatif fort et ceci dans le domaine aéronautique. Mais ces approches sont parfaitement "exportables" à d'autres systèmes. Il n'y a eu aucune restriction ou libertés supplémentaires du fait du choix des applications. Les limites et hypothèses des différentes approches sont intrinsèques et identiques quel que soit le système à commander.
Rappelons simplement le thème de cette thèse. Cette thèse s'inscrit dans le développement de nouvelles approches combinant l'identification et la commande dans un contexte aéronautique. L'interaction identification-commande peut se décomposer en deux grandes parties : la retouche de correcteurs et les schémas d'identification-commande.

- Le principe du réajustement de correcteurs est le suivant : un correcteur initial est synthétisé sur un modèle de synthèse. Ce correcteur est implémenté sur le véritable système. Malheureusement il ne respecte pas l'ensemble des spécifications du cahier des charges. Il s'agit donc à partir de nouvelles données d'entrées-sorties de retoucher le correcteur afin qu'il ait le comportement désiré sur le véritable système. Le point clef du réajustement est de réduire à son strict minimum l'étape de recalage ou d'identification du modèle.
- Les schémas d'identification-commande consistent à prendre en compte durant l'identification les objectifs de commande et durant la synthèse la structure et les erreurs d'identification. Dès lors on peut avoir un très grand nombre d'approches en fonction de la connaissance et des hypothèses que l'on a priori sur le système.

Nous avons développé un certain nombre de méthodes qui couvrent un large ensemble de problèmes.
La partie I est consacrée au problème de réajustement de correcteurs. Plus précisément le chapitre I propose une méthode permettant de réajuster un correcteur à l'aide exclusivement des données d'entrées-sorties, en court-circuitant une identification préalable. Cette approche considère un ensemble de correcteurs admissibles, un ensemble de mesures et un ensemble de spécifications H_∞. Cette technique consiste à déterminer un sous ensemble de l'ensemble des correcteurs admissibles satisfaisant effectivement les spécifications à partir des données d'entrées-sorties. La falsification a été appliquée à un problème réaliste d'un avion du type A330 en phase d'approche, montrant ainsi l'intérêt de cette approche. Le

point important de la falsification et de s'affranchir complètement d'un modèle et de n'utiliser que les données. Le chapitre II prend le contre pied puisque cette seconde technique de réajustement fait appel à l'un des outils de base de la commande robuste et de la μ-analyse qui est le critère de Nyquist. La phase d'identification est très réduite puisqu'elle consiste simplement à un recalage de la réponse fréquentielle à l'aide des nouvelles données d'entrées-sorties. On a montré que le réajustement à partir du critère de Nyquist MIMO qui est à la base un critère profondément nonlinéaire au travers de l'opérateur *déterminant* se ramène à un problème bilinéaire que l'on résout, grâce à une heuristique, par une série de problèmes d'optimisation LP/QP.

La connaissance du système permet d'envisager une approche structurée du problème d'identification-commande. Il est possible à partir des équations physiques décrivant le système, ici le modèle latéral d'un avion rigide, de le mettre sous forme LFT et de l'identifier. Identifier un modèle LFT permet d'identifier les paramètres physiques d'un système MIMO. Pour cela nous avons utilisé deux outils : la synthèse convexe et la SMI. Le chapitre I présente la synthèse convexe et justifie son emploi dans le cadre de l'identification d'une LFT : il est possible de minimiser séparément la norme H_∞ des transferts physiques et fictifs de la boucle fermée sur un domaine fréquentiel limité. Le chapitre II présente la SMI, qui est une technique d'identification basée sur une hypothèse déterministe et non statistique du bruit, consistant à construire des sur-ensembles contenant le FPS. Ces sur-ensembles sont cohérents avec les mesures passées, le bornitude du bruit et la structure du modèle. Cette approche nous permet de donner des intervalles de confiance sur les paramètres estimés de la LFT. Le chapitre III traite spécifiquement de l'identification du modèle LFT, mettant en évidence les contraintes de la méthode, la sensibilité du schéma d'identification en boucle fermée en fonction du correcteur et la possibilité par le correcteur de minimiser cette sensibilité à l'aide de la synthèse convexe. De plus grâce à la SMI et à la forme LFT on a un ensemble continu de modèles linéaires identifiés directement exploitable par la commande robuste grâce à un cadre unifié qui est la forme LFT.

Enfin la partie III propose une approche identification-commande type boite noire. Cette approche est nécessaire dans le cas ou la forme LFT n'est plus exploitable du fait de sa taille comme c'est le cas pour le modèle flexible de l'avion souple. Le chapitre I présente une méthode d'identification appelée sous espaces fréquentiels pour identifier dans le domaine fréquentiel des systèmes MIMO. Cette technique permet de prendre en compte facilement les objectifs de commande de l'avion souple à savoir la bande passante et une bonne précision pour l'estimation des pics de résonance. Le chapitre II montre comment il est possible par la synthèse H_∞ pondérée à deux degrés de liberté de résoudre un problème de commande complexe et de prendre en compte a priori l'erreur d'identification dans le domaine fréquentiel. Ceci permet d'assurer la stabilité du modèle complet à partir du modèle de synthèse.

Nous pouvons évoquer quelques perspectives sur les différentes méthodes présentées. Une perspective importante pour la falsification serait de considérer des ensembles continus de correcteurs comme c'est le cas dans [TS93b, TS93a]. Mais cela reste un problème difficile

et très contraignant car utilisant des hypothèses fortes sur le système. Il serait intéressant d'appliquer la synthèse convexe pour affiner le correcteur issu de la synthèse H_∞ pour la commande de l'avion souple. Cela permettrait de prendre en compte explicitement des critères de robustesse issus du μ. De même on pourrait améliorer la synthèse H_∞ en considérant d'autres sorties accélérations n_y à l'arrière ou au milieu de l'appareil. Pour l'identification par les sous espaces fréquentiels il serait intéressant d'utiliser des données bruitées et d'évaluer les conséquences sur le schéma d'identification-commande type boite noire.

Plus généralement pour le réajustement il serait intéressant de prendre en compte plus directement un ensemble plus large de spécifications issues du cahier des charges. Pour le réajustement LP/QP on ne peut prendre en compte que des spécifications du type marges de robustesse en boucle ouverte. Pour le réajustement par falsification on ne prend en compte que des spécifications fréquentielles. Il serait intéressant par exemple de proposer une autre méthode ou une extension de ces méthodes pour des spécifications comme des temps de montée, des MM, la position de certains pôles etc. Pour les schémas d'identification-commande, jusqu'ici on s'est intéressé à combiner des méthodes d'identification et de commande qui avaient été développées séparément. On les a donc combinées a posteriori. Il serait intéressant de proposer un critère mathématique commun a priori entre l'identification et la commande. Au sein de ce critère on trouverait à la fois les objectifs d'identification et les objectifs de commande.

Bibliographie

[ABF+97a] D. Alazard, A. Bucharles, G. Ferreres, N. Imbert, and S. Prudhomme. *Commande et identification d'un avion souple (COVAS). Annexe technique II.* décembre 1997.

[ABF+97b] D. Alazard, A. Bucharles, G. Ferreres, N. Imbert, and S. Prudhomme. *Commande et identification d'un avion souple (COVAS). Annexe technique III.* décembre 1997.

[ABF+97c] D. Alazard, A. Bucharles, G. Ferreres, N. Imbert, and S. Prudhomme. *Commande et identification d'un avion souple (COVAS). Rapport final de synthèse.* décembre 1997.

[ABF+98a] D. Alazard, A. Bucharles, G. Ferreres, N. Imbert, and S. Prudhomme. *Commande et idenification d'un avion souple (COVAS). Annexe technique III.* décembre 1998.

[ABF+98b] D. Alazard, A. Bucharles, G. Ferreres, N. Imbert, and S. Prudhomme. *Commande et identification d'un avion souple (COVAS). Rapport final de synthèse.* décembre 1998.

[ABF+99] D. Alazard, A. Bucharles, G. Ferreres, N. Imbert, and S. Prudhomme. *Commande et identification d'un avion souple (COVAS). Rapport final de synthèse.* décembre 1999.

[Bay94] D.S. Bayard. An algorithm for state-space frequency domain identification without windowing distortions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(9), September 1994.

[BB85] G. Belforte and B. Bona. An improved parameter identification algorithm for signals with unknown but bounded errors. *Proceedings of the IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation*, pages 1507–1512, 1985.

[BBC90] G. Belforte, B. Bona, and V. Cerone. Parameter estimation algorithms for a set membership description of uncertainty. *Automatica*, 26(5) :887–898, 1990.

[Bel95] G. Belforte. Uncertainty evaluation for estimates from recursive projection algorithms. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 9 :97–106, 1995.

[BFS98] P. B Brugarolas, V. Fromion, and M. G. Safonov. Robust switching missile autopilot. In *Proceedings of the ACC*, Philadelphie, PA, June 1998.

[BG+99] C. Blondeau, J.P. Grisval, , A. Bucharles, and S. Prudhomme. *Modélisation de l'avion souple (COVAS). Rapport final.* Janvier 1999.

[Boi96] J.L. Boiffier. *Dynamiques du vol 1ère et 2ème années SUPAERO. Notes de cours.* 1996.

[BS97] T. F. Brozenec and M. G. Safonov. Controller identification. In *Proceedings of the ACC*, Albuquerque, New Mexico, June 1997.

[BT93] G. Belforte and T.T. Tay. Two new estimation algorithms for linear models with unknown but bounded measurement noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(8):1273–1279, 1993.

[BTS01] T. F. Brozenec, T. C. Tsao, and M. G. Safonov. Controller validation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 15(5):431–444, August 2001.

[CG90] T. Clement and S. Gentil. Recursive membership set estimation for output error models. *Mathematics and computers in simulation*, pages 505–513, 1990.

[CJL93] C.W. Chen, J.N. Juang, and G. Lee. Frequency domain state space system identification. *Proceedings of the ACC*, June 1993.

[DA95] J. Douglas and M. Athans. Aqplication of set membership identification to lightly damped systems. *Proceedings of the ACC*, page 1418, 1995.

[Dai90] R.L. Dailey. A new algorithm for the real structured singular value. *Proceedings of the ACC*, pages 3036–3040, 1990.

[Dar98] I. Dardenne. *Développement de méthodologies pour la synthèse de lois de commande d'un avion de transport souple.* PhD thesis - ENSAE (France), 1998.

[DF98] I. Dardenne and G. Ferreres. Design of a lateral flight control system for a highly flexible aircraft using convex synthesis. *Proc. of the 1998 ICAS*, 1998.

[DF01a] F. Demourant and G. Ferreres. Frequency domain identification of an aircraft LFT model. *Proceedings of the European Control Conference*, 2001.

[DF01b] F. Demourant and G. Ferreres. Structured identification of an aircraft model. *Proceedings of the American Institute of Aeronautics and Astronautics GNC Conference*, 2001.

[DF02a] F. Demourant and G. Ferreres. Controller design for the identification of an LFT model. *IFAC World Congress 02*, 2002.

[DF02b] F. Demourant and G. Ferreres. A frequency domain identification-control approach for a flexible aircraft. *IEEE CCA 02*, 2002.

[DF02c] F. Demourant and G. Ferreres. Identification en boucle fermée d'un modèle LFT. *Journal Européen des Systèmes Automatisés: identification des systèmes*, 36, 2002.

[DFB02] F. Demourant, G. Ferreres, and J.M. Biannic. Falsification of an aircraft autopilot. *ACC 02*, 2002.

[DGKF89] J.C. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B.A. Francis. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8):831–845, 1989.

[DNPT94] J. Doyle, M. Newlin, F. Paganini, and J. Tierno. Unifying robustness analysis and system ID. *Proceedings of the IEEE CDC*, pages 3667–3672, 1994.

[Doy82] J. Doyle. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *IEE Proceedings, Part D*, 129(6) :242–250, 1982.

[Doy84] J.C. Doyle. *Matrix Interpolation Theory and Optimal Control.* PhD thesis, Univ. Calif. Bekerley, CA, 1984.

[Doy85] J.C. Doyle. Structured uncertainty in control system design. *Proceedings of the IEEE CDC*, pages 260–265, 1985.

[DS81] J.C. Doyle and G. Stein. Multivariable feedback design : concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(1) :4–16, 1981.

[DS88] R.R.E. DeGaston and M.G. Safonov. Exact calculation of the multiloop stability margin. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(2) :156–171, 1988.

[EL97] L. ElGhaoui and H. Lebret. Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. *Journal on Matrix Analysis and Applications*, 18(4) :1035–64, October 1997.

[FD99] G. Ferreres and C. Doll. Robust pole placement for an LFT model. *Proc. of the ACC*, 1999.

[FD00] G. Ferreres and F. Demourant. Retuning of a robust controller with an LP method. *Proceedings of the IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (St Petersburg, Russia)*, 2000.

[Fer95] G. Ferreres. *De l'utilisation des outils de robustesse pour la commande adaptative.* Thèse INPG (Grenoble), 1995.

[Fer99] G. Ferreres. *A practical approach to robustness analysis with aeronautical applications.* Kluwer Academics/Plenum Press, 1999.

[FF99] G. Ferreres and V. Fromion. H_∞ control for a flexible transmission system. *European Journal of Control*, 5(2-4) :185–192, 1999.

[FFDM96] G. Ferreres, V. Fromion, G. Duc, and M. M'Saad. Application of real / mixed μ computational techniques to a H_∞ missile autopilot. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(8) :743–769, October 1996.

[FG99] P.D. Fox and K.R. Godfrey. Multiharmonic perturbations for nonparametric autotuning. *IEE Proceedings*, 146(1) :1–8, 1999.

[FH82] E. Fogel and Y.F Huang. On the value of information in system identification - bounded noise case. *Automatica*, 18(2) :229–238, 1982.

[FM97] G. Ferreres and M. M'Saad. Estimation of output error models in the presence of unknown but bounded disturbances. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 11(2) :115–140, March 1997.

[Fon95] S. Font. *Méthodologie pour prendre en compte la robustesse des systèmes asservis : optimisation H_∞ et approche symbolique de la forme standard.* Thèse Université de Paris-Sud / Supelec (France), 1995.

[FS98] G. Ferreres and G. Scorletti. Robustness analysis in the presence of time delays. *Proc. of the IFAC workshop on linear time delay systems*, 1998.

[FTD91] M.K.H. Fan, A.L. Tits, and J.C. Doyle. Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(1) :25 – 38, 1991.

[FZ95] C.B. Feng and Y. Zhang. Unbiaised identification of systems with nonparamtric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(5) :933–936, 1995.

[Geh00] O. Gehan. *Sur la commande de procédés industriels.* thèse de doctorat - Université de Caen / Laboratoire d'Automatique des Procédés de Caen (LAPC-ISMRA), 2000.

[JCW88] J.N. Juang, J.E. Cooper, and J.R. Wright. An Eigensystem Realization Algorithm using Data Correlation (ERA/DC) for modal parameter identification. *Journal of Control Theory and Advanced Technology*, 4(1), 1988.

[JOI00] N. Jalili, N. Olgac, and M. Ide. Identification and retuning of optimum delayed feedback vibration aborber. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 23(6) :961–970, 2000.

[Jon87] R.D. Jones. structured singular value analysis for real parameter variations. *Proceedings of the AIAA GNC Conference*, pages 1424–1432, 1987.

[JP85] J.N. Juang and R.S. Pappa. An Eigensystem Realization Algorithm (ERA) for modal parameter identification and model reduction. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 8(5), 1985.

[JS88] J.N. Juang and H. Suzuki. An Eigensystem Realization Algorithm in frequency domain for modal parameter identification. *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 110(1), 1988.

[JS99] M. Jun and M. G. Safonov. Automatic pid tuning : An application of unfalsified control. In *Proceedings IEEE Symp. on CACSD*, Hawaii, August 1999.

[KK90] J.M. Krause and P.P. Khargonekar. Parameter identification in the presence of non-parametric dynamic uncertainty. *Automatica*, 26(1) :113–123, 1990.

[KLB92] R.L. Kosut, M.K>Lau, and S. Boyd. Set membership identification of systems with parametric and non parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(7) :929, 1992.

[KMTV86] B.Z. Kacewicz, M. Milanese, R. Tempo, and A. Vicino. Optimal of central and projection algorithms for bounded uncertainty. 8 :171–161, 1986.

[Kwa93] H. Kwakernaak. Robust control and H_∞ optimization - tutorial paper. *Automatica*, 29(2) :255–273, 1993.

[LJM96] K. Liu, R.N. Jacques, and D.W. Miller. Frequency domain structural system identification by observability range space extraction. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 118 :211–220, July 1996.

[MAL96] T. McKelvey, H. Akçay, and L. Ljung. Subspace-based multivariable system identification from frequency response data. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7) :960–979, July 1996.

[MB00] J. F. Magni and J. M. Biannic. *ONERA RealCAM design report.* BR-CT98-0627/TP05, December 2000.

[McK97] T. McKelvey. Frequency domain system identification with instrumental variable based algorithm. *ASME Design Engineering Technical Conferences, Sacramento*, September 1997.

[Mck00] T. Mckelvey. Frequency domain identification. *IFAC Symposium on System Identification SYSID 2000*, July 2000.

[MG90] D. McFarlane and K. Glover. *Robust controller design using normalized coprime factor plant descriptions.* Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer Verlag, 1990.

[MNPLW96] M. Milanese, J.P. Norton, H. Piet-Lahanier, and E. Walter. Bounding approaches to system identification. 1996.

[MT85] M. Milanese and R. Tempo. Optimal algorithms theory for robust estimation and prediction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 730–738, 1985.

[MV91] M. Milanese and A. Vicino. Optimal estimation theory for dynamic systems with set membership uncertainty : an overview. *Automatica*, 27(6) :997–1009, 1991.

[Nor95] J.P. Norton. Special issue on bounded-error estimation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 9(1), 1995.

[OM99] P. Van Overschee and B. De Moor. *Subspace identification for linear systems.* Kluwer Academic Publishers, 1999.

[OMI01] A. Ohara, K. Matsumoto, and M. Ide. Robust controller synthesis for plants satisfying a certain class of IQC. *Proceedings of the ACC*, pages 3427–3432, 2001.

[Saf82] M.G. Safonov. Stability margins of diagonally perturbed multivariable feedback systems. *IEE Proceedings, Part D*, 129(6) :251–256, 1982.

[Saf96] M. G. Safonov. Focusing on the knowable : Controller invalidation and learning. In A. S. Morse, editor, *Control Using Logic-Based Switching*, pages 224–233. Springer-verlag edition, Berlin, 1996.

[SC97] M. G. Safonov and F. B. Cabral. Robustness-oriented controller identification. In *Proceedings of the IFAC Symposium on Robust Control Design*, Budapest, Hongria, June 1997.

[SL93] M.G. Safonov and P.H. Lee. A multiplier method for computing real multivariable stability margins. *Proceedings of the IFAC World Congress*, pages 275–278, 1993.

[SP96] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable feedback control.* Wiley, 1996.

[ST94] M. G. Safonov and T. C. Tsao. The unfalsified control concept : A direct path from experiment to controller. In *Conference on Feedback Control, Nonlinear Systems, and Complexity*, McGill University, Montreal, Canada, May 1994.

[ST97] M. G. Safonov and T. C. Tsao. The unfalsified control concept and learning. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(6) :843–847, June 1997.

[TBL99] A.L. Tits, V. Balakrishnan, and L. Lee. Robustness under bounded uncertainties with phase information. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(1):50–65, January 1999.

[THL95] A. Tzes, Q. Hu, and K. Le. Development of a recursive algorithm for parameter uncertainty interval estimation. *Proceedings of the IEEE CDC*, pages 3010–3015, 1995.

[TS93a] T. C. Tsao and M. G. Safonov. Convex set theoric adaptor control systems. In *Proceedings of the IEEE CDC*, San Antonio, December 1993.

[TS93b] T. C. Tsao and M. G. Safonov. Set theoric adaptor control systems. In *Proceedings of the ACC*, San Francisco, June 1993.

[TS96] T. C. Tsao and M. G. Safonov. Adaptive robust manipulator trajectory control: An application of unfalsified control. In *Proc. 4th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision*, Singapore, December 1996.

[WHK99] B. R. Woodley, J. P. How, and R. L. Kosut. Direct unfalsified controller design - solution via convex optimization. In *Proceedings of the ACC*, pages 3302–3306, San Diego, Californie, June 1999.

[WPL90a] E. Walter and H. Piet-Lahanier. Estimation of parameter bounds from bounded-error data: a survey. *Mathematics and computers in simulation*, 32:449–468, 1990.

[WPL90b] E. Walter and H. Piet-Lahanier. Estimation of parameter bounds from bounded-error data: a survey. *Mathematics and Computers in Simulation*, 32:449–468, 1990.

[WRP97] G. Wolodkin, S. Rangan, and K. Poolla. An LFT approach to parameter estimation. In *Proceedings of the ACC*, pages 2088–2092, 1997.

[YD90] P.M. Young and J.C. Doyle. Computation of μ with real and complex uncertainties. *Proceedings of the IEEE CDC*, pages 1230–1235, 1990.

[YR92] R.C. Younce and C.E. Rohrs. Identification with nonparametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(6):715–728, 1992.

[ZBD88] C. Zervos, P.R. Bélanger, and G.A. Dumont. On pid controller tuning using orthonormal series identification. *Automatica*, 24(2):165–175, 1988.

[ZD63] L.A. Zadeh and C.A. Desoer. *Linear system theory*. McGraw-Hill, New York, 1963.

Résumé

On s'est intéressé au problème des interactions entre l'identification et la commande robuste. La difficulté est qu'il n'existe pas un « grand » problème d'identification-commande, mais un ensemble de problèmes et d'approches possibles. On part des mesures d'entrées-sorties faites sur le système réel et le but est de synthétiser/réajuster un correcteur à partir de ces données et éventuellement de la connaissance a priori qu'on a du système.
On propose différentes approches. Deux techniques seront présentées pour la retouche de correcteurs robustes: l'une cherchant à restaurer les marges MIMO de la synthèse initiale, l'autre, la falsification de correcteurs, utilisant des mesures d'entrées-sorties d'un système nonlinéaire à paramètres variants. Ces deux techniques ont été appliquées au pilotage rigide d'un avion de transport.
Les deux schémas d'identification-commande proposés combinent une étape d'identification structurée ou boite noire et une étape de synthèse :

- Le schéma structuré permet d'identifier un modèle LFT, typiquement les coefficients aérodynamiques du modèle latéral d'un avion rigide, offrant ainsi un cadre commun, la forme LFT, entre l'identification, la commande robuste et la μ-analyse.
- Le schéma type boite noire permet d'identifier dans un domaine fréquentiel limité un modèle, d'y associer une erreur fréquentielle et de synthétiser une loi de commande robuste H ∞ prenant en compte explicitement l'erreur d'identification. Cette approche a été appliquée à la commande d'un avion souple avec un cahier des charges complexe.

Mots clefs : schémas identification-commande robuste, retouche de correcteurs, falsification de correcteurs, modèle LFT, paramétrisation de Youla, sous espaces fréquentiels, commande robuste H∞, avion souple.

Abstract

The problem of interactions between identification and robust control is interested. The difficulty is that there does not exist a "big" identification-control problem, but a set of problems and possible approaches. Input-output data are measured on the real system and the goal is to synthesize/retune a controller from these data and possibly from a priori acknowledge on the system.
Different approaches are proposed. Two techniques are presented to retune robust controllers. The first one consists in recovering MIMO margins of the initial synthesis and the second one, controllers falsification, uses input-output data of a non linear parameter varying system. These techniques are applied to a rigid transport aircraft.
The two proposed identification-control schemes combine a structured or black box identification step and synthesis step:

- A structured scheme allows to identify an LFT model, typically stability derivatives of a rigid lateral aircraft model, offering a common background, the LFT form, between identification, synthesis and μ-analysis.
- The black box scheme allows to identify models in a limited frequency domain, to compute a frequency domain error and to synthesize an H∞ robust control law taking explicitly into account the identification error. This approach has been applied to a flexible aircraft with numerous and complex design specifications.

Keywords: identification-robust control schemes, controllers retuning, controllers falsification, LFT model, Youla parameterization, frequency domain subspace identification, H∞ robust control, flexible aircraft.

10, avenue Édouard-Belin - BP 4032 - 31055 Toulouse cedex 4 - France
Tél : 33 (0)5 62 17 80 80 - Fax : 33 0(5) 62 17 83 30 - http://www.supaero.fr
Établissement public à caractère administratif sous tutelle du Ministère de la Défense