

# THÈSE

présentée en vue de  
l'obtention du titre de

**DOCTEUR**

de

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE**

**ÉCOLE DOCTORALE : Sciences de l'Univers, de l'Environnement et de l'Espace**

**SPÉCIALITÉ : Mathématiques spatiales**

par

**Arnaud BOUTONNET**

**Déploiement optimal contraint et robuste  
de satellites volant en formation invariante**

Soutenue le 18 décembre 2003 devant le jury :

<b>MM.</b>	<b>P.</b>	<b>EXERTIER</b>	<b>Président - Rapporteur</b>
	<b>J.</b>	<b>BERNUSSOU</b>	<b>Rapporteur</b>
<b>Mme</b>	<b>B.</b>	<b>ESCUDIER</b>	
<b>MM.</b>	<b>V.</b>	<b>MARTINOT</b>	
	<b>J.</b>	<b>NOAILLES</b>	
<b>MM.</b>	<b>A.</b>	<b>BARANOV</b>	<b>Membre invité</b>
	<b>P.</b>	<b>LEGENDRE</b>	<b>Membre invité</b>

**Rapporteur M. F. GRAZIANI**



## RESUME

L'objet principal de cette thèse est de résoudre l'une des phases de reconfiguration de satellites volant en formation : le déploiement. L'originalité du travail consiste à proposer des solutions optimales sous forme analytique qui prennent en compte les contraintes (plate-forme, risque de collision). Ces solutions analytiques permettent alors de faire très rapidement des études d'analyse mission.

Le domaine d'application est la classe des formations géocentriques invariantes. Grâce à leur géométrie fixe au cours d'une révolution, ces formations sont utiles pour diverses missions : l'interférométrie radar ainsi que la synthèse d'antenne passive et active sont les plus intéressantes.

La thèse est ainsi divisée en trois parties complémentaires :

- *Positionnement du sujet* : une classification originale des missions et des problèmes de guidage associés est proposée. A partir de cette classification, un nouveau modèle définissant une classe particulière, celle des formations invariantes, est développé.
- *Déploiement optimal contraint pour les formations invariantes* : la loi de guidage à consommation minimale est obtenue sous forme analytique par la méthode du Primer Vector. L'utilisation combinée des conditions nécessaires d'optimalité fournies par le Primer Vector et de la méthode des Variations de Paramètres permet de prendre en compte des contraintes sur la commande tout en obtenant la solution optimale. La collision entre chaque satellite et le dernier étage du lanceur résultant de la solution optimale est évitée par l'adjonction puis l'optimisation d'une manœuvre d'injection du lanceur.
- *Robustesse de la solution* : le risque de collision découlant de l'introduction des dispersions sur l'application des manœuvres est limité par l'introduction d'une loi de commande innovante. Les distances minimales obtenues pour le cas non dispersé sont quasiment retrouvées moyennant une légère surconsommation d'ergols. Quant à l'imprécision du déploiement due à l'introduction des perturbations orbitales, elle est maîtrisée par la modification de la stratégie d'injection. Les caractéristiques du déploiement non perturbé sont alors retrouvées avec un très faible surcoût en ergols.

Des travaux complémentaires sur le déploiement des formations géocentriques périodiques et le maintien à poste des formations géocentriques non-keplériennes sont en outre présentés.

**Mots-clefs** : vol en formation, reconfiguration, déploiement, optimalité, Primer Vector, méthode de Variations des Paramètres, contraintes, collision, dispersions de manœuvres, perturbations d'orbite.

## ABSTRACT

The main purpose of this thesis is to solve one of the satellite formation flying reconfiguration phases, namely the initialization. The most interesting feature is that optimal analytical solutions are obtained for operational constraints (bus, collision risk). These analytical solutions then allow to quickly make mission analyses.

The field of application is the Earth-centered invariant formations' category. Their fixed geometry along one revolution permits to use them for several missions : radar interferometry as well as passive and active array antenna synthesis are the most promising.

The thesis is divided into three complementary parts :

- *Subject positioning* : an original categorization of the missions and of the linked guidance problems is given. From this categorization a new model defining the invariant formations' is proposed.
- *Optimal constrained initialization for the invariant formations* : the Primer Vector theory is used to find analytically the minimum fuel consumption solution. Then the Primer Vector necessary conditions of optimality are used in conjunction with the Variations of Parameters approach to account for the constraints on the command : once again the optimal analytical solution is found. The collision between each spacecraft and the rocket upper stage resulting from the optimal solution is prevented by introducing and optimizing a rocket upper stage transversal injection impulse.
- *Solution robustness* : the collision risk induced by maneuver uncertainties is managed by using an innovative control law. At the cost of a slight fuel consumption increase, the minimum distances are almost the same as for the nominal case. The initialization inaccuracy due to the orbital perturbations is managed by modifying the injection strategy. The accuracy of the unperturbed case is obtained with a very small extra fuel amount.

Complementary work has been performed on the other Earth-centered formations' categories : the main results for the periodic formations' initialization and the non-keplerian formations' station keeping are presented.

**Keywords** : formation flying, reconfiguration, initialization, optimality, Primer Vector, Variation of Parameters method, constraints, collision, maneuvers uncertainties, orbital perturbations.

*Il est grand temps de rallumer les étoiles*

*Guillaume Apollinaire*



# Remerciements

Commençons par le commencement, c'est-à-dire ceux sans qui je ne serais pas officiellement docteur !

Je remercie donc en premier lieu Mr Exertier d'avoir accepté d'être président du jury. Ses remarques m'ont permis d'améliorer le présent manuscrit, et sa bonne humeur d'être plus décontracté le jour de la soutenance.

Merci aussi à MM Bernussou et Graziani pour avoir rapporté ma thèse. Je suis heureux d'avoir pu profiter de leur connaissance du contrôle optimal et de la mécanique spatiale qui étaient au cœur de ma thèse.

Quant à Mr Martinot, appelons-le Vincent, il a été, en sus de son rôle de tuteur Alcatel, mon conseiller mécanique spatiale-informatique-préparation de conférences. Et au sujet des discussions sur, au hasard, l'intérêt d'une manœuvre supplémentaire sur un Terre-Mars, le non-sens de ressortir 99 Luftballons en anglais ou le réalisme de l'Odyssée de l'Espace, digressions qui n'ont sûrement pas fait mieux voler les satellites en formation, elles ont constitué autant de petits moments de bonheur.

Je pense aussi à Mme Escudier avec qui j'ai pris beaucoup de plaisir à travailler : merci pour votre aide et votre soutien tout au long de ces trois années !

Mr Noailles, ainsi que MM Caillau et Gergaud m'ont aussi aidé, notamment en contrôle optimal. Je les remercie d'avoir été là à chaque fois que j'avais une question.

La rencontre de Mr Baranov restera un souvenir inoubliable. Professionnellement d'abord, car il m'a énormément appris et qu'il m'a donné le goût pour le calcul analytique. Mais c'est surtout humainement que je garderai de lui un souvenir ému : j'ai découvert un être rare, complexe, généreux et drôle (je crois que je retiendrai à vie la date des soldes à Carrouf...).

Je tiens aussi à remercier Mr Legendre pour avoir lu et décrypté mon manuscrit en un temps record. Ses remarques m'ont permis d'éliminer des coquilles rebelles.

J'exprime de même ma gratitude à Mr Dargent grâce à qui j'ai pu "réellement" (par opposition à la théorie des cours d'école) me plonger dans les délices du Principe du Maximum.

Je pense aussi à MM Brousse et Lansard pour m'avoir fait confiance dans toutes mes entreprises. Merci pour votre soutien !

Je n'oublie pas Mr Bousquet sans qui ma thèse n'aurait pas vu le jour.

Une pensée aussi pour les membres du département AS d'Alcatel avec qui j'ai bien musclé mes zygomatiques, et en particulier Serge, Steeve, Jay Jay et Marco.

Et enfin, un énorme clin d'œil à mes colocataires (un bail, c'est bien trois ans non?...), j'ai nommé Popo, Guili et Axel !

Cela se passe de mots : merci mes Chers Parents, et mon Frérot.

Quant à tous ceux qui, pendant ces trois années, m'ont demandé "alors, cette thèse, ça avance?", qu'ils sachent que je ne leur en veux plus.



---

# Table des matières

---

Acronymes	xvii
Glossaire	xix
Notations	xxi
Introduction	1
<b>I Positionnement du sujet et cas d'étude</b>	<b>5</b>
<b>1 Positionnement du sujet</b>	<b>7</b>
1.1 Classification . . . . .	7
1.1.1 Introduction . . . . .	7
1.1.2 Premier critère : la dynamique . . . . .	8
1.1.3 Deuxième critère : le guidage . . . . .	9
1.1.4 Troisième critère : la géométrie . . . . .	10
1.1.5 Résumé . . . . .	11
1.2 Identification des problèmes de guidage spécifiques au vol en formation . . . . .	11
1.2.1 Définitions . . . . .	11
1.2.2 Evolutions pour le vol en formation . . . . .	12
1.2.3 Description des problèmes . . . . .	12
1.3 Choix du sujet . . . . .	14
1.4 Déroulement de la thèse . . . . .	14
1.4.1 Première partie : positionnement du sujet et cas d'étude . . . . .	14
1.4.2 Deuxième partie : déploiement optimal avec contraintes sur la commande et sur les distances . . . . .	15
1.4.3 Troisième partie : robustesse de la solution . . . . .	16
<b>2 Un nouveau modèle pour les formations géocentriques invariantes</b>	<b>17</b>
2.1 Le problème à deux corps : le mouvement keplerien . . . . .	17
2.1.1 Généralités . . . . .	17
2.1.2 Equations du mouvement relatif autour d'une orbite de référence circulaire	19
2.2 Le problème à trois corps : définition des points de Lagrange . . . . .	19
2.3 La dynamique inertielle (DI) : les formations inertielles . . . . .	20
2.4 La dynamique corps central (DCC) : les formations géocentriques . . . . .	20
2.4.1 Les formations non-kepleriennes (DCC-nk) . . . . .	21
2.4.2 Les formations à mouvement libre (DCC-ml) . . . . .	21
2.5 Intérêt des formations invariantes . . . . .	22
2.5.1 Interférométrie radar . . . . .	22
2.5.2 La synthèse d'antenne . . . . .	22
2.5.3 Conclusion . . . . .	23

2.6	Modèles existants pour les géométries invariantes . . . . .	23
2.6.1	Modèle en paramètres cartésiens . . . . .	23
2.6.2	Modèles en paramètres kepleriens . . . . .	25
2.7	Modèle général en paramètres kepleriens . . . . .	25
2.7.1	Modèle adapté à une orbite de référence circulaire et non-équatoriale . . . . .	25
2.7.2	Extension au cas d'une orbite de référence quasi-circulaire . . . . .	30
2.7.3	Extension au cas d'une orbite quasi-équatoriale . . . . .	33
2.7.4	Exemple . . . . .	36
2.8	Conclusion . . . . .	37

## **II Déploiement optimal avec contraintes sur la commande et les distances** **39**

<b>3</b>	<b>Déploiement optimal et contraint sur la commande</b>	<b>41</b>
3.1	Introduction . . . . .	41
3.2	La théorie du Primer Vector . . . . .	42
3.2.1	Résultats généraux du Principe du Maximum . . . . .	42
3.2.2	Formulation du Primer Vector . . . . .	43
3.2.3	Application au déploiement de formations invariantes : obtention de la consommation optimale pour la loi non contrainte . . . . .	48
3.2.4	Limitations . . . . .	51
3.3	La méthode des Variations de Paramètres . . . . .	52
3.3.1	Principe . . . . .	52
3.3.2	Exemples de lois contraintes . . . . .	54
3.4	Conclusion . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Prise en compte de la contrainte sur les distances</b>	<b>57</b>
4.1	Définition du problème d'optimisation . . . . .	57
4.1.1	Risque de collision : l'existant . . . . .	57
4.1.2	Bibliographie sur les différents mode d'injection . . . . .	58
4.2	Le Primer Vector . . . . .	59
4.2.1	Mise en place du problème . . . . .	59
4.2.2	Type de transfert . . . . .	60
4.2.3	Caractéristique de l'impulsion d'injection optimale . . . . .	62
4.3	La méthode des Variations de Paramètres pour déterminer la loi de guidage . . . . .	65
4.3.1	Premier intervalle . . . . .	65
4.3.2	Second intervalle . . . . .	67
4.3.3	Conclusion . . . . .	69
4.4	Etude du risque de collision : cas nominal . . . . .	69
4.4.1	Méthode . . . . .	69
4.4.2	Choix de paramètres annexes . . . . .	71
4.4.3	Présentation de l'algorithme . . . . .	72
4.4.4	Exemples numériques . . . . .	72
4.5	Conclusion . . . . .	75

<b>5</b>	<b>Robustesse aux dispersions de manœuvres</b>	<b>77</b>
5.1	Cas dispersé . . . . .	77
5.1.1	Origine des dispersions de manœuvres . . . . .	77
5.1.2	Modélisation du déploiement dispersé . . . . .	77
5.1.3	Résultats . . . . .	78
5.2	Stratégies de commande . . . . .	79
5.2.1	Première loi de commande . . . . .	80
5.2.2	Deuxième loi de commande . . . . .	81
5.3	Conclusion . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Robustesse aux perturbations orbitales</b>	<b>87</b>
6.1	Introduction . . . . .	87
6.2	L'aplatissement des pôles . . . . .	87
6.2.1	Modélisation . . . . .	87
6.2.2	Effet sur les paramètres orbitaux . . . . .	88
6.3	Application au déploiement . . . . .	89
6.3.1	Intérêt d'une intégration numérique . . . . .	89
6.3.2	Présentation du schéma d'intégration numérique . . . . .	89
6.3.3	Simulations sur le cas nominal . . . . .	90
6.3.4	Simulations sur le cas dispersé . . . . .	92
6.4	Conclusion . . . . .	92
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>93</b>
	<b>Annexes</b>	<b>95</b>
<b>A</b>	<b>Définition des différents jeux de paramètres orbitaux</b>	<b>97</b>
A.1	Le problème à deux corps . . . . .	97
A.2	Le mouvement keplerien . . . . .	97
A.2.1	Accélération centrale . . . . .	98
A.2.2	Accélération inversement proportionnelle au carré de la distance . . . . .	98
A.3	Éléments orbitaux . . . . .	98
A.3.1	Cas général . . . . .	98
A.3.2	Orbite quasi-circulaire . . . . .	100
A.4	Introduction du vecteur inclinaison et application aux orbites équatoriales . . . . .	101
A.5	Effet d'une petite rotation du plan sur le vecteur inclinaison . . . . .	102
<b>B</b>	<b>Le mouvement relatif non perturbé autour d'une orbite circulaire</b>	<b>105</b>
B.1	Mouvement dans un repère inertiel . . . . .	105
B.2	Mouvement dans le Repère Orbital Local (ROL) . . . . .	106
B.3	Autres cas . . . . .	107
<b>C</b>	<b>Modélisation de l'effet des perturbations</b>	<b>109</b>
C.1	Introduction . . . . .	109
C.2	Les équations de Gauss . . . . .	109
C.3	Modélisation du terme $J_2$ du potentiel terrestre . . . . .	112
C.3.1	Présentation . . . . .	112
C.3.2	Le potentiel terrestre statique . . . . .	112

C.3.3	Accélération perturbatrice engendrée par le potentiel statique . . . . .	113
C.4	Effet du terme $J_2$ du potentiel terrestre sur les paramètres orbitaux . . . . .	115
C.4.1	Solution analytique . . . . .	115
C.4.2	Solution numérique . . . . .	117
<b>D</b>	<b>La théorie du Primer Vector</b>	<b>121</b>
D.1	Le Calcul des Variations . . . . .	121
D.1.1	Problème de Mayer . . . . .	121
D.1.2	Conditions nécessaires d'optimalité . . . . .	121
D.2	Le principe du Maximum de Pontryagin . . . . .	123
D.3	Introduction du Primer Vector . . . . .	123
D.3.1	Cadre . . . . .	123
D.3.2	Conditions d'optimalité . . . . .	124
D.4	Linéarisation de l'équation d'état . . . . .	126
D.4.1	Conséquence . . . . .	126
D.4.2	Exemple : la linéarisation autour d'une orbite circulaire . . . . .	126
D.5	Cas du transfert . . . . .	128
<b>E</b>	<b>Travaux complémentaires</b>	<b>131</b>
E.1	Introduction . . . . .	131
E.2	Formation périodique : le cas de Noss White Cloud . . . . .	131
E.2.1	Présentation du déploiement . . . . .	131
E.2.2	Stratégies proposées . . . . .	132
E.2.3	Comparaison des stratégies . . . . .	134
E.2.4	Introduction du $J_2$ dans les résultats analytiques du Primer Vector . . .	135
E.3	Formation non-keplerienne : le cas de Max . . . . .	136
E.3.1	Calcul de la loi de guidage pour le maintien en formation . . . . .	136
E.3.2	Calcul de la consommation d'ergols pour le pire cas de direction d'ob- servation . . . . .	138
E.3.3	Optimisation de la consommation pour une prise de vue . . . . .	141
E.3.4	Conclusion . . . . .	146
<b>F</b>	<b>Liste des publications</b>	<b>147</b>
F.1	Principales présentations dans des conférences internationales . . . . .	147
F.2	Autres présentations . . . . .	147
F.3	Etudes internes . . . . .	148
	<b>Bibliographie</b>	<b>149</b>

---

# Table des figures

---

1	Illustration de la mission Cluster . . . . .	2
2	Illustration de la mission Max . . . . .	3
3	Illustration de la mission Roue interférométrique . . . . .	4
1.1	Représentation du mouvement relatif pour les formations invariantes . . . . .	10
1.2	Classification des formations . . . . .	11
2.1	Paramètres angulaires . . . . .	18
2.2	Formation circulaire . . . . .	26
2.3	Ecart en position su orbite . . . . .	29
2.4	Introduction de la quasi-circularité de l'orbite de référence . . . . .	31
2.5	Différence de vecteur excentricité entre une orbite de référence circulaire et une orbite de référence quasi-circulaire . . . . .	32
2.6	Introduction des angles définissant la longitude curviligne relative . . . . .	35
2.7	Définition générale des formations circulaire et circulaire projetée . . . . .	36
2.8	Mouvement relatif dans le cas d'une formation circulaire projetée . . . . .	37
3.1	Courbe d'efficacité dans l'espace hodographe pour le transfert nodal . . . . .	46
3.2	Courbe d'efficacité dans l'espace hodographe pour le transfert non dégénéré . . . . .	46
3.3	Courbe d'efficacité dans l'espace hodographe pour le transfert singulier . . . . .	47
3.4	Comparaison du Primer Vector avec une stratégie de référence . . . . .	52
3.5	Représentation géométrique des équations de Gauss . . . . .	53
3.6	Représentation géométrique des équations de Gauss . . . . .	55
4.1	Représentation géométrique du déploiement avec une impulsion d'injection . . . . .	60
4.2	Longitude optimale de l'impulsion d'injection . . . . .	63
4.3	Comparaison des consommations optimales pour le déploiement . . . . .	64
4.4	Représentation géométrique de la solution pour le premier intervalle . . . . .	65
4.5	Représentation géométrique de la solution pour le second intervalle . . . . .	67
4.6	Courbe d'efficacité dans l'espace hodographe pour le transfert nodal/non dégénéré . . . . .	69
4.7	Evolution des distances $d'_{ls}$ et $d'_{ss}$ en fonction de $\eta$ et $\Delta\theta$ . . . . .	71
4.8	Evolution des distances $d'_{ls}$ et $d'_{ss}$ en fonction de $\eta$ et $\Delta\theta$ pour un jeu optimal de révolutions . . . . .	72
4.9	Trajectoire d'un satellite au cours du déploiement dans le ROL du dernier étage du lanceur . . . . .	73
4.10	Evolution de la distance entre deux satellites consécutifs au cours du déploiement . . . . .	74
5.1	Pire cas de déploiement dispersé . . . . .	79
5.2	Fonction de répartition de $d_{ss}$ pour le cas dispersé . . . . .	79
5.3	Choix du paramètre $K$ pour le cas dispersé avec la première loi de commande . . . . .	80
5.4	Pire cas de déploiement avec la première loi de commande . . . . .	81
5.5	Choix du paramètre $K$ pour le cas dispersé avec la deuxième loi de commande . . . . .	83
5.6	Pire cas de déploiement avec la deuxième loi de commande . . . . .	84

5.7	Choix du paramètre $K$ pour le cas dispersé avec la deuxième loi de commande .	84
6.1	Comparaison de l'évolution de la distance inter-satellite avec le $J_2$ avec $\theta_1 = 0\ deg$ et $\theta_2 = 162, 270\ deg$ . . . . .	91
6.2	Intérêt de la correction différente du demi-grand axe . . . . .	92
6.3	Evolution de la distance inter-satellite avec $\theta_2 = 162\ deg$ et l'effet du $J_2$ pour le cas nominal et le pire cas dispersé . . . . .	92
A.1	Paramètres angulaires . . . . .	100
A.2	Définition du vecteur excentricité . . . . .	101
A.3	Définitions des vecteurs orientation et inclinaison . . . . .	102
A.4	Effet d'une petite rotation du plan de l'orbite de référence sur le vecteur inclinaison	103
C.1	Repère orbital local $(\hat{Q}, \hat{S}, \hat{W})$ . . . . .	110
E.1	Formation Noss White Cloud . . . . .	132
E.2	Comparaison des consommations des différentes stratégies pour une formation périodique triangulaire . . . . .	135
E.3	Repère lié à la lentille correspondant à l'orientation de ses propulseurs . . . . .	137
E.4	Loi de guidage dans le ROL de la lentille pendant une révolution . . . . .	138
E.5	Comparaison de la masse d'ergols consommée pour différents types d'orbites . .	140
E.6	Principe de la minimisation de la consommation pour une observation de la formation MAX . . . . .	141
E.7	Caractéristiques du rendez-vous pour l'optimisation de la consommation pendant une prise de vue . . . . .	144
E.8	Comparaison de la masse d'ergols consommée pour différents types d'orbites . .	145

---

# Liste des tableaux

---

2.1	Exemple numérique d'une formation circulaire projetée . . . . .	36
3.1	Définition de l'orbite Spot . . . . .	50
3.2	Ecart en paramètres orbitaux kepleriens . . . . .	50
3.3	Ecart en paramètres orbitaux kepleriens adaptés au Primer Vector . . . . .	50
4.1	Déploiement pour une distance minimale de $1\text{ km}$ . . . . .	73
4.2	Déploiement pour une distance minimale de $1.5\text{ km}$ . . . . .	74
C.1	Orbite de test pour la comparaison entre intégrateurs numériques . . . . .	118
C.2	Erreurs d'intégration de la trajectoire sur 1 jour . . . . .	118
C.3	Comparaison de l'intégration numérique avec toutes les perturbations orbitales avec le propagateur développé . . . . .	119
E.1	Cas d'étude pour la comparaison des stratégies de déploiement pour une for- mation périodique triangulaire . . . . .	134



---

# Acronymes

---

## Vol en formation

DCC	Dynamique Corps Central
DCC-ml	DCC à mouvement libre
DCC-nk	DCC non-keplerienne
DI	Dynamique Inertielle
DS	Deep Space
ISL	Inter Satellite Link
MAF	Maintien en Formation

## Mécanique spatiale

GEO	Geosynchronous Orbit
GNC	Guidage/Navigation/Commande
HEO	Highly Elliptic Orbit
LEO	Low Earth Orbit
LEOP	Launch and Early Orbit Phase
MAP	Maintien à Poste
MEO	Medium Earth Orbit
ROL	Repère Orbital Local
STM	State Transition Matrix
VEC	Vitesse d'Ejection Constante

## Optimisation

LBVP	Linear Bounded Value Problem
MILP	Mixed Integer Linear Programming
OCP	Optimal Control Problem
PL	Programmation Linéaire
PM	Programmation Mathématique
PNL	Programmation Non Linéaire
TPBVP	Two Point Bounded Value Problem
VOP	Variations Of Parameters
PV	Primer Vector

## Organismes

AFRL	Air Force Research Laboratory
ASP	ALCATEL SPACE
CNES	Centre National d'Etudes Spatiales

CNRS	Centre National de la Recherche Scientifique
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
ESA	European Space Agency
NASA	National Aeronautics and Space Administration
SSTL	Surrey Satellite Technology Limited
USAF	US Air Force

---

# Glossaire

---

## Définitions

<b>Commande</b>	Loi de commande dépendant de l'état courant (commande en boucle fermée)
<b>Courbe d'efficacité</b>	Trajectoire du primer vector dans l'espace hodographe
<b>Déploiement</b>	Le déploiement est la phase qui intervient entre l'injection d'un satellite depuis le dernier étage du lanceur et l'insertion dans la formation
<b>Hodographe</b>	L'espace hodographe est un espace orthonormé dont les axes sont ceux du repère orbital local et dans lequel on représente l'évolution de l'adjoint de la vitesse, le primer vector
<b>Guidage</b>	Loi de commande ne dépendant que de l'état initial (commande en boucle ouverte)
<b>Injection</b>	Phase où le satellite se sépare du dernier étage du lanceur
<b>Insertion</b>	L'insertion est l'instant où un satellite se retrouve dans sa position opérationnelle à l'intérieur de la formation. A partir de cet instant, si le satellite s'éloigne de sa position nominale, par exemple sous l'effet des perturbations orbitales, le guidage associé s'appelle Maintenance en Formation
<b>Primer Vector</b>	Adjoint de la vitesse
<b>Symétrie</b>	Une loi de guidage impulsive est symétrique ssi les cosinus directeurs de chaque impulsion sont les mêmes, au signe près, pour toutes les impulsions

## Conventions

<b>Géocentrique</b>	Une formation géocentrique est une formation dont l'orbite de référence est une ellipse autour de la Terre
<b>Invariante</b>	Une formation invariante est une formation à mouvement libre pour laquelle la géométrie de la formation reste la même pendant une révolution orbitale
<b>Mouvement libre</b>	Une formation à mouvement libre est une formation géocentrique dont la géométrie n'évolue que sous l'action de la gravité et des perturbations orbitales, c'est-à-dire sans utilisation de force propulsive
<b>Non-keplerienne</b>	Une formation non-keplerienne est une formation géocentrique dont la géométrie évolue de manière prédéfinie le long de l'orbite de référence sous l'action d'une force propulsive
<b>Périodique</b>	Une formation périodique est une formation à mouvement libre dont la géométrie évolue au cours d'une révolution orbitale, mais qui se répète à la pulsation orbitale

**Reconfiguration**

Le déploiement, la rotation, le changement de taille, le changement d'orientation et l'insertion d'un nouveau satellite sont des phases de reconfiguration : toutes ces phases font intervenir une optimisation. Par extension, le maintien en formation est aussi une reconfiguration

**Supersymétrie**

Une solution supersymétrique est une solution symétrique où les amplitudes des composantes sont égales, au signe près, pour toutes les impulsions

---

# Notations

---

$\alpha = \omega + (v, E, M)$	Argument de la latitude (vraie, excentrique, moyenne)
$\gamma$	Accélération
$\Gamma$	Amplitude de la commande
$\delta()$	Petite variation de ()
$\Delta()$	Variation de ()
$\theta$	Angle de phasage dans une formation invariante
$\lambda = \Omega + \omega + (v, E, M)$	Longitude curviligne (vraie, excentrique, moyenne)
$(\lambda_p, \mu_p, \nu_p)$	Composantes du primer vector
$\mu = GM_T$	Constante d'accélération terrestre
$\rho$	Rayon de la formation
$\omega$	Argument du périégée
$\varpi$	Ascension droite du périégée
$\Omega$	Ascension droite du nœud ascendant
$a$	Demi-grand axe
$a_e$	Rayon équatorial de la Terre
$C$	Vitesse caractéristique
$e$	Excentricité
$\mathbf{e}$	Vecteur excentricité
$E$	Anomalie excentrique
$F$	Amplitude de la force propulsive
$g_0$	Accélération de la pesanteur au niveau du sol
$G$	Constante universelle de gravitation
$H$	Hamiltonien
$\mathbf{H}$	Moment cinétique
$\mathbf{h}$	Vecteur orientation
$i$	Inclinaison
$\mathbf{i}$	Vecteur inclinaison
$Isp$	Impulsion spécifique
$J_2$	Coefficient du second terme zonal du potentiel terrestre
$m$	Masse
$M$	Anomalie moyenne
$n$	Moyen mouvement
$\mathbf{p}$	Adjoint de l'état
$\mathbf{p}_r$	Adjoint de la position
$\mathbf{p}_v$	Adjoint de la vitesse ou primer vector
$\mathbf{r}$	Rayon vecteur d'un satellite

$T$	Période orbitale
$\mathbf{u}$	Poussée
$v$	Anomalie vraie
$\mathbf{x}$	Vecteur
$\underline{\mathbf{X}}$	Matrice
$(\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{N}}, \hat{\mathbf{W}})$	ROL tangentiel, orthotangentiel, normal
$(\hat{\mathbf{Q}}, \hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{W}})$	ROL radial, transversal, normal
$\bar{X}$	Variable de linéarisation
$\tilde{X}$	Variable normalisée
$\hat{\mathbf{X}}$	Vecteur de norme unitaire
$\mathcal{O}(k)$	"Grand O de k"

---

# Introduction

---

## Définition du concept

Les formations de satellites sont des systèmes à plusieurs satellites volant de manière groupée, soit avec la même charge utile (ex : mesures atmosphériques en plusieurs points de l'espace ou du temps), soit avec des charges utiles différentes (ex : télescope).

Pour différencier le vol en formation des constellations, on peut mettre en avant plusieurs critères :

- La distance entre les satellites : la taille d'une formation varie entre quelques dizaines de mètres et quelques centaines de kilomètres, tandis qu'une constellation est à l'échelle de la Terre
- La couverture instantanée si la mission est orientée vers la Terre : elle est locale pour une formation et régionale (voire globale) pour une constellation
- L'agilité : une constellation n'assure que du maintien à poste tandis qu'une formation peut être amenée à se réorienter ou changer de taille par exemple
- La commande : comme cela est expliqué dans [Sch02], un membre d'une formation doit 1) avoir comme consigne un état relatif à un autre membre et 2) avoir une loi de commande qui dépende de l'autre membre. Ce second point est crucial : même si certaines constellations maintiennent des états relatifs, la commande, lors de corrections d'orbite, est toujours absolue

S'il est intuitif d'utiliser le critère de taille du système, il est en revanche très difficile de donner la taille limite qui sépare les formations des constellations. Cela signifie que cette définition n'est pas très rigoureuse. Cette remarque reste valable pour les autres définitions à l'exception de la dernière qui garantit une limite claire entre les deux concepts.

Cependant, l'inconvénient de cette dernière définition est qu'elle classe en tant que constellations des missions communément considérées comme étant des formations (ex : GRACE ou la roue interférométrique).

En conclusion, il n'existe pas à l'heure actuelle de norme pour définir une formation par rapport aux constellations et il faut s'en tenir à une définition intuitive.

## Historique

L'un des premiers papiers sur le vol spatial en formation (voire le premier) date de la fin des années 70 : Labeyrie, dans [Lab78], propose un concept d'interféromètre stellaire. Quand on imagine que le projet similaire Darwin de l'ESA ne sera pas lancé avant 2015, on mesure le chemin à parcourir pour qu'un tel concept devienne mature.

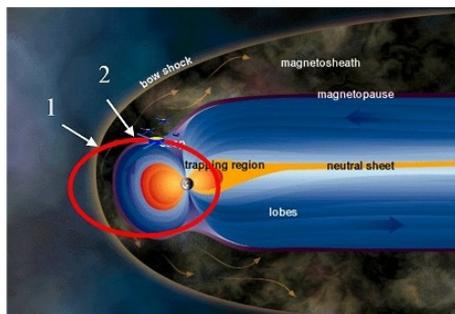
Cependant, depuis cette époque, de nombreux autres projets ont été imaginés. Ceux qui volent sont très peu nombreux, quatre exactement : historiquement, il y a eu Noss White Cloud, Cluster II, LandSat 7 / Earth Orbiter 1 (L7-EO1) et GRACE.

La mission Noss White Cloud de l'USAF, qui vole depuis près de vingt ans, permet de faire

de l'écoute électronique en utilisant trois satellites formant un triangle de plusieurs centaines de kilomètres de côté.

La mission Cluster II de l'ESA ([Esc01]) a pour but d'observer la magnétopause, i.e. l'interface entre le vent solaire et le champ magnétique terrestre. Elle est composée de quatre satellites formant une pyramide régulière lorsque la formation traverse la magnétopause (voir Figure 1). La pyramide doit être de taille suffisante pour détecter des variations de la composition de la magnétopause d'un satellite à un autre : concrètement cela signifie que la distance inter-satellites doit être au moins de plusieurs centaines de kilomètres. Il est évident qu'un tel concept est impossible avec un système composé d'un seul satellite.

La mission L7-EO1 de la NASA ([Fol97]) a consisté à faire voler en tandem deux satellites



**FIG. 1 - Illustration de la mission Cluster**

conçus et lancés séparément : un décalage temporel de quelques minutes entre les deux satellites a permis de réaliser des images stéréoscopiques du sol (satellites dans la trace séparés de quelques centaines de kilomètres). Cette vraie-fausse<sup>1</sup> formation a aussi servi de banc de test pour les premiers algorithmes de commande autonome pour le vol en formation.

Enfin, GRACE est une mission conjointe DLR/NASA ([Kir01]) dont le but est de calculer les termes du champ de gravité terrestre par la mesure différentielle de l'accélération gravitationnelle à l'aide de deux satellites volant en tandem (220 km les séparent).

On peut enfin parler d'un cas particulier de formation : la collocation de satellites géostationnaires de télécommunications : comme l'arc géostationnaire est très limité par rapport au nombre de satellites (surtout au dessus des zones d'intérêt comme l'Amérique, l'Europe ou l'Asie), une idée a consisté à collocaliser plusieurs satellites sur la même position en les faisant voler en formation ([Hub84]) : ainsi, une seule position est occupée. Mais ce type de formation est particulier puisque chaque satellite "ignore" la présence des autres : le contrôle du satellite est entièrement absolu.

## Projets

Les projets sont très nombreux. Sans être exhaustif, on peut citer Darwin de l'ESA ([Lag02]) et TPF de la NASA ([Nas03]) pour l'interférométrie stellaire, la Roue interférométrique du CNES ([Vac00]) pour l'interférométrie terrestre, Techsat 21 de l'AFRL ([Sed98]) pour l'imagerie de cibles mouvantes (MTI), Xeus de l'ESA ([Esa03]) et Max du CESR ([Von03]) pour l'observation X et Gamma de l'espace, etc ...

Plutôt que de présenter tous les projets, nous allons décrire deux cas représentatifs : Max et

<sup>1</sup>Puisque les satellites ont été conçus séparément

la Roue interférométrique.

## Max

Max est un projet d'observatoire du rayonnement gamma. Le principe consiste à utiliser une lentille qui focalise les photons. Mais du fait du faible angle de diffraction au niveau de la lentille, le foyer du télescope doit se trouver à une distance supérieure à 100 mètres. Il est donc impensable d'utiliser un seul satellite pour remplir cette mission : l'idée consiste à utiliser deux satellites, un pour la lentille et un pour le foyer, tous deux volant en formation. Pour faire une prise de vue, il faut donc que les deux satellites restent alignés sur une région de l'espace avec une distance constante entre eux. Ce principe est représenté sur la Figure 2. Les orbites sont telles que les deux satellites sont séparés d'une distance égale à la focale avec

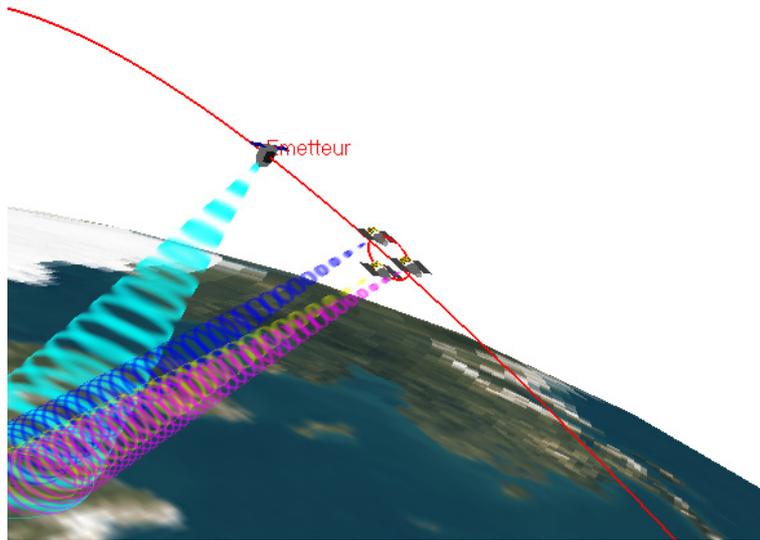


FIG. 2 - Illustration de la mission Max

une ligne de visée constante dans un repère inertiel. Il est impossible d'obtenir naturellement de telles orbites, ou du moins, si l'une d'entre elle est naturelle, l'autre ne peut pas l'être. Les études sur ce projet au niveau guidage portent donc sur les lois à appliquer pour obtenir un tel mouvement. Elles portent en outre sur la précision du maintien en formation car les spécifications sont très contraignantes : 50 *cm* dans la direction d'observation et 5 *mm* dans le plan orthogonal à cette direction.

## La Roue interférométrique

La roue est un concept inventé (et breveté!) par Massonet du CNES[Mas98]. Elle est constituée de trois satellites volant sur la même ellipse relative dont le demi-grand axe vaut quelques kilomètres. Un satellite radar (Alos ou Envisat) illumine une zone d'intérêt au sol et la roue récupère les échos. Avec les trois satellites, on a donc trois paires pour faire des mesures interférométriques de cet écho. Ce principe est représenté sur la Figure 3. Si l'interférométrie n'est pas un concept récent, la qualité de la mesure dépend de la distance entre les récepteurs : en 2001, la mission SRTM (Shuttle Radar Topographic Mission), mission d'interférométrie embarquée à bord de la navette Atlantis, était constituée de deux récepteurs séparés de 60 *m*. Comparé aux quelques kilomètres de la roue, on mesure l'amélioration potentielle. Au niveau du guidage se pose le problème de la reconfiguration de la roue : déploiement, changement de taille, maintien en formation (MAF).



**FIG. 3 - Illustration de la mission Roue interférométrique**

## Positionnement d'ALCATEL SPACE et choix de l'encadrement

ALCATEL SPACE (ASP) est maître d'œuvre systèmes : segment spatial, segment sol et segment utilisateur. Il intervient sur tous les types de missions (télécommunications, navigation, observation de la Terre et sciences) et sur tous les types de segment spatial (satellite unique, sonde interplanétaire, constellation et formation).

A ce titre, ASP s'intéresse au vol en formation et aux projets associés. Comme ce domaine est nouveau, il y a nécessité d'une expertise sur les spécificités du vol en formation, sur les charges utiles comme sur la fonction Guidage, Navigation et Commande (GNC). Par rapport à cette fonction se posent notamment des problèmes de reconfiguration : déploiement, changement de taille, de forme, maintien en formation, etc...

L'un des moyens pour acquérir l'expertise nécessaire consiste à financer une thèse : c'est ce qui a été réalisé en lançant une Convention Industrielle de Formation par la Recherche (CIFRE) -No. 2 000 527- entre ASP et le laboratoire coopératif sur les Télécommunications Spatiales et Aéronautiques (TéSA) qui regroupe plusieurs écoles d'ingénieurs de Toulouse, des industriels et des PME/PMI.

Sur un plan académique, la thèse s'est déroulée au Centre Aéronautique et Spatial (CAS) de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace (ENSAE-SUPAERO). De plus, le Laboratoire d'Informatique et Mathématiques Appliquées (LIMA) de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique, d'Electronique, d'Informatique, d'Hydraulique et des Télécommunications (ENSEEIH) a apporté son soutien.

Sur un plan industriel, la thèse s'est déroulée dans le service Ingénierie Mission et Système du département Ingénierie des Systèmes et Segments Sols (S/IM), appartenant à la Business Unit Observation et Sciences (BUOS) d'ASP.

Première partie

*Positionnement du sujet et cas d'étude*



# Positionnement du sujet

## Sommaire

---

<b>1.1 Classification</b>	<b>7</b>
1.1.1 Introduction	7
1.1.2 Premier critère : la dynamique	8
Dynamique Inertielle (DI)	8
Dynamique Corps Central (DCC)	8
1.1.3 Deuxième critère : le guidage	9
Formations DCC/nk	9
Formations DCC/ml	9
1.1.4 Troisième critère : la géométrie	10
Formations invariantes	10
Formations périodiques	10
1.1.5 Résumé	11
<b>1.2 Identification des problèmes de guidage spécifiques au vol en formation</b>	<b>11</b>
1.2.1 Définitions	11
1.2.2 Evolutions pour le vol en formation	12
1.2.3 Description des problèmes	12
<b>1.3 Choix du sujet</b>	<b>14</b>
<b>1.4 Déroulement de la thèse</b>	<b>14</b>
1.4.1 Première partie : positionnement du sujet et cas d'étude	14
1.4.2 Deuxième partie : déploiement optimal avec contraintes sur la commande et sur les distances	15
1.4.3 Troisième partie : robustesse de la solution	16

---

## 1.1 Classification

### 1.1.1 Introduction

La difficulté qui est immédiatement apparue au début de la thèse fut le manque de synthèse sur les problèmes liés au guidage des formations. L'étape correspondante fut donc de classer les formations en familles et d'identifier pour chacune d'elles quels étaient les points durs en termes de guidage. Cette classification a pour but d'identifier des familles de formations en fonction de critères ayant un impact sur la fonction GNC.

Considérons un mobile de référence dont la trajectoire est représentée dans un repère inertiel : son accélération dans ce repère est notée  $\gamma$ . Considérons un satellite proche de ce mobile de référence : il y a entre eux une accélération différentielle  $\Delta\gamma$ . Elle est égale à :

$$\Delta\gamma = \Delta\gamma_{dyn} + \Delta\gamma_{guid} \quad (1.1)$$

où  $\Delta\gamma_{dyn}$  représente le différentiel d'accélération du à la dynamique (attraction d'une planète par exemple) et  $\Delta\gamma_{guid}$  représente le différentiel du au guidage (la propulsion).

### 1.1.2 Premier critère : la dynamique

Un premier critère est la dynamique à laquelle est soumise la formation. Elle dépend du type d'orbite étudié.

#### Dynamique Inertielle (DI)

Par DI, on entend que tous les satellites de la formation sont soumis à la même accélération, et que par conséquent il n'y a pas d'accélération différentielle :

$$\Delta\gamma_{dyn} \approx \emptyset \quad (1.2)$$

C'est cette dynamique que l'on rencontre aux Points de Lagrange<sup>1</sup> ou sur les orbites héliocentriques<sup>2</sup>. Par conséquent, si on se place dans un repère lié à la formation, les satellites ne sont soumis à aucune force dans ce repère.

Du fait de cette inertialité, si les vitesses relatives entre les satellites sont nulles à l'instant initial, elles le restent. Par conséquent, on peut conserver une géométrie stable ne dépendant que de la mission : on parlera de *formation inertielle*.

De pair avec cette DI<sup>3</sup> on trouve un environnement très peu perturbé (comparé à l'environnement terrestre) : seule la pression de radiation solaire perturbe le mouvement. Du fait de ces faibles perturbations orbitales, les géométries peuvent être maintenues avec de très grandes précisions (jusqu'au nanomètre) et des niveaux de consommation compatibles avec des plateformes de minisatellite.

De telles missions ont un impact très important en termes de navigation et de commande :

- Navigation : la distance à la Terre induit un contrôle autonome, donc des Liens Inter Satellites (ISL). Pour les raisons de précision évoquées ci-dessus, ces ISL doivent être optiques pendant le Maintien en Formation<sup>4</sup> (MAF).
- Commande : au niveau MAF, les boucles de commande doivent être beaucoup plus précises que celles rencontrées habituellement en orbite terrestre (pour le rendez-vous entre un véhicule de transport et une station par exemple). Les actionneurs<sup>5</sup> associés doivent avoir des niveaux de poussée très faibles et une grande précision.

#### Dynamique Corps Central (DCC)

C'est celle que l'on rencontre en orbite autour de la Terre :

$$\Delta\gamma_{dyn} = \Delta\gamma_{DCC} \quad (1.3)$$

Elle regroupe toutes les classes habituelles : orbite basse (LEO), moyenne (MEO), fortement elliptique (HEO), et géostationnaire (GEO). Dans le cadre des formations, la distance entre les satellites est très petite devant le rayon de l'orbite de référence autour de laquelle tous les satellites de la formation volent. Ainsi les équations du mouvement peuvent être linéarisées par rapport à l'orbite d'un mobile fictif se trouvant sur l'orbite de référence. Comme on le verra

---

<sup>1</sup>Ce sont des points d'équilibre découlant de la résolution du problème à 3 corps (ex : Soleil, Terre et satellite)

<sup>2</sup>La dimension de la formation étant tellement petite par rapport à la distance au Soleil que les accélérations différentielles entre les satellites sont considérées comme nulles

<sup>3</sup>Aussi nommée Deep Space (DS)

<sup>4</sup>Phase qui consiste à maintenir une géométrie dans les limites des spécifications mission

<sup>5</sup>Système de propulsion généralement basé sur l'éjection de gaz, soit issus d'une réaction chimique soit préalablement mis sous pression, ou d'ions accélérés par un champ électrique

plus tard, le mouvement est non-linéaire en fonction du temps et présente un couplage entre les axes d'un repère lié au mobile fictif. Ce couplage induit un mouvement relatif des satellites d'une formation les uns par rapport aux autres. Suivant les conditions initiales sur l'état d'un satellite, sa trajectoire autour de la référence est fermée, c'est-à-dire périodique à la pulsation orbitale : on parlera de *formation géocentrique*. Cependant, cette trajectoire appartiendra à des catégories bien précises : ainsi, toutes les géométries ne sont pas accessibles.

De plus, l'environnement autour de la Terre est en général très perturbé (inhomogénéité du potentiel terrestre, traînée aérodynamique pour les orbites basses, potentiel luni-solaire, pression de radiation solaire pour citer les plus importantes).

Ces deux points ont un impact sur les missions puisque d'une part la géométrie d'une formation n'est plus liée complètement à la mission, mais aussi à la dynamique, et d'autre part parce qu'il est plus complexe et consommateur de contrer les perturbations orbitales.

A ce stade, on peut faire une nouvelle distinction à l'intérieur des formations géocentriques : du fait de l'impossibilité d'obtenir n'importe quelle géométrie de manière naturelle, on sépare la classe entre d'un côté les *formations à mouvement libre* (DCC/ml) et de l'autre les *formations non-keplériennes* (DCC/nk) pour lesquelles une poussée continue est nécessaire de manière à maintenir la géométrie le long de l'orbite de référence.

### 1.1.3 Deuxième critère : le guidage

#### Formations DCC/nk

La mission définit un mouvement relatif désiré  $\Delta\gamma_{mission}$ . Par conséquent, la loi de guidage vaut :

$$\Delta\gamma_{guid} = \Delta\gamma_{mission} - \Delta\gamma_{DCC} \quad (1.4)$$

Ainsi, n'importe quelle géométrie est accessible (ex : Xeus, Max).

De telles missions ont un impact très important sur la fonction GNC :

- Guidage : la trajectoire désirée doit être convertie en loi de guidage. En général cette loi est complexe (changement continu d'orientation et d'amplitude) ce qui affecte ensuite les actionneurs.
- Navigation : à l'instar des missions de type DI, le besoin d'ISL pour la mesure et pour les télécommunications est ici évident.
- Commande : de même la commande doit être en général très précise du fait des spécifications de ces missions.

#### Formations DCC/ml

Le mouvement est naturel ce qui implique qu'aucune force propulsive n'est appliquée :

$$\Delta\gamma_{guid} = \emptyset \quad (1.5)$$

La seule contrainte pour ce type de formation est que la trajectoire relative doit être fermée : par conséquent, le satellite doit avoir une orbite de même énergie que la référence. Si la dynamique est supposée keplérienne, cela signifie que les orbites doivent avoir le même demi-grand axe.

Pour les missions associées, l'objectif de la fonction GNC est de limiter la quantité de carburant<sup>6</sup> consommée plus que d'assurer un MAF très précis. Il n'est donc pas nécessaire de

---

<sup>6</sup>Ergols ou gaz suivant que la propulsion est chimique ou électrique

contrôler en permanence les orbites. Les besoins d'autonomie et d'ISL ne sont plus critiques. De cette catégorie, il est possible de distinguer deux nouveaux cas.

### 1.1.4 Troisième critère : la géométrie

#### Formations invariantes

Ces formations sont caractérisées par le fait que la géométrie de la formation ne change pas le long de l'orbite de référence. Par contre, ces géométries sont imposées : la projection du mouvement dans le plan de l'orbite de référence est une ellipse d'excentricité fixée, et le mouvement hors-plan est sinusoïdal. Par conséquent, ces géométries sont soit des ellipses, soit des cercles.

Afin d'illustrer simplement ce mouvement relatif elliptique, on considère une formation composée de deux satellites dont les orbites sont coplanaires. L'orbite du satellite de référence, noté  $S_{ref}$ , est circulaire. L'orbite de l'autre satellite, noté  $S$ , est légèrement excentrique. Pour une période orbitale notée  $T$ , la Figure 1.1(a) donne la position des deux satellites aux instants  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = \frac{T}{4}$ ,  $t_2 = \frac{T}{2}$  et  $t_3 = \frac{3T}{4}$ . Si on centre sur  $S_{ref}$  un repère dont l'axe  $\hat{X}$  est orienté suivant la direction Terre-satellite et l'axe  $\hat{Y}$  est orienté suivant la vitesse de  $S_{ref}$ , la position de  $S$  pour les instants  $t_j$  est représentée sur la Figure 1.1(b).

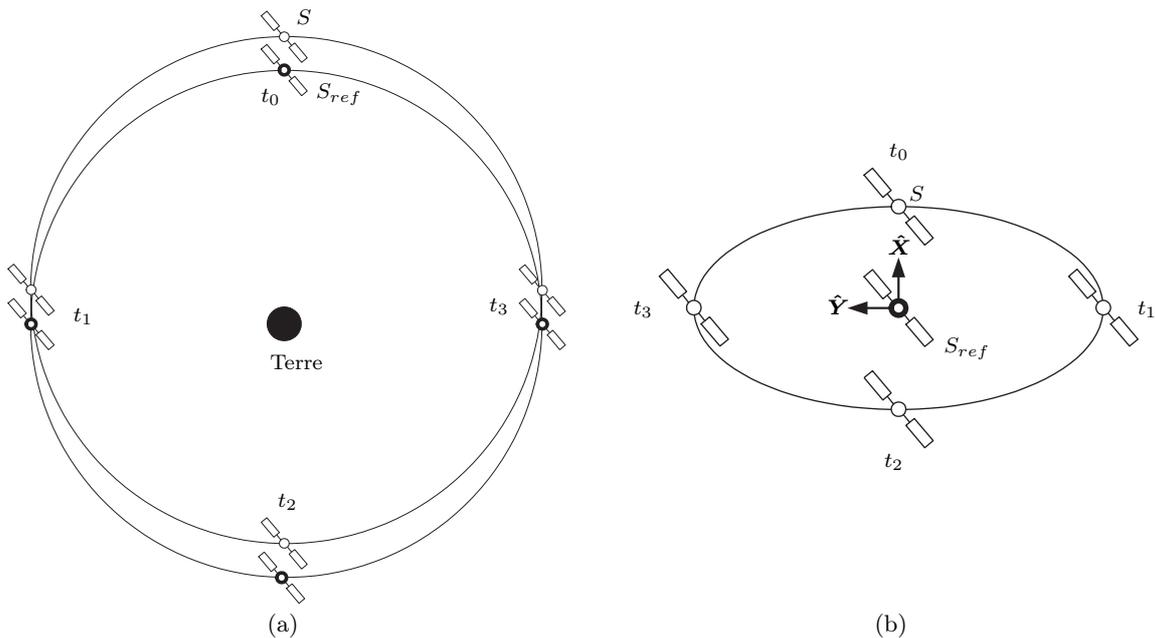


FIG. 1.1 - Représentation du mouvement relatif pour les formations invariantes

Le mouvement de  $S$  autour de  $S_{ref}$  est donc une ellipse. A noter aussi le cas particulier de satellites simplement déphasés en anomalie avec une orbite de référence circulaire.

#### Formations périodiques

Ce sont toutes les autres formations à mouvement libre.

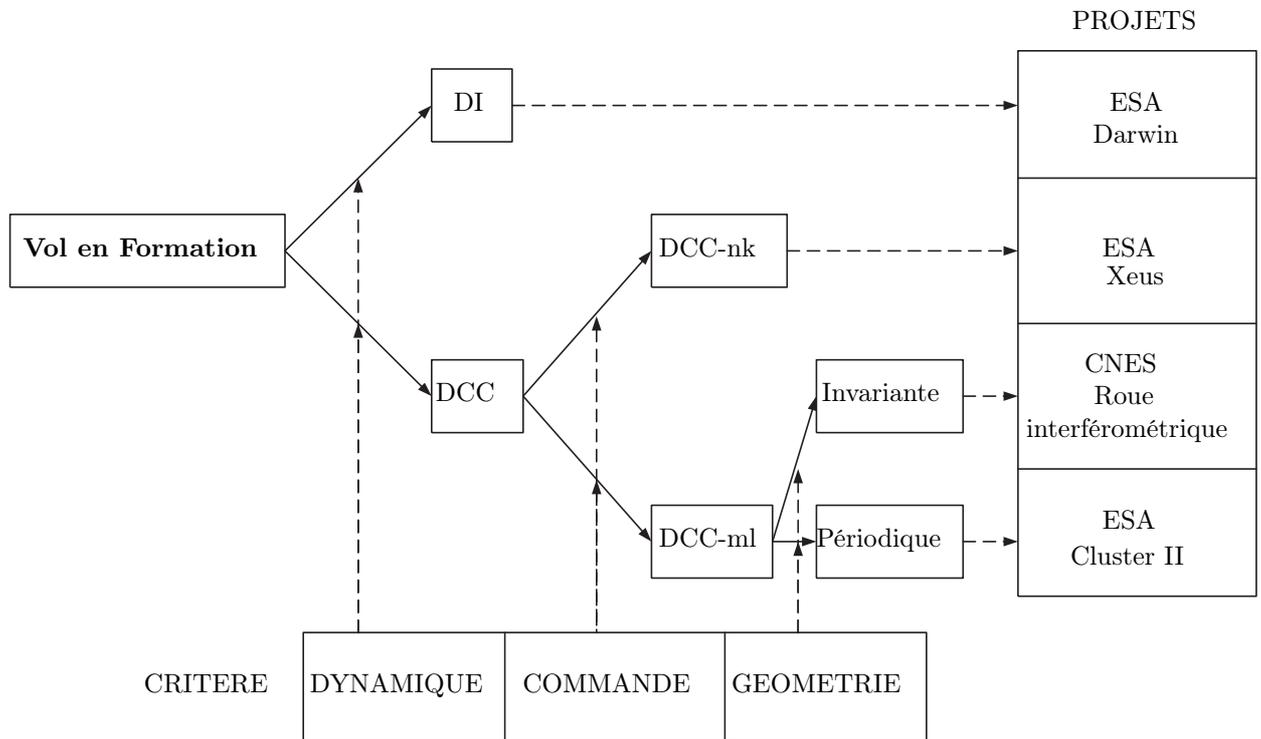


FIG. 1.2 - Classification des formations

### 1.1.5 Résumé

Cette classification, présentée par l'auteur dans [Bou02b], est résumée sur la Figure 1.2. Elle a été reprise par Scharf du JPL [Sch02] dans son article de synthèse sur le vol en formation.

Au niveau de la fonction GNC, on peut identifier trois familles : les formations inertielles, les formations non-keplériennes, et les formations à mouvement libre. A partir de ces trois familles, il est maintenant nécessaire d'identifier les points durs au niveau du guidage. Pour cela, il faut d'abord identifier les différentes phases d'une mission.

## 1.2 Identification des problèmes de guidage spécifiques au vol en formation

### 1.2.1 Définitions

Habituellement, on sépare une mission en deux phases :

- Mise à Poste (MIP) : c'est la phase qui démarre après l'injection sur orbite du satellite par le lanceur et se termine par son placement sur son orbite opérationnelle.
- Maintien à Poste (MAP) : c'est l'ensemble des périodes de correction de l'orbite du satellite pour contrer les perturbations orbitales.

## 1.2.2 Evolutions pour le vol en formation

En ce qui concerne les formations, ces deux phases existent toujours, à quelques nuances près :

- MIP : il faut différencier la MIP en fonction de la dynamique.  
Pour les formations inertielles, il y a une phase interplanétaire : la MIP est à la fois absolue et relative. La MIP absolue représente le transfert interplanétaire et constitue un problème différent. La MIP relative est le déploiement de la formation le long d'une trajectoire de référence, i.e. la phase qui commence à l'injection des satellites par le dernier étage du lanceur et se termine lorsque la formation est opérationnelle. Pour les formations géocentriques, la formation est en général déployée autour de l'orbite d'injection ce qui amène à ne plus considérer le problème de la MIP absolue.  
En conclusion, pour les formations, le problème de MIP est remplacé par le problème de déploiement.
- Maintien à Poste (MAP) : Comme pour la MIP, on peut séparer le problème en MAP absolue et MAP relative. La partie absolue est le maintien de l'orbite de référence, tandis que la partie relative est le MAF. Les stratégies de MAP peuvent être absolues uniquement, relatives uniquement, ou absolues et relatives.

Ces définitions peuvent être rapprochées de celles utilisées pour les constellations.

## 1.2.3 Description des problèmes

On obtient deux problèmes spécifiques aux formations :

**Problème I : modélisation du mouvement relatif** L'objectif est de décrire la trajectoire relative que suit un satellite par rapport à une référence. Les hypothèses de travail sont variées :

- Pour les formations géocentriques, l'orbite de référence peut être circulaire, faiblement elliptique ou très elliptique.
- La dynamique peut être inertielle, keplerienne, ou intégrer des perturbations orbitales
- La formation peut être de petite (quelques mètres à quelques kilomètres) ou de grande dimension (de quelques kilomètres à plusieurs centaines de kilomètres).

Il y a plusieurs utilisations de l'expression de la dynamique relative :

- Pour les formations à mouvement libre, il est intéressant d'identifier quelles sont les géométries robustes vis-à-vis des perturbations orbitales. Par exemple, à partir de géométries obtenues en hypothèse de dynamique keplerienne, on peut analyser s'il est possible de rendre robuste la géométrie en ne modifiant que très légèrement les paramètres orbitaux des satellites de la formation.
- Cette modélisation permet aussi de déduire des stratégies de MAF puisqu'il est possible de savoir quand un satellite sortira des spécifications de maintien. De plus, si la formulation est suffisamment simple (analytique par exemple), elle facilite le contrôle autonome à bord.
- Pour les formations non-keplériennes et inertielles : à partir de l'expression de l'accélération différentielle et d'un mouvement désiré, il est possible de calculer la force propulsive à laquelle doit être soumis le satellite.

Même si ce problème n'a pas été le sujet de la thèse, une bibliographie a été établie, notamment pour étalonner le modèle utilisé dans la thèse.

Le cas le plus simple est celui d'une référence dont l'orbite est circulaire, avec une dynamique keplerienne et une formation de petite dimension : ce sont les équations de Hill ou Clohessy-Wiltshire ([Clo60]) décrites dans l'annexe §B.1. Pour ce cas, la matrice de transition d'état<sup>7</sup> (STM) est obtenue en fonction du temps.

Les mêmes équations existent pour une référence elliptique : ce sont les équations de Tschauner-Hempel ([Tsc65]). La STM est obtenue en fonction de l'anomalie vraie nécessitant la résolution additionnelle de l'équation de Kepler si on veut obtenir une évolution temporelle. De plus, le vecteur position est normalisé dans le ROL de la référence.

Il y a ensuite des modèles de STM sans normalisation et avec le temps comme variable indépendante ([Bro02]), des modèles basés sur des développements en série de l'excentricité ([Vad01b], [Mel00]), des modèles prenant en compte l'effet du J2 ([Wie01]).

Pour les formations non-keplériennes et inertielles, le principe consiste à introduire un mouvement prédéfini dans les équations de la dynamique et d'en déduire la loi de guidage associée (voir [Kem02],[Vad01a], [Sed98], et [Mar03a]).

**Problème II : la reconfiguration** La reconfiguration<sup>8</sup> recouvre les phases de rotation, changements de taille, changement de forme, MAF, insertion d'un nouveau satellite, et bien entendu de déploiement.

Par définition, la reconfiguration est un problème d'optimisation : on a un état soumis à une dynamique et à des contraintes de bouts et/ou de chemin, et il faut minimiser un critère.

L'état peut être celui d'un seul satellite (ou une partie de celui-ci) comme la concaténation des états de tous les satellites de la formation.

Les contraintes peuvent être la donnée de l'état à l'instant initial ou final, mais aussi la nécessité d'avoir une distance minimale ou constante entre les satellites au cours d'une phase.

Le critère peut être le temps minimum, mais est en général plutôt la consommation minimale.

Pour le problème de MAF qui n'a pas été étudié dans cette thèse, on trouve :

- le Contrôle Optimal (OCP). Sous sa forme directe, la Programmation Mathématique (PM), on note l'utilisation de la Programmation Linéaire (PL) ([Mil01], [Pal99], [Til02], [Ina02]). Sous sa forme indirecte, on trouve la commande LQR avec [Vas85], [Kap99] ou [Vai03]. A noter enfin l'utilisation du Principe du Maximum avec un critère original sur les performances mission ([AIT03]).
- Approche "mécanique spatiale" où les équations du mouvement relatif (problème I) sont utilisées directement pour déduire les stratégies de MAF : modification des paramètres orbitaux des satellites d'une formation de manière à la rendre robuste aux perturbations orbitales ([Vad01a]). Certaines modélisations permettent de déduire des stratégies de MAF comme celle d'un tandem de satellites dont le coefficient balistique est différent ([Fol97], [Kir01],[Mar02]).
- Voyageur de commerce<sup>9</sup> : dans le cas particulier des formations inertielles, le problème à résoudre est celui du voyageur de commerce [Kon98].

---

<sup>7</sup>Matrice donnant l'état à un instant quelconque en fonction de l'état à l'instant initial

<sup>8</sup>Cette définition est une convention : Scharf, dans [Sch02], la définit lui comme une permutation des positions de tous les satellites de manière à équilibrer la consommation d'ergols

<sup>9</sup>Originellement, ce problème consiste à minimiser le temps pour passer par un certain nombre de villes. Mathématiquement, cela correspond à définir une métrique et parcourir un graphe dont chaque arrête est normée

## 1.3 Choix du sujet

ASP est impliqué dans des projets de formations appartenant à trois catégories de la classification :

- Formations inertielles (DI) : Smart-2, Darwin.
- Formations à mouvement libre (DCC/ml) : Roue interférométrique, Alerte avancée.
- Formation non-keplériennes (DCC/nk) : Max.

La thèse étant orientée mécanique spatiale, il a été naturel de s'orienter vers les formations géocentriques (DCC) où la dynamique est l'aspect le plus important. Les méthodes et résultats sont applicables aux formations à mouvement libre (bien que des travaux aient été menés en parallèle par l'auteur sur les formations non-keplériennes, cf Annexe E).

De plus, la majorité des projets sont basés sur des plate-formes de microsatellite : étant donné que ces plate-formes sont équipées d'une propulsion chimique ou gaz froid<sup>10</sup> (Myriades (CNES) et SSTL en Europe), le contrôle a été supposé impulsif.

Finalement, le choix s'est porté sur la phase de déploiement parce qu'elle est représentative des autres phases de reconfiguration (hormis le MAF).

## 1.4 Déroulement de la thèse

### 1.4.1 Première partie : positionnement du sujet et cas d'étude

Le vol en formation est un thème récent sur lequel la recherche est active. ASP est par conséquent très impliqué dans différents projets : la roue interférométrique pour le CNES, Max pour le CESR, Darwin et ACE+ pour l'ESA...

Il est donc primordial pour ASP de maîtriser les points critiques du vol en formation. La thèse se concentre sur le problème de la reconfiguration (déploiement, changement de taille, d'orientation, de forme).

Avant d'étudier un problème en particulier, la première tâche de la thèse a donc consisté à séparer les missions de manière à obtenir des classes de problèmes différents (voir paragraphe précédent) : c'est l'objet du chapitre courant. Du fait de la jeunesse du domaine, aucune synthèse n'existait qui aurait pu permettre de s'affranchir de cette première partie.

A partir de cette classification, il a été décidé d'étudier les formations géocentriques : le travail principal a concerné le déploiement des formations géocentriques invariantes, tandis que des travaux complémentaires ont été menés sur le déploiement des formations géocentriques périodiques et le maintien en formation des formations géocentriques non-keplériennes (ces travaux complémentaires sont exposés dans l'Annexe E).

Les formations géocentriques invariantes sont les plus adaptées pour de nombreuses missions comme cela est montré dans le Chapitre 2. De plus, leur déploiement présente l'avantage de nécessiter la correction de tous les paramètres orbitaux ce qui en fait un cas général.

D'un autre côté, le déploiement est une phase intéressante de reconfiguration puisqu'il faut non seulement l'optimiser, mais aussi répondre à des contraintes de risque de collisions.

L'optimalité du déploiement peut correspondre à n'importe quel critère, la consommation d'ergols et le temps sont les plus classiques. Comme on le verra, si le problème de déploiement à consommation minimale est résolu, il aboutit à une durée de quelques périodes orbitales.

---

<sup>10</sup>Pour des questions de prix de revient

Cette durée peut être considérée comme petite : retenir la consommation d'ergols comme critère d'optimisation est donc pertinent. De plus, les méthodes qui vont être développées dans le cadre du déploiement peuvent être appliquées à n'importe quelle phase de reconfiguration : limiter la consommation d'ergols augmentera d'autant la durée de vie de la mission.

Ainsi, le problème consiste à amener l'ensemble des satellites depuis le dernier étage du lanceur jusqu'à leur orbite opérationnelle tout en minimisant la consommation d'ergols.

Sur ce problème théorique se greffent des exigences opérationnelles : au delà d'une solution optimale, il faut que cette solution soit réaliste, par rapport à la commande et à la dynamique. Les méthodes trouvées doivent donc permettre par exemple d'éliminer la composante radiale d'une poussée comme cela est nécessaire sur certaines plate-formes de micro-satellite ; de manière analogue, elles doivent permettre de choisir le nombre de manœuvres ou leur instant d'application (contrainte de visibilité). De plus, la solution doit être robuste aux dispersions de manœuvres (orientation, amplitude) introduisant ainsi une notion de commande. Enfin, elle doit intégrer l'effet des perturbations orbitales.

Avant de s'attaquer au déploiement optimal, il est nécessaire de définir à quel type de formation s'applique le déploiement.

L'objet du Chapitre 2 est de présenter un nouveau modèle pour les formations invariantes : ce modèle est adapté aux orbites de référence quasi-circulaires avec une inclinaison quelconque.

#### 1.4.2 Deuxième partie : déploiement optimal avec contraintes sur la commande et sur les distances

Le problème général à résoudre est un rendez-vous<sup>11</sup> avec contrainte de collision du fait de la petite taille de ces formations<sup>12</sup> : c'est l'objet du Chapitre 3. L'approche choisie a d'abord été de casser la complexité du problème : d'une part en ramenant le rendez-vous à un transfert<sup>13</sup>, et d'autre part en traitant le risque de collision a posteriori.

Grâce aux différentes hypothèses sur le type de propulsion et la géométrie des formations, il a été possible d'utiliser les résultats analytiques fournis par la théorie du Primer Vector, variante du Principe du Maximum. L'intérêt d'obtenir des résultats analytiques est de fournir rapidement une solution en s'affranchissant d'une optimisation numérique qui peut être lente et même difficile à faire converger ; de plus, les études paramétriques sont facilitées.

Cette méthode aboutit à des résultats inattendus d'un point de vue contrôle optimal.

Si cette méthode est intéressante, elle ne prend pas en compte de contraintes sur la commande comme cela est nécessaire avec plusieurs plate-formes de microsattelites.

Une approche originale pour dépasser cette difficulté est présentée : elle consiste à introduire les conditions nécessaires d'optimalité issues du Primer Vector dans la méthode appelée Variations Of Parameters (VOP) basée sur la résolution directe des équations de Gauss. Cette méthode a permis de trouver analytiquement des solutions optimales contraintes, et de les comparer à la solution optimale non contrainte issue du Primer Vector.

A l'issue de cette partie, il est montré que la solution optimale non contrainte aboutit à terme à une collision entre les satellites et le dernier étage du lanceur.

L'objet du Chapitre 4 est donc de gérer ce risque de collision. La stratégie choisie consiste

---

<sup>11</sup>Correction de tous les paramètres orbitaux incluant la position sur l'orbite cible

<sup>12</sup>En effet, du fait de l'action des perturbations orbitales, les formations invariantes de grande dimension sont inenvisageables d'un point de vue budget d'ergol pour le MAF

<sup>13</sup>Rendez-vous sans la contrainte de position sur orbite cible

à introduire une impulsion d'injection depuis le dernier étage du lanceur. A l'issue de la bibliographie, la stratégie choisie est classique : il s'agit d'une impulsion le long de la vitesse permettant de créer un moyen mouvement différentiel entre le lanceur et le satellite, et ainsi une augmentation de la distance entre les deux.

Le nouveau problème consiste donc à optimiser les caractéristiques de la manœuvre d'injection du lanceur considérée comme "gratuite" (utilisation d'un ressort par exemple). Par "optimiser", on entend toujours minimiser la consommation en ergols puisque le risque de collision est traité a posteriori. Le Primer Vector est à nouveau appliqué : grâce à la formulation analytique optimale de la consommation, les caractéristiques optimales de l'impulsion d'injection sont trouvées.

Mais contrairement au cas précédent où la collision pouvait être déduite sans avoir directement la loi de guidage, il s'avère maintenant nécessaire de l'obtenir pour calculer l'évolution des distances entre les satellites et lanceur, et entre les satellites eux-mêmes. Cette loi ne peut être obtenue facilement par le Primer Vector.

Une fois de plus, la solution consiste à introduire des conditions nécessaires d'optimalité du Primer Vector dans la méthode VOP. Des lois de guidage analytiques sont obtenues et on trouve un nouveau cas de transfert non décrit dans la littérature.

A partir de ces lois, il est alors possible d'analyser l'évolution des différentes distances. Une méthode d'évaluation de la distance minimale est présentée : elle permet de s'affranchir de toute simulation grâce à des abaques fournissant la distance en fonction des caractéristiques géométriques de la formation.

Par ce biais, il est donc possible de trouver le déploiement à consommation minimale permettant d'avoir une distance inter-satellite et satellite-lanceur toujours supérieure à une limite.

### 1.4.3 Troisième partie : robustesse de la solution

Le premier chapitre de cette partie, Chapitre 5, aborde l'effet des dispersions de manœuvres : à partir de la solution optimale en terme de consommation, on peut alors analyser l'effet des dispersions d'impulsion dues à des erreurs représentatives des sous-systèmes (navigation, propulsion) d'un micro-satellite, la collision réapparaît dans une proportion de cas non négligeable ; de plus, la formation n'est pas correctement déployée.

Une stratégie de commande innovante est alors proposée pour répondre à ces deux problèmes. L'avantage de cette stratégie est qu'elle n'augmente quasiment pas la consommation d'ergols tout en corrigeant parfaitement les dispersions.

Ainsi, pour la classe des formations étudiée, une stratégie optimale et réaliste a été trouvée. Au final, cette stratégie comporte sept manœuvres là où la solution optimale issue du Primer Vector n'en comportait que deux.

Dans le Chapitre 6, c'est l'introduction des perturbations orbitales qui est traitée. Il est montré que pour la classe d'orbite considérée, la perturbation due à l'aplatissement des pôles domine. L'effet de l'aplatissement des pôles affecte notablement la distance inter-satellite finale, représentative de la qualité du déploiement. Une méthode basée sur la modification de l'amplitude de l'impulsion d'injection est présentée et montre que, moyennant une légère modification de celle-ci, le déploiement est parfaitement assuré.

Ainsi est-on arrivé à une solution à consommation minimale, contrainte sur la commande et sur les distances, robuste aux dispersions de manœuvres et aux perturbations orbitales.

# Un nouveau modèle pour les formations géocentriques invariantes

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Le problème à deux corps : le mouvement keplerien . . . . .</b>	<b>17</b>
2.1.1	Généralités . . . . .	17
2.1.2	Equations du mouvement relatif autour d'une orbite de référence circulaire . . . . .	19
<b>2.2</b>	<b>Le problème à trois corps : définition des points de Lagrange . .</b>	<b>19</b>
<b>2.3</b>	<b>La dynamique inertielle (DI) : les formations inertielles . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>2.4</b>	<b>La dynamique corps central (DCC) : les formations géocentriques</b>	<b>20</b>
2.4.1	Les formations non-keplériennes (DCC-nk) . . . . .	21
2.4.2	Les formations à mouvement libre (DCC-ml) . . . . .	21
	Les formations périodiques . . . . .	21
	Les formations invariantes . . . . .	21
<b>2.5</b>	<b>Intérêt des formations invariantes . . . . .</b>	<b>22</b>
2.5.1	Interférométrie radar . . . . .	22
2.5.2	La synthèse d'antenne . . . . .	22
	Antenne passive . . . . .	22
	Antenne active . . . . .	22
2.5.3	Conclusion . . . . .	23
<b>2.6</b>	<b>Modèles existants pour les géométries invariantes . . . . .</b>	<b>23</b>
2.6.1	Modèle en paramètres cartésiens . . . . .	23
2.6.2	Modèles en paramètres keplériens . . . . .	25
<b>2.7</b>	<b>Modèle général en paramètres keplériens . . . . .</b>	<b>25</b>
2.7.1	Modèle adapté à une orbite de référence circulaire et non-équatoriale	25
	Présentation du problème . . . . .	25
	Paramètres orbitaux définissant la composante dans le plan de l'orbite de référence . . . . .	25
	Paramètres orbitaux définissant la composante hors du plan de l'orbite de référence . . . . .	27
	Ecart en position sur orbite . . . . .	29
2.7.2	Extension au cas d'une orbite de référence quasi-circulaire . . . . .	30
2.7.3	Extension au cas d'une orbite quasi-équatoriale . . . . .	33
2.7.4	Exemple . . . . .	36
<b>2.8</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>37</b>

---

## 2.1 Le problème à deux corps : le mouvement keplerien

### 2.1.1 Généralités

Comme cela est décrit dans l'Annexe A, le mouvement d'un satellite dans un problème à deux corps est décrit par une conique : ellipse ou hyperbole. Mathématiquement, il y a deux

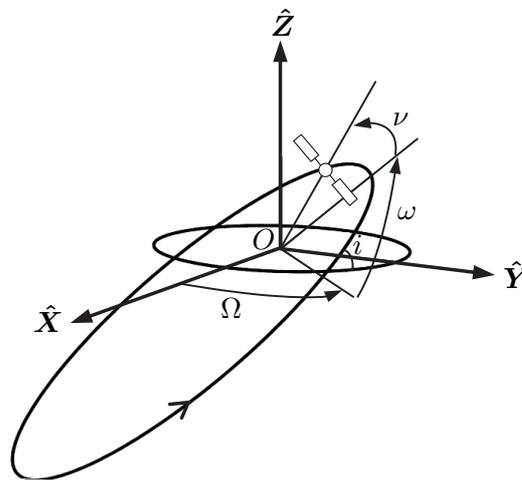
cas particuliers : le cercle et la parabole.

De manière générale, une orbite elliptique est décrite par un vecteur d'état à six paramètres. Pour définir ces paramètres, on définit un repère inertiel  $\mathcal{R}_T \equiv \{O, \hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}\}$  où  $O$  est le centre de la Terre.  $\hat{X}$  est le vecteur unitaire dans la direction du point vernal, c'est-à-dire la direction définie par l'intersection du plan équatorial et du plan de l'écliptique à une date donnée<sup>1</sup>, le sens étant donné par le fait que le Soleil doit avoir une déclinaison croissante.  $\hat{Z}$  est le vecteur unitaire dans la direction du pôle nord (par définition orthogonale au plan équatorial).  $\hat{Y}$  complète le trièdre orthonormé direct.

Le jeu de paramètres le plus classique est constitué :

- du demi-grand axe de l'ellipse, noté  $a$ .
- de l'excentricité de l'ellipse, notée  $e$ .
- de l'inclinaison du plan orbital par rapport au plan de l'équateur terrestre, notée  $i$ .
- de l'ascension droite du nœud ascendant, notée  $\Omega$ . Elle correspond à l'angle le long de l'équateur terrestre entre la direction du point vernal et le point d'intersection entre le plan de l'équateur et le plan orbital (passage montant du satellite).
- de l'argument du périégée, noté  $\omega$ . C'est l'angle le long du plan orbital entre le nœud ascendant et la direction du périégée.
- de l'anomalie vraie, notée  $v$ . C'est l'angle le long du plan orbital entre la direction du périégée et la position courante du satellite.

Ces paramètres sont résumés sur la Figure 2.1. Comme ils désigneront l'orbite d'un mobile fictif de référence autour de laquelle le mouvement du satellite de la formation sera linéarisé, ils seront surmontés d'une barre.



**FIG. 2.1 - Paramètres angulaires**

Dans le cas particulier des orbites circulaires, le demi-grand axe est égal au rayon du cercle, et l'orbite est parcourue la vitesse constante :

$$\bar{V} \equiv \sqrt{\frac{\mu}{a}} \quad (2.1)$$

<sup>1</sup>Plusieurs définitions du point vernal existent suivant que l'on parle de l'équateur et de l'écliptique moyens ou si l'on prend en compte leur nutation

où  $\mu \equiv GM_T$ ,  $G$  est la constante de gravitation universelle et  $M_T$  la masse de la Terre. On introduit enfin le moyen mouvement à l'aide de la troisième loi de Kepler :

$$\bar{n}^2 \bar{a}^3 = \mu \quad (2.2)$$

### 2.1.2 Equations du mouvement relatif autour d'une orbite de référence circulaire

Les formations sont définies par des écarts de paramètres orbitaux par rapport à une référence. La majorité des projets de formations est définie par rapport à une orbite de référence circulaire ou quasi-circulaire. Les formations autour d'une orbite elliptique sont très peu nombreuses : c'est pourquoi on ne développe ici (le détail est donné dans l'Annexe A) que le formalisme concernant les orbites circulaires (la quasi-circularité sera introduite plus tard). Faisons donc l'hypothèse que la dynamique est de type corps central (en  $\frac{1}{r^2}$ ) et l'orbite de référence circulaire. On utilise alors le ROL radial/transversal/normal  $\mathcal{R}'_T \equiv \{O', \hat{Q}, \hat{S}, \hat{W}\}$  où  $O'$  est centré sur un mobile fictif décrivant l'orbite circulaire de référence. Il parcourt cette orbite à vitesse angulaire constante  $\bar{n}$ .

Soit  $\mathbf{r}$  le vecteur position du satellite dans  $\mathcal{R}_T$ ,  $\bar{\mathbf{r}}$  le vecteur position du mobile fictif, et  $\delta\mathbf{r}$  tel que :

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} + \delta\mathbf{r} \quad (2.3)$$

On utilise les formules de dérivation vectorielles entre  $\mathcal{R}_T$  et  $\mathcal{R}'_T$  pour trouver le mouvement relatif du satellite dans  $\mathcal{R}'_T$  :

$$\delta\ddot{\mathbf{r}}_{\mathcal{R}'_T} = -\mu \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\bar{\mathbf{r}}}{\bar{r}^3} \right) + \gamma_P - 2\bar{\mathbf{n}} \wedge \delta\dot{\mathbf{r}}_{\mathcal{R}'_T} - \bar{\mathbf{n}} \wedge (\bar{\mathbf{n}} \wedge \delta\mathbf{r}) \quad (2.4)$$

où  $\gamma_P \equiv [\gamma_Q, \gamma_S, \gamma_W]^T$  représente l'accélération perturbatrice à laquelle est soumis le satellite. On définit les coordonnées du satellite dans  $\mathcal{R}'_T$  par :

$$\mathbf{r} \equiv x\hat{Q} + y\hat{S} + z\hat{W} \quad (2.5)$$

Si on fait l'hypothèse que la distance entre le satellite et le mobile fictif est petite devant le rayon de l'orbite de référence, on peut linéariser les équations du mouvement. On obtient alors le système d'équations différentielles régissant le mouvement relatif du satellite dans  $\mathcal{R}'_T$  soumis à l'accélération perturbatrice  $\gamma_P$  :

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\bar{n}\dot{y} - 3\bar{n}^2 x = \gamma_Q \\ \ddot{y} - 2\bar{n}\dot{x} = \gamma_S \\ \ddot{z} + 2\bar{n}^2 z = \gamma_W \end{cases} \quad (2.6)$$

Ces équations sont celles de Hill ou Clohessy-Wiltshire.

## 2.2 Le problème à trois corps : définition des points de Lagrange

Dans le cadre du problème à trois corps, on ajoute le Soleil dans le système dynamique. Il est alors possible de montrer qu'il existe cinq points d'équilibre d'un point de vue dynamique : les points de Lagrange. Ces points sont fixes dans un repère tournant avec la Terre. Deux d'entre eux, L1 et L2, sont situés de part et d'autre de la Terre le long d'une ligne

Terre-Soleil : ils présentent donc l'avantage d'être proches de la Terre. Ainsi, de nombreux missions au L1 et au L2 existent : SOHO, Genesis, Herschel, Planck, ...

Si on fait l'hypothèse que la masse du satellite est négligeable devant celle de la Terre, on dit que le problème est réduit. Si on ajoute l'hypothèse que l'orbite de la Terre est circulaire, on obtient le Problème à trois Corps Réduit Circularisé ou CR3BP.

Si on fait l'hypothèse que la distance entre le point de Lagrange et le satellite est petite devant la distance du point de Lagrange à la Terre, on peut linéariser les équations du mouvement. On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - (1 + 2K)x = 0 \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - (1 - K)y = 0 \\ \ddot{z} + Kz = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $K = \frac{\mu_L}{x_L} + \frac{1-\mu_L}{(1+x_L)^3}$  et  $\mu_L = \frac{M_T}{M_T+M_\odot}$ .  $x_L$  représente la distance Soleil-Point de Lagrange et  $M_\odot$  la masse du Soleil. Ces équations sont adimensionnées : la distance par une unité astronomique et le temps par la période de l'orbite de la Terre.

Lorsqu'on veut résoudre un problème de transfert Terre-Point de Lagrange de manière réaliste, il faut intégrer l'ellipticité de l'orbite de la Terre et l'effet de la Lune, mais la solution obtenue sans ces effets reste une bonne solution initiale.

## 2.3 La dynamique inertielle (DI) : les formations inertielles

La dynamique inertielle est celle que l'on rencontre au niveau des points de Lagrange. En effet, supposons une orbite de référence gouvernée par les équations 2.7. L'accélération différentielle  $\delta\gamma$  pour deux satellites séparés par une distance  $d$  est de l'ordre de :

$$\frac{\delta\gamma}{d} = \mathcal{O}(K) \quad (2.8)$$

Numériquement, on trouve  $\frac{\delta\gamma}{d} \approx 4.10^{-15} m.s^{-2}.m^{-1}$ , c'est-à-dire que pour une formation de rayon égal à 100 m, l'accélération différentielle est de l'ordre de  $4.10^{-13} m.s^{-2}$ . C'est pourquoi on considère que la dynamique à laquelle est soumise un satellite d'une formation volant au point de Lagrange est inertielle.

## 2.4 La dynamique corps central (DCC) : les formations géocentriques

Le même type d'analyse qualitative sur une formation volant le long d'une orbite LEO montre que :

$$\frac{\delta\gamma}{d} = \mathcal{O}(\bar{n}^2) \quad (2.9)$$

Pour une orbite de référence de 800 km d'altitude, on obtient un rapport de l'ordre de  $\frac{\delta\gamma}{d} \approx 1.10^{-6} m.s^{-2}.m^{-1}$ , c'est-à-dire que pour une formation de rayon égal à 100 m, l'accélération différentielle est de l'ordre de  $1.10^{-4} m.s^{-2}$  et la force propulsive nécessaire pour la contrôler pour un satellite de 100 kg est 10 mN. Une telle force montre que l'effet différentiel de l'attraction de la Terre n'est pas négligeable. Deux solutions existent alors : soit contrer cette accélération différentielle (les formations non-keplériennes), soit trouver les formations stables vis-à-vis de cette dynamique (les formations à mouvement libre).

### 2.4.1 Les formations non-keplériennes (DCC-nk)

Pour ces formations, une force propulsive est appliquée constamment pour imprimer un mouvement forcé au satellite.

Soit  $\delta\mathbf{r}(t)$  le mouvement désiré dans  $\mathcal{R}'_T$ , on déduit de l'équation 2.4 la loi de guidage  $\gamma_{cont}$  pour que le satellite décrive ce mouvement :

$$\gamma_{guid}(t) = \delta\ddot{\mathbf{r}}_{\mathcal{R}'_T}(t) + \mu \left( \frac{\mathbf{r}(t)}{r^3(t)} - \frac{\bar{\mathbf{r}}(t)}{\bar{r}^3(t)} \right) - 2\bar{\mathbf{n}} \wedge \delta\dot{\mathbf{r}}_{\mathcal{R}'_T}(t) - \bar{\mathbf{n}} \wedge (\bar{\mathbf{n}} \wedge \delta\mathbf{r}(t)) \quad (2.10)$$

Ainsi, n'importe quelle géométrie est accessible, comme par exemple la mission Max ([Bou02a], [Mar03a], [Mar03b] [Von03]). Les travaux sur le déploiement de Max seront résumés dans l'Annexe E.3, §E.3.

Cette analyse mission a consisté à étudier le cas où :

$$\delta\mathbf{r}(t) = \mathbf{D} \quad (2.11)$$

où  $\mathbf{D}$  est un vecteur constant dans  $\mathcal{R}_T$  donnant la direction de visée du télescope pendant la durée d'une observation, soit  $10^6$  secondes ou environ 11.5 jours.

Une stratégie de commande en boucle fermée et la minimisation de la consommation d'ergols nécessaire à une prise de vue ont été ensuite traitées dans [Cer03].

### 2.4.2 Les formations à mouvement libre (DCC-ml)

Pour ces formations, la géométrie de la formation utilise la dynamique : le maintien en formation ne sert qu'à contrer les perturbations orbitales.

#### Les formations périodiques

Les formations périodiques sont définies par le fait que la géométrie évolue avec la position sur orbite : si on ne considère qu'une dynamique de type corps central, la géométrie est périodique à la période orbitale.

Dans le cas de la mission Cluster, l'orbite de référence est elliptique et polaire. Des écarts d'inclinaison et de nœud ascendant permettent d'obtenir une géométrie pyramidale régulière lorsque la formation traverse la magnétopause.

Dans le cas de la mission Noss White Cloud, l'orbite de référence est héliosynchrone et quasi-circulaire. Des écarts de nœud ascendant et d'argument de la latitude permettent d'obtenir une géométrie en triangle équilatéral pour une latitude moyenne. Les travaux sur le déploiement d'une formation périodique de type Noss White Cloud seront résumés dans l'Annexe E, §E.2. Enfin, on peut citer le cas de mission en tandem (L7-EO1) où deux satellites partagent la même trace au sol grâce à des écarts de nœud ascendant et d'argument de la latitude.

#### Les formations invariantes

La caractéristique des formations invariantes est que leur géométrie ne change pas au cours d'une révolution (toujours dans le cadre d'une dynamique de type corps central). Dans le prochain paragraphe, nous allons définir précisément quelles sont ces géométries puisque c'est sur l'une d'entre elles, la géométrie circulaire, que vont porter les parties suivantes.

## 2.5 Intérêt des formations invariantes

### 2.5.1 Interférométrie radar

Cette application consiste à faire interférer les échos reçus par deux satellites. Ces échos proviennent d'une onde primaire envoyée par un satellite illuminateur (ce dernier peut d'ailleurs être émetteur et récepteur) et réfléchi par le sol.

La performance dépend des variations des "baselines" horizontale et verticale<sup>2</sup>. La finalité est la synthèse de Modèles Numériques de Terrain (MNT).

Un concept connu est celui de la Roue interférométrique qui est une formation invariante : grâce à l'ellipse relative, on dispose de deux baselines non nulles.

Il faut noter cependant qu'un concept nouveau, le Pendulum (cf [Fie02]), permet de remédier au défaut majeur de la Roue, à savoir le couplage des baselines : en effet, la qualité de l'interférogramme horizontal (resp. vertical) est d'autant meilleure que la baseline verticale (resp. horizontale) est constante (cf [Adr99]). Or, sur la Roue, les deux baselines évoluent de concert. Ce nouveau concept est un cas particulier de formation périodique.

### 2.5.2 La synthèse d'antenne

#### Antenne passive

Dans ce cas, les signaux que reçoit l'antenne proviennent d'émetteurs soit au sol (antenne, téléphone,...), soit dans l'espace (astrophysique) : une application classique est l'écoute électronique qui permet de repérer une cible au sol et d'isoler son rayonnement électromagnétique. C'est le cas de la mission Noss White Cloud de l'USAF. Pour cela, il est nécessaire d'avoir une formation hors du plan de l'orbite de référence. L'inconvénient majeur de Noss est d'être une formation périodique (un triangle) dont la géométrie est fonction de la latitude, ce qui signifie que les performances sont aussi fonction de la latitude. En revanche, l'avantage d'une formation invariante est que la géométrie est constante au cours d'une révolution ce qui permet d'avoir des performances stables. C'est ce qui est envisagé dans le cadre du projet TechSat21 de l'AFRL.

#### Antenne active

Dans ce cas, les signaux reçus par l'antenne sont l'écho radar sur le sol d'un satellite illuminateur. On peut citer deux applications :

- L'imagerie : l'avantage d'une formation est évident puisqu'il est possible d'augmenter la taille de l'antenne.

L'utilisation d'une formation revient à faire une discrétisation d'une antenne continue. De manière à avoir des performances constantes en termes de diagramme d'antenne, il est impératif d'avoir une géométrie invariante. L'avantage par rapport au SAR est que l'on garde l'information de Doppler qui permet une autre application : le MTI.

- Le Moving Target Identification (MTI) Il permet d'obtenir la vitesse radiale d'une cible au sol grâce à une baseline horizontale. Bien que peu répandue, cette application va se développer avec les formations où il est possible d'obtenir des baselines de taille quelconque.

Une mission récente (SRTM de la Nasa sur la navette) l'a ainsi mise en œuvre. Il

---

<sup>2</sup>La baseline horizontale est la distance entre les satellites le long de l'axe vitesse  $\hat{S}$ , la baseline verticale est la distance entre les satellites projetée dans le plan orthogonal à  $\hat{S}$

est intéressant d'avoir une baseline horizontale constante, ce qui signifie qu'hormis le cas particulier de satellites uniquement séparés en position sur orbite, les formations invariantes ne sont pas très adaptées pour ce type d'application. Pourtant, le MTI peut être une application secondaire : c'est le cas de la formation invariante TechSat21.

### 2.5.3 Conclusion

Pour de nombreuses applications, les formations invariantes sont des systèmes prometteurs. C'est pourquoi il a été décidé d'étudier cette classe de formations. De plus, comme on le verra plus tard, elles constituent le cas le plus général de déploiement puisqu'il faut corriger tous les paramètres orbitaux. Ainsi, les autres formations géocentriques ne sont que des cas particuliers des formations invariantes.

## 2.6 Modèles existants pour les géométries invariantes

### 2.6.1 Modèle en paramètres cartésiens

Ce modèle est décrit dans [Sab01]. Lorsque l'accélération perturbatrice  $\gamma_P$  est nulle, le système d'équations différentielles 2.6 s'intègre (cf Annexe B, §B.1) pour donner le système explicite en temps :

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}(t) \\ \delta \dot{\mathbf{r}}(t) \end{bmatrix} = \underline{\Phi}(t, t_0) \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}(t_0) \\ \delta \dot{\mathbf{r}}(t_0) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

où  $\underline{\Phi}(t, t_0)$  est la STM. Les équations sur la position donnent :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\bar{n}} \sin(\bar{n}t) - \left(3x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{\bar{n}}\right) \cos(\bar{n}t) + 4x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{\bar{n}} \\ y(t) = \frac{2\dot{x}_0}{\bar{n}} \cos(\bar{n}t) + \left(6x_0 + \frac{4\dot{y}_0}{\bar{n}}\right) \sin(\bar{n}t) - (6\bar{n}x_0 + 3\dot{y}_0)t \\ \quad - \frac{2\dot{x}_0}{\bar{n}} + y_0 \\ z(t) = \frac{\dot{z}_0}{\bar{n}} \sin(\bar{n}t) + z_0 \cos(\bar{n}t) \end{cases} \quad (2.13)$$

où  $[x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0]^T$  est le vecteur d'état à l'instant initial. Ainsi, il est aisé de remarquer que si :

$$\dot{y}_0 = -2x_0\bar{n} \quad (2.14)$$

le mouvement le long de l'axe transversal est borné. On a alors le nouveau système :

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\bar{n}} \sin(\bar{n}t) + x_0 \cos(\bar{n}t) \quad (2.15a)$$

$$y(t) = \frac{2\dot{x}_0}{\bar{n}} \cos(\bar{n}t) - 2x_0 \sin(\bar{n}t) - \frac{2\dot{x}_0}{\bar{n}} + y_0 \quad (2.15b)$$

$$z(t) = \frac{\dot{z}_0}{\bar{n}} \sin(\bar{n}t) + z_0 \cos(\bar{n}t) \quad (2.15c)$$

ou encore :

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\bar{n}t + \phi) \\ y(t) &= -2A \sin(\bar{n}t + \phi) + C \\ z(t) &= B \cos(\bar{n}t + \phi) \end{aligned}} \quad (2.16)$$

où  $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\bar{n}}\right)^2}$ ,  $B = \sqrt{z_0^2 + \left(\frac{\dot{z}_0}{\bar{n}}\right)^2}$ ,  $C = -\frac{2\dot{x}_0}{\bar{n}} + y_0$ ,  $\phi = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0}{\bar{n}x_0}\right)$  et  $\varphi = \arctan\left(-\frac{\dot{z}_0}{\bar{n}z_0}\right)$ . De ces équations, on constate que le mouvement dans le plan de l'orbite de référence (radial/transversal) est une ellipse de demi-grand axe  $a_{\hat{Q},\hat{S}} = 2A$  et de demi-petit axe  $b_{\hat{Q},\hat{S}} = A$ . Soit  $e_{\hat{Q},\hat{S}}$  l'excentricité de cette ellipse, de la relation générale sur les ellipses :

$$\frac{b_{\hat{Q},\hat{S}}}{a_{\hat{Q},\hat{S}}} = \sqrt{1 - e_{\hat{Q},\hat{S}}^2} \quad (2.17)$$

on en déduit que :

$$e_{\hat{Q},\hat{S}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2.18)$$

Ce mouvement est découplé de la composante hors du plan (normal). Si  $B = 0$ , on retrouve la mission Roue interférométrique.

Si  $B \neq 0$ , la formation n'est pas contenue dans le plan de l'orbite de référence. Il est alors possible de trouver deux cas particuliers :

**La formation circulaire** Pour que le mouvement relatif soit un cercle de rayon  $\rho$ , il faut remplir la condition :

$$x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = \rho^2 \quad (2.19)$$

Cette condition est vérifiée ssi :

$$\begin{cases} z_0 = \sqrt{3}\varepsilon x_0 \\ \dot{z}_0 = \sqrt{3}\varepsilon \dot{x}_0 \end{cases} \quad (2.20)$$

avec  $\varepsilon = \pm 1$ . Dans ce cas, le cercle est contenu dans un plan déduit du plan transversal/normal par une rotation  $\delta$  autour de l'axe transversal égale à :

$$\delta = \varepsilon \frac{\pi}{6} \quad (2.21)$$

**La formation circulaire projetée** Pour que le mouvement relatif projeté dans le plan tangent au plan orbital (transversal/normal) soit un cercle de rayon  $\rho$ , il faut remplir la condition :

$$y(t)^2 + z(t)^2 = \rho^2 \quad (2.22)$$

Cette condition est vérifiée ssi :

$$\begin{cases} z_0 = 2\varepsilon x_0 \\ \dot{z}_0 = 2\varepsilon \dot{x}_0 \end{cases} \quad (2.23)$$

avec  $\varepsilon = \pm 1$ .

Les limitations de ce modèle sont multiples : la première est que l'orbite de référence doit être circulaire. Il n'est donc pas possible de définir une formation avec ce formalisme pour une

orbite de référence à périégée gelée<sup>3</sup>, orbite qui représente la majorité des missions d'observation en orbite basse.

De plus, ce formalisme est donné en paramètres cartésiens dans  $\mathcal{R}'_T$ . Pour pouvoir connaître l'écart par rapport au mobile fictif en termes de paramètres orbitaux kepleriens, il faut convertir les paramètres cartésiens dans  $\mathcal{R}'_T$  en paramètres cartésiens dans  $\mathcal{R}_T$ , puis en paramètres kepleriens dans  $\mathcal{R}_T$ . Cette conversion est numérique à cause de la résolution de l'équation de Kepler. L'optimisation du déploiement qui découle de ce formalisme ne peut donc être analytique.

De plus, il n'est pas possible d'analyser analytiquement les effets différentiels des perturbations orbitales puisque ces effets sont en général donnés pour des écarts en paramètres orbitaux kepleriens.

## 2.6.2 Modèles en paramètres kepleriens

On trouve dans la littérature deux modèles décrivant les formations circulaire et circulaire projetée en termes de paramètres orbitaux kepleriens. Historiquement, le premier a été celui de Vadali [Vad01a]. L'inconvénient de ce modèle est qu'il ne permet pas de gérer les orbites de référence quasi-équatoriales. Le deuxième est celui de Swinburne [Swi01]. L'inconvénient est le même que pour le précédent. De plus, la méthode pour trouver le modèle n'est pas décrite et aucune référence n'est donnée.

Le développement du modèle qui va être décrit a commencé avant que ces articles ne soient publiés. Aujourd'hui, il inclut comme les deux autres l'effet de la quasi-circularité de l'orbite de référence, mais aussi sa quasi-équatorialité pour les missions de type géostationnaire.

## 2.7 Modèle général en paramètres kepleriens

### 2.7.1 Modèle adapté à une orbite de référence circulaire et non-équatoriale

#### Présentation du problème

Les premiers résultats obtenus par l'auteur ont été présentés dans [Bou02b] et poursuivis dans [Bou02c]. Dans un premier temps, le cas de la formation circulaire va être traité. Le vecteur d'état du mobile fictif de référence est :

$$\bar{\mathbf{x}} = [\bar{a}, \bar{e}, \bar{i}, \bar{\Omega}, \bar{\omega}, \bar{M}]^T \quad (2.24)$$

On fait l'hypothèse que l'excentricité vérifie :

$$\bar{e} \ll 10^{-3} \quad (2.25)$$

de telle sorte que le formalisme des équations de Clohessy-Wiltshire puisse être appliqué. Connaissant  $\mathbf{x}$ , le problème consiste donc à trouver  $\delta\mathbf{x}$  tel que le mouvement autour du mobile soit circulaire.

#### Paramètres orbitaux définissant la composante dans le plan de l'orbite de référence

De manière à ce que les deux orbites soient synchrones, elles doivent avoir la même période orbitale. On en déduit que :

$$\delta a = 0 \quad (2.26)$$

---

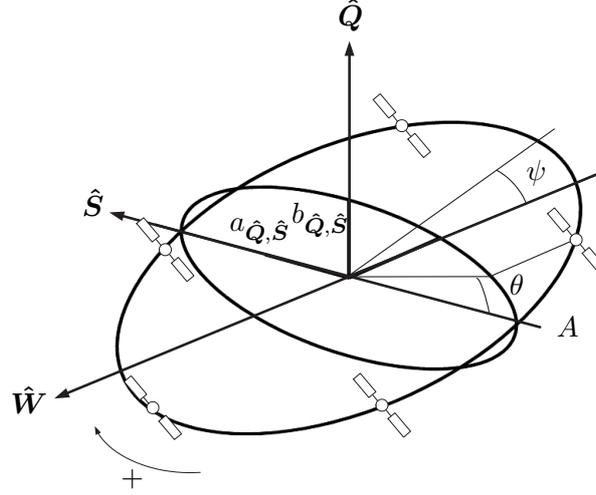
<sup>3</sup>Donc avec une excentricité gelée dont la valeur est de l'ordre de  $10^{-3}$

Cette condition correspond à la condition 2.14.

La Figure 2.2 représente le mouvement circulaire dans  $\mathcal{R}'_T$ . Il est possible de remarquer que cette figure correspond au cas :

$$\varepsilon = -1 \quad (2.27)$$

où  $\varepsilon$  a été introduit en 2.20. Les calculs à suivre correspondent à ce cas. Par conséquent, certains résultats devraient changer de signe pour prendre en compte le cas  $\varepsilon=1$ .



**FIG. 2.2 - Formation circulaire**

Comme cela a déjà été dit, le mouvement dans le plan  $\Pi = (\hat{Q}, \hat{S})$  est une ellipse. Le point de l'ellipse tel que la coordonnée le long de l'axe  $\hat{Q}$  soit maximale correspond au demi-petit axe de l'ellipse  $b_{\hat{Q}, \hat{S}}$ . Comme ce point correspond aussi à l'apogée de l'orbite du satellite dans  $\mathcal{R}_T$ , on en déduit la relation :

$$b_{\hat{Q}, \hat{S}} = \bar{a} \delta e_{\hat{Q}, \hat{S}} \quad (2.28)$$

Or, comme l'ellipse est de rapport (2x1), on en déduit la relation :

$$a_{\hat{Q}, \hat{S}} = 2\bar{a} \delta e_{\hat{Q}, \hat{S}} \quad (2.29)$$

Enfin, comme le mouvement est circulaire de rayon  $\rho$ , il apparaît que :

$$a_{\hat{Q}, \hat{S}} = \rho \quad (2.30)$$

et donc finalement :

$$\boxed{\delta e = \frac{\rho}{2\bar{a}}} \quad (2.31)$$

De l'équation 2.25, on peut remarquer que  $\delta e = e$ . Considérons que la position initiale du satellite à l'instant initial  $t_0$  est l'angle  $\theta$  compté à partir de l'axe  $-\hat{S}$ . Introduisons l'argument de la latitude moyenne :

$$\alpha = \bar{\omega} + \bar{M} \quad (2.32)$$

Faisons l'hypothèse que

$$\alpha(t_0) = \bar{\omega} + \bar{M}(t_0) = 0 \quad (2.33)$$

Cela signifie que le mobile fictif se trouve à l'équateur à  $t_0$ . La coordonnée le long de l'axe  $\hat{Q}$  est minimale et correspond au périégée de l'orbite du satellite pour l'instant  $t_1$  tel que :

$$\bar{\alpha}(t_1) = \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \quad (2.34)$$

c'est-à-dire pour :

$$t_1 = \frac{\frac{\pi}{2} + \theta}{\bar{n}} \quad (2.35)$$

On en déduit :

$$\boxed{\bar{\omega} = \frac{\pi}{2} + \theta} \quad (2.36)$$

### Paramètres orbitaux définissant la composante hors du plan de l'orbite de référence

Le mouvement hors du plan selon l'axe  $\hat{W}$  est une conséquence d'écarts d'inclinaison et de nœud ascendant. La coordonnée le long de l'axe  $\hat{W}$  est maximale pour l'instant  $t_1$ . L'équation 2.15c devient :

$$z_{max} = z(t_1) = -\frac{\dot{z}_0}{\bar{n}} \cos \theta + z_0 \sin \theta \quad (2.37)$$

De plus, on voit sur la Figure 2.2 que :

$$z_{max} = \rho \cos \psi \quad (2.38)$$

De l'équation 2.21, on déduit donc que :

$$z_{max} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rho \quad (2.39)$$

Du système d'équation 2.15, on déduit l'évolution de la vitesse dans  $\mathcal{R}'_T$  :

$$V_x(t) = \dot{x}(t) = \dot{x}_0 \cos(\bar{n}t) - x_0 \bar{n} \sin(\bar{n}t) \quad (2.40a)$$

$$V_y(t) = \dot{y}(t) = 2\dot{x}_0 \cos(\bar{n}t) - 2x_0 \bar{n} \sin(\bar{n}t) \quad (2.40b)$$

$$V_z(t) = \dot{z}(t) = \dot{z}_0 \cos(\bar{n}t) - z_0 \bar{n} \sin(\bar{n}t) \quad (2.40c)$$

Soit le point  $A$  de l'ellipse : il est atteint pour l'instant  $t_A$  tel que :

$$t_A = \frac{\theta}{\bar{n}} \quad (2.41)$$

De l'équation 2.40c, on déduit que la vitesse selon l'axe  $\hat{W}$  au point  $A$  vaut :

$$V_z(t_A) = \dot{z}_0 \cos \theta - z_0 \bar{n} \sin \theta \quad (2.42)$$

Des équations 2.37, 2.39 et 2.42, on déduit que :

$$V_z(t_A) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rho \bar{n} \quad (2.43)$$

Considérons maintenant que le mouvement initial est contenu dans le plan de l'orbite de référence. Pour initier la formation, il faut donc créer la composante hors plan du mouvement. Dans le mouvement initial, on a :

$$V_z(t) = 0 \quad \forall t \quad (2.44)$$

Pour créer la composante hors plan, il faut donc appliquer<sup>4</sup> un incrément de vitesse égal à  $V_z(t_A)$  au point  $A$ . Pour décrire l'effet d'une impulsion, il est nécessaire d'introduire les équations de Gauss adaptées à une orbite quasi-circulaire. A partir des équations pour une orbite quelconque<sup>5</sup> :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \frac{2}{n(1-e^2)^{1/2}} [\gamma_Q e \sin v + \gamma_S (1 + e \cos v)] \\ \frac{de}{dt} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na} [\gamma_Q \sin v + \gamma_S (\cos E + \cos v)] \\ \frac{di}{dt} = \frac{r \cos(\omega + v)}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \gamma_W \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin(\omega + v)}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \gamma_W \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{nae} \left[ -\gamma_Q \cos v + \left( 1 + \frac{1}{1+e \cos v} \right) \gamma_S \sin v \right] \\ \quad - \frac{r \cos i \sin(\omega + v)}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \gamma_W \\ \frac{dM}{dt} = n + \frac{1-e^2}{nae} \left[ \left( \cos v - \frac{2e}{1+e \cos v} \right) \gamma_Q \right. \\ \quad \left. - \left( 1 + \frac{1}{1+e \cos v} \right) \gamma_S \sin v \right] \end{array} \right. \quad (2.45)$$

où  $\boldsymbol{\gamma} \equiv [\gamma_Q, \gamma_S, \gamma_W]^T$  est l'accélération perturbatrice. Quand l'excentricité est faible et que la commande devient impulsionnelle, ces équations deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta a = 2\bar{a} \frac{\Delta V_S}{\bar{V}} \\ \delta e_x = 2 \cos \alpha \frac{\Delta V_S}{\bar{V}} + \sin \alpha \frac{\Delta V_Q}{\bar{V}} \\ \delta e_y = 2 \sin \alpha \frac{\Delta V_S}{\bar{V}} - \cos \alpha \frac{\Delta V_Q}{\bar{V}} \\ \delta i = \cos \alpha \frac{\Delta V_W}{\bar{V}} \\ \delta \Omega = \frac{\sin \alpha}{\sin i} \frac{\Delta V_W}{\bar{V}} \\ \Delta \alpha = - \left( 3\bar{n} \Delta t + \frac{\sin \alpha}{\tan i} \right) \frac{\Delta V_S}{\bar{V}} - 2 \frac{\Delta V_Q}{\bar{V}} \end{array} \right. \quad (2.46)$$

où  $\bar{V}$  est définie en 2.1,  $\boldsymbol{\Delta V} \equiv [\Delta V_Q, \Delta V_S, \Delta V_W]^T$  est l'impulsion de commande, et le vecteur excentricité défini comme suit :

$$\begin{aligned} e_x &\equiv e \cos \omega \\ e_y &\equiv e \sin \omega \end{aligned} \quad (2.47)$$

<sup>4</sup>Si on suppose qu'on ne dispose que d'une unique impulsion

<sup>5</sup>cf §C.2 dans l'Annexe C

Une impulsion d'amplitude  $V_z(t_A)$  suivant l'axe  $\hat{W}$  appliquée à l'argument de la latitude  $\alpha(t_A) = \theta$  produit donc les changements suivants :

$$\begin{aligned}\delta i &= \frac{\cos \theta}{\bar{V}} V_z(t_A) \\ \delta \Omega &= \frac{\sin \theta}{\bar{V} \sin \bar{i}} V_z(t_A)\end{aligned}\tag{2.48}$$

Combinées avec l'équation 2.43, ces équations donnent finalement les écarts :

$$\begin{aligned}\delta i &= \frac{\sqrt{3} \rho}{2} \frac{\rho}{\bar{a}} \cos \theta \\ \delta \Omega &= \frac{\sqrt{3} \rho}{2} \frac{\rho}{\bar{a}} \frac{\sin \theta}{\sin \bar{i}}\end{aligned}\tag{2.49}$$

### Ecart en position sur orbite

Le mouvement relatif du satellite doit être centré sur le mobile fictif. C'est pourquoi, si le mouvement était dans le plan de l'orbite de référence, il faudrait avoir :

$$\delta \alpha = 0\tag{2.50}$$

Cependant, comme le mouvement possède une composante hors plan, cette condition est différente comme le montre la Figure 2.3.

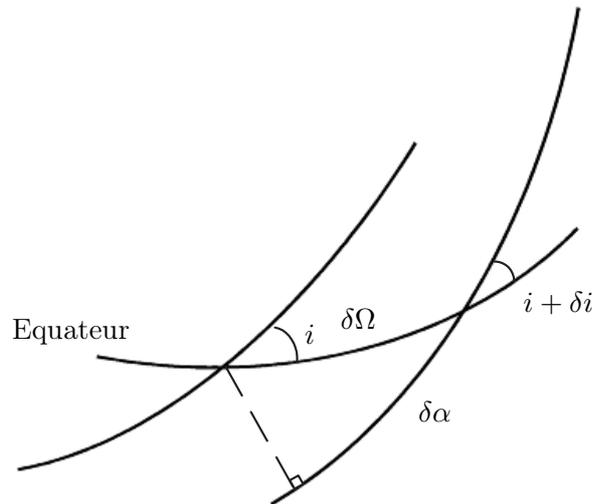


FIG. 2.3 - Ecart en position su orbite

On remarque que la condition 2.50 est vérifiée. Mais la projection du satellite sur l'orbite de référence est décalée du mobile fictif d'un angle égal :

$$\delta \alpha = -\cos \bar{i} \delta \Omega\tag{2.51}$$

On peut donc résumer la définition d'une formation circulaire : le mouvement d'un satellite par rapport à un mobile fictif est un cercle de rayon  $\rho$  ssi :

$$\begin{array}{l}
 \delta a = 0 \\
 e = \frac{\rho}{2\bar{a}} \\
 \delta i = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\rho}{\bar{a}} \cos \theta \\
 \delta \Omega = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\rho}{\bar{a}} \frac{\sin \theta}{\sin \bar{i}} \\
 \omega = \frac{\pi}{2} + \theta \\
 \delta \alpha = -\cos \bar{i} \delta \Omega
 \end{array} \tag{2.52}$$

où  $\theta$  est l'angle de phasage du satellite dans la formation. Un satellite est donc défini par la donnée du couple  $(\rho, \theta)$ .

Par le même raisonnement, on aboutit au modèle décrivant les formations circulaires projetées :

$$\begin{array}{l}
 \delta a = 0 \\
 e = \frac{\rho}{2\bar{a}} \\
 \delta i = \frac{\rho}{\bar{a}} \cos \theta \\
 \delta \Omega = \frac{\rho}{\bar{a}} \frac{\sin \theta}{\sin \bar{i}} \\
 \omega = \frac{\pi}{2} + \theta \\
 \delta \alpha = -\cos \bar{i} \delta \Omega
 \end{array} \tag{2.53}$$

L'inconvénient de ce formalisme est qu'il ne prend pas en compte l'excentricité de l'orbite de référence. De plus, il y a une singularité sur l'écart de nœud ascendant pour les orbites de référence quasi-équatoriales.

### 2.7.2 Extension au cas d'une orbite de référence quasi-circulaire

Ces calculs ont été présentés dans [Bou03b]. La condition 2.25 est remplacée par la condition :

$$\bar{e} = \mathcal{O}(10^{-3}) \tag{2.54}$$

Pour introduire l'excentricité de l'orbite de référence, on ne s'intéresse qu'à la composante dans le plan de l'orbite de référence du mouvement du satellite.

On utilise donc un nouveau repère inertiel  $\mathcal{R}_{in} \equiv \{O, \hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}\}$  lié à l'orbite de référence. L'axe  $\hat{\mathbf{X}}$  est suivant le nœud ascendant de l'orbite de référence. Le repère orbital local dans lequel on exprime le mouvement du satellite avec le couple de coordonnées rectangulaires  $(x, y)$  est toujours  $\mathcal{R}'_T = \{O', \hat{\mathbf{Q}}, \hat{\mathbf{S}}\}$ .

Comme on introduit maintenant l'excentricité de l'orbite de référence, il est nécessaire de différencier deux types d'argument de la latitude : l'argument de la latitude moyenne et l'argument de la latitude vraie. Soit  $\bar{v}$  l'anomalie vraie du mobile fictif, l'argument de la latitude vraie est défini comme :

$$\bar{\alpha}_v \equiv \bar{\omega} + \bar{v} \quad (2.55)$$

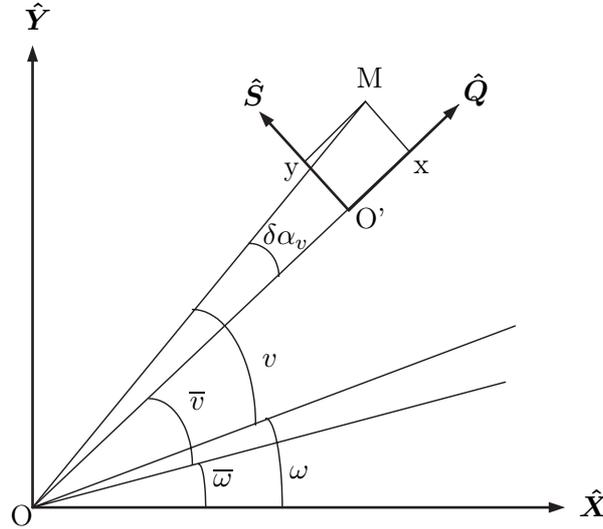
tandis que l'argument de la latitude moyenne est défini comme :

$$\bar{\alpha}_M \equiv \bar{\omega} + \bar{M} \quad (2.56)$$

De même, pour le satellite, on obtient  $\alpha_v \equiv \omega + v$  et  $\alpha_M \equiv \omega + M$ . La différence d'argument de la latitude vraie entre le satellite et le mobile fictif est définie par :

$$\delta\alpha_v \equiv \alpha_v - \bar{\alpha}_v \quad (2.57)$$

Le problème est représenté sur la Figure 2.4.



**FIG. 2.4 - Introduction de la quasi-circularité de l'orbite de référence**

De la condition 2.50 et du fait que l'excentricité de l'orbite de référence est faible, on a :

$$\delta\alpha_v \ll 1 \quad (2.58)$$

Ainsi, il est possible de déduire que :

$$x = r - \bar{r} \quad (2.59a)$$

$$y = r\delta\alpha_v \quad (2.59b)$$

Concernant l'équation 2.59a, on a l'expression du rayon vecteur :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} \quad (2.60)$$

Or, pour pouvoir utiliser la condition 2.50, il faut exprimer le rayon vecteur en fonction de l'anomalie moyenne et non de l'anomalie vraie. Cela nécessite la résolution de l'équation de

Kepler qui est transcendante. Le même problème apparaît avec l'équation 2.59b.

La solution consiste à utiliser des développements en série de Fourier-Bessel en fonction de l'anomalie moyenne ([Bat87]). Si on ne conserve que les termes à l'ordre 1 sur l'excentricité, on obtient alors le développement du rayon vecteur en fonction de l'anomalie moyenne :

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos M + \mathcal{O}(e^2) \quad (2.61)$$

De même, il est possible d'obtenir le développement de l'anomalie vraie en fonction de l'anomalie moyenne au premier ordre sur l'excentricité :

$$v = M + 2e \sin M + \mathcal{O}(e^2) \quad (2.62)$$

En combinant les équations 2.59a, 2.61 et 2.50, on obtient :

$$\frac{x}{a} = \delta e_x \cos \alpha_M + \delta e_y \sin \alpha_M \quad (2.63)$$

De même, en combinant les équations 2.59b, 2.62 et 2.50, on obtient :

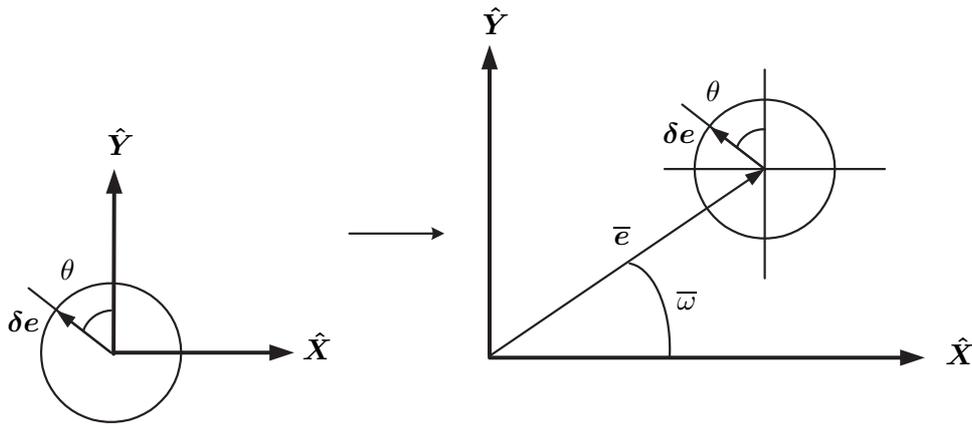
$$\frac{y}{2a} = \delta e_x \sin \alpha_M - \delta e_y \cos \alpha_M \quad (2.64)$$

Ainsi, exactement comme pour le cas où l'orbite de référence était circulaire, on retrouve un mouvement relatif elliptique centré sur le mobile fictif d'excentricité :

$$\delta e = \|\delta \mathbf{e}\| = \|\mathbf{e} - \bar{\mathbf{e}}\| \quad (2.65)$$

Graphiquement, la transformation est représentée Figure 2.5. On en déduit la valeur de  $\delta \mathbf{e}$  :

$$\begin{array}{l} \delta e_x = -\frac{\rho}{2a} \sin \theta \\ \delta e_y = \frac{\rho}{2a} \cos \theta \end{array} \quad (2.66)$$



**FIG. 2.5 - Différence de vecteur excentricité entre une orbite de référence circulaire et une orbite de référence quasi-circulaire**

Bien évidemment, lorsque l'excentricité augmente, il faut prendre en compte les puissances supérieures à 1 dans le développement en série : le mouvement n'est plus celui prédit (ce résultat est mis en exergue dans l'exemple du §2.7.4).

### 2.7.3 Extension au cas d'une orbite quasi-équatoriale

Pour pouvoir étendre la définition d'une formation circulaire au cas d'une orbite de référence quasi-équatoriale où le nœud ascendant n'est plus défini, il est nécessaire d'introduire le vecteur inclinaison comme cela a été fait par l'auteur dans [Bou03c]. Soit le vecteur orientation  $\bar{\mathbf{h}}$  défini dans  $\mathcal{R}_T$  comme :

$$\bar{\mathbf{h}} \left| \begin{array}{l} \bar{h}_x \equiv \sin \bar{i} \sin \bar{\Omega} \\ \bar{h}_y \equiv -\sin \bar{i} \cos \bar{\Omega} \\ \bar{h}_z \equiv \cos \bar{i} \end{array} \right. \quad (2.67)$$

Ce vecteur, de norme unitaire, définit l'orientation du plan de l'orbite : soit  $\bar{\mathbf{H}}$  le moment cinétique de l'orbite (cf Annexe A), on a la relation :

$$\bar{\mathbf{H}} = \|\bar{\mathbf{H}}\| \bar{\mathbf{h}} \quad (2.68)$$

Le vecteur inclinaison se définit comme suit :

$$\bar{\mathbf{i}} \left| \begin{array}{l} \bar{i}_x \equiv \sin \bar{i} \cos \bar{\Omega} \\ \bar{i}_y \equiv \sin \bar{i} \sin \bar{\Omega} \\ \bar{i}_z \equiv 0 \end{array} \right. \quad (2.69)$$

Il est donc par définition contenu dans le plan  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  et selon la ligne des nœuds.

De la même manière, il est possible de définir un petit vecteur inclinaison  $\delta \mathbf{i}'$  entre deux orbites proches : ce vecteur est orienté selon la ligne relative des nœuds. On peut alors redéfinir les équations de Gauss ([Zar87]) de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta a = 2\bar{a} \frac{\Delta V_S}{\bar{V}} \\ \delta e_x = 2 \cos \alpha \frac{\Delta V_S}{\bar{V}} + \sin \alpha \frac{\Delta V_Q}{\bar{V}} \\ \delta e_y = 2 \sin \alpha \frac{\Delta V_S}{\bar{V}} - \cos \alpha \frac{\Delta V_Q}{\bar{V}} \\ \delta i'_x = \cos \alpha \frac{\Delta V_W}{\bar{V}} \\ \delta i'_y = \sin \alpha \frac{\Delta V_W}{\bar{V}} \\ \Delta \alpha = - \left( 3\bar{n} \Delta t + \frac{\sin \alpha}{\tan \bar{i}} \right) \frac{\Delta V_S}{\bar{V}} - 2 \frac{\Delta V_Q}{\bar{V}} \end{array} \right. \quad (2.70)$$

Le changement par rapport au système 2.70 est qu'on a :

$$\begin{aligned} \delta i'_x &= \delta i \\ \delta i'_y &= \sin \bar{i} \delta \Omega \end{aligned} \quad (2.71)$$

On en déduit :

$$\boxed{\begin{aligned} \delta i'_x &= k_1 \frac{\rho}{a} \cos \theta \\ \delta i'_y &= k_1 \frac{\rho}{a} \sin \theta \end{aligned}} \quad (2.72)$$

Ainsi, si l'orbite de référence est quasi-équatoriale, la singularité sur le nœud ascendant est éliminée.

Comme  $\delta e$  et  $\delta i'$  sont repérés par rapport au nœud ascendant de l'orbite de référence, ils ne dépendent plus directement du repère inertiel (à la différence de  $i$  et  $\Omega$ ). Par souci d'harmonisation<sup>6</sup>, on change de notation pour l'argument de la latitude : introduisons la longitude curviligne relative du satellite  $\lambda'$ .

La longitude curviligne  $\lambda$  est définie comme :

$$\lambda = \Omega + \omega + M \quad (2.73)$$

En général, elle est introduite dans le cas d'une orbite équatoriale où le nœud ascendant n'est plus défini.

Définissons alors un nouveau repère  $\mathcal{R}' = \{O, \hat{X}', \hat{Y}', \hat{Z}'\}$  : l'axe  $\hat{X}'$  est orienté suivant le nœud ascendant de l'orbite de référence,  $\hat{Z}'$  est orienté suivant le moment cinétique de l'orbite de référence, et  $\hat{Y}'$  complète le trièdre orthonormé direct.

Dans  $\mathcal{R}'$ , on a :

$$\bar{\lambda}' = \bar{\Omega}' + \bar{\omega}' + \bar{M}' \quad (2.74)$$

Or, par définition de  $\mathcal{R}'$ , on a :

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}' &= 0 \\ \bar{\omega}' &= \bar{\omega} \\ \bar{M}' &= \bar{M} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Donc, finalement :

$$\bar{\lambda}' = \bar{\alpha} \quad (2.76)$$

De même, pour le satellite, on a :

$$\lambda' = \Omega' + \omega' + M' \quad (2.77)$$

Ces paramètres sont représentés sur la figure 2.6.

On constate alors que :

$$\lambda' = \alpha + \cos i \delta \Omega \quad (2.78)$$

De 2.76 et 2.78, on déduit que :

$$\delta \lambda' = \delta \alpha + \cos i \delta \Omega \quad (2.79)$$

L'équation précédente combinée avec la condition 2.51 donne finalement :

$$\boxed{\delta \lambda' = 0} \quad (2.80)$$

Alors, la définition générale des formations circulaire et circulaire projetée est :

$$\boxed{\begin{aligned} \delta a &= 0 \\ \delta e_x &= -\frac{\rho}{2\bar{a}} \sin \theta \\ \delta e_y &= \frac{\rho}{2\bar{a}} \cos \theta \\ \delta i'_x &= k_1 \frac{\rho}{\bar{a}} \cos \theta \\ \delta i'_y &= k_1 \frac{\rho}{\bar{a}} \sin \theta \\ \delta \lambda' &= k_2 \end{aligned}} \quad (2.81)$$

<sup>6</sup>Et aussi dans le but d'utiliser les mêmes notations que celles du Primer Vector

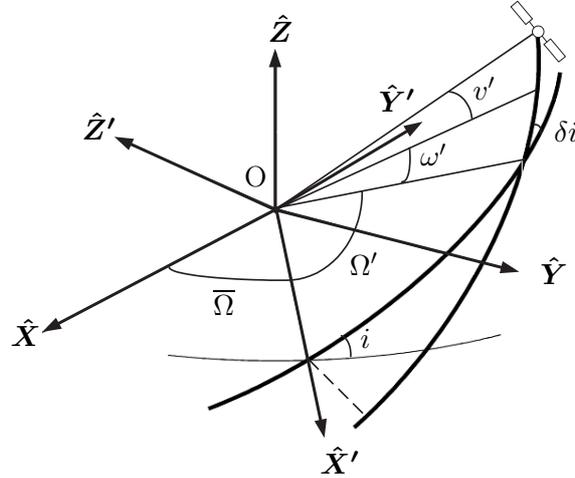


FIG. 2.6 - Introduction des angles définissant la longitude curviligne relative

où  $k_1 = 1$  (resp.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ) pour la formation circulaire projetée (resp. circulaire), et  $k_2$  est le décalage angulaire entre le mobile fictif et le centre de la formation.

Enfin, à partir de la définition de  $\delta \mathbf{i}'$ , il est possible d'obtenir son effet sur  $\bar{i}$  (cf Annexe A) :

$$\delta \mathbf{i}_{/\mathcal{R}'} \left| \begin{array}{l} \delta i_x = \cos(\bar{i}) \delta i'_x \\ \delta i_y = \delta i'_y \\ \delta i_z = 0 \end{array} \right. \quad (2.82)$$

Il faut remarquer que l'angle entre la direction du nœud ascendant et  $\delta \mathbf{i}_{/\mathcal{R}'}$  n'est plus  $\theta$  mais  $\theta'$  donné par :

$$\theta' = \arctan \frac{\delta i_y}{\delta i_x} = \arctan \frac{\tan \theta}{\cos i} \quad (2.83)$$

Graphiquement, la définition générale des formations circulaire et circulaire projetée est donnée Figure 2.7.

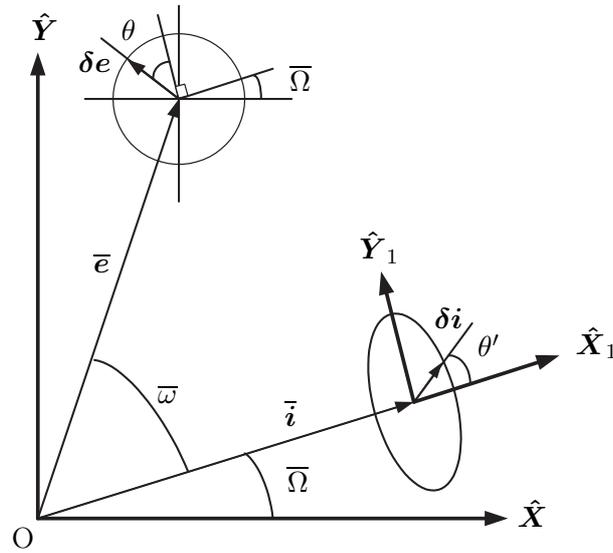


FIG. 2.7 - Définition générale des formations circulaire et circulaire projetée

**Remarque :** on peut remarquer que le coefficient  $k_1$  permet de définir les formations circulaire et circulaire projetée, mais aussi n'importe quel type de formation invariante : par exemple, si  $k_1 = 0$ , on retrouve le cas de la roue interférométrique.

#### 2.7.4 Exemple

La Figure 2.8 montre ces résultats pour l'exemple numérique suivant :

Paramètre	Valeur
$\bar{a}$	7000 km
$\bar{i}$	50 deg
$\bar{\Omega}$	0 deg
$\bar{\omega}$	0 deg
$\bar{M}(t_0)$	0 deg
$\rho$	1 km
$\theta$	45 deg
$k_1$	1
$k_2$	0

TAB. 2.1 - Exemple numérique d'une formation circulaire projetée

La Figure 2.8(a) présente le cas où :

$$\bar{e} = 0.001$$

Sur la courbe en haut à droite, le mouvement dans le plan  $(\hat{S}, \hat{W})$  est représenté : comme  $k_1 = 1$ , cette projection est un cercle.

La Figure 2.8(b) présente le cas où :

$$\bar{e} = 0.2$$

On remarque que le cercle, comme les autres projections, commence à se déformer : cet effet est dû à la prise en compte de l'excentricité de l'orbite de référence (cf Equations 2.63 et 2.64) à l'ordre 1. Lorsque l'excentricité augmente, les ordres supérieurs agissent et déforment le mouvement.

La Figure 2.8(c) présente le cas où :

$$\bar{e} = 0.715$$

Dans ce cas, la géométrie est complètement déformée<sup>7</sup>.

La Figure 2.8(d) montre l'effet du terme  $J_2$  dupotential terrestre sur la géométrie de la formation (sur une durée de 5 jours) : par son effet différentiel (entre le satellite et la référence) sur le nœud ascendant et sur le périégée, ainsi que par la différence de dérive du périégée et du nœud ascendant de l'orbite de référence, la formation se déforme. Ainsi est-il possible de définir des budgets d'ergols de MAF en fonction des spécifications de performances mission.

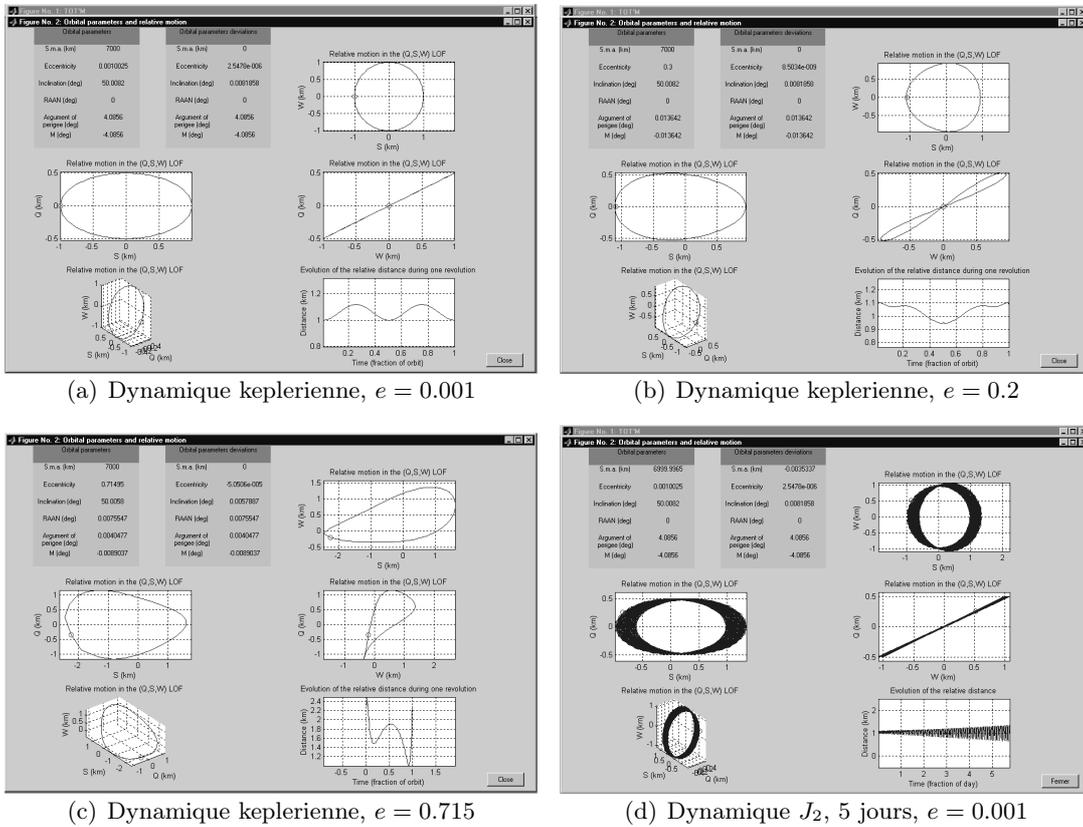


FIG. 2.8 - Mouvement relatif dans le cas d'une formation circulaire projetée

## 2.8 Conclusion

Un nouveau modèle pour les formations invariantes a été développé. Ces formations concernent plusieurs projets (notamment Techsat 21 et le cas particulier de la Roue interférométrique) et concepts (par exemple [Kon99]). Elles présentent surtout l'avantage de nécessiter la correction

<sup>7</sup>De manière plus générale, il est impossible d'obtenir un mouvement relatif elliptique lorsque l'excentricité est "grande"

de tous les paramètres orbitaux ce qui en fait un cas d'étude intéressant.

Ce nouveau modèle présente plusieurs avantages :

- Il est en paramètres keplériens : ce formalisme est commode pour la résolution du déploiement par la méthode de Variations de Paramètres (résolution directe des équations de Gauss), ou avec la théorie du Primer Vector. C'est l'objet du chapitre suivant. C'est aussi intéressant pour analyser la stabilité de la géométrie par rapport aux effets différentiels des perturbations orbitales qui sont en général donnés en fonction des paramètres orbitaux keplériens.
- Il est adapté à une orbite de référence quasi-circulaire : l'orbite héliosynchrone, donc quasi-circulaire, qui est l'orbite classique pour plusieurs applications (interférométrie, écoute, MTI), est donc prise en compte.
- Il est adapté à une orbite de référence quasi-équatoriale : l'orbite géostationnaire est donc prise en compte.

Deuxième partie

*Déploiement optimal avec contraintes  
sur la commande et les distances*



# Déploiement optimal et contraint sur la commande

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>41</b>
<b>3.2</b>	<b>La théorie du Primer Vector</b>	<b>42</b>
3.2.1	Résultats généraux du Principe du Maximum	42
3.2.2	Formulation du Primer Vector	43
	Conditions nécessaires d'optimalité sur la commande	43
	Système propulsif à poussée infinie	43
	Linéarisation du problème	44
	Transfert optimal	45
3.2.3	Application au déploiement de formations invariantes : obtention de la consommation optimale pour la loi non contrainte	48
	Cas d'étude	48
	Résultats	48
	Exemple numérique	49
	Comparaison avec une solution de référence	51
3.2.4	Limitations	51
<b>3.3</b>	<b>La méthode des Variations de Paramètres</b>	<b>52</b>
3.3.1	Principe	52
3.3.2	Exemples de lois contraintes	54
	Première loi	54
	Deuxième loi	54
<b>3.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>56</b>

---

## 3.1 Introduction

Déployer la formation revient à résoudre un problème d'optimisation : rendez-vous ou transfert. Par optimal, on entend en général consommation minimale ou temps minimum. Le choix a été fait en supposant (et en vérifiant a posteriori!) que la solution à consommation minimale ne demande qu'un temps réduit (à l'échelle de la période orbitale).

Comme une solution numérique limite les analyses paramétriques et pose parfois des problèmes de convergence, c'est la solution analytique qui a été choisie.

Dans le cadre de l'application au vol en formation avec une commande impulsionnelle, les solutions analytiques sont en général basées sur des heuristiques et donnent des solutions quasi ou sous-optimales ([Sch01], [Mac02], [Vad03]). L'objet de ce chapitre est d'une part de présenter une solution analytique optimale, et d'autre part de montrer qu'il est possible d'obtenir une solution analytique optimale contrainte.

## 3.2 La théorie du Primer Vector

### 3.2.1 Résultats généraux du Principe du Maximum

Le théorie du *Primer Vector*<sup>1</sup> est une formulation particulière du Principe du Maximum de Pontryagin [Pon64].

Le Principe du Maximum est basé sur un système dynamique de la forme :

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{x}$  est un vecteur représentant l'état du système,  $\mathbf{u}$  un vecteur représentant la commande appartenant à l'ensemble  $U$  i.e.  $\mathbf{u} \in U$ ,  $f(\cdot)$  une fonction représentant la dynamique et  $t$  représentant la variable indépendante.

Ce système est soumis à des contraintes d'extrémités, c'est-à-dire des contraintes sur l'instant initial  $t_0$ , l'instant final  $t_f$ , l'état à l'instant initial  $\mathbf{x}_0$  et l'état à l'instant final  $\mathbf{x}_f$ , si la variable indépendante est le temps. Ces contraintes sont données sous la forme d'un vecteur  $\Omega$  :

$$\Omega(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{x}_f, t_f) = \emptyset \quad (3.2)$$

Le problème<sup>2</sup> consiste à trouver la commande optimale  $\mathbf{u}^*$  maximisant le critère  $J$  tel que :

$$J \equiv J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{x}_f, t_f) \quad (3.3)$$

Le Principe du Maximum fournit des conditions nécessaires d'optimalité de la commande. Pour cela, le critère est augmenté pour prendre en compte la dynamique (sous forme d'une contrainte) : ainsi est introduit l'adjoint  $\mathbf{p}$  de l'état. A partir de l'Hamiltonien  $H$  tel que :

$$H \equiv \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{f} \quad (3.4)$$

les conditions nécessaires d'optimalité fournissent les relations :

$$\mathbf{u}^* = \arg \sup_{\mathbf{u} \in U} H \quad (3.5)$$

et

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.6)$$

où  $H^* = H(\mathbf{u}^*)$ .

Ensuite, si le critère est augmenté des contraintes d'extrémités, cela fournit un jeu de conditions de transversalité  $\Psi$  à respecter de la forme :

$$\Psi(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0, H_0, t_0, \mathbf{x}_f, \mathbf{p}_f, H_f, t_f) = \emptyset \quad (3.7)$$

On a donc un système d'équations différentielles représentant la dynamique de l'état et de l'adjoint, soumis à des conditions d'extrémités et avec une condition d'optimalité sur la commande le long de la trajectoire : c'est un problème aux deux bouts ou Two Points Boundary Value Problem (TPBVP). Ce problème est généralement résolu numériquement avec des méthodes de tir.

---

<sup>1</sup>La description détaillée est donnée dans l'Annexe B

<sup>2</sup>Sous la forme de Mayer

### 3.2.2 Formulation du Primer Vector

#### Conditions nécessaires d'optimalité sur la commande

Dans le cadre de la théorie du Primer Vector (initialement introduite par Lawden dans [Law63]), la dynamique de l'état est représentée par les coordonnées cartésiennes exprimées dans un repère inertiel (position  $\mathbf{r}$  et vitesse  $\mathbf{v}$ ), ainsi que par la vitesse caractéristique  $C$  :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \Gamma \hat{\mathbf{u}} \\ \dot{C} = \Gamma \end{cases} \quad (3.8)$$

où  $\mathbf{g}$  représente un champ de gravitation quelconque (dépendant donc de la position, de la vitesse et du temps),  $\Gamma = \frac{F}{m}$  représente l'accélération de poussée du moteur ( $F$  représente la poussée et  $m$  la masse) et  $\hat{\mathbf{u}}$  les cosinus directeurs de la poussée.

Le critère à minimiser est :

$$J \equiv -C_f = - \int_{t_0}^{t_f} \Gamma dt = -g_0 Isp \ln \frac{m_0}{m_f} \quad (3.9)$$

pour des systèmes de propulsion à Vitesse d'Ejection Constante (VEC) (voir [Mar83]). Dans cette équation,  $g_0$  représente l'accélération de la pesanteur au niveau de la mer et  $Isp$  représente l'impulsion spécifique du moteur.

Soit le vecteur adjoint  $\mathbf{p}$  défini par  $\mathbf{p}_r$  l'adjoint de la position,  $\mathbf{p}_v$  l'adjoint de la vitesse, et  $p_C$  l'adjoint de la vitesse caractéristique. L'application du Principe du Maximum (équation 3.5) donne les relations suivantes :

$$\hat{\mathbf{u}}^* = \frac{\mathbf{p}_v}{\|\mathbf{p}_v\|} \quad (3.10)$$

et

$$\Gamma^* = \Gamma_{max}(C)\mathcal{U}(\|\mathbf{p}_v\| + p_C) \quad (3.11)$$

où  $\mathcal{U}(x)$  représente la fonction échelon unité. Les relations 3.10 et 3.11 définissent les conditions nécessaires d'optimalité sur la commande.

#### Système propulsif à poussée infinie

Si l'on se place dans un cadre de système de propulsion impulsif, i.e. un système VEC où la force propulsive est infinie, les arcs de poussée deviennent des impulsions  $\Delta \mathbf{V}_j$  et le critère devient :

$$J = -\Delta V = \sum_j \|\Delta \mathbf{V}_j\| \quad (3.12)$$

De plus, il est alors possible de montrer en utilisant 3.6 que :

$$p_C(t) = -1 \quad \forall t \quad (3.13)$$

Cette dernière équation, combinée avec l'équation 3.11 donne la relation :

$$\Gamma^* = \Gamma_{max}(C)\mathcal{U}(\|\mathbf{p}_v\| - 1) \quad (3.14)$$

Les relations 3.10 et 3.14 définissent les conditions nécessaires d'optimalité sur la commande dans un cadre impulsif. On constate que ces deux relations font intervenir  $\mathbf{p}_v$ , adjoint de

la vitesse, et plus communément appelé *primer vector*.

Géométriquement, ces deux relations indiquent qu'une impulsion est appliquée à chaque fois que la norme du primer vector est unitaire, et que dans ce cas, la direction de poussée est celle du primer vector. La distance angulaire parcourue par le primer vector entre deux impulsions est l'angle entre ces deux impulsions.

Cependant, l'amplitude des impulsions n'est obtenue qu'en résolvant un TPBVP. De plus, comme l'adjoint dépend de l'état perturbé par la commande, la résolution doit être numérique. A ce stade, on peut affirmer que la théorie du Primer Vector est une manière commode de présenter le Principe du Maximum pour une commande impulsionnelle.

### Linéarisation du problème

Si certains cas particuliers peuvent être résolus analytiquement, comme le célèbre transfert de Hohmann, l'obtention de solutions générales analytiques ne peut se faire qu'à l'aide d'une hypothèse supplémentaire : les orbites de départ et d'arrivée sont proches, ce qui permet de linéariser le mouvement du satellite autour d'une orbite de référence : la dynamique de l'adjoint ne dépend plus de l'état perturbé mais uniquement de l'orbite de référence.

Dans ce cas, l'équation d'état 3.1 devient :

$$\dot{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \underline{\mathbf{B}}\mathbf{u} \quad (3.15)$$

où  $\underline{\mathbf{A}}$  est une matrice (6,6) et  $\underline{\mathbf{B}}$  une matrice (6,3) qui ne dépendent donc que de l'orbite de référence.

Dans le cas d'une orbite de référence circulaire, les équations du mouvement relatif sont celles de Clohessy-Wiltshire décrites au §2.1.2. En utilisant  $\delta\mathbf{r}$  le vecteur position entre le satellite et l'origine du ROL, ces équations deviennent sous forme explicite en fonction du temps :

$$\begin{bmatrix} \delta\mathbf{r}(t) \\ \delta\dot{\mathbf{r}}(t) \end{bmatrix} = \underline{\Phi}(t, t_0) \begin{bmatrix} \delta\mathbf{r}(t_0) \\ \delta\dot{\mathbf{r}}(t_0) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

où  $\underline{\Phi}(t, t_0)$  est la STM.

On peut alors montrer que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_v(t) \\ \mathbf{p}_r(t) \end{bmatrix} = \underline{\Phi}(t, t_0) \begin{bmatrix} \mathbf{p}_v(t_0) \\ \mathbf{p}_r(t_0) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

et que par conséquent, la courbe d'efficacité du primer vector définie comme :

$$\mathbf{p}_v \equiv \begin{bmatrix} \lambda_p \\ \mu_p \\ \nu_p \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

est :

$$\begin{cases} \lambda_p(t) = -p_{e_y} \cos \bar{n}t + p_{e_x} \sin \bar{n}t - 2p_{M_0} \\ \mu_p(t) = 2p_{e_x} \cos \bar{n}t + 2p_{e_y} \sin \bar{n}t + 3p_{M_0} \bar{n}t + 2p_a \\ \nu_p(t) = p_{i_x} \cos \bar{n}t + p_{i_y} \sin \bar{n}t \end{cases} \quad (3.19)$$

où  $\bar{n}$  est la pulsation orbitale de l'orbite de référence, et  $\mathbf{p}^{kep} \equiv [p_a, p_{e_x}, p_{e_y}, p_{i_x}, p_{i_y}, p_{M_0}, p_C]^T$  l'adjoint constant de l'état exprimé en paramètres orbitaux kepleriens.

La courbe d'efficacité est donc une cycloïde ou un cas dégénéré d'une cycloïde. Résoudre le problème de contrôle optimal consiste donc à trouver une telle courbe vérifiant les conditions d'optimalité 3.10 et 3.14. Les conditions de transversalité 3.7 donnent les valeurs de l'adjoint

$\mathbf{p}^{kep}$  :  $p_j^{kep} = 0$  si la correction du paramètre associé est libre,  $p_j^{kep}$  est libre si la correction est fixée.

Il reste alors à résoudre un problème linéaire aux deux bouts (LBVP) pour trouver les amplitudes des impulsions.

### Transfert optimal

Dans le cas du rendez-vous, le problème ne peut être résolu analytiquement. Dans le cas du transfert, on déduit que :

$$p_M = 0 \quad (3.20)$$

La courbe d'efficacité est donc soit une ellipse, soit un cercle. Les solutions associées existent sous forme analytiques (les premières par Edelbaum [Ede67], reprises par Marec dans [Mar83]) : l'espace des transferts peut être décomposé en 3 domaines appelés *transfert nodal*, *transfert non dégénéré* et *transfert singulier*.

Comme le transfert ne fait intervenir que les orientations relatives des orbites initiale et finale, un jeu de paramètres orbitaux adaptés est défini. Il est basé sur une direction de référence : la ligne des nœuds. A partir de cette référence, le transfert est défini par :

$$\boldsymbol{\delta x} \equiv [\delta a, \delta e_{//}, \delta e_{\perp}, \delta i]^T \quad (3.21)$$

où  $\delta i$  est l'inclinaison entre les deux orbites,  $\delta e_{//}$  la projection de  $\boldsymbol{\delta e}$  sur la ligne des nœuds et  $\delta e_{\perp}$  la composante orthogonale de la projection.

Il est important de remarquer qu'il y a deux directions possibles pour définir un nœud de référence à partir de la ligne des nœuds : la direction de référence est choisie de telle manière que  $\delta e_{//}$  soit positif. L'axe orthogonal à cette direction de référence est lui choisi de manière à ce que  $\delta e_{\perp}$  soit positif.

Par la suite, les grandeurs vont être normalisées pour simplifier les écritures. En considérant une orbite circulaire de référence de demi-grand axe  $\bar{a}$  sur laquelle un satellite se déplace à la vitesse constante  $\bar{V}$ , il est alors possible d'alléger les équations en introduisant la normalisation suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{a} &\equiv \frac{a}{\bar{a}} \\ \Delta \tilde{V}_j &\equiv \frac{\Delta V_j}{\bar{V}} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Le temps est donc lui aussi normalisé :

$$\tilde{t} \equiv \frac{\bar{V}}{\bar{a}} t = \bar{n} t \quad (3.23)$$

où  $\bar{n}$  est la pulsation de l'orbite de référence. Par conséquent, on a finalement :

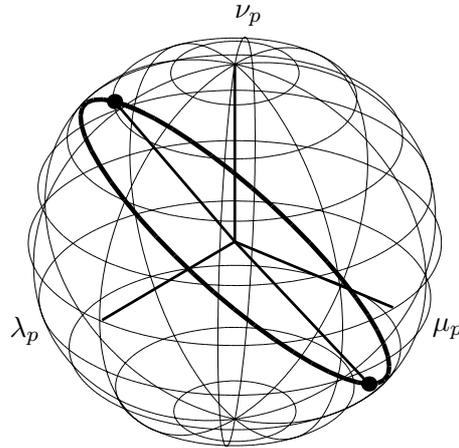
$$\tilde{n} \equiv 1 \quad (3.24)$$

**Transfert nodal** Dans ce cas, on a :

$$p_a = 0 \quad (3.25)$$

La courbe d'efficacité est une ellipse bi-tangente à la sphère unité. Le transfert est bi-impulsionnel et les impulsions sont appliquées sur la ligne des nœuds relative entre l'orbite initiale et finale.

Elles sont par conséquent séparées d'un angle de 180 deg. Les cosinus directeurs des deux impulsions sont opposés pour chaque composante (radiale, transversale, normale) : la solution est dite symétrique. Elle est représentée sur la Figure 3.1 dans l'espace hodographe.



**FIG. 3.1 - Courbe d'efficacité dans l'espace hodographe pour le transfert nodal**

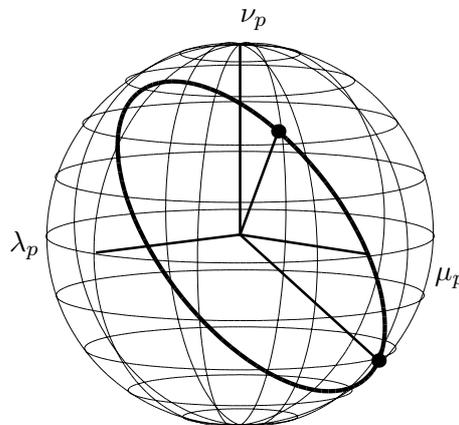
La consommation optimale est :

$$\Delta \tilde{V} = \sqrt{\delta i^2 + \frac{\delta e_{//}^2}{4} + \delta e_{\perp}^2} \quad (3.26)$$

**Transfert non-dégénéré** Dans ce cas, on a :

$$p_a \neq 0 \quad (3.27)$$

La courbe d'efficacité est une ellipse bi-tangente à la sphère unité. Le transfert est bi-impulsionnel. Le cosinus directeur de la composante transversale est le même pour les deux impulsions tandis que les cosinus directeurs des composantes radiale et normale sont opposés. La courbe d'efficacité est représentée sur la Figure 3.2 dans l'espace hodographe.



**FIG. 3.2 - Courbe d'efficacité dans l'espace hodographe pour le transfert non dégénéré**

La consommation optimale est :

$$\Delta\tilde{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \delta i^2 + \delta e^2 - \frac{1}{2}\delta\tilde{a}^2 + \sqrt{(\delta i^2 - \delta e^2 + \delta\tilde{a}^2)^2 + 4\delta i^2\delta e_{\perp}^2} \right)^{1/2} \quad (3.28)$$

**Transfert singulier** C'est un cas particulier du cas nodal : celui où l'ellipse devient un cercle. La courbe d'efficacité est un cercle de rayon unité : par conséquent, il y a indétermination sur la loi optimale. La condition nécessaire d'optimalité indique qu'une impulsion peut être appliquée à chaque instant. Seuls ses cosinus directeurs sont fixés par la courbe d'efficacité. Ainsi, le nombre d'impulsions optimal n'est pas connu, la solution optimale pouvant même être à poussée faible.

La courbe d'efficacité est représentée sur la Figure 3.3 dans l'espace hodographe.

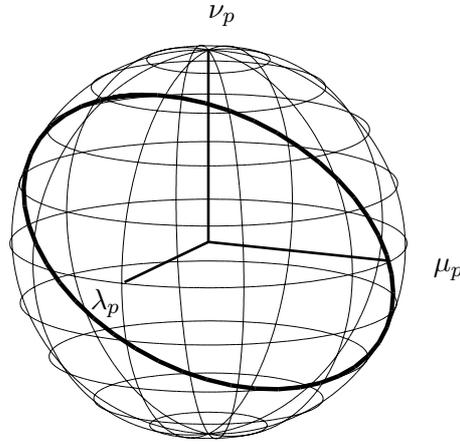


FIG. 3.3 - Courbe d'efficacité dans l'espace hodographe pour le transfert singulier

La consommation optimale est :

$$\Delta\tilde{V} = \frac{1}{2} \sqrt{\delta e_{//}^2 + (\delta e_{\perp} + \sqrt{3}\delta i)^2} \quad (3.29)$$

A chaque type de transfert sont associées des bornes :

- Le transfert est nodal ssi

$$\delta i^2 \geq 3\delta e_{\perp}^2 \quad (3.30a)$$

$$\delta\tilde{a}^2 \leq \delta e_{//}^2 \quad (3.30b)$$

- Le transfert est non-dégénéré ssi

$$\delta\tilde{a}^2 \geq \delta e_{//}^2 \quad (3.31a)$$

$$\delta\tilde{a}^2 \geq \delta e^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\delta e_{\perp}\delta i - \delta i^2 \quad (3.31b)$$

- Le transfert est singulier ssi :

$$\delta\tilde{a}^2 \leq \delta e^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\delta e_{\perp}\delta i - \delta i^2 \quad (3.32a)$$

$$\delta i^2 \leq 3\delta e_{\perp}^2 \quad (3.32b)$$

### 3.2.3 Application au déploiement de formations invariantes : obtention de la consommation optimale pour la loi non contrainte

#### Cas d'étude

Les déploiements qui seront étudiés seront ceux d'une formation circulaire et d'une formation circulaire projetée : pour tous les satellites de la formation, le rayon  $\rho$  sera le même tandis que les angles de phasage  $\theta$  seront équirépartis sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ .

#### Résultats

Les caractéristiques des géométries invariantes sont celles obtenues à la fin du Chapitre 2. Le problème  $(\mathcal{P}_1)$  de déploiement associé est donc :

$$(\mathcal{P}_1) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{j=1}^l \|\Delta \mathbf{V}_j\| \\ \delta \tilde{a} = 0 \\ \delta e_x = -\frac{\rho}{2\tilde{a}} \sin \theta \\ \delta e_y = \frac{\rho}{2\tilde{a}} \cos \theta \\ \delta i'_x = k_1 \frac{\rho}{\tilde{a}} \cos \theta \\ \delta i'_y = k_1 \frac{\rho}{\tilde{a}} \sin \theta \\ \delta \lambda' = k_2 \end{array} \right. \quad (3.33a)$$

Afin de pouvoir utiliser les résultats du Primer Vector, il est nécessaire de définir dans le repère inertiel  $\mathcal{R}_T$  une direction de référence : il s'agira de celle donnée par le vecteur  $\delta \mathbf{i}'$ . En considérant la correction  $\delta i$  du paragraphe précédent, on a donc la correspondance :

$$\delta i = \|\delta \mathbf{i}'\| = k_1 \frac{\rho}{\tilde{a}} \quad (3.34)$$

De plus, comme l'angle :

$$(\delta \mathbf{i}', \delta \mathbf{e}) = \frac{\pi}{2} \quad (3.35)$$

on en déduit :

$$\delta e_{//} = 0 \quad (3.36a)$$

$$\delta e_{\perp} = \|\delta \mathbf{e}\| = \frac{\rho}{2\tilde{a}} \quad (3.36b)$$

Concernant  $\delta \lambda'$ , une hypothèse très importante est faite : la variable  $k_2$  est libre. Autrement dit, au lieu de devoir résoudre un rendez-vous, il suffit de résoudre un transfert.

Cependant, cette hypothèse peut sembler insuffisante : en effet, l'angle de phasage est différent d'un satellite à un autre ce qui pourrait amener à une loi de commande différente d'un satellite à un autre. Ainsi, si on ne résout qu'un transfert, la correction  $\delta \lambda'$  serait différente aussi : les satellites décriraient des cercles dont les centres seraient décalés le long de l'orbite de référence.

Mais, étant donné que les équations 3.34, 3.36a et 3.36b ne dépendent pas de  $\theta$ , le problème de transfert est exactement le même pour tous les satellites : la commande optimale qui sera trouvée sera la même. La seule différence entre deux satellites déphasés d'un angle  $\Delta\theta$  dans la formation sera que les impulsions du déploiement seront déphasées d'un angle identique  $\Delta\theta$ . Par conséquent, la longitude curviligne finale  $\lambda'_f$  sera le même pour tous les satellites.

Ceci constitue un résultat intéressant : le déploiement de formations invariantes ne nécessite pas la résolution d'un rendez-vous différent pour chaque satellite mais d'un transfert identique pour tous les satellites.

Si  $k_2$  n'est pas libre, il faut résoudre un rendez-vous.

En utilisant les équations 3.33a, 3.34, 3.36a et 3.36b, on utilise les conditions de borne 3.30, 3.31 et 3.32 pour déterminer quel est le transfert correspondant.

Comme

$$\delta\tilde{a} = \delta e_{//} = 0 \quad (3.37)$$

les deux déploiements sont à la fois nodaux et non-dégénérés.

La borne entre le transfert nodal et le transfert singulier est :

$$k_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3.38)$$

Par conséquent, le déploiement de la formation circulaire projetée ( $k_1 = 1$ ) est nodal, et le déploiement de la formation circulaire ( $k_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ) est à la fois nodal et singulier.

On vérifie la borne entre le cas non-dégénéré et le cas singulier. C'est une équation d'ordre 2 en  $k_1$  :

$$-k_1^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}k_1 + \frac{1}{4} = 0 \quad (3.39)$$

dont les racines sont  $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$  et  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Ainsi, cela confirme que le déploiement de la formation circulaire projetée est non-dégénéré et le déploiement de la formation circulaire est non-dégénéré et singulier.

Le résultat le plus inattendu est que les déploiements de ces formations sont des cas limites : en fait, ces formations sont particulières d'un point de vue géométrique et particulière d'un point de vue contrôle optimal.

Plus précisément, le déploiement de la formation circulaire est "à la frontière des frontières" puisqu'il est à la fois nodal, non-dégénéré et singulier. La courbe d'efficacité est un cercle (puisque le déploiement est entre autres singulier). Il est alors intéressant de remarquer que le satellite et le primer vector décrivent tous deux une trajectoire circulaire.

La consommation optimale pour le déploiement vaut :

$$\begin{cases} \Delta\tilde{V}^* = \frac{\rho}{a} \sqrt{\frac{1}{4} + k_1^2} & k_1 \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Delta\tilde{V}^* = \frac{\rho}{2a} \left( \frac{1}{2} + \sqrt{3}k_1 \right) & k_1 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad (3.40)$$

### Exemple numérique

Considérons le déploiement autour d'une orbite héliosynchrone. En tant qu'exemple, on prend une orbite Spot dont les caractéristiques sont données dans le Tableau 3.1.

Paramètre	Valeur
$\bar{a}$	7200,55 km
$\bar{e}$	$1,14 \cdot 10^{-3}$
$\bar{i}$	98,72 deg
$\bar{\omega}$	90 deg
$\bar{H}_{NA}$	22h30

**TAB. 3.1 - Définition de l'orbite Spot**

$\bar{H}_{NA}$  représente l'heure locale du nœud ascendant. Comme l'heure locale est fixe, l'ascension droite du nœud ascendant dérive de manière séculaire sous l'effet de l'aplatissement des pôles. On choisit donc une valeur arbitraire  $\Omega = 0$  deg.

On considère le déploiement d'un satellite autour de cette orbite. Dans un souci de réalisme, on prend comme exemple numérique le cas de TechSat21 (pour son application MTI) : le rayon de la formation est pris égal à 5 km, et l'angle de phasage égal à 90 deg.

Les paramètres orbitaux du satellite sont donnés dans le Tableau 3.2.

Paramètre	Valeur
$\delta a$	0 km
$\delta e$	$5,1 \cdot 10^{-5}$
$\delta i$	$1,7 \cdot 10^{-4}$ deg
$\delta \omega$	6,9 deg
$\delta \Omega$	$3,49 \cdot 10^{-4}$ deg

**TAB. 3.2 - Ecart en paramètres orbitaux keplériens**

Exprimé dans le jeu de paramètres du Primer Vector, le Tableau 3.2 donne le Tableau 3.3.

Paramètre	Valeur
$\delta a$	0 km
$\delta e_{//}$	0 deg
$\delta e_{\perp}$	$3,47 \cdot 10^{-4}$ deg
$\delta i'_x$	0 deg
$\delta i'_y$	$3,44 \cdot 10^{-2}$ deg

**TAB. 3.3 - Ecart en paramètres orbitaux keplériens adaptés au Primer Vector**

On aboutit alors à la consommation optimale  $\Delta V^*$  :

$$\Delta V^* \approx 5,17 \text{ m.s}^{-1}$$

Si on compare ces résultats avec ceux de Vaddi, Alfriend et Vadali [Vad03], on obtient la même consommation. Cependant, leur méthode est basée sur l'hypothèse suivante : la consommation d'ergols est dominée par l'écart de plan. Ainsi, les angles d'applications des deux impulsions du transfert sont donnés par la correction optimale de la composante hors plan. Par conséquent, l'angle entre les deux manœuvres est de 180 deg. Ainsi, leur solution correspond à un transfert

nodal et ils retrouvent donc la solution optimale. Par contre, si on ajoute une correction de demi-grand axe comme ce sera le cas dans le chapitre suivant, le transfert optimal sera non-dégénéré, l'angle entre les deux manœuvres ne sera donc plus  $180 \text{ deg}$ , et leur solution serait sous-optimale.

Si on s'intéresse maintenant à un changement de taille et plus au déploiement, on constate que le problème se pose dans les mêmes termes : par exemple, on démarre du cas précédent où le satellite est déployé. Le satellite est caractérisé par le couple :

$$\begin{aligned}\rho_i &= 5 \text{ km} \\ \theta_i &= 90 \text{ deg}\end{aligned}\tag{3.41}$$

Supposons que l'on veuille doubler le rayon de la formation. Ce cas est à rapprocher des valeurs numériques pour la Roue Interférométrique où le demi-grand axe de la roue change de plusieurs kilomètres pour changer la précision de la mesure. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\rho_f &= 10 \text{ km} \\ \theta_f &= 90 \text{ deg}\end{aligned}\tag{3.42}$$

On trouve alors exactement le problème exposé dans le Tableau 3.3, et par conséquent les mêmes résultats.

Ainsi, cette méthode est valable pour n'importe quelle phase de reconfiguration de la formation.

### Comparaison avec une solution de référence

Afin d'évaluer le gain permis par le Primer Vector, on compare cette solution avec une solution "classique" : le vecteur excentricité est corrigé à l'aide de deux impulsions transversales, car elles sont deux fois plus efficaces que les impulsions radiales, et le vecteur inclinaison à l'aide d'une impulsion normale.

L'impulsion normale est appliquée à la longitude curviligne  $\lambda_1 = \theta$  et son amplitude vaut  $\|\Delta\tilde{\mathbf{V}}_1\| = \|\delta\mathbf{i}'\|$ . La première impulsion transversale est appliquée à la longitude curviligne  $\lambda_2 = \theta + \frac{\pi}{2}$  et vaut  $\|\Delta\tilde{\mathbf{V}}_2\| = \|\delta\mathbf{e}\|/2$ , tandis que la deuxième est appliquée à la longitude curviligne  $\lambda_3 = \lambda_2 + \pi$  et vaut  $\|\Delta\tilde{\mathbf{V}}_3\| = \|\Delta\tilde{\mathbf{V}}_2\|$ .

Le rapport entre la consommation donnée par le Primer Vector  $\Delta\tilde{\mathbf{V}}_{PV}$  et cette solution  $\Delta\tilde{\mathbf{V}}_{ref}$  est représenté sur la Figure 3.4. Le gain maximal est obtenu pour  $k_1 = 1$  et vaut dans ce cas  $1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 10.6\%$ . Ce gain est donc celui obtenu pour la formation circulaire projetée.

Pour la formation circulaire,  $k_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , le gain vaut  $1 - \frac{4}{1+2\sqrt{3}} \approx 10.4\%$ .

#### 3.2.4 Limitations

Si la consommation obtenue est optimale, elle n'est valable que sous un certain nombre d'hypothèses :

- La dynamique est de type corps central,
- La commande est impulsionnelle,
- La commande est non contrainte,

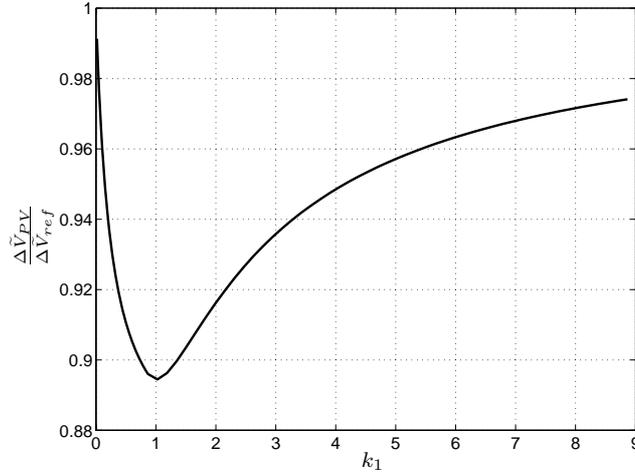


FIG. 3.4 - Comparaison du Primer Vector avec une stratégie de référence

- Le problème résolu est un transfert.

En ce qui concerne les applications du vol en formation, on trouve beaucoup de projets basés sur des plate-formes de type micro-satellite qui ont l'avantage d'être peu chères.

Du fait de leur faible coût, elles ont des performances limitées et possèdent des contraintes. Par exemple, la plate-forme Myriade ([Kra01]) est envisagée pour la Roue interférométrique. Plus largement, c'est une plate-forme adaptée pour le vol en formation en LEO. Il est par exemple impossible de réaliser des manœuvres radiales : seules les manœuvres transversale et normale sont possibles. Il serait par conséquent intéressant de trouver la solution optimale pour le déploiement en imposant des contraintes sur la commande.

De plus, il peut aussi y avoir des contraintes de visibilité station<sup>3</sup> pour la réalisation des manœuvres.

Il est donc nécessaire d'étendre les résultats du Primer Vector.

### 3.3 La méthode des Variations de Paramètres

#### 3.3.1 Principe

La solution proposée ici est la méthode dite des *Variations de Paramètres* (Variation Of Parameters ou VOP en anglais).

Cette méthode est basée sur une résolution géométrique directe des équations de Gauss. Cette méthode est classique : un exemple est donné dans [Car95] où une correction de demi-grand axe et de vecteur excentricité est traitée.

Dans le cadre du déploiement ([Bou03d]), on va étendre cette méthode au transfert 3D. De plus, on va obtenir la solution optimale en combinant cette méthode avec les conditions d'optimalité fournies par la théorie du Primer Vector : cette idée a été initialement proposée par Baranov dans [Bar89] et [Bar95]. Reprenons la forme des équations de Gauss normalisées et adaptées au problème de transfert entre orbites proches quasi-circulaires avec commande impulsionnelle

<sup>3</sup>Contrainte de réalisation d'une manœuvre en visibilité d'une station sol

introduite dans l'Annexe C (système d'équations C.6) :

$$\begin{cases} \delta\tilde{a} = 2\Delta\tilde{V}_S \\ \delta e_x = 2\cos\lambda'\Delta\tilde{V}_S + \sin\lambda'\Delta\tilde{V}_Q \\ \delta e_y = 2\sin\lambda'\Delta\tilde{V}_S - \cos\lambda'\Delta\tilde{V}_Q \\ \delta i'_x = \cos\lambda'\Delta\tilde{V}_W \\ \delta i'_y = \sin\lambda'\Delta\tilde{V}_W \\ \delta\lambda' = -3\Delta\tilde{t}\Delta\tilde{V}_S - 2\Delta\tilde{V}_Q \end{cases} \quad (3.43)$$

où  $\delta\tilde{a}$ ,  $\Delta\tilde{t}$  et  $\Delta\tilde{V}$  sont normalisés.

Définissons un plan  $\Pi = (\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}})$  où  $\hat{\mathbf{X}}$  donne la direction du nœud ascendant de l'orbite de référence, et  $\hat{\mathbf{Y}}$  est orthogonal à  $\hat{\mathbf{X}}$ , contenu dans le plan de l'orbite de référence du côté des longitudes curvilignes positives. Supposons que l'on veuille corriger  $\delta a$ ,  $\delta \mathbf{e}$  et  $\delta \mathbf{i}'$ . Sur la figure 3.5, ces corrections sont représentées par deux vecteurs (pour  $\delta \mathbf{e}$  et  $\delta \mathbf{i}'$ ) et par le cercle  $\mathcal{C}$  de rayon  $\delta a$ .

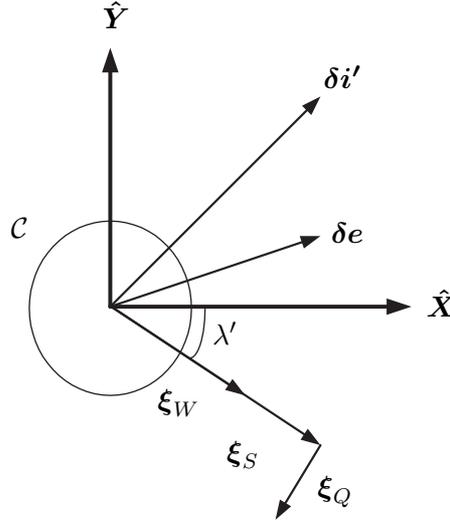


FIG. 3.5 - Représentation géométrique des équations de Gauss

Supposons qu'une impulsion  $\Delta \mathbf{V} = [\Delta V_Q, \Delta V_S, \Delta V_W]^T$  soit appliquée à la longitude curviligne  $\lambda'$ . Pour pouvoir représenter l'effet de ses composantes sur  $\delta a$ ,  $\delta \mathbf{e}$  et  $\delta \mathbf{i}'$ , il faut les transformer en vecteurs :

$$\begin{cases} \xi_Q \equiv [\Delta\tilde{V}_Q \sin\lambda', -\Delta\tilde{V}_Q \cos\lambda']^T \\ \xi_S \equiv [2\Delta\tilde{V}_S \cos\lambda', 2\Delta\tilde{V}_S \sin\lambda']^T \\ \xi_W \equiv [\Delta\tilde{V}_W \cos\lambda', \Delta\tilde{V}_W \sin\lambda']^T \end{cases} \quad (3.44)$$

Ces vecteurs sont aussi matérialisés sur la Figure 3.5.

Ainsi, si  $j$  impulsions  $\Delta \mathbf{V}_j = [\Delta V_{Qj}, \Delta V_{Sj}, \Delta V_{Wj}]^T$  sont appliquées, il faut qu'elles vérifient

le système :

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_j \frac{\Delta \tilde{V}_{Sj}}{|\Delta \tilde{V}_{Sj}|} \|\xi_{Sj}\| &= \delta \tilde{a} \\ \sum_j \xi_{Qj} + \xi_{Sj} &= \delta e \\ \sum_j \xi_{Wj} &= \delta i' \end{aligned}} \quad (3.45)$$

### 3.3.2 Exemples de lois contraintes

#### Première loi

Dans ce premier exemple, on va supposer qu'on ne dispose que d'une impulsion pour réaliser le transfert (contrairement aux résultats du Primer Vector qui en donnent en général deux). On a donc le système :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \tilde{V}_{Sj}}{|\Delta \tilde{V}_{Sj}|} \|\xi_S\| &= \delta \tilde{a} \\ \xi_Q + \xi_S &= \delta e \\ \xi_W &= \delta i' \end{aligned} \quad (3.46)$$

En utilisant le système d'équations 3.33, on aboutit à la solution unique :

$$\boxed{\begin{cases} \lambda' = \theta \\ \Delta \tilde{V}_Q = -\frac{\rho}{2\tilde{a}} \\ \Delta \tilde{V}_S = 0 \\ \Delta \tilde{V}_W = k_1 \frac{\rho}{\tilde{a}} \end{cases}} \quad (3.47)$$

La consommation d'ergols est donc :

$$\boxed{\Delta \tilde{V} = \frac{\rho}{\tilde{a}} \sqrt{\frac{1}{4} + k_1^2}} \quad (3.48)$$

On trouve exactement la consommation optimale 3.41 ce qui montre que le déploiement est un problème de transfert dégénéré puisqu'une impulsion fournit la solution optimale<sup>4</sup>.

A ce stade, l'approche géométrique fournit un résultat intéressant : la composante transversale est nulle. Supposons que tous les satellites de la formation sont regroupés sur le dernier étage du lanceur, et que la première impulsion du déploiement optimal est l'impulsion d'injection : s'il n'y a pas d'impulsion transversale pendant le déploiement cela signifie qu'il n'y a pas de différence de moyen mouvement entre le dernier étage du lanceur et chaque satellite, et que par conséquent, il y aura une collision entre chaque satellite et le dernier étage du lanceur une révolution après l'injection.

#### Deuxième loi

Dans cet exemple, on s'intéresse à une contrainte plate-forme : les composantes radiales sont interdites comme c'est le cas pour Myriade.

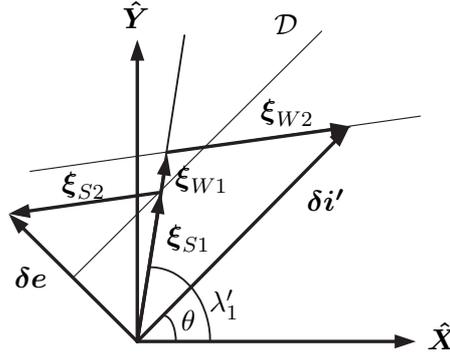
<sup>4</sup>On verra par la suite que ce n'est pas le cas quand la correction nécessaire de demi-grand axe n'est pas nulle

Ce problème à commande contrainte ne peut être résolu analytiquement avec le Primer Vector. De même, la solution ne peut être obtenue que numériquement avec la méthode des Variations de Paramètres.

Pour trouver une solution analytique, on va utiliser conjointement les deux méthodes en introduisant les conditions nécessaires d'optimalité issues du Primer Vector dans la méthode de Variations des Paramètres.

La première de ces condition est de n'utiliser que deux impulsions  $\Delta\tilde{V}_1$  et  $\Delta\tilde{V}_2$ .

On peut alors représenter géométriquement le problème comme sur la Figure 3.6.



**FIG. 3.6 - Représentation géométrique des équations de Gauss**

La condition 3.33a impose :

$$\|\xi_{S1}\| = \|\xi_{S2}\| \quad (3.49)$$

L'extrémité de  $\xi_{S1}$  appartient donc à la droite  $\mathcal{D}$ . De plus la condition 3.33a impose aussi que :

$$\frac{\Delta\tilde{V}_{S1}}{|\Delta\tilde{V}_{S1}|} = -\frac{\Delta\tilde{V}_{S2}}{|\Delta\tilde{V}_{S2}|} \quad (3.50)$$

Le transfert optimal contraint est donc de type nodal. On déduit alors que :

$$(\lambda'_1 - \theta) = -(\lambda'_2 - \theta) \quad (3.51)$$

On utilise alors une autre condition d'optimalité : le transfert nodal est symétrique. Cela signifie que :

$$\begin{aligned} \|\xi_{W1}\| &= \|\xi_{W2}\| \\ \frac{\Delta\tilde{V}_{W1}}{|\Delta\tilde{V}_{W1}|} &= -\frac{\Delta\tilde{V}_{W2}}{|\Delta\tilde{V}_{W2}|} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Ces résultats sont aussi représentés sur la Figure 3.6.

La consommation vaut :

$$\Delta\tilde{V} = 2\sqrt{\Delta\tilde{V}_{S1}^2 + \Delta\tilde{V}_{W1}^2} \quad (3.53)$$

En utilisant la figure, on peut alors montrer que :

$$\Delta\tilde{V}^2 = \frac{\|\delta e\|^2}{4} \left(1 + \cot(\lambda'_1 - \theta)^2\right) + \|\delta i'\|^2 \left(1 + \tan(\lambda'_1 - \theta)^2\right) \quad (3.54)$$

La consommation optimale est donnée par :

$$\frac{d(\Delta\tilde{V}^2)}{d\lambda'_1} = 0 \quad (3.55)$$

On trouve la racine :

$$\lambda'_1 = \arctan \sqrt{\frac{1}{4k_1}} + \theta \quad (3.56)$$

La solution optimale est donc complètement définie analytiquement :

$$\boxed{\begin{cases} \lambda'_1 = \arctan \sqrt{\frac{1}{4k_1}} + \theta \\ \Delta\tilde{V}_{Q1}^* = 0 \\ \Delta\tilde{V}_{S1}^* = \frac{\rho}{8a} \sqrt{1 + 4k_1} \\ \Delta\tilde{V}_{W1}^* = \frac{k_1\rho}{2a} \sqrt{1 + \frac{1}{4k_1}} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda'_2 = \lambda'_1 - \frac{\pi}{2} \\ \Delta\tilde{V}_{Q2}^* = 0 \\ \Delta\tilde{V}_{S2}^* = -\Delta\tilde{V}_{S1}^* \\ \Delta\tilde{V}_{W2}^* = -\Delta\tilde{V}_{W1}^* \end{cases}}$$

Il es alors possible d'obtenir le coût de la contrainte par rapport à la solution optimale non contrainte obtenue au §3.2.3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Formation circulaire} \\ k_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{coût} \approx 11.8\% \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Formation circulaire projetée} \\ k_1 = 1 \\ \text{coût} \approx 25.4\% \end{array} \right.$$

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, il a été montré comment la théorie du Primer Vector répondait parfaitement au déploiement de formation invariante avec une commande impulsionnelle : la solution optimale sous forme analytique a été obtenue. De plus, il a été montré que le déploiement des formations circulaire et circulaire projetée correspondait à des cas très particuliers d'un point de vue contrôle optimal.

L'introduction de contrainte sur la commande a pu être réalisée grâce à l'utilisation conjointe de la méthode de Variations des Paramètres et des conditions nécessaires d'optimalité fournies par le Primer Vector. Deux cas ont été traités et la commande optimale contrainte a été obtenue sous forme analytique.

Évidemment, d'autres contraintes peuvent être introduites suivant le même principe, comme par exemple fixer les angles d'application des impulsions pour avoir des visibilités station.

Un dernier résultat important est que la solution optimale aboutit à une collision entre le dernier étage du lanceur et chaque satellite. L'objet du chapitre suivant est d'introduire le risque de collision dans le problème d'optimisation.

# Prise en compte de la contrainte sur les distances

## Sommaire

---

<b>4.1 Définition du problème d'optimisation . . . . .</b>	<b>57</b>
4.1.1 Risque de collision : l'existant . . . . .	57
4.1.2 Bibliographie sur les différents mode d'injection . . . . .	58
<b>4.2 Le Primer Vector . . . . .</b>	<b>59</b>
4.2.1 Mise en place du problème . . . . .	59
4.2.2 Type de transfert . . . . .	60
4.2.3 Caractéristique de l'impulsion d'injection optimale . . . . .	62
<b>4.3 La méthode des Variations de Paramètres pour déterminer la loi de guidage . . . . .</b>	<b>65</b>
4.3.1 Premier intervalle . . . . .	65
4.3.2 Second intervalle . . . . .	67
4.3.3 Conclusion . . . . .	69
<b>4.4 Etude du risque de collision : cas nominal . . . . .</b>	<b>69</b>
4.4.1 Méthode . . . . .	69
4.4.2 Choix de paramètres annexes . . . . .	71
4.4.3 Présentation de l'algorithme . . . . .	72
4.4.4 Exemples numériques . . . . .	72
<b>4.5 Conclusion . . . . .</b>	<b>75</b>

---

## 4.1 Définition du problème d'optimisation

### 4.1.1 Risque de collision : l'existant

Du chapitre précédent, on a conclu que la loi de commande pour le déploiement optimal amenait à une collision entre chaque satellite et le dernier étage du lanceur<sup>1</sup>.

Une solution pour répondre à ce problème consiste à résoudre un problème d'optimisation sous contraintes. Dans ce cas, le risque de collision peut être représenté par une contrainte de boule ou de boîte.

Il est a priori difficile d'imaginer une résolution analytique de ce problème. Même la résolution numérique se heurte au fait que la contrainte est non-convexe ce qui génère des difficultés de convergence. Des exemples de solutions existent cependant :

- les fonctions de potentiel ([Inn93]) : cette technique garantie une non-collision, mais ne peut prendre en compte la dynamique du système. Si cette méthode est adaptée à la dynamique inertielle, elle ne l'est en revanche pas pour les formation géocentriques.

---

<sup>1</sup>Où la structure commune où sont regroupés les satellites

- La programmation linéaire à variables entières ([Ric01]) : la condition de collision est représentée par une contrainte binaire et la consommation est minimisée par programmation linéaire. A l'aide d'heuristiques sur la dynamique, cette méthode, initialement développée pour les avions, donne de bons résultats.
- La programmation non linéaire ([Mil01]) : le problème est résolu de manière brute en introduisant les contraintes non-convexes. Le problème est que les exemples numériques sont très succincts, ce qui ne permet pas de se faire une opinion.
- Les algorithmes génétiques ([Li00]) : si le concept est intéressant, les exemples numériques sont trop simples pour déterminer si cette méthode est efficace.

Les autres méthodes consistent à introduire des heuristiques et à résoudre un problème non contraint : dans [Cam02], l'heuristique porte sur la dynamique. En balayant les instants d'injection et d'insertion dans la formation, la trajectoire va être modifiée et il va être possible de borner le risque de collision. Pour chaque cas, un problème d'optimisation non contraint est résolu.

Dans le principe, l'idée retenue a été cette dernière : on définit un paramètre influençant la distance et on le choisit de manière à borner le risque de collision. Mais au lieu de différer les manœuvres, il a été choisi d'optimiser l'injection : en rajoutant une impulsion d'injection depuis le dernier étage du lanceur, il est possible de borner le risque de collision tout en minimisant la consommation. Ainsi, le problème qui va être résolu est un problème d'optimisation non contraint.

#### 4.1.2 Bibliographie sur les différents mode d'injection

Pour modéliser de manière réaliste l'insertion, une bibliographie sur les phases initiales de vol (Launch and Early Orbit Phase (LEOP) en anglais) pour les systèmes à plusieurs satellites a été menée.

**Les constellations** Historiquement, les constellations ont été le premier système à plusieurs satellites. De manière exhaustive, on trouve : GPS, Glonass, Iridium et Globalstar.

Peu de bibliographie a été trouvée concernant leur mode d'injection : seule celle concernant un avant projet pour Galileo a été analysée ([Bal99]) : les satellites sont regroupés par six et sont injectés au même instant. Pour chaque satellite, la séparation est réalisée à l'aide d'un ressort dont l'orientation et la raideur est différente. L'orientation est telle que la composante normale de l'impulsion est nulle tandis que les composantes transversales et radiales sont différentes pour chaque satellite.

Même si la composante radiale a un effet, c'est surtout la composante transversale qui, par le mouvement moyen différentiel qu'elle introduit, limite le risque de collision entre les satellites et le lanceur d'une part, et entre les satellites eux-mêmes d'autres part.

**Les formations** Le principal problème est que les formations qui volent sont peu nombreuses : L7-EO1, Cluster II et GRACE.

Concernant L7-EO1, les satellites ont été lancés séparément : il n'y a pas eu de stratégie de déploiement multiple.

Pour Cluster II, les satellites ont été lancés deux par deux, et la stratégie employée a été la même que pour GRACE, à savoir une impulsion transversale positive pour un satellite, et une impulsion transversale négative pour le deuxième (obtenue par retournement du dernier étage du lanceur).

Concernant les missions à venir, deux cas sont intéressants : Cloudsat/Calipso ([Vin03]) et Orion ([Rob99]). Concernant Cloudsat/Calipso, le principe est celui qui vient d'être exposé. Par contre, pour Orion, le nombre de satellites étant plus important, l'idée retenue a été d'empiler les satellites et de les injecter un par un à l'aide d'une impulsion transversale fournie par le dernier étage du lanceur.

En résumé, même si les techniques varient légèrement, la base reste l'utilisation d'impulsions transversales, leur amplitude ou leur signe pouvant varier. C'est pourquoi la première hypothèse simplificatrice a consisté à choisir une impulsion d'injection strictement transversale.

De plus, on va tirer profit de la stratégie optimale obtenue au chapitre précédent (système d'équations 3.47) : la longitude curviligne relative est égale à l'angle de phasage. Comme les satellites sont équirépartis sur la formation, cela signifie qu'il serait possible d'équirépartir la consommation d'ergols en équirépartissant l'injection des satellites. C'est pourquoi on a choisi un mode d'injection de type Orion.

Comme l'impulsion d'injection est "gratuite", car réalisée en général à l'aide d'un ressort, il est possible d'optimiser ses caractéristiques pour minimiser la consommation et limiter le risque de collision : dans le paragraphe qui va suivre, on va résoudre un problème de transfert à consommation minimale, et on analysera a posteriori le risque de collision.

## 4.2 Le Primer Vector

Avant tout, il est nécessaire de noter l'hypothèse simplificatrice suivante : on suppose que la masse à vide du dernier étage du lanceur est suffisamment grande par rapport à la masse des satellites pour que l'intégralité de l'impulsion d'injection soit transférée au satellite. Dans un cas réel, il faudra donc par exemple augmenter la raideur des ressorts au fur et à mesure que les satellites seront injectés de manière à conserver une impulsion constante.

### 4.2.1 Mise en place du problème

Lorsque l'impulsion d'injection  $\Delta\tilde{\mathbf{V}}_{in}$  va être appliquée, un écart de demi-grand axe va être créé. Il est donc nécessaire de définir un demi-grand axe cible. Une référence commode est celui de l'orbite d'injection<sup>2</sup>.

L'impulsion d'injection est de la forme :

$$\Delta\tilde{\mathbf{V}}_{in} = \begin{bmatrix} \Delta\tilde{V}_{inQ} = 0 \\ \Delta\tilde{V}_{inS} = \|\Delta\tilde{\mathbf{V}}_{in}\| \\ \Delta\tilde{V}_{inW} = 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Par conséquent, on a :

$$\boldsymbol{\xi}_{in} = \frac{\Delta\tilde{\mathbf{V}}_{in}}{2} \quad (4.2)$$

L'impulsion d'injection corrige aussi le vecteur excentricité et il reste alors à corriger le vecteur excentricité résiduel :

$$\delta\mathbf{e}_r = \delta\mathbf{e} - \boldsymbol{\xi}_{in} \quad (4.3)$$

Géométriquement, le nouveau problème est représenté sur la Figure 4.1 : il faut corriger  $\delta\mathbf{e}_r$ ,  $\delta\mathbf{i}'$  tout en s'assurant que la correction de demi-grand axe correspond au cercle  $\mathcal{C}$ .

---

<sup>2</sup>Ici, l'orbite d'injection devient l'orbite de référence précédemment définie

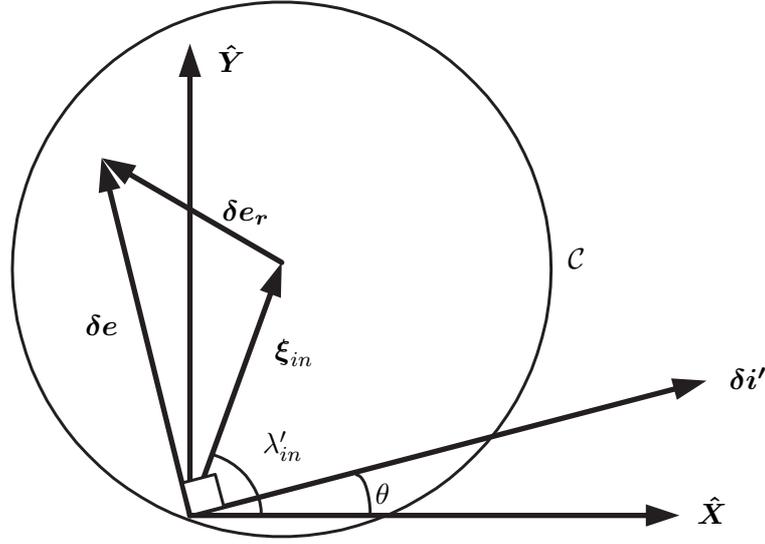


FIG. 4.1 - Représentation géométrique du déploiement avec une impulsion d'injection

Le système d'équations 3.45 devient alors :

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^2 \frac{\Delta \tilde{V}_{Sj}}{|\Delta \tilde{V}_{Sj}|} \|\xi_{Sj}\| &= \|\xi_{in}\| \\
 \sum_{j=1}^2 \xi_{Qj} + \xi_{Sj} &= \delta e_r \\
 \sum_{j=1}^2 \xi_{Wj} &= \delta i'
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Afin de comparer ce nouveau déploiement avec le déploiement du chapitre précédent (problème  $(\mathcal{P}_1)$ , cf Equation 3.33), on formalise le nouveau problème  $(\mathcal{P}_2)$  :

$$(\mathcal{P}_2) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{j=1}^l \|\Delta \mathbf{V}_j\| \\ \delta \tilde{a} = -2\|\Delta \mathbf{V}_{in}\| \\ \delta e_x = -\frac{\rho}{2\tilde{a}} \sin \theta - 2\|\Delta \mathbf{V}_{in}\| \cos \lambda'_{in} \\ \delta e_y = \frac{\rho}{2\tilde{a}} \cos \theta - 2\|\Delta \mathbf{V}_{in}\| \sin \lambda'_{in} \\ \delta i'_x = k_1 \frac{\rho}{\tilde{a}} \cos \theta \\ \delta i'_y = k_1 \frac{\rho}{\tilde{a}} \sin \theta \end{array} \right. \tag{4.5a}$$

#### 4.2.2 Type de transfert

A ce stade, il est impossible de résoudre le système 4.4 de manière analytique. La démarche va consister à fixer  $\|\Delta \tilde{\mathbf{V}}_{in}\|$  et trouver à l'aide du Primer Vector la valeur  $\lambda'^*_{in}$  minimisant la consommation d'ergols nécessaire au déploiement.

Le premier point consiste à déterminer à quel type de transfert le déploiement appartient en calculant les limites 3.30, 3.31 et 3.32.

Pour cela, on explicite les corrections à réaliser à l'aide de la Figure 4.1 :

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{a} &= -2\|\Delta\tilde{\mathbf{V}}_{in}\| \\
\|\delta\mathbf{e}_r\| &= \sqrt{\|\delta\mathbf{e}\|^2 + 4\|\Delta\tilde{\mathbf{V}}_{in}\|^2 - 4\|\delta\mathbf{e}\|\|\Delta\tilde{\mathbf{V}}_{in}\|\sin(\lambda'_{in} - \theta)} \\
\delta e_{r\perp} &= \|\delta\mathbf{e}\| - 2\|\Delta\tilde{\mathbf{V}}_{in}\|\sin(\lambda'_{in} - \theta) \\
\delta e_{r//} &= -2\|\Delta\tilde{\mathbf{V}}_{in}\|\cos(\lambda'_{in} - \theta) \\
\|\delta\mathbf{i}'\| &= 2k_1\|\delta\mathbf{e}\|
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Commençons par la limite entre le cas nodal et le cas non dégénéré :

$$\delta\tilde{a}^2 = \delta e_{r//}^2 \tag{4.7}$$

Cette équation équivaut à :

$$\cos(\lambda'_{in} - \theta) = 1 \tag{4.8}$$

Autrement dit, si  $\lambda'_{in} = \theta$ , le transfert est nodal et non dégénéré, et si  $\lambda'_{in} \neq \theta$ , le transfert est non dégénéré ou singulier.

Examinons maintenant la limite entre le transfert non dégénéré et le transfert singulier :

$$\delta\tilde{a}^2 = \|\delta\mathbf{e}_r\|^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\delta e_{r\perp}\|\delta\mathbf{i}'\| - \|\delta\mathbf{i}'\|^2 \tag{4.9}$$

Dans le cas de la formation circulaire,  $k_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , cette équation équivaut à :

$$\sin(\lambda'_{in} - \theta) = 0 \tag{4.10}$$

On fait alors une hypothèse raisonnable : l'impulsion d'injection optimale tend à corriger  $\delta\mathbf{e}$ . Si on se réfère à la Figure 4.1, cela signifie que :

$$\theta < \lambda'_{in} < \theta + \frac{\pi}{2} \tag{4.11}$$

De 4.10 et 4.11, on déduit que le transfert est non dégénéré ou nodal. En résumant, le transfert est "non dégénéré ou singulier" et "non dégénéré ou nodal" : il est par conséquent non dégénéré. Dans le cas de la formation circulaire projetée,  $k_1 = 1$ , on introduit le rapport important :

$$\eta \equiv \frac{\|\Delta\tilde{\mathbf{V}}_{in}\|}{\|\delta\mathbf{e}\|} \tag{4.12}$$

L'équation 4.9 équivaut alors à :

$$\left(4 + \frac{8}{\sqrt{3}}\right)\sin(\lambda'_{in} - \theta)\eta + \left(3 - \frac{4}{\sqrt{3}}\right) = 0 \tag{4.13}$$

En utilisant à nouveau l'hypothèse 4.11, on conclut que le transfert est non dégénéré ou nodal, donc non dégénéré pour la même raison que pour la formation circulaire.

Le déploiement est donc un transfert non dégénéré.

### 4.2.3 Caractéristique de l'impulsion d'injection optimale

On rappelle la consommation optimale associée au transfert non dégénéré donnée en 3.28 :

$$\Delta\tilde{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \|\delta\mathbf{i}'\|^2 + \|\delta\mathbf{e}_r\|^2 - \frac{\delta\tilde{a}^2}{2} + \sqrt{(\|\delta\mathbf{i}'\|^2 - \|\delta\mathbf{e}_r\|^2 + \delta\tilde{a}^2)^2 + 4\|\delta\mathbf{i}'\|^2\delta e_\perp^2} \right)^{1/2} \quad (4.14)$$

On peut alors trouver  $\lambda'_{in*}$  en calculant :

$$\frac{\partial(\Delta\tilde{V}^2)}{\partial\lambda'_{in}} = c_1 \cos(\lambda'_{in} - \theta) \left( 1 + \frac{c_2 (1 - 4\eta \sin(\lambda'_{in} - \theta))}{\sqrt{c_3 \sin^2(\lambda'_{in} - \theta) + c_4 \sin(\lambda'_{in} - \theta) + c_5}} \right) \quad (4.15)$$

où

$$\begin{aligned} c_1 &= -2\|\delta\mathbf{e}\|^2\eta \\ c_2 &= (1 + 4k_1^2) \\ c_3 &= (8k_1\eta)^2 \\ c_4 &= -8\eta(1 + 2\eta + 4k_1^2) \\ c_5 &= (1 + 4k_1^2)^2 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Il existe deux racines  $\lambda'_{in1*}$  et  $\lambda'_{in2*}$  qui vérifient :

$$\frac{\partial(\Delta\tilde{V}^2)}{\partial\lambda'_{in}} = 0 \quad (4.17)$$

Ces racines sont :

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda'_{in1*} &= \frac{\pi}{2} + \theta \\ \lambda'_{in2*} &= \arctan \frac{1}{\sqrt{4\eta^2 - 1}} + \theta \end{aligned}} \quad (4.18)$$

Afin de vérifier à quel type de maximum ces racines correspondent, on étudie la condition du second ordre :

$$\left. \frac{\partial^2(\Delta\tilde{V}^2)}{\partial\lambda'^2_{in}} \right|_{\lambda'_{in}=\lambda'_{in_j*}} > 0 \quad (4.19)$$

Pour  $\lambda'_{in1*}$ , on trouve :

$$\left. \frac{\partial^2(\Delta\tilde{V}^2)}{\partial\lambda'^2_{in}} \right|_{\lambda'_{in}=\lambda'_{in1*}} = \|\delta\mathbf{e}\|^2\eta \left( 1 - (4\eta - 1) \sqrt{\frac{(1 + 4k_1^2)}{1 + 4k_1^2 - 8\eta + 16\eta^2}} \right) \quad (4.20)$$

Les racines de l'équation :

$$\left. \frac{\partial^2(\Delta\tilde{V}^2)}{\partial\lambda'^2_{in}} \right|_{\lambda'_{in}=\lambda'_{in1*}} = 0 \quad (4.21)$$

sont  $\eta_1 = 0$  et  $\eta_2 = \frac{1}{2}$  : la fonction est positive entre les racines.

Concernant  $\lambda'_{in2*}$ , on trouve :

$$\left. \frac{\partial^2(\Delta\tilde{V}^2)}{\partial\lambda'^2_{in}} \right|_{\lambda'_{in}=\lambda'_{in2*}} = 4\|\delta\mathbf{e}\|^2k_1^2 \frac{4\eta^2 - 1}{1 + 4k_1^2} \quad (4.22)$$

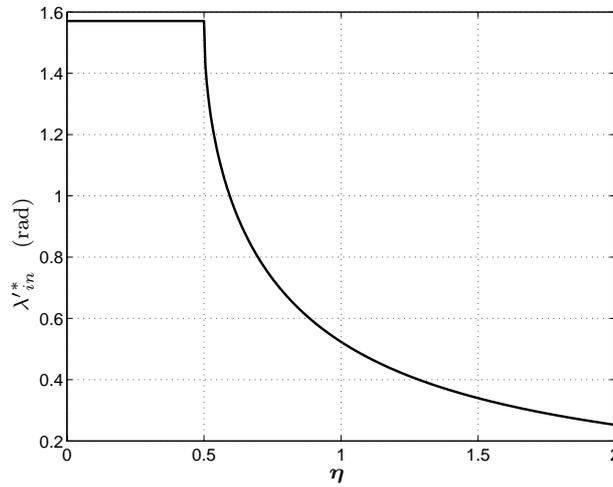
Les racines de l'équation :

$$\left. \frac{\partial^2(\Delta\tilde{V}^2)}{\partial\lambda'_{in}{}^2} \right|_{\lambda'_{in}=\lambda'_{in}^*} = 0 \quad (4.23)$$

sont  $\eta_1 = -\frac{1}{2}$  et  $\eta_2 = \frac{1}{2}$  : la fonction est positive autour des racines.  
En résumant ces calculs, on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 < \eta < \frac{1}{2} : \quad \lambda'_{in}^* = \lambda'_{in1}^* \\ \eta > \frac{1}{2} : \quad \lambda'_{in}^* = \lambda'_{in2}^* \end{array}} \quad (4.24)$$

Graphiquement, la longitude curviligne optimale de l'impulsion d'injection est représentée sur la Figure 4.2. Au delà de l'intérêt de la formulation analytique, ce résultat est inattendu :



**FIG. 4.2 - Longitude optimale de l'impulsion d'injection**

effet, on constate qu'il y a deux domaines de solutions, alors que la théorie en prévoit une seule pour toute valeur de  $\eta$ .

Un autre point intéressant est que la longitude curviligne optimale ne dépend pas de  $k_1$ , donc de l'amplitude de la composante hors plan.

Avant d'étudier les conséquences de cette stratégie en termes de risque de collision, il est déjà possible de comparer l'évolution de la consommation nécessaire pour le déploiement par rapport à la stratégie sans impulsion d'injection : sur la Figure 4.3, ces deux consommations sont représentées ; la stratégie initiale est évidemment constante tandis que celle qui vient d'être calculée est fonction de l'amplitude de l'impulsion d'injection  $\|\Delta\tilde{\mathbf{V}}_{in}\|$ . La comparaison pour la formation circulaire est présentée sur la Figure 4.3(a). Il y a un minimum pour :

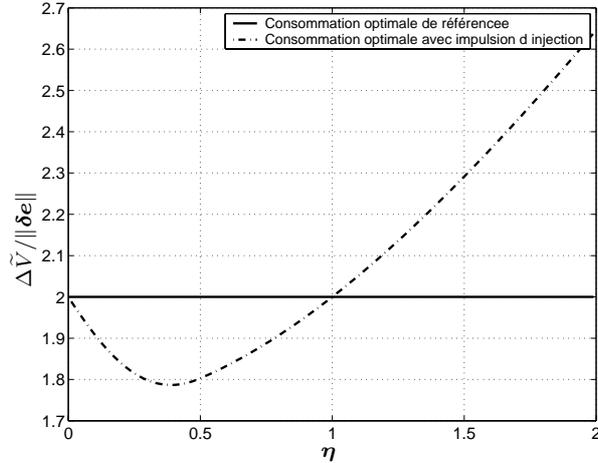
$$\eta^* \approx 0.389$$

Pour cette valeur, le gain optimal est :

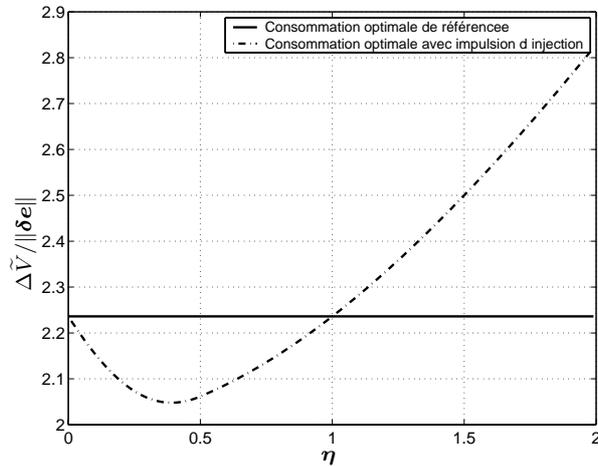
$$gain \approx 11.94\%$$

Concernant la formation circulaire projetée présentée sur la Figure 4.3(b), la consommation optimale est obtenue pour :

$$\eta^* \approx 0.392$$



(a) Formation circulaire



(b) Formation circulaire projetée

**FIG. 4.3 - Comparaison des consommations optimales pour le déploiement**

et le gain vaut alors

$$gain \approx 9.18 \%$$

Les résultats sont donc proches et ne sont que légèrement influencés par le rapport  $k_1$ . L'introduction et l'optimisation d'une impulsion d'injection permet donc de réduire la consommation. Il est maintenant nécessaire d'analyser son impact sur le risque de collision qui est à l'origine de son utilisation.

Le Primer Vector fournit la consommation optimale, mais la loi de guidage n'est donnée dans [Ede67] que pour le transfert nodal. Concernant le transfert non dégénéré, elle n'est donnée que sous forme implicite. Quant au transfert singulier, elle n'est pas donnée. Dans [Mar83], les lois ne sont tout simplement pas données.

Or, pour analyser l'évolution des distances entre le dernier étage lanceur et les satellites d'une part, et entre les satellites d'autres part, il est nécessaire de disposer des lois de guidage.

Dans le chapitre précédent, la méthode de Variations des Paramètres a permis de répondre à une limitation du Primer Vector exprimé sous forme analytique : l'introduction de contraintes sur la commande. Ici, on se propose de l'utiliser à nouveau pour répondre à une autre limita-

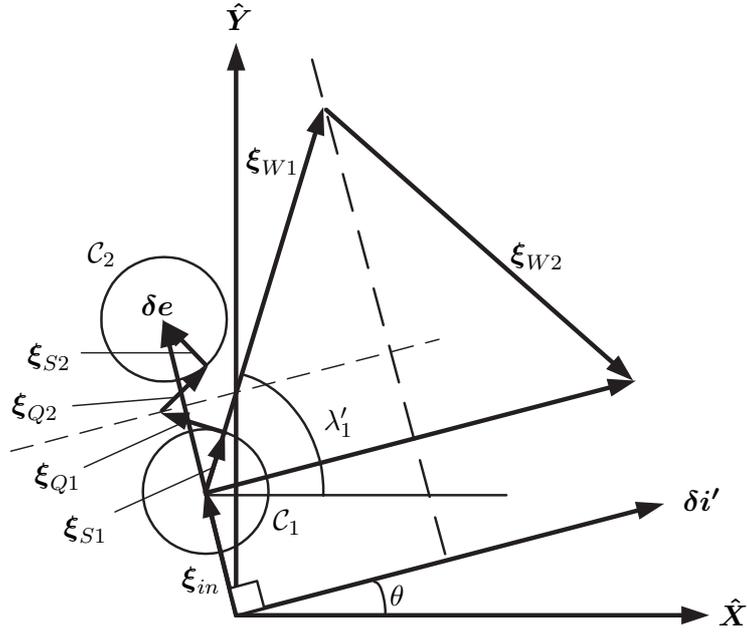


FIG. 4.4 - Représentation géométrique de la solution pour le premier intervalle

tion : l'obtention de la loi de guidage de manière explicite<sup>3</sup>.

### 4.3 La méthode des Variations de Paramètres pour déterminer la loi de guidage

Comme précédemment, la solution optimale est bi-impulsionnelle et symétrique. Il est alors possible de trouver une solution géométrique particulière du problème représenté sur la Figure 4.1 vérifiant ces deux conditions nécessaires d'optimalité. De plus, comme on connaît les deux longitudes curvilignes optimales d'injection, on va trouver deux solutions géométriques, une pour chaque intervalle.

#### 4.3.1 Premier intervalle

Des résultats obtenus en 4.24, on s'intéresse au premier intervalle  $0 < \eta < \frac{1}{2}$ . Sur cet intervalle, on a :

$$\lambda'_{in1} = \frac{\pi}{2} + \theta \quad (4.25)$$

On obtient alors la solution représentée sur le Figure 4.4 où la somme des rayons  $C_j$  est égale au rayon de  $C$ .

<sup>3</sup>Ce problème a cependant déjà été abordé au chapitre précédent puisque l'introduction de contrainte par la méthode de Variations des Paramètres a permis d'obtenir de telles lois

Géométriquement, on a donc :

$$\begin{aligned}
\|\xi_{Qj}\| &= \frac{-\frac{\|\delta e\|}{2} + \|\Delta \tilde{V}_{in}\| (1 - \sin(\lambda'_1 - \theta))}{\cos(\lambda'_1 - \theta)} \\
\|\xi_{Sj}\| &= \|\Delta \tilde{V}_{in}\| \\
\|\xi_{Wj}\| &= \frac{\|\delta i'\|}{2 \cos(\lambda'_1 - \theta)}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Soit la consommation :

$$\Delta \tilde{V} = \sum_{j=1}^2 \sqrt{\Delta \tilde{V}_{Qj}^2 + \Delta \tilde{V}_{Sj}^2 + \Delta \tilde{V}_{Wj}^2} \tag{4.27}$$

La racine de l'équation :

$$\frac{\partial (\Delta \tilde{V}^2)}{\partial \lambda'_1} = 0 \tag{4.28}$$

est :

$$\lambda_1^* = \arcsin \left( \frac{1}{4} \frac{4k_1^2 + 1 - 4\eta + 8\eta^2 + \sqrt{16(k_1^2 - \eta)^2 + 8k_1^2 + 64k_1^2\eta^2 + 1 - 8\eta}}{\eta(2\eta - 1)} \right) + \theta \tag{4.29}$$

Appliquée au cas de la formation circulaire, on obtient :

$$\lambda_1^* = \arcsin \left( \frac{1 - \eta + 2\eta^2 + \sqrt{1 - 2\eta + 4\eta^2}}{\eta(2\eta - 1)} \right) + \theta \tag{4.30}$$

et au cas de la formation circulaire projetée :

$$\lambda_1^* = \arcsin \left( \frac{1}{4} \frac{5 - 4\eta + 8\eta^2 + \sqrt{5}\sqrt{5 - 8\eta + 16\eta^2}}{\eta(2\eta - 1)} \right) + \theta \tag{4.31}$$

En définitive, la solution optimale pour le premier intervalle est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda'_1 = \lambda_1^* + \pi \\ \Delta \tilde{V}_{Q1}^* = \frac{-\frac{\rho}{4\bar{a}} + \|\Delta \tilde{V}_{in}\| (1 - \sin(\lambda'_1 - \theta))}{\cos(\lambda'_1 - \theta)} \\ \Delta \tilde{V}_{S1}^* = -\frac{\|\Delta \tilde{V}_{in}\|}{2} \\ \Delta \tilde{V}_{W1}^* = -\frac{k_1\rho}{2\bar{a}} \frac{1}{\cos(\lambda'_1 - \theta)} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda'_2 = \pi - \lambda_1^* + 2\theta \\ \Delta \tilde{V}_{Q2}^* = -\Delta \tilde{V}_{Q1}^* \\ \Delta \tilde{V}_{S2}^* = \Delta \tilde{V}_{S1}^* \\ \Delta \tilde{V}_{W2}^* = -\Delta \tilde{V}_{W1}^* \end{array} \right.$$

La solution obtenue est donc un cas particulier de solution symétrique : non seulement les valeurs absolues des cosinus directeurs sont égales, mais en plus les amplitudes sont égales. Cette solution est dite supersymétrique.

Soit  $\Delta \tilde{V}_{PV}^*(\lambda_{in} = \lambda'_{in1})$  la consommation optimale fournie par le Primer Vector en 4.14 et  $\Delta \tilde{V}_{VOP}^*(\lambda_{in} = \lambda'_{in1})$  celle fournie par l'approche VOP, on a vérifié analytiquement qu'elles étaient égales. Ainsi, en utilisant les conditions nécessaires d'optimalité (longitude curviligne d'injection et symétrie), on a retrouvé la consommation optimale du Primer Vector. Cette loi de guidage sera utilisée par la suite.

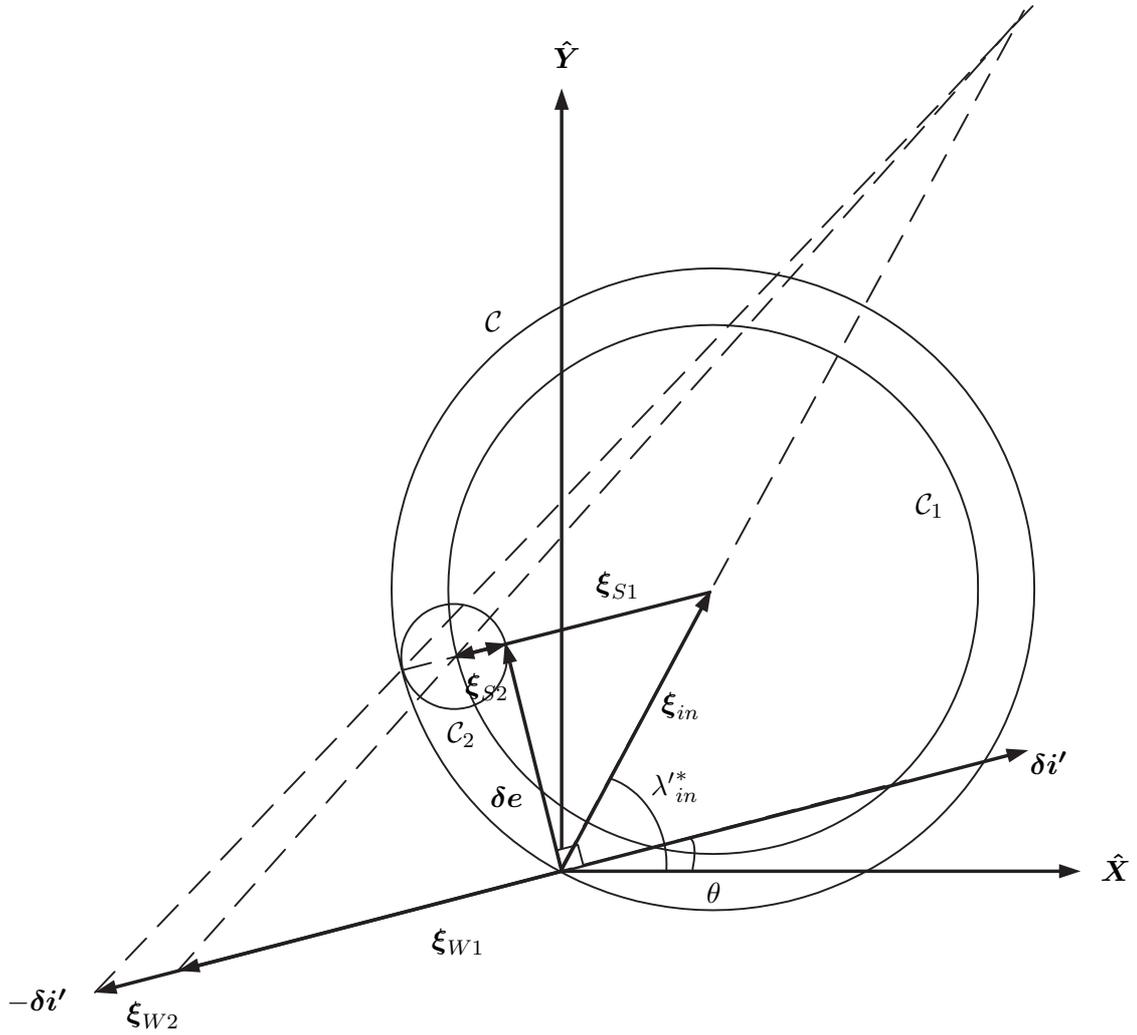


FIG. 4.5 - Représentation géométrique de la solution pour le second intervalle

### 4.3.2 Second intervalle

On s'intéresse maintenant au second intervalle  $\eta > \frac{1}{2}$ . Sur cet intervalle, on a :

$$\lambda'_{in2} = \arctan \frac{1}{\sqrt{4\eta^2 - 1}} + \theta \quad (4.32)$$

On obtient alors la solution représentée sur le Figure 4.5. Sur la figure,  $\xi_{in}$  est bien tel que la condition 4.32 soit vérifiée. Une telle solution implique que :

$$\xi_{Qj} = \emptyset \quad j \in \{1, 2\} \quad (4.33)$$

Afin de corriger l'écart de demi-grand axe généré par l'impulsion d'injection, on a bien la somme des rayons des cercles  $C_j$  égale au rayon du cercle  $C$ . Cependant, il existe une infinité de solutions pour ces cercles. Mais si on utilise à nouveau la symétrie de la solution optimale, on déduit l'unique solution représentée sur la figure.

Ainsi on calcule géométriquement que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda'_1 = \theta \\ \Delta \tilde{V}_{Q1}^* = 0 \\ \Delta \tilde{V}_{S1}^* = -\frac{\sqrt{4\|\Delta \tilde{V}_{in}\|^2 - \frac{\rho^2}{4\bar{a}^2}}}{4} - \frac{\|\Delta \tilde{V}_{in}\|}{2} \\ \Delta \tilde{V}_{W1}^* = -\frac{k_1\rho}{\bar{a}\|\Delta \tilde{V}_{in}\|} \Delta \tilde{V}_{S1}^* \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \lambda'_2 = \lambda'_1 + \pi \\ \Delta \tilde{V}_{Q2}^* = 0 \\ \Delta \tilde{V}_{S2}^* = \frac{\sqrt{4\|\Delta \tilde{V}_{in}\|^2 - \frac{\rho^2}{4\bar{a}^2}}}{4} - \frac{\|\Delta \tilde{V}_{in}\|}{2} \\ \Delta \tilde{V}_{W2}^* = \frac{k_1\rho}{\bar{a}\|\Delta \tilde{V}_{in}\|} \Delta \tilde{V}_{S2}^* \end{array} \right.$$

A nouveau, il est possible de remarquer que la consommation donnée par cette solution est la même que celle donnée par le Primer Vector.

Cependant, cette solution est en apparence surprenante. En effet, plusieurs points sont contradictoires :

- D'un côté, les deux impulsions transversales sont négatives sur l'intervalle considéré indiquant que le transfert est non dégénéré,
- De l'autre, les deux impulsions sont séparées d'un angle égal à 180 deg indiquant que le transfert est nodal,
- Un transfert nodal et non dégénéré doit vérifier les conditions de limite 3.30b et 3.31a. Or, c'est uniquement la deuxième qui est vérifiée indiquant que le transfert en présence n'est pas le cas limite entre le transfert nodal et le transfert non dégénéré.

Ainsi, ce transfert est nodal et non-dégénéré tout en n'appartenant pas à la frontière entre les deux types de transferts.

En fait, ce transfert est un cas particulier : on rappelle la courbe d'efficacité du primer vector 3.19 pour un transfert :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_p(t) = -p_{e_y} \cos \bar{n}t + p_{e_x} \sin \bar{n}t \\ \mu_p(t) = 2p_{e_x} \cos \bar{n}t + 2p_{e_y} \sin \bar{n}t + 2p_a \\ \nu_p(t) = p_{i_x} \cos \bar{n}t + p_{i_y} \sin \bar{n}t \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Etant donné que le transfert est non-dégénéré, on a :

$$\mu_p(t_1) = \mu_p(t_2) \quad (4.35)$$

Or, toujours par définition du transfert non-dégénéré, on a l'inégalité :

$$p_a \neq 0 \quad (4.36)$$

Les équations 4.35 et 4.36 permettent de conclure que soit :

$$\tan \bar{n}t_1 = \tan \bar{n}t_2 = -\frac{p_{e_x}}{p_{e_y}} \quad (4.37)$$

soit :

$$p_{e_x} = p_{e_y} = 0 \quad (4.38)$$

Supposons que l'équation 4.37 soit vérifiée. Comme les composantes radiales à l'instant d'application des impulsions sont nulles :

$$\lambda_p(t_1) = \lambda_p(t_2) = 0 \quad (4.39)$$

Ceci implique que :

$$\tan \bar{n}t_1 = \tan \bar{n}t_2 = \frac{p_{e_y}}{p_{e_x}} \quad (4.40)$$

Ce résultat est en contradiction avec l'hypothèse 4.37. C'est par conséquent l'équation 4.38 qui est vérifiée : la courbe d'efficacité n'est ni une ellipse, ni un cercle, mais un segment de droite. Plus précisément, la courbe d'efficacité est un oscillateur selon l'axe  $\nu_p$ . Elle est représentée sur la Figure 4.6 dans l'espace hodographe. Il n'a pas été trouvé de description de ce cas particulier

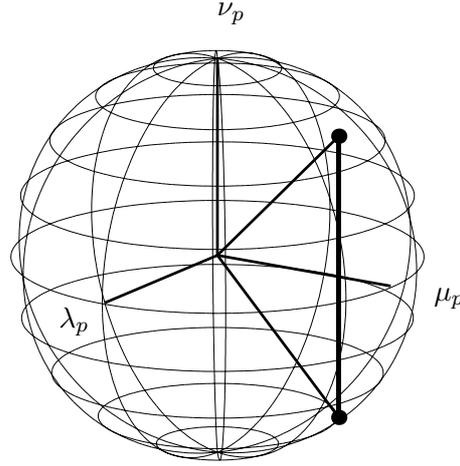


FIG. 4.6 - Courbe d'efficacité dans l'espace hodographe pour le transfert nodal/non dégénéré

de transfert dans la littérature : nous l'appelons donc transfert nodal/non dégénéré.

### 4.3.3 Conclusion

L'objectif de cette partie était d'obtenir les lois de guidage correspondant à la consommation optimale fournie par le Primer Vector en vue de l'analyse du risque de collision. Ces lois de guidage optimales ont été obtenues sous forme analytique en fonction de l'amplitude de l'impulsion d'injection : il est donc maintenant possible de faire aisément des études paramétriques sur le risque de collision.

## 4.4 Etude du risque de collision : cas nominal

### 4.4.1 Méthode

Avant tout, il faut préciser que dorénavant, seule la formation circulaire sera étudiée. Cependant, la méthode qui va être décrite peut être appliquée à la formation circulaire projetée ou toute autre formation invariante.

L'objectif est d'analyser l'évolution des distances d'une part entre le dernier étage lanceur et les satellites, et d'autre part entre les satellites eux-mêmes. Dans ce but, on va utiliser un formalisme basé sur les paramètres cartésiens dans le repère orbital local plutôt que sur les paramètres keplériens : la STM  $\underline{\Phi}(t, t_0)$  est définie dans l'Annexe B (§B.1) comme :

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}(t) \\ \delta \dot{\mathbf{r}}(t) \end{bmatrix} = \underline{\Phi}(t, t_0) \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}(t_0) \\ \delta \dot{\mathbf{r}}(t_0) \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Comme on s'intéresse à l'effet d'une impulsion de vitesse sur la position, on extrait de la STM la sous matrice (3,3) qui donne l'effet de  $\delta\dot{\mathbf{r}}(t_0)$  sur  $\delta\mathbf{r}(t)$  et on la dénote  $\underline{\Phi}_{vp}(t, t_0)$ .

En variables normalisées, on a  $\tilde{t} = \lambda'$ , et pour  $k$  impulsions, on aboutit à l'équation :

$$\boxed{\delta\tilde{\mathbf{r}}(\lambda') = \sum_{j=1}^k \underline{\tilde{\Phi}}_{vp}(\Delta\lambda'_j) \Delta\tilde{\mathbf{V}}_j(\lambda'_j)} \quad (4.42)$$

où  $\lambda'_j$  est la longitude curviligne d'application de l'impulsion  $\Delta\tilde{\mathbf{V}}_j$ ,  $\Delta\lambda'_j = \lambda' - \lambda'_j$ , et :

$$\underline{\tilde{\Phi}}_{vp}(\Delta\lambda'_j) = \begin{bmatrix} \sin \Delta\lambda'_j & 2(1 - \cos \Delta\lambda'_j) & 0 \\ 2(\cos \Delta\lambda'_j - 1) & 4 \sin \Delta\lambda'_j - 3\Delta\lambda'_j & 0 \\ 0 & 0 & \sin \Delta\lambda'_j \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

On suppose que la formation est constituée de satellites équirépartis. La première distance qui va être étudiée est celle entre le dernier étage lanceur et un satellite  $\#k$ . Si on suppose que l'orbite du dernier étage lanceur donne le ROL, on a :

$$d(\lambda') = \|\delta\mathbf{r}_k(\lambda')\| \quad (4.44)$$

Ensuite, pour simplifier le problème, on ne va étudier que l'évolution de la distance entre deux satellites consécutifs  $\#k$  et  $\#k+1$  car c'est la plus critique :

$$d(\lambda') = \|\delta\mathbf{r}_{k+1}(\lambda') - \delta\mathbf{r}_k(\lambda')\| \quad (4.45)$$

Pour ces deux distances qui nous intéressent, on ne va étudier que leur minimum puisque c'est le minimum qui définit le risque de collision :

- $d_{ls}$  est la distance minimale entre le dernier étage du lanceur et un satellite,
- $d_{ss}$  est la distance minimale entre deux satellites consécutifs.

Avant de continuer, il est nécessaire de définir le "minimum" : en effet, concernant  $d_{ls}$ , cette distance est nulle au moment de l'injection. Immédiatement après l'injection, cette distance augmente, puis évolue avec des minima locaux pendant le déploiement. La distance minimale a donc un sens à partir du moment où, juste après l'injection, la distance entre le dernier étage du lanceur et un satellite a atteint son premier maximum. On fait de même avec  $d_{ss}$ .

Afin que  $d_{ls}$  et  $d_{ss}$  ne dépendent pas du rayon de la formation, on s'intéresse plutôt à l'évolution de  $d'_{ls}$  et  $d'_{ss}$  telles que :

$$\begin{cases} d'_{ls} \equiv \frac{d_{ls}}{\rho} \\ d'_{ss} \equiv \frac{d_{ss}}{\rho} \end{cases} \quad (4.46)$$

L'évolution de  $d'_{ls}$  en fonction de  $\eta$  est représentée sur la Figure 4.7(a).

Soit  $\Delta\theta$  l'angle de phasage entre deux satellites consécutifs,  $d'_{ss}$  est représentée en abaques d'iso-distances en fonction de  $\eta$  et de  $\Delta\theta$  sur la Figure 4.7(b).

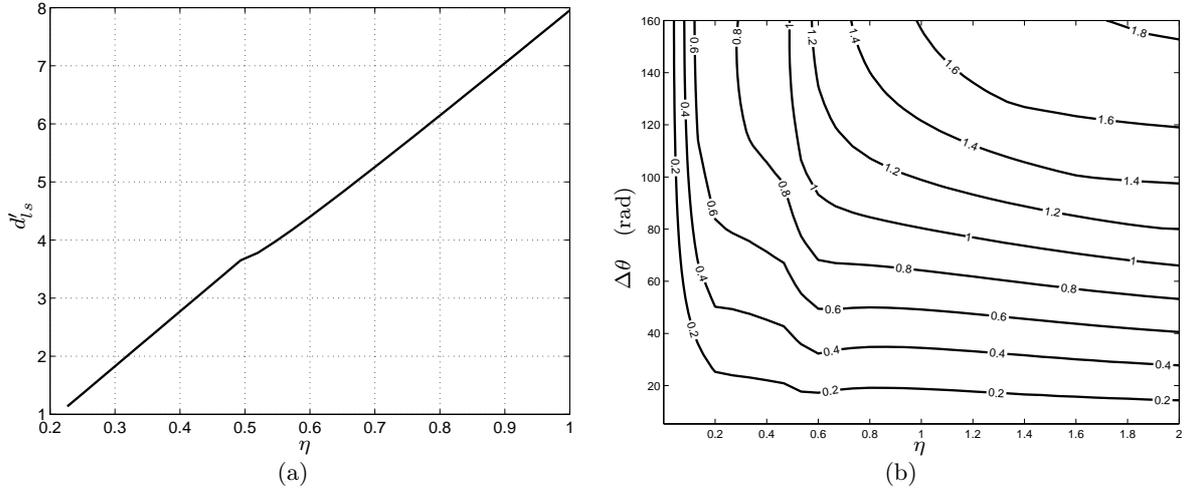


FIG. 4.7 - Evolution des distances  $d'_{ls}$  et  $d'_{ss}$  en fonction de  $\eta$  et  $\Delta\theta$

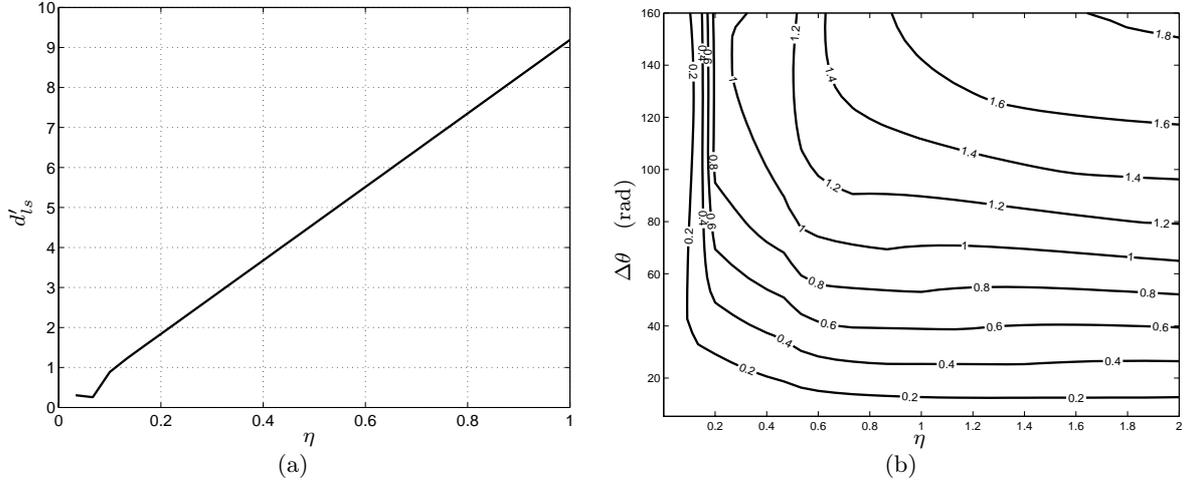
L'intérêt de ces figures est de pouvoir déduire l'amplitude de la manœuvre d'injection par la donnée d'une distance minimale à respecter. Ces courbes seront utilisées dans les exemples numériques.

#### 4.4.2 Choix de paramètres annexes

Avant d'utiliser la méthode présentée dans le paragraphe précédent, il est possible d'optimiser 3 paramètres qui n'influencent pas la consommation d'ergols et qui permettent d'augmenter les deux distances choisies :

- $N_1$  le nombre de révolutions entre l'impulsion d'injection du dernier étage du lanceur et l'application de la première manœuvre du déploiement
- $N_2$  le nombre de révolutions entre l'application de la première et de la deuxième manœuvres du déploiement
- $N_3$  le nombre de révolutions entre l'injection du premier et du second satellite

Une analyse paramétrique où ces trois paramètres sont balayés a été réalisée : elle montre que le choix  $\{N_1^* = 1, N_2^* = 0, N_3^* = 1\}$  permet de maximiser  $d'_{ls}$  et  $d'_{ss}$  : il n'est donc pas nécessaire de prendre des valeurs de révolutions supérieures puisque les distances ne sont pas augmentées mais que la durée du déploiement augmente de facto. Les nouvelles distances  $d'_{ls}$  et  $d'_{ss}$  pour ce jeu de paramètres sont données sur les Figure 4.8(a) et 4.8(b).



**FIG. 4.8 - Evolution des distances  $d'_{ls}$  et  $d'_{ss}$  en fonction de  $\eta$  et  $\Delta\theta$  pour un jeu optimal de révolutions**

Il est intéressant de remarquer que  $d_{ls}$  augmente linéairement avec  $\eta$ , ce qui signifie que l'on peut spécifier une distance quelconque.

Par contre, concernant  $d_{ss}$ , les courbes d'iso-distances tendent à s'aplatir en fonction de  $\eta$  ce qui signifie que pour un  $\Delta\theta$  donné, il y a une borne supérieure pour la distance inter-satellite : par conséquent, si la spécification est supérieure à cette borne, la méthode est inefficace, et il faudra introduire de nouvelles manœuvres dans le déploiement pour respecter la contrainte.

#### 4.4.3 Présentation de l'algorithme

La prise en compte du risque de collision se fait donc de la manière suivante :

1. Choisir une distance minimale  $d_{min}$  et un rayon  $\rho$  : en déduire  $d'_{ls}$  et  $d'_{ss}$
2. Avec la courbe 4.8(a), associer une valeur  $\eta_{min1}$
3. Choisir un écart d'angle de phasage  $\Delta\theta$  et avec la courbe 4.8(b), associer une valeur  $\eta_{min2}$
4. Prendre  $\eta_{min} = \max\{\eta_{min1}, \eta_{min2}\}$  et comparer à la valeur  $\eta^*$  définie au §4.2.3. Si  $\eta_{min} < \eta^*$ ,  $\eta^*$  donne l'amplitude de l'impulsion d'injection et la consommation est minimale : la distance minimale sera plus grande que la spécification. Si  $\eta_{min} < \eta^*$ ,  $\eta_{min}$  permet de calculer l'amplitude de l'impulsion d'injection et le surcoût associé à la contrainte de distance minimale.

On conclut donc que le déploiement optimal avec contrainte de distance minimale est fonction de trois paramètres :

$$\boxed{\text{déploiement}^* = f(\rho, \theta, d_{min})} \quad (4.47)$$

#### 4.4.4 Exemples numériques

Considérons cinq satellites volant en formation circulaire. Le rayon de l'orbite de référence est celui de Spot (cf §3.2.3). L'équirépartition donne un angle  $\Delta\theta = 72 \text{ deg}$ . Le rayon de la formation est supposé égal à  $\rho = 2 \text{ km}$ .

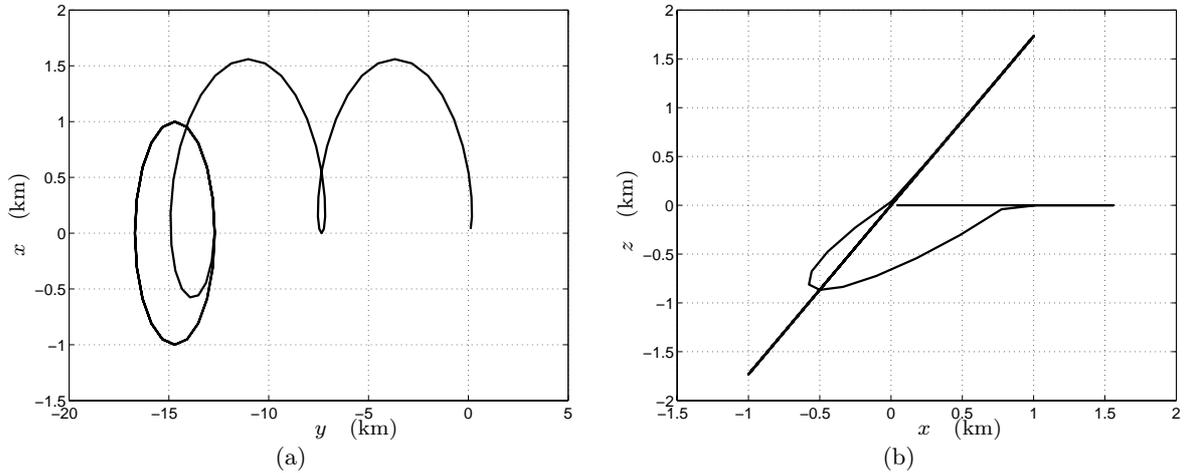
**Exemple 1** Dans cet exemple, on choisit  $d_{min} = 1 km$ . De cette valeur, on déduit que :

Paramètre	Valeur
$d_{min}$ (km)	1
$d'_{ls}$	0.5
$\eta_{min1}$	0.06
$d'_{ss}$	0.5
$\eta_{min2}$	0.18
$\eta_{min}$	0.18
$\eta^*$	0.39
$\ \Delta V_{in}\ $ ( $cm.s^{-1}$ )	40.30
$\ \Delta V\ $ ( $m.s^{-1}$ )	1.85
Coût (%)	0

**TAB. 4.1 - Déploiement pour une distance minimale de 1 km**

On constate que l'impulsion à fournir à l'injection vaut environ  $40 cm.s^{-1}$ . Si on compare avec la formation GRACE ([Kir03]), où l'impulsion fournie par le lanceur Breeze vaut  $28 cm.s^{-1}$ , on conclut que cette valeur est réaliste.

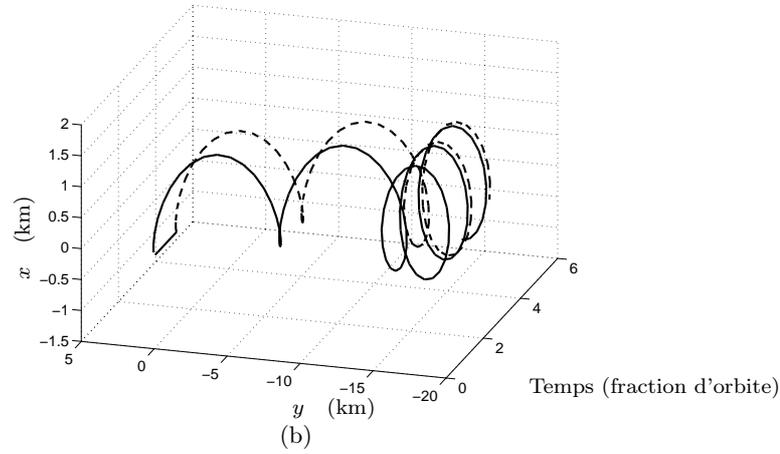
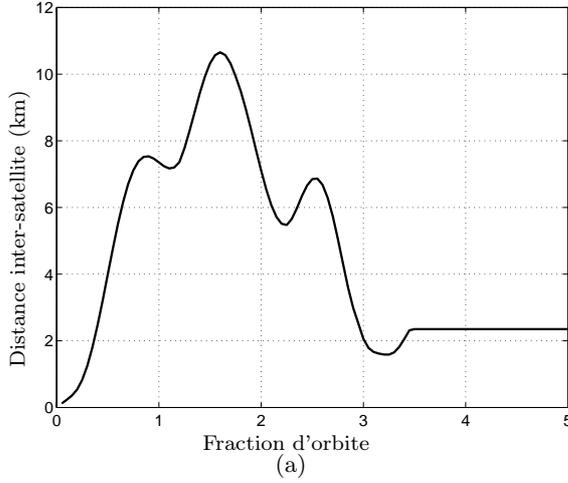
Le déploiement d'un satellite est représenté dans le plan  $(\hat{S}, \hat{Q})$  (du repère orbital local rattaché au dernier étage du lanceur) sur la Figure 4.9(a), et dans le plan  $(\hat{Q}, \hat{W})$  sur la Figure 4.9(b).



**FIG. 4.9 - Trajectoire d'un satellite au cours du déploiement dans le ROL du dernier étage du lanceur**

Sur la Figure 4.9(a), on constate que physiquement,  $d_{ls}$  correspond au point d'abscisse  $-7.5 km$  environ une révolution après l'injection : plus  $\|\Delta V_{in}\|$  est grand, plus l'abscisse de ce point, et par conséquent  $d_{ls}$ , augmenteront.

Pour cet exemple l'évolution de la distance entre les deux satellites au cours du déploiement est représentée sur la Figure 4.10(a).



**FIG. 4.10 - Evolution de la distance entre deux satellites consécutifs au cours du déploiement**

Afin de comprendre le sens physique de cette évolution, on a représenté sur la Figure 4.10(b) l'évolution au cours du temps de la position des deux satellites dans le plan  $(\hat{S}, \hat{Q})$  : on constate que  $d_{ss}$  se trouve juste avant le moment où le second satellite est inséré dans la formation.

**Exemple 2** Dans cet exemple, on choisit  $d_{min} = 2 km$ . De cette valeur, on déduit que

Paramètre	Valeur
$d_{min}$ (km)	2
$d'_{ls}$	1
$\eta_{min1}$	0.10
$d'_{ss}$	1
$\eta_{min2}$	0.71
$\eta_{min}$	0.71
$\eta^*$	0.71
$\ \Delta \mathbf{V}_{in}\ $ ( $cm.s^{-1}$ )	73.6
$\ \Delta \mathbf{V}\ $ ( $m.s^{-1}$ )	1.93
Coût (%)	4.32

**TAB. 4.2 - Déploiement pour une distance minimale de 1.5 km**

On constate que le surcoût lié à la contrainte est très faible. Par contre, l'amplitude de l'impulsion d'injection augmente sensiblement : en fait, c'est le système d'injection du lanceur qui "absorbe" la contrainte.

## 4.5 Conclusion

Le risque de collision a donc été géré par l'introduction d'une manœuvre d'injection du lanceur. A l'aide du Primer Vector, il a été possible de montrer que le transfert est non-dégénéré. La consommation associée a permis de trouver la longitude curviligne optimale d'injection. L'utilisation de la méthode VOP a ensuite fourni sous forme analytique la loi de guidage correspondant à la consommation optimale.

Enfin, une analyse paramétrique portant sur l'amplitude de l'impulsion d'injection a permis d'une part de montrer dans quels cas la consommation associée au déploiement diminue ou augmente, mais aussi d'obtenir des abaques reliant cette amplitude à la distance minimale. Inversement, la donnée de la distance minimale permet de trouver l'amplitude minimale correspondante.

Ainsi a-t-on obtenu un moyen extrêmement rapide de dimensionner un déploiement à consommation minimale respectant une contrainte de distance minimale.

Cependant, l'ensemble de ces calculs correspond à une dynamique keplerienne et des acteurs infiniment précis (orientation et amplitude des manœuvres). Afin d'obtenir une solution réaliste, il est donc nécessaire d'analyser la robustesse de la solution aux dispersions de manœuvres ainsi qu'aux perturbations orbitales.



# Robustesse aux dispersions de manœuvres

## Sommaire

---

<b>5.1 Cas dispersé</b>	<b>77</b>
5.1.1 Origine des dispersions de manœuvres	77
5.1.2 Modélisation du déploiement dispersé	77
5.1.3 Résultats	78
<b>5.2 Stratégies de commande</b>	<b>79</b>
5.2.1 Première loi de commande	80
5.2.2 Deuxième loi de commande	81
Généralisation	81
Application au cas de trois sous manœuvres	82
<b>5.3 Conclusion</b>	<b>85</b>

---

## 5.1 Cas dispersé

L'objet de ce paragraphe est de s'assurer que la stratégie retenue pour borner le risque de collision est robuste aux dispersions de manœuvres.

### 5.1.1 Origine des dispersions de manœuvres

Les dispersions de manœuvres ont deux origines :

- Le sous-système de navigation : l'attitude du satellite est mesurée à l'aide de systèmes variés : senseur Terre, senseur stellaire, GPS différentiel, gyroscope. Suivant le type de plate-forme et le type de performances désirées, on utilise préférentiellement un système. Cependant, ces systèmes donnent tous une mesure entachée d'une erreur : elle est responsable de l'erreur de pointage de la manœuvre.
- Le sous-système de propulsion : la propulsion, on l'a déjà vu, peut être assurée à l'aide d'une réaction chimique entre deux ergols, par l'éjection d'un gaz préalablement pressurisé (propulsion dite "gaz froid"), ou par accélération d'un gaz ionisé à l'aide d'un champ électrique. Dans les deux cas, les erreurs de contrôle sur différents paramètres (débit d'ergol, intensité du champ électrique,...) génèrent une erreur sur l'amplitude de la poussée.

### 5.1.2 Modélisation du déploiement dispersé

On modélise donc les manœuvres impulsives réelles en rajoutant sur la manœuvre nominale une erreur d'amplitude et une erreur d'orientation. Ces erreurs ont des fonctions de

densité de probabilité en lois normales de moyenne nulle et de variance représentative du type de sous-système choisi.

Dans le cas des plate-forme de micro-satellites, on trouve par exemple dans [Alf03] les valeurs suivantes :

- Variance sur l'amplitude :  $\sigma_{amp} = 5\%$
- Variance sur l'orientation<sup>1</sup> :  $\sigma_{or} = 0.5\text{ deg}$

Les simulations sont alors réalisées à l'aide de la technique de Monte Carlo où des tirages aléatoires sont effectués à partir des lois définies ci-dessus. On estime alors la probabilité :

$$\mathcal{P}(d_{ss} < d_{min}) \quad (5.1)$$

Cependant, avant de faire des simulations, il est nécessaire de définir quand finit le déploiement de manière à calculer la probabilité sur cet intervalle : le déploiement dans le cas nominal s'arrête lorsque tous les satellites ont acquis leur position opérationnelle dans la formation. Lorsque la commande est dispersée, il n'est pas réaliste de conserver cette définition : en effet, si les dispersions sont telles qu'une collision se produit une révolution après la fin du déploiement nominal, il est intuitif de considérer qu'il ne s'agit pas encore de maintien en formation. Mais il est alors difficile de donner une fin précise du déploiement.

Par la suite, on suppose que la phase de maintien intervient 2 révolutions après la fin du déploiement nominal, ce qui implique que les probabilités seront calculées sur cet intervalle. Il faut aussi remarquer qu'on ne s'intéresse plus à  $d_{ls}$  car les dispersions de manœuvres n'affectent quasiment pas cette valeur.

Les résultats sont appliqués à l'exemple numérique 1 (voir Tableau 4.1) où  $d_{min} = 1\text{ km}$ .

### 5.1.3 Résultats

Sur 1000 tirages, le pire cas est exposé sur la Figure 5.1(a) : pour ce pire cas, on a  $d_{ss} \equiv 21.5\text{ m}$ . Si on tient compte des erreurs de restitution d'orbite ainsi que du fait que les perturbations orbitales ne sont pas modélisées et que la précision sur  $d_{ss}$  dépend du pas d'intégration<sup>2</sup>, on peut en conclure que dans certains cas les deux satellites entrent en collision. Une fois la formation déployée, l'allure de la courbe d'évolution de la distance entre les deux satellites a deux composantes.

La première est une oscillation dont l'origine sont les composantes transversales de la première manœuvre : à cause de l'effet des dispersions, elles n'ont pas la même valeur pour les deux satellites, leur mouvement moyen sur l'orbite intermédiaire est différent et provoque une différence de longitude curviligne à l'instant final. La contrainte exprimée dans l'équation 2.80 est violée : les centres des cercles décrits par les satellites dans le ROL sont décalés le long de l'axe vitesse  $\hat{S}$ . Cet effet est visible sur la Figure 5.1(b).

La deuxième composante est une évolution linéaire de la valeur moyenne de l'oscillation (décroissante puis croissante) : elle est due au fait que le demi-grand axe final est différent d'un satellite à l'autre provoquant une dérive différentielle du centre du cercle. Cet effet est aussi visible sur la Figure 5.1(b).

---

<sup>1</sup>Cette erreur représente l'amplitude de l'écart à la consigne en pointage. La direction dispersée appartient alors à un cône : une direction sur le cône est choisie par l'adjonction d'un tirage suivant une loi de densité de probabilité uniforme sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$

<sup>2</sup>La distance n'étant évaluée qu'aux points d'intégration

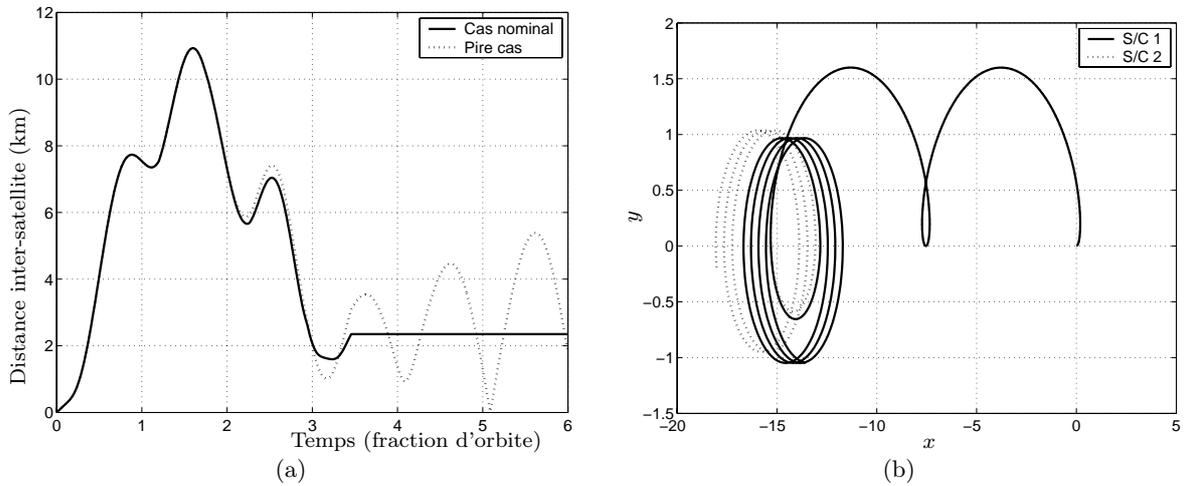


FIG. 5.1 - Pire cas de déploiement dispersé

Pour avoir une meilleure idée du risque de collision, on a représenté sur la Figure 5.2 la fonction de répartition  $F$  de  $d_{ss}$ . On constate par exemple que  $\mathcal{P}(d_{ss} < d_{min}) \approx 27\%$  : la contrainte est donc violée dans un grand nombre de cas.

La loi de guidage (boucle ouverte) doit donc être transformée en loi de commande (boucle fermée) de manière à corriger les dispersions.

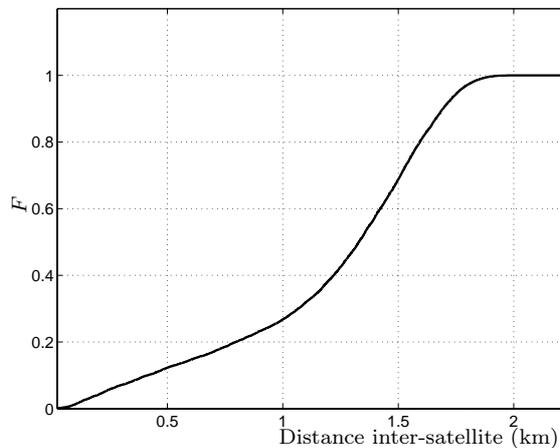


FIG. 5.2 - Fonction de répartition de  $d_{ss}$  pour le cas dispersé

## 5.2 Stratégies de commande

Une approche intuitive consiste à ajouter des manœuvres pour corriger les dispersions. Cependant, une telle technique requiert l'optimisation du nombre de manœuvres supplémentaires ainsi que de leurs caractéristiques. De plus, il y aura une surconsommation associée à ces corrections supplémentaires.

L'approche choisie consiste à diviser chaque manœuvre de la loi de guidage en sous-manœuvre : le rôle d'une manœuvre secondaire étant de corriger les erreurs d'une manœuvre primaire.

### 5.2.1 Première loi de commande

Pour cette première loi, chaque manœuvre  $\Delta V_j$  appliquée à la longitude curviligne  $\lambda'_j$  est divisée en deux sous manœuvres  $\Delta V_{j1}$  et  $\Delta V_{j2}$  suivant le principe suivant :

$$\boxed{\begin{cases} \lambda'_{j1} = \lambda'_j \\ \Delta V_{j1} = \frac{\Delta V_j}{1+K} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda'_{j2} = \lambda'_j + 2\pi \\ \Delta V_{j2} = \frac{K\Delta V_j}{1+K} \end{cases}} \quad (5.2)$$

où  $K$  est un coefficient à optimiser.

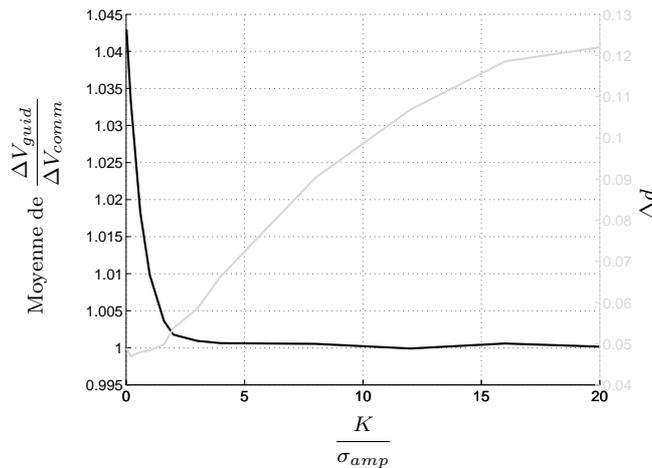
Il est clair que  $\Delta V_{j1} + \Delta V_{j2} = \Delta V_j$  ce qui signifie que s'il n'y a pas de dispersions, la consommation de la loi de commande est la même que celle de la loi de guidage.

Soit  $\delta V_{j1}$  l'amplitude de la dispersion qui affecte la première manœuvre. Cette dispersion est calculée par la mesure de l'état du satellite après application de la manœuvre. Par conséquent, l'amplitude corrigée de la seconde manœuvre sera  $\Delta V_{j2} - \delta V_{j1}$  : ainsi a-t-on un contrôle en boucle fermée.

Il y a deux paramètres à étudier pour optimiser  $K$  :

- La surconsommation : il faut étudier le rapport  $\frac{\Delta V_{guid}}{\Delta V_{comm}}$  qui traduit la surconsommation de la loi de commande par rapport à la loi de guidage,
- La précision : comme on l'a vu sur la Figure 5.1(a), la distance finale présente des oscillations dont le maximum évolue d'une révolution à la suivante. Comme on va le voir, quel que soit  $K$ , il y a des oscillations. Par contre, l'écart entre deux maxima d'une révolution à la suivante est très variable. Ainsi, on définit la précision  $\delta d$  par la différence entre deux maxima consécutifs : plus  $\delta d$  est petit, plus l'oscillation est stable et le risque de collision borné.

Ainsi la Figure 5.3 représente l'évolution de la moyenne de  $\frac{\Delta V_{guid}}{\Delta V_{comm}}$  sur l'ensemble des simulations, ainsi que  $\delta d$ , tous deux en fonction du rapport  $\frac{K}{\sigma_{amp}}$ .



**FIG. 5.3 - Choix du paramètre  $K$  pour le cas dispersé avec la première loi de commande**

Globalement, on constate qu'une bonne précision entraîne une surconsommation, et réciproquement qu'une loi de commande avec la même consommation que la loi de guidage

entraîne une imprécision, donc un risque de collision. Il est donc impossible d'obtenir une valeur optimale<sup>3</sup> de  $K$ . Par conséquent, on choisit une "bonne" valeur :

$$K = 2\sigma_{amp}$$

Avec cette valeur, la Figure 5.4(a) représente l'évolution de la distance entre les satellites pour le pire cas d'une nouvelle série de 1000 simulations : on constate qu'il n'y a plus que des oscillations et que la composante linéaire a presque disparu<sup>4</sup>. Cela est confirmée sur la Figure 5.4(b) où on voit qu'il n'y a plus de différence de demi-grand axe entre les deux satellites.

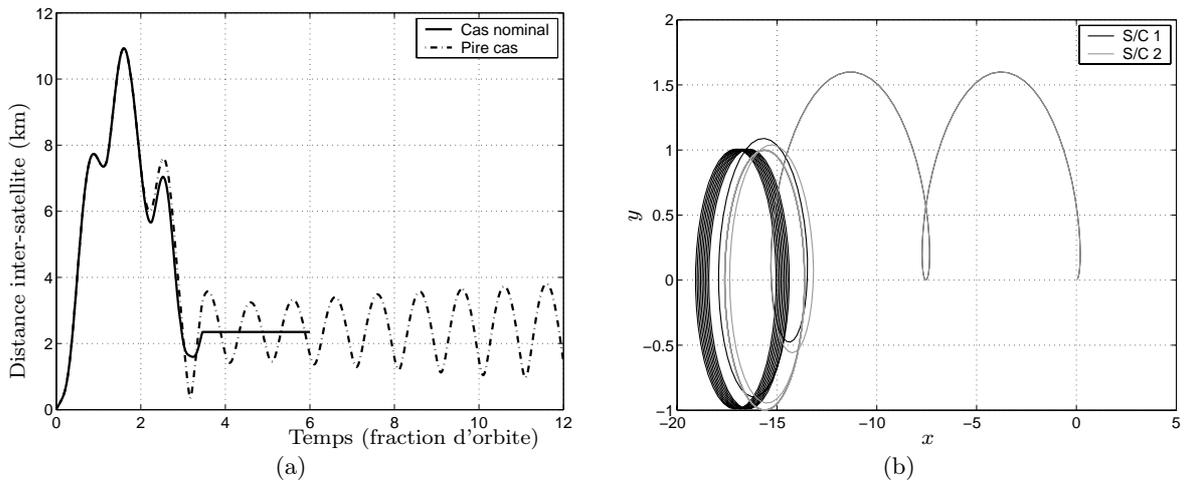


FIG. 5.4 - Pire cas de déploiement avec la première loi de commande

Il faut aussi remarquer que la loi de commande a amplifié la profondeur du premier minimum, celui qui correspondait à la distance  $d_{ss}$  du chapitre précédent : cet effet est gênant mais comme on tient maintenant compte des dispersions, on sait qu'il est quasiment impossible d'obtenir une distance inférieure à celle-là.

En ce qui concerne les oscillations, il faut utiliser une autre loi.

## 5.2.2 Deuxième loi de commande

### Généralisation

Cette nouvelle loi de commande est décrite dans [Bou03a]. L'idée principale de cette loi est la même que celle de la loi précédente : diviser chaque manœuvre en un nombre  $l$  de sous manœuvres. Pour mieux comprendre l'intérêt de la division pour corriger la longitude curviligne, il faut remonter à l'équation de Gauss la concernant :

$$\Delta\lambda' = -3\Delta\tilde{t}\Delta\tilde{V}_S - 2\Delta\tilde{V}_Q \quad (5.3)$$

Considérons maintenant le cas du déploiement : il est terminé pour un satellite de la formation lorsque la dernière manœuvre est appliquée. En conséquence, l'écart final en longitude

<sup>3</sup>A moins de pondérer les critères ce qui introduit une part de subjectivité

<sup>4</sup>Il reste néanmoins une légère dérive

curviligne entre le dernier étage du lanceur et le satellite est :

$$\Delta\lambda'_{ref} = -3\Delta\tilde{t}_{in}\Delta\tilde{V}_{in} - \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^{l-1} \left( 3\Delta\tilde{t}_{jk}\Delta\tilde{V}_{Sjk} + 2\Delta\tilde{V}_{Qjk} \right) \quad (5.4)$$

On remarque d'abord que dans le cas du déploiement, l'amplitude des composantes radiales est du même ordre de grandeur que celle des composantes transversales; de plus, l'écart en longitude curviligne ne dépend pas linéairement du temps pour les composantes radiales contrairement aux composantes transversales. Ainsi, lorsque le temps est de l'ordre de grandeur (ou plus grand) qu'une révolution, on peut négliger l'effet des composantes radiales sur l'écart final par rapport aux composantes transversales, donc l'équation 5.5 devient :

$$\Delta\lambda'_{ref} = -3\Delta\tilde{t}_{in}\Delta\tilde{V}_{in} - 3 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^{l-1} \Delta\tilde{t}_{jk}\Delta\tilde{V}_{Sjk} \quad (5.5)$$

Lorsque les dispersions sont introduites, les impulsions réelles appliquées  $\Delta\tilde{V}_{Sjk}^d$  donnent l'écart  $\Delta\lambda'_d$  égal à :

$$\Delta\lambda'_d = -3\Delta\tilde{t}_{in}\Delta\tilde{V}_{in} - 3 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^{l-1} \Delta\tilde{t}_{jk}\Delta\tilde{V}_{Sjk}^d \quad (5.6)$$

L'écart par rapport à la valeur de référence est donc :

$$\delta\lambda = \Delta\lambda'_d - \Delta\lambda'_{ref} = -3 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^{l-1} \Delta\tilde{t}_{jk} \left( \Delta\tilde{V}_{Sjk}^d - \Delta\tilde{V}_{Sjk} \right) = -3 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^{l-1} \Delta\tilde{t}_{jk} \delta\tilde{V}_{Sjk} \quad (5.7)$$

Bien entendu, l'objectif est d'obtenir :

$$\delta\lambda = 0 \quad (5.8)$$

Traitons les deux manœuvres séparément :

$$\delta\lambda = \underbrace{-3 \sum_{k=1}^{l-1} \Delta\tilde{t}_{1k} \delta\tilde{V}_{S1k}}_{\delta\lambda_1} - \underbrace{3 \sum_{k=1}^{l-1} \Delta\tilde{t}_{2k} \delta\tilde{V}_{S2k}}_{\delta\lambda_2} \quad (5.9)$$

Dans le cas présent, on essaye d'obtenir :

$$\delta\lambda_j = 0 \quad j \in \{1, 2\} \quad (5.10)$$

Si on applique ce cas général à la loi de commande précédente, on a  $l = 2$ . Par conséquent, comme seule la première impulsion  $\Delta\tilde{V}_{Sj1}$  contribue à l'écart en longitude curviligne, il est évident qu'il sera impossible d'en corriger les dispersions.

### Application au cas de trois sous manœuvres

Prenons maintenant le cas où  $l = 3$ . Dans ce cas, on a :

$$\delta\lambda'_j = -3\Delta\tilde{t}_{j1}\delta\tilde{V}_{j1} - 3\Delta\tilde{t}_{j2}\delta\tilde{V}_{j2} \quad (5.11)$$

La condition 5.10 donne donc la relation :

$$\boxed{\delta\tilde{V}_{j2} = -\frac{\Delta\tilde{t}_{j1}}{\Delta\tilde{t}_{j2}}\delta\tilde{V}_{j1}} \quad (5.12)$$

Autrement dit, si la première manœuvre est affectée de la dispersion  $\delta\tilde{V}_{j1}$ , il faut que la dispersion sur la deuxième manœuvre soit celle de l'équation 5.12. La deuxième impulsion en boucle fermée  $\Delta\tilde{V}_{Sj2}^{BF}$  vaut donc :

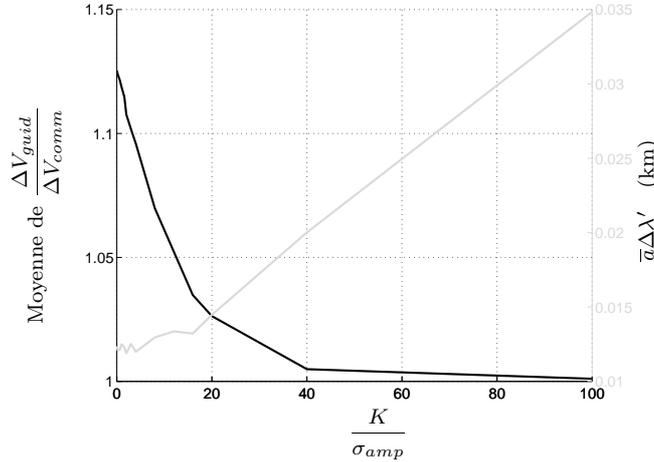
$$\Delta\tilde{V}_{Sj2}^{BF} = \Delta\tilde{V}_{Sj2} - 2\delta\tilde{V}_{j1} \quad (5.13)$$

avec  $\frac{\Delta\tilde{t}_{j1}}{\Delta\tilde{t}_{j2}} = 2$  puisque les impulsions sont séparées d'un angle  $2\pi$ .

Cependant, des dispersions vont aussi affecter  $\Delta\tilde{V}_{Sj2}^{BF}$  et le problème de la correction de  $\delta\lambda'_j$  va se poser à nouveau. Mais comme les dispersions sont proportionnelles à l'amplitude de la manœuvre, il est essentiel que l'amplitude initiale  $\Delta\tilde{V}_{Sj2}$  soit beaucoup plus petite que celle de  $\Delta\tilde{V}_{Sj1}$ . Pour cette raison, le schéma initial de correction est le suivant :

$$\boxed{\begin{cases} \lambda'_{j1} = \lambda'_j \\ \Delta\mathbf{V}_{j1} = \frac{\Delta\mathbf{V}_j}{1+3K} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda'_{j2} = \lambda'_j + 2\pi \\ \Delta\mathbf{V}_{j2} = \frac{2K\Delta\mathbf{V}_j}{1+3K} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda'_{j3} = \lambda'_j + 4\pi \\ \Delta\mathbf{V}_{j3} = \frac{K\Delta\mathbf{V}_j}{1+3K} \end{cases}} \quad (5.14)$$

Si  $K$  est suffisamment petit, la condition sur les amplitudes est vérifiée. Par contre, comme précédemment, si  $K$  est trop petit, il y a surconsommation. La Figure 5.5 présente, comme la Figure 5.3, l'évolution de la surconsommation et de l'écart  $\delta\lambda'$  en fonction du rapport  $\frac{K}{\sigma_{amp}}$ .



**FIG. 5.5 - Choix du paramètre  $K$  pour le cas dispersé avec la deuxième loi de commande**

A nouveau, il faut faire un choix sur  $K$ . A partir de la figure précédente, on choisit :

$$K = 2\sigma_{amp}$$

car c'est un bon compromis entre surconsommation et précision. Avec cette valeur, la Figure 5.6(a) représente l'évolution de la distance entre les satellites pour le pire cas de 1000 simulations : on constate que le déploiement est presque parfait puisqu'il n'y a presque plus

d'oscillations (décalage d'environ  $12\text{ m}$  entre les centres des cercles), et qu'il n'y a plus de dérive due à une différence de demi-grand axe. Par contre, le premier minimum est extrêmement profond : la distance minimale atteint environ  $12\text{ m}$ . Il est donc hors de question de garder cette valeur de  $K$ .

Une solution consiste à prendre une valeur plus petite pour  $K$  puisque la précision reste la même (cf Figure 5.5) : seule la consommation va augmenter. A l'aide d'une dichotomie, on choisit :

$$K = 0.5\sigma_{amp}$$

La Figure 5.6(b) présente la même courbe : cette fois, le minimum (environ  $352\text{ m}$ ) peut être considéré comme acceptable.

La surconsommation est d'environ 12%. La partie finale de la trajectoire des deux satellites

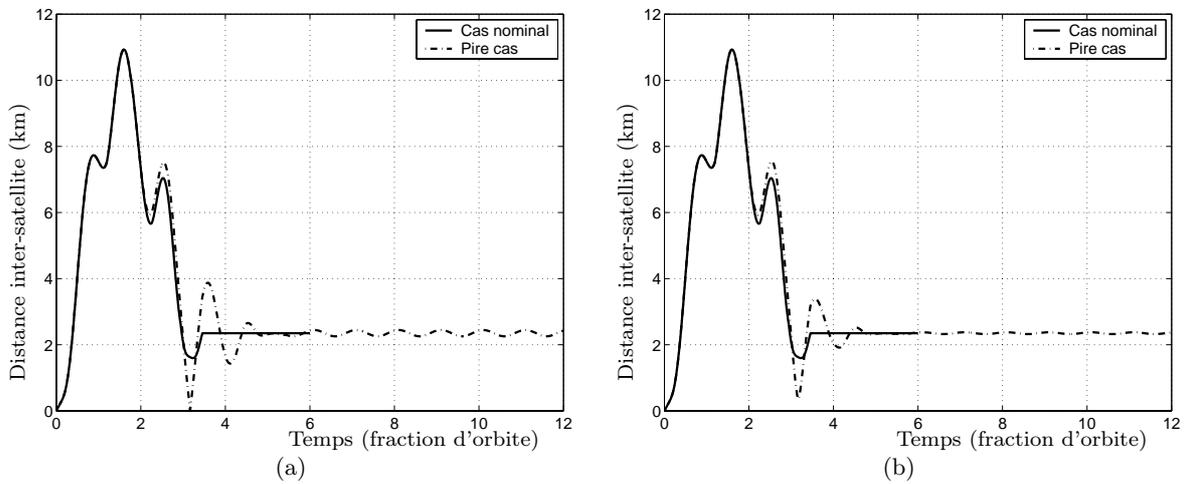


FIG. 5.6 - Pire cas de déploiement avec la deuxième loi de commande

dans le plan  $(\hat{S}, \hat{Q})$  est donnée sur la Figure 5.7.

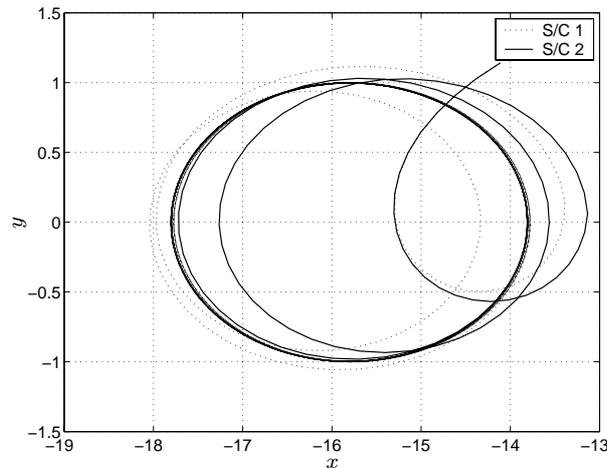


FIG. 5.7 - Choix du paramètre  $K$  pour le cas dispersé avec la deuxième loi de commande

### 5.3 Conclusion

La deuxième loi de commande permet de déployer la formation tout en prenant en compte les dispersions de manœuvres : en ce qui concerne la précision du déploiement, la méthode donne de bons résultats. Le risque de collision qui apparaissait avec le pire cas de dispersions (Figure 5.1(a), révolution #6) est corrigé. Par contre, la distance minimale issue du cas nominal (Figure 4.10(a), révolution #3) décroît avec l'introduction de la loi de commande : la contrainte initiale  $d_{min} > 1km$  n'est donc plus respectée dans le cas dispersé.

Cependant, même si la distance minimale a diminué, on peut considérer que le risque de collision est borné puisque les simulations représentent un pire cas dispersé.

L'introduction d'une loi de commande a entraîné une augmentation d'environ 12% de la consommation par rapport au cas nominal.

Enfin, on peut remarquer que la formule 5.5 peut être utilisée pour un nombre quelconque de sous manœuvres : la précision augmentera et la surconsommation diminuera. Cependant, la durée du déploiement va augmenter et l'amplitude de certaines sous manœuvres risque d'être inférieure à l'amplitude minimale que peut fournir un propulseur.



# Robustesse aux perturbations orbitales

## Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>87</b>
<b>6.2</b>	<b>L'aplatissement des pôles</b>	<b>87</b>
6.2.1	Modélisation	87
6.2.2	Effet sur les paramètres orbitaux	88
<b>6.3</b>	<b>Application au déploiement</b>	<b>89</b>
6.3.1	Intérêt d'une intégration numérique	89
6.3.2	Présentation du schéma d'intégration numérique	89
6.3.3	Simulations sur le cas nominal	90
6.3.4	Simulations sur le cas dispersé	92
<b>6.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>92</b>

---

## 6.1 Introduction

Jusqu'à présent, le déploiement a été traité en considérant que la dynamique était de type corps central. En réalité, les trajectoires des satellites et celle du dernier étage du lanceur sont soumises à des perturbations orbitales qui induisent des dérives des paramètres orbitaux (autres que l'anomalie).

Il existe de nombreuses perturbations : inhomogénéité du potentiel terrestre, traînée aérodynamique, potentiel luni-solaire, pression de radiation solaire, etc...

Dans le cadre de cette thèse, on ne considère que des orbites basses : si l'altitude de l'orbite du dernier étage du lanceur n'est pas trop "basse" (altitude supérieure à 700 km pour donner un ordre de grandeur), la perturbation principale a comme origine l'aplatissement des pôles. La justification numérique de cette hypothèse est fournie à la fin de l'Annexe C.

L'objet de ce chapitre est d'introduire cette perturbation dans le déploiement et d'étudier ses effets. Ensuite, il est montré qu'il est possible d'obtenir un déploiement précis sans modifier les distances minimales et en introduisant un surcoût très faible en consommation d'ergols.

## 6.2 L'aplatissement des pôles

La modélisation ainsi que l'effet sur les paramètres orbitaux de l'aplatissement des pôles sont donnés de manière exhaustive dans l'Annexe C.

### 6.2.1 Modélisation

L'aplatissement des pôles est un terme du potentiel terrestre : ce dernier se décompose en sa partie statique (répartition des masses constante sur un intervalle de temps donné) et dynamique (marées terrestres et océaniques). Pour l'application considérée, on se concentre sur la partie statique.

Soit  $U$  la partie statique du potentiel terrestre, on peut écrire un développement en série sur la base orthogonale des fonctions de Legendre :

$$U(r, \lambda, \varphi) = \frac{\mu}{r} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^l \left[ \sum_{m=0}^l (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda) P_{lm}(\sin \varphi) \right] \quad (6.1)$$

où  $r$  est la distance entre le centre de la Terre et le satellite,  $a_e$  est le rayon équatorial,  $\lambda$  la longitude du satellite,  $\varphi$  la latitude,  $C_{lm}$  et  $S_{lm}$  des coefficients constants dépendant de la répartition des masses de la Terre et  $P_{lm}$  les fonctions de Legendre. Les termes où  $m = 0$  ne dépendent pas de la longitude sont les termes zonaux, les autres sont les termes tesseraux. La mesure des coefficients  $C_{lm}$  et  $S_{lm}$  montre qu'en dehors du terme correspondant à l'accélération centrale de la Terre, la série est dominée<sup>1</sup> par le terme  $C_{20}$ , autrement nommé  $J_2$ . Ce dernier correspond à l'aplatissement des pôles de la Terre. Le potentiel induit vaut :

$$R = -J_2 \frac{\mu}{r} \left(\frac{a_e}{r}\right)^2 P_2(\sin \varphi) \quad (6.2)$$

L'accélération correspondante, exprimée dans un repère inertiel, vaut alors :

$$\begin{aligned} \gamma_{J_2x} &= -\frac{3\mu J_2 a_e^2}{2r^4} (1 - 5 \sin^2 \varphi) \cos \varphi \cos \lambda \\ \gamma_{J_2y} &= -\frac{3\mu J_2 a_e^2}{2r^4} (1 - 5 \sin^2 \varphi) \cos \varphi \sin \lambda \\ \gamma_{J_2z} &= -\frac{3\mu J_2 a_e^2}{2r^4} (3 - 5 \sin^2 \varphi) \sin \varphi \end{aligned} \quad (6.3)$$

Ces équations vont être directement utilisées dans l'intégrateur numérique.

## 6.2.2 Effet sur les paramètres orbitaux

Le calcul de l'effet du  $J_2$  sur les paramètres orbitaux peut se faire soit par voie analytique, soit par voie numérique. La solution analytique permet de faire la distinction entre la partie périodique et la partie séculaire. Pour cela, considérons que l'état est le vecteur :

$$\mathbf{x} = [a, e, i, \Omega, \omega, M - nt] \quad (6.4)$$

Dans ce cas, il est possible de montrer que l'évolution de l'état est gouvernée par l'équation :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + J_2 \Delta \mathbf{x}_p(t) + J_2 \Delta \mathbf{x}_s(t) \quad (6.5)$$

où  $\Delta \mathbf{x}_p(t)$  est une fonction périodique du temps, et  $\Delta \mathbf{x}_s(t)$  une fonction linéaire du temps. Ainsi, les paramètres *osculateurs*  $\mathbf{x}(t)$  sont la somme des paramètres *moyens*  $J_2 \Delta \mathbf{x}_s(t)$  et de la composante périodique  $\Delta \mathbf{x}_p(t)$ .

Comme  $\Delta \mathbf{x}_p(t)$  et  $\Delta \mathbf{x}_s(t)$  sont le résultat d'une méthode itérative, il est clair que leurs valeurs va être fonction de l'itération. Pour le déploiement, on considère que le résultat de la deuxième itération suffit : on parlera de paramètres moyens au sens de la théorie de propagation  $J_2$

---

<sup>1</sup>On ne parlera pas des résonances induites par les termes tesseraux, ni des cas particuliers comme le  $J_3$  pour le cas de l'excentricité gelée, ou le  $J_{22}$  pour l'ellipticité du l'équateur sur l'orbite géostationnaire

moyens premier ordre.

Pour cette théorie de propagation, l'évolution des paramètres moyens est :

$$\begin{aligned}
\Delta a_s &= 0 \\
\Delta e_s &= 0 \\
\Delta i_s &= 0 \\
\Delta \Omega_s &= -\frac{3}{2} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{J_2 n}{(1-e^2)^2} \cos i(t-t_0) \\
\Delta \omega_s &= \frac{3}{4} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{J_2 n}{(1-e^2)^2} (4-5\sin^2 i)(t-t_0) \\
\Delta M_s &= \left[ n + \frac{3}{4} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{J_2 n}{(1-e^2)^{3/2}} (2-3\sin^2 i) \right] (t-t_0)
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Ainsi est-il possible de prédire l'évolution "globale" des paramètres orbitaux : on va notamment pouvoir prédire quel paramètre influe sur le déploiement et comment on peut contrer cet effet en modifiant les caractéristiques de l'impulsion d'injection.

## 6.3 Application au déploiement

### 6.3.1 Intérêt d'une intégration numérique

Dans le cadre de l'application au déploiement de formations, il est nécessaire d'avoir une estimation précise des distances inter-satellites à chaque instant de la trajectoire : l'utilisation des effets séculaires permet d'avoir accès à l'évolution des paramètres orbitaux moyens au sens de la théorie de propagation  $J_2$  moyen premier ordre. Il est par conséquent ensuite nécessaire de convertir ces paramètres moyens en paramètres osculateurs pour connaître l'évolution des distances inter-satellites. Cependant, ces distances ne seront vraies que dans le cadre de la théorie de propagation :  $J_2$  premier ordre.

Une intégration numérique permettra, elle, d'accéder à l'effet du  $J_2$  "vrai" : cela correspond à prendre une infinité d'ordre en compte. L'évaluation des distances sera donc plus précise. C'est pour cela que l'on utilise l'intégration numérique.

### 6.3.2 Présentation du schéma d'intégration numérique

Le principe d'une intégration numérique est de résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= f(\mathbf{x}(t), t) \\
\mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0
\end{aligned} \tag{6.7}$$

où il faut trouver la solution du système d'équations différentielles (où  $f(\mathbf{x}(t), t)$  est la dynamique) soumis aux contraintes sur l'état à l'instant initial.

Les algorithmes permettent de calculer l'état à l'instant  $j+1$  soit à partir de l'état à l'instant  $j$  (intégrateurs à pas séparés), soit à partir des  $k$  instants précédents  $\{j-k+1, \dots, j\}$  (intégrateurs à pas liés). Dans le cadre de cette thèse, un intégrateur à pas séparé de type Runge-Kutta d'ordre 4 modifié a été utilisé. La dynamique est représentée par le terme d'accélération centrale ainsi que par l'équation 6.3.

Les conditions initiales sont représentées par les paramètres osculateurs du dernier étage du lanceur à l'instant initial : ces derniers sont calculés à partir des paramètres moyens  $J_2$  premier ordre.

La précision de cet intégrateur est comparée à celle de l'intégrateur de la bibliothèque interne de mécanique spatiale du service : il s'avère qu'elle est largement suffisante pour l'application étudiée ici.

Lorsque la commande  $\mathbf{u}(t)$  est ajoutée, le système 6.7 devient :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0\end{aligned}\tag{6.8}$$

Comme la commande est impulsionnelle, il est nécessaire d'effectuer plusieurs intégrations : en effet, si les instants de discrétisation ne sont pas exactement calés sur les instants d'application des impulsions, l'intégrateur ne "verrait" tout simplement pas les manœuvres. L'algorithme d'intégration utilisé est le suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{x}^-(t_{k+1}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\mathbf{x}^+(t), t) dt \\ \mathbf{x}^+(t_k) = \mathbf{x}^-(t_k) + \Delta \mathbf{x}_k \\ \Delta \mathbf{x}_k = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \Delta \mathbf{V}_k^T]^T \\ \mathbf{x}^+(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}\tag{6.9}$$

où  $\mathbf{u} = \{t_k, \Delta \mathbf{V}_k\}_{k \in [1:m]}$ , et  $m = 3$  dans le cas nominal ou  $m = 7$  dans le cas dispersé.

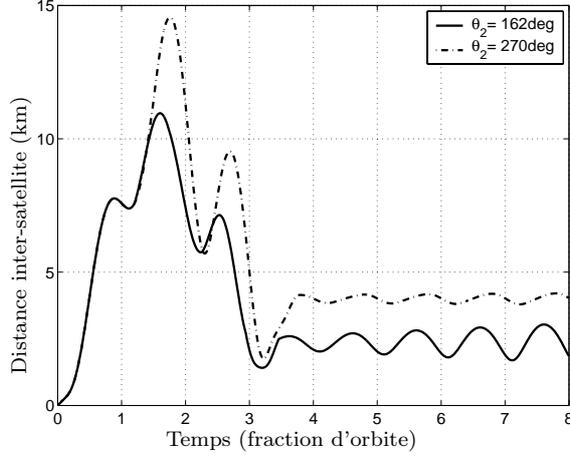
### 6.3.3 Simulations sur le cas nominal

Dans un premier temps, il est intéressant d'étudier l'effet du  $J_2$  sur le déploiement nominal. Afin d'illustrer cet effet, deux simulations ont été réalisées : pour la première, l'angle de phasage du premier satellite  $\theta_1$  est égal à  $90 \text{ deg}$  et  $\theta_2$  est égal à  $162 \text{ deg}$  (c'est le cas du chapitre précédent puisque  $\Delta\theta = 72 \text{ deg}$ ). Pour la deuxième simulation, on a considéré le même  $\theta_1$ , mais  $\theta_2$  vaut maintenant  $270 \text{ deg}$ . Ces deux simulations sont présentées sur la Figure 6.1. La première constatation est que la distance finale moyenne est différente, ce qui correspond aux angles de phasage différents.

Ensuite, on constate que le déploiement est globalement identique à celui du cas non perturbé (cf Figure 4.10(a)). La seule différence est l'évolution de la distance inter-satellite une fois déployée : concernant la première simulation ( $\theta_2 = 162 \text{ deg}$ ), la distance présente des oscillations d'amplitude croissante.

Pour expliquer ce phénomène, il faut remonter aux équations 6.6 : il apparaît clairement que les dérives séculaires du nœud ascendant, du périégée et de  $M - nt$  sont des fonctions de  $a$ ,  $e$  et  $i$ . Dans le cas présent, les demi-grand axes finaux sont les mêmes alors que les excentricités et les inclinaisons sont différentes puisqu'elles dépendent de  $\theta$  (cf Equations 2.81). Si la différence d'excentricité n'affecte que très peu l'évolution différentielle des paramètres orbitaux, la différence d'inclinaison est responsable d'un rôle capital notamment à travers l'évolution différentielle du nœud ascendant et du mouvement moyen.

Dans la seconde simulation, on a choisi  $\theta_j$  de telle sorte que  $\delta i_1 = \delta i_2 = 0$  : ainsi, les dérives séculaires ne dépendent plus que de l'écart d'excentricité : on remarque dans ce cas que la



**FIG. 6.1 - Comparaison de l'évolution de la distance inter-satellite avec le  $J_2$  avec  $\theta_1 = 0 \text{ deg}$  et  $\theta_2 = 162, 270 \text{ deg}$**

distance ne présente plus que de faibles oscillations sans dérive linéaire : le  $J_2$  n'a plus d'effet dans ce cas particulier.

Les oscillations du cas  $\theta_2 = 162 \text{ deg}$  ne sont donc pas dues à des erreurs d'intégration mais uniquement au  $J_2$  ce qui confirme la précision de l'intégrateur. Un moyen de limiter la dérive de la distance est de compenser l'écart d'inclinaison par un écart de demi-grand axe (cf Equations 6.6) de manière à obtenir :

$$\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 \quad (6.10)$$

où  $\dot{\alpha}_j = \dot{\omega}_{sj} + \dot{M}_{sj}$  donné par les équations 6.6. Par ce biais, le mouvement moyen des deux satellites est le même. La condition 6.10 est résolue par dichotomie. Posons :

$$\|\Delta V_{in2}\| = \varepsilon \|\Delta V_{in}\| \quad (6.11)$$

On a obtenu numériquement la valeur :

$$\varepsilon = 1.015$$

Avec cette valeur, la Figure 6.2 présente l'évolution de la distance inter-satellite pour le cas initial et le cas où le demi-grand axe final du deuxième satellite est différent de celui du premier. Il est clair que le déploiement est nettement amélioré.

Concernant la modification de l'impulsion d'injection, elle provoque une différence de demi-grand axe moyen de :

$$a_2(t_f) - a_1(t_f) \approx 11.96 \text{ m}$$

Il n'y a évidemment pas de surconsommation puisque la loi de guidage pour le déploiement reste la même. Par contre, la raideur du ressort devra être modifiée de 1.5%. Pour l'instant, il n'a pas été vérifié s'il était techniquement possible de fabriquer des ressorts avec cette précision. Comme on n'a pas pris en compte les dispersions sur la manœuvre d'injection, on ne peut qu'en rester à ce résultat théorique.

Une fois le déploiement terminé, l'effet différentiel du  $J_2$  sur le nœud ascendant et le périégée devra être corrigé dans la phase de maintien en formation (cf par exemple [Vad01a]).

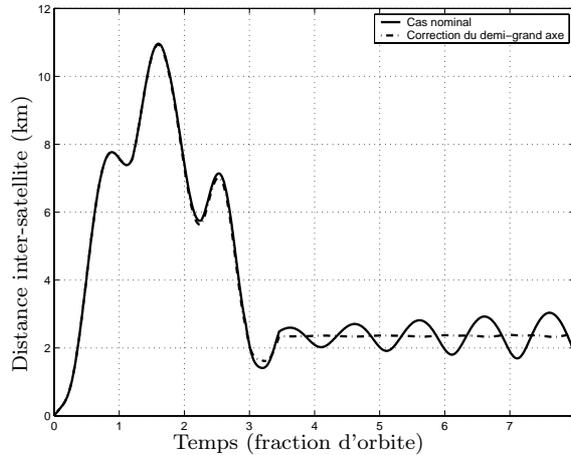


FIG. 6.2 - Intérêt de la correction différente du demi-grand axe

### 6.3.4 Simulations sur le cas dispersé

Concernant le cas dispersé, l'évolution de la distance inter-satellite est présentée sur la Figure 6.3 pour le cas où  $\theta_2 = 162 \text{ deg}$ . On constate à nouveau que la stratégie de commande

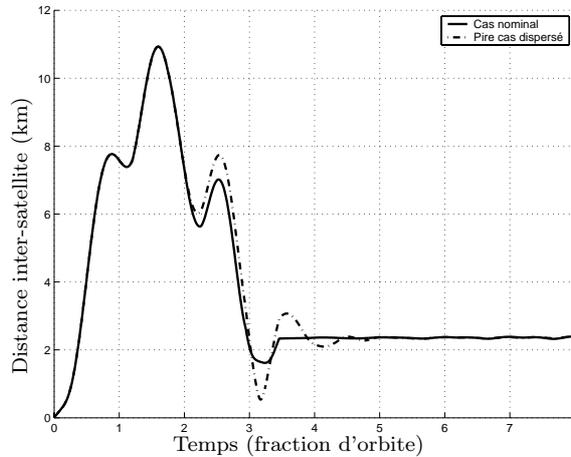


FIG. 6.3 - Evolution de la distance inter-satellite avec  $\theta_2 = 162 \text{ deg}$  et l'effet du  $J_2$  pour le cas nominal et le pire cas dispersé

permet de corriger parfaitement les dispersions. Comme pour le cas dispersé sans  $J_2$ , la seule différence est que la distance minimale diminue (tout en restant dans des proportions acceptable).

## 6.4 Conclusion

Il a été montré qu'il était possible d'obtenir un déploiement précis tout en prenant en compte l'effet du  $J_2$  dans la dynamique. La seule différence avec la dynamique keplerienne est qu'il faut légèrement modifier l'amplitude de l'impulsion d'injection.

---

# Conclusions et perspectives

---

## Conclusions

### Formations géocentriques invariantes

Le vol en formation de satellites est un concept récent : seulement quatre missions volent actuellement. Un des problèmes majeurs est la reconfiguration d'une formation. Le déploiement après injection par le lanceur en est une phase importante. Du fait de la jeunesse du domaine, il a été nécessaire d'introduire une classification des formations afin de séparer les problèmes qui se posent en termes de contrôle d'orbite. Cette classification originale a permis d'étudier une catégorie particulière de formations : les formations géocentriques invariantes. La variété d'applications que ces dernières proposent ainsi que leur généricité en terme de corrections nécessaires de paramètres orbitaux pour la reconfiguration en font un sujet de recherche intéressant.

Le déploiement optimal, au sens de la consommation minimale dans notre cas, et analytique a été obtenu à l'aide de la théorie du Primer Vector : cette approche fut une première dans le domaine. Elle a en particulier montré que d'autres solutions existantes sont soit quasi-optimales, soit optimales pour des cas particuliers.

La prise en compte de contraintes opérationnelles sur la commande s'est faite en combinant la méthode des Variations de Paramètres avec les conditions nécessaires d'optimalité fournies par le Primer Vector. Le coût de la solution optimale contrainte a pu être obtenu de façon simple grâce à la formulation analytique de celle-ci.

Cependant, la solution optimale non contrainte a abouti à une collision entre chaque satellite et le dernier étage du lanceur depuis lequel les satellites sont injectés sur orbite. Pour prendre en compte cette difficulté, il a été décidé d'introduire une manœuvre d'injection transversale du lanceur pour chaque satellite dont le coût en bilan d'ergols est nul (utilisation d'un ressort par exemple).

A partir de ce nouveau problème plus général que le précédent, les mêmes méthodes ont été appliquées et ont abouti à nouveau à une solution optimale analytique : cette fois-ci, la combinaison des deux méthodes a servi non pas à introduire des contraintes sur la commande, mais à fournir la loi de guidage nécessaire à l'évaluation des distances, donc des risques de collision, au cours du déploiement, ce que ne permet pas directement le Primer Vector.

Grâce à l'introduction d'abaques, il est possible d'obtenir directement la solution optimale avec contrainte de distance minimale.

Enfin, les exigences opérationnelles ont abouti à l'étude de la robustesse de la solution aux dispersions de manœuvres et aux perturbations orbitales.

Le premier point a été traité en introduisant une loi de commande : les résultats montrent une parfaite correction des dispersions moyennant une légère augmentation de la consommation. Le seul point négatif est une violation de la contrainte de distance minimale : cependant, la diminution de distance minimale reste modérée.

Le deuxième point a nécessité la mise en œuvre d'un intégrateur numérique pour obtenir de manière précise à chaque instant du déploiement l'effet de l'aplatissement des pôles de la Terre, perturbation prépondérante pour la classe d'orbite de référence considérée. Il a alors

été montré comment la perturbation influait sur la précision du déploiement, et comment il était possible d'y remédier par la modification de la manœuvre d'injection du lanceur.

Ainsi une stratégie de déploiement à consommation minimale, prenant en compte des contraintes sur la commande et sur la distance, a été obtenue sous forme analytique pour les formations invariantes.

## **Formations géocentriques périodiques et non-keplériennes**

Ces travaux ont concerné les autres classes de formations géocentriques : les formations périodiques et les formations non-keplériennes.

Pour les formations périodiques, il a été montré de quelle façon il était intéressant d'utiliser l'effet de l'aplatissement des pôles de la Terre pour réduire la consommation liée à la phase de déploiement. Une solution optimale analytique a été présentée.

Pour les formations non-keplériennes, les lois de maintien en formation ont été obtenues. Il a été ensuite possible d'obtenir la loi de guidage à consommation minimale pour réaliser une prise de vue dans le cadre de la mission Max. Cette loi a été obtenue par l'application du principe du Maximum pour les poussées faibles.

## **Perspectives**

### **Formations géocentriques invariantes**

Concernant la phase de déploiement, il serait intéressant d'introduire une manœuvre d'injection du dernier étage du lanceur sans contrainte sur l'orientation. Ainsi serait-il possible de diminuer la consommation tout en augmentant la contrainte de distance minimale.

Une autre solution pourrait consister à introduire une ou plusieurs manœuvres durant le déploiement de manière à prendre en compte n'importe quelle valeur pour la contrainte.

Il serait ensuite intéressant d'étudier l'application de la méthode proposée à d'autres phases de reconfiguration, notamment le changement de taille, même si ce point a été un peu abordé dans la deuxième partie de la thèse.

Enfin, la prise en compte de l'aplatissement des pôles a montré que cette perturbation influençait notablement le déploiement. Il serait par conséquent intéressant d'étudier le maintien en formation des formations invariantes sous l'effet des perturbations orbitales ("approfondir" serait en fait un terme plus approprié puisque ce sujet fait déjà l'objet de nombreuses études par ailleurs).

### **Formations géocentriques périodiques et non-keplériennes**

Une amélioration des résultats proposés dans le cadre des formations périodiques pourrait être la prise en compte d'autres perturbations orbitales susceptibles d'avoir un effet sensible sur la formation : le déploiement étant en général long (il se compte en mois), il faudrait introduire par exemple la traînée aérodynamique, la pression de radiation solaire et les termes tesseraux du potentiel terrestre pour les possibles résonances d'orbite. Une autre piste pourrait être d'étendre les résultats aux formations dont l'orbite de référence est excentrique.

Quant aux formations non-keplériennes, une piste pourrait être d'étudier l'impact des lois de guidage obtenues sur les autres sous-systèmes satellites impliqués : navigation et commande.

# *Annexes*



# Définition des différents jeux de paramètres orbitaux

## Sommaire

---

<b>A.1</b>	<b>Le problème à deux corps</b>	<b>97</b>
<b>A.2</b>	<b>Le mouvement keplerien</b>	<b>97</b>
A.2.1	Accélération centrale	98
A.2.2	Accélération inversement proportionnelle au carré de la distance	98
<b>A.3</b>	<b>Éléments orbitaux</b>	<b>98</b>
A.3.1	Cas général	98
A.3.2	Orbite quasi-circulaire	100
<b>A.4</b>	<b>Introduction du vecteur inclinaison et application aux orbites équatoriales</b>	<b>101</b>
<b>A.5</b>	<b>Effet d'une petite rotation du plan sur le vecteur inclinaison</b>	<b>102</b>

---

## A.1 Le problème à deux corps

On va considérer la trajectoire d'un satellite autour de la Terre bien que le raisonnement s'applique à n'importe quel problème à deux corps. La force principale s'exerçant sur un satellite est l'attraction gravitationnelle de la Terre : les autres forces, considérées comme perturbatrices, sont négligées. Soit  $m$  une masse ponctuelle représentant le satellite et  $M_T$  une masse ponctuelle représentant la Terre, la force d'attraction s'exerçant entre les deux masses est égale à :

$$F = \frac{GmM_T}{r^2} \quad (\text{A.1})$$

où  $r$  est la distance entre la masse représentant la Terre et le satellite, et  $G$  la constante de gravitation universelle.

Soit  $\mathcal{R}$  un repère galiléen et  $\mathcal{R}_T$  un repère ayant les mêmes axes que  $\mathcal{R}$  mais centré sur la Terre, on applique le principe fondamental de la dynamique et on obtient :

$$\boldsymbol{\gamma} = -G(M_T + m)\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{A.2})$$

où  $\boldsymbol{\gamma} = \ddot{\mathbf{r}}$  représente l'accélération entre la Terre et le satellite, et  $\mathbf{r}$  le vecteur reliant la masse représentant la Terre et le satellite. Exprimée dans  $\mathcal{R}_T$ , l'équation A.2 décrit le mouvement du satellite dans un repère centré sur la Terre : l'accélération est centrale et en  $1/r^2$ .

Dans la pratique,  $M_T \gg m$ , donc on considère que  $\mathcal{R}_T$  est lui aussi galiléen.

## A.2 Le mouvement keplerien

De ses observations, Kepler a identifié trois propriétés des orbites des planètes autour du Soleil :

1. Les orbites sont des ellipses planes dont le Soleil est un des foyers.
2. Ces ellipses suivent la loi des aires : l'aire balayée par le rayon vecteur par unité de temps est constante.
3. Le rapport période au carré sur demi-grand axe au cube est constant pour toutes les planètes.

Ces observations restent évidemment valables pour un satellite autour de la Terre.

### A.2.1 Accélération centrale

Soit  $\mathbf{H}$  le moment cinétique de l'orbite, ce vecteur se définit de manière générale comme :

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}} \quad (\text{A.3})$$

Du fait que l'accélération est centrale, la dérivée du moment cinétique  $\mathbf{H}$  est nulle : le mouvement est donc plan (1<sup>ère</sup> loi de Kepler).

A partir de l'équation A.2 exprimée en coordonnées polaires et de la définition de la vitesse aréolaire, on déduit que cette dernière est constante (2<sup>ème</sup> loi de Kepler).

### A.2.2 Accélération inversement proportionnelle au carré de la distance

Cette hypothèse, une fois introduite dans les équations de Binet<sup>1</sup>, permet de déduire que le mouvement du satellite est une conique : une ellipse, une parabole ou une hyperbole (1<sup>ère</sup> loi de Kepler).

A partir de l'expression de la conique et de la vitesse aréolaire, on montre que la période de l'orbite, donc dans le cas elliptique, est (3<sup>ème</sup> loi de Kepler) :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (\text{A.4})$$

où  $a$  représente le demi-grand axe de l'orbite, et  $\mu = GM_T$  est appelée constante d'attraction de la Terre.

## A.3 Eléments orbitaux

### A.3.1 Cas général

Une façon simple de représenter l'état du satellite est d'utiliser ses coordonnées cartésiennes position et vitesse. Mais à chaque instant, ce vecteur position/vitesse varie. Il est plus intéressant d'utiliser les propriétés des orbites décrites ci-dessus : en effet, il va être possible de décrire un vecteur d'état constant. Ce vecteur d'état, composé de six paramètres et bijectif avec le vecteur position/vitesse, peut être décrit de la manière suivante :

**Orientation du plan** L'orbite<sup>2</sup> est plane, donc le plan peut être orienté par rapport au repère inertiel  $\mathcal{R}_T \equiv \{O, \hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Z}}\}$  où  $O$  est le centre de la Terre.  $\hat{\mathbf{X}}$  est le vecteur unitaire dans la direction du point vernal, c'est-à-dire la direction définie par l'intersection du plan

<sup>1</sup>Les équations de Binet s'obtiennent en éliminant le temps de la dynamique en coordonnées polaires

<sup>2</sup>On ne traitera que le cas elliptique car c'est celui qui nous intéresse dans cette thèse

équatorial et du plan de l'écliptique à une date donnée<sup>3</sup>, le sens étant donné par le fait que le Soleil doit avoir une déclinaison croissante.  $\hat{\mathbf{Z}}$  est le vecteur unitaire dans la direction du pôle nord (par définition orthogonale au plan équatorial).  $\hat{\mathbf{Y}}$  complète le trièdre orthonormé direct.

La ligne d'intersection entre le plan équatorial et le plan de l'orbite est appelée ligne des nœuds. L'angle entre l'axe  $\hat{\mathbf{X}}$  et le nœud ascendant est appelé ascension droite du nœud ascendant et est noté  $\Omega$ . L'angle dièdre entre le plan équatorial et le plan de l'orbite est appelé inclinaison et est noté  $i$ .

**Forme de l'orbite** L'orbite est une ellipse définie par son demi-grand axe  $a$ , et par son excentricité notée  $e$ .

**Orientation de l'ellipse dans le plan de l'orbite** L'ellipse est orientée par le point de l'orbite le plus près de la Terre appelé périégée. L'angle entre le nœud ascendant et le périégée est appelé argument du périégée et est noté  $\omega$ .

**Position du satellite sur son orbite** Il existe plusieurs moyens de repérer un satellite sur son orbite :

**L'anomalie vraie** Elle est notée  $v$  : c'est l'angle mesuré depuis le centre de la Terre entre le périégée et le satellite. Il correspond à la position vraie du satellite, mais du fait de la loi des aires ne varie pas linéairement dans le temps.

**L'anomalie excentrique** Elle est notée  $E$  : le cercle passant par le périégée et l'apogée<sup>4</sup> est le grand cercle de l'ellipse. L'anomalie excentrique est l'angle mesuré depuis le centre du grand cercle entre le périégée et la projection du satellite sur le grand cercle perpendiculairement à la ligne des absides (qui relie le périégée à l'apogée).

La relation suivante permet de passer de l'anomalie vraie à l'anomalie excentrique :

$$\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2} \quad (\text{A.5})$$

**L'anomalie moyenne** Elle est notée  $M$  : c'est un angle mesuré depuis le centre du grand cercle entre le périégée et un mobile fictif placé sur le grand cercle. Ce mobile, confondu avec le satellite à l'instant de passage au périégée, parcourt le grand cercle à vitesse constante. Cette vitesse est telle que la période orbitale du mobile et celle du satellite sont les mêmes.  $M$  varie donc linéairement dans le temps et vaut :

$$M = n(t - t_p) \quad (\text{A.6})$$

où  $n = \frac{2\pi}{T}$  est le moyen mouvement, et  $t_p$  l'instant de passage au périégée. On remarquera que la connaissance de  $a$  fournit celle de  $n$  par l'équation A.4 :

$$n^2 a^3 = \mu \quad (\text{A.7})$$

---

<sup>3</sup>Plusieurs définitions du point vernal existent suivant que l'on parle de l'équateur et de l'écliptique moyens ou si l'on prend en compte leur nutation

<sup>4</sup>Le point de l'orbite le plus éloigné de la Terre

Il existe une relation entre l'anomalie moyenne et l'anomalie excentrique appelée équation de Kepler :

$$M = E - e \sin E \quad (\text{A.8})$$

Cette équation est transcendante et nécessite une résolution itérative (ou un développement en série pour des excentricités faibles) pour obtenir  $E$  à partir de  $M$ .

En conséquence, il est possible de définir l'état du satellite par un vecteur de six éléments :

$$\mathbf{x} \equiv [a, e, i, \Omega, \omega, M]^T \quad (\text{A.9})$$

dont cinq sont constants et un, l'anomalie moyenne, varie linéairement dans le temps. Ces paramètres sont représentés sur la Figure A.1.

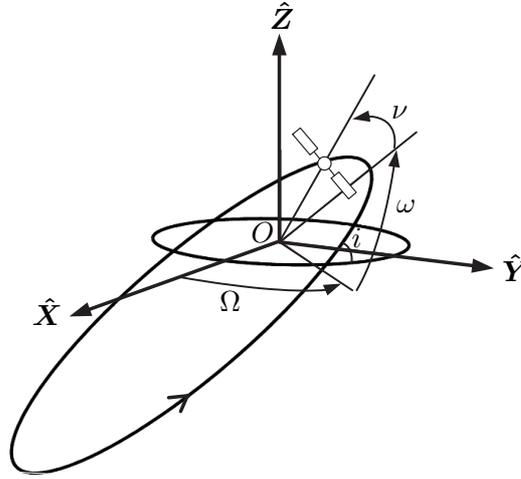


FIG. A.1 - Paramètres angulaires

Il est même possible d'aller plus loin en choisissant la date de passage au périégée  $t_p$  ou encore l'anomalie moyenne de l'époque  $M_0 = M(t = 0)$ . Par la connaissance de  $a$ , donc de  $n$ , on retrouve  $M$  à tout instant. Ainsi, les deux vecteurs d'état suivants sont constants :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [a, e, i, \Omega, \omega, t_p]^T \\ \mathbf{x} &= [a, e, i, \Omega, \omega, M_0]^T \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

### A.3.2 Orbite quasi-circulaire

Dans le cas où l'excentricité tend vers zéro (en pratique lorsque  $e \leq 10^{-3}$ ), l'orbite devient de plus en plus circulaire. Par conséquent, l'argument du périégée est de plus en plus difficile à repérer. Surtout, une petite accélération perturbatrice peut entraîner une grande variation de l'argument du périégée, et donc aussi de l'anomalie, ce qui est assez gênant. Par conséquent, on définit un nouveau vecteur d'état adapté aux orbites quasi-circulaires en remplaçant l'ensemble  $(e, \omega, M)$  par le vecteur excentricité  $\mathbf{e} = [e_x, e_y]^T$  tel que :

$$\begin{aligned} e_x &\equiv e \cos \omega \\ e_y &\equiv e \sin \omega \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

et par l'argument de la latitude  $\alpha$  tel que :

$$\alpha \equiv \omega + M \quad (\text{A.12})$$

Le vecteur excentricité est par définition contenu dans le plan de l'orbite et dirigé vers le périhélie. L'axe  $\hat{\mathbf{X}}$  dans  $e_x$  correspond à la direction du nœud ascendant. Le vecteur excentricité est représenté sur la Figure A.2

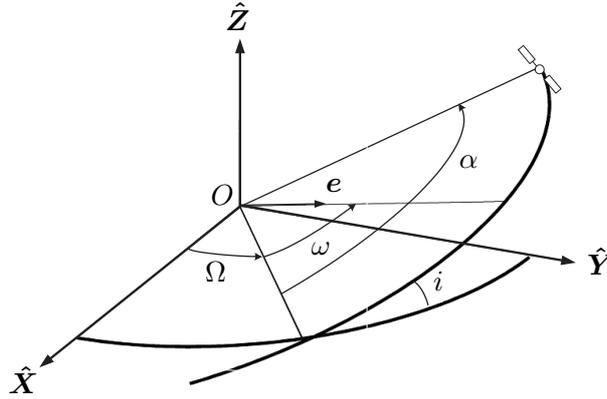


FIG. A.2 - Définition du vecteur excentricité

Ainsi, une petite perturbation changera faiblement l'amplitude du vecteur excentricité et la valeur de l'argument de la latitude. On peut à nouveau obtenir un vecteur d'état constant en choisissant :

$$\mathbf{x} = [a, e_x, e_y, i, \Omega, \alpha_0]^T \quad (\text{A.13})$$

#### A.4 Introduction du vecteur inclinaison et application aux orbites équatoriales

Il y a deux possibilités pour représenter l'information contenue dans le couple  $(i, \Omega)$ .

**Le vecteur orientation** On le définit à partir du moment cinétique  $\mathbf{H}$  : il est orienté comme le moment cinétique et est de norme unitaire. L'orbite courante est repérée sur la Figure A.3 par ce vecteur orientation dont les coordonnées sont :

$$\mathbf{h} \begin{cases} h_x \equiv \sin i \sin \Omega \\ h_y \equiv -\sin i \cos \Omega \\ h_z \equiv \cos i \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

La projection de ce vecteur dans le plan  $(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}})$  contient la même information que le couple  $(i, \Omega)$ . L'avantage est que ce vecteur varie lentement en présence d'une accélération perturbatrice.

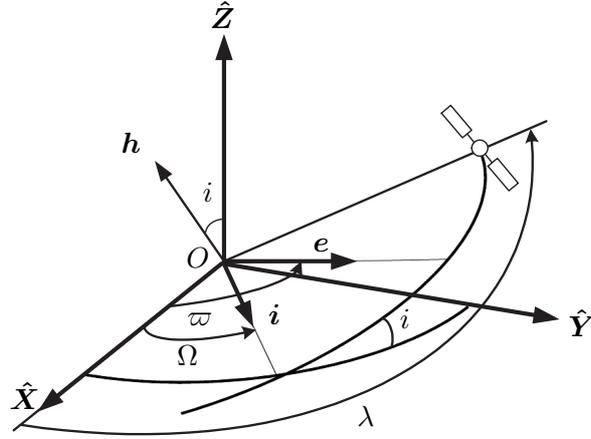


FIG. A.3 - Définitions des vecteurs orientation et inclinaison

**Le vecteur inclinaison** Soit  $\mathbf{h}_0$  le vecteur orientation initial tel que  $\mathbf{H}_0 = \|\mathbf{h}_0\|\hat{\mathbf{Z}}$ , et soit  $\mathbf{h}$  le vecteur orientation courant, le vecteur inclinaison  $\mathbf{i}$  est tel que :

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_0 \wedge \mathbf{i} \quad (\text{A.15})$$

Ce vecteur est contenu dans le plan  $(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}})$  a donc pour composantes :

$$\mathbf{i} \left| \begin{array}{l} i_x = \sin i \cos \Omega \\ i_y = \sin i \sin \Omega \\ i_z = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.16})$$

Dans le cas d'orbite quasi-équatoriale, l'inclinaison est petite : par conséquent, il y a indétermination sur le nœud ascendant de l'orbite courante. Une petite accélération perturbatrice peut entraîner une grande variation de l'ascension droite du nœud ascendant. Il est donc intéressant d'utiliser ce formalisme.

Comme la norme de  $\mathbf{i}$  est  $\sin i \approx i$ , le vecteur inclinaison devient vecteur rotation.

Du fait de l'indétermination sur  $\Omega$ , le vecteur excentricité est adapté par l'introduction de l'ascension droite du périégée  $\varpi$  :

$$\mathbf{e} \left| \begin{array}{l} e_x \equiv e \cos(\Omega + \omega) = e \cos \varpi \\ e_y \equiv e \sin(\Omega + \omega) = e \sin \varpi \end{array} \right. \quad (\text{A.17})$$

et par le remplacement de l'argument de la latitude  $\alpha$  par la longitude curviligne du satellite  $\lambda$  :

$$\lambda \equiv \Omega + \omega + M \quad (\text{A.18})$$

On reconnaît dans ce formalisme celui adapté aux orbites quasi-circulaires et quasi-équatoriales.

## A.5 Effet d'une petite rotation du plan sur le vecteur inclinaison

La résolution d'un transfert ou d'une rendez-vous de faible amplitude passe par l'utilisation du vecteur inclinaison entre l'orbite initiale et l'orbite finale : c'est l'orientation relative

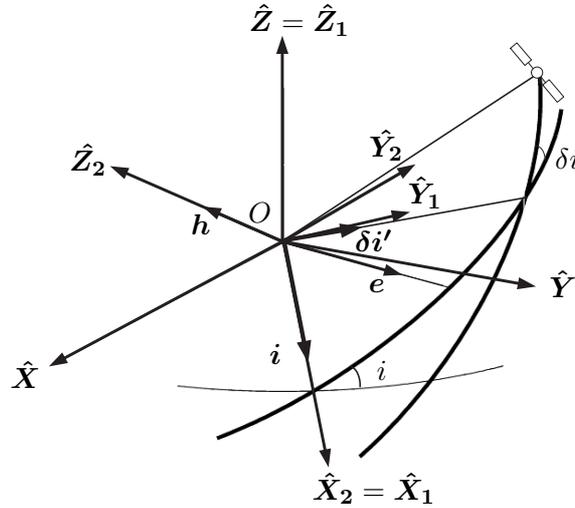
des orbites qui importe. Cependant, il est aussi intéressant d'utiliser l'inclinaison et le nœud ascendant, ou de manière équivalente le vecteur inclinaison entre l'orbite du satellite et le plan équatorial terrestre, pour pouvoir prédire les effets des perturbations orbitales : c'est l'orientation absolue liée à la Terre qui importe.

Il est donc essentiel d'établir un lien entre les deux formalismes. Il serait tentant d'affirmer qu'il suffit d'additionner la variation du vecteur inclinaison due à la rotation du plan au vecteur inclinaison, mais il n'en est rien : en effet, physiquement, ce sont les vecteurs orientation qui s'additionnent, les vecteurs inclinaison donnent une représentation commode mais ne peuvent pas être additionnés.

Ainsi, on va définir trois repères :

1. Le repère  $\mathcal{R}$  avec comme origine  $O$ ,  $\hat{X}$ , suivant le point vernal,  $\hat{Z}$  suivant l'axe des pôles, et  $\hat{Y}$  complétant le trièdre direct.
2. Le repère  $\mathcal{R}_1$  avec comme origine  $O$ ,  $\hat{X}_1$  suivant la direction du nœud ascendant de l'orbite de référence,  $\hat{Z}_1 = \hat{Z}$ , et  $\hat{Y}_1$  complétant le trièdre direct.
3. Le repère  $\mathcal{R}_2$  avec comme origine  $O$ ,  $\hat{X}_2 = \hat{X}_1$ ,  $\hat{Z}_2$  suivant le moment cinétique de l'orbite de référence, et  $\hat{Y}_2$  complétant le trièdre direct.

Ces différents repères sont représentés sur la Figure A.4.



**FIG. A.4 - Effet d'une petite rotation du plan de l'orbite de référence sur le vecteur inclinaison**

Par définition :

$$\mathbf{h}_{/\mathcal{R}_2} = [0, 0, 1]^T \quad (\text{A.19})$$

Il est possible de définir un petit vecteur inclinaison  $\delta \mathbf{i}'$  entre deux orbites proches : ce vecteur est orienté selon la ligne relative des nœuds. Comme  $\delta \mathbf{i}'_{/\mathcal{R}_2} = [\delta i'_x, \delta i'_y, 0]^T$  est petit par rapport à  $\mathbf{h}$ , le changement de plan qu'il provoque est égal à :

$$\delta \mathbf{h}_{/\mathcal{R}_2} = \mathbf{h}_{/\mathcal{R}_2} \wedge \delta \mathbf{i}' = [-\delta i'_y, \delta i'_x, 0]^T \quad (\text{A.20})$$

Quand on exprime ensuite  $\delta \mathbf{h}_{/\mathcal{R}_2}$  dans  $\mathcal{R}_1$ , on obtient :

$$\delta \mathbf{h}_{/\mathcal{R}_1} = [-\delta i'_y, \cos i \delta i'_x, \sin i \delta i'_x]^T \quad (\text{A.21})$$

La variation associée du vecteur inclinaison  $\mathbf{i}$  de l'orbite référence (comme définie en A.16) est :

$$\delta \mathbf{i}_{/\mathcal{R}_1} = [\cos i \delta i'_x, \delta i'_y, 0]^T \quad (\text{A.22})$$

Si on fait l'hypothèse que  $\|\mathbf{i}\| \gg \|\delta \mathbf{i}\|$ , c'est-à-dire que l'orbite de référence n'est pas quasi-équatoriale, on a le système d'équation :

$$\begin{aligned} \sin(i + \delta i) &= \sin i + \cos i \delta i'_x \\ \tan \delta \Omega &= \frac{\delta i'_y}{\sin i} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

qui se simplifie en :

$$\begin{aligned} \delta i &= \delta i'_x \\ \delta \Omega &= \frac{\delta i'_y}{\sin i} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Dans le cas d'une orbite de référence quasi-équatoriale, ces formules ne sont évidemment plus valables. Il faut alors exprimer  $\delta \mathbf{i}_{/\mathcal{R}_1}$  dans  $\mathcal{R}$  à l'aide de la matrice de rotation :

$$\underline{\mathbf{T}}_{\mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega \\ \sin \Omega & \cos \Omega \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

c'est-à-dire :

$$\delta \mathbf{i}_{/\mathcal{R}} = \underline{\mathbf{T}}_{\mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}} \delta \mathbf{i}_{/\mathcal{R}_1} \quad (\text{A.26})$$

A partir des équations A.16 et A.26, il est alors possible de trouver  $\delta i$  et  $\delta \Omega$ .

Ainsi, à partir de la variation  $\delta \mathbf{i}'$  qui est celle utilisée non seulement dans la résolution d'un transfert ou d'un rendez-vous, mais aussi dans la définition des formations invariantes, on connaît l'effet sur le vecteur inclinaison  $\mathbf{i}$  de l'orbite de référence, qu'elle soit équatoriale ou non.

# Le mouvement relatif non perturbé autour d'une orbite circulaire

## Sommaire

B.1	Mouvement dans un repère inertiel . . . . .	105
B.2	Mouvement dans le Repère Orbital Local (ROL) . . . . .	106
B.3	Autres cas . . . . .	107

## B.1 Mouvement dans un repère inertiel

Dans le cadre des applications au vol en formation, on s'intéresse au mouvement relatif d'un satellite par rapport à un mobile fictif de référence. Ce mobile peut avoir une orbite elliptique ou quasi-circulaire. Du fait de la variété de missions concernées, on n'étudie ici que les formations autour d'une orbite de référence quasi-circulaire voire circulaire.

On se propose ici de présenter ce mouvement autour d'une orbite circulaire : ce sont les équations de Hill ou de Clohessy-Wiltshire [Clo60].

Soit  $\mathcal{R}_T$  le référentiel galiléen défini en §A.1. On définit un repère tournant  $\mathcal{R}'_T$  à vitesse angulaire constante autour d'un axe fixe  $\mathbf{n}_{\mathcal{R}'_T/\mathcal{R}_T}$ , donc tel que :

$$\dot{\mathbf{n}}_{\mathcal{R}'_T/\mathcal{R}_T} = 0 \quad (\text{B.1})$$

Soit  $\mathbf{r}$  le vecteur position reliant la masse ponctuelle représentant la Terre et le satellite, on utilise les formules de dérivation vectorielle ainsi que l'équation B.1 pour trouver :

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\mathcal{R}'_T} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \boldsymbol{\gamma}_P - 2\mathbf{n}_{\mathcal{R}'_T/\mathcal{R}_T} \wedge \dot{\mathbf{r}}_{\mathcal{R}'_T} - \mathbf{n}_{\mathcal{R}'_T/\mathcal{R}_T} \wedge (\mathbf{n}_{\mathcal{R}'_T/\mathcal{R}_T} \wedge \mathbf{r}) \quad (\text{B.2})$$

où  $\boldsymbol{\gamma}_P$  représente l'accélération perturbatrice.

Soit  $\bar{\mathbf{r}}$  le vecteur position reliant la masse ponctuelle représentant la Terre et le mobile fictif, ce vecteur est tel que :

$$\|\bar{\mathbf{r}}\| = cste \quad (\text{B.3})$$

ce qui signifie que l'orbite du mobile est circulaire. Elle s'effectue donc à vitesse angulaire constante  $\bar{\mathbf{n}}$ . De la même manière que pour  $\mathbf{r}$ , sauf que le mobile référence n'est pas perturbé, on utilise l'équation de dérivation vectorielle pour trouver :

$$\ddot{\bar{\mathbf{r}}}_{\mathcal{R}'_T} = -\frac{\mu}{\bar{r}^3}\bar{\mathbf{r}} - 2\bar{\mathbf{n}} \wedge \dot{\bar{\mathbf{r}}}_{\mathcal{R}'_T} - \bar{\mathbf{n}} \wedge (\bar{\mathbf{n}} \wedge \bar{\mathbf{r}}) \quad (\text{B.4})$$

Pour simplifier les écritures, on choisit :

$$\mathbf{n}_{\mathcal{R}'_T/\mathcal{R}_T} = \bar{\mathbf{n}} \quad (\text{B.5})$$

Ainsi, le mobile est fixe dans  $\mathcal{R}'_T$ , donc :

$$\dot{\bar{\mathbf{r}}}_{\mathcal{R}'_T} = \mathbf{0} \quad (\text{B.6})$$

En posant  $\delta \mathbf{r}$  le vecteur position reliant le mobile et le satellite tel que :

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} + \delta \mathbf{r} \quad (\text{B.7})$$

on peut développer B.2 et soustraire B.4 pour finalement obtenir l'équation :

$$\delta \ddot{\mathbf{r}}_{\mathcal{R}'_T} = -\mu \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\bar{\mathbf{r}}}{\bar{r}^3} \right) + \gamma_P - 2\bar{\mathbf{n}} \wedge \delta \dot{\mathbf{r}}_{\mathcal{R}'_T} - \bar{\mathbf{n}} \wedge (\bar{\mathbf{n}} \wedge \delta \mathbf{r}) \quad (\text{B.8})$$

## B.2 Mouvement dans le Repère Orbital Local (ROL)

Exprimée dans le ROL  $(\hat{\mathbf{Q}}, \hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{W}})$  défini dans l'Annexe C, avec  $\delta \mathbf{r} = [x, y, z]^T$ , on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} \ddot{x} &= -\mu \left( \frac{r_c + x}{r^3} - \frac{1}{\bar{r}^2} \right) + \gamma_Q + 2\bar{n}\dot{y} + \bar{n}^2 x \\ \ddot{y} &= -\mu \frac{x}{r^3} + \gamma_S - 2\bar{n}\dot{x} + \bar{n}^2 y \\ \ddot{z} &= -\mu \frac{z}{r^3} + \gamma_W \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

En faisant l'hypothèse que :

$$\delta \mathbf{r} \ll \bar{\mathbf{r}} \quad (\text{B.10})$$

on peut alors linéariser les équations B.9 pour finalement obtenir :

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{x} &= 2\bar{n}\dot{y} + 3\bar{n}^2 x + \gamma_Q \\ \ddot{y} &= -2\bar{n}\dot{x} + \gamma_S \\ \ddot{z} &= -\bar{n}^2 z + \gamma_W \end{cases}} \quad (\text{B.11})$$

Ce sont les équations de Clohessy-Wiltshire.

Si l'accélération perturbatrice est nulle, ce système donne sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{r} \\ \delta \dot{\mathbf{r}} \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r} \\ \delta \dot{\mathbf{r}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

avec :

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3\bar{n}^2 & 0 & 0 & 0 & 2\bar{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\bar{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{n}^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Dans le cadre du Primer Vector décrit dans l'Annexe D, on écrit la matrice sous la forme :

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}}_3 & \underline{\mathbf{I}}_3 \\ \underline{\mathbf{A}}_r & \underline{\mathbf{A}}_v \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

où :

$$\underline{\mathbf{A}}_r = \begin{bmatrix} 3\bar{n}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{n}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

$$\underline{\mathbf{A}}_v = \begin{bmatrix} 0 & -2\bar{n} & 0 \\ 2\bar{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Alors il est possible d'intégrer le système sous forme explicite en temps et on obtient :

$$\boxed{\begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}(t) \\ \delta \dot{\mathbf{r}}(t) \end{bmatrix} = \underline{\Phi}(t, t_0) \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}(t_0) \\ \delta \dot{\mathbf{r}}(t_0) \end{bmatrix}} \quad (\text{B.17})$$

où  $\underline{\Phi}(t, t_0)$  est la STM :

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 4 - 3c & 0 & 0 & \frac{s}{\bar{n}} & \frac{2}{\bar{n}}(1 - c) & 0 \\ 6(s - \bar{\theta}) & 1 & 0 & \frac{2}{\bar{n}}(c - 1) & \frac{4s - 3\bar{\theta}}{\bar{n}} & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & \frac{s}{\bar{n}} \\ 3\bar{n}s & 0 & 0 & c & 2s & 0 \\ 6\bar{n}(c - 1) & 0 & 0 & -c & 4c - 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{n}s & 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

avec  $\bar{\theta} = \bar{n}(t - t_0)$ ,  $c = \cos \bar{\theta}$  et  $s = \sin \bar{\theta}$ .

### B.3 Autres cas

Comme cela est décrit dans le Chapitre 1, il existe d'autres STM qui sont adaptées à d'autres orbites :

- Orbite de référence faiblement elliptique (voir [Mel00]),
- Orbite de référence elliptique (voir [Tsc65]),
- Dynamique perturbée par le potentiel terrestre ([Wie01]),
- Dynamique perturbée par la traînée aérodynamique (voir [Mis02]).



# Modélisation de l'effet des perturbations

## Sommaire

<b>C.1 Introduction</b>	<b>109</b>
<b>C.2 Les équations de Gauss</b>	<b>109</b>
<b>C.3 Modélisation du terme <math>J_2</math> du potentiel terrestre</b>	<b>112</b>
C.3.1 Présentation	112
C.3.2 Le potentiel terrestre statique	112
C.3.3 Accélération perturbatrice engendrée par le potentiel statique	113
Cas général	113
Application au terme $J_2$	115
<b>C.4 Effet du terme <math>J_2</math> du potentiel terrestre sur les paramètres orbitaux</b>	<b>115</b>
C.4.1 Solution analytique	115
C.4.2 Solution numérique	117

## C.1 Introduction

Dans le mouvement keplerien, on a supposé que la seule force agissant sur le satellite était l'attraction gravitationnelle générée par une masse ponctuelle représentant la Terre. Cependant, d'autres forces agissent sur le satellite mais leurs amplitudes sont toujours faibles devant l'attraction centrale : cela justifie l'hypothèse de dynamique de type corps central du mouvement keplerien. Pour calculer leurs effets sur les paramètres orbitaux, on distingue deux cas :

- Si la force perturbatrice est d'origine gravitationnelle (ex : potentiel terrestre, attraction de la Lune et du Soleil), elle dérive d'un potentiel. Cela simplifie l'équation de la dynamique et facilite son intégration. On aboutit aux équations de Lagrange.
- Si la force perturbatrice n'est pas d'origine gravitationnelle (ex : traînée aérodynamique, pression de radiation solaire, poussée...), aucune simplification n'est possible. On aboutit aux équations de Gauss.

## C.2 Les équations de Gauss

Un ROL est centré sur le centre de masse du satellite. Il existe deux repères principaux : le repère  $(\hat{Q}, \hat{S}, \hat{W})$  et le repère  $(\hat{T}, \hat{N}, \hat{W})$ . Les équations de Gauss peuvent être exprimées indifféremment dans l'un ou l'autre des deux repères. Par souci d'harmonisation avec la théorie du Primer Vector, on utilise le repère  $(\hat{Q}, \hat{S}, \hat{W})$  où  $\hat{Q}$  est la direction radiale,  $\hat{W}$  la direction selon le moment cinétique de l'orbite, et  $\hat{S}$  la direction transversale complétant le trièdre direct comme cela est représenté sur la Figure C.1.

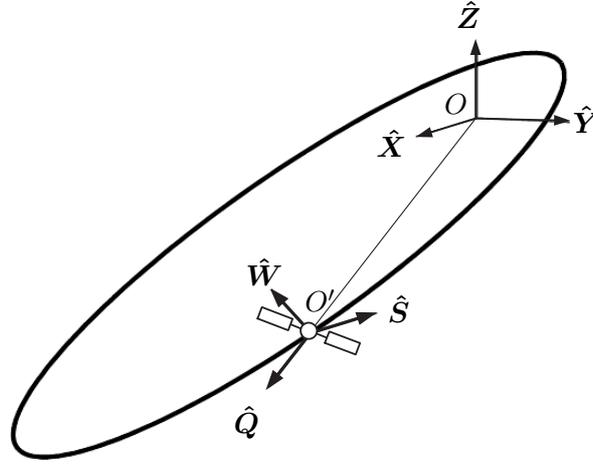


FIG. C.1 - Repère orbital local ( $\hat{Q}$ ,  $\hat{S}$ ,  $\hat{W}$ )

Dans ce repère, l'effet d'une accélération perturbatrice  $\gamma \equiv [\gamma_Q, \gamma_S, \gamma_W]^T$  sur les paramètres orbitaux kepleriens est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \frac{2}{n(1-e^2)^{1/2}} [\gamma_Q e \sin v + \gamma_S (1 + e \cos v)] \\ \frac{de}{dt} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na} [\gamma_Q \sin v + \gamma_S (\cos E + \cos v)] \\ \frac{di}{dt} = \frac{r \cos(\omega + v)}{na^2(1-e^2)^{1/2}} \gamma_W \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{r \sin(\omega + v)}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \gamma_W \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{nae} \left[ -\gamma_Q \cos v + \left( 1 + \frac{1}{1+e \cos v} \right) \gamma_S \sin v \right] \\ \quad - \frac{r \cos i \sin(\omega + v)}{na^2(1-e^2)^{1/2} \sin i} \gamma_W \\ \frac{dM}{dt} = n + \frac{1-e^2}{nae} \left[ \left( \cos v - \frac{2e}{1+e \cos v} \right) \gamma_Q \right. \\ \quad \left. - \left( 1 + \frac{1}{1+e \cos v} \right) \gamma_S \sin v \right] \end{array} \right. \quad (C.1)$$

Lorsque l'orbite considérée est quasi-circulaire, on introduit donc le vecteur excentricité et les

équations de Gauss C.1 deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \frac{2a}{V}\gamma_S \\ \frac{de_x}{dt} = \frac{2\cos\alpha}{V}\gamma_S + \frac{\sin\alpha}{V}\gamma_Q \\ \frac{de_y}{dt} = \frac{2\sin\alpha}{V}\gamma_S - \frac{\cos\alpha}{V}\gamma_Q \\ \frac{di}{dt} = \frac{\cos\alpha}{V}\gamma_W \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\sin\alpha}{V\sin i}\gamma_W \\ \frac{d\alpha}{dt} = n - \frac{2}{V}\gamma_Q - \frac{\sin\alpha}{V\tan i}\gamma_S \end{array} \right. \quad (\text{C.2})$$

où  $V = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$  est la vitesse de déplacement d'un satellite sur une orbite circulaire de demi-grand axe  $a$ .

Dans le cadre des équations de Gauss appliquées aux problèmes de transfert ou de rendez-vous entre orbites proches quasi-circulaires, on introduit le petit vecteur inclinaison  $\tilde{\delta}\mathbf{i}$  défini dans l'Annexe A (§A.5) ainsi que la longitude relative  $\lambda$ . Cette dernière correspond à l'angle entre le nœud ascendant de l'orbite de référence et la position du satellite. On obtient les nouvelles équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \frac{2a}{V}\gamma_S \\ \frac{de_x}{dt} = \frac{2\cos\lambda}{V}\gamma_S + \frac{\sin\lambda}{V}\gamma_Q \\ \frac{de_y}{dt} = \frac{2\sin\lambda}{V}\gamma_S - \frac{\cos\lambda}{V}\gamma_Q \\ \frac{di'_x}{dt} = \frac{\cos\lambda}{V}\gamma_W \\ \frac{di'_y}{dt} = \frac{\sin\lambda}{V}\gamma_W \\ \frac{d\lambda}{dt} = n - \frac{2}{V}\gamma_Q \end{array} \right. \quad (\text{C.3})$$

Dans un cadre impulsif, le vecteur d'accélération  $\gamma$  est remplacé par le vecteur d'impulsion  $\Delta\mathbf{V}$ .

En considérant une orbite circulaire de référence de demi-grand axe  $\bar{a}$  sur laquelle le satellite se déplace à la vitesse  $\bar{V}$ , il est alors possible d'alléger les équations en introduisant la normalisation suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \frac{a}{\bar{a}} \\ \Delta\tilde{V}_j &= \frac{\Delta V_j}{\bar{V}} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Le temps est donc lui aussi normalisé :

$$\tilde{t} = \frac{\bar{V}}{\bar{a}}t = \bar{n}t \quad (\text{C.5})$$

où  $\bar{n}$  est la pulsation de l'orbite de référence.  
 Les équations C.3 deviennent finalement :

$$\begin{array}{l}
 \Delta \tilde{a} = 2\Delta \tilde{V}_S \\
 \Delta e_x = 2 \cos \lambda \Delta \tilde{V}_S + \sin \lambda \Delta \tilde{V}_Q \\
 \Delta e_y = 2 \sin \lambda \Delta \tilde{V}_S - \cos \lambda \Delta \tilde{V}_Q \\
 \Delta i'_x = \cos \lambda \Delta \tilde{V}_W \\
 \Delta i'_y = \sin \lambda \Delta \tilde{V}_W \\
 \Delta \lambda = -3\Delta \tilde{t} \Delta \tilde{V}_S - 2\Delta \tilde{V}_Q
 \end{array} \tag{C.6}$$

## C.3 Modélisation du terme $J_2$ du potentiel terrestre

### C.3.1 Présentation

A l'aide des équations de Gauss<sup>1</sup>, il est possible de déterminer l'effet des perturbations orbitales sur les paramètres orbitaux. La description détaillée des perturbations orbitales ainsi que de leurs effets peut être trouvée dans [Car95] ou dans [Zar87] par exemple.

Dans la première référence, on trouve une comparaison des niveaux d'accélération dus aux différentes perturbations : il est montré que dans le cas d'une orbite basse (de type Spot), la perturbation principale a comme origine l'aplatissement des pôles de la Terre.

Si l'altitude de l'orbite diminue, la traînée aérodynamique sur les hautes couches atmosphériques augmente et finit par être du même ordre de grandeur, puis par dépasser l'effet de l'aplatissement des pôles.

De même, dans certains cas précis (inclinaison critique, excentricité gelée), d'autres effets deviennent du même ordre de grandeur que l'aplatissement des pôles.

Dans le cas général, il est donc suffisant d'étudier l'effet de l'aplatissement des pôles.

### C.3.2 Le potentiel terrestre statique

L'objet de ce paragraphe n'est pas de détailler la modélisation mais seulement d'en synthétiser les principaux résultats.

La partie statique du potentiel correspond à sa valeur moyenne sur un intervalle de temps : les effets de marées sont donc éliminés.

Soit un satellite  $S$  défini par ses coordonnées  $S(r; \lambda; \varphi)$  où  $r$  représente la distance entre le satellite et le centre de masse de la Terre,  $\lambda$  sa longitude et  $\varphi$  sa latitude dans un repère inertiel. De même, on définit un point  $P$  à l'intérieur de la Terre par  $P(r', \Lambda, \Phi)$ . On a la relation :

$$\frac{1}{PS} = \frac{1}{r} \left( 1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \psi + \frac{r'^2}{r^2} \right) \tag{C.7}$$

---

<sup>1</sup>Ou des équations de Lagrange pour les perturbations dérivant d'un potentiel

Dès que  $\frac{r'}{r} < 1$ , c'est-à-dire que le satellite est à l'extérieur de la Terre (!), cette expression admet un développement en série sur la base orthogonale de polynômes de Legendre :

$$\frac{1}{PS} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \psi) \quad (\text{C.8})$$

En développant cette expression, le potentiel terrestre  $U$  peut être mis sous la forme :

$$U(r, \lambda, \varphi) = \frac{\mu}{r} \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^l \left[ \sum_{m=0}^l (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda) P_{lm}(\sin \varphi) \right] \quad (\text{C.9})$$

où  $P_{lm}$  représente les fonctions de Legendre.

Il est important de remarquer que :

$$\begin{aligned} C_{lm} &= C_{lm}(r', \Lambda, \Phi) \\ S_{lm} &= S_{lm}(r', \Lambda, \Phi) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Autrement dit, les  $C_{lm}$  et les  $S_{lm}$  ne dépendent que de la Terre et pas du satellite : ce sont donc des coefficients constants. Par conséquent,  $U$  est une combinaison linéaire de fonctions harmoniques appelées harmoniques sphériques.

Il est clair que si  $m = 0$ , le potentiel ne dépend pas de la longitude : les  $C_{l0}$  et les  $S_{l0}$  sont appelés harmoniques zonaux. Les autres sont appelés harmoniques tesseraux<sup>2</sup>.

Certains coefficients peuvent être obtenus directement : le coefficient correspondant au terme central  $C_{00} = 1$ , et  $C_{10} = C_{11} = S_{11} = 0$ . A l'aide de modèles géophysiques et de mesures par satellite, les autres coefficients sont déterminés numériquement : le plus grand est  $C_{20} \approx 1,08 \cdot 10^{-3}$ , soit 1000 fois inférieur au terme central. Les autres sont au moins 1000 fois inférieur au  $C_{20}$ .

Le potentiel perturbateur correspondant au coefficient  $C_{20}$  est :

$$R = C_{20} \frac{\mu}{r} \left(\frac{a_e}{r}\right)^2 P_2(\sin \varphi) \quad (\text{C.11})$$

car  $P_2(\sin \varphi) = P_{20}(\sin \varphi)$ . En remplaçant la latitude  $\varphi$  par son expression en fonction de  $i$ ,  $\omega$  et  $v$ , on développe le polynôme de Legendre  $P_2$  :

$$P_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i + \frac{3}{4} \sin^2 i \cos 2(\omega + v) \quad (\text{C.12})$$

Ainsi l'effet du terme  $C_{20}$  correspond à la transformation d'une Terre sphérique en une Terre ellipsoïdale aplatie aux pôles<sup>3</sup>. Le coefficient est plus connu sous la forme  $J_2 = -C_{20}$ .

### C.3.3 Accélération perturbatrice engendrée par le potentiel statique

#### Cas général

Par la suite, il sera nécessaire d'obtenir l'accélération induite par le  $J_2$ . Pour cela, on utilise l'équation C.9 sous la forme :

$$U(r, \lambda, \varphi) = \mathcal{R}e \left[ \mu \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l a_e^l (C_{lm} - iS_{lm}) V_l^m \right] \quad (\text{C.13})$$

<sup>2</sup>Ils peuvent être subdivisés en harmoniques sectoriels et tesseraux

<sup>3</sup>On voit que le potentiel perturbateur est maximum à l'équateur et minimum aux pôles

avec :

$$V_l^m = P_{lm}(\sin \varphi) \frac{e^{im\lambda}}{r^{l+1}} \quad (\text{C.14})$$

où  $i$  est le nombre complexe.

L'accélération induite par le potentiel perturbateur, notée  $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z]^T$ , exprimée dans le repère inertiel vaut alors :

$$\gamma_\xi = \mu \sum_{l=1}^{\infty} a_e^l \mathcal{R}e \left[ \sum_{m=0}^l (C_{lm} - iS_{lm}) \frac{\partial V_l^m}{\partial \xi} \right] \quad (\text{C.15})$$

où  $\xi = x, y$  ou  $z$ .

Le calcul de  $\frac{\partial V_l^m}{\partial \xi}$  se fait à l'aide des formules de Cunningham :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial V_l^m}{\partial x} = -\frac{V_{l+1}^{m+1}}{2} + \frac{(l-m+2)(l-m+1)}{2} V_{l+1}^{m-1} & \text{si } m > 0 \\ \frac{\partial V_l^0}{\partial x} = -\mathcal{R}e\{V_{l+1}^1\} & \text{si } m = 0 \\ \frac{\partial V_l^m}{\partial y} = i\frac{V_{l+1}^{m+1}}{2} + \frac{i(l-m+2)(l-m+1)}{2} V_{l+1}^{m-1} & \text{si } m > 0 \\ \frac{\partial V_l^0}{\partial y} = -\mathcal{I}m\{V_{l+1}^1\} & \text{si } m = 0 \\ \frac{\partial V_l^m}{\partial z} = -(l-m+1)V_{l+1}^m & \forall m \end{array} \right. \quad (\text{C.16})$$

Enfin, le calcul des  $V_l^m$  se fait par récurrence<sup>4</sup> :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_0^0 = \frac{1}{r} \\ V_l^l = (2l-1) \frac{\cos \varphi}{r} V_{l-1}^{l-1} e^{i\lambda} \\ (l-m)V_l^m = (2l-1) \frac{\sin \varphi}{r} V_{l-1}^m - \frac{l+m-1}{r^2} V_{l-2}^m \quad \text{si } l > m+1 \\ V_l^{l-1} = (2l-1) \frac{\sin \varphi}{r} V_{l-1}^{l-1} \end{array} \right. \quad (\text{C.17})$$

---

<sup>4</sup>A noter l'erreur dans [Car95] par rapport à [Zar87] dans les formules de récurrence

## Application au terme $J_2$

Dans le cadre de l'application au  $J_2$ , les seuls potentiels unitaires nécessaires sont :

$$\begin{aligned}
 V_0^0 &= \frac{1}{r} \\
 V_1^0 &= \frac{\sin \varphi}{r^2} \\
 V_1^1 &= \frac{\cos \varphi}{r^2} e^{i\lambda} \\
 V_2^0 &= \frac{3 \sin^2 \varphi}{2 r^3} - \frac{1}{2 r^3} \\
 V_2^1 &= 3 \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^3} e^{i\lambda} \\
 V_3^0 &= \frac{5 \sin^3 \varphi}{2 r^4} - \frac{3 \sin \varphi}{2 r^4} \\
 V_3^1 &= \left[ \frac{15 \sin^2 \varphi}{2 r^4} - \frac{3}{2 r^4} \right] \cos \varphi e^{i\lambda}
 \end{aligned} \tag{C.18}$$

A l'aide des équations C.15 et C.18, on déduit que l'accélération provoquée par le terme central du potentiel et du  $J_2$  est :

$$\begin{aligned}
 \gamma_{J_2 x} &= -\frac{\mu}{r} x - \frac{3\mu J_2 a_e^2}{2r^4} (1 - 5 \sin^2 \varphi) \cos \varphi \cos \lambda \\
 \gamma_{J_2 y} &= -\frac{\mu}{r} y - \frac{3\mu J_2 a_e^2}{2r^4} (1 - 5 \sin^2 \varphi) \cos \varphi \sin \lambda \\
 \gamma_{J_2 z} &= -\frac{\mu}{r} z - \frac{3\mu J_2 a_e^2}{2r^4} (3 - 5 \sin^2 \varphi) \sin \varphi
 \end{aligned} \tag{C.19}$$

## C.4 Effet du terme $J_2$ du potentiel terrestre sur les paramètres orbitaux

Il y a deux manières d'obtenir l'effet du  $J_2$  sur les paramètres orbitaux :

- Soit par voie analytique avec les méthodes itératives ou les méthodes de transformation,
- Soit par voie numérique.

### C.4.1 Solution analytique

A nouveau, on ne va donner qu'une synthèse des résultats obtenus par la méthode itérative de Kozai.

Soit le vecteur d'état :

$$\mathbf{x} = [a, e, i, \Omega, \omega, M - nt] \tag{C.20}$$

Les équations de Lagrange<sup>5</sup> peuvent se mettre sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}} = \epsilon \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{C.21})$$

où  $\epsilon$  est un petit paramètre.

Intégrer directement l'équation C.21 est impossible. La solution consiste à intégrer l'équation de manière itérative en prenant un second membre où  $\mathbf{x}(t)$  est de plus en plus proche de la trajectoire réelle.

A la première itération, on intègre :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0 \quad (\text{C.22})$$

Par conséquent :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 = Cste \quad (\text{C.23})$$

C'est la solution keplerienne.

A la seconde itération, on considère dans le second membre que l'état est celui de l'itération précédente, soit :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = J_2 \mathbf{D}(\mathbf{x}_0, t) \quad (\text{C.24})$$

De la forme du potentiel  $R$  dans C.11, on constate que  $\mathbf{D}(\mathbf{x}_0, t)$  ne comporte que des termes constants sauf l'anomalie vraie qui varie suivant la loi des aires. Ainsi, l'intégration de l'équation donnera des termes linéaires avec le temps et périodiques à la période orbitale :

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + J_2 \Delta \mathbf{x}_p(t) + J_2 \Delta \mathbf{x}_s(t)} \quad (\text{C.25})$$

La composante  $\mathbf{x}_p(t)$  correspond à la partie périodique, tandis que  $\mathbf{x}_s(t)$  correspond à la partie linéaire dite séculaire. Avec ce formalisme,  $\mathbf{x}(t)$  représente l'évolution des paramètres osculateurs.

Il est possible de montrer que  $\Delta \mathbf{x}_s(t)$  vaut :

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta a_s &= 0 \\ \Delta e_s &= 0 \\ \Delta i_s &= 0 \\ \Delta \Omega_s &= -\frac{3}{2} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{n}{(1-e^2)^2} \cos i(t-t_0) \\ \Delta \omega_s &= \frac{3}{4} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{n}{(1-e^2)^2} (4-5 \sin^2 i)(t-t_0) \\ \Delta(M-n)_s &= \frac{3}{4} \left(\frac{a_e}{a}\right)^2 \frac{n}{(1-e^2)^{3/2}} (2-3 \sin^2 i)(t-t_0) \end{aligned}} \quad (\text{C.26})$$

Concernant celle de  $\Delta \mathbf{x}_p(t)$ , il est possible de se reporter aux ouvrages de référence sus-cités. L'évolution de  $\mathbf{x}_0 + J_2 \Delta \mathbf{x}_s(t)$  est celle des paramètres orbitaux moyens au sens de la théorie de propagation  $J_2$  premier ordre. En effet, si on itère à nouveau, la solution va changer

<sup>5</sup>Equations donnant l'effet d'un potentiel perturbateur sur les paramètres orbitaux. Elles sont apparues avant les équations de Gauss mais sont moins générales (impossibilité de modéliser l'effet de perturbations non conservatives)

faisant apparaître des termes en  $J_2^2$  : il y aura une composante séculaire et des composantes périodiques (courtes et longues périodes) : les paramètres moyens seront donc différents au sens de la théorie de propagation  $J_2$  second ordre. Cependant, dans le cadre de l'application du déploiement de formations, on néglige les termes d'ordre supérieurs à 1.

De toute façon, si on prenait en compte les termes en  $J_2^2$ , il faudrait aussi prendre en compte les termes en  $J_3$  et  $J_4$  (voire d'autres) qui sont du même ordre de grandeur.

Ainsi, à partir d'une orbite cible keplerienne, il est possible de prédire l'évolution séculaire des paramètres orbitaux.

Cette représentation est aussi très importante pour le paragraphe suivant : l'intégration numérique.

### C.4.2 Solution numérique

Avant tout, il faut remarquer que :

Si la solution analytique fournit des résultats qualitatifs sur l'effet des perturbations et permet une intégration rapide de la trajectoire, cette solution est moins précise à court terme que l'intégration numérique. Or, comme on s'intéresse au risque de collisions entre satellites au cours du déploiement, il est impératif de disposer d'une solution précise.

Le principe de l'intégration numérique est de résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= f(\mathbf{x}(t), t) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0\end{aligned}\tag{C.27}$$

où  $f$  représente la dynamique du système.

Pour cela, on fait appel à des schémas d'intégrateurs dont la formule générale est :

$$\mathbf{x}_{j+1} + \sum_{k=1}^{k=P} a_p \mathbf{x}_{j+1-k} = \sum_{k=1}^{k=N} h b_k \mathbf{f}_k\tag{C.28}$$

où  $\mathbf{x}_j$  représente l'état à un instant  $j$ ,  $h$  le pas d'intégration tel que  $t_{j+1} = t_j + h$ ,  $N$ , ou ordre, le nombre de points intermédiaires à évaluer entre  $\mathbf{x}_j$  et  $\mathbf{x}_{j+1}$ , et  $P$  le nombre d'échantillons de l'état aux instants antérieurs nécessaires à l'évaluation de l'état à l'instant courant.

On distingue deux classes d'intégrateurs numériques : les intégrateurs à pas séparés où  $P = 1$ , et les intégrateurs à pas liés où  $P > 1$ . Ces derniers sont beaucoup plus précis que les premiers. Néanmoins, dans le cadre de la thèse, on n'a utilisé qu'un intégrateur à pas séparés.

Une classe connue d'intégrateur à pas séparés est celle des Runge-Kutta. Pour ces derniers, on a la relation de récurrence :

$$\mathbf{f}_k = f\left(\mathbf{x}_j + \sum_{l=1}^N a_{kl} \mathbf{f}_l, t_j + c_j h\right)\tag{C.29}$$

Une fois  $N$  et les  $a_{kl}$ ,  $b_k$  et  $c_j$  donnés, l'intégrateur est complètement défini. Ces coefficients sont donnés dans des tableaux dits de Butcher : une matrice de  $a_{kl}$  encadrée par les  $b_k$  sur une ligne et les  $c_j$  sur une colonne. Il faut préciser que la matrice des  $a_{kl}$  est triangulaire inférieure de manière à rendre la relation C.29 possible.

Dans le cadre de la thèse, l'intégrateur utilisé a été un Runge-Kutta d'ordre 4 modifié.

Lorsqu'une intégration est initialisée, il faut impérativement lui fournir les paramètres osculateurs : ainsi, il faut convertir les paramètres moyens en rajoutant la composante périodique<sup>6</sup>. Le jeu de paramètres choisi a été les paramètres cartésiens car on dispose de l'accélération produite par le  $J_2$  dans un repère inertiel (cf Equation C.19). Afin de faciliter l'intégration, il a été décidé d'utiliser la normalisation définie en C.4 et C.5.

Alors, il a été possible de comparer la précision de cet intégrateur avec celui de la librairie interne de mécanique spatiale d'ASP : ce dernier est un intégrateur à pas liés Adams-Bashforth d'ordre 7-8. Il n'a pas été utilisé directement pour la thèse car il est codé en Fortran 77 et les programmes de la thèse en Matlab.

L'exemple de test a été l'orbite basse du Tableau C.1, donnée en paramètres moyens  $J_2$  premier ordre. La durée de simulations a été de 1 jour. L'erreur en paramètres moyens  $J_2$  premier ordre

Paramètre	Valeur
$a$	7200,55 km
$e$	$1,14 \cdot 10^{-3}$
$i$	98,72 deg
$\omega$	90 deg
$\Omega$	0 deg
$M$	0 deg

**TAB. C.1 - Orbite de test pour la comparaison entre intégrateurs numériques**

obtenue est donnée dans le Tableau C.2 : ces erreurs étant petites, on peut donc considérer

Paramètre	Valeur
$\Delta a$	14 m
$\Delta e$	$5,8 \cdot 10^{-6}$
$\Delta i$	$1 \cdot 10^{-5}$ deg
$\Delta \Omega$	$1,76 \cdot 10^{-3}$ deg
$\Delta \omega$	0.026 deg
$\Delta M$	0.096 deg
$\Delta \alpha$	0.071 deg

**TAB. C.2 - Erreurs d'intégration de la trajectoire sur 1 jour**

que l'intégrateur développé est suffisant pour simuler l'effet du  $J_2$  pendant le déploiement. Enfin, afin de justifier l'hypothèse de ne prendre en compte que le  $J_2$  comme perturbation orbitale, une intégration numérique avec le Adams-Bashforth ainsi que toutes les perturbations orbitales a été réalisée. Les caractéristiques de l'intégration sont données dans le Tableau C.3. La pression de radiation solaire dépend du flux solaire, la traînée aérodynamique dépend de la densité atmosphérique, donc de l'activité solaire (composante journalière  $F_{10.7}$  et composante moyenne  $\bar{F}_{10.7}$  du "Soleil calme") et de l'activité géomagnétique ( $A_p$  mesure<sup>7</sup> l'intensité des éruptions solaires). Ces forces dépendent évidemment aussi des caractéristiques du satellite (masse, surface, coefficients de réflectivité et aérodynamique). Les caractéristiques du satellite

<sup>6</sup>On remarquera qu'on se contente de rajouter les termes périodiques correspondant au premier ordre en  $J_2$  introduisant de fait une très légère erreur d'un rapport 1000 avec l'amplitude de  $J_2 \Delta \mathbf{x}_p(t)$

<sup>7</sup>C'est la même mesure que l'indice classique  $K_p$

Date	13/10/2003
Masse satellite	130kg
Surface corps central	$0.7m^2$
Surface panneau solaire	$1m^2$
Coefficient de réflexivité	1
Coefficient aérodynamique	2.2
Modèle de potentiel terrestre	GEMT1 (36x36)
Potentiel luni-solaire	actif
Flux solaire	$1350 W.m^{-2}$
$F_{10.7}$	$140 (10^{-22} W.m^{-2}.Hz^{-1})$
$\overline{F}_{10.7}$	$140 (10^{-22} W.m^{-2}.Hz^{-1})$
Indice d'activité géomagnétique $A_p$	17
$\Delta a$	66.4 m
$\Delta e$	$6, 2.10^{-5}$
$\Delta i$	$2, 44.10^{-4}$ deg
$\Delta \Omega$	$1, 4.10^{-3}$ deg
$\Delta \omega$	-0.19 deg
$\Delta M$	0.22 deg
$\Delta \alpha$	0.027 deg

**TAB. C.3 - Comparaison de l'intégration numérique avec toutes les perturbations orbitales avec le propagateur développé**

correspondent à l'ensemble plate-forme + charge utile classique de micro-satellite Myriade du Cnes.

Les paramètres osculateurs pour l'intégration avec toutes les perturbations orbitales sont obtenus à partir de la théorie de propagation Heckstein-Hechler<sup>8</sup> ( $J_2$ - $J_6$ ). On constate que les erreurs restent faibles vis-à-vis de l'application concernée : elles correspondent à une erreur de l'ordre de la centaine de mètres sur la position absolue (à comparer avec le demi-grand axe de 7000 km). Lorsque l'on s'intéresse à la distance entre deux satellites séparés d'environ un kilomètre, on constate donc que les perturbations orbitales autres que le  $J_2$  n'influent pas sur le risque de collisions.

<sup>8</sup>Algorithme le plus avancé au moment des simulations



# La théorie du Primer Vector

## Sommaire

---

<b>D.1 Le Calcul des Variations</b> . . . . .	<b>121</b>
D.1.1 Problème de Mayer . . . . .	121
D.1.2 Conditions nécessaires d'optimalité . . . . .	121
<b>D.2 Le principe du Maximum de Pontryagin</b> . . . . .	<b>123</b>
<b>D.3 Introduction du Primer Vector</b> . . . . .	<b>123</b>
D.3.1 Cadre . . . . .	123
D.3.2 Conditions d'optimalité . . . . .	124
<b>D.4 Linéarisation de l'équation d'état</b> . . . . .	<b>126</b>
D.4.1 Conséquence . . . . .	126
D.4.2 Exemple : la linéarisation autour d'une orbite circulaire . . . . .	126
<b>D.5 Cas du transfert</b> . . . . .	<b>128</b>

---

## D.1 Le Calcul des Variations

### D.1.1 Problème de Mayer

Considérons un système défini par un vecteur d'état  $\mathbf{x}$ , vecteur à  $n$  composantes : ce vecteur peut par exemple correspondre aux coordonnées de position et vitesse ainsi que la masse, ou alors aux paramètres keplériens et la masse. La dynamique du système est représentée par une équation d'état :

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{D.1}$$

où  $\mathbf{u}$  est le vecteur de commande du système, vecteur à  $r$  composantes. Dans le cadre du Calcul des Variations, la commande n'est pas contrainte. Le principe de la méthode est de trouver une commande optimale  $\mathbf{u}^*$  qui rend stationnaire un indice de performance. Sous la forme de Mayer, ce critère s'écrit sous la forme suivante :

$$J \equiv J(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{x}_f, t_f) \tag{D.2}$$

De plus, des contraintes peuvent être introduites sur les états initiaux et finaux sous la forme d'un vecteur  $\mathbf{\Omega}$  à  $m$  composantes :

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{x}_f, t_f) = \mathbf{0} \tag{D.3}$$

Ces données définissent le problème de Mayer.

### D.1.2 Conditions nécessaires d'optimalité

Afin de prendre en compte la contrainte imposée par la dynamique, on introduit le vecteur adjoint de l'état  $\mathbf{p}$  à  $n$  composantes. Ainsi, le critère augmenté à rendre stationnaire est :

$$I \equiv J - \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{p}^T \cdot (\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}) dt = J - \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{p}^T \cdot d\mathbf{x} - H dt \tag{D.4}$$

où

$$H \equiv \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{f} \quad (\text{D.5})$$

est l'Hamiltonien du système. Si on développe et qu'on annule  $\delta I$ , on obtient les conditions nécessaires d'optimalité :

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (\text{D.6})$$

et

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (\text{D.7})$$

Si ces conditions sont vérifiées, l'expression restante est :

$$\delta I = \delta J - [\mathbf{p}^T \cdot \delta \mathbf{x} - H \delta t]_0^f \quad (\text{D.8})$$

avec  $\delta \mathbf{x}_0$ ,  $\delta t_0$ ,  $\delta \mathbf{x}_f$ ,  $\delta t_f$  vérifiant les contraintes  $\mathbf{\Omega} = 0$ . Afin de prendre en compte ces contraintes, on introduit un vecteur de multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$  de dimension  $m$  qui rend stationnaire le nouvel indice :

$$K \equiv I + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{\Omega} \quad (\text{D.9})$$

En posant  $\delta K = 0$ , on aboutit aux conditions de transversalité :

$$\begin{cases} \mathbf{p}_0 &= -\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}_0} - \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial \mathbf{x}_0} \\ H_0 &= -\frac{\partial J}{\partial t_0} - \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t_0} \\ \mathbf{p}_f &= -\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}_f} - \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial \mathbf{x}_f} \\ H_f &= -\frac{\partial J}{\partial t_f} - \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t_f} \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

Le problème à résoudre est un problème aux deux bouts ou Two Point Boundary Value Problem (TPBVP) : il faut satisfaire les conditions nécessaires d'optimalité le long de la trajectoire tout en respectant les conditions de transversalité. Les méthodes classiques sont les méthodes de tir : à partir de  $\mathbf{\Omega}(\mathbf{x}_0, t_0)$  et des  $\lambda_k$  associés, on intègre le système différentiel (état + adjoint) en vérifiant la condition nécessaire d'optimalité D.6 à chaque instant. Le principe consiste donc à choisir les  $\lambda_k$  de manière à vérifier les conditions de transversalité à l'instant final  $\mathbf{\Omega}(\mathbf{x}_f, t_f)$ . A chaque instant  $t$ , on trouve la commande qui rend l'Hamiltonien stationnaire :

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) \quad (\text{D.11})$$

En reportant cette commande dans l'Hamiltonien, on obtient :

$$H^* = H(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t), t) \quad (\text{D.12})$$

Pour cet instant  $t$ , le système différentiel est gouverné par les équations canoniques :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{p}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*, t) \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad (\text{D.13})$$

## D.2 Le principe du Maximum de Pontryagin

Les deux différences fondamentales entre le Calcul des Variations et le Maximum de Pontryagin sont d'une part qu'on cherche à maximiser l'indice de coût et plus seulement de la rendre stationnaire, et d'autres part que des contraintes peuvent être introduites sur la commande :

$$\mathbf{u}(t) \in U(\mathbf{x}, t) \quad (\text{D.14})$$

où  $U(\mathbf{x}, t)$  est le domaine des commandes admissibles. La condition nécessaire d'optimalité D.6 est remplacée par :

$$\mathbf{u}^* = \arg \sup_{\mathbf{u} \in U} H \quad (\text{D.15})$$

## D.3 Introduction du Primer Vector

### D.3.1 Cadre

Afin d'introduire le primer vector, l'état est représenté par les coordonnées cartésiennes exprimées dans un repère inertiel (position  $\mathbf{r}$  et vitesse  $\mathbf{v}$ ) et par la masse  $m$ . Le mouvement général d'un satellite est donné par l'équation d'état non-linéaire :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \Gamma \hat{\mathbf{u}} \\ \dot{m} &= -q \end{cases} \quad (\text{D.16})$$

où  $\mathbf{g}$  représente un champ de gravitation quelconque (dépendant donc de la position, de la vitesse et du temps),  $\Gamma = \frac{F}{m}$  représente l'accélération de poussée du moteur ( $F$  représente la poussée),  $\hat{\mathbf{u}}$  les cosinus directeurs de la poussée et  $q$  le débit massique.

Il existe deux types de systèmes de propulsion (cf [Mar83]) : les systèmes de propulsion à Vitesse d'Ejection Constante (VEC) et les systèmes de propulsion à Puissance Limitée (PL). Les technologies actuelles de propulsion faible et chimique correspondent aux systèmes VEC. Pour ces systèmes, l'indice de performance choisi est la vitesse caractéristique à l'instant final ou intégrale de l'accélération :

$$J \equiv -\Delta V = -C_f = - \int_{t_0}^{t_f} \Gamma dt = -g_0 I_{sp} \ln \frac{m_0}{m_f} \quad (\text{D.17})$$

où  $g_0$  représente l'accélération de la gravité terrestre au niveau du sol et  $I_{sp}$  l'impulsion spécifique du moteur.

En guise de remarque, on constate que dans D.17 intervient la classique équation de la fusée :

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{C(t)}{g_0 I_{sp}}} \quad (\text{D.18})$$

Le critère à maximiser est :

$$\max -\Delta V \quad (\text{D.19})$$

Ainsi, on remplace l'équation  $\dot{m} = -q$  par :

$$\dot{C} = \Gamma \quad (\text{D.20})$$

La commande est supposée contrainte par une poussée maximale délivrable par le moteur  $F_{max}$ . Ainsi, à chaque instant, l'accélération de poussée est limitée au domaine  $U$  :

$$U \quad / \quad 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_{max} = \frac{F_{max}}{m(C)} \quad (D.21)$$

Dans le cas d'un système de propulsion impulsif (limite du système VEC lorsque la poussée devient infinie) dénommé INF, la vitesse caractéristique correspond à la somme arithmétique des impulsions  $\Delta \mathbf{V}_j$  :

$$\Delta V = \sum_j \|\Delta \mathbf{V}_j\| \quad (D.22)$$

Enfin, les états initiaux  $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, t_0)$  et finaux  $(\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f, t_f)$  peuvent être partiellement indéterminés.

### D.3.2 Conditions d'optimalité

Les composantes adjointes de l'état sont  $\mathbf{p}_r$  l'adjoint de la position,  $\mathbf{p}_v$  l'adjoint de la vitesse, et  $p_C$  l'adjoint de la vitesse caractéristique. On obtient alors l'hamiltonien :

$$H = \mathbf{p}_r^T \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{p}_v^T \cdot \dot{\mathbf{v}} + p_C \Gamma \quad (D.23)$$

On remarque que le produit scalaire  $\mathbf{p}_v^T \cdot \hat{\mathbf{u}}$  apparaît dans  $H$ . Si on applique le Principe du Maximum, la commande doit maximiser l'hamiltonien, donc on en déduit une première condition nécessaire d'optimalité :

$$\boxed{\hat{\mathbf{u}}^* = \frac{\mathbf{p}_v}{\|\mathbf{p}_v\|}} \quad (D.24)$$

Autrement dit, la commande optimale doit être alignée avec le primer vector.

On introduit alors D.24 dans D.23 et on obtient :

$$H = \Gamma(\|\mathbf{p}_v\| + p_C) + \mathbf{p}_r^T \cdot \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{p}_v^T \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (D.25)$$

En utilisant la contrainte D.21, on en déduit que l'amplitude optimale  $\Gamma^*$  est de la forme :

$$\Gamma^* = \Gamma_{max}(C) \mathcal{U}(\|\mathbf{p}_v\| + p_C) \quad (D.26)$$

où  $\mathcal{U}(x)$  représente la fonction échelon unité. On constate que cette commande est de la forme bang-bang, c'est-à-dire une alternance d'arcs à poussée maximale AMAX avec des arcs balistiques AB suivant la valeur de l'adjoint. Il faut néanmoins noter que si  $\|\mathbf{p}_v\| + p_C = 0$  sur un intervalle fini, on a un arc singulier AS (cas particulier obtenu dans §D.5). En utilisant la relation D.12, on obtient :

$$H^* = \mathbf{p}_r^T \cdot \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \Gamma_{max}(C) \mathcal{V}(\|\mathbf{p}_v\| + p_C) \quad (D.27)$$

où  $\mathcal{V}(x) = x \mathcal{U}(x)$ . Le système adjoint est donné par les équations canoniques D.13 et l'équation adjointe à la consommation donnent le système adjoint suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_r = -\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial \mathbf{g}^T}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}_v = -G_r^T \cdot \mathbf{p}_v \\ \dot{\mathbf{p}}_v = -\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{v}} = -\mathbf{p}_r - \frac{\partial \mathbf{g}^T}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{p}_v = -\mathbf{p}_r - G_v^T \cdot \mathbf{p}_v \end{cases} \quad (D.28)$$

et par l'adjoint de la consommation, qui, relié à D.17 donne :

$$\dot{p}_C = -\frac{\partial H^*}{\partial C} = -\frac{d\Gamma_{max}(C)}{dC}\mathcal{V}(\|\mathbf{p}_v\| + p_C) = -\frac{\Gamma_{max}(C)}{g_0 Isp}\mathcal{V}(\|\mathbf{p}_v\| + p_C) \quad (D.29)$$

L'équation D.29 montre tout d'abord que  $\dot{p}_C$  est décroissant. Sur un AB, on a  $\mathcal{V}(\|\mathbf{p}_v\| + p_C) = 0$ , c'est-à-dire  $\dot{p}_C = 0$  ou  $p_C = cste$ . Sur un AMAX, on a  $\mathcal{V}(\|\mathbf{p}_v\| + p_C) = 1$  et  $\dot{p}_C = -\frac{d\Gamma_{max}(C)}{dC}$ . On déduit de D.28 que la dynamique du primer vector est :

$$\boxed{\ddot{\mathbf{p}}_v = (G_r - \dot{G}_v)^T \cdot \mathbf{p}_v - G_v^T \cdot \dot{\mathbf{p}}_v} \quad (D.30)$$

A ce stade, on constate que la dynamique du primer vector dépend de l'état à travers les matrices  $G_r$  et  $G_v$ , donc de la commande. Il y a donc un couplage entre l'état et l'adjoint nécessitant une résolution combinée : c'est le problème aux deux bouts sous sa forme classique. Cependant, il est possible d'éliminer l'équation sur la consommation. En effet, si on se rappelle que le contrôle est impulsionnel, les AMAX sont ponctuels ; par continuité de  $p_C$ , on en déduit que :

$$p_C(t) = cste = p_C(t_f) \quad \forall t \quad (D.31)$$

Or, en utilisant la condition de transversalité D.10 sur l'état avec l'équation D.17, on obtient :

$$p_C(t_f) = -1 \quad (D.32)$$

D'où :

$$p_C(t) = -1 \quad \forall t \quad (D.33)$$

Ainsi, l'équation D.26 devient :

$$\boxed{\Gamma^* = \Gamma_{max}(C)\mathcal{U}(\|\mathbf{p}_v\| - 1)} \quad (D.34)$$

Finalement, sous l'hypothèse que la dynamique est de type corps central et que la commande est impulsionnelle, il est possible de synthétiser la théorie du Primer Vector en disant que :

- La trajectoire du primer vector est gouvernée par l'équation différentielle D.30.
- L'amplitude de la commande optimale est nulle lorsque la norme du primer vector est inférieure à 1, et une impulsion est appliquée à chaque fois qu'elle est égale à 1 comme le montre l'équation D.34.
- Les cosinus directeurs de l'impulsion sont donnés par l'orientation du primer vector au moment de l'impulsion comme le montre l'équation D.24.

En guise de remarque, on peut noter que l'équation D.33 s'obtient non seulement dans le cas des systèmes de propulsion VEC impulsionnels, mais aussi dans le cas des systèmes VEC à poussée faible avec l'hypothèse supplémentaire que la variation de masse entre l'instant initial et l'instant final est faible devant la masse initiale.

Mais l'apport majeur de la théorie du Primer Vector découle d'une hypothèse supplémentaire : la linéarisation de l'équation d'état, autrement dit un transfert ou un rendez-vous entre orbites proches.

## D.4 Linéarisation de l'équation d'état

### D.4.1 Conséquence

La trajectoire du satellite est linéarisée autour d'une orbite de référence (circulaire ou elliptique). L'état peut être représenté à partir des paramètres cartésiens relatifs dans le ROL (voir [Ina02]) ou des paramètres keplériens relatifs dans un repère inertiel (les équations de Gauss). Dans ce cas, l'équation d'état D.1 devient, en omettant l'équation de consommation du vecteur d'état :

$$\dot{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \underline{\mathbf{B}}\mathbf{u} \quad (\text{D.35})$$

où  $\underline{\mathbf{A}}$  est une matrice (6,6) et  $\underline{\mathbf{B}}$  une matrice (6,3) qui ne dépendent donc que de l'orbite de référence. Dans ce cas, l'équation D.7 donne directement :

$$\dot{\mathbf{p}} = -\underline{\mathbf{A}}^T \mathbf{p} \quad (\text{D.36})$$

où  $\mathbf{p} = [\mathbf{p}_r^T, \mathbf{p}_v^T, p_C]^T$ . Ainsi, la dynamique du primer vector ne dépend que de l'orbite de référence et pas de la trajectoire perturbée. Donc, l'équation du primer vector et l'équation du mouvement peuvent être résolues séparément.

### D.4.2 Exemple : la linéarisation autour d'une orbite circulaire

Dans le cas d'une orbite de référence circulaire, les équations du mouvement relatif sont celles de Clohessy-Wiltshire données dans l'Annexe A. En reprenant les notations qui y sont introduites, l'équation différentielle du mouvement est :

$$\delta\ddot{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{A}}_r \delta\mathbf{r} + \underline{\mathbf{A}}_v \delta\dot{\mathbf{r}} \quad (\text{D.37})$$

De l'équation D.36, on déduit que l'équation différentielle du primer vector est :

$$\ddot{\mathbf{p}}_v = \underline{\mathbf{A}}_r^T \mathbf{p}_v - \underline{\mathbf{A}}_v^T \dot{\mathbf{p}}_v \quad (\text{D.38})$$

En remarquant que :

$$\underline{\mathbf{A}}_r^T = \underline{\mathbf{A}}_r \quad (\text{D.39})$$

et que :

$$\underline{\mathbf{A}}_v^T = -\underline{\mathbf{A}}_v \quad (\text{D.40})$$

l'équation D.38 devient finalement :

$$\ddot{\mathbf{p}}_v = \underline{\mathbf{A}}_r \mathbf{p}_v + \underline{\mathbf{A}}_v \dot{\mathbf{p}}_v \quad (\text{D.41})$$

Autrement dit, la courbe d'efficacité du primer vector est la même que celle du mouvement relatif du satellite : le primer vector répond aux équations de Clohessy-Wiltshire.

La forme explicite en fonction du temps des équations de Clohessy-Wiltshire non perturbées permet d'écrire :

$$\begin{bmatrix} \delta\mathbf{r}(t) \\ \delta\dot{\mathbf{r}}(t) \end{bmatrix} = \underline{\Phi}(t, t_0) \begin{bmatrix} \delta\mathbf{r}(t_0) \\ \delta\dot{\mathbf{r}}(t_0) \end{bmatrix} \quad (\text{D.42})$$

où  $\underline{\Phi}(t, t_0)$  est la STM.

Soit :

$$\mathbf{p}_v \equiv \begin{bmatrix} \lambda_p \\ \mu_p \\ \nu_p \end{bmatrix} \quad (\text{D.43})$$

on utilise les trois premières lignes de  $\underline{\Phi}(t, t_0)$  pour trouver le système suivant :

$$\boxed{\begin{cases} \lambda_p(t) &= A \cos \bar{n}t + B \sin \bar{n}t + 2C \\ \mu_p(t) &= 2B \cos \bar{n}t - 2A \sin \bar{n}t - 3C\bar{n}t + D \\ \nu_p(t) &= E \cos \bar{n}t + F \sin \bar{n}t \end{cases}} \quad (\text{D.44})$$

où  $\bar{n}$  représente la pulsation orbitale de l'orbite autour de laquelle le mouvement a été linéarisé. La courbe d'efficacité est donc une cycloïde. Lorsque le problème est un problème de transfert, la solution doit être périodique, ce qui implique que  $C = 0$ , et que la courbe d'efficacité est une ellipse. Suivant les valeurs des autres constantes, on peut obtenir des cas dégénérés d'une cycloïde ou d'une ellipse.

Le problème de contrôle optimal revient donc à trouver les constantes  $A, B, C, D, E$  et  $F$  telles que la courbe d'efficacité soit contenue dans une sphère unitaire. Lorsque la courbe d'efficacité est tangente à la sphère, il est optimal d'appliquer à cet instant une impulsion dirigée suivant le primer vector. Il ne reste donc plus qu'à calculer l'amplitude des impulsions à partir des équations de Gauss : c'est un problème linéaire aux deux bouts (LBVP).

Les six constantes correspondent aux six conditions de transversalité sur l'adjoint : si on traite un rendez-vous, elles sont toutes libres. Par contre, si on traite un transfert, certains paramètres orbitaux sont libres à l'instant final et une des constantes doit être nulle.

Dans [Mar83], une méthode pour déterminer la courbe d'efficacité est présentée : elle consiste à utiliser une transformation canonique entre l'état en paramètres cartésiens et l'état en paramètres kepleriens. Il est alors montré que l'hamiltonien optimal du système keplerien est indépendant de l'état, et que donc l'adjoint est constant. En posant :

$$\mathbf{x}^{kep} \equiv [a, e_x, e_y, i_x, i_y, M_0, C]^T \quad (\text{D.45})$$

le vecteur d'état avec les paramètres kepleriens (où  $M_0$  représente l'anomalie moyenne de l'époque) et :

$$\mathbf{p}^{kep} \equiv [p_a, p_{e_x}, p_{e_y}, p_{i_x}, p_{i_y}, p_{M_0}, p_C]^T \quad (\text{D.46})$$

l'adjoint de l'état keplerien, il est donc montré que :

$$\mathbf{p}^{kep} = cste \quad (\text{D.47})$$

et la courbe d'efficacité suivante est obtenue :

$$\begin{cases} \lambda_p(t) &= -p_{e_y} \cos \bar{n}t + p_{e_x} \sin \bar{n}t - 2p_{M_0} \\ \mu_p(t) &= 2p_{e_x} \cos \bar{n}t + 2p_{e_y} \sin \bar{n}t + 3p_{M_0}\bar{n}t + 2p_a \\ \nu_p(t) &= p_{i_x} \cos \bar{n}t + p_{i_y} \sin \bar{n}t \end{cases} \quad (\text{D.48})$$

On retrouve évidemment les mêmes résultats que pour les équations de Clohessy-Wiltshire D.44 : la courbe d'efficacité est une cycloïde. Si on traite un transfert sur cinq paramètres,  $M_0$  est libre et donc  $p_{M_0} = 0$  : la cycloïde devient une ellipse. De manière générale, pour un transfert laissant un certain paramètre keplerien libre, l'adjoint keplerien associé sera nul, facilitant d'autant la résolution du problème.

Ainsi, les conditions de transversalité sont vérifiées grâce à ces constantes.

## D.5 Cas du transfert

Cette partie reprend des résultats décrits dans [Ede67] et dans [Mar83] : ils concernent le problème de transfert entre orbites proches quasi-circulaires.

Même si on dispose d'une expression de la dynamique linéarisée autour d'une orbite de référence elliptique ([Tsc65] ou [Law63] par exemple), les seuls résultats analytiques généraux concernent une orbite de référence circulaire.

Au sujet d'un rendez-vous, on trouve notamment [Pru70] pour le cas coplanaire.

Pour le transfert, on impose donc  $p_{M_0} = 0$  dans D.48 et on obtient donc la nouvelle courbe d'efficacité :

$$\begin{cases} \lambda_p(t) &= -p_{e_y} \cos \bar{n}t + p_{e_x} \sin \bar{n}t \\ \mu_p(t) &= 2p_{e_x} \cos \bar{n}t + 2p_{e_y} \sin \bar{n}t + 2p_a \\ \nu_p(t) &= p_{i_x} \cos \bar{n}t + p_{i_y} \sin \bar{n}t \end{cases} \quad (\text{D.49})$$

La courbe d'efficacité est une ellipse dont la projection dans le plan  $(\lambda_p, \mu_p)$  est une ellipse de rapport  $(1 : 2)$ .

Le principe de la méthode est le suivant :

1. Etudier géométriquement quels sont les cas possibles,
2. Pour chaque cas, déduire des contraintes géométriques sur la commande,
3. Introduire ces contraintes dans les équations de Gauss,
4. Calculer la consommation ainsi que les limites d'application du cas.

Soit  $\theta \equiv \bar{n}t$  la position courante, on définit  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les angles d'applications des deux impulsions. Dans [Ede67], on trouve 3 cas :

**Transfert nodal bi-impulsionnel** Dans ce cas, on a :

$$p_a = 0 \quad (\text{D.50})$$

et donc par conséquent :

$$\theta_2 = \theta_1 + \pi \quad (\text{D.51})$$

$$\begin{cases} \lambda_p(\theta_2) &= -\lambda_p(\theta_1) \\ \mu_p(\theta_2) &= -\mu_p(\theta_1) \\ \nu_p(\theta_2) &= -\nu_p(\theta_1) \end{cases} \quad (\text{D.52})$$

L'équation D.51 impose que les deux impulsions doivent être appliquées le long de la ligne des nœuds entre l'orbite initiale et l'orbite finale, d'où le nom de transfert nodal.

**Transfert non-dégénéré bi-impulsionnel** Dans ce cas :

$$p_a \neq 0 \quad (\text{D.53})$$

La seule possibilité est d'avoir :

$$\begin{cases} \lambda_p(\theta_2) &= -\lambda_p(\theta_1) \\ \mu_p(\theta_2) &= -\mu_p(\theta_1) \\ \nu_p(\theta_2) &= -\nu_p(\theta_1) \end{cases} \quad (\text{D.54})$$

**Transfert singulier tri-dimensionnel** C'est un cas particulier où :

$$p_a = 0 \quad (D.55)$$

et où l'amplitude du premier vector est constante et égale au rayon de la sphère : en d'autres termes, la courbe d'efficacité est un cercle. Cette courbe est décrite par les équations :

$$\begin{cases} \lambda_p(\theta) = \frac{1}{2} \sin(\theta - \theta_0) \\ \mu_p(\theta) = \cos(\theta - \theta_0) \\ \nu_p(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\theta - \theta_0) \end{cases} \quad (D.56)$$

Ce cas est singulier car il y a indétermination sur le nombre d'impulsions, et tri-dimensionnel car toutes les composantes sont non nulles. Dans [Mar83], on trouve les mêmes cas avec en plus un cas particulier du cas non-dégénéré :

**Transfert singulier plan** C'est un autre cas particulier où :

$$p_a \neq 0 \quad (D.57)$$

Mais dans ce cas, on a aussi :

$$p_{e_x} = p_{e_y} = p_{i_x} = p_{i_y} = 0 \quad (D.58)$$

ce qui signifie que :

$$\begin{cases} \mu_p(\theta) = 1 \\ \lambda_p(\theta) = \nu_p(\theta) = 0 \end{cases} \quad (D.59)$$

La courbe d'efficacité est donc un point sur la sphère. Dans ce cas, le transfert est purement tangentiel, donc un transfert plan. Le transfert est singulier car il y a indétermination sur le nombre d'impulsions et leur angle d'application.

Les limites entre les différents cas ont été obtenues analytiquement. En définissant par  $e_{//}$  la projection de  $\mathbf{e}$  sur  $\mathbf{i}$  et par  $e_{\perp}$  la composante orthogonale de la projection, et en utilisant les paramètres adimensionnés définis dans l'Annexe C, on obtient que :

- Le transfert est non-dégénéré ou singulier plan ssi :

$$\delta a^2 \geq \delta e_{//}^2 \quad (D.60a)$$

$$\delta a^2 \geq \delta e^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \delta e_{\perp} \delta i - \delta i^2 \quad (D.60b)$$

- Le transfert est nodal ssi :

$$\delta i^2 \geq 3\delta e_{\perp}^2 \quad (D.61a)$$

$$\delta a^2 \leq \delta e_{//}^2 \quad (D.61b)$$

- Le transfert est singulier tri-dimensionnel ssi :

$$\delta a^2 \leq \delta e^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \delta e_{\perp} \delta i - \delta i^2 \quad (\text{D.62a})$$

$$\delta i^2 \leq 3\delta e_{\perp}^2 \quad (\text{D.62b})$$

Les consommations associées sont :

- Pour le cas non-dégénéré :

$$\Delta V = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \delta i^2 + \delta e^2 - \frac{\delta a^2}{2} + \sqrt{(\delta i^2 - \delta e^2 + \delta a^2)^2 + 4\delta i^2 \delta e_{\perp}^2} \right)^{1/2} \quad (\text{D.63})$$

- Pour le cas nodal :

$$\Delta V = \sqrt{\delta i^2 + \frac{\delta e_{//}^2}{4} + \delta e_{\perp}^2} \quad (\text{D.64})$$

- Pour le cas singulier tri-dimensionnel :

$$\Delta V = \frac{1}{2} \sqrt{\delta e_{//}^2 + (\delta e_{\perp} + \sqrt{3}\delta i)^2} \quad (\text{D.65})$$

---

# Travaux complémentaires

## Sommaire

---

<b>E.1 Introduction</b>	<b>131</b>
<b>E.2 Formation périodique : le cas de Noss White Cloud</b>	<b>131</b>
E.2.1 Présentation du déploiement	131
E.2.2 Stratégies proposées	132
Stratégie 1 : $S_1$	133
Stratégie 2 : $S_2$	133
Stratégie 3 : $S_3$	134
E.2.3 Comparaison des stratégies	134
E.2.4 Introduction du $J_2$ dans les résultats analytiques du Primer Vector	135
<b>E.3 Formation non-keplerienne : le cas de Max</b>	<b>136</b>
E.3.1 Calcul de la loi de guidage pour le maintien en formation	136
E.3.2 Calcul de la consommation d'ergols pour le pire cas de direction d'observation	138
E.3.3 Optimisation de la consommation pour une prise de vue	141
Mise en place du problème de contrôle optimal	141
Résolution numérique du problème	143
E.3.4 Conclusion	146

---

## E.1 Introduction

Comme la classification du Chapitre 1 le montre, il existe d'autres classes de formations géocentriques que les formations invariantes, à savoir les formations périodiques et les formations non-keplériennes. Durant la thèse, des travaux annexes ont été menés sur ces deux types de formations.

## E.2 Formation périodique : le cas de Noss White Cloud

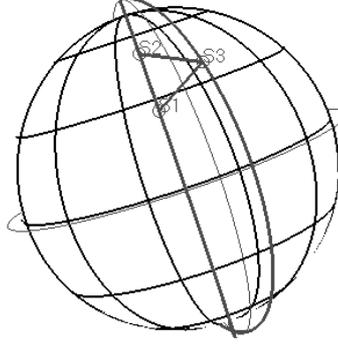
### E.2.1 Présentation du déploiement

La différence entre ces formations et les formations invariantes est que la géométrie de la formation dépend de la latitude.

En principe, il est donc possible d'utiliser les mêmes méthodes pour résoudre le déploiement. Cependant, l'une d'entre elles, Noss White Cloud<sup>1</sup> de l'USAF, qui nous a servi de cas d'étude, possède une particularité : elle est de "grande" dimension. Cette formation, composée de trois satellites, forme un triangle équilatéral pour une latitude particulière comme le montre la Figure E.1.

---

<sup>1</sup>Mission d'écoute électronique



**FIG. E.1 - Formation Noss White Cloud**

Pour toutes les autres latitudes, le triangle n'est plus équilatéral. Contrairement aux formations invariantes dont la dimension est de quelques centaines de mètres à quelques kilomètres, les côtés du triangle équilatéral font plusieurs centaines de kilomètres. Il est inenvisageable de créer des formations invariantes d'une telle taille pour des raisons de coût de MAF : en effet, les écarts d'inclinaison seraient tels que le budget d'ergols nécessaire à la correction des dérives séculaires différentielles sur le nœud ascendant et le périégée serait prohibitif.

Les formations périodiques de grande dimension ne possèdent pas d'écart d'inclinaison entre les satellites et sont donc viables.

Les satellites ne sont séparés que par des écarts de nœud ascendant et d'argument de la latitude. Leur correction peut se faire à l'aide des méthodes précédentes. Cependant, il est intéressant d'utiliser l'effet des perturbations orbitales, et en particulier le  $J_2$ , pour les réaliser. Il est par conséquent nécessaire de définir une autre méthode.

Le principe du déploiement consiste à déployer les satellites de part et d'autres de l'orbite d'injection de manière à équilibrer la consommation d'ergols. Par conséquent, le problème de déploiement ( $\mathcal{P}$ ) est :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \delta \mathbf{x}_1 = [\delta a_1 = 0, \delta \mathbf{e}_1 = 0, \delta i_1 = 0, \delta \Omega_1 = -\delta \Omega, \delta \alpha_1 = -\delta \alpha]^T \\ \delta \mathbf{x}_2 = [\delta a_2 = 0, \delta \mathbf{e}_2 = 0, \delta i_2 = 0, \delta \Omega_2 = -\delta \Omega, \delta \alpha_2 = \delta \alpha]^T \\ \delta \mathbf{x}_3 = [\delta a_3 = 0, \delta \mathbf{e}_3 = 0, \delta i_3 = 0, \delta \Omega_3 = \delta \Omega, \delta \alpha_3 = 0]^T \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

## E.2.2 Stratégies proposées

Dans les stratégies qui vont être définies, le demi-grand axe est corrigé sous forme d'un transfert de Hohmann. Le nœud ascendant où l'inclinaison à l'aide d'une manœuvre normale au plan de l'orbite. Si le demi-grand axe et l'inclinaison ou le nœud ascendant doivent être corrigés, on réalise une correction combinée : la manœuvre possède une composante transversale et une composante normale.

Nous avons décidé d'évaluer trois stratégies différentes :

- Stratégie 1 : elle est basée sur une correction directe du nœud ascendant et une correction du demi-grand axe pour mettre les satellites sur une orbite de dérive de manière à corriger l'argument de la latitude.
- Stratégie 2 : elle est basée sur une correction du demi-grand axe pour corriger le nœud ascendant par l'effet du  $J_2$ . Le rendez-vous implique, comme on le verra plus tard, une correction résiduelle de nœud ascendant.

- Stratégie 3 : elle est basée sur une correction combinée du demi-grand axe et d l'inclinaison pour corriger le nœud ascendant et obtenir le rendez-vous.

### Stratégie 1 : $S_1$

Avant d'utiliser les dérives séculaires dues au  $J_2$  obtenues en C.26, il faut remarquer que la formation Noss White Cloud est une formation dont le périégée est gelé : il est possible de montrer ([Car95]) que lorsque l'excentricité est judicieusement choisie (valeur proche de  $10^{-3}$ ) et que le périégée vaut 90 deg, l'effet à longue période du terme  $J_3$  du potentiel terrestre compense la dérive séculaire due au  $J_2$  sur le périégée : on parle de périégée gelé (et aussi d'excentricité gelée). En conséquence, il n'est plus nécessaire de prendre en compte la dérive du périégée. En remplaçant l'anomalie moyenne par l'argument de la latitude, on peut alors faire un développement limité au premier ordre sur ces dérives pour obtenir le système :

$$\delta\Omega(t) = \left( \partial_a \dot{\Omega}_{J_2} \delta\tilde{a} + \partial_e \dot{\Omega}_{J_2} \delta e + \partial_i \dot{\Omega}_{J_2} \delta i \right) \Delta\tilde{t} \quad (\text{E.2a})$$

$$\delta\alpha(t) = \left( \partial_a \dot{\alpha}_{J_2} \delta\tilde{a} + \partial_e \dot{\alpha}_{J_2} \delta e + \partial_i \dot{\alpha}_{J_2} \delta i \right) \Delta\tilde{t} \quad (\text{E.2b})$$

où  $\delta\Omega(t)$  représente l'écart de nœud ascendant entre le plan de l'orbite d'injection et le plan du satellite,  $\delta\alpha(t)$  l'écart en argument de la latitude entre le dernier étage du lanceur et le satellite,  $\partial_\xi$  la dérivée partielle par rapport au paramètre  $\xi$ , et  $\Delta\tilde{t}$  une durée.

La stratégie 1 aboutit aux résultats suivants :

$$\delta\tilde{a}_j = \frac{\delta\alpha_j}{\partial_a \dot{\alpha}_{J_2} \Delta\tilde{t}} \quad (\text{E.3})$$

La dérive du nœud ascendant induite par le rendez-vous vaut :

$$\delta\Omega_{res_j} = \partial_a \dot{\Omega}_{J_2} \delta\tilde{a}_j \Delta\tilde{t} \quad (\text{E.4})$$

à cause du couplage des équations E.2a et E.2b.

La consommation d'ergols est donc par conséquent :

$$\boxed{\delta\tilde{V}_j = \sqrt{\left( \frac{\delta\alpha_j}{2\partial_a \dot{\alpha}_{J_2} \Delta\tilde{t}} \right)^2 + \sin^2 i \left( \delta\Omega_j + \frac{\partial_a \dot{\Omega}_{J_2}}{\partial_a \dot{\alpha}_{J_2}} \delta\alpha_j \right)^2}} \quad (\text{E.5})$$

### Stratégie 2 : $S_2$

La stratégie 2 utilise le  $J_2$  pour corriger le nœud ascendant. Pour cela, on utilise une correction de demi-grand axe :

$$\delta\tilde{a}_j = \frac{\delta\Omega_j}{\partial_a \dot{\Omega}_{J_2} \Delta\tilde{t}} \quad (\text{E.6})$$

Comme les corrections de nœud ascendant sont opposées ( $\pm\delta\Omega$ ), les dérives correspondantes  $\delta\alpha_{\Omega_j}$  seront aussi opposées. Elles seront égales à :

$$\delta\alpha_{\Omega_j} = \frac{\partial_a \dot{\alpha}_{J_2}}{\partial_a \dot{\Omega}_{J_2}} \delta\Omega_j \quad (\text{E.7})$$

Il faut alors résoudre le problème du rendez-vous. On constate que les dérivées  $\delta\alpha_{\Omega_j}$  étant opposées, les seules valeurs permettant une équirépartition de la consommation entre les satellites sont 0 et  $\pi$ . Par conséquent, on écrit ces dérivées sous la forme :

$$\delta\alpha_{\Omega_j} = k\pi + \delta\alpha_{rdv_j} \quad (\text{E.8})$$

où  $k$  est un entier relatif et  $\delta\alpha_{rdv_j} \in [0, \frac{\pi}{2}[$ .

La dérivée de nœud ascendant résiduel due au rendez-vous vaut alors :

$$\delta\Omega_{res_j} = \frac{\partial_a \dot{\Omega}_{J_2}}{\partial_a \dot{\alpha}_{J_2}} \delta\alpha_{rdv_j} \quad (\text{E.9})$$

En outre, la correction de demi-grand axe à apporter pour corriger  $\delta\alpha_{rdv_j}$  vaut :

$$\delta\tilde{a}_{rdv_j} = \frac{\delta\alpha_{rdv_j}}{\partial_a \dot{\alpha}_{J_2} \Delta\tilde{t}} \quad (\text{E.10})$$

La consommation finale est :

$$\Delta\tilde{V}_j = \sqrt{\frac{1}{\Delta\tilde{t}^2} \left( \frac{\delta\Omega_j}{\partial_a \dot{\Omega}_{J_2}} + \frac{\delta\alpha_{rdv_j}}{\partial_a \dot{\alpha}_{J_2}} \right)^2 + \left( \sin i \frac{\partial_a \dot{\Omega}_{J_2}}{\partial_a \dot{\alpha}_{J_2}} \delta\alpha_{rdv_j} \right)^2} \quad (\text{E.11})$$

### Stratégie 3 : $S_3$

La stratégie 3 se base sur le fait suivant : l'effet d'une correction d'inclinaison (compatible avec une plate-forme de micro-satellite) sur l'évolution de l'argument de la latitude est très faible en comparaison avec celui du au corps central (troisième loi de Kepler).

Par conséquent, il est possible de corriger le nœud ascendant résiduel  $\delta\Omega_{res_j}$  de la Stratégie 2 à l'aide d'une correction d'inclinaison :

$$\delta\Omega_{res_j} = \partial_i \dot{\Omega}_{J_2} \delta i \Delta\tilde{t} \quad (\text{E.12})$$

La consommation finale est :

$$\Delta\tilde{V}_j = \frac{1}{\Delta\tilde{t}} \sqrt{\left( \frac{\delta\Omega_j}{\partial_a \dot{\Omega}_{J_2}} + \frac{\delta\alpha_{rdv_j}}{\partial_a \dot{\alpha}_{J_2}} \right)^2 + \left( \frac{\delta\Omega_{res_j}}{\partial_i \dot{\Omega}_{J_2}} \right)^2} \quad (\text{E.13})$$

### E.2.3 Comparaison des stratégies

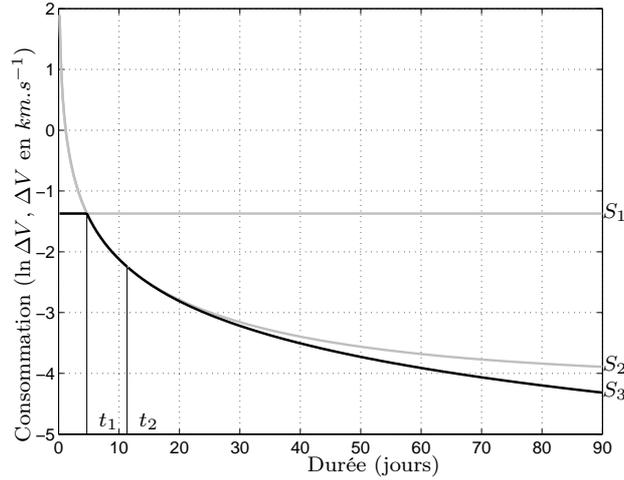
Afin de comparer numériquement les trois stratégies, on choisit le cas suivant :

Paramètre	Valeur
$a$	7000 km
$e$	0.001
$i$	57 deg
$\delta\Omega$	2.3 deg
$\delta\alpha$	1.47 deg

TAB. E.1 - Cas d'étude pour la comparaison des stratégies de déploiement pour une formation périodique triangulaire

Ces valeurs permettent d'obtenir un triangle équilatéral de  $450 \text{ km}$  de côté pour une latitude de  $25 \text{ deg}$ .

Comme les consommations diffèrent très peu d'un satellite à un autre ( $<1\%$ ), on a représenté sur la Figure la moyenne des consommations pour les trois stratégies en fonction de la durée de déploiement  $\Delta t$ .



**FIG. E.2 - Comparaison des consommations des différentes stratégies pour une formation périodique triangulaire**

On constate tout d'abord que  $S_1$  est quasi-constante : ceci est dû au fait que la correction hors plan est constante, et que dès que  $\Delta t$  augmente, la correction de demi-grand axe pour obtenir le rendez-vous tend vers 0.

Ensuite, on constate que  $S_2$  tend vers une valeur constante quand  $\Delta t$  tend vers l'infini : cette constante correspond à  $\delta\Omega_{res_j}$  qui est indépendant de  $\Delta t$ .

Enfin,  $S_3$  tend vers 0 puisque les corrections de demi-grand axe et d'inclinaison tendent vers 0 quand  $\Delta t$  tend vers l'infini.

D'autre part, il est intéressant de constater que la meilleure stratégie dépend de  $\Delta t$  :

- Si  $\Delta t < t_1$ , alors la meilleure stratégie est  $S_1$ ,
- Si  $t_1 < \Delta t < t_2$ , alors la meilleure stratégie est  $S_2$ ,
- Si  $\Delta t > t_2$ , alors la meilleure stratégie est  $S_3$ .

Ces résultats sont détaillés dans [Bou02b] et [Bou02c]. Cette méthode de déploiement des formations périodiques a été citée dans l'article de synthèse sur le vol en formation de Scharf ([Sch02]).

#### E.2.4 Introduction du $J_2$ dans les résultats analytiques du Primer Vector

En fait,  $S_1$  correspond à la solution optimale que fournit le Primer Vector dans un cadre de dynamique corps central. Il est donc possible d'estimer la limite de validité de cette hypothèse de corps central :  $\Delta t = t_1 \approx 4.68$  jours.

Lorsque  $\Delta t > t_1$ , il est nécessaire d'introduire l'effet du  $J_2$ . Si l'on se rappelle que la courbe d'efficacité du primer vector est une cycloïde dans le cas du rendez-vous, on en déduit que les manœuvres doivent être appliquées au début et à la fin du déploiement : il y aura 1, 2 ou 3 manœuvres lors de la première révolution et 1, 2 ou 3 manœuvres lors de la dernière

révolution.

Si on fait l'hypothèse que le  $J_2$  n'affecte pas "trop" la courbe d'efficacité, on en déduit que la solution optimale avec le  $J_2$  aura la même structure. En conséquence, le déploiement optimal peut être résolu de la manière suivante :

1. Etablir la stratégie d'utilisation du  $J_2$ ,
2. En déduire les corrections nécessaires des paramètres orbitaux lors de la première et dernière révolutions,
3. Utiliser la théorie analytique du Primer Vector pour obtenir les transferts optimaux correspondants.

La première étape consiste à définir comment on peut utiliser le  $J_2$  :  $S_2$  et  $S_3$  en sont deux exemples.

La deuxième étape se déduit analytiquement : ce sont par exemple les expressions obtenues au paragraphe précédent des demi-grand axes ou des inclinaisons de dérive et des nœuds ascendants résiduels.

La troisième étape correspond à l'application des résultats du Primer Vector : dans notre cas, il s'agissait de corriger le demi-grand axe et l'inclinaison (ou le nœud ascendant). Par conséquent, le Primer Vector n'était pas utile, la solution optimale étant un simple transfert de Hohmann avec une composante hors plan<sup>2</sup>. Par contre, si on rajoutait des dispersions d'injection du lanceur sur l'excentricité par exemple, il deviendrait avantageux de l'utiliser.

## E.3 Formation non-keplerienne : le cas de Max

Les résultats qui vont être décrits sont le fruit d'un travail personnel de l'auteur ([Bou02a]), mais aussi d'un travail conjoint avec Martinot ([Mar03a]) et Cerri<sup>3</sup> ([Mar03b]).

### E.3.1 Calcul de la loi de guidage pour le maintien en formation

La formation Max est un télescope constitué d'un satellite lentille contrôlé et d'un satellite collecteur non contrôlé. Ce télescope observe le rayonnement gamma issu de l'explosion de supernovae. Ce projet, au delà de l'aspect vol en formation, est très novateur du fait qu'il est le premier à envisager la concentration de rayons gamma par une lentille. Comme la focale est supérieure à 100 m, il est inenvisageable d'utiliser une plate-forme unique : c'est la raison d'être de la formation.

Afin de réaliser des observations, dont la durée est de 10<sup>6</sup> secondes, il faut que la formation maintienne une distance constante entre les deux satellites (égale à la focale) dans la direction d'observation de l'explosion.

On rappelle l'équation (cf Chapitre 2) qui est à la base des formations non-keplériennes :

$$\gamma_{guid}(t) = \delta\ddot{\mathbf{r}}_{\mathcal{R}}(t) + \mu \left( \frac{\mathbf{r}(t)}{r^3(t)} - \frac{\bar{\mathbf{r}}(t)}{\bar{r}^3(t)} \right) - 2\bar{\mathbf{n}} \wedge \delta\dot{\mathbf{r}}_{\mathcal{R}}(t) - \bar{\mathbf{n}} \wedge (\bar{\mathbf{n}} \wedge \delta\mathbf{r}_{\mathcal{R}}(t)) \quad (\text{E.14})$$

où  $\gamma_{guid}(t)$  est la loi de guidage pour obtenir le mouvement relatif  $\delta\mathbf{r}_{\mathcal{R}}(t)$  entre le satellite et la référence,  $\mathcal{R}$  est un repère inertiel, et  $\bar{\mathbf{n}}$  le vecteur rotation de la référence.

Bien que  $\delta\mathbf{r}_{\mathcal{R}}(t)$  puisse être quelconque, les études menées au cours de la thèse se sont focalisées sur un cas particulier, ce lui de la mission Max. Ainsi, il faut avoir :

$$\delta\mathbf{r}(t) = \mathbf{D} \quad (\text{E.15})$$

<sup>2</sup>Notons que si le problème n'était pas linéaire, la solution serait de type transfert supersynchrone

<sup>3</sup>Stagiaire DEA

où  $\mathbf{D}$  est un vecteur constant dans le repère inertiel  $\mathcal{R}$  donnant la direction de visée du télescope.

Le repère inertiel choisi est défini de la manière suivante :

- L'axe  $\hat{\mathbf{X}}$  est orienté suivant le périégée de l'orbite de référence (donc celle du collecteur),
- L'axe  $\hat{\mathbf{Z}}$  est orienté suivant le moment cinétique de l'orbite de référence,
- L'axe  $\hat{\mathbf{Y}}$  est tel que le trièdre  $\{\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Z}}\}$  soit orthonormé direct.

Exprimons  $\mathbf{D}$  dans  $\mathcal{R}$  :

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \|\mathbf{D}\| = d \\ \alpha_D : \text{ascension droite de l'étoile visée} \\ \delta_D : \text{déclinaison de l'étoile visée} \end{cases} \quad (\text{E.16})$$

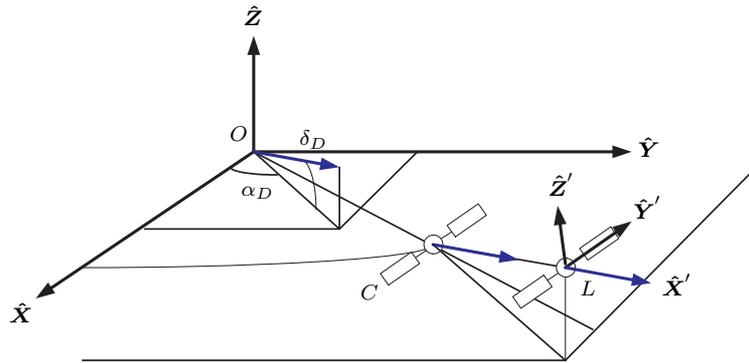
Sous l'hypothèse de dynamique de type corps central et que  $d \ll \bar{a}$ , il a pu être montré que :

$$\gamma_{guid}(t, \alpha_D, \delta_D) = \mu d \left( \frac{1 + e \cos v(t)}{a(1 - e^2)} \right)^3 \begin{bmatrix} -\cos \delta_D \left( \frac{3}{2} \cos(2v(t) - \alpha_D) + \frac{1}{2} \cos \alpha_D \right) \\ -\cos \delta_D \left( \frac{3}{2} \sin(2v(t) - \alpha_D) + \frac{1}{2} \sin \alpha_D \right) \\ \sin \delta_D \end{bmatrix} \quad (\text{E.17})$$

exprimé dans  $\mathcal{R}$ , avec  $v(t)$  l'anomalie vraie.

Définissons un ROL adapté à la mission : en effet, la lentille, qui effectue le maintien en formation, est constamment orientée vers l'étoile. Le pointage de la lentille est donc inertiel. En supposant que des propulseurs sont installés sur les trois axes de la lentille, on lui associe naturellement le repère  $\mathcal{R}'$  : l'axe  $\hat{\mathbf{X}}'$  selon la direction de l'étoile, l'axe  $\hat{\mathbf{Y}}'$  orthogonal à  $\hat{\mathbf{X}}'$  dans le plan  $(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}})$  et l'axe  $\hat{\mathbf{Z}}'$  qui complète le trièdre direct.

Ce repère est représenté sur la Figure E.3. La Figure E.4 donne l'accélération sur chaque axe



**FIG. E.3 - Repère lié à la lentille correspondant à l'orientation de ses propulseurs**

de  $\mathcal{R}'$  pendant une orbite pour maintenir une distance  $d = 112 m$ . Il est d'abord intéressant de remarquer que lorsque l'orbite du collecteur est circulaire (Figure E.4(a) et E.4(b)), la commande est sinusoïdale, contrairement au cas d'une GTO (Figure E.4(c)).

Ensuite, la poussée est variable en amplitude et en orientation pendant une révolution : autrement dit, si la plate-forme ne dispose que d'un seul propulseur, il va être très complexe

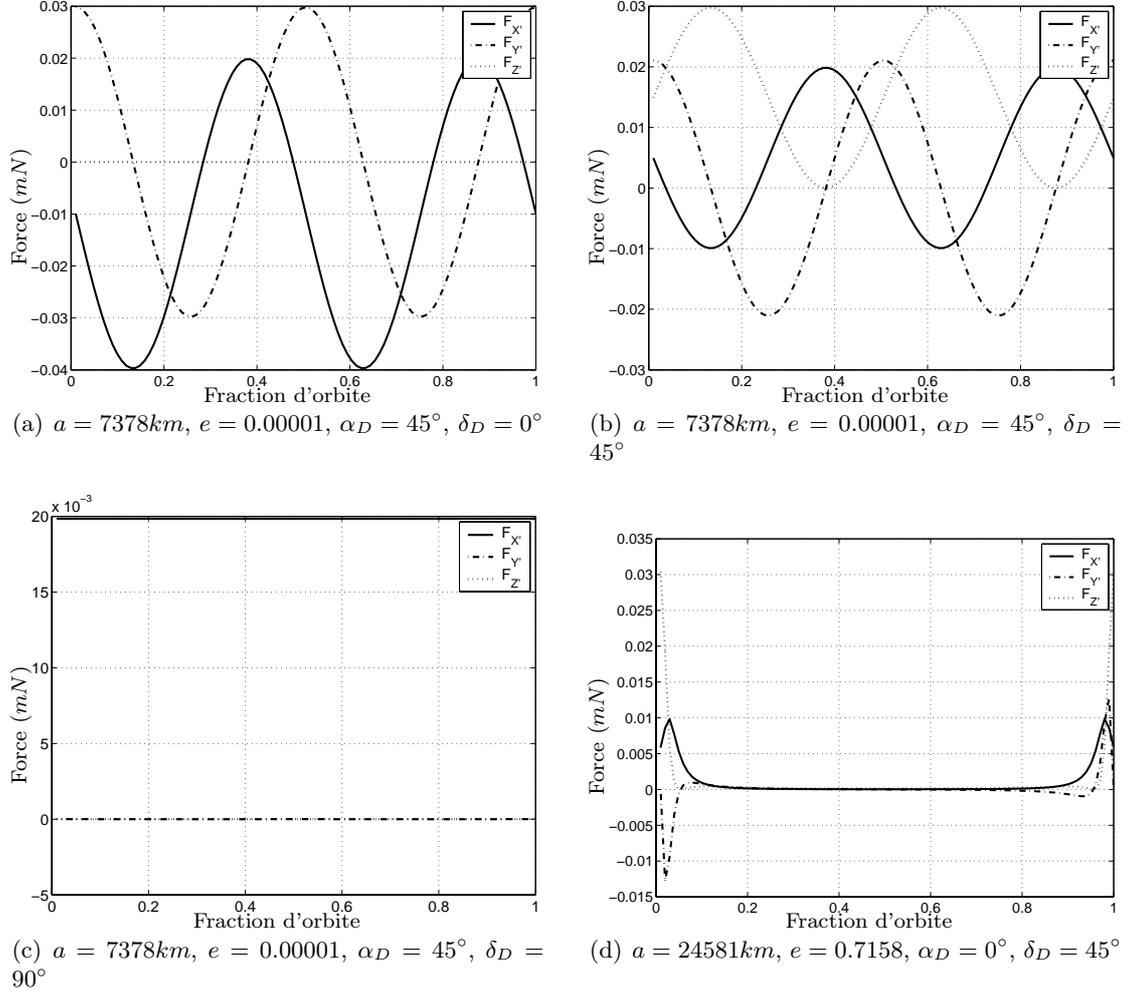


FIG. E.4 - Loi de guidage dans le ROL de la lentille pendant une révolution

d'implémenter une telle loi. La solution consiste à utiliser au moins six propulseurs, un par face.

Enfin, le niveau d'accélération maximal atteint environ  $0.2 mm.s^{-2}$ . Si on considère un satellite de  $200 kg$ , on obtient une poussée maximale d'environ  $40 mN$  : ce niveau de poussée est technologiquement accessible actuellement.

### E.3.2 Calcul de la consommation d'ergols pour le pire cas de direction d'observation

Il est alors possible de calculer :

$$\|\gamma_{guid}(t, \alpha_D, \delta_D)\| = \mu d \left( \frac{1 + e \cos v(t)}{a(1 - e^2)} \right)^3 \sqrt{(F(\alpha_D, v(t)) - 1) \cos^2 \delta_D + 1} \quad (E.18)$$

avec :

$$F(\alpha_D, v(t)) = \frac{3}{2} \cos(2v(t) - 2\alpha_D) + \frac{5}{2} \quad (E.19)$$

On constate que  $\alpha_D$  n'introduit qu'un déphasage dans la commande : la pire direction de visée du télescope en termes de consommation d'ergols ne dépend donc que de  $\delta_D$ .

On calcule donc les racines de :

$$\frac{\partial \|\gamma_{guid}(t, \alpha_D, \delta_D)\|}{\partial \delta_D} = 0 \quad (\text{E.20})$$

où :

$$\frac{\partial \|\gamma_{guid}(t, \alpha_D, \delta_D)\|}{\partial \delta_D} = -\mu d \left( \frac{1 + e \cos v(t)}{a(1 - e^2)} \right)^3 \frac{(F - 1) \sin 2\delta_D}{\sqrt{(F - 1) \cos^2 \delta_D + 1}} \quad (\text{E.21})$$

On trouve alors les racines :

$$\delta_D = \left\{ 0, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\} \quad (\text{E.22})$$

Pour savoir si ces valeurs sont des minima ou des maxima, on analyse la condition du second ordre :

$$\frac{\partial^2 \|\gamma_{guid}(t, \alpha_D, \delta_D)\|}{\partial \delta_D^2} > \text{ ou } < 0 \quad (\text{E.23})$$

En remarquant que  $F \in [1, 4]$ , on montre alors que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial^2 \|\gamma_{guid}(t, \alpha_D, \delta_D)\|}{\partial \delta_D^2} \right|_{\delta_D=0} = \mu d \left( \frac{1 + e \cos v(t)}{a(1 - e^2)} \right)^3 F(1 - F) < 0 \\ \left. \frac{\partial^2 \|\gamma_{guid}(t)\|}{\partial \delta_D^2} \right|_{\delta_D=-\pi/2} = \mu d \left( \frac{1 + e \cos v(t)}{a(1 - e^2)} \right)^3 (F - 1) > 0 \\ \left. \frac{\partial^2 \|\gamma_{guid}(t)\|}{\partial \delta_D^2} \right|_{\delta_D=\pi/2} = \mu d \left( \frac{1 + e \cos v(t)}{a(1 - e^2)} \right)^3 (F - 1) > 0 \end{array} \right. \quad (\text{E.24})$$

Dans le but d'évaluer le pire cas, on ne va se focaliser par la suite que sur le cas :

$$\delta_D = 0$$

Pour évaluer la consommation d'ergols moyenne pour le pire cas, il faut intégrer l'accélération de poussée sur une période orbitale ainsi que sur tous les directions  $\alpha_D$  puisque les directions d'observation sont isotropes<sup>4</sup> :

$$\Delta V_{moy} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\gamma_{guid}(t, \alpha_D, \delta_D)\| dt d\alpha_D \quad (\text{E.25})$$

Pour intégrer l'équation, on fait le changement de variable du temps pour l'anomalie vraie. Pour cela, on utilise la deuxième loi de Kepler, ou loi des aires :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{C}{r^2} \quad (\text{E.26})$$

où  $C = \|\mathbf{r} \wedge \mathbf{V}\| = r_p V_p$  est la constante de la loi des aires (norme du moment cinétique). En développant l'expression, on trouve :

$$dt = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos v)^2} dv \quad (\text{E.27})$$

---

<sup>4</sup>Le télescope doit observer des explosions de supernovae dont la position dans l'Univers est isotrope

En combinant les équations E.28 et E.27, il vient :

$$\Delta V_{moy} = \frac{d}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{I_0 + eI_1}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad (\text{E.28})$$

où la fonction  $I_k$  est définie comme :

$$I_k = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^k v \sqrt{F(v, \alpha_D, \delta_D = 0)} dv d\alpha_D \quad (\text{E.29})$$

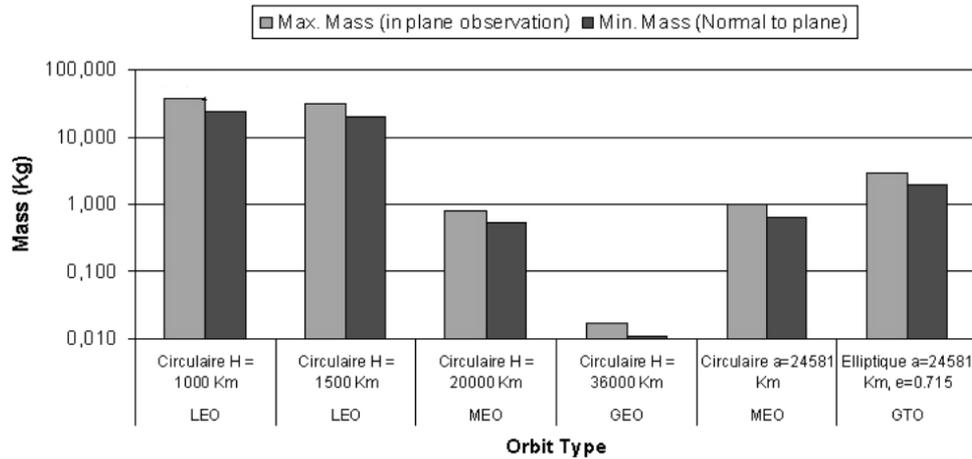
Numériquement, on obtient :

$$\begin{cases} I_0 \approx 60.87 \\ I_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{E.30})$$

D'où, finalement, la consommation moyenne :

$$\Delta V_{moy} = \frac{d}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{I_0}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad (\text{E.31})$$

Un récapitulatif pour les différents type d'orbites est donné sur la Figure E.5 : les masses d'ergols consommées correspondent à une lentille d'une masse de 200 kg, avec un propulseur<sup>5</sup> dont l' $Isp$  est de 3000 s et séparée du collecteur par une distance  $d = 112 m$ . La durée est d'un an.



**FIG. E.5 - Comparaison de la masse d'ergols consommée pour différents types d'orbites**

Le pire cas (LEO) donne une consommation moyenne d'environ 20 kg de xénon ce qui reste tout à fait raisonnable pour une durée de mission envisagée de deux ans.

Il est intéressant de constater que la consommation diminue quand le demi-grand axe augmente (ce qui est physiquement rassurant !). De plus, pour un demi-grand axe constant, il est possible de remarquer que la consommation diminue lorsque l'excentricité diminue : autrement, la consommation est minimale pour une orbite circulaire.

Cependant, il est intéressant de prendre en compte les orbites excentriques :

<sup>5</sup>Propulseur plasmique au xénon

- Coût de lancement : Max est une "petite" mission. Il est raisonnable d'imaginer que son lancement pourrait se faire en passant d'un GEO. La formation serait donc insérée sur une GTO.
- Perturbations orbitales : pour un même demi-grand axe, donc approximativement pour un coût de lancement donné, il est intéressant d'utiliser une orbite excentrique car si les observations sont faites à l'apogée de l'orbite, les perturbations orbitales seront moindres (du moins le potentiel terrestre et la traînée aérodynamique). La qualité de la prise de vue sera peut être meilleure.

### E.3.3 Optimisation de la consommation pour une prise de vue

#### Mise en place du problème de contrôle optimal

Supposons une orbite excentrique : l'accélération du terme central diminue en fonction de la distance entre la formation et le centre de la Terre. Par conséquent, l'accélération différentielle entre la lentille et le collecteur diminue aussi lorsque la distance au centre de la Terre augmente. L'idée est donc de ne contrôler la formation qu'autour de l'apogée de l'orbite : pendant une durée donnée autour de l'apogée, la formation fait une observation. Pendant le reste de la révolution, le satellite contrôlé, i.e. la lentille, doit consommer le moins possible. En fait, la lentille doit réaliser un rendez-vous entre sa position à l'instant final d'une révolution  $k$  (point B) et sa position à l'instant initial de la révolution  $k + 1$  (point A). Ce principe est représenté sur la Figure E.6. Soit  $\tau$  la fraction d'observation par révolution (appelé *duty cycle*). Une

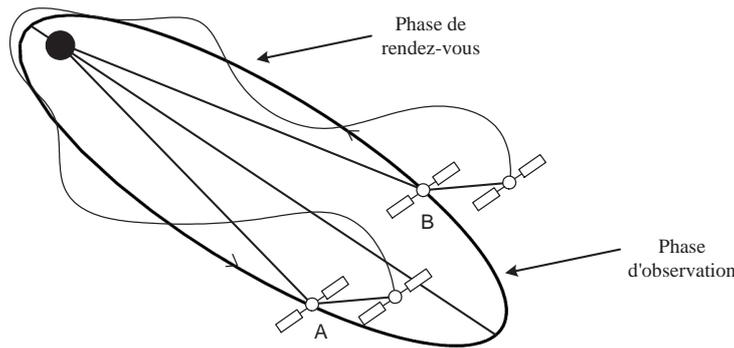


FIG. E.6 - Principe de la minimisation de la consommation pour une observation de la formation MAX

observation commence à l'instant :

$$t_{A1} = T \frac{1 - \tau}{2} \quad (\text{E.32})$$

et finit à l'instant :

$$t_B = T \frac{1 + \tau}{2} \quad (\text{E.33})$$

où  $T$  est la période orbitale du collecteur. Pendant cette durée, la loi de guidage est donnée par les équations E.17. Ensuite, entre l'instant  $t_B$  et l'instant  $t_{A2}$  donné par :

$$t_{A2} = T + T \frac{1-\tau}{2} \quad (\text{E.34})$$

il faut réaliser un rendez-vous à consommation minimale entre l'état  $[\delta \mathbf{r}_B, \delta \dot{\mathbf{r}}_B]^T$  et l'état  $[\delta \mathbf{r}_A, \delta \dot{\mathbf{r}}_A]^T$  où :

$$\delta \mathbf{r}_B = \delta \mathbf{r}_A = d \begin{bmatrix} \cos \delta_D \cos \alpha_D \\ \cos \delta_D \sin \alpha_D \\ \sin \delta_D \end{bmatrix} \quad (\text{E.35})$$

et :

$$\delta \dot{\mathbf{r}}_B = \delta \dot{\mathbf{r}}_A = \emptyset \quad (\text{E.36})$$

En posant :

$$\delta \mathbf{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}(t) \\ \delta \dot{\mathbf{r}}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{E.37})$$

le problème d'optimisation ( $\mathcal{P}$ ) se pose alors sous la forme :

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \min_{\gamma_{guid}} \frac{1}{2} \int_{t_B}^{t_{A2}} \|\gamma_{guid}(t)\|^2 dt \\ \delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \underline{\mathbf{A}}(v) \delta \mathbf{x}(t) + \underline{\mathbf{B}} \gamma_{guid}(t) \\ \delta \mathbf{x}(t_0) = \delta \mathbf{x}_0 = [\delta \mathbf{r}(t_B), \delta \dot{\mathbf{r}}(t_B)]^T \\ \delta \mathbf{x}(t_f) = \delta \mathbf{x}_f = [\delta \mathbf{r}(t_{A2}), \delta \dot{\mathbf{r}}(t_{A2})]^T \end{cases} \quad (\text{E.38})$$

où  $\underline{\mathbf{A}}(v)$  est une matrice (6,6) et représente la dynamique relative d'un satellite par rapport à une orbite elliptique proche exprimée dans  $\mathcal{R}$ , et  $\underline{\mathbf{B}}$  une matrice (6,3).

Il faut noter que le critère de minimisation correspond à un système propulsif à puissance limitée<sup>6</sup> (et plus un système à vitesse d'éjection constante comme c'est le cas dans le reste de la thèse) : cette hypothèse évitera d'obtenir une loi de type bang-off-bang.

On applique alors le Principe du Maximum (exposé dans l'Annexe D). Soit  $\delta \mathbf{p}(t)$  l'adjoint de l'état, l'hamiltonien du système est :

$$H(t) = \delta \mathbf{p}(t)^T (\underline{\mathbf{A}}(v) \delta \mathbf{x}(t) + \underline{\mathbf{B}} \gamma_{guid}(t)) - \frac{\|\gamma_{guid}(t)\|^2}{2} \quad (\text{E.39})$$

La condition nécessaire d'optimalité sur la commande D.15, combinée à l'équation E.39, aboutit à :

$$\gamma_{guid}^*(t) = \delta \mathbf{p}(t)^T \underline{\mathbf{B}} \quad (\text{E.40})$$

---

<sup>6</sup>Voir la définition dans [Mar83]

Il faut donc résoudre le problème aux deux bouts (TPBVP) :

$$(\mathcal{P}') = \begin{cases} \gamma_{guid}^*(t) = \delta \mathbf{p}(t)^T \underline{\mathbf{B}} \\ \delta \dot{\mathbf{x}}(t) = \underline{\mathbf{A}}(v) \delta \mathbf{x}(t) + \underline{\mathbf{B}} \gamma_{guid}^*(t) \\ \delta \dot{\mathbf{p}}(t) = -\partial_x H^*(t) \\ \delta \mathbf{x}_0 = [\delta \mathbf{r}(t_B), \delta \dot{\mathbf{r}}(t_B)]^T \\ \delta \mathbf{x}_f = [\delta \mathbf{r}(t_{A2}), \delta \dot{\mathbf{r}}(t_{A2})]^T \\ \delta \mathbf{p}(t_0) \text{ libre} \\ \delta \mathbf{p}(t_f) \text{ libre} \end{cases} \quad (\text{E.41})$$

Comme l'état est entièrement fixé aux instants initial et final, l'adjoint est entièrement libre.

### Résolution numérique du problème

Pour la résolution numérique du problème, on utilise le jeu de variables normalisées suivantes :

$$\tilde{r} = \frac{r}{\bar{a}} \quad (\text{E.42})$$

où  $\bar{a}$  est le demi-grand axe de l'orbite du collecteur et

$$\tilde{t} = \bar{n}t \quad (\text{E.43})$$

où  $\bar{n} = \sqrt{\frac{\mu}{\bar{a}^3}}$  est le mouvement moyen du collecteur.

Il est maintenant nécessaire d'expliciter  $\underline{\mathbf{A}}(v)$ . Pour cela, on utilise une linéarisation de l'équation E.14 :

$$\delta \ddot{\mathbf{r}}(t) = \frac{\mu}{r^3(t)} [3(\hat{\mathbf{r}}(t) \cdot \delta \mathbf{r}(t)) \hat{\mathbf{r}}(t) - \delta \mathbf{r}(t)] + \gamma_{guid}(t) \quad (\text{E.44})$$

Exprimée de manière normalisée, l'équation E.44 devient :

$$\delta \ddot{\tilde{\mathbf{r}}}(\tilde{t}) = \frac{1}{\tilde{r}^3(\tilde{t})} [3(\hat{\tilde{\mathbf{r}}}(\tilde{t}) \cdot \delta \tilde{\mathbf{r}}(\tilde{t})) \hat{\tilde{\mathbf{r}}}(\tilde{t}) - \delta \tilde{\mathbf{r}}(\tilde{t})] + \tilde{\gamma}_{guid}(\tilde{t}) \quad (\text{E.45})$$

Sous forme matricielle, l'équation E.45 s'écrit :

$$\delta \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(\tilde{t}) = \tilde{\underline{\mathbf{A}}}(v) \delta \tilde{\mathbf{x}}(\tilde{t}) + \tilde{\underline{\mathbf{B}}} \tilde{\gamma}_{guid}(\tilde{t}) \quad (\text{E.46})$$

avec  $\delta \tilde{\mathbf{x}}$  défini à partir de E.37 et où :

$$\tilde{\underline{\mathbf{A}}}(v) = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}}_3 & \underline{\mathbf{I}}_3 \\ \tilde{\underline{\mathbf{C}}}(v) & \underline{\mathbf{0}}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{E.47})$$

et :

$$\tilde{\underline{\mathbf{C}}}(v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tilde{r}^3(\tilde{t})} (3 \cos^2 v - 1) & \frac{3}{2\tilde{r}^3(\tilde{t})} \sin 2v & 0 \\ \frac{3}{2\tilde{r}^3(\tilde{t})} \sin 2v & \frac{1}{\tilde{r}^3(\tilde{t})} (3 \sin^2 v - 1) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tilde{r}^3(\tilde{t})} \end{bmatrix} \quad (\text{E.48})$$

et :

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{E.49})$$

Finalement, à partir de la condition d'optimalité E.40, on peut écrire le système différentiel gouvernant l'état et son adjoint normalisés sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(\tilde{t}) \\ \delta \dot{\tilde{\mathbf{p}}}(\tilde{t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}(v) & \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}^T \\ \mathbf{0}_3 & -\tilde{\mathbf{A}}(v)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \tilde{\mathbf{x}}(\tilde{t}) \\ \delta \tilde{\mathbf{p}}(\tilde{t}) \end{bmatrix} \quad (\text{E.50})$$

La dynamique du problème ( $\mathcal{P}'$ ) est donc entièrement définie par les équations E.47, E.48, E.49 et E.50.

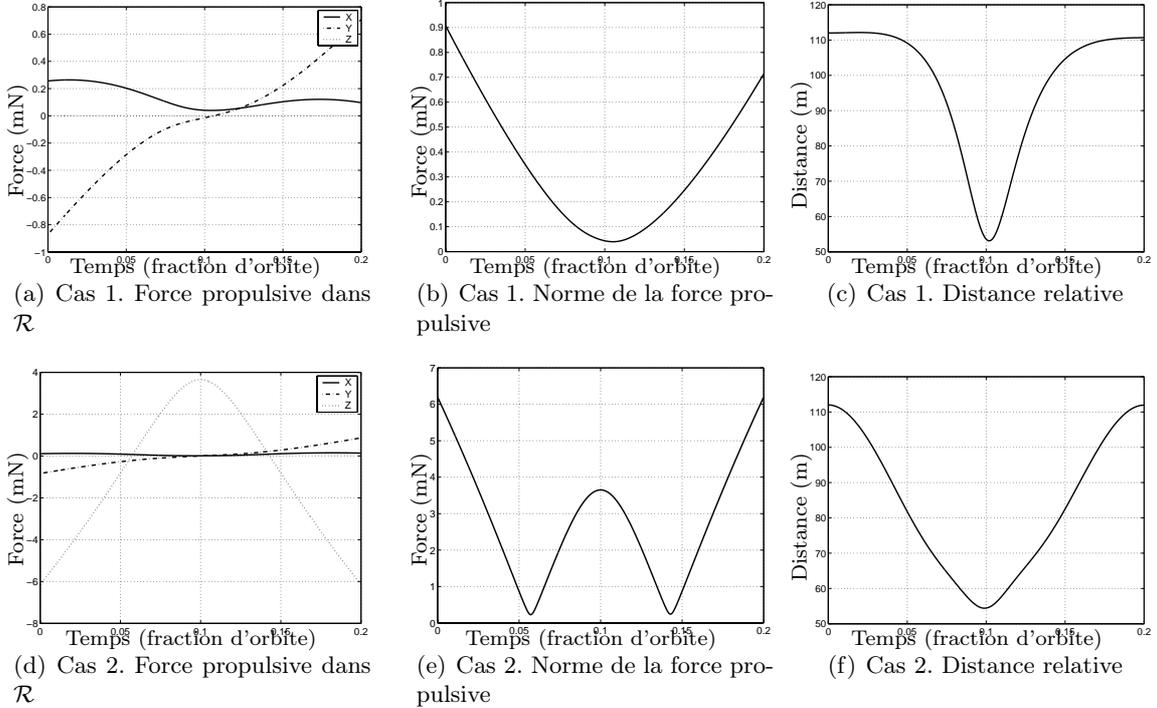
La résolution du problème se fait à l'aide d'une méthode de tir simple : les variables d'optimisation sont données par l'adjoint à l'instant initial, soit six variables. Le système d'équations non linéaires à résoudre est :

$$\int_{\tilde{t}_B}^{\tilde{t}_{A2}} \delta \tilde{\mathbf{x}}(\tilde{t}) dt - \delta \mathbf{x}_f = \mathbf{0}_6 \quad (\text{E.51})$$

Les résultats pour un duty cycle égal à 0.2 et pour deux directions de visée sont présentés sur la Figure E.7 : le Cas 1 correspond à  $\alpha_D = 0 \text{ deg}$  et  $\delta_D = 0 \text{ deg}$ . Le Cas 2 correspond à  $\alpha_D = 0 \text{ deg}$  et  $\delta_D = 45 \text{ deg}$ .

Les Figures E.7(a) et E.7(d) représentent l'amplitude de la force propulsive pendant la phase de rendez-vous sur chaque axe de  $\mathcal{R}$ . Les Figures E.7(b) et E.7(e) représentent l'amplitude de la force propulsive pendant la phase de rendez-vous. Les Figures E.7(c) et E.7(f) représentent l'évolution de la distance lentille-collecteur pendant la phase de rendez-vous.

L'orbite du collecteur est une GTO et la distance à maintenir est de 112 m.



**FIG. E.7 - Caractéristiques du rendez-vous pour l'optimisation de la consommation pendant une prise de vue**

La première remarque est que pour le Cas 1, la force maximale est du même ordre de grandeur que celle que l'on a obtenu pour le maintien en formation (cf Figure E.4(c)) : il n'est donc pas nécessaire de prévoir un surdimensionnement du sous-système de propulsion pour la phase de rendez-vous dans ce cas. Par contre, quand la déclinaison de visée augmente, la composante hors plan augmente et devient très supérieure à celle du maintien : il sera donc nécessaire d'étudier ce point plus précisément.

Ensuite, la distance entre le collecteur et la lentille est toujours supérieure à environ 50 m, ce qui en première approximation est suffisant pour se prémunir des risques de collision.

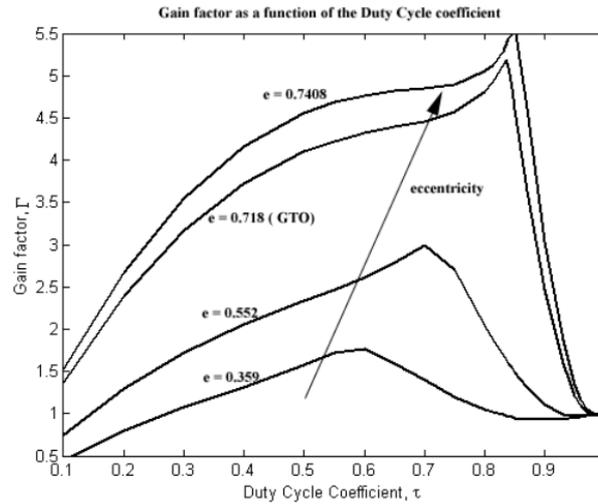
Afin d'évaluer l'intérêt de cette méthode, on définit le rapport  $\Gamma$  entre la consommation d'ergols  $\Delta V_{ref}$  donnée par une stratégie de guidage sans rendez-vous ( $\tau = 1$ ) et la consommation d'ergols  $\Delta V_{opt}$  donnée par la stratégie de guidage décrite ci-dessus. Concernant  $\Delta V_{opt}$ , il faut additionner pour chaque révolution la consommation nécessaire au maintien en formation pendant une fraction  $\tau$  de l'orbite, et la consommation pour le rendez-vous pendant une fraction  $1 - \eta$ .

On a donc :

$$\Gamma(\tau) = \frac{\Delta V_{ref}}{\Delta V_{opt}} = \frac{\Delta V(\tau = 1)}{\Delta V(\tau)} \quad (\text{E.52})$$

Ces deux consommations sont évidemment données pour une observation (et non pas une révolution).

La valeur de  $\Gamma(\tau)$  pour une observation dans le plan de l'orbite du collecteur est donnée sur la Figure E.8 pour  $a = 24581 \text{ km}$ ,  $d = 112 \text{ m}$ ,  $\alpha_D = 0^\circ$  et  $\delta_D = 0^\circ$ .



**FIG. E.8 - Comparaison de la masse d'ergols consommée pour différents types d'orbites**

On constate que cette nouvelle stratégie est d'autant plus efficace que l'excentricité tend vers 1. Pour le cas d'une GTO, le gain atteint environ 5.5 pour  $\tau \approx 0.85$  (ce qui confirme qu'il est intéressant de ne pas observer au périhélie). Par contre, cette stratégie est complètement inefficace pour des orbites circulaires ce qui est normal puisque son but était de tirer profit de l'accélération moindre à l'apogée.

Ainsi at-on mis en relief l'intérêt d'une stratégie combinée observation + rendez-vous puisqu'elle permet de multiplier par 5.5 la durée de la mission.

Cependant, il sera nécessaire d'étudier l'intérêt de la stratégie pour des déclinaisons d'observation non nulles<sup>7</sup>.

### **E.3.4 Conclusion**

Les stratégies de guidage pour tout type d'orbite et toute orientation ont été obtenues analytiquement. Les niveaux de poussée obtenus sont compatibles des systèmes de propulsion existants. La consommation annuelle reste raisonnable pour une plate-forme de type mini-satellite.

De plus, une stratégie basée sur la prise de vue uniquement autour de l'apogée a montré son efficacité pour des orbites de référence excentriques.

La partie concernant l'introduction des perturbations orbitales ainsi que la loi de commande associée pour conserver la formation à l'intérieur des fenêtres de maintien a été en grande partie réalisée par L.Cerri. Les résultats ne sont donc pas présentés ici (se référer à [Mar03b]).

---

<sup>7</sup>Ce qui n'a pas été fait par manque de temps

# Liste des publications

## F.1 Principales présentations dans des conférences internationales

- AAS-AIAA Astrodynamics Specialists Conference, août 2002, Monterey, Californie, Etats Unis. **A. Boutonnet**, B. Escudier et V. Martinot : *Direct approach for spacecraft formation-flying positioning in quasicircular low earth orbit.*
- International Symposium on Formation Flying Missions and Technologies, octobre 2002, Toulouse, France. **A. Boutonnet**, V. Martinot, P. Brousse et B. Escudier : *Efficient and accurate satellite formation flying positioning in low Earth orbit.*
- Third International Workshop on Constellations and Formation Flying, février 2003, Pise, Italie. **A. Boutonnet**, V. Martinot, A. Baranov, B. Escudier et J. Noailles : *Optimal analytical solution for invariant spacecraft formation initialization.*
- 17th International Symposium on Space Flight Dynamics, juin 2003, Moscou, Russie. **A. Boutonnet**, A. Baranov, V. Martinot, B. Escudier et J. Noailles : *Optimal small formation flying initialization in circular orbit.*
- AAS-AIAA Astrodynamics Specialists Conference, août 2003, Big Sky, Montana, Etats Unis. **A. Boutonnet**, A. Baranov, V. Martinot, B. Escudier et J. Noailles : *Optimal circular formation initialization with collision risk management.*
- 54th International Astronautical Federation Congress, octobre 2003, Breme, Allemagne. **A. Boutonnet**, A. Baranov, V. Martinot, B. Escudier et J. Noailles : *Optimal circular formation initialization with collision avoidance.*

## F.2 Autres présentations

- 53th International Astronautical Federation World Congress, septembre 2002, Houston, Texas, Etats-Unis. V. Martinot, A. Francastel, **A. Boutonnet**, P. Brousse et E. Lansard : *Combined Formation and Station-Keeping Strategies for Lead-Trail Formation Flying.*
- Third International Workshop on Constellations and Formation Flying, février 2003, Pise, Italie. V. Martinot, **A. Boutonnet**, P. Brousse, H. Saint et P. Von Ballmoos : *Orbit Control of MAX, a New Concept of Gamma Ray Telescope.*
- SPIE Annual Meeting, août 2003, San Diego, Etats Unis. P. Von Ballmoos, H. Halloin, G. Skinner, B. Smither, J. Paul, N. Abrosimov, J. Alvarez, P. Astier, P. Bastie, D. Barret, A. Bazzano, A. Blanchard, **A. Boutonnet**, P. Brousse, B. Cordier, T. Courvoisier, G. DiCocco, A. Guiliani, B. Hamelin, M. Hernanz, P. Jean, J. Isern, Knödlseider, P. Laurent, F. Lebrun, A. Marcowith, V. Martinot, L. Natalucci, J.F. Olive, R. Pain, R. Sadat, H. Saint, P. Ubertini, G. Vedrenne : *MAX - A gamma ray lens for nuclear astrophysics.*

- 54th International Astronautical Federation Congress. V. Martinot, **A. Boutonnet**, P. Brousse, H. Sainct et P. Von Ballmoos : *Formation keeping of MAX, a new concept of gamma ray telescope.*

### **F.3 Etudes internes**

- Etude auto financée, janvier 2001. V. Martinot, A. Boutonnet et S. Abbondanza : *Evolution des performances de la constellation GALILEO sur sa durée de vie.*
- Note interne, juillet 2001. A. Boutonnet : *Guidage de satellites volant en formation par des méthodes de programmation linéaire et programmation quadratique.*
- Note interne, mai 2002. A. Boutonnet : *Analyse mission du projet MAX.*

---

# Bibliographie

---

- [Adr99] F. Adragna. Cluster de micro-satellites radar pour applications interférométriques. *Note CNES*, Mai. 1999.
- [Alf03] K.T. Alfriend et T.A. Lovell. Error analysis of satellite formations in near-circular low-Earth orbits. *AAS-AIAA Astrodynamics Specialists Conference, Big Sky, Montana, Etats Unis*, Aug. 2003.
- [AIT03] H.A. AlTwaijry et D.C. Hyland. Optimal image quality-driven formation maneuvering. *Third International Workshop on Satellite Constellations and Formation Flying*, Feb. 2003.
- [Bal99] N. Balashova et E. Ignatovitch. Optimization of LEOP scheme. *Eurorusse Follow-on, Contract No : 795/99/7793/00*, 1999.
- [Bar89] A. A. Baranov. Geometric solution of the problem of a rendezvous on close nearly circular coplanar orbits. *Cosmic Research*, 27(6) :682–696, Nov. 1989.
- [Bar95] A. A. Baranov et E.O. Terekhova. Optimal four impulse rendezvous in coplanar near-circular orbits. *Cosmic Research*, 33(4) :382–387, 1995.
- [Bat87] R.H. Battin. An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics. *AIAA Education Series, ISBN(0-930-403-25-8)*, 1987.
- [Bou02a] A. Boutonnet. Analyse mission du projet Max. *Note interne ALCATEL SPACE*, Apr. 2002.
- [Bou02b] A. Boutonnet, B. Escudier, et V. Martinot. Direct approach for spacecraft formation-flying positioning in quasicircular low earth orbit. *AAS-AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Monterey, Californie, Etats Unis*, Aug. 2002.
- [Bou02c] A. Boutonnet, V. Martinot, P. Brousse, et B. Escudier. Efficient and accurate satellite formation flying positioning in low earth orbit. *Proceedings of the International Workshop on Formation Flying Missions and Technologies, Toulouse, France*, Oct. 2002.
- [Bou03a] A. Boutonnet, A. Baranov, V. Martinot, B. Escudier, et J. Noailles. Control for circular formation initialization with collision avoidance. *54th IAF annual congress*, Oct. 2003.
- [Bou03b] A. Boutonnet, A. Baranov, V. Martinot, B. Escudier, et J. Noailles. Optimal circular formation initialization with collision risk management. *AAS-AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Big Sky, Montana, Etats Unis*, Aug. 2003.
- [Bou03c] A. Boutonnet, A. Baranov, V. Martinot, B. Escudier, et J. Noailles. Optimal small formation flying initialization in circular orbit. *17th International Symposium on Space Flight Dynamics, Moscou, Russie*, Jun. 2003.
- [Bou03d] A. Boutonnet, V. Martinot, A. Baranov, B. Escudier, et J. Noailles. Optimal analytical solution for invariant spacecraft formation initialization. *Third International Workshop on Constellations and Formation Flying, Pise, Italie*, Feb. 2003.

- [Bro02] R.A. Broucke. A solution of the elliptic rendezvous problem with the time as independent variable. *AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting, San Antonio, Texas, Etat Unis*, Jan. 2002.
- [Cam02] M.E. Campbell. Planning algorithm for large satellite clusters. *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, Aug. 2002.
- [Car95] J.P. Carrou. Mécanique spatiale. *Cépaduès-Editions, ISBN : 2.85428.375.9*, 1995.
- [Cer03] L. Cerri. Contrôle d'orbite de formations non-keplériennes : application à l'observatoire gamma Max. *Rapport de stage de DEA*, 2003.
- [Clo60] W.H. Clohessy. Terminal guidance system for satellite rendezvous. *Journal of Aerospace Sciences*, 27(9), Sep. 1960.
- [Ede67] T.N. Edelbaum. Minimum impulse transfers in the near vicinity of a circular orbit. *Journal of Astronautical Sciences*, 14(2), 1967.
- [Esa03] Esa. Présentation du projet Xeus. 2003. Site Web <http://www.rssd.esa.int/XEUS/>.
- [Esc01] C.P. Escoubet, M. Fehringer, et P. Bond. Rumba, Salsa, Samba and Tango in the magnetosphere - The Cluster quartet's first year in space. *ESA bulletin*, (107), Aug. 2001.
- [Fie02] H. Fiedler, G. Krieger, F. Jochim, M. Kirschner, et A. Moreira. Analysis of satellite configurations for spaceborne SAR interferometry. *Proceedings of the international workshop on formation flying missions and technologies, Toulouse, France*, Oct. 2002.
- [Fol97] D. Folta, D. Quinn, J. Bristow, et K. Hartman. Enhanced formation flying for the new millenium and mission to planet earth programs. *Proceedings of the IAF Congress*, 1997.
- [Hub84] S. Hubert et J. Swale. Stationkeeping of a constellation of geostationary communications satellites. *AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Seattle, Washington, Etats Unis*, Aug. 1984.
- [Ina02] G. Inalhan, M. Tillerson, et J.P. How. Relative dynamics and control of spacecraft formations in eccentric orbits. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Jan. 2002.
- [Inn93] C.R. Innes. Autonomous proximity manoeuvring using artificial potential functions. *ESA Journal*, 17, 1993.
- [Kap99] V. Kapila, A.G. Sparks, B. James, et Q. Yan. Spacecraft formation flying : dynamics and control. *Proceedings of the ACC*, Jun. 1999.
- [Kem02] S. Kemble et B. Swinburne. Design of satellite formations in low earth orbit and deep space. *IAF World Congress, Houston, Texas, Etats-Unis*, Oct. 2002.
- [Kir01] M. Kirschner, O. Montenbruck, et S. Bettadpur. Flight dynamics aspects of the GRACE formation flying. *Proceedings of the second international workshop on constellations and formation flying, Haïfa, Israel*, Feb. 2001.
- [Kir03] M. Kirschner. First results on the implementation of the GRACE formation. *Proceedings of the third international workshop on constellations and formation flying, Pise, Italie*, Feb. 2003.
- [Kon98] E.M. Kong et D.W. Miller. Optimization of separated spacecraft interferometer trajectories in the absence of a gravity-well. *SPIE Conference on Astronomical Interferometry*, Mar. 1998.

- [Kon99] E.M.C. Kong, D.W. Miller, et R.J. Sedwick. Exploiting orbital dynamics for aperture synthesis using distributed satellite systems : application to a visible Earth imager system. *Journal of the Astronautical Sciences*, 47(1-2) :53–75, 1999.
- [Kra01] H.J. Kramer. Observation of the earth and its environment : survey of missions and sensors. *Springer Editions*, Aug. 2001.
- [Lab78] A. Labeyrie. Stellar interferometry methods. *Annual Review on Astrophysics*, 16, 1978.
- [Lag02] K. Lagadec, J. Lebas, et F. Ankersen. GNC system for the control of the Darwin free-flying interferometer. *Proceedings of the International Workshop on Formation Flying Missions and Technologies, Toulouse, France*, Oct. 2002.
- [Law63] D.F. Lawden. Optimal trajectories for space navigation. *London Butterworths*, 1963.
- [Li00] S. Li, R. Mehra, R. Smith, et R. Beard. Multi-spacecraft trajectory optimization and control using genetic algorithm technique. *IEEE Aerospace Conference*, 2000.
- [Mac02] C.A. MacLaughlin, K.T. Alfriend, et T.A. Lovell. Analysis of reconfiguration algorithm for formation flying experiments. *Proceedings of the International Workshop on Formation Flying Missions and Technologies, Toulouse, France*, Oct. 2002.
- [Mar83] J.P. Marec. Trajectoires spatiales optimales. *Support de cours de SUPAERO*, 1983.
- [Mar02] V. Martinot, A. Francastel, A. Boutonnet, P. Brousse, et E. Lansard. Combined formation and station-keeping strategies for lead-trail formation flying. *IAF World Congress, Houston, Texas, Etats-Unis*, Oct. 2002.
- [Mar03a] V. Martinot, A. Boutonnet, P. Brousse, H. Sainct, et P.V. Ballmoos. Orbit control of max, a new concept of gamma ray telescope. *Third International Workshop on Constellations and Formation Flying, Pise, Italie*, Feb. 2003.
- [Mar03b] V. Martinot, A. Boutonnet, P. Brousse, H. Sainct, et P.Von Ballmoos. Formation keeping of Max, a new concept of gamma ray telescope. *54th IAF annual congress*, Oct. 2003.
- [Mas98] D.H. Massonet. Dispositif d'interférométrie radar utilisant des satellites. *Demande de brevet d'invention. Institut national de la propriété industrielle*, Mai 1998.
- [Mel00] R.G. Melton. Time-explicit representation of relative motion between elliptical orbits. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Jul. 2000.
- [Mil01] M.B. Milam, N.Petit, et R.M. Murray. Constrained trajectory generation for micro-satellite formation flying. *AIAA Paper 4030*, 2001.
- [Mis02] D. Mishne. Formation control of LEO satellites subject to drag variations and J2 perturbations. *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, Monterey, Californie, Etats Unis*, Aug. 2002.
- [Nas03] Nasa. Presentation du projet Terrestrial Planet Finder. 2003. Site Web [http://planetquest.jpl.nasa.gov/TPF/tpf\\_index.html](http://planetquest.jpl.nasa.gov/TPF/tpf_index.html).
- [Pal99] G.B. Palmerini. Guidance strategies for satellite formations. *AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*, Aug. 1999.
- [Pon64] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyansky, R.V. Gamkrelidze, et E.F. Mishenko. The mathematical theory of optimal processes. *Pergamon press Ltd., Londres*, 1964.
- [Pru70] J.E. Prussing. Optimal two- and three-impulse fixed-time rendezvous in the vicinity of a circular orbit. *AIAA Journal*, 8(7), 1970.

- [Ric01] A. Richards, T. Schouwenaars, J.P. How, et E. Feron. Spacecraft trajectory planning with avoidance constraints using mixed-integer linear programming. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 25(4), Jul. 2001.
- [Rob99] A. Robertson, G. Inalhan, et J.P. How. Spacecraft formation flying control design for the Orion mission. *AIAA Paper 4266*, 1999.
- [Sab01] C. Sabol, R. Burns, et C.A. McLaughlin. Satellite formation flying design and evolution. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 38(2), Mar.-Apr. 2001.
- [Sch01] H. Schaub et K.T. Alfriend. Impulsive feedback control to establish specific mean orbit elements of spacecraft formations. *Journal of Guidance, Navigation and Control*, 24(4) :739–745, Jul.-Aug. 2001.
- [Sch02] D.P. Scharf, F.Y. Hadaegh, et B.H. Kang. A survey of spacecraft formation flying guidance. *International Symposium on Formation Flying Missions and Technologies, Toulouse, France*, Oct. 2002.
- [Sed98] R.J. Sedwick, E.M.C. Kong, et D.W. Miller. Exploiting orbital dynamics and micro-propulsion for aperture synthesis using distributed satellite systems : Applications to Techsat21. *AIAA Paper 5289*, 1998.
- [Swi01] D. Swinburne, M. Davidson, et S. Kemble. Control of close formations in low earth orbit. *52nd IAF Congress, Toulouse, France*, Oct. 2001.
- [Til02] M. Tillerson et J.P. How. Advanced guidance algorithms for spacecraft formation-keeping. *Proceedings of the American Control Conference*, May 2002.
- [Tsc65] J. Tschauner et P. Hempel. Rendezvous zu einem in elliptischer bahn umlaufenden ziel. *Astronautica Acta*, 11(2), 1965.
- [Vac00] A. Vacaresse et P. Brousse. Interferometric wheel orbit control. *International Symposium on Space Dynamics, Biarritz, France*, Jun. 2000.
- [Vad01a] S.R. Vadali, S.S. Vaddi, et K.T. Alfriend. A new concept for controlling formation flying satellite constellations. *AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*, Feb. 2001.
- [Vad01b] S.S. Vaddi, S.R. Vadali, et K.T. Alfriend. Formation flying : accomodating nonlinear and eccentricity perturbations. *Advances in Astronautical Sciences*, 112 :985–1004, 2001.
- [Vad03] S.S. Vaddi, K.T. Alfriend, et S.R. Vadali. Sub-optimal formation establishment and reconfiguration using impulsive thrust. *AAS-AIAA Astrodynamics Specialists Conference, Big Sky, Montana, Etats Unis*, Aug. 2003.
- [Vai03] L. Vaillon, K. Lagadec, et J. Lebas. Precision formation flying design for the Smart-2 and Smart-3 technology demonstration missions. *Proceedings of the Third International Workshop on Satellite Constellations and Formation Flying, Pise, Italie*, Feb. 2003.
- [Vas85] R.H. Vassar et R.B. Sherwood. Formationkeeping for a pair of satellites in a circular orbit. *Journal of Guidance, Navigation and Control*, 8(2), Mar. 1985.
- [Vin03] M.A. Vincent et C. Salcedo. The insertion of Cloudsat into the A-Train constellation. *AAS-AIAA Astrodynamics Specialists Conference, Big Sky, Montana, Etats Unis*, Aug. 2003.
- [Von03] P. VonBallmoos et Al. MAX - A gamma-ray lens for nuclear astrophysics. *SPIE Annual Meeting, San Diego, Californie, Etats Unis*, Aug. 2003.

- [Wie01] W.E. Wiesel. The dynamics of relative satellite motion. *AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Santa Barbara, Californie, Etats Unis*, Feb. 2001.
- [Zar87] O. Zarrouati. Trajectoires spatiales. *Cépadues Editions, ISBN No. 2.85428.166.7*, 1987.