

THÈSE

présentée en vue de
l'obtention du titre de

DOCTEUR

de

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE**

**ÉCOLE DOCTORALE : Énergétique et dynamique des fluides
SPÉCIALITÉ : Aéroacoustique**

par

Angelot MINOTTI

Contribution à la mesure aéroacoustique par vélocimétrie laser Doppler

Soutenue le 15 décembre 2004 devant le jury :

MM.	M. BRUNEAU	Président
	P. MILLAN	Co-directeur de thèse
	M. RIETHMULLER	Rapporteur
	F. SIMON	Co-directeur de thèse
	J.-C. VALIÈRE	Rapporteur
MM.	F. RAFFIN	Membre invité
	J. JULLIARD	Membre invité

Angelot MINOTTI

Contribution à la mesure aéroacoustique par
vélocimétrie laser Doppler

À mes parents...

Remerciements

Cette thèse aura certainement été l'aboutissement d'un intense travail personnel, mais aussi le fruit de nombreuses rencontres enrichissantes.

Mes premiers remerciements sont adressés à Monsieur Jean COUSTEIX, directeur du Département Modèles pour l'Aérodynamique et l'Énergétique (DMAE), pour m'avoir accueilli au sein de son département et pour avoir corrigé certaines parties de mes travaux.

Je tiens à remercier respectueusement Messieurs les Rapporteurs, les Professeurs Michel RIETHMULLER et Jean-Christophe VALIÈRE, pour avoir jugé mes travaux de thèse, Monsieur le Professeur Michel BRUNEAU pour avoir accepté la présidence du jury et Messieurs Jacques JULLIARD de la société SNECMA et Fabrice RAFFIN de la société AIRBUS pour avoir répondu favorablement à l'invitation au jury.

Je remercie aussi chaleureusement mes codirecteurs de thèse, Messieurs Frank SIMON et Pierre MILLAN, pour m'avoir accompagné et conseillé tout au long de cette aventure. Frank, ton implication personnelle en cette fin de thèse m'a grandement touché.

J'adresse mes remerciements à Simone PAUZIN, ancien chef de l'unité AéroThermique et Acoustique (ATAC), pour m'avoir toujours soutenu tant dans mes travaux que durant des périodes difficiles.

Je remercie beaucoup Daniel BIRON pour ses conseils d'expérimentateur, son aide, mais aussi de m'avoir fait découvrir l'acoustique «physique». Effectivement, un analyseur spectral, ça peut être lourd...

Présent lors de mes débuts, il me tient à cœur de remercier Jean-François PIET pour ses qualités professionnelles et humaines. Merci beaucoup pour ce que tu m'as appris et pour les moments de rire.

Je pense que cette thèse n'aurait pas été ce qu'elle est si ma curiosité ne s'était pas arrêtée sur certains aspects théoriques de l'acoustique. Et ceci, je le dois à Jean-Philippe BRAZIER. Un grand merci pour tes conseils avisés et pour le temps que tu m'as accordé lors de discussions essentielles pour ces travaux.

Un grand merci aussi à Philippe REULET et Francis MICHELI. Il est instructif et agréable d'être à vos côtés.

Puis, il y a les copains qui partagent avec vous la même embarcation : les «ceux-qui-étaient-déjà-à-bord», Matthieu NOËL, Stéphane PERRIN-DECROUX (Steph, tu es trop loin maintenant, reviens...) et Marie-Laure TOULOUSE, les «ceux-qui-sont-montés-à-bord-en-même-temps», Anne HOORNAERT et Rémi LOUBAT, le «celui-qui-a-déjà-navigué-mais-qui-continue-un-peu», Nicolas SCHAEFFER. Et il y a aussi les «ceux-qui-viennent-de-monter-à-bord», Emmanuel JULLIARD, Maud LAVIEILLE et Florian LONGUETEAU, à qui je souhaite un agréable voyage.

Anne Sophie, ma «petite AnneSo à moi», je t'embrasse tendrement pour ton soutien et ta patience sans faille (et il en a fallu...). Mes très chers parents, vous m'avez aidé par tous vos moyens et tout le temps. Vos vies respectives ont été marquées par la difficulté très tôt. Sachez que je vous aime et vous épaulerai toujours.

Table des matières

Nomenclature	13
Introduction	17
1 Éléments théoriques sur la propagation acoustique en écoulement	19
1.1 Rappels sur l'obtention des équations d'ondes acoustiques en écoulement . . .	19
1.1.1 Rappels théoriques sur le mouvement d'un fluide idéal	19
1.1.1.1 Descriptions eulérienne et lagrangienne d'une grandeur physique	19
1.1.1.2 Équations de la mécanique d'un fluide idéal	20
1.1.2 Perturbations des équations de la mécanique des fluides	21
1.1.2.1 Perturbations eulériennes	21
1.1.2.2 Perturbations lagrangiennes : acoustique de Galbrun	23
1.1.3 Sur l'intensité acoustique	26
1.1.4 Sur la notion d'impédance acoustique	27
1.1.5 Sur la propagation guidée	28
1.1.5.1 Modes propres de conduite et coupure de mode	29
1.1.5.2 Cas du mode plan : confrontation des définitions de l'intensité en acoustique de Galbrun	30
1.2 Formulation non linéaire exacte de l'acoustique de Galbrun	32
1.2.1 Définitions des états de référence et perturbé	33
1.2.2 Perturbation d'une grandeur physique	35
1.2.3 Équation d'évolution des perturbations d'une grandeur physique . . .	37
1.2.3.1 Expression de la perturbation de masse volumique	39
1.2.3.2 Équation d'évolution non linéaire de la perturbation d'une grandeur massique	40
1.2.3.3 Équations linéarisées	40
1.2.4 Application au cas du fluide idéal en écoulement	42
1.2.4.1 Formules de Galbrun non linéaires	42
1.2.4.2 Bilan d'énergie	44
1.3 Conclusion	49
2 Mesure des vitesse et intensité acoustiques et caractérisation de matériaux absorbants : étude bibliographique	51
2.1 Sur la mesure de la vitesse acoustique	51
2.1.1 Fluide au repos	52
2.1.1.1 Mesure par microphones	52
2.1.1.2 Mesure par capteurs «fil chaud»	56
2.1.1.3 Mesure par capteurs «laser»	62

2.1.2	Fluide en mouvement	74
2.1.2.1	Mesure par microphones	74
2.1.2.2	Mesure par capteurs «fil chaud»	76
2.1.2.3	Mesure par capteurs «laser»	76
2.2	Sur la mesure d'intensité acoustique	78
2.2.1	Fluide au repos	78
2.2.1.1	Mesure par sonde à deux microphones	79
2.2.1.2	Mesure par utilisation conjointe de la vélocimétrie laser Doppler et d'un microphone	81
2.2.2	Fluide en mouvement	82
2.3	Sur la caractérisation expérimentale de matériaux absorbants en écoulement	84
2.3.1	Méthode « <i>in situ</i> »	84
2.3.2	Méthodes indirectes	85
2.3.3	Mesure par sonde 1D anémomètre fil chaud/microphone	86
2.4	Conclusion	87
3	Dispositifs expérimentaux pour la mesure aéroacoustique par vélocimétrie laser Doppler	89
3.1	Principe de fonctionnement de la chaîne de vélocimétrie laser Doppler utilisée	89
3.1.1	Chaîne de vélocimétrie laser Doppler	89
3.1.1.1	Composition	89
3.1.1.2	Le volume de mesure	90
3.1.1.3	L'ensemencement	91
3.1.1.4	Traitement du <i>burst</i> et obtention de la vitesse	92
3.1.2	Présentation de deux méthodes de traitement du signal vitesse	94
3.1.2.1	La <i>Slotting Technique</i>	94
3.1.2.2	La reconstruction par interpolation	95
3.1.2.3	Note quant au choix d'une méthode	96
3.1.3	Le rejet de la turbulence	96
3.1.4	Domaine d'application de la vélocimétrie laser Doppler pour la mesure aéroacoustique	97
3.1.4.1	Longueur d'onde et fréquence des signaux acoustiques	98
3.1.4.2	Méthode de traitement du signal	98
3.1.4.3	Rapport vitesse acoustique sur vitesse turbulente	99
3.1.4.4	Paramètres de l'IFA	99
3.2	Dispositifs expérimentaux	100
3.2.1	Soufflerie à retour basse vitesse	100
3.2.2	Banc aéro-thermo-acoustique	102
4	Expériences dans le cadre de la description eulérienne des perturbations acoustiques	109
4.1	Descriptions des approches	109
4.1.1	Approche par vélocimétrie laser Doppler seule	109
4.1.2	Approche par vélocimétrie laser Doppler et mesure microphonique	110
4.2	Expériences	111
4.2.1	Caractérisation de la turbulence de grille	111
4.2.2	Mesures d'impédance et intensité acoustiques	112
4.2.2.1	Mesures unidimensionnelles en écoulement peu rapide et en présence d'ondes planes	112

4.2.2.2	Mesures 2D en écoulement plus rapide	115
4.3	Conclusion	120
5	Expériences dans le cadre de la description lagrangienne des perturbations acoustiques	121
5.1	Obtention expérimentale du déplacement en acoustique linéaire de Galbrun .	121
5.1.1	Équations générales	121
5.1.2	Équations avec un écoulement de référence quasi 1D	122
5.2	Étude de faisabilité	123
5.3	Caractérisation d'un matériau absorbant	125
5.3.1	Résultats par méthode « <i>in situ</i> »	125
5.3.2	Perturbations eulériennes de vitesse et pression, impédance du <i>liner</i> .	126
5.3.3	Champs d'intensité	132
5.3.4	Note sur la définition de l'impédance	135
5.4	Conclusion	137
	Conclusion générale et perspectives	139
A	Démonstrations et développements divers	149
A.1	\tilde{f}_t réalise une bijection	149
A.2	Expression de $\det \tilde{\mathbf{F}}_t$	150
A.3	Expression de $\tilde{\mathbf{F}}_t^{-1}$	151
A.4	Dérivation de \mathcal{L}	153
A.5	Vérification du bilan d'énergie avec \mathcal{H} et \mathcal{S}	155
A.6	Vérification du bilan d'énergie aux ordres 1 et 2	158
A.7	Équivalence entre le bilan d'énergie à l'ordre 2 trouvé et celui d'Élias	159
B	Qualification acoustique du banc aéro-thermo-acoustique	161
C	Champs d'intensité par vélocimétrie laser Doppler	163
D	Sonde à deux microphones	167

Nomenclature

Symboles et fonctions mathématiques

Symboles divers

$a \triangleq b$ a est égal à b *par définition*

$a \equiv b$ a est identiquement égal à b

$a = \mathcal{O}(b)$ a est un grand «O» de b

Algèbre tensorielle

T	Scalaire
\mathbf{T}	Vecteur ou tenseur d'ordre supérieur ou égal à 2
$\mathbf{T}_{ijk\dots}$	Élément d'indice $ijk\dots$ du tenseur \mathbf{T}
\mathbf{G}	Tenseur métrique
\otimes	Produit tensoriel
$\bar{\otimes}$	Produit tensoriel contracté une fois
$\overset{\equiv}{\otimes}$	Produit tensoriel contracté deux fois
\mathbf{T}^T	Transposé du tenseur d'ordre 2 \mathbf{T}
$\text{Tr}(\mathbf{T})$	Trace du tenseur d'ordre 2 \mathbf{T}
$\det \mathbf{T}$	Déterminant du tenseur d'ordre 2 \mathbf{T}
$\Theta_n(\mathbf{T}), n = 1, 2, 3$	Invariant d'ordre n du tenseur d'ordre 2 \mathbf{T}
$[\mathbf{T}]$	Matrice associée au tenseur d'ordre 2 \mathbf{T}

Dans le cas du produit scalaire de deux vecteurs $\mathbf{u} \bar{\otimes} \mathbf{v}$, la notation classique $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ sera parfois utilisée.

Écriture complexe

i	Imaginaire pur $i^2 = -1$
Z^*	Complexe conjugué de Z
$ Z $	Module de Z
$\text{Re}(Z)$	Partie réelle de Z
$\text{Im}(Z)$	Partie imaginaire de Z

Opérateurs différentiels

Les opérateurs écrits avec l'indice _{ref} sont calculés sur l'espace des positions des particules de \mathcal{D} en configuration de référence. Les opérateurs sans indice sont calculés sur l'espace des positions des particules de \mathcal{D} en configuration perturbée.

$\frac{\partial}{\partial \cdot}$	Dérivée partielle
$\frac{d}{d \cdot}$	Dérivée ordinaire
d.	Différentielle
$\frac{D}{Dt}$	Dérivée particulaire par rapport au temps
div	Divergence d'un vecteur
div	Divergence d'un tenseur d'ordre supérieur ou égal à 2
grad	Gradient d'un scalaire, vecteur ou tenseur d'ordre supérieur ou égal à 2
rot	Rotationnel d'un vecteur ou tenseur d'ordre supérieur ou égal à 2

Variables d'un milieu continu

Variables générales

t	Variable de temps
\mathcal{D}	Domaine matériel assimilé à un milieu continu
Ω_t	Ensemble des positions des particules de \mathcal{D} à l'instant t
$\partial\Omega_t$	Frontière de Ω_t
m	Particule (élément de \mathcal{D})
\mathbf{x} ou M	Variable de position (élément de Ω_t)
$f_{t,t'}$	Transformation de \mathcal{D} entre les instants t et t'
$\boldsymbol{\xi}_{t,t'}$	Vecteur déplacement d'une particule de \mathcal{D} entre les instants t et t'
\mathbf{V}	Vecteur vitesse d'une particule de \mathcal{D}
ρ	Masse volumique
p	Pression thermodynamique
T	Température absolue
s	Entropie massique
u	Énergie interne massique
e	Énergie totale massique
$S_{\mathcal{A}}$	Source volumique de la grandeur physique \mathcal{A}
$\varphi_{\mathcal{A}}$	Flux de la grandeur physique \mathcal{A} à la frontière de \mathcal{D}
C_p	Chaleur spécifique à pression constante
C_v	Chaleur spécifique à volume constant
$r = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}$	Constante du gaz considéré dans la loi des gaz parfaits, définie comme le rapport de la constante des gaz parfaits $\mathcal{R} = 8.314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ sur la masse molaire \mathcal{M} du gaz considéré
γ	Rapport de C_p sur C_v

Perturbations

\mathcal{V}^{ref}	$\mathcal{V} = \Omega_t, f_{t,t'}, \mathbf{V}, \rho \dots$ pris dans l'état de référence de \mathcal{D}
\mathcal{V}	\mathcal{V} pris dans l'état perturbé de \mathcal{D}
A'	Perturbation eulérienne de la grandeur physique \mathcal{A}
\tilde{f}_t	Transformation perturbation de \mathcal{D} à l'instant t
$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$	Vecteur déplacement d'une particule de \mathcal{D} à l'instant t dû à la perturbation
\tilde{A}	Perturbation lagrangienne de \mathcal{A} telle qu'introduite par Galbrun
\hat{A}	Autre perturbation lagrangienne de \mathcal{A}
\mathcal{E}	Perturbation de l'énergie totale due à la perturbation lagrangienne
\mathcal{I}	Flux associé à \mathcal{E}
\mathcal{L}	Lagrangien du mouvement correspondant à \tilde{f}_t
\mathcal{H}	Énergie des perturbations lagrangiennes
\mathcal{S}	Flux associé à \mathcal{H}
E	Énergie des perturbations eulériennes
\mathbf{I}	Flux associé à E

S'il n'y a aucune ambiguïté, l'accent sur la perturbation d'une grandeur physique sera omis.

Variables spécifiques à la propagation acoustique

c^{ref}	Célérité des ondes acoustiques dans le milieu considéré
λ	Longueur d'onde
\mathbf{k}	Vecteur nombre d'onde
f	Fréquence
$\omega = 2\pi f$	Pulsation
$Z_{\mathbf{n}}$	Impédance acoustique d'une surface de normale \mathbf{n}
$Y_{\mathbf{n}} = \frac{1}{Z_{\mathbf{n}}}$	Admittance acoustique d'une surface de normale \mathbf{n}
$z^{\text{ref}} = \rho^{\text{ref}} c^{\text{ref}}$	Impédance spécifique du milieu considéré

Introduction

Ce travail s'inscrit dans la problématique d'une meilleure connaissance des phénomènes aéroacoustiques pouvant se rencontrer :

- en propagation guidée ;
- au sein de turbomachines ;
- en présence de matériaux absorbants ;

tant d'un point de vue théorique (modélisation, codes de calcul...) qu'expérimental (mesures en soufflerie...).

La propagation des ondes acoustiques en présence d'un écoulement quelconque est un problème encore difficile à traiter, tant par le calcul que par l'expérience. En pratique, l'écoulement est généralement supposé uniforme ou lentement variable. Lorsque ces hypothèses ne sont pas respectées, les équations d'Euler ou de Navier-Stokes, linéarisées ou non, permettent de décrire le mouvement. Seule le formalisme lagrangien utilisé dans la théorie de Galbrun permet d'exprimer, en écoulement de fluide idéal, toutes les grandeurs acoustiques (pression, intensité...) en petites perturbations, ceci en fonction du vecteur déplacement [8, 9, 17, 59, 65, 66]. De même, la notion d'impédance acoustique en présence d'un écoulement est encore sujette à discussion [2].

Sur le plan expérimental, une méthodologie de mesure pour obtenir l'intensité acoustique en présence d'un écoulement uniforme non turbulent a été développée [53] à partir de la représentation eulérienne classique des perturbations [10, 35, 50]. Cette quantité renseigne sur l'amplitude, la direction et le sens de propagation de l'énergie acoustique. Une sonde composée de 2 microphones parfaitement appariés en phase est utilisée afin de mesurer la perturbation acoustique de vitesse, ou vitesse acoustique, dans une direction, par approximation aux différences finies (sonde intensimétrique). Différentes études [37, 52, 62] ont été menées sur l'obtention de l'intensité acoustique à l'aide d'une sonde munie de plusieurs microphones placés au sein d'un écoulement supposé uniforme, de vitesse moyenne inférieure à 20 m.s^{-1} . Il s'avère que l'anisotropie de la propagation acoustique en écoulement ainsi que l'existence de turbulence sur les capteurs peuvent causer des erreurs importantes. La vitesse acoustique étant une petite quantité par rapport aux vitesses aérodynamiques (valeur moyenne et fluctuations turbulentes), cette technique manque de précision et est fortement intrusive.

Pour ces raisons, une autre voie consistant à employer la vélocimétrie laser Doppler a été entreprise [42, 47, 60, 61]. Destinée généralement à la mesure des vitesses moyennes et turbulentes, elle a servi, jusqu'à présent, à obtenir la perturbation de vitesse d'ondes acoustiques périodiques, ceci en présence d'un écoulement turbulent de vitesse moyenne inférieure à 20 m.s^{-1} et de taux de turbulence inférieur à 2%.

Ces résultats obtenus étant prometteurs, il est apparu intéressant d'approfondir l'application de la vélocimétrie laser Doppler à d'autres quantités acoustiques, telles que l'intensité ou l'impédance, et suivant les deux approches possibles des perturbations, eulérienne ou lagrangienne. Ainsi, ce travail de thèse propose :

- dans un premier chapitre, de rappeler les bases théoriques de la propagation linéaire en écoulement par les deux approches des perturbations et de montrer la pertinence de l'approche de Galbrun en développant une approche non linéaire exacte des perturbations lagrangiennes au sein d'un milieu continu, approche ensuite appliquée au cas linéaire pour un écoulement de fluide idéal ;
- de mener, dans un deuxième chapitre, une étude bibliographique sur la mesure de la vitesse acoustique, sur la mesure de l'intensité et sur la caractérisation de matériaux absorbants ;
- de présenter, dans un troisième chapitre, les moyens expérimentaux mis en œuvre en vue de réaliser des mesures aéroacoustiques suivant les deux approches des perturbations, notamment un banc de mesure conçu spécialement pour la mesure aéroacoustique ;
- dans un quatrième chapitre, de montrer les résultats de mesures en soufflerie basse vitesse (nombre de Mach inférieur à 0.05) suivant la description eulérienne des perturbations ;
- et finalement, dans un cinquième chapitre, de montrer les résultats de mesures basées sur la description lagrangienne des perturbations et menées à plus haute vitesse (nombre de Mach de 0.1) sur le banc réalisé.

Chapitre 1

Éléments théoriques sur la propagation acoustique en écoulement

Le cadre du chapitre porte sur la propagation d'ondes acoustiques au sein d'un fluide en écoulement. Le fluide est supposé parfait, c'est-à-dire non visqueux et ne diffusant pas la chaleur. Le fluide est monophasique et aucune réaction chimique n'a lieu. De plus, comme les applications expérimentales concernent la propagation dans l'air, l'équation d'état du fluide sera celle des gaz parfaits. Ce cadre est suffisamment général pour notre étude.

Ainsi les équations de la mécanique des fluides pour un fluide idéal sont tout d'abord rappelées puis les perturbations des variables décrivant le mouvement du fluide sont introduites. Pour cela, deux façons de concevoir les perturbations sont présentées, une approche dite eulérienne et une autre dite lagrangienne.

1.1 Rappels sur l'obtention des équations d'ondes acoustiques en écoulement

Cette section renvoie à la littérature concernant la théorie de la mécanique des milieux continus [22, 23] et de l'acoustique [27, 41].

1.1.1 Rappels théoriques sur le mouvement d'un fluide idéal

1.1.1.1 Descriptions eulérienne et lagrangienne d'une grandeur physique

Soit \mathcal{D} un domaine matériel assimilé à un milieu continu. Ce milieu continu est en mouvement, avec t_0 une origine arbitraire des temps. À un instant $t \geq t_0$, le milieu continu occupe l'espace Ω_t . Soit $m \in \mathcal{D}$ une particule du milieu continu qui à t_0 se trouve en $\mathbf{x}_0 \in \Omega_{t_0}$ et qui à t se trouve en $\mathbf{x} \in \Omega_t$. Soit \mathcal{A} une grandeur physique permettant de décrire le milieu continu considéré (par exemple la masse, la température...). \mathcal{A} est définie pour l'ensemble des particules.

L'évolution au cours du temps de la grandeur physique \mathcal{A} peut être décrite de deux façons, les descriptions eulérienne et lagrangienne. La description eulérienne est la donnée de la valeur de \mathcal{A} à chaque instant t et pour une position \mathbf{x} fixée d'avance, notée $A(\mathbf{x}, t)$. Ainsi au cours du temps, un observateur placé en \mathbf{x} verra plusieurs particules. La description lagrangienne, quant à elle, est la donnée de la valeur de \mathcal{A} à chaque instant t et pour une particule m fixée d'avance. Dire que m est fixée d'avance revient en fait à l'identifier par sa position à l'instant t_0 . Ainsi la valeur de \mathcal{A} est notée en description lagrangienne $A(\mathbf{x}_0, t)$ et un observateur qui

suit la particule m verra plusieurs positions au cours du temps¹.

La dérivée par rapport au temps de la grandeur physique \mathcal{A} pour la particule m , dite dérivée particulaire et notée $\frac{DA}{Dt}$, s'écrit en description lagrangienne

$$\frac{\partial A}{\partial t}(\mathbf{x}_0, t)$$

qui est la dérivée ordinaire de $A(\mathbf{x}_0, t)$ par rapport au temps car \mathbf{x}_0 est fixé, alors qu'en description eulérienne, elle s'écrit

$$\frac{\partial A}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{grad}A(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$$

où $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ est la vitesse en description eulérienne de la particule se trouvant en \mathbf{x} à l'instant t .

1.1.1.2 Équations de la mécanique d'un fluide idéal

Ces équations traduisent les bilans de masse, de quantité de mouvement et d'énergie totale, auxquels se rajoute l'hypothèse de fluide parfait. Ces bilans ne dépendent pas de la description choisie pour les grandeurs physiques. Seule l'écriture des équations associées en dépend. La description eulérienne est la forme la plus courante pour décrire localement le mouvement d'un fluide. Sous forme conservative, ces équations sont :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = \mathbf{div}(-p \mathbf{G}) + \mathbf{f}_v \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho e \mathbf{V}) = \mathbf{div}(-p \mathbf{V}) + \mathbf{f}_v \otimes \mathbf{V} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho u \mathbf{V}) = -p \mathbf{div} \mathbf{V} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho s \mathbf{V}) = 0 \tag{1.5}$$

où ρ est la masse volumique, \mathbf{V} le vecteur vitesse, p la pression, u l'énergie interne massique, s l'entropie massique et $e = u + \frac{1}{2} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$ l'énergie totale massique. \mathbf{f}_v correspond à l'ensemble des forces volumiques extérieures pouvant agir sur le milieu fluide. (1.4) et (1.5) sont obtenues à partir de (1.2) et (1.3). Une autre forme dite non conservative est obtenue grâce à (1.1) :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \mathbf{div} \mathbf{V} = 0 \tag{1.6}$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{div}(-p \mathbf{G}) + \mathbf{f}_v \tag{1.7}$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \mathbf{div}(-p \mathbf{V}) + \mathbf{f}_v \otimes \mathbf{V} \tag{1.8}$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -p \mathbf{div} \mathbf{V} \tag{1.9}$$

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \tag{1.10}$$

¹En toute rigueur nous ne devrions pas écrire $A(\mathbf{x}_0, t)$ et $A(\mathbf{x}, t)$ mais $A^L(\mathbf{x}_0, t)$ et $A^E(\mathbf{x}, t)$, A^L et A^E étant deux fonctions distinctes, même si les valeurs sont identiques. Toutefois pour ne pas alourdir encore plus l'écriture, le choix de la description est implicitement donné par l'argument de A , (\mathbf{x}_0, t) ou (\mathbf{x}, t) .

La différentielle de l'énergie interne s'exprime par :

$$du = Tds - pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (1.11)$$

En introduisant en plus l'hypothèse de gaz parfait, il faut rajouter :

$$\frac{p}{\rho} = rT \quad (1.12)$$

r étant la constante du gaz considéré. Pour un gaz idéal, C_v et C_p sont constantes. Toutes les hypothèses citées impliquent les résultats thermodynamiques suivants :

$$u - u_0 = C_v T \quad (1.13)$$

$$s - s_0 = C_v \ln\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) \quad (1.14)$$

où C_v est la chaleur spécifique à volume constant et γ est le rapport des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant. u_0 et s_0 sont respectivement l'énergie interne et l'entropie de référence.

1.1.2 Perturbations des équations de la mécanique des fluides

Les ondes acoustiques sont des perturbations des variables décrivant le fluide qui se propagent dans le milieu fluide. Ceci signifie qu'il faut maintenant décomposer chaque variable comme la somme d'une variable de référence et d'une perturbation. Deux concepts de perturbations sont ainsi possibles. La première approche, la plus classique, consiste à adopter une description eulérienne de la perturbation et la deuxième une description lagrangienne. Elles sont maintenant décrites et appliquées aux équations précédentes.

1.1.2.1 Perturbations eulériennes

Soit \mathcal{A} une des grandeurs physiques décrivant le fluide (scalaire, vecteur, tenseur d'ordre 2...) en description eulérienne. Soit un observateur placé en une position donnée, par exemple \mathbf{x}^{ref} . Si l'écoulement est en configuration de référence, c'est-à-dire s'il n'est pas perturbé, l'observateur voit au cours du temps plusieurs particules et relève la valeur $A^{\text{ref}}(\mathbf{x}^{\text{ref}}, t)$ de \mathcal{A} . Si l'écoulement est perturbé, l'observateur voit au cours du temps plusieurs particules différentes du cas précédent et relève cette fois-ci la valeur $A(\mathbf{x}^{\text{ref}}, t)$ de \mathcal{A} . La perturbation eulérienne A' est définie par :

$$\forall \mathbf{x}^{\text{ref}} \in \Omega_t^{\text{ref}} \text{ et } t \geq t_0, \quad A(\mathbf{x}^{\text{ref}}, t) \triangleq A^{\text{ref}}(\mathbf{x}^{\text{ref}}, t) + A'(\mathbf{x}^{\text{ref}}, t) \quad (1.15)$$

La perturbation A' est considérée comme petite devant la valeur de référence A^{ref} et nulle en moyenne. La moyenne considérée en pratique est la moyenne temporelle sur un temps suffisamment long par rapport aux constantes de temps des phénomènes physiques observés. Mais ce n'est pas la seule définition de la moyenne. Toutefois, l'hypothèse de variables ergodiques est toujours posée, permettant alors de dire que moyenne temporelle et moyenne d'ensemble convergent toutes deux vers l'espérance mathématique.

(1.15) est appliquée aux équations vues section 1.1.1.2 page ci-contre. Nous allons dans un premier temps aborder le cas de l'écoulement de référence uniforme, avec le cas particulier de l'écoulement de référence nul. Dans un second temps, nous discuterons du cas de l'écoulement de référence quelconque.

1.1.2.1.1 Écoulement de référence uniforme : Les équations de conservation de la masse (1.6), de la quantité de mouvement (1.7) et d'entropie (1.10), sous l'hypothèse d'écoulement de référence uniforme, impliquent que $\rho^{\text{ref}} = \text{Cste}$, $p^{\text{ref}} = \text{Cste}$ et $s^{\text{ref}} = \text{Cste}$. De plus l'ensemble des forces volumiques extérieures \mathbf{f}_v sera considéré comme nul². Ce cas de propagation étant bien renseigné dans la littérature [27, 41], nous en viendrons donc directement aux équations utiles. En ne gardant que les termes d'ordre 1 en ρ' , \mathbf{V}' , p' et s' , les équations linéarisées de (1.6), (1.7) et (1.10) sont les suivantes :

$$\frac{d_{\text{ref}}\rho'}{dt} + \rho^{\text{ref}} \text{div}_{\text{ref}} \mathbf{V}' = 0 \quad (1.16)$$

$$\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \mathbf{V}'}{dt} = -\mathbf{grad}_{\text{ref}} p' \quad (1.17)$$

$$\frac{d_{\text{ref}} s'}{dt} = 0 \quad (1.18)$$

où $\frac{d_{\text{ref}}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{grad}_{\text{ref}} \cdot \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}}$ est la dérivée convective sur Ω_t^{ref} . (1.18) avec (1.14) permet d'écrire la fameuse relation :

$$p' = c^{\text{ref}2} \rho' \quad (1.19)$$

où $c^{\text{ref}2} = \gamma \frac{p^{\text{ref}}}{\rho^{\text{ref}}}$ est le carré de la célérité des ondes. Une conséquence forte de l'hypothèse d'écoulement de référence uniforme est que les opérateurs de dérivation spatiale et $\frac{d_{\text{ref}}}{dt}$ commutent. Ainsi $\frac{d_{\text{ref}}}{dt}(1.16) - \text{div}_{\text{ref}}(1.17)$ avec (1.19) donne l'équation de propagation convectée portant sur p' :

$$\boxed{\frac{d_{\text{ref}}^2 p'}{dt^2} - c^{\text{ref}2} \Delta_{\text{ref}} p' = 0} \quad (1.20)$$

Dans le cas où la dépendance temporelle de p' est harmonique, c'est-à-dire $\exists \mathcal{P}' \in \mathbb{C}$ tel que :

$$p'(\mathbf{x}^{\text{ref}}, t) = \text{Re} (\mathcal{P}'(\mathbf{x}^{\text{ref}}) e^{i\omega t}) \quad (1.21)$$

avec ω la pulsation, et où l'écoulement de référence est porté, par exemple, par \mathbf{e}_1 de la base physique, (1.20) donne l'équation d'Helmholtz :

$$\boxed{\Delta_{\text{ref}} \mathcal{P}' - M^{\text{ref}2} \frac{\partial^2 \mathcal{P}'}{\partial x_1^2} - 2ik^{\text{ref}} M^{\text{ref}} \frac{\partial \mathcal{P}'}{\partial x_1} + k^{\text{ref}2} \mathcal{P}' = 0} \quad (1.22)$$

où $M^{\text{ref}} = \frac{V_1^{\text{ref}}}{c^{\text{ref}}}$ avec $\mathbf{V}^{\text{ref}} = V_1^{\text{ref}} \mathbf{e}_1$, et $k^{\text{ref}} = \frac{\omega}{c^{\text{ref}}}$.

Une autre grandeur intéressante est l'énergie des perturbations E , appelée énergie acoustique. Elle s'exprime comme une fonction quadratique en p' et \mathbf{V}' . Un flux \mathbf{I} , appelé vecteur intensité acoustique, lui est associé. Leurs expressions sont [10] :

$$\boxed{E = \frac{1}{2} \left(\rho^{\text{ref}} \mathbf{V}' \bar{\otimes} \mathbf{V}' + \frac{p'^2}{\rho^{\text{ref}} c^{\text{ref}2}} \right) + \frac{\mathbf{V}' \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}}}{c^{\text{ref}2}} p'} \quad (1.23)$$

²Aucune source n'est introduite.

$$\mathbf{I} = \left(p' + \rho^{\text{ref}} \mathbf{V}' \otimes \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) \left(\mathbf{V}' + \frac{p'}{\rho^{\text{ref}} c^{\text{ref}2}} \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) \quad (1.24)$$

Ces expressions seront appelées par la suite expressions classiques ou de Cantrell et Hart, auteurs de la référence [10]. En dehors des sources, ces quantités vérifient l'équation de conservation suivante :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \text{div}_{\text{ref}} \mathbf{I} = 0 \quad (1.25)$$

La limite $\|\mathbf{V}^{\text{ref}}\| \rightarrow 0$ redonne les équations de l'acoustique classique³ :

– l'équation de propagation

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^{\text{ref}2} \Delta_{\text{ref}} p' = 0 \quad (1.26)$$

– l'équation d'Helmholtz

$$\Delta_{\text{ref}} \mathcal{P}' + k^{\text{ref}2} \mathcal{P}' = 0 \quad (1.27)$$

– l'énergie et le vecteur intensité

$$E = \frac{1}{2} \left(\rho^{\text{ref}} \mathbf{V}' \otimes \mathbf{V}' + \frac{p'^2}{\rho^{\text{ref}} c^{\text{ref}2}} \right) \quad (1.28)$$

$$\mathbf{I} = p' \mathbf{V}' \quad (1.29)$$

1.1.2.1.2 Écoulement de référence quelconque : Comme le rappelle Élias [17], il n'existe pas d'équation de propagation en écoulement de référence quelconque d'une perturbation eulérienne d'une grandeur physique. Le cas le plus élaboré est celui d'un écoulement de référence stationnaire continûment stratifié pour lequel la perturbation de pression vérifie l'équation de Lilley. Pour ce qui concerne l'énergie et le flux d'énergie des perturbations, les expressions (1.23) et (1.24) vérifient aussi le bilan hors sources (1.25) :

- en écoulement de référence potentiel ;
- ou lorsque les échelles de variation de l'écoulement de référence sont bien plus grandes que celles des perturbations (approximation géométrique).

En dehors de ces cas, (1.23) et (1.24) ne vérifient un bilan d'énergie qu'après introduction d'un terme source qui n'est théoriquement pas acceptable. Plusieurs travaux ont été publiés sur l'obtention d'un bilan d'énergie en écoulement de référence quelconque à l'aide des perturbations eulériennes [35, 50, 54, 55]. Mais ils aboutissent tous à l'introduction d'un terme source disparaissant dans les cas cités de propagation. Afin de prétendre à la généralité, l'approche eulérienne des perturbations semble donc conduire à une impasse. Mais il existe une deuxième approche permettant de parvenir à ce but, l'approche lagrangienne. Elle est maintenant présentée.

1.1.2.2 Perturbations lagrangiennes : acoustique de Galbrun

Ce qui suit s'appuie sur les travaux précédemment publiés [8, 9, 17, 59, 65, 66]. Soit m une particule du fluide considéré, en écoulement quelconque. Si elle se déplaçait le long de sa trajectoire en configuration de référence, c'est-à-dire si l'écoulement n'était pas perturbé, elle se trouverait en \mathbf{x}^{ref} à l'instant t . Comme l'écoulement est perturbé, la particule se trouve en \mathbf{x} au même instant t (FIG. 1.1 page suivante).

³Équations linéaires et milieu homogène au repos.

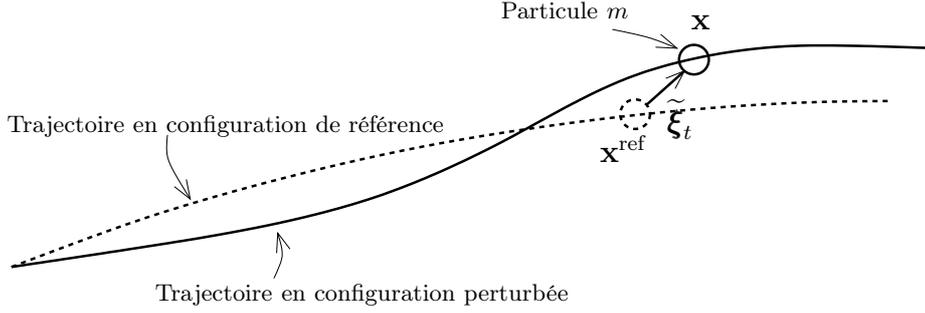


FIG. 1.1: Illustration de la perturbation au sens introduit par Galbrun.

L'idée de Galbrun⁴ est de définir la perturbation pour une particule donnée et non comme précédemment pour une position donnée. Soit \mathcal{A} une des grandeurs physiques décrivant le fluide (scalaire, vecteur, tenseur d'ordre 2...). Sa valeur pour la particule m est donnée en description eulérienne⁵. Ainsi la définition de la perturbation par Galbrun permet d'écrire :

$$\boxed{\forall m \in \mathcal{D} \text{ et } t \geq t_0, \quad A(\mathbf{x}, t) \triangleq A^{\text{ref}}(\mathbf{x}^{\text{ref}}, t) + \tilde{A}(\mathbf{x}^{\text{ref}}, t)} \quad (1.30)$$

où A^{ref} est la valeur de référence, c'est-à-dire non perturbée de \mathcal{A} , A la valeur perturbée de \mathcal{A} et \tilde{A} la perturbation de \mathcal{A} . Aussi le vecteur déplacement de la particule m dû à la perturbation est défini à l'instant t par :

$$\boxed{\tilde{\xi}_t \triangleq \mathbf{x} - \mathbf{x}^{\text{ref}}} \quad (1.31)$$

$\tilde{\xi}_t$ est considéré comme petit devant le déplacement de la particule m le long de sa trajectoire de référence et nul en moyenne. De même, la perturbation \tilde{A} est petite devant A^{ref} et nulle en moyenne. La relation entre les perturbations eulériennes et lagrangiennes est à l'ordre 1 en $\|\tilde{\xi}_t\|$:

$$\boxed{\tilde{A} = A' + \mathbf{grad}_{\text{ref}} A^{\text{ref}} \otimes \tilde{\xi}_t} \quad (1.32)$$

Les équations (1.1), (1.2), (1.5) et (1.14) avec un écoulement de référence quelconque sont perturbées au sens de (1.30) et écrites à l'ordre 1 des perturbations. Par rapport à l'approche eulérienne des perturbations, la simple substitution de $A(\mathbf{x}, t)$ par l'expression (1.30) dans les équations de conservation en configuration perturbée ne suffit pas. En effet l'approche lagrangienne se faisant à particule donnée, les opérateurs de dérivation spatiale sont eux aussi perturbés :

$$\frac{\widetilde{D}A}{Dt} = \frac{d_{\text{ref}} \tilde{A}}{dt} \quad (1.33)$$

et

$$\widetilde{\mathbf{grad}} A = \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{A} - \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\xi}_t \otimes \mathbf{grad}_{\text{ref}} A^{\text{ref}} \quad (1.34)$$

⁴Il l'introduisit en 1930.

⁵Poirée [65] parle de description mixte eulérienne - lagrangienne car \mathcal{A} est perturbée pour une particule donnée, c'est-à-dire en description lagrangienne, et la valeur de la perturbation est donnée en description eulérienne, en fonction des coordonnées de la configuration de référence.

La relation (1.33) est exacte alors que (1.34) est à l'ordre 1. L'équation de Galbrun est ainsi obtenue :

$$\boxed{\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}^2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt^2} = \mathbf{grad}_{\text{ref}} \left(c^{\text{ref}2} \rho^{\text{ref}} \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right) + \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} - \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}}} \quad (1.35)}$$

Cette équation vectorielle ne porte que sur $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$ du moment que l'écoulement de référence est connu. Les perturbations de vitesse, masse volumique et pression s'expriment à partir de $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$ par :

$$\boxed{\tilde{\mathbf{V}} = \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt}} \quad (1.36)$$

$$\boxed{\tilde{\rho} = -\rho^{\text{ref}} \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t} \quad (1.37)$$

$$\boxed{\tilde{p} = c^{\text{ref}2} \tilde{\rho}} \quad (1.38)$$

La connaissance de $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$ est donc suffisante pour connaître toutes les autres perturbations en présence d'un écoulement quelconque. C'est tout l'intérêt de l'approche de Galbrun. Avec l'hypothèse supplémentaire d'écoulement de référence stationnaire, Élias [17] a trouvé de façon heuristique un agrangien L permettant de retrouver l'équation de Galbrun grâce au principe d'Hamilton et surtout d'obtenir une densité d'énergie H et un flux \mathbf{S} :

– vérifiant hors sources

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial t} + \text{div}_{\text{ref}} \mathbf{S} = 0} \quad (1.39)$$

– redonnant bien l'énergie (1.23) et le vecteur intensité (1.24) dans le cadre de l'acoustique géométrique.

Ce lagrangien est :

$$\boxed{L = \frac{1}{2} \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\tilde{p}^2}{\rho^{\text{ref}} c^{\text{ref}2}} - \left(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \right) \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t - \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \bar{\otimes} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t} \quad (1.40)}$$

Les expressions de H et \mathbf{S} sont :

$$\boxed{H = \frac{1}{2} \frac{p'^2 - \left(\mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \bar{\otimes} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right)^2}{\rho^{\text{ref}} c^{\text{ref}2}} + \frac{1}{2} \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} - \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}} + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \bar{\otimes} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t} \quad (1.41)}$$

$$\boxed{\mathbf{S} = p' \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} + \rho^{\text{ref}} \left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \right) \mathbf{V}^{\text{ref}}} \quad (1.42)$$

Poirée [65] a trouvé d'autres grandeurs énergétiques liées aux perturbations mais pour un écoulement de référence non nécessairement stationnaire en perturbant l'équation d'énergie totale jusqu'à l'ordre 2, c'est-à-dire en tenant compte de termes non linéaires. Pour cela, il

a écrit toutes les perturbations comme la somme de deux perturbations d'ordre 1 et 2. Il a obtenu ainsi \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 , \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 vérifiant :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial t} + \operatorname{div}_{\text{ref}} \mathcal{I}_n = 0, \quad n = 1, 2 \quad (1.43)$$

avec à l'ordre 1 :

$$\mathcal{E}_1 = -\operatorname{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t p^{\text{ref}} + \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}} \quad (1.44)$$

$$\mathcal{I}_1 = \left(\tilde{p} + \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) \mathbf{V}^{\text{ref}} + p^{\text{ref}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \quad (1.45)$$

et à l'ordre 2 :

$$\mathcal{E}_2 = \frac{1}{2} \frac{\tilde{p}^2}{\rho^{\text{ref}} c^{\text{ref}2}} + \frac{1}{2} \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} + \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}} - \left(\operatorname{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_t + \frac{1}{2} \left((\operatorname{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)^2 - \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right) \right) p^{\text{ref}} \quad (1.46)$$

$$\mathcal{I}_2 = \left(\frac{1}{2} \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} + \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_t}{dt} \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}} + \tilde{p}_2 - \frac{1}{2} \frac{\tilde{p}^2}{\rho^{\text{ref}} c^{\text{ref}2}} \right) \mathbf{V}^{\text{ref}} + \tilde{p} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} + p^{\text{ref}} \left(\operatorname{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} - \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_t}{\partial t} \right) \quad (1.47)$$

$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}_t$ et \tilde{p}_2 sont respectivement le déplacement d'ordre 2 et la perturbation lagrangienne de pression d'ordre 2. \tilde{p}_2 s'écrit [8, 66] :

$$\tilde{p}_2 = -\rho^{\text{ref}} \operatorname{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\zeta}}_t + \rho^{\text{ref}} c^{\text{ref}2} \beta \left(\operatorname{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right)^2 + \frac{\rho^{\text{ref}} c^{\text{ref}2}}{2} \left(\left(\operatorname{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right)^2 - \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right) \quad (1.48)$$

où $\beta = \frac{\gamma + 1}{2}$. Brazier [8] a constaté que sous l'hypothèse d'écoulement de référence stationnaire, les expressions d'Élias et celles de Poirée ne sont pas égales. Nous en discuterons section 1.1.5.2 page 30.

1.1.3 Sur l'intensité acoustique

Nous allons maintenant revenir plus précisément sur le vecteur intensité. L'intérêt de ce vecteur est qu'il caractérise :

- les sens et directions effectifs de propagation ;
- l'énergie propagée.

Dès lors que l'écoulement de référence peut être considéré comme stationnaire, l'intensité moyennée a plus de sens physique que l'intensité instantanée. En effet, soit $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ le vecteur intensité, défini, suivant le cas de propagation, par (1.24), par (1.42) d'Élias ou par (1.45) et (1.47) de Poirée. Il est à noter tout d'abord que la moyenne du bilan d'énergie à l'ordre 1 de Poirée donne la tautologie $0 = 0$. Seul l'ordre 2 reste. Puis, en utilisant l'hypothèse d'ergodicité, il vient :

$$\operatorname{div}_{\text{ref}} \bar{\boldsymbol{\mathcal{S}}} = 0 \quad (1.49)$$

Si maintenant nous considérons que des sources de puissance totale W rayonnent dans le fluide, alors, en intégrant sur le domaine géométrique de volume V englobant les sources, le théorème de Green-Ostrogradsky donne :

$$\boxed{\iint_{\Sigma} \bar{\mathcal{S}} \otimes \bar{\mathbf{n}} dS = W} \quad (1.50)$$

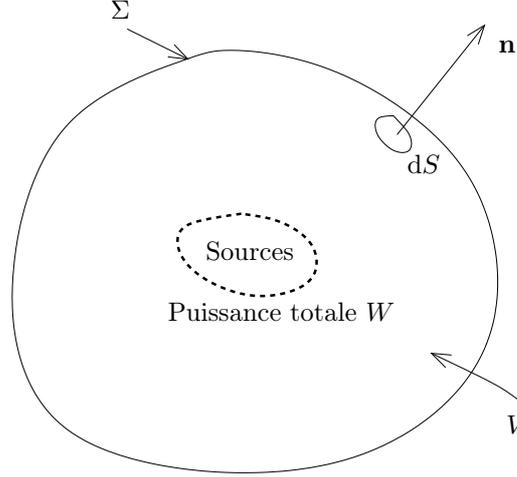


FIG. 1.2: Intégration du bilan d'énergie sur un domaine géométrique de volume V incluant des sources de puissance totale W .

$\bar{\mathcal{S}}$ est appelée aussi intensité active et sera par la suite notée \mathcal{S}_a . Ainsi elle permet de déterminer la puissance rayonnée par une (plusieurs) source(s) en l'intégrant sur la surface d'un volume *quelconque* englobant la (les) source(s).

1.1.4 Sur la notion d'impédance acoustique

Considérons des perturbations eulériennes en régime harmonique. Ainsi :

$$p'(\mathbf{x}^{\text{ref}}, t) = \text{Re} (\mathcal{P}'(\mathbf{x}^{\text{ref}})e^{i\omega t}) \quad (1.51)$$

$$\mathbf{V}'(\mathbf{x}^{\text{ref}}, t) = \text{Re} (\mathcal{V}'(\mathbf{x}^{\text{ref}})e^{i\omega t}) \quad (1.52)$$

Pour un milieu au repos et pour une surface Σ de normale \mathbf{n} dans le domaine physique, l'impédance acoustique est définie par :

$$Z_{\mathbf{n}} = \frac{\mathcal{P}'}{\mathcal{V}'_{\mathbf{n}}}, \forall \mathbf{x}^{\text{ref}} \in \Sigma \quad (1.53)$$

où $\mathcal{V}'_{\mathbf{n}} = \mathcal{V}' \otimes \bar{\mathbf{n}}$ est la composante de la perturbation de vitesse suivant la normale à la surface. Une autre quantité, strictement équivalente, est l'admittance $Y_{\mathbf{n}} = \frac{1}{Z_{\mathbf{n}}}$. Impédance et admittance sont *a priori* des nombres complexes. De ce fait $Z_{\mathbf{n}} = R_{\mathbf{n}} + iX_{\mathbf{n}}$ avec :

$$R_{\mathbf{n}} = \text{Re}(Z_{\mathbf{n}}) \quad (1.54)$$

$$X_{\mathbf{n}} = \text{Im}(Z_{\mathbf{n}}) \quad (1.55)$$

$R_{\mathbf{n}}$ et $X_{\mathbf{n}}$ sont nommées respectivement la résistance et la réactance. Dans le cas où la surface considérée coïncide avec une frontière du domaine physique, par exemple un mur

en acoustique des salles, on parle alors d'impédance (admittance) de paroi. Z_n est liée à la notion de conditions limites. Par exemple, une paroi dite acoustiquement rigide est définie par $Z_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow Y_n = 0$.

La notion d'impédance est très utile pour caractériser les matériaux absorbants. Elle est liée à l'énergie absorbée par un matériau. En effet, $I_{a,n}$, la composante de l'intensité active suivant la normale au matériau, est :

$$I_{a,n} = \frac{1}{2} R_n |\mathcal{V}'_n|^2 \tag{1.56}$$

C'est la résistance qui donne l'énergie absorbée. Dès lors que le milieu est en mouvement, les travaux d'Aurégan [2] montre que la notion d'impédance acoustique est délicate à définir. Aurégan tient compte de l'épaisseur Δ de couche limite dynamique et de l'épaisseur $\delta_a = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$ de couche limite acoustique, ν étant la viscosité cinématique du fluide, à proximité d'un matériau d'admittance donnée Y . Ainsi il montre que la valeur de l'admittance Y_c prise au-dessus de la couche limite dynamique dépend de la valeur du rapport $\delta^* = \frac{\delta_a}{\Delta}$. Il définit une fonction β_v par $M_{eff} = \beta_v M_0$, où M_0 est le nombre de Mach au cœur de l'écoulement et M_{eff} est un nombre de Mach effectif, moyenne du nombre de Mach le long de la couche limite dynamique pondéré par la contrainte de cisaillement due aux ondes acoustiques. β_v reflète le comportement de Y_c en fonction de δ^* . Cette fonction est tracée pour différents types de profils théoriques de vitesse d'écoulement (FIG. 1.3 (a) et (b)).

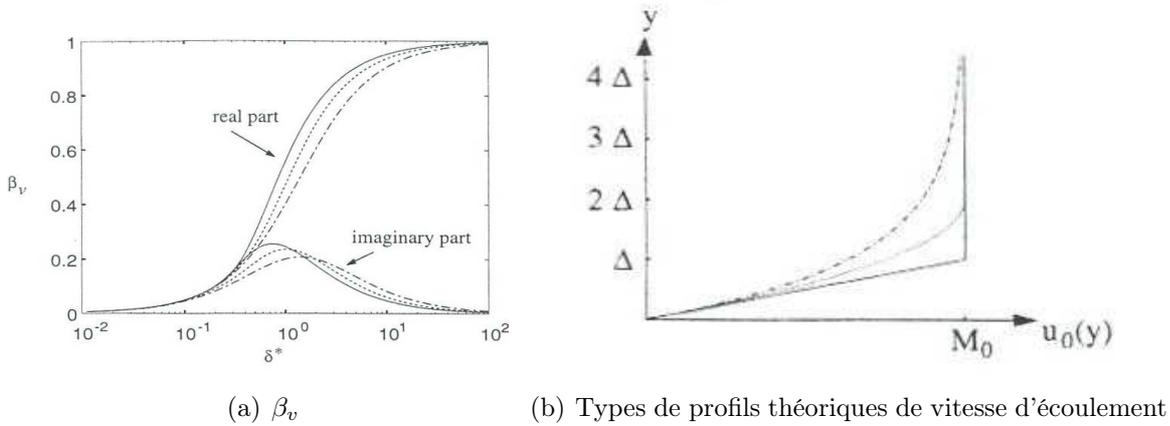


FIG. 1.3: β_v en fonction de δ^* (a) pour différents écoulements (b) (extrait de [2]).

L'allure globale est la même pour tous les profils. La conclusion est :

- pour $\delta^* \ll 1$, c'est-à-dire pour une petite couche limite acoustique, $\beta_v \rightarrow 0$ et la condition limite est une condition de continuité de la perturbation de déplacement ;
- pour $\delta^* \gg 1$, c'est-à-dire pour une petite couche limite de l'écoulement, $\beta_v \rightarrow 1$ et la condition limite est une condition de continuité de la perturbation de vitesse.

Alors qu'en pratique, (1.53) est quand même utilisée en présence d'un écoulement (traitements aéronautiques [4, 34]...), le résultat d'Aurégan appelle à être prudent quant à la pertinence de cette définition.

1.1.5 Sur la propagation guidée

La notion de propagation guidée, utile pour les applications expérimentales en soufflerie (chapitre 4 page 109 et chapitre 5 page 121), va maintenant être présentée. Considérons

une conduite 2D avec des parois planes rigides avec un écoulement de référence uniforme $\mathbf{V}^{\text{ref}} = V^{\text{ref}}\mathbf{e}_x$ (FIG. 1.4). Ceci est suffisant pour comprendre les phénomènes essentiels.

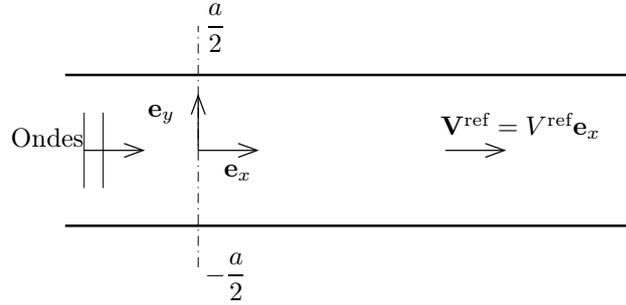


FIG. 1.4: Conduite 2D aux parois planes rigides.

1.1.5.1 Modes propres de conduite et coupure de mode

Considérons une perturbation eulérienne de pression en régime harmonique se propageant dans la conduite. En abandonnant l'indice ^{ref} pour les positions dans l'espace et l'accent de la perturbation, la perturbation eulérienne de pression p est :

$$p(x, y, t) = \text{Re} (\mathcal{P}(x, y)e^{i\omega t}) \quad (1.57)$$

$\mathcal{P}(x, y)$ vérifie l'équation d'Helmholtz (1.22). Une solution cherchée est du type :

$$\mathcal{P}(x, y) = \mathcal{P}_y(y)e^{-ik_x x} \quad (1.58)$$

Alors (1.22) avec (1.58) donne l'équation d'Helmholtz suivante :

$$\frac{d^2\mathcal{P}_y}{dy^2} + k_y^2\mathcal{P}_y = 0 \quad (1.59)$$

et la relation de dispersion :

$$(1 - M^{\text{ref}2})k_x^2 + 2kM^{\text{ref}}k_x - (k^2 - k_y^2) = 0 \quad (1.60)$$

où $M^{\text{ref}} = \frac{V^{\text{ref}}}{c^{\text{ref}}}$, $k = \frac{\omega}{c^{\text{ref}}}$. La résolution de (1.59) dépend des conditions limites suivant \mathbf{e}_y , c'est-à-dire du type de paroi. Ici la condition de rigidité⁶ implique que $\frac{d\mathcal{P}_y}{dy}(\pm\frac{a}{2}) = 0$. Ainsi il existe une infinité dénombrable de solutions s'écrivant :

$$\mathcal{P}_y^n(y) = A^n \cos\left(k_y^n \left(y - \frac{a}{2}\right)\right) \quad (1.61)$$

avec $k_y^n = \frac{n\pi}{a}$, $n \in \mathbb{N}$ et $A^n \in \mathbb{C}$. Les \mathcal{P}_y^n sont appelés les modes propres de la conduite. La question est de savoir maintenant à quelle condition un mode donné se propage dans la conduite. La réponse est trouvée en résolvant la relation de dispersion (1.60) en k_x pour un nombre d'onde k_y^n fixé. Compte tenu de (1.58), le mode se propagera si et seulement si

⁶Mais ce n'est pas le seule type de condition.

$k_x \in \mathbb{R}$. Le mode sera amorti si et seulement si $k_x \in \mathbb{C}$ avec $\text{Im}(k_x) < 0$ ⁷. La relation de dispersion donne deux solutions :

$$k_x = \frac{-kM^{\text{ref}} \pm \sqrt{\Delta}}{1 - M^{\text{ref}^2}} \quad (1.62)$$

avec $\Delta = k^2 - (1 - M^{\text{ref}^2})k_y^{n^2}$. De ce fait, si :

- $M^{\text{ref}} > 1$, alors $\Delta > 0$, il y a deux solutions réelles pour k_x et le mode se propage $\forall n$;
- $M^{\text{ref}} = 1$, alors il n'y a qu'une seule solution réelle $k_x = \frac{k^2 - k_y^{n^2}}{2k}$ et le mode se propage $\forall n$;
- $M^{\text{ref}} < 1$, Δ peut être positif ou négatif suivant la valeur de k_y^n . S'il est positif, il y a deux solutions réelles pour k_x et le mode se propage. S'il est négatif, alors il y a deux solutions complexes pour k_x et le mode est amorti.

Pour $M^{\text{ref}} < 1$, comme $k = \frac{\omega}{c^{\text{ref}}}$, $\Delta = 0$ permet de définir une fréquence de coupure $f_{c,n}$ en-dessous de laquelle le mode associé à k_n ne peut se propager :

$$\boxed{f_{c,n} = \sqrt{1 - M^{\text{ref}^2} \frac{nc^{\text{ref}}}{2a}}} \quad (1.63)$$

Il est à noter que la présence de l'écoulement de référence abaisse la fréquence de coupure de la conduite. Ainsi un mode amorti sans écoulement peut se propager en présence de celui-ci.

1.1.5.2 Cas du mode plan : confrontation des définitions de l'intensité en acoustique de Galbrun

Le mode plan est le nom donné au mode $n = 0$ car les variations transverses sont nulles. Ce mode se propagera seul dans la conduite pourvu que l'onde ait une fréquence inférieure à la fréquence de coupure du premier mode transverse ($n=1$) $f_{c,1} = \sqrt{1 - M^{\text{ref}^2} \frac{c^{\text{ref}}}{2a}}$. Alors la perturbation de pression s'écrit en général :

$$\mathcal{P}(x) = Ae^{-ik^+x} + Be^{ik^-x} \quad (1.64)$$

où $k^+ = \frac{k}{1 + M^{\text{ref}}}$ est le nombre d'onde de la partie se propageant dans le sens de l'écoulement et $k^- = \frac{k}{1 - M^{\text{ref}}}$ le nombre d'onde de la partie se propageant en sens contraire de

l'écoulement. A et B sont deux amplitudes complexes. Nous introduisons aussi $R = \frac{B}{A}$.

Nous allons maintenant confronter les définitions de l'intensité (1.42) d'Élias et (1.47) de Poirée à la définition classique (1.24) page 23. Dans le cas traité, cette dernière donne l'intensité active suivante :

$$\mathbf{I}_a = \frac{|A|^2}{2z^{\text{ref}}} \left((1 + M^{\text{ref}})^2 - |R|^2 (1 - M^{\text{ref}})^2 \right) \mathbf{e}_x \quad (1.65)$$

Cette expression a pour conséquences physiques que pour $|R| = \frac{1 + M^{\text{ref}}}{1 - M^{\text{ref}}}$:

- les ondes sont stationnaires, c'est-à-dire aucune énergie ne se propage ;

⁷Le cas $\text{Im}(k_x) > 0$ donne une perturbation qui croît exponentiellement dans l'espace. Cette solution n'est pas physiquement acceptable.

– un coefficient de réflexion ne peut dépasser cette valeur, condition de réflexion totale. Ce dernier résultat peut se constater expérimentalement [72]. L'écoulement de référence étant uniforme, les descriptions eulérienne et lagrangienne des perturbations sont identiques. Les perturbations sont alors écrites sans accent. Nous posons $\xi_t = \xi(x, t)\mathbf{e}_x$ avec :

$$\xi(x, t) = \text{Re} \left(\chi(x) e^{i\omega t} \right) \quad (1.66)$$

Grâce à (1.38) page 25, il vient :

$$\chi(x) = -i \frac{A}{\omega z^{\text{ref}}} \left((1 + M^{\text{ref}}) e^{-ik^+x} - (1 - M^{\text{ref}}) R e^{ik^-x} \right) \quad (1.67)$$

Aussi, $\frac{\partial}{\partial t}$ devient $\times i\omega$ pour les amplitudes complexes et :

$$\frac{d_{\text{ref}} \xi}{dt} = \text{Re} \left(\frac{A}{z^{\text{ref}}} \left(e^{-ik^+x} - R e^{ik^-x} \right) e^{i\omega t} \right) \quad (1.68)$$

Avec ces relations, les intensités actives \mathbf{S}_a et \mathbf{I}_{2a} suivant les définitions respectives d'Élias et de Poirée vont être évaluées :

$$\mathbf{S}_a = \frac{|A|^2}{2z^{\text{ref}}} \left((1 + M^{\text{ref}})^2 - |R|^2 (1 - M^{\text{ref}})^2 \right) \mathbf{e}_x \quad (1.69)$$

La définition d'Élias redonne (1.65). Pour ce qui concerne \mathbf{I}_{2a} , l'expression de la perturbation d'ordre 2 de pression est donnée par (1.48). Prise en moyenne, elle donne :

$$\overline{p_2} = \frac{1}{2} z^{\text{ref}} c^{\text{ref}} \beta \left| \frac{d\chi}{dx}(x) \right|^2 \quad (1.70)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\beta}{z^{\text{ref}} c^{\text{ref}}} |\mathcal{P}(x)|^2 \quad (1.71)$$

avec $\beta = \frac{\gamma + 1}{2}$. Ainsi \mathbf{I}_{2a} vaut :

$$\mathbf{I}_{2a} = \frac{|A|^2}{2z^{\text{ref}}} \left((1 + (1 + \beta)M^{\text{ref}}) - |R|^2 (1 - (1 + \beta)M^{\text{ref}}) + 2M^{\text{ref}}\beta \text{Re} \left(R e^{i(k^+ + k^-)x} \right) \right) \mathbf{e}_x \quad (1.72)$$

L'expression \mathbf{I}_{2a} n'apparaît pas conservative car dépendante de x . Brazier [9] suppose que la formule de Poirée contient l'énergie acoustique linéaire mais y ajoute d'autres formes d'énergie liées entre autres à la contribution non linéaire du deuxième ordre. Celles-ci se propagent à des vitesses différentes de la vitesse de groupe des ondes linéaires. Néanmoins, pour des faibles valeurs de M^{ref} et de $|R|$ et pour l'air ($\gamma = 1.4$), la valeur de \mathbf{I}_{2a} oscille en fonction de x autour de celle obtenue par (1.69) et (1.65).

Remarque : pour un milieu au repos, il est courant de définir les ondes stationnaires non pas par le fait qu'elles ne transportent aucune énergie mais par l'allure des champs des perturbations de pression et vitesse. En effet elles présentent la particularité de passer par 0. Mais ceci n'est plus vrai dès que la vitesse de l'écoulement de référence n'est plus nulle (FIG. 1.5).

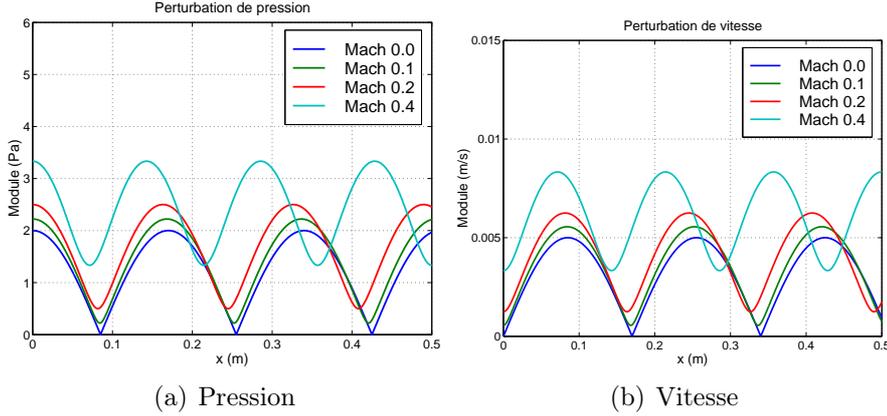


FIG. 1.5: Perturbations de pression et de vitesse pour une onde stationnaire ($|A| = 1$, $z^{\text{ref}} = 400 \text{ Rayl.}$, $c^{\text{ref}} = 340 \text{ m.s}^{-1}$ et $f = 1000 \text{ Hz}$).

Cependant le déplacement $\chi(x)$ garde bien cette propriété (FIG. 1.6).

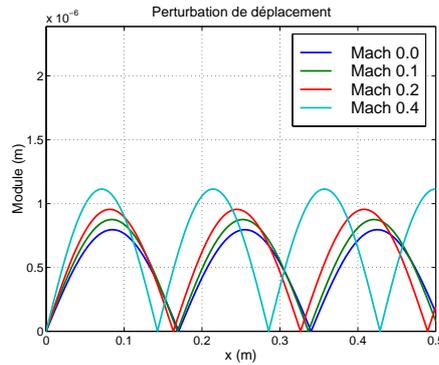


FIG. 1.6: Perturbation de déplacement pour une onde stationnaire (paramètres identiques).

Ceci conforte l'idée que le déplacement est la grandeur clef pour la propagation en écoulement. De ce fait, nous avons décidé de contruire une nouvelle approche théorique des perturbations en écoulement quelconque, toujours basée sur le déplacement, mais sans émettre l'hypothèse de petites perturbations.

1.2 Formulation non linéaire exacte de l'acoustique de Galbrun

Cette approche repart de l'idée de Galbrun suivant laquelle une perturbation est définie pour une particule donnée. Tandis que les équations de l'acoustique de Galbrun sont classiquement obtenues en regardant *localement de petites perturbations au sein d'un fluide idéal* (section 1.1.2.2 page 23 [8, 17, 59, 65]), notre point de départ est de considérer la perturbation de *façon globale* comme une transformation d'un *milieu continu quelconque, aucune hypothèse sur l'ordre de grandeur des perturbations* n'étant faite en premier lieu. Nous allons voir qu'il est alors possible de généraliser les équations connues pour un fluide parfait en petites perturbations au cas non linéaire exact, en particulier les expressions des densité et flux d'énergie d'Élias.

1.2.1 Définitions des états de référence et perturbé

Soit \mathcal{D} un domaine matériel assimilé à un milieu continu. Soient deux configurations de \mathcal{D} , l'une dite de référence (indice ref) et l'autre dite perturbée (aucun indice). Dans la configuration de référence, les particules de \mathcal{D} occupent l'espace Ω_t^{ref} à l'instant t tandis que dans la configuration perturbée, les particules de \mathcal{D} occupent l'espace Ω_t au même instant. L'instant t_0 est défini comme étant l'instant donnant l'origine des positions de chaque particule de \mathcal{D} . Dans sa configuration de référence, le domaine matériel se déforme de l'instant t_0 à l'instant t par la transformation $f_{t_0,t}^{\text{ref}}$ et, dans sa configuration perturbée, par la transformation $f_{t_0,t}$. Ainsi, en configuration de référence, une particule m de \mathcal{D} se trouvant à la position M_0^{ref} à l'instant t_0 se retrouve à la position M^{ref} à l'instant t :

$$f_{t_0,t}^{\text{ref}} : \begin{cases} \Omega_{t_0}^{\text{ref}} & \longrightarrow & \Omega_t^{\text{ref}} \\ M_0^{\text{ref}} & \longrightarrow & M^{\text{ref}} = f_{t_0,t}^{\text{ref}}(M_0^{\text{ref}}) \end{cases} ; \forall t \geq t_0 \quad (1.73)$$

En configuration perturbée, cette même particule m se trouvant alors à la position M_0 à l'instant t_0 se retrouve à la position M à l'instant t :

$$f_{t_0,t} : \begin{cases} \Omega_{t_0} & \longrightarrow & \Omega_t \\ M_0 & \longrightarrow & M = f_{t_0,t}(M_0) \end{cases} ; \forall t \geq t_0 \quad (1.74)$$

$f_{t_0,t}^{\text{ref}}$ et $f_{t_0,t}$ étant des transformations décrivant la déformation d'un milieu continu, elles possèdent les propriétés mathématiques suivantes (ici écrites pour f). Soient trois instants distincts t , t' et t'' :

$$f_{t,t} = \text{Id} \quad (1.75)$$

$$f_{t,t''} = f_{t,t'} \circ f_{t',t''} \quad (\text{transitivité}) \quad (1.76)$$

$$M \neq N \Rightarrow f_{t,t'}(M) \neq f_{t,t'}(N) \quad (\text{injectivité}) \quad (1.77)$$

$$M' \in \Omega_{t'} \Rightarrow \exists M \in \Omega_t \text{ tel que } M' = f_{t,t'}(M) \quad (\text{surjectivité}) \quad (1.78)$$

$$f_{t,t'}^{-1} = f_{t',t} \quad (1.79)$$

La dernière propriété est une conséquence des quatre premières.

Pour caractériser la perturbation, la fonction \tilde{f}_t est introduite, dite transformation perturbation, qui lie les configurations de référence et perturbée à chaque instant t par :

$$\tilde{f}_t : \begin{cases} \Omega_t^{\text{ref}} & \longrightarrow & \Omega_t \\ M^{\text{ref}} & \longrightarrow & M = \tilde{f}_t(M^{\text{ref}}) \end{cases} ; \forall t \geq t_0 \quad (1.80)$$

Nous pouvons écrire :

$$\tilde{f}_{t'} \circ f_{t,t'}^{\text{ref}} = f_{t,t'} \circ \tilde{f}_t ; \forall t, t'/t' \geq t \quad (1.81)$$

En particulier :

$$\tilde{f}_t \circ f_{t_0,t}^{\text{ref}} = f_{t_0,t} \circ \tilde{f}_{t_0} \quad (1.82)$$

Sans nuire à la généralité, nous pouvons poser $\tilde{f}_{t_0} = \text{Id}$. Ceci revient à considérer la perturbation nulle avant t_0 . Les espaces d'origine des deux configurations sont alors confondus :

$$\Omega_{t_0} = \Omega_{t_0}^{\text{ref}} \quad (1.83)$$

La FIG. 1.7, semblable aux figures 1 et 2 dans [65], résume les liens entre les deux configurations à des instants différents :

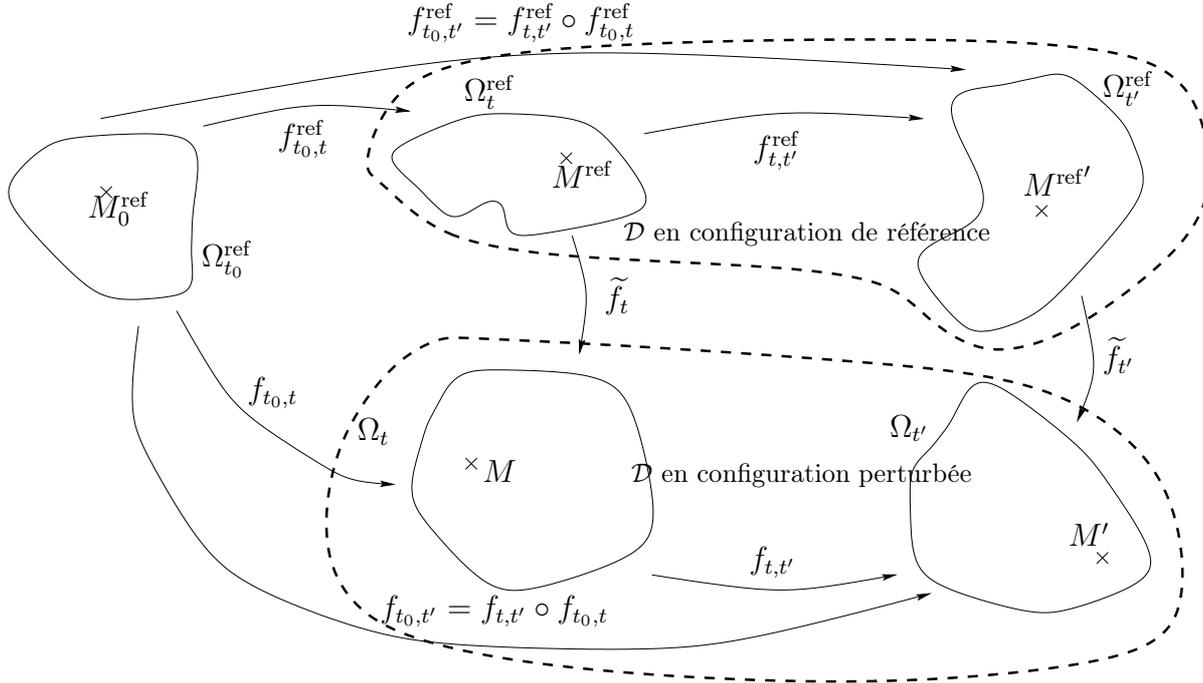


FIG. 1.7: Illustration des transformations du domaine matériel \mathcal{D} : pour tout $t \geq t_0$, les particules de \mathcal{D} occupent, en configuration de référence, les positions des espaces Ω_t^{ref} (représentés en haut) et, en configuration perturbée, les positions des espaces Ω_t (représentés en bas). À chaque instant t , les deux configurations de \mathcal{D} sont liées par la transformation perturbation.

Ainsi :

$$\boxed{f_{t_0,t} = \tilde{f}_t \circ f_{t_0,t}^{\text{ref}}} \quad (1.84)$$

Les propriétés (1.77) et (1.78) impliquent que \tilde{f}_t réalise aussi une bijection et donc que \tilde{f}_t^{-1} existe (annexe A.1 page 149).

Soient $M \in \Omega_t$, $M^{\text{ref}} \in \Omega_t^{\text{ref}}$ et $M_0^{\text{ref}} \in \Omega_{t_0}^{\text{ref}}$. Les vecteurs déplacement relatifs aux fonctions transformation sont définis :

$$\boldsymbol{\xi}_{t_0,t}(M_0^{\text{ref}}) \triangleq M - M_0^{\text{ref}} \quad (1.85)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{t_0,t}^{\text{ref}}(M_0^{\text{ref}}) \triangleq M^{\text{ref}} - M_0^{\text{ref}} \quad (1.86)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t(M^{\text{ref}}) \triangleq M - M^{\text{ref}} \Leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t(M^{\text{ref}}) = \boldsymbol{\xi}_{t_0,t}(M_0^{\text{ref}}) - \boldsymbol{\xi}_{t_0,t}^{\text{ref}}(M_0^{\text{ref}}) \quad (1.87)$$

(1.87) est bien sûr (1.31) vue section 1.1.2.2 page 23. Ces définitions sont équivalentes à :

$$M = f_{t_0,t}(M_0^{\text{ref}}) = M_0^{\text{ref}} + \boldsymbol{\xi}_{t_0,t}(M_0^{\text{ref}}) \quad (1.88)$$

$$M^{\text{ref}} = f_{t_0,t}^{\text{ref}}(M_0^{\text{ref}}) = M_0^{\text{ref}} + \boldsymbol{\xi}_{t_0,t}^{\text{ref}}(M_0^{\text{ref}}) \quad (1.89)$$

$$M = \tilde{f}_t(M^{\text{ref}}) = M^{\text{ref}} + \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t(M^{\text{ref}}) \quad (1.90)$$

Alors que $\boldsymbol{\xi}_{t_0,t}$ et $\boldsymbol{\xi}_{t_0,t}^{\text{ref}}$ (ou bien respectivement $f_{t_0,t}$ et $f_{t_0,t}^{\text{ref}}$) font le lien entre deux espaces de position de particules *d'instants différents pour une configuration donnée* (respectivement perturbée ou de référence), $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$ (ou bien \tilde{f}_t) fait le lien entre deux espaces de position de particules *de configurations différentes pour un instant donné*. Il est important de noter aussi

que, par définition, les déplacements $\boldsymbol{\xi}_{t_0,t}$ et $\boldsymbol{\xi}_{t_0,t}^{\text{ref}}$ sont donnés en description lagrangienne car fonctions des positions à t_0 mais que le déplacement $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$ lié à la perturbation est lui donné en description eulérienne car fonction des positions à l'instant t . Compte tenu de cette remarque, la dérivée particulaire par rapport au temps du déplacement $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$ est évaluée. Ainsi, pour une particule m donnée, c'est-à-dire pour une position $M_0^{\text{ref}} \in \Omega_{t_0}^{\text{ref}}$ donnée de m , la relation (1.87) est dérivée par rapport au temps :

$$\frac{D\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{Dt}(M^{\text{ref}}) = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_{t_0,t}}{\partial t}(M_0^{\text{ref}}) - \frac{\partial \boldsymbol{\xi}_{t_0,t}^{\text{ref}}}{\partial t}(M_0^{\text{ref}}) \quad (1.91)$$

Les dérivées des déplacements $\boldsymbol{\xi}_{t_0,t}$ et $\boldsymbol{\xi}_{t_0,t}^{\text{ref}}$ sont les vitesses de déplacement de la particule m respectivement en configuration perturbée et en configuration de référence. Il vient tout d'abord en description lagrangienne :

$$\frac{D\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{Dt}(M^{\text{ref}}) = \mathbf{V}(M_0^{\text{ref}}, t) - \mathbf{V}^{\text{ref}}(M_0^{\text{ref}}, t) \quad (1.92)$$

Puis en description eulérienne :

$$\frac{D\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{Dt}(M^{\text{ref}}) = \mathbf{V}(M, t) - \mathbf{V}^{\text{ref}}(M^{\text{ref}}, t) \quad (1.93)$$

car la particule m en M_0^{ref} à t_0 se retrouve à t en M en configuration perturbée et en M^{ref} en configuration de référence. De plus, $\frac{D\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{Dt}(M^{\text{ref}})$ s'écrit :

$$\frac{D\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{Dt}(M^{\text{ref}}) = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t}(M^{\text{ref}}) + \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t(M^{\text{ref}}) \otimes \mathbf{V}^{\text{ref}}(M^{\text{ref}}, t) \quad (1.94)$$

$$= \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt}(M^{\text{ref}}) \quad (1.95)$$

où $\frac{d_{\text{ref}}}{dt}$ est la dérivée convective sur Ω_t^{ref} . Ainsi il vient :

$$\frac{D\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{Dt}(M^{\text{ref}}) = \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt}(M^{\text{ref}}) = \mathbf{V}(M, t) - \mathbf{V}^{\text{ref}}(M^{\text{ref}}, t) \quad (1.96)$$

1.2.2 Perturbation d'une grandeur physique

Soit \mathcal{A} une grandeur physique définie pour toute particule m de \mathcal{D} . Sa valeur volumique est donnée par la fonction A en configuration perturbée, c'est-à-dire pour laquelle les positions des particules sont données dans Ω_t pour tout t . Sans nuire à la généralité, \mathcal{A} sera considérée comme représentable par un scalaire. L'extension aux vecteurs et tenseurs d'ordre supérieur ou égal à deux se fait en appliquant ce qui suit à chacune des composantes. En configuration de référence, c'est-à-dire pour des positions de particules appartenant à Ω_t^{ref} pour tout t , sa valeur est donnée par la fonction A^{ref} . La première perturbation définie est celle vue précédemment section 1.1.2.2 page 23. Ainsi, pour une particule m placée à un instant t en $M \in \Omega_t$ en configuration perturbée et en $M^{\text{ref}} \in \Omega_t^{\text{ref}}$ en configuration de référence :

$$\boxed{\tilde{A}(M^{\text{ref}}, t) = A(M, t) - A^{\text{ref}}(M^{\text{ref}}, t)} \quad (1.97)$$

Le symbole $\tilde{\cdot}$ est choisi volontairement car avec cette définition, (1.96) montre que la dérivée particulière de $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$ est la perturbation au sens défini précédemment de la vitesse de la particule :

$$\frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt}(M^{\text{ref}}) = \tilde{\mathbf{V}}(M^{\text{ref}}, t) \quad (1.98)$$

Une deuxième perturbation est maintenant introduite. Elle va servir d'intermédiaire de calcul afin d'exhiber une équation d'évolution de la perturbation au sens $\tilde{\cdot}$ d'une grandeur physique vérifiant un principe de conservation. Cette perturbation est définie non pas à partir des valeurs locales de la grandeur \mathcal{A} dans les deux configurations mais à partir des valeurs globales, c'est-à-dire intégrées sur le domaine matériel \mathcal{D} . Intégrer sur \mathcal{D} revient à intégrer à chaque instant t sur le domaine physique Ω_t pour la configuration perturbée et sur le domaine physique Ω_t^{ref} en configuration de référence. Soient donc :

$$I_{\mathcal{A}}(t) = \int_{\Omega_t} A(M, t) dv \quad (1.99)$$

$$I_{\mathcal{A}}^{\text{ref}}(t) = \int_{\Omega_t^{\text{ref}}} A^{\text{ref}}(M^{\text{ref}}, t) dv^{\text{ref}} \quad (1.100)$$

où dv et dv^{ref} sont les volumes élémentaires d'intégration sur respectivement Ω_t et Ω_t^{ref} . Définissons :

$$\hat{I}_{\mathcal{A}}(t) \triangleq I_{\mathcal{A}}(t) - I_{\mathcal{A}}^{\text{ref}}(t) \quad (1.101)$$

Or $dv = \det \tilde{\mathbf{F}}_t dv^{\text{ref}}$ car $\Omega_t = \tilde{f}_t(\Omega_t^{\text{ref}})$. $\tilde{\mathbf{F}}_t$ est un tenseur d'ordre 2 caractérisant les déformations locales dues à la transformation perturbation. Il est relié à la différentielle de la position M^8 . En différentiant (1.90) :

$$dM = \tilde{\mathbf{F}}_t \otimes dM^{\text{ref}} \quad (1.102)$$

et

$$\tilde{\mathbf{F}}_t = \mathbf{G} + \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t(M^{\text{ref}}) \quad (1.103)$$

avec \mathbf{G} le tenseur métrique.

Il vient donc :

$$\hat{I}_{\mathcal{A}}(t) = \int_{\Omega_t^{\text{ref}}} \left(A(M, t) \det \tilde{\mathbf{F}}_t - A^{\text{ref}}(M^{\text{ref}}, t) \right) dv^{\text{ref}} \quad (1.104)$$

La deuxième perturbation est définie par l'intégrande de (1.104) :

$$\boxed{\hat{A}(M^{\text{ref}}, t) \triangleq A(M, t) \det \tilde{\mathbf{F}}_t - A^{\text{ref}}(M^{\text{ref}}, t)} \quad (1.105)$$

Compte tenu de (1.104), \hat{A} est vue comme une perturbation volumique. Il peut être montré (annexe A.2 page 150) que :

$$\boxed{\det \tilde{\mathbf{F}}_t = 1 + \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t + \Theta_2(\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) + \det(\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)} \quad (1.106)$$

où Θ_2 est le second invariant du tenseur. Son expression et celle de $\det(\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)$ sont (annexe A.2 page 150) :

$$\boxed{\Theta_2(\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) = \frac{1}{2} \left((\text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)^2 - \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \otimes \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right)} \quad (1.107)$$

⁸La mécanique des milieux continus suppose qu'une transformation est différentiable presque partout.

$$\det(\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) = \frac{1}{6}(\text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)^3 - \frac{1}{2} \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t + \frac{1}{3} (\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \quad (1.108)$$

Il est possible de relier \hat{A} et \tilde{A} . En utilisant (1.97) dans (1.105), il vient :

$$\hat{A}(M^{\text{ref}}, t) = \tilde{A}(M^{\text{ref}}, t) \det \tilde{\mathbf{F}}_t + (\det \tilde{\mathbf{F}}_t - 1) A^{\text{ref}}(M^{\text{ref}}, t) \quad (1.109)$$

1.2.3 Équation d'évolution des perturbations d'une grandeur physique

Si maintenant \mathcal{A} est une grandeur physique vérifiant un principe de conservation (par exemple la masse, la quantité de mouvement, l'énergie totale...), l'intérêt de \hat{A} apparaît de par sa définition. En effet, en dérivant par rapport au temps (1.101) :

$$\frac{d\hat{I}_{\mathcal{A}}}{dt}(t) = \frac{dI_{\mathcal{A}}}{dt}(t) - \frac{dI_{\mathcal{A}}^{\text{ref}}}{dt}(t) \quad (1.110)$$

Comme \mathcal{A} vérifie un bilan, il existe $S_{\mathcal{A}}$ et $\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}$ en configuration perturbée et $S_{\mathcal{A}}^{\text{ref}}$ et $\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}^{\text{ref}}$ en configuration de référence tels que :

$$\frac{dI_{\mathcal{A}}}{dt}(t) = \int_{\Omega_t} (S_{\mathcal{A}}(M, t) + \text{div} \boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}(M, t)) dv \quad (1.111)$$

$$\frac{dI_{\mathcal{A}}^{\text{ref}}}{dt}(t) = \int_{\Omega_t^{\text{ref}}} (S_{\mathcal{A}}^{\text{ref}}(M^{\text{ref}}, t) + \text{div}_{\text{ref}} \boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}^{\text{ref}}(M^{\text{ref}}, t)) dv^{\text{ref}} \quad (1.112)$$

$S_{\mathcal{A}}$ et $S_{\mathcal{A}}^{\text{ref}}$ sont les sources volumiques de \mathcal{A} à l'intérieur du domaine \mathcal{D} dans les deux configurations; $\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}$ et $\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}^{\text{ref}}$ sont les flux entrants aux frontières du domaine \mathcal{D} dans les deux configurations⁹. En outre, le terme de gauche de (1.110) s'écrit :

$$\frac{d\hat{I}_{\mathcal{A}}}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t^{\text{ref}}} \hat{A}(M^{\text{ref}}, t) dv^{\text{ref}} \quad (1.113)$$

$$= \int_{\Omega_t^{\text{ref}}} \left(\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}(M^{\text{ref}}, t) + \text{div}_{\text{ref}}(\hat{A} \mathbf{V}^{\text{ref}})(M^{\text{ref}}, t) \right) dv^{\text{ref}} \quad (1.114)$$

De plus :

$$\int_{\Omega_t} (S_{\mathcal{A}}(M, t) + \text{div} \boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}(M, t)) dv = \int_{\Omega_t^{\text{ref}}} (S_{\mathcal{A}}(M, t) + \text{div} \boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}(M, t)) \det \tilde{\mathbf{F}}_t dv^{\text{ref}} \quad (1.115)$$

Ainsi (1.110) permet d'écrire localement que, presque partout :

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial t}(M^{\text{ref}}, t) + \text{div}_{\text{ref}}(\hat{A} \mathbf{V}^{\text{ref}})(M^{\text{ref}}, t) = \left(S_{\mathcal{A}}(M, t) \det \tilde{\mathbf{F}}_t - S_{\mathcal{A}}^{\text{ref}}(M^{\text{ref}}, t) \right) + \left(\text{div} \boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}(M, t) \det \tilde{\mathbf{F}}_t - \text{div}_{\text{ref}} \boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}^{\text{ref}}(M^{\text{ref}}, t) \right) \quad (1.116)$$

⁹Les discontinuités du type interface ou onde de choc ne sont pas considérées ici car hors contexte d'étude mais elles peuvent très bien être introduites dans ce raisonnement.

Finalement :

$$\boxed{\frac{\partial \widehat{A}}{\partial t}(M^{\text{ref}}, t) + \text{div}_{\text{ref}}(\widehat{A}\mathbf{V}^{\text{ref}})(M^{\text{ref}}, t) = \widehat{S}_{\mathcal{A}}(M^{\text{ref}}, t) + \widehat{\text{div}}\widehat{\varphi}_{\mathcal{A}}(M^{\text{ref}}, t)} \quad (1.117)$$

(1.117) peut s'écrire :

$$\frac{d_{\text{ref}}\widehat{A}}{dt}(M^{\text{ref}}, t) + \widehat{A}(M^{\text{ref}}, t)\text{div}_{\text{ref}}\mathbf{V}^{\text{ref}}(M^{\text{ref}}, t) = \widehat{S}_{\mathcal{A}}(M^{\text{ref}}, t) + \widehat{\text{div}}\widehat{\varphi}_{\mathcal{A}}(M^{\text{ref}}, t) \quad (1.118)$$

Utilisons maintenant le principe de conservation de la masse dans la configuration de référence du domaine matériel \mathcal{D} afin d'éliminer le terme $\text{div}_{\text{ref}}\mathbf{V}^{\text{ref}}$ dans (1.118) :

$$\text{div}_{\text{ref}}\mathbf{V}^{\text{ref}}(M^{\text{ref}}, t) = -\frac{1}{\rho^{\text{ref}}(M^{\text{ref}}, t)}\frac{d_{\text{ref}}\rho^{\text{ref}}}{dt}(M^{\text{ref}}, t) \quad (1.119)$$

Sauf si nécessaire, (M^{ref}, t) est omis dès à présent pour plus de clarté. Ainsi (1.118) devient :

$$\frac{d_{\text{ref}}\widehat{A}}{dt} - \frac{\widehat{A}}{\rho^{\text{ref}}}\frac{d_{\text{ref}}\rho^{\text{ref}}}{dt} = \widehat{S}_{\mathcal{A}} + \widehat{\text{div}}\widehat{\varphi}_{\mathcal{A}} \quad (1.120)$$

Soit :

$$\boxed{\frac{d_{\text{ref}}\left(\frac{\widehat{A}}{\rho^{\text{ref}}}\right)}{dt} = \widehat{S}_{\mathcal{A}} + \widehat{\text{div}}\widehat{\varphi}_{\mathcal{A}}} \quad (1.121)$$

Il faut maintenant évaluer $\widehat{\text{div}}\widehat{\varphi}_{\mathcal{A}}$. Il est facile de voir qu'en utilisant la définition de la perturbation $\widehat{\cdot}$ et la définition de la divergence en fonction du gradient :

$$\widehat{\text{div}}\widehat{\varphi}_{\mathcal{A}} = \widehat{\text{grad}}\widehat{\varphi}_{\mathcal{A}} \bar{\otimes} \mathbf{G} \quad (1.122)$$

Or $\widehat{\text{grad}}\widehat{\varphi}_{\mathcal{A}} = \text{grad}_{\text{ref}}\varphi_{\mathcal{A}} \bar{\otimes} \widetilde{\mathbf{F}}_t^{-1}$, où $\widetilde{\mathbf{F}}_t^{-1}$ est l'inverse de $\widetilde{\mathbf{F}}_t$ (qui est bien défini presque partout car \widetilde{f}_t^{-1} existe, voir annexe A.1 page 149, et \widetilde{f}_t est différentiable presque partout). L'expression de $\widetilde{\mathbf{F}}_t^{-1}$ est (annexe A.3 page 151) :

$$\boxed{\widetilde{\mathbf{F}}_t^{-1} = \frac{1}{\det\widetilde{\mathbf{F}}_t}\mathbf{T}^T} \quad (1.123)$$

avec :

$$\boxed{\mathbf{T} = \mathbf{G} - \text{grad}_{\text{ref}}^T\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t + \text{div}_{\text{ref}}\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t\mathbf{G} + \mathbf{N}} \quad (1.124)$$

et

$$\boxed{\mathbf{N} = \det\widetilde{\mathbf{F}}_t\text{grad}_{\text{ref}}^{-T}\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t} \quad (1.125)$$

Une expression exploitable de \mathbf{N} peut être trouvée en partant de $\widetilde{\mathbf{F}}_t \bar{\otimes} \widetilde{\mathbf{F}}_t^{-1} = \mathbf{G}$ (annexe A.3 page 151) :

$$\boxed{\mathbf{N} = \Theta_2(\text{grad}_{\text{ref}}\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t)\mathbf{G} - \text{div}_{\text{ref}}\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t\text{grad}_{\text{ref}}^T\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t + \left(\text{grad}_{\text{ref}}\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \text{grad}_{\text{ref}}\widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t\right)^T} \quad (1.126)$$

En utilisant en plus le résultat d'algèbre tensorielle disant que pour deux tenseurs d'ordre 2, \mathbf{P} et \mathbf{Q} , $(\mathbf{P} \bar{\otimes} \mathbf{Q}) \bar{\otimes} \mathbf{G} = \mathbf{P} \bar{\otimes} \mathbf{Q}^T$, (1.122) devient :

$$\widehat{\text{div}}\widehat{\varphi}_{\mathcal{A}} = \text{grad}_{\text{ref}}\widetilde{\varphi}_{\mathcal{A}} \bar{\otimes} \mathbf{T} + \text{grad}_{\text{ref}}\varphi_{\mathcal{A}}^{\text{ref}} \bar{\otimes} (\mathbf{T} - \mathbf{G}) \quad (1.127)$$

Une deuxième expression de $\widehat{\text{div}}\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}$ peut être trouvée. Pour cela, il faut reprendre les intégrales des divergences dans (1.111) et (1.112), et appliquer le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\int_{\Omega_t} \text{div}\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}(M, t)dv = \int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}(M, t) \bar{\otimes} d\mathbf{S} \quad (1.128)$$

$$\int_{\Omega_t^{\text{ref}}} \text{div}\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}^{\text{ref}}(M^{\text{ref}}, t)dv^{\text{ref}} = \int_{\partial\Omega_t^{\text{ref}}} \boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}^{\text{ref}}(M^{\text{ref}}, t) \bar{\otimes} d\mathbf{S}^{\text{ref}} \quad (1.129)$$

Or $d\mathbf{S} = \det\tilde{\mathbf{F}}_t \tilde{\mathbf{F}}_t^{-T} \bar{\otimes} d\mathbf{S}^{\text{ref}} = \mathbf{T} \bar{\otimes} d\mathbf{S}^{\text{ref}}$. La différence des deux intégrales donne :

$$\int_{\Omega_t^{\text{ref}}} \widehat{\text{div}}\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}(M^{\text{ref}}, t)dv^{\text{ref}} = \int_{\partial\Omega_t^{\text{ref}}} (\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}(M, t) \bar{\otimes} \mathbf{T} - \boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}^{\text{ref}}(M^{\text{ref}}, t)) \bar{\otimes} d\mathbf{S}^{\text{ref}} \quad (1.130)$$

Le théorème de Green-Ostrogradsky étant utilisé une nouvelle fois, nous obtenons que :

$$\widehat{\text{div}}\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}(M^{\text{ref}}, t) = \text{div}_{\text{ref}}(\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}(M, t) \bar{\otimes} \mathbf{T} - \boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}^{\text{ref}}(M^{\text{ref}}, t)) \quad (1.131)$$

Soit :

$$\widehat{\text{div}}\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}} = \text{div}_{\text{ref}}(\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathcal{A}} \bar{\otimes} \mathbf{T} + \boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}^{\text{ref}} \bar{\otimes} (\mathbf{T} - \mathbf{G})) \quad (1.132)$$

En utilisant le résultat disant que pour deux tenseurs \mathbf{P} et \mathbf{Q} , \mathbf{P} d'ordre supérieur à 1 et \mathbf{Q} d'ordre 2, $\text{div}(\mathbf{P} \bar{\otimes} \mathbf{Q}) = \text{grad}\mathbf{P} \bar{\otimes} \mathbf{Q} + \mathbf{P} \bar{\otimes} \text{div}\mathbf{Q}$, la différence entre (1.127) et (1.132) permet de montrer la propriété importante :

$$\boxed{\text{div}_{\text{ref}}\mathbf{T} = 0} \quad (1.133)$$

\mathbf{N} possède aussi cette propriété (annexe A.3 page 151).

1.2.3.1 Expression de la perturbation de masse volumique

Un premier résultat sur la perturbation de la masse volumique va être montré avec (1.121). Il sera utile pour la suite. Pour cette quantité physique, le terme de droite de (1.121) est nul. En effet le principe de conservation de la masse s'applique indifféremment de la configuration du domaine matériel \mathcal{D} . Ainsi $S_{\mathcal{A}}^{\text{ref}} \equiv 0$, $\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}}^{\text{ref}} \equiv 0$ et $S_{\mathcal{A}} \equiv 0$, $\boldsymbol{\varphi}_{\mathcal{A}} \equiv 0$ ¹⁰. Alors :

$$\frac{d_{\text{ref}}\left(\frac{\hat{\rho}}{\rho^{\text{ref}}}\right)}{dt} = 0 \quad (1.134)$$

soit

$$\frac{\hat{\rho}}{\rho^{\text{ref}}} = \text{Cste} \quad (1.135)$$

Or à t_0 , $\tilde{f}_{t_0} = \text{Id}$ ce qui implique que $\hat{\rho}(M_0^{\text{ref}}, t_0) = 0$, $\forall M_0^{\text{ref}} \in \Omega_{t_0}^{\text{ref}}$. Ainsi :

$$\boxed{\hat{\rho}(M^{\text{ref}}, t) = 0, \quad \forall M^{\text{ref}} \in \Omega_t^{\text{ref}}} \quad (1.136)$$

¹⁰Considérons deux observateurs distincts. Le premier sait que le milieu continu se déforme suivant une transformation de référence qui est perturbée. Ainsi cet observateur peut énoncer le principe de conservation de la masse dans la configuration de référence car la transformation de référence est une transformation de milieu continu. Le second observateur ne sait pas que la transformation du milieu continu est en fait une composition de deux transformations. Ainsi cet observateur va énoncer le principe de conservation de la masse mais dans la configuration perturbée car la composition des deux transformations est encore une transformation de milieu continu.

ou bien

$$\boxed{\tilde{\rho}(M^{\text{ref}}, t) = \frac{1 - \det \tilde{\mathbf{F}}_t}{\det \tilde{\mathbf{F}}_t} \rho^{\text{ref}}(M^{\text{ref}}, t)} \quad (1.137)$$

avec $\det \tilde{\mathbf{F}}_t$ donné par (1.106).

1.2.3.2 Équation d'évolution non linéaire de la perturbation d'une grandeur massique

Maintenant intéressons-nous à la perturbation au sens $\hat{\cdot}$ de grandeurs physiques de la forme $\rho \mathcal{A}$. La valeur de \mathcal{A} est donc une valeur massique. On peut montrer grâce à (1.97), (1.109), (1.136) et (1.137) que :

$$\widehat{\rho \mathcal{A}} = \rho^{\text{ref}} \tilde{\mathcal{A}} \quad (1.138)$$

Ainsi si cette quantité physique vérifie un principe de conservation, (1.121) s'applique et donne :

$$\boxed{\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\mathcal{A}}}{dt} = \widehat{S}_{\rho \mathcal{A}} + \widehat{\text{div}} \varphi_{\rho \mathcal{A}}} \quad (1.139)$$

Il est maintenant possible d'écrire (1.139) avec (1.127) et (1.117) avec (1.132). En substituant $\widehat{S}_{\rho \mathcal{A}}$ par son expression fonction de $\tilde{S}_{\rho \mathcal{A}}$ et $S_{\rho \mathcal{A}}^{\text{ref}}$, nous avons donc :

$$\boxed{\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\mathcal{A}}}{dt} = \tilde{S}_{\rho \mathcal{A}} \det \tilde{\mathbf{F}}_t + (\det \tilde{\mathbf{F}}_t - 1) S_{\rho \mathcal{A}}^{\text{ref}} + \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\varphi}_{\rho \mathcal{A}} \bar{\otimes} \mathbf{T} + \mathbf{grad}_{\text{ref}} \varphi_{\rho \mathcal{A}}^{\text{ref}} \bar{\otimes} (\mathbf{T} - \mathbf{G})} \quad (1.140)$$

et

$$\boxed{\frac{\partial \rho^{\text{ref}} \tilde{\mathcal{A}}}{\partial t} + \text{div}_{\text{ref}}(\rho^{\text{ref}} \tilde{\mathcal{A}} \mathbf{V}^{\text{ref}}) = \tilde{S}_{\rho \mathcal{A}} \det \tilde{\mathbf{F}}_t + (\det \tilde{\mathbf{F}}_t - 1) S_{\rho \mathcal{A}}^{\text{ref}} + \text{div}_{\text{ref}}(\tilde{\varphi}_{\rho \mathcal{A}} \bar{\otimes} \mathbf{T} + \varphi_{\rho \mathcal{A}}^{\text{ref}} \bar{\otimes} (\mathbf{T} - \mathbf{G}))} \quad (1.141)$$

avec \mathbf{T} défini par (1.124). Un avantage de (1.141) par rapport à (1.140) est qu'elle est écrite sous une forme conservative. Les équations d'évolution (1.140) et (1.141) de la perturbation au sens $\tilde{\cdot}$ de $\rho \mathcal{A}$ sont fonctions :

- de la configuration de référence ;
- des fluctuations des sources de $\rho \mathcal{A}$;
- de $\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$.

1.2.3.3 Équations linéarisées

Une version linéarisée des résultats précédents est proposée. Les hypothèses suivantes sur la transformation \tilde{f}_t sont maintenant faites :

- \tilde{f}_t induit de petites déformations ;
- f_t induit de petits déplacements ;
- les valeurs des grandeurs physiques et des sources associées fluctuent peu.

Ceci se traduit respectivement par :

$$\|\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t\| \ll 1 \quad (1.142)$$

$$\frac{\|\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t\|}{\|\boldsymbol{\xi}_{t_0,t}^{\text{ref}}\|} \ll 1 \quad (1.143)$$

$$\frac{|\tilde{A}|}{|A^{\text{ref}}|}, \frac{|\tilde{S}_A|}{|S_A^{\text{ref}}|}, \frac{\|\tilde{\varphi}_A\|}{\|\varphi_A^{\text{ref}}\|} \ll 1 \quad (1.144)$$

En ne retenant que les termes $\mathcal{O}(\|\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t\|)$, (1.142) donne les relations suivantes :

$$\det \tilde{\mathbf{F}}_t = 1 + \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \quad (1.145)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{G} - \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t + \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \mathbf{G} \quad (1.146)$$

car

$$\Theta_2(\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) = \mathcal{O}(\|\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t\|^2), \det(\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) = \mathcal{O}(\|\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t\|^3), \|\mathbf{N}\| = \mathcal{O}(\|\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t\|^2).$$

L'expression (1.137) de $\tilde{\rho}$ devient alors :

$$\boxed{\tilde{\rho} = -\rho^{\text{ref}} \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t} \quad (1.147)$$

qui est bien la même expression de la perturbation de la masse volumique obtenue en acoustique de Galbrun (section 1.1.2.2 page 23). (1.142) et (1.143) s'appliquent à $\tilde{\mathbf{V}}$ et son expression (1.98) est inchangée à l'ordre 1.

(1.140) devient :

$$\begin{aligned} \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{A}}{dt} &= \tilde{S}_{\rho A} + \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t S_{\rho A}^{\text{ref}} + \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\varphi}_{\rho A} \bar{\otimes} \mathbf{G} \\ &+ \mathbf{grad}_{\text{ref}} \varphi_{\rho A}^{\text{ref}} \bar{\otimes} (-\mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t + \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \mathbf{G}) \end{aligned} \quad (1.148)$$

Soit encore :

$$\boxed{\begin{aligned} \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{A}}{dt} &= \tilde{S}_{\rho A} + \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t S_{\rho A}^{\text{ref}} + \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\varphi}_{\rho A} \\ &- \mathbf{grad}_{\text{ref}} \varphi_{\rho A}^{\text{ref}} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t + \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \text{div}_{\text{ref}} \varphi_{\rho A}^{\text{ref}} \end{aligned}} \quad (1.149)$$

(1.141) devient aussi :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \rho^{\text{ref}} \tilde{A}}{\partial t} + \text{div}_{\text{ref}}(\rho^{\text{ref}} \tilde{A} \mathbf{V}^{\text{ref}}) &= \tilde{S}_{\rho A} + \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t S_{\rho A}^{\text{ref}} \\ &+ \text{div}_{\text{ref}}(\tilde{\varphi}_{\rho A} + \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \varphi_{\rho A}^{\text{ref}} - \varphi_{\rho A}^{\text{ref}} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) \end{aligned}} \quad (1.150)$$

Notre démarche a permis d'obtenir des relations valables pour n'importe quel milieu continu et n'importe quelle transformation de référence puisqu'aucune hypothèse n'a été faite à ces sujets. Elles vont être appliquées au cas de l'écoulement d'un fluide idéal (section 1.1.1.2 page 20).

1.2.4 Application au cas du fluide idéal en écoulement

Les équations précédentes, obtenues suivant une démarche rigoureuse, vont permettre de généraliser les équations linéaires vues section 1.1.2.2 page 23 au cas non linéaire. Alors que ce cas est classiquement traité en développant les perturbations aux ordres supérieurs à 1¹¹, nous l'abordons ici de façon exacte. Nous allons ainsi voir successivement la généralisation :

- de l'équation de Galbrun et des formules donnant les perturbations de vitesse, pression et masse volumique en fonction du déplacement ;
- du bilan d'énergie lié aux perturbations, et en particulier l'expression du flux surfacique d'énergie.

1.2.4.1 Formules de Galbrun non linéaires

Nous reprenons les équations (1.2) de quantité de mouvement et (1.5) d'entropie, l'équation (1.1) relative à la masse ayant déjà été exploitée. L'équation (1.3) d'énergie totale est traitée page 44. Nous supposons que l'écoulement est celui d'un fluide idéal en configuration de référence et qu'il le reste en configuration perturbée. De plus nous supposons nulles les forces volumiques extérieures. Ainsi les sources volumiques et surfaciques d'entropie sont nulles, de même que les sources volumiques de quantité de mouvement dans les deux configurations. Nous avons :

$$S_{\rho\mathbf{V}}^{\text{ref}} = 0, \quad S_{\rho\mathbf{V}} = 0 \quad (1.151)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{\rho\mathbf{V}}^{\text{ref}} = -p^{\text{ref}}\mathbf{G}, \quad \boldsymbol{\varphi}_{\rho\mathbf{V}} = -p\mathbf{G} \quad (1.152)$$

$$S_{\rho s}^{\text{ref}} = 0, \quad S_{\rho s} = 0 \quad (1.153)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{\rho s}^{\text{ref}} = 0, \quad \boldsymbol{\varphi}_{\rho s} = 0 \quad (1.154)$$

Soit en terme de fluctuations :

$$\tilde{S}_{\rho\mathbf{V}} = 0 \quad (1.155)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\rho\mathbf{V}} = -\tilde{p}\mathbf{G} \quad (1.156)$$

$$\tilde{S}_{\rho s} = 0 \quad (1.157)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\rho s} = 0 \quad (1.158)$$

(1.140) est ici appliquée à l'entropie, donnant :

$$\frac{d_{\text{ref}}\tilde{s}}{dt} = 0 \quad (1.159)$$

Comme à t_0 , $\tilde{f}_{t_0} = \text{Id}$, $\frac{d_{\text{ref}}\tilde{s}}{dt} = 0$ implique que $\tilde{s} = 0, \forall t$ et pour toute particule. De plus, le résultat thermodynamique (1.14) donne :

$$s - s_0^{\text{ref}} = C_v \ln \left(\frac{p}{p_0^{\text{ref}}} \left(\frac{\rho_0^{\text{ref}}}{\rho} \right)^\gamma \right) \quad (1.160)$$

$$s^{\text{ref}} - s_0^{\text{ref}} = C_v \ln \left(\frac{p^{\text{ref}}}{p_0^{\text{ref}}} \left(\frac{\rho_0^{\text{ref}}}{\rho^{\text{ref}}} \right)^\gamma \right) \quad (1.161)$$

¹¹C'est donc une approximation et on parle alors de perturbations faiblement non linéaires.

Ainsi la perturbation \tilde{s} est :

$$\tilde{s} = C_v \ln \left(\frac{p}{p^{\text{ref}}} \left(\frac{\rho^{\text{ref}}}{\rho} \right)^\gamma \right) \quad (1.162)$$

Soit :

$$\tilde{s} = C_v \ln \left(\frac{\left(1 + \frac{\tilde{p}}{p^{\text{ref}}} \right)}{\left(1 + \frac{\tilde{\rho}}{\rho^{\text{ref}}} \right)^\gamma} \right) \quad (1.163)$$

Et comme $\tilde{s} = 0$, alors :

$$\frac{\left(1 + \frac{\tilde{p}}{p^{\text{ref}}} \right)}{\left(1 + \frac{\tilde{\rho}}{\rho^{\text{ref}}} \right)^\gamma} = 1 \quad (1.164)$$

De plus (1.137) donne $1 + \frac{\tilde{\rho}}{\rho^{\text{ref}}} = \frac{1}{\det \tilde{\mathbf{F}}_t}$, donc :

$$\tilde{p} = \left(\left(\det \tilde{\mathbf{F}}_t \right)^{-\gamma} - 1 \right) p^{\text{ref}} \quad (1.165)$$

Si (1.140) est maintenant appliquée à la quantité de mouvement, comme $\tilde{\mathbf{V}} = \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt}$, une équation portant sur $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$ est obtenue :

$$\begin{aligned} \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\mathbf{V}}}{dt} = \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}^2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt^2} = \mathbf{grad}_{\text{ref}}(\tilde{p} \mathbf{G}) \bar{\otimes} \mathbf{T} \\ + \mathbf{grad}_{\text{ref}}(p^{\text{ref}} \mathbf{G}) \bar{\otimes} (\mathbf{T} - \mathbf{G}) \end{aligned} \quad (1.166)$$

L'identité $\mathbf{grad}(f \mathbf{G}) \bar{\otimes} \mathbf{P} = \mathbf{P} \bar{\otimes} \mathbf{grad} f$, avec \mathbf{P} un tenseur d'ordre 2 et f un scalaire, permet d'écrire finalement :

$$\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}^2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt^2} = -\mathbf{T} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{p} - (\mathbf{T} - \mathbf{G}) \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \quad (1.167)$$

Comme \tilde{p} et \mathbf{T} sont des fonctions de $\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$ via (1.165) et (1.124), (1.167) est une équation ne portant que sur $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$.

En résumé, connaissant les variables de référence ρ^{ref} , \mathbf{V}^{ref} et p^{ref} , les perturbations de ces variables $\tilde{\rho}$, $\tilde{\mathbf{V}}$ et \tilde{p} s'expriment en fonction du déplacement $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$, ce dernier vérifiant une équation d'évolution. Cependant (1.167) semble être complexe à manipuler. Si les hypothèses (1.142), (1.143) et (1.144) permettant de linéariser sont faites, les formules obtenues en acoustique de Galbrun sont retrouvées. L'expression de $\tilde{\rho}$ a déjà été retrouvée (voir (1.147) page 41). En écrivant (1.165) à l'ordre 1, il vient :

$$\tilde{p} = -\gamma p^{\text{ref}} \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \quad (1.168)$$

Or $c^{\text{ref}2} = \gamma \frac{p^{\text{ref}}}{\rho^{\text{ref}}}$, d'où :

$$\tilde{p} = -c^{\text{ref}2} \rho^{\text{ref}} \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \quad (1.169)$$

ou

$$\boxed{\tilde{p} = c^{\text{ref}2} \tilde{\rho}} \quad (1.170)$$

Un constat important est que l'hypothèse de linéarisation (1.144) est une conséquence des hypothèses (1.142) et (1.143). En effet les expressions précédentes donnent :

$$|\tilde{p}| = \mathcal{O} \left(\|\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t\| \right), \quad |\tilde{\rho}| = \mathcal{O} \left(\|\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t\| \right) \quad \text{et} \quad \|\tilde{\mathbf{V}}\| = \mathcal{O} \left(\|\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t\|, \|\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t\| \right)$$

Ainsi les hypothèses de petites déformations et de petits déplacements pour \tilde{f}_t impliquent de petites fluctuations des grandeurs physiques. Seules (1.142) et (1.143) seront retenues à présent.

En utilisant l'équation linéarisée (1.149) pour la quantité de mouvement et en utilisant (1.169) afin de substituer \tilde{p} , l'équation de Galbrun est retrouvée :

$$\boxed{\begin{aligned} \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}^2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt^2} &= \mathbf{grad}_{\text{ref}} \left(c^{\text{ref}2} \rho^{\text{ref}} \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right) \\ &+ \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \otimes \bar{\mathbf{grad}}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} - \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \end{aligned}} \quad (1.171)$$

1.2.4.2 Bilan d'énergie

L'équation non linéarisée (1.141) va être tout d'abord appliquée à l'énergie totale ρe . L'équation (1.3) donne les termes sources suivants :

$$S_{\rho e}^{\text{ref}} = 0, \quad S_{\rho e} = 0 \quad (1.172)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{\rho e}^{\text{ref}} = -p^{\text{ref}} \mathbf{V}^{\text{ref}}, \quad \boldsymbol{\varphi}_{\rho e} = -p \mathbf{V} \quad (1.173)$$

Soit en terme de fluctuations :

$$\tilde{S}_{\rho e} = 0 \quad (1.174)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\rho e} = -\tilde{p} \tilde{\mathbf{V}} = -\tilde{p} \tilde{\mathbf{V}} - \tilde{p} \mathbf{V}^{\text{ref}} - p^{\text{ref}} \tilde{\mathbf{V}} \quad (1.175)$$

Par construction, l'équation (1.141) permet de définir \mathcal{E} et \mathcal{I} , la fluctuation d'énergie totale et le flux de cette fluctuation :

$$\boxed{\mathcal{E} = \hat{\rho} e = \rho^{\text{ref}} \tilde{e}} \quad (1.176)$$

$$\boxed{\mathcal{I} = \mathcal{E} \mathbf{V}^{\text{ref}} - \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\rho e} \otimes \bar{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\varphi}_{\rho e}^{\text{ref}} \otimes \bar{(\mathbf{T} - \mathbf{G})}} \quad (1.177)$$

et

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \text{div}_{\text{ref}} \mathcal{I} = 0} \quad (1.178)$$

\mathcal{E} va être développée :

$$\mathcal{E} = \rho^{\text{ref}} \tilde{e} \quad (1.179)$$

$$= \rho^{\text{ref}} \left(\tilde{u} + \frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}} \right) \quad (1.180)$$

$$= \rho^{\text{ref}} \tilde{u} + \frac{1}{2} \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \bar{\frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt}} + \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \bar{\mathbf{V}}^{\text{ref}} \quad (1.181)$$

La fluctuation de l'énergie interne est trouvée grâce au résultat thermodynamique (1.13) :

$$u - u_0^{\text{ref}} = C_v (T - T_0^{\text{ref}}) \quad (1.182)$$

$$u^{\text{ref}} - u_0^{\text{ref}} = C_v (T^{\text{ref}} - T_0^{\text{ref}}) \quad (1.183)$$

Ainsi la perturbation \tilde{u} est :

$$\tilde{u} = C_v \tilde{T} \quad (1.184)$$

L'équation des gaz parfaits permet d'écrire :

$$\tilde{T} = \frac{1}{r} \left(\widetilde{\frac{p}{\rho}} \right) \quad (1.185)$$

Le résultat (1.138) page 40 appliqué pour $A = \frac{p}{\rho}$ donne $\left(\widetilde{\frac{p}{\rho}} \right) = \frac{\hat{p}}{\rho^{\text{ref}}}$, donc :

$$\tilde{T} = \frac{1}{r} \frac{\hat{p}}{\rho^{\text{ref}}} \quad (1.186)$$

De plus $C_v = \frac{r}{\gamma - 1}$. Ainsi :

$$\tilde{u} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\hat{p}}{\rho^{\text{ref}}} \quad (1.187)$$

D'où :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\gamma - 1} \hat{p} + \frac{1}{2} \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} + \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}} \quad (1.188)$$

avec :

$$\hat{p} = \left(\left(\det \tilde{\mathbf{F}}_t \right)^{-(\gamma-1)} - 1 \right) p^{\text{ref}} \quad (1.189)$$

relation obtenue avec (1.109), liant une perturbation $\hat{\cdot}$ à la perturbation $\tilde{\cdot}$ associée. Concernant le flux \mathcal{I} , il vient :

$$\mathcal{I} = \mathcal{E} \mathbf{V}^{\text{ref}} + \tilde{p} \tilde{\mathbf{V}} \bar{\otimes} \mathbf{T} + p^{\text{ref}} \tilde{\mathbf{V}} \bar{\otimes} \mathbf{T} + \tilde{p} \mathbf{V}^{\text{ref}} \bar{\otimes} \mathbf{T} + p^{\text{ref}} \mathbf{V}^{\text{ref}} \bar{\otimes} (\mathbf{T} - \mathbf{G}) \quad (1.190)$$

L'approche de Poirée [65] étant de perturber l'équation de l'énergie totale, \mathcal{E} et \mathcal{I} sont les généralisations au cas non linéaire exact de ses expressions de l'énergie et du flux surfacique d'énergie pour un écoulement de référence quelconque satisfaisant les équations du mouvement vues chapitre 1.1.1.2 page 20. Or nous avons constaté qu'appliquées au cas d'un écoulement de référence uniforme avec des petites perturbations de type onde plane harmonique, les formules de Poirée donnent un résultat surprenant.

Nous allons donc reprendre la démarche d'Élias [17] et voir que grâce au principe d'Hamilton, il est possible de trouver des expressions non linéaires exactes de l'énergie et du flux surfacique d'énergie, généralisant celles d'Élias. Pour cela, il faut maintenant considérer l'écoulement de référence comme stationnaire. En fin de compte, ceci n'est pas restrictif car les perturbations sont toujours considérées comme quelconques¹². Suivant [51], le lagrangien d'un système mécanique conservatif est la différence entre les parties cinétique et potentielle

¹²Ceci signifie que tout écoulement instationnaire d'un fluide idéal est décomposé en la somme d'un écoulement stationnaire et de perturbations. Ce sont ces dernières qui contiennent l'instationnarité.

de l'énergie totale du système. Dans notre cas, le mouvement considéré est celui dû aux perturbations. Nous utilisons donc \mathcal{E} pour définir le Lagrangien \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} = \rho^{\text{ref}} \left(\frac{1}{2} \widetilde{\mathbf{V}} \otimes \widetilde{\mathbf{V}} - \widetilde{u} \right) \quad (1.191)$$

soit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \frac{d_{\text{ref}} \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} + \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \mathbf{V}^{\text{ref}} - \frac{1}{\gamma - 1} \widehat{p} \quad (1.192)$$

Comme nous l'avons déjà cité chapitre 1.1.2.2 page 23, Élias a trouvé un lagrangien de façon heuristique *sous l'hypothèse de petites perturbations*, permettant de retrouver l'équation de Galbrun et de définir une énergie et un flux d'énergie corrects. Nous allons reprendre sa démarche avec le lagrangien plus général \mathcal{L} . Ainsi l'équation du mouvement, c'est-à-dire l'équation d'évolution de $\boldsymbol{\xi}_t$ (1.167) page 43, va être retrouvée dans un premier temps grâce à l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \right)} \right) + \mathbf{div}_{\text{ref}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{grad}_{\text{ref}} \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t} \quad (1.193)$$

Il est clair que $\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t}, \mathbf{grad}_{\text{ref}} \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right)$ car $\widehat{p} = \widehat{p} \left(\mathbf{grad}_{\text{ref}} \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right)$ selon (1.189) page précédente et (1.106) page 36. Donc :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t} = 0 \quad (1.194)$$

Après calcul (voir annexe A.4 page 153), il vient :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \right)} = \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} + \rho^{\text{ref}} \mathbf{V}^{\text{ref}} \quad (1.195)$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{grad}_{\text{ref}} \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t} = \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \mathbf{V}^{\text{ref}} + \rho^{\text{ref}} \mathbf{V}^{\text{ref}} \otimes \mathbf{V}^{\text{ref}} + (\widetilde{p} + p^{\text{ref}}) \mathbf{T} \quad (1.196)$$

En substituant dans (1.193) les expressions (1.194), (1.195), (1.196) et en utilisant les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement de l'écoulement de référence (1.1) et (1.2) page 20, (1.167) page 43 est retrouvée.

Élias [17] rappelle aussi qu'une énergie volumique \mathcal{H} et un flux d'énergie \mathcal{S} peuvent être définis grâce à \mathcal{L} par :

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \otimes \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \right)} - \mathcal{L} \quad (1.197)$$

$$\mathcal{S} = \frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \otimes \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{grad}_{\text{ref}} \widetilde{\boldsymbol{\xi}}_t} \quad (1.198)$$

vérifiant¹³ :

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \operatorname{div}_{\text{ref}} \mathbf{S} = 0} \quad (1.199)$$

\mathcal{H} (l'hamiltonien) et \mathbf{S} généralisent au cas de perturbations quelconques en présence d'un écoulement stationnaire de fluide idéal les expressions existantes de l'énergie et du vecteur intensité pour des cas plus restreints. \mathcal{H} et \mathbf{S} s'écrivent :

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{\gamma - 1} \hat{p} + \frac{1}{2} \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} - \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}} - \rho^{\text{ref}} \mathbf{V}^{\text{ref}} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}}} \quad (1.200)$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \rho^{\text{ref}} \left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \right) \mathbf{V}^{\text{ref}} + \rho^{\text{ref}} \left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) \mathbf{V}^{\text{ref}} + (\tilde{p} + p^{\text{ref}}) \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \mathbf{T}} \quad (1.201)$$

En effectuant la démarche inverse, c'est-à-dire en se donnant les expressions de \mathcal{H} et \mathbf{S} , il est possible de vérifier que l'équation de conservation (1.199) est satisfaite (annexe A.5 page 155). Nous allons vérifier maintenant que (1.200) et (1.201) donnent bien les expressions de l'énergie et du vecteur intensité obtenues par Élias [17]. Pour cela les hypothèses de linéarisation (1.142) et (1.143) page 41 vont être faites. Seul l'ordre 1, $\mathcal{O}(\|\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t\|)$ et $\mathcal{O}(\|\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t\|)$, et l'ordre 2, $\mathcal{O}(\|\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t\|^2)$, $\mathcal{O}(\|\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t\|^2)$ et $\mathcal{O}(\|\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t\| \cdot \|\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t\|)$, sont retenus. La partie potentielle de \mathcal{H} donne :

$$\frac{1}{\gamma - 1} \hat{p} = - \left(\operatorname{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t + \Theta_2(\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) \right) p^{\text{ref}} + \frac{\gamma}{2} (\operatorname{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)^2 p^{\text{ref}} \quad (1.202)$$

$$= \underbrace{\frac{\tilde{p}}{\gamma}}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{\Theta_2(\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) p^{\text{ref}} + \frac{1}{2} \frac{\tilde{p}^2}{\rho^{\text{ref}} c^{\text{ref}2}}}_{\text{ordre 2}} \quad (1.203)$$

où \tilde{p} est écrit à l'ordre 1 suivant (1.169) page 43. Concernant la partie cinétique, les deux premiers termes sont uniquement d'ordre 2 et le dernier d'ordre 1. Ainsi \mathcal{H} est écrit :

$$\boxed{\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2} \quad (1.204)$$

avec :

$$\boxed{\mathcal{H}_1 = \frac{\tilde{p}}{\gamma} - \rho^{\text{ref}} \mathbf{V}^{\text{ref}} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}}} \quad (1.205)$$

et

$$\boxed{\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2} \frac{\tilde{p}^2}{\rho^{\text{ref}} c^{\text{ref}2}} - \Theta_2(\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) p^{\text{ref}} + \frac{1}{2} \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} - \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}}} \quad (1.206)$$

Pour ce qui concerne \mathbf{S} , le premier terme est d'ordre 2 uniquement et le second d'ordre 1. Le dernier terme donne :

$$(\tilde{p} + p^{\text{ref}}) \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \mathbf{T} = \underbrace{p^{\text{ref}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t}}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{\tilde{p} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} + p^{\text{ref}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \left(\operatorname{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \mathbf{G} - \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right)}_{\text{ordre 2}} \quad (1.207)$$

¹³Élias écrit en fait $\mathbf{S} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}$. Or sa définition du gradient est la transposée de celui utilisé ici.

Donc \mathbf{S} est écrit :

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2} \quad (1.208)$$

avec :

$$\boxed{\mathbf{S}_1 = p^{\text{ref}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} + \rho^{\text{ref}} \left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \otimes \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) \mathbf{V}^{\text{ref}}} \quad (1.209)$$

et

$$\boxed{\mathbf{S}_2 = \tilde{p} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} + p^{\text{ref}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \otimes \left(\text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \mathbf{G} - \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right) + \rho^{\text{ref}} \left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \otimes \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \right) \mathbf{V}^{\text{ref}}} \quad (1.210)$$

De plus, il peut être montré que (annexe A.6 page 158) :

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial t} + \text{div}_{\text{ref}} \mathbf{S}_n = 0, \quad n = 1, 2} \quad (1.211)$$

À ce stade, nous avons une équation pour chaque ordre alors qu'Élias n'en a qu'une seule, correspondant à l'ordre 2. Notre approche est systématique et part d'un lagrangien non linéaire exact. Il est donc logique d'obtenir un ordre 1 non nul *a priori*. Toutefois, si notre lagrangien était développé jusqu'à l'ordre 2, nous pourrions voir que les termes d'ordre 1 sont liés au mouvement de référence dans (1.193) page 46 et qu'ils disparaissent pour donner au final l'équation de Galbrun. C'est pour cela que la démarche heuristique d'Élias ne donne pas d'ordre 1 puisqu'il s'est servi uniquement de l'équation de Galbrun pour obtenir son lagrangien.

Cependant, si $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$ est supposé nul en moyenne comme cela est fait classiquement en acoustique, alors, l'écoulement de référence étant stationnaire, la moyenne de (1.211) à l'ordre 1 donne la tautologie $0 = 0$. Seul l'ordre 2 intervient en moyenne.

Les expressions (1.206) et (1.210) de \mathcal{H}_2 et \mathbf{S}_2 semblent être différentes de celles d'Élias. Or, après simplification de certains termes (annexe A.7 page 159), il vient :

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial t} + \text{div}_{\text{ref}} \mathbf{S}_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial t} + \text{div}_{\text{ref}} \mathbf{S} = 0} \quad (1.212)$$

où H et \mathbf{S} sont les expressions trouvées par Élias. Notre bilan d'énergie est donc équivalent au sien.

Il est à noter que Godin [26] a trouvé les mêmes expressions des densité et flux surfacique d'énergie qu'Élias, non pas en utilisant le principe d'Hamilton, mais en réarrangeant les équations de bilan de quantité de mouvement et de masse, perturbées au sens de la description lagrangienne. Il forme alors une seule équation de bilan ne faisant intervenir que des quantités quadratiques des perturbations linéaires. Godin se réfère à la notion de pseudo-énergie pour définir l'énergie acoustique car l'énergie obtenue n'est généralement pas égale à la perturbation au second ordre de l'énergie totale (voir les expressions d'Élias et Poirée en section 1.1.2.2 page 23).

1.3 Conclusion

Un rappel théorique portant sur la propagation de petites perturbations en écoulement nous a permis de voir les points suivants :

- L’approche eulérienne d’une perturbation ne peut prétendre à généraliser au cas d’un écoulement quelconque l’équation de conservation de l’énergie des perturbations.
- L’approche lagrangienne introduite par Galbrun, disant qu’une grandeur physique est perturbée à particule fixée, permet cette généralisation pourvu que l’écoulement de référence soit celui d’un fluide idéal. Connaissant cet écoulement de référence, le vecteur déplacement dû à la perturbation est la seule inconnue d’une équation d’évolution - l’équation de Galbrun - et toutes les autres perturbations s’expriment en fonction de lui. L’équation de conservation de l’énergie des perturbations peut être obtenue rigoureusement. Toutefois, deux expressions différentes du bilan d’énergie existent, l’une obtenue par Élias grâce au principe d’Hamilton pour un écoulement de référence stationnaire, l’autre trouvée par Poirée en perturbant à l’ordre 2 l’équation de conservation de l’énergie totale pour un écoulement de référence. Cette dernière expression a la particularité de présenter des termes faiblement non linéaires. Mais dans le cas théorique simple de la propagation dans l’air avec un faible nombre de Mach et un coefficient de réflexion petit, les deux expressions sont numériquement très proches.
- L’intensité active est utile pour caractériser les sources de perturbations.
- La notion d’impédance, classiquement utilisée pour un milieu au repos, est délicate à appréhender en présence d’un écoulement.

À l’issue de ce rappel, une approche non linéaire exacte des perturbations a été proposée. Elle s’appuie aussi sur l’idée introduite par Galbrun : une grandeur physique est perturbée à particule fixée, impliquant alors que le vecteur déplacement dû à la perturbation est la grandeur centrale permettant de connaître toutes les autres perturbations. Alors que les formules existantes de l’acoustique de Galbrun sont classiquement obtenues en partant des équations locales du mouvement d’un fluide idéal (fluide parfait et hypothèse des gaz parfaits) et pour de petites perturbations, l’approche présentée dans ce travail repart de la formulation intégrale des équations d’évolution des grandeurs physiques, définies ici pour un milieu continu quelconque. La perturbation y est vue comme une transformation de milieu continu et aucune hypothèse n’est faite en premier lieu.

Une équation d’évolution de la perturbation d’une grandeur physique a pu être trouvée. Celle-ci dépend :

- de la grandeur physique et de ses sources dans le mouvement de référence ;
- des fluctuations des sources ;
- du gradient du vecteur déplacement dû à la perturbation.

Le principe de conservation de la masse s’exprimant identiquement pour tout milieu continu, cette équation a permis d’écrire de façon générale la fluctuation de masse volumique. Pour les autres grandeurs physiques, la loi de comportement du milieu continu et la thermodynamique doivent alors permettre d’explicitier les fluctuations des sources. Ceci a été fait pour un fluide idéal.

Une équation d’évolution du déplacement a été mise en évidence ainsi que les expressions des autres perturbations. Alors que ces dernières sont relativement simples, l’équation d’évolution du déplacement semble être difficile à exploiter en l’état. Toutefois son obtention alors qu’aucune hypothèse n’a été faite sur le déplacement conforte l’idée que la conception correcte d’une perturbation dans un milieu continu est celle de Galbrun.

L’hypothèse de petites déformations et de petits déplacements sur la transformation perturbation a permis de linéariser ces résultats et les formules de l’acoustique de Galbrun ont

alors été retrouvées. Cette hypothèse est donc la condition suffisante pour obtenir des petites perturbations.

Un autre résultat marquant est l'obtention des expressions non linéaires exactes de l'énergie et du flux surfacique d'énergie grâce au principe d'Hamilton, généralisant ainsi celles trouvées par Élias.

Bien que non abordé ici, un intérêt de cette approche intégrale est aussi de pouvoir introduire dès le début du raisonnement des discontinuités du type onde de choc, interfaces entre plusieurs milieux continus différents ou dioptries.

Tout au long de ce chapitre, différentes quantités utilisées en acoustique ont été introduites de façon théorique. Le chapitre suivant dresse un état de l'art quant à la mesure de certaines de ces quantités.

Chapitre 2

Mesure des vitesse et intensité acoustiques et caractérisation de matériaux absorbants : étude bibliographique

Ce chapitre constitue une synthèse bibliographique sur :

- la mesure de la perturbation de vitesse, ou vitesse acoustique¹ ;
- la mesure du vecteur intensité ;
- la caractérisation de matériaux absorbants.

Pour chacun de ces trois points, nous traitons en premier lieu du cas du fluide au repos, puis du fluide en mouvement car pour ce dernier, bien que certaines méthodes de mesure lui soient spécifiques, d'autres sont des évolutions du cas au repos. L'objectif du chapitre est donc de présenter différents capteurs et méthodes associées afin de choisir celui ou ceux le(s) plus adapté(s) au travail de thèse. Il est à noter qu'à l'heure actuelle, aucune mesure des perturbations lagrangiennes n'a été effectuée. Les perturbations sont à prendre au sens de la description eulérienne. L'accent ' des perturbations et l'indice ^{ref} pour les positions sont omis sans ambiguïté.

2.1 Sur la mesure de la vitesse acoustique

Les champs acoustiques sont généralement caractérisés en pratique par la mesure de la perturbation de pression, la pression acoustique, grandeur accessible par l'utilisation de microphones. La vitesse acoustique, grandeur liée au déplacement, est plus difficile à mesurer et donc moins communément présentée. Toutefois, en plus de pouvoir renseigner sur la notion de niveau sonore par son amplitude, elle permet de rendre compte des notions de direction et de sens de propagation par sa nature vectorielle. Elle doit aussi être connue en plus de la pression acoustique lorsque des quantités plus élaborées (intensité, impédance de paroi...) sont recherchées. Il est intéressant de ce fait de chercher comment accéder à cette grandeur.

¹Le terme de vitesse particulaire est parfois employé mais nous l'éviterons car trop ambigu vis à vis de l'approche lagrangienne d'une perturbation et aussi de la vélocimétrie laser Doppler. Comme nous le verrons, cette technique nécessite l'injection de particules dans le fluide considéré. La vitesse du fluide est en fait la vitesse des particules injectées.

2.1.1 Fluide au repos

Différents types de mesure de vitesse acoustique pour un fluide au repos sont présentés. Le premier type s'appuie sur l'utilisation de capteurs de pression acoustique pour déduire la vitesse acoustique tandis que les autres types reposent sur une mesure directe par capteurs de vitesse. Les méthodes retenues sont :

- la mesure par microphones ;
- la mesure par capteurs «fil chaud» (*microflow*n et anémométrie fil chaud) ;
- la mesure par capteurs «laser» (vélocimétrie laser Doppler et vélocimétrie par images de particules).

2.1.1.1 Mesure par microphones

Ces méthodes de mesure sont classiques et bien maîtrisées. Relativement simples à mettre en place, elles servent souvent de comparaison aux méthodes nouvellement élaborées. Seules certaines de ces méthodes de mesure par microphones ont été retenues ici. Elles sont présentées dans deux catégories :

- les méthodes dites directes, nécessitant peu de calcul ;
- les méthodes dites indirectes, pour lesquelles la vitesse acoustique est obtenue à l'issue d'un post-traitement plus long.

2.1.1.1.1 Méthodes directes : (1.17) page 22 pour un milieu au repos donne :

$$\rho^{\text{ref}} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\mathbf{grad}_{\text{ref}} p \quad (2.1)$$

Si deux microphones 1 et 2, mesurant chacun un signal de pression p_1 et p_2 , sont disposés côte à côte, définissant ainsi un axe orienté, par exemple par le vecteur \mathbf{e}_r , alors la composante V_r de la vitesse acoustique peut être approchée par \tilde{V}_r [18] :

$$\tilde{V}_r = -\frac{1}{\Delta x_r \rho^{\text{ref}}} \int_{-\infty}^t (p_2 - p_1) d\tau \quad (2.2)$$

où Δx_r est l'espacement entre les deux microphones. Si une analyse spectrale est effectuée, la densité spectrale de puissance $G_{\tilde{V}_r}$ est [61, 62] :

$$G_{\tilde{V}_r}(f) = \frac{1}{(\omega \Delta x_r \rho^{\text{ref}})^2} \left(G_{p_1}(f) + G_{p_2}(f) - 2\text{Re}(G_{p_2 p_1}(f)) \right), \forall f > 0 \quad (2.3)$$

où G_{p_1} , G_{p_2} sont les densités spectrales de puissance des signaux de pression p_1 et p_2 et $G_{p_2 p_1}$ la densité interspectrale de puissance entre les deux signaux. L'erreur due à l'approximation est définie par :

$$L_E(\text{dB}) = 10 \log_{10} \left(\frac{G_{\tilde{V}_r}}{G_{V_r}} \right) \quad (2.4)$$

Pour une onde plane se propageant suivant l'axe des microphones, cette erreur est (FIG. 2.1) :

$$L_E(\text{dB}) = 20 \log_{10} \left(\frac{\sin \left(\frac{k \Delta x_r}{2} \pm \phi \right)}{\frac{k \Delta x_r}{2}} \right) \quad (2.5)$$

où ϕ est le déphasage entre les chaînes de mesure microphoniques.

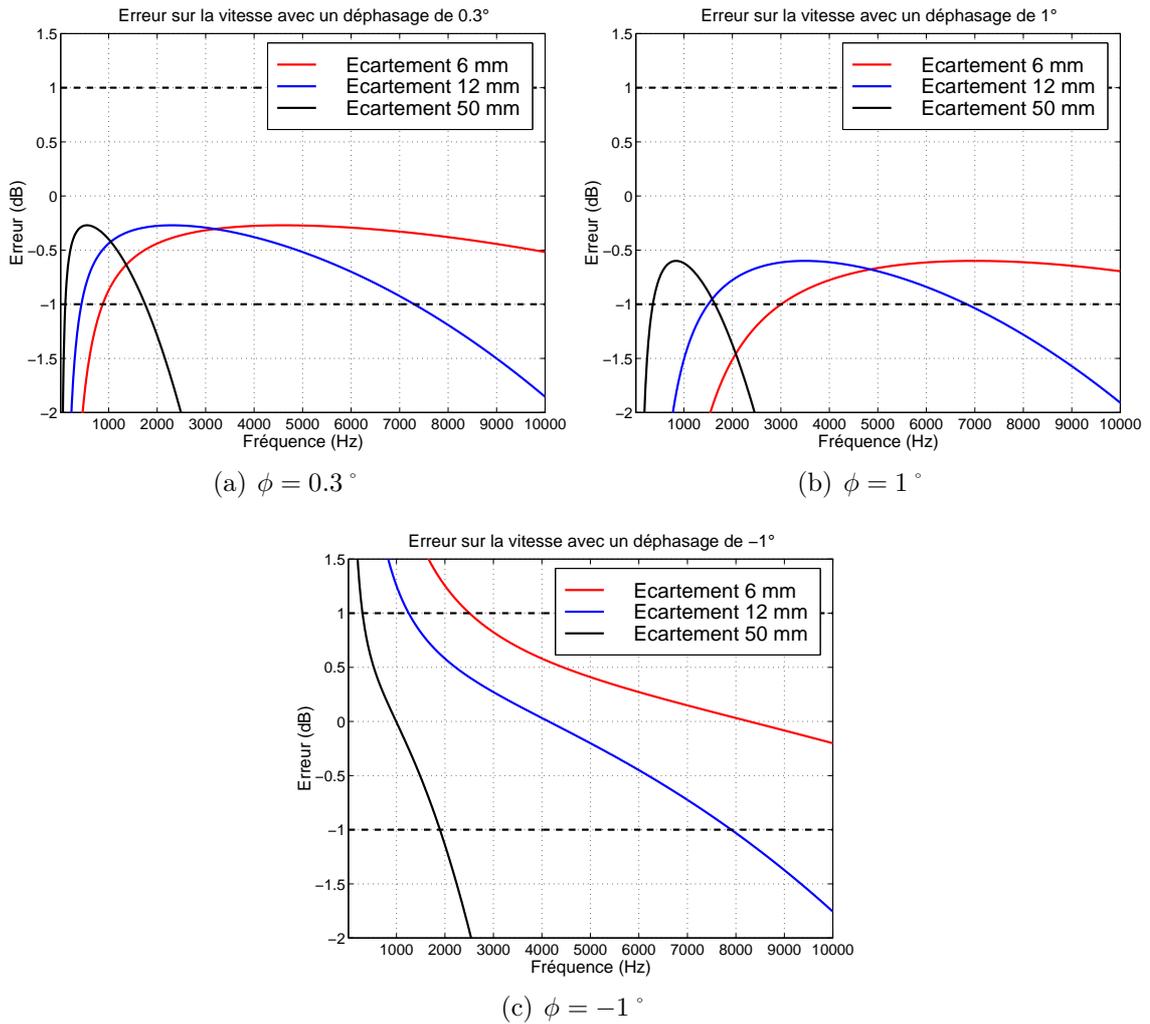


FIG. 2.1: Effet du déphasage et de Δx_r sur l'estimation de $G_{\hat{V}_r}$.

L_E est représenté pour trois valeurs de ϕ et trois valeurs de Δx_r (FIG. 2.1). La gamme de fréquence d'utilisation est définie par les valeurs de fréquences donnant $-1\text{dB} < L_E < 1\text{dB}$. Ainsi, à ϕ fixé, plus Δx_r est petit, plus la gamme de fréquence et la bande passante augmentent. De plus, ϕ est pénalisant aux basses fréquences – les bornes hautes fréquences ne sont quasiment pas modifiées – et pour des petits Δx_r . Il est à noter que, bien que ϕ soit faible, son influence est notable. Suivant son signe, il y a sous-estimation (FIG. 2.27 (a) et (b)) ou surestimation (FIG. 2.27 (c)) en basses fréquences. Un soin particulier doit être apporté en pratique au contrôle du déphasage entre les deux chaînes de mesure microphoniques. Une calibration préalable est indispensable. Elle se fait classiquement grâce à un tube de Kundt (FIG. 2.2).

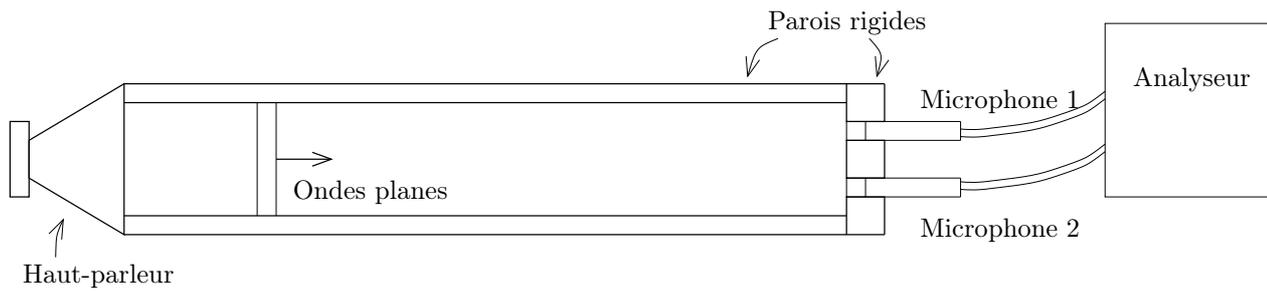


FIG. 2.2: Principe du tube de Kundt.

Les deux microphones sont placés au fond d'un tube rigide. À l'autre extrémité est positionné un haut-parleur émettant un signal à large bande. La borne supérieure de la bande de fréquence est plus petite que la fréquence de coupure du premier mode transverse (section 1.1.5.2 page 30) de sorte que les ondes acoustiques soient planes, c'est-à-dire amplitude et phase constantes dans un plan². De ce fait, si les chaînes de mesure des microphones 1 et 2 ne sont pas appariées en phase, $\phi_{2/1}$, la phase de la chaîne de mesure du microphone 2 par rapport à celle du microphone 1, est non nulle. Typiquement, elle évolue linéairement en fréquence (excepté parfois aux basses fréquences), traduisant le fait que ce déphasage est un retard temporel dû à des différences d'électronique.

Cette méthode par paire de microphones ne donne qu'une composante de vitesse. Cela signifie que pour obtenir *a priori* le vecteur entier :

- soit la mesure est faite en trois temps en positionnant les deux microphones sur 3 axes non colinéaires ;
- soit quatre microphones sont utilisés en même temps [37, 61, 62] (FIG. 2.3).

La première façon peut être contraignante pour obtenir un champ de vitesse assez grand car elle multiplie par 3 les positions de la paire. La deuxième façon permet d'éviter ce problème. Cependant les quatre microphones forment une sonde dont le volume n'est pas négligeable. L'hypothèse de mesure ponctuelle est alors discutable de même qu'une mesure en milieu confiné devient vite difficile.

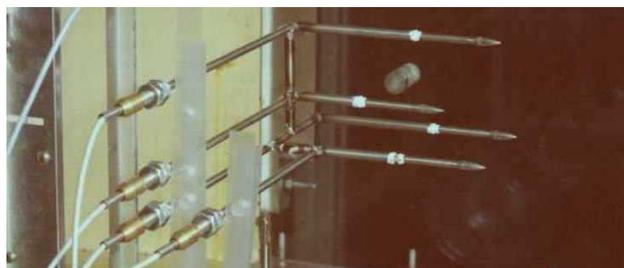


FIG. 2.3: Sonde à quatre microphones pour la mesure de vitesse acoustique.

2.1.1.1.2 Méthodes indirectes : exemple du tri d'onde. Si le type théorique de propagation est connu *a priori*, il est parfois possible de déduire une expression mi-analytique/mi-empirique de la vitesse acoustique à partir de quelques mesures de pression acoustique. Prenons le cas de la propagation guidée du mode plan dans une conduite rigide. La méthode s'appelle le tri d'onde. Deux microphones sont placés en paroi de la conduite (FIG. 2.4). De

²La coupure étant donnée par la dimension transverse du tube, ce dernier doit être choisi suivant les fréquences de travail.

manière générale, la pression acoustique dans la conduite s'écrit (voir (1.64) page 30) :

$$p(x, t) = \text{Re} (\mathcal{P}(x)e^{i\omega t}) \quad (2.6)$$

avec $\mathcal{P}(x) = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}$, $(A, B) \in \mathbb{C}^2$.

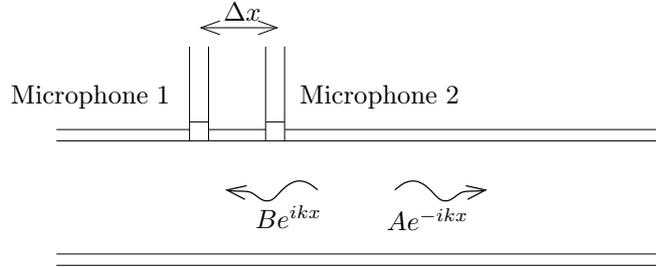


FIG. 2.4: Principe du tri d'ondes.

Soient x_1 et x_2 les positions respectives des microphones 1 et 2. $\Delta x = x_2 - x_1$ est l'écartement entre les deux microphones. Les pressions mesurées étant *a priori* distinctes, A et B sont les solutions du système linéaire :

$$Ae^{-ikx_1} + Be^{ikx_1} = \mathcal{P}(x_1) \quad (2.7)$$

$$Ae^{-ikx_2} + Be^{ikx_2} = \mathcal{P}(x_2) \quad (2.8)$$

Le déterminant D de ce système linéaire est $D = \sin(k\Delta x)$. Devant être différent de 0, Δx doit vérifier $\Delta x \neq n\frac{\lambda}{2}$, où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. En fait, Boden et Åbom [5] ont spécifié et validé expérimentalement le critère suivant :

$$0.1 < \frac{\Delta x}{\frac{\lambda}{2}} < 0.8 \quad (2.9)$$

Sous la condition que ce critère soit respecté, A et B sont :

$$A = \frac{\mathcal{P}(x_1)e^{ikx_2} - \mathcal{P}(x_2)e^{ikx_1}}{D} \quad (2.10)$$

$$B = \frac{\mathcal{P}(x_2)e^{-ikx_1} - \mathcal{P}(x_1)e^{-ikx_2}}{D} \quad (2.11)$$

Le coefficient de réflexion $R = \frac{B}{A}$ est :

$$R = \frac{\mathcal{P}(x_2)e^{-ikx_1} - \mathcal{P}(x_1)e^{-ikx_2}}{\mathcal{P}(x_1)e^{ikx_2} - \mathcal{P}(x_2)e^{ikx_1}} \Leftrightarrow R = \frac{H_{2/1}e^{-ikx_1} - e^{-ikx_2}}{e^{ikx_2} - H_{2/1}e^{ikx_1}} \quad (2.12)$$

où $H_{2/1} = \frac{\mathcal{P}(x_2)}{\mathcal{P}(x_1)}$ est la fonction de transfert entre les deux signaux microphoniques. C'est cette dernière formule qui est employée expérimentalement.

En écrivant $\mathbf{V}(x, t) = \text{Re}(\mathcal{V}(x)e^{i\omega t})\mathbf{e}_x$, (2.10) et (2.12) permettent de connaître $\mathcal{V}(x)$ avec (2.1) :

$$\mathcal{V}(x) = \frac{A}{z^{\text{ref}}} (e^{-ikx} - Re^{ikx}) \quad (2.13)$$

Le nom de tri d'onde donné à la méthode se comprend aisément car A et B sont les coefficients respectifs des ondes propagées et rétropropagées (FIG. 2.4).

2.1.1.2 Mesure par capteurs «fil chaud»

Ceci est le premier type de mesure directe de la vitesse acoustique. Fondées sur des principes physiques proches (échanges de chaleur), la mesure par *microflown* et l'anémométrie fil chaud sont présentées maintenant.

2.1.1.2.1 Le *microflown* : Un nouveau concept de capteur acoustique nommé *microflown* [15, 73, 78, 79] est présenté. Il permet de mesurer directement la vitesse acoustique, contrairement aux méthodes précédentes. De dimensions réduites, son fonctionnement est le suivant : deux tiges métalliques de 0.4 à 1 μm d'épaisseur, de 800 à 1000 μm de long, de 2.5 à 5 μm de large et espacées de 40 à 300 μm ³ sont chauffées à la même température T_0 (400 – 600 K).

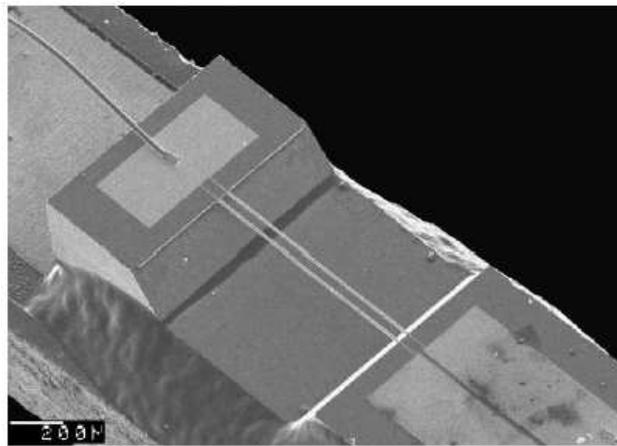


FIG. 2.5: Photographie d'un microflown (extraite de [79]).

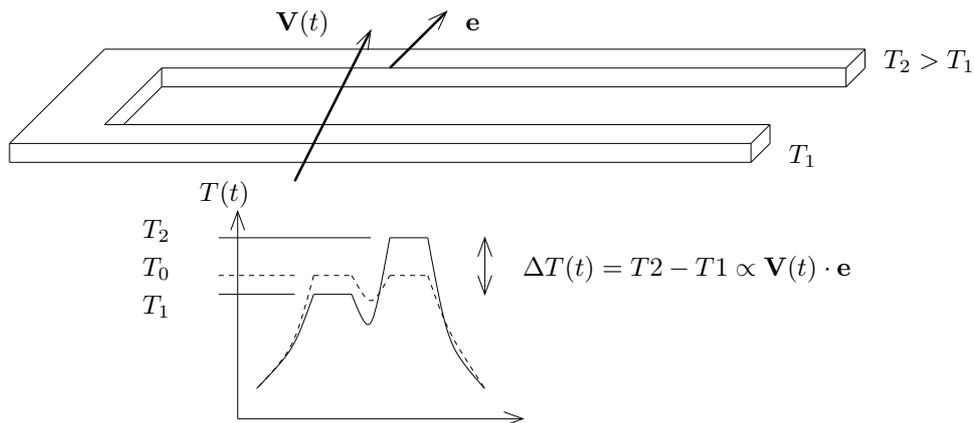


FIG. 2.6: Principe du microflown.

Au passage de la perturbation acoustique, le déplacement d'air crée un transport de chaleur par convection d'une tige à l'autre. Les deux tiges sont alors à deux températures différentes T_2 et T_1 (FIG. 2.6). La différence de température $\Delta T = T_2 - T_1$ est proportionnelle à $\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{e}$, la projection de la vitesse acoustique $\mathbf{V}(t)$ sur l'axe du *microflown* dirigé par \mathbf{e} . Elle est convertie en variation de résistance électrique. C'est cette dernière qui est mesurée. Le fait de disposer de deux tiges permet de déterminer le sens de la vitesse. La gamme de

³Ces dimensions correspondent à la synthèse des valeurs trouvées dans les références [15, 73, 78, 79].

fréquence annoncée par les auteurs [78] est $0 - 20 \text{ kHz}$, en ne montrant toutefois des résultats que sur $400 \text{ Hz} - 3950 \text{ Hz}$. La dynamique en niveau de pression n'est pas donnée (les auteurs n'ont pas dépassé 135 dB pour leur besoin expérimental) et le seuil de détectabilité n'est pas fourni. Selon les auteurs, ce capteur présente comme avantages par rapport à un microphone un SNR élevé, une dimension réduite et une sensibilité à la direction de propagation (utile en intensimétrie). Par contre il présente comme défauts un temps de stabilisation en température d'environ 2 min avant la première mesure, une fragilité à la manipulation et surtout une perte de sensibilité avec la fréquence en $\frac{1}{f}$ [15]. Des mesures de coefficients de réflexion et d'absorption [78] en tube à impédance avec soit un fond rigide soit un fond absorbant (plaque avec un trou) montrent une bonne concordance entre techniques «paire de microphones», «paire de *microflows*» et théorie acoustique.

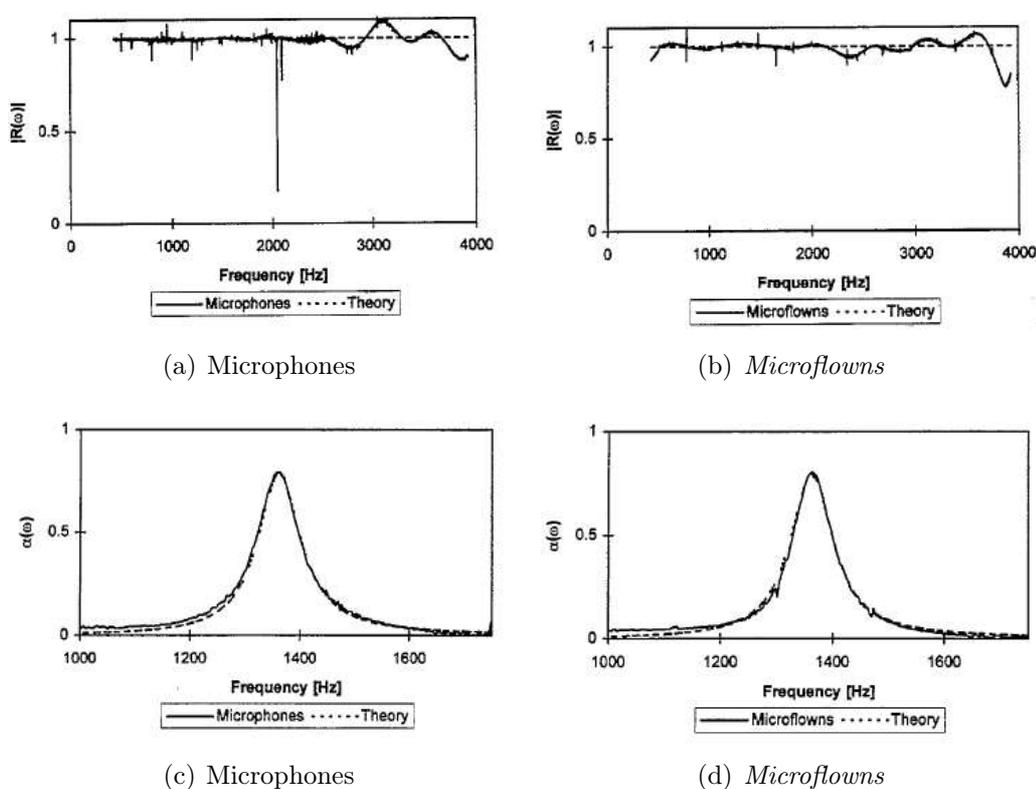


FIG. 2.7: Coefficients de réflexion (fond rigide) et d'absorption (plaque avec un trou) par «paire de microphones» et «paire de *microflows*». Comparaison avec la théorie (extraits de [78]).

Sur les FIG. 2.7 (a) et (b), le coefficient de réflexion dépasse 1 à partir d'environ 3 kHz à cause de la présence de modes transverses. Un modèle analytique du *microflow* a été proposé [73] en partant de l'équation de la chaleur convectée avec la vitesse acoustique pour vitesse du fluide. La sensibilité du *microflow* obtenue par ce modèle a été confrontée avec succès à celle mesurée en guide d'onde jusqu'à 10 kHz (FIG. 2.9). Les auteurs expliquent ainsi la perte de sensibilité avec la fréquence en petite partie par la vitesse finie du transport de la chaleur et en grande partie par la capacité calorifique de la partie sensible du capteur qui ne peut être négligée.

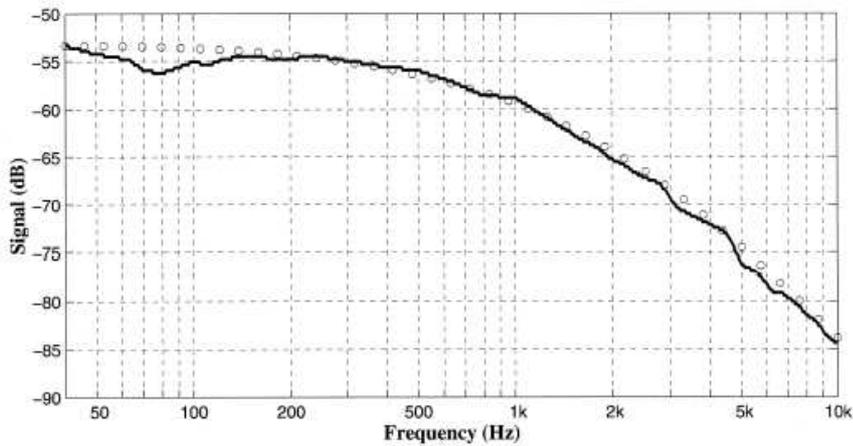


FIG. 2.8: Courbes de sensibilité d'un *microflow*, la mesure étant représentée par le trait plein et la courbe théorique par les cercles (extraites de [73]).

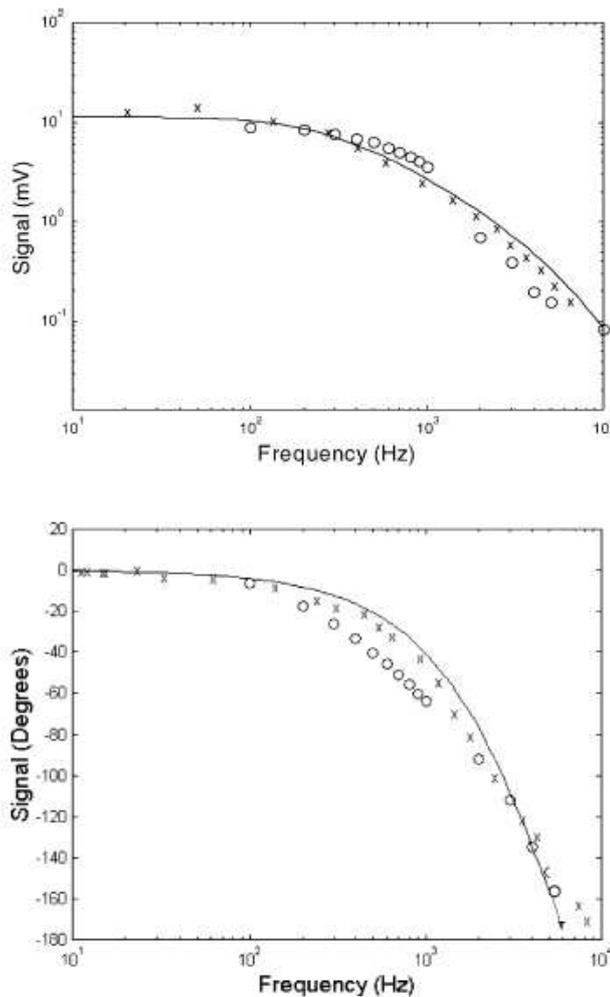


FIG. 2.9: Courbes de sensibilité d'un *microflow*, la caractérisation en guide d'onde étant représentée par les cercles, la caractérisation électronique par les croix et courbe théorique par le trait plein (extraites de [79]).

Une détermination expérimentale de la sensibilité par une caractérisation électronique du *microflown* a aussi été présentée [79]. Alors que dans le cas de la caractérisation en guide d'onde, la composante fluctuante du signal électrique est due à la perturbation acoustique, elle est créée ici en introduisant un courant fluctuant dans une des tiges conductrices du *microflown*. Le résultat de la caractérisation électronique est comparé avec succès à celui de la caractérisation en guide d'onde et au modèle analytique sur la gamme de fréquence de travail $10\text{ Hz} - 10\text{ kHz}$ (FIG. 2.9 page précédente). À l'état de recherche à l'époque des publications citées, ce capteur est maintenant commercialisé [46]. Notamment une sonde 3D (la partie sensible est composée de trois *microflowns* suivant des axes orthogonaux dans un volume de $5 \times 5 \times 5\text{ mm}^3$) permet une mesure complète de la vitesse acoustique pour un milieu au repos. Les caractéristiques techniques avancées sont :

- une bande passante de $5\text{ Hz} - 10\text{ kHz}$;
- une dynamique en niveau de vitesse acoustique de $40 - 120\text{ dB}$ (réf. 50 mm.s^{-1} ⁴, soit $5\text{ }\mu\text{m.s}^{-1}$ à 50 mm.s^{-1}) ;
- une température de fonctionnement entre -17 et $63\text{ }^\circ\text{C}$;
- un diamètre de 12.7 mm ($\frac{1}{2}$ ").

Il est à noter qu'à partir 1.2 kHz , la sensibilité a chuté de 10 dB et qu'elle décroît toujours en $\frac{1}{f}$ comme précédemment vu. La méthode retenue de calibration de la sensibilité est celle du guide d'onde. Par contre le problème du temps de stabilisation [15] n'est apparemment plus posé. Est-t-il résolu ?

Le principe physique du *microflown* rappelant celui de l'anémométrie fil chaud, cette dernière est maintenant présentée.

2.1.1.2.2 L'anémométrie fil chaud : Classiquement utilisée en aérodynamique pour mesurer la vitesse d'un écoulement (laminaire ou turbulent), elle a été expérimentée en tant que capteur de vitesse acoustique pour de l'air au repos [30]. À la différence du *microflown*, un anémomètre fil chaud ne dispose que d'un seul fil chauffé pour une composante de vitesse. Son principe est brièvement rappelé [14]. Un fil métallique est chauffé afin qu'il possède une température supérieure à celle du fluide en mouvement dans lequel il est plongé (FIG. 2.10).

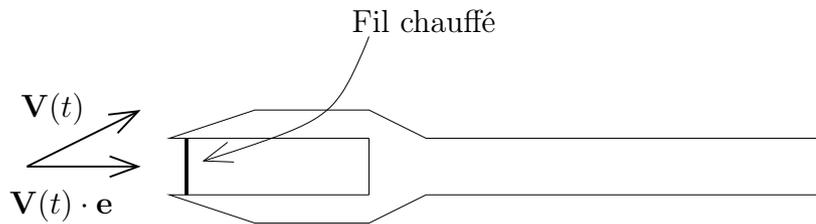


FIG. 2.10: Principe de l'anémomètre fil chaud.

La perte de chaleur du fil se fait par convection. Elle est une fonction de la projection $\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{e}$ de la vitesse au point de mesure sur l'axe normal au fil, de l'écart de température entre le fil et le fluide, et des propriétés physiques du fluide. Le fil est gardé à température constante indépendamment du refroidissement qu'impose le mouvement du fluide en ajustant la tension E aux bornes du fil. E est ainsi une mesure de la vitesse. Elle est donnée par la loi de King :

$$E^2(t) = A + B(\mathbf{V}(t) \cdot \mathbf{e})^n \quad (2.14)$$

⁴Vitesse acoustique associée dans l'air à une pression acoustique de $20\text{ }\mu\text{Pa}$, seuil minimal de sensibilité de l'oreille humaine.

où A , B et n sont des constantes dépendant de l'écart de température entre le fil et le fluide et des propriétés physiques du fluide, à calibrer au préalable à l'aide d'un écoulement de vitesse connue. Les caractéristiques techniques générales (suivant les fils chauds) sont [14] :

- gamme de vitesse de quelques $cm.s^{-1}$ à plusieurs centaines de $m.s^{-1}$;
- suivi en fréquence jusqu'à plusieurs centaines de kHz ;
- diamètre de fil de l'ordre de quelques μm et longueur de la partie sensible de l'ordre de $1 mm$

Pour une mesure 3D, une sonde avec trois fils chauds peut être utilisée. La partie sensible de certaines sondes forme un volume s'inscrivant dans un cylindre de $4 mm$ de diamètre et de $10 mm$ de long.

Les inconvénients d'un anémomètre fil chaud sont :

- l'utilisation d'un seul fil par composante fait que la réponse de l'anémomètre sera identique pour deux vitesses de même direction, de même norme mais de sens opposés ;
- la relation tension / vitesse n'est pas linéaire et plusieurs paramètres sont à calibrer.

Les auteurs [30] se sont intéressés au déplacement d'air dû aux ondes acoustiques. Les vitesses acoustiques sont situées dans la gamme $0.03 - 0.8 m.s^{-1}$ ($116 - 144 dB$ en niveau de vitesse acoustique avec la même référence que section 2.1.1.2.1 page 56). Les expériences ont été menées pour trois fréquences ($f = 35 Hz$, $46 Hz$ et $130 Hz$) en ondes planes stationnaires dans un guide d'onde. Une seule composante de vitesse acoustique étant ainsi présente, la sonde utilisée ne possède qu'un fil. Pour ces valeurs de vitesse acoustique, le niveau de pression peut atteindre $140 dB$ aux ventres. Comme le déplacement dû aux ondes acoustiques est en moyenne nul et qu'un anémomètre fil chaud n'est pas sensible au sens du déplacement, les auteurs proposent l'expression suivante de la tension E de sortie de l'anémomètre :

$$E = E_b + |E_{u_a} \sin(2\pi ft + \phi)| \quad (2.15)$$

où E_b est une tension dite de base, donnée par les auteurs comme toujours existante lorsque la sonde est placée dans un milieu au repos, et E_{u_a} l'amplitude de la partie oscillante de la tension due aux ondes acoustiques. Une comparaison du signal théorique et du signal mesuré (FIG. 2.11) montre qu'en fait la tension E_b n'est jamais atteinte. Ce phénomène est imputé selon les auteurs à l'inertie thermique du capteur.

Les auteurs ont proposé une méthode de calibration de l'anémomètre fil chaud pour des mesures de vitesse acoustique à l'aide de mesures de pression dans le guide d'onde. Ces dernières ont permis d'évaluer la vitesse acoustique théorique dans le guide d'onde. Ils ont ainsi tracé l'amplitude de cette dernière en fonction de l'amplitude E_{u_a} de la partie oscillante du signal de sortie de l'anémomètre pour différentes sondes fil chaud (indiquées par les différentes résistances électriques) de même que la différence de phase entre le signal microphonique et le signal de l'anémomètre (FIG. 2.12). Ces courbes sont non linéaires comme attendu.

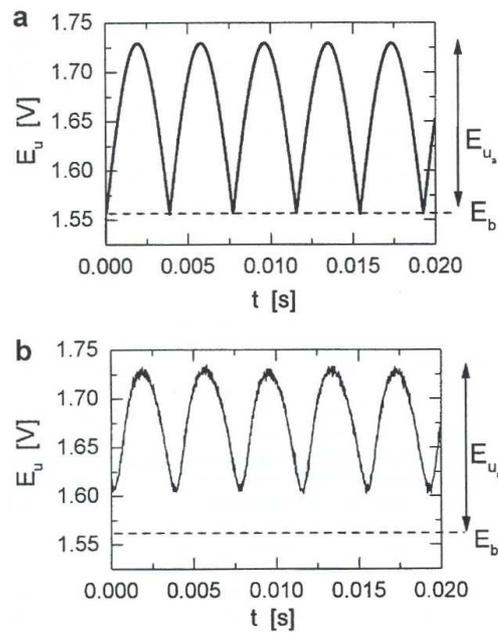


FIG. 2.11: Tensions de sortie idéale (haut) et mesurée (bas) en présence d'ondes acoustiques ($f = 130 \text{ Hz}$) (extraits de [30]).

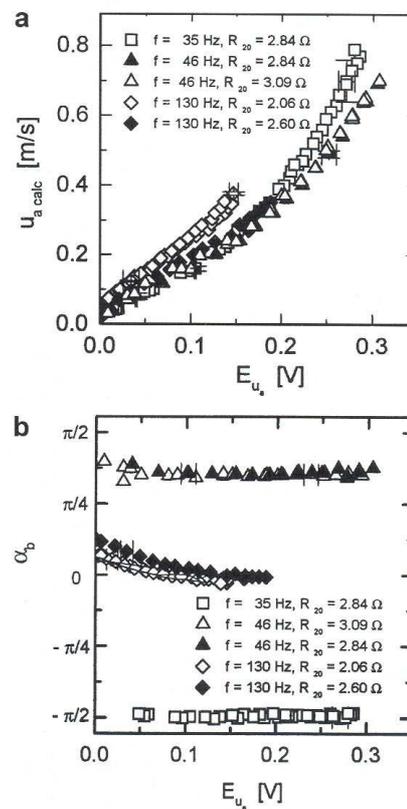


FIG. 2.12: Calibration pour des mesures de vitesse acoustique en amplitude (haut) et en phase (bas) de l'anémomètre fil chaud à l'aide de mesures de pression dans le guide d'onde pour les trois fréquences et pour différentes sondes fil chaud (extraits de [30]).

2.1.1.2.3 Comparaison : Dans le cadre de la mesure de vitesse acoustique pour un fluide au repos à l'aide d'un capteur «fil chaud» et compte tenu des publications trouvées, la technique par *microflow* est plus aboutie que celle par anémométrie fil chaud car contrairement à cette dernière, elle a été directement élaborée à des fins acoustiques, c'est-à-dire pour mesurer des vitesses dans la gamme du $\mu m.s^{-1}$ jusqu'aux dizaines de $mm.s^{-1}$. Toutefois le *microflow* est encore tout récent et malgré l'enthousiasme de ses concepteurs, il n'y a pas encore assez de recul sur ses capacités, surtout vis-à-vis de la chute en fréquence de la sensibilité. Aussi l'anémométrie fil chaud peut être une alternative au *microflow* pour les champs de vitesse acoustique intense (à partir de plusieurs dizaines de $cm.s^{-1}$).

Bien qu'un *microflow* et une sonde fil chaud soient de dimensions relativement petites par rapport à une sonde microphonique, les supports des parties sensibles des deux capteurs ont un volume non négligeable. Ceci est pénalisant pour des applications en champ proche de sources ou d'obstacles.

2.1.1.3 Mesure par capteurs «laser»

Tout comme l'anémométrie fil chaud, la vélocimétrie laser Doppler et la vélocimétrie par images de particules servent classiquement en mécanique des fluides à mesurer la vitesse d'un écoulement laminaire ou turbulent. Ces méthodes reposent sur des principes optiques afin de mesurer indirectement, grâce à un laser, la vitesse de l'écoulement d'après celle des particules injectées dans le fluide. Cette particularité fait qu'elles sont qualifiées de non intrusives car aucune sonde n'est introduite dans le fluide, évitant alors de modifier les phénomènes physiques observés. C'est ce caractère non intrusif qui a motivé plusieurs études dans le domaine de l'acoustique classique en vélocimétrie laser Doppler [13, 24, 28, 39, 63, 64, 70, 71, 74, 77, 80] et plus récemment en vélocimétrie par images de particules [76] afin d'essayer de s'affranchir à terme de capteurs comme ceux vus précédemment. Pour chacune des méthodes laser, une brève description du principe de mesure sera faite avant de détailler les études citées.

2.1.1.3.1 La vélocimétrie laser Doppler

2.1.1.3.1.1 Le principe : Il existe différents systèmes de vélocimètres laser Doppler. Décrits par Boutier et Royer [7], seuls deux de ces systèmes sont rappelés ici car ce sont ceux employés dans les études citées :

- le vélocimètre à faisceau de référence pour les travaux décrits dans [74] ;
- le vélocimètre à franges pour les autres.

Ces deux systèmes reposent sur le même phénomène physique : une onde électromagnétique éclairant une particule en mouvement est diffusée par cette dernière avec une fréquence différente de la fréquence de l'onde incidente. C'est un effet Doppler. Considérons une particule de vitesse \mathbf{V} , éclairée par une onde monochromatique de fréquence f_0 et de longueur d'onde dans le vide λ_0 (source laser).

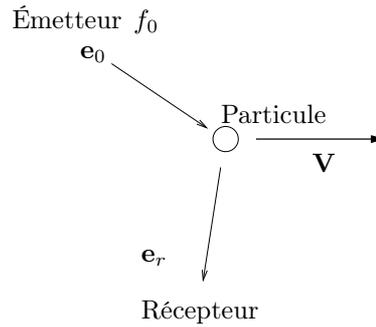


FIG. 2.13: Principe de l'effet Doppler lié à la diffusion d'une onde électromagnétique par une particule dans un écoulement.

\mathbf{e}_0 et \mathbf{e}_r sont les vecteurs unitaires indiquant respectivement la direction de propagation de l'onde incidente et la direction de réception de l'onde diffusée. \mathbf{V} étant toujours plus petite que la célérité de la lumière, le décalage fréquentiel, ou fréquence Doppler, est :

$$f_D = n \frac{\mathbf{V} \cdot (\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_0)}{\lambda_0} \quad (2.16)$$

où n est l'indice de réfraction du milieu. La lumière diffusée par la particule possède une fréquence $f_0 + f_D$. Or pour les lasers utilisés, f_0 est classiquement de l'ordre de 10^{14} Hz et f_D peut être au maximum de l'ordre de 10^8 Hz. Il est donc plus pratique de détecter f_D par des techniques d'interférence plutôt que par une mesure directe de $f_0 + f_D$. Les deux systèmes de vélocimétrie laser Doppler se différencient à ce stade :

- le vélocimètre à faisceau de référence : le faisceau diffusé par la particule et le faisceau émis par la source laser interfèrent sur le détecteur, ce dernier mesurant un signal modulé à la fréquence

$$f_D = \frac{|\mathbf{V} \cdot (\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_r)|}{\lambda_0} \quad (2.17)$$

- le vélocimètre à franges : deux faisceaux laser ayant des directions de propagation différentes \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 se croisent pour former un volume dit de mesure, le signal détecté ayant alors une fréquence indépendante de la direction d'observation (FIG. 2.14)

$$f_D = \frac{|\mathbf{V} \cdot (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1)|}{\lambda_0} \quad (2.18)$$

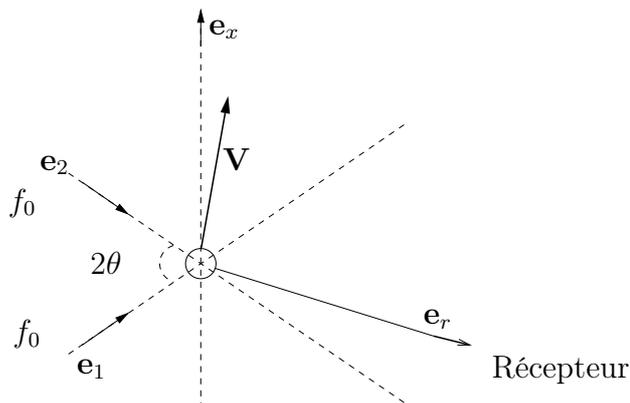


FIG. 2.14: Technique d'interférence du vélocimètre à franges.

Historiquement, le vélocimètre à faisceau de référence fut le premier à être mis en œuvre. Toutefois, c'est le vélocimètre à franges qui est le plus employé de nos jours à cause de l'indépendance de f_D vis-à-vis du détecteur. Son fonctionnement est détaillé. Les faisceaux laser émis étant cohérents, le volume de mesure est en fait un réseau d'interférences, composé d'une succession de franges sombres et brillantes⁵. L'interfrange i_f , distance entre deux franges brillantes successives, est :

$$i_f = \frac{\lambda_0}{2n \sin \theta} \quad (2.19)$$

où θ est le demi-angle au sommet entre les deux faisceaux laser émis (FIG. 2.15).

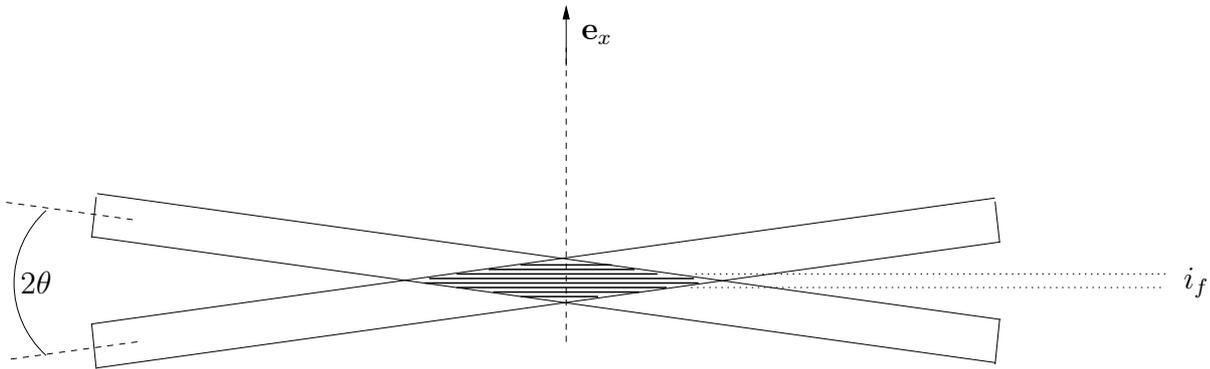


FIG. 2.15: Franges d'interférences entre deux faisceaux laser.

Ainsi, si une particule de vitesse \mathbf{V} traverse le volume de mesure, elle croisera alternativement des franges sombres et brillantes. La lumière diffusée sera périodique, de période T égale au temps mis par la particule pour passer d'une frange brillante à la suivante. Le signal détecté par un photomultiplicateur⁶ aura pour fréquence f :

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.20)$$

$$= \frac{|V_x|}{i_f} \quad (2.21)$$

où V_x est la projection de \mathbf{V} sur l'axe normal aux franges et dirigé par \mathbf{e}_x . La mesure de f permet donc de connaître $|V_x|$. Un intérêt important de cette relation est qu'elle est linéaire et qu'elle ne dépend que d'un seul paramètre, l'interfrange i_f ⁷. Il est à noter qu'en développant le terme $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1$ dans (2.18) et en utilisant (2.19), il vient que $f = f_D$. V_x apparaît en valeur absolue car tel qu'est décrit le vélocimètre à franges, deux particules de vitesses identiques en norme et direction mais différentes en sens produisent la même fréquence. La détection du signe de la vitesse est obtenue en envoyant un des faisceaux émis dans une cellule de Bragg avant d'interférer. Cette cellule permet de faire défiler les franges du volume de mesure à une vitesse constante connue V_B qui va se composer avec celle de la particule. De ce fait, si la particule avance dans le sens de \mathbf{e}_x , elle produit un signal de fréquence $\frac{V_x + V_B}{i_f}$ sinon elle produit un signal de fréquence $\frac{V_x - V_B}{i_f}$.

⁵D'où le nom de vélocimètre à franges.

⁶Appareil convertissant la lumière en courant.

⁷Contrairement à l'anémométrie fil chaud qui lie tension mesurée et vitesse par une relation non linéaire dépendant de trois paramètres.

2.1.1.3.1.2 Application à la mesure de vitesse acoustique pour un fluide au repos : Le travail de Taylor [74] constitue une référence dans les travaux de vélocimétrie laser Doppler effectués jusqu'à aujourd'hui. En 1976, il a montré que pour que les particules d'ensemencement suivent correctement le mouvement du fluide, leur taille et leur masse volumique doivent être choisies en fonction de la gamme de fréquence de travail (FIG. 2.16). Ainsi, il sera théoriquement possible de travailler jusqu'à une fréquence de 50 kHz , dans l'air et avec des particules d'un diamètre de 0.6 μm si :

- les particules ont une densité de 1 ;
- le rapport pour une position donnée des amplitudes de la vitesse d'une particule et de la vitesse du fluide en l'absence de particules est fixé à 0.5 dB (échelle logarithmique).

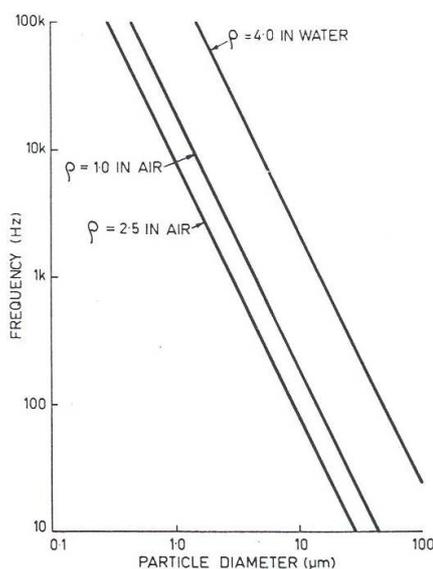


FIG. 2.16: Gamme de fréquence en fonction du diamètre des particules et de leur densité dans l'air et l'eau (extraits de [74]).

Un résultat plus restrictif a été trouvé dans les travaux effectués dans la référence [67]. En fait, des particules dont le diamètre est proche du micron suivront correctement des fluctuations allant jusqu'à 10 kHz .

Taylor a ensuite effectué des mesures suivant une composante de la vitesse acoustique avec un vélocimètre à faisceau de référence dans le cadre d'ondes stationnaires harmoniques en guide d'ondes et a confronté avec succès ses résultats à la vitesse théorique obtenue par mesure microphonique (FIG. 2.17). La mesure de la vitesse acoustique est basée sur une analyse spectrale du signal capté. Cette méthode utilise le fait que pour une vitesse acoustique harmonique, l'allure théorique du spectre du signal capté est connue. C'est un spectre comportant plusieurs harmoniques de la fréquence de l'onde acoustique. Leur amplitude respective est donnée par la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre égal à celui de l'harmonique. C'est l'argument de ces fonctions de Bessel qui contient l'information de l'amplitude de la vitesse acoustique.

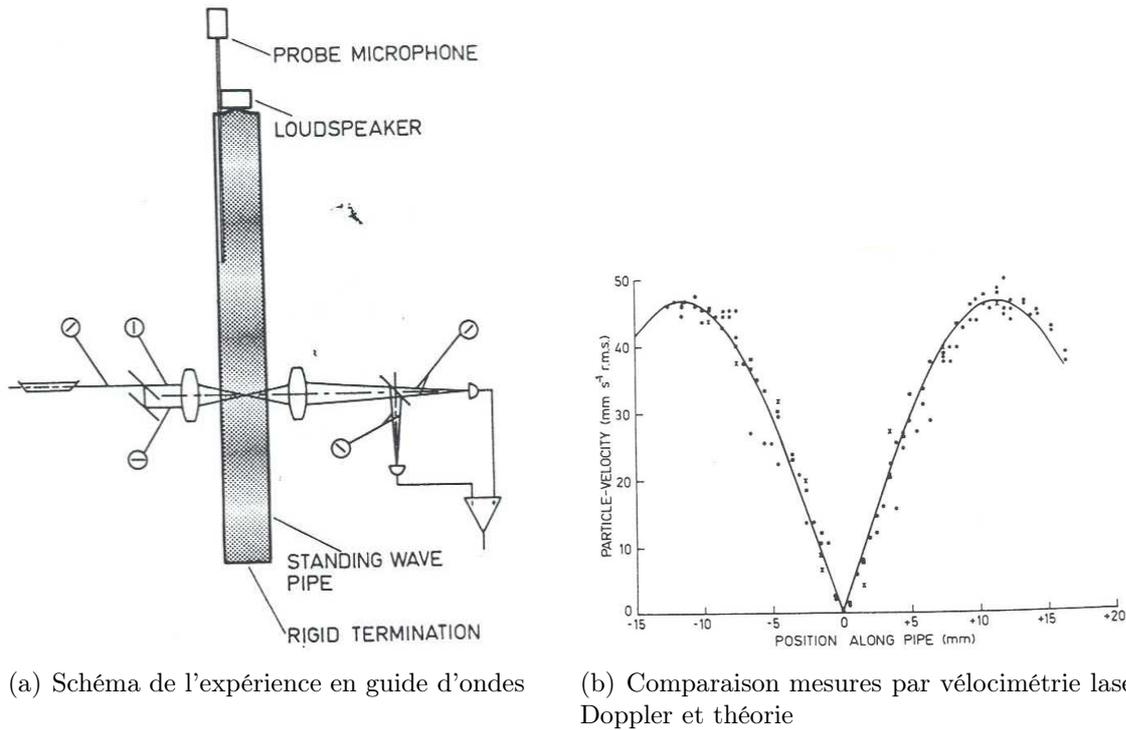


FIG. 2.17: Expérience de Taylor en guide d'ondes et comparaison des mesures à la théorie (extraits de [74]).

Par contre la phase de la vitesse acoustique n'est pas donnée. La méthode par analyse spectrale comporte les inconvénients :

- de permettre la mesure de l'amplitude de la vitesse acoustique uniquement pour des ondes harmoniques ;
- d'occulter la phase de la vitesse acoustique.

En 1991, Vignola [80] a étudié par vélocimétrie laser Doppler le déplacement de particules soumises à des ondes stationnaires dans un tube rempli d'eau. La mesure est toujours unidimensionnelle. Il a essayé de déterminer les performances et les limites du vélocimètre à franges utilisé, en particulier vis-à-vis du mouvement brownien et du *shot noise*, bruit propre du photomultiplicateur. La méthode de mesure de la vitesse acoustique repose sur une analyse spectrale du signal de sortie du photomultiplicateur tout comme Taylor [74]. Il a été montré que l'influence du mouvement brownien est négligeable, mais que le *shot noise* impose une limite inférieure sur l'amplitude du déplacement au-dessous de laquelle le système ne peut détecter le déplacement d'une particule. Il propose une expression de cette amplitude minimale détectable :

$$A_{min} = \sqrt{\left(\frac{\lambda h c_e B}{2\pi^2 n \eta P_0}\right)} \quad (2.22)$$

où

λ est la longueur d'onde optique,

$h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ est la constante de Planck,

$c_e = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ est la célérité de la lumière dans le vide,

B est la bande passante de l'électronique de réception,

n est l'indice de réfraction du fluide,

η est le rendement quantique du photomultiplicateur,

P_0 est la puissance de la lumière diffusée incidente sur la surface sensible du photomultiplicateur.

Pour le système utilisé, $A_{min} \simeq 1 \text{ mm}$. Aussi, il a trouvé que l'appareil de mesure, capable de détecter un déplacement minimal de 5 nm pour une bande de fréquence de 10 kHz , approche la limite du *shot noise*.

Une étude de faisabilité [13] a montré comment les méthodes de chronométrage des *bursts* (analyse statistique) et de transformée de Hilbert (suivi de fréquence) permettent d'extraire la vitesse acoustique instantanée dans le cadre d'une mesure unidimensionnelle sans écoulement. Ces deux techniques sont comparées grâce à l'étude dans un conduit à terminaison rigide d'une onde acoustique stationnaire contenant deux fréquences en rapport d'octaves. Les niveaux de vitesse acoustique sont dans la gamme $25 - 350 \text{ mm.s}^{-1}$. Les méthodes donnent des résultats quasiment identiques. Ceci montre leur capacité à mesurer des vitesses acoustiques.

Plus récemment, des travaux conséquents sur les méthodes d'extraction de l'amplitude et de la phase de la vitesse acoustique ont été menés [24, 39, 63, 64, 70, 71, 77].

Dans un guide d'onde dont la fréquence de coupure du premier mode transverse est d'environ 4.9 kHz , Poggi a comparé un système industriel de vélocimétrie laser Doppler 1D à un dispositif 1D mis au point au cours de son étude [63, 64]. Il utilise des outils d'analyse temps/fréquence afin de retirer l'information de la vitesse acoustique, c'est-à-dire son amplitude et sa phase connaissant la fréquence acoustique. En particulier, il utilise le signal de la fréquence instantanée d'un *burst*⁸ (FIG. 2.18) pour obtenir cette information. Sachant que l'ensemencement d'un milieu au repos est délicat, il a constaté que celui-ci pouvait introduire des erreurs de $\pm 0.5\%$ à $\pm 3\%$ suivant la concentration en particules. Contrairement au système industriel, le dispositif développé ne nécessite qu'un seul *burst* pour extraire la vitesse acoustique. La durée d'un *burst* est très grande en regard de la période acoustique, ceci pour des fréquences supérieures à 100 Hz .

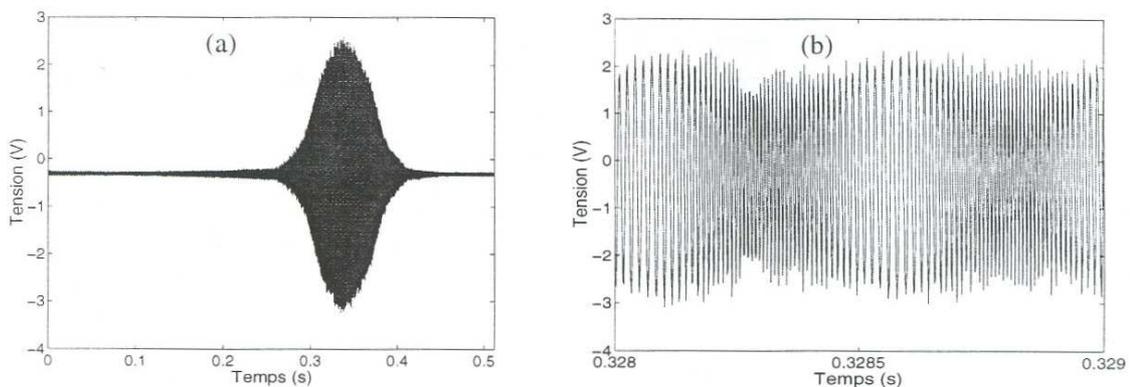
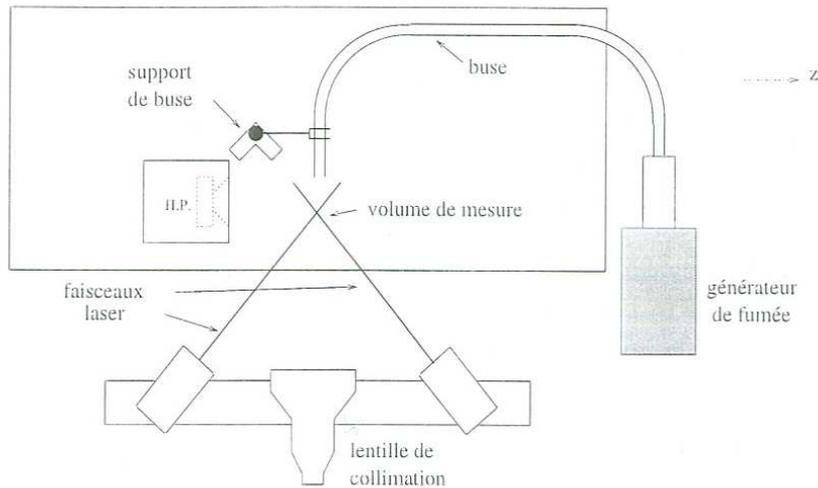


FIG. 2.18: *Burst* typique en vélocimétrie laser Doppler pour un milieu au repos (extraits de [63]).

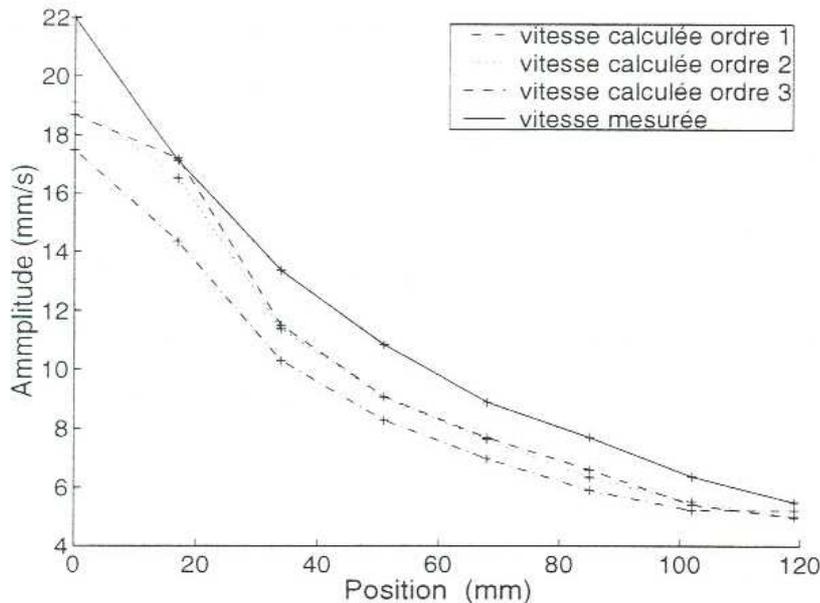
Il a pu vérifier la validité de ses mesures en vélocimétrie laser Doppler en les comparant à un modèle théorique nécessitant une mesure de pression en un point. Il a constaté un bon

⁸Signal de sortie du photomultiplicateur.

fonctionnement jusqu'à 2 kHz pour des niveaux suffisants de vitesse acoustique, c'est-à-dire des vitesses supérieures à 1 mm.s^{-1} . Une expérience en champ libre a donné de bons résultats pour une fréquence de 1 kHz et des vitesses allant de 5 à 22 mm.s^{-1} , i.e. des niveaux de pression acoustique compris entre 100 et 115 dB (FIG. 2.19). Par contre, les résultats se dégradent pour une fréquence supérieure à 2 kHz , dégradation imputée par l'auteur à la stabilité insuffisante des conditions expérimentales (température, bruit...).



(a) Dispositif



(b) Vitesses acoustiques par vélocimétrie laser Doppler et par mesures microphoniques

FIG. 2.19: Mesure en champ libre avec un haut-parleur (extraits de [63]).

Avec le même banc utilisé dans l'étude précédente et à l'aide de la transformée de Wigner-Ville croisée (CWVT) pour extraire la vitesse acoustique, Valière [77] a montré que, dans

le cas d'ondes planes en guide d'onde, les erreurs de mesure par vélocimétrie laser Doppler évoluent avec le niveau de vitesse acoustique et la fréquence (FIG. 2.20). En particulier, l'erreur est inférieure à 1 dB pour une vitesse acoustique supérieure à environ $0.7\text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ sur une gamme de fréquence de 500 à 4000 Hz . En deçà de cette vitesse, la fréquence maximale diminue, par exemple 1000 Hz pour $0.2\text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$.

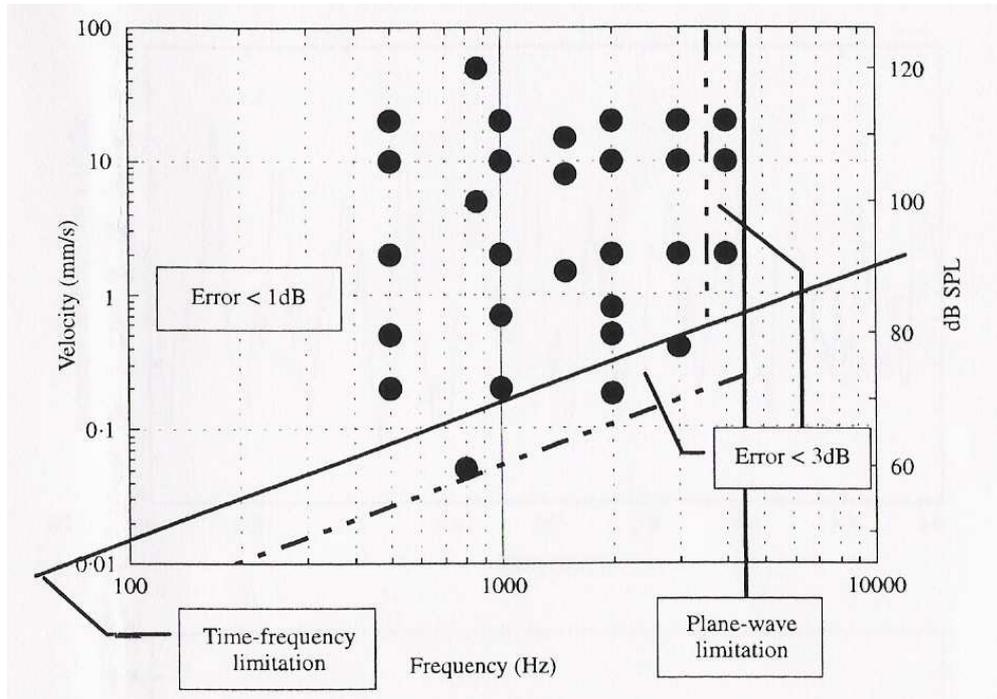


FIG. 2.20: La vélocimétrie laser Doppler en guide d'onde pour un milieu au repos : domaine d'application (extraits de [77]).

Il a aussi utilisé une détection temps/fréquence synchrone (TFSD) afin d'extraire la vitesse acoustique. Celle-ci est apparue plus robuste que la CWVT en présence de signaux bruités. En outre, la TFSD et la CWVT ne nécessitent pas autant de particules d'ensemencement que le système industriel. Un résultat est montré sur FIG. 2.21.

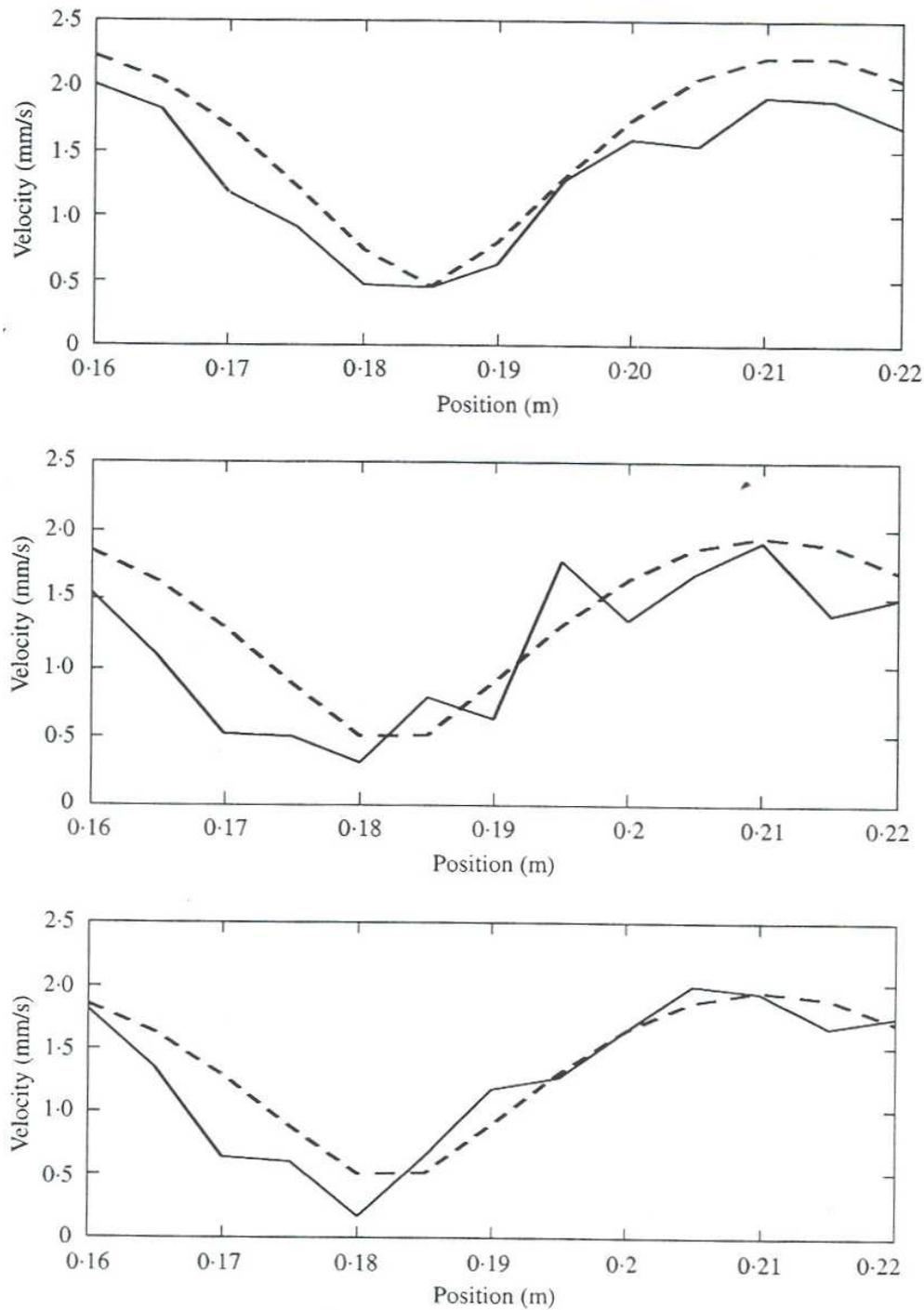


FIG. 2.21: Comparaison de trois méthodes de traitement du signal issu de la vélocimétrie laser Doppler en guide d'onde pour un milieu au repos : système industriel (haut), CWVT (milieu) et TFSD (bas). Mesures en trait plein et théorie en trait pointillé (extraits de [77]).

Comme cela a été constaté par les auteurs des études précédentes, le repos parfait d'un fluide est impossible car des phénomènes de convection naturelle sont toujours plus ou moins présents. De plus les vitesses associées à ces phénomènes sont souvent du même ordre que celles des vitesses acoustiques. Ainsi un nouveau banc de mesure par vélocimétrie laser Doppler 1D permettant de mieux contrôler l'acquisition a été réalisé [24, 70, 71]. Il utilise une transformée de Fourier à court terme en détection synchrone pour extraire la vitesse acoustique mais aussi la vitesse de convection naturelle. Cette dernière est estimée simplement en

moyennant sur le nombre de périodes durant un *burst* la vitesse totale de la particule. Des mesures comparatives avec une sonde à deux microphones en champ libre (champs proche et lointain d'un haut-parleur) ont été menées afin de valider la mesure de la vitesse acoustique en amplitude et en phase. Les fréquences de travail sont 500, 1000 et 2000 Hz . Des résultats sont montrés pour les deux premières fréquences (FIG. 2.22 et FIG. 2.23). Les vitesses acoustiques sont dans la gamme $1.5 - 10 \text{ mm.s}^{-1}$. L'auteur considère que la méthode est validée en champ libre, en amplitude et en phase. Toutefois, l'écart-type du déphasage pris sur 50 estimations est de l'ordre de 10 degrés, ce qui nous apparaît trop grand dans l'optique de l'utilisation conjointe vélocimétrie laser Doppler/capteur de pression pour mesurer une intensité acoustique, par exemple.

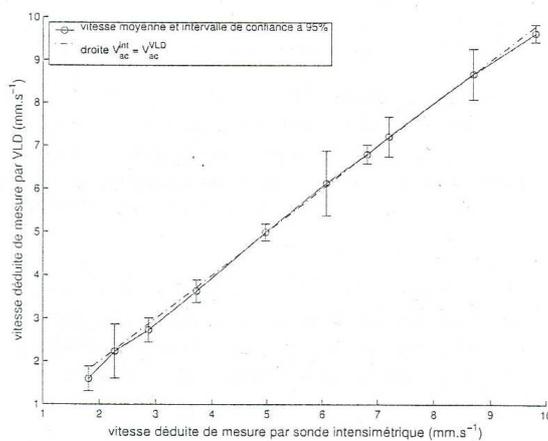
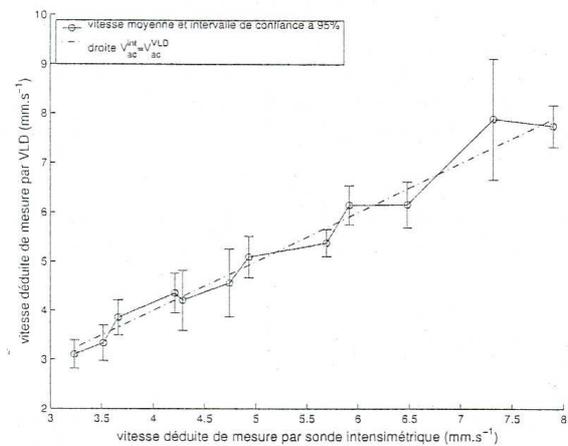
(a) Amplitude à 500 Hz (b) Amplitude à 1000 Hz

FIG. 2.22: Comparaison vélocimétrie laser Doppler/ sonde microphonique : amplitudes (extraits de [70]).

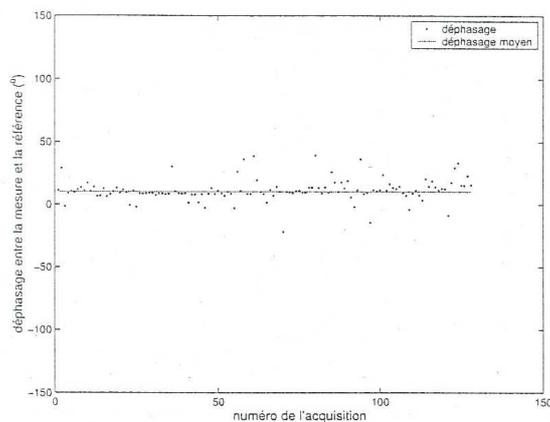
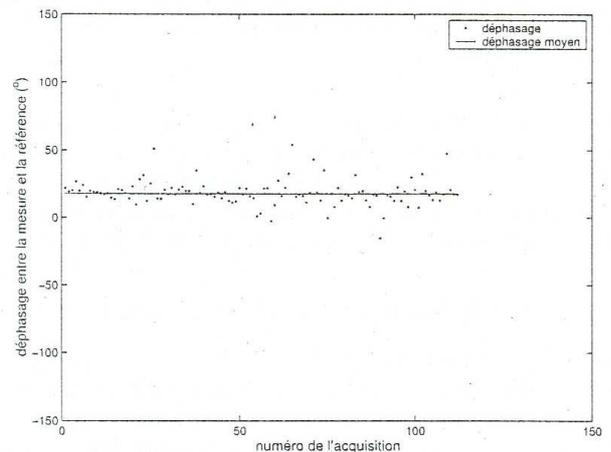
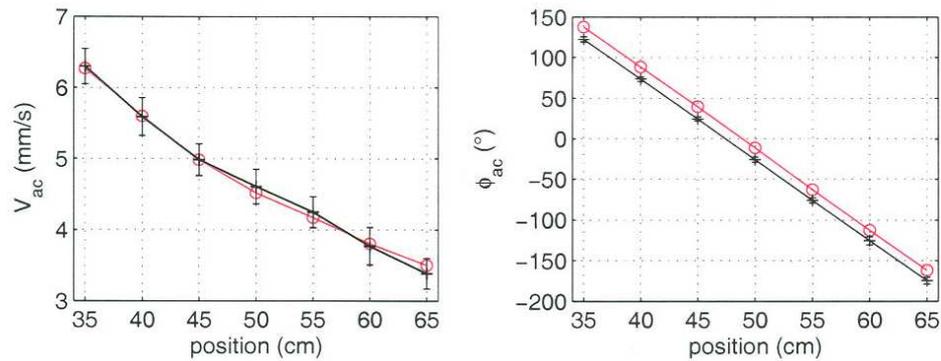
(a) Phase à 500 Hz (b) Phase à 1000 Hz

FIG. 2.23: Comparaison vélocimétrie laser Doppler/ sonde microphonique : phases (extraits de [70]).

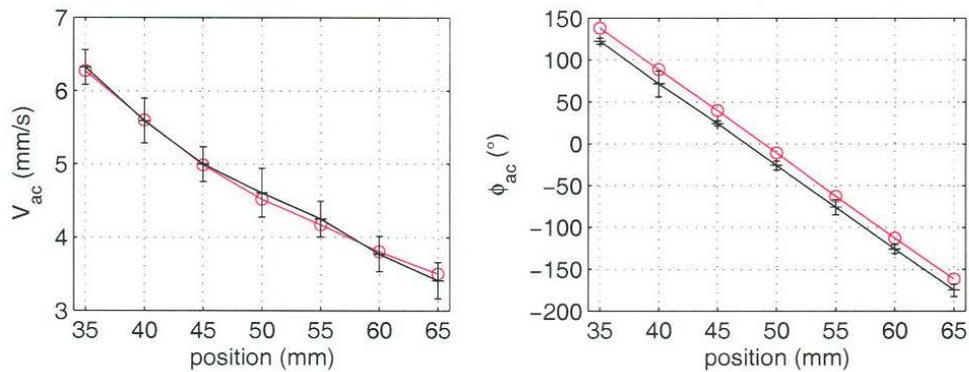
Des mesures en guide d'onde ont aussi été effectuées pour tester l'estimateur de vitesse de convection naturelle. Cette dernière est de l'ordre de 50 mm.s^{-1} et les vitesses acoustiques

dans la gamme $1 - 80 \text{ mm.s}^{-1}$ à 1000 Hz . Les erreurs obtenues sont d'environ 3% pour les deux types de vitesse.

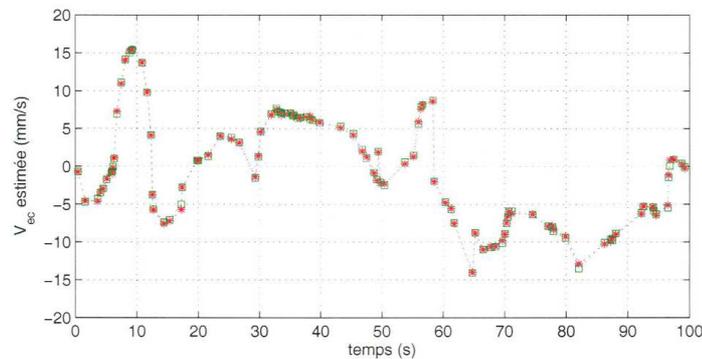
En parallèle à ce travail et dans le même but d'extraire la vitesse de convection naturelle en plus de la vitesse acoustique, une étude conséquente sur le traitement du signal [39] a permis de mettre au point deux nouveaux estimateurs, l'un basé sur la dérivée de la phase du *burst* (PDBE) et l'autre utilisant un filtre de Kalman étendu (EKF). Les mesures effectuées en champ libre sont du même type que précédemment (FIG. 2.24 (a) et (b)). Les erreurs sur la vitesse acoustique en amplitude et en phase sont du même ordre de grandeur que dans l'étude précédente, pour des vitesses acoustiques dans la gamme plus restreinte de $3.4 - 6.2 \text{ mm.s}^{-1}$. La vitesse de convection naturelle est montrée pour les deux estimateurs (FIG. 2.24).



(a) PDBE à 1000 Hz



(b) EKF à 1000 Hz



(c) Écoulement de convection naturelle

FIG. 2.24: Méthodes récentes de traitement du signal pour la vélocimétrie laser Doppler en milieu quasi au repos et comparaison avec mesure microphonique (extraits de [39]).

2.1.1.3.2 La vélocimétrie par images de particules : Alors qu'à un instant donné d'une acquisition, la vélocimétrie laser Doppler fournit une information ponctuelle, la vélocimétrie par images de particules permet d'obtenir un champ de vitesse. Son principe est très brièvement exposé. Il repose sur l'utilisation d'une nappe laser pulsée et d'une caméra afin de filmer le champ de mesure : deux nappes successives, la première émise à t_0 et la suivante à $t_0 + \Delta t$, éclairent le champ de la caméra. Les deux images obtenues donnent les positions des particules d'ensemencement aux deux instants. Une analyse statistique de ces images permet de déterminer le vecteur déplacement de chacune des particules sur la durée Δt et ainsi le

vecteur vitesse en divisant par Δt . En reproduisant plusieurs fois dans le temps les doublets de nappe laser, l'évolution temporelle du champ de vitesse est obtenue. Toutefois une bonne résolution temporelle repose sur la cadence des doublets et sur la résolution temporelle de la caméra. Or les systèmes courants de PIV ne peuvent donner qu'une cadence d'échantillonnage maximale de l'ordre de 10 Hz . Cette contrainte purement technologique commence à peine de nos jours à être levée avec les nouveaux systèmes de vélocimétrie par images de particules dits rapides (cadences de l'ordre du kHz). Cependant des études avec des systèmes classiques ont le mérite d'avoir été menées malgré cette barrière [76]. Le phénomène acoustique étant périodique, un signal corrélé au phénomène est utilisé pour donner l'origine des phases lors de l'acquisition par vélocimétrie par images de particules. Ainsi il est possible de constituer le champ de vitesse acoustique sur une période avec un temps d'acquisition suffisamment long pour obtenir toutes les phases. Pour des vitesses acoustiques assez fortes (0.5 m.s^{-1} , voir plus), la vélocimétrie par images de particules a permis d'obtenir des champs de couche limite acoustique [76] ou de décrire assez finement le mouvement de l'air dans un réfrigérateur thermoacoustique pour essayer de mieux comprendre son fonctionnement [45].

2.1.2 Fluide en mouvement

Nous allons maintenant compléter l'étude bibliographique de la mesure de la vitesse acoustique dans le cas du fluide en mouvement, correspondant au cadre du travail de thèse présenté. Dans ce cas, une fluctuation supplémentaire de vitesse apparaît :

- soit par la nature turbulente de l'écoulement ;
- soit par la présence d'un capteur, perturbant alors l'écoulement.

Cette fluctuation supplémentaire doit être rejetée :

- par traitement du signal ;
- par amélioration de l'aérodynamique du capteur ;

Aussi, la vitesse moyenne de l'écoulement doit être connue. Pour donner une idée de la problématique de la mesure, la vitesse acoustique correspondant à un niveau de pression de 100 dB en onde plane progressive est de 5 mm.s^{-1} alors que les vitesses moyennes d'écoulements classiques dans les applications industrielles sont au moins de l'ordre de $10\text{--}100\text{ m.s}^{-1}$. Ainsi la mesure de la vitesse acoustique en écoulement est la recherche d'une petite valeur par rapport à la vitesse moyenne, bruitée par des fluctuations turbulentes naturelles ou induites par le(s) capteur(s). Nous allons donc voir comment certaines des méthodes vues en section 2.1.1 page 52 peuvent s'étendre à ce cas.

2.1.2.1 Mesure par microphones

Les méthodes vues en section 2.1.1 page 52 sont applicables ici sous les conditions suivantes :

- pour ce qui concerne les mesures directes (sonde microphonique), un article important [53] montre qu'en général, ces méthodes ne peuvent être étendues au cas en écoulement. En effet, il est impossible d'exprimer la vitesse acoustique en fonction de la pression acoustique et de son gradient à l'aide de (1.16), (1.17) et (1.19) page 22 à cause de la présence d'une dérivée convective dans (1.17) et non plus d'une simple dérivée partielle par rapport au temps (milieu au repos). La seule exception est le cas d'une onde plane se propageant dans la même direction qu'un écoulement uniforme. Dans ce cas, les microphones doivent être dotés d'une ogive ou bien placés au fond d'un tube anti-turbulence [18], le choix de l'ogive étant tout de même privilégié. En plus de ces précautions, une technique de rejet de la turbulence à l'aide d'un signal s corrélé

aux phénomènes acoustiques observés [11] doit être appliquée. Malgré ces précautions, cette méthode de mesure ne semble pas être applicable avec des vitesses d'écoulement supérieures à environ 30 m.s^{-1} [18, 37, 61, 62]. Aussi, la mesure 3D par la sonde à quatre microphones présentée FIG. 2.3 page 54, en plus d'être fortement intrusive, est généralement fautive en toute rigueur, compte tenu de la référence [53]. Toutefois, pour ces vitesses d'écoulement, l'influence de la dérivée convective est faible [37, 61, 62]. De ce fait, l'expression valable pour un milieu au repos peut être appliquée, en commettant une erreur négligeable. Ainsi, en présence d'ondes acoustiques quelconques, la densité spectrale de puissance corrigée de l'estimation de la composante de vitesse acoustique \check{V}_r (2.3) page 52 devient :

$$G_{\check{V}_r}^{\text{corr}}(f) = \frac{1}{(\omega \Delta x_r \rho^{\text{ref}})^2} \left(G_{p_1}^{\text{corr}}(f) + G_{p_2}^{\text{corr}}(f) - 2\text{Re}(G_{p_2 p_1}^{\text{corr}}(f)) \right), \forall f > 0 \quad (2.23)$$

où

$$G_{p_j}^{\text{corr}} = \frac{|G_{p_j s}|^2}{G_s} \quad (2.24)$$

$$G_{p_1 p_2}^{\text{corr}} = \frac{G_{p_1 s} G_{p_2 s}^*}{G_s} \quad (2.25)$$

$G_{p_j s}$ est la densité interspectrale de puissance entre le signal de pression p_j , $j = 1, 2$ et le signal s et G_s la densité spectrale de puissance du signal s .

- pour ce qui concerne le tri d'onde en conduite, méthode de type indirect, le critère (2.9) page 55 devient [1] :

$$0.1 < \frac{\Delta x}{(1 - M^{\text{ref}2}) \frac{\lambda}{2}} < 0.8 \text{ et } \Delta x > \lambda M^{\text{ref}} \quad (2.26)$$

Les auteurs ont trouvé la deuxième inégalité en considérant que l'écartement Δx entre les deux microphones doit être plus grand que la plus grande des échelles de longueur de la turbulence. Cette méthode semble être efficace [29] pour des écoulements de nombre de Mach allant jusqu'à 0.3.

Toutefois, un soin important doit être apporté au positionnement pariétal des microphones. En effet, si un microphone est trop avancé dans la conduite, le signal mesuré est extrêmement bruité. Au contraire, si le microphone est trop reculé par rapport à la paroi, une cavité est formée, pouvant alors se comporter comme une source aéroacoustique pour une fréquence particulière liée aux dimensions de la cavité (sifflement). La correction par un signal corrélé aux phénomènes acoustiques étudiés est recommandée. Il est à noter que l'hypothèse simplificatrice d'écoulement uniforme est faite pour cette méthode. Elle utilise l'expression théorique de la pression (1.64) page 30. Le coefficient de réflexion R (2.12) devient :

$$R = \frac{\mathcal{P}(x_2) e^{-ik^+ x_1} - \mathcal{P}(x_1) e^{-ik^+ x_2}}{\mathcal{P}(x_1) e^{ik^- x_2} - \mathcal{P}(x_2) e^{ik^- x_1}} \Leftrightarrow R = \frac{H_{2/1}^{\text{corr}} e^{-ik^+ x_1} - e^{-ik^+ x_2}}{e^{ik^- x_2} - H_{2/1}^{\text{corr}} e^{ik^- x_1}} \quad (2.27)$$

où $H_{2/1}^{\text{corr}}$ est la fonction de transfert corrigée entre les signaux de pression des microphones 2 et 1 (voir FIG. 2.4). La vitesse acoustique est :

$$\mathcal{V}(x) = \frac{A}{z_{\text{ref}}} \left(e^{-ik^+ x} - R e^{ik^- x} \right) \quad (2.28)$$

Pour ces méthodes, la vitesse moyenne de l'écoulement n'est évidemment pas donnée par les capteurs employés. Ceci signifie qu'un capteur de vitesse doit être utilisé en plus.

2.1.2.2 Mesure par capteurs «fil chaud»

À notre connaissance, le *microflow* n'a jamais été testé en écoulement. Mais est-il utilisable dans ce cas compte tenu de la fragilité rapportée dans l'étude [15]? Tant bien même serait-il utilisable :

- une technique de rejet de la turbulence devrait quand même être appliquée;
- son principe de fonctionnement ferait que l'écoulement moyen occasionnerait un fort apport de chaleur au profit d'un seul fil, augmentant sa température. Suivant la valeur de la vitesse de l'écoulement, cette température ne pourrait-elle pas dépasser la température de fonctionnement des fils?

Par contre, des mesures de vitesse acoustique ont été effectuées par anémométrie fil chaud [38, 81] en guide d'onde avec un écoulement allant jusqu'à 20 m.s^{-1} et avec une excitation acoustique par haut-parleur. L'avantage est ici de disposer d'un seul capteur pour obtenir la vitesse moyenne de l'écoulement, les fluctuations turbulentes et la vitesse acoustique. Les auteurs ne donnent pas le seuil de détectabilité du capteur. La gamme de fréquence d'utilisation de l'anémométrie fil chaud pour ce type d'application n'est pas donnée non plus. Toutefois, elle ne doit pas être différente de celle donnée en section 2.1.1.2.2 page 59. Les auteurs montrent des résultats jusqu'à $5 - 6 \text{ kHz}$. Le fil chaud mesure, pour un point de l'espace donné, la somme de la vitesse de l'écoulement porteur et de la vitesse acoustique. La technique de rejet [11] avec un signal corrélé à l'excitation est employée pour extraire la vitesse acoustique. Il est à noter que la mesure de la vitesse acoustique n'est pas une fin en soi pour les auteurs mais une étape obligatoire pour la mesure de quantités plus élaborées telles que l'intensité acoustique [38, 81] ou la puissance absorbée par un matériau acoustique [81] en écoulement. Les références [38, 81] seront donc présentées de nouveau plus loin (voir section 2.2 page 78 et section 2.3 page 84). Toutefois, l'anémométrie fil chaud doit être répertoriée comme une technique possible de mesure de vitesse acoustique en écoulement. Mais bien que sa partie sensible ne soit pas trop intrusive, son support l'est.

2.1.2.3 Mesure par capteurs «laser»

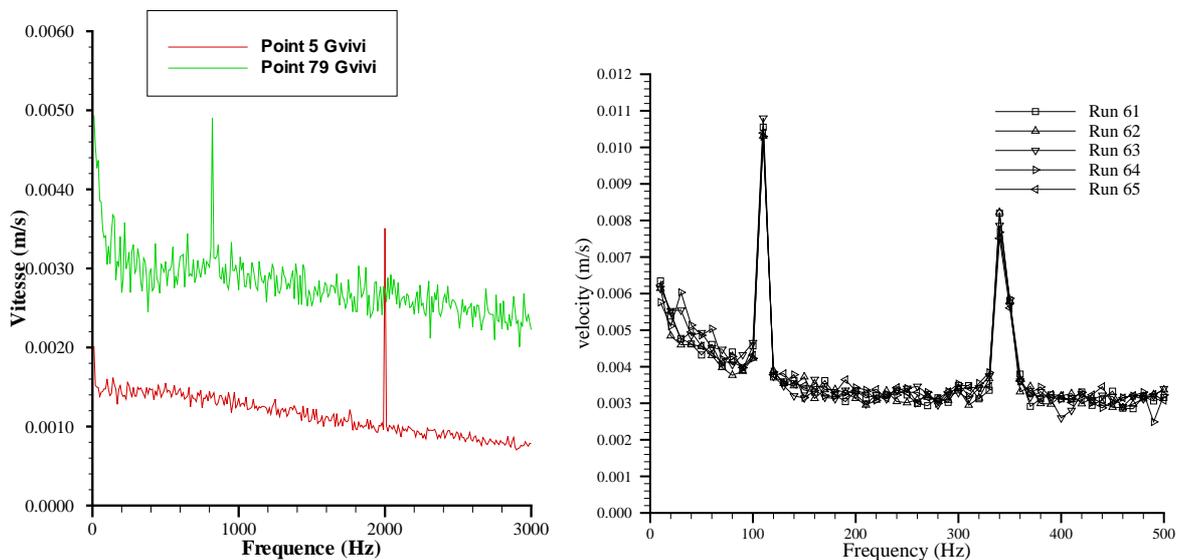
À notre connaissance, seule la vélocimétrie laser Doppler a été employée pour ce type de mesure. Tout comme l'anémométrie fil chaud, la vélocimétrie laser Doppler permet de donner les vitesses moyenne et turbulente de l'écoulement en plus de la vitesse acoustique. La différence essentielle avec l'application au cas du milieu au repos est le temps de résidence d'une particule d'ensemencement dans le volume de mesure. En effet, considérons une onde acoustique de période $T_{ac} = \frac{1}{f_{ac}}$ donnée. Le repos parfait étant purement idéal, une composante de vitesse de convection V_c suivant l'axe de mesure existe. Si la particule considérée parcourt la distance d dans le volume de mesure, son temps de résidence est $T = \frac{d}{V_c}$. Les méthodes vues en section 2.1.1.3.1 page 62 nécessitant plusieurs périodes dans un *burst* pour pouvoir être utilisées, il vient [70] :

$$T_{ac} < T \Leftrightarrow \frac{1}{T} < f_{ac} \quad (2.29)$$

Dans le cas des écoulements considérés dans notre travail, c'est-à-dire ayant une vitesse V suivant l'axe de mesure au moins de l'ordre de 10 m.s^{-1} , $T = \frac{d}{V}$. d étant inférieure à la dimension du volume de mesure suivant l'axe considéré, c'est-à-dire pour des systèmes classiques, de l'ordre de 0.1 mm , nous obtenons une valeur maximale du temps de résidence de $T_{max} = 10^{-5} \text{ s}$. Ainsi, la plus petite des fréquences envisageables de l'onde acoustique

devant vérifier (2.29), il viendrait $f_{ac} > 100 \text{ kHz}$. En conclusion, les méthodes développées pour un milieu au repos ne peuvent pas être étendues au cas d'un milieu en mouvement dans les applications industrielles courantes.

Lors d'une étude bibliographique précédente [47], il était ressorti que les méthodes présentées dans les travaux de la référence [28] n'étaient pas adaptées à nos fins. Par contre l'approche consistant à acquérir le signal de vitesse totale (somme des vitesses moyenne, acoustique et turbulente) par un système industriel non modifié et à appliquer une méthode de rejet de la turbulence [11] a donné des résultats prometteurs [42, 47, 60, 61]. Il arrive dans certains cas que la vitesse acoustique soit très élevée (de l'ordre de plusieurs dizaines de $m.s^{-1}$) si bien qu'aucun traitement n'est nécessaire [25]. Toutefois, des expériences [60, 61] ont fait ressortir qu'un dispositif de vélocimétrie laser Doppler est capable de mesurer des vitesses acoustiques bien plus petites. Les mesures ont consisté en la détection dans une soufflerie à retour classique d'une seule composante de vitesse acoustique d'ondes harmoniques. Le signal acoustique est celui d'un haut-parleur placé en amont de la veine d'essai. Ces travaux ont été effectués dans le cas d'un niveau acoustique suffisamment élevé (de 98 à 116 dB), une vitesse d'écoulement jusqu'à $25 m.s^{-1}$ et une gamme de fréquences d'environ 100 Hz à 2 kHz (la mesure avec une fréquence de 2 kHz et une vitesse de $25 m.s^{-1}$ n'a pas été faite). La faisabilité et la reproductibilité de la mesure ont ainsi été mises en évidence, par exemple à 2.5 et $8 m.s^{-1}$ (FIG. 2.25) :



(a) 2000 Hz avec un écoulement de $2.5 m.s^{-1}$ et (b) 108 et 344 Hz en un même point et pour des 820 Hz avec un écoulement de $8 m.s^{-1}$ acquisitions successives à $8 m.s^{-1}$

FIG. 2.25: Mise en évidence de la faisabilité et de la reproductibilité de la mesure par vélocimétrie laser Doppler de la vitesse acoustique en écoulement (extraits de [60, 61]).

Ces mesures ont été effectuées dans le cas favorable où la vitesse acoustique est clairement apparente sans rejet de la turbulence. De plus, toujours en ondes harmoniques, il a été constaté expérimentalement que [47] :

- pour un écoulement de $20 m.s^{-1}$ et un taux de turbulence inférieur à 2%, la plus petite valeur significative de vitesse acoustique est de l'ordre de $2 mm.s^{-1}$;
- le rejet de la turbulence permet de détecter dans le cas le plus défavorable une vitesse acoustique environ $8 dB$ en-dessous du spectre de la fluctuation turbulente.

Pour ce qui concerne les sources de bruit vis-à-vis de la détection de la vitesse acoustique, la turbulence est un facteur plus limitant que le *shot noise* du photomultiplicateur. Le travail sans écoulement de Vignola [80] donne, par exemple à 1 *kHz*, une vitesse d'environ 30 $\mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ à la limite du *shot noise* alors que pour les écoulements étudiés, la vitesse turbulente sera au moins de l'ordre du $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$.

2.2 Sur la mesure d'intensité acoustique

La connaissance expérimentale des grandeurs énergétiques acoustiques a la particularité qu'il n'existe aucun capteur (plus ou moins élaboré) les convertissant directement en toutes autres grandeurs observables⁹ et qu'elle doit donc faire appel aux définitions théoriques de ces grandeurs énergétiques afin de les déduire d'autres variables acoustiques accessibles par la mesure.

La mesure de ces grandeurs énergétiques est d'un grand intérêt pratique. En particulier, nous retenons la mesure¹⁰ de l'intensité acoustique car, comme nous l'avons dit en section 1.1.3 page 26, celle-ci rend compte :

- des directions et sens effectifs de propagation de par le caractère vectoriel de l'intensité ;
- de l'énergie propagée de par la nature physique de la grandeur observée.

Un état de l'art de la mesure d'intensité acoustique pour un fluide au repos et en mouvement va maintenant être dressé. Si la mesure pour un fluide au repos peut être considérée comme maîtrisée, celle pour un fluide en mouvement est loin d'être aboutie, le problème étant à la fois théorique – à cause de la définition de l'intensité acoustique – et pratique – de par la présence d'un écoulement. Concernant la définition théorique, aucune application pratique de l'intensité obtenue par perturbation lagrangienne des variables primitives du fluide n'a été réalisée à l'heure actuelle. Tout ce qui suit renvoie donc à la définition classique (1.24) page 23 de l'intensité. Ainsi cette mesure repose sur la connaissance simultanée des perturbations de vitesse et de pression. Elle nécessite donc l'emploi des méthodes vues à la section précédente.

2.2.1 Fluide au repos

L'expression de l'intensité est simple dans ce cas. Elle est donnée par (1.29) page 23. Classiquement, une sonde à deux microphones [18–20] est utilisée pour cette mesure. À l'heure actuelle, c'est le capteur le plus répandu. Ses premières utilisations peuvent être situées dans les années 1970 [18]. À notre connaissance, parmi les autres méthodes de mesure de vitesse acoustique, seuls le *microflow* [46] et la vélocimétrie laser Doppler [3] ont donné lieu à des mesures d'intensité en utilisant conjointement un microphone. Notamment, une sonde combinant un microphone $\frac{1}{2}$ " et trois *microflows* est commercialisée. Comme nous l'avons déjà dit, il n'y a pas assez de recul dans la littérature vis-à-vis de ce capteur. Nous proposons donc de ne décrire que les mesures par sonde à deux microphones et par utilisation conjointe de la vélocimétrie laser Doppler et d'un microphone.

⁹A la différence, par exemple, des perturbations de pression, mesurables par microphone. Ces variations de pression (contrainte mécanique) sont converties en variations de courant électrique, ces dernières étant facilement accessibles.

¹⁰Le terme de «mesure» n'est donc pas totalement rigoureux puisque nous avons vu que ce n'est pas l'intensité acoustique qui est mesurée.

2.2.1.1 Mesure par sonde à deux microphones

Deux capsules microphoniques sont maintenues en vis-à-vis¹¹ avec un espacement Δx_r (FIG. 2.26) [20]. L'axe passant par les capsules est appelé axe de la sonde et est orienté suivant le vecteur unitaire \mathbf{e}_r . Soit $I_{a,r}$ la composante de l'intensité active suivant \mathbf{e}_r .

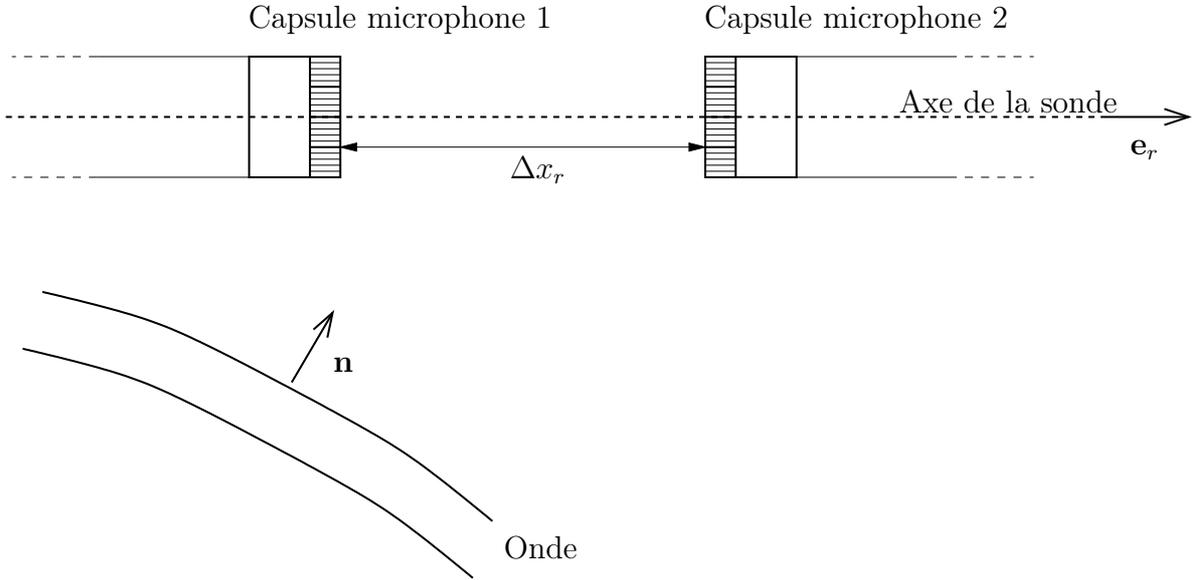


FIG. 2.26: Schéma de principe d'une sonde d'intensité.

Soient p_1 et p_2 les mesures respectives des capsules 1 et 2. La vitesse acoustique est évaluée par une approximation aux différences finies du gradient de pression à l'aide de p_1 et p_2 (section 2.1.1.1.1 page 52). Soit $\check{I}_{a,r}$ l'intensité acoustique obtenue par la sonde¹² (voir référence [20] et annexe D page 167) :

$$\check{I}_{a,r} = - \int_0^{+\infty} \frac{\text{Im}(G_{p_1 p_2}(f))}{2\pi f \Delta x_r \rho^{\text{ref}}} df \quad (2.30)$$

où $G_{p_1 p_2}$ est la densité interspectrale de puissance entre les microphones 1 et 2 définie pour des fréquences positives. La limite en basses fréquences de la sonde provient de l'existence d'un déphasage intrinsèque entre les voies de mesure des deux capsules microphoniques. Les limites en hautes fréquences et en champ proche sont dictées par l'espacement Δx_r . À l'instar de ce qui a été fait en section 2.1.1.1.1 page 52 pour la vitesse acoustique, L_E , le niveau d'erreur en dB commis par l'approximation aux différences finies, est défini par :

$$L_E(\text{dB}) = 10 \log_{10} \left(\frac{\check{I}_{a,r}}{I_{a,r}} \right) \quad (2.31)$$

Soit ϕ le déphasage intrinsèque entre les deux voies microphoniques. Pour une onde plane harmonique se propageant suivant l'axe de la sonde ($\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$), l'expression théorique de L_E est :

$$L_E(\text{dB}) = 10 \log_{10} \left(\frac{\sin(k\Delta x_r \pm \phi)}{k\Delta x_r} \right) \quad (2.32)$$

L_E est représenté pour trois valeurs de ϕ et trois valeurs de Δx_r (FIG. 2.27 page suivante). La gamme de fréquence d'utilisation est définie par les valeurs de fréquences donnant $-1\text{dB} <$

¹¹Mais ce n'est pas la seule disposition [18].

¹²C'est donc une approximation de $I_{a,r}$

$L_E < 1$ dB. Les courbes sur FIG. 2.27 étant similaires à celle de FIG. 2.1 page 53, l'analyse faite en fonction de ϕ et Δx_r en section 2.1.1.1.1 page 52 est toujours valable ici.

Concernant les limites en champ proche d'une source monopolaire, sans tenir compte de ϕ , l'expression théorique de L_E est [20] :

$$L_E(\text{dB}) = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta x_r}{r} \right)^2} \frac{\sin(k\Delta x_r)}{k\Delta x_r} \right) \quad (2.33)$$

où r est la distance de la sonde à la source.

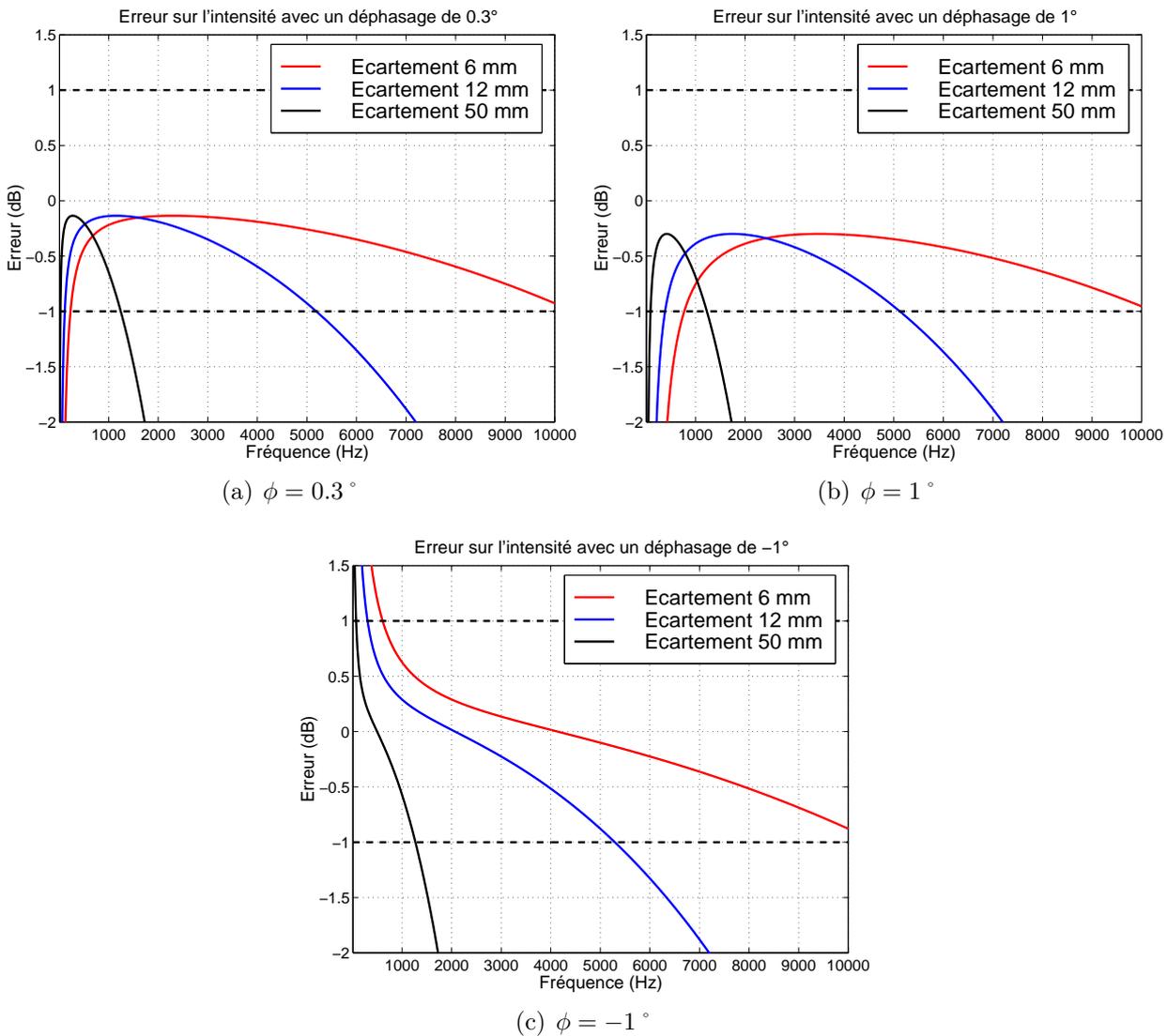


FIG. 2.27: Effet du déphasage et de Δx_r .

Les distances minimales à la source pour trois types de source idéale peuvent être évaluées théoriquement [20] (TAB. 2.1 page ci-contre) :

Source	Distance min. pour une erreur inférieure à 1 dB
Monopole	$1,1\Delta x_r$
Dipole	$1,6\Delta x_r$
Quadripole	$2,3\Delta x_r$

TAB. 2.1: Limites en champ proche pour différentes sources idéales [20]

Tout comme pour la vitesse acoustique, deux microphones donnent une composante de l'intensité. Une mesure 3D est obtenue :

- par deux microphones en effectuant la mesure en trois temps ;
- par une sonde multi microphones¹³.

Il est à noter aussi que ρ^{ref} doit être connue dans (2.30). Par exemple, si le fluide est supposé homogène, ρ^{ref} est connue en mesurant la température et la pression du fluide en un point, de même que son taux d'humidité.

2.2.1.2 Mesure par utilisation conjointe de la vélocimétrie laser Doppler et d'un microphone

La puissance acoustique au sein d'un réfrigérateur thermo-acoustique a pu être évaluée via la mesure de l'intensité acoustique par utilisation conjointe d'un système 1D de vélocimétrie laser Doppler et d'un microphone [3]. Le réfrigérateur thermo-acoustique utilisé par les auteurs (FIG. 2.28) est composé d'un tube transparent rempli d'air dont une extrémité est fermée par un haut-parleur.

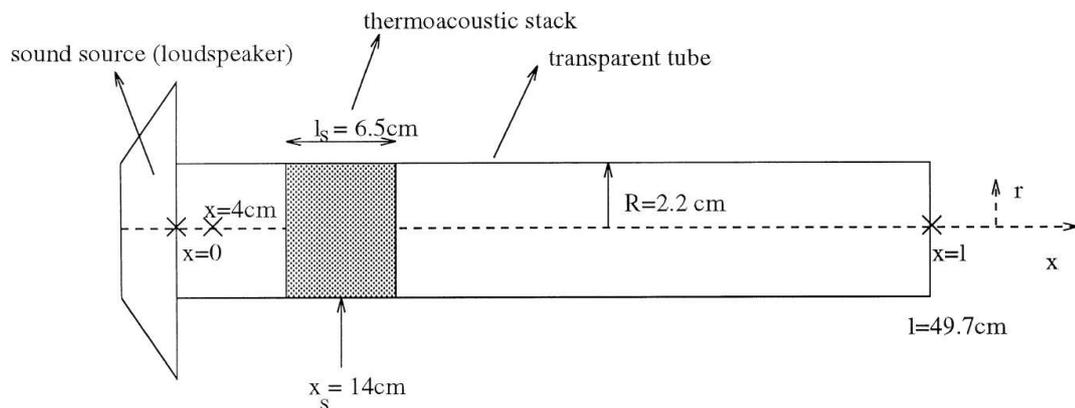


FIG. 2.28: Représentation du réfrigérateur thermo-acoustique utilisé par les auteurs (extraite de [3]).

L'étude d'un tel dispositif n'étant pas notre but, nous retiendrons que des échanges de chaleur se produisent à l'endroit où est placé l'ensemble nommé *thermoacoustic stack*. Le

¹³Une sonde à six capteurs est commercialisée.

flux de chaleur est positif à sa gauche et négatif à sa droite.

Sous l'hypothèse d'ondes planes, les auteurs ont mesuré la puissance acoustique en $x = 4 \text{ cm}$ (FIG. 2.28) à l'aide d'une mesure par microphone en paroi de la pression acoustique et de plusieurs mesures de vitesse acoustique par vélocimétrie laser Doppler sur toute la section du tube. Les niveaux de vitesse acoustique mesurés sont très élevés, avec des valeurs comprises entre 0.1 et 0.25 m.s^{-1} . La puissance acoustique utilisant l'expression de l'intensité (1.29) page 23, les deux capteurs mis à contribution doivent être appariés en phase au préalable. Les auteurs disposant d'une relation théorique liant vitesse et pression, la calibration en phase est effectuée en calculant en un point du tube l'écart entre la différence de phase vitesse/pression mesurée et la différence de phase théorique. La puissance acoustique a alors pu être mesurée pour plusieurs fréquences discrètes dans la gamme $100 - 550 \text{ Hz}$. Les valeurs obtenues ont été comparées à celles d'un modèle théorique du réfrigérateur thermo-acoustique (FIG. 2.29), permettant aux auteurs de conclure positivement quant à leur approche expérimentale par vélocimétrie laser Doppler.

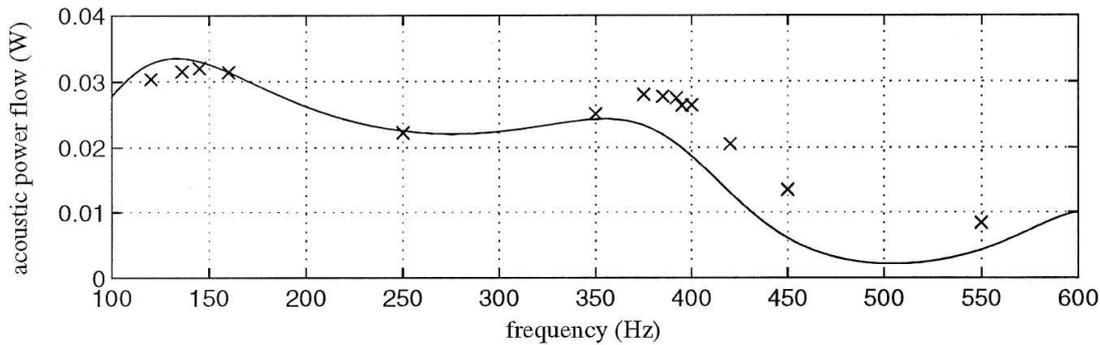


FIG. 2.29: Valeurs expérimentales pour différentes fréquences de travail (croix) et courbe théorique (trait plein) de la puissance acoustique en $x = 4 \text{ cm}$ (extraites de [3]).

2.2.2 Fluide en mouvement

Comme nous l'avons signalé au début de la section sur la mesure de l'intensité, la définition (1.24) page 23 est utilisée en pratique bien qu'elle ne soit pas générale (section 1.1.2.1.2 page 23).

De nombreux travaux concernent la propagation en conduite avec écoulement [6, 12, 29, 31, 37, 38, 56, 62, 81]. L'écoulement est considéré comme uniforme et le fluide supposé homogène. Les mesures des pression et vitesse acoustique p et \mathbf{V} et de la vitesse de l'écoulement \mathbf{V}^{ref} permettent d'accéder expérimentalement à l'intensité acoustique¹⁴.

Parmi toutes les méthodes de mesure de vitesse acoustique en écoulement, seules les méthodes par microphones, qui sont les plus utilisées [6, 12, 29, 31, 37, 56, 62], et plus récemment l'anémométrie fil chaud [38, 81] ont donné lieu à des mesures d'intensité acoustique.

Pour ce qui concerne les méthodes par microphones (sonde dans l'écoulement ou tri d'onde), leur utilisation est très restreinte (voir section 2.1.2.1 page 74) :

- si l'écoulement est peu rapide (vitesse inférieure à environ 30 m.s^{-1}) et les ondes acoustiques quelconques, l'expression de l'intensité pour un fluide au repos (2.30) est applicable sans trop d'erreur en prenant soin d'employer une technique de rejet de la turbulence [11] et d'améliorer l'aérodynamique de la sonde ;

¹⁴Le fluide étant supposé homogène et parfait, ρ^{ref} et c^{ref} sont connues en déterminant température et pression du fluide en un point.

- si l'écoulement est plus rapide et si les ondes acoustiques sont planes et qu'elles se propagent suivant la direction de l'écoulement, le tri d'onde est applicable, toujours avec une technique de rejet de la turbulence.

De plus, un capteur de vitesse doit être utilisé pour connaître l'écoulement. En dehors de ces cas, ces méthodes sont inexploitable. L'approximation de la vitesse acoustique doit être abandonnée. C'est pour cela que certains travaux ont été menés avec une sonde combinant un anémomètre fil chaud 1D et un microphone muni d'une ogive [38,81]. Cette sonde permet de connaître les trois quantités nécessaires pour déterminer l'intensité (FIG. 2.30).

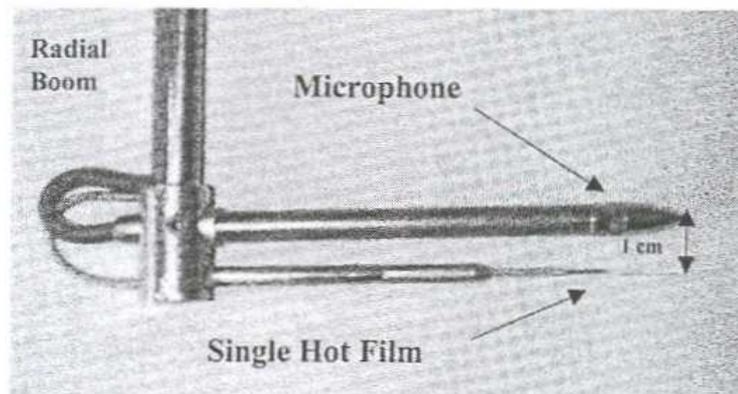


FIG. 2.30: Sonde constituée par un anémomètre fil chaud et un microphone (extrait de [81]).

Cependant, la sonde emploie deux capteurs différents. Ils doivent être appariés en phase au préalable. C'est le but de l'étude rapportée dans la référence [38]. Le problème est que ces deux capteurs mesurent des quantités physiques différentes (vitesse/pression). À défaut de connaître une relation théorique liant vitesse et pression, contrairement à l'étude de la référence [3], l'étalonnage en phase ne peut se faire qu'en comparant les signaux de sortie de deux capteurs mesurant une même quantité. L'expérience consiste donc à comparer la vitesse acoustique mesurée par l'anémomètre fil chaud et celle mesurée à l'aide de la méthode par tri d'onde (FIG. 2.31). La vitesse d'écoulement est de 7 m.s^{-1} . La distance entre la sonde et le microphone 1 est $\delta = 4 \text{ cm}$, donnant alors 3 kHz comme fréquence maximale de travail. La dimension transverse du banc fait que les ondes sont planes pour toutes les fréquences. L'excitation acoustique est générée en large bande par un haut-parleur en amont de la zone de mesure. Aucune information sur les niveaux de pression acoustique de l'excitation acoustique n'est donnée. La technique de rejet de la turbulence [11] vue précédemment est employée pour tous les signaux.

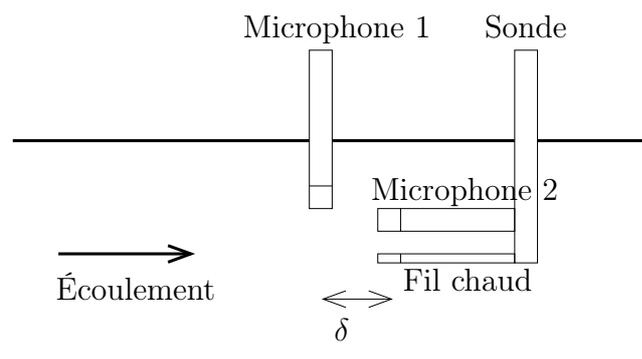


FIG. 2.31: Schéma de principe de l'expérience de calibration.

Les microphones 1 et 2 étant calibrés en phase, ils permettent d'obtenir une mesure de la vitesse acoustique $\mathcal{V}_{mic}e^{i\phi_{mic}}$. L'anémomètre fil chaud mesure une vitesse acoustique $\mathcal{V}_{fil}e^{i\phi_{fil}}$.

Dans un premier temps, les auteurs vérifient pour valider leur mesure que $\frac{\mathcal{V}_{fil}}{\mathcal{V}_{mic}} \simeq 1$, puis ils s'intéressent à $\Delta\phi = \phi_{fil} - \phi_{mic}$. Si $\Delta\phi$ n'est pas nul modulo 2π , alors il s'agit du déphasage intrinsèque entre la chaîne de mesure de l'anémomètre et celle du microphone 2.

Ainsi étalonnée, la sonde est utilisée par les auteurs pour mesurer la composante suivant la direction de l'écoulement de l'intensité du bruit large bande émis par le haut-parleur. La vitesse d'écoulement est toujours de 7 m.s^{-1} . Bien qu'ils ne comparent pas leur résultat à celui d'une autre méthode de mesure d'intensité, les auteurs concluent qu'il est en accord avec le coefficient de réflexion mesuré dans le banc.

En l'état, cette sonde ne mesure qu'une seule composante de l'intensité. Ceci pourrait très bien être amélioré en utilisant un anémomètre 3D.

2.3 Sur la caractérisation expérimentale de matériaux absorbants en écoulement

Comme cela a été remarqué en section 1.1.4 page 27, la couche limite d'un écoulement peut modifier grandement le type de condition limite acoustique à choisir pour une paroi par rapport au cas du fluide au repos. Cette spécificité fait qu'il est inutile de décrire les méthodes de caractérisation pour un fluide au repos.

De nombreuses études portent sur des matériaux supposés à réaction localisée, c'est-à-dire une réaction homogène et indépendante de l'incidence de l'onde, utilisés typiquement en aéronautique [4, 34]. Les méthodes actuelles de caractérisation expérimentale de matériaux reposent en majorité sur l'acquisition de la pression acoustique à l'aide de microphones [21, 32, 33, 36, 43, 44, 69, 82], à l'exception d'un essai avec la sonde anémomètre fil chaud / microphone [81]. Nous allons tout d'abord voir certaines des méthodes par microphones.

2.3.1 Méthode «*in situ*»

Dans la méthode mise au point par Dean [16], un échantillon d'un matériau est déposé sur un fond rigide de façon à avoir une face affleurante à l'écoulement (FIG. 2.32). Des ondes planes à l'amont du matériau¹⁵ sont générées par une source bien déterminée (haut-parleur...). L'impédance normalisée $\mathcal{Z} = \frac{Z}{z_{\text{ref}}}$ est déduite des mesures du microphone 1 en paroi affleurante à l'écoulement et du microphone 2 en fond de matériau par l'expression :

$$\mathcal{Z} = -\frac{i}{\sin(ke)}H_{1/2} \quad (2.34)$$

où e est l'épaisseur de l'échantillon du matériau et $H_{1/2}$ la fonction de transfert entre les signaux des microphones 1 et 2, corrigée par la méthode de rejet de la turbulence [11]. Aussi, les parties sensibles des deux capteurs doivent être affleurantes à leur face respective. Un soin particulier doit y être apporté. L'expression (2.34) est très simple, elle ne nécessite pas de description fine de l'écoulement, son influence étant contenue dans les mesures de pression acoustique. Mais son utilisation suppose une pression acoustique en fond de cavité homogène et elle s'appuie sur l'hypothèse forte que le matériau est à réaction localisée. Cette méthode ne

¹⁵Bien sûr, elles ne le sont plus juste au-dessus du matériau absorbant.

permet pas de détecter des inhomogénéités. De plus, elle est destructive puisqu'elle nécessite que le matériau soit percé afin de placer les microphones.

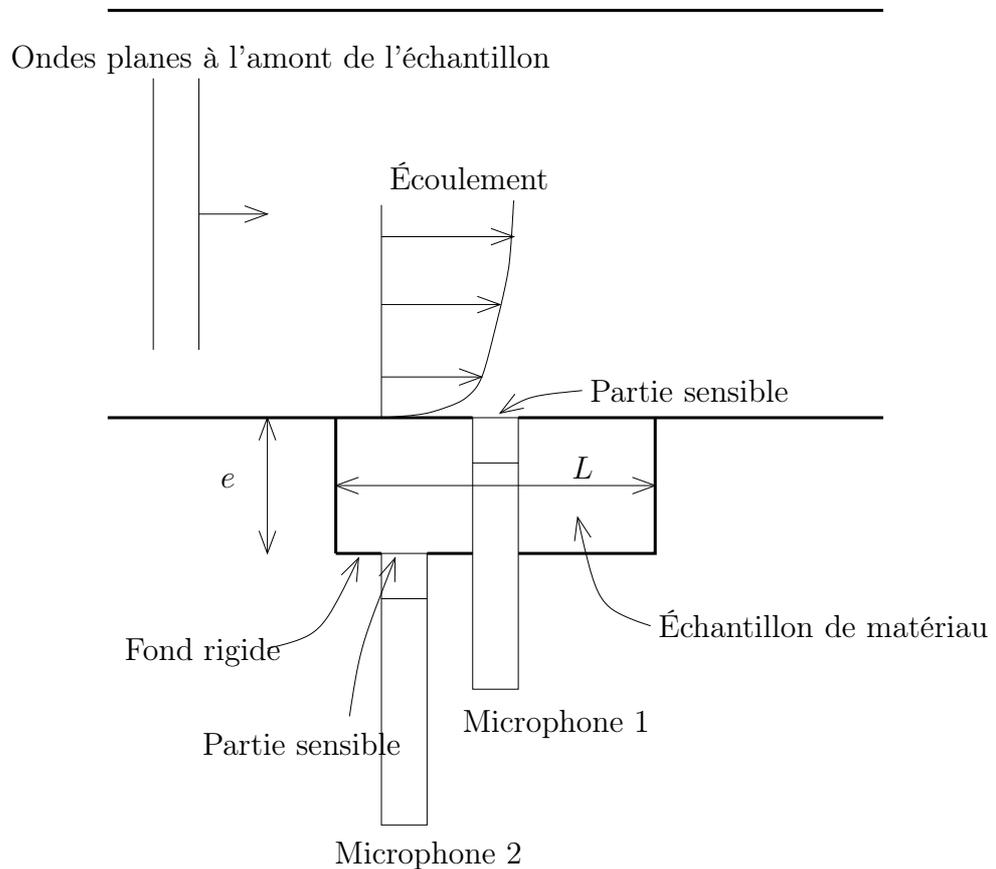


FIG. 2.32: Schéma de principe de la méthode «*in situ*».

2.3.2 Méthodes indirectes

Ces méthodes utilisent en entrée de codes de calcul des mesures de pression acoustique en paroi d'une conduite traitée par un échantillon du matériau à tester. Le matériau n'est donc pas modifié comme précédemment. La difficulté est qu'une modélisation mathématique suffisamment représentative de la propagation acoustique dans la conduite [21, 32, 33, 82] doit être faite pour obtenir pression acoustique et vitesse acoustique dans le domaine au-dessus de l'échantillon. Pour ce qui concerne l'impédance acoustique, elle est ensuite déterminée par une méthode itérative. La solution retenue est celle minimisant l'écart entre les mesures de pression et les valeurs de pression obtenues par calcul. Ces méthodes semblent fournir de bons résultats avec des matériaux classiquement utilisés en aéronautique [21, 32, 33, 82]. Toutefois, bien que certaines méthodes permettent de tenir compte de variations spatiales de l'écoulement [32, 82] (dans la limite d'un écoulement quasi 1D), les résultats en résistance et réactance sont toujours donnés de façon globale pour toute la surface du matériau. L'hypothèse de matériau à réaction localisée serait-elle posée implicitement ? Ces méthodes ne seraient donc pas plus générales que la méthode «*in situ*» de ce point de vue. Nous n'irons pas plus loin dans leur description.

2.3.3 Mesure par sonde 1D anémomètre fil chaud/microphone

Une autre façon de caractériser un matériau est de mesurer la puissance acoustique qu'il absorbe. Des mesures de puissance acoustique ont été menées avec la sonde décrite en section 2.2.2 page 82 en présence d'un écoulement de 20 m.s^{-1} [81]. Sur le banc décrit en FIG. 2.33 (a), un haut-parleur, situé à l'aval du matériau, émet un signal à neuf fréquences discrètes sur la gamme $1100 - 6100 \text{ Hz}$. La composante, suivant l'axe de la conduite, de l'intensité a été mesurée et intégrée dans deux plans perpendiculaires à l'axe, situés en aval et en amont du matériau. La différence aval-amont est la puissance absorbée. Les auteurs ont procédé à une décomposition modale dans la conduite afin de vérifier que la puissance mesurée est bien la somme des puissances des modes présents (FIG. 2.33 (b)). Deux valeurs de puissances négatives (sens de propagation effective inversé) ont été constatées pour les deux plus faibles valeurs de puissance en amont (après absorption par le matériau). Les auteurs imputent ce phénomène au fait que pour de faibles valeurs de la pression acoustique et de la vitesse acoustique, la différence de phase entre ces quantités est plus bruitée à cause de l'anémomètre.

Bien que moins volumineuse qu'une sonde à plusieurs microphones, le volume de la sonde anémomètre fil chaud/microphone est un problème. Elle n'a pu être placée au mieux qu'à 13 mm de la paroi. Les auteurs ont dû extrapoler les mesures pour obtenir les valeurs proches de la paroi.

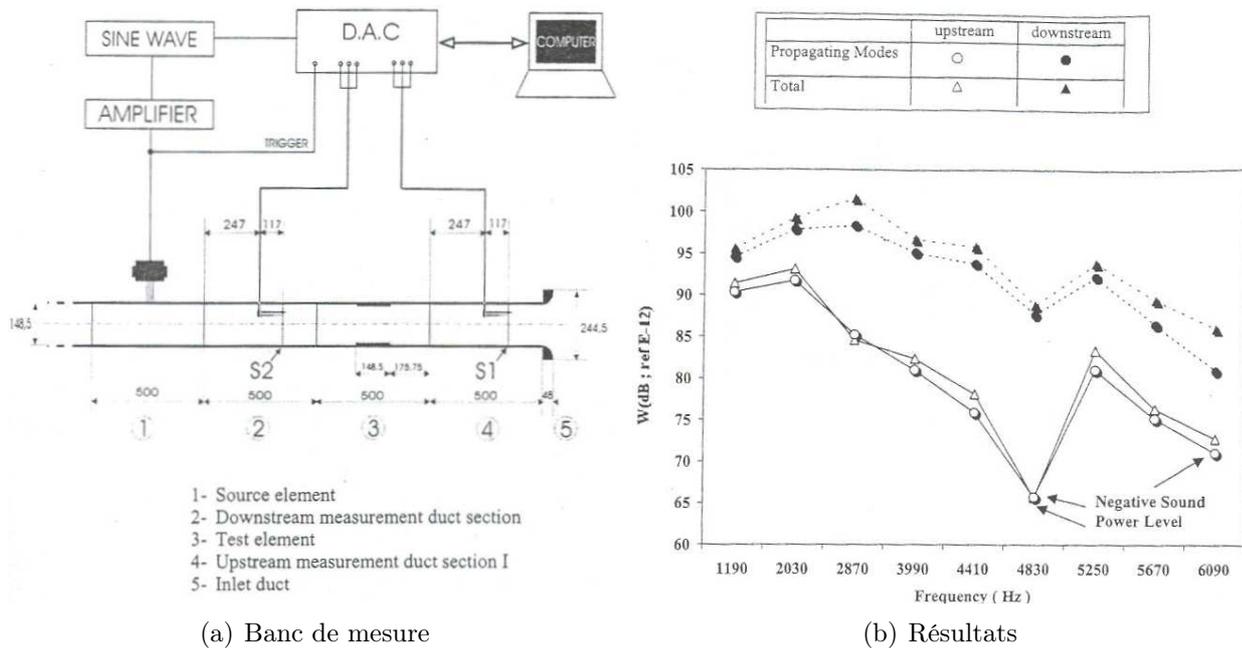


FIG. 2.33: Caractérisation d'un matériau absorbant par sonde anémomètre fil chaud/microphone, description du banc de mesure (a) et résultats en puissance acoustique (extraits de [81]).

2.4 Conclusion

L'étude bibliographique menée dans ce chapitre a eu pour objectif de sélectionner un(des) capteur(s) pouvant servir à la mesure de la vitesse acoustique, la mesure de l'intensité acoustique et la caractérisation de matériaux absorbants en présence d'un écoulement quelconque. Les constats suivants peuvent être faits :

- Classiquement utilisées pour un milieu au repos pour approcher la vitesse acoustique et l'intensité acoustique, les méthodes par microphones ne peuvent être appliquées avec un fluide en mouvement que pour des cas très restreints de propagation en écoulement. Aussi, l'intrusivité et la difficulté d'accès en milieu confiné rendent parfois impossible ce type de mesures. Toutefois, elles ne doivent pas être encore délaissées car elles constituent une référence fiable lorsqu'un nouveau capteur est testé.
- L'anémomètre fil chaud semble être plus prometteur en écoulement qu'au repos, cas pour lequel seules des mesures de vitesse acoustique ont été effectuées. Toutefois, sa calibration particulière mais surtout son intrusivité et son encombrement dès lors qu'il est associé à un microphone font que cette solution n'est pas retenue.
- Issue de l'aérodynamique tout comme l'anémométrie fil chaud, la vélocimétrie laser Doppler est prometteuse pour un fluide en quasi repos ou en écoulement pour la détermination de la vitesse acoustique. Sa dynamique semble être meilleure que celle de l'anémométrie fil chaud. Elle possède les avantages d'être non intrusive et de permettre des mesures à proximité d'obstacles. Elle a pu être utilisée conjointement à un microphone dans le cadre de la mesure de puissance acoustique pour un fluide au repos. Cependant, les techniques d'obtention de la vitesse acoustique avec un fluide au repos ne peuvent être retenues en écoulement.
- De manière générale pour tous ces capteurs, la vitesse turbulente est la source de bruit la plus contraignante parmi toutes les sources de bruit de mesure de la vitesse acoustique. Une technique de rejet de la turbulence doit toujours être appliquée.

Pour ce qui concerne la caractérisation de matériaux absorbants, les méthodes par microphone nécessitent des hypothèses qui ne peuvent pas être vérifiées *a posteriori* avec les résultats qu'elles fournissent. Elles sont ainsi restreintes dans le type de matériaux à tester. Bien que l'anémométrie fil chaud ne soit pas retenue, l'idée de se servir d'un capteur de vitesse pour déterminer l'énergie absorbée par un matériau est à exploiter.

Pour ses avantages, la vélocimétrie laser Doppler est donc choisie. Nous allons voir par la suite comment elle peut être employée à la détermination de l'intensité et à la caractérisation de matériaux. Étant un capteur de vitesse, sa mesure contient une information sur le déplacement. Ainsi, une première expérimentation de la théorie de Galbrun est envisageable. Le problème de l'utilisation d'une définition de l'intensité en écoulement hors de son domaine de validité pourra être enfin résolu.

Chapitre 3

Dispositifs expérimentaux pour la mesure aéroacoustique par vélocimétrie laser Doppler

L'objectif de ce chapitre est de décrire tous les dispositifs expérimentaux et méthodes employés dans le cadre des mesures acoustiques en écoulement menées durant ce travail de thèse. Tout d'abord un complément à la section 2.1.1.3.1.1 page 62 sur la vélocimétrie laser Doppler va être donné concernant :

- le principe de fonctionnement de la chaîne de vélocimétrie laser Doppler utilisée ;
- le traitement du signal utilisé en général pour la vélocimétrie laser Doppler mais aussi dans le cadre particulier de nos mesures.

Puis deux bancs vont être présentés avec l'instrumentation associée :

- une soufflerie à retour classique basse vitesse (nombre de Mach maximal de 0.05) ;
- un banc défini et conçu durant ce travail de thèse afin de disposer d'une large gamme d'applications tant en vitesse d'écoulement (nombre de Mach maximal de 0.5) qu'en type de mesure acoustique.

3.1 Principe de fonctionnement de la chaîne de vélocimétrie laser Doppler utilisée

3.1.1 Chaîne de vélocimétrie laser Doppler

3.1.1.1 Composition

La chaîne utilisée est constituée d'un vélocimètre à franges de la société TSI et d'une source laser à argon *Stabilité* 2017 de la société Spectra Physics. De manière générale, un système de vélocimétrie laser Doppler est composé d'éléments optiques, électroniques et mécaniques permettant de générer (source laser), modifier (diviseur de faisceau, cellule de Bragg) et récupérer (optiques d'émission et de réception) des signaux lumineux, de les convertir en signaux électriques (photomultiplicateur), de traiter ces derniers et de les convertir en données exploitables (module de traitement du signal), acquises au final par l'utilisateur (ordinateur d'acquisition). Un schéma de principe est présenté en FIG. 3.1 page suivante pour la mesure d'une seule composante de vitesse.

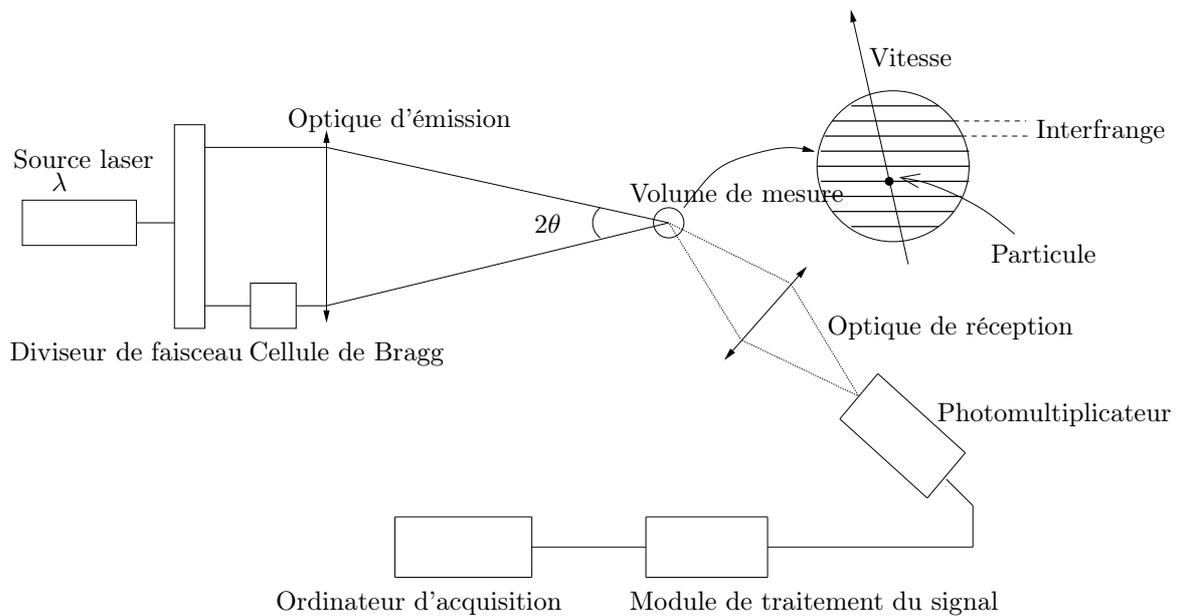


FIG. 3.1: Chaîne de vélocimétrie laser Doppler (d'après un schéma de [7]).

Bien que la FIG. 3.1 ne montre le principe de mesure que pour une composante de vitesse, la mesure simultanée de deux (trois) composantes suit le même schéma. Elle est basée sur l'utilisation de deux (trois) longueurs d'onde différentes au lieu d'une seule longueur d'onde λ . Pour chacune des longueurs d'onde, deux faisceaux sont formés créant ainsi deux (trois) volumes de mesure. Les paires de faisceaux sont bien évidemment non coplanaires afin d'obtenir des composantes différentes de vitesse. En pratique, le laser à argon émet sur plusieurs longueurs d'onde. Un séparateur de couleur permet de sélectionner les deux (trois) longueurs d'onde. Les raies verte $\lambda = 514.5 \text{ nm}$, bleue $\lambda = 488 \text{ nm}$, et violette $\lambda = 476.5 \text{ nm}$, sont couramment utilisées. Les termes de voie ou canal associés à chacune des couleurs sont souvent employés.

Par contre, la mesure de plusieurs composantes complique l'acquisition des données. En effet, les mesures sur chacune des composantes doivent être validées par le module de traitement du signal pour chaque particule. Ceci implique que les trois volumes de mesure soient bien formés au même endroit. Sinon il peut arriver que les mesures sur chaque composante soient validées alors qu'elles correspondent aux passages au même instant, par exemple, de deux particules différentes dans deux des volumes de mesure. En pratique, la mesure 2D, utilisant les raies verte et bleue, ne pose pas de problème car les quatre faisceaux sont acheminés via la même optique d'émission. Quant à la mesure 3D, celle-ci est plus délicate car les faisceaux violets sont acheminés via une optique d'émission différente. La superposition de ce volume de mesure aux autres est plus problématique.

3.1.1.2 Le volume de mesure

Les caractéristiques optiques d'un faisceau laser sont très différentes de celles des faisceaux lumineux conventionnels issus de sources naturelles ou artificielles (soleil, lampes à incandescence...). L'optique géométrique s'avérant insuffisante pour décrire la propagation des faisceaux laser, cette dernière fait appel à la théorie des faisceaux gaussiens. La propriété fondamentale des faisceaux gaussiens est qu'ils présentent une intensité lumineuse symétrique

et répartie suivant une fonction gaussienne (en coordonnées cylindriques) :

$$I(r) = I_0 \exp\left(\frac{-2r^2}{w^2}\right) \quad (3.1)$$

où r est la distance au centre du faisceau, I_0 l'intensité du faisceau à $r = 0$ et w le rayon du faisceau. La définition de w est délicate, il est défini comme la distance au centre à laquelle $\frac{I(r)}{I_0} = \frac{1}{e^2}$. Le rayon du faisceau n'est pas constant, mais il varie avec la distance z . L'enveloppe du faisceau est un hyperboloïde. Il existe donc un rayon minimal w_0 . Il est nommé *beam waist*. Les franges d'interférences d'un volume de mesure nécessitent des ondes planes cohérentes. Les faisceaux laser présentant ainsi une certaine divergence, leur front d'onde n'est pas parfaitement plan. De ce fait, si deux faisceaux se croisent symétriquement au delà de leur *beam waist*, une déformation du réseau de franges apparaît. L'énergie des faisceaux étant répartie spatialement, le volume de mesure est un ellipsoïde dont les dimensions sont :

$$d_m = \frac{d_{e^{-2}}}{\cos \theta} \quad (3.2)$$

$$l_m = \frac{d_{e^{-2}}}{\sin \theta} \quad (3.3)$$

$$h_m = d_{e^{-2}} \quad (3.4)$$

où $d_{e^{-2}} = 2w$ est le diamètre du faisceau laser. La largeur du volume de mesure d_m , la dimension suivant l'axe de mesure, est de manière générale de l'ordre de 0.1 mm . Sa longueur l_m est comprise entre 1 et 3 mm . Le volume de l'ellipsoïde est :

$$V_m = \frac{\pi d_{e^{-2}}^3}{6 \cos \theta \sin \theta} \quad (3.5)$$

Le nombre de franges N_f dans le volume est le rapport entre d_m et l'interfrange i_f ((2.19) page 64) :

$$N_f = \frac{d_m}{i_f} \quad (3.6)$$

3.1.1.3 L'ensemencement

La vélocimétrie laser Doppler consiste en la mesure de la vitesse de particules injectées dans un fluide. Ce n'est pas une mesure directe de la vitesse du fluide mais celle de traceurs qui doivent avoir le même comportement que le fluide. Il a été vu en section 2.1.1.3.1.2 page 65 que le choix des particules conditionne la gamme de fréquence des signaux acoustiques observables. Nous n'y reviendrons donc pas. Mais il conditionne aussi la qualité du signal lumineux récupéré par les photomultiplicateurs.

La théorie de la diffusion de la lumière par les particules donne comme paramètre principal $\alpha = \frac{\pi D}{\lambda}$, où D est le diamètre de la particule et λ la longueur d'onde du faisceau laser. α est un nombre adimensionnel définissant les différents domaines de diffusion de la lumière :

- Si $\alpha \ll 1$, il s'agit du domaine de Rayleigh. Les diagrammes de diffusion sont réguliers mais d'intensité (proportionnelle à D^6) trop faible pour être exploitable.
- Si $\alpha \simeq 1$, c'est le domaine de diffusion de Mie. Il est caractérisé par des diagrammes de diffusion présentant des lobes très marqués et par le fait que la lumière diffusée vers l'avant (diffusion avant) est bien plus intense que celle diffusée vers l'arrière (rétrodiffusion). Il est préférable de placer l'optique de réception du côté opposé à l'optique d'émission.

- Si $\alpha \gg 1$, cela correspond au cas de très grosses particules. Une mauvaise visibilité et des perturbations de l'onde incidente par l'onde diffusée font que ce mode est très rarement utilisé.

Le domaine utilisé est celui de Mie. Bien que la diffusion avant soit celle offrant un meilleur rapport signal sur bruit, la rétrodiffusion est souvent retenue car dans ce cas, optiques d'émission et de réception peuvent être contenues dans un même appareil, simplifiant le montage de la chaîne de vélocimétrie laser Doppler. Toutefois, elle n'est pas recommandée pour des écoulements dont la vitesse est supérieure à 100 m.s^{-1} [7].

La concentration en particules est aussi un paramètre important : si elle est trop forte, l'optique capte la somme des ondes diffusées par les particules éclairées et le signal du photomultiplicateur est fortement bruité.

Il existe de nombreux types de particules utilisables en vélocimétrie laser Doppler [7]. Le choix est à faire en fonction du type d'écoulement (chauffé, réactif, hypersonique...). Pour nos gammes de vitesse d'écoulement (de l'ordre de $10 - 100 \text{ m.s}^{-1}$), la fumée d'encens ou un aérosol de particules liquides, telles celles du DEHS, peuvent être employées.

3.1.1.4 Traitement du *burst* et obtention de la vitesse

Le *burst* est le signal électrique $s(t)$ fourni par le photomultiplicateur lors du passage d'une particule. Après filtrage de la modulation gaussienne¹, une expression analytique est [63] :

$$s(t) = Ae^{-(\beta V_x t)^2} \cos(2\pi f t) + e_b(t) \quad (3.7)$$

où V_x est la composante de vitesse mesurée, $\beta = \frac{2}{d}$ avec d la distance parcourue par la particule, $f = \frac{V_x \pm V_B}{i_f}$ avec V_B la vitesse de défilement des franges due à la cellule de Bragg (page 64) et $e_b(t)$ un bruit de mesure centré (*shot noise*, lumières parasites...). Une simulation d'un *burst* est représentée en FIG. 3.2 en supposant le bruit gaussien.

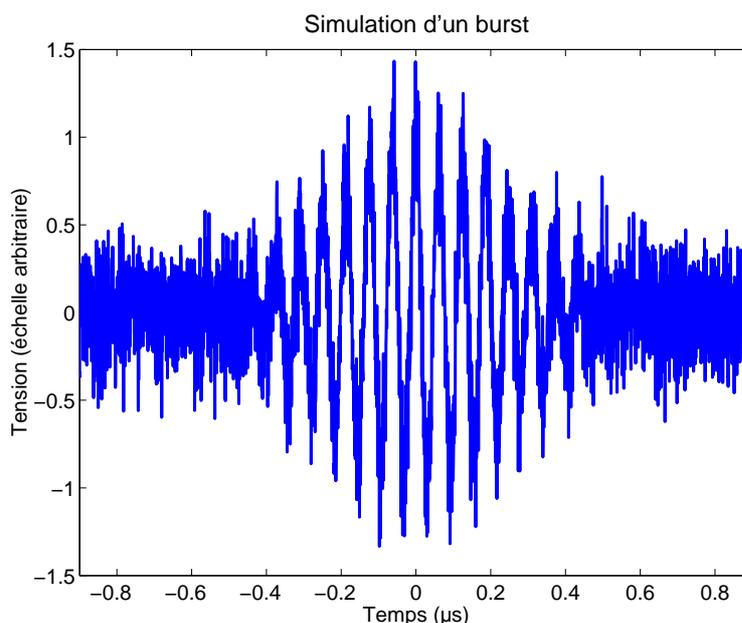


FIG. 3.2: Simulation d'un *burst* avec $V_x = 60 \text{ m.s}^{-1}$, $i_f = 3.73164 \mu\text{m}$ et $V_B = 0 \text{ m.s}^{-1}$.

¹Cette modulation est due au fait que les faisceaux laser répondent à la théorie des faisceaux gaussiens.

Ce signal est ensuite envoyé à un module de traitement du signal en temps réel, ici l'«IFA 755». Ce module détermine f en comptant les passages à zéro de la fonction d'autocorrélation du *burst*. À cause du bruit de mesure, le *burst* n'est pas directement utilisé. Il est d'abord transformé en signal à deux états suivant son signe, puis la fonction d'autocorrélation de ce dernier signal est calculée (FIG. 3.3).

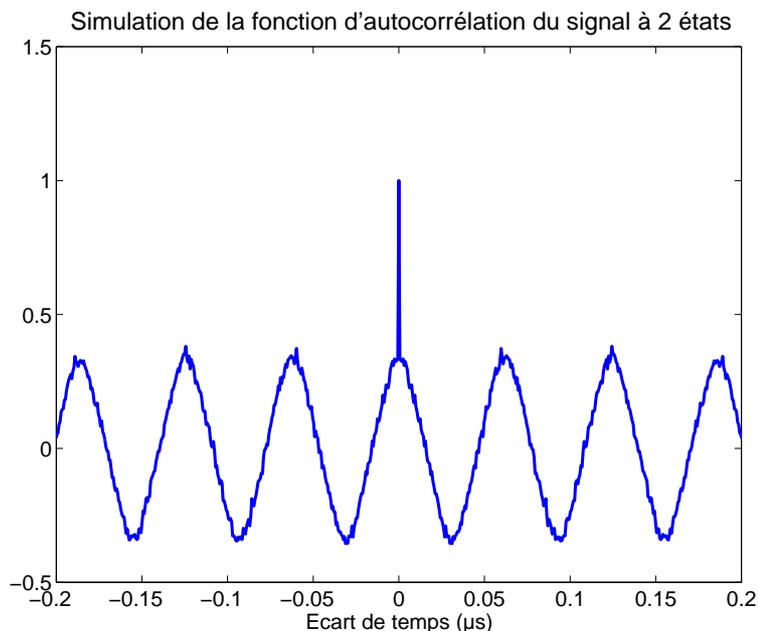


FIG. 3.3: Simulation de la fonction d'autocorrélation du signal à deux états du *burst* précédent.

C'est cette fonction qui est utilisée pour compter les passages à zéro car la présence du bruit de mesure ne se retrouve qu'à l'écart de temps nul. Les passages à zéro sont bien plus détectables que sur le *burst* (FIG. 3.4).

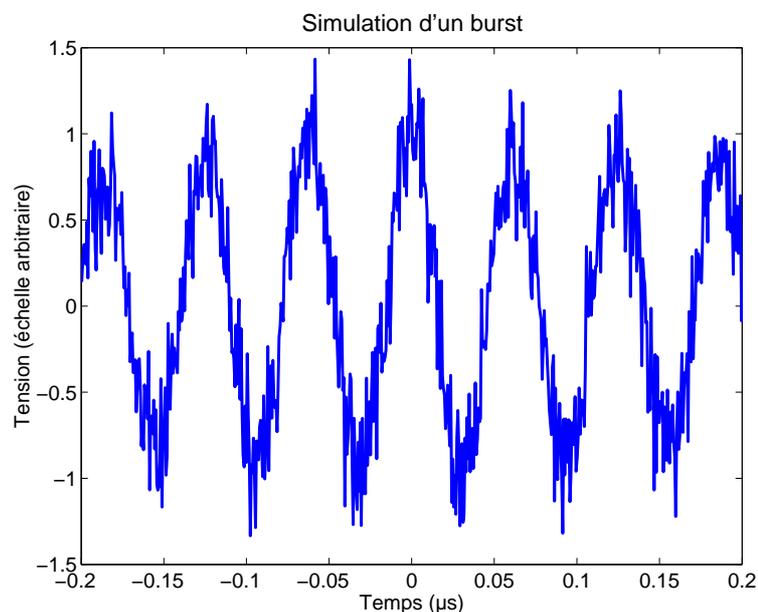


FIG. 3.4: Agrandissement sur le *burst* simulé.

Cette méthode est reconnue pour être une des plus performantes.

f étant mesurée, la composante V_x de vitesse est désormais connue. Ce traitement est effectué à chaque passage de particule et pour toutes les composantes de vitesse. Toutefois, tous les *bursts* détectés ne sont pas utilisables pour mesurer la vitesse. En effet, différents critères sont employés afin de sélectionner les *bursts* pertinents pour la mesure, notamment :

- un seuil minimal de tension à dépasser pour accepter un *burst* ;
- un nombre minimal de passages à zéro pour valider la mesure de vitesse ;
- des temps de détection d'une particule sur chacun des canaux suffisamment proches pour considérer que la mesure de vitesse correspond à une seule particule...

Nous venons de voir le principe de la chaîne de vélocimétrie laser Doppler utilisée. Nous allons maintenant nous focaliser sur le traitement du signal vitesse acquis pour les mesures acoustiques.

3.1.2 Présentation de deux méthodes de traitement du signal vitesse

Contrairement à l'anémométrie fil chaud ou à la mesure par microphone pour lesquelles un signal analogique est obtenu en sortie de capteur, la vélocimétrie laser Doppler fournit des données échantillonnées aléatoirement en temps. En effet, l'échantillonnage est conditionné par le passage des particules dans le volume de mesure et par la validation des *bursts* observés, dépendant donc :

- de la vitesse de l'écoulement ;
- de la concentration en particules ;
- du choix du type de diffusion...

Le terme de fréquence moyenne d'échantillonnage, notée f_m par la suite, est donc employé. Il existe deux familles de traitement des signaux issus de la vélocimétrie laser Doppler [75] : les méthodes directes utilisant les données brutes échantillonnées aléatoirement, et les méthodes de reconstruction donnant, à l'aide des données brutes, un signal échantillonné à pas constant. La *Slotting Technique* et la reconstruction par interpolation, appartenant respectivement aux méthodes directes et aux méthodes de reconstruction, sont des méthodes largement présentées dans la littérature [57, 58, 67, 68, 75] et reconnues pour être efficaces. Nous les avons retenues et elles sont brièvement décrites.

3.1.2.1 La *Slotting Technique*

Soit X un processus stochastique ergodique (valeur moyenne \overline{X}) échantillonné aléatoirement, et $\{t_i\}$ les temps d'observation. La *Slotting Technique* [57, 58, 75] permet de calculer une estimation \tilde{C} de l'autocovariance du processus. Parmi différentes formulations existantes de la *Slotting Technique*, nous avons choisi la plus simple. Supposant que $\Delta\tau$ est la durée des slots et n le nombre d'échantillons désiré de l'autocovariance, nous avons $\forall m = 1..n$:

$$\tilde{C}(m\Delta\tau) = \frac{S(m\Delta\tau)}{N(m\Delta\tau)} \quad (3.8)$$

où

$$N(m\Delta\tau) = \text{Card}(I_m) \quad (3.9)$$

$$S(m\Delta\tau) = \sum_{(i,j) \in I_m} (X(t_i) - \overline{X})(X(t_j) - \overline{X}) \quad (3.10)$$

et

$$I_m = \left\{ (i, j) / \left(m - \frac{1}{2} \right) < \frac{|t_i - t_j|}{\Delta\tau} < \left(m + \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (3.11)$$

L'inverse de $\Delta\tau$ doit satisfaire le critère de Shannon. La valeur $\tilde{C}(0)$ peut être calculée en moyennant tous les auto-produits ($i = j$). Afin d'effectuer une analyse spectrale du processus, la transformée de Fourier discrète est appliquée à l'autocovariance. Le résultat est la densité spectrale de puissance.

L'intercovariance de deux processus X et Y peut être calculée par la *Slotting Technique* en prenant $\forall m = 1..n$:

$$S(m\Delta\tau) = \sum_{(i,j) \in I_m} (X(t_i) - \bar{X})(Y(t_j) - \bar{Y}) \quad (3.12)$$

La densité interspectrale de puissance peut être calculée en appliquant la transformée de Fourier. Cette méthode permet d'effectuer correctement une analyse spectrale jusqu'à la fréquence moyenne d'échantillonnage f_m . Toutefois, cette méthode est pénalisée par les temps de calcul et nécessite un nombre conséquent d'échantillons ($\sim 10^6$) pour obtenir une bonne convergence statistique [67, 68].

3.1.2.2 La reconstruction par interpolation

L'évolution temporelle d'un processus stochastique X est approchée en rééchantillonnant le processus à pas constant, une interpolation étant utilisée pour calculer les nouvelles données. Classiquement, une interpolation d'ordre 0 (échantillonneur-bloqueur) ou d'ordre 1 (interpolation linéaire) est utilisée. Soient $\{t_i\}$ les temps d'acquisition, $\{t_{r,j}\}$ les nouveaux temps d'observation et $X_{r,k}$ le processus reconstruit avec l'interpolation d'ordre $k = 0, 1$. Alors :

$$X_{r,0}(t_{r,j}) = X(t_i), \quad \forall (i, j) / t_i < t_{r,j} \leq t_{i+1} \quad (3.13)$$

et

$$X_{r,1}(t_{r,j}) = \frac{(t_{r,j} - t_i)X(t_{i+1}) + (t_{i+1} - t_{r,j})X(t_i)}{(t_{i+1} - t_i)}, \quad \forall (i, j) / t_i < t_{r,j} \leq t_{i+1} \quad (3.14)$$

Ces interpolations sont largement implémentées dans les logiciels de traitement du signal du commerce. Simples et rapides toutes les deux, l'interpolation linéaire est choisie du fait d'un résultat expérimental de la référence [68] pour lequel le spectre de la vitesse interpolée linéairement coïncide mieux aux hautes fréquences avec le spectre de la vitesse issue d'un anémomètre fil chaud.

Des outils classiques de traitement du signal peuvent alors être utilisés afin de calculer l'autocovariance, l'intercovariance, les densités spectrale et interspectrale de puissance... La fréquence de rééchantillonnage doit vérifier le critère de Shannon.

L'inconvénient de ces méthodes de reconstruction est qu'elles introduisent un filtrage [75]. Il a été rappelé [67] que ce filtrage est dû à la présence de grands intervalles de temps durant l'acquisition par LDV de la vitesse. Une valeur théorique de la fréquence de coupure f_c est donnée dans le cas où l'arrivée des particules peut être modélisée par une loi de Poisson :

$$f_c = \frac{f_m}{2\pi} \quad (3.15)$$

avec une perte de 3 dB à cette fréquence.

3.1.2.3 Note quant au choix d'une méthode

Nous avons donc le choix entre deux méthodes, l'une est robuste en analyse spectrale mais coûteuse en nombre d'échantillons à acquérir, donc en temps de mesure et de calcul - la *Slotting Technique* - l'autre est rapide mais plus limitée dans le domaine fréquentiel - la reconstruction par interpolation linéaire. Ce travail de thèse ne prétendant pas améliorer le traitement du signal pour la vélocimétrie laser Doppler, nous choisirons la méthode offrant le meilleur compromis entre durée d'acquisition et qualité de mesure. Ainsi, dès que la bande passante du signal à observer le permettra, nous opterons pour la reconstruction par interpolation linéaire.

3.1.3 Le rejet de la turbulence

Comme nous l'avons signalé en section 2.1.2 page 74, toute mesure acoustique en écoulement nécessite une méthode de rejet de la turbulence. Nous allons reprendre la méthode classique [11] utilisant un signal s corrélé aux phénomènes acoustiques. Ainsi la densité spectrale de puissance de la composante V'_j de la vitesse acoustique est obtenue par :

$$G_{V'_j} = \frac{|G_{V'_j s}|^2}{G_s} \quad (3.16)$$

où $G_{V'_j s}$ est la densité interspectrale de puissance entre la composante de vitesse totale V_j mesurée par vélocimétrie laser Doppler et le signal s , et G_s la densité spectrale de puissance de s . La phase de la composante V'_j peut être référencée par rapport à celle de s :

$$\phi_{V'_j/s} = \text{atan} \left(\frac{\text{Im}G_{V'_j s}}{\text{Re}G_{V'_j s}} \right) \quad (3.17)$$

Dans le cadre d'une reconstruction par interpolation linéaire, (3.16) est testée sur une simulation d'acquisition par vélocimétrie laser Doppler de deux types de signaux acoustiques, harmoniques et bruit large bande. La loi des écarts de temps d'acquisition est modélisée classiquement par une loi de Poisson de paramètre f_m . Ici, nous prenons $f_m = 18 \text{ kHz}$. Les signaux acoustiques sont :

- deux sinusoïdes de fréquences $f_1 = 1 \text{ kHz}$ et $f_2 = 5 \text{ kHz}$ et d'amplitude 2 mm.s^{-1} toutes deux ;
- un bruit blanc gaussien d'écart-type 2 mm.s^{-1} .

Chacun des signaux est bruité par un autre bruit blanc, simulant grossièrement la turbulence². Les signaux sont reconstruits avec une fréquence d'échantillonnage $f_e = 0.95 f_m$. Nous étudions alors l'influence du nombre n_e d'échantillons acquis sur (3.16), avec $n_e = 100000, 300000, 1000000$, respectivement FIG. 3.5 (a), (b) et (c). Les densités spectrales et interspectrales sont calculées sur 256 points avec un fenêtrage de Hanning et un recouvrement de 90%.

Pour chaque figure, les résultats sont donnés pour les deux types de signaux acoustiques, en haut le signal harmonique et en bas le bruit large bande.

Pour le signal harmonique :

- en dessous de f_c , l'amplitude à la fréquence f_1 est bien retrouvée quel que soit n_e ;
- au delà, l'effet du filtrage dû à la reconstruction est notable quel que soit n_e , entraînant une perte de signal élevée à la fréquence f_2 .

Pour le bruit large bande :

²Un spectre turbulent n'est pas constant en fréquence.

- une augmentation significative de n_e permet d'améliorer l'estimation de la densité spectrale de puissance ;
- au delà de f_c , l'effet du filtrage est de nouveau notable quel que soit n_e .

Il est à noter que l'effet du filtrage se retrouve sur le bruit blanc simulant la turbulence du spectre brut.

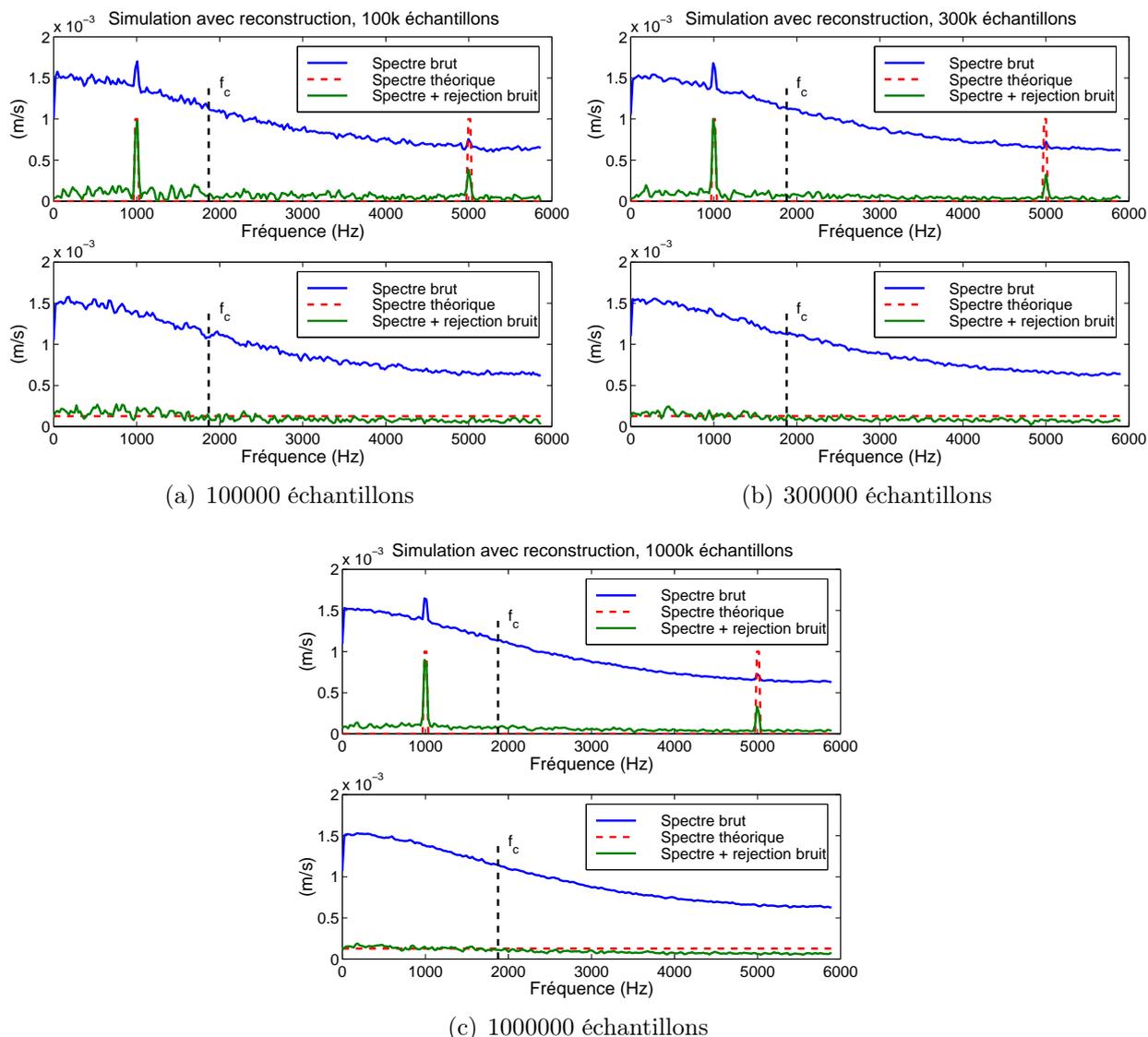


FIG. 3.5: Analyse spectrale des signaux simulés pour trois valeurs de n_e .

En conclusion, le nombre d'échantillons est à adapter suivant le type de signal acoustique observé.

3.1.4 Domaine d'application de la vélocimétrie laser Doppler pour la mesure aéroacoustique

Nous allons essayer de donner les paramètres permettant de délimiter un domaine d'application en nombre de Mach et en fréquence du système de vélocimétrie laser Doppler utilisé pour nos mesures. Le nombre de ces paramètres peut être estimé à quatre :

- longueur d'onde et fréquence des signaux acoustiques ;

- méthode de traitement du signal ;
- rapport vitesse acoustique sur vitesse turbulente ;
- paramètres de l'IFA.

3.1.4.1 Longueur d'onde et fréquence des signaux acoustiques

3.1.4.1.1 Longueur d'onde : Soient λ la longueur d'onde pour le milieu au repos et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ le nombre d'onde associé. Considérons alors une perturbation acoustique p en régime harmonique plan $p(x, t) = A^+e^{-ik^+x} + A^-e^{ik^-x}$. Quand le nombre de Mach M^{ref} de l'écoulement augmente, k^- augmente, c'est-à-dire que la longueur d'onde apparente de la partie rétropropagée diminue. Elle s'écrit :

$$\lambda^- = \lambda(1 - M^{\text{ref}}) \quad (3.18)$$

C'est cette échelle de longueur qui doit être comparée à d_m , la largeur du volume de mesure, afin de donner une borne supérieure à M^{ref} . Afin que la mesure par vélocimétrie laser Doppler soit correcte, l'onde acoustique ne doit pas provoquer une perturbation de vitesse variant dans le volume de mesure. En posant $r = \frac{\lambda^-}{d_m}$, une condition suffisante est $r \gg 1$. Si en pratique nous considérons cette condition valable pour $r \geq 10$, sachant que $\lambda = \frac{c^{\text{ref}}}{f}$, nous pouvons alors définir la borne supérieure $M_{\text{max}}^{\text{ref}}$ suivante :

$$M_{\text{max}}^{\text{ref}} = 1 - \frac{10d_m f}{c^{\text{ref}}} \quad (3.19)$$

$M_{\text{max}}^{\text{ref}}$ est une fonction affine décroissante de f . Sa pente est d'autant plus importante que d_m est grande ou que c^{ref} est petit.

3.1.4.1.2 Fréquence : Soient $T_p = \frac{d_m}{V^{\text{ref}}}$ le temps de résidence d'une particule d'ensemencement et $T_{ac} = \frac{1}{f}$ la période de la perturbation acoustique. En fonction de M^{ref} , il vient $T_p = \frac{d_m}{c^{\text{ref}} M^{\text{ref}}}$. Afin que la mesure par vélocimétrie laser Doppler soit correcte, il suffit que T_{ac} soit bien plus grande que T_p . Donc :

$$f \ll \frac{c^{\text{ref}} M^{\text{ref}}}{d_m} \quad (3.20)$$

En considérant qu'un facteur 10 est suffisant, le nombre de Mach minimal $M_{\text{min}}^{\text{ref}}$ est :

$$M_{\text{min}}^{\text{ref}} = \frac{10d_m f}{c^{\text{ref}}} \quad (3.21)$$

$M_{\text{min}}^{\text{ref}}$ est une fonction linéaire croissante de f . Sa pente est d'autant plus importante que d_m est grande ou que c^{ref} est petit.

3.1.4.2 Méthode de traitement du signal

Comme vu en section 3.1.2 page 94, le choix d'une méthode de traitement du signal détermine la bande passante d'analyse spectrale, f_m pour la *Slotting Technique* ou $f_c = \frac{f_m}{2\pi}$

pour la reconstruction par interpolation. f_m est souvent donnée comme une fonction de la norme de la vitesse de l'écoulement [75]. Toutefois, elle dépend aussi du type de diffusion des particules. Il a été constaté expérimentalement qu'en rétrodiffusion, f_m sature à partir d'une certaine vitesse d'écoulement, puis décroît (lumière diffusée par les particules trop faible).

3.1.4.3 Rapport vitesse acoustique sur vitesse turbulente

Compte tenu de l'allure typique d'un spectre de vitesse turbulente (fort niveau en basses fréquences, puis décroissance logarithmique en $-\frac{5}{3}$), il apparaît une fréquence minimale f_{min} en deçà de laquelle le rapport vitesse acoustique sur vitesse turbulente est trop faible pour que la méthode de rejet de la turbulence opère correctement (voir section 2.1.2.3 page 76).

3.1.4.4 Paramètres de l'IFA

3.1.4.4.1 Le codage de la vitesse : La vitesse totale (somme des vitesses moyenne, acoustique et turbulente) est codée numériquement par l'IFA sur un nombre de bits donné. Aussi, le seuil de détection en vitesse acoustique augmente linéairement avec la vitesse moyenne de l'écoulement [60, 61]. Par exemple à $20 m.s^{-1}$, le seuil de détection est de $2.8 mm.s^{-1}$ avec une mantisse codée sur 12 bits par l'IFA 755 [60, 61].

3.1.4.4.2 Choix du filtre en fréquence du *burst* : En pratique, la fréquence centrale de la gamme de fréquence des photomultiplicateurs, et donc *a priori* l'incertitude sur la fréquence du *burst* détecté, augmentent avec la vitesse moyenne de l'écoulement. Ceci implique une incertitude croissante sur la vitesse acoustique avec la vitesse moyenne.

Ainsi, pour un niveau de vitesse acoustique donné, les paramètres de l'IFA donnent un nombre de Mach maximal M_{IFA}^{ref} .

L'influence des quatre paramètres peut être résumée sur FIG. 3.6.

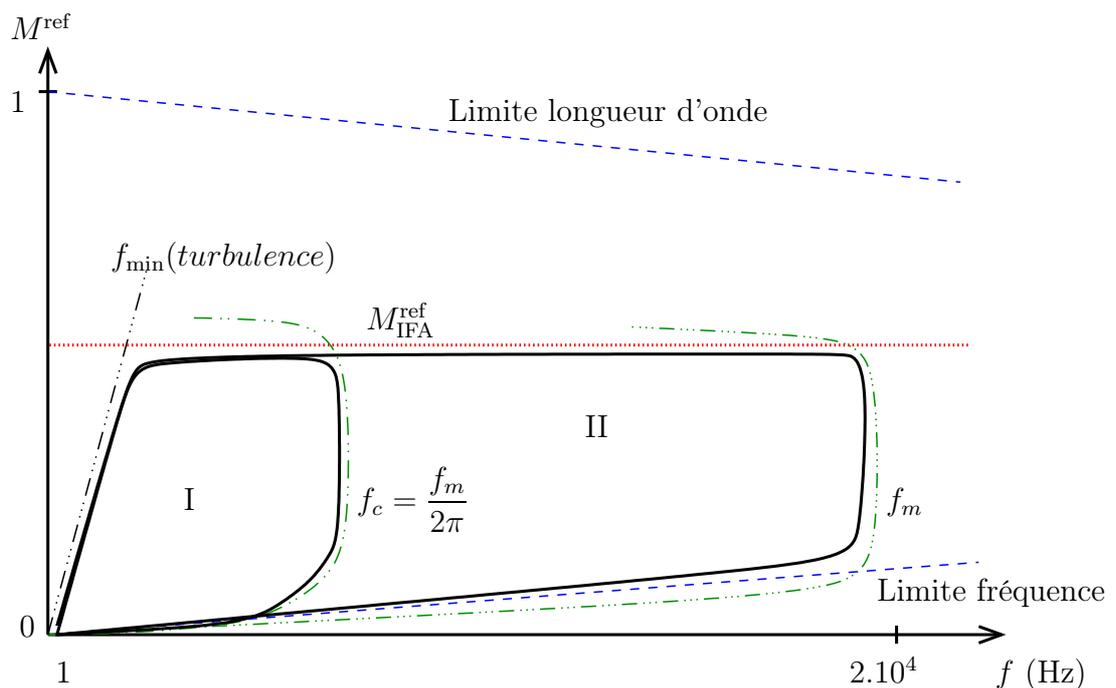


FIG. 3.6: Domaines d'utilisation (I et II en trait plein) en fréquence et en nombre de Mach.

Le domaine I correspond au choix d'une méthode par reconstruction et le domaine II au choix de la *Slotting Technique*. Les valeurs et les formes des courbes sont arbitraires. Elles dépendent fortement du dispositif de mesure et des conditions expérimentales.

Nous venons de décrire la chaîne de vélocimétrie laser Doppler utilisée. Les dispositifs expérimentaux et l'instrumentation liée sont maintenant présentés.

3.2 Dispositifs expérimentaux

3.2.1 Soufflerie à retour basse vitesse

Cette soufflerie à retour permet de générer un écoulement stabilisé avec une gamme de nombre de Mach de $0.01 - 0.05$. Les dimensions de la veine de mesure sont 690 mm suivant l'axe x de l'écoulement, 450 mm suivant l'axe y (FIG. 3.7) et 420 mm suivant l'axe z . Un accès optique permet des mesures par vélocimétrie laser Doppler 2D (FIG. 3.8). Une grille de turbulence peut être placée à l'entrée de la veine d'essai (FIG. 3.8). Cette soufflerie n'étant pas initialement prévue pour des mesures aéroacoustiques, deux haut-parleurs ont été montés sur une paroi en amont du convergent, permettant de générer des ondes acoustiques dans la veine d'essai. Les dimensions suivant y et z de la veine impliquent une fréquence théorique de coupure du premier mode transverse de 380 Hz .

Le vélocimètre laser mesure les composantes suivant x et y de la vitesse moyenne de l'écoulement et de la vitesse acoustique. L'ensemencement est réalisé avec de la fumée d'encens. Un microphone fixe, muni d'une ogive et placé dans la veine d'essai, permet d'assurer la reproductibilité du niveau acoustique dans la veine. Une sonde à quatre microphones munis d'ogives (voir FIG. 2.3 page 54) est employée pour mesurer la vitesse acoustique et l'intensité pour 6 positions en x négatif (FIG. 3.7) de 0 à -250 mm par pas de 50 mm le long de l'axe central de la veine. Un microphone mobile muni d'une ogive (FIG. 3.9) peut être déplacé dans quatre plans $x = -100, -150, -200, -250\text{ mm}$ (quart de section de la veine, voir FIG. 3.10). Les différents microphones sont de type $\frac{1}{4}$ " B & K 4135.

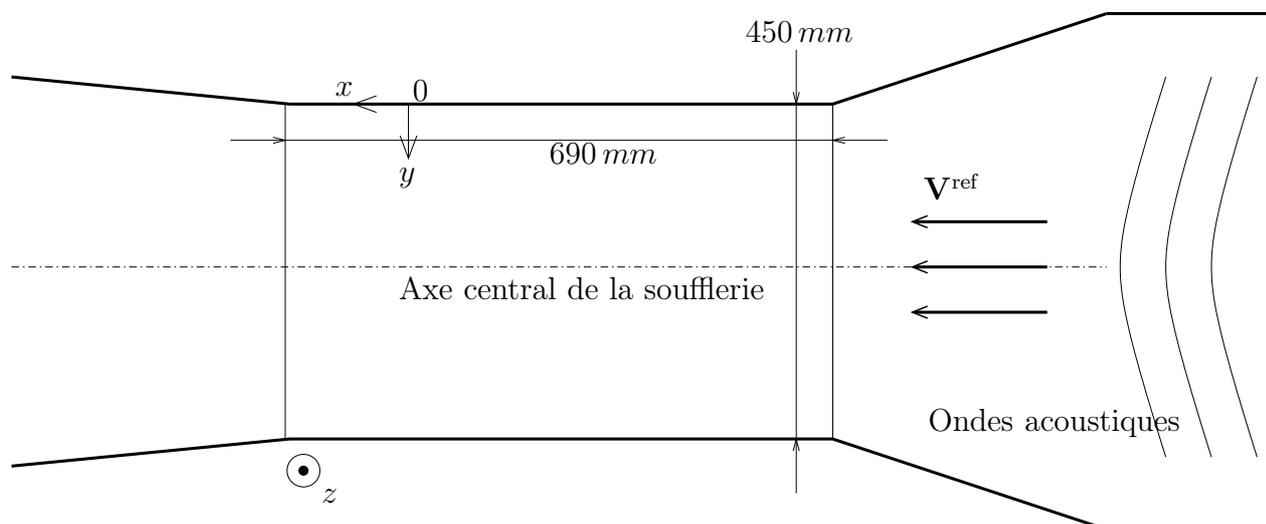


FIG. 3.7: Soufflerie à retour basse vitesse (plan médian $z = 0$)

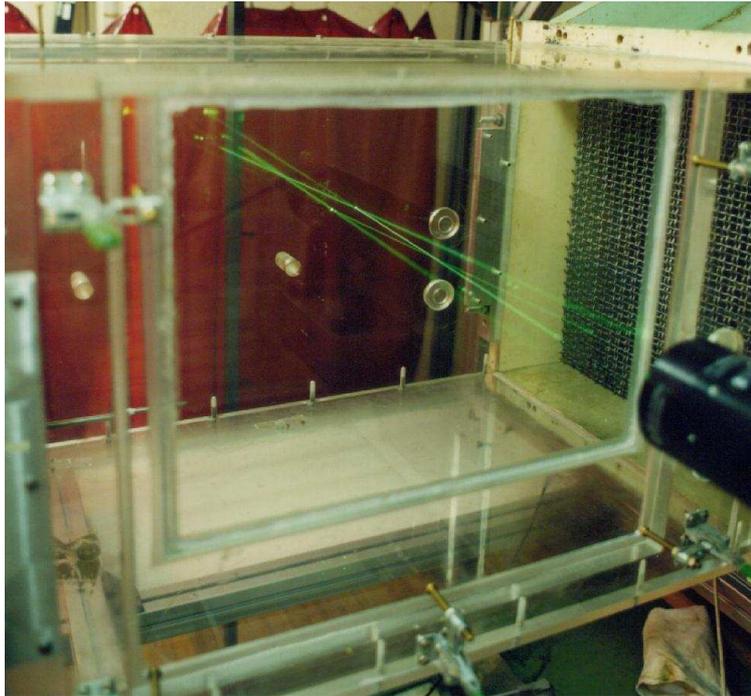


FIG. 3.8: Photographie de la veine de la soufflerie à retour basse vitesse. Le système de vélocimétrie laser Doppler est ici configuré en 1D (faisceaux verts) et la grille de turbulence est installée (à droite de la veine).



FIG. 3.9: Microphone mobile dans la soufflerie à retour basse vitesse.

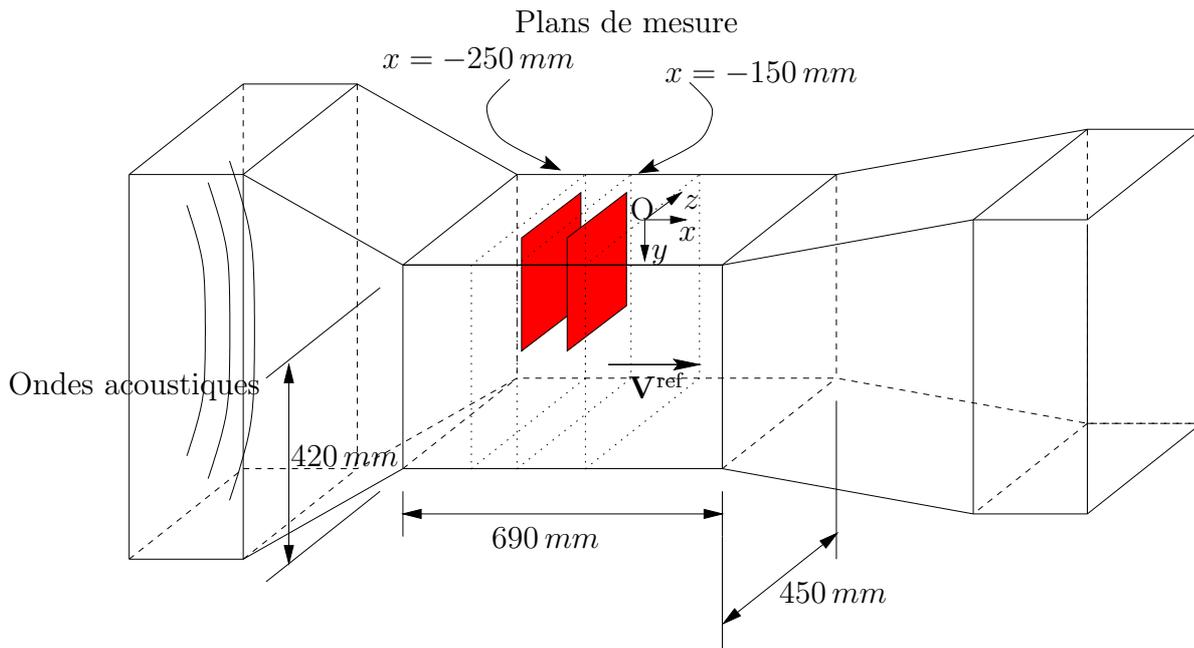


FIG. 3.10: Plans $x = -150 \text{ mm}$ et $x = -250 \text{ mm}$ du microphone mobile dans la soufflerie à retour basse vitesse (extrait de l'article [49]).

3.2.2 Banc aéro-thermo-acoustique

Ce banc a été réalisé durant ce travail de thèse suivant un cahier des charges plus spécifique aux mesures aéroacoustiques :

- une température jusqu'à 300°C ;
- un nombre de Mach moyen dans la veine de mesure de l'ordre de 0.1 à 0.5 ;
- des ondes acoustiques planes sur une gamme de l'ordre de 300 – 3000 Hz .

Il est raccordé à un circuit d'air régulé en débit normalisé ($300 - 1500 \text{ Nm}^3 \cdot \text{h}^{-1}$) et en température (jusqu'à 300°C). Il comprend, de l'amont vers l'aval (FIG. 3.11) :

- un disque de rupture (2.5 Bars relatifs) ;
- un caisson contenant un brise-jet puis un nid d'abeille (maille de 6 mm et épaisseur de 60 mm) ;
- un convergent ;
- une conduite de section interne carrée de 50 mm et de longueur variable ;
- deux haut-parleurs en dérivation, chacun dans un caisson pressurisé ;
- une veine d'essai (FIG. 3.12) ;
- un pavillon exponentiel.

L'ensemble est en acier inoxydable, matériau compatible avec les hautes températures admissibles. Des panneaux de mousse de mélamine d'épaisseur de 100 mm (FIG. 3.13 et FIG. 3.14) sont placés en sortie du pavillon afin de réduire le niveau sonore dans le lieu de travail et d'améliorer la condition limite de sortie (coefficient de réflexion tendant vers 0, voir annexe B page 161).

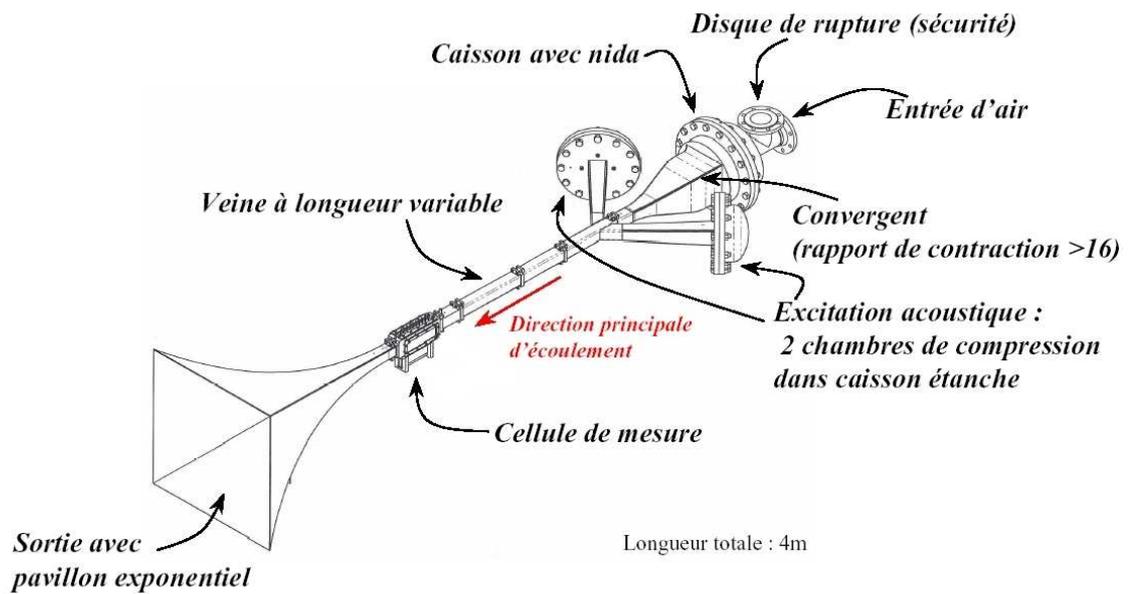


FIG. 3.11: Schéma du banc aéro-thermo-acoustique.

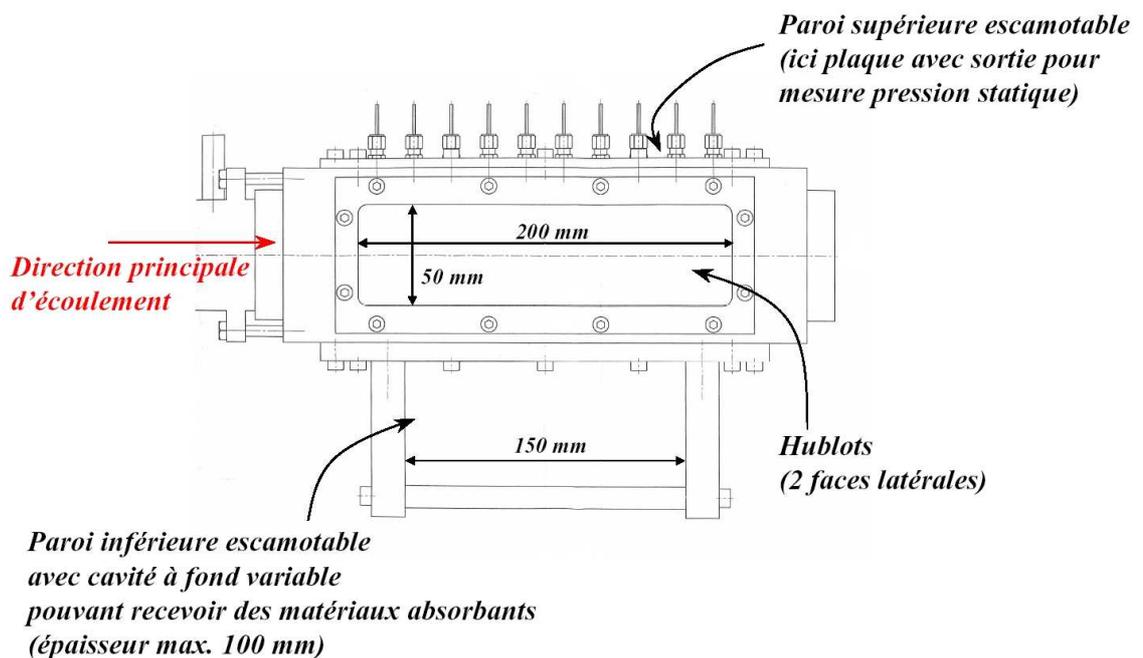


FIG. 3.12: Schéma de la veine d'essai.



FIG. 3.13: Photographie du banc en cours de montage (panneaux vides).



FIG. 3.14: Photographie du banc monté (avec mousse de mélamine).

La veine d'essai comprend deux hublots de 200 mm de long, 60 mm de large et 20 mm d'épaisseur, donnant un accès optique sur toute la section de la veine (FIG. 3.15 et FIG. 3.16). La paroi inférieure comprend un fond amovible de 150 mm de long, 30 mm de large, pouvant abriter des matériaux absorbants d'épaisseur maximale de 100 mm . La paroi supérieure est escamotable, pouvant être, suivant les applications, un hublot (accès optique sur 200 mm de long et 30 mm de large) ou une plaque d'acier munie de 10 prises de pression statique. Le vélocimètre laser mesure les composantes suivant x et z . Pour ce qui concerne des particules d'ensemencement, la fumée d'encens est retenue de nouveau³. La dimension de la section et la gamme de nombre de Mach donnent des fréquences de coupure du premier mode transverse de 3000 à 3450 Hz .

Des thermocouples sont placés à l'amont et à l'aval de la veine (FIG. 3.15), à proximité de

³Un essai avec du DEHS atomisé par un *Laskin nozzle* [7] a été mené. En effet ce type d'ensemencement est plus souple d'utilisation que la fumée d'encens. Malheureusement, son emploi est à proscrire en milieu très confiné car un film liquide se forme en paroi et ruisselle sur les hublots, rendant la mesure par vélocimétrie laser Doppler impossible.

chaque haut-parleur et en amont du caisson d'entrée d'air. Une paire de microphones (sondes microphoniques B & K 4182) peut être placée en parois amont et aval afin d'appliquer la méthode du tri d'onde (section 2.1.2.1 page 74). Afin de couvrir toute la gamme de fréquence, deux écartements des sondes sont disponibles pour chaque emplacement. Ils ont été calculés de sorte qu'ils vérifient le critère vu en section 2.1.2.1 page 74 pour toute la gamme de nombre de Mach et toutes les températures.

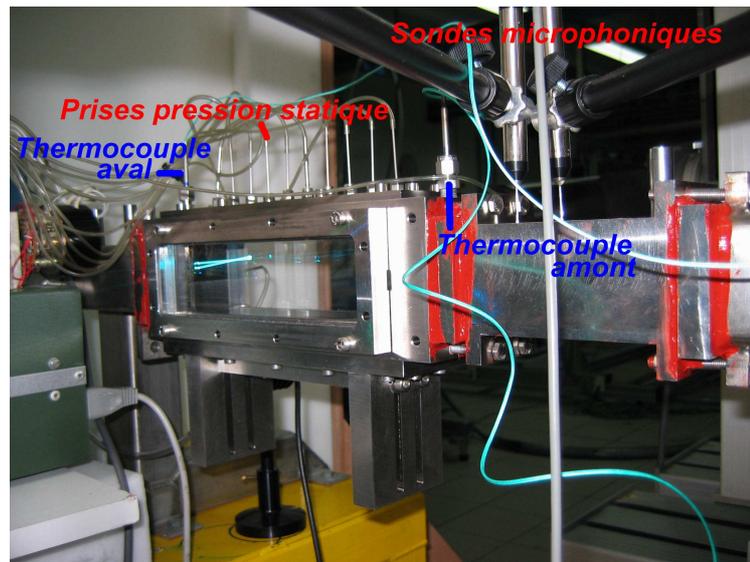


FIG. 3.15: Photographie de la veine d'essai instrumentée.

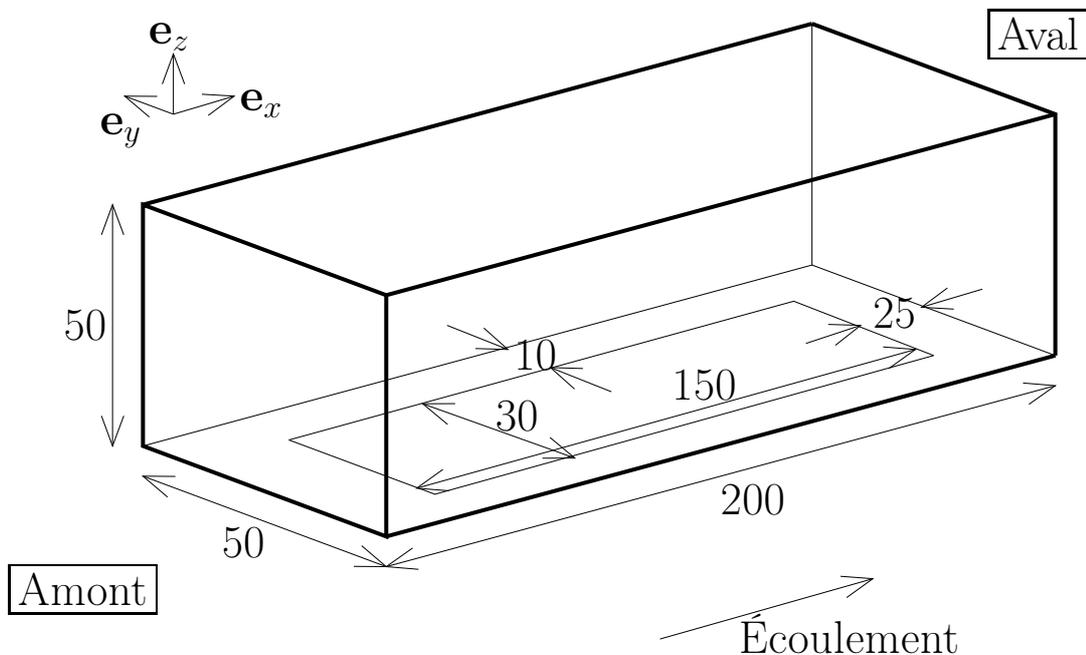


FIG. 3.16: Représentation de la veine d'essai avec dimensions en millimètre.

La géométrie des conduites de dérivation des haut-parleurs a été définie à l'aide d'une simulation numérique de l'écoulement (FIG. 3.17) et d'un calcul de coefficient de transmission acoustique au raccord des conduites (FIG. 3.18). Le choix d'un raccord à 45 degrés résulte

d'un compromis entre une faible perturbation de l'écoulement générée par la dérivation et un coefficient de transmission acoustique élevé sur une large gamme de nombres de Mach. Les calculs de coefficient de transmission sont à prendre avec précaution car ils supposent :

- que l'interface est un plan infini séparant un milieu au repos d'un milieu en écoulement uniforme ;
- qu'une onde incidente plane provenant du milieu au repos se réfléchit à l'interface.

Malgré ces hypothèses simplificatrices, les résultats semblent montrer qu'au delà d'un nombre de Mach de 0.4, le rendement de la source acoustique sera faible. La brusque remontée du coefficient de transmission permettrait de conclure *a priori* au résultat contraire. Or, pour ce nombre de Mach, l'onde transmise tend à être rasante à l'interface⁴, ce qui signifie finalement qu'aucune onde ne se propage dans le milieu en mouvement.

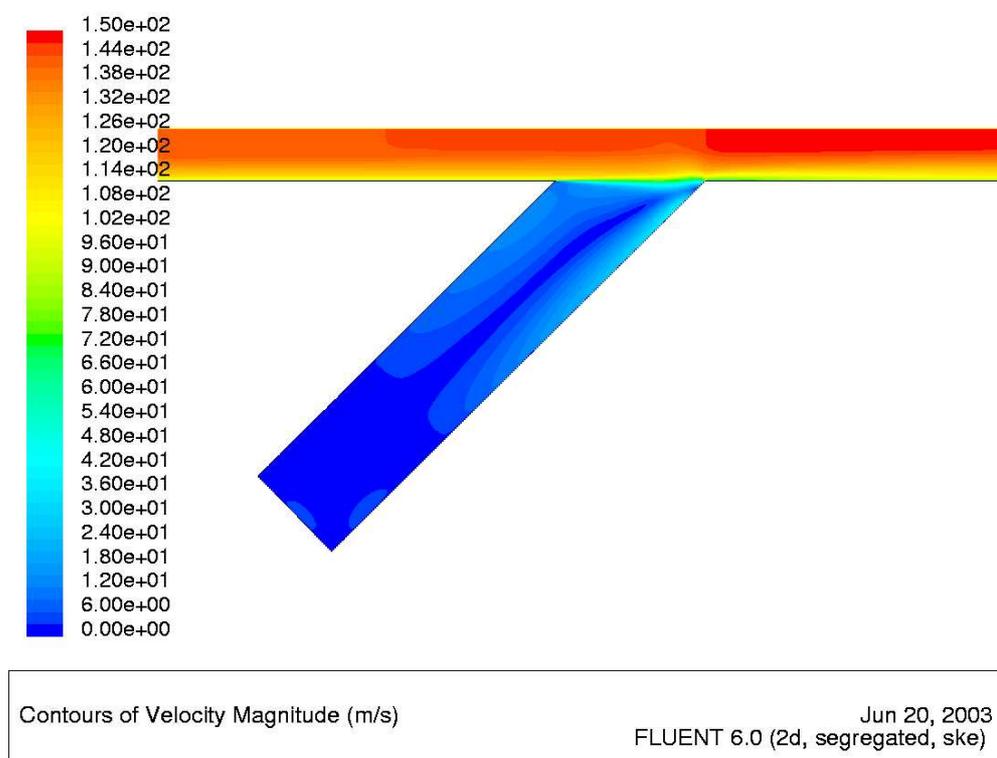


FIG. 3.17: Résultats de la simulation numérique de l'écoulement (vitesse débitante de 135 m.s^{-1}). La conduite principale (horizontale) est représentée sur une demi-section.

⁴Incidence de Brewster en électromagnétisme.

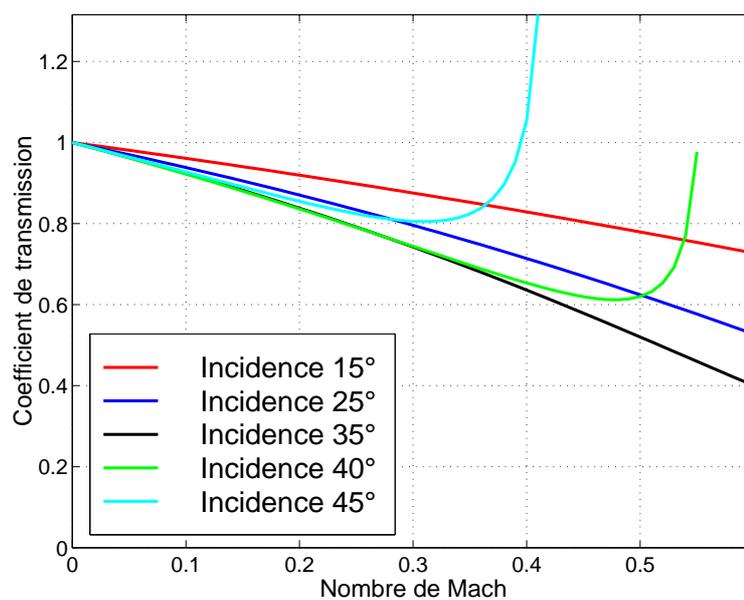


FIG. 3.18: Coefficient de transmission acoustique théorique en fonction du nombre de Mach de l'écoulement pour plusieurs incidences de raccord (référence d'incidence normale à la conduite principale).

Chapitre 4

Expériences dans le cadre de la description eulérienne des perturbations acoustiques

Ce chapitre présente un ensemble d'expériences utilisant uniquement la description eulérienne des perturbations. Aucune ambiguïté n'étant possible, l'accent ' relatif à ces perturbations sera désormais omis. Ces expériences ont été réalisées dans une soufflerie à retour (détails en section 3.2.1 page 100). Elles font suite aux travaux [42, 47, 60, 61] dont le seul but était d'extraire la vitesse acoustique. Le nouvel objectif est d'obtenir d'autres quantités acoustiques telles que, par exemple, l'intensité en présence d'un écoulement définie par (1.24) page 23 ou l'impédance acoustique. Dans un premier temps, deux concepts de mesure sont présentés :

- une approche n'utilisant que la vélocimétrie laser Doppler et pour laquelle la perturbation de pression est calculée à l'aide des mesures de vitesse acoustique ;
- une utilisation conjointe du vélocimètre laser et d'un microphone, nécessitant alors une calibration préalable en phase des deux chaînes de mesure.

Ils sont appliqués à une mesure unidimensionnelle avec un écoulement de référence peu rapide (nombre de Mach de 0.01) et des ondes planes. Dans un deuxième temps, le concept le plus performant est repris dans le cadre d'une mesure en vélocimétrie laser Doppler 2D pour un écoulement plus rapide (nombre de Mach de 0.05) en présence ou non d'une grille de turbulence.

4.1 Descriptions des approches

Afin d'obtenir en description eulérienne des perturbations les quantités acoustiques telles que l'intensité ou l'impédance, pression et vitesse doivent être connues en amplitude et en phase.

4.1.1 Approche par vélocimétrie laser Doppler seule

L'estimation de la pression repose sur les équations (1.16), (1.17) et (1.19) page 22 avec un milieu en mouvement uniforme. Ces équations permettent d'exprimer la dérivée partielle par rapport au temps de la perturbation de pression par :

$$\frac{1}{z^{\text{ref}}} \frac{\partial p}{\partial t} = M^{\text{ref}} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}) + c^{\text{ref}} (M^{\text{ref}2} - 1) \frac{\partial}{\partial \mathbf{e}} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}) - c^{\text{ref}} \text{div}_{\text{ref}} \mathbf{V}^{\perp \mathbf{e}} \quad (4.1)$$

où \mathbf{e} est le vecteur directeur de l'écoulement, $\mathbf{V}^{\perp\mathbf{e}}$ la vitesse acoustique dans le plan perpendiculaire à l'écoulement.

Nous particularisons cette équation au cas d'ondes planes se propageant suivant $\mathbf{e} = \mathbf{e}_x$ avec un écoulement lent. Ainsi, $\mathbf{V}^{\perp\mathbf{e}_x} = 0$ et $M^{\text{ref}} \ll 1$. En écrivant $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_x$, il vient :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -z^{\text{ref}} c^{\text{ref}} \frac{\partial V}{\partial x} \quad (4.2)$$

En régime harmonique ($e^{i2\pi ft}$), nous avons :

$$\mathcal{P} = i \frac{z^{\text{ref}} c^{\text{ref}}}{2\pi f} \frac{d\mathcal{V}}{dx} \quad (4.3)$$

où \mathcal{P} et \mathcal{V} sont la pression et la vitesse acoustiques complexes.

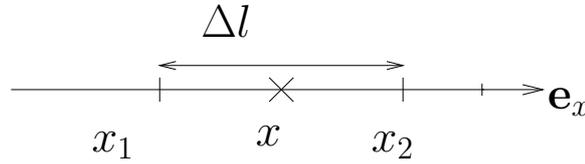


FIG. 4.1: Schéma de principe de la méthode.

Afin de calculer \mathcal{P} , nous approchons $\frac{d\mathcal{V}}{dx}$ avec un schéma aux différences finies d'ordre 1 centré. Les vitesses acoustiques \mathcal{V}_1 and \mathcal{V}_2 sont mesurées aux points x_1 et x_2 . De ce fait, la pression acoustique est évaluée en x par :

$$\check{\mathcal{P}} = i \frac{z^{\text{ref}} c^{\text{ref}}}{2\pi f} \frac{\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_1}{\Delta l} \quad (4.4)$$

Pour une vitesse acoustique $\mathcal{V}(x) = Ae^{-ikx} + Be^{ikx}$ avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$, l'erreur relative sur l'amplitude E^p due à l'approximation est :

$$E^p = 20 \log_{10} \left| \frac{\check{\mathcal{P}}}{\mathcal{P}} \right| \quad (4.5)$$

Soit :

$$E^p = 20 \log_{10} \left| \text{sinc} \left(k \frac{\Delta l}{2} \right) \right| \quad (4.6)$$

Avec $\Delta l = 0.03 \text{ m}$, $E^p = -1 \text{ dB}$ pour $f \simeq 1 \text{ kHz}$.

La pression acoustique alors connue, l'intensité, par exemple, peut être déterminée.

4.1.2 Approche par vélocimétrie laser Doppler et mesure microphonique

Puisque vitesse et pression acoustiques sont mesurées par deux outils différents, la différence de phase $\Delta\psi$ entre les chaînes de mesure par vélocimétrie laser Doppler et par microphone doit être déterminée. Une expérience de calibration en phase a donc été mise au point. Similaire à la méthode vue en section 2.2.2 page 82 [38] avec la sonde anémomètre fil chaud / microphone, elle utilise la sonde à quatre microphones comme deuxième capteur de vitesse acoustique. L'expérience et le fonctionnement de la sonde sont détaillés respectivement dans [48] et [60]. En comparant les vitesses obtenues par vélocimétrie laser Doppler et

par la sonde, nous obtenons la différence de phase $\Delta\psi$ entre la chaîne de mesure LDV et la chaîne de mesure du microphone centrale de la sonde.

Une fois les chaînes de mesure calibrées, il est possible de coupler une mesure de pression acoustique par microphone à une mesure de vitesse acoustique par vélocimétrie laser Doppler afin de mesurer, par exemple, l'intensité.

4.2 Expériences

Avant de montrer les résultats des mesures acoustiques, la caractérisation de la turbulence générée par la grille amovible de la soufflerie à retour est proposée.

4.2.1 Caractérisation de la turbulence de grille

La grille utilisée possède des mailles carrées de dimension $M = 9.22 \text{ mm}$. L'origine des positions est ici prise à la grille (début de la veine d'essai), contrairement à toutes les autres mesures. Aucun signal acoustique n'est émis. Le nombre de Reynolds basé sur la dimension des mailles est $R_M = \frac{V^{\text{ref}} M}{\nu} = 0.91 \cdot 10^4$ et le nombre de Mach de l'écoulement est 0.05. La *Slotting Technique* est choisie pour évaluer l'autocovariance C de la vitesse afin d'éliminer le bruit de mesure suivant la procédure décrite dans les travaux des références [67, 68] : une régression polynomiale est effectuée à l'origine de l'autocovariance afin de retirer le pic ajouté par le bruit de mesure, ce dernier étant supposé blanc. Ce polynôme permet aussi de calculer la dérivée seconde à l'origine et donc trouver la micro-échelle de temps de la turbulence λ_t :

$$\frac{C(0)}{\lambda_t^2} = -\frac{1}{2} \frac{d^2 C}{d\tau^2}(0) \quad (4.7)$$

L'échelle intégrale est :

$$\Lambda_t = \int_0^{+\infty} \frac{C(\tau)}{C(0)} d\tau \quad (4.8)$$

En pratique, l'intégration s'effectue jusqu'à un écart de temps où l'autocovariance est quasi nulle. Grâce à l'hypothèse de Taylor, nous accédons aux échelles spatiales :

$$\lambda_l = V^{\text{ref}} \lambda_t \quad (4.9)$$

$$\Lambda_l = V^{\text{ref}} \Lambda_t \quad (4.10)$$

Le taux de turbulence est

$$tt = \frac{\sqrt{C(0)}}{V^{\text{ref}}} \quad (4.11)$$

En turbulence de grille, une loi empirique donne :

$$\frac{1}{tt^2} \sim \left(\frac{x}{M}\right)^n \quad (4.12)$$

où x est la distance depuis la grille. Aussi, la formule de Batchelor donne la micro-échelle spatiale :

$$\left(\frac{\lambda_l}{M}\right)^2 = \frac{20}{n R_M} \frac{x}{M} \quad (4.13)$$

Nous avons tracé $\frac{1}{tt^2}$, $\left(\frac{\lambda_l}{M}\right)^2$ et $\frac{\Lambda_l}{M}$ en fonction de $\frac{x}{M}$ (voir FIG. 4.2). Nous trouvons $n = 1.45$. Les mesures de la micro-échelle sont conformes à la formule de Batchelor avec le n obtenu. Dans le domaine de mesure, nous avons trouvé une décroissance du taux de turbulence de 3 à 2%.

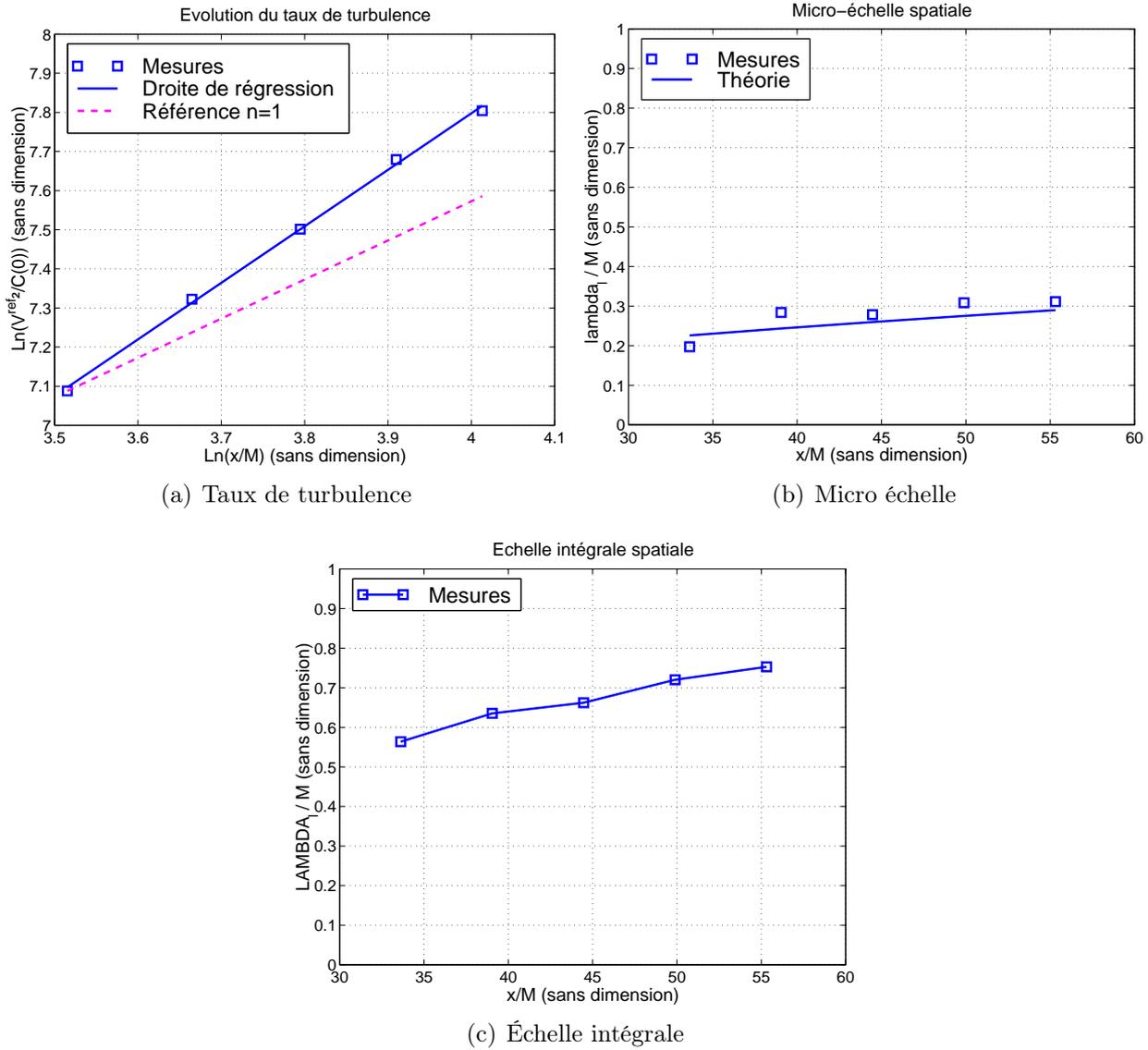


FIG. 4.2: Évolution longitudinale du taux de turbulence (a), de la micro-échelle spatiale (b) et de l'échelle intégrale spatiale (c).

4.2.2 Mesures d'impédance et intensité acoustiques

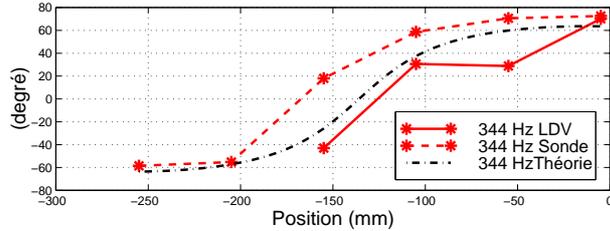
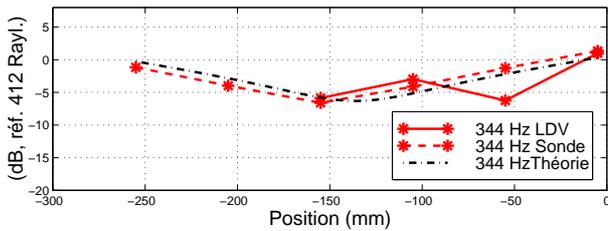
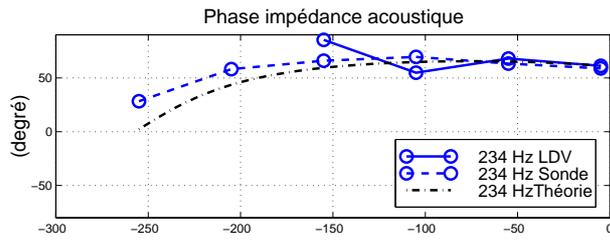
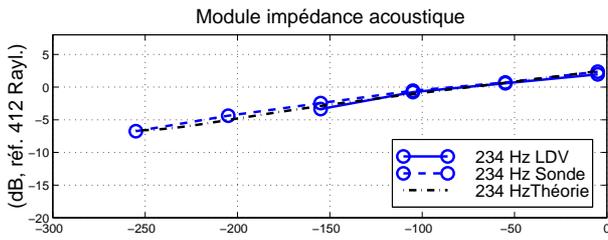
4.2.2.1 Mesures unidimensionnelles en écoulement peu rapide et en présence d'ondes planes

L'écoulement moyen a pour nombre de Mach 0.01 et la grille n'est pas installée. Deux fréquences inférieures à la fréquence de coupure théorique du premier mode transverse sont choisies, 234 Hz et 344 Hz. Le niveau de pression mesuré par le microphone fixe en veine d'essai est égal à 110 dB pour 234 Hz et 100 dB pour 344 Hz. Comme la fréquence moyenne d'échantillonnage f_m varie de 7 kHz à 8.5 kHz, la méthode de reconstruction par interpolation

peut être choisie car elle n'introduit pas de filtrage à ces fréquences.

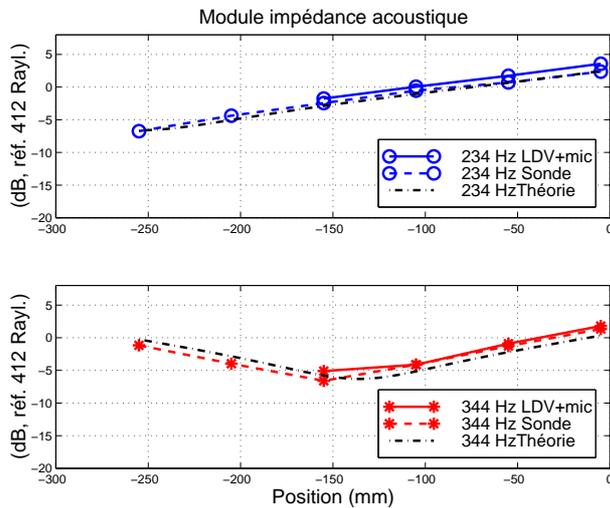
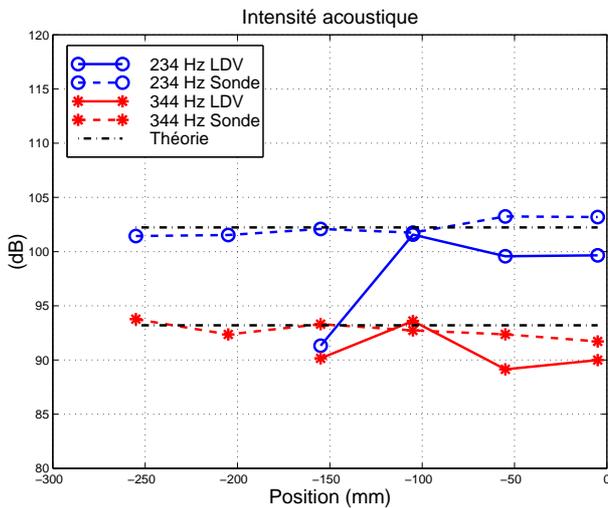
Sur FIG. 4.3 page suivante, nous présentons les résultats de mesure d'impédance et d'intensité par vélocimétrie laser Doppler seule avec $\Delta l = 0.03 m$ ((a), (b) et (c)), par vélocimétrie laser Doppler et microphone ((d), (e) et (f)) et par la sonde à quatre microphones le long de l'axe longitudinal au centre de la veine. En outre une comparaison à la théorie de propagation en ondes planes est effectuée. Nous pouvons constater que la méthode par vélocimétrie laser Doppler seule fournit un module d'impédance correct, à l'exception du point $x = -50 mm$ à $344 Hz$ (FIG. 4.3 page suivante (a)). Par contre, à $234 Hz$, la phase oscille autour de la valeur théorique avec une imprécision au maximum de l'ordre de 25 degrés. À $344 Hz$, hormis le point cité précédemment, l'erreur par rapport à la théorie est inférieure à 10 degrés (FIG. 4.3 page suivante (b)), ce qui est meilleur que le résultat de la sonde. Les erreurs d'amplitude et/ou de phase se répercute sur l'intensité (FIG. 4.3 page suivante (c)), notamment pour $234 Hz$ en $x = -155 mm$. La phase se rapprochant de 90 degrés, l'intensité diminue. Toutefois, en dehors de ce point, l'erreur est inférieure à $3 dB$ mais reste supérieure à celle de la sonde.

La méthode par vélocimétrie laser Doppler et microphone donne des résultats comparables à ceux de la théorie (FIG. 4.3 page suivante (e)). Les intensités mesurées se recoupent bien avec un écart maximal inférieur à $2 dB$ (FIG. 4.3 page suivante (f)).



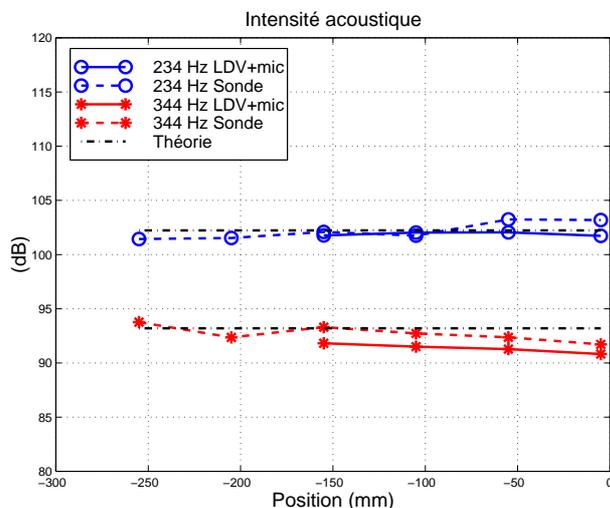
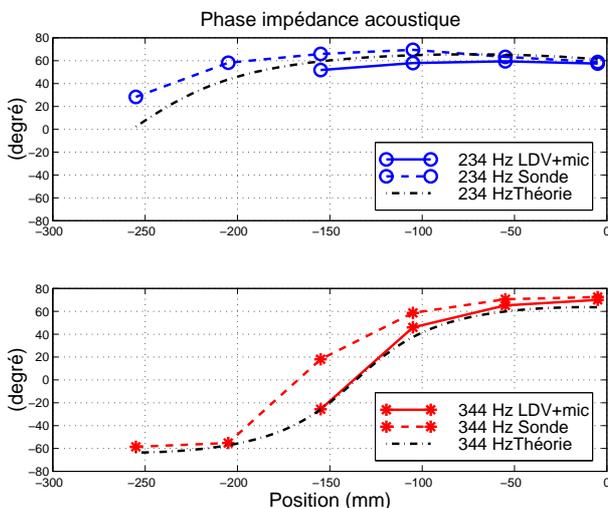
(a) Module d'impédance par vélocimétrie laser Doppler seule

(b) Phase d'impédance par vélocimétrie laser Doppler seule



(c) Intensité par vélocimétrie laser Doppler seule

(d) Module d'impédance par vélocimétrie laser Doppler et microphone



(e) Phase d'impédance par vélocimétrie laser Doppler et microphone

(f) Intensité par vélocimétrie laser Doppler et microphone

FIG. 4.3: Impédance (module et phase) et intensité acoustiques par vélocimétrie laser Doppler seule ((a), (b) et (c)) et par vélocimétrie laser Doppler et Microphone ((d), (e) et (f)). Comparaison avec sonde et théorie.

À l'issue de ces mesures, la méthode par vélocimétrie laser Doppler et microphone est retenue pour les mesures complémentaires suivantes.

4.2.2.2 Mesures 2D en écoulement plus rapide

Les mesures sont effectuées pour un écoulement de nombre de Mach 0.05 sans et avec grille de turbulence. Les fréquences de travail sont identiques à celles précédemment citées. Une fréquence supérieure à la fréquence de coupure du premier mode transverse est également testée (932 Hz). Les expériences sont réalisées avec le microphone mobile, dans les plans $x = -150 \text{ mm}$ et $x = -250 \text{ mm}$ (voir FIG. 3.10 page 102).

Les quantités suivantes sont mesurées avec la méthode par vélocimétrie laser Doppler et microphone :

- les composantes longitudinale et transversale (y) de la vitesse moyenne d'écoulement (FIG. 4.4 et FIG. 4.5) ;
- les champs 2D d'intensité active aux trois fréquences sans la grille (FIG. 4.6) et à 932 Hz avec la grille (FIG. 4.8) ;
- le coefficient de réflexion de la soufflerie à l'aval de la veine sans grille à 234 Hz (FIG. 4.7 et TAB. 4.2) ;
- la puissance acoustique dans les plans de mesure (TAB. 4.1)

Les mesures de pression acoustique sont aussi utilisées avec la méthode du tri d'onde.

L'écoulement peut être considéré comme étant uniforme (à 1 m.s^{-1} près) et dirigé suivant l'axe longitudinal (vitesse transversale négligeable par rapport à la vitesse longitudinale), avec une vitesse moyenne de 18.6 m.s^{-1} sans grille et 17.5 m.s^{-1} avec grille, ce qui correspond bien au nombre de Mach de 0.05. Ce résultat permet d'appliquer l'expression (1.24) de l'intensité.

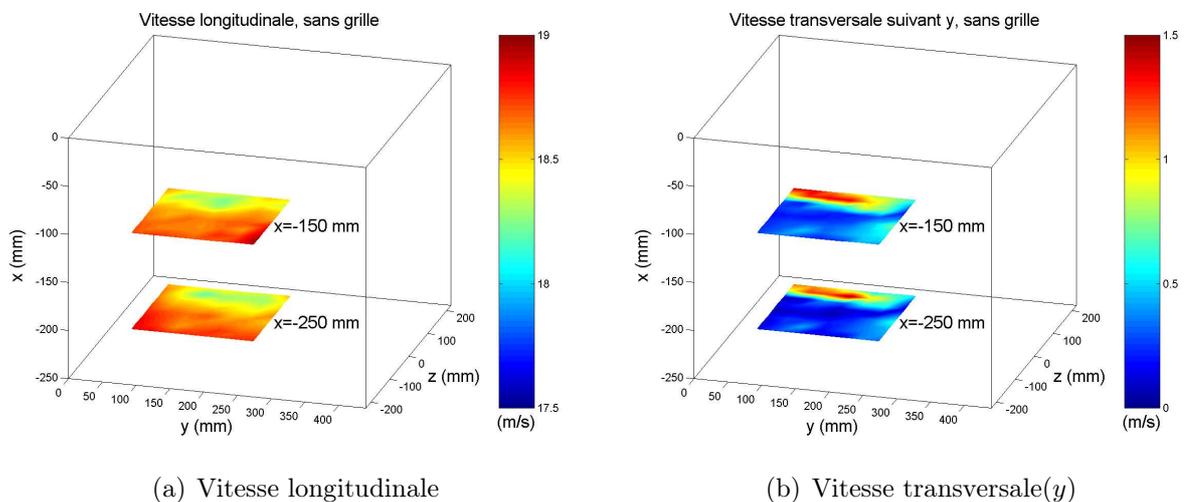


FIG. 4.4: Vitesse moyenne d'écoulement sans grille de turbulence (les plans verticaux représentent les limites physiques de la soufflerie).

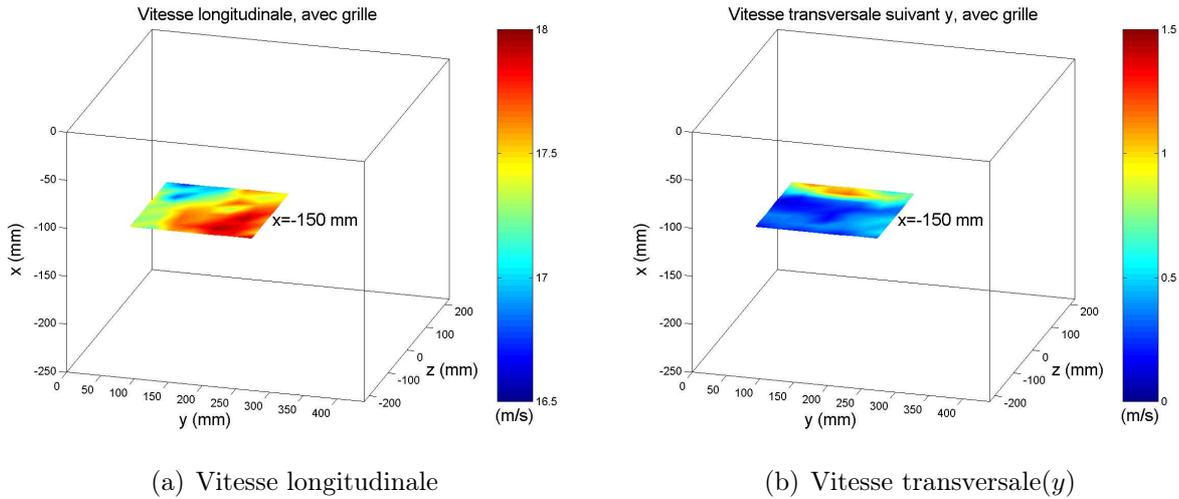


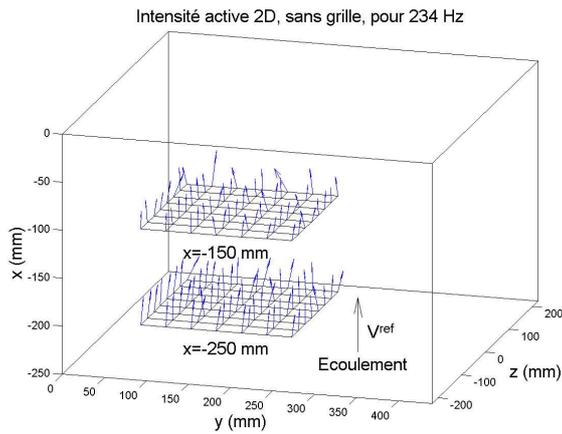
FIG. 4.5: Vitesse moyenne d'écoulement avec grille de turbulence (les plans verticaux représentent les limites physiques de la soufflerie).

Pour ce qui concerne les mesures sans grille, à 234 Hz , les champs d'intensité active sont en accord avec la théorie de propagation en ondes planes. À $x = -250 \text{ mm}$, l'amplitude moyennée spatialement vaut 99.4 dB (écart-type négligeable). À $x = -150 \text{ mm}$, l'amplitude moyennée est de 98.1 dB , avec un écart-type de $\pm 1 \text{ dB}$ dû à une moins bonne estimation de la phase de la vitesse acoustique. À 344 Hz , contrairement à ce qui a été supposé en FIG. 4.3 (f) (mesures sur l'axe longitudinal au centre de la veine), l'hypothèse d'onde plane n'apparaît pas justifiée compte tenu des variations spatiales de l'amplitude de l'intensité active. Ceci peut s'expliquer par le fait que la fréquence de coupure est proche. À 932 Hz , la propagation de l'énergie reflète la présence de modes transverses. Bien qu'il y ait peu de références dans la littérature portant sur de telles mesures, ce comportement est similaire à des résultats théoriques de propagation en conduite sans écoulement [18]. Bien que la surface des plans de mesure ne correspond qu'au quart de la surface totale, la puissance acoustique W , résultant de l'intégration de l'intensité active dans les deux plans de mesure, se conserve à 234 Hz . Aux autres fréquences, les bilans de puissance sont aussi vérifiés, bien que les ondes ne soient pas planes.

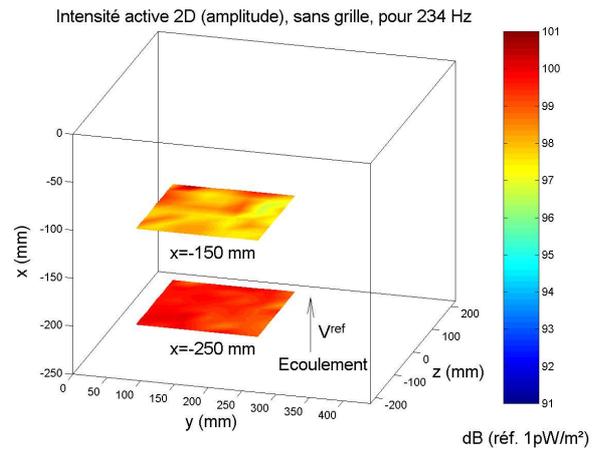
Le coefficient de réflexion peut être évalué à 234 Hz , sous caution de l'hypothèse d'ondes planes (FIG. 4.7 et TAB. 4.2). Les valeurs obtenues dans les deux plans sont proches. Sur les valeurs prises en moyenne spatiale, l'écart relatif est de 5.6% .

Les mesures de puissance acoustique et de coefficient de réflexion obtenues par tri d'onde à 234 Hz (TAB. 4.3) sont très proches, ce qui constitue une validation supplémentaire.

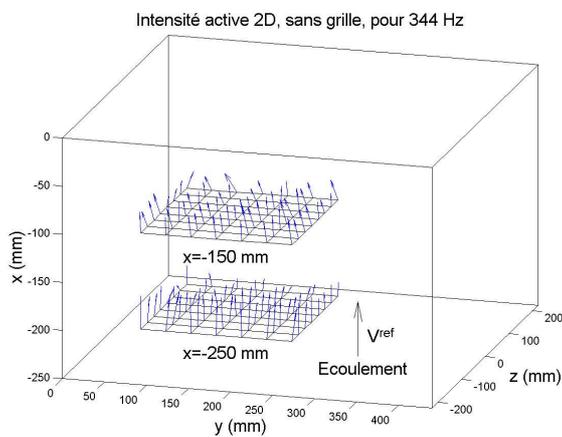
À 932 Hz et en présence de la grille de turbulence, la puissance acoustique obtenue à $x = -150 \text{ mm}$ est $W = 82.9 \text{ dB}$, valeur comparable au cas sans grille. Toutefois, le champ d'intensité active est modifié avec une composante transverse plus élevée (FIG. 4.8 (a)).



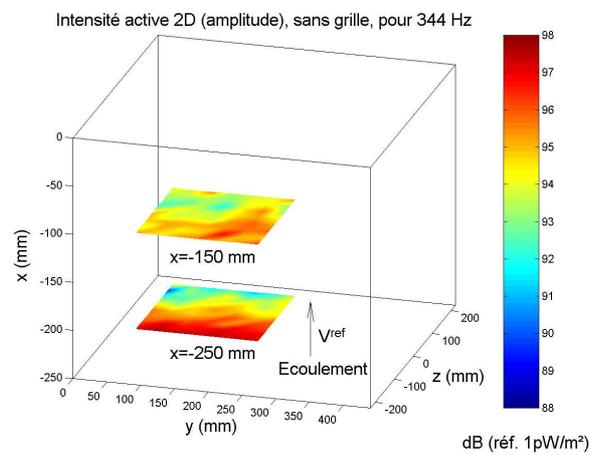
(a) Vecteur intensité active 2D à 234 Hz



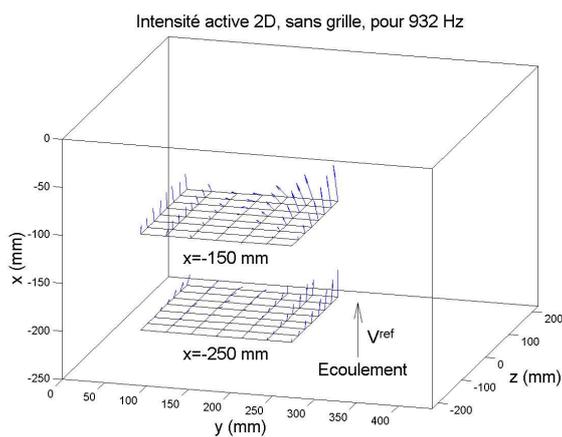
(b) Amplitude de l'intensité active 2D à 234 Hz



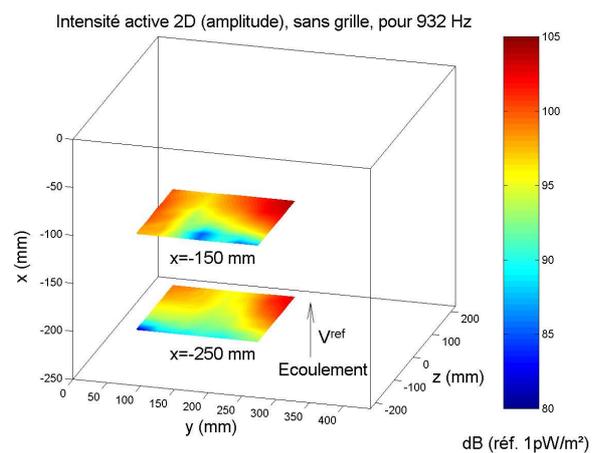
(c) Vecteur intensité active 2D à 344 Hz



(d) Amplitude de l'intensité active 2D à 344 Hz



(e) Vecteur intensité active 2D à 932 Hz



(f) Amplitude de l'intensité active 2D à 932 Hz

FIG. 4.6: Mesure de l'intensité active 2D par vélocimétrie laser Doppler et microphone sans grille de turbulence.

	W (dB, réf. 1 pW)		
	234 Hz	344 Hz	932 Hz
$x = -250$ mm	84.9	80.6	80.6
$x = -150$ mm	83.5	79.9	82.3

TAB. 4.1: Puissance acoustique dans chaque plan de mesure, sans grille de turbulence, par vélocimétrie laser Doppler et microphone.

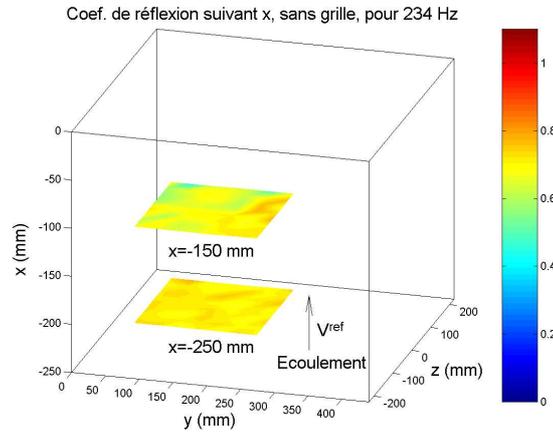


FIG. 4.7: Coefficient de réflexion de la soufflerie à l’aval de la veine, sans grille, à 234 Hz, par vélocimétrie laser Doppler et microphone.

	$\langle R \rangle$	std (en %)
$x = -250$ mm	0.71	3.3
$x = -150$ mm	0.67	8.9

TAB. 4.2: Moyenne spatiale du coefficient de réflexion de la soufflerie à l’aval de la veine, sans grille, à 234 Hz, par vélocimétrie laser Doppler et microphone.

W_S (dB, ref. 1 pW)	$\langle R \rangle$	std (en %)
83.6	0.62	4.9

TAB. 4.3: Puissance acoustique et moyenne spatiale du coefficient de réflexion, sans grille, à 234 Hz, par la méthode du tri d'onde.

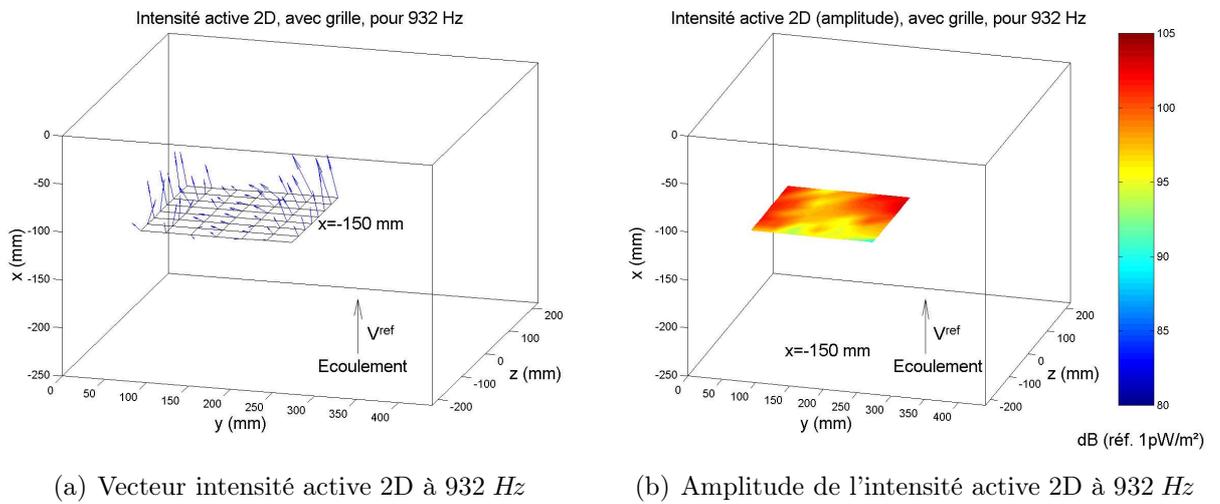


FIG. 4.8: Mesure de l'intensité active 2D par vélocimétrie laser Doppler et microphone avec grille de turbulence à 932 Hz.

4.3 Conclusion

Une approche n'utilisant que la vélocimétrie laser Doppler a été décrite. Sous l'hypothèse d'ondes planes se propageant au sein d'un écoulement lent et uniforme, la perturbation eulérienne de pression peut être calculée à l'aide des mesures de vitesse acoustique et d'un schéma aux différences finies d'ordre 1. Puis, une deuxième approche a été introduite. Elle repose sur l'utilisation conjointe du vélocimètre laser et d'un microphone, les deux chaînes de mesure étant calibrées en phase à l'aide d'une sonde à quatre microphones.

Ces deux approches ont été appliquées à une mesure unidimensionnelle d'impédance et d'intensité active avec un écoulement de référence peu rapide (nombre de Mach de 0.01) et pour deux fréquences en ondes planes (234 Hz et 344 Hz). Des comparaisons avec la sonde à quatre microphones et la théorie de propagation en ondes planes ont été effectuées. L'approche par vélocimétrie laser Doppler seule a fourni un module d'impédance satisfaisant par rapport à la théorie. Les erreurs de phase atteignant au maximum 25 degrés à 234 Hz et 10 degrés à 344 Hz, l'estimation de l'intensité a été pénalisée. Néanmoins, hormis en un point, l'erreur sur l'intensité a été inférieure à 3 dB. L'approche par vélocimétrie laser Doppler et microphone a amélioré l'estimation de la phase et de l'intensité (erreur en tout point inférieure à 2 dB). Elle s'est avérée aussi, voir plus, précise que la sonde.

Cette dernière approche a été testée dans le cadre d'une mesure en vélocimétrie laser Doppler 2D pour un écoulement plus rapide (nombre de Mach de 0.05) en ondes planes (234 Hz et 344 Hz) mais aussi avec des modes transverses (932 Hz). L'hypothèse d'écoulement uniforme a été vérifiée expérimentalement sur les champs de vitesse moyenne. Les champs d'intensité active ont confirmé une propagation en ondes planes à 234 Hz mais ont montré que cette hypothèse n'était pas justifiée à 344 Hz en raison de la proximité de la fréquence de coupure. Les champs d'intensité active à 932 Hz sont apparus cohérents avec la propagation guidée en présence de modes transverses. Les bilans de puissance ont été vérifiés quelques soient les fréquences. La validité de ces résultats a été confirmée par des mesures de coefficient de réflexion à l'aval de la veine à 234 Hz et une comparaison avec la méthode par tri d'onde.

Bien que l'approche par vélocimétrie laser Doppler et microphone ait été la plus probante, elle a présenté les inconvénients :

- de nécessiter une calibration en phase ;
- d'introduire un capteur dans l'écoulement, compromettant l'extension des mesures à un écoulement plus rapide.

De ce fait, une nouvelle approche par vélocimétrie laser Doppler seule va être présentée. Reposant sur la théorie de Galbrun, cette approche permettra de s'affranchir du problème théorique de la définition de l'intensité active utilisée en pratique jusqu'à présent.

Chapitre 5

Expériences dans le cadre de la description lagrangienne des perturbations acoustiques

De manière générale, le résultat d'une mesure est une description eulérienne de la grandeur physique observée. En effet, le capteur utilisé est placé à une position donnée durant la durée d'acquisition. Une mesure, par exemple, de la perturbation lagrangienne de pression semble impossible puisqu'il faudrait suivre une particule dans son mouvement.

Toutefois, nous allons voir qu'il est possible grâce à la vélocimétrie laser Doppler de remonter aux perturbations de déplacement en acoustique linéaire de Galbrun à partir des mesures de la perturbation eulérienne de vitesse et de la vitesse moyenne de l'écoulement (supposé stationnaire), puis de calculer la perturbation lagrangienne de pression. Cette approche va être expérimentée sur le banc aéro-thermo-acoustique. À l'aide des mesures de pression statique le long de la veine de mesure, nous pourrions ainsi revenir à la perturbation eulérienne de pression au sein de l'écoulement. Nous aurons alors toutes les variables nécessaires pour déterminer des grandeurs comme l'intensité ou l'impédance d'une paroi absorbante.

En premier lieu, les équations utilisées dans cette approche sont développées. Puis, les résultats d'une étude de faisabilité en vélocimétrie laser Doppler 2D sont montrés. Finalement, une caractérisation d'un matériau absorbant est présentée à l'aide de résultats en perturbations eulériennes de vitesse et de pression, d'impédance de paroi et de champs d'intensité active.

5.1 Obtention expérimentale du déplacement en acoustique linéaire de Galbrun

5.1.1 Équations générales

Sans ambiguïté, nous omettons l'indice $_{\text{ref}}$ sur les opérateurs de dérivation spatiale et sur les positions. Aussi, les coordonnées sont prises en repère cartésien, notées (x, y, z) .

La perturbation lagrangienne de vitesse est définie par (1.36). Or elle est liée à la perturbation eulérienne de vitesse \mathbf{V}' par (1.32). Ainsi, la perturbation de déplacement $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$ est liée à \mathbf{V}' par :

$$\frac{d_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} = \mathbf{V}' + \mathbf{grad}\mathbf{V}^{\text{ref}} \otimes \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \quad (5.1)$$

Soit encore :

$$\frac{\partial \tilde{\xi}_t}{\partial t} + \mathbf{grad} \tilde{\xi}_t \otimes \bar{\mathbf{V}}^{\text{ref}} - \mathbf{grad} \bar{\mathbf{V}}^{\text{ref}} \otimes \tilde{\xi}_t = \mathbf{V}' \quad (5.2)$$

En régime harmonique, nous posons $\tilde{\xi}_t = \text{Re}(\chi(x, y, z)e^{i\omega t})$ et $\mathbf{V}' = \text{Re}(\mathcal{V}'(x, y, z)e^{i\omega t})$. D'où :

$$\boxed{\mathbf{grad} \chi \otimes \bar{\mathbf{V}}^{\text{ref}} + (i\omega \mathbf{G} - \mathbf{grad} \bar{\mathbf{V}}^{\text{ref}}) \otimes \chi = \mathcal{V}'} \quad (5.3)$$

La vélocimétrie laser Doppler 3D permet de mesurer toutes les composantes des vecteurs $\bar{\mathbf{V}}^{\text{ref}}$ et \mathcal{V}' dans tout un domaine volumique de l'écoulement. La résolution de (5.3) pour chaque ω donne donc χ dans ce domaine. Une fois le déplacement connu, la perturbation lagrangienne de pression est obtenue par (1.38) page 25. La perturbation eulérienne de pression \mathcal{P}' est donc :

$$\boxed{\mathcal{P}' = -\rho^{\text{ref}} c^{\text{ref}2} \text{div} \chi - \mathbf{grad} p^{\text{ref}} \otimes \chi} \quad (5.4)$$

La connaissance de $\mathbf{grad} p^{\text{ref}}$ permet ainsi de déterminer \mathcal{P}' .

5.1.2 Équations avec un écoulement de référence quasi 1D

Nous allons maintenant particulariser ces équations au cas d'un écoulement de référence quasi 1D. Cette hypothèse donne :

$$\bar{\mathbf{V}}^{\text{ref}} = V_x^{\text{ref}}(y, z) \mathbf{e}_x \quad (5.5)$$

En pratique, cette hypothèse sera vérifiée si :

$$V_y^{\text{ref}}, V_z^{\text{ref}} \ll V_x^{\text{ref}} \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial V_x^{\text{ref}}}{\partial x} \ll \frac{\partial V_x^{\text{ref}}}{\partial y}, \frac{\partial V_x^{\text{ref}}}{\partial z} \quad (5.7)$$

(5.3) donne alors :

$$V_x^{\text{ref}} \frac{\partial \chi_x}{\partial x} + i\omega \chi_x = \mathcal{V}'_x + \frac{\partial V_x^{\text{ref}}}{\partial y} \chi_y + \frac{\partial V_x^{\text{ref}}}{\partial z} \chi_z \quad (5.8)$$

$$V_x^{\text{ref}} \frac{\partial \chi_y}{\partial x} + i\omega \chi_y = \mathcal{V}'_y \quad (5.9)$$

$$V_x^{\text{ref}} \frac{\partial \chi_z}{\partial x} + i\omega \chi_z = \mathcal{V}'_z \quad (5.10)$$

(5.9) et (5.10) sont découplées grâce à l'hypothèse d'écoulement de référence quasi 1D. Elles sont résolues séparément. Ensuite les composantes χ_y et χ_z sont introduites dans le second membre de (5.8) afin de trouver χ_x . Il est à noter que les composantes χ_y et χ_z sont portées par le rotationnel de l'écoulement de référence qui s'écrit ici :

$$\mathbf{rot} \bar{\mathbf{V}}^{\text{ref}} = \frac{\partial V_x^{\text{ref}}}{\partial z} \mathbf{e}_y - \frac{\partial V_x^{\text{ref}}}{\partial y} \mathbf{e}_z \quad (5.11)$$

Il peut exister des zones dans l'écoulement où le rotationnel est faible et donc que (5.8) est faiblement couplée aux deux autres équations.

En écoulement quasi 1D, la pression statique p^{ref} ne dépend que de x . Ainsi \mathcal{P}' devient :

$$\mathcal{P}' = -\rho^{\text{ref}} c^{\text{ref}2} \text{div} \chi - \frac{dp^{\text{ref}}}{dx} \chi_x \quad (5.12)$$

Afin d'étudier la faisabilité d'une telle mesure, nous allons appliquer (5.8), (5.9) et (5.10) avec des mesures dans le banc aéro-thermo-acoustique par vélocimétrie laser Doppler 2D de la perturbation eulérienne de vitesse et de la vitesse moyenne de l'écoulement. Des mesures pariétales de pression statique permettent d'appliquer ensuite (5.12). Les ondes sont harmoniques et planes.

5.2 Étude de faisabilité

La faisabilité d'une méthode par vélocimétrie laser Doppler utilisant la théorie de Galbrun va être montrée pour un écoulement de nombre de Mach 0.1 (défini avec la vitesse débitante) en configuration où la paroi inférieure est rigide. L'air est régulé en température de sorte qu'elle soit de $25 \pm 1^\circ \text{C}$ dans la veine de mesure¹. Le domaine de mesure est un volume de $150 \times 30 \times 35 \text{ mm}^3$ à 3 mm au dessus de la partie amovible de la paroi inférieure (voir FIG. 3.16 page 105). Il est maillé sur 250 points (10 en x , 5 en y et 5 en z) avec un raffinement en z près de la paroi. Pour chaque position, 300000 échantillons sont pris. Les composantes longitudinale (suivant x) et normale à la paroi (suivant z) sont acquises, de même que le signal d'excitation pour la technique de rejet de la turbulence et la référence de phase. Ce signal est un bruit large bande dans la gamme $1200 - 2000 \text{ Hz}$. Ces fréquences sont inférieures à la fréquence de coupure du premier mode transverse en conduite à parois rigides (voir annexe B page 161). Seul le mode plan se propage. L'hypothèse d'écoulement de référence quasi 1D étant vérifiée, le profil de vitesse moyenne utilisé dans la méthode vue en section 5.1 page 121 est la moyenne suivant x des profils mesurés (erreur inférieure à 1 m.s^{-1}). Il est représenté sur la FIG. 5.1.

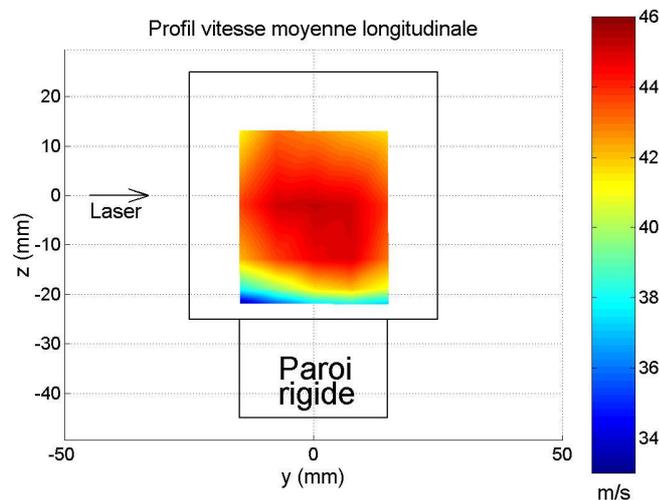


FIG. 5.1: Vitesse moyenne longitudinale mesurée par vélocimétrie laser Doppler (plan (y, z) pris en moyenne suivant x).

Les trois premiers plans en x ne sont pas considérés pour cause de mauvais ensemencement lors de la mesure. Après avoir constaté que la composante longitudinale de la perturbation eulérienne de vitesse est relativement constante dans les plans $x = \text{Cste}$, les résultats sont montrés en moyenne dans chaque plan (FIG. 5.2) afin d'améliorer la qualité de l'analyse

¹La température est contrôlée par les thermocouples amont et aval.

spectrale. Il est à noter que pour $x = 180\text{ mm}$, la cadence d'échantillonnage lors de la mesure par vélocimétrie laser Doppler ayant chuté, l'effet du filtrage de la reconstruction est visible (FIG. 5.2 (a) et (b)). La condition de paroi rigide, c'est-à-dire admittance nulle, est bien vérifiée expérimentalement car les valeurs de la composante normale à la paroi de la perturbation eulérienne de vitesse ne sont pas significatives (de l'ordre de $1\text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ sur FIG. 5.2 (a)) en comparaison de celles de la composante longitudinale.

Le coefficient de réflexion dû à la terminaison du banc étant petit dans cette gamme de fréquence (voir annexe B page 161), la valeur de la perturbation eulérienne de pression en amont du volume de mesure doit être proche de celle à l'intérieur du volume. Ceci se vérifie en comparant le résultat de la mesure par vélocimétrie laser Doppler à celui d'une sonde microphonique située en paroi amont. Sur FIG. 5.2 (c) et (d), nous constatons un bon accord entre les spectres, en particulier la coloration du bruit large bande. Le niveau semble plus élevé d'environ 1 à 2 dB pour la sonde microphonique, conséquence peut-être du léger filtrage de la reconstruction et de la différence de localisation des points de mesure (sonde en paroi / mesures laser 3 mm au dessus de la paroi).

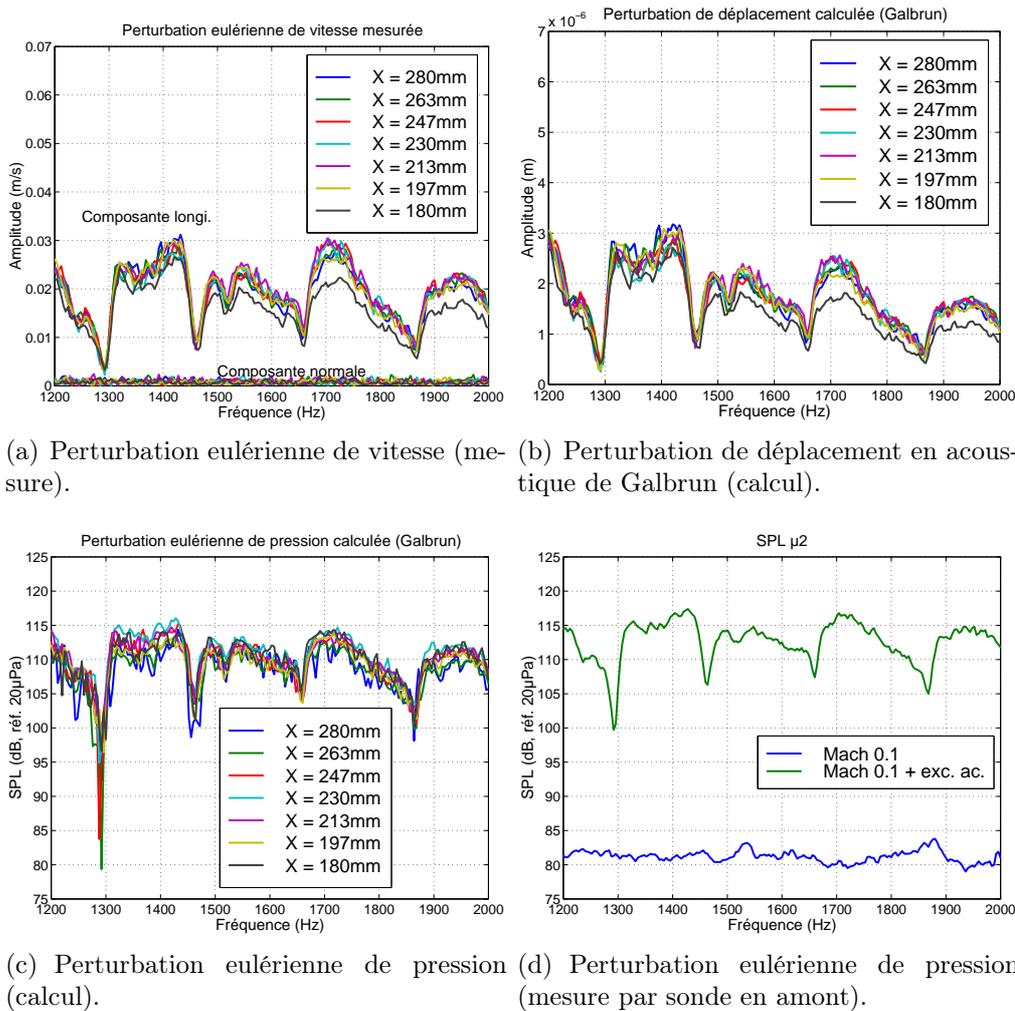


FIG. 5.2: Résultats de l'étude de faisabilité de la méthode par vélocimétrie laser Doppler basée sur l'acoustique de Galbrun : perturbation eulérienne de vitesse mesurée (a), perturbation de déplacement (b) et perturbation eulérienne de pression (c) calculées et perturbation eulérienne de pression mesurée par une sonde microphonique en amont (d).

5.3 Caractérisation d'un matériau absorbant

À l'issue des résultats encourageants obtenus lors de l'étude de faisabilité, un échantillon de matériau absorbant de type aéronautique ou *liner* (surface de $150 \times 30 \text{ mm}^2$ et 20 mm de profondeur, voir FIG. 5.3), supposé à réaction localisée, a été testé par vélocimétrie laser Doppler 2D pour un nombre de Mach basé sur la vitesse débitante de 0.1. La température est de $18 \pm 1^\circ \text{C}$ dans la veine de mesure. Le même maillage que précédemment est utilisé mais cette fois-ci, 100000 échantillons sont pris pour chaque position afin de baisser le temps de mesure et ainsi effectuer la mesure sans renouveler l'écoulement. Comme le signal d'excitation est harmonique, ce nombre de points est suffisant pour la reconstruction des signaux acquis (FIG. 3.5 page 97). Le signal d'excitation est envoyé à l'entrée des deux haut-parleurs du banc et est acquis de façon synchrone avec les deux composantes de vitesse pour les mêmes raisons que précédemment. La tension d'entrée des haut-parleurs est réglée de façon à obtenir un niveau total (toutes raies) de pression acoustique mesuré à la surface du matériau de 140 dB. Le matériau est absorbant sur une bande de fréquences étroite, valant environ 2000–2500 Hz. Les résultats sont montrés pour la fréquence f_{abs} d'absorption maximale.

Des mesures d'impédance par la méthode «*in situ*» (section 2.3.1 page 84), utilisant une sonde microphonique en face supérieure (μ_1) et une autre en fond (μ_2), ont été menées afin de constituer une base de données comparatives. Ces mesures sont effectuées pour trois positions de paire de sondes, amont, centre et aval (FIG. 5.3). Les phases des pressions acoustiques mesurées par μ_1 et μ_2 sont référencées par rapport au signal d'excitation.

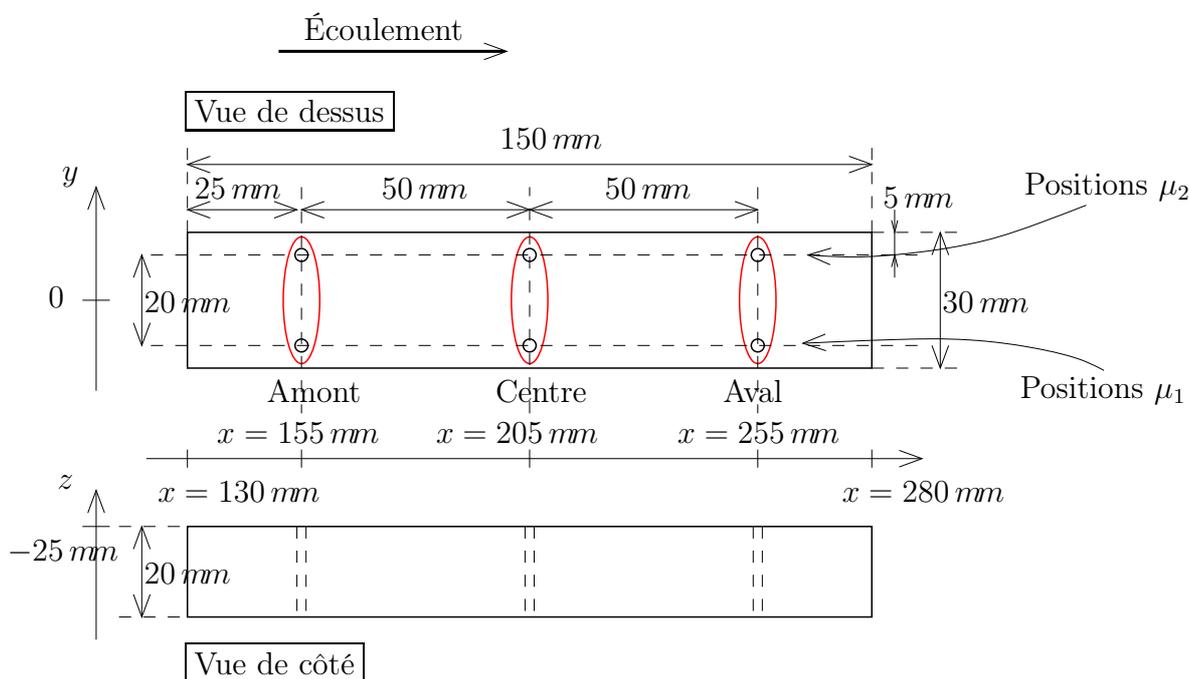


FIG. 5.3: Plan de l'échantillon avec les six passages de sonde microphonique.

5.3.1 Résultats par méthode «*in situ*»

La méthode «*in situ*» donnant l'impédance et la perturbation de pression à la surface du *liner* (vitesse moyenne d'écoulement voisine de 0), les valeurs des composantes normales de la perturbation de vitesse et de l'intensité aux différentes positions de la sonde microphonique μ_1 pour f_{abs} peuvent être établies par (1.53) et (1.56) page 28. Elles sont reportées dans les tableaux suivants :

	Vitesse normale ($m.s^{-1}$)	Pression μ_1 (dB , réf. $20 \mu Pa$)
Amont	0.158	127.5
Centre	0.169	128.5
Aval	-	127.2

TAB. 5.1: Résultats des mesures par la méthode «*in situ*» : vitesse normale et pression de la sonde microphonique μ_1 .

	Résistance ($\times z^{ref}$, $Rayl.$)	Réactance ($\times z^{ref}$, $Rayl.$)	Intensité normale (dB , réf. $1 pW.m^{-2}$)
Amont	0.4	-0.6	126.1
Centre	0.2	-0.7	124.0
Aval	-	-	-

TAB. 5.2: Résultats des mesures par la méthode «*in situ*» : résistance, réactance et intensité normale au *liner*.

La méthode «*in situ*» donnant une valeur irréaliste de l'impédance à l'aval, seule la mesure du niveau de pression est indiquée.

5.3.2 Perturbations eulériennes de vitesse et pression, impédance du *liner*

Le champ de vitesse d'écoulement de référence quasi 1D est montré sur FIG. 5.4. Comme sur FIG. 5.1, section 5.2 page 123, l'épaisseur de la couche limite dynamique diminue quand y augmente. Les profils des FIG. 5.1 et FIG. 5.4 étant très proches (écart au centre de l'ordre de $1 m.s^{-1}$), il est à noter que les conditions d'écoulement sont reproduites correctement sur ce banc d'une campagne de mesures à une autre. Les composantes longitudinale et normale au matériau de la perturbation sont représentées suivant différents plans sur les FIG. 5.5, FIG. 5.6, FIG. 5.7 et FIG. 5.8. Il est à noter que les valeurs pour $x = 130 mm$ ne sont pas utilisables à cause d'une chute de la cadence d'échantillonnage lors de la mesure par vélocimétrie laser Doppler.

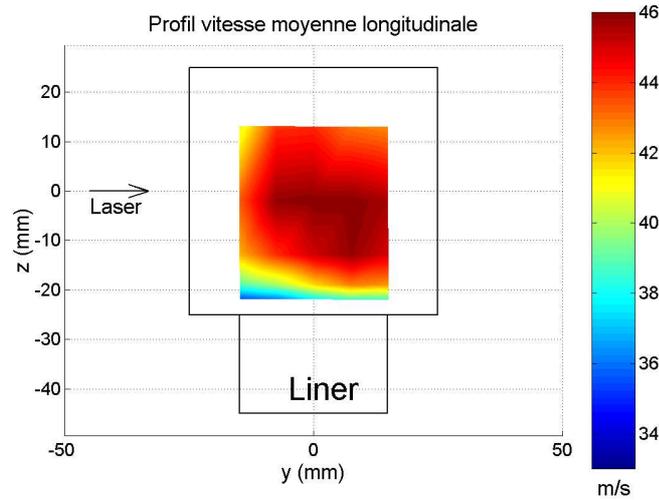


FIG. 5.4: Vitesse moyenne longitudinale mesurée par vélocimétrie laser Doppler (plan (y, z) pris en moyenne suivant x).

Les FIG. 5.5 (a) et (b) montrent qu'au-dessus du *liner*, les ondes sont planes et qu'elles se propagent suivant la direction de l'écoulement (vitesse normale quasi nulle). À proximité du *liner*, les fronts d'ondes se courbent pour s'orienter vers lui et en même temps, les valeurs des composantes de la perturbation de vitesse augmentent. La composante normale (FIG. 5.5 (d)) possède le même ordre de grandeur que celle obtenue par la méthode «*in situ*» (TAB. 5.1), avec une valeur autour de 0.12 m.s^{-1} pour $150 \leq x \leq 220 \text{ mm}$ (zone amont-centre). Sur les FIG. 5.5 (c) et (d), il est possible de voir que l'influence locale du *liner* est anisotrope, avec deux lignes privilégiées suivant x où les composantes de la perturbation de vitesse sont élevées. Ces lignes semblent correspondre à certaines structures matérielles du *liner*. Aussi, l'influence de la couche limite dynamique est peut être la cause de l'augmentation des valeurs des deux composantes quand y augmente. De tels résultats ne peuvent évidemment pas être obtenus par la méthode «*in situ*». La diminution de l'amplitude de la composante longitudinale suivant x (FIG. 5.6 (a), FIG. 5.7 (a) et FIG. 5.8 (a)) est cohérente avec une perte d'énergie due au *liner*.

La méthode basée sur la théorie de Galbrun vue en section 5.1.2 page 122 permet d'accéder au vecteur déplacement de la perturbation. Ainsi, il est possible de calculer la pression acoustique (FIG. 5.9 et FIG. 5.10) et l'impédance du *liner* (FIG. 5.11). Il faut tout d'abord noter que le domaine représenté est plus petit que précédemment. En effet, seules deux composantes du déplacement sont calculées (suivant x et z). Or, aux limites transversales du *liner* ($y = \pm 15 \text{ mm}$), les parois sont réfléchissantes. Au voisinage de ces positions, une troisième composante du déplacement (suivant y) existe et doit être connue pour calculer la pression acoustique. Toutefois, le déplacement est 2D au cœur du *liner*.

Sur les FIG. 5.9 (a)-(b) et FIG. 5.10 (a), la pression est maximale au-dessus du *liner*. Ce comportement est typiquement dû à la présence du *liner* [40] et s'observe aussi sans écoulement. Les valeurs sont dans une gamme de 128 à 132 dB (FIG. 5.10 (b)), ce qui est parfois un peu plus élevé mais comparable au niveau de pression obtenu par la méthode «*in situ*» (TAB. 5.1). FIG. 5.9 (a)-(b) montrent la présence de ventres et de nœuds de pression avec une différence de niveau de l'ordre de 2 à 3 dB au maximum au niveau du *liner*. À notre connaissance, il n'y a pas d'équivalent dans la littérature présentant ce phénomène car une analyse expérimentale aussi fine du comportement d'un *liner* en écoulement n'a jamais été

réalisée. Nous pouvons attribuer ce phénomène à la présence d'ondes stationnaires sur toute la longueur du *liner* liées à une légère rupture d'impédance à l'amont et à l'aval du *liner*. En effet :

- f_{abs} étant proche de 2500 Hz , la distance entre deux nœuds de pression ($\simeq 70\text{ mm}$) est à rapprocher de la demi-longueur d'onde apparente² (67 mm) ;
- la présence de l'écoulement élargit les zones nodales (voir FIG. 1.5 page 32) ;
- les perturbations eulériennes de vitesse longitudinale (FIG. 5.6 (a) et FIG. 5.7 (a)) et de pression sont en opposition de phase spatialement (voir FIG. 1.5 page 32) ;

Les FIG. 5.9 (a)-(b) et FIG. 5.10 (a) montrent que l'épaisseur de la zone de forte pression diminue quand y augmente. De nouveau, la cause est peut-être l'inhomogénéité de la couche limite dynamique.

Sur les FIG. 5.11 (a) et (b), les valeurs en $x = 155$ et 205 mm de la résistance (respectivement $\simeq 0.8$ et $\simeq 0.3$) et de la réactance (comprises entre -1 et -2 pour les deux valeurs de x) sont à peine plus élevées en valeurs absolues mais tout de même dans le même ordre de grandeur que celles obtenues par la mesure «*in situ*» (TAB. 5.2). Par contre cette dernière ne permet pas de voir les zones inhomogènes obtenues par la mesure par vélocimétrie laser Doppler, de même que la remontée de la résistance en aval avant de devenir négative. Cette zone de résistance négative traduirait le fait que l'énergie sortante du *liner* est plus forte que l'énergie rentrante. Il est à noter que la réactance est relativement constante au cœur du *liner* et qu'elle diminue brusquement dans la zone de résistance négative. Enfin, nous n'observons pas de corrélation directe entre les zones de nœuds de pression et l'inhomogénéité de la résistance.

²Nous tenons compte du nombre de Mach local de l'écoulement de référence.

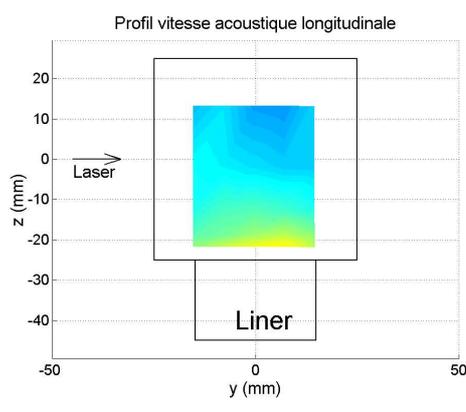
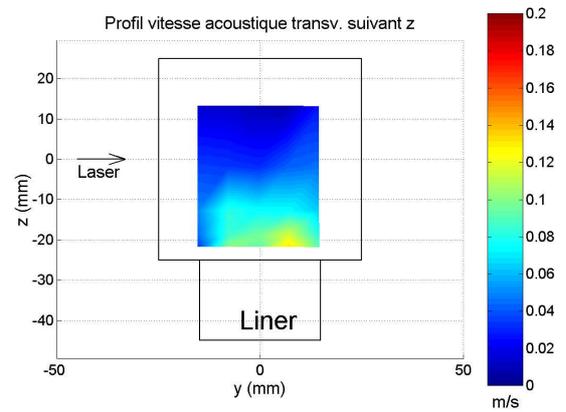
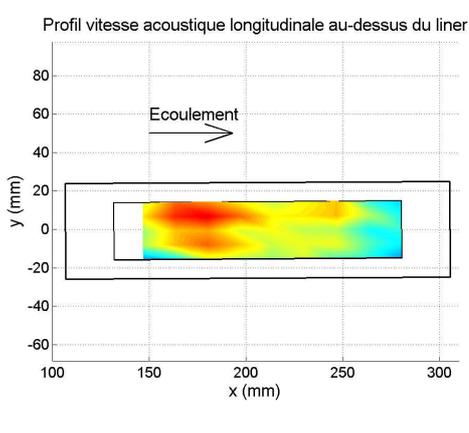
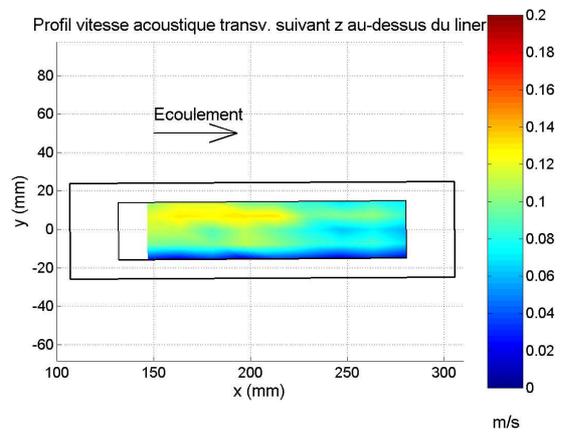
(a) composante longitudinale en $x = 205 \text{ mm}$ (b) composante normale en $x = 205 \text{ mm}$ (c) composante longitudinale au-dessus du *liner*(d) composante normale au-dessus du *liner*

FIG. 5.5: Composantes longitudinale et normale de la perturbation eulérienne de vitesse dans le plan $x = 205 \text{ mm}$ ((a) et (b)) et au-dessus *liner* ((c) et (d)).

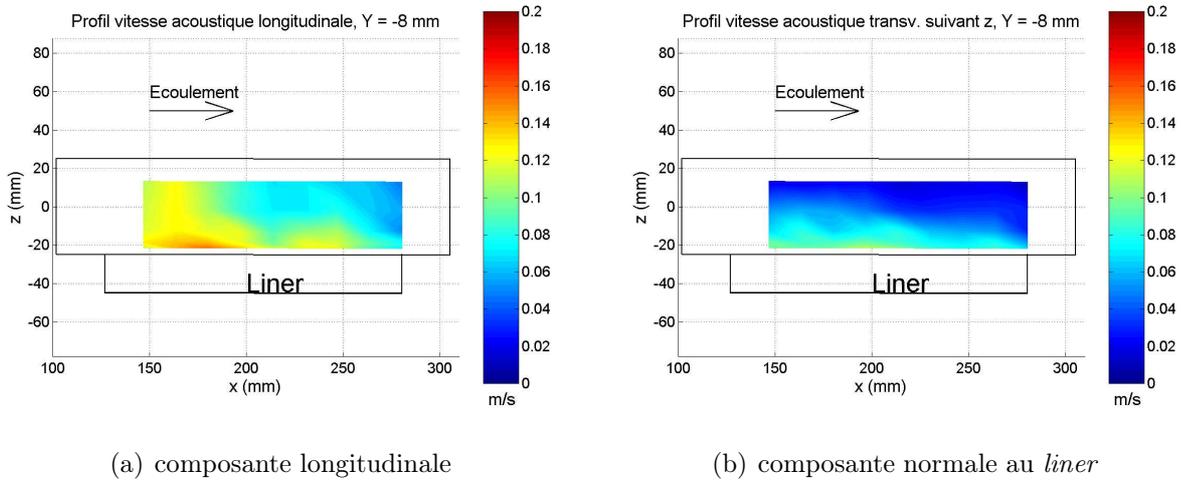


FIG. 5.6: Perturbations eulériennes de vitesse en $y = -8 \text{ mm}$, composantes longitudinale (a) et normale au *liner* (b).

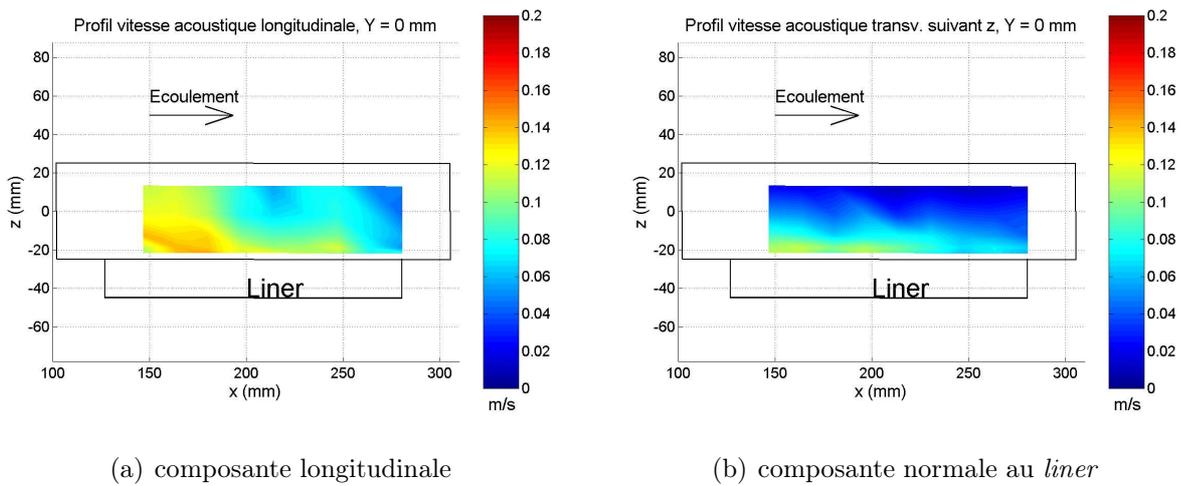


FIG. 5.7: Perturbations eulériennes de vitesse en $y = 0 \text{ mm}$, composantes longitudinale (a) et normale au *liner* (b).

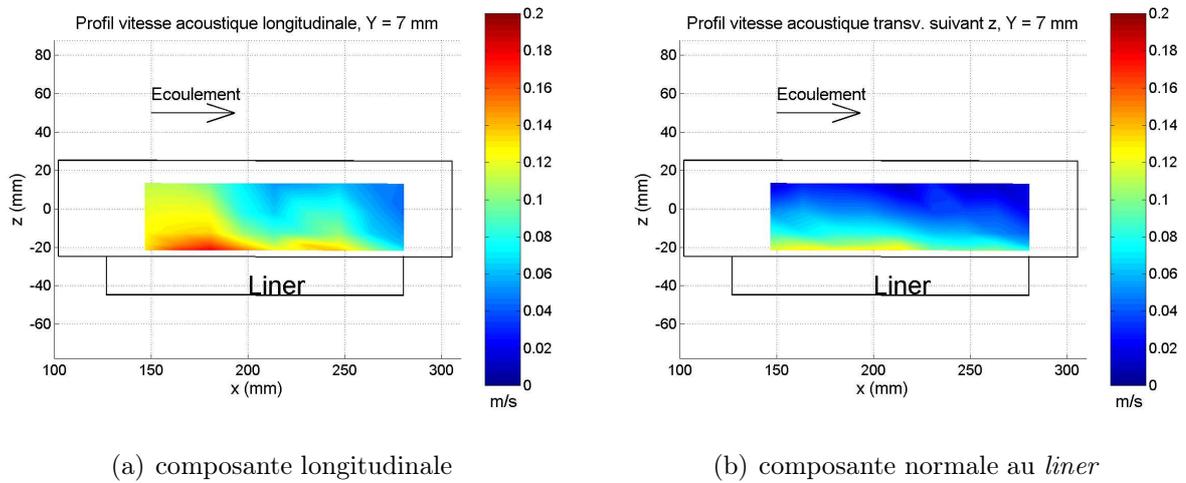


FIG. 5.8: Perturbations eulériennes de vitesse en $y = 7 \text{ mm}$, composantes longitudinale (a) et normale au *liner* (b).

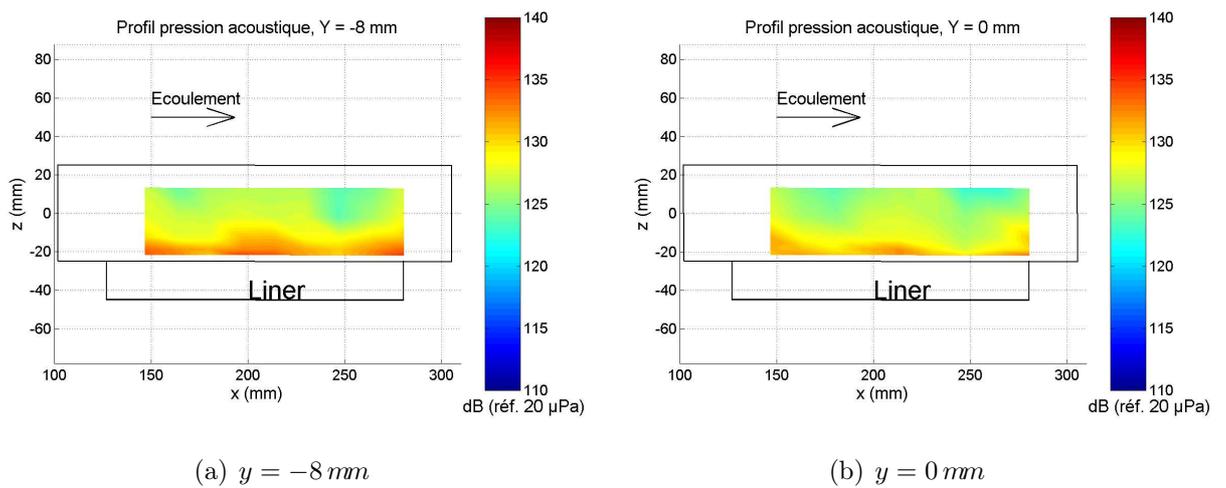


FIG. 5.9: Perturbations eulériennes de pression calculées par la méthode basée sur la théorie de Galbrun, en $y = -8 \text{ mm}$ (a) et $y = 0 \text{ mm}$ (b).

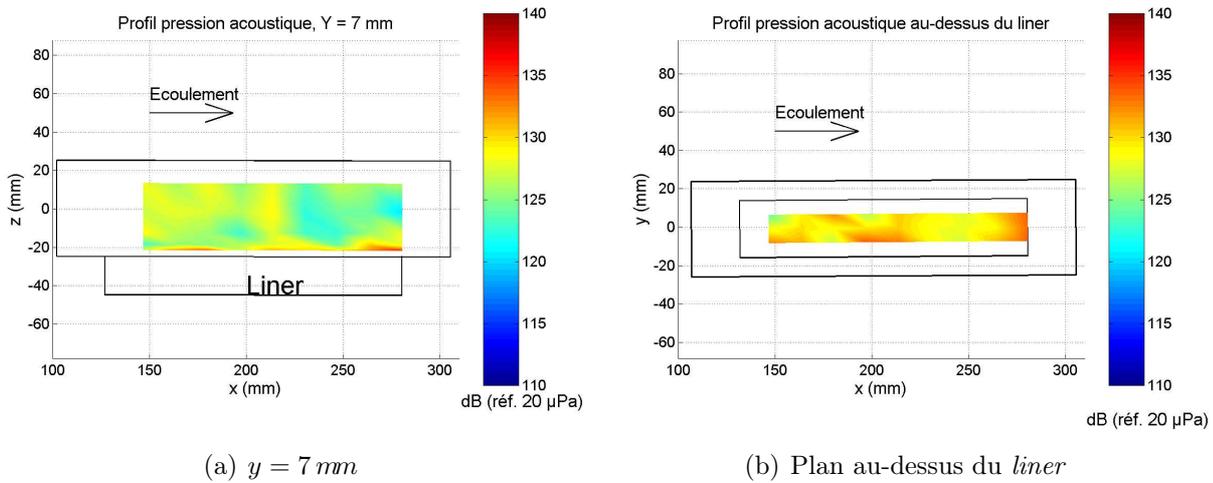


FIG. 5.10: Perturbations eulériennes de pression calculées par la méthode basée sur la théorie de Galbrun, en $y = 7 \text{ mm}$ (a) et au-dessus du *liner* (b).

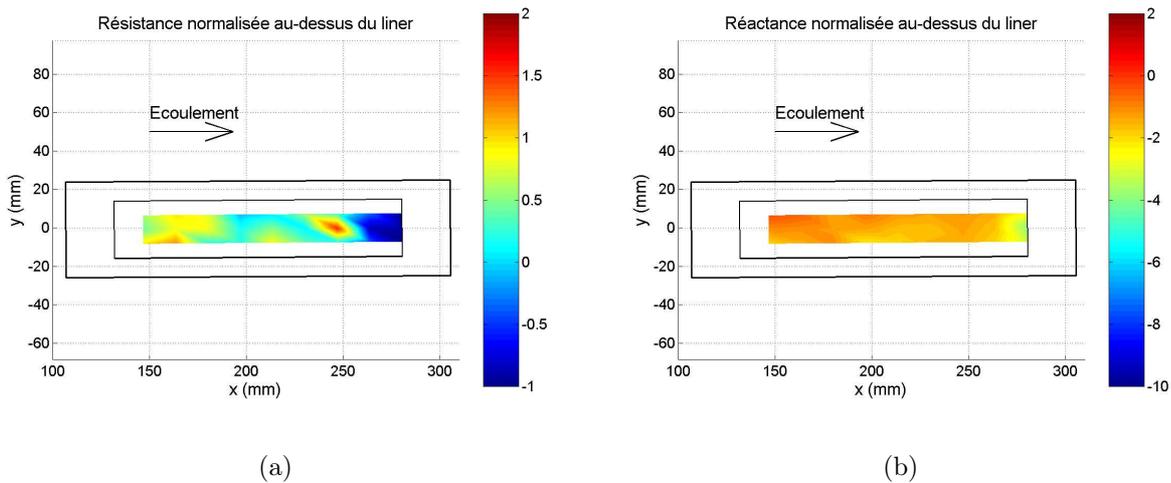


FIG. 5.11: Résistance (a) et réactance (b) normalisées par z^{ref} au-dessus du *liner*.

5.3.3 Champs d'intensité

Finalement, les champs du vecteur intensité sont présentés en $y = 0 \text{ mm}$. Les champs pour les autres y n'apportant rien de plus à l'analyse suivante, ils peuvent être vus en annexe C page 163. Nous avons appliqué ici la définition d'Élias (1.42) page 25 (FIG. 5.12), la définition de Poirée à l'ordre 2 (1.47) page 26 avec le terme en \tilde{p}_2 (FIG. 5.13) et sans ce terme (FIG. 5.15) et la définition courante (1.24) page 23 (FIG. 5.14). Avant de discuter du sens physique des champs mesurés, les résultats relatifs à chaque définition sont comparés :

- Les directions de propagation d'énergie obtenues sont très proches d'une définition à une autre.
- La norme du vecteur intensité est quasi identique avec les définitions d'Élias et de Poirée (écarts inférieurs à 0.5 dB), cette dernière prise avec le terme non linéaire \tilde{p}_2 . En effet, les ondes rétropropagées par la légère rupture d'impédance sont de faible amplitude et le nombre de Mach est petit (voir section 1.1.5.2 page 30 (1.72)).

- La norme du vecteur intensité avec la définition de Poirée sans le terme non linéaire \tilde{p}_2 est légèrement différente (1 à 2 dB). Ce terme est donc nécessaire pour retrouver les mêmes valeurs que l'intensité définie par Élias.
- Des différences apparaissent quant à la valeur de la norme du vecteur intensité au sens classique en se rapprochant du *liner* (de l'ordre de 1.2 dB), c'est-à-dire avec un rotationnel suivant y de la vitesse moyenne de l'écoulement devenant non nul. L'apparition de ce rotationnel est une limite à l'application de la définition classique (1.24).

Toutefois, la concordance qualitative des champs obtenus sur un cas d'écoulement à basse vitesse par l'acoustique de Galbrun et par la théorie classique est encourageante quant à la validité de l'approche basée sur une théorie n'ayant jamais été expérimentée.

D'un point de vue physique, les champs d'intensité montrent comment l'énergie des perturbations est absorbée. Bien au-dessus du *liner*, le vecteur intensité est aligné suivant x (ondes planes) et il diminue en norme pour x augmentant (perte d'énergie). À proximité du *liner*, une composante normale apparaît dans les zones où le *liner* absorbe l'énergie. Ces zones sont évidemment celles où la résistance est strictement positive. Dans la zone en aval où la résistance est négative, le vecteur intensité est sortant au *liner*. Ce phénomène pourrait être attribué au fait qu'une partie de l'énergie absorbée en amont ressortirait en aval, infirmant l'hypothèse de réaction localisée. La comparaison des composantes normales obtenues par la méthode «*in situ*» et par vélocimétrie laser Doppler (les intensités suivant les deux définitions en acoustique de Galbrun ayant des différences quasi nulles) est concluante (TAB. 5.3) :

		Intensité normale (dB, réf. 1 pW.m^{-2})	
		« <i>in situ</i> »	laser
Amont	126.1	124.5 à 127.6	
Centre	124.0	121.5 à 123.2	

TAB. 5.3: Comparaison des mesures par vélocimétrie laser Doppler et par la méthode «*in situ*» sur l'intensité normale au *liner*.

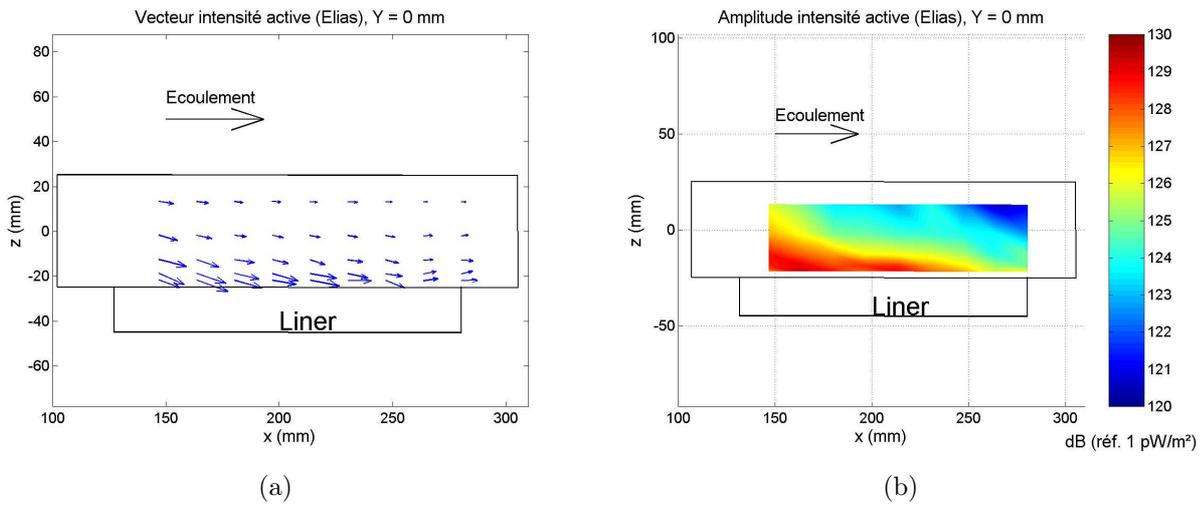


FIG. 5.12: Champ du vecteur intensité suivant la définition d'Élias en $y = 0$ mm.

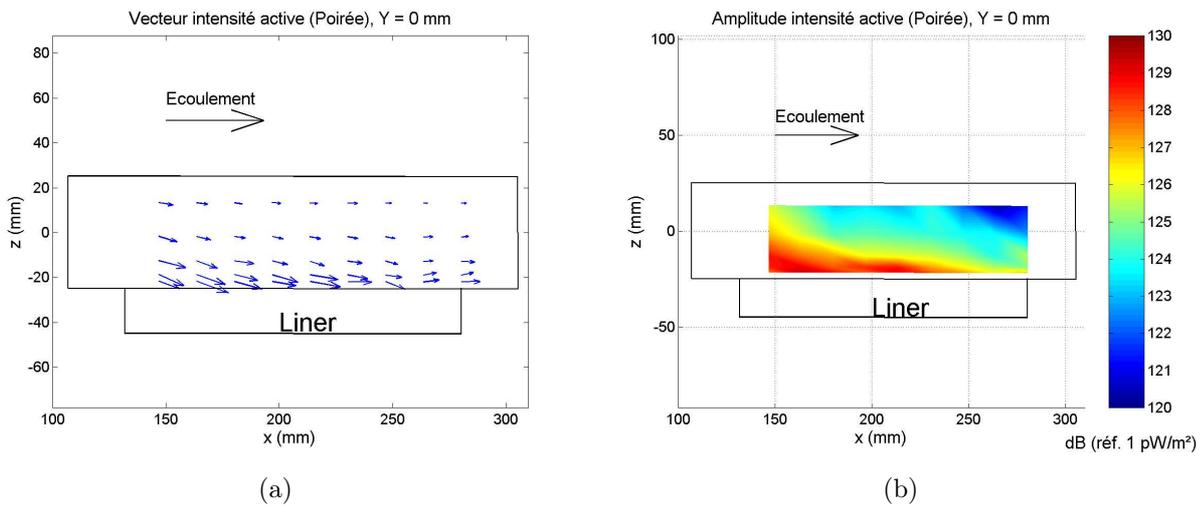


FIG. 5.13: Champ du vecteur intensité suivant la définition de Poirée en $y = 0$ mm.

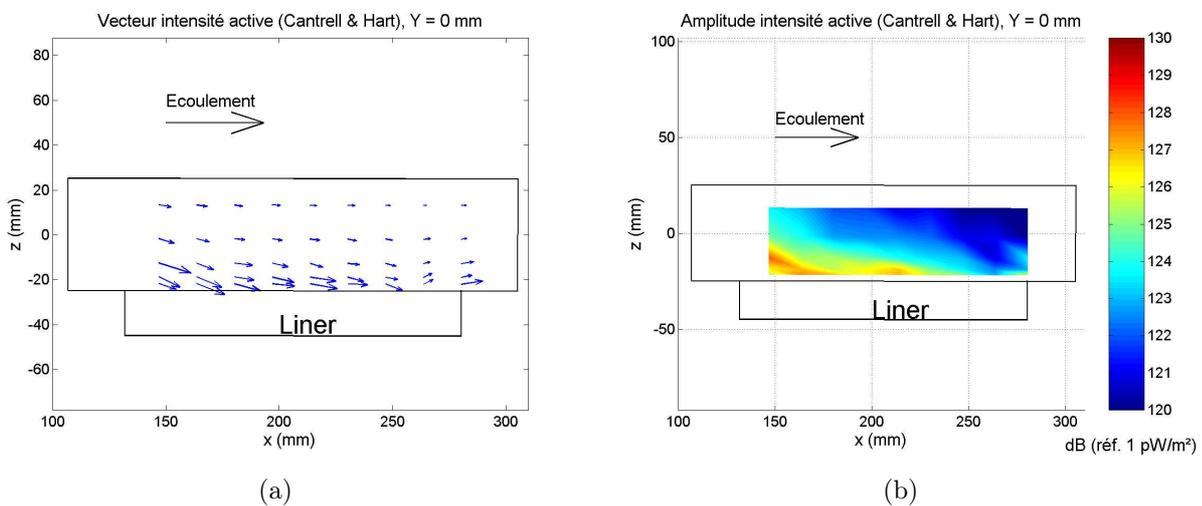


FIG. 5.14: Champ du vecteur intensité suivant la définition classique en $y = 0$ mm.

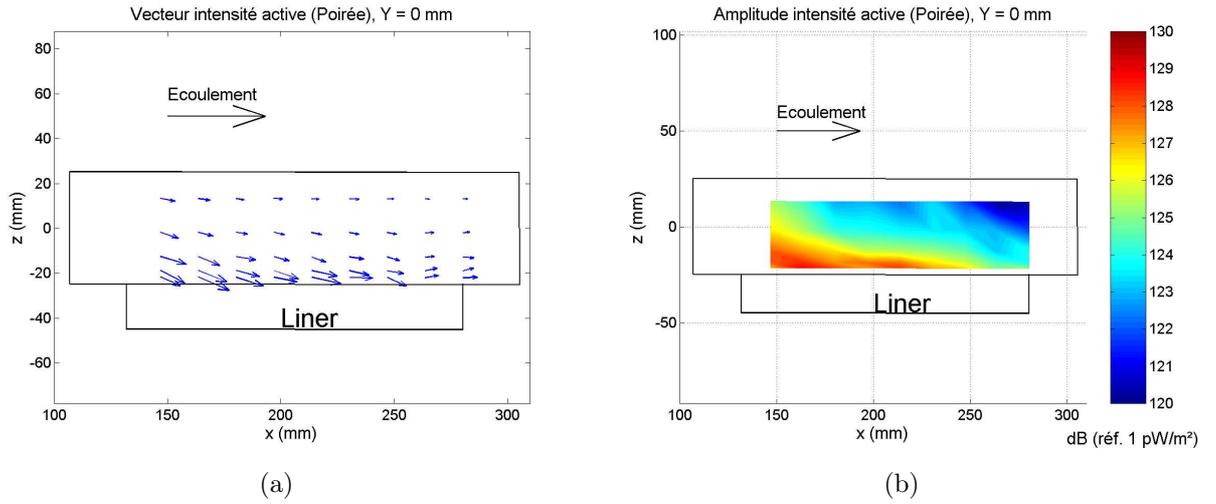


FIG. 5.15: Champ du vecteur intensité suivant la définition de Poirée sans le terme \tilde{p}_2 en $y = 0 \text{ mm}$.

5.3.4 Note sur la définition de l'impédance

L'étude d'Aurégan [2] vue en section 1.1.4 page 27 appelle à être prudent quant à la définition de l'impédance d'une paroi avec un écoulement présentant une couche limite. Pour nos mesures, la gamme de fréquences pour laquelle le *liner* est absorbant étant 2000–2500 Hz, l'épaisseur de la couche limite acoustique est de l'ordre de 40 μm . Elle est clairement plus petite que celle de la couche limite dynamique à la vue du profil porté sur la FIG. 5.4. Selon Aurégan, il y a continuité du déplacement et non de la perturbation de vitesse, cette dernière intervenant classiquement dans la définition de l'impédance. La zone de mesure étant 3 mm au-dessus du *liner*, ceci pourrait expliquer que la résistance et la réactance trouvées soient plus élevées en valeur absolue que celles trouvées par la méthode «*in situ*». De ce fait, nous prenons comme définition de l'impédance :

$$Z_{\mathbf{n}} = \frac{\mathcal{P}'}{i\omega\tilde{\chi}_{\mathbf{n}}} \quad (5.13)$$

Cette définition de l'impédance est basée sur la dérivée partielle par rapport au temps de la composante normale au *liner* $\tilde{\xi}_{\mathbf{n}}$ du déplacement, donnant en régime harmonique $i\omega\tilde{\chi}_{\mathbf{n}}$, et non pas sur la perturbation eulérienne de vitesse, liée à la dérivée convective du déplacement. Il est à noter qu'à la paroi, l'écoulement étant nul, (5.13) redonne (1.53) page 27. Nous obtenons alors un comportement spatial de la résistance et de la réactance identique à celui vu section 5.3.2 page 126 mais avec des valeurs plus petites en valeur absolue (FIG. 5.16). Ainsi, aux positions amont et centre des sondes microphoniques, la résistance normalisée est respectivement $\simeq 0.6$ et $\simeq 0.3$ et la réactance normalisée $\simeq -1$. Ces valeurs sont plus proches de celles obtenues par la méthode «*in situ*» (TAB. 5.2). (5.13) serait correcte dans ce cas. Toutefois, des mesures complémentaires avec différents écoulements et différents *liners* seraient à envisager avant de pouvoir généraliser ces conclusions, la méthode «*in situ*» étant à remettre en cause du fait des hypothèses restrictives qu'elle implique.

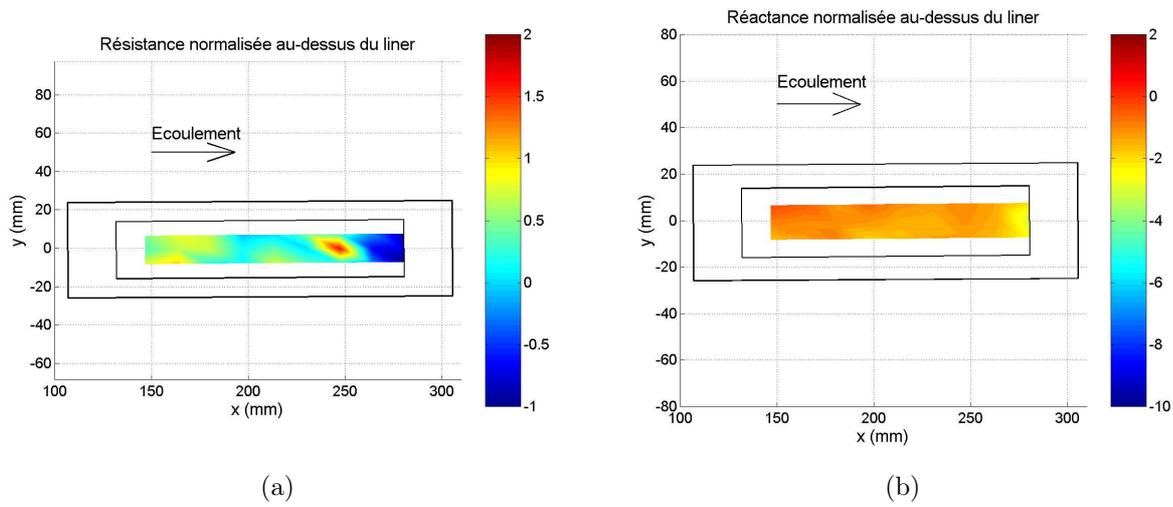


FIG. 5.16: Résistance (a) et réactance (b) normalisées par z^{ref} au-dessus du *liner* avec la définition (5.13) de l'impédance.

5.4 Conclusion

Une nouvelle approche basée sur l'acoustique linéaire de Galbrun a été présentée. Son principe repose sur l'intégration de la dérivée convective de la perturbation de déplacement. Elle nécessite de connaître la perturbation eulérienne de vitesse et la vitesse de l'écoulement, ce dernier supposé stationnaire, dans un domaine volumique. Ceci est assuré par la vélocimétrie laser Doppler. Appliquée au cas d'un écoulement quasi 1D en conduite, elle a été expérimentée dans la veine d'essai du banc aéro-thermo-acoustique. Ce banc est plus adapté à la métrologie aéroacoustique que la soufflerie à retour, notamment en raison de son faible coefficient de réflexion à l'aval.

Une étude de faisabilité a été menée avec un écoulement de nombre de Mach 0.1 (calculé par rapport à la vitesse débitante) et une propagation en ondes planes progressives sur une gamme de fréquences 1200 – 2000 Hz. La perturbation eulérienne de pression dans l'écoulement a ainsi été calculée le long de la veine d'essai et comparée à des mesures microphoniques en amont de la veine d'essai. Les résultats se sont avérés proches, justifiant l'hypothèse d'ondes progressives.

À l'issue de cette étude, une caractérisation d'un matériau absorbant, supposé à réaction localisée, a été conduite par cette approche laser et par la méthode «*in situ*». Des champs d'impédance mesurés par l'approche laser ont des valeurs du même ordre de grandeur, mais plus élevées, que celles trouvées localement par la méthode «*in situ*», tout en permettant une représentation fine des variations spatiales. Il a été constaté que la réactance est relativement constante au cœur du *liner* et diminue brusquement à l'aval dans une zone où la résistance apparaît négative. Ce phénomène pourrait traduire le fait que le matériau n'est pas à réaction localisée. Ceci a été corroboré par les champs d'intensité active montrant que l'énergie acoustique entrant à l'amont ressort en partie à l'aval.

Une formulation de l'impédance utilisant non pas la perturbation eulérienne de vitesse mais la dérivée partielle par rapport au temps de la composante normale au *liner* du déplacement a été testée. Elle a donné des résultats plus proches de ceux de la méthode «*in situ*».

Les différentes définitions de l'intensité vues en section 1.1.2 page 21 appliquées à ce cas ont aussi été comparées.

Conclusion générale et perspectives

Ce mémoire de thèse a traité de la métrologie aéroacoustique, tant d'un point de vue théorique qu'expérimental, complétée par des applications sur des bancs d'essai dédiés.

Dans un premier temps, l'aspect théorique de la propagation de petites perturbations en écoulement a été abordé via l'approche eulérienne classique et via l'approche lagrangienne telle qu'introduite par Galbrun. Contrairement à l'approche eulérienne d'une perturbation, cette approche lagrangienne permet de généraliser au cas d'un écoulement quelconque d'un fluide idéal l'équation de propagation de petites perturbations et le bilan d'énergie des perturbations. Le vecteur déplacement, dû à la perturbation, apparaît comme la seule inconnue d'une équation d'évolution - l'équation de Galbrun. Toutes les autres perturbations s'expriment en fonction de celui-ci.

Les deux expressions du bilan d'énergie (Élias et Poirée) ont été étudiées et comparées sur le cas théorique simple de la propagation guidée dans l'air avec un faible nombre de Mach et un coefficient de réflexion petit.

Afin de montrer la pertinence de l'idée de Galbrun, une approche non linéaire exacte des perturbations a été proposée, supposant qu'une grandeur physique est perturbée à particule fixée. L'originalité de l'approche est de repartir de la formulation intégrale des équations d'évolution des grandeurs physiques, définies ici pour un milieu continu quelconque, et de considérer la perturbation quelconque comme une transformation de milieu continu. Appliquée au principe de conservation de la masse, nous avons trouvé l'expression de la perturbation de la masse volumique. Particularisée au cas du fluide idéal, une équation d'évolution de la perturbation du déplacement a été mise en évidence ainsi que les expressions des autres perturbations. En faisant l'hypothèse de petites déformations et de petits déplacements sur la transformation perturbation, les formules de l'acoustique linéaire de Galbrun ont alors été retrouvées.

Des expressions non linéaires exactes de la densité et du flux surfacique d'énergie, dérivées du principe d'Hamilton, généralisent aussi celles trouvées par Élias.

Bien que non abordé ici, un autre intérêt de l'approche intégrale est aussi de pouvoir introduire dès le début du raisonnement des discontinuités du type ondes de choc ou interfaces entre plusieurs milieux continus différents, tout en gardant la non-linéarité (exemple d'application : tube à choc).

La mesure directe de la perturbation de déplacement n'ayant jamais été réalisée, une étude bibliographique portant sur un certain nombre de capteurs susceptibles d'accéder à cette quantité au travers de la perturbation de vitesse ou vitesse acoustique a été menée. En complément, nous nous sommes intéressés à la mesure de l'intensité acoustique et la caractérisation de matériaux absorbants en présence d'un écoulement quelconque. Dans ce type de conditions de mesure, il est nécessaire de rejeter les fluctuations turbulentes de vitesse afin d'extraire la vitesse acoustique.

La vélocimétrie laser Doppler est ressortie comme étant la plus prometteuse en écoulement quelconque tant par sa dynamique que par son caractère non intrusif et sa fine résolution spatiale. Toutefois, sa mise en œuvre est difficile car elle nécessite un traitement du signal particulier (échantillonnage aléatoire).

En vue d'appliquer la vélocimétrie laser Doppler et les approches eulérienne et lagrangienne des perturbations, différents dispositifs expérimentaux ont été mis en œuvre. Aussi, dans un premier temps, une description est faite de la chaîne de vélocimétrie laser Doppler utilisée (système industriel) et du traitement du signal spécifique à la mesure aéroacoustique. Dans un deuxième temps, sont présentés une soufflerie à retour classique à basse vitesse d'écoulement et un banc haute vitesse spécialement conçu dans le cadre de ce travail - le banc aéro-thermo-acoustique.

Des expériences sont présentées dans le cadre de la description eulérienne des perturbations acoustiques. Deux approches permettant d'accéder aux quantités acoustiques citées précédemment, l'une par vélocimétrie laser Doppler seule et l'autre par vélocimétrie laser Doppler et microphone, sont décrites et appliquées dans la soufflerie à retour avec un nombre de Mach de 0.01 en ondes planes. Une seule composante de vitesse a été mesurée dans les deux cas. À l'issue d'une première série d'essais à basse vitesse, bien que plus intéressante que la deuxième approche car non intrusive et ne nécessitant pas de calibration en phase des chaînes de mesure, la première approche n'a pas été retenue car moins précise. Une deuxième série d'essais a été menée pour un écoulement plus rapide, avec un nombre de Mach de 0.05. Une mesure par vélocimétrie laser Doppler 2D et microphone a permis de décrire finement la propagation des ondes acoustiques dans la veine d'essai au travers de champs d'intensité 2D. La validité de l'approche a été confirmée d'un point de vue quantitatif par des bilans de puissance.

Si cette technique est pertinente pour ces vitesses d'écoulement, l'utilisation d'un microphone pour des vitesses plus élevées est plus délicate. Le caractère non intrusif de la méthode à employer est primordial pour accéder aux quantités acoustiques au sein du fluide. Aussi une nouvelle approche par vélocimétrie laser Doppler seule, reposant cette fois-ci sur la théorie de Galbrun et permettant ainsi de s'affranchir du problème théorique de la définition de l'intensité active, a été développée et appliquée au cas d'un écoulement quasi 1D dans le banc aéro-thermo-acoustique. Des quantités telles que la perturbation de pression ou l'intensité ont été obtenues dans un large volume de la veine d'essai pour un écoulement de nombre de Mach de 0.1. Un champ surfacique d'impédance de paroi a permis pour la première fois de caractériser finement un matériau absorbant de type aéronautique. L'ensemble des quantités acoustiques obtenues grâce à la vélocimétrie laser Doppler a mis en évidence certains phénomènes physiques liés au matériau :

- présence d'ondes stationnaires dues à la rupture d'impédance ;
- déviation du vecteur intensité à proximité du matériau ;
- comportement du type réaction non localisée.

En continuité de ce travail, des essais à plus haute vitesse d'écoulement et/ou avec de l'air chauffé seraient à entreprendre avec le banc aéro-thermo-acoustique. Aussi, des expériences avec des niveaux acoustiques dans la veine d'essai plus élevés permettraient d'éprouver les formules non linéaires présentées. La caractérisation de matériaux absorbants utilisés en aéronautique serait ainsi faite dans des conditions proches des conditions de fonctionnement rencontrées en pratique, par exemple dans une entrée d'air ou une tuyère de moteur d'aéro-

nef. En outre, des matériaux non susceptibles d'être caractérisés par les méthodes classiques (matériau à réaction non localisée) le seraient à l'aide de la méthodologie développée et du banc réalisé. Au delà de ces applications industrielles, des expériences de référence pourraient être menées afin de valider des codes d'aéroacoustique numérique.

Il est à noter que le système de vélocimétrie laser Doppler utilisé est un système du commerce. Il serait intéressant de réfléchir quant à la faisabilité de certaines modifications de l'acquisition, notamment pour l'amélioration du seuil de détection en vitesse acoustique en séparant, par exemple l'acquisition de la vitesse moyenne de l'écoulement et l'acquisition des fluctuations de vitesse.

Bibliographie

- [1] ÅBOM, M., BODÉN, H. «Error analysis of two microphone measurements in ducts with flow». *Journal of the Acoustical Society of America*, **83**(6) : pp. 2429–2438 (1988).
- [2] AURÉGAN, Y., STAROBINSKI, R., PAGNEUX, V. «Influence of grazing flow and dissipation effects on the acoustic boundary conditions at a lined wall». *Journal of the Acoustical Society of America*, **109**(1) : pp. 59–64 (janvier 2001).
- [3] BAILLIET, H., LOTTON, P., BRUNEAU, M., GUSEV, V., VALIÈRE, J.-C., GAZENGEL, B. «Acoustic power flow measurement in a thermoacoustic resonator by means of laser Doppler anemometry (L.D.A.) and microphonic measurement». *Applied Acoustics*, **60** : pp. 1–11 (2000).
- [4] BATARD, H. «Aircraft noise reduction : AIRBUS industrial needs in terms of new materials for nacelle liners». Communication aux Journées Scientifiques de l'ONERA : Matériaux Absorbants pour applications aéronautiques—<http://www.onera.fr/congres/jso2003mat-bruit/index.html> (janvier 2003).
- [5] BODÉN, H., ÅBOM, M. «Influence of errors on the two microphones method for measuring acoustics properties in ducts». *Journal of the Acoustical Society of America*, **79**(2) : pp. 541–549 (1986).
- [6] BODÉN, H., ÅBOM, M. «Maximum sound power from in-duct sources with applications to fans». *Journal of Sound and Vibration*, **187**(3) : pp. 543–550 (1995).
- [7] BOUTIER, A., ROYER, H. «Visualisations et mesures optiques en aérodynamique». Techniques de l'ingénieur, traité Mesures et Contrôle.
- [8] BRAZIER, J.-P. «Propagation acoustique au sein d'un écoulement non uniforme». Rapport technique DERAT 109/5004.78, ONERA, 2 avenue Édouard Belin BP 4025 31055 Toulouse cedex 4 (septembre 1996).
- [9] BRAZIER, J. P. «Aspects théoriques de l'acoustique de Galbrun dans les écoulements non uniformes». Rapport technique RTS 3/6187 DSNA/Y/DMAE, RF 2/5300.05 DMAE, ONERA, 2 avenue Edouard Belin BP 4025 31055 Toulouse Cedex 4 (novembre 1998).
- [10] CANTRELL, R.-H., HART, R.-W. «Interaction between sound and flow in acoustic cavities : mass, momentum and energy considerations». *Journal of the Acoustical Society of America*, **36** (1964).
- [11] CHUNG, J. Y. «Rejection of flow noise using a coherence function method». *Journal of the Acoustical Society of America*, **62**(2) : pp. 388–395 (août 1977).
- [12] COMPARIN, R. J., RAPP, J. R., SINGH, R. «Measurement of acoustic intensity in the presence of one-dimensional fluid flow». *Journal of the Acoustical Society of America*, **72**(1) : pp. 7–12 (juillet 1982).
- [13] CULLEN, J. S., HANN, D. B., GREATER, C. A., CAMPBELL, D. M. «Methods of Processing Laser Doppler Anemometry Signals to Extract Sound Field Information». *16th International Congress on Acoustics and 135th Meeting of the ASA* (1998).

- [14] DANTEC DYNAMICS. «Measurement Principles of CTA». <http://www.dantecdynamics.com/cta/Princip/Index.html>.
- [15] DE BREE, H.-E., LEUSSINK, P., KORTHORST, T., JANSEN, H., LAMMERINK, T. S. J., ELWENSPOEK, M. «The μ -flown : a novel device for measuring acoustic flows». *Sensors and Actuators A*, **54** : pp. 552–557 (1996).
- [16] DEAN, P. «An in-situ method of wall acoustic impedance measurement in flow ducts». *Journal of Sound and Vibration*, **34**(1) : pp. 97–130 (1974).
- [17] ELIAS, G. «Nouvelles Expressions pour l'Energie et l'Intensité Acoustique dans un Ecoulement Non Uniforme». Rapport technique RT 22/3641 PY, ONERA (1996).
- [18] FAHY, F. J. *Sound Intensity*. Elsevier Applied Science (1989).
- [19] GADE, S. «Sound Intensity (Instrumentation & Application)». *Technical Review*, 4, pp. 3–32. Brüel & Kjær (1982).
- [20] GADE, S. «Sound Intensity (Theory)». *Technical Review*, 3. Brüel & Kjær (1982).
- [21] GALLMAN, J. M., KUNZE, R. K. «Grazing Flow Acoustic Impedance Testing for the NASA AST Program». *8th Aeroacoustics Conference and Exhibit*, AIAA 2002–2447. AIAA/CEAS, Breckenridge, CO, USA (juin 2002).
- [22] GARRIGUES, J. «Éléments d'algèbre et d'analyse tensorielle à l'usage des mécaniciens». <Http://esm2.imt-mrs.fr/gar/tenseurs.html>.
- [23] GARRIGUES, J. «Mécaniques des milieux continus». <Http://esm2.imt-mrs.fr/gar/mmc.html>.
- [24] GAZENGEL, B., ROUQUIER, P. «Mesures de vitesses acoustiques par ALD en présence d'écoulement faible : développements récents». Communication aux Journées Mesures de vitesse particulaire acoustique par laser, Angers (octobre 2003).
- [25] GELY, D., ELIAS, G., LUPOGLAZOFF, N., VUILLOT, F., MICHELI, F. «Aeroacoustic Characterization and Numerical Simulation of a Helmholtz Resonator». *33rd Thermophysics Conference*, AIAA 99–1941, pp. 929–936. AIAA, Norfolk, VA, USA (juin 1999).
- [26] GODIN, O. A. «Reciprocity and energy theorems for waves in a compressible inhomogeneous moving fluid». *Wave Motion*, **25** : pp. 143–167 (1997).
- [27] GOLDSTEIN, M. E. *Aeroacoustics*. McGraw Hill (1976).
- [28] HANN, D., GREATED, C. «The measurement of sound fields using Laser Doppler anemometry». *Acustica-acta acustica*, **85** : pp. 401–411 (1999).
- [29] HOLLAND, K. R., DAVIES, P. O. A. L. «The measurement of sound power flux in flow ducts». *Journal of Sound and Vibration*, **230**(4) : pp. 915–932 (2000).
- [30] HUELSZ, G., LÓPEZ-ALQUICIRA, F. «Hot-wire anemometry in acoustic waves». *Experiments in Fluids*, **30** : pp. 283–285. Springer-Verlag (2001).
- [31] JACOBSEN, F. «Measurement of Sound Intensity in the Presence of Air Flow». *2nd International Congress on Acoustic Intensity*, pp. 193–200. CETIM, Senlis, France (septembre 1985).
- [32] JONES, M. G., PARROTT, T. L., WATSON, W. R. «Comparison of Acoustic Impedance Eduction Techniques for Locally-Reacting Liners». *9th Aeroacoustics Conference and Exhibit*, AIAA 2003-3306. AIAA/CEAS, Hilton Head, SC, USA (mai 2003).
- [33] JONES, M. G., WATSON, W. R., TRACY, M. B., PARROTT, T. L. «Comparison of Two Acoustic Waveguide Methods for Determining Liner Impedance». *7th Aeroacoustics Conference and Exhibit*, AIAA 2001–2266. AIAA/CEAS, Maastricht, Pays-Bas (mai 2001).

- [34] JULLIARD, J. «Problématique des matériaux absorbants sonores pour applications sur turboréacteur». Communication aux Journées Scientifiques de l'ONERA : Matériaux Absorbants pour applications aéronautiques—<http://www.onera.fr/congres/jso2003mat-bruit/index.html> (janvier 2003).
- [35] KELLY, J. J. «A generalized approach to acoustic intensity». *Journal of the Acoustical Society of America*, **83**(6) : pp. 2069–2073 (juin 1988).
- [36] KIRBY, R., CUMMINGS, A. «The impedance of perforated plates subjected to grazing gas flow and backed by porous media». *Journal of Sound and Vibration*, **217**(4) : pp. 619–636 (1998).
- [37] LARTIGUES, S. «Mesure de l'intensité acoustique en présence d'un écoulement turbulent». Rapport DEA, Université Paul Sabatier, Toulouse (juin 2000).
- [38] LAZREQ, Z., VILLE, J.-M. «Acoustic calibration of a pressure-velocity probe». *Journal of the Acoustical Society of America*, **100**(1) : pp. 364–371 (juillet 1996).
- [39] LEDUFF, A. *Contribution à l'estimation paramétrique de signaux à variation sinusoïdale de la fréquence instantanée et à amplitude variable : application à l'anémométrie laser Doppler pour l'acoustique*. Thèse de doctorat, Université du Maine, Le Mans, France (mai 2003).
- [40] LEROUX, M., JOB, S., AURÉGAN, Y., PAGNEUX, V. «Acoustical propagation in 2D lined duct with flow : numerical simulations and measurements». Troisièmes journées sur l'acoustique de Galbrun, Université de La Rochelle (octobre 2003).
- [41] LEWY, S. *Acoustique industrielle et aéroacoustique*. Collection d'acoustique de la Société Française d'Acoustique (2001).
- [42] MAIMARAN, D. «Contribution à la mesure de vitesses acoustiques en présence d'écoulement par Anémométrie Laser Doppler». Travail de fin d'études, École Centrale de Lyon (août 2000).
- [43] MALMARY, C. *Étude théorique et expérimentale de l'impédance acoustique de matériaux en présence d'un écoulement d'air tangentiel*. Thèse de doctorat, Université du Maine, Le Mans, France (2000).
- [44] MALMARY, C., CARBONNE, S., AUREGAN, Y., PAGNEUX, V. «Acoustic Impedance Measurement with Grazing Flow». *7th Aeroacoustics Conference and Exhibit*, AIAA 2001–2193. AIAA/CEAS, Maastricht, Pays-Bas (mai 2001).
- [45] MICHARD, M., BLANC-BENON, P., GROSJEAN, N., NICOT, C. «Apport de la VIP pour la caractérisation du champ de vitesse acoustique dans une maquette de réfrigérateur thermoacoustique». Communication aux Journées Mesures de vitesse particulaire acoustique par laser, Angers (octobre 2003).
- [46] MICROFLOWN TECHNOLOGIES B. V. <http://www.microflown.com>.
- [47] MINOTTI, A. «Contribution à la mesure acoustique en écoulement à l'aide de l'Anémométrie Laser Doppler». Travail de fin d'études et DEA (août 2001).
- [48] MINOTTI, A., SIMON, F., PIET, J.-F., MILLAN, P. «Signal Processing for In-flow Measurement of Acoustic Velocity by LDV». *8th Aeroacoustics Conference and Exhibit*, AIAA 2002–2463. AIAA/CEAS, Breckenridge, CO, USA (juin 2002).
- [49] MINOTTI, A., SIMON, F., PIET, J.-F., MILLAN, P. «In-Flow Acoustic Power and Intensity Fields Measurements with a 2D LDV System». *9th Aeroacoustics Conference and Exhibit*, AIAA 2003–3262. AIAA/CEAS, Hilton Head, SC, USA (mai 2003).

- [50] MORFEY, C. L. «Acoustic energy in non-uniform flows». *Journal of Sound and Vibration*, **14**(2) : pp. 159–170 (1971).
- [51] MORSE, P. M., FESCHBACH, H. *Methods of Theoretical Physics*, chap. 3, pp. 280–283. McGraw-Hill (1953).
- [52] MOULIS, F., SIMON, F. «Intensimétrie acoustique en présence d'un écoulement». Projet de fin d'études, École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Constructions Aéronautiques (ENSICA) (1989).
- [53] MUNRO, D. H., INGARD, K. U. «On acoustic intensity measurements in the presence of mean flow». *Journal of the Acoustical Society of America*, **65**(6) : pp. 1402–1406 (juin 1979).
- [54] MYERS, M. K. «Generalization and Extension of the Law of Acoustic Energy Conservation in a Nonuniform Flow». *24th Aerospace Sciences Meeting*. AIAA (janvier 1986).
- [55] MYERS, M. K. «Transport of energy by disturbances in arbitrary steady flows». *J. Fluid Mech.*, **16** : pp. 383–400 (1991).
- [56] NEISE, W., ARNOLD, F. «On sound power determination in flow ducts». *Journal of Sound and Vibration*, **244**(3) : pp. 481–503 (2001).
- [57] NOBACH, H. «Local time estimation for the slotted correlation function of randomly sampled LDA data». *Experiments in Fluids*, **32** : pp. 337–345. Springer-Verlag (2002).
- [58] NOBACH, H., MÜLLER, E., TROPEA, C. «Efficient estimation of power spectral density from laser Doppler anemometer data». *Experiments in Fluids*, **24** : pp. 199–509 (1998).
- [59] PEYRET, C., ELIAS, G. «Finite-element method to study harmonic aeroacoustics problems». *Journal of the Acoustical Society of America*, **110**(2) : pp. 661–668 (août 2001).
- [60] PIET, J.-F., SIMON, F. «Acoustic Velocity In-flow Measurements Using LDV». *7th Aeroacoustics Conference and Exhibit*, AIAA 2001–2191. AIAA/CEAS, Maastricht, Pays-Bas (mai 2001).
- [61] PIET, J.-F., SIMON, F. «Mesure de vitesse acoustique en écoulement par Vélocimétrie Laser Doppler». Rapport technique RF 1/03489 DMAE, ONERA, 2 avenue Édouard Belin BP 4025 31055 Toulouse cedex 4 (février 2001).
- [62] PIET, J.-F., SIMON, F., LARTIGUES, S. «Métrologie acoustique en écoulement». Rapport technique RT 5630.09 DMAE, ONERA, 2 avenue Édouard Belin BP 4025 31055 Toulouse cedex 4 (février 2000).
- [63] POGGI, S. *Contribution au développement d'un banc de mesure de la vitesse particulière acoustique par Vélocimétrie Laser Doppler (VLD) : Évaluation des résultats et applications*. Thèse de doctorat, Université du Maine, Le Mans, France (2000).
- [64] POGGI, S., GAZENGEL, B., VALIÈRE, J.-C., BRUNEAU, A.-M. «Laser Doppler Velocimetry applied to airborne acoustics : Influence of the signal processing parameters». *Forum Acousticum*. Berlin, Allemagne (1999).
- [65] POIRÉE, B. «Les équations de l'acoustique linéaire et non linéaire dans un écoulement de fluide parfait». *Acustica*, **57** : pp. 5–25 (1985).
- [66] POIRÉE, B. «L'équation de l'énergie acoustique dans un écoulement unidimensionnel. Comparaison avec les résultats connus.» *Revue d'acoustique*, **67** : pp. 234–239 (1983).
- [67] RAMOND, A. *Étude expérimentale de la turbulence : développement d'une méthodologie de traitement des mesures issues d'un anémomètre Laser*. Thèse de doctorat, ENSAE, Toulouse, France (2000).

- [68] RAMOND, A., MILLAN, P. «Measurements and treatment of LDA signals, comparison with hot-wire signals». *Experiments in Fluids*, **28** : pp. 58–63. Springer-Verlag (2000).
- [69] REBEL, J., DONNEBERGER, D. «The effect of shear stress on the propagation and scattering of sound in flow ducts». *Journal of Sound and Vibration*, **158**(3) : pp. 469–496 (1992).
- [70] ROUQUIER, P. *Mesure de vitesses particulières acoustiques en champ libre par Vélocimétrie Laser Doppler : développement du banc de mesure et évaluation des performances*. Thèse de doctorat, Université du Maine, Le Mans, France (2004).
- [71] ROUQUIER, P., GAZENGEL, B., RICHOUX, O., TOURNOIS, G., BRUNEAU, M. «Étude par VLD d'un champ acoustique en champ libre : extraction des paramètres de la vitesse particulière acoustique». *8ème Congrès Francophone de Vélocimétrie Laser*, pp. 243–248. AFVL, Orsay (sep 2002).
- [72] SIMON, F., BIRON, D. «Experimental acoustic reflections of choked inlet and outlet nozzles». *The 33rd International Congress and Exposition on Noise Control Engineering*. Inter-Noise, Prague, République Tchèque (août 2004).
- [73] SVETOVVOY, V. B., WINTER, I. A. «Model of the μ -flown microphone». *Sensors and Actuators A : Physical*, **86** : pp. 171–181 (2000).
- [74] TAYLOR, K. J. «Absolute measurement of acoustic particle velocity». *Journal of the Acoustical Society of America*, **59**(3) : pp. 691–694 (mars 1976).
- [75] TROPEA, C. «Processing of Time-Dependent Data». *Post-Processing of Experimental and Numerical Data*. von Karman Institute for Fluid Dynamics (avril 2002).
- [76] VALIÈRE, J.-C., BOUCHERON, R., BAILLIET, H. «Vélocimétrie par image de particule pour l'acoustique : mesure dans les couches limites». Communication aux Journées Mesures de vitesse particulière acoustique par laser, Angers (octobre 2003).
- [77] VALIÈRE, J.-C., HERZOG, P., VALEAU, V., TOURNOIS, G. «Acoustic velocity measurements in the air by means of Laser Doppler Velocimetry : dynamics and frequency range limitations and signal processing improvements». *Journal of Sound and Vibration*, **229**(3) : pp. 607–626 (2000).
- [78] VAN DER EERDEN, F. J. M., DE BREE, H.-E., TIJDEMAN, H. «Experiments with a new acoustic particle velocity sensor in an impedance tube». *Sensors and Actuators A : Physical*, **69** : pp. 126–133 (1998).
- [79] VAN HONSCHOTEN, J. W., SVETOVVOY, V. B., LAMMERINK, T. S. J., KRIJNEN, G. J. M., ELWENSPOEK, M. C. «Determination of the sensibility behavior of an acoustic, thermal flow sensor by electronic characterization». *Sensors and Actuators A : Physical*, **112** : pp. 1–9 (2004).
- [80] VIGNOLA, J.-F., BERTHELOT, Y. H., JARZYNSKI, J. «Laser Detection of Sound». *Journal of the Acoustical Society of America*, **90**(3) : pp. 1275–1286 (septembre 1991).
- [81] VILLE, J.-M., FOUCART, F. «Experimental setup for measurement of acoustic power dissipation in lined ducts for higher order modes propagation with air mean-flow conditions». *Journal of the Acoustical Society of America*, **114**(4) : pp. 1742–1748 (octobre 2003).
- [82] WATSON, W. R., TRACY, M. B., JONES, M. G., PARROTT, T. L. «Impedance Eduction In the Presence of Shear Flow». *7th Aeroacoustics Conference and Exhibit*, AIAA 2001–2263. AIAA/CEAS, Maastricht, Pays-Bas (mai 2001).

Annexe A

Démonstrations et développements divers

A.1 \tilde{f}_t réalise une bijection

$f_{t_0,t}$, $f_{t_0,t}^{\text{ref}}$ et \tilde{f}_t sont liées par (1.84) page 34. Comme $f_{t_0,t}$ et $f_{t_0,t}^{\text{ref}}$ sont des transformations de milieu continu, elles réalisent toutes les deux une bijection respectivement de $\Omega_{t_0}^{\text{ref}}$ dans Ω_t et de $\Omega_{t_0}^{\text{ref}}$ dans Ω_t^{ref} . Ceci permet de montrer l'injectivité et la surjectivité de \tilde{f}_t .

Injectivité

Soient $(M^{\text{ref}}, N^{\text{ref}}) \in \Omega_t^{\text{ref}} \times \Omega_t^{\text{ref}} / M^{\text{ref}} \neq N^{\text{ref}}$. Alors $\tilde{f}_t(M^{\text{ref}}) \neq \tilde{f}_t(N^{\text{ref}})$?
Comme $f_{t_0,t}^{\text{ref}}$ est injective (car bijective), nous avons :

$$\exists (M_0^{\text{ref}}, N_0^{\text{ref}}) \in \Omega_{t_0}^{\text{ref}} \times \Omega_{t_0}^{\text{ref}} / M_0^{\text{ref}} \neq N_0^{\text{ref}}$$

vérifiant

$$M^{\text{ref}} = f_{t_0,t}^{\text{ref}}(M_0^{\text{ref}}) \tag{A.1}$$

$$N^{\text{ref}} = f_{t_0,t}^{\text{ref}}(N_0^{\text{ref}}) \tag{A.2}$$

(1.84) page 34, (A.1) et (A.2) impliquent :

$$\tilde{f}_t(M^{\text{ref}}) = \tilde{f}_t \circ f_{t_0,t}^{\text{ref}}(M_0^{\text{ref}}) = f_{t_0,t}(M_0^{\text{ref}}) \tag{A.3}$$

$$\tilde{f}_t(N^{\text{ref}}) = \tilde{f}_t \circ f_{t_0,t}^{\text{ref}}(N_0^{\text{ref}}) = f_{t_0,t}(N_0^{\text{ref}}) \tag{A.4}$$

Comme $M_0^{\text{ref}} \neq N_0^{\text{ref}}$ et $f_{t_0,t}$ est injective (car bijective), $f_{t_0,t}(M_0^{\text{ref}}) \neq f_{t_0,t}(N_0^{\text{ref}})$, donc :

$$\boxed{\tilde{f}_t(M^{\text{ref}}) \neq \tilde{f}_t(N^{\text{ref}})} \tag{A.5}$$

Surjectivité

Soit $M \in \Omega_t$. Alors $\exists M^{\text{ref}} \in \Omega_t^{\text{ref}}$ tel que $M = \tilde{f}_t(M^{\text{ref}})$?
La surjectivité de $f_{t_0,t}$ donne :

$$\exists M_0^{\text{ref}} \in \Omega_{t_0}^{\text{ref}} \text{ tel que } M = f_{t_0,t}(M_0^{\text{ref}}) \tag{A.6}$$

Or $f_{t_0,t}(M_0^{\text{ref}}) = \tilde{f}_t \circ f_{t_0,t}^{\text{ref}}(M_0^{\text{ref}})$ et $f_{t_0,t}^{\text{ref}}(M_0^{\text{ref}}) = M^{\text{ref}}$, $M^{\text{ref}} \in \Omega_t^{\text{ref}}$. Donc :

$$\boxed{\exists M^{\text{ref}} \in \Omega_t^{\text{ref}} \text{ tel que } M = \tilde{f}_t(M^{\text{ref}})} \tag{A.7}$$

Conclusion

\tilde{f}_t est injective et surjective. Elle réalise donc une bijection de Ω_t^{ref} dans Ω_t .

De plus $\exists \tilde{f}_t^{-1} / \tilde{f}_t^{-1} \circ \tilde{f}_t = \tilde{f}_t \circ \tilde{f}_t^{-1} = \text{Id}$ \square

A.2 Expression de $\det \tilde{\mathbf{F}}_t$

Soit un tenseur d'ordre 2 \mathbf{T} . Calculons $\det(\mathbf{G} + \mathbf{T})$. \det étant un invariant, calculons-le dans la base naturelle car ainsi $\mathbf{G}_{ij} = \delta_{ij}$:

$$\det(\mathbf{G} + \mathbf{T}) = \begin{vmatrix} 1 + \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{13} \\ \mathbf{T}_{21} & 1 + \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{23} \\ \mathbf{T}_{31} & \mathbf{T}_{32} & 1 + \mathbf{T}_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{G} + \mathbf{T}) &= (1 + \mathbf{T}_{11}) \left((1 + \mathbf{T}_{22})(1 + \mathbf{T}_{33}) - \mathbf{T}_{23}\mathbf{T}_{32} \right) - \mathbf{T}_{21} \left(\mathbf{T}_{12}(1 + \mathbf{T}_{33}) - \mathbf{T}_{32}\mathbf{T}_{13} \right) \\ &\quad + \mathbf{T}_{31} \left(\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23} - \mathbf{T}_{13}(1 + \mathbf{T}_{22}) \right) \\ &= 1 + (\mathbf{T}_{11} + \mathbf{T}_{22} + \mathbf{T}_{33}) \\ &\quad + \left((\mathbf{T}_{11}\mathbf{T}_{22} - \mathbf{T}_{21}\mathbf{T}_{12}) + (\mathbf{T}_{11}\mathbf{T}_{33} - \mathbf{T}_{31}\mathbf{T}_{13}) + (\mathbf{T}_{22}\mathbf{T}_{33} - \mathbf{T}_{23}\mathbf{T}_{32}) \right) \\ &\quad + \mathbf{T}_{11}(\mathbf{T}_{22}\mathbf{T}_{33} - \mathbf{T}_{23}\mathbf{T}_{32}) - \mathbf{T}_{21}(\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{33} - \mathbf{T}_{32}\mathbf{T}_{13}) \\ &\quad + \mathbf{T}_{31}(\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23} - \mathbf{T}_{22}\mathbf{T}_{13}) \\ &= 1 + \Theta_1(\mathbf{T}) + \Theta_2(\mathbf{T}) + \Theta_3(\mathbf{T}) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Theta_1(\mathbf{T}) &= \mathbf{T}_{11} + \mathbf{T}_{22} + \mathbf{T}_{33} \\ \Theta_2(\mathbf{T}) &= (\mathbf{T}_{11}\mathbf{T}_{22} - \mathbf{T}_{21}\mathbf{T}_{12}) + (\mathbf{T}_{11}\mathbf{T}_{33} - \mathbf{T}_{31}\mathbf{T}_{13}) + (\mathbf{T}_{22}\mathbf{T}_{33} - \mathbf{T}_{23}\mathbf{T}_{32}) \\ \Theta_3(\mathbf{T}) &= \mathbf{T}_{11}(\mathbf{T}_{22}\mathbf{T}_{33} - \mathbf{T}_{23}\mathbf{T}_{32}) - \mathbf{T}_{21}(\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{33} - \mathbf{T}_{32}\mathbf{T}_{13}) \\ &\quad + \mathbf{T}_{31}(\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23} - \mathbf{T}_{22}\mathbf{T}_{13}) \end{aligned}$$

Les $\Theta_n(\mathbf{T})$, $n = 1, 2, 3$ sont les invariants du tenseur \mathbf{T} . $\Theta_1(\mathbf{T}) = \text{Tr}(\mathbf{T})$, $\Theta_2(\mathbf{T})$ est la somme des cofacteurs diagonaux de $[\mathbf{T}]$ et $\Theta_3(\mathbf{T}) = \det \mathbf{T}$. $\Theta_2(\mathbf{T})$ et $\Theta_3(\mathbf{T})$ peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \Theta_2(\mathbf{T}) &= \frac{1}{2} \left(\Theta_1(\mathbf{T})^2 - \Theta_1(\mathbf{T} \bar{\otimes} \mathbf{T}) \right) \\ \Theta_3(\mathbf{T}) &= \frac{1}{6} \Theta_1(\mathbf{T})^3 - \frac{1}{2} \Theta_1(\mathbf{T}) \Theta_1(\mathbf{T} \bar{\otimes} \mathbf{T}) + \frac{1}{3} \Theta_1(\mathbf{T} \bar{\otimes} \mathbf{T} \bar{\otimes} \mathbf{T}) \end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned} \Theta_1(\mathbf{T})^2 &= \mathbf{T}_{11}^2 + \mathbf{T}_{22}^2 + \mathbf{T}_{33}^2 + 2(\mathbf{T}_{11}\mathbf{T}_{22} + \mathbf{T}_{11}\mathbf{T}_{33} + \mathbf{T}_{22}\mathbf{T}_{33}) \\ \Theta_1(\mathbf{T})^3 &= \mathbf{T}_{11}^3 + \mathbf{T}_{22}^3 + \mathbf{T}_{33}^3 + 3(\mathbf{T}_{11}^2\mathbf{T}_{22} + \mathbf{T}_{11}^2\mathbf{T}_{33} + \mathbf{T}_{11}\mathbf{T}_{22}^2 + \mathbf{T}_{11}\mathbf{T}_{33}^2 + \mathbf{T}_{22}^2\mathbf{T}_{33} + \mathbf{T}_{22}\mathbf{T}_{33}^2) \\ &\quad + 6\mathbf{T}_{11}\mathbf{T}_{22}\mathbf{T}_{33} \\ \Theta_1(\mathbf{T} \bar{\otimes} \mathbf{T}) &= \mathbf{T}_{11}^2 + \mathbf{T}_{22}^2 + \mathbf{T}_{33}^2 + 2(\mathbf{T}_{21}\mathbf{T}_{12} + \mathbf{T}_{31}\mathbf{T}_{13} + \mathbf{T}_{32}\mathbf{T}_{23}) \end{aligned}$$

$$\Theta_1(\mathbf{T} \bar{\otimes} \mathbf{T} \bar{\otimes} \mathbf{T}) = \mathbf{T}_{11}^3 + \mathbf{T}_{22}^3 + \mathbf{T}_{33}^3 + 3(\mathbf{T}_{21}\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22} + \mathbf{T}_{21}\mathbf{T}_{13}\mathbf{T}_{32} + \mathbf{T}_{11}\mathbf{T}_{13}\mathbf{T}_{31} + \mathbf{T}_{22}\mathbf{T}_{23}\mathbf{T}_{32} \\ + \mathbf{T}_{11}\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{21} + \mathbf{T}_{31}\mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{23} + \mathbf{T}_{31}\mathbf{T}_{13}\mathbf{T}_{33} + \mathbf{T}_{32}\mathbf{T}_{23}\mathbf{T}_{33})$$

Or :

$$\begin{aligned} \Theta_1(\mathbf{T} \bar{\otimes} \mathbf{T}) &= (\mathbf{T} \bar{\otimes} \mathbf{T})_{ii} \\ &= \mathbf{T}_{ij}\mathbf{T}_{ji} \\ &= \mathbf{T}_{ij}\mathbf{T}_{ij}^T \\ &= \mathbf{T} \bar{\otimes} \mathbf{T}^T \end{aligned}$$

et

$$\Theta_1(\mathbf{T} \bar{\otimes} \mathbf{T} \bar{\otimes} \mathbf{T}) = (\mathbf{T} \bar{\otimes} \mathbf{T}) \bar{\otimes} \mathbf{T}^T$$

Appliquer à $\mathbf{T} = \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$:

$$\det \tilde{\mathbf{F}}_t = 1 + \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t + \Theta_2(\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) + \Theta_3(\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)$$

$$\Theta_2(\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) = \frac{1}{2} \left((\text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)^2 - \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right)$$

$$\begin{aligned} \Theta_3(\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) &= \frac{1}{6} (\text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)^3 - \frac{1}{2} \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \\ &\quad + \frac{1}{3} (\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \end{aligned}$$

A.3 Expression de $\tilde{\mathbf{F}}_t^{-1}$

Le calcul s'effectue dans la base naturelle. Nous avons $[\tilde{\mathbf{F}}_t]_{ij} = \delta_{ij} + [\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t]_{ij}$. Pour alléger l'écriture, nous poserons $g_{ij} = [\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t]_{ij}$. Utilisons l'écriture explicite de l'inverse de la matrice $[\tilde{\mathbf{F}}_t]$:

$$[\tilde{\mathbf{F}}_t^{-1}] = [\tilde{\mathbf{F}}_t]^{-1} = \frac{1}{\det \tilde{\mathbf{F}}_t} [\mathbf{T}]^T$$

où $[\mathbf{T}]$ est la matrice des cofacteurs de $[\tilde{\mathbf{F}}_t]$. Elle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 + g_{22} + g_{33} + g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32} & -(g_{21} + g_{21}g_{33} - g_{31}g_{23}) & g_{21}g_{32} - g_{31}g_{22} - g_{31} \\ -(g_{12} + g_{12}g_{33} - g_{32}g_{13}) & 1 + g_{11} + g_{33} + g_{11}g_{33} - g_{13}g_{31} & -(g_{32} + g_{32}g_{11} - g_{31}g_{12}) \\ g_{12}g_{23} - g_{22}g_{13} - g_{13} & -(g_{23} + g_{11}g_{23} - g_{21}g_{13}) & 1 + g_{11} + g_{22} + g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12} \end{pmatrix}$$

Comme $\Theta_1(\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) = \text{Tr}(\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) = g_{11} + g_{22} + g_{33}$, il est possible d'écrire $[\mathbf{T}]$ de la façon suivante :

$$[\mathbf{T}] = \begin{pmatrix} 1 - g_{11} & -g_{21} & -g_{31} \\ -g_{12} & 1 - g_{22} & -g_{32} \\ -g_{13} & -g_{23} & 1 - g_{33} \end{pmatrix} + \Theta_1(\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + [\mathbf{N}]$$

où

$$[\mathbf{N}] = \begin{pmatrix} g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32} & -(g_{21}g_{33} - g_{31}g_{23}) & g_{21}g_{32} - g_{31}g_{22} \\ -(g_{12}g_{33} - g_{32}g_{13}) & g_{11}g_{33} - g_{13}g_{31} & -(g_{32}g_{11} - g_{31}g_{12}) \\ g_{12}g_{23} - g_{22}g_{13} & -(g_{11}g_{23} - g_{21}g_{13}) & g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12} \end{pmatrix}$$

$[\mathbf{N}]$ est la matrice des cofacteurs de $\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$. Elle s'écrit donc :

$$[\mathbf{N}] = \Theta_3(\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) [\mathbf{grad}_{\text{ref}}^{-T}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t]$$

En repassant aux tenseurs :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_t^{-1} &= \frac{1}{\det\tilde{\mathbf{F}}_t} \mathbf{T}^T \\ \mathbf{T} &= \mathbf{G} - \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t + \Theta_1(\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)\mathbf{G} + \mathbf{N} \\ \mathbf{N} &= \Theta_3(\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) \mathbf{grad}_{\text{ref}}^{-T}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \end{aligned}$$

Une expression utilisable de \mathbf{N} peut être trouvée en partant de l'égalité $\tilde{\mathbf{F}}_t \bar{\otimes} \tilde{\mathbf{F}}_t^{-1} = \mathbf{G}$ et en utilisant $\mathbf{N}^T \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t = \Theta_3(\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)\mathbf{G}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_t \bar{\otimes} \tilde{\mathbf{F}}_t^{-1} &= \frac{1}{\det\tilde{\mathbf{F}}_t} \left(\mathbf{G} - \mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t + \Theta_1(\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)\mathbf{G} + \mathbf{N} + \mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t + \Theta_1(\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t + \Theta_3(\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)\mathbf{G} \right) \\ &= \frac{1}{\det\tilde{\mathbf{F}}_t} \left(\left(1 + \Theta_1(\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) + \Theta_3(\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) \right) \mathbf{G} + \mathbf{N}^T + \Theta_1(\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right) \end{aligned}$$

Comme $\det\tilde{\mathbf{F}}_t = 1 + \Theta_1(\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) + \Theta_2(\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) + \Theta_3(\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)$, il faut nécessairement que :

$$\mathbf{N}^T = \Theta_2(\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)\mathbf{G} - \Theta_1(\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t + \mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$$

afin d'obtenir $\tilde{\mathbf{F}}_t \bar{\otimes} \tilde{\mathbf{F}}_t^{-1} = \mathbf{G}$. Ainsi :

$$\boxed{\tilde{\mathbf{F}}_t^{-1} = \frac{1}{\det\tilde{\mathbf{F}}_t} \mathbf{T}^T}$$

où

$$\boxed{\mathbf{T} = \mathbf{G} - \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t + \text{div}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \mathbf{G} + \mathbf{N}}$$

avec

$$\boxed{\mathbf{N} = \Theta_2(\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)\mathbf{G} - \text{div}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t + \left(\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right)^T}$$

Aussi, tout comme \mathbf{T} , \mathbf{N} possède la propriété suivante :

$$\text{div}_{\text{ref}}\mathbf{N} = 0 \tag{A.8}$$

En effet :

$$\text{div}_{\text{ref}}\mathbf{T} = -\text{div}_{\text{ref}}\mathbf{grad}_{\text{ref}}^T\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t + \text{div}_{\text{ref}}(\text{div}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \mathbf{G}) + \text{div}_{\text{ref}}\mathbf{N} \tag{A.9}$$

$$= -\mathbf{grad}_{\text{ref}}\text{div}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t + \mathbf{grad}_{\text{ref}}(\text{div}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \mathbf{G}) \bar{\otimes} \mathbf{G} + \text{div}_{\text{ref}}\mathbf{N} \tag{A.10}$$

L'identité $\mathbf{grad}(f\mathbf{G}) \bar{\otimes} \mathbf{P} = \mathbf{P} \bar{\otimes} \mathbf{grad}f$, \mathbf{P} étant un tenseur d'ordre 2 et f un scalaire, utilisée avec $\mathbf{P} = \mathbf{G}$ et $f = \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$, donne $\mathbf{grad}_{\text{ref}}(\text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \mathbf{G}) \bar{\otimes} \mathbf{G} = \mathbf{grad}_{\text{ref}} \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$. Donc :

$$\mathbf{div}_{\text{ref}} \mathbf{T} = \mathbf{div}_{\text{ref}} \mathbf{N} \quad (\text{A.11})$$

D'où le résultat.

A.4 Dérivation de \mathcal{L}

Les calculs se font dans la base naturelle. L'expression du Lagrangien est :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} + \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}} - \frac{1}{\gamma - 1} \hat{p} \quad (\text{A.12})$$

Afin d'appliquer le principe d'Hamilton, les dérivées partielles de \mathcal{L} par rapport à $\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t}$ et $\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$ doivent être calculés, en considérant $\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t}$ et $\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t$ indépendants. Avec $\tilde{\mathbf{V}} = \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt}$ et $[\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t]_{ij} = g_{ij}$ pour alléger l'écriture, il vient :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}}{\partial \left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \right)} = \mathbf{G} \quad (\text{A.13})$$

car $\tilde{\mathbf{V}} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} + \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}}$. Comme $\hat{p} = \hat{p}(\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)$, alors :

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \right)} = \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} + \rho^{\text{ref}} \mathbf{V}^{\text{ref}}} \quad (\text{A.14})$$

Pour ce qui concerne la deuxième dérivée partielle, effectuons le calcul avec l'écriture indicielle des tenseurs :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (\tilde{\mathbf{V}} \bar{\otimes} \tilde{\mathbf{V}})}{\partial g_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\tilde{\mathbf{V}}_k \tilde{\mathbf{V}}_k)}{\partial g_{ij}} \quad (\text{A.15})$$

$$= \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}_k \tilde{\mathbf{V}}_k}{\partial g_{ij}} \quad (\text{A.16})$$

$$= \frac{\partial g_{kl}}{\partial g_{ij}} \mathbf{V}_l^{\text{ref}} \tilde{\mathbf{V}}_k \quad (\text{A.17})$$

$$= \delta_{ik} \delta_{jl} \tilde{\mathbf{V}}_k \mathbf{V}_l^{\text{ref}} \quad (\text{A.18})$$

$$= \tilde{\mathbf{V}}_i \mathbf{V}_j^{\text{ref}} \quad (\text{A.19})$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \frac{\partial (\tilde{\mathbf{V}} \bar{\otimes} \tilde{\mathbf{V}})}{\partial \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t} = \tilde{\mathbf{V}} \otimes \mathbf{V}^{\text{ref}}} \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial(\tilde{\mathbf{V}} \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}})}{\partial g_{ij}} = \frac{\partial(\tilde{\mathbf{V}}_k \mathbf{V}_k^{\text{ref}})}{\partial g_{ij}} \quad (\text{A.21})$$

$$= \frac{\partial g_{kl}}{\partial g_{ij}} \mathbf{V}_l^{\text{ref}} \mathbf{V}_k^{\text{ref}} \quad (\text{A.22})$$

$$= \delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{V}_l^{\text{ref}} \mathbf{V}_k^{\text{ref}} \quad (\text{A.23})$$

$$= \mathbf{V}_i^{\text{ref}} \mathbf{V}_j^{\text{ref}} \quad (\text{A.24})$$

$$\boxed{\frac{\partial(\tilde{\mathbf{V}} \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}})}{\partial \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t} = \mathbf{V}^{\text{ref}} \otimes \mathbf{V}^{\text{ref}}} \quad (\text{A.25})$$

Sachant que $\hat{p} = \left((\det \tilde{\mathbf{F}}_t)^{-(\gamma-1)} - 1 \right) p^{\text{ref}}$, le dernier terme de \mathcal{L} donne :

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{\partial \hat{p}}{\partial g_{ij}} = \frac{1}{\gamma-1} p^{\text{ref}} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} (\det \tilde{\mathbf{F}}_t)^{-(\gamma-1)} \quad (\text{A.26})$$

$$= -p^{\text{ref}} (\det \tilde{\mathbf{F}}_t)^{-\gamma} \frac{\partial \det \tilde{\mathbf{F}}_t}{\partial g_{ij}} \quad (\text{A.27})$$

Comme $\tilde{p} + p^{\text{ref}} = p^{\text{ref}} (\det \tilde{\mathbf{F}}_t)^{-\gamma}$:

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial g_{ij}} = -(\tilde{p} + p^{\text{ref}}) \frac{\partial \det \tilde{\mathbf{F}}_t}{\partial g_{ij}} \quad (\text{A.28})$$

Or $\det \tilde{\mathbf{F}}_t = 1 + \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t + \frac{1}{2} \left((\text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)^2 - \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right) + \det(\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)$. De plus $\text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t = \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{G}$:

$$\frac{\partial}{\partial g_{ij}} \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t = \frac{\partial g_{kl}}{\partial g_{ij}} \delta_{kl} \quad (\text{A.29})$$

$$= \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{kl} \quad (\text{A.30})$$

$$= \delta_{ij} \quad (\text{A.31})$$

Donc :

$$\boxed{\frac{\partial \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t} = \mathbf{G}} \quad (\text{A.32})$$

Aussi :

$$\frac{\partial}{\partial g_{ij}} \left(\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right) = \frac{\partial g_{kl} g_{lk}}{\partial g_{ij}} \quad (\text{A.33})$$

$$= \frac{\partial g_{kl}}{\partial g_{ij}} g_{lk} + g_{kl} \frac{\partial g_{lk}}{\partial g_{ij}} \quad (\text{A.34})$$

$$= \delta_{ik} \delta_{jl} g_{lk} + g_{kl} \delta_{il} \delta_{jk} \quad (\text{A.35})$$

$$= 2g_{ji} \quad (\text{A.36})$$

Donc :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t} \left(\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right) = 2 \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t} \quad (\text{A.37})$$

Le calcul de la dérivée de $\det(\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)$ peut se faire en utilisant (1.108) page 37 ou bien en écriture matricielle, élément par élément. En choisissant cette dernière façon, comme $\det(\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t) = g_{11}(g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32}) - g_{21}(g_{12}g_{33} - g_{32}g_{13}) + g_{31}(g_{12}g_{23} - g_{22}g_{13})$, il vient :

$$\left[\frac{\partial \det(\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)}{\partial \mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t} \right] = \begin{pmatrix} g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32} & -(g_{21}g_{33} - g_{31}g_{23}) & g_{21}g_{32} - g_{31}g_{22} \\ -(g_{12}g_{33} - g_{32}g_{13}) & g_{11}g_{33} - g_{13}g_{31} & -(g_{32}g_{11} - g_{31}g_{12}) \\ g_{12}g_{23} - g_{22}g_{13} & -(g_{11}g_{23} - g_{21}g_{13}) & g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12} \end{pmatrix} \quad (\text{A.38})$$

qui est la matrice des cofacteurs de $[\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t]$. Donc :

$$\boxed{\frac{\partial \det(\mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t)}{\partial \mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t} = \mathbf{N}} \quad (\text{A.39})$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{\partial \det \tilde{\mathbf{F}}_t}{\partial \mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t} = \mathbf{G} + \text{div}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \mathbf{G} - \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t + \mathbf{N} = \mathbf{T}} \quad (\text{A.40})$$

et

$$\boxed{\frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t} = -(\tilde{p} + p^{\text{ref}}) \mathbf{T}} \quad (\text{A.41})$$

De ce fait :

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t} = \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \mathbf{V}^{\text{ref}} + \rho^{\text{ref}} \mathbf{V}^{\text{ref}} \otimes \mathbf{V}^{\text{ref}} + (\tilde{p} + p^{\text{ref}}) \mathbf{T}} \quad (\text{A.42})$$

A.5 Vérification du bilan d'énergie avec \mathcal{H} et \mathcal{S}

Les expressions de \mathcal{H} et \mathcal{S} sont :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\gamma - 1} \tilde{p} + \frac{1}{2} \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \frac{d_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} - \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \otimes \mathbf{V}^{\text{ref}} - \rho^{\text{ref}} \mathbf{V}^{\text{ref}} \otimes \mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \otimes \mathbf{V}^{\text{ref}} \quad (\text{A.43})$$

et

$$\mathcal{S} = \rho^{\text{ref}} \left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \otimes \frac{d_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \right) \mathbf{V}^{\text{ref}} + \rho^{\text{ref}} \left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \otimes \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) \mathbf{V}^{\text{ref}} + (\tilde{p} + p^{\text{ref}}) \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \otimes \mathbf{T} \quad (\text{A.44})$$

Elles ont été trouvées grâce au principe d'Hamilton, avec l'hypothèse supplémentaire que l'écoulement de référence est stationnaire. Vérifions toutefois que si nous partons de ces expressions avec l'hypothèse d'écoulement de référence stationnaire, alors le bilan d'énergie est satisfait. Calculons donc $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \text{div}_{\text{ref}} \mathcal{S} = \mathcal{C}$.

Afin de montrer son importance, l'hypothèse de stationnarité ne sera utilisée qu'en fin. Si le premier terme de \mathcal{S} est écrit

$$\rho^{\text{ref}} \left(\frac{d_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \frac{d_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \right) \mathbf{V}^{\text{ref}} - \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \mathbf{grad}_{\text{ref}}\tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \otimes \mathbf{V}^{\text{ref}} \mathbf{V}^{\text{ref}}$$

alors, en ordonnant les termes :

$$\mathcal{C} = a + b + c + d \quad (\text{A.45})$$

avec

$$a = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \right) + \frac{1}{2} \text{div}_{\text{ref}} \left(\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) \quad (\text{A.46})$$

$$b = \frac{1}{2} \text{div}_{\text{ref}} \left(\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \otimes \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) - \text{div}_{\text{ref}} \left(\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \otimes \mathbf{V}^{\text{ref}} \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) \quad (\text{A.47})$$

$$c = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho^{\text{ref}} \mathbf{V}^{\text{ref}} \otimes \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \otimes \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) + \text{div}_{\text{ref}} \left(\rho^{\text{ref}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \otimes \mathbf{V}^{\text{ref}} \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) \quad (\text{A.48})$$

$$d = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \text{div}_{\text{ref}} \left((\tilde{p} + p^{\text{ref}}) \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \otimes \mathbf{T} \right) \quad (\text{A.49})$$

L'équation de conservation de la masse en configuration de référence et la définition de $\frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt}$ permettent d'écrire :

$$a = \frac{1}{2} \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}}{dt} \left(\frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \right) \quad (\text{A.50})$$

$$= \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}^2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt^2} \otimes \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \quad (\text{A.51})$$

$$b = \frac{1}{2} \text{div}_{\text{ref}} \left(\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) - \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}}{dt} \left(\frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \otimes \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) \quad (\text{A.52})$$

$$= \frac{1}{2} \text{div}_{\text{ref}} \left(\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) - \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}}{dt} \left(\frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \right) \quad (\text{A.53})$$

$$+ \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}}{dt} \left(\frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \text{div}_{\text{ref}} \left(\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) - 2 \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}^2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt^2} \otimes \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \quad (\text{A.54})$$

$$+ \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}^2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt^2} \otimes \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} + \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \otimes \frac{d_{\text{ref}} \partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt}$$

$$c = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho^{\text{ref}} \mathbf{V}^{\text{ref}} \otimes \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \right) + \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \otimes \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) \quad (\text{A.55})$$

Le bilan de quantité de mouvement en configuration de référence permet d'écrire :

$$c = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho^{\text{ref}} \mathbf{V}^{\text{ref}} \otimes \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \right) + \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}}{dt} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \otimes \mathbf{V}^{\text{ref}} - \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \otimes \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \quad (\text{A.56})$$

En utilisant le fait que $\mathbf{div}_{\text{ref}} \mathbf{T} = 0$ et (A.40), il vient :

$$d = - \underbrace{\left(\det \tilde{F}_t \right)^{-\gamma} p^{\text{ref}} \frac{\partial \det \tilde{F}_t}{\partial t}}_{\tilde{p} + p^{\text{ref}}} + \frac{1}{\gamma - 1} \left(\left(\det \tilde{F}_t \right)^{-(\gamma-1)} - 1 \right) \frac{\partial p^{\text{ref}}}{\partial t} + \mathbf{grad}_{\text{ref}} \left((\tilde{p} + p^{\text{ref}}) \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \right) \bar{\otimes} \mathbf{T} \quad (\text{A.57})$$

$$= -(\tilde{p} + p^{\text{ref}}) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{T} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\hat{p}}{p^{\text{ref}}} \frac{\partial p^{\text{ref}}}{\partial t} \quad (\text{A.58})$$

$$+ (\tilde{p} + p^{\text{ref}}) \mathbf{grad}_{\text{ref}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \mathbf{T} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \mathbf{T} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} (\tilde{p} + p^{\text{ref}}) \\ = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\hat{p}}{p^{\text{ref}}} \frac{\partial p^{\text{ref}}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \mathbf{T} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} (\tilde{p} + p^{\text{ref}}) \quad (\text{A.59})$$

Or l'équation dévolution (1.167) page 43 donne $\mathbf{T} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} (\tilde{p} + p^{\text{ref}}) = \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} - \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}^2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt^2}$.

Donc :

$$d = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\hat{p}}{p^{\text{ref}}} \frac{\partial p^{\text{ref}}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} - \rho^{\text{ref}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}}^2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt^2} \quad (\text{A.60})$$

Ainsi en sommant les quatre termes :

$$\mathcal{C} = -\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}^2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt^2} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} + \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} + \frac{1}{2} \text{div}_{\text{ref}} \left(\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho^{\text{ref}} \mathbf{V}^{\text{ref}} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \right) + \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}} \quad (\text{A.61}) \\ + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\hat{p}}{p^{\text{ref}}} \frac{\partial p^{\text{ref}}}{\partial t}$$

L'hypothèse de stationnarité de l'écoulement de référence est maintenant utilisée. Alors :

$$\frac{\partial p^{\text{ref}}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho^{\text{ref}}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{V}^{\text{ref}}}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.62})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{d_{\text{ref}}}{dt} = \frac{d_{\text{ref}}}{dt} \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{A.63})$$

Donc :

$$\mathcal{C} = -\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}^2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt^2} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} + \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \frac{\partial}{\partial t} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} + \frac{1}{2} \text{div}_{\text{ref}} \left(\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) \quad (\text{A.64})$$

$$= -\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}^2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt^2} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \right) + \frac{1}{2} \text{div}_{\text{ref}} \left(\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) \quad (\text{A.65})$$

$$= -\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}^2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt^2} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} + \frac{1}{2} \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}}{dt} \left(\frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \right) \quad (\text{A.66})$$

$$= -\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}^2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt^2} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} + \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}^2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt^2} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \quad (\text{A.67})$$

$$= 0 \quad (\text{A.68})$$

Le bilan d'énergie est bien vérifié. L'hypothèse de stationnarité de l'écoulement de référence est importante car si elle n'avait pas été faite, le bilan d'énergie n'aurait pu être vérifié.

A.6 Vérification du bilan d'énergie aux ordres 1 et 2

Ordre 1

Avec (1.205) et (1.209) page 48, calculons $\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial t} + \text{div}_{\text{ref}} \mathbf{S}_1 = \mathcal{C}_1$.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 = & -\rho^{\text{ref}} \mathbf{V}^{\text{ref}} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}} - p^{\text{ref}} \text{div}_{\text{ref}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} + p^{\text{ref}} \text{div}_{\text{ref}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \\ & + \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \bar{\otimes} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} + \text{div}_{\text{ref}} (\rho^{\text{ref}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}} \mathbf{V}^{\text{ref}}) \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

et en utilisant les bilans de masse et de quantité de mouvement en stationnaire,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 = & -\rho^{\text{ref}} \mathbf{V}^{\text{ref}} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}} - \rho^{\text{ref}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \mathbf{V}^{\text{ref}} \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}} \\ & + \rho^{\text{ref}} \mathbf{V}^{\text{ref}} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}} + \rho^{\text{ref}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \mathbf{V}^{\text{ref}} \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}} \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

$$= 0 \quad (\text{A.71})$$

Ordre 2

De la même façon, avec (1.206) et (1.210) page 48, calculons $\frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial t} + \text{div}_{\text{ref}} \mathbf{S}_2 = \mathcal{C}_2$. Tout d'abord, notons que :

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \frac{\partial \Theta_2}{\partial \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t} \quad (\text{A.72})$$

$$= \mathbf{grad}_{\text{ref}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \underbrace{\left(\text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \mathbf{G} - \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right)}_{\mathbf{T} - \mathbf{G} \text{ à l'ordre 1}} \quad (\text{A.73})$$

Comme $\text{div}_{\text{ref}} \mathbf{T} = 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 = & \frac{1}{2} \rho^{\text{ref}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \right) + \underbrace{\frac{\tilde{p}}{\rho^{\text{ref}} c^{\text{ref}2}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t}}_{-\tilde{p} \frac{\partial}{\partial t} \text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t} - p^{\text{ref}} \frac{\partial \Theta_2}{\partial t} - \rho^{\text{ref}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) \\ & + \rho^{\text{ref}} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \right) \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}} + \tilde{p} \text{div}_{\text{ref}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} + \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{p} \bar{\otimes} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \\ & + \underbrace{\mathbf{grad}_{\text{ref}} \left(p^{\text{ref}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \right) \bar{\otimes} (\mathbf{T} - \mathbf{G})}_a \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

Avec l'équation de Galbrun :

$$a = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} (\mathbf{T} - \mathbf{G}) \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} + p^{\text{ref}} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} (\mathbf{T} - \mathbf{G}) \quad (\text{A.75})$$

$$= -\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{p} \bar{\otimes} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} - \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}^2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt^2} \bar{\otimes} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} + p^{\text{ref}} \frac{\partial \Theta_2}{\partial t} \quad (\text{A.76})$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 &= \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}^2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt^2} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} - \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}^2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt^2} \bar{\otimes} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho^{\text{ref}} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \left(\frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \right) \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}} - \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}}{dt} \left(\frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \underbrace{\mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}}}_{\frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} - \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

$$= -\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}^2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt^2} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} + \frac{1}{2} \rho^{\text{ref}} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \left(\frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \right) \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}} + \frac{1}{2} \rho^{\text{ref}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \right) \quad (\text{A.78})$$

$$= -\rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}^2 \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt^2} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} + \frac{1}{2} \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}}}{dt} \left(\frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \right) \quad (\text{A.79})$$

$$= 0 \quad (\text{A.80})$$

A.7 Équivalence entre le bilan d'énergie à l'ordre 2 trouvé et celui d'Élias

Reprenons les expressions (1.206) et (1.210) page 48. En posant pour la partie cinétique de (1.206)

$$e_c = \frac{1}{2} \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} - \rho^{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}} \quad (\text{A.81})$$

avec (A.73) et (1.32) page 24 pour exprimer \tilde{p} en fonction de p' , le bilan (1.211) page 48 à l'ordre 2 donne :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \left(e_c + \frac{1}{2} \frac{\tilde{p}^2}{\rho^{\text{ref}} c^{\text{ref}2}} \right) + \text{div}_{\text{ref}} \left(\tilde{p} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} + \rho^{\text{ref}} \left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \right) \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) \\ &\quad - p^{\text{ref}} \frac{\partial \Theta_2}{\partial t} + \mathbf{grad}_{\text{ref}} \left(p^{\text{ref}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \right) \bar{\otimes} \left(\text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \mathbf{G} - \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right) \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(e_c + \frac{1}{2} \frac{\tilde{p}^2}{\rho^{\text{ref}} c^{\text{ref}2}} \right) + \text{div}_{\text{ref}} \left(p' \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} + \rho^{\text{ref}} \left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{dt} \right) \mathbf{V}^{\text{ref}} \right) \\ &\quad - \underbrace{\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \left(\text{div}_{\text{ref}} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \mathbf{G} - \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \right) \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} + \text{div}_{\text{ref}} \left(\mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \bar{\otimes} \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\xi}}_t}{\partial t} \right)}_a \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

L'écoulement étant stationnaire :

$$a = \operatorname{div}_{\text{ref}} \tilde{\xi}_t \frac{\partial}{\partial t} \left(\tilde{\xi}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \right) - \frac{\partial \tilde{\xi}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}}^T \tilde{\xi}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \quad (\text{A.84})$$

$$+ \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \bar{\otimes} \tilde{\xi}_t \operatorname{div}_{\text{ref}} \frac{\partial \tilde{\xi}_t}{\partial t} + \mathbf{grad}_{\text{ref}} \left(\mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \bar{\otimes} \tilde{\xi}_t \right) \bar{\otimes} \frac{\partial \tilde{\xi}_t}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div}_{\text{ref}} \tilde{\xi}_t \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \bar{\otimes} \tilde{\xi}_t \right) - \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\xi}_t \bar{\otimes} \frac{\partial \tilde{\xi}_t}{\partial t} \quad (\text{A.85})$$

$$+ \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\xi}_t \bar{\otimes} \frac{\partial \tilde{\xi}_t}{\partial t} + \tilde{\xi}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \bar{\otimes} \frac{\partial \tilde{\xi}_t}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{div}_{\text{ref}} \tilde{\xi}_t \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \bar{\otimes} \tilde{\xi}_t + \frac{1}{2} \tilde{\xi}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \bar{\otimes} \tilde{\xi}_t \right) \quad (\text{A.86})$$

car $\mathbf{grad}_{\text{ref}} \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}}$ est un tenseur symétrique. De plus :

$$\frac{\tilde{p}^2}{\rho_{\text{ref}}^2 c_{\text{ref}}^2} = \frac{1}{\rho_{\text{ref}}^2 c_{\text{ref}}^2} \left(p'^2 + 2p' \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \bar{\otimes} \tilde{\xi}_t + \left(\mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \bar{\otimes} \tilde{\xi}_t \right)^2 \right) \quad (\text{A.87})$$

et

$$\operatorname{div}_{\text{ref}} \tilde{\xi}_t \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \bar{\otimes} \tilde{\xi}_t = - \frac{\tilde{p}}{\rho_{\text{ref}}^2 c_{\text{ref}}^2} \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \bar{\otimes} \tilde{\xi}_t \quad (\text{A.88})$$

$$= - \frac{p'}{\rho_{\text{ref}}^2 c_{\text{ref}}^2} \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \bar{\otimes} \tilde{\xi}_t - \frac{\left(\mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \bar{\otimes} \tilde{\xi}_t \right)^2}{\rho_{\text{ref}}^2 c_{\text{ref}}^2} \quad (\text{A.89})$$

Ainsi :

$$0 = \frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div}_{\text{ref}} \mathbf{S} \quad (\text{A.90})$$

avec

$$H = \frac{1}{2} \frac{p'^2 - \left(\mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \bar{\otimes} \tilde{\xi}_t \right)^2}{\rho_{\text{ref}}^2 c_{\text{ref}}^2} + \frac{1}{2} \rho_{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\xi}_t}{dt} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\xi}_t}{dt} - \rho_{\text{ref}} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\xi}_t}{dt} \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \tilde{\xi}_t \bar{\otimes} \mathbf{V}^{\text{ref}}$$

$$+ \frac{1}{2} \tilde{\xi}_t \bar{\otimes} \mathbf{grad}_{\text{ref}} \mathbf{grad}_{\text{ref}} p^{\text{ref}} \bar{\otimes} \tilde{\xi}_t \quad (\text{A.91})$$

et

$$\mathbf{S} = p' \frac{\partial \tilde{\xi}_t}{\partial t} + \rho_{\text{ref}} \left(\frac{\partial \tilde{\xi}_t}{\partial t} \bar{\otimes} \frac{d_{\text{ref}} \tilde{\xi}_t}{dt} \right) \mathbf{V}^{\text{ref}} \quad (\text{A.92})$$

Ce sont bien les expressions d'Élias. Inversement, en partant de (A.90), le bilan (1.211) page 48 à l'ordre 2 se retrouve (il suffit de reprendre la démonstration à l'envers). Donc :

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial t} + \operatorname{div}_{\text{ref}} \mathbf{S}_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div}_{\text{ref}} \mathbf{S} = 0} \quad (\text{A.93})$$

Annexe B

Qualification acoustique du banc aéro-thermo-acoustique

La fréquence de coupure du premier mode transverse de la conduite du banc aéro-thermo-acoustique a été évaluée expérimentalement à l'aide des deux sondes microphoniques B & K 4182 en amont de la veine de mesure. Une des sondes (μ_1) est fixée en paroi tandis que l'autre (μ_2) est déplacée transversalement dans la veine. La fonction de transfert entre les deux sondes est acquise. La mesure est faite sans écoulement à cause de la présence dans la conduite de μ_2 . Ainsi, en deçà de la fréquence de coupure, le module de la fonction de transfert doit être indépendante de la position transverse de μ_2 .

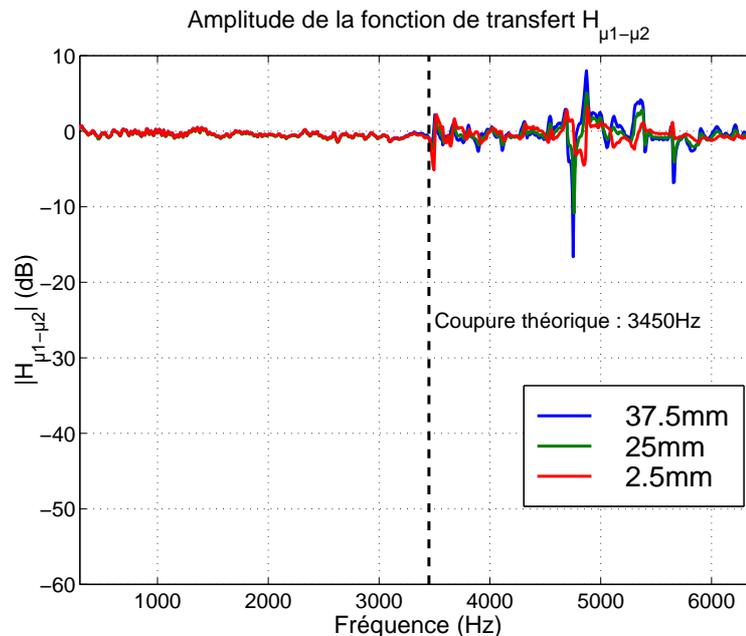


FIG. B.1: Vérification expérimentale de la fréquence de coupure du premier mode transverse sans écoulement.

Aussi, le coefficient de réflexion a été mesuré pour différents nombres de Mach calculés sur la vitesse débitante.

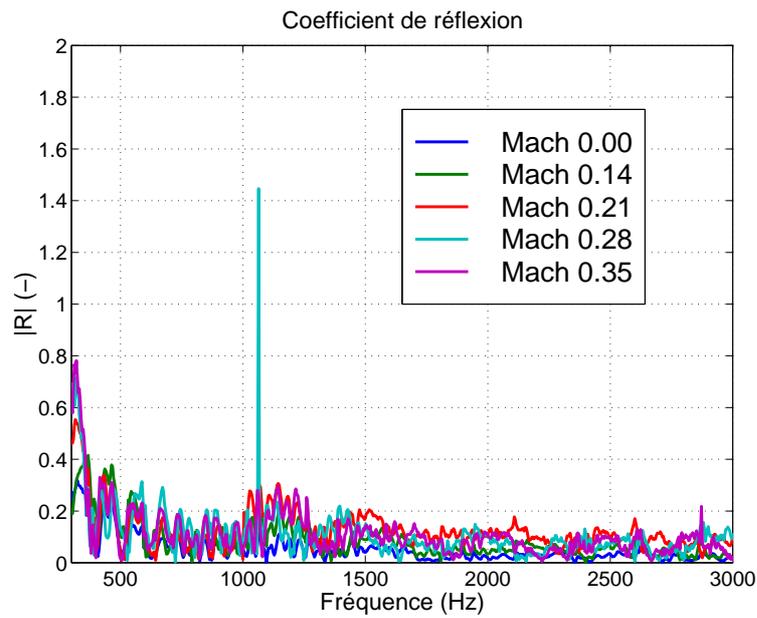


FIG. B.2: Coefficient de réflexion de la terminaison du banc aéro-thermo-acoustique.

Le pic après 1000 Hz est un artefact de calcul dû à un niveau insuffisant de pression acoustique sur les sondes microphoniques.

Annexe C

Champs d'intensité par vélocimétrie laser Doppler

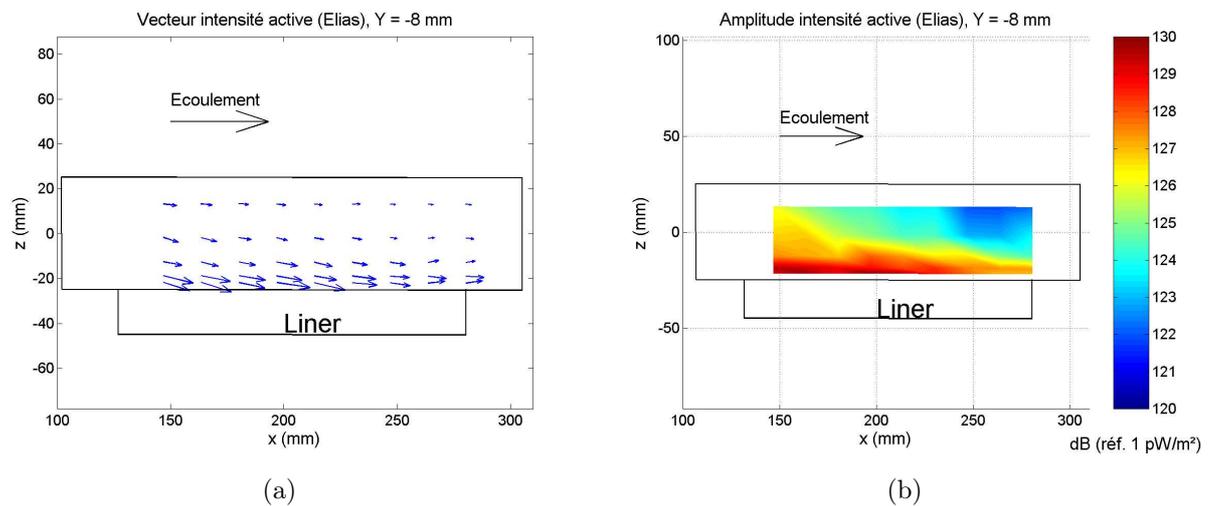


FIG. C.1: Champ du vecteur intensité suivant la définition d'Élias en acoustique de Galbrun en $y = -8$ mm.

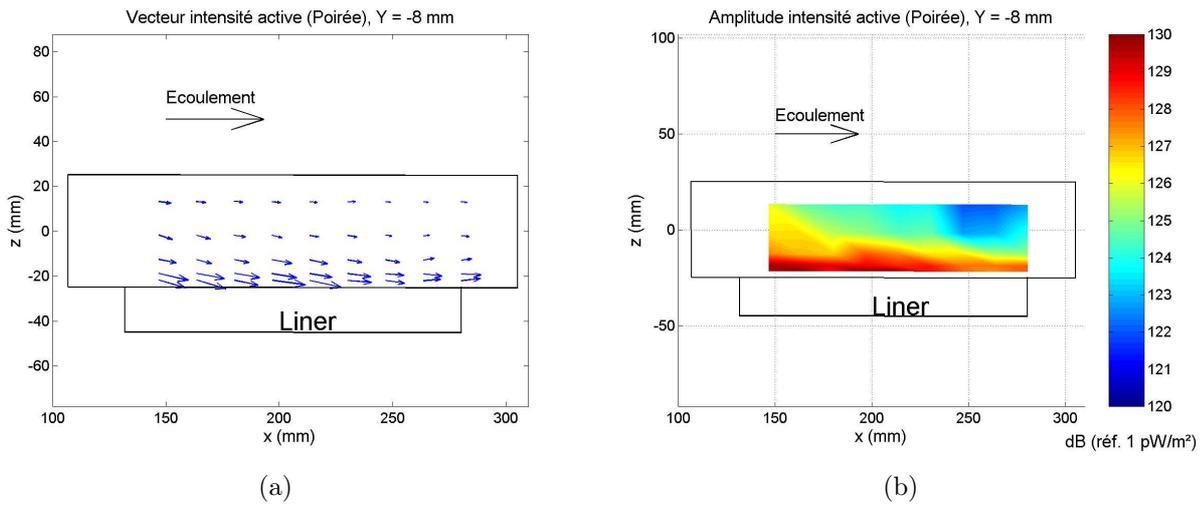


FIG. C.2: Champ du vecteur intensité suivant la définition de Poirée en acoustique de Galbrun en $y = -8 \text{ mm}$.

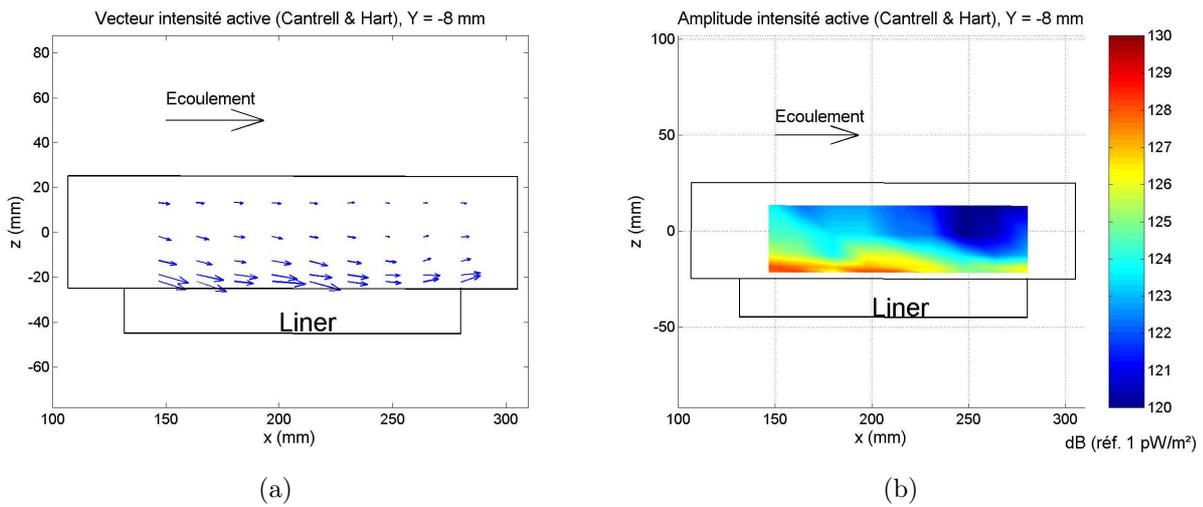


FIG. C.3: Champ du vecteur intensité suivant la définition classique ((b) et (d)) en $y = -8 \text{ mm}$.

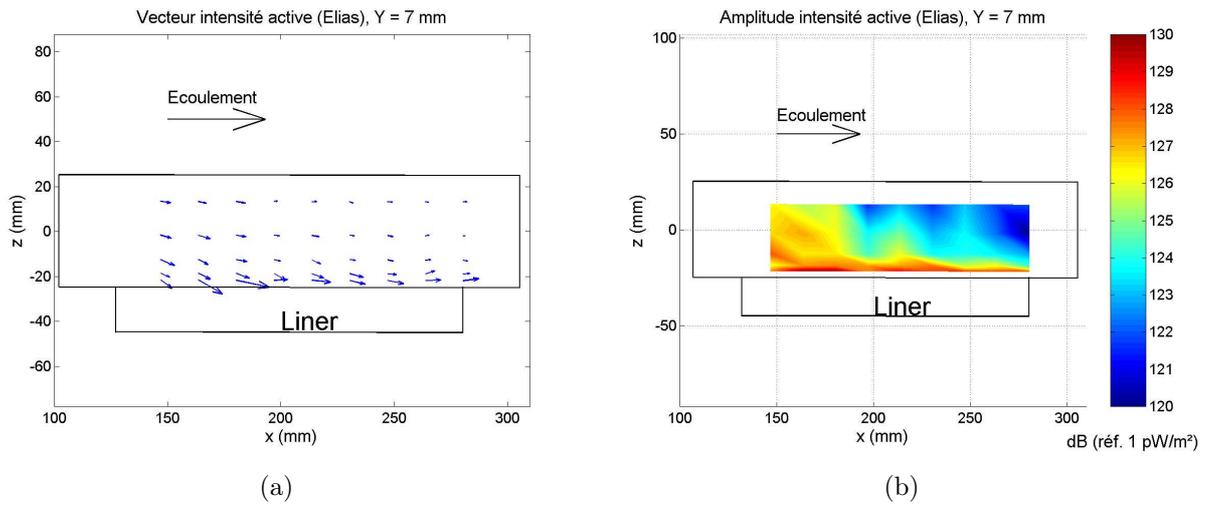


FIG. C.4: Champ du vecteur intensité suivant la définition d'Élias en acoustique de Galbrun en $y = 7 \text{ mm}$.

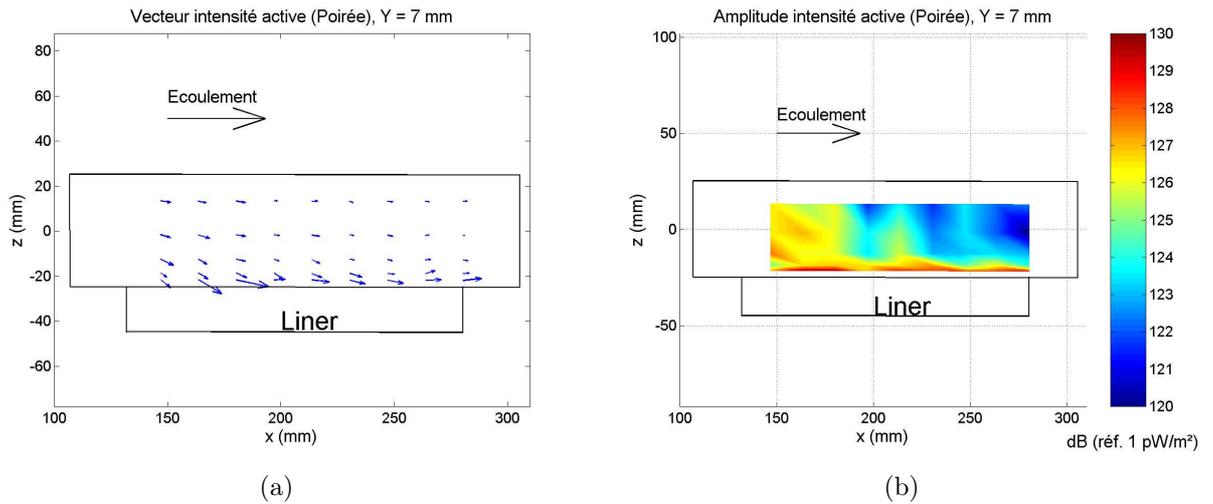


FIG. C.5: Champ du vecteur intensité suivant la définition de Poirée en acoustique de Galbrun en $y = 7 \text{ mm}$.

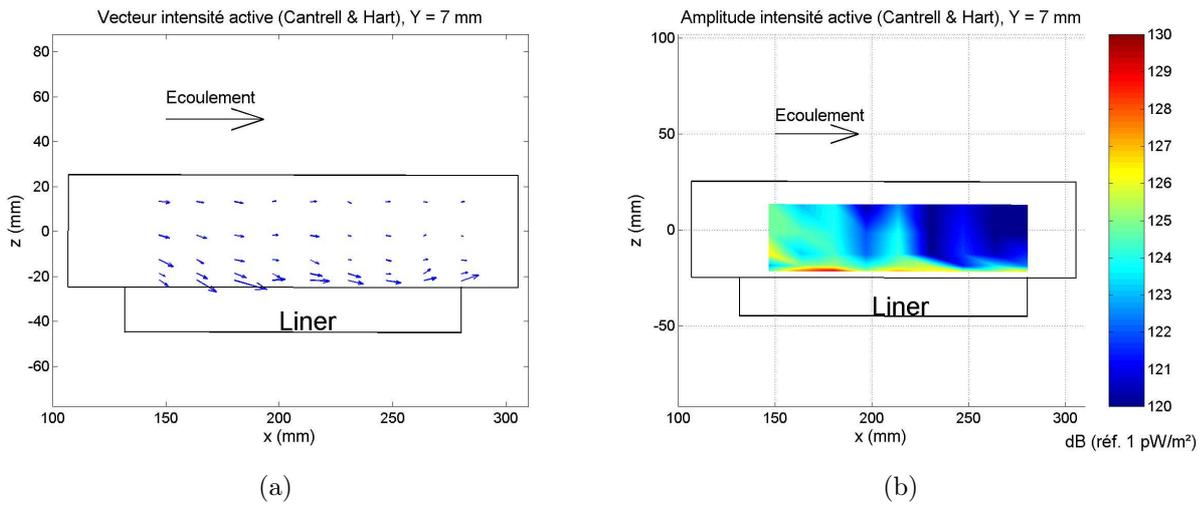


FIG. C.6: Champ du vecteur intensité suivant la définition classique ((b) et (d)) en $y = 7 \text{ mm}$.

Annexe D

Sonde à deux microphones

Le principe théorique de la sonde à deux microphones est expliqué dans [20]. Cependant la partie mathématique n'est pas totalement rigoureuse car l'auteur utilise la transformée de Fourier d'un signal pouvant être aléatoire alors qu'elle n'est pas forcément définie. Bien que le résultat soit inchangé, nous avons repris le raisonnement de l'auteur en le rendant compatible avec ces signaux. Les perturbations sont eulériennes. L'accent ' est omis, de même que l'indice _{ref} des dérivées spatiales. La définition de l'intensité moyennée sur le temps est :

$$\mathbf{I} = \overline{p\mathbf{V}} \quad (\text{D.1})$$

L'hypothèse de variables ergodiques étant souvent faite, la moyenne temporelle peut être remplacée par l'espérance mathématique. Ainsi (D.1) s'écrit :

$$\mathbf{I} = \mathbb{E}(p\mathbf{V}) \quad (\text{D.2})$$

La sonde ne donne qu'une composante de l'intensité I_r suivant l'axe de la sonde orienté par \mathbf{e}_r . De plus, l'espérance mathématique est la valeur à $\tau = 0$ de la fonction d'intercorrélation $R_{pV_r}(\tau)$, qui est elle-même l'intégrale de la densité interspectrale de puissance $S_{pV_r}(f)$:

$$I_r = \mathbb{E}(pV_r) \quad (\text{D.3})$$

$$= R_{pV_r}(0) \quad (\text{D.4})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{pV_r}(f) df \quad (\text{D.5})$$

A partir des deux mesures simultanées de pression acoustique, pour une position de sonde donnée, la vitesse acoustique peut être déduite à l'aide de l'équation linéarisée de conservation de quantité de mouvement :

$$\rho^{\text{ref}} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\text{grad} p \quad (\text{D.6})$$

En particulier, suivant l'axe de la sonde, la composante V_r est :

$$\rho^{\text{ref}} \frac{\partial V_r}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial \mathbf{e}_r} \quad (\text{D.7})$$

Soient p_1 et p_2 les mesures respectives des capsules 1 et 2. La position de la sonde étant fixée, pression et vitesse acoustiques sont vues comme des fonctions du temps. Les approximations \check{V}_r et \check{p} de V_r et p vérifient :

$$\rho^{\text{ref}} \frac{d\check{V}_r}{dt} = -\frac{1}{\Delta x_r} (p_2 - p_1) \quad (\text{D.8})$$

$$\check{p} = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) \quad (\text{D.9})$$

D'où \check{I}_r , l'approximation de I_r :

$$\check{I}_r = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\check{p}\check{V}_r}(f) df \quad (\text{D.10})$$

L'équation différentielle (D.8) peut se réécrire :

$$\rho^{\text{ref}} \frac{d\check{V}_r}{dt} = \frac{1}{\Delta x_r} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}^T P \quad (\text{D.11})$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.12})$$

En considérant P comme l'entrée de (D.11) et \check{V}_r comme la sortie, la réponse en fréquence $H(f)$ est :

$$H(f) = \frac{i}{2\pi f \Delta x_r \rho^{\text{ref}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}^T \quad (\text{D.13})$$

De plus :

$$S_{\check{p}\check{V}_r}(f) = \frac{1}{2} (S_{p_1\check{V}_r}(f) + S_{p_2\check{V}_r}(f)) \quad (\text{D.14})$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}^T S_{P\check{V}_r}(f) \quad (\text{D.15})$$

$S_{P\check{V}_r}(f)$ étant la densité interspectrale de puissance entre l'entrée et la sortie de l'équation (D.11), il vient :

$$S_{P\check{V}_r}(f) = S_P(f) H(f)^T \quad (\text{D.16})$$

$$= \frac{i}{2\pi f \Delta x_r \rho^{\text{ref}}} \begin{pmatrix} S_{p_1}(f) + S_{p_1 p_2}(f) \\ -S_{p_2}(f) - S_{p_2 p_1}(f) \end{pmatrix} \quad (\text{D.17})$$

Ainsi :

$$S_{\check{p}\check{V}_r}(f) = \frac{1}{2} \frac{i}{2\pi f \Delta x_r \rho^{\text{ref}}} [S_{p_1 p_2}(f) - S_{p_2 p_1}(f) - (S_{p_2}(f) - S_{p_1}(f))] \quad (\text{D.18})$$

Or $S_{p_2 p_1}(f) = S_{p_1 p_2}^*(f)$, donc $S_{p_1 p_2}(f) - S_{p_2 p_1}(f) = 2i \text{Im}(S_{p_1 p_2}(f))$. Alors :

$$S_{\check{p}\check{V}_r}(f) = \frac{1}{2} \left[-\frac{2 \text{Im}(S_{p_1 p_2}(f))}{2\pi f \Delta x_r \rho^{\text{ref}}} - i \frac{S_{p_2}(f) - S_{p_1}(f)}{2\pi f \Delta x_r \rho^{\text{ref}}} \right] \quad (\text{D.19})$$

Comme $\text{Re}(S_{\check{p}\check{V}_r}(f))$ est paire et $\text{Im}(S_{\check{p}\check{V}_r}(f))$ est impaire, (D.10) devient :

$$\check{I}_r = 2 \int_0^{+\infty} \text{Re}(S_{\check{p}\check{V}_r}(f)) df \quad (\text{D.20})$$

Soit :

$$\check{I}_r = - \int_0^{+\infty} \frac{2\text{Im}(S_{p_1 p_2}(f))}{2\pi f \Delta x_r \rho^{\text{ref}}} df \quad (\text{D.21})$$

Parfois, la densité interspectrale de puissance peut être définie uniquement pour des fréquences positives par $G_{p_1 p_2}(f) = 2S_{p_1 p_2}(f); \quad \forall f > 0$. Ainsi (D.21) devient :

$$\check{I}_r = - \int_0^{+\infty} \frac{\text{Im}(G_{p_1 p_2}(f))}{2\pi f \Delta x_r \rho^{\text{ref}}} df \quad (\text{D.22})$$

Liste des publications et communications

MINOTTI A., SIMON F., J.-F. PIET J.-F. and MILLAN P. «Signal Processing for In-flow Measurement of Acoustic Velocity by LDV». *8th Aeroacoustics Conference and Exhibit*, AIAA 2002–2463. AIAA/CEAS, Breckenridge, CO, USA (juin 2002).

MINOTTI A., SIMON F., J.-F. PIET J.-F. et MILLAN P. «Mesures de vitesse, impédance et intensité acoustiques en écoulement par Vélocimétrie Laser Doppler». *8ème Congrès Francophone de Vélocimétrie Laser* : pp. 263–271. AFVL, Orsay (septembre 2002).

MINOTTI A., SIMON F., J.-F. PIET J.-F. and MILLAN P. «In-Flow Acoustic Power and Intensity Fields Measurements with a 2D LDV System». *9th Aeroacoustics Conference and Exhibit*, AIAA 2002–2463. AIAA/CEAS, Hilton Head, SC, USA (mai 2003).

MINOTTI A., SIMON F. et MILLAN P. «Mesures d'Intensité et de Puissance Acoustiques en Écoulement avec un Vélocimètre Laser Doppler». Communication aux Journées Mesures de vitesse particulière acoustique par laser. Angers (octobre 2003).

RESUMÉ

CONTRIBUTION À LA MESURE AÉROACOUSTIQUE PAR VÉLOCIMÉTRIE LASER DOPPLER

La réduction des nuisances sonores d'aéronefs implique une meilleure compréhension de la propagation acoustique en présence d'un écoulement quelconque, tant d'un point de vue théorique qu'expérimental. Mais ce phénomène physique est difficile à appréhender. Si l'écoulement n'est pas uniforme, la théorie de Galbrun (représentation lagrangienne) permet d'exprimer, en écoulement quelconque d'un fluide parfait, toutes les grandeurs acoustiques (pression, intensité...) en petites perturbations en fonction d'une seule variable, le vecteur déplacement. Toutefois, elle n'a jamais été expérimentée faute de capteurs adéquats.

Ce travail de thèse propose en premier lieu de montrer la pertinence de l'approche théorique de Galbrun en l'intégrant dans une description non linéaire exacte des perturbations dans un milieu continu. Des équations sont alors obtenues qui, appliquées au cas du fluide parfait, généralisent les équations linéaires de la théorie de Galbrun. Dans un second temps, après avoir montré la faisabilité de la mesure de vitesse acoustique par vélocimétrie laser Doppler (LDV) sur une soufflerie à faible vitesse, la théorie linéaire de Galbrun est expérimentée sur un banc aéroacoustique haute vitesse, spécialement développé à cet effet. Une première caractérisation en écoulement du champ acoustique, notamment le vecteur intensité, au-dessus d'un matériau absorbant a ainsi pu être menée.

Mots clés : Galbrun, aéroacoustique non linéaire, LDV, banc aéroacoustique haute vitesse, intensité en écoulement, matériau acoustique absorbant.

ABSTRACT

CONTRIBUTION TO AEROACOUSTIC MEASUREMENT BY MEAN OF LASER DOPPLER VELOCIMETRY

The aircraft noise reduction implies a better understanding of the acoustic propagation with an arbitrary flow, from both theoretical and experimental points of view. But this physical phenomenon is hard to tackle. If the flow is not uniform, the Galbrun's theory (Lagrangian representation) allows to express, in an arbitrary flow of an inviscid fluid, all the acoustic quantities (pressure, intensity...) under the small disturbances assumption as functions of only one variable, the displacement vector.

The relevance of the Galbrun's theoretical approach is first demonstrated in this Ph. D. work in an exact nonlinear description of disturbances in a continuum. Equations are obtained which lead to a generalization of the linear equations of Galbrun's theory in the case of an inviscid fluid. After the feasibility of the acoustic velocity measurement by Laser Doppler velocimetry (LDV) has been shown in a low-speed wind-tunnel, the linear Galbrun's theory is experimented in an aeroacoustic high-speed bench, specially developed for this purpose. Then, a first in-flow characterization of the acoustic field, especially the intensity vector, above an acoustic liner has been carried out.

Key words: Galbrun, nonlinear Aeroacoustics, LDV, aeroacoustic high-speed bench, in-flow intensity, acoustic liner.

