

THÈSE

présentée en vue de
l'obtention du titre de

DOCTEUR

de

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE**

ÉCOLE DOCTORALE : SYSTÈMES

SPÉCIALITÉ : Systèmes automatiques

Fabien DELMOND

Alternatives à la synthèse multi-objectifs : forme standard de passage et ajustements de loi de commande

Soutenue le 7 novembre 2005 devant le jury :

MM.	L. DUGARD	Président
	H. ABOU-KANDIL	Rapporteur
	D. ALAZARD	Directeur de thèse
	Ph. CHEVREL	Rapporteur
Mme	C. CUMER	Co-directrice de thèse
M.	M. HUMBERT	

Remerciements

Cette page constitue pratiquement la toute première page de cette thèse, et pourtant, c'est celle qui a été écrite en dernier, et aussi une de celles qui m'a donné le plus de mal. Non pas que les apports théoriques de la page des remerciements constituent une avancée incontournable pour la science, mais j'aimerais dans ce difficile exercice de style exprimer un peu de mon ressenti à l'issue de cette aventure que constitue la thèse.

En réalité, l'aventure commença légèrement plus tôt, puisque mon stage de DEA se fit au DCSD. Je remercie Daniel Alazard d'être passé à l'école doctorale EDSYS un après midi d'automne pour présenter une partie de ce sujet. Depuis, il a su guider les grandes lignes de mes travaux avec efficacité jusqu'à ce jour du 7 novembre 2005. Je remercie aussi Christelle Cumer d'avoir passé autant de temps aussi bien autour de nos réflexions qu'autour de ma rédaction. En effet, si cette thèse est devenue lisible, c'est surtout grâce aux corrections qu'elle a apportées. De plus, j'aimerais insister sur le soutien que m'ont apporté Daniel et Christelle depuis l'obtention de la bourse, jusqu'à la délibération. Durant plus de trois ans, j'ai toujours pu compter sur eux.

Je remercie Messieurs Hisham Abou Kandil et Philippe Chevrel pour avoir accepté de relire avec autant de soin ce manuscrit et pour toutes les remarques constructives qu'ils ont pu me faire. Je tiens à remercier aussi Messieurs Luc Dugard et Marc Humbert pour avoir bien voulu participer à ce jury.

Bien entendu, il ne faut pas que j'oublie de parler de mon lieu de travail. Ainsi, j'ai eu la chance d'être accueilli au Département Commande des Systèmes et Dynamique du vol du Centre de Toulouse de l'Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales. Je parle de chance, car réellement l'ambiance y était bonne, et les conditions de travail probablement enviées par de nombreux autres thésards. J'aimerais remercier Claude Barrouil pour m'avoir si agréablement accueilli au sein de son département et Philippe Mouyon, qui s'occupe de l'unité de recherche, et chez qui je suis allé chercher de temps en temps des solutions à mes problèmes.

Durant ce passage à l'ONERA, d'autres personnes me sont venues en aide de différentes façons. Parmi ces personnes, je tiens à remercier Michel Corrège et Jean-Pierre Chrétien pour leur soutien logistique indispensable, Liliane Arendo pour son efficacité, Gilles Ferreres, Jean-François Magni et Pierre Apkarian pour leur aide. J'aimerais aussi remercier Patrick Fabiani pour avoir limité la consommation de certaines de mes cigarettes. Que les personnes du DCSD qui ne sont pas nommées ici ne s'of-

fusquent pas, je les remercie pour la bonne humeur générale qui régnait au bureau.

L'ambiance à l'ONERA doit aussi beaucoup à ses thésards, ou assimilés, dont beaucoup sont devenus des amis et avec qui j'espère garder des contacts pendant longtemps.

Merci à Olivier V. pour avoir constitué pendant son passage à l'ONERA ma hotline Matlab et Latex. Merci à Yannick L., Elodie R. et Guilhem P. pour m'avoir supporté dans ce grand bureau du rez-de-chaussée. Merci aussi à Carsten D. et Fabrice D. pour les pauses café et l'aide qu'ils m'ont apportée. Merci aux filles du premier, Sontsada V., Sophie H. et Stéphanie C., pour leur bonne humeur, et leurs bavardages. Merci aussi à Nico le Tortionnaire (je sais, Elodie l'a déjà faite, mais vraiment elle me plaît trop :)). Merci encore à Jean-Baptiste T., Sylvain D., Olivier B. pour les coinches FIAS (je remercie Nicole au passage) et les soirées. Pour les soirées, mais aussi pour leur ponctualité à toute épreuve, je remercie Florent T. et Raoudha J.. Je n'oublie pas bien sûr Charles L. et Helene.Cabaniols@laposte.net pour leur soutien logistique et les divers Bangs passés ça et là.

Merci aussi aux amis les voisins, Emmanuelle S. et François M., et puis aux amis les bridgeurs, Olivier et Nathalie G., Didier M., Chounou et Jan A.. Je remercie aussi les amis qui sont plus loin, Joe B., Laurent H., Vincent T., Guillaume M., Antoine P. et les A'2.

Comme on le dit parfois, le hasard fait bien les choses, et j'aimerais remercier mes familles pour leur soutien inconditionnel. Merci Maman pour m'avoir aidé du mieux que tu as pu, et pour avoir soutenu mes choix. Merci Papa pour m'avoir toujours poussé à mieux faire. Merci à vous deux pour m'avoir supporté depuis le 8 janvier 1978, et même lorsque je ne voulais pas dormir, je vous aime. J'envoie aussi un merci à mes grand-parents, présents et absents. Merci également à mes "familles" d'accueil Buzequaises et Saint-Laurentaises.

Pour finir, Elodie, je te remercie de m'avoir supporté pendant cette fin de thèse, même si j'étais parfois pénible. Mais méfie-toi, tu vas encore devoir me supporter pour un moment, ma chérie.

Table des matières

Remerciements	3
Notations	11
I Partie introductive	13
1 Objectifs / Généralités	15
1.1 Problématique	15
1.2 Présentation du mémoire	17
2 Structuration des correcteurs	19
2.1 Introduction	19
2.2 La structure estimation-retour d'état	19
2.2.1 Structure de base	20
2.2.2 Paramétrisation de YOULA	21
2.2.3 Observateur de LUENBERGER	22
2.3 Réalisation estimation-retour d'état à partir d'un correcteur quelconque	23
2.3.1 Le correcteur est d'ordre égal à celui du système	24
2.3.2 Résolution de l'équation de RICCATI	24
Conditions nécessaires pour la satisfaction de C1	25
Discussion autour de la satisfaction de C2	26
2.3.3 Le correcteur est d'ordre supérieur à celui du système	26
Attribution des différentes dynamiques	29
2.3.4 Le correcteur est d'ordre strictement inférieur à celui du système	29
Cas $n_k + p \geq n$	30
Cas $n_k + p < n$	31
2.4 Conclusion	31
3 Présentation des modèles avion	33
3.1 Introduction	33
3.2 Principe des commandes de vol électriques	33
3.3 Modèle longitudinal de l'avion	34
3.3.1 Modèle rigide	34

3.3.2	Modèle longitudinal complet	35
3.4	Modèle latéral de l'avion	36
3.4.1	Modèle rigide	36
3.5	Modèle latéral complet	37
II	Structuration d'un problème multi-objectifs	39
4	Introduction	41
5	La Forme Standard de Passage	45
5.1	Introduction	45
5.2	Préliminaires	45
5.2.1	Définitions	46
	Problèmes inverses	47
	Forme Standard de Passage	47
5.2.2	Compléments	48
5.3	La CSF dans le cas $n_k \leq n$	49
5.3.1	Construction d'un problème $P(s)$ général	49
5.3.2	Conditions sur l'unicité de la solution $K_0(s)$	52
	Zéros de (A, B_1, C, I)	52
	Zéros de (A, B, C_1, I)	53
5.3.3	Existence d'une CSF pour un couple donné $\{G(s), K_0(s)\}$	54
	Démonstration par l'absurde	54
	Démonstration en utilisant le changement de base M	55
5.4	Généralisation	57
5.4.1	Système avec transmission directe	57
5.4.2	Cas du correcteur d'ordre supérieur ($n_k > n$)	59
	Construction	59
	Régularité du problème $P(s)$	62
	Transmission directe D	62
5.4.3	Correcteur à deux degrés de liberté	63
5.5	Conclusion	64
6	Procédure multi-canal	67
6.1	Introduction	67
6.2	Procédure générale	67
6.2.1	Synthèse en performances	68
6.2.2	Utilisation de la Forme Standard de Passage	68
6.2.3	Synthèse finale	69
6.2.4	Utilisations de la procédure	69
6.3	Application sur un exemple académique	70
6.4	Application sur un système masses-ressorts	71
6.4.1	Système et cahier des charges	72

TABLE DES MATIÈRES

6.4.2	Synthèse H_∞	73
	Premier réglage	74
	Second réglage	79
6.4.3	Utilisation de la CSF	83
	Première étape : synthèse d'un correcteur robuste aux variations paramétriques	83
	Seconde étape : conversion du correcteur en problème standard et synthèse finale	84
	Résultats	85
6.5	Prise en compte d'un correcteur proportionnel dérivé	88
6.6	Conclusion	91
7	Application au modèle avion	93
7.1	Position du problème	93
	7.1.1 Les objectifs	94
	7.1.2 Le correcteur initial	94
7.2	Ajustements réalisés	98
	7.2.1 Réglage en confort	99
	7.2.2 Réglage en charges	103
	7.2.3 Réduction du correcteur	103
7.3	Conclusion	107
III	Ajustement de loi de commande : placement de pôles	109
8	Introduction	111
9	L'outil d'identification paramétrique	115
9.1	Introduction	115
9.2	Théorie générale	115
	9.2.1 Position du problème	116
	9.2.2 Méthode d'analyse bayésienne	117
9.3	Comportement asymptotique de la matrice de covariance de l'erreur $M_f(\theta)$	118
	9.3.1 Développements limités pour le calcul de $p(\theta_0 + \Delta\theta y^k)$	119
	9.3.2 Calcul de $\text{Tr}(M_0^{-1} \Delta M)$	120
	Calcul de M_0	121
	Calcul de ΔM	123
	9.3.3 Dépendance de $\text{Tr}[M_0^{-1} \Delta M]$ en $\Delta\theta$	125
	Quadraticité de $\text{Tr}[M_0^{-1} \Delta M]$ en $\Delta\theta$	125
9.4	Cas général	127
	9.4.1 La matrice d'observation dépend de $\Delta\theta$	127
	Calcul de ΔM lorsque $C = C(\theta)$	128
	Quadraticité de $\text{Tr}[M_0^{-1} \Delta M]$ en $\Delta\theta$	129
	9.4.2 Calcul de N et L	129

9.5	Algorithme de calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$	131
9.5.1	Procédure utilisée	131
9.5.2	Cas des systèmes diagonaux	132
9.5.3	Comparaison avec l'algorithme en discret	133
9.6	Interprétation de la matrice $G_{\theta_0}^{-1}$	134
9.6.1	Directions de sensibilité paramétrique	134
9.6.2	Lien avec la robustesse	136
9.7	Conclusion	137
10	Analyse d'un ajustement d'une loi de commande	139
10.1	Introduction	139
10.2	Paramètres du correcteur	139
10.2.1	Structure estimation/retour d'état	141
10.2.2	Mise sous forme LFT	142
10.3	Caractéristiques modales	143
10.3.1	Mise en évidence du vecteur paramétrique reflétant les variations modales	143
10.3.2	Modélisation des variations modales	144
	Variation d'amortissement	144
	Variation de pulsation	145
	Variations simultanées	146
10.3.3	Récapitulatif	147
10.4	Critères d'analyse	148
10.4.1	Conditionnement, direction d'insensibilité de $G_{\theta_0}^{-1}$	148
10.4.2	Paramétrisation de l'identification	150
10.4.3	Critère quantitatif	151
	Exemple de la page 149	152
	Modification de la pulsation d'un mode avec changement de base	155
	Introduction d'une matrice d'observation fictive	158
10.5	Conclusion	159
11	Synthèse de directions paramétriques	161
11.1	Introduction	161
11.2	Directions optimales	161
11.2.1	Critère primaire	162
	Exemple illustratif	162
	Exemple à 4 pôles	164
11.2.2	Critère avec pondérations	165
	Obtention du taux de confiance unitaire	166
	Solution optimale pour le critère (11.7)	167
	Cas général	168
	Retour sur l'exemple à 4 pôles p.164	170
11.3	Système masses-ressorts	172
11.3.1	Mise en équation	172

TABLE DES MATIÈRES

11.3.2	Réduction du système	173
11.3.3	Calcul d'un correcteur nominal	174
11.4	Choix de la structure	176
11.4.1	Limitation du nombre de paramètres	176
	Structure estimation/retour d'état	176
	Illustration avec le système masses/ressorts	178
11.4.2	Influence du modèle embarqué	184
	Nouveau modèle embarqué et correcteur correspondant	184
	Résultats des ajustements avec le nouveau modèle embarqué	185
11.4.3	Changements de base	190
11.5	Méthode d'ajustement de placement de pôles	192
11.6	Extensions de la méthode	193
11.6.1	Désensibilisation paramétrique des correcteurs	194
	Robustesse aux performances	194
	Désensibilisation aux incertitudes paramétriques	195
11.6.2	Autres méthodes itératives	196
11.6.3	Réduction de la dimension de l'espace paramétrique	197
11.7	Conclusion	197
12	Application au modèle avion	199
12.1	Position du problème	199
12.1.1	Le correcteur initial	199
12.1.2	Les objectifs	201
12.2	Ajustements réalisés	201
12.2.1	Premier ajustement	203
12.2.2	Second ajustement	208
12.3	Conclusion	208
	Conclusion et Perspectives	213
	Bibliographie	215

TABLE DES MATIÈRES

Notations

Symboles courants

\mathbb{R}	ensemble des réels
\mathbb{C}	ensemble des complexes
\mathbb{R}^n	ensemble des vecteurs réels de dimension n
\mathbb{C}^n	ensemble des vecteurs complexes de dimension n
$\mathbb{R}^{m \times n}$	ensemble des matrices réelles $m \times n$
$\mathbb{C}^{m \times n}$	ensemble des matrices complexes $m \times n$
$\Re(x)$	partie réelle du complexe x
$\Im(x)$	partie imaginaire du complexe x
$E[x]$	espérance mathématique de la variable aléatoire x
I_n	matrice identité $n \times n$
0_n ou $0_{n \times m}$	matrices nulles $n \times n$ ou $n \times m$
$M_{i,j}$	élément de la i -ème ligne et j -ème colonne de la matrice M
M^T	transposée de la matrice M
M^*	conjuguée transposée de M
M^{-1}	inverse de M
M^{-T}	$(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$
M^{-*}	$(M^*)^{-1} = (M^{-1})^*$
M^+	pseudo-inverse de M , le plus souvent de MOORE-PENROSE : $M^+ = (M^*M)^{-1}M^T$
$\lambda_i(M)$	i -ème valeur propre de M
$\lambda_m(M)$	plus petite valeur propre de M
$\lambda_M(M)$	plus grande valeur propre de M
$\text{Tr}(M)$	trace de M , $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n M_{i,i}$, pour $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$
$\text{vec}(M)$	vectorisation de M (vecteur constitué par les colonnes de M mises bout-à-bout)
$\det(M)$	déterminant de M
$\text{spec}(M)$	ensemble des valeurs propres de M

Notations système

s	variable de LAPLACE
ω	pulsation (rad./ sec.)
ξ	amortissement

$G(s) := \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ matrice de transfert $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$
 δ, Δ incertitudes paramétriques

Acronymes

B.F.	Boucle Fermée
B.O.	Boucle Ouverte
LFT	Transformation Linéaire Fractionnaire
LMI	Inégalité Matricielle Linéaire
LQG	Linéaire Quadratique Gaussien
LTI	Linéaire à Temps Invariant
SVD	Décomposition en Valeurs Singulières

Première partie

Partie introductive

Chapitre 1

Objectifs / Généralités

1.1 Problématique

Cette thèse traite avant tout de la commande des systèmes. On peut observer certaines caractéristiques d'un système au travers de mesures effectuées sur celui-ci. On peut également modifier le comportement d'un système grâce à des actions effectuées sur celui-ci à l'aide de commandes. La problématique de la commande consiste à utiliser la connaissance des observations du système pour modifier son comportement : on cherche à réguler le système avec un correcteur, qui est l'expression concrète d'une loi de commande.

Le travail de l'automaticien consiste donc à maîtriser le comportement des systèmes dynamiques : maîtriser au sens de l'analyse de ce comportement et au sens de la synthèse de lois de commande pour modifier ce comportement. Dans le cadre de ce mémoire, on s'est intéressé à la partie synthèse.

Lorsqu'on cherche à réguler un système dynamique, on établit dans un premier temps un cahier des charges qui consiste à énoncer quelles caractéristiques ou quelles performances le système doit avoir une fois régulé. Ce cahier des charges peut par exemple être dicté par des contraintes industrielles, et peut parfois ne pas s'avérer réalisable. Dans ce cas, on s'efforce généralement de s'en approcher le plus possible.

L'obtention d'un correcteur vérifiant un certain cahier des charges est chose difficile. De nombreuses méthodes ont été développées pour permettre à l'automaticien d'obtenir des correcteurs plus performants, pour lui permettre de mieux prendre en compte les objectifs du cahier des charges ou encore pour réduire le temps passé lors de la synthèse d'une loi de commande, et par là de réduire les coûts de développement.

Certes la technique progresse, mais la complexité des systèmes étudiés progresse également. Par exemple, dans le domaine de l'aéronautique, l'augmentation de la taille des avions de transport pose des problèmes dans la conception des lois de pilotage, du fait de la souplesse croissante des avions. Ceci a une influence directe sur l'efficacité des correcteurs et sur leur coût de développement :

- le correcteur est d'ordre élevé, sans structure particulière, ce qui rend l'interprétation de ses variables d'état difficile ;
- la réalisation du cahier des charges est délicate, car les objectifs à atteindre sont plus ou moins contradictoires et il convient donc d'obtenir un correcteur qui réalise un "bon" compromis ;
- la formalisation du cahier des charges pose également des problèmes, puisqu'elle doit être à la fois cohérente avec l'objectif souhaité et avec la méthode de synthèse de la loi de commande.

Dans un tel contexte, il arrive fréquemment que la première synthèse ne soit pas "la bonne".

Ce mémoire a pour objectif de proposer des outils permettant de combler le fossé entre :

- la "quête de l'idéal" qui motive l'automaticien. C'est-à-dire la recherche de techniques permettant de fournir la loi de commande optimale directement à partir du modèle et des spécifications.
- et la réalité industrielle. Où les contraintes pratiques et économiques, le savoir-faire et la culture d'entreprise conduisent toujours à favoriser la démarche qui vise à adapter aux nouveaux problèmes rencontrés la solution qui "marchait jusqu'à présent".

Le dénominateur commun des techniques présentées est donc la disponibilité d'un correcteur pré-existant qui satisfait une partie du cahier des charges mais qu'il faut adapter pour satisfaire des spécifications complémentaires ou prendre en compte une évolution du modèle et/ou du cahier des charges. Le cadre est donc **l'ajustement de lois de commande**.

Deux méthodes sont proposées dans ce mémoire :

- la première va permettre de prendre en compte un correcteur donné dans le formalisme général des techniques de synthèse de lois de commande optimales (synthèse H_∞ , synthèse H_2 , ...). Elle permettra donc de bâtir un problème standard de commande que l'on pourra enrichir par la prise en compte de spécifications complémentaires. Nous verrons également que cette méthode permet de résoudre indirectement des problèmes de synthèse multi-objectifs. C'est d'ailleurs dans ce contexte de synthèse multi-objectifs que cette méthode sera introduite dans la partie II ;
- la seconde consiste à isoler dans un correcteur donné, des paramètres de réglage ("potentiomètres") qui permettent de maîtriser (d'ajuster) une ou plusieurs propriétés dynamiques du système en boucle fermée (propriétés modales). Elle peut s'appliquer sur un correcteur déjà structuré ou sur un correcteur non structuré que l'on propose alors de re-structurer sous la forme estimation/retour d'état. Dans tous les cas, cette méthode conserve la structure du correcteur, contrairement à la première qui fournit, à l'issue de la synthèse finale, un correcteur non-structuré.

Ces deux approches sont complémentaires : alors que la première vise à enrichir une méthodologie de synthèse de lois de commande déjà existante et pourra être utilisée en phase de conception des lois de commande, les paramètres de réglage isolés par la seconde approche pourront être utilisés pour des ajustements de "dernière minute" pour prendre en compte des évolutions soudaines du modèle et/ou du cahier des charges (ajustement de la commande lors des essais en vol d'un avion par exemple).

1.2 Présentation du mémoire

Le mémoire contient 3 parties.

- La partie I, dont ce chapitre fait partie, est une partie introductive. Elle a pour objectif de présenter des notions qui seront utilisées à la fois dans les parties II et III.

Le chapitre 2 présente la forme estimation-retour d'état d'un correcteur et expose comment on peut, en partant d'un correcteur quelconque, calculer sa représentation estimation-retour d'état. Cette représentation des correcteurs est utile d'un point de vue interprétatif : on donne aux variables d'état du correcteur une signification physique en rapport avec les variables d'état du système, c'est en partie l'utilisation que l'on fait de cette transformation dans la partie III du mémoire. La construction de la forme estimation-retour d'état est également utile d'un point de vue mathématique, puisque les équations qui en découlent et la façon dont elles sont résolues se retrouvent dans la partie II.

Le chapitre 3 présente un modèle latéral d'avion souple qui sera utilisé dans les parties II et III.

- La partie II développe une méthode de synthèse d'une loi de commande lorsqu'on prend en compte dans le cahier des charges plusieurs objectifs. Cette méthode constitue l'extension de travaux réalisés au DCSD par ALAZARD et VOINOT [42, 5].

Le chapitre 5 présente et développe un outil, dénommé *Forme Standard de Passage*, qui permet, à partir d'un correcteur donné de formaliser un problème standard (H_2 ou H_∞) dont le correcteur en question est solution.

Le chapitre 6 montre comment utiliser cet outil dans le contexte de la résolution d'un problème multi-objectifs. La méthode est ensuite comparée à une synthèse H_∞ (pour le même problème global) sur la base d'un exemple masses-ressort.

Le chapitre 7 met en application cette méthode centrée sur la *Forme Standard de Passage* sur le modèle latéral de l'avion souple.

- La partie III développe une autre méthode, entièrement axée sur l'ajustement d'une loi de commande déjà existante, qui vise principalement au re-placement de pôles de la boucle fermée.

Le chapitre 9 établit la base théorique de la méthode. Le point de départ est la relation étroite entre l'identification paramétrique et la commande. Dans ce chapitre, on développe un outil qui permet la quantification de l'identifiabilité d'un paramètre, basé sur les résultats de l'identification bayésienne. Cet outil déjà utilisé dans certains travaux au DCSD par Gauvrit, Lavigne et Cumer [24, 25, 26, 29, 9, 10], voit son champ d'action élargi.

Le chapitre 10 établit comment cet outil d'identification paramétrique permet d'analyser l'impact d'une modification du correcteur sur les pôles de la boucle fermée. L'un des avantages, qui apparaît avec cette méthode, est de pouvoir analyser tous les correcteurs, quel que soit leur ordre ou leur structure.

Le chapitre 11 étend la méthode à la synthèse de l'ajustement. À partir d'un placement de pôles désiré, on est capable de modifier le correcteur existant pour s'en rapprocher, cela sans modifier la structure du correcteur.

Le chapitre 12 applique cette méthode de placement de pôles sur le modèle latéral de l'avion souple présenté dans la partie I.

Enfin, une conclusion générale précise quels pourraient être les travaux futurs envisageables, s'appuyant sur les méthodologies développées dans ce mémoire.

Chapitre 2

Structuration des correcteurs

2.1 Introduction

Ce chapitre se focalise essentiellement sur la représentation des correcteurs. Même si d'un point de vue de l'analyse ou de l'ajustement d'une loi de commande, il est possible de se référer directement au modèle d'état du correcteur (A_k, B_k, C_k, D_k) , d'autres représentations offrent une plus grande lisibilité. La représentation dont on se préoccupe ici est dénommée "structure estimation-retour d'état". Elle associe, de fait, un estimateur des modes du système avec un retour de l'état estimé. Cette mise en forme du correcteur présente plusieurs avantages, en particulier d'un point de vue de l'interprétation modale, et sera utilisée dans les deux parties qui suivent.

Ce chapitre présente les travaux d'ALAZARD et APKARIAN [3] qui permettent de trouver la structure estimation-retour d'état d'ordre minimal associée à un correcteur et un système donnés. Ces travaux s'inscrivent dans la continuité des recherches menées par SCHUMACHER [34] et par BENDER et FOWELL [22, 7].

Dans un premier temps, on s'attachera à décrire cette structure sous sa forme "primaire", puis sous une forme plus générale, sans la construire. Ensuite, on donnera l'approche qui conduit à exprimer un correcteur sous sa forme estimation-retour d'état. Le lecteur pourra découvrir une méthode alternative pour résoudre les équations permettant de passer d'un correcteur, sous sa forme représentation d'état, à un correcteur équivalent, sous sa forme estimation-retour d'état avec paramétrisation de YOULA. Une autre de nos réflexions s'est portée sur les conditions de faisabilité de ce problème de transformation, qui sont ici énumérées.

2.2 La structure estimation-retour d'état

L'intérêt premier de la structure réside dans le fait que les variables du correcteur ont un sens physique évident puisque ce sont les estimés des états du système commandé. L'estimation se base sur un modèle du système. Une fois ce modèle arrêté, le correcteur sous forme estimation-retour d'état se détermine entièrement par des matrices de gains statiques d'estimation et de retour d'état. Ceci peut s'avérer utile pour le séquençement

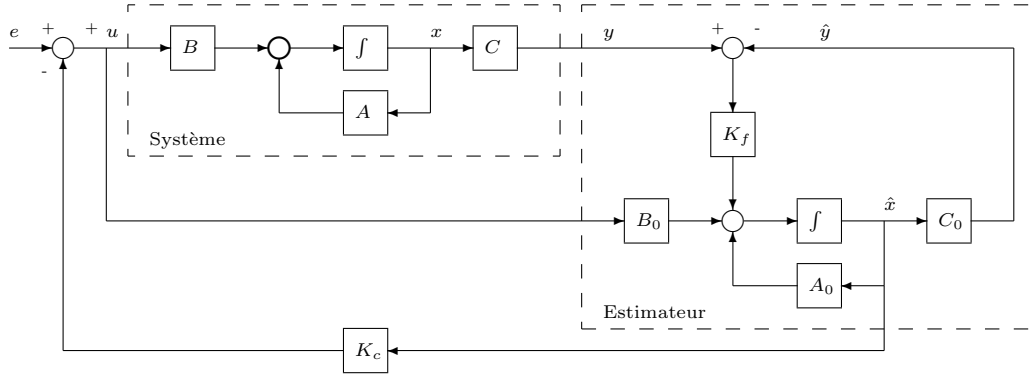


FIGURE 2.1: Structure estimation-retour d'état de base.

de gains ([38, 39]) ou encore pour l'ajustement d'une loi de commande, ce qui est d'ailleurs utilisé dans la partie III de ce mémoire.

2.2.1 Structure de base

La structure de base est décrite par la figure 2.1. Pour plus de clarté dans le schéma, la matrice de transmission directe D a été ignorée. Dans la suite, on considèrera un système sans transmission directe, sans que cela n'implique une perte de généralité. Normalement, pour avoir un estimateur des états du système, les matrices A_0 , B_0 , C_0 doivent correspondre aux matrices A , B , C du système (le correcteur et le système ont donc le même ordre $n = n_k$). Dans ce cas, on peut alors écrire les différentes équations du système bouclé. Pour la partie système :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.1)$$

Pour la partie correcteur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - \hat{y}) \\ u = -K_c\hat{x} + e \end{cases} \quad (2.2)$$

Pour la boucle fermée dans son intégralité, on arrive à :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - BK_c\hat{x} + Be \\ \dot{\hat{x}} = (A - BK_c)\hat{x} + Be + K_fC(x - \hat{x}) \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.3)$$

À ce niveau, il est intéressant d'introduire une nouvelle variable d'état : $\epsilon = x - \hat{x}$. La représentation d'état du système bouclé s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\epsilon} \\ y \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} A - BK_c & BK_c & B \\ 0 & A - K_fC & 0 \\ C & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \\ e \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

On peut faire deux remarques :

2.2. LA STRUCTURE ESTIMATION-RETOUR D'ÉTAT

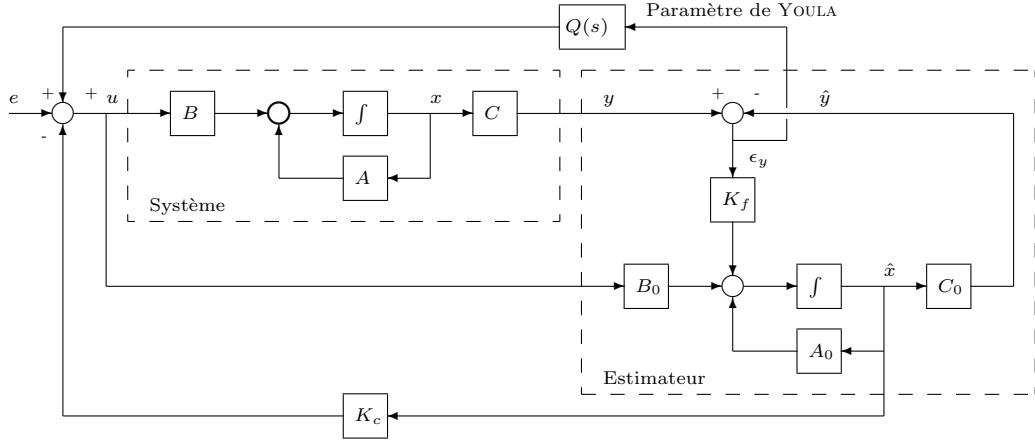


FIGURE 2.2: Structure estimation-retour d'état avec paramétrisation de YOULA.

1. le système est diagonal par blocs, on y distingue deux dynamiques indépendantes :
 $A - BK_c$ qui constitue la dynamique des états du système bouclé par le retour d'état ;
 $A - K_f C$ qui constitue la dynamique des états de l'estimateur ;
2. la dynamique régissant le comportement de l'état ϵ ne possède pas d'excitation ; dans le cas où les perturbations sont négligeables on arrive donc au bout d'un certain temps à $\epsilon = 0$, puisque cette dynamique est strictement stable.

On peut déduire de tout cela que tout se passe comme si le système en boucle fermée se réduisait aux équations :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK_c)x + Be \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.5)$$

qui correspondent aux équations d'un retour d'état seul. Les n valeurs propres du filtre d'estimation sont ingouvernables par l'entrée e . Et les n valeurs propres du retour d'état sont inobservables par l'innovation $\epsilon_y = C(x - \hat{x})$. Cette structure a donc l'avantage de pouvoir utiliser les techniques modales de retour d'état pour régler le gain K_c (ou le gain K_f).

2.2.2 Paramétrisation de YOULA

Lorsque le correcteur comprend une transmission directe, ou qu'il est d'ordre supérieur au système, la structure de base s'enrichit d'un paramètre de YOULA, dont l'ordre $n_q = n_k - n$. Ce paramètre agit en feedback du transfert nul $e \rightarrow \epsilon_y$, comme en témoigne la figure 2.2. La représentation d'état du système en boucle fermée s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_q \\ \dot{\epsilon} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_c & BC_q & BK_c + BD_q C & B \\ 0 & A_q & B_q C & 0 \\ 0 & 0 & A - K_f C & 0 \\ \hline C & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_q \\ \epsilon \\ e \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

On est donc en présence de trois groupes de valeurs propres :

- les n valeurs propres du retour d'état, $\text{spec}(A - BK_c)$;
- les n valeurs propres du filtre d'estimation, $\text{spec}(A - K_f C)$;
- et les $n_q = n_k - n$ valeurs propres du paramètre de YOULA, $\text{spec}(Q(s))$, qui sont à la fois inobservables par la sortie ϵ_y et ingouvernables par l'entrée e .

Le transfert $e \rightarrow \epsilon_y$ est donc nul. On conserve par conséquent la dynamique du retour d'état dans le transfert $e \rightarrow y$ (équation (2.5)).

2.2.3 Observateur de LUENBERGER

Il reste possible, sous certaines conditions, d'obtenir un estimateur des états du système sans pour autant que l'estimateur ait un nombre d'états supérieur ou égal au nombre d'états du système, il est dans ce cas d'ordre réduit. Dans ce cas l'estimateur doit avoir un nombre d'états au moins égal à $n - p$, où p désigne le nombre de sorties du système. Autrement dit le nombre d'états de l'estimateur augmenté du nombre de sorties du système doit être supérieur ou égal au nombre d'états du système.

L'estimé \hat{x} constitue une combinaison linéaire des états de l'estimateur \hat{z} et des sorties du système y :

$$\hat{x} = H_1 \hat{z} + H_2 y$$

avec la contrainte :

$$\text{rang}(\begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}) = n$$

Ici la variable \hat{z} est en réalité une estimée d'une combinaison linéaire des états du système, $z = Tx$. En effet, LUENBERGER a montré que le système :

$$\dot{\hat{z}} = F\hat{z} + Gy + TBu$$

est un observateur de la variable $z = Tx$, si F , G et T vérifient :

$$TA - FT = GC \quad \text{et} \quad F \text{ stable}$$

On a bien alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{z}(t) \rightarrow z(t) \quad \forall u(t)$$

De plus, si on choisit H_1 et H_2 tels que :

$$H_1 T + H_2 C = I$$

alors on a :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x - H_1 \epsilon_z \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) &= x(t) \end{aligned}$$

Le schéma correspondant est exposé figure 2.3. Comme dans les cas précédents, le transfert de e vers l'innovation $\epsilon_y = y - C\hat{x}$ est nul ; de plus, on conserve la dynamique du retour d'état dans le transfert $e \rightarrow y$.

2.3. RÉALISATION ESTIMATION-RETOUR D'ÉTAT À PARTIR D'UN CORRECTEUR QUELCONQUE

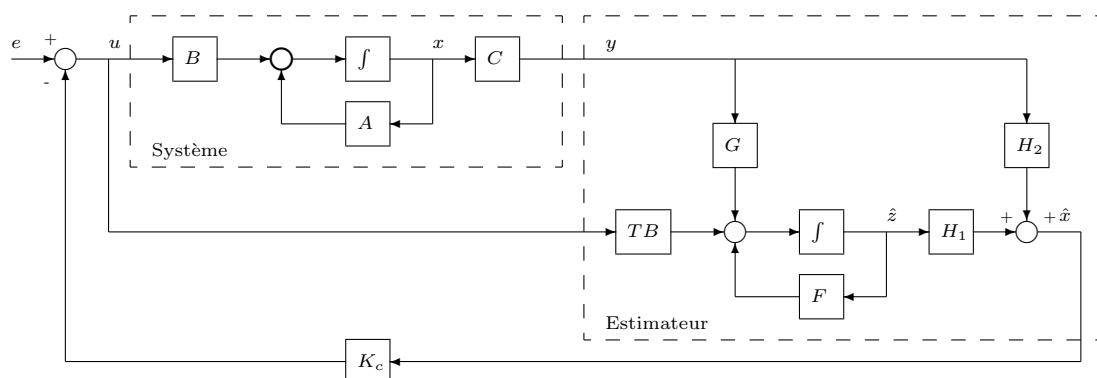


FIGURE 2.3: Structure estimation-retour d'état avec observateur de LUENBERGER.

L'intérêt de cette structure réside dans le fait que l'on peut estimer plus d'états que le nombre d'états d'un correcteur. En effet, d'un point de vue pratique, un correcteur donné est souvent d'ordre inférieur à l'ordre du système. Il en résulte que lorsqu'on souhaite faire une réalisation estimation-retour d'état du correcteur en question, on est forcé de bâtir un modèle d'ordre réduit (que l'on dénomme dans la partie III **modèle embarqué**) dont on va faire une estimation des états. L'estimateur qui résulte de cette réalisation n'estime donc pas l'intégralité des états du système. Dans le cas d'une structure de base (éventuellement avec paramètre de YOULA statique), le nombre d'états que l'on pourra estimer s'élève donc à n_k ; alors que, dans le cas d'une structure avec un observateur de LUENBERGER, ce nombre passe à $n_k + p$ ce qui permet de travailler avec un modèle embarqué plus représentatif du modèle complet, et de réduire le nombre de dynamiques négligées.

2.3 Réalisation estimation-retour d'état à partir d'un correcteur quelconque

On distingue trois cas :

- le cas où le correcteur est d'ordre supérieur à celui du système. La structure utilisée est alors celle avec paramétrisation de YOULA ;
- le cas où le correcteur est d'ordre égal à celui du système, qui est en fait un cas particulier du premier cas ;
- le cas où le correcteur est d'ordre inférieur à celui du système. Dans ce cas, on utilisera le plus souvent une structure faisant intervenir un observateur de LUENBERGER, mais parfois, lorsque les ordres du correcteur et du système sont trop différents, on sera amené à construire un modèle réduit du système, et donc de faire un estimateur partiel.

En outre, il existera des cas particuliers où il est impossible d'obtenir une forme estimation-retour d'état d'un correcteur sous une des formes exposées ci-avant. Nous

détaillerons les conditions pour lesquelles ces cas particuliers se manifestent.

2.3.1 Le correcteur est d'ordre égal à celui du système

L'objectif est, à partir d'un correcteur donné sous la forme d'une représentation d'état A_k, B_k, C_k, D_k , de calculer les matrices de retour d'état K_c , de gain d'estimation K_f et du paramètre de YOULA, afin que les formes estimation-retour d'état et représentation d'état donnent le même correcteur. Pour cela, on utilise une matrice de transformation T telle que $x_k = T\hat{x}$.

Lorsque le système et le correcteur sont du même ordre, le paramètre de YOULA est statique. Les deux représentations du correcteur s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{x}_k &= A_k x_k + B_k y \\ u &= C_k x_k + D_k y \end{cases} \quad (2.7)$$

et :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= (A - BK_c - K_f C - BD_q C)\hat{x} + (K_f + BD_q)y \\ u &= -(K_c + D_q C)\hat{x} + D_q y \end{cases} \quad (2.8)$$

En écrivant l'équivalence entrées-sorties des représentations (2.7) et (2.8), on obtient un système d'équations algébriques (2.9) où K_c, K_f, D_q et T sont les inconnues. On peut alors substituer dans la première équation les trois dernières pour obtenir une équation en T (2.10).

$$\begin{aligned} A - BK_c - K_f C - BD_q C &= T^{-1} A_k T \\ K_f + BD_q &= T^{-1} B_k \\ -K_c - D_q C &= C_k T \\ D_q &= D_k \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$A_k T - T(A + BD_k C) - TBC_k T + B_k C = 0 \quad (2.10)$$

et finalement :

$$\begin{aligned} K_f &= T^{-1} B_k - BD_k \\ K_c &= -C_k T - D_k C \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ainsi le problème consiste à trouver une solution T inversible de l'équation de RICCATI généralisée.

Le lecteur remarquera que l'équation de RICCATI donnée dans la partie II, lorsqu'on cherche à obtenir une Forme Standard de Passage pour un correcteur donné, et celle présentée ici sont identiques (celle de la partie II est toutefois plus générale car la matrice T peut y être rectangulaire), ce qui montre la forte imbrication entre la Forme Standard de Passage et la mise sous forme estimation-retour d'état d'un correcteur.

2.3.2 Résolution de l'équation de RICCATI

L'équation de RICCATI peut également se formuler sous la forme suivante :

$$[-T \quad I] A_{cl} \begin{bmatrix} I \\ T \end{bmatrix} = 0 \quad (2.12)$$

2.3. RÉALISATION ESTIMATION-RETOUR D'ÉTAT À PARTIR D'UN CORRECTEUR QUELCONQUE

où la matrice associée à l'équation de RICCATI, A_{cl} , correspond à la matrice d'évolution de la boucle fermée construite sur le vecteur d'état $[x^T \ x_k^T]$:

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + BD_kC & BC_k \\ B_kC & A_k \end{bmatrix}$$

Cette équation peut être résolue par la technique des sous-espaces invariants :

— on commence par trouver un sous-espace $S = \text{Im}(U)$ de dimension n de la matrice A_{cl} :

$$A_{cl} U = U \Lambda \quad (2.13)$$

Ce sous-espace est associé à un ensemble de n valeurs propres de A_{cl} parmi les $n + n_k$ disponibles :

$$\text{spec}(\Lambda) \in \text{spec}(A_{cl})$$

— puis, on partitionne la matrice U des vecteurs qui engendrent ce sous-espace de la façon suivante :

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, U_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

— enfin, on calcule la solution :

$$T = U_2 U_1^{-1}.$$

On peut d'ailleurs facilement vérifier que la matrice T donnée ci-dessus est bien solution de l'équation de RICCATI. Pour cela, il suffit, dans l'équation (2.13), de multiplier à gauche par la matrice $[-U_2 U_1^{-1} \ I]$ et à droite par la matrice U_1^{-1} .

L'existence d'une solution T satisfaisant (2.10) est démontrée lorsque les valeurs propres de la matrice A_{cl} sont distinctes ([31]). Dans le cas général, il existe plusieurs sous-espaces admissibles U et donc, plusieurs solutions. Chaque solution correspond à un choix particulier de n valeurs propres parmi l'ensemble des valeurs propres de la boucle fermée. En outre, on peut faire d'autres remarques :

- C1** la matrice T étant une matrice de transformation, elle doit être inversible ;
- C2** étant donné que l'on souhaite avoir des matrices de gains d'estimation K_f et de retour d'état K_c réelles, il importe également que la matrice T soit réelle.

Conditions nécessaires pour la satisfaction de C1

Même si on ne peut pas dire *a priori* si la solution T existe, on peut citer deux conditions nécessaires (la justification se trouve également dans [4]) pour satisfaire **C1** :

Lemme 2.3.1 $\text{spec}(A - BK_c) = \text{spec}(\Lambda)$

En d'autres termes, les n valeurs propres choisies pour le calcul de T correspondent aux n valeurs propres du retour d'état associé à la forme estimation-retour d'état équivalente : $\text{spec}(A - B_k C)$. Corrolairement, les n valeurs propres restantes (dans le cas d'un paramètre de YOULA statique) correspondent à la dynamique d'estimation.

Lemme 2.3.2 *S'il existe $\lambda \notin \text{spec}(\Lambda)$ telle que λ soit ingouvernable par (A, B) , alors U_1 est singulière.*

Les pôles ingouvernables du système appartiennent à $\text{spec}(A - B_k C)$, ce quel que soit le gain K_c , il convient donc de les sélectionner lors du choix du sous-espace invariant.

Lemme 2.3.3 *S'il existe $\lambda \in \text{spec}(\Lambda)$ telle que λ soit inobservable par (A, C) , alors U_2 est singulière.*

De façon similaire, les pôles inobservables du système appartiennent à $\text{spec}(A - K_f C)$, ce quel que soit le gain K_f , il convient donc de ne pas les sélectionner lors du choix du sous-espace invariant.

Discussion autour de la satisfaction de C2

Lorsque toutes les valeurs propres de la boucle fermée sont réelles, il n'y a pas de problème particulier pour satisfaire la condition T réelle. En effet, les vecteurs propres associés sont tous réels. Il n'en va pas de même lorsqu'une partie (ou l'intégralité) de ces valeurs propres est complexe, puisqu'on ne pourra pas séparer un couple de valeurs propres complexes conjuguées $(\lambda, \bar{\lambda})$ de la façon suivante :

$$\lambda \in \text{spec}(\Lambda) \quad \text{et} \quad \bar{\lambda} \notin \text{spec}(\Lambda).$$

Cela conduirait à une matrice T complexe. On est alors amené à distinguer plusieurs cas.

n est pair. Dans ce cas-là, on peut toujours associer n valeurs propres de la boucle fermée en un ensemble autoconjugué.

n est impair. On doit alors avoir en boucle fermée au moins une valeur propre réelle observable, puisque la matrice U des vecteurs propres de la boucle fermée, qui contient un nombre impair de vecteurs, doit être autoconjuguée. De plus, lorsque le correcteur est de même ordre que le système (paramètre de YOULA statique) il faut également avoir au moins une valeur propre réelle gouvernable, qui fera partie du complémentaire.

2.3.3 Le correcteur est d'ordre supérieur à celui du système

Dans ce cas, le paramètre de YOULA est dynamique. La représentation d'état du correcteur reste identique, mais celle sous forme estimation-retour d'état s'agrandit d'un vecteur d'état supplémentaire correspondant aux états du paramètre de YOULA :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= (A - BK_c - K_f C - BD_q C)\hat{x} + BC_q x_q + (K_f + BD_q)y \\ \dot{\hat{x}}_q &= -B_q C \hat{x} + A_q x_q + B_q y \\ u &= -(K_c + D_q C)\hat{x} + C_q x_q + D_q y \end{cases} \quad (2.14)$$

Le vecteur d'état x_k étant de taille supérieure à \hat{x} , la transformation utilisée précédemment ($x_k = T\hat{x}$) devient insuffisante. On utilise alors une transformation étendue :

$$x_k = \begin{bmatrix} T & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ x_q \end{bmatrix}$$

2.3. RÉALISATION ESTIMATION-RETOUR D'ÉTAT À PARTIR D'UN CORRECTEUR QUELCONQUE

où $T \in \mathbb{R}^{n_k \times n}$ et $V \in \mathbb{R}^{n_k \times n_q}$ de sorte que $[T \ V]$ soit de rang plein.

Lorsqu'on écrit l'équivalence entrées-sorties du correcteur, on arrive aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 T(A - BK_c - K_f C - BD_q C) - VB_q C &= A_k T \\
 TBC_q + VA_q &= A_k V \\
 T(K_f + BD_q) + VB_q &= B_k \\
 -(K_c + D_q C) &= C_k T \\
 C_q &= C_k V \\
 D_q &= D_k
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

En remplaçant les troisième et quatrième équations dans la première équation, on obtient de nouveau l'équation de RICCATI en T . Puis on définit deux nouvelles matrices T^+ et V^+ qui doivent vérifier les équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} T^+ \\ V^+ \end{bmatrix}, \text{ telle que : } \begin{bmatrix} T^+ \\ V^+ \end{bmatrix} [T \ V] = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

On multiplie alors les deuxième et troisième équations dans (2.15) par T^+ et V^+ pour finalement obtenir le système équivalent (2.17).

$$\begin{aligned}
 0 &= A_k T - T(A + BD_k C) - TBC_k T + B_k C \\
 0 &= (T^+ A_k - BC_k)V \\
 A_q &= V^+ A_k V \\
 K_f &= T^+ B_k - BD_k \\
 B_q &= V^+ B_k \\
 K_c &= -(C_k T + D_k C) \\
 C_q &= C_k V \\
 D_q &= D_k
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Le correcteur équivalent est alors entièrement déterminé par les matrices T , T^+ , V et V^+ . L'existence de la solution est donc dépendante de l'existence de ces 4 matrices, qui doivent en outre vérifier les propriétés de (2.16). Afin d'obtenir une équation en T^+ , on multiplie, à gauche et à droite, la première équation de (2.17) par T^+ , puis on remplace les termes TT^+ par $I - VV^+$ et on utilise la seconde équation de (2.17) pour simplifier certains termes. L'équation résultante est présentée en (2.18). Cette équation est présentée sous sa forme transposée.

$$0 = A_k^T T^{+T} - T^{+T} (A + BD_k C)^T - (BC_k)^T + T^{+T} (B_k C)^T T^{+T} \tag{2.18}$$

Cette équation peut également s'écrire sous sa forme factorisée :

$$0 = \begin{bmatrix} -T^{+T} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} A_{cl}^T \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ T^{+T} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

On utilise alors la technique des sous-espaces invariants, déjà utilisée lors de la résolution de l'équation de RICCATI en T . On note $-U_3$ et U_4 les deux partitions des vecteurs qui engendrent le sous-espace invariant ; le résultat est alors $T^+ = -U_3^{-T} U_4^T$.

$$\begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} A_{cl}^T \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \Lambda^T$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\begin{bmatrix} U_3^T & U_4^T \end{bmatrix} A_{cl} = \Lambda \begin{bmatrix} U_3^T & U_4^T \end{bmatrix}$$

On constate alors que cette équation (2.10) est équivalente à l'équation utilisée pour la résolution en T . En effet, les vecteurs $[U_1^T \ U_2^T]^T$ et $[U_3^T \ U_4^T]^T$ font tous les deux partie de l'ensemble des vecteurs propres de la boucle fermée¹.

Il existe alors plusieurs solutions pour T^+ , chaque solution correspondant à une partition faisant référence à des valeurs propres de la boucle fermée différentes. Il y a cependant une restriction : **la partition utilisée pour la complétion de T^+ doit être d'intersection nulle avec celle utilisée pour la complétion de T** . En effet, si tel n'était pas le cas, T^+T serait différent de la matrice identité. Dans le cas où cette condition est remplie, il est facile de montrer que $T^+T = I$ lorsqu'on décompose A_{cl} dans une base orthogonale de vecteurs propres :

$$\begin{aligned} A_{cl} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \Lambda_1 \\ A_{cl} \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} \Lambda_2 \\ \begin{bmatrix} U_1^T & U_2^T \\ U_3^T & U_4^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & U_3 \\ U_2 & U_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On peut vérifier que $T^+T = I$:

$$\begin{aligned} T^+T &= -U_3^{-T} (U_4^T U_2) U_1^{-1} \\ T^+T &= -U_3^{-T} (-U_3^T U_1) U_1^{-1} \\ T^+T &= I \end{aligned}$$

Les résolutions de T et de T^+ peuvent donc se faire de façon simultanée. En ce qui concerne l'obtention de V et V^+ , les deux équations de (2.20) suffisent.

$$\begin{aligned} T^+V &= 0 \\ \begin{bmatrix} T^+ \\ V^+ \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T & V \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \tag{2.20}$$

La première équation permet de déterminer une matrice V solution. En effet, T^+ est de taille $n \times n_k$ et de rang n , son noyau est donc de rang $n_k - n = n_q$ et chaque vecteur du noyau possède n éléments. On choisit donc pour V une base du noyau de T^+ . La seconde équation permet alors de reconstituer la matrice V^+ correspondante.

1. Pour être exact, ces vecteurs correspondent aux vecteurs propres uniquement si A_{cl} est diagonalisable et que l'on a choisi une décomposition de SCHUR dans cette base. Dans le cas général, ces deux vecteurs font tout de même référence au même ensemble de valeurs propres, $\text{spec}(A_{cl})$.

Attribution des différentes dynamiques

Il y a des choix à faire pour déterminer les valeurs propres que l'on attribue à chaque dynamique :

- pour la dynamique de $A - BK_c$, qui correspond au choix des vecteurs du sous-espace qui permet d'obtenir T , on privilégie souvent l'une ou l'autre de ces deux solutions :
 - on choisit les pôles de la boucle fermée qui sont les plus proches des pôles du système en boucle ouverte ;
 - on fait un suivi des pôles du système en boucle ouverte pour voir à quels pôles en boucle fermée ils sont associés (pour cela, on fait varier le gain de boucle de 0 à 1).

La première solution présente l'avantage d'obtenir un gain de retour d'état K_c minimal ; la seconde d'être plus naturelle. Cependant, il arrive fréquemment que ces deux solutions soient identiques. Comme dans le cas du paramètre de YOULA statique, les valeurs propres ingouvernables doivent être incluses dans ce choix.
- pour le choix de $A - K_f C$, qui correspond au choix des vecteurs du sous-espace qui permet d'obtenir T^+ , on peut prendre les valeurs propres du système les plus rapides pour obtenir un estimateur performant.
- la dynamique de A_q est alors déterminée de façon automatique, puisqu'il s'agit des pôles qui n'ont pas été sélectionnés pour les deux dynamiques précédentes.

En pratique, le choix de la dynamique de $A - BK_c$ semble plus important que les autres.

Remarque : Dans le cas du paramètre de YOULA statique, on devait trouver un sous-espace invariant autoconjugué pour le calcul de T (le sous-espace restant étant, de fait, autoconjugué lui aussi). Ici, il faut former deux groupes autoconjugués, un pour T et un autre pour T^+ , ce qui restreint un peu les possibilités. On peut préciser les différentes situations :

n est pair. Dans ce cas-là, il est toujours possible de former deux groupes de n vecteurs autoconjugués.

n est impair. Il faut qu'il y ait comme dans le cas d'un paramètre de YOULA statique au moins deux valeurs propres réelles en boucle fermée, une étant observable, l'autre gouvernable. Cependant, dans le cas d'un paramètre de YOULA statique, le fait qu'il y ait une valeur propre réelle en boucle fermée implique forcément qu'il y en ait une seconde, puisqu'il y a en tout un nombre pair de valeurs propres. Dans le cas d'un paramètre de YOULA dynamique, il se peut qu'il n'y ait qu'une seule valeur propre réelle en boucle fermée si n_k est pair, auquel cas il n'y aura pas de solution réelle.

Plus généralement, dans le cas n impair, la boucle fermée doit avoir au moins deux valeurs propres réelles si n_k est impair, et trois valeurs propres réelles si n_k est pair pour qu'il existe une paramétrisation réelle.

2.3.4 Le correcteur est d'ordre strictement inférieur à celui du système

Il faut alors distinguer deux possibilités :

- $n_k + p \geq n$, alors il y a la possibilité d'utiliser une forme estimation-retour d'état faisant intervenir un observateur de LUENBERGER ;
- $n_k + p < n$, dans ce cas-là, il n'est pas possible de faire une estimation complète de tous les pôles du système, on est amené à construire un modèle réduit.

Cas $n_k + p \geq n$

Dans ce cas, la matrice $[T^T \ C^T]$ est de rang n (à condition que la matrice C soit de rang plein). On établit alors l'équivalence entrées-sorties entre le correcteur dans sa représentation d'état et le correcteur sous sa forme estimation-retour d'état. On rappelle les équations du correcteur sous sa forme estimation-retour d'état :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} &= F\hat{z} + Gy + TBu \\ u &= -(K_c + D_q C)H_1 \hat{z} + [-(K_c + D_q C)H_2 + D_q]y \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} TA - FT &= GC \\ H_1 T + H_2 C &= I \end{aligned}$$

On obtient donc le système suivant :

$$\begin{aligned} F &= A_k - TBC_k \\ G &= B_k - TBD_k \\ -(K_c + D_c C)H_1 &= C_k \\ -(K_c + D_c C)H_2 + D_q &= D_k \end{aligned}$$

Grâce aux deux premières équations et à la relation qui relie les matrices T , F , G , C et A , on retrouve l'équation de RICCATI pour le calcul de T . Cette dernière se résout de la même façon que dans les cas précédents. De plus, si on additionne la troisième équation, multipliée à droite par T , à la dernière équation multipliée à droite par C , on obtient alors l'équation qui donne K_c :

$$K_c = -C_k T - D_k C$$

Comme on peut le constater, cette équation est identique à celle trouvée avec des estimateurs d'ordre plein.

La résolution en H_1 et H_2 , est assez simple à effectuer puisque :

$$[H_1 \ H_2] = \text{pinv}\left(\begin{bmatrix} T \\ C \end{bmatrix}\right)$$

où pinv désigne la pseudo-inverse. Le plus simple étant de choisir la pseudo-inverse de MOORE-PENROSE. Enfin, le calcul de D_q conduit à :

$$D_q = (D_k + K_c H_2)(I - C H_2)^{-1}$$

Cas $n_k + p < n$

Tous les modes du système ne peuvent pas être estimés. On construit donc un modèle réduit du système dont l'ordre n' doit être inférieur ou égal à $n_k + p$. Puis, à partir de ce modèle réduit, on utilise une des trois transformations présentées (en fonction de l'ordre de ce modèle réduit). Le modèle du système ainsi utilisé est nommé “**modèle embarqué**”. En boucle fermée, on aura donc un estimateur qui n'est pas basé sur le système auquel il s'applique. Dans le cas où on choisit de réduire le système à la dimension du correcteur par exemple, on retrouve un schéma identique à celui de la figure 2.2 avec des matrices A_0, B_0, C_0 différentes des matrices A, B, C . On perd alors les propriétés de séparation des dynamiques (entre $A - BK_c$ et $A - K_f C$).

Dans un objectif d'ajustement d'une loi de commande, il convient alors de construire un modèle embarqué qui prenne en compte les dynamiques principales du système et les dynamiques sur lesquelles on souhaite agir.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre on a donc décrit comment passer d'un correcteur sous sa représentation d'état à un correcteur équivalent sous forme estimation-retour d'état. On y a également précisé dans quels cas il n'était pas possible de trouver cette équivalence.

En fonction de l'ordre du correcteur, on a pu distinguer quatre cas. Tant que le correcteur est d'ordre supérieur ou égal à l'ordre du système diminué du nombre de ses sorties, on peut réaliser un estimateur complet des états du système. On se trouve alors avec une structure estimation-retour d'état avec un paramètre de YOULA statique ou dynamique ou avec un observateur de type LUENBERGER. Dans ce cas, des propriétés fortes sont mises en évidence : **les différents groupes de dynamiques du système en boucle fermée sont indépendants**. Ceci permet de faciliter d'éventuels ajustements, puisqu'en agissant sur une matrice de gain (K_c ou K_f), on agit sur une partie des pôles seulement. Dans le dernier cas, où le correcteur possède un ordre insuffisant, on est amené à faire une réduction préalable du système. Le correcteur sous sa forme estimation-retour d'état est tout de même identique à celui exprimé dans sa représentation d'état, cependant, en boucle fermée il est effectué une “approximation” sur l'estimation des états et sur la séparation des dynamiques, ce principe n'étant plus exact.

Quel que soit le cas dans lequel on se trouve, cette structure possède tout de même un avantage d'un point de vue lisibilité. Par la suite, elle sera utilisée lorsqu'on souhaitera modifier l'emplacement d'un pôle de la boucle fermée (voir chapitre 11).

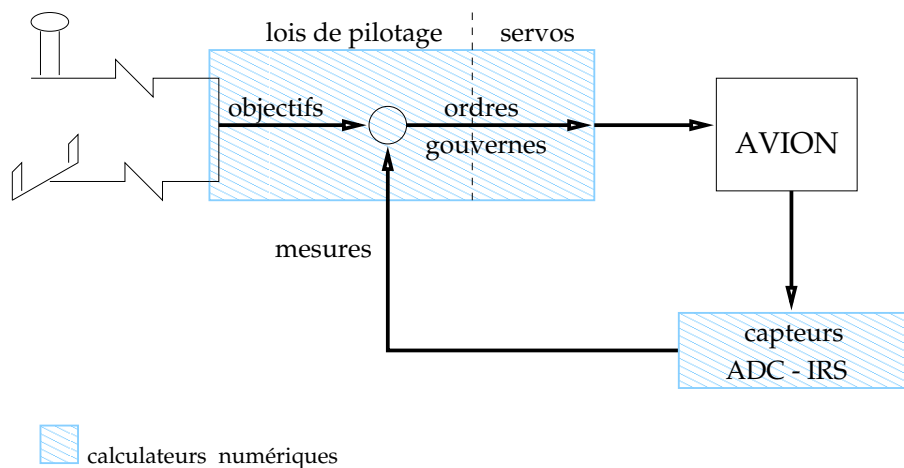
Chapitre 3

Présentation des modèles avion

3.1 Introduction

Nous présentons ici le principe des commandes de vol électriques ainsi que deux modèles d'un avion de transport civil. Le premier modèle est un modèle longitudinal, qui sera utilisé dans la partie II pour illustrer la technique d'ajustement d'une loi de commande avec la Forme Standard de Passage. Le second, quant à lui, est un modèle latéral, utilisé dans la troisième partie pour illustrer la méthode d'ajustement de placement de pôles mise au point dans la partie III et basée sur l'outil d'identification bayésienne.

3.2 Principe des commandes de vol électriques



ADC : Air Data Computer (centrale anémométrique)

IRS : Inertial Reference System (centrale inertielle)

FIGURE 3.1: Principe des commandes de vol électriques.

Le concept des commandes de vol électriques est résumé à la figure 3.1. On peut distinguer trois ensembles rattachés à la partie système : les servocommandes, l'avion et les capteurs ; et un ensemble supplémentaire pour les lois de pilotage, qui est associé au bloc servocommandes. Le pilote dispose de deux organes de pilotage, le palonnier et le manche. Des capteurs sont situés sur les organes de pilotage pour transformer les ordres du pilote en objectifs de commande. La différence entre ces objectifs et les mesures fournies par les capteurs (anémométriques et inertiels) permet de déduire l'ordre de commande envoyé aux servocommandes. Ce type de structure permet d'intégrer les techniques modernes de l'automatique pour commander les braquages des gouvernes en fonction des ordres du pilote et de l'état mesuré de l'avion. Fréquemment, le système à commander est un modèle linéarisé en un point de vol, mis sous forme de représentation d'état.

Il existe deux types de pilotage pour un avion : le pilotage latéral et le pilotage longitudinal. Généralement, les lois de commande réalisées sur les avions séparent ces deux pilotages. Le pilotage longitudinal consiste à commander la chaîne de tangage, le pilote pouvant agir sur le manche et la manette des gaz. Le pilotage latéral consiste à commander simultanément la chaîne de roulis et de lacet à l'aide du palonnier et du manche. Le roulis est principalement contrôlé par les ailerons (en braquage différentiel) situés aux extrémités des ailes de l'avion. Le lacet est principalement contrôlé par la gouverne de direction située à l'arrière de l'avion (surface "verticale"). Enfin, le tangage est principalement contrôlé par la gouverne de profondeur située elle aussi à l'arrière de l'appareil (surface "horizontale").

3.3 Modèle longitudinal de l'avion

3.3.1 Modèle rigide

Généralement, le modèle longitudinal rigide d'un avion fait intervenir 5 états :

- la vitesse réduite $u = \frac{V-V_e}{V_e}$ où V constitue la norme du vecteur vitesse de l'appareil et V_e sa valeur à l'équilibre ;
- l'écart de pente par rapport à l'équilibre $\bar{\gamma}$, où γ , la pente, désigne l'angle entre le plan horizontal et le vecteur vitesse ;
- l'écart d'incidence par rapport à l'équilibre $\bar{\alpha}$, où α , l'incidence, est l'angle entre l'axe du fuselage de l'avion et la projection du vecteur vitesse sur le plan de symétrie de l'avion ;
- la vitesse de tangage q qui est la vitesse de rotation de l'avion autour de l'axe perpendiculaire au plan de symétrie de l'avion ;
- et l'écart d'altitude par rapport à l'équilibre h .

Les 5 pôles de ce système correspondent à trois modes décrivant le mouvement longitudinal de l'avion :

- *l'oscillation d'incidence* : c'est un mode oscillatoire associé aux états $\bar{\alpha}$ et q dont la pulsation est située autour de $2rad/sec$ et l'amortissement autour de 0.5. Il est déterminant pour les qualités de vol longitudinales.

3.3. MODÈLE LONGITUDINAL DE L'AVION

- *le mode phugoïde* : c'est également un mode oscillatoire associé aux états u et $\bar{\gamma}$. C'est un mode extrêmement lent (pulsation autour de $0.1rad/sec$) et très mal amorti (amortissement autour de 0.1). Cependant, par sa lenteur, il ne crée pas de difficultés majeures car il est facilement pilotable autant par le pilote que par un pilote automatique.
- *le rappel de propulsion* : il s'agit d'un mode apériodique associé à l'altitude h . C'est un mouvement très lent (pulsation autour de $0.01rad/sec$) qui ramène la pente à 0.

Sur le modèle que nous utilisons, les deux derniers modes, la phugoïde et le rappel de propulsion, ont été négligés, ce qui revient à dire que le vecteur vitesse de l'avion est constant. Le modèle rigide est alors d'ordre 2. Sa pulsation est de $1.65rad/sec$ et son amortissement de 0.58.

En outre, le système dispose de 5 commandes : les gouvernes de profondeur (internes et externes) et les ailerons (internes, médians, et externes) utilisés en braquage symétrique.

3.3.2 Modèle longitudinal complet

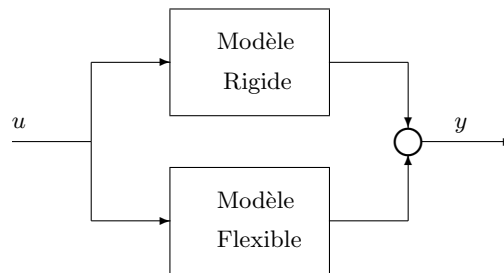


FIGURE 3.2: Modèle de l'avion souple.

L'avion souple se distingue de l'avion rigide par la prise en compte des déformations aéroélastiques dues au couplage entre les modes structuraux et les efforts aérodynamiques. Ces déformations sont calculées par rapport à une position d'équilibre de l'avion à Mach et vitesse constants. La procédure d'obtention du modèle d'état de l'avion flexible (ou souple) est donné dans [13]. Le modèle global est alors obtenu par un couplage entre les sorties du modèle rigide et celles du modèle flexible (figure 3.2).

L'augmentation de la taille des avions, sans pour autant rigidifier les structures de façon significative, conduit à des modèles souples faisant apparaître un plus grand nombre de modes. De plus, les modes souples de basse fréquence ont tendance à se rapprocher de la bande passante du système.

En plus des modes rigides et souples de l'avion, il faut comptabiliser un certain nombre de modes représentant la dynamique parasite liée, entre autres, aux dynamiques des actionneurs.

Le modèle qu'on présente ici est d'ordre 29. Il comporte :

- 1 mode rigide (complexe),

- 8 modes flexibles (complexes),
- et 11 états secondaires pour la dynamique parasite, qui représente la dynamique des actionneurs et les retards aerodynamiques.

Mises à part les 5 commandes décrites dans le paragraphe sur le modèle longitudinal rigide, le modèle possède également une entrée vent. Enfin il a 16 sorties :

- 5 mesures, utilisées par le correcteur,
- 3 sorties utilisées pour évaluer les critères de confort,
- et 8 sorties charges, pour analyser les efforts exercés sur la structure de l'avion.

3.4 Modèle latéral de l'avion

3.4.1 Modèle rigide

Lorsqu'on écrit les équations de la dynamique pour le comportement latéral de l'avion, on arrive à la construction d'un modèle, non linéaire, qui comporte quatre états, dits états rigides :

- β , l'angle de dérapage (*rad*), qui est l'angle entre le vecteur vitesse de l'avion et sa projection sur le plan de symétrie.
- p , la vitesse de roulis (*rad/s*), qui correspond à la vitesse de rotation de l'avion autour de son axe longitudinal.
- r , la vitesse de lacet (*rad/s*), qui correspond à la vitesse de rotation de l'avion autour de son axe vertical.
- ϕ , l'angle de gîte (*rad*), qui est l'angle de rotation autour de son axe longitudinal.

Deux variables supplémentaires apparaissent : la vitesse de tangage (q_0) et l'angle d'incidence (α_0). La linéarisation de ce modèle se fait autour d'un point d'équilibre défini par :

$$\beta_{eq} = \phi_{eq} = r_{eq} = p_{eq} = q_{eq} = 0$$

Cela suppose, pour que la linéarisation soit valide, des faibles écarts autour de ces valeurs d'équilibre. Pour β , cela est justifié, car cet angle reste généralement faible. À noter toutefois que, lorsque les manoeuvres impliquent de forts angles de roulis (supérieurs à 30 degrés), on entre dans les limites de cette modélisation. Pour agir sur ces différents états, les commandes sont constituées du braquage différentiel des ailerons et du braquage de la gouverne de direction.

Autour du point de fonctionnement qu'on a choisi, la matrice dynamique associée à ces états est la suivante :

$$A_{rig} = \begin{bmatrix} -0.14 & 0.053 & -0.1 & 0.047 \\ -2.241 & -0.992 & 0.262 & 0 \\ 1.595 & -0.041 & -0.267 & 0 \\ 0 & 1 & 0.053 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui donne les modes suivants :

Ces modes correspondent en fait aux modes de l'avion si celui-ci est équipé de commandes hydromécaniques (sans loi de commande) :

3.5. MODÈLE LATÉRAL COMPLET

mode	valeur propre	$\omega_i(rad/s)$	ξ_i
roulis pur	-1.03	1.03	1
spiral	$-3.84 \cdot 10^{-3}$	$3.84 \cdot 10^{-3}$	1
roulis hollandais	$-0.185 + / - 1.33i$	1.34	0.138

TABLE 3.1: Modes rigides en boucle ouverte

— *le mode de roulis pur*: il s'agit d'un mode apériodique, généralement rapide (autour de $1rad/s$) qui correspond à la mise en vitesse de roulis de l'avion à la suite d'un braquage des ailerons.

— *le mode spiral*: il s'agit d'un mode apériodique très lent. Le pôle associé est très proche de 0. Supposons que l'avion soit en virage stabilisé ($\phi = \text{constante}$ et $p = 0$) et que le pilote remette le manche en position neutre; alors, si le pôle est stable, l'avion revient à un vol en palier ($\phi = 0$), et si le pôle est intégrateur, l'avion maintient son inclinaison.

— *le mode de roulis hollandais*, aussi appelé oscillation de dérapage: il s'agit d'une oscillation entre le dérapage β et la vitesse de roulis r qui provoque un mouvement de roulis (souvent désagréable pour les passagers) durant le vol.

3.5 Modèle latéral complet

Le modèle latéral de l'avion souple se construit de la même manière que pour le modèle longitudinal. À la dynamique rigide s'ajoute une dynamique flexible, ainsi que des dynamiques supplémentaires associées à la modélisation des turbulences aérodynamiques et des servocommandes.

Pour le modèle que nous avons choisi, on dénombre 18 modes flexibles (soit 36 pôles) dont le plus basse fréquence a une pulsation de $9.47 rad/s$. Le tableau 3.2 fait l'inventaire des caractéristiques des différents modes flexibles¹ de ce modèle.

Aux 40 états déjà présents dans la représentation de l'avion souple (4 états rigides et 36 états flexibles) viennent s'ajouter 28 pôles supplémentaires. Parmi ces 28, 8 sont ingouvernables, et sont éliminés de la représentation. Le modèle final est donc d'ordre 60.

Le nombre de commandes est de 4: deux gouvernes de direction, basse et haute, et deux paires d'ailerons, internes et externes, utilisés en braquage antisymétrique. On dénombre également 6 mesures, situées à divers endroits du fuselage de l'avion. Ces mesures correspondent aux entrées du correcteur. Enfin, en addition de ces 6 mesures, on dispose de 4 sorties représentant les états rigide de l'avion (β , p , r et ϕ) qui sont utilisées pour les simulations temporelles.

1. Un mode est jugé flexible si son amortissement est inférieur à 0.2 (parfois à 0.3) et qu'il ne fait pas partie des modes rigides. Le roulis hollandais n'est donc pas un mode flexible bien que fortement oscillant.

N°	valeur propre	ω_i (rad/s)	ξ_i
1	$-0.55 \pm 9.46i$	9.47	0.058
2	$-0.15 \pm 10.60i$	10.60	0.014
3	$-0.37 \pm 10.86i$	10.87	0.034
4	$-0.34 \pm 11.87i$	11.88	0.029
5	$-0.37 \pm 13.49i$	13.49	0.027
6	$-0.56 \pm 16.46i$	16.46	0.034
7	$-0.24 \pm 17.40i$	17.41	0.014
8	$-0.80 \pm 18.49i$	18.51	0.043
9	$-1.80 \pm 21.83i$	21.90	0.082

N°	valeur propre	ω_i (rad/s)	ξ_i
10	$-3.23 \pm 25.01i$	25.22	0.128
11	$-0.90 \pm 25.95i$	25.97	0.035
12	$-0.59 \pm 30.57i$	30.57	0.019
13	$-0.62 \pm 31.70i$	31.70	0.020
14	$-1.23 \pm 46.26i$	46.28	0.027
15	$-8.39 \pm 56.35i$	56.97	0.147
16	$-1.61 \pm 59.61i$	59.63	0.027
17	$-3.21 \pm 61.91i$	61.99	0.052
18	$-1.68 \pm 73.48i$	73.50	0.023

TABLE 3.2: Modes flexibles de l'avion souple en boucle ouverte.

Deuxième partie

**Structuration d'un problème
multi-objectifs**

Chapitre 4

Introduction

Cette partie présente une méthode de synthèse ou d'ajustement d'une loi de commande, qui vise à minimiser plusieurs critères de type H_2 ou H_∞ . Elle permet de prendre en compte un correcteur préalablement synthétisé, dans un problème de commande standard, afin d'enrichir celui-ci de spécifications H_2 et/ou H_∞ . Indirectement, la méthode peut également être utilisée lors d'une procédure générale de synthèse multi-objectifs.

Plaçons-nous d'abord dans le cadre où il y a plusieurs objectifs à atteindre. Lorsque cela ne sera pas précisé, on supposera que le nombre d'objectifs (ou de groupes d'objectifs) est de deux, la procédure pouvant tout de même s'étendre à n objectifs. Ces deux objectifs considérés peuvent se mettre sous la forme de critères H_2 ou H_∞ , et ce de façon indépendante. Le problème général peut alors se schématiser de la façon suivante :

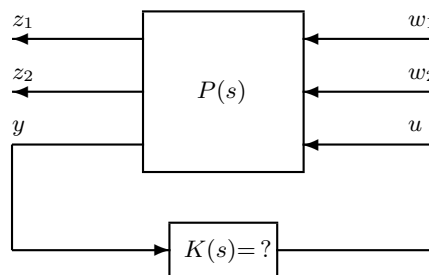


FIGURE 4.1: Présentation d'un problème standard.

Le but est alors de trouver le correcteur $K(s)$ qui minimise d'une part la norme (au sens H_2 ou H_∞) du transfert $w_1 \rightarrow z_1$ et d'autre part la norme (au sens H_2 ou H_∞ , mais indépendamment de la norme utilisée sur le premier transfert) du transfert $w_2 \rightarrow z_2$.

Bien entendu, la minimisation des deux critères qui font tous les deux appel à la même variable d'optimisation (ici $K(s)$) n'est pas compatible. On cherche alors à résoudre un problème voisin, ce problème étant souvent présenté sous une des deux

formes suivantes :

★ on regroupe les deux transferts sous la même norme, à condition que les deux critères choisis soient de même nature (H_2 ou H_∞ tous les deux). Le problème se formalise alors de la sorte :

$$K^*(s) = \arg \min_{K(s)} (\|F_l(P(s), K(s))\|_{2 \text{ ou } \infty})$$

★ on se fixe un objectif minimal à atteindre pour un des deux critères, et l'on cherche à minimiser le second sous la contrainte que le premier objectif soit réalisé. Le problème se formalise cette fois-ci comme :

$$K^*(s) = \arg \min_{K(s)} (\|F_l(P(s), K(s))_{11}\|_{2 \text{ ou } \infty}) \\ \text{avec } \|F_l(P(s), K(s))_{22}\|_{2 \text{ ou } \infty} < \gamma$$

Dans le premier cas, on introduit des pondérations sur les différentes entrées w_1 , w_2 et les différentes sorties z_1 , z_2 afin de pondérer l'influence des deux critères dans le critère global. Cette méthode présente principalement deux inconvénients : il n'est pas possible de prendre en considération deux normes de nature différente et l'influence des transferts "croisés" ($w_1 \rightarrow z_2$ et $w_2 \rightarrow z_1$), dans le critère global, n'est pas maîtrisée de façon simple avec le jeu des pondérations, et entraîne une solution conservative.

La seconde méthode est en soi bien meilleure. Malheureusement, en pratique, la résolution du problème correspondant est difficile. Des solutions existent, notamment avec l'aide de LMIs¹ ; l'article de SCHERER, GAHINET et CHILALI [36] en donne un exemple. Ces méthodes restent encore imparfaites.

La solution proposée dans cette partie conserve la "simplicité" de résolution de la première méthode, mais permet d'intégrer des critères de natures différentes. Cette méthode est basée sur un outil, nommé *Forme Standard de Passage* [CSF]², qui permet, à partir d'un correcteur existant, de construire un problème standard dont la solution est le correcteur en question. Cet outil est présenté dans le chapitre 5. La CSF est établie, dans la section 5.3, pour un correcteur d'ordre inférieur ou égal à celui du système. Elle est ensuite généralisée, dans la section 5.4, aux correcteurs d'ordre quelconque et aux correcteurs à deux degrés de liberté. Dans le chapitre 6, on précise alors comment l'outil CSF peut être utile pour la résolution du problème multi-objectifs. L'idée générale est la suivante :

- ★ on construit un correcteur optimal pour le sous-problème faisant intervenir uniquement le transfert $w_1 \rightarrow z_1$,
- ★ puis, on construit un nouveau problème standard, grâce à la CSF, dont le correcteur obtenu au point précédent est la solution,
- ★ enfin, on ajoute à ce problème le second transfert $w_2 \rightarrow z_2$ et on effectue la synthèse finale.

Cette façon de procéder sera d'abord illustrée par un exemple simple, sur un système masses-ressort à partir de la section 6.4, afin de bien appréhender les apports de cette méthode et ses limites.

1. "Linear Matrix Inequalities".
2. De l'anglais "Cross Standard Form".

En ce qui concerne l'ajustement de loi de commande, l'outil CSF est très bien approprié pour prendre en compte un correcteur déjà synthétisé et y ajouter de nouvelles spécifications, sous la forme d'un critère H_2 ou H_∞ . L'étape de synthèse initiale est alors court-circuitée. Le correcteur final comportera donc une amélioration vis-à-vis des spécifications nouvellement prises en compte, sans pour autant s'éloigner trop du correcteur initial. Le chapitre 7 illustre cette façon de procéder sur un modèle d'avion.

Chapitre 5

La Forme Standard de Passage

5.1 Introduction

La Forme Standard de Passage¹ correspond à un problème standard H_2 ou H_∞ dont la solution est un correcteur connu par avance et préalablement synthétisé par une approche quelconque. On peut donc la définir dans un premier temps comme une solution des problèmes H_2/H_∞ inverses. Dans le cas particulier du problème inverse H_∞ , plusieurs contributions ont déjà été en considérant des cas particuliers. On trouvera par exemple dans [23] le cas d'un correcteur par retour d'état, et dans [30] le cas particulier d'un problème de sensibilité appliqué à un système mono-entrée/mono-sortie.

Cet outil a déjà été introduit dans [5]. Les différentes réalisations de la CSF y sont décrites à partir de la forme estimation/retour d'état du correcteur initial. La CSF ne s'exprimait donc que dans les cas où le système est d'ordre inférieur à celui du correcteur. L'apport original de ce chapitre est la généralisation de l'outil. En effet, une formulation de la CSF qui permet de prendre en compte des correcteurs d'ordre quelconque (vis-à-vis de l'ordre du système) augmente considérablement le champ d'action de l'outil; en aéronautique en particulier, le correcteur est fréquemment d'ordre inférieur à celui du modèle. Une généralisation aux correcteurs à deux degrés de liberté a également été menée.

Outre la généralisation de la CSF, sa définition a été modifiée afin de garantir que le correcteur initial est la solution unique à ce problème de commande. De plus, la CSF est directement établie à partir de sa définition alors qu'elle était donnée *a priori* dans [5, 43]. On posera également des conditions nécessaires pour que la Forme Standard de Passage existe (ou n'existe pas).

5.2 Préliminaires

L'intérêt pratique des solutions des problèmes inverses H_2 ou H_∞ réside dans la possibilité de rassembler plusieurs approches différentes pour un problème et de pouvoir prendre en compte différentes spécifications [40, 37]. La Forme Standard de Passage

1. ou *Cross Standard Form* (CSF).

constitue une solution à la fois pour le problème inverse H_2 , et pour le problème inverse H_∞ . Cependant, l'approche sous laquelle est traité le problème inverse est différente des approches existantes.

Une solution du problème inverse H_∞ dans le cas général (entrées et sorties multiples, retour de sortie dynamique) a déjà été établie dans [35] : considérant une structure de pondérations $W(s)$ connu ainsi qu'un correcteur $K(s)$ également connu, le problème consistait à trouver le système correspondant $G(s)$ de sorte que :

$$\|F_l(F_l(W(s), G(s)), K(s))\|_\infty < \gamma$$

L'illustration se trouve figure 5.1). Cependant, le problème inverse auquel on s'intéresse ici est différent : il s'agit en quelque sorte de trouver la structure des pondérations en connaissant le système $G(s)$ et le correcteur $K(s)$.

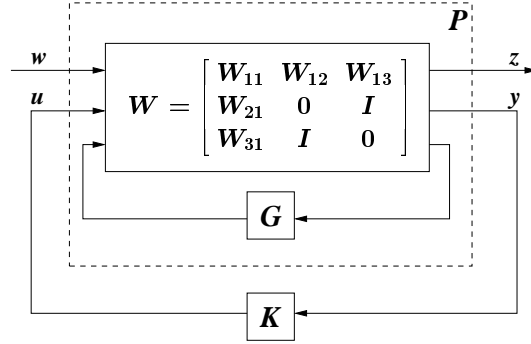


FIGURE 5.1: Schéma bloc d'une forme standard P et du correcteur K .

5.2.1 Définitions

Avant de procéder à la construction de la Forme Standard de Passage, les notions qui seront utilisées vont être définies ici.

On considère un système $G(s)$ d'ordre n , stabilisable et détectable, pourvu de m entrées et de p sorties, dont la réalisation d'état minimale s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

On considère également un correcteur stabilisant $K_0(s)$ d'ordre n_k , pourvu de p entrées et m sorties, dont une réalisation d'état minimale s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_k \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

La forme standard générale entre les entrées exogènes w , les commandes u , les sorties exogènes z et les sorties contrôlées y est notée :

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{zw}(s) & P_{zu}(s) \\ P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

avec la réalisation d'état correspondante :

$$P(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A_p & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (5.4)$$

Problèmes inverses

On définit alors les problèmes H_2 et H_∞ inverses comme suit :

Définition 5.2.1 (Problème inverse H_2) *Il s'agit de trouver une forme standard $P(s)$ qui vérifie les conditions suivantes :*

- $P_{yu}(s) = G(s)$,
- K_0 stabilise $P(s)$,
- $K_0(s) = \arg \min_{K(s)} \|F_l(P(s), K(s))\|_2$,

Autrement dit : $K_0(s)$ minimise $\|F_l(P(s), K(s))\|_2$.

Définition 5.2.2 (Problème inverse H_∞) *Il s'agit de trouver une forme standard $P(s)$ qui vérifie les conditions suivantes :*

- $P_{yu}(s) = G(s)$,
- K_0 stabilise $P(s)$,
- $K_0(s) = \arg \min_{K(s)} \|F_l(P(s), K(s))\|_\infty$,

Autrement dit : $K_0(s)$ minimise $\|F_l(P(s), K(s))\|_\infty$.

On remarquera que ces deux définitions ne diffèrent que par la norme employée. De plus si

$$\|F_l(P(s), K_0(s))\|_2 = 0$$

alors,

$$\|F_l(P(s), K_0(s))\|_\infty = 0$$

la réciproque étant également vraie. Ceci conduit à introduire la notion de Forme Standard de Passage.

Forme Standard de Passage

Définition 5.2.3 *Si la forme standard $P(s)$ vérifie les conditions suivantes :*

- $P_{yu}(s) = G(s)$,
- K_0 stabilise $P(s)$,
- $F_l(P(s), K_0(s)) = 0$,

alors $P(s)$ est une forme standard pour le problème inverse H_2 et le problème inverse H_∞ , associée au système $G(s)$ et au correcteur $K_0(s)$.

Par construction, cette forme standard est solution des problèmes H_2 et H_∞ inverses.

Cette définition a déjà été utilisée dans [5]. Cependant, avec une synthèse H_2 ou H_∞ sur la forme standard ainsi créée, on souhaiterait obtenir le correcteur initial (et

uniquement celui-ci) afin d'éviter les pertes d'informations (ou d'explorer un espace de solutions admissibles trop vaste). Or, la définition 5.2.3 ne garantit pas ce résultat. En effet, l'exemple trivial suivant soulève ce problème. Supposons $P(s)$ tel que :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

On peut facilement vérifier que cette forme standard remplit les conditions de la définition 5.2.3 quel que soit le correcteur stabilisant. Le problème perd alors une partie conséquente des données initiales : l'intégralité des données du correcteur initial. Pour pallier ce problème, la définition 5.2.3 doit être complétée :

Définition 5.2.4 (Forme Standard de Passage) *Si la forme standard $P(s)$ vérifie les conditions suivantes :*

- **C1** $P_{yu}(s) = G(s)$,
- **C2** K_0 stabilise $P(s)$,
- **C3** $F_l(P(s), K_0(s)) = 0$,
- **C4** $K_0(s)$ est l'unique solution du problème H_2 ou H_∞ optimal $P(s)$,

alors $P(s)$ est appelée Forme Standard de Passage (CSF), associée au système $G(s)$ et au correcteur $K_0(s)$.

$K_0(s)$ devenant l'unique solution du problème, cette définition garantit la conservation de l'intégralité du problème (les données concernant $G(s)$ sont conservées grâce à la condition **C1**).

5.2.2 Compléments

Dans les sections suivantes, on se propose d'établir des Formes Standards de Passage dans différents cas en s'appuyant sur les définitions précédentes. Ces constructions font appel à d'autres notions qui sont introduites ici.

Définition 5.2.5 (Problème d'optimisation H_2 régulier) *Un problème est dit H_2 régulier s'il fait référence à un problème standard pour lequel $P(s)$ satisfait :*

- D_{12} est de rang plein en colonnes (injective),
- D_{21} est de rang plein en lignes (surjective),
- Les systèmes (A_p, B_1, C_2, D_{21}) et (A_p, B_2, C_1, D_{12}) n'ont pas de zéros invariants sur l'axe imaginaire.

Cette définition est tirée de [8]. Elle sera utilisée pour l'établissement de la condition **C4** lors de la construction de la CSF. En particulier, cette définition est associée au lemme suivant (cf. [8] pour plus de détails) :

Lemme 5.2.6 *Si le système $P(s)$ satisfait les conditions d'un problème régulier, alors $P(s)$ a un unique correcteur H_2 -optimal si et seulement si :*

- (A_p, B_2) est stabilisable,

— (A_p, C_2) est détectable.

De plus, dans ce cas précis, l'unique correcteur H_2 -optimal pour le problème $P(s)$ est donné par les équations (5.6)².

$$\begin{cases} \dot{\xi} = (A_p + B_2 F + L C_2) \xi - L y \\ u_\xi = F \xi \end{cases} \quad (5.6)$$

avec :

$$\begin{aligned} F &= -(D_{12}^T D_{12})^{-1} (D_{12}^T C_1 + B_2^T R) \\ L &= -(Q C_2^T + B_1 D_{21}^T) (D_{21} D_{21}^T)^{-1} \\ R, Q &\geq 0 \end{aligned}$$

Q et R correspondant aux solutions stabilisantes des équations de RICCATI :

$$0 = R A_p + A_p^T R + C_1^T C_1 - (R B_2 + C_1^T D_{12}) (D_{12}^T D_{12})^{-1} (R B_2 + C_1^T D_{12})^T \quad (5.7)$$

$$0 = Q A_p^T + A_p Q + B_1 B_1^T - (C_2 Q + D_{21} B_1^T)^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} (C_2 Q + D_{21} B_1^T) \quad (5.8)$$

Le lecteur pourra remarquer que le correcteur donné à l'équation (5.6) correspond à une forme estimation/retour d'état.

5.3 La CSF dans le cas $n_k \leq n$

On traite dans un premier temps le cas du correcteur d'ordre inférieur ou égal au système. Le premier objectif est de construire une forme standard vérifiant les conditions **C1**, **C2** et **C3** de façon la plus générale possible. Dans un second temps, des conditions supplémentaires sur la forme standard précédemment obtenue seront introduites afin de remplir la condition **C4**. Une CSF sera alors obtenue. L'existence de cette Forme Standard de Passage est soumise à certaines conditions sur le système $G(s)$ et son correcteur $K_0(s)$, ce qui fera l'objet d'un troisième point.

Dans le but de simplifier les démonstrations, la matrice de transmission directe D du système $G(s)$ sera considérée comme nulle.

5.3.1 Construction d'un problème $P(s)$ général

Pour satisfaire la condition **C1**, la forme standard de l'équation (5.4), où $P(s)$ est supposée être minimale, doit vérifier :

$$\begin{aligned} A_p &= A \\ B_2 &= B \\ C_2 &= C \\ D_{22} &= D (= 0) \end{aligned}$$

2. Il est important de noter qu'ici les matrices D_{11} et D_{22} sont considérées comme nulles, sans que cela ne soit préjudiciable pour le cas général comme cela sera vu ultérieurement.

Les matrices B_1 , C_1 , D_{11} , D_{12} et D_{21} restent donc inconnues. Le correcteur étant stabilisant, la condition **C2** est remplie par défaut.

On calcule alors une représentation de $F_l(P(s), K_0(s))$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_k \\ z \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} A + BD_kC & BC_k & B_1 + BD_kD_{21} \\ B_kC & A_k & B_kD_{21} \\ \hline C_1 + D_{12}D_kC & D_{12}C_k & D_{11} + D_{12}D_kD_{21} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ x_k \\ w \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $F_l(P(s), K_0(s)) = 0$ (**C3**) réside dans l'existence d'un changement de base M de sorte que la nouvelle représentation d'état soit une décomposition de KALMAN de transmission directe nulle et de la forme :

$$F_l(P(s), K_0(s)) := \left[\begin{array}{cc|c} a_1 & a_{12} & b \\ 0 & a_2 & 0 \\ \hline 0 & c & 0 \end{array} \right] \quad (5.10)$$

Le changement de base donne le système d'équations suivantes :

$$\begin{aligned} M \begin{bmatrix} A + BD_kC & BC_k \\ B_kC & A_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_{12} \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} M \\ M \begin{bmatrix} B_1 + BD_kD_{21} \\ B_kD_{21} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_1 + D_{12}D_kC & D_{12}C_k \\ D_{11} + D_{12}D_kD_{21} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M \end{aligned}$$

Afin d'expliciter les calculs, on décompose la matrice M de la façon suivante :

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

où $m_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $m_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n_k}$, $m_{21} \in \mathbb{R}^{n_k \times n}$ et $m_{22} \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$. De plus, dans un objectif de lisibilité, on notera $C'_1 = C_1 + D_{12}D_kC$, $B'_1 = BD_kD_{21} + B_1$ et $A' = A + BD_kC$.

Le système résultant est donné ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{11}A' + m_{12}B_kC = a_1m_{11} + a_{12}m_{21} \\ m_{11}BC_k + m_{12}A_k = a_1m_{12} + a_{12}m_{22} \\ m_{21}A' + m_{22}B_kC = a_2m_{21} \\ m_{21}BC_k + m_{22}A_k = a_2m_{22} \\ \\ m_{11}B'_1 + m_{12}B_kD_{21} = b \\ m_{21}B'_1 + m_{22}B_kD_{21} = 0 \\ \\ C'_1 = cm_{21} \\ D_{12}C_k = cm_{22} \\ D_{11} + D_{12}D_kD_{21} = 0 \end{array} \right. \quad (5.11)$$

5.3. LA CSF DANS LE CAS $N_K \leq N$

Ce système comporte comme inconnues les 4 blocs de la matrice M , les 3 blocs de la matrice a , ainsi que b , c , D_{11} , D_{12} , D_{21} , C'_1 et B'_1 ; soit 14 inconnues pour seulement 9 équations. Il est donc largement sous-déterminé. Afin de réduire le nombre de variables et de simplifier certaines équations, on pose $m_{12} = 0$. On démontrera par la suite que ce choix n'est pas restrictif.

Comme la matrice M est une matrice de changement de base, elle est donc inversible. m_{12} étant nulle, il résulte que les deux matrices m_{11} et m_{22} sont inversibles. Ceci permet de donner l'expression des inconnues suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = m_{11}A'm_{11}^{-1} - m_{11}BC_k m_{22}^{-1} m_{21} m_{11}^{-1} \\ a_{12} = m_{11}BC_k m_{22}^{-1} \\ a_2 = m_{21}BC_k m_{22}^{-1} + m_{22}A_k m_{22}^{-1} \\ \\ b = m_{11}B'_1 \\ \\ c = D_{12}C_k m_{22}^{-1} \\ C'_1 = D_{12}C_k m_{22}^{-1} m_{21} \\ \\ D_{11} = -D_{12}D_k D_{21} \end{array} \right. \quad (5.12)$$

Pour résoudre l'équation en B'_1 de la 6^{ème} équation du système (5.11), on est amené à faire l'hypothèse que m_{21} est inversible à droite. Autrement dit, il existe $m_{21}^+ \in \mathbb{R}^{n \times n_k}$ telle que $m_{21} m_{21}^+ = I$. On utilise généralement la pseudo-inverse de MOORE-PENROSE pour calculer cette matrice : $m_{21}^+ = m_{21}^T (m_{21} m_{21}^T)^{-1}$. On obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} B'_1 = m_{21}^+ B''_1 \\ B''_1 = -m_{22} B_k D_{21} \end{array} \right. \quad (5.13)$$

La 3^{ème} équation du système (5.11) s'écrit finalement :

$$m_{21}A' + m_{22}B_k C - (m_{21}BC_k m_{22}^{-1} + m_{22}A_k m_{22}^{-1})m_{21} = 0 \quad (5.14)$$

Remarques :

1. 8 des 9 équations du système (5.11) reviennent finalement à écrire les variables a_1 , a_{12} , a_2 , b , c , B'_1 , C'_1 et D_{11} en fonction des autres variables m_{11} , m_{21} , m_{22} , D_{12} et D_{21} , qui sont donc équivalents à un ensemble de paramètres.
2. La dernière équation (5.14) relie entre eux les paramètres du système. Notons que l'on peut résoudre le système sans avoir à déterminer les paramètres m_{11} , D_{12} et D_{21} , qui pourront donc être fixés ultérieurement.
3. On peut effectuer un changement de variable sur la matrice m_{21} : on pose T telle que $T = -m_{22}^{-1} m_{21}$. L'équation (5.14), après multiplication à gauche par m_{22}^{-1} se résume à :

$$T(A + BD_k C) - B_k C + TBC_k T - A_k T = 0 \quad (5.15)$$

3. Ceci est tout à fait compatible avec le fait que $n_k \leq n$.

Cette équation ne dépend que de T , ce qui est cohérent avec le fait que l'on ait considéré m_{22} comme un paramètre du système.

4. L'équation (5.15) correspond à l'équation de RICCATI généralisée déjà rencontrée dans la partie I, page 24, lors de la mise en forme estimation/retour d'état d'un correcteur quelconque. Pour cette raison nous avons gardé la variable T .

Parmi cet ensemble de solutions, on choisit la solution particulière suivante :

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ T & -I \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Ce qui donne la forme standard suivante :

$$P(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A & (T^+ B_k - B D_k) D_{21} & B \\ -D_{12}(C_k T + D_k C) & -D_{12} D_k D_{21} & D_{12} \\ \hline C & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (5.17)$$

De par sa construction, cette forme standard vérifie la condition **C3** : $F_l(P(s), K_0(s)) = 0$ sous la condition que T vérifie l'équation de RICCATI (5.15). Il s'agit à présent de remplir la condition **C4** pour que $P(s)$ soit une Forme Standard de Passage.

5.3.2 Conditions sur l'unicité de la solution $K_0(s)$

On utilise ici le résultat du lemme 5.2.6. Le problème $P(s)$ présenté ci-dessus vérifie par hypothèse les deux propositions suivantes (cf. section 5.2.1, page 46) :

- (A, B) est détectable,
- (A, C) est stabilisable.

Si on arrive à démontrer que $P(s)$ est régulier, on aura alors l'unicité de la solution du problème H_2 -optimal correspondant. $K_0(s)$, étant solution du problème, sera alors l'unique solution.

Les choix $D_{12} = I$ et $D_{21} = I$ garantissent que D_{12} soit injective et D_{21} surjective et donc garantissent l'unicité de $K_0(s)$.

Zéros de (A, B_1, C, I)

Considérons un zéro λ de $P_{21}(s)$. Alors il existe une direction d'état v et une direction d'entrée v' telles que :

$$\begin{cases} 0 &= (A - \lambda I)v + (T^+ B_k - B D_k)v' \\ 0 &= C v + v' \end{cases} \quad (5.18)$$

5.3. LA CSF DANS LE CAS $N_K \leq N$

En substituant v' dans la première équation par sa valeur issue de la seconde équation, puis en multipliant par T à gauche, on arrive à l'expression suivante :

$$[T(A + BD_kC) - B_kC]v = \lambda T v$$

Grâce à l'équation de RICCATI (5.15), le membre de gauche devient :

$$(A_k - TBC_k)Tv = \lambda T v$$

Ce qui signifie que λ est valeur propre de la matrice $(A_k - TBC_k)$. Or, si l'on observe la matrice a de la boucle fermée après le changement de base par M (cf. équation (5.10), page 50), on constate que la matrice a est diagonale par blocs avec $a_2 = A_k - TBC_k$. λ est donc une valeur propre de la boucle fermée. Le correcteur initial choisi étant stabilisant, il ne peut donc y avoir de pôles sur l'axe imaginaire. (A, B_1, C, I) **ne peut donc pas avoir de zéros invariants sur l'axe imaginaire.**

Zéros de (A, B, C_1, I)

Considérons un zéro λ de $P_{12}(s)$. Alors il existe une direction d'état v et une direction d'entrée v' telles que :

$$\begin{cases} 0 &= (A - \lambda I)v + Bv' \\ 0 &= -(C_k T + D_k C)v + v' \end{cases} \quad (5.19)$$

En substituant v' dans la première équation par sa valeur issue de la seconde équation, on arrive à l'expression suivante :

$$[(A + BD_kC) + BC_kT]v = \lambda v$$

Comme précédemment, le spectre de $(A + BD_kC + BC_kT) = a_1$ est inclus dans le spectre de a . Le correcteur étant stabilisant, (A, B, C_1, I) **ne peut donc pas avoir de zéros invariants sur l'axe imaginaire.**

Le choix $D_{12} = I$ et $D_{21} = I$ assure que $P(s)$ est un problème régulier. Le correcteur $K_0(s)$ correspond à son unique solution. La forme standard :

$$P(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A & (T^+ B_k - BD_k) & B \\ \hline -(C_k T + D_k C) & -D_k & I \\ C & I & 0 \end{array} \right]$$

est donc une Forme Standard de Passage. Elle sera notée $P_{CSF}(s)$.

Remarques :

1. Si la solution du problème $P_{CSF}(s)$ est unique, il n'en va pas de même avec la forme standard elle-même; en effet la CSF qui a été obtenue ici est dépendante à la fois du choix de M et des choix de D_{12} et D_{21} .
2. La présence d'une transmission directe entre les entrées exogènes w et les sorties contrôlées z pose des problèmes pour la résolution du problème H_2 ou H_∞ . Cependant, cet écueil est contournable par le changement de variable $u \leftarrow u + D_k y$ qui conduit à la Forme Standard de Passage :

$$\overline{P_{CSF}(s)} := \left[\begin{array}{c|cc} A + BD_k C & T^+ B_k & B \\ \hline -C_k T & 0 & I \\ C & I & 0 \end{array} \right]$$

Le correcteur $K'_0(s)$ solution de ce problème vérifie alors :

$$\begin{aligned} K'_0(s) &= \arg \min_K \|F_l(\overline{P_{CSF}}, K)\| \\ K'_0(s) &= K_0(s) - D_k \\ K_0(s) &= \arg \min_K \|F_l(P_{CSF}, K)\| \end{aligned}$$

5.3.3 Existence d'une CSF pour un couple donné $\{G(s), K_0(s)\}$

La construction de la CSF établie dans la sous-section 5.3.1 repose sur l'existence d'une matrice T vérifiant l'équation de RICCATI (5.15) page 51. Si l'équation de RICCATI a une solution, on est donc assuré de pouvoir trouver une Forme Standard de Passage. On se propose de démontrer la réciproque de deux manières différentes :

- l'une en raisonnant par l'absurde ;
- l'autre s'appuyant sur le changement de base mis en évidence à la section 5.3.1.

Démonstration par l'absurde

On suppose ici que la CSF existe⁴ mais l'équation de RICCATI n'a pas de solution, et donc que T n'existe pas. Afin d'éliminer la transmission directe D_k du correcteur initial, on considère le correcteur $K_0(s) - D_k$ associé au système modifié $\overline{G}(s)$. Ce changement de variable n'est pas restrictif.

$$\overline{G}(s) := \left[\begin{array}{c|c} A + BD_k C & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right]$$

La Forme Standard de Passage s'écrit donc :

$$P_{CSF}(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A + BD_k C & B_1 & B \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C & D_{21} & 0 \end{array} \right]$$

4. Mais également que le problème correspondant est régulier.

Le lemme 5.2.6 donne comme unique solution du problème H_2 correspondant le correcteur sous forme estimation/retour d'état $\hat{K}_{H_2}(s)$, avec le gain d'estimation L et le gain de retour d'état F . Ce correcteur est associé à un vecteur d'état \hat{x} et a pour représentation :

$$\hat{K}_{H_2}(s) := \left[\begin{array}{c|c} \frac{A + BD_kC + BF + LC}{F} & \begin{array}{c} -L \\ 0 \end{array} \end{array} \right] \quad (5.20)$$

La solution du problème $P_{CSF}(s)$ étant unique, $K_0(s) - D_k = \hat{K}_{H_2}(s)$. Il existe donc une matrice de projection $S_{n_k \times n}$ de rang plein en lignes⁵ telle que $x_k = S\hat{x}$ et :

$$\begin{aligned} S(A + BD_kC + BF + LC) &= A_kS \\ -SL &= B_k \\ F &= C_kS \end{aligned}$$

On déduit de cela que la matrice S est solution de l'équation suivante :

$$S(A + BD_kC) + SBC_kS - B_kC - A_kS = 0 \quad (5.21)$$

Ce qui est incohérent avec les hypothèses de départ, car cette équation (5.21) est identique à l'équation de RICCATI (5.15). Donc il existe bien une solution T de (5.15).

Il vient d'être prouvé que, pour un couple $\{G(s), K_0(s)\}$ donné,
 — s'il existe une Forme Standard de Passage régulière relative au couple $\{G(s), K_0(s)\}$;
 — alors l'équation de RICCATI en T :

$$T(A + BD_kC) - B_kC + TBC_kT - A_kT = 0$$

possède au moins une solution.

Démonstration en utilisant le changement de base M

On suppose l'existence d'une Forme Standard de Passage, de variable d'état x , associée au couple $\{G(s), K_0(s)\}$. Il existe donc une matrice de passage M , qui conduit à une représentation de $F_l(P_{CSF}(s), K_0(s))$ sous forme de décomposition de KALMAN⁶, de variable d'état X'' , avec $MX = X''$ où $X^T = [x^T \ x_k^T]$.

On peut décomposer ce changement de base M en deux changements de base successifs, N et N' . On considère alors que le changement de base N est le changement de base particulier considéré en (5.11) à la page 50, dont le terme $n_{12} = 0$. Si on arrive à démontrer que, quel que soit M , on peut trouver N' tel que $N'N = M$, on aura alors

5. Le correcteur donné en (5.20) n'est pas minimal si $n_k < n$.

6. Il s'agit de la réalisation de l'équation (5.10) page 50.

prouvé que le changement de base particulier N , considéré en (5.11) avec $n_{12} = 0$, n'est pas restrictif (on peut arriver à la représentation d'état correspondante par l'application successive des changements de base M et N'^{-1}).

On écrit la matrice N' de la façon suivante :

$$N' = \begin{bmatrix} n'_{11} & n'_{12} \\ n'_{21} & n'_{22} \end{bmatrix}$$

Comme les représentations d'état associées à X' et X'' sont des décompositions de KALMAN, l'écriture des équations $N'A' = A''N'$, $N'B' = B''$ et $C' = C''N'$ permet de conclure que $n'_{21} = 0$. On est donc amené à résoudre le système sous-déterminé suivant :

$$\begin{cases} n'_{11}n_{11} + n'_{12}n_{21} = m_{11} \\ n'_{12}n_{22} = m_{12} \\ n'_{22}n_{21} = m_{21} \\ n'_{22}n_{22} = m_{22} \end{cases}$$

Supposons dans un premier temps que la matrice m_{22} soit singulière. Alors il existe un vecteur v tel que $m_{22}v = 0$. D'après le système (5.11) page 50, cela conduit à la relation $C_k v = 0$ (puisque D_{12} est de rang plein en colonnes). Or dans ce cas, le correcteur n'est pas minimal. On fera donc l'hypothèse que le correcteur est minimal (au besoin, on le réduit) et m_{22} est donc inversible. Par conséquent, ce système admet au moins une solution. Par exemple :

$$\begin{cases} n_{11} = I \\ n_{22} = I \\ n'_{12} = m_{12} \\ n'_{22} = m_{22} \\ n_{21} = m_{22}^{-1}m_{21} \\ n'_{11} = m_{11} - m_{12}m_{22}^{-1}m_{21} \end{cases}$$

On peut donc conclure que tout changement de base peut se ramener à un changement de base où la matrice m_{12} est nulle.

Reste maintenant à savoir si l'hypothèse m_{21} de rang plein en lignes est restrictive. Supposons que ce ne soit pas le cas, alors il existe un vecteur u tel que $m_{21}u = 0$. Toujours d'après le système (5.11), il vient que $m_{22}B_k u = 0$ (puisque D_{21} est de rang plein en lignes). Il existe donc une combinaison linéaire d'états du correcteur qui est non gouvernable : le correcteur n'est pas minimal.

Lors du changement de base effectué pour la construction d'une CSF à la section 5.3.1, le choix $m_{12} = 0$ et l'hypothèse m_{21} de rang plein en lignes ne sont pas restrictifs.

5.4. GÉNÉRALISATION

Il y a équivalence entre les deux propositions ci-après.

- Il existe une Forme Standard de Passage régulière relative au couple $\{G(s), K_0(s)\}$.
- L'équation de RICCATI en T :

$$T(A + BD_k C) - B_k C + TBC_k T - A_k T = 0$$

possède au moins une solution surjective.

Remarques :

- En règle générale, on souhaite restreindre l'ensemble des solutions T de l'équation de RICCATI généralisée au sous-espace des matrices réelles. Bien que l'élaboration d'une Forme Standard de Passage complexe soit possible, celle-ci poserait des problèmes de résolution.
- Les conditions sur l'existence des solutions de l'équation de RICCATI généralisée sont exposées dans la partie I de ce mémoire (section 2.3.2, page 24 et suivantes).
- Le cas étudié ici, où $n_k \leq n$, conduit toujours à une CSF d'ordre n . Certaines routines de synthèse H_2 ou H_∞ appliquées au problème standard correspondant aboutiront alors à un correcteur d'ordre n , non minimal.

5.4 Généralisation

La Forme Standard de Passage a été établie dans le cas particulier d'un correcteur d'ordre inférieur ou égal au système, dont on a omis la transmission directe D . Ce résultat est maintenant généralisé sous plusieurs points de vue :

1. La transmission directe D est réintroduite. Un schéma bloc est établi.
2. La CSF est donnée dans le cas $n_k > n$.
3. On traite ensuite le cas d'un correcteur à deux degrés de liberté par ajout d'entrées et/ou de sorties.

5.4.1 Système avec transmission directe

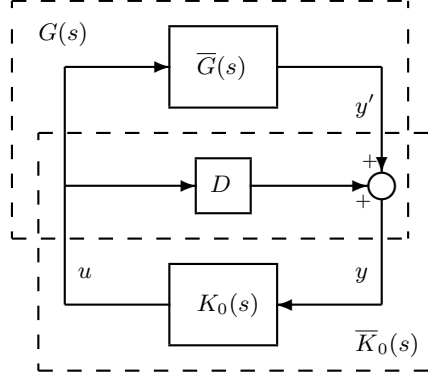
Pour se ramener au cas précédent, on définit une sortie y' telle que $y = y' + Du$. Vis-à-vis de cette nouvelle sortie, l'ensemble $\{G(s), K_0(s)\}$ est identique à l'ensemble $\{\overline{G}(s), \overline{K}_0(s)\}$ où :

- $\overline{G}(s)$ est le système dépourvu de sa transmission directe,
- $\overline{K}_0(s)$ est le correcteur sur lequel on a effectué un retour de sortie égal à D .

Ceci est illustré par la figure 5.2.

La représentation d'état du nouveau correcteur s'écrit :

$$\overline{K}_0(s) := \left[\begin{array}{c|c} A_k + B_k D(I - D_k D)^{-1} C_k & B_k (I - D D_k)^{-1} \\ \hline (I - D_k D)^{-1} C_k & (I - D_k D)^{-1} D_k \end{array} \right] \quad (5.22)$$


 FIGURE 5.2: Normalisation de $G(s)$ et de $K_0(s)$

Pour ce calcul, l'identité matricielle $D(I - D_k D)^{-1} = (I - DD_k)^{-1} D$ a été utilisée.

La Forme Standard de Passage qui est associée au couple $\{\bar{G}(s), \bar{K}_0(s)\}$ s'écrit alors (d'après le résultat de la page 53) :

$$\bar{P}_{CSF}(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A & (T^+ B_k - BD_k)(I - DD_k)^{-1} & B \\ \hline -(I - D_k D)^{-1}(C_k T + D_k C) & -(I - D_k D)^{-1} D_k & I \\ C & I & 0 \end{array} \right] \quad (5.23)$$

On effectue ensuite les changements de variables $\bar{z} = (I - D_k D)^{-1} z$, $w = (I - DD_k)^{-1} \bar{w}$ (ces changements de variable ne modifient pas le problème puisque le transfert $w \rightarrow z$ est nul en boucle fermée) et $y = y' + Du$ pour se ramener à la Forme Standard de Passage P_{CSF} correspondant au couple $\{G(s), K_0(s)\}$. Finalement, la représentation d'état de $P_{CSF}(s)$ est donnée par :

$$P_{CSF}(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A & (T^+ B_k - BD_k) & B \\ \hline -(C_k T + D_k C) & D_k DD_k - D_k & I - D_k D \\ C & I - DD_k & D \end{array} \right] \quad (5.24)$$

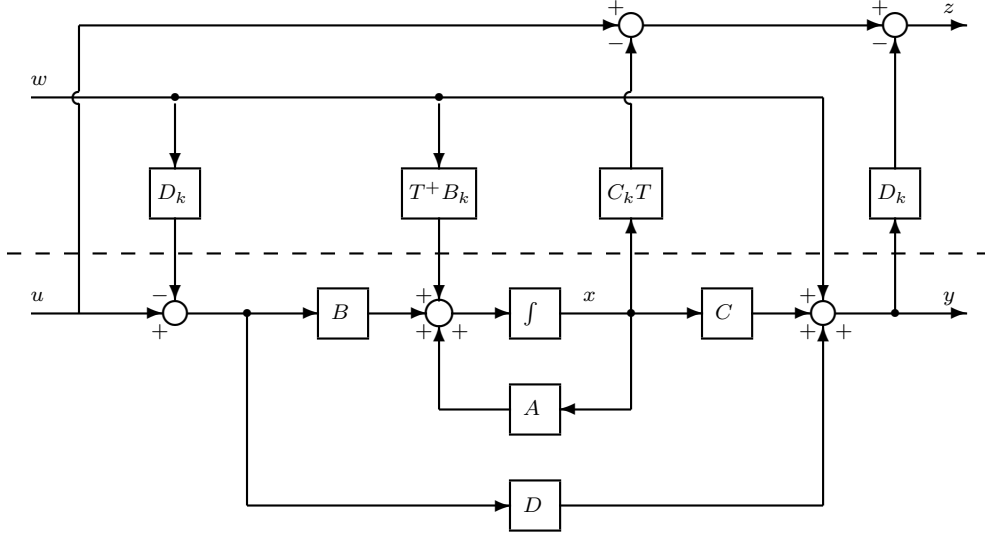
Rappelons que T reste solution de l'équation de RICCATI généralisée qui fait intervenir la matrice de la boucle fermée :

$$\begin{bmatrix} -T & I \end{bmatrix} A_{cl} \begin{bmatrix} I \\ T \end{bmatrix} = 0$$

où

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B(I - D_k D)^{-1} D_k C & B(I - D_k D)^{-1} C_k \\ B_k(I - DD_k)^{-1} C & A_k + B_k D(I - D_k D)^{-1} C_k \end{bmatrix}$$

Le schéma bloc général associé à $P_{CSF}(s)$ est donné figure 5.3.


 FIGURE 5.3: Schéma bloc général de la Forme Standard de Passage $P_{CSF}(s)$

5.4.2 Cas du correcteur d'ordre supérieur ($n_k > n$)

On considère maintenant que le correcteur $K_0(s)$ est minimal, et que $n_k > n$. On prendra dans un premier temps $D = 0$.

La matrice T , de dimension $n_k \times n$, ne peut pas être inversible à droite lorsque $n_k > n$. La construction présentée en 5.3.1 n'est donc plus valable. D'autre part, on peut démontrer facilement que la CSF doit être d'ordre n_k (et non plus d'ordre n).

Supposons, en effet, qu'il existe une Forme Standard de Passage d'ordre q où $q < n_k$. Alors, d'après le lemme 5.2.6, le correcteur H_2 -optimal est d'ordre q et est unique. Le correcteur initial $K_0(s)$, qui est minimal, ne peut donc pas être la solution du problème $P_{CSF}(s)$. On déduit que la CSF est d'ordre n_k .

Construction

On introduit un vecteur x_q de taille $n_q = n_k - n$ afin d'obtenir une CSF d'ordre n_k . Le problème standard général répondant à la condition **C1** (cf. définition 5.2.4) peut alors être écrit :

$$P(s) := \left[\begin{array}{cc|cc} A & A_{12} & B_{11} & B \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ \hline C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ C & C_{22} & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (5.25)$$

où A_{22} est de dimension $n_q \times n_q$.

La démarche du 5.3.1 n'est pas reproduite ici, en raison de la taille de la matrice de changement de base M qui comporte à présent 9 blocs. On se contente d'utiliser le vecteur $\epsilon = Tx + Vx_q - x_k$. Ce vecteur correspond en fait à la seconde ligne du changement de base opéré dans la section précédente (voir page 52).

On écrit alors les équations en z et en $\dot{\epsilon}$ de $F_l(P(s), K_0(s))$. L'objectif est d'arriver à obtenir l'indépendance de z vis-à-vis de w . $F_l(P(s), K_0(s))$ est représenté par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BD_k C)x + (A_{12} + BD_k C_{22})x_q \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + BC_k x_k + (B_{11} + BD_k D_{21})w \\ \dot{x}_q = (A_{21} + B_{22}D_k C)x + (A_{22} + B_{22}D_k C_{22})x_q \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + B_{22}C_k x_k + (B_{21} + B_{22}D_k D_{21})w \\ \dot{x}_k = B_k C x + B_k C_{22} x_q + A_k x_k + B_k D_{21} w \\ z = (C_{11} + D_{12}D_k C)x + (C_{12} + D_{12}D_k C_{22})x_q \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + D_{12}C_k x_k + (D_{11} + D_{12}D_k D_{21})w \end{cases} \quad (5.26)$$

On peut déjà dire que la solution en D_{11} est la même que dans le cas d'un correcteur d'ordre inférieur. On établit donc pour la suite que $D_{11} = -D_{12}D_k D_{21}$. Ce qui donne pour $\dot{\epsilon}$ et z les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon} = [T(A + BD_k C) + V(A_{21} + B_{22}D_k C) - B_k C] x \\ \quad \quad \quad + [T(A_{12} + BD_k C_{22}) + V(A_{22} + B_{22}D_k C_{22}) - B_k C_{22}] x_q \\ \quad \quad \quad + [TBC_k + VB_{22}C_k - A_k] x_k \\ \quad \quad \quad + [T(B_{11} + BD_k D_{21}) + V(B_{21} + B_{22}D_k D_{21}) - B_k D_{21}] w \\ z = (C_{11} + D_{12}D_k C)x + (C_{12} + D_{12}D_k C_{22})x_q + D_{12}C_k x_k \end{cases} \quad (5.27)$$

L'idée est de dire qu'il existe deux matrices \mathcal{A} et \mathcal{C} telles que :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \mathcal{A}\epsilon \\ z &= \mathcal{C}\epsilon \end{aligned}$$

de sorte que z soit ingouvernable par w . En faisant apparaître les variables intermédiaires \mathcal{A} et \mathcal{C} , on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &= [T(A + BD_k C) + V(A_{21} + B_{22}D_k C) - B_k C] + [TBC_k + VB_{22}C_k - A_k] T \\ 0 &= [T(A_{12} + BD_k C_{22}) + V(A_{22} + B_{22}D_k C_{22}) - B_k C_{22}] + [TBC_k + VB_{22}C_k - A_k] V \\ 0 &= [T(B_{11} + BD_k D_{21}) + V(B_{21} + B_{22}D_k D_{21}) - B_k D_{21}] \\ 0 &= (C_{11} + D_{12}D_k C) + D_{12}C_k T \\ 0 &= (C_{12} + D_{12}D_k C_{22}) + D_{12}C_k V \end{aligned} \quad (5.28)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -(TBC_k + VB_{22}C_k - A_k) \\ \mathcal{C} &= -D_{12}C_k \end{aligned}$$

À partir de la première équation, afin de réobtenir l'équation de RICCATI pour T , on pose l'équation suivante :

$$0 = V[A_{21} + B_{22}(D_k C + C_k T)]$$

5.4. GÉNÉRALISATION

En ce qui concerne la matrice V , qui est de dimension $n_k \times n_q$ on la choisit de sorte que $[T \ V]$ soit une matrice inversible. Ce qui suppose que T est de rang plein (en colonnes cette fois-ci) et que V est le noyau de T^T . On notera T^+ et V^+ les inverses à gauche de T et V soit :

$$\begin{bmatrix} T^+ \\ V^+ \end{bmatrix} [T \ V] = I \quad \text{et} \quad [T \ V] \begin{bmatrix} T^+ \\ V^+ \end{bmatrix} = I$$

Les équations du système (5.28) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} 0 &= T(A + BD_k C) - B_k C + TBC_k T - A_k T \\ 0 &= V[A_{21} + B_{22}(C_k T + D_k C)] \\ 0 &= [T \ V] \begin{bmatrix} A_{12} + BD_k C_{22} + BC_k V \\ A_{22} + B_{22}D_k C_{22} + B_{22}C_k V \end{bmatrix} - B_k C_{22} - A_k V \\ 0 &= [T \ V] \begin{bmatrix} B_{11} + BD_k D_{21} \\ B_{21} + B_{22}D_k D_{21} \end{bmatrix} - B_k D_{21} \\ 0 &= (C_{11} + D_{12}D_k C) + D_{12}C_k T \\ 0 &= (C_{12} + D_{12}D_k C_{22}) + D_{12}C_k V \end{aligned} \tag{5.29}$$

Parmi l'ensemble des solutions possibles, on choisit de prendre $B_{22} = 0$, $C_{22} = 0$, $D_{12} = I$ et $D_{21} = I$. Ce qui donne le système (5.30).

$$\begin{aligned} 0 &= VA_{21} \\ 0 &= [T \ V] \begin{bmatrix} A_{12} + BC_k V \\ A_{22} \end{bmatrix} - A_k V \\ 0 &= [T \ V] \begin{bmatrix} B_{11} + BD_k \\ B_{21} \end{bmatrix} - B_k \\ 0 &= C_{11} + D_k C + C_k T \\ 0 &= C_{12} + C_k V \end{aligned} \tag{5.30}$$

Une fois ce système résolu (on inverse la matrice $[T \ V]$), on arrive au problème $P(s)$ défini en (5.31). On peut remarquer que les choix pris pour la résolution du système ne sont pas uniques, comme c'était le cas pour $n_k \leq n$.

$$P(s) := \left[\begin{array}{cc|cc} A & (T^+ A_k - BC_k)V & T^+ B_k - BD_k & B \\ 0 & V^+ A_k V & V^+ B_k & 0 \\ \hline -C_k T - D_k C & -C_k V & -D_k & I \\ C & 0 & I & 0 \end{array} \right] \tag{5.31}$$

La condition **C3** vient d'être remplie, il reste à vérifier que la solution particulière choisie pour résoudre l'équation (5.29) aboutit à un problème régulier afin de valider la condition **C4**, de la définition 5.2.4.

Régularité du problème $P(s)$

On considère un zéro λ de $P_{12}(s)$:

$$P_{12}(s) := \left[\begin{array}{cc|c} A & (T^+ A_k - BC_k)V & T^+ B_k - BD_k \\ 0 & V^+ A_k V & V^+ B_k \\ \hline C & 0 & I \end{array} \right]$$

Il existe alors une direction d'état v et une direction d'entrée v' telles que :

$$\begin{cases} 0 = \begin{bmatrix} A - \lambda I_n & T^+ A_k V - BC_k V \\ 0 & V^+ A_k V - \lambda I_{n_q} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} T^+ B_k - BD_k \\ V^+ B_k \end{bmatrix} v' \\ 0 = [C \ 0]v + v' \end{cases} \quad (5.32)$$

En substituant dans la première équation v' par son expression dans la seconde, on arrive à :

$$\begin{bmatrix} A + BD_k C - T^+ B_k C & T^+ A_k V - BC_k V \\ -V^+ B_k C & V^+ A_k V \end{bmatrix} v = \lambda I v \quad (5.33)$$

Or en effectuant un changement de base avec la matrice $[T \ V]$, on aboutit à l'équation (5.34).

$$[A_k - TBC_k][T \ V]v = \lambda [T \ V]v \quad (5.34)$$

On déduit alors que λ est aussi une valeur propre de la boucle fermée du système. Le correcteur étant stable par hypothèse, λ ne peut pas être située sur l'axe imaginaire. Une démonstration analogue conduit à la conclusion que $P_{21}(s)$ n'a pas non plus de zéros sur l'axe imaginaire. La condition **C4** est donc validée d'après le lemme 5.2.6. Le problème $P(s)$ défini en (5.31) constitue donc une Forme Standard de Passage lorsque le correcteur est d'ordre supérieur au système (sans transmission directe).

Transmission directe D

En passant par le correcteur $\overline{K}_0(s)$ et le système $\overline{G}(s)$, puis en faisant un changement de variable sur z et w , comme dans le cas $n_k \leq n$, la CSF s'écrit :

$$P_{CSF}(s) := \left[\begin{array}{cc|cc} A & T^+ A_k V + (T^+ B_k D - B)(I - D_k D)^{-1} C_k V & T^+ B_k - BD_k & B \\ 0 & V^+ [A_k + B_k D (I - D_k D)^{-1} C_k] V & V^+ B_k & 0 \\ \hline -C_k T - D_k C & -C_k V & D_k D D_k - D_k & I - D_k D \\ C & 0 & I - D D_k & D \end{array} \right] \quad (5.35)$$

On rappelle que dans ce cas, la matrice d'évolution de la boucle fermée s'écrit :

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B(I - D_k D)^{-1} D_k C & B(I - D_k D)^{-1} C_k \\ B_k (I - D D_k)^{-1} C & A_k + B_k D (I - D_k D)^{-1} C_k \end{bmatrix}$$

et que T est solution de l'équation de RICCATI généralisée :

$$[-T \ I] A_{cl} \begin{bmatrix} I \\ T \end{bmatrix} = 0$$

5.4. GÉNÉRALISATION

On peut vérifier comme précédemment que les conditions **C3** et **C4** sont validées⁷.

Remarque : cette CSF, équation (5.35), englobe la précédente formulation proposée par Alazard et Voinot [5] qui faisait intervenir les gains K_c , K_f et le paramètre de YOULA $Q(s)$ de la réalisation estimation-retour d'état du correcteur $K_0(s)$ et qui s'écrit :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A & 0 & K_f & B \\ 0 & A_q & B_q & 0 \\ \hline K_c & -C_q & -D_q & I \\ C & 0 & I & 0 \end{array} \right] \quad (5.36)$$

5.4.3 Correcteur à deux degrés de liberté

La forme générale de la connection entre un système $G(s)$ et un correcteur à deux degrés de liberté est donnée par la figure 5.4.

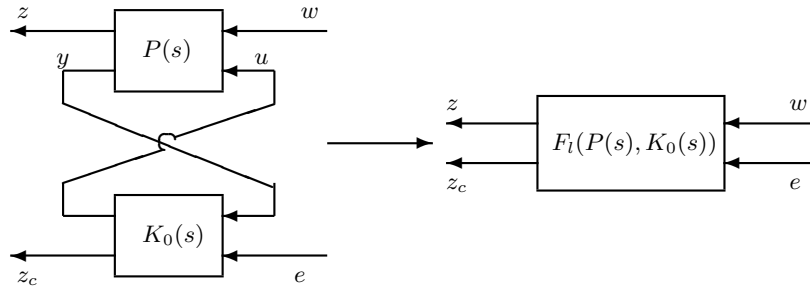


FIGURE 5.4: Correcteur à deux degrés de liberté

La réalisation d'état d'un tel correcteur s'écrit :

$$K_0(s) := \begin{bmatrix} \frac{\dot{x}_k}{u} \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_{k1} & B_{k2} \\ C_{k1} & D_{k11} & D_{k12} \\ C_{k2} & D_{k21} & D_{k22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y \\ e \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\dot{x}_k}{u} \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y \\ e \end{bmatrix}$$

On peut alors écrire la CSF comme il a été fait dans le cas du correcteur à un seul

7. Le calcul n'est pas fait ici, mais il est analogue aux calculs menés en 5.4.1.

degré de liberté. Ce qui donne, avec $D = 0$ et $n_k \leq n$:

$$P_{CSF}(s) := \left[\begin{array}{c} \dot{x} \\ z_1 \\ z_2 \\ y \\ e \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|ccc} A & & (T^+B_{k_1} - BD_{k_{11}}) & (T^+B_{k_2} - BD_{k_{12}}) & B & 0 \\ \hline -(C_{k_1}T + D_{k_{11}}C) & & -D_{k_{11}} & -D_{k_{12}} & I & 0 \\ -(C_{k_2}T + D_{k_{21}}C) & & -D_{k_{21}} & -D_{k_{22}} & 0 & I \\ C & & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & I & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x \\ w_1 \\ w_2 \\ u \\ z_c \end{array} \right] \quad (5.37)$$

On voit que le résultat revient à considérer qu'à la fois le correcteur et le système sont augmentés, avec :

$$G'(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A & B & 0 \\ \hline C & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

L'équation de RICCATI qui donne la matrice T reste valable à condition d'utiliser les matrices augmentées.

$$\left[\begin{array}{cc} -T & I \end{array} \right] A_{cl} \left[\begin{array}{c} I \\ T \end{array} \right] = 0$$

où

$$A_{cl} = \left[\begin{array}{cc} A + \mathcal{B}(I - \mathcal{D}_k\mathcal{D})^{-1}\mathcal{D}_k\mathcal{C} & \mathcal{B}(I - \mathcal{D}_k\mathcal{D})^{-1}\mathcal{C}_k \\ \mathcal{B}_k(I - \mathcal{D}\mathcal{D}_k)^{-1}\mathcal{C} & A_k + \mathcal{B}_k\mathcal{D}(I - \mathcal{D}_k\mathcal{D})^{-1}\mathcal{C}_k \end{array} \right]$$

En développant les calculs, on remarque que la matrice A_{cl} ne dépend en réalité que de la partie "feedback" du correcteur.

$$A_{cl} = \left[\begin{array}{cc} A + B(I - D_{k_{11}}D)^{-1}D_{k_{11}}C & B(I - D_{k_{11}}D)^{-1}C_{k_1} \\ B_{k_1}(I - DD_{k_{11}})^{-1}C & A_k + B_{k_1}D(I - D_{k_{11}}D)^{-1}C_{k_1} \end{array} \right]$$

Ceci peut facilement être généralisé au cas $n_k > n$ avec ou sans transmission directe. Par exemple, on prouve facilement que la Forme Standard de Passage dans ce cas présent, sans transmission directe, s'écrit :

$$P_{CSF}(s) := \left[\begin{array}{cc|ccc} A & (T^+A_k - BC_{k_1})V & T^+B_{k_1} - BD_{k_{11}} & T^+B_{k_2} - BD_{k_{12}} & B & 0 \\ 0 & V^+A_kV & V^+B_{k_1} & V^+B_{k_2} & 0 & 0 \\ \hline -C_{k_1}T + D_{k_{11}}C & -C_{k_1}V & -D_{k_{11}} & -D_{k_{12}} & I & 0 \\ -C_{k_2}T + D_{k_{21}}C & -C_{k_2}V & -D_{k_{21}} & -D_{k_{22}} & 0 & I \\ C & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (5.38)$$

5.5 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de définir et de construire un problème H_2/H_∞ à partir d'un système donné et dont la solution est un correcteur connu par avance. On

5.5. CONCLUSION

a donc défini un outil nommé **Forme Standard de Passage [CSF]** qui remplit ces conditions. Tout d'abord définie, la Forme Standard de Passage a été construite puis généralisée. On est donc capable de préciser la solution d'un problème inverse pour :

- un système $G(s)$ d'ordre n , avec ou sans transmission directe,
- et un correcteur $K_0(s)$ d'ordre n_k , inférieur, supérieur ou égal à n , qui peut présenter deux degrés de liberté.

Il a également été démontré que cette Forme Standard de Passage existe si et seulement si l'équation de RICCATI généralisée :

$$\begin{bmatrix} -T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A + B(I - D_{k_{11}}D)^{-1}D_{k_{11}}C & B(I - D_{k_{11}}D)^{-1}C_{k_1} \\ B_{k_1}(I - DD_{k_{11}})^{-1}C & A_k + B_{k_1}D(I - D_{k_{11}}D)^{-1}C_{k_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ T \end{bmatrix} = 0$$

admet une solution $T \in \mathbb{R}^{n_k \times n}$ de rang plein.

L'utilisation de la Forme Standard de Passage est explicitée dans le chapitre suivant. La procédure multi-canal présentée permet de faire le lien entre l'ajustement (et/ou la synthèse) d'une loi de commande multi-critères et l'outil CSF.

Chapitre 6

Procédure multi-canal

6.1 Introduction

La Forme Standard de Passage a été définie comme solution des problèmes H_2 et/ou H_∞ inverses. Elle nécessite donc un correcteur initial. On peut donc considérer l'outil CSF comme un moyen d'obtenir un problème standard dans un contexte d'ajustement d'une loi de commande. Il peut également convenir à la résolution d'un problème multi-objectifs. Le correcteur se synthétise alors en trois phases :

1. on synthétise un correcteur initial répondant aux spécifications d'un premier objectif ;
2. on utilise la CSF afin d'obtenir un problème standard à partir du correcteur créé en 1 ; puis on ajoute des spécifications sur le problème standard obtenu ;
3. on effectue une seconde synthèse.

Dans la troisième étape, la forme standard est complétée par des pondérations fréquentielles et des entrées ou des sorties supplémentaires afin de répondre au mieux à l'ensemble des objectifs.

Dans le cas le plus classique, la première procédure effectue une synthèse en performances et la seconde vise à robustifier le correcteur.

6.2 Procédure générale

On considère ici un problème de commande à deux canaux décrit par la réalisation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 & B \\ C_1 & D_{11} & D_{12} & D_{1.} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} & D_{2.} \\ C & D_{.1} & D_{.2} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ w_2 \\ u \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Le problème en performance correspond à la minimisation de la norme H_2 (ou H_∞) du premier transfert, entre l'entrée exogène w_1 et la sortie exogène z_1 . Le second transfert,

entre l'entrée exogène w_2 et la sortie exogène z_2 , correspond, quant à lui, à un problème de robustesse¹.

La solution qui consiste à minimiser directement la norme H_2 (ou la norme H_∞) du transfert $F_l(P(s), K(s))$ est conservative. En effet, elle conduit à minimiser en même temps les transferts $w_1 \rightarrow z_1$, $w_2 \rightarrow z_2$, mais également les transferts croisés $w_2 \rightarrow z_1$ et $w_1 \rightarrow z_2$. L'objectif est donc de réduire l'influence des termes croisés dans la synthèse.

On considèrera par la suite que les matrices $D_{12} = 0$ et $D_{21} = 0$.

6.2.1 Synthèse en performances

Dans un premier temps, une synthèse H_2 ou H_∞ est effectuée sur le sous-système donné par le modèle d'état suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B \\ C_1 & D_{11} & D_1 \\ C & D_1 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_1 \\ u \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Cette synthèse conduit à un correcteur d'ordre n (taille de la matrice A), que l'on note $K_1(s)$. Ce correcteur est optimal pour ce qui est de la minimisation de la norme du transfert $w_1 \rightarrow z_1$.

6.2.2 Utilisation de la Forme Standard de Passage

Le correcteur précédent $K_1(s)$ constitue le point de départ pour la construction d'une CSF. Dans le cas où nous nous sommes placés, l'ordre du correcteur et celui du système sont identiques. En utilisant les résultats énoncés au chapitre précédent, on arrive donc à la Forme Standard de Passage $P(s)$ définie par l'équation (6.3)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z'_1 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & T^+ B_{k_1} - B D_{k_1} & B \\ -C_{k_1} T - D_{k_1} C & D_{k_1} D D_{k_1} - D_{k_1} & I - D_{k_1} D \\ C & I - D D_{k_1} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w'_1 \\ u \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

où T est solution de l'équation de RICCATI généralisée :

$$\begin{bmatrix} -T & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A + B(I - D_{k_1} D)^{-1} D_{k_1} C & B(I - D_{k_1} D)^{-1} C_{k_1} \\ B_{k_1} (I - D D_{k_1})^{-1} C & A_{k_1} + B_{k_1} D (I - D_{k_1} D)^{-1} C_{k_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ T \end{bmatrix} = 0$$

D'après la construction de la Forme Standard de Passage, le correcteur $K_1(s)$ est bien la solution du problème H_2/H_∞ correspondant.

À partir de ce nouveau problème (6.3) ainsi constitué, qui est une reformulation du problème (6.2), on remplace le second canal que l'on avait écarté lors de la synthèse en performance. On obtient alors la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z'_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & T^+ B_{k_1} - B D_{k_1} & B_2 & B \\ -C_{k_1} T - D_{k_1} C & D_{k_1} D D_{k_1} - D_{k_1} & 0 & I - D_{k_1} D \\ C_2 & 0 & D_{22} & D_2 \\ C & I - D D_{k_1} & D_2 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w'_1 \\ w_2 \\ u \end{bmatrix}$$

1. Le problème rencontré peut être indifféremment un problème de robustesse dans un domaine fréquentiel incertain ou un problème de robustesse paramétrique.

6.2. PROCÉDURE GÉNÉRALE

D'un point de vue des transferts directs $w_1' \rightarrow z_1'$ et $w_2 \rightarrow z_2$, le problème exposé ci-dessus est strictement équivalent au problème initial.

6.2.3 Synthèse finale

Il ne reste plus qu'à effectuer une synthèse H_2 ou H_∞ sur le nouveau problème. Puisque la solution optimale du problème lié au canal 1' est par construction le correcteur $K_1(s)$ ², la solution du problème à deux canaux sera "attirée" vers la solution $K_1(s)$. On a donc finalement robustifié le correcteur $K_1(s)$ issu de la synthèse en performances.

On ne peut pas prédire de façon certaine si le correcteur final $K(s)$ issu de la seconde synthèse sur le problème modifié (lorsqu'on ajoute le second canal à la Forme Standard de Passage déduite du correcteur $K_1(s)$) sera meilleur qu'un correcteur $K_0(s)$ qui aurait été synthétisé directement sur le problème nominal (6.1) (noté P_{nom}). Cependant, en pratique, on observe souvent une amélioration des normes des deux transferts $F_l(P_{\text{nom}}(s), K(s))_{11}$ et $F_l(P_{\text{nom}}(s), K(s))_{22}$ par rapport aux transferts qui font intervenir la solution $K_0(s)$: $F_l(P_{\text{nom}}(s), K_0(s))_{11}$ et $F_l(P_{\text{nom}}(s), K_0(s))_{22}$.

Par contre, il faut remarquer que lorsqu'on utilise la CSF pour obtenir le problème modifié et que l'on effectue la synthèse finale, on ne regarde pas de quelle manière le correcteur a été synthétisé lors de la synthèse en performances. En effet, indépendamment de la synthèse finale qui peut être une synthèse H_2 ou H_∞ , la synthèse en performances peut être indifféremment une synthèse H_2 , H_∞ ou un autre type de synthèse (on peut utiliser un correcteur déjà existant, synthétisé d'une façon qui nous est inconnue).

6.2.4 Utilisations de la procédure

La procédure exposée ci-dessus peut être généralisée pour d'autres types de synthèses. À titre d'exemple, on cite quelques possibilités de cette façon de faire :

- on dispose d'un problème à deux canaux (H_2 ou H_∞) et l'on souhaite réduire l'influence des transferts croisés lors de la synthèse. Il se peut que cette synthèse en trois étapes permette d'obtenir de meilleurs résultats.
- on dispose d'un problème à deux canaux mais les critères correspondants sont de deux types différents : un est H_2 , l'autre H_∞ . L'utilisation s'adapte assez bien à ce problème, l'ajout de gains sur les canaux 1' ou 2 lors de la synthèse finale permet de réaliser le compromis entre les deux objectifs. Notons tout de même que la synthèse reste conservative car l'influence des transferts croisés n'est pas totalement annulée. Notons également que les solutions offertes *via* les LMI's³ traduisent également d'un certain conservatisme.
- on dispose d'un correcteur initial, déjà synthétisé, et l'on souhaite le robustifier. Cette solution est alors tout à fait adaptée.
- en outre, la reformulation du problème par la Forme Standard de Passage peut se répéter plusieurs fois pour prendre en compte plusieurs spécifications différentes

2. Rappelons aussi que $F_l(P(s), K_1(s))_{11} = 0$.

3. "Linear Matrix Inequalities".

afin d'appréhender des structures d'incertitudes plus complexes.

6.3 Application sur un exemple académique

Nous proposons d'illustrer cette approche sur un problème de synthèse mixte H_2/H_∞ bien connu, initialement proposé dans [36] pour illustrer l'approche LMI (Linear Matrix Inequality) et plus particulièrement la macro-fonction `hinfmix` de la LMI Control Toolbox de MATLAB. Cet exemple a également été utilisé dans [33] pour illustrer une approche itérative de résolution de BMI (Bilinear Matrix Inequality) qui a permis de trouver une solution moins conservative sur ce problème académique. Il s'agit d'un système du troisième ordre instable mono-entrée, mono sortie avec une entrée exogène w et 5 sorties contrôlées, défini par la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_2(1) \\ z_2(2) \\ z_2(3) \\ z_\infty(1) \\ z_\infty(2) \\ y \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 10 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

On s'intéresse à la performance H_2 du transfert de w vers z_2 , notée $\|T_{wz_2}\|_2$ et à la performance H_∞ du transfert de w vers z_∞ , notée $\|T_{wz_\infty}\|_\infty$. La performance H_2 optimale est 7.748 et est obtenue pour le correcteur :

$$K_2(s) = \frac{-5.7275(s + 5.168)(s - 0.2711)}{(s + 5.164)(s^2 + 3.669s + 9.933)}.$$

Pour ce correcteur la performance H_∞ est $\bar{\gamma} = 23.586$. Pour évaluer le conservatisme de leur approche, les auteurs proposent dans [36] de résoudre le problème :

$$\text{Minimiser } \|T_{wz_2}\|_2 \text{ sous la contrainte } \|T_{wz_\infty}\|_\infty < 23.6 .$$

Ils obtiennent alors une performance H_2 de 8.07 pour le correcteur :

$$K_{LMI}(s) = \frac{-7.5924(s + 5.271)(s - 0.05601)}{(s + 5.272)(s^2 + 4.253s + 10.25)}.$$

La performance H_∞ effective de ce correcteur est 17.87.

L'application de notre approche sur cette exemple est très directe car la première synthèse étant une synthèse H_2 (la contrainte portant sur le canal H_∞ , il est donc nécessaire de le prendre en compte lors de la synthèse finale), nous obtenons directement le gain K_c et le K_f de la structure estimation commande du correcteur issue de la première synthèse. On peut donc appliquer directement la CSF décrite en (5.36) sans

6.4. APPLICATION SUR UN SYSTÈME MASSES-RESSORTS

se soucier du choix de la dynamique dans la résolution de l'équation de RICCATI (2.10). Les gains de retour d'état et d'estimation du correcteur H_2 sont :

$$K_c = [0.0000, 2.6048, 0.1438], \quad K_f = [0.3401, 2.1488, 0.8997]^T,$$

et la synthèse H_∞ finale se fera donc sur le problème suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_{CSF} \\ z_\infty(1) \\ z_\infty(2) \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 2 & 0.3401 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2.1488 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 0.8997 & 1 & 0 \\ 0 & 2.6048 & 0.1438 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w_{CSF} \\ w \\ u \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

On utilise pour cela la fonction MATLAB `hinfsyn` en spécifiant une borne inférieure de 23.6 pour le critère H_∞ global, condition suffisante (mais non nécessaire) pour assurer $\|T_{wz_\infty}\|_\infty < 23.6$. On obtient alors le correcteur suivant :

$$K_{LMI}(s) = \frac{-9.8509(s + 0.3705)(s + 5.104)}{(s + 5.12)(s^2 + 5.159s + 12.06)},$$

une performance H_2 de 8.66 et une performance H_∞ de 16.09.

On constate donc que sur cet exemple nous obtenons une solution plus conservative que celle obtenue par LMI et qui s'éloigne davantage de la saturation de la contrainte H_∞ . On notera toutefois, et cela sera repris au chapitre des perspectives, que nous n'exploitons pas avec cette approche les pondérations que l'on pourrait mettre sur le canal CSF pour réduire le conservatisme dû au fait de que la condition suffisante n'est pas nécessaire. A titre d'exemple, si l'on introduit un gain de 10 sur l'entrée et la sortie du canal CSF, la γ -itération converge alors vers la valeur de 104 mais la performance H_∞ réelle est de 22.43 (la contrainte est donc satisfaite) pour une performance H_2 de 7.76 ; très proche de la valeur optimale.

On pourrait également soumettre le problème final (6.5) à un algorithme de synthèse H_2/H_∞ (le canal CSF serait alors le canal H_2) mais il faudrait pourvoir distinguer les canaux d'entrée ; ce qui n'est pas possible avec la fonction `hinfmix`. Cependant, il existe des outils généraux de synthèse multi-objectifs, développés dans [32], mais uniquement pour des systèmes discrets.

6.4 Application sur un système masses-ressorts

On se propose dans cette section d'illustrer au mieux les avantages et les inconvénients de l'utilisation de la forme standard de passage pour la synthèse d'un correcteur ayant un cahier des charges particulier. On présentera dans un premier temps le système étudié et son cahier des charges, puis, on effectuera sur ce système une synthèse H_∞ , ayant pour but de se fixer un point de référence pour la comparaison de résultats,

enfin on utilisera sur ce système une technique faisant intervenir la Forme Standard de Passage. On a alors la possibilité de comparer les résultats obtenus avec ceux obtenus avec une synthèse H_∞ classique.

6.4.1 Système et cahier des charges

Le système étudié est composé de deux masses m , reliées par un ressort de raideur k et un amortisseur ayant un coefficient de frottement visqueux f . Il est représenté sur le schéma de la figure 6.1. La sortie correspond à la position de la seconde masse, et l'entrée est la force exercée sur la première masse.

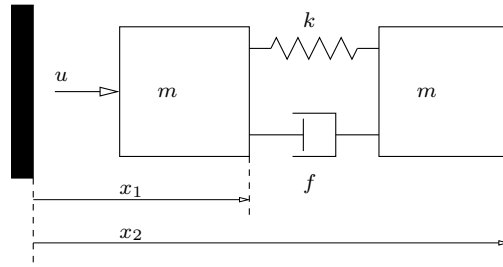


FIGURE 6.1: Système masses-ressort.

Ce système peut être écrit sous la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{mc} \\ \ddot{x}_{mc} \\ \dot{x}_d \\ \ddot{x}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2\frac{k}{m} & -2\frac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{mc} \\ \dot{x}_{mc} \\ x_d \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \\ \frac{-1}{m} \end{bmatrix} u \quad (6.6)$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} X$$

où $x_{mc} = x_1 + x_2$ et $x_d = x_2 - x_1$ (on a voulu faire apparaître le mode commun, représentatif du mode rigide, et le mode différentiel, représentatif du mode flexible).

Dans notre cas, les valeurs numériques utilisées sont les suivantes :

- $m = 0.5 \text{ kg}$;
- $k = 1 \text{ N.m}^{-1}$;
- $f = 0.0025 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$.

Les objectifs de la loi de commande sont les suivants :

- On souhaite faire un asservissement de position dont la dynamique se rapproche le plus possible d'un second ordre, de pulsation $\omega_0 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$, d'amortissement $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et de gain statique unitaire ;
- Le correcteur doit assurer la stabilité du système, et si possible les performances, pour des variations paramétriques (δm , δk , δf) de +/- 30% ; si possible, la dynamique de sortie devra correspondre à la dynamique du mode commun ;
- Le correcteur sera un correcteur à deux degrés de liberté, pour une plus grande marge de manoeuvre.

6.4. APPLICATION SUR UN SYSTÈME MASSES-RESSORTS

Ce qui conduit au schéma bloc suivant :

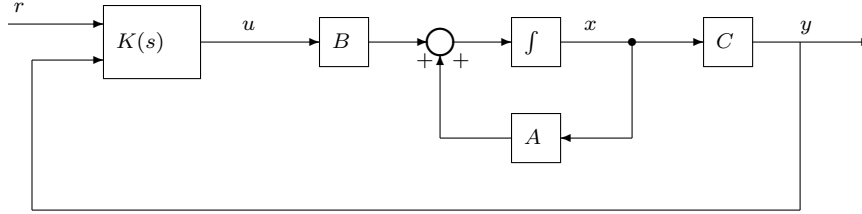


FIGURE 6.2: Schéma bloc du système masses-ressort en boucle fermée.

6.4.2 Synthèse H_∞

Le but de cette sous-section est d'obtenir un correcteur, pour le système masses-ressort précédemment défini, qui remplisse au mieux le cahier des charges imposé. Le correcteur ainsi obtenu donnera une base de comparaison avec la technique faisant intervenir la Forme Standard de Passage à la section 6.4.3.

En fait, on souhaite obtenir, en boucle fermée, l'équation suivante entre r et y :

$$\ddot{y} = -\omega_0^2 y - 2\xi\omega_0 \dot{y} + \omega_0^2 r \quad (6.7)$$

Dans cette équation, on remplace y par $\frac{1}{2}(x_{mc} + x_d)$, et on obtient :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{X} = -\omega_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X - 2\xi\omega_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} X + 2\omega_0^2 r$$

Puis, en remplaçant \dot{X} par $AX + Bu$, l'équation (6.7) devient équivalente à l'équation (6.8).

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A + \begin{bmatrix} \omega_0^2 & 2\xi\omega_0 & \omega_0^2 & 2\xi\omega_0 \end{bmatrix} \right) X + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} Bu - 2\omega_0^2 r \\ 0 &= K_x X + K_u u + K_r r \end{aligned} \quad (6.8)$$

Au final, la forme standard non-pondérée pour la synthèse H_∞ se représente avec le schéma bloc de la figure 6.3. On a donc remplacé la sortie y du schéma classique par la sortie z_d dont la principale fonction est de fixer la dynamique de sortie du système en boucle fermée.

Parmi les 6 transferts disponibles, on utilise principalement :

- le transfert $w_p \rightarrow z_d$ pour placer la dynamique principale de la boucle fermée ;
- le transfert $w_r \rightarrow z_d$ pour diminuer l'erreur statique ;
- les transferts $w_p \rightarrow z_u$ et $w_r \rightarrow z_u$ pour éviter une trop forte agitation de la commande ;
- les transferts $w_b \rightarrow z_d$ et $w_b \rightarrow z_u$ pour réduire l'influence des bruits de mesure.

On choisit donc un lot de pondérations sur les 3 entrées w et les 2 sorties z qui établit un compromis entre l'erreur de position de la boucle fermée, l'erreur de dynamique et la robustesse vis-à-vis des bruits de mesure. Il est important de noter ici qu'il n'est

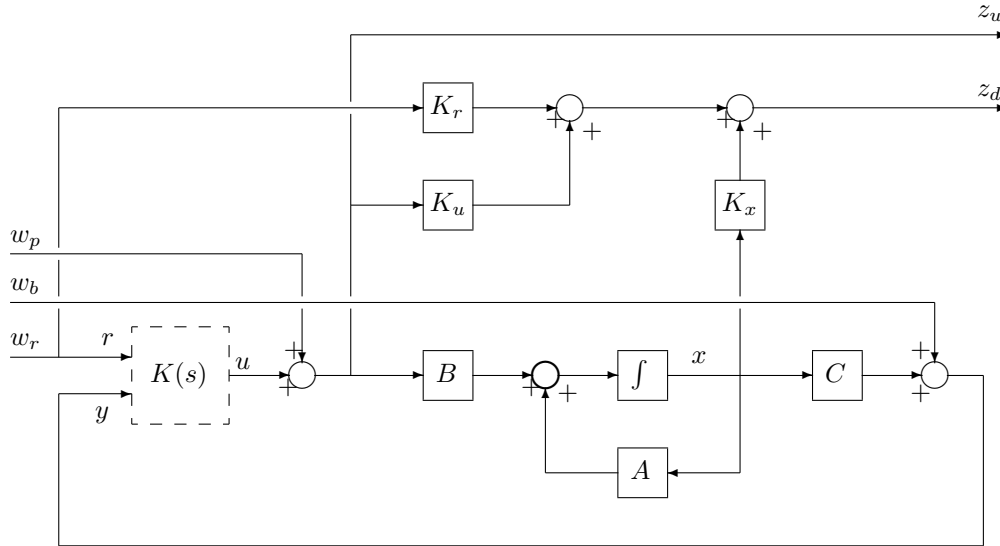


FIGURE 6.3: Schéma bloc pour la synthèse H_∞ .

pas indispensable de prendre en compte le critère de robustesse paramétrique de façon directe. En effet, la robustesse du correcteur vis-à-vis du bruit de mesure prend déjà ce critère en compte de manière indirecte, et, comme on le verra par la suite, un réglage adapté des différentes pondérations permettra de satisfaire les conditions de robustesse paramétrique.

Cette synthèse s'effectue donc sur la base d'une synthèse 4 blocs, sur laquelle on ajoute une entrée exogène correspondant au second degré de liberté du correcteur (la référence). De plus, une des sorties est modifiée pour répondre à la caractéristique de dynamique.

Il est important de noter ici que les réglages des différentes pondérations sont extrêmement délicats, et qu'une faible différence de pondérations peut conduire à deux correcteurs assez différents. D'un point de vue pratique, cela implique de passer du temps lors de la synthèse pour trouver un réglage adéquat. La procédure de réglage des différentes pondérations est, en effet, fastidieuse et demande une certaine pratique de la synthèse de correcteur par la technique H_∞ . Parmi les différents réglages qui ont été testés, on en exposera ici deux qui ont donné d'assez bons résultats.

Premier réglage

Dans le compromis performance-robustesse paramétrique, ce premier réglage favorise la performance.

6.4. APPLICATION SUR UN SYSTÈME MASSES-RESSORTS

À partir du schéma de la figure 6.3, on ajoute des filtres de pondération comme expliqué avec le schéma explicatif ci-dessous :



FIGURE 6.4: Illustration du rajout d'une pondération.

La pondération sur les entrées exogènes est de type (a), et sur les sorties contrôlées de type (b). Au final, le schéma utilisé pour la synthèse du correcteur fera intervenir les entrées et les sorties comportant un prime (').

On utilise ici les pondérations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \frac{w_r}{w_r'} &= \frac{1 + 0.1s}{1 + 10s} & \frac{z_d'}{z_d} &= 10 \\
 \frac{w_p'}{w_p} &= 0.01 & \frac{z_u'}{z_u} &= 0.5 \\
 \frac{w_b'}{w_b} &= 0.01 & &
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Le filtre est utilisé, parce qu'aux hautes fréquences on peut difficilement agir sur le gain entre z_d et w_r . On se contente donc d'agir sur les basses fréquences pour assurer une erreur maximale de 10% sur le gain statique. L'ensemble des résultats graphiques de cette synthèse est donné sur les figures 6.5 et 6.6.

Sur la figure 6.5 les différentes lignes représentent, dans l'ordre, les entrées w_r , w_p et w_b . Les colonnes représentent, dans l'ordre, les sorties z_d et z_u . Ces figures montrent également les gabarits imposés par les pondérations sur les différents transferts (c'est-à-dire l'inverse des pondérations). On constate que l'erreur sur le gain statique est inférieure à 40dB (transfert $w_r \rightarrow z_d$), et que la pulsation de coupure du système se situe bien entre 1 et 10rad/sec. (transfert $w_p \rightarrow z_d$).

La figure 6.6 permet de bien évaluer le résultat de la synthèse :

— la première figure représente la réponse du système bouclé à un échelon unitaire (en rouge). On y a superposé la réponse d'un système de référence ($\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 s + s^2}$, en vert). On constate que les deux courbes sont quasiment confondues, la performance est donc assurée.

— la seconde figure représente le lieu des racines de $G(s)K(s)$ lorsqu'on fait varier le gain de boucle de 0 à 2. Les étoiles bleues représentent les pôles de la boucle ouverte, les étoiles vertes les pôles du correcteur (il y en a au-delà du champ observé), et les ronds rouges représentent les pôles de la boucle fermée (soit, lorsque le gain de boucle est égal à 1). Le mode rigide se trouve quasiment au même endroit que les modes de la dynamique de référence. De plus, une certaine stabilité est assurée grâce à l'augmentation de l'amortissement du mode flexible.

— la troisième figure représente le diagramme de stabilité paramétrique de la boucle fermée lorsqu'on fait varier k (en abscisse) et m (en ordonnée) ; les points noirs indiquant les endroits où le système est stable. On n'a pas pris en compte les variations

de f car le système est naturellement très robuste à ces variations. On constate que le système en boucle fermée est robuste à des variations de plus de 30% des paramètres, à condition qu'un seul varie. Lorsque ces deux paramètres varient simultanément, il persiste une faible zone dans laquelle la stabilité n'est plus assurée.

— enfin, sur la dernière figure, on peut observer le lieu de BLACK de $G(s)K(s)$ pour constater que l'on a obtenu des marges de robustesse suffisantes.

Afin de mesurer la robustesse paramétrique vis-à-vis des différents paramètres, on ajoute un bloc d'incertitudes paramétriques structuré, sous forme LFT, où les entrées et sorties correspondantes sont pondérées par $\sqrt{0.3}$ (pour qu'une norme H_∞ de 1 corresponde à une variation de 30% du paramètre). On calcule alors les normes suivantes pour les différents transferts :

$$0.3 \left\| \frac{\delta k_{out}}{\delta k_{in}} \right\|_\infty = 0.97 \quad 0.3 \left\| \frac{\delta f_{out}}{\delta f_{in}} \right\|_\infty = 0.01 \quad 0.3 \left\| \frac{\delta m_{out}}{\delta m_{in}} \right\|_\infty = 0.97$$

On constate que ces normes sont toutes inférieures à 1. Cependant, une amélioration est ici nécessaire pour stabiliser le système lorsque plusieurs paramètres varient simultanément.

6.4. APPLICATION SUR UN SYSTÈME MASSES-RESSORTS

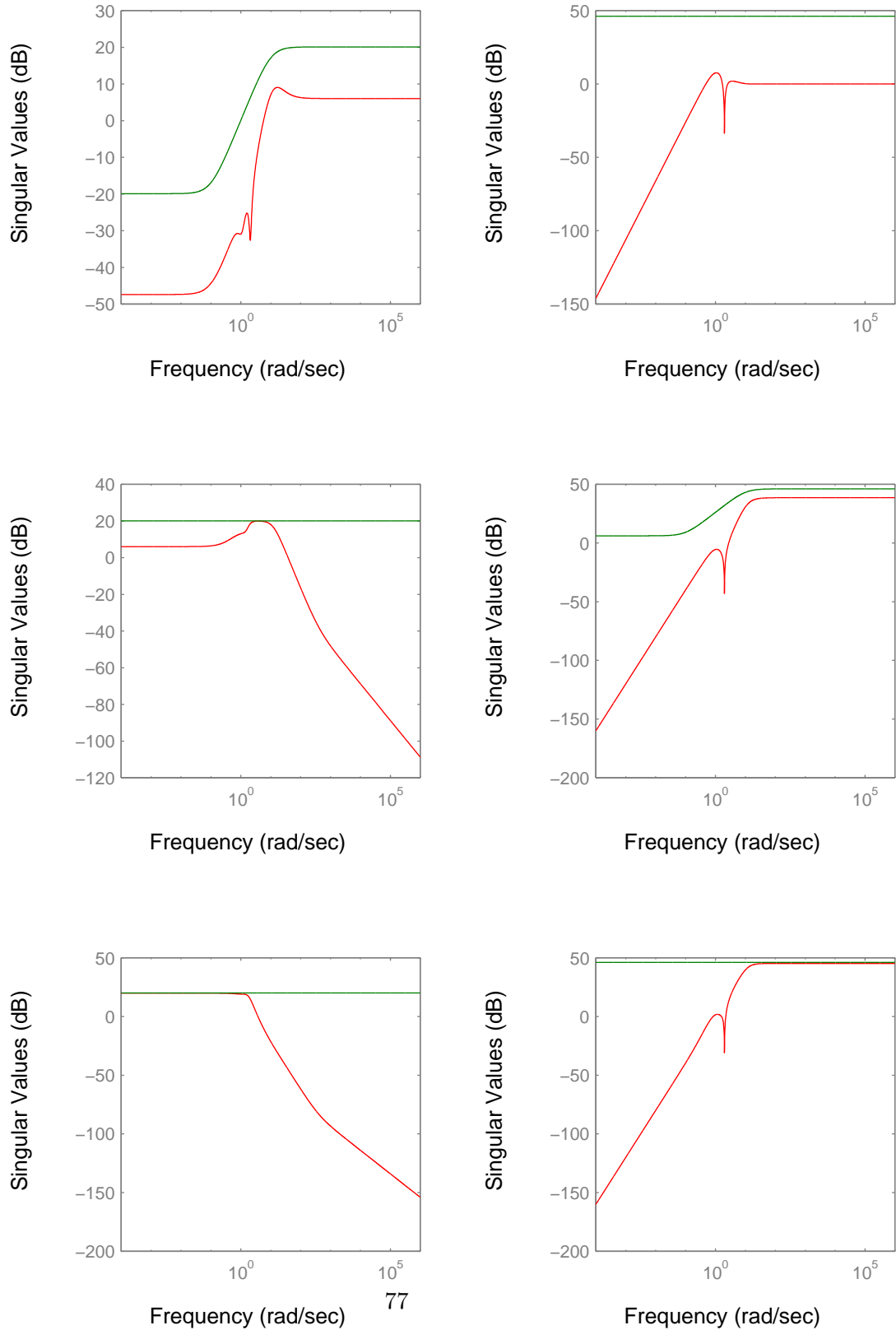


FIGURE 6.5: Visualisation des différents transferts $w \rightarrow z$ en boucle fermée (1^{er} réglage H_∞).

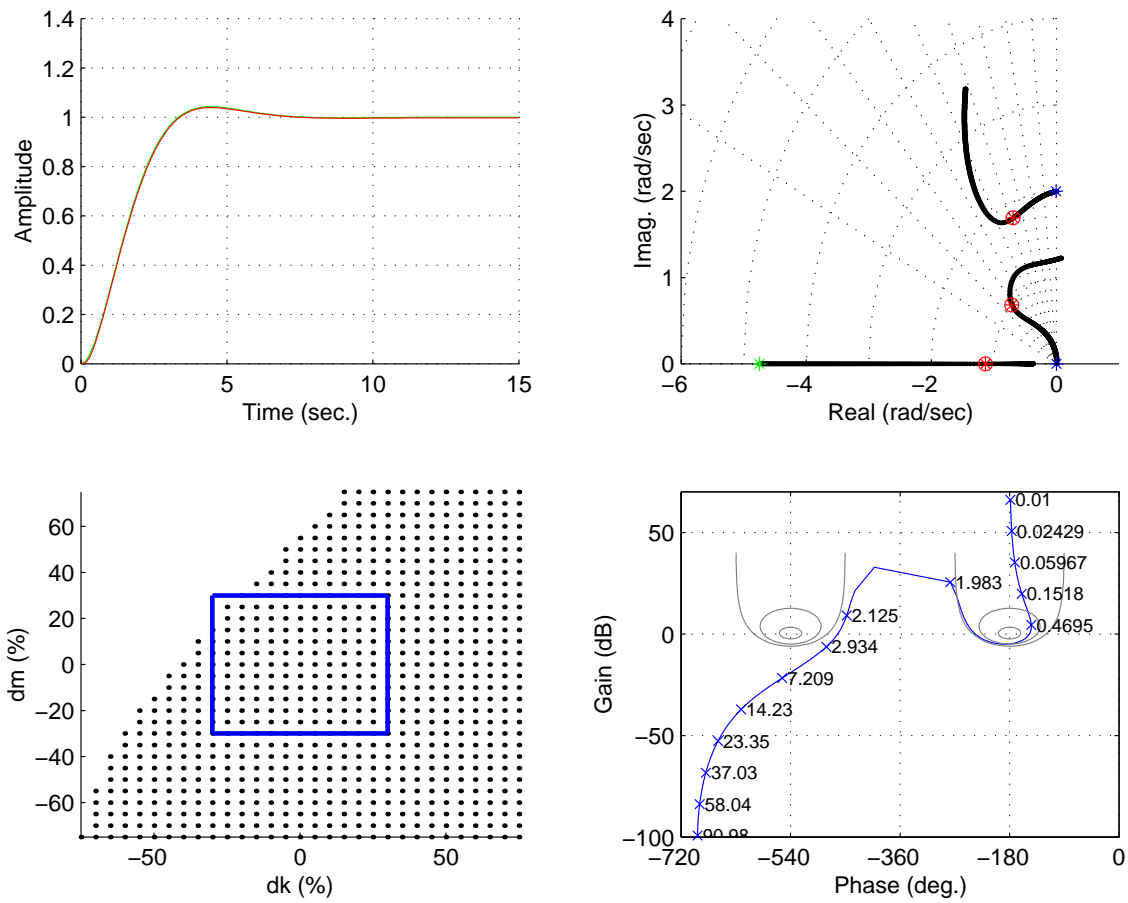


FIGURE 6.6: Visualisation des résultats de la synthèse (1^{er} réglage H_∞).

Second réglage

Le premier réglage exposé n'ayant pas rempli les conditions de robustesse paramétrique, on tente de trouver un nouveau jeu de pondération plus adéquat vis-à-vis de ce critère.

On modifie légèrement les différentes pondérations précédemment utilisées :

$$\begin{aligned}
 \frac{w_r}{w_p'} &= \frac{1 + 0.1s}{1 + 10s} & \frac{z_d'}{z_u} &= 10 \\
 \frac{w_p'}{w_b'} &= 0.005 & \frac{z_d}{z_u} &= 0.5 \\
 \frac{w_b'}{w_b'} &= 0.02 & &
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Ceci nous conduit aux résultats des figures 6.7 et 6.8.

Les différents transferts de la figure 6.7 sont dans le même ordre que pour le réglage précédent. On constate que le transfert $w_r \rightarrow z_d$ est plus élevé dans la zone autour de 1 rad/sec . On devrait donc se retrouver avec une performance légèrement diminuée. Ceci se confirme sur la réponse temporelle de la figure 6.8 ; la réponse ne “colle” plus aussi bien avec le modèle de référence. Cependant, le temps de montée est identique et ce résultat reste correct. C'est sur le lieu des racines que la détérioration se ressent le plus, puisque le mode rigide ne se retrouve pas en $-0.7 + j - 0.7i$. En revanche, le diagramme de stabilité est meilleur. En effet, le rectangle qui définit la limite des $\pm 30\%$ est parfaitement incluse dans la zone de stabilité. Les normes des différents transferts du bloc d'incertitudes structuré sont d'ailleurs améliorées :

$$0.3 \left\| \frac{\delta k_{out}}{\delta k_{in}} \right\|_{\infty} = 0.73 \quad 0.3 \left\| \frac{\delta f_{out}}{\delta f_{in}} \right\|_{\infty} = 0.01 \quad 0.3 \left\| \frac{\delta m_{out}}{\delta m_{in}} \right\|_{\infty} = 0.87$$

Les deux réglages de pondérations utilisés pour la synthèse H_{∞} sur le système masses-ressorts considéré ont conduit à deux correcteurs différents. Le premier correcteur satisfait bien le critère de performance mais ne satisfait pas complètement le critère de robustesse paramétrique ; pour le second réglage, il se produit exactement l'inverse. Nous n'avons pas trouvé de réglage permettant de satisfaire les deux critères. Néanmoins, les correcteurs obtenus sont assez proches de ce que l'on souhaitait obtenir. Quoi qu'il en soit, le réglage de ce type de synthèse reste assez délicat et demande un certain temps.

Vis-à-vis du résultat obtenu, on pourrait penser que la prise en compte directe du critère de robustesse paramétrique (en considérant les 3 entrées w et les entrées liées au bloc d'incertitudes et les 2 sorties z et les sorties liées au bloc d'incertitudes) aurait amélioré ce résultat. Malheureusement, ce n'est pas le cas, car certains transferts croisés deviennent limitants (alors qu'ils n'ont aucune utilité).

Bien qu'on n'ait aucune garantie *a priori*, on espère que la méthodologie utilisant la

Forme Standard de Passage apportera un mieux par rapport à la synthèse H_∞ directe. Cette amélioration peut se faire à deux niveaux :

- au niveau de la satisfaction du cahier des charges,
- au niveau du temps passé pour régler la synthèse.

6.4. APPLICATION SUR UN SYSTÈME MASSES-RESSORTS

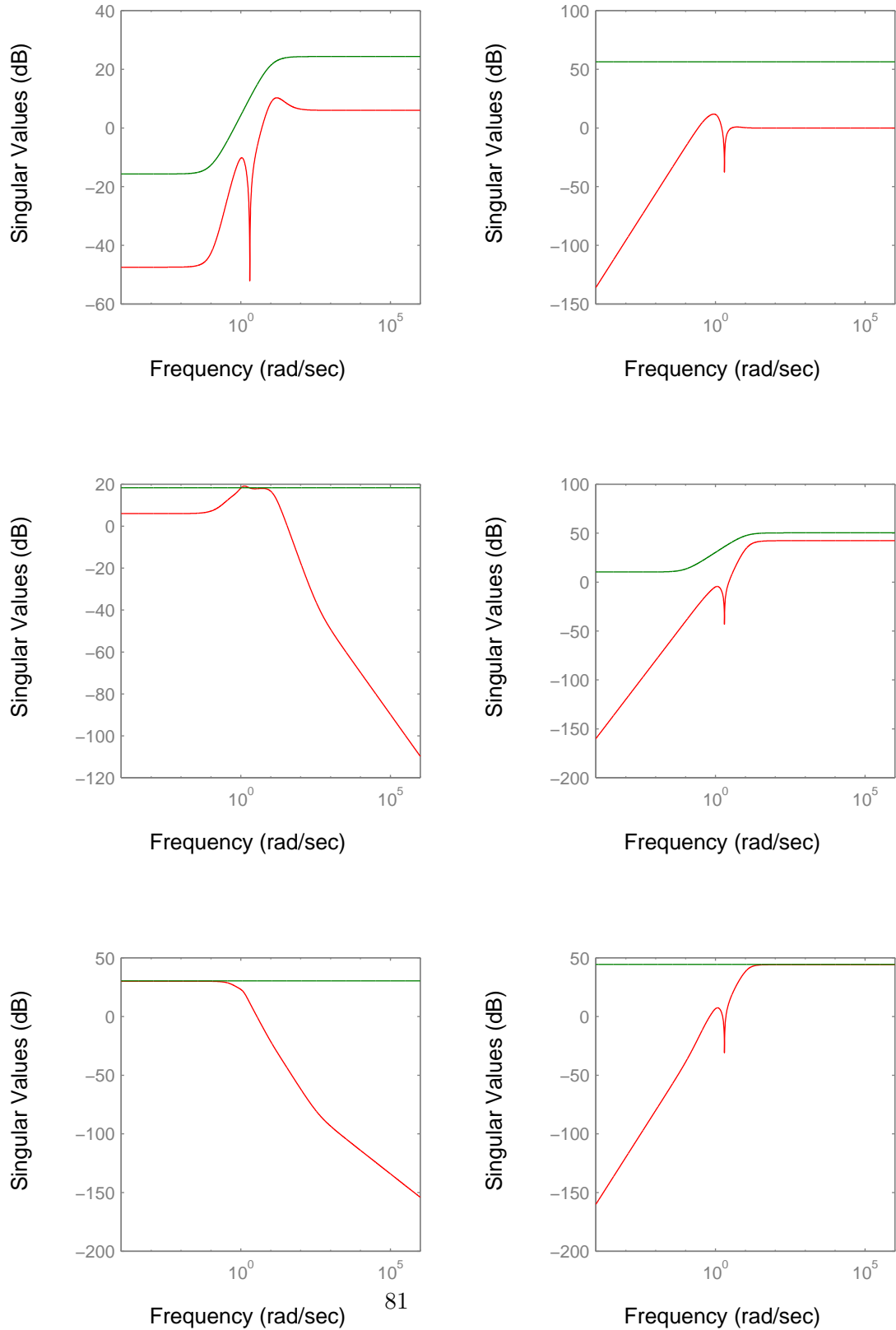


FIGURE 6.7: Visualisation des différents transferts $w \rightarrow z$ en boucle fermée (2nd réglage H_∞).

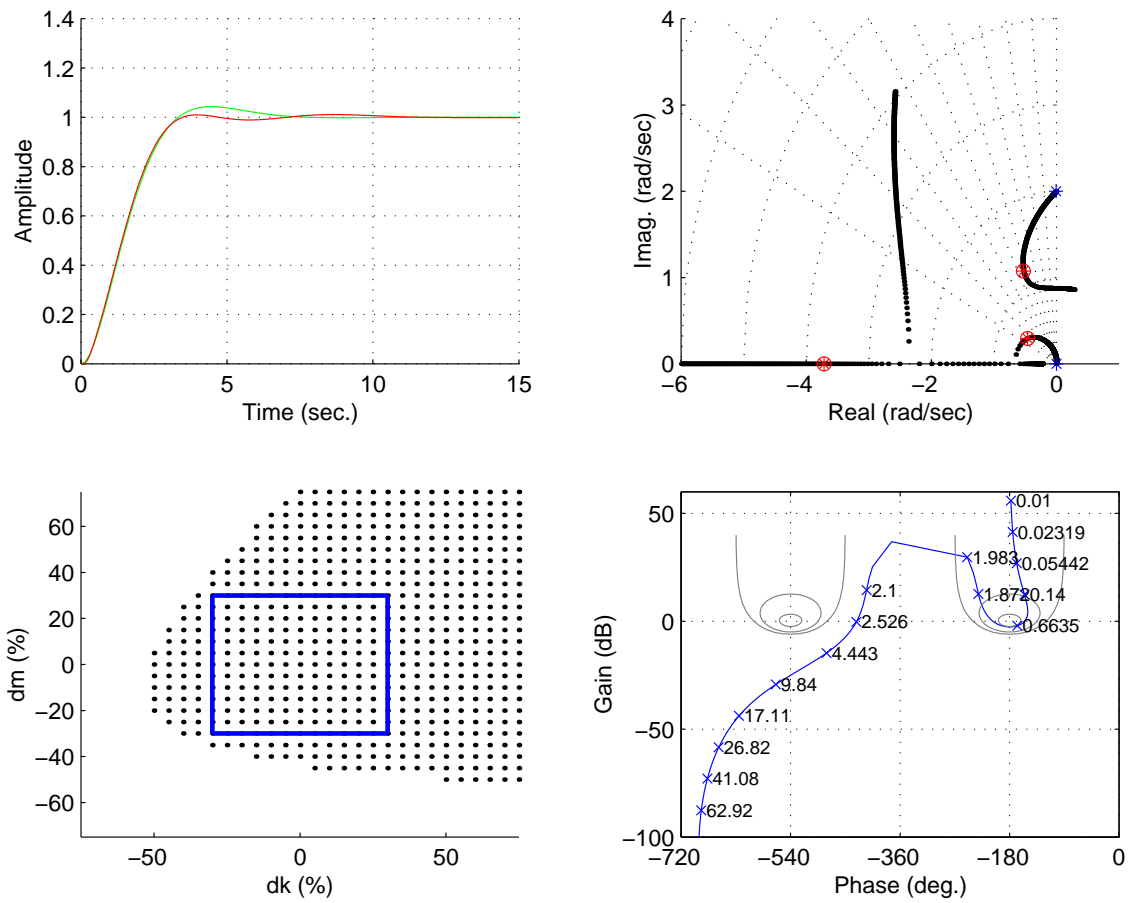


FIGURE 6.8: Visualisation des résultats de la synthèse (2^{nd} réglage H_∞).

6.4.3 Utilisation de la CSF

Rappelons, avant de commencer, que les résultats de la synthèse H_∞ précédente sont indépendants de ceux présentés dans cette sous-section.

La synthèse du correcteur, lorsqu'on utilise la Forme Standard de Passage comme outil, s'effectue en deux étapes : on synthétise un premier correcteur qui remplit un premier critère, puis après avoir transformé le problème, à partir du correcteur obtenu et à l'aide de la CSF, on effectue une synthèse finale qui prend en compte le correcteur initial et le second critère. Deux solutions ont été envisagées :

1. Faire une synthèse H_∞ sur la base de celles réalisées précédemment, en privilégiant l'aspect performance. Puis construire la Forme Standard de Passage (à deux degrés de liberté) à partir du correcteur ainsi obtenu et y ajouter les entrées et sorties liées au bloc d'incertitudes paramétriques.
2. Faire une synthèse H_∞ visant uniquement l'aspect robustesse. Puis construire la Forme Standard de Passage (à un seul degré de liberté) et y ajouter les entrées et sorties liées à la performance, pour finalement obtenir le correcteur à deux degrés de liberté souhaité.

Lors de la mise en oeuvre de la première méthode, on est confronté à des difficultés avec la dernière phase du processus. En effet, le fait que la Forme Standard de Passage possède deux entrées pour les canaux qui correspondent aux caractéristiques du correcteur rend difficile les réglages des pondérations, les termes croisés dans certains transferts étant souvent bloquants. C'est pourquoi on s'est reporté sur la seconde solution.

Première étape : synthèse d'un correcteur robuste aux variations paramétriques

On commence donc par construire un correcteur qui est robuste aux variations paramétriques. Le schéma de la forme standard utilisé pour cette synthèse est décrit figure 6.9. Les entrées δ_{in} et les sorties δ_{out} correspondent aux incertitudes paramétriques.

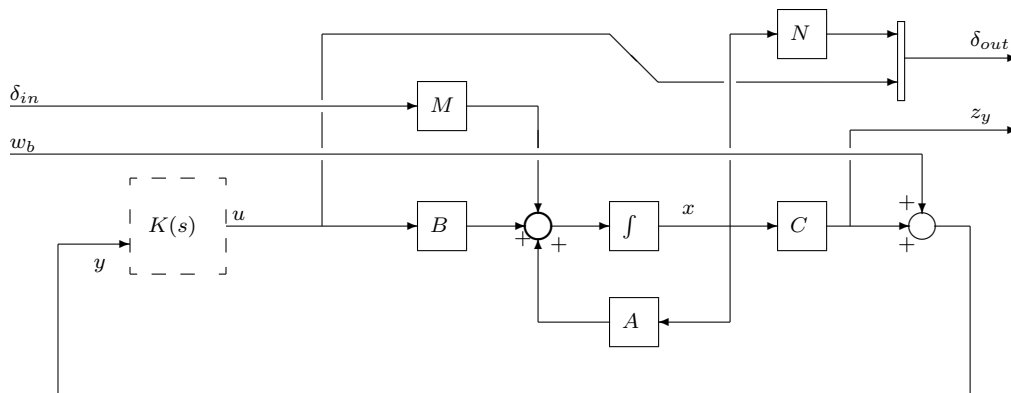


FIGURE 6.9: Schéma bloc pour la synthèse H_∞ liée à la robustesse.

Lorsqu'on applique une variation paramétrique Δ , on a :

$$\delta_{in} = \Delta \delta_{out} = \text{diag}([\ \delta_k \ \delta_f \ \delta_m \ \delta_m \]) \delta_{out}$$

L'incertitude liée à la masse est répétée (voir les matrices A et B de (6.6)).

En plus des entrées/sorties liées aux incertitudes, on a ajouté une entrée bruit w_b et une sortie mesure z_y dans le but de régulariser la forme standard correspondante.

Les pondérations qui y sont appliquées sont faibles :

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{in}}{\delta'_{in}} &= \text{diag}([\ \sqrt{0.3} \ \sqrt{0.3} \ \sqrt{0.3} \ \sqrt{0.3} \]) & \frac{w_b}{w'_p} &= 0.01 \\ \frac{\delta'_{out}}{\delta_{out}} &= \text{diag}([\ \sqrt{0.3} \ \sqrt{0.3} \ \sqrt{0.3} \ \sqrt{0.3} \]) & \frac{z_y}{z'_y} &= 0.01 \end{aligned}$$

À l'issue de cette synthèse, le correcteur obtenu permet d'obtenir de très faibles normes sur les transferts concernant les incertitudes :

$$0.3 \left\| \frac{\delta k_{out}}{\delta k_{in}} \right\|_{\infty} = 0.46 \quad 0.3 \left\| \frac{\delta f_{out}}{\delta f_{in}} \right\|_{\infty} = 0.01 \quad 0.3 \left\| \frac{\delta m_{out}}{\delta m_{in}} \right\|_{\infty} = 0.52$$

Seconde étape : conversion du correcteur en problème standard et synthèse finale

À partir de ce correcteur, on calcule une Forme Standard de Passage comme décrit dans le chapitre précédent. Pour plus de facilité dans la lecture, on rappelle son expression :

$$P_{CSF} := \left[\begin{array}{c|cc} A & T^+ B_k - B D_k & B \\ \hline -C_k T - D_k C & -D_k & 1 \\ C & 1 & 0 \end{array} \right]$$

où la matrice T est solution de l'équation de RICCATI généralisée :

$$[\ -T \ I \] A_{cl} \begin{bmatrix} I \\ T \end{bmatrix}$$

Rappelons qu'il existe plusieurs solutions pour la résolution de cette équation. La technique des sous-espaces invariants impose de choisir un sous-espace de vecteurs propres de A_{cl} de dimension n qui servira à la construction de T . Le lecteur se reportera à la première partie de ce mémoire pour plus de détails.

Dans le cas présent, on a choisi le sous-espace invariant sur la base des 4 valeurs propres issues du système non corrigé. À l'usage, on s'est aperçu que ce choix donnait souvent de meilleurs résultats.

À cette Forme Standard de Passage, on ajoute alors les entrées et sorties qui correspondent aux exigences de performance. Le schéma de la figure 6.10 illustre la forme standard correspondante. Avec $B_1 = T^+ B_k - B D_k$, $C_1 = -C_k T - D_k C$ et $D_{11} = -D_k$.

6.4. APPLICATION SUR UN SYSTÈME MASSES-RESSORTS

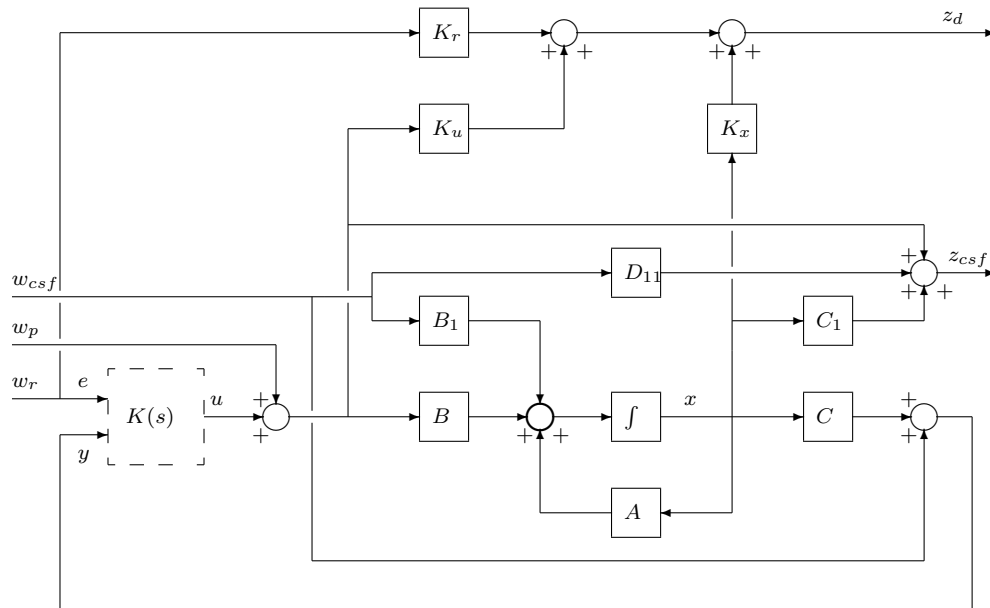


FIGURE 6.10: Schéma bloc pour la synthèse finale.

Les pondérations que l'on utilise alors sont :

$$\begin{aligned}
 \frac{w_r}{w'_r} &= 10 \frac{1 + 0.1s}{1 + 10s} & \frac{z'_d}{z_d} &= 1 \\
 \frac{w_p}{w'_p} &= 2 & \frac{z'_{csf}}{z_{csf}} &= 0.1 \\
 \frac{w_{csf}}{w'_{csf}} &= 0.001 & &
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Le filtre sur l'entrée w_r a la même utilité que pour la synthèse H_∞ directe. Le choix des coefficients est établi après avoir fait une ou deux synthèses préliminaires pour évaluer quels sont les transferts "bloquants".

Résultats

Les résultats de la synthèse finale sont montrés sur les figures 6.11 et 6.12.

Sur la figure 6.11, on trouve sur chaque ligne les entrées qui, sont, de haut en bas, w_r , w_p et w_{csf} et sur chaque colonne les sorties qui sont, de gauche à droite, z_d et z_{csf} . On constate une performance correcte avec la bande passante désirée (entre 1 et 10 rad/sec.) et un gain entre z_d et w_r qui atteint pratiquement -40 dB en basses fréquences, soit une erreur statique d'environ 1%.

La figure 6.12 confirme les bons résultats en performance du système en boucle fermée. La réponse temporelle est presque confondue avec la réponse de référence et le mode rigide est correctement placé en $-0.7 + j - 0.7i$.

En ce qui concerne la robustesse paramétrique, on observe que le carré qui marque des variations sur k et m de 30% est à l'intérieur de la zone de stabilité. Ceci se vérifie

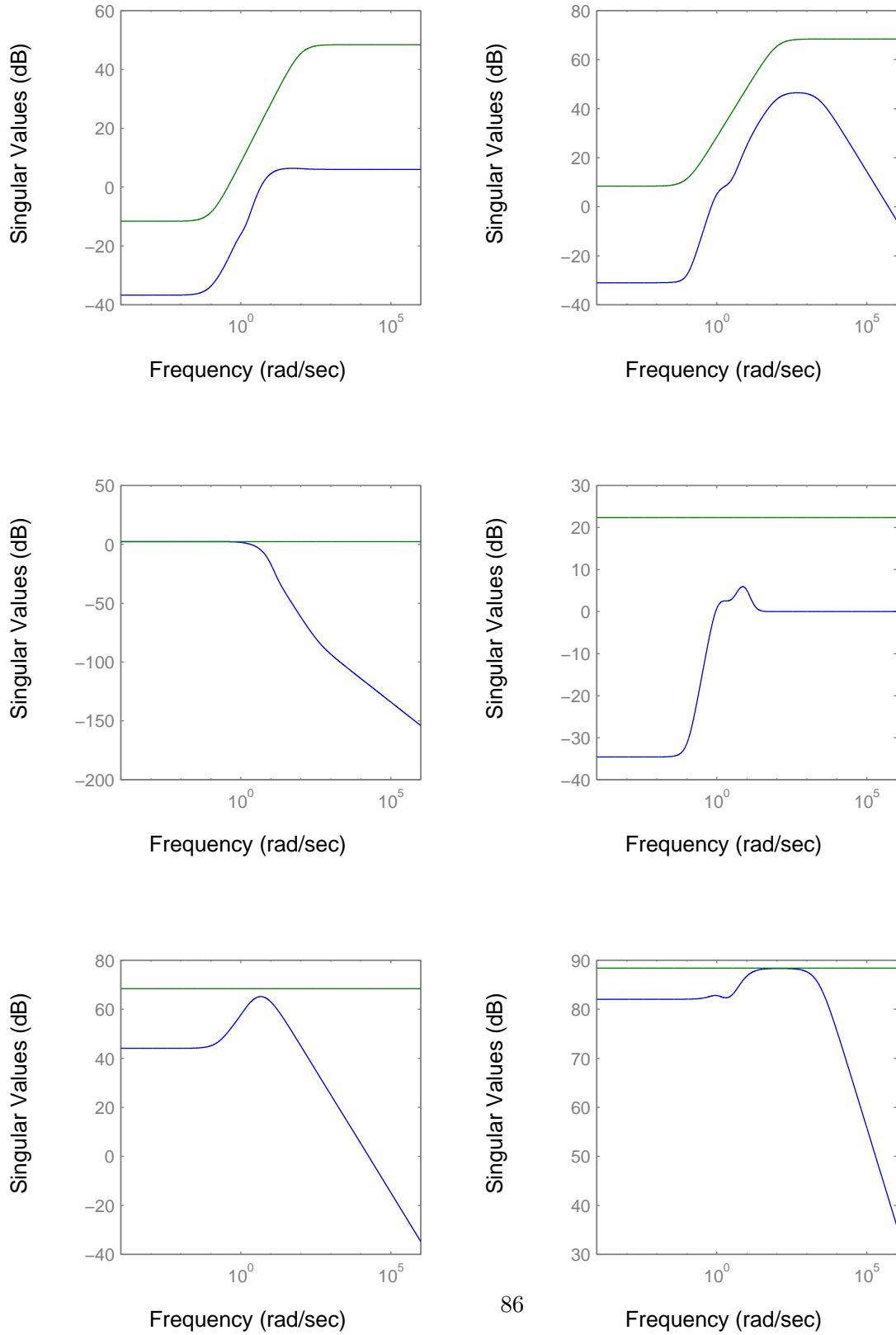


FIGURE 6.11: Visualisation des différents transferts $w \rightarrow z$ en boucle fermée.

6.4. APPLICATION SUR UN SYSTÈME MASSES-RESSORTS

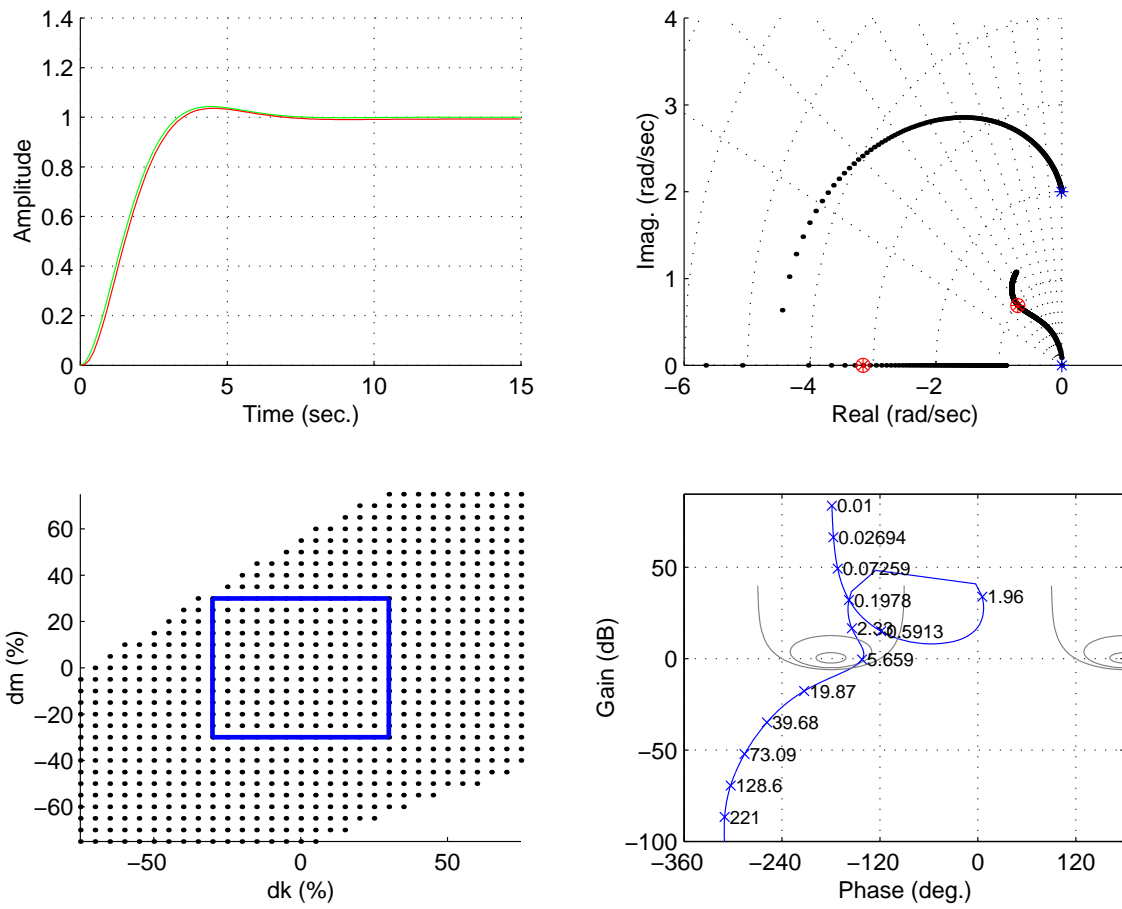


FIGURE 6.12: Visualisation des résultats de la synthèse finale.

sur les faibles normes des transferts concernant les incertitudes :

$$0.3 \left\| \frac{\delta k_{out}}{\delta k_{in}} \right\|_{\infty} = 0.54 \quad 0.3 \left\| \frac{\delta f_{out}}{\delta f_{in}} \right\|_{\infty} = 0.01 \quad 0.3 \left\| \frac{\delta m_{out}}{\delta m_{in}} \right\|_{\infty} = 0.54$$

Ces normes ont été légèrement détériorées lors de la seconde synthèse ; néanmoins, elles restent inférieures à celles obtenues avec la synthèse H_{∞} directe.

Au final, par rapport à la synthèse H_{∞} seule, l'utilisation de la Forme Standard de Passage a permis de mieux remplir le cahier des charges puisque :

- les pôles de la boucle fermée ont la position souhaitée,
- la réponse temporelle du système en boucle fermée se confond quasiment avec la réponse du modèle de référence,
- la robustesse paramétrique est assurée pour les variations fixées.

Un autre point positif est le temps passé au réglage des différentes pondérations pour les deux synthèses successives de la méthode : ces réglages se sont avérés plus faciles à réaliser.

6.5 Prise en compte d'un correcteur proportionnel dérivé

On présente une autre approche de la CSF sur le même exemple du système masse-ressort mais qui permet de prendre en compte un correcteur d'ordre réduit synthétisé par une approche classique. On considèrera donc ici que le système masse-ressort présenté figure 6.1 (ou l'équation (6.6)) est le modèle détaillé $G(s)$ d'un système de positionnement en translation dans lequel on a modélisé la raideur de transmission entre l'actionneur et la charge. Si l'on suppose le système rigide, le modèle de base entre l'effort u et la position y de la charge est réduit au mode commun. Ce modèle très grossier s'écrit :

$$G_0(s) = \frac{1}{2m s^2} ,$$

où $2m$ représente la masse totale du système de positionnement (actionneur + charge). Il est alors bien connu qu'une commande proportionnelle dérivée permet d'obtenir la dynamique désirée (second ordre de pulsation $\omega_0 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ et d'amortissement $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$). Cette loi de commande, où l'on introduit un pôle rapide à $-10\omega_0$ pour rendre le correcteur propre, s'écrit :

$$K_0(s) = -2m \frac{\omega_0^2 + 2\xi \omega_0 s}{1 + \frac{s}{10\omega_0}} .$$

Une réalisation d'état de $K_0(s)$ est :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} -10\omega_0 & 20\xi - 1 \\ \hline 20\omega_0^3 m & -40\xi\omega_0^2 m \end{array} \right] \quad (6.12)$$

6.5. PRISE EN COMPTE D'UN CORRECTEUR PROPORTIONNEL DÉRIVÉ

La dynamique du modèle rigide obtenue en boucle fermée est représentée par le lieu des racines (en clair sur la figure 6.13) du transfert de boucle ouvert $-K_0(s)G_0(s)$. Elle satisfait bien la spécification de performance.

On souhaite maintenant satisfaire les autres spécifications du cahier des charges (robustesse paramétrique) tout en gardant le comportement dynamique du mode commun obtenu avec le correcteur K_0 . On ne s'intéressera ici qu'à des correcteurs à 1 degré de liberté et on évaluera les solutions obtenues sur la position des modes dans le plan complexe. De même, seules les incertitudes sur la raideur k seront considérées ici. On peut montrer [4, 6] que le modèle incertain peut être représenté par la forme $M(s) - \Delta$ suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \frac{z_{\Delta k}}{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & B_{\Delta} & B \\ C_{\Delta} & D_{\Delta} & D_{\Delta} \\ C & D_{\Delta} & D \end{bmatrix}}_{:= M(s)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \frac{w_{\Delta k}}{u} \end{bmatrix}$$

$$\Delta \in [-1, +1] \quad / \quad w_{\Delta k} = \Delta z_{\Delta k}$$

avec :

$$M(s) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\bar{k}}{m_1} & \frac{\bar{k}}{m_1} & -\frac{f}{m_1} & \frac{f}{m_1} & -\frac{\sqrt{\delta}}{m_1} & \frac{1}{m_1} \\ \frac{\bar{k}}{m_2} & -\frac{\bar{k}}{m_2} & \frac{f}{m_2} & -\frac{f}{m_2} & \frac{\sqrt{\delta}}{m_2} & 0 \\ \sqrt{\delta k} & -\sqrt{\delta k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où $\delta = 0.3$ est la plage d'incertitude sur k . On peut alors écrire : $G(s) = F_u(M(s), 0) = D + C(sI - A)^{-1}B$.

Il est bien connu qu'une commande proportionnelle dérivée ne peut pas stabiliser un tel système flexible où l'action n'est pas colocalisée à la mesure. En effet, la dynamique en boucle fermée de $F_l(M, K_0)$ est :

$$\{0.68 \pm 2.02i, -0.71 \pm 0.61i, -9.95\} .$$

Nous sommes donc dans un cas où le correcteur initial ne stabilise pas le modèle (et ne vérifie donc pas les hypothèses énoncées dans la définition 5.2.4 de la CSF). Cependant, il est toujours possible de résoudre en T l'équation de RICCATI généralisée 2.10. Mais la synthèse H_2 ou H_{∞} sur la CSF construite à partir de T (équation (5.24)) fournira toujours un correcteur stabilisant $\hat{K}(s) \neq K_0(s)$. On peut alors montrer (voir [4]) que les valeurs propres de la boucle fermée $F_l(P_{CSF}, \hat{K})$ seront alors placées sur les valeurs propres stables et sur les valeurs opposées des valeurs instables de $F_l(P_{CSF}, K_0)$. Le placement stable rigide sera donc restitué sur la forme standard de passage construite à partir de ce correcteur non stabilisant.

Pour résoudre l'équation de RICCATI par la méthode des sous-espaces invariants, nous avons choisi le sous-espace associé aux 4 valeurs propres complexes. La solution

est alors :

$$T = [0.0311, 1.5683, -0.0030, -0.1577].$$

On peut alors construire le problème à 2 canaux $P(s)$:

$$\left[\begin{array}{c|cc|c} A & B_\Delta & T^+ B_K - B D_K & B \\ \hline C_\Delta & D_\Delta & 0 & D_\Delta \\ -C_K T - D_K C & 0 & -D_K + D_K D D_K & I_m - D_K D \\ \hline C & D_\Delta & I_p - D D_K & D \end{array} \right] \quad (6.13)$$

Le premier canal correspond à la spécification de robustesse sur k . Une condition suffisante pour assurer la stabilité robuste est : la norme H_∞ de ce canal doit être inférieure à 1. Le second canal correspond à la forme standard de passage. Le correcteur du troisième ordre obtenu alors par synthèse H_∞ (macro-fonction `hinflmi`) s'écrit :

$$\begin{aligned} \widehat{K}(s) &= \arg \min_{K(s)} \|F_l(P(s), K(s))\|_\infty \\ &= \frac{-73.62s^3 + 63.66s^2 - 170.4s - 57.16}{s^3 + 19.07s^2 + 118.4s + 305.8}. \end{aligned}$$

On peut vérifier sur le lieu des racines de $-\widehat{K}(s)G(s)$ (en noir sur la figure 6.13) que la dynamique du mode commun est correctement placée, à proximité de la dynamique obtenue avec $K_0(s)$. La figure 6.14, qui présente le lieu des racines autour de l'incertitude sur la raideur, met en évidence la stabilité de la boucle fermée pour toutes les valeurs du paramètre incertain k . On remarque également que l'incertitude sur k a très peu d'influence sur le placement du mode rigide (mode commun).

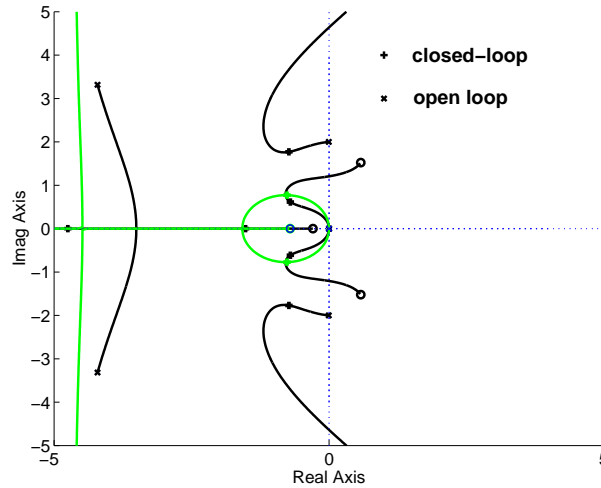


FIGURE 6.13: Lieux des racines : $-K_0G_0$ (clair), $-\widehat{K}G$ (noir).

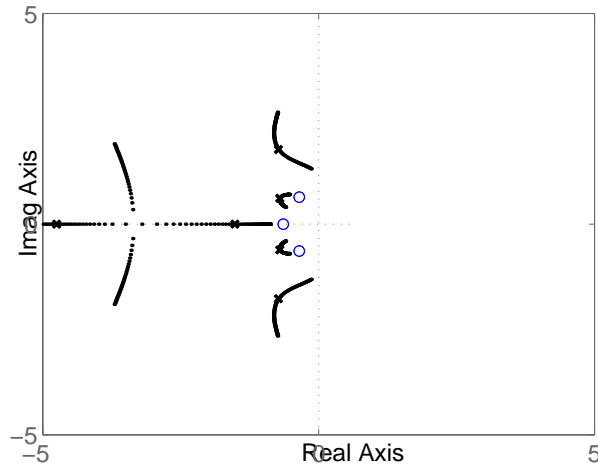


FIGURE 6.14: Lieu des racines de $F_u(F_l(M, \widehat{K}), \Delta)$ pour $\Delta \in [-1, 1]$.

6.6 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était d'illustrer les possibilités offertes par la **Forme Standard de Passage** (CSF). D'une façon générale, la CSF permet de bâtir un problème standard de commande dont la solution optimale unique est un correcteur préalablement donné. On peut alors enrichir ce problème standard par une nouvelle spécification H_2 ou H_∞ . Cette procédure peut être renouvelée plusieurs fois. Sur le plan méthodologique, la CSF se révèle être d'une utilisation très souple. 3 exemples ont été traités pour illustrer ces propos :

- le premier exemple visait à détailler sur un exemple académique bien connu la procédure de synthèse multi-objectifs proposée. Bien que les résultats obtenus n'apportent rien de bien nouveau, cet exemple a permis de montrer la simplicité de cette approche et comment enchaîner les différentes étapes de la procédure,
- le second exemple est bien plus riche et complet sur le plan du cahier des charges et aborde les problèmes de robustesse paramétrique et de synthèse de correcteurs à 2 degrés de liberté, très rarement abordée dans la littérature. Les résultats obtenus sont très "pointus" quant à la gestion du compromis performance/robustesse. L'intérêt par rapport aux approches de synthèse H_∞ classiques réside dans la simplicité de la procédure de réglage essais-erreurs incontournable pour ce type de problème très contraint,
- le dernier exemple est peut-être le plus intéressant sur le plan méthodologique et le plus près des préoccupations industrielles. Il montre comment prendre en compte une loi de commande proportionnelle-dérivée classique, qui satisfait la spécification de performance, dans une forme standard qui permet ensuite de traiter le problème de la robustesse paramétrique.

La CSF apporte donc certaines possibilités. D'un point de vue méthodologique, elle offre une possibilité nouvelle pour la synthèse de lois de commande multi-objectifs. D'un point de vue pratique, elle permet la prise en compte d'un correcteur préalablement synthétisé lors de modifications ou d'ajout de spécifications H_2 ou H_∞ .

Chapitre 7

Application au modèle avion

7.1 Position du problème

Le modèle avion utilisé ici correspond au modèle longitudinal présenté dans la partie I au chapitre 3. Ce modèle $P(s)$ comporte 29 états, 16 sorties (dont 5 sont des mesures, 3 sont utilisées pour la définition du critère de confort et 8 sont représentatives de charges structurales qu'il faut diminuer) et 6 entrées (la première représente le vent, les cinq dernières les commandes). En outre, on dispose :

- d'un correcteur initial $K_0(s)$ à 11 états, 5 sorties et 5 entrées. Ce correcteur a été conçu pour répondre à des exigences de qualités de vol (réglage des performances rigides) ;
- d'un filtre de confort $C(s)$ à 24 états, 3 sorties et 3 entrées. Ce filtre correspond aux fonctions de transfert représentatives des sièges passagers ;
- et d'un filtre vent $V(s)$ à 2 états, 1 sortie et 1 entrée. Ce filtre correspond à la modélisation des turbulences verticales. Si on soumet le filtre à un bruit blanc de spectre unité, on retrouve en sortie un spectre identique au modèle théorique de DRYDEN d'une turbulence verticale.

Le schéma ci-dessous résume l'architecture de l'ensemble.

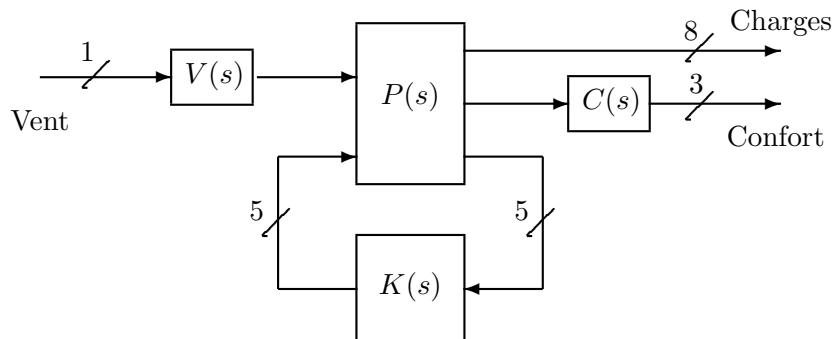


FIGURE 7.1: Schéma fonctionnel.

7.1.1 Les objectifs

Le correcteur initial est issu du savoir-faire de l'industriel. La façon dont il a été obtenu nous est donc complètement inconnue. Le plus souvent, lors de la synthèse de ce type de correcteur, l'ensemble des critères n'est pas formalisé de façon explicite. Il est par conséquent très difficile, voire impossible, de reconstituer un problème standard de synthèse qui fait apparaître de façon précise les différents critères qui ont été considérés lors de la synthèse initiale. La technique d'ajustement d'une loi de commande qui vise à ne modifier que certains critères, en essayant de rester le plus proche possible du correcteur initial, prend alors tout son sens.

Dans le cas présent, on demande de modifier le correcteur afin de réduire la norme H_2 du transfert lié au confort (entrée vent, sorties confort), et/ou de réduire la norme H_2 du transfert lié aux charges (entrée vent, sorties charges).

7.1.2 Le correcteur initial

On présente ici le correcteur initial. La figure 7.2 représente le lieu des racines de $-K_0(s)P_{22}(s)$ lorsqu'on fait varier le gain de boucle de 0 à 1 simultanément sur les 5 commandes. $K_0(s)$ désigne le correcteur initial, et $P_{22}(s) = P(12 : 16, 2 : 6)$ ¹ le modèle longitudinal de l'avion entre les 5 commandes et les 5 mesures.

Les 'x' bleus représentent les pôles du modèle de l'avion en boucle ouverte. Les 'x' verts (en clair) correspondent aux pôles du correcteur. Les '+' rouges, quant à eux, indiquent l'emplacement des pôles du système en boucle fermée. On peut suivre chaque pôle depuis sa position en boucle ouverte jusqu'à sa position en boucle fermée grâce aux lignes pointillées en noir.

On peut constater que ce correcteur agit relativement peu sur les modes flexibles de l'avion (qui correspondent aux pôles présents dans le cône d'amortissement 0-0.2), mis à part sur le mode flexible numéro 1 (en $0.73 \pm 7.3i$) et sur le mode flexible numéro 7 (en $-1.1 \pm 22.3i$). Quant au mode d'oscillation d'incidence (en $-0.95 \pm 1.35i$), il est accéléré.

Cette carte des pôles constituera un repère pour observer les modifications du correcteur par rapport au correcteur initial lors de la procédure d'ajustement.

On peut observer l'action de ce correcteur sur les critères de confort et de charges à l'aide des figures 7.3 et 7.4.

Sur la figure 7.3, on peut observer les réponses fréquentielles des transferts {vent \rightarrow confort} en trois points de mesure différents. Ainsi, la sortie notée **Nz point : x=12.30m** est un accéléromètre situé sur le fuselage de l'avion à une distance de 12.30m du nez. On trouve en ordonnée l'amplitude des accélérations verticales et en abscisse les pulsations d'excitation (en *rad/sec*). Les tracés en vert donnent les réponses du système $C P(9 : 11, 1) V$, où C représente la matrice de transfert du filtre de confort, $P(9 : 11, 1)$ les transferts correspondant aux sorties confort et à l'entrée vent et V la matrice de transfert du filtre vent. Il s'agit donc d'un tracé en boucle ouverte. Les tracés en noir donnent les réponses du système $C F_l(P, K_0)(9 : 11, 1)V$, et représentent

1. $P(i : j, k : l)$ désigne le sous-transfert de P entre les sorties i et j et les entrées k et l .

7.1. POSITION DU PROBLÈME

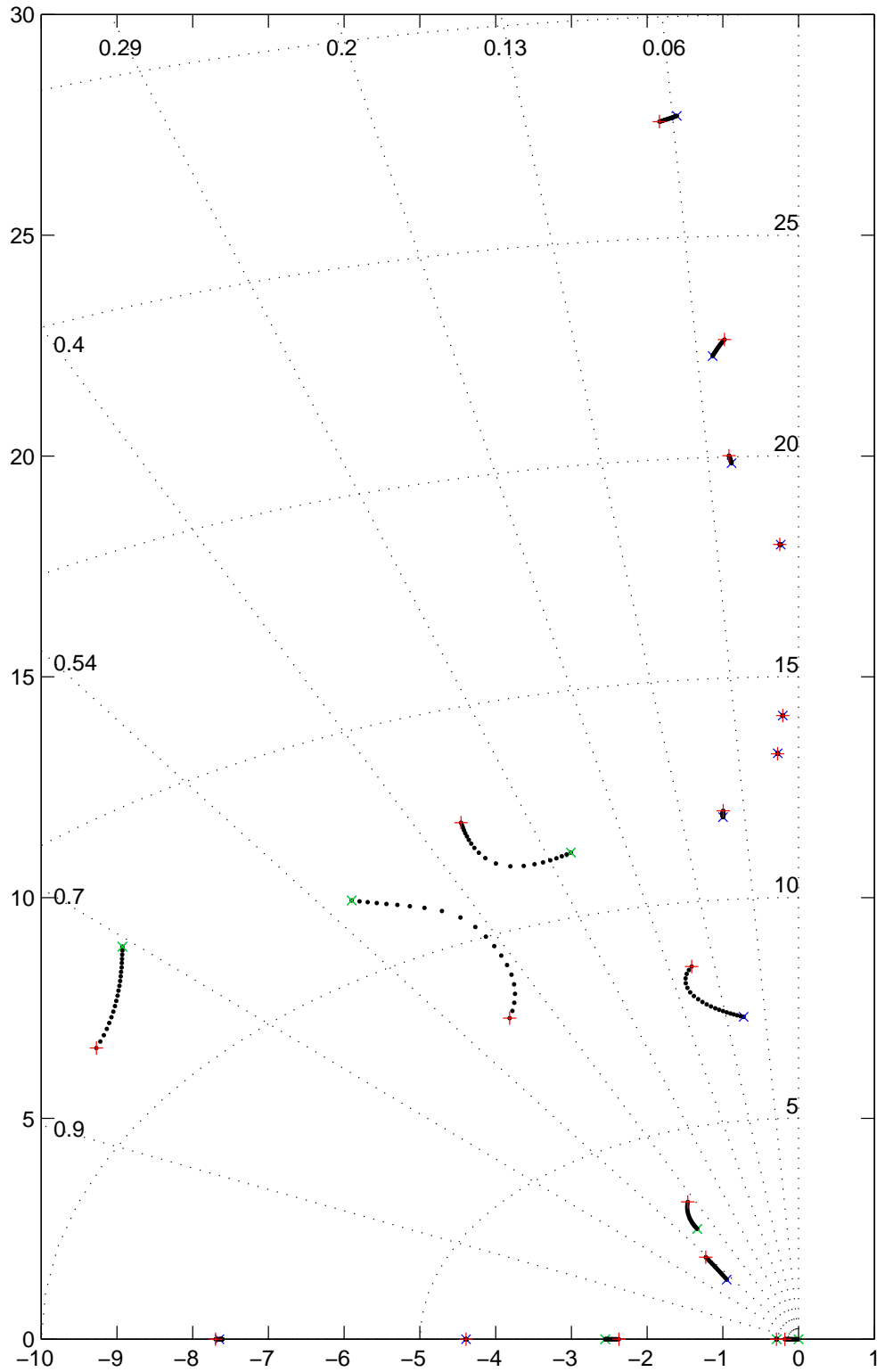


FIGURE 7.2: Lieu des racines de $-K_0(s)P_{22}(s)$.

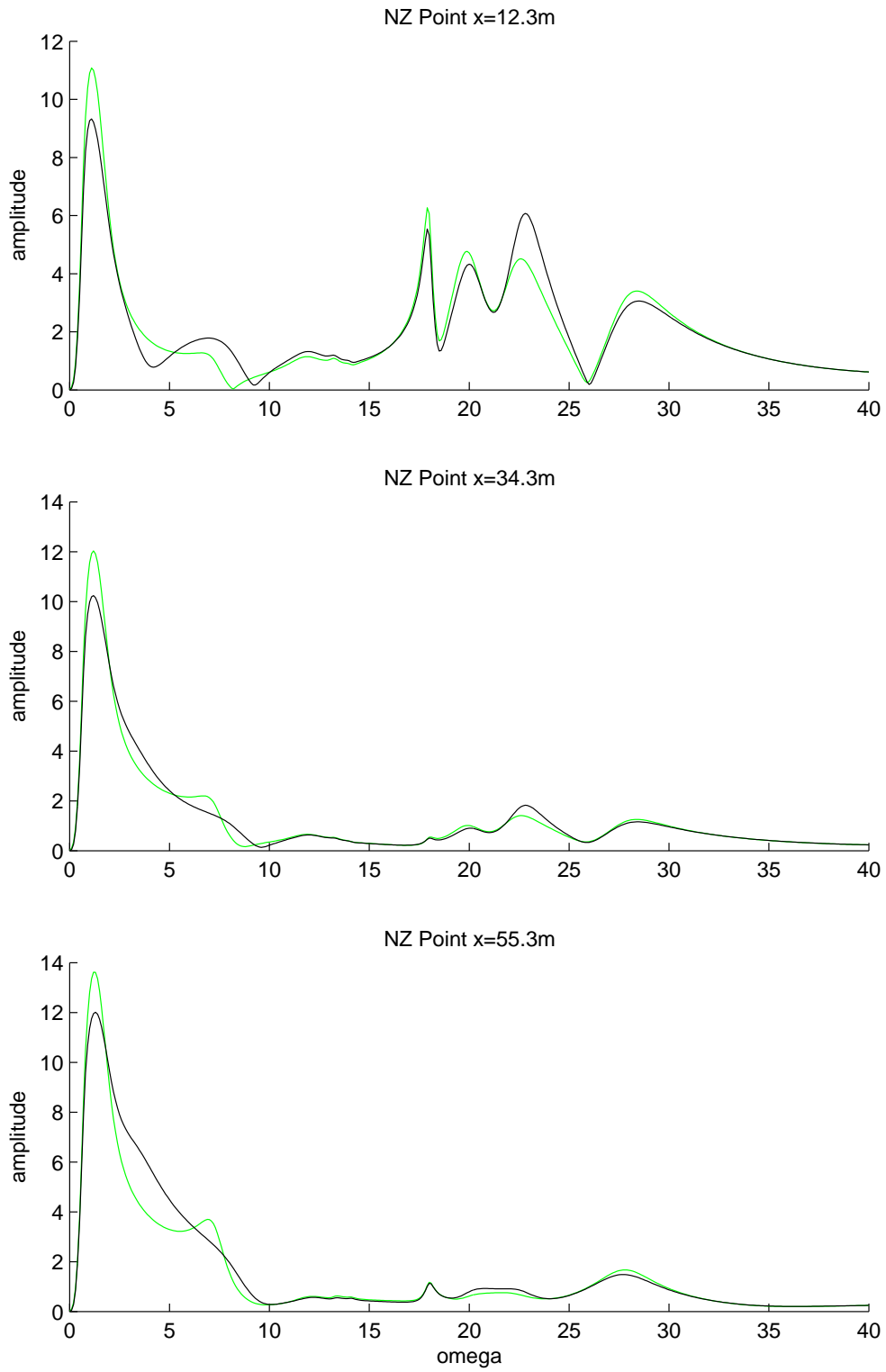


FIGURE 7.3: Réponses fréquentielles en confort (K_0).

7.1. POSITION DU PROBLÈME

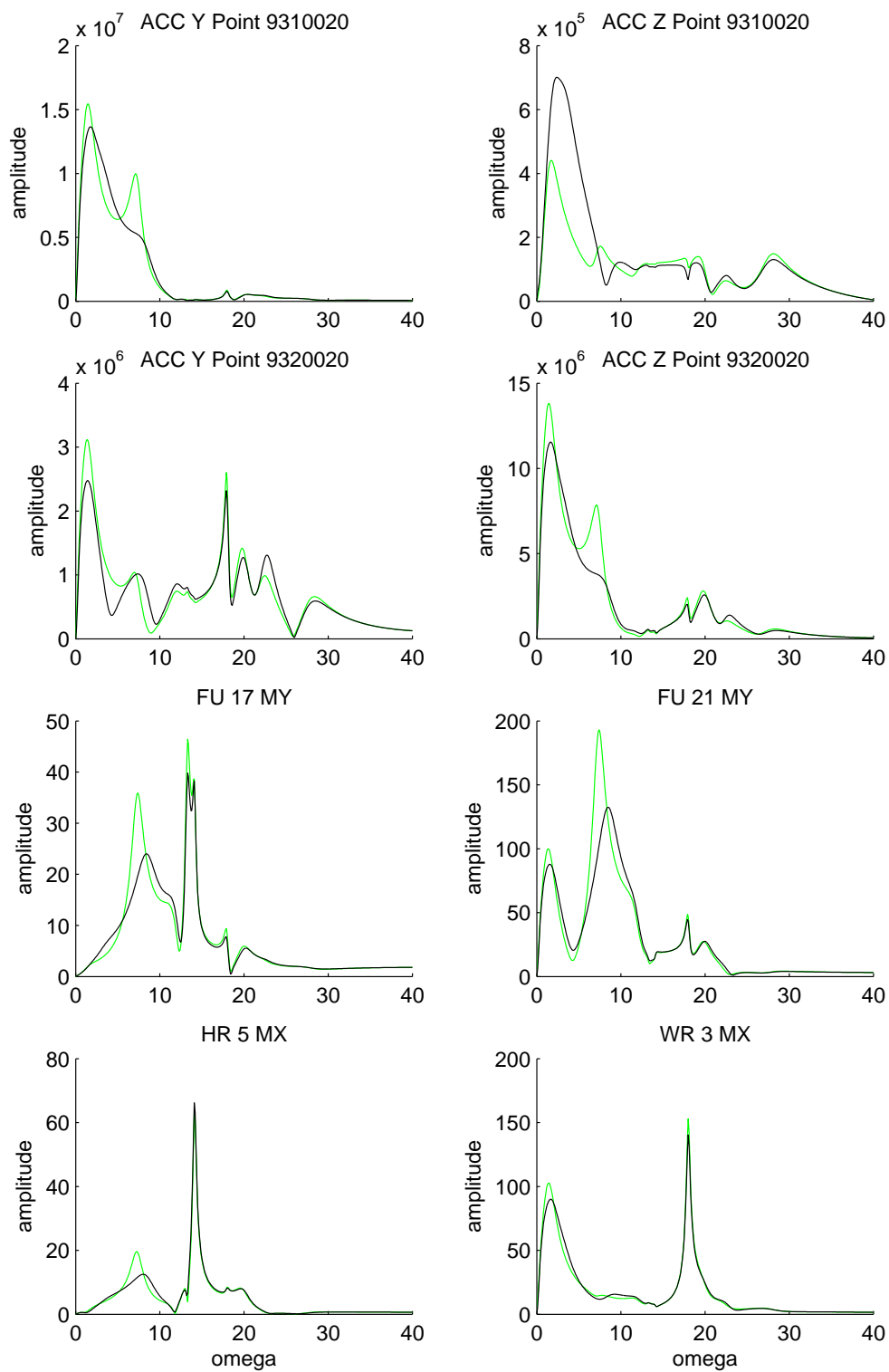


FIGURE 7.4: Réponses fréquentielles en charges (K_0).

donc des transferts analogues, mais en boucle fermée cette fois-ci. Les courbes vertes et noires restent assez proches les unes des autres, ce qui aboutit à une faible diminution du critère de confort (cf. tableau 7.1).

Sur la figure 7.4, on observe le même type de réponses que sur la figure 7.3. Cependant, on considère à présent les sorties charges :

- **ACCY** et **ACCZ** sont les accélérations latérale et verticale au niveau des moteurs (aux points 9310020 et 9320020),
- **FU17MY** et **FU21MY** sont les moments de flexion fuselage,
- **HR5MX** est le moment de flexion à l’empenage horizontal,
- **WR3MX** est le moment de flexion voilure à l’emplanture.

Les tracés en vert correspondent au système en boucle ouverte : $P(1 : 8, 1)V$, et les tracés en noir correspondent au système en boucle fermée : $F_l(P, K_0)(1 : 8, 1)V$. Sur certains transferts, on constate une diminution des efforts, alors que d’autres transferts donnent lieu à une augmentation.

Le tableau 7.1 donne les valeurs des critères de confort et de charges du système en boucle ouverte et en boucle fermée. On peut constater que le correcteur apporte quasiment une diminution de 7% sur le critère de charges, alors qu’il ne modifie presque pas le critère de confort.

	Boucle ouverte	Boucle fermée
$\ \text{Confort}\ _2$	16.62	16.51
$\ \text{Charges}\ _2$	$2.05 \cdot 10^7$	$1.91 \cdot 10^7$

TABLE 7.1: Critères de confort et de charges en BO et BF.

7.2 Ajustements réalisés

La technique d’ajustement utilisée ici fait intervenir la Forme Standard de Passage développée au chapitre 5 et illustrée au chapitre 6. Pour résoudre en T l’équation de RICCATI 5.15 par la technique des sous-espaces invariants, il faut donc choisir 29 valeurs propres parmi les 40 ($29 + 11$) valeurs propres de la boucle fermée. Nous avons choisi le sous-espace associé aux 29 valeurs propres de la boucle fermée qui sont reliées aux 29 pôles du système en boucle ouverte par les branches du lieu des racines présenté figure 7.2. Une macro-fonction a été développée pour effectuer ce choix de façon systématique.

Le problème standard auquel on est confronté est alors composé de 21 sorties, de 11 entrées et de 29 états. Parmi les sorties, on dénombre :

- 8 sorties (numéros 1 à 8) associées aux charges ;
- 3 sorties (numéros 9 à 11) associées au confort ;
- 5 sorties (numéros 12 à 16) associées au canal “CSF” (permettant de ré-obtenir le correcteur initial) ;
- et 5 sorties de mesures (numéros 17 à 21).

Parmi les entrées, on trouve :

- 1 entrée vent (numéro 1) ;

7.2. AJUSTEMENTS RÉALISÉS

- 5 entrées (numéros 2 à 6) associées au canal “CSF” ;
- et 5 commandes (numéros 7 à 11).

Une fois ce problème standard obtenu, on vérifie que si l’on prend en compte uniquement les entrées/sorties “CSF”, les mesures et les commandes, on retrouve bien, lors d’une synthèse H_2 , le correcteur initial. Notons que le correcteur obtenu est d’ordre 29, mais qu’il se réduit à l’ordre 11, car une partie de la dynamique n’est pas minimale.

7.2.1 Réglage en confort

On se propose ici de réduire le critère de confort. On élimine par conséquent, les sorties associées aux charges dans la CSF. Les résultats présentés sont issus d’un réglage que nous avons élaboré (par essais/erreurs) en augmentant successivement les scalings statiques sur l’entrée vent et sur les sorties confort afin de réduire la norme H_2 du critère de confort $C F_l(P, K)(9 : 11, 1) V$. On note K_{conf} le correcteur issu de cette synthèse.

Note: Il est important de noter ici que la prise en compte des filtres de confort et du filtre vent lors de la synthèse augmente considérablement l’ordre du correcteur obtenu : l’ordre est alors de 55 au lieu de 29. On a donc fait le choix d’effectuer la synthèse afin de minimiser la norme H_2 du critère $F_l(P, K)(9 : 11, 1)$. Cependant, les résultats considérés concernent bien le critère initial $C F_l(P, K)(9 : 11, 1) V$.

Les résultats présentés ont été obtenus avec une pondération de 0.001 sur l’entrée vent, et de 0.01 sur les trois sorties charges.

On peut vérifier, en comparant les figures 7.2 et 7.5, que les lieux des racines n’ont quasiment pas changé autour des modes flexibles et que l’oscillation d’incidence se retrouve au même endroit (avec un trajet légèrement différent).

La figure 7.6 permet de comparer l’action du correcteur initial sur les courbes de confort avec l’action du nouveau correcteur. Les transferts de $C F_l(P, K_0)(9 : 11, 1) V$ sont représentés par les courbes vertes, ceux de $C F_l(P, K_{conf})(9 : 11, 1) V$ sont représentés par les courbes noires. La diminution du critère s’opère principalement en basse fréquence.

Sur la figure 7.7, les tracés en vert représentent les transferts $F_l(P, K_0)(1 : 8, 1) V$ et les noirs ceux de $F_l(P, K_{conf})(1 : 8, 1) V$. On n’observe pas d’amélioration sensible (mais le critère de charges n’était pas pris en compte lors de la synthèse). On peut d’ailleurs constater sur le tableau 7.2 que le nouveau correcteur a permis la diminution du critère de confort d’environ 15%, mais que le critère de charges se trouve légèrement détérioré.

	Correcteur K_0	Correcteur K_{conf}
$\ \text{Confort}\ _2$	16.51	14.04
$\ \text{Charges}\ _2$	$1.91 \cdot 10^7$	$1.99 \cdot 10^7$

TABLE 7.2: Critères de confort et de charges en BO et BF.

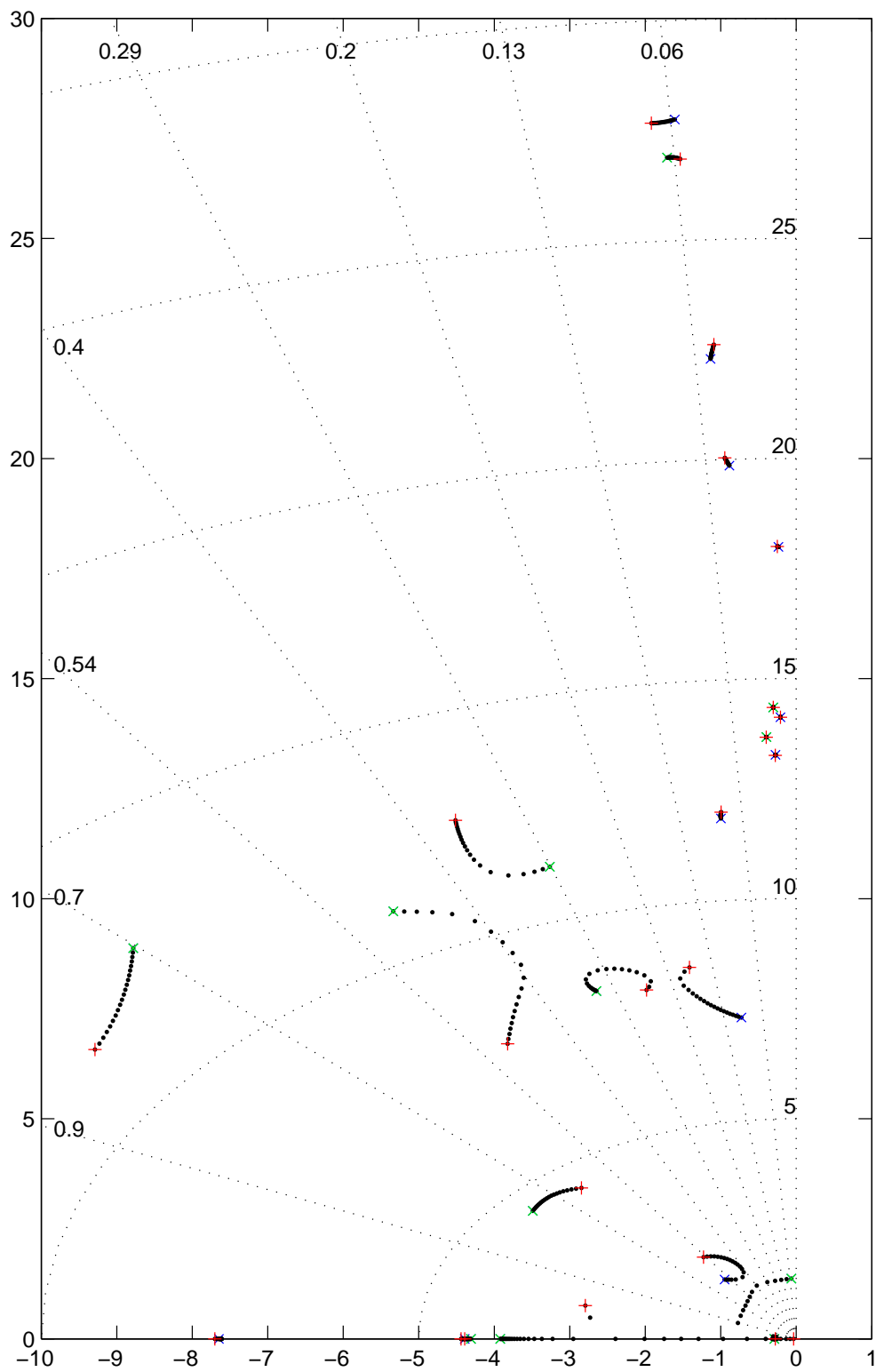


FIGURE 7.5: Lieu des racines de $-K_{conf}(s)P(s)$.

7.2. AJUSTEMENTS RÉALISÉS

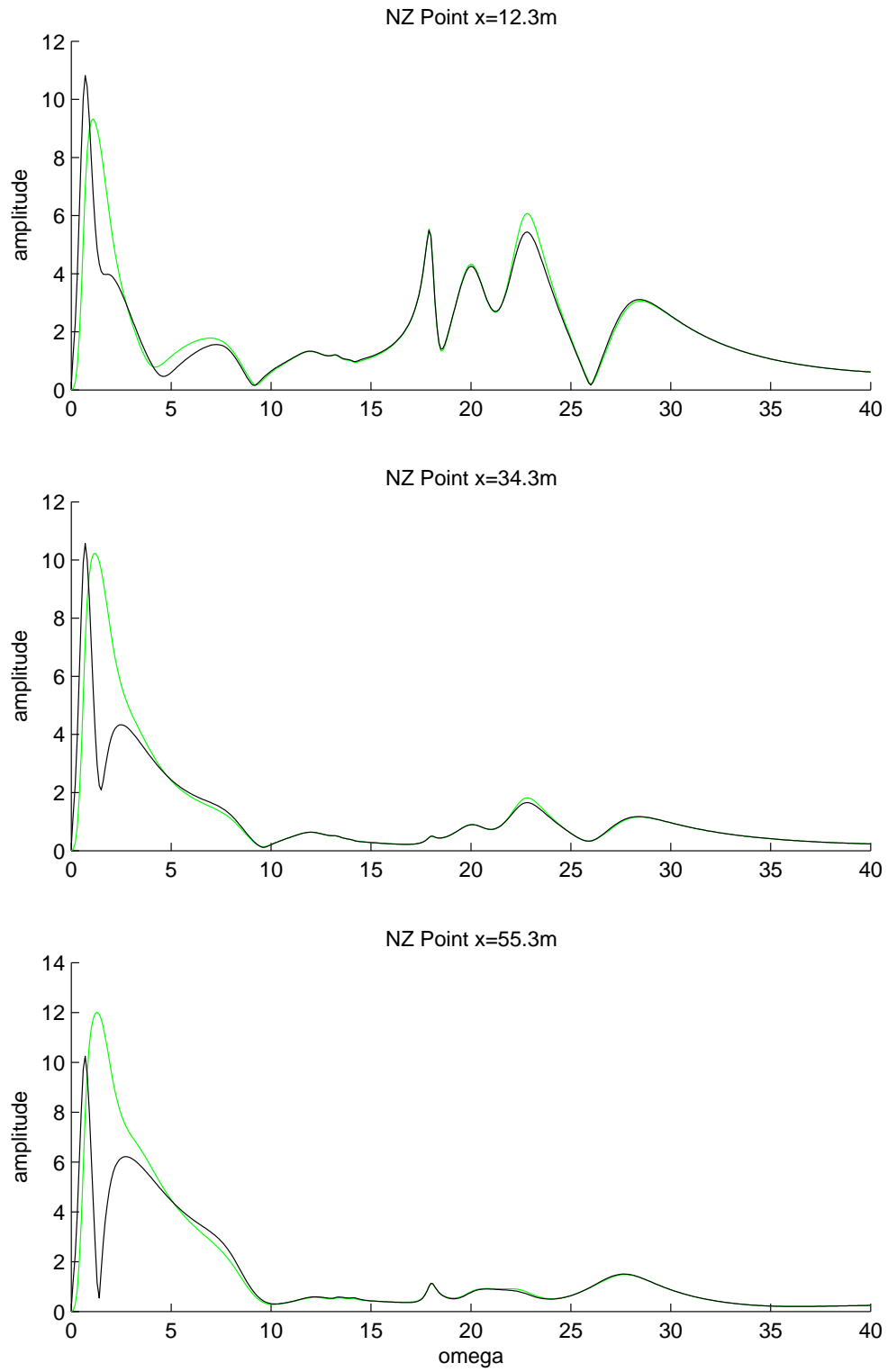


FIGURE 7.6: Réponses fréquentielles en confort (K_{conf}).

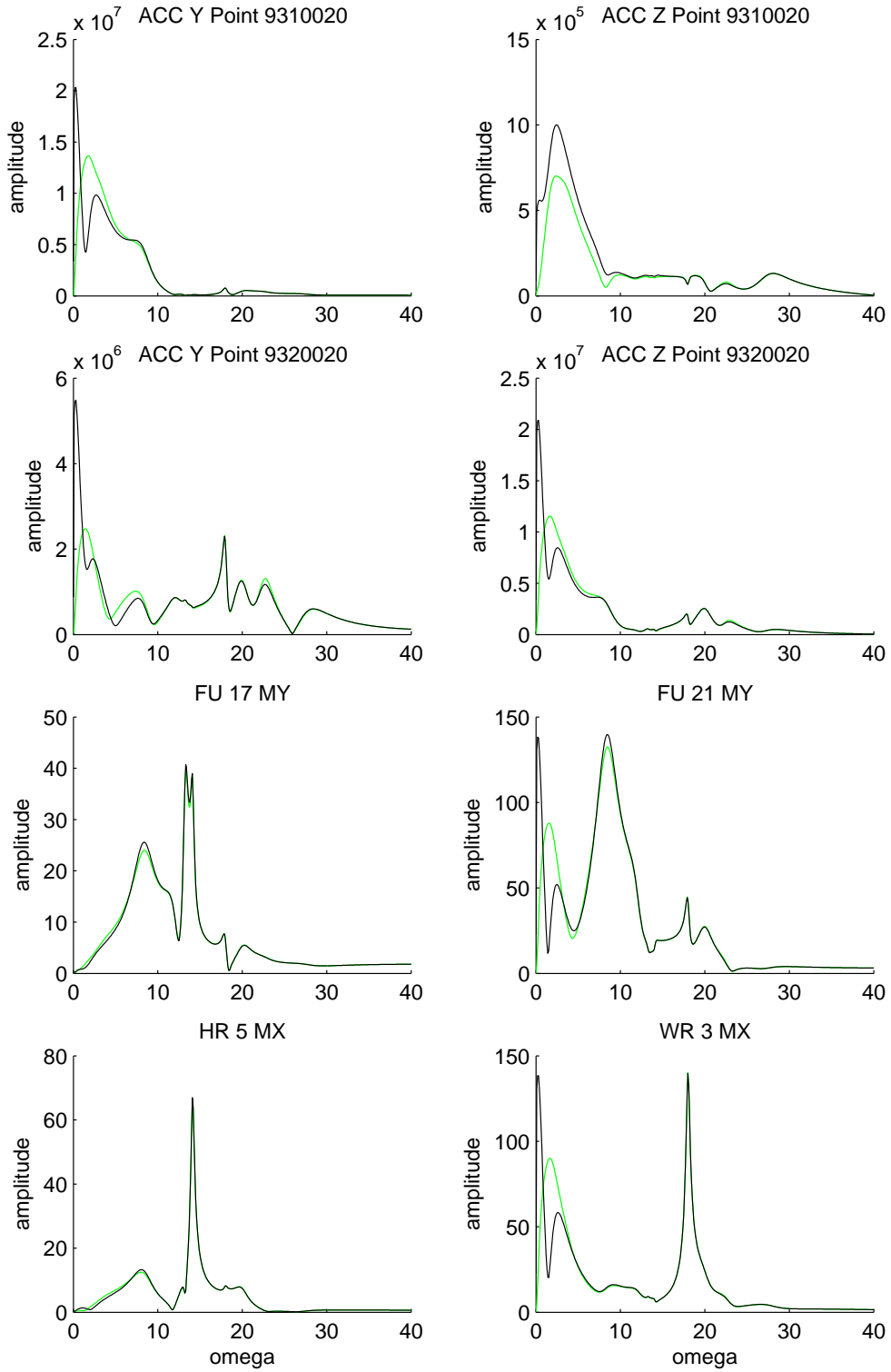


FIGURE 7.7: Réponses fréquentielles en charges (K_{conf}).

7.2.2 Réglage en charges

On reprend le problème initial et on se préoccupe à présent de réduire la norme H_2 du critère de charges $F_l(P, K)(1 : 8, 1) V$. Comme dans le cas précédent, le filtre vent n'est pas pris en compte lors de la synthèse, mais il est cependant utilisé pour la lecture des résultats. Le réglage des différentes pondérations disponibles sur la CSF ne s'est pas fait par une procédure d'essais/erreurs. En effet, au vu des tests réalisés pour le réglage en confort, on a une idée maintenant du poids qu'il faut mettre sur le nouveau canal (en confort), pour que ce critère soit considéré par la synthèse H_2 sans trop dégrader le canal CSF. La différence d'ordre de grandeur entre la norme H_2 du critère de confort et du critère de charges étant d'environ 10^6 , la pondération choisie pour le critère charges conserve le poids relatif du nouveau canal par rapport au canal CSF. On aboutit alors à une pondération de 0.001 sur l'entrée vent et une pondération de 10^{-8} sur les sorties charges. Le correcteur issu de cette synthèse est noté K_{ch} .

Comme précédemment, on peut constater qu'autour des modes flexibles ou du mode d'oscillation d'incidence, les différences entre les figures 7.2 et 7.8 sont minimales.

Au niveau de la courbe de confort, figure 7.9, on constate une diminution en basse fréquence, alors que le critère de confort n'a pas été pris en compte. De même, on constate un abaissement des courbes de charges, figure 7.10, sur la majorité des transferts. Le tableau 7.3 montre que ces modifications sont bien corrélées avec une diminution des normes H_2 sur les critères de confort et de charges. En effet, on constate une diminution d'environ 9% pour les charges et d'environ 15% pour le confort.

	Correcteur K_0	Correcteur K_{ch}
$\ \text{Confort}\ _2$	16.51	14.11
$\ \text{Charges}\ _2$	$1.91 \cdot 10^7$	$1.74 \cdot 10^7$

TABLE 7.3: Critères de confort et de charges en BO et BF.

7.2.3 Réduction du correcteur

Le correcteur K_{ch} est d'ordre 29. Le correcteur initial K_0 étant d'ordre 11, les 18 pôles non-minimaux du correcteur obtenu par une synthèse H_2 lorsque l'on ne considère que le canal CSF ne se réduisent plus dès qu'on introduit un canal supplémentaire.

On peut toutefois se demander dans quelle mesure ce nouveau correcteur K_{ch} peut se réduire, c'est-à-dire dans quelle mesure ces 18 pôles participent au comportement dynamique de ce nouveau correcteur. On peut alors vérifier qu'une réduction équilibrée à l'ordre 20 ne perturbe en rien les résultats obtenus sur les figures 7.8, 7.9 et 7.10 et le tableau 7.3.

Enfin, on peut également remarquer sur la figure 7.8 (mais c'était également le cas sur la figure 7.5) la présence de pôles du correcteur près de l'axe imaginaire autour de 13, 14 et 27 rd/s . Ces pôles (qui sont non minimaux lorsque seul le canal CSF est considéré) sont également présents après avoir réduit le correcteur à l'ordre 20. On peut vérifier que ces modes oscillants dans le correcteur peuvent se réduire par troncature

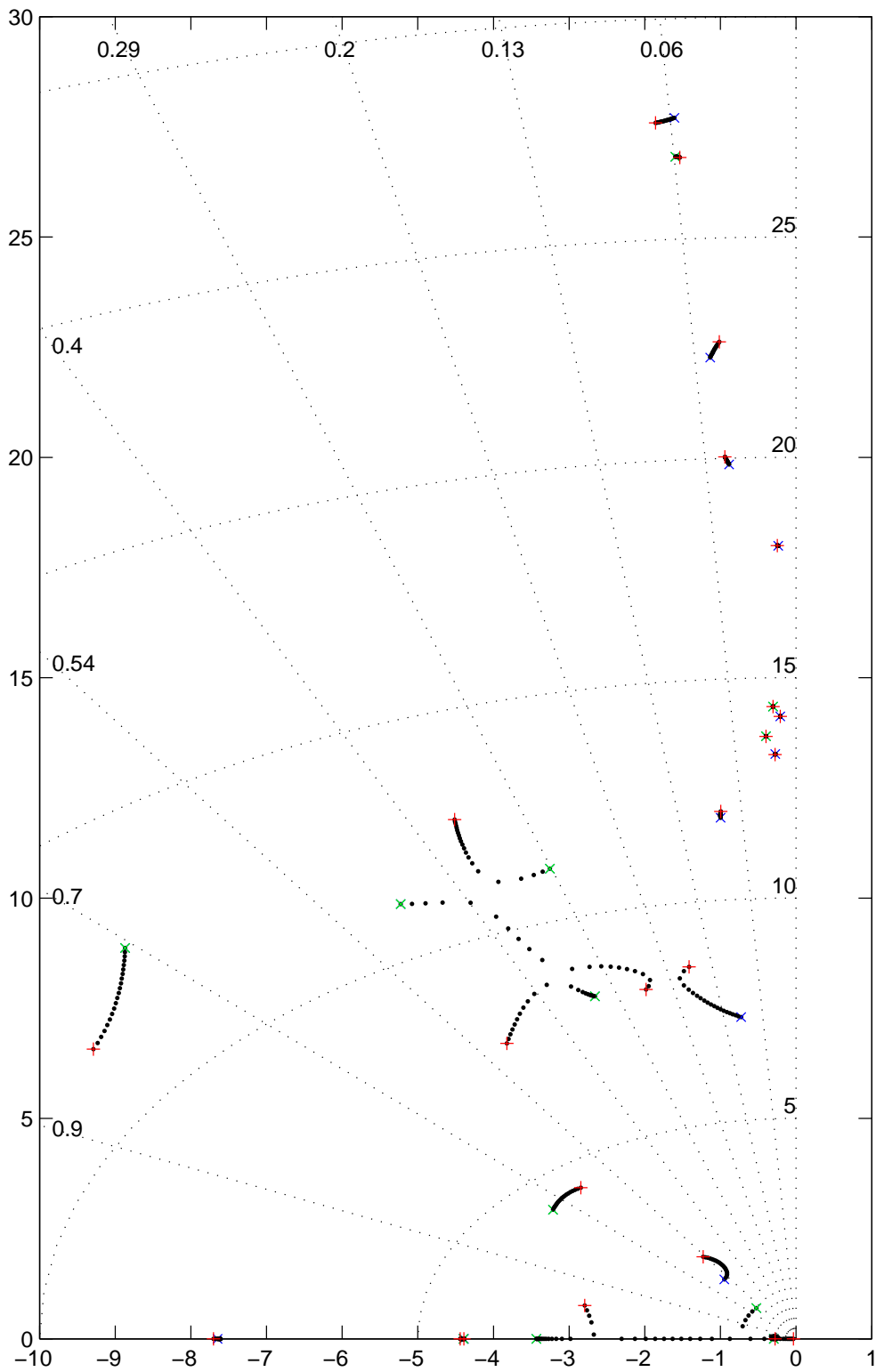


FIGURE 7.8: Lieu des racines de $-K_{ch}(s)P(s)$.

7.2. AJUSTEMENTS RÉALISÉS

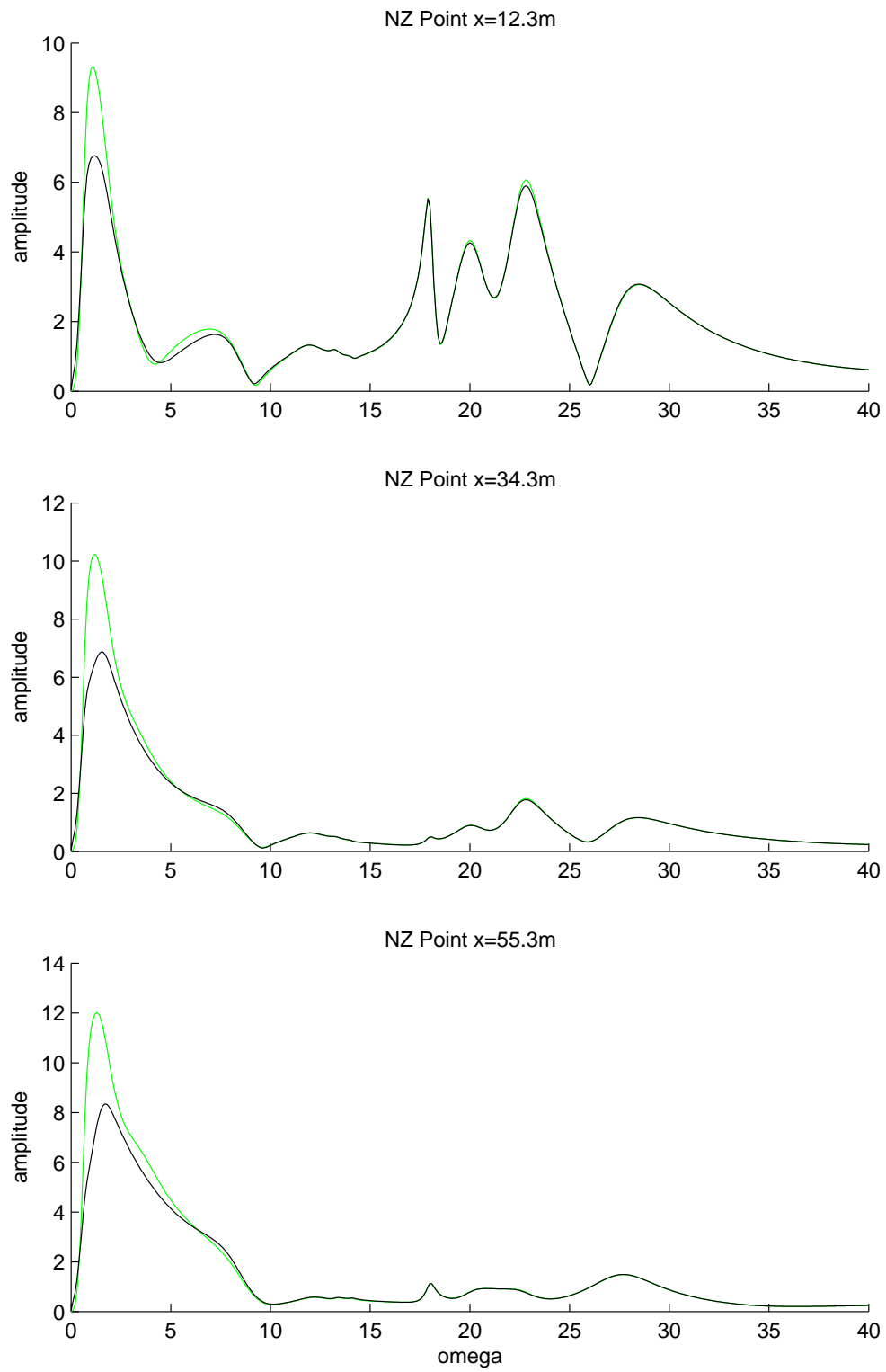


FIGURE 7.9: Réponses fréquentielles en confort (K_{ch}).

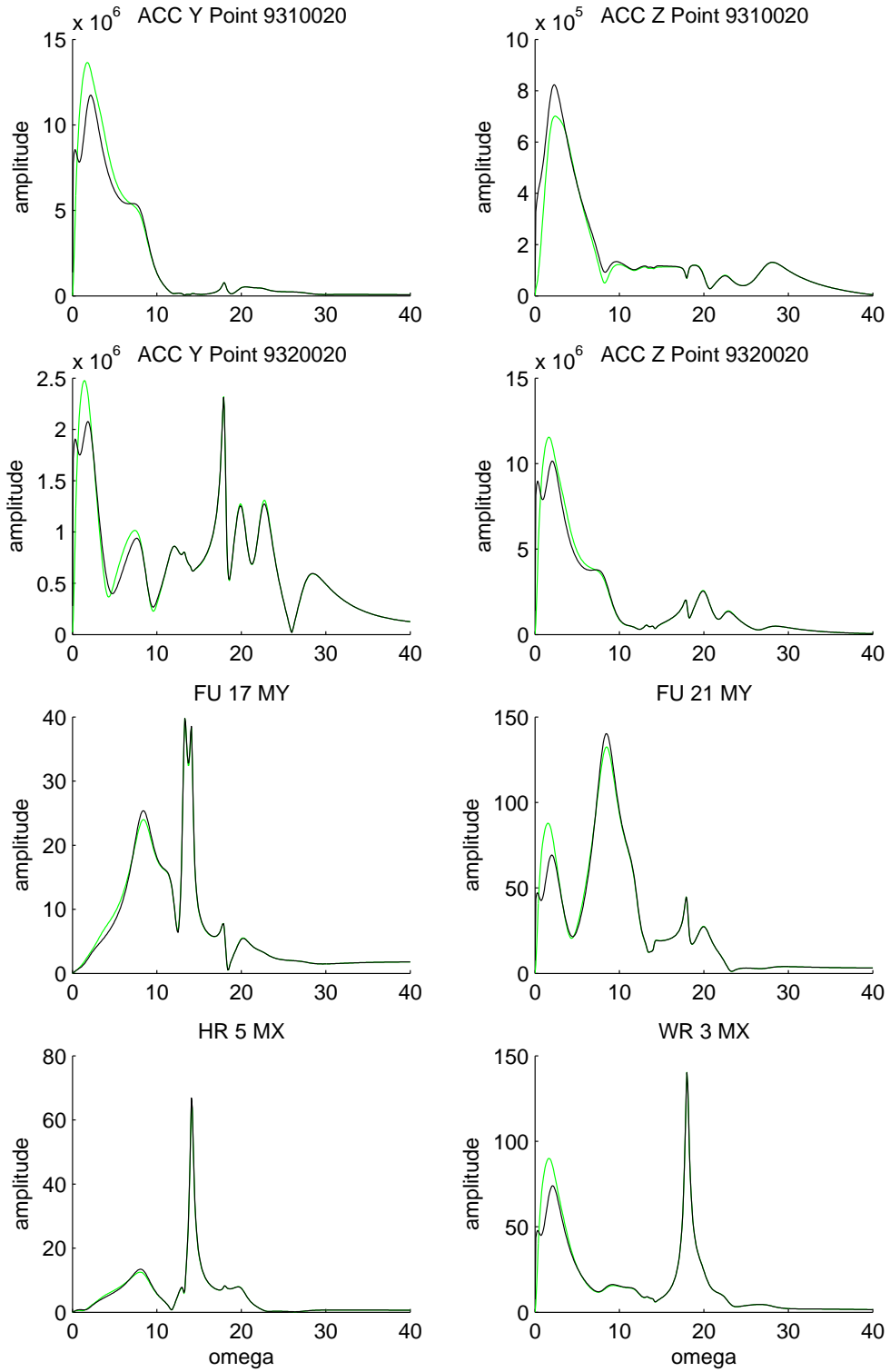


FIGURE 7.10: Réponses fréquentielles en charges (K_{ch}).

directe dans la base modale du correcteur. On obtient alors un correcteur K_{ch}^r d'ordre 14 dont le lieu des racines est présenté sur la figure 7.11. Cela confirme que ces pôles n'avaient pas d'influence sur le comportement dynamique du correcteur. Les réponses fréquentielles en confort et en charge ainsi que les critères H_2 obtenus avec ce correcteur réduit K_{ch}^r sont parfaitement semblables à ceux obtenus avec le correcteur K_{ch} (figures 7.9 et 7.10 et le tableau 7.3).

7.3 Conclusion

Ce chapitre illustre bien l'utilité que peut avoir la Forme Standard de Passage : elle permet de prendre en compte un correcteur déjà existant. Au prix d'efforts minimes, et de faibles modifications, on peut alors prendre en compte un critère supplémentaire et améliorer le correcteur vis-à-vis de ce critère. On perd tout de même la structure et l'ordre du correcteur lors de ce type de modifications.

Certes, le réglage des différents scalings peut être délicat, et le correcteur obtenu est sous-optimal. Mais il est tout à fait possible d'envisager de "marier" l'utilisation de la Forme Standard de Passage avec des techniques de synthèse BMI² ou des techniques LMI mixtes H_2/H_∞ . Dans notre application, on pourrait envisager de chercher le correcteur K qui minimise la norme H_2 (ou H_∞) du canal de CSF, sous une contrainte en charges (resp. en confort) $\|\text{Charges}\|_2 < \gamma$ (resp. $\|\text{Confort}\|_2 < \gamma$). Le fait de ne pas considérer les transferts croisés lors de la synthèse permettrait sûrement d'obtenir de meilleurs résultats.

2. "Bilinear Matrix Inequalities".

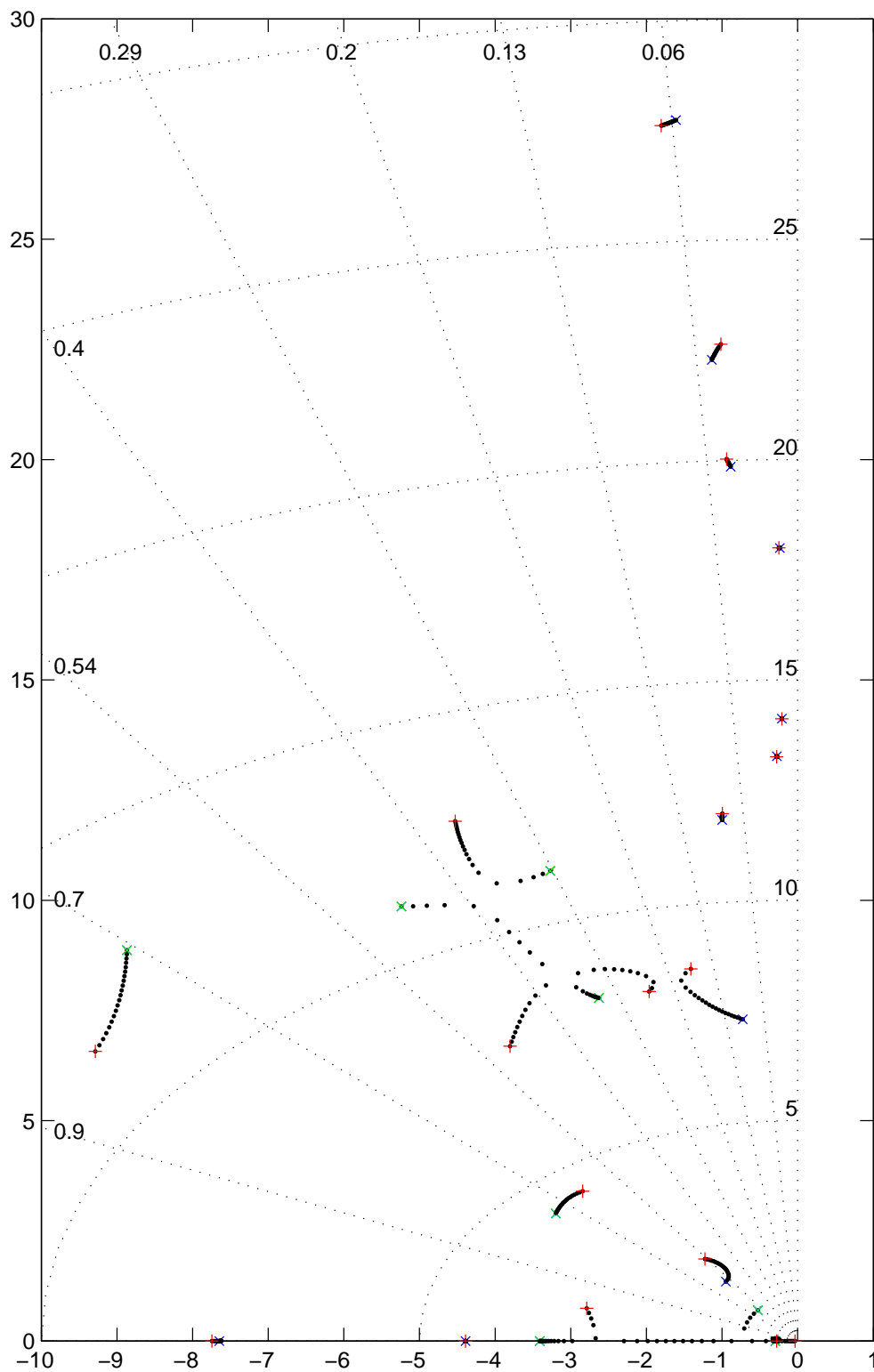


FIGURE 7.11: Lieu des racines de $-K_{ch}^r(s)P(s)$.

Troisième partie

Ajustement de loi de commande : placement de pôles

Chapitre 8

Introduction

Cette partie présente une méthode originale d'ajustement de lois de commande, puisqu'elle exploite l'un des nombreux liens qui existent entre le domaine de l'identification et le domaine de la commande.

On considère un système simple -un intégrateur- bouclé par un gain k positif, comme illustré à la figure 8.1a. On sait qu'un tel bouclage déplace le pôle réel de la boucle ouverte de $-k$ en boucle fermée. Si ce premier placement modal n'est pas satisfaisant, il est possible

- ★ soit de re-synthétiser un autre bouclage sur cette boucle fermée pour corriger le résultat précédent (cf figure 8.1b). On traduit exactement le fait de vouloir re-déplacer le pôle de $-\delta_1$. En final, le pôle de la boucle fermée est $-(k + \delta_1)$.

- ★ soit d'ajuster le premier gain k (cf figure 8.1c). Le pôle est donc placé en $-(k + \delta_2)$.

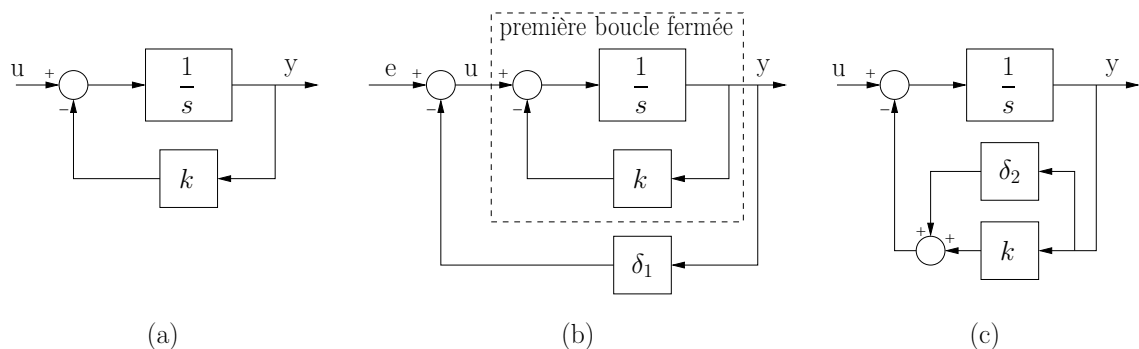


FIGURE 8.1: Exemple démonstratif

L'idée est alors de réunir dans un même schéma les deux manières de procéder ; ce qui est relativement simple pour cet exemple (figure 8.2). Les effets se cumulent sauf dans le cas où δ_2 vaut $-\delta_1$ (on notera $\delta = \delta_2 = -\delta_1$). Dans ce cas, l'ajustement du gain k réalise exactement -au signe près- ce que la traduction directe de la modification du placement modal donnerait.

En procédant ainsi, on montre comment maîtriser complètement l'effet de l'ajus-

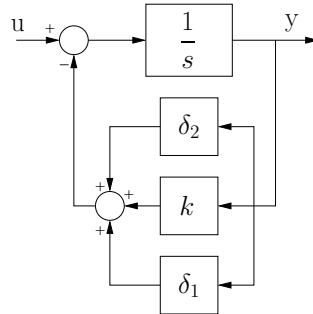


FIGURE 8.2: Exemple démonstratif

tement du correcteur. Mais la généralisation de cette procédure à des problèmes plus complexes ne s’obtient que par la constatation fondamentale suivante : il est impossible d’identifier le paramètre δ à partir de la mesure de la sortie y du système.

Cette notion d’*“identifiabilité d’un paramètre”* (ou d’*“identifiabilité d’une combinaison de paramètres”*), qui serait obtenue à l’issue d’une phase d’identification paramétrique, est donc la base de la méthode d’ajustement de correcteur, présentée dans cette partie.

Cette qualité d’identifiabilité, dont on démontre l’expression mathématique de la **section 9.1 à la section 9.5 du chapitre 9**, conduit à la **section 9.6** aux conclusions suivantes :

- ★ plus un paramètre est identifiable, plus le système est sensible aux variations de ce paramètre, et dans le cas d’un système commandé, moins la boucle fermée est robuste aux variations de ce paramètre ;
- ★ l’inverse étant vraie également : moins un paramètre est identifiable, moins le système est sensible aux variations de ce paramètre, et dans le cas d’un système commandé, plus la boucle fermée est robuste aux variations de ce paramètre.

Ce même paragraphe généralise ces notions en définissant des directions de sensibilité minimale et maximale dès qu’il y a plus d’un paramètre considéré.

Ce sont donc ces idées directrices, établies mathématiquement dans le **chapitre 9**, qui sont à l’origine de la méthode d’ajustement de certains gains d’une loi de commande initialement calculée (appelés par la suite *paramètres du correcteur*). Le but de l’ajustement de correcteur est, ici, de modifier les caractéristiques modales de la boucle fermée initiale (caractéristiques dénommées ensuite *paramètres modaux*). Autrement dit, le problème d’ajustement de loi de commande, traité dans cette partie, se ramène à automatiser le réglage de *paramètres du correcteur* en vue d’obtenir des *paramètres modaux* préalablement définis. C’est un problème purement paramétrique.

Il est alors judicieux de distinguer deux phases :

- ★ l’analyse de la sensibilité de la boucle fermée aux variations des deux types de paramètres. Plus exactement, les directions de sensibilité minimale, lorsqu’on considère l’ensemble (paramètres du correcteur, paramètres modaux) sont intéressantes dans leur interprétation : elles signifient alors qu’une variation des caractéristiques mo-

dales voulue peut être contrée par un jeu de paramètres du correcteur. C'est ce qui est appliqué dans le **chapitre 10**.

★ la synthèse de potentiomètres de réglage utilisant des directions paramétriques particulières pourra alors être effectuée grâce à des critères utilisant les résultat de l'identification bayésienne. Ce qui sera vu au **chapitre 11**.

Enfin, il faut noter que les étapes, nécessaires pour l'algorithme final de cette méthode d'ajustement de lois de commande, sont marquées par certains choix :

★ il convient d'étudier l'outil d'identification paramétrique utilisé -à savoir, *identification bayésienne*- mais surtout de bien en interpréter les résultats ;

★ l'utilisation d'un correcteur structuré -en particulier un *correcteur de type estimation/retour d'état*- permettra plus facilement de mettre en avant les variables du correcteur pertinentes pour modifier de façon voulue le comportement de la boucle fermée.

Chapitre 9

L'outil d'identification paramétrique

9.1 Introduction

L'outil utilisé est une méthode d'identification bayésienne. Pour pouvoir parler d'estimation (ou d'identification paramétrique), il faut introduire un système à paramètres incertains. Ces paramètres incertains ont une loi de probabilité *a priori*, l'objectif étant de calculer leur loi de probabilité *a posteriori*, connaissant un vecteur de mesures.

Il faut noter que sous certaines conditions, la loi de probabilité choisie *a priori* n'influence que très peu la loi *a posteriori*. Ce principe est appelé "principe de l'estimation stable" par EDWARDS, LINDMAN et SAVAGE [19].

La théorie qui permet d'obtenir cette loi de probabilité *a posteriori* a été initialement conçue pour des systèmes à temps discret. On retrouvera d'ailleurs les différents développements dans [24] et [29]. Cependant, il s'est avéré que le fait d'avoir une théorie construite autour de systèmes à temps discret et de l'utiliser sur des systèmes à temps continu conduisait à certains problèmes, en particulier sur le choix des fréquences d'échantillonnage. Ce qui explique l'effort particulier qui a été réalisé durant cette thèse, d'étendre les résultats existants à des systèmes à temps continu.

9.2 Théorie générale

Il s'agit de rappeler ici les principes de l'identification bayésienne et de caractériser le comportement de cet estimateur en régime permanent.

L'estimation bayésienne est fondée sur une interprétation subjective des probabilités puisqu'elle repose sur une connaissance *a priori* des réalisations des événements. Ce choix *a priori* peut être basé sur l'expérience par exemple.

Cependant, si la prédiction s'avère inexacte après expérimentation, une correction est effectuée. Si bien que la statistique bayésienne peut être interprétée comme une correction *a posteriori* de la loi de probabilité *a priori*. On peut en déduire que seul

le comportement asymptotique de l'estimateur est intéressant. De plus, ce résultat est peu dépendant de la loi de probabilité *a priori*¹.

Il est nécessaire de préciser que le but n'est pas de comparer différentes méthodes d'identification paramétrique, mais d'utiliser au mieux l'une d'entre elles afin de satisfaire un objectif d'ajustement de loi de commande. Le lecteur pourra constater dans [29] que l'utilisation de la méthode du maximum de vraisemblance développée par FISHER [20, 21] conduit à des résultats équivalents.

9.2.1 Position du problème

On considère un système à temps continu exponentiellement stable décrit par les équations suivantes :

$$(S) \begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\theta)x(t) + Bw(t) \\ y(t) &= Cx(t) + v(t) \end{cases} \quad (9.1)$$

Le vecteur $x(t)$ représente le vecteur d'état du système à l'instant t . Les matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ et $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ décrivent une représentation d'état du système (B n'étant pas forcément la matrice de commande) et $\theta \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ un vecteur paramétrique incertain, dans le sens où il regroupe tous les paramètres du système dont on ne connaît pas exactement les valeurs.

Le vecteur $y(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ constitue le vecteur de mesures à l'instant t . Rappelons ici que la théorie de l'estimation bayésienne est basée sur un ensemble de mesures discrètes. Afin de se raccrocher à cette théorie, on introduit un vecteur de mesures échantillonnées :

$$y_k = y(k \Delta t) \quad (9.2)$$

où k est un entier et Δt est la période d'échantillonnage.

Enfin, les vecteurs $w(t)$ et $v(t)$ sont des bruits pseudo-blancs, gaussiens, indépendants, ayant pour propriétés statistiques :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(w(t)) &= 0 \\ \mathbb{E}(v(t)) &= 0 \\ \mathbb{E}(w(t) v(t - \tau)^T) &= 0 \\ \mathbb{E}(w(t) w(t - \tau)^T) &= Q \delta(\tau) \\ \mathbb{E}(v(t) v(t - \tau)^T) &= R \delta(\tau) \end{aligned} \quad (9.3)$$

La fonction $\delta(\tau)$, représentée sur la figure 9.1, est une fonction triangle centrée en 0, de largeur $2 \Delta t$, de hauteur $1/\Delta t$ et donc d'aire unitaire. On remarquera que lorsqu'on fait tendre la période d'échantillonnage Δt vers 0, il s'agit d'un DIRAC.

Le fait d'avoir introduit ici un pas d'échantillonnage Δt peut sembler en contradiction avec le fait de vouloir établir un résultat pour des systèmes continus. En réalité, seule la sortie est discrétisée, et comme on le verra par la suite, on peut s'affranchir de donner une valeur à cette variable Δt . Au final le résultat portera bien sur le système à temps continu.

1. Comme on l'a vu en introduction, ce résultat est appelé "principe de l'estimation stable" [19].

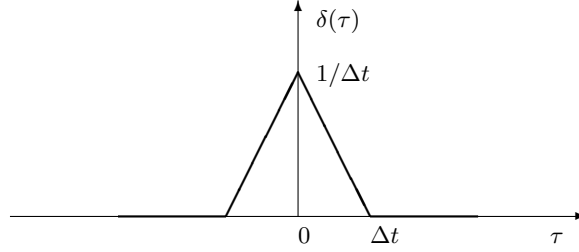


FIGURE 9.1: Fonction $\delta(\tau)$

9.2.2 Méthode d'analyse bayésienne

Le but est de calculer la densité de probabilité conditionnelle de θ *a posteriori*, connaissant l'ensemble des vecteurs de mesures y_i de l'instant 0 à l'instant k .² Cet ensemble de mesures sera noté y^k et la densité de probabilité recherchée $p(\theta|y^k)$.

Remarquons que $p(\theta|y^k)$ peut aussi s'écrire $p(\theta|y^{k-1}, y_k)$. L'application de la règle de BAYES conduit aux équations (9.4).

$$p(\theta|y^k) = p(\theta|y^{k-1}, y_k) = \frac{p(\theta, y_k|y^{k-1})}{p(y_k|y^{k-1})} \quad (9.4)$$

$$p(\theta, y_k|y^{k-1}) = p(\theta|y^{k-1}) p(y_k|\theta, y^{k-1})$$

On obtient alors la formule de récurrence (9.5).

$$p(\theta|y^k) = p(\theta|y^{k-1}) \frac{p(y_k|\theta, y^{k-1})}{p(y_k|y^{k-1})} \quad (9.5)$$

La formule (9.5) fait intervenir le quotient de deux densités de probabilité $p(y_k|y^{k-1})$ et $p(y_k|\theta, y^{k-1})$:

- $p(y_k|y^{k-1})$ ne dépend pas du vecteur paramétrique θ . Elle peut donc être assimilée à une constante ;
- $p(y_k|\theta, y^{k-1})$ est la densité de probabilité accessible par la méthode du filtre de KALMAN où les paramètres et les bruits sont connus. Cette densité de probabilité est gaussienne et peut s'exprimer de la manière suivante :

$$p(y_k|\theta, y^{k-1}) = \frac{\Gamma}{\sqrt{\det(M_k)}} \exp \left[-\frac{1}{2} (y_k - \hat{y}_k)^T M_k^{-1} (y_k - \hat{y}_k) \right] \quad (9.6)$$

Γ est une constante, $\hat{y}_k = \hat{y}(k|k-1)$ est la prédiction de la sortie donnée par le filtre de KALMAN, $M_k = M_k(\theta) = E(\nu_k \nu_k^T)$ définit la matrice de covariance de l'erreur, $\nu_k = y_k - \hat{y}_k$ désignant l'erreur de prédiction de la mesure ou facteur d'innovation du filtre.

2. Il s'agit ici d'un abus de langage, puisqu'en réalité l'instant considéré est l'instant $k \Delta t$. Très pratique, cette écriture sera reprise maintes fois, en particulier pour la définition de \hat{y}_k un peu plus bas.

Finalement, à partir des équations (9.5) et (9.6), on obtient $p(\theta|y^k)$ en fonction de la densité de probabilité *a priori* de θ : $p_0(\theta)$. En choisissant cette densité de probabilité *a priori* comme constante sur l'intervalle de variation de θ , on peut écrire la relation suivante :

$$p(\theta|y^k) = \Lambda_0 \prod_{i=1}^k \left\{ \frac{1}{\sqrt{\det(M_i)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \nu_i^T M_i^{-1} \nu_i \right] \right\} \quad (9.7)$$

Λ_0 dépendant de Γ , de $p_0(\theta)$ la loi *a priori* de θ , et des $p(y_k|y^{k-1})$.

L'étude des propriétés d'un tel estimateur en régime asymptotique nécessite d'initier le processus d'identification du vecteur paramétrique à partir d'un instant où le filtre de KALMAN a atteint son régime stationnaire. On notera $M_f(\theta)$ la valeur permanente de la matrice $M_k(\theta)$. L'équation (9.7) peut donc se réécrire de la sorte :

$$p(\theta|y^k) = \Lambda \det(M_f(\theta))^{-\frac{k}{2}} \exp \left[\sum_{i=1}^k -\frac{1}{2} \nu_i^T M_f(\theta)^{-1} \nu_i \right] \quad (9.8)$$

Λ est la valeur asymptotique de Λ_0 .

De plus, le caractère ergodique de la suite des $\nu_i(\theta)$ fait que la moyenne temporelle est égale à la moyenne statistique :

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \nu_i^T M_f(\theta)^{-1} \nu_i = E[\nu_k^T M_f(\theta)^{-1} \nu_k]$$

Ce qui donne au final :

$$\boxed{p(\theta|y^k) = \Lambda \det(M_f(\theta))^{-\frac{k}{2}} \exp \left[-\frac{k}{2} E(\nu_k^T M_f(\theta)^{-1} \nu_k) \right]} \quad (9.9)$$

À l'aide de cette équation (9.9), on est en mesure d'étudier la convergence de l'estimation bayésienne. Par la suite, on désignera par θ_0 le vecteur paramétrique nominal, et on effectuera une petite variation $\Delta\theta$ autour de ce vecteur nominal. Plus précisément, on va s'intéresser à la probabilité conditionnelle $p(\theta_0 + \Delta\theta|y^k)$, où $\Delta\theta$ désignera une petite variation possible autour du vecteur paramétrique nominal θ_0 .

9.3 Comportement asymptotique de la matrice de covariance de l'erreur $M_f(\theta)$

Ce paragraphe s'attache exclusivement au comportement asymptotique de la probabilité conditionnelle $p(\theta_0 + \Delta\theta|y^k)$ au voisinage du vecteur paramétrique nominal.

9.3. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA MATRICE DE COVARIANCE DE L'ERREUR $M_F(\theta)$

En d'autres termes, il s'agit de trouver une forme exploitable pour le calcul numérique de l'expression (9.9) où θ vaut $\theta_0 + \Delta\theta$. Le fait de rester au voisinage de θ_0 justifie l'utilisation de développements limités pour le calcul de $p(\theta_0 + \Delta\theta|y^k)$. Par conséquent, toutes les méthodes d'ajustement qui seront présentées ultérieurement et utiliseront cet outil garderont nécessairement un caractère local. Les méthodes développées ici ne pourront donc pas être appliquées pour des synthèses de lois de commande.

9.3.1 Développements limités pour le calcul de $p(\theta_0 + \Delta\theta|y^k)$

Il est important de souligner ici que les filtres de KALMAN utilisés pour le calcul des $M_k(\theta)$ conduisent à l'équation (9.6). Or dans cette équation, la densité de probabilité recherchée est à θ connu : $p(y_k|\theta, y^{k-1})$. Autrement dit, les filtres de KALMAN qui fournissent les estimés \hat{y}_k sont calculés pour θ valant $\theta_0 + \Delta\theta$. Cela signifie que le filtre de KALMAN est accordé sur θ et non sur θ_0 , autrement dit, le système est considéré en θ pour les calculs du filtre³.

Il faut noter qu'en réalité les paramètres nominaux du système sont les valeurs du vecteur θ_0 . Il s'en suit que la sortie réelle du système fait intervenir θ_0 et non θ . Afin de bien préciser les choses, considérons trois types de situations selon que le filtre est adapté ou non. Le tableau 9.1 récapitule ces différentes situations.

Système θ_0	Filtre θ_0	Covariance M_0
Système $\theta_0 + \Delta\theta$	Filtre $\theta_0 + \Delta\theta$	Covariance $M_f = M_0 + \Delta M_f$
Système θ_0	Filtre $\theta_0 + \Delta\theta$	Covariance $M = M_0 + \Delta M$

TABLE 9.1: Covariances en fonction de l'adaptation du filtre sur le système

Le premier point à souligner est que $M_f = M_f(\theta)$ est calculée pour un filtre accordé sur un système en $\theta_0 + \Delta\theta$, puisque cela provient d'un filtre où θ est connu : $p(y_k|\theta, y^{k-1})$. La seconde remarque porte sur le terme $\nu_k^T M_f^{-1} \nu_k$. Comme ce dernier est un scalaire, ce terme est égal à sa trace. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\nu_k^T M_f^{-1} \nu_k \right] &= \mathbb{E} \left[\text{Tr}(\nu_k^T M_f^{-1} \nu_k) \right] = \mathbb{E} \left[\text{Tr}(M_f^{-1} \nu_k \nu_k^T) \right] \\ &= \text{Tr} \left[M_f^{-1} \mathbb{E}(\nu_k \nu_k^T) \right] = \text{Tr} \left[M_f^{-1} M \right] \end{aligned} \quad (9.10)$$

Pour bien comprendre la dernière étape de l'équation (9.10), il est bon de rappeler que les termes M_f et ν_k proviennent de l'équation 9.6 que l'on rappelle ici :

$$p(y_k|\theta, y^{k-1}) = \frac{\Gamma}{\sqrt{\det(M_k)}} \exp \left[-\frac{1}{2} (y_k - \hat{y}_k)^T M_k^{-1} (y_k - \hat{y}_k) \right]$$

Le terme M_f vient du fait que θ est connu. Le filtre est donc accordé en θ . Quant au terme ν_k il est issu de $(y_k - \hat{y}_k)$ où \hat{y}_k est la sortie de l'estimateur pris en θ et y_k la

3. Gardons à l'esprit que le système n'est considéré en θ que pour le calcul du filtre de KALMAN.

sortie réelle du système pris en θ_0 . $E(\nu_k \nu_k^T)$ correspond donc à la covariance d'un filtre de KALMAN désaccordé : M .

Lorsque la matrice M_0 est inversible, il est possible de décomposer un peu plus l'équation (9.10). Pour cela, on se place dans un voisinage de θ_0 , ce qui permet de faire un développement limité de $(I + M_0^{-1} \Delta M_f)^{-1}$ au premier ordre. Ce calcul est détaillé dans l'équation (9.11) :

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(M_f^{-1} M) &= \text{Tr} [(M_0^{-1} M_f)^{-1} (M_0^{-1} M)] \\
 &= \text{Tr} [(I + M_0^{-1} \Delta M_f)^{-1} (I + M_0^{-1} \Delta M)] \\
 &= \text{Tr} [(I - M_0^{-1} \Delta M_f)(I + M_0^{-1} \Delta M)] \\
 &= m - \text{Tr}(M_0^{-1} \Delta M_f) + \text{Tr}(M_0^{-1} \Delta M)
 \end{aligned} \tag{9.11}$$

Le terme en m de l'équation précédente vient de la dimension du vecteur de sortie y_k . Notons également les développements limités des termes suivants :

$$\begin{aligned}
 \det(M_f) &= \det(M_0 + \Delta M_f) = \det (M_0(I + M_0^{-1} \Delta M_f)) \\
 &= \det(M_0) (1 + \text{Tr}(M_0^{-1} \Delta M_f))
 \end{aligned} \tag{9.12}$$

$$\exp \left[\frac{k}{2} \text{Tr}(M_0^{-1} \Delta M_f) \right] = 1 + \frac{k}{2} \text{Tr}(M_0^{-1} \Delta M_f)$$

On reporte ces différents résultats dans l'équation (9.9) :

$$p(\theta_0 + \Delta\theta | y^k) = \Lambda \frac{\exp \left[-\frac{k}{2} (m - \text{Tr}(M_0^{-1} \Delta M_f) + \text{Tr}(M_0^{-1} \Delta M)) \right]}{\det(M_0)^{\frac{k}{2}} (1 + \text{Tr}(M_0^{-1} \Delta M_f))^{\frac{k}{2}}}$$

soit encore :

$$\boxed{p(\theta_0 + \Delta\theta | y^k) = \Lambda \frac{\exp(-\frac{mk}{2})}{\det(M_0)^{\frac{k}{2}}} \exp \left[-\frac{k}{2} \text{Tr}(M_0^{-1} \Delta M) \right]} \tag{9.13}$$

Dans cette dernière équation il ne reste plus qu'un terme qui dépend encore de $\Delta\theta$. Il s'agit de $\text{Tr}(M_0^{-1} \Delta M)$.

9.3.2 Calcul de $\text{Tr}(M_0^{-1} \Delta M)$

Jusqu'à présent, aucun distinguo selon que le système est à temps continu ou à temps discret n'a été fait. L'échantillonnage du vecteur de mesure $y(t)$ tous les Δt a permis de contourner le problème⁴. Cela conduit à considérer des bruits pseudo-blancs

4. Cependant on verra que l'on peut s'abstenir d'un choix pour Δt .

9.3. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA MATRICE DE COVARIANCE DE L'ERREUR $M_F(\theta)$

à la place de bruits blancs pour le calcul des filtres de KALMAN. En effet, pour un bruit blanc, le calcul de la matrice M_0 conduit au résultat suivant :

$$M_0 = E [\nu_k(\theta_0) \nu_k^T(\theta_0)] \rightarrow \infty \quad (9.14)$$

C'est à ce niveau -le calcul de $\text{Tr}(M_0^{-1} \Delta M)$ - que les résultats diffèrent selon que l'on considère un système discret ou un système continu.

Calcul de M_0

Pour le calcul de M_0 , le filtre de KALMAN associé est accordé sur le système, soit en θ_0 . La définition de M_0 est rappelée ci-dessous :

$$M_0 = E [(y_k - \hat{y}_{k|k-1})(y_k - \hat{y}_{k|k-1})^T] \quad (9.15)$$

En définissant P_0 comme l'espérance du carré de l'erreur entre l'état x et son estimée⁵ \hat{x} : $P_0 = E [(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T]$, on obtient les équations suivantes pour le filtre de KALMAN ; le système étant celui présenté en (9.1). On notera $A_0 = A(\theta_0)$.

$$\dot{\hat{x}} = A_0 \hat{x} + K_0 C(x - \hat{x}) + K_0 v$$

$$K_0 = P_0 C^T R^{-1} \quad (9.16)$$

$$P_0 A_0^T + A_0 P_0 - P_0 C^T R^{-1} C P_0 + Q = 0$$

Pour le calcul du filtre de KALMAN à temps continu, aucune différence n'est faite entre erreur de prédiction et erreur d'estimation, contrairement au calcul du filtre à temps discret. Or la caractérisation de l'estimateur bayésien en régime asymptotique utilise précisément l'erreur de prédiction : $y_k - \hat{y}_{k|k-1}$. Une approximation discrète au premier ordre en Δt du système continu est proposée. La prédiction à l'instant k utilise alors les grandeurs calculées de l'instant $k - 1$ alors que l'estimation utiliserait les grandeurs de l'instant k . En intégrant les équations de (9.1), la formule des rectangles donne les équations suivantes⁶ :

$$\begin{cases} x_k &= x_{k-1} + \Delta t(A_0 x_{k-1} + w_{k-1}) \\ y_k &= C x_k + v_k \\ y_k &= C[(I + \Delta t A_0)x_{k-1} + \Delta t w_{k-1}] + v_k \end{cases} \quad (9.17)$$

La même méthode est utilisée pour les équations du filtre (9.16) :

$$\begin{cases} \hat{x}_k &\simeq \hat{x}_{k-1} + \Delta t[A_0 \hat{x}_{k-1} + K_0 C(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + K_0 v_{k-1}] \\ \hat{y}_{k|k} &= C \hat{x}_k \\ \hat{y}_{k|k-1} &= C[(I + \Delta t(A_0 - K_0 C))\hat{x}_{k-1} + \Delta t K_0(C x_{k-1} + v_{k-1})] \end{cases} \quad (9.18)$$

5. Il n'y a pas de différence entre estimée et prédiction pour des systèmes continus.

6. Le lecteur remarquera que la matrice B a été supprimée pour une meilleure lisibilité des calculs. Le système reste cependant strictement équivalent au précédent si on prend soin de choisir une matrice de bruit d'état différente : $Q = B Q_{old} B^T$.

Afin de simplifier légèrement les formules, on note $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Soit encore, après discrétisation : $e_k = x_k - \hat{x}_k$. En regroupant les termes dans le calcul de $y_k - \hat{y}_{k|k-1}$, on arrive au résultat de l'équation (9.19).

$$y_k - \hat{y}_{k|k-1} = C[I + \Delta t(A_0 - K_0 C)]e_{k-1} + \Delta t C(w_{k-1} - K_0 v_{k-1}) + v_k \quad (9.19)$$

On doit donc, pour le calcul de M_0 , calculer les différents termes de $E[(y_k - \hat{y}_{k|k-1})(y_k - \hat{y}_{k|k-1})^T]$ dont certains sont déjà connus :

$$\begin{aligned} E(v_k w_k^T) &= 0 & E(v_k w_{k-1}^T) &= 0 & E(v_k v_{k-1}^T) &= 0 & E(e_{k-1} v_k^T) &= 0 \\ E(e_k e_k^T) &= P_0 & E(w_k w_k^T) &= \frac{1}{\Delta t} Q & E(v_k v_k^T) &= \frac{1}{\Delta t} R \end{aligned} \quad (9.20)$$

Les égalités (9.20) proviennent directement des spécifications des bruits choisis en (9.3). Les bruits w et v étant indépendants, leurs corrélations sont nulles. D'autre part, le bruit à l'instant k est indépendant des signaux antérieurs (e_{k-1}). En ce qui concerne les corrélations entre bruits, la définition de la fonction $\delta(\tau)$ de la figure 9.1 permet de déduire la nullité des termes.

Il ne reste donc plus que deux termes à calculer :

$$E(e_{k-1} w_{k-1}^T) = E(e(t) w(t)^T) \quad \text{et} \quad E(e_{k-1} v_{k-1}^T) = E(e(t) v(t)^T)$$

Leur calcul sera effectué avec les grandeurs continues.

En notant $\mathcal{A} = A_0 - K_0 C$, $\mathcal{B} = [I \quad -K_0]$ et $u^T = [w^T \quad v^T]$,⁷ l'équation différentielle de l'erreur e s'écrit comme suit :

$$\dot{e} = (A_0 - K_0 C)e + [I \quad -K_0] \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}$$

$$\dot{e} = \mathcal{A}e + \mathcal{B}u$$

équation qui est ensuite intégrée entre t_0 et t , afin d'obtenir l'expression analytique de $e(t)$.

$$e(t) = \exp[\mathcal{A}(t - t_0)] e(t_0) + \int_{t_0}^t \exp[\mathcal{A}(t - \tau)] \mathcal{B} u(\tau) d\tau \quad (9.21)$$

Pour le calcul de l'espérance $E[e(t) u(t)^T]$, le terme $E[e(t_0) u(t)^T]$ est nul. De plus, puisque les bruits blancs sont ergodiques, les opérateurs intégrale et espérance commutent. On choisit alors un Δt suffisamment petit ($\Delta t \rightarrow 0$) pour achever le calcul de

⁷ Les notations \mathcal{A} et \mathcal{B} sont ici temporaires ; elles seront réutilisées page 124 pour désigner d'autres grandeurs.

9.3. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA MATRICE DE COVARIANCE DE L'ERREUR $M_F(\theta)$

l'intégrale.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[e(t) u(t)^T] &= \int_{t_0}^t \exp[\mathcal{A}(t - \tau)] \mathcal{B} \mathbb{E}[u(\tau) u(\tau)^T] d\tau \\
 &= \int_{t_0}^t \exp[\mathcal{A}(t - \tau)] \mathcal{B} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \delta(t - \tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{2} \mathcal{B} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{9.22}$$

Ce dernier résultat montre que les termes $\mathbb{E}(e_{k-1} w_{k-1}^T)$ et $\mathbb{E}(e_{k-1} v_{k-1}^T)$ de $\mathbb{E}[(y_k - \hat{y}_{k|k-1})(y_k - \hat{y}_{k|k-1})^T]$ sont d'ordre minimum 1 en Δt . Le seul terme à l'ordre 0 en Δt est $C P_0 C^T$. Quant aux termes en $1/\Delta t$, ils deviennent dans l'équation finale des termes en Δt par post et pré-multiplications par Δt , à l'exception de $\mathbb{E}(v_k v_k^T)$. On obtient le résultat final à l'ordre 0 en Δt :

$$\boxed{M_0 = C P_0 C^T + \frac{R}{\Delta t}} \tag{9.23}$$

À noter que le terme à l'ordre 0 est conservé puisque, comme nous le verrons par la suite, le calcul de ΔM viendra simplifier le terme en $1/\Delta t$.

|| En résumé, le calcul de M_0 se limite au calcul de P_0 dans l'équation de RICCATI (9.16).

Calcul de ΔM

La différence avec le calcul de M_0 réside dans le fait que le filtre de KALMAN n'est plus accordé sur le système : le système reste dans sa configuration nominale en θ_0 alors que le filtre est maintenant accordé en $\theta_0 + \Delta\theta$. Les nouvelles équations du filtre sont donc les suivantes (en pratique on commence par calculer le gain de KALMAN K_p . Ce calcul est effectué sur un système en $\theta_0 + \Delta\theta$, puisque le filtre est réglé sur cette valeur) :

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}} &= (A_0 + \Delta A)\hat{x} + K_p C(x - \hat{x}) + K_p v \\
 K_p &= P_p C^T R^{-1}
 \end{aligned} \tag{9.24}$$

$$P_p(A_0 + \Delta A)^T + (A_0 + \Delta A)P_p - P_p C^T R^{-1} C P_p + Q = 0$$

Après échantillonnage des équations du filtre et du système à l'ordre 1 en Δt , on obtient pour le système les mêmes équations qu'en (9.17) ; les équations du filtre sont,

quant à elles, quelque peu modifiées :

$$\begin{cases} \hat{x}_k & \simeq \hat{x}_{k-1} + \Delta t[(A_0 + \Delta A) \hat{x}_{k-1} + K_p C(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + K_p v_{k-1}] \\ \hat{y}_{k|k} & = C \hat{x}_k \\ \hat{y}_{k|k-1} & = C[(I + \Delta t(A_0 + \Delta A - K_p C)) \hat{x}_{k-1} + \Delta t K_p (C x_{k-1} + v_{k-1})] \end{cases} \quad (9.25)$$

Un cheminement identique au calcul de M_0 montre que les termes en Δt disparaissent de la même façon pour le calcul de $E[(y_k - \hat{y}_{k|k-1})(y_k - \hat{y}_{k|k-1})^T]$. On aboutit alors à :

$$\boxed{M = C P C^T + \frac{R}{\Delta t}} \quad (9.26)$$

La différence fondamentale par rapport au calcul de M_0 est que $P = E[(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T]$ n'est pas connu, puisqu'il est calculé avec un filtre désaccordé. P n'est donc pas égal à P_p . Là encore, pour le calcul de P , le mieux est d'introduire les variables suivantes :

$$\begin{aligned} X^T &= [x^T \quad (x - \hat{x})^T] & U^T &= [w^T \quad v^T] \\ \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ -\Delta A & A_0 + \Delta A - K_p C \end{bmatrix} & \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -K_p \end{bmatrix} \\ \mathcal{P} = E[X X^T] &= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P \end{bmatrix} & \mathcal{Q} &= \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.27)$$

Le vecteur X vérifie alors l'équation différentielle (9.28) :

$$\dot{X} = \mathcal{A} X + \mathcal{B} U \quad (9.28)$$

On calcule à présent $\dot{\mathcal{P}}$, qui est nul en régime asymptotique. En procédant de la même manière qu'en (9.22) pour les termes en $E(U X^T)$ et $E(X U^T)$, on aboutit à l'équation de LYAPUNOV (9.29).

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{P}} &= E(\dot{X} X^T) + E(X \dot{X}^T) \\ &= \mathcal{A} \mathcal{P} + \mathcal{B} E(U X^T) + \mathcal{P} \mathcal{A}^T + E(X U^T) \mathcal{B}^T \\ 0 &= \mathcal{A} \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{A}^T + \mathcal{B} \mathcal{Q} \mathcal{B}^T \end{aligned} \quad (9.29)$$

9.3. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA MATRICE DE COVARIANCE DE L'ERREUR $M_F(\theta)$

En résumé, le calcul de M demande le calcul de P_p, K_p puis le calcul de \mathcal{P} pour enfin obtenir P . On obtient alors ^a $\Delta M = C(P - P_0)C^T$. Au final, on peut en déduire la valeur de $\text{Tr}[M_0^{-1} \Delta M]$ lorsque Δt tend vers 0, résultat déjà présenté en [16].

$$\boxed{\text{Tr}[M_0^{-1} \Delta M] = \Delta t \text{Tr}[R^{-1} C(P - P_0)C^T]} \quad (9.30)$$

Quelle que soit la variation de $\Delta\theta$ que l'on prenne, le résultat est factorisable par le même Δt . Toute l'information est donc contenue dans le terme $\text{Tr}[R^{-1} C(P - P_0)C^T]$. Le calcul de ce dernier terme ne fait intervenir à aucun moment une période d'échantillonnage, puisque les équations permettant de calculer les différentes variables (équations de LYAPUNOV ou de RICCATI) sont des équations continues.

^a. Le terme en $1/\Delta t$ s'est simplifié.

9.3.3 Dépendance de $\text{Tr}[M_0^{-1} \Delta M]$ en $\Delta\theta$

$\text{Tr}[M_0^{-1} \Delta M]$ est nécessairement dépendant de la variable $\Delta\theta$. Le terme d'ordre 0 étant nul⁸, il est important de connaître dans cette équation les termes d'ordre 1 en $\Delta\theta$, voire d'ordre supérieur si les termes d'ordre 1 sont tous nuls également. Pour cela, on exprime les termes ΔA et ΔK comme suit :

$$A = A_0 + \Delta A = A_0 + \sum_{i=1}^r A_i \Delta\theta_i \quad (9.31)$$

$$K_p = K_0 + \Delta K = K_0 + \sum_{i=1}^r K_i \Delta\theta_i$$

où les $\Delta\theta_i$ représentent les différentes coordonnées du vecteur $\Delta\theta$.

Quadraticité de $\text{Tr}[M_0^{-1} \Delta M]$ en $\Delta\theta$

L'objectif est de démontrer ici que la fonction $\text{Tr}[M_0^{-1} \Delta M]$ est quadratique en $\Delta\theta$. Pour ce faire on va démontrer que les termes d'ordre 1 en $\Delta\theta$ sont nuls. C'est pour cette raison qu'on s'est limité à l'ordre 1 dans l'équation en K_p de (9.31). En effet rien ne prouve qu'il n'existe pas dans le développement de K_p de termes d'ordre supérieur, cependant ces derniers ne seraient d'aucune utilité puisqu'on se limitera par la suite aux termes d'ordre 1.

On commence par écrire les coordonnées en (2,2) de l'équation de LYAPUNOV (9.29) ;

8. Si $\Delta\theta = 0$, alors $P = P_0$.

on rappelle également l'équation de RICCATI (9.16) en P_0 .

$$\begin{aligned}
 0 = & -\Delta A P_{12} + (A_0 + \Delta A - K_0 C - \Delta K C)P \\
 & - P_{12}^T \Delta A^T + P(A_0 + \Delta A - K_0 C - \Delta K C)^T \\
 & + Q + K_0 R K_0^T + \Delta K R K_0^T + K_0 R \Delta K^T
 \end{aligned} \tag{9.32}$$

$$0 = P_0 A_0^T + A_0 P_0 - K_0 R K_0^T + Q$$

Avec les notations $\Delta P = P - P_0$ et $N = P_{12} - P = E[\hat{x}(x - \hat{x})^T]$, la soustraction des deux équations précédentes conduit à l'équation (9.33)⁹. Il faut remarquer que N est calculé pour le système en θ_0 et le filtre accordé en $\theta_0 + \Delta\theta$, puisqu'il est issu du calcul de \mathcal{P} . On désignera par N_0 la valeur de N quand $\Delta\theta = 0$, à savoir, quand le filtre est accordé en θ_0 . Comme N est toujours en facteur de ΔA dans les équations de (9.33), on peut le remplacer par N_0 puisqu'on ne s'intéresse qu'à l'ordre 1 en $\Delta\theta$. On remarquera également qu'au premier ordre $\Delta K C P = \Delta K C P_0$.

$$\begin{aligned}
 0 = & -\Delta A(P_{12} - P) + (A_0 - K_0 C)P - \Delta K C P - A_0 P_0 \\
 & - (P_{12} - P)^T \Delta A^T + P(A_0 - K_0 C)^T - P C^T \Delta K^T - P_0 A_0^T \\
 & + 2 K_0 R K_0^T + \Delta K R K_0^T + K_0 R \Delta K^T
 \end{aligned} \tag{9.33}$$

$$0 = -\Delta A N_0 - N_0^T \Delta A^T + (A_0 - K_0 C)\Delta P + \Delta P(A_0 - K_0 C)^T$$

Pour le calcul de N_0 , on passe par le calcul de \dot{N}_0 , grandeur qui, par ailleurs, est nulle en régime asymptotique. On utilise les équations du filtre de KALMAN (9.16), p. 121, ainsi que les équations (9.1) du système¹⁰, p. 116.

$$\begin{aligned}
 \dot{N}_0 &= E[\dot{\hat{x}}(x - \hat{x})^T] + E[\hat{x}(\dot{x} - \dot{\hat{x}})^T] \\
 &= A_0 N_0 + K_0 C P_0 + N_0(A_0 - K_0 C)^T \\
 &\quad + K_0 E[v(x - \hat{x})^T] + E[\hat{x} w^T] - E[\hat{x} v^T] K_0^T
 \end{aligned} \tag{9.34}$$

$$0 = A_0 N_0 + N_0(A_0 - K_0 C)^T$$

Ceci se justifie par le calcul des différentes espérances mathématiques présentes dans l'équation (9.34). Ces calculs se conduisent exactement de la même façon que pour celui de $E[e u^T]$ de l'équation (9.22), p. 123. Afin de ne pas trop alourdir la démonstration, on donnera uniquement les résultats :

$$\begin{aligned}
 K_0 E[v e^T] &= -\frac{1}{2} K_0 R K_0^T \\
 E[\hat{x} w^T] &= 0 \\
 -E[\hat{x} v^T] K_0^T &= -\frac{1}{2} K_0 R K_0^T
 \end{aligned} \tag{9.35}$$

9. On rappelle que $K_0 = P_0 C^T R^{-1}$.

10. Ici aussi, la matrice B a été omise, ce qui n'est pas restrictif.

9.4. CAS GÉNÉRAL

La solution en N_0 à l'équation de SYLVESTER de (9.34) est $N_0 = 0$. En reportant ce dernier résultat dans l'équation (9.33), on obtient une équation de LYAPUNOV, qui présente un terme constant nul.

On arrive donc à la conclusion suivante : **il n'y a pas de termes d'ordre 1 en $\Delta\theta$ dans le développement limité de ΔP . ΔP est donc une fonction quadratique de $\Delta\theta$.** En affirmant cela, on a bien évidemment négligé les termes d'ordre supérieur ou égal à 3, on n'a cependant pas montré que les termes d'ordre 2 sont non nuls mais le calcul à l'ordre 2 sur un exemple simple suffirait à le prouver. Le résultat exploitable ici est l'existence d'une matrice $G_{\theta_0}^{-1} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ définie positive telle que :

$$\boxed{\frac{1}{\Delta t} \text{Tr}[M_0^{-1} \Delta M] = \text{Tr}[R^{-1} C \Delta P C^T] = \Delta\theta^T G_{\theta_0}^{-1} \Delta\theta} \quad (9.36)$$

Ce résultat montre que le calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$ peut se faire à partir du calcul de \mathcal{P} .

9.4 Cas général

Jusqu'à présent, seuls les paramètres de la matrice A étaient susceptibles de varier. On s'intéresse maintenant au cas où non seulement la matrice A , mais aussi la matrice d'observation C dépendent de θ . La question qui se pose alors est de savoir si on peut toujours considérer que le résultat $\text{Tr}[M_0^{-1} \Delta M]$ est quadratique en $\Delta\theta$.

Lors de cette étude, on verra apparaître deux matrices L et N , qui pourront également être utilisées dans le calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$ où la matrice C est indépendante de $\Delta\theta$. Ceci permettra de s'affranchir du calcul de \mathcal{P} .

9.4.1 La matrice d'observation dépend de $\Delta\theta$

La première étape consiste à calculer le gain de KALMAN. Ce calcul de K_p , qui se fait lorsque le filtre et le système sont accordés en $\theta_0 + \Delta\theta$, est différent du précédent, puisqu'il faut intégrer le fait que la matrice C varie aussi. On donne les équations en (9.37). Quoi qu'il en soit, lorsqu'on se place dans le cadre de variations locales de θ , on peut écrire ici aussi que $K_p = K_0 + \Delta K$ et ne conserver dans ΔK que les termes d'ordre 1 en $\Delta\theta$.

$$K_p = P_p(C_0 + \Delta C)^T R^{-1} \quad (9.37)$$

$$P_p(A_0 + \Delta A)^T + (A_0 + \Delta A)P_p - P_p(C_0 + \Delta C)^T R^{-1}(C_0 + \Delta C)P_p + Q = 0$$

Le système que l'on considère est donc légèrement différent du cas précédent. À présent, les équations du système et de son filtre de KALMAN désaccordé sont les sui-

vantes :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A_0 x + w \\ \dot{\hat{x}} &= (A_0 + \Delta A)\hat{x} + K_p C_0(x - \hat{x}) - K_p \Delta C \hat{x} + K_p v \\ y &= C_0 x + v \\ \hat{y} &= (C_0 + \Delta C)\hat{x} \end{cases} \quad (9.38)$$

ce que l'on peut encore écrire :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A_0 x + w \\ \dot{\hat{x}} &= (A_0 + \Delta A - K_p \Delta C)\hat{x} + K_p C_0(x - \hat{x}) + K_p v \\ y &= C_0 x + v \\ \hat{y} &= (C_0 + \Delta C)\hat{x} \end{cases} \quad (9.39)$$

On remarque alors que la différence entre ces dernières équations et celles qui avaient été établies pour les variations de A uniquement -cf. (9.1) et (9.24), p. 116 et 123- est que d'un coté on a le terme ΔA dans l'équation différentielle de l'estimé, alors que de l'autre coté, on dispose du terme $\Delta A - K_p \Delta C$. Tout comme on avait développé ΔA à l'ordre 1 en $\Delta\theta$, on développe à l'ordre 1 également l'expression $\Delta A - K_p \Delta C$. Le calcul de P s'effectuant alors de la même manière que précédemment, on en déduit que ΔP est ici aussi une fonction quadratique de $\Delta\theta$.

Cependant, existe-t-il d'autres termes que ceux en ΔP dans le développement de ΔM ?

Calcul de ΔM lorsque $C = C(\theta)$

Le calcul de ΔM conduit à introduire des termes supplémentaires, puisqu'en effet, l'équation d'observation de l'estimateur comporte un terme en $\Delta C \hat{x}$. Ces termes vont donc apparaître lorsqu'on calcule $M = \mathbb{E}[(y - \hat{y}_{k|k-1})(y - \hat{y}_{k|k-1})^T]$, les équations de y_k et $\hat{y}_{k|k-1}$ étant les suivantes :

$$\begin{cases} y_k &= C_0 x_{k-1} + v_k + \Delta t(C_0 A_0 x_{k-1} + C_0 w_{k-1}) \\ \hat{y}_{k|k-1} &= (C_0 + \Delta C)\hat{x}_{k-1} + \Delta t[C(A - K_p C)\hat{x}_{k-1} + K_p(C x_{k-1} + v_{k-1})] \end{cases} \quad (9.40)$$

Dans cette équation $C = C_0 + \Delta C$, $A = A_0 + \Delta A$ et K_p est établi selon l'équation présentée en (9.37). Lorsqu'on fait la soustraction de y_k avec $\hat{y}_{k|k-1}$ et que l'on calcule les différents termes de M , certains sont en facteur de Δt ou même de Δt au carré. Ces termes vont au final disparaître tout comme cela a été le cas pour le calcul de M et M_0 lorsque $C = C_0$, (9.19) p. 122 à (9.25) p. 124. Le calcul de M donnera donc le résultat suivant :

$$\begin{aligned} y_k - \hat{y}_{k|k-1} &\simeq C_0(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) - \Delta C \hat{x}_{k-1} + v_k \\ M &= C_0 P C_0 + \frac{R}{\Delta t} - C_0 \mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k-1})\hat{x}_{k-1}^T] \Delta C^T \\ &\quad - \Delta C \mathbb{E}[\hat{x}_{k-1}(x_k - \hat{x}_{k-1})^T] C_0^T + \Delta C \mathbb{E}[\hat{x}_{k-1}\hat{x}_{k-1}^T] \Delta C \end{aligned} \quad (9.41)$$

9.4. CAS GÉNÉRAL

On notera $N = E[\hat{x}(x - \hat{x})^T]$ et $L = E[\hat{x}\hat{x}^T]$. Les grandeurs discrètes étant égales aux grandeurs continues prises au même instant, on aboutit à l'équation (9.42) pour ΔM .

$$\boxed{\Delta M = C_0 \Delta P C_0^T - C_0 N^T \Delta C^T - \Delta C N C_0^T + \Delta C L \Delta C^T} \quad (9.42)$$

Quadraticité de $\text{Tr}[M_0^{-1} \Delta M]$ en $\Delta\theta$

Comme on l'a vu en (9.34) p. 126, la grandeur N ne contient pas de terme d'ordre 0 ($N_0 = 0$). D'autre part, le terme en $\Delta C L \Delta C^T$ est déjà d'ordre 2 (il peut donc être considéré avec $L = L_0$). Le calcul de ΔM ne fait donc intervenir que des termes d'ordre 2 en $\Delta\theta$. Le résultat¹¹ de $\text{Tr}[R^{-1} \Delta M]$ peut donc ici encore s'écrire sous la forme $\Delta\theta^T G_{\theta_0}^{-1} \Delta\theta$. Par conséquent, le cas $A = A(\theta)$ seul est un cas particulier du cas où $A = A(\theta)$ et $C = C(\theta)$. Pour avoir accès au résultat numérique de (9.42), il reste à calculer les termes N et L .

9.4.2 Calcul de N et L

On a vu lorsqu'on s'est intéressé à la dépendance de $\text{Tr}[M_0^{-1} \Delta M]$ en $\Delta\theta$ que l'on pouvait écrire N sous la forme $N = P_{12} - P$. Il en est de même ici à la différence près que le calcul de \mathcal{P} intégrera la dépendance de C en θ . Pour ce qui est du calcul de L , on peut écrire $E[\hat{x}\hat{x}^T] = E[(x - e)(x - e)^T]$. En développant cette expression, on arrive aux résultats suivants :

$$\begin{aligned} N &= P_{12} - P & L &= P_{11} - P_{12} - P_{12}^T + P \\ &= [I \quad -I] \mathcal{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} & & = [I \quad -I] \mathcal{P} \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.43)$$

Le calcul de \mathcal{P} est donc suffisant pour obtenir ΔM . Cependant, pour $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, le calcul de \mathcal{P} nécessite la résolution d'une équation de LYAPUNOV de dimension $2n \times 2n$. De plus, \mathcal{P} comprend non seulement les termes d'ordre 2 en $\Delta\theta$ mais également les termes d'ordre supérieur qui ne sont pas nécessaires ici. Quant à L , on peut se contenter de calculer L_0 puisque ce terme est déjà en facteur de ΔC au carré. On propose alors une autre méthode que de passer par le calcul de \mathcal{P} pour obtenir les termes P , N et L_0 , bien que le calcul de \mathcal{P} ait, d'un point de vue théorique, le mérite de la simplicité.

On décompose l'équation de LYAPUNOV (9.29) sur 3 de ses 4 coordonnées (elle est symétrique); sachant que la matrice \mathcal{A} n'est pas tout à fait la même, vu que l'on considère ΔC :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ -\Delta A + K_p \Delta C & A_0 + \Delta A - K_p(C_0 + \Delta C) \end{bmatrix} \quad (9.44)$$

L'équation de coordonnée (1,1) donne accès à la valeur de L_0 , puisque dans le développement à l'ordre 0 de L , les termes en P_{12} et P_{21} disparaissent : $P_{11} = L_0 + P_0$. L'équation de RICCATI (9.16) ou (9.32) permet d'obtenir l'équation (9.45) :

$$\boxed{A_0 L_0 + L_0 A_0^T + K_0 R K_0^T = 0} \quad (9.45)$$

11. On rappelle que $M_0^{-1} = \Delta t R^{-1}$.

On développe ensuite l'équation de coordonnée (2,1) en ne conservant que les termes d'ordre le plus faible en $\Delta\theta$. Il s'agit ici d'une équation à l'ordre 1. Rappelons qu'à l'ordre 1, $P_{12} = N + P_0$ et que N n'a pas de termes d'ordre 0. De plus P_{11} est en facteur de termes d'ordre 1, et par conséquent, on pourra le remplacer par $L_0 + P_0$. Les termes d'ordre 0 se simplifiant, on obtient :

$$0 = A_0 P_{12} + [(-\Delta A + K_p \Delta C)P_{11} + (A_0 + \Delta A - K_p(C_0 + \Delta C))P_{12}]^T + Q \quad (9.46)$$

$$0 = A_0 N + N(A_0 - K_0 C_0)^T - L_0(\Delta A - K_0 \Delta C)^T - K_0 R \Delta K^T$$

Enfin, on développe l'équation de coordonnées (2,2) à l'ordre 2 en $\Delta\theta$, puisqu'on a déjà démontré que les termes d'ordre 1 se simplifiaient.

$$0 = (-\Delta A + K_p \Delta C)(N + P) + (N + P)^T(-\Delta A + K_p \Delta C)^T + (A_0 + \Delta A - K_p(C_0 + \Delta C))P + P(A_0 + \Delta A - K_p(C_0 + \Delta C))^T + K_p R K_p^T + Q \quad (9.47)$$

$$0 = (A_0 - K_0 C_0)\Delta P + \Delta P(A_0 - K_0 C_0)^T + \Delta K R \Delta K - (\Delta A - K_0 \Delta C)N - N^T(\Delta A - K_0 \Delta C)^T$$

Pour le calcul de \mathcal{P} , tout comme pour le calcul de L_0 , N et P , on ne s'est pas posé le problème de savoir si les équations de LYAPUNOV et de SYLVESTER mises en cause ont toujours une solution. Selon les hypothèses du problème posé en (9.1) p. 116, le calcul de ΔM peut effectivement être mené à bout. En effet, les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'ensemble de ces équations aient une solution unique sont que les matrices A_0 et $(A_0 - K_0 C_0)$ aient toutes leurs valeurs propres à partie réelle strictement négative. $(A_0 - K_0 C_0)$ est stable grâce aux propriétés du filtre de KALMAN, il faut et il suffit donc que A_0 soit exponentiellement stable.

Les avantages de ce dernier mode de calcul par rapport au calcul direct de \mathcal{P} sont les suivants :

- le calcul de \mathcal{P} est une équation de LYAPUNOV de taille $2n \times 2n$ alors que les calculs successifs de L_0 , N et ΔP sont chacun de taille $n \times n$; certes, l'équation en \mathcal{P} est symétrique -on aboutit au calcul d'un même nombre de coefficients- mais les routines numériques pour la résolution des équations de LYAPUNOV et SYLVESTER ont des difficultés pour les ordres élevés. La décomposition en trois équations permet donc de "digérer" une taille de problèmes plus importante.
- d'autre part, parmi les trois équations aboutissant à L_0 , N et P , deux seulement doivent être résolues pour toutes les coordonnées du vecteur $\Delta\theta$; en effet le calcul de L_0 peut être effectué une seule fois.

9.5 Algorithme de calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$

Comme on a pu le constater à la page 120, l'information sur le comportement de $p(\theta_0 + \Delta\theta|y^k)$ est contenue dans l'expression $\text{Tr}[R^{-1} \Delta M]$ qui elle-même est une fonction quadratique de $\Delta\theta$ (cela a été démontré p. 127). On peut donc écrire, en regroupant les termes qui ne sont pas intéressants, que :

$$p(\theta_0 + \Delta\theta|y^k) = \Lambda' \exp[-\alpha \Delta\theta^T G_{\theta_0}^{-1} \Delta\theta] \quad (9.48)$$

où Λ' et α sont des termes positifs, indépendants de $\Delta\theta$ et donc ne contenant aucune information. La matrice $G_{\theta_0}^{-1}$ est, à elle seule, représentative du comportement de la gaussienne $p(\theta_0 + \Delta\theta|y^k)$.^a C'est donc cette matrice, et cette matrice seule, qui contient toute l'information sur la convergence de l'estimateur bayésien quand le vecteur paramétrique est supposé être au voisinage de θ_0 . Il est donc indispensable de savoir calculer $G_{\theta_0}^{-1}$.

^a. Il s'agit bien d'une gaussienne, puisque le terme à l'intérieur de l'exponentielle est quadratique.

9.5.1 Procédure utilisée

Suite aux développements mathématiques des sections 9.3 et 9.4, le calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$ se fait en trois temps.

- On commence par calculer toutes les grandeurs utiles lorsque $\theta = \theta_0$. Ces dernières sont P_0 calculée à partir de l'équation de RICCATI (9.16) p. 121, puis K_0 , ainsi que L_0 calculée à partir de l'équation de SYLVESTER (9.45) p. 129.
- On s'attaque ensuite aux termes diagonaux de la matrice $G_{\theta_0}^{-1}$; on fait varier une à une les coordonnées du vecteur $\Delta\theta$. C'est-à-dire pour $i = 1..r$ on prend $\Delta\theta_{k=i} = \varepsilon$ et $\Delta\theta_{k \neq i} = 0$. On calcule ensuite $\text{Tr}[R^{-1} \Delta M]$ pour le $\Delta\theta$ choisi. Pour cela, on calcule le nouveau gain de KALMAN K_p selon l'équation (9.37) p. 127 afin d'en déduire ΔK , puis les valeurs de N et ΔP selon les équations (9.46) et (9.47) p. 130, et enfin, on obtient ΔM grâce à l'équation (9.42) p. 129. Le coefficient correspondant de $G_{\theta_0}^{-1}$ est alors :

$$G_{\theta_0}^{-1}(i, i) = \frac{\text{Tr}[R^{-1} \Delta M]_{\Delta\theta_i}}{\varepsilon^2} \quad (9.49)$$

- On finit par le calcul des autres termes. Pour cela on prend $\Delta\theta_{k=i} = \varepsilon$, $\Delta\theta_{k=j} = \varepsilon$ et $\Delta\theta_{k \neq (i \text{ et } j)} = 0$ puis on suit le même cheminement de calculs que précédemment. La matrice $G_{\theta_0}^{-1}$ étant une matrice symétrique, la moitié des termes seulement est calculée. Ces termes ont pour valeurs :

$$G_{\theta_0}^{-1}(i, j) = \frac{\text{Tr}[R^{-1} \Delta M]_{\Delta\theta_{ij}} - \varepsilon^2 [G_{\theta_0}^{-1}(i, i) + G_{\theta_0}^{-1}(j, j)]}{2\varepsilon^2} \quad (9.50)$$

9.5.2 Cas des systèmes diagonaux

Pour simplifier la lisibilité de la démonstration, on traitera le cas où seule la matrice A est dépendante des paramètres incertains ($A = A_0 + \Delta A$, $C = C_0$). On se place dans le cas d'un système qui est diagonal par blocs à savoir :

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}(A_1, A_2) & C &= \text{diag}(C_1, C_2) \\ Q &= \text{diag}(Q_1, Q_2) & R &= \text{diag}(R_1, R_2) \end{aligned} \quad (9.51)$$

On résout alors les différentes équations pour calculer $\text{Tr}[R^{-1} \Delta M]$. Lorsqu'on observe l'équation de RICCATI (9.16) p. 121, on s'aperçoit qu'elle est vérifiée par la matrice P_0 décrite dans l'équation (9.52) où P_{1_0} est la solution de l'équation du filtre pour le système 1 et P_{2_0} la solution pour le système 2. Or, la matrice $A_0 = \text{diag}(A_{1_0}, A_{2_0})$ est exponentiellement stable puisque les deux matrices A_{1_0} et A_{2_0} le sont. La solution de l'équation de RICCATI est donc unique et c'est par conséquent la matrice P_0 . Le fait que cette matrice P_0 soit diagonale par blocs, implique que la matrice K_0 l'est aussi.

$$P_0 = \begin{bmatrix} P_{1_0} & 0 \\ 0 & P_{2_0} \end{bmatrix} \quad K_0 = \begin{bmatrix} K_{1_0} & 0 \\ 0 & K_{2_0} \end{bmatrix} \quad (9.52)$$

Le même raisonnement conduit au fait que K_p est diagonale par blocs et logiquement ΔK aussi. En introduisant la variable¹² $X = \text{vec}(x_1, e_1, x_2, e_2)$ on arrive à l'équation différentielle déjà connue :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_2 \end{bmatrix} \text{vec}(w_1, v_1, w_2, v_2) \quad (9.53)$$

La variable $\mathcal{P} = \text{E}[X X^T]$ vérifie donc l'équation de LYAPUNOV (9.54). Or la matrice $\text{diag}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$, où \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 vérifient les équations de LYAPUNOV (9.29) pour chaque système, vérifie également l'équation (9.54). Par unicité de la solution, on a donc une matrice \mathcal{P} qui est diagonale par blocs.

$$0 = \mathcal{A} \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{A}^T + \mathcal{B} \mathcal{Q} \mathcal{B}^T \quad (9.54)$$

\mathcal{P} étant diagonale par blocs, ΔM l'est également. On arrive donc à la conclusion suivante :

$$\text{Tr}[R^{-1} \Delta M] = \text{Tr}[R_1^{-1} \Delta M_1] + \text{Tr}[R_2^{-1} \Delta M_2] \quad (9.55)$$

Si on dispose d'un vecteur $\Delta \theta$ ordonné en deux parties tel que pour $k = 1..r_1$, $\Delta A_2(\Delta \theta_k) = 0$, et pour $k = r_1 + 1..r_1 + r_2$, $\Delta A_1(\Delta \theta_k) = 0$, on se retrouve alors dans la configuration suivante :

— lorsque seul ΔA_1 varie alors $\text{Tr}[R^{-1} \Delta M] = \text{Tr}[R_1^{-1} \Delta M_1]$ (et réciproquement).

Si bien que $G_{\theta_0}^{-1}(i, j) = G_{\theta_{01}}^{-1}(i, j)$ pour i et $j \in [1..r_1]$.

12. L'opérateur vec produit une concaténation bout à bout de ses arguments. On obtient ici un vecteur qui est la succession des 4 vecteurs x_1, e_1, x_2, e_2 .

9.5. ALGORITHME DE CALCUL DE $G_{\theta_0}^{-1}$

— lorsque à la fois ΔA_1 et ΔA_2 varient, par exemple avec $i \in [1..r_1]$ et $j \in [r_1 + 1..r_1 + r_2]$, alors :

$$G_{\theta_0}^{-1}(i, j) = \frac{\text{Tr}[R^{-1} \Delta M]_{\Delta \theta_{ij}} - \varepsilon^2 [G_{\theta_0 1}^{-1}(i, i) + G_{\theta_0 2}^{-1}(j, j)]}{2 \varepsilon^2} = 0 \quad (9.56)$$

On obtient alors au final le résultat (9.57) qui sera utile pour décomposer les gros systèmes en plusieurs sous-systèmes et éventuellement réduire le nombre de calculs lorsque l'occasion se présentera.

$$G_{\theta_0}^{-1} = \begin{bmatrix} G_{\theta_0 1}^{-1} & 0 \\ 0 & G_{\theta_0 2}^{-1} \end{bmatrix} \quad (9.57)$$

9.5.3 Comparaison avec l'algorithme en discret

Lorsqu'on considère directement un système discret, on aboutit à des équations analogues pour le calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$. Au lieu d'avoir des équations de RICCATI, LYAPUNOV et SYLVESTER de type continu, on a des équations de type discret, qui sont donc légèrement différentes. Les résultats sont présentés ici, mais il faudra se référer à [29] et [9] pour disposer des développements.

Le filtre de KALMAN est construit à partir des équations (9.58).

$$\begin{aligned} K_0 &= P'_0 C^T M_0^{-1} \\ M_0 &= C P'_0 C^T + R \\ P'_0 &= A_0 P_0 A_0^T + Q \\ P_0 &= (I - K_0 C) P'_0 (I - K_0 C)^T + K_0 R K_0^T \end{aligned} \quad (9.58)$$

On peut en déduire directement que $\Delta M = C \Delta P' C^T$. À noter la présence de deux matrices P_0 et P'_0 selon que l'on considère la covariance en estimation ou en prédiction. Bien entendu, les matrices A_0 et C considérées sont celles d'un système à temps discret, A_0 étant exponentiellement stable (son rayon spectral étant strictement inférieur à 1).

Pour les équations de L_0 , N et $\Delta P'$, on obtient :

$$\begin{aligned} L_0 &= A_0 [L_0 + K_0 M_0 K_0^T] A_0^T \\ N &= A_0 N (I - K_0 C)^T A_0^T - A_0 L_0 \Delta A^T - A_0 K_0 M_0 (\Delta A K_0 + A_0 \Delta K)^T \\ \Delta P' &= A_0 (I - K_0 C) \Delta P' (I - K_0 C)^T A_0^T + \Delta A L \Delta A^T \\ &\quad + \Delta A N (I - K_0 C)^T A_0^T - A_0 (I - K_0 C) N^T \Delta A^T \\ &\quad + (A_0 \Delta K + \Delta A K_0) M_0 (A_0 \Delta K + \Delta A K_0)^T \end{aligned} \quad (9.59)$$

On constate donc que ces équations sont de même "nature". Cependant, si l'on veut appliquer ces calculs en discret pour un système continu, il faut au préalable discrétiser

le système. On est donc obligé de choisir une période d'échantillonnage ainsi qu'une méthode de discrétisation. Le fait de choisir telle ou telle période d'échantillonnage, telle ou telle méthode de discrétisation conduit donc à des systèmes échantillonnés légèrement différents et des résultats différents également. Le fait de construire $G_{\theta_0}^{-1}$ en continu, permet de s'abstenir de cette dépendance vis-à-vis de la phase de discrétisation.

9.6 Interprétation de la matrice $G_{\theta_0}^{-1}$

L'identification des paramètres incertains d'un système n'est pas ici une fin en soi. En effet l'objectif est d'utiliser les résultats de cette identification à des fins de commande. Ce qui est important n'est donc pas l'outil d'identification en lui-même¹³ mais l'utilisation que l'on peut faire du résultat. Pour cela il est nécessaire de bien comprendre la signification de la matrice $G_{\theta_0}^{-1}$ et les interprétations que l'on peut en tirer.

9.6.1 Directions de sensibilité paramétrique

La matrice $G_{\theta_0}^{-1}$ permet de mesurer l'identifiabilité des composantes¹⁴ du vecteur paramétrique θ . En effet, la qualité de l'identification peut s'illustrer par la figure 9.2, dans le cas où θ est un scalaire. Il est clair que si, asymptotiquement, les probabilités que θ soit égal à θ_0 ou égal à $\theta_0 + \Delta\theta$ avec $\Delta\theta$ "grand", sont sensiblement identiques alors l'identification est de mauvaise qualité. Les qualificatifs de "grand" et de "mauvaise" sont bien évidemment relatifs : sur la figure 9.2, c'est la différence de l'écart entre les probabilités $p(\theta_0)$ et $p(\theta_0 + \Delta\theta)$ qui conduit à l'utilisation d'une part du qualificatif "bonne" (à gauche) et d'autre part du qualificatif "mauvaise" (à droite).

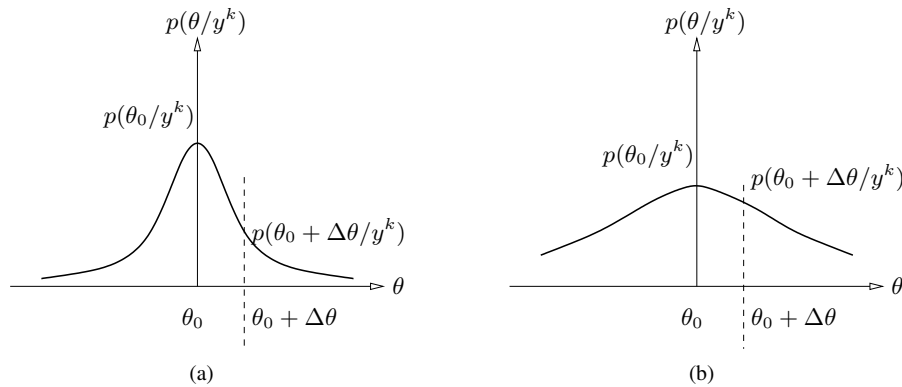


FIGURE 9.2: (a) Bonne qualité de l'identification ; (b) Mauvaise qualité d'identification

Or, il existe une relation directe entre l'identifiabilité des paramètres et la sensibilité du système à ces mêmes paramètres. En effet supposons qu'un paramètre ne soit absolument pas identifiable. Ceci correspond à une gaussienne "plate", c'est-à-dire

13. On aurait pu choisir une méthode basée sur le maximum de vraisemblance.

14. Ou des combinaisons de composantes.

9.6. INTERPRÉTATION DE LA MATRICE $G_{\theta_0}^{-1}$

que les probabilités que θ soit égal à θ_0 et que θ soit égal à $\theta_0 + \Delta\theta$ sont identiques (dans le cas scalaire cela correspond à une matrice $G_{\theta_0}^{-1}$ nulle), autrement dit, quelle que soit la valeur réelle de ce paramètre le vecteur de sortie y (ou y^k) sera le même. Réciproquement, plus le vecteur de sortie “change” entre deux valeurs différentes de θ , plus le paramètre associé est identifiable. On en tire le principe suivant, déjà présenté dans la partie introductive, et qui constitue le point de départ pour l’utilisation de la méthode :

- plus un paramètre est identifiable, plus le système, d’un point de vue entrée-sortie, est sensible aux variations de ce paramètre ;
- moins le système est sensible aux variations d’un paramètre, moins ce paramètre est identifiable.

Lorsqu’on se trouve dans le cas d’un vecteur θ de dimension r , on a alors plusieurs directions de sensibilités différentes. Une décomposition en vecteurs propres de la matrice $G_{\theta_0}^{-1}$ permet de visualiser les directions principales. Si λ_m (resp. λ_M) désigne la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de $G_{\theta_0}^{-1}$ et θ_m (resp. θ_M) le vecteur propre unitaire associé, on obtient les deux relations suivantes, lorsqu’on choisit $\Delta\theta = \gamma\theta_m$ d’une part, et $\Delta\theta = \gamma\theta_M$ d’autre part :

$$\begin{aligned} p(\theta_0 + \gamma\theta_m|y^k) &= \Lambda' \exp [-\alpha \lambda_m \gamma^2] \\ p(\theta_0 + \gamma\theta_M|y^k) &= \Lambda' \exp [-\alpha \lambda_M \gamma^2] \end{aligned} \quad (9.60)$$

La première équation, lorsqu’on considère la plus petite valeur propre est un cas typique de (b) sur la figure 9.2 ; la seconde, quant à elle, représente bien le cas (a). Si on considère une direction paramétrique unitaire donnée θ_d , alors on peut décomposer ce vecteur sur la base des vecteurs propres unitaires $(\theta_v^i)_{i=1..r}$: $\theta_d = \sum_{i=1}^r \beta_i \theta_v^i$ sachant que la somme des β_i^2 est égale à 1. La densité de probabilité dans cette direction se formule comme suit :

$$p(\theta_0 + \gamma\theta_d|y^k) = \Lambda' \exp \left[-\alpha \left(\sum_{i=1}^r \beta_i \lambda_i \right) \gamma^2 \right] \quad (9.61)$$

Le plus petit inverse de la covariance est donné pour $\beta_{i=m} = 1$ et le plus grand pour $\beta_{i=M} = 1$, les autres β_i étant nuls bien entendu. On peut résumer les différentes situations dans le tableau 9.2.

Il existe d’autres mesures de l’identifiabilité des paramètres incertains. Si on considère le vecteur $\Delta\theta$ dans son ensemble, et non par une décomposition selon les direction paramétriques, alors l’identifiabilité de l’ensemble des paramètres peut se mesurer essentiellement au travers de deux grandeurs :

- le déterminant de $G_{\theta_0}^{-1}$ qui est directement lié au volume de l’hyper-ellipsoïde d’incertitude. Cette mesure ayant l’inconvénient principal d’être nulle dès qu’une direction n’est pas identifiable.
- la trace de $G_{\theta_0}^{-1}$ qui peut être interprétée comme la variance moyenne des paramètres.

Par la suite, seules les directions particulières seront étudiées, car le critère global d’identifiabilité n’a que peu d’utilité dans le réglage d’un correcteur.

θ_m : direction - de sensibilité minimale - la moins identifiable - donnée par le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre λ_m de $G_{\theta_0}^{-1}$
θ_M : direction - de sensibilité maximale - la plus identifiable - donnée par le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre λ_M de $G_{\theta_0}^{-1}$

TABLE 9.2: Directions de sensibilité

9.6.2 Lien avec la robustesse

Le concept de robustesse est lié à l'aspect de commande en boucle fermée. On introduit par conséquent un correcteur qui agit par retour dynamique de sortie. Les équations de départ sont données en (9.62). La matrice A du système est toujours la seule comprenant des paramètres incertains.

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (9.62)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = C_c x_c + D_c y \end{cases}$$

En reconstituant la boucle fermée de cet ensemble système/correcteur, on en déduit la représentation d'état (9.63). On notera par la suite A_{cl} la matrice d'évolution du système en boucle fermée.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta) + B D_c C & B C_c \\ B_c C & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \\ y = [C \ 0] \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \end{cases} \quad (9.63)$$

La matrice A_{cl} est la seule à dépendre des paramètres incertains. On peut par conséquent appliquer l'identification paramétrique sur le système (9.63). Dans cette optique de commande, la trace de $G_{\theta_0}^{-1}$ est une mesure de robustesse aux incertitudes paramétriques. Pour s'en persuader, on suppose que le vecteur paramétrique θ est un scalaire, et que l'on dispose de deux correcteurs différents. Si, pour le premier correcteur le paramètre θ est moins identifiable que pour le second correcteur, alors le premier correcteur est plus robuste aux variations de θ -i.e. la sortie sera moins sensible à ces variations-.

On conclut que :

- θ_m -direction de sensibilité minimale- correspond également à la direction de robustesse maximale dans le cas d'un système bouclé ;

— θ_M -direction de sensibilité maximale- correspond également à la direction de robustesse minimale dans le cas d'un système bouclé.

Cette conclusion a permis la création d'une méthode d'analyse de robustesse en stabilité [10], ainsi qu'une méthode de synthèse et de désensibilisation aux variations paramétriques [26].

9.7 Conclusion

Le but de ce chapitre a été de mettre en évidence les différents liens existant entre la qualité de l'identification bayésienne, la sensibilité paramétrique et la robustesse paramétrique. Pour cela, on a étudié la loi de probabilité $p(\theta|y^k)$ où θ représente un vecteur paramétrique incertain appartenant à un système linéaire exponentiellement stable et où y^k représente le vecteur de sortie jusqu'à l'instant k . Il apparaît que cette loi de probabilité obéit en régime asymptotique à une loi gaussienne dont la matrice de covariance $G_{\theta_0}^{-1}$ est calculée à partir d'un ensemble d'équations de LYAPUNOV et de SYLVESTER. Le cas continu a été traité afin de s'affranchir des problèmes de discrétisation.

L'interprétation de cette matrice de covariance est riche de conséquences. C'est en effet $G_{\theta_0}^{-1}$ qui permet de quantifier la qualité de l'identification bayésienne d'un paramètre ou d'une combinaison de paramètres. Par conséquent, cette matrice constituera le point de départ pour l'analyse de sensibilité paramétrique, des directions particulières se matérialisant par les vecteurs propres.

À présent, si l'on revient à la problématique d'ajustement de correcteur, le premier problème va consister à choisir un ensemble pertinent de paramètres qui seront considérés comme des paramètres incertains. L'analyse des directions issues de $G_{\theta_0}^{-1}$ donnera alors des relations entre les différents paramètres choisis. C'est ce qui va être étudié dans ce qui suit.

Chapitre 10

Analyse d'un ajustement d'une loi de commande

10.1 Introduction

Le parallèle entre la qualité de l'identification et la sensibilité paramétrique constitue la clé de l'analyse d'ajustement de loi de commande grâce à la méthode bayésienne. La matrice de covariance $G_{\theta_0}^{-1}$ apporte des renseignements précieux sur les différentes composantes du vecteur paramétrique θ .

La direction de sensibilité minimale est ici un concept primordial. En effet, il se trouve que c'est le long de ce vecteur paramétrique θ_m que le système considéré a les plus faibles variations de son comportement entrée/sortie. En séparant en deux parties les composantes du vecteur paramétrique $\theta = (\theta^1; \theta^2)$ on peut donc conclure que, localement, la variation de $\theta^1 = \theta_m^1$ compense la variation de $\theta^2 = \theta_m^2$. C'est cette compensation qui a conduit à composer le vecteur paramétrique θ de deux familles distinctes de paramètres :

- d'une part des paramètres de réglage du correcteur ;
- d'autre part, des caractéristiques modales que l'on veut régler.

Bien évidemment, il ne s'agit pas en réalité de paramètres incertains, mais ils seront traités comme tels dans le cadre d'un ajustement précis d'une loi de commande, puisqu'on ne sait pas *a priori* de combien il faut faire varier les paramètres du correcteur pour obtenir le résultat escompté.

10.2 Paramètres du correcteur

Le modèle que l'on utilise à présent est un modèle en boucle fermée -tout comme pour l'analyse de la robustesse- puisque le fait de s'intéresser à l'ajustement de lois de commande nécessite la présence d'un correcteur. À la différence des équations (9.62),

ce n'est plus le système qui contient les paramètres incertains, mais le correcteur :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases} \quad (10.1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_c &= A_c(\theta)x_c + B_c(\theta)y \\ u &= C_c(\theta)x_c + D_c(\theta)y \end{cases}$$

On remarquera que le système étudié ne comprend pas de transmission directe. Cependant, cette hypothèse n'est absolument pas restrictive : le choix a uniquement été fait par souci de clarté. Si on veut garder une structure identique en présence de transmission directe, on peut l'intégrer dans le correcteur comme présenté sur la figure 10.1.

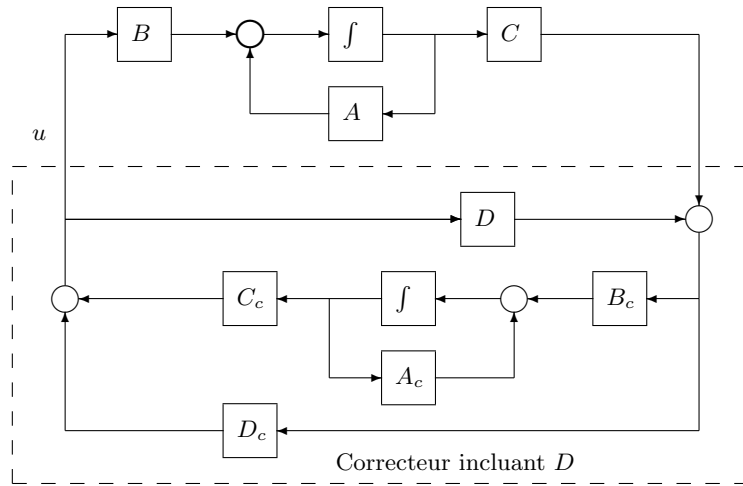


FIGURE 10.1: Transmission directe intégrée au correcteur

Évidemment toutes les matrices du correcteur ne dépendent pas nécessairement de θ . Cela est lié à l'ajustement que l'on effectue. Lorsqu'on calcule la boucle fermée de ce système, on arrive alors au système augmenté suivant :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B D_c(\theta) C & B C_c(\theta) \\ B_c(\theta) C & A_c(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \\ y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \end{cases} \quad (10.2)$$

On est alors en présence d'un système où les matrices d'évolution et d'observation dépendent de θ : $A_{cl} = A_{cl}(\theta)$, $C_{cl} = C_{cl}(\theta)$. Même si la relation en θ n'est pas linéaire, cela n'a que peu d'importance puisque localement, on peut faire un développement limité à l'ordre 1 en $\Delta\theta$.

La structure du correcteur utilisée ici est une représentation d'état. Il est clair que cela ne sera pas toujours le cas. En effet, lorsqu'on évalue la pertinence d'un ajustement, il se trouve que le correcteur utilisé est déjà sous une structure fixée. Le fait d'utiliser une forme particulière peut permettre de diminuer le nombre des paramètres incertains.

10.2.1 Structure estimation/retour d'état

La structure estimation-retour d'état a déjà été présentée dans la partie I de ce mémoire au chapitre 2. Elle peut être particulièrement efficace pour réduire le nombre de paramètres incertains pour un ajustement particulier [3]. Par exemple, la modification de quelques gains de la matrice K_c du retour d'état -cf. figure 10.2- peut suffire à modifier les caractéristiques modales de la boucle fermée (pulsation ou amortissement de modes du système) [2].

On présente ici l'introduction des paramètres incertains lors de la modification du gain de retour d'état. Cependant, le fait de ne considérer que le retour d'état n'est pas restrictif. En effet, de la même façon, on pourrait décider de modifier uniquement le gain d'estimation K_f ou le paramètre de YOULA $Q(s)$, statique ou dynamique, ou plusieurs de ces gains simultanément.

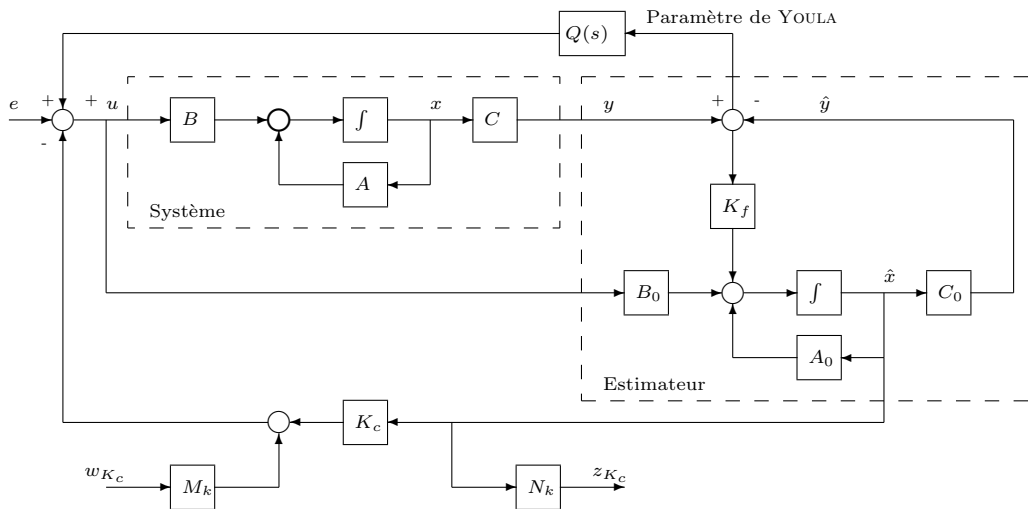


FIGURE 10.2: Mise en évidence des paramètres incertains liés à la modification de K_c

Il convient de noter quelques points importants sur la structure de la figure 10.2. Tout d'abord, les matrices A_0 , B_0 , C_0 ne correspondent pas aux matrices d'évolution, de commande et d'observation du correcteur sous sa forme de représentation d'état, comme sur la figure 10.1. En effet, ces matrices peuvent correspondre à la représentation d'état du système (A , B , C) lorsque le correcteur est du même ordre que le système. Il va de soi que lorsque le système est d'ordre supérieur au correcteur, cette représentation ne permet pas d'obtenir une estimation complète des modes du système; auquel cas, la représentation A_0 , B_0 , C_0 sera souvent une réduction de la représentation A , B , C (ceci à déjà été précisé dans le chapitre 2).

On note la présence sur ce schéma d'une entrée et d'une sortie supplémentaires notées: w_{K_c} et z_{K_c} . C'est précisément à cet endroit qu'agira le vecteur paramétrique

$\Delta\theta$:

$$w_{K_c} = \text{diag}(\Delta\theta) z_{K_c} \quad (10.3)$$

$$\Delta K_c = M_k \text{diag}(\Delta\theta) N_k$$

La composition des matrices M_k et N_k dépend à la fois des dimensions de la matrice de retour d'état K_c et de l'ajustement auquel on procède. Un exemple simple permet d'illustrer cela. Considérons que la matrice ΔK_c soit la suivante :

$$\Delta K_c = \begin{bmatrix} -0.15 & 1.5 & 0 & 0 \\ -0.3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.4)$$

En considérant que $\Delta\theta_1 = \Delta K_c(1, 1)$, $\Delta\theta_2 = \Delta K_c(2, 1)$, et $\Delta\theta_3 = \Delta K_c(2, 1)$ sont des paramètres indépendants, on obtient alors les matrices M_k et N_k de l'équation (10.5), ce qui vérifie la seconde équation de (10.3).

$$M_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad N_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.5)$$

10.2.2 Mise sous forme LFT

Finalement, la figure 10.2 et l'équation (10.3) conduisent à l'utilisation d'une forme standard, appelée encore forme $M - \Delta$ ou LFT¹, pour la modélisation des incertitudes, les entrées exogènes étant constituées des w_{K_c} et les sorties exogènes des z_{K_c} . On aboutit donc à une formulation présentée en figure 10.3 où $y = F_u(M(s), \text{diag}(\Delta\theta)) u$, qui est une formulation classique des systèmes incertains sous forme $M - \Delta$, où la perturbation est structurée. Le système $M(s)$ est la boucle fermée du système en son point nominal (voir figure 10.2).

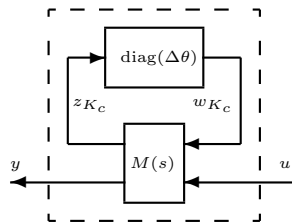


FIGURE 10.3: Formulation standard d'un système incertain

Le système $M(s)$, qui regroupe la dynamique de la boucle fermée, peut s'exprimer également sous la forme d'une représentation d'état. Par rapport à la représentation d'état nominale de la boucle fermée, cette représentation comporte un nombre d'entrées augmenté de la taille de w_{K_c} et un nombre de sorties augmenté de la taille de z_{K_c} ; pour cette raison, on donnera à $M(s)$ l'appellation de "*système augmenté*", même si le nombre de pôles reste le même.

1. Linear Fractional Transformation

10.3 Caractéristiques modales

Le système issu de la transformation $F_u(M(s), \text{diag}(\Delta\theta))$ comprend les variations du correcteur. Lors de l'analyse de la pertinence d'une action de certains gains du correcteur sur le comportement du système, le vecteur paramétrique $\Delta\theta$ du correcteur sera souvent un scalaire. En effet, même si l'ajustement concerne plusieurs gains du correcteur, ces gains seront modifiés selon une direction -au sens d'un vecteur- déjà déterminée, seule la norme dans cette direction constituera le paramètre incertain. Cependant, les modifications que l'on souhaite apporter sur les caractéristiques de la boucle fermée du système sont parfois en nombre supérieur. Par exemple si l'on souhaite, grâce à un réglage de correcteur scalaire -de type potentiométrique, ne faisant intervenir qu'un seul paramètre-, modifier à la fois la pulsation d'un mode et l'amortissement d'un autre, alors les modifications à considérer seront au nombre de 2. Pour pouvoir faire une analyse en compensation, il faut donc intégrer les caractéristiques à modifier dans le vecteur des paramètres incertains.

10.3.1 Mise en évidence du vecteur paramétrique reflétant les variations modales

En ce qui concerne les caractéristiques de type modal (pulsations, amortissements), on utilise également la formulation $M - \Delta$. L'action de modifier une pulsation ou un amortissement agit alors directement sur la matrice d'évolution A_{cl} de $M(s)$. On modélise cela de la façon décrite par la figure 10.4.

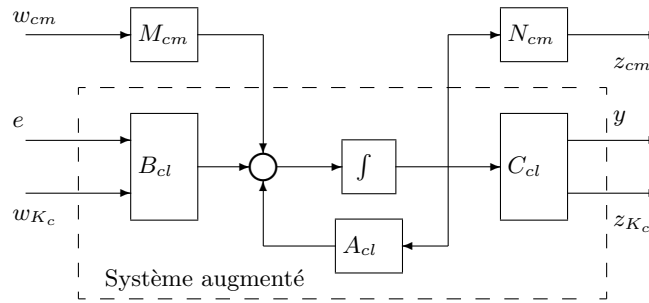


FIGURE 10.4: Mise en évidence de paramètres incertains liés aux modifications modales souhaitées

On a supposé sur ce schéma que les variations du correcteur étaient focalisées sur le gain de retour d'état K_c . Il est clair qu'on aurait pu présenter la même chose avec les autres matrices, voire plusieurs matrices simultanément. Quant aux matrices M_{cm} et N_{cm} ², elles sont construites exactement comme on a construit M_k et N_k :

$$w_{cm} = \text{diag}(\Delta\theta) z_{cm} \tag{10.6}$$

$$\Delta A_{cl} = M_{cm} \text{diag}(\Delta\theta) N_{cm}$$

2. L'indice $_{cm}$ correspond à "caractéristiques modales".

Notons que le θ considéré ici n'est pas le même que celui de l'équation (10.3) p. 142. Comme par la suite ces deux types de paramètres figureront dans $\Delta\theta$, on les distinguera de cette manière :

- le(s) paramètre(s) de type modal (modaux) qui est (sont) sensé(s) représenter le résultat du réglage, c'est-à-dire les variations voulues de la dynamique du système, sera (seront) regroupé(s) dans θ^{cm} ;
- le(s) paramètre(s) du correcteur qui fait (font) l'objet du réglage sera (seront) regroupé(s) dans θ^k .

10.3.2 Modélisation des variations modales

Afin que la variation $\Delta\theta^{cm}$ ait l'effet désiré sur le système $M(s)$, il faut déterminer les matrices M_{cm} et N_{cm} . On distinguera deux cas, selon que l'on s'intéresse à une pulsation, ou selon que l'on s'intéresse à un amortissement. On peut remarquer que pour un mode complexe conjugué, le découpage en pulsation/amortissement est arbitraire, on aurait pu choisir tout aussi bien un découpage partie imaginaire/partie réelle. Malgré tout, les variables pulsation et surtout amortissement semblent être plus intéressantes d'un point de vue ajustement de loi de commande.

Variation d'amortissement

Pour modéliser des variations d'amortissement, il faut choisir en premier lieu si l'on considère des variations relatives, du type $\xi = \xi_0(1 + \delta\xi)$, ou additives, du type $\xi = \xi_0 + \delta\xi$. Ensuite, le système doit être mis sous forme LFT comme indiqué par les équations (10.6). Lors de cette mise en forme, il se peut que certains paramètres apparaissent de façon répétée dans le vecteur paramétrique. Afin de minimiser le nombre de variables utilisées, on choisira la formulation LFT minimale. Dans le cas de l'amortissement d'un mode complexe, la formulation ne fait intervenir qu'une seule fois le paramètre $\delta\xi$.

Dans les exemples qui seront présentés ultérieurement, il a semblé judicieux d'utiliser des incertitudes de type relatif. C'est donc ce cas qui sera étudié ici. Le système $M(s)$ auquel on s'intéresse est considéré sous sa forme de représentation d'état dans une base bloc diagonale réelle afin de pouvoir distinguer les différents modes. On notera A_i , B_i , C_i les blocs élémentaires associés au mode complexe numéro i :

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\xi_i\omega_i \end{bmatrix} \quad B_i = \begin{bmatrix} B_i^1 \\ B_i^2 \end{bmatrix} \quad C_i = [C_i^1 \quad C_i^2] \quad (10.7)$$

À partir de cette représentation, on exprime les correspondances entre les termes

10.3. CARACTÉRISTIQUES MODALES

ΔA_i , M_i , N_i et $\delta \xi_i$:

$$\Delta A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \xi_{0_i} \delta \xi_i \omega_i \end{bmatrix}$$

$$\Delta A_i = M_i \delta \xi_i N_i \quad (10.8)$$

$$M_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad N_i = [0 \quad -2 \xi_{0_i} \omega_i]$$

En introduisant la sortie fictive z_{cm_i} et l'entrée fictive w_{cm_i} ainsi que la relation $w_{cm_i} = \delta \xi_i z_{cm_i}$, on arrive finalement à la représentation $M - \Delta$ de l'équation (10.9).

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_i^1 \\ \dot{x}_i^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{cm_i} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \vdots & \vdots \\ & \ddots & & & & & 0 & \vdots \\ & & 0 & 1 & & & 0 & B_i^1 \\ & & -\omega_i^2 & -2 \xi_{0_i} \omega_i & & & 1 & B_i^2 \\ & & & & \ddots & & 0 & \vdots \\ & & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & 0 & -2 \xi_{0_i} \omega_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & C_i^1 & C_i^2 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ x_i^1 \\ x_i^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_{cm_i} \\ e \end{bmatrix} \quad (10.9)$$

Variation de pulsation

La modélisation se fait ici de la même façon. On choisit toujours d'exprimer les variations relatives $\delta \omega_i$ sur la pulsation des modes complexes. On obtient alors la mise sous forme $M - \Delta$ de l'équation (10.10). La relation entre la sortie et l'entrée fictive étant la suivante: $w_{cm_i} = \delta \omega_i z_{cm_i}$.

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_i^1 \\ \dot{x}_i^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{cm_i} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \vdots & \vdots \\ & \ddots & & & & & 0 & \vdots \\ & & 0 & 1 & & & 0 & B_i^1 \\ & & -\omega_{0_i}^2 & -2 \xi_i \omega_{0_i} & & & 1 & B_i^2 \\ & & & & \ddots & & 0 & \vdots \\ & & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & -2 \omega_{0_i}^2 & -2 \xi_i \omega_{0_i} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & C_i^1 & C_i^2 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ x_i^1 \\ x_i^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_{cm_i} \\ e \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

Pour obtenir cette modélisation des incertitudes au premier ordre, on a supposé que $\delta \omega_i \ll 1$. En effet, si tel n'est pas le cas, alors cette modélisation est fautive à cause du terme quadratique en $\delta \omega_i$ qui est normalement présent -ce terme n'étant plus négligeable-. Dans ce cas, si on désire tout de même une modélisation exacte de

l'incertitude, il faut utiliser un Δ de rang deux, avec le paramètre $\delta\omega_i$ répété. Apparaît alors une transmission directe entre les entrées et les sorties fictives. La forme $M - \Delta$ résultante est présentée dans (10.11) avec : $w_{cm_i} = \delta\omega_i z_{cm_i}$ et $w'_{cm_i} = \delta\omega_i z'_{cm_i}$.

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_i^1 \\ \dot{x}_i^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{cm_i} \\ z'_{cm_i} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & & & & & & & & & 0 & 0 & \vdots \\ & & \ddots & & & & & & & & 0 & 0 & B_i^1 \\ & & & 0 & 1 & & & & & & 1 & 0 & B_i^2 \\ & & & -\omega_{0_i}^2 & -2\xi_i\omega_{0_i} & & & & & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ & & & & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & -2\omega_{0_i}^2 & -2\xi_i\omega_{0_i} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & & & & \\ \dots & 0 & -\omega_{0_i}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & & & & \\ \dots & \dots & C_i^1 & C_i^2 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ x_i^1 \\ x_i^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_{cm_i} \\ w'_{cm_i} \\ e \end{bmatrix} \quad (10.11)$$

Cette représentation fait donc intervenir une matrice de transmission directe, mais a l'avantage de rester dans la base bloc diagonale réelle choisie initialement. Ce n'est cependant pas la seule représentation possible.

Variations simultanées

Lorsqu'on fait varier simultanément la pulsation et l'amortissement d'un mode, non seulement il y a des termes en $\delta\omega^2$ mais aussi des termes croisés en $\delta\omega\delta\xi$. Ces derniers font apparaître un second terme non nul dans la transmission directe. La représentation n'est donc pas la simple concaténation des deux représentations précédentes. L'équation (10.12) donne le résultat avec la prise en compte des termes croisés, avec : $w_{cm_i} = \delta\xi_i z_{cm_i}$, $w'_{cm_i} = \delta\omega_i z'_{cm_i}$ et $w''_{cm_i} = \delta\omega_i z''_{cm_i}$. On remarquera que la dimension du vecteur paramétrique reste cependant la même (3 : 1 pour $\delta\xi$, 2 pour $\delta\omega$ en terme répété).

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_i^1 \\ \dot{x}_i^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{cm_i} \\ z'_{cm_i} \\ z''_{cm_i} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ & & \ddots & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & B_i^1 \\ & & & 0 & 1 & & & & & & 1 & 1 & 0 & B_i^2 \\ & & & -\omega_{0_i}^2 & -2\xi_i\omega_{0_i} & & & & & \ddots & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ & & & & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & 0 & -2\xi_{0_i}\omega_i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ \dots & 0 & -2\omega_{0_i}^2 & -2\xi_i\omega_{0_i} & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ \dots & 0 & -\omega_{0_i}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ \dots & \dots & C_i^1 & C_i^2 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ x_i^1 \\ x_i^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_{cm_i} \\ w'_{cm_i} \\ w''_{cm_i} \\ e \end{bmatrix} \quad (10.12)$$

10.3.3 Récapitulatif

La mise en forme du problème s'effectue donc de la façon suivante :

- parmi l'ensemble des gains qui définissent le correcteur, on en choisit une partie (ou l'intégralité) pour laquelle on veut étudier l'influence sur certaines caractéristiques modales. Les variations de ces gains sont généralement mises sous forme LFT pour faciliter la suite de l'analyse ;
- le système en boucle fermée augmenté du nombre d'entrées et de sortie égal au nombre de variables du correcteur est mis sous forme de représentation d'état $-A_{cl}$, B_{cl} , C_{cl} dans une base bloc diagonale réelle ;
- on augmente alors le système d'entrées et de sorties fictives qui permettent la modélisation des incertitudes sur les modes de la boucle fermée -pulsations, amortissement- ; cette formulation est exprimée par l'équation (10.12) ;
- on dispose finalement d'une formulation LFT de l'ensemble des paramètres incertains, faisant apparaître, d'une part les variations $\Delta\theta^k$ des variables du correcteur, d'autre part les variations $\Delta\theta^{cm}$ des caractéristiques modales de la boucle fermée supposées varier à cause de $\Delta\theta^k$. La figure 10.5 synthétise ces deux derniers points.

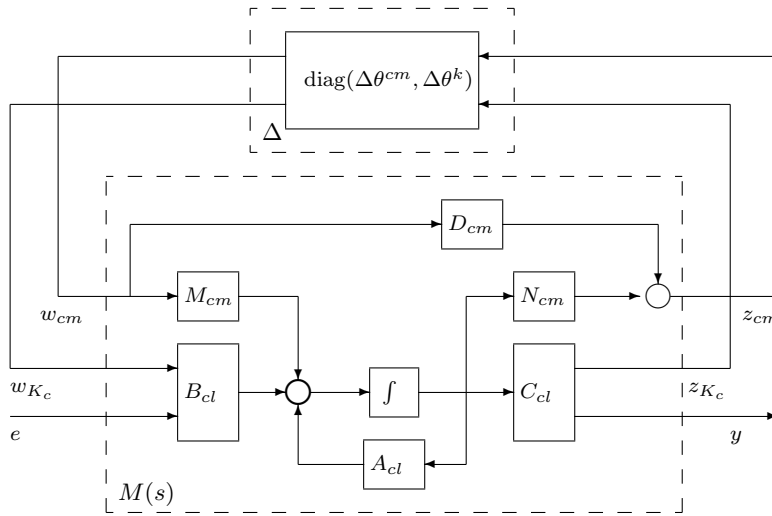


FIGURE 10.5: Forme $M - \Delta$ finale

Dans la forme $M - \Delta$ de la figure 10.5, certains des paramètres de $\Delta\theta^{cm}$ peuvent être sous forme répétée. Lors du calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$, on s'arrange pour lever cette répétition. De plus, le calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$ supporte des systèmes incertains non linéaires en $\Delta\theta$, et la représentation sous forme LFT n'est pas obligatoire. Par conséquent, la répétition d'éventuels paramètres de $\Delta\theta^{cm}$ n'apparaît pas dans $G_{\theta_0}^{-1}$.

10.4 Critères d'analyse

Le calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$ s'effectue selon les explications de la page 131. Ce n'est qu'une fois le calcul effectué que l'on distingue les deux types de variations paramétriques. Afin de déterminer des critères quantitatifs permettant de juger de la pertinence de tel ou tel ajustement, nous nous appuyerons sur les résultats donnés par un exemple trivial.

10.4.1 Conditionnement, direction d'insensibilité de $G_{\theta_0}^{-1}$

Le système utilisé est d'ordre 2, comprenant une unique paire de pôles complexes conjugués. Le correcteur initial est nul, et on se propose par un retour d'état statique de modifier l'amortissement du mode. La boucle fermée nominale et la boucle ouverte étant identiques, on déduit facilement la formulation LFT qui permet de prendre en compte la variation du correcteur. Cette représentation est illustrée par la figure 10.6.

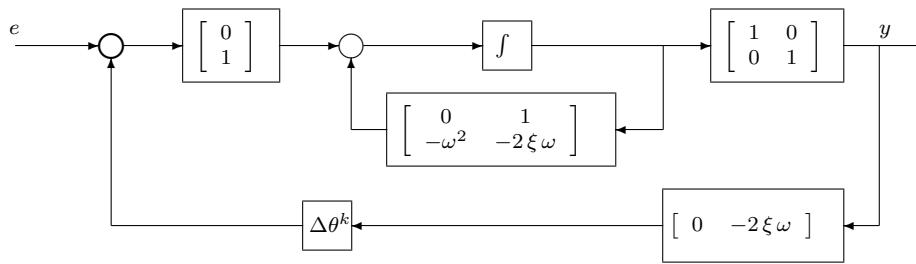


FIGURE 10.6: Ajustement de la variable “amortissement” sur un système du second ordre

Le calcul de la boucle fermée de ce système, lorsque $\Delta\theta^k$ est différent de 0, donne la matrice d'évolution suivante :

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi\omega(1 + \Delta\theta^k) \end{bmatrix} \quad (10.13)$$

On introduit alors les deux types de variations modales en $\delta\xi = \Delta\theta_1^{cm}$ et en $\delta\omega = \Delta\theta_2^{cm}$. On se placera ici dans le cadre de variations locales, si bien que $\delta\omega \ll 1$ et $\delta\xi \ll 1$, on pourra donc utiliser la représentation de l'équation (10.10) qui évite d'introduire une répétition du terme en $\Delta\theta_2^{cm}$. Le terme croisé en $\delta\xi \delta\omega$ n'est pas non plus pris en compte. Ce qui simplifie le schéma. La forme LFT finale est représentée par la figure 10.7.

On procède à présent au calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$, en prenant comme variables : $\omega = 3rd/s$ et $\xi = 0.5$. Il faut également choisir les matrices de covariance de bruits d'état Q , et de bruits de mesure R que l'on utilisera pour l'identification. Pour cela, on choisit deux matrices identité³.

Note : Il est important de ne pas perdre à l'esprit que le paramètre $\Delta\theta^k$ correspond à une variation physique et réelle du correcteur. Il sera matérialisé par un potentiomètre

3. on verra par la suite que ce choix n'est pas nécessairement le meilleur.

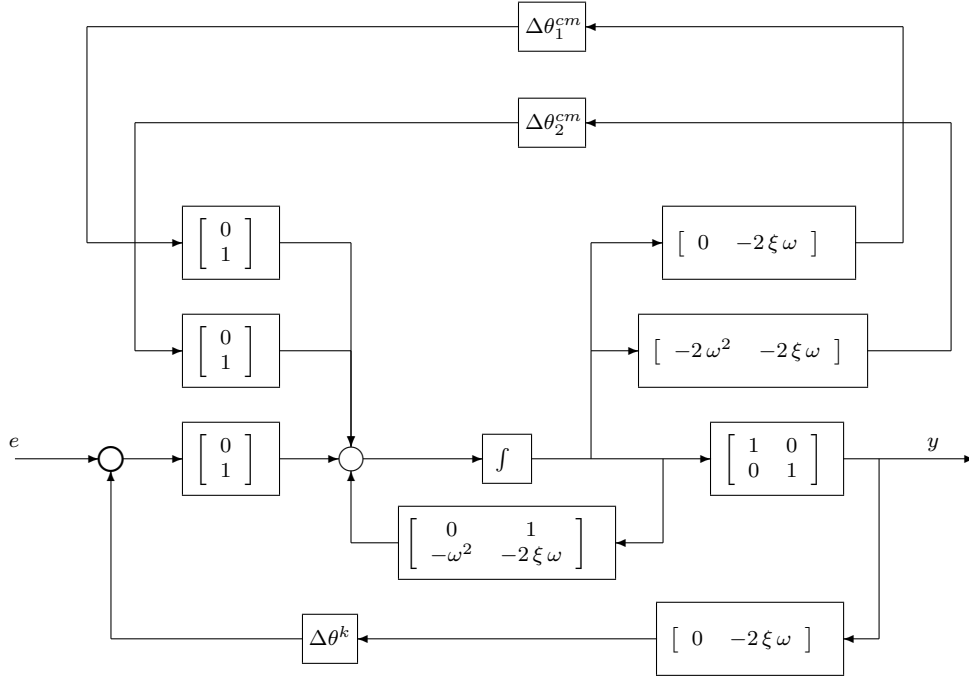


FIGURE 10.7: Forme LFT finale pour le système du second ordre

de réglage, alors que les variations $\Delta\theta^{cm}$ ne sont que des variations fictives uniquement destinées à permettre une évaluation de $\Delta\theta^k$.

La matrice $G_{\theta_0}^{-1}$ que l'on obtient est la suivante :

$$G_{\theta_0}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.36 & -0.24 & 0.36 \\ -0.24 & 0.58 & -0.24 \\ 0.36 & -0.24 & 0.36 \end{bmatrix} \quad (10.14)$$

On tire de cette matrice plusieurs conclusions :

— $G_{\theta_0}^{-1}$ comporte une direction d'insensibilité : il existe une valeur propre nulle. Le vecteur propre associé à cette direction est le suivant : $\Delta\theta_m = [-\frac{\sqrt{2}}{2} \ 0 \ \frac{\sqrt{2}}{2}]$, cela signifie que l'action du potentiomètre $\Delta\theta^k$ peut être parfaitement contrebalancée par un déplacement fictif de l'amortissement en sens inverse. Lorsqu'on supprime les variations fictives, en ne conservant que la variation en $\Delta\theta^k$, on obtient donc une variation d'amortissement sur le système considéré.

— Si on observe la matrice $G_{\theta_0}^{-1}([1, 3], [1, 3])$, en ne considérant que les variations $\delta\xi$ et $\Delta\theta^k$, on constate que la direction d'insensibilité est conservée, et possède le même vecteur propre. On peut donc dire que la présence d'une direction d'insensibilité, faisant intervenir une coordonnée en $\Delta\theta^k$ non nulle, donne une indication exacte de l'action du potentiomètre.

— Malheureusement lorsqu'on considère les autres directions, on a des difficultés

pour indiquer l'action du potentiomètre. En effet, la considération de la matrice $G_{\theta_0}^{-1}([2, 3], [2, 3])$, où seuls varient $\delta\omega$ et $\Delta\theta^k$, n'indique pas de direction d'insensibilité. On peut donc affirmer que le potentiomètre n'agit pas exclusivement sur $\delta\omega$; mais quelle est son action sur $\delta\omega$? Certes on sait que son action est nulle, mais la lecture sur la matrice n'est pas simple.

— Plus inquiétante est la considération de $G_{\theta_0}^{-1}([1, 2], [1, 2])$. Les termes croisés signifient qu'il existe une relation liant $\delta\omega$ à $\delta\xi$. Or ces deux variations, $\delta\omega$ et $\delta\xi$ devraient être indépendantes; c'est-à-dire, les vecteurs propres associés devraient être égaux à $[1 \ 0]$ et $[0 \ 1]$.

Le critère primordial d'analyse est donc la présence ou non d'une direction d'insensibilité, ou de quasi-insensibilité. Le conditionnement de $G_{\theta_0}^{-1}$ est donc une information utile, même si elle n'est pas très précise :

- plus le conditionnement de $G_{\theta_0}^{-1}$ est élevé, plus la direction de sensibilité minimale a du sens;
- moins il est élevé, moins les variables considérées dans $\Delta\theta^{cm}$ ont de rapport avec l'action de $\Delta\theta^k$.

10.4.2 Paramétrisation de l'identification

On remet ici en cause le choix de R et de Q qui a été fait précédemment. Plutôt que de prendre deux matrices identité, on choisit cette fois :

$$R = I \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On calcule alors $G_{\theta_0}^{-1}$ pour voir si on obtiendrait éventuellement des différences d'interprétation. Ce calcul nous donne la matrice suivante :

$$G_{\theta_0}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.33 & -0.26 & 0.33 \\ -0.26 & 0.62 & -0.26 \\ 0.33 & -0.26 & 0.33 \end{bmatrix} \quad (10.15)$$

On constate que la différence avec la matrice $G_{\theta_0}^{-1}$ obtenue en (10.14) n'est pas suffisante pour aboutir à une différence d'interprétation. On teste alors d'autres configurations de Q et R afin de se faire une idée plus précise. Avec :

$$R = I \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on obtient une matrice $G_{\theta_0}^{-1}$ qui a une allure totalement différente. Cependant, la direction de sensibilité nulle reste la même. Il y a toujours un couplage entre les variables $\delta\xi$ et $\delta\omega$, par conséquent, les interprétations restent délicates.

$$G_{\theta_0}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.012 & 0.013 & 0.012 \\ 0.013 & 0.026 & 0.013 \\ 0.012 & 0.013 & 0.012 \end{bmatrix} \quad (10.16)$$

Maintenant, si l'on additionne les deux matrices $G_{\theta_0}^{-1}$ obtenues en (10.15) et (10.16) avec des coefficients bien choisis, on obtient des termes de $G_{\theta_0}^{-1}$ de coordonnées (1,2) et (2,1) nuls. Malheureusement, la relation qui lie Q aux termes croisés en (1,2) et (2,1) n'est pas linéaire. Un algorithme d'optimisation classique, permet de trouver une matrice Q qui donne des termes croisés nuls. Cette matrice est la suivante :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8.375 \end{bmatrix}$$

On obtient alors la matrice $G_{\theta_0}^{-1}$ de l'équation (10.17). Les termes croisés sont effectivement nuls. Ceci signifie très clairement qu'une variation d'amortissement ne peut pas être compensée par une variation de pulsation du point de vue du processus d'identification. C'est justement ce que l'on souhaite pour quantifier plus précisément l'action d'un ajustement.

$$G_{\theta_0}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.56 & 0 & 0.56 \\ 0 & 0.66 & 0 \\ 0.56 & 0 & 0.56 \end{bmatrix} \quad (10.17)$$

On a vu page 132 que, dans le cas où A est une matrice bloc diagonale réelle, et où ΔA est aussi bloc diagonale réelle, alors $G_{\theta_0}^{-1}$ est également bloc diagonale et chacun des blocs peut être déterminé par les matrices A , R , Q , ΔA etc. qui lui correspondent. Par conséquent, quand on se trouve en présence d'un système complexe, on peut affirmer qu'au niveau des résultats de l'identification des différents paramètres $\delta\omega$ et $\delta\xi$, il n'y a pas d'interaction entre les différents modes. Il existe cependant une interaction au sein même d'un mode complexe conjugué entre $\delta\omega$ et $\delta\xi$. Il serait donc intéressant de trouver pour chaque sous-bloc d'ordre 2, un ensemble de paramètres Q et R qui permettent d'obtenir pour le bloc correspondant de $G_{\theta_0}^{-1}$ une matrice diagonale.

Nous venons de voir que les équations qui lient Q et R à $G_{\theta_0}^{-1}$ ne sont pas linéaires et la solution analytique n'a pas été trouvée. Par conséquent, il a été utilisé un algorithme d'optimisation. Malheureusement, l'algorithme ne converge pas toujours, il semble donc qu'il faille trouver une autre solution que celle basée sur le réglage de R et Q . Pour cette raison, nous allons nous intéresser à d'autres critères, plus ou moins explicatifs des phénomènes observés. Pour juger au mieux la pertinence d'un ajustement, il nous faut obtenir un critère quantitatif qui évite des couplages entre les paramètres modaux pour la définition des directions d'insensibilité.

10.4.3 Critère quantitatif

Supposons une direction donnée, $\Delta\theta$, dans l'espace paramétrique complet, alors la quantité $\Delta\theta^T G_{\theta_0}^{-1} \Delta\theta = \frac{1}{\sigma}$ définit la qualité de l'identification bayésienne le long de cette direction, et par conséquent la sensibilité du système lorsqu'on se déplace le long de cette direction. En effet, la loi de probabilité correspondante est donnée par la relation (10.18).

$$p(\theta_0 + \gamma \Delta\theta | y^k) = \Lambda' \exp\left[-\alpha \frac{\gamma^2}{\sigma}\right] \quad (10.18)$$

Cette grandeur, $\Delta\theta^T G_{\theta_0}^{-1} \Delta\theta = \frac{1}{\sigma}$ constitue donc un critère. Afin de pouvoir utiliser cette quantité, on sépare dans le critère les différentes parties, issues soit des paramètres du correcteur, soit des caractéristiques modales fictives du système. Ce qui donne la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} &= \begin{bmatrix} \Delta\theta^{cmT} & \Delta\theta^{kT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12}^T & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta^{cm} \\ \Delta\theta^k \end{bmatrix} \\ &= \Delta\theta^{cmT} G_{11} \Delta\theta^{cm} + 2 \Delta\theta^{cmT} G_{12} \Delta\theta^k + \Delta\theta^{kT} G_{22} \Delta\theta^k \end{aligned} \quad (10.19)$$

Pour connaître les différents effets d'un ajustement donné suivant une direction $\Delta\theta^k$, on introduit les paramètres modaux fictifs qui sont sensés varier grâce à cet ajustement, et on compile la matrice $G_{\theta_0}^{-1}$. On cherche ensuite à minimiser le critère (10.19), avec le vecteur $\Delta\theta^k$ fixé et égal à la direction donnée pour l'ajustement, en fonction de $\Delta\theta^{cm}$. Le vecteur $\Delta\theta^{cm*}$ correspond alors à la valeur optimale de $\Delta\theta^{cm}$ pour laquelle le critère $\frac{1}{\sigma}$ est minimal.

En dérivant l'équation (10.19) par rapport à $\Delta\theta^{cm}$, et en se plaçant à l'extremum du critère -extremum qui correspond à un minimum puisque la matrice $G_{\theta_0}^{-1}$ est définie positive-, on obtient la valeur de $\Delta\theta^{cm*}$, ainsi que la valeur du critère correspondant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \frac{1}{\sigma}}{\partial \Delta\theta^{cm}} &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Delta\theta^{cm*} &= -G_{11}^{-1} G_{12} \Delta\theta^k \end{aligned} \quad (10.20)$$

$$\frac{1}{\sigma^*} = \Delta\theta^{kT} [G_{22} - G_{12}^T G_{11}^{-1} G_{12}] \Delta\theta^k$$

Ce résultat amène deux constats :

- l'effet d'une variation de $\Delta\theta^{cm*}$ et l'action de $\Delta\theta^k$ se compensent mutuellement. Dès lors, une action sur $\Delta\theta^k$ provoque une modification des pôles semblable à celle que provoquerait une variation de $\Delta\theta^{cm}$ égale à $-\Delta\theta^{cm*}$.
- la comparaison du critère initial : $\frac{1}{\sigma^{init}}$ (pour $\Delta\theta^{cm} = 0$) et du critère à l'optimal : $\frac{1}{\sigma^*}$ donne une indication de fiabilité sur la direction $\Delta\theta^{cm*}$. Pour mesurer cette notion de fiabilité, on utilise la grandeur suivante T_{cf} , nommée taux de confiance :

$$T_{cf} = 1 - \frac{\sigma^{init}}{\sigma^*} \quad (10.21)$$

Lorsqu'il est égal à 1, cela signifie que le critère final est nul, et que la direction $\Delta\theta$ est une direction de sensibilité nulle. Plus ce taux de confiance est proche de 0, et moins le vecteur $\Delta\theta^{cm*}$ n'aura d'action sur le critère.

Exemple de la page 149

Pour illustrer ce fait, on considère de nouveau la matrice $G_{\theta_0}^{-1}$ de la page 149 (10.14). Les deux matrices $G_{\theta_0}^{-1}([2, 3], [2, 3])$ et $G_{\theta_0}^{-1}([1, 3], [1, 3])$ qui en sont issues conduisent à deux taux de confiance très différents :

— dans le premier cas -le correcteur agit sur l'amortissement du mode et le seul paramètre fictif utilisé est la pulsation du mode- on obtient $\Delta\theta^{cm*} = \delta\omega^* = 0.41 \Delta\theta^k$ avec un taux de confiance $T_{cf} = 0.27$. Ce taux de confiance indique que le paramètre $\Delta\theta^{cm}$ choisi, $\delta\omega$ en l'occurrence, est très peu représentatif de l'action de $\Delta\theta^k$, le vecteur de compensation $\Delta\theta^{cm*}$ n'est donc pas fiable. Ce qui se passe est représenté schématiquement sur la figure 10.8 en (a). Cette figure illustre où le pôle du système se déplace lorsqu'on applique successivement les ajustements $\Delta\theta^k$ et $\Delta\theta^{cm*}$; on constate que le pôle est loin de sa position initiale.

— dans le second cas, on obtient $\Delta\theta^{cm*} = \delta\xi = -\Delta\theta^k$ avec un taux de confiance $T_{cf} = 1$. Le paramètre fictif, $\delta\xi$, que l'on avait décidé d'introduire pour le calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$ est donc parfaitement représentatif de l'action de $\Delta\theta^k$. De plus lorsqu'on donne à $\Delta\theta^k$ une valeur de $x\%$, on sait que l'amortissement du pôle varie lui aussi de $x\%$.⁴ La figure 10.8 (b) illustre le fait que $\Delta\theta^{cm*}$ ramène le système dans sa position initiale.

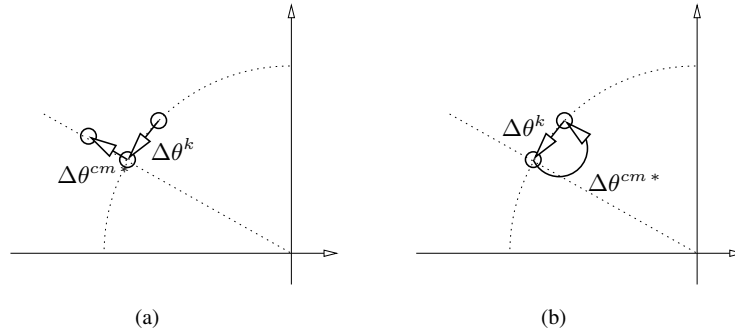


FIGURE 10.8: (a) Mauvais taux de confiance; (b) Taux de confiance unitaire

Si on considère maintenant $G_{\theta_0}^{-1}$ dans son ensemble, on trouve $T_{cf} = 1$ avec $\delta\omega^* = 0$ et $\delta\xi^* = -\Delta\theta^k$. On peut conclure, dans ce cas, qu'une variation de $\Delta\theta^k$ fait varier l'amortissement du pôle de la même quantité, et uniquement l'amortissement.

Afin de confirmer les conclusions précédentes, on considère le même système que celui de la figure 10.7 mais où l'ajustement du correcteur n'agit pas uniquement sur l'amortissement du pôle. On peut lire sur le schéma LFT correspondant, figure 10.9, que le nouveau potentiomètre $\Delta\theta^k$ agit à 0.75% sur l'amortissement du système et à 0.25% sur sa pulsation. Il serait donc logique que l'on retrouve un taux de confiance plus élevé en considérant uniquement $\delta\xi$ qu'en considérant uniquement $\delta\omega$. Les résultats confirment cela dans le tableau 10.1.

Note: S'il existe des paramètres modaux qui sont couplés au niveau du calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$, alors le taux de confiance dépend de la paramétrisation en Q et R utilisée. Ce taux n'est donc pas intrinsèque au système. Il importe donc, lorsqu'on regarde l'action

4. Il est clair que si on avait obtenu $\Delta\theta^{cm*} = -0.5 \Delta\theta^k$ alors une variation de $x\%$ sur $\Delta\theta^k$ aboutirait à une variation de $0.5x\%$ de l'amortissement. Par la suite, on considèrera des variations de $\Delta\theta^k$ unitaires.

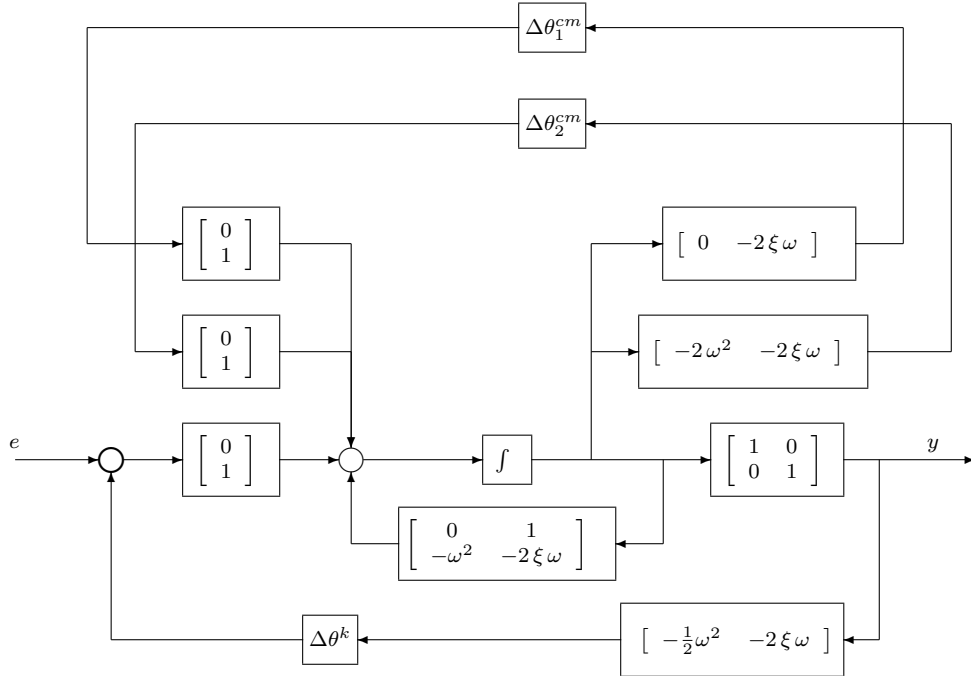


FIGURE 10.9: Ajustement agissant à la fois sur la pulsation et l'amortissement du mode

$\Delta\theta = \begin{bmatrix} \delta\xi \\ \Delta\theta^k \end{bmatrix}$	$\Delta\theta = \begin{bmatrix} \delta\omega \\ \Delta\theta^k \end{bmatrix}$	$\Delta\theta = \begin{bmatrix} \delta\xi \\ \Delta\omega \\ \Delta\theta^k \end{bmatrix}$
$G_{\theta_0}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.36 & 0.21 \\ 0.21 & 0.15 \end{bmatrix}$	$G_{\theta_0}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.58 & -0.03 \\ -0.03 & 0.15 \end{bmatrix}$	$G_{\theta_0}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.36 & -0.24 & 0.21 \\ -0.24 & 0.58 & -0.03 \\ 0.21 & -0.03 & 0.15 \end{bmatrix}$
$T_{cf} = 0.82$	$T_{cf} = 0.02$	$T_{cf} = 1$
$\Delta\theta^{cm*} = -0.59$ ($\Delta\theta^k = 1$)	$\Delta\theta^{cm*} = 0.06$ ($\Delta\theta^k = 1$)	$\Delta\theta^{cm*} = \begin{bmatrix} -0.75 \\ -0.25 \end{bmatrix}$ ($\Delta\theta^k = 1$)

TABLE 10.1: Résultats d'analyse pour le système de la figure 10.9

de $\Delta\theta^k$ sur un mode particulier, de considérer à la fois $\delta\xi$ et $\delta\omega$ -qui sont couplés- pour minimiser l'influence de la paramétrisation.

Les problèmes de couplages entre les différentes variables modales fictives utilisées pour l'analyse apparaissent également lorsque l'ajustement provoque un changement de base.

Modification de la pulsation d'un mode avec changement de base

Certains ajustements modifient la structure de la matrice A_0 . L'exemple que l'on se propose de traiter est un ajustement qui modifie la pulsation du mode complexe du système, mais qui ne conserve pas la structure bloc diagonale réelle considérée jusqu'à présent.

Le schéma de la figure 10.10 montre comment la correction s'effectue sur le système⁵.

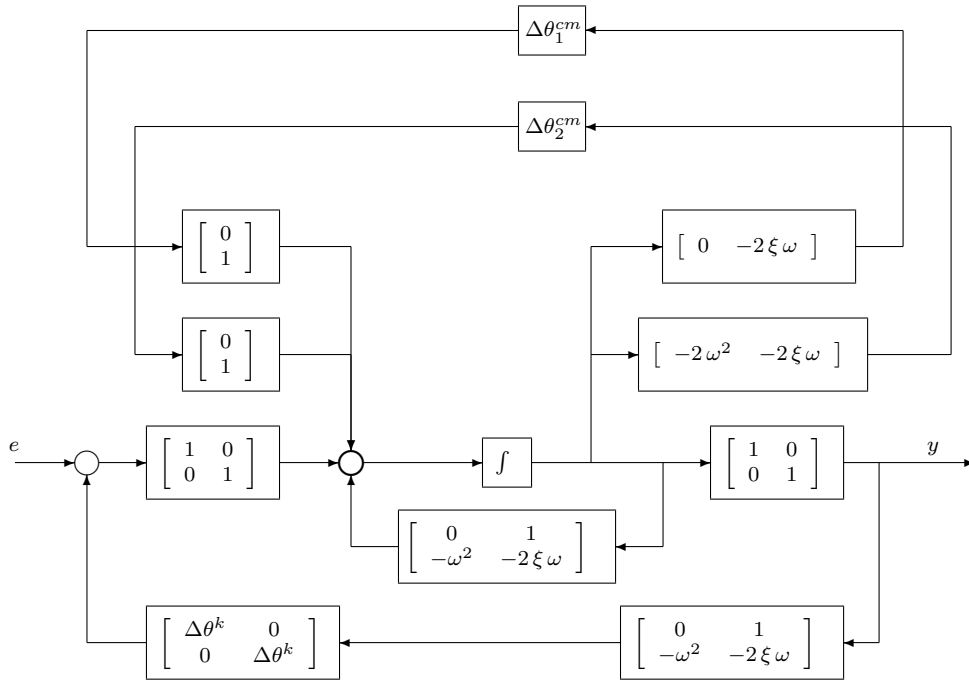


FIGURE 10.10: Modification de pulsation sans conservation de la structure de A

Le calcul de la boucle fermée de ce système conduit à la matrice A_{cl} suivante :

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 1 + \Delta\theta^k \\ -\omega^2(1 + \Delta\theta^k) & -2\xi\omega(1 + \Delta\theta^k) \end{bmatrix} \quad (10.22)$$

Si on calcule l'équation caractéristique de cette matrice, on s'aperçoit que $\Delta\theta^k = \delta\omega$. Cependant, la base dans laquelle on se trouve n'est plus la même.

5. Le paramètre $\Delta\theta^k$ est répété sur la figure 10.10 mais reste scalaire.

L'analyse qui suit donne les résultats du tableau 10.2. Le faible taux de confiance, malgré la prise en compte simultanée de $\delta\omega$ et $\delta\xi$, indique qu'il manque des variables dans cette analyse. Le vecteur $\Delta\theta^{cm*}$ obtenu est décevant par rapport au résultat escompté ; il est peu représentatif de ce qu'il se passe en réalité.

$\Delta\theta = \begin{bmatrix} \delta\xi \\ \delta\omega \\ \Delta\theta^k \end{bmatrix}$	$T_{cf} = 0.59$	$\Delta\theta^{cm*} = \begin{bmatrix} -0.98 \\ -0.99 \end{bmatrix}$
--	-----------------	---

TABLE 10.2: Résultats d'analyse pour le système de la figure 10.10

Le fait d'avoir un tel résultat s'explique justement à cause de cette différence de base. En effet, les filtres de KALMAN utilisés pour l'identification bayésienne sont construits sur le système suivant -les termes d'ordre 2 et plus ont été simplifiés- :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 + \Delta\theta^k \\ -\omega^2(1 + \Delta\theta^k + 2\delta\omega) & -2\xi\omega(1 + \Delta\theta^k + \delta\omega + \delta\xi) \end{bmatrix} x + w \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + v \end{cases} \quad (10.23)$$

On constate que pour $\Delta\theta^k \neq 0$, il n'est pas possible de trouver $\delta\omega$ et $\delta\xi$ qui ramènent le système dans sa position initiale. Lors d'un changement de base, la matrice d'observation est aussi modifiée, il convient donc d'introduire ces variables supplémentaires.

Une analyse est donc menée avec, non seulement les variables $\delta\omega$ et $\delta\xi$, mais également avec les coefficients de la matrice C . Certains coefficients nominaux de la matrice C pouvant être nuls -ce qui est le cas-, il sera appliqué sur cette matrice des variations absolues et non relatives :

$$C(\theta_0 + \Delta\theta) = \begin{bmatrix} 1 + \delta C_{11} & \delta C_{12} \\ \delta C_{21} & 1 + \delta C_{22} \end{bmatrix} \quad (10.24)$$

Le résultat de l'analyse, donné sur le tableau 10.3, est à présent nettement meilleur. On retrouve un taux de confiance très proche de 1, et $\Delta\theta^{cm*}$ indique bien que l'action principale de $\Delta\theta^k$ porte sur $\delta\omega$.

Si le taux de confiance n'est pas exactement égal à 1, bien que toutes les variables du système (10.23) soient considérées, c'est dû à la modification de l'excitation du bruit w sur le système. En effet, comme $\Delta\theta^k$ modifie légèrement la configuration initiale de la matrice A_{cl} , les modes ne sont pas excités de la même façon en présence et en l'absence de perturbation $\Delta\theta^k$. Pour pallier ce problème, deux solutions sont possibles :

- la première consiste à considérer une matrice B , qui constituerait la matrice d'entrée du bruit w , dépendant de θ . C'est-à-dire, qu'on augmente le nombre de variables dans $\Delta\theta^{cm}$ de 4 : δB_{11} , δB_{12} , δB_{21} , δB_{22} , et qu'on calcule $G_{\theta_0}^{-1}$ avec $B = B(\theta)$. Cette solution, qui augmente le nombre de variables, augmente le temps de calcul : on lui préférera la seconde solution.

10.4. CRITÈRES D'ANALYSE

$\Delta\theta = \begin{bmatrix} \delta\xi \\ \delta\omega \\ \delta C_{11} \\ \delta C_{12} \\ \delta C_{21} \\ \delta C_{22} \\ \Delta\theta^k \end{bmatrix}$	$T_{cf} = 0.99$	$\Delta\theta^{cm*} = \begin{bmatrix} 0.03 \\ -1.05 \\ 0.03 \\ 0.06 \\ -0.62 \\ 0.77 \end{bmatrix}$
--	-----------------	---

TABLE 10.3: Résultats d'analyse pour le système de la figure 10.10, avec prise en compte des coefficients de la matrice d'observation

— la seconde solution consiste à se replacer dans la base compagne après avoir construit $A_{cl}(\theta_0 + \Delta\theta)$ et $C(\theta_0 + \Delta\theta)$, et ce **avant** d'appliquer le bruit sur le système (10.23). De cette façon, le bruit w agit toujours de la même façon. Cette dernière solution appliquée sur ce système conduit à un taux de confiance unitaire. Le vecteur $\Delta\theta^{cm*}$ résultant -cf. tableau 10.4- montre bien la véritable action de $\Delta\theta^k$.

$\Delta\theta = \begin{bmatrix} \delta\xi \\ \delta\omega \\ \delta C_{11} \\ \delta C_{12} \\ \delta C_{21} \\ \delta C_{22} \\ \Delta\theta^k \end{bmatrix}$	$T_{cf} = 1$	$\Delta\theta^{cm*} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
--	--------------	---

TABLE 10.4: Résultats d'analyse pour le système de la figure 10.10, avec prise en compte des coefficients de la matrice d'observation et changement de base

On peut vérifier l'exactitude de ce résultat en appliquant la variation $\Delta\theta^*$ sur le système, puis en effectuant le changement de base adéquat, *via* la matrice M , ce qui conduit au système initial :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 + \Delta\theta^k \\ -\omega^2(1 - \Delta\theta^k) & -2\xi\omega \end{bmatrix} x \\ y = \begin{bmatrix} 1 - \Delta\theta^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (10.25)$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 + \Delta\theta^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note : On pourra remarquer que le changement de base n'est pas unique. En parti-

culier, la matrice :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \Delta\theta^k \end{bmatrix}$$

est aussi une matrice qui transforme A_{cl} sous sa forme compagne. Si lors du calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$, on “force” le changement de base sous cette forme plutôt que sous la forme exprimée en (10.25), alors on se retrouvera avec le vecteur :

$$\Delta\theta^{cm*T} = [0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

qui lui correspond.

Introduction d'une matrice d'observation fictive

Comme on vient de le voir précédemment, on peut s'affranchir d'utiliser une matrice B qui dépend de θ pour le calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$. Or il en est de même pour la matrice C . Si l'on ne désire pas étudier l'influence de l'ajustement sur les paramètres de la matrice C - quand on se replace dans la base compagne initiale-, alors on peut choisir une matrice C fictive, indépendante de θ , qui est utilisée uniquement pour le processus d'identification. Ce faisant, on n'étudie que l'influence de l'ajustement sur la position de pôles $-ie$ sur la matrice d'évolution-.

Le calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$ suit alors les étapes suivantes :

- on applique au système la variation $\Delta\theta^k$;
- on se place dans la base bloc diagonale compagne ;
- on applique au système la variation $\Delta\theta^{cm}$, qui ne comprend que des termes en $\delta\omega$ ou en $\delta\xi$;
- on ne conserve du système que la matrice A_{cl} , on remplace la matrice C par une matrice identité. Le fait de choisir une matrice identité permet à la fois de garantir que tous les modes sont observables⁶ et de garantir que G_{11} soit diagonale par blocs -deux modes distincts seront donc indépendants d'un point de vue de l'identification- ;
- on calcule le coefficient de $G_{\theta_0}^{-1}$ correspondant.

Lorsque l'action de $\Delta\theta^k$ a été mise sous forme LFT comme sur la figure 10.4, p. 143, les étapes 2 et 3 peuvent être interverties.

L'application de cette procédure au système considéré précédemment (figure 10.10, p. 155), conduit à la matrice $G_{\theta_0}^{-1}$ suivante :

$$G_{\theta_0}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.36 & -0.24 & -0.24 \\ -0.24 & 0.58 & 0.58 \\ -0.24 & 0.58 & 0.58 \end{bmatrix} \quad (10.26)$$

Ceci donne les résultats d'analyse du tableau 10.5. On constate que le taux de confiance est de 1, ce qui est tout à fait normal, puisque seules les variations au sein de la matrice

6. Le fait qu'un mode soit inobservable rend les paramètres correspondants non-identifiables.

10.5. CONCLUSION

A_{cl} ont été considérées et que tous les paramètres possibles sont présents dans $\Delta\theta^{cm}$ ($\delta\omega$ et $\delta\xi$). De plus la valeur de $\Delta\theta^{cm*}$ montre bien que l'action de $\Delta\theta^k$ ne modifie que la pulsation du système.

$\Delta\theta = \begin{bmatrix} \delta\xi \\ \delta\omega \\ \Delta\theta^k \end{bmatrix}$	$T_{cf} = 1$	$\Delta\theta^{cm*} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
--	--------------	--

TABLE 10.5: Résultats d'analyse pour le système de la figure 10.10, avec changement de base et remplacement de la matrice d'observation

10.5 Conclusion

La quantification de la qualité de l'identification bayésienne, *via* la matrice $G_{\theta_0}^{-1}$, a permis d'établir un processus pour analyser la pertinence d'un ajustement de loi de commande donné. Les variations paramétriques $\Delta\theta$ ont été séparées en deux parties :

- d'une part les variations des variables du correcteur correspondant à l'ajustement de la loi de commande ;
- d'autre part les variations des paramètres modaux du système sensés évoluer lors de l'ajustement, ainsi que de ceux présentant un couplage avec les précédents.

Un critère a ensuite été construit, qui permet de juger l'efficacité de l'ajustement. La variable $\Delta\theta^{cm*}$ issue de l'optimisation de ce critère permet de dire quelle est l'action du réglage sur la dynamique de la boucle fermée, et la variable T_{cf} indique quant à elle la confiance que l'on peut avoir dans $\Delta\theta^{cm*}$.

Chapitre 11

Synthèse de directions paramétriques

11.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, il était question de quantifier la pertinence d'une direction paramétrique donnée, dans l'espace des variables du correcteur, vis-à-vis d'une action déterminée, ou bien, d'évaluer l'action de cette direction. Ici, on s'intéresse au problème inverse : on dispose d'un objectif d'ajustement, et on se demande quelle est la direction paramétrique optimale -toujours dans l'espace des variables du correcteur, $\Delta\theta^k$ - qui accomplit au mieux cette tâche. On regroupe donc dans le vecteur paramétrique $\Delta\theta^k$ un ensemble "bien choisi" des variables du correcteur.

Nous verrons que l'ensemble des variables que nous choisissons, initialement, dépend de la structure du correcteur et de l'ajustement désiré. Une fois cet ensemble déterminé, on minimise un critère pour obtenir $\Delta\theta^{k*}$. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, le principal objectif réalisable par cette technique est le placement de pôles. Le lecteur aura pu s'apercevoir qu'à aucun moment il n'était fait allusion à l'ordre du système ou à l'ordre du correcteur. Si bien qu'un des avantages de la technique est le fait de pouvoir travailler directement avec un correcteur d'ordre (très) inférieur à l'ordre du système.

11.2 Directions optimales

Lors de la phase d'analyse explicitée dans le chapitre 10, le vecteur paramétrique $\Delta\theta$ était composé de deux parties distinctes :

- $\Delta\theta^k$, scalaire dans le cas de l'analyse, constituait une grandeur de réglage du correcteur ;
- $\Delta\theta^{em}$ regroupait les variations des paramètres modaux, sensés être modifiés par l'action $\Delta\theta^k$. Ce vecteur constituait alors le vecteur des inconnues.

Lors de la phase de synthèse, $\Delta\theta^k$ est maintenant un vecteur, et c'est lui l'inconnu. L'objectif est donc de définir un critère, dont la variable d'optimisation est $\Delta\theta^k$, et qui

soit représentatif de la distance à l'objectif d'ajustement qu'on s'est fixé.

11.2.1 Critère primaire

Le critère considéré est le même que pour l'analyse d'un ajustement particulier :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} &= \begin{bmatrix} \Delta\theta^{cmT} & \Delta\theta^{kT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12}^T & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta^{cm} \\ \Delta\theta^k \end{bmatrix} \\ &= \Delta\theta^{cmT} G_{11} \Delta\theta^{cm} + 2 \Delta\theta^{cmT} G_{12} \Delta\theta^k + \Delta\theta^{kT} G_{22} \Delta\theta^k \end{aligned} \quad (11.1)$$

Par rapport à l'équation obtenue pour l'analyse d'une direction d'ajustement, la seule différence est la dimension des trois matrices G_{11} , G_{12} et G_{22} .

En particulier, G_{22} était un scalaire dans le chapitre 10. Elle est, à présent, une matrice qui peut être de très grande dimension. Par exemple, si on veut modifier un retour d'état qui comporte 10 états et 4 entrées, cela conduit à la modification d'une matrice K_c de 40 gains ; G_{22} est alors une matrice de taille 40×40 . Quant à la taille de G_{11} , ce sera la plupart du temps un scalaire.

L'objectif consiste donc à minimiser le critère $\frac{1}{\sigma}$, non plus avec $\Delta\theta^k$ fixé, mais avec $\Delta\theta^{cm}$ fixé. Ce qui donne le résultat suivant :

$$\Delta\theta^{k*} = -G_{22}^{-1} G_{12}^T \Delta\theta^{cm} \quad (11.2)$$

Observons les résultats d'une synthèse sur un exemple simple analogue à celui de la page 149.

Exemple illustratif

On se propose de modifier la pulsation du modèle du second ordre de la figure 11.1. Or, dans ce cas précis, la structure du correcteur nous est imposée, et on dispose de deux gains $\Delta\theta_1^k$ et $\Delta\theta_2^k$ pour mener à bien l'ajustement. Puisqu'on ne s'intéresse qu'à la pulsation du système, la variable $\Delta\theta^{cm} = \delta\omega$ a été introduite sous forme LFT (voir section 10.3 du chapitre 10).

Si on observe les résultats de la synthèse, cf. tableau 11.1, on constate que le taux de confiance est unitaire, et que le vecteur $\Delta\theta^{k*}$ correspond au vecteur auquel on s'attendait¹. Dans ce cas, on peut donc dire que le résultat de la synthèse est parfait. Ceci dit, il faut souligner que la solution du problème existait dans ce cas-là. Parfois, il n'existera pas de direction paramétrique au niveau du correcteur qui permette une compensation parfaite de l'objectif.

1. On peut facilement le vérifier par le calcul.

11.2. DIRECTIONS OPTIMALES

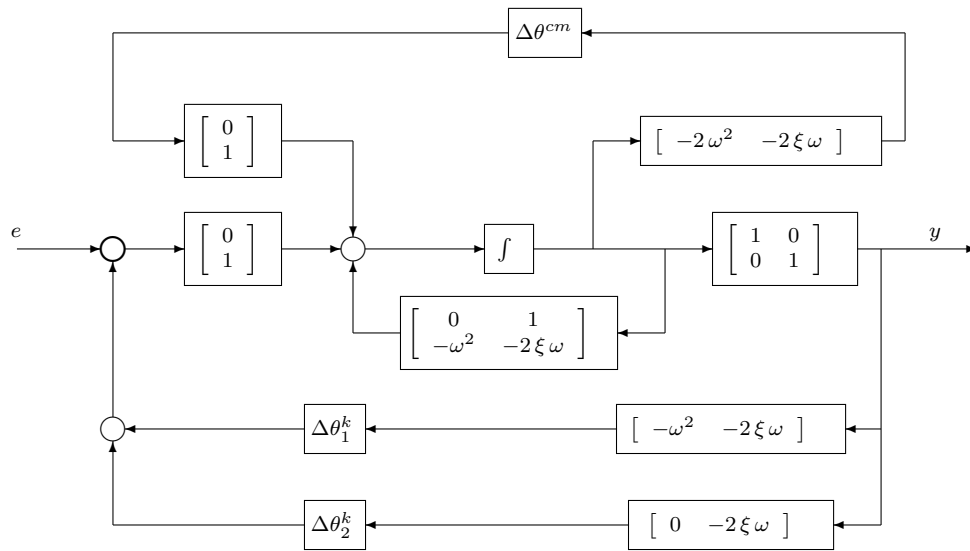


FIGURE 11.1: LFT pour la synthèse d'un ajustement de la pulsation d'un mode

$\Delta\theta = \begin{bmatrix} \delta\omega \\ \Delta\theta_1^k \\ \Delta\theta_2^k \end{bmatrix}$	$T_{cf} = 1$	$\Delta\theta^{k*} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$
---	--------------	---

TABLE 11.1: Résultats de synthèse pour le système de la figure 11.1

Exemple à 4 pôles

Afin de mieux comprendre ce qu'il se passe quand il n'existe pas d'ajustement parfait, on considère un système composé de 2 paires de pôles complexes conjugués. La première paire a pour pulsation $\omega_1 = 3rd/s$, et pour amortissement $\xi_1 = 0.5$; la seconde paire a pour pulsation $\omega_2 = 4rd/s$, et pour amortissement $\xi_2 = 0.75$. Les paramètres à identifier sont les suivants :

- la variation de l'amortissement du premier mode $\delta\xi_1$,
- et la variation de deux gains du correcteur $\Delta\theta_1^k$ et $\Delta\theta_2^k$.

Le schéma du système n'est pas représenté, mais les équations qui le décrivent le système sous sa forme LFT sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -16 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \\ \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\xi_1 & 0 & & \\ 0 & \Delta\theta_1^k & 0 & \\ 0 & 0 & \Delta\theta_2^k & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (11.3)$$

Les deux potentiomètres disponibles ($\Delta\theta_1^k, \Delta\theta_2^k$) agissent sur les deux pôles simultanément. Un calcul simple permet de le vérifier. Par exemple, pour $\Delta\theta_1^k \neq 0$ et $\Delta\theta_2^k = \delta\xi_1 = 0$, la variation de la matrice A_{cl} de la boucle fermée du système s'écrit :

$$\Delta A_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta\theta_1^k$$

De plus, on pourrait vérifier que si $\delta\xi_1 \neq 0$, il est impossible de trouver $\Delta\theta_1^k$ et $\Delta\theta_2^k$ qui permettent d'annuler de façon exacte les variations de la matrice A du système dues à $\delta\xi_1$.

Si on veut que l'ajustement apporte une modification de l'amortissement du premier mode flexible égal à $\delta\xi_1 = 1$, le processus de synthèse donne le résultat résumé dans le tableau 11.2.

On peut constater que le taux de confiance n'est pas unitaire. Le critère $\frac{1}{\sigma}$ n'est donc pas nul ; il n'existe pas de direction d'insensibilité (ce qui est cohérent avec l'affirmation ci-dessus, qui précise que dans le cas particulier où $\delta\xi_1 \neq 0$, on ne peut pas compenser intégralement son effet). Cependant, le taux de confiance est suffisamment élevé pour que la direction de sensibilité minimale ait un sens. On peut donc dire que cette modification du correcteur $\Delta\theta^{k*}$ permet de modifier l'amortissement du premier mode. Mais

2. Pour trouver la direction optimale $\Delta\theta^{k*}$, on considère une variation $\delta\xi_1$ normalisée, en pratique cette variation est trop grande, et on est amené à appliquer un coefficient.

11.2. DIRECTIONS OPTIMALES

$\Delta\theta = \begin{bmatrix} \delta\xi_1 \\ \Delta\theta_1^k \\ \Delta\theta_2^k \end{bmatrix}$	$T_{cf} = 0.95$	$\Delta\theta^{k*} = \begin{bmatrix} -0.93 \\ -3.28 \end{bmatrix}$
--	-----------------	--

TABLE 11.2: Résultats de synthèse pour le système du quatrième ordre (11.3)

on ne peut pas préciser comment cette variation agit sur les autres caractéristiques du système. La seule chose qu'on puisse dire c'est que cette action n'est pas nulle puisque le critère n'est pas égal à 0 à l'optimum.

Dans cet exemple, l'action de $-\Delta\theta^{k*}$ est représenté par l'équation (11.4) qui donne la matrice A_{cl} de la boucle fermée du système pour une variation de $-0.1 \Delta\theta^{k*}$.

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -9.24 & -3.34 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -14.52 & -5.54 \end{bmatrix} \quad (11.4)$$

On constate bien une variation de l'amortissement du premier pôle, mais également de faibles variations sur ω_1 , ω_2 , et ξ_2 . Malheureusement, ces variations autres que sur ξ_1 ont une influence dans le critère qui n'est pas contrôlable. On ne sait pas si une modification de ξ_2 a autant d'influence sur le critère qu'une modification de ω_2 etc.

De plus, si on souhaite modifier ξ_1 en modifiant le moins possible ξ_2 mais en laissant une marge de manoeuvre sur ω_1 et ω_2 , le critère présenté ici ne permet pas de le faire. On peut ajouter qu'un mode faiblement observable (la mesure considérée est celle utilisée pour le calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$) a une influence, sur le critère considéré ici, plus faible que les autres modes.

11.2.2 Critère avec pondérations

Pour pallier les problèmes soulevés ci-dessus, on adopte un critère différent, basé sur une analyse des différentes directions. Ce critère nécessite de prendre en compte un plus grand nombre de variables, mais permet de pondérer les erreurs commises sur chaque déplacement. L'idée est d'utiliser un critère direct d'erreur quadratique entre la position modale que l'on désire $\Delta\theta^{cm\ des}$, et la position modale réelle. Supposons que l'on connaisse effectivement cette position. On dispose alors d'un vecteur $\Delta\theta^{cm\ re}$ et on peut évaluer la qualité de la synthèse par le critère de l'équation (11.5).

$$\text{Crit} = (\Delta\theta^{cm\ re} - \Delta\theta^{cm\ des})^T P (\Delta\theta^{cm\ re} - \Delta\theta^{cm\ des}) \quad (11.5)$$

Dans ce critère, la matrice P représente une pondération sur les erreurs commises ($\Delta\theta^{cm\ re} - \Delta\theta^{cm\ des}$ constitue bien une erreur³). Cette pondération sera le plus souvent

3. L'exposant ^{re} est une abréviation de "réel", et ^{des} de "désiré".

une matrice diagonale. S'il existe deux paramètres dans $\Delta\theta^{cm}$, le critère peut s'écrire de la sorte :

$$\text{Crit} = p_1 (\Delta\theta_1^{cm\text{re}} - \Delta\theta_1^{cm\text{des}})^2 + p_2 (\Delta\theta_2^{cm\text{re}} - \Delta\theta_2^{cm\text{des}})^2 \quad (11.6)$$

Par conséquent, si on désire qu'une erreur sur la première composante de $\Delta\theta^{cm}$ ait le même impact sur le critère que le double de cette même erreur, mais sur la seconde composante de $\Delta\theta^{cm}$, alors on attribuera à p_1 la valeur 1 et à p_2 la valeur $(\frac{1}{2})^2$. Les pondérations sur chaque coordonnée doivent donc être élevées au carré dans P .

Le problème est donc à présent de pouvoir évaluer la variation $\Delta\theta^{cm\text{re}}$ en fonction de la variation $\Delta\theta^k$ du correcteur. Or, pour une variation de $\Delta\theta^k$ donnée, l'analyse (voir chapitre 10, section 10.4.3, page 151) montre qu'on peut déterminer un vecteur $\Delta\theta^{cm*}$ qui se rapproche très fortement de $-\Delta\theta^{cm\text{re}}$, pour peu que le taux de confiance T_{cf} soit suffisamment proche de 1. On arrive donc au critère (11.7) qui sera finalement utilisé par la suite pour synthétiser des directions de réglage. Les matrices G_{11} , G_{12} et G_{22} sont les mêmes que celles présentées à la section 10.4.3.

$$\begin{aligned} \text{Crit} &= (-\Delta\theta^{cm*} - \Delta\theta^{cm\text{des}})^T P (-\Delta\theta^{cm*} - \Delta\theta^{cm\text{des}}) \\ &= (G_{11}^{-1} G_{12} \Delta\theta^k - \Delta\theta^{cm\text{des}})^T P (G_{11}^{-1} G_{12} \Delta\theta^k - \Delta\theta^{cm\text{des}}) \end{aligned} \quad (11.7)$$

La minimisation de ce critère conduit au vecteur solution $\Delta\theta^{k*}$ qui représente donc l'ajustement à réaliser pour obtenir un vecteur $\Delta\theta^{cm\text{re}}$ le plus proche possible du vecteur $\Delta\theta^{cm\text{des}}$ ⁴. Bien évidemment, le résultat ne sera probant que si le taux de confiance lié au calcul de $\Delta\theta^{cm*}$ est proche de 1. En effet, un taux de confiance égal à 1 correspond à une diminution du critère primaire $\frac{1}{\sigma}$ de 100%. Dans ce cas, le vecteur associé aux quantités $\Delta\theta^{cm*}$ et $\Delta\theta^k$ constitue donc une direction de sensibilité nulle. Il y a donc, en théorie (et localement), équivalence entre :

- la variation des pôles de la boucle fermée correspondant à $\Delta\theta^{cm\text{re}}$, induite par une variation $\Delta\theta^k$ du correcteur ;
- et la variation des pôles de la boucle fermée correspondant à $-\Delta\theta^{cm*}$.

Obtention du taux de confiance unitaire

Dans le chapitre 10, une méthode pour améliorer le taux de confiance a été vue dans la section 10.4.3, p.156. On utilisera la même procédure pour le calcul des différents coefficients de $G_{\theta_0}^{-1}$, à savoir :

1. on applique une variation $\Delta\theta^k$ sur le système ;
2. on se place dans la base bloc diagonale compagne ;
3. on applique ensuite la variation $\Delta\theta^{cm}$;
4. on remplace la matrice C existante par une matrice identité, si on ne s'intéresse qu'aux seules variations modales de la boucle fermée.

4. Par rapport au $\Delta\theta^{k*}$ précédent, il y a une inversion de signe, puisqu'on ne travaille plus avec une compensation, mais avec un critère faisant intervenir l'erreur.

Si on considère dans le vecteur $\Delta\theta^{cm}$ **toutes** les variations possibles des modes de la boucle fermée (pulsations et amortissements), alors on peut produire toutes les variations possibles de la matrice A_{cl} . En effet, la matrice A_{cl} est considérée dans sa base diagonale par blocs à chaque étape du calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$. Toutes les variations possibles de cette matrice sont donc considérées dans $\Delta\theta^{cm}$. On est alors sûr qu'il existe un vecteur $\Delta\theta^{cm*}$ qui permette d'obtenir $A_{cl}(\Delta\theta^k) + M_{cm}\text{diag}(\Delta\theta^{cm*})N_{cm} = A_{cl_0}$. Il y a donc une compensation exacte entre $\Delta\theta^{cm*}$ et $\Delta\theta^{cm re}$.

Solution optimale pour le critère (11.7)

La solution $\Delta\theta^{k*}$ qui minimise le critère Crit de l'équation (11.7) s'obtient en commençant par dériver le critère par rapport à $\Delta\theta^k$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\Delta\theta^k} \left[(G_{11}^{-1} G_{12} \Delta\theta^k - \Delta\theta^{cm des})^T P (G_{11}^{-1} G_{12} \Delta\theta^k - \Delta\theta^{cm des}) \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \\ G_{12}^T G_{11}^{-1} P (G_{11}^{-1} G_{12} \Delta\theta^k - \Delta\theta^{cm des}) &= 0 \end{aligned} \quad (11.8)$$

Supposons, dans un premier temps, que la matrice P soit égale à l'identité. Deux cas se présentent fréquemment :

— la matrice $G_{11}^{-1} G_{12}$ est de rang plein en colonnes. Alors $G_{12}^T G_{11}^{-2} G_{12}$ est une matrice inversible. On obtient donc en développant l'équation (11.8) la solution suivante :

$$\Delta\theta^{k*} = (G_{12}^T G_{11}^{-2} G_{12})^{-1} G_{12}^T G_{11}^{-1} \Delta\theta^{cm des} \quad (11.9)$$

— la matrice $G_{11}^{-1} G_{12}$ est de rang plein en lignes. Alors c'est la matrice $G_{11}^{-1} G_{12} G_{12}^T G_{11}^{-1}$ qui est inversible. La deuxième équation de (11.8) peut alors s'écrire⁵ :

$$G_{11}^{-1} G_{12} \Delta\theta^k - \Delta\theta^{cm des} = 0 \quad (11.10)$$

Par conséquent, il existe tout un ensemble de solutions. La solution centrale, qui se résout en prenant la pseudo-inverse de $G_{11}^{-1} G_{12}$, correspond à la solution de norme minimale. À cela s'ajoute une solution de type solution de l'équation sans second membre, notée \mathcal{N} qui appartient au noyau de $G_{11}^{-1} G_{12}$:

$$\Delta\theta^{k*} = G_{12}^T G_{11}^{-1} (G_{11}^{-1} G_{12} G_{12}^T G_{11}^{-1})^{-1} \Delta\theta^{cm des} + \mathcal{N} \quad (11.11)$$

$$\text{où } G_{11}^{-1} G_{12} \mathcal{N} = 0$$

Si maintenant la matrice P est diagonale quelconque. Lorsqu'on se trouve dans le second cas, on peut remarquer que la solution proposée reste valable, y compris en présence d'une matrice P non inversible (des zéros sur la diagonale). Dans le premier cas également, la présence d'une matrice P comprenant des zéros sur la diagonale ne rend pas le problème insoluble. Mais, la résolution nécessite une manipulation préalable de l'équation (11.8). La matrice P étant une matrice diagonale, dont les termes p_1 ,

5. Le noyau de $G_{12}^T G_{11}^{-1}$ est l'ensemble vide.

p_2 etc. sur sa diagonale sont des termes positifs, on peut construire la matrice \sqrt{P} dont la diagonale est formée par les termes $\sqrt{p_1}$, $\sqrt{p_2}$ etc. On définit alors à partir de $\sqrt{P} G_{11}^{-1} G_{12}$ une matrice $H_r = \sqrt{P_r} G_{11r}^{-1} G_{12r}$, où les lignes nulles ont été éliminées. Il y a alors une stricte équivalence entre les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} G_{12}^T G_{11}^{-1} P (G_{11}^{-1} G_{12} \Delta\theta^k - \Delta\theta^{cm \text{ des}}) &= 0 \\ \Leftrightarrow H_r^T (H_r \Delta\theta^k - \sqrt{P_r} \Delta\theta^{cm \text{ des}}) &= 0 \end{aligned} \quad (11.12)$$

De nouveau, la résolution de cette dernière équation demande à considérer deux cas (tout comme pour la résolution de l'équation (11.8)) : le cas où H est de rang plein en lignes et le cas où H est de rang plein en colonnes.

Mais, il reste un cas, dont la résolution est un peu plus complexe que dans les deux cas précédents : si la matrice $G_{11}^{-1} G_{12}$ a ses deux dimensions supérieures à son rang. Dans ce cas-là, on doit décomposer en valeurs singulières la matrice $G_{11}^{-1} G_{12}$ (ou la matrice $\sqrt{P} G_{11}^{-1} G_{12}$).

Cas général

Afin d'obtenir la solution générale du problème, on introduit les grandeurs $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rang r , et $\Delta\theta_p^{cm \text{ des}} \in \mathbb{R}^m$:⁶

$$H = \sqrt{P} G_{11}^{-1} G_{12} \quad \Delta\theta_p^{cm \text{ des}} = \sqrt{P} \Delta\theta^{cm \text{ des}} \quad (11.13)$$

L'équation à résoudre est donc la suivante :

$$H^T (H \Delta\theta^k - \Delta\theta_p^{cm \text{ des}}) = 0 \quad (11.14)$$

On effectue ensuite une décomposition en valeurs singulières de la matrice H . Cette décomposition fait apparaître les matrices unitaires $u \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $v \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la matrice pseudo-diagonale $S \in \mathbb{R}^{+m \times n}$ de rang r , ainsi que leurs homologues de taille réduite au rang r comme présentées dans l'équation (11.15) :

$$\begin{aligned} S &= u^T H v & u^T u &= I_m & v^T v &= I_n \\ u_r &= u \begin{bmatrix} I_r \\ 0_{(m-r) \times r} \end{bmatrix} & v_r &= v \begin{bmatrix} I_r \\ 0_{(n-r) \times r} \end{bmatrix} \\ S &= \begin{bmatrix} S_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix} & S_r &= u_r^T H v_r \end{aligned} \quad (11.15)$$

On se propose à présent de démontrer que le vecteur $\Delta\theta^{k*} = v_r S_r^{-1} u_r^T \Delta\theta_p^{cm \text{ des}}$ constitue la solution particulière du problème. Pour cela, on remplace $\Delta\theta^k$ dans l'équation

⁶. Les variables m , n et r ont, peut-être, déjà été utilisées précédemment avec d'autres définitions ; on n'en tiendra pas compte ici.

11.2. DIRECTIONS OPTIMALES

(11.14), puis on multiplie à droite par la matrice inversible v^T . On doit donc démontrer que :

$$v^T H^T H v_r S_r^{-1} u_r^T \Delta\theta_p^{cm\ des} = v^T H^T \Delta\theta_p^{cm\ des} \quad (11.16)$$

Pour cela, on travaille sur le premier membre de l'équation précédente (que l'on note par commodité (a)) :

$$\begin{aligned} (a) &= v^T H^T H v_r S_r^{-1} u_r^T \Delta\theta_p^{cm\ des} = v^T H^T u u^T H v_r S_r^{-1} u_r^T \Delta\theta_p^{cm\ des} \\ &= S^T u^T H v_r S_r^{-1} u_r^T \Delta\theta_p^{cm\ des} = S^T S v^T v_r S_r^{-1} u_r^T \Delta\theta_p^{cm\ des} \\ &= S^T S \begin{bmatrix} I_r \\ 0_{(n-r) \times r} \end{bmatrix} S_r^{-1} u_r^T \Delta\theta_p^{cm\ des} = S^T \begin{bmatrix} I_r \\ 0_{(m-r) \times r} \end{bmatrix} u_r^T \Delta\theta_p^{cm\ des} \\ &= S^T \begin{bmatrix} I_r \\ 0_{(m-r) \times r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0_{r \times (m-r)} \end{bmatrix} u^T \Delta\theta_p^{cm\ des} \\ &= S^T \begin{bmatrix} I_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix} u^T \Delta\theta_p^{cm\ des} = S^T u^T \Delta\theta_p^{cm\ des} \\ &= v^T H^T \Delta\theta_p^{cm\ des} \end{aligned} \quad (11.17)$$

On a donc démontré, dans le cas général, que le minimum du critère (11.7) est atteint pour la valeur :

$$\Delta\theta^{k*} = v_r S_r^{-1} u_r^T \sqrt{P} \Delta\theta^{cm\ des} \quad (11.18)$$

Retour sur l'exemple à 4 pôles p.164

Étant donné qu'on doit considérer à présent toutes les variations modales du système, la forme LFT de ce système d'ordre 4 est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -16 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ -18 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -32 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \\ \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\xi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta\omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta\xi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta\omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta\theta_1^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta\theta_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (11.19)$$

Comme précédemment, on peut lire que les deux potentiomètres disponibles, $\Delta\theta_1^k$ et $\Delta\theta_2^k$, agissent simultanément sur les 2 pôles complexes. Le calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$ donne les résultats d'analyse suivants :

$\Delta\theta = \begin{bmatrix} \delta\xi_1 \\ \Delta\omega_1 \\ \Delta\xi_2 \\ \Delta\omega_2 \\ \Delta\theta_1^k \\ \Delta\theta_2^k \end{bmatrix}$	$G_{\theta_0}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.36 & -0.24 & 0 & 0 & 0.36 & 0.002 \\ -0.24 & 0.58 & 0 & 0 & -0.24 & 0.006 \\ 0 & 0 & 0.28 & -0.21 & 0.16 & -0.046 \\ 0 & 0 & -0.21 & 0.26 & -0.17 & 0.034 \\ 0.36 & -0.24 & 0.16 & -0.17 & 0.48 & -0.025 \\ 0.002 & 0.006 & -0.046 & 0.034 & -0.025 & 0.008 \end{bmatrix}$
$T_{cf} = 1 \quad \forall \Delta\theta^k$	$\Delta\theta^{cm*} = \begin{bmatrix} -1 & 0.0167 \\ 0 & -0.0167 \\ -0.2708 & 0.1667 \\ 0.4375 & 0 \end{bmatrix} \Delta\theta^k$

TABLE 11.3: Résultats d'analyse pour le système du quatrième ordre (11.19)

11.2. DIRECTIONS OPTIMALES

Le fait que T_{cf} soit unitaire peut se démontrer facilement en calculant la valeur du critère d'analyse $(\Delta\theta^T G_{\theta_0}^{-1} \Delta\theta)$ pour $\Delta\theta^T = [\Delta\theta^{cm*} \quad \Delta\theta^k]$; on s'aperçoit que cette valeur est nulle, quelle que soit la valeur affectée à $\Delta\theta^k$.

$\Delta\theta^{cm*}$ étant calculé, on se propose d'observer ce qu'il se passe sur la matrice A_{cl} lorsqu'on prend $\Delta\theta^{cm\ des T} = [0.1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ (i.e., $\delta\xi_1 = 0.1$ et les autres variations de paramètres nulles), et ce, pour différentes valeurs de la matrice de pondération P . Afin de faciliter la lecture des résultats, on se dispense de donner la nouvelle valeur de la matrice A_{cl} en donnant plutôt l'erreur commise sur chaque composante $\delta\xi_1, \delta\omega_1, \delta\xi_2, \delta\omega_2$ lors de l'ajustement -erreur prise par rapport à la valeur désirée, exprimée en valeur absolue-.

$\text{diag}(\sqrt{P}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$ \Delta\theta^{cm*} - \Delta\theta^{cm\ des} = \begin{bmatrix} 0.0154 \\ 0.0024 \\ 0.0013 \\ 0.0360 \end{bmatrix}$	$\Delta\theta^{k*} = \begin{bmatrix} 0.082 \\ 0.142 \end{bmatrix}$
$\text{diag}(\sqrt{P}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$ \Delta\theta^{cm*} - \Delta\theta^{cm\ des} = \begin{bmatrix} 0.0417 \\ 0.0019 \\ 0.0040 \\ 0.0246 \end{bmatrix}$	$\Delta\theta^{k*} = \begin{bmatrix} 0.056 \\ 0.115 \end{bmatrix}$
$\text{diag}(\sqrt{P}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$ \Delta\theta^{cm*} - \Delta\theta^{cm\ des} = \begin{bmatrix} 0.0001 \\ 0.0026 \\ 0.0003 \\ 0.0422 \end{bmatrix}$	$\Delta\theta^{k*} = \begin{bmatrix} 0.097 \\ 0.157 \end{bmatrix}$
$\text{diag}(\sqrt{P}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$ \Delta\theta^{cm*} - \Delta\theta^{cm\ des} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0268 \\ 0.0437 \end{bmatrix}$	$\Delta\theta^{k*} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.002 \end{bmatrix}$

TABLE 11.4: Résultats de synthèse avec critère pondéré pour le système du quatrième ordre (11.19)

On constate sur le tableau 11.4 que la modification de la pondération sur la variable $\delta\omega_2$ influence l'erreur commise sur cette même grandeur. Lorsqu'on augmente le coefficient de pondération, on diminue l'erreur commise sur $\delta\omega_2$; inversement, lorsqu'on diminue le coefficient de pondération, on augmente l'erreur commise. Cependant, le fait d'agir sur la pondération d'une composante implique une modification du poids relatif

des autres composantes dans le critère. Ici, la diminution de l'erreur commise sur $\delta\omega_2$ provoque indirectement une augmentation de l'erreur sur le vecteur des autres composantes ; ce qui se traduit, dans notre cas, par une augmentation de l'erreur commise principalement sur $\delta\xi_1$.

On peut donc conclure que l'utilisation du critère (11.7) avec pondérations permet l'obtention de directions de réglages $\Delta\theta^{k*}$ optimales, conformes avec l'idée qu'on se fait du résultat de l'ajustement de la loi de commande. Même si les réglages à effectuer sur les pondérations sont parfois délicats, ils permettent un contrôle relatif des différentes erreurs commises sur le déplacement des différents pôles.

11.3 Système masses-ressorts

Afin d'illustrer les sections qui suivent, on considère un système masses-ressorts d'ordre 6, et son correcteur associé d'ordre 4. Le schéma du système est présenté figure 11.2. Le système comprend 2 entrées et 1 sortie.

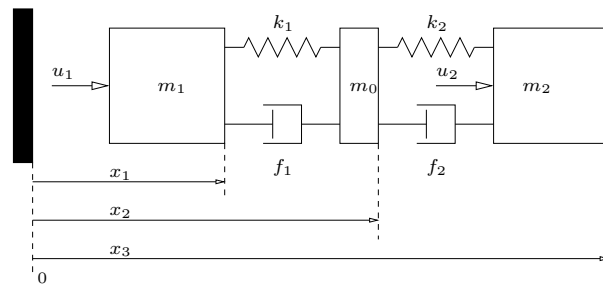


FIGURE 11.2: Schéma de principe d'un système masses-ressorts d'ordre 6.

11.3.1 Mise en équation

Les équations fondamentales de la dynamique conduisent à la représentation d'état du système (11.20). On notera X le vecteur d'états : $X^T = [x_1 \quad \dot{x}_1 \quad x_3 \quad \dot{x}_3 \quad x_2 \quad \dot{x}_2]$.

11.3. SYSTÈME MASSES-RESSORTS

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{f_1}{m_1} & 0 & 0 & \frac{k_1}{m_1} & \frac{f_1}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{f_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & \frac{f_2}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m_0} & \frac{f_1}{m_0} & \frac{k_2}{m_0} & \frac{f_2}{m_0} & -\frac{k_1+k_2}{m_0} & -\frac{f_1+f_2}{m_0} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X \end{array} \right. \quad (11.20)$$

Le choix des valeurs numériques pour l'application est le suivant :

- les masses : $m_1 = 0.5 \text{ kg}$, $m_2 = 0.6 \text{ kg}$ et $m_0 = 0.25 \text{ kg}$;
- les raideurs : $k_1 = 1 \text{ N.m}^{-1}$ et $k_2 = 1.3 \text{ N.m}^{-1}$;
- les coefficients de frottement visqueux : $f_1 = 0.0025 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}$ et $f_2 = 0.003 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}$.

Associé à ce système, on construit un correcteur par la méthode LQG/LTR. L'idée de base de cette méthode, due à KWAKERNAAK [28] et reprise par DOYLE et STEIN [18], est de synthétiser une commande de type LQG qui "recouvre" asymptotiquement soit les propriétés de robustesse de la méthode LQ, soit celles du filtre de KALMAN.

11.3.2 Réduction du système

Afin d'obtenir un correcteur d'ordre réduit, on utilise un modèle d'ordre réduit lors de la phase de synthèse⁷. Étant données les valeurs numériques de m_1 , m_2 et m_0 , on décide de négliger l'effet de la masse m_0 . Les variables d'états correspondantes x_2 et \dot{x}_2 disparaissent, ce qui ramène l'ordre du système à 4. On dispose également entre les masses m_1 et m_2 des raideurs k_1 , k_2 et des coefficients de frottement visqueux f_1 , f_2 disposés en série ; la raideur totale est alors notée k et le coefficient de frottement visqueux f . Le système sur lequel s'effectue la synthèse est finalement décrit par l'équation (11.21).

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{f}{m_1} & \frac{k}{m_1} & \frac{f}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_2} & \frac{f}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & -\frac{f}{m_2} \end{bmatrix} X_r + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X_r \end{array} \right. \quad (11.21)$$

Les valeurs numériques sont les suivantes :

- $m_1 = 0.5 \text{ kg}$ et $m_2 = 0.6 \text{ kg}$;
- $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = 0.565 \text{ N.m}^{-1}$;
- $f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} = 0.0014 \text{ N.m}^{-1}.\text{s}$.

⁷ La synthèse de type LQG/LTR conduit à un correcteur d'ordre identique à l'ordre du modèle de synthèse.

11.3.3 Calcul d'un correcteur nominal

Le calcul des gains de retour d'état K_c et d'estimation K_f se fait à partir de ce modèle d'ordre réduit (A_r, B_r, C_r) par résolution des équations de RICCATI (11.22) et (11.23)

$$P_c A_r + A_r^T P_c - P_c B_r R_c^{-1} B_r^T P_c + Q_c = 0 \quad (11.22)$$

$$K_c = R_c^{-1} B_r^T P_c$$

$$P_f A_r^T + A_r P_f - P_f C_r^T R_f^{-1} C_r P_f + Q_f = 0 \quad (11.23)$$

$$K_c = P_f C_r^T R_f^{-1}$$

où le choix des matrices de bruits d'état Q_c et Q_f et des matrices de bruits de mesure R_c et R_f est le suivant :

- $Q_c = C_r^T C_r$ et $Q_f = B_r B_r^T$;
- $R_c = 10 I_2$ et $R_f = 2 \cdot 10^{-3}$.

On arrive finalement aux matrices K_c et K_f :

$$K_c = \begin{bmatrix} 0.104 & 0.278 & 0.069 & 0.195 \\ 0.128 & 0.162 & 0.137 & 0.354 \end{bmatrix} \quad K_f^T = [41.2 \quad 9.3 \quad 9.5 \quad 45.0] \quad (11.24)$$

Les figures 11.4 et 11.5 montrent les lieux des racines depuis les pôles en boucle ouverte⁸ de $K(s)G(s)$ jusqu'aux pôles en boucle fermée de $\frac{-G(s)}{1-K(s)G(s)}$ lorsque le gain de boucle g varie de 0 à 1 (voir schéma 11.3).

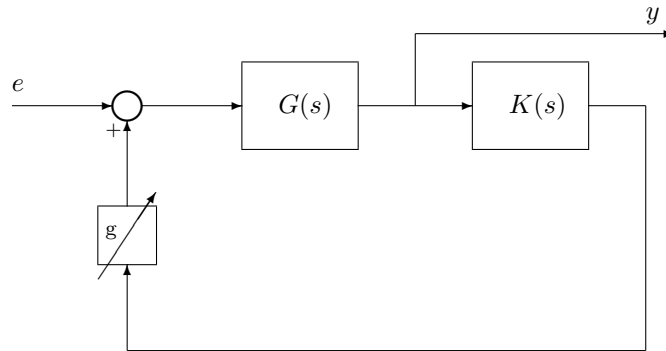


FIGURE 11.3: Schéma de principe pour le tracé du lieu des racines.

Les pôles du système en boucle ouverte, $G(s)$, sont marqués par des '*' et ceux du système en boucle fermée sont marqués par des 'o'. Le lieu construit à partir du système complet comprend, en plus, le pôle éliminé lors de la réduction.

8. On note $K(s)$ la matrice de transfert du correcteur et $G(s)$ la matrice de transfert du système.

11.3. SYSTÈME MASSES-RESSORTS

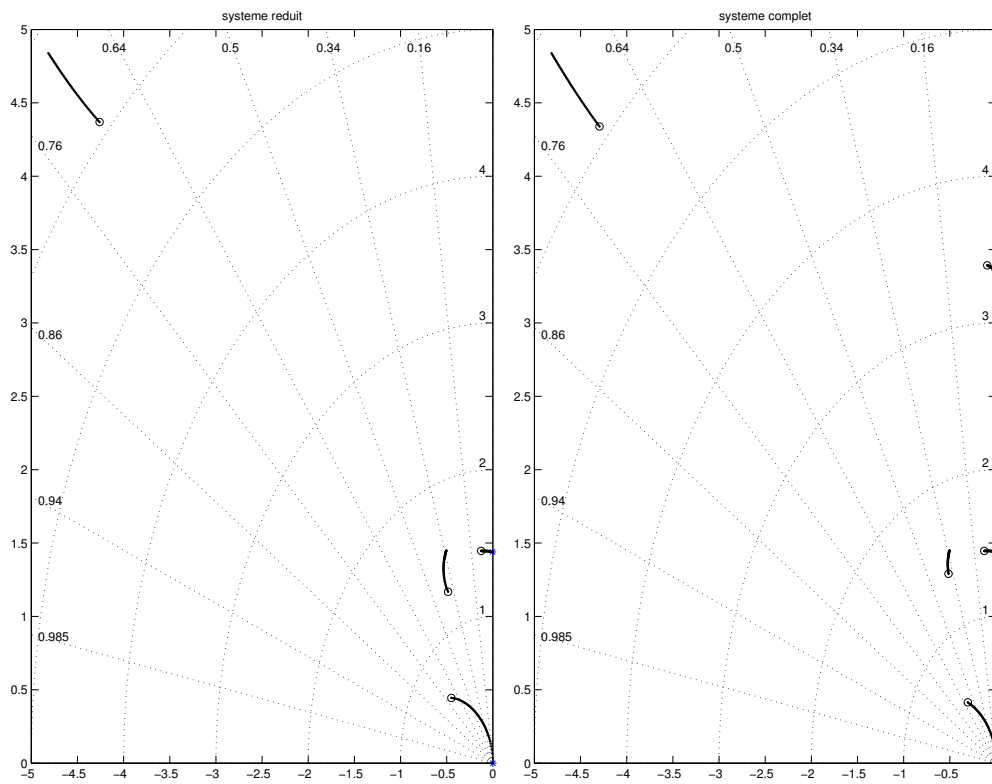


FIGURE 11.4: Lieu des racines du système réduit associé au correcteur nominal. FIGURE 11.5: Lieu des racines du système complet associé au correcteur nominal.

11.4 Choix de la structure

Le choix du critère utilisé étant arrêté, il convient à présent d'analyser s'il est judicieux de choisir une structure particulière du correcteur, lorsque celle-ci n'est pas imposée. Entre autres critères, une structure peut être jugée plus intéressante que les autres, dans le fait de diminuer le nombre de paramètres du correcteur que l'on intègre dans le vecteur θ^k .

11.4.1 Limitation du nombre de paramètres

Lorsqu'on est confronté à des systèmes d'ordre élevé (dont le correcteur associé est souvent lui aussi d'ordre élevé), le nombre de paramètres dans le vecteur $\Delta\theta$ devient vite élevé. En effet :

- le nombre de variables dans le vecteur $\Delta\theta^{cm}$ est égal, au minimum, à l'ordre de la boucle fermée, et peut être supérieur si on décide d'y intégrer les variations de la matrice d'observation C ;
- le nombre de variables dans le vecteur $\Delta\theta^k$ est, quant à lui, dépendant de la complexité du correcteur. Le nombre de paramètres qui définissent un correcteur d'ordre n_k , comportant p entrées et m sorties, est de $n_k(p + m) + mp$.

Le nombre d'éléments dans le vecteur $\Delta\theta^{cm}$ ne peut être réduit que si on est sûr que, par la suite, certaines pondérations dans la matrice P seront égales à 0 ; les paramètres modaux correspondants peuvent alors être éliminés. Le nombre d'éléments dans le vecteur $\Delta\theta^k$ peut quant à lui être réduit, selon la structure la structure utilisée et les objectifs attendus.

Structure estimation/retour d'état

La structure estimateur/retour d'état⁹ a déjà été utilisée au chapitre 10, p.141, pour illustrer la mise sous forme LFT de la variation des paramètres du correcteur $\Delta\theta^k$. Seuls les paramètres du retour d'état K_c avaient été pris en compte. Cependant, pour plus d'exactitude, il faut également considérer les paramètres du gain d'estimation K_f et ceux du paramètre de YOULA statique Q . La forme LFT globale est rappelée figure 11.6.

Supposons sur cette structure que $A_0 = A$, $B_0 = B$ et $C_0 = C$, autrement dit, qu'on dispose d'un correcteur du même ordre que le système et qu'on ait choisi une représentation d'état du modèle embarqué identique à la représentation d'état du modèle de validation. Alors, on peut affirmer qu'il y a séparation des dynamiques d'estimation et de commande ; les pôles de la boucle fermée sont :

- les pôles de $A_0 - B_0 K_c$: la dynamique de commande,
- et les pôles de $A_0 - K_f C_0$: la dynamique d'estimation.

On conclut de tout cela que l'objectif consistant à replacer un pôle appartenant à $\text{spec}(A_0 - B_0 K_c)$ (resp. à $\text{spec}(A_0 - K_f C_0)$) peut être atteint en ne considérant dans

9. Rappelons que mis à part quelques cas marginaux, tous les correcteurs peuvent se mettre sous forme estimateur/retour d'état.

11.4. CHOIX DE LA STRUCTURE

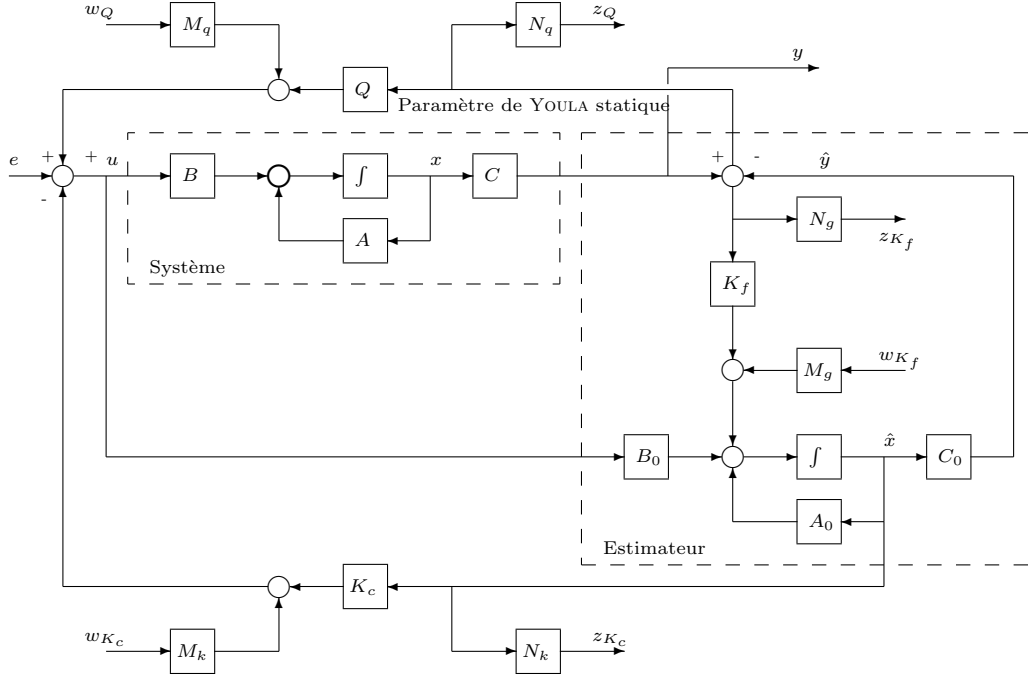


FIGURE 11.6: Mise sous forme LFT complète des variables du correcteur pour un correcteur sous forme estimateur/retour d'état.

$\Delta\theta^k$ que les paramètres de ΔK_c (resp. de ΔK_f). Ce qui permet de réduire la taille de $\Delta\theta^k$ d'environ une moitié.

Notons également que dans ce cas précis, si le vecteur $\Delta\theta^k$ n'est composé que des paramètres de ΔK_c (resp. ΔK_f), alors la partie des pôles de la boucle fermée initialement en $\text{spec}(A_0 - K_f C_0)$ (resp. en $\text{spec}(A_0 - B_0 K_c)$) reste identique. On peut donc éliminer du vecteur θ^{cm} tous les paramètres issus de $\text{spec}(A_0 - K_f C_0)$. Ce cas très simple, où il y a séparation des dynamiques, n'est pas des plus intéressants, puisque l'ajustement modal peut être parfaitement réalisé par les techniques classiques de placement modal.

Par contre, lorsque l'ordre du correcteur est inférieur à celui du système, le nombre d'états que l'on peut estimer est alors au maximum de $n_k + p$ grâce à un observateur de type LUENBERGER. Si le système est d'ordre supérieur à $n_k + p$, l'estimateur ne réalise alors qu'une estimation partielle des modes du système, et le principe de séparation n'est plus vérifié. De plus, on ne retrouve pas $\text{spec}(A_0 - B_0 K_c)$ et $\text{spec}(A_0 - K_f C_0)$ dans $\text{spec}(A_{cl})$.

Cependant, lorsque le modèle embarqué est correctement choisi (on verra dans la section suivante le choix du modèle embarqué), on constate que, souvent, la considération des gains de la seule matrice K_c dans θ^k permet d'atteindre au moins partiellement les objectifs d'ajustement.

Illustration avec le système masses/ressorts

On rappelle que l'ajustement du placement des pôles en boucle fermée s'effectue directement sur l'association modèle complet du système/correcteur réduit. Les matrices du système, A , B , C , sont celles définies en (11.20). Quant aux matrices de l'observateur, A_0 , B_0 , C_0 , elles sont identiques à celles qui définissent le modèle embarqué (11.21). On se trouve donc dans le cas où le système et le modèle embarqué ne sont pas du même ordre.

Même si tous les modes du système ne sont pas estimés, on se propose de déplacer les pôles de la boucle fermée issus de la dynamique du système (cf. figure 11.5) grâce aux seuls gains de la matrice de retour d'état K_c . Les différents résultats sont rassemblés sur les pages 179 et 181.

Figure 11.7 : On observe le lieu des racines de la boucle fermée lorsqu'on fait varier δK_c . Les 'o' représentent les pôles de la boucle fermée nominale ($\delta K_c = 0$), et les '*' les pôles de la boucle fermée lorsque¹⁰ $\text{vec}(\delta K_c) = \Delta\theta^{k*}$; l'objectif de $\Delta\theta^{k*}$ étant d'augmenter la pulsation du mode rigide de 25% avec une matrice de pondération P qui comprend des 1 pour les modes issus du système (mode rigide, mode flexible et second mode flexible qu'on avait éliminé pour la synthèse du correcteur nominal) et des 0 pour les modes issus du correcteur. On constate que l'on obtient effectivement une augmentation de 25% de la pulsation du mode rigide, les modes flexibles ne se déplaçant pas. Cependant, le mode basse fréquence issu de la dynamique du correcteur s'est légèrement déplacé : ce qui est cohérent avec le fait qu'on ait laissé ce pôle libre (pondération nulle).

Figure 11.8 : Il s'agit du lieu des racines de la boucle fermée construit de la même façon que précédemment, mais lorsqu'on décide de faire varier cette fois l'amortissement du mode rigide de 25%. Les pondérations choisies sont identiques à celles prises pour la figure 11.7 et on aboutit aux mêmes observations : le mode rigide s'est déplacé comme souhaité, avec cependant un léger déplacement du mode basse fréquence du correcteur.

Figure 11.9 : Cette fois-ci, en considérant la même matrice de pondération, on s'intéresse au déplacement du premier mode flexible suivant une direction d'iso-amortissement. On constate que l'objectif est bien atteint, puisque la pulsation du mode en question augmente des 25% souhaités et que les autres modes ne se sont pas déplacés.

Figure 11.10 : On travaille toujours sur le premier mode flexible, avec comme objectif de doubler l'amortissement. Le choix des pondérations est resté le même, et on constate que l'objectif est atteint par l'ajustement effectué.

Figure 11.11 : Le lieu des racines évolue selon un potentiomètre de réglage δK_c visant à augmenter légèrement la pulsation du second mode flexible. Les pondérations utilisées sont toujours de 1 pour les 6 modes issus du système en boucle ouverte et de 0 pour les 4 modes issus de la dynamique du correcteur. On constate que la pulsation

10. $\text{vec}(\delta K_c)$ désigne le vecteur constitué des colonnes de K_c mises bout-à-bout.

11.4. CHOIX DE LA STRUCTURE

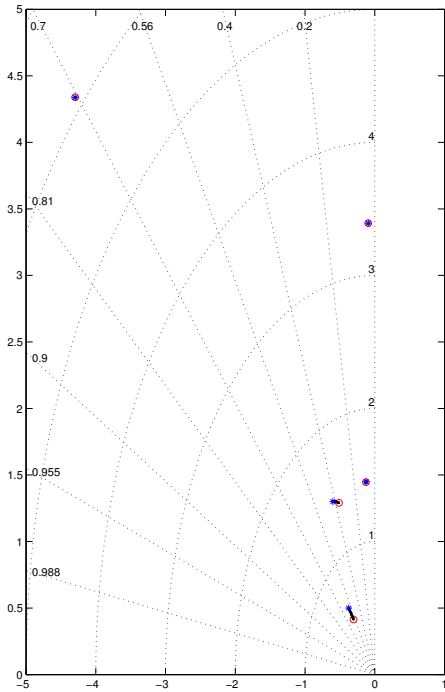


FIGURE 11.7:

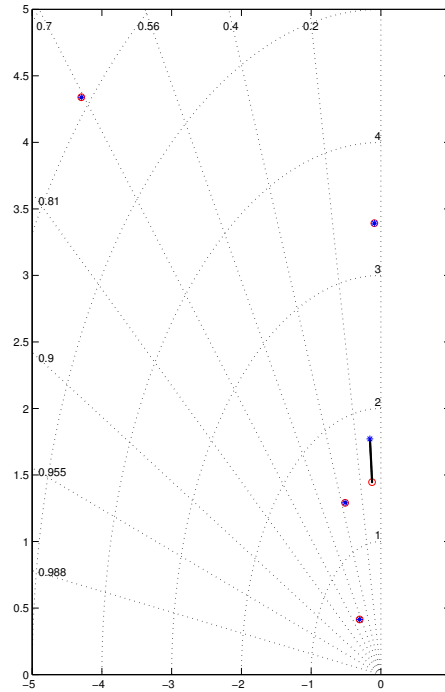


FIGURE 11.9:

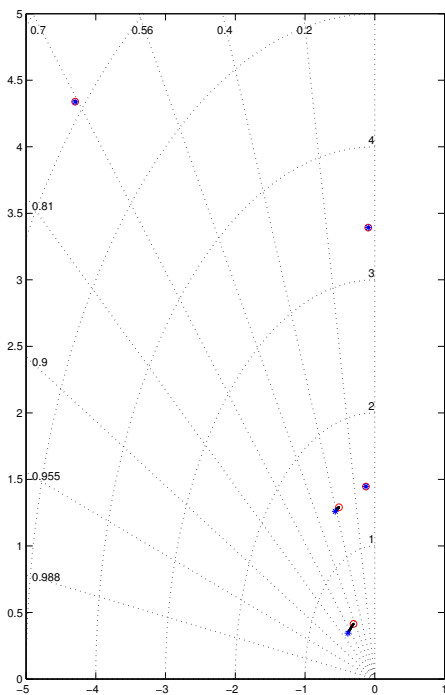


FIGURE 11.8:

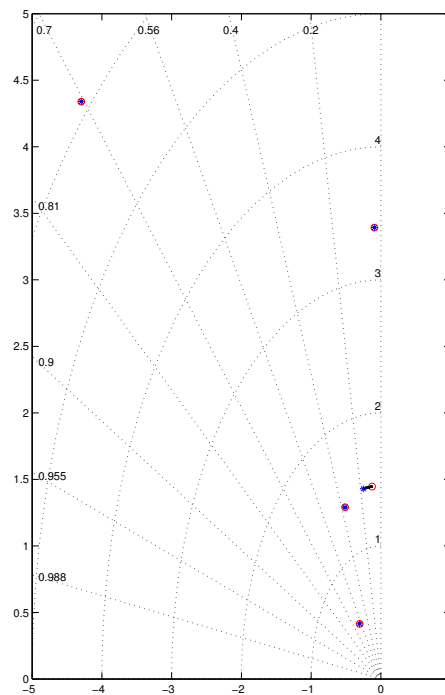


FIGURE 11.10:

du second mode flexible est effectivement augmentée. Il y a par contre un fort couplage avec le mode rigide et le mode basse fréquence du correcteur. Ces deux derniers modes sont fortement perturbés, et l'action des pondérations n'a pas eu le rôle escompté sur le premier mode rigide (l'erreur commise sur le premier mode flexible est bien trop importante par rapport à celle commise sur le second mode flexible compte tenu du fait que leurs pondérations sont identiques). Ceci s'explique de deux façons :

- le second mode flexible ne figure pas dans les estimées du système, par conséquent sa correction par action sur K_c demande l'utilisation de forts gains :

$$\delta K_c = \begin{bmatrix} -1.9 & -2.5 & 1.5 & 2.0 \\ -1.4 & -2.8 & 1.3 & 2.2 \end{bmatrix} \quad (11.25)$$

On s'éloigne donc du cadre local de l'ajustement (même si on ne demande pas un grand déplacement du mode en question).

- on peut lire cela sur la 4ème ligne de la matrice H (cf. p.168) où tous les coefficients sont compris entre -0.02 et 0.02, alors que les autres lignes ont plutôt des coefficients compris entre -1 et 1 voire plus. Ceci est associé à une valeur singulière faible.

On verra par la suite l'importance de ces valeurs singulières trop faibles.

Figure 11.12 : On s'intéresse à la modification de l'amortissement du second mode flexible. On constate qu'il n'y a pas réellement de problème, l'amortissement du mode est bien plus commandable que la pulsation. Il est donc possible de modifier des pôles qui ne sont pas estimés avec les gains de la matrice K_c .

Figure 11.13 : L'objectif de cet ajustement est d'augmenter de 10% l'amortissement du premier mode flexible. Cependant, la matrice de pondération utilisée est différente de celle utilisée pour l'ajustement de la figure 11.10 ; il s'agit de la matrice identité. Les valeurs singulières de la matrice H sont les suivantes :

$$\text{diag}(S)^T = [7.32 \quad 3.48 \quad 2.18 \quad 0.69 \quad 0.44 \quad 0.20 \quad 0.69 \cdot 10^{-4} \quad 0.015 \cdot 10^{-4}] \quad (11.26)$$

La tolérance choisie pour le calcul du rang de S donne ici un rang de 8. Toutes les valeurs singulières sont donc considérées, y compris les deux dernières qui sont beaucoup plus faibles que les autres. On constate que les déplacements des pôles sont mal contrôlés.

Figure 11.14 : On se propose ici d'effectuer le même ajustement que précédemment, mais 10 fois plus important (on désire doubler l'amortissement du premier mode flexible). On utilise la même matrice de pondération que pour l'ajustement de la figure 11.13, c'est-à-dire une pondération qui prend en compte l'intégralité des 10 modes de la boucle fermée. La différence avec le cas précédent se situe dans le calcul du rang de la matrice S (*i.e.* de la matrice H) : les deux dernières valeurs singulières sont considérées comme nulles vis-à-vis des 6 autres. On se retrouve donc avec une matrice H de rang 6 seulement. Le résultat montre une nette amélioration, l'ajustement est conforme à nos attentes.

11.4. CHOIX DE LA STRUCTURE

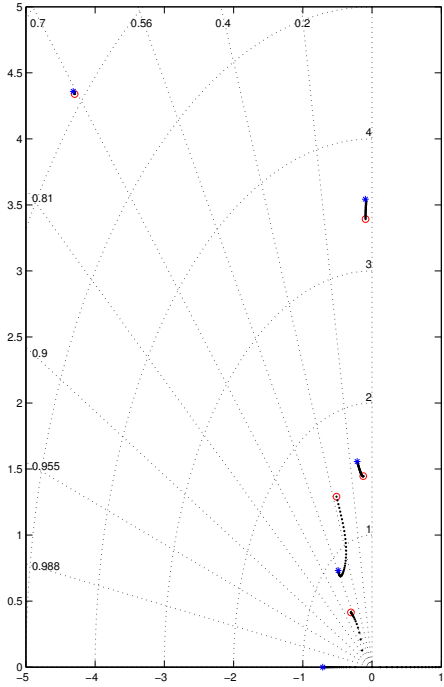


FIGURE 11.11:

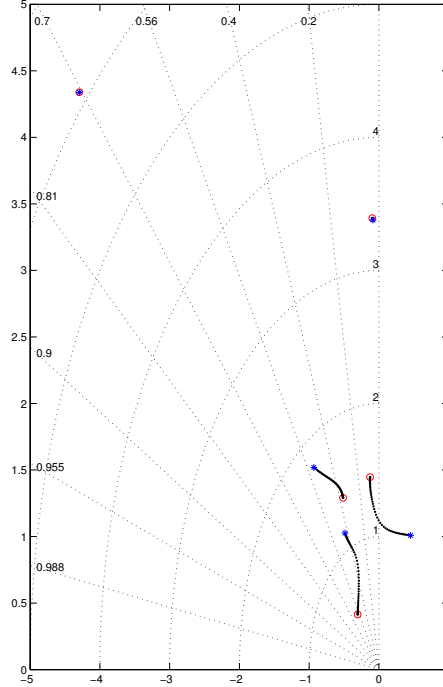


FIGURE 11.13:

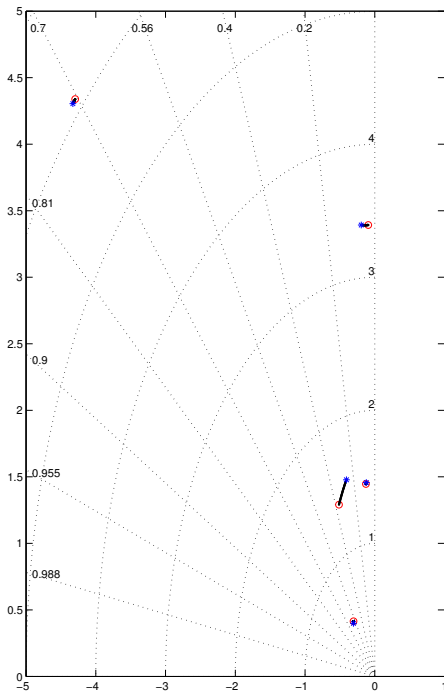


FIGURE 11.12:

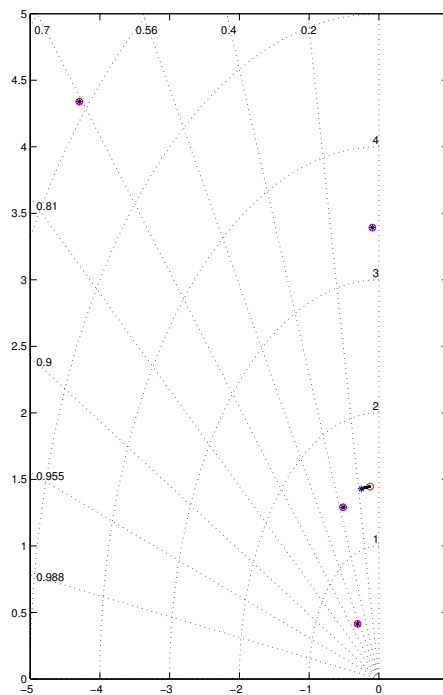


FIGURE 11.14:

Figure 11.15 : L'objectif qu'on cherche à atteindre sur cette figure et sur les 3 suivantes (sur la même page), est d'augmenter la pulsation du mode rigide de 50%. La pondération utilisée comporte des 1 pour l'intégralité des modes du système. De plus, on utilise plus de variables du correcteur que précédemment : en effet, on s'autorise la modification des gains de K_f et de D_k (transmission directe du correcteur) en plus de la modification des gains de K_c . Le résultat obtenu n'est pas satisfaisant. Certes, l'erreur commise sur les différents placements des modes du système est indiquée comme nulle par le résultat de l'analyse, mais les gains obtenus pour conserver la position initiale des modes sont élevés, si bien que l'ajustement perd de son caractère local. Parmi les modes nécessitant de grands gains pour être contrôlés, figure principalement le second mode flexible.

Figure 11.16 : On décide d'éliminer l'influence du second mode flexible sur le critère afin de voir si on obtient une amélioration de l'ajustement. On fixe donc à 0 les deux pondérations correspondantes. Le rang de la matrice H passe donc de 10 à 8. On constate une nette amélioration du résultat (le premier mode flexible aussi bien que le mode basse fréquence du correcteur se déplacent beaucoup moins).

Figure 11.17 : On élimine à présent les pondérations sur les deux modes du correcteur. Le résultat est meilleur en ce qui concerne le déplacement du mode rigide (on suit un peu plus une direction d'iso-pulsation) et aussi en ce qui concerne le premier mode flexible, qui ne se déplace plus. Le mode basse fréquence du correcteur se déplace beaucoup moins que pour la figure précédente, mais ceci est "compensé" par un déplacement plus important du mode haute fréquence du correcteur.

Figure 11.18 : Le résultat présenté sur cette figure est obtenu en considérant que les gains de K_c sont les seuls à pouvoir être modifiés. Si on compare avec la figure 11.17 (où les gains de K_c , K_f et D_k pouvaient tous varier), on constate que le résultat est moins satisfaisant ici.

11.4. CHOIX DE LA STRUCTURE

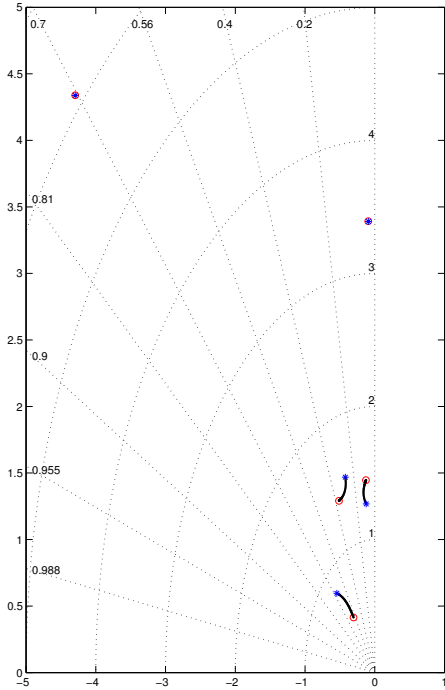


FIGURE 11.15:

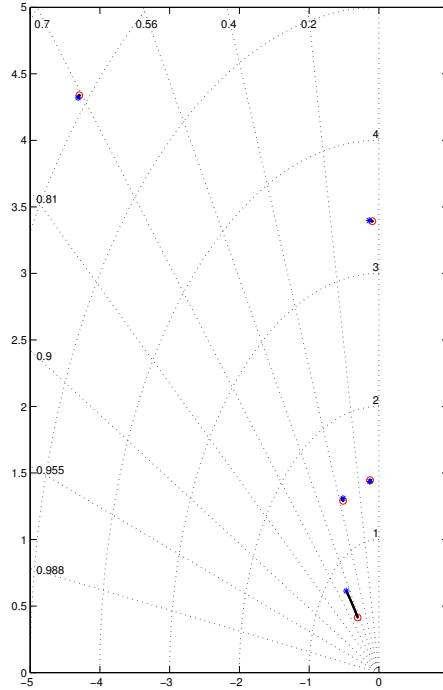


FIGURE 11.17:

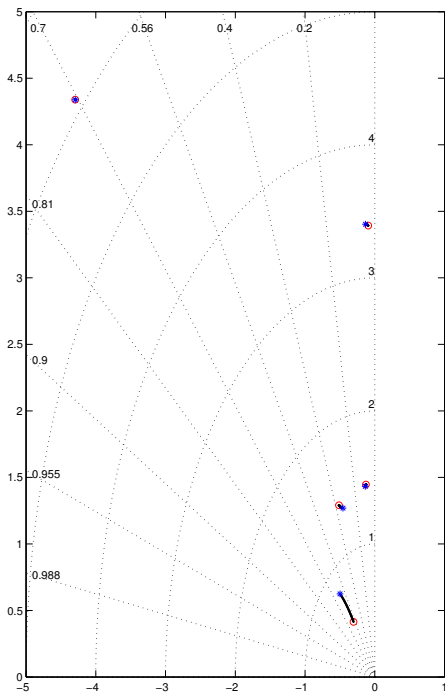


FIGURE 11.16:

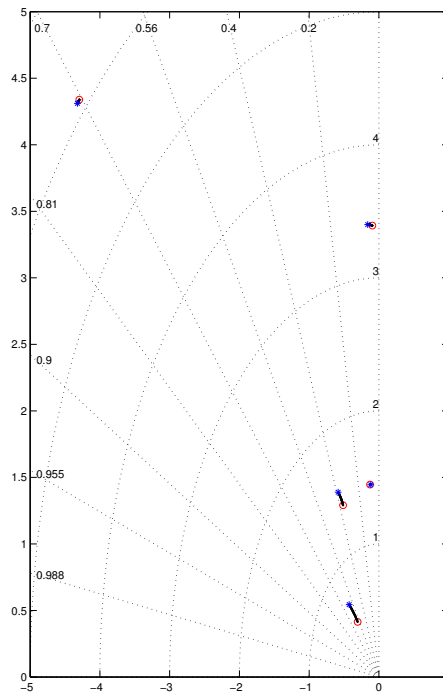


FIGURE 11.18:

Il est possible de déplacer un certain nombre de modes de la boucle fermée issus du système avec la méthode que nous proposons, et cela sans prendre en considération tous les paramètres du correcteur sur lesquels on aurait la possibilité d'agir. Le choix d'une structure estimation/retour d'état facilite cette démarche. Cela nécessite tout de même plusieurs précautions :

- lorsqu'on travaille avec une partie seulement des variables du correcteur (K_c par exemple), il est inutile d'essayer de modifier une caractéristique modale qui est trop peu commandable par cet ensemble de gains ;
- les valeurs singulières trop faibles de la matrice H doivent être éliminées pour conserver le caractère local de l'ajustement. Si, pour un ajustement local, on venait à trouver des gains de réglage trop importants, alors il faudrait douter de la validité du résultat ;
- dans certains cas, un mauvais choix de pondérations peut conduire à des résultats ne correspondant pas à la réalité. On prendra donc soin de tester plusieurs pondérations avant de conclure sur un ajustement ^a.

^a. Comparé au calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$, le temps mis pour calculer une direction d'ajustement pour une pondération donnée est petit.

11.4.2 Influence du modèle embarqué

Pour les ajustements effectués dans la sous-section 11.4.1, on a utilisé un modèle embarqué d'ordre 4 qui estimait principalement le mode rigide et le premier mode flexible. On se propose de choisir un estimateur qui estime à présent le mode rigide et le second mode flexible, le correcteur vu dans son ensemble restant identique au correcteur nominal.

Nouveau modèle embarqué et correcteur correspondant

On décide à présent de réduire le système masses-ressorts, initialement d'ordre 6, à l'ordre 4 par une troncature dans sa base "naturelle". Pour cela, on supprime simplement les états x_1 et \dot{x}_1 dans l'équation (11.20). On obtient alors le modèle embarqué suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{f_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & \frac{f_2}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_0} & \frac{f_2}{m_0} & -\frac{k_1+k_2}{m_0} & -\frac{f_1+f_2}{m_0} \end{bmatrix} X_r + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] X_r \end{cases} \quad (11.27)$$

On peut remarquer que ce système réduit est assez peu représentatif du système complet. En effet, l'action de l'entrée u_1 a disparu et les pôles du système sont différents

de ceux du système complet :

$$\text{spec}(A_r) = \begin{bmatrix} -0.0125 + 3.2472 \mathbf{i} \\ -0.0125 - 3.2472 \mathbf{i} \\ -0.0010 + 0.9066 \mathbf{i} \\ -0.0010 - 0.9066 \mathbf{i} \end{bmatrix} \quad \text{spec}(A) = \begin{bmatrix} -0.0135 + 3.3608 \mathbf{i} \\ -0.0135 - 3.3608 \mathbf{i} \\ -0.0025 + 1.4393 \mathbf{i} \\ -0.0025 - 1.4393 \mathbf{i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aucun pôle de ce modèle réduit n'occupe une place d'un pôle du modèle complet, et le mode rigide a disparu. On peut comparer les diagrammes de BODE du modèle complet, du modèle embarqué de la sous-section 11.4.1 et de ce nouveau modèle réduit sur la figure 11.19. Les courbes en trait continu constituent les diagrammes de BODE du modèle complet ; celles en tirets représentent les transferts du modèle réduit lorsqu'on néglige la masse m_0 ; enfin, les courbes en tirets et pointillés désignent les transferts du modèle réduit par troncature des états x_1 et \dot{x}_1 .

À partir de ce modèle réduit, on construit les gains K_c et K_f de la forme estimation/retour d'état, de sorte que le correcteur résultant soit identique au correcteur nominal. La technique utilisée est celle décrite dans [3] et [4]. Ce qui donne les gains suivants :

$$K_c = \begin{bmatrix} 0.2859 & 0.0918 & 0.0237 & -0.0683 \\ 0.3768 & 0.2345 & -0.1323 & -0.0682 \end{bmatrix} \quad K_f^T = [10.22 \quad 42.36 \quad -4.96 \quad -140.5] \quad (11.28)$$

Résultats des ajustements avec le nouveau modèle embarqué

Figure 11.20 : L'objectif fixé est la modification de 50% de la pulsation du mode rigide. On utilise une matrice de pondération P égale à l'identité et on s'autorise à modifier l'intégralité des gains utilisables, c'est-à-dire les gains des matrices K_c , K_f et D_k . Le résultat est semblable à celui de la figure 11.15. Le déplacement du premier mode flexible et du mode basse fréquence du correcteur est mal contrôlé ; cependant, le mode rigide suit une direction proche de la direction d'iso-amortissement. L'ajustement semble donc réalisable.

Figure 11.21 : Dans le cas où le modèle embarqué était plus représentatif de la dynamique du système, on avait eu des problèmes lorsqu'on considérait le second mode flexible dans le critère. On décide par conséquent de fixer à 0 les pondérations correspondantes. Le résultat s'améliore, comme il s'était amélioré entre la figure 11.15 sur la figure 11.16 ; cependant, il reste légèrement moins bon que ce qu'il n'était avec le précédent modèle embarqué (figure 11.16).

Figure 11.22 : Ici, on choisit des pondérations unitaires uniquement pour les modes issus du système (premier mode flexible et mode rigide), les autres modes ont une pondération nulle dans le critère. Le résultat est moins satisfaisant que le résultat de la

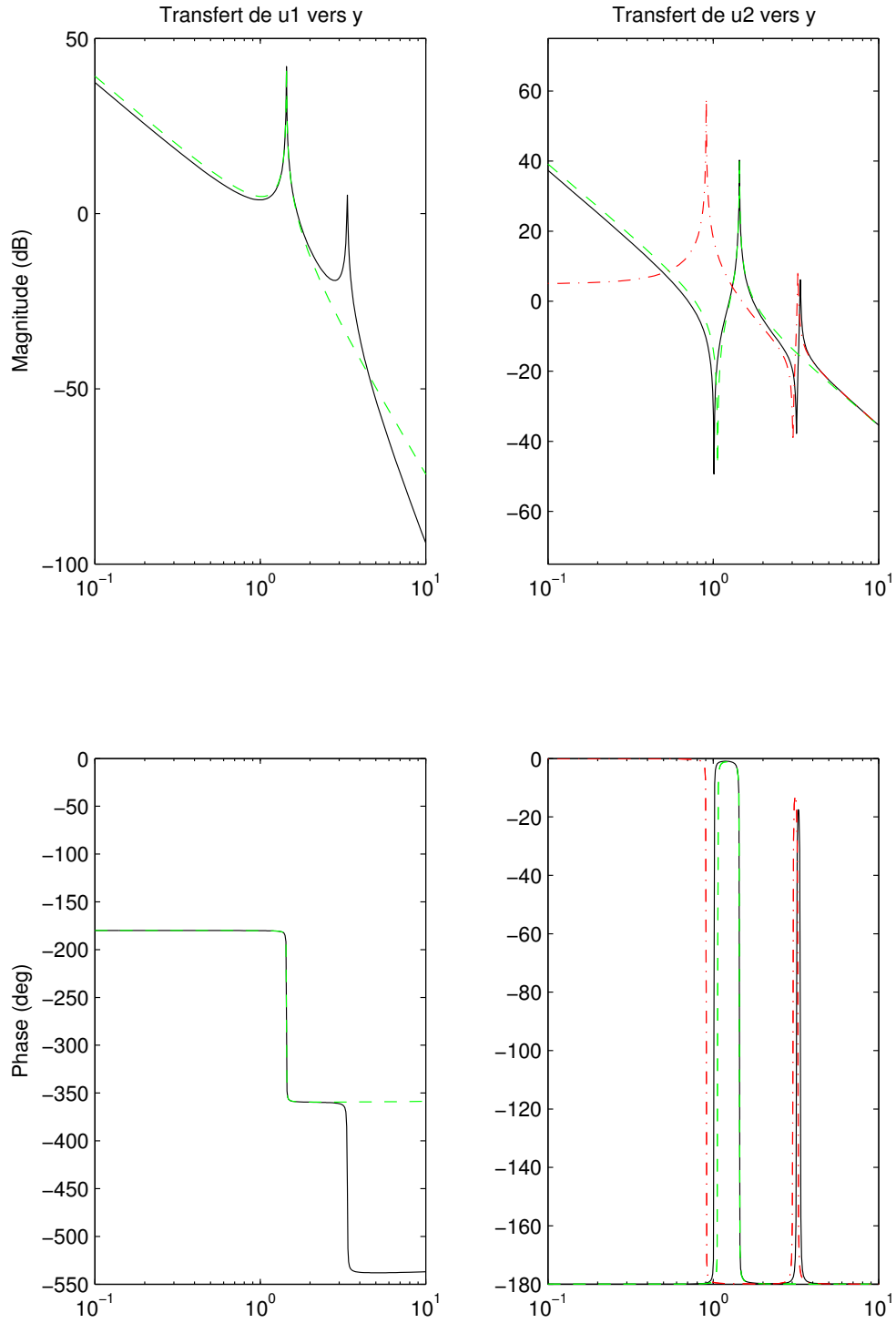


FIGURE 11.19: Diagrammes de BODE pour les différents modèles du système masses-ressorts.

11.4. CHOIX DE LA STRUCTURE

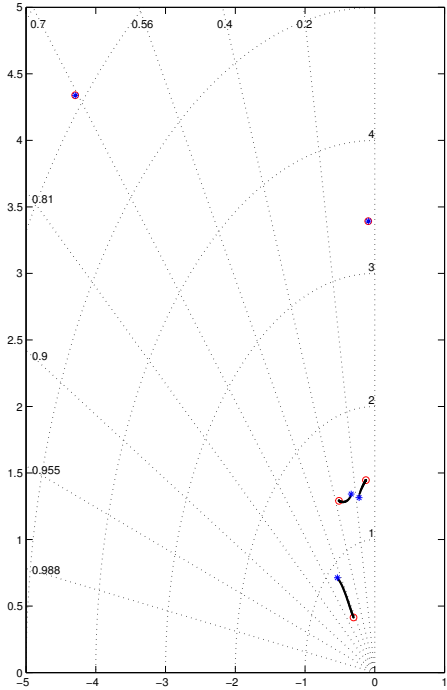


FIGURE 11.20:

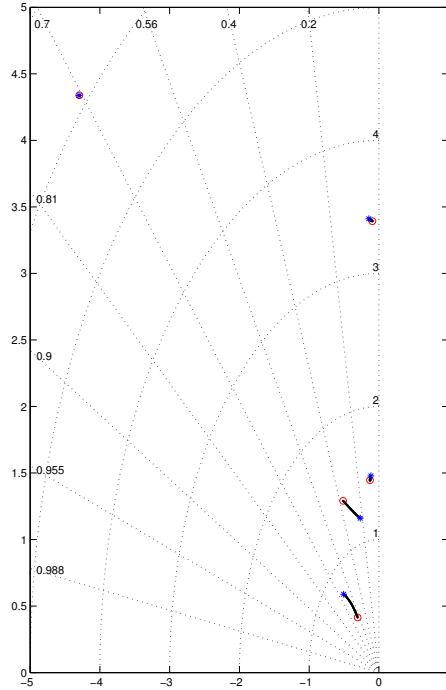


FIGURE 11.22:

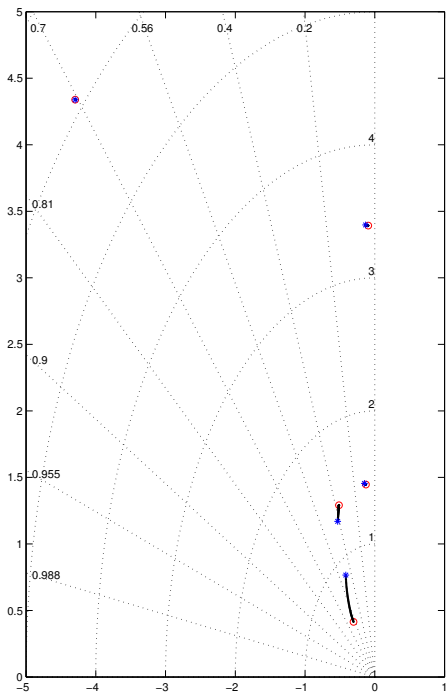


FIGURE 11.21:

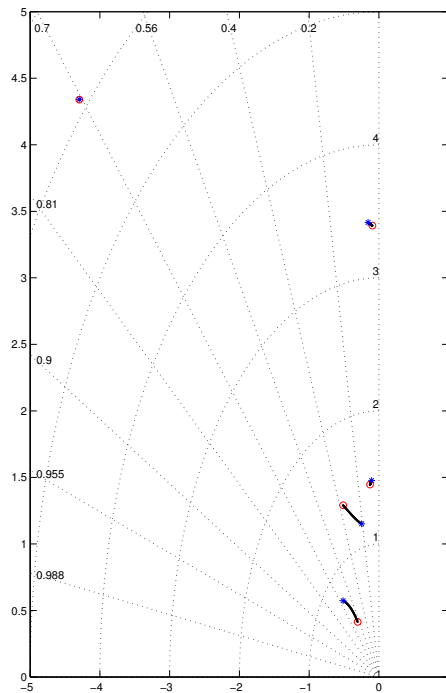


FIGURE 11.23:

figure 11.21, où on a considéré les pôles du correcteur dans le critère, et que celui de la figure 11.17, où on utilise les mêmes pondérations avec un modèle embarqué différent. Il se peut donc que les gains K_c et K_f aient une influence sur tous les modes du système. Ici, la séparation des dynamiques est moins bien vérifiée que dans le cas du modèle embarqué représentatif.

Figure 11.23: Afin de vérifier ce qui a été dit précédemment, on conserve les même pondérations, mais on effectue l'ajustement en n'utilisant que les gains de la matrice K_c . Le résultat observé confirme la conclusion précédemment citée : la direction synthétisée est de moins bonne qualité que la direction synthétisée à la figure 11.22.

Étant donné que les gains de K_c et de K_f ont des ordres de grandeur différents, et qu'apparemment ils contribuent tous deux au bon placement du mode rigide, on décide d'effectuer un *scaling* sur les variations δK_c et δK_f avant le calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$. On normalise donc les variations de $\Delta\theta^k$ de la sorte : $\delta K_c(i, j) = 0.1 K_c(i, j) \Delta\theta^k(4(i-1)+j)$ et $\delta K_f(i) = 0.1 K_f(i) \Delta\theta^k(8+i)$.

Figure 11.24: Cette figure représente le résultat obtenu pour une matrice de pondération identité lorsqu'on se préoccupe toujours de la pulsation du mode rigide. Il ne semble pas y avoir de nette amélioration par rapport à la figure 11.20.

Figure 11.25: On élimine la pondération sur le second mode flexible. Cette fois-ci, le résultat est parlant : il est de même qualité que le meilleur résultat obtenu avec le modèle embarqué initial. Le mode rigide suit une direction d'iso-amortissement et les autres modes du système ne se déplacent quasiment pas.

Figure 11.26: On réduit le nombre de pondérations unitaires, en ne prenant en compte que les pondérations sur le mode rigide et le premier mode flexible. Le résultat est cette fois-ci beaucoup plus dégradé qu'il ne l'était entre les figures 11.21 et 11.22.

Figure 11.27: On supprime l'utilisation des gains K_f et D_k pour voir si on a également une détérioration par rapport à la figure 11.26. On constate, en fait, que le résultat est moins mauvais. Il est d'ailleurs comparable à celui de la figure 11.23.

11.4. CHOIX DE LA STRUCTURE

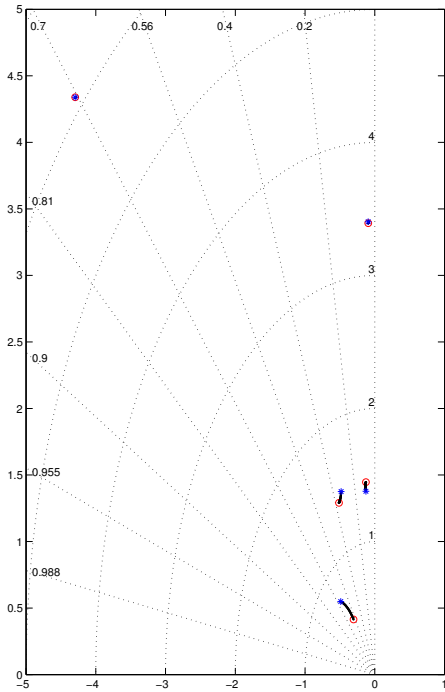


FIGURE 11.24:

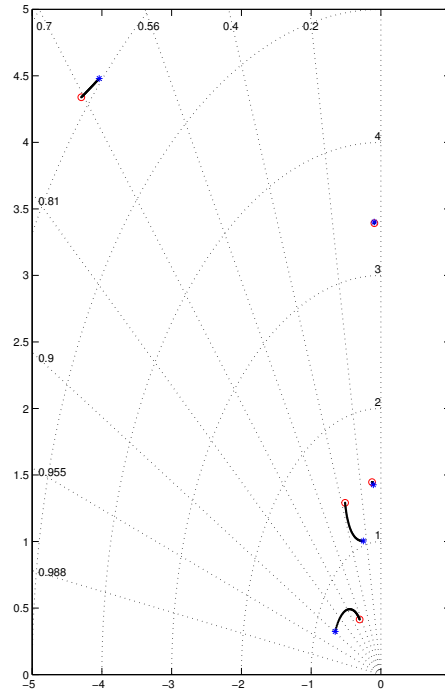


FIGURE 11.26:

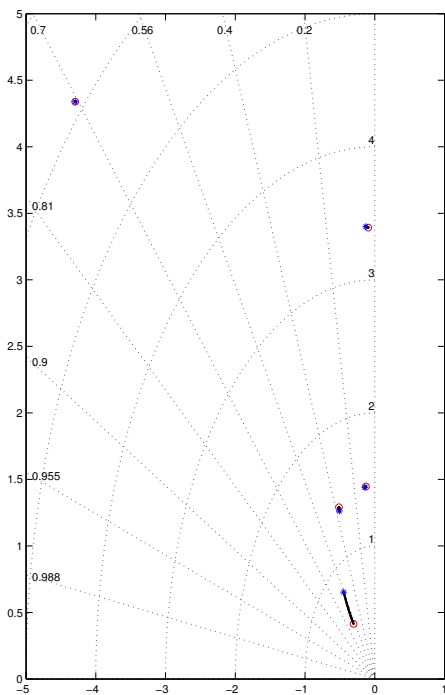


FIGURE 11.25:

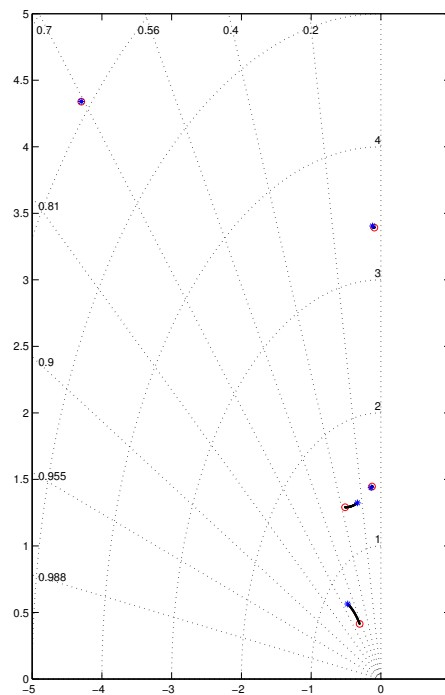


FIGURE 11.27:

Il apparaît que le choix de la structure à utiliser peut avoir de nettes conséquences sur le résultat d'un ajustement particulier. Les conclusions de cette section sont les suivantes :

- le choix d'une structure estimation/retour d'état se justifie principalement par le fait qu'on peut réduire le nombre de variables utilisées par l'algorithme. Pour que cette réduction du nombre de variables ne porte pas trop préjudice à la qualité de l'ajustement, il est nécessaire que le modèle embarqué choisi soit représentatif du système complet ;
- lorsque le modèle embarqué est trop peu représentatif du système, il devient nécessaire de considérer l'intégralité des gains du correcteur ;
- la matrice de pondération joue un rôle important dans le résultat de l'ajustement. Il convient d'éviter de prendre en compte dans le critère le déplacement des modes trop peu commandables.

11.4.3 Changements de base

On étudie, dans ce paragraphe, le cas particulier d'un changement de modèle embarqué qui est un simple changement de base. Pour cela, on utilise le modèle réduit initial (qui était représentatif de la dynamique globale du système - voir sous-section 11.4.1) dans une base différente. La base utilisée ici est une base bloc-diagonale, composée de deux blocs de JORDAN. Le système A_0, B_0, C_0 est donc le même que celui décrit par (11.21) à la page 173, mais dans la base suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2.072 & -0.005 \end{bmatrix} X_r + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.909 & 0.909 \\ 0.0021 & -0.0017 \\ 1.73 & -1.44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5258 & 0.0006 \end{bmatrix} X_r \end{array} \right. \quad (11.29)$$

Comme pour les résultats 11.24 à 11.27, on utilise une pondération visant la mise à l'échelle des gains de K_c et K_f lors du calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$.

Figure 11.28 : L'objectif fixé est la modification de 50% de la pulsation du mode rigide. On utilise une matrice de pondération P égale à l'identité et on s'autorise à modifier l'intégralité des gains utilisables, c'est-à-dire les gains des matrices K_c, K_f et D_k . Le résultat est semblable à celui de la figure 11.15, à la différence près que le premier mode flexible ne se déplace plus. Il semble donc que l'action de l'ajustement sur les différents pôles du système soit mieux découpée.

Figure 11.29 : Dans tous les cas précédents, on s'était aperçu d'une dégradation de l'ajustement lors de la prise en considération des pondérations sur le second mode flexible du système. On procède donc de même que pour la figure 11.16 en attribuant une

11.4. CHOIX DE LA STRUCTURE

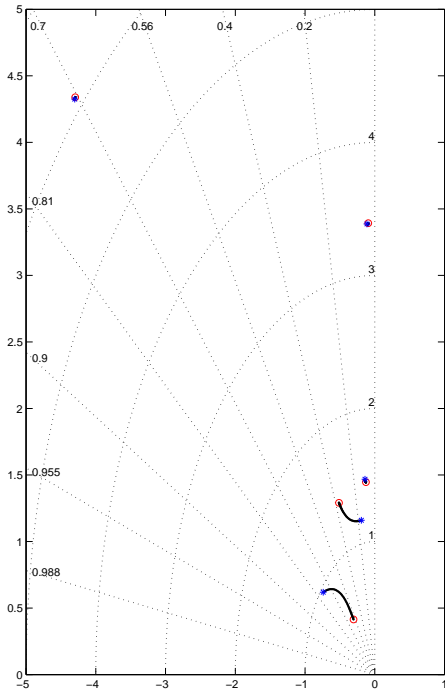


FIGURE 11.28:

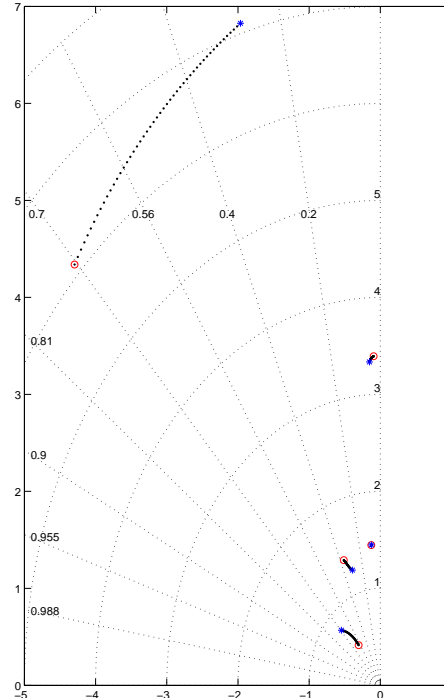


FIGURE 11.30:

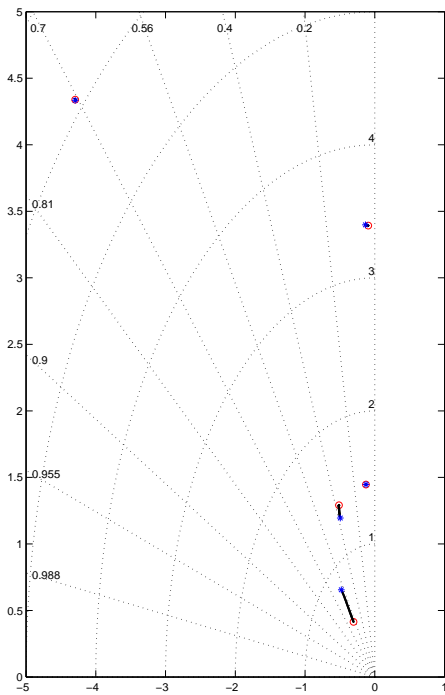


FIGURE 11.29:

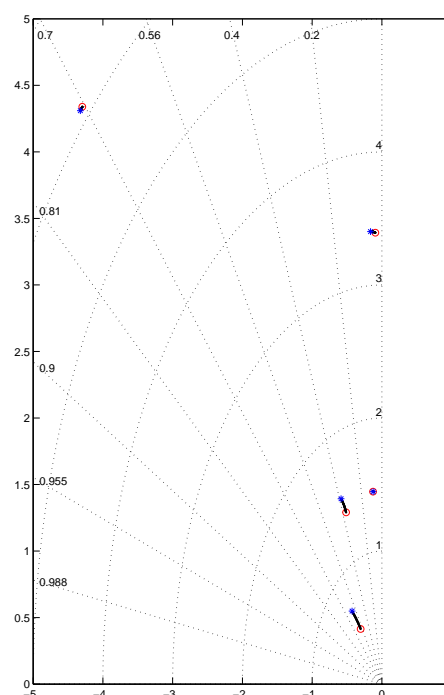


FIGURE 11.31:

valeur nulle à ces pondérations. Le résultat confirme ce qui était observé précédemment puisqu'on observe une amélioration par rapport à la figure précédente. Le seul mode à se déplacer légèrement est le mode basse fréquence de la dynamique du correcteur. Quant au mode rigide, il se déplace de façon parfaite sur une direction d'iso-pulsation.

Figure 11.30 : On se propose également de vérifier l'action des pondérations sur les modes issus de la dynamique de correction. Pour cela on ne garde des pondérations unitaires que pour le mode rigide et le premier mode flexible ; les autres pondérations étant nulles. Le résultat est cette fois-ci décevant. Il est en effet comparable à celui de la figure 11.26 où on avait les mêmes pondérations et un modèle embarqué non-représentatif du système. On peut donc conclure que lorsqu'on utilise tous les gains du correcteur disponibles, il importe d'avoir choisi une matrice de pondérations significative.

Figure 11.31 : Afin de compléter la comparaison avec les cas où on a utilisé un modèle embarqué différent ou utilisé dans une base différente, on effectue l'ajustement en ne considérant que les gains de la matrice K_c , associé à une pondération ne portant que sur le mode rigide et le premier mode flexible. Le résultat est quasiment identique à celui de la figure 11.18 où on a utilisé le même modèle embarqué dans une base différente.

Il apparaît que le choix de la base du modèle embarqué dans laquelle on se trouve a moins d'influence sur l'ajustement que le modèle embarqué lui-même. Cependant, son influence n'est pas nulle. On retrouve le fait que l'utilisation de tous les gains disponibles pour effectuer l'ajustement demande un choix de pondérations adéquat. En particulier, certains pôles non estimés par le modèle embarqué, ou difficilement commandables, ne doivent pas être pris en compte, alors que les pôles issus de la dynamique du correcteur doivent être considérés.

11.5 Méthode d'ajustement de placement de pôles

Ce paragraphe résume la méthode d'ajustement de placement de pôles, que nous venons de présenter. Nous supposons pour cela que la structure du correcteur n'est pas imposée¹¹.

On rappelle que les données du problème sont les suivantes :

- on dispose d'un système d'ordre élevé ;
- associé à ce système, on dispose d'un correcteur nominal d'ordre réduit par rapport à l'ordre du système ;
- on souhaite déplacer certains pôles de la boucle fermée, tout en évitant le déplacement de certains autres ;

11. Lorsque la structure est imposée, on démarre directement à l'étape du calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$.

— une phase de validation doit être évitée, de telle sorte que l'on travaille directement sur l'ensemble modèle complet/correcteur réduit.

La procédure d'ajustement est alors la suivante :

1. On construit, à partir du modèle complet, un modèle d'ordre réduit généralement égal à l'ordre du correcteur. Ce modèle réduit devra, quand cela est possible, être représentatif de la dynamique du modèle complet.
2. On opère un changement de base sur le modèle réduit si nécessaire afin de le placer dans une représentation diagonale par blocs. Cela permet d'améliorer un peu d'éventuels couplages lors de l'ajustement entre différents modes issus de la dynamique du système.
3. À partir de ce modèle réduit et du correcteur nominal, on construit la forme estimation/commande équivalente à ce correcteur. Autrement dit, on calcule les matrices de gains K_c et K_f .
4. On fait ensuite apparaître la variation des gains du correcteur sur le système en boucle fermée. La forme LFT n'est pas indispensable. Il suffit, en fait, de faire une fonction, qui, à partir des deux entrées (système nominal en boucle fermée et variations du correcteur), calcule le système en boucle fermée après application de ces variations. Notons que cette fonction n'est autre qu'un simple feedback lorsque le système est sous forme LFT. La fonction en question devra donner en sortie le système "perturbé" dans une forme diagonale par blocs.
5. On ajoute ensuite les variations fictives de type modal. Ces variations peuvent également s'écrire au travers d'une forme LFT. Le résultat de ce point et du précédent, doit être par contre sous la forme d'une fonction d'entrée $\Delta\theta$ et de sortie $Sys_{bf}(\Delta\theta)$ sous forme diagonale par blocs. On ajoutera si nécessaire un *scaling* sur les gains de K_c et K_f (lorsque ces derniers ont des ordres de grandeur différents).
6. Vient à présent le calcul de la matrice $G_{\theta_0}^{-1}$. La procédure de ce calcul a déjà été détaillée au chapitre 9.
7. On se fixe un vecteur $\delta\theta^{cmdes}$ et une matrice de pondération P . L'ensemble doit être conforme aux objectifs de l'ajustement. Le choix de la matrice de pondération nécessite parfois plusieurs essais.
8. On synthétise ensuite la direction $\delta\theta^k$ optimale par minimisation du critère avec pondération présenté à la section 11.2.2.

Notons que les deux dernières étapes peuvent être répétées plusieurs fois jusqu'à obtention d'une matrice de pondération P menant à des résultats satisfaisants. Comme l'étape la plus longue de la phase d'ajustement est le calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$ (qui ne s'effectue qu'une seule fois), le coût relatif en temps de cette réitération est faible.

11.6 Extensions de la méthode

Jusqu'à présent, la méthode était exploitée pour modifier uniquement des caractéristiques modales en boucle fermée. Cependant, cet outil d'identification permet d'autres

types d'ajustements.

11.6.1 Désensibilisation paramétrique des correcteurs

Les synthèses classiques de type LQ -LQG, LQR et LQG/LTR- n'assurent à aucun moment une robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques. La synthèse LQG/LTR, connue pour recouvrer les garanties de marges de stabilité d'un régulateur LQR ou d'un filtre de KALMAN, ne donne aucune garantie de robustesse à la stabilité.

Il est par conséquent souvent utile de robustifier le correcteur vis-à-vis des incertitudes paramétriques. Cette robustification peut avoir lieu directement lors de la phase de synthèse, c'est ainsi qu'a été élaborée la synthèse PRLQR (*"Parameter Robust Linear Quadratic Regulator"*), ou encore la synthèse PRLQG (*"Parameter Robust Linear Quadratic Gaussian"*) pour la robustification des synthèses LQG. Le lecteur pourra se reporter à [4] pour plus de détails.

Outre les désensibilisations de correcteurs classiques issues de synthèses de type LQ, il est possible de désensibiliser un correcteur en utilisant les propriétés de l'identification paramétrique, si celle-ci avait effectivement eu lieu. L'outil est donc le même que celui utilisé jusqu'à présent. Cet outil a déjà été utilisé dans le cadre des recherches effectués au sein du DCSD, afin de construire une méthode de synthèse robuste aux incertitudes paramétriques [27, 29]. Mais on peut également, à partir de la formulation mathématique de la mesure de robustesse obtenue pour la phase d'analyse, chercher à robustifier un régulateur donné, tout en assurant un bon compromis performance/robustesse [26, 9]. On se trouve alors dans le cadre de notre étude visant l'ajustement de lois de commande.

Dans ce qui suit, on se contente d'exposer brièvement la méthode qui permet de robustifier un correcteur vis-à-vis des incertitudes paramétriques. On peut se reporter à [9] pour avoir un aperçu applicatif de la méthode.

Robustesse aux performances

Lors de la phase de désensibilisation, il importe de garder une certaine robustesse aux performances de l'ensemble système/correcteur. Le compromis performances/robustesse paramétrique ne doit pas être entièrement au profit de la robustesse.

Afin d'éviter une dégradation brutale des performances lors de la phase d'ajustement, on décide de construire, grâce à l'outil développé au chapitre 9, une classe de régulateurs aux performances semblables. Ultérieurement, parmi cet ensemble de régulateurs, on choisira celui qui offre la meilleure robustesse paramétrique.

La construction de l'ensemble de correcteurs assurant des performances semblables au correcteur nominal se fait de la façon suivante :

1. on définit l'ensemble des variables du correcteur que l'on s'autorise à modifier. Si le correcteur est à structure fixée, alors cet ensemble de variables est constitué de l'ensemble des gains "naturels" de la structure utilisée. Tout comme pour un ajustement de placement de pôles de la boucle fermée, lorsque la structure n'est pas imposée, on pourra mettre le correcteur sous forme observateur/retour d'état

et utiliser les différents gains des matrices K_c , K_f , et D_k . L'ensemble de ces gains sera noté θ^k comme précédemment.

2. une fois cet ensemble déterminé, on calcule la matrice $G_{\theta_0^k}^{-1}$ où les seules variables sont les gains du correcteur.
3. par analogie à la mesure de robustesse en stabilité (chapitre 9 p. 115) obtenue par la qualité de l'identification des paramètres inconnus (θ^{cm}) du système en boucle fermée, la robustesse aux performances va être ici quantifiée grâce à la qualité de l'identification des paramètres du correcteur θ^k .
4. la direction de sensibilité minimale donnée par le vecteur propre de $G_{\theta_0^k}^{-1}$, θ_{min}^k , associé à la plus petite valeur propre, constitue donc une direction de robustesse maximale.
5. en se déplaçant le long de cette direction de $+/- \Delta\theta_{min}^k$ on obtient donc deux nouveaux correcteurs qui ont très peu changé la dynamique de la boucle fermée du système.

L'ensemble des correcteurs à performances similaires comprend généralement deux éléments. Ce sont les correcteurs paramétrés par :

- $\theta_0^k + \alpha \theta_{min}^k = \theta_{1+}^k$ et,
- $\theta_0^k - \alpha \theta_{min}^k = \theta_{1-}^k$.

Cependant, il est possible de choisir un plus grand nombre de correcteurs le long de la droite θ_{min}^k .

Désensibilisation aux incertitudes paramétriques

À partir de la direction de robustesse maximale, obtenue dans l'espace paramétrique θ^k , il a été obtenu une classe de régulateurs robustes aux performances. On va alors chercher, dans cette classe de régulateurs, celui qui est le plus robuste aux incertitudes paramétriques. Le vecteur paramétrique que l'on considère à présent est donc θ^{cm} . La mesure de robustesse aux incertitudes choisie est alors la suivante :

$$J_{1+/-} = \text{Tr} \left(G_{\theta_0^{cm}}^{-1} (\theta_{1+/-}^k) \right)$$

La notation $G_{\theta_0^{cm}}^{-1} (\theta_{1+}^k)$ (respectivement $G_{\theta_0^{cm}}^{-1} (\theta_{1-}^k)$) doit se comprendre comme la matrice $G_{\theta_0^{cm}}^{-1}$, de variable θ^{cm} , considérée au voisinage de θ_0^{cm} , le tout calculé pour le correcteur pris en θ_{1+}^k (respectivement en θ_{1-}^k). S'il existe plus de deux éléments dans la classe des correcteurs robustes aux performances on pourrait alors noter le critère J_{11} , J_{12} etc.

Le choix de la trace comme critère de robustesse permet d'envisager une augmentation de la robustesse pour toutes les grandeurs de θ^{cm} , tout en pondérant plus fortement dans le critère les directions de robustesse minimale (les plus grandes valeurs propres de la matrice $G_{\theta_0^{cm}}^{-1}$ ont plus d'importance). Cependant, on aurait pu choisir une autre grandeur pour la mesure de la robustesse. Par exemple, en utilisant la plus grande valeur propre de $G_{\theta_0^{cm}}^{-1}$:

$$J_{1+/-} = \lambda_{max} \left(G_{\theta_0^{cm}}^{-1} (\theta_{1+/-}^k) \right)$$

L'algorithme de désensibilisation des régulateurs aux incertitudes paramétriques peut donc se résumer par les étapes suivantes :

1. Établir une classe de régulateurs robustes aux performances avec la méthode décrite au paragraphe précédent. Cette classe comportera généralement deux éléments. Rappelons que cette construction s'effectue dans l'espace paramétrique θ^k .
2. Pour chaque élément de la classe précédente, on cherche celui qui a la plus grande robustesse aux incertitudes ; soit encore celui dont le critère de robustesse aux incertitudes, $J_{i+/-}$, est le plus petit. Chacun des critères étant associé à un correcteur, on obtient par conséquent un nouveau correcteur paramétré soit en θ_{1+}^k , soit en θ_{1-}^k .
3. On recommence la procédure à partir de la première étape en considérant le nouveau correcteur.

L'algorithme s'arrête quand :

- on est passé en-dessous du critère de robustesse désiré ;
- ou quand lors de la phase 2, les deux nouveaux correcteurs (en θ_{i+}^k et θ_{i-}^k) ont un critère de robustesse aux incertitudes ($J_{i+/-}$) plus grand que le critère conservé à l'étape précédente ($\min(J_{(i-1)+/-}$).

Dans ce dernier cas, on peut néanmoins continuer l'algorithme si le dernier correcteur considéré en $\theta_{(i-1)}^k$ n'est pas satisfaisant. On définit alors un nouvel ensemble de correcteurs robustes aux performances à partir de $\theta_{(i-1)}^k$, non pas en considérant le vecteur propre θ_{min}^k associé à la valeur propre minimale de $G_{\theta_{(i-1)}^k}^{-1}$, mais en considérant le vecteur propre $\theta_{min'}^k$ associé à la seconde plus petite valeur propre de $G_{\theta_{(i-1)}^k}^{-1}$. Les deux correcteurs correspondants sont alors paramétrés par :

- $\theta_i^k + \alpha \theta_{min'}^k = \theta_{i+}^k$ et,
- $\theta_i^k - \alpha \theta_{min'}^k = \theta_{i-}^k$.

Si on n'arrive pas à améliorer le critère, on recommence en prenant la troisième plus petite valeur propre etc. Et si finalement, quelle que soit la valeur propre considérée, le critère ne peut pas être amélioré, c'est qu'on se trouve, localement, sur un point de robustesse paramétrique maximale, par conséquent on ne pourra pas atteindre l'objectif désiré en partant du correcteur paramétré par $\theta_{(i-1)}^k$. On peut alors considérer le point $\theta_{(i-2)}^k$ (et ainsi de suite), ou arrêter l'algorithme.

11.6.2 Autres méthodes itératives

La méthode itérative présentée pour la désensibilisation paramétrique d'un correcteur se base sur le principe suivant :

- on définit un ensemble de correcteurs robustes aux performances grâce à l'outil d'identification bayésienne,
- puis, parmi cet ensemble, on cherche un correcteur qui minimise un certain critère (ici de robustesse paramétrique).

On peut donc envisager de généraliser cette façon de procéder à d'autres types de critères ; par exemple, minimiser la norme d'un transfert donné dans un espace de correcteurs robustes aux performances.

Cette voie n'a pas été explorée durant cette thèse, mais pourrait faire l'objet d'une étude ultérieure.

11.6.3 Réduction de la dimension de l'espace paramétrique

À la page 167, dans la section 11.2.2, lorsque la matrice $G_{11}^{-1}G_{12}$ est de rang plein en lignes (mais pas nécessairement en colonnes), alors la solution optimale en $\Delta\theta^k$ pour une variation modale désirée s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta\theta^{k*} &= G_{12}^T G_{11}^{-1} (G_{11}^{-1} G_{12} G_{12}^T G_{11}^{-1})^{-1} \Delta\theta^{cm\ des} + \mathcal{N} \\ G_{11}^{-1} G_{12} \mathcal{N} &= 0 \end{aligned} \tag{11.30}$$

Ce résultat est particulièrement intéressant. En effet, cela signifie que si l'on choisit $\Delta\theta^k = \mathcal{N}$ (dans le noyau de $G_{11}^{-1}G_{12}$) l'ajustement qui en résulte ne modifie pas la position des pôles de la boucle fermée. Si on va un peu plus loin et qu'on choisit une matrice de pondération P qui ne prend pas en compte dans le critère certains pôles (ce qui correspond à des zéros sur la diagonale de P), alors le choix de $\Delta\theta^k$ dans le noyau de $\sqrt{P}G_{11}^{-1}G_{12}$ conduit à un ajustement qui ne modifie pas les pôles pris en compte.

On peut par conséquent imaginer, lors d'un problème d'optimisation où :

- les variables d'optimisation sont les paramètres $\Delta\theta^k$,
- et les contraintes consistent à ne pas déplacer certains pôles,

transformer le problème :

on réduit le nombre des variables d'optimisation en se plaçant dans le sous-espace correspondant au noyau de $\sqrt{P}G_{11}^{-1}G_{12}$, ce qui permet de supprimer en même temps les contraintes sur les pôles.

Ce type de transformation d'un problème d'optimisation pourrait s'appliquer à n'importe quel critère, du moment qu'il existe une contrainte forte sur un ou plusieurs pôles.

11.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on s'est efforcé de mettre au point une méthode d'ajustement de placement de pôles qui puisse s'appliquer sur un ensemble {système - correcteur} ne permettant pas d'avoir un estimateur d'ordre complet (le système est d'ordre trop élevé par rapport à celui du correcteur). Pour cela, on a été amené à construire un critère qui soit représentatif de l'écart qu'il y a entre la position d'un pôle et la position qu'on souhaiterait qu'il ait. Ce critère s'articule lui-même autour de l'analyse faite au chapitre 10 grâce à l'outil d'identification paramétrique développé.

Les résultats obtenus pour des systèmes relativement simples sont satisfaisants, mais dépendent tout de même de certains facteurs, principalement :

- le choix des paramètres du correcteur qu'on s'autorise à modifier,
- le choix du modèle embarqué qu'on utilise, lorsqu'on souhaite utiliser un correcteur sous sa forme estimation/retour d'état -en particulier quand le nombre de paramètres que l'on s'autorise à modifier est réduit.

La méthode a tout de même l'avantage de pouvoir s'appliquer sur tout type de systèmes et de correcteurs en respectant la structure de ce dernier. Il faut néanmoins rappeler que son utilisation reste locale.

Enfin, on a pu voir dans ce chapitre que l'outil d'identification paramétrique développé au chapitre 9 avait d'autres champs d'application possibles, en particulier, dans la robustification de lois de commande vis-à-vis de paramètres incertains.

Chapitre 12

Application au modèle avion

12.1 Position du problème

Le modèle avion utilisé ici correspond au modèle latéral présenté dans la partie I au chapitre 3. Ce modèle comporte 60 états, 10 sorties (dont 6 sont des mesures et 4 sont utilisées pour les simulations temporelles) et 4 entrées (qui sont toutes des commandes). En outre, on dispose d'un correcteur initial à 20 états, 6 entrées et 4 sorties, conçu pour répondre à des exigences de qualités de vol (réglage des performances rigides - voir figure 12.2).

12.1.1 Le correcteur initial

On présente ici le correcteur initial. La figure 12.1 représente le lieu des racines de $-K_0(s)P_{22}(s)$ lorsqu'on fait varier le gain de boucle de 0 à 1. $K_0(s)$ désigne le correcteur initial et $P_{22}(s) = P(5 : 10, :)$ le modèle latéral de l'avion entre les 4 commandes et les 6 mesures.

Les 'x' bleus représentent les pôles du modèle de l'avion en boucle ouverte. Les 'x' verts (en clair) correspondent aux pôles du correcteur. Les '+' rouges, quant à eux, indiquent l'emplacement des pôles du système en boucle fermée. On peut suivre chaque pôle depuis sa position en boucle ouverte jusqu'à sa position en boucle fermée grâce aux lignes pointillées en noir.

On peut constater que ce correcteur place les modes rigides du système de la façon suivante :

- le mode de roulis hollandais est placé en $-0.85 + j - 1.80i$, sa pulsation est de 1.99 et son amortissement de 0.43 ;
- le mode spiral est placé en -0.4 ;
- le mode de roulis, quant à lui, est placé en -0.67 .

Ce positionnement conduit à un dépassement important sur la sortie β lorsqu'on applique comme consigne un échelon unitaire de β_{ref} . La cause principale est le trop faible amortissement du mode de roulis hollandais.

Les simulations temporelles sont établies à partir du schéma 12.2. La précommande statique H est calculée pour avoir un gain statique unitaire entre (β, ϕ) et $(\beta_{ref}, \phi_{ref})$.

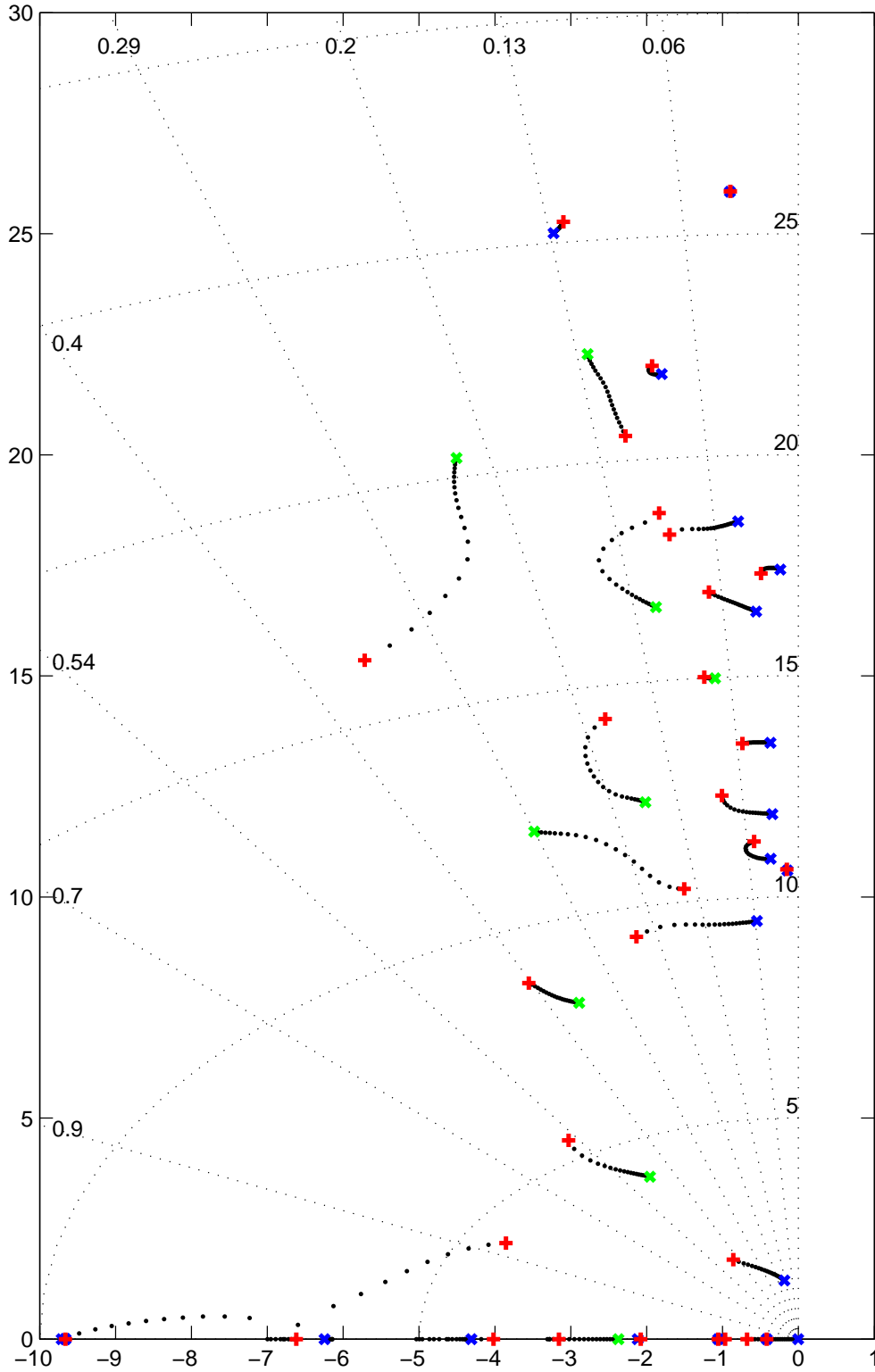


FIGURE 12.1: Lieu des racines de $-K_0(s)P(s)$.

12.2. AJUSTEMENTS RÉALISÉS

En amont de H , on trouve le produit de matrices :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

qui est utilisé pour établir un virage coordonné et une consigne en p_{ref} (vitesse de roulis).

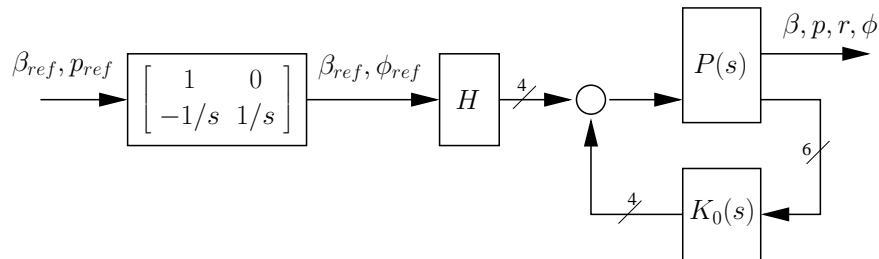


FIGURE 12.2: Schéma fonctionnel.

La figure 12.3 permet de visualiser les 4 sorties β , p , r et ϕ , pour une consigne d'échelon sur β_{ref} (les 4 graphes de la partie supérieure) et p_{ref} (les 4 graphes de la partie inférieure).

On peut constater sur la première courbe le problème de dépassement en β . On peut également constater un problème de déphasage non-minimal sur la réponse de ϕ à un échelon de β_{ref} qui n'est pas acceptable sur le plan des qualités de vol.

12.1.2 Les objectifs

L'objectif qu'on se propose d'atteindre est, dans un premier temps, la réduction du dépassement de β . Comme le mode dominant dans la réponse en β est le mode de roulis hollandais, on va donc augmenter son amortissement. En outre, comme le premier mode flexible a une influence sur les réponses du système, on souhaiterait donc augmenter également son amortissement.

La technique mise en oeuvre pour cet ajustement est celle qui est présentée dans le chapitre 11. Elle utilise l'outil d'identification bayésienne développé dans cette partie III. Pour cela, nous avons mis le correcteur sous forme estimation-retour d'état, afin de diminuer le nombre de paramètres lors du calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$. La structure utilisée est de type observateur de LUENBERGER, qui permet l'estimation de 26 états du système (l'ordre du correcteur étant de 20 et le nombre de sorties de 6). À l'intérieur de cette structure, on ne s'est intéressé qu'aux seuls gains de la matrice de retour d'états estimés K_c . Le nombre de paramètres du correcteur qu'on s'est autorisé à modifier est donc de 104 (26 états par 4 entrées).

12.2 Ajustements réalisés

À partir de :

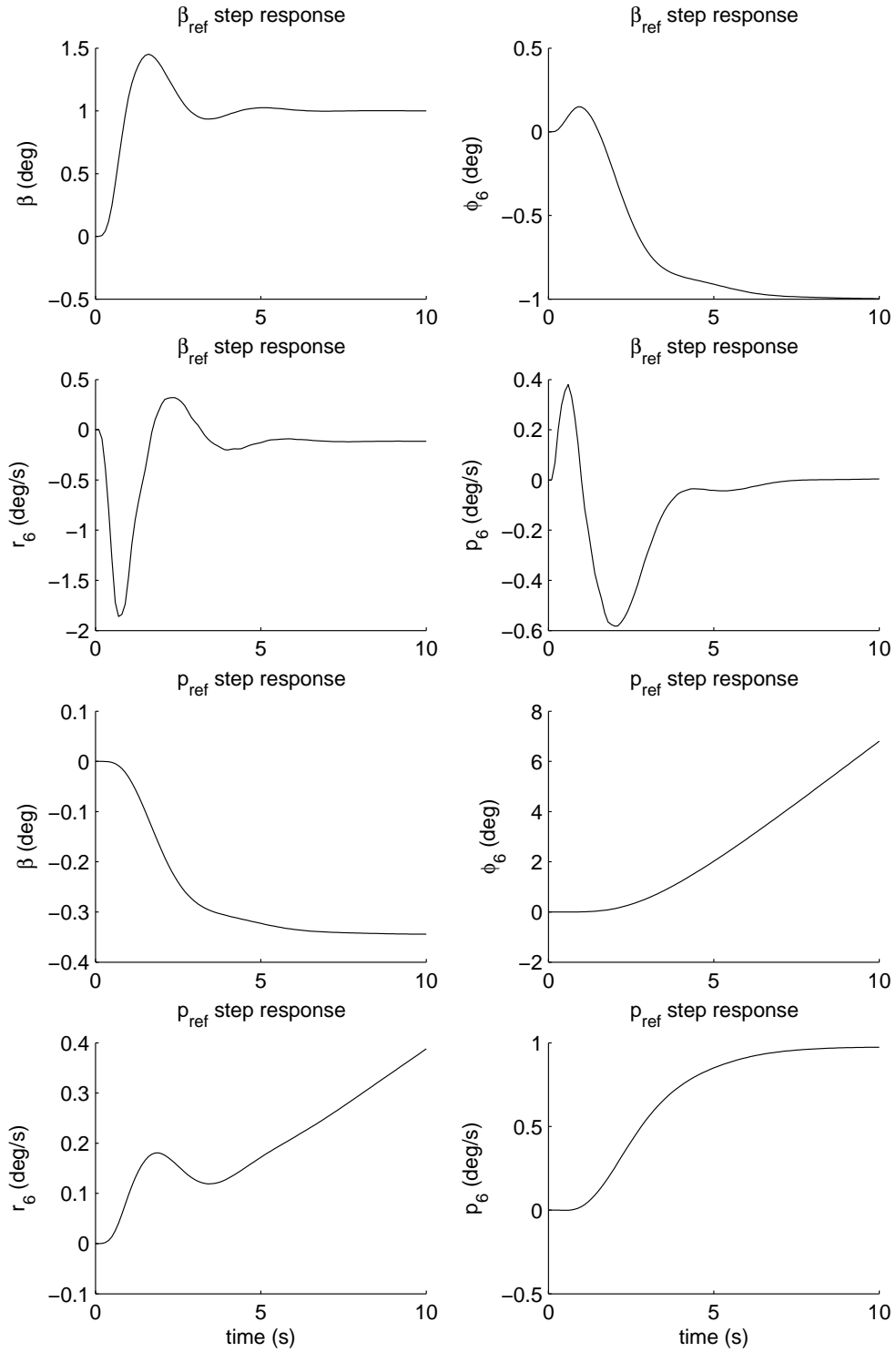


FIGURE 12.3: Simulations temporelles pour le correcteur initial.

12.2. AJUSTEMENTS RÉALISÉS

— la matrice $G_{\theta_0}^{-1}$ calculée avec les variations des 80 pôles de la boucle fermée et des 104 paramètres du correcteur ;
— et d'une matrice de pondérations, définie dans le chapitre 11, où toutes les pondérations sont égales à 0.1, à l'exception de celles qui correspondent aux amortissements et aux pulsations du roulis hollandais et du premier mode flexible, qui ont été prises égales à 1 ;
on a pu calculer pour différentes valeurs du vecteur δ_{des}^{cm} (qui correspond à la variation souhaitée des pôles de la boucle fermée) les variations correspondantes du correcteur.

12.2.1 Premier ajustement

Dans un premier temps, on observe ce qui se passe sur la carte des pôles lorsqu'on fait varier l'amortissement du roulis hollandais, puis lorsqu'on fait varier l'amortissement du premier mode flexible.

La figure 12.4 correspond à un objectif d'augmentation de l'amortissement du roulis hollandais de 40%. La figure 12.5 correspond à un objectif d'augmentation de l'amortissement du premier mode flexible de 35%. Les '+' indiquent la position des pôles de la boucle fermée initiale. Les 'x' indiquent la position des pôles de la boucle fermée après l'ajustement. On peut suivre le déplacement des pôles lorsqu'on fait varier un gain en facteur de δK_c de 0 à 1 par les pointillés noirs.

Sur la figure 12.4, on peut constater qu'on a bien modifié l'amortissement du roulis hollandais sans altérer sa pulsation. Les autres pôles du système ne se déplacent quasiment pas (à l'exception du premier mode flexible dont l'amortissement est légèrement augmenté, pôle situé aux alentours de $-2 \pm 9i$), cependant, les modes issus de la dynamique du correcteur sont influencés par cet ajustement (cela n'a pas de conséquences importantes et traduit comment évolue la dynamique du correcteur en fonction du paramètre de réglage δK_c).

Sur la figure 12.5, on peut constater que l'amortissement du premier mode flexible est bien augmenté. Il s'agit pratiquement de la seule modification importante sur la localisation des pôles du système.

On applique à présent au système la combinaison des deux modifications précédentes : l'augmentation des amortissements du roulis hollandais et du premier mode flexible. Le déplacement des pôles induit par cet ajustement est représenté sur la figure 12.6.

Un des inconvénients de cet ajustement est le déplacement vers le demi-plan droit d'un mode du correcteur (autour de $-1.5 \pm 10i$). On peut d'ailleurs constater sur la figure 12.7 que ce déplacement modifie l'attribution des dynamiques de la boucle fermée.

Ce lieu des racines donne l'emplacement des pôles de la boucle ouverte, du nouveau correcteur et des pôles de la boucle fermée lorsqu'on fait varier le gain de boucle de 0 à 1 (selon les mêmes principes que le lieu des racines établi pour le correcteur initial). Le mode du correcteur qui est déplacé par l'ajustement et le mode premier mode flexible se croisent, de telle sorte que l'on a du mal à distinguer quel pôle de la boucle fermée est associé à quel pôle de la boucle ouverte.

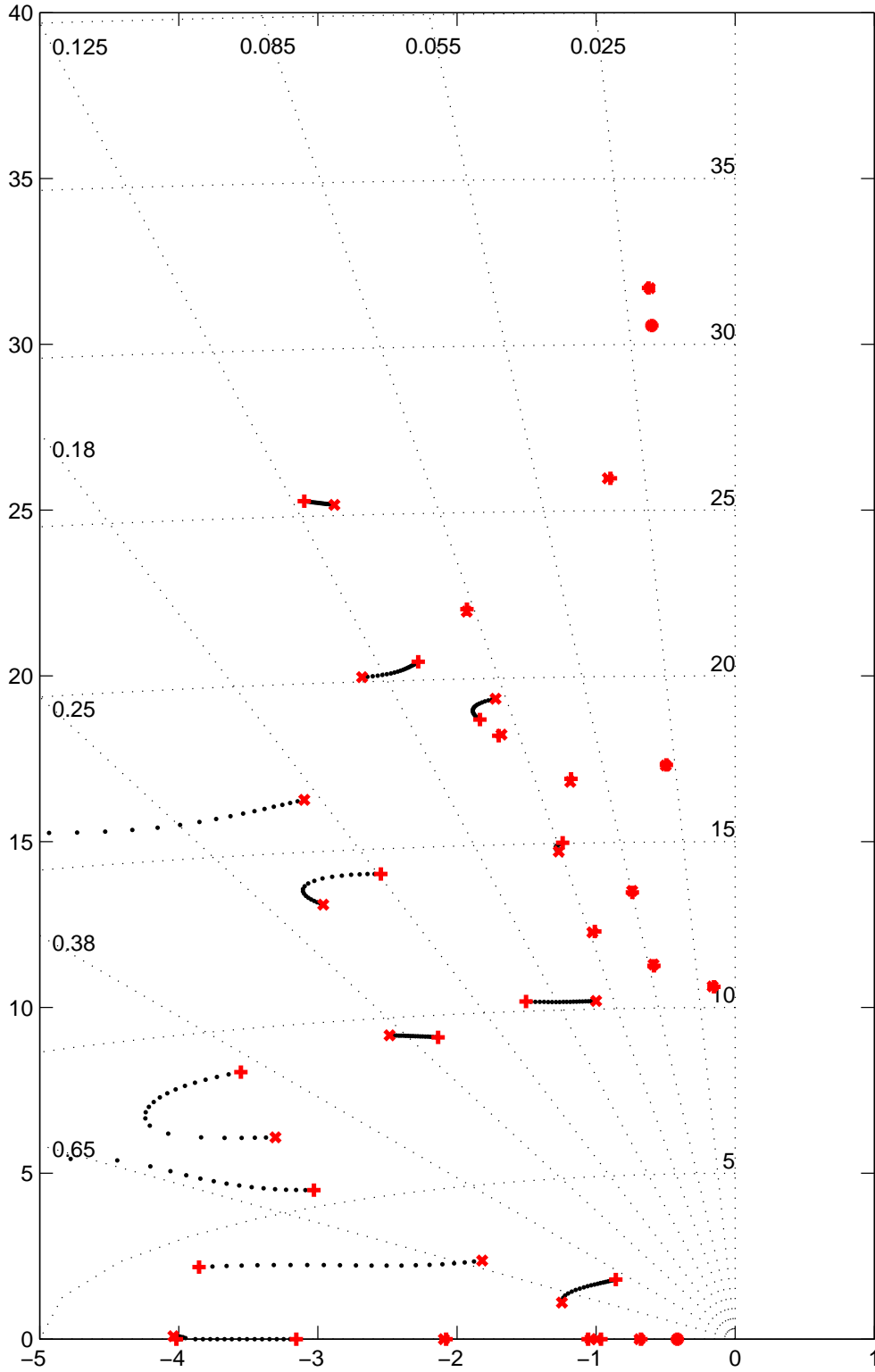


FIGURE 12.4: Carte des pôles lors de la modification du roulis hollandais.

12.2. AJUSTEMENTS RÉALISÉS

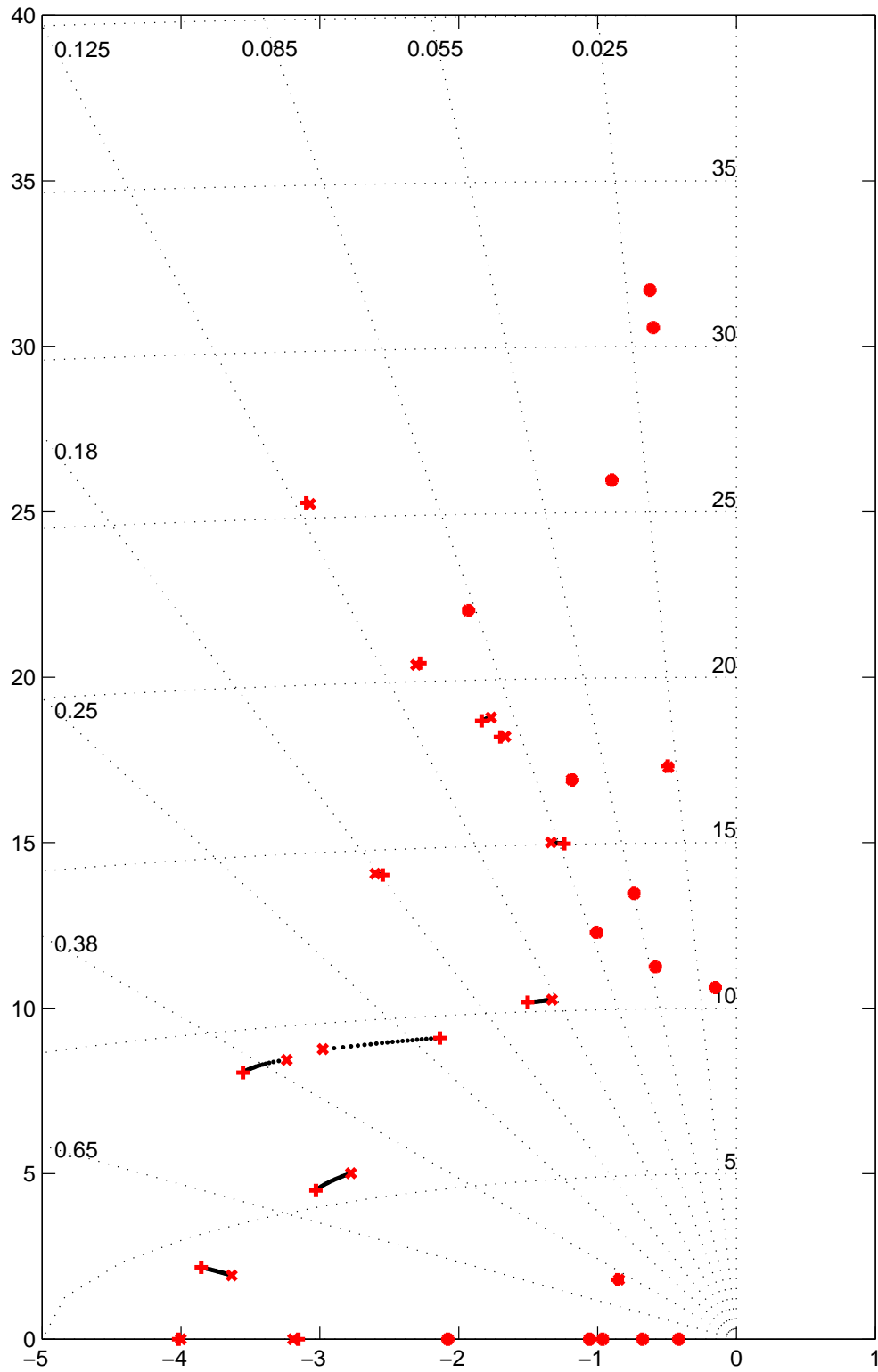


FIGURE 12.5: Carte des pôles lors de la modification du premier mode flexible.

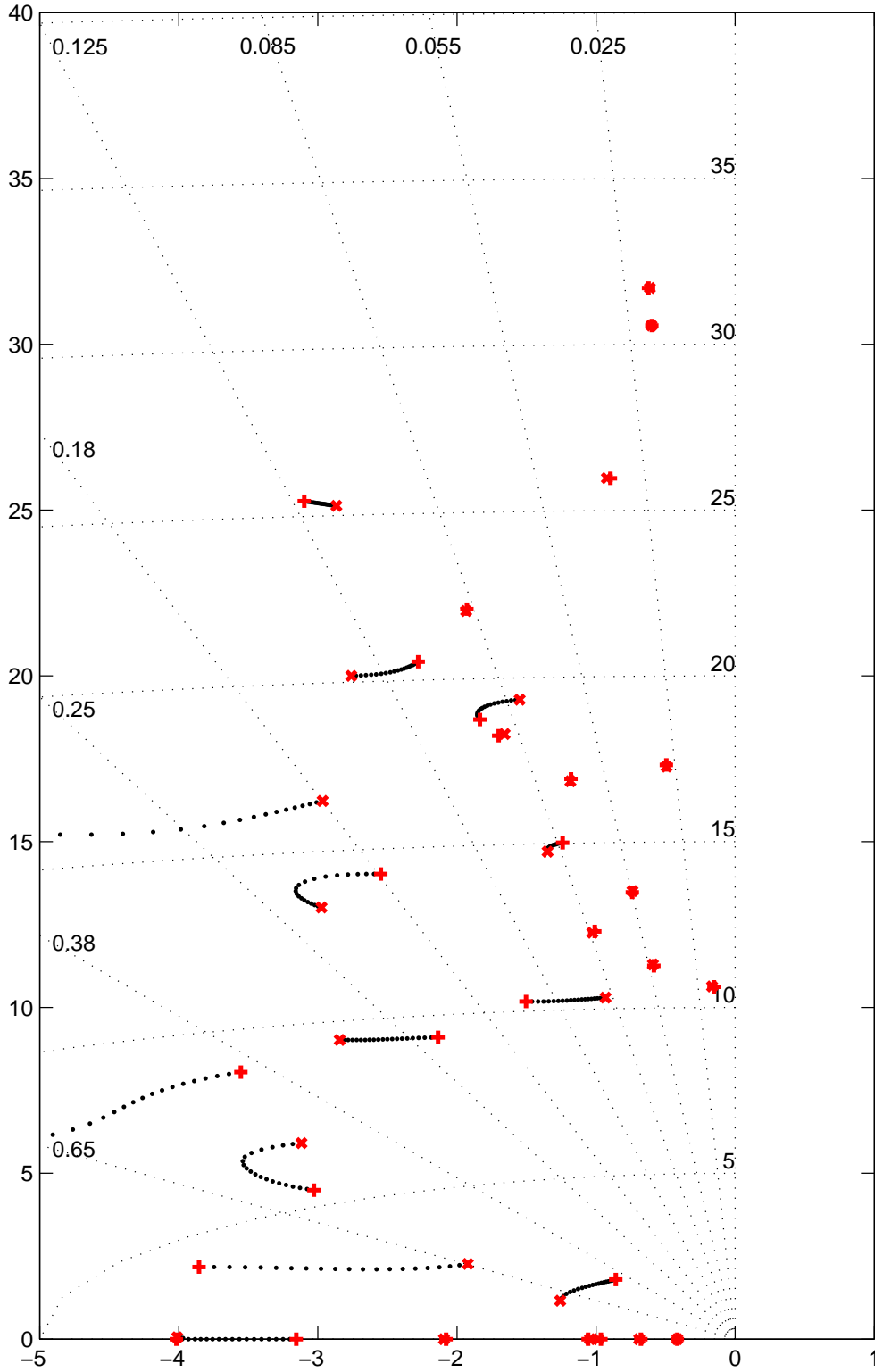


FIGURE 12.6: Carte des pôles lors des deux modifications simultanées.

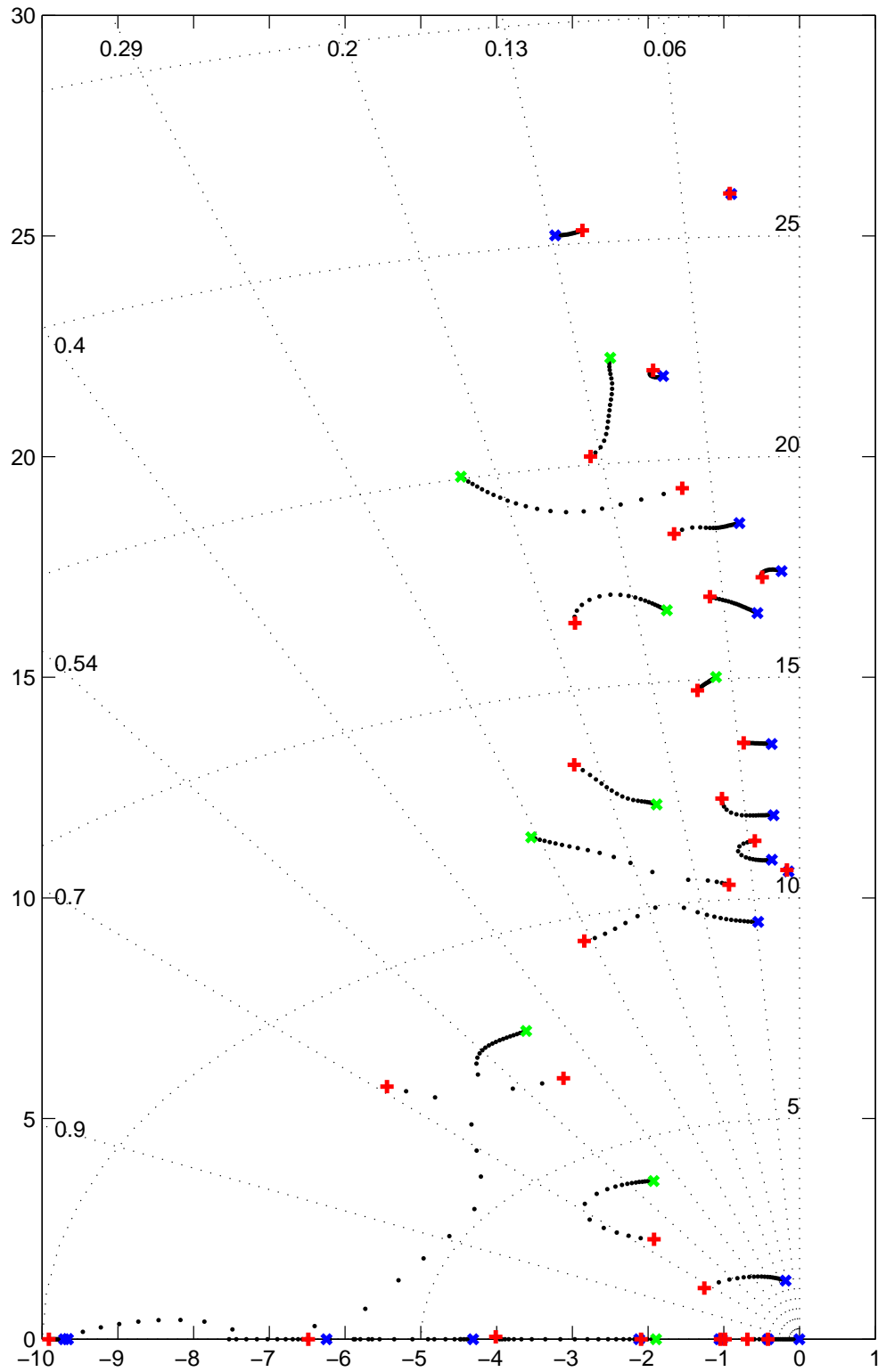


FIGURE 12.7: Lieu des racines du nouveau correcteur.

12.2.2 Second ajustement

Afin d'éviter cela, on décide, en plus des modifications sur le roulis hollandais et le premier mode flexible, d'augmenter légèrement la pulsation du mode issu de la dynamique du correcteur. L'augmentation choisie est de 5%. On aboutit alors au correcteur final dont les résultats sont présentés figures 12.8 à 12.10.

La figure 12.8 montre la carte des pôles lorsqu'on passe de la boucle fermée initiale (les '+') à la boucle fermée finale (les 'x'). On constate que la pulsation du mode du correcteur a effectivement légèrement augmentée. Il suffit de comparer la figure 12.8 à la figure 12.6 précédemment établie sans consigne sur le déplacement de ce pôle.

On peut alors observer, sur le lieu des racines correspondant (figure 12.9), que l'ambiguïté soulevée autour de la position finale du premier mode flexible est levée.

On conserve donc ce correcteur, et on calcule la précommande H . Le résultat des simulations temporelles est donné figure 12.10.

Le fort dépassement en β , qui était constaté sur la figure 12.3, est réduit. On a éliminé par la même occasion le phénomène de déphasage non-minimal sur ϕ . On peut donc considérer l'ajustement réalisé comme étant satisfaisant.

12.3 Conclusion

Ce chapitre illustre l'utilisation de la méthode d'ajustement de loi de commande utilisant l'outil d'identification bayésienne. On peut décomposer, d'un point de vue pratique, cette méthode en deux parties : le calcul de la matrice $G_{\theta_0}^{-1}$ et la réalisation des ajustements à partir de cette matrice.

Le calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$ s'avère être assez long pour des gros systèmes comportant un grand nombre de paramètres à modifier. De plus, on a parfois été confronté à certains problèmes numériques lors de ce calcul (matrice $G_{\theta_0}^{-1}$ non positive). Cependant, une fois le calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$ effectué, on a la possibilité d'essayer tous les ajustements possibles, avec diverses matrices de pondérations, car les calculs qui suivent sont très rapides. Les réglages par essais/erreurs peuvent alors être employés pour modifier le comportement du système en boucle fermée et agir directement sur les caractéristiques modales de la boucle fermée.

12.3. CONCLUSION

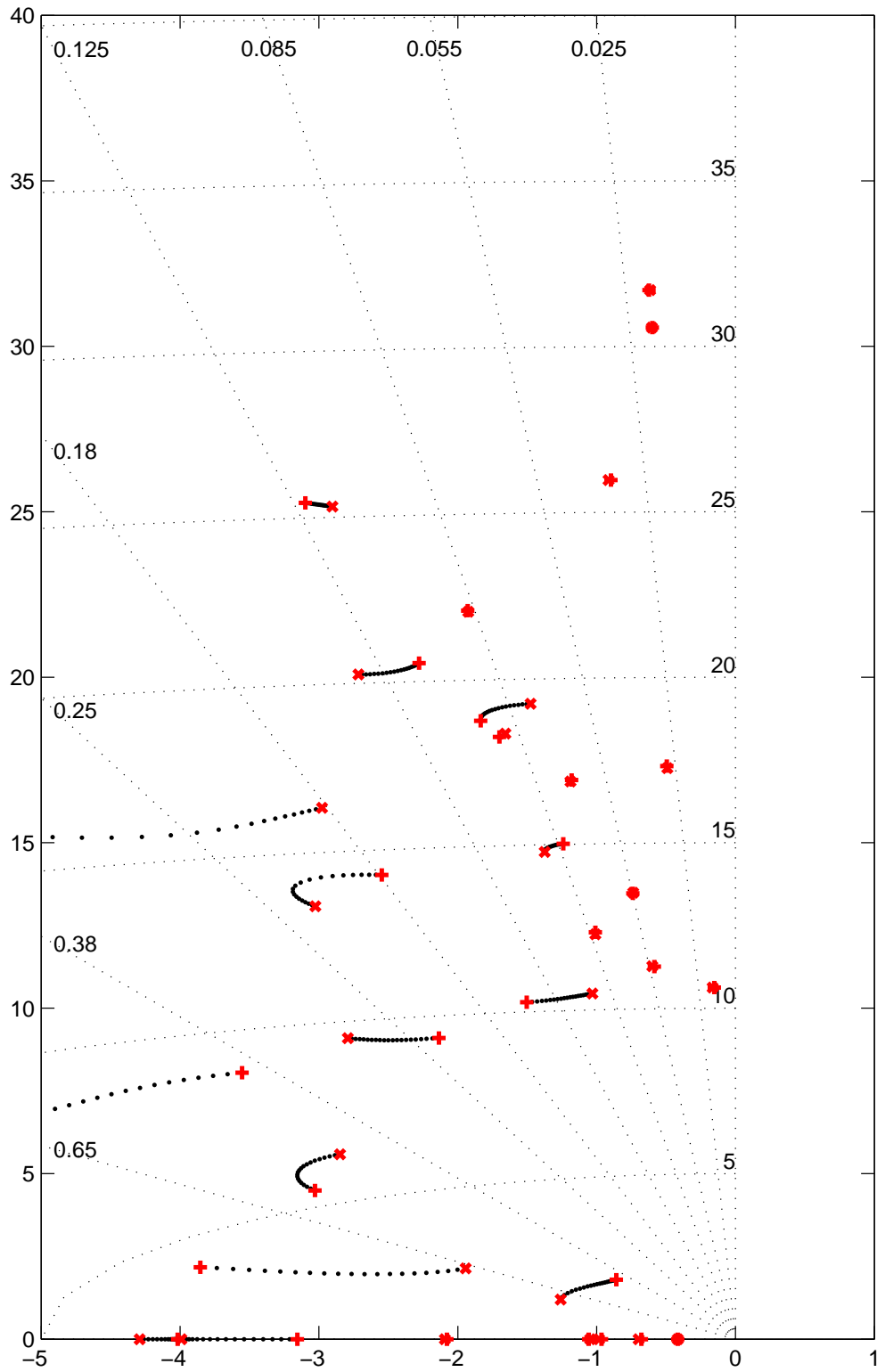


FIGURE 12.8: Carte des pôles pour l'ajustement final.

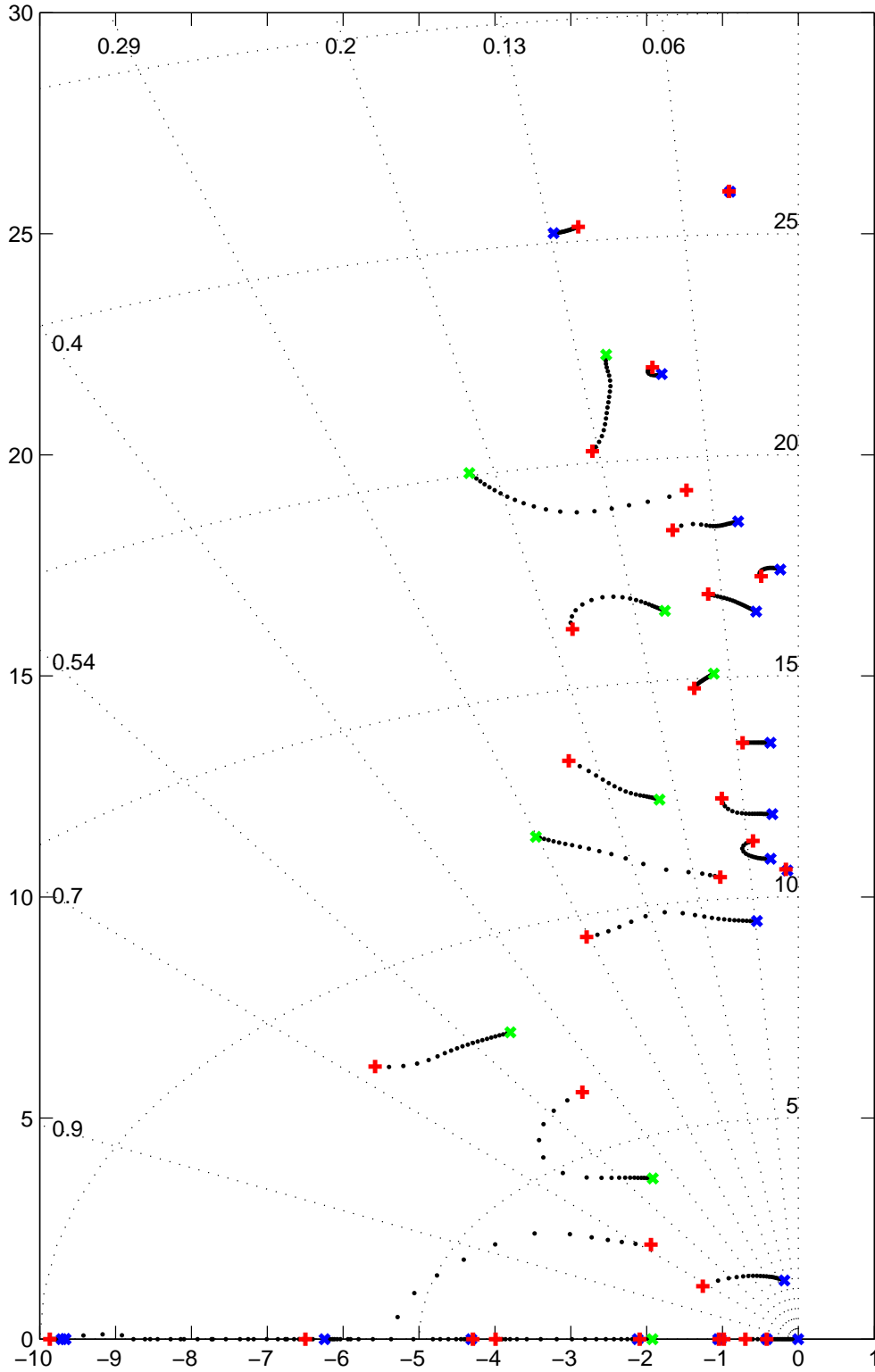


FIGURE 12.9: Lieu des racines de $-K_{final}(s)P(s)$.

12.3. CONCLUSION

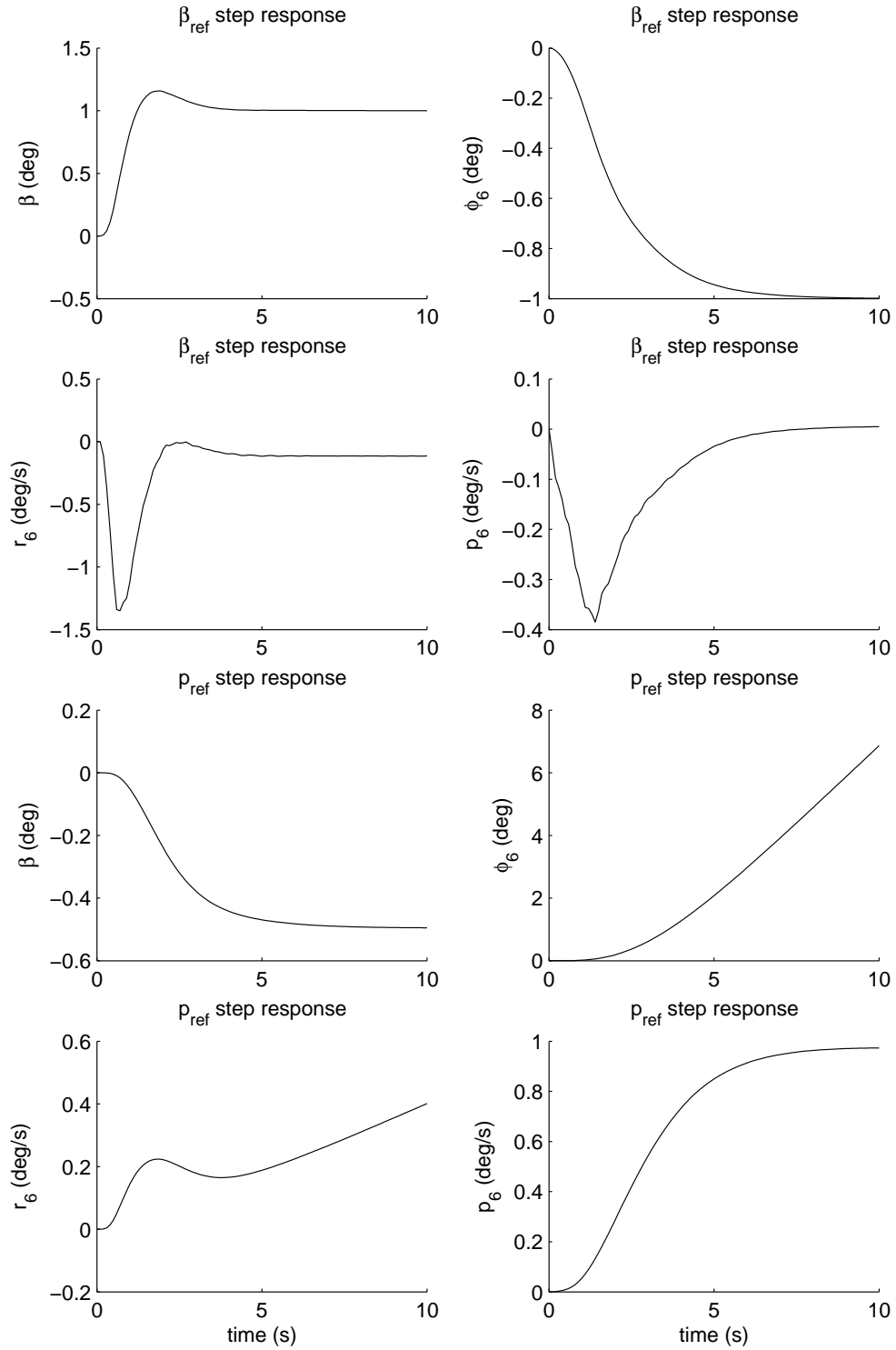


FIGURE 12.10: Simulations temporelles pour le correcteur final.

Conclusion et Perspectives

Les travaux effectués au cours de cette thèse sont articulés autour de l’ajustement de lois de commande. Nous avons centré nos études autour de deux outils différents : la CSF et l’identification bayésienne. Ces outils permettent de mettre au point différentes méthodologies afin d’améliorer un correcteur existant. Les résultats se sont exprimés à la fois sur un plan théorique, par l’amélioration ou la généralisation des outils existants, et sur un plan méthodologique, puisque certaines des techniques d’ajustement mises en oeuvre grâce aux outils présentés dans ce mémoire, n’avaient pas d’antécédents.

La partie II présente un outil, baptisé CSF, qui peut être utilisé pour la résolution de certains problèmes multi-objectifs, ou encore pour la prise en compte de spécifications H_2 ou H_∞ supplémentaires sur un correcteur déjà existant.

- D’un point de vue théorique, notre apport s’est focalisé essentiellement sur trois aspects.
 - *La formalisation du problème de la Forme Standard de Passage.* La définition a été légèrement complétée par rapport à ce qu’elle était dans [5]. En effet, on souhaitait s’assurer que la résolution d’un problème de type CSF aboutissait à une unique solution, ce qui constitue un point de départ essentiel lorsqu’on souhaite effectuer l’ajustement d’une loi de commande.
 - *La formulation de la CSF.* Nous avons réussi à nous affranchir d’une expression de la Forme Standard de Passage nécessitant la mise sous forme de représentation estimation-retour d’état du correcteur. Il existe néanmoins un lien fort entre la mise sous forme estimation-retour d’état d’un correcteur et la création d’un problème standard de type CSF à partir de ce même correcteur, puisque, lors de chacune de ces opérations, on retrouve la même équation de RICCATI.
 - *La généralisation de la CSF à des correcteurs quelconques.* L’outil ne se limite plus aux correcteurs d’ordre supérieur ou égal à celui du système ; il permet également de constituer une CSF à partir d’un correcteur d’ordre réduit. Nous pouvons aussi rappeler que les formulations exposées dans ce manuscrit permettent de trouver la Forme Standard de Passage d’un correcteur à deux degrés de liberté.
- D’un point de vue méthodologique, la CSF peut s’appliquer dans deux cadres différents, mais voisins.
 - *La résolution d’un problème multi-objectifs.* Les exemples choisis dans ce manuscrit s’articulent autour des mêmes méthodologies que celles proposées dans

[41, 5]. Néanmoins, le champ d'action de la CSF a été élargi aux correcteurs d'ordre inférieur et aux correcteurs à deux degrés de liberté [15]. D'autre part, la méthodologie de synthèse multi-objectifs utilisant la CSF permet "l'empilement" de plusieurs objectifs. Malheureusement, lors de la synthèse finale, une seule contrainte de type H_2 ou H_∞ peut être prise en compte.

- *La prise en compte de nouvelles spécifications dans une optique d'ajustement.* Il s'agit ici d'un point particulier par rapport à la résolution d'un problème multi-objectifs. Cependant, c'est dans cette optique, que les améliorations apportées à l'outil CSF sont les plus significatives. En effet, il est fréquent, dans le cadre d'un ajustement, d'avoir affaire à un correcteur d'ordre réduit. La nouvelle formulation de cet outil autorise ce type d'ajustement. L'inconvénient majeur de cette procédure est la perte de la structure du correcteur. Il n'est, en effet, pas possible de conserver une structure particulière pour le correcteur, ni de garder un correcteur d'ordre réduit.
- Sur le plan algorithmique, certains résultats peuvent paraître décevants, mais il faudrait évaluer l'utilisation des degrés de liberté disponibles de la structure. En effet, la maîtrise des multiplicateurs à l'entrée et à la sortie du canal de la CSF, qui ne dénaturent pas le problème, peut sensiblement améliorer les résultats. Le problème est alors de pouvoir affirmer que les multiplicateurs choisis sont, à coup sûr, optimaux. Le choix de la distribution des valeurs propres de la boucle fermée pour la résolution de l'équation de RICCATI semble également avoir de l'importance. Il faudrait pouvoir calculer l'influence de ces degrés de liberté sur le critère et les contraintes, dans le cadre d'une synthèse mixte H_2/H_∞ par exemple.

La partie III présente un autre outil basé sur une identification paramétrique. Cet outil, dans le cadre de la commande des systèmes, était principalement utilisé pour l'analyse de robustesse paramétrique ou pour la robustification paramétrique des lois de commande. Notre apport [11, 14, 17] a été de diversifier son champ d'action.

- D'un point de vue théorique, on peut considérer que les modifications apportées dans le calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$ simplifient son utilisation.
- *Extension de l'outil aux systèmes continus.* Quand on appliquait l'ancienne méthode de calcul de $G_{\theta_0}^{-1}$ à un système continu, il fallait commencer par le discrétiser. Le résultat dépendait alors de la période d'échantillonnage choisie. À présent, on peut utiliser cet outil directement sur des systèmes continus, sans passer par un échantillonnage. Il y a donc un gain sur le plan méthodologique en supprimant le choix d'une période d'échantillonnage et les erreurs potentielles dues à la présence de ce paramètre supplémentaire.
- D'un point de vue méthodologique, l'idée forte, nouvelle, concerne la façon dont on utilise les différentes directions de sensibilité.
- *Compensation de l'action de paramètres issus de deux groupes distincts.* Le concept de compensation des actions de certains paramètres par la modification d'autres paramètres constitue un autre apport de cette thèse. Dans la robustification d'un

correcteur, des directions de sensibilité minimales permettaient de créer un sous-ensemble de correcteurs aux performances équivalentes. La direction de sensibilité minimale était donc utilisée comme un tout, l'ensemble des paramètres étant uniquement composé de gains du correcteur. Ici, nous avons introduit un ensemble de paramètres fictifs supplémentaires, représentant les variations modales de la boucle fermée. Le vecteur paramétrique peut donc être scindé en deux parties.

- *L'analyse de variations modales de la boucle fermée.* L'utilisation d'un vecteur paramétrique composé de deux ensembles différents permet d'évaluer l'action d'une variation du correcteur sur les caractéristiques modales de la boucle fermée.
- *La synthèse de "potentiomètres" de réglage.* L'utilisation d'un critère représentatif de l'action exercée sur les pôles du système en boucle fermée et des résultats de l'analyse des variations du correcteur a permis de dégager des directions de réglage ayant des actions spécifiques. Il est, par exemple, possible d'extraire un vecteur paramétrique, au niveau du correcteur, qui permet (lorsqu'on modifie les gains du correcteur le long de cette direction paramétrique) de modifier l'amortissement d'un mode donné. L'exploitation de ce "potentiomètre" permet alors d'ajuster une loi de commande, mais pourrait offrir d'autres possibilités dans le cadre d'essais en vol par exemple.

La méthode d'ajustement proposée dans ce mémoire, avec l'aide de l'identification bayésienne, possède l'avantage de ne pas modifier la structure initiale du correcteur. Cependant, son utilisation se restreint aux déplacements de pôles. L'extension de cette approche à des spécifications temporelles ou fréquentielles (par exemple : isoler dans la loi de commande un potentiomètre pour maîtriser le dépassement d'une réponse indicielle ou la fréquence de coupure sur la fonction de sensibilité complémentaire) sans dégradation des autres performances, pourrait être envisagée. D'un point de vue des spécifications temporelles, une piste envisageable est d'utiliser l'outil pour dégager un certain nombre de paramètres du correcteur dont on sait qu'ils ont indirectement (par l'intermédiaire des pôles) une action sur la réponse du système. On pourrait alors utiliser un outil d'optimisation qui travaillerait sur cet ensemble réduit de paramètres. On peut raisonnablement penser qu'une optimisation sur un ensemble de paramètres restreints et pertinents sera plus efficace qu'une optimisation aveugle sur l'ensemble des paramètres de la loi de commande.

Bibliographie

- [1] D. Alazard. *TABASCO : manuel d'utilisation (annexe technique 4 au rapport final) AT/6/7997.72 DCSD.ONERA*, January 2000.
- [2] D. Alazard. Extracting physical tuning potentiometers from a complex control law : application to flexible aircraft flight control. In *Proceedings of the Guidance, Navigation and Control Conference*, Montréal, August 2001.
- [3] D. Alazard and P. Apkarian. Exact observer-based structures for arbitrary compensators. *International Journal of Robust and Non-Linear Control*, 9:101–118, 1999.
- [4] D. Alazard, Ch. Cumer, P. Apkarian, M. Gauvrit, and G. Ferreres. *Robustesse et Commande Optimale*. CEPADUES Edition, 1999.
- [5] D. Alazard, O. Voinot, and P. Apkarian. A new approach to multiobjective control design from the viewpoint of the inverse optimal control problem. In *Proceedings of the IFAC Symposium on System, Structure and Control*, Oaxaca, December 2004.
- [6] D. Arzelier and D. Peaucelle. Quadratic guaranteed cost control for uncertain dissipative models : a Riccati equation approach. *International Journal of Control*, 73:762–775, 2000.
- [7] D.J. Bender and R.A. Fowell. Computing the estimator-controller form of a compensator. *International Journal of Control*, 41(6):1565–1575, 1985.
- [8] B. M. Chen and A. Saberi. Necessary and sufficient conditions under which an \mathcal{H}_2 -optimal control problem has a unique solution. In *Proceedings of the 31th Conference on Decision and Control*, pages 1105–1110, Tucson (Arizona), december 1992. IEEE.
- [9] Ch. Cumer. *Techniques de commande robuste*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace, 1998.
- [10] Ch. Cumer. Towards a generalized robust analysis by fictitious identification. In *Proceedings of the 3rd IFAC Symposium on Robust Control Design*, 2000.
- [11] Ch. Cumer, F. Delmond, D. Alazard, and C. Chiappa. Tuning of observer-based controllers. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2004.
- [12] Ch. Cumer, Ph. Mouyon, and D. Alazard. DTP ”FONCTION PILOTAGE” (PIL) (année 2), thème 5 - tâche 1 sous-tâche 1.3.1 et tâche 3 sous-tâche 3.2.3. Technical Report RF 11/06539 DCSD, ONERA - DCSD, Toulouse, December 2003.

-
- [13] I. Dardenne. *Développement de méthodologies pour la synthèse de lois de commandes d'un avion de transport souple*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 1998.
- [14] F. Delmond. Ajustement de loi de commande : une méthode originale de placement modal. In *Proceedings of the Congrès des Doctorants*, Toulouse, 2004. EDSYS04.
- [15] F. Delmond, D. Alazard, and Ch. Cumer. Improving a given controller with \mathcal{H}_2 or \mathcal{H}_∞ specifications. (*submitted to ROCOND 2006*).
- [16] F. Delmond, Ch. Cumer, and D. Alazard. L'identification bayésienne en vue de la retouche de correcteurs. In *Proceedings of the Journées Doctorales d'Automatique*, pages 161–166, Valenciennes, juin 2003. JDA.
- [17] F. Delmond, Ch. Cumer, and D. Alazard. Controller gains adjustment for closed-loop modal requirements. In *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, Prague, July 2005.
- [18] J.C. Doyle and G. Stein. Right-of-plane poles and zeros and design trade-offs in feedback systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26, August 1981.
- [19] W. Edwards, H. Lindman, and J. L. Savage. Bayesian statistical inference for psychological research. *Psychol. Review*, 70:193–242, 1963.
- [20] R.A. Fisher. On an absolute criterion for fitting frequency curves. *Messages of Mathematics*, 41:155–160, 1912.
- [21] R.A. Fisher. On the mathematical foundations of theoretical statistics. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 222:309–368, 1922.
- [22] R.A. Fowell, D.J. Bender, and A.F. Assal. Estimating the plant state from the compensator state. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31(10):964–967, 1986.
- [23] T. Fujii and P.P. Khargonekar. Inverse problems in \mathcal{H}_∞ control theory and linear-quadratic differential games. In *Proceedings of the 27th Conference on Decision and Control*, pages 26–31, Austin (Texas), december 1988. IEEE.
- [24] M. Gauvrit. *Performance des estimateurs bayésiens en boucle ouverte et fermée ; dualité identification-commande*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, 1982.
- [25] M. Gauvrit and D. Alazard. Parametric worst-case analysis by PRABI method : application to flexible space structures. In *Proceedings of the 2nd IFAC Symposium on Robust Control Design*, 1997.
- [26] M. Gauvrit and Ch. Manceaux. Robust synthesis by fictitious bayesian identification approach. In *Proceedings of the UKACC International Conference on CONTROL'98*, 1997.
- [27] G. Magela Pinheiro Gomes. *Synthèse d'une commande robuste liée à la qualité de l'identification bayésienne*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 1991.
- [28] H. Kwakernaak and R. Sivan. *Linear optimal control systems*. Wiley interscience, 1972.

- [29] G. Lavigne. *Dualité : qualité de l'identification - insensibilité de la commande ; application à la synthèse de commandes robustes aux incertitudes paramétriques*. PhD thesis, ENSAE, 1994.
- [30] K.E. Lenz, P.P. Khargonekar, and J.C. Doyle. When is a controller \mathcal{H}_∞ optimal? *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 1:107–122, 1988.
- [31] N. Narasimhamurthi and F. Wu. On the Riccati equation arising from the study of singularly perturbed systems. In *Proceedings of the IEEE Joint Automatic Control Conference*, New-York, June 1977.
- [32] P. Pellanda. *Commande des systèmes instationnaires : séquençement de compensateurs et commande LPV*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 2001.
- [33] S. Salhi and D. Arzelier. An iterative method for multi-objective dynamic output feedback synthesis. In *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, Prague, July 2005.
- [34] J.M. Schumacher. Compensator synthesis using (c, a, b) -pairs. *IEEE. Transactions on Automatic Control*, 25(6):1133–1138, 1980.
- [35] N. Sebe. A characterization of solutions to the inverse \mathcal{H}_∞ optimal control problem. In *Proceedings of the 40th Conference on Decision and Control*, pages 273–278, Orlando (Florida), december 2001. IEEE.
- [36] C. Sherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE. Transactions on Automatic Control*, 42(7):896–911, 1997.
- [37] T. Shimomura and T. Fujii. Strictly positive real \mathcal{H}_2 controller synthesis from the viewpoint of the inverse problem. In *Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control*, pages 1014–1019, San Diego (California), december 1997. IEEE.
- [38] D.J. Stilwell and W. Rugh. Interpolation of observer state feedback controllers for gain scheduling. *IEEE. Transactions on Automatic Control*, 44(6):1225–1229, 1999.
- [39] D.J. Stilwell and W. Rugh. Stability preserving interpolation methods for the synthesis of gain scheduling controllers. *Automatica*, 36(5):665–671, 2000.
- [40] K. Sugimoto. Partial pole-placement by LQ regulator: An inverse problem approach. *IEEE. Transactions on Automatic Control*, vol. 43., No. 5.:706–708, 1998.
- [41] O. Voinot. *Développement de méthodologies de synthèses de lois de commande pour le pilotage des lanceurs*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, 2002.
- [42] O. Voinot, D. Alazard, A. Piquereau, and A. Biard. A robust multi-objective synthesis applied to launcher attitude control. In *Proceedings of the 15th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Bologna, September 2001.

- [43] O. Voinot, D. Alazard, P. Apkarian, S. Mauffrey, and B. Clément. Launcher attitude control: Discrete-time robust design and gain-scheduling. *IFAC Control Engineering Practice*, 11:1243–1252, 2003.

Résumé

Le contexte général dans lequel s'inscrivent ces travaux de thèse est celui de l'ajustement de lois de commande. Cette problématique récente est née de la confrontation des techniques modernes de synthèses de lois de commande sur des applications réalistes dans un contexte industriel, et regroupe les techniques permettant de réduire le fossé entre :

- la "quête de l'idéal" qui motive l'automaticien. C'est-à-dire la recherche de techniques permettant de fournir la loi de commande optimale directement à partir de l'énoncé du modèle et des spécifications.
- et la réalité industrielle où les contraintes pratiques et économiques, le savoir-faire et la culture d'entreprise conduisent toujours à favoriser la démarche qui vise à adapter aux nouveaux problèmes rencontrés la solution qui "marchait jusqu'à présent".

Le dénominateur commun des techniques présentées dans ce mémoire est donc la disponibilité d'un correcteur pré-existant qui satisfait une partie du cahier des charges, mais qu'il faut adapter pour satisfaire des spécifications complémentaires ou prendre en compte une évolution du modèle et/ou du cahier des charges.

Deux techniques sont exposées dans ce mémoire. La première utilise un outil de synthèse multi-objectifs : la Forme Standard de Passage, qui est définie comme une solution des problèmes inverses de commande optimale H_2 et H_∞ ; c'est-à-dire un problème standard de commande dont l'unique solution optimale au sens des normes H_2 et H_∞ coïncide avec le correcteur pré-existant. La seconde se base sur l'identification bayésienne et permet de mettre à profit des considérations de robustesse paramétrique pour l'ajustement des lois de commande, principalement la direction de robustesse maximale dans l'espace paramétrique, constitué des paramètres dynamiques à ajuster en boucle fermée, augmenté des paramètres de réglage du correcteur.

Ces deux techniques sont appliquées sur des exemples réalistes empruntés au domaine aéronautique ; domaine caractérisé par l'utilisation de modèles de grandes dimensions, des cahiers des charges très complets et qui a donc motivé ces recherches.

Mots clés : ajustement de loi de commande, Forme Standard de Passage, synthèse multi-objectifs, identification bayésienne, commandes de vol.

Abstract

This PhD thesis concerns the **ajustment of control laws**. This new problematic comes from the confrontation of modern control design techniques to real applications in an industrial context and concerns techniques that allows to reduce the gap between :

- the "quest of the ideal" which motivates every control law designer. I.e. the research for techniques allowing the control law to be provided directly from the model and the specifications.
- and industrial reality where the practical and economic constraints, the know-how and the culture of company always lead to adapt to a new problem a solution that "has been working up until now".

The common denominator of the techniques proposed in this manuscript is the existence of a given controller. This controller meets some specifications but needs to be improved to satisfy new specifications or to take into account an evolution of the model.

Two techniques are presented. The first one uses a multi-objective design tool : the Cross Standard Form which is defined as a solution to the H_2 and H_∞ inverse optimal control problem ; that is a standard control problem whose unique optimal solution is the given controller. The second one is based on a bayesian identification approach of parametric robustness and on the maximal robustness direction in the parametric space of closed-loop dynamic parameters (to be adjusted) augmented with controller tuning parameters.

These two techniques are applied to realistic aeronautic examples. Aeronautic applications involve high order models, very complete specifications and so motivate this research.

Key words : control law adjustment, Cross Standard Form, multi-objective synthesis, bayesian identification, flight control.

