

THÈSE

présentée en vue de
l'obtention du titre de

DOCTEUR

de

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE**

**ÉCOLE DOCTORALE : Énergétique et dynamique des fluides
SPÉCIALITÉ : Dynamique des fluides**

par

Cécilia ROBITAILLIÉ-MONTANÉ

**Une approche non locale pour l'étude des instabilités linéaires.
Application à l'écoulement de couche limite compressible le long d'une ligne de partage**

Soutenue le 3 juin 2005 devant le jury :

MM.	A. BOTTARO	Président
	C. AIRIAU	
	T. ALZIARY DE ROQUEFORT	Rapporteur
	G. CASALIS	Directeur de thèse
	R. FRIEDRICH	Rapporteur
	J.C. ROBINET	

*À Jordi et Maia,
avec tout mon amour.*

Remerciements

Je tiens à remercier les membres du jury d'avoir accepté de participer à la finalisation de cette étude et plus particulièrement les rapporteurs, Thierry Alziary de Roquefort et Rainer Friedrich, pour leurs corrections et remarques pertinentes. Je remercie également Jean-Christophe Robinet pour sa disponibilité, ses conseils et sa volonté de m'apporter son aide au cours de cette thèse. J'assure également toute ma gratitude à Alessandro Bottaro, tant pour ses qualités professionnelles que humaines, qui a largement contribué à mon désir de poursuivre des études doctorales dans le domaine de la mécanique des fluides.

Je remercie également toutes les personnes avec lesquelles j'ai partagé ces presque quatre années à l'ONERA. Je remercie Jean Cousteix qui m'a accueilli au sein de son département pour la troisième fois. J'exprime toute ma reconnaissance à Daniel Arnal qui a accepté de me donner ma première chance en 1999 avec la complicité de Jean-Pierre Archambaud et a rouvert la porte de son unité pour cette thèse. J'en profite aussi pour remercier Daniel Caruana, que je n'avais pas eu l'occasion de remercier pour sa gentillesse et sa disponibilité lors de mon stage de DEA et auprès duquel je m'excuse de n'avoir su prendre le temps de regarder les possibles passerelles entre ce travail et le contrôle du tremblement aérodynamique. Je remercie toutes les personnes de l'unité TRIN, notamment pour leur participation en réunion technique. Merci à Grégoire Casalis, qui avait la lourde responsabilité de mon encadrement. Je le remercie plus particulièrement de m'avoir encouragée et aidée à conclure ce projet dans les plus brefs délais tout en restant compréhensif vis-à-vis de mes obligations de jeune maman.

De même, un grand merci à Allan Bonnet, Jean Cousteix et Jacques Georges de m'avoir confié une mission d'enseignement, expérience extrêmement enrichissante et que j'ai eu beaucoup de plaisir à vivre.

Je souhaite également remercier toutes les personnes qui nous rendent de fiers services et toujours avec le sourire au secrétariat du DMAE, au SRI, au CID, au CE, à MTG et RH. Également mes remerciements aux différentes personnes du centre avec lesquelles j'ai partagé discussions ou des activités comme le basket et la plongée.

Enfin que seraient des remerciements sans mentionner la population doctorants-stagiaires ? Il faudrait un chapitre complet pour évoquer les remerciements incombant à chacun d'entre eux, les anciens, mes contemporains et les jeunes, je vais donc me contenter de les remercier tous pour leur participation à créer une ambiance chaleureuse, pour leur soutien et pour les moments partagés. Évidemment une mention spéciale s'impose pour ceux qui m'ont plus que supporté, je pense en particulier à Frédéric Louis, l'oreille compatissante qui a subi mes humeurs pendant trois ans et Thierry Féraïlle, le saint homme, qui a toujours été présent pour mes questions tant professionnelles que personnelles. Enfin tous mes vœux de réussite à ceux qui sont dans les *starting-blocks*, Yann Chauvat, Laure Dupland, Benoît-Joseph Grea, Gilles Studer et Mylène Thiery ainsi qu'aux nouvelles générations TRIN Damien Biau, François Chedevergne et Estelle Piot.

Une dernière ligne pour remercier tous ceux que j'aime, qui m'ont soutenue jusqu'ici et que j'ai parfois un peu délaissé ces derniers temps.

Table des matières

Introduction	13
1 Stabilité linéaire 2D : formulation générale	15
1.1 Méthode perturbative	15
1.1.1 Rappel 1D : écoulements parallèles	16
1.1.2 Cas général 2D	18
1.2 Problème aux valeurs propres généralisé	19
1.2.1 Discrétisation des équations aux dérivées partielles	19
1.2.2 Résolution du spectre $\mathcal{S}(\mathcal{V}_1^t, \mathcal{V}_2^t)$	22
1.3 Conclusion	24
2 Applications : écoulements tridimensionnels ou non-parallèles	25
2.1 Écoulement 3D de Poiseuille	25
2.1.1 Géométrie	25
2.1.2 Grandeurs caractéristiques	26
2.1.3 Écoulement moyen	26
2.2 Écoulement plan de Taylor-Culick	27
2.3 Écoulement incompressible de Hiemenz en flèche	29
2.3.1 Géométrie	29
2.3.2 Grandeurs caractéristiques	29
2.3.3 Solution pour l'écoulement moyen	30
2.4 Écoulement compressible de Hiemenz en flèche	31
2.4.1 Grandeurs caractéristiques	32
2.4.2 Solution pour l'écoulement moyen	33
2.5 Conclusion	36
3 Stabilité de l'écoulement 3D de Poiseuille	37
3.1 Formulation du problème 2D	38
3.1.1 Équations aux perturbations : problème aux valeurs propres généralisé	38
3.1.2 Complément : méthode de tir	41
3.1.3 Paramètres de calcul	41
3.2 Spectre de valeurs propres	42
3.3 Comportement des modes 2D : fonctions propres	43
3.4 Variation du rapport d'aspect : lien avec l'approche 1D	45
3.5 Conclusion	46

4	Stabilité de l'écoulement 3D de Hiemenz incompressible	47
4.1	Rappel de l'approche locale dite 1D : mode de Görtler-Hämmerlin	48
4.2	Formulations non-locales : approche 2D du problème	51
4.2.1	Équations aux perturbations en formulation primitive	51
4.2.2	Formulation réduite des équations aux perturbations	53
4.3	Résultats issus de l'approche 2D : spectre et fonctions propres	54
4.3.1	Validation : comparaison au 1D et à Lin & Malik	55
4.3.2	Description des modes tridimensionnels	56
4.3.3	Commentaires sur d'autres types de résolution	57
4.4	Conclusion	64
5	Stabilité de l'écoulement 3D de Hiemenz compressible	67
5.1	Formulation du problème de stabilité 2D	68
5.1.1	Équations aux perturbations	68
5.1.2	Écriture des grandeurs relatives au champ de base pour le problème de stabilité	70
5.1.3	Paramètres de calcul	71
5.2	Validation : incompressible et DNS	72
5.3	Effet de compressibilité : évolution du nombre de Mach	73
5.4	Effet de température	80
5.5	Modes de compressibilité ?	81
5.6	Conclusions	85
	Conclusions et perspectives	87
	Bibliographie	93
A	Écoulement de Poiseuille	95
A.1	Calcul de l'écoulement de base	95
A.1.1	Discrétisation	95
A.1.2	Conditions aux limites	96
A.1.3	Résolution numérique	97
A.2	Résolution du problème de stabilité 2D	98
A.2.1	Discrétisation	98
A.2.2	Résolution numérique	102
A.2.3	Résolution du problème sur un domaine réduit	107
B	Écoulement de Hiemenz incompressible	109
B.1	Perturbation de Görtler-Hämmerlin (approche 1D)	109
B.2	Perturbation tridimensionnelle de l'écoulement incompressible de Hiemenz (ap- proche 2D)	110
B.3	Perturbation tridimensionnelle de l'écoulement incompressible de Hiemenz, formu- lation réduite de l'approche 2D	111
B.4	Convergence en maillage, dépendance au domaine de calcul et aux conditions limites	113
B.4.1	Précision des modes obtenus vis-à-vis d'une modification de maillage . . .	113
B.4.2	Conditions limites sur les frontières artificielles Γ_{num} du domaine	114

C	Écoulement de Hiemenz compressible	117
C.1	Conditions de compatibilité pour la pression	117
C.2	Écriture des grandeurs dérivées relatives au champ moyen	118

Table des figures

Écoulements moyens	25
2.1 Représentation de l'écoulement de Poiseuille dans une conduite rectangulaire de rapport d'aspect A	27
2.2 Effet du rapport d'aspect sur l'écoulement moyen : évolution de $\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2}$ en $y = 0$ en fonction de z/A . Dans le cas plan ($1D$), la valeur est -2	28
2.3 Représentation de quelques lignes de courant associées à l'écoulement dit de Taylor, résultant de l'injection uniforme de fluide à travers les deux parois horizontales.	28
2.4 Représentation de l'écoulement de ligne de partage	29
2.5 Évolution des composantes de vitesse de l'écoulement de base de Hiemenz incompressible avec la distance à la paroi $y = y^*/\Delta$ pour un nombre de Reynolds $\mathcal{R} = 800$	31
2.6 Diagramme d'obtention du nombre de Mach transversal sur la ligne de partage \mathcal{M} en fonction du nombre de Mach infini amont \mathcal{M}_∞ paramétré par l'angle de flèche ϕ	32
2.7 Profils de température de l'écoulement de base de Hiemenz compressible pour les conditions $\mathcal{R} = 1500$, $\mathcal{M} = 2$ et $T_{i0}^* = 300K$	35
Stabilité de l'écoulement 3D de Poiseuille	37
3.1 Représentation des conditions limites sur le quart de domaine $[0, 1] \times [0, A]$ pour la résolution en formulation réduite avec une méthode de tir	42
3.2 Spectre QZ pour des perturbations paires en y et en z dans le cas d'un rapport d'aspect $A = 5$ et pour $\mathcal{R} = 10400$, $\alpha = 0.91$	43
3.3 Comparaison au cas plan : profils à $z = 0$ des modules d'amplitudes des composantes de vitesse longitudinale (à gauche) et normale (à droite) de la perturbation associée au mode neutre de la configuration $A = 5$ et pour $\mathcal{R} = 10400$, $\alpha = 0.91$ et profils issus de l'approche locale $1D$	44
3.4 Iso-valeurs du module de l'amplitude de la composante de vitesse transversale de la perturbation associée au mode neutre de la configuration $A = 5$ et pour $\mathcal{R} = 10400$, $\alpha = 0.91$	44
3.5 Profils longitudinaux (à droite) et normaux (à gauche) des amplitudes de fluctuations de vitesse associées au mode neutre, pour différentes positions z , de la configuration $A = 5$ et pour $\mathcal{R} = 10400$, $\alpha = 0.91$	45
3.6 Évolution de la pulsation (à gauche) et du taux d'amplification (à droite) d'un mode propre en fonction du rapport d'aspect A pour $\mathcal{R} = 10400$, $\alpha = 0.91$: représentation de la limite limite de l'approche locale	45
Stabilité de l'écoulement 3D de Hiemenz incompressible	47

4.1	Spectre issu de l'approche 2D dans des conditions identiques aux DNS de Spalart $Re = 600, \beta = 0.255$	51
4.2	Spectre des valeurs propres pour l'écoulement de Hiemenz incompressible, $Re = 800, \beta = 0.255$	55
4.3	Profils normaux et longitudinaux des amplitudes de fluctuations de vitesse associées au mode $S1$	58
4.4	Profils normaux et longitudinaux des amplitudes de fluctuations de vitesse associées au mode $A1$	58
4.5	Profils normaux et longitudinaux des amplitudes de fluctuations de vitesse associées au mode $S2$	59
4.6	Iso-valeurs de la perturbation de vitesse transversale \hat{w} aux instants $t = 0$ et $t = T/4$ pour le mode $S1$	59
4.7	Iso-valeurs de la perturbation de vitesse transversale \hat{w} aux instants $t = 0$ et $t = T/4$ pour le mode $A1$	60
4.8	Iso-valeurs de la perturbation de vitesse transversale \hat{w} aux instants $t = 0$ et $t = T/4$ pour le mode $S2$	60
4.9	Représentation dans le plan parallèle à la ligne de partage à $t = 0$ de la composante longitudinale de la perturbation de rotationnel pour le mode $S1$	61
4.10	Représentation dans le plan parallèle à la ligne de partage à $t = 0$ de la composante longitudinale de la perturbation de rotationnel pour le mode $A1$	61
4.11	Représentation dans le plan parallèle à la ligne de partage à $t = 0$ de la composante longitudinale de la perturbation de rotationnel pour le mode $S2$	62
4.12	Comparaison de différents types de résolution : cas incompressible $\mathcal{R} = 800, \beta = 0.255, 36 \times 53$ points sur $[0, 200] \times [0, 50]$. À gauche, en haut : différentes transformations de la répartition de points de Gauß-Lobatto sur l'intervalle $[0, 200]$, en bas : zoom sur la zone proche de la ligne de partage $[0, 50]$. À droite : spectres issus de calculs utilisant les trois répartitions et spectre issu de la formulation réduite .	63
4.13	Comparaison d'un spectre QZ avec des spectres Arnoldi- $\mathcal{R} = 800, \beta = 0.255, 31 \times 53$ points sur $[0, 200] \times [0, 50]$	64
4.14	À gauche : composante de vitesse transversale associée au mode apparaissant comme le plus amplifié dans le spectre QZ, à droite : effet d'une modification du maillage sur les modes les plus instables du spectre QZ (calculs Arnoldi, notés Ar.)	64
Stabilité de l'écoulement 3D de Hiemenz compressible		67
5.1	Évolution du taux d'amplification des modes $S1$ et $S2$ avec le nombre d'onde . .	74
5.2	Effet de Mach sur les vitesses de phase et taux d'amplification des modes $S1, A1, S2$	75
5.3	Profils normaux des amplitudes de fluctuations de vitesse du mode $S1$ pour les nombres de Mach $\mathcal{M} = 0.75, \mathcal{M} = 1.5$ et $\mathcal{M} = 2.1$ - $\mathcal{R} = 1500, \beta = 0.19, [0, 200] \times [0, 50] : 36 \times 51$	75
5.4	Iso-valeurs de la perturbation de vitesse transversale \hat{w} aux instants $t = 0$ et $t = T/4$ pour le mode $S1$ - $\mathcal{M} = 2.1$	76
5.5	Iso-valeurs de la perturbation de vitesse transversale \hat{w} aux instants $t = 0$ et $t = T/4$ pour le mode $A1$ - $\mathcal{M} = 2.1$	77
5.6	Iso-valeurs de la perturbation de vitesse transversale \hat{w} aux instants $t = 0$ et $t = T/4$ pour le mode $S2$ - $\mathcal{M} = 2.1$	77

5.7	Fluctuation de température à $\mathcal{R} = 1500$, $\beta = 0.19$, $[0, 200] \times [0, 50]$: 36×51 . À gauche : module de l'amplitude $ T $ en fonction de la distance à la paroi pour le mode $S1$ pour les nombres de Mach $\mathcal{M} = 0.75$, $\mathcal{M} = 1.5$ et $\mathcal{M} = 2.1$. À droite : iso-valeurs dans le plan (x, z) de température de paroi $\hat{T}_p(y = 0)$ au temps $t = 0$ associée aux modes $S1$, $A1$ et $S2$ pour $\mathcal{M} = 2.1$	78
5.8	Évolution du module de l'amplitude de la fluctuation de température vis-à-vis de la distance à la ligne de partage pour les modes $S1$ (à gauche), $A1$ (au milieu) et $S2$ (à droite)- $\mathcal{M} = 2.1$, $\mathcal{R} = 1500$, $\beta = 0.19$, $[0, 200] \times [0, 50]$: 36×51	78
5.9	À gauche, résultat des DNS de Le Duc [20] : maximum selon y de la valeur <i>rms</i> selon z de la perturbation de température, normalisé par sa valeur en $x = 0$, à différents instants. À droite, résultat de calcul compressible dans les conditions des DNS de Le Duc : module de l'amplitude de la perturbation de température en $y = 0.86393$, position où la perturbation atteint son maximum, pour le mode $S1$. La normalisation et les échelles de représentations sont identiques à la figure de gauche.	80
5.10	Évolution du module de l'amplitude de la perturbation de température vis-à-vis de la distance à la ligne de partage pour les modes $S1$, $A1$ et $S2$ dans les conditions des DNS de Le Duc ($\mathcal{M} = 0.2977$, $\mathcal{R} = 644$, $\beta = 0.2787$, $[0, 196] \times [0, 50]$: 36×53)	80
5.11	Effet de la température de paroi sur les vitesses de phase et taux d'amplification des modes $S1$, $A1$, $S2$	81
5.12	Mode $S1$: Comparaison des fluctuations de température pour les cas de parois isothermes à $T_p^* = 200K$, $T_p^* = 400K$ et cas de paroi adiabatique à $\mathcal{M} = 0.75$ et $\mathcal{M} = 2$ - $\mathcal{R} = 1500$, $\beta = 0.19$ - $[0, 200] \times [0, 50]$: 36×51	83
5.13	Autres modes compressibles : modes acoustiques ?	83
5.14	Comportement de la composante transversale de vitesse correspondant aux modes de compressibilité	84
5.15	Représentation des modes de compressibilité et des fluctuations de pression associées aux $S1_j$ pour des domaines de hauteur $y_{\max} = 50$ et $y_{\max} = 100$	84
Annexe Poiseuille		95
A.1	Représentation du maillage et de l'écriture des conditions limites	105
A.2	Représentation du domaine de calcul réduit	107
Annexe Hiemenz incompressible		109
B.1	Représentation des conditions limites dans le domaine de calcul de l'écoulement incompressible de Hiemenz	110
B.2	Représentation des conditions limites en formulation réduite dans le domaine de calcul de l'écoulement incompressible de Hiemenz	113

Liste des tableaux

Stabilité de l'écoulement 3D de Poiseuille	37
3.1 Mode neutre de l'écoulement dans une conduite définie par un rapport d'aspect $A = 5$ dans les conditions critiques $\mathcal{R} = 10400$ et $\alpha = 0.91$: comparaison aux calculs Arnoldi de Theofilis [36] et au résultat de l'approche locale	43
Stabilité de l'écoulement 3D de Hiemenz compressible	67
5.1 Validation du code compressible : comparaison des modes $S1, A1, S2, A2$ en incompressible et à $\mathcal{M} = 0.01$ aux résultats incompressibles de Lin & Malik [24] pour $\mathcal{R} = 800, \beta = 0.255$	73
5.2 Validation du code compressible : comparaison de $S1$ aux simulations numériques directes de Le Duc [20] à $\mathcal{M} = 0.2977$ pour $\mathcal{R} = 644, \beta = 0.2787$ et comparaison de la valeur incompressible correspondante au calcul de Schmid.	74
5.3 Effet de température : mode $S1$ en paroi adiabatique et paroi isotherme froide et chaude - $\mathcal{M} = 2, \mathcal{R} = 1500, \beta = 0.19, [0, 200] \times [0, 50]$: 36×51	82
Annexe Hiemenz incompressible	109
B.1 Effet de la résolution en x et en y pour un domaine $[0, 200] \times [0, 50]$ sur les valeurs des modes $S1, A1, S2, A2$ de l'écoulement Hiemenz en flèche de fluide incompressible pour $\mathcal{R} = 800, \beta = 0.255$	115
B.2 Effet des dimensions du domaine de calcul, x_{max} et y_{max} à une résolution de points donnée, 36×53 , sur les valeurs des modes $S1, A1, S2, A2$ de l'écoulement Hiemenz en flèche de fluide incompressible pour $\mathcal{R} = 800, \beta = 0.255$	116

Introduction

En raison de la non linéarité forte des équations, des solutions multiples peuvent exister satisfaisant aussi bien les équations générales de la mécanique que les conditions aux limites et les conditions initiales. Bien sûr en pratique ces conditions sont souvent simplifiées eu égard à tel modèle recherché (paroi parfaitement lisse, écoulement incident parfaitement uniforme etc ...), mais la question de la multiplicité des solutions demeure. Par exemple une couche limite peut être laminaire ou turbulente.

Une façon d'appréhender ce problème est de se poser la question de la stabilité des différentes solutions possibles. On peut penser que la théorie de la stabilité a un vrai point de départ avec les travaux de Lord Reynolds qu'il a appliqué à diverses applications. Ensuite et jusque vers les années soixante, avant l'arrivée de l'informatique, les études étaient exclusivement analytiques, s'appuyant notamment sur des approches asymptotiques. L'informatique et ses performances croissantes ont progressivement permis de répondre à des situations pratiques pour lesquelles l'approche numérique était indispensable. Ces calculs de stabilité restent néanmoins très avantageux en terme de temps de calcul par rapport à des simulations numériques complètes de l'écoulement considéré.

En pratique, une instabilité se déroule souvent en trois phases successives. Il y a d'abord l'apparition d'une instabilité en réponse à une (micro-) excitation quelle qu'elle soit (imperfection de paroi, inhomogénéité du fluide porteur etc), ce mécanisme fixe une amplitude initiale à chaque perturbation. Puis dans une phase dite linéaire, les perturbations sont appréhendées de façon individuelle avec une amplitude arbitraire, mais supposée très petite, on suit alors leur amplification éventuelle dans le temps ou dans l'espace. Cette étape linéaire conduit à la détermination des paramètres critiques associés au seuil de déclenchement des amplifications des perturbations. Enfin si les amplitudes atteintes physiquement deviennent trop importantes des phénomènes non linéaires entrent en jeu et il s'agit alors de prendre en compte les interactions entre les perturbations elles-mêmes ce qui peut conduire à des modifications observables de l'écoulement porteur. Dans certains cas, la phase linéaire peut ne pas exister, notamment dans le cas où les excitations évoquées ci-dessus sont de grande amplitude. Le travail présenté dans cette thèse se limite à la phase linéaire.

La stabilité est appliquée à un écoulement que l'on nomme écoulement de base; par le biais d'une méthode perturbative on superpose une fluctuation à cet écoulement de base. Tout l'avantage des méthodes de stabilité en linéaire par rapport aux simulations numériques directes consiste à particulariser une forme mathématique à la perturbation recherchée. Cette forme est déterminée par les propriétés de l'écoulement de base. L'approche classique que l'on notera $1D$ par la suite est limitée au cas d'écoulements dits parallèles (correspondant à un écoulement de base inhomogène dans une seule direction d'espace). L'approche $2D$ (ou non locale) proposée a pour objectif de généraliser l'approche classique pour traiter des écoulements de base plus complexes. Cette généralité a cependant l'inconvénient de demander de grandes ressources informatiques ce qui explique aussi que son développement soit récent.

Notre travail a consisté à formaliser la mise en œuvre de cette nouvelle approche et de l'appliquer à l'écoulement de couche limite qui se développe au voisinage de la ligne de partage d'une aile en flèche. Dans la traditionnelle recherche de réduction de traînée d'un avion, la conservation d'un état laminaire ou la relaminarisation de l'écoulement sur des zones étendues de chacune des parties de l'avion est un point déterminant. L'état de la couche limite au voisinage de la ligne de partage peut être critique vis-à-vis de la conservation d'un état laminaire sur l'aile. L'approche $1D$ est inadaptée pour cet écoulement, qui s'apparente à un écoulement de type point d'arrêt auquel on superpose une vitesse transversale. Les lignes de courant au voisinage de cette ligne sont donc violemment non-parallèles. Il existe une hypothèse simplificatrice, approximation de Görtler-Hämmerlin, qui permet de se ramener à une approche $1D$. Par chance, cette modélisation semble conduire au mode le plus amplifié mais rien ne garantit qu'il n'existe pas d'autres types d'instabilités que celle envisagée par cette hypothèse. Enfin si cette approximation conduit à une solution exacte du problème aux perturbations dans le cas d'un écoulement de fluide incompressible, en écoulement de fluide compressible elle imposerait de négliger un certain nombre de termes dans les équations, notamment celle de l'énergie.

Le premier objectif de cette thèse était donc de mettre en place un outil permettant d'étudier la stabilité linéaire d'écoulements tridimensionnels ou fortement non-parallèles par une approche non-locale. Nous avons donc choisi de développer cette nouvelle approche en considérant l'écoulement de Poiseuille dans une conduite de section rectangulaire, et en cherchant les instabilités dans un plan perpendiculaire à la direction de l'écoulement définissant une section complète de la conduite. Pour cela nous nous sommes appuyés sur les travaux de Tatsumi & Yoshimura [35]. Le deuxième objectif était d'utiliser cette méthode afin d'étudier la stabilité de l'écoulement de couche limite compressible au voisinage d'une ligne de partage. Nous avons dans un premier temps mené l'étude en écoulement incompressible en se basant sur les travaux de Lin & Malik [24] puis nous avons traité le cas compressible.

Le présent mémoire se décompose en cinq chapitres. Dans le premier chapitre il s'agit de présenter la méthode de stabilité linéaire non locale. Ainsi de façon formelle on rappellera le principe de l'approche locale et on donnera sa généralisation. La méthode de résolution numérique du problème de stabilité est également présentée. Un deuxième chapitre présente les écoulements qui ont été étudiés. On présentera pour chaque cas la géométrie, les grandeurs caractéristiques et le champ moyen ainsi que la façon de l'obtenir. Ce deuxième chapitre justifie donc en quelque sorte la nécessité de développer l'approche non locale présentée dans le premier chapitre. En outre les résolutions des écoulements moyens constituent une problématique à part entière et font appel à des méthodes de résolution différentes de celles utilisées pour le problème de stabilité. Enfin, il était plus aisé de présenter l'écoulement compressible de ligne de partage dans la continuité de la présentation de ce même écoulement en fluide incompressible. Finalement, chacune des sections de ce chapitre fera par la suite l'objet d'un chapitre qui sera dédié exclusivement au traitement du problème de stabilité par l'approche non locale. Ainsi le troisième chapitre décrit les éléments propres à l'approche $2D$ de la stabilité de l'écoulement de Poiseuille dans une conduite de section rectangulaire de dimensions finies. Le quatrième chapitre expose les résultats concernant la stabilité de l'écoulement de couche limite incompressible de ligne de partage. On montrera en particulier que nos résultats sont en très bon accord avec ceux établis précédemment. Le cinquième chapitre est dédié à la stabilité de l'écoulement de couche limite compressible de ligne de partage. Il n'existe que peu de résultats pour cette dernière configuration. On présentera les principales tendances qui ont pu être observées et on en proposera une analyse critique en les comparant à celles proposées par d'autres auteurs. Enfin on donnera les conclusions de cette étude et les perspectives qui nous sembleraient intéressantes de développer.

Chapitre 1

Stabilité linéaire $2D$: formulation générale

La présence d'instabilités, et leur amplification dans le temps ou dans l'espace est bien souvent à l'origine d'un processus de modification de la structure d'un écoulement, comme par exemple le passage d'un état laminaire à un état turbulent. Ces instabilités peuvent être déclenchées par un élément extérieur à l'écoulement, comme par exemple la présence d'imperfections sur une surface ou d'un bruit. Dans ce cas ces instabilités peuvent être soit d'amplitude infinitésimale et il existera alors une zone d'écoulement *sain* dans laquelle une amplification linéaire de ces instabilités peut être observée, soit d'amplitude non infinitésimale et l'écoulement sera alors totalement *contaminé* et son étude ne relève pas d'une analyse de stabilité. Par ailleurs, les instabilités peuvent être intrinsèques à l'écoulement, on parle également d'instabilités naturelles que l'on considère d'amplitudes infinitésimales. Dans ce cas, le développement des instabilités est lié à une valeur seuil d'un paramètre de l'écoulement. La stabilité linéaire permet de modéliser ces instabilités naturelles et d'étudier leur évolution. Le mécanisme global de déstabilisation de l'écoulement ne pourra être décrit uniquement par la théorie linéaire mais cette dernière constitue une étape importante vers la compréhension de ce mécanisme. En effet, pour reprendre l'exemple de la transition d'un état laminaire à un état turbulent, dans la plus grande partie des cas elle est le résultat d'une réceptivité de l'écoulement à des perturbations extérieures, combinée à une amplification linéaire des instabilités naturelles, et enfin à des mécanismes d'interactions non linéaires des différentes perturbations. Une présentation complète des instabilités hydrodynamiques et des théories de stabilité est proposée par différents auteurs, citons par exemple Drazin & Reid [7] et Huerre & Rossi [15].

Ce chapitre a pour but de présenter de façon formelle un problème de stabilité linéaire $2D$. On reviendra tout d'abord sur le principe de la méthode perturbative. Après avoir rappelé la théorie $1D$, qui est classiquement utilisée pour un écoulement parallèle, on généralisera cette formulation au cas $2D$. La méthode de résolution du problème de stabilité $2D$ est également donnée à la fin de ce chapitre.

1.1 Méthode perturbative

On rappelle que la méthode perturbative consiste à considérer un écoulement moyen dont on connaît une solution laminaire, stationnaire et à laquelle on superpose une perturbation tridimensionnelle, instationnaire infinitésimale. Les grandeurs qui définissent l'état et le mouvement de l'écoulement instantané, soient les composantes de vitesse, la pression et dans le cas compressible la température et la masse volumique, notées de façon générique \tilde{q} s'écrivent alors comme

la somme d'une grandeur moyenne, caractérisant l'écoulement laminaire stationnaire et notée \bar{Q} , et d'une grandeur fluctuante, représentative de la petite perturbation introduite et notée \hat{q} .

Si l'opérateur \mathcal{E} désigne les équations générales du mouvement alors formellement la solution pour l'écoulement instantané vérifie :

$$\mathcal{E}(\bar{q}) = \mathcal{E}(\bar{Q} + \hat{q}) = 0$$

L'écoulement moyen laminaire stationnaire est solution de : $\mathcal{E}(\bar{Q}) = 0$ et sous l'hypothèse de perturbations infinitésimales on linéarise les équations de sorte que les équations aux perturbations soient finalement décrites par l'application linéaire d'un opérateur (gradient de \mathcal{E}) dépendant de l'écoulement moyen :

$$\mathcal{L}(\bar{Q}).\hat{q} = 0 \tag{1.1}$$

Ainsi ces équations linéaires et homogènes associées à des conditions homogènes représentent le problème de stabilité à résoudre. Dans la section 1.1.1 on rappelle le principe de l'approche modale en $1D$ qui permet de réduire et de résoudre le problème (1.1) dans le cas d'écoulements moyens parallèles. Puis dans la section 1.1.2 on proposera une généralisation de cette approche modale que l'on qualifera de $2D$ pour des écoulements moyens tridimensionnels ou non-parallèles.

1.1.1 Rappel $1D$: écoulements parallèles

Les simplifications permettant la résolution du problème de stabilité se situent à deux niveaux intimement liés : la modélisation de l'écoulement moyen et la modélisation de la perturbation. La première ayant naturellement des conséquences sur la dernière. Ainsi dans l'approche $1D$ on considère des écoulements qui sont tels que l'opérateur $\mathcal{L}(\bar{Q})$ de l'expression (1.1) ne dépende que d'une variable d'espace X . En écoulement incompressible, cela revient à ce que $\mathcal{L}(\bar{Q})$ ne soit fonction que de la vitesse et dans ce cas l'équation de continuité impose des lignes de courant parallèles. C'est pour cette raison qu'on parle également souvent de l'approximation d'écoulements parallèles pour désigner l'approche $1D$. Le champ de vitesse décrivant l'écoulement moyen est donc considéré stationnaire et invariant dans deux des trois directions d'espace, soit :

$$\bar{U} = \bar{U}(X) \tag{1.2}$$

où X est une variable d'espace. Ce type d'écoulement correspond par exemple à l'écoulement plan, incompressible, stationnaire de Poiseuille entre deux plans parallèles infinis dans les directions x et z et dont le champ de vitesse est donné par $\bar{U} = (\bar{U}(y), 0, 0)$. Dans ce cas l'équation linéaire décrite par (1.1) est à coefficients constants vis-à-vis des variables de temps t et d'espace Y et Z . Or une équation linéaire à coefficients constants admet des solutions exponentielles, d'où l'idée de rechercher les perturbations dont la dépendance en t , Y et Z est de type exponentiel :

$$\hat{q}(X, Y, Z, t) = q(X)e^{i(k_1Y + k_2Z - \omega t)} \tag{1.3}$$

Les nombres k_1 , k_2 et ω et la fonction $q(X)$ sont *a priori* complexes. La partie imaginaire de l'exponentielle donne à la perturbation son caractère ondulatoire tandis que la partie réelle donne l'amplification ou l'atténuation de la perturbation. L'instabilité physique correspond à la partie réelle de \hat{q} . Pour simplifier, on s'intéresse au cas où les perturbations sont recherchées dans un plan, soit $k_2 = 0$. On peut alors envisager deux types de théorie :

- la théorie temporelle pour laquelle on suppose que l'amplification (ou l'atténuation) des ondes ne peut être que temporelle. Dans ce cas, k_1 est réel et représente le nombre d'onde dans la direction longitudinale et ω est complexe, sa partie réelle représente la pulsation de l'onde et sa partie imaginaire le taux d'amplification. L'écoulement est temporellement stable si ω_i est négatif et instable si ω_i est positif.

- la théorie spatiale pour laquelle on suppose que l'amplification (ou l'atténuation) des ondes ne peut être que spatiale. Dans ce cas, ω est réel et représente la pulsation de l'onde tandis que k_1 est complexe, sa partie imaginaire représentant le nombre d'onde spatial et sa partie réelle le taux d'amplification. L'écoulement est spatialement stable si k_{1i} est positif et instable si k_{1i} est négatif. La stabilité spatiale dépend en réalité du signe de k_{1i} et de celui de la vitesse de groupe dans la direction Y .

Grâce à ces modélisations les équations aux perturbations données par (1.1) peuvent se ramener, dans le cas incompressible, à une équation différentielle scalaire ordinaire :

$$\mathcal{O}(\bar{Q}, k_1, k_2, \omega).q(X) = 0 \quad (1.4)$$

Cette équation différentielle ordinaire homogène et ses conditions limites homogènes associées constituent le problème de stabilité à résoudre. La condition d'existence d'une solution autre que la solution $q \equiv 0$, qui correspond à la solution d'écoulement non perturbé où l'écoulement instantané se réduit à l'écoulement moyen, est que l'opérateur constitué de \mathcal{O} et des conditions limites correspondantes soit singulier, ce qui se traduit par une relation, dite de dispersion, de dépendance entre les paramètres k_1 , k_2 et ω :

$$\mathcal{D}(k_1, k_2, \omega) = 0 \quad (1.5)$$

Ainsi, en se plaçant dans le cadre de la théorie spatiale ou temporelle, bien souvent la démarche est de se donner deux de ces paramètres et de résoudre alors le problème aux valeurs propres dont les solutions correspondent aux valeurs du troisième paramètre, les fonctions d'amplitude q sont les fonctions propres correspondant à chacune de ces valeurs. Dans le cadre de la théorie temporelle, on cherche à résoudre le problème aux valeurs propres donné par :

$$\mathcal{V}_1^t(\bar{Q}, k_1, k_2)q = \omega \mathcal{V}_2^t(\bar{Q}, k_1, k_2)q \quad (1.6)$$

En effet, la dépendance de ω dans l'opérateur \mathcal{O} de l'expression (1.4) est linéaire et on peut donc écrire (1.4) sous la forme $(\mathcal{V}_1^t(\bar{Q}, k_1, k_2) - \omega \mathcal{V}_2^t(\bar{Q}, k_1, k_2)).q(X) = 0$ qui conduit au problème aux valeurs propres généralisé donné par (1.6). Dans le cadre de la théorie spatiale, la valeur propre apparaît généralement sous la forme d'un polynôme. Pour simplifier, on se place dans le cas où $k_2 = 0$, en posant $k = k_1$ le problème s'écrit alors :

$$\mathcal{V}_1^s(\bar{Q}, \omega)q = \sum_n^N k^n \mathcal{V}_{2,n}^s(\bar{Q}, \omega)q \quad (1.7)$$

Si on souhaite pouvoir utiliser les méthodes de résolution classiques présentées par la suite, il faudra alors transformer le problème (1.7) à un problème linéaire. Pour cela, on construit un nouveau vecteur inconnu \tilde{q} , tel que :

$$\tilde{q} = (q, kq, \dots, k^{N-1}q)^T$$

Le problème (1.7) sera alors sous la forme désirée, $\tilde{\mathcal{V}}_1^s \tilde{q} = k \tilde{\mathcal{V}}_2^s \tilde{q}$.

Dans le cas où on considère l'écoulement de base unidirectionnel, par exemple de Poiseuille, et au sein duquel on cherche les perturbations dans le plan (x, y) soit $\hat{u} = (u(y), v(y), 0)e^{i(\alpha x - \omega t)}$, l'équation différentielle ordinaire obtenue est l'équation de Orr-Sommerfeld :

$$\left[\frac{1}{i\mathcal{R}} (D^2 - \alpha^2)^2 - (\alpha \bar{U} - \omega) (D^2 - \alpha^2) + \alpha \bar{U}'' \right] v = 0 \quad (1.8)$$

avec l'opérateur D désignant la dérivation par rapport à y , $D = \frac{d}{dy}$ et \mathcal{R} le nombre de Reynolds défini à l'aide des grandeurs de référence de l'écoulement considéré. Cette équation se généralise facilement au cas de perturbations ayant une troisième composante de vitesse et un nombre d'onde k_2 non nul. Les conditions limites associées sont homogènes :

$$v(y = 1) = v(y = -1) = v'(y = 1) = v'(y = -1) = 0 \quad (1.9)$$

On trouvera une description plus détaillée par exemple dans Drazin & Reid [7].

1.1.2 Cas général 2D

On souhaite généraliser l'approche modale utilisée pour les écoulements parallèles à des écoulements non-parallèles ou tridimensionnels. On considère donc un écoulement moyen stationnaire pour lequel l'opérateur $\mathcal{L}(\bar{Q})$ de l'expression (1.1) est fonction de deux variables d'espace X et Y . Dans le cas incompressible, cela correspond à un champ de vitesse :

$$\bar{U} = \bar{U}(X, Y) \quad (1.10)$$

De la même façon, on recherche des perturbations prise sous forme de mode normal vis-à-vis du temps et de la troisième variable spatiale :

$$\hat{q}(X, Y, Z, t) = q(X, Y)e^{i(kZ - \omega t)} \quad (1.11)$$

Dans la suite, on utilisera également la forme $\hat{q}(X, Y, Z, t) = q(X, Y)e^{ik(Z - ct)}$ où $c = \frac{\omega}{k}$ représente la vitesse de phase. Par ailleurs on notera $f = \omega/2\pi$ la fréquence associée à la perturbation. Les équations aux perturbations données par (1.1) ne peuvent plus s'écrire sous forme d'une équation différentielle ordinaire mais d'un système d'équations aux dérivées partielles :

$$\mathcal{P}(\bar{Q}, k, \omega).q(X, Y) = 0 \quad (1.12)$$

Le problème discretisé pour la résolution numérique sera en conséquence de taille considérablement plus importante que pour l'approche 1D. C'est d'ailleurs en raison de ces limitations d'ordre numérique que l'approche 2D a été peu développée jusqu'à présent. C'est également la raison pour laquelle on restera dans le cadre de la théorie temporelle bien que les écoulements considérés par la suite soient plutôt sujets à des instabilités convectives. La théorie spatiale serait alors plus pertinente mais elle est également bien plus coûteuse, particulièrement en approche 2D et à plus forte raison pour un écoulement compressible. L'étude de stabilité en théorie spatiale est néanmoins envisageable et a d'ailleurs été réalisée par certains auteurs que l'on précisera pour chaque application. Dans ce cas, la méthode de résolution est différente de celle présentée ci-après, il faudra par exemple utiliser une méthode de Jacobi-Davidson. C'est une méthode qui consiste à projeter le problème non-linéaire sur un sous-espace de dimension moindre. Une présentation est donnée par Voss [40], ce type de méthode est également utilisée par Heeg [14]. Cette méthode peut aussi bien être utilisée pour l'approche 1D mais le problème en 1D étant de taille plus raisonnable, elle semble moins essentielle.

Les conditions limites seront supposées homogènes de façon à toujours être en mesure de se ramener à la résolution d'un problème aux valeurs propres de type (1.6). Ces conditions limites peuvent éventuellement s'avérer être un point dur selon les applications considérées. En effet, dans le cas d'écoulements fermés ou assimilés, toutes les frontières du problème sont réelles et il existe des conditions naturelles. En revanche, dans le cas d'écoulements ouverts, la frontière globale du problème est la réunion de frontières réelles et artificielles $\Gamma = \Gamma_\phi \cup \Gamma_{num}$. L'établissement de conditions limites sur ces frontières artificielles reste un point délicat sur lequel nos travaux n'apportent que des propositions.

1.2 Problème aux valeurs propres généralisé

On a montré dans la section 1.1.2 que le problème de stabilité est un système d'équations aux dérivées partielles qui, associé à des conditions limites homogènes, s'écrit comme un problème aux valeurs propres généralisé (1.6). Il existe une solution non nulle à ce problème si ω appartient au spectre des opérateurs définissant (1.6), $\mathcal{S}(\mathcal{V}_1^t, \mathcal{V}_2^t)$. Nous allons voir dans cette section comment résoudre numériquement ce problème.

1.2.1 Discrétisation des équations aux dérivées partielles

La résolution du problème de stabilité est traitée à l'aide d'une méthode de collocation spectrale dans les deux directions. Un exposé complet des méthodes spectrales a été réalisé par Canuto *et al.* [4]. Nous n'utilisons pas de méthode spectrale à proprement parler puisqu'on restera toujours dans l'espace physique. On rappelle ici quelques éléments principaux de cette méthode.

Le domaine de discrétisation défini par les intervalles I et J est composé de couples de points (X, Y) . Ces points sont construits à partir des points de Gauß-Lobatto. Pour l'intervalle I on utilise $n_x + 1$ points ξ_i définis sur $[-1, 1]$ et répartis sur I à l'aide d'un changement de variable adéquat. La question du changement de variable est traité ci-après. De même sur l'intervalle J on utilise $n_y + 1$ points η_j de Gauß-Lobatto. Ces points de collocation s'expriment par :

$$\xi_i = \cos\left(\frac{\pi i}{n_x}\right), \quad i = 0, \dots, n_x \quad \text{et} \quad \eta_j = \cos\left(\frac{\pi j}{n_y}\right), \quad j = 0, \dots, n_y$$

Une approximation d'une fonction $\psi(\xi)$ définie sur $[-1, 1]$ est obtenue par interpolation polynômiale :

$$\psi(\xi) = \sum_{i=0}^{n_x} \lambda_i(\xi) \psi(\xi_i)$$

avec λ_i les polynômes interpolateurs de Lagrange, qui dans le cas particulier des points ξ choisis, ont l'expression simple suivante :

$$\lambda_i(\xi) = \left(\frac{1 - \xi^2}{\xi - \xi_i}\right) (-1)^{i+1} \frac{T'_{n_x}(\xi)}{n_x^2 c_i}$$

où T'_{n_x} désigne la dérivée de T_{n_x} , T_n étant le polynôme de Chebychev de degré n et c_i la suite telle que pour un entier n_x fixé, $c_0 = c_{n_x} = 2$ et $c_i = 1$ pour $i = 1, \dots, n_x - 1$. Ainsi, si la fonction ψ est l'inconnue du problème, la méthode de discrétisation consiste à remplacer cette inconnue par les $n_x + 1$ inconnues $\psi_i = \psi(\xi_i)$.

De façon équivalente l'approximation d'une fonction $\psi(\xi, \eta)$ définie sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$ est obtenue de façon similaire, à η fixé :

$$\psi(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n_x} \lambda_i(\xi) \psi(\xi_i, \eta)$$

À ξ fixé, on réalise alors l'interpolation suivant η :

$$\psi(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^{n_y} \mu_j(\eta) \psi(\xi, \eta_j)$$

avec $\mu_j(\eta) = \left(\frac{1 - \eta^2}{\eta - \eta_j} \right) (-1)^{j+1} \frac{T'_{n_y}(\eta)}{n_y^2 d_j}$ et $d_0 = d_{n_y} = 2$, $d_j = 1$ pour $j = 1, \dots, n_y - 1$. Finalement la solution s'écrit :

$$\psi(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{n_x} \sum_{j=0}^{n_y} \lambda_i(\xi) \mu_j(\eta) \psi(\xi_i, \eta_j), \quad (1.13)$$

et les inconnues discrètes sont $\psi_{ij} = \psi(\xi_i, \eta_j)$.

Dérivation

La dérivée d'ordre l de la solution approchée d'une fonction $\psi(\xi)$ définie sur $[-1, 1]$ est évaluée aux points de collocation à l'aide d'un opérateur de dérivation obtenu en différenciant les fonctions interpolantes :

$$\psi^{(l)}(\xi_i) = \sum_{k=0}^{n_x} \lambda_k^{(l)}(\xi_i) \psi(\xi_k)$$

Cet opérateur peut être représenté par une matrice qui relie ainsi de façon simple la dérivée de ψ calculée aux points de collocation avec les valeurs de ψ en ces mêmes points :

$$\frac{d^l \psi}{d\xi^l}(\xi_i) = \sum_{k=0}^{n_x} D_{\Xi ik}^{(l)} \psi_k$$

La matrice de dérivation à l'ordre 0 est la matrice identité, notée \mathbf{I} et dans notre cas les coefficients de la matrice de dérivation à l'ordre 1, notée \mathbf{D}_{Ξ} s'expriment de manière simple :

$$\begin{aligned} D_{\Xi ik} &= \frac{c_i}{c_k} \frac{(-1)^{k+i}}{\xi_i - \xi_k} && \text{pour } i \neq k \\ D_{\Xi ii} &= -\frac{\xi_i}{2(1 - \xi_i^2)} && \text{pour } i = 1, \dots, n_x - 1 \\ D_{\Xi 00} &= -D_{\Xi n_x n_x} = \frac{2n_x^2 + 1}{6} \end{aligned}$$

La matrice de dérivation pour la fonction définie sur un intervalle I sera obtenue par le changement de variable considéré. Les matrices de dérivation d'ordre supérieur peuvent être obtenues par multiplications matricielles simples ou bien par la méthode itérative proposée par Weideman & Reddy [41] où les coefficients hors diagonale sont obtenus par la récurrence :

$$i \neq k \quad D_{\Xi ik}^{(l)} = \frac{l}{\xi_i - \xi_k} \left(\frac{c_i}{c_k} D_{\Xi kk}^{(l-1)} - D_{\Xi ik}^{(l-1)} \right) \quad (1.14)$$

et les termes de la diagonale par la relation :

$$D_{\Xi ii}^{(l)} = -\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n_x} D_{\Xi ik}^{(l)}$$

De façon équivalente, on généralise à une fonction $\psi(\xi, \eta)$ définie sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$ en représentant la matrice de dérivation à l'ordre 1 par rapport à η par :

$$\begin{aligned} D_{\Pi jk} &= \frac{d_j}{d_k} \frac{(-1)^{j+k}}{\eta_j - \eta_k} && \text{pour } j \neq k \\ D_{\Pi jj} &= -\frac{\eta_j}{2(1 - \eta_j^2)} && \text{pour } j = 1, \dots, n_y - 1 \\ D_{\Pi 00} &= -D_{\Pi n_y n_y} = \frac{2n_y^2 + 1}{6} \end{aligned}$$

Les dérivées de ψ aux points de collocation s'expriment donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}(\xi_i, \eta_j) = \sum_{k=0}^{n_x} D_{\Xi ik} \psi_{kj} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \eta}(\xi_i, \eta_j) = \sum_{k=0}^{n_y} D_{\Pi jk} \psi_{ik} \end{cases} \quad (1.15)$$

Changement de variable

Transformation de l'intervalle $[-1, 1]$ en $I = [-L, L]$

Ce cas est évidemment extrêmement simple, la variable x définie sur I et ses dérivées s'expriment par :

$$x = L\xi \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_X^{(l)} = \frac{1}{L^l} \mathbf{D}_\Xi^{(l)}$$

Utilisation de matrices de dérivation paires et impaires pour un calcul sur $I = [0, L]$

Si la géométrie et l'écoulement le permettent il est souvent judicieux, en tous cas économique, de ne considérer qu'un demi-domaine en utilisant des propriétés de symétrie et de parité. Dans ce cas on ne considère que la moitié des points. On suppose que n_x est pair de sorte à ce que le point 0 soit un point de collocation et on pose $n_x = 2(n - 1)$. Le calcul sera alors réalisé à l'aide des n points représentant l'intervalle $[0, 1]$. On peut simplement utiliser les matrices de dérivation tronquées au sous-domaine et imposer des conditions de parité ensuite ou bien on peut construire de nouvelles matrices qui prennent en compte la parité de la fonction que l'on s'apprête à dériver. Ces matrices, notées avec un exposant (p) pour les matrices de dérivation paires et un exposant (i) pour les matrices impaires, sont définies par :

$$\forall i = 0, \dots, n \quad \begin{cases} D_{Xij}^{(p)(l)} = D_{Xij}^{(l)} + D_{Xi,2n-j}^{(l)} \quad \forall j = 0, \dots, n-1 & \text{et} \quad D_{Xin}^{(p)(l)} = D_{Xin}^{(l)} \\ D_{Xij}^{(i)(l)} = D_{Xij}^{(l)} - D_{Xi,2n-j}^{(l)} \quad \forall j = 0, \dots, n-1 & \text{et} \quad D_{Xin}^{(i)(l)} = D_{Xin}^{(l)} \end{cases}$$

L'utilisation de ces matrices paires et impaires implique que les conditions de parité portant sur les dérivées sont implicitement vérifiées, en revanche l'annulation de la fonction impaire en 0 reste à préciser.

Transformation de l'intervalle $[-1, 1]$ en $I = [0, L]$

Cette transformation est notamment utilisée, une fois de plus, dans le cas de résolution sur un demi-domaine en imposant des conditions de parité. Cette fois, tous les points de Gauß-Lobatto sont utilisés pour représenter le demi-intervalle. On a :

$$x = L \frac{1 + \xi}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_X^{(l)} = \frac{2^l}{L^l} \mathbf{D}_\Xi^{(l)}$$

Transformation de l'intervalle $[-1, 1]$ en $J = [0, L]$ avec resserrement des points autour d'un point y_i

Cette transformation est souvent utilisée pour représenter un intervalle physique $[0, +\infty]$. En particulier si on s'intéresse à un écoulement entre une paroi libre et une atmosphère infinie, et que l'on souhaite cependant bien représenter la zone proche paroi où se développe la couche limite, on pourra choisir de resserrer les points autour de l'épaisseur de couche limite. On pose :

$$y = a \frac{1 + \eta}{b - \eta}$$

avec $b = 1 + 2a/L$ et $a = y_i L / (L - y_i)$, ainsi la moitié des points sont situés dans la zone $0 \leq y \leq y_i$. Les matrices de dérivation sont données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_Y &= c_0 \mathbf{D}_\Xi & \mathbf{D}_Y^{(3)} &= c_5 \mathbf{D}_\Xi^{(3)} + c_4 \mathbf{D}_\Xi^{(2)} + c_3 \mathbf{D}_\Xi \\ \mathbf{D}_Y^{(2)} &= c_2 \mathbf{D}_\Xi^{(2)} + c_1 \mathbf{D}_\Xi & \mathbf{D}_Y^{(4)} &= c_9 \mathbf{D}_\Xi^{(4)} + c_8 \mathbf{D}_\Xi^{(3)} + c_7 \mathbf{D}_\Xi^{(2)} + c_6 \mathbf{D}_\Xi \end{aligned}$$

avec, en posant $d = a(b + 1)$, les termes métriques c_i :

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{(b - \eta)^2}{d} & c_5 &= \frac{(b - \eta)^6}{d^3} \\ c_1 &= -2 \frac{(b - \eta)^3}{d^2} & c_6 &= -24 \frac{(b - \eta)^5}{d^4} \\ c_2 &= \frac{(b - \eta)^4}{d^2} & c_7 &= 36 \frac{(b - \eta)^6}{d^4} \\ c_3 &= 6 \frac{(b - \eta)^4}{d^3} & c_8 &= -12 \frac{(b - \eta)^7}{d^4} \\ c_4 &= -6 \frac{(b - \eta)^5}{d^3} & c_9 &= \frac{(b - \eta)^8}{d^4} \end{aligned}$$

Modification des dérivées pour la prise en compte implicite des conditions limites

Il est également possible pour un problème aux conditions limites simples de modifier la base de polynômes interpolants de sorte à ce qu'ils vérifient les conditions limites du problème. Les matrices mises en jeu sont alors réduites du nombre de points pour lesquels on a une condition limite. Cette modification se traduit ensuite par de nouvelles matrices de dérivation. Cette méthode n'a été utilisée que pour l'écoulement de Poiseuille, elle est détaillée par Weideman [41] et est abordée en annexe A.

1.2.2 Résolution du spectre $\mathcal{S}(\mathcal{V}_1^t, \mathcal{V}_2^t)$

Les équations du problème (1.12) sont discrétisées à l'aide de la méthode de collocation spectrale présentée ci-avant. Le problème de stabilité est donc décrit par $n_q \times (n_x + 1)(n_y + 1)$ équations discrètes couplées, où n_q désigne le nombre d'éléments du vecteur inconnu continu \underline{q} . Il s'agit à présent d'écrire le problème sous la forme classique matricielle d'un problème aux valeurs propres généralisé :

$$\mathbf{A} \cdot \underline{X} = \omega \mathbf{B} \cdot \underline{X} \quad (1.16)$$

Les $(n_x + 1)(n_y + 1)$ premières composantes du vecteur \underline{X} correspondent aux valeurs discrètes de la première grandeur caractéristique du vecteur \underline{q} (par exemple la composante de vitesse dans la direction x) et ainsi de suite. Cette solution n'est pas nécessairement habituelle en 1D mais c'est celle que nous avons utilisée. Un exemple de la construction de ces matrices est donnée en annexe A pour l'écoulement de Poiseuille et en annexe B.3 pour le cas de l'étude de la stabilité de l'écoulement de ligne de partage incompressible avec une formulation réduite des équations. Le problème étant à présent donné sous forme matricielle, sa résolution va pouvoir être réalisée à l'aide d'algorithmes déjà programmés dans des sous-routines disponibles dans des bibliothèques de calcul.

Algorithme QZ

Une description générale des différentes méthodes et algorithmes existants pour la résolution de problèmes aux valeurs propres de tous types est donnée dans les ouvrages de Golub &

Van Loan [11] et Chatelin [6]. Concernant des problèmes aux valeurs propres généralisés impliquant des matrices complexes, non-symétriques, l'algorithme permettant la résolution complète du spectre est l'algorithme QZ. Il est basé sur une méthode itérative conduisant à la réduction de \mathbf{A} et \mathbf{B} à l'aide de décompositions Schur généralisées en matrices respectivement de Hessenberg et triangulaire supérieures. En pratique nous utilisons une sous-routine de calcul issue de la librairie LAPACK [1]. Dans le cas d'une approche $1D$ cette méthode de résolution convient parfaitement, en revanche pour une approche $2D$ elle n'est pas toujours envisageable. En effet, lorsque les matrices deviennent très grandes, il n'est plus possible d'utiliser les méthodes itératives classiques qui requièrent, lorsqu'elles convergent, une allocation de mémoire et un temps de calcul prohibitifs. Pour les matrices de grande taille il existe des méthodes itératives dont le principe est de projeter les matrices sur des sous-espaces de dimensions significativement plus petites. On en expose brièvement le principe dans le paragraphe suivant.

Méthode itérative de type Arnoldi

L'idée de cette méthode est d'une part de projeter les matrices sur un espace de dimension plus petite que le problème initial mais également d'utiliser un sous-espace ayant des propriétés de convergence permettant de réduire le nombre d'itérations nécessaires pour la réduction des matrices à des formes plus simples. Les valeurs propres de la matrice projetée sur un sous-espace de Krylov correspondent à une approximation des valeurs propres de plus grand module de la matrice initiale. La dimension du sous-espace étant très inférieure à celle du problème initial, on peut résoudre le problème projeté à l'aide d'une méthode itérative classique telle que la méthode QZ présentée ci-avant. Nous proposons dans ce paragraphe une présentation simplifiée des principes à l'origine de ce type d'algorithmes. La plupart de nos calculs ont été réalisés à l'aide de sous-programmes issus de la librairie ARPACK [3] qui utilisent cette méthode. Arnoldi [3] est l'un des premiers à proposer ce type de méthode pour des matrices symétriques. Les généralisations à des matrices quelconques et des améliorations de cet algorithme initial ont fait l'objet de nombreux travaux, on ne citera ici que Saad [32] concernant les différents algorithmes d'orthogonalisation. Une récapitulation synthétique de la méthode est également donnée par Sorensen *et al.* [22], auteurs de la librairie ARPACK.

Les éléments propres ω , \underline{X} du problème (1.16) d'ordre $n_q(n_x + 1)(n_y + 1)$ vont être approchés par ceux d'une matrice d'un ordre m très inférieur à $n_q(n_x + 1)(n_y + 1)$.

On propose ici une présentation très simplifiée du principe de la méthode. Pour une description plus complète on se référera à Saad [32], Sorensen *et al.* [22], Golub & Van Loan [11] ou Chatelin [6]. Considérons le problème aux valeurs propres simple, $\mathbf{A}\underline{X} = \lambda\underline{X}$. Dans ce cas, la matrice de dimension m est obtenue par projection orthogonale sur le sous-espace de Krylov $\mathcal{K}_m(\mathbf{A}, \underline{X}_0)$. Le sous-espace $\mathcal{K}_m(\mathbf{A}, \underline{X}_0)$ est engendré par les combinaisons linéaires de $\{\underline{X}_0, \mathbf{A}\underline{X}_0, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\underline{X}_0\}$, où \underline{X}_0 représente un vecteur initial. Notons $\mathcal{B}_0 = (\underline{e}_0, \dots, \underline{e}_m)$ la base canonique. On construit, à partir de \underline{X}_0 , une base orthonormale $\mathcal{Q}_m = (\underline{q}_0, \dots, \underline{q}_{m-1})$ de ce sous-espace \mathcal{K}_m telle que l'on puisse écrire :

$$\mathbf{A}\mathbf{Q}_m = \mathbf{Q}_m\mathbf{H}_m + h_m\underline{q}_m\underline{e}_m^T$$

où \mathbf{Q}_m est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $(\underline{q}_0, \dots, \underline{q}_{m-1})$ exprimés dans la base \mathcal{B}_0 , \underline{e}_m^T est le transposé de \underline{e}_m et \mathbf{H}_m une matrice de Hessenberg supérieure¹. Dans cette équation le scalaire h_m représente le résidu de la réduction de \mathbf{A} sur le sous-espace de Krylov. Si $h_m = 0$, alors le sous-espace $\mathcal{K}_m(\mathbf{A}, \underline{X}_0)$ est un sous-espace invariant de \mathbf{A} et dans ce cas les éléments propres de la matrice Hessenberg sont exactement les m éléments propres de plus grand module de \mathbf{A} .

¹Une matrice de Hessenberg supérieure est une matrice \mathbf{H} complexe de dimension $n \times n$ dont les éléments sont tels que $hi, j = 0$ pour $i > j + 1$

Cette étape finale n'est obtenue qu'après plusieurs itérations dans lesquelles le vecteur initial \underline{X}_0 est évalué à partir d'une combinaison linéaire des vecteurs formant la base orthonormale \mathcal{Q}_m calculée à l'itération précédente. La construction du sous-espace de Krylov fait intervenir des puissances de la matrice \mathbf{A} , ce qui implique que les écarts entre les valeurs propres de la matrice projetée seront plus importants, ce qui facilite leur obtention. L'autre conséquence est qu'en utilisant un sous-espace de dimension p supérieure à m , on sera en mesure d'obtenir une meilleure approximation d'un plus grand nombre de valeurs propres du problème complet.

Le problème que nous souhaitons résoudre est un problème aux valeurs propres généralisé $\mathbf{A}.\underline{X} = \omega\mathbf{B}.\underline{X}$ dont la matrice \mathbf{B} est singulière. Les valeurs propres approchées étant celles de plus grand module, l'idée est de contourner le problème de la singularité de \mathbf{B} tout en choisissant la zone du spectre recherchée. Ainsi, on utilise une valeur cible σ et on applique la méthode présentée ci-avant pour le problème aux valeurs propres simple pour résoudre le problème suivant :

$$(\mathbf{A} - \sigma\mathbf{B}).\underline{X} = \lambda\underline{X}$$

Les fonctions propres restent les mêmes et la valeur propre ω est immédiatement déduite de λ par :

$$\omega = \sigma + \frac{1}{\lambda}$$

Une restriction apparaît cependant pour le choix de σ , la transformation précédente n'est possible que si σ n'est pas une valeur propre du problème.

En pratique, le problème discret le plus lourd présenté dans ce mémoire utilise $(n+1)(n_y+1) = 36 \times 53$ points pour $n_q = 5$ grandeurs caractéristiques, ce qui correspond à des matrices de dimension 9540^2 . On recherche dans ce cas 30 valeurs propres et fonctions propres associées à l'aide d'un sous-espace de dimension 300 (un sous-espace de dimension 100 serait également suffisant par exemple). L'approximation est plus que satisfaisante, on en verra une illustration sur la figure 4.13.

1.3 Conclusion

Le principe général d'une étude de stabilité a été rappelé et la généralisation à l'approche $2D$ a été présentée. Les outils nécessaires à la discrétisation et la résolution de ces problèmes ont également été introduits. Nous allons donc appliquer la démarche proposée ici à différents écoulements. Les champs de base et leur résolutions sont rassemblés dans le prochain chapitre. Les équations aux perturbations correspondant à chaque écoulement seront données et résolues dans les chapitres suivants. Pour chaque configuration, il faudra préciser :

- les variables X, Y , liées à l'inhomogénéité de l'écoulement dont on étudie la stabilité,
- déterminer un domaine d'intégration $\Omega = I \times J$ du problème différentiel,
- donner les conditions aux limites sur les frontières naturelles Γ_ϕ et artificielles Γ_{num} ,
- effectuer les changements de variable nécessaires pour se retrouver avec un problème aux valeurs propres généralisé du type (1.6) discrétisé dans $[-1, 1] \times [-1, 1]$,
- résoudre ce problème en *essayant* différentes cibles pour l'algorithme d'Arnoldi.

Chapitre 2

Applications : écoulements tridimensionnels ou non-parallèles

Dans ce chapitre on présente brièvement les écoulements pour lesquels nous avons mené une étude de stabilité $2D$. L'écoulement de Poiseuille dans une conduite de section rectangulaire a été choisi dans le but de développer notre approche $2D$. Ce cas académique, largement documenté dans le cadre d'une théorie de stabilité classique $1D$ nous a en effet permis de valider notre démarche ; il présente en outre l'avantage de conditions aux limites bien posées. Nous nous sommes ensuite intéressés à des écoulements plus proches d'applications de type aéronautiques : d'une part l'écoulement de Taylor dans une conduite à parois débitantes qui modélise l'écoulement interne d'un moteur à propergol solide (booster d'Ariane 5) et d'autre part l'écoulement de couche limite se développant autour d'une aile en flèche à proximité de la ligne de partage. Pour ce dernier, on mènera une étude en écoulement incompressible mais également une étude en écoulement compressible.

La démarche formelle exposée dans le chapitre 1 sera donc appliquée à chacun de ces écoulements. Les études de stabilité détaillées feront l'objet des prochains chapitres. L'objet de ce chapitre est de préciser pour chaque cas la géométrie considérée ainsi que les différentes grandeurs caractéristiques et nombres adimensionnels mis en jeu. Enfin on décrit l'écoulement moyen et la méthode utilisée pour le calculer.

2.1 Écoulement $3D$ de Poiseuille

2.1.1 Géométrie

Dans une conduite de section rectangulaire, on considère l'écoulement de Poiseuille laminaire incompressible stationnaire. Contrairement au cas plan, la hauteur et la largeur de la conduite sont de dimensions comparables et on définit un rapport d'aspect A comme le rapport de la largeur sur la hauteur. Par raison de symétrie on se limite par exemple au cas $A > 1$. Le cas plan correspond au cas où ce rapport d'aspect est infini. Le couple (y, z) définit la section de la conduite et x désigne la direction longitudinale du canal (voir figure 2.1). La longueur du canal est supposée suffisamment grande devant les dimensions de la section de sorte que l'écoulement moyen puisse être considéré comme invariant dans cette direction. Pour l'écoulement moyen, on cherche une solution simple des équations de Navier-Stokes décrivant un fluide laminaire incompressible en écoulement stationnaire et invariant en x . L'équation de continuité suggère alors un champ de vitesse de type $(\bar{U}(y, z), 0, 0)$. Notons que ce champ de vitesse correspond à un écoulement unidirectionnel mais qui dépend de deux variables d'espace définissant le plan

normal à cette direction et donc représenté de façon tridimensionnelle.

2.1.2 Grandeurs caractéristiques

La longueur caractéristique choisie pour cet écoulement est la demi-hauteur de la conduite (direction y) et la vitesse de référence est la vitesse maximale, relevée sur l'axe ¹. Pour l'écoulement de Poiseuille, \mathcal{R} désigne donc le nombre de Reynolds correspondant à cet adimensionnement.

La démarche formelle pour mener une étude de stabilité 2D exposée au chapitre 1 sera appliquée à l'écoulement de Poiseuille dans le chapitre dédié à celui-ci (chap. 3). On précise ici auparavant les différentes notations relatives à cette étude. La recherche d'instabilités s'effectue dans toute la section de la conduite, ainsi pour cette application les variables d'espace adimensionnelles sont $X = y$, $Y = z$, le domaine de calcul est fermé par des parois et ainsi il n'y a pas de frontière artificielle, $\Gamma_\phi = \gamma_p$ et $\Gamma_{num} = \emptyset$. Le nombre d'onde k est un nombre d'onde longitudinal que l'on notera α . Les perturbations de vitesse u , v , w et de pression p s'écrivent donc sous la forme de mode normal :

$$\hat{q} = q(y, z)e^{i(\alpha x - \omega t)}$$

Le problème de stabilité pouvant être abordé de différentes façons, on écrira les équations que doivent satisfaire les perturbations au début du chapitre consacré à la stabilité de l'écoulement de Poiseuille (chap. 3). On verra en particulier qu'il est possible d'utiliser une formulation réduite, en ne conservant que deux composantes de vitesse de fluctuations inconnues.

2.1.3 Écoulement moyen

On cherche une solution simple des équations de Navier-Stokes représentant un fluide laminaire incompressible en écoulement stationnaire et invariant en x , soit le champ de vitesse de type $(\bar{U}(y, z), 0, 0)$ suggéré par l'équation de continuité. Après simplification du système d'équations on trouve un gradient de pression longitudinal constant et il reste à résoudre une équation de Poisson pour la vitesse. Ces équations sont données sous forme adimensionnée par :

$$\begin{cases} \frac{d\bar{P}}{dx} = \kappa \\ \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} = \kappa \mathcal{R} \end{cases} \quad (2.1)$$

avec κ une constante² et \mathcal{R} le nombre de Reynolds défini précédemment (section 2.1.2). Les conditions limites traduisent l'adhérence aux parois :

$$\bar{U}(1, z) = \bar{U}(-1, z) = 0 \quad \forall z \in [-A; A] \quad \text{et} \quad \bar{U}(y, A) = \bar{U}(y, -A) = 0 \quad \forall y \in [-1; 1] \quad (2.2)$$

La discrétisation de l'équation de Poisson à une valeur de κ donnée est réalisée à l'aide de la méthode de collocation spectrale décrite en section 1.2.1 et conduit finalement à l'inversion d'un problème linéaire. Cette inversion est réalisée à l'aide d'une routine de résolution, utilisant une factorisation LU, issue d'une librairie scientifique (LAPACK [1]). On constate que le niveau de la solution $\bar{U}(y, z)$ est proportionnel à $\kappa \mathcal{R}$. On a choisi pour longueur de référence la valeur dimensionnée de \bar{U}^* au centre de la conduite $\bar{U}^*(0, 0)$. Cette valeur dépend du gradient de pression

¹On vérifie (section 2.1.3 que \bar{U} est borné, car solution d'une équation de Poisson. Intuitivement, ce maximum se situe bien sur l'axe du canal)

²Cette constante représente la chute de pression observée en aval de la conduite, elle est donc négative.

imposé et du rapport d'aspect de la conduite mais ne connaissant pas *a priori* la forme analytique de $\bar{U}(y, z)$, elle ne s'en déduit pas trivialement. En pratique, on réalise un premier calcul pour une valeur arbitraire de $\kappa\mathcal{R}$, $(\kappa\mathcal{R})_a$ (par exemple $(\kappa\mathcal{R})_a = -2$), dont on extrait la solution $\bar{U}_a(0, 0)$ correspondante. On effectue alors un deuxième calcul pour $\kappa\mathcal{R} = (\kappa\mathcal{R})_a/\bar{U}_a(0, 0)$ qui satisfait ainsi $\bar{U}(0, 0) = 0$. On peut trouver une présentation plus détaillée de la mise en place du problème linéaire en annexe A. De façon alternative, le champ moyen peut également être obtenu à l'aide d'une solution analytique (*cf* Theofilis [36]). La figure 2.1 permet de visualiser la géométrie, le repère ainsi que l'écoulement moyen.

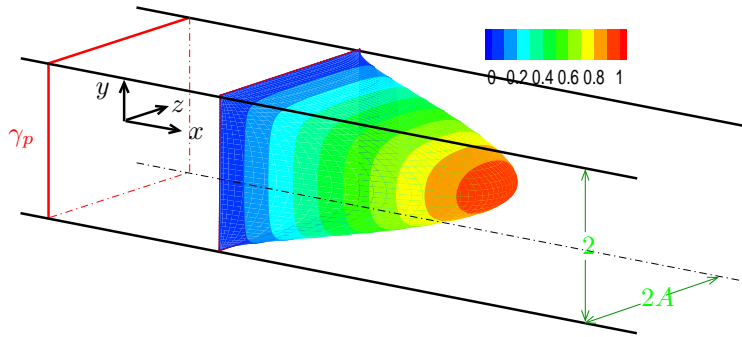


FIG. 2.1 – Représentation de l'écoulement de Poiseuille dans une conduite rectangulaire de rapport d'aspect A

En principe, le cas plan correspond à un rapport d'aspect infini. En pratique, à partir de quel ordre de grandeur du rapport d'aspect peut-on considérer les effets de bord comme négligeables? On peut apprécier le rôle du rapport d'aspect sur l'écoulement de base en observant l'évolution sur l'axe $y = 0$ de la dérivée seconde de l'unique composante de vitesse \bar{U} vis-à-vis de la variable y . Sur la figure 2.2 on a tracé cette dérivée $\left. \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} \right|_{y=0}$ en fonction de la largeur du canal adimensionnée et rapportée sur le rapport d'aspect z/A pour différents rapports d'aspect. Seul le demi-domaine $z/A \in [0, 1]$ est représenté, l'autre partie se déduisant par symétrie en $z/A = 0$. Dans le cas plan (1D) cette dérivée vaut -2 puisque le champ moyen est défini par $\bar{U}_{1D}(y) = 1 - y^2$. Pour un rapport d'aspect $A = 20$, le niveau de $\left. \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} \right|_{y=0}$ atteint plus de 99% du niveau 1D à partir d'une distance à la paroi supérieure à 10% du demi-domaine. Pour $A = 25$, le niveau atteint à 10% de la paroi est à plus de 99,5% celui du 1D. Ainsi, du point de vue de l'écoulement de base, on peut considérer l'approximation du cas plan comme très satisfaisante à partir d'un rapport d'aspect de l'ordre de 20 (pour la majeure partie du domaine sauf bien entendu à proximité des parois latérales $z = \pm A$).

2.2 Écoulement plan de Taylor-Culick

Dédiée au problème des oscillations de poussée qui peuvent survenir dans les moteurs à propérgol solide, des travaux relatifs à la stabilité de l'écoulement dit de Taylor-Culick sont entrepris au Département depuis une petite dizaine d'années. De façon simplifiée, il s'agit de l'écoulement en conduit plan induit par injection pariétale (normale, constante et uniforme). En rendant les longueurs sans dimension par la demi-hauteur du conduit, on se donne deux surfaces planes parallèles situées en $y = -1$ et $y = 1$ à travers lesquelles de l'air est injecté, ces deux

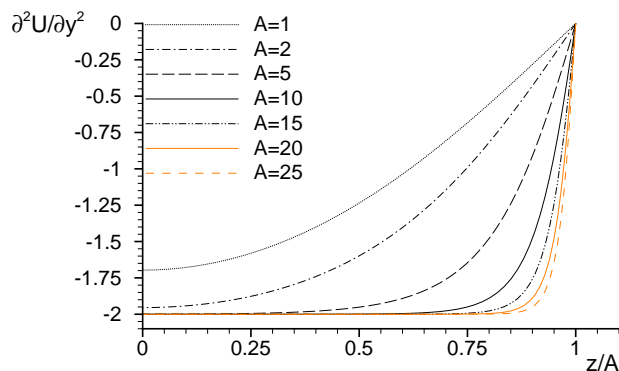


FIG. 2.2 – Effet du rapport d’aspect sur l’écoulement moyen : évolution de $\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2}$ en $y = 0$ en fonction de z/A . Dans le cas plan ($1D$), la valeur est -2 .

plans sont limités par une surface pleine (non débitante) située en $x = 0$, comme indiqué sur la figure 2.3.

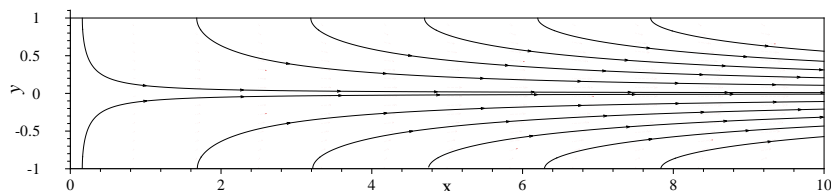


FIG. 2.3 – Représentation de quelques lignes de courant associées à l’écoulement dit de Taylor, résultant de l’injection uniforme de fluide à travers les deux parois horizontales.

Dans cette approche simplifiée, l’écoulement est plan : pas de composante de vitesse selon l’axe Oz et l’écoulement est invariant selon cette direction z . Sur la figure sont également représentées quelques lignes de courant qui partent des parois injectantes. Loin du fond avant situé en $x = 0$, ces lignes semblent devenir presque parallèles au moins suffisamment loin des parois débitantes. En fait, notamment près du fond avant, cet écoulement est fortement non parallèle.

La partie principale du travail de thèse effectuée par Thierry Féraïlle [8] a consisté à étudier la stabilité de cet écoulement. En parallèle et en collaboration avec nos propres recherches, Thierry Féraïlle a développé une approche globale en recherchant les perturbations sous forme modale vis-à-vis du temps t avec des fonctions d’amplitude dépendant de x et y . Le problème de stabilité se pose en terme d’une équation aux dérivées partielles écrites pour une fonction de courant associée à la perturbation. Le domaine d’intégration spatial est délimité par les deux parois débitantes, le fond avant (soit donc trois frontières physiques) et une ligne artificielle en $x = X_e$.

Cet écoulement constitue une application un peu différente des autres écoulements présentés puisqu’il est $2D$ mais non parallèle. L’approche $2D$ de stabilité menée par Thierry Féraïlle a permis de valider certaines hypothèses utilisées dans l’approche locale et de confirmer la forme des perturbations. De plus, comme certaines expériences le laissent supposer, le spectre des instabilités obtenu par l’approche $2D$ est discret et non continu comme le prévoit la théorie locale. L’existence d’une frontière artificielle dans le domaine de calcul impose d’établir une condition de sortie comme ce sera le cas pour l’écoulement de Hiemenz. On trouvera les résultats

détaillés des travaux de Thierry Féraïlle ainsi que la poursuite de ces travaux par François Chedevergne et Grégoire Casalis, notamment pour le cas d'une conduite cylindrique dans les différentes communications [9, 10, 8, 5].

2.3 Écoulement incompressible de Hiemenz en flèche

2.3.1 Géométrie

On considère une aile supposée d'envergure infinie, placée en flèche dans un écoulement de vitesse infinie amont Q_∞ . La topologie des lignes de courant de l'écoulement de fluide parfait, dit extérieur, autour de l'aile permet de définir la notion de ligne de partage. Cette ligne est la ligne de courant de courbure minimale, située à proximité du bord d'attaque, et qui correspond à la séparation des écoulements intrados et extrados. Classiquement, l'écoulement de Hiemenz désigne l'écoulement de point d'arrêt $2D$. L'écoulement de Hiemenz en flèche correspond donc à cet écoulement auquel on a ajouté une composante de vitesse transversale. Cet écoulement est obtenu par une solution de similitude des équations de couche limite qui correspond dans ce cas précis à une solution exacte des équations de Navier-Stokes. Le repère est choisi de façon classique : z représente la direction de l'envergure, x désigne la normale à la ligne de partage dans le plan tangent de l'aile et y est la normale à ce plan tangent. La figure 2.4 donne une représentation schématique de l'aile avec son repère local, des lignes de courant de l'écoulement extérieur et d'un profil de vitesse transversal de couche limite.

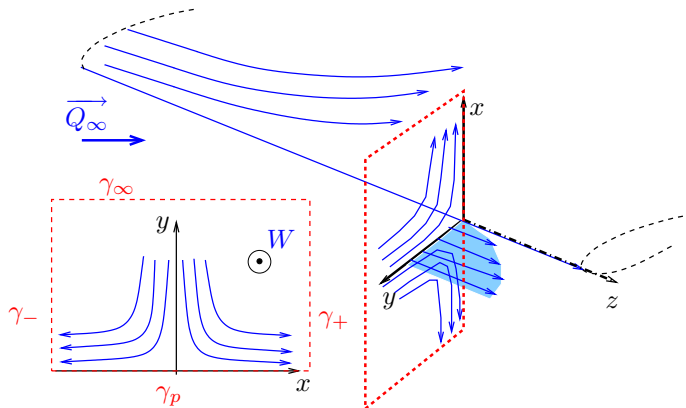


FIG. 2.4 – Représentation de l'écoulement de ligne de partage

2.3.2 Grandeurs caractéristiques

L'écoulement de fluide parfait à l'extérieur de la couche limite est un écoulement de type ligne de partage, au voisinage de cette ligne les composantes longitudinale et transversale de vitesse sont donc de type $U_0 = k_1 x^*$ et $W_0 = k_2$ où k_1, k_2 sont des constantes. Afin de travailler en grandeurs adimensionnées et de définir le nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement on se donne une longueur et une vitesse de référence. De façon classique [13, 24], on choisit W_0 comme échelle de vitesse et on construit une échelle de longueur Δ telle que :

$$\Delta = \sqrt{\frac{\nu}{k_1}} \quad \text{et} \quad \mathcal{R} = \frac{\Delta W_0}{\nu}$$

avec ν la viscosité cinématique. En pratique, comme cela peut être observé sur la figure 2.5 $\delta/\Delta \sim 3$, d'où Δ est de l'ordre de $\delta/3$ en notant δ l'épaisseur de couche limite, telle que :

$$W^*(y^* = \delta) = 0.99W_0$$

L'épaisseur de couche limite est habituellement définie de façon équivalente mais en considérant non pas la composante transversale de l'écoulement mais la projection de l'écoulement sur la ligne de courant extérieure. Étant situés dans un voisinage de la ligne de partage on obtient une bonne approximation en ne considérant que la composante transversale. Remarquons également que pour cet écoulement particulier l'épaisseur de couche limite est invariante avec la distance à la ligne de partage x et avec la position en envergure z .

Dans cette application on souhaite chercher les éventuelles instabilités dans le plan normal à la ligne de partage (x, y) (voir figure 2.4). Les variables spatiales adimensionnelles de l'étude de stabilité sont donc $X = x$, $Y = y$. Le domaine de calcul comprend à la fois des frontières réelles et des frontières artificielles. Selon la direction y , il est fermé par la paroi γ_p d'un côté et de l'autre par γ_∞ que l'on suppose située à une ordonnée suffisamment grande pour que la condition physique de non-perturbation à l'infini soit valable. En revanche, selon la direction x , normale à la ligne de partage, il n'y a pas de frontière physique. On doit se placer dans un *voisinage* de la ligne de partage et on devra donc fermer le domaine de calcul de façon artificielle par γ_+ et γ_- (voir figure 2.4). Finalement, dans ce cas les frontières sont $\Gamma_\phi = \gamma_p \cup \gamma_\infty$ et $\Gamma_{num} = \gamma_+ \cup \gamma_-$. Le nombre d'onde k est ici un nombre d'onde transversal que l'on notera β et on écrit les perturbations de vitesse et de pression sous la forme d'ondes :

$$\hat{q} = q(x, y)e^{i\beta(z-ct)}$$

Le problème de stabilité est donné dans le chapitre consacré à la stabilité de l'écoulement incompressible de ligne de partage (chap. 4).

2.3.3 Solution pour l'écoulement moyen

Localement dans le voisinage de la ligne de partage, si l'épaisseur de couche limite est petite comparée au rayon de bord d'attaque, on peut chercher une solution adimensionnelle sous la forme :

$$\bar{U}(x, y) = \frac{xU^*(y)}{\mathcal{R}}, \quad \bar{V}(x, y) = \frac{V^*(y)}{\mathcal{R}}, \quad \bar{W}(x, y) = W^*(y)$$

où \mathcal{R} est le nombre de Reynolds dont on précisera la définition dans la section suivante (2.3.2). Ainsi les équations de continuité et de Navier-Stokes conduisent au système :

$$\begin{cases} U^* + V^{*\prime} = 0 \\ V^{*\prime\prime\prime} + (V^{*\prime})^2 - V^*V^{*\prime\prime} - 1 = 0 \\ W^{*\prime\prime} - V^*W^{*\prime} = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Les conditions aux limites traduisant l'adhérence à la paroi et le raccord à l'écoulement extérieur de fluide parfait sont données par :

$$V^*(0) = 0, V^{*\prime}(0) = 0, W^*(0) = 0 \text{ et } V^{*\prime}(y) = -1, W^*(y) = 1 \text{ pour } y \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

La solution peut être obtenue à l'aide d'un code de similitude déjà disponible au département, c'est la solution auto-semblable de Hiemenz-Falkner-Skan-Cook mais qui est également

solution exacte des équations de Navier-Stokes. Nous avons préféré une résolution directe afin de l'implémenter dans notre code de stabilité. On a ainsi la possibilité de choisir une répartition de points du même type que celle utilisée pour le calcul de stabilité et espérer ainsi une solution de l'écoulement moyen interpolée sur le maillage de stabilité de meilleure qualité. L'équation portant sur V^* est résolue à l'aide d'une routine de calcul d'équation différentielle non linéaire issue de la librairie NAG [25] basée sur un algorithme de type Runge-Kutta. On donne initialement en sus des conditions limites portant sur V^* une estimation de $V^{*'}(y \rightarrow \infty)$, $V^{*''}(y = 0)$ et $V^{*'''}(y \rightarrow \infty)$. La solution approchée obtenue est alors corrigée à l'aide de techniques de correction de différences finies couplées à une itération de Newton [25]. On utilise 300 points avec une répartition de type Gauß-Lobatto ramenés sur l'intervalle $[0, y_{max}^b]$ (*cf* section 1.2.1) avec $y_{max}^b = 8$. En effet, comme cela a été évoqué précédemment la hauteur de couche limite adimensionnée étant de l'ordre de 3, cet intervalle est largement suffisant pour calculer un écoulement de couche limite. La solution convergée est alors écrite sur le maillage utilisée pour le calcul de stabilité. Sur l'intervalle $[0, y_{max}^b]$ la solution est interpolée linéairement, puis elle est prolongée linéairement sur l'intervalle $[y_{max}^b, y_{max}]$. La composante U^* est déduite immédiatement sur la grille de stabilité grâce à l'équation de continuité. Enfin on discrétise l'équation de quantité de mouvement transversal par la méthode de collocation spectrale (1.2.1) sur la grille de stabilité. Finalement, la composante W^* est résolue en inversant le système linéaire discret obtenu, à l'aide de routines d'inversion matricielle utilisant une factorisation LU et issues de la librairie LAPACK [1]. La figure 2.5 présente les profils de vitesse adimensionnés : à gauche en noir, la composante transversale \bar{W} d'ordre $\mathcal{O}(1)$ et en gris U^*/\mathcal{R} qui représente la partie de la composante longitudinale \bar{U} qui dépend de y ($\bar{U} = xU^*/\mathcal{R}$) d'ordre $\mathcal{O}(10^{-3})$. La composante normale \bar{V} est représentée à droite.

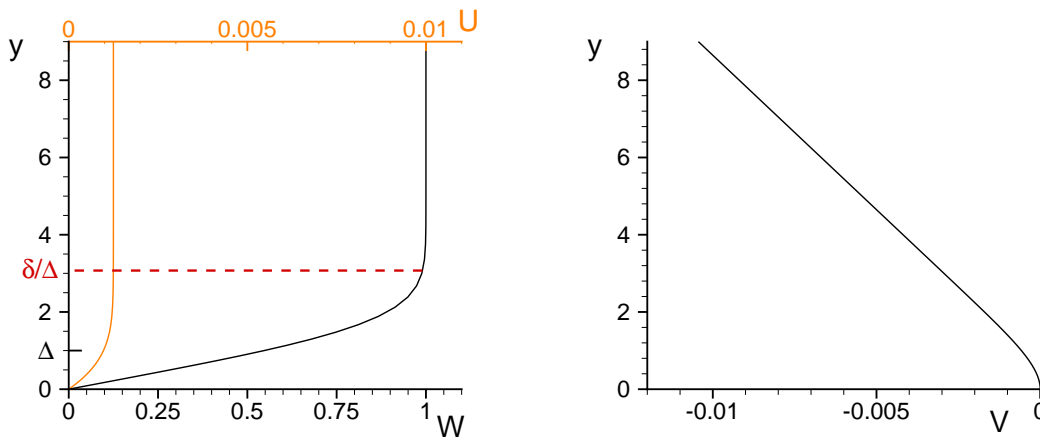


FIG. 2.5 – Évolution des composantes de vitesse de l'écoulement de base de Hiemenz incompressible avec la distance à la paroi $y = y^*/\Delta$ pour un nombre de Reynolds $\mathcal{R} = 800$

2.4 Écoulement compressible de Hiemenz en flèche

La géométrie est strictement celle présentée dans la section (2.3.1) dédiée à l'écoulement incompressible de Hiemenz en flèche. Toutes les notations introduites pour l'écoulement incompressible sont conservées.

2.4.1 Grandeurs caractéristiques

On utilise à nouveau les grandeurs caractéristiques et le nombre de Reynolds définis précédemment pour l'écoulement incompressible (section 2.3.2). On introduit en sus le nombre de Mach transversal \mathcal{M} et le nombre de Prandtl \mathcal{P} , définis à l'aide de la vitesse du son prise sur la ligne de partage a_0 :

$$\mathcal{M} = \frac{W_0}{a_0} \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = \frac{C_p \mu}{\lambda_c}$$

avec μ la viscosité dynamique, C_p la capacité calorifique à pression constante et λ_c le coefficient de conductivité thermique. On se place sous l'hypothèse de gaz parfait et caloriquement parfait, ainsi C_p et \mathcal{P} sont considérés comme constants. La vitesse du son a_0 est définie à l'aide de la température relevée sur la ligne de partage T_0 qui nous servira de température de référence pour les adimensionnements. En revanche, on préférera caractériser l'écoulement compressible par une température génératrice T_{i0} . Dans le cas d'un point d'arrêt $2D$ ces températures sont strictement équivalentes mais pour la ligne de partage ces températures se déduisent l'une de l'autre par la relation :

$$T_{i0} = T_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathcal{M}^2 \right)$$

où γ est le rapport des capacités calorifiques ($\gamma = 1.4$). D'autre part, on est souvent plus habitué à un nombre de Mach infini amont \mathcal{M}_∞ caractérisant l'écoulement impactant l'aile en amont de celle-ci. La relation entre ces deux nombres de Mach est établie à partir de la conservation d'enthalpie totale, valable dans le cas où il n'y a pas de choc en amont du bord d'attaque de l'aile et dans le cas où ce choc existe mais reste stationnaire. Elle est donnée par :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_\infty \sin \phi \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathcal{M}_\infty^2 \cos^2 \phi \right)^{-1/2} \quad (2.5)$$

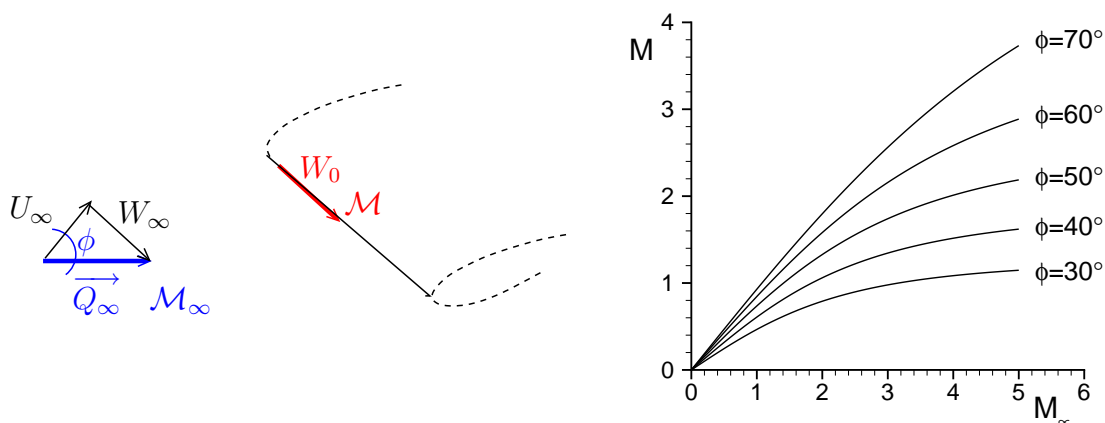


FIG. 2.6 – Diagramme d'obtention du nombre de Mach transversal sur la ligne de partage \mathcal{M} en fonction du nombre de Mach infini amont \mathcal{M}_∞ paramétré par l'angle de flèche ϕ

Cette relation fait intervenir l'angle de mise en flèche de l'aile ϕ , donné par l'angle formé entre la composante longitudinale de la vitesse dans le repère lié à l'aile et l'écoulement infini amont incident. À gauche de la figure 2.6, on donne un schéma de l'aile et de l'écoulement incident avec les différentes notations utilisées. La partie droite de la figure donne, à un angle de flèche donné, le nombre de Mach transversal sur la ligne de partage en fonction du nombre de Mach infini

amont. Cette évolution est obtenue par la formule (2.5). Par exemple, pour avoir un écoulement tel que $\mathcal{M} = 1.5$ sur la ligne de partage d'une aile en flèche de 60° , on doit avoir un écoulement amont à $\mathcal{M}_\infty = 1.88$.

Les variables et frontières nécessaires à l'étude de stabilité sont celles décrites en section 2.3.2.

2.4.2 Solution pour l'écoulement moyen

Mise en place d'un système d'équations

L'écoulement moyen est un écoulement laminaire compressible stationnaire de couche limite qui se développe autour d'une aile en flèche supposée d'envergure infinie à proximité de la ligne de partage. Sous ces conditions il vérifie donc les équations de continuité et de couche limite qui s'écrivent sous forme dimensionnée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho^* u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \rho^* v^*}{\partial y^*} = 0 \\ \rho^* u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx^*} + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \\ \rho^* u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} = \rho_e u_e \frac{dw_e}{dx^*} + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right) \\ \rho^* u^* \frac{\partial h_i^*}{\partial x^*} + \rho^* v^* \frac{\partial h_i^*}{\partial y^*} = \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\mu^* \left(1 - \frac{1}{\mathcal{P}} \right) \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right) \right) + \frac{\lambda_c}{C_p} \frac{\partial h_i^*}{\partial y^*} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

où ρ_e , u_e , w_e caractérisent l'écoulement à l'extérieur de la couche limite et h_i^* désigne l'enthalpie totale. Afin d'augmenter la précision de la définition de notre écoulement moyen en vue d'effectuer une étude de stabilité, on préfère calculer une solution de similitude plutôt que d'utiliser le résultat d'un code de couche limite. Pour cela on considère l'écoulement extérieur de ligne d'arrêt :

$$u_e = k_1 x^* \quad \text{et} \quad w_e = k_2$$

On utilise le changement de variables de Levy-Lees, où l'indice p est relatif aux grandeurs prises à la paroi :

$$\xi = \int_0^{x^*} \rho_p \mu_p u_e dX \quad \text{et} \quad \eta = \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \int_0^{y^*} \rho^* dY \quad (2.7)$$

On vérifie que ξ est uniquement fonction de x^* tandis que η est fonction de x^* et y^* . On introduit ensuite trois fonctions de similitude telles que :

$$f'(\eta) = \frac{df}{d\eta} = \frac{u^*}{u_e} \quad \text{et} \quad f(0) = 0, \quad g(\eta) = \frac{w^*}{w_e} \quad \text{et} \quad s(\eta) = \frac{h_i^*}{h_{ie}} - 1$$

En définissant la fonction ψ^* telle que :

$$\rho^* u^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \quad \text{et} \quad \rho^* v^* = -\frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \quad (2.8)$$

l'équation de continuité est toujours vérifiée. Ainsi la vitesse normale v^* sera déduite de la vitesse longitudinale u^* , en effet :

$$\rho^* u^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \Rightarrow \psi^* = \sqrt{2\xi} f(\eta) + h(\xi) \Rightarrow \rho^* v^* = -\frac{\rho_p \mu_p u_e}{\sqrt{2\xi}} f(\eta)$$

En supposant en outre que la masse volumique et la viscosité dynamique ne dépendent pas de la position en corde x^* , le système d'équations aux dérivées partielles (2.6) se ramène à un système d'équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} f f'' + \frac{2\xi}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} \left(\frac{\rho_e}{\rho^*} - f'^2 \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\rho^* \mu^*}{\rho_p \mu_p} f'' \right) = 0 \\ f g' + \frac{2\xi}{w_e} \frac{dw_e}{d\xi} \left(\frac{\rho_e}{\rho^*} - f' g \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\rho^* \mu^*}{\rho_p \mu_p} g' \right) = 0 \\ f s' + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\rho^* \mu^*}{\rho_p \mu_p} \frac{1}{\mathcal{P}} s' \right) + \frac{u_e^2}{h_{ie}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\rho^* \mu^*}{\rho_p \mu_p} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{P}} \right) f' f'' \right) + \frac{w_e^2}{h_{ie}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\rho^* \mu^*}{\rho_p \mu_p} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{P}} \right) g g' \right) = 0 \end{cases}$$

Les coefficients de ces équations doivent être des fonctions de la variable η si on veut que les conditions de similitude (f , g et s fonctions de η) soient respectées. Il faut tout d'abord rappeler que l'écoulement extérieur est un écoulement de ligne de partage $u_e = k_1 x^*$, $w_e = k_2$. Au voisinage de la ligne de partage, la composante longitudinale est donc petite devant la composante transversale. Ainsi dans la dernière équation, le second terme est négligé devant le dernier, $u_e^2 \ll w_e^2$ (et f , g sont en $\mathcal{O}(1)$). Enfin, sous l'hypothèse énoncée ci-dessus que masse volumique et viscosité ne sont fonctions que de la distance à la paroi y^* et non de la position en corde x^* , on vérifie que la forme particulière de l'écoulement extérieur permet de satisfaire les conditions de similitude :

$$\frac{2\xi}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} = 1, \quad \frac{2\xi}{w_e} \frac{dw_e}{d\xi} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{w_e^2}{h_{ie}} = \text{constante}$$

Finalement, le système à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} f f'' + \frac{\rho^*}{\rho_e} - f'^2 + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\rho^* \mu^*}{\rho_p \mu_p} f'' \right) = 0 \\ f g' + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\rho^* \mu^*}{\rho_p \mu_p} g' \right) = 0 \\ f s' + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\rho^* \mu^*}{\rho_p \mu_p} \frac{1}{\mathcal{P}} s' \right) + \frac{w_e^2}{h_{ie}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\rho^* \mu^*}{\rho_p \mu_p} \left(1 - \frac{1}{\mathcal{P}} \right) g g' \right) = 0 \end{cases} \quad (2.9a)$$

La traduction des conditions d'adhérence à la paroi, de raccord à l'écoulement extérieur et des conditions de paroi donne :

$$\begin{cases} f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\eta_e) = 1 \\ g(0) = 0, \quad g(\eta_e) = 1 \\ s(\eta_e) = 0, \quad \begin{cases} s'(0) = 0 \text{ si la paroi est athermane} \\ s(0) = \frac{h_p}{h_{ie}} - 1 \text{ si la paroi est isotherme} \end{cases} \end{cases} \quad (2.9b)$$

Sous les hypothèses précédemment énoncées, on peut obtenir la distribution de température à partir de la définition de l'enthalpie totale :

$$\frac{T^*}{T_e} = \frac{T_{ie}}{T_e} (s + 1) - \frac{w_e^2}{2C_p T_e} g^2 = h(\eta)$$

En outre, l'air est considéré comme calorifiquement parfait et comme un gaz parfait. La viscosité dynamique est modélisée par la loi de Sutherland :

$$\mu(T) = 1.711 \times 10^{-5} \frac{1 + 110.4/273}{1 + 110.4/T} \sqrt{\frac{T}{273}}$$

Résolution numérique

La résolution du problème (2.9) nécessite la connaissance du groupement $\mathcal{G}(\eta) = \frac{\rho^* \mu^*}{\rho_p \mu_p} = \frac{T_p \mu^*}{T^* \mu_p}$. On se donne donc une distribution initiale de température de façon à évaluer \mathcal{G} ainsi que sa dérivée par rapport à η . On peut alors résoudre en cascade l'équation portant sur f puis sur g puis sur s . On en déduit un nouveau profil de température et une nouvelle évolution de \mathcal{G} . On itère ce processus jusqu'à convergence.

Dans le cas d'une paroi adiabatique, on choisit une répartition de température initiale constante correspondant au cas incompressible. Ainsi la première estimation de \mathcal{G} est une loi constante. Le système est alors résolu à l'aide d'une routine de calcul de système d'équations différentielles non linéaires issue de la librairie NAG [25] (identique à celle utilisée pour la résolution de l'écoulement incompressible (2.3.3)). En pratique on donne une estimation de la valeur du vecteur inconnu, soit $(f, f', f'', g, g', s, s')$, aux deux points de la frontière du domaine (0 et η_e); un algorithme de type Runge-Kutta associé à des méthodes de correction et de Newton permet alors d'obtenir une solution pour (f, g, s) . On peut alors calculer \mathcal{G} et $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \eta}$ et recommencer le processus.

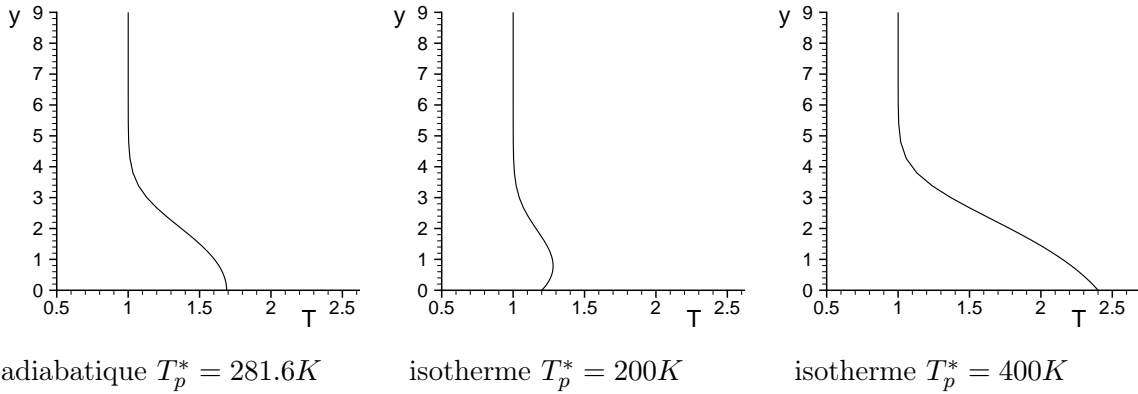


FIG. 2.7 – Profils de température de l'écoulement de base de Hiemenz compressible pour les conditions $\mathcal{R} = 1500$, $\mathcal{M} = 2$ et $T_{i0}^* = 300K$

Dans le cas d'une paroi isotherme, il est très difficile de faire converger ce processus et on procède donc différemment. La solution initiale utilisée est une répartition de température de type loi de Crocco construite à l'aide d'un profil de vitesse longitudinal de type Blasius. L'équation portant sur f est résolue à l'aide d'une routine de calcul NAG d'intégration de système d'équations différentielles du premier ordre utilisant une méthode de type Adams [25] et placée au sein d'un algorithme de type Newton-Raphson. L'équation portant sur f est exprimée sous forme de système linéaire en évaluant la dérivée du vecteur $\underline{F} = (f, f', f'')$ au point $p + 1$ à l'aide de ce même vecteur au point p . En pratique on se donne une valeur estimée du vecteur \underline{F} en 0, la borne inférieure du domaine de calcul. On compare ensuite le résultat issu de la routine NAG en η_e , la borne supérieure du domaine de calcul, à la condition limite physique en ce même point ($f'(\eta_e) = 1$). Si l'écart est significatif on réitère le calcul avec une nouvelle estimation de $f''(0)$ et ce jusqu'à convergence de la condition limite en η_e . L'évolution de f étant connue, on peut procéder à la même démarche pour résoudre l'équation portant sur g en convergeant sur la condition $g(\eta_e) = 1$. De façon similaire, connaissant f et g , on résout l'équation portant sur s en convergeant sur la condition $s(\eta_e) = 0$. On peut ensuite en déduire une distribution

de température et estimer \mathcal{G} et $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \eta}$. Le processus complet est répété jusqu'à ce que la solution complète (f , g , s et \mathcal{G}) soit convergée.

Les profils de vitesse adimensionnés ont la même allure que pour l'écoulement incompressible avec toutefois des niveaux plus faibles pour U^*/\mathcal{R} et \bar{V} tout en conservant les mêmes ordres de grandeur (cf 2.3.3). La figure 2.7 présente les profils de température adimensionnée pour une paroi adiabatique (à gauche) et une paroi isotherme (à droite) pour deux températures de paroi T_p imposées.

2.5 Conclusion

Ce chapitre était dédié à la présentation des écoulements moyens pour lesquels nous avons mené une étude de stabilité $2D$. Pour l'écoulement plan de Taylor on a une solution analytique mais pour les écoulements tridimensionnels de Poiseuille et de Hiemenz, la détermination des champs moyens n'est pas triviale. En outre la qualité de la solution pour l'écoulement de base est capitale puisqu'elle influence directement les résultats de stabilité. C'est la raison pour laquelle les procédures de calcul ont été détaillées, notamment pour le cas de la ligne de partage compressible, pour lequel on considère une solution de similitude.

L'étude de la stabilité $2D$ de l'écoulement de Taylor-Culick faisant partie des travaux de thèse de Thierry Féraïlle, on trouvera des résultats de stabilité non-locale dans son mémoire [8]. L'étude de l'écoulement de Taylor-Culick dans une conduite cylindrique est poursuivie par François Chedevergne. La mise en place du problème de stabilité avec la formulation des équations aux perturbations et les résultats de stabilité en approche non-locale pour les autres écoulements font l'objet des chapitres suivants, les chapitres 3 pour Poiseuille, 4 pour Hiemenz et 5 pour Hiemenz compressible.

Chapitre 3

Stabilité de l'écoulement $3D$ de Poiseuille

L'objet de ce chapitre est d'étudier la stabilité de l'écoulement de Poiseuille dans une conduite de section rectangulaire supposée de longueur infinie. L'écoulement de Poiseuille est ici qualifié d'écoulement $3D$ au sens où les trois dimensions sont nécessaires pour le représenter. En fait, cet écoulement est unidirectionnel mais son unique composante de vitesse dépend des deux variables d'espace définissant le plan perpendiculaire à cette direction (soit le plan définissant la section de la conduite). Cet écoulement a été présenté dans le chapitre précédent (section 2.1). L'approche de stabilité locale ($1D$) peut être envisagée lorsqu'une des deux dimensions de la section de la conduite est infiniment grande devant l'autre.

L'écoulement de Poiseuille plan est certainement l'écoulement le plus couramment étudié en stabilité linéaire. Si l'enjeu de cette étude ne paraît pas très important à première vue, ce cas quelque peu académique nous permet néanmoins de développer l'approche $2D$ en s'appuyant sur un problème pour lequel les conditions limites sont bien posées et pour lequel on dispose d'une large documentation concernant les résultats de stabilité linéaire classique ($1D$). En outre, Tsumi & Yoshimura [35], qui sont les premiers à avoir utilisé une approche $2D$ pour l'écoulement de Poiseuille, donnent les conditions critiques (en nombre de Reynolds et nombre d'onde) correspondant à des conduites de dimensions différentes. Ils rappellent que dans le cas d'une section carrée, l'écoulement semble être stable du fait de sa similarité avec l'écoulement de Hagen-Poiseuille en conduite cylindrique et que lorsqu'une dimension de la conduite devient infinie devant l'autre on tend vers l'écoulement de Poiseuille entre deux plans parallèles. Cet écoulement est instable vis-à-vis d'une perturbation de vitesse normale à la direction principale de l'écoulement symétrique pour un nombre de Reynolds supérieur à $\mathcal{R}_c = 5772$ et stable pour une perturbation de vitesse normale antisymétrique à ce nombre de Reynolds. Ils établissent un rapport géométrique critique $A_c = 3.2$, rapport entre les deux dimensions définissant la section, en deçà duquel l'écoulement est inconditionnellement stable. Theofilis [36, 38] a également développé une approche $2D$ afin d'étudier la stabilité de l'écoulement dans des conduites de section définies par des rapports $A = 1$, $A = 5$ et $A = 6$. En particulier, il utilise pour cela la méthode de résolution basée sur l'algorithme d'Arnoldi, exposée dans le chapitre précédent (section 1.2.2).

Un rappel de l'approche $1D$ a été donné dans le premier chapitre de ce document (section 1.1.1). On aborde dans une première partie le développement de la méthode $2D$ en écrivant deux formulations différentes du problème de stabilité et on propose également, en complément des méthodes de résolution présentées dans le chapitre 1, une méthode de tir généralisée à la configuration $2D$. Les résultats de l'approche globale sont ensuite présentés : du point de vue spectral, puis du point de vue du comportement $2D$ des fluctuations. Enfin une variation du

rapport géométrique définissant la section de la conduite permettra d'apprécier les limites de l'approche locale. Une grande partie des développements exposés dans ce chapitre a déjà fait l'objet d'un rapport interne [29]. Certains des résultats ont été présentés en congrès [30].

3.1 Formulation du problème 2D

La présentation formelle exposée dans le chapitre précédent, section 1, donne le problème de stabilité sous forme d'un problème aux valeurs propres généralisé. On précise pour le cas de l'écoulement de Poiseuille deux formulations pour exprimer les opérateurs intervenant dans la relation de dispersion. Enfin, une généralisation de la méthode de tir à la configuration 2D est établie afin d'envisager le suivi individuel d'un mode dans sa dépendance vis-à-vis d'un paramètre du problème.

3.1.1 Équations aux perturbations : problème aux valeurs propres généralisé

Considérant l'écoulement de fluide incompressible, laminaire et stationnaire de Poiseuille dans une conduite de section rectangulaire et de longueur supposée infinie, les équations linéarisées pour les perturbations s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} i\alpha u + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ -i\omega u + i\alpha\bar{U}u + \frac{\partial\bar{U}}{\partial y}v + \frac{\partial\bar{U}}{\partial z}w + i\alpha p = \frac{1}{R}\mathcal{L}u \\ -i\omega v + i\alpha\bar{U}v + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{R}\mathcal{L}v \\ -i\omega w + i\alpha\bar{U}w + \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{R}\mathcal{L}w \end{array} \right. \quad (3.1)$$

avec \mathcal{L} l'opérateur défini par :

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \alpha^2$$

qui est en fait l'opérateur laplacien pour une dépendance en $e^{i\alpha x}$ vis-à-vis de x . Les conditions aux limites associées à ce système, traduisant l'adhérence aux parois, s'écrivent :

$$\begin{aligned} \forall y \quad u(y, -A) = v(y, -A) = w(y, -A) = u(y, A) = v(y, A) = w(y, A) = 0 \\ \forall z \quad u(-1, z) = v(-1, z) = w(-1, z) = u(1, z) = v(1, z) = w(1, z) = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Il peut également être commode de considérer le système (3.1) sous d'autres formes. En combinant les équations on peut se ramener à un système réduit. Différentes possibilités ont été envisagées [29] mais il ne nous a pas paru possible de se ramener à une unique équation scalaire pour une certaine grandeur, à l'instar de l'équation d'Orr-Sommerfeld. En revanche on peut obtenir un système de deux équations. On choisit une formulation (v, w) identique à celle utilisée par Tatsumi *et al.* [35].

L'équation de continuité sert à exprimer u et l'équation de quantité de mouvement projetée sur l'axe Oz donne l'expression de p en fonction de v et w . En dérivant l'équation de quantité de

mouvement projetée sur l'axe Ox par rapport à y et par rapport à z , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} v + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial z} w + \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} + i\alpha \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{K}u \\ \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial z} v + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} w + \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + i\alpha \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{K}u \end{aligned}$$

où \mathcal{K} est l'opérateur défini par $\mathcal{K} = \frac{1}{R} \mathcal{L} + i\omega - i\alpha \bar{U}$. On multiplie ces deux équations par $i\alpha$ et on y remplace u et les dérivées de p par leur expression, de sorte qu'il ne reste plus que v et w . Enfin, en regroupant les opérateurs suivant v et ceux suivant w et en redonnant l'opérateur \mathcal{K} sous sa forme explicite pour mettre en évidence la valeur propre ω , les deux équations à résoudre sont :

$$\begin{aligned} &\left(i\alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} - \alpha^2 \frac{1}{R} \mathcal{L} + i\alpha^3 \bar{U} + \left(\frac{1}{R} \mathcal{L} - i\alpha \bar{U} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v \\ &+ \left(i\alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial z} + i\alpha \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{1}{R} \mathcal{L} - i\alpha \bar{U} \right) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - i\alpha \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) w \\ &= \omega \left(i\alpha^2 - i \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v - i\omega \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} w \end{aligned} \quad (3.3)$$

et

$$\begin{aligned} &\left(i\alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial z} + i\alpha \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} + \left(\frac{1}{R} \mathcal{L} - i\alpha \bar{U} \right) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - i\alpha \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \right) v \\ &+ \left(i\alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} - \alpha^2 \frac{1}{R} \mathcal{L} + i\alpha^3 \bar{U} + \left(\frac{1}{R} \mathcal{L} - i\alpha \bar{U} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w \\ &= -i\omega \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \omega \left(i\alpha^2 - i \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ces deux équations (3.3) et (3.4) forment un système différentiel dont les inconnues sont les fonctions v et w . Reste à écrire les conditions aux limites. Celles sur v et w sont écrites directement dans (3.2), il faut maintenant traduire celles portant sur u en conditions sur v et w , nos inconnues. On utilise pour cela l'équation de continuité. Prenons par exemple la frontière $z = -A$, les conditions dans (3.2) donnent :

$$\forall y \quad u(y, -A) = v(y, -A) = w(y, -A) = 0$$

On en déduit :

$$\forall y \quad \frac{\partial v}{\partial y}(y, -A) = 0$$

L'équation de continuité montre alors que la condition sur u implique :

$$\forall y \quad \frac{\partial w}{\partial z}(y, -A) = 0$$

qui est bien une condition qui s'exprime avec les inconnues du problème. On procède de façon équivalente pour les trois autres frontières, de sorte que, finalement, les conditions aux limites

associées au système (3.3)+(3.4) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \forall y \quad & \begin{cases} v(y, -A) = w(y, -A) = \frac{\partial w}{\partial z}(y, -A) = 0 \\ v(y, A) = w(y, A) = \frac{\partial w}{\partial z}(y, A) = 0 \end{cases} \\ \forall z \quad & \begin{cases} v(-1, z) = w(-1, z) = \frac{\partial v}{\partial y}(-1, z) = 0 \\ v(1, z) = w(1, z) = \frac{\partial v}{\partial y}(1, z) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Le problème complet pour les perturbations est à présent bien décrit. Cette formulation réduite conduit à un système d'équations discrètes deux fois plus petit qu'en formulation primitive. On peut envisager d'intégrer les équations différentielles dans le domaine complet $[-1, 1] \times [-A, A]$, cependant la taille du système discret peut encore être divisée par quatre en considérant les symétries et parités du problème. L'écoulement de base est symétrique par rapport aux axes $y = 0$ et $z = 0$. En effet, en réécrivant le système 2.1 formellement :

$$\mathcal{L}\bar{U}(y, z) = \lambda$$

de sorte que l'opérateur \mathcal{L} englobe l'opérateur différentiel Δ_2 et les conditions aux limites. Les propriétés de \mathcal{L} et λ sont telles que si l'on change y en $-y$, L et λ restent inchangés. Ainsi, en calculant le système précédent en $-y$, on a :

$$\mathcal{L}\bar{U}(-y, z) = \lambda$$

Les fonctions $y \mapsto \bar{U}(y, z)$ et $y \mapsto \bar{U}(-y, z)$ satisfont donc le même problème différentiel. En admettant l'existence et l'unicité de la solution de ce dernier¹, ces deux fonctions sont égales ce qui montre que la fonction $y \mapsto \bar{U}(y, z)$ est paire. Le même résultat s'applique évidemment pour la variable z .

De la même façon on peut examiner les symétries pour la perturbation. On réécrit le système (3.3+3.4+3.5) sous la forme :

$$\begin{cases} \mathcal{K}^{(v)}(y, z)v + \mathcal{K}^{(w)}(y, z)w = 0 \\ \mathcal{N}^{(v)}(y, z)v + \mathcal{N}^{(w)}(y, z)w = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Un rapide examen de l'expression explicite de chacun de ces opérateurs montre que les fonctions :

$$y \mapsto \mathcal{K}^{(v)}(y, z), \quad z \mapsto \mathcal{K}^{(v)}(y, z), \quad y \mapsto \mathcal{N}^{(w)}(y, z), \quad z \mapsto \mathcal{N}^{(w)}(y, z)$$

sont paires et les quatre autres impaires. Ainsi, le système précédent évalué en $-y$ donne :

$$\begin{cases} \mathcal{K}^{(v)}(y, z)v(-y, z) - \mathcal{K}^{(w)}(y, z)w(-y, z) = 0 \\ -\mathcal{N}^{(v)}(y, z)v(-y, z) + \mathcal{N}^{(w)}(y, z)w(-y, z) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Pour un écoulement dans une conduite de section rectangulaire, ce domaine réduit ne présente plus aucune symétrie et on peut supposer que toutes les valeurs propres dans ce cas sont simples.

¹Dans le cas présent, l'existence et l'unicité ne posent pas de difficulté théorique en raison du caractère strictement elliptique du problème.

Formellement, à z fixé et pour une valeur propre simple ω donnée, le système (3.6) admet la solution $\underline{Z}(y) = (v(y), w(y))$ et le système (3.7) admet la solution $\underline{\tilde{Z}}(y) = (v(-y), -w(-y))$. \underline{Z} et $\underline{\tilde{Z}}$ représentent les fonctions propres d'une même valeur propre simple, elles appartiennent ainsi à un espace vectoriel de dimension 1 et sont donc proportionnelles. On peut alors écrire :

$$\begin{cases} v(-y) = \mu v(y) \\ w(-y) = -\mu w(y) \end{cases}, \forall y \text{ et donc pareillement, en changeant } y \text{ en } -y : \begin{cases} v(y) = \mu v(-y) \\ w(y) = -\mu w(-y) \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} v(y) = \mu^2 v(y) \\ w(y) = \mu^2 w(y) \end{cases} \Rightarrow \mu^2 = 1$$

Ainsi, la perturbation v associée à une valeur propre simple de ce système d'opérateurs est soit paire, soit impaire pour la variable y , et la fonction w associée est de parité inverse. De la même façon, on montre que v est également soit paire soit impaire en z , et w à nouveau de parité inverse. Il y a donc quatre possibilités :

$$\begin{array}{llll} y \mapsto v(y, z) & \text{paire} & \text{et } z \mapsto v(y, z) & \text{paire} \\ y \mapsto v(y, z) & \text{paire} & \text{et } z \mapsto v(y, z) & \text{impaire} \\ y \mapsto v(y, z) & \text{impaire} & \text{et } z \mapsto v(y, z) & \text{paire} \\ y \mapsto v(y, z) & \text{impaire} & \text{et } z \mapsto v(y, z) & \text{impaire} \end{array} \quad (3.8)$$

les symétries pour w étant déduites de celles sur v .

La mise en place du problème numérique ainsi qu'un exemple d'implémentation des conditions limites permettant de ne considérer que les points intérieurs du domaine sont donnés en annexe A et dans le rapport [29].

3.1.2 Complément : méthode de tir

Ayant sélectionné quelques valeurs propres jugées intéressantes dans le spectre de l'opérateur complet, calculé avec un algorithme QZ par exemple, il est intéressant de pouvoir les suivre individuellement dans leur dépendance vis-à-vis des différents paramètres caractéristiques du problème. Le domaine de calcul est borné par des frontières réelles où les conditions limites sont bien définies, on peut envisager une méthode de tir permettant de contrôler la convergence d'un mode à une précision donnée et d'obtenir la fonction propre associée à l'aide d'une procédure de calcul rapide. On utilise le principe de la méthode de Newton-Raphson qu'on généralise à la configuration 2D. La difficulté en 2D porte sur le choix de la déshomogénéisation permettant l'inversion du problème $(\mathbf{A} - \omega \mathbf{B})\underline{X}$. En effet, la substitution d'une condition d'adhérence par une condition inhomogène portant sur une dérivée du second ordre en un point unique de la frontière, conduit à une forte discontinuité des conditions appliquées à la frontière du domaine et nuit ainsi à la convergence du processus. Pour éviter ce problème, on remplace la condition d'adhérence sur tous les autres points de la paroi par une condition moins sévère, *ie* on impose que la vitesse reste constante sur la paroi. On modifie donc les conditions limites sur v , celles sur w restant inchangées, et l'algorithme de convergence sur la condition inhomogène reste identique à celui de la configuration 1D. Un schéma illustrant l'imposition des conditions limites est donné sur la figure 3.1.

3.1.3 Paramètres de calcul

Les résultats de stabilité de l'écoulement 3D de Poiseuille vont être présentés dans les sections suivantes. Nous avons initialement choisi une configuration identique à celle de Theofilis [36],

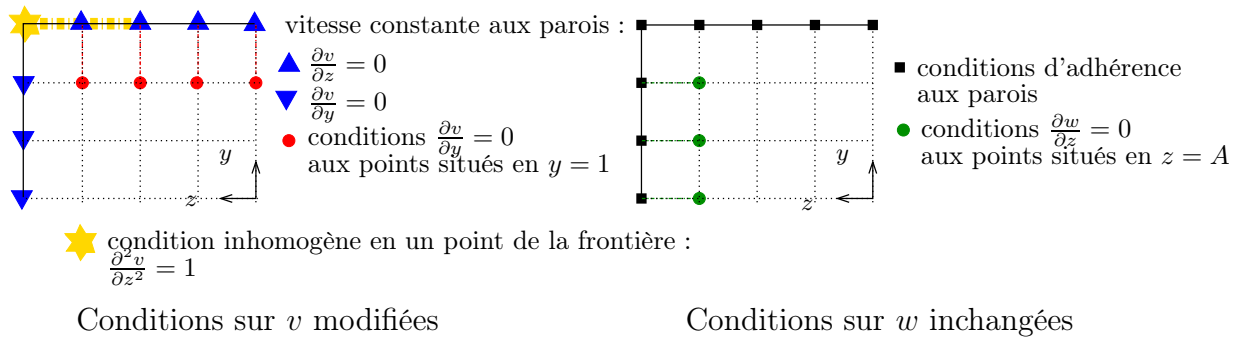


FIG. 3.1 – Représentation des conditions limites sur le quart de domaine $[0, 1] \times [0, A]$ pour la résolution en formulation réduite avec une méthode de tir

soit une conduite de rapport d'aspect $A = 5$, dont les conditions critiques correspondantes sont données par Tatsumi & Yoshimura, soit un nombre de Reynolds $\mathcal{R} = 10400$ et un nombre d'onde $\alpha = 0.91$. Le problème aux valeurs propres a été construit à partir de la formulation réduite des équations et on considère également le domaine de calcul réduit $[0, 1] \times [0, A]$ que l'on discrétise à l'aide de 41×61 points.

3.2 Spectre de valeurs propres

Dans le cas plan ($1D$), le spectre de l'opérateur Orr-Sommerfeld dans le cadre de la théorie temporelle est composé d'un certain nombre de valeurs discrètes qui se distinguent nettement d'une branche continue pratiquement verticale. Les modes de la branche continue sont correctement alignés lorsque le raffinement du maillage est suffisant. Autrement dit, plus le nombre de points est grand, plus la branche continue est bien définie. Dans le cas de l'approche $2D$, les tailles des matrices décrivant le problème aux valeurs propres sont bien plus importantes. L'espace mémoire et le temps de calcul requis pour une recherche de spectre ne nous permettent pas dans ce cas d'utiliser un maillage aussi fin qu'en $1D$. La conséquence est que l'on obtient un spectre confus dans lequel il s'agit de trier les modes correspondant à des solutions physiques du problème des modes liés à la discrétisation du problème. On donne sur la figure 3.2 un exemple de spectre, obtenu à l'aide d'une routine de résolution LAPACK [1] basée sur l'algorithme QZ, pour deux maillages différents. On ne représente que les modes associés à des perturbations de vitesse normale à la direction principale de l'écoulement paires vis-à-vis des deux variables définissant la section y et z , soit uniquement un quart du spectre pour tous types de perturbations confondus.

Si une modification de maillage permet d'éliminer un bon nombre de modes, il en reste cependant encore beaucoup. Mis à part un raffinement de maillage supplémentaire, la seule façon, néanmoins fastidieuse, d'apprécier si ces modes représentent éventuellement une solution du problème continu serait de contrôler les fonctions propres associées à chacun de ces modes. C'est ainsi que procède Sipp [33] qui effectue ce contrôle de façon automatique en éliminant les modes dont la transformée de Fourier des fonctions propres ont *trop* d'énergie sur les hautes fréquences. Nous nous limiterons à la présentation du mode neutre² qui se dégage légèrement du nuage de points et qui doit être le mode susceptible de déstabiliser l'écoulement si on suppose une analogie stricte avec l'approche locale. La pulsation et le taux d'amplification de ce mode marginalement instable sont donnés dans le tableau 3.1 pour les deux maillages présentés sur

²Rappelons que nous sommes dans des conditions critiques et que de ce fait on ne doit *a priori* trouver aucun mode instable.

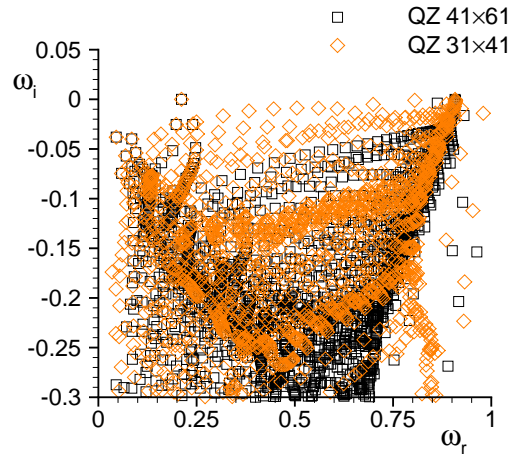


FIG. 3.2 – Spectre QZ pour des perturbations paires en y et en z dans le cas d'un rapport d'aspect $A = 5$ et pour $\mathcal{R} = 10400$, $\alpha = 0.91$

la figure 3.2. On donne également les résultats, issus de calculs utilisant la méthode itérative d'Arnoldi, réalisés par Theofilis qui discrétise tout le domaine sans considérer de symétries. Le nombre de points indiqué correspond au nombre de points représentant un demi-domaine dans chaque direction. Avec toute la réserve que l'on peut émettre vis-à-vis de la convergence en maillage de ce mode dans les deux cas, la comparaison est toutefois assez satisfaisante. On donne également, à titre informatif, le mode le plus amplifié issu de l'approche locale à mêmes nombre de Reynolds et nombre d'onde.

	$n_y \times n_z$	ω_r	$\omega_i (\times 10^3)$
Theofilis [36]	18×27	0.21215	0.28
Theofilis [36]	20×30	0.21167	0.01
étude présente	31×41	0.21146	0.02
étude présente	41×61	0.21158	0.02
1D		0.20543	4.08

TAB. 3.1 – Mode neutre de l'écoulement dans une conduite définie par un rapport d'aspect $A = 5$ dans les conditions critiques $\mathcal{R} = 10400$ et $\alpha = 0.91$: comparaison aux calculs Arnoldi de Theofilis [36] et au résultat de l'approche locale

3.3 Comportement des modes 2D : fonctions propres

Les fonctions propres sont normalisées en amplitude et en phase de sorte à ce que le maximum selon y d'amplitude de perturbation de vitesse dans la direction principale de l'écoulement en $z = 0$ soit égal à un. Dans la suite de ce chapitre on présentera des modules d'amplitude normalisés, soit $|q_{norm}(y, z)| = \left| \frac{q(y, z)}{u(y_m, z = 0)} \right|$, où y_m est tel que $|u(y_m, z = 0)| = \max_y |u(y, z = 0)|$. On présente sur la figure 3.3 les allures des fonctions d'amplitude associées au mode neutre pour

$A = 5$. Les profils d'amplitudes des composantes longitudinale (à gauche) et normale à la direction principale de l'écoulement (à droite) sont donnés en $z = 0$, l'axe de symétrie de la conduite sur lequel l'écoulement moyen se rapproche le plus de l'écoulement de Poiseuille entre deux plans parallèles. Les profils issus de l'approche locale dans les mêmes conditions d'écoulement y sont également représentés pour la même normalisation. Ces résultats montrent le comportement très semblable de ces perturbations pour les directions x et y . Les niveaux d'amplitude au centre de la conduite sont plus faibles dans la configuration $2D$. L'amplitude de la composante transversale de vitesse fluctuante $|w|$, propre à notre approche, est représentée sur la figure 3.4 sous forme d'iso-contours. On observe que dans les coins de la conduite elle est maximum et est du même ordre de grandeur que celle de la composante longitudinale (en $z = 4.04$ et $y = 0.83$ $|w| = 1.03$). En revanche, au voisinage de l'axe de symétrie son influence est faible et diminue d'ailleurs lorsque le rapport d'aspect A devient plus grand pour devenir presque inexistante dans la majeure partie de la conduite si A est très grand (on tend vers le comportement $1D$).

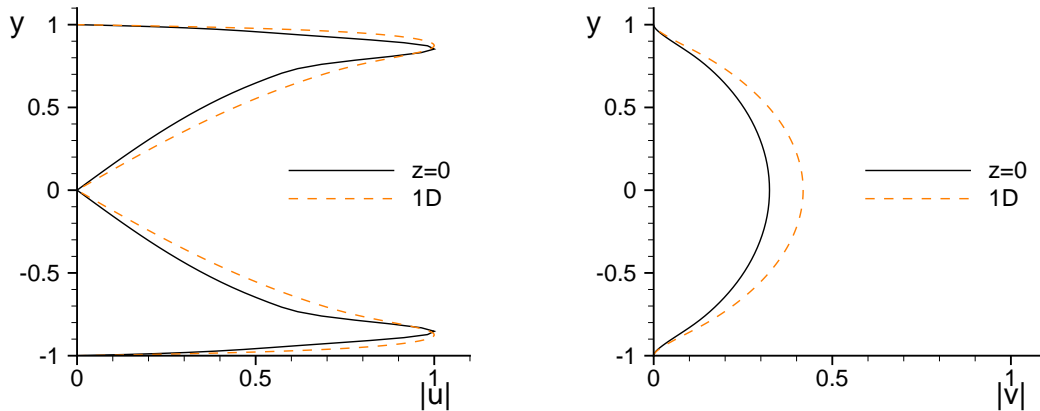


FIG. 3.3 – Comparaison au cas plan : profils à $z = 0$ des modules d'amplitudes des composantes de vitesse longitudinale (à gauche) et normale (à droite) de la perturbation associée au mode neutre de la configuration $A = 5$ et pour $\mathcal{R} = 10400$, $\alpha = 0.91$ et profils issus de l'approche locale $1D$

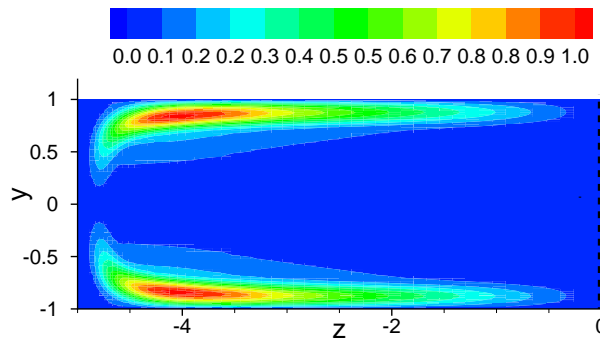


FIG. 3.4 – Iso-valeurs du module de l'amplitude de la composante de vitesse transversale de la perturbation associée au mode neutre de la configuration $A = 5$ et pour $\mathcal{R} = 10400$, $\alpha = 0.91$

Si l'allure des perturbations de vitesse sur l'axe $z = 0$ est très proche de celle du mode de Poiseuille plan, les parois en $z = -A$ et $z = A$ ont cependant un effet non négligeable partout

ailleurs dans la conduite. Ceci est illustré sur la figure 3.5 où les modules des amplitudes de perturbations de vitesse longitudinale et normale sont représentés en fonction de y à différentes distances z de l'axe de symétrie, pour un rapport d'aspect $A = 5$. En s'éloignant de l'axe de symétrie, si A n'est pas trop grand, l'amplitude des perturbations diminue jusqu'à la zone de perturbation transversale maximale évoquée précédemment où la perturbation atteint un niveau plus élevé que sur l'axe ($z = 4.04$ puis a un comportement totalement différent juste avant d'atteindre la paroi $z = 4.79$).

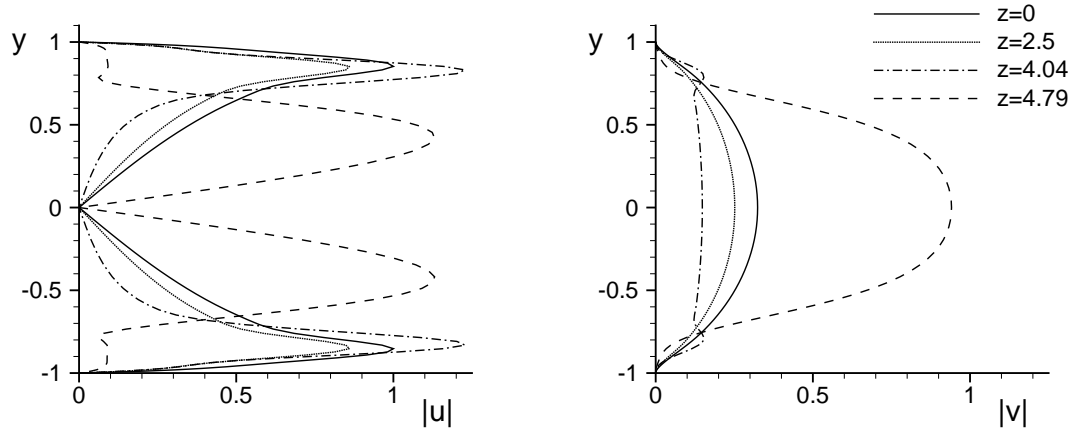


FIG. 3.5 – Profils longitudinaux (à droite) et normaux (à gauche) des amplitudes de fluctuations de vitesse associées au mode neutre, pour différentes positions z , de la configuration $A = 5$ et pour $\mathcal{R} = 10400$, $\alpha = 0.91$

3.4 Variation du rapport d'aspect : lien avec l'approche 1D

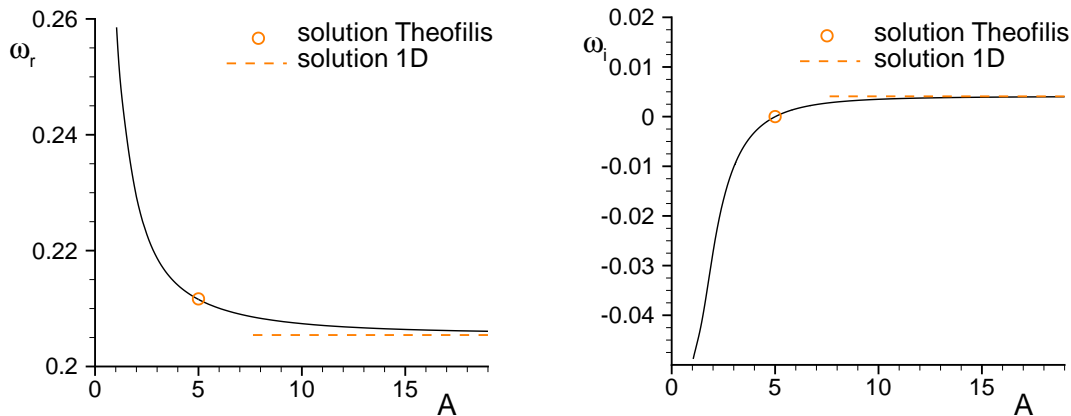


FIG. 3.6 – Évolution de la pulsation (à gauche) et du taux d'amplification (à droite) d'un mode propre en fonction du rapport d'aspect A pour $\mathcal{R} = 10400$, $\alpha = 0.91$: représentation de la limite limite de l'approche locale

La méthode de tir présentée en section 3.1.2 a été mise en œuvre dans le but de suivre

l'évolution du mode neutre de la configuration précédemment étudiée dans sa dépendance vis-à-vis du rapport d'aspect de la conduite. Les évolutions de la pulsation et du taux d'amplification sont reportées sur la figure 3.6. Lorsque A devient suffisamment grand, on tend asymptotiquement vers le mode bien connu issu de l'approche locale (sa pulsation et son taux d'amplification ont été donnés dans le tableau 3.1). Si cette observation valide en quelque sorte l'approche $2D$, d'une certaine manière elle la justifie aussi. En effet, elle souligne les limitations d'une approximation $1D$ dans le cadre, par exemple, d'une comparaison précise à des résultats expérimentaux. En effet, pour un rapport d'aspect $A = 10$ l'écart relatif entre les valeurs de ω obtenues en $1D$ et en $2D$ est de 1% pour la partie réelle et de 30% pour la partie imaginaire ; pour un rapport d'aspect $A = 19$, les écarts sont respectivement de 0.3% et 2%.

3.5 Conclusion

L'approche non-locale développée dans le chapitre précédent à été appliquée à l'écoulement de Poiseuille dans une conduite de section rectangulaire. Toutes les frontières du problème étant réelles et avec des conditions limites bien posées, il a été possible de développer une méthode de tir permettant le suivi individuel de modes vis-à-vis des paramètres caractéristiques du problème. L'approche non-locale est validée par une comparaison satisfaisante aux résultats $2D$ également de Theofilis d'une part et d'autre part on tend asymptotiquement vers le mode issu de l'approche locale lorsque la géométrie de la conduite tend vers la géométrie $1D$. La perturbation $2D$ a globalement le même comportement que la perturbation $1D$ dans un voisinage du plan de symétrie de la conduite, en revanche l'influence de la composante dans la direction perpendiculaire à ce plan devient importante près des parois dès que l'on s'éloigne de ce plan. Les taux d'amplification donnés par l'approche locale sont entachés d'une erreur significative (supérieure à 5%) pour des rapports d'aspects $A \leq 14$.

Chapitre 4

Stabilité de l'écoulement 3D de Hiemenz incompressible

Un des enjeux primordiaux et récurrents des études en aérodynamique est de parvenir à diminuer la consommation de carburant via une réduction de traînée sur les principaux éléments du corps de l'avion. En particulier on cherche à reculer l'apparition de la transition laminaire-turbulent sur la voilure car la traînée de frottement d'un écoulement laminaire est bien moins importante que celle d'un écoulement turbulent. Or l'examen de la couche limite qui se développe autour d'une aile en flèche dans des conditions de vol, au voisinage du bord d'attaque, montre l'apparition très précoce de la turbulence. Dans les années 50 les premiers essais de laminarisation de l'aile à l'aide d'un dispositif d'aspiration à la paroi échouèrent. Plus tard, Gaster mit en évidence l'alimentation de la couche limite turbulente au bord d'attaque de l'aile par l'écoulement provenant du fuselage de l'avion, mécanisme dit de *contamination de bord d'attaque*. Il proposa un dispositif, le Gaster-bump, permettant d'obtenir un écoulement *sain* en aval¹ du Gaster-bump placé sur le bord d'attaque, à proximité de l'emplanture de l'aile. Ainsi, supposant le problème de contamination de bord d'attaque résolu, on peut s'interroger sur l'amplification éventuelle d'instabilités intrinsèques à la couche limite laminaire située au voisinage de la ligne de partage de l'aile en flèche, qui pourrait conduire à une transition vers un état turbulent. L'écoulement de couche limite qui se développe autour d'une aile en flèche à proximité du bord d'attaque est modélisé par l'écoulement de Hiemenz en flèche. Cet écoulement a été décrit précédemment dans la section 2.3. Dans cette partie on examine les instabilités naturelles susceptibles de se développer au sein de cet écoulement.

Pour des configurations particulières de Poiseuille et de Taylor, il est possible de définir des zones d'écoulement quasi-parallèle dans lesquelles on peut mener des études de stabilité locales. Dans le cas de Hiemenz cela semble bien moins réaliste car l'écoulement est totalement tridimensionnel. Cependant, Görtler et Hämmerlin ont proposé de considérer que la perturbation a la même forme que l'écoulement moyen en ce qui concerne la dépendance en x , ce qui permet de simplifier le problème et de se ramener à une approche locale. Après un bref rappel de cette analyse locale, on proposera deux formulations du problème de stabilité global. Enfin les résultats issus de cette approche seront présentés et comparés aux travaux existants.

¹Ici la notion d'aval se rapporte à l'écoulement dans la direction de la ligne de partage.

4.1 Rappel de l'approche locale dite 1D : mode de Görtler-Hämmerlin

La première approche non-parallèle menée avec succès pour l'écoulement de ligne de partage avec effet de flèche a été réalisée par Hall, Malik et Poll [13]. Sous l'hypothèse énoncée initialement par Görtler et Hämmerlin (1955), les perturbations sont recherchées sous une forme semblable à celles des ondes de Tollmien-Schlichting se propageant le long de la ligne de partage :

$$\hat{u}(x, y, z, t) = (xu^*(y), v^*(y), w^*(y)) e^{i\beta(z-ct)}$$

avec plus précisément, comme unique différence, la dépendance linéaire en x dans la direction transverse à celle de la propagation modale. Cette forme particulière est choisie sur le modèle de la dépendance en x de l'écoulement principal sans aucune autre justification *a priori* que celle de simplifier le problème mathématique. On conserve les notations utilisées pour le calcul de l'écoulement moyen (section 2.3.3) et on écrit les équations de Navier-Stokes linéarisées. L'équation de continuité permet d'exprimer la composante de vitesse transversale w^* en fonction des autres composantes de vitesse :

$$i\beta w^* = -u^* - v^{*'}$$

L'équation de quantité de mouvement selon z donne la pression en fonction des composantes de vitesse :

$$i\beta p^* = \frac{1}{\mathcal{R}} \mathcal{L}w + i\beta c w - \frac{V^*}{\mathcal{R}} w^{*'} - W^{*'} v - i\beta W^* w$$

avec

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{dy^2} - \beta^2$$

En remplaçant p^* et w^* par leurs expressions dans l'équation de quantité de mouvement selon y , on obtient le système réduit suivant :

$$\begin{cases} (\mathcal{L} + i\beta c \mathcal{R}) u^* = 2U^* u^* + U^{*'} v^* + V^* u^{*'} + i\beta \mathcal{R} W^* u^* \\ (\mathcal{L} + i\beta c \mathcal{R}) \mathcal{L} v^* = i\beta \mathcal{R} W^* \mathcal{L} v^* - i\beta \mathcal{R} W^{*''} v^* + V^* \mathcal{L} v^{*'} + V^{*'} \mathcal{L} v^* \\ \quad - 2U^{*'} u^* - 2U^* u^{*'} - U^{*''} v^* - U^{*'} v^{*'} \end{cases} \quad (4.1)$$

et les conditions limites associées :

$$u^*(0) = 0, v^*(0) = 0, v^{*'}(0) = 0 \text{ et } u^*(y) = 0, v^*(y) = 0, v^{*'}(y) = 0 \text{ pour } y \rightarrow \infty$$

La résolution du problème aux valeurs propres (Hall *et al.* [13]) montre l'existence d'un mode propre amplifié au-delà d'un nombre de Reynolds critique $\mathcal{R}_c = 583$. Ce mode bidimensionnel, issu de l'approche 1D qui nous servira de référence, est appelé mode de Görtler-Hämmerlin, noté par la suite GH.

Insuffisances du modèle de Görtler-Hämmerlin

Note préalable sur la terminologie : par un souci de cohérence avec les différentes publications sur le sujet, on parlera de perturbations bidimensionnelles pour désigner les perturbations telles le mode GH^a issus de l'approche 1D^b et de perturbations tridimensionnelles^c pour les perturbations issues de l'approche 2D^d.

^aà part pour la composante de vitesse u , où elle est prédéfinie, il n'y a pas de dépendance vis-à-vis de la variable x

^ble problème s'écrit comme une équation différentielle ordinaire à une variable

^cles perturbations dépendent des trois variables d'espace

^dle problème s'écrit comme un système d'équations différentielles à deux variables

Une synthèse des problèmes liés à la ligne de partage, dont la contamination de bord d'attaque et la transition naturelle, est présentée par Arnal [2]. Une compilation des différents travaux théoriques, numériques et expérimentaux réalisés sur ce sujet (excepté les publications les plus récentes) et leur analyse globale y sont proposées.

Les différentes expériences réalisées sur une aile en flèche mettent en évidence un nombre de Reynolds² $\mathcal{R} = 245$. En deçà de ce seuil, l'écoulement est inconditionnellement stable, quelles que soient les amplitudes des perturbations et les mécanismes mis en jeu. Dans ce cas, la dissipation visqueuse est trop importante pour que la turbulence puisse s'auto-entretenir. Cette limite correspond en particulier au mécanisme de contamination de bord d'attaque lié à des perturbations d'amplitude non infinitésimale provenant de la couche limite turbulente du fuselage ou provoquées, par exemple, par une grosse rugosité. La mise en place d'un système d'aspiration ou d'un Gaster-bump permet de relaminariser l'écoulement. Si aucune perturbation issue du fuselage ne vient ainsi contaminer la couche limite au bord d'attaque et si la surface est suffisamment lisse, on peut supposer que la transition au voisinage de la ligne de partage sera causée par l'amplification d'instabilités naturelles avec des perturbations initialement de faible amplitude.

Du point de vue des perturbations infinitésimales, la théorie linéaire précédemment évoquée montre qu'au-delà d'un nombre de Reynolds critique $\mathcal{R}_c = 583$, l'écoulement est inconditionnellement instable et que le mode responsable de cette déstabilisation est le mode GH. Cependant, excepté l'intérêt de la simplification mathématique qu'apporte cette hypothèse, rien ne justifie *a priori* de rechercher des perturbations bidimensionnelles. Les simulations numériques directes tridimensionnelles de Spalart [34] montrent néanmoins qu'en réponse à un bruit blanc les fluctuations les plus instables correspondent bien à celles comportant cette dépendance particulière vis-à-vis de la composante longitudinale, ce qui justifie *a posteriori* la forme mathématique choisie. De même Joslin [17] confirme également une prédominance des instabilités bidimensionnelles dans ses simulations numériques directes tridimensionnelles en utilisant une source harmonique comme générateur de perturbations. Ces perturbations sont quasi-bidimensionnelles lorsque la source est étendue et placée perpendiculairement à la ligne de partage ou bien tridimensionnelles si la source tend vers une source ponctuelle placée sur la ligne de partage. En revanche, même en se donnant les meilleures conditions de taux de turbulence extérieure et d'état de surface, il reste très difficile de retrouver expérimentalement avec précision le nombre de Reynolds critique issu de la théorie linéaire. Les résultats expérimentaux semblent s'en approcher de la même façon que d'une limite, ce qui laisse supposer l'existence d'un mécanisme non-linéaire conduisant à une instabilité subcritique entre $\mathcal{R} = 245$ et $\mathcal{R} = 583$. Ainsi Hall *et al.* [13], en comparant leurs courbes neutres aux résultats expérimentaux de Poll et Pfenninger & Bacon, suggèrent l'existence d'un équilibre subcritique. Hall & Malik [12], avec une approche faiblement non linéaire, confirment et

²Sans aucune autre précision le nombre de Reynolds désigne le nombre de Reynolds qui a été défini en section 2.3.2 basé sur la vitesse transversale et une longueur construite à l'aide du gradient de vitesse longitudinal.

argumentent l'idée d'une bifurcation subcritique qui serait liée à l'existence de perturbations non linéaires instables en-deçà du nombre de Reynolds critique mais évoquent également la possibilité d'un rôle des perturbations tridimensionnelles. Les travaux de Jiménez *et al.* [16] (DNS avec formulation en vorticité sous l'approximation bidimensionnelle) montrent des résultats linéaires près de la courbe neutre en accord avec Hall *et al.* [13] et concluent qu'il n'existe pas de solution bidimensionnelle non linéaire subcritique et supposent donc une prédominance des effets 3D. De même Theofilis [37] n'obtient pas d'états subcritiques en utilisant le modèle GH dans ses DNS et suggère ainsi l'absence d'instabilité subcritique dans ce cas, argumentant que les formulations bidimensionnelles utilisées par lui-même et Jiménez *et al.* en sont la cause. Quant à Joslin [18], ses simulations numériques directes mettent en évidence des perturbations subcritiques non-linéaires amplifiées, qu'elles soient bidimensionnelles ou tridimensionnelles. Il argumente que Jiménez *et al.* ne les observent pas du fait de leur choix de modélisation de la pression et Theofilis aurait des amplitudes de perturbations trop faibles. Cependant Joslin relève des différences quantitatives entre les deux types de perturbations et souligne l'importance des perturbations tridimensionnelles pour la compréhension de la transition au sein de cet écoulement.

Lin & Malik [24] sont les premiers à considérer une approche non-locale pour cet écoulement permettant la recherche d'instabilités tridimensionnelles. Ils montrent qu'il existe des perturbations instables en plus de l'onde bidimensionnelle dominante qui permet une non-uniformité dans la direction d'accélération de l'écoulement. Ils suggèrent également que bien que ces modes soient linéairement stables dans la région subcritique, une combinaison de ces modes peut éventuellement initier la chute du Reynolds critique.

Finalement, la théorie classique (Görtler-Hämmerlin) en linéaire et en non-linéaire étant incomplète pour expliquer les instabilités subcritiques, il est indispensable de s'intéresser aux perturbations tridimensionnelles qu'il est possible d'obtenir grâce à l'approche dite 2D. La connaissance des perturbations tridimensionnelles existant au sein de l'écoulement pourrait permettre la mise en place d'une recherche de perturbation optimale et s'intéresser aux éventuelles interactions non-linéaires entre les différents modes. Et ce d'autant plus qu'il est nécessaire d'apporter une réserve quant à l'interprétation des travaux de Spalart affirmant que le mode GH est le seul mode instable émergeant en réponse à un bruit blanc. En effet on a pu vérifier avec l'approche 2D que dans les conditions de ses DNS, soit $\mathcal{R} = 600$ et $\beta = 0.2845$, seul le mode GH est en zone instable (voir figure 4.1). Il serait particulièrement intéressant de réaliser de nouvelles DNS dans des conditions de Reynolds plus élevé pour lesquelles deux modes seraient instables. D'après nos calculs, à même nombre d'onde mais pour un nombre de Reynolds $\mathcal{R} = 675$ par exemple, le mode GH ainsi que le mode antisymétrique suivant, noté A1, sont tous deux en zone instable. Peut-être serait-il ainsi possible d'observer avec un excitateur de perturbations symétriques, puis antisymétriques, puis un bruit blanc si la réponse obtenue est le mode GH ou le mode antisymétrique ou bien encore une combinaison de ces modes. Notons que ce nombre de Reynolds est indicatif mais toutefois il faudrait choisir un nombre de Reynolds tel que $650 < \mathcal{R} < 700$. En effet pour des valeurs proches de $\mathcal{R} = 650$ le mode S1 est marginalement instable et on risque donc d'être dans la même configuration qu'à $\mathcal{R} = 600$. De même au-delà de $\mathcal{R} = 700/725$ d'autres modes vont passer en zone instable et cette situation n'est pas souhaitable si on ne veut pas compliquer l'exploitation des résultats.

La méthode non-locale présentée au chapitre 1 va donc être mise en œuvre pour l'écoulement de Hiemenz en flèche. Deux formulations du problème seront envisagées, l'une conservant les variables primitives et l'autre, réduite, obtenue en exprimant certaines variables en fonction des autres. Les travaux existants proposent tous une formulation primitive et des méthodes de discrétisation différentes. Lin & Malik [24] utilisent une méthode de collocation spectrale pour discrétiser les équations dans les deux directions mais à l'aide de polynômes différents (Chebychev

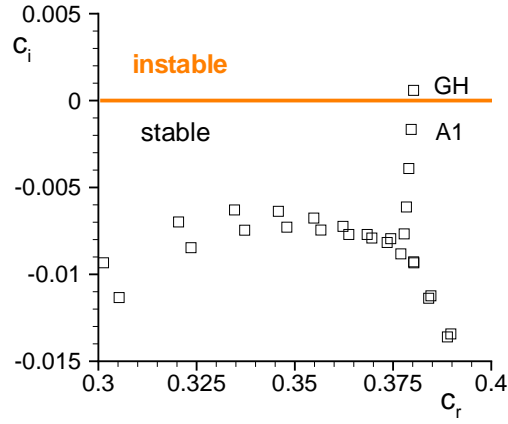


FIG. 4.1 – Spectre issu de l’approche 2D dans des conditions identiques aux DNS de Spalart $Re = 600$, $\beta = 0.255$

pour y et réguliers pour x). Theofilis [39] procède la même façon mais avec des polynômes de Jacobi en x . Quant à Heeg [14] qui s’intéresse à la théorie linéaire spatiale, il utilise une méthode de différences finies pour la discrétisation en x . Les paragraphes suivants donnent les formulations des équations aux perturbations. Les aspects les plus techniques sont reportés en annexe B.

4.2 Formulations non-locales : approche 2D du problème

4.2.1 Équations aux perturbations en formulation primitive

En conservant le champ complet des perturbations, le système des équations linéarisées pour le mouvement fluctuant, traduisant les conservations de débit et de quantité de mouvement, s’écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i\beta w = 0 \\ -i\beta c u + \bar{U} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial u}{\partial y} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + i\beta \bar{W} u = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathcal{R}} \nabla^2 u \\ -i\beta c v + \bar{U} \frac{\partial v}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + i\beta \bar{W} v = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mathcal{R}} \nabla^2 v \\ -i\beta c w + \bar{U} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial w}{\partial y} + v \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} + i\beta \bar{W} w = -i\beta p + \frac{1}{\mathcal{R}} \nabla^2 w \end{array} \right. \quad (4.2)$$

avec

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \beta^2 f$$

Les conditions limites associées à ce système sont des conditions d’adhérence à la paroi et d’écoulement non perturbé à l’infini pour la direction normale y :

$$u(x, 0) = v(x, 0) = w(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad u(x, y) = v(x, y) = w(x, y) = 0, \quad \text{pour } y \rightarrow \infty$$

Pour la pression, le problème est bien posé, il n'est pas nécessaire d'imposer des conditions. On laisse donc les équations de la mécanique à la paroi et en $y = y_{max}$:

$$\frac{\partial p}{\partial y}(x, 0) = \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, 0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial y}(x, y_{max}) = \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y_{max}) - \bar{V}(y_{max}) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y_{max})$$

Ces relations sont parfois appelées conditions de compatibilité, elles correspondent à la traduction de l'équation de quantité de mouvement dans la direction normale y écrite aux points limites du domaine [24, 38]. Ces conditions deviennent obsolètes si on utilise des grilles de maillage différentes pour les composantes de vitesse d'une part et la pression d'autre part. Cette dernière doit compter deux points de moins, ce qui peut être obtenu en retirant les points frontière tout en conservant leur influence dans les opérateurs de dérivation. Une autre méthode enfin consiste à conserver une unique grille mais approcher la pression par des polynômes de degré inférieur de deux unités à ceux qui sont utilisés pour interpoler la vitesse. Ce type de méthode est discuté dans [26] mais elle n'a pas été implémentée dans notre étude.

Dans la direction x il faut définir une zone de calcul au voisinage de la ligne de partage car il n'y a pas de frontière physique à proprement parler. On peut choisir ce domaine de façon à ce qu'il présente une symétrie en $x = 0$, soit $[-x_{max}, x_{max}]$. L'écoulement de base a ainsi une composante longitudinale antisymétrique et les autres composantes sont symétriques par rapport à $x = 0$. On peut alors montrer que les solutions d'un tel système seront soit paires, soit impaires. En effet, le système (4.2) étant réécrit formellement de la façon suivante :

$$\begin{cases} C^{(u)}(x, y)u + C^{(v)}(y)v + C^{(w)}w = 0 \\ Q_x^{(u)}(x, y)u + Q_x^{(p)}(x)p + \bar{Q}_x(x, y) = 0 \\ Q_y^{(v)}(x, y)v + Q_y^{(p)}(y)p = 0 \\ Q_z^{(w)}(x, y)w + Q_z^{(p)}p + Q_z^{(v)}(y)v = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Un rapide examen de chacun de ces opérateurs montrent que les fonctions

$$x \mapsto Q_x^{(u)}(x, y), \quad x \mapsto Q_y^{(v)}(x, y), \quad x \mapsto Q_z^{(w)}(x, y)$$

sont paires et les fonctions

$$x \mapsto C^{(u)}(x, y), \quad x \mapsto Q_x^{(p)}(x), \quad x \mapsto \bar{Q}_x(x, y)$$

impaires. Ainsi, le système (4.3) évalué en $-x$ s'écrit :

$$\begin{cases} -C^{(u)}(x, y)u(-x, y) + C^{(v)}(y)v(-x, y) + C^{(w)}w(-x, y) = 0 \\ Q_x^{(u)}(x, y)u(-x, y) - Q_x^{(p)}(x)p(-x, y) - \bar{Q}_x(-x, y) = 0 \\ Q_y^{(v)}(x, y)v(-x, y) + Q_y^{(p)}(y)p(-x, y) = 0 \\ Q_z^{(w)}(x, y)w(-x, y) + Q_z^{(p)}p(-x, y) + Q_z^{(v)}(y)v(-x, y) = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Formellement, vis-à-vis de x , pour une valeur propre simple c donnée, le système (4.3) admet la solution $S(x) = (u(x), v(x), w(x), p(x))$ et $\tilde{S}(x) = (-u(-x), v(-x), w(-x), p(-x))$ est solution du système (4.4). Les solutions S et \tilde{S} représentent les fonctions propres d'une même valeur

propre simple, elles appartiennent donc à un espace vectoriel de dimension 1 et sont donc proportionnelles. On peut donc traduire cette proportionnalité en écrivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(-x) = -\mu u(x) \\ v(-x) = \mu v(x) \\ w(-x) = \mu w(x) \\ p(-x) = \mu p(x) \end{array} \right. , \forall x \text{ et donc de même, en changeant } x \text{ en } -x : \left\{ \begin{array}{l} u(x) = -\mu u(-x) \\ v(x) = \mu v(-x) \\ w(x) = \mu w(-x) \\ p(x) = \mu p(-x) \end{array} \right.$$

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x) = \mu^2 u(x) \\ v(x) = \mu^2 v(x) \\ w(x) = \mu^2 w(x) \\ p(x) = \mu^2 p(x) \end{array} \right. \Rightarrow \mu^2 = 1$$

Ainsi, la perturbation u associée à une valeur propre simple de ce système d'opérateurs est soit paire, soit impaire pour la variable x , et les fonctions v , w , p associées sont de parité inverse. Les solutions d'un tel système seront donc nécessairement paires ou impaires. Les solutions dites par la suite "paires" sont telles que u est impaire et v , w paires. Dans ces conditions, on peut donc ajouter au système les conditions de symétrie ; pour les solutions paires :

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \frac{\partial v}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial w}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial p}{\partial x}(0, y) = 0 \\ u(x_{max}, y) &= -u(-x_{max}, y), \quad v(x_{max}, y) = v(-x_{max}, y), \\ w(x_{max}, y) &= w(-x_{max}, y), \quad p(x_{max}, y) = p(-x_{max}, y) \end{aligned}$$

pour les solutions impaires :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) &= v(0, y) = w(0, y) = p(0, y) = 0 \\ u(x_{max}, y) &= u(-x_{max}, y), \quad v(x_{max}, y) = -v(-x_{max}, y), \\ w(x_{max}, y) &= -w(-x_{max}, y), \quad p(x_{max}, y) = -p(-x_{max}, y) \end{aligned}$$

Cependant, en recherchant des solutions de symétrie particulière il est légitime de travailler sur un domaine réduit dans la direction de symétrie pour des raisons d'économie de mémoire. Dans ce cas les conditions en $x = 0$ restent inchangées en revanche en $x = x_{max}$ on écrit des conditions d'extrapolation, *i.e.* les fonctions d'amplitude sur le dernier point de la grille de calcul en x sont calculées à l'aide des mailles précédentes [38]. Les conditions d'écoulement sortant pour la direction longitudinale x constituent un point ardu de cette étude car aucune condition physique ne s'impose. Les résultats de calcul présentés ont été réalisés avec des conditions d'extrapolation quadratique (*cf* annexe B.4).

4.2.2 Formulation réduite des équations aux perturbations

Les équations du système précédent 4.2 peuvent également être combinées, ce qui permet de réduire le système initial à un système de deux équations. En effet, w et p peuvent être exprimées

en fonction de u et v à l'aide des équations de continuité et de quantité de mouvement projetée sur Oz :

$$w = \frac{i}{\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$p = -\frac{i}{\beta} \left(\mathcal{M}w + i\beta cw - \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} v \right)$$

avec

$$\mathcal{M} = \frac{1}{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2 \right) - \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} - \bar{V} \frac{\partial}{\partial y} - i\beta \bar{W}$$

En remplaçant dans les équations de quantité de mouvement projetées sur Ox et Oy , on obtient le système à deux équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\mathcal{M}u + i\beta cu - \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} u - \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} v \right) = \\ \frac{1}{\beta^2} \left(\mathcal{M} + i\beta c - \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{i}{\beta} \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \left(\mathcal{M}v + i\beta cv - \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} v \right) = \\ \frac{1}{\beta^2} \left[\left(\mathcal{M} + i\beta c - \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right. \\ \left. - i\beta \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{i}{\beta} \left[\frac{\partial \bar{W}}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} v \right] \end{array} \right. \quad (4.5)$$

On conserve les conditions de symétrie et d'extrapolation pour u et v . Il n'est pas nécessaire de traduire les conditions de symétrie pour w et p . En effet, comme montré dans la section précédente, la parité de w est déduite de celle de u et v grâce à l'équation de continuité. De même on déduit la parité de p à l'aide par exemple de l'équation de quantité de mouvement longitudinal. Les conditions d'extrapolation en sortie de domaine étant imposées par nécessité numérique uniquement, il est inutile de traduire celles concernant w et p . Il en va de même pour les conditions de compatibilité portant sur p dans la direction y . Traduisant l'adhérence à la paroi pour u , v et w , les conditions limites physiques pour la direction normale à la paroi y s'écrivent :

$$u(x, 0) = v(x, 0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad u(x, y) = v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0, \quad \text{pour } y \rightarrow \infty$$

La mise en place du problème numérique est détaillée en annexe B.3.

4.3 Résultats issus de l'approche 2D : spectre et fonctions propres

Les deux formulations ont été utilisées afin de résoudre le problème. L'intérêt principal de la formulation réduite, outre le fait qu'elle permet de valider en quelque sorte les résultats obtenus par la formulation primitive, est d'utiliser des matrices de taille deux fois plus petites *a priori*. Cependant si le gain de mémoire et donc de temps est réel pour les modes les plus faciles à converger, le raisonnement n'est pas aussi évident pour les modes suivants. En effet, on doit traiter deux équations au lieu de quatre mais dont l'ordre de différentiation est deux fois plus élevé. L'utilisation d'un algorithme de construction des matrices dérivées optimisé pour la réduction des erreurs d'arrondi (formule (1.14), Weideman [41]) n'y suffit pas, l'apparition de matrices de dérivation d'ordre plus élevé impose un nombre de points de maillage plus grand pour faire converger la solution. Le gain global n'est donc pas évident.

4.3.1 Validation : comparaison au 1D et à Lin & Malik

Le cas de référence étant celui traité par Lin & Malik [24], nous nous sommes placés dans les mêmes conditions dans un premier temps afin de vérifier le bon comportement de notre code. Ainsi pour un nombre de Reynolds $\mathcal{R} = 800$ et un nombre d'onde transversal $\beta = 0.255$, on a reporté le mode GH issu de l'approche 1D d'une part et les modes obtenus par Lin & Malik [24] d'autre part sur le spectre donné en figure 4.2. Les valeurs des quatre modes les plus amplifiés sont rassemblées dans le tableau 5.1. Notre calcul est réalisé en formulation primitive à l'aide de 36×53 points pour décrire le domaine $[0, 200] \times [0, 50]$.

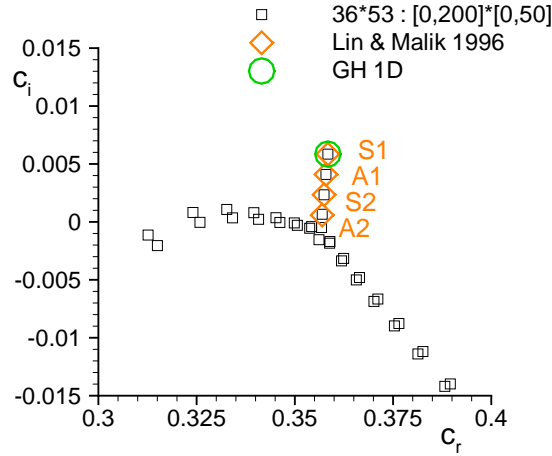


FIG. 4.2 – Spectre des valeurs propres pour l'écoulement de Hiemenz incompressible, $Re = 800, \beta = 0.255$

L'accord avec Lin & Malik est très satisfaisant. On retrouve une série de modes alternativement symétriques et antisymétriques. Ces modes, ordonnés selon un taux d'amplification décroissant sont notés pour la suite $S1 < A1 < S2 < A2$. Le mode le plus amplifié correspond bien au mode GH symétrique donné par l'approche 1D. Cependant il est important de noter que les modes suivants de fréquence très proches de celle de GH sont certes moins amplifiés mais restent tout de même en zone instable pour certains. Ainsi il n'est pas exclu que ces modes jouent un rôle dans le processus de déstabilisation de la couche limite au voisinage du bord d'attaque et en particulier que leurs interactions conduisent à une instabilité subcritique telle qu'elle est observée expérimentalement. Il serait particulièrement intéressant dans ce but de mener une étude de perturbation optimale afin d'évaluer leur participation. L'existence du mode A1 a été confirmée par les DNS spatiales de Joslin [19]. Il impose une perturbation ou bien symétrique (S1) ou bien antisymétrique (A1) de façon indépendante à l'aide d'aspiration et de soufflage à la paroi. Les taux d'amplification observés sont en très bon accord avec les résultats de Lin & Malik [24].

La portion de spectre présentée est obtenue à l'aide de la méthode d'Arnoldi (*cf* section 1.2.2). Aucun post-traitement n'a été réalisé et seuls les modes précédemment évoqués peuvent être considérés comme convergés et donc solutions du problème continu. En particulier, les modes de la «branche» située à gauche du graphe, qui semblent pour certains être plus amplifiés que A2 ne doivent pas être pris en compte. De façon plus précise, les questions de convergence en maillage ainsi que l'influence du domaine de calcul choisi et des conditions limites de sortie sont discutées en annexe B.4.

La figure 4.3 regroupe différentes représentations des modules des amplitudes des fluctuations

de vitesse associées au mode $S1$, ces fonctions sont normalisées de façon à ce que $\max_{(x,y)} |w| = 1$ (ce qui apparaît clairement sur les profils de $|w|$ donnés figure 4.3). À ce stade, il est important d'expliciter de façon précise, la normalisation qui a été utilisée. On cherche la position (x_m, y_m) à laquelle le module de l'amplitude de la perturbation de vitesse transversale atteint son maximum, $|w(x_m, y_m)| = \max_{(x,y)} |w|$. Les différentes amplitudes complexes de vitesse, pression et température sont alors divisées par la valeur de l'amplitude complexe de la composante transversale à cette position, soit $q_{norm}(x, y) = q(x, y)/w(x_m, y_m)$. Les représentations de modules d'amplitude ou de perturbation réelle données par la suite, sauf précision contraire, sont donc normalisées en amplitude et en phase :

$$|q(x, y)| = \left| \frac{q(x, y)}{w(x_m, y_m)} \right| \text{ et } \hat{q}_r(x, y) = \left(\frac{q(x, y)}{w(x_m, y_m)} \right)_r \cos \beta(z - ct) - \left(\frac{q(x, y)}{w(x_m, y_m)} \right)_i \sin \beta(z - ct)$$

où les indices r et i désignent respectivement les parties réelle et imaginaire. La partie supérieure de la figure 4.3 donne les profils dans la direction normale à la paroi y des trois composantes de vitesse pour quatre positions x données. Le mode $S1$ apparaît bien comme le mode bidimensionnel de Görtler-Hämmerlin avec des composantes normale v et transversale w indépendantes vis-à-vis de la distance à la ligne de partage. En outre, leur allure est comparable à celle observée pour une onde de type Tollmien-Schlichting oblique qui se propage au sein d'une couche limite sur plaque plane (avec l'axe Oz comme direction principale). En revanche, il existe une composante longitudinale non-nulle qui est du même ordre de grandeur que la composante transversale *loin*³ de la ligne de partage. Les maxima de vitesse longitudinale et transversale sont atteints à une hauteur d'environ 20% de l'épaisseur de couche limite (21% pour u et 17% pour w) et la composante normale v atteint son niveau maximum à une distance d'environ 0.7δ de la paroi. Sur la partie inférieure de la figure 4.3 les évolutions de chaque composante en fonction de la distance à la ligne de partage x sont données pour trois valeurs de la distance à la paroi y . Ces évolutions sont représentées par des symboles et les traits plein représentent une régression linéaire de ces points. La dépendance linéaire de la composante longitudinale u vis-à-vis de x et la constance des deux autres composantes vis-à-vis de cette même variable sont confirmées.

4.3.2 Description des modes tridimensionnels

Ainsi le mode le plus instable est bien le mode GH donné par l'approche $1D$ et observé également par Spalart [34]. On s'intéresse à présent au comportement des modes tridimensionnels moins amplifiés que $S1$ mais de fréquences proches. Des représentations similaires à celles données pour $S1$ sont donc proposées pour les modes $A1$ et $S2$. Les figures 4.4 et 4.5 donnent les profils en y et en x des modules des amplitudes de vitesse fluctuante. Le comportement dans la direction normale à la paroi y est strictement identique pour tous les modes. En revanche la dépendance en x est de type polynômiale avec un ordre croissant pour un mode de plus en plus amorti. Les régressions polynômiales d'ordre 1, 2 ou 3 sont reportées selon les cas sur les profils pour comparaison. Ainsi l'évolution de la composante longitudinale u de $A1$ est de type quadratique tandis que les deux autres sont de type linéaire et de même pour $S2$ la dépendance pour ces dernières est de type quadratique et celle pour la composante longitudinale est de type cubique. Ces formes polynômiales en x sont également exhibées par Theofilis *et al.* [39] comme résultat de leur approche $2D$ dite bi-globale. Theofilis *et al.* suggèrent que c'est probablement cette

³La notion de *loin* signifie ici proche de la section de sortie du domaine, soit pour des valeurs de x proches de 200 mais il faut garder à l'esprit que ce domaine représente en réalité un voisinage de la ligne de partage et ainsi en grandeur dimensionnelle $x^* = 200\Delta$ est très petit devant la dimension de la corde de l'aile.

dépendance en puissance de x croissante qui rend la convergence des modes suivants de plus en plus difficile. Ils proposent une extension du modèle Görtler-Hämmerlin en pré-définissant la forme des modes qui conduit à des résultats tout à fait satisfaisants qui font même douter de l'intérêt d'utiliser une approche 2D pour cet écoulement dans le cas incompressible.

Les modes tridimensionnels semblent donc, à la dépendance en x près, évoluer de façon totalement similaire au mode bidimensionnel GH . Afin de rechercher d'éventuelles différences on s'est intéressés à diverses représentations. On en donne deux d'entre elles pour les trois modes $S1$, $A1$ et $S2$. Les figures 4.6, 4.7 et 4.8 montrent pour chaque mode les iso-valeurs de la perturbation complète de vitesse transversale, soit $\hat{w}(x, y, z, t) = Re[w(x, y)e^{i\beta(z-ct)}]$, à trois distances de la ligne de partage $x = 102.58$, $x = 150.61$ et $x = 190.21$ et pour deux temps $t = 0$ et $t = T/4$ où T représente la période temporelle. Encore une fois on retrouve pour les trois modes des caractéristiques similaires à celle d'une onde TS au sein d'une couche limite de plaque plane. On observe un décalage de phase entre deux zones, une proche de la paroi et l'autre au-delà de la couche limite. Le développement de chacune de ces ondes se fait principalement dans la direction d'envergure z . Bien entendu, pour le mode $S1$ les contours sont absolument identiques pour les différentes positions x . On observe uniquement un déplacement vers les z croissants en avançant dans le temps. En revanche pour les modes $A1$ et $S2$ on retrouve une croissance en x . Celle-ci est plus importante pour le mode $S2$ (croissance en x^2 contre x pour $A1$).

Enfin, les figures 4.9, 4.10 et 4.11 donnent pour les trois modes une représentation de la partie réelle de la composante longitudinale du rotationnel à $t = 0$, $Re[\Omega_x e^{i\beta z}]$. Ces iso-valeurs sont données dans un plan parallèle à la ligne de partage (y, z) . Dans la représentation plane le trait plein désigne la position $x = 131.59$ et le trait segmenté désigne la position $x = 190.21$. Une vue 3D est également proposée où plusieurs plans apparaissent à différentes positions x . Le maximum de vorticité longitudinale est situé en très proche paroi. On observe une nouvelle fois la constance en x pour le mode $S1$. En revanche, on observe nettement le développement en x pour les modes $A1$ et $S2$.

4.3.3 Commentaires sur d'autres types de résolution

L'objet de ce paragraphe est de faire un certain nombre de commentaires sur divers calculs qui ont été réalisés. Ces calculs diff rent de ceux présentés précédemment soit par la formulation du problème de stabilité, soit par la répartition des points, soit encore par l'algorithme de résolution. Si aucune de ces solutions n'a conduit à des améliorations, elles peuvent néanmoins être considérées comme autant de cas de validation des résultats obtenus.

Formulation réduite des équations

La formulation réduite des équations permet d'obtenir un problème discret deux fois plus petit. Ainsi pour un calcul à même nombre de points on réalise une économie importante à la fois de stockage mémoire et de temps de calcul. Cependant seuls les deux premiers modes sont correctement convergés dans ce cas. On peut bien entendu se permettre d'augmenter le nombre de points, néanmoins il est très difficile de trouver de meilleures conditions de convergence. Les essais que nous avons menés n'ont pas permis d'amélioration des résultats. Le nombre de points dans la direction normale à la paroi y a été porté à 83 points sur un domaine d'intégration allant jusqu'à $y_{max} = 50$ ou $y_{max} = 60$, le nombre de points dans la direction parallèle à la ligne de partage x à 51 points sur un domaine d'intégration variant de $x_{max} = 50$ à $x_{max} = 300$. Un exemple de résultat est donné sur la figure 4.12(b) pour un domaine $[0, 200] \times [0, 50]$ représenté par 36×53 points.

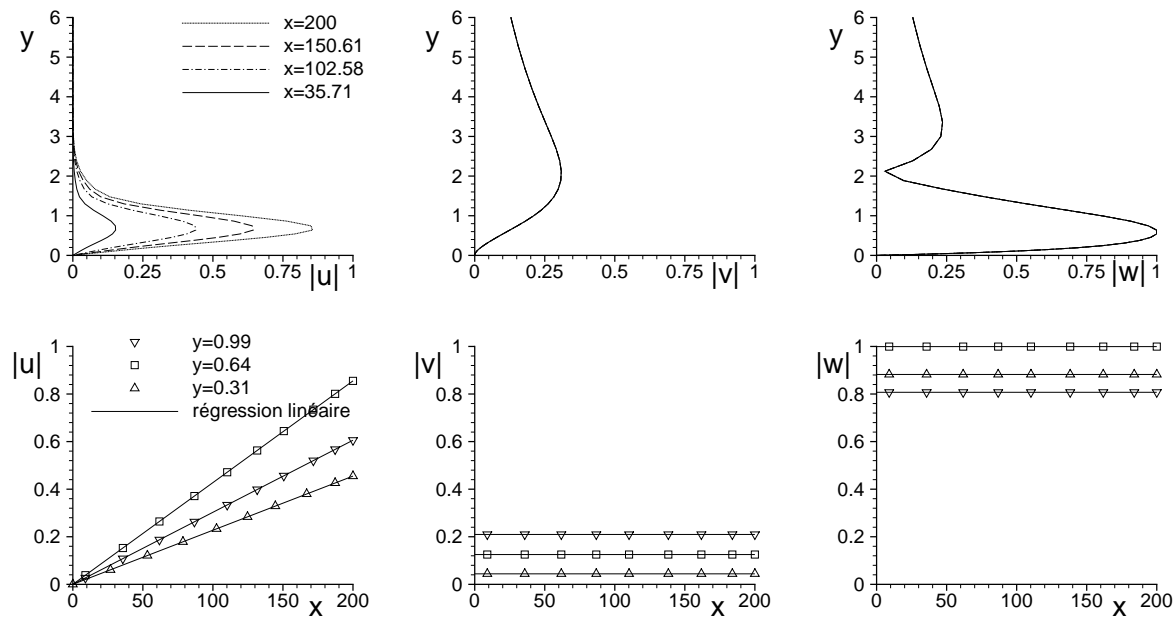


FIG. 4.3 – Profils normaux et longitudinaux des amplitudes de fluctuations de vitesse associées au mode $S1$

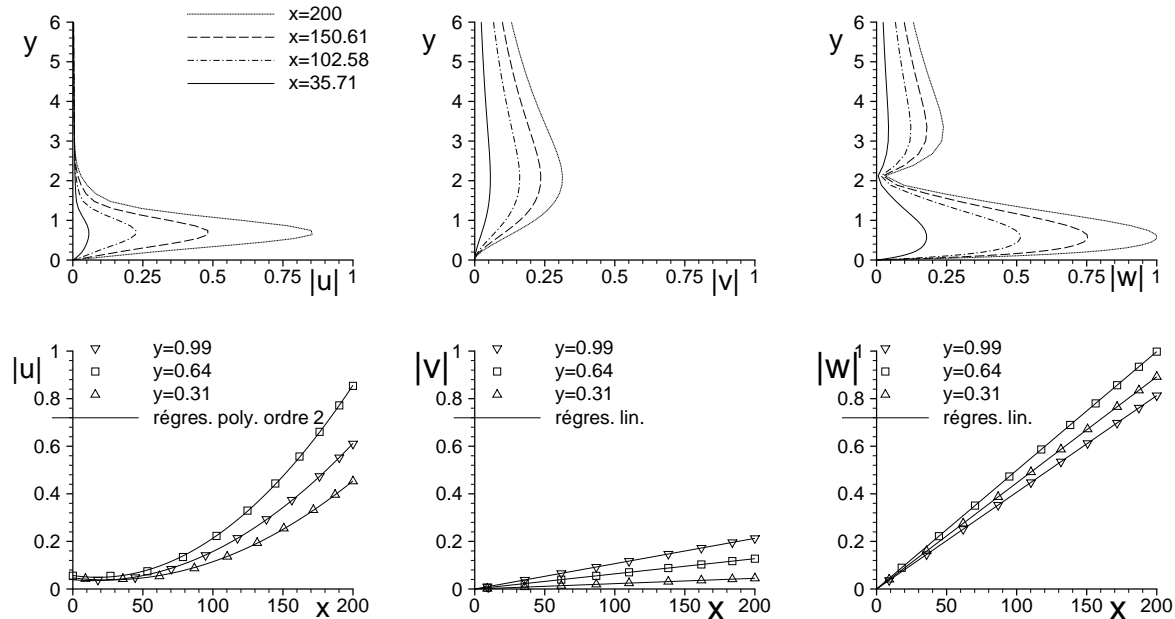


FIG. 4.4 – Profils normaux et longitudinaux des amplitudes de fluctuations de vitesse associées au mode $A1$

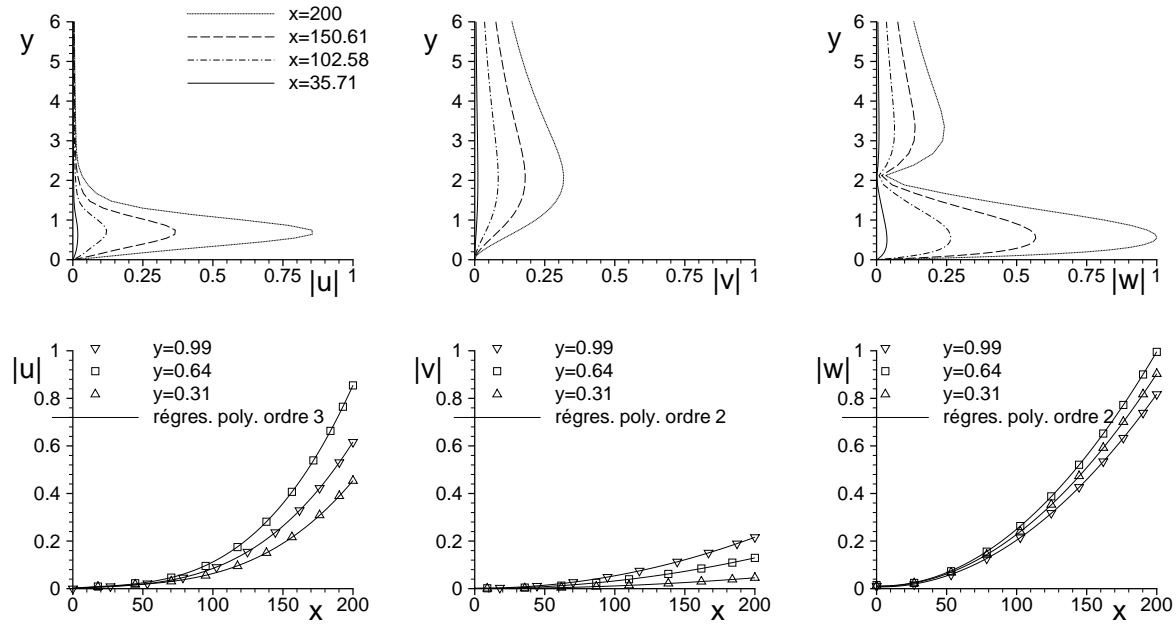


FIG. 4.5 – Profils normaux et longitudinaux des amplitudes de fluctuations de vitesse associées au mode $S2$

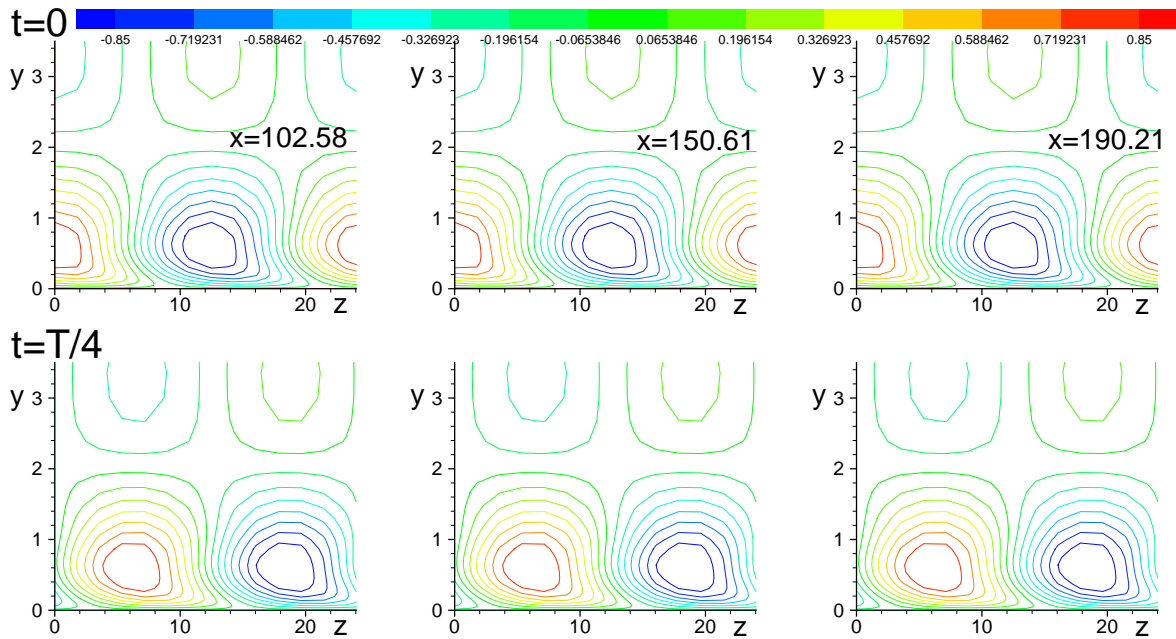


FIG. 4.6 – Iso-valeurs de la perturbation de vitesse transversale \hat{w} aux instants $t = 0$ et $t = T/4$ pour le mode $S1$

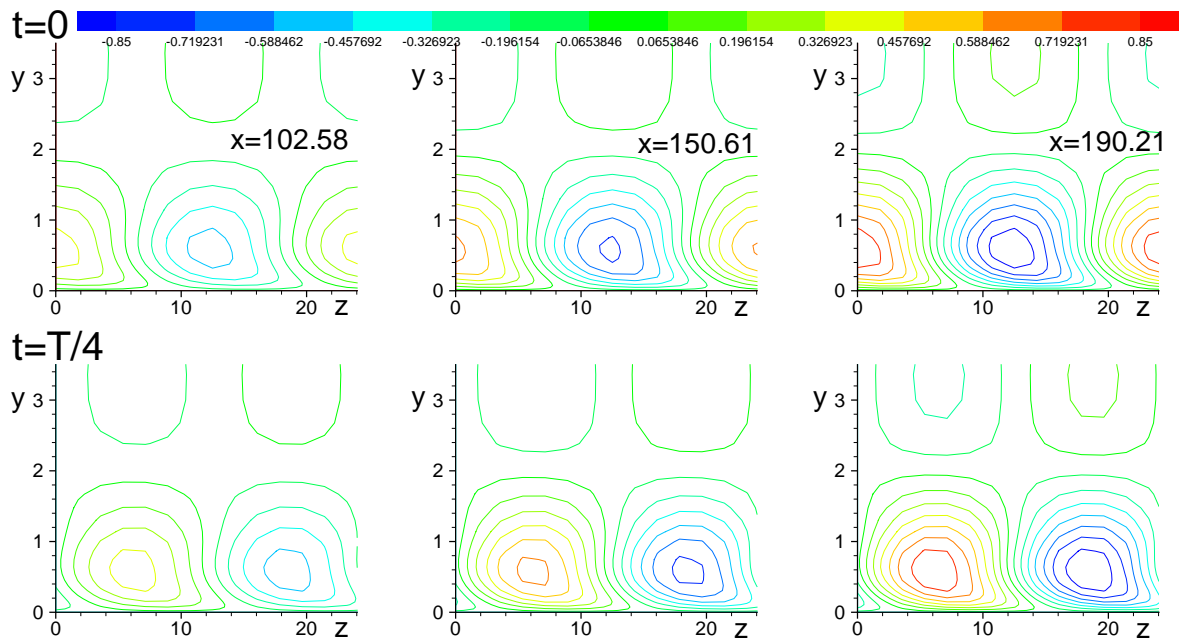


FIG. 4.7 – Iso-valeurs de la perturbation de vitesse transversale \hat{w} aux instants $t = 0$ et $t = T/4$ pour le mode $A1$

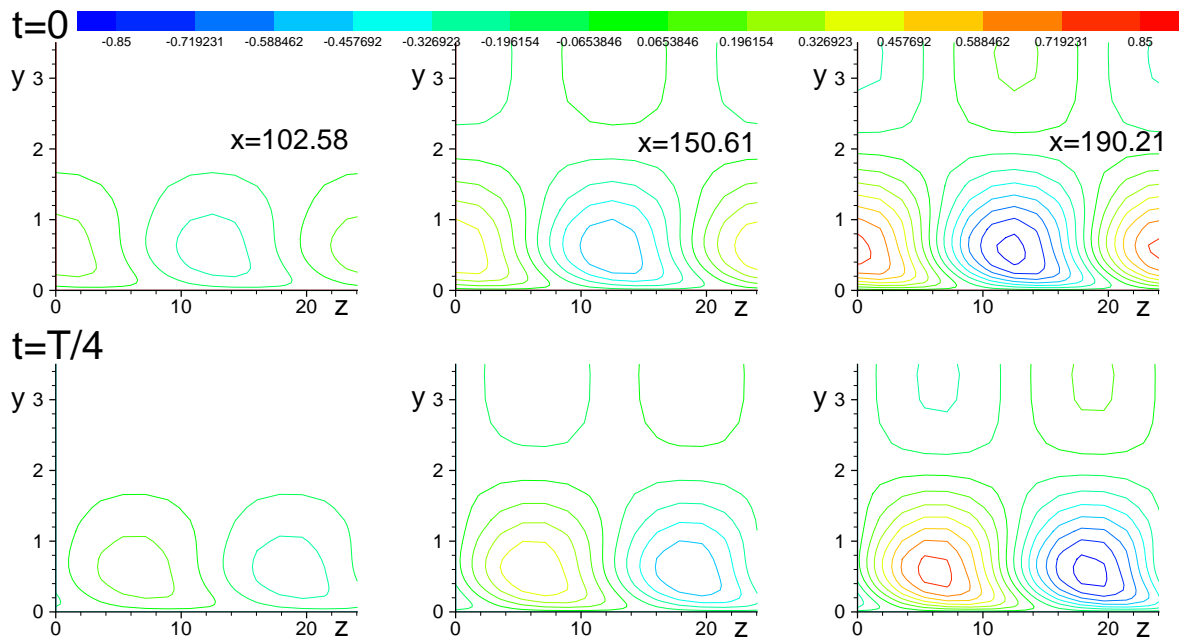


FIG. 4.8 – Iso-valeurs de la perturbation de vitesse transversale \hat{w} aux instants $t = 0$ et $t = T/4$ pour le mode $S2$

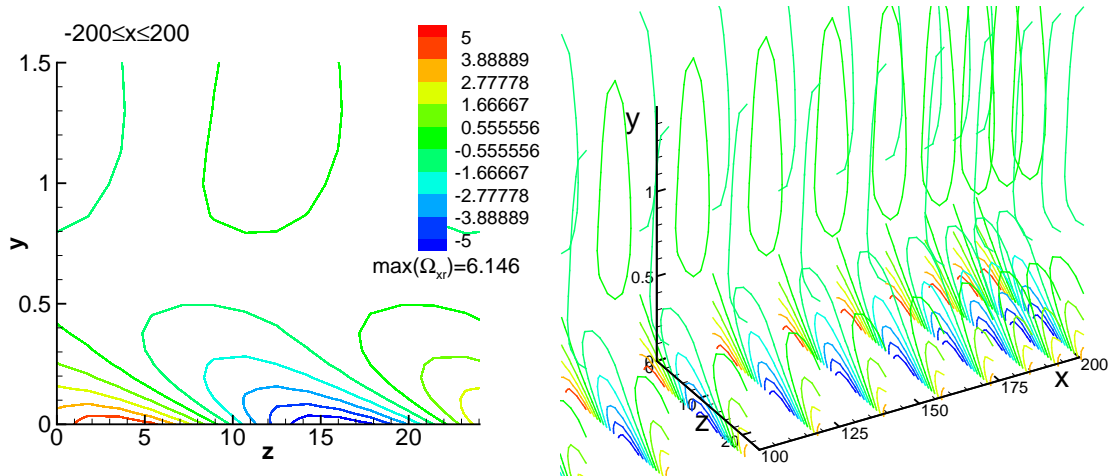


FIG. 4.9 – Représentation dans le plan parallèle à la ligne de partage à $t = 0$ de la composante longitudinale de la perturbation de rotationnel pour le mode $S1$

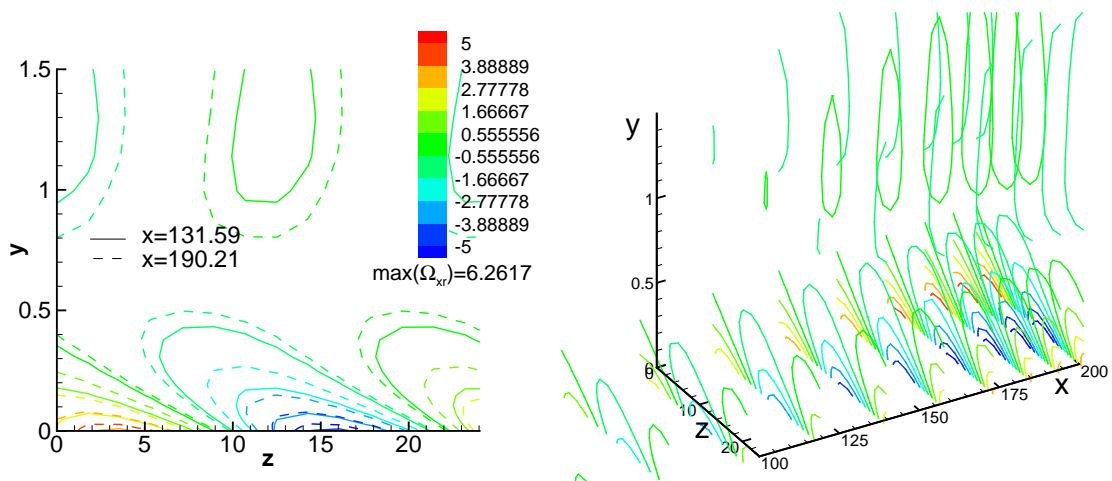


FIG. 4.10 – Représentation dans le plan parallèle à la ligne de partage à $t = 0$ de la composante longitudinale de la perturbation de rotationnel pour le mode $A1$

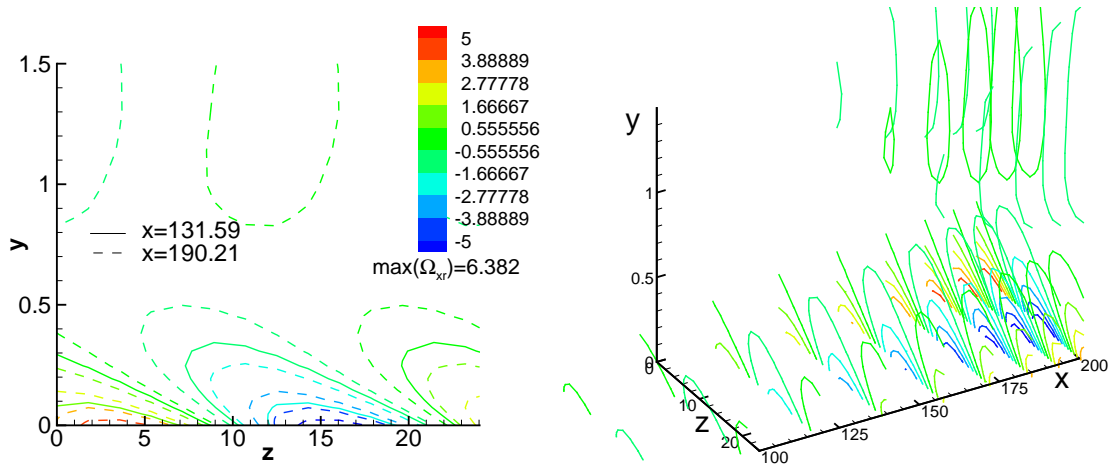


FIG. 4.11 – Représentation dans le plan parallèle à la ligne de partage à $t = 0$ de la composante longitudinale de la perturbation de rotationnel pour le mode $S2$

Répartition des points de discrétisation

Dans la direction parallèle à la ligne de partage, la sensibilité du spectre au nombre de points et à la dimension du domaine de calcul x_{max} (voir annexe B.4) nous a poussé à explorer différentes solutions. Pour des raisons inconnues ne nous sommes pas parvenus à obtenir le spectre recherché en utilisant une répartition de points régulière. Nous avons donc préféré conserver la répartition de points de Gauß-Lobatto qui a de bonnes propriétés de convergence et tenter de modifier leurs positions à l'aide de changements de variable. Deux types de changements de variable dits *mappings* ont été réalisés. Les points de Gauß-Lobatto sont resserrés aux bornes de l'intervalle $[-1, 1]$ et relâchés en 0. Les changements de variable envisagés ont pour but d'avoir un peu plus de points dans la zone autour de $x = 0$. Le premier est un mapping de type exponentiel :

$$x = x_{max} \frac{e^{\kappa\xi} - 1}{e^{\kappa} - 1} \quad (4.6)$$

où κ est un paramètre que l'on peut modifier. L'autre mapping est uniquement destiné à un calcul sur demi-domaine en écrivant explicitement les conditions de symétrie. Il consiste à ramener les points de Gauß-Lobatto sur un demi-domaine $[0, 1]$:

$$x = x_{max} \frac{1 + \xi}{2} \quad (4.7)$$

La figure 4.12(a) donne les trois différentes répartitions de points sur l'intervalle $[0, x_{max}]$ pour une valeur du paramètre $\kappa = 2$ et les spectres obtenus dans chaque cas sont rassemblés sur la figure 4.12(b). En haut de la figure 4.12(a), les carrés représentent les 36 points de maillage utilisés pour le calcul et issus d'une répartition de 71 points de Gauß-Lobatto sur $[-1, 1]$ qui a été ramenée sur l'intervalle $[-200, 200]$. Les cercles correspondent aux mêmes points après la transformation de type exponentiel donnée par 4.6. Les losanges sont les 36 points issus d'une répartition de 36 points de Gauß-Lobatto ramenés sur l'intervalle $[0, 200]$ à l'aide de la transformation 4.7. Les trois répartitions ont été artificiellement décalées dans un souci de visibilité. Sur le bas de la figure on représente un zoom de la zone $[0, 50]$, où cette fois les points sont superposés afin d'apprécier les différences dans la zone proche de la ligne de partage. Malheureusement aucune configuration ne nous a conduit à une meilleure convergence du spectre, cependant cela montre que les modes

obtenus ne dépendent pas du maillage utilisé. La répartition de points pour la variable y donnée en section 1.2.1 n'a été que peu modifiée. On pourrait bien entendu s'interroger sur la position optimale du paramètre de lieu de raffinement y_i mais ce paramètre doit impérativement être situé dans un voisinage de l'épaisseur de couche limite pour bien représenter cette zone et dans la gamme proche de l'épaisseur de couche limite il est difficile de déterminer les améliorations éventuelles apportées.

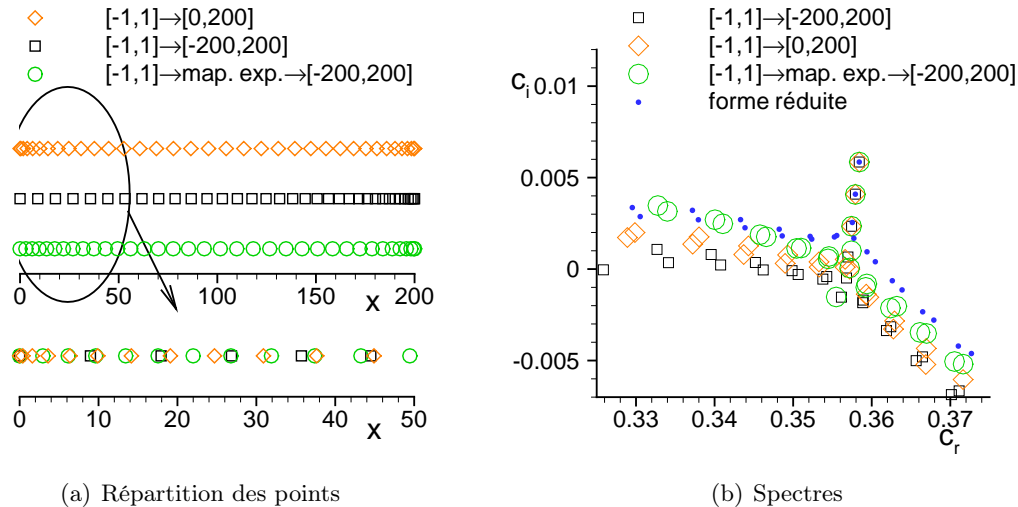


FIG. 4.12 – Comparaison de différents types de résolution : cas incompressible $\mathcal{R} = 800$, $\beta = 0.255$, 36×53 points sur $[0, 200] \times [0, 50]$. À gauche, en haut : différentes transformations de la répartition de points de Gauß-Lobatto sur l'intervalle $[0, 200]$, en bas : zoom sur la zone proche de la ligne de partage $[0, 50]$. À droite : spectres issus de calculs utilisant les trois répartitions et spectre issu de la formulation réduite

Résolution du spectre complet par un algorithme QZ

Pour information, on propose un spectre complet issu de la résolution par un algorithme QZ (routine LAPACK [1]), donné en figure 4.13. Le calcul correspond approximativement au maximum d'espace mémoire utilisable sur notre machine pour un unique processeur. On donne également le calcul Arnoldi correspondant avec le même maillage et pour trois cibles différentes données sur la figure. Pour obtenir des spectres QZ exploitables, il faudrait être en mesure d'augmenter considérablement le nombre de points de calcul. Cependant, en zoomant sur la zone qui nous intéresse, on peut contrôler que l'algorithme d'Arnoldi nous offre bien une très bonne approximation des valeurs propres recherchées. D'autre part l'intérêt du calcul QZ est de s'assurer que les modes que l'on étudie sont bien les plus amplifiés. Rappelons que la procédure d'Arnoldi ne donne qu'un nombre de modes donné, les plus proches d'une cible fixée. Sans un calcul QZ on ne peut donc être certains d'avoir choisi la bonne cible. En réalité on observe un groupe de modes plus amplifiés à des vitesses de phase plus élevées et également deux modes isolés dans la gamme des modes qui font l'objet de notre étude. Ces modes sont des modes purement numériques qui ne sont absolument pas convergés. L'examen des fonctions propres associées à ses modes montrent en effet nettement le caractère non établi de ces modes. Un exemple est donné en figure 4.14, où est représentée l'évolution du module de la composante transversale de vitesse vis-à-vis de la direction normale à la paroi pour le mode le plus amplifié, soit $c = (0.986, 0.160)$. On a également effectué d'autres calculs de spectres Arnoldi pour les mêmes cibles mais avec une résolution de

points différente, soit 31×63 , qui montrent que les modes ne sont pas convergés en maillage (*cf* figure 4.14). Les deux modes dans notre gamme d'étude n'existent plus et le groupe situé à des vitesses de phase plus élevées est grossièrement déplacé vers le haut du diagramme (c_r, c_i) .

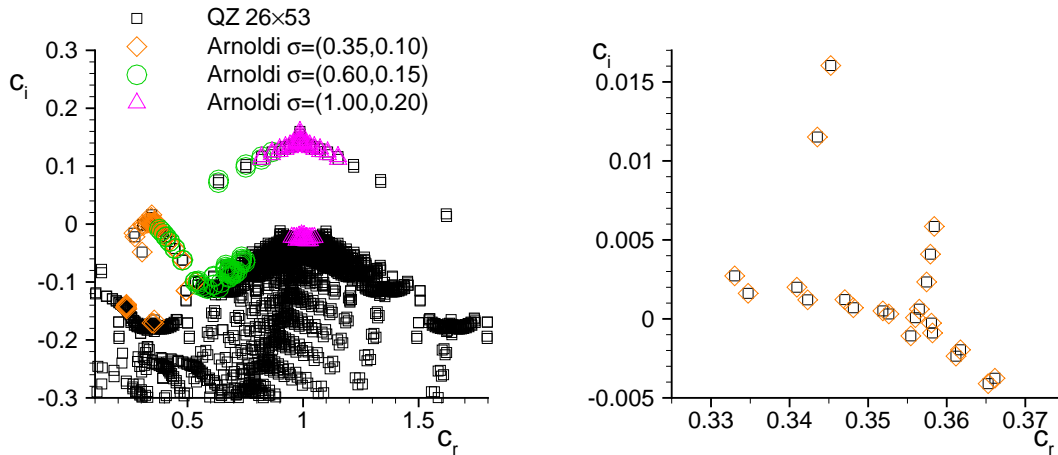


FIG. 4.13 – Comparaison d'un spectre QZ avec des spectres Arnoldi- $\mathcal{R} = 800$, $\beta = 0.255$, 31×53 points sur $[0, 200] \times [0, 50]$

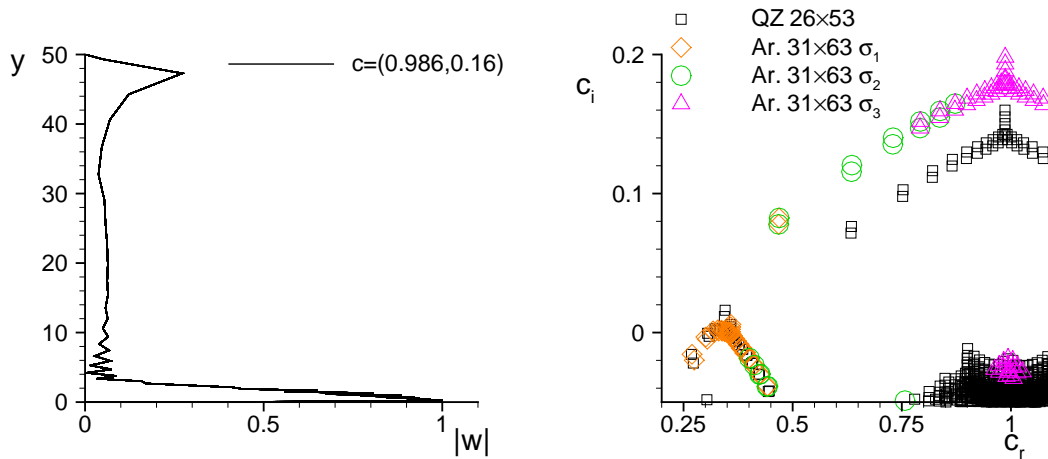


FIG. 4.14 – À *gauche* : composante de vitesse transversale associée au mode apparaissant comme le plus amplifié dans le spectre QZ, à *droite* : effet d'une modification du maillage sur les modes les plus instables du spectre QZ (calculs Arnoldi, notés Ar.)

4.4 Conclusion

L'approche globale menée pour la stabilité de l'écoulement incompressible laminaire et stationnaire de ligne de partage désigne le mode bidimensionnel, obtenu par ailleurs via l'approximation de Görtler-Hämmerlin, comme étant le mode linéaire le plus instable. Cette méthode non-locale montre néanmoins l'existence d'autres modes amplifiés dont les fonctions propres associées dépendent de x de façon polynômiale. Il est finalement très difficile de différencier ces

modes autrement que par le degré du polynôme qui représente cette dépendance. Comme Theofilis [39] l'évoque, cela vient corroborer le fait que seul le mode $S1$ est observé expérimentalement. En effet, les fréquences étant très proches (suffisamment pour passer pour une fréquence unique à la précision de la mesure près) et les comportements similaires, le mode $S1$, le plus amplifié peut masquer l'existence des autres modes. Seul un sondage dans la direction perpendiculaire à la ligne de partage permettrait peut-être de mettre en évidence l'existence de ces modes de façon expérimentale. Bien que moins amplifiés, ces modes peuvent jouer un rôle important dans le processus de déstabilisation subcritique observé expérimentalement. Si l'approche non-locale présentée ne permet pas de comprendre les mécanismes mis en jeu, elle peut toutefois servir de point de départ à une recherche de perturbation optimale. Ainsi une analyse faiblement non linéaire, basée sur une recherche de perturbation optimale nous permettrait peut-être d'observer un équilibre subcritique. Il serait bien entendu préférable d'utiliser les modes issus de la théorie spatiale, laquelle peut être développée de façon similaire à condition d'avoir de fortes ressources de mémoire pour la résolution numérique ou bien il faudra mettre en place une méthode de Jacobi-Davidson [40]. D'autre part la dépendance particulière vis-à-vis de la distance à la ligne de partage des fonctions propres associées aux modes tridimensionnels offre des possibilités intéressantes de développement analytique. Ainsi, par exemple, Obrist & Schmid [27, 28] se sont intéressés aux effets non-modaux et à la réceptivité de cet écoulement à partir de la formulation globale du problème de stabilité. Si cette partie de l'étude n'apporte pas de résultats innovants quant aux travaux déjà réalisés, ils confirment néanmoins des résultats encore peu courants en utilisant une résolution numérique légèrement différente.

Chapitre 5

Stabilité de l'écoulement $3D$ de Hiemenz compressible

On a évoqué en préambule du chapitre précédent l'intérêt d'étudier la stabilité de l'écoulement de couche limite laminaire qui se développe autour d'une aile en flèche au voisinage du bord d'attaque (écoulement $3D$ de Hiemenz). Ainsi après l'étude de l'écoulement incompressible, on souhaite naturellement étendre notre étude au problème de l'écoulement compressible. En outre dans ce cas l'approximation de Görtler-Hämmerlin ne permet pas de simplifier suffisamment les équations pour se ramener à une approche $1D$ ¹. La méthode globale apparaît donc comme la seule possibilité de mener une étude de stabilité pour cet écoulement autrement que par des simulations numériques directes plus coûteuses. Pour cette raison très peu de résultats concernant la stabilité de l'écoulement compressible sont disponibles. Lin & Malik [23] ont étendu le modèle $2D$ qu'ils avaient développé en incompressible à l'étude d'une couche limite supersonique au voisinage de la ligne de partage d'un cylindre en flèche. Ils privilégient la recherche d'ondes obliques propagatives et montrent que les taux d'amplification donnés par la théorie $1D$ sont largement sous-estimés. Toutefois l'analyse de leurs résultats est rendue difficile par la prise en compte des effets de courbure en sus des effets de compressibilité. Heeg [14] réalise une étude dans le cadre de la théorie spatiale en incompressible et en compressible subsonique. Dans la gamme de Mach de ses travaux, il note un effet stabilisant de la compressibilité concernant le taux d'amplification spatial dans la direction d'envergure. Il n'observe de différences de structure spatiale des modes que pour les fluctuations directement liées à la compressibilité (température et densité). Enfin, Le Duc [20] réalise des simulations numériques directes à un Mach faiblement compressible $\mathcal{M} \sim 0.3$. En procédant à l'excitation de tous les modes d'instabilités par un bruit blanc, elle constate que le mode le plus instable possède la symétrie de Görtler-Hämmerlin. Elle n'observe pas de différences avec le comportement en écoulement incompressible et note que la forme de la fluctuation de température est parabolique dans la direction perpendiculaire à la ligne de partage. Elle situe le déclenchement des instabilités près de la paroi, à une hauteur de l'ordre de la longueur de référence (soit au tiers de l'épaisseur de couche limite) et suggère une propagation par diffusion dans la zone proche de la paroi et par convection au-dessus. Enfin utilisant à la fois une condition de paroi adiabatique et une condition de paroi isotherme, elle constate un taux d'amplification plus élevé dans le cas de la paroi isotherme. Ainsi, en écoulement faiblement compressible il semble que le mode GH soit encore le plus instable. Néanmoins, on ajoutera la même réserve que celle évoquée dans le cas des simulations en incompressible de Spalart [34] (chap. 4). En effet, d'après nos calculs seul le mode GH est amplifié dans les conditions de ces DNS et il est donc possible que la perturbation la plus instable soit une combinaison de plusieurs modes dans des

¹Certes possible en incompressible, la simplification ne permet d'atteindre qu'un seul mode d'instabilité.

conditions plus défavorables.

Après avoir explicité le problème de stabilité et exposé sa mise en place, on proposera une validation de la formulation en compressible à l'aide de comparaisons aux résultats obtenus en incompressible et des DNS pour un fluide faiblement compressible de Le Duc. Les résultats sont ensuite présentés en trois volets. Les effets directement liés à la compressibilité via une évolution en nombre de Mach sont analysés. Puis on s'intéresse à la condition de paroi isotherme et aux effets d'une paroi chaude ou froide sur la stabilité de l'écoulement. Enfin, on parlera de modes nouveaux, qu'on appellera modes de compressibilité, qui apparaissent au-delà d'un certain seuil et dont le comportement est de type acoustique.

5.1 Formulation du problème de stabilité 2D

5.1.1 Équations aux perturbations

Pour l'écoulement de Hiemenz compressible on se contentera d'une seule formulation en considérant les variables primitives. Toutefois, l'équation d'état des gaz parfaits linéarisée permet d'exprimer simplement la masse volumique en fonction de la pression et la température, elle s'écrit sous forme adimensionnée :

$$\rho = \frac{\gamma M^2}{\bar{T}} p - \frac{\bar{p}}{\bar{T}} T \quad (5.1)$$

En remplaçant ρ dans les équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie linéarisées et adimensionnées on obtient le système à cinq inconnues :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} \right) v + i\beta w + \gamma M^2 \left(\bar{U} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial}{\partial y} + i\beta \bar{W} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{d\bar{V}}{dy} - \frac{\bar{V}}{\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} - i\beta c \right) p \\ - \frac{1}{\bar{T}} \left(\bar{U} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial}{\partial y} + i\beta \bar{W} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{d\bar{V}}{dy} - 2 \frac{\bar{V}}{\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} - i\beta c \right) T = 0 \end{aligned} \quad (5.2a)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\bar{T}} \left(\bar{U} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial}{\partial y} + i\beta \bar{W} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} - i\beta c \right) - \frac{1}{\mathcal{R}} \left(\bar{\mu} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2 \right) + \frac{d\bar{\mu}}{dy} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] u \\ + \left[\frac{1}{\bar{T}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - \frac{1}{\mathcal{R}} \left(\frac{1}{3} \bar{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{d\bar{\mu}}{dy} \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] v - \frac{i\beta}{3\mathcal{R}} \bar{\mu} \frac{\partial w}{\partial x} + \left[\frac{\gamma M^2}{\bar{T}} \left(\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \right] p \\ - \left[\frac{1}{\bar{T}^2} \left(\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{\mathcal{R}} \left(\frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \left(\frac{4}{3} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{d\bar{V}}{dy} \right) \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \frac{d^2 \bar{\mu}}{d\bar{T}^2} \frac{d\bar{T}}{dy} \right) \right] T = 0 \end{aligned} \quad (5.2b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{R}} \left[\frac{2}{3} \frac{d\bar{\mu}}{dy} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{3} \bar{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right] u \\ + \left[\frac{1}{\bar{T}} \left(\bar{U} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial}{\partial y} + i\beta \bar{W} + \frac{d\bar{V}}{dy} - i\beta c \right) - \frac{1}{\mathcal{R}} \left(\bar{\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2 \right) + \frac{4}{3} \frac{d\bar{\mu}}{dy} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] v \\ + \frac{i\beta}{3\mathcal{R}} \left[2 \frac{d\bar{\mu}}{dy} - \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \right] w + \left[\bar{V} \frac{d\bar{V}}{dy} \frac{\gamma M^2}{\bar{T}} + \frac{\partial}{\partial y} \right] p \\ - \left[\frac{\bar{V}}{\bar{T}^2} \frac{d\bar{V}}{dy} + \frac{1}{\mathcal{R}} \left(\frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x \partial y} + \frac{4}{3} \frac{d^2 \bar{V}}{dy^2} + i\beta \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} \right) + \frac{d^2 \bar{\mu}}{d\bar{T}^2} \frac{d\bar{T}}{dy} \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{d\bar{V}}{dy} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{d\bar{V}}{dy} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] T = 0 \end{aligned} \quad (5.2c)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{i\beta}{3\mathcal{R}}\bar{\mu}\frac{\partial u}{\partial x} + \left[\frac{1}{\bar{T}}\frac{d\bar{W}}{dy} - \frac{i\beta}{\mathcal{R}}\left(\frac{1}{3}\bar{\mu}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{d\bar{\mu}}{dy}\right) \right] v \\
& + \left[\frac{1}{\bar{T}}\left(\bar{U}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{V}\frac{\partial}{\partial y} + i\beta\bar{W} - i\beta c\right) - \frac{1}{\mathcal{R}}\left(\bar{\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{4}{3}\beta^2\right) + \frac{d\bar{\mu}}{dy}\frac{\partial}{\partial y}\right) \right] w \\
& + \left[i\beta + \gamma M^2 \frac{\bar{V}}{\bar{T}} \frac{d\bar{W}}{dy} \right] p \\
& - \left[\frac{\bar{V}}{\bar{T}^2} \frac{d\bar{W}}{dy} + \frac{1}{\mathcal{R}} \left(\frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \left(\frac{d^2\bar{W}}{dy^2} - \frac{2}{3}i\beta\frac{\partial\bar{U}}{\partial x} - \frac{2}{3}i\beta\frac{d\bar{V}}{dy} \right) + \frac{d\bar{W}}{dy} \frac{d^2\bar{\mu}}{d\bar{T}^2} \frac{d\bar{T}}{dy} + \frac{d\bar{W}}{dy} \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] T = 0 \\
& \hspace{15em} (5.2d) \\
& - (\gamma - 1) M^2 \left[\frac{\partial\bar{P}}{\partial x} + \frac{\bar{\mu}}{\mathcal{R}} \left(\frac{4}{3} \left(2\frac{\partial\bar{U}}{\partial x} - \frac{d\bar{V}}{dy} \right) \frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial\bar{U}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] u \\
& \left[\frac{1}{\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dy} - (\gamma - 1) M^2 \frac{\bar{\mu}}{\mathcal{R}} \left(2\frac{\partial\bar{U}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{4}{3} \left(2\frac{d\bar{V}}{dy} - \frac{\partial\bar{U}}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} + 2i\beta \frac{d\bar{W}}{dy} \right) \right] v \\
& - (\gamma - 1) M^2 \frac{\bar{\mu}}{\mathcal{R}} \left[2\frac{d\bar{W}}{dy} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{4}{3}i\beta \left(\frac{\partial\bar{U}}{\partial x} + \frac{d\bar{V}}{dy} \right) \right] w \\
& + \left[\gamma M^2 \frac{\bar{V}}{\bar{T}} \frac{\partial\bar{T}}{\partial y} - (\gamma - 1) M^2 \left(\bar{U}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{V}\frac{\partial}{\partial y} + i\beta\bar{W} - i\beta c \right) \right] p \\
& + \left[\frac{1}{\bar{T}} \left(\bar{U}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{V}\frac{\partial}{\partial y} + i\beta\bar{W} - i\beta c \right) - \frac{\bar{V}}{\bar{T}^2} \frac{d\bar{T}}{dy} \right. \\
& \left. - \frac{(\gamma - 1) M^2}{\mathcal{R}} \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial\bar{U}^2}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{d\bar{V}^2}{dy} - \frac{4}{3} \frac{\partial\bar{U}}{\partial x} \frac{d\bar{V}}{dy} + \frac{\partial\bar{U}^2}{\partial y} + \frac{d\bar{W}^2}{dy} \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{\mathcal{R}\mathcal{P}} \left(\bar{\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \beta^2 \right) + \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}} \left(\frac{d^2\bar{T}}{dy^2} + \frac{d\bar{T}}{dy} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{d^2\bar{\mu}}{d\bar{T}^2} \frac{d\bar{T}^2}{dy} \right) \right] T = 0 \\
& \hspace{15em} (5.2e)
\end{aligned}$$

Les différentes grandeurs surlignées sont relatives à l'écoulement principal. On détaillera dans la section 5.1.2 comment s'expriment ces grandeurs moyennes à l'aide des fonctions de similitude calculées précédemment (voir section 2.4.2).

Les conditions limites vis-à-vis de la direction normale à la paroi y sont des conditions d'adhérence à la paroi et d'écoulement non perturbé à l'infini. Pour la perturbation en température, à l'infini on considère un écoulement non perturbé et en $y = 0$ la condition est différente selon que l'on considère une paroi athermane ou isotherme. Ne faisant pas de distinction de maillage ou de méthode, pour la pression on traduit l'équation de quantité de mouvement en $y = 0$ et en $y = y_{max}$ dans la direction normale à la paroi. Dans le cas incompressible, la même démarche nous avait déjà permis d'obtenir ce type de conditions dites de compatibilité. Finalement, les conditions associées au système (5.2) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
& u(x, 0) = v(x, 0) = w(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad u(x, y) = v(x, y) = w(x, y) = 0, \text{ pour } y \rightarrow \infty \\
& \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0) = 0 \text{ en paroi athermane} \\ T(x, 0) = 0 \text{ en paroi isotherme} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad T(x, y) = 0 \text{ pour } y \rightarrow \infty \\
& \frac{\partial p}{\partial y}(x, 0) = \mathcal{Q}_y(x, 0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial y}(x, y) = \mathcal{Q}_y(x, y), \text{ pour } y \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

avec l'opérateur \mathcal{Q}_y donné explicitement en annexe C.1.

De la même façon que pour l'écoulement incompressible, en choisissant un domaine symétrique par rapport au plan de symétrie situé en $x = 0$, on pourra réduire le nombre d'inconnues ou sinon affiner la discrétisation dans un demi-espace ($x > 0$ ou $x < 0$). En effet, tous les opérateurs intervenant dans les équations (5.2a,5.2b,5.2c,5.2d,5.2e) sont de parité particulière vis-à-vis de x . On recherche donc des solutions paires ou impaires sur un demi-domaine et les conditions dans la direction de corde x s'écrivent, pour les solutions paires :

$$u(0, y) = \frac{\partial v}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial w}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial p}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial T}{\partial x}(0, y) = 0$$

$$u(x_{max}, y) = -u(-x_{max}, y), \quad v(x_{max}, y) = v(-x_{max}, y), \quad w(x_{max}, y) = w(-x_{max}, y),$$

$$p(x_{max}, y) = p(-x_{max}, y), \quad T(x_{max}, y) = T(-x_{max}, y)$$

pour les solutions impaires :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = v(0, y) = w(0, y) = p(0, y) = T(0, y) = 0$$

$$u(x_{max}, y) = u(-x_{max}, y), \quad v(x_{max}, y) = -v(-x_{max}, y), \quad w(x_{max}, y) = -w(-x_{max}, y),$$

$$p(x_{max}, y) = -p(-x_{max}, y), \quad T(x_{max}, y) = -T(-x_{max}, y)$$

5.1.2 Écriture des grandeurs relatives au champ de base pour le problème de stabilité

Le problème de stabilité défini par le système (5.2) est donné sous forme adimensionnée. Ainsi le champ moyen, donné par une solution de similitude (voir section 2.4.2) doit être écrit sous forme adimensionnée, en fonction des variables sans dimension utilisées pour le calcul de stabilité $x = \frac{x^*}{\Delta}$ et $y = \frac{y^*}{\Delta}$. On procède donc à un changement de variables et en différentiant l'expression de la variable de similitude η donnée par (2.7) on obtient :

$$dy = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}_e}} \frac{T^*}{T_e}(\eta) d\eta = \frac{h(\eta)}{\sqrt{\mathcal{G}_e}} d\eta$$

D'où les expressions suivantes :

$$\bar{U}(x, y) = \frac{u^*}{W_0} = x \frac{1}{\mathcal{R}} f'(\eta)$$

$$\bar{V}(y) = \frac{v^*}{W_0} = -\frac{1}{\mathcal{R}\sqrt{\mathcal{G}_e}} \frac{T^*}{T_e}(\eta) f(\eta)$$

où la vitesse normale v^* est obtenue à l'aide de l'équation de continuité et de la décomposition (2.8)

$$\rho^* u^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \Rightarrow \psi^* = \sqrt{2\xi} f(\eta) + h(\xi) \Rightarrow \rho^* v^* = -\frac{\rho_p \mu_p u_e}{\sqrt{2\xi}} f(\eta)$$

$$\bar{W}(y) = \frac{w^*}{W_0} = g(\eta)$$

$$\bar{T}(y) = h(\eta) = \frac{T^*}{T_e}(\eta) = \frac{T_{ie}}{T_e} (s(\eta) + 1) - \frac{w_e^2}{2C_p T_e} g^2(\eta)$$

$$\bar{\mu}(y) = \frac{1.711 \times 10^{-5}}{\mu_e} \frac{1 + 110.4/273}{1 + 110.4/T_e \bar{T}(y)} \sqrt{\frac{T_e \bar{T}(y)}{273}}$$

D'autre part, on utilise la projection de la quantité de mouvement sur x pour l'écoulement moyen afin d'exprimer le gradient de pression $\frac{\partial \bar{P}}{\partial x}$:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} = \frac{\bar{\mu}}{\mathcal{R}} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{d\bar{\mu}}{dy} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - \frac{1}{\bar{T}} \left(\bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right)$$

Le système est discrétisé à l'aide de la méthode de collocation spectrale présentée en section 1.2.1 puis il est mis sous forme d'un problème aux valeurs propres. On trouvera des informations complémentaires concernant la mise en place du problème numérique en annexe C.

5.1.3 Paramètres de calcul

L'écoulement moyen est résolu (section 2.4.2) pour la variable η avec 300 points répartis entre 0 et 8. La solution est ensuite interpolée sur la grille de calcul pour la stabilité (comme décrit en section 5.1.2). L'écoulement est caractérisé par un nombre de Mach transversal \mathcal{M} (défini en section 2.4.1) et dans la configuration avec paroi isotherme par une température de paroi T_p qui seront précisés pour chaque cas de calcul. Le nombre de Prandtl \mathcal{P} est fixé à 0.72. Les modifications induites par une variation de la température génératrice T_{i0} , qui sert de grandeur d'adimensionnement, ne sont que peu significatives, c'est pourquoi on fixe *a priori* sa valeur à $T_{i0}^* = 300K$. Le nombre de Reynolds \mathcal{R} et le nombre d'onde β seront définis pour chaque calcul de stabilité.

Les résultats présentés dans ce document sont tous issus de calculs réalisés sur un demi-domaine en x , soit $[0, x_{max}] \times [0, y_{max}]$. Selon la direction normale y les équations sont discrétisées à l'aide d'une répartition de points de Gauß-Lobatto ramenés sur l'intervalle $[0, y_{max}]$ par le biais d'un changement de variable qui permet en outre de resserrer les points autour d'une valeur donnée y_i . Ainsi l'intervalle $[0, y_i]$ sera représenté par la moitié des points. Il est légitime de choisir y_i de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de couche limite δ . En écoulement incompressible, on observe une épaisseur de couche limite de l'ordre de 3Δ , Δ représentant la longueur de référence précédemment définie (*cf* section 2.3.2). On fixe donc y_i à 3. En y_{max} , on doit vérifier une condition d'*écoulement non perturbé à l'infini*, il faut donc trouver le bon compromis entre une valeur très élevée pour assurer cette condition mais assez modérée toutefois pour être en mesure de représenter correctement cette direction avec un nombre de points raisonnable. Les différents tests réalisés nous ont conduit à fixer y_{max} à 50 ce qui correspond en dimensionnel à une valeur dimensionnelle y_{max}^* de l'ordre de 15 à 20δ . Il faut un minimum de 51 points pour être assurés que la solution soit indépendante du maillage. Selon la direction tangente à la paroi x on se donne une répartition de points de Gauß-Lobatto qu'on ramène sur $[-x_{max}, x_{max}]$ puis on considère le demi-domaine $[0, x_{max}]$ en utilisant des propriétés de symétrie. On a également testé de modifier la répartition de points avec un changement de variables et également de ramener la répartition de Gauß-Lobatto directement sur le domaine $[0, x_{max}]$. Les différentes approches seront commentées lors de la présentation des résultats. Le choix de x_{max} est moins aisé que celui de y_{max} car aucune condition physique ne s'y applique. Nous n'avons donc d'autres critères que celui de la convergence des modes et de la non dépendance des résultats à ce paramètre. La difficulté de satisfaire ces critères est accrue par le fait que le spectre est encore plus facilement "pollué" qu'en approche 1D par des modes parasites d'une part et d'autre part l'amélioration de la convergence par une plus grande résolution en nombre de points de discrétisation est rapidement limitée par l'espace mémoire disponible. En pratique en choisissant $30 \leq x_{max} \leq 50$ (soit une valeur dimensionnée x_{max}^* de l'ordre 10 à 20δ) seuls les deux modes les plus amplifiés sont convergés (résultats présentés dans [31]). On parvient à obtenir une bonne convergence pour un mode supplémentaire ainsi qu'une estimation correcte du suivant en passant à un domaine au

moins 3 fois plus grand. Lorsque cela ne sera pas précisé x_{max} sera fixé à 200. Il n'est pas exclu qu'une augmentation du nombre de points aurait amélioré ces résultats mais malheureusement les ressources de mémoire dont nous disposions ne nous ont pas permis d'effectuer ce test. Par ailleurs, comme en incompressible, nous avons souhaité utiliser une répartition de points régulière, mais ce fut également sans succès. Les détails concernant les méthodes de discrétisation sont donnés en section 1.2.1.

5.2 Validation : incompressible et DNS

La première vérification qui s'impose pour valider la version compressible de notre code est de comparer les résultats à faible nombre de Mach aux résultats obtenus en incompressible. Notre référence en écoulement incompressible étant les travaux de Lin & Malik [24], on effectue un calcul dans les mêmes conditions, soit un nombre de Reynolds $\mathcal{R} = 800$ et un nombre d'onde $\beta = 0.255$. Le calcul compressible est réalisé pour un nombre de Mach $\mathcal{M} = 0.01$. Le domaine considéré est $[0, 200] \times [0, 50]$ et il est discrétisé à l'aide de 36×53 points. L'accord est tout-à-fait satisfaisant, on retrouve le même spectre. On observe une série de modes qui sont alternativement symétriques et antisymétriques. On note ces modes pour un taux d'amplification décroissant, $S1 > A1 > S2 > A2$. Le mode $S1$ correspond, comme dans le cas incompressible, au mode de Görtler-Hämmerlin, obtenu en approche locale. En effet, la perturbation de vitesse associée à ce mode a une composante longitudinale qui varie linéairement avec la distance à la ligne de partage et les deux autres composantes sont constantes dans cette direction. Les autres modes sont également ceux que l'on avait observés en fluide incompressible. En passant d'un mode à l'autre, chaque composante de vitesse de la perturbation correspondante voit sa dépendance en x , variable représentant la distance à la paroi, augmenter d'un ordre. Ainsi par exemple, le mode $A1$ a une perturbation de vitesse longitudinale parabolique en x et des perturbations de vitesse normale et transversale linéaires en x . Les quatre premiers modes sont donnés dans le tableau 5.1.

On obtient également un accord satisfaisant avec les simulations numériques directes réalisées par Le Duc [20]. Ces simulations concernent une configuration faiblement compressible pour un nombre de Mach $M = 0.2977$. Le nombre de Reynolds est fixé à $\mathcal{R} = 644$ et le nombre d'onde transversal vaut $\beta = 0.2787$. Pour une paroi adiabatique le mode le plus amplifié qui émerge de la simulation numérique est bien le mode de Görtler-Hämmerlin ($S1$). La vitesse de phase et le taux d'amplification de ce mode sont donnés dans le tableau 5.2 où ils sont comparés à nos résultats dans les mêmes conditions². Cette comparaison n'étant pas parfaite mais encourageante nous avons pris contact avec l'auteur afin de mener en parallèle de nouvelles simulations. À ce moment nos résultats étaient quelque peu différents ($c_r = 0.38028$, $c_i \times 10^2 = 0.38630$) du fait de légères erreurs dans la programmation du système d'équations à résoudre. De son côté Le Duc évoque la possibilité d'un problème de dissipation numérique dans ses simulations à faible nombre de Mach qui pourrait être supprimée grâce à une meilleure résolution de points dans la direction de l'envergure z . De nouveaux calculs, avec un plus grand nombre de points en z donnent alors un taux d'amplification $c_i \times 10^2 = 0.19$ pour $\mathcal{M} = 0.3$ [21]. Ces résultats s'éloignent encore plus des nôtres. Malheureusement nous n'avons pu poursuivre nos comparaisons et il serait pourtant fort intéressant de pouvoir reprendre des calculs en parallèle. En outre, Le Duc [21] évoque également un calcul de stabilité linéaire en écoulement incompressible réalisé par P. Schmid pour les paramètres $\mathcal{R} = 644$ et $\beta = 0.2787$ qui est en très bon accord avec notre calcul équivalent. Ces résultats sont également donnés en table 5.2. On retrouve aussi l'effet stabilisant du nombre de Mach.

² $M = 0.2977$, $\mathcal{R} = 644$, $\beta = 0.2787$, $T_{i0}^* = 300.244K$, domaine $[0, 196] \times [0, 50]$ représenté par 36×53 points

		c_r	$c_i(\times 10^2)$
S1	Lin & Malik [24]	0.35840982	0.58532472
	GH code 1D	0.35841059	0.58510587
	incompressible	0.35840961	0.58512010
	$M = 0.01$	0.35842029	0.58497932
A1	Lin & Malik [24]	0.35791970	0.40988668
	incompressible	0.35791964	0.40968751
	$M = 0.01$	0.35793028	0.40954184
S2	Lin & Malik [24]	0.35743540	0.23430007
	incompressible	0.35743483	0.23410857
	$M = 0.01$	0.35744543	0.23395912
A2	Lin & Malik [24]	0.35695687	0.058571260
	incompressible	0.35696896	0.06604485
	$M = 0.01$	0.35697965	0.06590850

TAB. 5.1 – Validation du code compressible : comparaison des modes $S1$, $A1$, $S2$, $A2$ en incompressible et à $\mathcal{M} = 0.01$ aux résultats incompressibles de Lin & Malik [24] pour $\mathcal{R} = 800$, $\beta = 0.255$

Ces vérifications étant faites on peut à présent s'intéresser à la stabilité d'écoulements compressibles pour des nombres de Mach plus élevés. Différents types d'analyse ont été menés. Il est bien entendu possible de réaliser toutes sortes de variations paramétriques. À titre d'exemple on donne ci-après la variation du taux d'amplification des deux modes symétriques les plus instables avec le nombre d'onde β (figure 5.1). Ces évolutions sont tout-à-fait similaires à celles réalisées par Heeg [14] dans d'autres conditions.

On peut également s'interroger sur les effets de compressibilité et de température d'une part sur la structure du spectre et d'autre part sur la forme des fonctions propres associées aux modes les plus amplifiés. Ces points sont traités dans les paragraphes suivants.

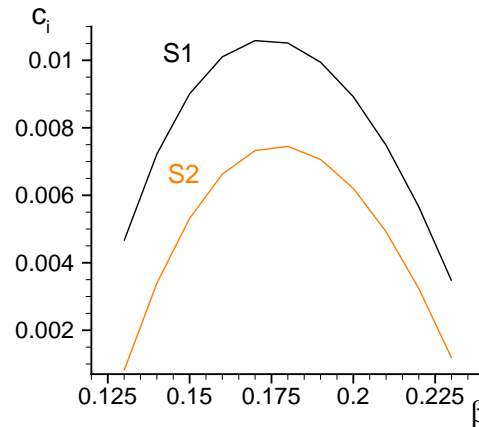
5.3 Effet de compressibilité : évolution du nombre de Mach

À partir des conditions de paroi adiabatique on fait varier le nombre de Mach. Sur la figure 5.2 sont représentées les évolutions en fonction du nombre de Mach de la vitesse de phase, à gauche, et du taux d'amplification, à droite, pour les modes $S1$ (en trait plein), $A1$ (en trait pointillé) et $S2$ (en trait segmenté). Les écoulements sont définis pour un nombre de Reynolds $\mathcal{R} = 1500$, une température génératrice $T_{i0}^* = 300K$ et on cherche les perturbations ayant pour nombre d'onde $\beta = 0.19$. Le domaine de calcul est décrit par 36×51 points sur $[0, 200] \times [0, 50]$. On constate que le nombre de Mach a un effet stabilisant jusqu'à $\mathcal{M} = 1.6$.

On peut observer que la structure $S1 < A1 < S2 < A2$ est conservée. Cependant on a pris soin cette fois de ne pas les qualifier de modes les plus instables. À partir d'un certain nombre de

	c_r	$c_i(\times 10^2)$
DNS Le Duc [20]	0.38095	0.10370
$S1$ ($M = 0.2977$)	0.38196	0.12673
P. Schmid [21]	0.37520	0.20060
$S1$ incompressible	0.37522	0.20042

TAB. 5.2 – Validation du code compressible : comparaison de $S1$ aux simulations numériques directes de Le Duc [20] à $\mathcal{M} = 0.2977$ pour $\mathcal{R} = 644$, $\beta = 0.2787$ et comparaison de la valeur incompressible correspondante au calcul de Schmid.



$$M = 0.75, \mathcal{R} = 1500 - [0, 200] \times [0, 50] : 36 \times 51$$

FIG. 5.1 – Évolution du taux d'amplification des modes $S1$ et $S2$ avec le nombre d'onde

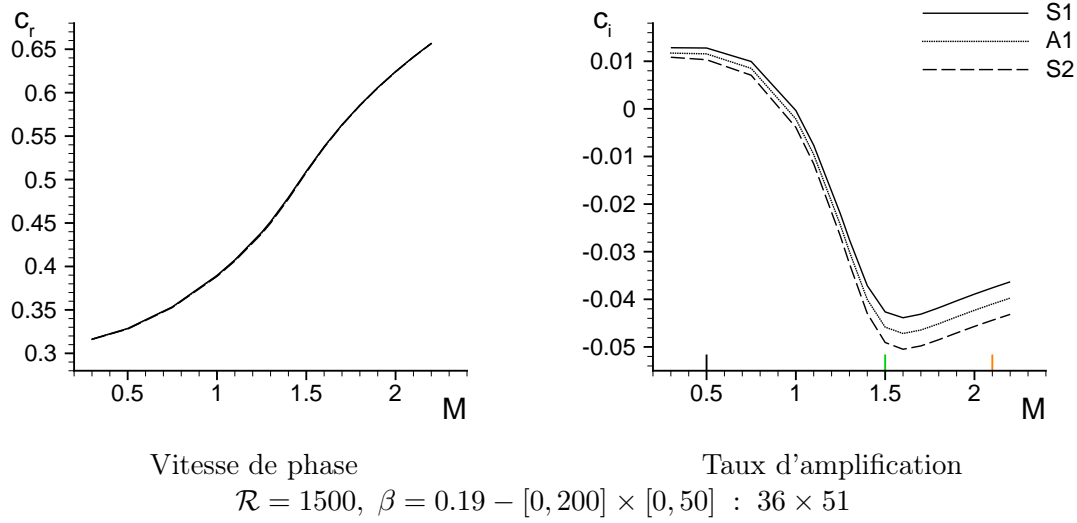
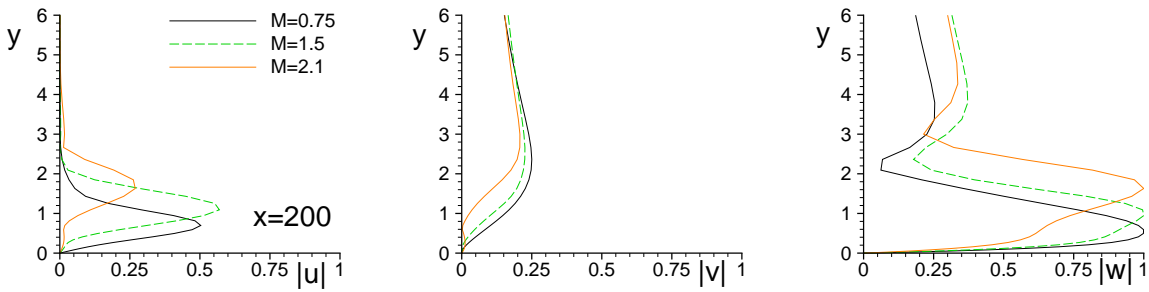
Mach, d'autres modes ayant un taux d'amplification plus important que $S1$ apparaissent en effet dans notre fenêtre de visualisation. Ce point sera discuté dans un prochain paragraphe (5.5).

L'allure générale des fluctuations est conservée mais on peut toutefois observer quelques modifications. Les modules des amplitudes des fluctuations de vitesse associées au mode $S1$ sont représentés en fonction de la direction normale à la paroi y sur la figure 5.3 pour trois nombres de Mach différents $\mathcal{M} = 0.75$, $\mathcal{M} = 1.5$ et $\mathcal{M} = 2.1$. Comme dans le cas incompressible, la normalisation choisie est telle que $\max_{(x,y)} |w| = 1$. Elle est explicitée plus en détails en section 4.3.1.

Les composantes normale et transversale sont indépendantes de la position par rapport à la ligne de partage, tandis que la composante longitudinale en dépend linéairement. Pour cette dernière, seule la position la plus éloignée $x = 200$ a été représentée. Les maxima d'amplitude sont de plus en plus hauts dans la couche limite, même en tenant compte de l'épaississement de cette dernière. Le profil de vitesse transversal est un peu modifié près de la paroi. On donne sur les figures (5.4,5.5,5.6), pour les modes $S1$, $A1$, $S2$, les iso-valeurs de la perturbation réelle de vitesse transversale \hat{w} pour trois positions différentes par rapport à la ligne de partage au temps $t = 0^3$ et au quart de période suivant. Par rapport au cas incompressible (figs. 4.6,4.7,4.8⁴), les contours

³Rappelons que les perturbations sont normalisées en amplitude et en phase, ainsi l'indication de temps est relative à cette normalisation.

⁴Les dimensions des diagrammes diffèrent entre les cas compressible et incompressible.

FIG. 5.2 – Effet de Mach sur les vitesses de phase et taux d'amplification des modes $S1$, $A1$, $S2$ FIG. 5.3 – Profils normaux des amplitudes de fluctuations de vitesse du mode $S1$ pour les nombres de Mach $\mathcal{M} = 0.75$, $\mathcal{M} = 1.5$ et $\mathcal{M} = 2.1$ - $\mathcal{R} = 1500, \beta = 0.19, [0, 200] \times [0, 50] : 36 \times 51$

sont déformés dans la direction principale de propagation.

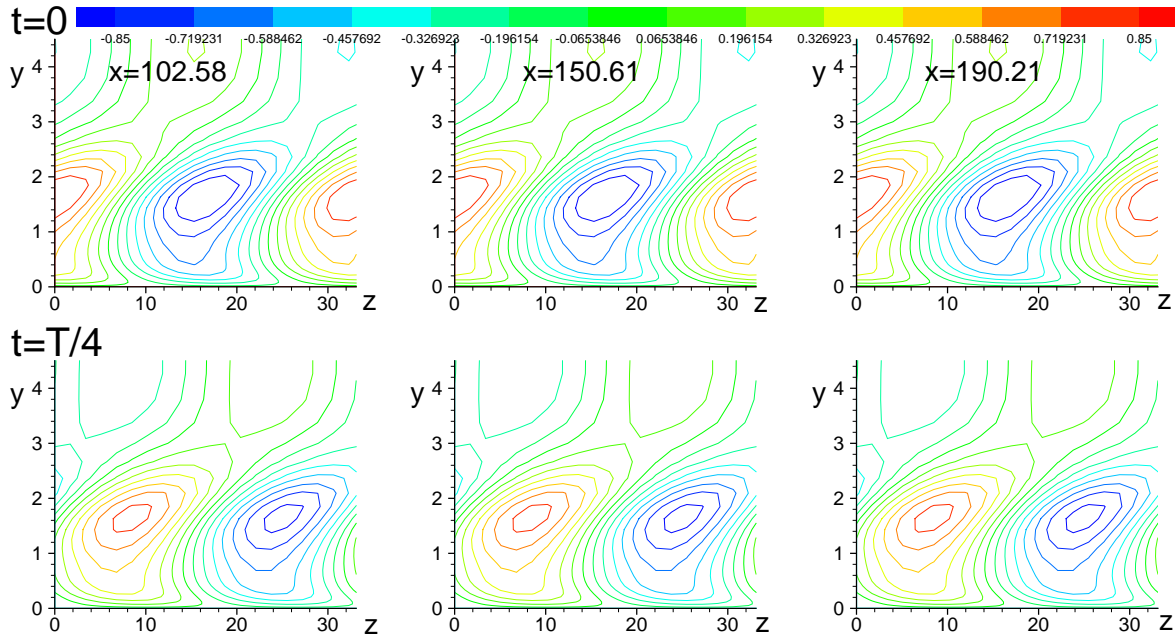


FIG. 5.4 – Iso-valeurs de la perturbation de vitesse transversale \hat{w} aux instants $t = 0$ et $t = T/4$ pour le mode $S1$ - $\mathcal{M} = 2.1$

La figure 5.7 donne différentes représentations de la température. Sur la partie gauche, on observe l'effet d'une augmentation du nombre de Mach sur l'amplitude de la fluctuation de température dont on a pris le module. Seules les amplitudes associées au mode $S1$ sont représentées. On remarque l'augmentation, à laquelle on pouvait s'attendre, du niveau de perturbation de température par rapport à celui de la composante transversale de vitesse w avec le nombre de Mach. En outre, il est important de noter que, pour des Mach élevés, soit ici $\mathcal{M} = 2.1$, la fluctuation de vitesse dans la direction normale à la ligne de partage u devient moins importante relativement à fluctuation de vitesse transversale w que pour des nombres de Mach plus faibles, tandis que celle de température atteint un niveau plus élevé que celui de la perturbation de vitesse transversale. D'autre part, cherchant toujours à différencier les modes observés, nous avons superposé les iso-valeurs de la perturbation réelle de température de paroi à l'instant initial $t = 0$ pour les modes $S1$, $A1$ et $S2$ dans le cas $\mathcal{M} = 2.1$. Cette représentation à la paroi, dans le plan (x, z) est donnée à droite de la figure 5.7. À nouveau, le mode $S1$ se distingue par son indépendance à la distance de la ligne de partage. On donne, pour le cas $\mathcal{M} = 2.1$, sur la figure 5.8, les profils longitudinaux des modules des amplitudes de fluctuation de température pour trois distances à la paroi différentes pour les modes $S1$ (à gauche), $A1$ (au milieu) et $S2$ (à droite). Les profils sont représentés par des symboles et les lignes pleines correspondent à des régressions linéaire ou polynômiale d'ordre 2 le cas échéant. Il est intéressant à ce stade de relever le fait que Le Duc [20] observe une évolution parabolique de la température avec la distance à la paroi et que les perturbations de vitesse en revanche ont les mêmes propriétés de symétrie que le mode GH. Ce point important est discuté en détail dans le paragraphe suivant.

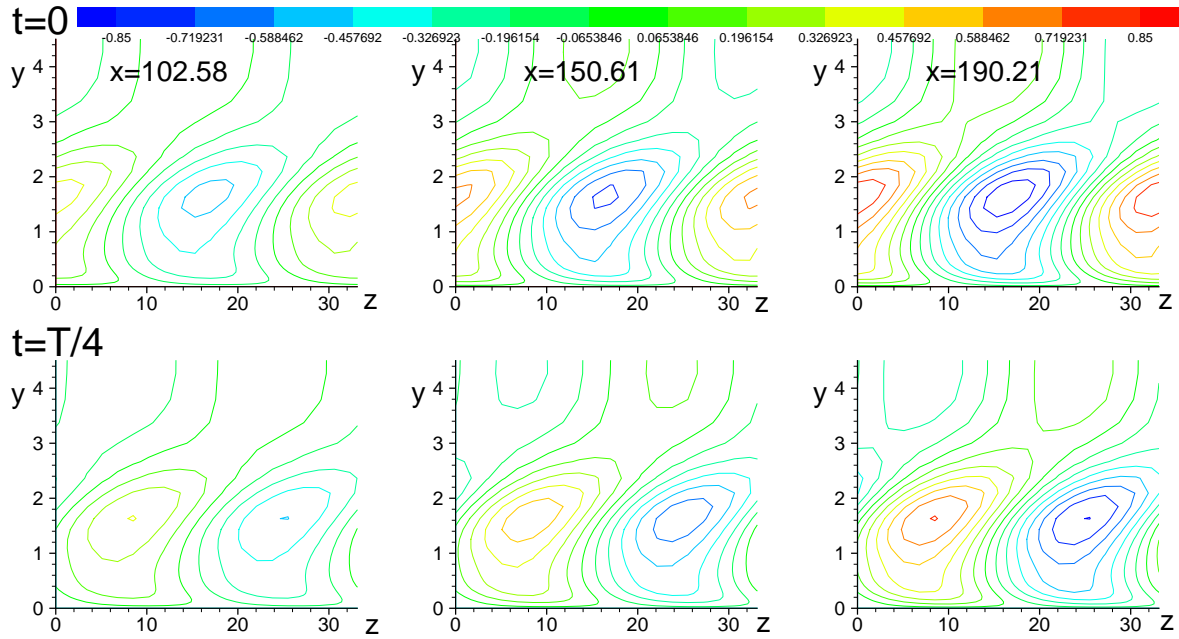


FIG. 5.5 – Iso-valeurs de la perturbation de vitesse transversale \hat{w} aux instants $t = 0$ et $t = T/4$ pour le mode $A1-\mathcal{M} = 2.1$

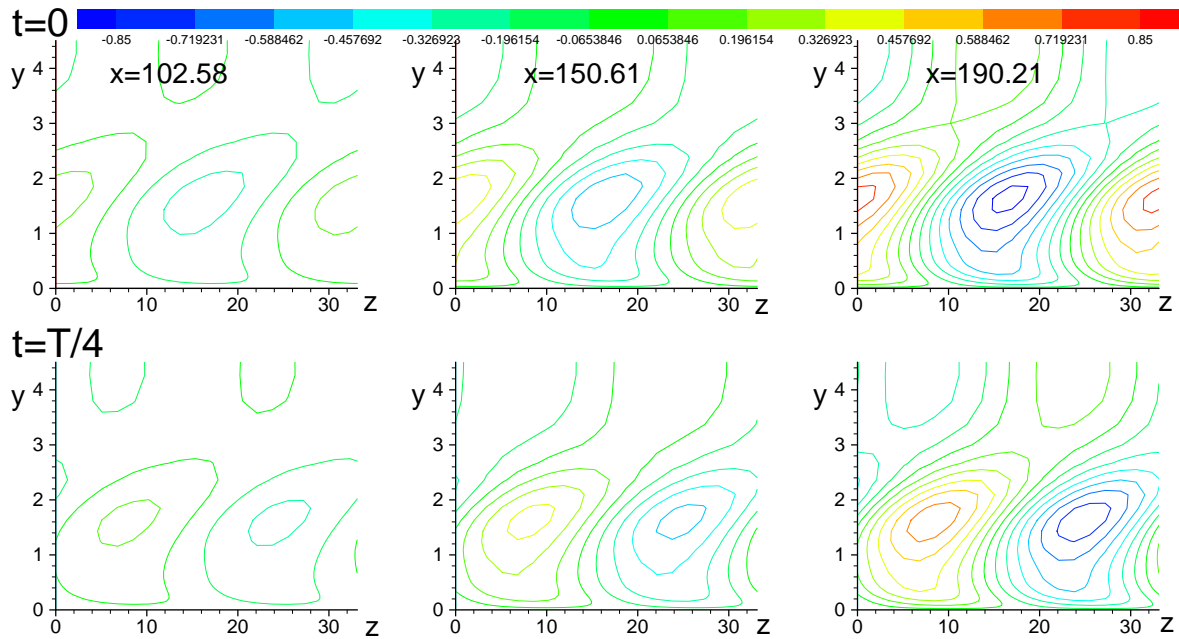


FIG. 5.6 – Iso-valeurs de la perturbation de vitesse transversale \hat{w} aux instants $t = 0$ et $t = T/4$ pour le mode $S2-\mathcal{M} = 2.1$

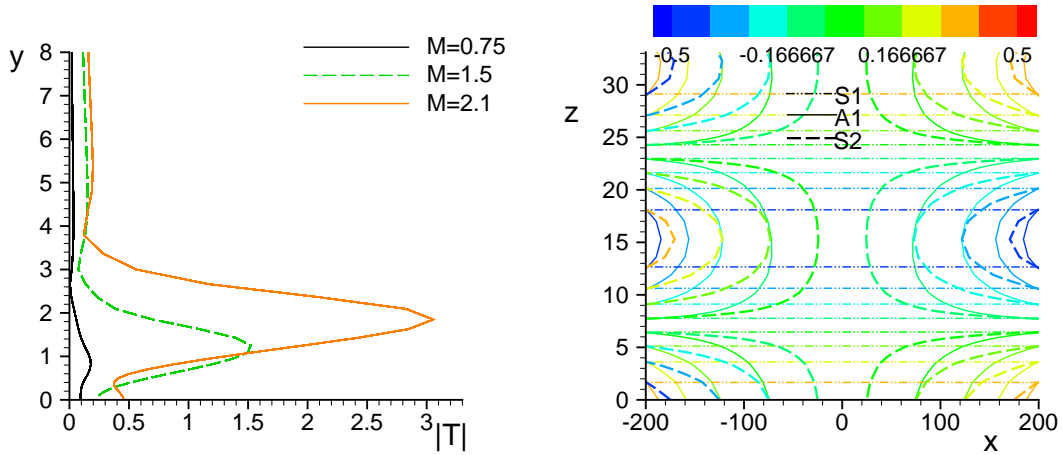


FIG. 5.7 – Fluctuation de température à $\mathcal{R} = 1500$, $\beta = 0.19$, $[0, 200] \times [0, 50] : 36 \times 51$. À gauche : module de l'amplitude $|T|$ en fonction de la distance à la paroi pour le mode $S1$ pour les nombres de Mach $\mathcal{M} = 0.75$, $\mathcal{M} = 1.5$ et $\mathcal{M} = 2.1$. À droite : iso-valeurs dans le plan (x, z) de température de paroi $\hat{T}_p(y = 0)$ au temps $t = 0$ associée aux modes $S1$, $A1$ et $S2$ pour $\mathcal{M} = 2.1$.

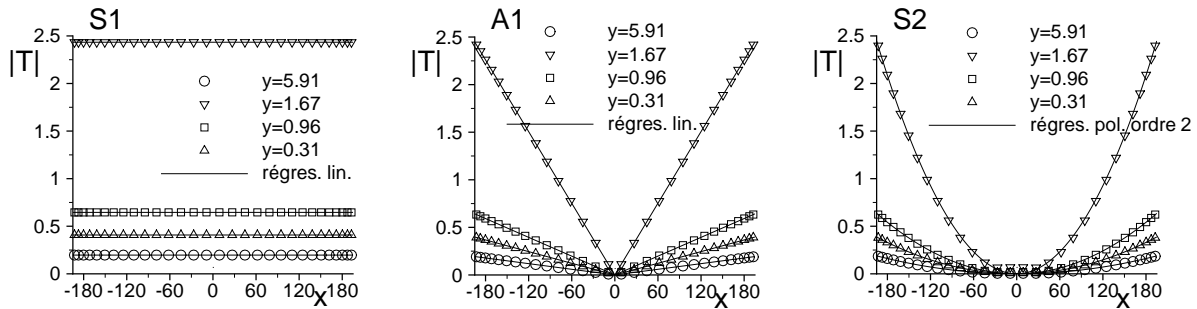


FIG. 5.8 – Évolution du module de l'amplitude de la fluctuation de température vis-à-vis de la distance à la ligne de partage pour les modes $S1$ (à gauche), $A1$ (au milieu) et $S2$ (à droite)- $\mathcal{M} = 2.1$, $\mathcal{R} = 1500$, $\beta = 0.19$, $[0, 200] \times [0, 50] : 36 \times 51$

Note sur l'évolution de la perturbation de température associée au mode GH : comparaison aux DNS de Le Duc

Comme cela a déjà été évoqué ci-avant et en introduction de ce chapitre, Le Duc [20] réalise des simulations numériques directes avec une excitation de type bruit blanc et observe une perturbation ayant les mêmes propriétés vis-à-vis du comportement dans la direction perpendiculaire à la ligne de partage que le mode de Görtler-Hämmerlin. En outre, dans la section (5.2) dédiée à la validation de nos résultats compressibles, on a montré que la vitesse de phase et le taux d'amplification de cette perturbation étaient en assez bon accord avec ceux du mode $S1$, correspondant au mode le plus amplifié issu de notre calcul de stabilité dans les mêmes conditions. En revanche, nous n'observons pas le même comportement pour la perturbation de température. L'évolution parabolique du maximum selon y de la valeur rms selon z de la perturbation de température, à différents instants, en fonction de la distance à la ligne de partage x obtenue par Le Duc [20] est donnée à gauche de la figure 5.9. On se place dans les mêmes conditions, soit dans notre cas à la position $y = 0.86$ de la paroi où le module de l'amplitude de température atteint son maximum. L'évolution du module de l'amplitude de température, à cette position, en fonction de la distance à la paroi est donnée dans la partie droite de la figure 5.9. Cette perturbation de température correspond au mode le plus amplifié $S1$ et le module a été normalisé de sorte à ce qu'il soit unitaire sur la ligne de partage. Les échelles de représentation sont les mêmes que celles de la figure de gauche. On remarque également une évolution parabolique mais avec une échelle de variations qui nous paraît peu significative. On constate l'existence d'un facteur 10 entre l'amplitude de Le Duc et la nôtre. La différence majeure de conditions entre les DNS et notre calcul de stabilité, à part la prise en compte des termes non linéaires, provient de la modélisation de l'écoulement de base. En effet, nous supposons que notre écoulement de base a une température homogène dans la direction perpendiculaire à la ligne de partage. Cette hypothèse conduit à l'élimination d'un certain nombre de termes dans l'équation de l'énergie pour les perturbations. La présence de faibles variations dans la direction x de la température de l'écoulement de base dans les DNS, si elles existent, pourraient être envisagées comme un élément d'explication possible de ces différences de variation en x . Ce point mériterait d'être exploré plus avant.

D'autre part, concernant nos résultats, l'évolution parabolique n'est pas pertinente. Outre le faible niveau de variations observé, l'évolution en x est variable selon la position y considérée. Pour des positions supérieures au tiers de la hauteur de la couche limite on tend réellement vers une évolution constante et pour des positions inférieures, la dépendance parabolique nous semble caduque d'autant plus que le coefficient de x^2 de la régression polynômiale correspondante est non seulement petit par rapport au coefficient constant mais surtout positif ou négatif selon la position considérée. Par ailleurs sur une représentation de la perturbation de température en fonction de x et de y donnée par Le Duc (figure 2.7 de [20]), l'impression visuelle confirme l'évolution quasi-constante dans la direction x , ou en tous cas très faible comparée à l'évolution dans la direction y . Enfin, pour se convaincre de la dépendance linéaire vis-à-vis de la distance à la ligne de partage de l'amplitude de fluctuation de température associée au mode $S1$, on la compare à celle des autres modes sur la figure 5.10. Les évolutions de l'amplitude des fluctuations de température avec la distance à la ligne de partage sont données pour trois positions y situées dans la couche limite et une position hors de la couche limite, pour les modes $S1$, $A1$ et $S2$. Dans ce cas la normalisation est celle qui était utilisée jusqu'alors, c'est-à-dire telle que le maximum d'amplitude selon x et y de la perturbation de vitesse transversale soit égale à un. Les échelles sont les mêmes pour les trois modes.

Finalement, l'observation faite précédemment pour $\mathcal{M} = 2.1$ d'une perturbation de température constante avec la distance à la ligne de partage pour le mode $S1$ (et une évolution linéaire pour $A1$ et parabolique pour $S2$) est confirmée à $\mathcal{M} = 0.2977$. C'est la tendance générale qui se

dégage de notre étude de stabilité linéaire. Cependant Le Duc formule une conclusion différente. On peut alors s'interroger sur l'existence ou non d'une dépendance parabolique dans la zone de plus forte amplitude (environ au tiers de la couche limite) qui serait atténuée dans notre cas du fait de la non prise en compte des termes non-linéaires ou des variations de température de l'écoulement moyen dans la direction x .

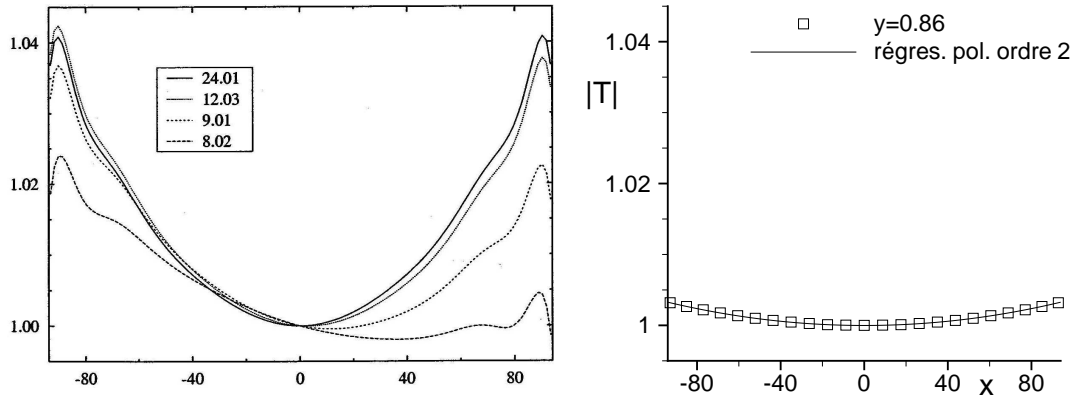


FIG. 5.9 – À gauche, résultat des DNS de Le Duc [20] : maximum selon y de la valeur rms selon z de la perturbation de température, normalisé par sa valeur en $x = 0$, à différents instants. À droite, résultat de calcul compressible dans les conditions des DNS de Le Duc : module de l'amplitude de la perturbation de température en $y = 0.86393$, position où la perturbation atteint son maximum, pour le mode $S1$. La normalisation et les échelles de représentations sont identiques à la figure de gauche.

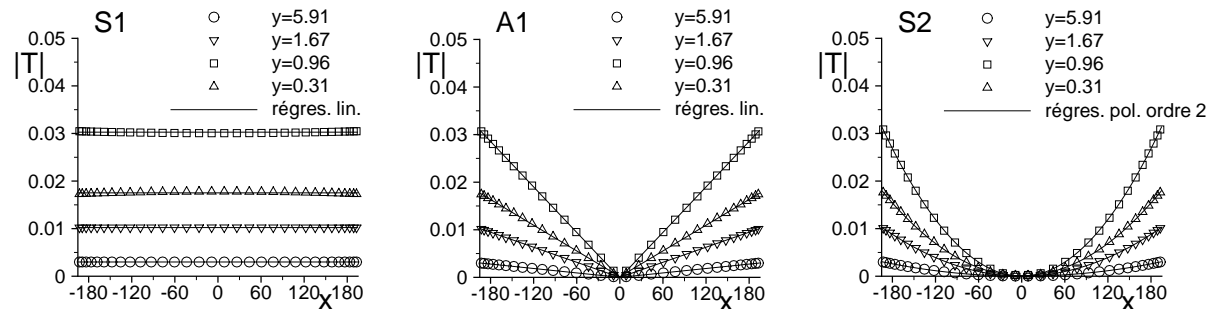


FIG. 5.10 – Évolution du module de l'amplitude de la perturbation de température vis-à-vis de la distance à la ligne de partage pour les modes $S1$, $A1$ et $S2$ dans les conditions des DNS de Le Duc ($\mathcal{M} = 0.2977$, $\mathcal{R} = 644$, $\beta = 0.2787$, $[0, 196] \times [0, 50]$: 36×53)

5.4 Effet de température

Sous des conditions de paroi isotherme on s'intéresse aux conséquences d'un chauffage ou d'un refroidissement de la paroi sur la stabilité. On choisit un cas de référence en paroi adiabatique, soit le cas d'un écoulement à $\mathcal{M} = 0.75$, $\mathcal{R} = 1500$ et de perturbations ayant pour nombre d'onde transversal $\beta = 0.19$. Le calcul de stabilité est réalisé à l'aide de 36×51 points discrétisant le

domaine $[0, 200] \times [0, 50]$. Les évolutions de la vitesse de phase et du taux d'amplification sont données en figure 5.11 pour les modes $S1$, $A1$ et $S2$ dont l'ordonnancement est conservé. On retrouve le résultat connu pour la couche limite loin de la ligne de partage (en approche de stabilité locale) : l'écoulement est déstabilisé par une augmentation de la température de paroi.

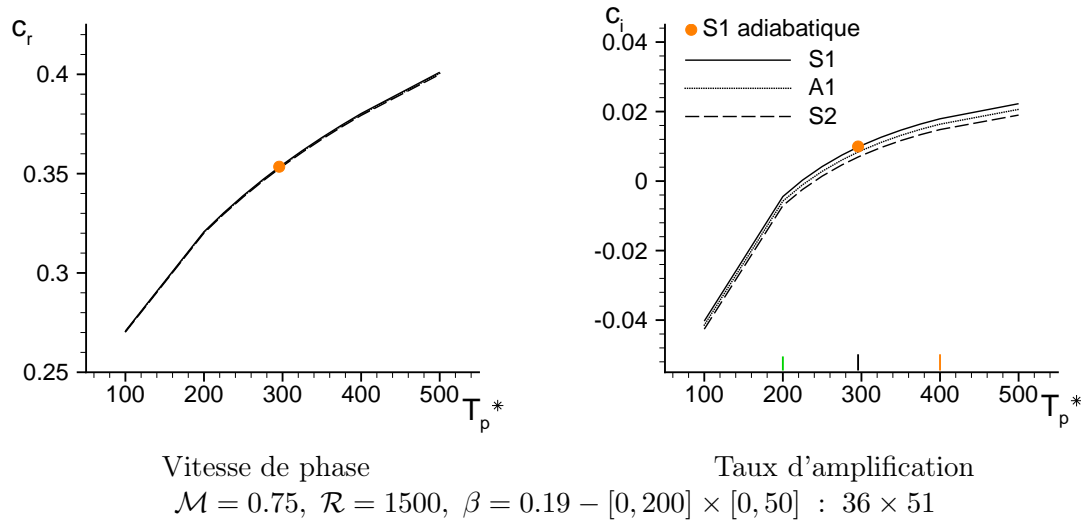


FIG. 5.11 – Effet de la température de paroi sur les vitesses de phase et taux d'amplification des modes $S1$, $A1$, $S2$

Le cas adiabatique a également été reporté sur la figure 5.11. Dans ces conditions, la température de paroi calculée est $T_p^* = 295.75K$.

Pour le mode $S1$ on compare, sur la figure 5.12, à gauche, les profils de température, entre le cas adiabatique ($T_p^* = 295.75K$), un cas de paroi froide ($T_p^* = 200K$) et un cas de paroi chaude ($T_p^* = 400K$). On peut être surpris de trouver un niveau inférieur aux deux autres pour le cas adiabatique. Cependant, on se trouve dans le cas où en adiabatique le profil de température de l'écoulement moyen ne varie que très peu et ainsi les niveaux de $\frac{dT}{dy}$ sont très faibles. Ainsi le cas adiabatique, comparé au cas paroi froide, est plus instable et a des niveaux d'amplitude plus élevés pour les fluctuations de vitesse mais son niveau d'amplitude pour la fluctuation de température est plus faible. On refait le même type de comparaison pour un cas moins particulier, où la dérivée de la température de l'écoulement moyen n'est pas aussi faible. On choisit le cas $\mathcal{M} = 2$ dont les profils de température moyenne pour les cas adiabatique ($T_p^* = 281.6K$), paroi isotherme froide ($T_p^* = 200K$) et paroi isotherme chaude ($T_p^* = 400K$) ont été donnés précédemment (figure 2.7). Les profils de température sont également représentés sur la figure 5.12. Les valeurs du mode $S1$ pour ces trois températures à $\mathcal{M} = 2$ sont donnés en table 5.3.

5.5 Modes de compressibilité ?

Au-delà d'un certain nombre de Mach, on observe, dans notre fenêtre de recherche de modes, des nouveaux modes proches de l'axe $c_i = 0$. Dans certains cas ces modes sont plus amplifiés que $S1$. Dans les conditions de nombre de Reynolds $\mathcal{R} = 1500$ et de nombre d'onde $\beta = 0.19$, ces nouveaux modes sont plus amortis que le mode $S1$ si le nombre de Mach est inférieur ou égal à $\mathcal{M} = 0.9$ et moins amortis que $S1$ si le nombre de Mach est supérieur ou égal à $\mathcal{M} = 1$. Afin d'analyser de plus près ces différents modes on va se placer dans une configuration propice, soit à

$S1$	c_r	$c_i(\times 10^1)$
paroi adiabatique $T_p^* = 281.6K$	0.62434226	-0.38915344
paroi isotherme $T_p^* = 200K$	0.62086548	-0.41745493
paroi isotherme $T_p^* = 400K$	0.62939498	-0.36603424

TAB. 5.3 – Effet de température : mode $S1$ en paroi adiabatique et paroi isotherme froide et chaude - $\mathcal{M} = 2$, $\mathcal{R} = 1500$, $\beta = 0.19$, $[0, 200] \times [0, 50]$: 36×51

un nombre de Mach $\mathcal{M} = 1.5$. Le spectre correspondant est donné en figure 5.13. On observe deux catégories de modes ayant un taux d'amplification plus élevé que celui du mode $S1$: d'une part les modes situés sur une sorte de branche à gauche de la série $S1 - A1 - S2$, notée \mathcal{B} (voir figure 5.13) qui ne sont en réalité pas convergés et qui ne correspondent pas à des solutions physiques du problème et d'autre part les nouvelles séries verticales situées proche de l'axe $c_i = 0$. On s'intéresse plus particulièrement à ces derniers que l'on note $(S1 - A1 - S2)_1$, $(S1 - A1 - S2)_2$ et ainsi de suite car le comportement de ces modes vis-à-vis de la direction x est rigoureusement identique à celui de ceux de la série $S1 - A1 - S2$. En effet, les perturbations de vitesse associées aux modes $S1_j$ sont linéaires dans la direction perpendiculaire à la ligne de partage et constantes dans les deux autres directions vis-à-vis de la distance à la ligne de partage. Les perturbations associées aux modes $A1_j$ sont respectivement quadratiques et linéaires et enfin celles associées aux modes $S2_j$ cubiques et quadratiques (voir l'exemple donné figure 5.14(b)).

Les allures des fonctions d'amplitude associées à ces nouveaux modes sont synthétisées sur la figure 5.14. À gauche, figure 5.14(a), on donne les profils, selon la direction normale y , de vitesse transversale des fluctuations correspondant aux modes $S1_1$ et $S1_2$ ainsi que celui correspondant au mode $S1$ pour mémoire. On retrouve pour les modes $S1_1$ et $S1_2$ l'indépendance vis-à-vis de la variable x . Dans la direction y , on observe la trace d'un comportement de type couche limite en proche paroi puis, plus loin de la paroi on observe un comportement oscillatoire avec un quart de longueur d'onde ($S1_1$), un quart plus une longueur d'onde ($S1_2$), un quart plus deux longueurs d'onde ($S1_3$) et ainsi de suite. À droite la figure 5.14(b), illustre le comportement dans la direction tangentielle x . L'évolution de la composante transversale de vitesse selon x est donnée dans la couche limite à une hauteur $y^* = 0.95\delta$ mais la dépendance en x est de même type pour toutes les valeurs de y . On retrouve la dépendance linéaire en x pour les modes $A1_j$ et la dépendance quadratique pour les modes $S2_j$.

Les modes semblent être de type acoustique. En effet, ils sont neutres ou très légèrement amortis. Leur évolution dans la direction normale à la paroi y est de type ondulatoire. Ces modes sont convergés en maillage, ne dépendent pas du domaine choisi dans la direction x (contrairement à ceux de la branche \mathcal{B}). Par contre ils dépendent fortement du choix du domaine en y . De façon plus précise la longueur d'onde observée, et donc également la vitesse de phase via la fréquence, sont directement liées à la taille du domaine dans la direction y . En revanche le nombre de longueurs d'onde observé reste le même. Ces modes pourraient correspondre à des ondes de type cavité. Il est plus que probable que ces modes ne soient pas solution du problème tel que nous l'avons posé avec une condition de perturbation nulle à l'infini. Néanmoins on construit artificiellement une cavité en imposant un infini numérique, défini par la taille du domaine selon y , et il semble logique que ces modes apparaissent. Dans ce cas, ils seraient donc intrinsèquement liés aux équations compressibles telles que nous les avons données et doivent ainsi exister numériquement quel que soit le nombre de Mach mais sont probablement rejetés à des fréquences élevées (vitesse de phase c_r petite). En revanche s'il existe une frontière supérieure

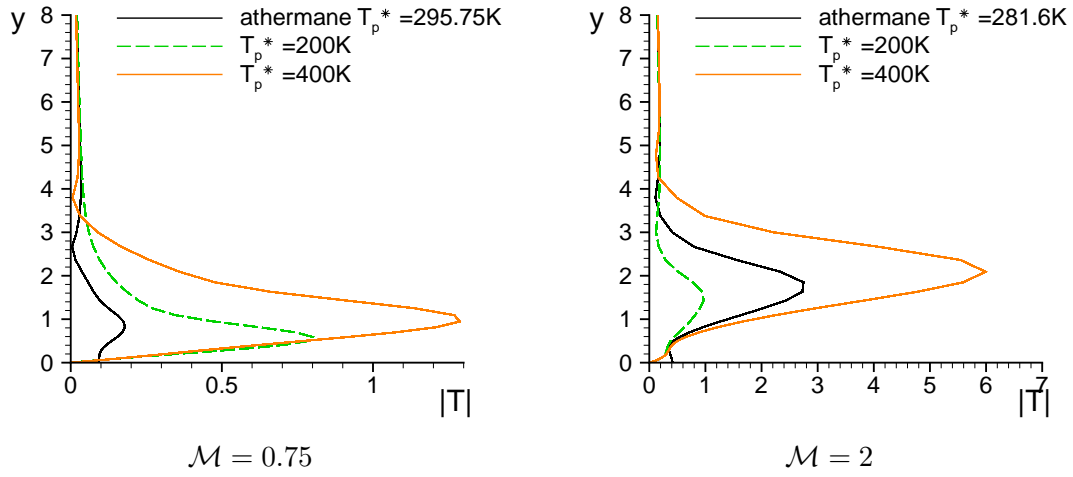
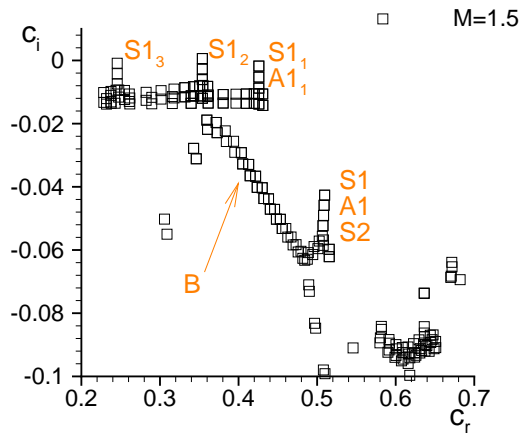


FIG. 5.12 – Mode $S1$: Comparaison des fluctuations de température pour les cas de parois isothermes à $T_p^* = 200K$, $T_p^* = 400K$ et cas de paroi adiabatique à $\mathcal{M} = 0.75$ et $\mathcal{M} = 2$ – $\mathcal{R} = 1500$, $\beta = 0.19$ – $[0, 200] \times [0, 50]$: 36×51



$\mathcal{R} = 1500$, $\beta = 0.19$, 36×51 points sur $[0, 200] \times [0, 50]$

FIG. 5.13 – Autres modes compressibles : modes acoustiques ?

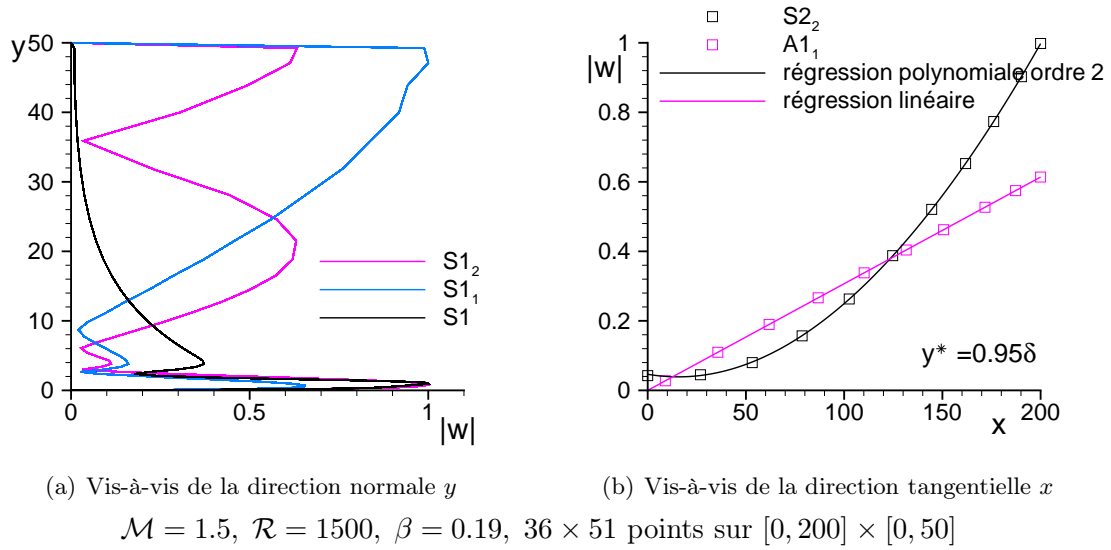


FIG. 5.14 – Comportement de la composante transversale de vitesse correspondant aux modes de compressibilité

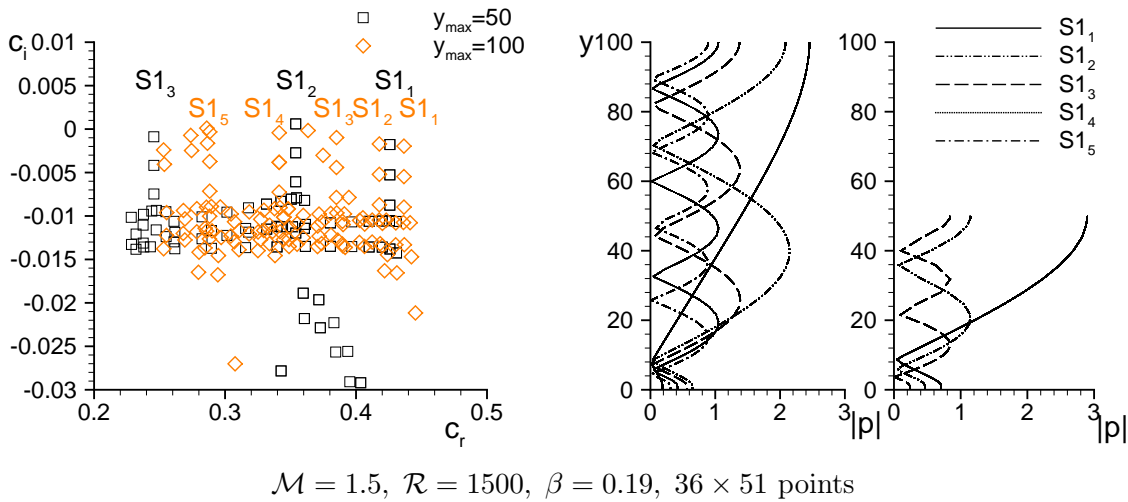


FIG. 5.15 – Représentation des modes de compressibilité et des fluctuations de pression associées aux $S1_j$ pour des domaines de hauteur $y_{\max} = 50$ et $y_{\max} = 100$

naturelle, ces modes pourraient alors être des solutions acceptables du problème continu quitte à ce qu'ils soient un peu modifiés par la condition limite écrite alors sur cette frontière. La frontière naturelle à laquelle on peut raisonnablement songer serait un choc détaché en amont de la ligne de partage. Pour un écoulement infini amont suffisamment rapide et ou un angle de flèche suffisamment élevé, on peut imaginer l'existence d'un choc détaché placé en amont de la ligne de partage. De la même façon que l'on néglige les effets de courbure de l'aile dans un voisinage proche de la ligne de partage, on pourrait également supposer que dans ce même voisinage (au sens de l'étendue dans la direction perpendiculaire perpendiculaire à la ligne de partage) le choc est localement droit et reste parallèle à la ligne de partage. Le problème est loin d'être aisé à mettre en place puisqu'il resterait encore à évaluer la position de ce choc par rapport à la ligne de partage, qui fixera très certainement la fréquence des ondes observées, et surtout à écrire une condition de réflexion.

La figure 5.15 illustre la dépendance des modes de compressibilité à la taille du domaine dans la direction y . À gauche on a représenté la partie du spectre où on trouve les modes de compressibilité. Les carrés noirs représentent les modes issus d'un calcul avec un domaine $[0, 200] \times [0, 50]$ discrétisé par 36×51 points et les diamants gris représentent les modes issus d'un calcul sur un domaine deux fois plus haut $[0, 200] \times [0, 100]$ discrétisé par 21×71 points. Comme cela a déjà été évoqué, les modes dépendent de la taille du domaine en y , en revanche pour une hauteur y_{max} donnée, une modification de la taille de domaine en x ou du nombre de points de discrétisation dans l'une ou l'autre des directions ne change en rien le spectre obtenu et n'a d'effet que sur la bonne représentation des fonctions propres associées. Sur la figure, à droite, on compare les fluctuations de pression correspondant aux modes $S1_j$ obtenus pour les deux calculs $y_{max} = 50$ et $y_{max} = 100$. Pour ces calculs, la normalisation a été modifiée pour que l'amplitude et la phase soient normalisées de sorte à ce que le maximum sur x et y du module de l'amplitude de la vitesse dans la direction normale à la ligne de partage soit unitaire, $\max_{(x,y)} |v| = 1$. Afin d'avoir une résolution de points suffisante pour représenter correctement les oscillations nous avons modifié la répartition de points utilisée jusqu'à présent en choisissant le point-milieu du maillage $y_i = 60$ au lieu de $y_i = 3$ (voir le principe de modification de la répartition de points en section 1.2.1). Le lieu des modes de compressibilité dans le plan (c_r, c_i) est totalement inchangé. Ce dernier point vient corroborer l'idée que ces modes ne sont en aucun cas pilotés par le comportement de la couche limite mais plutôt par le comportement de l'écoulement extérieur.

5.6 Conclusions

Les résultats de stabilité linéaire, obtenus à l'aide de la méthode non-locale, ont été présentés pour l'écoulement de fluide compressible de Hiemenz en flèche. La structure de modes alternativement symétriques et antisymétriques observée dans le cas incompressible est retrouvée et le mode ayant le taux d'amplification le plus élevé de cette série est toujours le mode de Görtler-Hämmerlin, ou plus exactement le mode dit $S1$ que l'on suit par continuité à partir du mode GH en augmentant le nombre de Mach. D'une façon générale les conclusions établies dans le cas incompressible sont valables également dans le cas compressible. Pour des conditions de Reynolds et de nombre d'onde fixées, l'augmentation du nombre de Mach a un effet stabilisant jusqu'à un certain seuil. Dans tous les cas la structure évoquée est toujours identique et les perturbations associées sont légèrement modifiées en proche paroi pour des nombres de Mach élevés. La perturbation de température pour ces différents modes est maximale au tiers de la hauteur de la couche limite. Elle a la même dépendance en x que les perturbations de vitesse normale et tangente à la ligne de partage. En particulier la perturbation de température associée au mode $S1$ est constante vis-à-vis de la distance à la ligne de partage. Ce point précis apparaît, semble-t-il, en désaccord

avec les résultats des simulations numériques directes effectuées par Le Duc pour qui l'évolution de la fluctuation de température en x est de type parabolique pour ce même mode. Par ailleurs l'effet de la température de paroi est similaire à celui observé en couche limite loin de la ligne de partage. Une augmentation de la température de paroi déstabilise l'écoulement et réciproquement une diminution le stabilise. L'apparition de nouveaux modes, propres à l'étude compressible, de nature apparemment acoustique, mériterait de nouvelles investigations. Ces modes semblent être la trace de modes de type cavité qui pourraient exister en présence d'une frontière réelle, imposée par une onde de choc, loin de la paroi.

Conclusions et perspectives

Une approche non locale a été mise en place pour étudier la stabilité linéaire d'écoulements non parallèles ou tridimensionnels stationnaires. Cette approche plus globale que la théorie $1D$ classique nous a permis de calculer les instabilités naturelles présentes dans l'écoulement de couche limite compressible au voisinage d'une ligne de partage en considérant leur développement dans un plan perpendiculaire à la direction principale de l'écoulement. À partir de conditions telles que l'écoulement incompressible soit instable, on a augmenté le nombre de Mach, obtenant alors des conditions d'écoulement amont subsonique et supersonique. Le premier résultat à souligner est que lorsqu'il y a amplification, le mode le plus amplifié $S1$ correspond au mode de Görtler-Hämmerlin donné par l'approche locale. Il existe également une série de modes alternativement antisymétriques et symétriques $A1 > S2 > A2$, moins amplifiés mais également instables et de fréquence très voisine de celle de $S1$. Leur comportement vis-à-vis de la distance à la paroi est identique à celui de $S1$ et de type onde de Tollmien-Schlichting dans la direction principale d'écoulement. Vis-à-vis de la distance à la ligne de partage leur dépendance est polynômiale en puissance croissante en allant vers le mode le plus amorti. Ces résultats viennent corroborer ceux établis en incompressible par Lin & Malik [24], ainsi que ceux obtenus par Heeg [14] dans le cadre d'une théorie spatiale pour un écoulement compressible subsonique. Par ailleurs, les simulations numériques directes de Le Duc [20] pour un fluide faiblement compressible mettent également en évidence le mode $S1$ comme réponse à un bruit blanc. Notre étude montre que pour la gamme de nombres de Mach étudiée ainsi que pour des conditions de paroi adiabatique ou isotherme, le spectre observé reste ordonné de la même façon et les propriétés des perturbations évoquées précédemment sont conservées. L'augmentation du nombre de Mach a un effet stabilisant jusqu'à un certain seuil. Au-delà de ce seuil on observe néanmoins une déformation des profils de vitesse de la perturbation en proche paroi. De façon plus générale, avec l'augmentation du nombre de Mach le lieu des maxima d'amplitudes est déplacé plus haut dans l'épaisseur de couche limite.

On observe que la perturbation de température a la même dépendance vis-à-vis de la distance à la ligne de partage que la perturbation de vitesse dans la direction principale de l'écoulement. En particulier, elle est invariante pour le mode $S1$. Ce résultat semble être en désaccord avec les conclusions de Le Duc et ce point mériterait d'être éclairci, en particulier en tentant d'établir si cette différence peut provenir de l'hypothèse d'une température uniforme dans des plans parallèles à la paroi pour l'écoulement de base. D'autre part, contrairement aux résultats du modèle de type Görtler-Hämmerlin en théorie spatiale de Heeg [14], nous n'observons pas de modification majeure du profil de température dans la direction normale à la paroi lorsque le nombre de Mach augmente. Une fois de plus nous ne pouvons que nous interroger sur le fait que ces effets soient liés ou non à la simplification de l'équation de l'énergie nécessaire à l'établissement de ce modèle.

À l'instar des simulations de Le Duc, nous avons également réalisé des calculs pour une paroi isotherme. On retrouve le résultat connu de couche limite loin de la ligne de partage, soit un effet stabilisant d'une paroi chaude et déstabilisant d'une paroi froide. Par ailleurs, aucune modification de l'ordonnement des modes ou de la structure des perturbations associées n'est

observée.

Une autre observation, qui mériterait d'être explorée plus avant, est la présence de nouveaux modes qui sont plus amortis que $S1$ et restent dans des gammes fréquentielles très différentes de celle de $S1$ tant qu'on est dans une situation instable. Cependant, en augmentant le nombre de Mach, pour des situations marginales ou stables, ces modes ont alors un taux d'amplification plus élevé que $S1$ et ont des fréquences plus proches de celle de $S1$. Ces modes sont ordonnés en séries similaires à celle de $S1 > A1 > S2 > A2$ et possèdent les mêmes propriétés vis-à-vis de la dépendance à la distance de la ligne de partage. En revanche, dans la direction normale à la paroi, ils ne sont plus gouvernés par l'écoulement de couche limite mais plutôt par l'écoulement extérieur. Leur dépendance à la taille du domaine et la structure de type noeud-ventre et harmonique dans cette direction laisse supposer qu'ils représentent probablement des modes acoustiques qui existeraient dans un écoulement où la frontière supérieure serait un choc et dont la distance à la paroi imposerait une longueur d'onde privilégiée.

Finalement, pour la recherche d'instabilités linéaires dans l'écoulement de couche limite au voisinage d'une ligne de partage, l'approche non locale n'apporte aucune information supplémentaire par rapport à l'approche locale quant au mode le plus amplifié. En revanche, elle montre l'existence d'autres modes pouvant jouer un rôle dans le processus de déstabilisation. Les simulations numériques directes de Spalart [34] et de Le Duc [20] qui montrent le mode $S1$ comme le mode émergeant en réponse à un bruit blanc sont réalisées dans les conditions particulières où il est le seul à être amplifié. Une collaboration avec l'équipe de la Technische Universität München est envisagée et dans ce cadre il serait particulièrement intéressant de réaliser des simulations dans des conditions où plusieurs modes sont amplifiés. Il s'agirait également de contrôler l'évolution de la température dans le cas où seul $S1$ est amplifié. D'autre part, cette approche $2D$ pourrait également servir de point de départ à une étude de perturbation optimale. L'idéal serait de mettre en place au préalable le problème de stabilité en théorie spatiale. Il faudrait également s'assurer que les différents modes observés soient susceptibles d'interagir entre eux en contrôlant leurs directions de propagation relatives. Si elles ne sont pas trop différentes cette étude pourrait peut-être mettre en évidence une croissance transitoire qui pourrait conduire à une instabilité subcritique. Une autre possibilité, suggérée par Jean-Christophe Robinet serait de réaliser de simulations directes des équations aux perturbations. Toutes ces propositions supposent des capacités de mémoire et de temps bien plus importantes que celles utilisées pour mener cette étude.

Concernant l'étude de stabilité linéaire $2D$, les améliorations à envisager concernent la définition du problème dans la direction normale à la ligne de partage. En particulier, nous avons évoqué la difficulté d'obtenir $A2$ ainsi que les modes plus amortis.

Enfin, de nombreuses autres applications pour l'approche non locale développée peuvent être envisagées. En particulier, les écoulements pour lesquels l'approximation d'écoulement faiblement non-parallèle ne peut être posée. On peut penser par exemple à des tourbillons de bout d'aile ou à des décollements. Cependant, une difficulté semblable à celle rencontrée pour l'écoulement de ligne de partage réside dans l'expression de conditions limites. En revanche, les travaux entrepris dans cette thèse doivent être poursuivis dans le cadre de la thèse future d'Estelle Piot, encadrée par Grégoire Casalis. Ils souhaitent utiliser l'approche non-locale pour étudier la stabilité des *streaks* que l'on observe sous certaines conditions dans une couche limite. En effet l'instabilité qui se développe dans la couche limite déforme les profils de vitesse et conduit, si le niveau de perturbations extérieurs est faible, à la formation de structures longitudinales, appelées *streaks*. Elles correspondent à des régions alternées dans la direction transverse à l'écoulement de haute et basse vitesses. Leur stabilité pourrait donc être étudiée dans le plan normal à la direction principale de l'écoulement. Dans ce cas, les conditions limites dans la direction normale à la paroi sont classiquement la condition d'adhérence à la paroi et la condition d'écoulement non

perturbé à l'infini et on peut imaginer qu'une condition de périodicité dans la direction transverse à l'écoulement permettrait d'avoir un problème bien posé.

En fait, il se dégage deux types de problématique bien distincts. Le premier concerne la stabilité dans un plan perpendiculaire à la direction de l'écoulement. Le second traite les aspects purement non parallèles (cas du décollement par exemple). Si les conditions aux limites ne posent pas de difficulté dans le premier cas, la condition d'extrapolation mise en œuvre dans cette étude pour le second cas est une première solution à tester pour d'autres problèmes de stabilité.

En outre, des questions fondamentales se posent sur la modélisation des instabilités formulées par l'approche $2D$ non locale. Par exemple, la structure de mode normal modélisée dans l'approche classique conduit à la notion d'onde, de vitesse de phase et de vitesse de groupe. Ces notions sont utilisées pour déterminer notamment la structure convective ou absolue du type d'instabilités considérées. Il faudra étendre ces notions importantes à l'approche non locale. Avec l'augmentation constante des capacités informatiques, cette approche pourra être utilisée de façon systématique quand elle est nécessaire comme pour la stabilité des tourbillons ou des décollements de couche limite.

Bibliographie

- [1] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, et D. Sorensen. The LAPACK Users' Guide. Third Edition. site web : <http://www.netlib.org/lapack/lug/index.html>, 1999.
- [2] D. Arnal. Boundary layer transition : prediction, application to drag reduction. Dans *AGARD Report n°786 Special Course on Skin Friction Drag Reduction*, VKI, Brussels, Belgique, 1992.
- [3] W.E. Arnoldi. The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 9 :17–29, 1951.
- [4] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, et T.A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer Verlag, 3^e édition, 1988.
- [5] G. Casalis, F. Chedevergne, T. Féraïlle, et G. Avalon. A new stability approach for the flow induced by wall injection. Bangalore, Inde, 13-17 décembre 2004. IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition.
- [6] Françoise Chatelin. *Valeurs propres de matrices*. Masson, 1988.
- [7] P. G. Drazin et W. H. Reid. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, 2^e édition, 1981.
- [8] T. Féraïlle. *Instabilités de l'écoulement interne des moteurs à propergol solide*. PhD thesis, ENSAE, Toulouse, France, octobre 2004.
- [9] T. Féraïlle, C. Robitailié-Montané, et G. Casalis. 2D-eigenmodes of the flow induced by wall injection. Toulouse, France, 24-28 août 2003. The 5th Euromech Fluid Mechanics Conference.
- [10] T. Féraïlle, C. Robitailié-Montané, et G. Casalis. Global stability of the flow induced by wall injection. Varsovie, Pologne, 15-21 août 2004. 21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics.
- [11] G.H. Golub et C.F. Van Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 3^eme édition, 1996.
- [12] P. Hall et M.R. Malik. On the instability of the three-dimensional attachment-line boundary layer : weakly nonlinear theory and numerical approach. *J. Fluid Mech.*, 163 :257–282, 1986.
- [13] P. Hall, M.R. Malik, et D.I.A Poll. On the stability of an infinite swept attachment line boundary layer. *Proc. R. Soc. Lond.*, A 395 :229–245, 1984.
- [14] R. Heeg. *Stability and transition of attachment-line flow*. PhD thesis, Universiteit Twente, Enschede, Holland, August 1998.
- [15] P. Huerre et M. Rossi. *Hydrodynamic instabilities in open flows*. Cambridge University Press, 1998.

- [16] J. Jiménez, C. Martel, J.C. Agüü, et J.A. Zufiria. Direct numerical simulation of transition in the incompressible leading edge boundary layer. Technical Report MF-903, ETSIA, 1990.
- [17] R.D. Joslin. Direct simulation of evolution and control of three-dimensional instabilities in attachment-line boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 291 :369–392, 1995.
- [18] R.D. Joslin. Simulation of non-linear instabilities in an attachment-line boundary layer. *Fluid Dyn. Res.*, 18 :81–97, 1996.
- [19] R.D. Joslin. Simulation of three-dimensional symmetric and asymmetric instabilities in attachment-line boundary layers. *AIAA J.*, 34 :2432–2434, 1996.
- [20] A. Le Duc. *Etude d'écoulements faiblement compressibles, de giration, puis d'impact sur paroi, par théorie linéaire et simulation numérique directe*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, Lyon, France, décembre 2001.
- [21] A. Le Duc. Communication privée, avril 2004.
- [22] Rich Lehoucq, Kristi Maschhoff, Danny Sorensen, et Cha o Yang. Arpack homepage. site web : <http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK>, 1997.
- [23] RS Lin et M.R. Malik. Stability and transition in compressible attachment-line boundary-layer flow. Technical Report 952041, SAE, 1995.
- [24] RS Lin et M.R. Malik. On the stability of attachment line boundary layers. part 1. the incompressible swept hiemenz flow. *J. Fluid Mech.*, 311 :239–255, 1996.
- [25] The Numerical Algorithms Group Ltd. The NAG fortran library manual, mark 20. site web : <http://www.nag.com/numeric/fl/manual/html/FLlibrarymanual.asp>, 2002.
- [26] Botella O. Résolution des équations de navier-stokes par des schémas de projection tchebychev. Technical Report 3018, INRIA, octobre 1996.
- [27] D. Obrist et P. Schmid. On the linear stability of swept attachment-line boundary layer flow. part1. spectrum and asymptotic behaviour. *J. Fluid Mech.*, 493 :1–29, 2003.
- [28] D. Obrist et P. Schmid. On the linear stability of swept attachment-line boundary layer flow. part2. non-modal effects and receptivity. *J. Fluid Mech.*, 493 :31–58, 2003.
- [29] C. Robitaillié-Montané et G. Casalis. Méthode de collocation spectrale appliquée à un problème de stabilité donné sous forme d'équations aux dérivées partielles. Technical Report RT 1/07895 DMAE, ONERA, mars 2003.
- [30] C. Robitaillié-Montané et G. Casalis. Prévisions des instabilités linéaires d'un écoulement fortement inhomogène dans deux directions d'espace. Nice, France, 1–5 septembre 2003. 36ème Congrès Français de Mécanique.
- [31] C. Robitaillié-Montané, T. Féraille, et G. Casalis. Linear stability of the incompressible swept Hiemenz flow : a 2D model. Varsovie, Pologne, 15-21 août 2004. 21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics.
- [32] Y. Saad. Variations on arnoldi's method for computing eigenelements of large unsymmetric matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 34 :269–295, 1980.
- [33] D. Sipp. *Instabilités dans les écoulements tourbillonnaires*. PhD thesis, École Polytechnique, Décembre 1995.
- [34] P.R. Spalart. Direct numerical study of leading-edge contamination. Dans *Agard Conference Proceedings No.438*, volume AGARD-CP-438, 1988.
- [35] T. Tatsumi et T. Yoshimura. Stability of the laminar flow in a rectangular duct. *J. Fluid Mech.*, 212 :437–449, 1990.

- [36] V. Theofilis. Linear instability analysis in two spatial dimensions. *ECCOMAS*, 1998.
- [37] V. Theofilis. On linear and nonlinear instability of the incompressible swept attachment-line boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 355 :193–227, 1998.
- [38] V. Theofilis. Advances in global linear instability analysis of nonparallel and three-dimensional flows. *Prog. Aero. Sci*, 39 :249–315, 2003.
- [39] V. Theofilis, A. Fedorov, D. Obrist, et Dallmann U. The extended görtler-hämmerlin model for linear instability of the three-dimensional incompressible swept attachment-line boundary layer flow. *J. Fluid Mech.*, 487 :271–313, 2003.
- [40] H. Voss. A jacobi-davidson method for nonlinear eigenproblems. site web : <http://www.tu-harburg.de/mat/SCHRIFTEN/rep/rep66.pdf>.
- [41] J.A.C Weideman et S.C. Reddy. A MATLAB differentiation matrix suite. site web : <http://dip.sun.ac.za/weideman/research/differ.html>.

A

Écoulement de Poiseuille

Cette annexe est en fait une partie du rapport [29]. Pour cette raison les notations sont légèrement différentes de celles utilisées dans le reste de ce mémoire. On utilise $N + 1$ points de discrétisation dans la direction y et $M + 1$ points dans la direction z . En particulier les indices des matrices commencent à 1 et non à 0, soit $[\psi]_{ij} = \psi_{i-1,j-1}$ pour $i = 1, \dots, N + 1$ et $j = 1, \dots, M + 1$. D'autre part, la matrice de dérivation dans la direction y est notée $[D]$ et celle dans la direction z est notée $[E]$. On donne ici les éléments techniques de mise en place de la résolution numérique de l'écoulement de base et du problème de stabilité.

A.1 Calcul de l'écoulement de base

A.1.1 Discrétisation

Le système à résoudre pour l'écoulement moyen est donné par (2.1). L'équation différentielle s'écrit explicitement :

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} = \lambda$$

où λ est une constante fixée. On cherche à appliquer la méthode de collocation spectrale. Compte tenu de la géométrie, on pose :

$$\xi = y \quad \text{et} \quad \eta = z^* = \frac{1}{A}z$$

Avec les mêmes notations que ci-dessus, on recherche $\psi = \bar{U}$ suivant la formule d'interpolation (1.13). Dès lors, en terme de matrice, l'équation à résoudre pour \bar{U} se discrétise sous la forme :

$$[D].[D].[\psi] + [\psi].[E]^T.[E]^T = [\lambda] \tag{A.1}$$

où $[D] = [D^*]$, $[E] = \frac{1}{A}[E^*]$ et $[\lambda]$ représente la matrice dont tous les éléments sont égaux à λ . Cette équation représente en fait $(N + 1)(M + 1)$ équations scalaires à résoudre. On a affaire à une sorte de crochet de Lie. Notons $\mathbf{A} = [D].[D]$ et $\mathbf{B} = [E]^T.[E]^T$ de sorte que le système (A.1) s'écrive :

$$\mathbf{A}.\psi + [\psi].\mathbf{B} = [\lambda]$$

A.1.2 Conditions aux limites

Il faut maintenant introduire les conditions aux limites écrites dans (2.2). En termes de coefficients, celles-ci s'écrivent :

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, M+1 \quad [\psi]_{1,j} &= [\psi]_{N+1,j} = 0 \\ \forall i = 1, \dots, N+1 \quad [\psi]_{i,1} &= [\psi]_{i,M+1} = 0 \end{aligned}$$

Définissons la matrice $(N+1, N+1)$, $\tilde{\mathbf{A}}$ identique à \mathbf{A} sauf pour la première et la dernière ligne :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} & \dots & \mathbf{A}_{2,N} & \mathbf{A}_{2,N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{N,1} & \mathbf{A}_{N,2} & \dots & \mathbf{A}_{N,N} & \mathbf{A}_{N,N+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On peut alors calculer le produit $\tilde{\mathbf{A}} \cdot [\psi]$:

$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot [\psi] = \begin{bmatrix} [\psi]_{1,1} & [\psi]_{1,2} & \dots & [\psi]_{1,M} & [\psi]_{1,M+1} \\ (\mathbf{A} \cdot [\psi])_{2,1} & (\mathbf{A} \cdot [\psi])_{2,2} & \dots & (\mathbf{A} \cdot [\psi])_{2,M} & (\mathbf{A} \cdot [\psi])_{2,M+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\mathbf{A} \cdot [\psi])_{N,1} & (\mathbf{A} \cdot [\psi])_{N,2} & \dots & (\mathbf{A} \cdot [\psi])_{N,M} & (\mathbf{A} \cdot [\psi])_{N,M+1} \\ [\psi]_{N+1,1} & [\psi]_{N+1,2} & \dots & [\psi]_{N+1,M} & [\psi]_{N+1,M+1} \end{bmatrix}$$

De la même façon, on construit une matrice $(M+1, M+1)$, $\tilde{\mathbf{B}}$ identique à \mathbf{B} sauf pour la première et la dernière colonne :

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{B}_{1,2} & \dots & \mathbf{B}_{1,M} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_{2,2} & \dots & \mathbf{B}_{2,M} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \mathbf{B}_{M,2} & \dots & \mathbf{B}_{M,M} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_{M+1,2} & \dots & \mathbf{B}_{M+1,M} & 1 \end{bmatrix}$$

à partir de laquelle on déduit le produit $[\psi] \cdot \tilde{\mathbf{B}}$:

$$[\psi] \cdot \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} [\psi]_{1,1} & ([\psi] \cdot \mathbf{B})_{1,2} & \dots & ([\psi] \cdot \mathbf{B})_{1,M} & [\psi]_{1,M+1} \\ [\psi]_{2,1} & ([\psi] \cdot \mathbf{B})_{2,2} & \dots & ([\psi] \cdot \mathbf{B})_{2,M} & [\psi]_{2,M+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\psi]_{N,1} & ([\psi] \cdot \mathbf{B})_{N,2} & \dots & ([\psi] \cdot \mathbf{B})_{N,M} & [\psi]_{N,M+1} \\ [\psi]_{N+1,1} & ([\psi] \cdot \mathbf{B})_{N+1,2} & \dots & ([\psi] \cdot \mathbf{B})_{N+1,M} & [\psi]_{N+1,M+1} \end{bmatrix}$$

Enfin, on définit la matrice $(N+1, M+1)$, $[\tilde{\lambda}]$:

$$[\tilde{\lambda}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & \lambda & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On remplace alors le système (A.1) par

$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot [\psi] + [\psi] \cdot \tilde{\mathbf{B}} = [\tilde{\lambda}] \tag{A.2}$$

Reste à vérifier que les conditions aux limites sont bien satisfaites. Ecrivons par exemple la première colonne du système (A.2) :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} + 1 & \mathbf{A}_{2,3} & \dots & \mathbf{A}_{2,M+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{M,1} & \mathbf{A}_{M,2} & \dots & \mathbf{A}_{M,M} + 1 & \mathbf{A}_{M,M+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [\psi]_{1,1} \\ [\psi]_{2,1} \\ \vdots \\ [\psi]_{M,1} \\ [\psi]_{M+1,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Il s'agit de prouver que la matrice écrite dans le membre de gauche ci-dessus est inversible. Sans que ce soit une preuve formelle, on peut effectuer la transformée inverse de la discrétisation par la méthode spectrale 1D. L'écriture ci-dessus correspond en effet à la discrétisation de l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{aligned} u'' + u &= 0 \\ 2.u(-1) &= 2.u(1) = 0 \end{aligned}$$

vu que la matrice \mathbf{A} correspond au carré de la matrice de dérivation par rapport à une variable. Les première et dernière lignes de la matrice écrite dans (A.3) correspondent aux conditions aux limites. La solution générale de l'équation s'écrit :

$$u = A \sin x + B \cos x$$

avec A et B deux constantes. Les conditions aux limites conduisent au système :

$$\begin{cases} A \sin 1 + B \cos 1 = 0 \\ -A \sin 1 + B \cos 1 = 0 \end{cases}$$

dont le discriminant $\Delta = 2 \sin 1 \cos 1$ est non nul, ce qui implique $A = B = 0$. Finalement, la solution est bien identiquement nulle et la seule solution de (A.3) est bien nulle elle-aussi. On peut faire le même raisonnement pour les trois autres conditions aux limites (on a détaillé ici $\bar{U}(z, -1) = 0$). Dès lors, on peut admettre que le système (A.2) permet effectivement de résoudre le problème différentiel complet (2.1,2.2) caractérisant l'écoulement moyen.

A.1.3 Résolution numérique

Le système (A.2) à résoudre représente en fait $(N+1)(M+1)$ équations algébriques couplées, il faut alors le mettre effectivement sous la forme classique

$$\mathcal{A}.X = \mathcal{B} \quad (\text{A.4})$$

d'un système d'ordre $\chi = (N+1)(M+1)$, avec \mathcal{A} une matrice (χ, χ) et X, \mathcal{B} deux vecteurs $(\chi, 1)$. Il s'agit donc d'écrire une routine d'assemblage pour transformer un système du type (A.2) à l'écriture usuelle précédente qui permettra d'utiliser une librairie de résolution interne.

Commençons par définir les coordonnées de X . On choisit d'ordonner les éléments par rangée horizontale (iso- y) successive. Pour $i = 1$, $X(k) = [\psi]_{1,k}$ pour $k = 1, \dots, M+1$ pour $i = 2$, $X((M+1) + k) = [\psi]_{2,k}$ pour $k = 1, \dots, M+1$ etc. La formule générale s'écrit :

$$X((M+1)(i-1) + j) = [\psi]_{i,j} \quad \text{pour } i = 1, \dots, N+1 \text{ et } j = 1, \dots, M+1 \quad (\text{A.5})$$

Le terme i, j du membre de gauche de (A.2) s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{N+1} \tilde{\mathbf{A}}_{i,k} [\psi]_{k,j} + \sum_{m=1}^{M+1} [\psi]_{i,m} \tilde{\mathbf{B}}_{m,j} = \sum_{k=1}^{N+1} \tilde{\mathbf{A}}_{i,k} X((M+1)(k-1) + j) + \sum_{m=1}^{M+1} \tilde{\mathbf{B}}_{m,j} X((M+1)(i-1) + m)$$

Avec la numérotation choisie, ce terme i, j correspond à la $p^{\text{ième}}$ équation avec $p = (M + 1)(i - 1) + j$. Si l'on cherche le terme $\mathcal{A}_{p,q}$, on doit en plus avoir :

$$\begin{cases} (M + 1)(k - 1) + j = q & k \in \{1, \dots, N + 1\} \\ (M + 1)(i - 1) + m = q & m \in \{1, \dots, M + 1\} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Alors, on a

$$\mathcal{A}_{p,q} = \delta_{(k)} \tilde{\mathbf{A}}_{i,k} + \delta_{(m)} \tilde{\mathbf{B}}_{m,j}$$

où nous avons noté $\delta_{(n)}$ un entier qui vaut 1 si n existe, solution du système (A.6) et 0 sinon. On en déduit l'algorithme de construction de la matrice \mathcal{A} . On fait une boucle sur $i = 1, \dots, N + 1$ et sur $j = 1, \dots, M + 1$. On se place alors à (i, j) fixé. On calcule p et on fait une boucle sur $q = 1, \dots, (N + 1)(M + 1)$. A chaque valeur de q fixée, on résout (A.6) et on en déduit $\delta_{(k)}$ et k si $\delta_{(k)} = 1$ et $\delta_{(m)}$ et m si $\delta_{(m)} = 1$. Dès lors la dernière expression ci-dessus permet d'affecter $\mathcal{A}_{p,q}$. Quant à \mathcal{B}_p , son remplissage est immédiat car $\mathcal{B}_p = \tilde{\lambda}_{i,j}$, avec $[\tilde{\lambda}]$ définie dans l'équation (A.2). Ainsi l'inversion du système matriciel (A.4) à l'aide d'une librairie scientifique, utilisant une factorisation LU, conduit à la solution de l'écoulement moyen en réutilisant la formule de "transformation matrice-vecteur" (A.5).

A.2 Résolution du problème de stabilité 2D

A.2.1 Discrétisation

On prend les mêmes notations que celles décrites ci-dessus et utilisées pour le calcul de \bar{U} .

Commençons par l'équation (3.3) et par l'opérateur K_v du membre de gauche s'appliquant à v :

$$\begin{aligned} K_v v &= \left(i\alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} - \alpha^2 \frac{1}{R} \mathcal{L} + i\alpha^3 \bar{U} + \left(\frac{1}{R} \mathcal{L} - i\alpha \bar{U} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v \\ &= \left(i\alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + i\alpha^3 \bar{U} + \frac{\alpha^4}{R} \right) v - 2 \frac{\alpha^2}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\alpha^2}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^4 v}{\partial y^2 \partial z^2} - i\alpha \bar{U} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Notons

$$\tilde{V} = i\alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + i\alpha^3 \bar{U} + \frac{\alpha^4}{R}$$

la discrétisation de $K_v v$ s'écrit alors :

$$[K_v v] = [\tilde{V} v] - 2 \frac{\alpha^2}{R} \mathbf{A} \cdot [v] - \frac{\alpha^2}{R} [v] \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{R} \mathbf{B}^2 \cdot [v] + \frac{1}{R} \mathbf{A} \cdot [v] \cdot \mathbf{B} - i\alpha [\bar{U} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}]$$

Rappelons que $[v]$ représente une matrice (tenseur d'ordre 2) avec :

$$[v]_{i,j} = v_{i-1,j-1} \quad \forall i = 1, \dots, N + 1 \quad \forall j = 1, \dots, M + 1$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} [K_v v]_{i,j} &= \tilde{V}_{i,j} [v]_{i,j} - 2 \frac{\alpha^2}{R} \sum_{k=1}^{N+1} \mathbf{A}_{i,k} [v]_{k,j} - \frac{\alpha^2}{R} \sum_{m=1}^{M+1} [v]_{i,m} \mathbf{B}_{m,j} + \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{N+1} \mathbf{A}_{i,k}^2 [v]_{k,j} \\ &\quad + \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{N+1} \mathbf{A}_{i,k} \sum_{m=1}^{M+1} [v]_{k,m} \mathbf{B}_{m,j} - i\alpha \bar{U}_{i,j} \sum_{k=1}^{N+1} \mathbf{A}_{i,k} [v]_{k,j} \end{aligned}$$

En regroupant les opérateurs par type de dérivation, le terme i, j de $K_v v$ s'écrit :

$$[K_v v]_{i,j} = [\mathbf{K}_I^{(v)}]_{i,j} [v]_{i,j} + \sum_{k=1}^{N+1} [\mathbf{K}_{II}^{(v)}]_{i,k} [v]_{k,j} + \sum_{m=1}^{M+1} [v]_{i,m} [\mathbf{K}_{III}^{(v)}]_{m,j} + \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{m=1}^{M+1} [\mathbf{K}_{IV}^{(v)}]_{k,m} [v]_{k,m}$$

avec :

- pour les opérateurs non dérivés

$$[\mathbf{K}_I^{(v)}]_{i,j} = \tilde{V}_{i,j}$$

- pour les opérateurs de dérivation en y

$$[\mathbf{K}_{II}^{(v)}]_{i,k} = -\left(2\frac{\alpha^2}{R} + i\alpha[\bar{U}]_{i,j}\right)[\mathbf{A}]_{i,k} + \frac{1}{R}[\mathbf{A}^2]_{i,k}$$

- pour les opérateurs de dérivation en z

$$[\mathbf{K}_{III}^{(v)}]_{m,j} = -\frac{\alpha^2}{R}[\mathbf{B}]_{m,j}$$

- pour les opérateurs de dérivation en y et z

$$[\mathbf{K}_{IV}^{(v)}]_{k,m} = \frac{1}{R}[\mathbf{A}]_{i,k}[\mathbf{B}]_{m,j}$$

Regardons maintenant l'opérateur K_w du membre de gauche de (3.3) s'appliquant à w :

$$\begin{aligned} K_w w &= \left(i\alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial z} + i\alpha \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{1}{R} \mathcal{L} - i\alpha \bar{U} \right) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - i\alpha \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right) w \\ &= i\alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial z} w + i\alpha \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} - i\alpha \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} - \left(\frac{\alpha^2}{R} + i\alpha \bar{U} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial^4 w}{\partial y^3 \partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial^4 w}{\partial y \partial z^3} \end{aligned}$$

La discrétisation de $K_w w$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} [K_w w] &= [i\alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial z} w] + [i\alpha \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y}] - [i\alpha \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}] - [i\alpha \bar{U} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}] \\ &\quad - \frac{\alpha^2}{R} [D] \cdot [w] \cdot [E]^T + \frac{1}{R} [D] \cdot [w] \cdot [E]^T \cdot [E]^T \cdot [E]^T + \frac{1}{R} [D] [D] [D] \cdot [w] \cdot [E]^T \end{aligned}$$

avec $[w]$ la matrice telle que :

$$[w]_{i,j} = w_{i-1,j-1} \quad \forall i = 1, \dots, N+1 \quad \forall j = 1, \dots, M+1$$

et ainsi le terme i, j de $K_w w$ s'écrit :

$$\begin{aligned} [K_w w]_{i,j} &= i\alpha \left[\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial z} \right]_{i,j} [w]_{i,j} + i\alpha \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right]_{i,j} \sum_{k=1}^{N+1} D_{i,k} [w]_{k,j} \\ &\quad - i\alpha \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right]_{i,j} \sum_{m=1}^{M+1} [w]_{i,m} E_{m,j}^T - \left(i\alpha \bar{U}_{i,j} + \frac{\alpha^2}{R} \right) \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{m=1}^{M+1} D_{i,k} [w]_{k,m} E_{m,j}^T \\ &\quad + \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{m=1}^{M+1} D_{i,k} [w]_{k,m} [E^T]^3_{m,j} + \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{m=1}^{M+1} [D^3]_{i,k} [w]_{k,m} E_{m,j}^T \end{aligned}$$

Soit finalement en regroupant les termes comme précédemment :

$$[K_w w]_{i,j} = [\mathbf{K}_I^{(w)}]_{i,j} [w]_{i,j} + \sum_{k=1}^{N+1} [\mathbf{K}_{II}^{(w)}]_{i,k} [w]_{k,j} + \sum_{m=1}^{M+1} [w]_{i,m} [\mathbf{K}_{III}^{(w)}]_{m,j} + \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{m=1}^{M+1} [\mathbf{K}_{IV}^{(w)}]_{k,m} [w]_{k,m}$$

avec :

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_I^{(w)}]_{i,j} &= i\alpha \left[\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial z} \right]_{i,j} \\ [\mathbf{K}_{II}^{(w)}]_{i,k} &= i\alpha \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right]_{i,j} D_{i,k} \\ [\mathbf{K}_{III}^{(w)}]_{m,j} &= -i\alpha \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right]_{i,j} E_{m,j}^T \\ [\mathbf{K}_{IV}^{(w)}]_{k,m} &= - \left(i\alpha \bar{U}_{i,j} + \frac{\alpha^2}{R} \right) D_{i,k} E_{m,j}^T + \frac{1}{R} (D_{i,k} [E^{T3}]_{m,j} + [D^3]_{i,k} E_{m,j}^T) \end{aligned}$$

De la même manière, notant L_v et L_w les opérateurs du membre de droite de l'équation (3.3) s'appliquant respectivement à v et w , ceux-ci s'écrivent :

$$L_v v = i\omega \left(\alpha^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v \quad \text{et} \quad L_w w = -i\omega \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}$$

Ainsi les termes i, j issus de la discrétisation de $L_v v$ et $L_w w$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} [L_v v]_{i,j} &= i\omega \alpha^2 [v]_{i,j} - i\omega \sum_{k=1}^{N+1} \mathbf{A}_{i,k} [v]_{k,j} \\ [L_w w]_{i,j} &= -i\omega \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{m=1}^{M+1} D_{i,k} [w]_{k,m} E_{m,j}^T \end{aligned}$$

soit encore :

$$[L_v v]_{i,j} = \omega \left([\mathbf{L}_I^{(v)}]_{i,j} [v]_{i,j} + \sum_{k=1}^{N+1} [\mathbf{L}_{II}^{(v)}]_{i,k} [v]_{k,j} \right) \quad [L_w w]_{i,j} = \omega \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{m=1}^{M+1} [\mathbf{L}_{IV}^{(w)}]_{k,m} [w]_{k,m}$$

avec :

$$\begin{aligned} [\mathbf{L}_I^{(v)}]_{i,j} &= i\alpha^2 & [\mathbf{L}_{IV}^{(w)}]_{k,m} &= -iD_{i,k} E_{m,j}^T \\ [\mathbf{L}_{II}^{(v)}]_{i,k} &= -i\mathbf{A}_{i,k} \end{aligned}$$

On s'intéresse à présent à l'équation (3.4), et tout d'abord à l'opérateur M_v du membre de gauche s'appliquant à v :

$$\begin{aligned} M_v v &= \left(i\alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial z} + i\alpha \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} + \left(\frac{1}{R} \mathcal{L} - i\alpha \bar{U} \right) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - i\alpha \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \right) v \\ &= i\alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial z} v + i\alpha \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} - i\alpha \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{\alpha^2}{R} + i\alpha \bar{U} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial^4 v}{\partial y^3 \partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial^4 v}{\partial y \partial z^3} \end{aligned}$$

La discrétisation de $M_v v$ donne :

$$\begin{aligned} [M_v v] &= [i\alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial z} v] + [i\alpha \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z}] - [i\alpha \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y}] - [i\alpha \bar{U} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}] \\ &\quad - \frac{\alpha^2}{R} [D] \cdot [v] \cdot [E]^T + \frac{1}{R} [D] \cdot [v] \cdot [E]^T \cdot [E]^T \cdot [E]^T + \frac{1}{R} [D] \cdot [D] \cdot [D] \cdot [v] \cdot [E]^T \end{aligned}$$

et le terme i, j s'écrit :

$$\begin{aligned} [M_v v]_{i,j} &= i\alpha \left[\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial z} \right]_{i,j} [v]_{i,j} + i\alpha \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right]_{i,j} \sum_{m=1}^{M+1} [v]_{i,m} E_{m,j}^T \\ &\quad - i\alpha \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right]_{i,j} \sum_{k=1}^{N+1} D_{i,k} [v]_{k,j} - \left(i\alpha \bar{U}_{i,j} + \frac{\alpha^2}{R} \right) \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{m=1}^{M+1} D_{i,k} [v]_{k,m} E_{m,j}^T \\ &\quad + \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{m=1}^{M+1} D_{i,k} [v]_{k,m} [E^{T3}]_{m,j} + \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{m=1}^{M+1} [D^3]_{i,k} [v]_{k,m} E_{m,j}^T \end{aligned}$$

En regroupant les termes on obtient :

$$[M_v v]_{i,j} = [\mathbf{M}_I^{(v)}]_{i,j} [v]_{i,j} + \sum_{k=1}^{N+1} [\mathbf{M}_{II}^{(v)}]_{i,k} [v]_{k,j} + \sum_{m=1}^{M+1} [v]_{i,m} [\mathbf{M}_{III}^{(v)}]_{m,j} + \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{m=1}^{M+1} [\mathbf{M}_{IV}^{(v)}]_{k,m} [v]_{k,m}$$

avec :

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_I^{(v)}]_{i,j} &= i\alpha \left[\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial z} \right]_{i,j} = [\mathbf{K}_I^{(w)}]_{i,j} \\ [\mathbf{M}_{II}^{(v)}]_{i,k} &= -i\alpha \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right]_{i,j} D_{i,k} = -[\mathbf{K}_{II}^{(w)}]_{i,k} \\ [\mathbf{M}_{III}^{(v)}]_{m,j} &= i\alpha \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right]_{i,j} E_{m,j}^T = -[\mathbf{K}_{III}^{(w)}]_{m,j} \\ [\mathbf{M}_{IV}^{(v)}]_{k,m} &= - \left(i\alpha \bar{U}_{i,j} + \frac{\alpha^2}{R} \right) D_{i,k} E_{m,j}^T + \frac{1}{R} (D_{i,k} [E^{T3}]_{m,j} + [D^3]_{i,k} E_{m,j}^T) = [\mathbf{K}_{IV}^{(w)}]_{k,m} \end{aligned}$$

L'opérateur M_w du membre de gauche de l'équation (3.4) s'appliquant à w est :

$$\begin{aligned} M_w w &= \left(i\alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} - \alpha^2 \frac{1}{R} \mathcal{L} + i\alpha^3 \bar{U} + \left(\frac{1}{R} \mathcal{L} - i\alpha \bar{U} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w \\ &= \left(i\alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} + i\alpha^3 \bar{U} + \frac{\alpha^4}{R} \right) w - 2 \frac{\alpha^2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\alpha^2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial z^2} - i\alpha \bar{U} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{aligned}$$

En notant :

$$\tilde{W} = i\alpha \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} + i\alpha^3 \bar{U} + \frac{\alpha^4}{R}$$

la discrétisation de $M_w w$ s'écrit :

$$[M_w w] = [\tilde{W} w] - 2 \frac{\alpha^2}{R} [w] \cdot \mathbf{B} - \frac{\alpha^2}{R} \mathbf{A} \cdot [w] + \frac{1}{R} [w] \cdot \mathbf{B}^2 + \frac{1}{R} \mathbf{A} \cdot [w] \cdot \mathbf{B} - i\alpha \bar{U} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

En regroupant les opérateurs de dérivation, le terme i, j de $M_w w$ se met sous la forme :

$$[M_w w]_{i,j} = [\mathbf{M}_I^{(w)}]_{i,j} [w]_{i,j} + \sum_{k=1}^{N+1} [\mathbf{M}_{II}^{(w)}]_{i,k} [w]_{k,j} + \sum_{m=1}^{M+1} [w]_{i,m} [\mathbf{M}_{III}^{(w)}]_{m,j} + \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{m=1}^{M+1} [\mathbf{M}_{IV}^{(w)}]_{k,m} [w]_{k,m}$$

avec :

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_I^{(w)}]_{i,j} &= \tilde{W}_{i,j} \\ [\mathbf{M}_{II}^{(w)}]_{i,k} &= -\frac{\alpha^2}{R} [\mathbf{A}]_{i,k} \end{aligned}$$

$$[\mathbf{M}_{\text{III}}^{(w)}]_{m,j} = -\left(2\frac{\alpha^2}{R} + i\alpha[\bar{U}]_{i,j}\right)[\mathbf{B}]_{m,j} + \frac{1}{R}[\mathbf{B}^2]_{m,j}$$

$$[\mathbf{M}_{\text{IV}}^{(w)}]_{k,m} = \frac{1}{R}[\mathbf{A}]_{i,k}[\mathbf{B}]_{m,j} = [\mathbf{K}_{\text{IV}}^{(v)}]_{k,m}$$

Enfin, notant N_v et N_w les opérateurs du membre de droite de l'équation (3.4) s'appliquant respectivement à v et w , on a :

$$N_v v = -i\omega \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}$$

$$N_w w = i\omega \left(\alpha^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w$$

et les termes i, j issus de la discrétisation de $L_v v$ et $L_w w$ s'écrivent :

$$[N_v v]_{i,j} = \omega \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{m=1}^{M+1} [\mathbf{N}_{\text{IV}}^{(v)}]_{k,m} [v]_{k,m} \quad [N_w w]_{i,j} = \omega \left([\mathbf{N}_{\text{I}}^{(w)}]_{i,j} [w]_{i,j} + \sum_{m=1}^{M+1} [w]_{m,j} [\mathbf{N}_{\text{III}}^{(w)}]_{m,j} \right)$$

avec :

$$[\mathbf{N}_{\text{IV}}^{(v)}]_{k,m} = -iD_{i,k}E_{m,j}^T = [\mathbf{L}_{\text{IV}}^{(w)}]_{k,m} \quad [\mathbf{N}_{\text{I}}^{(w)}]_{i,j} = i\alpha^2 = [\mathbf{L}_{\text{I}}^{(v)}]_{i,j}$$

$$[\mathbf{N}_{\text{III}}^{(w)}]_{m,j} = -i\mathbf{B}_{m,j}$$

A.2.2 Résolution numérique

Problème aux valeurs propres généralisé

Le problème de stabilité 2D est décrit par $2 \times (N+1)(M+1)$ équations discrètes couplées. Il s'agit à présent d'écrire ce système sous la forme classique d'un problème aux valeurs propres généralisé :

$$\mathcal{A}.X = \omega \mathcal{B}.X$$

Ainsi la résolution de ce problème pourra être effectuée à l'aide d'une librairie interne. On construit les matrices \mathcal{A} et \mathcal{B} en utilisant le même principe que celui qui nous a permis d'assembler les matrices pour la résolution de l'écoulement de base.

La première moitié des coordonnées du vecteur X , de longueur $2(N+1)(M+1)$, correspond aux valeurs discrètes de la vitesse verticale v ordonnées en rangées horizontales (iso- y). Et dans la seconde partie du vecteur sont rangées de manière identique les valeurs discrètes de la vitesse transversale w .

Ainsi on a, pour $i = 1, \dots, N+1$ et $j = 1, \dots, M+1$:

$$\begin{cases} X(q_v) = [v]_{i,j}, & q_v = j + (i-1)(M+1) \\ X(q_w) = [w]_{i,j}, & q_w = q_v + (N+1)(M+1) \end{cases} \quad \text{soit} \quad X = \begin{pmatrix} x_{q_v} \\ \vdots \\ x_{q_w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \\ \vdots \\ w_{N+1,M} \\ w_{N+1,M+1} \end{pmatrix}$$

Dans les matrices \mathcal{A} et \mathcal{B} , les lignes $p_1 = 1, \dots, (N+1)(M+1)$ traduisent la discrétisation de l'équation (3.3) et les lignes $p_2 = p_1 + (N+1)(M+1)$ correspondent à l'équation (3.4). Ainsi les matrices \mathcal{A} et \mathcal{B} sont sous la forme :

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{c|c} a_{p_1, q_v} & a_{p_1, q_w} \\ \hline - & - \\ a_{p_2, q_v} & a_{p_2, q_w} \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \left(\begin{array}{c|c} b_{p_1, q_v} & b_{p_1, q_w} \\ \hline - & - \\ b_{p_2, q_v} & b_{p_2, q_w} \end{array} \right)$$

A l'aide du repérage de lignes (p_1, p_2) et du repérage de colonnes (q_v, q_w) , il est possible d'assembler les quatre blocs des matrices simultanément.

En écrivant les termes i, j , comme cela a été fait pour le calcul de l'écoulement de base, de chacun des membres des équations de stabilité (3.3) et (3.4), on peut exprimer les éléments $\mathcal{A}_{p,q}$ et $\mathcal{B}_{p,q}$. On réalise une double boucle sur $i = 1, \dots, (N+1)$ et sur $j = 1, \dots, (M+1)$. Étant ainsi placé au point (i, j) , on calcule les repérages des lignes p_1 et p_2 . On fait ensuite une boucle sur le repérage de colonne $q_v = 1, \dots, (N+1)(M+1)$. A ce stade il faut également calculer q_w puis effectuer différents tests pour l'implémentation des divers opérateurs :

- lorsque $q_v = p_1$ on ajoute les opérateurs I

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{p_1, q_v} &= [\mathbf{K}_I^{(v)}]_{i,j} & \text{et} & \quad \mathcal{B}_{p_1, q_v} = [\mathbf{L}_I^{(v)}]_{i,j} \\ \mathcal{A}_{p_1, q_w} &= [\mathbf{K}_I^{(w)}]_{i,j} \\ \mathcal{A}_{p_2, q_v} &= [\mathbf{M}_I^{(v)}]_{i,j} \\ \mathcal{A}_{p_2, q_w} &= [\mathbf{M}_I^{(w)}]_{i,j} & \text{et} & \quad \mathcal{B}_{p_2, q_w} = [\mathbf{N}_I^{(w)}]_{i,j} \end{aligned}$$

- si $\exists k \in \{1, \dots, N+1\}$ tel que $q_v = j + (M+1)(k-1)$, on ajoute les opérateurs II

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{p_1, q_v} &= [\mathbf{K}_{II}^{(v)}]_{i,k} & \text{et} & \quad \mathcal{B}_{p_1, q_v} = [\mathbf{L}_{II}^{(v)}]_{i,k} \\ \mathcal{A}_{p_1, q_w} &= [\mathbf{K}_{II}^{(w)}]_{i,k} \\ \mathcal{A}_{p_2, q_v} &= [\mathbf{M}_{II}^{(v)}]_{i,k} \\ \mathcal{A}_{p_2, q_w} &= [\mathbf{M}_{II}^{(w)}]_{i,k} \end{aligned}$$

- on calcule $m = q_v - (i-1)(M+1)$, si $m \in \{1, \dots, M+1\}$ on ajoute les opérateurs III

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{p_1, q_v} &= [\mathbf{K}_{III}^{(v)}]_{m,j} \\ \mathcal{A}_{p_1, q_w} &= [\mathbf{K}_{III}^{(w)}]_{m,j} \\ \mathcal{A}_{p_2, q_v} &= [\mathbf{M}_{III}^{(v)}]_{m,j} \\ \mathcal{A}_{p_2, q_w} &= [\mathbf{M}_{III}^{(w)}]_{m,j} & \text{et} & \quad \mathcal{B}_{p_2, q_w} = [\mathbf{N}_{III}^{(w)}]_{m,j} \end{aligned}$$

- si $\exists k \in \{1, \dots, N+1\}$ tel que $m = j + (M+1)(k-1)$, on ajoute les opérateurs IV

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{p_1, q_v} &= [\mathbf{K}_{IV}^{(v)}]_{m,k} \\ \mathcal{A}_{p_1, q_w} &= [\mathbf{K}_{IV}^{(w)}]_{m,k} & \text{et} & \quad \mathcal{B}_{p_1, q_w} = [\mathbf{L}_{IV}^{(w)}]_{m,k} \\ \mathcal{A}_{p_2, q_v} &= [\mathbf{M}_{IV}^{(v)}]_{m,k} & \text{et} & \quad \mathcal{B}_{p_2, q_v} = [\mathbf{N}_{IV}^{(v)}]_{m,k} \\ \mathcal{A}_{p_2, q_w} &= [\mathbf{M}_{IV}^{(w)}]_{m,k} \end{aligned}$$

Conditions aux limites : implémentation directe

Il s'agit à présent d'introduire les conditions limites associées au problème de stabilité. Les conditions (3.5) mises sous forme discrète s'écrivent :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, N + 1 & \quad \left\{ \begin{array}{l} [v]_{i,M+1} = [w]_{i,M+1} = \left[\frac{\partial w}{\partial z}\right]_{i,M+1} = 0 \\ [v]_{i,1} = [w]_{i,1} = \left[\frac{\partial w}{\partial z}\right]_{i,1} = 0 \end{array} \right. \\ \forall j = 1, \dots, M + 1 & \quad \left\{ \begin{array}{l} [v]_{N+1,j} = [w]_{N+1,j} = \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]_{N+1,j} = 0 \\ [v]_{1,j} = [w]_{1,j} = \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right]_{1,j} = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On va remplacer les lignes des matrices correspondant à l'écriture des équations sur les frontières du domaine par les lignes traduisant les conditions d'adhérence sur ces même frontières.

Ainsi les conditions d'adhérence conduisent à écraser les lignes $p_1 = p$ et $p_2 = p + (M + 1)(N + 1)$ telles que $\forall i = 1, \dots, N + 1$ et $\forall j = 2, \dots, M$:

$$\left. \begin{array}{l} p = M + 1 + (i - 1)(M + 1) \\ p = 1 + (i - 1)(M + 1) \\ p = j + N(M + 1) \\ p = j \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \mathcal{A}_{p_1,q} = \mathcal{B}_{p_1,q} = 0 \\ \mathcal{A}_{p_2,q} = \mathcal{B}_{p_2,q} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{pour } q = 1, \dots, 2(N + 1)(M + 1) \\ \text{et } \mathcal{A}_{p_1,p_1} = \mathcal{A}_{p_2,p_2} = 1 \end{array}$$

Il est à noter que les deux lignes correspondant à l'écriture des conditions pour les points $j = 1$ et $j = M + 1$ à i fixé sont équivalentes à celles déjà écrites pour les points $i = 1$ et $i = N + 1$ à j fixé.

On choisit d'écrire les conditions portant sur les dérivées sur les lignes voisines des frontières du domaine (voir figure A.1). Ainsi les conditions portant sur les dérivées de v et w sont intégrées de la manière suivante, $\forall i = 2, \dots, N$, $\forall j = 2, \dots, M$ et $\forall q = 1, \dots, 2(N + 1)(M + 1)$:

– sur les $N - 1$ lignes $p = M + (N + i)(M + 1)$

$$\mathcal{A}_{p,q} = \mathcal{B}_{p,q} = 0$$

$$m = q - (M + 1)(N + i), \quad \text{si } m \in \{1, \dots, M + 1\}, \quad \mathcal{A}_{p,q} = E_{m,M+1}^T$$

– sur les $N - 1$ lignes $p = 2 + (N + i)(M + 1)$

$$\mathcal{A}_{p,q} = \mathcal{B}_{p,q} = 0$$

$$m = q - (M + 1)(N + i), \quad \text{si } m \in \{1, \dots, M + 1\}, \quad \mathcal{A}_{p,q} = E_{m,1}^T$$

– sur les $M - 1$ lignes $p = j + (N - 1)(M + 1)$

$$\mathcal{A}_{p,q} = \mathcal{B}_{p,q} = 0$$

$$\text{si } \exists k \in \{1, \dots, N + 1\}, \quad \text{tel que } (k - 1)(M + 1) + j = q, \quad \mathcal{A}_{p,q} = D_{N+1,k}$$

– sur les $M - 1$ lignes $p = j + (M + 1)$

$$\mathcal{A}_{p,q} = \mathcal{B}_{p,q} = 0$$

$$\text{si } \exists k \in \{1, \dots, N + 1\}, \quad \text{tel que } (k - 1)(M + 1) + j = q, \quad \mathcal{A}_{p,q} = D_{1,k}$$

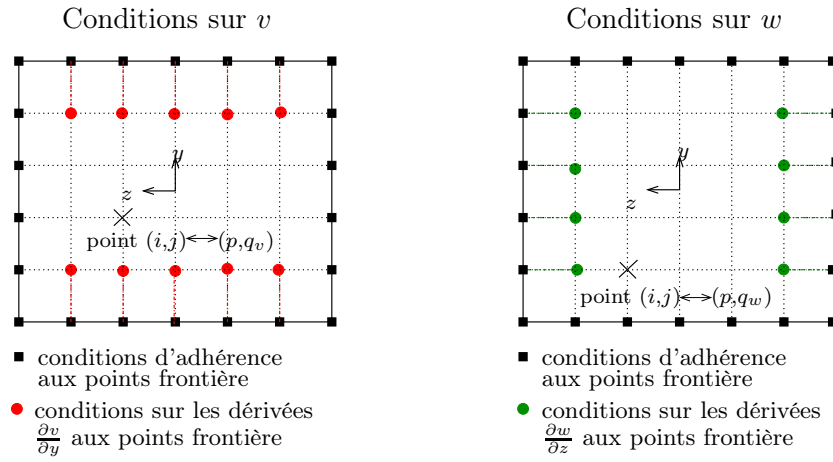


FIG. A.1 – Représentation du maillage et de l'écriture des conditions limites

Conditions aux limites : modification de la base de représentation

Une autre manière de s'assurer du respect des conditions limites est de modifier la base sur laquelle la solution approchée est exprimée, voir (1.13). Le problème initial défini sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$ s'écrit :

$$v(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \lambda_i^{(v)}(\xi) \mu_j^{(v)}(\eta) v_{ij}$$

$$\text{avec} \begin{cases} v(\xi_0, \eta_j) = v(\xi_N, \eta_j) = \frac{\partial v}{\partial y}(\xi_0, \eta_j) = \frac{\partial v}{\partial y}(\xi_N, \eta_j) = 0 \\ v(\xi_i, \eta_0) = v(\xi_i, \eta_M) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

$$w(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \lambda_i^{(w)}(\xi) \mu_j^{(w)}(\eta) w_{ij} // [0.3cm] \text{avec} \begin{cases} w(\xi_0, \eta_j) = w(\xi_N, \eta_j) = 0 \\ w(\xi_i, \eta_0) = w(\xi_i, \eta_M) = \frac{\partial w}{\partial z}(\xi_i, \eta_0) = \frac{\partial w}{\partial z}(\xi_i, \eta_M) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Les valeurs de v et w sur les parois étant imposées et donc connues par les conditions de Dirichlet, on peut d'ores et déjà résoudre le problème discret sur $] - 1, 1[\times] - 1, 1[$. Le problème se ramènera ainsi à un système linéaire écrit pour les points intérieurs de Gauss-Lobatto. Reste à écrire les conditions aux limites de type Neumann, issues des conditions sur u . Pour cela on cherche à modifier les polynômes $\lambda_i(\xi) \mu_j(\eta)$ de sorte que la nouvelle décomposition de v et w vérifie les conditions limites associées au problème. Deux solutions sont envisagées. Les nouveaux polynômes sont construits à partir des anciens soit à l'aide de combinaisons linéaires soit à l'aide de multiplications. Dans ce dernier cas, les valeurs discrètes \tilde{v}_{ij} , \tilde{w}_{ij} ne seront pas modifiées par rapport aux v_{ij} , w_{ij} de la formulation initiale (A.7, A.8).

On cherche donc les approximations v et w sous la forme :

$$v(\xi, \eta) = \sum_{i=2}^{N-2} \sum_{j=2}^{M-2} \tilde{\lambda}_i^{(v)}(\xi) \tilde{\mu}_j^{(v)}(\eta) \tilde{v}_{ij} \quad \text{et} \quad w(\xi, \eta) = \sum_{i=2}^{N-2} \sum_{j=2}^{M-2} \tilde{\lambda}_i^{(w)}(\xi) \tilde{\mu}_j^{(w)}(\eta) \tilde{w}_{ij}$$

avec v et w vérifiant les conditions limites associées au problème.

La différentiation de ces expressions permettra ensuite de réécrire un système matriciel semblable à celui construit dans la section A.2.2 en remplaçant les matrices $[D]$ et $[E]$ par les matrices

$[\tilde{D}^{(v)}], [\tilde{E}^{(v)}]$ pour les dérivations appliquées à v et les matrices $[\tilde{D}^{(w)}], [\tilde{E}^{(w)}]$ pour les dérivations appliquées à w . Ce nouveau système vérifiera alors automatiquement les conditions limites.

Modification des polynômes interpolants par combinaisons linéaires

On cherche les nouveaux polynômes interpolants sous la forme :

$$\forall k = 1, \dots, N - 1 \text{ et } \forall l = 1, \dots, M - 1$$

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_k^{(v)}(\xi)\tilde{\mu}_l^{(v)}(\eta) = & \lambda_k^{(v)}(\xi)\mu_l^{(v)}(\eta) - \left(\alpha_k^{(v)}\lambda_1^{(v)}(\xi)\mu_l^{(v)}(\eta) + \beta_k^{(v)}\lambda_{N-1}^{(v)}(\xi)\mu_l^{(v)}(\eta) \right. \\ & + \gamma_k^{(v)}\lambda_0^{(v)}(\xi)\mu_l^{(v)}(\eta) + \delta_k^{(v)}\lambda_N^{(v)}(\xi)\mu_l^{(v)}(\eta) \\ & \left. + \tau_l^{(v)}\lambda_k^{(v)}(\xi)\mu_0^{(v)}(\eta) + \chi_l^{(v)}\lambda_k^{(v)}(\xi)\mu_M^{(v)}(\eta) \right) \end{aligned}$$

Il faut également écrire que le jeu de polynômes $\tilde{\lambda}_k^{(v)}(\xi)\tilde{\mu}_l^{(v)}(\eta)$ doit vérifier les conditions limites de (A.7). On procède de façon similaire pour le jeu de polynômes interpolants de w .

Finalement, en tenant compte du décalage d'indices évoqué en début d'annexe, les coefficients des nouvelles matrices de dérivation sont donnés par :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{D}_{ik}^{(v)} &= D_{ik} - \left(\beta_{N+2-k}^{(v)}D_{i2} + \beta_k^{(v)}D_{iN} \right) \\ \tilde{D}_{ik}^{(w)} &= D_{ik} \end{aligned} \right\} \quad i, k = 2, \dots, N$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{E}_{jl}^{(v)} &= E_{jl} \\ \tilde{E}_{jl}^{(w)} &= E_{jl} - \left(\beta_{M+2-l}^{(w)}E_{j2} + \beta_l^{(w)}E_{jM} \right) \end{aligned} \right\} \quad j, l = 2, \dots, M$$

avec :

$$\beta_k^{(v)} = \frac{(-1)^{N+k}}{2} \frac{\xi_k - \xi_2}{\xi_2} \frac{1 - \xi_2^2}{1 - \xi_k^2} \quad \text{et} \quad \beta_l^{(w)} = \frac{(-1)^{M+l}}{2} \frac{\eta_l - \eta_2}{\eta_2} \frac{1 - \eta_2^2}{1 - \eta_l^2}$$

La solution $(\tilde{v}_{ij}, \tilde{w}_{ij})$ étant obtenue par résolution du problème aux valeurs propres, on peut ensuite écrire :

$$\forall l = 2, \dots, M \quad \left\{ \begin{aligned} v(\xi_2, \eta_l) &= v_{2l} = \tilde{v}_{2l} - \sum_{k=2}^N \beta_{N+2-k}^{(v)} \tilde{v}_{kl} \\ v(\xi_N, \eta_l) &= v_{Nl} = \tilde{v}_{Nl} - \sum_{k=2}^N \beta_k^{(v)} \tilde{v}_{kl} \\ v(\xi_k, \eta_l) &= v_{kl} = \tilde{v}_{kl}, \quad k = 3, \dots, N - 1 \end{aligned} \right.$$

$$\forall k = 2, \dots, N \quad \left\{ \begin{aligned} w(\xi_k, \eta_2) &= w_{k2} = \tilde{w}_{k2} - \sum_{l=2}^M \beta_{M+2-l}^{(w)} \tilde{w}_{kl} \\ w(\xi_k, \eta_M) &= w_{kM} = \tilde{w}_{kM} - \sum_{l=2}^M \beta_l^{(w)} \tilde{w}_{kl} \\ w(\xi_k, \eta_l) &= w_{kl} = \tilde{w}_{kl}, \quad l = 3, \dots, M - 1 \end{aligned} \right.$$

Modification des polynômes interpolants par multiplications

Un autre raisonnement peut être mené sur l'idée qu'on cherche à approcher la solution du problème par un polynôme qui doit satisfaire les conditions d'interpolation $v(\xi_i, \eta_j) = \tilde{v}_{ij} = v_{ij}$, $w(\xi_i, \eta_j) = \tilde{w}_{ij} = w_{ij}$ pour tous les points intérieurs du domaine, où la solution est inconnue, soit $N - 1$ points en y et $M - 1$ points en z . Ce polynôme doit également vérifier les conditions limites, soit 4 conditions pour la variable y et 2 conditions pour la variable z concernant la

fonction v et 2 en y , 4 en z pour la fonction w . Ainsi on cherche pour chaque fonction un polynôme interpolateur pour chaque variable sous forme d'un produit entre un polynôme de degré correspondant au nombre de conditions de collocation et un polynôme de degré correspondant au nombre de conditions limites moins une. On ne poursuivra pas cette démarche ici, qui est néanmoins décrite de façon plus détaillée dans [41].

A.2.3 Résolution du problème sur un domaine réduit

Considérant les propriétés de parité du problème à résoudre dans les deux directions y et z , on peut limiter l'étude à un quart du domaine physique.

Finalement, d'après ce que l'on vient de voir, sous l'hypothèse de valeurs propres de multiplicité 1, la recherche de perturbations paires et impaires conduit à la résolution complète du problème de stabilité 2D. La solution complète sera obtenue par superposition des solutions obtenues pour chacune des configurations énoncées en (3.8).

Résolution avec implémentation directe des conditions limites

Les matrices de dérivation pour les deux variables spatiales sont définies pour chacune des deux inconnues en fonction de leur parité comme fait en section 1.2.1.

On considère le domaine de calcul réduit $[0, 1] \times [0, 1]$, représenté ci-après avec les conditions limites associées.

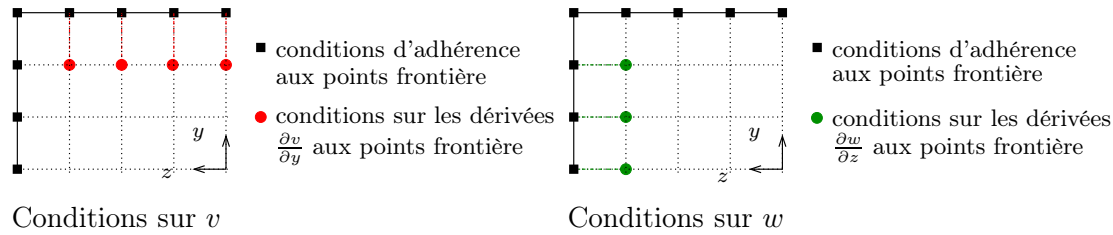


FIG. A.2 – Représentation du domaine de calcul réduit

Le problème aux valeurs propres généralisé est construit de la même façon que pour le domaine complet. On conserve les mêmes équations en remplaçant les matrices de dérivation par leurs nouvelles expressions qui prennent en compte les propriétés de parité des solutions recherchées.

Chacune des quatre configurations (3.8) est résolue de manière indépendante sur le domaine réduit, avant d'être reconstruite sur le domaine $[-1, 1] \times [-1, 1]$ puis superposée aux autres afin d'obtenir la solution complète dans toute la section.

Résolution avec implémentation implicite des conditions limites à l'aide d'un changement de base

On utilise ici le principe de la méthode, basée sur la modification des polynômes interpolateurs à l'aide de combinaisons linéaires, décrite en section A.2.2. On considère les points intérieurs du domaine réduit, pour lesquels les valeurs discrètes des fonctions sont inconnues, soit $[0, 1[\times [0, 1[$. On suppose que N et M sont pairs de sorte que les points 0 soient points de collocation, ainsi on écrit : $N = 2(n - 1)$ et $M = 2(m - 1)$. Finalement le domaine discret considéré sera encore

diminué des points ξ_n et/ou η_m selon la parité des fonctions ¹. Chaque configuration de parité étudiée (3.8) est alors associée à des maillages particuliers, pouvant être différents pour les deux inconnues v et w , et à un jeu de matrices de dérivation particulier. Les coefficients des matrices modifiées s'écrivent alors :

dérivation par rapport à y - $\forall i = 2, \dots, n$ et $\forall k = 2, \dots, n-1$:

★ v paire en y

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{ik}^{(v)} &= D_{ik} + D_{i,2n-k} - \beta_k^{(v)} (D_{i2} + D_{iN}) & \text{et} & \quad \tilde{D}_{in}^{(v)} = D_{in} - \beta_n^{(v)} (D_{i2} + D_{iN}) \\ \tilde{D}_{ik}^{(w)} &= D_{ik} - D_{i,2n-k} \\ \text{avec} \quad \beta_k^{(v)} &= \frac{(-1)^{k+1}(1 - \xi_2^2)}{1 - \xi_k^2} & \text{et} & \quad \beta_n^{(v)} = \frac{(-1)^{n+1}}{2}(1 - \xi_2^2) \end{aligned}$$

★ v impaire en y

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{ik}^{(v)} &= D_{ik} - D_{i,2n-k} - \gamma_k^{(v)} (D_{i2} - D_{iN}) \\ \tilde{D}_{ik}^{(w)} &= D_{ik} + D_{i,2n-k} & \text{et} & \quad \tilde{D}_{in}^{(w)} = D_{in} \\ \text{avec} \quad \gamma_k^{(v)} &= (-1)^{k+1} \frac{\xi_k (1 - \xi_2^2)}{\xi_2 (1 - \xi_k^2)} \end{aligned}$$

dérivation par rapport à z - $\forall j = 2, \dots, m$ et $\forall l = 2, \dots, m-1$:

★ v paire en z

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{jl}^{(v)} &= E_{jl} + E_{j,2m-l} & \text{et} & \quad \tilde{E}_{jm}^{(v)} = E_{jm} \\ \tilde{E}_{jl}^{(w)} &= E_{jl} - E_{j,2m-l} - \gamma_l^{(w)} (E_{j2} - E_{jM}) \\ \text{avec} \quad \gamma_l^{(w)} &= (-1)^{l+1} \frac{\eta_l (1 - \eta_1^2)}{\eta_2 (1 - \eta_l^2)} \end{aligned}$$

★ v impaire en z

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{jl}^{(v)} &= E_{jl} - E_{j,2m-l} \\ \tilde{E}_{jl}^{(w)} &= E_{jl} + E_{j,2m-l} - \beta_l^{(w)} (E_{j2} + E_{jM}) & \text{et} & \quad \tilde{E}_{jm}^{(w)} = E_{jm} - \beta_m^{(w)} (E_{j2} + E_{jM}) \\ \text{avec} \quad \beta_l^{(w)} &= \frac{(-1)^{l+1}(1 - \eta_2^2)}{1 - \eta_l^2} & \text{et} & \quad \beta_m^{(w)} = \frac{(-1)^{m+1}}{2}(1 - \eta_2^2) \end{aligned}$$

¹par exemple, si v est impaire pour la variable y , sa valeur est connue en ξ_n , on cherche alors v sur $]0, 1[$ soit pour ξ_1, \dots, ξ_{n-1}

B

Écoulement de Hiemenz incompressible

B.1 Perturbation de Görtler-Hämmerlin (approche 1D)

La perturbation doit satisfaire les équations du système (4.1). Afin de rechercher le spectre de l'opérateur, le système des équations aux perturbations est mis sous la forme $\mathbf{A} \cdot \underline{X} = \omega \mathbf{B} \cdot \underline{X}$, où \underline{X} est le vecteur composé des valeurs discrètes des composantes u et v du champ de vitesse perturbé. Le domaine de calcul est défini par $y \in [0, y_{max}]$ avec y_{max} choisi suffisamment grand pour que la condition d'écoulement non perturbé à l'infini soit vérifiée. En pratique un ordre de 15 à 20δ , δ désignant l'épaisseur de couche limite, est suffisant. Les équations sont écrites aux points de collocation y_i . Rappelons que $\mathbf{D}_Y^{(k)}$ désigne la matrice de dérivation d'ordre k par rapport à la variable y ($\mathbf{D}_Y^{(0)}$ correspond à la matrice identité), en notation matricielle les équations s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
 A_{ij}^{(u,u)} &= D_{Yij}^{(2)} - V_i^* D_{Yij}^{(1)} - (\beta^2 + 2U_i^* - i\beta \mathcal{R}W_i^*) D_{Yij}^{(0)} \\
 A_{ij}^{(u,v)} &= -U_i^{*\prime} D_{Yij}^{(0)} \\
 B_{ij}^{(u,u)} &= -i\mathcal{R} D_{Yij}^{(0)} \\
 A_{ij}^{(v,u)} &= (2U^*)_i D_{Yij}^{(1)} + 2U_i^{*\prime} D_{Yij}^{(0)} \\
 A_{ij}^{(v,v)} &= D_{Yij}^{(4)} - V_i^* D_{Yij}^{(3)} - (2\beta^2 + i\beta \mathcal{R}W_i^* + V_i^{*\prime}) D_{Yij}^{(2)} + (\beta^2 V_i^* - U_i^{*\prime}) D_{Yij}^{(1)} \\
 &\quad + (\beta^4 + i\beta^3 \mathcal{R}W_i^* + i\beta \mathcal{R}W_i^{*\prime\prime} + \beta^2 V_i^{*\prime} + U_i^{*\prime\prime}) D_{Yij}^{(0)} \\
 B_{ij}^{(v,v)} &= -i\mathcal{R} D_{Yij}^{(2)} + i\beta^2 \mathcal{R} D_{Yij}^{(0)}
 \end{aligned}$$

où l'on convient que pour l'écoulement de base la dérivation porte sur la variable y et $U_i^{*\prime}$ désigne la fonction dU^*/dy évaluée en y_i .

On pose \underline{X} le vecteur dont les $2(n_y + 1)$ composantes sont $u(y_i)$ pour les $n_y + 1$ premières et $v(y_i)$ pour les $n_y + 1$ suivantes, soit :

$$X = \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix}$$

Finalement le système d'équations se met sous la forme matricielle suivante :

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{(u,u)} & A^{(u,v)} \\ \hline A^{(v,u)} & A^{(v,v)} \end{array} \right] \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix} = \omega \left[\begin{array}{c|c} B^{(u,u)} & 0 \\ \hline 0 & B^{(v,v)} \end{array} \right] \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Il reste à introduire les conditions limites discrètes associées au système. Ces conditions sont :

$$u_0^* = 0, v_0^* = 0, \sum_{k=0}^{n_y} D_{Y0k}^{(1)} v_k^* = 0$$

$$u_{n_y}^* = 0, v_{n_y}^* = 0, \sum_{k=0}^{n_y} D_{Yn_y k}^{(1)} v_k^* = 0$$

On écrit les conditions de Dirichlet sur les lignes des matrices qui correspondent aux points frontière, soient les lignes correspondant aux indices 0, n_y , $n_y + 1$ et $2n_y$ et les conditions de Neumann sur les points intérieurs correspondant aux indices $n_y + 2$ et $2n_y - 1$.

B.2 Perturbation tridimensionnelle de l'écoulement incompressible de Hiemenz (approche 2D)

Le problème de stabilité décrit par le système (4.2) est mis sous forme d'un problème aux valeurs propres $\mathbf{A}\underline{X} = \omega\mathbf{B}\underline{X}$ comme décrit dans la section A.2.2. Dans ce cas le vecteur propre recherché est composé des valeurs dans le plan (x, y) des composantes de vitesse et de la pression ordonnées en lignes parallèles à la ligne de partage (iso- x). Les lignes des matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} correspondent à l'écriture des équations en chaque point du domaine de calcul. Dans l'ordre on écrit les équations de quantité de mouvement longitudinal, normal et transversal puis la continuité. On peut illustrer cela de façon schématique, par :

$$\begin{bmatrix} Qm_{/x}^{(u)} & Qm_{/x}^{(v)} & Qm_{/x}^{(w)} & Qm_{/x}^{(p)} \\ Qm_{/y}^{(u)} & Qm_{/y}^{(v)} & Qm_{/y}^{(w)} & Qm_{/y}^{(p)} \\ Qm_{/z}^{(u)} & Qm_{/z}^{(v)} & Qm_{/z}^{(w)} & Qm_{/z}^{(p)} \\ Cont^{(u)} & Cont^{(v)} & Cont^{(w)} & Cont^{(p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} \Delta_{(i)}^{(u)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{(i)}^{(v)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{(i)}^{(w)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{bmatrix}$$

avec $\Delta_{(i)}$ désignant une sous-matrice de dimension $(n_x + 1)(n_y + 1)$ dont tous les éléments sont nuls à l'exception des éléments diagonaux qui prennent la valeur complexe i .

On introduit ensuite les conditions aux limites que l'on écrit respectivement pour u , v , w et p . Concernant la pression, ce ne sont pas des conditions d'adhérence et d'écoulement non perturbé mais des conditions dites de compatibilité. En effet, si on n'écrit rien pour la pression, cela reviendrait dans ce cas à laisser l'équation de continuité en $y = 0$ et $y = y_{max}$ qui correspondent à des équations discrètes identiquement nulles.

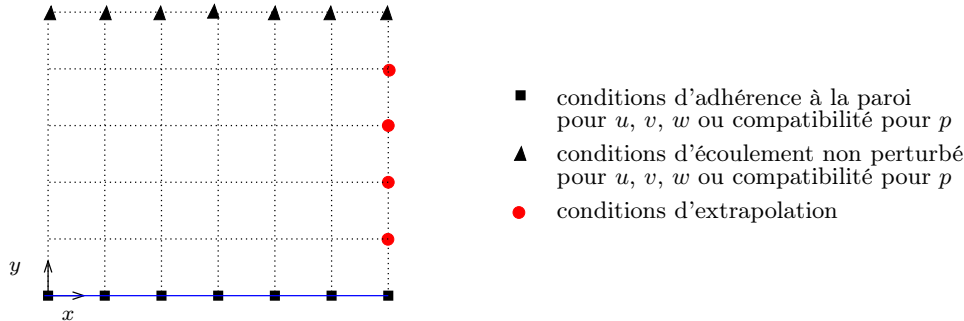


FIG. B.1 – Représentation des conditions limites dans le domaine de calcul de l'écoulement incompressible de Hiemenz

Aux *points frontière* en $x = 0$ on conserve les équations de la mécanique car en utilisant des matrices de dérivation paires et impaires on vérifie implicitement les conditions de symétrie qu'il aurait fallu écrire.

B.3 Perturbation tridimensionnelle de l'écoulement incompressible de Hiemenz, formulation réduite de l'approche 2D

Le système (4.5) représente un jeu d'équations algébriques couplées que l'on cherche à écrire sous la forme classique d'un problème aux valeurs propres $\mathbf{A} \cdot \underline{X} = \omega \mathbf{B} \cdot \underline{X}$. Dans ce but, le système (4.5) peut également être mis sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\mathcal{M} - \frac{\partial U}{\partial x} \right) \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u \\ - \left(\frac{1}{\beta^2} \left(\mathcal{M} - \frac{\partial U}{\partial x} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{i}{\beta} \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) v \\ = -i\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u + \frac{i\omega}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} v \\ - \frac{1}{\beta^2} \left[\left(\mathcal{M} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - i\beta \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] u \\ + \left[\left(\mathcal{M} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{i}{\beta} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] v \\ = \frac{i\omega}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u - i\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) v \end{array} \right.$$

On écrit ces deux équations aux points de collocation (x_i, y_j) . On désigne par $D_X^{(l)}$ et $D_Y^{(l)}$ les matrices de dérivation d'ordre l issues de la méthode de collocation spectrale, respectivement par rapport aux variables x et y . Le système ci-dessus se met alors sous forme matricielle :

$$\left[\begin{array}{c|c} A^{(u,u)} & A^{(u,v)} \\ \hline A^{(v,u)} & A^{(v,v)} \end{array} \right] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \omega \left[\begin{array}{c|c} B^{(u,u)} & B^{(u,v)} \\ \hline B^{(v,u)} & B^{(v,v)} \end{array} \right] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

La première moitié des coordonnées du vecteur \underline{X} correspond aux valeurs discrètes de u ordonnées en lignes parallèles à la ligne de partage (iso- x), ainsi pour $i = 0, \dots, n_x$ et $j = 0, \dots, n_y$ $X(j+1+i(n_y+1)) = u_{ij}$ et $X(j+1+i(n_y+1) + (n_x+1)(n_y+1)) = v_{ij}$.

Afin de faciliter l'implémentation numérique, les coefficients des matrices sont donnés en regroupant les opérateurs par type de dérivation, par exemple :

$$\left[A^{(u,u)} u \right]_{ij} = \underbrace{\left[A_{\text{I}}^{(u,u)} \right]_{ij}}_{\text{terme non dérivé}} u_{ij} + \sum_{k=1}^{N+1} \underbrace{\left[A_{\text{II}}^{(u,u)} \right]_{ik}}_{\text{dérivation en } x} u_{kj} + \sum_{m=1}^{M+1} \underbrace{\left[A_{\text{III}}^{(u,u)} \right]_{jm}}_{\text{dérivation en } y} u_{im} + \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{m=1}^{M+1} \underbrace{\left[A_{\text{IV}}^{(u,u)} \right]_{km}}_{\text{dérivation en } xy} u_{km}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [A_I^{(u,u)}]_{ij} = -\frac{\beta^2}{R} - i\beta W_{ij} - \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{ij} \\ [A_{II}^{(u,u)}]_{ik} = -\frac{1}{\beta^2 R} D_{Xik}^{(4)} + \frac{U_{ij}}{\beta^2} D_{Xik}^{(3)} + \left(\frac{2}{R} + \frac{i}{\beta} W_{ij} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{ij} \right) D_{Xik}^{(2)} - U_{ij} D_{Xik} \\ [A_{III}^{(u,u)}]_{jm} = \frac{1}{R} D_{Yjm}^{(2)} - V_{ij} D_{Yjm} \\ [A_{IV}^{(u,u)}]_{km} = -\frac{1}{\beta^2} \left(\frac{1}{R} D_{Yjm}^{(2)} - V_{ij} D_{Yjm} \right) D_{Xik}^{(2)} \\ [B_I^{(u,u)}]_{ij} = -i \qquad [B_{II}^{(u,u)}]_{ik} = \frac{i}{\beta^2} D_{Xik}^{(2)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [A_I^{(u,v)}]_{ij} = -\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{ij} \\ [A_{II}^{(u,v)}]_{ik} = -\frac{i}{\beta} \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{ij} D_{Xik} \\ [A_{III}^{(u,v)}]_{jm} = 0 \\ [A_{IV}^{(u,v)}]_{km} = -\frac{1}{\beta^2} \left(\frac{1}{R} D_{Yjm}^{(3)} - V_{ij} D_{Yjm}^{(2)} \right) D_{Xik} \\ \quad - \left(\frac{1}{\beta^2 R} D_{Xik}^{(3)} - \frac{U_{ij}}{\beta^2} D_{Xik}^{(2)} - \left(\frac{1}{R} + \frac{i}{\beta} W_{ij} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{ij} \right) D_{Xik} \right) D_{Yjm} \\ [B_{IV}^{(u,v)}]_{km} = \frac{i}{\beta^2} D_{Xik} D_{Yjm} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [A_I^{(v,u)}]_{ij} = 0 \\ [A_{II}^{(v,u)}]_{ik} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{ij} D_{Xik}^{(2)} + \frac{i}{\beta} \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{ij} D_{Xik} \\ [A_{III}^{(v,u)}]_{jm} = 0 \\ [A_{IV}^{(v,u)}]_{km} = -\frac{1}{\beta^2} \left(\frac{1}{R} D_{Yjm}^{(3)} - V_{ij} D_{Yjm}^{(2)} \right) D_{Xik} \\ \quad - \left(\frac{1}{\beta^2 R} D_{Xik}^{(3)} - \frac{U_{ij}}{\beta^2} D_{Xik}^{(2)} - \left(\frac{1}{R} + \frac{i}{\beta} W_{ij} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{ij} \right) D_{Xik} \right) D_{Yjm} \\ [B_{IV}^{(v,u)}]_{km} = \frac{i}{\beta^2} D_{Xik} D_{Yjm} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [A_I^{(v,v)}]_{ij} = -\frac{i}{\beta} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Big|_{ij} - \frac{\beta^2}{R} - i\beta W_{ij} - \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{ij} \\ [A_{II}^{(v,v)}]_{ik} = \frac{1}{R} D_{Xik}^{(2)} - U_{ij} D_{Xik} \\ [A_{III}^{(v,v)}]_{jm} = -\frac{1}{\beta^2 R} D_{Yjm}^{(4)} + \frac{V_{ij}}{\beta^2} D_{Yjm}^{(3)} + \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{2}{R} + i\beta W_{ij} + \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{ij} \right) D_{Yjm}^{(2)} - V_{ij} D_{Yjm} \\ [A_{IV}^{(v,v)}]_{km} = -\frac{1}{\beta^2} \left(\left(\frac{1}{R} D_{Xik}^{(2)} - U_{ij} D_{Xik} \right) D_{Yjm}^{(2)} - \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{ij} D_{Xik} D_{Yjm} \right) \\ [B_I^{(v,v)}]_{ij} = -i \qquad [B_{III}^{(v,v)}]_{jm} = \frac{i}{\beta^2} D_{Yjm}^{(2)} \end{array} \right.$$

Les conditions limites sont ensuite ajoutées de façon à reproduire le schéma suivant :

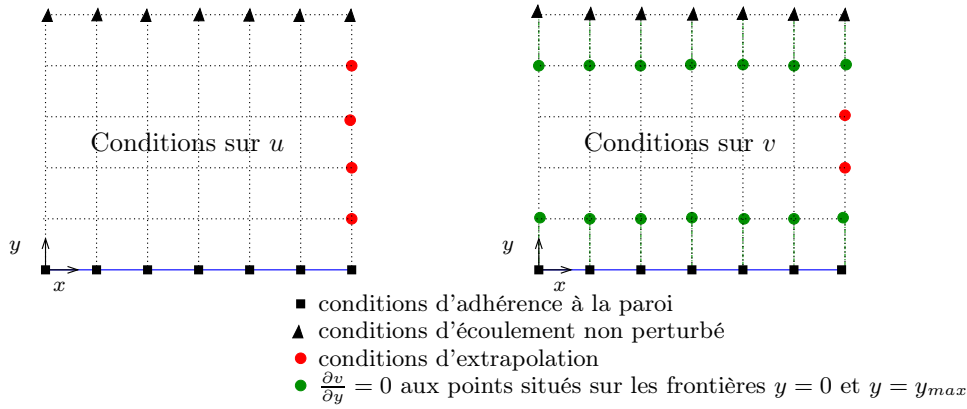


FIG. B.2 – Représentation des conditions limites en formulation réduite dans le domaine de calcul de l'écoulement incompressible de Hiemenz

Aux points situés en $x = 0$ on conserve les équations de la mécanique car en utilisant des matrices de dérivation paires et impaires on vérifie implicitement les conditions de symétrie qu'il aurait fallu écrire.

B.4 Convergence en maillage, dépendance au domaine de calcul et aux conditions limites

B.4.1 Précision des modes obtenus vis-à-vis d'une modification de maillage

La table B.1 regroupe les valeurs des modes $S1$, $A1$, $S2$ et $A2$ obtenus pour différentes résolutions de points pour la discrétisation en x et en y . On obtient aisément le mode $S1$ avec 4 chiffres significatifs pour la vitesse de phase et 3 chiffres significatifs pour le taux d'amplification. Le nombre de points utilisés pour la discrétisation du domaine en x est le paramètre le plus sensible. Plus la résolution dans cette direction est bonne et plus le nombre de modes convergés est grand. On pouvait s'attendre à cette constatation du fait de la dépendance polynomiale croissante des modes. En pratique, nous avons utilisé 71 points en x afin de s'assurer 3 chiffres significatifs pour le taux d'amplification de $S2$. La résolution pour le domaine y influence les chiffres significatifs en-deçà de 10^{-6} , en réalité nous pensons que ces derniers ne doivent pas être pris en compte car il est certain que dans cette gamme de valeurs les résultats sont également extrêmement sensibles au choix du point de raffinement y_i et à la résolution de points dans la couche limite que ce choix implique¹. La table B.2 propose des comparaisons pour les mêmes quatre modes pour différents domaines de calcul $[0, x_{max}] \times [0, y_{max}]$. On conclut de façon similaire en observant que la taille du domaine en y n'a d'influence que sur les chiffres significatifs en-deçà de 10^{-5} voire 10^{-6} . Le choix de $y_{max} = 50$ a été motivé par le souhait d'avoir un domaine le plus petit possible dans la gamme où ce paramètre n'a pas d'influence sur les résultats, afin d'utiliser un nombre de points assez petit dans un but d'économie de mémoire mais suffisamment grand pour assurer une bonne représentation des fonctions propres. En revanche le choix de x_{max} est crucial vis-à-vis de l'obtention de $S2$ et $A2$ ². Pour des valeurs de x_{max} trop faibles la branche observée en-dessous de la série de modes qui nous intéresse est ramenée à des taux d'amplifications plus

¹Sans en être une preuve, cette idée est confirmée par l'identité des valeurs pour le mode $S1$ à une résolution en y donnée, quelle que soit la résolution en x .

²Les astérisques signalent que le mode n'a pas été observé

élevés et vient donc « parasiter » les modes $S2$ et $A2$. En particulier, les résultats présentés dans [31] mentionnaient uniquement les modes $S1$ et $A1$ car à ce moment là nous avons choisi un domaine en x , identique à celui utilisé par Lin & Malik, qui s'avère être insuffisant pour notre discrétisation puisqu'il nous avait conduit à nous interroger sur l'existence des modes suivants.

B.4.2 Conditions limites sur les frontières artificielles Γ_{num} du domaine

Comme nous l'avons déjà évoqué, les conditions limites à imposer sur les frontières artificielles du domaine, soit en $x = x_{max}$ (et $x = -x_{max}$ si on ne considère pas les symétries du problème), constituent un point ardu de cette étude. La première idée est de laisser les équations de la mécanique puisque physiquement il n'y a *a priori* aucune raison d'imposer quoi que ce soit. C'est ce que nous avons tout d'abord fait dans une version utilisant la formulation réduite des équations aux perturbations. Nous n'obtenions alors aucun des modes recherchés. Avec une formulation primitive, le système n'est tout simplement pas inversible. Finalement nous avons opté, sur les conseils de Theofilis (communication privée), pour une condition d'extrapolation. On choisit une extrapolation quadratique, autrement dit la valeur en y_{max} est calculée à l'aide des trois stations précédentes en y :

$$q(x_1, y) = q(x_2, y) + \frac{1}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} \\ \left[(x_3 - x_2) (x_1(x_2 + x_3) - x_2x_3 - x_1^2) (q(x_2, y) - q(x_4, y)) \right. \\ \left. + (x_4 - x_2) (x_1(x_2 + x_4) - x_2x_4 - x_1^2) (q(x_2, y) - q(x_3, y)) \right]$$

Des extrapolations linéaires et d'ordre 3 et 4 ont également été testées. Du point de vue des valeurs propres, les résultats sont identiques pour les modes les plus instables. L'extrapolation quadratique permet d'obtenir une meilleure précision à même nombre de points sur les modes $S2$ et $A2$. La tendance est confirmée en augmentant l'ordre de l'extrapolation mais avec un gain plus faible et à condition d'avoir suffisamment de points resserrés en sortie de domaine. Du point de vue des fonctions propres les résultats ne sont modifiés que sur les dernières positions en x du domaine et les extrapolations linéaire et quadratique semblent les plus appropriées. Nous aurions souhaité tester d'autres types de conditions mais nous n'avons pas pu trouver de conditions pertinentes et qu'il est possible d'introduire dans notre approche. Les calculs de stabilité de l'écoulement de Taylor-Culick réalisés par Thierry Féraïlle [8] utilisent également ce type de condition de sortie.

	domaine $[0, 200] \times [0, 50]$	c_r	$c_i (\times 10^2)$
S1	71 \times 53	0.35840961	0.58512010
	61 \times 53	0.35840961	0.58512010
	51 \times 63	0.35841003	0.58517969
	61 \times 63	0.35841003	0.58517969
	71 \times 43	0.35840980	0.58522134
	81 \times 53	0.35840961	0.58512010
	71 \times 63	0.35841003	0.58517969
	51 \times 83	0.35840964	0.58515350
A1	71 \times 53	0.35791964	0.40968751
	61 \times 53	0.35791964	0.40968751
	51 \times 63	0.35791996	0.40974799
	61 \times 63	0.35791996	0.40974799
	71 \times 43	0.35791975	0.40977902
	81 \times 53	0.35791964	0.40968751
	71 \times 63	0.35791996	0.40974800
	51 \times 83	0.35791964	0.40971746
S2	71 \times 53	0.35743483	0.23410857
	61 \times 53	0.35743465	0.23396958
	51 \times 63	0.35743689	0.23385669
	61 \times 63	0.35743487	0.23403074
	71 \times 43	0.35743485	0.23419049
	81 \times 53	0.35743539	0.23412716
	71 \times 63	0.35743504	0.23416989
	51 \times 83	0.35743665	0.23382218
A2	71 \times 53	0.35696896	0.06604485
	61 \times 53	0.35682505	0.07113307
	51 \times 63	0.35650350	0.06170356
	61 \times 63	0.35682503	0.07120179
	71 \times 43	0.35696880	0.06612092
	81 \times 53	0.35698535	0.05931373
	71 \times 63	0.35696904	0.06611448
	51 \times 83	0.35650356	0.06165353

TAB. B.1 – Effet de la résolution en x et en y pour un domaine $[0, 200] \times [0, 50]$ sur les valeurs des modes $S1$, $A1$, $S2$, $A2$ de l'écoulement Hiemenz en flèche de fluide incompressible pour $\mathcal{R} = 800$, $\beta = 0.255$

résolution 71×53 points		c_r	$c_i(\times 10^2)$
<i>S1</i>	$[0, 200] \times [0, 50]$	0.35840961	0.58512010
	$[0, 200] \times [0, 40]$	0.35840959	0.58514564
	$[0, 200] \times [0, 60]$	0.35840994	0.58516640
	$[0, 100] \times [0, 50]$	0.35840961	0.58512010
	$[0, 300] \times [0, 50]$	0.35840961	0.58512010
<i>A1</i>	$[0, 200] \times [0, 50]$	0.35791964	0.40968751
	$[0, 200] \times [0, 40]$	0.35791961	0.40971061
	$[0, 200] \times [0, 60]$	0.35791989	0.40973649
	$[0, 100] \times [0, 50]$	0.35791964	0.40968757
	$[0, 300] \times [0, 50]$	0.35791964	0.40968751
<i>S2</i>	$[0, 200] \times [0, 50]$	0.35743483	0.23410857
	$[0, 200] \times [0, 40]$	0.35743478	0.23412933
	$[0, 200] \times [0, 60]$	0.35743499	0.23416008
	$[0, 100] \times [0, 50]$	0.35754982	0.22496689
	$[0, 300] \times [0, 50]$	0.35743596	0.23417369
<i>A2</i>	$[0, 200] \times [0, 50]$	0.35696896	0.06604485
	$[0, 200] \times [0, 40]$	0.35696888	0.06606317
	$[0, 200] \times [0, 60]$	0.35696903	0.06610582
	$[0, 100] \times [0, 50]$	***	***
	$[0, 300] \times [0, 50]$	0.35715417	0.04412399

TAB. B.2 – Effet des dimensions du domaine de calcul, x_{max} et y_{max} à une résolution de points donnée, 36×53 , sur les valeurs des modes *S1*, *A1*, *S2*, *A2* de l'écoulement Hiemenz en flèche de fluide incompressible pour $\mathcal{R} = 800$, $\beta = 0.255$

C

Écoulement de Hiemenz compressible

La forme matricielle du problème aux valeurs propres issu du système (5.2) est semblable à celle donnée en (B.3) mais dans ce cas, le vecteur propre recherché est composé des valeurs discrètes dans le plan (x, y) des perturbations de vitesse u, v, w , de pression p et de température T rangées par iso-position en x . Les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont alors de dimension $5(n_x + 1)(n_y + 1)$ et leurs lignes traduisent l'écriture des équations de quantité de mouvement selon x (5.2b), selon y (5.2c), selon z (5.2d), l'équation de continuité (5.2a) et enfin l'équation de l'énergie (5.2e). Les conditions aux limites discrètes sont introduites dans les matrices sur les lignes correspondant aux points où sont écrites ces conditions. Ceci est illustré par le schéma (B.1) donné en écoulement incompressible auquel il faut ajouter les conditions pour la température. La condition à la paroi étant une condition de paroi soit athermane soit isotherme.

C.1 Conditions de compatibilité pour la pression

Lors de la résolution du problème de stabilité en formulation primitive, la pression étant traité comme toutes les autres grandeurs, il est nécessaire d'ajouter des conditions dites de compatibilité de façon à ce que le problème numérique soit correctement posé. Ces conditions ne sont autres que l'équation de quantité de mouvement dans la direction normale à la paroi dégénérées aux points $y = 0$ et $y = y_{max}$. En paroi athermane on écrit en $y = 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mathcal{R}} \left[\frac{2}{3} \frac{d\bar{\mu}}{dy}(x, 0) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{3} \bar{\mu}(x, 0) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right] u(x, 0) \\ & - \frac{1}{\mathcal{R}} \left[\bar{\mu}(x, 0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \bar{\mu}(x, 0) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{4}{3} \frac{d\bar{\mu}}{dy}(x, 0) \frac{\partial}{\partial y} \right] v(x, 0) \\ & - \frac{i\beta}{3\mathcal{R}} \bar{\mu}(x, 0) \frac{\partial w}{\partial y}(x, 0) + \frac{\partial p}{\partial y}(x, 0) - \frac{1}{\mathcal{R}} \left[\frac{d\bar{\mu}}{dT}(x, 0) \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x \partial y}(x, 0) + \frac{4}{3} \frac{d^2 \bar{V}}{dy^2}(x, 0) + i\beta \frac{d\bar{W}}{dy}(x, 0) \right) \right. \\ & \left. + \frac{4}{3} \frac{d^2 \bar{\mu}}{dT^2}(x, 0) \frac{d\bar{T}}{dy}(x, 0) \frac{d\bar{V}}{dy}(x, 0) + \frac{d\bar{\mu}}{dT}(x, 0) \frac{\partial \bar{U}}{\partial y}(x, 0) \frac{\partial}{\partial x} \right] T(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

En paroi isotherme on écrit en $y = 0$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mathcal{R}} \left[\frac{2}{3} \frac{d\bar{\mu}}{dy}(x, 0) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{3} \bar{\mu}(x, 0) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right] u(x, 0) \\
& - \frac{1}{\mathcal{R}} \left[\bar{\mu}(x, 0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \bar{\mu}(x, 0) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{4}{3} \frac{d\bar{\mu}}{dy}(x, 0) \frac{\partial}{\partial y} \right] v(x, 0) \\
& - \frac{i\beta}{3\mathcal{R}} \bar{\mu}(x, 0) \frac{\partial w}{\partial y}(x, 0) + \frac{\partial p}{\partial y}(x, 0) \\
& - \frac{1}{\mathcal{R}} \left[\frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}}(x, 0) \frac{\partial \bar{U}}{\partial y}(x, 0) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}}(x, 0) \frac{d\bar{V}}{dy}(x, 0) \frac{\partial}{\partial y} \right] T(x, 0) = 0
\end{aligned}$$

En $y = y_{max}$ la condition de compatibilité pour p est donnée par :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mathcal{R}} \left[\frac{2}{3} \frac{d\bar{\mu}}{dy}(x, y_{max}) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{3} \bar{\mu}(x, y_{max}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right] u(x, y_{max}) \\
& + \left[\frac{1}{\bar{T}(x, y_{max})} \left(\bar{U}(x, y_{max}) \frac{\partial}{\partial x} + \bar{V}(x, y_{max}) \frac{\partial}{\partial y} \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{\mathcal{R}} \left(\bar{\mu}(x, y_{max}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \bar{\mu}(x, y_{max}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{4}{3} \frac{d\bar{\mu}}{dy}(x, y_{max}) \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] v(x, y_{max}) \\
& - \frac{i\beta}{3\mathcal{R}} \bar{\mu}(x, y_{max}) \frac{\partial w}{\partial y}(x, y_{max}) + \left[\frac{\gamma M^2}{\bar{T}(x, y_{max})} \bar{V}(x, y_{max}) \frac{d\bar{V}}{dy}(x, y_{max}) + \frac{\partial}{\partial y} \right] p(x, y_{max}) \\
& - \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}}(x, y_{max}) \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial y}(x, y_{max}) \frac{\partial}{\partial x} + \left(-\frac{2}{3} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x}(x, y_{max}) + \frac{4}{3} \frac{d\bar{V}}{dy}(x, y_{max}) \right) \frac{\partial}{\partial y} \right] T(x, y_{max}) = 0
\end{aligned}$$

C.2 Écriture des grandeurs dérivées relatives au champ moyen

Dans la section 5.1.2 le champ moyen $3D$ de l'écoulement compressible de Hiemenz a été exprimé afin d'être utilisable pour le calcul de stabilité. À toutes fins utiles, on précise ici les

dérivées de ces mêmes grandeurs intervenant dans les équations aux perturbations.

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial y}(x, y) = x \frac{\sqrt{\mathcal{G}_e} f''(\eta)}{\mathcal{R} h(\eta)}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2}(x, y) = x \frac{\mathcal{G}_e}{\mathcal{R}} \left[\frac{f'''(\eta)}{h^2(\eta)} - \frac{f''(\eta)h'(\eta)}{h^3(\eta)} \right]$$

$$\frac{d\bar{V}}{dy}(y) = -\frac{1}{\mathcal{R}} f'(\eta) - \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{h'(\eta)}{h(\eta)}$$

$$\frac{d^2 \bar{V}}{dy^2}(y) = -\frac{\sqrt{\mathcal{G}_e}}{\mathcal{R} h(\eta)} \left[f''(\eta) + \frac{f'(\eta)h'(\eta)}{h(\eta)} + \frac{f(\eta)h''(\eta)}{h(\eta)} - \frac{f(\eta)h'^2(\eta)}{h^2(\eta)} \right]$$

$$\frac{d\bar{W}}{dy}(y) = \sqrt{\mathcal{G}_e} \frac{g'(\eta)}{h(\eta)}$$

$$\frac{d^2 \bar{W}}{dy^2}(y) = \mathcal{G}_e \left[\frac{g''(\eta)}{h^2(\eta)} - \frac{g'(\eta)h'(\eta)}{h^3(\eta)} \right]$$

$$\frac{d\bar{T}}{dy}(y) = \sqrt{\mathcal{G}_e} \frac{h'(\eta)}{h(\eta)}$$

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dy^2}(y) = \mathcal{G}_e \left[\frac{h''(\eta)}{h^2(\eta)} - \frac{h'(\eta)}{h^3(\eta)} \right]$$

$$\frac{d\bar{\mu}}{dy}(y) = \sqrt{\mathcal{G}_e} \frac{1.711 \times 10^{-5}}{\mu_e} \frac{1 + 110.4/273}{(T_e h(\eta) + 110.4)^2} \sqrt{\frac{T_e}{273}} T_e \left(\frac{3}{2} \frac{110.4}{\sqrt{h(\eta)}} + \frac{1}{2} T_e \sqrt{h(\eta)} \right) h'(\eta)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\mu}}{dy^2}(y) = \mathcal{G}_e \frac{1.711 \times 10^{-5}}{\mu_e} \frac{1 + 110.4/273}{(T_e h(\eta) + 110.4)^3} \sqrt{\frac{T_e}{273}} T_e & \left[h''(\eta) (T_e h(\eta) + 110.4) \left(\frac{1}{2} T_e h^{-1/2}(\eta) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{3}{2} 110.4 h^{-3/2}(\eta) \right) + h'^2(\eta) (T_e h(\eta) + 110.4) \left(\frac{1}{4} T_e h^{-3/2}(\eta) + \frac{3}{4} 110.4 h^{-5/2}(\eta) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{d\bar{\mu}}{d\bar{T}}(y) = \frac{1.711 \times 10^{-5}}{\mu_e} \sqrt{\frac{T_e}{273}} (1 + 110.4/273) T_e \frac{\frac{3}{2} 110.4 \sqrt{\bar{T}(y)} + \frac{1}{2} T_e \bar{T}(y)^{3/2}}{(T_e \bar{T}(y) + 110.4)^2}$$

$$\frac{d^2 \bar{\mu}}{d\bar{T}^2}(y) = \frac{1.711 \times 10^{-5}}{\mu_e} \sqrt{\frac{T_e}{273}} (1 + 110.4/273) T_e \frac{-\frac{3}{2} 110.4 T_e \sqrt{\bar{T}(y)} - \frac{1}{4} T_e^2 \bar{T}^{3/2}(y) + \frac{3}{4} 110.4^2 / \sqrt{\bar{T}(y)}}{(T_e \bar{T}(y) + 110.4)^3}$$

**Une approche non locale pour l'étude des instabilités linéaires.
Application à l'écoulement de couche limite compressible
le long d'une ligne de partage.**

Résumé : Ce travail propose une généralisation de l'approche locale classique de stabilité linéaire pouvant être appliquée à des écoulements complexes.

L'approche locale est réservée dans le cas incompressible à des écoulements dits parallèles et conduit à un problème donné sous forme d'une équation différentielle ordinaire. L'approche non locale développée permet d'étudier n'importe quel écoulement stationnaire ayant une évolution constante dans une des trois directions d'espace. Le problème est alors donné sous forme d'équations aux dérivées partielles (EDP). L'imposition de conditions limites homogènes, parfois délicates à établir, conduit à l'écriture d'un problème aux valeurs propres. Les deux directions d'espace intervenant dans les EDP sont discrétisées à l'aide d'une méthode de collocation spectrale. Le problème est ainsi représenté par des matrices de grande taille dont la détermination des valeurs propres fait appel à la méthode d'Arnoldi.

L'approche non locale est ensuite mise en oeuvre pour étudier le développement d'instabilités naturelles au sein de l'écoulement de couche limite le long du bord d'attaque d'une voilure d'avion. L'écoulement est modélisé par l'écoulement de Hiemenz en flèche. Les études sont réalisées d'abord en incompressible puis en compressible. La perturbation la plus instable correspond toujours au mode de Görtler-Hämmerlin donné par l'approche locale en incompressible mais d'autres modes d'instabilité de fréquences voisines sont également mis en évidence. De façon semblable au comportement d'une couche limite qui se développe sur une plaque plane on note les effets stabilisants d'une augmentation de nombre de Mach jusqu'à un certain seuil et d'un refroidissement de paroi. Enfin, la présence de modes de type acoustique se propageant dans la direction normale à la paroi est également discutée dans ce mémoire.

Mots-clés : stabilité hydrodynamique - écoulement de Hiemenz en flèche - compressible - EDP - collocation spectrale - méthode d'Arnoldi

Abstract : This work consist of a generalization of the classic local linear stability approach, that may be used for complex flows.

Local approach for incompressible flows is dedicated to parallel flows and led to a problem represented by ordinary differential equations. The nonlocal approach developed herein may be used for any flow having a constant behaviour in one of the three space directions. The problem is then given by a set of partial derivative equations (PDE). Adding suitable homogeneous boundary conditions, which are sometimes tricky to establish, led to an eigenvalue problem. Both space directions involved in the PDE are discretized using a spectral collocation method. The problem is then represented by large matrices whose eigenvalues are evaluated with an Arnoldi method.

The nonlocal approach is then used to study the growth of natural instabilities in the boundary layer flow which is developing around the leading edge of an aircraft wing. The swept Hiemenz flow is used to represent the base flow. Studies are first undertaken for an incompressible flow and then for the compressible flow. The most amplified instability is always the one corresponding to the Görtler-Hämmerlin mode given by the local approach in the incompressible case. However other instability modes with close frequencies emerge. Raising the Mach number until a certain threshold or cooling the surface have stabilizing effects on the boundary layer flow likewise for the one developing over a flat plate. Finally the existence of acoustic-like modes that travel in the wall normal direction is discussed.

Key words : hydrodynamic stability - swept Hiemenz flow - compressible - PDE - spectral collocation technique - Arnoldi method

