

# THÈSE

présentée en vue de  
l'obtention du titre de

**DOCTEUR**

de

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE**

**ÉCOLE DOCTORALE : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS**

**SPÉCIALITÉ : Mathématiques appliquées**

**Yoann VENTRIBOUT**

**Contrôle des perturbations aéroacoustiques par impédances de parois :  
application à un modèle de matériaux poreux**

Soutenue le 20 janvier 2006 devant le jury :

<b>MM.</b>	<b>P. DEGOND</b>	<b>Président</b>
	<b>Ph. DELORME</b>	
	<b>T. HA-DUONG</b>	<b>Rapporteur</b>
	<b>P.A. MAZET</b>	<b>Directeur de thèse</b>
	<b>S. PIPERNO</b>	<b>Rapporteur</b>
	<b>J.P. RAYMOND</b>	

# Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent avant tout à Pierre-Alain Mazet. De par sa disponibilité, sa pédagogie, et sa passion pour la recherche en mathématiques appliquées, il m'a permis d'accomplir ce travail. Nos liens vont bien au-delà de la relation "professeur-doctorant". Je remercie également Jean-Pierre Raymond pour son soutien, son intuition, et les efforts réellement importants qu'il a consenti à fournir pour la relecture des différentes propositions d'articles et de rapports que je lui ai transmis au cours de ma thèse.

Je sais gré à messieurs Daniel Kalfon et François Rogier de m'avoir accueilli et encouragé au sein de l'unité M2SN de l'ONERA-CERT qu'ils ont successivement dirigée.

Bien entendu, la soutenance de thèse n'aurait pas eu lieu si Serge Piperno et Tuong Ha-Duong n'avaient pas accepté de rapporter ce travail. Leurs remarques particulièrement judicieuses et pertinentes mettent en lumière toute l'attention qu'ils ont bien voulu porter à ce manuscrit. J'exprime également ma gratitude à Pierre Degond pour avoir accepté de participer au jury.

J'adresse également toute ma sympathie et ma reconnaissance à Philippe Delorme (Hi! I'm french) et Christophe Peyret, notamment pour leur collaboration précieuse au sein du projet OTARI.

Je ne saurais en aucun cas oublier les thésards et stagiaires que j'ai croisés au M2SN (et dont certains sont devenus des amis). La liste est longue, et mes pensées vont tout d'abord vers ceux qui ont collaboré de près ou de loin aux travaux de cette thèse, à savoir Vincent, Florian, Laurent, Emmanuel, Céline. Mais d'autres ont été de précieux réconforts dans les moments difficiles (si si, il y en a) comme Stéphane, Géraldine ou Eric.

Bien entendu, je remercie mes parents qui ont toujours fait en sorte que je puisse continuer mes études, ainsi que pour m'avoir encouragé dans des choix parfois difficiles à assumer. Enfin, the last but not the least, ma dulcinée Véronique a su me redonner le surcroît de motivation dont j'avais grandement besoin dans les moments où je ne cessais de répéter que je n'y arriverais pas, que le travail de thèse n'était pas fait pour moi (d'ailleurs, certains diront après avoir lu cette thèse qu'il n'était pas fait pour moi!!!). Elle peut revendiquer une part importante dans l'aboutissement de ce travail.

*A Marguerite*

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>iv</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Résolution des équations d'Euler linéarisées barotropes</b>	<b>11</b>
1.1 Présentation de l'aéroacoustique . . . . .	11
1.2 Les équations d'Euler linéarisées au premier ordre . . . . .	13
1.2.1 Linéarisation entropique des équations d'Euler . . . . .	14
1.2.2 Perturbations barotropes . . . . .	16
1.3 Existence et unicité du système instationnaire posé avec des conditions aux limites admissibles . . . . .	18
1.3.1 Conditions aux limites admissibles algébriques . . . . .	19
1.3.2 Relèvement des conditions aux limites admissibles . . . . .	25
<b>2 Approximation par une méthode Galerkin discontinue</b>	<b>31</b>
2.1 Formulation variationnelle du problème direct . . . . .	31
2.2 Discrétisation du problème direct . . . . .	33
2.3 Schéma volumes finis en espace et Euler explicite en temps ; stabilité conditionnelle en norme $L^2$ . . . . .	35
2.4 Conditions de stabilité pour des approximations d'ordres plus élevés . . . . .	38
2.5 Validation numérique de la méthode d'approximation . . . . .	45
2.5.1 Modes guidés bidimensionnels en présence d'un écoulement uniforme . . . . .	45
2.6 Mise en évidence d'instabilités d'écoulement, en résolution volumes finis en espace et Euler explicite en temps . . . . .	51
2.6.1 Définitions des problèmes harmoniques . . . . .	52
2.6.2 Difficultés inhérentes aux problèmes d'aéroacoustique . . . . .	55
2.6.3 Mise en évidence numérique d'instabilités d'écoulements . . . . .	56
<b>3 CPML pour l'aéroacoustique</b>	<b>67</b>
3.1 Etude d'une formulation "PML" des équations tridimensionnelles à coefficients constants	69
3.2 Etude du caractère bien posé du problème temporel . . . . .	74
3.2.1 Un premier modèle PML . . . . .	74
3.2.2 Un second modèle PML : les CPML . . . . .	78
3.3 Approximation des modèles PML . . . . .	79
3.3.1 Schéma d'approximation pour le premier modèle PML . . . . .	79
3.3.2 Schéma d'approximation pour les CPML . . . . .	80

3.4	Validation numérique du modèle CPML pour l'aéroacoustique . . . . .	81
3.4.1	Couches PML suivant la direction $x$ , résolution volumes finis dans le domaine . . . . .	81
3.4.2	Couches PML suivant les directions $x, y$ , résolution volumes finis dans le domaine . . . . .	81
3.4.3	Couches PML bidimensionnelles, résolution Galerkin discontinue P1 dans le domaine . . . . .	82
3.5	Conclusion . . . . .	96
<b>4</b>	<b>Méthodologie de résolution des problèmes inverses ; Modèle de matériau poreux</b>	<b>97</b>
4.1	Etude d'un cas monodimensionnel . . . . .	100
4.2	Méthodologie de résolution du problème d'optimisation . . . . .	103
4.2.1	Calcul de la dérivée de la fonctionnelle à l'aide du problème adjoint . . . . .	104
4.2.2	L'adjoint du problème discrétisé . . . . .	108
4.3	Caractérisation physique de la fonctionnelle objectif et de la réflexion acoustique . . . . .	110
4.3.1	Fonctionnelles objectif . . . . .	110
4.3.2	Modèle de réflexion acoustique pour matériaux poreux . . . . .	111
4.4	Etude de sensibilité et choix de l'algorithme d'optimisation . . . . .	120
<b>5</b>	<b>Résultats numériques : Gains et identifications</b>	<b>129</b>
5.1	Contrôle optimal : réduction du bruit . . . . .	130
5.1.1	Source ponctuelle et paramètres réels . . . . .	131
5.1.2	Sources modales et écoulement porteur uniforme . . . . .	133
5.2	Résultats d'identifications . . . . .	145
5.2.1	Identification de "trous" dans les parois internes . . . . .	145
5.2.2	Identification d'un matériau poreux . . . . .	147
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>148</b>

# Table des figures

1	Le domaine d'étude. $\Gamma_c$ est un ouvert mesurable de $\Gamma$ de mesure non nulle. . . . .	2
2.1	Element de référence bidimensionnel (triangle rectangle) et ses fonctions de bases. . .	42
2.2	Element de référence monodimensionnel. . . . .	44
2.3	Le guide plan. . . . .	46
2.4	Maillage bidimensionnel d'un canal rigide. . . . .	48
2.5	Comparaison des parties réelles et imaginaires de la variable $u$ entre la solution exacte et la solution obtenue numériquement. . . . .	49
2.6	Comparaison des parties réelles et imaginaires de la variable $v$ entre la solution exacte et la solution obtenue numériquement. . . . .	50
2.7	Comparaison des parties réelles et imaginaires de la variable $\rho$ entre la solution exacte et la solution obtenue numériquement. . . . .	50
2.8	Propagations aéroacoustiques sans écoulement sur une géométrie tridimensionnelle représentative d'un Falcon. . . . .	51
2.9	Instabilités de type Kelvin-Helmholtz. . . . .	56
2.10	Maillage rectangulaire du canal bidimensionnel. . . . .	57
2.11	Représentation du profil de vitesse choisi pour un écoulement convectivement instable. . . . .	58
2.12	Profils de la solution pour une couche de mélanges sans retour, avec excitation par une condition initiale. . . . .	59
2.13	Profils de la solution pour une couche de mélanges sans retour, avec excitation par un second membre sinusoïdal. . . . .	60
2.14	Représentation du profil de vitesse choisi pour un écoulement stable. . . . .	61
2.15	Profils de la solution pour un écoulement parabolique, avec excitation par une condition initiale. . . . .	62
2.16	Profils de la solution pour un écoulement parabolique, avec excitation par un second membre sinusoïdal. . . . .	63
2.17	Maillage considéré pour la mise en évidence d'une instabilité absolue. . . . .	64
2.18	Profil de vitesses pour un écoulement absolument instable. . . . .	64
2.19	Profils de la solution pour une couche de mélanges avec retour, avec excitation par une condition initiale. . . . .	65
2.20	Mise en évidence d'une instabilité convective. . . . .	66
3.1	Comparaison des parties réelles et imaginaires entre la solution exacte et la solution obtenue numériquement, pour $n = 2$ . . . . .	67
3.2	Profils de $\rho$ pour un écoulement porteur sans convection avec conditions de glissement sur les bords verticaux et couches PML sur les bords horizontaux. . . . .	84
3.3	Décroissance exponentielle de $\rho$ dans la zone PML. . . . .	84

3.4	Profils de $\rho$ pour un écoulement porteur avec convection constante, conditions de glissement sur les bords verticaux et couches PML sur les bords horizontaux, obtenus avec le premier modèle PML. . . . .	85
3.5	Profils de $v$ pour un écoulement porteur avec convection constante, conditions de glissement sur les bords verticaux et couches PML sur les bords horizontaux, obtenus avec le premier modèle PML. . . . .	85
3.6	Profils de $\rho$ pour un écoulement porteur avec convection constante, conditions de glissement sur les bords verticaux et couches PML sur les bords horizontaux, obtenus avec le modèle CPML. . . . .	86
3.7	Profils de $v$ pour un écoulement porteur avec convection constante, conditions de glissement sur les bords verticaux et couches PML sur les bords horizontaux, obtenus avec le modèle CPML. . . . .	86
3.8	Profils de $\rho$ pour un écoulement porteur nul, et couches PML 2D, obtenus avec le premier modèle PML. . . . .	87
3.9	Profils de $v$ pour un écoulement porteur nul, et couches PML 2D, obtenus avec le premier modèle PML. . . . .	87
3.10	Profils de $\rho$ pour un écoulement porteur nul, et couches PML 2D, obtenus avec le modèle CPML. . . . .	88
3.11	Profils de $v$ pour un écoulement porteur nul, et couches PML 2D, obtenus avec le modèle CPML. . . . .	88
3.12	Profils de $\rho$ pour un écoulement à convection constante, et couches PML 2D, obtenus avec le premier modèle PML. . . . .	89
3.13	Profils de $v$ pour un écoulement à convection constante, et couches PML 2D, obtenus avec le premier modèle PML. . . . .	89
3.14	Profils de $\rho$ pour un écoulement à convection constante, et couches PML 2D, obtenus avec le modèle CPML. . . . .	90
3.15	Profils de $v$ pour un écoulement à convection constante, et couches PML 2D, obtenus avec le modèle CPML. . . . .	90
3.16	Profils de $u$ pour un écoulement à convection constante perturbé par une source rotationnelle, pour des couches PML 2D. . . . .	91
3.17	Profils de $v$ pour un écoulement à convection constante perturbé par une source rotationnelle, pour des couches PML 2D. . . . .	91
3.18	Profils de $u$ pour un écoulement à convection constante perturbé par une source rotationnelle, pour des couches CPML 2D. . . . .	92
3.19	Profils de $v$ pour un écoulement à convection constante perturbé par une source rotationnelle, pour des couches CPML 2D. . . . .	92
3.20	Comparaison des parties réelles et imaginaires entre la solution exacte, la solution avec les CPML et la solution avec les conditions aux limites non réfléchissantes approchées, pour des sources modales de seconde espèce, en un point proche de la source. . . . .	93
3.21	Comparaison des parties réelles et imaginaires entre la solution exacte, la solution avec les CPML et la solution avec les conditions aux limites non réfléchissantes approchées, pour le mode nul, en un point proche de la source. . . . .	93
3.22	Maillage de la zone PML bidimensionnelle pour une prise d'air réaliste. . . . .	94
3.23	Maillage du domaine de calcul d'une prise d'air réaliste. . . . .	94
3.24	Evolution de la partie réelle de $\rho$ au cours du temps assez long pour obtenir le régime périodique, dans une prise d'air réaliste. . . . .	95

4.1	Le domaine d'étude. . . . .	97
4.2	Exemple monodimensionnel . . . . .	100
4.3	Matériau poreux absorbant revêtant une paroi rigide. . . . .	113
4.4	Module de la réflexion acoustique en fonction de l'épaisseur et de la porosité du matériau, pour $\Lambda = \Lambda' = 0.1\text{mm}$ et 2 fréquences différentes. . . . .	116
4.5	Module de la réflexion acoustique pour une fréquence donnée pour $\Lambda = 0.2\text{mm}$ , $\Lambda' = 0.1\text{mm}$ à gauche, et pour $\Lambda = 0.2\text{mm}$ , $\Lambda' = 0.3\text{mm}$ à droite. . . . .	116
4.6	Domaine des $\beta$ admissibles pour $f = 1000$ Hz. . . . .	118
4.7	Domaine des $\beta$ admissibles pour $f = 3000$ Hz. . . . .	118
4.8	Domaine des $\beta$ admissibles pour $f = 5000$ Hz. . . . .	119
4.9	Maillage bidimensionnel représentatif d'une prise d'air. . . . .	120
4.10	Analogie monodimensionnelle pour une source invariante par translation. . . . .	121
4.11	Fonctionnelles objectif. . . . .	122
4.12	Fonctionnelles objectif. . . . .	123
4.13	Fonctionnelle $J(\beta)$ pour différentes longueurs caractéristiques. . . . .	125
5.1	Précision du maillage représentatif d'une prise d'air bidimensionnelle. . . . .	130
5.2	Distribution des paramètres de coefficients de réflexion acoustique à valeurs réelles sur les parois internes du canal pour $n = 40$ . . . . .	132
5.3	L'observatoire tronqué est en sortie de canal en rouge. . . . .	134
5.4	$Re(\rho)$ , $n = 2$ , $M = 0$ , parois rigides. . . . .	135
5.5	$Re(\rho)$ , $n = 0$ , $M = 0.3$ , parois rigides. . . . .	136
5.6	Dimension=20, $n = 0$ , $M = 0$ , $f=1000\text{Hz}$ . . . . .	141
5.7	Dimension=20, $n = 2$ , $M = 0$ , $f=1000\text{Hz}$ . . . . .	141
5.8	Dimension=20, $n = 0$ , $M = 0.3$ , $f=1000\text{Hz}$ . . . . .	142
5.9	Dimension=20, $n = 2$ , $M = 0.3$ , $f=1000\text{Hz}$ . . . . .	142
5.10	Dimension=20, $n = 0$ , $M = 0$ , $f=3000\text{Hz}$ . . . . .	143
5.11	Dimension=20, $n = 2$ , $M = 0$ , $f=3000\text{Hz}$ . . . . .	143
5.12	Dimension=20, $n = 0$ , $M = 0.3$ , $f=3000\text{Hz}$ . . . . .	144
5.13	Dimension=20, $n = 2$ , $M = 0.3$ , $f=3000\text{Hz}$ . . . . .	144
5.14	Identification d'un "trou". . . . .	146
5.15	Identification de 2 "trous" du treizième de longueur d'ondes. . . . .	146
5.16	Identification de 4 "trous" du treizième de longueur d'ondes non symétriquement localisés sur chacune des deux parois internes. . . . .	147
5.17	Identification d'un matériau poreux. . . . .	148





# Introduction

Ce mémoire présente les travaux de recherche effectués sous la direction conjointe de Pierre-Alain Mazet (ONERA Toulouse) et Jean-Pierre Raymond (Laboratoire MIP de l'université de Toulouse Paul Sabatier). Ces travaux traitent de phénomènes de propagations acoustiques en présence d'écoulements et de leur contrôle optimal à l'aide de conditions aux limites de type impédance complexe.

## Contexte général

En trente ans, les progrès intégrant les nouvelles technologies disponibles ont permis de réduire en moyenne d'un peu plus de 30 décibels le bruit des avions. Mais les nuisances sonores occasionnées doivent respecter des normes de plus en plus strictes (normes imposées par l'organisation de l'aviation civile internationale). Deux sources majeures de bruit dans un avion (en vol, au décollage ou à l'atterrissage) peuvent être distinguées :

1. Le bruit aérodynamique qui résulte du déplacement de l'avion dans l'air (prépondérant en phase d'atterrissage).
2. Le bruit émis par les moteurs.

A ces deux sources importantes de bruit viennent s'ajouter celles du bruit de jet (flux d'air éjecté par les tuyères) et le bruit émis à l'intérieur de la nacelle par les parties tournantes (soufflante, turbine). Les progrès récents sont dûs pour l'essentiel à la nouvelle génération de turboréacteurs à grand taux de dilution, inaugurée par le CFM56. Cette tendance doit se poursuivre dans les prochaines décennies, avec toutefois un rythme réduit du fait de deux obstacles importants : la maîtrise des très hautes températures de combustion (donc limitations des structures de matériaux) et l'intégration sous l'aile de l'avion de moteurs présentant un diamètre élargi. Cette complexité croissante de l'architecture des turboréacteurs rend difficile l'élaboration de dispositifs d'atténuation de bruit émis par les nacelles.

Les enjeux commerciaux sont tels que les constructeurs aéronautiques (au sens large) mènent des actions de recherche dans l'insonorisation des nacelles (notamment le projet européen SILENCER). L'un des axes majeurs est la modélisation mathématique et numérique de champs sonores générés par des écoulements turbulents dans les conduits à parois traitées, afin d'améliorer les traitements acoustiques passifs (ou mieux encore, généraliser le contrôle acoustique actif). Cet axe va évidemment de pair avec le développement de structures absorbantes à impédances réglables (ou complètement actives). Les phénomènes physiques mis en jeu sont complexes, instationnaires et souvent non linéaires. Leur modélisation doit prendre en compte conjointement des effets aérodynamiques, des interactions fluide-structure et de l'acoustique.

## Objectifs de la thèse

Dans ce mémoire, nous nous proposons d'étudier et de contrôler des modèles de perturbations aéroacoustiques d'un écoulement porteur stationnaire, subsonique, et suffisamment régulier. Ces modèles doivent décrire des modes de propagation qui ne dépendent que de l'écoulement porteur, et c'est pourquoi il s'agira de résoudre des systèmes hyperboliques linéaires dont les coefficients dépendent de l'écoulement porteur. Ces systèmes sont obtenus par linéarisation de modèles non linéaires, avec éventuellement des hypothèses supplémentaires non restrictives, comme par exemple la barotropie de la perturbation.

On fixe un domaine  $\Omega$  régulier de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  dans lequel est placé un obstacle solide de frontière  $\Gamma$ . Loin de  $\Gamma$ , l'écoulement sera supposé uniforme et nous pourrions borner artificiellement  $\Omega$  en écrivant une condition non réfléchissante approchée à l'ordre 1 sur  $\partial\Omega \setminus \Gamma$ , ou bien d'autres conditions aux limites plus précises de type milieux fictifs absorbants seront formulées. Le but est de modéliser, à l'échelle des perturbations aéroacoustiques, l'influence de l'obstacle solide (la rugosité de sa frontière  $\Gamma$ , de petites vibrations, ...) sur les propriétés de l'écoulement perturbé. En première approximation, ceci sera réalisé par une condition aux limites à adjoindre au système hyperbolique de type condition d'impédance locale complexe. On se fixe alors deux objectifs :

1. Contrôler les phénomènes de propagation par ce type de condition aux limites. Pour cela, on modélise a priori l'obstacle et on choisit une fonction coût dépendant des paramètres locaux d'impédance qui définissent les conditions aux limites sur  $\Gamma$ . On évaluera par exemple l'énergie de perturbation localisée sur un observatoire spatio-temporel donné  $O_s$  (figure 1), ou bien l'énergie en flux acoustiques traversant des frontières d'éléments. La décroissance de l'énergie caractérisera une réduction du bruit.
2. Identifier les impédances locales qui modélisent au mieux le comportement acoustique de l'obstacle, la fonction coût étant alors définie par un écart (en énergie) sur l'observatoire entre des données mesurées et celles fournies par le modèle.

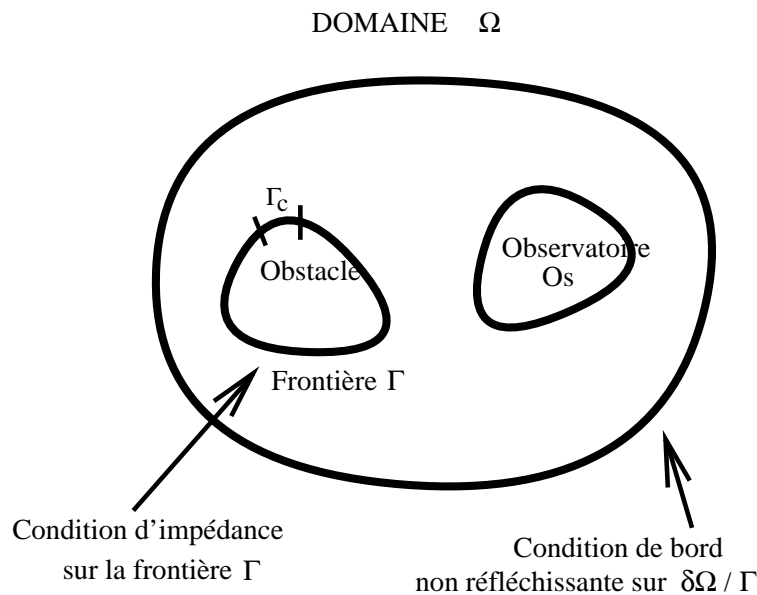


FIG. 1 – Le domaine d'étude.  $\Gamma_c$  est un ouvert mesurable de  $\Gamma$  de mesure non nulle.

## Thèmes abordés

Avant de parler de contrôle optimal des phénomènes de propagation, il faut les étudier le plus précisément possible, aussi bien du point de vue théorique que numérique. En contrôle optimal, cette phase indispensable s'appelle l'étude du problème direct.

### Propagation de perturbations aéroacoustiques

Les phénomènes généralement étudiés en aéroacoustique sont linéaires, et ce sont de petites perturbations d'un écoulement de fluide autour d'une configuration moyenne (appelé écoulement porteur) qui sont alors considérées. En écoulement subsonique, le modèle couramment retenu (système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre hyperbolique) est celui des équations d'Euler linéarisées, qui correspond à une linéarisation des équations de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et de l'équation d'état. Ce système instationnaire constitue un système de Friedrichs, bien posé en espace libre, mais non nécessairement stable en temps long (cela dépend a priori de la nature de l'écoulement porteur). Ces instabilités sont des instabilités convectives ou absolues de type Kelvin-Helmholtz et correspondent à des familles d'écoulements porteur cisailés [38],[17]. Le symbole principal de l'opérateur spatial intervenant dans le système du premier ordre n'est pas elliptique, et ses propriétés intrinsèques ne permettent pas d'utiliser les techniques habituelles permettant de résoudre les problèmes harmoniques en domaine non borné.

Pour effectuer des simulations numériques, il faut bien évidemment étudier ce système en domaine spatio-temporel borné. Les travaux [59, 60] traitent des conditions aux limites admissibles à adjoindre à un système de Friedrichs afin d'assurer l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème mixte. Dans [59], les hypothèses ne permettent pas d'appliquer directement les résultats dans le contexte de l'aéroacoustique, mais de nombreux résultats sur des extensions de régularités (régularités des solutions et des traces) sont démontrés. De plus, tous les résultats sur le système dissymétrique espace-temps sont étendus en spatio-temporel. J. Rauch étend ces résultats dans [60] à d'autres hypothèses moins restrictives.

Néanmoins, les problèmes de propagations sont en général posés dans un domaine spatial non borné (guide d'ondes infini ou complémentaire d'un domaine diffractant). Pour les systèmes de Friedrichs décrivant des phénomènes de propagations d'ondes, des conditions non réfléchissantes approchées d'ordre 1 découlent naturellement de la taxinomie des conditions aux limites admissibles. Même si dans un premier temps, ces conditions aux limites peuvent permettre de simuler l'espace libre, on peut facilement montrer qu'elles sont insuffisantes (en particulier pour des guides d'ondes en présence de sources réalistes : sources modales de modes non nul). Elles ne sont exactes que pour des ondes normales à la frontière du domaine de calcul. Une étude plus approfondie d'autres méthodes de construction de ce type de conditions est donc souhaitable, afin que les applications numériques ne soient pas contraintes par la nature de l'écoulement. Plusieurs méthodes ont été proposées pour ramener un problème de propagations en milieu non borné à un problème posé en milieu borné. Trois principales méthodes se détachent : Les méthodes intégrales, les méthodes de conditions aux limites absorbantes et les méthodes de milieux fictifs absorbants.

1. Les méthodes intégrales consistent à exprimer le problème extérieur au domaine borné par une représentation intégrale. C'est donc un opérateur exact et global, mais qui pose certaines difficultés numériques et théoriques. La résolution numérique nécessite l'inversion d'une matrice pleine dont la dimension peut être élevée, ce qui engendre d'importants problèmes de stockage. Théoriquement, cette méthode s'adapte mal à des problèmes de propagations instationnaires en raison de la nature hypersingulière du noyau de Green associé à l'opérateur intégral exact.

2. Les méthodes de conditions aux limites absorbantes consistent à imposer sur la frontière artificielle un opérateur différentiel (donc local), destiné à créer à distance finie des conditions d'ondes sortantes. Ces méthodes, dont il existe principalement deux familles [4, 26, 31], sont numériquement peu coûteuses car elles ne requièrent que l'intégration d'une équation différentielle. En revanche, elles nécessitent un choix très délicat des paramètres à mettre en jeu et sont inexactes. De plus, il n'existe pas à l'heure actuelle de théorie générale pour les problèmes à coins.
3. Les méthodes de milieux fictifs absorbants consistent à entourer le domaine d'étude par une couche de faible épaisseur dont les caractéristiques assurent la propagation de l'onde sans réflexions et une absorption suffisante de l'onde dans la couche afin d'imposer des conditions homogènes sur le bord de la couche. Ces méthodes ont connu dans un premier temps peu de succès en raison de réflexions parasites et leurs dépendances par rapport aux fréquences des signaux incidents. Les travaux de Bérenger ont relancé l'utilisation de ces méthodes. Dans [5], J.P Bérenger introduit des couches absorbantes parfaitement adaptées (appelées PML) en traitant la diffraction des ondes électromagnétiques par un obstacle parfaitement conducteur. Ces PML possèdent de nombreux atouts :
  - La transmission d'une onde à travers l'interface entre deux milieux PML se fait sans réflexion parasite pour tout angle d'incidence et à toute fréquence.
  - Le nouveau problème a une solution qui coïncide avec la solution dans le domaine borné et une solution qui décroît exponentiellement à l'extérieur du domaine.
  - L'implémentation numérique est très aisée dans un code de calcul déjà existant.

En revanche, les équations décrivant cette approche aboutissent à un système mal posé en instationnaire et il est donc nécessaire de réinterpréter le milieu PML de Bérenger. Un des procédés le plus usité est de modifier l'opérateur spatial du problème initial (qui se traduit par un changement de coordonnées complexes), mais même dans ce cas des difficultés théoriques persistent [24, 9, 54, 1]. Dans [58], l'auteur propose une extension de ces méthodes aux équations d'Euler linéarisées.

Comme toujours en calcul scientifique, le choix de la méthode d'approximation numérique est primordial. En régime transitoire, des schémas aux différences finies d'ordres élevés ont ainsi été développés pour la résolution des équations d'Euler linéarisées et sont régulièrement employés pour les phénomènes transitoires en aéroacoustique numérique [3]. Malheureusement, ces méthodes supportent mal la résolution sur des géométries complexes, et surtout le traitement spécial des conditions aux limites (ce qui est notre cas) peut entraîner une perte de convergence de l'approximation vers la solution du problème continu. La forme symétrique du problème mixte associé aux équations d'Euler linéarisées permet de mettre en oeuvre des techniques d'approximation du type Galerkin discontinue qui pallient les inconvénients issus de la non ellipticité de l'opérateur spatial, en approximant de façon non conforme dans le domaine de cet opérateur. En introduisant une technique de flux-splitting, il n'est plus nécessaire d'assurer la coercivité de l'opérateur spatial discrétisé dans l'orthogonal du noyau de l'opérateur spatial continu. Ces méthodes, introduites par Lesaint [43] se sont considérablement développées par la suite ([19], en aéroacoustique [2]), avec beaucoup de succès notamment en électromagnétisme. Elles présentent de nombreux avantages, parmi lesquels on peut citer :

1. Une parfaite adaptation à des maillages destructurés (donc à des géométries complexes).
2. La parallélisation en sous-domaines est peu coûteuse en temps de calcul et très efficace pour des cas industriels réalistes 3D (ce qui permet d'envisager sereinement aussi l'implémentation des méthodes PML, puisque le domaine PML peut éventuellement être traité comme un ou plusieurs sous-domaines).

Ces méthodes se présentent comme une généralisation des méthodes de volumes finis. Dans le cas où les fonctions de bases sont des polynômes complets de degré  $k$  et si la solution  $\varphi$  a la régularité spatiale  $H_m^{k+1}$  ( $H^{k+1}$  par morceaux), alors on peut espérer l'estimation d'erreur dans  $L^2([0, T], L^2(\Omega)^3)$  (en 3D,  $T$  arbitrairement long) suivante [39, 23, 8, 49] :

$$\|\varphi - \varphi_h\|_{L^2([0, T], L^2(\Omega)^3)} \leq C(T, \Omega) h^{k+\frac{1}{2}},$$

où  $\varphi_h$  désigne évidemment la solution du problème discrétisé sur le domaine maillé en  $\Omega = \bigcup_e \omega_e$  et  $h = \sup_e \text{diam}(\omega_e)$ . Si le système n'est pas stable (en fonction de la nature de l'écoulement porteur),  $C$  peut croître exponentiellement avec  $T$ .

Il est bien entendu nécessaire d'approcher convenablement la dérivée temporelle intervenant dans le système instationnaire pour conserver l'ordre de cette erreur sur la discrétisation complète spatio-temporelle du système. Dans le cas des volumes finis ( $k = 0$ ) et pour des écoulements porteurs à convection uniforme, les auteurs montrent dans [22] que le schéma d'Euler explicite conserve l'ordre  $h^{\frac{1}{2}}$  et que la condition de stabilité est en  $\Delta t \leq Ch$ ,  $C$  dépendant de la forme des éléments et des valeurs propres du symbole principal de l'opérateur spatial. En revanche, cette condition de stabilité est établie en introduisant un terme de pénalisation dans les conditions aux limites afin de contrôler suffisamment la dissipation d'énergie au bord  $\partial\Omega$ . A notre connaissance, il n'existe pas de résultats qui démontreraient que cette estimation de l'erreur de consistance se conserve pour une résolution d'ordre plus élevé que les volumes finis en espace et Euler explicite en temps. En revanche, de nombreux résultats concernant des conditions de stabilité pour des approximations Galerkin discontinue en espace et explicite en temps de systèmes hyperboliques ont été obtenus, notamment dans [15, 18, 34]. De plus, l'essentiel de l'erreur d'approximation des méthodes de type Galerkin discontinue est une erreur en dissipation : elles sont peu dispersives. Les erreurs de phases sont par conséquent faibles, ce qui les rend plus aptes à la modélisation de problèmes de contrôle [27].

## Résolution des problèmes inverses

Cette phase d'étude approfondie du problème direct, l'étude des perturbations aéroacoustiques en présence d'écoulement, incluant un choix judicieux et approprié de méthode d'approximation, est une étape indispensable pour tenter de résoudre les problèmes inverses qui motivent ce travail. En effet, dans la pratique, la plupart des problèmes inverses sont structurellement mal posés. Même quand les équations d'états sont linéaires (ce qui est notre cas), les problèmes de contrôle optimal ou d'identification associés peuvent être aussi bien linéaires que non linéaires en la variable de contrôle. Dans le cas linéaire, l'unicité de la solution à l'un de ces problèmes inverses nécessite l'obtention d'inéquations d'observabilité pour établir la coercivité de la fonctionnelle coût associée. En pratique, il faut généraliser les études habituelles [46] aux conditions aux limites mises en jeu d'une part, et aux différentes géométries caractéristiques du problème étudié d'autre part (la géométrie du support des sources et du support des conditions aux limites, la géométrie de l'observatoire). Dans le cas où les problèmes inverses sont non linéaires, l'unicité de la solution est encore plus difficile à obtenir. Or, si pour le contrôle passif, l'unicité de la solution importe peu pour justifier sa résolution (la diminution seule de la fonctionnelle le justifie), elle est indispensable pour donner un sens à la résolution du problème d'identification. Supposons tout de même que l'on soit dans des configurations où le problème d'identification est bien posé en unicité. L'application

$$\beta \longmapsto \varphi|_{O_s}(\beta),$$

où  $\beta(x)$  est la variable de contrôle,  $\varphi$  la solution du problème direct, et où  $O_s$  désigne l'observatoire spatial, n'est probablement pas bicontinue, car très vraisemblablement complètement continue par rapport à  $\beta(x)$ . Le problème est alors qualifié de sévèrement mal posé et laisse présager d'un mauvais conditionnement croissant du problème d'identification à mesure que l'on augmente le nombre de paramètres à identifier (autrement dit, la dimension du problème inverse, théoriquement infinie puisque dépendante de la localisation spatiale). Mais les deux problèmes d'optimisation et d'identification sont mathématiquement équivalents : ils consistent en la minimisation de fonctionnelles quadratiques similaires. La difficulté se retrouve donc dans la résolution du problème de contrôle optimal, se traduisant généralement par la recherche de minima extrêmement plats, et donc de gradients très faibles autour du minimum de la fonctionnelle objectif. De plus, il n'est pas exclu que le problème d'optimisation soit fortement non linéaire au sens de [14], et qu'il existe par conséquent des minima locaux. Compte tenu de ces difficultés (non exhaustives), il semble judicieux de pouvoir qualitativement justifier l'intérêt de sa résolution avant même la mise en place d'une méthodologie susceptible de le résoudre, par exemple par une simple étude monodimensionnelle amenant à des résultats peu intuitifs. Dans le même ordre d'idée, il est crucial d'avoir, sinon une démonstration théorique, au moins une idée de la nature de la fonctionnelle coût dans les configurations que l'on souhaite traiter. Après un choix de fonctionnelle objectif en adéquation avec les motivations physiques du problème, cette étude de sensibilité numérique, généralement effectuée par des cas tests numériques proches de ceux que l'on souhaite exploiter, permet d'entrevoir des propriétés de la fonctionnelle coût (stricte convexité, minima locaux, ...). Elle permet alors d'adopter et de justifier au moins qualitativement un choix d'algorithme d'optimisation suivant cette nature a priori de fonctionnelle. Pour notre étude de contrôle passif, la fonctionnelle objectif pourra être tout aussi bien une fonctionnelle distribuée (volumique), définie par l'énergie de perturbation localisée sur un observatoire spatial volumique accumulée au cours d'un temps fini assez grand  $T$ , qu'une énergie surfacique définie par l'énergie en flux acoustiques traversant des frontières d'éléments du domaine de calcul, dont les diminutions caractériseront bien des réductions de bruit acoustique. Elle dépend donc de la solution du problème direct  $\varphi_\beta$ , et par conséquent de façon non linéaire de la variable de contrôle  $\beta$  en vertu du rôle joué par celle-ci dans les conditions aux limites du problème direct. On pourra en outre étudier la pertinence d'autres choix de fonctionnelles objectifs.

La mise en place d'une méthodologie de résolution des problèmes inverses nécessite l'évaluation des gradients de la fonctionnelle dans n'importe quelle direction (après justification de son existence dans un cadre fonctionnel adéquat). Lorsque cela est théoriquement possible, cette explicitation des gradients met en jeu la solution d'un problème continu et rétrograde en temps, admettant pour conditions aux limites admissibles, des conditions duales de celles du problème direct. Ce problème s'appelle le problème adjoint. En revanche, on n'est pas assuré, suivant la méthode d'approximation utilisée pour résoudre ces deux problèmes de conserver cette expression des gradients après discrétisations. Or, en vertu des difficultés inhérentes à la résolution de problèmes inverses (mauvais conditionnement, ...), tout choix de méthode d'approximation pour la résolution des équations d'état doit s'accompagner d'une étude de l'erreur commise entre la discrétisation de la dérivée de la fonctionnelle coût et la dérivée de la fonctionnelle coût discrétisée (l'idéal étant que ces deux fonctions coïncident).

Enfin, notre travail s'inscrit dans les traitements de matériaux absorbants dans des zones chaudes comme les tuyères. Nos variables de contrôle passif sont les paramètres d'impédance des conditions aux limites locales complexes d'impédance, distribuées sur la frontière de l'obstacle solide  $\Gamma$ . Pour les équations d'Euler linéarisées barotropes, ces variables  $\alpha(x)$  complexes n'ont pour seules contraintes théoriques que d'être à parties réelles positives ( $Re(\alpha) \geq 0$ ). La condition aux limites d'impédance complexe locale peut être unifiée avec les conditions d'obstacles classiques (conditions d'obstacle dur et d'obstacle mou) à l'aide d'un changement de variables homographique, abou-

tissant à la définition du coefficient local complexe de réflexion acoustique  $\beta(x)$ , contraint par son appartenance au disque unité complexe ( $|\beta| \leq 1$ ). L'algorithme d'optimisation candidat pour la résolution des problèmes inverses devra donc être un algorithme avec contraintes. Il est bien connu que l'impédance complexe (et par conséquent la réflexion acoustique complexe) caractérise un matériau absorbant pour le traitement acoustique, et ce en fonction de la fréquence des perturbations [50]. En revanche, même pour une source monochromatique, on n'est pas assuré que tous les coefficients de réflexions acoustiques du disque unité complexe correspondent à un matériau absorbant équivalent expérimentalement réalisable. Autrement dit, afin de donner un sens physique à notre travail d'optimisation, il est nécessaire d'utiliser un modèle de matériaux absorbants physiquement réalisable et caractérisable par un coefficient de réflexion acoustique complexe donné. Un tel matériau ne doit pas être choisi au hasard. Il doit respecter de nombreuses contraintes (limites de poids, résistances aux hautes températures, aux vibrations, à la corrosion, ...). Il semble donc que ce matériau multifonctionnel se doive d'être métallique. Pour l'atténuation du son, un matériau dense ne semble pas un bon candidat pour dissiper l'énergie : un matériau cellulaire présentant une porosité ouverte sera plus adéquat. A cet effet, un modèle d'homogénéisation de milieu poreux constitué par un agglomérat de petites billes creuses de Nickel soudées entre elles est développé puis étudié dans [29], notamment à partir de travaux et modèles développés dans [57, 41, 39, 13]. Ce modèle, uniquement valable pour une fréquence fixe dans la plage [1000 – 6000] Hz, permet de relier le coefficient de réflexion acoustique à des paramètres physiques caractéristiques du matériau poreux équivalent. Les contraintes physiquement réalisables sur les coefficients de réflexions acoustiques seront donc a priori plus restrictives que le disque unité complexe.

Nous passons maintenant à la description précise du plan de la thèse.

## Plan de la thèse

**Résolution des équations d'Euler linéarisées barotropes : chapitre 1.** Le premier chapitre, après une justification de la pertinence des équations d'Euler linéarisées pour la description des phénomènes de propagations aéroacoustiques, présente ces équations avec l'hypothèse supplémentaire non restrictive de barotropie des perturbations, sous la forme d'un système de Friedrichs. On y montre, dans un premier temps, la difficulté de définir un problème harmonique associé suivant la nature de l'écoulement porteur. Dans un second temps, on classe exhaustivement les conditions aux limites à adjoindre à ce système de Friedrichs pour que le problème instationnaire mixte appelé problème direct admette une unique solution en espace-temps sur une géométrie du type (figure 1) et dans un cadre fonctionnel adéquat. Ceci est réalisé à l'aide de généralisations des résultats présents dans [59, 60]. On y montre également que cela implique l'existence et l'unicité d'une solution à un problème adjoint, problème rétrograde en temps admettant des conditions aux limites admissibles duales de celles du problème direct, dans ce même cadre fonctionnel. Ces conditions admissibles exhaustives sont des conditions d'obstacles et d'impédances généralisées unifiées dans la formulation du problème direct d'une part, et d'autre part, des conditions parfaitement transparentes pour les ondes normales.

**Approximation par une méthode Galerkin discontinue : chapitre 2.** Dans ce chapitre est exposée la méthode de Galerkin discontinue choisie pour la semi-discrétisation en espace des problèmes direct et adjoint. Elle repose sur un flux-splitting décentré en espace qui rend l'approximation spatiale localement dissipative, contrairement aux méthodes de Galerkin discontinue centrées en espace qui conservent pour les équations d'Euler linéarisées, une certaine forme d'énergie [56]. L'approximation temporelle est explicite de type Runge-Kutta d'ordre 2. Dans [25], on y estime numériquement les erreurs de dissipation commises par la méthode en fonction de l'ordre  $k$

d'approximation spatiale par des fonctions de bases polynomiales  $P^k$ . Pour le système symétrique des équations d'Euler linéarisées associé à un écoulement porteur quelconque posé avec les conditions aux limites préalablement classifiées, on généralise dans un premier temps le résultat sur la condition de stabilité établie pour une approximation volumes finis en espace et Euler explicite en temps obtenue dans [22]. Dans ce cas, on établit une condition de stabilité uniforme en  $\beta$  et cette condition de stabilité est la plus fine que l'on puisse obtenir en norme  $L^2$ , pour un schéma de résolution volumes finis en espace et Euler explicite en temps, et ceci uniformément par rapport aux maillages. Dans un second temps, un résultat de stabilité pour une approximation temporelle de type Runge-Kutta d'ordre 2 des problèmes direct et adjoint est établi, et ce quel que soit l'ordre d'approximation spatiale de la méthode Galerkin discontinue. La propriété d'uniformité du CFL par rapport à la variable  $\beta(x)$  est conservée dans cette généralisation. On donne une estimation des CFL pour plusieurs ordres d'approximation polynomiale  $k$  en 2D ou 3D. Enfin, cette méthode d'approximation est validée numériquement à l'aide d'une comparaison avec une solution exacte des équations d'Euler linéarisées déterminée analytiquement dans un conduit rigide bidimensionnel (calcul de modes guidés), puis utilisée pour mettre en évidence numériquement, et sur des géométries bidimensionnelles simples, les instabilités de type Kelvin-Helmholtz, convectives ou absolues.

**CPML pour l'aéroacoustique : chapitre 3.** L'objectif est d'étendre les méthodes PML développées dans [5] aux équations d'Euler linéarisées, à l'instar des travaux effectués dans [58]. On présente dans un premier temps les principaux arguments permettant d'établir le problème sur tout l'espace et notamment la décroissance exponentielle du noyau de Green associé, et dans un second temps, on propose un autre modèle de PML appelé CPML (pour PML convolutive), dont on montre qu'il est plus adapté aux écoulements porteurs avec convection à l'aide de comparaisons de tests numériques avec l'implémentation du modèle PML développé dans [58]. Les démonstrations théoriques concernant l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème CPML, système augmenté par rapport au système de Friedrichs initial, nous résistent encore à l'heure actuelle. On présentera tout de même quelques résultats théoriques dans des cas particuliers et on mettra surtout l'accent sur des justifications numériques, avec notamment une comparaison sur un cas test bidimensionnel, entre une solution exacte des équations d'Euler linéarisées en espace libre et les résultats numériques obtenus par l'implémentation du système CPML.

**Méthodologie de résolutions des problèmes inverses et modèle de matériau poreux : chapitre 4.** Ce chapitre est composé de trois parties. Dans la première, on y expose, après la justification de choix de fonctionnelles coûts, l'explicitation des gradients en fonction de la solution du problème direct et d'un problème adjoint adéquat, dont le second membre met en jeu la solution du problème direct. Cette estimation est rendue possible par des théorèmes de régularité analogues à ceux démontrés dans [59, 60]. On montre alors que cette explicitation des gradients se conserve par passage aux discrétisés des systèmes différentiels associés aux problèmes direct et adjoint, en vertu du flux splitting décentré en espace utilisé dans la méthode de Galerkin discontinue. De plus, une étude monodimensionnelle académique tend à montrer, à travers ces résultats explicites, la pertinence d'une résolution dans sa globalité la plus complexe des problèmes d'optimisation qui motivent cette thèse. Dans la seconde partie, le coefficient de réflexion est mis en relation avec un modèle d'homogénéisation de milieu poreux constitué par un agglomérat de billes de petits diamètres, ceci grâce aux travaux de [29]. Les variables de contrôle sont alors des paramètres (porosité, épaisseur et longueurs caractéristiques) de ce milieu. Ces paramètres seront bien entendu considérés comme pouvant être variables suivant la localisation du point considéré sur la paroi (frontière  $\Gamma$  de l'obstacle solide). Pour le problème d'optimisation, ils deviennent les fonctions de contrôle. Dans le



cadre des objectifs de la thèse, on remarque alors que toutes les réflexions acoustiques complexes du disque unité ne sont pas atteignables par celles, équivalentes, d'un milieu poreux modélisé par [29], pour une plage de fréquence d'environ [1000 – 5000]Hz. Enfin, dans la troisième partie, une étude de sensibilité est effectuée. Elle semble mettre en évidence, sur des cas tests bidimensionnels proches de ceux que l'on désire exploiter, que le problème inverse est faiblement non linéaire au sens de [14]. Toutefois, la quasi-convexité des fonctionnelles coûts, numériquement toujours apparente suivant la localisation des sources et les caractéristiques de la géométrie du domaine (longueurs, place de l'observatoire), n'est pas encore prouvée. En accord avec cette probable convexité, l'utilisation d'un algorithme d'optimisation de type quasi-Newton, l'algorithme sous contraintes BFGS-B, nous semble judicieuse. Elle met également en lumière des configurations pathologiques pour la résolution de nos problèmes inverses.

**Résultats numériques, gains et identifications : chapitre 5.** Même si avec le modèle de matériau poreux utilisé, toutes les réflexions acoustiques complexes du disque unité ne sont pas atteignables par celles équivalentes d'un milieu poreux pour une plage de fréquence de [1000–5000]Hz, on peut toujours réaliser l'absorption acoustique parfaite pour les ondes normales. Autrement dit, pour une fréquence donnée, il existe toujours un milieu réalisant l'absence de réflexion d'une onde plane normale à un plan définissant la frontière de ce milieu avec l'air. On pourrait être alors tenté, à fréquence donnée, d'imaginer que le milieu réalisant cette absorption parfaite des ondes normales présente un caractère d'optimalité du contrôle du bruit. Or, à l'instar du problème monodimensionnel proposé et à travers des tests numériques bidimensionnels présentés dans ce chapitre, utilisant une géométrie proche d'une prise d'air réaliste, on peut montrer que l'absorption acoustique maximale pour les ondes normales est loin de constituer une répartition optimale du milieu poreux pour une propagation aéroacoustique de modes transverses d'entrée dans un canal en présence d'un écoulement porteur avec convection quelconque. En effet, si l'on choisit pour fonction objectif le flux aéroacoustique sortant d'un canal, on peut réaliser un gain (en résolvant complètement le problème du contrôle optimal avec pour équations d'état les équations d'Euler linéarisées et pour conditions aux limites le modèle asymptotique défini par [29]) de l'ordre de quelques dizaines de dB par rapport à l'impédance acoustique optimale pour les ondes normales (absorption totale de celles-ci). Même si ce résultat n'est pour le moment établi que pour des sources monochromatiques et modulo la "pertinence" du modèle de parois utilisé, il met en lumière la nécessité de considérer le problème de contrôle optimal dans sa complexité, et de le simuler mathématiquement et numériquement, par rapport à une attitude qui consisterait à "localiser" la problématique de l'absorption des bruits par des raisonnements locaux au voisinage de la paroi.

On ne dispose pas pour le moment de mesures expérimentales pertinentes pour la résolution du problème d'identification, dont on n'est pas assuré, d'une manière générale, qu'il en existe une unique solution. Toutefois, pour notre configuration numérique finale, l'unicité de la solution peut être supposée. Dès lors, et dans un premier temps, on testera la robustesse de notre méthode d'optimisation grâce à l'utilisation de données non bruitées, étape préalable qui se justifie amplement par le caractère extrêmement mal conditionné des problèmes inverses mis en jeu. On se proposera par exemple, à partir de calculs préalablement effectués avec un matériau poreux donné, de résoudre numériquement le problème inverse afin d'obtenir au moins un matériau poreux ayant une impédance complexe équivalente à ce matériau poreux donné.



# Chapitre 1

## Résolution des équations d'Euler linéarisées barotropes

### 1.1 Présentation de l'aéroacoustique

L'acoustique classique traite de la propagation de petites perturbations dans un milieu homogène et isotrope, au repos ou en mouvement uniforme par rapport à l'observateur. L'aéroacoustique a pour objet de décrire la génération et la propagation de bruit dans des écoulements présentant des gradients et des rotationnels de vitesse (écoulements instationnaires et cisailés), et ceci dans des domaines les plus généraux possibles (parois fixes ou mobiles, géométries complexes,...).

Les principales difficultés rencontrées dans la détermination des ondes acoustiques en présence de tels écoulements sont liées à deux différences fondamentales entre les fluctuations acoustiques et les champs aérodynamiques :

1. Des différences d'échelles de valeurs : Les amplitudes des ondes acoustiques sont de l'ordre de  $10^4$  à  $10^5$  fois inférieures aux amplitudes du champ aérodynamique moyen, tandis que la longueur d'onde principale  $\lambda$  est de l'ordre de  $10^2$  supérieure aux épaisseurs de cisaillement généralement constatées dans les écoulements cisailés [6].
2. De plus, les ondes acoustiques se propagent à la vitesse du son, alors que les perturbations aérodynamiques sont uniquement convectées par l'écoulement.

Les premières applications ont porté sur le rayonnement acoustique des chocs créés par les rotors d'hélicoptère en vol d'avancement rapide. Le bruit, fut dans ce cas, calculé au moyen de formulations fondées sur l'analogie acoustique de Lighthill [44] (les termes sources étant fournies par un calcul de l'écoulement autour des pales). Cette analogie avec l'acoustique en champs proches est fondée sur la résolution d'une équation d'onde dans un milieu au repos, couramment écrite de la manière suivante :

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c^2 \Delta \rho' = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (1.1)$$

avec  $\rho'$  la densité de fluctuations acoustiques,  $c$  la vitesse du son ambiante et  $T_{ij}$  le tenseur de Lighthill. Ce tenseur intervenant dans le terme source est habituellement exprimé comme une fonction des variables du champ aérodynamique  $T_{ij} \approx \rho u_i u_j$  ( $\rho$  composante du champ de densité et  $u_i$  composantes de vitesses). Cette analogie fournit de très bons résultats, si la région où le fluide est très perturbé est relativement localisée et si la propagation se fait dans un milieu "ordinaire" (matériau homogène notamment). En revanche, si l'ensemble du domaine fluide étudié est très perturbé, elle deviendra très lourde ou même inadaptée.

Le développement de Curle a permis par la suite, à partir de l'équation de Lighthill établie en espace libre, de prendre en compte l'effet de parois solides (ce sont les équations de Flowcs-Williams et Hawkings [33]).

Ces analogies sont le plus souvent résolues par formulation intégrale (ce qui nécessite la connaissance de la fonction de Green associée) et sont limitées par les hypothèses dues à la propagation et la radiation des ondes dans un milieu homogène (pour l'analogie de Curle, d'autres restrictions plus fines s'ajoutent). Elles négligent les interactions entre l'écoulement moyen et les fluctuations acoustiques, et en particulier les effets de réfraction des ondes.

Depuis, d'autres opérateurs de propagation complets ont été proposés afin de prendre en compte les effets de convection et de réfraction des ondes acoustiques : l'équation du troisième ordre de Lilley [45] d'une part, et les équations d'Euler linéarisées d'autre part. Différentes études sur ces deux types de modèles tendent à rendre les équations d'Euler linéarisées plus adéquate à l'aéroacoustique numérique :

1. D'un point de vue purement numérique tout d'abord, il est moins coûteux de résoudre numériquement les équations d'Euler linéarisées que celle du troisième ordre de Lilley (équation différentielle du troisième ordre).
2. Dans [7], les auteurs ont comparé des calculs de rayonnement acoustique produit dans une couche de mélanges parallèles, obtenus par résolution des équations de Navier-Stokes filtrées et par résolution des équations d'Euler linéarisées. Les résultats sont très en faveur de l'utilisation des équations d'Euler linéarisées en vertu de l'identité des champs acoustiques (aussi bien en amplitude qu'en phase) et du coût moins élevé en temps de calcul.
3. Dans [21], il est montré que bien que l'analogie de Lilley inclut les effets de réfraction, elle dépend trop fortement de la façon dont les termes sources sont évalués.

En conclusion, les équations d'Euler linéarisées décrivent un opérateur de propagation complet, incluant les effets de convection et de réfraction des ondes acoustiques, ce qui modélisent au mieux les interactions entre l'écoulement moyen et les fluctuations acoustiques. Elles semblent définir le modèle le plus adapté (moins coûteuse numériquement que les équations du troisième ordre de Lilley) à l'étude de la génération et de la propagation de bruit dans des écoulements instationnaires et à rotationnels de vitesse, et ceci pour des géométries raisonnablement complexes.

## 1.2 Les équations d'Euler linéarisées au premier ordre

Dans toute la suite,  $d$  désignera un entier valant 2 ou 3. La convention d'Einstein sur les indices répétés dans les sommations sera systématiquement utilisée. Sauf mention contraire, les indices  $i$  et  $j$  couramment utilisés seront des entiers de l'intervalle  $[1, d]$ . On notera  $u^i = (u^1, \dots, u^d)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^d$ .

Nous examinerons donc ici la perturbation d'un écoulement porteur stationnaire subsonique régulier quelconque défini par :

1. Un champ de vitesse  $U_0^i$ ,
2. Un champ de pression  $P_0$ ,
3. Une masse volumique  $\rho_0$ ,
4. Une énergie interne  $e_0$ ,
5. Une entropie  $s_0$ ,

et vérifiant les équations d'Euler stationnaires suivantes ( $\delta$  désignant le symbole de Kronecker) :

$$\begin{cases} \partial_j (\rho_0 U_0^j) & = 0 \\ \partial_j (\rho_0 U_0^j U_0^i + P_0 \delta_{ij}) & = 0 \\ \partial_j \left( \left( \rho_0 \left( e_0 + \frac{\|U_0\|_2^2}{2} \right) + P_0 \right) U_0^j \right) & = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

**Remarque 1.2.1** *En l'absence de chocs (hypothèses supplémentaires de régularité de l'écoulement), la  $(d+2)$ ième équation (bilan d'énergie) pourra être confondue avec le bilan d'entropie suivant ( $\sigma_0$  désignant l'entropie volumique de l'écoulement porteur) :*

$$\partial_j (\rho_0 \sigma_0 U_0^j) = 0,$$

la loi d'état du champ de pression s'écrivant alors indifféremment

$$P_0 = P_0(\rho_0, e_0)$$

ou

$$P_0 = P_0(\rho_0, \sigma_0).$$

De plus, si le fluide porteur est barotrope, la loi d'état devient  $P_0 = P_0(\rho_0)$ , et seules les quatre premières équations de (1.2) peuvent être retenues.

Après perturbation au temps  $t = 0$ , l'écoulement est supposé vérifier les équations d'Euler instationnaires (complètes ou barotropes) au sens des distributions, soit le système de  $(d+2)$  équations sous la forme conservative suivant (on conservera les notations utilisées pour les variables entropiques de l'écoulement porteur sans l'indice 0 afin de stipuler leurs caractères désormais instationnaires) :

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_i f^i(w) & = g \\ w(0) & = w_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

avec  $w \in C_m^1(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{R}^{d+2})$  et les flux  $f^i \in (\mathbb{R}^{d+2}, \mathbb{R}^{d+2})$ , fonctions "suffisamment régulières" données par :

$$w = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U^i \\ \rho \left( e + \frac{\|U\|_2^2}{2} \right) \end{pmatrix}$$

(respectivement)

$$w = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U^i \\ \rho \sigma \end{pmatrix}$$

et

$$f^i(w) = \begin{pmatrix} \rho U^i \\ \rho U^i U^j + P \delta_{ij} \\ \left( \rho \left( e + \frac{\|U\|_2^2}{2} \right) + P \right) U^i \end{pmatrix}$$

(respectivement)

$$f^i(w) = \begin{pmatrix} \rho U^i \\ \rho U^i U^j + P \delta_{ij} \\ \rho \sigma U^i \end{pmatrix},$$

dans le cas où l'on prend en compte la perturbation thermique (respectivement la perturbation entropique). Dans un premier temps, on se propose d'étudier le caractère bien posé du système (en espace libre) obtenu par une linéarisation entropique au premier ordre de (1.3).

### 1.2.1 Linéarisation entropique des équations d'Euler

(1.3) constitue un système hyperbolique non linéaire admettant une entropie de Lax [61]. Plus précisément, cela signifie que (1.3) admet une équation de conservation supplémentaire (en l'absence de chocs) de la forme :

$$\partial_t S(w) + \partial_i S^i(w) - g \nabla_w S(w) = 0, \quad (1.4)$$

où  $S(w)$  est strictement convexe en  $w$  et telle que le jacobien des flux  $f^i$  soit auto-adjoint par rapport à la métrique induite par le hessien de  $S(w)$ . C'est une entropie (volumique) "physique" dans le cas général et dans le cas barotrope avec  $P = P(\rho)$ , on a :

$$S(w) = H(\rho) + \rho \frac{\|U\|_2^2}{2}, H''(\rho) = \frac{P'(\rho)}{\rho}.$$

On aura supposé bien entendu que  $P'(\rho) = c^2(\rho)$  est positif. On a alors :

$$S^i(w) = (S + \rho)U^i,$$

et l'équation de conservation supplémentaire a physiquement le sens d'une équation d'énergie. Rappelons un théorème dû à S.K Godunov [32] :

**Théorème 1.2.1** *Le système (1.3) est symétrisable si et seulement si il admet une entropie.*

Par application du théorème 1.2.1, le changement de variables bijectif

$$\Phi = \nabla_w (S(w))$$

(dans le domaine admissible pour  $w$ ) permet d'obtenir une forme symétrique de (1.3) :

$$\partial_t (\nabla_{\Phi} S^* (\Phi)) + \partial_i (\nabla_{\Phi} S^{*i} (\Phi)) = g, \quad (1.5)$$

avec :

$$\begin{aligned} S^* (\Phi) &= \Phi \cdot w (\Phi) - S (w (\Phi)) \\ S^{*i} (\Phi) &= \Phi \cdot f^i (w (\Phi)) - S^i (w (\Phi)). \end{aligned}$$

On suppose que (1.5) est bien posée, donc que sa solution est continue par rapport aux données du problème. En posant  $g = \varepsilon h$ , et  $\Phi = \Phi_0 + \varepsilon \varphi$  ( $\Phi_0$  variables entropiques associées à l'écoulement porteur), on obtient formellement en faisant un développement limité en  $\varepsilon$  au premier ordre de la formulation faible de (1.5), une expression linéarisée du problème :

$$\partial_t (H_{S^*} (\Phi_0) \varphi) + \partial_i (H_{S^{*i}} (\Phi_0) \varphi) = h, \quad (1.6)$$

où  $H_{S^*} (\Phi_0)$  sont les Hessiens symétriques définis positifs de  $S^* (\Phi)$  et  $H_{S^{*i}} (\Phi_0)$  sont les Hessiens symétriques de  $S^{*i} (\Phi)$ , calculés en  $\Phi_0$ .

**Remarque 1.2.2** *Il est difficile de sortir de ce cadre "formel" pour établir (1.6). Il faudrait tout d'abord pour cela établir, dans un voisinage de 0 pour  $\varepsilon$ , l'existence et l'unicité de (1.6). Ensuite, il suffirait de montrer que le reste de la formule de Taylor tend vers 0 (par exemple dans  $L^1_{loc}$ , en restant localement et uniformément majoré en  $\varepsilon$ ) quand  $\varepsilon$  tend vers 0, de façon à pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée.*

*Toutefois, (1.6) peut s'interpréter au sens des distributions quant à la propagation des discontinuités de la condition initiale. En revanche, en cas de discontinuités de contact, le problème à coefficients discontinus est a priori mal posé en unicité (bien que linéaire), et dans ce cas, la forme conservative de (1.6) ne constitue pas un avantage réel.*

En notant  $A^0 (x) = H_{S^*} (\Phi_0)$ , et  $A^i (x) = H_{S^{*i}} (\Phi_0)$  la matrice symétrique définie positive et les matrices symétriques, (1.6) constitue un système de Friedrichs :

$$\partial_t (A^0 \varphi) + \partial_i (A^i \varphi) = h, \quad (1.7)$$

sur lequel on dispose de beaucoup de résultats (quant aux conditions limites admissibles, à l'approximation, ...). En posant  $\mathcal{A} = A^i \partial_i$ , on a à titre d'exemple le théorème suivant établi en espace libre [28] :

**Théorème 1.2.2** *Si  $h \in \mathcal{C}^1 (\mathbb{R}^+, L^2 (\mathbb{R}^d)^{d+2})$ , si les coefficients de  $A^0 (x)$  et de  $A^i (x)$  sont dans  $W^{1,\infty} (\mathbb{R}^d)$ , et si  $\varphi (0, x) \in \mathcal{D} (\mathcal{A}) = \{ \varphi \in L^2 (\mathbb{R}^d)^{d+2} / \mathcal{A} \varphi \in L^2 (\mathbb{R}^d)^{d+2} \}$ , alors (1.6) admet une solution unique dans  $\mathcal{C}^1 (\mathbb{R}^+, L^2 (\mathbb{R}^d)^{d+2}) \cap \mathcal{C}^0 (\mathbb{R}^+, \mathcal{D} (\mathcal{A}))$ .*

Nous indiquerons dans la prochaine section une généralisation de ce théorème en y adjoignant des conditions aux limites, ce qui est facilité par la symétrie des matrices  $A^i$ . Même si le système (1.7) est bien posé en espace libre, on n'est cependant pas assuré de sa stabilité. En effet, (1.7) admet une équation de bilan supplémentaire d'"énergie-entropie" donnée par :

$$\frac{1}{2} \partial_t (A^0 \varphi, \varphi)_{L^2 (\mathbb{R}^d)^{d+2}} + \frac{1}{2} \partial_i (A^i \varphi, \varphi)_{L^2 (\mathbb{R}^d)^{d+2}} + \frac{1}{2} ((\partial_i A^i) \varphi, \varphi)_{L^2 (\mathbb{R}^d)^{d+2}} = (h, \varphi)_{L^2 (\mathbb{R}^d)^{d+2}}. \quad (1.8)$$

C'est bien évidemment l'étude du signe de  $\frac{1}{2} \partial_t (A^0 \varphi, \varphi)_{L^2 (\mathbb{R}^d)^{d+2}}$  qui va nous renseigner sur la stabilité du système.

Or celui-ci est fonction du signe des deux autres termes quadratiques en la variable  $\varphi$  de l'équation (1.8), à savoir  $\frac{1}{2} \partial_i (A^i \varphi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^d)^{d+2}}$  et  $\frac{1}{2} ((\partial_i A^i) \varphi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^d)^{d+2}}$ . Mais, si les conditions aux limites éventuelles peuvent (et en un certain sens doivent) garantir la positivité du premier de ces deux termes, le signe du second dépend de l'écoulement porteur. A titre d'exemple (qui sera repris et détaillé dans la partie concernant les instabilités d'écoulement de type Kelvin-Helmholtz), dans le cas de l'écoulement isotherme associé à un écoulement porteur cisailé 2D ( $\rho_0 = cte$ ,  $U_0^2 = 0$ ,  $U_0^1 = U_0^1(y)$ ), on a :

$$\partial_i A^i = \rho_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_y U_0^1 \\ 0 & \partial_y U_0^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice symétrique est évidemment non positive dans le cas d'un écoulement porteur à convection non uniforme (valeurs propres opposées).

**Remarque 1.2.3** *Le choix des variables  $\phi$ , associé à la linéarisation  $\phi = \phi_0 + \varepsilon \varphi$ , peut paraître arbitraire (même s'il conduit à un système symétrique conservatif en  $\varphi$ ). Cependant, si l'écoulement porteur est assez régulier, un autre "jeu" de variables (par exemple lipschitzien par rapport à  $\phi$ ) conduirait à des systèmes linéarisés équivalents. La "positivité" du bilan d'énergie (1.8) peut quant à elle dépendre du système de variables choisi (la positivité de la matrice  $\partial_i A^i$  n'est qu'une condition suffisante et les métriques définies par  $A^0$  associées peuvent, si ces matrices ne sont pas uniformément équivalentes, définir des topologies différentes dans les espaces où vivent "naturellement" les inconnues  $\varphi$ ).*

*A ce sujet, il convient de distinguer, l'équation d'énergie du problème porteur linéarisé (1.8) et la linéarisation de l'équation d'énergie (ou d'entropie) (1.4) qui est conservative (il n'y a pas de termes multiplicatifs). La première est utile, sinon nécessaire à la définition du problème harmonique et à l'étude de la convergence du problème discrétisé ; la seconde est physiquement plus pertinente, mais ne conduit pas à des estimations a priori utiles à la résolution et à l'approximation de (1.7).*

*C'est en ce sens que l'on peut parler d'échanges d'énergie entre (1.7) et l'écoulement porteur.*

### Conclusions :

1. Sous des hypothèses convenables sur les données du problème, il est toujours possible, par linéarisation à l'ordre 1 des équations d'Euler non linéaires, d'obtenir des systèmes linéaires symétriques (ou symétrisables si l'on a mal choisi les "variables") bien posés en instationnaire, mais non nécessairement stables.
2. La forme de ces systèmes dépend de l'équation d'état de l'écoulement porteur et le système linéaire provient d'une linéarisation d'un problème mettant en jeu la même équation d'état.

## 1.2.2 Perturbations barotropes

Nous allons voir que si l'on choisit de négliger les perturbations de l'entropie, on peut obtenir un système symétrique également bien posé et d'une forme ne dépendant pas de l'équation d'état associée à l'écoulement porteur (ce système sera sous forme non conservative, mais ceci n'est pas très gênant pour un écoulement porteur régulier). En outre, ceci permettra dans un contexte assez général, d'obtenir une classification définitive des conditions aux limites admissibles à adjoindre à ce système, qui permettra de mettre en évidence les difficultés du problème harmonique évoquées à la section précédente et suffira à l'étude heuristique numérique des instabilités d'écoulement de type Kelvin-Helmholtz.



On considère donc un écoulement porteur vérifiant (1.2) de loi d'état en  $P_0$  quelconque. L'hypothèse de barotropie de la perturbation consiste à supposer que l'influence des variations entropiques est négligeable devant celle des variations de la masse volumique, autrement dit que :

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho' + o(\varepsilon) \Rightarrow P = P_0 + \varepsilon c_0^2 \rho' + o(\varepsilon), \quad (1.9)$$

où  $c_0 = c_0(x)$  désigne la vitesse du son dans le milieu.

On pose les changements de variables suivants :

$$U^i = U_0^i + \varepsilon u^i, \rho = \frac{c_0 \rho'}{\rho_0}, \varphi = (u^1, \dots, u^d, \rho)^T.$$

Dès lors, après développement en  $\varepsilon$  à l'ordre 1 des équations générales d'Euler instationnaires (1.3), il vient que  $\varphi$  est solution du système suivant :

$$\partial_t \varphi + A^i \partial_i \varphi + B \varphi = f, \quad (1.10)$$

avec

$$A^i \partial_i = (U_0^i \partial_i) \mathbb{I}_{d+1} + c_0 \begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \nabla^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} [\partial_i U_0^j]_{i,j} & \frac{1}{\rho_0} \left( \nabla (c_0 \rho_0) - \frac{1}{c_0} \nabla P_0 \right) \\ \frac{c_0}{\rho_0} \nabla^T \rho_0 & \frac{-1}{c_0} (U_0^i \partial_i c_0) \end{pmatrix}$$

et

$$f = \frac{1}{\rho_0} \left( g^1 - U_0^1 g^0, \dots, g^d - U_0^d g^0, c_0 g^0 \right)^T.$$

**Remarques 1.2.4** 1. La partie diagonale de la partie principale de l'opérateur est un opérateur de convection tandis que la partie non diagonale est l'écriture sous la forme d'un système d'ordre 1 de l'équation des ondes.

2. On obtient ces équations en utilisant la formule de dérivation d'un produit, donc elles n'ont de sens distributionnel que si l'écoulement porteur est régulier.

3. la quatrième colonne de  $B$  s'annule pour un fluide porteur isotherme.

La conservation de l'énergie n'est toujours pas assurée (même si  $f$  est nulle). En effet, l'équation de bilan d'énergie globale s'écrit :

$$\frac{1}{2} \partial_t (\varphi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^d)^{d+1}} + \frac{1}{2} \partial_i (A^i \varphi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^d)^{d+1}} + \frac{1}{2} \left( \left( B - \frac{1}{2} \partial_i A^i \right) \varphi, \varphi \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)^{d+1}} = (f, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^d)^{d+1}}. \quad (1.11)$$

Le terme  $\frac{1}{2} (\varphi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^d)^{d+1}}$  peut s'interpréter comme une énergie puisque :

$$\frac{1}{2} (\varphi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^d)^{d+1}} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \|u\|_2^2 + \frac{c_0^2 \rho'^2}{\rho_0^2} dx,$$

somme de l'énergie cinétique massique et de l'énergie acoustique massique du problème linéarisé. L'équation (1.11) s'écrit de la façon suivante :

$$\frac{1}{2} \partial_t (\varphi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^d)^{d+1}} + \frac{1}{2} \partial_i (A^i \varphi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^d)^{d+1}} + \frac{1}{2} (K \varphi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^d)^{d+1}} = (f, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^d)^{d+1}},$$

où

$$K = B + B^t - \partial_i A^i.$$

Comme précédemment, les conditions aux limites peuvent garantir la positivité du second terme  $\partial_i (A^i \varphi, \varphi)_{L^2(\mathbb{R}^d)^{d+1}}$ . En revanche, le signe de la matrice symétrique  $K$  est non déterminé et intervient de façon cruciale.

**Remarque 1.2.5** *On a  $K \equiv 0$  pour un écoulement porteur à convection uniforme ou pour un fluide en mouvement "solide" ( $P_0$  et  $\rho_0$  constants, la vitesse correspondant alors à un mouvement composé de rotations et de translations). Les équations (1.10) sont d'ailleurs invariantes par une isométrie de  $\mathbb{R}^d$ .*

La stabilité  $L^2_{loc}$  du problème instationnaire n'est donc pas garantie, et nous sommes dans l'impossibilité de définir le problème harmonique associé. En revanche, nous allons montrer que le problème instationnaire en domaine espace-temps (borné en temps) avec des conditions aux limites admissibles est quant à lui bien posé. Un des arguments majeurs pour le démontrer est le suivant :

► Si l'on pose  $\varphi = \varphi' e^{\alpha t}$ , avec  $\alpha > 0$ , l'équation (1.11) devient :

$$\begin{aligned} & \partial_t \frac{1}{2} (\varphi', \varphi')_{L^2(\mathbb{R}^d)^{d+1}} + \frac{1}{2} \partial_i (A^i \varphi', \varphi')_{L^2(\mathbb{R}^d)^{d+1}} + \frac{1}{2} ((K + 2\alpha \mathbb{I}_{d+1}) \varphi', \varphi')_{L^2(\mathbb{R}^d)^{d+1}} \\ & = (e^{-\alpha t} f, \varphi')_{L^2(\mathbb{R}^d)^{d+1}}. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation similaire à (1.11) mais avec une matrice  $K' = K + 2\alpha \mathbb{I}_{d+1}$ , qui en choisissant  $\alpha$  de manière convenable sera toujours définie positive. Ainsi si les coefficients des  $A^i$  et de  $B$  sont par exemple dans  $W^{1,\infty}$ , on pourra supposer que  $K > 0$ . Ceci est à la base du choix des conditions aux limites rendant (1.10) bien posé en domaine temporel borné (et uniquement dans ce cas, car le changement d'inconnue  $\varphi = \varphi' e^{\alpha t}$  est non homéomorphe sur  $\mathbb{R}_t^+$ ).

### 1.3 Existence et unicité du système instationnaire posé avec des conditions aux limites admissibles

Le but de cette section est de classifier (de manière exhaustive) les conditions aux limites convenables à adjoindre au système symétrique (1.10) (évidemment sous des conditions de régularités sur les opérateurs mis en jeu), afin d'en assurer l'existence et l'unicité d'une solution sur un domaine spatio-temporel  $\Omega \times [0, T]$ . Le cadre fonctionnel des deux précédentes sections était formel, il suffisait à mettre en évidence des difficultés inhérentes au système instationnaire non "décelables au premier abord" (comme l'impossibilité de définir le problème harmonique associé). Par exemple, nous avons énoncé le théorème 1.2.2 en dissymétrisant l'espace et le temps, ce qui est rendu possible par le fait que les coefficients de  $A^0$  et des  $A^i$  ne dépendent pas du temps. Nous avons décidé de nous placer dans un cadre fonctionnel plus général en nous appuyant sur des résultats de ([59, 60]), pour toute la suite du travail et ceci pour plusieurs raisons :

1. Le caractère stationnaire de l'écoulement porteur est un cadre d'application, mais il n'est pas une nécessité pour l'étude théorique. Dans un souci de généralité du travail, nous supposons donc que les coefficients des matrices symétriques  $A^i$  et de la matrice  $B$  intervenant dans (1.10) dépendent du temps.
2. Le but avoué de cette thèse est de modéliser, à l'échelle des perturbations acoustiques, l'influence de l'obstacle solide de frontière  $\Gamma$  placé dans le domaine  $\Omega$  sur les propriétés de

l'écoulement perturbé par des conditions aux limites de type impédance locale à adjoindre au système, car elles caractérisent les modèles de traitements acoustiques. Mais pour des sources monochromatiques (sinusoïdales), on ne peut se contenter de modèles d'impédances réelles. Elles doivent être complexes, afin que leurs parties imaginaires (appelées réactances acoustiques) soient optimisées pour obtenir l'accord en fréquences souhaité.

Les solutions du système hyperbolique seront par conséquent à valeurs complexes.

3. Quand les sources considérées ne seront pas sinusoïdales, les paramètres régissant les conditions aux limites (et donc l'opérateur spatial) devront dépendre du temps.
4. Pour l'étude des perturbations acoustiques d'un écoulement porteur stationnaire convecté (même uniformément) dans un domaine dont la géométrie est caractérisée par la figure 1, le rang de l'opérateur  $A^i n_i$  dans (1.10) n'est pas constant sur chaque composante connexe du bord  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  ( $\vec{n}$  est un vecteur unitaire sortant à  $\partial\Omega$ ). En effet, la vitesse normale sortante de l'écoulement porteur,  $U_0^i n_i$ , change de signe de part et d'autre de  $\Gamma$  (et par conséquent les valeurs propres de  $A^i n_i$  aussi). Pour pallier cette difficulté inhérente à l'aéroacoustique, nous généraliserons, en vertu des hypothèses établies dans [60], les résultats obtenus dans [59] sur le système symétrique espace-temps.

### 1.3.1 Conditions aux limites admissibles algébriques

Plus précisément, nous avons tout d'abord besoin d'hypothèses de régularité sur le domaine spatial  $\Omega$  et sur les opérateurs intervenant dans (1.10) :

**Hypothèses 1.3.1** 1.  $\Omega$  est un domaine borné ou non de  $\mathbb{R}^d$ , régulier, à frontière bornée  $\partial\Omega$   $C^1$  et localement d'un seul côté de la frontière. On notera  $Q = \Omega \times [0, T]$ , le domaine spatio-temporel.

2.  $T$  est un temps fini assez grand quelconque.

3. Les coefficients des opérateurs mis en jeu, à savoir  $A^i(x, t)$  et  $B(x, t)$  sont respectivement dans  $W^{1, \infty}(\overline{\Omega} \times [0, T])$  et dans  $L^\infty(\Omega \times [0, T])$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

Ensuite, on définit les opérateurs suivants :

–  $\mathcal{N}(x, t)$  avec  $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]$  est une application dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{C}^{d+1}$  définissant des conditions aux limites homogènes, de régularité :

1. Lipchitzienne et contenant le noyau de  $A^i n_i$ , sur les composantes connexes de  $\partial\Omega$  où  $A^i n_i$  est de rang constant,
2.  $C^1$  sur la composante connexe où  $A^i n_i$  saute de rang sur une variété immergée différentiable de codimension  $d - 2$  notée  $\partial\Omega_g$ , et  $C^1$  sur le complémentaire de  $\partial\Omega_g$  dans  $\partial\Omega$ .

–  $L = \mathbb{I}_{d+1} \partial_t \cdot + A^i \partial_i + B$ , l'opérateur spatio-temporel défini sur le domaine :

$$\mathcal{D}(L) = \left\{ \varphi \in (C^1(\overline{Q}))^{d+1}, \varphi|_{\partial\Omega \times [0, T]} \in \mathcal{N}(x, t) \text{ et } \varphi(x, 0) = 0 \right\}.$$

–  $L^\# = -\mathbb{I}_{d+1} \partial_t \cdot - \partial_i (A^i \cdot) + B^*$ , l'adjoint formel de  $L$ , de domaine :

$$\mathcal{D}(L^\#) = \left\{ \psi \in (C^1(\overline{Q}))^{d+1}, \psi|_{\partial\Omega \times [0, T]} \in \mathcal{N}^*(x, t) = (A^i n_i(\mathcal{N}(x, t)))^\perp \text{ et } \psi(x, T) = 0 \right\}.$$

Pour des écoulements porteurs avec convection, l'hypothèse que l'opérateur  $A^i n_i$  est de rang constant sur chaque composante connexe de  $\partial\Omega \times [0, T]$  est trop restrictive, en particulier pour l'écriture de conditions aux limites approchées sur une frontière fictive. Nous supposons donc une hypothèse supplémentaire concernant le comportement de  $\mathcal{N}$  au voisinage de  $\partial\Omega_g$  ([60], hypothèses 2.2) :

**Hypothèses 1.3.2** Pour tout  $(x, t)$  de  $\partial\Omega_g \times ]0, T[$ , il existe un ouvert  $O$  de  $\partial\Omega$  avec  $x \in O$  tel que :

1.  $O$  est difféomorphe à une boule  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^d$  et  $\partial\Omega_g$  à un équateur de cette boule.
2. Il existe deux sous-espaces vectoriels  $\mathcal{N}^-$  et  $\mathcal{N}^+$  de  $\mathbb{C}^m$  tels que :
  - $\ker(A^i n_i(x, t)) \subset \mathcal{N}^+(x, t)$  pour tout  $(x, t) \in O \times [0, T]$ .
  - $\mathcal{N}^-(x, t) \subset \mathcal{N}^+(x, t)$  pour tout  $(x, t) \in O \times [0, T]$ .
  - $\mathcal{N} = \mathcal{N}^+$  d'un côté de  $O/\partial\Omega_g$  et  $\mathcal{N} = \mathcal{N}^-$  de l'autre (on "rajoute" d'autres conditions aux limites homogènes en franchissant le saut de rang  $A^i n_i$ ,  $\mathcal{N}^+$  correspondant au plus faible rang de  $A^i n_i$ ).

**Remarque 1.3.1** Sur les composantes connexes de  $\partial\Omega$  où  $A^i n_i$  est de rang constant, comme  $\ker(A^i n_i) \subset \mathcal{N}$ , on a dans  $\mathbb{C}^m$  :

$$\text{rg}(A^i n_i) = \dim(\mathcal{N}) - \dim(\ker(A^i n_i)),$$

et donc  $\mathcal{N}^*$  y est également lipchitzien. Les autres hypothèses sur  $\mathcal{N}$  sont également vérifiées pour  $\mathcal{N}^*$ .

On a alors en mesure d'établir le théorème suivant :

**Théorème 1.3.1** Si les hypothèses (1.3.1) et (1.3.2) sont vérifiées, alors l'adjoint dans  $(L^2(Q))^{d+1}$  de la fermeture  $\overline{L}$  de  $L$  est la fermeture  $\overline{L^\#}$  dans  $(L^2(Q))^{d+1}$  de  $L^\#$ .

**Preuve.** La preuve nécessite plusieurs étapes intermédiaires.

Tout d'abord, comme  $\partial Q = (\partial\Omega \times [0, T]) \cup (\Omega \times \{0\}) \cup (\Omega \times \{T\})$  possède des coins,  $\partial Q$  est lipchitzien et donc  $H^s(\partial Q)$  est bien défini pour  $|s| \leq 1$ .

On définit alors les espaces suivants :

- $\mathcal{K}_L = \left\{ \varphi \in (L^2(Q))^{d+1}, L\varphi \in \left( (H^1(Q))^{d+1} \right)' \right\}$ ,  $\|\varphi\|_{\mathcal{K}_L}^2 = \|\varphi\|_{(L^2(Q))^{d+1}}^2 + \|L\varphi\|_{((H^1(Q))^{d+1})'}^2$
- $\mathcal{K}_{L^\#}$  est défini de manière analogue.
- $\mathcal{H}_L = \left\{ \varphi \in (L^2(Q))^{d+1}, L\varphi \in (L^2(Q))^{d+1} \right\}$ ,  $\|\varphi\|_{\mathcal{H}_L}^2 = \|\varphi\|_{(L^2(Q))^{d+1}}^2 + \|L\varphi\|_{(L^2(Q))^{d+1}}^2$
- $\mathcal{H}_{L^\#}$  est défini de manière analogue.

Ces espaces vérifient la proposition suivante ([59], proposition 1) :

**Théorème 1.3.2**  $\mathcal{K}_L, \mathcal{K}_{L^\#}, \mathcal{H}_L$  et  $\mathcal{H}_{L^\#}$  sont des espaces de Hilbert et  $(C^1(\overline{Q}))^{d+1}$  est dense dans chacun de ces espaces.

Cette propriété de densité permet d'établir le théorème suivant :

**Théorème 1.3.3** L'application :

$$\begin{aligned} g : (C^1(\overline{Q}))^{d+1} &\longrightarrow (L^\infty(\partial Q))^{d+1} \\ \varphi &\longmapsto g(\varphi) \end{aligned}$$

définie par :

$$g = \begin{cases} \varphi & \text{sur } \Omega \times \{T\} \\ -\varphi & \text{sur } \Omega \times \{0\} \\ A^i n_i \varphi & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \end{cases}$$

s'étend de façon unique en une application continue de  $\mathcal{K}_L$  dans  $\left(\left(H^{\frac{1}{2}}(\partial Q)\right)^{d+1}\right)'$ , et l'application :

$$h : (C^1(\overline{Q}))^{d+1} \times (C^1(\overline{Q}))^{d+1} \longrightarrow (L^\infty(\partial Q))$$

$$(\varphi, \psi) \longmapsto h(\varphi, \psi)$$

définie par :

$$h = \begin{cases} (\varphi, \psi)_{\mathbb{C}^{d+1}} & \text{sur } \Omega \times \{T\} \\ -(\varphi, \psi)_{\mathbb{C}^{d+1}} & \text{sur } \Omega \times \{0\} \\ (A^i n_i \varphi, \psi)_{\mathbb{C}^{d+1}} & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \end{cases}$$

s'étend de façon unique en une application continue de  $\mathcal{H}_L \times \mathcal{H}_{L^\#}$  dans  $(W^{1,\infty}(\partial Q))'$ .

La formule de Green suivante :

$$(L\varphi, \psi)_{(L^2(Q))^{d+1}} = \int_{\partial\Omega \times [0, T]} (A^i n_i \varphi, \psi)_{\mathbb{C}^{d+1}} + \int_Q (\varphi, L^\# \psi)_{\mathbb{C}^{d+1}}$$

$$+ \int_\Omega (\varphi(\cdot, T), \psi(\cdot, T))_{\mathbb{C}^{d+1}} - \int_\Omega (\varphi(\cdot, 0), \psi(\cdot, 0))_{\mathbb{C}^{d+1}},$$

est alors valable pour  $(\varphi, \psi) \in \mathcal{K}_L \times (H^1(Q))^{d+1}$ , et pour  $(\varphi, \psi) \in \mathcal{H}_L \times \mathcal{H}_{L^\#}$ .

**Théorème 1.3.4** Si les hypothèses (1.3.1) et (1.3.2) sont vérifiées, si  $\varphi \in \mathcal{H}_L$  et  $\varphi \in \mathcal{N}(x, t)$  sur  $\partial\Omega \times [0, T]$ , alors il existe une suite  $\varphi_n \in (C^1(\overline{Q}))^{d+1}$  telle que  $\varphi_n \in \mathcal{N}(x, t)$  sur  $\partial\Omega \times [0, T]$  et  $\varphi_n \rightarrow \varphi \in \mathcal{H}_L$ . De plus, si  $\varphi = 0$  sur  $\Omega \times \{0\}$ , alors la suite  $\varphi_n$  peut être choisie avec  $\varphi_n(t=0) = 0$  sur  $\Omega$ .

La preuve de ces trois théorèmes se trouvent dans [59], dans le cas où le rang de  $A^i n_i$  est constant sur chaque composante connexe de  $\partial\Omega$ . L'auteur procède par régularisation et troncature, séparément en temps et en espace, puis établit un théorème de régularisation tangentielle en introduisant les distributions conormales sur  $\Omega$  associées à  $\partial\Omega$ . Un travail similaire peut être effectué sur  $\mathcal{N}^-$  et  $\mathcal{N}^+$  dans le cas où les hypothèses 1.3.2 sont vérifiées.

Le théorème 1.3.1 est alors une interprétation en tant qu'opérateur et opérateur adjoint du théorème 1.3.4. Premièrement, Les plus petites extensions fermées  $\overline{L}$  et  $\overline{L^\#}$  existent, en vertu de la densité des domaines  $D(L)$  et  $D(L^\#)$  respectifs dans  $(L^2(Q))^{d+1}$ . De plus, nous allons montrer que

$$G(\overline{L}) = G\left(\left(\overline{L^\#}\right)^*\right),$$

où

$$G(L) = \left\{ (\varphi, f) \in (L^2(Q))^{d+1} \times (L^2(Q))^{d+1} \mid \varphi \in D(L), L\varphi = f \right\}.$$

– Soit  $(\varphi, f) \in G(\overline{L})$ , alors  $\exists \varphi \in D(\overline{L})$  tel que  $\overline{L}\varphi = f$ .

Donc  $\forall \psi \in D(L^\#)$ ,  $(\overline{L}\varphi, \psi)_{(L^2(Q))^{d+1}} = (f, \psi)_{(L^2(Q))^{d+1}}$ . Dès lors, le théorème 1.3.4 assure qu'il existe une suite  $\varphi_n \in D(\overline{L})$  et une suite  $f_n$  vérifiant :

$$\varphi_n \longrightarrow \varphi \quad \text{dans } (L^2(Q))^{d+1}$$

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{dans } (L^2(Q))^{d+1}$$

avec  $(\overline{L}\varphi_n, \psi)_{(L^2(Q))^{d+1}} = (f_n, \psi)_{(L^2(Q))^{d+1}}$ .

Une telle solution  $\varphi$  de  $L\varphi = f$  est appelée solution faible.

Par conséquent,  $(\varphi_n, \overline{L^\#}\psi)_{(L^2(Q))^{d+1}} = (f_n, \psi)_{(L^2(Q))^{d+1}}$ .

Mais la continuité du produit scalaire assure que

$$(\varphi, \overline{L^\#}\psi)_{(L^2(Q))^{d+1}} = (f, \psi)_{(L^2(Q))^{d+1}},$$

ce qui se traduit par  $(\varphi, f) \in G\left(\left(\overline{L^\#}\right)^*\right)$ , et en conclusion on a montré que :

$$G(\overline{L}) \subset G\left(\left(\overline{L^\#}\right)^*\right).$$

– D'autre part, soit  $(\varphi, f) \in G\left(\left(\overline{L^\#}\right)^*\right)$ . Par définition, on a  $\forall \psi \in D(L^\#)$  :

$$\left(\left(\overline{L^\#}\right)^* \varphi, \psi\right)_{(L^2(Q))^{d+1}} = (f, \psi)_{(L^2(Q))^{d+1}} \Rightarrow (\varphi, \overline{L^\#}\psi)_{(L^2(Q))^{d+1}} = (f, \psi)_{(L^2(Q))^{d+1}}.$$

Mais comme  $\mathcal{N}^*$  vérifie les hypothèses 1.3.2, il existe une suite  $\psi_n \in D(\overline{L^\#})$  et une suite  $f_n$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \psi_n &\longrightarrow \psi \quad \text{dans } (L^2(Q))^{d+1} \\ f_n &\longrightarrow f \quad \text{dans } (L^2(Q))^{d+1} \end{aligned}$$

avec  $(\varphi, \overline{L^\#}\psi_n)_{(L^2(Q))^{d+1}} = (f_n, \psi_n)_{(L^2(Q))^{d+1}}$ . Donc, comme précédemment, la continuité du produit scalaire permet de conclure que :

$$G\left(\left(\overline{L^\#}\right)^*\right) \subset G(\overline{L}).$$

En conclusion, on a montré que  $\overline{L} = \left(\overline{L^\#}\right)^*$ . Mais, comme pour tout opérateur  $\mathcal{K}$  fermé à domaine dense dans un espace de Banach réflexif,  $\mathcal{K}^{**} = \mathcal{K}$ , on a :

$$\overline{L}^* = \left(\left(\overline{L^\#}\right)^*\right)^* = \overline{L^\#}.$$

■

Le théorème d'existence et d'unicité attendu nécessite une dernière hypothèse :

**Hypothèses 1.3.3** *On suppose de plus que les deux inégalités suivantes sont vérifiées pour  $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]$  (on dira que  $\mathcal{N}(x, t)$  est maximal positif) :*

1.  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(L), (A^i n_i \varphi, \varphi)_{\mathbb{C}^{d+1}} \geq 0,$
2.  $\forall \psi \in \mathcal{D}(L^\#), (A^i n_i \psi, \psi)_{\mathbb{C}^{d+1}} \leq 0.$

**Théorème 1.3.5** *Pour  $(f, g) \in (L^2(Q))^{d+1} \times (L^2(Q))^{d+1}$ , et sous les hypothèses (1.3.1, 1.3.2, 1.3.3), les deux systèmes :*

$$\begin{cases} \overline{L}\varphi &= f(x, t) & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \varphi(x, t) &\in \mathcal{N}(x, t) & \text{pour } (x, t) \in (\partial\Omega \times [0, T]) \\ \varphi(\cdot, 0) &= 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.12)$$

et

$$\begin{cases} \overline{L^\#} \psi &= g(x, t) & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \psi(x, t) &\in \mathcal{N}^*(x, t) & \text{pour } (x, t) \in (\partial\Omega \times [0, T]) \\ \psi(\cdot, T) &= 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1.13)$$

admettent une solution unique dans  $(L^2(Q))^{d+1}$ , avec équivalence entre solution faible et forte. De plus,  $\overline{L}^{-1}$  et  $\overline{L^\#}^{-1}$  appartiennent à  $\mathcal{L}\left((L^2(Q))^{d+1}\right)$ , et les solutions  $\varphi$  et  $\psi$  appartiennent à  $C([0, T], L^2(\Omega))$ .

**Preuve.** On rappelle que l'on a posé :

$$K = B - \frac{1}{2}(\partial_i A^i).$$

Si l'on pose  $\varphi = \varphi' e^{\alpha t}$  avec  $\alpha > 0$  (isomorphisme bicontinu de  $(L^2(Q))^{d+1}$  sur lui-même puisque  $T$  est borné), le problème spatio-temporel  $\overline{L}\varphi = f$  devient un problème en  $\varphi'$  associé à un  $K' = K + 2\alpha \mathbb{I}_{d+1}$ . Donc, sans perte de généralité, on peut supposer que  $\exists c > 0$  tel que :

$$K = B - \frac{1}{2}(\partial_i A^i) \geq c \mathbb{I}_{d+1}.$$

Rappelons deux théorèmes d'analyse fonctionnelle :

**Théorème 1.3.6** (théorème de "surjectivité", forme primale) Soit  $H$  un Hilbert et  $A$  un opérateur fermé à domaine dense dans  $H$ , alors on a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

1.  $A$  est surjectif.
2.  $\exists c > 0$  tel que  $\forall v \in D(A^*), \|v\|_H \leq c \|A^*(v)\|_H$ .
3.  $\ker(A^*) = \{0\}$  et  $\text{Im}(A^*)$  fermé.

**Théorème 1.3.7** (théorème de "surjectivité", forme duale) Soit  $H$  un Hilbert et  $A$  un opérateur fermé à domaine dense dans  $H$ , alors on a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

1.  $A^*$  est surjectif.
2.  $\exists c > 0$  tel que  $\forall u \in D(A), \|u\|_H \leq c \|A(u)\|_H$ .
3.  $\ker(A) = \{0\}$  et  $\text{Im}(A)$  fermé.

Nous allons montrer dans un premier temps que  $\overline{L}$  et  $\overline{L^\#}$  sont des opérateurs maximaux monotones. Pour cela, on écrit d'abord facilement que, d'une part,  $\forall w \in (C^1(\overline{Q}))^{d+1}$  :

$$(Lw, w)_{\mathbb{C}^{d+1}} + (L^\# w, w)_{\mathbb{C}^{d+1}} = ((K + K^*)w, w)_{\mathbb{C}^{d+1}}.$$

D'autre part, la formule de Green donne pour tout  $(w_1, w_2)$  dans  $(C^1(\overline{Q}))^{d+1} \times (C^1(\overline{Q}))^{d+1}$  :

$$\begin{aligned} (Lw_1, w_2)_{(L^2(Q))^{d+1}} &= \int_{\partial\Omega \times [0, T]} (A^i n_i w_1, w_2)_{\mathbb{C}^{d+1}} + \int_Q (w_1, L^\# w_2)_{\mathbb{C}^{d+1}} \\ &+ \int_\Omega (w_1(\cdot, T), w_2(\cdot, T))_{\mathbb{C}^{d+1}} - \int_\Omega (w_1(\cdot, 0), w_2(\cdot, 0))_{\mathbb{C}^{d+1}}. \end{aligned}$$

Comme la formule de Green est encore applicable dans  $D(L)$  et  $D(L^\#)$  en vertu du théorème 1.3.3, on en déduit que  $\forall \varphi \in D(L)$  :

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}(L\varphi, \varphi)_{(L^2(Q))^{d+1}} &= \int_{\partial\Omega \times [0, T]} (A^i n_i \varphi, \varphi)_{(L^2(Q))^{d+1}} + \operatorname{Re}((K + K^*)\varphi, \varphi)_{(L^2(Q))^{d+1}} \\ &+ \int_{\Omega} |\varphi(\cdot, T)|^2, \end{aligned}$$

et  $\forall \psi \in D(L^\#)$  :

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}(L^\#\psi, \psi)_{(L^2(Q))^{d+1}} &= \int_{\partial\Omega \times [0, T]} - (A^i n_i \psi, \psi)_{(L^2(Q))^{d+1}} + \operatorname{Re}((K + K^*)\psi, \psi)_{(L^2(Q))^{d+1}} \\ &+ \int_{\Omega} |\psi(\cdot, 0)|^2. \end{aligned}$$

Dès lors, la maximalité de  $\mathcal{N}(x, t)$  et l'hypothèse sur la matrice hermitienne  $K$  assurent que les opérateurs  $L$  et  $L^\#$  sont monotones et coercifs sur leurs domaines respectifs. Dans ces conditions et par définition de la plus petite extension fermée d'un opérateur,  $\overline{L}$  et  $\overline{L^\#}$  sont également monotones sur leurs domaines respectifs. Donc en appliquant Cauchy-Schwartz,  $\forall \varphi \in D(\overline{L})$  et  $\forall \psi \in D(\overline{L^\#})$ , on a :

$$\|\varphi\|_{(L^2(Q))^{d+1}} \leq \|(I + \overline{L})\varphi\|_{(L^2(Q))^{d+1}},$$

et

$$\|\psi\|_{(L^2(Q))^{d+1}} \leq \|(I + \overline{L^\#})\psi\|_{(L^2(Q))^{d+1}}.$$

Ces deux coercivités et le théorème 1.3.1 nous garantissent par l'application des théorèmes 1.3.6 et 1.3.7 que les opérateurs  $\overline{L}$  et  $\overline{L^\#}$  sont maximaux monotones. De plus, ils sont coercifs (en vertu de l'hypothèse sur  $K$ ). On en déduit que  $\overline{L}$  est injectif car coercif et que  $\overline{L^\#}$  est coercif. Donc en appliquant de nouveau les théorèmes de surjectivité (forme primale et duale), ces opérateurs sont bijectifs et inversibles sur  $(L^2(Q))^{d+1}$ . On a ainsi construit une suite  $\varphi_n$  telle que, pour  $f_n$  convergeant vers  $f$  dans  $(L^2(Q))^{d+1}$  et pour tout  $(t_1, t_2) \in [0, T]^2$ , on a :

$$|\|\varphi_n(t_2)\|_{L^2(\Omega)} - \|\varphi_n(t_1)\|_{L^2(\Omega)}| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|f_n(\sigma)\|_{L^2(\Omega)} d\sigma.$$

Dès lors, en vertu du fait que l'on peut choisir  $\varphi_n$  telle que  $\varphi_n(t=0) = 0$  sur  $\Omega$ , on montre que  $\varphi \in C([0, T], L^2(\Omega))$  (la preuve est analogue pour  $\psi$ ). ■

## Conclusion

Dans un cadre fonctionnel spatio-temporel précis, nous avons montré l'existence et l'unicité d'une solution au système instationnaire hyperbolique (1.10) en considérant que les conditions aux limites à lui adjoindre sont définies par un espace théorique  $\mathcal{N}(x, t)$ . Dans le but de faciliter l'écriture des schémas d'approximations et éventuellement l'écriture de conditions aux limites non homogènes, nous allons réécrire les conditions aux limites admissibles afin de faire apparaître explicitement, tant pour l'opérateur  $L$  que pour son adjoint, les relations linéaires entre les inconnues. On procède pour cela à un relèvement des conditions aux limites admissibles.



### 1.3.2 Relèvement des conditions aux limites admissibles

On représente classiquement  $\mathcal{N}(x, t)$  par le noyau d'une matrice  $M \in \mathbb{C}^{d+1} \times \mathbb{C}^{d+1}$ . Donc :

$$\mathcal{N}(x, t) = \ker(M(x, t)),$$

et on pose

$$M = -\frac{1}{2} (A^i n_i - N). \quad (1.14)$$

La matrice  $N$  à identifier n'est pas nécessairement symétrique. On rappelle que  $\mathcal{N}(x, t)$  est dit maximal positif (hypothèse 1.3.3 indispensable pour assurer l'existence et l'unicité du problème instationnaire posé avec des conditions aux limites) si :

1.  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(L), (A^i n_i \varphi, \varphi)_{\mathbb{C}^{d+1}} \geq 0,$
2.  $\forall \psi \in \mathcal{D}(L^\#), (A^i n_i \psi, \psi)_{\mathbb{C}^{d+1}} \leq 0.$

Afin de classifier de manière exhaustive les conditions aux limites convenables à adjoindre au problème (1.10), on exprime les flux  $A^i n_i$  dérivant de (1.10) sous la forme :

$$A^i n_i = V_n \mathbb{I}_{d+1} + c_0 \begin{pmatrix} 0 & n \\ n^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

où  $V_n = U_0^i n_i$  désigne la vitesse normale sortante de l'écoulement porteur. Il en découle une discussion suivant le signe de ces flux.

#### L'écoulement porteur glissant

Pour  $V_n = 0$ , l'écoulement porteur est dit "glissant". Dans ce cas, les flux  $A^i n_i$  correspondent aux flux de l'équation des ondes écrite à l'ordre 1. Deux types de conditions d'obstacles apparaissent alors naturellement :

- $\forall \varphi \neq 0 \in \ker(M), (A^i n_i \varphi, \varphi)_{\mathbb{C}^{d+1}} = 0$ . C'est en particulier le cas pour ces deux conditions classiques<sup>1</sup> :
- Une condition d'obstacle "mou" ou encore un noeud de pression qui consiste à imposer  $\rho = 0$ .<sup>2</sup>
- Une condition d'obstacle "dur" ou encore de glissement parfait qui consiste à imposer  $u^i n_i = 0$ .<sup>3</sup>

Comme les échelles de valeurs de pressions et de vitesses ne sont pas du tout du même ordre de grandeur pour l'écoulement porteur et l'écoulement perturbé, on peut considérer, même dans le cas de l'écoulement porteur "glissant", que les perturbations obéissent à une relation d'impédance modélisant des phénomènes physiques tels la rugosité ou les vibrations d'une paroi.

- $\forall \varphi \neq 0 \in \ker(M), (A^i n_i \varphi, \varphi)_{\mathbb{C}^{d+1}} > 0$ . On impose alors la condition aux limites homogène suivante :

$$\forall (x, t) \in \Gamma \times [0, T], \rho = \alpha(x, t) \vec{u} \cdot \vec{n}, \quad (1.16)$$

avec  $\vec{n}$  normale sortante à  $\Omega$  sur  $\partial\Omega$ , et la condition suivante sur l'impédance :

$$\alpha(x, t) \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \text{Re}(\alpha) \geq 0.$$

<sup>1</sup>Dans ce cas, le flux d'énergie dans (1.11) est nul.

<sup>2</sup>C'est la condition de Dirichlet pour l'équation des ondes.

<sup>3</sup>C'est la condition de Neumann pour l'équation des ondes.

La matrice  $M_\alpha$  naturellement associée à cette condition aux limites est :

$$M_\alpha = \frac{c_0}{2} \begin{pmatrix} \alpha n \otimes n & -n \\ -n^T & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Cette condition d'impédance est la plus couramment usitée, mais pour cette matrice  $M_\alpha$ , la condition d'obstacle "mou" ( $\alpha = 0$ ) ou la condition de glissement parfait ( $\alpha \rightarrow +\infty$ , pour  $\alpha$  réel) est singulière par rapport à la condition d'impédance générale.

Pour pallier ce handicap, on écrit la condition d'impédance (1.16) en fonction de  $\beta$ , absorption acoustique définie par :

$$\beta(x, t) = \frac{\alpha(x, t) - 1}{\alpha(x, t) + 1},$$

changement de variable homographique et bijectif des complexes à partie réelle positive dans le disque unité ( $|\beta| \leq 1$ ). Dès lors, (1.16) devient :

$$(\beta - 1) \rho + (\beta + 1) \vec{u} \cdot \vec{n} = 0, \quad (1.17)$$

à la condition que  $|\beta| \leq 1$ .

Une matrice  $M_\beta$  candidate est :

$$M_\beta = \frac{c_0}{2} \begin{pmatrix} (\beta + 1)n \otimes n & (\beta - 1)n \\ -(1 + \beta)n^T & (1 - \beta) \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

mais il reste encore à vérifier que ce relèvement de la condition aux limites satisfait les conditions de l'hypothèse 1.3.3, nécessaire pour appliquer le théorème 1.3.5.

1. Il est clair que :

$$\forall \varphi \in \ker(M_\beta), (A^i n_i \varphi, \varphi)_{\mathbb{C}^{d+1}} \geq 0 \Leftrightarrow ((N_\beta + N_\beta^*)\varphi, \varphi)_{\mathbb{C}^{d+1}} \geq 0.$$

Or, pour cette matrice  $M_\beta$ , on a :

$$N_\beta = 2M_\beta + A^i n_i = c_0 \begin{pmatrix} (\beta + 1)n \otimes n & \beta n \\ -\beta n^T & (1 - \beta) \end{pmatrix},$$

donc pour tout  $\varphi \in \mathbb{C}^{d+1}$  de la forme  $(u^i, \rho)^T$ , on a :

$$(N_\beta \varphi, \varphi)_{\mathbb{C}^{d+1}} = c_0 \begin{pmatrix} (\beta + 1)\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} & \beta \mathbf{1} \\ -\beta \mathbf{1}^T & 1 - \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^i n_i \\ \rho \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{u^i n_i} \\ \overline{\rho} \end{pmatrix},$$

où  $\mathbf{1}$  désigne le vecteur de taille  $d$  ne comportant que des 1. On en déduit que pour étudier le signe de la forme quadratique associée à  $N_\beta$ , il suffit d'étudier celui de la forme quadratique associée à la matrice suivante (que l'on notera aussi  $N_\beta$  par abus de notation) :

$$N_\beta = c_0 \begin{pmatrix} (\beta + 1) & \beta \\ -\beta & (1 - \beta) \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique associé à la matrice symétrique :

$$\frac{N_\beta + N_\beta^*}{2} = c_0 \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\beta) + 1 & i \operatorname{Im}(\beta) \\ -i \operatorname{Im}(\beta) & 1 - \operatorname{Re}(\beta) \end{pmatrix},$$

vaut :

$$P_\beta(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - |\beta|^2.$$

Comme  $|\beta| \leq 1$ , les racines de  $P_\beta$  sont positives et la première des hypothèses 1.3.3 est vérifiée.

2. Il reste encore à vérifier la validité de la seconde hypothèse, à savoir :

$$\forall \omega \in (A^i n_i(\mathcal{N}(x, t)))^\perp, (A^i n_i \omega, \omega)_{\mathbb{C}^{d+1}} \leq 0.$$

En premier lieu, on cherche donc à identifier  $(A^i n_i(\mathcal{N}(x, t)))^\perp$ .

Soit :

$$\varphi \in \mathcal{N}(x, t) \quad \text{et} \quad \omega = (\omega^i)_{i=1..d+1}^T \in (A^i n_i(\mathcal{N}(x, t)))^\perp.$$

$\omega$  est caractérisé par la relation

$$(A^i n_i \varphi, \omega)_{\mathbb{C}^{d+1}} = 0 \Leftrightarrow \rho \overline{\omega^i} n_i + \overline{\omega^{d+1}} u^i n_i = 0.$$

Comme  $\varphi \in \mathcal{N}(x, t)$ , pour  $\beta \neq 1$  et  $\beta \neq -1$ , nous avons :

$$(A^i n_i \varphi, \omega)_{\mathbb{C}^{d+1}} = 0 \Leftrightarrow (\beta - 1) \overline{\omega^{d+1}} - (\beta + 1) \overline{\omega^i} n_i = 0.$$

Par conséquent, pour  $\beta \neq 1$  et  $\beta \neq -1$ ,  $(A^i n_i(\mathcal{N}(x, t)))^\perp$  est caractérisé par :

$$(A^i n_i(\mathcal{N}(x, t)))^\perp = \{\omega \text{ tel que } (\beta - 1) \overline{\omega^{d+1}} - (\beta + 1) \overline{\omega^i} n_i = 0\}. \quad (1.19)$$

Mais :

$$\beta = 1 \Leftrightarrow u^i n_i = 0 \Leftrightarrow \overline{\omega^i} n_i = 0,$$

et

$$\beta = -1 \Leftrightarrow \rho = 0 \Leftrightarrow \overline{\omega^{d+1}} = 0.$$

Par conséquent, la caractérisation (1.19) de  $(A^i n_i(\mathcal{N}(x, t)))^\perp$  reste vraie pour  $\beta = 1$  et  $\beta = -1$ . En conclusion,  $\forall \omega \in (A^i n_i(\mathcal{N}(x, t)))^\perp$ , on a :

$$(A^i n_i \omega, \omega)_{\mathbb{C}^{d+1}} = c_0 \left( \omega^{d+1} \left( \overline{\omega^i} n_i \right) + \overline{\omega^{d+1}} \omega^i n_i \right) = 2c_0 \operatorname{Re} \left( \overline{\omega^i} n_i \omega^{d+1} \right).$$

Donc, on peut conclure que :

-  $(A^i n_i \omega, \omega)_{\mathbb{C}^{d+1}} = 0$  pour  $\beta = -1$ .

-  $(A^i n_i \omega, \omega)_{\mathbb{C}^{d+1}} = 2c_0 |\omega^{d+1}|^2 \operatorname{Re} \left( \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \right)$ , pour  $\beta \neq -1$ .

Mais :

$$\operatorname{Re} \left( \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \right) = \frac{|\beta|^2 - 1}{|\beta + 1|^2},$$

donc :

$$\forall \omega \in (A^i n_i(\mathcal{N}))^\perp, (A^i n_i \omega, \omega)_{\mathbb{C}^{d+1}} \leq 0 \Leftrightarrow |\beta| \leq 1.$$

La matrice  $M_\beta$  satisfait bien la seconde des hypothèses 1.3.3, et par conséquent les hypothèses 1.3.3.

**Remarque 1.3.2** La matrice  $M_\alpha$  vérifie également cette hypothèse de maximale positivité. Mais pour saisir l'importance de ce changement de variables, il est nécessaire de ne pas perdre de vue l'objectif de cette thèse, à savoir le contrôle de perturbations aéroacoustiques par des conditions aux limites de type impédance. Sans ce changement de variable, les conditions d'obstacle "mou" ou de glissement "parfait" ne seraient jamais atteintes dans la méthode de descente associée à l'algorithme d'optimisation mis en oeuvre ultérieurement. Or, ces conditions sont des conditions de référence physique (notamment la condition de glissement "parfait") auxquelles les résultats obtenus peuvent être facilement comparés. D'autres propriétés seront signalées ultérieurement, et de nombreuses comparaisons seront effectuées entre la prise en compte de la condition d'impédance par la variable  $\alpha$  et la variable  $\beta$ .

### L'écoulement porteur sortant

Pour  $V_n > 0$ , l'écoulement porteur subsonique est dit "sortant". Dans ce cas, les conditions aux limites intéressantes correspondent à des conditions transparentes à l'ordre 1 (complètement non réfléchissantes pour les ondes normales). Elles correspondent à des coefficients "gelés", supposés localement constants.

La matrice des flux  $A^i n_i$  associée à la partie principale de l'opérateur  $A^i \partial_i$  mis en jeu dans (1.10) est symétrique réelle. En posant :

$$A^i n_i^+ = \sup(A^i n_i, 0),$$

et

$$A^i n_i^- = \inf(A^i n_i, 0),$$

les matrices associées respectivement aux valeurs propres positives et négatives de  $A^i n_i$ , on obtient la décomposition :

$$A^i n_i = A^i n_i^+ + A^i n_i^-.$$

Dans ce cas, la matrice

$$M = -(A^i n_i^-),$$

définie en (1.14) vérifie successivement les conditions :

1.  $N = (A^i n_i)^+ - (A^i n_i)^- = |A^i n_i| \geq 0$ .
2.  $(A^i n_i (\ker(A^i n_i^-)))^\perp = \ker(A^i n_i^+)$ , donc

$$\forall w \in (A^i n_i (\mathcal{N}))^\perp, (A^i n_i w, w)_{\mathbb{C}^{d+1}} = (A^i n_i^- w, w)_{\mathbb{C}^{d+1}} \leq 0.$$

Par conséquent, cette matrice  $M$  vérifie les hypothèses 1.3.3. Dans [35], l'auteur montre que cette condition aux limites est la première approximation d'une condition non réfléchissante.<sup>4</sup> Plus précisément, dans ce cas, l'expression de la matrice  $M$  est donnée par :<sup>5</sup>

$$M = -(A^i n_i)^- = -\frac{1}{2} (V_n - c_0) \begin{pmatrix} n \otimes n & -n \\ -n^T & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Mais,

$$M\varphi = 0 \Leftrightarrow \rho = u^i n_i = \vec{u} \cdot \vec{n},$$

donc dans ce cas, il ne subsiste qu'une seule condition aux limites ( $\alpha = (1, 0)$  ou  $\beta = (0, 0)$  correspond à "l'impédance" du vide dans le système de variables choisi).

### L'écoulement porteur entrant

Pour  $V_n < 0$ , l'écoulement porteur subsonique est dit "entrant". Les conditions aux limites intéressantes sont les mêmes que dans le cas précédent, avec cette fois-ci :

$$(A^i n_i)^+ = \frac{1}{2} (V_n + c_0) \begin{pmatrix} n \otimes n & n \\ n^T & 1 \end{pmatrix},$$

<sup>4</sup>Les matrices  $(A^i n_i)^+$  et  $(A^i n_i)^-$  seront utilisées pour une semi-discrétisation spatiale de (1.10) posé avec des conditions aux limites admissibles.

<sup>5</sup>L'écoulement porteur est subsonique, donc  $V_n < c_0$ .

et

$$\begin{aligned}
M &= -(A^i n_i)^- \\
&= (A^i n_i)^+ - (A^i n_i) \\
&= \begin{pmatrix} -V_n \mathbb{I}_d + \frac{1}{2} (V_n + c_0) n \otimes n & \frac{1}{2} (V_n - c_0) n \\ \frac{1}{2} (V_n - c_0) n^T & -\frac{1}{2} (V_n - c_0) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

La condition non réfléchissante se formule dans ce cas de la façon suivante :

$$M\varphi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho & = \vec{u} \cdot \vec{n} \\ V_n u - \frac{1}{2} (V_n + c_0) (\vec{u} \cdot \vec{n}) n + \frac{1}{2} (c_0 - V_n) \rho n & = 0. \end{cases}$$

**Remarque 1.3.3** *Ces relations ne sont pas indépendantes. La première relation se déduit des deux ou trois autres en multipliant scalairement par le vecteur  $\vec{n}$ . Cette condition non réfléchissante approchée ne comporte donc que deux relations indépendantes. On remarque immédiatement que l'on impose bien une condition homogène supplémentaire en franchissant le saut de rang  $A^i n_i$ , ce qui traduit l'hypothèse 1.3.2.*

**Théorème 1.3.8** *Les matrices (1.18, 1.20, 1.21) vérifient la relation algébrique :*

$$\ker(M^\#) = (A^i n_i (\ker(M)))^\perp,$$

où  $M^\# = A^i n_i + M^*$ .

**Preuve.**

– Pour  $M = -(A^i n_i)^-$ , c'est clair car :

$$\ker(M^\#) = \ker(A^i n_i^+) = (A^i n_i (\ker(A^i n_i^-)))^\perp = (A^i n_i (\ker(M)))^\perp.$$

– Pour  $M = M_\beta$ , on a :

$$M_\beta = \frac{c_0}{2} \begin{pmatrix} (\beta + 1)n \otimes n & (\beta - 1)n \\ -(1 + \beta)n^T & (1 - \beta) \end{pmatrix} \Rightarrow M_\beta^* + A^i n_i = \frac{c_0}{2} \begin{pmatrix} (\bar{\beta} + 1)n \otimes n & (1 - \bar{\beta})n \\ (1 + \bar{\beta})n^T & (1 - \bar{\beta}) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, avec les notations précédentes, et en vertu de (1.19), on a :

$$\omega \in \ker(M_\beta^\#) \Leftrightarrow (\bar{\beta} - 1)\omega^{d+1} - (\bar{\beta} + 1)\omega^i n_i = 0 \Leftrightarrow \omega \in (A^i n_i (\ker(M_\beta)))^\perp.$$

■

## Conclusion

De cette taxinomie des conditions aux limites, on déduit un théorème d'existence et d'unicité :

**Théorème 1.3.9** *Si l'on suppose que :*

1. *Sur toutes les composantes connexes  $O_i$  de  $\partial\Omega$  où  $V_n = 0$ ,  $\mathcal{N}(x, t) = \ker(M_\beta)$  avec  $\beta \in C^1(O_i \times [0, T], \mathbb{C})$ .<sup>6</sup>*
2. *Sur toutes les autres composantes connexes de  $\partial\Omega$ ,  $\mathcal{N} = \ker((A^i n_i)^-)$ .<sup>7</sup>*

<sup>6</sup>Ces conditions sont des conditions d'obstacle pour l'écoulement porteur.

<sup>7</sup>L'ensemble où  $V_n = 0$  est supposé être constitué de courbes séparant localement  $\partial\Omega$  en parties où  $V_n < 0$  et  $V_n > 0$ .

3.  $\forall (x, t) \in \Gamma \times [0, T], \beta(x, t) \in C^0(\overline{\Gamma_c} \times [0, T], \mathbb{C}) \cap C_m^1(\Gamma_c \times [0, T], \mathbb{C}), |\beta(x, t)| \leq 1$  (voir figure 1).
4. On note  $M^\# = A^i n_i + M^*$ , donc  $\ker(M^\#) = (A^i n_i(\ker(M)))^\perp$ .
5.  $f \in (L^2(Q))^{d+1}, g \in (L^2(Q))^{d+1}$ ,

alors les deux systèmes suivants (où l'on notera abusivement  $L = \overline{L}$  et  $L^\# = \overline{L^\#}$ ) :

$$\begin{cases} L\varphi & = f \\ M_\beta\varphi & = 0 \quad \text{dans } H_{loc}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma \times [0, T]) \\ A^i n_i^- \varphi & = 0 \quad \text{dans } H_{loc}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega \setminus \Gamma \times [0, T]) \\ \varphi(x, 0) & = 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

et,

$$\begin{cases} L^\#\psi & = g \\ M_\beta^\#\psi & = 0 \quad \text{dans } H_{loc}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma \times [0, T]) \\ A^i n_i^+ \psi & = 0 \quad \text{dans } H_{loc}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega \setminus \Gamma \times [0, T]) \\ \psi(x, T) & = 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

ont une unique solution (faible et forte) dans  $(L^2(Q))^{d+1}$  notées respectivement  $\varphi_\beta$  et  $\psi_\beta$ .

**Preuve.** On a  $\ker(M^\#) = (A^i n_i(\ker(M)))^\perp = \mathcal{N}^*$  et  $\ker(A^i n_i) \subset \mathcal{N}$ .

Les matrices  $M_\beta, M_\beta^\#, A^i n_i^-, A^i n_i^+$  sont lipchitziennes, donc les valeurs des traces

$$M_\beta\varphi, M_\beta^\#\psi, A^i n_i^- \varphi, A^i n_i^+ \psi,$$

sont bien définies dans  $H_{loc}^{-\frac{1}{2}}$ . Les valeurs  $\varphi(x, 0)$  et  $\psi(x, T)$  sont bien définies d'après la dernière partie du théorème 1.3.5. Les hypothèses (1.3.2, 1.3.3) sont satisfaites. Par application du théorème 1.3.5, les systèmes (1.22) et (1.23) ont une unique solution dans  $(L^2(Q))^{d+1}$ . ■

**Remarque 1.3.4** Pour la motivation de cette thèse, et en particulier la résolution de problème de contrôle optimal dont les équations d'état sont régis par le problème (1.22), ce résultat n'est a priori pas suffisant. En effet,  $g \in (L^2(Q))^{d+1}$  ne correspond pas à une observabilité frontière. Le second membre  $g$  du problème adjoint doit pouvoir être moins régulier que  $L^2$  dans le cas d'une observabilité de type frontière (autrement dit pour une surface de prélèvement  $O_s$ ), par exemple un second membre de type Dirac. Une théorie des systèmes de Friedrichs basée sur les résultats de régularité obtenus dans [59], dont un théorème similaire au théorème 1.3.9 pourrait être la finalité (mais pour un second membre  $g \in (C^{1,1}(Q))^{d+1}$  et des coefficients des équations d'état de même régularité), nécessiterait d'importantes améliorations techniques quant au relèvement du problème (1.23) à des seconds membres équivalents  $L^2$ . Néanmoins, pour les applications numériques et la discrétisation des problèmes (1.22) et (1.23), une approximation convenable d'un observatoire surfacique par une surface plus régulière permettant de considérer que le second membre du problème (1.23) est de régularité  $L^2$ , nous semble tout à fait valable. En effet, même dans le cas d'une surface de prélèvement très peu régulière, la faisabilité des applications numériques et de la discrétisation imposera nécessairement que le support de cette surface contienne l'épaisseur des éléments choisis pour la discrétisation.

Les problèmes (1.22) et (1.23) seront appelés par la suite problème direct et problème adjoint.

## Chapitre 2

# Approximation par une méthode Galerkin discontinue

En mettant sous la forme  $A^i \eta_i$  (avec  $\eta \in \mathbb{R}^d$ ) la partie principale spatiale  $A^i \partial_i$  de l'opérateur  $L = \mathbb{I}_{d+1} \partial_t + \mathcal{A}$ , ses valeurs propres sont :

$$U_0^i \eta_i + c_0 \|\eta\|_2, U_0^i \eta_i - c_0 \|\eta\|_2, U_0^i \eta_i,$$

où la dernière est une valeur propre simple ou double suivant la valeur de  $d$ . Le déterminant de la partie principale est donc égal à :

$$\det(A^i \eta_i) = ((U_0^i \eta_i)^2 - c_0^2 \|\eta\|_2^2) (U_0^i \eta_i)^{d-1}.$$

En conclusion, la partie principale de l'opérateur spatial n'est pas elliptique<sup>1</sup>, car le déterminant de celui-ci peut s'annuler pour  $\eta \neq 0$ . La forme symétrique du problème mixte (1.22) permet de mettre en oeuvre des techniques d'approximation du type Galerkin discontinue, qui pallient, en approximant de façon non conforme dans  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ , les inconvénients issus de la non ellipticité de l'opérateur  $\mathcal{A}$ . En introduisant une technique de flux-splitting, il n'est plus nécessaire d'assurer la coercivité de l'opérateur discrétisé  $\mathcal{A}_h$  dans  $(\ker(\mathcal{A}))^\perp$ .

### 2.1 Formulation variationnelle du problème direct

Pour définir la formulation variationnelle de (1.22), s'affranchir des problèmes de traces et justifier les intégrations par parties, on va se placer dans l'espace  $\tilde{E}$  défini par :

$$\varphi \in \tilde{E} \Leftrightarrow \varphi \in \left( H_m^{k+1}(Q) \right)^{d+1}, k \in \mathbb{N},$$

ce qui signifie que les composantes de  $\varphi$  sont  $H^{k+1}$  par morceaux dans  $Q$  à valeurs complexes, ou plus précisément qu'il existe une famille finie d'ouverts notée  $(U_e)$  vérifiant les points suivants :

- Les  $U_e$  sont connexes, deux à deux disjoints, non dégénérés et de mesure de Lebesgue uniformément bornées.
- $\bigcup_e U_e = \bar{Q}$ .
- $\partial U_e$  est de classe  $C_m^{k+1}$ , et  $U_e$  est localement d'un seul côté de la frontière  $\partial U_e$ .
- Pour tout  $e$ , les restrictions de  $\varphi$  à  $U_e$  sont dans  $H^{k+1}(U_e)$ .

---

<sup>1</sup>le même résultat persiste pour l'opérateur  $\mathcal{A} = A^i \partial_i + B$ , car l'opérateur  $B$  est borné.

En pratique, nous considérons une sous-partition  $(V_e)$  en ouverts de la partition  $(U_e)$ , vérifiant les mêmes propriétés. On adopte alors les notations suivantes :

$$\begin{cases} S\varphi &= \bigcup_e \partial V_e \setminus \partial Q \\ R\varphi &= \bigcup_e V_e \end{cases}$$

$S\varphi$  représente l'ensemble des discontinuités de la distribution  $\varphi$  et  $R\varphi$  son complémentaire dans  $\Omega$ . On peut alors établir le théorème suivant :

**Théorème 2.1.1**  $\varphi_\beta$  est solution de (1.22) dans  $\tilde{E}$  si et seulement si  $\forall \psi \in \tilde{E}$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{R\varphi_\beta \cap R\psi} (L\varphi_\beta, \psi)_{\mathbb{C}^{d+1}} + \int_{\widetilde{S\varphi_\beta \cup S\psi}} (A^i n_i^- (\varphi_\beta^+ - \varphi_\beta^-), \psi^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} \\ + \int_{\partial Q} (M_\beta \varphi_\beta, \psi)_{\mathbb{C}^{d+1}} = \int_Q (f, \psi)_{\mathbb{C}^{d+1}}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

où les conventions suivantes ont été adoptées :

1.  $\vec{n} = (n_i)$  est un vecteur unitaire normal, sortant à  $\partial V_e$ .
2.  $\widetilde{S\varphi_\beta \cup S\psi}$  signifie que l'intégration correspondante doit s'effectuer suivant les deux orientations de  $\vec{n}$  (des deux côtés de la frontière).
3. Pour  $x \in (S\varphi_\beta \cup S\psi)$ , on définit  $\varphi_\beta^+(x)$  (respectivement  $\varphi_\beta^-(x)$ ) par :

$$\varphi_\beta^+(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varphi_\beta(x + \varepsilon n) \quad (\text{respectivement } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varphi_\beta(x - \varepsilon n)),$$

et cette limite est au moins définie dans  $H^{\frac{1}{2}}(S\varphi_\beta \cup S\psi)$ .

Le second terme de (2.1), en choisissant une seule orientation de la normale, devient :

$$\int_{S\varphi_\beta \cup S\psi} (A^i n_i^- (\varphi_\beta^+ - \varphi_\beta^-), \psi^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} + (A^i n_i^+ (\varphi_\beta^+ - \varphi_\beta^-), \psi^+)_{\mathbb{C}^{d+1}}.$$

**Preuve.** L'équation principale du système (1.22) s'écrit au sens des distributions :

$$\begin{cases} \partial_t \varphi_\beta + A^i \partial_i \varphi_\beta + B \varphi_\beta &= f \quad \text{presque partout sur } R\varphi_\beta \\ A^i n_i [\varphi_\beta] &= 0 \quad \text{sur } S\varphi_\beta. \end{cases}$$

En conséquence, on a pour tout  $\psi \in \tilde{E}$  :

$$\int_{R\varphi_\beta \cap R\psi} (\partial_t \varphi_\beta + A^i \partial_i \varphi_\beta + B \varphi_\beta, \psi)_{\mathbb{C}^{d+1}} = \int_{R\varphi_\beta \cap R\psi} (f, \psi)_{\mathbb{C}^{d+1}}.$$

De plus, on a les relations suivantes :

1.  $\ker(A^i n_i) \subset \ker(A^i n_i)^+$ .
2.  $\ker(A^i n_i) \subset \ker(A^i n_i)^-$ .
3.  $(A^i (-n_i))^+ = - (A^i n_i)^-$ .



Cela signifie que les relations de Rankine-Hugoniot sont équivalentes à :

$$\begin{aligned} A^i n_i [\varphi_\beta] &= 0 \text{ sur } S\varphi_\beta \\ \Leftrightarrow A^i n_i^- (\varphi_\beta^+ - \varphi_\beta^-) &= 0 \text{ en } n_i \text{ et en } -n_i, \end{aligned} \quad (2.2)$$

donc, pour tout  $\psi \in \widetilde{E}$ , on a :

$$\int_{S\varphi_\beta \cup S\psi} \left( A^i n_i^- (\varphi_\beta^+ - \varphi_\beta^-), \psi^- \right)_{\mathbb{C}^{d+1}} = 0.$$

La contribution de la condition aux limites permet de conclure, à savoir que  $\varphi_\beta$  solution de (1.22) implique que  $\varphi_\beta$  vérifie (2.1). Un choix judicieux de fonctions tests  $\psi$  qui permet d'annuler successivement les intégrales mises en jeu dans (2.1), ainsi que l'équivalence (2.2) montrent trivialement la réciproque.

■

Une discrétisation naturelle symétrique espace/temps de cette formulation variationnelle avec des éléments produits cartésiens espace/temps aboutirait à un schéma totalement implicite. Dans [23], l'auteur montre que l'on peut résoudre le système linéaire qui en découle par une méthode de Jacobi par bloc convergente (car le système discrétisé est localement dissipatif). Cette méthode est de plus très robuste [53]. Si chacune des composantes des fonctions de base est un polynôme de degré inférieur à  $k$ , les auteurs précités ainsi que ([39, 8]) obtiennent l'estimation de l'erreur de consistance en la norme  $||| \cdot |||$  associée au produit scalaire

$$(\varphi, \psi)_{(L^2(Q))^{d+1}} + \int_{S\varphi_\beta \cup S\psi} (|A^i n_i| [\varphi], [\psi])_{\mathbb{C}^{d+1}} d\sigma,$$

où  $[\varphi]$  représente le saut des traces de  $\varphi$  sur  $S\varphi$ , suivante :

$$||| \varphi_\beta - \varphi_h ||| \leq C(T, \Omega) ||| \varphi_\beta |||_{(H_m^k(Q))^{d+1}} h^{k+\frac{1}{2}}, \quad (2.3)$$

où  $\varphi_h$  est la solution du problème associé au schéma totalement implicite et  $h$  la dimension caractéristique du maillage du domaine spatio-temporel  $Q$ . De plus, ce type de schéma est inconditionnellement stable. Dans [49], les auteurs montrent qu'un schéma semi-implicite en espace reste également inconditionnellement stable, et obtiennent une estimation d'erreur similaire à (2.3).

Cependant, la nécessité de résoudre ce système linéaire induit un fort coût de calcul et des difficultés numériques se présentent pour écrire des discrétisations plus précises (ordre 2 ou plus). Ces deux inconvénients majeurs font que l'approximation totalement implicite, quoique plus naturelle, ne présente en général que peu d'intérêt. On va donc opter pour une discrétisation temporelle explicite du système différentiel associé à (1.22). Bien entendu, contrairement à la résolution totalement implicite, cette résolution temporelle explicite ne sera pas inconditionnellement stable.

## 2.2 Discrétisation du problème direct

On considère une partition de  $\Omega$  de la forme  $\Omega = \bigcup_{e=1}^N \omega_e$ . Plus précisément, on suppose que :

- Les  $\omega_e$  sont ouverts, disjoints 2 à 2, non dégénérés et de volumes uniformément bornés :

$$\exists h > 0, \sup_e \text{diam}(\omega_e) \leq h.$$

$$- \overline{\bigcup_e \omega_e} = \overline{\Omega}.$$

-  $\partial\omega_e$  est  $C^\infty$  par morceaux et  $\omega_e$  est localement d'un seul côté de la frontière  $\partial\omega_e$ .

- Pour tout  $e$ , les restrictions  $\varphi_h$  de  $\varphi_\beta$  à  $\omega_e$  sont dans  $H^{k+1}(V_e)$  et  $\omega_e \subset V_e$ .

Soit  $W_{h,e}$ , l'espace des fonctions vectorielles à valeurs complexes de dimension finie  $k$ , engendré par une base de fonctions  $b_r^e (r = 1..k)$  de l'élément  $\omega_e$  (engendrant un espace d'interpolation de dimension finie noté  $\partial W_{h,e}$  sur  $\partial\omega_e$ ). On supposera de plus qu'il existe  $\alpha_e$  et  $\beta_e$  réels positifs tels que les propriétés d'homogénéités suivantes soient vérifiées :

$$\forall X \in W_{h,e}, \forall i, \|\partial_i X\|_{L^2(W_{h,e})} \leq \alpha_e \frac{\text{aire}(\partial\omega_e)}{\text{vol}(\omega_e)} \|X\|_{L^2(W_{h,e})} \quad (2.4)$$

$$\forall X \in W_{h,e}, \|X|_{\partial\omega_e}\|_{L^2(\partial W_{h,e})}^2 \leq \beta_e \frac{\text{aire}(\partial\omega_e)}{\text{vol}(\omega_e)} \|X\|_{L^2(W_{h,e})}^2, \quad (2.5)$$

où  $\text{vol}(\omega_e)$  désigne le volume d'un élément du maillage spatial, et  $\text{aire}(\partial\omega_e)$  l'aire de sa frontière.

**Remarque 2.2.1** Ces hypothèses techniques d'homogénéité (2.4, 2.5) sont évidemment vérifiées pour des fonctions de base polynômiales.

La discrétisation du système différentiel associé à (1.22) consiste à résoudre la formulation variationnelle suivante :

Quelque soit l'élément  $e$ , trouver  $\varphi_h \in W_{h,e}$  telle que  $\forall \psi_h \in W_{h,e}$ , on ait :

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_e \times [0,T]} (\partial_t \varphi_h + \mathcal{A}^i \partial_i \varphi_h + B \varphi_h, \psi_h)_{\mathbb{C}^{d+1}} + \int_{\partial\omega_e \setminus \Gamma \times [0,T]} (A^i n_i^- (\varphi_h^+ - \varphi_h^-), \psi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} \\ & + \int_{\partial\omega_e \cap \Gamma \times [0,T]} (M_\beta \varphi_h, \psi_h)_{\mathbb{C}^{d+1}} = \int_{\omega_e \times [0,T]} (f, \psi_h)_{\mathbb{C}^{d+1}}. \end{aligned}$$

Mais comme

$$\forall v \in W_{h,e}, \exists v_r \in \mathbb{C}^k \text{ tel que } v = \sum_{r=1}^k b_r^e v_r,$$

la décomposition dans cette base des fonctions  $\varphi_h$  et  $\psi_h$  intervenant dans (2.1) amène en fait à résoudre un système de  $(d+1)kN$  équations aux dérivées ordinaires linéaires se présentant sous la forme de  $(d+1)k$  équations par élément, le couplage avec les éléments voisins ne s'opérant que par le terme contenant  $\varphi_h^+$ . Localement, le problème peut s'écrire sous la forme d'un problème d'algèbre linéaire :

$$\{\varphi_h \in W_{h,e} \mid \forall \psi_h \in W_{h,e}, \mathcal{L}(\varphi_h, \psi_h) = 0\},$$

où  $\mathcal{L}(\varphi_h, \psi_h)$  se décompose de la façon suivante :

$$\mathcal{L}(\varphi_h, \psi_h) = \mathcal{M}_h + \mathcal{K}_h + \mathcal{P}_h + \mathcal{K}_{\partial h} + \mathcal{B}_h + \mathcal{S}_h, \quad (2.6)$$

avec les explicitations suivantes :

1.  $\mathcal{M}_h = \int_{\omega_e} (\partial_t \varphi_h, \psi_h)_{\mathbb{C}^{d+1}}$  est la matrice locale de masse diagonale par bloc.
2.  $\mathcal{K}_h = \int_{\omega_e} (A^i \partial_i \varphi_h, \psi_h)_{\mathbb{C}^{d+1}}$  est la matrice locale de rigidité diagonale par bloc.
3.  $\mathcal{P}_h = \int_{\omega_e} (B \varphi_h, \psi_h)_{\mathbb{C}^{d+1}}$  est une matrice produit diagonale par bloc.

4.  $\mathcal{K}_{\partial h} = \int_{\partial\omega_e \setminus \Gamma} (A^i n_i^- (\varphi_h^+ - \varphi_h^-), \psi_h)_{\mathbb{C}^{d+1}}$  est la matrice locale de rigidité qui connecte les éléments entre eux.
5.  $\mathcal{B}_h = \int_{\partial\omega_e \cap \Gamma} (M_\beta \varphi_h, \psi_h)_{\mathbb{C}^{d+1}}$  est la matrice locale qui introduit les conditions aux limites d'impédances généralisées.
6.  $\mathcal{S}_h = \int_{\omega_e} (f, \psi_h)_{\mathbb{C}^{d+1}}$  est la matrice locale qui introduit les termes sources dans la formulation.

La contribution de chaque élément est ensuite assemblée dans une matrice de rigidité et de masse globale, ce qui aboutit à la résolution du système linéaire :

$$\mathcal{M} \times \partial_t \varphi_\beta + \mathcal{S} \times \varphi_\beta = f \Rightarrow \partial_t \varphi_\beta = \mathcal{M}^{-1} \times (f - \mathcal{S} \times \varphi_\beta) = F(t, \varphi_\beta) \quad (2.7)$$

Dans le cas où les fonctions de base sont des polynômes de degré  $k$  et si la solution  $\varphi_\beta$  a la régularité spatiale  $H_m^{k+1}$  ( $H^{k+1}$  par morceaux), on peut espérer l'estimation d'erreur dans  $L^2([0, T], L^2(\Omega)^3)$  (en 3D,  $T$  arbitrairement long) suivante (partie spatiale de l'estimation (2.3)) :

$$\| \varphi_\beta - \varphi_h \|_{L^2([0, T], L^2(\Omega)^3)} \leq C(T, \Omega) h^{k+\frac{1}{2}},$$

où  $\varphi_h$  désigne évidemment la solution du problème discrétisé sur le domaine maillé en  $\Omega = \bigcup_e \omega_e$ .

Si le système n'est pas stable (en fonction de la nature de l'écoulement porteur), la constante  $C$  (qui dépend également de la solution  $\varphi_\beta$ ) peut croître exponentiellement avec  $T$ .

Il est bien entendu nécessaire d'approcher convenablement la dérivée temporelle intervenant dans (2.7) pour conserver l'ordre de cette erreur sur la discrétisation complète spatio-temporelle du système. Dans le cas des volumes finis ( $k = 0$ ) et pour des écoulements porteurs à convection uniforme (les coefficients des  $A^i$  sont constants), les auteurs montrent dans [22] que le schéma d'Euler explicite conserve l'ordre  $h^{\frac{1}{2}}$  et que la condition de stabilité est en  $\Delta t \leq Ch$  (où  $[0, T] = n\Delta t$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ),  $C$  dépendant de la forme des éléments et des valeurs propres de  $A^i n_i$ . En revanche, cette condition de stabilité est établie en introduisant un terme de pénalisation dans les conditions aux limites afin de contrôler suffisamment la dissipation d'énergie au bord  $\partial\Omega$ .

Dans un premier temps, nous allons étendre ce résultat au cas des coefficients des  $A^i(x)$  non constants et en ne traitant pas de façon particulière les conditions aux limites. Le résultat principal va consister à établir une condition de stabilité uniforme par rapport au coefficient de réflexion acoustique local  $\beta$  et à montrer que le traitement de la condition aux limites d'impédance locale par la variable "classique"  $\alpha$  ne semble pas mener à une condition de stabilité uniforme (ce qui a été vérifié numériquement).

## 2.3 Schéma volumes finis en espace et Euler explicite en temps ; stabilité conditionnelle en norme $L^2$

On notera de manière classique :

1.  $\Omega \times [0, T] = \bigcup_e \omega_e \times [n\Delta t, (n+1)\Delta t]$ .
2.  $\varphi_n = \varphi_\beta(n\Delta t)$ .

La résolution du schéma volumes finis en espace et Euler explicite en temps consiste en la résolution de l'équation suivante sur chaque élément  $\omega_e$  :

$$\frac{vol(\omega_e)}{\Delta t} (\varphi_{n+1}^- - \varphi_n^-) + \int_{\partial\omega_e \setminus \Gamma} A^i n_i^- (\varphi_n^+ - \varphi_n^-) + \int_{\partial\omega_e \cap \Gamma} M_\beta \varphi_n^- + \int_{\omega_e} B \varphi_n^- = vol(\omega_e) f. \quad (2.8)$$

On est alors en mesure d'établir le théorème suivant :

**Théorème 2.3.1** *Le schéma explicite, sur les équations d'Euler linéarisées barotropes*

$$\text{vol}(\omega_e) (\varphi_{n+1}^- - \varphi_n^-) + \Delta t \int_{\partial\omega_e \setminus \Gamma} A^i n_i^- (\varphi_n^+ - \varphi_n^-) + \Delta t \int_{\partial\omega_e \cap \Gamma} M_\beta \varphi_n^- + \Delta t \int_{\omega_e} B \varphi_n^- = 0,$$

est stable uniformément en  $\beta$  sous la condition CFL

$$\Delta t \leq \inf_{e, x \in \Omega} \left( \frac{1}{|V_n + c_0|} \frac{\text{vol}(\omega_e)}{\text{aire}(\partial\omega_e)} \right). \quad (2.9)$$

**Preuve.** On réécrit le schéma explicite de la façon suivante :

$$\text{vol}(\omega_e) (\varphi_{n+1}^- - \varphi_n^-) + \Delta t \int_{\partial\omega_e} F_n (\varphi_n^- - \varphi_n^+) + \Delta t \int_{\omega_e} B \varphi_n^- = 0, \quad (2.10)$$

avec  $\varphi_n^+ = 0$  sur  $\partial\omega_e \cap \partial\Omega$  et  $F_n$  défini par :

$$F_n = \begin{cases} -A^i n_i^- & \text{sur } \partial\omega_e \setminus \Gamma \\ \frac{-1}{2} (A^i n_i - N_\beta) = M_\beta & \text{sur } \partial\omega_e \cap \Gamma \end{cases} \quad (2.11)$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} & \frac{\text{vol}(\omega_e)}{2} [|\varphi_{n+1}^-|^2 - |\varphi_n^-|^2 - |\varphi_{n+1}^- - \varphi_n^-|^2] + \Delta t \text{Re} \left( \int_{\partial\omega_e \cap \Gamma} \left( \frac{N_\beta}{2} \varphi_n^-, \varphi_n^- \right)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) \\ & + \frac{\Delta t}{2} \int_{\omega_e} (\partial_i A^i \varphi_n^-, \varphi_n^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} + \Delta t \text{Re} \left( \int_{\omega_e} \left( \left( B - \frac{\partial_i A^i}{2} \right) \varphi_n^-, \varphi_n^- \right)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) \\ & + \frac{\Delta t}{2} \text{Re} \left( \int_{\partial\omega_e} (F_n \varphi_n^-, \varphi_n^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} - \int_{\partial\omega_e} (F_n \varphi_n^+, \varphi_n^+)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) \\ & + \frac{\Delta t}{2} \text{Re} \left( \int_{\partial\omega_e} (F_n (\varphi_n^- - \varphi_n^+), (\varphi_n^- - \varphi_n^+))_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Mais comme  $\partial\omega_e = (\partial\omega_e \setminus \Gamma) \cup (\partial\omega_e \cap \Gamma)$ , il découle que :

$$\begin{aligned} & \frac{\text{vol}(\omega_e)}{2} [|\varphi_{n+1}^-|^2 - |\varphi_n^-|^2 - |\varphi_{n+1}^- - \varphi_n^-|^2] + \Delta t \text{Re} \left( \int_{\partial\omega_e \cap \Gamma} \left( \frac{N_\beta}{2} \varphi_n^-, \varphi_n^- \right)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) \\ & + \Delta t \text{Re} \left( \int_{\omega_e} \left( \left( B - \frac{\partial_i A^i}{2} \right) \varphi_n^-, \varphi_n^- \right)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) + \frac{\Delta t}{2} \int_{\partial\omega_e \setminus \Gamma} (A^i n_i^+ \varphi_n^-, \varphi_n^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} \\ & + \frac{\Delta t}{2} \int_{\partial\omega_e \setminus \Gamma} (A^i n_i^- \varphi_n^+, \varphi_n^+)_{\mathbb{C}^{d+1}} + \frac{\Delta t}{2} \text{Re} \left( \int_{\partial\omega_e \setminus \Gamma} (F_n (\varphi_n^- - \varphi_n^+), (\varphi_n^- - \varphi_n^+))_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Comme on a supposé que :

$$B - \frac{\partial_i A^i}{2} \geq 0,$$

et que

$$\sum_{\omega_e} \int_{\partial\omega_e \setminus \Gamma} (A^i n_i^+ \varphi_n^-, \varphi_n^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} + \int_{\partial\omega_e \setminus \Gamma} (A^i n_i^- \varphi_n^+, \varphi_n^+)_{\mathbb{C}^{d+1}} = \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} (A^i n_i^+ \varphi_n^-, \varphi_n^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} \geq 0,$$

on est alors capable, en sommant sur les éléments  $\omega_e$ , d'établir une condition qui, pour un maillage donné, sera suffisante pour un résultat de stabilité global :

$$-\frac{vol(\omega_e)}{2} [|\varphi_{n+1}^-|^2 - |\varphi_n^-|^2 - |\varphi_{n+1}^- - \varphi_n^-|^2] + \Delta t Re \left( \int_{\partial\omega_e \cap \Gamma} \left( \frac{N_\beta}{2} \varphi_n^-, \varphi_n^- \right)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) + \frac{\Delta t}{2} \int_{\partial\omega_e \setminus \Gamma} (F_n(\varphi_n^- - \varphi_n^+), (\varphi_n^- - \varphi_n^+))_{\mathbb{C}^{d+1}} \geq 0. \quad (2.12)$$

Sans aucune hypothèse sur  $\Delta t$ , si le maillage spatial est assez fin, on tire de (2.10) l'équivalence suivante :

$$-\frac{vol(\omega_e)}{2} |\varphi_{n+1}^- - \varphi_n^-|^2 \simeq \frac{-\Delta t^2}{2vol(\omega_e)} \left( \int_{\partial\omega_e} F_n(\varphi_n^- - \varphi_n^+), \int_{\partial\omega_e} F_n(\varphi_n^- - \varphi_n^+) \right)_{\mathbb{C}^{d+1}}.$$

On pose alors :

$$G_n = \begin{cases} N_\beta & \text{sur } \partial\omega_e \cap \Gamma \\ F_n & \text{sur } \partial\omega_e \setminus \Gamma \end{cases}$$

et

$$z_n^- = \begin{cases} \varphi_n^- - \varphi_n^+ & \text{sur } \partial\omega_e \setminus \Gamma \\ \varphi_n^- & \text{sur } \partial\omega_e \cap \partial\Omega \end{cases}$$

L'application de l'inégalité de Jensen donne :

$$\left| \int_{\partial\omega_e} F_n(\varphi_n^- - \varphi_n^+) \right|^2 \leq aire(\partial\omega_e) \int_{\partial\omega_e} |F_n(\varphi_n^- - \varphi_n^+)|^2.$$

Dès lors, en injectant l'estimation précédente dans (2.12), une condition suffisante de stabilité globale sera :

$$\forall \omega_e, -\Delta t \frac{aire(\partial\omega_e)}{vol(\omega_e)} \int_{\partial\omega_e} |F_n z_n^-|^2 da + Re \left( \int_{\partial\omega_e} (G_n z_n^-, z_n^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} da \right) \geq 0,$$

où  $da$  désigne la mesure d'aire. Par conséquent, il est suffisant d'étudier le signe de la forme quadratique associée à la matrice suivante (en respectant les notations précédentes) :

$$M_{stabilite} = \begin{cases} \frac{N_\beta + N_\beta^*}{2} - \Delta t \frac{aire(\partial\omega_e)}{vol(\omega_e)} M_\beta^* M_\beta & \text{sur } \partial\omega_e \cap \Gamma \\ \text{ou} \\ (-A^i n_i)^- - \Delta t \frac{aire(\partial\omega_e)}{vol(\omega_e)} (A^i n_i^-)^2 & \text{sur } \partial\omega_e \setminus \Gamma. \end{cases}$$

Or, les valeurs propres de  $M_{stabilite}$  sont positives pour tout  $\Delta t$  tel que  $\Delta t \leq \frac{vol(\omega_e)}{(|V_n + c_0|) aire(\partial\omega_e)}$ .

Par conséquent, on en déduit que le schéma volumes finis en espace et Euler explicite en temps est uniformément stable si la condition CFL suivante est vérifiée :

$$\Delta t \leq \inf_{e, x \in \Omega} \left( \frac{1}{|V_n + c_0|} \frac{vol(\omega_e)}{aire(\partial\omega_e)} \right).$$

■

**Remarques 2.3.1** 1. Remarquons que dans le cas où  $M = M_\alpha$ ,  $N = N_\alpha$  et  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , les valeurs propres de la matrice  $M_{\text{stabilite}}$  correspondante (dans le cas où  $\partial\omega_e \cap \Gamma \neq \emptyset$ ) sont positives si :

$$\Delta t \leq \frac{4}{c_0} \left( \frac{\text{vol}(\omega_e)}{\text{aire}(\partial\omega_e)} \right) \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1},$$

avec

$$\frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} \longrightarrow 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \longrightarrow 0 \quad \text{ou} \quad \alpha \longrightarrow +\infty.$$

Donc une démarche analogue à la preuve de la stabilité conditionnelle uniforme en  $\beta$  aboutirait à une condition de stabilité dépendante de  $\alpha$ , ce qui est fortement rédhitoire pour des méthodes d'optimisation faisant intervenir de multiples valeurs du paramètre  $\alpha$ . De plus, comme les valeurs de  $\Delta t$  résultant de ce calcul tendent vers 0 pour des  $\alpha$  réels positifs tendant vers 0 ou vers  $+\infty$ , les calculs seraient beaucoup trop coûteux en temps. Comme pour la plupart des résultats de stabilité numérique, ils ne reposent que sur des conditions suffisantes basées sur des estimations d'énergie. Il sera donc nécessaire de mettre en évidence numériquement ce handicap à traiter la condition d'impédance par la variable  $\alpha$ .

2. Pour établir la condition CFL, nous avons dû faire l'hypothèse que  $K = B - \frac{\partial_i A^i}{2} \geq 0$ . Sans cette dernière, la constante de stabilité dépendrait de  $T$ .

Cette condition de stabilité est la plus fine que l'on puisse obtenir en norme  $L^2$ , pour un schéma de résolution volumes finis en espace et Euler explicite en temps, et ceci uniformément par rapport aux maillages.

A notre connaissance, il n'existe pas de résultat dans la littérature qui démontrerait que l'erreur de consistance (2.3) subsiste pour une résolution d'ordre plus élevé que les volumes finis en espace et Euler explicite en temps. En revanche, après un état de l'art non exhaustif, nous allons établir un résultat de stabilité pour tout ordre de résolution en espace et en temps du système (2.7). L'uniformité du CFL par rapport à la variable  $\beta$  va subsister dans cette généralisation.

## 2.4 Conditions de stabilité pour des approximations d'ordres plus élevés

Hormis les références déjà citées, une littérature assez fournie existe sur des conditions de stabilité pour des approximations de type Galerkin discontinue en espace et explicite en temps de systèmes hyperboliques, mais surtout pour la résolution de problèmes non linéaires. Formellement et pour fixer les idées, considérons un système hyperbolique standard :

$$\partial_t \varphi + \partial_i F^i(\varphi) = f. \quad (2.13)$$

Pour un espace de fonctions de bases (polynômiales ou autres) et un domaine maillé avec des éléments  $\omega_e$ , la méthode de Galerkin discontinue consiste en la résolution de la formulation variationnelle suivante :

$$\int_{\omega_e} \partial_t \varphi_h \cdot \psi_h - \int_{\omega_e} F^i(\varphi_h) \cdot \partial_i \psi_h + \int_{\partial\omega_e} A(\varphi_h^-, \varphi_h^+, n) \cdot \psi_h d\sigma = \int_{\omega_e} f \cdot \psi_h, \quad (2.14)$$

où  $A(\cdot, \cdot, n)$  est uniformément Lipschitzien pour tout vecteur  $n$  et

$$A(\varphi_h, \varphi_h, n) = F^i(\varphi_h) \cdot n_i.$$

Si le problème est non linéaire et que le système est séparable, on sait qu'il existe une unique décomposition en flux "convexe-concave" pour  $A$  et que le système est localement stable pour des schémas totalement implicites. Pour des problèmes linéaires, une décomposition de flux "convexe-concave" (comme celle en  $A^i n_i^-$  et  $A^i n_i^+$ ) rend les schémas totalement implicites inconditionnellement stables et pour ceux-ci on peut obtenir, sous hypothèses de régularité, l'estimation (2.3) de l'erreur de consistance de ces schémas. Pour des approximations temporelles explicites, on a par exemple les travaux de :

1. [15], dans lequel les auteurs obtiennent pour un système hyperbolique non linéaire monodimensionnel, et pour une approximation Euler explicite en temps et P1 en espace associée à une approximation Galerkin discontinue générale, une condition de stabilité trop contraignante pour des systèmes hyperboliques du type

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq C\sqrt{\Delta x}.$$

2. [18], où les auteurs étudient la stabilité d'un problème non linéaire monodimensionnel approximé en Galerkin discontinue  $P^0$  ou  $P^1$  en espace et Euler explicite ou Runge-Kutta Heun en temps. Avec une technique de limiteurs de pentes, ils obtiennent une condition de stabilité en norme  $L^\infty$  du type

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} < C.$$

3. [34], dans lequel les auteurs généralisent des conditions de stabilité obtenues pour des schémas à un ordre d'approximation quelconque en espace et Euler explicite en temps, à des CFL obtenus pour le même d'ordre d'approximation spatial mais pour des approximations temporelles d'ordre plus élevés (des schémas Runge-Kutta préservant la propriété de stabilité forte des approximations Euler explicite du premier ordre, ce qui était connu pour des discrétisations temporelles de type TVD (variation totale décroissante)).

Plus précisément, on définit la propriété de stabilité forte d'un schéma d'Euler explicite par :

**Définition 1** Soit un système d'EDP de type :

$$\frac{du}{dt} = K(u). \quad (2.15)$$

On dit que le schéma d'Euler explicite est fortement stable, si pour une méthode d'approximation spatiale donnée (où l'on notera toujours par  $K$  l'approximation), il existe un  $\Delta t_E$  strictement positif et une certaine norme  $\|\cdot\|$  tels que :

$$\forall \Delta t < \Delta t_E, \|u^n + \Delta t K(u^n)\| \leq (1 + O(\Delta t)) \|u^n\|.$$

Le résultat principal de [34], que l'on va utiliser par la suite, est que si le schéma de résolution est fortement stable pour Euler explicite, alors pour un  $r \geq 2$  donné, il existe un schéma Runge-Kutta optimal d'ordre  $r$  qui préserve cette propriété de forte stabilité pour la même norme et pour le même ordre d'approximation spatial. Plus précisément, on peut écrire un schéma de résolution temporelle de type Runge-Kutta à l'ordre  $r$  du système (2.15) sous la forme :

$$\begin{cases} u^{(0)} &= u^n, \\ u^{(i)} &= \sum_{k=0}^{i-1} \left( \alpha_{i,k} u^{(k)} + \Delta t \beta_{i,k} K(u^{(k)}) \right), \quad \alpha_{i,k} \geq 0, i = 1..r, \\ u^{n+1} &= u^{(r)}, \end{cases} \quad (2.16)$$

avec  $\sum_{k=0}^{i-1} \alpha_{i,k} = 1$ .

Dès lors, les méthodes de Runge-Kutta à  $\beta_{i,k} \geq 0$  préservent la forte stabilité et le nouveau CFL devient :

$$\Delta t \leq c \Delta t_E, c = \min_{i,k} \frac{\alpha_{i,k}}{\beta_{i,k}}.$$

Les auteurs montrent également, que si l'opérateur  $K$  est linéaire, alors  $c = 1$ , ce qui signifie que dans ce cas et pour la même norme, on ne peut améliorer le CFL Euler explicite avec ces méthodes Runge-Kutta. En particulier, pour  $r = 2$ , si  $K$  est linéaire, le schéma Runge-Kutta optimal est le Runge-Kutta Heun, qui correspond à :

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t K \left( u^n + \frac{\Delta t}{2} K(u^n) \right) \Leftrightarrow \alpha_{1,0} = \beta_{1,0} = 1, \alpha_{2,0} = \alpha_{2,1} = \beta_{2,1} = \frac{1}{2}, \beta_{2,0} = 0.$$

On est alors en mesure d'établir un théorème concernant l'approximation de (2.7) :

**Théorème 2.4.1** *Sous les hypothèses (2.4, 2.5) et  $\forall r \in \mathbb{N}^*$ , il existe une approximation explicite Runge-Kutta d'ordre  $r$  de (2.7) stable sous la condition*

$$\Delta t \leq \inf_{e,x \in \Omega} \left( \frac{1}{\beta_e} \frac{1}{V_n + c_0} \frac{\text{vol}(\omega_e)}{\text{aire}(\partial\omega_e)} \right). \quad (2.17)$$

**Preuve.** On pose :

$$\begin{aligned} (A_h \varphi, \varphi)_{\mathbb{C}^{d+1}} &= \sum_{\omega_e} \left( \int_{\omega_e} ((A^i \partial_i + B) \varphi^-, \varphi^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} + \int_{\partial\omega_e \setminus \Gamma} (A^i n_i^- (\varphi^+ - \varphi^-), \varphi^-) \right) \\ &\quad + \sum_{\omega_e} \left( \int_{\partial\omega_e \cap \Gamma} \left( -\frac{1}{2} (A^i n_i - N) \varphi^-, \varphi^- \right)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right). \end{aligned}$$

En particulier, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \text{Re} (A_h \varphi, \varphi)_{\mathbb{C}^{d+1}} &= \sum_{\omega_e} \left( \text{Re} \left( \int_{\omega_e} (K \varphi^-, \varphi^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} + \int_{\partial\omega_e \setminus \Gamma} (A^i n_i^- (\varphi^+ - \varphi^-), \varphi^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) \right) \\ &\quad + \sum_{\omega_e} \left( \text{Re} \left( \frac{1}{2} \int_{\partial\omega_e} (A^i n_i \varphi^-, \varphi^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} + \int_{\partial\omega_e \cap \Gamma} \left( -\frac{1}{2} (A^i n_i - N) \varphi^-, \varphi^- \right)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) \right), \end{aligned} \quad (2.18)$$

où

$$K = B + B^* - \partial_i A^i.$$

Sur les frontières internes  $\partial\omega_e \setminus \Gamma$ , les contributions sont :

$$\begin{aligned} &\text{Re} \left( (A^i n_i^- (\varphi^+ - \varphi^-), \varphi^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} + (A^i n_i^+ (\varphi^+ - \varphi^-), \varphi^+)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) \\ &\quad + \text{Re} \left( \frac{1}{2} (A^i n_i \varphi^-, \varphi^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} - \frac{1}{2} (A^i n_i \varphi^+, \varphi^+)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right), \end{aligned} \quad (2.19)$$

et par conséquent, la contribution sur les frontières internes vaut :

$$\frac{1}{2} \text{Re} \left( \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} (|A^i n_i| (\varphi^+ - \varphi^-), \varphi^+ - \varphi^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} (|A^i n_i| (\varphi^+ - \varphi^-), \varphi^+ - \varphi^-)_{\mathbb{C}^{d+1}}. \quad (2.20)$$



Sur  $\Gamma$ , la contribution vaut :

$$\int_{\Gamma} \left( \frac{N + N^*}{4} \varphi^-, \varphi^- \right)_{\mathbb{C}^{d+1}}. \quad (2.21)$$

On pose

$$\rho = \sup \left( \rho(|A^i n_i|), \rho \left( \frac{N + N^*}{4} \right) \right),$$

qui désigne le sup des rayons spectraux de ces deux matrices positives.

Par un argument de changement d'unité spatio-temporel et l'hypothèse 2.4, le terme positif

$$\Delta t Re \left( \int_{\Omega} (K \varphi^-, \varphi^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right)$$

devient négligeable par rapport aux deux autres termes dans la majoration de  $Re(A_h \varphi, \varphi)$ . En vertu de l'hypothèse 2.5, on a :

$$0 \leq \Delta t Re(A_h \varphi, \varphi)_{\mathbb{C}^{d+1}} \leq \inf_{e, x \in \Omega} \left( \beta_e \rho \frac{aire(\partial \omega_e)}{vol(\omega_e)} \right). \quad (2.22)$$

Un calcul trivial de valeurs propres donne :

$$\rho = |V_n + c_0|.$$

Mais, pour l'approximation Galerkin discontinue (2.7) du problème direct (1.22), et par rapport à la matrice de masse globale  $\mathcal{M}$ , une condition suffisante de stabilité forte pour la résolution Euler explicite temporelle et pour une certaine norme  $\|\cdot\|$  est donnée par l'existence d'un  $\Delta t_E$  tel que pour tout  $\Delta t < \Delta t_E$ , on ait :

$$\|\mathbb{I}_{d+1} - \Delta t A_h\| \leq 1 + C \Delta t, \quad (2.23)$$

où  $C$  est une constante.

L'inégalité (2.23) sera vérifiée, si

$$\rho(\mathbb{I}_{d+1} - \Delta t A_h) \leq 1 + C \Delta t,$$

puisque dans ce cas, on pourra assurer l'existence d'une norme subordonnée telle que :

$$\|\mathbb{I}_{d+1} - \Delta t A_h\| \leq \rho(\mathbb{I}_{d+1} - \Delta t A_h).$$

Mais, considérons un vecteur propre  $z$  de  $A_h$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . Il suffit de trouver une condition suffisante sur  $\Delta t$  pour qu'il existe une constante  $C$  telle que :

$$(1 - \Delta t \lambda)(1 - \Delta t \bar{\lambda}) \leq (1 + C \Delta t)^2.$$

Mais :

$$\begin{aligned} |1 - \Delta t \lambda|^2 &= 1 - 2\Delta t Re(\lambda) + (\Delta t)^2 (Re(\lambda))^2 + (\Delta t)^2 (Im(\lambda))^2 \\ &= (1 - \Delta t Re(\lambda))^2 + (\Delta t)^2 (Im(\lambda))^2. \end{aligned}$$

Or, la monotonie de la discrétisation spatiale entraîne que  $Re(A_h z, z)_{\mathbb{C}^{d+1}} \geq 0$ , et par conséquent, on peut affirmer que pour

$$\Delta t Re(\lambda) < 1, \quad (2.24)$$

on aura :

$$|1 - \Delta t \lambda|^2 \leq (1 + \Delta t |Im(\lambda)|)^2.$$

Mais,

$$(2.24) \Leftrightarrow \Delta t \leq \inf_{e,x \in \Omega} \left( \frac{1}{\beta_e} \frac{1}{V_n + c_0} \frac{\text{vol}(\omega_e)}{\text{aire}(\partial\omega_e)} \right),$$

donc avec  $\Delta t_E = \inf_{e,x \in \Omega} \left( \frac{1}{\beta_e} \frac{1}{V_n + c_0} \frac{\text{vol}(\omega_e)}{\text{aire}(\partial\omega_e)} \right)$ , et  $C = |\text{Im}(\lambda)|$ , la stabilité forte de l'approximation Euler explicite est assurée pour l'approximation Galerkin discontinue à tout ordre en espace de (1.22).

Le résultat énoncé précédemment dans [34] sur la préservation de la stabilité forte pour une approximation Runge-Kutta Heun d'ordre 2 permet de terminer la démonstration. ■

**Remarque 2.4.1** *La norme discrète utilisée n'est pas nécessairement la même que celle intervenant pour l'approximation volumes finis, à savoir la norme  $L^2$ . Cependant, nous avons montré qu'une estimation du rayon spectral de la résolvante de l'opérateur spatial discrétisé  $A_h$  est possible en vertu, d'une part de la monotonie de  $A_h$  et d'autre part des hypothèses techniques (2.4, 2.5) (évidemment vérifiées pour des interpolations polynomiales). Il est important de noter que le résultat exprimé confère à l'approximation Euler explicite ce même CFL de type hyperbolique. Il est bien évident qu'en augmentant l'ordre du Runge-Kutta, on peut améliorer ce CFL (en modifiant la norme). Il convient également de souligner le rôle essentiel que joue la monotonie de l'opérateur spatial discrétisé, et cette propriété est essentiellement due à un flux-splitting localisant la décroissance en entropie de Lax (ce qui exclut les méthodes de Galerkin discontinue dites "centrées").*

Afin de préciser ces conditions, on peut obtenir une estimation du paramètre  $\beta_e$  intervenant dans (2.5), par exemple :

**Théorème 2.4.2** *Avec des  $\omega_e$  triangulaires en 2D et tétraédriques en 3D et une interpolation polynômiale P1 de Lagrange, on a :*

1.  $\beta_e = 3$  en 2D.
2.  $\beta_e = \frac{120}{47}$  en 3D.

**Preuve.** En 2D, on considère l'élément de référence suivant :

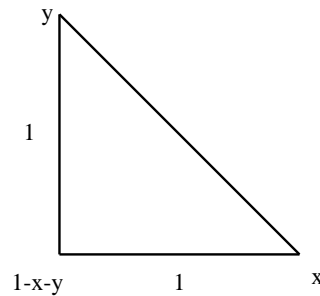


FIG. 2.1 – Element de référence bidimensionnel (triangle rectangle) et ses fonctions de bases.

A l'aide des matrices de masse (dont le calcul est élémentaire), on est en mesure de calculer  $\beta_e$ .

En effet, trouver  $\beta_e$  consiste à déterminer un  $\beta_e$  tel que :

$$\text{aire}(\partial\omega_e) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leq \beta_e \text{vol}(\omega_e) \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

En posant  $Z_e = \frac{1}{\beta_e}$ , il suffit donc de trouver une condition pour que les valeurs propres de la matrice  $M_{2D}$  soit positives ou nulles, où

$$M_{2D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} - \frac{Z_e}{3} & \frac{1}{12} - \frac{Z_e}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} - \frac{Z_e}{6} & \frac{1}{6} - \frac{Z_e}{3} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Après un calcul élémentaire, les valeurs propres de  $M_{2D}$  sont positives ou nulles si  $\beta_e \geq 3$ , d'où le résultat en bidimensionnel.

Pour une configuration tridimensionnelle et avec un élément tétraédrique de référence, il suffit d'étudier les valeurs propres de la matrice  $M_{3D}$  suivante :

$$M_{3D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} - \frac{Z_e}{6} & \frac{1}{20} - \frac{Z_e}{12} & \frac{1}{20} - \frac{Z_e}{12} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} - \frac{Z_e}{12} & \frac{1}{10} - \frac{Z_e}{6} & \frac{1}{20} - \frac{Z_e}{12} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} - \frac{Z_e}{12} & \frac{1}{20} - \frac{Z_e}{12} & \frac{1}{10} - \frac{Z_e}{6} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $M_{3D}$  sont positives ou nulles si  $\beta_e \geq \frac{120}{47}$ , d'où le résultat en tridimensionnel.

■

En monodimensionnel,  $\beta_e$  n'est pas défini, mais il est facile de déterminer exactement les CFL. On a par exemple le théorème :

**Théorème 2.4.3** *Une approximation explicite en temps et de type Galerkin discontinue en espace de l'équation monodimensionnelle associée à (2.7) admet, suivant les cas, les conditions de stabilité suivantes :*

1. En volumes finis, suivant l'ordre d'approximation du Runge-Kutta :

(a) pour  $r = 1$  (Euler explicite),  $\Delta t \leq \inf_{e,x \in \Omega} \left( \frac{\Delta x}{|V_n + c_0|} \right).$

(b) pour  $r = 2$  (Runge-Kutta Heun),  $\Delta t \leq \inf_{e,x \in \Omega} \left( \frac{2\Delta x}{|V_n + c_0|} \right).$

2. En P1 Lagrange,

$$(a) \text{ pour } r = 1 \text{ (Euler explicite), } \Delta t \leq \inf_{e,x \in \Omega} \left( \frac{2}{3} \frac{\Delta x}{|V_n + c_0|} \right).$$

$$(b) \text{ pour } r = 2 \text{ (Runge-Kutta Heun), } \Delta t \leq \inf_{e,x \in \Omega} \left( \frac{RK_2 \Delta x}{|V_n + c_0|} \right),$$

$$\text{où } rk_2 = \left( 82 + 3\sqrt{689} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ et } RK_2 = \frac{1}{9} rk_2 - \frac{8}{9} \left( \frac{1}{rk_2} \right) + \frac{4}{9} \simeq 0.895.$$

**Preuve.** En volumes finis, le calcul est trivial. On ne démontre le résultat que dans le cas de l'approximation P1 Lagrange en espace.

Considérons l'équation d'advection monodimensionnelle en espace libre d'inconnue  $u(x, t)$  :

$$\partial_t u + \partial_x u = 0, \quad (2.25)$$

en P1 Lagrange, sur un segment de longueur  $\Delta x$  de type représenté sur la figure 2.2 :

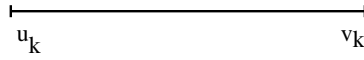


FIG. 2.2 – Element de référence monodimensionnel.

Les fonctions de bases sont  $1 - \frac{x}{\Delta x}$  et  $\frac{x}{\Delta x}$ . On a :

$$\Delta x \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_k - v_{k-1} \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Pour un schéma temporel Euler explicite, en notant  $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  et  $u_k^n$  la valeur de  $u_k$  à l'étape  $t = n\Delta t$ , on obtient que :

$$\begin{pmatrix} u_k^{n+1} \\ v_k^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k^n \\ v_k^n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k^n \\ v_k^n \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{k-1}^n \\ v_{k-1}^n \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Comme on étudie l'équation d'advection en espace libre, une condition de stabilité est une condition pour que la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} K & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ B & K & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & B & K & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & K \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

où

$$K = \begin{pmatrix} 1 - 3\lambda & -\lambda \\ 3\lambda & 1 - \lambda \end{pmatrix},$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4\lambda \\ 0 & -2\lambda \end{pmatrix},$$

possède des valeurs propres majorées en module par 1. En raison de la forme de la matrice (2.27), il suffit d'étudier celles de la matrice  $K$ . Mais, les valeurs propres de  $K$  sont données par :

$$(1 - 2\lambda) \pm i\sqrt{2}\lambda,$$

d'où le résultat annoncé pour l'approximation P1 Lagrange et Euler explicite de l'équation monodimensionnelle associée à (2.7).

Comme le système est linéaire, le même argument est valable pour une approximation temporelle Runge-Kutta Heun, à savoir que la matrice  $B$  n'intervient pas dans la condition de stabilité. Pour ce schéma, il suffit d'étudier les valeurs propres de la matrice :

$$K_{RK2} = \mathbb{I}_2 + \lambda K(\lambda) + \frac{\lambda^2}{2} K^2(\lambda). \quad (2.28)$$

Or, les valeurs propres de  $K_{RK2}$  sont :

$$(1 - 2\lambda + \lambda^2) + i \left( \pm\sqrt{2}\lambda \mp 2\sqrt{2}\lambda^2 \right).$$

Une condition suffisante de stabilité est par conséquent :

$$9\lambda^3 - 12\lambda^2 + 8\lambda - 4 < 0,$$

d'où le résultat annoncé (à l'aide d'un logiciel de calcul formel pour identifier  $RK_2$ ) pour l'approximation P1 Lagrange et Runge-Kutta Heun de l'équation monodimensionnelle associée à (2.7).

■

**Remarques 2.4.2** 1. *Les calculs peuvent se conduire à des ordres quelconques à l'aide de logiciels de calculs formels.*

2. *L'approximation Galerkin discontinue, ainsi que les résultats de stabilité ont été présentés et démontrés pour l'approximation du problème direct (1.22). Pour l'approximation du problème adjoint (1.23), les résultats sont bien évidemment analogues.*

## 2.5 Validation numérique de la méthode d'approximation

Dans un premier temps, nous avons montré dans la section (1.3.2), que les conditions aux limites permettant de simuler l'espace libre qui découlent naturellement de la taxinomie des conditions aux limites à adjoindre au problème (1.10) sont des conditions non réfléchissantes à l'ordre 1, exactes uniquement pour des ondes normales à la frontière du domaine de calcul. Ainsi, pour valider numériquement la méthode d'approximation Galerkin discontinue présentée pour la résolution des équations d'Euler linéarisées, nous allons déterminer, dans une configuration géométrique particulière, une solution au problème (1.22) vérifiant cette propriété de normalité à la frontière du domaine de calcul.

Pour cela, on calcule analytiquement les modes des équations d'Euler linéarisées dans un conduit rigide bidimensionnel infini, et en présence d'un écoulement porteur à convection uniforme.

### 2.5.1 Modes guidés bidimensionnels en présence d'un écoulement uniforme

Nous considérons un conduit bidimensionnel infini de hauteur constante  $l$  et dont les parois sont rigides. Celui-ci est représenté sur la figure 2.3. A l'intérieur de ce guide, un écoulement porteur subsonique régulier et uniforme (de vitesse  $U_0$ ) de direction l'axe du guide, est présent.

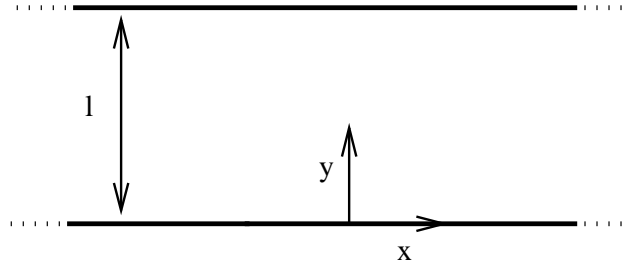


FIG. 2.3 – Le guide plan.

L'étude des modes guidés consiste à chercher, pour une pulsation réelle strictement positive donnée  $\omega$ , des solutions non nulles au système suivant :

$$\partial_t \varphi + \begin{pmatrix} U_0 & 0 & c_0 \\ 0 & U_0 & 0 \\ c_0 & 0 & U_0 \end{pmatrix} \partial_x \varphi + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 \\ 0 & c_0 & 0 \end{pmatrix} \partial_y \varphi = 0, \quad (2.29)$$

de la forme

$$\varphi(x, y, t) = \varphi_m(y) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [0, l], t \geq 0, k \in \mathbb{R},$$

vérifiant les conditions aux limites de parois rigides, à savoir :

$$\vec{\varphi}_m \cdot \vec{n} = 0 \text{ en } y = 0 \text{ et } y = l, \quad (2.30)$$

où  $\vec{n}$  désigne le vecteur normal unitaire extérieur aux parois du conduit.

**Remarque 2.5.1** *On pourrait chercher les nombres d'ondes axiaux  $k$  dans  $\mathbb{C}$  et ainsi obtenir des modes évanescents, mais ceci n'est pas notre propos, car on veut exclure les ondes exponentiellement amorties.*

En posant :

$$\varphi_m(y) = (u_m(y), v_m(y), \rho_m(y))^T, \quad M = \frac{U_0}{c_0},$$

(2.30) se traduit par :

$$v_m(l) = v_m(0) = 0,$$

et on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} -i(\omega - kM)u_m + ik\rho_m & = 0 \\ -i(\omega - kM)v_m + \partial_y \rho_m & = 0 \\ -i(\omega - kM)\rho_m + iku_m + \partial_y v_m & = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

On pose alors :

$$\alpha = \frac{\omega}{k} - M.$$

(2.31) devient alors :

$$\begin{cases} -\alpha u_m + \rho_m & = 0 \\ -\alpha v_m - \frac{i}{k} \partial_y \rho_m & = 0 \\ -\alpha \rho_m + u_m - \frac{i}{k} \partial_y v_m & = 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

De ce système, on tire l'équation vérifiée par  $\rho_m$  :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + (\alpha^2 - 1)k^2 \rho_m = 0. \quad (2.33)$$

L'explicitation de la solution de (2.33) et la deuxième équation de (2.32) nous donne successivement :

$$\alpha^2 = 1 + \left(\frac{n\pi}{kl}\right)^2, n \in \mathbb{N}, \quad (2.34)$$

et l'équation du second degré en  $k$  qui en découle :

$$k^2 l^2 (M^2 - 1) - 2\omega M l^2 k + l^2 \omega^2 - n^2 \pi^2 = 0. \quad (2.35)$$

On trouve alors deux familles de nombres d'onde axiaux, respectivement notées  $k_n^+$  et  $k_n^-$  dépendant chacun de l'entier  $n$  qui sont solutions de (2.35) :

$$k_n^\pm = \frac{-\omega M \pm \sqrt{\omega^2 - (1 - M^2) \frac{n^2 \pi^2}{l^2}}}{1 - M^2}, \quad (2.36)$$

la racine carrée ne posant pas de problème de définition puisque l'on s'impose  $k \in \mathbb{R}$ .

Finalement, à la multiplication par une constante près (que l'on choisit égale à 1 pour chacune des trois variables), une solution  $\varphi_m(y)$  cherchée est donnée par :

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{k_n^\pm}{\omega - k_n^\pm M} \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \\ v_m &= \frac{i n \pi}{l (\omega - k_n^\pm M)} \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \\ \rho_m &= \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right), \end{aligned}$$

et donc une solution harmonique  $\varphi(x, y, t)$  à (2.29) vérifiant (2.30) est donnée par :

$$\varphi(x, y, t) = \begin{pmatrix} \frac{k_n^\pm}{\omega - k_n^\pm M} \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right) e^{i(k_n^\pm x - \omega t)} \\ \frac{i n \pi}{l (\omega - k_n^\pm M)} \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) e^{i(k_n^\pm x - \omega t)} \\ \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right) e^{i(k_n^\pm x - \omega t)} \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

**Remarques 2.5.2** 1. Comme  $k$  est réel, on ne peut pas avoir de modes évanescents. Les modes sont propagatifs.

2. Les modes  $k_n^+$  sont qualifiés de modes aval (les plans de phase et l'énergie se propagent dans le sens de l'écoulement).

3. Les modes  $k_n^-$  sont qualifiés de modes amont (les plans de phase et l'énergie se propagent à contre-courant).

4. On pourrait également choisir de fixer  $k$  réel strictement positif et chercher alors les familles  $w_n^\pm$ . Cela revient à résoudre alors l'équation (2.35) en  $w$ . On trouve alors :

$$\omega_n^\pm = k \left( M \pm \sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{kl}\right)^2} \right). \quad (2.38)$$

5. Il faut bien entendu s'assurer que la réciproque du calcul est valable, c'est-à-dire que (2.37) exprimée en fonction de  $k_n^\pm$  ou de  $\omega_n^\pm$  est bien une solution de (2.29) vérifiant (2.30) (calcul trivial).
6. Ces modes appelés modes acoustiques ou modes de pression sont irrotationnels.

Sur la figure 2.4, on représente un maillage triangulaire bidimensionnel d'un canal rectangulaire de 3 longueurs d'ondes en longueur et 1.5 longueurs d'ondes en largeur, maillé en 10 éléments par longueur d'ondes (soit 450 éléments). On impose des conditions de parois rigides ( $\beta(x) = (1, 0)$ , voir section (1.3.2)) sur les parois supérieures et inférieures du canal. A l'intérieur du domaine de calcul, l'écoulement porteur est uniforme, de convection constante mach 0.5, suivant la direction des  $x$  positifs. Sur la paroi de droite, on impose une excitation modale de modes amont plan ( $n = 0$ ). La paroi de gauche est traitée avec des conditions aux limites absorbantes approchées (voir section 1.3.2).

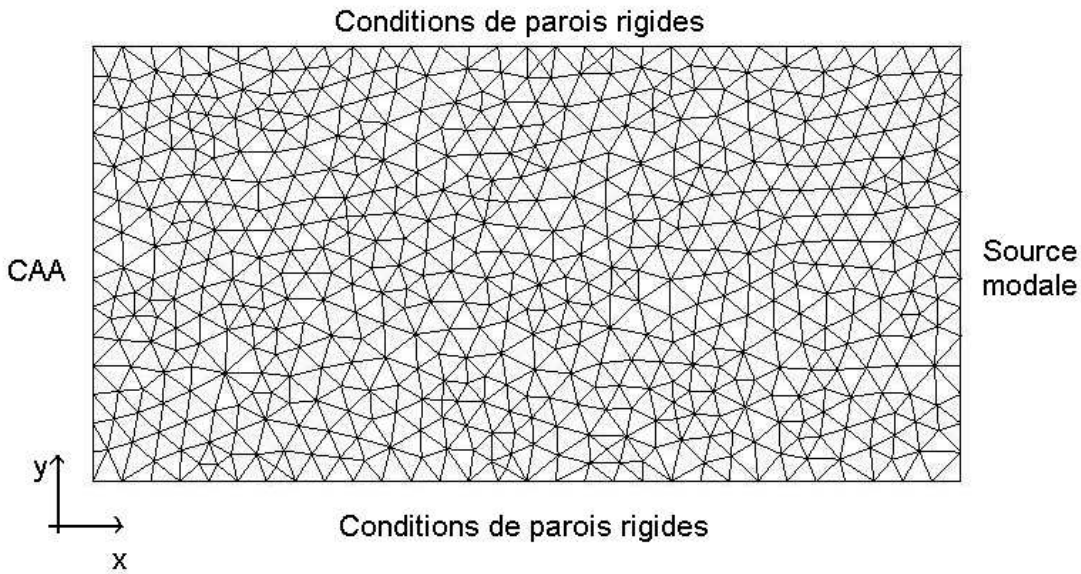


FIG. 2.4 – Maillage bidimensionnel d'un canal rigide.

On peut vérifier, par le calcul, que cette condition aux limites approchée pour simuler l'espace libre est dans ce cas, et dans ce cas uniquement, une condition exacte. En effet, les modes calculés sont irrotationnels, mais sur la paroi de gauche en 2D, on a :

$$A^i n_i^- = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (V_n - c_0) & 0 & \frac{1}{2} (V_n - c_0) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} (V_n - c_0) & 0 & \frac{1}{2} (V_n - c_0) \end{pmatrix},$$

et par conséquent, pour les modes  $\varphi(x, y, t)$  calculés, la condition aux limites  $A^i n_i^- \varphi = 0$  est exacte si et seulement si, pour  $l$  fixé et pour tout  $y \in [0, l]$ , on a :

$$(V_n - c_0) \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \left(1 + \frac{k}{\omega - kM}\right) = 0, \quad (2.39)$$

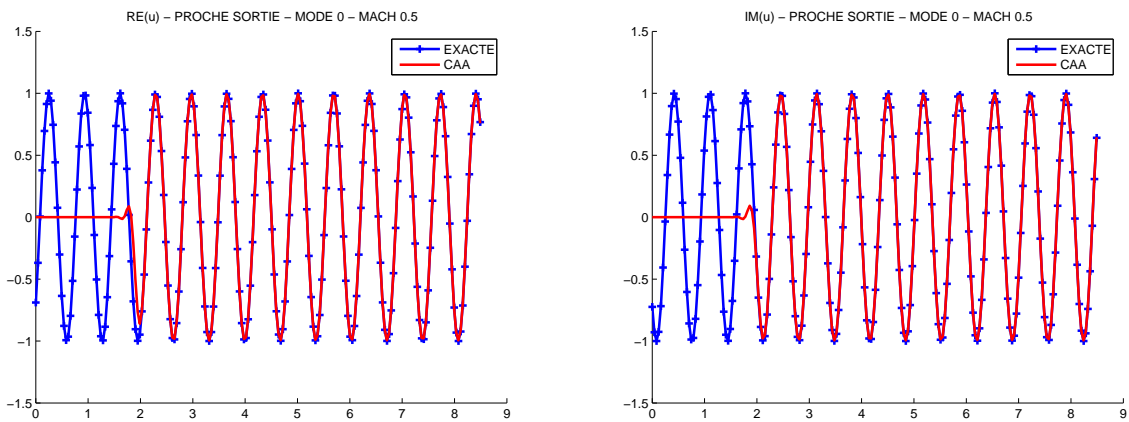


où  $n$  est le mode, et où  $k$  et  $\omega$  sont liés par la relation de dispersion (modes amont) :

$$k = \frac{-\omega M - \sqrt{\omega^2 - (1 - M^2) \frac{n^2 \pi^2}{l^2}}}{1 - M^2}.$$

Par conséquent, (2.39) n'est vérifiée que pour  $n = 0$ . Ce mode plan  $n = 0$  correspond bien à des ondes normales à la frontière du domaine de calcul, puisque  $v_m = 0$ .

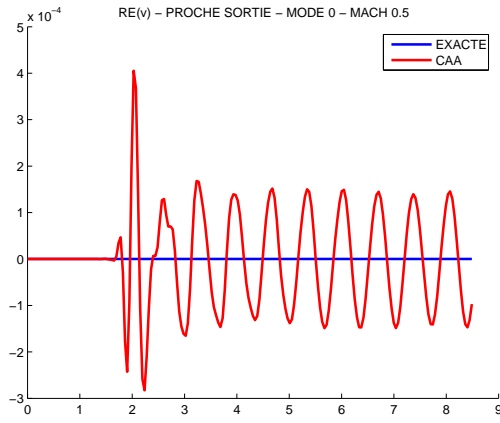
On va donc utiliser ce cas test pour valider numériquement la méthode d'approximation Galerkin discontinue en espace et Runge-Kutta explicite en temps du problème (1.22). Sur les figures (2.5,2.6,2.7), on représente les profils des parties réelles et imaginaires des solutions numériques obtenues en un point  $(x_0, y_0)$  proche du bord gauche du canal et situé en son axe médian, avec une méthode d'approximation  $P^1$  Lagrange en espace et Runge-Kutta-Heun en temps. On les compare bien évidemment à la solution exacte donnée explicitement par le calcul de modes ci-dessus. Le temps de calcul est suffisamment long pour avoir atteint le régime harmonique de la source et pour que le capteur  $(x_0, y_0)$  ait pu observer de nombreuses périodes temporelles.



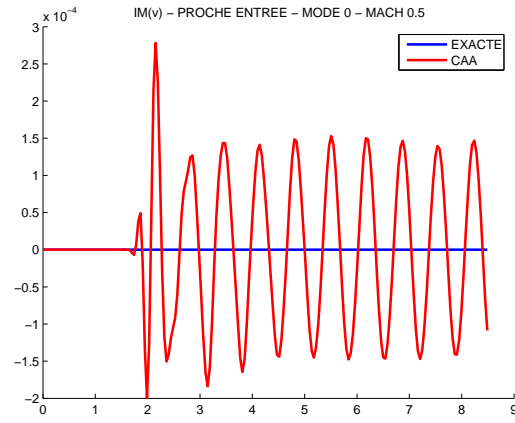
(a) Comparaison des parties réelles.

(b) Comparaison des parties imaginaires.

FIG. 2.5 – Comparaison des parties réelles et imaginaires de la variable  $u$  entre la solution exacte et la solution obtenue numériquement.

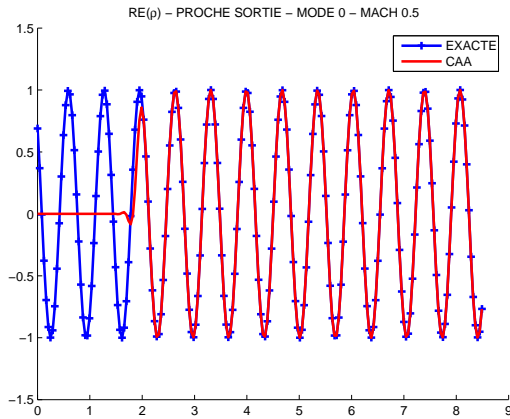


(a) Comparaison des parties réelles.

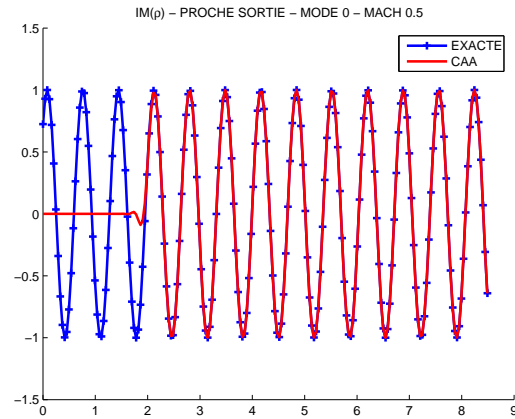


(b) Comparaison des parties imaginaires.

FIG. 2.6 – Comparaison des parties réelles et imaginaires de la variable  $v$  entre la solution exacte et la solution obtenue numériquement.



(a) Comparaison des parties réelles.



(b) Comparaison des parties imaginaires.

FIG. 2.7 – Comparaison des parties réelles et imaginaires de la variable  $\rho$  entre la solution exacte et la solution obtenue numériquement.

Les résultats obtenus, avec une approximation  $P^1$  Lagrange sont très satisfaisants. L'erreur numérique, de l'ordre de  $10^{-4}$  est quantifiée sur la variable  $v$ , puisque elle est toujours nulle pour le mode plan amont. D'autres validations numériques, réalisées à l'aide de l'implémentation d'un code de calcul 3D adoptant cette méthode d'approximation Galerkinе discontinue pour résoudre les équations d'Euler linéarisées, sont présentées dans [25]. Cet article illustre le bon comportement des solutions obtenues sur des géométries assez complexes avec des approximations polynomiales jusqu'à l'ordre  $P^6$ . Une étude de l'erreur numérique de dissipation sur un cas bidimensionnel suivant la précision du maillage et l'ordre d'approximation polynomiale y est également présentée. Une parallélisation du code a également été effectuée. A titre d'illustration numérique sur une géométrie tridimensionnelle complexe, un calcul 3D a été effectué sur 4 machines en parallèle, représentant

la propagation aéroacoustique sans écoulement de deux sources de bruit irrotationnelles en phase localisées dans les réacteurs d'un maillage tridimensionnel de Falcon, fournit par Dassault (figure 2.8).

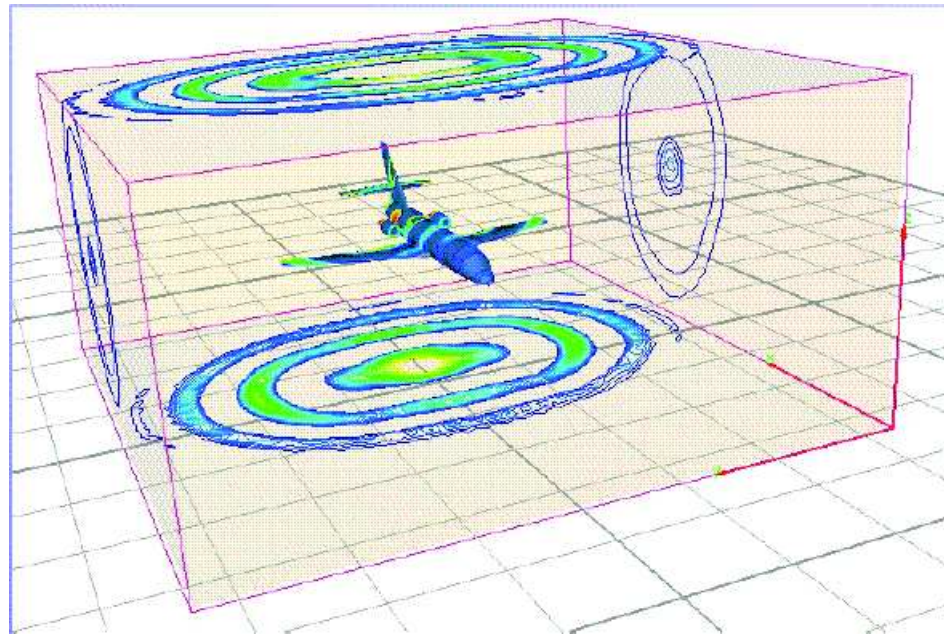


FIG. 2.8 – Propagations aéroacoustiques sans écoulement sur une géométrie tridimensionnelle représentative d'un Falcon.

Dans le contexte de l'aéroacoustique, un autre type de validation numérique probant est la mise en évidence des instabilités d'écoulement de type Kelvin-Helmholtz. Nous allons montrer qu'une résolution volumes finis en espace et Euler explicite en temps du problème (1.22) suffit pour mettre en lumière cette propriété bien connue de certains types d'écoulement porteur.

## 2.6 Mise en évidence d'instabilités d'écoulement, en résolution volumes finis en espace et Euler explicite en temps

Afin de montrer l'existence et l'unicité du problème (1.22) ou plus généralement pour montrer l'existence et l'unicité d'un problème instationnaire type (1.10) posé avec des conditions aux limites maximales positives sur un domaine spatio-temporel  $\Omega \times [0, T]$ , l'hypothèse que  $K = B - \frac{1}{2}\partial_i A^i$  (ou ce qui est équivalent  $K = B + B^* - \partial_i A^i$ ) soit positive est essentielle, et cette hypothèse n'est viable que sur un domaine temporel borné  $[0, T]$ . Pour beaucoup d'écoulements,  $K$  est une matrice non signée. Par exemple, dans le cas d'un écoulement isotherme associé à un écoulement porteur cisailé 2D pour lequel

$$\rho_0 = cte, U_0^2 = 0, U_0^1 = U_0^1(y),$$

on a :

$$B + B^* - \partial_i A^i = \begin{pmatrix} 0 & \partial_y U_0^1 & 0 \\ \partial_y U_0^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

matrice évidemment non positive. Nous avons déjà montré que sans cette hypothèse, il est impossible de garantir la stabilité en  $L^2_{loc}$  du problème instationnaire, ce qui interdit la définition du problème harmonique associé.<sup>2</sup>

### 2.6.1 Définitions des problèmes harmoniques

Un problème harmonique est un problème obtenu en régime périodique établi, qui se définit comme la limite asymptotique en temps d'un problème transitoire entretenu. Afin de souligner les difficultés propres à l'aéroacoustique, nous allons étudier le problème harmonique associé au système instationnaire (1.10) dans le cas où les coefficients des opérateurs  $A^i$  et  $B$  ne dépendent pas du temps. La démonstration de l'existence et l'unicité d'une solution au problème où l'on dissymétrise l'espace et le temps dans (1.10) (avec des notations et des hypothèses identiques, en remplaçant  $Q$  par  $\Omega$ ) découle naturellement du théorème de Hille-Yosida (dans ce cas,  $-\mathcal{A}$  est le générateur d'un semi-groupe) :

**Théorème 2.6.1** *Si  $h \in C^1(\mathbb{R}^+, (L^2(\Omega))^{d+1})$  et si  $B + B^* - \partial_i A^i \geq 0$ , alors le système (où l'on notera  $\mathcal{A} = A^i \partial_i + B$ ,  $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \varphi \in (C^1(\overline{\Omega}))^{d+1}, \varphi|_{\partial\Omega} \in \mathcal{N}(x) \right\}$ )*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi + \mathcal{A}\varphi = h & \text{sur } \mathbb{R}^+ \\ \varphi \in \mathcal{N}(x) & \text{pour } x \in \partial\Omega \\ \varphi(\cdot, 0) = \varphi_0 & \text{dans } D(\mathcal{A}) \end{cases} \quad (2.40)$$

admet une solution unique dans  $C^1(\mathbb{R}^+, (L^2(\Omega))^{d+1}) \cap C^0(\mathbb{R}^+, D(\mathcal{A}))$  donnée par la formule de Duhamel :

$$\varphi(t) = e^{-\mathcal{A}t}\varphi_0 + \int_0^t e^{-\mathcal{A}(t-s)}h(s)ds, \quad (2.41)$$

où  $e^{-\mathcal{A}t}$ ,  $t \geq 0$ , est un semi-groupe sur l'espace de Hilbert  $H = (L^2(\Omega))^{d+1}$ .

Une manière naturelle de définir un problème harmonique associé à (2.40) est d'examiner sa "réponse forcée" asymptotique en temps en remplaçant  $h(t)$  par  $Y(t)g(x)e^{i\omega t}$ , où  $Y(t)$  est la fonction de Heaviside de  $\mathbb{R}^+$  et  $g \in H$ . Un calcul simple utilisant la formule de Duhamel et les propriétés des semi-groupes montre que si  $i\omega$  est dans l'ensemble résolvant de  $-\mathcal{A}$  (ouvert connexe de  $\mathbb{C}$ ), alors :

$$\varphi(\cdot, t) = e^{-\mathcal{A}t}(\varphi_0 - (i\omega I + \mathcal{A})^{-1}g) + e^{i\omega t}(i\omega I + \mathcal{A})^{-1}g. \quad (2.42)$$

Deux termes apparaissent dans cette formule :

1. Le premier est appelé terme transitoire. Il correspond à une solution de (2.40) homogène et avec  $\varphi_0 - (i\omega I + \mathcal{A})^{-1}g$  comme condition initiale (qui est bien dans  $D(\mathcal{A})$ ).
2. Le second  $e^{i\omega t}(i\omega I + \mathcal{A})^{-1}g$  est la solution forcée périodique en temps.

Le cas le plus simple (et le plus rare) où l'on peut définir la solution harmonique comme solution forcée asymptotique en temps de la solution de (2.40) correspond donc au cas où les deux hypothèses suivantes sont vérifiées :

- $i\omega$  est dans le domaine résolvant de  $-\mathcal{A}$ . Ceci sera le cas pour tout  $\omega$  hormis un ensemble discret, par exemple pour  $\Omega$  borné et des conditions aux limites adéquates (l'opérateur  $\mathcal{A}$  est alors à résolvante compacte).
- Le terme transitoire tend vers 0, par exemple si l'opérateur  $-\mathcal{A}$  est strictement dissipatif avec  $B + B^* - \partial_i A^i > 0$  ou des conditions aux limites suffisamment dissipatives.

<sup>2</sup>Dans la démonstration du théorème 1.3.5, on perd la monotonie de l'opérateur  $L$ .

Dans ce cas favorable, le premier terme tendra exponentiellement vers 0 dans  $H$  et on aura :

$$\varphi(\cdot, t) \simeq e^{i\omega t} (i\omega I + \mathcal{A})^{-1} g,$$

pour  $t$  assez grand. A l'inverse, plusieurs cas de figures sont possibles :

- $\mathcal{A}$  peut être maximal conservatif (même si  $-\mathcal{A}$  est non strictement dissipatif), et alors  $i\mathcal{A}$  est un opérateur auto-adjoint (corollaire du théorème de Stone). Dans ce cas, le spectre de  $\mathcal{A}$  est tout entier sur l'axe des imaginaires purs.
- Dans le cas où  $\Omega$  est non borné, il peut même être confondu avec l'axe des imaginaires purs, et alors il n'existe pas de  $\omega$  tel que  $i\omega$  soit dans la résolvante de  $-\mathcal{A}$ . Le terme de convection forcée n'est pas défini car  $i\omega + \mathcal{A}$  n'est pas inversible dans  $H$ .

Toutefois, sous certaines hypothèses, la théorie du scattering permet de définir des inverses appropriés. Il s'agit de donner dans un espace convenable, un sens à la disparition de la solution transitoire, même quand la formule (2.42) ne peut être écrite, faute de possibilité de définition dans  $H$  de  $(i\omega + \mathcal{A})^{-1}$ . On peut distinguer pour cela deux "classes" de techniques.

### Les études en "amplitude limite"

Le principe est la décomposition du spectre de  $i\mathcal{A}$ , quand  $\mathcal{A}$  est maximal conservatif [63], ou plus généralement quand  $\mathcal{A}$  est maximal monotone ( $Re(\mathcal{A}\varphi, \varphi)_H$  et  $(I + \mathcal{A})^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ ). On a alors le théorème dit théorème RAGE [55] :

**Théorème 2.6.2** *Soit  $C \in \mathcal{L}(H)$  et  $H_b^\perp$  l'orthogonal dans  $H$  des sous-espaces propres associés à une valeur propre imaginaire pure. Si  $C(\mathcal{A} + I)^{-1}$  est compact, alors :*

$$\forall f \in H_b^\perp, \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \| Ce^{-\mathcal{A}t} f \|_H^2 dt = 0.$$

Ce théorème permet de "contrôler", si  $C$  est l'opérateur de restriction à un compact spatial dans  $H = (L^2(\Omega))^{d+1}$ , l'énergie locale produite par la condition initiale, et en conséquence de définir une solution du problème harmonique dans  $(L_{loc}^2(\Omega))^{d+1}$ .

**Remarques 2.6.1** *L'hypothèse de compacité de  $C(I + \mathcal{A})^{-1}$  sera vérifiée si les conditions aux limites adjointes à  $\mathcal{A}$  permettent d'avoir une estimation de la solution dans  $(H_{loc}^1(\Omega))^{d+1}$ . On dit alors que les conditions aux limites sur  $\Omega$  sont coercives et que  $\Omega$  a la propriété de compacité locale.*

Lorsque  $\Omega$  est non borné, des difficultés spécifiques se greffent :

1. La forme du bord  $\partial\Omega$  a une grande importance.  $\Omega$  doit être non "trapping", c'est-à-dire suffisamment convexe pour ne pas piéger l'énergie de la condition initiale et ceci peut être élucidé uniquement en fréquence infinie (non piégeage des rayons).
2. Le rang de  $A^i \xi_i$  doit être constant en dehors d'un compact de  $\mathbb{R}^d$ , les coefficients des  $A^i(x)$  doivent tendre vers des coefficients constants de matrices  $A^{0i}$  (avec  $A^{0i} \xi_i$  de rang constant), et  $B(x)$  doit tendre vers 0.

Outre l'hypothèse de monotonie sur  $\mathcal{A}$ , à savoir  $B + B^* - \partial_i A^i \geq 0$ , une hypothèse de compacité est essentielle pour pouvoir appliquer le théorème RAGE :

$$\forall f \in D(\mathcal{A}) \cap (ker(\mathcal{A}))^\perp, \sum_j |\partial_{x_j} f| \leq C(\|f\|_H + \|\mathcal{A}(f)\|_H), \quad (2.43)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $f$ . Sous ces hypothèses, on contrôle le terme transitoire de (2.42) et on peut montrer que :

$$\forall f \in H_b^\perp, \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf \| e^{-\mathcal{A}t} f \|_{(L_{loc}^2(\Omega))^{d+1}} = 0.$$

### Les études en “absorption limite”

On peut définir plus largement le problème harmonique, c’est-à-dire l’inversion de  $i\omega + \mathcal{A}$  en lui conférant un sens “causal”. Plus précisément, cela signifie, qu’après avoir défini arbitrairement un sens de propagation des ondes, on éliminera dans la solution les ondes “provenant” de l’infini. Pour cela, on cherche à donner un sens dans un espace convenable au problème <sup>3</sup> :

$$((i\omega + \varepsilon)I + \mathcal{A})\varphi = h, \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0^+. \quad (2.44)$$

Si  $\mathcal{A}$  est maximal monotone, (2.44) a toujours une solution unique dans  $H$ , mais

$$\|((i\omega + \varepsilon)I + \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

explose quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Il convient alors pour plus de clarté de distinguer deux cas suivant la nature du domaine  $\Omega$ .

#### $\Omega$ borné

Si la résolvante de  $-\mathcal{A}$  est compacte (en pratique si l’on vérifie au moins l’hypothèse 2.43), le spectre de  $-\mathcal{A}$  est ponctuel discret et on est ramené à une alternative de Fredholm. Autrement dit,  $\exists \sigma_p$  discret dans  $\mathbb{R}$  tel que :

- $\omega \notin \sigma_p$ , donc  $(i\omega + \mathcal{A})\varphi = h$  a une solution unique dans  $H$  continue par rapport à  $h$ .
- $\omega \in \sigma_p$  et  $i\omega + \mathcal{A}$  est non injectif.  $i\omega$  est alors valeur propre de  $-\mathcal{A}$  et suivant  $h$ ,  $(i\omega + \mathcal{A})\varphi = h$  n’a pas de solution ou une infinité.

On dit que  $\omega$  est une pulsation de résonance de  $\Omega$  pour  $\mathcal{A}$ .

#### $\Omega$ non borné

En général, le spectre de  $-\mathcal{A}$  est continu. Cependant, si l’on suppose que (2.43) est vérifiée et que  $\mathcal{A}$  est maximal monotone, on pourra montrer que la solution de (2.44) tend généralement vers une limite dans  $(L_{loc}^2(\Omega))^{d+1}$  si  $\Omega$  a la propriété de compacité locale décrite ci-dessus.

**Remarques 2.6.2** 1. On peut aussi définir des espaces pondérés à l’infini ou bien, lorsque  $\mathcal{A}$  est à coefficients constants en dehors d’un compact, on ajoute à l’équation

$$(i\omega + \mathcal{A})\varphi = h$$

une condition à l’infini, dite condition de radiation.

2. Que  $\Omega$  soit borné ou non, il existe des solutions du problème d’absorption limite qui ne sont pas solutions du problème d’amplitude limite. Cela revient pour  $\Omega$  borné à “oublier” le terme transitoire de (2.42) et, pour  $\Omega$  non borné, à oublier l’énergie piégée dans un obstacle trapping.
3. Dans tous les cas, l’hypothèse 2.43 est essentielle aux démonstrations, et celle-ci n’est généralement pas vérifiée en aéroacoustique.

---

<sup>3</sup>On aurait pu choisir  $\varepsilon \rightarrow 0^-$  en définissant autrement le sens de propagation, autrement dit le sens direct du repère dans  $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ .

## 2.6.2 Difficultés inhérentes aux problèmes d'aéroacoustique

La principale difficulté provient de la perte de monotonie de l'opérateur  $\mathcal{A}$  pour divers écoulements porteurs, comme des écoulements cisailés. La matrice symétrique  $K = B + B^* - \partial_i A^i$  possède généralement des valeurs propres de signes opposés pour ce type d'écoulement. Il y a cependant deux cas faciles a priori où la matrice  $K$  est identiquement nulle, le cas des écoulements porteurs uniforme et celui des écoulements "solides" entre deux cylindres concentriques ( $\rho_0$  et  $c_0$  constants, glissement sur les cylindres). On peut, pour ces deux configurations se ramener aux solutions évoquées précédemment. Pour démontrer la compacité de la résolvante et se ramener à une alternative de Fredholm dans le cas d'un domaine borné ou obtenir l'estimation (2.43) en domaine non borné, on procède à un changement de variables se ramenant à l'équation des ondes à l'ordre 1 (on rappelle que (2.40) est invariant par translation-rotation). On retrouve alors des techniques de décomposition de  $(L^2(\Omega))^{d+1}$  duales de celles exposées dans [48] pour écrire que :

$$(L^2(\Omega))^{d+1} = H(\text{rot}\vec{0}, \Omega) \oplus \text{rot}\vec{\omega},$$

où  $\omega \in (H^1(\Omega))^d$ ,  $\vec{\omega} \wedge \vec{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$ . On peut également songer à étendre les techniques de [48] dans le cas où l'écoulement porteur admettrait un prolongement analytique tel que, dans un voisinage de  $i\mathbb{R}$ , on obtienne une famille d'opérateurs analytiques à résolvante compacte.

Cependant, même dans des cas très simples comme la perturbation barotrope d'un écoulement cisailé isotherme entre deux cylindres en 2D, nous n'avons pas pu (ou su) mettre en oeuvre ces techniques. Ceci ne signifie pas nécessairement que l'état harmonique ne puisse être défini. On peut distinguer en fait trois cas :

1. L'écoulement est stable, mais on ne sait pas encore le montrer. Il est possible que la compensation entre le transport d'énergie par les fronts d'onde et la production d'énergie par le terme  $(K\varphi, \varphi)_{(L^2(\Omega))^{d+1}}$  puisse entraîner une décroissance locale partout sur  $\Omega$ .
2. L'écoulement présente des instabilités dites convectives qui n'interdisent pas, à partir d'un certain temps, la décroissance en  $(L^2_{loc})^{d+1}$  de la solution transitoire. Il y a croissance exponentielle de l'énergie mais localisée dans un cône espace-temps (figure 2.9 gauche).
3. L'écoulement présente des instabilités dites absolues qui interdisent la décroissance en  $(L^2_{loc})^{d+1}$  de la solution transitoire. Le problème harmonique n'a alors pas grand sens. La condition initiale produit une instabilité dont la propagation contient l'axe des temps (figure 2.9 droite).

Des études ont été faites sur la stabilité d'écoulements cisailés 2D dans un guide d'ondes en espace libre ([10, 37]), ce qui nous amène à considérer un écoulement porteur 2D cisailé donné par :

$$U_0^1(y) = U_0(y), U_0^2 = V_0 = 0, \rho_0 = c_0 = 1.$$

Le système instationnaire à résoudre s'écrit donc de la manière suivante :

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \\ \rho \end{pmatrix} + U_0 \partial_x \begin{pmatrix} u \\ v \\ \rho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \partial_x \\ 0 & 0 & \partial_y \\ \partial_x & \partial_y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \rho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \partial_y U_0(y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \rho \end{pmatrix} = F, \quad (2.45)$$

de sorte que  $B + B^* - \partial_i A^i = \begin{pmatrix} 0 & \partial_y U_0(y) & 0 \\ \partial_y U_0(y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Dans ([10, 37]), les auteurs montrent que

pour un tel écoulement, la réponse linéarisée à une perturbation en condition initiale correspondante à une perturbation du rotationnel de vitesses spatialement localisée est, suivant les cas :

1. Stable pour des profils convexes, par exemple parabolique.

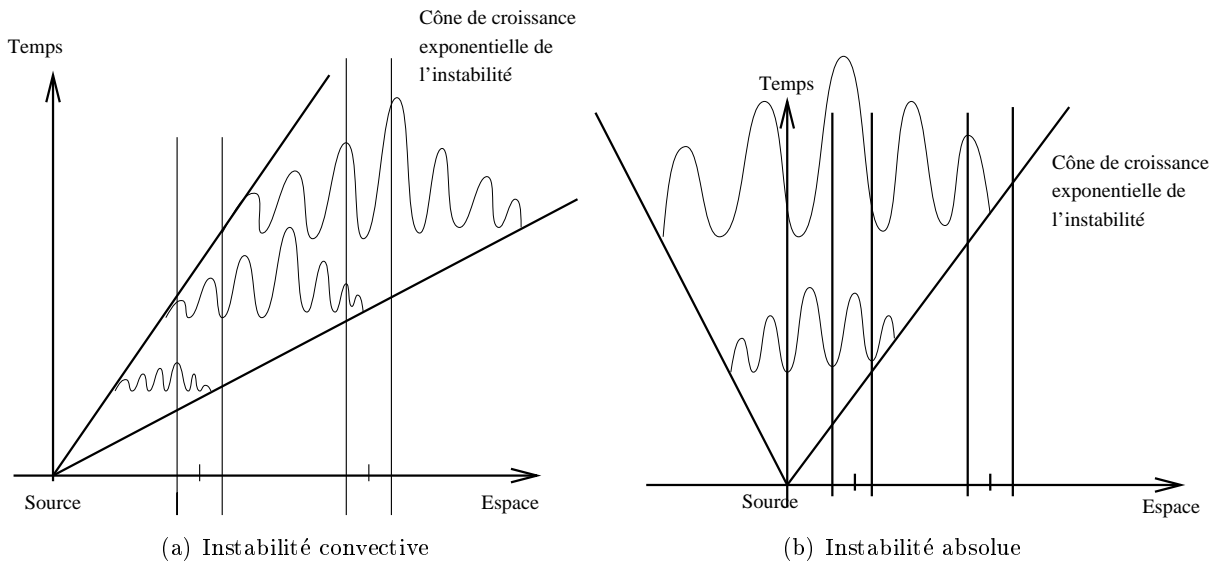


FIG. 2.9 – Instabilités de type Kelvin-Helmholtz.

2. Convectivement instable pour des profils sans retour ( $U_0(y) \geq 0$ ) présentant un point d'inflexion.
3. Absolument instable pour des profils d'écoulement présentant des points d'inflexion avec retour assez importants ( $U_0(y)$  changeant de signe).

Nous proposons donc en adéquation avec ces résultats, une simulation numérique de ces trois cas afin de vérifier, en instationnaire, en mode transitoire et en mode forcé, le passage des instabilités convectives et l'obtention dans les deux premiers cas d'un état harmonique<sup>4</sup>, et la capture de l'instabilité dans le troisième cas (la dissipation numérique aurait pu masquer le phénomène).

**Remarque 2.6.3** Dans ce dernier cas, l'inversion de  $(iw + \mathcal{A}_h)$  aurait donné un résultat sans grande signification physique, et probablement sans convergence quand  $h \rightarrow 0$ .

### 2.6.3 Mise en évidence numérique d'instabilités d'écoulements

Les résultats présentés le sont dans la plus "simple" de nos configurations, à savoir :

- Le canal 2D est rectangulaire et le maillage cartésien ( $\Delta x = \Delta y$ , si l'on note  $\Delta x$  et  $\Delta y$  les longueurs caractéristiques d'une maille).
- Le problème instationnaire est résolu avec une méthode d'approximation type volumes finis en espace et explicite en temps par un schéma d'Euler.
- On impose une condition d'obstacle dur en haut et en bas du canal (condition de glissement), en fixant  $\beta = 1$  sur ces parois (voir section 1.3.2). On cherchera par conséquent la solution  $\varphi$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
- Des conditions aux limites non réfléchissantes à l'ordre 1 sur le système "gelé" sont imposées aux extrémités du canal ( $(A^i n_i)^- = 0$ , voir section 1.3.2).

<sup>4</sup>Cet état harmonique aurait pu être obtenu directement par résolution non linéaire, les "pas" instationnaires pouvant être considérés comme une relaxation pour résoudre le problème  $(iw + \mathcal{A}_h)^{-1}$ .



La condition CFL de stabilité du schéma est dans ce cas (voir section 2.3)

$$\Delta t \leq \frac{1}{2(\max_y (|U_0(y) + 1|))}.$$

Les études d'instabilités sont effectuées en espace libre, donc pour pallier le caractère inexact des conditions aux limites non réfléchissantes approchées, il sera nécessaire de mettre en évidence ces instabilités avant d'atteindre les bords gauche et droite du maillage sur lesquelles on impose la condition non réfléchissante approchée. Les perturbations aéroacoustiques seront engendrées par deux types d'excitation :

1. Soit une perturbation par un Dirac de rotationnel de vitesses en condition initiale,  $u(0) = Y(y - y_0) \otimes \delta(x - x_0)$ ,  $v(0) = 0$ ,  $\rho(0) = 0$ , où  $Y$  désigne la fonction de Heaviside et  $(x_0, y_0)$  un point de l'axe longitudinal du canal.
2. Soit une perturbation par un second membre sinusoidal,  $F = Y(y - y_0) \otimes \delta(x - x_0) \otimes \sin(\omega t)$ , où  $\omega = 1.29^5$ .

### Mise en évidence d'une instabilité convective

Pour cela, on choisit comme domaine un canal bidimensionnel significativement plus long que large, à savoir un canal rectangulaire constitué de 1018 éléments en longueur et 19 éléments en largeur, avec  $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{19}$ . Plusieurs points d'observations (voir figure 2.10) sont désignés afin de faciliter la mise en évidence numérique de l'instabilité tout au long du parcours de l'onde acoustique dans le canal.

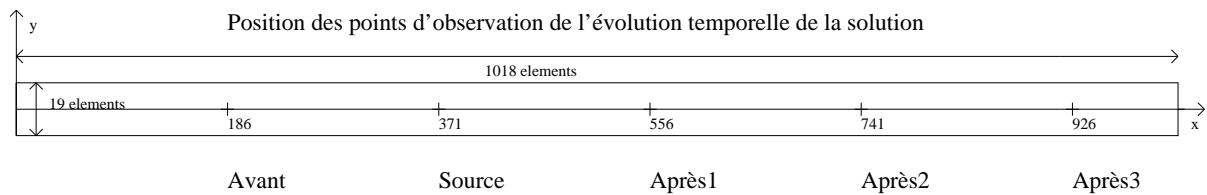


FIG. 2.10 – Maillage rectangulaire du canal bidimensionnel.

<sup>5</sup>Cette valeur de  $\omega$  en adimensionné, qui correspond à une fréquence de 70 Hz, est proche de celle obtenue par analyse spectrale par l'auteur dans [10], pour mettre en évidence une instabilité convective significative.

Le profil de vitesse choisi pour l'écoulement porteur sans retour est :

$$U_0(y) = 0.5(1 + 0.3 \tanh(5(y - 0.5))),$$

dont le graphe est représenté sur la figure 2.11. Il présente un point d'inflexion en  $y = 0.5$ , condition nécessaire à l'existence d'une instabilité d'écoulement.

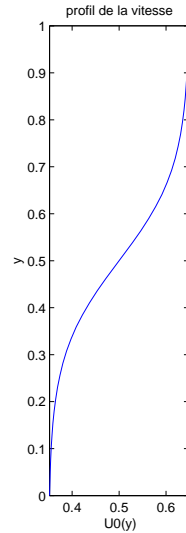


FIG. 2.11 – Représentation du profil de vitesse choisi pour un écoulement convectivement instable.

Pour cet écoulement cisaillé sans retour, les résultats obtenus pour la perturbation par une condition initiale sont présentés sur la figure 2.12. On observe que :

1. Sur chacune des courbes représentées sur ces trois figures, le premier pic correspond à l'arrivée au point d'observation de l'onde acoustique, dont l'amplitude décroît lorsqu'on s'éloigne de la source.
2. Le second pic traduit l'arrivée d'une instabilité que nous pouvons interpréter comme une instabilité de convection, étant donné que l'amplitude et la durée de celle-ci augmentent au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la source.

Pour savoir si cette instabilité de convection n'interdit pas l'établissement d'un régime harmonique, il faut interpréter les figures (2.13) obtenues pour la perturbation par un second membre sinusoïdal en temps. Par souci de clarté des figures, nous n'avons pas tracé la courbe légendée "après 1" sur les graphes précédents. Nous avons en revanche conservé les mêmes couleurs. On observe :

1. L'obtention d'un régime sinusoïdal, de même période que la source (à savoir  $T = 4.87$ ) et dont l'amplitude décroît en s'éloignant de la source, avant l'arrivée d'une instabilité. Cette instabilité est plus longue et visible si l'on s'éloigne de la source.
2. Le régime redevient sinusoïdal après le passage de l'instabilité.

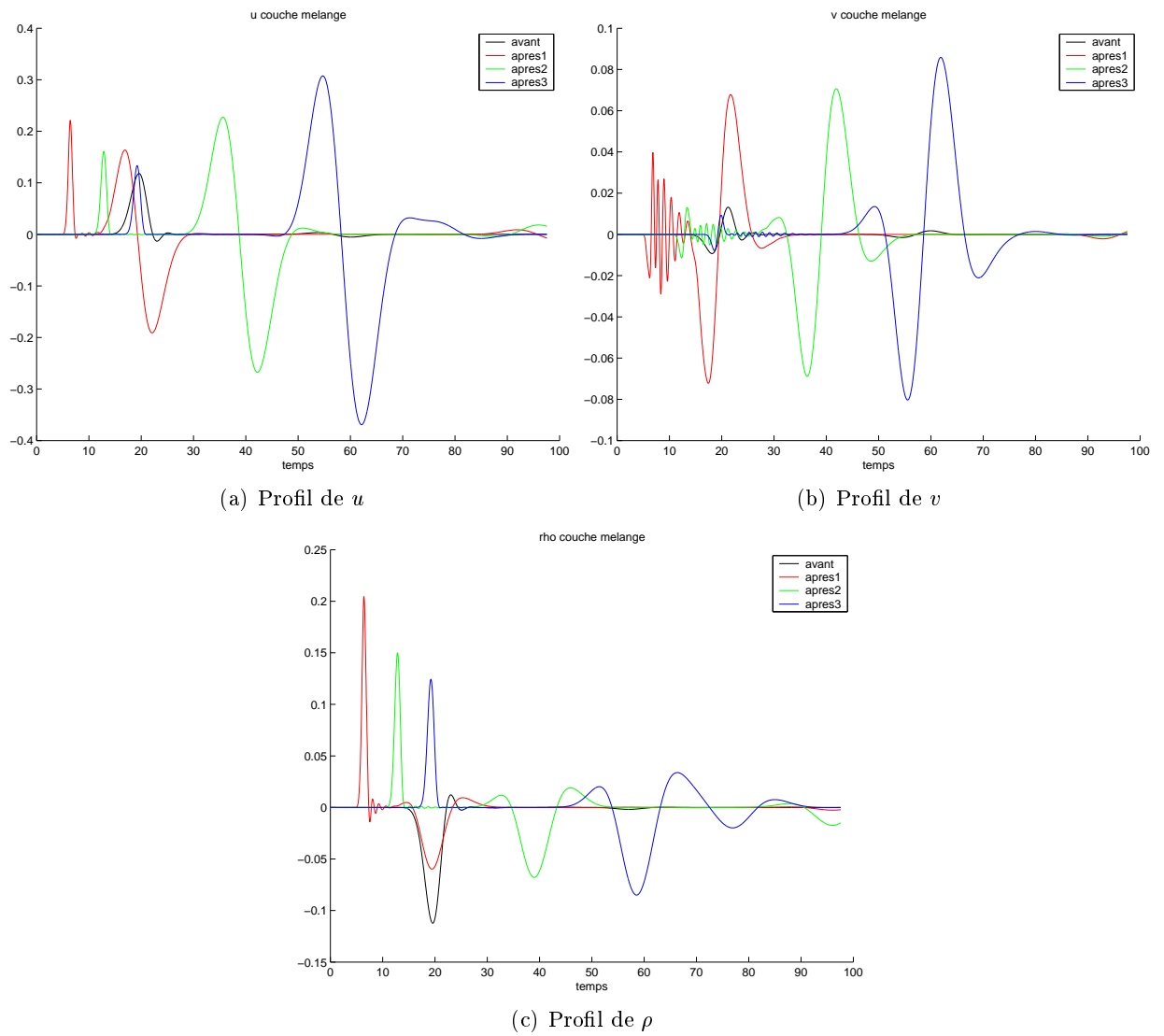


FIG. 2.12 – Profils de la solution pour une couche de mélanges sans retour, avec excitation par une condition initiale.

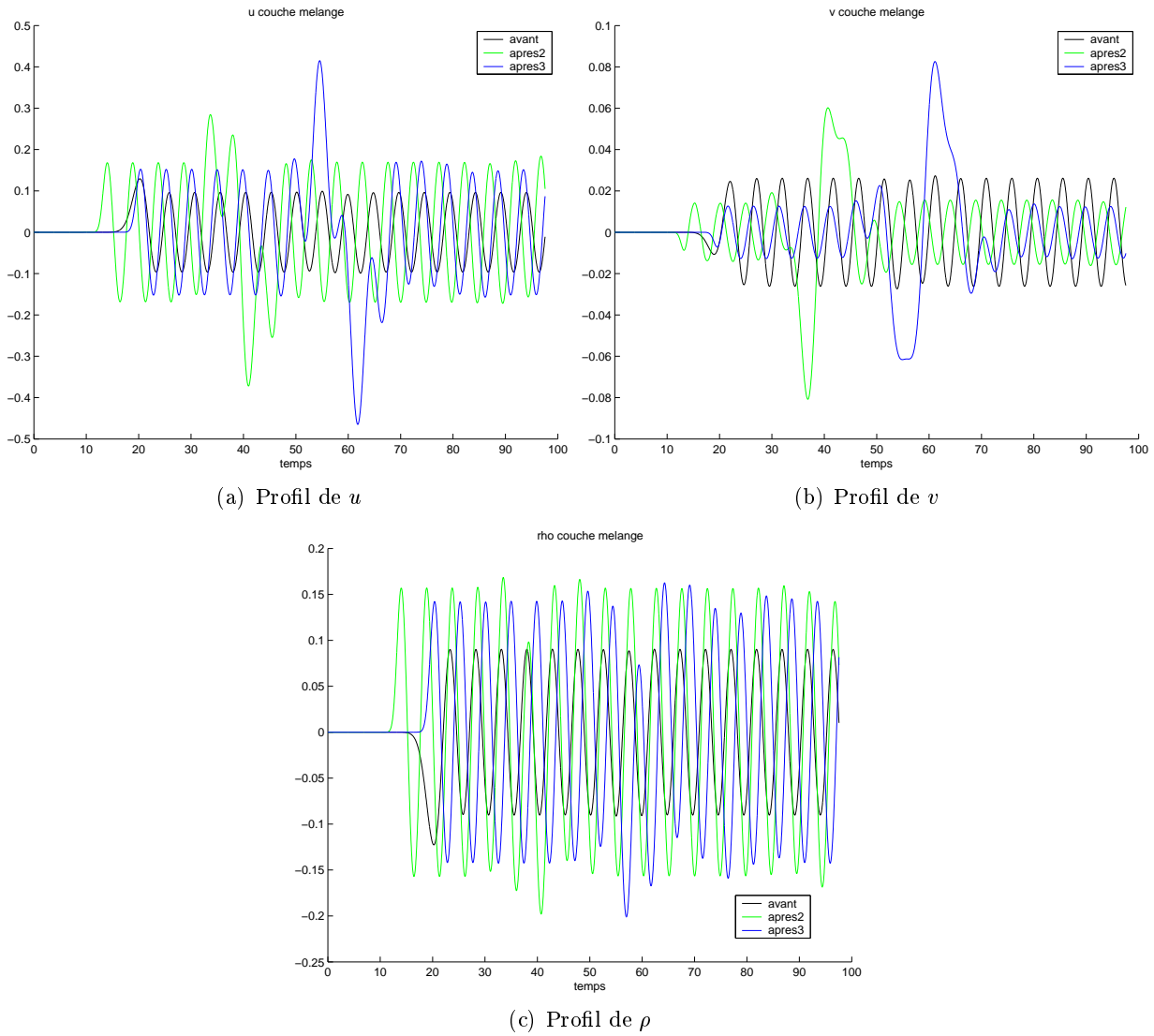


FIG. 2.13 – Profils de la solution pour une couche de mélanges sans retour, avec excitation par un second membre sinusoïdal.

Nous perturbons ensuite de façon similaire un écoulement porteur dont le profil de vitesses ne comporte pas de point d'inflexion, afin de voir si ce que nous avons précédemment interprété comme étant une instabilité convective persiste.

### Stabilité du profil parabolique

On considère alors comme exemple, celui d'un écoulement porteur à profil de vitesse parabolique, d'équation

$$U_0(y) = -1.6y^2 + 1.6y + 0.1,$$

dont le graphe est représenté sur la figure 2.14.

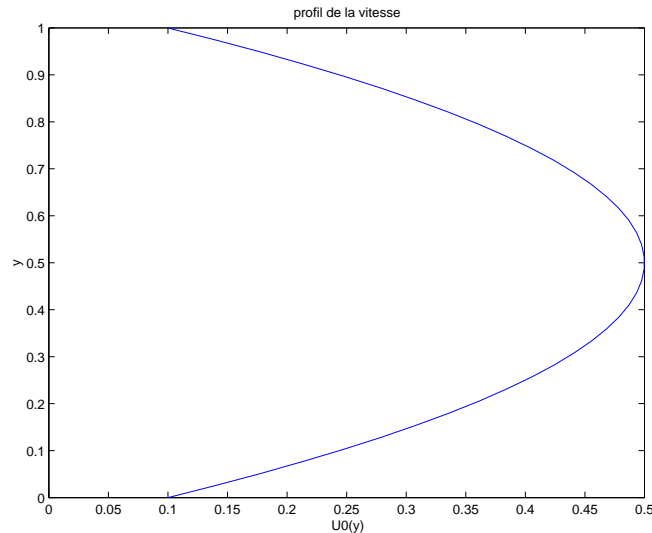


FIG. 2.14 – Représentation du profil de vitesse choisi pour un écoulement stable.

Pour cet écoulement sans point d'inflexion, les résultats obtenus pour la perturbation par une condition initiale sont présentés sur la figure 2.15. On observe :

1. L'arrivée de l'onde acoustique sans autre phénomène caractéristique sur les graphes représentant les différentes composantes de la solution  $\varphi$ .
2. Les variations de la seconde composante  $v$ , de nature totalement différente de celles des deux autres composantes, sont trop faibles pour être interprétées de façon pertinente.

Les figures 2.16 obtenues pour la perturbation par un second membre sinusoïdal en temps montrent pour ce profil d'écoulement que :

1. Les variations de  $u$  et  $\rho$  deviennent rapidement sinusoïdales (installation rapide du régime harmonique).
2. Les variations de la composante  $v$  en aval de la source peinent à devenir sinusoïdales, mais leurs amplitudes sur l'axe sont si faibles que ce résultat est difficile à interpréter.

### Mise en évidence d'une instabilité absolue

Le maillage considéré est un peu plus fin que celui utilisé pour la mise en évidence d'une instabilité convective. La figure 2.17 le représente, ainsi que la position des points d'observation

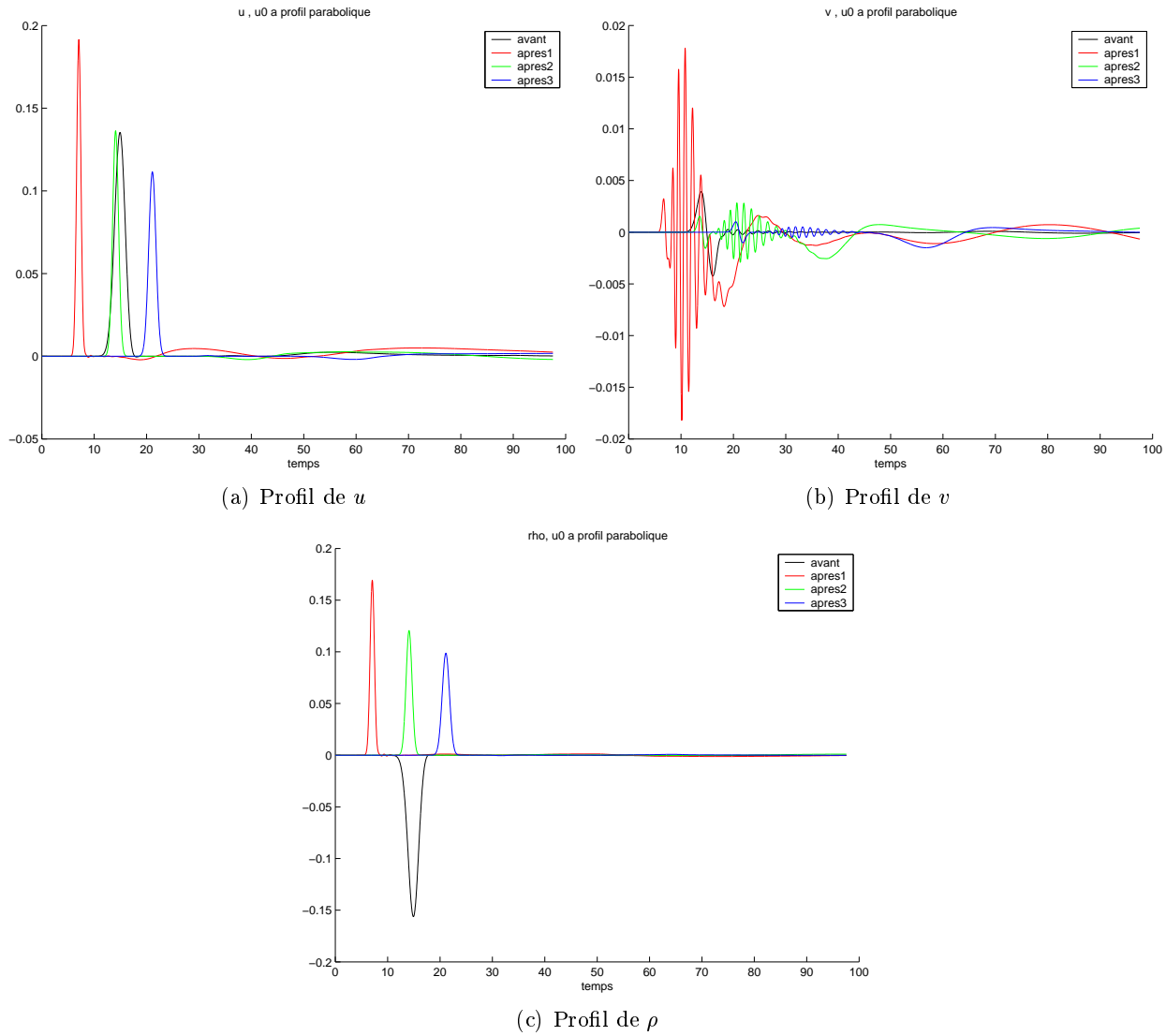


FIG. 2.15 – Profils de la solution pour un écoulement parabolique, avec excitation par une condition initiale.

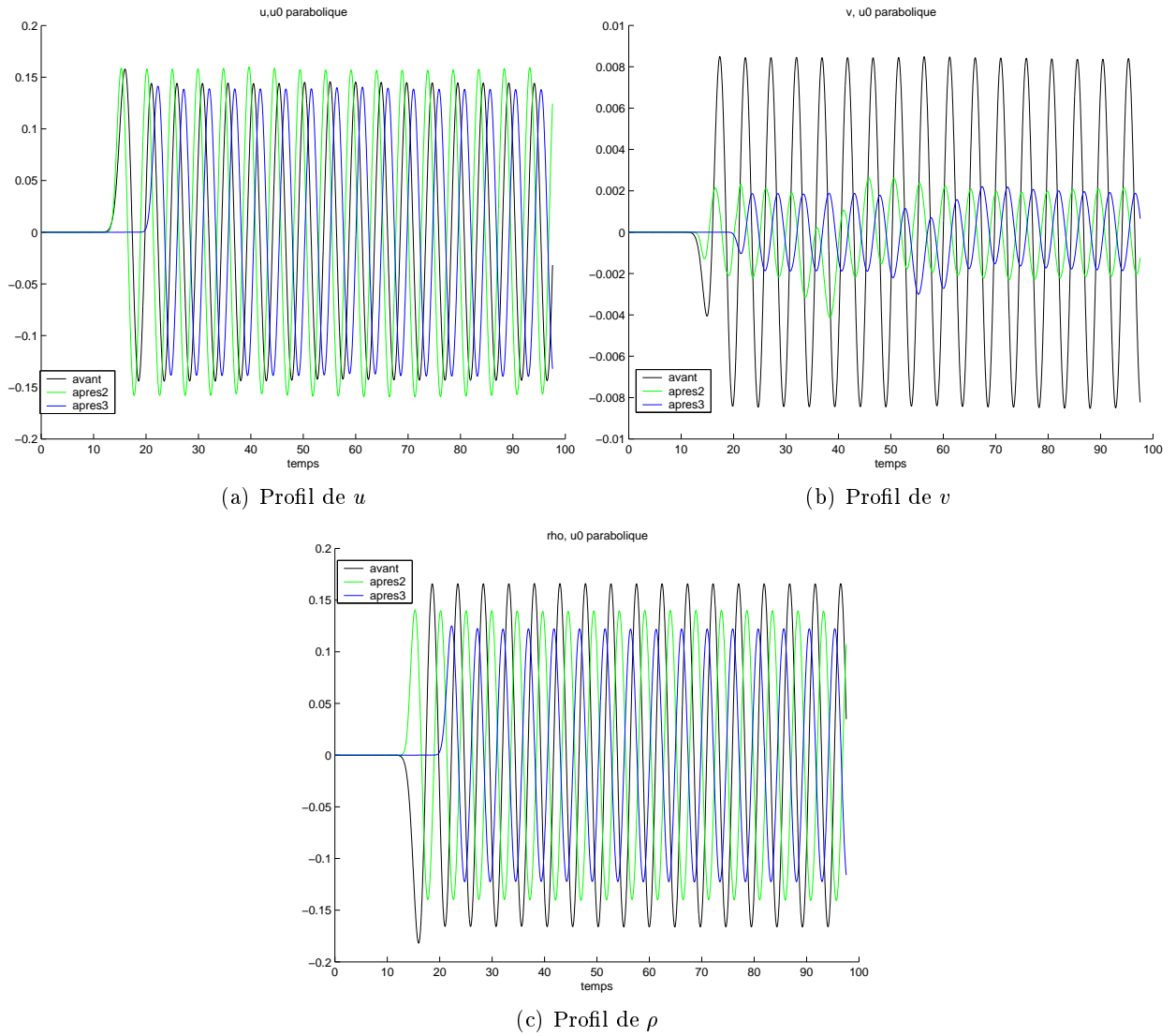


FIG. 2.16 – Profils de la solution pour un écoulement parabolique, avec excitation par un second membre sinusoïdal.

et de la source considérés. Le profil de l'écoulement porteur est celui d'une couche de mélanges avec retour. C'est-à-dire qu'il présente un point d'inflexion comme pour l'instabilité convective en  $y = 0.5$ , mais que  $U_0$  change de signe de part et d'autre de  $y = 0.5$  (voir figure 2.18).

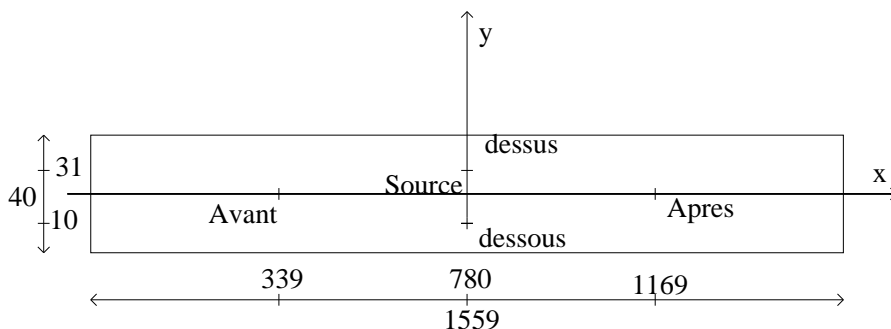


FIG. 2.17 – Maillage considéré pour la mise en évidence d'une instabilité absolue.

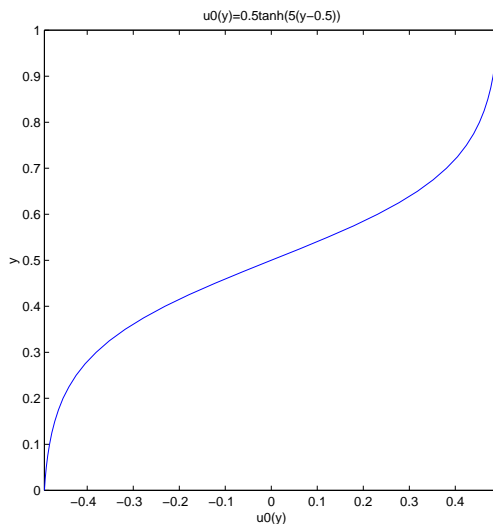


FIG. 2.18 – Profil de vitesses pour un écoulement absolument instable.

Sur la figure 2.19 sont représentées les allures des trois composantes de la solution  $\varphi$  au-dessus et en-dessous de la source, en des points d'observation situés très proches de la source (voir (2.17)). La croissance très rapide laisse supposer qu'il n'existe pas de stabilisation possible, ce qui s'interprète comme une instabilité absolue.



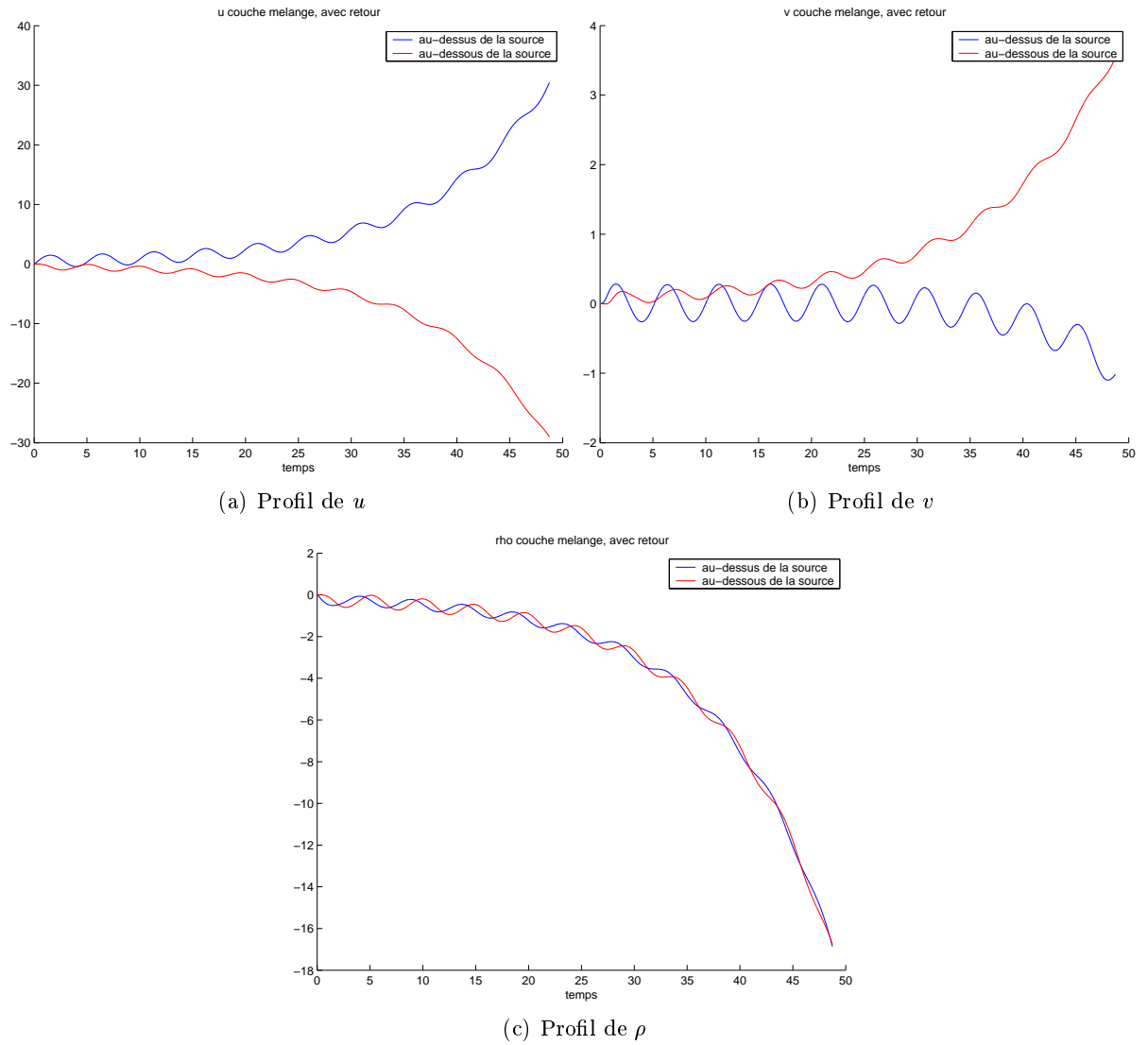


FIG. 2.19 – Profils de la solution pour une couche de mélanges avec retour, avec excitation par une condition initiale.

## Conclusion

Pour des écoulements porteurs non uniformes, nous avons mis en évidence numériquement dans un canal bidimensionnel à l'aide d'une méthode volumes finis en espace et Euler explicite en temps les phénomènes suivants :

1. La stabilité (autrement dit la décroissance en énergie en temps) pour des profils de vitesse convexes (dans notre cas, paraboliques).
2. L'instabilité convective pour des profils sans retour présentant un point d'inflexion, mais n'interdisant pas l'installation d'un régime harmonique.
3. L'instabilité absolue pour des profils de vitesse avec retour présentant un point d'inflexion et interdisant l'installation d'un régime harmonique.

**Remarques 2.6.4** *D'autres exemples d'écoulements sont présentés dans [11]. Dans [25], nous avons mis en évidence avec les auteurs une instabilité convective à l'aide d'une simulation Galerkinе discontinue P1 en espace et Runge-Kutta d'ordre deux en temps. Avec un profil de vitesse en tangente hyperbolique similaire à celui utilisé précédemment, on obtient la représentation de la pression acoustique en variables non adimensionnées ( $c_0 = 340\text{m/s}$ ,  $\rho_0 = 1.23\text{kg/m}^3$ ,  $P_0 = 101325\text{Pa}$ ) de la figure 2.20. Des conditions aux limites absorbantes approchées sont implémentées sur tous les bords du canal, et la simulation est donc stoppée avant d'atteindre ces parois.*

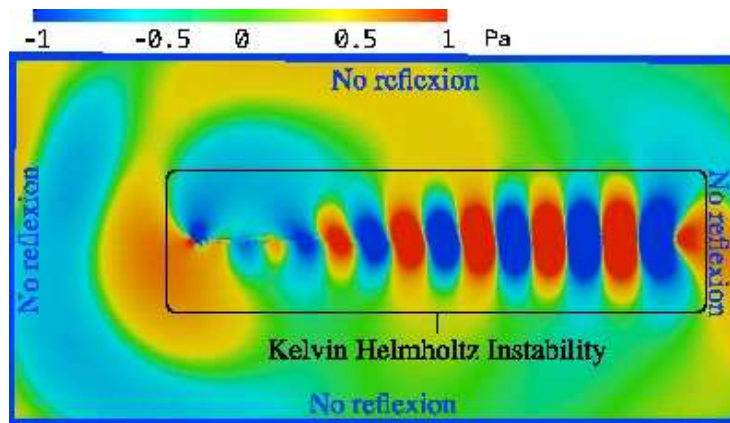


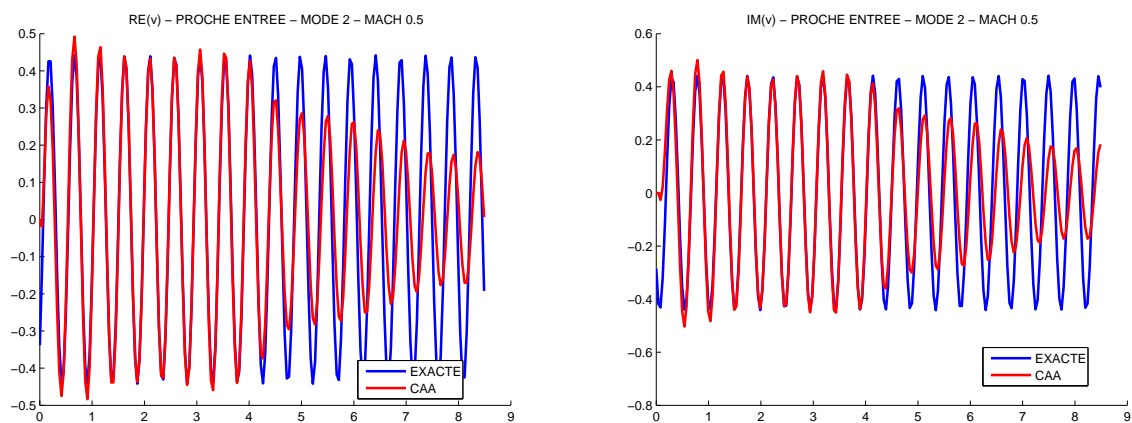
FIG. 2.20 – Mise en évidence d'une instabilité convective.

## Chapitre 3

# CPML pour l'aéroacoustique

Même si dans un premier temps, les conditions aux limites permettant de simuler l'espace libre qui découlent naturellement de la taxinomie des conditions aux limites à adjoindre au problème (1.10) sont des conditions non réfléchissantes à l'ordre 1 (donc exactes pour des ondes normales), une étude plus approfondie d'autres méthodes de construction de ce type de conditions est souhaitable, afin que les applications numériques ne soient pas contraintes par la nature de l'écoulement.

En effet, on peut facilement montrer que ces conditions sont insuffisantes, en particulier pour des guides d'ondes en présence de sources réalistes : des sources modales d'ordre non nul. Ces sources (voir section 2.5) sont déterminées de manière à être des solutions exactes des équations d'Euler linéarisées en espace libre, dans la configuration représentée sur la figure 2.4. On utilise de nouveau le cas test numérique présenté en la section 2.5 pour caractériser numériquement l'insuffisance des conditions aux limites non réfléchissantes approchées. On rappelle que l'écoulement porteur est uniforme, et que l'excitation est cette fois-ci une excitation par des modes amont d'ordre  $n = 2$ . La figure 3.1 représente les profils de la partie réelle et imaginaire de la composante  $v$  de la solution exacte et de la solution numérique obtenue avec des conditions aux limites approchées, en un point  $(x_0, y_0)$  proche de la source, et au cours du temps.



(a) Comparaison des parties réelles.

(b) Comparaison des parties imaginaires.

FIG. 3.1 – Comparaison des parties réelles et imaginaires entre la solution exacte et la solution obtenue numériquement, pour  $n = 2$ .

Après l'installation du régime périodique, on voit très nettement la courbe rouge s'écarter de la courbe bleue représentant le profil de la solution exacte. Ces courbes illustrent parfaitement les réflexions parasites causées par l'inexactitude des conditions aux limites approchées pour ce type de sources réalistes : le temps à partir duquel la solution approchée s'écarte de la solution exacte correspond totalement au temps mis par les ondes non absorbées pour atteindre le capteur localisé en  $(x_0, y_0)$  proche de l'entrée du canal (bord de droite).

Comme les résultats sont qualitativement similaires sur les variables  $u$  et  $\rho$ , nous n'avons pas représenté les figures comparatives correspondantes pour ces variables.

Dans l'introduction générale, on a rappelé les trois méthodes principales développées depuis plusieurs années pour ramener un problème de propagation en milieu non borné à un problème posé en milieu borné : Les méthodes intégrales, les méthodes de conditions aux limites absorbantes et les méthodes de milieux fictifs absorbants. Les méthodes de milieux fictifs absorbants consistent à entourer le domaine d'étude par une couche de faible épaisseur dont les caractéristiques assurent la propagation de l'onde sans réflexions et une absorption suffisante de l'onde dans la couche afin d'imposer des conditions homogènes sur le bord de la couche. Ces méthodes ont connu dans un premier temps peu de succès en raison de leurs dépendances aux fréquences des signaux incidents et de réflexions parasites. Les travaux de Bérenger ont relancé l'utilisation de ces méthodes. Dans [5], il introduit des couches absorbantes parfaitement adaptées (appelées PML) en traitant la diffraction des ondes électromagnétiques par un obstacle parfaitement conducteur. Ces PML possèdent de nombreux atouts :

- La transmission d'une onde à travers l'interface entre deux milieux PML se fait sans réflexions parasites pour tout angle d'incidence et à toute fréquence.
- Le nouveau problème a une solution qui coïncide avec la solution dans le domaine borné et une solution qui décroît exponentiellement à l'extérieur du domaine.
- L'implémentation numérique est très aisée dans un code de calcul déjà existant.

En revanche, de telles équations aboutissent à un système mal posé en instationnaire et il est donc nécessaire de réinterpréter le milieu PML de Bérenger. Un des procédés le plus usité est de modifier l'opérateur spatial du problème initial (qui se traduit par un changement de coordonnées complexes), mais même dans ce cas des difficultés théoriques persistent (voir [24, 9, 54, 1]). On veut généraliser ce type de méthodes aux équations d'Euler linéarisées, à l'instar des travaux effectués dans [58]. Dans le cas de la propagation dans un conduit en régime instationnaire, et en présence d'un écoulement porteur uniforme, plusieurs études ont montré que les PML pouvaient se révéler instables, notamment en présence de modes amonts inverses [62, 42]. On présentera dans un premier temps les principaux arguments permettant d'établir le problème sur tout l'espace et notamment la décroissance exponentielle du noyau de Green associé. Dans un second temps, on comparera le modèle dérivé du système dispersif associé au problème sans convection ([58]) avec un autre modèle de PML appelé CPML (CPML pour PML convolutive) a priori plus adapté aux écoulements porteurs avec convection. Ce modèle conduit à la résolution d'un système hyperbolique non symétrique dont la partie principale est diagonalisable (donc non faiblement hyperbolique). L'étude théorique de ce modèle (unicité, convergence d'une approximation) n'est pas complètement terminée (seule l'unicité du problème de Cauchy à coefficients gelés est démontrée). Cependant, une approximation numérique stable, des conditions aux limites convenables ont été implémentées, dans le cas où le domaine fictif est limité par un parallélépipède avec un écoulement porteur invariant par translation normale aux frontières de celui-ci. L'étude théorique étant encore inachevée, nous nous attacherons à mettre en évidence la précision numérique de la solution obtenue avec des conditions aux limites de type PML en comparaison avec le problème analogue posé avec des conditions aux limites transparentes approchées. Pour cela, la solution explicite aux équations d'Euler linéarisées dans un conduit 2D de longueur infinie, d'épaisseur constante, vérifiant la condition de glissement

parfait sur les bords, précédemment calculée en la section 2.5 et déjà utilisée pour caractériser numériquement l'erreur commise par des conditions aux limites absorbantes approchées pour simuler l'espace libre, permettra de comparer la solution obtenue avec ou sans PML avec la solution exacte.

L'idée des PML est d'obtenir, après changement de variables complexe (rendu possible par prolongement analytique autour d'une variété de  $\mathbb{C}^3$  du noyau de Green de  $p^2 - \Delta$ ), un système d'équations défini sur tout l'espace, et tel que :

- La solution vérifie les équations d'Euler "en espace libre" dans  $\Omega$  (c'est-à-dire coïncide avec la solution  $\varphi$  qui nous intéresse dans  $\Omega$ ).
- La solution décroît exponentiellement sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ , et ce indépendamment de la fréquence et de la direction de propagation des ondes.

On présentera dans un premier temps les principaux arguments permettant d'établir le problème sur tout l'espace, et ce successivement pour deux modèles PML différents, pour ensuite mettre en oeuvre numériquement ces modèles et les comparer.

### 3.1 Etude d'une formulation "PML" des équations tridimensionnelles à coefficients constants

Considérons le système suivant (où le choix de l'axe de direction de la convection a pour but de simplifier les calculs) :

$$\partial_t \varphi - \mathcal{A} \varphi = f, \tag{3.1}$$

où

$$-\mathcal{A} = \begin{pmatrix} M\partial_x & 0 & 0 & \partial_x \\ 0 & M\partial_x & 0 & \partial_y \\ 0 & 0 & M\partial_x & \partial_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z & M\partial_x \end{pmatrix}.$$

Le second membre  $f$  a son support spatial contenu dans un parallélépipède  $\Pi = ]-x_0, x_0[ \times ]-y_0, y_0[ \times ]-z_0, z_0[$ , et  $f \in L^2(\mathbb{R}^+, \Pi)$ . On rappelle que  $0 \leq M < 1$ . Nous allons étudier le problème harmonique associé en absorption limite, c'est-à-dire la solution du système :

$$p\Phi + \mathcal{A}\Phi = F(p), \tag{3.2}$$

pour  $p \in \mathbb{C}$  avec  $Re(p) > 0$ .  $F$  désigne la transformée de Laplace en temps de  $f$ , et la limite de  $\Phi$  pour  $p = i\omega + 0$  (autrement dit pour  $p = i\omega + \varepsilon$  avec  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) sera la solution harmonique recherchée. Le système (3.2) s'inverse formellement en :

$$\Phi = (C^2 - \Delta)^{-1} C^{-1} [Cof] F, \tag{3.3}$$

où  $C = p + M\partial_x$ , et

$$[Cof] = \begin{pmatrix} C^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 & \partial_x \partial_y & \partial_x \partial_z & -C\partial_x \\ \partial_x \partial_y & C^2 - \partial_x^2 - \partial_z^2 & \partial_y \partial_z & -C\partial_y \\ \partial_x \partial_z & \partial_y \partial_z & C^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 & -C\partial_z \\ -C\partial_x & -C\partial_y & -C\partial_z & C^2 \end{pmatrix}.$$

Ce calcul n'est bien entendu pas uniquement formel, et on a par exemple :

**Proposition 3.1.1** Si  $F \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)^4$  et  $\text{Re}(p) > 0$ , alors <sup>1</sup> :

$$C^{-1} = G_c * (\cdot) = \frac{Y(x)}{M} e^{-p \frac{x}{M}} \otimes \delta_{(y)} \otimes \delta_{(z)} * (\cdot)$$

et

$$(C^2 - \Delta)^{-1} = G_{oc} * (\cdot) = \frac{1}{4\pi\sqrt{1-M^2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{1-M^2} + y^2 + z^2}} e^{-\frac{p}{\sqrt{1-M^2}} \left( \frac{-Mx}{\sqrt{1-M^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{1-M^2} + y^2 + z^2} \right)} * (\cdot)$$

$G_c$  et  $G_{oc}$  sont des distributions de  $O'_c$ , et (3.2) a une solution unique dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)^4$  donnée par :

$$\Phi = G_c * G_{oc} * [Cof] * F,$$

où  $[Cof]$  désigne désormais la matrice de dérivation de Dirac associée à la matrice  $[Cof]$  de (3.3).

**Preuve.** En effet,  $C^{-1}$  s'obtient de façon évidente, et le résultat est le produit tensoriel d'une fonction à décroissance rapide par une distribution à support ponctuel. Pour obtenir  $(C^2 - \Delta)^{-1}$ , on remarque que :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(C^2 - \Delta) &= (p + iM\xi)^2 + \xi^2 + \eta^2 + \epsilon^2 \\ &= \frac{p^2}{1-M^2} + \left( \xi' + ip \frac{M}{\sqrt{1-M^2}} \right)^2 + \eta^2 + \epsilon^2, \end{aligned}$$

avec  $\xi' = \xi\sqrt{1-M^2}$ , et on applique la formule de l'isomorphie :

$$\mathcal{F}(S \circ J) = \frac{1}{|\det J|} \mathcal{F}(S) \circ (J^*)^{-1},$$

puis la formule du retard pour se ramener à la solution de

$$K^2 - \Delta = \delta,$$

avec  $K = \frac{p}{\sqrt{1-M^2}}$ . De plus,  $G_{oc} \in L^1_{loc}$  et est à décroissance rapide, car pour  $\text{Re}(p) > 0$  et pour  $M < 1$ , on a :

$$\frac{-Mx}{\sqrt{1-M^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{1-M^2} + y^2 + z^2} \rightarrow +\infty$$

comme  $|(x, y, z)|$  quand  $|(x, y, z)| \rightarrow +\infty$ . Pour conclure, il suffit de remarquer que  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)^4$  est un module sur l'algèbre unifère  $O'_c$ . ■

**Remarques 3.1.1** Cette proposition est établie pour  $\text{Re}(p) > 0$ , et le passage à la limite quand  $\text{Re}(p) \rightarrow 0$  exige plus quand au comportement de  $F$  à l'infini.

Si  $F \in L^2(\mathbb{R}^3)^4 \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)^4$ ,  $\Phi_{i\omega+\varepsilon}$  est  $L^2$  et possède une limite dans  $L^2_{loc}$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . En fait, quand l'écoulement porteur est à coefficients constants uniquement à l'extérieur d'un compact, et/ou lorsque (3.1) est accompagné de conditions aux limites, on ne sait en général pas si cette limite existe (voir le sous-chapitre 2.6.1). Toutefois, si l'on désigne par  $\mathcal{A} + \mathcal{B}$  une perturbation de  $\mathcal{A}$  (des coefficients variables sur une composante par exemple), on est conduit à supposer que

$$p\Phi + (\mathcal{A} + \mathcal{B})\Phi = F$$

<sup>1</sup> $\mathcal{S}'$  désigne l'espace des distributions tempérées, et  $O'_c$  l'espace des distributions à décroissance rapide.

a une solution unique  $L^2$  admettant une limite  $\Phi_0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  telle que  $B\Phi_0$  soit dans  $L^2(\mathbb{R}^3)^4 \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)^4$ , et alors  $\Phi_0$  sera aussi solution de

$$(i\omega + \varepsilon)\Phi + \mathcal{A}\Phi = F - B\Phi_0.$$

Bien entendu, dans tous les cas,  $\Phi_{i\omega+0}$  n'est pas à décroissance rapide (elle vérifie tout au plus des conditions de radiations à l'infini caractérisées par une décroissance lente).

Le "programme PML" le moins ambitieux peut alors se définir comme suit :  
 Modifier l'équation (3.2) en l'équation (3.4) suivante :

$$p\tilde{\Phi} + \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\Phi} = \tilde{F}, \tag{3.4}$$

avec les hypothèses suivantes :

1. Une solution  $\tilde{\Phi}$  est à décroissance rapide pour tout  $\tilde{F}$  à support compact, même pour  $p = i\omega + 0$ .
2. Si  $\text{supp}\tilde{F} \subset \Pi$ , avec  $\tilde{F} = F$ , alors  $\tilde{\Phi}|_{\Pi} = \Phi|_{\Pi}$ . Cette hypothèse permettra par la suite de perturber les "PML" par l'écriture de conditions aux limites.
3. Le comportement asymptotique (quand  $|(x, y, z)| \rightarrow +\infty$ ) de  $\tilde{\Phi}$  est "indépendant" de  $p$ . Autrement dit,  $\tilde{\Phi}$  est majorée par une fonction à décroissance rapide à l'infini indépendante de  $p$ .

Depuis ([16], [20], [24], [48], [54]), la traduction des idées de Bérenger consiste à obtenir (3.4) en complexifiant  $\mathbb{R}^3$  en dehors de  $\Pi$  et obtenir une solution fondamentale de (3.4) en utilisant le fait que la solution fondamentale du système de départ admet un prolongement analytique sur  $\mathbb{C}^3/\{0\}$  (ce qui provient de l'ellipticité du déterminant du symbole). Dans notre cas, si  $OC = (C^2 - \Delta)$  est elliptique (avec  $M < 1$ ), ce n'est pas le cas de l'opérateur de convection  $C$  qui n'est que partiellement elliptique en  $x$  ([36], chapitre 4, paragraphe 1). Ceci n'est pas un obstacle sérieux, car on peut interpréter (3.4) en munissant  $\mathbb{R}^3$  d'une structure de variété réelle pseudo-riemmanienne à fibré tangent et cotangent complexe. Dans le cas de PML cartésiennes ( $\Pi$  est un pavé), ceci peut être réalisé très facilement en se donnant a priori une immersion de cette variété dans  $\mathbb{C}^3$ , par exemple de la façon suivante :

$$\begin{cases} \tilde{u} &= \tilde{u}(u) &= u + \frac{1}{p} \int_0^u \sigma_u(\xi) d\xi, & u = (x, y, z) \\ \sigma_u &\in C^\infty(\mathbb{R}) &, \end{cases}$$

avec  $\sigma_u(\xi) \geq 0$ , croissante sur  $\mathbb{R}^+$ , décroissante sur  $\mathbb{R}^-$  et nulle sur  $]-u_0, u_0[$ . Pour démontrer l'hypothèse 3 ci-dessus, nous ferons en outre l'hypothèse (et ceci pour faciliter certaines majorations) que  $\sigma_u(\xi)$  tend lentement vers l'infini quand  $|\xi| \rightarrow +\infty$  (au plus comme  $|\xi|^\alpha$ ,  $\alpha > 1$ ). Alors  $(\tilde{x}(x), \tilde{y}(y), \tilde{z}(z))$  sont les points courants d'une variété  $\mathbb{M}$ , localement confondue avec  $\Pi$  (munie de la structure de sous-variété induite par  $\mathbb{R}^3$  Euclidien), de fibré tangent engendré par les  $\partial_{\tilde{u}}$  et cotangent engendré par les  $d\tilde{u}$ .

Sur  $\mathbb{M}$ , il existe une pseudo-métrique (isomorphisme entre le fibré tangent et cotangent) donnée par :

$$g_{uv} = \sum_{\omega} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial u} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial v} = \delta_{uv} S_u^{-1} S_v^{-1},$$

avec  $S_u = \left(1 + \frac{\sigma(u)}{p}\right)$ .  $g_{uv}$  est diagonale donc symétrique inversible, et son déterminant  $g$  a une racine globalement définie  $\sqrt{g} = (S_x S_y S_z)^{-1}$ .

Cela suffit pour définir sur  $\mathbb{M}$  un calcul différentiel et tensoriel très analogue à celui défini sur les variétés Riemanniennes [51] : produits extérieurs et intérieurs de tenseurs ou de formes, transformée de Hodge, expression co et contra variantes, ...

On est amené à définir (3.4) de la façon suivante :

**Définition 2** On appelle système PML cartésien associé à (3.2), le système défini sur  $\mathbb{M}$  par :

$$p\tilde{\Phi} + \tilde{\mathcal{A}}\tilde{\Phi} = \tilde{F}, \quad (3.5)$$

où  $\tilde{\mathcal{A}}$  est obtenu en remplaçant  $\partial_u$  par  $\partial_{\tilde{u}}$  dans  $\mathcal{A}$ , et  $\tilde{F}$  est à support compact (de forme  $F(\tilde{x}(x), \tilde{y}(y), \tilde{z}(z))$  où l'application  $(x, y, z) \rightarrow \tilde{F}$  est  $L^2$  et à support compact dans  $\mathbb{R}^3$ ).

Afin de remplir les conditions 1,2,3 du "programme PML" défini ci-dessus, nous allons exhiber une solution fondamentale à droite régulière de ce système. Pour ce faire, intéressons nous tout d'abord aux noyaux des opérateurs  $\tilde{C}$  et  $\tilde{OC}$  obtenus à partir de  $C$  et  $OC$  en remplaçant  $\partial_u$  par  $\partial_{\tilde{u}}$  où  $u = (x, y, z)$ .

**Proposition 3.1.2** Les opérateurs  $\tilde{C}$  et  $\tilde{OC}$  admettent des noyaux fondamentaux symétriques à droite réguliers, avec respectivement :

$$G_{\tilde{C}}\tilde{\varphi} = \frac{1}{M} \int Y(x - x') e^{-\frac{p}{M}(\tilde{x} - \tilde{x}')} dx' \varphi(\tilde{x}', \tilde{y}, \tilde{z}).$$

$$G_{\tilde{OC}}\tilde{\varphi} = \frac{1}{4\pi\sqrt{1-M^2}} \int \frac{e^{-\frac{p}{\sqrt{1-M^2}}\left(\frac{-M(\tilde{x} - \tilde{x}')}{\sqrt{1-M^2}} + \tilde{r}\right)}}{\tilde{r}} \tilde{\varphi} d\tilde{x} \wedge d\tilde{y} \wedge d\tilde{z},$$

où  $\tilde{r} = \sqrt{\frac{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2}{1-M^2} + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}')^2}$  (la racine étant définie par sa détermination en partie réelle positive).

**Preuve.**

–  $G_{\tilde{OC}}$  est obtenu par prolongement analytique à  $\mathbb{C}^3/\{0\}$  ( $OC$  est elliptique pour  $M < 1$ ). On montre que  $G_{\tilde{OC}}\tilde{\varphi}$  est un noyau fondamental régulier (et même très régulier puisque  $C^\infty$  sauf sur la diagonale  $X' = X$ ) de  $\tilde{OC}$  de façon tout à fait analogue à ce qui est fait pour  $p^2 - \Delta$  dans ([24], [20]).  $\tilde{OC}$  est au moins hypoelliptique ...

– Soit  $\phi = G_{\tilde{C}}\tilde{\varphi} = \frac{1}{M} e^{-\frac{p}{M}\tilde{x}} \int_{-\infty}^x e^{\frac{p}{M}\tilde{x}'} S_x(x') \varphi(\tilde{x}', \tilde{y}, \tilde{z}) dx'$ .

On a  $M\partial_{\tilde{x}}\phi = -p\phi + \varphi$  donc  $\tilde{C} \circ G_{\tilde{C}}\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}$  et  $\phi$  est évidemment  $C^\infty$ .

■

A ce stade, on peut prolonger  $G_{\tilde{C}}\tilde{\varphi}$  et  $G_{\tilde{OC}}\tilde{\varphi}$  sur  $\mathcal{E}'$ , mais avec des valeurs dans  $\mathcal{D}'$ , ce qui ne permet pas de les composer, ni de déterminer le comportement à l'infini. Il faut pour cela examiner plus en détail le comportement des solutions obtenues par  $G_{\tilde{C}}\tilde{\varphi}$  et  $G_{\tilde{OC}}\tilde{\varphi}$  pour lesquels on a en fait le résultat suivant :

**Proposition 3.1.3**  $\forall p$  avec  $Re(p) \geq 0$ , si  $f \in L^2_{loc}(\Pi)$  et est à support compact, alors  $G_{\tilde{C}}\tilde{\varphi}(G_{\tilde{OC}}\tilde{\varphi}f)$  est la somme d'une fonction  $L^2$  à support compact et d'une fonction  $C^\infty$  à décroissance rapide indépendante de  $p$  (majoré à l'infini par une fonction à décroissance rapide indépendante de  $p$ ).



**Preuve.** Le noyau de Schwartz  $G_{\widetilde{OC}}(\widetilde{X} - \widetilde{X}') S_x(x') S_y(y') S_z(z')$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$  est  $C^\infty$  sauf sur la diagonale, et par conséquent  $\Theta(\widetilde{X}) = G_{\widetilde{OC}} \widetilde{*} f$  est  $C^\infty$  sauf sur le support de  $f$ . Comme  $G_{\widetilde{OC}}(\widetilde{U})$  est  $L^2_{loc}$  en  $U$ ,  $\Theta(\widetilde{X})$  est la somme d'une fonction  $\Theta_s L^2$  dans un ouvert quelconque autour du support de  $f$  et d'une fonction  $\Theta_r C^\infty$  (avec  $supp \Theta_r \cap supp f = \emptyset$ ).

De plus, comme pour  $|u| \rightarrow +\infty$ , l'hypothèse de croissance lente de  $\sigma(\xi)$  affirme que

$$\frac{1}{u} \int_0^u \sigma(\xi) d\xi \rightarrow \infty,$$

$p\widetilde{r}$  se comporte comme :

$$\sqrt{\frac{\left(\int_{x'}^x \sigma_x(\xi) d\xi\right)^2}{1-M^2} + \left(\int_{y'}^y \sigma_y(\xi) d\xi\right)^2 + \left(\int_{z'}^z \sigma_z(\xi) d\xi\right)^2},$$

avec  $Re\left(\frac{1}{p}\right) \geq 0$ .

Comme  $M < 1$  et que  $(x', y', z')$  reste dans le support borné de  $\mathbb{R}^3$ , il vient que dans  $G_{\widetilde{OC}}(X - X')$ , le comportement à l'infini de

$$k(\widetilde{X}) = -\frac{p}{\sqrt{1-M^2}} \left( -\frac{M(\widetilde{x} - \widetilde{x}')}{\sqrt{1-M^2}} + \widetilde{r} \right)$$

est équivalent à celui de

$$-\sup_{u \in \{x, y, z\}} \left( \left| \int_0^u \sigma(\xi) d\xi \right| \right),$$

et donc que  $\Theta(\widetilde{X})$  est à décroissance rapide (**et ce même si**  $Re(p) = 0$ ).

**Remarque 3.1.2** Pour  $(y, z)$  fixés,  $k(\widetilde{X})$  est équivalent à  $-\frac{1}{1 \pm M} \left| \int_{x'}^x \sigma(\xi) d\xi \right|$  pour  $x \rightarrow \pm\infty$ .

On aura donc intérêt à prendre  $\sigma_x(\xi)$  et  $\sigma_x(-\xi)$  différents, et de fait en rapport  $\frac{1+M}{1-M}$  pour "symétriser" la décroissance en  $x > 0$  et  $x < 0$ . En fait, puisque ce qui nous importe est le "retour" dû à la restriction du problème à un borné, on choisira  $\sigma_x$  ("amont") =  $\frac{1+M}{1-M} \sigma_x$  ("aval") pour  $M$  assez proche de 1. Ceci améliore sensiblement les résultats numériques.

On a donc  $\Theta(\widetilde{X}) = \Theta_s(\widetilde{X}) + \Theta_r(\widetilde{X})$  à décroissance rapide et  $C^\infty$  en dehors d'un compact et :

$$G_{\widetilde{C}} \widetilde{*} \Theta(\widetilde{X}) = \frac{1}{M} \int_{x > x'} e^{-\frac{p}{M}(\widetilde{x} - \widetilde{x}')} S_x(x') \Theta(\widetilde{x}', \widetilde{y}, \widetilde{z}) dx'. \quad (3.6)$$

En fait, (3.6) est majorée par :

$$\frac{1}{M} \int Y(x - x') e^{-\frac{Re(p)}{M}(x - x') - \frac{1}{M} \int_{x'}^x \sigma(\xi) d\xi} |S_x(x')| |\Theta(\widetilde{x}', \widetilde{y}, \widetilde{z})| dx'.$$

Comme  $\sigma(\xi)$  est croissante et strictement positive, on a  $\int_{x'}^x \sigma(\xi) d\xi > \int_0^{x-x'} \sigma(\xi) d\xi$ , et comme seul le cas  $x > x'$  est à prendre en compte dans l'intégrande de (3.6), on a encore :

$$G_{\tilde{C}} \tilde{*} \Theta(\tilde{x}) < K(x) * S_x(x) \Theta(x, \tilde{y}, \tilde{z}),$$

avec

$$K(x) = Y(x) e^{-\frac{Re(p)}{M}x - \frac{1}{M} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi},$$

où  $Y(x) e^{-\frac{1}{M} \int_0^x \sigma(\xi) d\xi}$  est à décroissance rapide en  $x$ . La stabilité des distributions à décroissance rapide par convolution implique la décroissance rapide (indépendante de  $p$ ) de  $G_{\tilde{C}} \tilde{*} \Theta(\tilde{X})$  qui est de plus  $C^\infty$  à l'extérieur d'un ouvert quelconque autour du support de  $f$ . ■

On est alors en mesure d'énoncer le résultat suivant :

**Théorème 3.1.1** *Pour  $Re(p) \geq 0$ , le système (3.5) admet une solution  $\tilde{\Phi}$ ,  $C^\infty$  en dehors d'un compact de  $\mathbb{R}^3$ , et à décroissance rapide.*

*Si le second membre de (3.5) est à support dans  $\Pi$ , on a :*

$$\tilde{\Phi}|_{\Pi} = \Phi|_{\Pi},$$

où  $\Phi$  est la solution de (3.2) (obtenue par absorption limite quand  $Re(p) = 0$ ).

On a :

$$\tilde{\Phi} = [\widetilde{Cof}] (\mathbb{I}_4 G_{\tilde{C}} \tilde{*} G_{\widetilde{OC}} \tilde{*} F), \quad (3.7)$$

où  $[\widetilde{Cof}]$  est obtenu en remplaçant  $\partial_u$  par  $\partial_{\tilde{u}}$  dans  $[Cof]$ .

**Preuve.** En effet,

$$(p\mathbb{I}_4 + \tilde{\mathcal{A}}) [\widetilde{Cof}] = \mathbb{I}_4 \widetilde{OC} \circ \tilde{C},$$

et il suffit d'appliquer ligne à ligne les propositions précédentes, et on a par construction  $\tilde{\Phi}|_{\Pi} = \Phi|_{\Pi}$ . ■

**Remarques 3.1.3** 1. Nous n'avons pas prouvé l'unicité de la solution de (3.5), ni que ce problème est bien posé au sens de la continuité par rapport aux données.

2. De plus, (3.5) doit être pratiquement posé sur un borné (avec des conditions aux limites adéquates ...) et son "relèvement" en temps doit être effectué.

3. Si  $M = 0$ , les questions soulevées par les deux précédentes remarques reçoivent une réponse à travers un changement d'inconnues conduisant à une formulation dispersive ([24], [48], [58]). On peut se ramener au cas  $M = 0$  en effectuant sur (3.1) le changement de variable espace-temps  $x' = x + Mt$ , mais les problèmes "harmoniques" associés n'ont pas une relation claire avec (3.2). Cette technique a été utilisée par [58], et nous comparerons plus loin les solutions obtenues avec celles obtenues par un relèvement direct de (3.5).

4. L'"opération"  $\tilde{*}$  peut être interprétée comme une convolution de courants sur  $\mathbb{M}$ , et on pourrait espérer obtenir l'unicité en étendant la structure algébrique de la proposition 3.1.1 à ces convolutions pour déduire l'unicité de l'existence.

## 3.2 Etude du caractère bien posé du problème temporel

### 3.2.1 Un premier modèle PML

Nous présentons dans ce paragraphe la formulation "PML" dispersive développée notamment dans les travaux de ([24], [58]).

► **Cas sans convection** L'étude menée dans le paragraphe précédent (cas sans convection) conduit à un nouveau problème harmonique dont la restriction de la solution à  $\Omega$  est également solution du problème harmonique initial. Ce nouveau problème, que nous considérerons maintenant dans le cas d'un domaine spatial à 2 dimensions :

$$i\omega\tilde{\varphi} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial_x}{S_x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial_y}{S_y} \\ \frac{\partial_x}{S_x} & \frac{\partial_y}{S_y} & 0 \end{pmatrix} \tilde{\varphi} = \mathbf{f}, \quad (3.8)$$

nécessite d'être formulé différemment afin d'établir le caractère bien posé du problème temporel qui lui est associé.

On note tout d'abord que (3.8) se met sous la forme :

$$(i\omega I_3 + \frac{1}{S_x} A^1 \partial_x + \frac{1}{S_y} A^2 \partial_y) \tilde{\varphi} = \mathbf{f}, \quad (3.9)$$

avec  $A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

On peut alors se ramener à l'opérateur spatial initial défini par  $A^1 \partial_x + A^2 \partial_y$  par le théorème suivant ([58]) :

**Théorème 3.2.1** *Il existe deux opérateurs inversibles  $M$  et  $N$ , tels que :*

$$\frac{1}{S_x} A^1 \partial_x + \frac{1}{S_y} A^2 \partial_y = M(A^1 \partial_x + A^2 \partial_y)N,$$

et qui de plus vérifient :

$$A^1 \partial_x M + A^2 \partial_y N = 0$$

et

$$\lim_{\sigma_x, \sigma_y \rightarrow 0} N = I_3.$$

Le couple d'opérateurs  $(M, N)$  n'étant pas unique, on choisit  $M$  et  $N$  diagonaux :

$$M = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} \frac{1}{S_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{S_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{S_y S_x} \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème précédent, l'équation (3.9) s'écrit donc :

$$i\omega\tilde{\varphi} + M(A^1 \partial_x + A^2 \partial_y)N\tilde{\varphi} = \mathbf{f},$$

qui, en posant  $\tilde{\tilde{\varphi}} = N\tilde{\varphi}$ , et en multipliant l'égalité par  $M^{-1}$ , devient :

$$i\omega M^{-1}N^{-1}\tilde{\tilde{\varphi}} + (A^1 \partial_x + A^2 \partial_y)\tilde{\tilde{\varphi}} = M^{-1}\mathbf{f}. \quad (3.10)$$

**Remarques 3.2.1** Sur  $\Omega$ , on a  $S_x = S_y = 1$  et donc  $M^{-1} = I_3$ . De plus,  $\mathbf{f}$  est à support compact dans  $\Omega$ . Par conséquent, on pourra mettre indifféremment  $\mathbf{f}$  ou  $M^{-1}\mathbf{f}$  comme second membre de l'équation.

On décompose alors  $i\omega M^{-1}N^{-1}$  de la manière suivante :

$$i\omega M^{-1}N^{-1} = i\omega I_3 + C + RU_\omega,$$

avec

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y - \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x + \sigma_y \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sigma_y(\sigma_y - \sigma_x) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x(\sigma_x - \sigma_y) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x\sigma_y \end{pmatrix}$$

$$\text{et } U_\omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{i\omega + \sigma_y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{i\omega + \sigma_x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{i\omega} \end{pmatrix}.$$

Le système (3.10) s'écrit alors :

$$i\omega \tilde{\varphi} + C\tilde{\varphi} + RU_\omega \tilde{\varphi} + (A^1 \partial_x + A^2 \partial_y) \tilde{\varphi} = \mathbf{f},$$

ce qui, après transformation de Fourier inverse (en temps), donne :

$$\partial_t \tilde{\varphi} + C\tilde{\varphi} + RK *_t \tilde{\varphi} + (A^1 \partial_x + A^2 \partial_y) \tilde{\varphi} = f,$$

$$\text{avec } K = \mathcal{F}_t^{-1}(U_\omega) = \begin{pmatrix} e^{-\sigma_y t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\sigma_x t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En posant  $T = K *_t \tilde{\varphi}$ , on obtient alors :

$$\partial_t \tilde{\varphi} + C\tilde{\varphi} + RT + (A^1 \partial_x + A^2 \partial_y) \tilde{\varphi} = f.$$

De plus, après transformation de Fourier (en temps) de l'égalité  $T = K *_t \tilde{\varphi}$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= U_\omega \tilde{\varphi} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} i\omega + \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & i\omega + \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & i\omega \end{pmatrix} \mathbf{T} &= \tilde{\varphi} \\ \Leftrightarrow i\omega \mathbf{T} + \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{T} &= \tilde{\varphi}, \end{aligned}$$

ce qui, en revenant au domaine temporel, amène à l'équation en  $T$  :

$$\partial_t T + \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T = \tilde{\varphi}.$$

On aboutit finalement au système couplé suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\varphi} + A^i \partial_i \tilde{\varphi} + C \tilde{\varphi} + RT = f \\ \partial_t T + DT = \tilde{\varphi}, \end{cases} \quad (3.11)$$

où  $D = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , qui peut également se mettre sous la forme d'un système de Friedrichs :

$$\partial_t \Phi + \begin{pmatrix} C & R \\ -I_3 & D \end{pmatrix} \Phi + \begin{pmatrix} A^1 \partial_x + A^2 \partial_y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec  $\Phi = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ T \end{pmatrix}$ .

Le problème temporel étant mis sous cette forme, on a alors le théorème d'existence suivant ([58]) :

**Théorème 3.2.2** *Le modèle (3.11) est un modèle PML pour les équations d'Euler linéarisées. De plus, le problème de Cauchy associé à ce modèle est fortement bien posé, la solution étant de même régularité que les données.*

► **Cas avec convection** On s'intéresse désormais au cas où  $U_0 \neq 0$ , cas dans lequel le problème temporel que l'on considère est le suivant :

$$\partial_t \tilde{\varphi} + A^1 \partial_x \tilde{\varphi} + A^2 \partial_y \tilde{\varphi} = f, \quad (3.12)$$

avec  $A^1 = U_0^1 I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A^2 = U_0^2 I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Le théorème 3.2.1 n'étant alors plus valable, on ne peut pas appliquer ici la même démarche que précédemment. Cependant, en effectuant le changement de variables :

$$\begin{cases} \eta(t) = x + U_0^1 t \\ \xi(t) = y + U_0^2 t, \end{cases}$$

et en posant  $\tilde{\varphi}_\chi = \tilde{\varphi}(\vec{\chi}, t)$ , avec  $\vec{\chi} = (\eta, \xi)$  et  $\tilde{\varphi}$  solution de (3.12), on montre que  $\tilde{\varphi}_\chi$  vérifie l'équation :

$$\partial_t \tilde{\varphi}_\chi + A^1 \partial_x \tilde{\varphi}_\chi + A^2 \partial_y \tilde{\varphi}_\chi = f.$$

Ce problème ressemble de par sa structure aux équations considérées précédemment. Cependant, celui-ci fait intervenir des dérivées en  $\partial_x$  et  $\partial_y$  alors que les fonctions sont en  $(\eta, \xi)$ . Il n'y a donc a priori aucune raison pour que le modèle PML précédent puisse s'appliquer ici. De plus, les trois variables de  $\varphi_\chi$  dépendent du temps, et une transformation de Laplace en temps d'une telle fonction, point de départ de la démarche utilisée pour établir la décroissance du noyau de Green, ne permet pas d'utiliser les résultats obtenus précédemment. Dans la thèse [58], le système (3.11) a tout de même été utilisé tel quel sur  $\varphi_\chi$ ; ceci suppose qu'une transformation de Laplace "partielle en temps" (par rapport à la troisième variable en fait) et non une transformation de Laplace totale en temps a été faite. On ne peut donc conclure quant à la décroissance exponentielle que par rapport aux variables  $\eta$  et  $\xi$  (sur  $\varphi_\chi$ ) qui dépendent du temps, et l'on n'a pas de moyen d'établir un lien entre la solution recherchée  $\varphi$  et  $\varphi_\chi$ , c'est-à-dire entre faire une transformation de Laplace en temps ou partielle en temps. On ne peut donc pas, pour le moment du moins, justifier l'utilisation de ce modèle PML pour un écoulement porteur convecté et, bien que certaines simulations semblent concluantes, on verra lors des résultats numériques que d'autres mettent en évidence certains problèmes.

### 3.2.2 Un second modèle PML : les CPML

Avec le modèle PML précédent, on a vu que le cas d'un écoulement porteur avec convection posait problème autant du point de vue théorique que numérique. On se propose donc maintenant d'utiliser un autre modèle PML : les CPML, dont la pertinence quant au cas avec convection est parfaitement justifiée contrairement au premier modèle, sous hypothèse toutefois du caractère bien posé du problème CPML au sens de la continuité par rapport aux données, résultat qui n'a toujours pas été démontré.

L'étude menée précédemment nous amène à considérer l'équation :

$$\partial_t \tilde{\varphi} + A^1 \partial_{\tilde{x}} \tilde{\varphi} + A^2 \partial_{\tilde{y}} \tilde{\varphi} + B \tilde{\varphi} = f, \quad (3.13)$$

avec  $\partial_{\tilde{x}} = \left( \frac{\partial_t}{\partial_t + \sigma_x} \right) \partial_x$  et  $\partial_{\tilde{y}} = \left( \frac{\partial_t}{\partial_t + \sigma_y} \right) \partial_y$ . Or, on montre que :

$$\frac{\partial_t}{\partial_t + \sigma} = (\delta - \sigma e^{-\sigma t}) *_t.$$

Par conséquent, (3.13) s'écrit également :

$$\partial_t \tilde{\varphi} + A^1 \partial_x \tilde{\varphi} + A^2 \partial_y \tilde{\varphi} + B \tilde{\varphi} - \sigma_x A^1 e^{-\sigma_x t} *_t \partial_x \tilde{\varphi} - \sigma_y A^2 e^{-\sigma_y t} *_t \partial_y \tilde{\varphi} = f.$$

En posant

$$\begin{cases} S = A^1 e^{-\sigma_x t} *_t \partial_x \tilde{\varphi} \\ T = A^2 e^{-\sigma_y t} *_t \partial_y \tilde{\varphi}, \end{cases}$$

et en procédant de la même manière que pour le modèle précédent, on aboutit au système couplé suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\varphi} + A^1 \partial_x \tilde{\varphi} + A^2 \partial_y \tilde{\varphi} + B \tilde{\varphi} - \sigma_x S - \sigma_y T = f \\ \partial_t S + \sigma_x S = A^1 \partial_x \tilde{\varphi} \\ \partial_t T + \sigma_y T = A^2 \partial_y \tilde{\varphi}, \end{cases}$$

qui peut également s'écrire :

$$\partial_t \Psi + \begin{pmatrix} A^1 \partial_x + A^2 \partial_y + B & -\sigma_x & -\sigma_y \\ -A^1 \partial_x & \sigma_x & 0 \\ -A^2 \partial_y & 0 & \sigma_y \end{pmatrix} \Psi = \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

avec  $\Psi = (\tilde{\varphi}, S, T)^T$ .

On a donc un système permettant une décroissance exponentielle de la solution valable autant pour le cas sans convection qu'avec convection, contrairement au premier modèle qui ne se justifiait que pour des problèmes d'acoustique pure.

Concernant l'étude du caractère bien posé de ce système, on distingue deux cas :

► Cas sans convection  $U_0 = 0$  : (3.14) est un système de Friedrichs et l'on peut montrer qu'il est par conséquent bien posé.

► Cas avec convection  $U_0 \neq 0$  : (3.14) n'est pas un système de Friedrichs puisque les matrices ne sont pas symétriques. Il est donc plus difficile de savoir si le problème est bien posé.

On sait qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de la forme :

$$\begin{cases} \partial_t u + C^j \partial_j u + Du = g \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

soit bien posé est donnée par le critère de Hadamard-Petrowsky suivant :

$$|Re(\lambda(\xi))| \text{ majorée } \forall \xi,$$

où  $\lambda(\xi)$  valeur propre de l'opérateur  $iC^j\xi_j + D$  et  $\xi_j$  variables duales des  $x_j$ .

Cette condition n'a, dans le cadre des CPML avec convection, toujours pas été vérifiée. Cependant, une condition nécessaire à la forte hyperbolicité du problème (donc à son caractère bien posé  $\forall D$ ) est que  $C^j\xi_j$  soit diagonalisable et à valeurs propres réelles. Cette condition a quant à elle été vérifiée; il n'est donc pas possible pour le moment de conclure quant au caractère bien posé du problème au sens de la continuité par rapport aux données, mais non plus quant à son caractère mal posé. Les simulations sont quant à elles très bonnes et n'ont pour le moment pas été mises en défaut.

### 3.3 Approximation des modèles PML

#### 3.3.1 Schéma d'approximation pour le premier modèle PML

Le système (3.11) étant bien posé, on en cherche maintenant une approximation. Contrairement au cas de conditions aux limites absorbantes, il nous faut ici considérer un couple d'équations, chacune étant approchée par un schéma numérique convergent et stable. Cependant, la stabilité de chacun des deux schémas ne permet pas de conclure quant à celle de leur couplage. C'est pourquoi on préférera utiliser, lorsque cela n'est pas trop contraignant, la formulation implicite des schémas, beaucoup plus stable que l'explicite.

La première équation de (3.11) étant, de par sa structure, similaire à l'équation principale du système (1.22) dont on a approché la solution précédemment, elle sera discrétisée de la même manière par une méthode aux volumes finis. On aura finalement dans le cas sans convection, le schéma suivant :

$$\forall e = 1..N, \forall k,$$

$$\begin{aligned} \varphi_e^k &= \varphi_e^{k-1} - \Delta t(C_e\varphi_e^{k-1} - f_e^{k-1} + R_eT_e^k) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y} [(-A_b^2)^-(\varphi_{b,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1}) + (A_h^2)^-(\varphi_{h,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1})] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(A_d^1)^-(\varphi_{d,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1}) + (-A_g^1)^-(\varphi_{g,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1})] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} \text{mes}(\partial\Omega \cap \partial\omega_e) (M_e\varphi_e^{k-1} - f_e^{k-1}) \end{aligned}$$

**Remarques 3.3.1** Par souci de lisibilité, on note  $\varphi_e^k$ , au lieu de  $\tilde{\varphi}_e^k$ , la valeur de  $\tilde{\varphi}$  sur  $q_e^k$ .

**Remarques 3.3.2** Le schéma donné ici est complètement explicite. Cependant, on peut passer le terme  $C_e\varphi_e^{k-1}$  en implicite, le schéma d'approximation étant alors de la forme :

$$\begin{aligned} \forall e = 1..N, \forall k, \\ \varphi_e^k &= (I_3 + \Delta t C_e)^{-1} (\varphi_e^{k-1} - \Delta t (R_e T_e^k - f_e^{k-1})) - \frac{\Delta t}{\Delta y} [\dots] - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\dots] - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} (\dots). \end{aligned}$$

Pour approcher la seconde équation, qui est une équation différentielle temporelle en  $T$ , on utilisera une méthode d'Euler implicite. A chaque pas de temps, on calculera ainsi  $T_e^k$  grâce au schéma suivant :

$$\begin{aligned} \forall e = 1..N, \forall k, \\ T_e^k = (I_3 + \Delta t D_e)^{-1} (T_e^{k-1} + \Delta t \varphi_e^{k-1}). \end{aligned}$$

On obtient donc le schéma numérique couplé suivant :

$$\forall e = 1..N, \forall k,$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright T_e^k &= (I_3 + \Delta t D_e)^{-1} (T_e^{k-1} + \Delta t \varphi_e^{k-1}) \\ \blacktriangleright \varphi_e^k &= \varphi_e^{k-1} - \Delta t (C_e \varphi_e^{k-1} - f_e^{k-1} + R_e T_e^k) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[ (-A_b^2)^- (\varphi_{b,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1}) + (A_h^2)^- (\varphi_{h,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1}) \right] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (A_d^1)^- (\varphi_{d,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1}) + (-A_g^1)^- (\varphi_{g,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1}) \right] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} \text{mes}(\partial\Omega \cap \partial\omega_e) \left( M_e \varphi_e^{k-1} - f_e^{k-1} \right). \end{aligned}$$

**Remarques 3.3.3** Dans le cas d'une simulation de propagation de perturbations aéroacoustiques dans un cylindre infini, il faut se ramener au cas 1D. Dans ce cas là, on a  $\sigma_y = 0$ , et donc

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Seule la seconde composante } T_2 \text{ de } T \text{ nous intéresse alors ; } D \text{ étant diagonale,}$$

il suffit de considérer l'équation scalaire en  $T_2$ .

### 3.3.2 Schéma d'approximation pour les CPML

On procède de la même manière pour discrétiser le système (3.14). On aboutit alors au schéma d'approximation :

$$\forall e = 1..N, \forall k,$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright S_e^k &= -\Delta t \sigma_{x,e} S_e^{k-1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (A_d^1)^- (\varphi_{d,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1}) + (-A_g^1)^- (\varphi_{g,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1}) \right] + S_e^{k-1} \\ \blacktriangleright T_e^k &= -\Delta t \sigma_{y,e} T_e^{k-1} + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[ (-A_b^2)^- (\varphi_{b,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1}) + (A_h^2)^- (\varphi_{h,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1}) \right] + T_e^{k-1} \\ \blacktriangleright \varphi_e^k &= \varphi_e^{k-1} - \Delta t (B_e \varphi_e^{k-1} - f_e^{k-1} - \sigma_{x,e} S_e^k - \sigma_{y,e} T_e^k) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[ (-A_b^2)^- (\varphi_{b,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1}) + (A_h^2)^- (\varphi_{h,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1}) \right] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (A_d^1)^- (\varphi_{d,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1}) + (-A_g^1)^- (\varphi_{g,e}^{k-1} - \varphi_e^{k-1}) \right] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y} \text{mes}(\partial\Omega \cap \partial\omega_e) \left( M_e \varphi_e^{k-1} - f_e^{k-1} \right). \end{aligned}$$

Ici encore, le cas du guide d'ondes se traite en considérant  $\sigma_y = 0$ , la variable  $T$  n'intervenant alors plus dans les calculs.



## 3.4 Validation numérique du modèle CPML pour l'aéroacoustique

On donne dans ce paragraphe un ensemble de résultats numériques obtenus avec les différents types de PML, le premier modèle PML comparé avec le modèle CPML.

### 3.4.1 Couches PML suivant la direction $x$ , résolution volumes finis dans le domaine

Le domaine est rectangulaire, de dimension 3 longueurs d'ondes en longueur et 1 longueur d'onde en largeur. La célérité du milieu  $c_0$  est adimensionnée à 1. Pour toutes les simulations, on a pris 15 couches de PML (c'est-à-dire l'équivalent de 15 éléments de maillage). Les profils de la variable  $u$  ne seront pas représentés, car ils sont de même nature que ceux de la variable  $\rho$ .

Dans un premier temps, le domaine  $\Omega$  est maillé avec un maillage cartésien, et la méthode d'approximation de résolution du problème (1.22) est une méthode volumes finis en espace et Euler explicite en temps. La source de perturbation est une pyramide en espace, tensoriel un sinus de fréquence 1 Hz en temps. La résolution des variables est dans un premier temps à valeurs réelles.

La figure 3.2 montre le résultat de la simulation avec le premier modèle PML, dans le cas d'un écoulement porteur sans convection (acoustique pure), et les parois verticales gauche-droite sont traitées par une condition de glissement ( $\beta = 1$ ). Lorsque des ondes sortantes atteignent un des bords horizontaux (en  $x$ ), la couche PML est visible sous forme d'une étroite bande dans laquelle "l'extinction" exponentielle est matérialisée par une couleur uniforme, correspondant à des valeurs proches de 0. Dans tous les cas, l'absence de réflexion confirme numériquement la validité de l'approche. Les profils de  $u$  et  $v$  sont eux aussi corrects et ne présentent pas d'anomalies. Les résultats avec CPML ne sont pas représentés car similaires.

La figure 3.3 représente un tracé de  $\rho$  sur l'axe du guide d'ondes dans la couche PML à 6 temps proches succédant l'arrivée du front d'onde. La décroissance exponentielle  $y$  est clairement visible.

Les figures (3.4, 3.5) représentent l'évolution de  $\rho$  et  $v$  dans le cas d'une convection constante avec le premier modèle PML. On constate que même si le profil de  $\rho$  semble correct, le profil de  $v$  est quant à lui plus "douteux" : la décroissance exponentielle dans la couche PML est beaucoup moins claire et l'on constate même dans la couche l'apparition de perturbations. Nos méfiances à l'égard de la validité du premier modèle PML s'illustrent sur ces résultats numériques (à savoir que le premier modèle PML n'a aucune justification théorique dans le cadre d'un écoulement porteur avec convection). Les conclusions sont analogues pour un écoulement cisailé.

Ces mêmes simulations effectuées avec l'implémentation du modèle CPML (figures 3.6 et 3.7) sont en revanche très satisfaisantes et ne présentent pas les problèmes décelés avec le premier modèle de PML : la couche PML  $y$  est nettement visible et les perturbations sont rapidement atténuées comme le nécessite la théorie (les résultats sont également satisfaisants pour un écoulement porteur cisailé).

### 3.4.2 Couches PML suivant les directions $x, y$ , résolution volumes finis dans le domaine

Ces remarques restent valables lorsque l'on considère des PML bidimensionnelles. Toutes les simulations 2D sont faites sur un carré de côté 1 longueur d'ondes entouré d'une couche de PML de 15 éléments, la source étant de fréquence 2 Hz. On peut voir sur les figures (3.8, 3.9), les profils de  $\rho$  et  $v$  pour un écoulement porteur sans convection avec le premier modèle de PML. Ici encore,

les simulations sont bonnes et ne présentent pas d'anomalies. Remarquons que l'on peut voir sur le profil de  $v$  de petites illuminations dans la couche PML : c'est un phénomène d'instabilités bien connu qui n'a aucune influence sur la solution dans le domaine, puisque les instabilités sont de type croissance polynômiale alors que la décroissance de la solution est exponentielle dans la couche PML. Ce phénomène était déjà visible sur le profil de  $v$  en configuration PML monodimensionnelle. Les mêmes simulations avec le modèle CPML, figures (3.10, 3.11) donnent des résultats sensiblement plus satisfaisants : le phénomène d'illumination sur  $v$  n'est pas visible (il en est de même en PML monodimensionnelle).

Les figures (3.12, 3.13) représentent les résultats obtenus d'une simulation pour un écoulement porteur à convection constante, avec le premier modèle PML. On constate, comme pour les simulations PML monodimensionnelles, d'importants "défauts" en  $v$  dans la couche PML de droite (dans le sens de la convection en fait), corrigés sur les figures (3.14, 3.15), qui représentent la même simulation avec le modèle CPML.

Les figures (3.16, 3.17, 3.18, 3.19) illustrent respectivement, pour une source générant du rotationnel (une source pyramidale en  $u$  cette fois), l'évolution de  $u$  et  $v$  avec le premier modèle PML et avec le modèle CPML. On voit encore que les simulations avec CPML sont nettement plus satisfaisantes que celles obtenues avec le premier modèle PML.

**Remarque 3.4.1** *Aussi bien pour les tests numériques monodimensionnels que bidimensionnels, La solution dans le domaine ne semble pas trop influencée par les problèmes rencontrés dans les zones PML implémentées avec le premier modèle. Ceci est certainement dû au fait que, à l'intérieur des zones PML, les conditions aux limites non réfléchissantes d'ordre 1 sont implémentées sur les frontières. Par conséquent, la majorité des perturbations numériques causées par ce modèle est absorbée par ce type de conditions aux limites. Pour quantifier une influence de ces défauts sur la solution dans le domaine, il faudrait que la condition aux limites soit moins tolérante afin que l'efficacité des PML soit plus déterminante.*

### 3.4.3 Couches PML bidimensionnelles, résolution Galerkin discontinue P1 dans le domaine

Outre la comparaison entre les deux modèles de PML, il est nécessaire de montrer que les couches PML sont plus précises que les conditions aux limites non réfléchissantes écrites à l'ordre 1 pour simuler les propagations aéroacoustiques en espace libre. On choisit pour cela d'implémenter une interface de résolution entre une méthode d'approximation type Galerkin discontinue P1 en espace et Runge-Kutta en temps dans le domaine  $\Omega$  et une méthode d'approximation type volumes finis en espace et Euler en temps dans les zones PML. Cette approche peut sembler contraignante, car elle nécessite de mailler séparément le domaine  $\Omega$  en triangles destructurés et les zones PML en maillages cartésiens. Cependant, en maillant les frontières sortantes avec deux fois plus d'éléments cartésiens pour les zones PML que pour le domaine  $\Omega$  et en moyennant les "rencontres" en temps tous les deux pas de temps pour compenser les différences de schémas temporels (Runge-Kutta d'ordre 2 pour du schéma Euler explicite), on assure la stabilité de la solution dans la zone PML. Par rapport à l'avancée de notre étude, c'est d'ailleurs la seule configuration théorique qui nous l'assure. Une implémentation globale des couches PML dans le code au travers d'approximations identiques entre les zones PML et le domaine de résolution  $\Omega$  nous ferait perdre, pour le moment, cette propriété.

On utilise donc une nouvelle fois la configuration de canal bidimensionnel (2.4) traité avec des parois supérieures rigides, des sources modales amont (irrotationnelles) en excitation sur la paroi de

droite et l'interaction domaine/PML évoquée sur la paroi de gauche (pour simuler l'espace libre), afin de comparer la solution exacte en espace libre avec d'une part, les résultats de cette simulation, et d'autre part les résultats obtenus en traitant la paroi de gauche par une condition aux limites non réfléchissantes approchées. La figure 3.20 représente les profils obtenus (en parties réelle et imaginaire) établis en un point  $(x_0, y_0)$  proche de la source, au cours d'un temps assez long pour avoir atteint le régime périodique depuis plusieurs périodes, pour une convection uniforme de Mach 0.5 et pour des modes de second ordre. D'une part, les limites de la validité des conditions non réfléchissantes approchées sont nettement visibles (déjà vus), et d'autre part les CPML sont validées de part l'adéquation constante au cours du temps entre les courbes bleues et vertes (obtenues avec les couches PML). Bien entendu, toutes les courbes sont en phases avec la solution exacte pour le mode transverse constant (figure 3.21).

Enfin, sur les figures (3.22, 3.23), on traite un domaine de calcul plus réaliste pour une prise d'air (ou une tuyère). Dans la prise d'air, les parois seront supposées d'épaisseur nulle afin d'avoir un écoulement porteur trivialement calculable. Le domaine de calcul CPML est bien cartésien, le fait que l'on voit un maillage triangulaire est uniquement dû à des exigences de la représentation de la solution dans ce domaine). Le domaine  $\Omega$  est de longueur 4 longueurs d'ondes et 2 longueurs d'onde en largeur. Sur les figures 3.24 est représentée l'évolution de la solution dans le domaine de calcul et dans les zones pml, pour une source de bruit modale constante (mode nul), et pour un écoulement porteur nul. Toutes les propriétés attendues des couches PML (ici 10 couches sont implémentées) sont clairement visibles, et ceci est également le cas pour des écoulements porteurs avec convection, uniforme ou non.

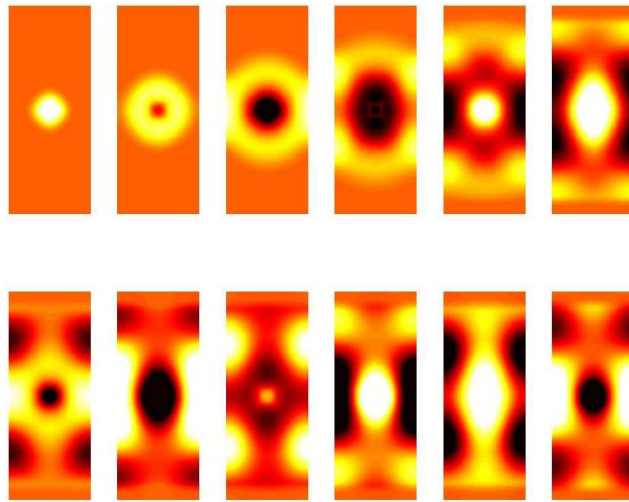


FIG. 3.2 – Profils de  $\rho$  pour un écoulement porteur sans convection avec conditions de glissement sur les bords verticaux et couches PML sur les bords horizontaux.

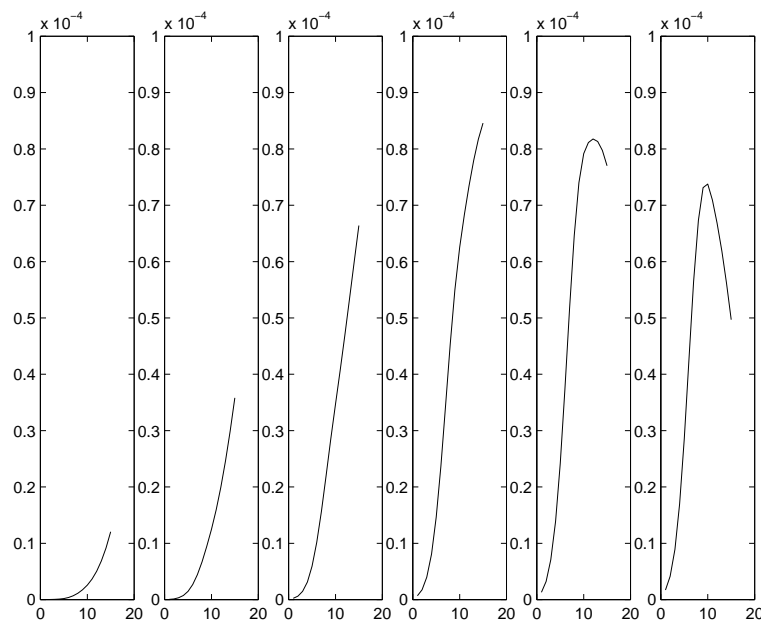


FIG. 3.3 – Décroissance exponentielle de  $\rho$  dans la zone PML.

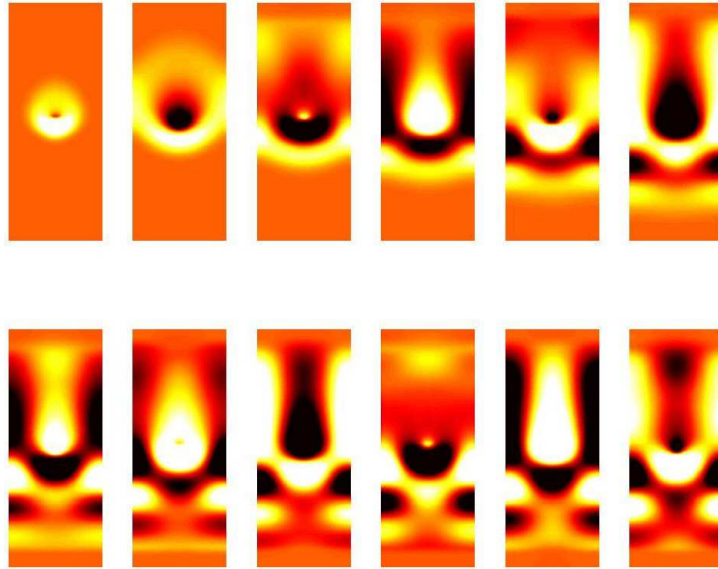


FIG. 3.4 – Profils de  $\rho$  pour un écoulement porteur avec convection constante, conditions de glissement sur les bords verticaux et couches PML sur les bords horizontaux, obtenus avec le premier modèle PML.

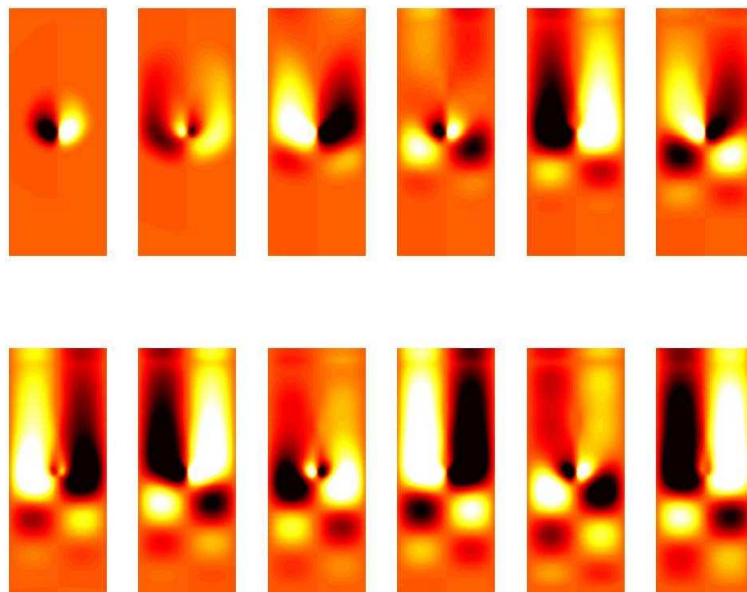


FIG. 3.5 – Profils de  $v$  pour un écoulement porteur avec convection constante, conditions de glissement sur les bords verticaux et couches PML sur les bords horizontaux, obtenus avec le premier modèle PML.

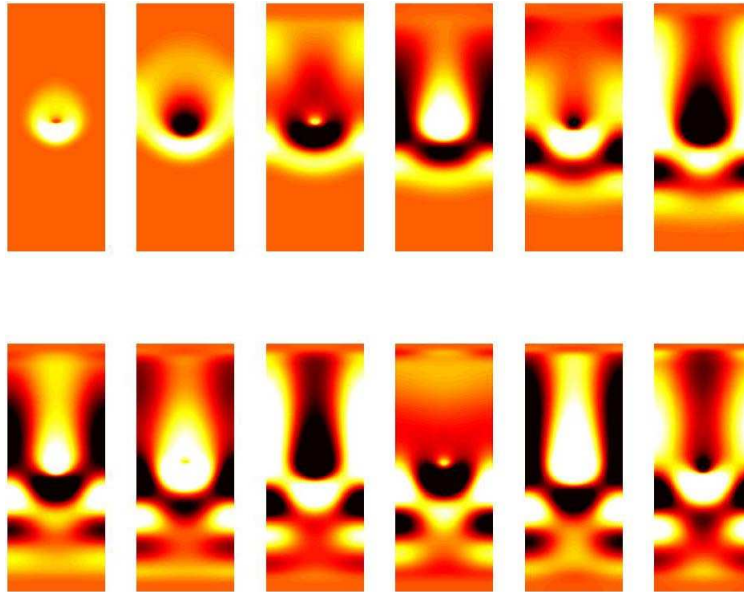


FIG. 3.6 – Profils de  $\rho$  pour un écoulement porteur avec convection constante, conditions de glissement sur les bords verticaux et couches PML sur les bords horizontaux, obtenus avec le modèle CPML.

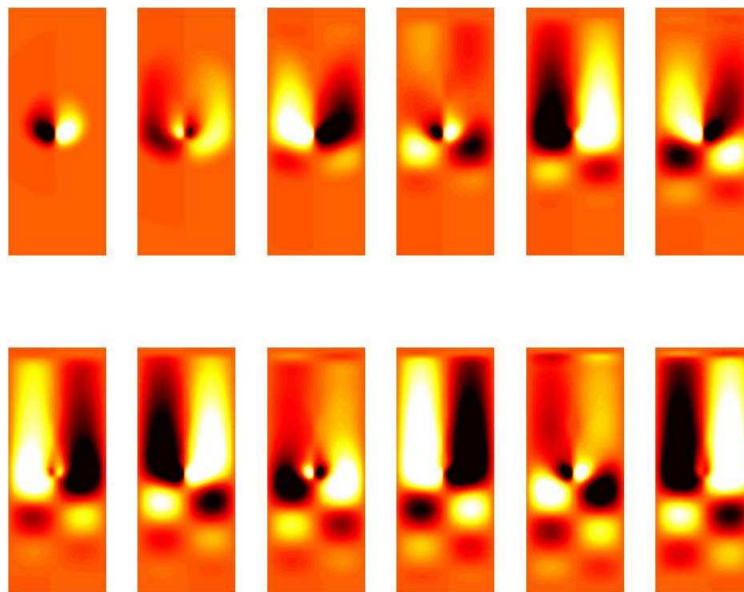


FIG. 3.7 – Profils de  $v$  pour un écoulement porteur avec convection constante, conditions de glissement sur les bords verticaux et couches PML sur les bords horizontaux, obtenus avec le modèle CPML.

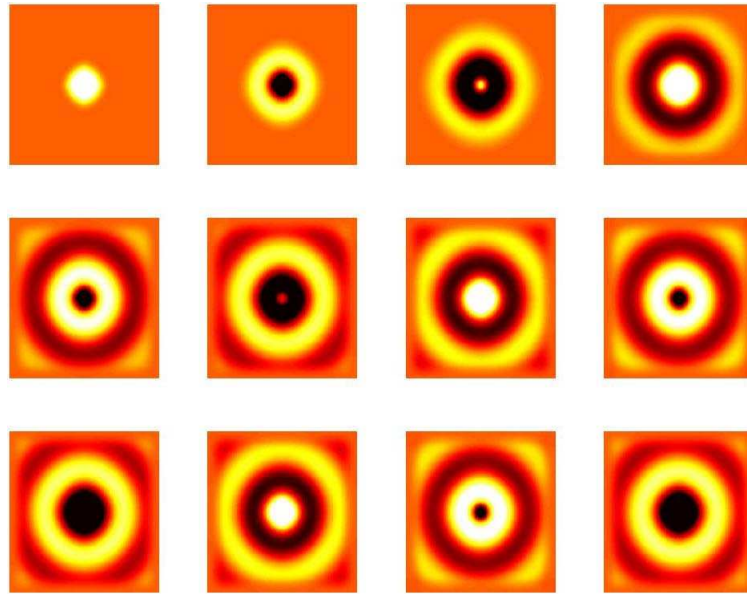


FIG. 3.8 – Profils de  $\rho$  pour un écoulement porteur nul, et couches PML 2D, obtenus avec le premier modèle PML.

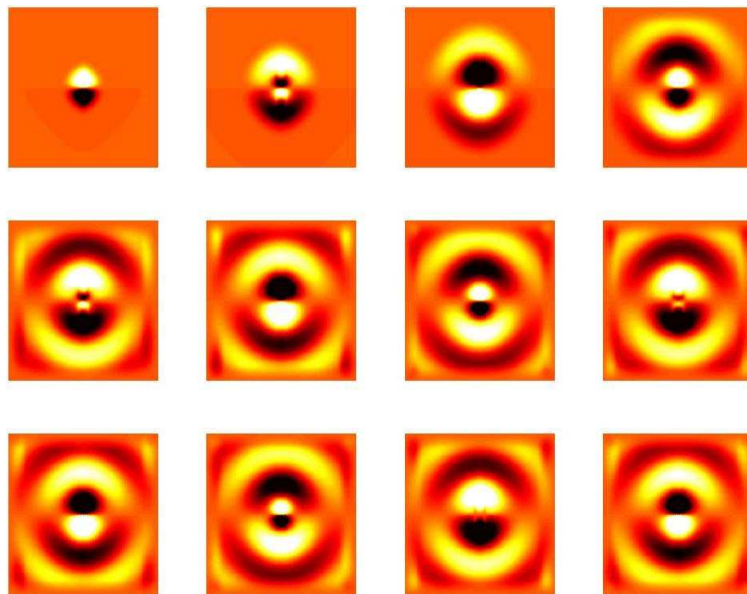


FIG. 3.9 – Profils de  $v$  pour un écoulement porteur nul, et couches PML 2D, obtenus avec le premier modèle PML.

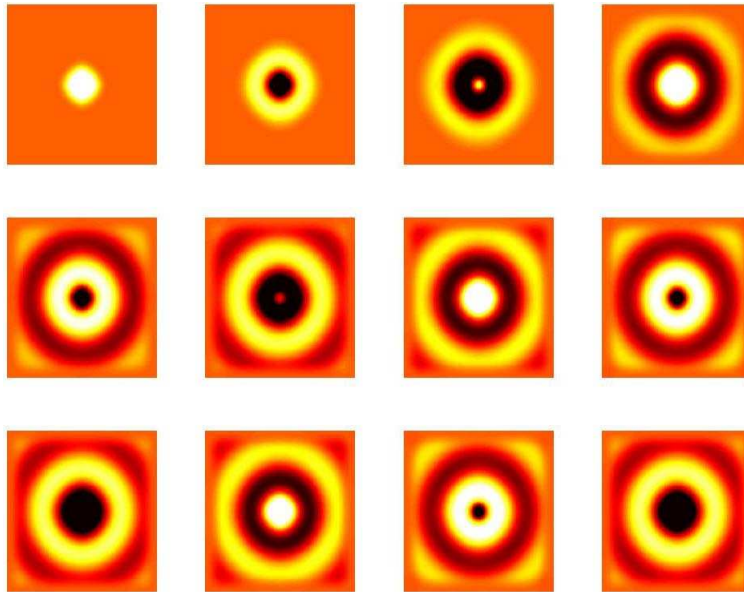


FIG. 3.10 – Profils de  $\rho$  pour un écoulement porteur nul, et couches PML 2D, obtenus avec le modèle CPML.

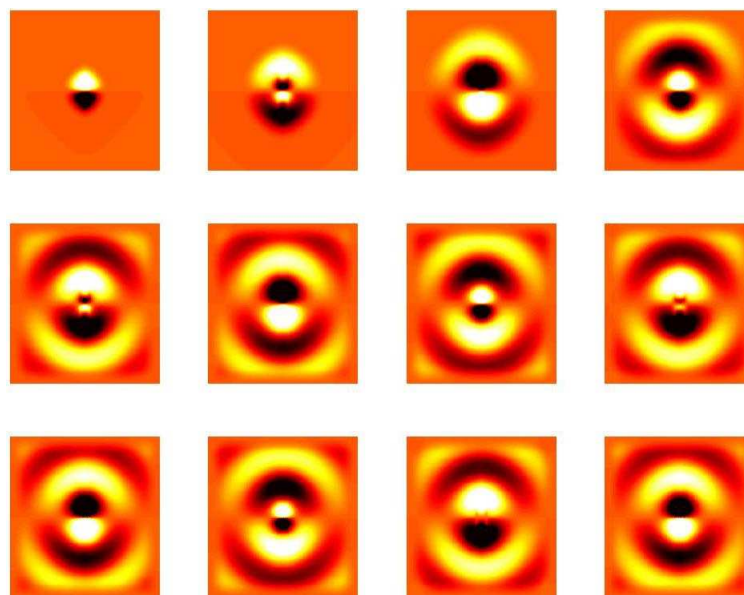


FIG. 3.11 – Profils de  $v$  pour un écoulement porteur nul, et couches PML 2D, obtenus avec le modèle CPML.



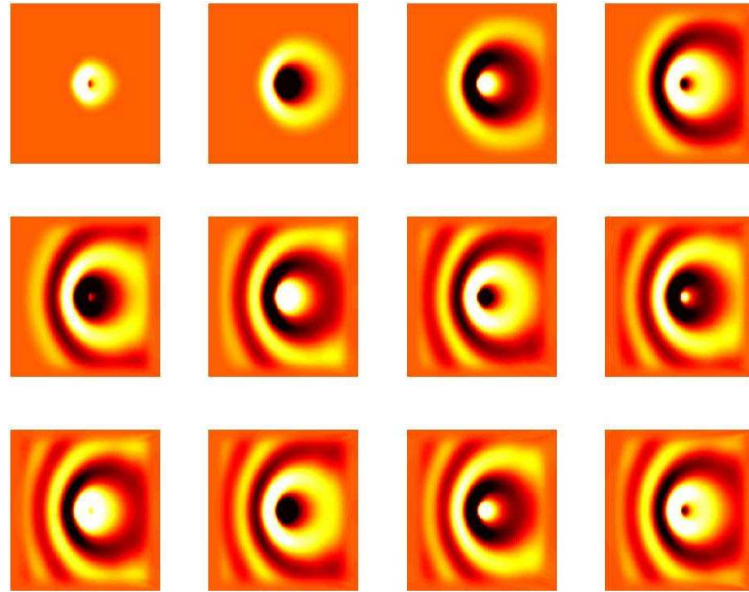


FIG. 3.12 – Profils de  $\rho$  pour un écoulement à convection constante, et couches PML 2D, obtenus avec le premier modèle PML.

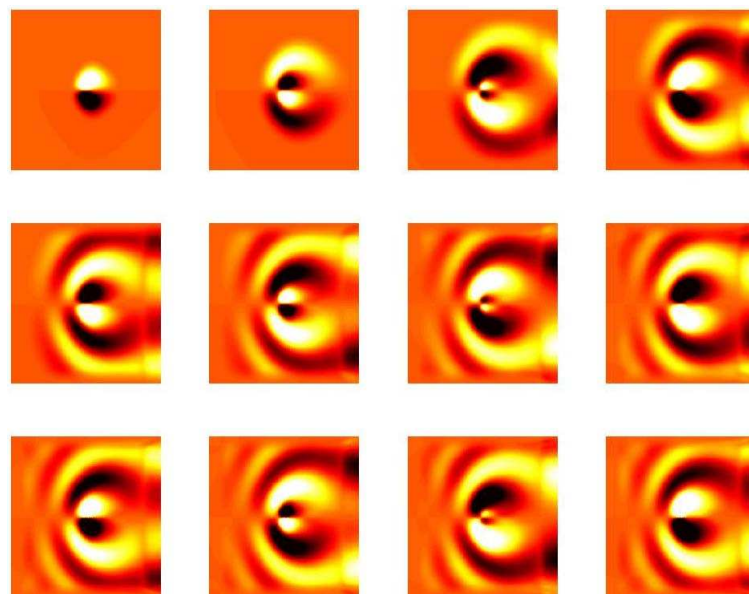


FIG. 3.13 – Profils de  $v$  pour un écoulement à convection constante, et couches PML 2D, obtenus avec le premier modèle PML.

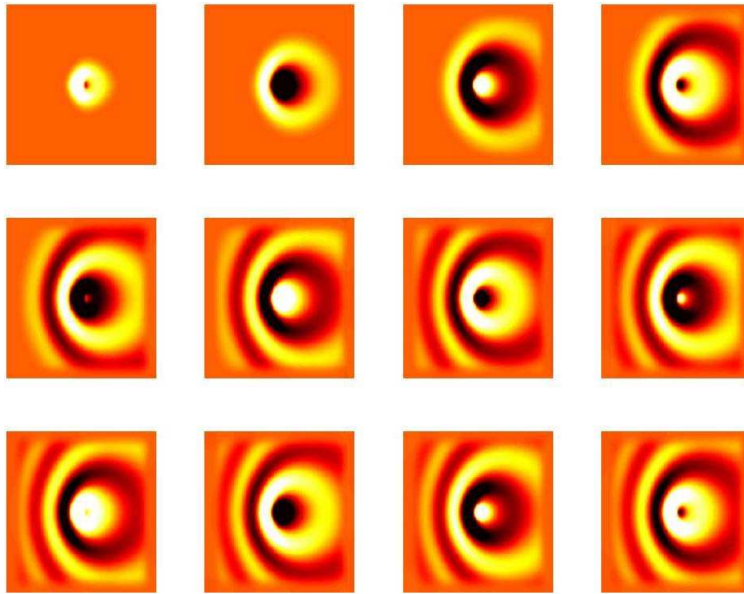


FIG. 3.14 – Profils de  $\rho$  pour un écoulement à convection constante, et couches PML 2D, obtenus avec le modèle CPML.

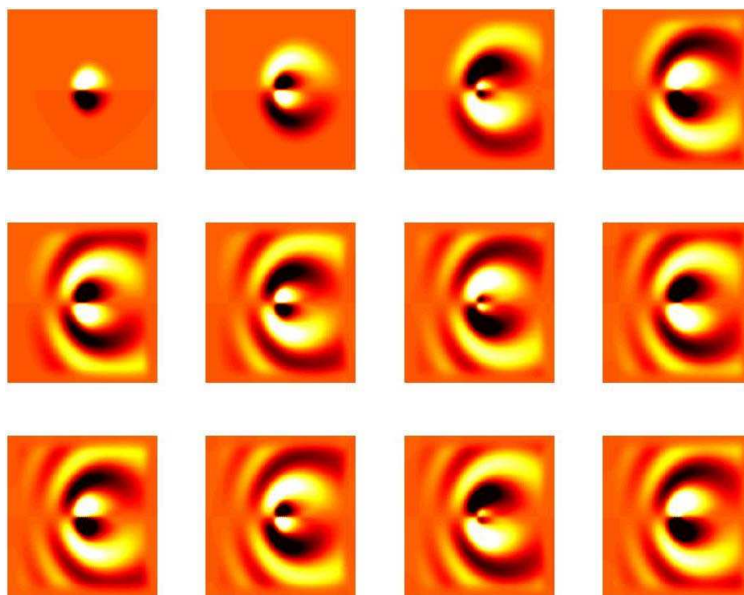


FIG. 3.15 – Profils de  $v$  pour un écoulement à convection constante, et couches PML 2D, obtenus avec le modèle CPML.

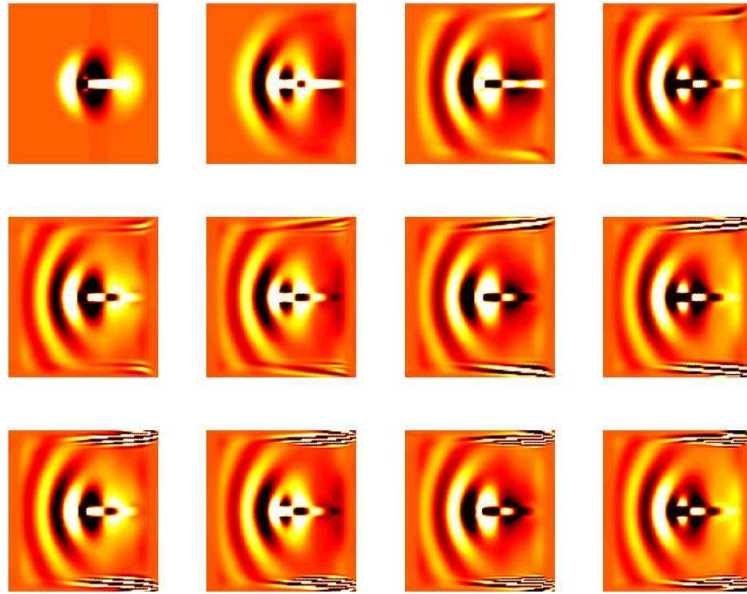


FIG. 3.16 – Profils de  $u$  pour un écoulement à convection constante perturbé par une source rotationnelle, pour des couches PML 2D.

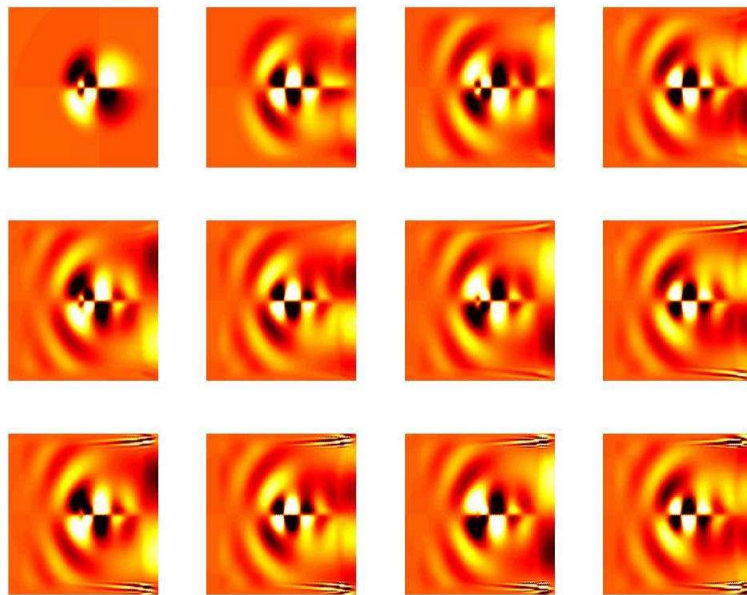


FIG. 3.17 – Profils de  $v$  pour un écoulement à convection constante perturbé par une source rotationnelle, pour des couches PML 2D.

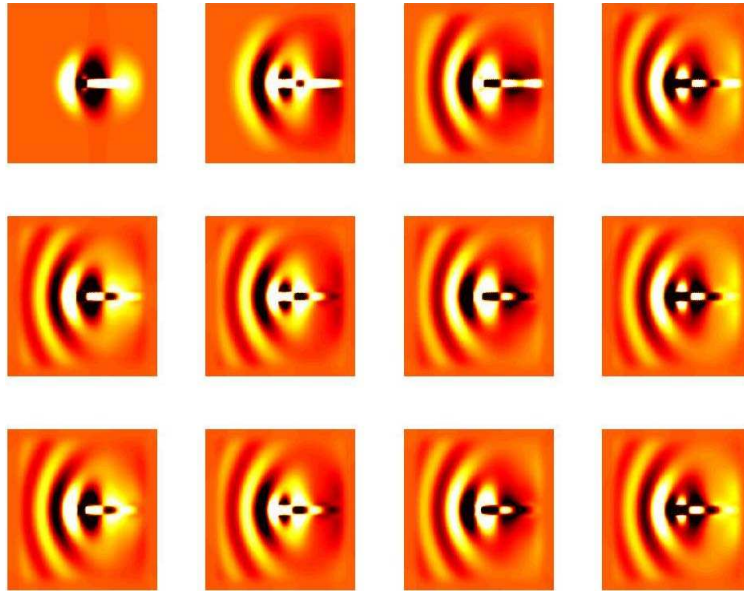


FIG. 3.18 – Profils de  $u$  pour un écoulement à convection constante perturbé par une source rotationnelle, pour des couches CPML 2D.

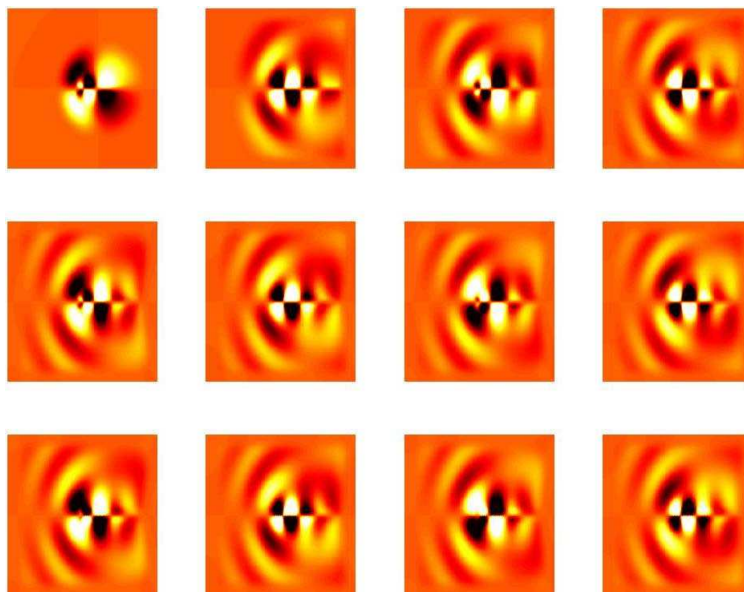
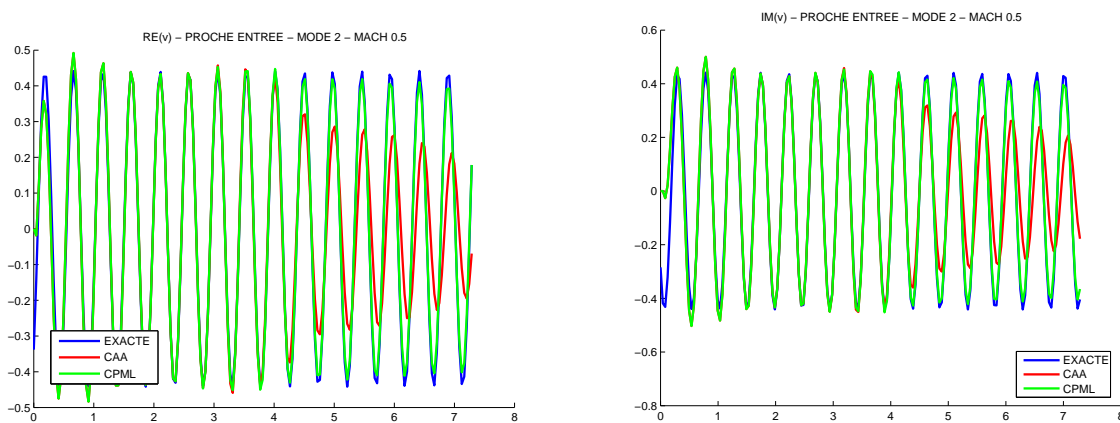


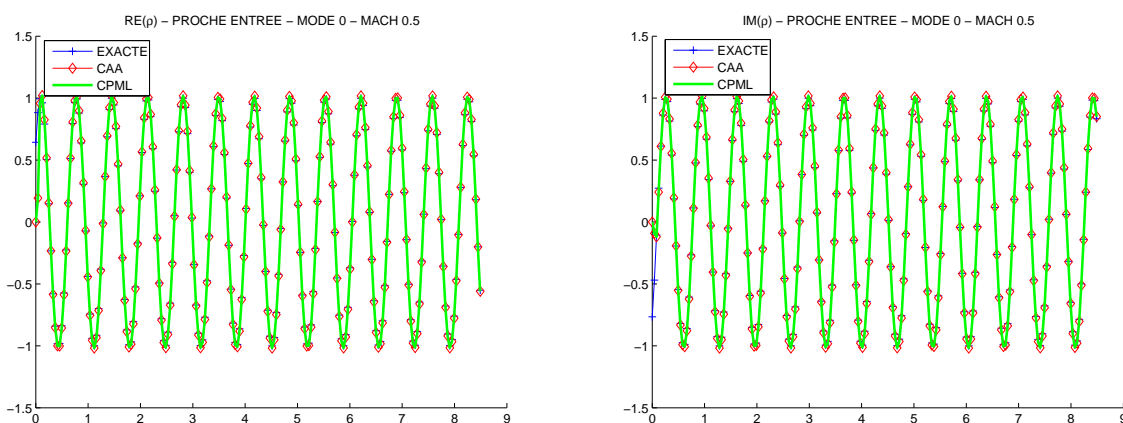
FIG. 3.19 – Profils de  $v$  pour un écoulement à convection constante perturbé par une source rotationnelle, pour des couches CPML 2D.



(a) Comparaison des parties réelles.

(b) Comparaison des parties imaginaires.

FIG. 3.20 – Comparaison des parties réelles et imaginaires entre la solution exacte, la solution avec les CPML et la solution avec les conditions aux limites non réfléchissantes approchées, pour des sources modales de seconde espèce, en un point proche de la source.



(a) Comparaison des parties réelles.

(b) Comparaison des parties imaginaires.

FIG. 3.21 – Comparaison des parties réelles et imaginaires entre la solution exacte, la solution avec les CPML et la solution avec les conditions aux limites non réfléchissantes approchées, pour le mode nul, en un point proche de la source.

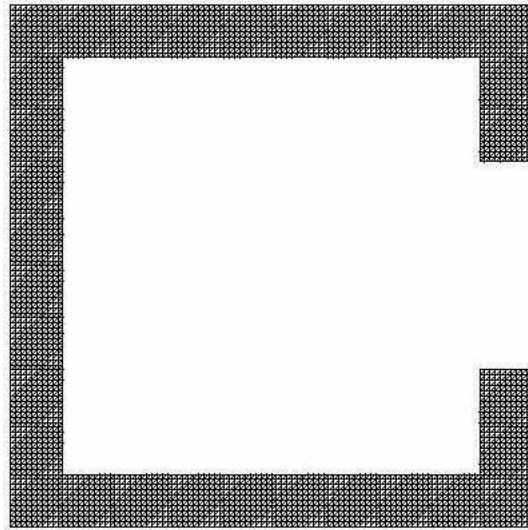


FIG. 3.22 – Maillage de la zone PML bidimensionnelle pour une prise d'air réaliste.

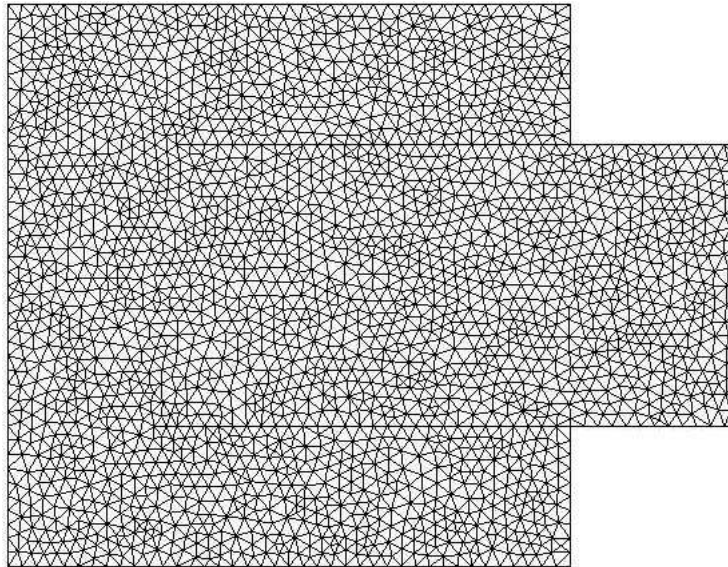


FIG. 3.23 – Maillage du domaine de calcul d'une prise d'air réaliste.

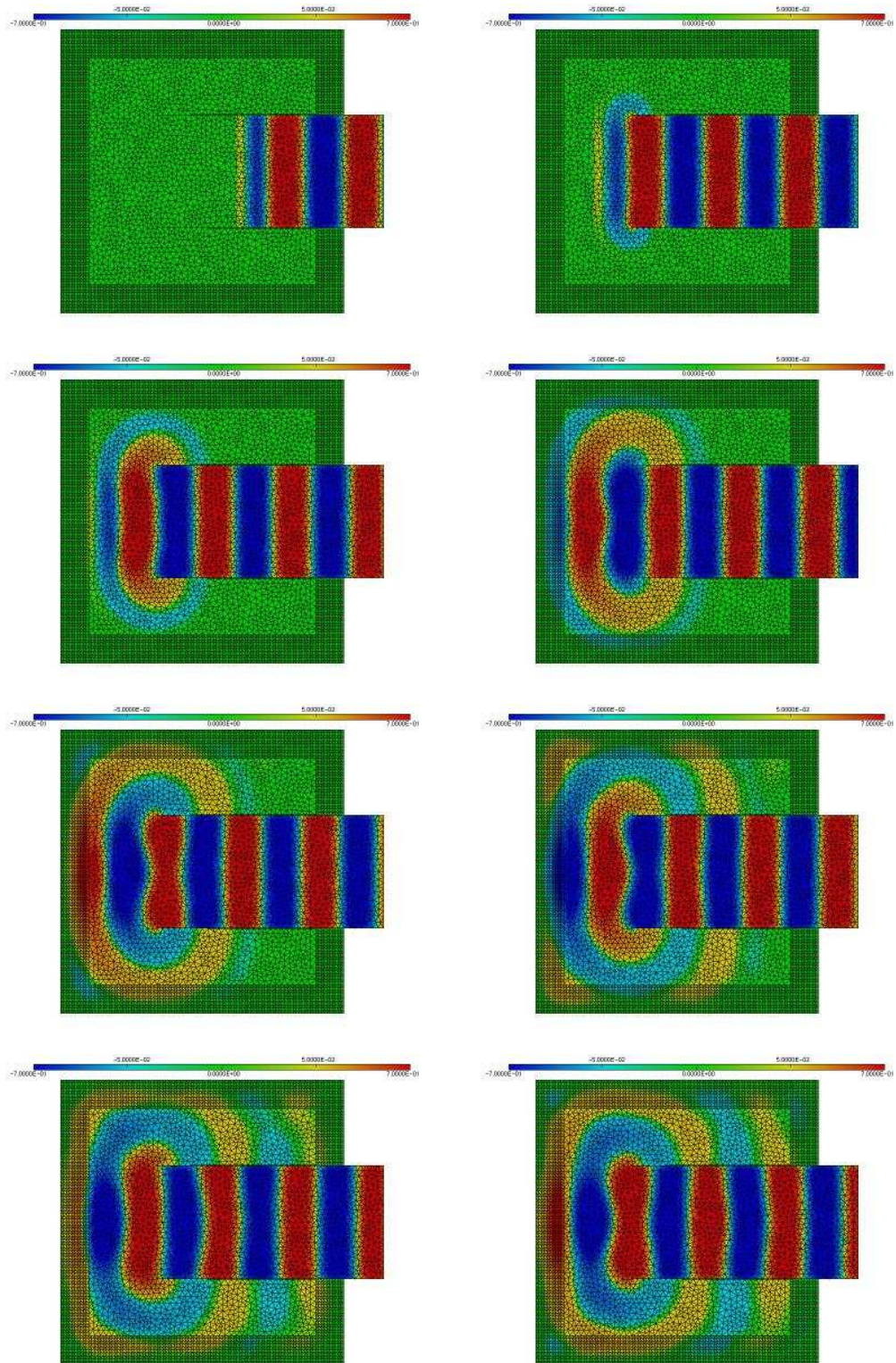


FIG. 3.24 – Evolution de la partie réelle de  $\rho$  au cours du temps assez long pour obtenir le régime périodique, dans une prise d'air réaliste.

### 3.5 Conclusion

Du point de vue des conditions fictives bornant le domaine de l'opérateur spatial, les avantages des PML sur d'autres méthodes de construction de frontières non réfléchissantes sont de plusieurs types. D'une part, la nature intrinsèquement exacte des équations obtenues garantit une parfaite absorption (aux erreurs de discrétisation et de troncature du domaine près) indépendamment de la fréquence et de l'incidence de l'onde sortante. D'autre part, la formulation étant du même type que l'équation dans le domaine principal, la mise en œuvre est simple et compatible avec le schéma de résolution retenu pour l'équation considérée. Enfin, la décroissance exponentielle de la solution dans le domaine PML autorise des approximations économiques.

Les simulations confirment le fait que les CPML, qui sous hypothèse d'aboutir à un problème bien posé ont une justification mathématique réelle, sont un modèle PML de choix dans le cadre de simulations avec ou sans convection. On a en effet montré qu'elles étaient bien plus précises que des conditions aux limites non réfléchissantes approchées à l'ordre 1, à travers des comparaisons avec une solution exacte, et que les résultats numériques sur plusieurs cas tests étaient nettement en faveur des CPML par rapport au premier modèle de PML, généralement utilisé pour l'aéroacoustique. Elles n'ont d'ailleurs pour le moment jamais été mises en défaut numériquement.

Il conviendrait toutefois, d'une part d'approfondir l'étude mathématique (unicité, ...) de façon à pouvoir étendre l'approximation Galerkin discontinue au domaine fictif avec le minimum de "risques", et d'autre part comme dans [24], d'étendre la formulation CPML à d'autres formes de frontières fictives.



## Chapitre 4

# Méthodologie de résolution des problèmes inverses ; Modèle de matériau poreux

Rappelons le contexte physique du problème illustré sur la figure 4.1 :

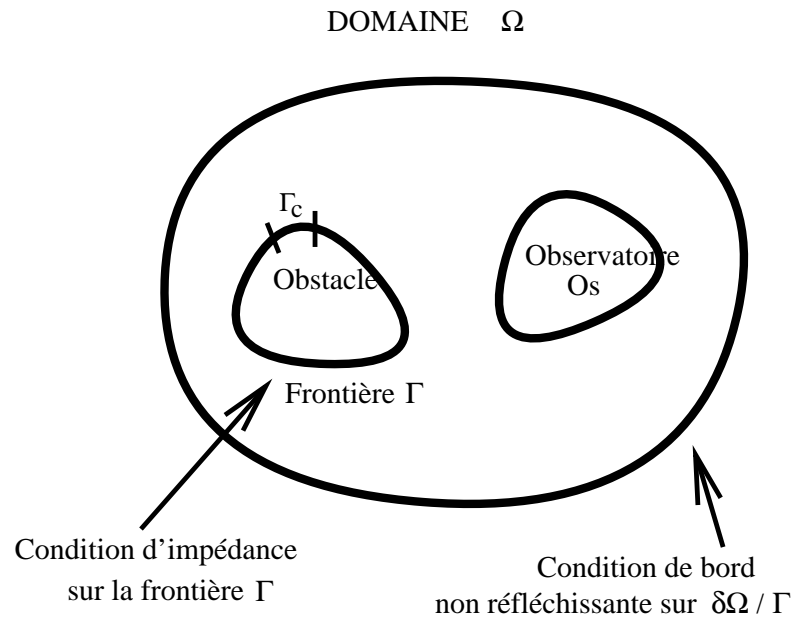


FIG. 4.1 – Le domaine d'étude.

Soit  $\Omega$  un domaine régulier de  $\mathbb{R}^d$  entourant un obstacle solide de frontière  $\Gamma$ . On suppose que  $\Gamma$  est régulier par rapport à l'écoulement porteur, autrement dit (en reprenant les notations précédentes) :

$$U_0^i n_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma,$$

où  $\vec{n}$  désigne la normale unitaire sortante à  $\Omega$  sur  $\Gamma$ .

On suppose de plus que  $\partial\Omega \setminus \Gamma$  est  $C^1$ , connexe, séparée de  $\Gamma$  et régulier par rapport à l'écoulement porteur. C'est-à-dire que  $\partial\Omega \setminus \Gamma$  est localement séparée par une courbe de régularité

$C^1$ 

$$(\partial\Omega \setminus \Gamma)^- = \{x \in \partial\Omega \setminus \Gamma \mid U_0^i n_i < 0\}.$$

Notre but est d'étudier, dans ce domaine artificiellement borné par des conditions aux limites absorbantes approchées à l'ordre 1 ou par des couches PML, les propagations d'un écoulement porteur subsonique régulier perturbé à un temps initial, afin de pouvoir simuler en première approximation et à l'échelle des petites perturbations, l'influence de la frontière de l'obstacle solide par le concept d'impédance locale complexe. Le premier chapitre a montré que dans la configuration de la figure 4.1, cette modélisation aboutissait à la résolution du problème bien posé (1.22).

Pour caractériser l'influence de la frontière de l'obstacle solide, on se propose de résoudre deux problèmes, l'un de contrôle optimal et l'autre d'identification :

1. Contrôler les phénomènes de propagation par les conditions aux limites de type impédance locale complexe, décrites dans la section (1.3.2) (plus précisément de type réflexion acoustique locale complexe). Pour cela, on modélise a priori la frontière de l'obstacle et on choisit une fonction coût dépendant de ces paramètres locaux qui définissent des conditions aux limites sur  $\Gamma$ . On évalue alors cette fonction coût en fonction de ces paramètres à travers un algorithme d'optimisation adéquat,  $\Gamma_c$  étant alors un ouvert mesurable de  $\Gamma$  de mesure non nulle, où l'impédance complexe sera variable.
2. Identifier les impédances locales qui modélisent au mieux le comportement acoustique local en fonction de données mesurées sur un observatoire, la fonction coût étant alors définie par un écart (en énergie) sur cet observatoire entre les données mesurées et celles fournies par le modèle.

Ces problèmes sont des problèmes inverses pour lesquels l'équation d'état est une équation aux dérivées partielles linéaire (l'équation d'Euler linéarisée barotrope) et où les variables de contrôle de dimension infinie (distribution localisée spatialement sur  $\Gamma_c$ ) jouent un rôle dans les conditions aux limites à adjoindre à cette équation d'état pour que le système complet, le problème direct (1.22), soit bien posé. Les problèmes inverses sont donc non linéaires. Ces problèmes inverses sont généralement mal posés mathématiquement (problème d'existence et d'unicité d'une solution), et dépendent fortement, en domaine borné, de la géométrie du domaine dans lequel on souhaite les résoudre. Dans un premier temps, nous allons brièvement rappeler les difficultés inhérentes à la résolution de tels problèmes inverses.

### Problématique récurrente aux problèmes inverses

Soit  $L$  un opérateur aux dérivées partielles (incluant les conditions aux limites) tel que

$$L(\varphi, \beta) = 0, \tag{4.1}$$

où  $\varphi$  est l'inconnue du problème, appelé problème direct, à chercher dans un espace  $V$  de dimension infinie. La variable  $\beta$  représente soit la variable de contrôle, soit les paramètres à identifier, comme des conditions aux limites, des seconds membres ou plus généralement des paramètres fonctionnels des équations dans une variété de dimension infinie.

On suppose dans ce contexte qu'il existe un unique  $\varphi(\beta)$  vérifiant (4.1) tel que :

$$J(\beta) = \int_{O_s} f(\varphi(\beta)),$$

soit bien définie pour une fonction  $f$  donnée et un observatoire spatial  $O_s$ .

Les problèmes de contrôle optimal et d'identification se posent alors toujours en ces termes :

- Trouver un  $\beta$  tel que la valeur de  $J(\beta)$  soit la plus petite possible, pour une fonction  $f$  significative.
- Rechercher le minimum de la fonctionnelle

$$J(\beta) = \int_{O_s} |\varphi|_{O_s}(\beta) - \varphi_d|^2,$$

où  $\varphi_d$  représente des mesures. Ce problème est un problème d'unicité.

Dans ces deux démarches, le problème mathématique est équivalent. Cependant, les difficultés mathématiques et structurelles que nous allons énoncer n'ont pas les mêmes conséquences sur la résolution de ces deux problèmes. En effet, il est fréquent dans ce genre de problématique que l'application

$$\beta \mapsto \varphi|_{O_s}(\beta)$$

soit non linéaire, non surjective, non injective, et non bicontinue. Pour les deux problèmes non linéaires évoqués, l'unicité de la solution n'est donc pas assurée. Si, pour le contrôle passif, l'unicité nous importe peu, car seule la diminution de la fonctionnelle objectif justifie la résolution du problème, pour le problème d'identification, l'unicité de la solution est une nécessité pour donner un sens à sa résolution. Or ce problème d'unicité est difficile. Dans le contexte applicatif qui motive ce travail, même dans le cas où le paramètre à identifier ne serait pas l'impédance (ou plus exactement la réflexion acoustique locale  $\beta$ ), mais le second membre de la condition d'impédance<sup>1</sup>, il nécessiterait des inégalités d'observabilité pour établir la coercivité de la fonctionnelle. Il faudrait généraliser les études habituelles [46] aux conditions d'impédances d'une part, et à la géométrie du support des sources, de  $\Gamma$  et de l'observatoire d'autre part. De toute façon, notre problème d'identification ou de contrôle est non linéaire ...

Admettons tout de même que le problème d'identification soit bien posé en unicité. L'application

$$\beta \mapsto \varphi|_{O_s}(\beta),$$

n'est probablement pas bicontinue, car très vraisemblablement complètement continue par rapport à  $\beta$ . Le problème est alors qualifié de sévèrement mal posé et laisse présager d'un mauvais conditionnement croissant du problème d'identification à mesure que l'on augmente le nombre de paramètres à identifier. Comme les deux problèmes d'optimisation et d'identification sont équivalents, cette difficulté se retrouve dans le problème de contrôle optimal, généralement sous la forme de minima extrêmement plats (valeurs du gradient faibles autour du minimum de la fonctionnelle objectif). De plus, il n'est pas exclu que le problème d'optimisation soit fortement non linéaire (au sens de [14]), et ainsi qu'il existe des minima locaux défiant un choix d'algorithme d'optimisation a priori judicieux.

Ces difficultés, dont l'énumération n'est pas exhaustive montrent que :

1. Les problèmes d'identification et de contrôle optimal sont structurellement et techniquement liés.
2. Outre une justification a posteriori en liaison avec les résultats obtenus, une justification a priori (même qualitative) de la résolution du problème de contrôle optimal est souhaitable avant la mise en place d'une méthodologie susceptible de résoudre ces problèmes.

C'est ce que l'on se propose de faire à travers une étude d'un cas monodimensionnel en acoustique pure. Nous allons montrer, que pour une source ponctuelle placée à une certaine distance d'un obstacle, la condition d'impédance parfaitement transparente pour les ondes normales n'est pas optimale si l'on souhaite minimiser l'énergie efficace évaluée sur un observatoire spatial situé en

---

<sup>1</sup>Le problème d'identification est dans ce cas linéaire.

aval de la source. Ce résultat peu intuitif est fortement lié au caractère monodimensionnel, mais on peut légitimement se demander si ce n'est pas le cas en bidimensionnel puisque le traitement absorbant localisé d'un matériau se caractérise par des conditions d'impédances normales à la frontière de ce matériau.

### 4.1 Etude d'un cas monodimensionnel

Sur la figure 4.2, la variable de contrôle est le complexe  $\alpha$  (avec  $Re(\alpha) \geq 0$ ) porté sur la limite spatiale  $x = 0$ . Une source ponctuelle est placée en  $x = a$  ( $f = A\delta_a \otimes e^{i\omega t}$ ) et la condition initiale est nulle. La solution instationnaire est observée sur le domaine spatial vérifiant  $x = a + a_{obs}, a_{obs} > 0$ .

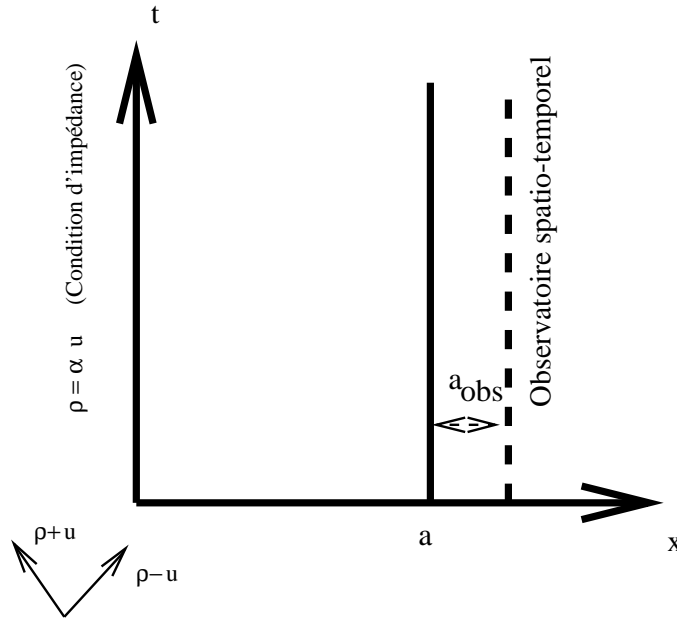


FIG. 4.2 – Exemple monodimensionnel

Comme le suggère les caractéristiques  $\rho+u$  et  $\rho-u$ , le temps d'observation  $t_{obs}$  doit être supérieur à  $2a + a_{obs}$  afin de remplir les conditions d'observabilité géométrique. De plus, nous supposons que l'on observe sur une période  $[t_1, t_2]$  au delà de ce temps d'observation, car le régime harmonique est établi en  $x = a + a_{obs}$ . On veut résoudre alors le problème suivant, équivalent à l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \partial_t \rho - \partial_x u &= A\delta_a \otimes e^{i\omega t} \\ \partial_t u - \partial_x \rho &= 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

#### Solution du problème

On résoud ce problème par la méthode des caractéristiques. Autrement dit, il est équivalent de résoudre :

$$\begin{cases} \partial_t (\rho + u) - \partial_x (\rho + u) &= A\delta_a \otimes e^{i\omega t} \\ \partial_t (\rho - u) + \partial_x (\rho - u) &= A\delta_a \otimes e^{i\omega t} \end{cases}$$

D'après la figure 4.2, on a pour  $t \geq a$  :

$$(\rho + u)(0, t) = (\rho + u)(a, t - a) = Ae^{i\omega t} e^{-ai\omega},$$

et comme

$$(\rho - \alpha u)(0, t) = 0,$$

on en déduit que :

$$\begin{cases} \rho(0, t) &= \frac{\alpha}{1 + \alpha} A e^{i\omega t} e^{-a i \omega} \\ u(0, t) &= \frac{1}{1 + \alpha} A e^{i\omega t} e^{-a i \omega} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$(\rho - u)(0, t) = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} A e^{i\omega t} e^{-a i \omega}.$$

Dès lors, il en découle que pour  $t \geq 2a + a_{obs}$  :

$$\begin{aligned} (\rho - u)(a + a_{obs}, t) &= (\rho - u)(0, t - a_{obs} - 2a) + [\rho - u](a^+, t - a_{obs} - a) \\ &= \frac{\alpha - 1}{1 + \alpha} A e^{i\omega t} e^{-i(a_{obs} + 3a)\omega} + A e^{i\omega t} e^{-i\omega(a_{obs} + a)}. \end{aligned}$$

Mais comme  $(\rho + u)(a_{obs} + a, t) = 0$ , on en déduit que

$$\begin{cases} \rho(a_{obs} + a, t) &= \frac{1}{2} A e^{i\omega t} \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} e^{-i(a_{obs} + 3a)\omega} + e^{-i\omega(a_{obs} + a)} \right) \\ u(a_{obs} + a, t) &= -\frac{1}{2} A e^{i\omega t} \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} e^{-i(a_{obs} + 3a)\omega} + e^{-i\omega(a_{obs} + a)} \right). \end{cases} \quad (4.3)$$

On a ainsi déterminé explicitement la solution du problème (1.22) dans cette configuration monodimensionnelle. On va alors démontrer que dans ce cas, l'existence et l'unicité d'une solution au problème de contrôle optimal et au problème d'identification est assurée.

### Résolution du problème d'optimisation

On choisit comme fonctionnelle coût l'énergie totale efficace sur l'observatoire spatio-temporel, placée en sortie  $a + a_{obs}$ , afin de traduire par sa minimisation, la réduction du bruit acoustique. Soit la fonctionnelle objectif

$$J(\rho, u) = \int_{x=a+a_{obs} \times [t_1, t_2]} |\rho|^2 + |u|^2.$$

En posant

$$\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}, \quad (4.4)$$

application monotone et bijective de l'ensemble des nombres complexes à partie réelle positive dans l'ensemble des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1, il vient :

$$\begin{aligned} J(\rho_\beta, u_\beta) &= \frac{1}{2} \int_{[t_1, t_2]} |A|^2 |\beta e^{-2a i \omega} + 1|^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{[t_1, t_2]} |A|^2 (|\beta|^2 + 2 \operatorname{Re}(\beta) \cos 2a\omega + 2 \operatorname{Im}(\beta) \sin 2a\omega + 1). \end{aligned}$$

Par conséquent, les problèmes de contrôle optimal et d'identification (puisque équivalents) admettent une solution unique en  $\beta = \beta_{opt} = -e^{2a i \omega}$ . Cette propriété est également vérifiée si l'on souhaite résoudre les problèmes en la variable naturelle  $\alpha$ . En revanche, le changement de variable homographique (4.4) conduit à la convexification de la fonctionnelle objectif : elle est convexe en  $\beta$  et non convexe en  $\alpha$ .

**Remarque 4.1.1** *La conclusion est donc, que pour une source ponctuelle localisée en  $x = a$ , il existe une unique réflexion acoustique optimale qui contrôle exactement l'énergie efficace pour  $x > a$ . Un résultat similaire peut être établi pour plusieurs sources ponctuelles localisées en  $x = \{a_k\}$ , avec  $a_k > 0$ .*

*En effet, en notant les différentes sources par  $f_k = A_k \delta_{a_k} \otimes e^{i\omega t}$ , avec  $A_k \in \mathbb{R}^+$ , on obtient facilement qu'il existe un unique  $\beta_{opt}^2$*

$$\beta_{opt} = \frac{\sum_k -A_k e^{ia_k \omega}}{\sum_k A_k e^{-ia_k \omega}},$$

*qui contrôle exactement l'énergie efficace pour  $x > a_k$ . Ainsi, comme toute distribution est combinaison linéaire de Dirac, on peut affirmer que l'on contrôle exactement l'énergie efficace si le terme source est une distribution spatiale.*

### Interprétation physique dans le cas d'une impédance réelle

La réflexion acoustique optimale, comme il était prévisible est indépendante de  $a_{obs}$  et de  $A$ . Mais pour  $a$  fixé (par exemple  $a = 1$ ) et dans le cas où l'impédance est réelle, nous allons montrer que la condition parfaitement transparente pour les ondes normales en  $x = 0$  ( $\alpha = 1 \Leftrightarrow \beta = 0^3$ ) n'est pas la condition d'absorption acoustique maximale pour l'énergie observée en  $1 + a_{obs}$ ,  $a_{obs} > 0$ , ce qui constitue un résultat un peu moins intuitif.

Pour cela, on évalue dans un premier temps le gain par rapport à la condition parfaitement transparente par :

$$\frac{1}{Gain} = \frac{J_{\beta=\beta_{opt}}}{J_{\beta=0}} = 1 - \cos^2 2\omega. \quad (4.5)$$

Dans tous les cas, on a

$$Gain \geq 1,$$

donc le contrôle passif optimal est toujours meilleur que la condition parfaitement transparente. Ce phénomène monodimensionnel peut probablement s'expliquer par des interférences destructrices créées par la position de la source par rapport à la condition aux limites (que l'on va exprimer en nombre d'ondes par rapport au signal exciteur). On rappelle que si l'on note  $\lambda$  la période ou la longueur d'onde et  $n = \frac{1}{\lambda}$  le nombre d'ondes entre l'obstacle et la source, alors  $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

D'après (4.5), trois cas se distinguent :

1.  $\cos 2\omega = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{4\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = n = \frac{1}{8} + \frac{k}{4}$ .

Dans ce cas, on ne peut rien améliorer,  $Gain = 1$  et l'impédance optimale est celle du vide.

2.  $\cos 2\omega = 1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}\right) = 1 \Leftrightarrow \beta = -1 \Leftrightarrow \alpha = 0 \Leftrightarrow 4\pi n = 2k\pi, k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow n = \frac{k}{2}, k \in \mathbb{N}^*$ .

Dans ce cas, l'impédance optimale correspond à des conditions d'obstacle mou,  $n = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ , et il y a une correspondance noeud à noeud entre la paroi et la position de la source.

<sup>2</sup>  $|\beta_{opt}(x)| = 1$ , car  $A_k \in \mathbb{R}^+$ .

<sup>3</sup> Elle est parfaitement transparente pour les ondes normales en acoustique pure sans convection.

$$3. \cos 2\omega = -1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}\right) = -1 \Leftrightarrow \beta = 1 \Leftrightarrow \alpha = +\infty \Leftrightarrow n = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{N}.$$

Dans ce cas, l'impédance optimale correspond à des conditions d'obstacle dur,  $n = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots$ , et il y a une correspondance noeud à ventre entre la paroi et la position de la source.

**Remarque 4.1.2** *Dans les deux derniers cas, l'énergie efficace est nulle sur l'observatoire et le gain est infini. On peut également remarquer que les ensembles où  $\text{Gain} = 1$  ou  $\text{Gain} = +\infty$  sont discrets sur  $[0, 1]$  et que leurs cardinaux augmentent avec la valeur de  $n$ . L'efficacité du contrôle optimal est par conséquent très sensible à la position de la source par rapport à l'observatoire.*

## Conclusion

Cette configuration monodimensionnelle fournit deux conclusions fondamentales pour la suite de notre travail :

1. Le contrôle optimal passif est toujours meilleur que la condition parfaitement transparente, avec une variation très rapide de la valeur de la réflexion acoustique optimale induisant une forte variation du gain. Ce résultat, bien que grandement lié au caractère monodimensionnel, peut justifier à lui seul, l'intérêt de la mise en place d'une méthodologie de contrôle optimal pour des perturbations aéroacoustiques en présence d'un obstacle.
2. Le changement naturel de variable (4.4) intervenant dans l'évaluation de la fonction coût et qui la convexifie, est à la base de l'idée de ce changement de variable proposé dans la section (1.3.2) pour une configuration géométrique polydimensionnelle.

## 4.2 Méthodologie de résolution du problème d'optimisation

Dans le premier chapitre, nous avons établi dans le théorème 1.3.9, que sous certaines hypothèses, les problèmes (1.22) et (1.23) ont chacun une solution unique dans  $(L^2(Q))^{d+1}$ , notées respectivement  $\varphi_\beta$  et  $\psi_\beta$ .

Pour la configuration géométrique rappelée au début de ce chapitre, on suppose donc que les hypothèses (1.3.1, 1.3.2) sont vérifiées. En particulier, on suppose que pour un  $T$  donné assez grand, on a :

$$\forall (x, t) \in \Gamma \times [0, T], \beta(x, t) \in C^0(\overline{\Gamma_c} \times [0, T], \mathbb{C}) \cap C_m^1(\Gamma_c \times [0, T], \mathbb{C}),$$

et

$$|\beta(x, t)| \leq 1.$$

Sans expliciter précisément la fonctionnelle objectif (des exemples seront fournis à la section suivante), on suppose que celle-ci est de la forme :

$$J(\beta) = \int_{O_s \times [0, T]} (C^* C \varphi_\beta, \varphi_\beta)_{\mathbb{C}^{d+1}}, \quad (4.6)$$

où  $C \in \mathcal{M}_{d+1}(W^{1,\infty}(\overline{\Omega} \times [0, T]), \mathbb{C})$ . L'observatoire  $O_s$  peut aussi bien être un observatoire volumique que surfacique, autrement dit un domaine borné de dimension  $d$  ou  $d - 1$ .

Afin de minimiser cette fonctionnelle, nous allons établir, à l'aide du problème adjoint (1.23), l'existence et l'explicitation de la dérivée de cette fonctionnelle dans toutes les directions  $\xi$ .

### 4.2.1 Calcul de la dérivée de la fonctionnelle à l'aide du problème adjoint

Dans cette partie, nous cherchons à évaluer

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (J(\beta + \varepsilon \xi) - J(\beta)),$$

avec  $\beta \in C^0(\overline{\Gamma_c} \times [0, T], I) \cap C_m^1(\Gamma_c \times [0, T], I)$  et  $I \subset \subset \{|z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$ .

Certaines traces des solutions des problèmes (1.22) et (1.23) vivent naturellement dans les espaces  $H_{loc}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma \times [0, T])$  et  $H_{loc}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega \setminus \Gamma \times [0, T])$ . C'est insuffisant pour espérer établir la continuité et la dérivabilité de la fonctionnelle  $J(\beta)$ , et il faut pour cela parvenir à définir ces traces dans des espaces plus réguliers. Avant d'établir un résultat de régularité supplémentaire, on introduit quelques notations :

- $\varphi_\beta = (\varphi_\beta^i)_{i=1, \dots, d+1}^T$  et  $\psi_\beta = (\psi_\beta^i)_{i=1, \dots, d+1}^T$  sont les solutions fortes des problèmes respectifs (1.22) et (1.23).
- $\varphi_\beta^N = \sum_{i=1}^d \varphi_\beta^i n_i, \psi_\beta^N = \sum_{i=1}^d \psi_\beta^i n_i$ , où  $\{n_i\}$  est la normale unitaire sortante à  $\partial\Omega$ .
- Les projections orthogonales de  $\varphi_\beta$  et  $\psi_\beta$  sur  $(\ker(|A^i n_i|))^\perp$  seront notées respectivement  $P_{\varphi_\beta}$  et  $P_{\psi_\beta}$ .

Le théorème de régularité supplémentaire est le suivant :

**Proposition 4.2.1** *Si  $\varphi_\beta$  (respectivement  $\psi_\beta$ ) est solution du problème direct (1.22) (respectivement du problème adjoint (1.23)), alors  $\varphi_\beta^{d+1}, \varphi_\beta^N$  (respectivement  $\psi_\beta^{d+1}, \psi_\beta^N$ ) sont dans  $L^2([0, T] \times \Gamma)$  et  $P_{\varphi_\beta}$  (respectivement  $P_{\psi_\beta}$ ) appartient à  $L^2([0, T], \partial\Omega \setminus \Gamma)$ . On a de plus les estimations suivantes :*

$$(i) \quad |\varphi_\beta|_{L^2(Q)} + |\varphi_\beta^0|_{L^2([0, T] \times \Gamma)} + |\varphi_\beta^N|_{L^2([0, T] \times \Gamma)} + |P_{\varphi_\beta}|_{L^2([0, T], \partial\Omega/\Gamma)} \leq C |f|_{L^2(Q)}$$

$$(ii) \quad |\psi_\beta|_{L^2(Q)} + |\psi_\beta^0|_{L^2([0, T] \times \Gamma)} + |\psi_\beta^N|_{L^2([0, T] \times \Gamma)} + |P_{\psi_\beta}|_{L^2([0, T], \partial\Omega/\Gamma)} \leq C |g|_{L^2(Q)},$$

où  $C$  est une constante positive ne dépendant que de  $T, \Omega$  et  $I$ .

**Preuve.** Soit une suite  $\{\varphi_\beta^n\}$  convergeant vers la solution forte  $\varphi_\beta$  de (1.22). Alors, en posant  $\omega = \varphi_\beta^n - \varphi_\beta^p$ , il vient l'égalité (déjà démontrée dans la section 2, égalité 2.18) :

$$\begin{aligned} \frac{Re}{2} \left( \int_Q (K\omega, \omega)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) + \frac{Re}{2} \left( \int_{\Gamma \times ]0, T[} (N_\beta \omega, \omega)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma \times ]0, T[} (|A^i n_i| \omega, \omega)_{\mathbb{C}^{d+1}} \\ = Re \left( \int_Q ((f^n - f^p), \omega)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dès lors, trois arguments suffisent pour démontrer la première partie de la proposition 4.2.1 :

1. On rappelle que l'on peut, sans pertes de généralités, supposer que :

$$\exists c > 0 \text{ tel que } K = B - \frac{1}{2} (\partial_i A^i) \geq c \mathbb{I}_{d+1}.$$

2. Les valeurs propres de  $A^i n_i$  sont  $(c_0 + |\vec{U}_0 \cdot \vec{n}|, c_0 - |\vec{U}_0 \cdot \vec{n}|, |\vec{U}_0 \cdot \vec{n}|)$ , et comme l'écoulement porteur est strictement subsonique, il en découle que

$$(|A^i n_i| \omega, \omega)_{\mathbb{C}^{d+1}} = |P_\omega|^2.$$



3.  $Re (N_\beta \omega, \omega)_{\mathbb{C}^{d+1}} = \left( \frac{N_\beta + N_\beta^*}{2} \omega, \omega \right)_{\mathbb{C}^{d+1}} \geq \inf_{k \in \{0,1\}} (\lambda_k) |\omega|^2$ , où  $\lambda_k$  est une valeur propre réelle strictement positive, car  $|\beta| < 1$  (voir section 1.3.2).

Dès lors, en faisant tendre  $n$  et  $p$  vers  $+\infty$ , les termes

$$\frac{Re}{2} \left( \int_Q (K\omega, \omega)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right), \frac{Re}{2} \left( \int_{\Gamma \times ]0, T[} (N_\beta \omega, \omega)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right), \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma \times ]0, T[} (|A^i n_i| \omega, \omega)_{\mathbb{C}^{d+1}}$$

intervenant dans l'égalité (4.7) sont positifs et convergent vers 0, car  $|f^n - f^p|_{L^2(Q)} \rightarrow 0$ .

Les suites  $\varphi_\beta^n, \varphi_\beta^{d+1, n}|_\Gamma, \varphi_\beta^{N, n}|_\Gamma, P_{\varphi_\beta^n}|_{\partial\Omega \setminus \Gamma}$  sont donc des suites de Cauchy respectivement dans  $L^2(Q), L^2([0, T] \times \Gamma), L^2([0, T] \times \Gamma)$  et  $L^2([0, T], \partial\Omega \setminus \Gamma)$ . La première partie de la proposition 4.2.1 est alors démontrée.

Mais  $\varphi_\beta$  est solution de (1.22), donc en passant à la limite sur  $\varphi_\beta^n, \varphi_\beta$  vérifie l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{Re}{2} \left( \int_Q (K\varphi_\beta, \varphi_\beta)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) + \frac{Re}{2} \left( \int_{\Gamma \times ]0, T[} (N_\beta \varphi_\beta, \varphi_\beta)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma \times ]0, T[} (|A^i n_i| \varphi_\beta, \varphi_\beta)_{\mathbb{C}^{d+1}} \\ = Re \left( \int_Q (f, \varphi_\beta)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

où toutes les intégrales sont clairement définies.

De plus, les trois arguments précédents permettent encore de minorer les termes positifs du premier membre de l'égalité (4.8) et ainsi obtenir l'estimation (i) de la proposition 4.2.1. Pour la démonstration de l'inégalité (ii), on procède de manière analogue en remplaçant  $N_\beta$  par  $N_\beta^*$ . ■

**Remarque 4.2.1** *On en déduit que pour tout  $\beta \in C^0(\overline{\Gamma_c} \times [0, T], I) \cap C_m^1(\Gamma_c \times [0, T], I)$ , toutes les formes quadratiques en  $\varphi_\beta^{d+1}, \varphi_\beta^N, \psi_\beta^{d+1}, \psi_\beta^N$ , à coefficients de régularités  $L^\infty$  sont intégrables sur  $\Gamma \times [0, T]$ .*

*L'hypothèse  $I \subset \subset \{|z| < 1, z \in \mathbb{C}\}$  est ici essentielle : on est dans l'incapacité de contrôler  $\varphi_\beta^{d+1}, \psi_\beta^{d+1}, \varphi_\beta^N, \psi_\beta^N$  dans  $L^2(\Gamma)$  pour  $|\beta| = 1$  (en particulier, pour  $\beta = 1$ , et  $\beta = -1$ ). Dans ce cas là, la suite doit être écrite à un sens plus faible.*

*Il reste que les problèmes (1.22) et (1.23) ont des solutions fortes vers lesquelles convergent les discrétisés de ces problèmes et, bien entendu, cette difficulté uniquement théorique n'intervient pas dans l'écriture de la dérivée de la fonctionnelle discrétisée, qui comme nous le justifierons ultérieurement est la discrétisée de la dérivée de la fonctionnelle.*

Avant d'exprimer la dérivée de  $J(\beta)$ , examinons la continuité des solutions de (1.22) et (1.23) et de certaines traces à travers la proposition suivante :

**Proposition 4.2.2** *Soient  $\beta$  et  $\beta'$  dans  $C^0(\overline{\Gamma_c} \times [0, T], I) \cap C_m^1(\Gamma_c \times [0, T], I)$ , avec  $\beta' \rightarrow \beta$  dans  $L^\infty(\Gamma) \times [0, T]$ , alors :*

$$\varphi_{\beta'} \rightarrow \varphi_\beta \quad \text{et} \quad \psi_{\beta'} \rightarrow \psi_\beta \quad \text{dans} \quad L^2(Q),$$

$$\varphi_{\beta'}^{d+1}|_\Gamma, \varphi_{\beta'}^N|_\Gamma, \psi_{\beta'}^{d+1}|_\Gamma, \psi_{\beta'}^N|_\Gamma \quad \text{tendent vers} \quad \varphi_\beta^{d+1}|_\Gamma, \varphi_\beta^N|_\Gamma, \psi_\beta^{d+1}|_\Gamma, \psi_\beta^N|_\Gamma \quad \text{dans} \quad L^2(\Gamma \times [0, T]),$$

$$\text{et} \quad P_{\varphi_{\beta'}}, P_{\psi_{\beta'}} \quad \text{convergent respectivement vers} \quad P_{\varphi_\beta}, P_{\psi_\beta} \quad \text{dans} \quad L^2([0, T], \partial\Omega \setminus \Gamma).$$

**Preuve.** On pose  $\omega = \varphi_\beta - \varphi_{\beta'}$ . On montre que,  $\forall \psi \in C^1(\overline{Q})$ ,  $\omega$  est solution de

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \int_Q ((A^i \partial_i \omega + B\omega), \psi)_{\mathbb{C}^{d+1}} + \int_{\Gamma \times ]0, T[} ((M_\beta \varphi_\beta - M_{\beta'} \varphi_{\beta'}), \psi)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) \\ + \operatorname{Re} \left( \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma \times ]0, T[} ((-A^i n_i^-) \omega, \psi)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Dès lors, en posant la matrice

$$N' = c_0 \begin{pmatrix} n \otimes n & n \\ -n^T & -1 \end{pmatrix},$$

il en découle que  $\forall \psi \in C^1(\overline{Q})$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \int_Q ((A^i \partial_i \omega + B\omega), \psi)_{\mathbb{C}^{d+1}} + \int_{\Gamma \times ]0, T[} (M_{\beta'} \omega, \psi)_{\mathbb{C}^{d+1}} + \frac{1}{2} (\beta - \beta') (N' \varphi_\beta, \psi)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) \\ + \operatorname{Re} \left( \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma \times ]0, T[} ((-A^i n_i^-) \omega, \psi)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) = 0. \end{aligned}$$

On utilise alors la proposition 4.2.1 pour passer à la limite sur  $\omega^n = \varphi_\beta^n - \varphi_{\beta'}^n$ , et obtenir que :

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Re}}{2} \left( \int_Q (K\omega, \omega)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) + \frac{\operatorname{Re}}{2} \left( \int_{\Gamma \times ]0, T[} (N_{\beta'} \omega, \omega)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma \times ]0, T[} (|A^i n_i| w, w)_{\mathbb{C}^{d+1}} \\ = \frac{\operatorname{Re}}{2} \left( \int_{\Gamma \times ]0, T[} (\beta' - \beta) (N' \varphi_\beta, \omega)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right). \end{aligned}$$

La preuve est alors complète en appliquant de nouveau la proposition 4.2.1. Une démonstration tout à fait analogue peut être établie pour les quantités associées au problème (1.23). ■

Finalement, on est en mesure d'établir un théorème d'existence et d'explicitation de la dérivée de la fonctionnelle objectif :

**Proposition 4.2.3** *La fonctionnelle (4.6) définie de  $C^0(\overline{\Gamma_c} \times [0, T], I) \cup C_m^1(\Gamma_c \times [0, T], I)$  dans  $\mathbb{R}$  est Gâteaux dérivable (et même Fréchet différentiable), et de plus on a l'expression :*

$$J'(\beta, \xi) = \operatorname{Re} \left( -\frac{1}{2} \int_{\Gamma \times [0, T]} (N' \varphi_\beta, \psi_\beta)_{\mathbb{C}^{d+1}} \overline{\xi} \right), \quad (4.9)$$

où  $\psi_\beta$  est la solution du problème adjoint (1.23) avec pour second membre  $g = \chi_{O_s \times [0, T]} C^* C \varphi_\beta$  et  $\xi \in C^0(\overline{\Gamma_c} \times [0, T], I) \cap C_m^1(\Gamma_c \times [0, T], I)$ .

**Preuve.** Soit  $\varepsilon > 0$  fixé quelconque. Comme

$$(C^* C \varphi_{\beta+\varepsilon\xi}, \varphi_{\beta+\varepsilon\xi})_{\mathbb{C}^{d+1}} - (C^* C \varphi_\beta, \varphi_\beta)_{\mathbb{C}^{d+1}} = (C^* C (\varphi_\beta + \varphi_{\beta+\varepsilon\xi}), \varphi_{\beta+\varepsilon\xi} - \varphi_\beta)_{\mathbb{C}^{d+1}},$$

on a l'expression du taux d'accroissement suivante :

$$\frac{1}{\varepsilon} [J(\beta + \varepsilon\xi) - J(\beta)] = \frac{1}{2\varepsilon} \operatorname{Re} \left( \int_{O_s \times [0, T]} (C^* C (\varphi_\beta + \varphi_{\beta+\varepsilon\xi}), \varphi_{\beta+\varepsilon\xi} - \varphi_\beta)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right).$$

On pose alors :

$$\begin{cases} g_\xi^\varepsilon &= \chi_{O_s \times [0, T]} \frac{\varphi_\beta + \varphi_{\beta + \varepsilon \xi}}{2} \\ D_\xi^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon} (\varphi_{\beta + \varepsilon \xi} - \varphi_\beta), \end{cases}$$

et  $\psi_\varepsilon$  la solution de (1.23) pour ce second membre  $g_\xi^\varepsilon$  et pour  $M_{\beta + \varepsilon \xi} \psi_\varepsilon = 0$  sur  $\Gamma \times [0, T]$ . Dès lors, on obtient :

$$\frac{1}{\varepsilon} [J(\beta + \varepsilon \xi) - J(\beta)] = \operatorname{Re} \left( \int_Q (g_\xi^\varepsilon, D_\xi^\varepsilon)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) = \operatorname{Re} \left( \int_Q (-\partial_t \psi_\varepsilon - \partial_i (A^i \psi_\varepsilon) + B^* \psi_\varepsilon, D_\xi^\varepsilon)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right).$$

Mais comme  $D_\xi^\varepsilon$  vérifie

$$\partial_t D_\xi^\varepsilon + A^i \partial_i D_\xi^\varepsilon + B D_\xi^\varepsilon = 0,$$

et que les matrices  $A^i$  sont symétriques réelles, on obtient que

$$\frac{1}{\varepsilon} [J(\beta + \varepsilon \xi) - J(\beta)] = \operatorname{Re} \left( \int_\Omega \psi_\varepsilon(\cdot, 0) \overline{D_\xi^\varepsilon(\cdot, 0)} - \psi_\varepsilon(\cdot, T) \overline{D_\xi^\varepsilon(\cdot, T)} - \int_{\partial\Omega \times [0, T]} (A^i n_i \psi_\varepsilon, D_\xi^\varepsilon)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} [J(\beta + \varepsilon \xi) - J(\beta)] &= -\operatorname{Re} \left( \int_{\partial\Omega \times [0, T]} (A^i n_i \psi_\varepsilon, D_\xi^\varepsilon)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) \\ &= -\operatorname{Re} \left( \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma \times [0, T]} (A^i n_i \psi_\varepsilon, D_\xi^\varepsilon)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) - \operatorname{Re} \left( \int_{\Gamma \times [0, T]} (A^i n_i \psi_\varepsilon, D_\xi^\varepsilon)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Mais, sur  $\partial\Omega \times [0, T]$ , on a :

$$A^i n_i^- D_\xi^\varepsilon = 0,$$

et

$$A^i n_i^+ \psi_\varepsilon = 0,$$

et comme les matrices  $A^i n_i^-$  et  $A^i n_i^+$  sont réelles symétriques, (4.10) devient :

$$\frac{1}{\varepsilon} [J(\beta + \varepsilon \xi) - J(\beta)] = -\operatorname{Re} \left( \int_{\Gamma \times [0, T]} (A^i n_i \psi_\varepsilon, D_\xi^\varepsilon)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right).$$

De plus,  $\forall \beta, A^i n_i = M_\beta^\# - M_\beta^*$ , donc

$$\frac{1}{\varepsilon} [J(\beta + \varepsilon \xi) - J(\beta)] = \operatorname{Re} \left( \int_{\Gamma \times [0, T]} (\psi_\varepsilon, M_{\beta + \varepsilon \xi} D_\xi^\varepsilon)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right). \quad (4.11)$$

Toutes les intégrations par parties sont justifiées par les propositions 4.2.1 et 4.2.2 et par la prise en compte d'une suite  $\psi_\varepsilon^n \rightarrow \psi_\varepsilon$  décrivant une solution forte de (1.23).

Mais, comme

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon} (M_{\beta + \varepsilon \xi} \varphi_{\beta + \varepsilon \xi} - M_\beta \varphi_\beta) \\ &= -\frac{1}{2} A^i n_i D_\xi^\varepsilon + \frac{1}{2\varepsilon} (N_{\beta + \varepsilon \xi} (\varphi_{\beta + \varepsilon \xi} - \varphi_\beta) + (N_{\beta + \varepsilon \xi} - N_\beta) \varphi_\beta), \end{aligned}$$

on obtient par passage à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_{\beta+\varepsilon\xi} D_\xi^\varepsilon = -\frac{1}{2} N' \varphi_\beta \xi.$$

En réinjectant ce résultat dans (4.11), et en passant à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  (justifié par les propositions 4.2.1 et 4.2.2), on obtient le résultat escompté, à savoir que :

$$J'(\beta, \xi) = Re \left( -\frac{1}{2} \int_{\Gamma \times [0, T]} (N' \varphi_\beta, \psi_\beta)_{\mathbb{C}^{d+1}} \bar{\xi} \right).$$

La différentiabilité découle de la continuité de l'application

$$\beta \longmapsto (N' \varphi_\beta, \psi_\beta) \in L^1(\Gamma \times [0, T]).$$

■

On est donc en mesure d'évaluer la dérivée de la fonctionnelle objectif  $J(\beta)$  dans toutes les directions  $\xi$ . Pour cela, il est nécessaire de résoudre un problème direct puis un problème adjoint (rétrograde par rapport au problème direct). Cette explicitation est une explicitation de la dérivée de la fonctionnelle "continue", dans le sens où elle met en jeu les solutions fortes des problèmes continus (1.22) et (1.23). Or, la plupart des problèmes inverses sont sévèrement mal posés, ce qui a généralement pour conséquence d'avoir à estimer des gradients de fonctionnelle très "faibles" autour de la zone du minimum (ou des minima locaux). Dans ces conditions, afin de ne pas perdre en précision, il est crucial après approximation des solutions des problèmes directs et adjoints, de minimiser (voire annuler) l'erreur théorique et numérique entre la dérivée de la fonctionnelle objectif discrétisée et la discrétisation de la dérivée de la fonctionnelle continue. Or, nous allons démontrer que le flux-splitting intervenant dans la méthode d'approximation Galerkin discontinue décentrée présentée dans la section 2 conduit à ce résultat, ce qui constitue l'argument principal pour affirmer que cette méthode se prédispose à la résolution numérique de problèmes inverses en aéroacoustique.

#### 4.2.2 L'adjoint du problème discrétisé

Nous allons montrer que pour cette discrétisation, l'adjoint du problème direct discrétisé correspond au discrétisé du problème adjoint (bien évidemment, le même schéma décentré que celui présenté dans le chapitre 2 est appliqué au problème adjoint).

En reprenant les notations de la section 2, pour une fonction test  $\psi_h \in H_h$  telle que  $\psi_h(T) = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} & \sum_e Re \left[ \int_{\omega_e \times [0, T]} (\partial_t \varphi_h^- + A^i \partial_i \varphi_h^- + B \varphi_h^-, \psi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} + \int_{\partial \omega_e \setminus \Gamma \times [0, T]} (A^i n_i^- (\varphi_h^+ - \varphi_h^-), \psi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right] \\ & + \sum_e Re \left( \int_{\partial \omega_e \cap \Gamma \times [0, T]} (M_\beta \varphi_h^-, \psi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) \\ & = \sum_e Re \left[ \int_{\omega_e \times [0, T]} -(\varphi_h^-, \partial_t \psi_h)_{\mathbb{C}^{d+1}} + (-\partial_i (A^i \psi_h^-) + B^* \psi_h^-, \varphi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} + \partial_i (A^i \psi_h^-, \varphi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right] \\ & + \sum_e Re \left[ \int_{\partial \omega_e \setminus \Gamma \times [0, T]} (A^i n_i^- (\varphi_h^+ - \varphi_h^-), \psi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} + \int_{\partial \omega_e \cap \Gamma \times [0, T]} (M_\beta \varphi_h^-, \psi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right] \end{aligned}$$

Mais comme :

$$\begin{aligned} \int_{\omega_e \times [0, T]} \partial_i (A^i \psi_h^-, \varphi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} &= \int_{\partial\omega_e \times [0, T]} (A^i n_i \psi_h^-, \varphi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} \\ &= \int_{\partial\omega_e \setminus \Gamma \times [0, T]} (A^i n_i \psi_h^-, \varphi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} + \int_{\partial\omega_e \cap \Gamma \times [0, T]} (A^i n_i \psi_h^-, \varphi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}}, \end{aligned}$$

on en déduit que sur la frontière de l'obstacle, il ne subsiste que le terme

$$\sum_e Re \left( \int_{\partial\omega_e \cap \Gamma \times [0, T]} ((M_\beta^* + A^i n_i) \psi_h^-, \varphi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right) = \sum_e Re \left( \int_{\partial\omega_e \cap \Gamma \times [0, T]} (M_\beta^\# \psi_h^-, \varphi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right). \quad (4.12)$$

Or, le but est d'obtenir une expression de l'adjoint du problème discrétisé, donc pour cela, il suffit d'évaluer les termes en facteur de  $\varphi_h^-$ . Dès lors, sur  $\partial\omega_e \setminus \Gamma \times [0, T]$ , les termes contributifs sont :

1. d'une part,

$$\begin{aligned} \sum_e \left[ \int_{\partial\omega_e \setminus \Gamma \times [0, T]} (-A^i n_i^- \varphi_h^-, \psi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} + \int_{\partial\omega_e \setminus \Gamma \times [0, T]} (A^i n_i \varphi_h^-, \psi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right] \\ = \sum_e \int_{\partial\omega_e \setminus \Gamma \times [0, T]} (A^i n_i^+ \varphi_h^-, \psi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

2. et d'autre part, en vertu de la double orientation de la normale unitaire sortante ( $n_i$ ), la contribution des éléments voisins s'exprime de la manière suivante :

$$\sum_e \int_{\partial\omega_e \setminus \Gamma \times [0, T]} \left( (A^i (-n_i))^- (\varphi_h^- - \varphi_h^+), \psi_h^+ \right)_{\mathbb{C}^{d+1}},$$

où le seul terme en facteur de  $\varphi_h^-$  a pour expression

$$\sum_e \int_{\partial\omega_e \setminus \Gamma \times [0, T]} (-A^i n_i^+ \varphi_h^-, \psi_h^+)_{\mathbb{C}^{d+1}}. \quad (4.14)$$

Finalement, avec (4.12), (4.13), (4.14), on est en mesure d'établir l'expression suivante de la partie réelle de l'adjoint du discrétisé :

$$\begin{aligned} \sum_e Re \left[ \int_{\omega_e \times [0, T]} -((\partial_t \psi_h - \partial_i (A^i \psi_h^-) + B^*) \psi_h^-, \varphi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right] \\ + \sum_e Re \left[ \int_{\partial\omega_e \setminus \Gamma \times [0, T]} (A^i n_i^+ (\psi_h^- - \psi_h^+), \varphi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} + \int_{\partial\omega_e \cap \Gamma \times [0, T]} (M_\beta^\# \psi_h^-, \varphi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Mais, on a également l'égalité suivante :

$$(A^i n_i^+ (\psi_h^- - \psi_h^+), \varphi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} = \left( (-A^i n_i)^- (\psi_h^+ - \psi_h^-), \varphi_h^- \right)_{\mathbb{C}^{d+1}}.$$

En réinjectant cette égalité dans (4.15), on obtient l'expression de la partie réelle de l'adjoint du discrétisé :

$$\begin{aligned} \sum_e Re \left[ \int_{\omega_e \times [0, T]} -((\partial_t \psi_h - \partial_i (A^i \psi_h^-) + B^*) \psi_h^-, \varphi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right] \\ + \sum_e Re \left[ \int_{\partial\omega_e \setminus \Gamma \times [0, T]} \left( (-A^i n_i)^- (\psi_h^+ - \psi_h^-), \varphi_h^- \right)_{\mathbb{C}^{d+1}} + \int_{\partial\omega_e \cap \Gamma \times [0, T]} (M_\beta^\# \psi_h^-, \varphi_h^-)_{\mathbb{C}^{d+1}} \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

L'expression (4.16), avec la méthode d'approximation présentée dans le chapitre 2, correspond exactement à l'expression de la partie réelle du discrétisé du système différentiel associé au problème adjoint (1.23). Or, pour obtenir une expression de la dérivée de la fonctionnelle  $J_h(\beta)$ , discrétisée de la fonctionnelle  $J(\beta)$ , on procède de manière analogue à la méthode développée dans 4.2.1. Il est alors nécessaire de faire intervenir l'adjoint du problème discrétisé, et comme **la fonctionnelle coût et sa dérivée sont réelles**, le résultat obtenu ci-dessus nous assure que la dérivée de la fonctionnelle coût discrétisée correspond à la discrétisation de la dérivée de la fonctionnelle coût continue, ce qui justifie la remarque 4.2.1. Autrement dit, l'explicitation (4.9) est encore valable sur l'approximation des problèmes directs et adjoints par la méthode Galerkin discontinue décentrée proposée dans le chapitre 2 (on rappelle que le problème adjoint (1.23) est décentré à l'identique).

### 4.3 Caractérisation physique de la fonctionnelle objectif et de la réflexion acoustique

La fonctionnelle objectif a été dans un premier temps définie à travers la solution du problème (1.22), une matrice abstraite  $C \in \mathcal{M}_{d+1}(W^{1,\infty}(\bar{\Omega} \times [0, T]), \mathbb{C})$ , et un observatoire  $O_s$  qui peut aussi bien être volumique que surfacique.

En tout état de cause, une fonctionnelle objectif significative devrait être déterminée par un contexte expérimental. A défaut de telles données, il s'agit d'expliciter des matrices  $C$  donnant un "sens" physique le plus pertinent possible à la fonctionnelle objectif en adéquation avec la problématique posée dans cette thèse, à savoir la "réduction" du bruit acoustique dans une prise d'air. Ces matrices  $C$  déterminent bien entendu la nature de l'observatoire, surfacique ou volumique.

De même, la seule contrainte sur le coefficient de réflexion acoustique locale est que :

$$|\beta(x, t)| \leq 1.$$

Cette contrainte est théoriquement nécessaire et suffisante pour que les problèmes (1.22, 1.23) avec la prise en compte des conditions aux limites sur la frontière de l'obstacle solide  $\Gamma$  soient bien posés. En revanche, à ce stade, rien n'affirme ou infirme que l'ensemble des complexes de ce disque unité soit physiquement réalisable dans le sens où l'on n'est pas assuré de la faisabilité expérimentale d'un matériau équivalent dont la réflexion acoustique est un complexe donné de ce disque unité. C'est pourquoi, il nous semble "physiquement" pertinent d'utiliser un modèle de réflexion acoustique pour un type de matériau dont les résultats expérimentaux sont en bonne adéquation avec le modèle théorique, développé dans [29].

#### 4.3.1 Fonctionnelles objectif

Nous nous limiterons dans le cadre de cette thèse, à une fonctionnelle objectif évaluée directement dans le domaine de calcul, autrement dit l'observatoire spatial sera constitué d'éléments ou de frontières d'éléments du maillage du domaine  $\Omega$ . Par conséquent, l'observatoire spatial ne pourra être que "raisonnablement" proche de la source de bruit, afin d'avoir des temps de simulation numérique réalisables. Nous n'aborderons pas la problématique "champ lointain" "champ proche", qui pourraient permettre d'évaluer la fonctionnelle objectif dans le domaine de calcul, à partir de son évaluation en champ "lointain".

Dès lors, la fonctionnelle objectif la plus "naturelle" correspond à l'énergie totale accumulée au cours d'un intervalle de temps donné, et localisée sur un élément ou un ensemble d'éléments (une aire en 2D ou un volume en 3D), définie par :

$$J(\beta) = \int_{O_s \times [0, T]} |\varphi_\beta|^2, \quad (4.17)$$

où  $\varphi_\beta$  est la solution de (1.22). Cette fonctionnelle, que l'on appellera par la suite fonctionnelle "énergie distribuée" correspond à la matrice  $C = \mathbb{I}_{d+1}$  dans (4.6).

Néanmoins, il peut sembler plus judicieux d'évaluer d'autres types d'énergie, comme par exemple l'énergie des flux acoustiques entrants et sortants au travers de frontières d'éléments, que l'on note également  $O_s$ , définie par :

$$J(\beta) = \int_{O_s \times [0, T]} (A^i n_i \varphi_\beta, A^i n_i \varphi_\beta)_{\mathbb{C}^{d+1}}, \quad (4.18)$$

où la matrice  $C$  correspondante est la matrice symétrique  $A^i n_i$ . Dans la suite, on appellera cette fonctionnelle "énergie surfacique". A titre d'exemple, pour  $d = 2$  et avec les notations précédemment adoptées, on a :

$$(A^i n_i \varphi_\beta, A^i n_i \varphi_\beta)_{\mathbb{C}^{d+1}} = (c_0^2 + V_n^2) |\varphi_\beta|^2 + c_0^2 n_1 n_2 \text{Re}(\bar{u}v) + 2V_n c_0 [n_1 \text{Re}(\bar{u}\rho) + n_2 \text{Re}(\bar{v}\rho)].$$

**Remarque 4.3.1** *La définition d'un procédé expérimental d'obtention de mesures pour en déduire, en fonction de ces qualifications, une fonctionnelle coût d'identification adéquate, est indispensable pour qualifier de manière pertinente la résolution du problème d'identification. A défaut de telles mesures, on se contentera dans les premiers tests numériques d'une minimisation, pour un  $\varphi_d$  donné sur un observatoire spatio-temporel  $O_s \times [0, T]$ , de la fonctionnelle :*

$$J_{id} = \int_{O_s \times [0, T]} |\varphi_\beta - \varphi_d|^2. \quad (4.19)$$

### 4.3.2 Modèle de réflexion acoustique pour matériaux poreux

Les sources de bruit d'un aéronef sont d'une part, le bruit aéronautique causé par l'écoulement d'air autour de la cellule, et d'autre part le bruit des moteurs. La seconde source de bruit, traitable par des matériaux absorbants, produit à la fois des bruits externes et internes, et si il existe déjà des traitements absorbants dans les zones froides des moteurs, les zones chaudes comme les tuyères (soumises à l'écoulement de gaz d'échappement) ne font pas l'objet de ce type de traitement. Dans [29], l'auteur étudie des empilements de billes creuses de nickel soudées entre elles, ce qui constitue un matériau cellulaire de porosité semi-ouverte multifonctionnel (bonne adaptation aux hautes températures, aux chocs thermiques, faible poids, bonne tenue mécanique et bonne dissipation de l'énergie acoustique de l'onde). Les propriétés acoustiques du matériau ainsi que l'influence de la géométrie sur l'absorption acoustique y sont étudiées, en faisant intervenir des modèles acoustiques descriptifs et des techniques prédictives que l'auteur compare aux mesures expérimentales (avec de très bons résultats). C'est ce modèle obtenu par homogénéisation que l'on se propose de présenter, afin de l'utiliser pour obtenir un modèle de réflexion acoustique pour des matériaux poreux équivalents et expérimentalement réalisables. Le modèle des tubes est un modèle simple de milieu poreux pour lequel les équations de la propagation du son sont complètement résolubles analytiquement et de plus ce modèle est à la base de la plupart des modèles de la littérature, qui en sont une généralisation à des matériaux poreux de topologie différente. Les équations de base sont celles de Navier-Stokes complètes. L'onde acoustique qui se propage est supposée de faible amplitude dans un milieu homogène, ce qui permet de linéariser ces équations autour du repos ( $U_0^i = 0, \rho = \rho_0, T = T_0$ ).

En notant  $(u', \rho', P', T')$ , les fluctuations au premier ordre (vitesse acoustique, densité acoustique, pression acoustique, température acoustique), on obtient le système :

$$\begin{cases} \rho_0 \partial_t u'^i + \partial_i P' + \mu \Delta u'^i & = 0 \\ \partial_t \rho' + \rho_0 \partial_i u'^i & = 0 \\ \rho_0 C_p \partial_t T' - K \Delta T' - \partial_t P' & = 0, \end{cases} \quad (4.20)$$

où  $C_p$  et  $K$  désignent la chaleur spécifique à pression constante et la conductibilité thermique du gaz. Les fluctuations  $P', \rho', T'$  sont reliées par l'équation des gaz parfaits linéarisée :

$$\frac{P'}{P_0} = \frac{T'}{T_0} + \frac{\rho'}{\rho_0} \quad (4.21)$$

A la frontière du milieu fluide et du squelette solide, un fluide visqueux vérifie une condition d'accrochage, ce qui revient à dire que le champ de vitesses perturbées est continu entre le fluide et le solide. Or le squelette est rigide en première approximation, et la condition d'accrochage devient une condition d'annulation de la vitesse à la frontière du solide ( $u'_{|\Gamma} = 0$ ). De même,  $T'_{|\Gamma} = 0$  (les parois sont supposées isothermes).

L'écoulement acoustique s'effectue dans un cylindre circulaire de rayon  $R$ , essentiellement suivant l'axe du cylindre, donc :  $u'_x = u'_y = 0 \Rightarrow \partial_x P' = \partial_y P' = 0$ . D'où l'équation :

$$\begin{cases} \rho_0 \partial_t u'_z + \partial_z P' + \mu \Delta u'_z = 0 \\ u'_z(r = R) = 0, \end{cases} \quad (4.22)$$

qui est la même que pour l'écoulement incompressible, mais la compressibilité est essentielle pour la suite. En résolvant l'équation (4.22) et en passant en variables de Laplace, on établit une relation entre  $u'_z$  et  $\partial_z P'$ , puis en désignant  $\langle u'_z \rangle$ , la vitesse moyenne sur une section, on aboutit à la première équation homogénéisée :

$$i\rho_{eff}(\omega)\omega \langle u'_z \rangle + \partial_z P' = 0, \quad (4.23)$$

où  $\rho_{eff}$  est la densité effective. Un travail analogue sur l'équation de la thermique dans (4.20), en utilisant la loi des gaz parfaits linéarisée (4.21) et la conservation de la masse linéarisée dans (4.20), permet d'aboutir à la seconde équation homogénéisée :

$$i\chi_{eff}(\omega)\omega P' + \partial_z \langle u'_z \rangle = 0, \quad (4.24)$$

où  $\chi_{eff}$  désigne la compressibilité effective. Le système constitué des deux équations (4.23) et (4.24) est un système pseudo-différentiel en temps et différentiel en la variable  $z$ . Une vérification a posteriori des hypothèses effectuées pour aboutir à ces équations est décrite dans ([29], p.185).

Pour une fréquence donnée, le modèle de densité effective le plus général est celui développé par les auteurs dans [57], et celui pour la compressibilité effective est dû à Lafarge [41] à partir de travaux et de généralisations effectués dans [39, 13].

La densité effective est donnée par :

$$\rho_{eff} = \rho_0 \alpha_\infty \left( 1 - i \frac{8\mu \left( 1 - p + p \left( 1 + \frac{C^2 \rho_0 \Lambda^2}{2p^2 8\mu} i\omega \right)^{\frac{1}{2}} \right)}{\rho_0 \Lambda^2 C \omega} \right), \quad (4.25)$$

où la racine carrée doit être prise dans le demi-plan complexe supérieur. On a  $\rho_0 = 1.2$  et  $\mu = 1.8 \cdot 10^{-5}$ . La tortuosité  $\alpha_\infty$  est un paramètre (scalaire pour des matériaux poreux isotropes) permettant de prendre en compte en partie l'écart de la géométrie à une géométrie invariante par translation, c'est-à-dire dont les pores sont des cylindres droits de section quelconque. Le paramètre  $\Lambda$  désigne une longueur caractéristique liée à la forme du tube.



La compressibilité effective de Lafarge est donnée par :

$$\chi_{eff} = \frac{1}{\gamma P_0} \left( \gamma - \frac{\gamma - 1}{1 - i \frac{8\mu \left( 1 - p' + p' \left( 1 + \frac{C'^2 \rho_0 \Lambda'^2 Pr i \omega}{2p'^2 8\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \right)}{\rho_0 Pr \Lambda'^2 C' \omega}} \right), \quad (4.26)$$

où  $Pr$  désigne le nombre de Prandtl (que l'on prendra égal à 1 pour simplifier) et  $\gamma$  le rapport des chaleurs spécifiques (égal à 1,4). La détermination de la racine carrée est encore le demi-plan complexe supérieur. En posant :

$$re = \frac{\rho_0 \Lambda^2 \omega}{8\mu},$$

et  $re'$  la même expression pour  $\Lambda'$ , on a que :

$$\begin{cases} \rho_{eff} = \rho_0 \alpha_\infty \left( 1 - \frac{i}{re} \left( 1 + \frac{ire}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ \chi_{eff} = \frac{1}{c_0^2 \gamma \rho_0} \left( \gamma - \frac{\gamma - 1}{1 - \frac{i}{re'} \left( 1 + \frac{re'}{2} i \right)^{\frac{1}{2}}} \right) \end{cases}. \quad (4.27)$$

### Application des modèles descriptifs au matériau étudié ; modèle de réflexion acoustique

On cherche à caractériser la capacité du matériau à dissiper l'énergie acoustique, donc il faut relier les grandeurs introduites par le modèle général, à savoir la densité et la compressibilité effective, avec la réflexion acoustique du matériau. On reprend la situation classique décrite dans ([29], p.53), représentée sur la figure 4.3.

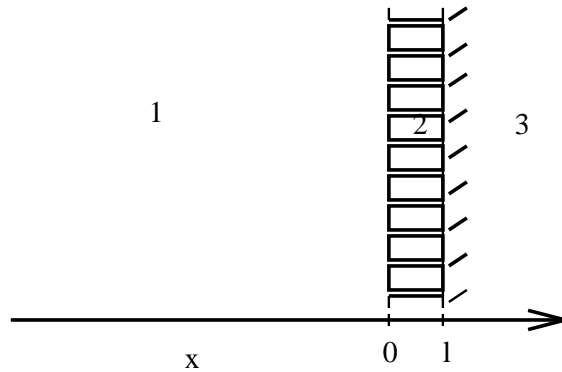


FIG. 4.3 – Matériau poreux absorbant revêtant une paroi rigide.

Une onde acoustique incidente sinusoïdale arrive par le milieu gazeux (1). Le problème est ici supposé unidimensionnel, c'est-à-dire que l'on considère que des ondes incidentes planes perpendiculaires aux interfaces entre les différents milieux. Elle va être partiellement réfléchie dans le milieu poreux rigide (2) et partiellement transmise dans ce même milieu. Arrivée à l'interface du milieu solide et rigide (3), elle va être complètement réfléchie, puis partiellement réfléchie par le milieu (1) et ainsi de suite. Les effets de surface sont supposés négligeables, ce qui permet d'écrire des conditions aux limites par continuité. En écrivant les équations de compatibilité, on obtient le modèle de réflexion acoustique recherché pour cette situation, donné par :

$$\beta = \frac{\rho_{eff}c - i\varphi\rho_0c_0 \tan(k'l)}{\rho_{eff}c + i\varphi\rho_0c_0 \tan(k'l)}, \quad (4.28)$$

où  $l$  est l'épaisseur du matériau (voir figure 4.3),  $c_0$  la célérité du son,  $c = \frac{1}{(\chi_{eff}\rho_{eff})^{\frac{1}{2}}}$  la célérité complexe dans le milieu poreux,  $k' = \frac{\omega}{c}$  le nombre d'ondes complexe du milieu poreux et enfin  $\varphi$  la porosité du matériau, paramètre exprimé en pourcentage désignant le volume du matériau accessible au fluide.

En adimensionnant la densité et la compressibilité effective par :

$$\begin{cases} \rho_{eff} &= \alpha_{\infty} \left( 1 - \frac{i}{re} \left( 1 + \frac{ire}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ \chi_{eff} &= 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma \left( 1 - \frac{i}{re'} \left( 1 + i\frac{re'}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)}, \end{cases} \quad (4.29)$$

on obtient l'expression du coefficient de réflexion acoustique suivante :

$$\beta = \frac{\rho_{eff} \left( 1 + e^{-2il\frac{\omega}{c_0}\sqrt{\rho_{eff}\chi_{eff}}} \right) - \varphi\sqrt{\rho_{eff}\chi_{eff}} \left( 1 - e^{-2il\frac{\omega}{c_0}\sqrt{\rho_{eff}\chi_{eff}}} \right)}{\rho_{eff} \left( 1 + e^{-2il\frac{\omega}{c_0}\sqrt{\rho_{eff}\chi_{eff}}} \right) + \varphi\sqrt{\rho_{eff}\chi_{eff}} \left( 1 - e^{-2il\frac{\omega}{c_0}\sqrt{\rho_{eff}\chi_{eff}}} \right)}. \quad (4.30)$$

Cette approche descriptive des matériaux est validée dans les travaux de [29], à travers plusieurs comparaisons effectuées entre des résultats théoriques issus du modèle d'absorption acoustique ( $1 - |\beta|^2$ ) et des mesures expérimentales, et ce sur des échantillons variés au niveau de la nature et de la taille des billes constituant le cylindre, ainsi que le mode d'empilement de celles-ci (empilement CFC, aléatoire). Ces résultats satisfaisants sont obtenus avec le modèle élémentaire  $C = C' = p = p' = 1$ , modèle que nous utiliserons donc pour notre étude.

L'expression de la réflexion acoustique (4.30), valable uniquement pour une fréquence donnée, est fonction de 5 paramètres :

$$\alpha_{\infty}, re(\Lambda), re'(\Lambda'), \varphi, l.$$

Pour la tortuosité scalaire, on choisit la valeur moyenne  $\alpha_{\infty} = 1.5$  établie à partir de la synthèse des mesures de la littérature présentée dans ([29], tableau p.60). Les contraintes pour les autres paramètres sont également établies à partir de ce même tableau, et correspondent à des intervalles

de valeurs qui nous permettent d'étudier (en fonction de la valeur de la fréquence) la sensibilité de la réflexion acoustique à ces paramètres au travers des figures (4.4, 4.5).

Sur chacune de ces figures, on représente le profil du module de la réflexion acoustique  $|\beta|$  en fonction de l'épaisseur  $l$  du matériau pour trois différentes porosités. Sur la figure 4.4, les valeurs des longueurs caractéristiques  $\Lambda$  et  $\Lambda'$  sont fixées à 0.1 mm et la fréquence est de 1000 Hz sur la figure de gauche contre 3000 Hz sur la figure de droite.

Sur chacune des figures, les allures des profils sont similaires en fonction de la porosité, avec toutefois une forte sensibilité des extrema du module de la réflexion acoustique en fonction de la porosité (les minima décroissent à mesure que la porosité croît). Les allures des profils sont également très différentes suivant la valeur de la fréquence. En conclusion, la figure 4.4 montre la forte sensibilité de la réflexion acoustique à la porosité et à la longueur du matériau, ainsi qu'à la fréquence (pour des valeurs des longueurs caractéristiques fixées).

La figure 4.5 met en lumière, la sensibilité de la réflexion acoustique aux longueurs caractéristiques  $\Lambda'$  et  $\Lambda$ . Dans le contexte applicatif de cette thèse, nous voulons modéliser l'obstacle solide de frontière  $\Gamma$  par un matériau poreux équivalent au sens du modèle développé dans [29]. Cette sensibilité du coefficient de réflexion acoustique local  $\beta = \beta(x)$  donné par (4.30) aux paramètres

$$re, re', \varphi, l,$$

justifie complètement de considérer ces 4 paramètres comme les nouvelles variables de contrôle pour la résolution des problèmes d'optimisation qui nous intéressent.

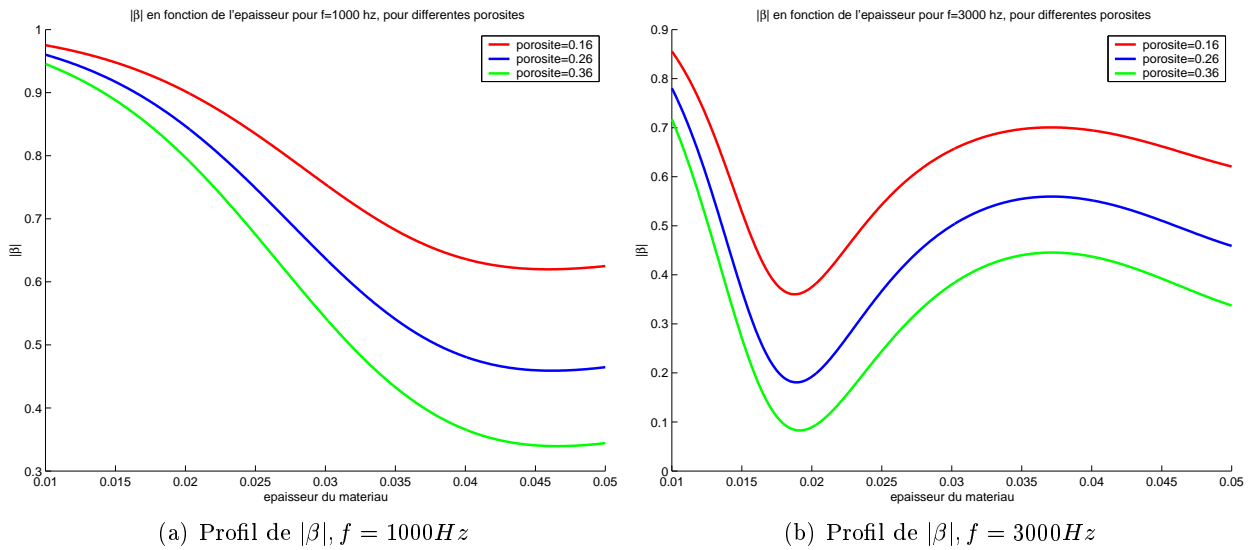


FIG. 4.4 – Module de la réflexion acoustique en fonction de l'épaisseur et de la porosité du matériau, pour  $\Lambda = \Lambda' = 0.1mm$  et 2 fréquences différentes.

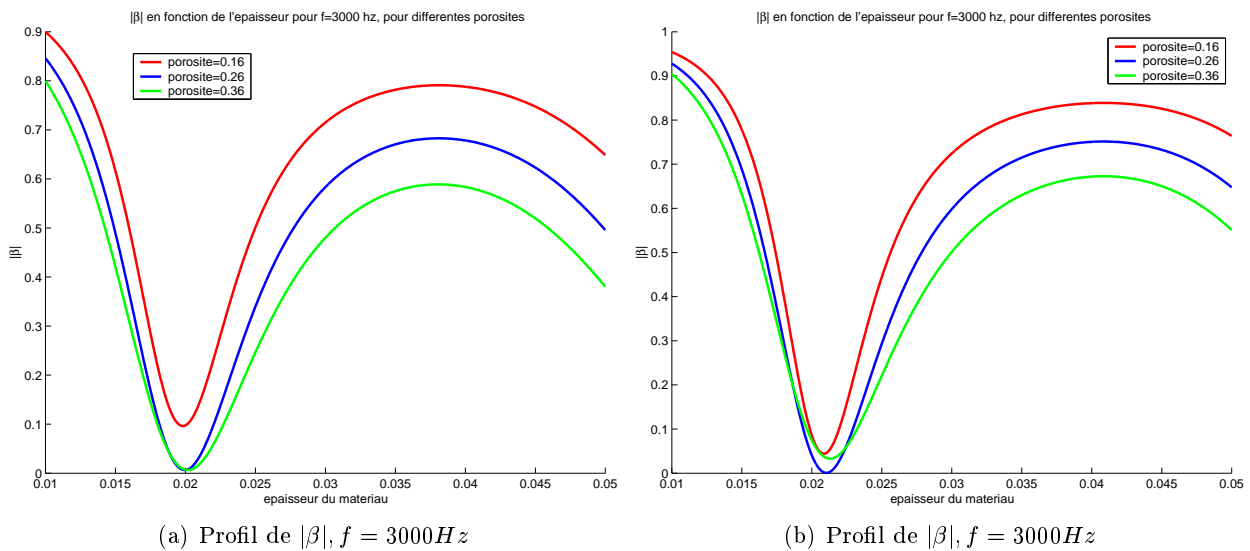


FIG. 4.5 – Module de la réflexion acoustique pour une fréquence donnée pour  $\Lambda = 0.2mm, \Lambda' = 0.1mm$  à gauche, et pour  $\Lambda = 0.2mm, \Lambda' = 0.3mm$  à droite.

On rappelle qu'en l'absence de contraintes physiques imposées par un modèle descriptif, il faut et il suffit que la réflexion acoustique appartienne au disque unité pour que les problèmes directs (1.22) et adjoints (1.23) soient bien posés en existence et unicité dans  $(L^2(Q))^{d+1}$ .

Pour le modèle descriptif (4.30), on représente sur les figures (4.6, 4.7, 4.8) la réflexion acoustique obtenue en fonction de la fréquence et d'un nombre très important de valeurs des quatre variables de contrôle (représentatives des différents modèles de la littérature repertoriés page 60 de [29]). Elles illustrent, suivant la fréquence, les domaines de réflexions acoustiques "admissibles" ou "physiquement réalisables", au sens où l'on est en mesure de réaliser expérimentalement des matériaux équivalents correspondants aux paramètres  $l, re, re'$ , et  $\varphi$  dont résultent ces réflexions acoustiques. Pour 1000 Hz, sur la figure 4.6, le disque unité se restreint à un domaine admissible où peu de valeurs imaginaires positives et de parties réelles négatives sont accessibles. Au delà de 2000 Hz, les domaines admissibles deviennent relativement semblables à ceux représentés en figures (4.7, 4.8), où les restrictions sur les valeurs complexes des réflexions acoustiques sont de moindre importance que pour la fréquence 1000 Hz, mais il apparaît néanmoins que tout le disque unité complexe n'est pas physiquement admissible pour le modèle de réflexion acoustique (4.30).

**Remarque 4.3.2** *Les résultats numériques présentés exhibent une forte dépendance de la sensibilité des paramètres mis en jeu dans le modèle descriptif de [29] à la fréquence. Les équations homogénéisées (4.23) et (4.24) sont valables à fréquence fixe, et ont nécessité quelques simplifications des phénomènes physiques réellement mis en jeu. Il s'agit d'une première modélisation qui sera utilisée dans la suite de cette thèse pour les applications numériques. Toutefois, dans un cadre d'application moins restrictif, cette dépendance à la fréquence nécessiterait de relever en temps ces équations. En effet, le problème inverse qui nous intéresse est non linéaire, donc il ne peut suffire de superposer des sources à différentes fréquences fixées pour simuler une source à fréquence variable dépendante du temps. Cette perspective d'étude nécessiterait l'utilisation d'un développement (par exemple de type Padé), puis l'étude du caractère bien posé de ces nouvelles équations instationnaires couplées avec le problème d'aéroacoustique. De plus, même dans ce cas, l'étude théorique et numérique du nouveau problème inverse associé doit être menée.*

Quoiqu'il en soit, les paramètres du milieu poreux homogénéisé  $\varphi, l, re, re'$  deviennent les fonctions de contrôle pour le problème d'optimisation, et celui-ci, écrit en fonction de la variable  $\beta(x)$  originelle, doit donc être reformulé à l'aide de ces nouveaux paramètres *physiquement* significatifs. En particulier, l'expression des gradients de la fonctionnelle coût en fonction de  $\beta$ , de la solution du problème direct et du problème adjoint, est modifiée par ce changement de variable. D'après (4.30), les dérivées partielles  $\partial_\varphi\beta$  et  $\partial_l\beta$  ne posent aucune difficulté, car elles ne font pas intervenir d'autres déterminations de racines complexes que celles déjà mises en jeu dans (4.30).

De même, le principe de causalité décrit dans ([29], p. 49) qui permet de justifier dans une certaine mesure les modèles de  $\rho_{eff}$  et  $\chi_{eff}$ , lève les déterminations des racines carrées complexes (la détermination des racines carrées mises en jeu est toujours le demi-plan complexe supérieur), et permet de définir par les règles de calcul différentiel élémentaires les expressions de  $\partial_{re}\rho_{eff}$ ,  $\partial_{re'}\chi_{eff}$ , et par suite, les expressions de  $\partial_{re}\beta$  et  $\partial_{re'}\beta$ . Par conséquent, on explicite les dérivées partielles de la fonctionnelle coût  $J(\beta)$ ,

$$\partial_\varphi J, \partial_l J, \partial_{re} J, \partial_{re'} J,$$

à l'aide du calcul différentiel et des règles sur la composition.

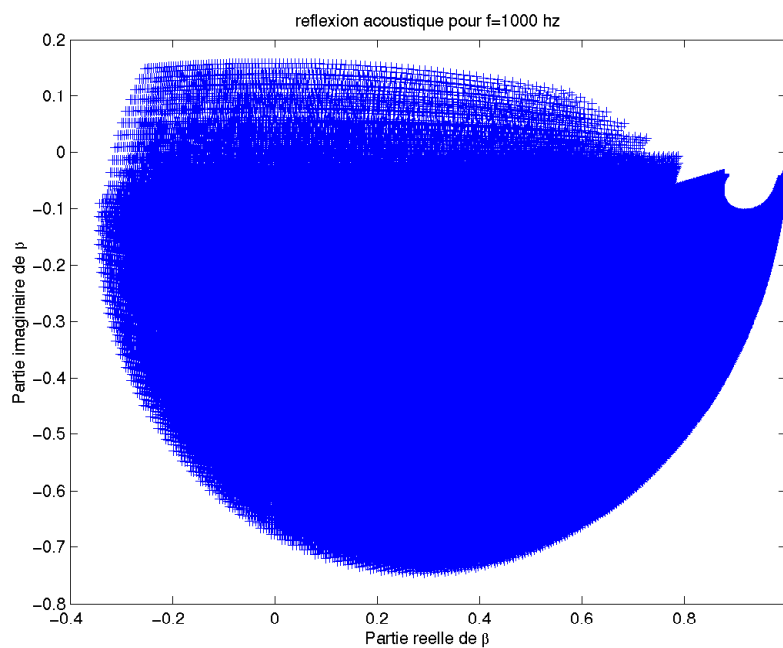


FIG. 4.6 – Domaine des  $\beta$  admissibles pour  $f = 1000$  Hz.

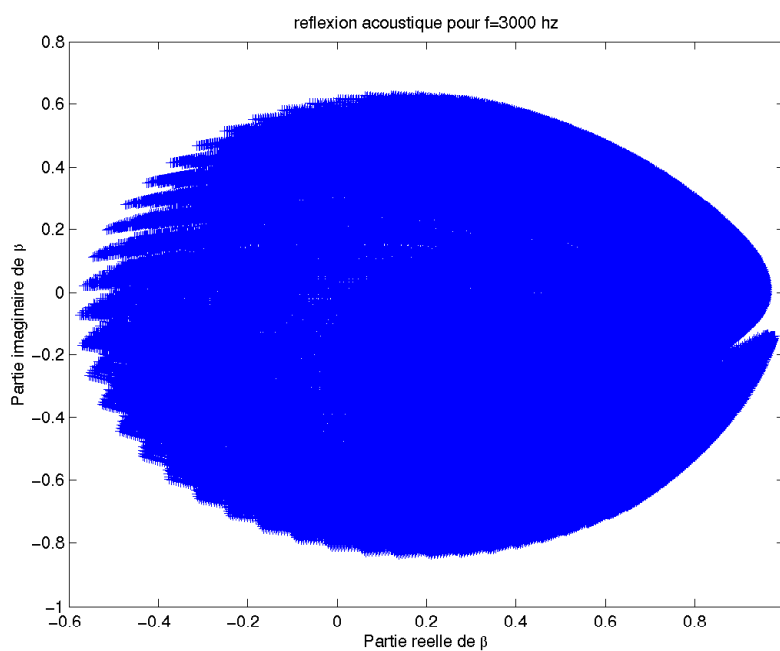


FIG. 4.7 – Domaine des  $\beta$  admissibles pour  $f = 3000$  Hz.

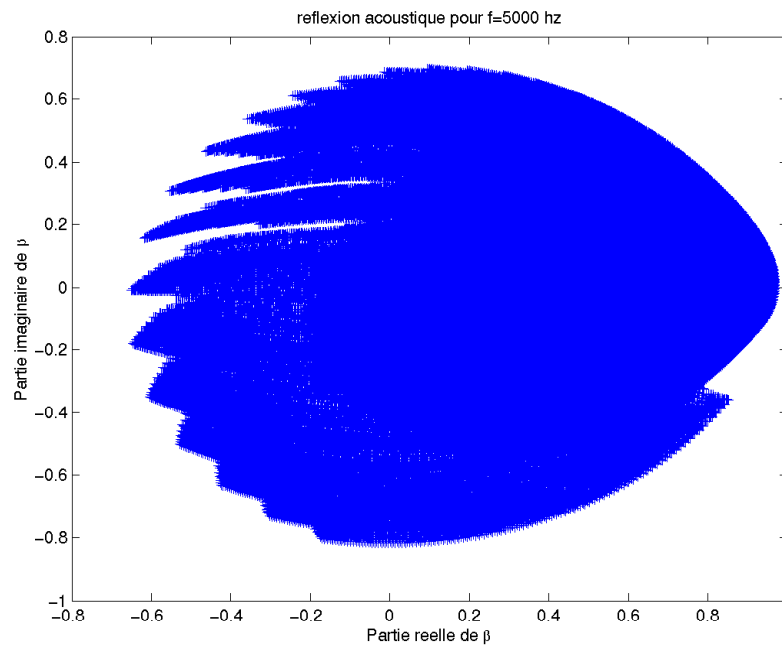


FIG. 4.8 – Domaine des  $\beta$  admissibles pour  $f = 5000$  Hz.

Dans le cas de l'étude monodimensionnelle des problèmes inverses en acoustique pure, l'existence et l'unicité d'un coefficient de réflexion acoustique optimal a été démontrée (section 4.1). Pour les fonctions objectifs qui nous intéressent, nous n'avons pas pu (ou su) démontrer un résultat analogue pour une configuration bidimensionnelle quelconque, même dans le cas de l'acoustique pure. En particulier, nous n'avons pas réussi à démontrer la quasi-convexité de la fonctionnelle objectif (assurée en 1D), c'est-à-dire à montrer que le problème inverse est faiblement non linéaire [14]. Comme il a été rappelé dans l'introduction de ce chapitre, le problème inverse est sévèrement mal posé. Des conséquences, dont une liste non exhaustive a été présentée, rendent primordiale une étude préalable de sensibilité du problème direct discrétisé par rapport aux paramètres mis en jeu (coefficients de réflexion acoustique, nature des sources, forme et localisation de l'observatoire, ...). Cette étude doit notamment permettre d'orienter le choix de l'algorithme d'optimisation en fonction des propriétés géométriques apparentes de la fonction objectif évaluée pour certaines configurations géométriques, à la fois plus simple et suffisamment "proche" des configurations géométriques finales visées. Il s'agit par exemple, dans un premier temps, de vérifier numériquement si la propriété de convexité de la fonctionnelle objectif semble persister pour des cas tests bidimensionnels, "similaires" aux cas tests numériques que l'on désire exploiter.

#### 4.4 Etude de sensibilité et choix de l’algorithme d’optimisation

On utilise de nouveau la configuration géométrique bidimensionnelle traitée dans le chapitre 3, et illustrée par la figure 4.9. Les deux types de sources de bruit envisagées (ponctuelles ou modales) sont indiquées en bleu sur la figure et l’observatoire spatial surfacique qui sera considéré en rouge (en fait constitué des frontières internes communes aux éléments voisins).

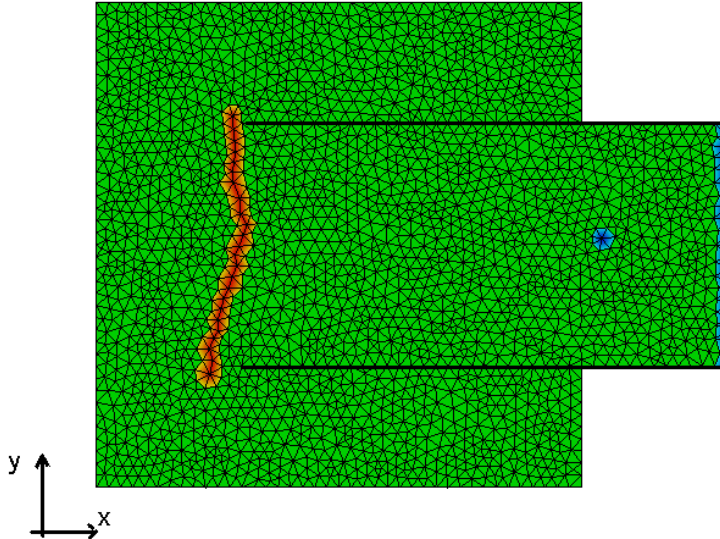


FIG. 4.9 – Maillage bidimensionnel représentatif d’une prise d’air.

L’obstacle solide est un canal, de longueur 1m par 50cm, constitué de deux parois d’épaisseurs négligeables par rapport à leurs longueurs (les parois sont volontairement épaissies pour faciliter la visualisation). Une épaisseur de parois non négligeable nécessiterait un calcul préalable d’écoulement porteur satisfaisant aux équations d’Euler pour ce type de géométrie, mais l’épaisseur peut être considérée suffisamment régulière afin d’assurer les hypothèses techniques nécessaires à la démonstration du théorème 1.3.9.

Les sources de bruit suffisamment pertinentes sont soit de type Dirac en espace et sinusoïdale en temps, soit de type source modale distribuée sur la frontière d’entrée du canal. **Dans un premier temps**, on considérera une source de type **Dirac en espace et sinusoïdale en temps**, uniquement en la variable  $\rho$ , donc irrotationnelle. Des couches PML cartésiennes non représentées sur la figure sont implémentées autour du domaine de calcul à l’instar de celles utilisées dans le chapitre 3. Sur ce type de configuration géométrique de domaine, l’écoulement porteur sera nécessairement à convection nulle ou à convection uniforme, car nous ne disposons pas d’autres écoulements porteurs explicites qui soient solution des équations d’Euler instationnaires pour ce type de géométrie. Par convention, l’écoulement porteur  $U_0 = cte$  est propagé dans la direction des  $x$  positifs.

Les localisations spatialement opposées de la source de bruit et de l’observatoire spatial par rapport au sens de propagation de l’écoulement porteur de la source de bruit de l’écoulement porteur n’est pas anodine. En effet, l’énergie acoustique augmente en “remontant” l’écoulement. Une démonstration pour une configuration monodimensionnelle de ce résultat est équivalente à une démonstration dans une configuration géométrique bidimensionnelle où la source de bruit est invariante par translation (ce qui est notre cas). Or, dans le cas monodimensionnel, notre système



s'écrit ( $c_0 = 1$ ,  $U_0 = M$ ) :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + M \partial_x \rho + \partial_x u &= \delta \otimes e^{i\omega t} \\ \partial_t u + M \partial_x u + \partial_x \rho &= 0, \end{cases} \quad (4.31)$$

et en posant  $S = \rho + u$  et  $m = \rho - u$ , on obtient :

$$\begin{cases} \partial_t S + (M + 1) \partial_x S &= \delta \otimes e^{i\omega t} \\ \partial_t m + (M - 1) \partial_x m &= \delta \otimes e^{i\omega t}. \end{cases}$$

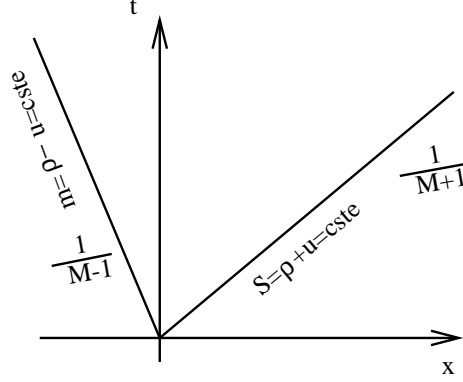


FIG. 4.10 – Analogie monodimensionnelle pour une source invariante par translation.

Une résolution par la méthode des caractéristiques donne, en  $(0^+, t)$ ,

$$\begin{cases} \rho^+ + u^+ &= \frac{e^{i\omega t}}{M + 1} \\ \rho^+ - u^+ &= 0, \end{cases}$$

et en  $(0^-, t)$ ,

$$\begin{cases} \rho^- + u^- &= 0 \\ \rho^- - u^- &= \frac{e^{i\omega t}}{1 - M}. \end{cases}$$

Les solutions sont donc données explicitement par :

$$\begin{cases} \rho^+ &= \frac{e^{i\omega t}}{2(M + 1)} \\ \rho^- &= \frac{e^{i\omega t}}{2(1 - M)} \\ u^+ &= \frac{e^{i\omega t}}{2(M + 1)} \\ u^- &= -\frac{e^{i\omega t}}{2(1 - M)}. \end{cases} \quad (4.32)$$

Par conséquent, l'augmentation des amplitudes en remontant l'écoulement est égale au rapport

$$\frac{1 + M}{1 - M},$$

tandis que la diminution de la vitesse de remontée est dans le rapport inverse.

Dans le cadre de cette étude de sensibilité, l'écoulement porteur considéré sera à convection nulle ( $V_n = 0$ , acoustique pure). Les conditions géométriques d'observabilité sont donc analogues à celles étudiées pour l'équation des ondes dans [46].

Les paramètres locaux de réflexion acoustique ou d'impédances ne dépendent pas du temps, mais uniquement de la localisation spatiale sur les parois,  $\beta = \beta(x)$  ou  $\alpha = \alpha(x)$ . Ces paramètres locaux seront considérés à valeurs réelles pour cette étude de sensibilité. La partie de la frontière de l'obstacle solide où les paramètres seront variables,  $\Gamma_c$ , est constituée des parois internes du canal. Sur les parois externes du canal, soit  $\overline{\Gamma}_c$ , une condition d'obstacle dur est imposée. Les hypothèses du théorème 1.3.9

$$\forall x \in \Gamma, \beta(x) \in C^0(\overline{\Gamma}_c, \mathbb{R}) \cap C_m^1(\Gamma_c, \mathbb{R}),$$

sont par conséquent vérifiées.

Le temps d'observabilité  $T$  sera suffisamment grand pour avoir atteint le régime périodique de la solution. L'approximation du problème direct (1.22) est du type  $P^1$  Lagrange en espace et Runge-Kutta d'ordre 2 en temps. Dans un premier temps, on étudie la sensibilité de la fonctionnelle objectif à la localisation spatiale de la source, pour une géométrie de canal donnée et un observatoire surfacique donné en sortie de canal (voir figure 4.9). Sur la figure 4.11, on représente les profils des fonctionnelles coût  $J(\alpha)$  et  $J(\beta)$  obtenus pour une configuration de canal de 4 longueurs d'ondes par 2 longueurs d'ondes, où la variable de contrôle, indifféremment la réflexion acoustique ou l'impédance, est scalaire et identique sur chacune des parois internes. Le maillage est régulier avec 10 éléments par longueurs d'ondes. La source ponctuelle est en pression, sinusoïdale et de fréquence 1360 Hz.

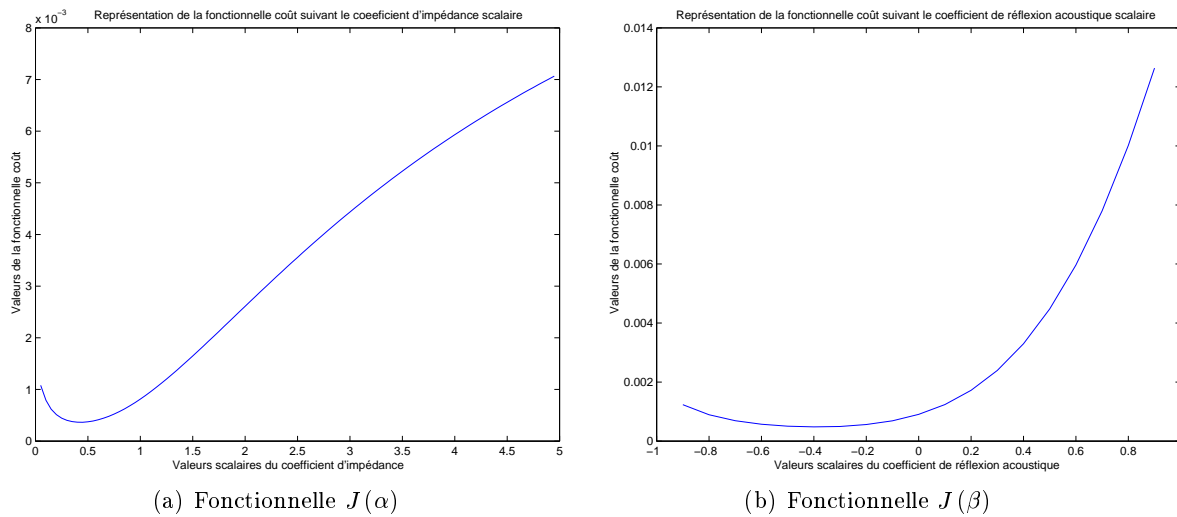


FIG. 4.11 – Fonctionnelles objectif.

A l'instar de l'étude monodimensionnelle, deux conclusions essentielles découlent de ces premiers résultats numériques :

1. La fonctionnelle  $J(\beta)$  est strictement convexe, tandis que la fonctionnelle  $J(\alpha)$  correspondante ne l'est pas. La réécriture de la condition d'impédance locale en la condition de réflexion acoustique locale semble convexifier la fonctionnelle objectif. Un algorithme d'optimisation adéquat pour la résolution des problèmes inverses qui nous intéressent semble donc être un algorithme de type quasi-Newton avec contraintes.
2. La réflexion acoustique optimale réelle n'est pas celle du vide pour cette configuration de canal ( $\beta = 0$ ), ni même une autre valeur remarquable caractérisant une condition d'obstacle dur ou mou. La résolution du problème de contrôle optimal dans sa globalité, sans raisonnements locaux, même pour des valeurs de paramètres de réflexions acoustiques réels, semble donc pertinente.

La sensibilité du problème à la localisation de la source peut être illustrée par la figure 4.12, où la source ponctuelle est déplacée vers l'amont, au milieu du canal. La non convexité de la fonctionnelle  $J(\alpha)$  est dans ce cas encore plus prononcée que pour la configuration où la source ponctuelle est plus proche de l'entrée du canal. La convexification par la réécriture de la condition d'impédance en la condition de réflexion acoustique est encore vérifiée pour cette localisation de source.

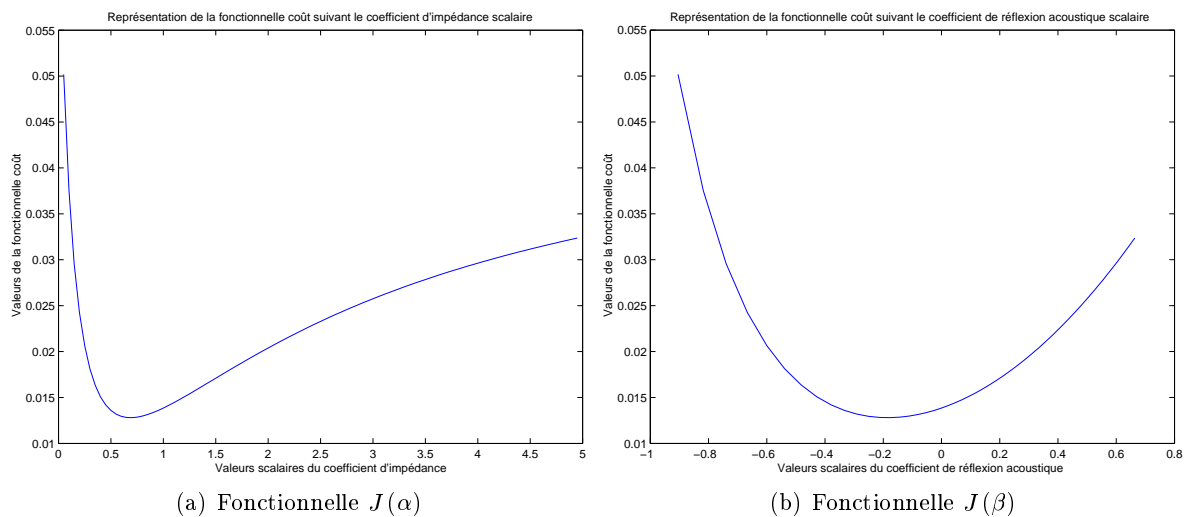


FIG. 4.12 – Fonctionnelles objectif.

## Conclusion

Ces figures illustrent une importante propriété numériquement apparente de la formulation de la condition d'impédance locale en la condition de réflexion acoustique locale, autre que celles déjà démontrées (conditions aux limites unifiées, uniformité du CFL) : la convexification de la fonctionnelle objectif. Nous n'avons pas pu (ou su) démontrer ce résultat théorique, les difficultés étant essentiellement dûes au caractère non linéaire du paramètre  $\beta$  intervenant dans l'explicitation des gradients (4.9). Ceci laisse toutefois augurer d'une bonne efficacité numérique quant à sa recherche de minima. Les difficultés inhérentes à la résolution de problèmes inverses ne sont pas évitées, puisque les minima semblent se situer dans des zones de faibles variations de la fonctionnelle objectif. De plus, toutes nos tentatives de démonstration de l'existence éventuelle d'une solution au problème de contrôle optimal pour ce type de fonctionnelle objectif n'ont pas abouti (convexité, faible non-linéarité, ...).

A travers une étude de sensibilité à 2 paramètres de réflexion acoustique réels, soit deux paramètres scalaires sur chacune des parois internes, nous allons voir que, pour des sources de bruit localisées à l'entrée du canal, d'une part la convexité de la fonctionnelle persiste et, d'autre part la sensibilité à la géométrie du canal (longueurs caractéristiques) est très importante.

La configuration géométrique utilisée reste celle de la figure 4.9, mais on modifie les longueurs caractéristiques (en longueurs d'ondes) du canal. Sur la figure 4.13, la valeur de la fonctionnelle objectif est représentée en fonction des deux valeurs scalaires réelles des coefficients de réflexion acoustique sur les deux parois internes du canal, et ce pour différentes longueurs d'ondes caractéristiques (indiquées sous les figures correspondantes, longueur  $\times$  largeur).

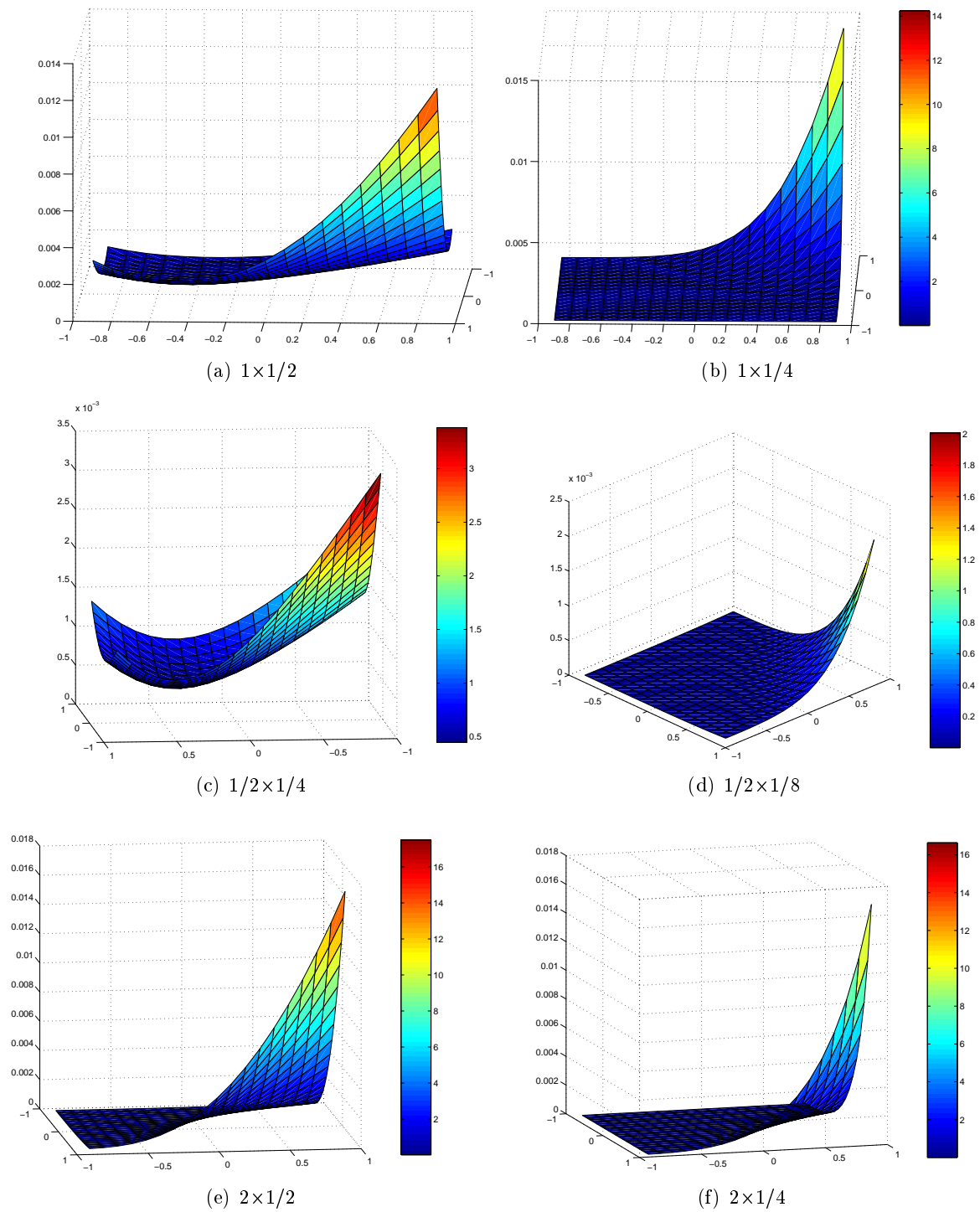
## Conclusion

En conclusion de cette étude de sensibilité, le problème semble extrêmement mal conditionné, même à 2 paramètres, pour les configurations géométriques de canal choisies. La fonction objectif semble bien être convexe (ce qui n'a d'ailleurs jamais été mis en défaut dans d'autres cas tests numériques non illustrés), mais les zones où se trouvent le minimum sont extrêmement plates.

D'autre part, en excitant le canal uniquement à l'entrée, pour un canal assez étroit en longueur d'ondes, la condition d'obstacle mou semble privilégiée. Ceci n'est pas très étonnant a priori : la condition de glissement parfait privilégie le transport d'énergie par modes longitudinaux et la condition d'obstacle mou a tendance à la "piéger" par modes transversaux (par exemple, dans un canal infini, en effectuant une décomposition en série de Fourier dans le sens longitudinal, le mode constant est annulé par la condition d'obstacle mou, alors qu'il subsiste dans le cas de la condition de glissement parfait).

Ces quelques tests numériques pourraient laisser présager d'un mauvais conditionnement pour le problème d'identification et d'une certaine indifférence au nombre de paramètres pris pour inconnues dans le problème de contrôle. Il est évident que pour d'autres types de sources (linéiques, distribuées en modes sur la frontière, rotationnelles, ...), ou en présence d'écoulement privilégiant une direction, ce conditionnement pourrait être meilleur.

Dans le cadre de notre étude, les cas pathologiques pour l'intérêt de la résolution du problème de contrôle ne sont pas pertinents. En effet, les longueurs d'ondes caractéristiques ne sont pas significatives d'une prise d'air réaliste, approximativement d'un mètre de longueur et de 50 cm de largeur. Ces rapports de longueurs caractéristiques correspondent donc beaucoup plus aux cas tests traités où les coefficients de réflexion acoustique optimaux sont non intuitifs. De plus, un type de source bruit monochromatique (seul cas où l'on peut relier la réflexion acoustique à un matériau poreux au sens du modèle de [29]) plus proche de la réalité (ce point clé étant le plus délicat de la modélisation) nous semble être une distribution modale à la frontière de l'entrée du canal.

FIG. 4.13 – Fonctionnelle  $J(\beta)$  pour différentes longueurs caractéristiques.

Deux résultats importants peuvent guider notre choix d'algorithme d'optimisation :

1. Nous disposons d'une explicitation des gradients dans toutes les directions de la fonction objectif (cette explicitation restant valable lors de la discrétisation des problèmes (1.22) et (1.23) par la méthode de Galerkin discontinue décentrée).
2. La fonction objectif semble convexe.

Par conséquent, un algorithme BFGS-B (de type quasi-Newton avec contraintes) nous semble approprié.

### L'algorithme BFGS

Dans le cadre de l'optimisation sans contraintes, pour résoudre la condition d'optimalité :

$$g(x^*) = \nabla f(x^*) = 0,$$

en partant de  $x^k$ , la méthode de Newton remplace  $g$  par son approximation linéaire et revient à résoudre l'équation

$$\nabla^2 f(x^k) d^k = -\nabla f(x^k).$$

La direction de déplacement  $d^k$  est une direction de descente uniquement si la matrice hessienne (dont l'évaluation est nécessaire pour appliquer la méthode de Newton) est définie positive.

Le principe des méthodes de quasi-Newton est de remplacer l'inverse de la matrice hessienne par une matrice  $W^k$  beaucoup plus simple telle que :

$$d^k = -W^k \nabla f(x^k),$$

avec les  $W^k$  qui constituent une séquence de matrices symétriques définies positives qui soient des approximations toujours améliorées de l'inverse de la matrice hessienne. On note  $M^k$ , l'approchée de  $\nabla^2 f(x^k)$  correspondante. Au point courant  $x^k$ , si  $g^k = \nabla f(x^k)$  désigne le gradient au point courant à l'itération  $k$ , l'algorithme génère une direction de descente  $d^k$  en résolvant le système linéaire :

$$M^k d^k = -g^k.$$

Une fois la direction de descente  $d^k$  obtenue, le nouveau point d'itération  $k+1$  est trouvé en pratiquant une recherche linéaire le long de cette direction (par exemple de type recherche de Wolfe). Si le nouveau point  $x^{k+1}$  ne satisfait pas au critère de convergence, une nouvelle approximation  $M^k$  est définie par une formule de remise à jour du type :

$$M^{k+1} = \eta^k M^k + U^k,$$

où  $\eta^k$  est un réel et  $U^k$  une matrice choisie de telle sorte que  $M^{k+1}$  soit symétrique définie positive. Ces mises à jour satisfont toutes à l'équation de quasi-Newton

$$\nabla f(x^k) - \nabla f(x^{k+1}) = M^{k+1} (x^k - x^{k+1}).$$

Actuellement, l'unanimité est faite autour de la mise en jour formulée par Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno (1970, BFGS), et éventuellement sa modification par Powell. En effet, de nombreux travaux ont depuis validé cette approche, à la fois pour des problèmes de grandes tailles, et pour des problèmes de minimisations non linéaires avec contraintes de bornes sur les variables. Ces recherches

ont abouti à des algorithmes L-BFGS-B, algorithmes BFGS-B à mémoire limitée ([52]), pour lesquels l'efficacité a été prouvée dans le cas sans contraintes [47, 30], et dans le cas de contraintes avec bornes [12].

Dans le cadre de la modélisation des matériaux poreux par le modèle de [29], les contraintes sont des bornes sur les quatres variables physiques  $l, \varphi, re, re'$ . Dans le cadre de l'optimisation avec contraintes mathématiques ( $|\beta| \leq 1$ ), on peut dans un premier temps borner les parties réelles et les parties imaginaires, et modifier éventuellement dans un second temps ces bornes si les premières contraintes sont saturées au cours du calcul. On adoptera donc, pour nos résolutions numériques de problèmes inverses, un algorithme L-BFGS-B avec contraintes de bornes de ce type (développé par une équipe universitaire danoise, et à libre disposition sur internet à des fins de recherche).





## Chapitre 5

# Résultats numériques : Gains et identifications

L'étude monodimensionnelle du problème de contrôle optimal a déjà mis en lumière que, d'une part l'intuition "physique" qui consiste à laisser "sortir" les ondes normales n'est pas une condition optimale pour la réduction de bruit évaluée sur un observatoire spatio-temporel, et que d'autre part la résolution explicite du problème de contrôle était très dépendante de la géométrie (position de la source par rapport à celle de l'observatoire). L'étude de sensibilité effectuée sur un cas test bidimensionnel proche de celui que l'on désire exploiter, tend à confirmer la pertinence de la résolution du problème de contrôle dans sa globalité, même en considérant les variables de contrôle à valeurs réelles. Nous allons dans ce chapitre, expliciter et interpréter les résultats de contrôle optimal et d'identification obtenus pour une prise d'air suffisamment réaliste illustrée par la figure 4.9, pour lequel le canal sera de dimension caractéristique d'un mètre en longueur et de 50 cm en largeur.<sup>1</sup> Pour pouvoir considérer des sources de bruit excitées dans une plage de fréquence [1000 – 3000] Hz tout en conservant le même maillage du domaine, on utilise les résultats de l'étude de l'erreur de dissipation numérique effectuée dans [25], suivant l'ordre d'approximation spatial de la méthode Galerkin discontinue et la précision du maillage. Elle nous assure, que pour une approximation  $P^1$  Lagrange, un maillage en 5 éléments par longueur d'onde est suffisamment précis. Le maillage du canal considéré sera par conséquent de 40 par 20 éléments triangulaires réguliers (figure 5.1).

Dans le contexte de l'aéroacoustique, l'inexactitude des conditions aux limites non réfléchissantes sur les bords du domaine  $\Omega$  a été illustrée au chapitre 3. Les réflexions causées par ce type de conditions ont une répercussion notable en termes d'erreurs entre la solution numérique et la solution exacte, et ce dans tout le domaine  $\Omega$ , donc en particulier pour la solution localisée sur l'observatoire. Il est par conséquent nécessaire de résoudre la formulation système augmenté CPML du problème direct (1.22) et du problème adjoint (1.23). Les couches PML cartésiennes, illustrées sur la figure 5.1, sont au nombre de 10 dans chaque direction spatiale (les valeurs des intégrales de  $\sigma(x)$  et  $\sigma(y)$  sont constantes dans chacune de ces couches PML).

La résolution des problèmes inverses consiste en l'optimisation ou l'identification des paramètres de réflexion acoustique locaux localisés sur les parois internes au canal, de sorte à minimiser les fonctionnelles objectif  $J(\beta)$  ou  $J_{id}(\beta)$ .

Les résultats théoriques de cette thèse ne présupposent pas d'invariance des coefficients de réflexion acoustique par rapport au temps. Toutefois, on rappelle que le modèle développé dans [29] ou tout autre modèle de la littérature, permettant de relier ces coefficients complexes à des

---

<sup>1</sup>L'étude de sensibilité a montré que cette configuration ne semble pas faire partie des cas pathologiques pour l'intérêt de la résolution du problème de contrôle optimal.

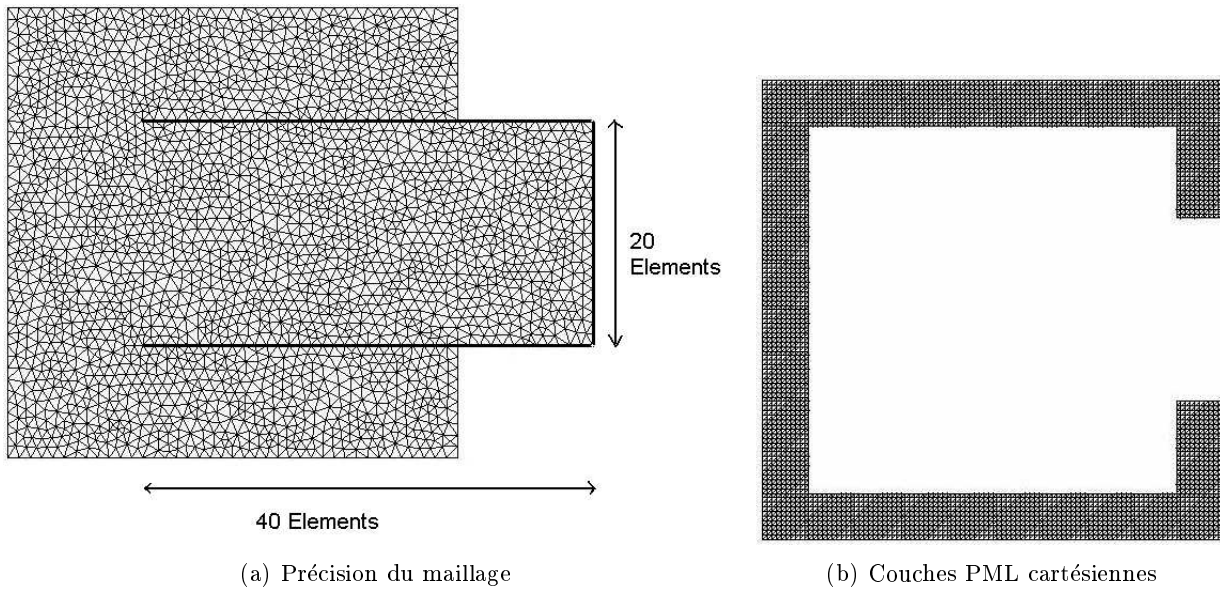


FIG. 5.1 – Précision du maillage représentatif d’une prise d’air bidimensionnelle.

matériaux poreux équivalents, ne sont valables que pour des sources de bruit monochromatiques. Pour pouvoir appliquer de tels modèles, nous chercherons donc des distributions de paramètres sur les parois internes constants au cours du temps. Les problèmes de contrôle optimaux que l’on va numériquement résoudre seront par conséquent des problèmes de contrôle passif. Sur les parois externes du canal, soit  $\overline{\Gamma}_c$  pour reprendre nos notations, une condition d’obstacle dur est imposée :  $\forall x \in \overline{\Gamma}_c, \beta(x) = (1, 0)$  (l’extérieur de la prise d’air est bien entendu supposée être une surface rigide).

On rappelle que l’algorithme d’optimisation mis en oeuvre est un algorithme de type quasi-Newton, l’algorithme L-BFGS-B. Pour obtenir les valeurs des gradients dans une direction donnée, étape nécessaire pour ce type d’algorithme (mais qui ne nécessite pas la connaissance des Hessiens), il nous faut résoudre un problème adjoint (1.23) dont le second membre dépend de la solution du problème direct (1.22). Par conséquent, chaque étape de l’algorithme d’optimisation L-BFGS-B nécessite la résolution d’un problème direct et d’un problème adjoint.

## 5.1 Contrôle optimal : réduction du bruit

Dans un premier temps, notre but est de montrer l’apport de la prise en compte dans toute sa complexité de la résolution du problème de contrôle optimal par rapport à un raisonnement local qui consisterait en l’application d’un milieu (les parois du canal) d’absorption acoustique maximale pour les ondes normales, donc en l’application de la condition aux limites scalaire  $\beta(x) = (0, 0)$  sur l’ensemble des deux parois internes. On cherche donc, suivant la nature de l’écoulement porteur, une distribution de paramètres complexes localisés sur les parois internes du canal, qui mette en défaut ce raisonnement local.

Pour cela, les contraintes sur ces coefficients de réflexion acoustique, seront soit du type  $|\beta(x)| \leq 1$  (appelées contraintes *mathématiques*), soit en relation avec les contraintes appelées contraintes *physiques* (contraintes sur les porosités, sur les deux longueurs caractéristiques, et sur l’épaisseur du matériau homogénéisé) liées au modèle physiquement réalisable de matériau poreux développé

dans [29]. On rappelle que toutes les réflexions acoustiques du disque unité complexe ne sont pas équivalentes à un milieu poreux : la dépendance à la fréquence de la source est illustrée sur les figures (4.6, 4.7, 4.8). Néanmoins, on peut toujours réaliser l'absorption acoustique maximale pour les ondes normales ( $\beta(x) = (0, 0)$ ). On pourra donc, pour les deux types de problèmes d'optimisation avec contraintes *mathématiques* ou *physiques*, comparer les résultats obtenus avec un raisonnement local consistant à appliquer cette absorption parfaite des ondes normales comme critère d'optimalité pour la réduction de bruit en sortie de canal.

Dans le but de valider notre travail, nous effectuerons donc systématiquement une comparaison entre la valeur de la fonction objectif caractérisant le flux acoustique sortant du canal obtenue pour la réflexion acoustique scalaire fixée à  $\beta(x) = (0, 0)$  sur chacune des deux parois internes du canal et la valeur obtenue pour une certaine répartition de réflexions acoustiques locales sur ces parois, et ce par la résolution de la méthode d'optimisation. La fonction Gain (en dB) définie par :

$$G = 20 \log \left( \frac{J_{\beta=(0,0)}}{J_{optimale}} \right), \quad (5.1)$$

permettra alors de quantifier la réduction de bruit supplémentaire obtenue à l'aide de cette répartition de paramètres par rapport à celle que l'on obtiendrait par la seule application d'un raisonnement local a priori intuitif. Cette distribution des paramètres de réflexion nécessite que l'on puisse augmenter le nombre de variables de contrôle inconnues dans la résolution du problème de contrôle optimal passif. A cette fin, on adopte une méthode multigrille. Elle consiste en la résolution des étapes suivantes :

1. Une résolution scalaire du problème de contrôle. On cherche un coefficient de réflexion acoustique optimal complexe constant sur chacune des deux parois internes du canal (pour cela, l'initialisation de l'algorithme est fixée à  $\beta(x) = (0, 0)$ ).
2. Le paramètre optimal complexe ainsi obtenu est ensuite pris comme initialisation pour la résolution du problème de contrôle à deux paramètres.
3. On procède ainsi de suite en utilisant à chaque nouvelle étape les valeurs obtenues à l'étape précédente comme nouvelle initialisation pour l'algorithme L-BFGS-B, la répartition des paramètres inconnus se faisant alors de manière projective (de type barycentrique, moindres carrés, ...).

### 5.1.1 Source ponctuelle et paramètres réels

Tout d'abord, on se propose de résoudre le problème de contrôle optimal associé au cas test numérique de l'étude de sensibilité. On rappelle que pour cette configuration géométrique de canal et pour une source ponctuelle de type Dirac en espace et sinusoïdale en temps (de type  $\sin(\omega t)$ ), le coefficient de réflexion acoustique scalaire réel optimal obtenu n'est pas un coefficient significatif (ne correspondant à aucune condition d'obstacle significative). Toutefois, les tests effectués à l'aide de 2 paramètres scalaires laissent présager d'un mauvais conditionnement pour le problème d'identification et d'une certaine indifférence au nombre de paramètres pris pour inconnus dans la résolution du problème de contrôle. On rappelle que l'on traite dans ce cas un écoulement porteur à convection nulle, soit l'acoustique pure.

Dans le tableau 5.1 sont regroupées les valeurs des gains obtenues par l'application de la méthode multigrille d'optimisation avec des contraintes *mathématiques* réelles, pour une source ponctuelle localisée à l'entrée du canal, excitant uniquement la pression à la fréquence de 1360 Hz. On impose une distribution symétrique des paramètres sur chacune des parois internes du canal, d'une part car une dimension de 80 paramètres serait trop importante pour la résolution du problème de contrôle

numérique, et d'autre part les valeurs des paramètres inconnus obtenus dans les premières étapes de la méthode multigrille sont symétriques (la source ponctuelle est localisée dans l'axe médian du canal, et l'écoulement sans convection ne favorise aucune direction de propagation).

dimension de $\beta(x)$	$\beta_{opt}$	$J(\beta_{opt})$	$J(\beta)$ pour $\beta = 0$	Gain en dB
1	-0,40	$3,64 \cdot 10^{-4}$	$1,02 \cdot 10^{-3}$	8,94
4		$3,59 \cdot 10^{-4}$	$1,02 \cdot 10^{-3}$	9,07
20		$3,56 \cdot 10^{-4}$	$1,02 \cdot 10^{-3}$	9,14
40	fig 5.2	$3,55 \cdot 10^{-4}$	$1,02 \cdot 10^{-3}$	9,16

TAB. 5.1 – Tableau des gains obtenus pour une source ponctuelle, à Mach nul, pour des paramètres locaux réels.

La figure 5.2 invoquée dans le tableau 5.1 représente la distribution des valeurs des coefficients de réflexion acoustique obtenue sur chacune des parois internes, après application de la méthode multigrille itérative jusqu'à la dimension  $n = 40$  du problème de contrôle. La localisation spatiale sur chacune des parois internes des coefficients est une localisation suivant les  $x$  positifs, soit une localisation dirigée de l'observatoire spatial  $O_s$  vers la source de bruit.

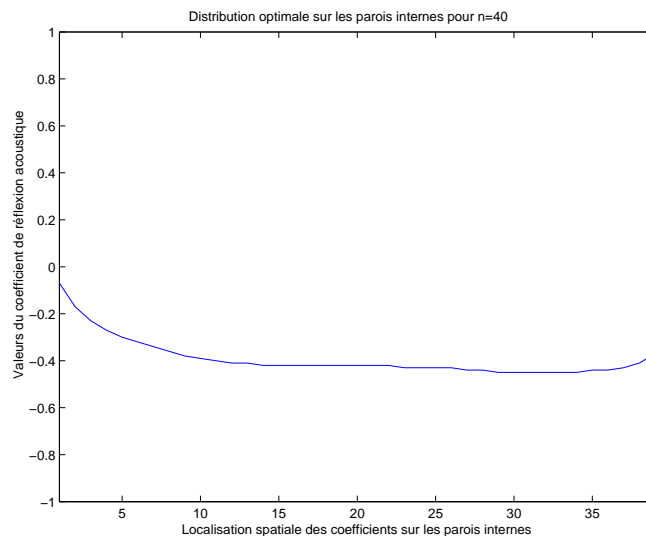


FIG. 5.2 – Distribution des paramètres de coefficients de réflexion acoustique à valeurs réelles sur les parois internes du canal pour  $n = 40$ .

### Interprétation des premiers résultats

La réduction du "bruit" acoustique de l'ordre d'une dizaine de décibels est encourageante, d'autant plus que la variable de contrôle utilisée pour l'obtenir est uniquement scalaire et à valeurs réelles. En revanche, pour cette configuration de source et de localisation de l'observatoire, le problème de contrôle est indifférent au nombre de paramètres locaux pris pour inconnus. En fait, plusieurs tests numériques montrent, que pour ce type de source ponctuelle, sa localisation spatiale joue un rôle primordial. Plus la source ponctuelle est déplacée vers l'aval du canal (dans le sens des  $x$  négatifs), et plus l'indifférence à l'augmentation du nombre de paramètres est marquée. En

fait, il apparaît que la source ne “voit” pas les paramètres inconnus situés en son amont, et dès lors toutes ces fonctions inconnues correspondantes ne participent pas à la réduction de bruit de manière sensible.

Il est également très important de souligner que les valeurs des paramètres ne sont pas des valeurs complexes, or la prise en compte du rôle joué par les parties imaginaires des coefficients de réflexion acoustique permettra la création de phénomènes d’ondes destructives dans le canal. On peut dans ce cas s’attendre à des gains plus significatifs. De plus, le modèle de réflexion acoustique présenté dans [29] n’est dans ce cas plus pertinent.

En contrepartie, la figure 5.2 illustre une bonne convergence de la solution du problème de contrôle vers un  $\beta$  optimal distribué, et ce manque de sensibilité de la fonction coût à la distribution des paramètres laisse augurer d’une bonne performance de la méthode d’optimisation *mathématique* multigrille à coefficients réels pour le problème d’identification.

Quoiqu’il en soit, dans le cadre applicatif de cette thèse, une modélisation de source de bruit physiquement plus pertinente est un type de source distribué sur la frontière d’entrée droite du canal, plus réaliste pour une entrée de prise d’air. On a donc choisi la modélisation de sources de bruit modales, à l’aide des modes calculés dans la section 2.5, et déjà utilisés afin de mettre en évidence le caractère inexact des conditions aux limites non réfléchissantes approchées dans le chapitre 3, ainsi que pour la validation numérique de l’approximation Galerkin discontinue dans la section 2. Contrairement à une source de bruit ponctuelle située au milieu du canal, ce type de source de bruit distribuée ne devrait pas laisser la résolution du problème de contrôle indifférente à l’augmentation du nombre de paramètres pris comme variables inconnues.

De plus, à fréquence fixe, on désire optimiser avec des contraintes *physiques*. Il va donc s’agir de résoudre le problème de contrôle optimal passif (et les problèmes direct et adjoint) en variables complexes. Nous allons également effectuer ces tests numériques en présence d’écoulement porteur avec convection non nulle, afin de tester l’influence de la convection et des parties imaginaires des coefficients de réflexion acoustique sur les résultats en terme de gain.

### 5.1.2 Sources modales et écoulement porteur uniforme

On se propose d’appliquer la méthode d’optimisation avec contraintes *mathématiques* et *physiques* dans le cas d’un écoulement porteur à convection nulle (acoustique pure) ou dans le cas d’un écoulement porteur admettant une convection uniforme de Mach 0.3. La direction de propagation de l’écoulement est dans le sens des  $x$  positifs, et la source de bruit est de type modes amonts (modes 0,1,2), distribuée sur la frontière d’entrée du canal. Dans un premier temps, les modes seront excités à la fréquence monochromatique de 1000 Hz. En effet, cette limite inférieure de validité du modèle de [29] représente, d’après la figure 4.6, la valeur de la fréquence monochromatique pour laquelle les contraintes sur les paramètres de réflexion acoustique équivalents à des matériaux poreux réalisables sont les plus importantes (en particulier, peu de valeurs des parties imaginaires de ces coefficients complexes sont admissibles pour cette fréquence). On illustre tout d’abord sur les figures (5.4,5.5), l’évolution de la partie réelle de la variable  $\rho$  de la solution  $\varphi_\beta$  du problème direct (1.22) pour la configuration dans laquelle les sources de bruit modales sont bien les modes guidés déterminés à la section 2.5. Autrement dit, pour ces figures, on a :

$$\forall x \in \Gamma_c, \beta(x) = (1, 0),$$

et les parois internes du canal sont rigides.

Sur la figure 5.4, on représente la partie réelle de  $\rho$  pour trois temps différents, obtenue pour un écoulement porteur à convection uniforme nulle, et des modes amonts d’indice  $n = 2$ . Sur la figure 5.5, on représente la partie réelle de  $\rho$  pour trois temps différents, obtenue pour un écoulement

porteur à convection uniforme Mach 0.3, et des modes amonts d'indice  $n = 0$ . Les temps indiqués sont les temps adimensionnés ( $c_0 = 1$ ). On constate bien numériquement que les ondes “remontent” le canal en présence d'un écoulement uniforme à Mach 0.3 avec une vitesse moindre et une amplitude plus forte que sans écoulement.

De plus, la figure 5.4 révèle la sensibilité du problème de contrôle à la géométrie de l'observatoire (localisation et forme). En effet, on voit bien que pour ce type de sources modales (indice  $n = 2$ ), une importante quantité d'énergie se déplace le long des parois internes du canal lorsque celles-ci sont rigides, c'est-à-dire lorsque la condition de réflexion acoustique scalaire équivalente est celle de la condition d'obstacle “dur” ( $\beta(x) = (1, 0)$ ). Une conséquence immédiate est que, si l'observatoire en sortie de canal est tronqué comme sur la figure 5.3, la condition d'optimalité pour la réduction de bruit sur ce type d'observatoire en présence de telles sources modales est la condition de réflexion acoustique scalaire complexe

$$\forall x \in \Gamma_c, \beta(x) = (1, 0).$$

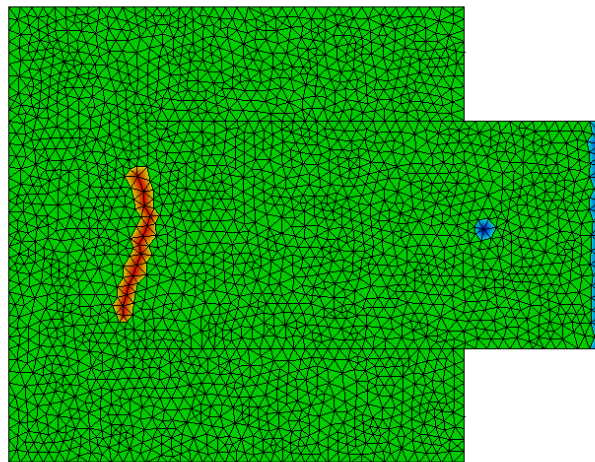
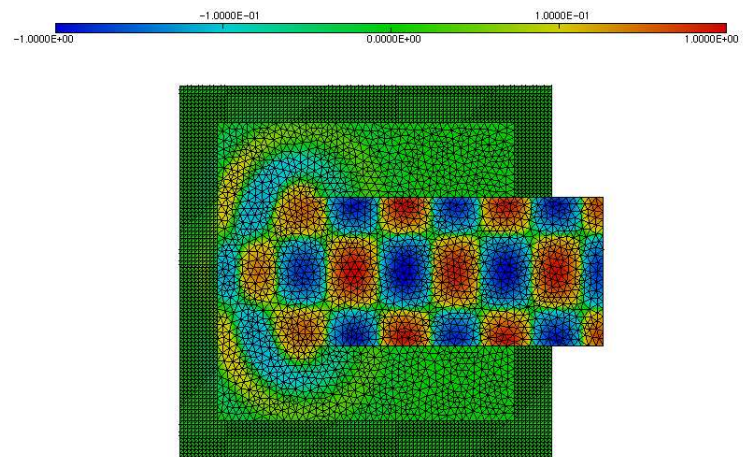
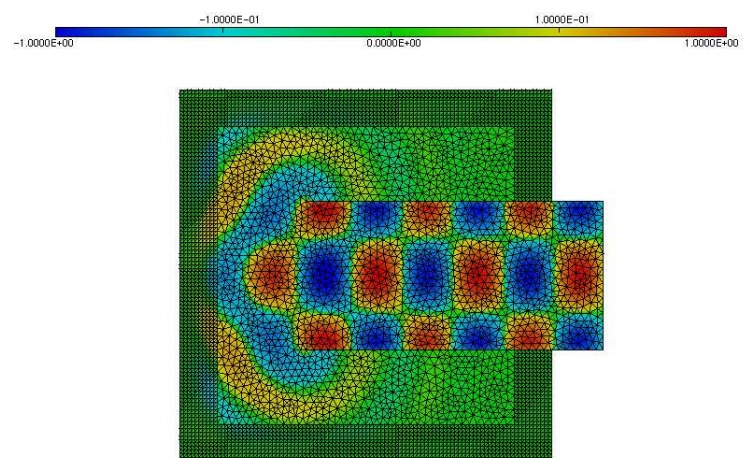
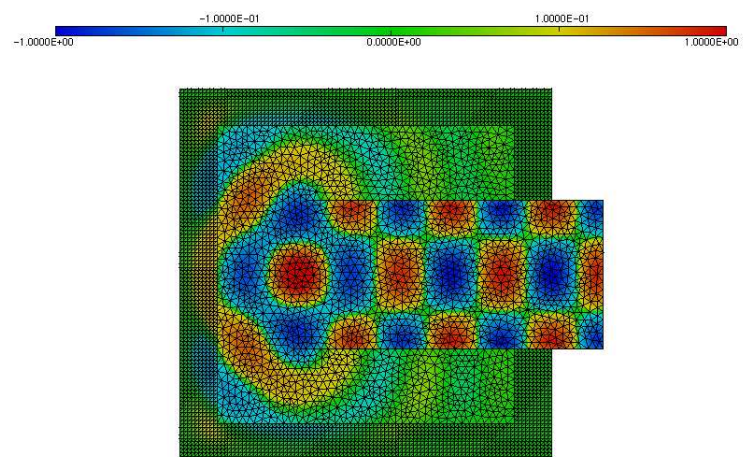
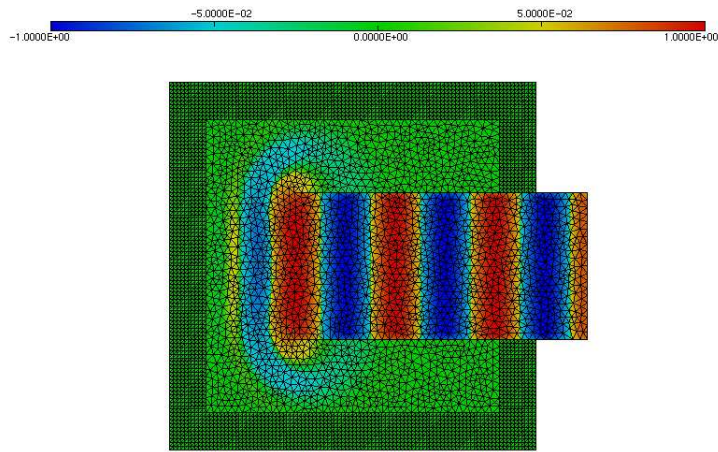
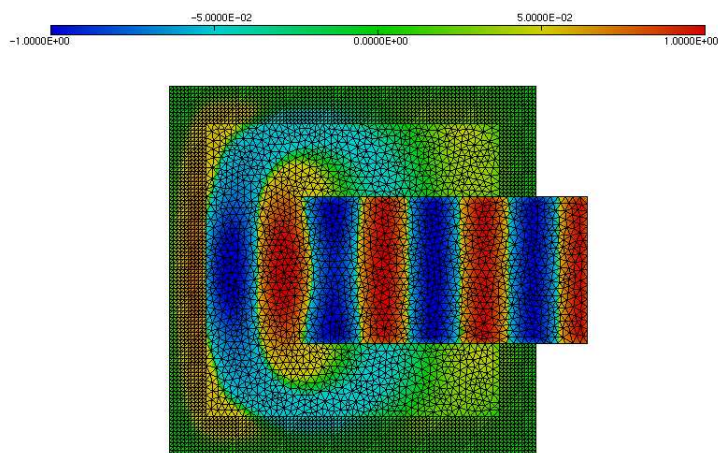
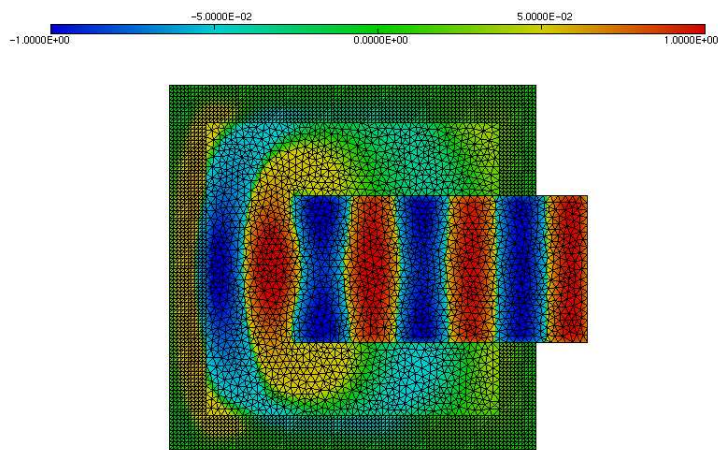


FIG. 5.3 – L'observatoire tronqué est en sortie de canal en rouge.

Ce n'est évidemment plus le cas pour un observatoire du type de celui illustré par la figure 4.9. Dans les tableaux (5.2, 5.3, 5.4, 5.5), on présente les résultats obtenus pour l'optimisation avec contraintes *mathématiques* ou *physiques*, pour les différents indices de mode amont (modes 0,1,2) excités à la fréquence monochromatique de 1000 Hz, et pour une convection nulle ou uniforme de Mach 0.3. La dimension correspond à la dimension intervenant dans l'algorithme d'optimisation L-BFGS-B, à savoir le nombre de coefficients de réflexion acoustique locaux à répartir sur les parois internes de façon symétrique, multipliés par 2 pour l'optimisation avec contraintes *mathématiques* car ces coefficients sont complexes et que l'algorithme d'optimisation procède sur les parties réelles et les parties imaginaires, et multipliés par 4 pour l'optimisation avec contraintes *physiques* car un coefficient de réflexion correspond à 4 valeurs de paramètres physiques (épaisseur, porosité, longueurs caractéristiques\*2). Le temps d'observation pour ces résultats est  $T = 7.4s$ .

(a)  $t=1.5s$ ,  $f=1000Hz$ (b)  $t=1.9s$ ,  $f=1000Hz$ (c)  $t=2.3s$ ,  $f=1000Hz$ FIG. 5.4 -  $Re(\rho)$ ,  $n=2$ ,  $M=0$ , parois rigides.

(a)  $t=2.4s$ ,  $f=1000Hz$ (b)  $t=3s$ ,  $f=1000Hz$ (c)  $t=3.2s$ ,  $f=1000Hz$ FIG. 5.5 –  $Re(\rho)$ ,  $n = 0$ ,  $M = 0.3$ , parois rigides.



<u>mode</u> <u>dimension</u>	0	1	2
2	10.8	7.85	4.8
4	10.9	7.9	4.9
8	24.9	15.85	22.7
16	29.12	25.45	27.45
20	31.1	29.35	30.2

TAB. 5.2 – Gains en dB ,  $M = 0$ , contraintes *mathématiques*,  $f=1000$  Hz.

<u>mode</u> <u>dimension</u>	0	1	2
4	10.8	7.85	4.8
8	10.9	7.9	4.9
16	17.65	13.5	7.6
32	24.6	21.1	15
40	27.8	25.15	20.3

TAB. 5.3 – Gains en dB,  $M = 0$ , contraintes *physiques*,  $f=1000$  Hz.

<u>mode</u> <u>dimension</u>	0	1	2
2	20.8	18.9	10.2
4	20.85	19	10.4
8	24.3	23.7	27.5
16	26.2	25.6	30.2
20	27.1	26.8	31.8

TAB. 5.4 – Gains en dB,  $M = 0.3$ , contraintes *mathématiques*,  $f=1000$  Hz.

<u>mode</u> <u>dimension</u>	0	1	2
4	20.8	18.9	10.2
8	20.85	19	10.4
16	22.5	22.2	18.8
32	24.35	24.3	25.6
40	25.2	25.1	28.2

TAB. 5.5 – Gains en dB,  $M = 0.3$ , contraintes *physiques*,  $f=1000$  Hz.

## Conclusion

Ces tableaux de gains obtenus par rapport à un raisonnement local consistant à appliquer l'absorption acoustique maximale pour les ondes normales sur les parois internes du canal met en lumière les points suivants :

1. Pour ces configurations géométriques, ce raisonnement est très loin du caractère d'optimalité pour la réduction de "bruit" localisé sur l'observatoire en sortie de canal. En augmentant successivement la dimension de résolution du problème de contrôle optimal, on peut réaliser un gain de l'ordre de 20–30 dB (suivant que le matériau poreux équivalent au sens du modèle de [29] est réalisable ou non) par rapport à ce raisonnement. Il est important de noter que le gain est d'autant plus croissant en augmentant la dimension du problème de contrôle que l'écoulement perturbé est complexe. En effet, plus la source est complexe (mode d'indice 1 ou 2), donc plus l'écoulement perturbé correspondant à la perturbation de l'écoulement porteur par ce type de sources est complexe, plus la méthode multigrille consistant à augmenter le nombre de paramètres pris en compte dans la résolution du problème de contrôle optimal est performante. La convection de l'écoulement porteur, qui privilégie une direction de propagation, augmente également très sensiblement la performance de la méthode multigrille.
2. Le rôle joué par la répartition des parties imaginaires des coefficients de réflexion acoustique locaux complexes est primordial. Sans la prise en compte des parties imaginaires dans la résolution du problème de contrôle optimal (donc avec des coefficients de réflexion acoustique purement réels), on a montré que les gains n'étaient que de l'ordre de la dizaine de décibels pour l'optimisation avec contraintes *mathématiques*, soit beaucoup moins qu'en résolvant le problème de contrôle optimal en variables complexes. Les parties imaginaires permettent de créer des déphasages entraînant des phénomènes destructifs sur les allers et retours des propagations d'ondes entre les parois internes du canal, qui sont à l'origine du gain obtenu par rapport au raisonnement qui consiste à laisser "sortir" toutes les ondes normales aux plans décrits par ces parois internes. Ceci explique les différences de gains obtenus selon que l'optimisation est à paramètres *mathématiques* ou à paramètres *physiques*, puisque pour une fréquence monochromatique de 1000 Hz, la figure 4.6 montre bien que beaucoup de valeurs de parties imaginaires des coefficient de réflexion acoustique sont interdites par les contraintes physiquement réalisables.
3. Les figures (4.6, 4.7, 4.8) laissent présager que la différence de gain obtenu entre l'optimisation avec contraintes *mathématiques* et l'optimisation avec contraintes *physiques* va s'amenuiser en augmentant la fréquence de la source. En effet, La plupart des valeurs complexes du disque unité deviennent de plus en plus physiquement réalisables par des matériaux poreux équivalents au sens du modèle de [29] (et particulièrement les valeurs des parties imaginaires). A cet effet, on présente dans les tableaux (5.6, 5.7, 5.8, 5.9), les résultats obtenus pour une fréquence monochromatique de 3000 Hz pour les mêmes configurations que la fréquence 1000 Hz.

<u>mode</u> <u>dimension</u>	0	1	2
2	4.3	3.1	2.1
4	4.35	3.2	2.3
8	7.5	7.3	7
16	10.1	10.2	10.5
20	11	11.6	12.2

TAB. 5.6 – Gains en dB,  $M = 0$ , contraintes *mathématiques*,  $f=3000$  Hz.

<u>mode</u> <u>dimension</u>	0	1	2
4	4.3	3.1	2.1
8	4.35	3.2	2.3
16	7.5	7.3	7
32	10.1	10.1	10.5
40	10.9	11.4	12

TAB. 5.7 – Gains en dB,  $M = 0$ , contraintes *physiques*,  $f=3000$  Hz.

<u>mode</u> <u>dimension</u>	0	1	2
2	8.3	7.6	5.8
4	8.4	7.65	5.9
8	12.6	13.7	15.1
16	14.3	16	18.3
20	15.1	18.2	21.1

TAB. 5.8 – Gains en dB,  $M = 0.3$ , contraintes *mathématiques*,  $f=3000$  Hz.

<u>mode</u> <u>dimension</u>	0	1	2
4	8.3	7.6	5.8
8	8.4	7.65	5.9
16	12.5	13.7	14.2
32	14	15.8	17.6
40	15	18	19.8

TAB. 5.9 – Gains en dB,  $M = 0.3$ , contraintes *physiques*,  $f=3000$  Hz.

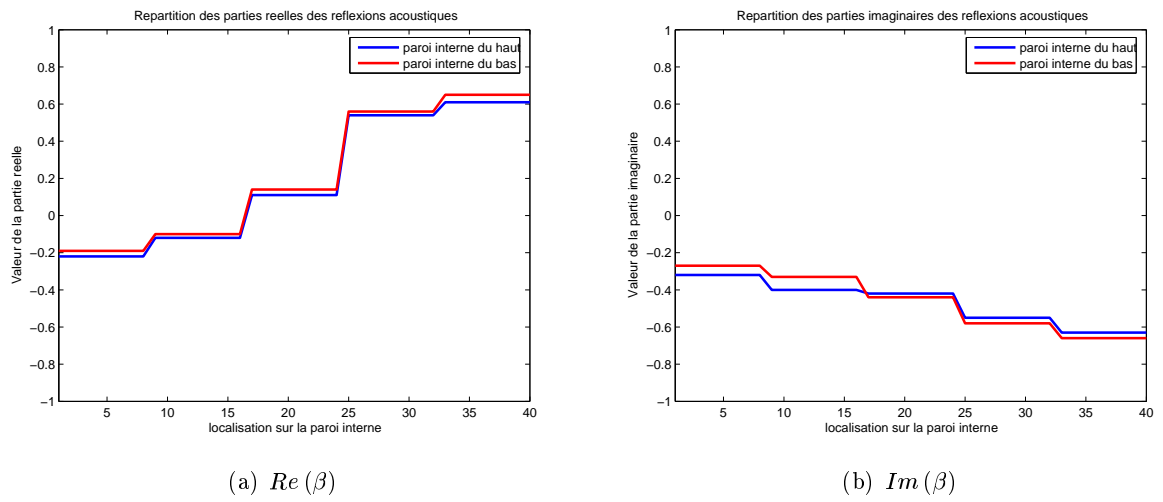
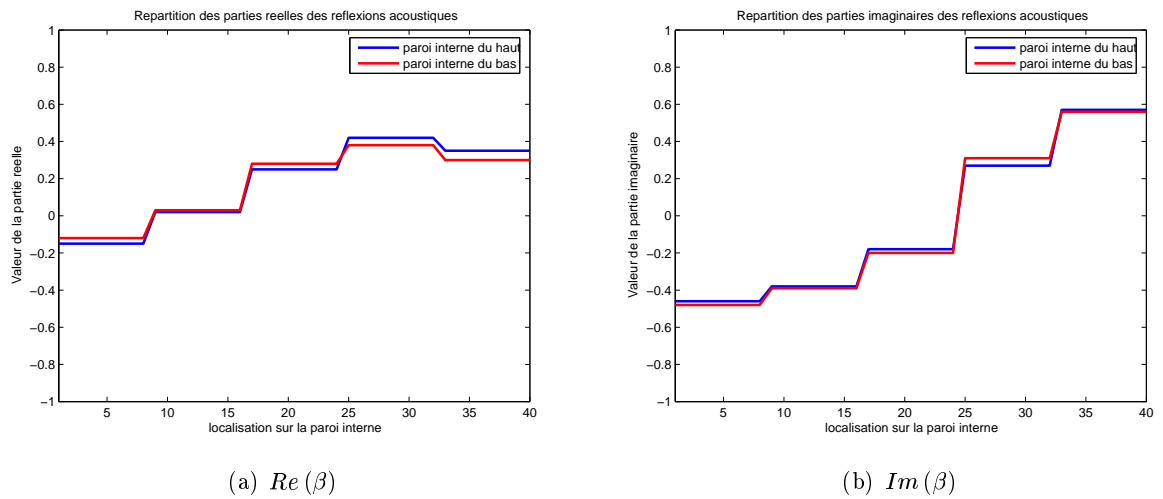
Deux conclusions importantes sont à souligner :

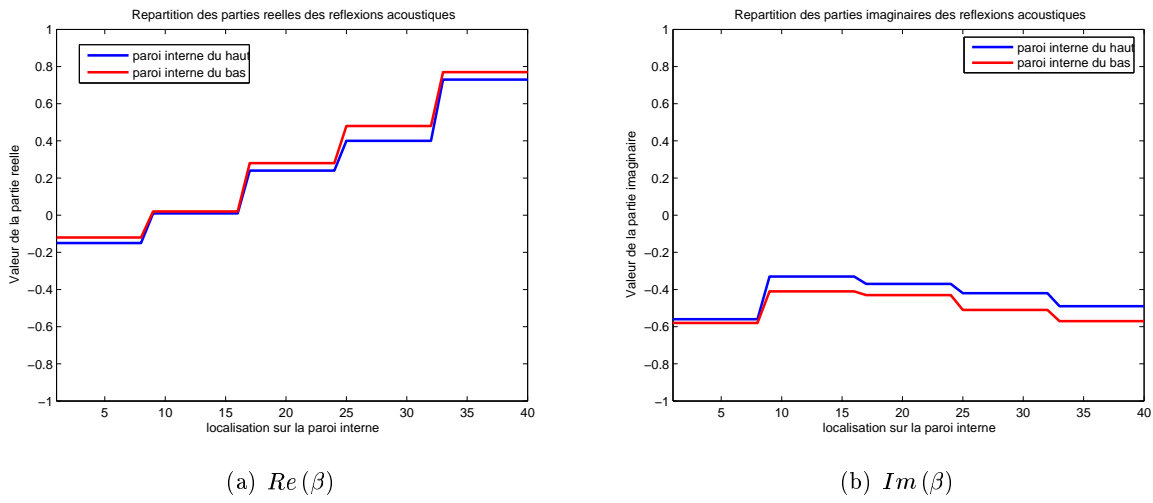
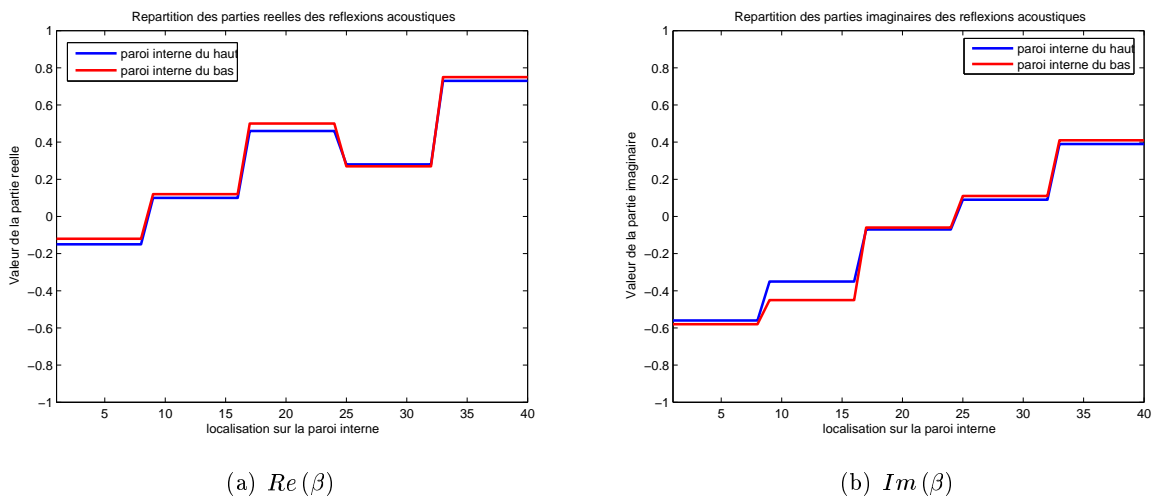
1. Les gains sont moindres que pour l'excitation monochromatique de 1000 Hz. Les parois internes sont beaucoup plus sollicitées par les réflexions d'ondes propagées. L'augmentation du nombre de paramètres pris pour inconnus est absolument nécessaire pour créer le plus possible de phénomènes destructifs.
2. Les gains obtenus par l'optimisation sous contraintes *mathématiques* ou *physiques* sont quasiment similaires. En effet, pour la fréquence 3000 Hz, les matériaux poreux équivalents aux réflexions acoustiques obtenues par la méthode d'optimisation avec contraintes *mathématiques* sont presque tous expérimentalement réalisables.

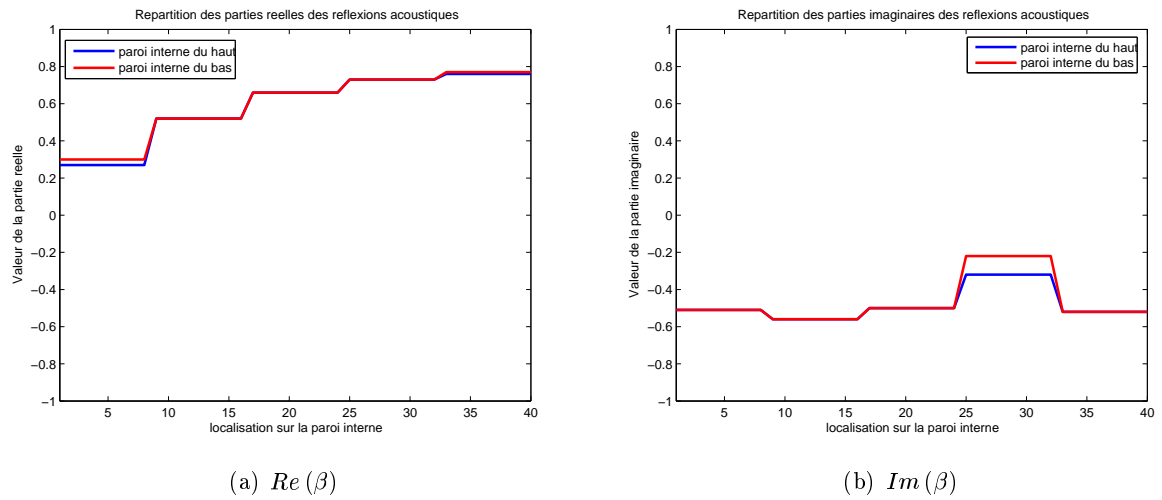
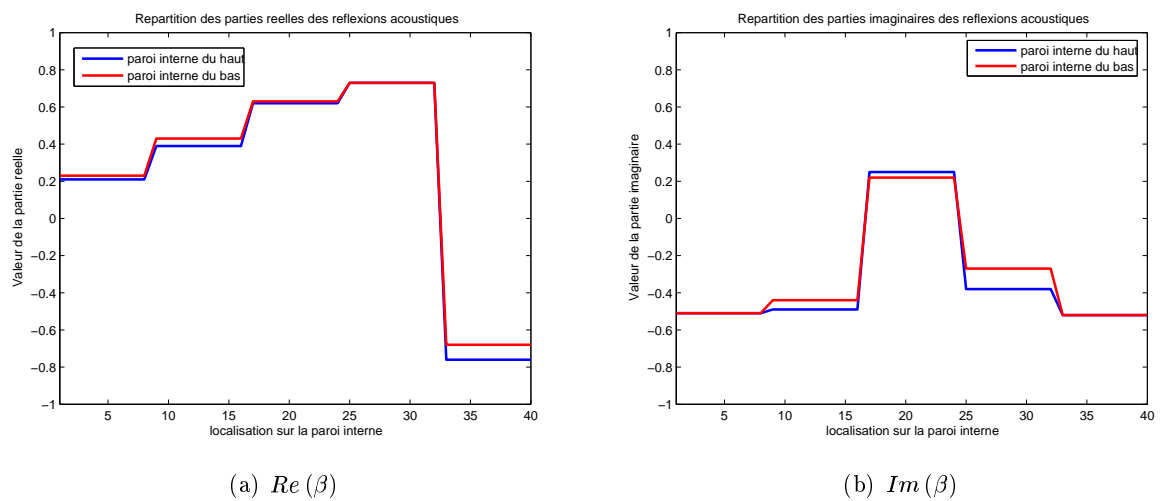
On représente sur les figures (5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13), la répartition des valeurs des parties réelles et des parties imaginaires sur les parois internes du canal, à mesure de l'augmentation de la dimension d'optimisation sous contraintes *mathématiques* par la méthode multigrille, obtenue pour un écoulement porteur à convection nulle ou à Mach 0.3, et pour une source de bruit modale d'indice  $n = 0$  ou  $n = 2$ . On rappelle que chaque paroi interne est composée de 40 éléments frontières. En abscisse de chacune de ces figures, on représente la localisation spatiale des coefficients de réflexion acoustique sur la frontière du matériau dans le sens des  $x$  positifs, donc de l'observatoire  $O_s$  vers la source modale à l'entrée du canal.

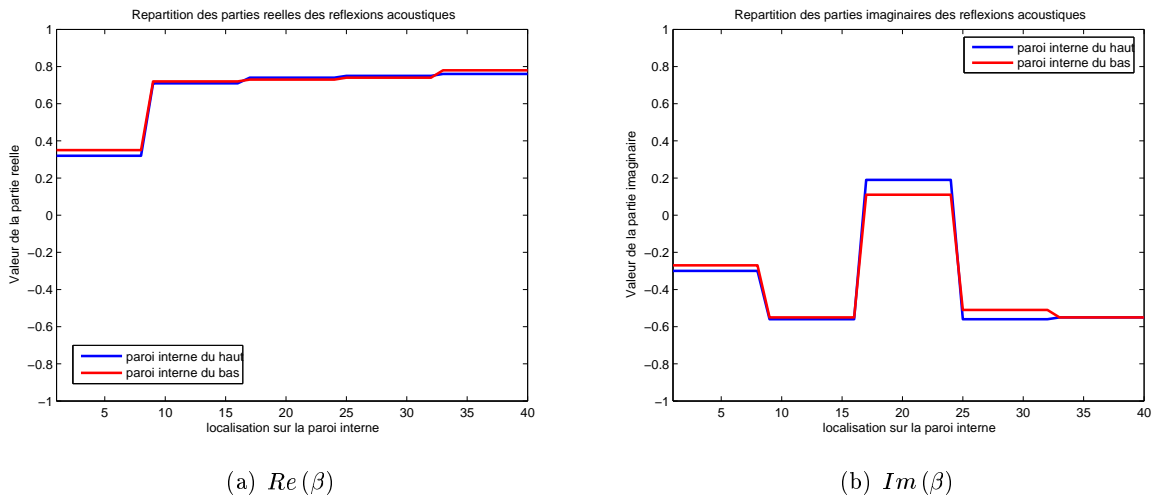
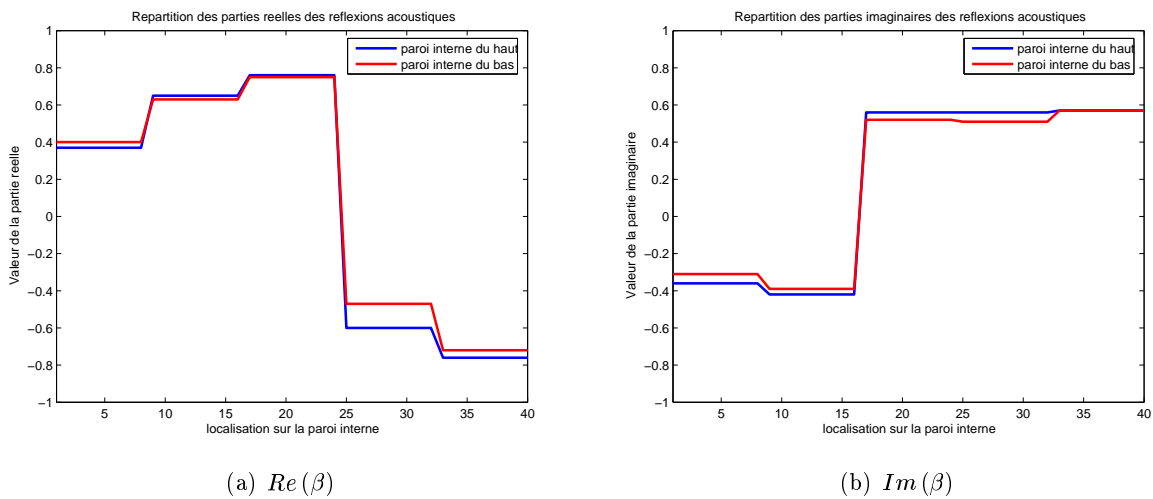
## Conclusion

La variabilité des profils de la répartition des paramètres sur chaque paroi interne suivant la fréquence, la convection, et le type de source est assez importante. Elle met en lumière l'intérêt de la résolution du problème de contrôle optimal dans sa globalité et sa complexité : les distributions de coefficients de réflexion acoustique ne sont pas intuitives. Il ne semble pas se dégager de ces résultats des profils de distribution type : seule la convection semble, pour une fréquence et un indice de mode fixés, "déplacer" les profils dans le sens inverse de la propagation et "amplifier" les discontinuités de valeurs des parties réelles et imaginaires des coefficients. La dimension 20 d'optimisation sous contraintes *mathématiques* correspond à une dimension d'optimisation sous contraintes *physiques* de 40 paramètres, pour lequel les calculs réalisés sur un SUN blade 1500 (1 Giga de mémoire vive) approximent les 6 heures de temps CPU.

FIG. 5.6 – Dimension=20,  $n = 0$ ,  $M = 0$ ,  $f=1000\text{Hz}$ .FIG. 5.7 – Dimension=20,  $n = 2$ ,  $M = 0$ ,  $f=1000\text{Hz}$ .

FIG. 5.8 – Dimension=20,  $n = 0$ ,  $M = 0.3$ ,  $f=1000\text{Hz}$ .FIG. 5.9 – Dimension=20,  $n = 2$ ,  $M = 0.3$ ,  $f=1000\text{Hz}$ .

FIG. 5.10 – Dimension=20,  $n = 0$ ,  $M = 0$ ,  $f=3000\text{Hz}$ .FIG. 5.11 – Dimension=20,  $n = 2$ ,  $M = 0$ ,  $f=3000\text{Hz}$ .

FIG. 5.12 – Dimension=20,  $n = 0$ ,  $M = 0.3$ ,  $f=3000\text{Hz}$ .FIG. 5.13 – Dimension=20,  $n = 2$ ,  $M = 0.3$ ,  $f=3000\text{Hz}$ .



## 5.2 Résultats d'identifications

On rappelle dans un premier temps le contexte du problème d'identification. On dispose de données  $\varphi_d$ , prélevées sur l'observatoire pendant un temps  $[0, T]$  (idéalement des mesures expérimentales), et le but est de trouver les coefficients de réflexion acoustique locaux qui modélisent au mieux le comportement acoustique de l'obstacle (plus exactement de sa frontière) pour lequel on a obtenu ces données. Pour cela, on cherche à minimiser la fonctionnelle  $J_{id}(\beta)$ . Le problème mathématique est donc équivalent à celui du problème de contrôle optimal où l'on cherche à minimiser la fonctionnelle coût  $J(\beta)$ . Cependant, si pour le problème de contrôle optimal, l'absence de démonstration d'existence et/ou d'unicité d'une solution au problème de minimisation n'est pas essentielle (il suffit de diminuer la fonction objectif), il en est tout autrement pour le problème d'identification. Le caractère bien posé du problème d'identification en existence et unicité est crucial pour la seule justification de sa résolution théorique. Les zones extrêmement plates autour des minima dévoilées dans les cas tests numériques de résolution du problème de contrôle optimal, se traduisent pour le problème d'identification (vraisemblablement mal posé en continuité, et peut être pas en unicité), en un mauvais conditionnement croissant du problème d'identification à mesure que l'on augmente le nombre de paramètres à identifier. Pour le moment, on ne dispose pas de mesures expérimentales pertinentes, et on se propose alors de résoudre deux types de problème d'identification "physiquement" pertinent.

### 5.2.1 Identification de "trous" dans les parois internes

Dans un premier temps, on se propose d'identifier la localisation et la taille de "trous" aléatoirement disposés sur les parois internes du canal. Le problème d'identification est extrêmement mal conditionné, donc une première étape heuristique consiste à tester les limites numériques d'applications de l'algorithme pour la résolution de ce problème. Pour cela, on suppose que les données sont non bruitées, c'est-à-dire que l'emplacement des "trous" et leurs tailles sont connus par avance, et on se propose alors de retrouver ces données. On se place dans le cas a priori favorable, pour lequel la figure 5.2 a révélé une "bonne" distribution des coefficients réels :

1. la source ponctuelle est un Dirac en espace et sinusoïdale en temps localisée à l'entrée du canal et dans son axe médian,
2. les coefficients de réflexion acoustique à identifier sont à valeurs réelles.

Ces "trous" seront caractérisés par des valeurs locales de coefficients de réflexion acoustique  $\beta(x) = 0$ , c'est-à-dire par des conditions locales parfaitement transparentes pour les ondes normales.

Sur les figures (5.14, 5.15, 5.16), on représente les résultats obtenus, suivant la dimension du problème inverse et la taille des "trous" (exprimée en longueurs d'ondes). Pour chaque test, tous les autres coefficients de réflexion acoustique correspondent à une condition d'obstacle dur, soit des coefficients de valeur fixées à  $\beta(x) = 1$ . L'initialisation de l'algorithme d'optimisation est fixé à la valeur scalaire  $\beta(x) = 0.5$ , ce qui correspond à l'écart moyen entre les deux valeurs de  $\beta$  que l'on souhaite identifier. On ne facilite donc a priori, ni la restitution des "trous", ni la restitution de la condition d'obstacle dur.

Sur la figure 5.14, on identifie avec précision :

1. Un "trou" de  $1/3$  de longueur d'ondes localisé sur une des deux parois internes. Les deux autres coefficients de réflexion acoustique de cette paroi sont également correctement identifiés, puisque le faible écart de valeur entre les valeurs exactes et les valeurs identifiées n'est pas significatif : on a bien identifié une condition d'obstacle dur. Il est à noter que la seconde paroi interne est par avance soumis à la condition d'obstacle dur. L'identification de cette

condition, non illustrée ici, est également bonne à l'instar de l'identification de la condition d'obstacle dur sur l'autre paroi interne.

- Un "trou" de  $1/13$  de longueur d'ondes et les 12 autres paramètres soumis à la condition d'obstacle dur.

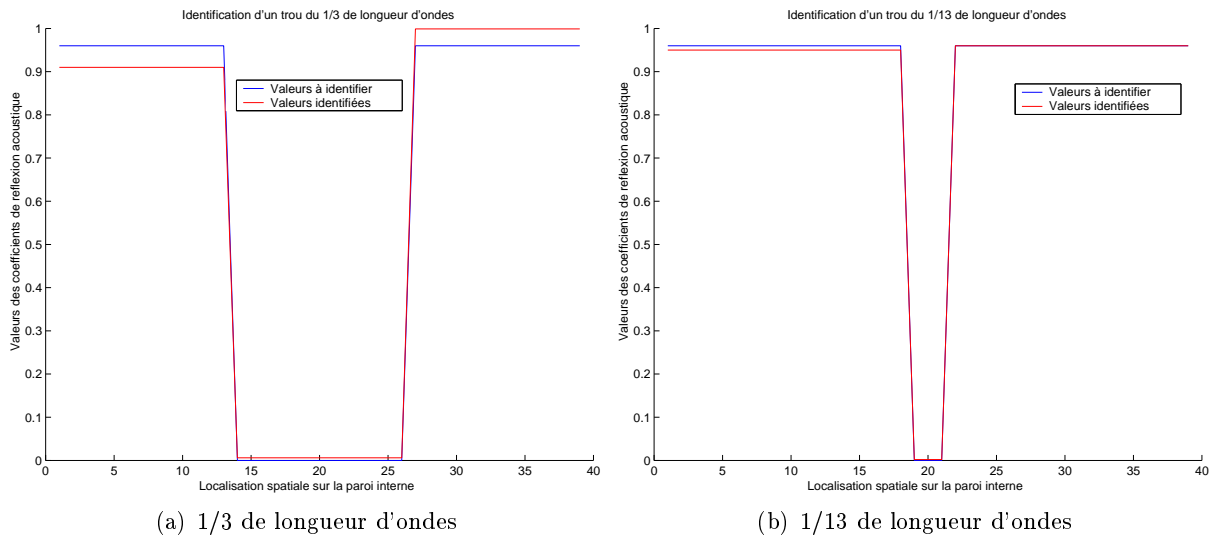


FIG. 5.14 – Identification d'un "trou".

Sur la figure 5.15, le résultat est correct quant à l'identification de 2 trous de  $1/13$  de longueurs d'ondes. La localisation sur la paroi interne est exactement identifiée, seul un écart perceptible de 6% entre la valeur exacte et la valeur identifiée tempère la qualité du résultat numérique.

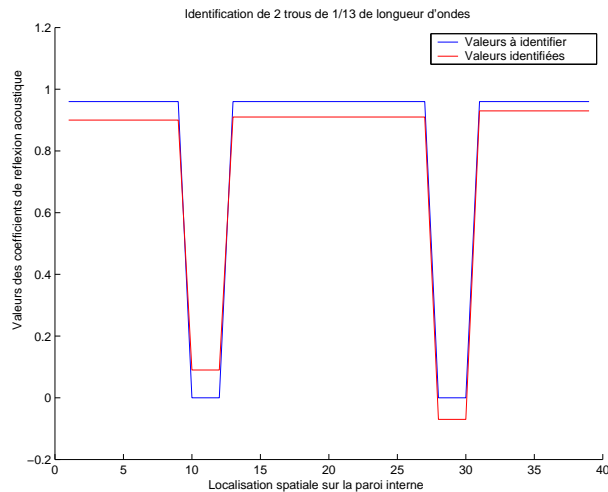


FIG. 5.15 – Identification de 2 "trous" du treizième de longueur d'ondes.

Les résultats numériques restent satisfaisants pour 3 ou 4 “trous” du treizième de longueur d’ondes localisés sur une paroi interne, et pour 8 “trous” localisés de manière symétrique sur chacune des deux parois internes (4 “trous” sur chaque paroi interne). En revanche, les limites de la méthode de résolution du problème d’identification semblent atteintes pour la restitution de 4 trous (2 et 2) répartis non symétriquement sur chacune des deux parois internes (figure 5.16).

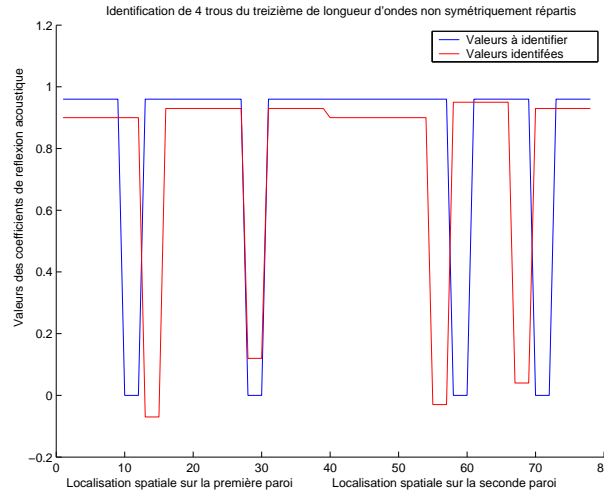


FIG. 5.16 – Identification de 4 “trous” du treizième de longueur d’ondes non symétriquement localisés sur chacune des deux parois internes.

Les écarts de valeurs restent de l’ordre de 6% , mais des décalages apparaissent lors de l’identification des localisations spatiales des “trous”. En fait, le nombre et la taille des “trous” influent évidemment sur le nombre de paramètres réels à identifier, et au delà d’une limite de 40 paramètres, les résultats se dégradent qualitativement : dans ce cas, l’évolution relative de la fonctionnelle autour de la solution trouvée et de ces gradients sont à la limite de la précision machine. Une étude mathématique et numérique spécifique au problème d’identification est nécessaire (pénalisation de la fonctionnelle coût, ...), d’autant plus que l’étape suivante, beaucoup plus pertinente, serait d’identifier des données bruitées, c’est-à-dire identifier des “trous” pour lesquels les tailles et les localisations ont été préalablement perturbées de manière aléatoire.

## 5.2.2 Identification d'un matériau poreux

Pour le cas le plus général que nous avons traité, autrement dit avec des coefficients de réflexion acoustique complexes et des sources modales d’indice  $n$ , on se propose d’identifier un matériau poreux au sens du modèle de [29]. Les données seront encore non bruitées, c’est-à-dire que l’emplacement du matériau poreux à identifier est connu par avance. On rappelle, que pour une fréquence donnée, plusieurs valeurs de paramètres physiques  $(\varphi, l, re, re')$  peuvent correspondre à un même coefficient de réflexion acoustique, et dans ce cas, on dit que les matériaux poreux homogénéisés correspondant à ces paramètres physiques sont équivalents. La sensibilité aux 4 paramètres physiques du problème inverse donné par la minimisation de la fonctionnelle  $J_{id}$  est donc très importante. Par conséquent, une étude heuristique physiquement pertinente nous semble être, pour une source modale d’indice et de fréquence fixés, l’identification d’un matériau poreux connu par avance (autrement dit caractérisé par 4 paramètres physiques) par un matériau poreux au moins équivalent. On se propose, dans la configuration de domaine représentée sur la figure 4.9, et en présence d’un

écoulement porteur à convection constante  $M = 0.3$  et d'une source de bruit modale amont d'indice  $n = 0$  de fréquence 2000 Hz, d'identifier un seul matériau poreux constituant chacune des deux parois du canal. On représente, sur la figure 5.17, les résultats obtenus pour l'identification d'un matériau poreux caractérisé par les paramètres physiques suivant :

$$mat = (\varphi, l, re, re') = (0.467, 0.056, 2.41, 0.53),$$

de coefficient de réflexion acoustique  $\beta = (10^{-10}, 10^{-10})$ . L'initialisation de la méthode de résolution du problème inverse correspond à un matériau initial donné par :

$$mat_{init} = (\varphi, l, re, re') = (0.3, 0.05, 2.385, 0.567),$$

de coefficient de réflexion acoustique  $\beta_{init} = (0.2, -0.2)$ .

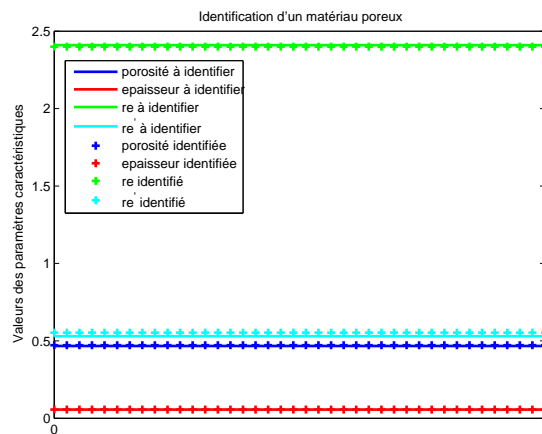


FIG. 5.17 – Identification d'un matériau poreux.

Le matériau identifié sur la figure 5.17 est caractérisé par les paramètres physiques

$$mat_{ident} = (\varphi, l, re, re') = (0.471, 0.056, 2.40, 0.55),$$

de coefficient de réflexion acoustique  $\beta_{ident} = (10^{-5}, 10^{-5})$ . Le résultat est donc satisfaisant, puisque on a identifié un matériau d'impédance complexe équivalente à celui recherché, et de plus caractérisé par des paramètres physiques très similaires. Ce résultat est d'autant plus encourageant que l'identification peut éventuellement être envisagée comme une étape préliminaire au contrôle optimal. En effet, à partir d'une source de bruit mesurée expérimentalement par avance à l'aide de capteurs (localisée en espace et pendant une période de temps donnée), on pourra utiliser la méthode d'identification (a priori sans pénalisation) afin d'identifier le matériau poreux pour lequel ces mesures ont été effectuées. Par la suite, il suffit d'utiliser les paramètres physiques de ce matériau identifié comme paramètres initiaux de la méthode d'optimisation. On obtiendra ainsi un gain en décibels réalisable par une distribution de matériaux poreux déterminée par la méthodologie mise en place dans cette thèse.

# Conclusion et perspectives

Nous nous sommes intéressés dans cette thèse à la propagation linéaire des perturbations aéroacoustiques d'un écoulement porteur quelconque, subsonique et régulier. Notre approche du problème a consisté en la résolution mathématique et numérique du système hyperbolique linéaire des équations d'Euler linéarisées, posé en domaine borné avec des conditions aux limites admissibles. Ces conditions aux limites incluent en particulier comme conditions d'obstacles, les conditions d'impédances généralisées qui ont été reformulées en conditions de réflexions acoustiques. L'approximation numérique de ce système a été réalisée à l'aide d'une formulation Galerkin discontinue, pour laquelle nous avons établi des conditions de stabilité uniformes en la variable caractérisant les conditions aux limites admissibles, et ce pour une approximation temporelle de type Runge-Kutta. Afin de simuler l'espace libre, étape nécessaire pour l'étude de phénomènes de propagations d'ondes, on a établi un modèle de couches absorbantes original pour l'aéroacoustique du type couches PML de Bérenger, les CPML. Une validation numérique de ce modèle a été réalisée à travers de multiples cas tests numériques bidimensionnels. Cette première partie de notre travail aurait pu être menée différemment (notamment un autre choix de méthode d'approximation), mais nous avons justifié cette approche tout au long de cette thèse par son adéquation à la résolution d'un problème de contrôle optimal, véritable motivation de ce travail : le contrôle dans un domaine  $\Omega$  entourant un obstacle solide de frontière  $\Gamma$ , des perturbations localisées sur un observatoire spatial au cours d'un temps suffisamment long, par des variables de contrôle qui sont des paramètres locaux investis dans les conditions aux limites de réflexion acoustique, appelés coefficients de réflexion acoustique. Plus précisément, si l'on considère comme fonction objectif l'énergie acoustique des perturbations localisées sur un observatoire spatio-temporel, et si l'on est en mesure de relier les coefficients de réflexion acoustique locaux par des paramètres caractéristiques de matériaux expérimentalement réalisables, on peut espérer trouver un matériau réalisable qui minimise ce bruit acoustique. Dans une optique d'application similaire, si l'on dispose de données mesurées expérimentalement sur un observatoire pendant un temps donné, on peut espérer caractériser le comportement acoustique de l'obstacle correspondant à ces mesures.

La seconde partie du document, en se basant sur l'étude approfondie des phénomènes propagatifs de l'aéroacoustique de la première partie, a donc été consacrée à la résolution de ces problèmes inverses. Les difficultés structurelles inhérentes aux problèmes inverses nécessitent dans la pratique une justification préalable au moins qualitative (par exemple dans des cas très particuliers), quant à la pertinence de leurs résolutions. Dans le cadre de l'aéroacoustique, la résolution explicite d'une étude monodimensionnelle des problèmes inverses a suffi à justifier la validité de cette démarche. Dès lors, nous avons explicité les gradients des fonctionnelles mises en jeu à l'aide de la solution du problème direct et d'un problème adjoint dont le caractère bien posé est assuré par la théorie déjà invoquée pour l'existence et l'unicité d'une solution au problème direct. Nous avons ensuite démontré que notre méthode d'approximation Galerkin discontinue présentait un avantage fondamental pour la résolution numérique de tels problèmes inverses : elle assure la commutation entre la dérivée de la fonctionnelle discrétisée et la discrétisation de la fonctionnelle continue. Pour donner

un sens physiquement significatif à notre travail, nous avons utilisé un modèle d'homogénéisation de matériau poreux développé dans [29]. Il permet de relier nos variables de contrôles à des paramètres physiques caractérisant la faisabilité expérimentale de matériaux absorbants, possédant les propriétés nécessaires pour être adaptés aux contraintes de l'industrie aéronautique.

La dernière partie de ce travail a eu pour but d'illustrer, à travers des cas tests bidimensionnels numériques, la nécessité de considérer le problème de contrôle optimal dans toute sa complexité. En effet, nous avons montré, que même pour des configurations relativement académiques, un raisonnement local qui consisterait à penser que l'absorption parfaite des ondes normales à la frontière d'un matériau absorbant présente un caractère d'optimalité du contrôle de bruit sortant d'une tuyère matérialisée par de tels matériaux, est totalement erroné.

## Perspectives

Néanmoins ce résultat principal de la thèse est essentiellement qualitatif, lié à la modélisation physique utilisée, et doit être tempéré par le caractère académique des tests numériques présentés. En effet, les gains annoncés ne peuvent sûrement pas être réalistes du fait de la modélisation adoptée.

D'une part, le modèle de matériaux absorbants n'est établi que pour des sources monochromatiques, peu représentatives de la réalité complexe des sources de bruit mises en jeu dans de telles situations. Une perspective de ce travail serait bien entendu d'étudier le problème de contrôle non linéaire pour des sources de bruit non simples en fréquence, ce qui n'est pas réalisable par une simple superposition de plusieurs sources monochromatiques. Si l'étude du relèvement en temps du modèle harmonique des milieux poreux (ou d'un autre proposé dans la littérature, car ils sont à notre connaissance tous harmoniques) semble réalisable compte tenu de la forme des équations, il reste encore dans ce cas à étudier d'une part le couplage du système instationnaire qui en découlerait avec les équations d'Euler linéarisées, et d'autre part le nouveau problème de contrôle associé.

D'autre part, la fonction objectif choisie pour ce travail est le flux acoustique sortant, ce qui conduit à considérer la tuyère comme une source acoustique dont on veut minimiser le rayonnement dans toutes les directions. Qu'en est-il si l'on cherche à privilégier certaines directions où les nuisances sonores seraient effectives? Mathématiquement, ceci revient à associer au problème de contrôle un problème de restitution champ lointain champ proche dont on sait qu'il constitue un problème mathématique mal posé. Il convient par conséquent de spécifier les fonctions objectifs de manière plus pertinente.

De plus, nous avons montré que le contrôle optimal dépend en amplitude et en phase du type de la source. Pour que celle-ci soit la plus réaliste possible, il faudrait étudier le couplage du vrai problème d'aéroacoustique non linéaire avec le problème de propagation qui doit être linéarisé afin de tenir compte de façon assez précise des ordres de grandeurs.

Quant au problème d'identification, alors que l'étude de sensibilité peut suffire à la mise en place d'une méthodologie de résolution du problème de contrôle, nous avons constaté ses limites pour sa résolution. Une étude mathématique typique de ce genre de problèmes (principe de Morosov, ...) est nécessaire. Enfin, la méthodologie de résolution de ces problèmes inverses doit être implémentée sur des géométries tridimensionnelles plus complexes (par exemple, voir figure 2.8), à l'aide des approximations polynomiales d'ordres élevés déjà utilisées pour résoudre le problème direct sur ces configurations.

# Bibliographie

- [1] S. ARBANEL and D. GOTTLIEB. A mathematical analysis of the PML method. *Journal of Computational Physics*, 134 :357–363, 1997.
- [2] H.L. ATKINS and C.-W. SHU. Quadrature-free implementation of discontinuous Galerkin method for hyperbolic equations. *AIAA J.*, 36 :775–782, 1998.
- [3] C. BAILLY and D. JUVE. Numerical solution of acoustic propagation problems using linearized Euler equations. *AIAA J.*, 38 :22–29, 2000.
- [4] A. BAYLISS and E. TURKEL. Radiation boundary conditions for wave-like equations. *Communication on Pure and Applied Mathematics*, 23 :707–725, 1980.
- [5] J.P. BERENGER. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114 :185–200, 1994.
- [6] C. BOGEY. *Calcul direct du bruit aérodynamique et validation de modèles acoustiques hybrides*. PhD thesis, Ecole centrale de Lyon, Avril 2000.
- [7] C. BOGEY, C. BAILLY, and D. JUVE. Calcul du rayonnement acoustique d’une couche de mélange à l’aide des équations d’Euler linéarisées. *C.R Acad. Sci. Paris Sér. Iib Mec.*, 328 :341–347, 2000.
- [8] F. BOURDEL, P.A. MAZET, and P. HELLUY. Resolution of the non-stationary or harmonic Maxwell equations by a discontinuous finite element method. Application to an electromagnetic impulse case. *Proc. of the 10th International Conference on Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, 11-14 Février 1992, Paris, France. Nova science publishers, Inc. New-York*, pages 405–423, 1992.
- [9] A. DE LA BOURDONNAYE. Sur le problème de Cauchy pour le système de Bérenger. *C.R Acad. Sci. Paris Serie I Math.*, 322 :285–288, 1995.
- [10] J.P. BRAZIER. Etude des modes convectés dans un canal plan; calcul numérique du déplacement acoustique. *Tech. Report, RT 13/05628 DSNA/DMAE, ONERA*, Juin 2002.
- [11] F. BUGARIN and L. GAMMACURTA. Perturbation aéroacoustique d’un écoulement cisailé. *Tech. Report, RI 01/05632 DTIM, ONERA*, Juillet 2002.
- [12] R.H. BYRD, P. LU, J. NOCEDAL, and C. ZHU. A limited memory algorithm for bound constrained optimization. *SIAM. J. Sci. Comput.*, 16 :1190–1208, 1995.
- [13] Y. CHAMPOUX and J.F ALLARD. Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media. *Journal of Applied Physics*, 70 (4) :1975–1979, 1991.
- [14] G. CHAVENT and K. KUNISCH. On weakly nonlinear inverse problems. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 56, number 2 :542–572, 1996.
- [15] G. CHAVENT and G. SALZANO. A finite element method for the 1d water flooding problem with gravity. *Journal of Computational Physics*, 45 :307–344, 1982.

- [16] W.C. CHEW and W.H. WEEDON. A 3d perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates. *Microwave and Optical Technology Letters*, 7(13), 1994.
- [17] B.-T. CHU and L. KOVASZNAY. Nonlinear interactions in a viscous heat conducting compressible gas. *Journal of Fluid Mechanics*, 3(5) :494–514, 1958.
- [18] B. COCKBURN and G. CHAVENT. The local projection  $P^0 P^1$  discontinuous Galerkin finite element method for scalar conservation laws. *Model. Math. Anal. Numer.*, 23 :565–592, 1989.
- [19] B. COCKBURN, C.-W. SHU, and G.E. KARNIADAKIS. *Discontinuous Galerkin methods, theory, computation and applications*, volume 11. Springer-Verlag, 2000.
- [20] F. COLLINO and P. MONK. The perfectly matched layer in curvilinear coordinates. *SIAM J. Sci. Comput.*, 19 :2061–2090, 1998.
- [21] T. COLONIUS, P. MOIN, and S. LELE. Sound generation in a mixing layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 330 :375–409, 1997.
- [22] Y. COUDIERE, J.P. VILA, and P. VILLEDIEU. Convergence d'un schéma volumes finis explicite en temps pour les systèmes hyperboliques linéaires symétriques en domaines bornés. *C.R Acad. Sci. Paris, Serie I Math.*, 331 :95–100, 2000.
- [23] J.P. CROISILLE. *Contribution à l'étude théorique et à l'approximation par éléments finis du système hyperbolique de la dynamique des gaz multidimensionnelle et multi espèces*. PhD thesis, Université Paris VI, Janvier 1990.
- [24] B. DAH. *Sur la modélisation de milieux fictifs absorbants de type couches de Bérenger*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Octobre 2001.
- [25] P. DELORME, C. PEYRET, P.A. MAZET, and Y. VENTRIBOUT. Applications de l'aéroacoustique numérique basées sur une méthode numérique de Galerkin discontinue. *C.R Acad. Sci. Paris, série IIb Mec.*, 2005.
- [26] B. ENQUIST and A. MADJA. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Mathematics of Computation*, 31 :629–651, 1977.
- [27] E.M. FERNANDEZ-BERDAGUER. Parameter estimation in acoustic media using the adjoint method. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 36(4), 1998.
- [28] K.O. FRIEDRICHS. Symmetric positive linear differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 7 :333–418, 1958.
- [29] S. GASSER. *Etude des propriétés acoustiques et mécaniques d'un matériau métallique poreux modèle à base de sphères creuses de nickel*. PhD thesis, Institut national polytechnique de Grenoble, Juillet 2003.
- [30] J.C. GILBERT and C. LEMARECHAL. Some numerical experiments with variable-storage quasi-Newton algorithms. *Mathematical Programming*, 45 :407–435, 1989.
- [31] D. GIVOLI. Non-reflecting boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, 94 :1–29, 1991.
- [32] S.K. GODUNOV. *Lois de conservation et intégrales d'énergie des équations hyperboliques*, volume 1270. Springer Lecture Notes in Mathematics, 1987.
- [33] M.E. GOLDSTEIN. *Aeroacoustics*. McGraw-Hill International Book Company (New York), 1976.
- [34] S. GOTTLIEB, C.-W. SHU, and E. TADMOR. Strong stability-preserving high-order time discretization methods. *SIAM Rev.*, 43 :89–112, 2001.
- [35] P. HELLUY. *Résolution numérique des équations de Maxwell harmoniques par une méthode d'éléments finis discontinus*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Janvier 1994.



- [36] L. HORMANDER. *The analysis of linear partial differential operators. II : Differential operators with constant coefficients*, volume II. Springer Verlag, 1983.
- [37] P. HUERRE and P.A. MONKEWITZ. Absolute and convective instabilities in free shear layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 159, 1985.
- [38] P. HUERRE and M. ROSSI. *Hydrodynamics instabilities in open flows*. Cambridge University Press, 1998.
- [39] C. JOHNSON and J. PITKARANKA. An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation. *Math. of Comp.*, 47 :285–312, 1986.
- [40] D.L. JOHNSON, J. KOPLIK, and R. DASHEN. Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, 176 :379–402, 1987.
- [41] D. LAFARGE. *Propagation du son dans les matériaux poreux à structure rigide saturés par un fluide viscothermique*. PhD thesis, Université du Maine, 1993.
- [42] G. LEGENDRE. *Rayonnement acoustique dans un fluide en écoulement. Analyse mathématique et numérique de l'équation de Galbrun*. PhD thesis, Université Paris VI, Septembre 2003.
- [43] P. LESAIN. *Sur la résolution des systèmes hyperboliques du premier ordre par des méthodes d'éléments finis*. PhD thesis, Université Paris VI, 1975.
- [44] M.J. LIDTHILL. On sound generated aerodynamically - i. general theory. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A(211) :313–357, 1952.
- [45] G.M. LILLEY. The generation and radiation of supersonic jet noise. vol. iv - theory of turbulence generated noise, noise radiation from upstream sources, and combustion noise. part ii : Generation of sound in a mixing region. *Air force aero propulsion laboratory, AFAPL-TR-72-53*, 4, 1972.
- [46] J.L. LIONS. *Contrôlabilité exacte, perturbation et stabilisation des systèmes distribués*, volume 1 et 2. Masson, 1988.
- [47] D.C. LIU and J. NOCEDAL. On the limited memory BFGS method for large scale optimization. *Mathematical Programming*, 45 :503–528, 1989.
- [48] P.A. MAZET, L. SEGUI, and B. DAH. Sur l'existence et l'unicité des solutions pour le système de Maxwell harmonique en présence de couches de Bérenger. *C.R Acad. Sci. Paris, Serie I Math.*, 333 :599–604, 2001.
- [49] P. MONK and G.R. RICHTER. A discontinuous Galerkin method for linear symmetric hyperbolic systems in inhomogeneous media. *SIAM J. Sci. Comput.*, 22(7) :443–477, 2005.
- [50] M.K. MYERS. On the acoustic boundary condition in the presence of flow. *Journal of Sound and Vibration*, 71 :429–434, 1980.
- [51] M. NAKAHARA. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics, Publishing Bristol, 2002.
- [52] J. NOCEDAL. Updating quasi-Newton matrices with limited storage. *Mathematical Programming*, 35 :773–782, 1980.
- [53] S. PAINTANDRE. *Matériaux non parfaits en électromagnétisme. Matériaux non linéaires, dispersifs et matériau fictif absorbant*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Juin 1998.
- [54] S. PAINTANDRE, P.A. MAZET, and A. RAHMOUNI. Interprétation dispersive du milieu PML de Bérenger. *C.R Acad. Sci. Paris, Serie I Math.*, 327 :59–64, 1998.
- [55] V. PETKOV. *Scattering theory for hyperbolic operators.*, volume 21. North-Holland, 1989.

- 
- [56] S. PIPERNO and M. BERNACKI. Méthode de type Galerkin discontinue pour les propagations des ondes en aéroacoustique. *Technical report, INRIA*, 2003.
- [57] S.R. PRIDE, F.D. MORGAN, and A.F. GANGI. Drag forces of porous-medium acoustics. *Phys. Rev, B* 47 :4964–4978, 1993.
- [58] A. RAHMOUNI. *Des modèles PML bien posés pour divers problèmes hyperboliques*. PhD thesis, Université Paris XIII, 2000.
- [59] J. RAUCH. Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity. *Transactions of the American Mathematical Society*, 291 :167–187, 1985.
- [60] J. RAUCH. Boundary value problems with nonuniformly characteristic boundary. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 73 :347–353, 1994.
- [61] D. SERRE. *Systèmes de lois de conservation*, volume 1. Diderot Editeur, 1996.
- [62] C.K.W. TAM, L. AURIAULT, and F. CAMBULI. Perfectly matched layer as an absorbing boundary condition for the linearized Euler equations in open and ducted domains. *Journal of Computational Physics*, 144 :213–234, 1998.
- [63] C.H. WILCOX. *Scattering theory for the d'Alembert equation in exterior domains*, volume 442. Springer Verlag, 1975.

## **Contrôle des perturbations aéroacoustiques par impédances de parois : application à un modèle de matériaux poreux.**

*Résumé* : Pour réduire les nuisances sonores produites par un avion, les traitements acoustiques se doivent d'être réalisables par des matériaux caractérisés par des impédances complexes réglables.

L'objet de cette thèse est l'étude et le contrôle d'un modèle de perturbations aéroacoustiques d'un écoulement porteur stationnaire et subsonique, le système régi par les équations d'Euler linéarisées (EEL). Le but est de contrôler les phénomènes de propagations aéroacoustiques, générés dans un domaine (a priori infini) et localisés sur un observatoire spatio-temporel, en utilisant comme variables de contrôle des paramètres locaux d'impédances complexes caractérisant la frontière d'un obstacle solide situé à l'intérieur du domaine. En utilisant dans le cadre de l'aéroacoustique la théorie des systèmes de Friedrichs, et en classifiant les conditions aux limites admissibles à adjoindre au système des EEL, nous montrons le caractère bien posé sur un domaine spatio-temporel borné, d'un problème direct régissant les phénomènes physiques mis en jeu, ainsi que d'un problème adjoint rétrograde, étape indispensable à la résolution de problèmes inverses.

La méthode d'approximation choisie pour résoudre ces problèmes est une méthode de type Galerkin discontinue reposant sur un flux-splitting décentré en espace, combinée avec un schéma de type Runge-Kutta pour l'approximation temporelle. Comme toujours en propagations d'ondes, la simulation de l'espace libre est primordiale. Dans cette optique, une méthode PML adaptée aux EEL est proposée et numériquement validée.

Enfin, une attention toute particulière est portée à la signification physique de ce travail. Un modèle d'homogénéisation de matériaux poreux est utilisé, permettant de relier les variables de contrôle à des paramètres physiques caractérisant la faisabilité expérimentale de matériaux absorbants. Les résultats numériques obtenus sur un modèle académique de prise d'air, illustrent la nécessité de la mise en place de cette méthodologie pour résoudre les problèmes inverses en aéroacoustique dans toutes leurs complexités.

**Mots clefs** : Aéroacoustique, Système de Friedrichs, Problème inverse, Impédance, PML, Matériau poreux.

## **Control of aero-acoustic propagations with wall impedance boundary conditions : application to a porous material.**

*Abstract* : To reduce the noise out of an engine nozzle, the acoustic treatments must be realizable by materials adapted to aeronautic constraints and characterized by adjustable complex impedances.

The purpose of this thesis is the study and the control of a model of aero-acoustic disturbances of a stationary and subsonic initial flow, the system governed by the linearized Euler equations (LEE). The goal is to control the phenomena of aero-acoustic propagations, generated in a field (a priori infinite) and located on a space-time observatory, by using as control variables the local parameters of complex impedances characterizing the boundary of a solid obstacle located inside the field. We show that the LEE system constitutes a Friedrichs' system for which one classifies in an exhaustive way the boundary conditions, which return an well-posed increased system (called direct problem) on a bounded time-space domain. From this study naturally rises a well-posed adjoint problem, which is an essential step to the resolution of inverse problems.

The numerical method chosen to approximate these problems is a Galerkin discontinuous one with an upwind flux-splitting in space, combined with a Runge-Kutta scheme in time. As always in wave propagations, absorbing boundary conditions are of primary importance. Accordingly, a PML method adapted to the LEE is proposed and numerically validated.

Lastly, a very detailed attention is paid to the physical meaning of this work. An homogenized model of porous material is used, making it possible to connect the control variables to physical parameters characterizing the experimental feasibility of absorbent materials. The numerical results obtained with an academic model of air intake, illustrate the efficiency of this methodology to solve aero-acoustic inverse problems with their complexities.

**Key words** : Aero-acoustic, Friedrichs' system, Inverse problem, Impedance, PML, porous Material.

