

THESE

Présentée en vue de
l'obtention du titre de

DOCTEUR

de

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE
ÉCOLE DOCTORALE : Matériaux - Structures - Mécanique**

SPÉCIALITÉ : Génie mécanique

par

Elie ABDULLAH

**Développement d'un élément fini pour la modélisation du
délaminage dans les structures composites**

Soutenue le 14 décembre 2005 devant le jury :

MM. D. BELLET	Président
J.J. BARRAU	Directeur de thèse
J.F. FERRERO	Co-directeur de thèse
D. LE HOUEDÉC	Rapporteur
J.B. MOUILLET	
A. VAUTRIN	Rapporteur

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire Matériaux et Structures de l'École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace de Toulouse, en collaboration avec la société MECALOG.

Je tiens à remercier chaleureusement Monsieur Jean-Jacques BARRAU, Professeur à l'Université Paul Sabatier et directeur de cette thèse. Merci pour sa disponibilité et ses conseils qui m'ont permis de mener à bien ce projet de recherche. Merci pour m'avoir assuré, au niveau humain et technique, les meilleures conditions de travail.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Didier BELLET, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Toulouse, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de thèse.

Je tiens à remercier Monsieur Donatien LE HOUEDÉC, Professeur à l'École Centrale Nantes, pour avoir aimablement accepté d'examiner ce travail et pour les critiques constructives qu'il a bien voulu formuler.

Mes remerciements vont également à Monsieur Alain VAUTRIN, Professeur à l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne, pour avoir accepté d'être rapporteur et pour la qualité de ses remarques qui ont contribué à améliorer le rapport final.

Je remercie Monsieur Jean-Baptiste MOUILLET, Ingénieur à MECALOG / CTA, pour sa disponibilité. J'en profite pour remercier également, de façon générale, la société MECALOG pour l'intérêt qu'elle a porté à cette thèse.

Je voudrais remercier Monsieur Serge CRÉZÉ, chef du Laboratoire Matériaux et Structures pour son accueil chaleureux et les moyens d'essais qu'il a mis à ma disposition.

Je remercie vivement Monsieur Jean-François FERRERO, Maître de Conférence à l'Université Paul Sabatier, pour m'avoir suivi et soutenu au cours de ces années. Merci Jeff pour, sans être exhaustif, ton amitié, ton aide, ta gentillesse, tes lasagnes et ta piscine !

Enfin, je tiens à remercier vivement tous les gens que j'ai rencontrés durant ces dernières années et qui m'ont permis de passer des moments agréables et inoubliables :

Merci Sandrine pour la joie, la bonne ambiance et la féminité que tu as apportées à un labo de mécaniciens...

Merci Issam pour ta gentillesse authentique à la libanaise...

Merci Elias pour ton... énorme gentillesse authentique à la libanaise...

Merci Anne-Laure pour ton amabilité et ta grande tolérance...

Merci Sam pour avoir répondu à toutes les questions que je t'ai posées... et que je ne t'ai pas posées...

Merci Mathieu pour ton extrême politesse...

Merci Piu et Yul pour votre gentillesse et vos nems...

Merci Victorien pour ta présence assidue à Supaero...à ma soutenance...

Merci Javier pour les mots très utiles que tu m'as appris en espagnol...

Merci Christophe pour ta ponctualité de 10h et 16h...

Merci Bruno pour la richesse des conversations de 10h et 16h...

Merci à Christine, Vincent, Suleman et Clément, mes chers stagiaires qui m'ont appelé « chef », je me sens beaucoup plus intelligent depuis...

Merci à Cristina, David, Josu, Jaime et Fernando, sources de bonne ambiance...

Merci Polo pour ton authenticité, tes gags et ta finesse...

Merci Titi pour ton amitié, tes blagues et tes huîtres...

Merci Marco (Chartrou) pour ton amitié, ton aide précieuse et pour la correction des fote d'ortagraffe...

Merci Marco (Chevalier) pour ta bonne mémoire qui t'as permis de ne jamais me dire bonjour deux fois dans la même journée...

Merci Joël pour m'avoir ouvert la porte de mon bureau les fois où j'ai oublié mes clés...

Merci Mimi pour ton éternelle bonne humeur...

Merci les Footeux pour tous les buts que vous m'avez laissé marquer...

Merci aux joueurs XSGLMF pour votre esprit de solidarité...

Merci les Gipsy Queens pour l'attitude funky...

Merci à Docteur Marlène KORDAHI pour les deux étoiles qu'elle m'a collées en éléments finis...

Merci Chadi et Moro, les authentiques, into bass oulo bah !

Merci enfin à ma Famille de m'avoir soutenu durant ces années d'études interminables...

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I - PRELIMINAIRES	9
<i>I-1. INTRODUCTION.....</i>	<i>9</i>
<i>I-2. SOLUTION PROPOSÉE.....</i>	<i>11</i>
I-2.1. Mécanisme simplifié d'endommagement	11
<i>I-3. PLAN DU RAPPORT DE THÈSE.....</i>	<i>13</i>
CHAPITRE II - ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE.....	15
<i>II-1. INTRODUCTION.....</i>	<i>15</i>
<i>II-2. LES CODES DE CALCUL ELÉMENTS FINIS EN DYNAMIQUE</i>	<i>16</i>
II-2.1. Introduction	16
II-2.2. Les équations du mouvement.....	16
II-2.3. Formulation variationnelle : principe des travaux virtuels	17
II-2.4. La formulation éléments finis	18
II-2.5. Schémas d'intégration	20
II-2.6. Schéma implicite.....	21
II-2.7. Schéma explicite	22
II-2.8. Stabilité du schéma explicite	23
II-2.9. Bilan.....	24
II-2.10. Cinématique en éléments finis non-linéaire.....	24
<i>II-2.10.1. Tenseur de déformations de Green - Lagrange</i>	<i>25</i>
<i>II-2.10.2. Petites déformations.....</i>	<i>25</i>
<i>II-2.10.3. Grandes déformations – Déformations vraies</i>	<i>25</i>
<i>II-2.10.4. La formulation co-rotationnelle.....</i>	<i>26</i>
II-2.11. Algorithme de calcul	27
II-2.12. Conclusion.....	28
<i>II-3. MODÉLISATION DE L'ENDOMMAGEMENT DES STRATIFIÉS COMPOSITES.....</i>	<i>29</i>

II-3.1. Introduction	29
II-3.2. Modèles sans éléments d'interface.....	29
<i>II-3.2.1. Modélisation par éléments plaques multicouches.....</i>	<i>30</i>
<i>II-3.2.2. Modélisation par une couche d'éléments volumes par pli composite.....</i>	<i>32</i>
II-3.3. Aperçu des principaux critères de rupture existants.....	34
<i>II-3.3.1. Fissuration matricielle</i>	<i>34</i>
<i>II-3.3.2. Rupture de fibres</i>	<i>36</i>
<i>II-3.3.3. Délaminage</i>	<i>37</i>
II-3.4. Modèles avec éléments d'interface	40
<i>II-3.4.1. Modèles basés sur les forces de liaison</i>	<i>41</i>
<i>II-3.4.2. Modèles basés sur la mécanique de l'endommagement.....</i>	<i>42</i>
<i>II-3.4.3. Modèles basés sur la mécanique de la rupture</i>	<i>45</i>
II-3.5. Conclusion.....	50
II-4. CONCLUSIONS	52
CHAPITRE III - ETUDE NUMERIQUE : FORMULATION DE L'ELEMENT	53
III-1. INTRODUCTION.....	53
III-2. FORMULATION DE LA PHASE VOLUMIQUE	54
III-2.2. Création de l'élément à partir d'un élément à 20 nœuds et 60 ddl.....	54
<i>III-2.2.1 Elément 20 nœuds et 60 ddl</i>	<i>54</i>
<i>III-2.2.2 Elément 8 nœuds et 48 ddl</i>	<i>55</i>
III-2.3. Problématique : point intermédiaire figé au milieu de l'arête	59
III-2.4. Solution proposée : rectification de la transformation.....	63
III-2.5. Choix de l'ordre d'intégration.....	66
III-2.6. Contrôle des modes parasites à rotations égales.....	69
III-2.7. Contrôle des modes d'hourglass	71
III-2.8. Patch test	72
III-2.9. Développement du code MEF_EX	74
III-2.10. Test de poutre encastree en flexion	74
<i>III-2.10.1 Modélisation avec des éléments de forme cubique</i>	<i>74</i>
<i>III-2.10.2 Modélisation avec des éléments de formes irrégulières</i>	<i>76</i>
III-2.11. Etude du comportement de l'élément en traction / compression.....	78
III-2.12. Test de poutre encastree en compression	81

III-2.13. Conclusion	83
III-3. L'ÉLÉMENT PLAQUE ÉPAISSE COMPOSITE : « PEC »	84
III-3.1. Intégration numérique couche par couche.....	84
III-3.2. Test de poutre composite encastrée en compression	85
III-3.3. Test de poutre composite encastrée en flexion	87
III-3.4. Etude de la performance de l'élément	89
<i>III-3.4.1. Effet du rapport longueur / épaisseur de l'élément PEC.....</i>	<i>89</i>
<i>III-3.4.2. Effet du rapport largeur / longueur de l'élément PEC.....</i>	<i>91</i>
III-3.5. Conclusion	93
III-4. FORMULATION DE LA PHASE PLAQUE.....	94
III-4.1. Formulation de l'élément plaque de type Belytschko-Lin-Tsay	94
III-4.2. L'intégration numérique couche par couche	96
III-4.3. Décalage du plan moyen par rapport aux nœuds.....	97
III-5. LA LIAISON PEC – PLAQUES.....	98
III-5.1. Vérification de la liaison PEC – Plaques en sollicitation symétrique	98
III-5.2. Vérification de la liaison PEC – Plaques en sollicitation unilatérale.....	100
III-6. CONCLUSIONS.....	103
CHAPITRE IV - MODELISATION DU DELAMINAGE DANS L'ÉLÉMENT PEC	105
IV-1. INTRODUCTION	105
IV-2. TRANSFORMATION NUMÉRIQUE DE L'ÉLÉMENT PEC EN 2 PLAQUES.....	106
IV-2.1. Technique numérique.....	106
IV-3. MODÉLISATION DU DÉLAMINAGE AU SEIN DE L'ÉLÉMENT.....	108
IV-3.1. Méthode de passage de l'élément PEC à l'élément bi-plaque	108
IV-3.2. Calcul des contraintes.....	110
IV-3.3. Lois d'endommagement et de transfert fonction de la longueur de fissure	111
<i>IV-3.3.1. Principe de recherche des lois</i>	<i>111</i>
<i>IV-3.3.2. Détermination des lois d'endommagement et de transfert</i>	<i>114</i>
<i>IV-3.3.3. Effet du module de cisaillement et du coefficient de Poisson transverses</i>	<i>116</i>
IV-3.4. Conclusion	118

IV-4. CRITÈRE DE DÉLAMINAGE AU NIVEAU LOCAL DE L'ÉLÉMENT.....	119
IV-4.1. Introduction.....	119
IV-4.2. Critère de propagation de délaminage à 0°	119
<i>IV-4.2.1. Calcul du taux de restitution d'énergie basé sur la théorie des poutres</i>	<i>120</i>
IV-4.3. Essai expérimental de poutre DCB	122
<i>IV-4.3.1. Définition du modèle d'essai.....</i>	<i>122</i>
<i>IV-4.3.2. Résultats de l'essai.....</i>	<i>123</i>
IV-4.4. Identification du critère local.....	125
<i>IV-4.4.1. Définition du modèle numérique</i>	<i>125</i>
<i>IV-4.4.2. Résultats de la simulation</i>	<i>127</i>
<i>IV-4.4.3. Identification du critère du délaminage local à l'élément.....</i>	<i>128</i>
IV-4.5. Critère de propagation du délaminage à 45°.....	130
<i>IV-4.5.1. Calcul du taux de restitution d'énergie basé sur la méthode de Ritz.....</i>	<i>130</i>
IV-4.6. Conclusion	133
IV-5. CONCLUSION.....	134
CHAPITRE V - APPLICATIONS NUMERIQUES.....	135
V-1. INTRODUCTION.....	135
V-2. EXEMPLE DE POUTRE DCB	136
V-2.1. Modèle avec une couche d'éléments PEC	136
<i>V-2.1.1. Première simulation</i>	<i>137</i>
<i>V-2.1.2. Rectification de la loi d'endommagement</i>	<i>138</i>
<i>V-2.1.3. Résultats de la simulation.....</i>	<i>139</i>
V-2.2. Sensibilité au maillage.....	140
V-2.3. Modèle avec deux couches d'éléments PEC.....	142
<i>V-2.3.1. Modèle DCB à 2 couches d'éléments dans l'épaisseur.....</i>	<i>143</i>
<i>V-2.3.2. Résultat de la simulation</i>	<i>144</i>
V-2.4. Conclusion	145
V-3. EXEMPLE DE SÉPARATION DE PLAQUE COMPOSITE	146
V-3.1. Introduction	146
V-3.2. Essai expérimental.....	146
<i>V-3.2.1. Définition du modèle d'essai</i>	<i>146</i>
<i>V-3.2.2. Résultats de l'essai</i>	<i>147</i>
V-3.3. Modélisation numérique	148

<i>V-3.3.1. Présentation du modèle numérique</i>	148
<i>V-3.3.3. Utilisation des critères de délaminage</i>	150
<i>V-3.3.4. Définition de la direction de propagation du délaminage</i>	152
<i>V-3.3.5. Résultat de la simulation</i>	153
V-3.4. Conclusion	155
<i>V-4. IMPLÉMENTATION DANS RADIOSS</i>	156
V-4.1. Introduction	156
V-4.2. Architecture de RADIOSS	156
V-4.3. Implémentation de l'élément PEC dans RADIOSS	157
V-4.4. Simulation du test DCB	159
V-4.5. Conclusion	160
<i>V-5. CONCLUSIONS</i>	162
CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES	163
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	167
ANNEXE 1 - PRESENTATION DU CODE DE CALCUL MEF_EX	173

CHAPITRE I

PRELIMINAIRES

I-1. Introduction

L'utilisation des matériaux composites est de plus en plus répandue dans les industries grâce à leurs intéressantes propriétés mécaniques et matérielles. Dans le domaine aéronautique, la demande des industriels pour des matériaux à la fois résistants et légers a été le moteur du développement des composites. Il est devenu courant de trouver sur des avions civils et militaires des parties structurales en matériaux composites telles que les ailerons, dérivés, voilures et pales de rotor. Les structures de certains avions légers sont totalement réalisées en composites.

Cependant, plusieurs points faibles limitent encore leur expansion. Le premier point faible de ce type de matériaux reste généralement leurs coûts globaux. En effet, des matériaux comme du carbone / époxy, couramment utilisés, ont une réponse linéaire élastique jusqu'à rupture. Ce comportement fragile rend les structures composites vulnérables à l'impact qui doivent alors satisfaire des procédures de certification onéreuses pour les impacts à grande vitesse.

De plus, le comportement des composites aux chocs reste difficile à prédire. Ceci amène les industriels à faire des essais souvent coûteux afin de déterminer la réponse aux crashes et impacts de structures complexes, et de comprendre les phénomènes d'endommagement mis en jeu. La diminution du nombre d'essais passe forcément par une compréhension fine de ces phénomènes physiques ainsi que par le développement de modèles éléments finis de l'endommagement. Cependant, la modélisation des endommagements des structures complexes reste à l'heure actuelle difficile à réaliser.

Cette étude, réalisée en collaboration avec la société MECALOG, résulte de la difficulté pour les industriels à modéliser l'endommagement des composites, en particulier le délaminage en mode I lors d'un impact sur des structures industrielles. A terme, ce travail doit permettre de modéliser par exemple l'endommagement de pales d'hélicoptère suite à l'impact, ou à simuler l'écrasement de poutre sinus.

En effet, certaines structures composites sont conçues de façon à absorber de l'énergie lors d'un crash. C'est le cas des poutres sinus qui sont situées sous les planchers d'hélicoptères ou sous le plancher cargo d'avions de transport. Lors d'un crash, la rupture de ces pièces permet d'absorber une importante quantité d'énergie et de conserver ainsi l'intégrité des passagers et des pilotes. Leur écrasement est amorcé par un mécanisme initiateur (trigger) qui empêche d'atteindre des pics de charge élevés. Parmi les ruptures se produisant pendant l'écrasement, le délaminage en mode I présente un mode essentiel.

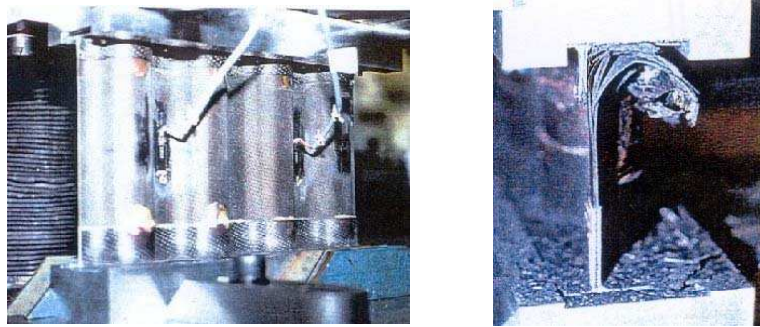


Figure I - 1 : Essai de compression d'une poutre sinus - délaminage en mode I

D'autre part, l'équipe STRUCOMP du laboratoire Génie Mécanique de Toulouse s'intéresse à la tenue à l'impact des pales d'hélicoptère. La pale constitue un élément essentiel de sécurité et fait l'objet d'essais de certification. Dans cet autre cas, l'impact sur la pale produit des délaminages au niveau du longeron et des décollements carbone / verre au niveau du bord d'attaque ainsi que des décollement peaux / mousse sur l'intrados et l'extrados de la pale (Figure I - 2).

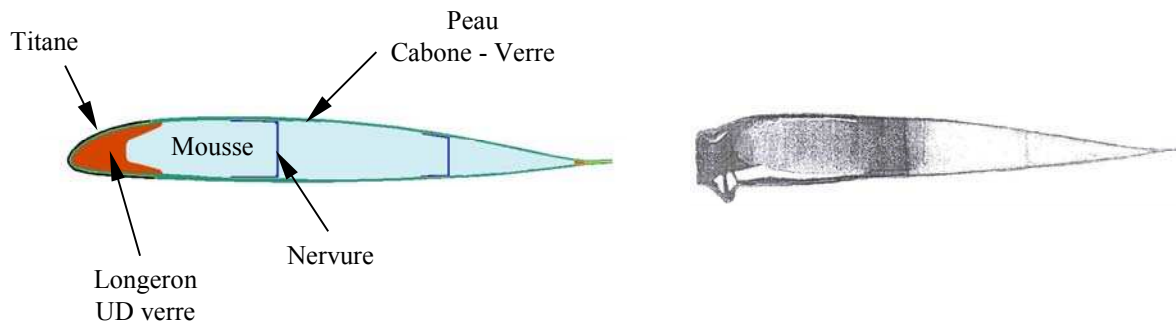


Figure I - 2 : Endommagement de pale d'hélicoptère suite à l'impact

Pour ces deux exemples, il est important dans un premier temps de comprendre les mécanismes de rupture et d'absorption d'énergie. Cette compréhension des mécanismes servira de base au développement d'un outil de prédiction pour la simulation de la réponse des structures composites subissant des crashes et impacts. Cependant, la modélisation des structures complexes et de tailles industrielles est difficile à l'heure actuelle par les méthodes classiques. De plus, elle présente des temps de calcul importants.

Les modélisations éléments finis de l'impact des structures composites présentent certaines limitations. D'un côté, l'utilisation des éléments coques multicouches assure des temps de calcul relativement réduits mais ne permet pas la modélisation du délaminage en mode I, mode essentiellement piloté par la contrainte σ_{33} . D'un autre côté, l'utilisation des éléments volumiques, capable de représenter les principaux modes d'endommagement, présente un temps de calcul élevé surtout si l'on veut modéliser de grandes structures. On trouvera dans le chapitre II une étude bibliographique détaillée des différents modèles existants, présentant les avantages et les inconvénients des diverses modélisations ainsi que les critères utilisés.

I-2. Solution proposée

Notre étude propose une méthode qui doit permettre de simplifier les modélisations et de diminuer le temps de calcul. On propose d'utiliser un élément 3D dans l'épaisseur du stratifié qui a accès à la contrainte σ_{33} ce qui lui donne la capacité de subir un délaminage en mode I. On a adopté une approche multicouche permettant d'avoir une seule couche d'éléments dans l'épaisseur. Ainsi, d'une part, le nombre de degrés de liberté est relativement réduit, et d'autre part, la taille des éléments est relativement grande ce qui a un effet bénéfique sur le temps de calcul.

L'élément proposé a la particularité de pouvoir se transformer en deux éléments plaques suite au délaminage et permet ainsi de reproduire correctement l'endommagement correspondant à la séparation des plis.

I-2.1. Mécanisme simplifié d'endommagement

La première étape consiste à définir un modèle simplifié des mécanismes d'endommagement mis en jeu lors d'un impact faisant apparaître du délaminage en mode I.

On suppose qu'un seul délaminage en mode I se produit dans l'épaisseur d'un élément et qui est régie par la contrainte transverse normale σ_{33} . Lorsque cette ouverture apparaît, les contraintes σ_{33} présentes dans les deux tronçons ainsi formés sont insuffisantes pour produire de nouvelles ouvertures. Néanmoins, ces tronçons peuvent subir des contraintes de cisaillement et des moments de flexion importants qui seront à l'origine de l'apparition d'autres modes d'endommagement tels que la fissuration de la matrice, la rupture de fibres et le délaminage mais en mode II ou III.

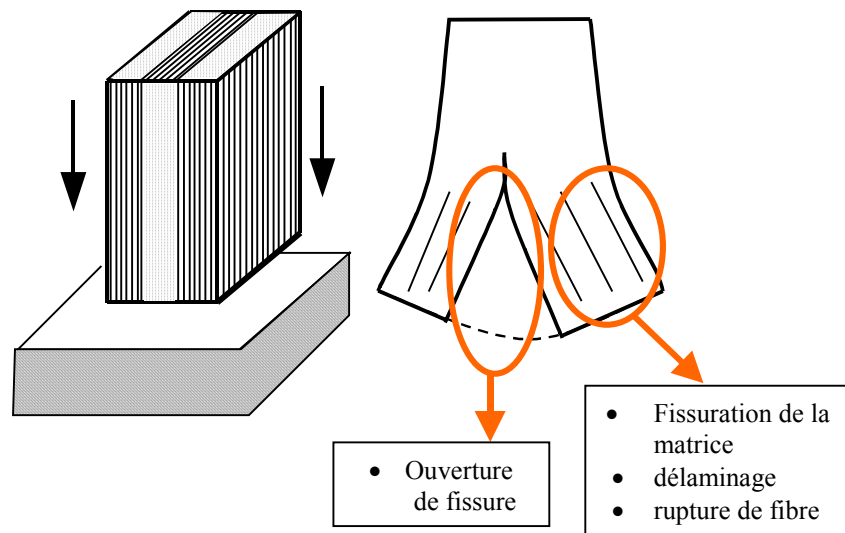


Figure I - 3 : Mécanisme simplifié d'endommagement

L'endroit où l'ouverture se produit est défini a priori. Dans le cas d'écrasement des poutres sinus, ceci pourrait correspondre physiquement à l'endroit où se trouvent les initiateurs.

Dans un stratifié ayant déjà subi un délaminage en mode I, la contrainte σ_{33} dans les parties ouvertes n'a plus d'importance physique significative localement. Donc, l'élément 3D de départ peut se comporter, en post-délaminage, comme étant deux plaques physiquement indépendantes. Ainsi, la dégradation locale du moment d'inertie et par conséquent de la rigidité de flexion et de la résistance au flambage sont représentés correctement, indépendamment de la rigidité de membrane qui dans certains cas peut rester intact.

L'élément volumique proposé permet de simplifier fortement la modélisation des structures composites complexes et de décrire correctement le phénomène de délaminage.

Pour ne pas pénaliser le temps de calcul en créant de nouveaux éléments, les 2 plaques qui apparaissent après délaminage sont formées par les 4 nœuds de la face supérieure de l'élément volumique pour l'une et par les 4 nœuds de la face inférieure pour l'autre.

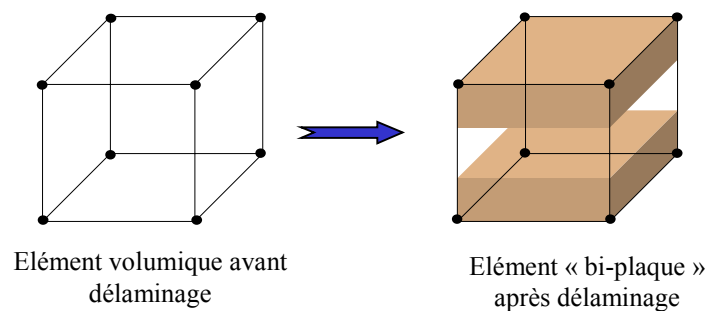


Figure I - 4 : Transformation de l'élément plaque épaisse en un élément "bi-coque"

Ainsi, pour modéliser par exemple une poutre "Double Cantilever Beam", au lieu d'utiliser plusieurs éléments 3D dans l'épaisseur avec des éléments d'interface intercalés au centre de la poutre entre les couches, on utilise une seule couche du nouvel élément qui se transforme en deux coques physiquement indépendantes au fur et à mesure que la fissure se propage.

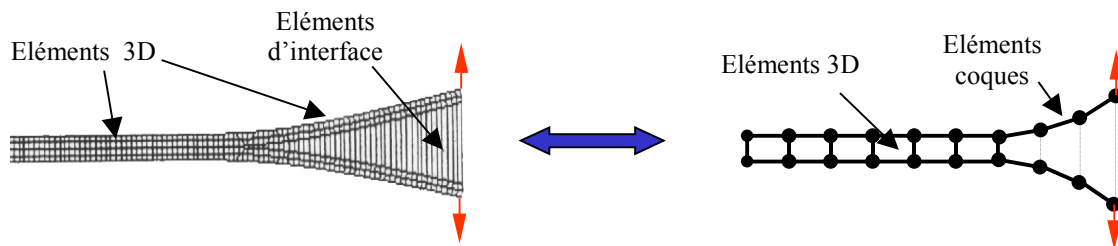


Figure I - 5 : Modélisation d'une poutre DCB

L'élément a été implanté dans le code de calcul éléments finis explicite RADIOSS. Celui-ci est dédié aux simulations des problèmes dynamiques non-linéaires. A noter que, dans un premier temps, il a paru plus judicieux de développer l'élément en dehors de l'environnement RADIOSS. Un code éléments finis explicite (MEF_EX) a alors été spécialement élaboré pour cet effet en langage FORTRAN. Il va permettre de programmer la

formulation du nouvel élément et de tester ces performances avec des exemples simples. Les détails de ce code sont décrits en annexe 1.

I-3. Plan du rapport de thèse

Ce travail est divisé en 4 parties.

La première partie présente les codes éléments finis explicites ainsi qu'une recherche bibliographique sur les problèmes d'impact des structures composites. Les différents modes d'endommagement sont étudiés. Les différents critères de ruptures sont présentés ainsi que les modélisations éléments finis de différentes structures soumises à un impact.

Les différentes étapes du développement du nouvel élément sont présentées dans la deuxième partie : choix de l'élément, écriture des fonctions de formes et leurs modifications, formulation de l'élément composite multicouche et tests de validation.

La troisième partie traite le problème de la modélisation du délaminage au niveau de l'élément. La représentation du délaminage à travers des lois d'endommagement est étudiée. La loi de transfert de la rigidité de membrane de l'élément volume à l'élément bi-plaque est élaborée. Un critère de délaminage basé sur les théories simples des poutres et des plaques et sur la mécanique de la rupture est défini.

Des applications numériques de poutres Double Cantilever Beam et de séparation de plaque composite pré-fissurée sont présentées dans la quatrième partie, ainsi que l'implantation de l'élément dans le code de calcul RADIOSS.

CHAPITRE II

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

II-1. Introduction

Ce travail de thèse peut se diviser en deux grandes parties. Dans une première partie, on construit la formulation élément fini de l'élément développé. Dans une seconde partie, on s'attache à modéliser les phénomènes physiques dans l'élément, c'est-à-dire, définir la modélisation du délaminage et son contrôle à travers un critère de rupture et une loi d'endommagement.

Dans cette optique, l'étude bibliographique porte sur deux grands axes : la théorie des éléments finis en dynamique et les différentes modélisations des endommagements des structures composites.

Dans une première partie, on analyse la méthode éléments finis en dynamique. On rappelle les bases théoriques de cette méthode qui serviront d'une part à la formulation du nouvel élément et d'autre part au développement d'un code éléments finis explicite nécessaire pour la programmation et la vérification de cet élément. L'aperçu de la méthode des éléments finis présenté dans cette partie est basé sur de nombreux travaux existants parmi lesquels nous citerons [IMBERT (1984)], [BATHE (1982)], [ZIENKIEWICZ (1971)], [CRISFIELD (1991)] et [RADIOSS (2001)].

Dans la seconde partie, on décrit les modes principaux d'endommagement que subissent les structures composites et les critères de rupture les plus utilisés pour contrôler ces modes. On évoque également les différentes modélisations existantes pour ces modes. L'accent est particulièrement mis sur la modélisation du délaminage, notamment sur la mécanique de la rupture qui constitue un point essentiel pour l'élaboration du critère de délaminage présenté au chapitre IV.

II-2. Les codes de calcul Eléments Finis en dynamique

II-2.1. Introduction

La connaissance de la répartition des déformations et des contraintes dans un milieu continu ou de la réponse d'une structure suite à une sollicitation quelconque est nécessaire pour l'ingénieur. Ces informations sont déterminées d'une façon exacte pour des structures simples (barres, poutres, plaques) dont on dispose de la formulation théorique. Cependant, quand la structure devient complexe, la solution analytique devient impossible à établir.

Pour cela, il faut alors se tourner vers des modèles numériques où la structure est décomposée en plusieurs sous-domaines de formes géométriques simples qu'on appelle « éléments finis ». Ces sous-domaines sont interconnectés par des points situés aux frontières des éléments appelés « nœuds ».

Les déplacements de ces nœuds seront les principaux paramètres inconnus du problème. Un ensemble de fonctions (polynômes) est choisi pour définir le champ de déplacement dans chaque élément en fonction des déplacements aux nœuds. Ces fonctions permettent de définir le champ des déformations dans l'élément à partir des déplacements nodaux.

A partir de ce champ de déformation et connaissant les propriétés des matériaux, le champ des contraintes est ensuite défini, ce qui contribue au calcul de forces internes à l'élément et concentrées aux nœuds.

L'assemblage des caractéristiques élémentaires (rigidité, masse, forces internes) pour tous les éléments permet alors de trouver la réponse globale de la structure et de déterminer les inconnues du problème (déplacements ou accélérations) par résolution des équations du mouvement.

II-2.2. Les équations du mouvement

Considérons un solide Ω de volume V et de surface A soumis à des sollicitations fonctions du temps $\bar{\tau}(t)$. Sur la surface A les conditions aux limites sont : sur A_u les déplacements \bar{u}_i sont imposés et les efforts surfaciques $\tau_i dA$ sont inconnus, sur A_t ce sont les sollicitations externes qui sont imposées et les déplacements sont inconnus. Dans le volume du solide, les forces de volume $\rho b_i dV$ sont connues, les déplacements u_i , déformations ε_{ij} et contraintes σ_{ij} sont inconnus.

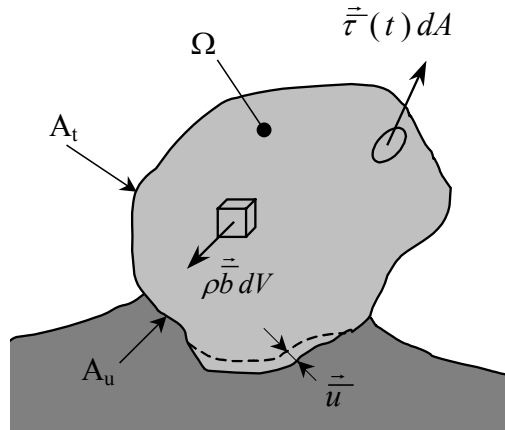


Figure II - 1 : Solide Ω

La solution du problème doit satisfaire aux équations du mouvement du volume :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (\text{Eq. II - 1})$$

$$\sigma = \sigma^T \quad (\text{Eq. II - 2})$$

ainsi qu'aux conditions aux limites sur la surface A_t :

$$n_i \sigma_{ij} = \tau_i \quad (\text{Eq. II - 3})$$

II-2.3. Formulation variationnelle : principe des travaux virtuels

La résolution exacte de la forme différentielle (Eq. II – 1 à II – 3) est pratiquement impossible. Le recours à des résolutions approchées basées sur des techniques numériques s'impose alors. Dans cette optique, la forme intégrale, valable pour tout problème de physique gouverné par une forme différentielle, est généralement supérieure.

La première étape de résolution consiste à remplacer les équations d'équilibre par une forme faible équivalente dite formulation variationnelle.

La formulation variationnelle s'obtient en multipliant l'équation différentielle locale par un champ vectoriel virtuel δv_i vérifiant les conditions aux limites et en l'intégrant sur tout le volume :

$$\int_V \left(\delta v_i \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i - \rho \dot{v}_i \right) \right) dV = 0 \quad (\text{Eq. II - 4})$$

En développant le produit dans l'intégrale et en intégrant par partie le terme en $\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}$ on obtient :

$$\int_A \sigma_{ji} (\delta v_i) n_j dA - \int_V \sigma_{ji} \frac{\partial (\delta v_i)}{\partial x_j} dV + \int_V \rho b_i (\delta v_i) dV - \int_V (\delta v_i) \rho \dot{v}_i dV = 0 \quad (\text{Eq. II - 5})$$

en utilisant la condition aux limites sur la surface (Eq. II – 3), l'équation précédente devient :

$$\int_V \sigma_{ji} \frac{\partial (\delta v_i)}{\partial x_j} dV - \int_A (\delta v_i) \tau_i dA - \int_V \rho b_i (\delta v_i) dV + \int_V (\delta v_i) \rho \dot{v}_i dV = 0 \quad (\text{Eq. II - 6})$$

Cette relation n'est autre que l'expression du principe des travaux virtuels. Son avantage est qu'elle réunit en une seule relation l'équation du mouvement du volume (Eq. II – 1), la propriété de symétrie (Eq. II – 2) et les conditions aux limites aux surfaces (Eq. II – 3).

Physiquement, le premier terme de l'équation II – 6 correspond à l'énergie interne virtuelle (δW_{int}), le deuxième et troisième terme correspondent au travail externe virtuel (δW_{ext}), le dernier terme représente l'énergie virtuelle d'inertie (δW_{inert}). Cette équation peut alors être écrite de la façon suivante :

$$\delta W_{int} - \delta W_{ext} + \delta W_{inert} = 0 \quad (\text{Eq. II - 7})$$

Le principe des travaux virtuels implique que le travail virtuel extérieur est égal au travail virtuel intérieur pour tout champ de déplacement virtuel compatible.

II-2.4. La formulation éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à réduire le solide Ω à une structure composée d'éléments discrets interconnectés par des nœuds (Figure II - 2).

On caractérise le comportement de cette structure par un nombre fini de paramètres inconnus : les déplacements aux nœuds.

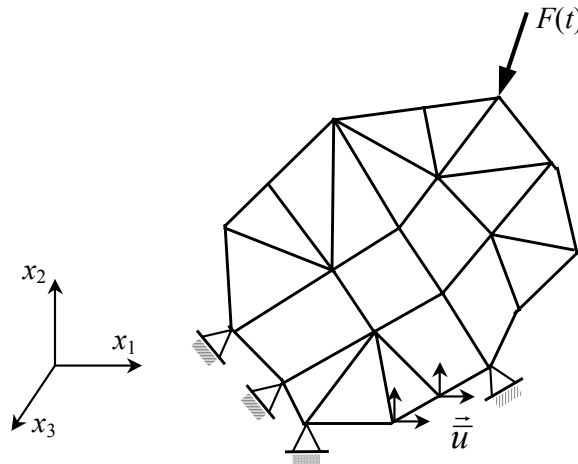


Figure II - 2 : Discrétisation du solide Ω

Le déplacement en fonction du temps d'un point quelconque à l'intérieur d'un élément peut être défini par l'approximation suivante :

$$u_i(X, t) = N_I(X)u_{il}(t) \quad (\text{Eq. II - 8})$$

où X représente les coordonnées (x_1, x_2, x_3) d'un point matériel de la structure dans la configuration initiale ($t = 0$), N_I sont les fonctions d'interpolation et u_{il} les déplacements du nœud I .

La vitesse en ce point peut alors s'écrire :

$$v_i(X, t) = \frac{\partial u_i(X, t)}{\partial t} = N_I(X)v_{il}(t) \quad (\text{Eq. II - 9})$$

De la même manière, l'accélération s'exprime :

$$\dot{v}_i(X, t) = N_I(X)\dot{v}_{il}(t) \quad (\text{Eq. II - 10})$$

v_{il} et \dot{v}_{il} étant respectivement la vitesse et l'accélération au nœud I .

En écrivant le champ de vitesse virtuelle de la même façon :

$$\delta v_i(X) = N_I(X)\delta v_{il} \quad (\text{Eq. II - 11})$$

le principe des travaux virtuels devient :

$$\delta v_{il} \int_V \sigma_{ji} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} dV - \delta v_{il} \int_A N_I \tau_i dA - \delta v_{il} \int_V \rho b_i N_I dV + \delta v_{il} \int_V N_I N_J \rho \dot{v}_{il} dV = 0 \quad (\text{Eq. II - 12})$$

Le premier terme de cette équation correspond à la puissance interne virtuelle qui permet de définir les forces internes aux nœuds :

$$\delta W_{\text{int}} = \delta v_{il} f_{il}^{\text{int}} = \delta v_{il} \int_V \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV \quad (\text{Eq. II - 13})$$

ce qui donne :

$$f_{il}^{\text{int}} = \int_V \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV \quad (\text{Eq. II - 14})$$

Les forces externes sont définies en utilisant le terme associé à la puissance externe virtuelle :

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta v_{il} f_{il}^{\text{ext}} = \delta v_{il} \int_A N_I \tau_i dV + \delta v_{il} \int_V N_I \rho b_i dV \quad (\text{Eq. II - 15})$$

d'où :

$$f_{il}^{ext} = \int_A N_I \tau_i dV + \int_V N_I \rho b_i dV \quad (\text{Eq. II - 16})$$

De même, le dernier terme peut être réécrit en fonction des forces d'inertie aux nœuds :

$$\delta W_{inert} = \delta v_{il} f_{il}^{inert} = \delta v_{il} \int_V N_I N_J \rho \dot{v}_{il} dV \quad (\text{Eq. II - 17})$$

il en résulte :

$$f_{il}^{inert} = \int_V N_I N_J \rho \dot{v}_{il} dV \quad (\text{Eq. II - 18})$$

or, la matrice masse élémentaire est définie par :

$$M_{ijIJ} = \int_V \rho N_I N_J dV \quad (\text{Eq. II - 19})$$

les forces d'inertie s'écrivent alors :

$$f_{il}^{inert} = M_{ijIJ} \dot{v}_{il} \quad (\text{Eq. II - 20})$$

ceci permet d'exprimer le principe des puissances virtuelles de la façon suivante, quelque soit le champ de vitesse virtuelle δv_{il} :

$$\delta v_{il} (M_{ijIJ} \dot{v}_{il} + f_{il}^{int} - f_{il}^{ext}) = 0 \quad (\text{Eq. II - 21})$$

ce qui mène à l'équation du mouvement sous forme matricielle :

$$M \frac{dv}{dt} = f^{ext} - f^{int} \quad (\text{Eq. II - 22})$$

II-2.5. Schémas d'intégration

On distingue deux algorithmes de résolution de problème éléments finis en dynamique : explicite et implicite. Le premier est surtout utilisé pour des problèmes de propagation d'ondes et d'impact à grande vitesse. Le second est plus adapté à des problèmes statiques, quasi statiques et dynamiques à basse fréquence.

En dynamique, les sollicitations externes et la réponse d'une structure évoluent dans le temps. Il est donc nécessaire de discrétiser la durée du problème $[t_0, t_{fin}]$ en un certain nombre d'intervalles de temps Δt et de résoudre l'équation du mouvement à chaque instant t_i de l'ensemble $\{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{fin}\}$ tel que $t_i = t_{i-1} + \Delta t$.

La résolution de l'équation différentielle de type : $R = M\ddot{u} + f^{int} - f^{ext} = 0$ peut se faire par intégration directe en utilisant le schéma de Newmark. Cette méthode consiste à écrire les déplacements, vitesses et accélérations à l'instant t_{n+1} en fonction des mêmes grandeurs obtenues au pas précédent t_n tel que [CRISFIELD (1991)]:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{u}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_{n+1} \quad (\text{Eq. II - 23})$$

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{u}_n + \gamma \Delta t \ddot{u}_{n+1} \quad (\text{Eq. II - 24})$$

où β et γ sont les constantes de Newmark. En adoptant un certain choix de ces constantes, on peut obtenir soit un schéma implicite soit un schéma explicite.

II-2.6. Schéma implicite

Le schéma est dit implicite quand le vecteur déplacement au pas $n+1$ est fonction des caractéristiques du pas n et du pas $n+1$. Ce schéma se traduit en prenant $\beta = 1/4$ et $\gamma = 1/2$ où l'on considère une accélération moyenne constante sur un pas de temps. Ces valeurs de β et γ assurent un schéma d'intégration inconditionnellement stable à grande précision.

Pour résoudre l'équation de mouvement, l'accélération \ddot{u}_{n+1} à l'instant t_{n+1} est exprimée en fonction de la vitesse et du déplacement. Toutes les informations étant connues au pas n , l'équation différentielle de second ordre se réduit à une équation différentielle d'ordre zéro avec u_{n+1} comme seule inconnue. Le vecteur résidu devient une fonction implicite de u_{n+1} :

$$R(u_{n+1}) = \frac{4}{\Delta t^2} M u_{n+1} - M \left(\frac{4}{\Delta t^2} u_n - \frac{4}{\Delta t} \dot{u}_n - \ddot{u}_n \right) + f_{n+1}^{int} - f_{n+1}^{ext} = 0 \quad (\text{Eq. II - 25})$$

Cette équation est non-linéaire en u_{n+1} à travers le terme des forces internes. La solution est calculée avec une méthode itérative, Newton – Raphson par exemple, qui consiste à trouver une meilleure approximation ($u_{n+1} + \Delta u$) à partir d'une approximation initiale u_{n+1} en résolvant l'équation linéaire :

$$\left(\frac{4}{\Delta t^2} M + K_t \right) \Delta u = R(u_{n+1}) \quad (\text{Eq. II - 26})$$

ou encore :

$$K_{glob} \Delta u = R(u_{n+1}) \quad (\text{Eq. II - 27})$$

avec :

$$K_{glob} = \frac{4}{\Delta t^2} M + K_t \quad (\text{Eq. II - 28})$$

K_t étant la matrice de rigidité tangente :

$$K_t = \frac{\partial f^{int}}{\partial u} \quad (\text{Eq. II - 29})$$

Pour les problèmes non-linéaires, cette méthode nécessite l'assemblage et l'inversion de la matrice K_{glob} à chaque pas de temps. Cette opération, peut devenir très coûteuse en temps de calcul et inapplicable à des structures industrielles complexes. Quant à la caractéristique physique du schéma implicite, il ne permet pas le traitement de phénomènes locaux. En effet, la matrice inverse $[K_{glob}]^{-1}$ est, à priori, une matrice pleine [BONINI (1995)] entraînant un couplage entre les éléments, ce qui rend la réponse de la structure globale même si la sollicitation est locale. Ainsi, une force locale appliquée a un effet immédiat sur le reste de la structure. De ce fait, le schéma implicite est surtout utilisé pour des problèmes statiques, quasi statiques et dynamiques à basse fréquence.

II-2.7. Schéma explicite

Le schéma est dit explicite quand le vecteur déplacement du pas $n+1$ n'est fonction que des caractéristiques du pas n . Le schéma explicite s'obtient en choisissant les valeurs $\beta = 0$ et $\gamma = 1/2$ dans les formules de Newmark, ce qui donne :

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_n \quad (\text{Eq. II - 30})$$

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_n + \ddot{u}_{n+1}) \quad (\text{Eq. II - 31})$$

Toutes les informations étant connues au pas n , le déplacement u_{n+1} peut être calculé ainsi que les déformations, les contraintes et les forces internes au pas $n+1$. L'équation de mouvement peut ainsi être résolue pour obtenir l'accélération \ddot{u}_{n+1} et par suite la vitesse \dot{u}_{n+1} en utilisant l'équation précédente.

Cependant, la majorité des codes « explicites » utilise un schéma d'intégration légèrement différent. En effet, la nécessité d'utiliser la vitesse pour le calcul des taux de déformations et de contraintes pour les comportements non-linéaires et à grandes déformations incite à calculer la vitesse au demi pas de temps $n + 1/2$ en fonction de l'accélération au pas n . Le schéma explicite prend alors la forme suivante [RADIOSS (2001)]:

1- Calcul de l'accélération au pas n :

$$\ddot{u}_n = [M]^{-1} (f_n^{ext} - f_n^{int}) \quad (\text{Eq. II - 32})$$

dans les codes explicite de calcul dynamique, la masse est supposée répartie sur les nœuds, ce qui rend la matrice masse $[M]$ diagonale et son inversion triviale. Notons que l'intégration explicite satisfait naturellement à l'équation de mouvement au calcul de l'accélération.

2- Calcul de la vitesse au demi pas de temps $n + \frac{1}{2}$:

$$\dot{u}_{n+\frac{1}{2}} = \dot{u}_{n-\frac{1}{2}} + \Delta t_{n+\frac{1}{2}} \ddot{u}_n \quad (\text{Eq. II - 33})$$

avec

$$\Delta t_{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t_n + \Delta t_{n+1}}{2} \quad (\text{Eq. II - 34})$$

le pas de temps pouvant être variable pour des raisons de stabilité.

3- Calcul des déplacements au pas $n + 1$:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t_{n+1} \dot{u}_{n+\frac{1}{2}} \quad (\text{Eq. II - 35})$$

II-2.8. Stabilité du schéma explicite

Le schéma d'intégration explicite est conditionnellement stable, ce qui veut dire que le pas de temps Δt ne doit pas dépasser une certaine valeur critique au delà de laquelle le calcul diverge. La condition de stabilité s'exprime sous la forme :

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}} = \Delta t_{\text{critique}} \quad (\text{Eq. II - 36})$$

ou ω_{\max} est la plus grande fréquence propre du système :

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (\text{Eq. II - 37})$$

avec K la matrice de rigidité du modèle et M sa matrice masse.

En pratique, le pas de temps critique est calculé en fonction de la taille du plus petit élément et de la vitesse de propagation du son :

$$\Delta t_{\text{critique}} = \frac{l}{c} \quad (\text{Eq. II - 38})$$

l étant la longueur caractéristique de l'élément qui dépend de sa forme, et c la vitesse de propagation du son dans le matériau.

II-2.9. Bilan

Contrairement à un code de calcul implicite, le code explicite ne nécessite pas l'assemblage ni l'inversion d'une matrice de rigidité. Ceci permet une robustesse de calcul et évite les problèmes de convergence ou d'inversion de matrice liés à des déplacements d'ensemble, de différences considérables dans les rigidités de parties adjacentes du modèle, ou à un maillage trop allongé (rapport de dimensions supérieur à 10) [IMBERT (1984)].

Cependant, la stabilité du calcul explicite impose une limite sur la taille du pas de temps qui peut devenir très petit. Par conséquent un nombre élevé de cycles de calcul est demandé. En effet, le nombre de cycles dans un calcul explicite est 100 à 10000 fois plus grand que dans un calcul implicite [HALLQUIST (1998)]. Ce dernier, étant un schéma inconditionnellement stable, n'a pas de contrainte sur la taille du pas de temps et demande ainsi un nombre réduit de cycles de calcul.

Pour des problèmes à grande vitesse de chargement, particulièrement pour les matériaux « non linéaires » (matériaux élasto-plastiques), le pas de temps nécessaire pour suivre l'évolution de la contrainte est souvent du même ordre de grandeur que le pas de temps critique. Dans ces cas, la limitation due au pas de temps dans la méthode d'intégration explicite ne constitue pas un désavantage.

Par contre, pour des vitesses de chargement trop basses, la condition de stabilité est largement en dessous du pas de temps nécessaire pour suivre l'évolution de la contrainte et de la réponse de la structure. De ce fait, le schéma explicite n'est pas efficace pour ce genre d'application [BELYTSCHEK (1976)]. Une intégration implicite est, dans ce cas, parfaitement adaptée.

Les codes implicites permettent un calcul global à l'échelle de la structure. Ils sont adaptés à des problèmes statiques, quasi statiques et dynamiques à basse fréquence. D'une façon générale, la vitesse et la durée du chargement par rapport au temps nécessaire pour qu'une onde traverse la structure permet de caractériser le problème : si le temps de montée de la force et sa durée dépassent le temps de plusieurs aller-retour de l'onde, le problème peut être qualifié de quasi-statique.

Par contre, dans les codes explicites, le calcul des forces internes aux nœuds se fait au niveau de chaque élément, indépendamment du reste de la structure. Cela permet de traiter les phénomènes locaux et les propagations d'ondes associés souvent à des problèmes de dynamique rapide comme les impacts et les crashes. Cette caractéristique permet également de traiter facilement les modèles éléments finis par un calcul parallélisé.

II-2.10. Cinématique en éléments finis non-linéaire

Pour les problèmes à non-linéarité géométrique, c'est-à-dire les problèmes à grands déplacements et grandes rotations, plusieurs expressions ont été proposées pour caractériser l'état de déformation. Cette caractérisation est d'ailleurs purement géométrique.

II-2.10.1. Tenseur de déformation de Green - Lagrange

Le tenseur de déformations de Green – Lagrange (dit aussi tenseur de Green) est calculé par rapport à la configuration initiale du système. Il s'écrit :

$$E_{ij}^G = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (\text{Eq. II - 39})$$

Ce tenseur est établi dans les axes (X_i) de la configuration initiale (à l'instant $t = 0$). La formulation du mouvement prenant les coordonnées X_i comme variables indépendantes et la configuration initiale comme référence, s'appelle formulation lagrangienne totale.

La relation (II – 39) montre que les composantes de la déformation sont des fonctions quadratiques des gradients des déplacements. En fait, l'étude géométrique qui permet d'obtenir cette relation n'est soumise à aucune restriction quant à l'amplitude des déplacements. Il en résulte que le tenseur de Green est l'expression exacte des déformations quelque soit l'ordre de grandeur des déplacements.

II-2.10.2. Petites déformations

Généralement, dans des problèmes où les rotations et les déformations mises en jeu sont petites, on peut se contenter d'une version linéarisée de la mesure des déformations montrée dans l'expression (II – 39). Il suffit de négliger les termes de second ordre dans le tenseur de Green – Lagrange. Il en découle :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (\text{Eq. II - 40})$$

En pratique, cette formulation s'applique dans des problèmes linéaires élastiques. Elle n'est pas recommandée pour les problèmes de dynamique rapide qui engendrent souvent des grandes déformations et des grands déplacements.

II-2.10.3. Grandes déformations – Déformations vraies

Dans n'importe quelle formulation de grandes déformations – grands déplacements, le calcul est habituellement réalisé en analysant la configuration courante par rapport à une configuration de référence.

La configuration courante est une description complète du solide déformé dans sa position et son orientation courante dans l'espace à partir des coordonnées de ses nœuds. La configuration de référence peut être soit la configuration initiale du solide (coordonnées des nœuds à l'instant $t_0 = 0$), soit la configuration au pas de temps précédent ($t_n = t_{n+1} - \delta t$).

Le choix de la configuration de référence détermine le type de déformation qui sera calculée. La déformation totale résulte de la comparaison de la configuration courante avec la configuration initiale, alors que l'incrément de déformation résulte de la comparaison avec la

configuration précédente. La méthode incrémentale est mieux adaptée aux code de calcul explicite parce qu'elle permet une simplification de certains algorithmes de calcul, notamment les modèles de non-linéarité constitutive.

En pratique, la formulation incrémentale de la déformation donne directement la déformation logarithmique et la contrainte vraie. Les coordonnées sont actualisées à chaque cycle et la nouvelle position des nœuds servira de configuration de référence pour le cycle suivant. Cette formulation est dite lagrangienne actualisée.

Le taux de déformation pendant un pas de temps est défini à partir des dérivées spatiales des vitesses :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{Eq. II - 41})$$

Ce taux de déformation est établi dans les axes (x_i) de la configuration courante. Il sert au calcul du taux de contrainte qui contribue à la mise à jour de la contrainte dite de Cauchy (contrainte vraie). La contrainte vraie pour chaque intervalle de temps est calculée par une intégration explicite du taux de contrainte $\dot{\sigma}_{ij}$:

$$\sigma_{ij}(t + \Delta t) = \sigma_{ij}(t) + \dot{\sigma}_{ij} \Delta t \quad (\text{Eq. II - 42})$$

Le tenseur de contraintes de Cauchy est associé à un repère fixe. Ainsi ses composantes varient dans le cas d'une rotation d'ensemble même si le solide n'a pas subi de déformation. Il est alors nécessaire de séparer le taux de contrainte $\dot{\sigma}_{ij}$ en deux parties : la première associée au mouvement de corps rigide et la seconde au taux de déformation et à la loi matériau considérée tel que :

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^R + \dot{\sigma}_{ij}^J \quad (\text{Eq. II - 43})$$

$\dot{\sigma}_{ij}^R$ est le taux de contrainte associé à la rotation de corps rigide et $\dot{\sigma}_{ij}^J$ est le taux de contrainte de Jaumann calculé à partir du taux de déformation et de la loi constitutive.

II-2.10.4. La formulation co-rotationnelle

La formulation co-rotationnelle permet de prendre en compte facilement les rotations de corps rigides. Elle permet un calcul direct des déformations dans un repère lié à chaque élément. Ce repère suit les mouvements et les orientations de l'élément. Les contraintes ainsi que les forces internes aux nœuds sont alors calculées dans le repère local et ensuite transformées dans le repère global du système.

Le taux de contrainte objective sera alors naturellement le taux de contrainte calculé à partir du taux de déformation. L'expression (II - 43) se réduit alors à :

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^J \quad (\text{Eq. II - 44})$$

Ce type de formulation est d'ailleurs mieux adapté à la modélisation des matériaux orthotropes tels que les stratifiés composites. Les propriétés matériaux sont attribuées dans le repère local et suivent ainsi l'orientation de l'élément.

II-2.11. Algorithme de calcul

La procédure numérique des méthodes de calcul éléments finis explicites peut être résumée à chaque pas de temps de la façon suivante [RADIOSS (2001)] :

- 1- Pour un déplacement, vitesse et accélération à un certain pas de temps, le vecteur des forces externes est établi.
- 2- Une boucle sur les éléments est effectuée où l'on calcule les forces internes et le prochain pas de temps. Les calculs suivants sont alors faits :
 - a. Calcul du taux de déformation dans les éléments :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_I}{\partial x_i} \dot{u}_{jI} + \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \dot{u}_{iI} \right) \quad (\text{Eq. II - 45})$$

- b. Calcul du taux de contrainte :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij}^J &= f(\dot{\epsilon}, \text{loi materiau}) \\ \dot{\sigma}_{ij} &= \dot{\sigma}_{ij}^J + \dot{\sigma}_{ij}^R \end{aligned} \quad (\text{Eq. II - 46})$$

- c. Calcul des contraintes de Cauchy dans les éléments par intégration explicite dans le temps :

$$\sigma_{ij}(t + \Delta t) = \sigma_{ij}(t) + \dot{\sigma}_{ij} \Delta t \quad (\text{Eq. II - 47})$$

- d. Calcul des forces internes aux noeuds :

$$f_{iI}^{\text{int}} = \int_V \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV \quad (\text{Eq. II - 48})$$

- 3- Calcul du prochain pas de temps.
- 4- Les forces de contact entre les interfaces sont ensuite calculées et les forces internes sont assemblées aux noeuds.
- 5- Connaissant toutes les forces internes et externes, les nouvelles valeurs des accélérations sont ensuite calculées à chaque noeuds :

$$\ddot{u}_{iI} = [M]^{-1} (f_{iI}^{\text{ext}} - f_{iI}^{\text{int}}) \quad (\text{Eq. II - 49})$$

Finalement, les nouvelles valeurs des vitesses et déplacements des noeuds sont calculées par intégration explicite dans le temps.

II-2.12. Conclusion

Comme règle générale, la méthode explicite permet un meilleur traitement des problèmes d'impact et de crash. Néanmoins, les codes implicites sont plus appropriés pour résoudre des problèmes en quasi-statique.

Les méthodes implicite et explicite sont toutes les deux adaptées à la résolution des problèmes non-linéaires. Dans les problèmes à grandes déformations, il existe plusieurs façons pour caractériser géométriquement l'état de déformation et de contrainte. Néanmoins, la méthode incrémentale associée à une formulation co-rotationnelle permet, d'une part, de simplifier les algorithmes de calcul des déformations et des contraintes et, d'autre part, de s'affranchir des problèmes de contraintes associées à des mouvements de corps rigide.

Les formulations co-rotationnelle et incrémentale sont adoptées d'une part pour la formulation du nouvel élément et d'autre part pour le développement du code éléments finis explicite MEF_EX.

II-3. Modélisation de l'endommagement des stratifiés composites

II-3.1. Introduction

Dans cette partie, nous allons nous intéresser aux différentes méthodes de modélisations des stratifiés composites et de leurs endommagements. Nous évoquerons aussi les principaux critères utilisés. Nous rappellerons en particulier les principaux travaux qui ont été réalisés dans le domaine du délaminage, notamment les modèles basés sur la mécanique de l'endommagement ainsi que les modèles basés sur la mécanique de la rupture.

Les modèles traitant du délaminage des stratifiés composites seront classés dans deux catégories : les modèles n'utilisant pas d'éléments d'interface et les modèles avec éléments d'interface. Un élément d'interface est une entité assurant un lien rigide entre les plis adjacents et qui est capable de se dégrader jusqu'à rupture complète afin de libérer ces plis à l'apparition du délaminage. On inclut dans la catégorie d'éléments d'interface les modèles utilisant des efforts de liaison pour assurer la solidarité entre des nœuds doubles.

Le système d'axes utilisé à travers ce rapport pour définir un pli est représenté dans la Figure II - 3.

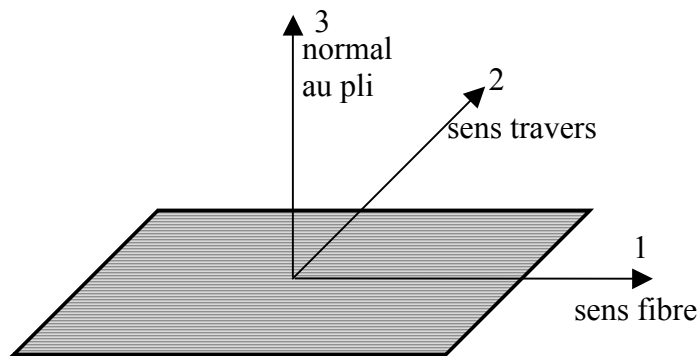


Figure II - 3 : Définition d'un pli de stratifié

II-3.2. Modèles sans éléments d'interface

Les modèles sans éléments d'interface sont généralement réservés à l'étude des problèmes d'impact sur plaque composite où le délaminage reste confiné à l'intérieur du stratifié. Ce type de délaminage, essentiellement dû à des contraintes de cisaillement transverse, est souvent représenté par une dégradation des propriétés locales à l'endroit de la fissure.

Il existe deux façons principales pour représenter les stratifiés composites en éléments finis. La première consiste à utiliser des éléments plaques multicouches où l'on attribue à chaque couche les propriétés du pli composite correspondant. La seconde méthode consiste à utiliser une couche d'éléments volumes par pli composite.

II-3.2.1. Modélisation par éléments plaques multicouches

L'utilisation des éléments plaques multicouches assure des temps de calcul relativement réduits. Par contre, elle ne permet pas la prise en compte de la contrainte σ_{33} dans l'étude du délaminage. De ce fait, la modélisation du délaminage en mode I est impossible.

Dans cette méthode, les propriétés de chaque pli sont attribuées à une couche de l'élément. Le nombre de degrés de liberté est alors réduit et permet ainsi d'avoir un temps de calcul moins important par rapport aux modèles utilisant une couche d'éléments par pli.

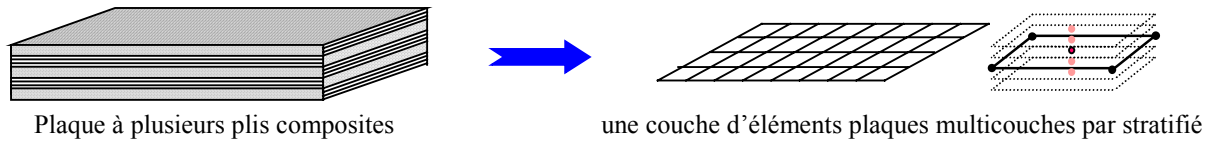


Figure II - 4 : Modélisations actuelles des plaques composites

Toutefois, la modélisation de la physique du décollement ou des séparations des plis n'est pas possible avec ce genre d'éléments. L'étude du délaminage en mode II et III reste possible en dégradant les propriétés correspondantes. Cependant, ce type de traitement du délaminage ne représente pas la réalité physique de façon complète.

En effet, si la dégradation est reportée uniquement sur les propriétés matériaux (E , G , ν) d'une couche de l'élément [WALRICK (1999)] [SPOSTSWOOD (2001)], ceci va affecter la rigidité de membrane sans influencer correctement la rigidité de flexion. Or, le délaminage se traduit par une réduction de la rigidité en flexion et de la résistance au flambage due essentiellement à une baisse locale du moment d'inertie du fait de la subdivision locale du stratifié en plusieurs couches.

Pour mieux voir l'erreur qui se produit, prenons l'exemple d'une plaque qui subit un délaminage en son centre. La relation force - déplacement dans une plaque composite s'écrit [BARRAU (1987)] :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ k \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. II - 50})$$

où N représente les forces dans le plan, et M les grandeurs hors plan,
 e , les déformations du plan moyen, et k associé aux courbures de la plaque,
 A , la matrice de rigidité en membrane,
 C , la matrice de rigidité en flexion,
 B , les termes de couplage (membrane – flexion)

Les termes de la matrice C s'écrivent :

$$C_{ij} = \frac{1}{3} \sum_k Q_{ij}^k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (\text{Eq. II - 51})$$

avec Q_{ij}^k les termes de la matrice de rigidité liant les contraintes aux déformations dans le repère d'orthotropie du $k^{ième}$ pli.

Quand un délaminage se produit au milieu de la plaque (pli $k=1$), en réduisant à zéro certaines propriétés matériaux, les termes C_{ij} affectés s'écrivent :

$$C_{ij} = \frac{1}{3} \sum_k Q_{ij}^k (h_k^3 - h_{k-1}^3) - \frac{1}{3} Q_{ij}^1 h_1^3 \quad (\text{Eq. II - 52})$$

le délaminage étant au centre, la valeur de h_1 est petite et donc la dégradation de la rigidité en flexion subie par l'élément est négligeable.

Or, en réalité, c'est le moment d'inertie locale qui est dégradé affectant tous les termes de la matrice C de façon significative. En effet, suite à un délaminage au milieu de la plaque, le moment d'inertie sera divisé par 4 :

Sans délaminage :

$$I_z = \frac{bh^3}{12} \quad (\text{Eq. II - 53})$$

Avec délaminage au centre :

$$I_z = 2 \times \frac{b(h/2)^3}{12} = \frac{1}{4} \frac{bh^3}{12} \quad (\text{Eq. II - 54})$$

En général, les auteurs qui utilisent les éléments multicouches négligent l'effet du délaminage sur le comportement global de la structure. Ils ne considèrent que la rupture de fibre ainsi que la fissuration ou l'écrasement de la matrice dans le cas d'impact sur plaque composite [MAJEED (1994)] [BELINGARDI (1998)]. La fissuration de la matrice se traduit en imposant $E_{22} = G_{12} = \nu_{12} = \nu_{21} = 0$ dans la couche en question, et la rupture de fibre en imposant en plus $E_{11} = 0$.

L'étude du crash d'un tube carré composite à l'aide d'un modèle avec des éléments plaques multicouches a aussi été tenté [FARUQUE (1995)]. Dans ce cas, l'endommagement de la structure est traité de façon globale sans différenciation entre les différents modes d'endommagement.

McCarthy et al. [McCARTHY (2000)] utilisent des éléments plaques multicouches pour modéliser le crash de poutres sinus. Le composite est représenté par une loi "bi-phase" qui permet d'attribuer des propriétés différentes aux fibres et à la matrice et de modéliser séparément l'endommagement de la fibre et de la matrice. La matrice d'élasticité du pli dans le sens fibre n'est autre que la somme des matrices d'élasticité de la fibre et de la matrice :

$$C^{pli} = C^f + C^m \quad (\text{Eq. II - 55})$$

C^f et C^m sont les matrices de d'élasticité des fibres et de la matrice à l'état courant qui s'écrivent en fonction de ces matrices à l'état initial C_0^f et C_0^m :

$$\begin{aligned} C^f &= C_0^f \times (1 - d^f) \\ C^m &= C_0^m \times (1 - d^m) \end{aligned} \quad (\text{Eq. II - 56})$$

où d^f et d^m sont les paramètres d'endommagement des fibres et de la matrice (compris entre 0 et 1).

L'endommagement total de la matrice est la somme de l'endommagement dû à la partie sphérique du tenseur des déformations et de l'endommagement dû à la partie déviatorique. L'endommagement de la fibre est dû seulement à sa déformation unidirectionnelle.

Le code de calcul utilisé (PAM-CRASH) permet d'étalonner des courbes contrainte – déformation établies en définissant des valeurs des déformations ε_i , ε_l , ε_u , et les valeurs des paramètres d'endommagement correspondantes à ε_l et ε_u (d_l , d_u) pour chaque type d'endommagement (Figure II - 5). Pour éviter des instabilités numériques, ε_u est choisi assez loin de ε_l afin que la résistance ne chute pas brutalement. Cette méthode permet de définir une contrainte résiduelle σ_u .

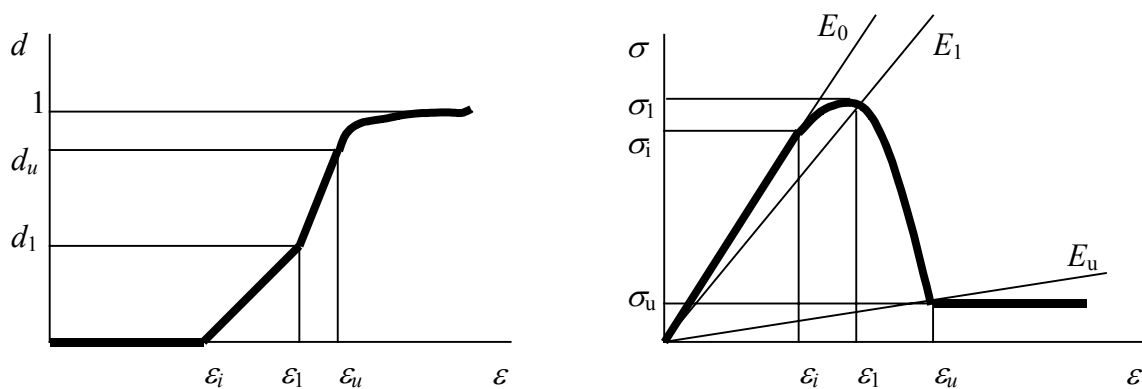


Figure II - 5 : Loi d'évolution de l'endommagement dans PAM – CRASH

Cette technique est jugée complexe [GAUTHIER (1996)] compte tenu de la quantité importante de paramètres à identifier. Pour la matrice, il faut déterminer les paramètres pour en cisaillement, traction et compression, et pour les fibres, en traction et en compression. Au total, il y a 30 paramètres à déterminer et ceci nécessite un nombre important d'essais.

II-3.2.2. Modélisation par une couche d'éléments volumes par pli composite

L'utilisation des éléments volumiques pour la modélisation des plis composites permet de représenter les principaux modes d'endommagement. Cependant, sans l'utilisation d'éléments d'interface, cette méthode reste limitée à des problèmes d'impact où il n'y a pas de grandes ouvertures de fissure mises en jeu.

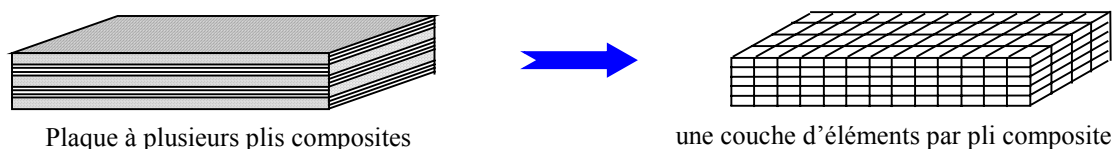


Figure II - 6 : Modélisation des structures composites par des éléments volumiques

Cette méthode nécessite un nombre élevé d'éléments qui dépend du nombre de plis du stratifié à modéliser. Par conséquent, elle présente un temps de calcul important, surtout si

l'on veut modéliser de grandes structures. Ajoutons aussi que l'épaisseur des éléments dans ce type de maillage est très faible ce qui fait chuter, de façon prohibitive, le pas de temps de calcul dans les codes explicites.

Ce type de modélisation, permet surtout une représentation qualitative du délaminage. Hou et al [HOU (2000)] modélisent une plaque composite au moyen d'une couche d'éléments solides (8 nœuds) par pli. La modélisation du délaminage dû à l'impact se traduit en réduisant graduellement les contraintes σ_{33} , σ_{13} et σ_{23} à zéro. Hou compare l'essai numérique à l'essai expérimental en ne regardant que la forme des délaminage dans la plaque. Les résultats numériques semblent bien corrélés les essais. Toutefois, aucune tentative n'est faite pour vérifier d'autres grandeurs telles le taux d'absorption d'énergie, la force d'impact, la déformée etc....

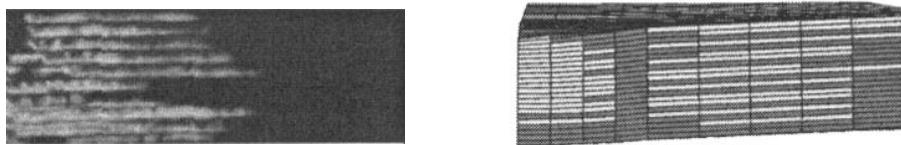


Figure II - 7 : Comparaison des formes de délaminages expérimentales et numériques

Dans ce type de modélisation, le délaminage se traduit par une rupture dans le pli et non pas à l'interface. La rupture de la couche d'éléments représente alors la propagation de la fissure.

Certains auteurs ont poussé le domaine d'application de cette méthode pour modéliser la propagation de délaminage en mode I [BEISSEL (1998)] et mode II [TAY (2003)]. Leur méthode tient compte de la propagation de la fissure à l'intérieur de l'élément qui est alors partiellement détruit. Dans ce cas, seulement une partie des contraintes dans l'élément contribue au calcul des forces aux nœuds. Quand la fissure traverse l'élément, l'élément est complètement détruit.

Les forces aux nœuds s'écrivent d'après le principe des travaux virtuels (c. f. II-2.4. Eq. II – 14) :

$$f = \alpha \int_V B^T \sigma \cdot dV \quad (0 < \alpha < 1) \quad (\text{Eq. II - 57})$$

Le facteur α diminue au fur et à mesure que la longueur de fissure augmente dans l'élément. Il est égal à 1 avant que la fissure n'atteigne l'élément et devient quasi nul quand la fissure quitte l'élément.

La vitesse de propagation de la fissure V_{fiss} est définie en fonction du facteur de concentration de contrainte K , et la longueur de fissure a est déduite par intégration explicite dans le temps tel que :

$$a^{n+1} = a^n + V_{fiss} \times \Delta t \quad (\text{Eq. II - 58})$$

Le facteur α est alors défini en fonction de la longueur de la fissure ainsi que de la longueur caractéristique de l'élément L :

$$\alpha^n = \frac{a^n}{L} \quad (\text{Eq. II - 59})$$

Cette méthode de rupture de l'élément permet de traiter la propagation de la fissure sans recours à la modélisation de l'interface mécanique entre les plis. Elle permet également la propagation du délaminage dans des directions arbitraires non définies à priori dans le modèle.

II-3.3. Aperçu de principaux critères de rupture existants

Comme cité plus haut, les modèles qui n'utilisent pas d'éléments d'interface sont en général adaptés à la modélisation des problèmes d'impact sur plaque où le délaminage reste enfermé entre les plis. Dans ces cas, l'utilisation des critères de ruptures quadratiques en contrainte pour les différents modes d'endommagement semble adéquate.

Tsai – Wu [TSAI (1971)] propose un critère global pour l'endommagement du pli sans différenciation des différents modes de rupture. Toutes les contraintes interviennent dans ce critère qui s'écrit :

$$\frac{\sigma_{11}^2}{XX'} + \frac{(\sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2)}{YY'} + \frac{(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)}{S^2} - \frac{(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33})}{\sqrt{XX'YY'}} - \frac{\sigma_{22}\sigma_{33}}{YY'} + \sigma_{11}\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X'}\right) + (\sigma_{22} + \sigma_{33})\left(\frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'}\right) \geq 1 \quad (\text{Eq. II - 60})$$

avec : X : résistance à la traction dans la direction 1

X' : résistance à la compression dans la direction 1

Y : résistance à la traction dans la direction 2

Y' : résistance à la compression dans la direction 2

S : résistance au cisaillement (supposée la même dans toutes les directions)

Cependant, dans les problèmes d'impact sur plaques composites, la majorité des auteurs traite chaque mode de rupture par un critère. On distingue trois modes d'endommagement principaux : la fissuration de la matrice, la rupture des fibres et le délaminage.

II-3.3.1. Fissuration matricielle

L'endommagement de la matrice est le premier mode de rupture induit par l'impact dans le sens transverse au stratifié. Souvent, il prend la forme de fissuration matricielle ou aussi de décohésion entre la fibre et la matrice. Les fissurations sont dues à la différence de propriétés entre la matrice et les fibres et sont en général parallèles à la direction des fibres dans les plis unidirectionnels [RICHARDSON (1996)]. On distingue 2 types de fissuration de la matrice dans le cas d'impact sur plaque composite : les fissurations dues au cisaillement et les fissurations dues à la flexion (Figure II - 8).

Les fissurations dues au cisaillement se produisent à l'intérieur d'un pli à une certaine distance de la zone impactée. Ces fissures sont inclinées d'environ 45°. Les contraintes de cisaillement transverse qui apparaissent sont liées à la force et à la surface de contact.

Les fissurations dues à la flexion apparaissent directement sous la zone impactée dans le pli le plus éloigné de l'impact. Ces fissures sont verticales et sont la conséquence d'importantes contraintes de traction dans le sens travers du pli.

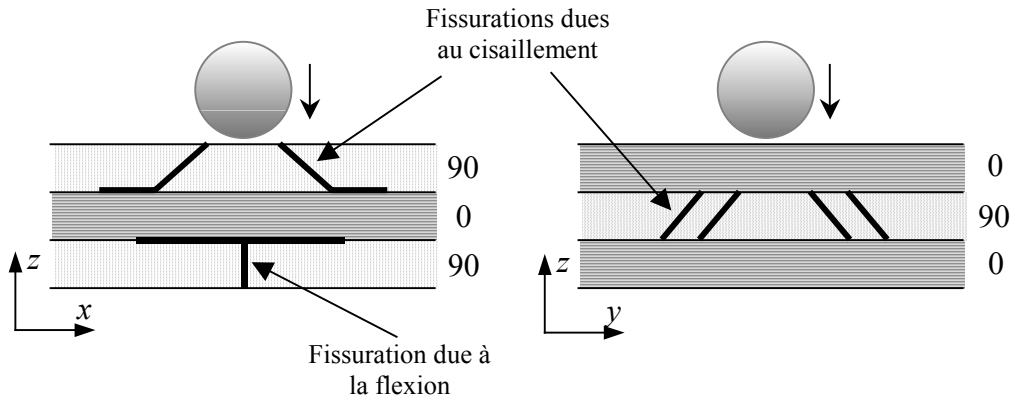


Figure II - 8 : Types de fissuration de la matrice

Le type de fissuration de matrice est souvent associé à la forme globale de la structure impactée [CANTWELL (1989)]. Les structures longues et minces sont susceptibles de subir des fissurations dues à la flexion à cause d'une flèche importante. Les structures épaisses sont, quant à elles, plus rigides et par conséquent la force d'impact est plus importante ce qui induit des fissurations dues aux cisaillement.

Dans le cas général, on peut considérer que la contrainte normale σ_{11} est principalement reprise par les fibres. Toutes les autres contraintes sollicitent la matrice et sont alors susceptibles de provoquer sa rupture.

Dans cette optique, Hashin [HASHIN (1980)] propose un critère qui tient compte de toutes ces contraintes sollicitant la résine. De plus, il distingue l'état de traction dans la matrice de l'état de compression.

Dans le cas de traction dans le sens travers du pli, le critère s'écrit :

$$\frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{\sigma_{MNT}^2} + \frac{\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{\sigma_{MS}^2} + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{\sigma_{FS}^2} \geq 1 \quad (\text{Eq. II - 61})$$

Dans le cas de compression dans le sens travers, le critère devient :

$$\left[\left(\frac{\sigma_{MNC}}{2\sigma_{MS}} \right)^2 - 1 \right] \frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})}{\sigma_{MNC}} + \frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{4\sigma_{MS}^2} + \frac{\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{\sigma_{MS}^2} + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{\sigma_{FS}^2} \geq 1 \quad (\text{Eq. II - 62})$$

avec : σ_{MNT} : résistance de la matrice en traction
 σ_{MNC} : résistance de la matrice en compression
 σ_{MS} : résistance de la matrice en cisaillement
 σ_{FS} : résistance de la fibre en cisaillement

Chang – Chang [CHANG (1987)] propose un critère faisant intervenir les contraintes de membrane sollicitant la matrice, à savoir σ_{22} et σ_{12} . Dans le cas de traction dans le sens travers ($\sigma_{22} \geq 0$), le critère s'écrit :

$$e_m^2 = \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_T} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}} \right)^2 \geq 1 \quad (\text{Eq. II - 63})$$

Y_T étant la résistance à la traction dans le sens transverse, et S_{12} la résistance au cisaillement dans le plan du pli.

Ce critère ne prend pas en compte la contribution de la contrainte de cisaillement σ_{23} qui a un effet dominant dans le cas de fissuration due au cisaillement. Hou et al [HOU (2001)] propose l'amélioration suivante : (toujours dans le cas où $\sigma_{22} \geq 0$)

$$e_m^2 = \left(\frac{\sigma_{22}}{Y_T} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{23}}{S_{m23}} \right)^2 \geq 1 \quad (\text{Eq. II - 64})$$

où S_{m23} représente la résistance au cisaillement de la matrice dans le plan transverse normal aux fibres.

II-3.3.2. Rupture de fibres

Dans l'ensemble du processus d'endommagement, la rupture de fibres intervient généralement après la fissuration de la matrice et après le délaminage. La rupture de fibres est due soit à une importante contrainte normale σ_{11} soit au cisaillement.

Généralement, les critères de rupture de fibres font intervenir la contrainte sens fibre et les contraintes de cisaillement dans les plans contenant la fibre, à savoir σ_{12} et σ_{13} .

Chang – Chang [CHANG (1987)] propose un critère proche du critère qu'il donne pour piloter la rupture de la matrice tel que :

$$e_f^2 = \left(\frac{\sigma_{11}}{X_T} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S_{12}} \right)^2 \geq 1 \quad (\text{Eq. II - 65})$$

X_T étant la résistance à la traction dans le sens des fibres et S_{12} la résistance au cisaillement dans le plan du pli

Une version modifiée de ce critère est proposée par Hou et al [HOU (2001)]. L'auteur tient compte de la contrainte de cisaillement σ_{13} en considérant qu'elle a le même effet que

σ_{12} . Il faut noter aussi que la résistance au cisaillement pour la rupture de fibres est prise indépendamment de celle de la matrice :

$$e_f^2 = \left(\frac{\sigma_{11}}{X_T} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{S_f^2} \right) \geq 1 \quad (\text{Eq. II - 66})$$

où S_f est la résistance au cisaillement de la fibre.

II-3.3.3. Délaminage

Le délaminage est l'un des modes d'endommagement primordiaux dans les structures composites. Il se caractérise par une séparation ou un manque de liaison entre deux plis d'un stratifié composite. Il est associé à une fissure qui se propage généralement dans une région riche en résine formant une interface entre deux plis adjacents.

Dans le cas d'impact sur plaque composite, d'après [LIU (1988)], le délaminage résulte de la différence entre les rigidités en flexion des plis adjacents : le long des fibres, la plaque a tendance à fléchir d'une façon différente que dans le sens travers.

D'après les différentes études déjà effectuées, le délaminage pour structures impactées semble avoir lieu seulement en présence de fissurations dans la matrice, c'est-à-dire, lorsque les plis de part et d'autre de l'interface sont endommagés par fissuration et le pli inférieur à l'interface est localement saturé en fissures. A ce moment là, l'énergie due au choc passe dans l'ouverture d'une liaison moins forte : l'interface entre plis d'orientations différentes [BONINI (1995)].

En reprenant les types de fissurations de la matrice présentés au paragraphe II-3.3.1., la fissuration inclinée de cisaillement dans le pli supérieur est arrêtée par le changement de la direction des fibres lorsqu'elle arrive jusqu'à l'interface (Figure II - 9). Pour cela elle se propage entre les plis : c'est le délaminage. Ce délaminage est limité par les fissurations transverses du pli inférieur. La fissuration verticale due à la flexion provoque, quant à elle, le délaminage dans l'interface la plus basse.

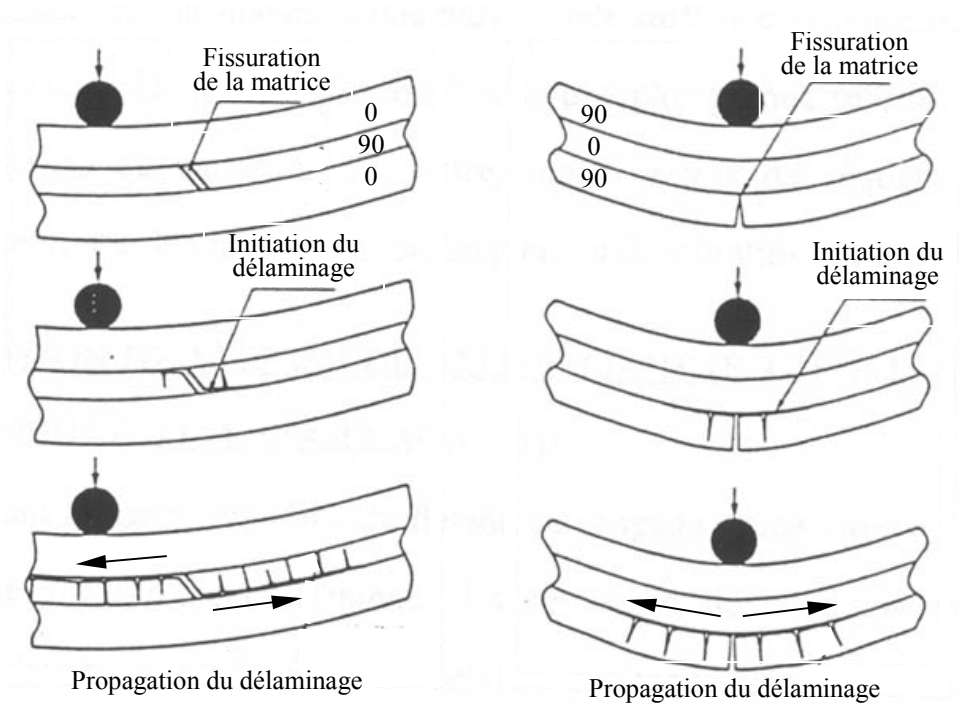


Figure II - 9 : Délaminage sous impact

Il existe de nombreux critères de forme quadratique permettant de détecter l'apparition du délaminage.

Globalement, les auteurs proposent des critères faisant intervenir les contraintes dans le sens transverse, à savoir σ_{13} , σ_{23} et σ_{33} . Certains ne différencient pas l'état de contrainte de compression de celui de la traction dans le sens normal au pli. Hashin [HASHIN (1980)], par exemple propose un critère où il ne prend pas en compte le signe de σ_{33} :

$$\left(\frac{\sigma_{33}}{\sigma_{DN}} \right)^2 + \frac{\sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2}{\sigma_{DS}^2} \geq 1 \quad (\text{Eq. II - 67})$$

σ_{DN} est la résistance du pli à un effort normal, et σ_{DS} résistance du pli au délaminage par cisaillement.

Brewer et al. [BREWER (1988)] et Chang et al [BANERJEE (1992)] donnent un critère très proche de celui de Hashin sans tenir compte, non plus, du signe de σ_{33} :

$$\left(\frac{\sigma_{33}}{Z_T} \right)^2 + \frac{\sigma_{23}^2}{S_{123}^2} + \frac{\sigma_{31}^2}{S_{31}^2} \geq 1 \quad (\text{Eq. II - 68})$$

où S_{13} représente la résistance en cisaillement dans le plan 13, S_{113} la résistance au délaminage en cisaillement dans le plan 23 et Z_T la résistance en traction dans le sens de l'épaisseur.

Hou et al [HOU (2001)] proposent, pour le délaminage, une amélioration du critère de Brewer et Lagace, en tenant compte de l'effet bénéfique de la compression sur la tenue au

délaminage, tout en autorisant le délaminage sous faible compression et fort cisaillement. Ils distinguent donc 3 cas selon l'état de contrainte dans le sens transverse du stratifié.

Cas où $\sigma_{33} \geq 0$ favorisant l'apparition du délaminage :

$$\left(\frac{\sigma_{33}}{Z_T}\right)^2 + \frac{\sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2}{S_{13}^2 \cdot (d_{ms} d_{fs} + \delta)} \geq 1 \quad (\text{Eq. II - 69})$$

Cas où $-\sqrt{\frac{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2}{8}} \leq \sigma_{33} < 0$ qui veut dire que pour un état de compression donné, il faut que le cisaillement soit important pour produire du délaminage :

$$\frac{\sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 - 8\sigma_{33}^2}{S_{13}^2 \cdot (d_{ms} d_{fs} + \delta)} \geq 1 \quad (\text{Eq. II - 70})$$

Finalement, le cas où $-\sqrt{\frac{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2}{8}} > \sigma_{33}$, la compression est assez importante pour empêcher le glissement entre les plis et éviter le délaminage.

Dans ces expressions :

S_{13} est la résistance en cisaillement dans le plan 13,

Z_T est la résistance en traction dans le sens de l'épaisseur ,

d_{ms} est un coefficient d'endommagement de la matrice qui varie de 0 à 1,

d_{fs} est un coefficient d'endommagement en rupture de fibres qui varie de 0 à 1,

δ est le ratio entre le cisaillement interlaminaire avant et après l'apparition de dommage dans la matrice ou les fibres.

La Figure II - 10 illustre les différentes améliorations apportées au critère de délaminage proposé par Brewer et Lagace. Cette évolution se résume par :

- critère n°1 où le signe de σ_{33} n'est pas pris en compte, par conséquent l'effet bénéfique de la compression n'est pas considéré,
- critère n°2 la compression dans le sens transverse empêche le délaminage,
- critère n°3 où malgré la compression, un cisaillement important peut faire apparaître du délaminage

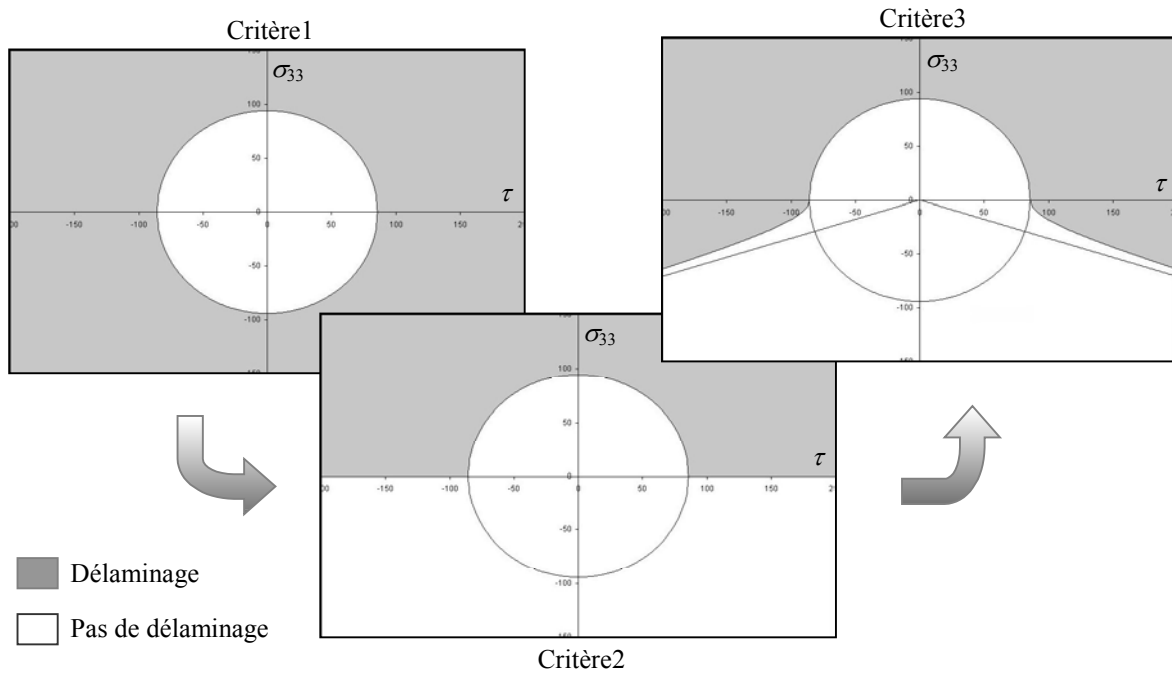


Figure II - 10 : Evolution du critère de Brewer et Lagace

Zhang X. [ZHANG (1998)] utilise un critère plus simple qui consiste à comparer séparément les contraintes de cisaillement et les contraintes normales à des valeurs de contraintes critiques :

$$\sqrt{\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2} \geq ILSS \text{ ou } \sigma_{33} > T_{zt} \quad (\text{Eq. II - 71})$$

$ILSS$ est la résistance en cisaillement interlaminaire et T_{zt} la résistance dans le sens de l'épaisseur.

Ce critère ne permet pas de prendre en compte le couplage entre le cisaillement et la traction hors plan. Il est moins représentatif de la réalité physique du phénomène que les critères cités précédemment.

II-3.4. Modèles avec éléments d'interface

Ce type de modélisation consiste à mailler les plis indépendamment et les relier par des liens rigides assurant une liaison mécanique entre les nœuds de chaque côté de l'interface susceptible de subir un délaminage. La liaison entre ces nœuds est supprimée quand un certain critère de délaminage est atteint. Cette méthode nécessite la connaissance a priori des endroits d'apparition du délaminage.

On peut distinguer trois genres de modèles gouvernant la rupture des liaisons et l'apparition du délaminage : les modèles basés sur les forces de liaison entre les nœuds [BONINI (1995)] [KOHLGRUEBER (1998)] [FLEMING (1999)] [TAN (2003)], les modèles basés sur la mécanique de l'endommagement [ALLIX (1995)] [LADEVEZE (2000)] [CORIGLIANO (2001)] [JOHNSON (1999)] et les modèles basés sur la mécanique de la

rupture [FLEMING (1999)] [ROUDOLFF (2002)] [EL SAYED 2001] [DE MORAIS (2003)] [SANKAR (1991)].

II-3.4.1. Modèles basés sur les forces de liaison

Dans cette méthode, les nœuds de chaque côté de l'interface, où l'on s'attend au délaminage, sont liés entre eux à l'aide d'une variété d'éléments tel que des ressorts et des barres ou tout autre condition de liaison. Quand la force produite dans ces éléments dépasse un certain critère, les nœuds sont relâchés.

Bonini [BONINI (1995)] relie les nœuds doubles de l'interface par une condition d'assemblage qui porte sur l'égalité des accélérations dans les trois directions de l'espace. Cette condition est assurée par une force de liaison calculée par la méthode de multiplicateur de Lagrange dans les trois directions de l'espace.

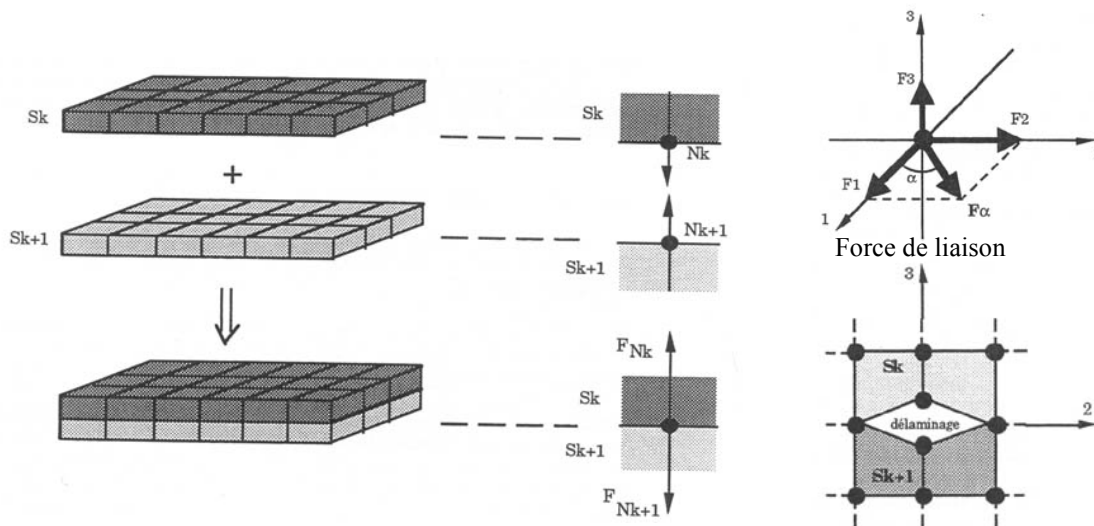


Figure II - 11 : Modélisation du délaminage par Bonini

Une perte de contact entre 2 nœuds apparaît lorsque, d'une part, un élément du pli supérieur adjacent au nœud double est fissuré et tous les éléments du pli inférieur adjacents à ce nœuds sont saturés en fissures et, d'autre part, lorsque la force de liaison dépasse une valeur critique au nœud double.

Le nombre critique de fissures dans l'élément ainsi que la force critique de liaison sont déterminés d'une façon expérimentale et numérique (approche hybride).

Fleming [FLEMING (1999)] a étudié différentes méthodes utilisées pour la représentation du délaminage par la séparation des nœuds de l'interface.

"Force based tied connections" : les nœuds de part et d'autre de l'interface sont liés entre eux soit par des éléments ressorts, soit par des barres rigides. Le critère de rupture utilisé est de la forme :

$$\left(\frac{F_N}{F_{Nc}}\right)^{a_N} + \left(\frac{F_S}{F_{Sc}}\right)^{a_S} = 1 \quad (\text{Eq. II - 72})$$

où F_N représente la force normale dans le lien rigide, F_S la force tangentielle, F_{Nc} la force normale de rupture et F_{Sc} la force tangentielle de rupture. a_N et a_S sont des paramètres qui pilotent l'interaction entre les modes de rupture.

Dans le cas de poutre "Double Cantilever Beam" (solicitation en mode I), F_S est nulle et le critère se réduit à un simple critère de force maximale. Toutefois, la force F_{Nc} est difficile à déterminer. Elle est prise comme étant :

$$F_{Nc} \approx \sigma_{ult} A_e \quad (\text{Eq. II - 73})$$

où A_e est l'aire de l'interface modélisée par le ressort et σ_{ult} est la résistance de la résine.

"*Cohesive fracture model*" : dans ce cas, l'élément d'interface répond à une loi de force – déplacement permettant une mise à zéro progressive de la force de liaison (Figure II - 12).

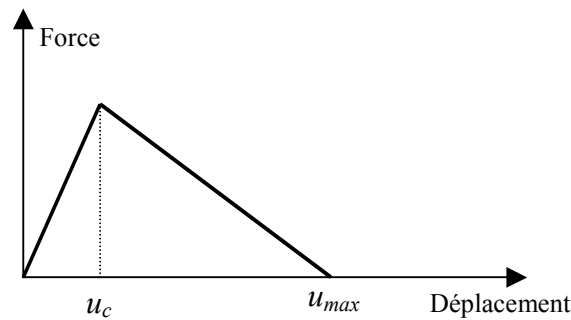


Figure II - 12 : Loi d'évolution de la force de liaison en fonction du déplacement

Cette loi évite une séparation brutale des nœuds, elle réduit ainsi les perturbations dynamiques et permet la dissipation de l'énergie du système.

II-3.4.2. Modèles basés sur la mécanique de l'endommagement

Pour décrire le comportement endommageable des composites, Ladevèze et Allix [ALLIX (1993)] s'appuient sur la thermodynamique des processus irréversibles où l'état du matériau peut être déterminé par la connaissance de certaines variables internes. Dans le cas élastique – endommageable isotherme, il s'agit de la déformation ε et des variables d'endommagement d_i .

La modélisation s'effectue à l'échelle mésoscopique du stratifié, c'est à dire à l'échelle du pli élémentaire supposé homogène dans son épaisseur. Donc, le matériau est défini par deux constituants élémentaires : la monocouche et l'interface.

La monocouche subit des détériorations telles que les microfissurations de la matrice, la décohésion fibre – matrice et la rupture de fibre, tandis que l'interface sert à modéliser le délaminage dans les mode I, II et III.

En ce qui concerne la modélisation de l'interface interlaminaire, 3 directions d'orthotropie, N_1 , N_2 et N_3 , sont définies, N_1 et N_2 étant les bissectrices des directions des fibres des couches adjacentes.

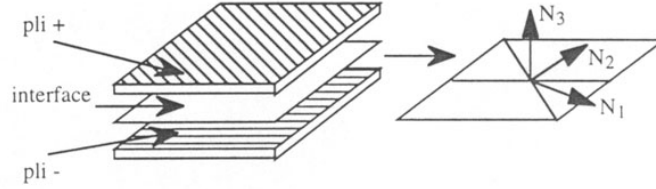


Figure II - 13 : Définition des directions d'orthotropie dans l'interface

Pour une interface non endommagée, l'énergie de déformation s'écrit :

$$E_D = \frac{1}{2} [k_3^0 [U_3]^2 + k_1^0 [U_1]^2 + k_2^0 [U_2]^2] = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_{33}^2}{k_3^0} + \frac{\sigma_{31}^2}{k_1^0} + \frac{\sigma_{32}^2}{k_2^0} \right] \quad (\text{Eq. II - 74})$$

$[U]$ étant la différence de déplacement des surfaces inférieure et supérieure des couches adjacentes, avec :

$$[U] = U^+ - U^- = [U_1]N_1 + [U_2]N_2 + [U_3]N_3 \quad (\text{Eq. II - 75})$$

k_1^0, k_2^0, k_3^0 sont les raideurs élastiques de l'interface ($k_1^0 = k_2^0 = k_3^0 = 0$ implique la décohésion complète entre les couches ; $k_1^0 = k_2^0 = k_3^0 = +\infty$ implique une liaison parfaite entre les couches).

La relation entre les contraintes et les sauts de déplacement dans la base d'orthotropie de l'interface s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2^0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [U_1] \\ [U_2] \\ [U_3] \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k_1^0 = 2G_{13} / e \\ k_2^0 = 2G_{23} / e \\ k_3^0 = E_3 / e \end{cases} \quad (\text{Eq. II - 76})$$

L'énergie de déformation de l'interface endommagée s'écrit :

$$E_D = \frac{1}{2} \left[\frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{k_3^0 (1-d_3)} + \frac{\langle -\sigma_{33} \rangle_+^2}{k_3^0} + \frac{\sigma_{31}^2}{k_1^0 (1-d_1)} + \frac{\sigma_{32}^2}{k_2^0 (1-d_2)} \right] \quad (\text{Eq. II - 77})$$

où d_1, d_2 et d_3 sont les variables d'endommagement associées aux trois modes d'ouverture des microfissures selon les directions principales de l'interface.

Les forces thermodynamiques associées aux trois variables d'endommagement au sens du second principe de la thermodynamique sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
Y_{d3} &= \left. \frac{\partial E_D}{\partial d_3} \right|_{\sigma: cst} = \frac{1}{2} \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{k_3^0 (1-d_3)^2} & \text{Mode I} \\
Y_{d2} &= \left. \frac{\partial E_D}{\partial d_2} \right|_{\sigma: cst} = \frac{1}{2} \frac{\langle \sigma_{32} \rangle_+^2}{k_2^0 (1-d_2)^2} & \text{Mode II} \\
Y_{d1} &= \left. \frac{\partial E_D}{\partial d_1} \right|_{\sigma: cst} = \frac{1}{2} \frac{\langle \sigma_{31} \rangle_+^2}{k_1^0 (1-d_1)^2} & \text{Mode III}
\end{aligned} \tag{Eq. II - 78}$$

La variable qui pilote l'évolution des endommagements est approximée de la façon suivante :

$$\underline{Y} = \underline{Y}_{d3} + \gamma_1 \underline{Y}_{d1} + \gamma_2 \underline{Y}_{d2} \quad \text{avec} \quad \underline{Y}_{di} \Big|_t = \sup_{\tau \leq t} Y_{di} \Big|_\tau \tag{Eq. II - 79}$$

γ_1 et γ_2 sont des paramètres de couplage.

Les lois d'évolution d'endommagement sont alors définies par :

$$\begin{cases} d_3 = d_1 = d_2 = w(\underline{Y}) & \text{si } d_3 < 1 \\ d_3 = d_1 = d_2 = 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec} \quad w(\underline{Y}) = \frac{\langle \sqrt{\underline{Y}} - \sqrt{Y_0} \rangle_+}{\sqrt{Y_c} - \sqrt{Y_0}} \tag{Eq. II - 80}$$

Y_0 représente le seuil d'énergie d'endommagement, Y_c représente l'énergie critique d'endommagement.

Y_0 , Y_c , γ_1 et γ_2 sont déterminés expérimentalement.

Ladevèze [LADEVEZE (2000)] a proposé un modèle avec effet de retard qui consiste à décrire l'évolution du paramètre d en considérant que la vitesse d'endommagement est fonction de l'état du matériau, donc un certain délai existe dans l'évolution de l'endommagement.

Dans un cadre simple unidimensionnel, si la loi d'évolution sans effet de retard s'écrit :

$$\begin{cases} d = \langle w(\underline{Y}) \rangle_+ & \text{si } d < 1 \\ d = 1 & \text{sinon} \end{cases} \tag{Eq. II - 81}$$

avec effet de retard, la loi d'évolution proposée par Deü [DEÜ (1997)] s'écrit :

$$\begin{aligned}
\dot{d} &= \frac{k}{a} [1 - \exp(-a \langle w(Y) - d \rangle_+)] & \text{si } d < 1 \\
d &= 1 & \text{sinon}
\end{aligned} \tag{Eq. II - 82}$$

k et a sont des paramètres qui caractérisent l'effet retard.

Cette modélisation impose un taux maximum d'endommagement (k/a) caractéristique du matériau étudié, évitant ainsi, pour des problèmes d'impact sévère, d'avoir une vitesse d'endommagement trop élevée rendant inefficace l'effet retard.

L'avantage de ces modèles est une bonne prédiction des phénomènes d'endommagement et de délaminage. Ces modèles s'appliquent aussi bien pour des problèmes d'impact sur plaque composite que pour des problèmes de propagation de délaminage en mode I [ALLIX (1995)].

Cependant, pour que le modèle soit précis, il est nécessaire d'avoir une connaissance exacte des contraintes interlaminaires au front de fissure. De ce fait, la taille des éléments dans cet endroit là doit être relativement petite. Ceci rend cette méthode coûteuse pour la modélisation en dynamique rapide de structures composites de tailles industrielles, le pas de temps dans les codes éléments finis à intégration explicite étant fortement lié à la taille du plus petit élément du modèle.

II-3.4.3. Modèles basés sur la mécanique de la rupture

La mécanique de la rupture définit un taux de restitution d'énergie critique G_c correspondant à l'énergie nécessaire pour faire croître le délaminage d'une surface unitaire. Pour chacun des modes de propagation de délaminage I, II et III, il existe un taux de restitution d'énergie critique dépendant du type de l'interface [LAKSIMI (1991)].

La valeur du taux de restitution d'énergie critique est déterminée expérimentalement pour chaque mode.

Concernant la propagation du délaminage en mode I, mode auquel nous nous intéressons en particulier dans cette étude, nous présenterons deux méthodes pour calculer le taux de restitution d'énergie. La première est basée sur la théorie des poutres et inspirera le critère de propagation de délaminage en mode I qui sera développé au chapitre IV de ce rapport. La seconde technique est basée sur la méthode d'Irwin [IRWIN (1957)].

Calcul de G_I basé sur la théorie des poutres

Le test le plus utilisé pour caractériser la propagation du délaminage en mode I est le test de la poutre DCB (Double Cantilever Beam). Il s'agit d'une double poutre encastree, chargée à son extrémité préalablement fissurée dans son plan moyen. La géométrie d'une poutre DCB est présentée dans la Figure II - 14.

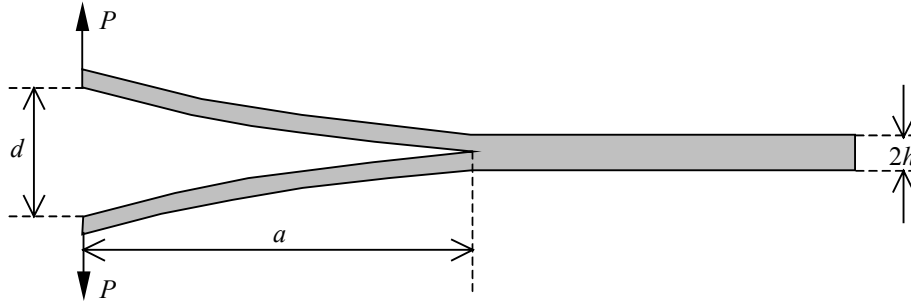


Figure II - 14 : Géométrie de la poutre DCB

Le taux de restitution d'énergie peut être défini analytiquement dans ce cas en se basant sur la théorie des poutres. Par définition, le taux de restitution d'énergie dans la poutre DCB s'exprime par :

$$G = -\frac{\partial W}{b\partial a} \quad (\text{Eq. II - 83})$$

où b est la largeur de la poutre, a la longueur de la fissure et W l'énergie potentielle du système. Supposant le système linéaire élastique, l'énergie potentielle s'écrit :

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} \quad (\text{Eq. II - 84})$$

δW_{int} étant la variation d'énergie de déformation élastique du système et δW_{ext} le travail fourni par les forces extérieures. Comme la poutre se déforme élastiquement, l'énergie interne est l'énergie emmagasinée au cours du chargement, soit :

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2} Pu \quad (\text{Eq. II - 85})$$

d'où :

$$dW_{\text{int}} = \frac{1}{2} u dP + \frac{1}{2} P du \quad (\text{Eq. II - 86})$$

P étant la force à l'extrémité chargée de la poutre, et u le déplacement. Sachant qu'au cours de l'extension δa de la fissure la charge varie très peu, le travail fourni par les forces extérieures est donné par :

$$dW_{\text{ext}} = P du \quad (\text{Eq. II - 87})$$

A partir des équations II – 83 à II – 87 on peut écrire :

$$G = -\frac{1}{2b} \frac{\partial P}{\partial a} u - \frac{1}{2b} P \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{1}{b} P \frac{\partial u}{\partial a} = \frac{1}{2b} \left(P \frac{\partial u}{\partial a} - u \frac{\partial P}{\partial a} \right) \quad (\text{Eq. II - 88})$$

en utilisant la compliance du système définie par $c = \frac{u}{P}$ et la relation II – 88, on obtient la formule très connue du taux de restitution d'énergie :

$$G = \frac{P^2}{2b} \frac{\partial c}{\partial a} \quad (\text{Eq. II - 89})$$

Dans le cas particulier de la poutre DCB, cette relation peut prendre plusieurs formes en se basant sur la théorie des poutres. La flèche (moitié de la distance de l'ouverture) s'écrit $\frac{d}{2} = \frac{Pa^3}{3EI}$ où $I = \frac{bh^3}{12}$ est le moment d'inertie de la section et E le module de Young. La compliance devient alors :

$$c = \frac{2a^3}{3EI} \quad (\text{Eq. II - 90})$$

Finalement en exprimant EI en fonction de a , d et P , on arrive à :

$$G = \frac{3Pd}{2ba} \quad (\text{Eq. II - 91})$$

L'avantage de cette formule est qu'elle permet de définir le taux de restitution d'énergie en fonction des trois grandeurs facilement déterminées a , d et P . La rigidité de flexion EI difficile à définir surtout pour un stratifié multidirectionnel n'intervient pas dans cette relation.

Cependant, cette formule est précise pour des conditions idéales de la théorie des poutres à savoir : encastrement parfait, longueur de fissure assez grande, déformation de cisaillement négligeable [LEVEQUE (1998)]. Des corrections pourraient être nécessaires pour tenir compte de l'imperfection de ces conditions là.

Le calcul du taux de restitution d'énergie à l'aide de la théorie des poutres sera la base de la définition du critère de délaminage développé ultérieurement dans cette étude et qui sera adapté pour le calcul éléments finis.

Calcul de G_I basé sur la méthode d'Irwin

Le taux de restitution d'énergie selon l'hypothèse d'Irwin est calculé en supposant que pour une progression infinitésimale de la fissure, la distance d'ouverture derrière le nouveau front de fissure est quasi identique à celle derrière l'ancien front de fissure. Par conséquent, l'énergie nécessaire pour propager d'une quantité infinitésimale le front de fissure est équivalente au travail nécessaire pour ramener la fissure à sa longueur d'origine. Sur ce, le taux de restitution d'énergie s'écrit :

$$G_I = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2ab} \int_0^b \int_0^a w_R(r, y) \sigma(a - r, y) dx dy \quad (\text{Eq. II - 92})$$

où $w_R(r,y)$ est le déplacement relatif ou la distance d'ouverture à la position (r,y) derrière le front de fissure, $\sigma(a-r,y)$ est la contrainte devant le front de fissure, a est la distance de propagation de fissure et b la longueur du front.

La méthode "Virtual Crack Closure Technique" (VCCT) est basée sur cette hypothèse. En éléments finis, elle consiste à calculer le taux de restitution d'énergie en fonction des forces et déplacements aux nœuds des éléments autour du front de fissure. Ceci permet d'utiliser un maillage relativement gros comparé aux méthodes qui demandent une description exacte du champ de contrainte près du front de fissure.

De Roeck et al [DE ROECK (1995)] montre que, pour un élément volume à huit nœuds, les taux de restitution d'énergie pour les trois modes de rupture peuvent être exprimés en fonction des forces nodales devant le front de fissure et des déplacements d'ouverture derrière le front (Figure II - 15).

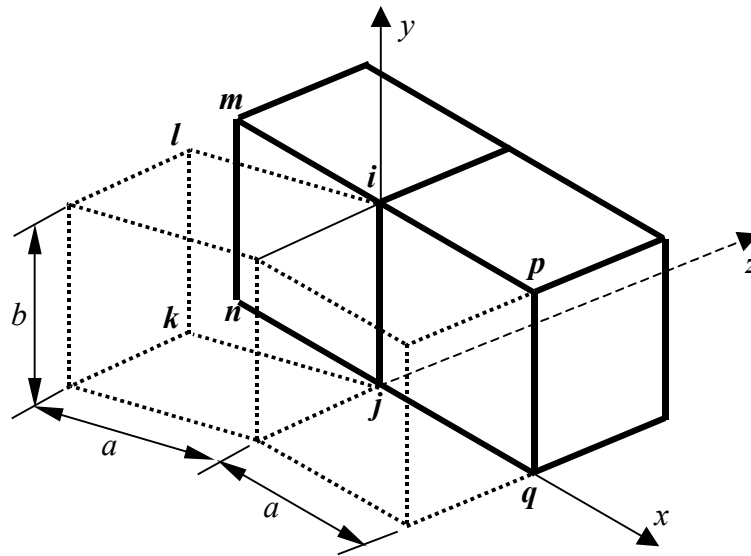


Figure II - 15 : Les nœuds autour du front de fissure considérés pour le calcul du taux de restitution d'énergie

Il définit pour cela une distribution de la contrainte normale σ_z devant le front de fissure dans le plan (x,y) de la façon suivante :

$$\sigma_z = \frac{A_1}{\sqrt{x}} + A_2 + A_3 y + A_4 \frac{y}{\sqrt{x}} \quad (\text{Eq. II - 93})$$

ou bien d'une façon matricielle :

$$[\sigma_z] = [X][A] \quad (\text{Eq. II - 94})$$

avec : $[X] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{x}} & 1 & y & \frac{y}{\sqrt{x}} \end{bmatrix}$ et $[A] = [A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4]^t$

A_1 à A_4 sont des constantes qui seront écrites en fonction des forces aux quatre nœuds i, j, p, q de l'élément devant le front de fissure. Pour avoir cette relation, il écrit que le travail fourni

par la distribution de la contrainte σ_z est égal au travail des forces aux quatre nœuds dans la direction z tel que :

$$\frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \sigma_z(x, y) w(x, y) dx dy = \frac{1}{2} (F_{zi} w_i + F_{zj} w_j + F_{zp} w_p + F_{zq} w_q) \quad (\text{Eq. II - 95})$$

$w(x, y)$ étant le déplacement suivant z au point (x, y) calculé par interpolation à partir des déplacements w aux nœuds i, j, p, q :

$$w(x, y) = N_i w_i + N_j w_j + N_p w_p + N_q w_q \quad (\text{Eq. II - 96})$$

où N_i, N_j, N_p, N_q , sont les fonctions d'interpolation de l'élément.

A partir de l'équation II – 95 , la force au nœud i (ainsi que j, p, q) peut être calculée de la manière suivante :

$$F_{zi} = \int_0^b \int_0^a \sigma_z N_i dx dy \quad (\text{Eq. II - 97})$$

remplaçant σ_z de la relation II – 93 dans l'équation précédente, les forces nodales s'écrivent après intégration de façon symbolique :

$$[F] = [Q][A'] \quad (\text{Eq. II - 98})$$

avec $[F] = [F_{zi} \ F_{zj} \ F_{zp} \ F_{zq}]^t$, $[A'] = [A_1 b \sqrt{a} \ A_2 b a \ A_3 b^2 a \ A_4 b^2 \sqrt{a}]^t$ et $[Q]$ est la matrice qui relie les forces nodales aux constantes A_1 à A_4 . Ceci permet d'exprimer les constantes $[A']$ en fonction des forces aux nœuds :

$$[A'] = [Q]^{-1} [F] \quad (\text{Eq. II - 99})$$

Reprenant l'hypothèse d'Irwin et l'équation II – 92, quand l'élément au front de fissure devient petit, la limite peut être enlevée et G_I devient proche de la valeur exacte. La distance d'ouverture $w_R(r, y)$, qui est aussi le déplacement relatif des nœuds de chaque côté de la fissure, peut être déterminée à n'importe quelle position (r, y) à partir des déplacements aux nœuds k, l, m, n tel que :

$$w_R(r, y) = N_m w_m + N_n w_n - N_k w_k - N_l w_l \quad (\text{Eq. II - 100})$$

Les déplacements des nœuds i et j sont ignorés dans l'équation précédente puisque leurs distances d'ouverture à cet endroit sont nulles et ne contribuent donc pas au calcul de G_I .

En remplaçant les relation II – 93 et II – 100 dans la relation II – 92, et utilisant l'équation II – 99, on retrouve l'expression du taux de restitution d'énergie en mode I pour les éléments volumes à 8 nœuds en fonction des forces et déplacements aux nœuds :

$$G_I = \frac{1}{2ab} [F_{zi} (w_m - w_l) + F_{zj} (w_n - w_k)] \quad (\text{Eq. II - 101})$$

En suivant la même procédure, on peut exprimer les taux de restitution d'énergie pour les modes II et III de la même façon :

$$G_{II} = \frac{1}{2ab} [F_{xi}(u_m - u_l) + F_{xj}(u_n - u_k)] \quad (\text{Eq. II - 102})$$

$$G_{III} = \frac{1}{2ab} [F_{yi}(v_m - v_l) + F_{yj}(v_n - v_k)] \quad (\text{Eq. II - 103})$$

F_{xi} , F_{yi} et F_{zi} sont les forces au nœud I dirigées selon les axes x , y et z , u_l , v_l et w_l sont les déplacements des nœuds I dans les directions x , y et z respectivement, a et b sont la longueur et la largeur de l'élément qui correspondent à l'incrément de la surface fissurée lié à la taille de l'élément au front de fissure.

En pratique, la propagation de la fissure s'effectue par rupture de la liaison nodale quand le taux de restitution d'énergie calculé au front de la fissure atteint le taux critique. Dans le cas général, le critère de rupture s'exprime sous la forme d'une combinaison des trois modes de délaminage [FLEMING (1999)] [EL SAYED (2001)]:

$$\frac{G_I}{G_{Ic}} + \frac{G_{II}}{G_{IIc}} + \frac{G_{III}}{G_{IIIc}} = 1 \quad (\text{Eq. II - 104})$$

Cette méthode présente toutefois quelques limitations. La précision de G_I , G_{II} et G_{III} diminue quand la taille de l'élément augmente et impose ainsi la nécessité d'un maillage très fin à proximité du front de fissure. De plus, pour avoir une meilleure précision des taux de restitution d'énergie, le front de fissure doit être aligné avec le maillage. L'utilisation d'un maillage adaptatif s'avère alors nécessaire pour la modélisation de la propagation arbitraire du délaminage dans le plan.

II-3.5. Conclusion

Il existe de nombreuses méthodes pour la modélisation des structures composites. Par contre, la modélisation de leurs endommagements pose de grands défis, notamment le délaminage.

Parmi les différents modèles existants, les modèles basés sur les critères en contraintes quadratiques permettent de détecter l'initiation du délaminage. Ils ne permettent pas de gérer la propagation des fissures aux interfaces. Ils restent, de ce fait, limités à des modèles de type impact sur plaques composites.

Les modèles basés sur la mécanique de l'endommagement sont utilisables quelque soit le mode d'endommagement. Ils donnent de bons résultats dans des applications spécifiques, mais nécessitent un maillage relativement fin. Ce type de modèle permet de contrôler l'initiation ainsi que la propagation du délaminage contrairement aux modèles basés sur la mécanique de rupture qui, eux, ne peuvent piloter que la progression de la fissure. Appliquée à des structures industrielles, la mécanique de l'endommagement nécessite un maillage fin pour une bonne précision, entraînant des temps de modélisation et de calcul très importants.

La mécanique de la rupture offre à la méthode éléments finis un moyen de piloter la propagation du délaminage en fonction des paramètres nodaux. Cette méthode permet l'utilisation d'un maillage moins fin que les modèles basés sur la mécanique de l'endommagement. Par contre, elle ne permet pas de définir une dégradation progressive des éléments et peut engendrer des problèmes de vibration parasite à chaque accroissement de la fissure. L'utilisation en parallèle d'une loi de dégradation est alors nécessaire pour assouplir la rupture de l'interface.

Notons que le calcul du taux de restitution d'énergie G dans un modèle éléments finis à l'aide de la méthode VCCT présentée ici prend en compte uniquement les degrés de liberté de translation ainsi que les forces aux nœuds. Or, le calcul des G doit faire intervenir les rotations et les moments aux nœuds pour les éléments ayant des degrés de liberté de rotation. Une étude dans cette direction, basée sur la théorie des poutres, sera présentée au chapitre quatre.

II-4. Conclusions

Ce chapitre présente un aperçu rapide de la méthode éléments finis en dynamique. L'accent a été mis sur les codes à schéma d'intégration explicite qui permettent de traiter les problèmes de crash et d'impact. Les calculs au niveau des éléments ainsi que les formulations non-linéaires servant à résoudre des problèmes à grands déplacements ont été présentés. Cette étude servira pour la formulation du nouvel élément fini et à sa programmation dans le code de calcul explicite MEF_EX spécialement créé pour cet effet.

D'autre part, l'étude bibliographique des modes d'endommagement des stratifiés composites a permis de se familiariser avec les différents modèles existants et de mettre en avant la complexité et la difficulté posées par la modélisation éléments finis de l'endommagement des structures composites.

Concernant les codes à intégration explicite, les modélisations éléments finis de l'impact des structures composites présentent certaines limitations.

D'un côté, l'utilisation des éléments volumiques, capables de représenter les principaux modes d'endommagement, génèrent un temps de calcul élevé, surtout si l'on veut modéliser des structures complexes. En effet, les modèles utilisant une couche d'éléments volumiques par pli composite nécessitent un nombre élevé d'éléments de petites tailles. Il en découle que le pas de temps de calcul est très petit. De ce fait le nombre de cycles de calcul est très important.

D'un autre côté, l'utilisation des éléments plaques multicouches assure des temps de calcul relativement réduits mais ne permet pas la modélisation du délaminage en mode I, mode essentiellement piloté par la contrainte σ_{33} .

De plus, la précision des modèles d'endommagement impose des restrictions sur la taille du maillage qui vont à l'encontre de la logique des codes de calcul explicites.

La recherche de nouvelles approches pour la modélisation des endommagements des structures composites industrielles s'avère intéressante. Notre but à travers cette étude est de présenter une nouvelle méthode pour la modélisation du délaminage en essayant de réunir tous les éléments bénéfiques au niveau du temps de calcul et de la taille des modèles dégagés de cette partie bibliographique. Ces éléments se résument par : l'approche multicouche, les critères basés sur les paramètres nodaux et la modélisation de la séparation des plis sans recours aux éléments d'interface.

CHAPITRE III

ETUDE NUMERIQUE : FORMULATION DE L'ELEMENT

III-1. Introduction

Comme il a été indiqué dans le chapitre I, nous cherchons à définir un élément volumique capable de se transformer en deux éléments plaques pour modéliser efficacement et avec réalisme la cinématique du phénomène de délaminage en mode I.

Les modes d'endommagement que subissent les structures composites sont associés à des problèmes d'élasticité en 3 dimensions. Il est nécessaire de disposer des contraintes transverses σ_{33} , τ_{13} et τ_{23} pour pouvoir correctement modéliser le délaminage. Les éléments plaques n'ont pas accès à la contrainte σ_{33} . De ce fait, l'utilisation d'un élément volume à élasticité tridimensionnelle s'impose.

Dans la cinématique décrite en introduction, l'élément volumique défini se transforme en deux éléments plaques et se trouve donc obligatoirement lié à des éléments plaques lors de l'apparition du délaminage. Pour assurer une liaison rigide et simple avec les éléments plaques, cet élément volume doit alors avoir 2 nœuds par côté ainsi que des degrés de liberté de rotation. Un élément 3D à 8 nœuds et 48 ddl est alors adopté. Il est généré à partir d'un élément hexaédrique à 20 nœuds [YUNUS (1989)] [YUNUS (1991)] et possède 6 ddl par nœud dont 3 de translation et 3 de rotation.

III-2. Formulation de la phase volumique

L'élément 8 nœuds à 48 ddl est créé en partant d'un élément 20 nœuds et 60 ddl. Il présente quelques avantages du point de vue modélisation. Il a la capacité d'être relié à un élément plaque 4 nœuds. Il est donc approprié pour être transformé en 2 plaques pour représenter le délaminage. De plus, un élément à 8 nœuds ne possède que 4 nœuds par face. Cela est favorable pour la gestion de contact dans les codes explicites où le temps de calcul dépend directement du nombre de nœuds exposés au contact.

III-2.2. Création de l'élément à partir d'un élément à 20 nœuds et 60 ddl

III-2.2.1 Elément 20 nœuds et 60 ddl

Cet élément possède 8 nœuds principaux et 12 nœuds additionnels de mi-côté (Figure III - 1). Chaque nœud possède 3 degrés de liberté de translation.

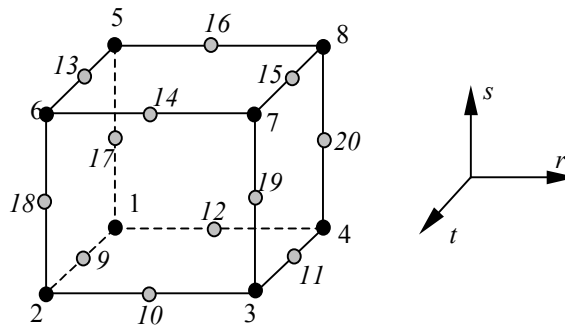


Figure III - 1 : Elément hexaédrique à 20 nœuds

Le déplacement $\{u, v, w\}$ d'un point quelconque de l'élément 20 nœuds s'écrit en fonction des déplacements des nœuds $\{u_1, \dots, u_{20}, v_1, \dots, v_{20}, w_1, \dots, w_{20}\}$:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_{20} \\ & N_1 & N_2 & \dots & N_{20} \\ & & N_1 & N_2 & \dots & N_{20} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{20} \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{20} \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{20} \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq. III - 1})$$

ou bien d'une façon symbolique:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{20\text{nœuds}} = [N]\{u\} \quad (\text{Eq. III - 2})$$

Les fonctions d'interpolations N_i sont les fonctions de la famille Serendip écrites dans le repère naturel (r, s, t) . Les coordonnées naturelles permettent de définir une transformation du domaine physique de l'élément en un domaine géométrique simple sans dimension. L'écriture des fonctions d'interpolation dans ce domaine géométrique est faite alors d'une façon plus facile.

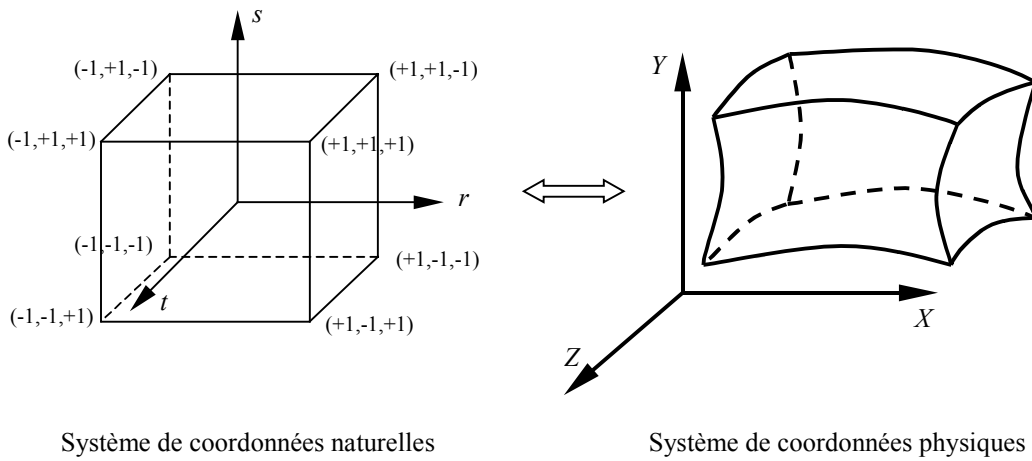


Figure III - 2 : Transformation du domaine physique en domaine géométrique naturel

Aux nœuds principaux ($i = 1$ à 8) on définit les fonctions d'interpolation telles que :

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + rr_i)(1 + ss_i)(1 + tt_i)(rr_i + ss_i + tt_i - 2) \quad (\text{Eq. III - 3})$$

aux nœuds d'interface ($i = 9$ à 20) :

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{4}(1 - r^2)(1 + ss_i)(1 + tt_i) && \text{pour } r_i = 0 \\ N_i &= \frac{1}{4}(1 + rr_i)(1 - s^2)(1 + tt_i) && \text{pour } s_i = 0 \\ N_i &= \frac{1}{4}(1 + rr_i)(1 + ss_i)(1 - t^2) && \text{pour } t_i = 0 \end{aligned} \quad (\text{Eq. III - 4})$$

(r_i, s_i, t_i) étant les coordonnées du nœud i .

III-2.2.2 Elément 8 nœuds et 48 ddl

L'idée consiste à éliminer les nœuds intermédiaires de l'élément 20 nœuds et à remplacer leur effet par des rotations aux nœuds des sommets.

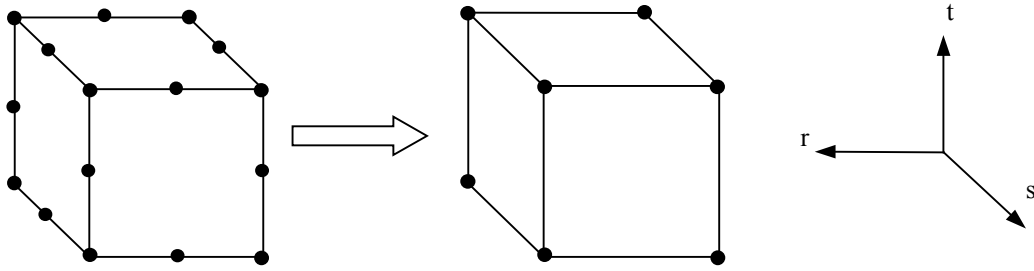


Figure III - 3 : Création d'un élément 8 nœuds (ddl : $u, v, w, \omega_x, \omega_y, \omega_z$) à partir d'un élément 20 nœuds (ddl : u, v, w)

On souhaite générer un déplacement normal parabolique dans l'arête quand un nœud du sommet subit de la rotation. Les translations aux nœuds induiront toutefois un déplacement linéaire dans l'arête. Les différents modes de déformation que subit l'élément suite à des déplacements et rotations appliqués aux nœuds peuvent se traduire alors de la façon suivante :

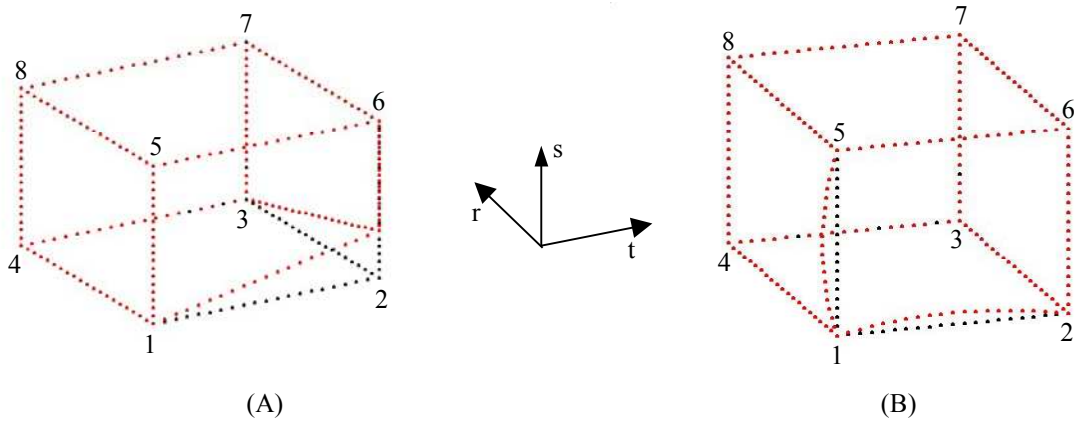


Figure III - 4 : (A) Déplacement v du nœud 2 suivant l'axe s – (B) Rotation $-\theta$ du nœud 1 autour de l'axe r

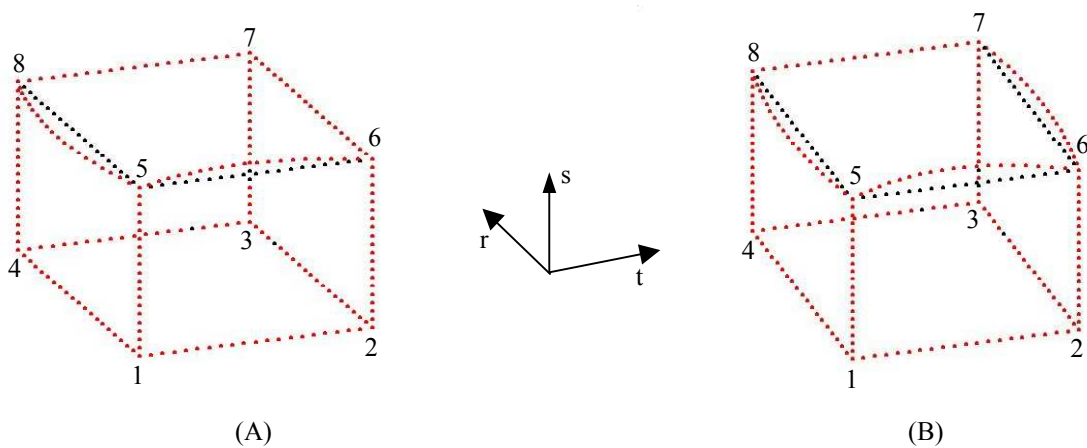


Figure III - 5 : (A) Rotation θ du nœud 5 autour de l'axe s – (B) Rotation θ du nœud 5 autour de l'axe s et $-\theta$ du nœud 6 autour de l'axe s

Considérons une arête formée par les nœuds i et j et ayant un nœud intermédiaire k . Pour une rotation aux nœuds i et j , l'arête subit un déplacement normal parabolique (Figure III - 6). On suppose que k est l'extremum de la parabole.

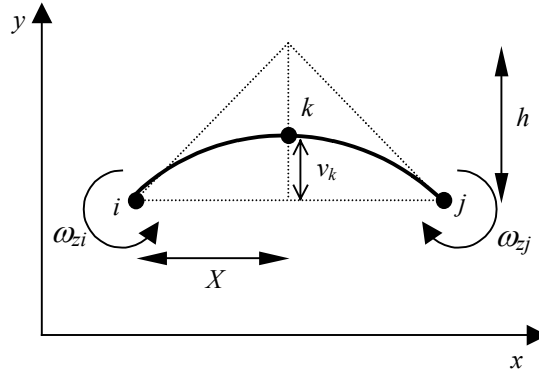


Figure III - 6 : Déplacement normal parabolique de l'arête

En posant :

$$X = \frac{x_j - x_i}{2} \quad (\text{Eq. III - 5})$$

et :

$$\omega = \frac{\omega_{zi} - \omega_{zj}}{2} \quad (\text{Eq. III - 6})$$

le déplacement normal (suivant l'axe y) du point k peut alors être exprimé en fonction des rotations des nœuds des extrémités par :

$$v_k = \frac{h}{2} = \frac{1}{2} X \omega = \frac{x_j - x_i}{8} (\omega_{zi} - \omega_{zj}) \quad (\text{Eq. III - 7})$$

h étant la hauteur reliant l'arête à l'intersection des tangentes aux nœuds i et j .

Les déplacements des nœuds intermédiaires en fonction des translations et rotations des nœuds des sommets s'écrivent alors d'une façon générale :

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{2}(u_i + u_j) + \frac{z_j - z_i}{8}(\omega_{yi} - \omega_{yj}) + \frac{y_j - y_i}{8}(\omega_{zj} - \omega_{zi}) \\ v_k &= \frac{1}{2}(v_i + v_j) + \frac{z_j - z_i}{8}(\omega_{xj} - \omega_{xi}) + \frac{x_j - x_i}{8}(\omega_{zi} - \omega_{zj}) \\ w_k &= \frac{1}{2}(w_i + w_j) + \frac{x_j - x_i}{8}(\omega_{yj} - \omega_{yi}) + \frac{y_j - y_i}{8}(\omega_{xi} - \omega_{xj}) \end{aligned} \quad (\text{Eq. III - 8})$$

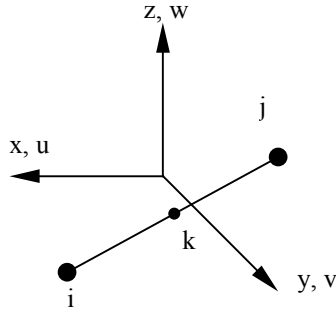


Figure III - 7 : arête type d'un élément

Les déplacements des nœuds situés aux centres des arêtes s'écrivent sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_u \\ T_v \\ T_w \end{bmatrix} \{\delta\} \quad (\text{Eq. III - 9})$$

avec : $[u_m] = [u_9, u_{10}, \dots, u_{20}]$

$[v_m] = [v_9, v_{10}, \dots, v_{20}]$

$[w_m] = [w_9, w_{10}, \dots, w_{20}]$

$[\delta] = [u_1 \dots u_8, v_1 \dots v_8, w_1 \dots w_8, \omega_{x1} \dots \omega_{x8}, \omega_{y1} \dots \omega_{y8}, \omega_{z1} \dots \omega_{z8}]$

$[T_u], [T_v], [T_w]$ sont les matrices de transformation de $[u_m], [v_m], [w_m]$.

La matrice d'interpolation de l'élément 8 nœuds à 48 ddl est construite en combinant les équations (III-2) et (III-9) :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}_{8\text{nœuds}} = [N][T]\{\delta\} = [N]_{8\text{nœuds}} \{\delta\} \quad (\text{Eq. III - 10})$$

où $[T]$ est la matrice suivante :

$$[T] = \begin{bmatrix} [I] & [0_1] & [0_1] & [0_2] \\ & [T_u] & & \\ [0_1] & [I] & [0_1] & [0_2] \\ & [T_v] & & \\ [0_1] & [0_1] & [I] & [0_2] \\ & [T_w] & & \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. III - 11})$$

$[I]$ est la matrice d'identité 8×8 , $[0_1]$ et $[0_2]$ sont des matrices zéro 8×8 et 8×24 respectivement.

Les fonctions de formes qui apparaissent dans la matrice d'interpolation $[N]_{8\text{nœuds}}$ s'écrivent :

$N_i = \frac{1}{8}(1 + rr_i)(1 + ss_i)(1 + tt_i)$ affectant les déplacements u , v et w des nœuds du vecteur $\{\delta\}$,

$N_i = \frac{1}{32}(1 - r^2)(1 + ss_i)(1 + tt_i)$ affectant les rotations des nœuds autour de s et t ,

$N_i = \frac{1}{32}(1 + rr_i)(1 - s^2)(1 + tt_i)$ affectant les rotations des nœuds autour de r et t ,

$N_i = \frac{1}{32}(1 + rr_i)(1 + ss_i)(1 - t^2)$ affectant les rotations des nœuds autour de r et s .

Le comportement de cet élément reste linéaire si les nœuds ne subissent que des translations. Les termes quadratiques qui provenaient des fonctions de forme de l'élément 20 nœuds aux nœuds principaux disparaissent et les fonctions quadratiques aux nœuds d'interfaces sont reportées aux rotations des nœuds des extrémités. En d'autres termes, un déplacement parabolique n'apparaît que lorsqu'un nœud subit de la rotation.

III-2.3. Problématique : point intermédiaire figé au milieu de l'arête

Les fonctions de formes de l'équation (III – 10) développées plus haut, montrent que le déplacement normal suivant chaque côté est quadratique, alors que la translation le long de chaque côté n'est que linéaire. Ce type de champ de déplacement qui varie en fonction de la direction au sein de l'élément engendre un comportement communément connu sous le nom de *Poisson's ratio locking* [MACNEAL (1988)] que l'on peut traduire par « verrouillage dû au coefficient de Poisson ». Ce verrouillage se caractérise, dans le cas d'une poutre en flexion pure modélisée avec un seul élément dans la hauteur, par un excès de rigidité en flexion d'un facteur de $1/(1 - \nu^2)$ pour les contraintes de membrane et de $(1 - \nu)^2/(1 - 2\nu)$ pour les déformations de membrane.

Afin d'éliminer le problème dû à ce verrouillage, l'auteur procède à l'adjonction de 3 modes incompatibles au niveau des fonctions d'interpolation. Ceci assouplit davantage l'élément et compense, par conséquent, l'excès de rigidité rencontré. Cette méthode consiste à ajouter aux fonctions de formes habituelles des modes de déplacements définis par des degrés de liberté en un nœud interne supplémentaire à l'élément. Ainsi, une matrice de rigidité de 51×51 est formée. Elle sera ramenée en une matrice 48×48 après élimination des ddl supplémentaires par une technique dite de condensation.

Cette méthode, malgré son efficacité, semble être compliquée à mettre en œuvre dans un calcul éléments finis explicite. Compte tenu de cette remarque, nous avons adopté une autre approche. Une autre explication de l'excès de rigidité est tentée.

Les fonctions de formes telles qu'elles étaient faites précédemment ne permettent pas aux nœuds intermédiaires (devenus fictifs) de se déplacer le long de l'arête auquel chacun appartient. En effet, en regardant l'équation des déplacements des nœuds intermédiaires en fonction des déplacements et des rotations des nœuds principaux (Eq. III-8), on remarque que le point intermédiaire est obligé de rester au milieu du segment reliant les nœuds principaux et il s'écarte de ce segment lorsqu'il y a des rotations tout en restant à mi-distance entre les nœuds des extrémités.

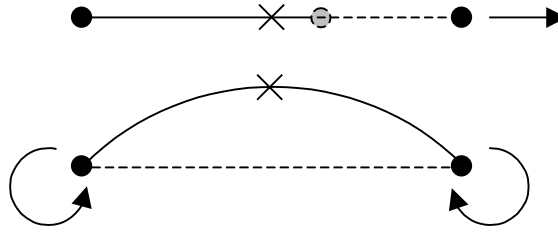


Figure III - 8 : Le nœud milieu (×) contraint à rester à mi-distance entre les nœuds des sommets

Cette restriction augmente la rigidité de l'élément en flexion. La solution analytique exacte du problème de poutre en flexion donnée par Bellet [BELLET (1984)] montre que, pour une section quelconque, le point milieu des facettes latérales n'est plus au milieu de l'arête après déformation de la section résultante d'un chargement en flexion. Prenons l'exemple d'une poutre de section rectangulaire de dimensions $2a \times 2c$ (Figure III - 9) et soumise à un moment de flexion M suivant la direction x_2 :

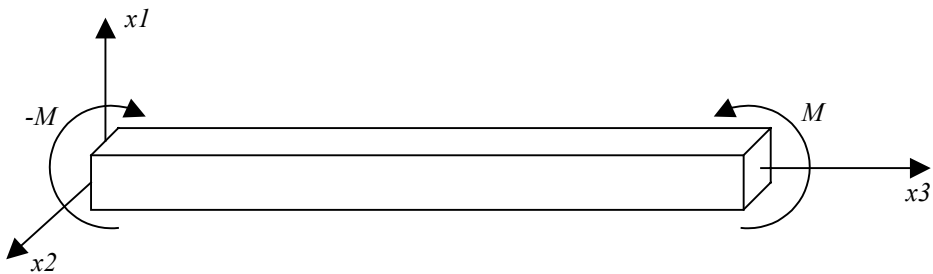


Figure III - 9 : Poutre de section $2a \times 2c$ en flexion simple

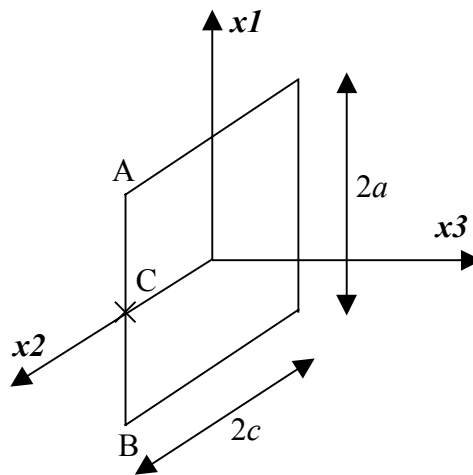


Figure III - 10 : Section de poutre en flexion simple

Le vecteur déplacement d'un point I de coordonnées (x_1, x_2, x_3) s'écrit :

$$\vec{u}(\vec{x}) = \frac{M}{2EI_2} \begin{pmatrix} v[(x_1)^2 - (x_2)^2] + (x_3)^2 \\ 2vx_1x_2 \\ -2x_1x_2 \end{pmatrix} \quad (\text{Eq. III - 12})$$

donc pour les points A et B le déplacement suivant x_1 est :

$$u_{x_1A} = u_{x_1B} = \frac{M}{2EI_2} (v[a^2 - c^2] + x_3^2) \quad (\text{Eq. III - 13})$$

or le déplacement du point C, milieu du segment AB est :

$$\vec{u}(\vec{x}) = \frac{M}{2EI_2} (-vc^2 + x_3^2) \quad (\text{Eq. III - 14})$$

donc le point C se décale d'une quantité $\delta = \frac{M}{2EI_2} (-va^2)$ par rapport au milieu de l'arête AB.

AB. Considérons un tronçon de la poutre de section $2a \times 2c$ et de longueur b (Figure III - 11).

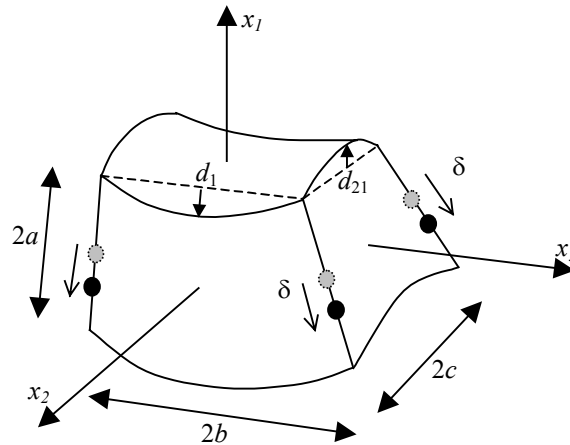


Figure III - 11 : Déformation d'un tronçon de la poutre – Décalage δ par rapport aux milieux des faces latérales

Le moment étant dirigé suivant la direction x_2 , les déplacements d_1 et d_{21} des points aux milieux des autres arêtes par rapport aux points des sommets s'écrivent :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{M}{2EI_2} (-b^2) \\ d_{21} &= \frac{M}{2EI_2} (vc^2) \end{aligned} \quad (\text{Eq. III - 15})$$

δ et d_{21} peuvent être exprimée en fonction de d_1 :

$$\delta = \nu \left(\frac{a}{b} \right)^2 d_1$$

$$d_{21} = -\nu \left(\frac{c}{b} \right)^2 d_1$$

(Eq. III - 16)

Inversement, quand la poutre est dirigée suivant l'axe x_2 et le moment suivant x_3 , les déplacements δ et d_{12} s'écrivent en fonction de d_2 :

$$\delta = \nu \left(\frac{a}{c} \right)^2 d_2$$

$$d_{12} = -\nu \left(\frac{b}{c} \right)^2 d_2$$

(Eq. III - 17)

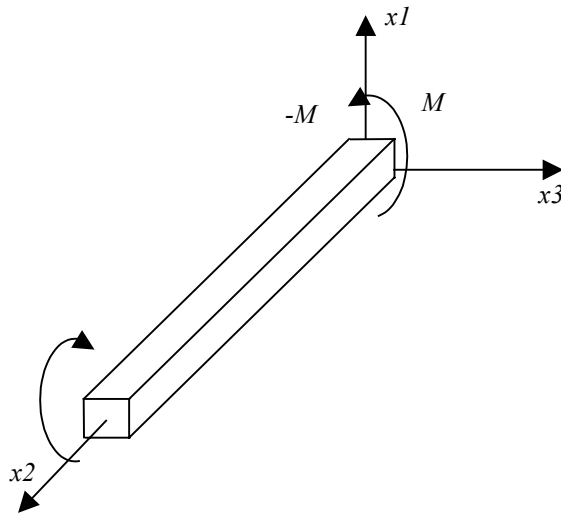


Figure III - 12 : Poutre en flexion autour de l'axe x_3

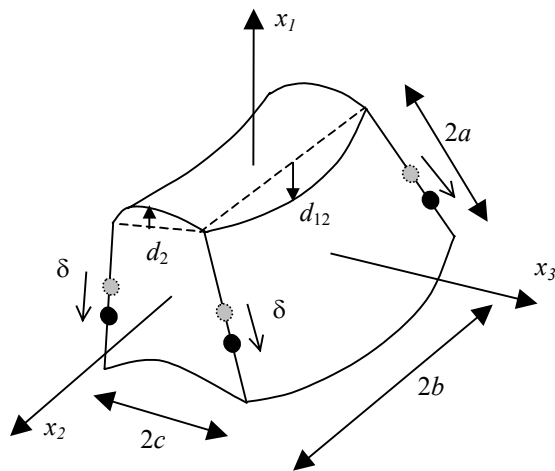


Figure III - 13 : Déformation d'un tronçon de longueur b de la poutre

En assimilant le tronçon de poutre à l'élément volume développé plus haut, dans le cas général le déplacement δ s'écrit en fonction de D_1 et D_2 :

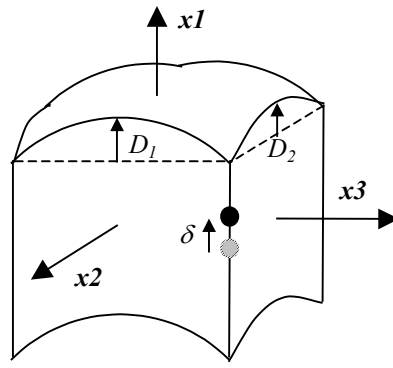


Figure III - 14 : Elément volumique subissant un moment autour de x2 et x3

$$\delta = \nu \left(\frac{a}{b} \right)^2 D_1 + \nu \left(\frac{a}{c} \right)^2 D_2 \quad (\text{Eq. III - 18})$$

avec :

$$\begin{aligned} D_1 &= d_1 + d_{12} \\ D_2 &= d_2 + d_{21} \end{aligned} \quad (\text{Eq. III - 19})$$

utilisant les équations III – 16, III – 17 et III – 19, l'équation III – 18 devient :

$$\delta = \nu \left(\frac{a}{b} \right)^2 d_1 - \nu^2 \left(\frac{a}{c} \right)^2 d_2 + \nu \left(\frac{a}{c} \right)^2 d_2 - \nu^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 d_1 \quad (\text{Eq. III - 20})$$

En négligeant le terme en ν^2 , δ s'écrit :

$$\delta = \nu \left(\frac{a}{b} \right)^2 d_1 + \nu \left(\frac{a}{c} \right)^2 d_2 \quad (\text{Eq. III - 21})$$

III-2.4. Solution proposée : rectification de la transformation

Concernant la formulation de l'élément, le nœud intermédiaire doit pouvoir se déplacer le long de l'arête. Il doit être capable de quitter la position du milieu entre les nœuds des sommets. Pour ce faire, sa position le long de l'arête sera régie par les rotations des nœuds des facettes auxquelles il appartient.

En se basant sur ce qui est décrit plus haut, le déplacement du point milieu le long d'une arête (i,j) sera écrit en fonction des déplacements normaux paraboliques des autres arêtes en intersection avec (i,j).

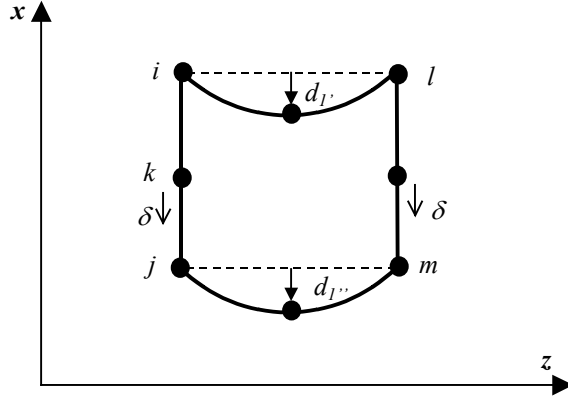


Figure III - 15 : Facette (i,j,m,l) de l'élément volumique

Considérons une facette (i,j,m,l) , le déplacement δ du point k le long de l'arête (i,j) dépend donc de la moyenne d_1 des déplacements paraboliques $d_{1'}$ et $d_{1''}$ des arêtes (j,m) et (i,l) . Or ces déplacements sont fonctions des rotations aux nœuds i, j, m et l . Le déplacement du point k dû à la flexion de la facette (i,j,m,l) s'écrit alors en fonction des coordonnées et des rotations aux nœuds :

$$v \left(\frac{a}{b} \right)^2 d_1 = v \frac{(x_i - x_j)^2}{(z_m - z_j)^2} \times \frac{1}{2} \left[\frac{z_m - z_j}{8} (\omega_{yj} - \omega_{ym}) + \frac{z_l - z_i}{8} (\omega_{yi} - \omega_{yl}) \right] \quad (\text{Eq. III - 22})$$

D'une façon similaire, le déplacement du point k dû à la flexion de la facette (i,j,q,p) (Figure III - 16) s'écrit :

$$v \left(\frac{a}{c} \right)^2 d_2 = v \frac{(x_i - x_j)^2}{(y_q - y_j)^2} \times \frac{1}{2} \left[\frac{y_q - y_j}{8} (\omega_{zq} - \omega_{zj}) + \frac{z_p - z_i}{8} (\omega_{zp} - \omega_{zi}) \right] \quad (\text{Eq. III - 23})$$

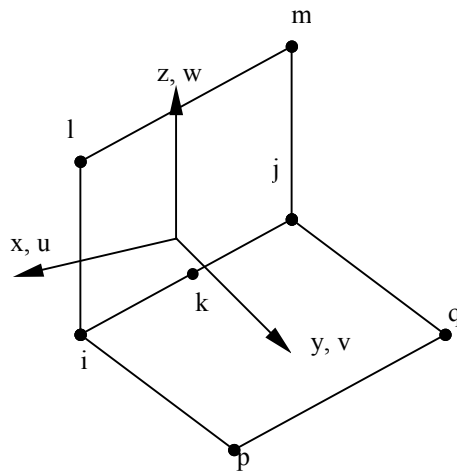


Figure III - 16 : 2 facettes ayant un nœud intermédiaire en commun

En ajoutant les équations III – 22 et III – 23 à la relation III – 8, les déplacements des nœuds intermédiaires en fonctions des déplacements et rotations des nœuds principaux s'écrivent de façon générale :

$$\begin{aligned}
 u_k &= \frac{1}{2}(u_i + u_j) + \frac{z_j - z_i}{8}(\omega_{yi} - \omega_{yj}) + \frac{y_j - y_i}{8}(\omega_{zj} - \omega_{zi}) \\
 &+ \frac{1}{2}v \frac{(x_i - x_j)^2}{(z_m - z_j)^2} \left[\frac{z_m - z_j}{8}(\omega_{yj} - \omega_{ym}) + \frac{z_l - z_i}{8}(\omega_{yi} - \omega_{yl}) \right] \\
 &+ \frac{1}{2}v \frac{(x_i - x_j)^2}{(y_q - y_j)^2} \left[\frac{y_q - y_j}{8}(\omega_{zq} - \omega_{zj}) + \frac{z_p - z_i}{8}(\omega_{zp} - \omega_{zi}) \right] \\
 v_k &= \frac{1}{2}(v_i + v_j) + \frac{z_j - z_i}{8}(\omega_{xj} - \omega_{xi}) + \frac{x_j - x_i}{8}(\omega_{zi} - \omega_{zj}) \\
 &+ \frac{1}{2}v \frac{(y_i - y_j)^2}{(x_m - x_j)^2} \left[\frac{x_m - x_j}{8}(\omega_{zj} - \omega_{zm}) + \frac{x_l - x_i}{8}(\omega_{zi} - \omega_{zl}) \right] \\
 &+ \frac{1}{2}v \frac{(y_i - y_j)^2}{(z_q - z_j)^2} \left[\frac{z_q - z_j}{8}(\omega_{xq} - \omega_{xj}) + \frac{z_p - z_i}{8}(\omega_{xp} - \omega_{xi}) \right] \\
 w_k &= \frac{1}{2}(w_i + w_j) + \frac{x_j - x_i}{8}(\omega_{yj} - \omega_{yi}) + \frac{y_l - y_i}{8}(\omega_{xi} - \omega_{xj}) \\
 &+ \frac{1}{2}v \frac{(z_i - z_j)^2}{(y_m - y_j)^2} \left[\frac{y_m - y_j}{8}(\omega_{xj} - \omega_{xm}) + \frac{z_l - z_i}{8}(\omega_{xi} - \omega_{xl}) \right] \\
 &+ \frac{1}{2}v \frac{(z_i - z_j)^2}{(x_q - x_j)^2} \left[\frac{x_q - x_j}{8}(\omega_{yq} - \omega_{yj}) + \frac{x_p - x_i}{8}(\omega_{yp} - \omega_{yi}) \right]
 \end{aligned} \tag{Eq. III - 24}$$

Cette transformation permet au nœud intermédiaire de quitter la position de milieu entre les nœuds des extrémités de l'arête. L'écart par rapport au milieu est fonction du déplacement normal quadratique des autres côtés en intersection avec l'arête en question. Autrement dit, le nœud intermédiaire suit la flexion des facettes auxquelles il appartient :

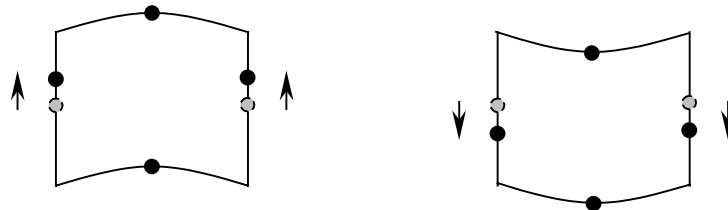


Figure III - 17 : Mouvement de translation sur les côtés suivant la flexion de la facette

Les nouvelles fonctions d'interpolation sont ensuite établies suivant la méthode décrite au paragraphe III-2.2. à partir de l'équation de transformation III – 24.

III-2.5. Choix de l'ordre d'intégration

Le calcul des forces internes dans les éléments s'effectue par intégration numérique de l'expression :

$$f_{il}^{\text{int}} = \int_V \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV \quad (\text{Eq. III - 25})$$

En posant :

$$F_{il}(r, s, t) = \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \sigma_{ji} |J| \quad (\text{Eq. III - 26})$$

où $|J|$ est le déterminant du Jacobien de la transformation du repère global (x, y, z) au repère intrinsèque (r, s, t) , l'intégration numérique donne :

$$f_{il}^{\text{int}} = \iiint_{-1}^1 F_{il}(r, s, t) dr \cdot ds \cdot dt = \sum_{k=1}^n w_k F_{il}(r_k, s_k, t_k) \quad (\text{Eq. III - 27})$$

f_{il}^{int} étant la force suivant l'axe i au $l^{\text{ième}}$ nœud, n étant le nombre de points d'intégration, w_k le poids associé au $k^{\text{ième}}$ point d'intégration de coordonnées r_k, s_k et t_k dans le repère intrinsèque à l'élément.

Quand le nombre de points d'intégration est suffisamment élevé, l'expression de la force interne est intégrée d'une façon exacte. L'intégration est alors dite complète. Celle-ci est souvent utilisée dans les codes de calcul statique ou dynamique de type implicite. Elle ne présente aucun problème de stabilité. Par contre, elle peut engendrer des problèmes de verrouillage en cisaillement ou en volume.

Il existe aussi un ordre d'intégration minimal (intégration réduite), qui permet d'assurer la convergence. Dans ce cas, certains modes de déformation ne sont pas pris en compte dans le calcul des forces internes. L'intégration réduite présente quelques avantages. D'un côté, elle permet de compenser la surestimation de la rigidité due à l'approximation du champ de déplacement. De l'autre côté, elle permet une réduction significative du temps de calcul par rapport aux éléments complètement intégrés. Cependant, l'intégration réduite peut faire apparaître au niveau de l'élément des modes de déformations à énergie nulle connus sous le terme anglais d'*hourglass*. Ces modes ont tendance à se propager dans le maillage et à mener ainsi à des solutions incorrectes du problème. Ces déformations parasites peuvent être contrées en ajoutant une rigidité ou une viscosité artificielle associée aux modes d'*hourglass* et qui a un effet négligeable sur le calcul des déformations globales de la structure.

En utilisant la méthode de Gauss, il faut n points d'intégration dans l'élément pour intégrer exactement un polynôme de degré $2n - 1$. Ainsi, si le nouvel élément solide à 48 ddl a une forme rectangulaire, le déterminant du Jacobien est constant, et le polynôme $F_{il}(r, s, t)$ sera de degré 4. Dans ce cas, 3 points d'intégration dans chaque direction ($3 \times 3 \times 3$) sont nécessaires pour calculer exactement les forces internes. Néanmoins, cet ordre d'intégration est très coûteux en temps de calcul. Pour cela, une intégration à 8 points de Gauss ($2 \times 2 \times 2$) ou

à 14 points [COOK (1974)] sera adoptée pour les cas tests qui vont suivre. Les 2 méthodes d'intégration sont illustrées dans la Figure III - 18 et la Figure III - 19.

8 points d'intégration de Gauss :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(r, s, t).dr.ds.dt = \sum_{i=1}^8 w_i F(r_i, s_i, t_i) \quad (\text{Eq. III - 28})$$

$$r_i = \pm 0.577350269189626 \quad s_i = \pm 0.577350269189626 \quad t_i = \pm 0.577350269189626$$

$$w_i = 1$$

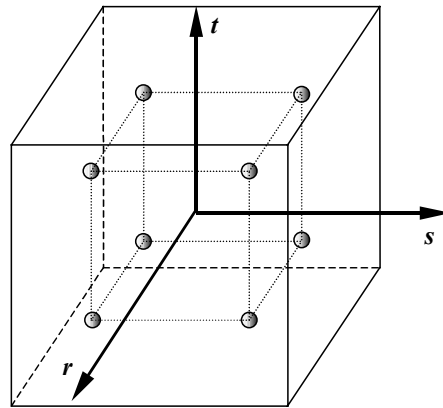


Figure III - 18 : Position des 8 points d'intégration de Gauss

14 points d'intégration :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(r, s, t).dr.ds.dt =$$

$$B[F(-b,0,0) + F(b,0,0) + F(0,-b,0) + F(0,b,0) + F(0,0,-b) + F(0,0,b)] + C \cdot \sum_{i=1}^8 F(r_i, s_i, t_i)$$

(Eq. III - 29)

$$B = 0.8864265927977938 \quad C = 0.3351800554016621 \quad b = 0.7958224257542215$$

$$r_i = \pm 0.7587869106393281 \quad s_i = \pm 0.7587869106393281 \quad t_i = \pm 0.7587869106393281$$

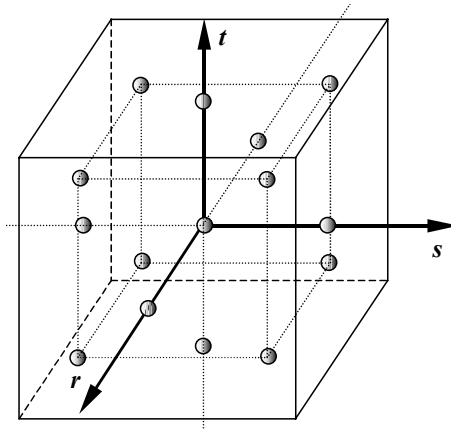


Figure III - 19 : Position des 14 points d'intégration

Une intégration à 8 points de Gauss laisse 12 modes de déformations parasites (*hourglass*), tandis qu'une intégration à 14 points ne laisse que 6 modes parasites. Les 6 premiers modes à énergie nulle sont associés à des rotations égales aux nœuds (Figure III - 20). Chaque mode est associé à une face de l'élément. La Figure III - 20 représente les 6 faces en modes parasites à rotations égales.

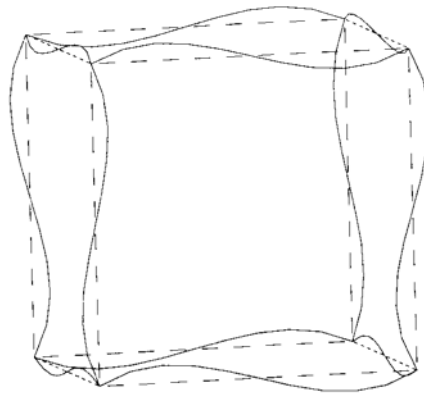


Figure III - 20 : Mode parasite à rotations égales

Les 6 autres modes sont dus à des rotations symétriques aux nœuds. la Figure III - 21 montre les 6 faces en modes d'*hourglass* à rotations symétriques.

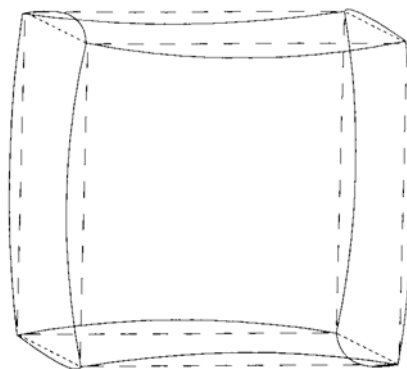


Figure III - 21 : Mode parasite à rotations symétriques

Ces modes peuvent être contrôlés en leur associant deux rigidités artificielles par face : une pour le mode de déformation à rotations égales et une autre pour la déformation à rotations symétriques. L'intégration à 14 points élimine ces derniers modes hourglass grâce à la présence d'un point d'intégration au centre de chaque face. De plus, certains modes parasites sont incompatibles avec l'apparition de modes similaires dans les éléments adjacents et disparaissent donc dans un assemblage d'éléments. Ainsi, l'existence de ces modes n'aura aucune influence sur la réponse globale de la structure.

III-2.6. Contrôle des modes parasites à rotations égales

Pour illustrer le contrôle des modes parasites à rotations égales, nous allons étudier la déformation d'un élément volumique de forme hexaédrique régulière. Soit la face initialement rectangulaire définie par les nœuds (1, 2, 3, 4) (Figure III - 22). Considérons, par exemple, la déformée suivante : les nœuds 1 et 4 subissent une même rotation ω_1 et le nœud 4 subit un déplacement dans la direction x . L'arête (1, 4) reste droite. En effet, rappelons que l'élément est généré à partir d'un élément ayant un nœud intermédiaire sur chaque côté. Ces nœuds sont remplacés par des rotations aux nœuds principaux dans le nouvel élément. Le champ de déplacement résultant oblige le point de mi-côté à rester aligné avec les nœuds des sommets pour la déformée considérée dans la Figure III - 22. Il en résulte que si deux nœuds d'une même arête subissent un même angle de rotation, l'arête reste rectiligne et ne se déforme pas.

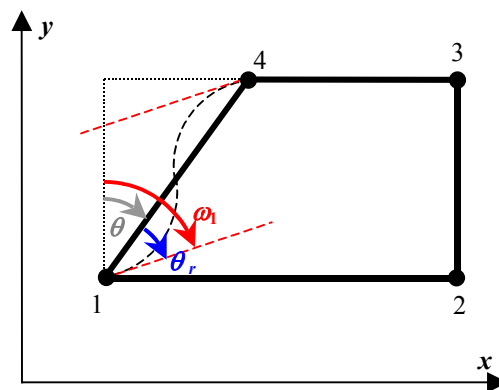


Figure III - 22 : Facette de l'élément hexaédrique en cisaillement

La rotation du nœud 1 peut être écrite sous la forme :

$$\omega_1 = \theta + \theta_r \quad (\text{Eq. III - 30})$$

où θ représente la distorsion angulaire due au cisaillement. Dans le calcul de l'énergie interne de l'élément, le cisaillement est naturellement pris en compte. De ce fait, θ ne participe pas au mode de déformation parasite.

θ_r représente alors une rotation qui ne génère pas de déformation dans l'élément et qui n'est donc pas prise en compte dans le calcul de l'énergie interne.

Une facette située dans le plan (x,y) subissant un mode de déformation à rotations égales est considérée dans la Figure III - 23.

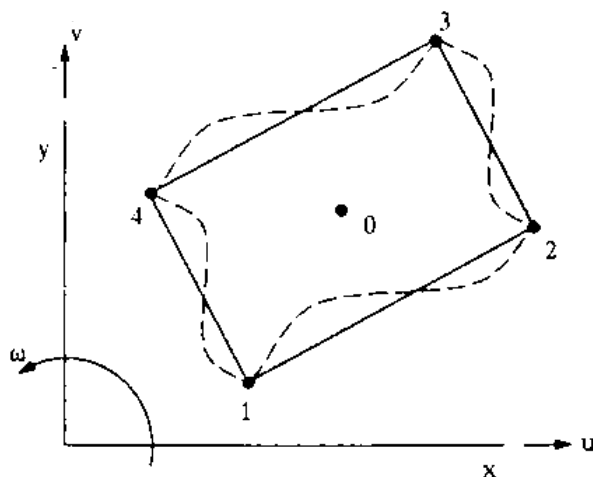


Figure III - 23 : Mode parasite à rotations égales dans une facette de l'hexaèdre

Une rotation relative θ_r est définie comme étant la différence entre la moyenne des degrés de liberté de rotation aux nœuds ω_i et la distorsion angulaire θ_o calculée au centre de l'élément tel que :

$$\theta_r = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \omega_i - \theta_o \quad (\text{Eq. III - 31})$$

où θ_o est calculée en utilisant les fonctions d'interpolation et les déplacements nodaux de la façon suivante :

$$\theta_o = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (\text{Eq. III - 32})$$

u et v étant les déplacements dans le plan (x,y) .

L'équation III - 31 s'écrit en fonction des déplacements et rotations aux nœuds de la facette sous la forme:

$$\theta_r = [Q_u, Q_v, Q_\omega] \{\delta\} \quad (\text{Eq. III - 33})$$

avec $\{\delta\} = \{u_1, \dots, u_4, v_1, \dots, v_4, \omega_1, \dots, \omega_4\}$

Q_u, Q_v, Q_ω = les vecteurs de base permettant d'écrire la rotation relative en fonction de u_i, v_i et ω_i .

Les forces et moments nécessaires pour contrer le mode à rotations égales dans chaque facette s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
f_{\bar{x}I}^{rot} &= (\gamma VG) Q_{ul} \theta_r \\
f_{\bar{y}I}^{rot} &= (\gamma VG) Q_{vl} \theta_r \\
m_I^{rot} &= (\gamma VG) Q_{\omega l} \theta_r
\end{aligned}
\tag{Eq. III - 34}$$

où l'indice I indique le numéro du nœud dans la facette, γ est un multiplicateur de faible valeur, V est le volume de l'élément et G le module de cisaillement.

III-2.7. Contrôle des modes d'hourglass

L'intégration numérique à 8 points de Gauss génère, en plus des modes de déformation à énergie nulle associés à des rotations égales, des modes associés à des rotations alternées symétriques. On distingue un mode d'hourglass par face. Une facette située dans le plan (x,y) subissant un mode de déformation à rotations alternées est illustrée dans la Figure III - 24.

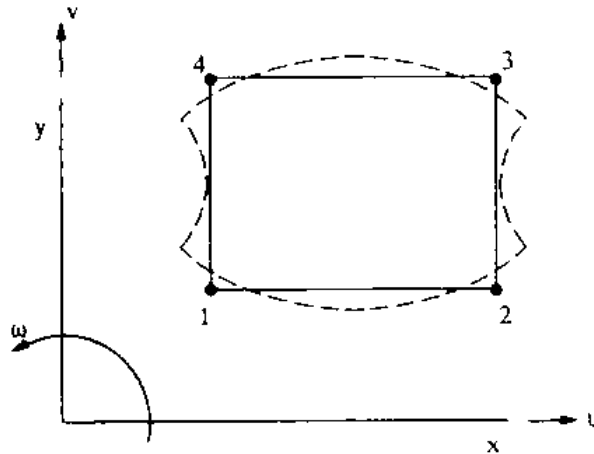


Figure III - 24 : Mode d'hourglass dans une facette de l'élément hexaédrique

Le mode *hourglass* pour toute face de l'élément hexaédrique s'écrit :

$$\begin{aligned}
\theta_h &= (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \bar{\omega}_4) \\
&= [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1] \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{Eq. III - 35}$$

ou encore, d'une façon symbolique :

$$\theta_h = [\Gamma] \{ \delta_{\bar{\omega}} \}
\tag{Eq. III - 36}$$

où Γ est le vecteur de base du mode d'hourglass.

Les moments nécessaires pour contrer le mode d'hourglass dans chaque facette s'écrivent alors :

$$m_I^{hrg} = (\alpha V G) \Gamma_I \theta_h \quad (\text{Eq. III - 37})$$

où l'indice I indique le numéro du nœud dans la facette, α est un multiplicateur de faible valeur, V est le volume de l'élément et G le module de cisaillement.

A noter qu'une intégration à 14 points ne présente pas ces modes d'hourglass grâce à la présence d'un point d'intégration au milieu de chaque face. Cet ordre d'intégration sera d'ailleurs adopté pour tester le nouvel élément obtenu après modification de l'équation de transformation (c. f. III-2.4.).

III-2.8. Patch test

Une série de tests en statique [MACNEAL (1985)] est réalisé afin d'évaluer la précision du nouvel élément. Le premier test, et probablement le plus basique, est celui du rapiéçage (*patch test*). Dans ce test on considère un groupe d'éléments de formes arbitraires (Figure III - 25). Toutefois, la forme externe du groupe est rectangulaire afin de faciliter l'application de conditions aux limites permettant d'avoir un état de déformation constante indépendant de la forme de l'élément. Le test est satisfait si les déplacements des nœuds internes, les déformations et les contraintes sont en accord avec l'état de déformation constante. Si l'élément satisfait le *patch test*, le résultat de tout problème utilisant un maillage de cet élément va converger vers la solution exacte en affinant le maillage.

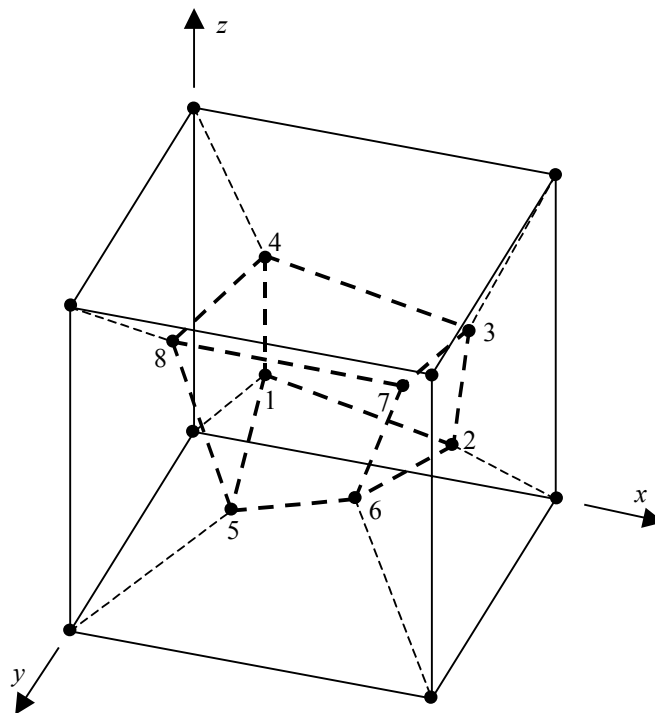


Figure III - 25 : Modèle du *patch test* : cube unité

Les coordonnées des points internes au cube et les caractéristiques du modèle sont illustrées dans les tableaux suivants :

Nœud	x	y	z
1	0.249	0.342	0.192
2	0.826	0.288	0.288
3	0.850	0.649	0.263
4	0.273	0.750	0.230
5	0.320	0.186	0.643
6	0.677	0.305	0.683
7	0.788	0.693	0.644
8	0.165	0.745	0.702

Tableau III - 1 : Coordonnées des nœuds internes au cube unité

Modèle du <i>patch test</i>		
Dimensions (mm^3)	Module de Young E (MPa)	Coefficient de Poisson ν
1×1×1	1×10 ⁶	0.25

Tableau III - 2 : Caractéristiques du modèle du *patch test*

Les déplacements (u_i, v_i, w_i) sont imposés au modèle en fonction des coordonnées (x_i, y_i, z_i) du nœud i tel que :

$$\begin{aligned}
 u_i &= 10^{-3}(2x_i + y_i + z_i)/2 \\
 v_i &= 10^{-3}(x_i + 2y_i + z_i)/2 \\
 w_i &= 10^{-3}(x_i + y_i + 2z_i)/2
 \end{aligned}
 \tag{Eq. III - 38}$$

La solution théorique donne :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} &= 10^{-3} \\
 \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z &= 2000MPa \\
 \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 400MPa
 \end{aligned}
 \tag{Eq. III - 39}$$

Les résultats du *patch test* de l'élément d'origine et de l'élément modifié sont comparés aux résultats théoriques et dressés dans le tableau suivant :

	<i>Patch test</i>		
	Théorie	Elément d'origine	Elément modifié
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ (MPa)	2000	1997	1997
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ (MPa)	400	399	399

Tableau III - 3 : Résultats du *patch test*

On remarque que l'élément 8 nœuds et 48 ddl, avant et après rectification de l'équation de transformation, satisfait le *patch test*. Ainsi, l'énergie potentielle totale des modèles maillés avec cet élément tend vers sa valeur exacte de minimum absolu lorsqu'on augmente le nombre de degrés de liberté.

III-2.9. Développement du code MEF_EX

Un code éléments finis a été spécialement développé en langage FORTRAN pour programmer la formulation du nouvel élément et tester ces performances à travers des exemples en dynamique ou quasi-statique. Ce code, baptisé MEF_EX, utilise un schéma d'intégration explicite et une formulation lagrangienne actualisée. Il permet de traiter une large gamme de problèmes non linéaires. Il permet l'intégration facile de nouveaux éléments et de nouvelles lois matériaux. L'entrée des données peut se faire à l'aide d'un fichier « .bdf » généré par PATRAN. Les sorties sont traitées par des logiciels tels que EXCEL ou MATLAB. Les caractéristiques du code MEF_EX sont présentées en annexe 1.

III-2.10. Test de poutre encastrée en flexion

Avant de continuer le développement de l'élément, différents tests de validation sont réalisés à l'aide du code MEF_EX afin de vérifier le comportement de l'élément sous différents cas de chargement. Les résultats seront comparés aux résultats obtenus par le code de calcul explicite RADIOSS ainsi qu'aux solutions théoriques en statique.

III-2.10.1 Modélisation avec des éléments de forme cubique

L'élément modifié avec la nouvelle équation de transformation (Eq. III – 24) est utilisé pour modéliser en dynamique une poutre encastrée en flexion.

Afin de s'affranchir des difficultés liées à l'utilisation des matériaux orthotropes, la modélisation est effectuée, dans un premier temps, avec un matériau isotrope de façon à analyser uniquement la modification apportée à l'élément à travers l'équation III – 24.

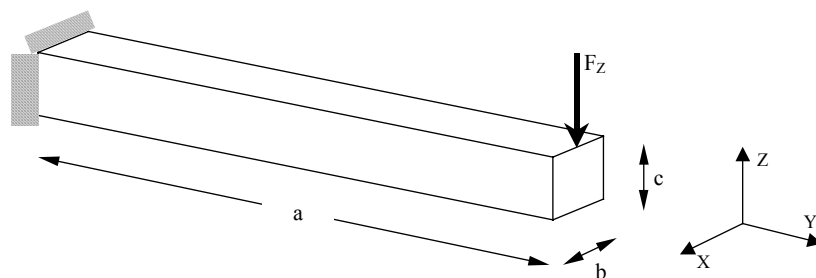


Figure III - 26 : Modèle de poutre en flexion

Les caractéristiques de la poutre sont récapitulées dans le tableau suivant :

Géométrie	
Longueur a	60 mm
Largeur b	6 mm
Hauteur c	6 mm
Matériau	
Module de Young E	210000 MPa
Coefficient de poisson ν	0.3
Masse volumique ρ	0.0078 g/mm ³

Tableau III - 4 : Caractéristiques de la poutre

Le modèle réalisé avec le nouvel élément, comporte 10 éléments dans la longueur et un seul dans la largeur et la hauteur.

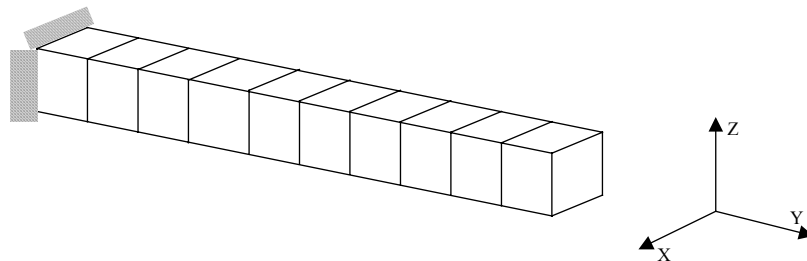


Figure III - 27 : Modèle de poutre en flexion utilisant le nouvel élément

Le modèle RADIOSS comporte 1250 éléments bricks à un point d'intégration avec les mêmes conditions aux limites. La comparaison avec ce modèle permettra de vérifier la réponse du nouvel élément en dynamique.

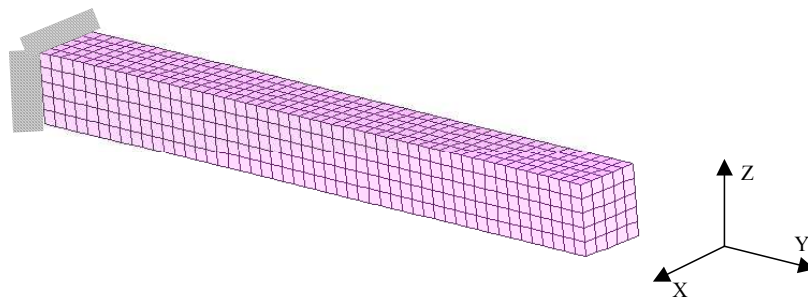


Figure III - 28 : Poutre en flexion simulée sur RADIOSS

Le chargement est appliqué aux nœuds de la section libre suivant la direction Z. L'évolution du chargement en fonction du temps est illustré dans la Figure III - 29. La force maximale atteinte est de 560 N.

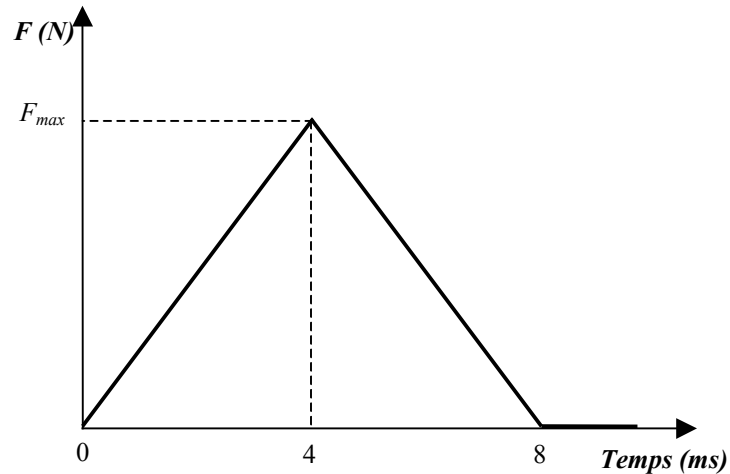


Figure III - 29 : Chargement appliqué en fonction du temps

Sur le graphe suivant sont comparées les flèches obtenues par le modèle RADIOSS, par le modèle utilisant le nouvel élément créé par l'ancienne transformation (Eq. III – 8) et par le modèle utilisant l'élément modifié.

La modification de l'équation de transformation a permis de rectifier considérablement la raideur en flexion de l'élément et d'avoir une réponse proche du résultat RADIOSS.

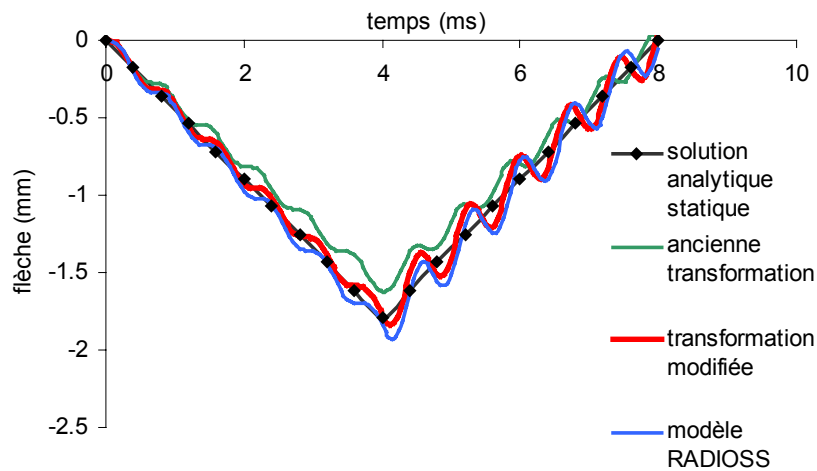


Figure III - 30 : variation de la flèche de la poutre en flexion en fonction du temps

III-2.10.2 Modélisation avec des éléments de formes irrégulières

La performance de l'élément, quand il prend des formes irrégulières (Figure III - 31), est étudiée à travers un test de poutre encastree.

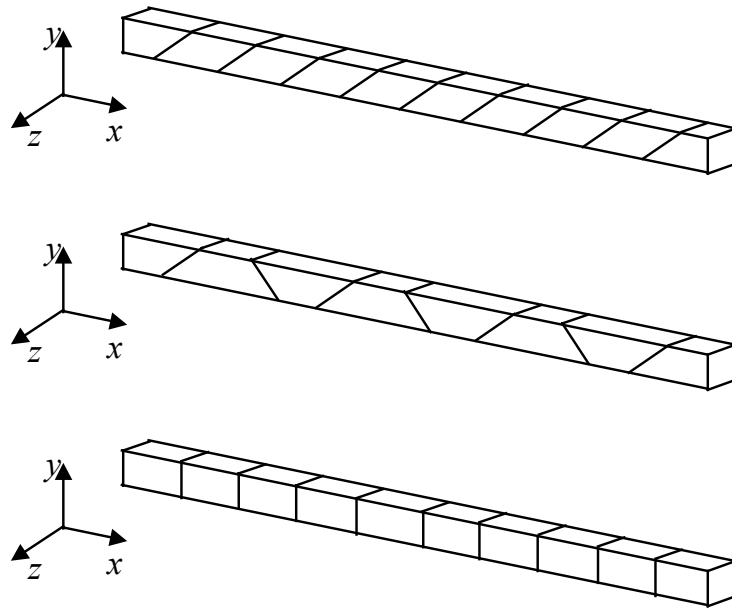


Figure III - 31 : Modèles de poutre droite encastree

Deux cas de figure sont pris en compte : flexion dans le plan vertical (x, y) et flexion dans le plan horizontal (x, z). La force totale appliquee a l'extremite de la poutre est de $400N$ dans chacun des cas de figure. Les caracteristiques des modeles sont presentees dans le tableau suivant :

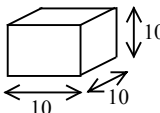
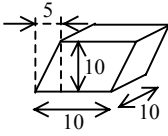
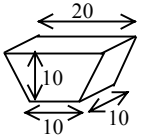
Caracteristiques geometriques			
	Maillage uniforme	Maillage parallelogramme	Maillage trapézoïdal
Dimensions de la poutre	$100 \times 10 \times 10$	$105 \times 10 \times 10$	$115 \times 10 \times 10$
Dimensions de l'element			
Caracteristiques du materiau			
Module de Young E (MPa)	210000		
Coefficient de Poisson ν	0.3		
Chargement			
	Flexion dans le plan vertical	Flexion dans le plan horizontal	
	$F_y = 400N$	$F_z = 400N$	

Tableau III - 5 : Caracteristiques du modele de poutre encastree

Les valeurs des fleches obtenues par ces differents modeles sont comparees aux valeurs theoriques dans les tableaux suivants. Le terme HEX8 represente l'element hexaedrique d'origine a 8 noeuds et 48 ddl et HEX8M represente le meme element obtenu apres modification de l'equation de transformation.

Flexion dans le plan vertical			
Maillage			
Type d'élément	Régulier	Parallélogramme	trapézoïdal
HEX8	0.900	0.782	0.821
HEX8M	0.999	0.901	0.943
Flexion dans le plan horizontal			
Maillage			
Type d'élément	Régulier	Parallélogramme	trapézoïdal
HEX8	0.900	0.892	0.889
HEX8M	0.999	0.971	0.936

Tableau III - 6 : Poutre encastree : valeurs relatives des flèches par rapport aux valeurs théoriques

Les résultats montrent que les modèles à maillage irrégulier donnent une réponse plus raide par rapport à un modèle de maillage régulier. Cependant, on note une amélioration nette dans la performance de l'élément après modification de l'équation de transformation (Eq. III – 24).

III-2.11. Etude du comportement de l'élément en traction / compression

L'élément solide à 8 nœuds et 48 ddl est créé à partir d'un élément hexaédrique à 20 nœuds et 60 ddl en remplaçant les nœuds intermédiaires par des degrés de liberté de rotation aux nœuds des sommets. Bien que les nœuds intermédiaires soient devenus fictifs dans le nouvel élément, on ressent encore leurs effets. Une force appliquée sur un nœud fait apparaître des rotations sur les autres nœuds de l'élément, et inversement, un déplacement imposé sur un nœud fait apparaître des moments sur les autres nœuds. Ce couplage est inhérent à l'élément. Il provient des termes générés par l'élimination des nœuds intermédiaires au sein de la matrice rigidité.

En effet, considérons un élément à 20 nœuds. Une vue de profil de l'élément est illustrée dans la figure ci-dessous. Un chargement appliqué uniquement sur les nœuds des sommets provoque un déplacement quadratique dans les arêtes. Ce mode de déformation engendre un allongement supplémentaire aux nœuds des sommets par rapport à un élément à champ de déplacement linéaire. Ce surplus est dû justement au déplacement quadratique du nœud intermédiaire et devient négligeable quand la longueur de l'élément augmente.

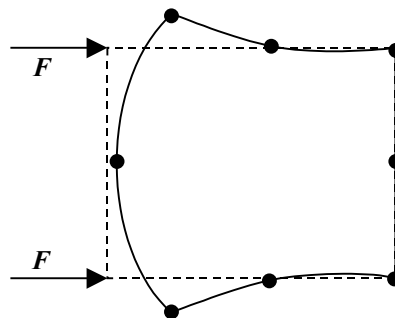


Figure III - 32 : Elément 20 nœuds en compression – chargement sur les 2 nœuds des sommets

Une étude a été menée avec un calcul statique sur le logiciel MAPLE en vue de vérifier la réponse du nouvel élément en traction / compression.

Un élément de dimension $a \times b \times c$ soumis à un chargement de compression est considéré (Figure III - 33). Un chargement unitaire est appliqué sur chacun des 4 nœuds. La matrice de rigidité de l'élément est établie en fonction des paramètres a , b et c . Le déplacement de la facette chargée est alors déterminé en fonction des paramètres a , b et c .

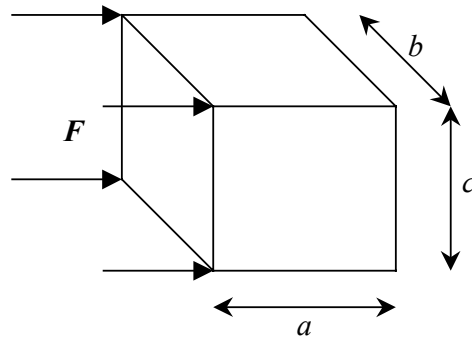


Figure III - 33 : Élément en compression

Pour une largeur b et une hauteur c données, on regardera l'effet de la longueur a de l'élément. L'allongement de l'élément est comparée à celui d'un élément à champ de déplacement linéaire.

Deux modèles sont étudiés :

- 1)- $b = 10, c = 10,$
- 2)- $b = 10, c = 1.$

On trace alors l'allongement (Δl) du nouvel élément et l'allongement d'un élément linéaire en fonction de la longueur a pour chacun des 2 modèles définis.

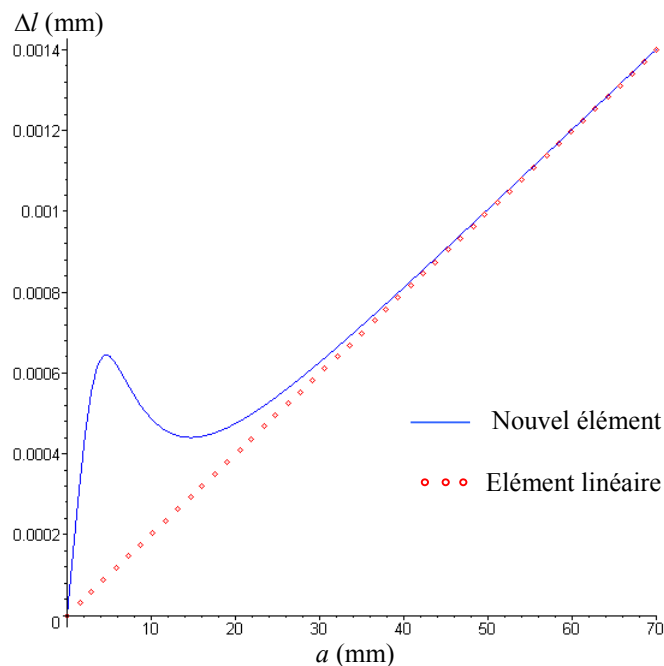


Figure III - 34 : Modèle 1 : $b = 10, c = 10$ – l'allongement en fonction de a

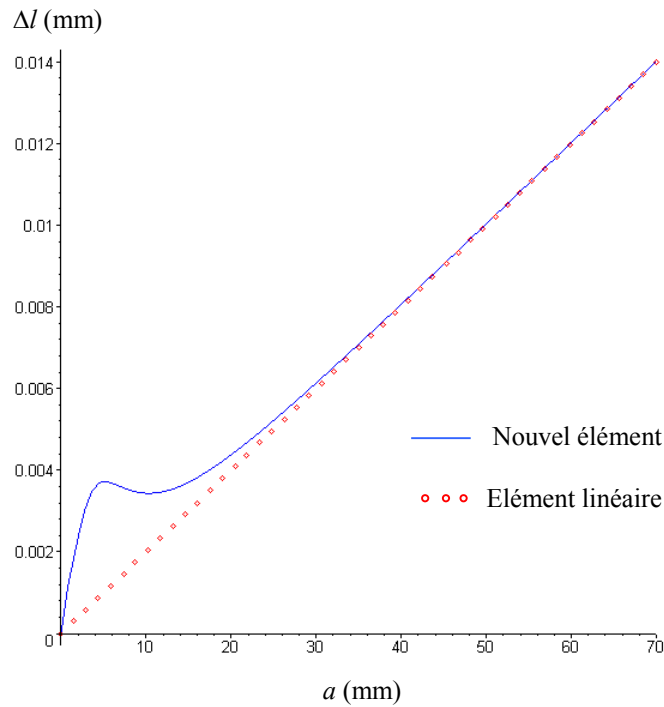


Figure III - 35 : Modèle 2 : $b = 10, c = 1$ – l’allongement en fonction de a

Pour une valeur réduite de a par rapport aux deux autres dimensions, l’élément donne une réponse largement différente de la solution linéaire. Le comportement devient correct à partir d’une longueur de l’élément égale à au moins 3 fois le côté le plus grand des 2 autres dimensions. Le surplus d’allongement aux nœuds des sommets devient alors négligeable par rapport à l’allongement total de l’élément.

Pour éviter d’avoir cette physionomie en compression / traction, le chargement doit être réparti sur tous les nœuds. Une telle répartition de charge se traduit dans l’élément 8 nœuds à 48 ddl par une application de moments sur les nœuds des sommets afin d’entraîner les nœuds intermédiaires fictifs.

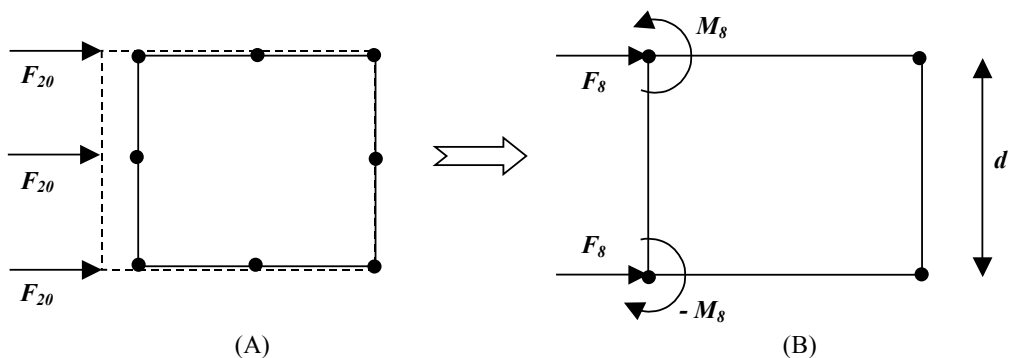


Figure III - 36 : Répartition du chargement pour un déplacement uniforme de l’ensemble de l’arête, (A) – élément 20 nœuds à 60 ddl, (B) – élément 8 nœuds à 48 ddl

Le moment à appliquer sur les nœuds chargés dans chaque direction est :

$$M_8 = F_{20} \times \frac{d}{2} = \frac{2F_8}{3} \times \frac{d}{2}$$

$$M_8 = \frac{1}{3} F_8 \times d$$

(Eq. III - 40)

Ainsi, dans le modèle 1, en rajoutant les moments appropriés sur chaque nœud, on obtient une réponse exempte d'erreur quelque soit la longueur de l'élément, comme le montre le graphe ci-après.

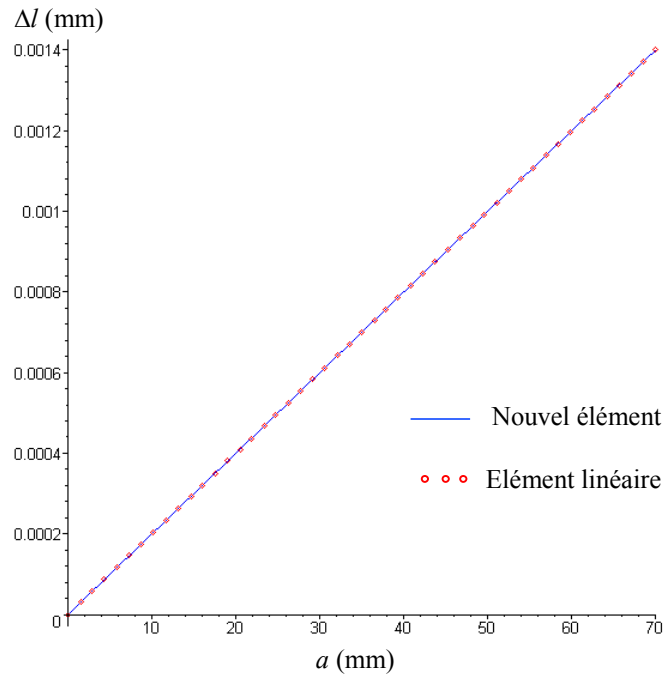


Figure III - 37 : Modèle 1 : $b = 10$, $c = 10$ – l’allongement en fonction de a avec des moments appliqués

Notons par ailleurs que l’excédent de déplacement des nœuds en compression / traction devient négligeable quand la longueur de l’élément augmente ou aussi quand la longueur totale de la structure augmente.

III-2.12. Test de poutre encastree en compression

Le modèle de poutre en compression est identique au modèle précédent (c. f. III-2.10.1). Seules la direction de la force appliquée et sa valeur maximale changent. Celle-ci, dirigée suivant la direction Y , suit la variation illustrée dans la Figure III - 29 et atteint la valeur maximale de 5600 N . Le chargement est réparti sur les 4 nœuds de l’extrémité sans ajout de moments de correction dans un premier temps.

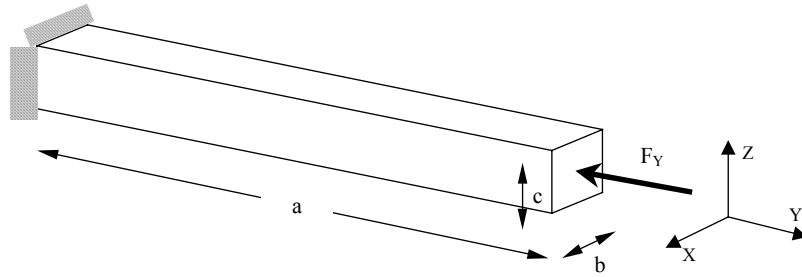


Figure III - 38 : Modèle de poutre en compression

Le modèle utilisant le nouvel élément et le modèle RADIOSS sont les mêmes que les modèles en flexion (Figure III - 27 et Figure III - 28 respectivement).

Le comportement de l'élément est souple en compression par rapport à la solution exacte. La transformation modifiée a apporté une légère augmentation de la raideur en compression. Cependant, la réponse reste encore décalée par rapport au résultat RADIOSS et à la solution analytique en statique. L'erreur est de 8% sur l'allongement maximal.

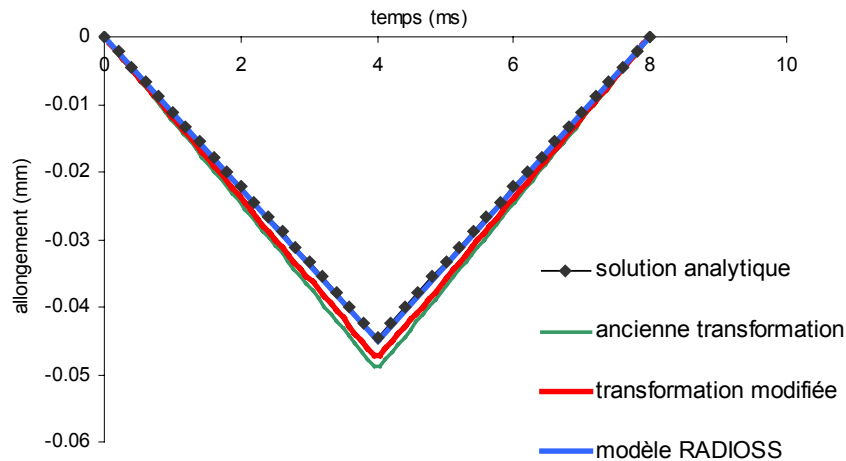


Figure III - 39 : L'allongement de la poutre en fonction du temps

Reprenons le modèle réalisé avec les éléments créés à l'aide de l'équation de transformation modifiée. En corrigeant cette fois-ci le chargement appliqué à la poutre en ajoutant des moments pour contrer l'effet des nœuds intermédiaires fictifs, on obtient une réponse sans aucun excès de souplesse comme le montre le graphe suivant.

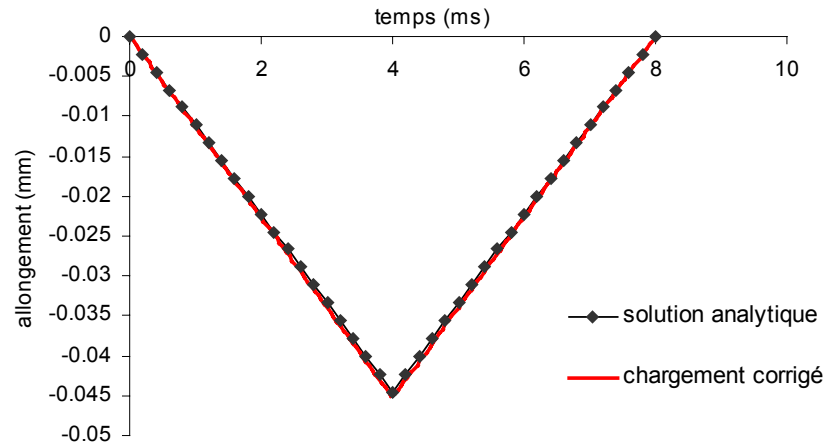


Figure III - 40 : L'allongement de la poutre en fonction du temps après correction du chargement

III-2.13. Conclusion

L'élément solide à 8 nœuds et 48 ddl d'origine créé à partir d'un élément 20 nœuds et 60 ddl présente un comportement relativement rigide en flexion. La modification apportée à l'équation de transformation afin de permettre aux nœuds intermédiaires de se déplacer le long des arêtes auxquelles ils appartiennent a sensiblement amélioré la performance de l'élément. Celui-ci, après modification, a été validé par l'ensemble des tests numériques réalisés jusqu'à maintenant et sera adopté pour la suite de l'étude.

III-3. L'élément Plaque Epaisse Composite : « PEC »

Le nouvel élément est essentiellement dédié à la modélisation des structures composites. L'objectif, à travers sa création, est de réduire la taille des modèles et d'avoir une description réaliste du comportement des matériaux composites. Ceci peut se réaliser en utilisant un seul élément pour représenter plusieurs plis tout en permettant de tenir compte des phénomènes liés à l'hétérogénéité des stratifiés composites. Il en découle que les épaisseurs et les matériaux de chaque pli doivent être affectés à l'élément. De ce fait, une approche multicouche de l'élément s'impose.

Le terme *PEC* (Plaque Epaisse Composite) désignera par la suite l'élément hexaédrique à 8 nœuds et à 48 ddl.

III-3.1. Intégration numérique couche par couche

L'approche multicouche se traduit par la partition de l'élément en plusieurs couches ayant chacune l'épaisseur et les propriétés matériaux du pli du stratifié à modéliser. Numériquement, à partir des déplacements aux 8 nœuds, les déformations sont calculées au niveau de points d'intégration se trouvant dans chaque couche. Le tenseur des contraintes est ensuite calculé à partir de ces déformations et en utilisant la loi matériau de chaque couche.

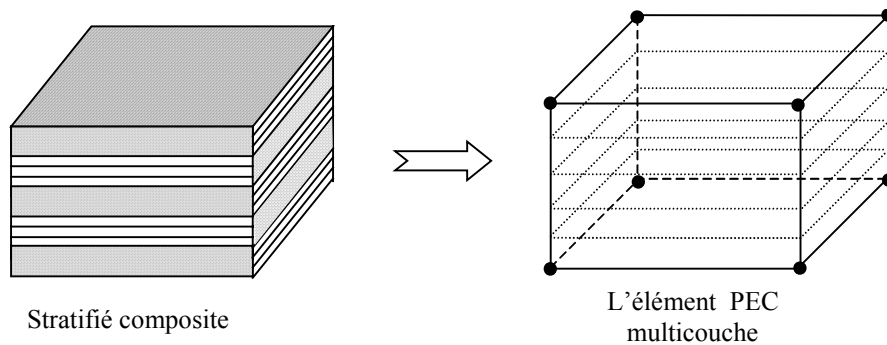


Figure III - 41 : L'élément multicouche correspondant au stratifié

L'intégration numérique des forces internes dans l'élément PEC s'effectue en considérant que les contraintes sont constantes dans l'épaisseur de chaque pli. Reprenant les équations III – 25 à III – 27, celles-ci s'écrivent alors :

$$f_{il}^{\text{int}} = \sum_{l=1}^m h^l \int_S \frac{\partial N_l}{\partial x_j} \sigma_{ji}^l dS \quad (\text{Eq. III - 41})$$

L'indice l représente le numéro du pli et h son épaisseur. En posant :

$$F_{il}^l(r, s) = \frac{\partial N_l}{\partial x_j} \sigma_{ji}^l \frac{|J|}{h_{\text{tot}}} \quad (\text{Eq. III - 42})$$

où h_{tot} est l'épaisseur totale de l'élément :

$$\begin{aligned}
 f_{il}^{\text{int}} &= \sum_{l=1}^m h^l \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F_{il}^l(r, s) dr ds \\
 &= \sum_{l=1}^m h^l \sum_{k=1}^n w_k F_{il}^l(r_k, s_k)
 \end{aligned}
 \tag{Eq. III - 43}$$

L'intégration s'effectue alors par couche. Une règle de 2x2 points de Gauss situés à mi-hauteur de chaque pli sera adoptée.

La performance de l'élément PEC sera étudiée, dans un premier temps, à travers des essais classiques de compression et de flexion.

III-3.2. Test de poutre composite encastree en compression

Un test de compression d'une poutre composite encastree est modélisé par des éléments PEC. Le résultat sera comparé aux résultats obtenus par le code de calcul explicite RADIOSS ainsi qu'à la solution théorique en statique.

Cet essai, ainsi que celui de flexion qui suit, ont pour but de vérifier le fonctionnement de l'élément multicouche créé et de valider l'intégration numérique couche par couche adoptée.

La poutre composite est représentée dans la Figure III - 42 et ses caractéristiques dans les tableaux III - 7 et III - 8.

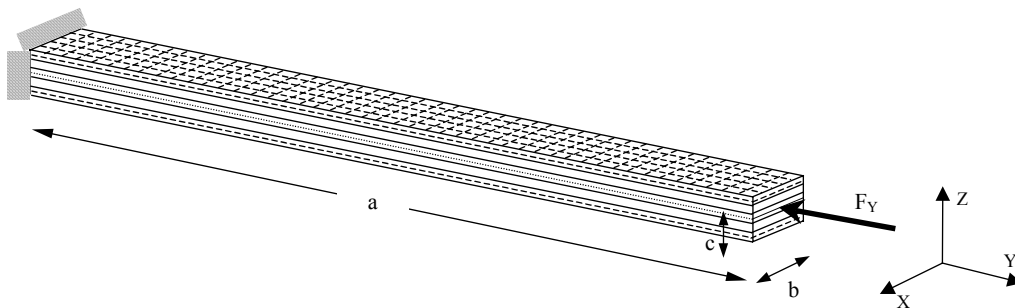


Figure III - 42 : Modèle de poutre composite en compression

Géométrie	
Longueur a	200 mm
Largeur b	8 mm
Hauteur c	6 mm

Tableau III - 7 : Caractéristiques géométriques de la poutre composite

Séquence d'empilement : [Tissus carbone 0° / UD verre 0° / UD carbone 90°] _s			
	Tissu carbone	UD verre	UD carbone
Masse volumique ρ (g/mm ³)	0.0015	0.002	0.0015
E ₁ (MPa)	58000	45000	144000
E ₂ (MPa)	58000	10000	10000
E ₃ (MPa)	10000	10000	10000
G ₁₂ (MPa)	4200	4200	4200
G ₂₃ (MPa)	4200	4200	4200
G ₃₁ (MPa)	4200	4200	4200
ν_{12}	0.045	0.3	0.25
ν_{23}	0.25	0.3	0.3
ν_{31}	0.045	0.06	0.017
Epaisseur totale (mm)	1.2	1.2	0.6

Tableau III - 8 : Caractéristiques matériaux de la poutre composite

Le modèle réalisé avec des éléments PEC comporte 20 éléments dans la longueur et un seul dans la largeur et la hauteur. L'intégration numérique est réalisée sur 5 couches (une couche par empilement d'un même matériau) avec 2×2 points de Gauss par couche.

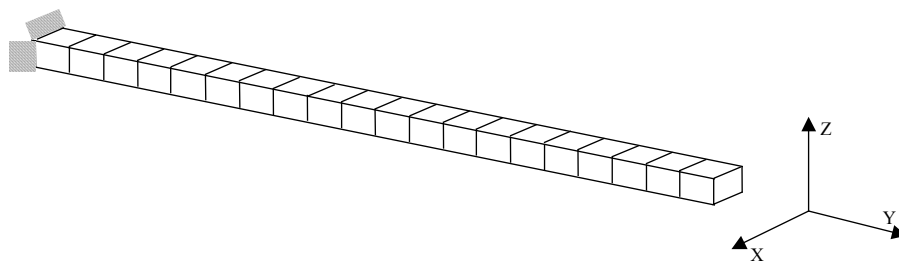


Figure III - 43 : Modèle de poutre en flexion utilisant le nouvel élément

Le modèle RADIOSS comporte 8000 éléments bricks à un point d'intégration et une loi matériau orthotrope.

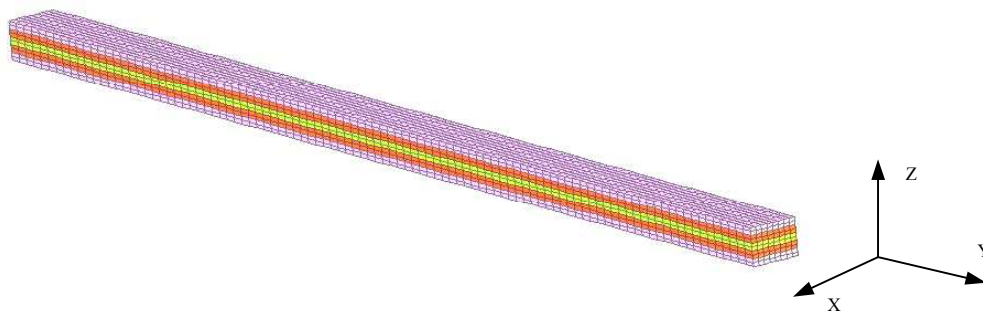


Figure III - 44 : Modèle de poutre composite en flexion simulé sur RADIOSS

Le chargement est appliqué aux nœuds de la section libre suivant la direction Y . L'évolution du chargement en fonction du temps est illustrée dans la Figure III - 45. La force maximale atteinte est de 4000 N .

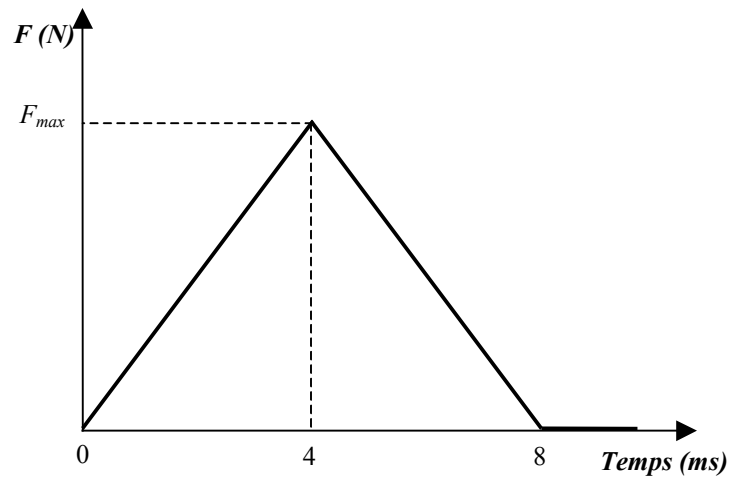


Figure III - 45 : Chargement appliqué en fonction du temps

Les allongements obtenus par les 2 modèles (Figure III - 46) sont quasi identiques à la solution analytique. L'approche multicouche attribuée à l'élément semble alors ne pas compromettre son fonctionnement en membrane.

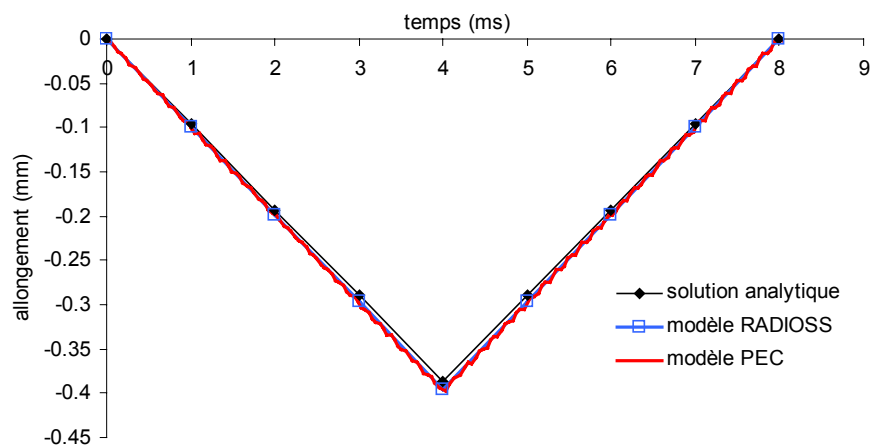


Figure III - 46 : L'allongement de la poutre en fonction du temps

III-3.3. Test de poutre composite encastree en flexion

Le modèle de poutre en flexion est identique au modèle précédent. Seules la direction de la force appliquée et sa valeur maximale changent. Celle-ci est appliquée suivant la direction Z , suit la variation illustrée dans la Figure III - 48 et atteint la valeur maximale de 100 N .

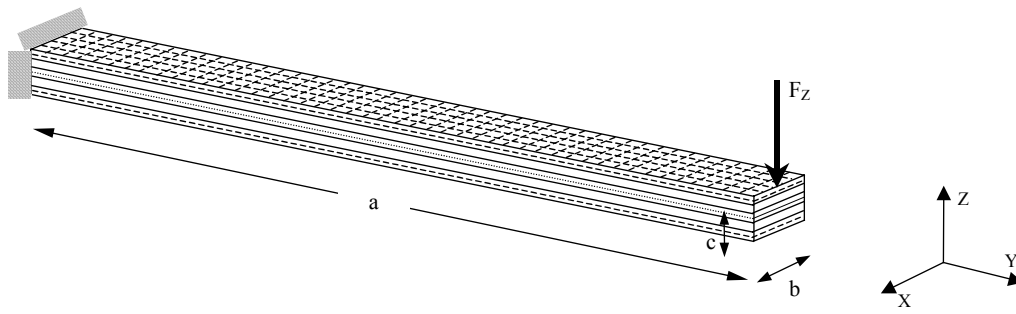


Figure III - 47 : Modèle de poutre composite en flexion

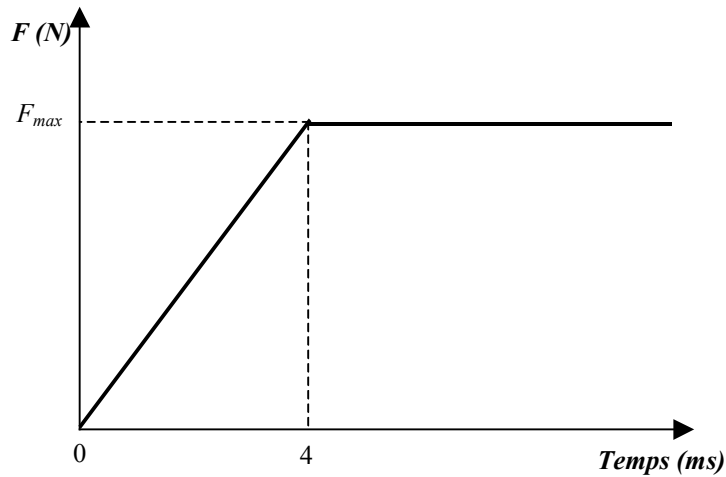


Figure III - 48 : Chargement appliqué en fonction du temps

Le modèle utilisant les éléments PEC et le modèle RADIOSS sont les mêmes que ceux en compression (Figure III - 43 et Figure III - 44 respectivement).

Le résultat du modèle PEC corréle bien le résultat du modèle RADIOSS. Le modèle PEC, avec très peu d'éléments multicouches, permet de retrouver la même flèche ainsi que la même fréquence d'oscillation que le modèle RADIOSS finement maillé.

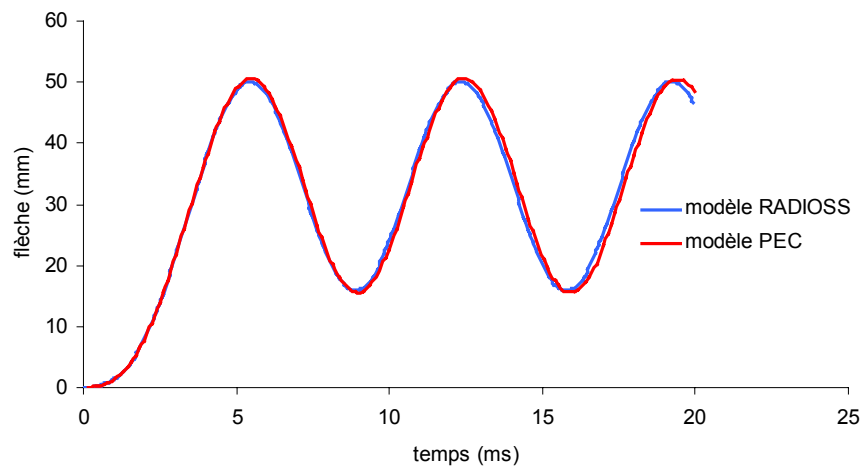


Figure III - 49 : La flèche de la poutre en fonction du temps

Un léger amortissement est incorporé dans les modèles PEC afin que la solution converge à une valeur constante. La flèche finale pour un effort constant de 100 N est alors comparée à la solution statique non linéaire obtenue par le code éléments finis SAMCEF. On remarque sur le graphe que le résultat du modèle PEC oscille autour de la solution SAMCEF au début pour tendre finalement vers la même valeur de flèche.

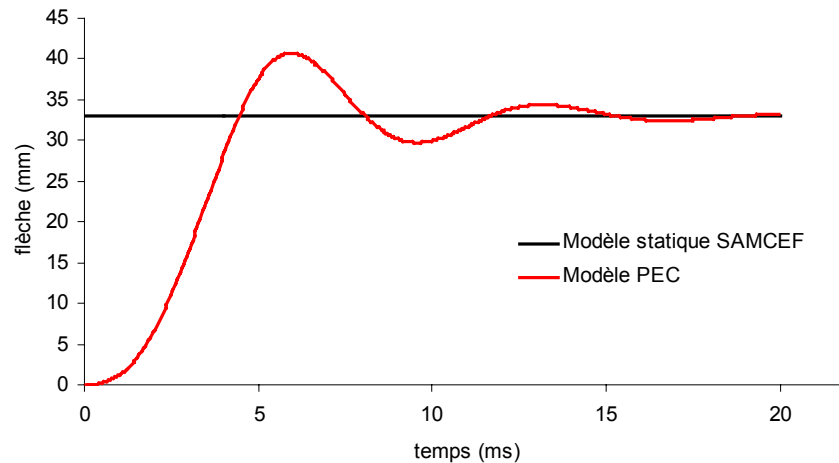


Figure III - 50 : La flèche de la poutre avec amortissement

III-3.4. Etude de la performance de l'élément

La performance de l'élément PEC, comme tout autre élément fini, peut varier en fonction des rapports des dimensions de ses côtés. Une étude est alors réalisée afin d'observer sa performance dans différentes configurations. Des poutres en flexion sont considérées. Elles sont toutes modélisées avec un seul élément PEC dans la largeur et la hauteur. Les dimensions de l'élément PEC seront désignées : « L » pour la longueur, « l » pour la largeur et « e » pour l'épaisseur comme le montre la figure suivante.

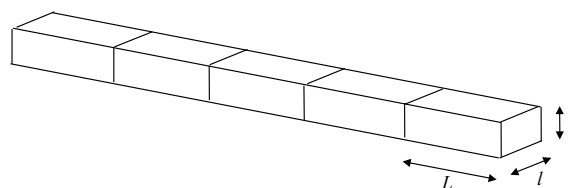


Figure III - 51 : Désignation des dimensions de l'élément PEC

III-3.4.1. Effet du rapport longueur / épaisseur de l'élément PEC

Trois modèles de poutres discrétisés par 5 éléments PEC sont réalisés. Les trois ont une même largeur de 10mm et des longueurs de 5, 10 et 20mm. Plusieurs valeurs d'épaisseur sont considérées dans chaque modèle telles que : $L/10 \leq e \leq L$. Les 3 modèles et leurs caractéristiques sont représentés ci-dessous.

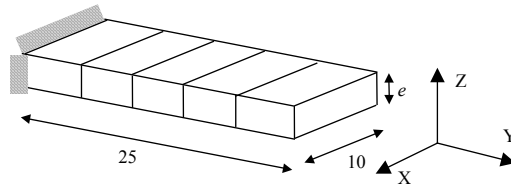


Figure III - 52 : Modèle 1 : longueur 25mm, largeur 10mm

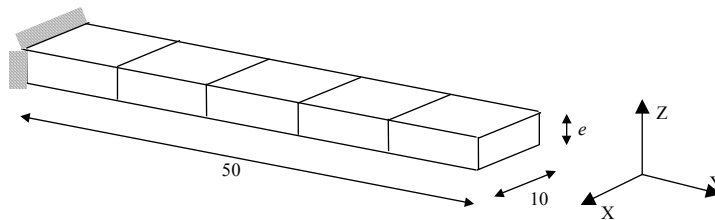


Figure III - 53 : Modèle 2 : longueur 50mm, largeur 10mm

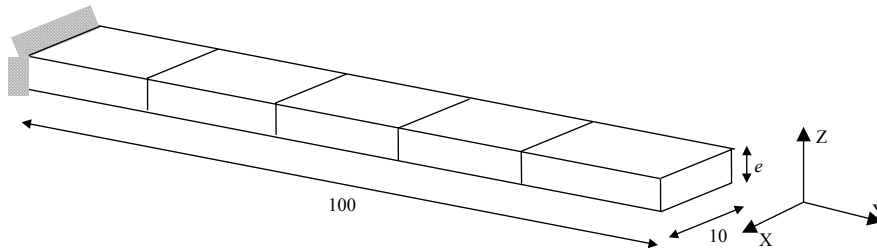


Figure III - 54 : Modèle 2 : longueur 100mm, largeur 10mm

	Modèle 1	Modèle 2	Modèle 3
Longueur élément (mm)	5	10	20
Largeur élément (mm)	10	10	10
Paramètre : épaisseur (mm)	0.5	1	2
	0.625	1.25	2.5
	0.833	1.667	3.333
	1.25	2.5	5
	2.5	5	10
	5	10	20
$F_{Z \max}$ (N)	1	4	8

Tableau III - 9 : Dimensions des poutres composites étudiées

Les caractéristiques des matériaux des poutres sont celles utilisées dans les exemples précédents (Tableau III - 8). Le chargement appliqué suit l'évolution illustrée dans la Figure III - 48. Un léger amortissement est incorporé aux modèles afin que les flèches convergent vers des valeurs constantes. Ces valeurs sont alors comparées aux solutions statiques obtenues par un calcul éléments finis des différents modèles finement maillés réalisé sur le logiciel SAMCEF.

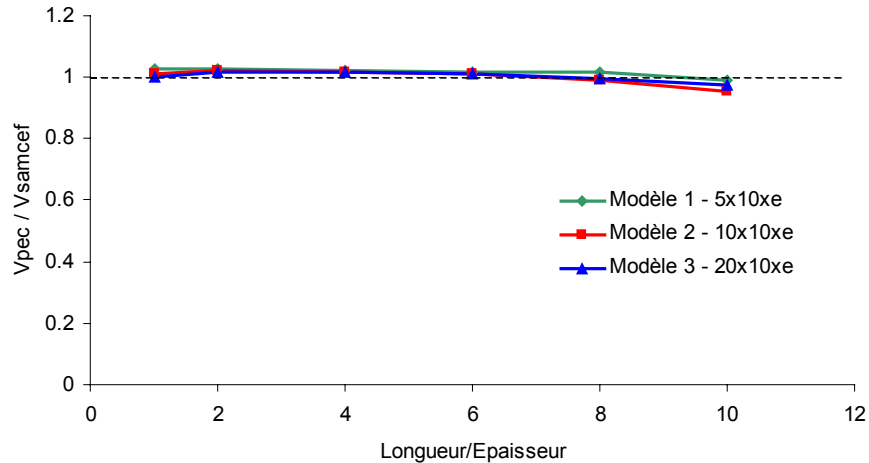


Figure III - 55 : Valeurs des flèches PEC relatives aux valeurs SAMCEF

On remarque que l'élément reste performant même lorsque la longueur devient égale à 10 fois l'épaisseur et ne présente pas de problèmes de verouillage. Un léger excès de raideur est observé, néanmoins, quand le rapport longueur / épaisseur devient très élevé, mais le résultat reste largement acceptable compte tenu de la précision recherchée.

Le graphe précédent nous permet de voir que la largeur n'a pas d'influence sur la performance de l'élément. Ceci sera confirmé dans les tests suivants où l'on étudie l'effet du rapport de la largeur sur la longueur de l'élément.

III-3.4.2. Effet du rapport largeur / longueur de l'élément PEC

Trois modèles de poutres discrétisés par 10 éléments PEC sont réalisés. Les 3 modèles ont une même épaisseur e de $5mm$ et des longueurs L de 50 , 100 et $200mm$. Plusieurs valeurs de la largeur l sont considérées pour chaque modèle avec : $0.2 \times L \leq l \leq L$. Les poutres sont discrétisées avec 10 éléments. Les 3 modèles et leurs caractéristiques sont représentés ci-dessous.

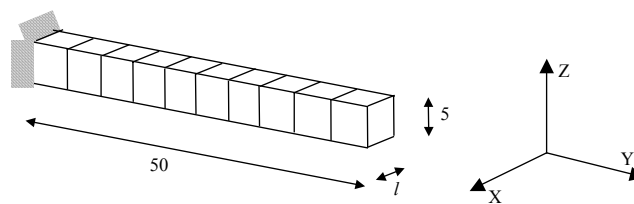


Figure III - 56 : Modèle 1 : longueur 50mm, épaisseur 5mm

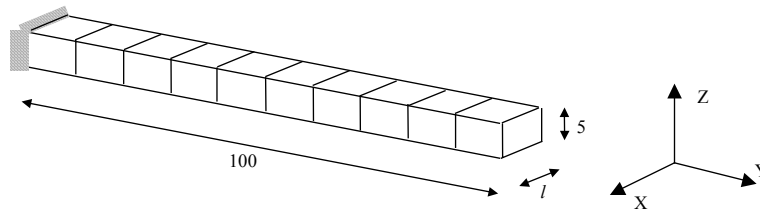


Figure III - 57 : Modèle 2 : longueur 100mm, épaisseur 5mm

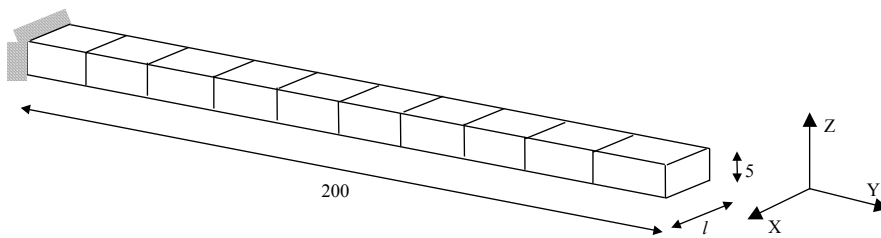


Figure III - 58 : Modèle 2 : longueur 200mm, épaisseur 5mm

	Modèle 1	Modèle 2	Modèle 3
Longueur élément (mm)	5	10	20
Épaisseur élément (mm)	5	5	5
Paramètre : largeur (mm)	1	2	4
	2	4	8
	3	6	12
	4	8	16
	5	10	20
$F_{Z \max}$ (N)	16	4	1

Tableau III - 10 : Dimensions des poutres composites étudiées

Les valeurs des flèches obtenues par les modèles PEC sont comparées aux valeurs obtenues par les modèles SAMCEF sur le graphe suivant :

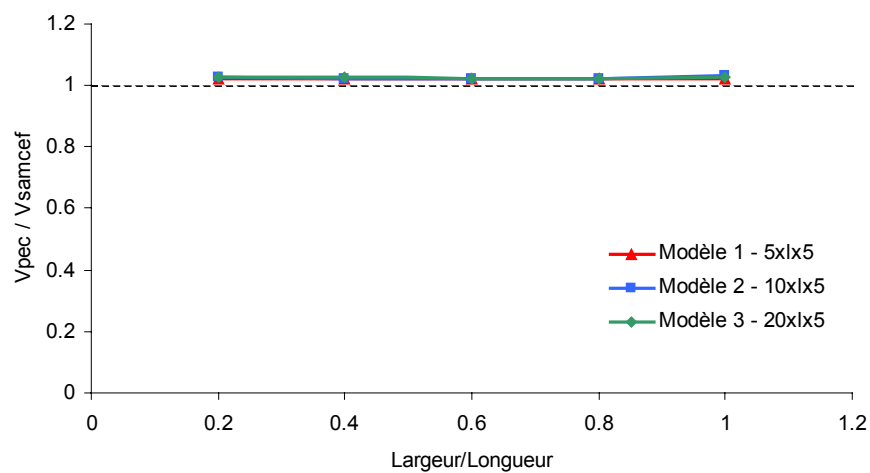


Figure III - 59 : Valeurs des flèches PEC relatives aux valeurs SAMCEF

Les résultats montrent qu'il n'y a aucune influence du rapport largeur / longueur sur le comportement de l'élément. Les valeurs des flèches obtenues par les différents tests correspondent aux valeurs données par SAMCEF quelque soit le rapport largeur / longueur.

III-3.5. Conclusion

L'élément PEC est bien adapté à la modélisation des structures composites. L'approche multicouche permet d'utiliser un seul élément dans l'épaisseur ce qui permet de réduire la taille des modèles. De plus, l'élément PEC ne présente aucun problème de verrouillage quand l'épaisseur devient très petite par rapport aux autres dimensions. Au contraire, dans une configuration hexaédrique droite, l'élément reste performant quelque soit le rapport de ses dimensions.

On note, par contre, un léger excès de souplesse dans la réponse de l'élément PEC. Ceci est dû à l'approximation des contraintes dans le sens de l'épaisseur dont l'exactitude dépend du nombre de couches d'intégration. Les tests précédents sont réalisés avec 5 couches. Un nombre plus élevé de couches permet d'avoir une raideur encore plus proche de la raideur exacte.

III-4. Formulation de la phase plaque

L'élément PEC développé plus haut devra se transformer en deux éléments plaques suite au délaminage. La technique de transformation et la procédure numérique pour cet effet seront décrites plus tard. Ce paragraphe retrace succinctement la formulation de l'élément plaque choisi et décrit l'intégration numérique multicouche adaptée à la présente étude.

III-4.1. Formulation de l'élément plaque de type Belytschko-Lin-Tsay

Les plaques adoptées sont de type Belytschko-Lin-Tsay [BELYTSCHKO (1984)]. Ces éléments sont très utilisés en codes explicites. Ils sont robustes et faciles à mettre en œuvre. Leur formulation est basée sur la théorie de plaques de Mindlin où le cisaillement transverse est pris en compte. La vitesse d'un point quelconque de la plaque situé à une hauteur z par rapport au plan moyen est définie en fonction de la vitesse du plan moyen v^m et de la vitesse de rotation θ :

$$v = v^m - z e_3 \times \theta \quad (\text{Eq. III - 44})$$

e_3 est le vecteur local normal à la plaque. Le système d'axes local est défini à partir des diagonales de la plaque de la façon suivante :

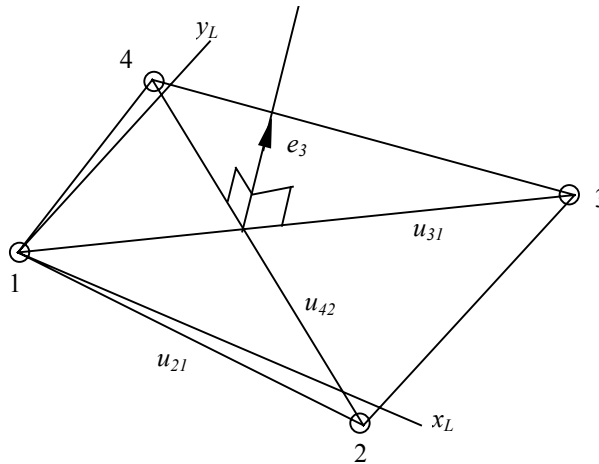


Figure III - 60 : Le repère local à l'élément plaque

Le vecteur local e_3 est normal aux vecteurs u_{31} et u_{42} . Les composantes du vecteur e_3 sont données par :

$$E_3 = \begin{Bmatrix} y_{31}z_{42} - z_{31}y_{42} \\ z_{31}x_{42} - x_{31}z_{42} \\ x_{31}y_{42} - y_{31}x_{42} \end{Bmatrix} \quad (\text{Eq. III - 45})$$

$$e_3 = \frac{E_3}{\|E_3\|} \quad (\text{Eq. III - 46})$$

L'axe local x_L est construit à partir des nœuds 1 et 2 de l'élément. Cependant, le vecteur u_{21} n'est pas forcément orthogonal à e_3 . L'orthogonalité de l'axe local x_L par rapport à e_3 est imposée par construction (Eq. III - 47). Le vecteur résultant reste proche du vecteur u_{21} , ceci permet une meilleure interprétation des contraintes qui sont définies dans le système d'axe local (x_L, y_L). Le vecteur local e_1 est alors défini de la façon suivante :

$$u_{21} = \begin{Bmatrix} x_{21} \\ y_{21} \\ z_{21} \end{Bmatrix},$$

(Eq. III - 47)

$$E_1 = [u_{21} - (u_{21}^t e_3) e_3]$$

$$e_1 = \frac{E_1}{\|E_1\|}$$

Le vecteur e_2 est alors obtenu par :

$$e_2 = e_3 \times e_1 \quad (\text{Eq. III - 48})$$

La plaque Belytschko-Lin-Tsay est un élément quadrilatéral bilinéaire à 4 nœuds et un point d'intégration au centre. Le terme bilinéaire signifie que les déplacements et les rotations dans l'élément sont interpolés par les fonctions de formes bilinéaires suivantes :

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + r r_i)(1 + s s_i) \quad (\text{Eq. III - 49})$$

où r_i et s_i représentent les coordonnées intrinsèques du $i^{\text{ème}}$ nœud.

Les vitesses de déformations s'écrivent alors en fonctions des vitesses de translation et de rotation des nœuds du plan moyen :

$$\begin{aligned} d_x &= B_{1I} v_{xI} + z B_{1I} \theta_{yI} \\ d_y &= B_{2I} v_{yI} - z B_{2I} \theta_{xI} \\ 2d_{xy} &= B_{2I} v_{xI} + B_{1I} v_{yI} + z(B_{2I} \theta_{yI} - B_{1I} \theta_{xI}) \\ 2d_{xz} &= B_{1I} v_{zI} + N_I \theta_{yI} \\ 2d_{yz} &= B_{2I} v_{zI} - N_I \theta_{xI} \end{aligned} \quad (\text{Eq. III - 50})$$

avec :

$$\begin{aligned} B_{1I} &= \frac{\partial N_I}{\partial x} & B_{5I} &= \frac{\partial N_{\theta I}}{\partial x} \\ B_{2I} &= \frac{\partial N_I}{\partial y} & B_{6I} &= \frac{\partial N_{\theta I}}{\partial y} \end{aligned}, \quad (\text{Eq. III - 51})$$

Le principe des puissances virtuelles permet d'obtenir les forces et les moments aux nœuds :

$$\begin{aligned}
f_{xl} &= A(B_{1l}f_x + B_{2l}f_{xy}) \\
f_{yl} &= A(B_{2l}f_y + B_{1l}f_{xy}) \\
f_{zl} &= A\kappa(B_{1l}f_{xz} + B_{2l}f_{yz}) \\
m_{xl} &= A(B_{2l}m_y + B_{1l}m_{xy} - \frac{\kappa}{4}f_{yz}) \\
m_{yl} &= A(-B_{1l}m_x + B_{2l}m_{xy} + \frac{\kappa}{4}f_{xz}) \\
m_{zl} &= 0
\end{aligned}
\tag{Eq. III - 52}$$

où

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta} &= \int \sigma_{\alpha\beta} dz \\
m_{\alpha\beta} &= -\int z \sigma_{\alpha\beta} dz
\end{aligned}
\tag{Eq. III - 53}$$

avec A étant la surface de l'élément, et κ le facteur de cisaillement et $\sigma_{\alpha\beta}$ les contraintes dans le repère (α, β) .

III-4.2. L'intégration numérique couche par couche

L'expression III – 53 est intégrée numériquement dans l'épaisseur de l'élément plaque. Modélisant du composite, une approche multicouche est également allouée à l'élément plaque. Chaque couche a l'épaisseur et les propriétés matériaux d'un pli du stratifié à modéliser. Les déformations dans chaque couche sont calculées au niveau des points d'intégration situés au centre de chaque couche à partir des déplacements des 4 nœuds de la plaque. Les contraintes sont ensuite calculées à partir des déformations et des lois matériaux dans chaque couche.

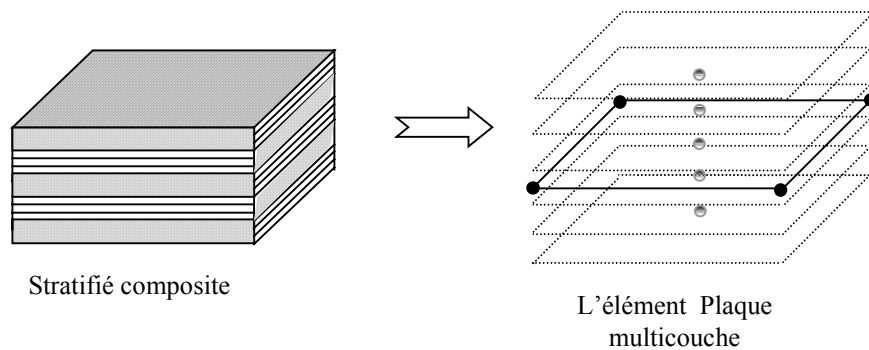


Figure III - 61 : L'élément plaque multicouche

L'intégration numérique de l'équation III – 53 s'écrit alors :

$$f_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} dz = \sum_{l=1}^m \int_{h_{l-1}}^{h_l} \sigma_{\alpha\beta} dz = \sum_{l=1}^m \sigma_{\alpha\beta} e_l$$

$$m_{\alpha\beta} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{\alpha\beta} dz = -\sum_{l=1}^m \int_{h_{l-1}}^{h_l} z \sigma_{\alpha\beta} dz = -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^m \sigma_{\alpha\beta} (h_l^2 - h_{l-1}^2)$$
(Eq. III - 54)

avec :

h = l'épaisseur totale de la plaque

h_l = la hauteur du $l^{\text{ième}}$ pli

e_l = l'épaisseur du $l^{\text{ième}}$ pli

III-4.3. Décalage du plan moyen par rapport aux nœuds

L'élément PEC modélisera le stratifié composite avant délaminage. Les éléments plaques représenteront le stratifié après délaminage. Ils se trouveront donc obligatoirement connectés aux éléments volumes. Afin de préserver la continuité de la matière entre les éléments volumique et les éléments plaques, un décalage du plan moyen par rapport aux nœuds est nécessaire.

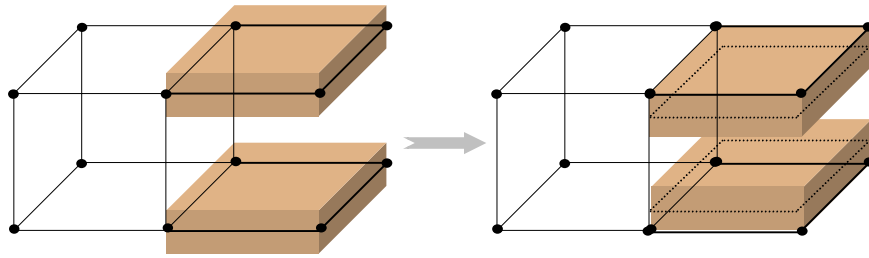


Figure III - 62 : Décalage du plan moyen par rapport aux noeuds

Ce décalage se traduit numériquement par l'intégration de l'équation III – 53 entre $-h$ et 0 pour un décalage vers le bas et entre 0 et h pour un décalage vers le haut.

L'expression III – 53 devient alors :

$$f_{\alpha\beta} = \int_{-h}^0 \sigma_{\alpha\beta} dz \quad , \quad m_{\alpha\beta} = -\int_{-h}^0 z \sigma_{\alpha\beta} dz \quad \text{pour la plaque supérieure, (Eq. III - 55)}$$

$$f_{\alpha\beta} = \int_0^h \sigma_{\alpha\beta} dz \quad , \quad m_{\alpha\beta} = -\int_0^h z \sigma_{\alpha\beta} dz \quad \text{pour la plaque inférieure. (Eq. III - 56)}$$

III-5. La liaison PEC – Plaques

Comme décrit plus haut, l'élément PEC est capable d'être relié à des éléments plaques. Il possède 2 nœuds par côté ainsi que des degrés de liberté de rotations ce qui lui permet d'assurer une liaison rigide avec les éléments plaques. Cependant, ces 2 types d'éléments ne sont pas formulés de la même façon et ne possèdent pas le même champ de déplacement. La vérification de la liaison entre l'élément PEC et les éléments plaques est alors nécessaire.

III-5.1. Vérification de la liaison PEC – Plaques en sollicitation symétrique

Afin de tester la liaison PEC – Plaques, nous considérons dans un premier temps le cas où l'élément PEC est lié sur une face à deux éléments plaques sollicités de façon symétrique. Pour cela, des modèles de poutres de type « Double Cantilever Beam » (DCB) sollicitées en mode I sont étudiés pour vérifier la liaison PEC - Plaques.

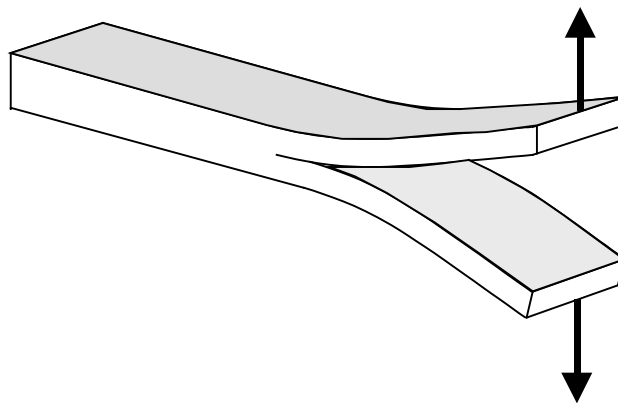


Figure III - 63 : Poutre DCB considérée pour le test de la liaison PEC – Plaque

Les poutres sont discrétisées par 4 éléments PEC dans la partie solide et 2×4 éléments plaques dans la partie fissurée. Trois modèles de poutres sont réalisés. Les trois ont une même largeur de 10mm et des longueurs de 5, 10 et 20mm. Plusieurs valeurs d'épaisseur sont considérées dans chaque modèle telles que : $L/5 \leq e \leq 2L$. Les caractéristiques des 3 modèles sont représentées dans les tableaux ci-dessous.

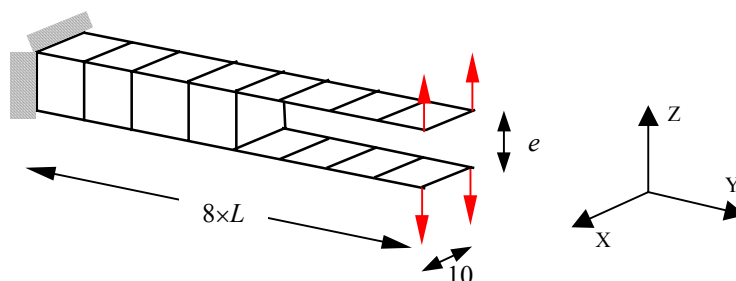


Figure III - 64 : Modélisation de la poutre DCB avec des éléments PEC liés à des éléments Plaques

	Modèle 1	Modèle 2	Modèle 3
Longueur élément L (mm)	5	10	20
Largeur élément (mm)	10	10	10
Paramètre : épaisseur (mm)	1	2	4
	1.25	2.5	5
	1.667	3.333	6.667
	2.5	5	10
	5	10	20
	10	20	40
$F_{Z \max}$ (N)	7	7	7

Tableau III - 11 : Caractéristiques géométriques des modèles DCB

Les caractéristiques des matériaux utilisées sont citées dans le tableau suivant :

	Séquence d'empilement : [Tissus carbone 0° / UD verre 0° / UD carbone 90°] _s		
	Tissu carbone	UD verre	UD carbone
Masse volumique ρ (g/mm ³)	0.0015	0.002	0.0015
E_1 (MPa)	58000	45000	144000
E_2 (MPa)	58000	10000	10000
E_3 (MPa)	10000	10000	10000
G_{12} (MPa)	4200	4200	4200
G_{23} (MPa)	4200	4200	4200
G_{31} (MPa)	4200	4200	4200
ν_{12}	0.045	0.3	0.25
ν_{23}	0.25	0.3	0.3
ν_{31}	0.045	0.06	0.017
Epaisseur totale (mm)	$e/3$	$e/3$	$e/3$

Tableau III - 12 : Caractéristiques des matériaux utilisés pour le modèle DCB

Les valeurs des flèches obtenues par ces différents modèles avec le code MEF_EX sont comparées aux valeurs obtenues par des modèles finement maillés simulés sur SAMCEF (Figure III - 65).

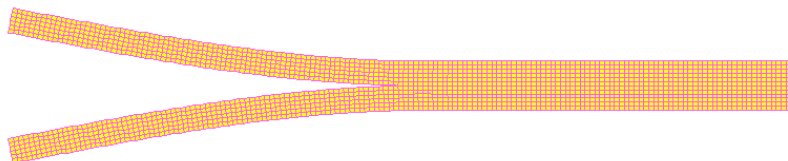


Figure III - 65 : Modèle de poutre DCB simulé sur SAMCEF

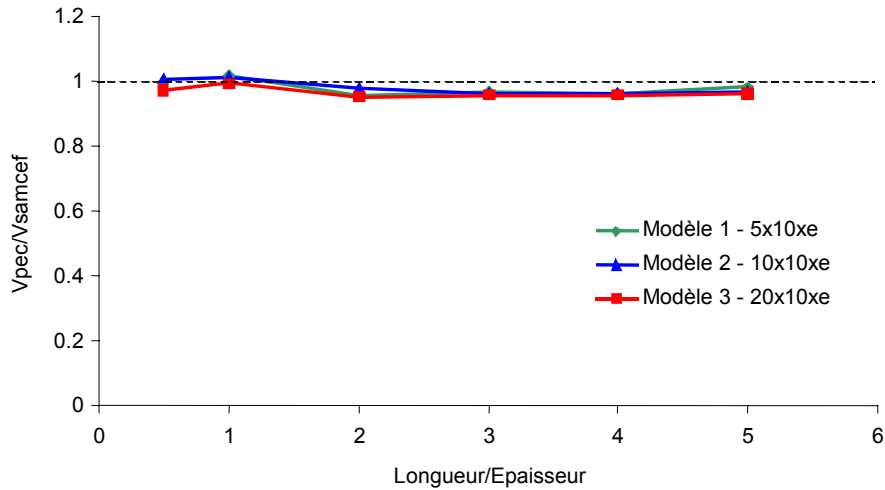


Figure III - 66 : Valeurs des flèches PEC relatives aux valeurs SAMCEF

Les 3 modèles donnent des résultats satisfaisants avec un écart maximal de 5% par rapport aux valeurs SAMCEF. Dans le cas d'une sollicitation symétrique, la liaison PEC – Plaques est correcte. Cette liaison reste à vérifier dans le cas de chargement unilatéral non symétrique.

III-5.2. Vérification de la liaison PEC – Plaques en sollicitation unilatérale

Dans ce cas, seulement une rangée d'éléments plaques est chargée (Figure III - 67) et l'élément PEC se trouve alors sollicité de façon unilatérale et non symétrique.

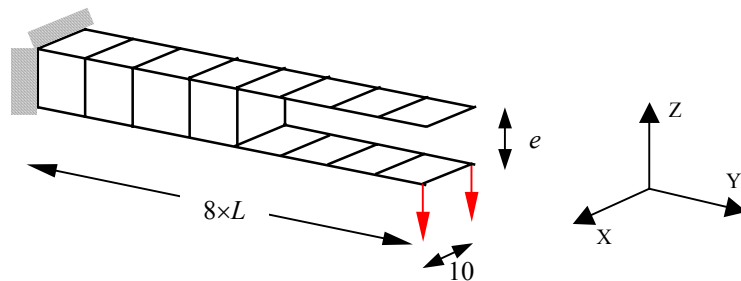


Figure III - 67 : Sollicitation de l'élément PEC de façon non symétrique

Ce mode de sollicitation excite un mode parasite dans l'élément PEC. En effet, le fait de charger l'élément sur un seul côté avec un moment fait apparaître un mode de déformation à rotations égales et à énergie nulle (c. f. III-2.6.). Les résultats des tests qui suivent vont mettre en évidence la sensibilité de l'élément PEC à ce mode de chargement.

Les modèles considérés pour l'étude de liaison PEC – Plaque sont les mêmes établis au paragraphe précédent dont les caractéristiques sont illustrées dans les tableaux III – 11 et III – 12. Par contre, le chargement est appliqué sur un seul côté de la poutre (Figure III - 67).

Dans un premier temps, le contrôle des modes parasites n'est pas pris en compte. Dans ce cas, les résultats obtenus par ces différents modèles montrent que la liaison est correcte à partir d'une longueur de l'élément 3 fois plus grande que l'épaisseur (Figure III - 68).

Cependant, au fur et à mesure que la longueur diminue par rapport à l'épaisseur, la liaison devient de moins en moins rigide. Le mode de déformation à rotation égale a tendance à s'accroître quand l'épaisseur de l'élément devient importante par rapport à sa longueur.

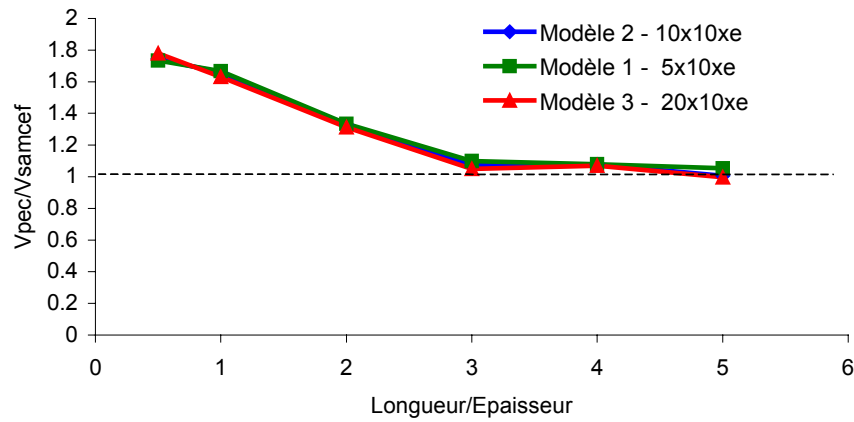


Figure III - 68 : Valeurs des flèches PEC relatives aux valeurs SAMCEF sans contrôle de modes parasites

Les essais pour lesquels les modes parasites ne sont pas négligeables sont refaits en géométrant, cette fois-ci, les déformations à rotations égales. Des valeurs arbitraires du multiplicateur γ sont choisies pour permettre de contrôler les modes parasites tel que :

- $\gamma = 0.01$ pour $L/e = 2$
- $\gamma = 0.08$ pour $L/e = 1$
- $\gamma = 0.2$ pour $L/e = 0.5$

Ce traitement des modes de déformations à énergie nulle permet d'améliorer le comportement de l'élément PEC quand le rapport L/e devient inférieur à 3 (Figure III - 69).

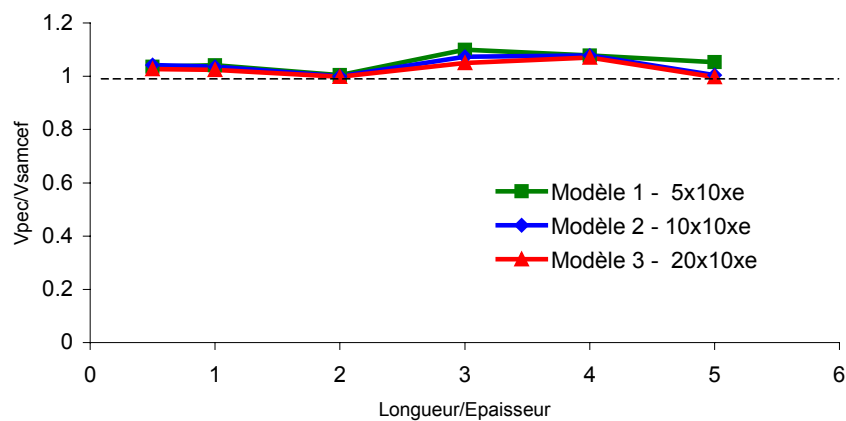


Figure III - 69 : Valeurs des flèches PEC relatives aux valeurs SAMCEF avec contrôle de modes parasites

Une précaution dans l'utilisation de l'élément PEC soumis à des modes de chargement unilatéraux est nécessaire. Cependant, les structures en stratifiés composites ont souvent de faibles épaisseurs par rapport aux autres dimensions. De ce fait, il serait plus commode, pour

les modéliser, d'utiliser des éléments ayant une épaisseur plus faible que les autres dimensions ce qui rend l'influence des modes parasites négligeable.

Ces différents tests montrent que l'élément PEC peut être connecté à des éléments plaques. Cette caractéristique est utile dans les modélisations tridimensionnelles dans la mesure où elle permet de simplifier la modélisation de certaines structures contenant des changements de sections importants.

III-6. Conclusions

Dans ce chapitre, la formulation du nouvel élément a été développée. Elle est basée sur l'élimination des nœuds de mi-côté d'un élément volumique à 20 nœuds pour obtenir un élément à 8 nœuds et 48 ddl compatible avec nos objectifs. Ce dernier possède d'une part, des degrés de liberté de rotation et, d'autre part, seulement deux nœuds par côté. Il peut être alors relié à des éléments plaques.

La formulation du nouvel élément a été établie de façon à permettre un comportement optimal en flexion, débarrassé de tout phénomène de verrouillage. Différents essais dans les configurations isotropes et multicouches ont permis de valider cette formulation et d'évaluer la performance de l'élément.

L'écriture d'un élément de plaque classique permet de modéliser l'état délaminé de la structure, c'est-à-dire, la phase où l'élément sera constitué uniquement de deux plaques indépendantes.

De plus, la liaison entre l'état non délaminé, modélisée par les éléments volumes multicouches PEC, et l'état délaminé, représenté par deux plaques, a été validée.

L'outil numérique étant opérationnel, la progression de ce travail va maintenant consister à gérer la transition des différents états de l'élément, c'est-à-dire, la migration de l'élément volume vers les deux plaques. Cette transition sera pilotée par un critère de délaminage et par des lois d'endommagement et de transfert qui feront l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE IV

MODELISATION DU DELAMINAGE DANS L'ELEMENT PEC

IV-1. Introduction

Le délaminage est l'un des modes d'endommagement primordiaux dans les structures composites. Il se caractérise par un manque de liaison entre deux plis d'un stratifié composite. Il est associé à une fissure qui se propage généralement dans une région riche en résine formant une interface entre deux plis adjacents. La propagation du délaminage conduit à une dégradation progressive de la rigidité, voire à une éventuelle rupture globale de la structure composite. En effet, cette séparation de couches provoque une baisse locale du moment d'inertie du stratifié. Ceci induit essentiellement une dégradation locale de la rigidité en flexion et de la résistance au flambage.

Il existe plusieurs méthodes pour modéliser le délaminage en éléments finis. Un aperçu de ces différentes méthodes a été présenté dans l'étude bibliographique au chapitre II. Les modélisations les plus réalistes et qui reproduisent correctement le processus de délaminage sont celles qui représentent d'une part les différents plis du stratifié par des couches d'éléments et, d'autre part, la séparation interlaminaire par une rupture de la liaison entre ces couches. Cette liaison est assurée par des éléments d'interface rigides qui rompent une fois le délaminage détecté. Notons d'un côté que ce genre de modélisation demande un nombre élevé de ddl. D'un autre côté, en ce qui concerne les codes de calcul explicites, la taille des mailles étant petite vu la présence de plusieurs éléments dans l'épaisseur du stratifié, le pas de temps de calcul est sensiblement réduit. De ce fait, ce type de modélisation est très coûteux en temps de calcul et devient laborieux quand la structure à modéliser est complexe.

Il s'agit, au travers de ce chapitre, de développer la méthode évoquée dans l'introduction de ce rapport. Elle consiste à utiliser un seul élément PEC dans l'épaisseur du stratifié. Celui-ci se transforme en deux éléments plaques suite au délaminage. La procédure numérique de la transformation est expliquée dans un premier temps. La modélisation du délaminage au sein de l'élément est ensuite détaillée. Les lois d'endommagement et de transfert sont déterminées pour cet effet. Un critère local de délaminage utilisant les paramètres nodaux est élaboré. La validation de la méthode proposée sera réalisée à travers quelques applications numériques présentées au chapitre V.

IV-2. Transformation numérique de l'élément PEC en 2 plaques

Lors du délaminage, l'élément PEC doit se transformer en 2 plaques physiquement indépendantes. Il ne s'agit pas de remailler le modèle ni d'attribuer une nouvelle numérotation aux éléments. Lors de la séparation en deux plaques, l'élément reste formé par les 8 nœuds de l'élément volume PEC du départ. Ces nœuds seront considérés comme deux ensembles de 4 nœuds supportant les 2 plaques. Les déplacements aux nœuds de chaque ensemble sont alors utilisés pour calculer les déformations suivant la formulation Belyschko-Lin-Tsay (BLT).

En clair, l'élément formé par les 8 nœuds possède avant délaminage une formulation PEC (c. f. chapitre III) et, après délaminage, une formulation BLT pour chaque ensemble de 4 nœuds. La nomination «élément bi-plaque» est adéquate dans ce cas et sera alors utilisée par la suite pour désigner l'élément après délaminage.

IV-2.1. Technique numérique

Le repère naturel (r, s, t) de l'élément PEC ainsi que la numérotation interne à l'élément sont montrés dans la figure suivante :

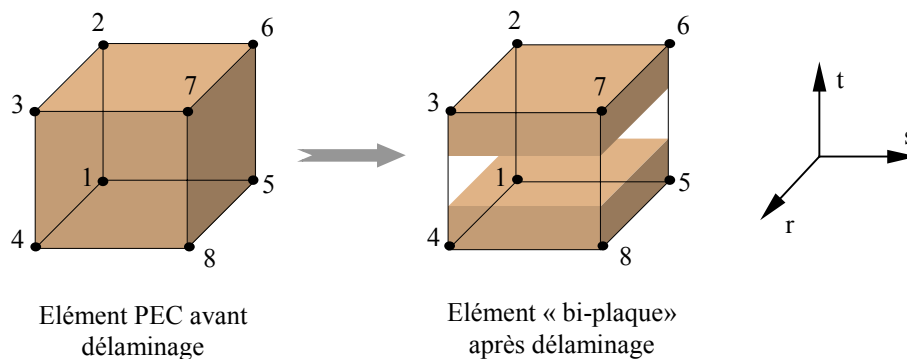


Figure IV - 1 : Conservation de la numérotation des nœuds avant et après délaminage

La séparation de l'élément PEC est supposée avoir lieu suivant le plan (r, s) formant ainsi 2 plaques à partir des nœuds $\{2,3,7,6\}$ et $\{1,4,8,5\}$ respectivement. A l'intérieur du code de calcul, ceci se traduit par l'utilisation des vitesses aux nœuds $\{2,3,7,6\}$ pour le calcul des déformations de la première plaque, et celles aux nœuds $\{1,4,8,5\}$ pour le calcul des déformations de la seconde plaque. Les contraintes dans la première plaque donnent alors les forces internes aux nœuds $\{2,3,7,6\}$ et celles dans la seconde plaque donnent les forces aux nœuds $\{1,4,8,5\}$.

Chaque série de forces internes est transformée ensuite dans le repère global. L'assemblage des forces internes et le calcul des accélérations, des vitesses et des déplacements sont réalisés ensuite pour l'ensemble des nœuds de la structure. Le calcul des vitesses locales se fait en utilisant un repère local pour chaque face.

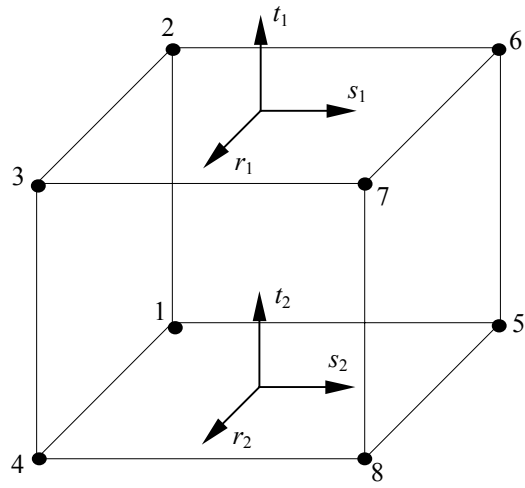


Figure IV - 2 : Les repères locaux de chaque face de l'élément

IV-3. Modélisation du délaminage au sein de l'élément

Dans les modèles de délaminage se basant sur la rupture des liens rigides entre les plis, la libération instantanée des nœuds provoque des oscillations importantes. Ceci revient à faire propager la fissure, pendant un pas de temps, d'une distance égale à la longueur de l'élément. De ce fait, plus l'élément est grand, plus l'énergie libérée est importante et plus les vibrations sont sévères. Afin de minimiser ces vibrations parasites qui peuvent déstabiliser le comportement de la structure, les forces assurant la liaison entre ces nœuds sont graduellement réduites à zéro.

Dans notre problématique, la transition entre l'état volume et l'état bi-plaque de l'élément est lissée par un état hybride. Elle est associée à une propagation de la fissure à l'intérieur de l'élément.

IV-3.1. Méthode de passage de l'élément PEC à l'élément bi-plaque

Le nouvel élément peut exister sous 3 états différents : l'état volumique où le délaminage n'a pas encore atteint l'élément, l'état hybride où le délaminage est en train de se propager dans l'élément et, enfin, l'état « bi-plaques » où le délaminage a complètement traversé l'élément.

Lorsque la fissure se propage dans un élément, ce qui correspond à son état hybride, il faut gérer l'effondrement des propriétés transverses du stratifié ainsi que le transfert progressif des rigidités de membrane du volume vers les 2 plaques. Pour cela, la transition entre l'état volume et l'état bi-plaque est pilotée par 2 paramètres : d qui contrôle la dégradation des propriétés transverses (E_{33} , G_{13} , G_{23}) et d_{transf} qui contrôle le transfert des propriétés de membrane des plis (E_{11} , E_{22} , G_{12}).

En effet, la propagation de fissure au sein de l'élément peut être définie d'une part, comme une chute locale des propriétés transverses dans le stratifié (E_{33} , G_{13} , G_{23}). Le paramètre d'endommagement d varie en fonction de la longueur de fissure qui est supposée connue : d est égal à 1 quand il n'y a pas de délaminage, et d est égal à 0 quand la longueur de la fissure dans l'élément est égale à la longueur de l'élément. Dans un premier temps, toutes les propriétés transverses sont supposées varier de la même façon.

D'autre part, il faut conserver la rigidité de membrane en la faisant migrer du volume vers les plaques. Ce transfert des rigidités de membrane est réalisé en diminuant graduellement les propriétés mécaniques de membrane des plis de l'élément 3D et en augmentant les propriétés des plis des plaques simultanément de façon à garder constante la rigidité résultante E^0 . Le paramètre de transfert d_{transf} est aussi défini en fonction de la longueur de fissure dans l'élément : il est égal à 1 avant l'apparition du délaminage, et à 0 quand la longueur de fissure devient égale à la longueur de l'élément. d_{transf} multiplie les propriétés de membrane de l'élément volumique tandis que $(1-d_{transf})$ multiplie les propriétés des plaques.

Les termes de la matrice d'élasticité du $i^{ème}$ pli d'un élément contenant une fissure s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
Q_{11_PEC}^i &= d_{transf} Q_{11_0}^i \\
Q_{22_PEC}^i &= d_{transf} Q_{22_0}^i \\
G_{12_PEC}^I &= d_{transf} Q_{12_0}^i
\end{aligned} \tag{Eq. IV - 1}$$

$$\begin{aligned}
Q_{11_PLAQ}^i &= (1 - d_{transf}) Q_{11_0}^i \\
Q_{22_PLAQ}^i &= (1 - d_{transf}) Q_{22_0}^i \\
Q_{44_PLAQ}^i &= (1 - d_{transf}) Q_{44_0}^i \\
Q_{55_PLAQ}^i &= (1 - d_{transf}) Q_{55_0}^i \\
Q_{66_PLAQ}^i &= (1 - d_{transf}) Q_{66_0}^i
\end{aligned} \tag{Eq. IV - 2}$$

$$\begin{aligned}
Q_{33_PEC}^i &= d \cdot Q_{33_0}^i \\
Q_{55_PEC}^i &= d \cdot Q_{55_0}^i \\
Q_{66_PEC}^i &= d \cdot Q_{66_0}^i
\end{aligned} \tag{Eq. IV - 3}$$

A partir de ces nouvelles caractéristiques matériau pour une longueur de fissure donnée, les contraintes dans chaque pli de l'élément fissuré sont calculées pour chaque état par :

$$\begin{aligned}
\sigma_{fiss}^{PEC} &= C_{fiss}^{PEC} \varepsilon^{PEC} \\
\sigma_{fiss}^{Plaque} &= C_{fiss}^{Plaque} \varepsilon^{Plaque}
\end{aligned} \tag{Eq. IV - 4}$$

où ε^{PEC} représente les déformations dans un pli de l'élément fissuré calculées à partir des dérivés des fonctions de formes N_I^{PEC} de l'élément PEC, et ε^{Plaque} les déformations calculées à partir des fonctions de formes de plaque N_I^{Plaque} . Les matrices d'élasticité C_{fiss} de l'état PEC et des plaques s'écrivent respectivement pour chaque pli :

$$C_{fiss}^{PEC} = \begin{bmatrix} \frac{(-1+v_{23}v_{32})}{\mu} d_{transf} E_{11}^0 & -\frac{(v_{21}+v_{23}v_{31})}{\mu} d_{transf} E_{11}^0 & -\frac{(v_{21}+v_{23}v_{31})}{\mu} d_{transf} E_{11}^0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(v_{21}+v_{23}v_{31})}{\mu} d_{transf} E_{22}^0 & \frac{(-1+v_{23}v_{32})}{\mu} d_{transf} E_{22}^0 & -\frac{(v_{21}+v_{23}v_{31})}{\mu} d_{transf} E_{22}^0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(v_{21}+v_{23}v_{31})}{\mu} d \cdot E_{33}^0 & -\frac{(v_{21}+v_{23}v_{31})}{\mu} d \cdot E_{33}^0 & \frac{(-1+v_{23}v_{32})}{\mu} d \cdot E_{33}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{transf} G_{12}^0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & d \cdot G_{13}^0 & \\ 0 & 0 & 0 & & & d \cdot G_{13}^0 \end{bmatrix} \tag{Eq. IV - 5}$$

avec :

$$\mu = -1 + v_{23}v_{32} + v_{12}v_{21} + v_{13}v_{31} + v_{12}v_{23}v_{31} + v_{32}v_{13}v_{21}$$

$$C_{fiss}^{Plaque} = \begin{bmatrix} \frac{-(1-d_{transf})E_{11}^0}{-1+v_{12}v_{21}} & \frac{-v_{21}(1-d_{transf})E_{11}^0}{-1+v_{12}v_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-v_{12}(1-d_{transf})E_{22}^0}{-1+v_{12}v_{21}} & \frac{-(1-d_{transf})E_{22}^0}{-1+v_{12}v_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-d_{transf})G_{12}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-d_{transf})G_{13}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-d_{transf})G_{23}^0 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. IV - 6})$$

Les contraintes σ_{fiss}^{PEC} et σ_{fiss}^{Plaque} de l'état hybride contribuent au calcul de l'énergie interne totale à l'élément et aux forces et moments résultants aux nœuds. Ceux-ci sont calculés en ajoutant les forces et moments provenant de l'état PEC à ceux provenant de l'état plaque :

$$f_{total}^{int} = f_{PEC}^{int} + f_{Plaque}^{int} \quad (\text{Eq. IV - 7})$$

IV-3.2. Calcul des contraintes

Le calcul des déformations totales s'effectue à l'aide d'une formulation incrémentale utilisant le repère co-rotationnel de l'élément (c. f. chapitre II) tel que :

$$\varepsilon_{ij}(t + \Delta t) = \varepsilon_{ij}(t) + \dot{\varepsilon}_{ij} \Delta t \quad (\text{Eq. IV - 8})$$

où $\varepsilon_{ij}(t)$ est le tenseur de déformations à l'instant t , Δt le pas de temps et $\dot{\varepsilon}_{ij}$ le taux de déformation. Ce calcul s'effectue à chaque point d'intégration de l'élément.

Généralement dans les codes explicites, une formulation incrémentale permet de calculer les contraintes vraies. En effet, la contrainte vraie s'écrit :

$$\sigma_{ij}(t + \Delta t) = \sigma_{ij}(t) + \dot{\sigma}_{ij} \Delta t \quad (\text{Eq. IV - 9})$$

le taux de contrainte $\dot{\sigma}_{ij}$ s'écrit en fonction du taux de déformation et de la loi matériau :

$$\dot{\sigma}_{ij} = f(\dot{\varepsilon}_{ij}) \quad (\text{Eq. IV - 10})$$

Une des difficultés à utiliser ce formalisme est d'arriver à prendre en compte l'endommagement. En effet, au début du mécanisme de dégradation, la contrainte dans l'élément contenant la fissure a une valeur σ_D . Lors de la dégradation de l'élément, cette valeur, en raison de l'équation (IV - 9), va continuer à croître alors que physiquement elle doit décroître. Pour tenir compte de ce phénomène, on introduit généralement une raideur tangente « négative » au niveau de la loi matériau afin de permettre à la contrainte de décroître avec l'endommagement (Figure IV - 3).

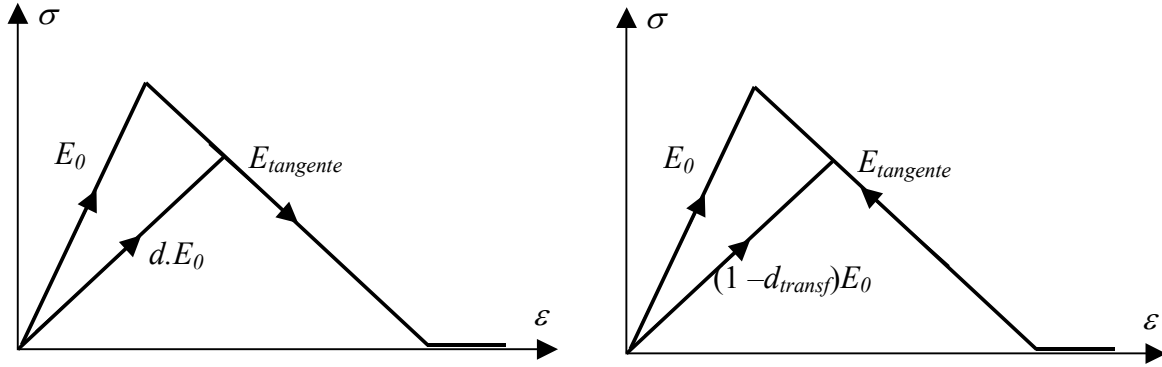


Figure IV - 3 : Evolution de la contrainte en fonction de la loi d'endommagement et de transfert

En supposant que le comportement des matériaux composites est élastique fragile, les contraintes peuvent être calculées directement à partir des déformations totales. Cette méthode permet de s'affranchir de cette difficulté. Le tenseur des contraintes s'écrit alors directement à chaque point d'intégration par :

$$\sigma_{ij} = C \varepsilon_{ij} \quad (\text{Eq. IV - 11})$$

C étant la matrice d'élasticité du pli où le calcul s'effectue, donnée par l'équation (IV – 5) pour l'état PEC ou par l'équation (IV – 6) pour l'état bi-plaque.

Cette formulation permet de tenir compte directement de l'endommagement et du transfert des propriétés du matériau. C'est-à-dire, d'une part, l'endommagement des propriétés transverses de l'élément PEC se traduit par une chute des valeurs des contraintes transverses. D'autre part, les contraintes provenant de l'état bi-plaque augmentent d'une façon cohérente avec la loi de transfert.

IV-3.3. Lois d'endommagement et de transfert fonction de la longueur de fissure

IV-3.3.1. Principe de recherche des lois

Afin de déterminer la variation des paramètres d'endommagement et de transfert en fonction de la longueur de fissure, 2 modèles éléments finis sont considérés. Le premier est réalisé avec un maillage fin 2D et avec une fissure initiale de longueur a . Une sollicitation en mode I est appliquée et des valeurs moyennes des déplacements suivants les axes x et y de l'extrémité chargée sont relevées pour différentes valeurs de longueur de fissure. Dans un premier temps, la fissure est supposée avoir lieu au milieu de la hauteur du modèle.

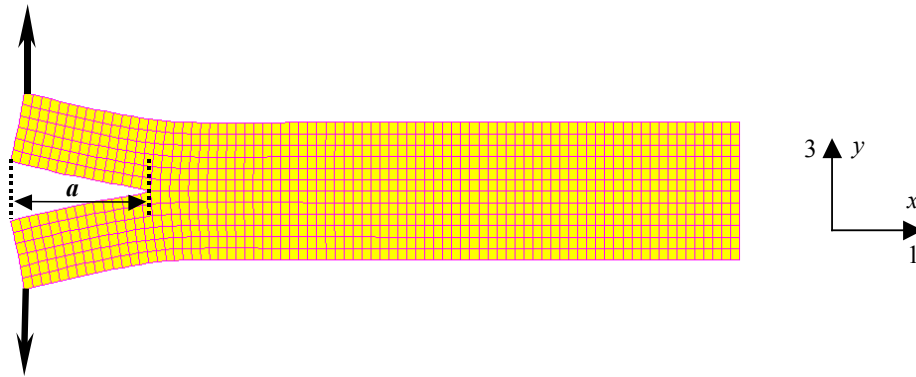


Figure IV - 4 : Modèle SAMCEF pour le calcul de E_p , E_{11} et E_{33} en fonction de la longueur de fissure

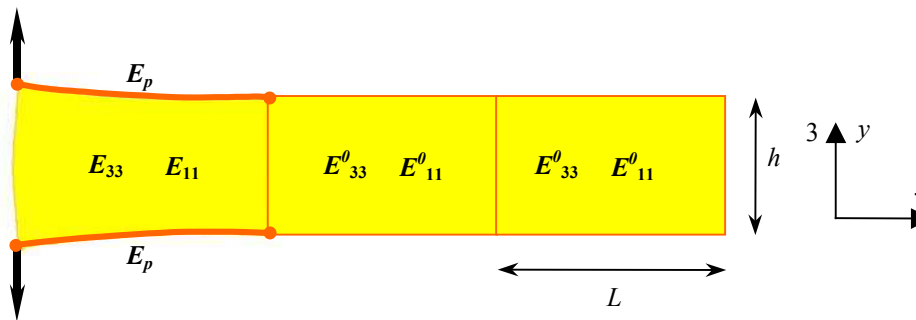


Figure IV - 5 : Modèle 2D pour le calcul de E_p , E_{11} et E_{33} en fonction de la longueur de fissure

Le second modèle comporte un assemblage de 3 éléments PEC réécrits avec une formulation en 2D. Donc, deux éléments de poutre sont assemblés sur les côtés supérieur et inférieur du premier élément PEC. La matrice de rigidité globale est alors établie en fonction des inconnues suivantes : le module de Young du matériau de la poutre E_p , les modules de Young de membrane et transverse, E_{11} et E_{33} respectivement, du nouvel élément. Le principe consiste à identifier les valeurs de E_p , E_{11} et E_{33} permettant de retrouver les déplacements aux nœuds extrêmes équivalents à ceux calculés à partir modèle finement maillé.

Les caractéristiques matériaux et géométriques de ce modèle sont illustrées ci-dessous .

Caractéristiques matériaux	
E^0_{11} (MPa)	58000
E^0_{33} (MPa)	10000
G_{13} (MPa)	4200
ν_{13}	0.3
Dimensions	
Longueur L (mm)	10
Hauteur h (mm)	5
Force appliquée	
Force (N)	100

Tableau IV – 1 : Caractéristiques du modèle

La matrice de rigidité élémentaire de la formulation 2D de l'élément PEC est définie comme étant :

$$K^e = \int_{V^e} (B^T C B)^e dV \quad (\text{Eq. IV - 12})$$

V^e étant le volume de l'élément, B la matrice dérivée des fonctions de formes de l'élément PEC et C la matrice d'élasticité (contraintes – déformations) :

$$C := \begin{bmatrix} -\frac{E_{11}}{-1 + \nu_{13} \nu_{31}} & -\frac{\nu_{31} E_{11}}{-1 + \nu_{13} \nu_{31}} & 0 \\ \frac{\nu_{13} E_{33}}{-1 + \nu_{13} \nu_{31}} & -\frac{E_{33}}{-1 + \nu_{13} \nu_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{13} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. IV - 13})$$

avec :

$$\begin{aligned} E_{11} &= d_{transf} E_{11}^0 \\ E_{33} &= d E_{33}^0 \\ G_{13} &= d G_{13}^0 \end{aligned} \quad (\text{Eq. IV - 14})$$

La matrice K^e du premier élément est assemblée ensuite aux 2 matrices K_p des éléments poutres qui s'écrivent :

$$K_p = \begin{bmatrix} \frac{Ep S}{l} & 0 & 0 & -\frac{Ep S}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 I Ep}{l^3} & \frac{6 I Ep}{l^2} & 0 & \frac{-12 I Ep}{l^3} & \frac{6 I Ep}{l^2} \\ 0 & \frac{6 I Ep}{l^2} & \frac{4 I Ep}{l} & 0 & \frac{-6 I Ep}{l^2} & \frac{2 I Ep}{l} \\ -\frac{Ep S}{l} & 0 & 0 & \frac{Ep S}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12 I Ep}{l^3} & \frac{-6 I Ep}{l^2} & 0 & \frac{12 I Ep}{l^3} & \frac{-6 I Ep}{l^2} \\ 0 & \frac{6 I Ep}{l^2} & \frac{2 I Ep}{l} & 0 & \frac{-6 I Ep}{l^2} & \frac{4 I Ep}{l} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. IV - 15})$$

avec

$$E_p = (1 - d_{transf}) E_{11}^0 \quad (\text{Eq. IV - 16})$$

Après assemblage de la matrice globale K_g du modèle et élimination des degrés de liberté bloqués, le vecteur déplacement est calculé classiquement :

$$u = K_g^{-1}F \quad (\text{Eq. IV - 17})$$

où F est le vecteur Force appliqué au système.

Les valeurs des déplacements suivant les axes x et y , u_a et w_a respectivement, obtenues avec le modèle finement maillé pour une longueur donnée de fissure a , sont utilisées pour résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} u_a &= f(E_p, E_{11}, E_{33}) \\ w_a &= g(E_p, E_{11}, E_{33}) \\ E_p + E_{11} &= E^0 \end{aligned} \quad (\text{Eq. IV - 18})$$

avec E_0 le module de Young initial du modèle, $f(E_p, E_{11}, E_{33})$ et $g(E_p, E_{11}, E_{33})$ les déplacements suivant les axes x et y obtenus par le second modèle.

IV-3.3.2. Détermination des lois d'endommagement et de transfert

La résolution du système d'équation IV-18 pour différentes longueurs de fissure permet de tracer la variation des paramètres d'endommagement et de transfert, d et d_{transf} , en fonction de la progression du délaminage, a , au sein de l'élément. On obtient les courbes suivantes :

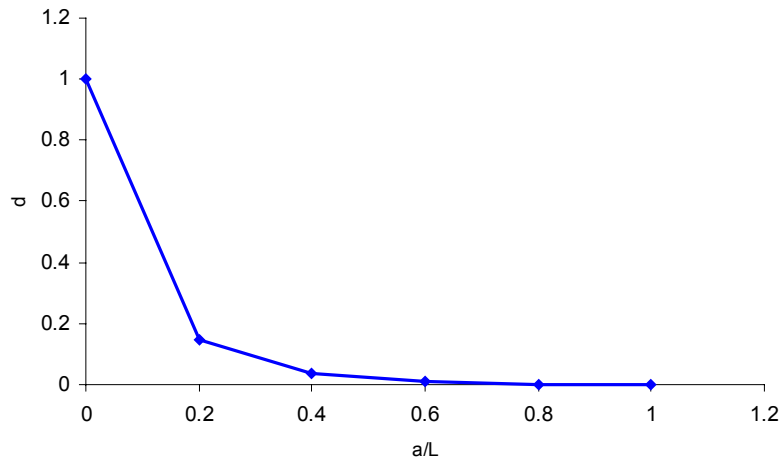


Figure IV - 6 : Loi d'endommagement en fonction de la longueur de fissure

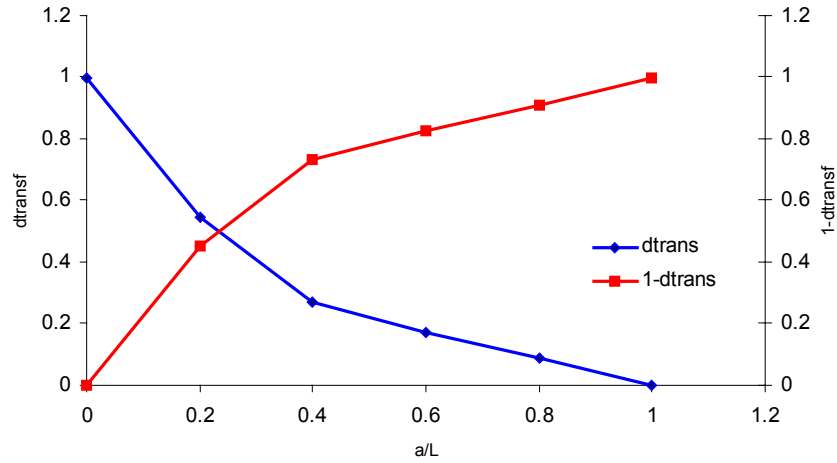


Figure IV - 7 : Loi de transfert en fonction de la longueur de fissure

Cette loi qui relie le paramètre de transfert d_{transf} à la longueur de la fissure peut s'exprimer par la fonction suivante :

$$d_{transf} = \left[\left(\frac{L+1}{L} \right) \left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{L+1} \right) \right]^{0,8} \quad (\text{Eq. IV - 19})$$

où L est la longueur de l'élément et a la longueur de la fissure dans l'élément.

La loi d'endommagement peut être écrite directement en fonction de la loi de transfert par la fonction :

$$d = \left[\frac{1}{1 - 0.5d_{transf}} - 1 \right]^{1,7} \quad (\text{Eq. IV - 20})$$

Les courbes de ces fonctions sont comparées aux courbes empiriques sur le graphe ci-dessous.

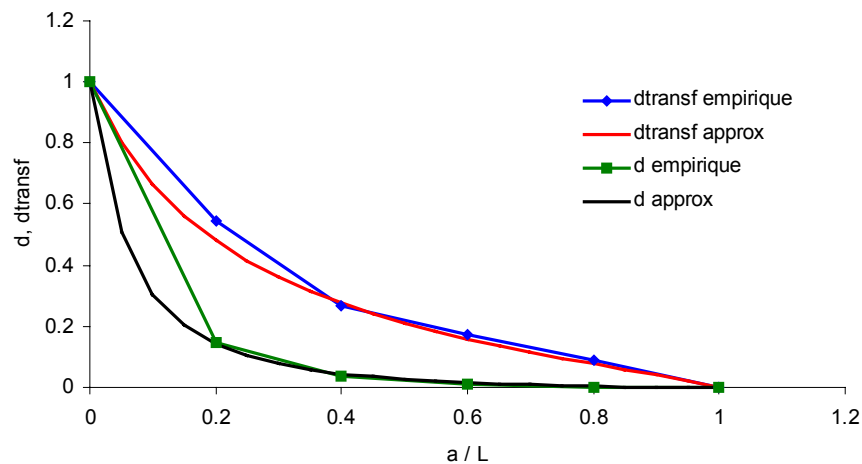


Figure IV - 8 : comparaison des lois d'endommagement et de transfert

IV-3.3.3. Effet du module de cisaillement et du coefficient de Poisson transverses

Dans l'étude de l'identification de la loi d'endommagement réalisée plus haut, seul le module transverse E_{33} était dégradé. Le module de cisaillement G_{13} et le coefficient de Poisson sont gardés constants. Leurs influences sur la réponse du modèle sont considérées négligeables dans le cas de délaminage en mode I.

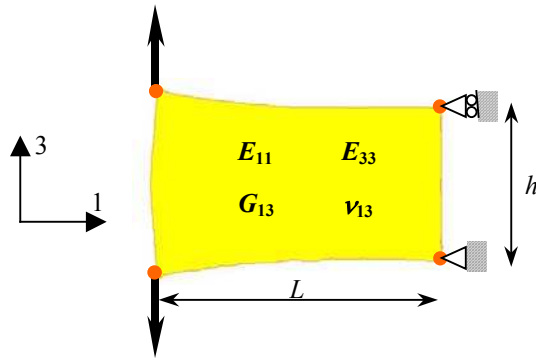


Figure IV - 9 : Modèle pour l'étude de l'effet de E_{11} , E_{33} , G_{13} et ν_{13} sur la flèche

En effet, prenons un élément PEC seul sollicité sur un côté en mode I et bloqué sur le côté opposé (Figure IV - 9). On écrit la valeur des déplacements sur les nœuds chargés en fonction des modules E_{11} , E_{33} , G_{13} et ν_{13} . En faisant varier ces modules et le coefficient de Poisson, on remarque que seulement E_{33} a un effet significatif sur la valeur de la flèche (Figure IV - 10 à IV - 13).

De ce fait, dans le cas général tridimensionnel, toutes les propriétés transverses sont supposées décroître de la même façon suivant la loi d'endommagement présentée dans la Figure IV - 8.

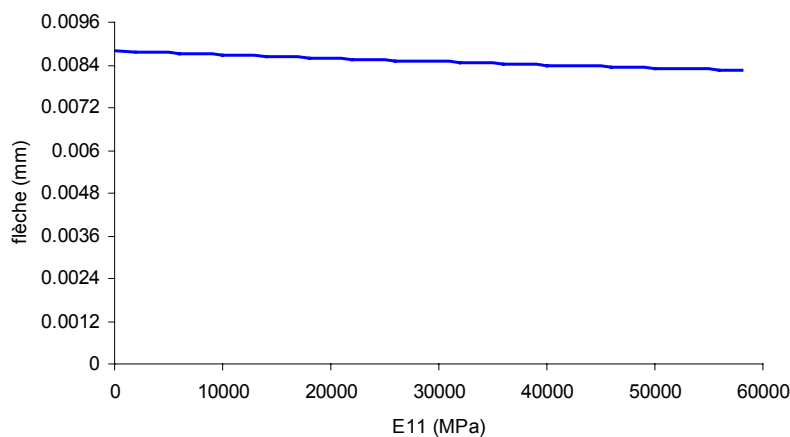


Figure IV - 10 : Influence de E_{11} sur la flèche

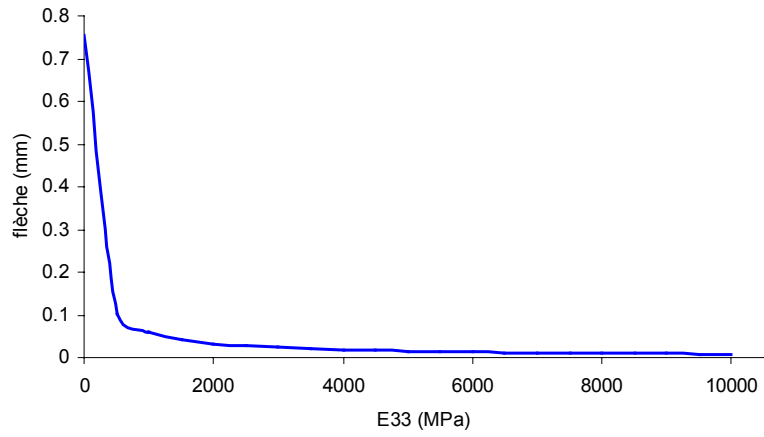


Figure IV - 11 : Influence de E_{33} sur la flèche

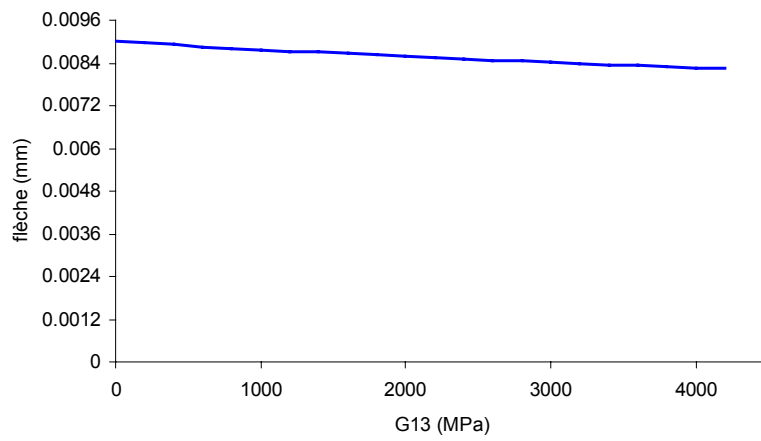


Figure IV - 12 : Influence de G_{13} sur la flèche

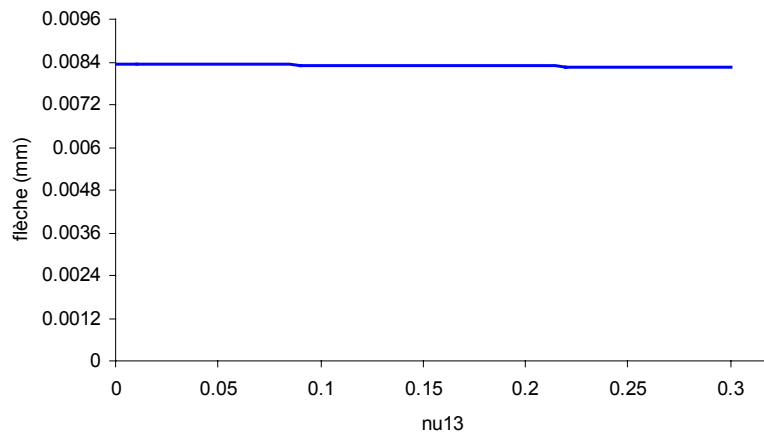


Figure IV - 13 : Influence de ν_{13} sur la flèche

IV-3.4. Conclusion

L'utilisation d'éléments de taille relativement grande est sans doute avantageuse. Cependant, la modélisation de la propagation de la fissure par une rupture brutale de l'élément génère des vibrations qui peuvent déstabiliser le modèle. Pour cela, la simulation de la propagation du délaminage à l'intérieur de l'élément est nécessaire. Ceci a été réalisé d'une part, en dégradant toutes les propriétés de l'élément PEC dans le sens transverse d'une quantité fonction de la longueur de la fissure et, d'autre part, en transférant une partie de la rigidité de membrane à l'élément bi-plaque. Ce traitement de la progression de la fissure peut être valable quelque soit la direction de propagation évitant ainsi le recours au maillage adaptatif.

Les lois permettant la transformation de l'élément PEC en élément bi-plaque ont été déterminées à l'aide de modèles éléments finis.

Ces lois de passage de l'état PEC à l'état bi-plaque influent sur la façon dont la structure évolue entre le moment où la fissure atteint un élément et le moment où elle le traverse complètement.

Il en découle que plus la taille de l'élément est grande, plus le choix de ces lois aura de l'importance sur l'évolution de la réponse de la structure pendant la fissuration d'un élément. Inversement, plus la taille de l'élément est petite, moins le choix de ces lois aura de l'influence sur la réponse de la structure.

En pratique, connaissant le point de départ qui correspond à l'élément à l'état PEC non dégradé et le point d'arrivée qui correspond à l'élément à l'état bi-plaque complet, les lois utilisées doivent assurer un passage lissé d'un état à l'autre.

IV-4. Critère de délaminage au niveau local de l'élément

IV-4.1. Introduction

Pour pouvoir contrôler la propagation de la fissure, différentes méthodes peuvent être utilisées. Allix et al [ALLIX (1993)] utilisent la mécanique d'endommagement avec un modèle d'interface. Cette technique demande une connaissance précise des contraintes interlaminaires au front de fissure et, par conséquent, une taille relativement petite des éléments à cet endroit là. Cependant, les codes éléments finis en dynamique rapide utilisent un schéma d'intégration explicite dont le temps de calcul dépend de la taille du plus petit élément du modèle. Ceci entraîne des temps de calcul prohibitifs pour la modélisation de structures de tailles industrielles.

D'autres auteurs utilisent la « virtual crack closure technique » [FLEMING (1999)] [DE ROECK (1995)]. L'avantage de cette méthode est que le taux de restitution d'énergie peut être calculé en utilisant les forces et les déplacements aux nœuds des éléments autour du front de fissure. Ceci permet d'utiliser un maillage relativement grossier comparé aux méthodes qui demandent une description exacte du champ de contraintes près du front de fissure. Cependant, la propagation de la fissure est égale à la surface de l'élément et la vitesse de propagation dépend alors de la taille des mailles.

L'approche présentée ici consiste à contrôler la propagation de fissure en mode I en utilisant les forces, moments, déplacements et rotations aux nœuds de l'élément contenant le front de fissure. Nous traiterons dans cette partie les cas particuliers de propagation de fissure à des angles de 0° et 45° par rapport au maillage. La recherche du critère de propagation de la fissure est basée, dans un premier temps, sur la théorie des poutres pour le cas de propagation à 0° . Le critère de propagation du délaminage à 45° est déterminé à partir de la méthode de Ritz.

IV-4.2. Critère de propagation de délaminage à 0°

Le maillage est aligné avec la direction de propagation de la fissure lorsque le front de fissure est parallèle à l'arête de l'élément (Figure IV - 14). Dans ce cas, la longueur du front de fissure dans l'élément reste constante durant sa progression. Le problème se réduit alors à un cas unidimensionnel qu'on peut facilement résoudre à partir de la théorie des poutres.

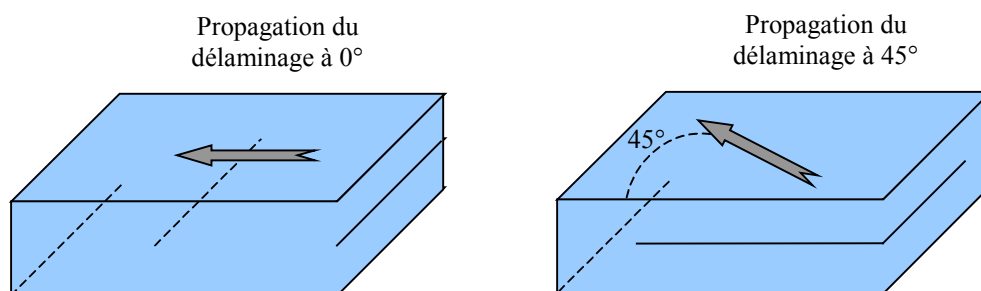


Figure IV - 14 : Directions de propagation du délaminage dans l'élément

IV-4.2.1. Calcul du taux de restitution d'énergie basé sur la théorie des poutres

Considérons la partie fissurée d'une poutre composite comme une poutre encastree soumise à un effort et à un moment. A une distance a du front de fissure, le déplacement et la rotation, w et θ , s'écrivent :

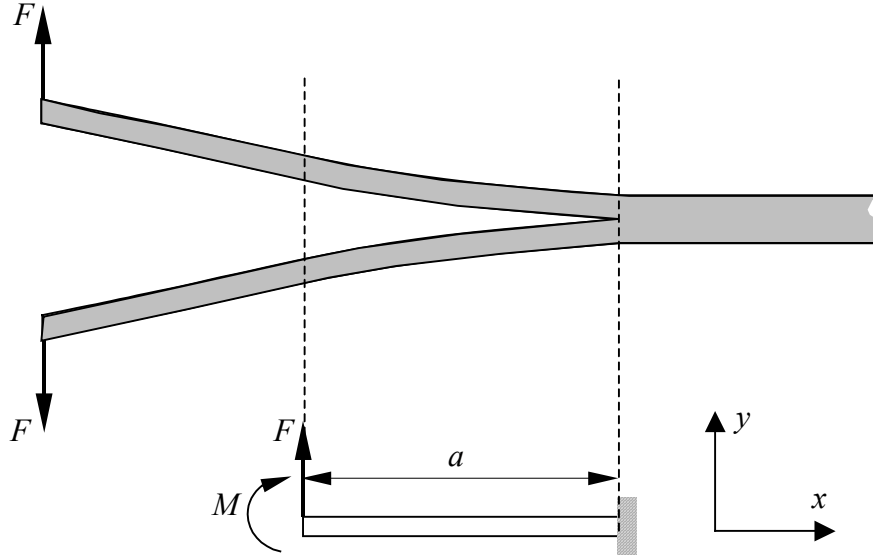


Figure IV - 15 : Modèle de poutre pour la détermination du critère de délaminage

$$w = \frac{Fa^3}{3EI_z} + \frac{Ma^2}{2EI_z} \quad (\text{Eq. IV - 21})$$

$$\theta = \frac{Fa^2}{2EI_z} + \frac{Ma}{EI_z}$$

L'énergie potentielle accumulée dans la structure délaminée est :

$$W = -\frac{1}{2}(Fw + M\theta) = -\frac{1}{2}\left(\frac{F^2a^3}{3EI} + \frac{FMa^2}{EI} + \frac{M^2a}{EI}\right) \quad (\text{Eq. IV - 22})$$

Le taux de restitution d'énergie correspond à la variation de W par rapport à la surface de fissure :

$$G = -\frac{\partial W}{b\partial a} = \frac{1}{2b}\left(\frac{F^2a^2}{EI} + \frac{2FMa}{EI} + \frac{M^2}{EI}\right) \quad (\text{Eq. IV - 23})$$

Utilisant les expressions IV - 21 de w et θ , l'équation IV - 23 devient :

$$\frac{1}{2ba}(3Fw + M\theta) = G \quad (\text{Eq. IV - 24})$$

F , M , w et θ sont calculés sur les nœuds derrière le front de fissure, a est la longueur de délaminage à l'intérieur de l'élément contenant le front de fissure et b la largeur de la poutre.

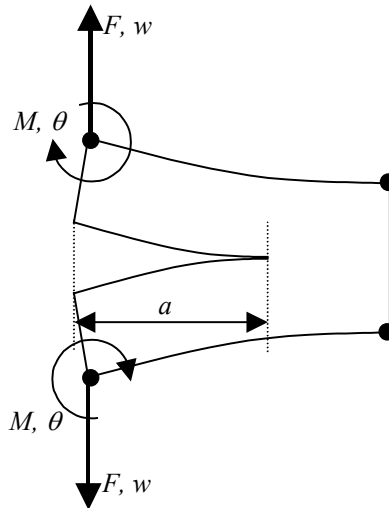


Figure IV - 16 : Paramètres élémentaires utilisés dans le critère local de délaminage

La relation IV – 24 a été obtenue à partir de la théorie des poutres et en supposant la structure encastree soumise à un effort tranchant et un moment de flexion. Or, lorsque l'élément commence à se fissurer, la longueur d'ouverture est très faible par rapport à la hauteur de l'élément et on se trouve en limite d'application de la théorie des poutres. Le modèle est alors peu fiable.

De plus, la liaison supposée encastree ne l'est pas en réalité. Physiquement, l'angle de rotation à la racine de la fissure est différent de zéro. La liaison au front de fissure est forcément moins rigide qu'un encastrement parfait.

Pour ces différentes raisons, un processus d'identification de l'énergie ($3Fw + M\theta$) s'avère alors nécessaire. Un essai de poutre « Double Cantilever Beam » (DCB) servira comme modèle de référence pour la détermination de la quantité ($3Fw + M\theta$) en mode I dans un élément contenant la fissure.

La modélisation de la poutre DCB sera réalisée en utilisant les lois d'endommagement et de transfert définies précédemment. La propagation du délaminage sera contrôlée par le taux de restitution d'énergie calculé dans la poutre d'une façon globale et comparé au taux de restitution critique trouvé expérimentalement. Cette façon de gérer la propagation de la fissure ne servira que dans le cas de poutre DCB et seulement pour la validation de la technique d'endommagement et de transfert de rigidité et l'identification du critère de délaminage.

La comparaison des résultats de cette simulation avec les résultats expérimentaux permettra d'observer l'évolution du terme ($3Fw + M\theta$) du critère de délaminage établi précédemment en fonction de la longueur de la fissure dans l'élément.

IV-4.3. Essai expérimental de poutre DCB

IV-4.3.1. Définition du modèle d'essai

L'essai DCB permet de calculer le taux de restitution d'énergie critique en mode I. Il servira de modèle de base pour l'identification du critère de délaminage. L'éprouvette DCB est fabriquée avec du tissu en carbone pré-imprégné (G803/914) et des plis unidirectionnels de carbone (T300/914). La séquence d'empilement est la suivante :

8 plis de G803/914 à 0°
4 plis de T300/914 à 90°
8 plis de G803/914 à 0°

Les caractéristiques de l'éprouvette DCB sont présentées dans les tableaux suivants :

	Matériaux	
	G803/914	T300/914
Masse volumique ρ (g/mm^3)	0.0015	0.0015
Epaisseur du pli (mm)	0.31	0.13
E_1 (MPa)	58000	144000
E_2 (MPa)	58000	10000
E_3 (MPa)	10000	10000
G_{12} (MPa)	4200	4200
G_{23} (MPa)	4200	4200
G_{31} (MPa)	4200	4200
ν_{12}	0.045	0.25
ν_{23}	0.25	0.3
ν_{31}	0.045	0.017

Tableau IV - 2 : Caractéristiques matériaux de l'éprouvette DCB

Géométrie	
Longueur (mm)	200
Largeur (mm)	20
Epaisseur (mm)	5.52

Tableau IV - 3 : Dimensions de la poutre DCB

La poutre DCB possède un délaminage initial de 30mm sur une interface G803/914-T300/914. L'effort est appliqué sur des chapes collées sur les zones délaminées.



Figure IV - 17 : L'essai expérimental DCB

Le test est réalisé sur une machine de traction permettant l'acquisition du déplacement vertical et de l'effort appliqué sur les mors. Afin de mesurer la fissure, la tranche de l'éprouvette est colorée en blanc. L'essai consiste en une progression du déplacement vertical par paliers où l'on mesure manuellement la longueur de la fissure. On procède par paliers de 1mm d'ouverture. La traction est arrêtée dès propagation de fissure. On note alors sa longueur, l'effort maximal atteint ainsi que l'effort final stabilisé.

IV-4.3.2. Résultats de l'essai

La courbe force – déplacement obtenue est illustrée dans le graphe ci-dessous.

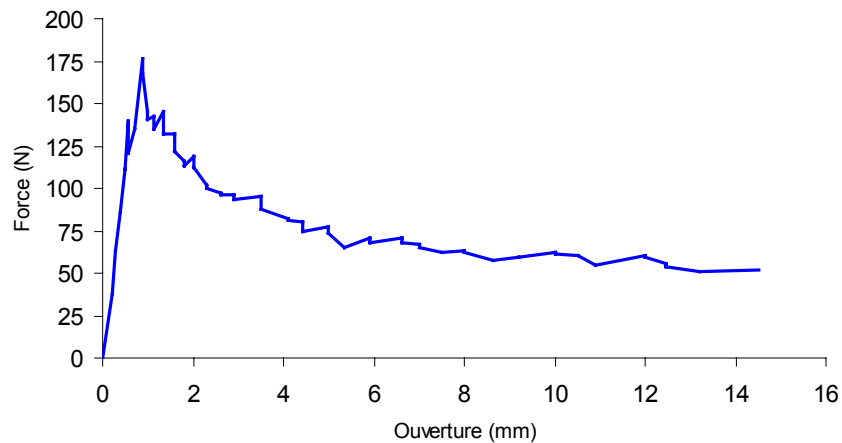


Figure IV - 18 : Force en fonction de l'ouverture de la poutre DCB

Le taux de restitution d'énergie dans la poutre DCB est défini comme étant :

$$G = \frac{F^2}{2b} \frac{\partial C}{\partial a} \quad (\text{Eq. IV - 25})$$

F étant la force appliquée, b la largeur de la poutre, a la longueur de la fissure. C est la compliance et s'écrit en fonction de l'ouverture w de la poutre et de la force F :

$$C = \frac{w}{F} \quad (\text{Eq. IV - 26})$$

Dans le cas idéal, l'ouverture w est égale à deux fois la flèche d'une poutre encastree de longueur a tel que :

$$w = \frac{2Fa^3}{3EI} \quad (\text{Eq. IV - 27})$$

La dérivée de la compliance par rapport à la longueur de la fissure devient alors :

$$\frac{\partial C}{\partial a} = \frac{2a^2}{EI} \quad (\text{Eq. IV - 28})$$

A partir des équations IV – 25, IV – 27 et IV – 28, on obtient une autre formule pour le calcul de G en fonction des seules données expérimentales F , w et a :

$$G = \frac{3Fw}{2ba} \quad (\text{Eq. IV - 29})$$

Les courbes du taux de restitution d'énergie calculées suivant les équations IV – 25 et IV – 29 sont représentées sur le graphe suivant :

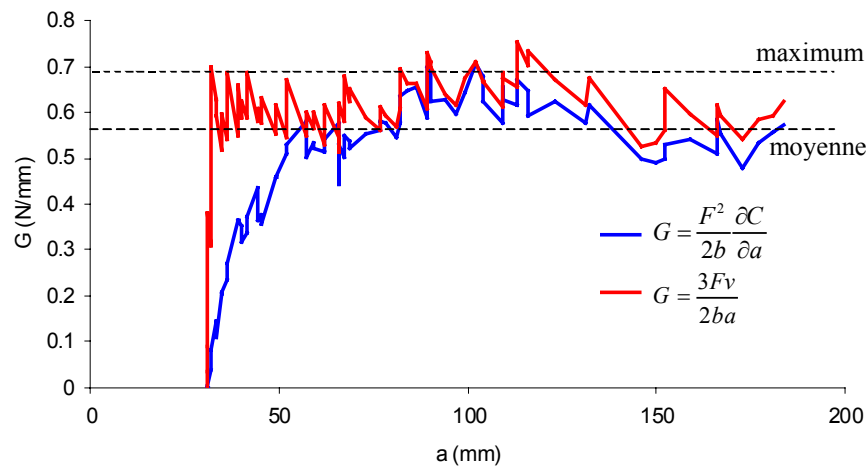


Figure IV - 19 : Taux de restitution d'énergie de la poutre DCB

A partir d'une longueur de fissure de 50mm, les deux formules donnent des valeurs du taux de restitution d'énergie assez proches. A partir d'une certaine longueur de fissure, l'hypothèse de poutre idéalement encastree devient plus réaliste. Ceci étant, l'expression IV – 29 donne une valeur de G relativement constante dès la première propagation de fissure. De plus, cette formule permet de calculer G d'une façon simple et elle sera donc utilisée dans le modèle d'identification du critère local.

La valeur moyenne du taux de restitution d'énergie est de $0,56 \text{ N/mm}$ et une valeur de crête de $0,69 \text{ N/mm}$. La valeur du taux de restitution d'énergie critique G_c utilisée dans la modélisation est de $0,69 \text{ N/mm}$, soit la valeur maximale. Cette valeur permet d'avoir le même pic d'effort initial de la courbe force – déplacement.

IV-4.4. Identification du critère local

IV-4.4.1. Définition du modèle numérique

Une première modélisation de la poutre DCB va nous permettre, d'une part, de vérifier les lois d'endommagement et de transfert (c. f. paragraphe IV-3.2.) et, d'autre part, d'identifier le critère de délaminage local. La simulation est réalisée sur le code MEF_EX. Le modèle est constitué d'un seul élément dans la largeur et l'épaisseur et 40 éléments sur la longueur. La partie initialement délaminée est constituée de 6 éléments bi-plaques.

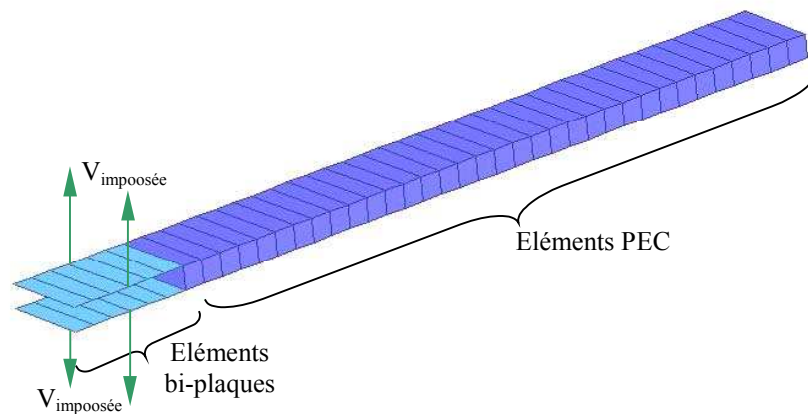


Figure IV - 20 : Modèle PEC de la poutre DCB

Les caractéristiques du modèle sont présentées dans le tableau ci-dessous.

	Elément		
	PEC	Plaque supérieure	Plaque inférieure
Longueur L (mm)	5	5	5
Largeur l (mm)	20	20	20
Epaisseur e (mm)	5.52	2.5	3.02
Nombre	34	6	6
Nombre de couches d'intégration	6	3	3

Tableau IV - 4 : Caractéristiques du modèle PEC de la poutre DCB

PEC		
N° couche	Epaisseur (mm)	Matériaux
1	1.25	G803/914 à 0°
2	1.25	G803/914 à 0°
3	0.26	T300/914 à 90°
4	0.26	T300/914 à 90°
5	1.25	G803/914 à 0°
6	1.25	G803/914 à 0°

Tableau IV - 5 : Définition des couches d'intégration numérique pour l'élément PEC

Plaque supérieure		
N° couche	Epaisseur (mm)	Matériaux
1	0.833	G803/914 à 0°
2	0.833	G803/914 à 0°
3	0.833	G803/914 à 0°

Tableau IV - 6 : Définition des couches d'intégration numérique pour la plaque supérieure

Plaque inférieure		
N° couche	Epaisseur (mm)	Matériaux
1	0.52	T300/914 à 90°
2	1.25	G803/914 à 0°
3	1.25	G803/914 à 0°

Tableau IV - 7 : Définition des couches d'intégration numérique pour la plaque inférieure

L'application de la vitesse imposée de $0.05m/s$ se fait sur les nœuds au milieu de la zone pré-fissurée, ce qui correspond au milieu des chapes collées là où l'effort est introduit.

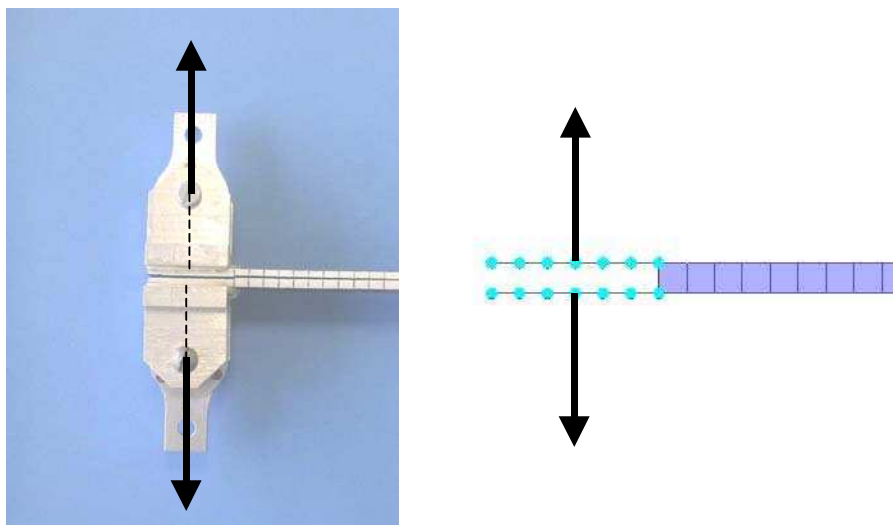


Figure IV - 21 : Application de la vitesse imposée

Pour contrôler la propagation de fissure, cette modélisation utilise le taux de restitution d'énergie calculé avec la formule $G = \frac{3Fw}{2ba}$, où F est la force relevée aux nœuds de l'extrémité chargée, w la distance entre les nœuds supérieurs et inférieurs de l'extrémité chargée de la poutre, a la longueur totale de la fissure dans la poutre et b la largeur de la poutre. Cette façon de gérer la propagation de fissure dans la poutre DCB ne sert que pour valider le modèle et identifier un critère général de propagation de délaminage au niveau local de l'élément.

La vitesse de propagation de fissure est supposée être fonction de la célérité du son dans le matériau et de l'énergie emmagasinée dans la structure telle que :

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \omega \times C \times \Delta G, & \text{for } \Delta G > 0 \\ \dot{a} &= 0, & \text{for } \Delta G < 0 \end{aligned} \quad (\text{Eq. IV - 30})$$

où C est la vitesse de propagation du son dans le matériau et ω est un coefficient d'amortissement. Quand G atteint la valeur du taux de restitution d'énergie critique G_c , le délaminage augmente d'une longueur $\dot{a} \times \Delta t$, Δt étant le pas de temps. $\Delta G = G - G_c$ correspond à l'énergie accumulée dans la structure durant un pas de temps.

IV-4.4.2. Résultats de la simulation

La simulation donne une corrélation correcte de l'essai expérimental. La transformation de l'élément PEC en bi-plaque, à chaque fois que la fissure traverse un élément, s'opère sans vibrations parasites significatives.

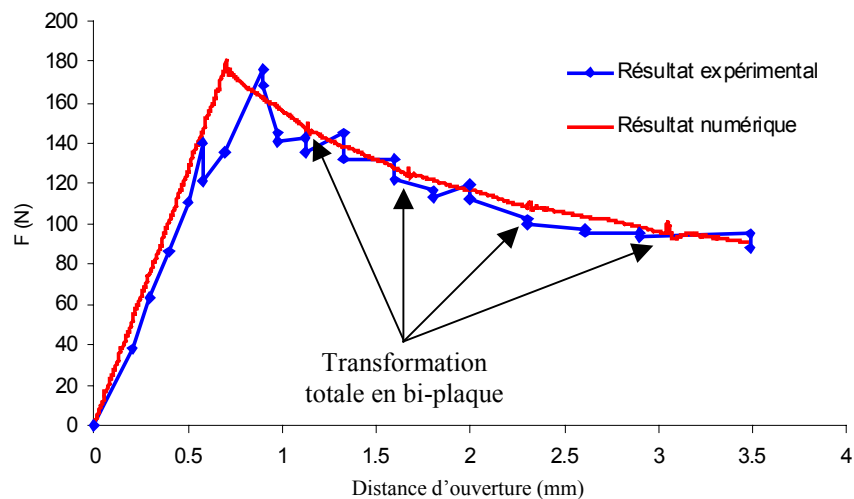


Figure IV - 22 : Courbes forces – déplacement de la poutre DCB

La progression de la fissure telle qu'elle est calculée à partir de l'expression IV – 30 semble être pertinente. En effet, en comparant le résultat de la simulation numérique avec celui de l'essai expérimental, on remarque une propagation continue du délaminage du modèle avoisinant la propagation par pallier de l'essai.

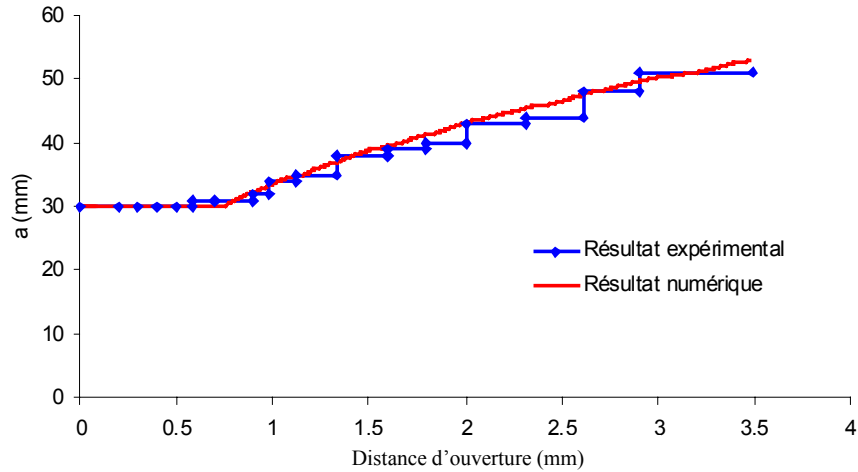


Figure IV - 23 : Progression de la fissure en fonction de la distance d'ouverture

Ce modèle corrèle bien les résultats de l'essai. La propagation du délaminage est contrôlée par la comparaison du taux de restitution d'énergie calculée au niveau global de la structure avec le taux de restitution critique. La progression de la fissure au sein de l'élément est représentée à travers des lois d'endommagement et de transfert de rigidités fonction de la longueur de la fissure. Celle-ci est calculée par intégration explicite dans le temps de la vitesse de propagation supposée fonction de la célérité du son dans le matériau.

IV-4.4.3. Identification du critère du délaminage local à l'élément

Cette approche va nous permettre d'identifier un critère de délaminage général au niveau de l'élément. Au fur et à mesure que la fissure se propage, l'évolution du terme $3F_w + M\theta$ de l'équation IV - 24 dans 3 éléments successifs est tracée en fonction de la longueur de la fissure a rapportée à la longueur de l'élément L sur le graphe suivant :

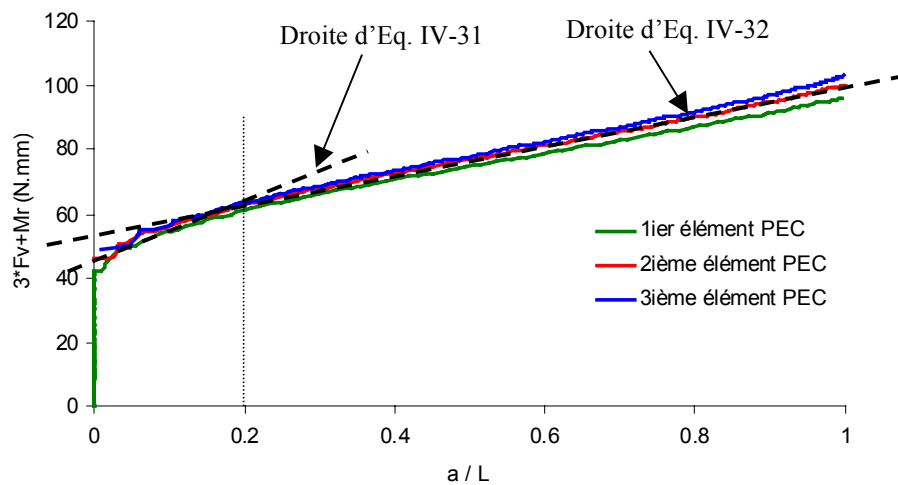


Figure IV - 24 : Variation de la quantité $3F_w + M\theta$ par rapport à la longueur de fissure dans l'élément

Les courbes $3Fw + M\theta$ dans les 3 éléments successifs sont presque identiques. On remarque que pour une longueur de fissure a supérieure à 20% de la longueur de l'élément L , la variation de $3Fw + M\theta$ devient linéaire. Ces courbes peuvent être alors approximées par 2 droites :

$$0 < a/L < 0,2 \quad 3Fw + M\theta - 15a = 47 \quad (\text{Eq. IV - 31})$$

$$0,2 < a/L < 1 \quad 3Fw + M\theta - 9a = 54 \quad (\text{Eq. IV - 32})$$

Les équations IV – 31, IV – 32 et IV – 24 permettent de calculer le taux de restitution d'énergie G dans les 3 éléments successifs :

$$0 < a/L < 0,2 \quad G = \frac{1,175}{a} + 0,375 \quad (\text{Eq. IV - 33})$$

$$0,2 < a/L < 1 \quad G = \frac{1,35}{a} + 0,225 \quad (\text{Eq. IV - 34})$$

Lorsque la fissure atteint l'élément, la valeur de G calculée est très grande. Ceci est dû à l'imprécision de la formule IV – 24 pour des petites valeurs de fissure où la théorie des poutres, sur laquelle se base le critère, n'est pas applicable. Par contre, quand la longueur de la fissure augmente, la valeur du G calculée tend vers une valeur de 0.5 N/mm qui n'est pas loin de la valeur moyenne expérimentale du taux de restitution d'énergie critique.

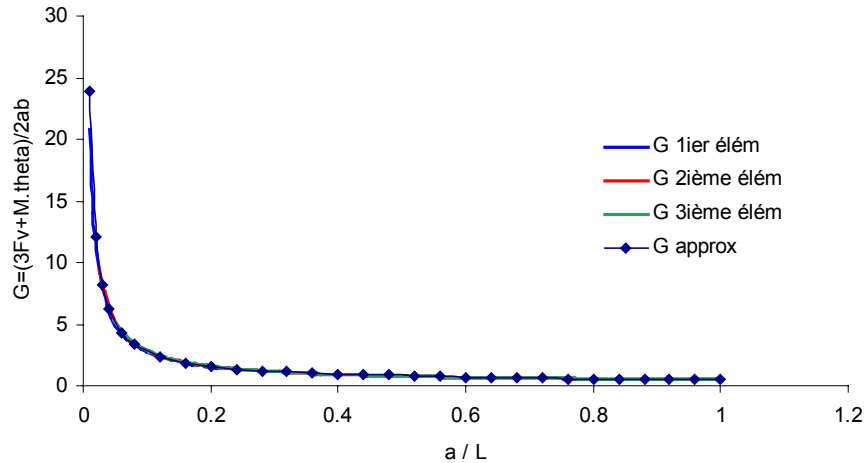


Figure IV - 25 : Taux de restitution d'énergie critique calculée dans l'élément contenant la fissure

Du point de vue pratique, le critère de propagation de délaminage prendra la forme suivante :

$$3Fw + M\theta - Ka \geq E_{seuil} \quad (\text{Eq. IV - 35})$$

où K correspond à la pente de la courbe $3Fw + M\theta$ et qui peut être assimilé à un taux de restitution d'énergie « résiduel ». E_{seuil} correspond à l'énergie à partir de laquelle commence la propagation de fissure dans l'élément. Cette énergie permet de remédier à la limitation de la

théorie des poutres au début de la propagation de la fissure dans l'élément. K et E_{seuil} sont les paramètres identifiables du critère de délaminage.

IV-4.5. Critère de propagation du délaminage à 45°

Dans ce paragraphe, nous considérons le cas où le front de fissure attaque l'élément sur un de ses coins faisant un angle de 45° avec l'arête. Quand le front de fissure n'est pas parallèle à l'arête de l'élément, sa longueur au sein de l'élément tend à augmenter avec la distance de propagation du délaminage. Par conséquent, une énergie plus importante doit être disponible au niveau du nœud au sommet afin de pouvoir faire progresser la fissure.

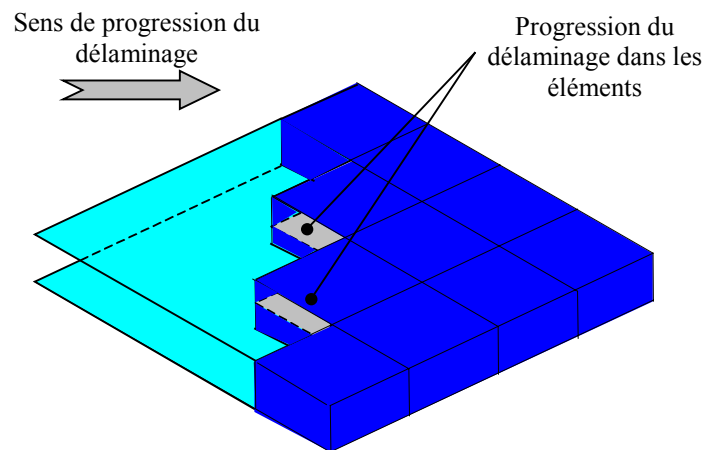


Figure IV - 26 : Progression du délaminage à 45° dans les éléments

Le délaminage prend une forme triangulaire au début de sa progression dans les éléments. A ce stade là, seul le nœud au sommet du triangle de délaminage contribue au calcul de l'énergie disponible pour faire avancer la fissure.

Quand le délaminage atteint la diagonale de l'élément, le front de fissure commence à diminuer et l'énergie requise pour la progression du délaminage devient de moins en moins importante.

Nous supposons alors que l'énergie disponible calculée au nœud du sommet est suffisamment élevée pour délaminer le triangle restant de l'élément. Par conséquent, seule la moitié de l'élément est considérée pour la définition du critère de propagation du délaminage à 45°.

IV-4.5.1. Calcul du taux de restitution d'énergie basé sur la méthode de Ritz

Afin de déterminer ce critère, un modèle analytique de plaque triangulaire est considéré. La plaque est encastree sur un côté. Le sommet libre du triangle est tronqué pour éviter une singularité due à un moment d'inertie nul à cet endroit. Une force f et un moment m par unité de longueur sont répartis sur cette extrémité (Figure IV - 27). L'effet du coefficient de Poisson n'est pas pris en compte dans cette étude.

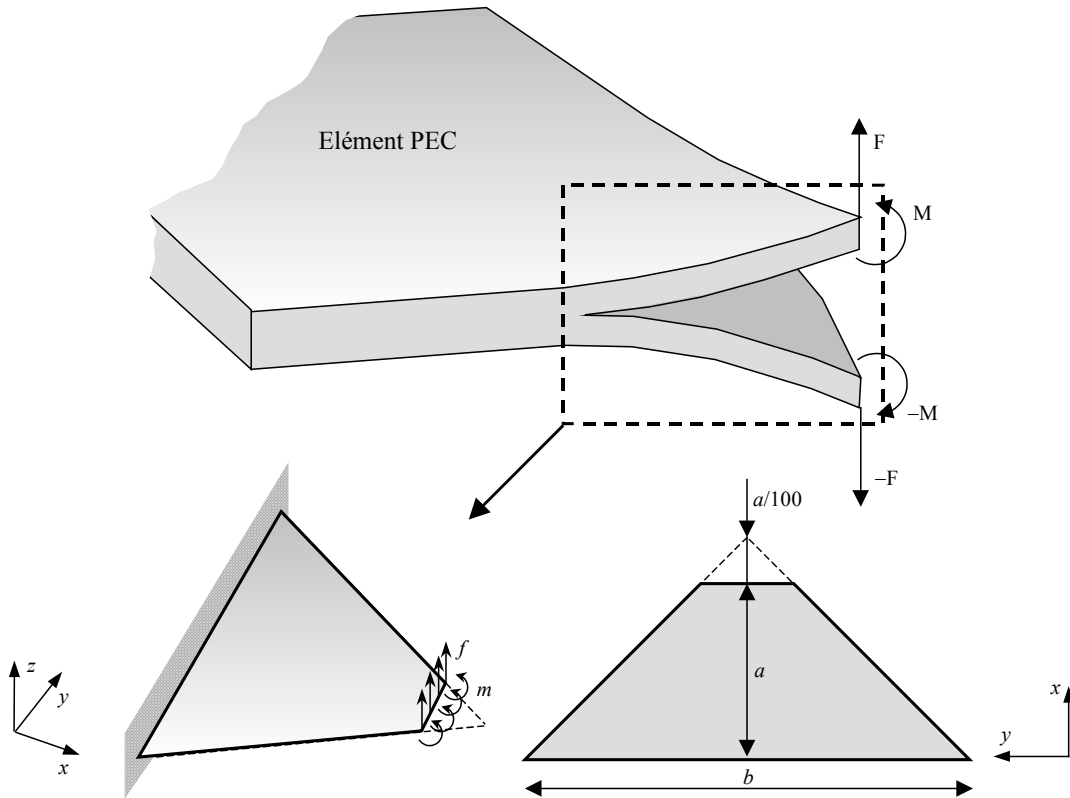


Figure IV - 27 : Modèle de plaque encastree pour la détermination du critère de délaminage

Le système est résolu avec la méthode de Ritz en choisissant une fonction de base cubique comme approximation de la déformée telle que:

$$w = Ax^3 \quad (\text{Eq. IV - 36})$$

L'énergie élastique du système s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{Eh^3}{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dS \quad (\text{Eq. IV - 37})$$

avec :

$$dS = 2 \times (a - x) dx \quad (\text{Eq. IV - 38})$$

l'énergie élastique devient alors :

$$U = \frac{1}{4} Eh^3 A^2 a^4 \quad (\text{Eq. IV - 39})$$

Le travail des forces extérieures s'écrit :

$$V = f \frac{2a}{100} Aa^3 + m \frac{2a}{100} 3Aa^2 \quad (\text{Eq. IV - 40})$$

L'énergie potentielle du système peut être exprimée par :

$$W = U - V = \frac{1}{4} Eh^3 A^2 a^4 - \frac{f}{50} Aa^4 - \frac{m}{50} 3Aa^3 \quad (\text{Eq. IV - 41})$$

Pour un système en équilibre, la fonction de base choisie pour l'approximation de la déformée doit rendre l'énergie potentielle extrémale :

$$\frac{\partial W}{\partial A} = 0 \quad (\text{Eq. IV - 42})$$

ceci permet de déterminer la valeur de A :

$$A = \frac{1}{25} \frac{fa + 3m}{Eh^3 a} \quad (\text{Eq. IV - 43})$$

la flèche et la rotation à l'extrémité de la plaque deviennent :

$$w_a = \frac{1}{25} \frac{fa^3}{Eh^3} + \frac{3}{25} \frac{ma^2}{Eh^3} \quad (\text{Eq. IV - 44})$$

$$\theta_a = \frac{3}{25} \frac{fa^2}{Eh^3} + \frac{9}{25} \frac{ma}{Eh^3} \quad (\text{Eq. IV - 45})$$

le taux de restitution d'énergie s'écrit :

$$G = -\frac{\partial W}{b\partial a} = \frac{1}{625} \frac{f^2 a^2}{Eh^3} + \frac{9}{1250} \frac{fma^2}{Eh^3} + \frac{9}{1250} \frac{m^2 a}{Eh^3} \quad (\text{Eq. IV - 46})$$

ou bien, en terme de force équivalente, moment équivalent, déplacement et rotation au sommet de la plaque, le taux de restitution d'énergie s'exprime de la façon suivante :

$$G = \frac{1}{2ba} (4Fw_a + 2M\theta_a) \quad (\text{Eq. IV - 47})$$

avec $F = f \frac{2a}{100}$ et $M = m \frac{2a}{100}$ correspondant à la force et au moment au nœud du sommet.

Comme pour le critère défini à partir de la théorie des poutres au paragraphe précédent, la liaison entre la partie fissurée et la partie intacte est supposée encastree. Or en réalité, la rotation à la racine de la fissure est différente de zéro. De plus, la méthode de Ritz conduit à des modèles approchés qui sont plus rigides que ne l'est la structure réelle. Par conséquent, le calcul du taux de restitution d'énergie à partir de l'équation IV - 47 n'est pas fiable. Pour remédier à ces limitations, le critère de propagation de délaminage à 45° dans un élément doit alors prendre la forme du critère défini précédemment tel que :

$$4Fw + 2M\theta - Ka \geq E_{seuil} \quad (\text{Eq. IV - 48})$$

les paramètres E_{seuil} et K sont à identifier à partir de l'exemple de séparation de plaque composite qui sera présenté au chapitre suivant.

IV-4.6. Conclusion

Une approche simple pour la détermination du critère de délaminage en mode I a été établie. Nous avons considéré deux cas de propagation de fissure par rapport au maillage : propagation avec un angle de 0° d'une part et à 45° d'autre part. Les critères sont basés sur la théorie classique des poutres, sur la méthode de Ritz ainsi que sur la mécanique de la rupture. En plus des forces et déplacements, les moments et les rotations aux nœuds sont pris en compte dans la définition du critère permettant de considérer toute l'énergie disponible dans l'élément pour le calcul du taux de restitution d'énergie.

Cependant, vu les approximations faites, les valeurs du taux de restitution d'énergie calculées par ces critères ne peuvent correspondre exactement aux valeurs expérimentales. Un processus d'identification doit être réalisé afin de corriger la formulation des critères et de définir les paramètres K et E_{seuil} .

Pour le cas particulier de poutre DCB, il existe des formules analytiques pour calculer le taux de restitution d'énergie en mode I (c. f. IV-4.2.1. ou chapitre II). Ceci nous a permis de contrôler la propagation de fissure dans le modèle éléments finis et d'observer l'évolution de l'expression du critère de délaminage dans les éléments contenant le front de fissure et de d'identifier les paramètres K et E_{seuil} .

Le chapitre suivant présentera quelques applications numériques permettant de valider les critères de délaminage établis dans cette partie.

IV-5. Conclusion

La nécessité d'utilisation de maillage relativement grossier pour modéliser des structures composites de grandes tailles nous a amené à adopter des approches à l'échelle macroscopique. Le calcul des contraintes au front de fissure étant moyenné, la recherche d'autres paramètres pour piloter le critère de délaminage a été nécessaire. Les efforts et les déplacements aux nœuds présentent une alternative pour évaluer l'énergie disponible dans l'élément et, par conséquent, des paramètres pour formuler le critère de délaminage.

Les éléments nécessaires à la modélisation de la propagation du délaminage dans l'élément ont été établis dans ce chapitre. D'une part, les lois pilotant le passage de l'état volume à l'état plaque ont été définies. D'autre part, le critère de délaminage au niveau local à l'élément a été formulé.

Ces deux outils vont permettre de modéliser le délaminage de structures composites avec une taille de maille grande. Ceci contribue à la réduction de la taille des modèles et du temps de calcul et va être mis en évidence à travers les applications numériques présentées dans le chapitre suivant.

CHAPITRE V

APPLICATIONS NUMERIQUES

V-1. Introduction

Dans les chapitres précédents, la formulation du nouvel élément ainsi que la méthode de modélisation de la propagation du délaminage dans cet élément ont été présentées. Il s'agit, dans ce chapitre, de valider l'élément PEC à travers quelques exemples d'application.

Dans cette étude, nous nous intéressons essentiellement à la propagation de fissure en mode I. De ce fait, les exemples présentés dans ce chapitre portent sur des cas de propagation de délaminage en mode I.

L'exemple de poutre DCB sera repris en premier, utilisant cette fois-ci le critère de délaminage élaboré au chapitre précédent pour contrôler la progression de la fissure. La sensibilité du critère au maillage sera également étudiée. Une modélisation différente de la poutre DCB sera en plus proposée où l'on considère une ouverture se produisant loin de la mi-hauteur de l'élément. La propagation arbitraire de la fissure dans le plan sera ensuite étudiée à travers un exemple de séparation de plaque composite. L'ensemble de ces modélisations est réalisé avec le code explicite MEF_EX.

Ces travaux de recherche sont réalisés en collaboration avec la société MECALOG qui développe le logiciel de calcul RADIOSS. L'implémentation de l'élément PEC dans le code RADIOSS à travers les « fenêtres utilisateurs » sera présentée à la fin du chapitre.

V-2. Exemple de poutre DCB

V-2.1. Modèle avec une couche d'éléments PEC

Le même modèle PEC de la poutre DCB développé dans le paragraphe précédent est utilisé. Il est constitué de 34 éléments à l'état PEC et 6 éléments à l'état bi-plaque dans la zone pré-fissurée.

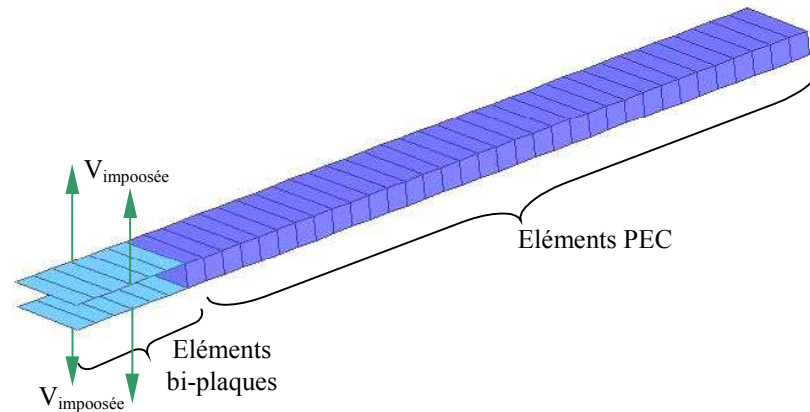


Figure V - 1 : Modèle PEC de la poutre DCB

Le critère de délaminage élaboré au chapitre précédent est utilisé. Ce critère s'écrit :

$$3Fw + M\theta - Ka \geq E_{seuil} \quad (\text{Eq. V - 1})$$

Le processus d'identification réalisé au paragraphe IV-4.3. a permis de définir les valeurs de K et de E_{seuil} telles que :

$$0 < a/L < 0,2 \quad 3Fw + M\theta - 15a \geq 47 \quad (\text{Eq. V - 2})$$

$$0,2 < a/L < 1 \quad 3Fw + M\theta - 9a \geq 54 \quad (\text{Eq. V - 3})$$

où a est la longueur de la fissure dans l'élément, L la longueur de l'élément, F , M , w et θ sont respectivement la force, moment, déplacement et rotation aux nœuds derrière le front de fissure.

La longueur de fissure a est calculée par intégration explicite dans le temps de la vitesse de propagation de délaminage que l'on estime par :

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \omega \times C \times \Delta E, & \text{for } \Delta E > 0 \\ \dot{a} &= 0, & \text{for } \Delta E < 0 \end{aligned} \quad (\text{Eq. V - 4})$$

où C est la vitesse de propagation du son dans le matériau et ω est un coefficient d'amortissement. $\Delta E = E - E_{seuil}$ correspond à l'énergie accumulée dans la structure durant un pas de temps.

V-2.1.1. Première simulation

La simulation montre des sauts dans la courbe force – déplacement à chaque fois que la fissure commence à se propager dans un nouvel élément. Ce phénomène n'apparaissait pas dans le modèle d'identification présenté dans IV-4.3. Dans ce cas là, le taux de restitution d'énergie était calculé avec des données globales (force et déplacement à l'extrémité de la poutre et la longueur totale de fissure) et permettait de gérer la réponse globale de la structure et de contrôler la propagation de la fissure de façon à ce qu'il reste au niveau du taux de restitution d'énergie critique.

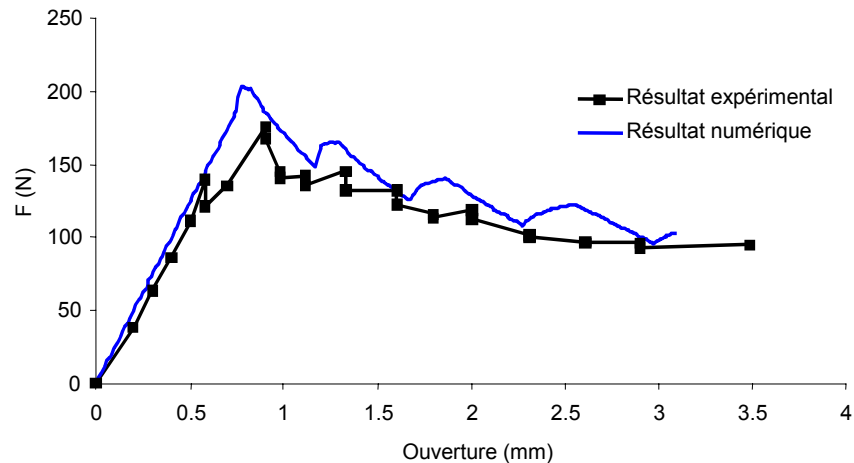


Figure V - 2 : Simulation de la poutre DCB utilisant le critère de délaminage local

Dans ce modèle, des sauts de forces sont observés sur la courbe pendant chaque transformation de l'élément de l'état PEC à l'état bi-plaque. La valeur de la force s'éloigne de la valeur expérimentale au début de la transformation pour ensuite se rapprocher à nouveau de la courbe de l'essai à la fin du passage à l'état bi-plaque. Ce phénomène est dû à un excès de raideur, à chaque début de propagation de la fissure dans un élément, induit par le transfert de la rigidité de membrane de l'état PEC à l'état bi-plaque.

En effet, dans le modèle DCB, considérons un élément adjacent au front de fissure. En gardant les propriétés transverses (E_{33} , G_{13} , G_{23}) de cet élément PEC constantes et en faisant varier le paramètre de transfert de la rigidité de membrane ($1 - d_{transf}$), on remarque que, pour un déplacement donné au bout de la poutre, la force résultante augmente (Figure V - 3). Ce qui veut dire que l'émergence des plaques apporte un surplus de rigidité de flexion dû à leur formulation éléments finis. Sur la figure ci-dessous, F désigne la force résultante au bout de la poutre où le déplacement est imposé, F_0 désigne la force obtenue avant qu'il y ait transfert, pour $(1 - d_{transf})$ égal à zéro.

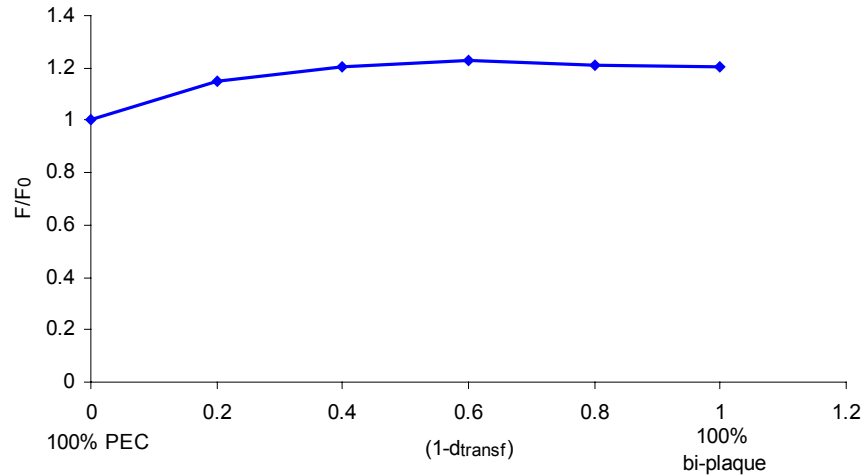


Figure V - 3 : Evolution de la force résultante F avec l'apparition de l'état bi-plaque

On remarque que la raideur augmente de 20% quand les propriétés dans le plan (E_{11} , E_{22} , G_{12}) de l'élément sont fournies par l'état bi-plaque. Les éléments plaques, de par leur formulation bilinéaire en éléments finis (c. f. III-4.) manifestent une rigidité en flexion supérieure à l'élément PEC qui lui, possède un champ de déplacements quadratique et peut se déformer suivant l'épaisseur.

V-2.1.2. Rectification de la loi d'endommagement

Le transfert de rigidité de l'état PEC à l'état plaque augmente légèrement la raideur résultante. Cet excès de raideur peut être compensé par une dégradation plus rapide des propriétés transverses de l'élément PEC.

Considérons de nouveau un élément adjacent au front de fissure dans le modèle DCB. Pour différentes valeurs du paramètre d'endommagement des rigidités transverses d , on fait varier le paramètre de transfert des propriétés de membrane ($1 - d_{transf}$). En imposant un déplacement constant en mode I au bout de la poutre, nous retraçons sur la figure suivante l'évolution de la force de réaction.

On remarque que pour un taux de transfert donné, la raideur de la poutre décroît avec l'endommagement des propriétés transverse de l'élément contenant le front de fissure (Figure V - 4). Par contre, pour un endommagement donné, le transfert des rigidités de membranes s'effectue avec une variation de la raideur en flexion de la poutre.

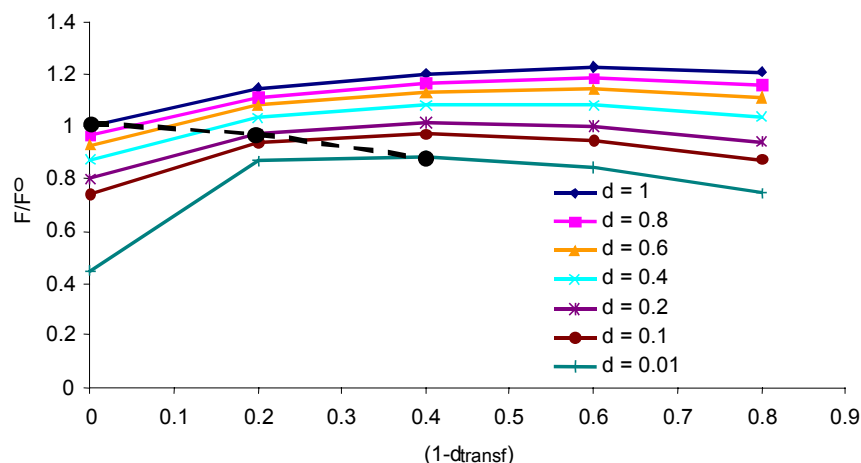


Figure V - 4 : Variation de la force résultante en fonction des paramètres d et $(1-d_{transf})$

Sur ces courbes nous définissons un ensemble de points (marqués en noir sur le graphe ci-dessus) qui permet d'obtenir une force résultante qui diminue avec le transfert de rigidité de l'état PEC à l'état plaque. Ceci nous amène à réécrire d en fonction de d_{transf} . On remarque alors qu'il suffit d'augmenter à 4 le degré de la loi de dégradation (Eq. IV – 20) afin d'éliminer le surplus de rigidité de l'élément au début de la phase de transition. La loi de dégradation sera alors :

$$d = \left[\frac{1}{1 - 0.5d_{transf}} - 1 \right]^4 \quad (\text{Eq. V - 5})$$

La simulation de la poutre DCB est alors relancée avec, cette fois-ci, la nouvelle loi de dégradation des propriétés transverses.

V-2.1.3. Résultats de la simulation

Dans un premier temps, le critère de délaminage sera défini par la seule équation (Eq. V – 3) dès le début de la propagation de fissure dans l'élément considérant ainsi une évolution linéaire du critère durant toute la période de fissuration de l'élément.

La Figure V - 5 montre la force résultante sur l'extrémité de la poutre en fonction de la distance d'ouverture. La simulation montre une bonne corrélation avec l'essai expérimental. La courbe obtenue en utilisant le critère défini par l'équation V – 3 uniquement, présente des pics d'effort à chaque fois que la fissure commence à se propager dans un nouvel élément. Le résultat est néanmoins acceptable compte tenu de la précision souhaitée et de la simplicité de l'écriture du critère de délaminage.

Signalons tout de même que ces pics d'effort sont atténués quand les deux équations V – 2 et V – 3 sont considérées pour définir le critère de délaminage.

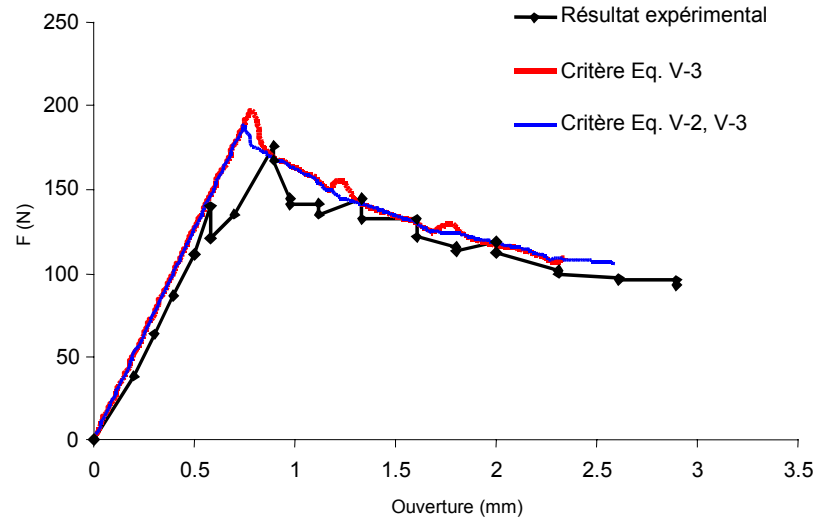


Figure V - 5 : Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

V-2.2. Sensibilité au maillage

L'étude de la sensibilité au maillage permet de mieux comprendre l'effet des lois d'endommagement et de transfert sur le comportement de l'élément et leurs conséquences sur la réponse globale de la structure. Elle permet aussi de vérifier la non sensibilité du critère de délaminage par rapport à la taille des éléments.

L'étude est réalisée en créant deux modèles de poutre DCB avec deux densités de maillage différentes du modèle précédent où les éléments faisaient $5mm$ de longueur. Dans un premier modèle, l'élément aura une longueur de $2.5mm$. La longueur de l'élément dans le deuxième modèle sera de $7.5mm$ (Figure V - 6).

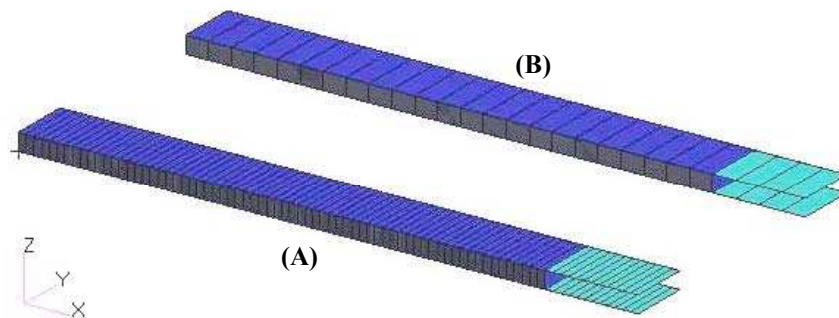


Figure V - 6 : Modèles de poutre DCB à différents maillages : (A) Eléments de longueur $2.5mm$ – (B) Eléments de longueur $7.5mm$

Les lois d'endommagement et de transfert utilisées dans ces modèles sont les lois définies pour le modèle précédent. Elles étaient déterminées avec un élément PEC de longueur $5mm$. Le critère de délaminage est également le même que le modèle précédent. Les résultats des simulations sont comparés au résultat du modèle précédent, considéré comme modèle de référence, dans le graphe suivant.

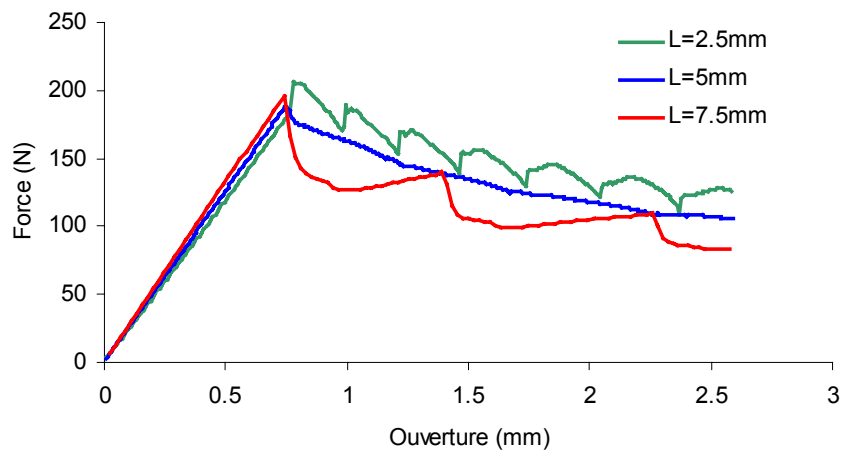


Figure V - 7 : Comparaison des résultats obtenus par différents maillages

On observe sur le graphe que la courbe du modèle $2.5mm$ présente des rebonds qui s'appuient sur la courbe $5mm$. La fréquence de ces sauts correspond à la taille des éléments. La courbe du modèle $7.5mm$ suit la courbe de référence par le « bas ». La fréquence des vagues formées par cette courbe correspond aussi à la taille des éléments.

Les sauts observés sur la courbe $2.5mm$ sont associés à une montée de raideur pendant la propagation du délaminage dans les éléments. Les chutes de la courbe $7.5mm$ sont liées à un manque de rigidité pendant la fissuration de l'élément.

Cet excès de raideur d'un côté et le manque de raideur de l'autre côté sont étroitement liés aux fonctions d'endommagement et de transfert qui pilotent la réponse de l'élément entre le moment où la fissure atteint l'élément jusqu'au moment où elle le quitte. Ces comportements peuvent être rectifiés en ajustant les degrés des lois d'endommagement et de transfert.

Le critère de délaminage, quant à lui, n'est pas sensible à la taille du maillage. Il permet aux différents modèles d'avoir la même tendance que la courbe de référence et celle du résultat expérimental. C'est au moment où la fissure rentre dans l'élément que la réponse de la structure commence à dévier de la courbe de référence.

La loi de dégradation utilisée pour obtenir les courbes présentées sur la Figure V - 7 est de degré 4 (c. f. Eq. V - 5). En considérant le modèle $7.5mm$, le comportement de l'élément pendant la fissuration peut être amélioré en réduisant le degré de la fonction d'endommagement à 2. Ceci revient à ralentir la dégradation des propriétés transverses par rapport à l'avancement de la fissure et, par conséquent, à rigidifier l'élément. Les chutes dans la courbe force – déplacement se trouvent alors atténuées comme on peut le constater sur la figure ci-après.

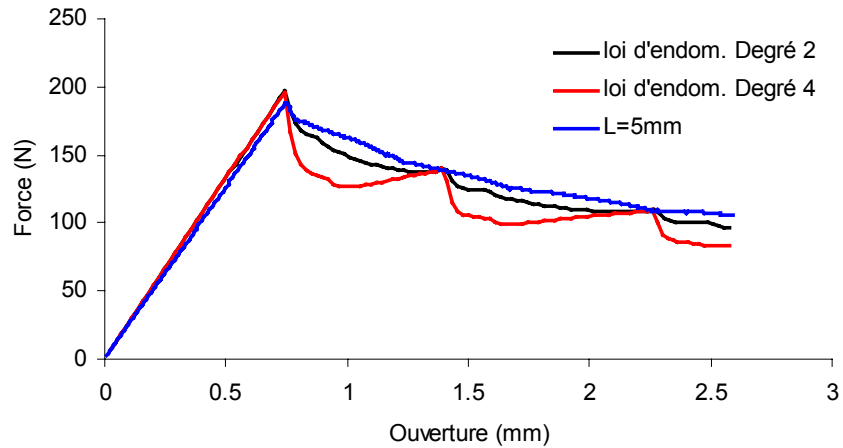


Figure V - 8 : Influence de la loi d'endommagement sur la réponse de l'élément pendant la fissuration

V-2.3. Modèle avec deux couches d'éléments PEC

Le modèle DCB étudié jusqu'à présent consiste en une fissure qui se propage quasiment au milieu de l'épaisseur de l'élément PEC. En pratique, l'élément sera confronté à d'autres cas de figure, selon la structure à modéliser, où la fissure ne se propage pas forcément en son centre.

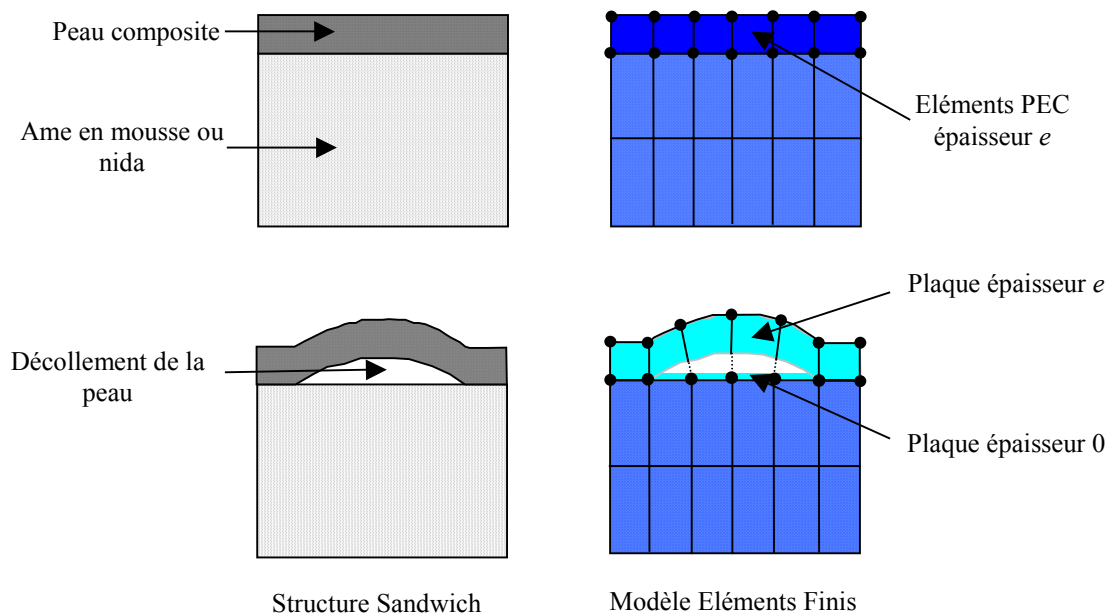


Figure V - 9 : Modélisation du décollement dans une structure sandwich avec l'élément PEC

Le décollement de la peau composite de l'âme dans les structures sandwichs en est un cas typique et extrême où la fissure se propage à la limite de l'élément PEC. Celui-ci doit se transformer en une plaque ayant l'épaisseur initiale de l'élément PEC et une autre plaque d'épaisseur nulle (Figure V - 9) . Dans le bord d'attaque d'une pale d'hélicoptère, le décollement de la peau composite du longeron unidirectionnel pourrait également être modélisé de cette même façon.

V-2.3.1. Modèle DCB à 2 couches d'éléments dans l'épaisseur

Afin de tester la capacité de l'élément PEC à simuler un délaminage se produisant au voisinage d'une de ses faces, une autre modélisation de la poutre DCB est testée. Elle consiste à utiliser deux couches d'éléments PEC superposées ayant la même épaisseur de $2,76\text{mm}$ chacune (Figure V - 10). La zone initialement délaminée est modélisée par une couche supérieure de six éléments bi-plaques, les plaques inférieures étant solidaires de la couche du dessous d'éléments PEC.

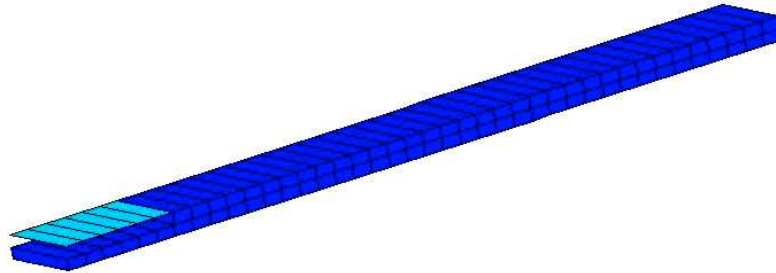


Figure V - 10 : Modèle de la poutre DCB avec 2 couches d'éléments dans l'épaisseur

Le délaminage se traduit alors par une transformation des éléments PEC de la couche supérieure en deux plaques. La première plaque sera d'une épaisseur égale à $2,5\text{mm}$ correspondant à l'épaisseur des plis de tissus de carbone et la seconde aura une épaisseur de $0,26\text{mm}$ qui représente la moitié de l'épaisseur des plis unidirectionnels et restera collée à l'élément PEC adjacent (Figure V - 11).

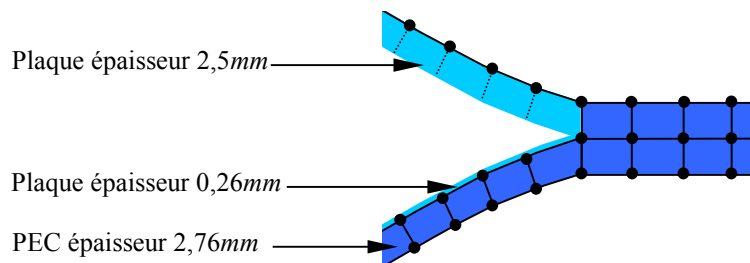


Figure V - 11 : Modélisation du délaminage

Les caractéristiques du modèle et des éléments PEC et bi-plaque utilisés sont présentées dans les tableaux ci-dessous.

	Elément		
	Etat volume	Etat bi-plaque	
		PEC	Plaque supérieure
Longueur L (mm)	5	5	5
Largeur l (mm)	20	20	20
Epaisseur e (mm)	2.76	2.5	0.26
Nombre	74	6	6
Nombre de couches d'intégration	4	3	3

Tableau V - 1 : Caractéristiques du modèle PEC de la poutre DCB

PEC supérieurs		
N° couche	Epaisseur (mm)	Matériaux
1	0.833	G803/914 à 0°
2	0.833	G803/914 à 0°
3	0.833	G803/914 à 0°
4	0.26	T300/914 à 90°

Tableau V - 2 : Définition des couches d'intégration numérique pour les éléments PEC de la couche supérieure

PEC inférieurs		
N° couche	Epaisseur (mm)	Matériaux
1	0.26	T300/914 à 90°
2	0.833	G803/914 à 0°
3	0.833	G803/914 à 0°
4	0.833	G803/914 à 0°

Tableau V - 3 : Définition des couches d'intégration numérique pour les éléments PEC de la couche inférieure

Plaque supérieure		
N° couche	Epaisseur (mm)	Matériaux
1	0.833	G803/914 à 0°
2	0.833	G803/914 à 0°
3	0.833	G803/914 à 0°

Tableau V - 4 : Définition des couches d'intégration numérique pour la plaque supérieure

Plaque inférieure		
N° couche	Epaisseur (mm)	Matériaux
1	0.0867	T300/914 à 90°
2	0.0867	T300/914 à 90°
3	0.0867	T300/914 à 90°

Tableau V - 5 : Définition des couches d'intégration numérique pour la plaque inférieure

V-2.3.2. Résultat de la simulation

Sur le graphe suivant sont comparées les courbes forces – déplacements obtenues par l'essai expérimental, par le modèle numérique à une couche d'éléments (c. f. V-2.1.) et par le modèle numérique à 2 couches d'éléments PEC. Le critère de délaminage utilisé est défini par les deux équations V – 2 et V – 3.

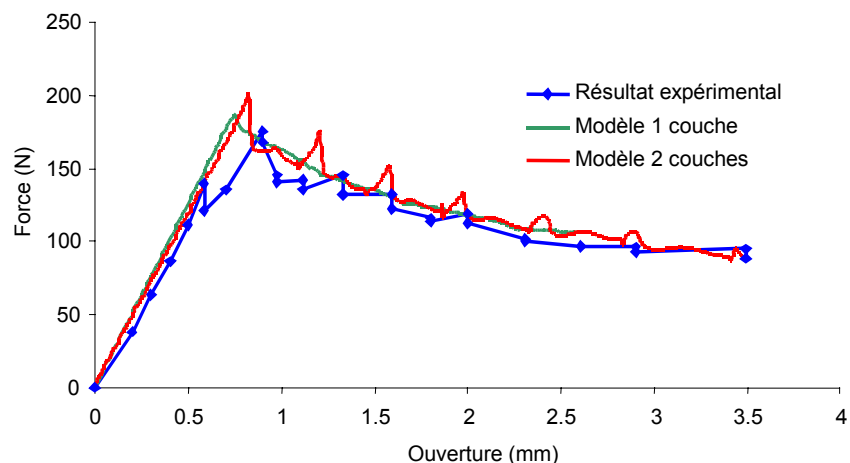


Figure V - 12 : Comparaison des résultats numérique et expérimental

La courbe du modèle à 2 couches d'éléments suit la même tendance que les autres courbes. Toutefois, on remarque des pics d'efforts à chaque fois que la fissure atteint un nouvel élément. Ce comportement peut être amélioré en déterminant des lois d'endommagement et de transfert mieux adaptées.

En effet, les lois d'endommagement et de transfert utilisées ont été déterminées pour une fissure se produisant au milieu de l'élément PEC. De ce fait, elles ne sont pas en mesure de reproduire la physique exacte de la propagation de fissure au voisinage de l'une des deux faces de l'élément. Néanmoins, la précision du modèle est acceptable.

V-2.4. Conclusion

L'exemple de poutre DCB a permis d'étudier le comportement du nouvel élément affecté par les lois d'endommagement et de transfert d'une part, et par un critère de propagation de délaminage d'autre part.

Le modèle à 2 couches d'éléments a montré que les lois et le critère restent applicables quelque soit l'endroit où se produit le délaminage dans l'épaisseur de l'élément et sans recours à une nouvelle identification de paramètres.

V-3. Exemple de séparation de plaque composite

V-3.1. Introduction

L'essai de poutre DCB a permis de montrer l'efficacité de la méthode de modélisation de délaminage proposée dans cette étude. Comme décrit dans le chapitre précédent, la propagation de la fissure dans l'élément est gérée, d'une part, par une loi d'endommagement des propriétés transverses, et d'autre part, par une loi de transfert de rigidité de membrane de l'état volume à l'état bi-plaque. Ce genre de traitement de la progression de la fissure est valable quelque soit la direction de propagation du délaminage. Par conséquent, le maillage n'est pas obligé d'être orthogonal à la direction de propagation de la fissure.

Néanmoins, le critère de délaminage a été déterminé pour une propagation unidirectionnelle et pour des éléments parallèles au front de fissure. Dans le cas présenté ci-après, la direction de propagation de fissure fait un angle de 45° avec le maillage. Ce cas test va permettre de valider le critère de propagation à 45° défini au chapitre précédent.

Le but à travers l'exemple présenté dans ce paragraphe est de mettre en évidence la capacité de la méthode proposée à simuler la propagation du délaminage dans le plan.

V-3.2. Essai expérimental

V-3.2.1. Définition du modèle d'essai

L'essai consiste à charger en mode I une plaque composite ayant un délaminage initial dans un de ses coins (Figure V - 13). La plaque est fabriquée avec du tissu en carbone pré-imprégné (G803/914). La séquence d'empilement est $[(\pm 45^\circ) / (0^\circ/90^\circ) / (\pm 45^\circ) / (0^\circ/90^\circ)]_s$.

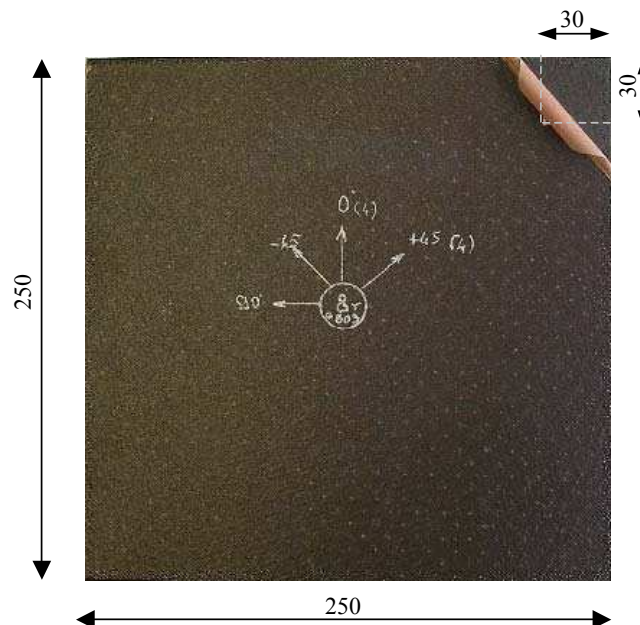


Figure V - 13 : Plaque composite pour le test de séparation

La plaque a une épaisseur totale de 2.5mm et possède une zone délaminée de $30\times 30\text{mm}^2$ sur un coin à mi-épaisseur. L'effort est appliqué sur des chapes collées dans cette zone. Le test est réalisé sur une machine de traction permettant l'acquisition du déplacement vertical et de l'effort appliqué sur les mors.



Figure V - 14 : Essai de séparation de la plaque composite

V-3.2.2. Résultats de l'essai

La courbe force – déplacement obtenue est illustrée dans le graphe ci-dessous. L'essai a été arrêté avant que le front de fissure ne franchisse toute la plaque du fait de l'arrachement d'une chape.

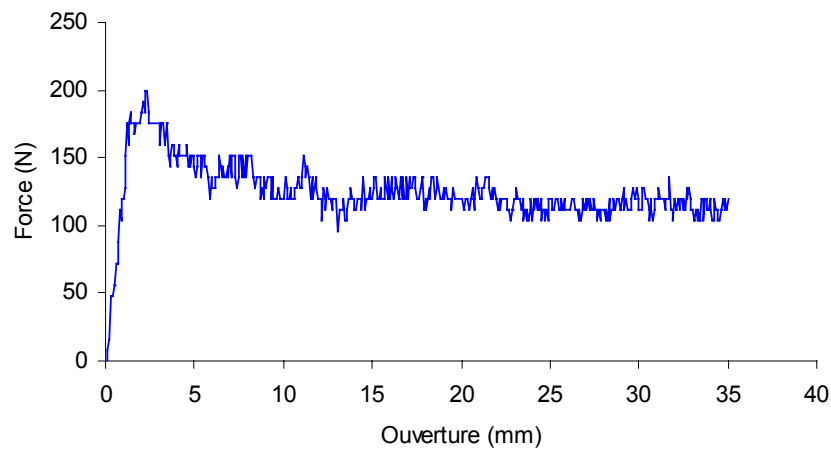


Figure V - 15 : Force en fonction de la distance d'ouverture de la plaque

Un essai ultrason est ensuite réalisé afin de déterminer la surface délaminée. L'essai montre une forme triangulaire du délaminage. Le front de fissure est une ligne droite faisant un angle de 45° avec les côtés de la plaque (Figure V - 16).

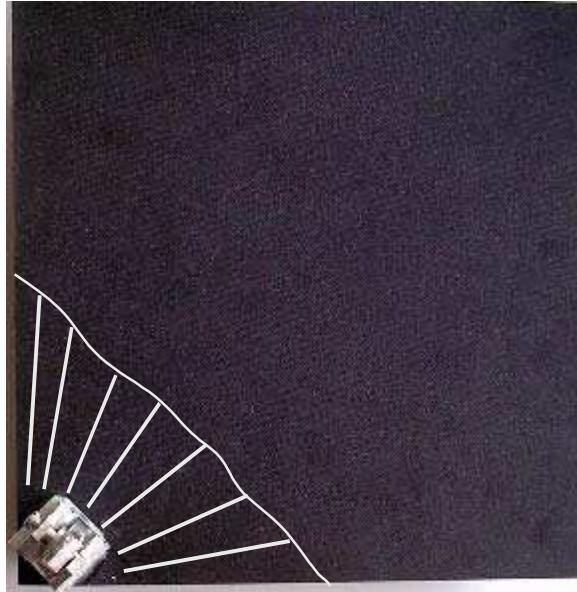


Figure V - 16 : Surface délaminée à la fin de l'essai

V-3.3. Modélisation numérique

V-3.3.1. Présentation du modèle numérique

Afin de simplifier le modèle et de réduire le temps de calcul, seule la partie qui a subi le délaminage a été modélisée. Le modèle fait alors $130 \times 130 \text{ mm}^2$ et comporte 716 éléments au total (

Figure V - 17). Les chapes sont modélisées par des éléments en croix suivant les diagonales des chapes (Figure V - 18). Une vitesse de 0.2 m/s est imposée aux milieux des chapes.

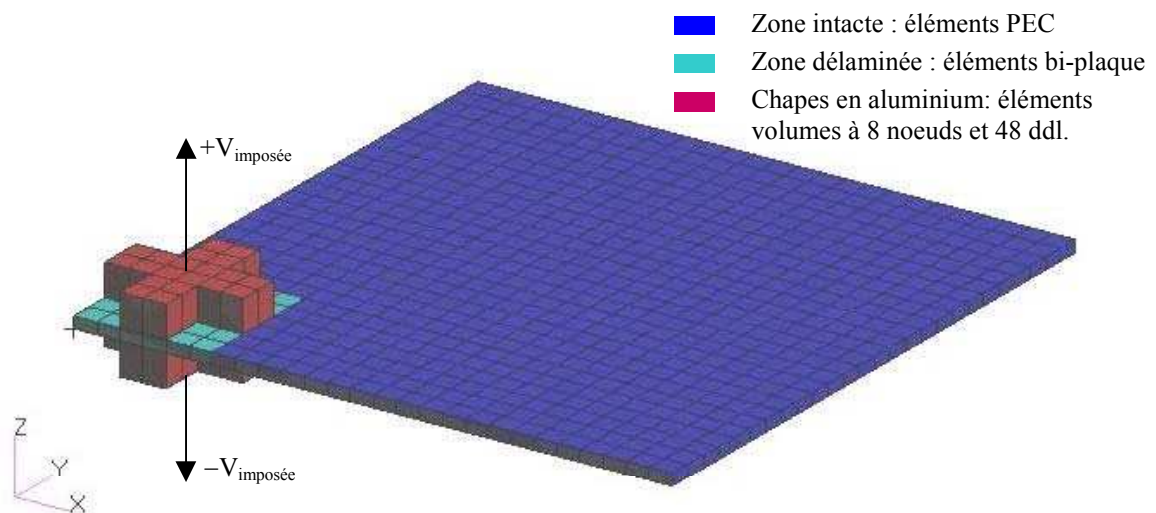


Figure V - 17 : Modèle de la plaque composite

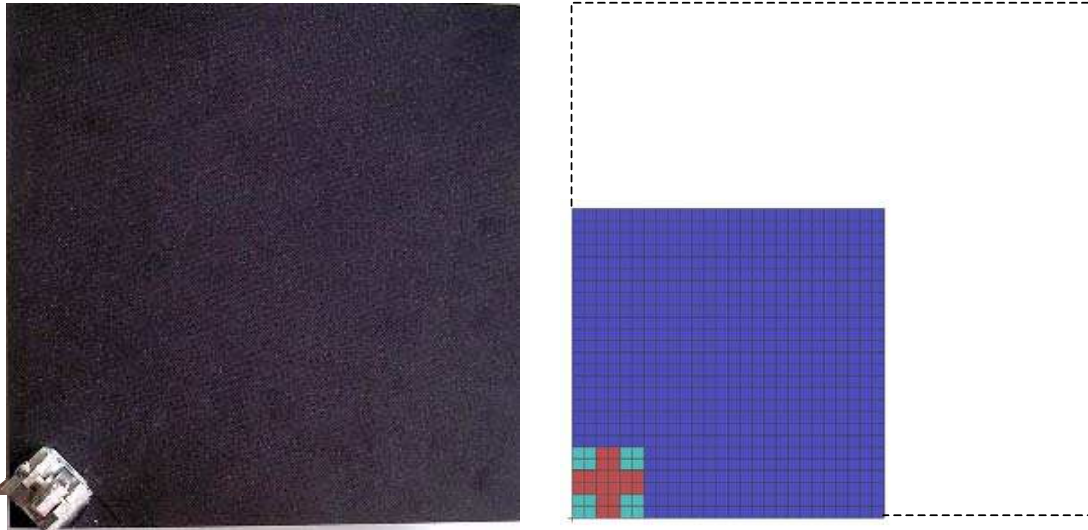


Figure V - 18 : Modélisation des chapes collées sur la plaque composite (vue de dessus)

Les propriétés du matériau G803/914 ont été déjà illustrées dans le tableau IV – 2. Les caractéristiques du modèle sont illustrées dans les tableaux suivants :

	Elément			
	PEC	Plaque supérieure	Plaque inférieure	Elément 48 ddl
Longueur L (mm)	5	5	5	5
Largeur l (mm)	5	5	5	5
Epaisseur e (mm)	2.5	1.25	1.25	7
Nombre	640	36	36	40
Nombre de couches d'intégration	7	4	4	-

Tableau V - 6 : Caractéristiques du modèle de plaque composite

N° couche	PEC	
	Epaisseur (mm)	Matériaux
1	0.3125	G803/914 à $\pm 45^\circ$
2	0.3125	G803/914 à $0/90^\circ$
3	0.3125	G803/914 à $\pm 45^\circ$
4	0.625	G803/914 à $0/90^\circ$
5	0.3125	G803/914 à $\pm 45^\circ$
6	0.3125	G803/914 à $0/90^\circ$
7	0.3125	G803/914 à $\pm 45^\circ$

Tableau V - 7 : Définition des couches d'intégration numérique pour l'élément PEC

Plaque supérieure		
N° couche	Epaisseur (mm)	Matériaux
1	0.3125	G803/914 à $\pm 45^\circ$
2	0.3125	G803/914 à 0/90°
3	0.3125	G803/914 à $\pm 45^\circ$
4	0.3125	G803/914 à 0/90°

Tableau V - 8 : Définition des couches d'intégration numérique pour la plaque supérieure

Plaque inférieure		
N° couche	Epaisseur (mm)	Matériaux
1	0.3125	G803/914 à 0/90°
2	0.3125	G803/914 à $\pm 45^\circ$
3	0.3125	G803/914 à 0/90°
4	0.3125	G803/914 à $\pm 45^\circ$

Tableau V - 9 : Définition des couches d'intégration numérique pour la plaque inférieure

V-3.3.3. Utilisation des critères de délaminage

Dans le cas général, la direction de propagation de fissure par rapport au maillage est inconnue a priori. Dans le cas de séparation de plaque composite, la propagation de la fissure est supposée être alignée avec les éléments adjacents à la zone initialement délaminée au début de l'essai pour s'effectuer ensuite avec un angle de 45° avec le reste du maillage.

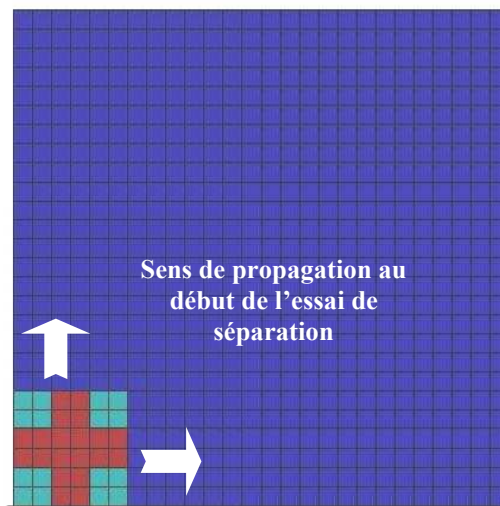


Figure V - 19 : Propagation du délaminage aligné avec le maillage au début de l'essai

Le critère de délaminage doit être alors calculé selon la direction de propagation de fissure. Dans le cas présent, nous nous contenterons des critères de propagation à 0° et 45° établis au chapitre précédent.

Le critère de propagation à 0° s'écrit :

$$3Fw + M\theta - 9a \geq 54 \quad (\text{Eq. V - 6})$$

Le critère à 45° s'exprime par :

$$4Fw + 2M\theta - 9a \geq 24 \quad (\text{Eq. V - 7})$$

Le critère de propagation à 0° est normalement défini par deux équations (Eq. V - 2 et V - 3) selon la longueur de la fissure dans l'élément. Ici, nous considérons une évolution linéaire uniforme du critère durant toute la période de fissuration de l'élément et seule la partie du critère exprimée dans la relation V - 6 est prise en compte.

La valeur de E_{seuil} du critère à 45° est définie en considérant un modèle ayant une zone fissurée de forme triangulaire (Figure V - 20). La plaque est chargée jusqu'à ce que la courbe force - déplacement atteigne la courbe de l'essai expérimental (Figure V - 21). A ce moment là, la valeur de l'énergie $4Fw + 2M\theta$ est relevée sur les nœuds adjacents à la zone délaminée permettant de déterminer la valeur de E_{seuil} .

La valeur de K ($K=9$) est la même pour les deux critères et correspond à la valeur identifiée dans le chapitre précédent.

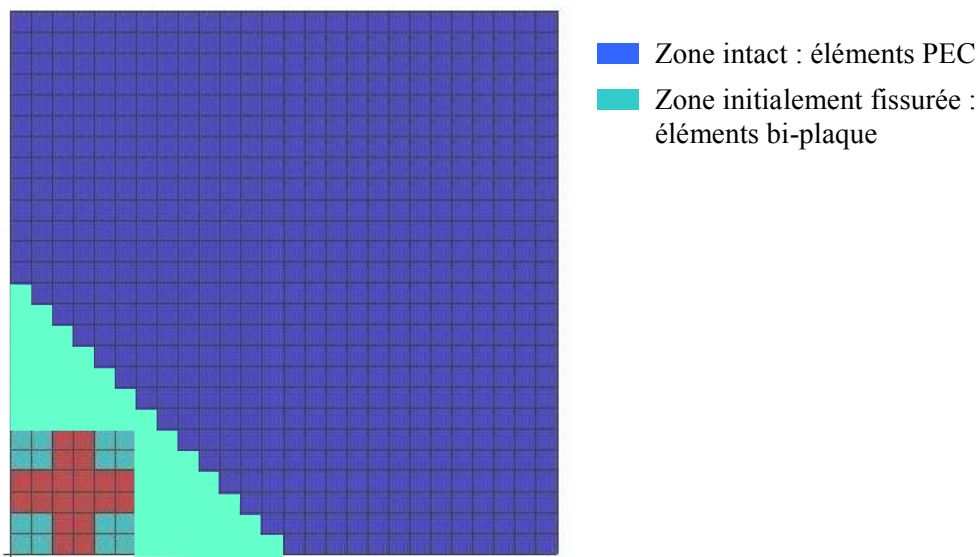


Figure V - 20 : Modèle considéré pour déterminer la valeur de E_{seuil}

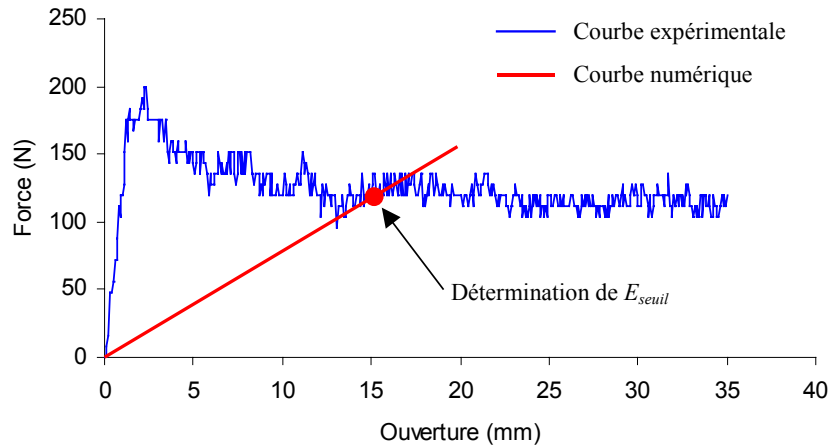


Figure V - 21 : Intersection des courbes force – déplacement

V-3.3.4. Définition de la direction de propagation du délaminage

Afin de déterminer si la fissure se propage à 0° ou bien à 45° par rapport à l'élément, les valeurs de $Fw+M\theta$ sur chaque couple de nœuds suivant l'épaisseur de l'élément (1,2), (3,4), (5,6) et (7,8) sont relevées à chaque cycle.

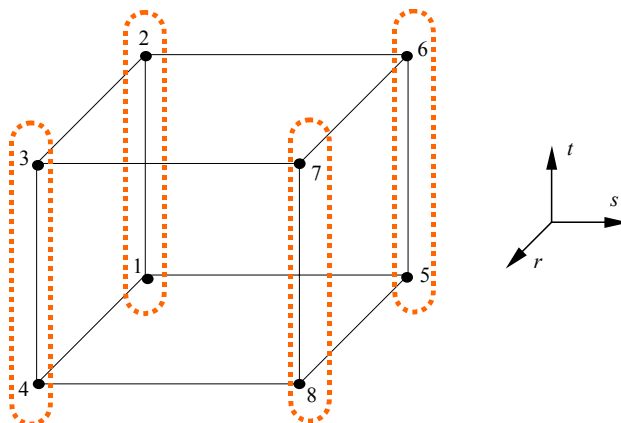


Figure V - 22 : Numérotation des nœuds et désignation des couples de nœuds

Cette valeur dépend évidemment de la position du couple de nœuds par rapport à la position du front de fissure. Deux cas sont alors différenciés :

- Le couple de nœuds est directement en contact avec la fissure. Dans ce cas, il est moins contraint dans le sens de l'épaisseur et peut avoir des déplacements w et des rotations θ relativement élevés.
- Le couple de nœuds est intérieur à la zone saine. Dans ce cas, la quantité $Fw+M\theta$ reste faible.

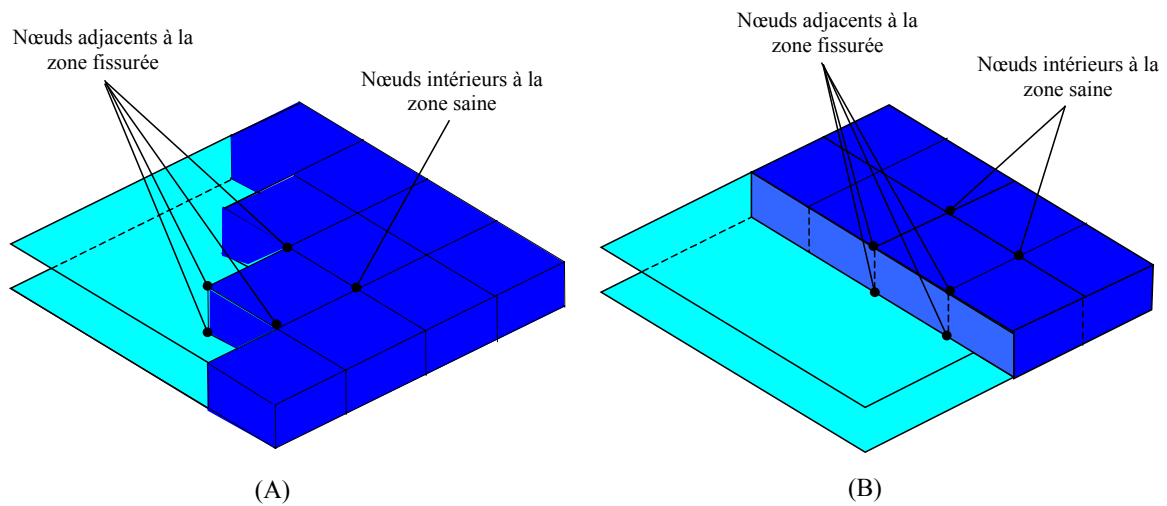


Figure V - 23 : Les nœuds adjacents à la fissure : (A) dans une propagation à 45° - (B) dans une propagation à 0°

De ce fait, il est possible de déterminer le sens de propagation de la fissure dans chaque élément, en comparant les valeurs de $F_{w+M\theta}$ entre chaque couple de nœud. S'il existe 2 couples de nœuds ayant des valeurs égales et supérieures aux 2 autres couples de nœuds, le front de fissure est alors aligné avec l'élément et le critère de l'équation V - 6 est appliqué (Figure V - 23(B)). Si le nombre de couples de nœuds ayant des valeurs maximales de $F_{w+M\theta}$ est égal à 1, la fissure est supposée se propager à 45° par rapport à l'élément (Figure V - 23(A)). Le critère exprimé dans l'équation V - 7 est appliqué dans ce cas.

V-3.3.5. Résultat de la simulation

Le graphe force – déplacement montre une bonne corrélation entre le résultat numérique et le résultat expérimental (Figure V - 24).

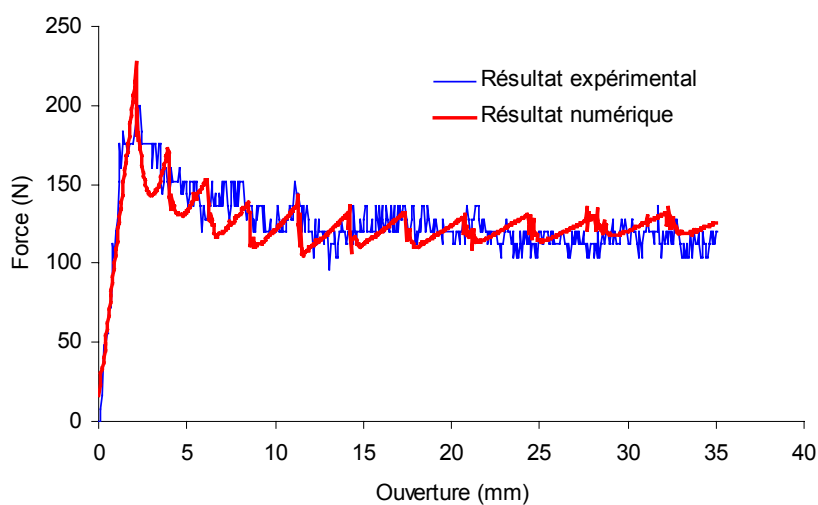


Figure V - 24 : Comparaison entre les résultats numérique et expérimental

Cependant, on relève une erreur de 13% sur le calcul du pic d'effort (valeur numérique 226N, valeur expérimentale 200N). Ceci s'explique par l'analyse de l'avancement du front de fissure au début de la propagation. Initialement, la partie délaminée a une forme carrée. L'accroissement de cette surface qui tend ensuite vers une forme triangulaire se fait progressivement sans pour autant suivre des directions privilégiées de 0° ou 45° par rapport au maillage. Or, compte tenu des hypothèses faites pour cette simulation, le phénomène de progression de la fissure est réduit exclusivement à une propagation à 0° ou 45° par rapport aux éléments. De ce fait, le critère de propagation considéré est atteint pour une valeur légèrement supérieure à la valeur expérimentale du pic d'effort.

On note également que la propagation du délaminage se produit à un effort stabilisé autour de 120N. La chute de la force qui aurait pu avoir lieu due à l'augmentation de la surface délaminée est compensée par l'augmentation du front de délaminage qui demande une plus grande quantité d'énergie pour le faire progresser.

Un suivi qualitatif de la propagation de délaminage dans le modèle numérique permet de noter également la ressemblance avec l'essai expérimental. La fissure commence par se développer autour de la zone de délaminage initiale pour former progressivement une surface triangulaire qui augmente au fur et à mesure.

- Zone intact : éléments PEC
- Zone fissurée : éléments bi-plaque

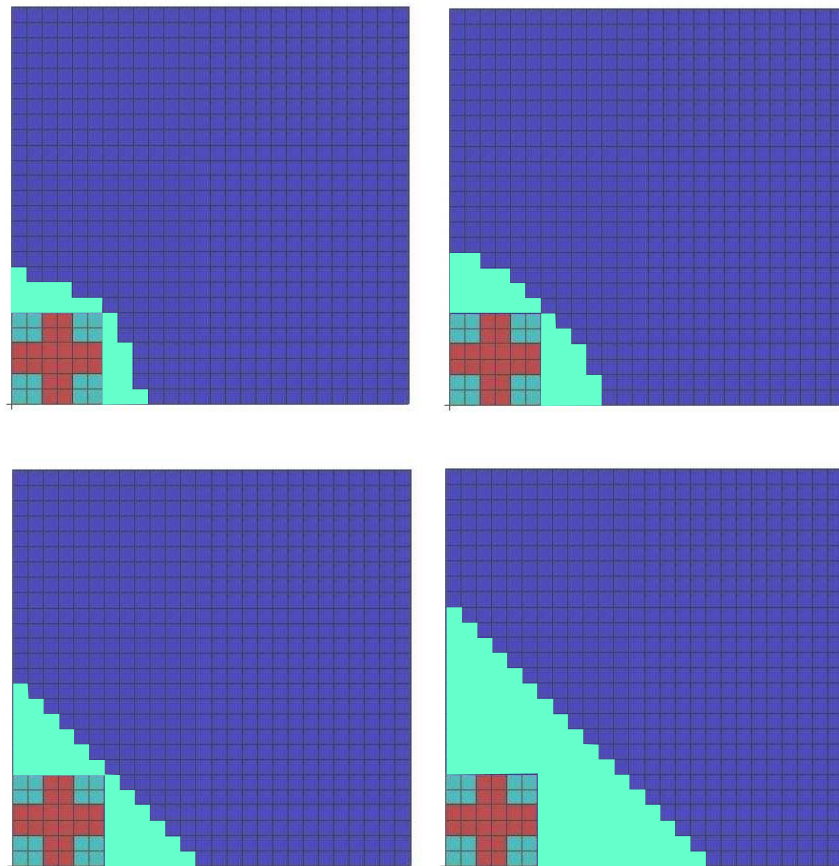


Figure V - 25 : Progression du délaminage dans la plaque composite

La comparaison de la surface finale du délaminage entre l'essai expérimental et la simulation numérique montre la même forme triangulaire. Cependant, la surface obtenue numériquement est inférieure à la surface obtenue expérimentalement. Le côté du triangle de délaminage mesure réellement 113mm (soit une surface de 6385mm^2) alors que la simulation donne une longueur de 105mm (soit une surface de 5513mm^2). L'erreur atteinte sur la surface délaminée est alors de 14%.

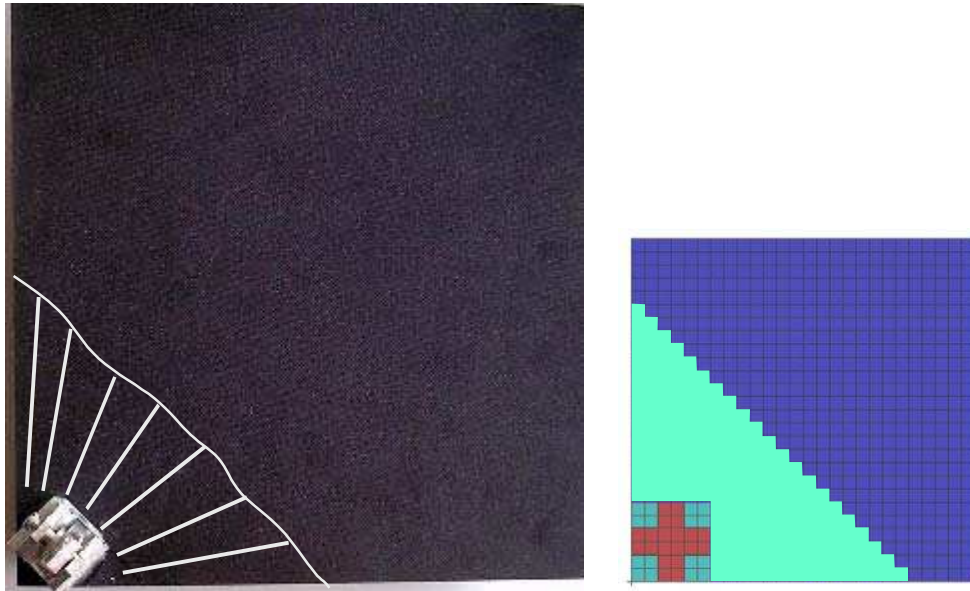


Figure V - 26 : Forme du délaminage à la fin de l'essai

V-3.4. Conclusion

L'essai de séparation de la plaque a permis d'étudier la modélisation de la propagation de la fissure dans le plan. Une technique a été proposée afin de déterminer l'angle (0° ou 45°) avec lequel le front de fissure atteint l'élément. Cette technique peut être généralisée afin d'évaluer n'importe quel angle d'avancement de la fissure par rapport aux éléments. Les coefficients du critère de délaminage pourraient être par suite réécrits selon l'angle de propagation. Cette méthode sera explicitée dans la partie perspective de ce rapport.

Le modèle a permis également de vérifier la validité de la méthode d'endommagement et de transfert des rigidités quelque soit la direction de propagation du délaminage.

V-4. Implémentation dans RADIOSS

V-4.1. Introduction

En parallèle au développement et la validation de l'élément PEC, un travail d'implémentation de l'élément dans le logiciel RADIOSS a été réalisé.

RADIOSS permet aux utilisateurs de définir leur propre code dans certaines catégories comme, par exemple, la loi matériau pour les éléments plaques et solides, la propriété d'éléments ressorts ou aussi la propriété d'éléments à 8 nœuds et 6 ddl. C'est à l'aide de cette dernière possibilité que nous allons pouvoir implémenter l'élément PEC dans RADIOSS.

V-4.2. Architecture de RADIOSS

L'architecture de RADIOSS se résume de la façon suivante :

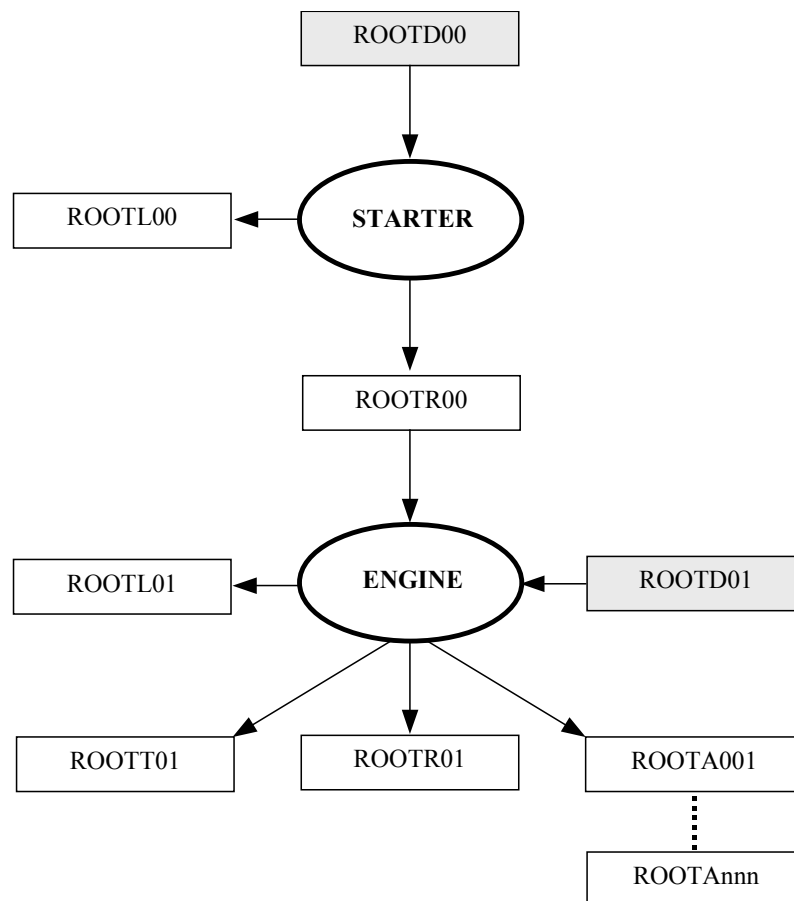


Figure V - 27 : Architecture simplifiée du logiciel RADIOSS

Les fichiers D00 et D01 sont les fichiers à fournir en entrée. Le premier contient les données du modèle : géométrie, maillage, propriétés matériaux, conditions limites etc.... Dans le fichier D01, l'utilisateur définit les résultats qu'il souhaite récupérer en sortie pour le post-traitement ainsi que la durée du problème et la fréquence de sauvegarde des données.

RADIOSS dispose de post-processeurs permettant de visualiser l'animation de la simulation numérique à l'aide des fichiers Annn et de tracer différentes courbes à l'aide du fichier T01.

Le STARTER est le module qui permet la compilation du fichier des données D00. Il initialise les variables, évalue le pas de temps de calcul. Il génère un fichier binaire R00 nécessaire au lancement du calcul et un autre fichier L00 en format ASCII qui contient les calculs réalisés par le STARTER et les éventuels messages d'erreur et d'avertissement. Le module ENGINE effectue le calcul proprement dit.

V-4.3. Implémentation de l'élément PEC dans RADIOSS

Pour implémenter l'élément PEC dans RADIOSS, nous devons intervenir au niveau du fichier D00 à l'aide de mots clés indiquant les propriétés que nous souhaitons définir par notre propre code. Pour cela, nous devons fournir nos propres routines de calcul dont certaines sont associées au STARTER et d'autres à l'ENGINE. Les routines liées au STARTER servent à l'initialisation des données, et celles liées à l'ENGINE servent à effectuer le calcul que nous souhaitons selon nos propres formulations.

En résumé, les interventions sont illustrées dans le schéma suivant :

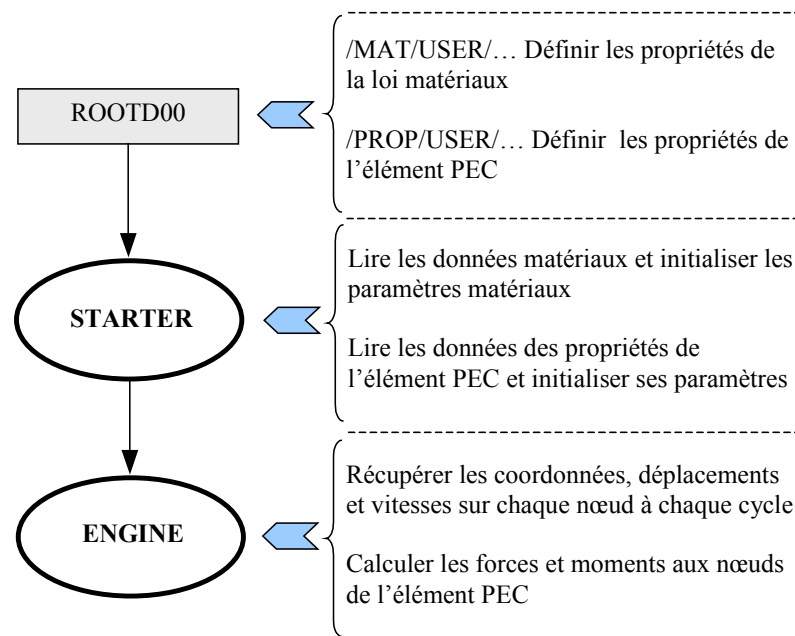


Figure V - 28 : Interventions de l'utilisateur

Les calculs liés à la formulation éléments finis sont réalisés dans les routines associées à l'ENGINE. Autrement dit, les nouvelles positions des repères locaux aux éléments doivent être calculées, les vitesses et déplacements fournis par RADIOSS doivent être transformés dans les repères locaux, il faut vérifier le critère de propagation de délaminage, calculer la nouvelle longueur de fissure, calculer les paramètres d'endommagement et de transfert, mettre à jour la loi constitutive du matériau, calculer les déformations et les contraintes et fournir en sortie les forces et moments aux nœuds.

Par rapport à l'algorithme de calcul de RADIOSS ceci se résume d'une façon simplifiée de la façon suivante :

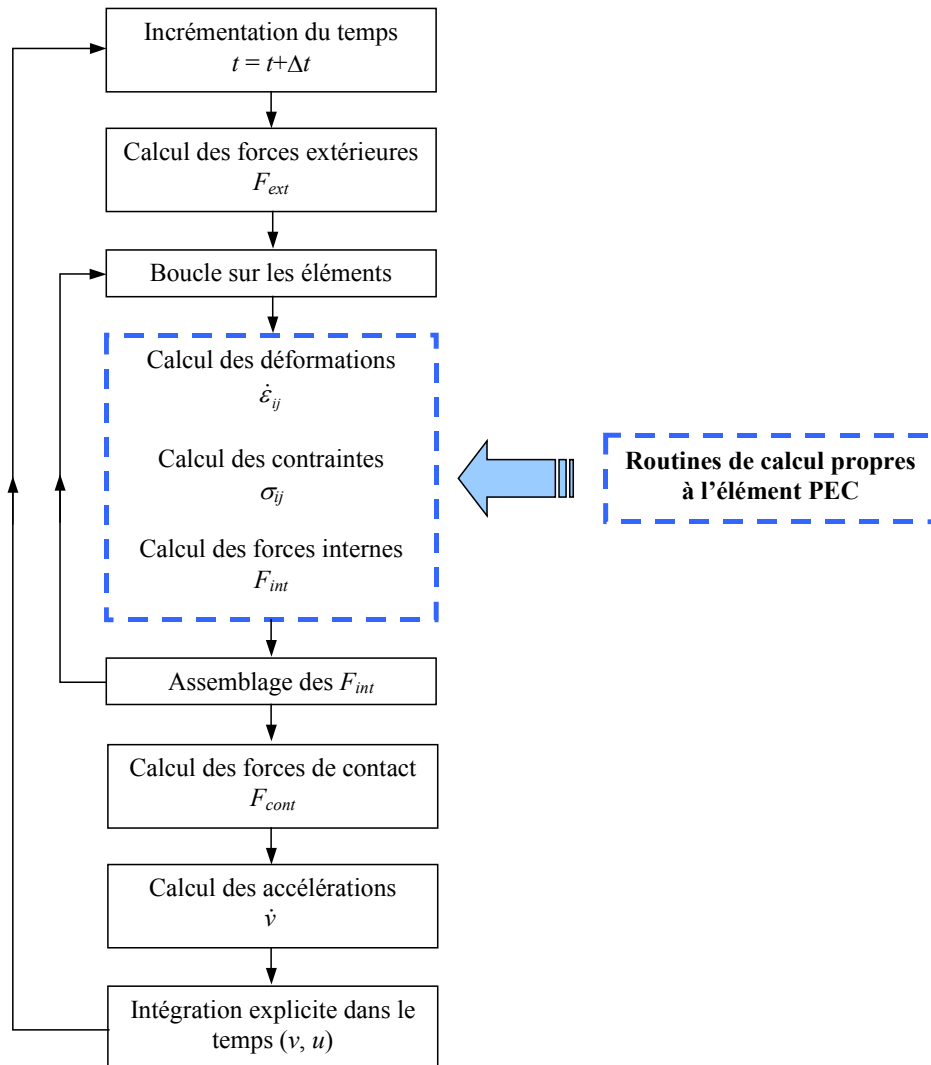


Figure V - 29 : Algorithme simplifié de RADIOSS – Endroit d'intervention des formulations utilisateurs

Pour intégrer les codes utilisateurs, RADIOSS fournit une routine servant d'interface entre le progiciel RADIOSS et les routines utilisateurs. Les variables d'entrée/sortie entre l'algorithme RADIOSS et la routine d'interface sont, d'une part, les coordonnées, les déplacements et les vitesses aux nœuds fournis par le calcul RADIOSS et, d'autre part, les forces et les moments aux nœuds calculés par les routines utilisateurs.

Tous les autres paramètres, intervenant dans le calcul propre à l'élément PEC et dont les valeurs au pas de temps courant seront utilisées au pas suivant, doivent être affectés à une seule variable appelée « UVAR » mise à disposition de l'utilisateur par la routine d'interface. Cette affectation concerne les déformations, les contraintes, la valeur du critère de délaminage, la longueur de la fissure dans l'élément et l'indicateur de l'état de l'élément (état PEC, hybride ou bi-plaque).

La communication entre la routine d'interface appelée « SUSER29 » et nos propres routines est illustrée dans le schéma suivant :

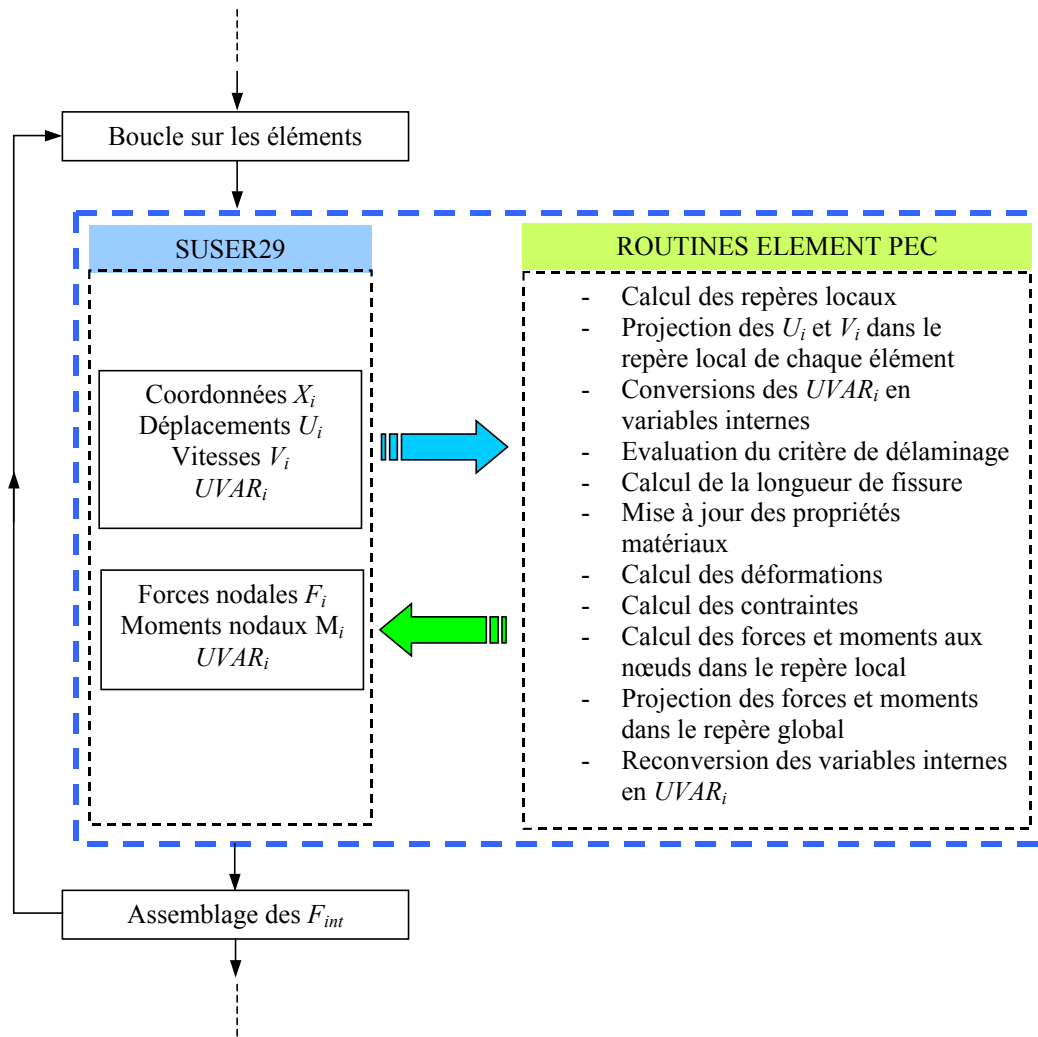


Figure V - 30 : Communication entre la routine d'interface SUSER29, l'algorithme RADIOSS et les routines PEC

Le programme MEF_EX développé a donc été déstructuré pour en récupérer différents sous-programmes qui sont utilisés après adaptation pour la définition de l'élément PEC dans le code RADIOSS.

V-4.4. Simulation du test DCB

Afin de vérifier l'implémentation de l'élément PEC dans RADIOSS, la simulation de la poutre DCB est réalisée à l'aide du code utilisateur dans RADIOSS. Le post-processeur MODANIM nous a permis de visualiser l'animation de la propagation de la fissure dans la poutre.

Notons que le support graphique des éléments bricks classiques est utilisé pour représenter les éléments PEC tant à l'état volume qu'à l'état bi-plaque. La couleur bleu cyan indique que la fissure a totalement traversé l'élément qui est donc à l'état bi-plaque. La couleur jaune indique que l'élément volume n'est pas encore atteint par le délaminage. La zone initialement fissurée est modélisée par des éléments bi-plaques qui sont alors en bleu cyan dès le début de la simulation.

La figure suivante donne un aperçu du déroulement de la simulation de la poutre DCB. Le changement de la couleur de l'élément indique l'évolution de la longueur de la fissure au sein de l'élément.

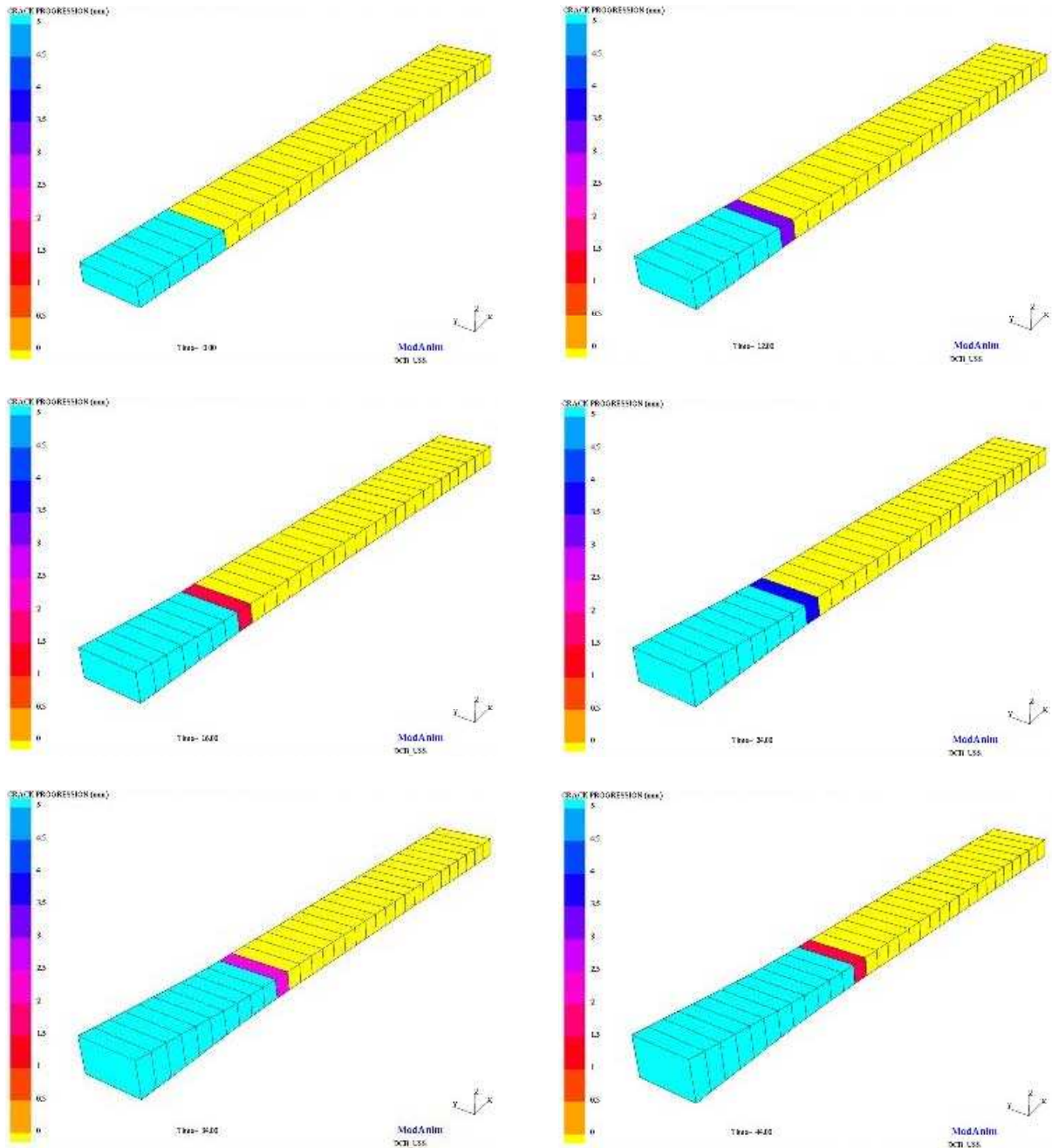


Figure V - 31 : Simulation de l'essai DCB à l'aide du code utilisateur : visualisation sur MODANIM

V-4.5. Conclusion

L'implémentation de l'élément PEC dans le code de calcul RADIOSS a été réalisée. Cependant, la gestion des entrées et des sorties n'est pas encore optimisée : les routines d'interface mise à disposition par RADIOSS ne fournissent pas un accès direct à certaines

données. Un contournement est alors nécessaire à l'aide de variables proposées par RADIOSS et réservées à un usage libre de l'utilisateur.

La modélisation de structures composites complexes à l'échelle industrielle sera bientôt possible à l'aide des éléments PEC implémentés à travers le code utilisateur dans RADIOSS.

V-5. Conclusions

Deux exemples d'application ont été présentés dans ce chapitre. Le modèle de poutre DCB a permis d'une part de valider le critère de délaminage développé au chapitre précédent et, d'autre part, de vérifier la pertinence de la méthode de modélisation du délaminage proposée dans un cas où la fissure ne se produit pas au milieu de l'épaisseur de l'élément.

L'exemple de séparation de la plaque composite a permis de mettre au point le critère de propagation du délaminage à 45° dans l'élément et de vérifier la capacité de modéliser la propagation de la fissure dans le plan.

L'utilisation de l'élément PEC a permis de simplifier la modélisation de ces structures composites. Le modèle DCB ainsi que le modèle de séparation de la plaque contenaient un faible nombre d'éléments par rapport aux modélisations classiques sans pour autant compromettre la qualité des résultats.

L'implémentation de l'élément PEC dans le code RADIOSS a été réalisée et validée à travers la simulation de l'essai de poutre DCB. Ceci va permettre dans l'avenir de modéliser des structures de plus grande complexité.

Cependant, quelques mises au point seront nécessaires avant de se lancer dans la modélisation de structures complexes telles que : la généralisation de la méthode d'évaluation de l'angle de propagation de la fissure jusqu'alors limitée aux cas de 0° et 45°, la prise en compte de l'endommagement de la matrice et de la rupture de fibre ainsi que du délaminage en mode II et III, la dégradation des éléments bi-plaque. Ces points seront évoqués dans la partie suivante où l'on trace les perspectives de cette recherche.

CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES

La difficulté à modéliser le délaminage des structures composites à l'heure actuelle nous a amené à rechercher une nouvelle approche de modélisation. Cette nouvelle approche peut être caractérisée à partir de trois idées directrices. La première consiste à utiliser un élément volumique spécifique de type multicouche permettant de réduire le nombre d'éléments dans le modèle et de se passer de l'utilisation de liaison d'interface. La deuxième consiste à transformer l'élément volumique en deux éléments plaques en fonction de la propagation du délaminage au sein de l'élément à l'aide de lois de dégradation et de transfert de rigidité. La troisième phase consiste à utiliser un critère de délaminage basé sur des théories simplifiées des poutres et des plaques. Ceci offre la possibilité de piloter la propagation du délaminage à l'aide de paramètres loin du front de fissure évitant le recours à un maillage fin dans cette zone.

Dans un premier temps, un code éléments finis explicite a été réalisé pour intégrer les différents éléments développés au cours de cette étude. Ce code, réalisé en FORTRAN, offre la possibilité d'intégrer facilement de nouveaux éléments. L'entrée des données se fait en réalisant un fichier « *.bdf* » PATRAN, et les sorties sont lisibles par des logiciels tels que MATLAB ou EXCEL.

Ensuite, un élément volume multicouche à 8 noeuds et 48 ddl a été développé. Il a la particularité de se transformer en deux plaques physiquement indépendantes pour modéliser l'état délaminé de la structure. Sa formulation autorise la liaison avec des éléments plaques et de s'affranchir des phénomènes de verrouillage qui rigidifient le comportement en flexion. Cet élément a passé les tests de validation et montre une bonne précision pour un rapport épaisseur/longueur allant jusqu'à 1/10.

De plus, l'élément développé réunit toutes les spécificités permettant la réduction du temps de calcul et de la taille du modèle à savoir : le caractère multicouche pour la représentation de plusieurs plis composites avec un seul élément dans l'épaisseur et la possibilité de modéliser la séparation des plis sans besoin d'éléments d'interface.

Dans une deuxième partie, on définit la modélisation de la propagation du délaminage au sein de l'élément. Ce travail est divisé en deux phases. La première décrit la façon dont nous représentons la progression de la fissure à l'intérieur de l'élément. Il s'agit de piloter la migration de l'état solide à l'état bi-plaque en dégradant les propriétés transverses du solide d'une part, et en transférant sa rigidité de membrane aux plaques d'autre part.

Dans la seconde phase, le critère de propagation du délaminage est développé. Celui-ci est basé sur les théories de poutres et de plaques ainsi que sur la mécanique de la rupture. Il évalue l'énergie disponible pour faire propager le délaminage en fonction des déplacements, rotations, forces et moments aux noeuds de l'élément contenant le front de fissure indépendamment de la taille de l'élément. Cette approche de modélisation de l'avancement de

la fissure permet d'avoir un maillage relativement grossier par rapport aux modèles classiques de structures composites.

L'utilisation de l'élément PEC pour la modélisation du délaminage est validée à travers deux tests de propagation en mode I dans des structures composites simples. Les tests de la poutre DCB et de la séparation de la plaque ont permis la validation des critères de délaminage dans les cas particuliers de propagation de la fissure avec des angles de 0° et 45° par rapport au maillage. De plus, il a été montré que le critère de délaminage est insensible à la taille de l'élément.

L'élément PEC développé est adapté pour traiter n'importe quel mode de propagation de délaminage. La séparation du volume en deux plaques indépendantes reproduit la physique de séparation des plis indépendamment du mode de délaminage. Néanmoins, le mode de délaminage et sa progression à l'intérieur de l'élément dépendent du critère de propagation. Dans ce travail de recherche, le mode I seul a été étudié.

Pour ce qui est du gain au niveau du temps de calcul, aucune évaluation n'est encore réalisée à ce stade de l'étude. Pour chiffrer ce gain, l'approche présentée doit être comparée à d'autres méthodes de modélisation de la propagation du délaminage en mode I. Pour cela, il aurait fallu, par exemple, développer sur le code MEF_EX des modèles utilisant des éléments d'interface et formuler les critères basés sur la mécanique de l'endommagement ou de la rupture (c. f. II-3.4.) ce qui va au delà des objectifs de cette thèse.

Enfin, cet élément a été intégré dans le code de calcul RADIOSS à l'aide des fenêtres utilisateurs proposées par ce logiciel. Il est ainsi possible actuellement d'utiliser cet élément dans ce code industriel.

Afin de permettre une utilisation de l'élément plus générale et adaptée à des modélisations pour d'autres modes d'endommagement, certains développements restent encore à effectuer.

La prochaine étape sera de vérifier la validité du critère de délaminage dans d'autres cas de chargement. Le critère a permis de modéliser correctement des essais de délaminage en mode I où l'élément PEC a été sollicité d'une façon symétrique. Un essai de propagation de fissure sous chargement unilatéral permettra de valider ou d'apporter des améliorations au critère défini jusqu'alors.

Une méthode a été proposée pour déterminer l'angle de propagation du délaminage par rapport au maillage. A ce stade de l'étude, elle permet de différencier les propagations à 0° et 45° uniquement. Pour une utilisation plus générale, elle devra être étendue pour permettre l'évaluation de tout angle de propagation de la fissure. Pour cela, en parallèle, le critère de délaminage devra être adapté : les coefficients des termes F_w et M_θ du critère pourront être fonction de l'angle de propagation.

Dans l'introduction de ce rapport, nous avons proposé un mécanisme d'endommagement simplifié des structures composites. Nous avons supposé qu'une seule ouverture en mode I peut se produire au niveau de l'élément PEC qui se transforme alors en bi-plaque. Les éléments plaques qui apparaissent par suite peuvent subir tous les autres modes d'endommagement, à savoir : fissuration matricielle, rupture de fibres et délaminage en mode II et III. Ces modes d'endommagement ne sont pas pris en compte dans notre étude.

L'endommagement « post-délaminage » devra être introduit dans l'élément avant de pouvoir modéliser des problèmes de crash ou d'impact à grandes vitesses sur des structures composites.

L'endroit où la fissure se produit dans l'épaisseur de l'élément est, jusqu'alors, défini à priori. L'étude de l'initiation du délaminage n'a pas été abordée. Un critère d'initiation du délaminage devra être défini dans un premier temps. L'endroit d'apparition du délaminage dans l'épaisseur sera alors fonction des contraintes dans les différentes couches de l'élément PEC. Pour cela, les lois d'endommagement et de transfert devront également être modulables en fonction de l'endroit d'apparition de la fissure.

La gestion de la propagation du délaminage en mode II et III n'a pas été considérée. Les critères de délaminages devront être définis pour ces modes là. A ce stade là, l'étude de la propagation de fissure en mode mixte sera alors possible.

L'élément PEC, à l'instant actuel, ne permet pas de gérer le contact entre les deux plaques devenues totalement indépendantes après délaminage. La fermeture de la fissure n'est pas possible sans la gestion des éventuelles interpénétrations de l'état bi-plaque. Une condition sur les déplacements relatifs des nœuds suivant l'épaisseur devra être introduite dans la formulation de l'élément.

Pour ce qui est du gain au niveau du temps de calcul, une optimisation de la programmation fortran devra être réalisée. L'architecture des routines de calcul devra être revue. Une amélioration pourra être apportée au niveau des boucles de calcul ainsi que sur le nombre et les dimensions des variables internes.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[ALLIX (1993)]

ALLIX O., ENGRAND D., LADEVÈZE P., PERRET L. : Une nouvelle approche des composites par la mécanique de l'endommagement. *Cachan (1993)*.

[ALLIX (1995)]

ALLIX O. ; LADEVÈZE P. ; CORIGLIANO A. : Damage analysis of interlaminar fracture specimens. *Composite Structures (1995), vol. 31, pp. 61-74*.

[BANERJEE (1992)]

BANERJEE R. : Numerical simulation of impact damage in composite laminates. *Proceedings of the 7th Technical Conference of the American Society for Composites (1992), pp. 539-552*.

[BARRAU (1987)]

BARRAU J. J., LAROZE S. : Mécanique des structures, tome 4 : Calcul des structures en matériaux composites. *Polycopié de Cours de l'ENSAE (1987)*.

[BATHE (1982)]

BATHE K. J. : Finite Element procedures in engineering analysis. *Prentice-Hall Inc., (1982)*.

[BEISSEL (1998)]

BEISSEL S. R. ; JOHNSON G. R. ; POPELAR C. H. : An element-failure algorithm for dynamic crack propagation in general directions. *Engineering Fracture Mechanics (1998), vol. 61, pp. 407-425*.

[BELINGARDI (1998)]

BELINGARDI G. ; GUGLIOTTA A. ; VADORI R. : Numerical simulation of fragmentation of composite material plates due to impact. *International Journal of Impact Engineering (1998), vol. 21, pp. 335-347*.

[BELLET (1984)]

BELLET D. : Problèmes d'Elasticité. *Cepadues Editions, (1984)*.

[BELYTSCHKO (1976)]

BELYTSCHKO T. : A survey of numerical methods and computer programs for dynamic structural analysis. *Nuclear Engineering and Design (1976), vol. 37, pp. 23-34*.

[BELYTSCHKO (1984)]

BELYTSCHKO T., LIN J. I., TSAY C. S. : Explicit algorithms for the nonlinear dynamics of shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (1984), vol. 42, pp. 225-251*.

[BONINI (1995)]

BONINI J. : Contribution a la prédiction numérique de l'endommagement de stratifiés composites sous impact basse vitesse. *Thèse de doctorat, ENSAM Bordeaux (1995)*.

[BREWER (1988)]

BREWER J.C., LAGACE P. A. : Quadratic stress criterion for initiation of delamination. *Journal of Composite Materials (1988), vol. 22, pp. 1141-1155*.

[CANTWELL (1989)]

CANTWELL W. J., MORTON J. : Geometrical effects in the low velocity impact response of CFRP. *Composite Structures (1989), vol. 12, pp. 39-59*.

[CHANG (1987)]

CHANG F. K., CHANG K. Y. : A progressive damage model for laminated composites containing stress concentrations. *Journal of Composite Materials, (1987), vol. 21, pp. 834-855*.

[COOK (1974)]

COOK R. D. : Concepts and applications of Finite Element analysis. *John Wiley and Sons, (1974)*.

[CORIGLIANO (2001)]

CORIGLIANO A. ; MARIANI S. : Simulation of damage in composites by means of interface models : parameter identification. *Composites Science and Technology (2001), vol. 61, pp. 2299-2315*.

[CRISFIELD (1991)]

CRISFIELD M. A. : Non-linear finite element analysis of solids and structures – volume 1 & 2 : Advanced topics. *John Wiley and Sons (1997)*.

[DE MORAIS (2003)]

DE MORAIS A. B., DE MOURA M. F., GONÇALVES J. P. M., CAMANHO P. P. : Analysis of crack propagation in double cantilever beam tests of multidirectional laminates. *Mechanics of Materials (2003), vol. 35, pp. 641-652*.

[DE ROECK (1995)]

DE ROECK G. ; ABDEL WAHAB M. M. : Strain energy release rate formulae for 3D finite element. *Engineering Fracture Mechanics (1995), vol. 50, pp. 569-580*.

[DEÛ (1997)]

DEÛ J-F. : Rupture des composites stratifiés sous chargement dynamique : apports des méso-modèles avec endommagement retardé. *Thèse de doctorat, ENS Cachan (1997)*.

[EL SAYED (2001)]

EL-SAYED S. ; SRIDHARAN S. : Predicting and tracking interlaminar crack growth in composites using a cohesive layer model. *Composites: Part B (2001), vol. 32, pp. 545-553*.

[FARUQUE (1995)]

FARUQUE M. O. ; WANG H. C. : Crash analysis of structures made of laminated fibre reinforced composites. *Crashworthiness and Occupant Protection in Transportation Systems, American Society of Mechanical Engineers (1995), vol. 210, pp. 191-201.*

[FLEMING (1999)]

FLEMING D. C. : Delamination modeling of composites for improved crash analysis. *NASA 209725 (1999).*

[FREY (1998)]

FREY F. : Traité de génie civile, volume 3 : Analyse des structures et milieux continus. *Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (1998).*

[GAUTHIER (1996)]

GAUTHIER C. : Contribution à la modélisation du comportement en crash des structures stratifiées métal / composite : développement d'un élément de coque multicouche multi-matériaux. *Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis (1996).*

[HALLQUIST (1998)]

HALLQUIST J. O. : LS-DYNA Theoretical manual. *Livermore Software Technology Corporation, (1998).*

[HASHIN (1980)]

HASHIN Z. : Failure criteria for unidirectional fiber composites. *Journal of Applied Mechanics (1980), vol. 47, pp. 329-334.*

[HOU (2000)]

HOU J. P., PETRINIC N., RUIZ C., HALLETT S. R. : Prediction of impact damage in composite plates. *Composite Science and Technologie (2000), vol. 60, pp.273-281.*

[HOU (2001)]

HOU J. P., PETRINIC N., RUIZ C. : A delamination criterion for laminated composites under low-velocity impact. *Composite Science and Technologie (2001), vol. 61, pp. 2069-2074.*

[IMBERT (1984)]

IMBERT J. F. : Analyse des structures par éléments finis. *Cepadues Editions (Sup'aero), 2^{ème} Edition (1984).*

[IRWIN (1957)]

IRWIN G. R. : Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics (1957), vol. 24, pp. 361-364.*

[JOHNSON (1999)]

JOHNSON A. F., PICKETT A. K. : Impact and crash modeling of composite structures : a challenge for damage mechanics. *European Conference on Computational Mechanics – Munich (1999).*

[KOHLGRUEBER (1998)]

KOHLGRUEBER D., KAMOULAKOS A. : Validation of numerical simulation of composite helicopter sub-floor structures under crash loading. *Annual Forum Proceedings – American Helicopter Society. – AHS, Alexandria, VA, USA (1998), vol. 1, pp. 340-349.*

[LADEVEZE (2000)]

LADEVEZE P., ALLIX O., DEÛ J. F., LEVEQUE D. : A mesomodel for localisation and damage computation in laminates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (2000), vol. 183, pp. 105-122.*

[LAKSIMI (1991)]

LAKSIMI A., BENZEGGAGH M. L., JING G., HECINI M., ROELANDT J. M. : Mode I interlaminar fracture of symmetrical cross-ply composites. *Composites Science and Technology (1991), vol. 41, pp. 147-164.*

[LEVEQUE (1998)]

LEVEQUE D. : Analyse de la tenue au délaminage des composites stratifiés : identification d'un modèle d'interface interlaminaire. *Thèse de doctorat, ENS Cachan (1998).*

[LIU (1988)]

LIU D. : Impact –induced delamination – A view of bending stiffness mismatching. *Journal of Composite Materials (1988), pp. 674-692.*

[MACNEAL (1985)]

MACNEAL R. H. ; HARDER R. L. : A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Elements in Analysis and Design (1985), vol. 1, pp. 3-20.*

[MACNEAL (1988)]

MACNEAL R. H. ; HARDER R. L. : A refined four-noded membrane element with rotational degrees of freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (1988), vol. 28, pp. 75-84.*

[MAJEED (1994)]

MAJEED O., WORSWICK M. J., STRAZNICKY P. V., POON C. : Numerical modelling of transverse impact on composite coupons. *Canadian Aeronautics and Space Journal (1994), vol. 40, pp. 99-106.*

[McCARTHY (2000)]

MCCARTHY M., HARTE C., WIGGENRAAD J., MICHIELSEN A., KOHLGRUEBER D. : Finite element modelling of crash response of composite aerospace sub-floor structures. *Computational Mechanics 26 (2000), vol. 26, pp. 250-258.*

[RADIOSS (2001)]

RadioSS Theory Manual, *version 4.2 (2001).*

[RICHARDSON (1996)]

RICHARDSON M. O. W., WISHEART M. J. : Review of low-velocity impact properties of composite materials. *Composites Part A (1996), vol. 27A, pp. 1123-1131.*

[ROUDOLFF (2002)]

ROUDOLFF F. ; OUSSET Y. : Comparison between two approaches for the simulation of delamination growth in a D.C.B. specimen. *Aerospace Science and Technology* (2002), vol. 6, pp. 123-130.

[SANKAR (1991)]

SANKAR B. V., HU S. : Dynamic delamination propagation in composite beams. *Journal of Composite Materials* (1991), vol. 25, pp. 1414-1426.

[SPOSTSWOOD (2001)]

SPOTTWOOD S. M., PALAZOTTO A. N. : Progressive failure analysis of a composite shell. *Composite Structures* 53 (2001), vol. 53, pp. 117-131.

[TAN (2003)]

TAN V. B. C., SHIM V. P. W., TAY T. E. : Experimental and numerical study of the response of flexible laminates to impact loading. *International Journal of Solids and Structures* (2003), vol. 40, pp. 6245-6266.

[TAY (2003)]

TAY T. E. ; TAN V. B. C. ; DENG M. : Element-failure concepts for dynamic fracture and delamination in low-velocity impact of composites. *International Journal of Solids and Structures* (2003), vol. 40, pp. 555-571.

[TSAI (1971)]

TSAI S. W., WU E. M. : A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials* (1971), pp. 58-80.

[WALRICK (1999)]

WALRICK J. C. : Contribution au développement d'une nouvelle méthodologie pour l'étude du délaminage dans les structures stratifiées composites : application à l'impact basse vitesse. *Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis* (1999).

[YUNUS (1989)]

YUNUS S. M. ; SAIGAL S. ; COOK R. D. : On improved hybrid finite elements with rotational degrees of freedom. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (1989), vol. 28, pp. 785-800.

[YUNUS (1991)]

YUNUS S. M. ; PAWLAK T. P. ; COOK R. D. : Solid elements with rotational degrees of freedom. –Part 1.-Hexahedron elements. *International Journal for numerical Methods in Engineering* (1991), vol. 31, pp. 573-592.

[ZHANG (1998)]

ZHANG X. : Impact damage in composite aircraft structures : experimental testing and numerical simulation. *Journal of Aerospace Engineering* (1998), vol. 56, pp. 245-260.

[ZIENKIEWICZ (1971)]

ZIENKIEWICZ O. C. : The Finite Element Method in engineering Science. *McGraw – Hill* (1971).

ANNEXE 1

PRESENTATION DU CODE DE CALCUL MEF_EX

MEF_EX est un code de calcul *éléments finis en dynamique* qui a été programmé spécialement pour développer l'élément PEC et pour réaliser des tests de validation. Les caractéristiques de ce code peuvent être résumées par les points suivants :

- **Intégration dans le temps**

MEF_EX utilise un schéma d'*intégration explicite*. Le pas de temps est fonction des caractéristiques du maillage ainsi que des caractéristiques matériaux du modèle. La résolution de l'équation du mouvement se fait au niveau de chaque élément. De ce fait, la propagation des informations dans la structure se fait de proche en proche permettant de traiter les phénomènes locaux et les propagations d'ondes qui caractérisent les problèmes de dynamique rapide. MEF_EX n'est pas idéalement adapté pour résoudre des problèmes en statique ou en quasi-statique. Cependant, des problèmes simples en quasi-statique ont été modélisés en utilisant une faible vitesse de chargement et en introduisant de l'amortissement dans le modèle.

- **Discrétisation**

A l'heure actuelle, MEF_EX permet de traiter des modèles discrétisés par des éléments hexaédriques à huit nœuds, des éléments quadrangles à 4 nœuds, des éléments barres à 2 nœuds. Plusieurs formulations pour ces types d'éléments sont disponibles. Pour l'hexaèdre à 8 nœuds il existe la formulation *brick* classique à champ de déplacements linéaire et 24 ddl ainsi que la formulation *PEC* à 48 ddl. L'élément quadrangle peut avoir une formulation *plaque* de type Belytschko – Lin – Tsay (BLT) ou une formulation *membrane* pour les problèmes en 2D.

- **Ordre de l'intégration numérique**

Différents ordres d'intégration sont disponibles pour chaque type d'élément. L'élément brick peut être sous intégré par un point au centre ou avoir une intégration complète par 8 points. L'élément volume à 48 ddl possède une version « isotrope » ou homogène, dans ce cas il peut être intégré par 27 ou 14 points d'intégration, ou bien sous intégré par 8 points seulement. L'élément PEC (version composite – multicouche) est intégré par 4 ou 9 points par couche. Toutes ces intégrations utilisent la méthode de Gauss sauf l'intégration à 14 points présentée par Cook [COOK (1974)].

Les plaques BLT utilisent une intégration réduite avec un point d'intégration dans le plan. Suivant l'épaisseur, une intégration par la méthode de Newton – Cotes à 3 points peut être adoptée dans le cas d'un matériau homogène. Par défaut, une intégration couche par couche, mieux adaptée pour les stratifiés composites, est utilisée pour les plaques. Une intégration sélective existe aussi pour ces éléments. Elle consiste à calculer les contraintes normales de membranes aux 4 points de Gauss, et la contrainte de cisaillement dans le plan au point central. Ceci permet d'éviter, d'une part, l'apparition de certains modes d'hourglass et, d'autre part, d'empêcher le phénomène de verrouillage en cisaillement.

- **Formulation cinématique**

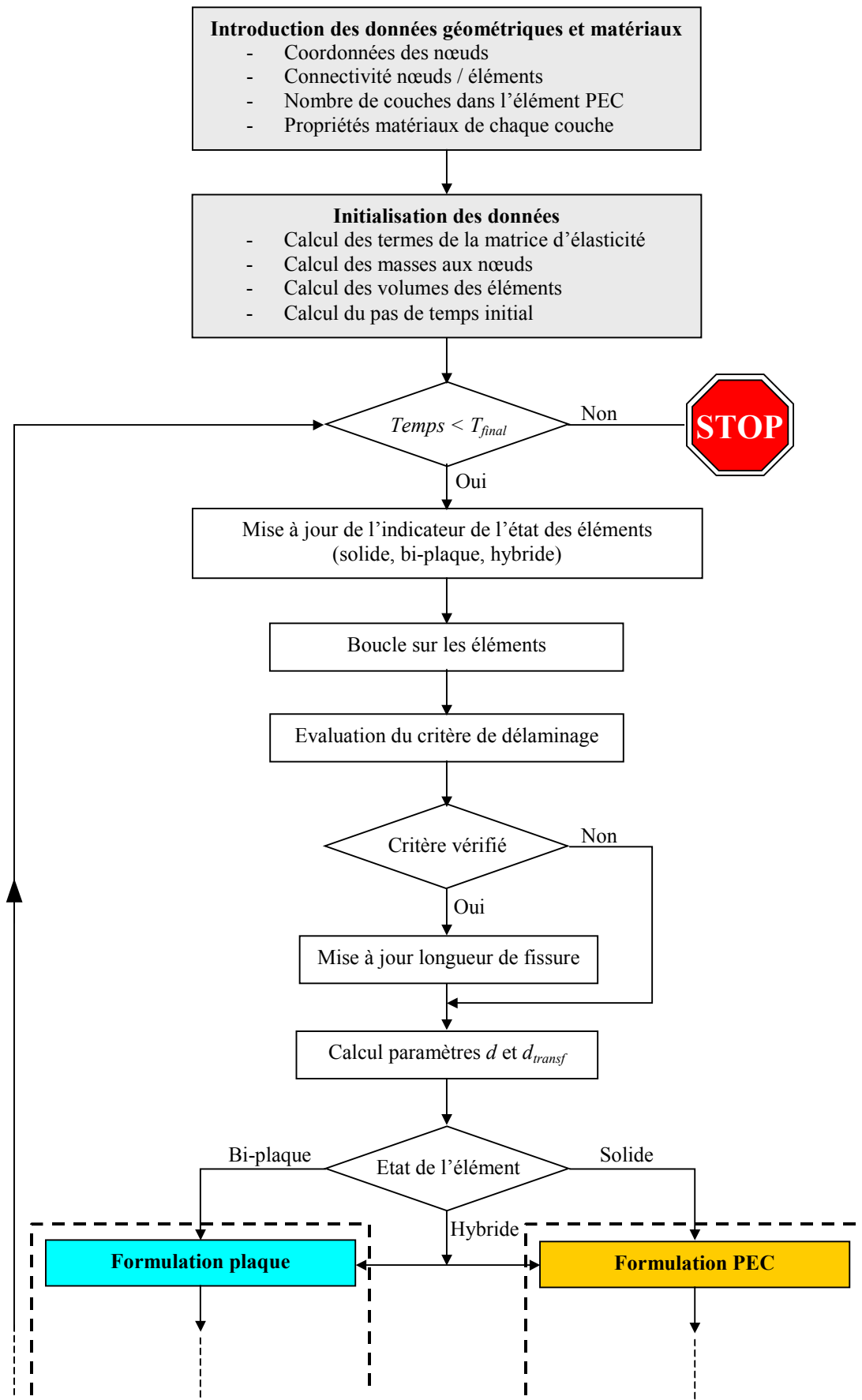
MEF_EX emploie une formulation *lagrangienne actualisée*. Dans la formulation lagrangienne, les nœuds du maillage restent liés à la matière et les éléments se déforment avec la matière. La formulation lagrangienne actualisée implique que les coordonnées des nœuds sont mises à jour à chaque cycle et la nouvelle position servira de configuration de référence pour le cycle suivant. L'intégration de l'équation du mouvement se fait alors par rapport à la configuration déformée.

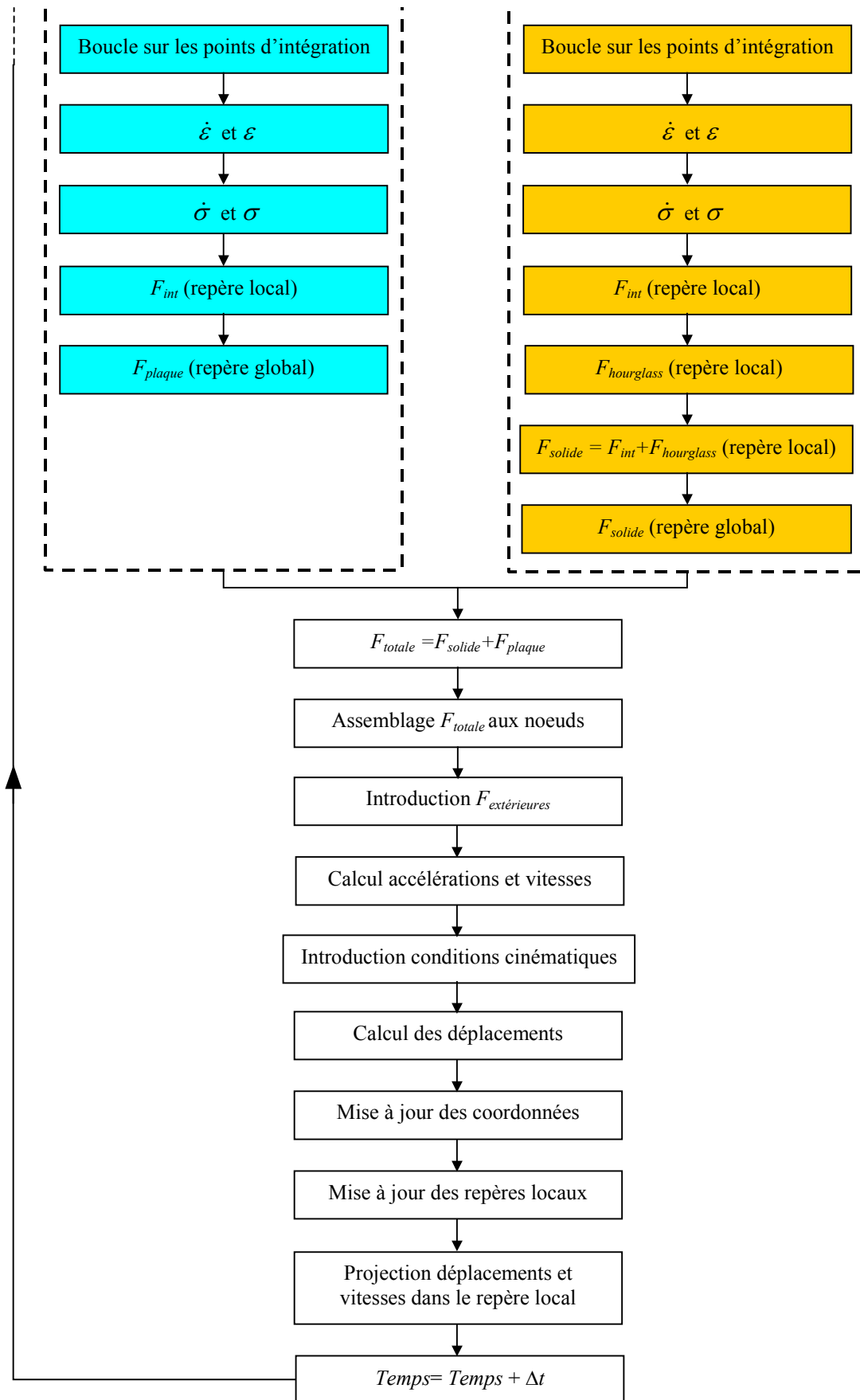
MEF_EX utilise une formulation *co-rotationnelle* pour les différents types d'éléments. Cette formulation permet une meilleure interprétation des déformations et des contraintes. Elle facilite également l'attribution des lois matériaux dans le cas d'utilisation de propriétés orthotropes.

MEF_EX utilise une formulation *grandes déformations*. Les déformations et les contraintes sont calculées de façon incrémentale par intégration explicite dans le temps. De ce fait, les déformations et les contraintes calculées sont des *déformations logarithmiques* et des *contraintes vraies*. Toutefois, une formulation *petites déformations* peut être adoptée. Dans ce cas, le volume de chaque élément est supposé constant, il est déterminé une seule fois au début du calcul.

- **Algorithme de calcul**

L'algorithme de calcul du code MEF_EX dans le cas de traitement des éléments PEC est présenté ci-après.





RÉSUMÉ

Cette étude s'intéresse à la modélisation du délaminage dans les structures composites. La nouvelle approche présentée consiste à utiliser un nouvel élément volume multicouche capable de se transformer en deux plaques physiquement indépendantes. Cet élément fini à 8 nœuds est généré à partir d'un élément hexaédrique à 20 nœuds et 60 ddl. Il possède 6 ddl par nœud dont 3 degrés de translation et 3 de rotation. Il est de ce fait capable d'être relié à des éléments de plaques.

Une méthode de modélisation de la propagation du délaminage dans l'élément est proposée. Il s'agit de gérer la transformation de l'état volume à l'état bi-plaque en dégradant les propriétés transverses du volume d'une part et, en transférant la rigidité de membrane aux plaques d'autre part. Cette transformation se fait d'une façon progressive à l'aide de lois d'endommagement et de transfert développées dans cette étude. Un critère de propagation de délaminage en mode I est défini afin de piloter cette transformation. Il est basé sur les théories des poutres et des plaques ainsi que sur la mécanique de la rupture.

Des applications numériques de propagation de délaminage en mode I permettent de valider l'approche proposée dans cette étude et montre la faisabilité de la modélisation de la propagation de fissure dans une direction arbitraire dans le plan. Cet élément a été implanté dans le code de calcul RADIOSS à l'aide des fenêtres utilisateurs proposées par ce logiciel.

MOTS-CLÉS

COMPOSITE MULTICOUCHE – MODÉLISATION – ÉLÉMENT FINI – DYNAMIQUE NON LINÉAIRE – DÉLAMINAGE – ENDOMMAGEMENT

ABSTRACT

This study treats the delamination modelling in composite structures. A new approach is introduced which consist in using a new solid multi-layered element that is able to be transformed into two physically independent shells. The 8-node solid is derived from a 20-node hexahedron element and has 3 translational and 3 rotational degrees of freedom. Hence, it is capable to be connected to 4-node shell elements.

A new method for delamination propagation modelling inside the element was also introduced. It consist in controlling the transformation of the solid state into the double-shell state by damaging the transverse mechanical properties of the solid on the one hand, and transferring its in-plane stiffness to the shells on the other hand. This transformation is done gradually by means of damage and transfer laws proposed in this study. A delamination propagation criterion in mode I is defined in order to govern this transformation. It is based on beam and classical laminate theories and on fracture mechanics.

The proposed approach is validated through numerical examples of mode I delamination propagation. These applications show the feasibility of crack propagation modelling in an arbitrary in-plane direction. This element was integrated to the finite element code RADIOSS through the user interface subroutines.

KEY-WORDS

COMPOSITE MULTI-LAYER – MODELLING – FINITE ELEMENT – NON LINEAR DYNAMICS – DELAMINATION – DAMAGING

