



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par **l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace**
Spécialité : systèmes automatiques

Présentée et soutenue par **Sebastian GAULOCHER**
le 25 octobre 2007

**Commande boucle fermée multivariable pour le vol
en formation de vaisseaux spatiaux**

JURY

M. Wisama Khalil, président du jury
M. Daniel Alazard
M. Samir Bennani, rapporteur
M. Philippe Chevrel, rapporteur
M. Jean-Pierre Chrétien, directeur de thèse
M^{me} Christelle Pittet, co-directrice de thèse

École doctorale : **systèmes**

Unité de recherche : **équipe d'accueil SUPAERO-ONERA CSDV
(ONERA-DCSD, centre de Toulouse)**

Directeur de thèse : **M. Jean-Pierre Chrétien**

Co-directrice de thèse : **M^{me} Christelle Pittet**



Source : NASA

« Si vous voulez construire un navire, ne vous contentez pas de réunir du bois, de recruter des hommes, de les instruire et leur répartir leurs tâches, mais parlez-leur de la mer que sillonnera le bateau jusqu'à les en faire rêver. »

„Wenn du ein Schiff bauen willst, so trommle nicht die Männer zusammen, um Holz zu beschaffen, Werkzeuge vorzubereiten und Aufgaben zu vergeben, sondern lehre die Männer die Sehnsucht nach dem endlosen Meer.“

attribué à Antoine DE SAINT-EXUPÉRY (1900 – 1944)

Remerciements

À l'issue de la longue période que représente une thèse, le moment est venu de dire merci à toutes les personnes qui ont, directement ou indirectement, de façon significative ou non, qu'ils en soient conscients ou non, contribué à l'achèvement de cette thèse.

J'aimerais commencer par remercier mes encadrants, au nombre de trois, Daniel ALAZARD de l'*Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace* (ISAE), Christelle PITTET du *Centre National d'Études Spatiales* (CNES) et Jean-Pierre CHRÉTIEN de l'*Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales* (ONERA). Les nombreuses discussions et réunions étaient indispensables pour arriver où je suis maintenant. J'ai particulièrement apprécié les conversations avec Jean-Pierre CHRÉTIEN, ses conseils et ses encouragements tout au long de ces trois ans.

J'exprime ma gratitude envers Samir BENNANI de l'*Agence Spatiale Européenne* (ESA) et Philippe CHEVREL de l'*École des Mines de Nantes* (EMN) pour avoir accepté d'être rapporteurs et pour avoir pris le temps d'étudier mon mémoire de thèse. Je remercie aussi Wisama KHALIL pour avoir présidé le jury de soutenance.

Que soient remerciés également Claude BARROUIL et Patrick FABIANI, directeurs successifs du *Département Commande de Systèmes et Dynamique du vol* (DCSD) à l'ONERA et Pierre PELIPENKO, chef du service *Pilotage SCAO* (PS) au CNES, pour m'avoir accueilli au sein de leurs départements respectifs. En outre, je suis très reconnaissant pour la bourse CNES-ONERA sans laquelle cette thèse n'aurait pas été possible.

Je tiens aussi à remercier Valérie CASSIGNOL, secrétaire du DCSD, et Annie DUTHY, secrétaire du service PS, pour leur soutien et pour la bonne ambiance qu'elles savent créer.

Remercées soient les équipes entières du DCSD à l'ONERA (en particulier Christelle CUMER, Michel LLIBRE, Jean-Marc BIANNIC, Gilles FERRÈRES, Pierre APKARIAN et Carsten DÖLL) et du service PS au CNES (en particulier Michel DELPECH et Pierre-Yves GUIDOTTI) pour la collaboration enrichissante. Ce fut un véritable privilège de faire partie d'un groupement d'un tel nombre d'experts. Que soient remerciés aussi Jean-Paul NIGOUL et Ghyslaine PICCHI de l'ONERA pour leur précieux soutien logistique.

J'aimerais dire merci à tous les autres doctorants et stagiaires au DCSD et à PS, en particulier Alexander FEUERSÄNGER et Andreas KNAUF pour les innombrables heures que nous avons passées ensemble. Je ne veux pas oublier de remercier mon stagiaire Patrice ANTOINETTE pour ses contributions et nos conversations.

Schließlich möchte ich noch einige Worte in meiner Muttersprache äußern, um mich von ganzem Herzen bei meiner Familie, insbesondere bei meinen Eltern, für alles zu bedanken, was sie für mich in den letzten 30 Jahren getan haben. Ganz besonders danke ich auch meiner Freundin Judith für ihre Liebe und ihre Geduld sowie ihrer ganzen Familie.

Toulouse, octobre 2007

Sebastian GAULOCHER

Résumé

Dans cette thèse, le problème du contrôle du vol en formation de vaisseaux spatiaux est traité. Le vol en formation permet de mettre en œuvre de nouveaux scénarios de missions spatiales, et ce notamment dans les domaines de l'interférométrie, des télescopes spatiaux et des radars à synthèse d'ouverture.

De par la diversité des applications envisageables, les travaux sont divisés en deux parties, une partie relative aux missions de vol en formation en orbite terrestre et une partie concernant le vol en formation en orbite non planétaire.

Dans la première partie, restreinte au contrôle des centres de masse des vaisseaux, les modèles existant dans la littérature sont détaillés et une approche est proposée pour modéliser les orbites relatives entre deux **satellites en orbite terrestre elliptique** de façon plus systématique, en particulier pour tenir compte de la perturbation orbitale due à l'aplatissement de la Terre. Fondée sur le scénario d'une mission située en orbite de transfert géostationnaire, la problématique d'une dynamique à paramètre variant est illustrée. Deux manières différentes d'asservir la position relative entre deux satellites sont présentées : la première a recours à la représentation linéaire fractionnaire du modèle dynamique pour obtenir un correcteur auto-séquence sous forme linéaire fractionnaire ; la deuxième utilise la synthèse \mathcal{H}_2 -optimale et un modèle de référence pour synthétiser des correcteurs à différentes positions le long de l'orbite. Ces correcteurs sont ensuite interpolés grâce à la forme estimateur d'état/retour d'état.

Dans la deuxième partie, traitant des 6 degrés de liberté de chaque vaisseau, des modèles pour cinématique, dynamique et métrologie d'une **formation de vaisseaux spatiaux en orbite non planétaire** est proposée. Cette approche générique permet de modéliser différents types de missions. La mission *Pegase* est composée de trois vaisseaux et sert comme exemple applicatif afin de montrer la puissance et la généralité du modèle proposé. Dans son mode d'observation, qui requiert un maintien précis des positions et des attitudes des vaisseaux, il est possible de linéariser le modèle et d'avoir recours à des techniques de commande multivariable. La commande \mathcal{H}_2 est utilisée pour satisfaire les spécifications de la mission *Pegase*. Ensuite, deux problématiques particulières du vol en formation sont traitées. Premièrement, la commutation entre correcteurs conçus pour différents modes est considérée. Ainsi, il est possible d'enchaîner des correcteurs utilisant des capteurs de plus en plus précis, mais d'un champ de vue de plus en plus restreint. La garantie de respecter les champs de vue après commutation est obtenue grâce à des fonctions de LYAPUNOV quadratiques. Deuxièmement, un correcteur décentralisé est synthétisé grâce à un algorithme itératif basé sur la synthèse \mathcal{H}_2 -optimale. Après réduction, les correcteurs locaux sont de taille raisonnable et permettent de satisfaire les spécifications de la mission *Pegase*.

Mots Clés : vol en formation ; vaisseaux spatiaux ; modélisation cinématique et dynamique ; modélisation métrologique ; synthèse de correcteurs multivariables ; correcteurs à gain séquencé ; commutation entre correcteurs ; correcteurs décentralisés

Table des matières

Table des matières	v
Sigles et acronymes	xi
Table des figures	xiii
Liste des tableaux	xix
Liste des publications	xxi
I Introduction	1
1 Le vol en formation	3
1.1 Définition du vol en formation	4
1.2 Applications du vol en formation	6
1.2.1 Interféromètres	6
1.2.2 Radars à synthèse d'ouverture	7
1.2.3 Télescopes	7
1.3 Missions de vol en formation	8
1.3.1 <i>LISA</i>	9
1.3.2 <i>TanDEM-X</i>	9
1.3.3 <i>XEUS</i>	9
1.3.4 <i>Pegase</i>	10
1.4 Enjeux du vol en formation	13
1.5 Objectifs de la thèse	14
1.6 Structure de ce mémoire	15

II	Modèles pour le vol en formation	19
2	Dynamique translationnelle en orbite terrestre	21
2.1	Le mouvement d'un satellite en orbite terrestre	22
2.1.1	Le mouvement keplerien	22
2.1.2	Les perturbations orbitales	29
2.2	Revue bibliographique	36
2.2.1	Vol en formation en orbite terrestre circulaire	36
2.2.2	Vol en formation en orbite terrestre elliptique	37
2.2.3	Perturbations orbitales	38
2.2.4	Autres orbites	40
2.3	Le mouvement relatif en orbite terrestre	40
2.3.1	Dynamique d'un seul satellite de la formation	40
2.3.2	Dynamique relative entre les satellites de la formation	42
2.3.3	Linéarisation de la dynamique relative	43
2.3.4	Repère mobile	45
2.3.5	Dynamique en notation matricielle	47
2.3.6	Dynamique de translation en orbite elliptique keplerienne	51
2.3.7	Dynamique de translation en orbite elliptique perturbée – première version . .	53
2.3.8	Dynamique de translation en orbite elliptique perturbée – deuxième version . .	54
2.4	Bilan	58
3	Modèle couplé en translation et en rotation	59
3.1	Revue bibliographique	60
3.2	Points de LAGRANGE	62
3.3	Modèle cinématique	64
3.4	Modèle dynamique en notation intrinsèque	70
3.5	Modèle dynamique en notation extrinsèque	72
3.6	Modèles des perturbations	75
3.6.1	Gradient de gravité	75
3.6.2	Pression de radiation solaire	77
3.7	Simplifications	79
3.7.1	Dynamique de translation en orbite terrestre	79
3.7.2	Mode d'observation	80
3.7.3	Linéarisation autour du mode d'observation	81
3.7.4	Linéarisation autour du mode de changement de la distance inter-vaisseau . . .	85
3.7.5	Linéarisation autour du mode de rotation de la formation autour d'un axe . . .	86

3.8	Structure hiérarchique	88
3.8.1	Complétion de la dynamique	90
3.8.2	Hiérarchies	92
3.9	Modèle métrologique	96
3.9.1	Différence de marche optique	97
3.9.2	Dépointages	103
3.9.3	Senseur stellaire	107
3.9.4	Capteur d'incidence du faisceau optique	107
3.9.5	Capteur latéral fin	113
3.9.6	Capteur latéral grossier	116
3.9.7	Capteur longitudinal	120
3.9.8	Capteur radiofréquence	121
3.9.9	Sorties mesurées supplémentaires	123
3.10	Modèle des actionneurs	123
3.11	Bilan	124
 III Contrôle du vol en formation		125
 4 Méthodologie pour le pilotage relatif en translation		127
4.1	Revue bibliographique	128
4.1.1	Nouveaux actionneurs	128
4.1.2	Trajectoires optimales, initialisation de la formation, manœuvres	128
4.1.3	Guidage, anti-collision	129
4.1.4	Coordination des éléments de la formation	129
4.1.5	Navigation, estimation et capteurs	129
4.1.6	Contrôle en boucle fermée	130
4.2	Objectifs	131
4.3	Analyse de la dynamique	132
4.4	Modèle linéaire fractionnaire	136
4.4.1	Généralités sur la représentation linéaire fractionnaire	136
4.4.2	Modélisation linéaire fractionnaire des fonctions trigonométriques	138
4.4.3	Modélisation linéaire fractionnaire de la dynamique en translation	146
4.5	Contrôle modal auto-séquenté	147
4.5.1	Commande modale stationnaire	148
4.5.2	Commande modale linéaire fractionnaire	150
4.5.3	Application à la dynamique relative	152

4.5.4	Problème de l'existence et de l'unicité de la solution	155
4.5.5	Décomposition en une série de FOURIER	162
4.5.6	Analyse de stabilité	165
4.5.7	Simulations	167
4.5.8	Bilan	170
4.6	Contrôle séquencé \mathcal{H}_2 -optimal avec modèle de référence	170
4.6.1	Synthèse d'un correcteur pour un seul point sur l'orbite	170
4.6.2	Interpolation des correcteurs	175
4.6.3	Analyse de stabilité	179
4.6.4	Analyse de performance	179
4.6.5	Bilan	181
4.7	Perspectives	182
5	Méthodologie pour pilotage en attitude/translation	183
5.1	Revue bibliographique	184
5.2	Objectifs	186
5.3	Modélisation de la mission <i>Pegase</i>	187
5.3.1	Hierarchie et dynamique	189
5.3.2	Définition des repères	190
5.3.3	Perturbations orbitales	192
5.3.4	Actionneurs	192
5.3.5	Météorologie	194
5.3.6	Représentation d'état	202
5.3.7	Bilan	206
5.4	Synthèse d'un correcteur pour un seul mode opérationnel	206
5.4.1	Correcteur de base	206
5.4.2	Correcteur avec réjection de biais	218
5.4.3	Bilan	222
5.5	Commutation entre correcteurs	223
5.5.1	Motivation	223
5.5.2	Revue bibliographique	225
5.5.3	Mise en œuvre	226
5.5.4	Prise en compte du bruit	240
5.5.5	Bilan	253
5.6	Synthèse d'un correcteur décentralisé	255
5.6.1	Motivation	256
5.6.2	Revue bibliographique	257

5.6.3	Description de la méthode	259
5.6.4	Application au vol en formation et résultats	267
5.6.5	Bilan	277
5.7	Bilan global	278
IV	Conclusion	281
	Récapitulation et contributions	283
	Perspectives	287
	Bibliographie	289
	Annexes	303
A	Constantes et unités	305
B	Notations	307
B.1	Raccourcis	307
B.2	Matrice antisymétrique	307
B.3	Matrices d'identité et nulle	308
B.4	Matrices colonnes nulle et élémentaires	309
B.5	Matrices de rotation élémentaires	309
B.6	Matrice diagonale	311
C	Notions de base en cinématique et en dynamique	313
C.1	Cinématique	313
C.1.1	Repères	314
C.1.2	Produits	317
C.1.3	Dérivées	318
C.1.4	Paramétrisation de l'attitude	321
C.2	Dynamique	323
C.2.1	Masse ponctuelle	323
C.2.2	Corps rigide	324
D	Calcul des gradients d'un champ de gravitation	329
D.1	Potentiel terrestre sphérique	330
D.2	Deuxième harmonique zonal (J_2)	331

E	Non-existence d'une représentation LFT d'ordre un	333
F	Transformée de Fourier discrète	337
G	Théorème de Floquet	339
H	La synthèse \mathcal{H}_2	343
I	Distance entre un hyper-ellipsoïde et un point	349
	I.1 Premier algorithme	351
	I.2 Deuxième algorithme	353
J	Réduction de correcteurs	357

Sigles et acronymes

Sigle	Explication
BMI	inégalité matricielle bilinéaire (<i>angl.</i> bilinear matrix inequality)
CNES	Centre National d'Études Spatiales
CW	équations de CLOHESSY-WILTSHIRE
DCSD	Département Commande des Systèmes et Dynamique du vol
DLR	Centre Allemand de l'Aéronautique et de l'Espace (<i>all.</i> Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt)
EKF	filtre de KALMAN étendu (<i>angl.</i> extended KALMAN filter)
ESA	Agence Spatiale Européenne (<i>angl.</i> European Space Agency)
FRAS	capteur d'incidence du faisceau optique (<i>angl.</i> fine relative angle sensor)
FWBT	troncature balancée avec pondération fréquentielle (<i>angl.</i> frequency-weighted balanced truncation)
FWMR	réduction de modèle avec pondération fréquentielle (<i>angl.</i> frequency-weighted model reduction)
FWSPA	approximation à perturbation singulière avec pondération fréquentielle (<i>angl.</i> frequency-weighted singular perturbation approximation)
GEO	orbite géostationnaire (<i>angl.</i> geostationary orbit)
GPS	système de positionnement global (<i>angl.</i> Global Positioning System)
GTO	orbite de transfert géostationnaire (<i>angl.</i> geostationary transfer orbit)
\mathcal{H}_2	correcteur (ou norme) \mathcal{H}_2
\mathcal{H}_∞	correcteur (ou norme) \mathcal{H}_∞
HCW	équations de HILL-CLOHESSY-WILTSHIRE
HEO	orbite fortement elliptique (<i>angl.</i> highly-elliptical orbit)

Sigle	Explication
L_2	deuxième point de LAGRANGE (similaire pour L_1 , L_3 , L_4 et L_5)
LEO	orbite terrestre basse (<i>angl.</i> low Earth orbit)
LFT	transformation linéaire fractionnaire (<i>angl.</i> linear-fractional transformation)
LMI	inégalité matricielle linéaire (<i>angl.</i> linear matrix inequality)
LPV	linéaire à paramètre variant (<i>angl.</i> linear parameter-varying)
LQG	correcteur linéaire-quadratique gaussien
LVLH	repère vertical-local horizontal-local (<i>angl.</i> local-vertical local-horizontal frame)
MPC	commande prédictive à modèle interne (<i>angl.</i> model-predictive control)
NASA	National Air and Space Administration
NMI	inégalité matricielle non-linéaire (<i>angl.</i> nonlinear matrix inequality)
ONERA	Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales
PD	correcteur proportionnel-dérivé
PID	correcteur proportionnel-intégral-dérivé
SCAO	Système de contrôle de l'attitude et de l'orbite (<i>angl.</i> attitude and orbit control system, AOCS)
SLICOT	Bibliothèque de sous-routines en théorie de commande (<i>angl.</i> Subroutine Library In Control Theory)
SSV	valeur singulière structurée (<i>angl.</i> structured singular value)
UKF	filtre de KALMAN unscented (<i>angl.</i> unscented KALMAN filter)

Table des figures

1.1	Essaims d'animaux. Insectes, poissons et oiseaux	4
1.2	Vol en constellation. <i>Galileo</i> , <i>Cluster</i> et <i>SWARM</i>	5
1.3	Rendez-vous spatiaux. <i>ATV – ISS</i> et <i>Apollo – Soyouz</i>	6
1.4	<i>VLTI</i> (Very Large Telescope Interferometer)	7
1.5	<i>LISA</i> (Laser Interferometer Space Antenna)	9
1.6	<i>TanDEM-X</i>	10
1.7	<i>XEUS</i> (X-ray Evolving Universe Spectroscopy Mission)	10
1.8	<i>Pegase</i>	11
1.9	Schéma de la mission <i>Pegase</i> et des interférences	11
1.10	Modes opérationnels de la mission <i>Pegase</i>	12
1.11	Structure du mémoire	16
2.1	Orbite keplerienne terrestre	23
2.2	Repère géocentrique équatorial	25
2.3	Paramètres orbitaux – Ascension droite du nœud ascendant Ω	25
2.4	Paramètres orbitaux – Inclinaison i	26
2.5	Paramètres orbitaux – Argument du périégée ω	27
2.6	Orbite keplerienne	28
2.7	Comparaison des niveaux des différentes perturbations en orbite terrestre	30
2.8	Attraction différentielle du Soleil	31
2.9	Définition des angles de latitude et de colatitude	32
2.10	Potentiel de gravitation sphérique	33
2.11	Potentiel de gravitation J_2 superposé	33
2.12	Variations des éléments orbitaux a , e , i , Ω , ω et ν sur 10 orbites	35
2.13	Variations des éléments orbitaux Ω , ω et ν sur 10 orbites	35
2.14	Géométrie utilisée pour la linéarisation	43
3.1	Points de LAGRANGE du système Soleil-Terre	62

3.2	Orbite halo autour du point de LAGRANGE L_2 du système Soleil-Terre	63
3.3	Géométrie du mouvement de deux vaisseaux d'une formation suivant une orbite halo autour du point de LAGRANGE L_2	64
3.4	Succession de translations et de rotations	67
3.5	Géométrie du mouvement de deux vaisseaux d'une formation suivant une orbite halo autour du point de LAGRANGE L_2 : cas perturbé	68
3.6	Succession de translations et de rotations	70
3.7	Les trois types de forces générées par la pression solaire	77
3.8	Linéarisation autour d'une trajectoire de référence	83
3.9	Évolution possible de r_i , \dot{r}_i et \ddot{r}_i pour un changement de distance inter-vaisseau	85
3.10	Les deux chemins optiques différents	97
3.11	Principe de la différence de marche optique	98
3.12	Réflexion du vecteur incident \vec{v} sur le miroir défini par le vecteur normal \vec{n}_i	99
3.13	Principe du dépointage inertiel d'un vaisseau	103
3.14	Principe du dépointage du leader/de la formation entière	105
3.15	Principe du dépointage du follower vis-à-vis du leader	106
3.16	Principe du dépointage relatif d'un vaisseau par rapport à un autre vaisseau	106
3.17	Principe d'un senseur stellaire	107
3.18	Principe du capteur d'incidence du faisceau optique (FRAS)	108
3.19	Capteur photographique	111
3.20	Analogie entre les télescopes de KEPLER et de CASSEGRAIN	113
3.21	Principe du capteur latéral fin	114
3.22	Principe du capteur latéral grossier	117
3.23	Principe du capteur longitudinal	119
3.24	Le principe du capteur radiofréquence	122
3.25	Exemple d'implantation des tuyères sur un vaisseau	123
4.1	Lieu des pôles de la dynamique relative en translation	134
4.2	Valeurs singulières de la dynamique relative non perturbée pour des valeurs différentes de ν	135
4.3	La représentation linéaire fractionnaire	136
4.4	Modèles de TAYLOR d'ordres différents	140
4.5	Approximations de PADÉ d'ordres différents	141
4.6	Modèles d'ordre deux	142
4.7	Modèles d'ordre deux	143
4.8	Modèles d'ordre quatre	145
4.9	Schéma-bloc du système et du correcteur sans consignes	151

4.10	Schéma-bloc du système et du correcteur. Injection des consignes au niveau des entrées	151
4.11	Schéma-bloc du système et du correcteur. Injection des consignes au niveau des états	152
4.12	Pôles choisis pour la boucle fermée par rapport à l'évolution des pôles en boucle ouverte	153
4.13	Modèle de référence pour un seul axe – lieu de BODE et réponse indicielle	154
4.14	Erreur commise lors du placement des pôles	155
4.15	Variations des gains normalisés du correcteur en fonction de l'anomalie vraie	156
4.16	Variations des gains normalisés du correcteur en fonction du temps	156
4.17	Conditionnement de la matrice $I_{n_\Delta} - K_{11}\Delta$ du correcteur à trois axes	158
4.18	Conditionnement de la matrice $I_{n_\Delta} - K_{11}\Delta$ du correcteur à deux axes	159
4.19	Conditionnement de la matrice $I_{n_\Delta} - K_{11}\Delta$ du correcteur mono-axe	159
4.20	Rayon spectral $\rho(K_{11}\Delta)$ du correcteur à trois axes	161
4.21	Rayon spectral $\rho(K_{11}\Delta)$ du correcteur à deux axes	162
4.22	Rayon spectral $\rho(K_{11}\Delta)$ du correcteur mono-axe	162
4.23	Approximation d'un gain scalaire du correcteur à l'aide d'une série de FOURIER tronquée	164
4.24	Suivi d'une trajectoire de référence	167
4.25	Suivi d'une trajectoire de référence, illustration en deux dimensions.	168
4.26	Commandes utilisées pour suivre une trajectoire de référence	169
4.27	Erreur entre la trajectoire de référence et la trajectoire contrôlée	169
4.28	Schéma bloc de synthèse	171
4.29	Valeurs singulières du transfert entre la consigne r et la sortie y	172
4.30	Valeurs singulières du correcteur $K(s)$	173
4.31	Structure du correcteur	174
4.32	Variation de l'anomalie vraie ν en fonction du temps t pour une orbite de transfert géostationnaire	176
4.33	Répartition des points de synthèse le long de l'orbite	177
4.34	Erreurs entre la réponse indicielle du modèle de référence et celle du correcteur séquencé sur deux orbites	180
5.1	Séparation du système et des correcteurs en deux étages	188
5.2	Emplacement de plusieurs capteurs sur le recombineur et le sidérostas 2	189
5.3	Positions et orientations des repères définissant la formation <i>Pegase</i>	191
5.4	Forme des matrices de la représentation d'état	205
5.5	Forme standard de synthèse utilisée	207
5.6	Filtre de pondération	208
5.7	Forme des matrices de la représentation d'état de la forme standard	210
5.8	Correcteur sous forme d'un filtre de KALMAN	211

5.9	Effet d'une multiplication des bruits de mesure et des bruits d'actuation sur la performance stochastique	212
5.10	Temps de réponse de l'attitude inertielle du recombineur (axe x)	213
5.11	Valeurs singulières σ du correcteur $K(s)$	214
5.12	Bandes passantes des différentes dynamiques	214
5.13	Biais et écarts-type des différentes sorties contrôlées	216
5.14	Simulation de la sortie contrôlée 1 (attitude inertielle recombineur, axe x) avec l'effet de la pression solaire	216
5.15	Simulation de la sortie contrôlée 2 (attitude inertielle recombineur, axe y) avec l'effet de la pression solaire	217
5.16	Simulation de la sortie contrôlée 6 (attitude relative sidérost 1, axe y) avec l'effet de la pression solaire	217
5.17	Forme standard avec biais	218
5.18	Biais et écarts-type des différentes sorties contrôlées	220
5.19	Simulation de la sortie contrôlée 6 (attitude relative sidérost 1, axe y) avec l'effet de la pression solaire et avec réjection de biais	221
5.20	Estimée de la force différentielle selon l'axe z agissant sur les sidérost 1 et 2	221
5.21	Valeurs singulières σ du correcteur $K(s)$ avec et sans réjection de biais	222
5.22	Modes opérationnels auxiliaires du mode nulling	223
5.23	Champs de vue de deux capteurs et trajectoire des états sans et avec garantie de stabilité	229
5.24	Simulation dans laquelle la commutation est effectuée selon la stratégie 1b (états et mode actif)	230
5.25	Simulation dans laquelle la commutation est effectuée selon la stratégie 1b (mesures) .	231
5.26	Conservatisme dû au champ de vue asymétrique du capteur 2	233
5.27	Simulation dans laquelle la commutation est effectuée selon la stratégie 2a (états et mode actif)	239
5.28	Simulation dans laquelle la commutation est effectuée selon la stratégie 2a (mesures) .	239
5.29	Simulation dans laquelle la commutation est effectuée selon la stratégie 2a (fonction de LYAPUNOV)	240
5.30	Région de confiance (hyper-ellipsoïde autour de l'état de l'estimateur x_K dans laquelle se trouve le vrai état x	241
5.31	Probabilité p en fonction du facteur d'échelle k pour $n = 1$ et $n = 30$	243
5.32	Hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV et de covariance initiaux et après la première transformation	244
5.33	Hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV et de covariance après la deuxième et troisième transformation	246
5.34	Surface parallèle de distance 1 à l'hyper-ellipsoïde $\xi^T \mathcal{P} \xi = 1$	247
5.35	Hyper-ellipsoïdes de LYAPUNOV et de covariance dans le cas $n = 2$	247
5.36	Hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV	248

5.37	Simulation dans laquelle la commutation est effectuée selon la stratégie 2b	250
5.38	Simulation dans laquelle la commutation est effectuée selon la stratégie 2b	251
5.39	Simulation dans laquelle la commutation est effectuée selon la stratégie 2c	252
5.40	Algorithme de commutation entre le mode k et le mode $k + 1$	253
5.41	Utilisation de plusieurs fonctions de LYAPUNOV	255
5.42	Correcteur centralisé et correcteur décentralisé	256
5.43	Nouvelle forme standard $P_k^i(s)$ après bouclage de tous les correcteurs sauf $K_k^i(s)$. . .	260
5.44	Algorithme de synthèse décentralisée	262
5.45	Algorithme amélioré de synthèse décentralisée	266
5.46	Couplages entre les trois vaisseaux spatiaux de la mission <i>Pegase</i>	267
5.47	Croissance de l'ordre du correcteur sans réduction	269
5.48	Norme \mathcal{H}_2 , écart-type maximal et ordres des correcteurs locaux et du correcteur complet pour la synthèse décentralisée	270
5.49	Norme \mathcal{H}_2 , écart-type maximal et ordres des correcteurs locaux et du correcteur complet pour la synthèse décentralisée	271
5.50	Comparaison des valeurs singulières entre les correcteurs locaux initiaux et finaux . . .	273
5.51	Comparaison des valeurs singulières du système en boucle fermée	274
5.52	Valeurs singulières des différents transferts des correcteurs centralisé et décentralisé. .	275
C.1	Un système direct de vecteurs orthonormaux	315
C.2	Passage du repère \mathcal{F}_A au repère \mathcal{F}_B	316
C.3	Rotations élémentaires autour des axes 1, 2 et 3	322
C.4	Dynamique d'une masse ponctuelle	323
C.5	Corps rigide	325
H.1	La forme standard	343
H.2	Le système en boucle fermée	347
I.1	Ellipse ε_P et point X à l'intérieur	350
I.2	Quelques itérations du premier algorithme	352
I.3	Les fonctions $f(c)$ et $g(c)$	356

Liste des tableaux

1.1	Missions de vol en formation	8
2.1	Les paramètres orbitaux	29
3.1	Repères associés aux vecteurs utilisés	67
3.2	Repères associés aux vecteurs utilisés	69
3.3	Repères associés aux vecteurs et dyades utilisés	73
3.4	Matrices de passage entre les différents repères	73
3.5	Ordres de grandeur des différentes distances importantes	76
3.6	Les structures hiérarchiques possibles	95
3.7	Sorties mesurées et contrôlées modélisées	97
4.1	Demi-grand axe a et excentricité e d'une orbite de transfert géostationnaire	132
4.2	Avantages et inconvénients des différentes représentations LFT	145
4.3	Modèles linéaires fractionnaires des équations de LAW DEN	146
4.4	Modèles linéaires fractionnaires pour le premier modèle tenant compte du deuxième harmonique zonal	146
4.5	Modèles linéaires fractionnaires pour le deuxième modèle tenant compte du deuxième harmonique zonal	147
4.6	Taille des correcteurs modaux auto-séquencés	154
4.7	Rayons de l'existence et de l'unicité de la solution	157
4.8	Comparaison des besoins de mémoire d'un correcteur LFT avec un correcteur sous forme d'une série de FOURIER	165
4.9	Analyse de FLOQUET	166
4.10	Pôles du correcteur $K(s)$	175
4.11	Multiplicateurs caractéristiques μ_k pour le système en boucle fermée	179
4.12	Critère de performance pour différents types de séquencement	181
5.1	Données numériques pour la dynamique	190
5.2	Données numériques pour les repères	191

5.3	Données numériques pour les perturbations orbitales	193
5.4	Données numériques pour l'optique	195
5.5	Données numériques pour les senseurs stellaires	197
5.6	Données numériques pour les capteurs d'incidence du faisceau optique	198
5.7	Données numériques pour les capteurs latéraux fins	199
5.8	Données numériques pour les capteurs longitudinaux fins	200
5.9	Données numériques pour les capteurs latéraux grossiers	201
5.10	Données numériques pour les capteurs radiofréquence	202
5.11	Forces causées par la pression solaire	205
5.12	Forces causées par le gradient de gravité	206
5.13	Performances atteintes en boucle fermée	211
5.14	Temps de réponse des différents états suite à une valeur initiale de 1 sur l'état concerné	213
5.15	Biais normalisés en régime permanent des sorties contrôlées	215
5.16	Performances (1σ) atteintes en boucle fermée avec réjection des biais	219
5.17	Biais normalisés améliorés en régime permanent des sorties contrôlées	220
5.18	Capteurs utilisés dans les différents modes opérationnels auxiliaires	224
5.19	Limites des champs de vue des différents capteurs	227
5.20	Temps de commutation pour la stratégies 2a	240
5.21	Facteur d'échelle k pour différentes probabilités dans les cas $n = 1$ et $n = 30$	243
5.22	Avantages et inconvénients des trois stratégies de commutation 2a, 2b et 2c	253
5.23	Temps de commutation pour les stratégies 2a, 2b, 2c et 2d	254
5.24	Croissance de l'ordre du correcteur sans réduction	268
5.25	Performances atteintes en boucle fermée avec le correcteur décentralisé	272
5.26	Performance \mathcal{H}_2 centralisée atteignable avec un correcteur centralisé lors de l'omission d'un seul capteur	276
5.27	Performance \mathcal{H}_2 décentralisée atteignable avec un correcteur décentralisé lors de l'omission d'un seul capteur	276

Liste des publications

- [1] GAULOCHER, S. Modeling the coupled translational and rotational relative dynamics for formation flying control. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (San Francisco, CA, August 2005).
- [2] GAULOCHER, S. Modélisation de la dynamique relative couplée en translation/rotation pour le contrôle du vol en formation. In *6ème Congrès des Doctorants de l'École Doctorale Systèmes* (Toulouse, France, May 19-20 2005).
- [3] GAULOCHER, S., CHRÉTIEN, J.-P., AND PITTET, C. Six-DOF formation flying modeling and control with an application to space interferometry. In *6th International ESA Conference on Guidance, Navigation and Control Systems* (Loutraki, Greece, October 17-20, 2005).
- [4] GAULOCHER, S., CHRÉTIEN, J.-P., AND PITTET, C. Six-axis control design and controller switching for spacecraft formation flying. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Keystone, CO, August 2006).
- [5] GAULOCHER, S., CHRÉTIEN, J.-P., PITTET, C., DELPECH, M., AND ALAZARD, D. Closed-loop control of formation flying satellites : Time and parameter varying framework. In *2nd Int. Symposium on Formation Flying Missions & Technologies* (Washington, DC, September 14-16 2004).
- [6] GAULOCHER, S., CHRÉTIEN, J.-P., PITTET, C., AND ALAZARD, D. Six-axis decentralized control design for spacecraft formation flying. In *IEEE International Conference on Control Applications* (Munich, Germany, October 4-6 2006).
- [7] GAULOCHER, S., CUMER, C., ALAZARD, D., HUMBERT, M., AND CASSEIN, G. Aircraft load alleviation during manoeuvres using optimal control surfaces combinations. In *6th ONERA-DLR Aerospace Symposium* (Berlin, Germany, June 22-23 2004).
- [8] GAULOCHER, S., PITTET, C., AND CHRÉTIEN, J.-P. Modélisation de la dynamique relative couplée en translation/rotation pour le contrôle du vol en formation de satellites. In *Journées Doctorales et Nationales du GDR MACS* (Lyon, France, September 5-7 2005).
- [9] GAULOCHER, S., ROOS, C., AND CUMER, C. Aircraft load alleviation during maneuvers using optimal control surface combinations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 30, 2 (March-April 2007).
- [10] KNAUF, A., GAULOCHER, S., AND FEUERSÄNGER, A. P. Innovative controller design for systems with parameter variations. In *Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress* (Braunschweig, Germany, November 6-9 2006).

- [11] KNAUF, A., GAULOCHER, S., AND FEUERSÄNGER, A. P. Self-scheduled relative-motion control of formation-flying satellites. In *3rd International Conference on Integrated Modeling and Analysis in Applied Control and Automation* (Buenos Aires, Argentina, February 8-10 2007).

Première partie

Introduction

Chapitre 1

Le vol en formation

Sommaire

1.1	Définition du vol en formation	4
1.2	Applications du vol en formation	6
1.2.1	Interféromètres	6
1.2.2	Radars à synthèse d'ouverture	7
1.2.3	Télescopes	7
1.3	Missions de vol en formation	8
1.3.1	<i>LISA</i>	9
1.3.2	<i>TanDEM-X</i>	9
1.3.3	<i>XEUS</i>	9
1.3.4	<i>Pegase</i>	10
1.4	Enjeux du vol en formation	13
1.5	Objectifs de la thèse	14
1.6	Structure de ce mémoire	15

L'exploration de l'environnement, en particulier de la Terre et de l'univers, a toujours été une forte motivation pour toute activité humaine. Le zèle vers des découvertes a fécondé des avancées technologiques hors pair, et celles-ci ont de nouveau mené à l'exploration de territoires inconnus.

L'avènement de l'ère spatiale avec des pionniers comme Constantin TSIOLKOVSKI (1857 – 1935), Robert GODDARD (1882 – 1945), Hermann OBERTH (1894 – 1980), Eugen SÄNGER (1905 – 1964), Sergueï KOROLEV (1907 – 1966) et Wernher VON BRAUN (1912 – 1977) a déclenché une véritable avalanche de technologies. Ceci a permis à l'humanité de se surpasser comme le peint l'homme qui était le premier à poser son pied sur la Lune le 20 juillet 1969 :

« That's one small step for man, one giant leap for mankind. »

Neil ARMSTRONG (1930 –)

Outre les progrès dans les domaines de la propulsion spatiale, des vols habités et des sondes spatiales, le domaine des satellites a connu un essor considérable, permettant à l'humanité d'étudier la Terre d'en haut, de naviguer avec plus de précision, d'observer l'univers sans l'atténuation gênante de l'atmosphère et de communiquer plus efficacement.

Le vol en formation de satellites est une technologie récente qui a commencé à se développer à partir des années 1990 et qui est destinée à un futur très prometteur. Les missions de vol en formation en cours de préparation sont légion et présentent une variété considérable.

Au sein de ce premier chapitre, nous définirons tout d'abord les caractéristiques du vol en formation, en particulier celles qui le distinguent des technologies voisines. Ensuite, nous donnerons un aperçu des principaux types d'application, suivi d'une présentation des missions spatiales les plus importantes en cours de préparation par les agences spatiales dans le monde entier. Finalement, nous citerons les différents enjeux rencontrés lorsqu'il s'agit de la commande du vol en formation pour en déduire les objectifs de cette thèse.

1.1 Définition du vol en formation

Pour être clair en ce qui concerne la terminologie et pour dissiper toutes sortes de malentendus dans la suite, nous devons d'abord définir ce qu'est le vol en formation de satellites.

Définition 1.1 *Une formation est un groupement de deux ou plusieurs satellites ou vaisseaux spatiaux qui ont pour but d'accomplir une tâche commune et de longue durée. À cette fin, ils ont recours à des capteurs relatifs. Les états relatifs entre différents éléments sont primordiaux pour l'accomplissement de la mission.*

Définition 1.2 *Un capteur relatif est capable de mesurer les états relatifs entre différents éléments d'une formation comme la distance cartésienne ou l'orientation relative entre deux vaisseaux.*

Il nous paraît nécessaire d'éclaircir quelques points cruciaux par rapport aux deux définitions que nous venons d'établir.

D'abord, le mot *essaim* (*angl.* swarm, flock ou school), un terme emprunté de la biologie pour décrire une accumulation d'animaux (par exemple insectes, oiseaux et poissons, cf. FIG. 1.1) qui se déplacent en trois dimensions, peut être utilisé synonymiquement pour *formation*.



FIGURE 1.1 – Essaims d'animaux. Insectes (à gauche), poissons (au centre) et oiseaux (à droite).
Source : Wikipédia

Comme nous le verrons plus tard, il existe beaucoup d’analogies entre le vol en formation de satellites et le mouvement en essaim d’animaux tel qu’il est décrit de façon parlante par Hiro-Sato NIWA [132] :

« One of the most striking behaviours of a school is its synchronization. Hundreds of small fish glide in unison, more like a single organism than a collection of individuals. »

Le choix entre l’emploi de *satellite* (*lat.* satelles = escorte, garde du corps) ou de *vaisseau spatial* se fait en fonction de l’orbite. Dans ce mémoire de thèse, nous utiliserons le premier terme lorsqu’il s’agit d’une orbite autour de la Terre, par exemple une orbite basse (LEO, *angl.* low earth orbit) ou une orbite géostationnaire (GEO, *angl.* geostationary earth orbit), et le deuxième terme (plus général) lorsque la formation est située sur une orbite non terrestre, par exemple au voisinage d’un point de LAGRANGE¹.

Bien entendu, il existe aussi le vol en formation d’engins aériens, par exemple de drones (UAV, *angl.* unmanned aerial vehicle), et d’autres types de coopérations entre plusieurs véhicules, par exemple de véhicules terrestres ou (sous-)marins. Cependant, nous nous focaliserons dans ce mémoire sur les engins spatiaux.

La restriction dans la Déf. 1.1 à l’existence de capteurs relatifs sert à distinguer le vol en formation du *vol en constellation* qui, généralement, n’a pas besoin de capteurs relatifs pour accomplir sa mission, mais qui se base sur des mesures prises au sol. En outre, les distances à l’intérieur d’une constellation sont généralement supérieures à celles à l’intérieur d’une formation (néanmoins, il y a des exceptions comme la mission *LISA*). En termes de positionnement relatif, il est suffisant que les éléments d’une constellation maintiennent grossièrement la géométrie de la constellation et qu’ils évitent d’éventuelles collisions.

Comme exemples de constellations, nous pouvons citer *Galileo* (ESA), *Cluster* (ESA) et *SWARM* (ESA), cf. FIG. 1.2.



FIGURE 1.2 – Vol en constellation. *Galileo* (à gauche), *Cluster* (au centre) et *SWARM* (à droite). Source : ESA

L’attribut *de longue durée* exclut les rendez-vous spatiaux qui, de leur côté, sont aussi équipés de capteurs relatifs. Or, le but commun consiste à approcher deux vaisseaux pour accomplir un amarrage. Nous découvrirons dans la suite qu’il existe de nombreux points communs entre le vol en formation et les rendez-vous spatiaux.

1. Giuseppe Lodovico LAGRANGIA (1736 – 1813), mathématicien et astronome italien

La FIG. 1.3 montre deux exemples de rendez-vous spatiaux.

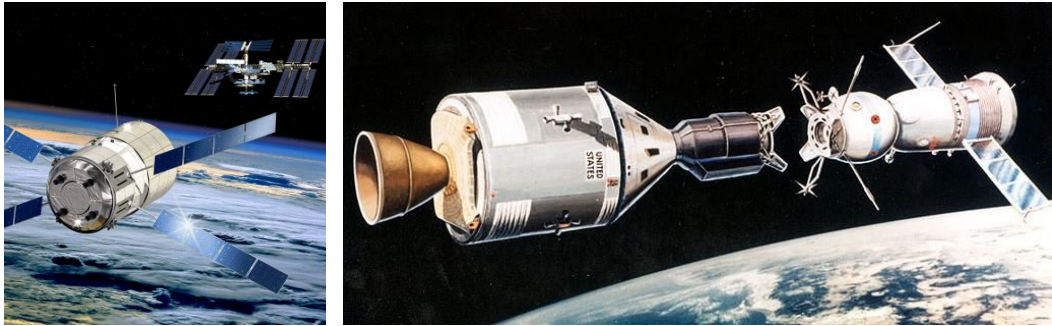


FIGURE 1.3 – Rendez-vous spatiaux. *ATV – ISS* (à gauche) et *Apollo – Soyuz* (à droite). Source : ESA, Wikipédia

1.2 Applications du vol en formation

Contrairement aux constellations dont le but principal est de maximiser la couverture, par exemple la couverture de la surface terrestre avec des signaux électromagnétiques dans le cas de *Galileo* ou l'observation de la magnétosphère à partir de différentes positions dans le cas de *Cluster*, les motivations du vol en formation sont multiples comme nous allons le voir.

De manière générale, il est possible de distinguer trois grandes catégories d'applications, les *interféromètres*, les *radars à synthèse d'ouverture* et les *télescopes*.

1.2.1 Interféromètres

Absolument parlant, l'interférométrie consiste à rallier plusieurs faisceaux lumineux pour créer des interférences. Il existe une multitude de méthodes d'interférométrie, comme l'interféromètre de MACH²-ZEHNDER³, l'interféromètre de MICHELSON⁴ ou l'interféromètre de SAGNAC⁵.

Les applications sont aussi variées que le nombre de types d'interféromètres est grand.

À titre d'exemple, nous citons l'utilisation de l'effet de *Sagnac*, c'est-à-dire l'interférence entre un faisceau courant dans le sens horaire et un faisceau courant dans le sens anti-horaire, pour en déterminer la vitesse de rotation de l'instrument. Cet effet est utilisé dans les gyromètres laser (*angl.* light amplification by stimulated emission of radiation, *fr.* amplification de la lumière par émission stimulée de rayonnement) embarqués dans quelques satellites.

En plus, un interféromètre peut être utilisé pour mesurer des distances avec une très haute précision comme le montre l'expérience de MICHELSON et MORLEY⁶ datant de 1887. Ce principe est le fondement de la mission *LISA* (*angl.* Laser Interferometer Space Antenna) que nous décrirons plus tard.

2. Ernst MACH (1838 – 1916), physicien autrichien

3. Ludwig Louis Albert ZEHNDER (1854 – 1949), physicien suisse

4. Albert Abraham MICHELSON (1852 – 1931), physicien allemand

5. Georges SAGNAC (1869 – 1928), physicien français

6. Edward Williams MORLEY (1838 – 1923), scientifique américain

Un exemple encore plus pertinent sont les télescopes qui opèrent à l'aide de l'interférométrie, comme par exemple le *VLTI* (*angl.* Very Large Telescope Interferometer) au Chili, cf. FIG. 1.4. Cet ensemble combine les mesures de plusieurs télescopes individuels pour augmenter la résolution optique. Le même principe est utilisé dans les missions *Darwin* (ESA), *Pegase* (CNES) et *TPF-I* (*angl.* Terrestrial Planet Finder, NASA). Ceci permet de distribuer un grand télescope sur plusieurs petits télescopes pour des raisons de faisabilité et de coût.



FIGURE 1.4 – VLTI (Very Large Telescope Interferometer). Source : Wikipédia

1.2.2 Radars à synthèse d'ouverture

Le radar à synthèse d'ouverture (SAR, *angl.* synthetic-aperture radar) consiste à synthétiser un radar d'une résolution équivalente à un grand radar monolithique en le distribuant sur plusieurs antennes de taille réduite. Des échos du signal émis sont interceptés par les autres antennes, avec des intensités et des phases légèrement différentes. Ceci permet d'augmenter la résolution du radar dans la direction de vol.

Le principe du radar à synthèse d'ouverture a déjà eu de nombreuses applications, par exemple dans des avions de reconnaissance ou des missiles de croisière. Dans le secteur spatial, plusieurs constellations de satellites utilisant cette technique sont en cours de préparation, par exemple *SAR-Lupe* (armée de la République fédérale d'Allemagne), ou déjà en vol, par exemple *Lacrosse* (National Reconnaissance Office, États-Unis). Il existe aussi des radars à synthèse d'ouverture à bord d'un seul véhicule, par exemple à bord de la navette spatiale en utilisant un mât d'une longueur de 60 m (*Shuttle Radar Topography Mission*).

Dans le domaine du vol en formation, il y a actuellement plusieurs missions en cours de préparation qui utilisent ce principe, par exemple *ROMULUS* (Radars Orbitaux MULTisatellites à Usage de Surveillance, ONERA) pour détecter des cibles mobiles ou *TanDEM-X* (DLR) pour effectuer des mesures topographiques.

1.2.3 Télescopes

La troisième catégorie d'applications du vol en formation sont les télescopes. De nouveau, il existe de nombreuses variantes de télescopes.

Une première variante sont les coronographes, des télescopes destinés à observer la couronne du

Soleil. Le premier coronographe a été conçu par Bernard LYOT⁷ au début des années 1930. Le principe est d'insérer, à l'intérieur du télescope, un masque opaque qui imite ainsi la Lune lors d'une éclipse totale solaire. La mission de vol en formation *ASPICS* (Association de Satellites Pour l'Imagerie et la Coronographie Solaire, CNES) repose sur ce principe.

Une deuxième idée est de synthétiser un télescope à partir de deux vaisseaux spatiaux en séparant spatialement le miroir et l'oculaire. Bien entendu, l'oculaire doit être positionné au foyer du miroir, mais sans avoir de contraintes d'encombrement à l'intérieur d'un seul vaisseau. Ainsi, un télescope de très grande résolution peut être assemblé. Les missions *XEUS* (*angl.* X-ray Evolving Universe Spectroscopy Mission, ESA) et *SIMBOL-X* (CNES) sont basées sur cette technique pour observer des sources de rayons X dans l'univers.

1.3 Missions de vol en formation

Nous décrivons, dans les paragraphes qui suivent, quelques missions de vol en formation qui nous paraissent particulièrement intéressantes. Cette énumération ne peut pas être exhaustive, mais nous essayerons de couvrir un large spectre d'applications. Quelques unes de ces missions ont déjà été abordées dans la section précédente. Le TAB. 1.1 donne un aperçu plus complet des missions de vol en formation existantes.

TABLE 1.1 – Missions de vol en formation

Nom de la mission	Agence spatiale	Catégorie	Nbre. de vaisseaux	Orbite	Année de lancement prévue
<i>ASPICS</i>	CNES	télescope	2	HEO #	2011
<i>Darwin</i>	ESA	interféromètre	4	L ₂ +	2015
<i>LISA</i>	ESA, NASA	interféromètre	3	solaire	2015
<i>MAX</i>	CNES	télescope	2	HEO/L ₂	2010
<i>MAXIM</i>	NASA	interféromètre	36	solaire	2020
<i>MAXIM</i>	NASA	interféromètre	2	solaire	2010
<i>Pathfinder</i>					
<i>Pegase</i>	CNES	interféromètre	3	HEO/L ₂	2013
<i>PRISMA</i>	SSC,*DLR,† CNES	démonstrateur	2	LEO	2008
<i>SIMBOL-X</i>	CNES	télescope	2	HEO	2012
<i>TanDEM-X</i>	DLR †	radar	2	LEO	2009
<i>TechSat-21</i>	USAF ‡	radar	3	LEO	2006
<i>TPF-I</i>	NASA	interféromètre	6	L ₂	2020
<i>XEUS</i>	ESA	télescope	2	L ₂	2015

HEO : orbite fortement elliptique (*angl.* highly elliptical orbit)

+ L₂ : orbite autour du point de LAGRANGE L₂

* SSC : Swedish Space Corporation

† DLR : Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt

‡ USAF : United States Air Force

7. Bernard LYOT (1897 – 1952), astronome français

1.3.1 *LISA*

La mission *LISA* (*angl.* Laser Interferometer Space Antenna), planifiée pour l'an 2015 conjointement par l'ESA et la NASA, est destinée à détecter des ondes gravitationnelles d'une fréquence entre 0,1 mHz et 1 Hz émanant de trous noirs ou encore du Big Bang.

Les trois vaisseaux spatiaux identiques forment un triangle équilatéral dont chaque côté a une longueur de 5 millions de km, cf. FIG. 1.5. L'ensemble constitue un interféromètre de MICHELSON capable de mesurer des déplacements avec une précision de $20 \cdot 10^{-12}$ m.

La formation se trouve sur une orbite autour du Soleil à la même distance que la Terre, mais à 50 millions de km derrière celle-ci. Les forces perturbatrices non gravitationnelles, par exemple celle due à la pression solaire, sont contrées avec une approche dite *drag-free* (*fr.* sans traînée), c'est-à-dire avec l'asservissement des plateformes sur des masses d'épreuve à l'intérieur des vaisseaux.

La durée de vie nominale est de 5 ans. La masse de chaque vaisseau est de 200 kg environ après avoir atteint son orbite.

Pour valider l'approche choisie pour *LISA* et pour tester les instruments, une mission de démonstration, *LISA Pathfinder*, sera lancée en 2009.

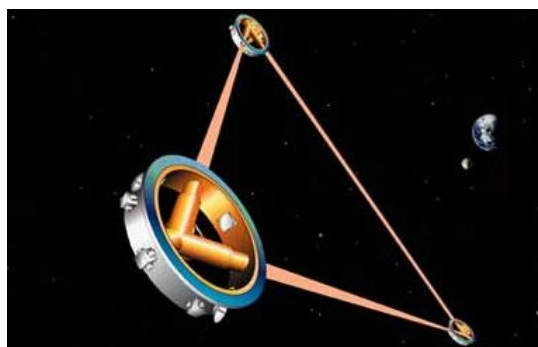


FIGURE 1.5 – *LISA* (Laser Interferometer Space Antenna). Source : Wikipédia

1.3.2 *TanDEM-X*

TanDEM-X, préparé par le DLR (Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, Allemagne), est une mission de vol en formation qui a pour but d'établir un modèle topographique digital en synthétisant un radar à grande ouverture, cf. FIG. 1.6. Le premier satellite de la formation, TerraSAR-X, a été lancé en juin 2007 et le lancement du deuxième est programmé pour 2009. Les deux satellites opéreront ensemble pendant 3 années.

Le radar à synthèse d'ouverture disposera d'une résolution inférieure à 6 m avec une zone de balayage dont la largeur sera supérieure à 30 km. La distance entre les satellites sera comprise entre 200 m et 2 km. La formation sera positionnée sur une orbite polaire avec une inclinaison de $97,4^\circ$ et une altitude de 514 km. Les deux satellites auront une masse de 1100 kg chacun.

1.3.3 *XEUS*

La mission *XEUS* (*angl.* X-ray Evolving Universe Spectroscopy Mission), cf. FIG. 1.7, préparée par l'ESA comme successeur de la mission *XMM-NEWTON* a pour objectif d'étudier des trous noirs

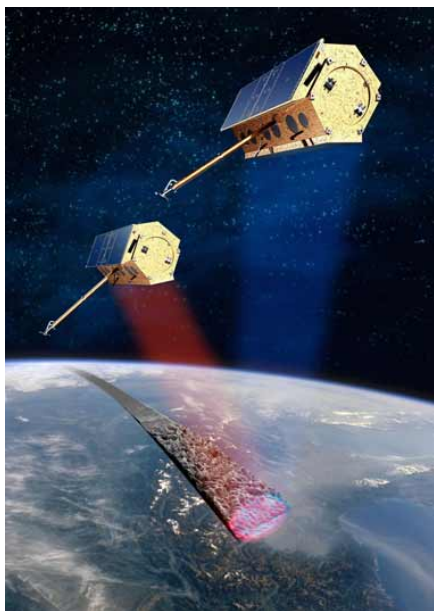


FIGURE 1.6 – *TanDEM-X*. Source : DLR

et des groupes de galaxies. Le spectre considéré est celui des rayons X (0,1 keV à 10 keV). *XEUS* sera l'observatoire le plus puissant dans cette bande spectrale.

La formation consistera en deux vaisseaux spatiaux, un vaisseau miroir et un vaisseau détecteur, volant sur une orbite autour du point de LAGRANGE L_2 . Les deux vaisseaux formeront ainsi un télescope avec une focale d'environ 35 m. La masse au lancement de l'ensemble sera 6500 kg.

XEUS sera lancé en 2015 et aura une durée de vie de 5 ans.

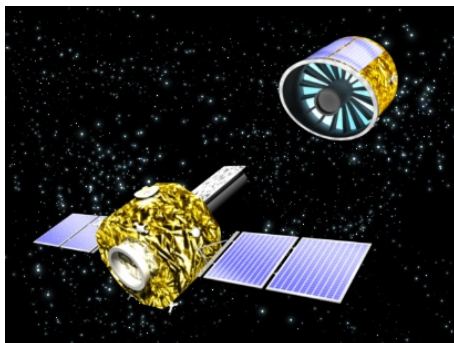
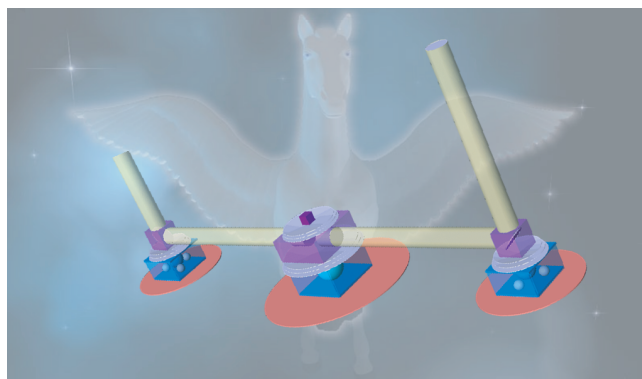


FIGURE 1.7 – *XEUS* (X-ray Evolving Universe Spectroscopy Mission). Source : ESA

1.3.4 *Pegase*

Nous décrivons la mission *Pegase* plus en détail que les missions précédentes car elle nous servira comme exemple d'application plus tard dans ce mémoire.

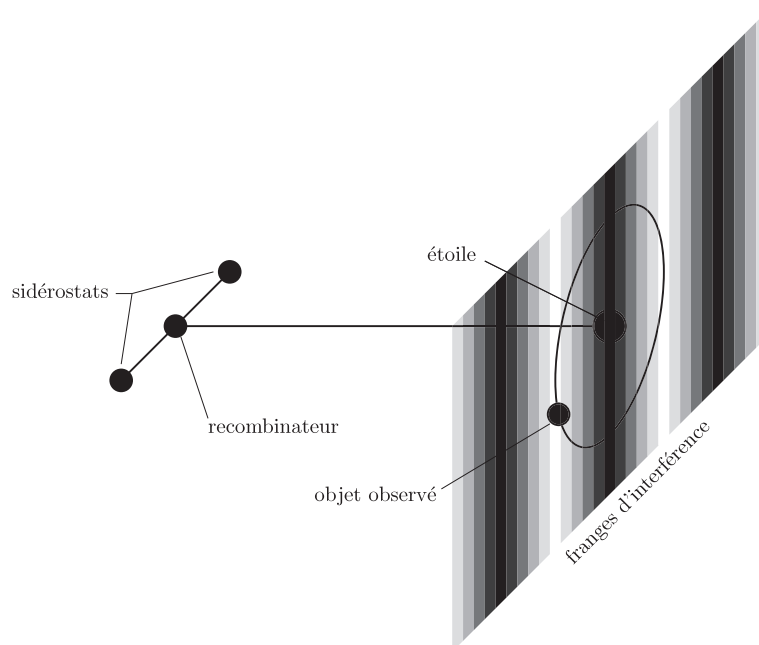
La mission *Pegase* (cf. FIG. 1.8), actuellement préparée au CNES, est destinée à détecter des objets extra-solaires, c'est-à-dire des objets en orbite autour des étoiles voisines, et d'en effectuer des analyses

FIGURE 1.8 – *Pégase*. Source : CNES

spectrales. Ces objets peuvent être des planètes de la taille de Jupiter, des disques proto-planétaires ou encore des naines brunes. La bande spectrale la plus prometteuse pour cette tâche est l'infrarouge ($2,5 \mu\text{m}$ à $5 \mu\text{m}$).

La formation sera composée de trois vaisseaux spatiaux : un recombineur et deux sidérostats. Elle sera positionnée sur une orbite terrestre fortement elliptique (HEO, *angl.* highly elliptical earth orbit) ou sur une orbite halo autour du point de LAGRANGE L_2 , à environ 1,5 millions de km de la Terre.

L'observation sera effectuée grâce à un interféromètre de BRACEWELL⁸ dont le principe est esquissé dans la FIG. 1.9. En fait, les deux sidérostats qui sont, au fond, seulement des miroirs, reflètent les faisceaux lumineux venant de l'objet observé vers le recombineur.

FIGURE 1.9 – Schéma de la mission *Pégase* et des interférences destructives et constructives

8. Ronald N. BRACEWELL (1921 – 2007), scientifique américain

À l'intérieur de celui-ci, les deux faisceaux sont recombinaés après avoir subi un déphasage d'une demi longueur d'onde. Ce déphasage permet d'annuler la lumière de l'étoile et d'augmenter le contraste d'un facteur entre 10^{-3} et 10^{-4} pour pouvoir observer les objets ciblés, d'où le terme anglais *nulling* (*fr.* annulation). Un capteur, le senseur de franges, mesure les franges d'interférence pour pouvoir ajuster la *différence de marche* entre les deux faisceaux grâce à une ligne à retard.

De nombreux problèmes technologiques apparaissent dans le cadre de la mission *Pegase*. Par exemple, il faut assurer que la température des charges utiles des trois vaisseaux n'excède pas certaines bornes. Pour les miroirs et le banc optique du recombineur, la borne supérieure est 100 K (-173 °C) et pour le détecteur, la température maximale est 55 K (-218 °C). Pour résoudre ce problème, il faut recourir à des dispositifs spéciaux comme des pare-soleil ou des isolateurs (*angl.* V-grooves). De plus, la formation doit pointer dans une direction comprise dans un cône d'un demi-angle de 30° autour de la direction anti-Soleil, ce qui est une forte contrainte en termes de flexibilité et ce qui réduit de façon considérable le nombre de cibles potentielles.

La base de l'interféromètre, c'est-à-dire la distance entre les deux sidérostats, variera entre 50 m et 500 m, en fonction des cibles à observer. La masse du recombineur sera de 700 kg, celle d'un sidérostat sera de 350 kg environ. *Pegase* sera lancé en 2013 avec une durée de vie nominale de 2,5 ans.

La FIG. 1.10 montre les différents modes opérationnels de la mission *Pegase*.

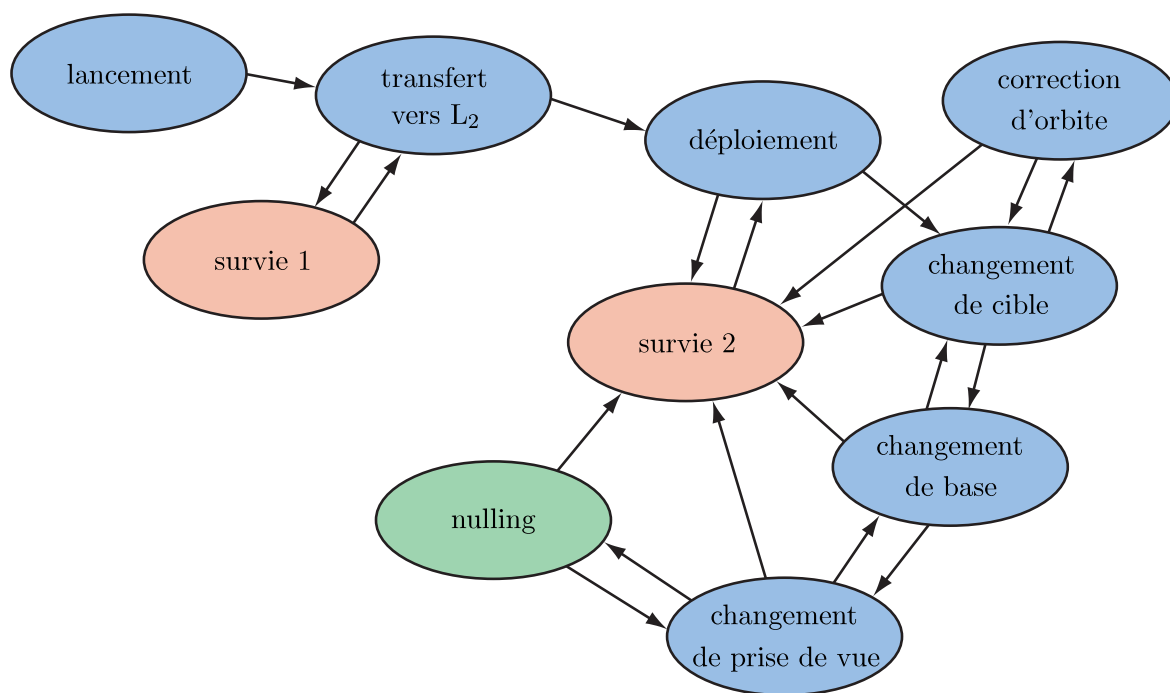


FIGURE 1.10 – Modes opérationnels de la mission *Pegase*

Ces modes peuvent être catégorisés comme suit :

- le *mode nulling* (en vert) est le *mode normal* de la mission, c'est-à-dire celui qui sert à remplir l'objectif de la mission ;
- les *modes de transition* (en bleu) sont des modes qui servent à initialiser la formation après le lancement, ainsi qu'à la correction d'orbite et à un changement de la forme ou de l'orientation

de la formation ;

- les modes de survie (en rouge) sont activés dès qu’une erreur se produit afin de garantir que la formation reste saine et sauve.

1.4 Enjeux du vol en formation

Les enjeux du vol en formation de vaisseaux spatiaux sont multiples.

Tout d’abord, il existe les problématiques habituelles de l’aéronautique, c’est-à-dire les contraintes très dures en termes de consommation d’ergols et d’énergie. La première contrainte provient du souci perpétuel de minimiser la masse de lancement. La contrainte d’énergie résulte de la taille finie des générateurs solaires.

En outre, il existe des spécifications thermiques, en d’autres termes des températures à ne pas dépasser (comme nous l’avons vu dans le cas de la mission *Pegase*) pour pouvoir effectuer la mission ou pour ne pas endommager les composants électroniques des vaisseaux. Ces spécifications thermiques se traduisent souvent par des spécifications de pointage ou par l’implantation de dispositifs de contrôle thermique comme des radiateurs ou des pompes de chaleur.

Les contraintes de communication ne sont pas négligeables non plus. La visibilité des vaisseaux à partir de stations au sol doit être assurée pour permettre la transmission de données entre le sol et les vaisseaux.

Le problème des perturbations orbitales telles que la pression solaire et la traînée atmosphérique doit être considéré également.

La configuration de lancement d’un vaisseau de grand volume pose souvent des problèmes d’encombrement dans la sous-coiffe du lanceur.

Également, la sûreté de fonctionnement a des répercussions sur toutes les missions spatiales. Il en découle une approche de redondance car il est généralement impossible d’échanger des composants d’un vaisseau une fois qu’il est sur son orbite (bien sûr, il existe des exceptions comme le maintien et la réparation du télescope spatial HUBBLE⁹ (NASA et ESA) à partir de la navette spatiale en 1993 et en 1999).

Par ailleurs, il existe de nombreuses problématiques liées au vol en formation qui ne sont pas rencontrées dans des missions mono-satellite. L’évitement de collisions est un souci de première importance pour garantir le bon fonctionnement des vaisseaux.

La communication s’enrichit d’un aspect de plus qui est la communication entre les différents vaisseaux. Comme nous allons le voir, cette communication est souvent indispensable pour l’accomplissement d’une mission de vol en formation. Dans ce cadre-là, l’attribution et la décentralisation (ou non) des différentes tâches aux éléments de la formation et la répartition de l’intelligence embarquée entre eux fait objet d’études.

Au sujet des perturbations orbitales, il peut y avoir une partie dite *différentielle*, c’est-à-dire une partie qui diffère entre les vaisseaux individuels comme la différente traînée atmosphérique due à différents coefficients ballistiques des vaisseaux. Dans ce contexte, il n’est pas exclu qu’il existe des effets perturbateurs entre les différents vaisseaux, comme une moindre traînée atmosphérique subie par un satellite qui se cache derrière un autre (par rapport à la direction de vol).

Dans le contexte du vol en formation, il y a une tendance vers des missions encore plus coûteuses

9. Edwin Powell HUBBLE (1889 – 1953), astronome américain

que d'habitude, c'est-à-dire par rapport aux missions spatiales mono-satellite. Souvent, ce fait féconde des coopérations encore plus étroites entre les différentes agences spatiales, par exemple dans les cas des missions *LISA* (ESA et NASA) ou *PRISMA* (SSC, DLR et CNES).

N'oublions pas de mentionner la difficulté principale liée au vol en formation, le fait que les vaisseaux doivent assumer leurs places dans une configuration prédéfinie, en position et en orientation en même temps. Ainsi, la séparation dans les missions spatiales mono-satellite entre contrôle d'orbite et d'attitude disparaît. En outre, le mouvement relatif des vaisseaux doit être coordonné pendant le maintien et la reconfiguration de la formation.

Finalement, un enjeu important du vol en formation est l'utilisation de nouveaux types d'actionneurs et de capteurs. La plupart de ces dispositifs sont encore en cours de réalisation. Dans ce contexte, il est envisageable de réutiliser des technologies développées pour les rendez-vous spatiaux. Il est important à noter également que certains aspects restent inchangés par rapport aux missions mono-satellite comme les orbites utilisées, certains capteurs et les problèmes liés à leur calibration, ainsi que la partie absolue des perturbations orbitales.

1.5 Objectifs de la thèse

Dans cette section, nous détaillerons le périmètre de cette thèse, c'est-à-dire les aspects qui constituent des objectifs de la thèse et des aspects qui ne seront pas traités dans la thèse.

Comme l'intitulé l'indique, nous aimerions faire de la commande en boucle fermée. Contrairement à des approches axe-par-axe utilisées dans la plupart des missions spatiales actuellement, nous focaliserons notre attention sur des techniques modernes de commande linéaire multivariable. Un souci permanent est l'embarquabilité des correcteurs synthétisés, c'est-à-dire une complexité suffisamment réduite pour pouvoir être réalisé sur un ordinateur de bord. Un autre souci important est la signification physique des états du correcteur pour qu'il puisse être initialisé facilement.

La synthèse de correcteurs multivariable repose généralement sur des modèles du système à asservir. Par conséquent, un premier volet de la thèse doit traiter la conception de modèles utilisables à des fins de synthèse de correcteurs. Dans ce contexte, il est souhaitable de profiter le plus possible des modèles existant dans la littérature, mais aussi de faire de nouvelles contributions en cas de besoin. Il est important de faire la distinction entre les deux types de modèle suivants :

- *modèles de simulation*, c'est-à-dire des modèles prenant en compte autant d'aspects et ainsi le plus proche de la réalité que possible ;
- *modèles de synthèse*, c'est-à-dire des modèles prenant en compte seulement les aspects les plus importants et possédant une complexité réduite pour être exploitables par des algorithmes de synthèse multivariable.

Vu l'objectif global de cette thèse, nous nous focaliserons sur des modèles de synthèse. En particulier, une étape très importante sera la linéarisation de modèles non-linéaires afin de pouvoir avoir recours aux méthodes de synthèse linéaires. Outre des modèles dynamiques, des modèles décrivant les capteurs, actionneurs, ainsi que les perturbations orbitales seront indispensables.

Bien que la simulation soit un outil indispensable dans la conception et vérification de missions spatiales, notre ambition n'est pas de concevoir un simulateur de haute fidélité. Nous nous restreindrons à simuler seulement les aspects qui nous paraissent importants.

La présentation des différentes missions de vol en formation planifiées a clairement montré qu'il n'existe pas le vol en formation. Au contraire, le vol en formation a beaucoup de facettes, et chaque

mission a des besoins particuliers qui se reflètent, entre autres, dans le choix de l'orbite, du nombre de vaisseaux et des types de capteurs et d'actionneurs. SCHARF et al. [154, 155] donnent une revue bibliographique vaste et illustrent ainsi l'impressionnante variété que représente le vol en formation.

Du fait de cette variété, mais aussi parce que cette thèse est située dans le contexte d'une coopération entre CNES et ONERA concernant plusieurs missions de vol en formation (*ROMULUS* et *Pegase*), il est important de se concentrer sur des pistes de recherche ayant un intérêt industriel, tout en essayant de développer des méthodes novatrices et utilisables dans un cadre le plus général possible. C'est cette généralité qui nous oblige à mettre l'accent de nos travaux sur des méthodologies et d'adopter une approche système.

Un autre objectif important est la prise en compte simultanée des dynamiques de translation et d'attitude. Cet objectif est justifié du fait de la préparation de la mission *Pegase* au CNES qui montre un fort couplage entre ces deux dynamiques. Dans ce contexte, il nous paraît intéressant d'étudier ce que peut apporter une approche multivariable, contrairement à une approche axe-par-axe.

Enfin, il est souhaitable que les méthodes de synthèse de correcteurs développées proposent des solutions à quelques problématiques spécifiques au vol en formation, comme le contrôle décentralisé des vaisseaux, la garantie des spécifications de la mission ou la commutation entre différents modes opérationnels.

Nous aimerions également mentionner quelques points qui seraient intéressants à étudier, mais qui ne font pas partie des objectifs de cette thèse.

Tout d'abord, le guidage est un point que nous ne considérerons pas. Le calcul de trajectoires optimales, par exemple pour la reconfiguration d'une formation, est effectué en boucle ouverte. Cependant, c'est la commande en boucle fermée qui nous préoccupe.

Nous n'avons pas l'intention de contribuer au développement de nouveaux capteurs pour le vol en formation. Ce fait n'est pas aussi évident qu'il paraît car quelques capteurs possèdent une partie informatique assez développée. Un exemple est le capteur radiofréquence dont la levée d'ambiguïté est effectué sur l'ordinateur de bord.

Un troisième point que nous excluons est la conception de missions spatiales. Nous considérerons que les spécifications d'une mission sont dictées par les objectifs scientifiques ou opérationnels. Par conséquent, nous supposons une mission donnée dont les propriétés, par exemple capteurs, actionneurs, nombre de vaisseaux et orbite, sont fixées. Cependant, cela n'empêche personne d'utiliser les méthodes que nous développerons afin d'améliorer la conception d'une mission particulière.

Enfin, la calibration (ou étalonnage) ne fait pas partie de nos objectifs non plus. Parfois, des manœuvres doivent être effectués afin d'estimer des paramètres comme le mésalignement de certains capteurs et pour garantir les performances spécifiées. Nous sommes conscients que cette étape peut être indispensable pour le bon fonctionnement de la mission, mais ne la traiterons pas dans le cadre de cette thèse.

1.6 Structure de ce mémoire

Outre l'introduction que nous sommes en train de conclure, ce mémoire est divisé en deux grandes parties :

- la première partie est consacrée à la modélisation de la dynamique et d'autres aspects du vol en formation ;
- la deuxième partie décrit des méthodologies de commande pour le vol en formation.

La FIG. 1.11 révèle la structure du mémoire de façon graphique.

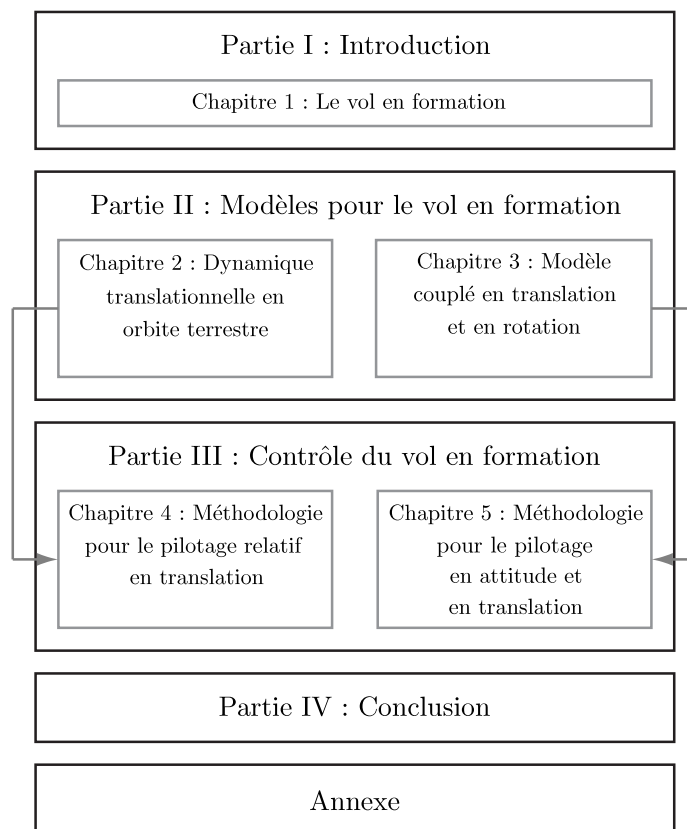


FIGURE 1.11 – Structure du mémoire

Chacune des parties principales est subdivisée en deux chapitres.

Dans la *partie modélisation*, nous distinguons entre la modélisation de la dynamique translationnelle en orbite terrestre (Chapitre 2) et la modélisation couplée en translation et en rotation (Chapitre 3). Les deux modèles dynamiques prennent en compte les perturbations orbitales les plus importantes pour chaque cas. En outre, nous proposons également des modèles métrologiques dans le Chapitre 3, c'est-à-dire des modèles pour les capteurs utilisés et pour les sorties contrôlées.

Dans la *partie contrôle*, le Chapitre 4 présente deux approches afin d'asservir la position relative en orbite terrestre entre deux satellites. Dans ce contexte, le problème principal lié à la commande est le caractère variant de la dynamique relative.

Le Chapitre 5 montre comment les positions et attitudes relatives peuvent être contrôlées simultanément en utilisant la synthèse \mathcal{H}_2 . La mission *Pegase* sert comme exemple d'application. En particulier, nous proposons des méthodes pour résoudre les quatre problématiques suivantes :

- synthèse d'un correcteur centralisé de base pour un seul mode opérationnel prenant en compte les spécifications stochastiques de la mission ;
- réjection de biais, en particulier des biais dûs aux perturbations orbitales ;
- synthèse de correcteurs pour plusieurs modes opérationnels, commutation entre les modes opérationnels et garantie de stabilité à travers les commutations ;
- synthèse de correcteurs décentralisés.

Les flèches dans la FIG. 1.11 indiquent que le Chapitre 4 est basé sur le modèle développé dans le Chapitre 2. De façon similaire, le modèle du Chapitre 3 est utilisé dans le Chapitre 5. Par ailleurs, les Chapitres 2 et 4 peuvent être lus indépendamment des Chapitres 3 et 5 et vice versa.

Dans la dernière partie, nous concluons ce mémoire en faisant un bilan, en soulignant nos propres contributions et en indiquant quelques perspectives pour de travaux futurs.

Dans les chapitres annexes, nous avons résumé des informations supplémentaires et utiles à comprendre le contenu des chapitres principaux. Nous y faisons référence à plusieurs reprises au cours de ce mémoire.

Deuxième partie

Modèles pour le vol en formation

Chapitre 2

Dynamique translationnelle en orbite terrestre

Sommaire

2.1	Le mouvement d'un satellite en orbite terrestre	22
2.1.1	Le mouvement keplerien	22
2.1.2	Les perturbations orbitales	29
2.2	Revue bibliographique	36
2.2.1	Vol en formation en orbite terrestre circulaire	36
2.2.2	Vol en formation en orbite terrestre elliptique	37
2.2.3	Perturbations orbitales	38
2.2.4	Autres orbites	40
2.3	Le mouvement relatif en orbite terrestre	40
2.3.1	Dynamique d'un seul satellite de la formation	40
2.3.2	Dynamique relative entre les satellites de la formation	42
2.3.3	Linéarisation de la dynamique relative	43
2.3.4	Repère mobile	45
2.3.5	Dynamique en notation matricielle	47
2.3.6	Dynamique de translation en orbite elliptique keplerienne	51
2.3.7	Dynamique de translation en orbite elliptique perturbée – première version	53
2.3.8	Dynamique de translation en orbite elliptique perturbée – deuxième version	54
2.4	Bilan	58

Dans ce chapitre, nous traiterons le problème de la modélisation de la dynamique translationnelle en orbite terrestre. Les satellites seront alors généralement décrits sous forme de masses ponctuelles.

Nous expliquerons d'abord le mouvement d'un seul satellite en orbite terrestre keplerienne, c'est-à-dire sans perturbations orbitales, et les perturbations qui peuvent amener le satellite à adopter une orbite différente de cette orbite idéalisée. Ensuite, nous donnerons un aperçu des modèles de la dynamique relative existant dans la littérature. Enfin, nous présenterons notre propre méthode pour établir des modèles décrivant la dynamique relative et prenant en compte la perturbation orbitale prépondérante, celle due à l'aplatissement de la Terre. Ce cadre méthodologique nous permettra notamment de retrouver des modèles déjà connus dans la littérature, mais également de synthétiser de nouveaux modèles mieux adaptés à la réalité.

2.1 Le mouvement d'un satellite en orbite terrestre

2.1.1 Le mouvement keplerien

Le mouvement non perturbé d'un satellite autour d'un corps central, c'est-à-dire le mouvement induit par un champ de gravitation d'un corps central parfaitement sphérique, s'appelle le *mouvement keplerien*.

Au 17^{ème} siècle, Johannes KEPLER¹ a découvert à partir d'observations faites par Tycho BRAHE² les célèbres *lois de KEPLER* et les a publiées dans ses œuvres *Astronomia Nova* (1609) et *Harmonices Mundi* (1619).

Les *lois de KEPLER*, au nombre de trois, décrivent le mouvement des planètes du système solaire (cf. [188]) :

1. Loi des orbites

Une planète se trouve sur une trajectoire elliptique autour du Soleil. Le Soleil est situé à un des foyers de cette ellipse.

2. Loi des aires

Dans un intervalle de temps donné, l'aire balayée par le rayon vecteur, c'est-à-dire le vecteur reliant le Soleil et la planète, est la même sur toute l'orbite. Par conséquent, la vitesse angulaire de la planète est maximale au périhélon (point le plus proche du foyer) et minimale à l'apohélon (point le plus éloigné du foyer).

3. Loi des périodes

Le carré de la période sidérale T est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'orbite ($a^3/T^2 = cte.$).

Bien entendu, ces lois ne sont pas seulement valables pour le mouvement des planètes autour du Soleil, mais aussi pour des satellites artificiels autour de la Terre. Nous traiterons ce cas particulier dans la suite.

En orbite terrestre, la terminologie change légèrement. Le point le plus proche du foyer s'appelle *périgée*, le plus loin *apogée*. Les termes utilisés dans le cas général sont *périapside* et *apoapside*.

Dans la FIG. 2.1, les termes couramment utilisés sont illustrés, en particulier la paramétrisation choisie pour décrire la cinématique du mouvement.

L'*anomalie vraie* est l'angle courant du satellite compté à partir du périhélon. La forme et les dimensions de l'ellipse sont déterminées par l'*excentricité* e , le *demi-grand axe* a et le *demi-petit axe* $b = a\sqrt{1 - e^2}$.

Les distances du périhélon et de l'apogée du foyer sont données par $r_P = a(1 - e)$ et $r_A = a(1 + e)$. On appelle la ligne qui relie le périhélon et l'apogée la *ligne des apsides*. Un autre point important est le *semilatus rectum*, le point dont l'anomalie vraie est $\pi/2$. Sa distance du foyer est $p = a(1 - e^2)$.

En plus de la forme de l'orbite, l'évolution temporelle des grandeurs qui ne restent pas constantes nous intéresse bien entendu, en d'autres termes le rayon R et l'anomalie vraie ν . Le rayon, qui dépend de l'anomalie vraie, est donné par l'expression suivante :

$$R = \frac{p}{1 + e \cos \nu} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} \quad (2.1)$$

1. Johannes KEPLER (1571 – 1630), astronome allemand

2. Tycho BRAHE (1546 – 1601), astronome danois

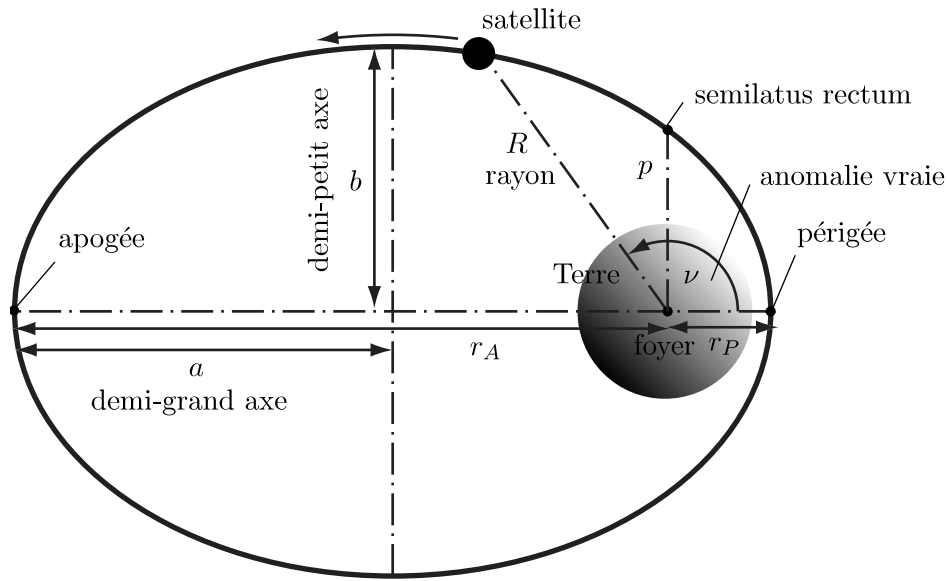


FIGURE 2.1 – Orbite keplerienne terrestre

Contrairement au rayon R , l'évolution de l'anomalie vraie ne peut pas être déduite de la géométrie de l'ellipse décrivant l'orbite. En effet, sa variation temporelle est liée à la loi des aires décrite ci-dessus.

Pour déterminer l'anomalie vraie, il faut avoir recours à la *loi universelle de la gravitation* ée publiée en 1687 par Isaac NEWTON³. Dans le cas de l'attraction d'un satellite par la Terre, cette loi est donnée par l'équation suivante :

$$\ddot{\vec{R}} = \vec{f}_{\oplus, \text{sph}}(\vec{R}) \quad (2.2)$$

\vec{R} est le vecteur entre le centre de la Terre et le satellite. $\vec{f}_{\oplus, \text{sph}}(\vec{R})$ est l'expression de l'accélération d'attraction du champ de gravitation de la Terre supposée sphérique (loi universelle de la gravitation) et s'écrit comme suit :

$$\vec{f}_{\oplus, \text{sph}}(\vec{R}) = -\mu_{\oplus} \frac{\vec{R}}{R^3} \quad (2.3)$$

Ici, μ_{\oplus} est la constante gravitationnelle du corps central. Elle est le produit entre la constante universelle de gravitation G et la masse de la Terre m_{\oplus} :

$$\mu = Gm_{\oplus} \quad (2.4)$$

Les valeurs de la masse m_{\oplus} de la Terre et la constante gravitationnelle géocentrique μ_{\oplus} sont données en Annexe A.

R est la norme du vecteur \vec{R} :

$$R = (\vec{R} \cdot \vec{R})^{1/2} \quad (2.5)$$

3. Sir Isaac NEWTON (1643 – 1727), philosophe, mathématicien, physicien et astronome anglais

La solution analytique peut être obtenue grâce au calcul vectoriel. On peut notamment profiter de la constance du vecteur de moment cinétique $\vec{h} = \vec{R} \wedge \dot{\vec{R}}$. Cette constance est due au champ de gravitation qui est central, sphérique et inversement quadratique.

Il n'existe pas d'expression explicite pour l'évolution de l'anomalie vraie. Elle peut être écrite soit à l'aide des anomalies moyenne M et excentrique E sous forme d'une équation implicite, soit sous forme d'une équation différentielle, cf. [185] :

$$\dot{\nu} = \frac{n(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad (2.6)$$

Ici, n est la vitesse angulaire moyenne le long de l'orbite. Elle est donnée par l'équation suivante :

$$n = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{a^3}} \quad (2.7)$$

La période orbitale T peut être calculée à partir de la vitesse angulaire moyenne n comme suit :

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_{\oplus}}} \quad (2.8)$$

À partir de l'Éq. (2.6), nous pouvons, par différentiation, calculer la dérivée seconde de l'anomalie vraie ν que nous utiliserons dans la suite :

$$\ddot{\nu} = -\frac{2n^2 e \sin \nu (1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} \quad (2.9)$$

Toutes ces informations nous permettent de décrire le mouvement d'un satellite dans le plan qui contient l'ellipse, appelé le *plan orbital*.

Dans la suite, nous décrirons l'orientation de ce plan orbital par rapport au repère géocentrique équatorial (*angl.* ECI = earth-centered inertial ou geocentric-equatorial) que nous appelons \mathcal{F}_{IJK} . Comme le montre la FIG. 2.2, les vecteurs élémentaires \vec{e}_I et \vec{e}_J se trouvent dans le plan équatorial de la Terre, tandis que le vecteur \vec{e}_K coïncide avec l'axe de rotation la Terre. Il est important de noter que les vecteurs \vec{e}_I et \vec{e}_J ne sont pas fixes par rapport à la Terre, mais fixes dans un repère inertiel. En effet, le vecteur \vec{e}_I indique la direction du *point vernal*.

L'orientation du plan orbital peut être décrite grâce à trois rotations successives à partir du repère géocentrique \mathcal{F}_{IJK} . La première rotation est une rotation autour du vecteur \vec{e}_K (qui indique la direction du pôle nord) avec l'angle Ω appelé l'*ascension droite du nœud ascendant*. La FIG. 2.3 montre cette rotation.

Le repère intermédiaire s'appelle $\mathcal{F}_{I'J'K'}$. Son vecteur $\vec{e}_{K'}$ est identique au vecteur \vec{e}_K . Les vecteurs unitaires $\vec{e}_{I'}$, $\vec{e}_{J'}$ et $\vec{e}_{K'}$ définissant le repère $\mathcal{F}_{I'J'K'}$ peuvent être calculés à partir des vecteurs \vec{e}_I , \vec{e}_J et \vec{e}_K grâce à la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_{I'} \\ \vec{e}_{J'} \\ \vec{e}_{K'} \end{pmatrix} = \underbrace{C_{III}}_{=C_{I'J'K'}}(\Omega) \begin{pmatrix} \vec{e}_I \\ \vec{e}_J \\ \vec{e}_K \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

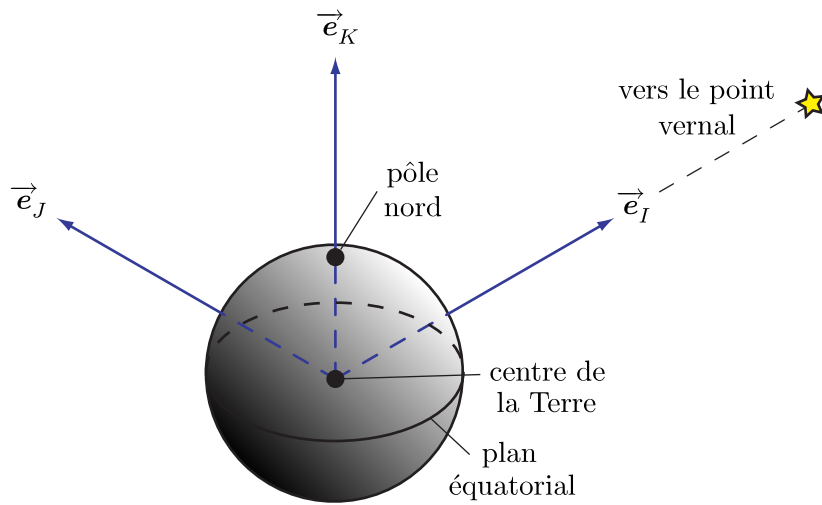
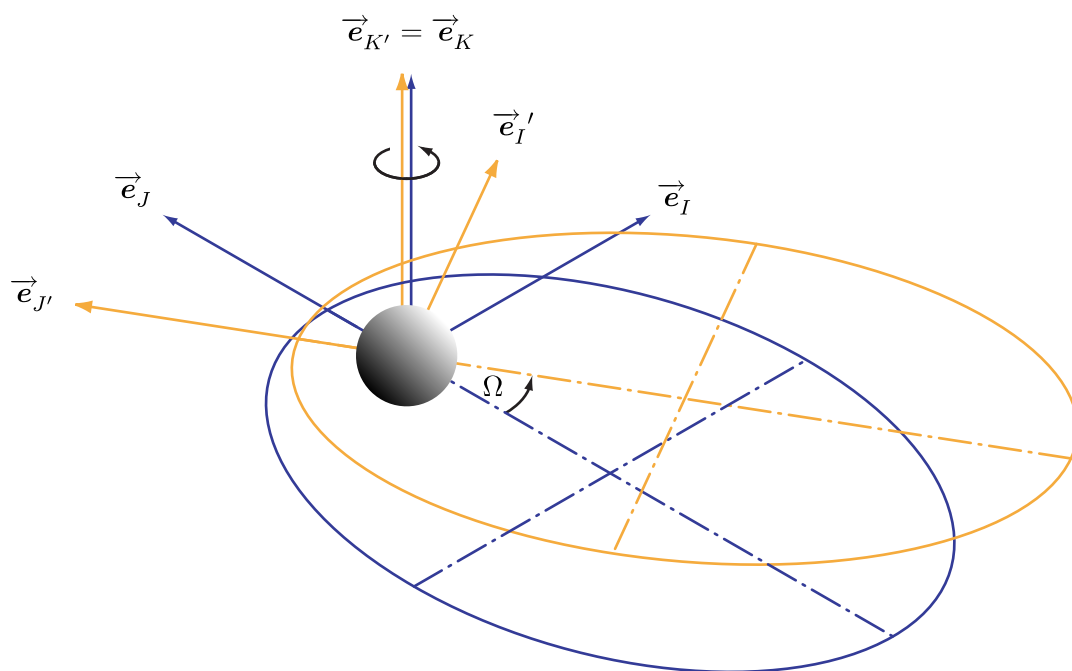


FIGURE 2.2 – Repère géocentrique équatorial

FIGURE 2.3 – Paramètres orbitaux – Ascension droite du nœud ascendant Ω

La matrice de rotation $C_{III}(\Omega)$ ainsi que les autres matrices de rotation élémentaires sont définies dans l'Annexe B.

Ensuite, une rotation d'angle i autour du vecteur $\vec{e}_{I'}$ est effectuée. i s'appelle l'*inclinaison* du plan orbital. Bien entendu, le vecteur $\vec{e}_{I''}$ est identique au vecteur $\vec{e}_{I'}$. La FIG. 2.4 illustre cette deuxième rotation.

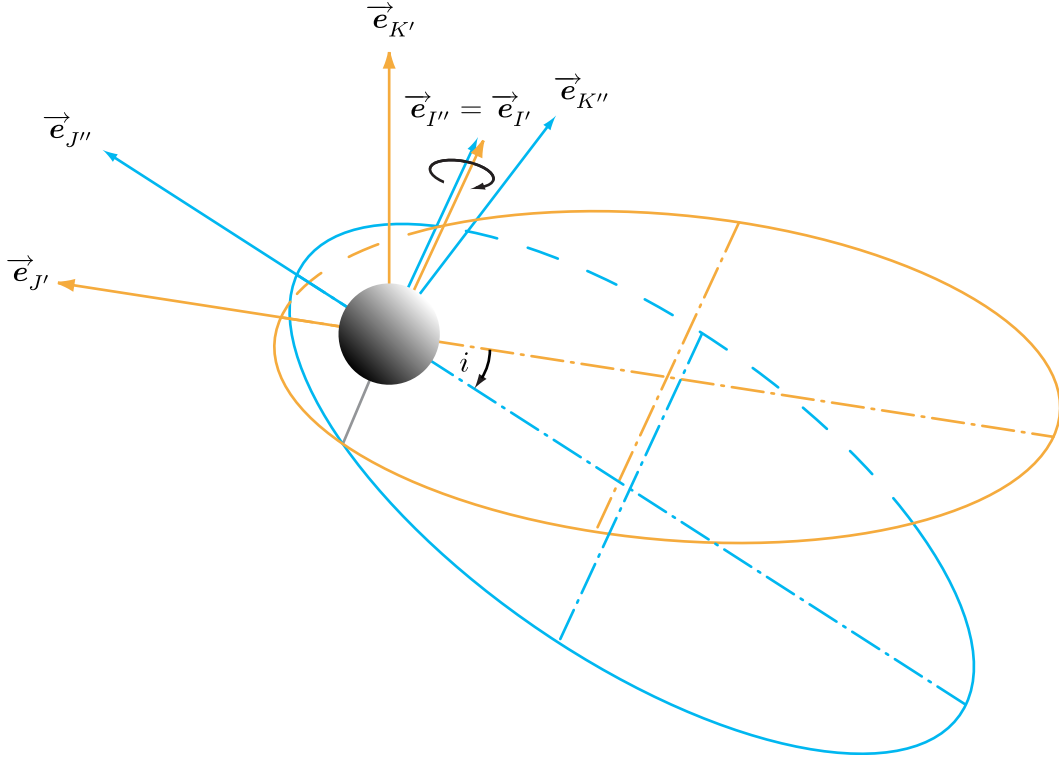


FIGURE 2.4 – Paramètres orbitaux – Inclinaison i

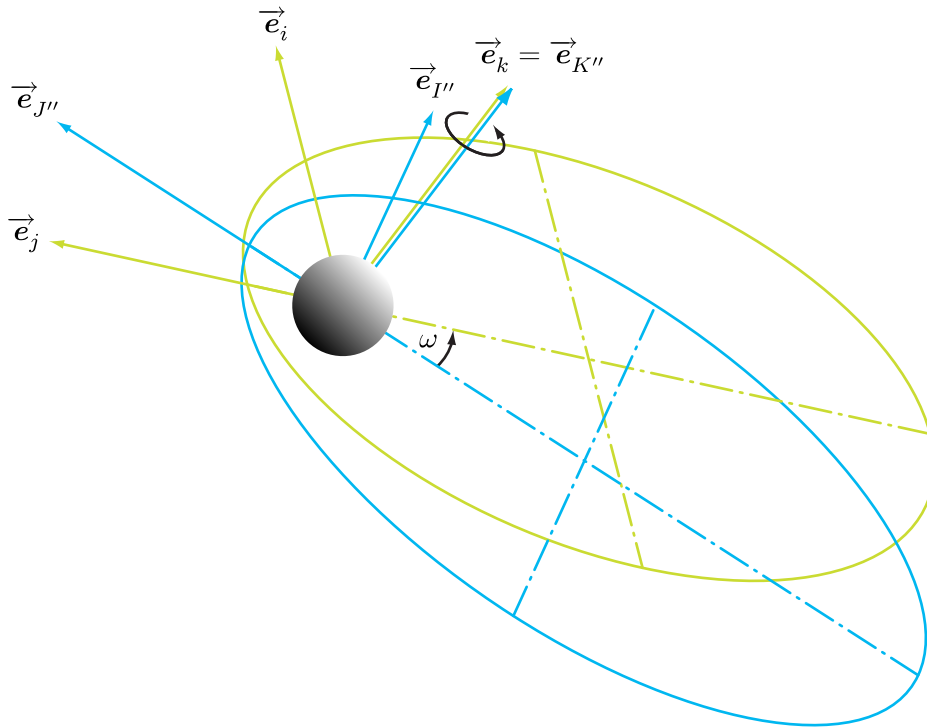
Les vecteurs $\vec{e}_{I''}$, $\vec{e}_{J''}$ et $\vec{e}_{K''}$ peuvent être déterminés comme suit :

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_{I''} \\ \vec{e}_{J''} \\ \vec{e}_{K''} \end{pmatrix} = \underbrace{C_I(i)}_{=C_{I''J''K''}^{I'J'K'}} \begin{pmatrix} \vec{e}_{I'} \\ \vec{e}_{J'} \\ \vec{e}_{K'} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

$$= \underbrace{C_I(i)C_{III}(\Omega)}_{=C_{I''J''K''}^{IJK}} \begin{pmatrix} \vec{e}_I \\ \vec{e}_J \\ \vec{e}_K \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Finalement, l'ellipse de l'orbite est tournée autour du vecteur $\vec{e}_{K''}$ avec l'angle ω appelé l'*argument du périhélie*. La FIG. 2.5 montre cette dernière rotation.

Encore une fois, les vecteurs unitaires définissant le nouveau repère \mathcal{F}_{ijk} peuvent être calculés avec

FIGURE 2.5 – Paramètres orbitaux – Argument du périégée ω

des matrices de rotation :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \vec{e}_i \\ \vec{e}_j \\ \vec{e}_k \end{pmatrix} &= \underbrace{C_{III}(\omega)}_{=C_{i''j''k''}^{I''}} \begin{pmatrix} \vec{e}_{I''} \\ \vec{e}_{J''} \\ \vec{e}_{K''} \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{C_{III}(\omega)C_I(i)C_{III}(\Omega)}_{=C_{ijk}^{IJK}} \begin{pmatrix} \vec{e}_I \\ \vec{e}_J \\ \vec{e}_K \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.13)$$

L'orientation du plan orbital étant définie, nous pouvons ajouter un quatrième angle, l'anomalie vraie ν mentionnée ci-dessus. Cette rotation a lieu autour de l'axe \vec{e}_k et fournit le repère \mathcal{F}_{rco} :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_c \\ \vec{e}_o \end{pmatrix} &= \underbrace{C_{III}(\nu)}_{=C_{rco}^{ijk}} \begin{pmatrix} \vec{e}_i \\ \vec{e}_j \\ \vec{e}_k \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{C_{III}(\omega + \nu)C_I(i)C_{III}(\Omega)}_{=C_{rco}^{IJK}} \begin{pmatrix} \vec{e}_I \\ \vec{e}_J \\ \vec{e}_K \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Nous choisissons de positionner l'origine du nouveau repère \mathcal{F}_{rco} sur le point courant de l'orbite, cf. FIG. 2.6. Ce repère s'appelle *repère local-vertical local-horizontal* (LVLH, *angl.* local-vertical local-

horizontal). La notation suit le papier d'IRVIN et JACQUES [77]. Les lettres r , c et o signifient *radial*, *transversal* (angl. cross-track) et *orthogonal*, respectivement.

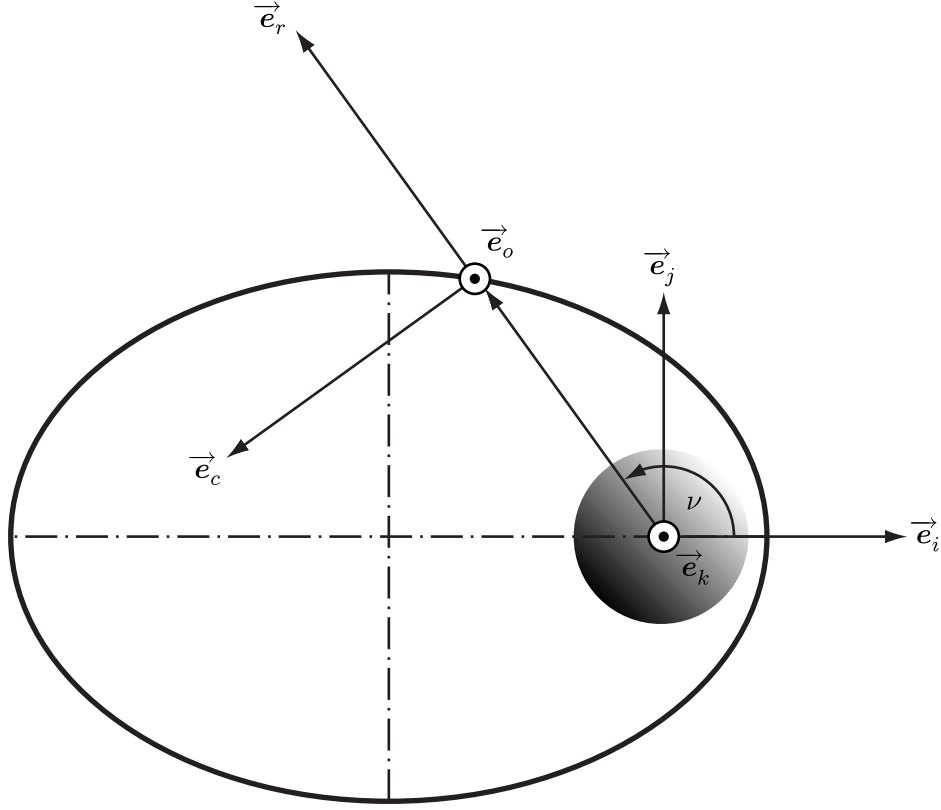


FIGURE 2.6 – Repère LVLH (local-vertical local-horizontal)

C'est le repère \mathcal{F}_{rco} qui sera utilisé pour exprimer la dynamique relative entre plusieurs satellites. Le produit des trois matrices de rotation utilisées dans l'Éq. (2.14) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} C_{rco}^{IJK} &= C_{III}(\omega + \nu)C_I(i)C_{III}(\Omega) \\ &= C_{III}(\tilde{\nu})C_I(i)C_{III}(\Omega) \\ &= \begin{pmatrix} c_{\tilde{\nu}}c_{\Omega} - s_{\tilde{\nu}}c_i s_{\Omega} & c_{\tilde{\nu}}s_{\Omega} + s_{\tilde{\nu}}c_i c_{\Omega} & s_{\tilde{\nu}}s_i \\ -s_{\tilde{\nu}}c_{\Omega} - c_{\tilde{\nu}}c_i s_{\Omega} & -s_{\tilde{\nu}}s_{\Omega} + c_{\tilde{\nu}}c_i c_{\Omega} & c_{\tilde{\nu}}s_i \\ s_i s_{\Omega} & -s_i c_{\Omega} & c_i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.15)$$

avec $\tilde{\nu} = \omega + \nu$

Les paramètres utilisés pour décrire l'orientation du plan orbital (Ω , i et ω), la forme de l'ellipse représentant l'orbite keplerienne (a et e) et la position courante sur cette orbite (ν) sont au nombre de six et résumés dans le TAB. 2.1.

Il existe d'autres paramétrisations pour traiter des cas spéciaux, par exemple les *paramètres orbitaux généralisés* avec une direction d'inclinaison et une direction d'excentricité pour décrire des orbites circulaires ou non inclinées. Cependant, nous utiliserons dans la suite les paramètres orbitaux donnés dans le TAB. 2.1 pour être cohérent avec la plupart des autres publications sur ce sujet.

TABLE 2.1 – Les paramètres orbitaux

Paramètre orbital	Symbole	Unité
Demi-grand axe	a	m
Excentricité	e	–
Ascension droite du nœud ascendant	Ω	rad
Inclinaison	i	rad
Argument du périégée	ω	rad
Anomalie vraie	ν	rad

Les principales équations nécessaires pour déterminer les éléments orbitaux à partir des vecteurs de position \vec{R} et de vitesse $\dot{\vec{R}}$ sont données dans l'ouvrage [185].

2.1.2 Les perturbations orbitales

Le cas d'une orbite keplerienne est purement théorique. En réalité, il existe de multiples perturbations orbitales qui causent des déviations du mouvement keplerien.

Les accélérations perturbatrices dues aux principales perturbations orbitales sont illustrées dans la FIG. 2.7. L'accélération engendrée par le champ de gravitation sphérique est donné à titre de référence. Dans la suite, nous expliquerons ces perturbations plus en détail.

Trainée atmosphérique

La trainée atmosphérique est la perturbation prépondérante pour des altitudes inférieures à 150 km. Elle dépend de la densité ρ de l'air, du coefficient balistique S/m (surface projetée divisée par la masse) du satellite et du coefficient de trainée C_D qui est une fonction de la forme du satellite et a une valeur de l'ordre de 2 typiquement. Des valeurs tabulées de la densité ρ sont disponibles dans [205]. L'accélération due à la trainée est une fonction quadratique de la vitesse V et est dirigée dans la direction opposée au vecteur de vitesse \vec{V} :

$$\vec{a}_{\text{tr}} = \frac{1}{2}\rho V^2 C_D \frac{S}{m} \frac{\vec{V}}{V} \quad (2.16)$$

avec $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$ et $V = (\vec{V} \cdot \vec{V})^{1/2}$.

Attractions de la Lune et du Soleil

Les attractions de la Lune et du Soleil sont les perturbations résiduelles au-delà d'une altitude de 40000 km, correspondant approximativement à une orbite géostationnaire. Du fait que la Lune et le Soleil exercent une attraction sur la Terre et influent sur son orbite, il suffit de prendre en compte les accélérations différentielles, c'est-à-dire les différences entre les accélérations subies par le satellite sur le point courant de l'orbite et celles que le satellite subirait si sa position coïncidait avec le centre de la Terre. Les deux perturbations étant identiques au niveau des équations, nous détaillons ici seulement

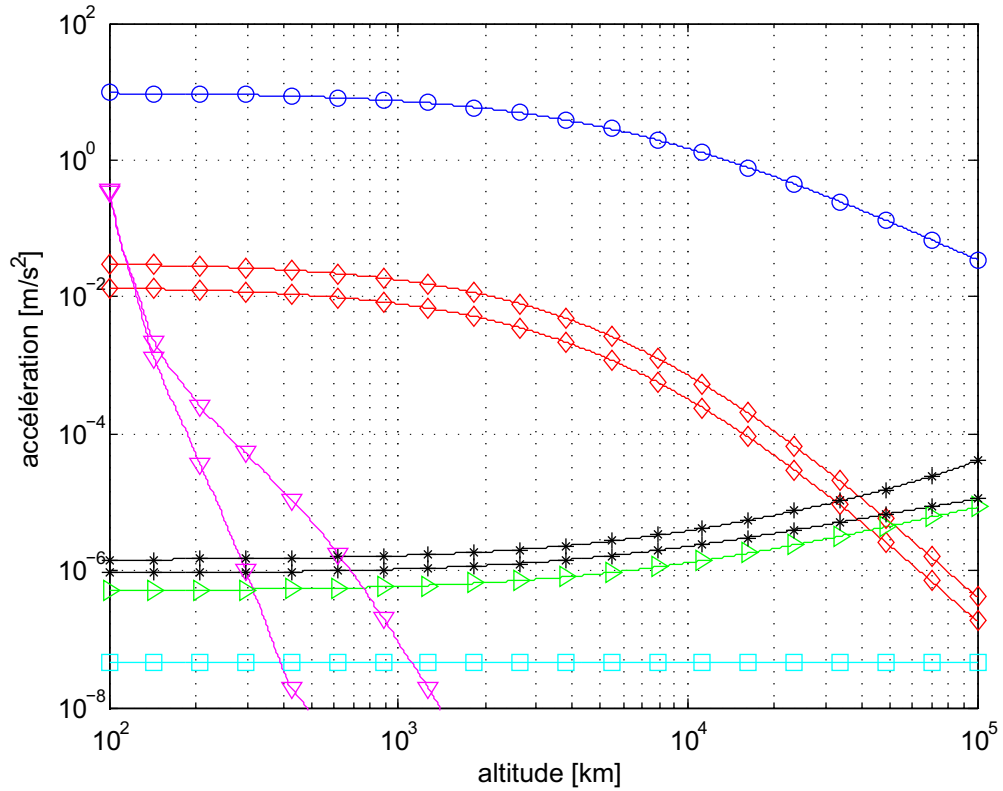


FIGURE 2.7 – Comparaison des niveaux des différentes perturbations en orbite terrestre. \circ : gravité sphérique, \diamond : J_2 , $*$: Lune, \triangleright : Soleil, \square : pression de radiation solaire, ∇ : traînée atmosphérique. Hypothèses : $C_D = 2$, $S/m = 0.01 \text{ m}^2/\text{kg}$. Comme le J_2 et l'attraction lunaire dépendent de la position sur l'orbite, les bornes sont indiquées. Il en est de même pour la traînée atmosphérique car la densité de l'atmosphère dépend de la température exosphérique.

l'accélération due à l'attraction du Soleil :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\text{sol}} &= -\frac{\mu_{\odot}(\vec{R}_S + \vec{R})}{\|\vec{R}_S + \vec{R}\|^3} + \frac{\mu_{\odot}\vec{R}_S}{\|\vec{R}_S\|^3} \\ &= \mu_{\odot} \left[\vec{h}(\vec{R}_S + \vec{R}) - \vec{h}(\vec{R}_S) \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ici, μ_{\odot} est la constante gravitationnelle héliocentrique.

Perturbation due à la non sphéricité de la Terre

La forme de la Terre n'est pas une sphère parfaite. C'est pour cette raison que son champ de gravitation n'obéit pas à l'Éq. (2.3). On utilise un développement en série du potentiel de gravitation

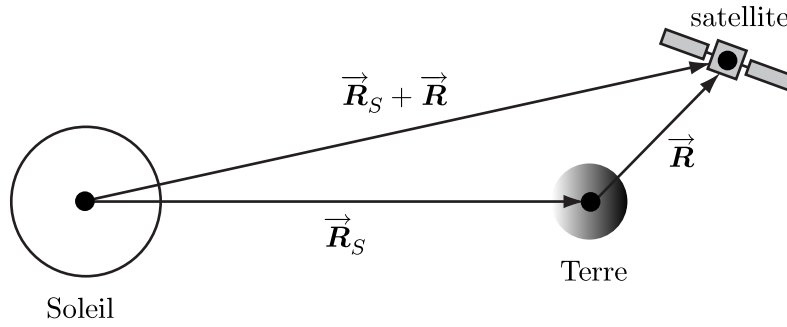


FIGURE 2.8 – Attraction différentielle du Soleil

terrestre utilisant des fonctions harmoniques, cf. par exemple [185] et [12] :

$$U_{\oplus, \text{complet}}(\vec{R}, \varphi) = \frac{\mu_{\oplus}}{(\vec{R} \cdot \vec{R})^{1/2}} \quad (2.18)$$

$$\cdot \left\{ 1 + \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{R_{\oplus}}{(\vec{R} \cdot \vec{R})^{1/2}} \right)^l \left[-J_l P_l(\sin \varphi) + \sum_{m=-l}^l (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda) P_l^{(m)}(\sin \varphi) \right] \right\}$$

Les fonctions $P_l(x)$ et $P_l^{(m)}$ s'appellent *fonctions de LEGENDRE*⁴. Elles sont définies comme suit, cf. [187] :

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \cdot \frac{d^l}{dx^l} [(x^2 - 1)^l] \quad (\text{formule de RODRIGUES}^5) \quad (2.19)$$

$$P_l^{(m)}(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} [P_l(x)]$$

$$P_l^{(m)}(x) = \frac{(-1)^m}{2^l \cdot l!} (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} [(x^2 - 1)^l]$$

En effet, les termes $J_l P_l(\sin \varphi)$ décrivent des déviations axisymétriques (par exemple un aplatissement ou une forme de poire) du champ de gravitation terrestre (harmonique zonal d'ordre l), tandis que les termes $(C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda) P_l^{(m)}(\sin \varphi)$ sont des déviations dépendant de la longitude λ (harmonique tesséral d'ordre l).

Nous nous concentrerons dans la suite sur les harmoniques zonaux car leurs effets dominent sur les effets des harmoniques tesseraux. Les quatre premières fonctions de la suite $P_m(x)$ s'écrivent :

$$P_0(x) = 1 \quad (2.20)$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{x(5x^2 - 3)}{2}$$

4. Adrien-Marie LEGENDRE (1752 – 1833), mathématicien français

Le potentiel de gravitation terrestre prenant en compte les harmoniques zonaux uniquement devient :

$$U_{\oplus,complet}(\vec{\mathbf{R}}, \varphi) = \frac{\mu_{\oplus}}{(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{1/2}} \quad (2.21)$$

$$\cdot \left\{ 1 + \frac{J_2 R_{\oplus}^2}{2(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})} (1 - 3 \sin^2 \varphi) - \frac{J_3 R_{\oplus}^3}{2(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{3/2}} (5 \sin^3 \varphi - 3 \sin \varphi) - \dots \right\}$$

La FIG. 2.9 illustre la définition des angles de latitude φ et de colatitude $\varphi' = \pi/2 - \varphi$.

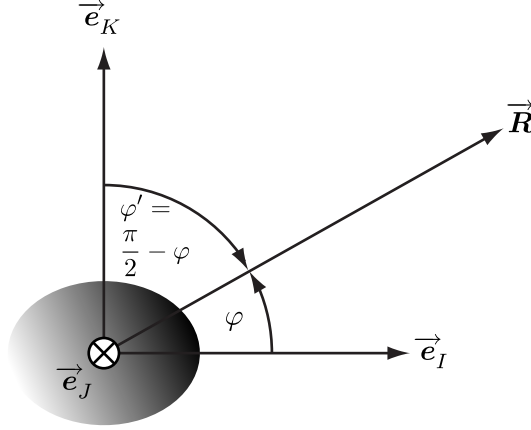


FIGURE 2.9 – Définition des angles de latitude φ et de colatitude φ'

Les coefficients de l'harmonique zonal J_0 et J_1 n'apparaissent pas de façon explicite. En effet, le coefficient J_0 est déjà pris en compte par le champ de gravitation sphérique. Le coefficient J_1 n'existe pas si l'origine du repère géocentrique coïncide avec le centre de la Terre, ce qui est le cas par définition.

Parmi les harmoniques zonaux, l'harmonique zonal d'ordre deux qui décrit l'effet dû à l'aplatissement de la Terre est prépondérant quant à la perturbation de l'orbite keplerienne. Son coefficient J_2 a une valeur de $J_2 = 1,08263 \cdot 10^{-3}$. Le potentiel U_{\oplus, J_2} s'écrit comme suit :

$$U_{\oplus, J_2}(\vec{\mathbf{R}}) = \frac{\mu_{\oplus} J_2 R_{\oplus}^2}{2(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{3/2}} (1 - 3 \sin^2 \varphi) \quad (2.22)$$

$$= \frac{\mu_{\oplus} J_2 R_{\oplus}^2}{2(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{3/2}} \frac{(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})(\vec{\mathbf{e}}_K \cdot \vec{\mathbf{e}}_K) - 3(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_K)^2}{(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})(\vec{\mathbf{e}}_K \cdot \vec{\mathbf{e}}_K)}$$

$$= \frac{\mu_{\oplus} J_2 R_{\oplus}^2}{2} \frac{(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})(\vec{\mathbf{e}}_K \cdot \vec{\mathbf{e}}_K) - 3(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_K)^2}{(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{5/2}}$$

Ici, nous avons utilisé les faits suivants :

$$\vec{\mathbf{e}}_K \cdot \vec{\mathbf{e}}_K = 1 \text{ et} \quad (2.23)$$

$$\sin \varphi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \cos \varphi' = \vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_K$$

La FIG. 2.10 montre le champ de gravitation terrestre sphérique. Le champ superposé induit par l'aplatissement de la Terre (deuxième harmonique zonal) est illustré dans la FIG. 2.11. Dans les deux figures, les accélérations sont marquées avec des flèches.

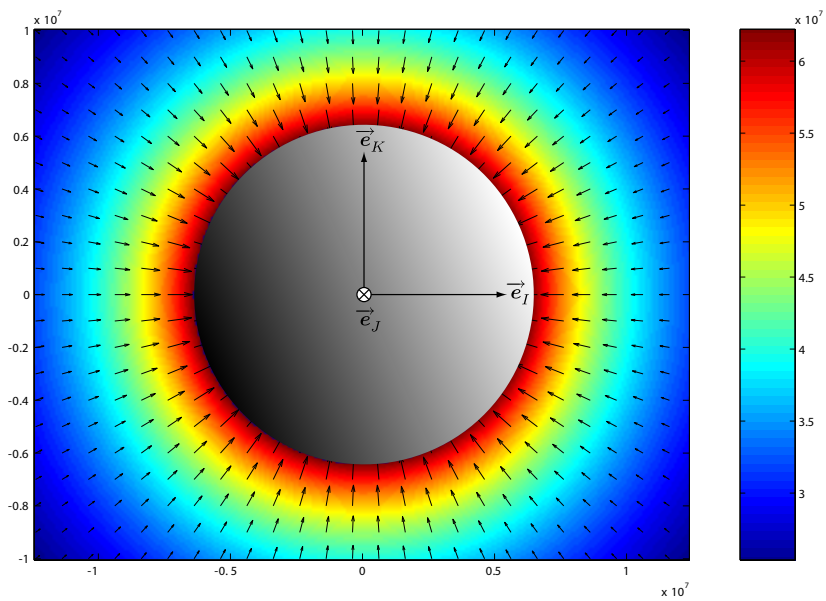
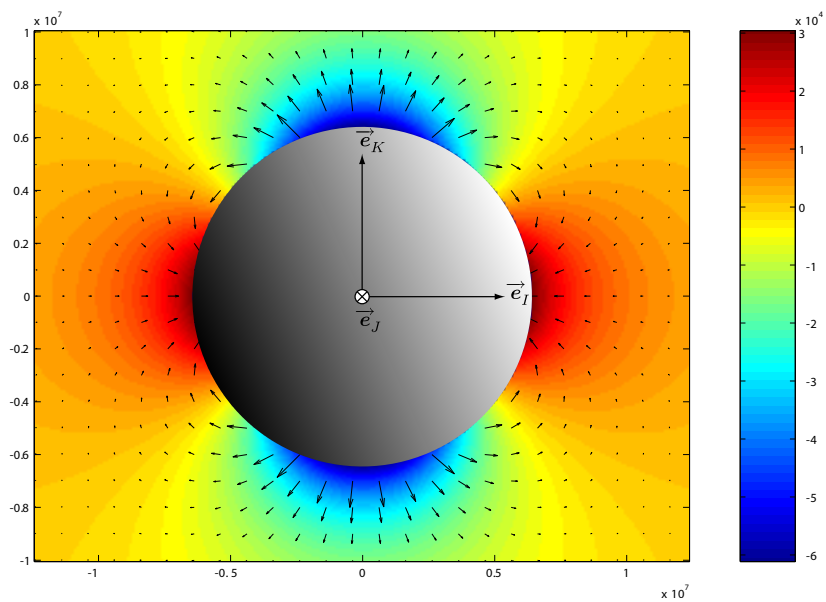


FIGURE 2.10 – Potentiel de gravitation sphérique

FIGURE 2.11 – Potentiel de gravitation J_2 superposé

Bien que l'échelle de la FIG. 2.11 soit environ mille fois inférieure à celle de la FIG. 2.10, l'effet dû à l'aplatissement de la Terre est bien perceptible en pratique. Qualitativement, un satellite à proximité du plan équatorial subit une attraction supérieure à l'attraction dans un champ purement sphérique, tandis qu'un satellite ayant une grande latitude φ subit une attraction moindre.

Une étude approfondie des effets perturbateurs peut être menée grâce aux *équations planétaires de LAGRANGE*. Une description détaillée est disponible dans les ouvrages de WIE [185] et de ZARROUATI [205]. En présence d'une perturbation, les paramètres orbitaux a , e , i , Ω , ω ne restent plus constants. L'évolution temporelle de l'anomalie vraie ν est modifiée également.

Les équations planétaires de LAGRANGE permettent d'évaluer les variations des paramètres orbitaux dues à une perturbation, plus précisément un potentiel de gravitation non sphérique. Les paramètres orbitaux instantanés s'appellent *paramètres orbitaux osculatoires*. Selon HUGHES [74], l'ellipse osculatrice à un point sur la trajectoire est définie comme le chemin que suivrait une masse ponctuelle si toutes les forces perturbatrices cessaient à ce point.

Généralement, un potentiel perturbateur entraîne des changements des paramètres orbitaux qui sont composés de variations périodiques à court terme et de variations moyennes à long terme, appelées variations *séculaires* : nous nous intéressons plus en détail aux variations séculaires. Grâce aux équations planétaires de LAGRANGE, nous pouvons obtenir ces variations dans le cas du second harmonique zonal :

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} &= -\frac{3nJ_2R_\oplus^2}{2p^2}c_i = -2C c_i n & (2.24) \\ \dot{\omega} &= -\frac{3nJ_2R_\oplus^2}{2p^2}\left(\frac{5}{2}s_i^2 - 2\right) = C(5c_i^2 - 1)n \\ \Delta n &= \frac{3nJ_2\sqrt{1-e^2}R_\oplus^2}{4p^2}(3c_i^2 - 1) = C\sqrt{1-e^2}(3c_i^2 - 1)n = C'n \\ \text{avec } p &= a(1-e^2), \\ n &= \sqrt{\mu_\oplus/a^3} \text{ et} \\ C &= \frac{3}{4}J_2\left(\frac{R_\oplus}{p}\right)^2 \\ C' &= \frac{3}{4}J_2\left(\frac{R_\oplus}{p}\right)^2\sqrt{1-e^2}(3c_i^2 - 1)\end{aligned}$$

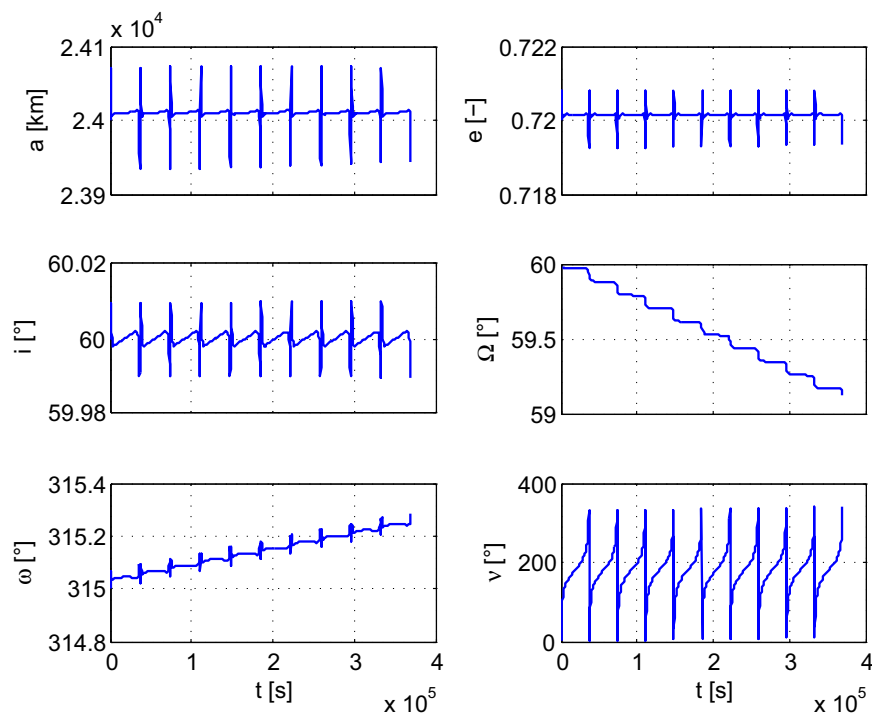
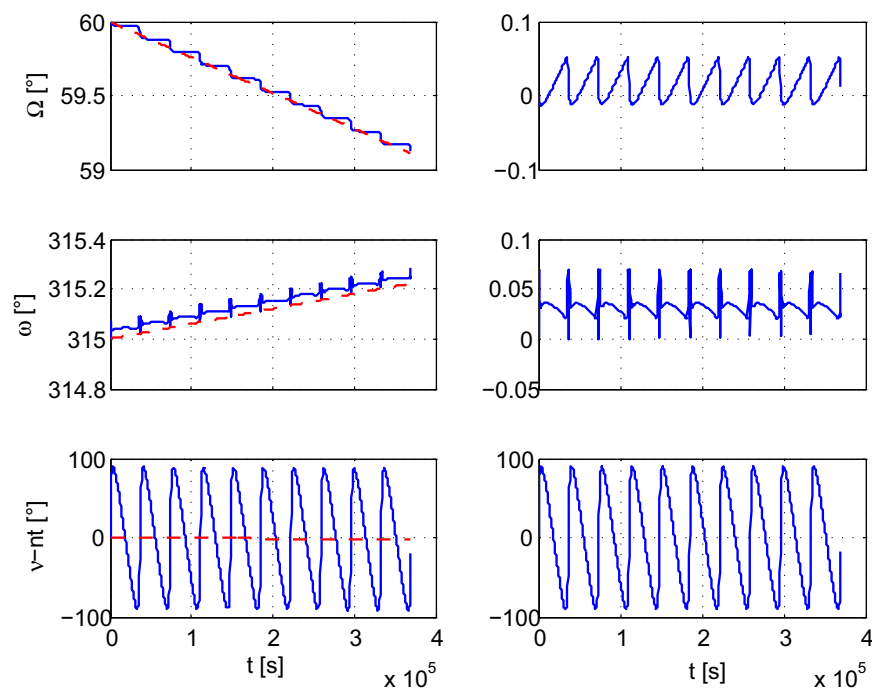
Ces expressions ont été obtenues par KOZAI, cf. [91]. Elle représentent une très bonne approximation de la réalité pour des faibles valeurs de J_2 . Les paramètres a , e et i n'ont pas de variations séculaires.

L'expression Δn nécessite quelques explications. Comme le paramètre orbital ν varie en permanence, la façon correcte d'exprimer son nouveau comportement temporel est obtenue en modifiant l'Éq. (2.6) :

$$\dot{\nu} = \frac{(n + \Delta n)(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad (2.25)$$

Il est très important de noter que dans les Éqs. (2.24) et (2.25), a et e sont les valeurs *moyennes* du demi-grand axe et de l'excentricité, respectivement.

La FIG. 2.12 montre les variations des éléments orbitaux dans le cas d'une orbite de transfert

FIGURE 2.12 – Variations des éléments orbitaux a , e , i , Ω , ω et ν sur 10 orbitesFIGURE 2.13 – Variations des éléments orbitaux Ω , ω et ν sur 10 orbites. À gauche : éléments orbitaux osculatoires (ligne continue) et séculaires (ligne tiretée). À droite : différence entre éléments orbitaux osculatoires et séculaires

géostationnaire ($a = 24000$ km, $e = 0,72$) inclinée de $i = \pi/3$ et avec des valeurs initiales pour l'ascension droite du nœud ascendant et l'argument du périégée de $\Omega = \pi/3$ et $\omega = -\pi/4$, respectivement. La simulation a été effectuée pour une durée équivalente à dix orbites.

On distingue clairement les variations périodiques et séculaires des paramètres orbitaux Ω et ω . La colonne gauche de la FIG. 2.13 montre les évolutions des paramètres Ω , ω et ν . Dans le cas de ν , le mouvement moyen $n \cdot t$ a été soustrait. Les lignes rouges sont les variations séculaires de ces paramètres, obtenues grâce à l'Éq. (2.24). Dans la colonne droite, les différences entre les variations et les variations séculaires sont illustrées : il est bien visible qu'il ne reste que des variations périodiques.

2.2 Revue bibliographique

Dans cette section, nous présenterons les différents modèles pour le vol en formation en orbite terrestre qui existent dans la littérature.

2.2.1 Vol en formation en orbite terrestre circulaire

Curieusement, le premier modèle du mouvement relatif a été publié bien avant l'ère spatiale, en 1878 par HILL⁶. Son modèle décrit le mouvement relatif de la Lune par rapport à la Terre [69, 70, 71] et contient des termes non-linéaires. Ce problème peut être considéré comme une sorte de vol en formation de la Terre et de la Lune autour du Soleil. La différence entre le vol en formation de satellites et le problème de HILL est l'attraction gravitationnelle réciproque qui existe entre la Terre et la Lune et qui est (presque) absente entre deux satellites.

Plus tard, en 1960, CLOHESSY et WILTSHIRE ont présenté leurs équations linéarisées [41] et connues sous le nom d'*équations de CLOHESSY-WILTSHIRE* (CW) ou d'*équations de HILL-CLOHESSY-WILTSHIRE* (HCW). Ces équations sont exprimées dans un repère local dit LVLH (*angl.* local-vertical local-horizontal). Concernant l'application de leurs équations, ils avaient à l'esprit les rendez-vous spatiaux qui obéissent à la même physique que le vol en formation.

Ces équations différentielles donnent la dynamique relative des deux satellites dont un, appelé *leader*, suit une orbite circulaire non perturbée autour de la Terre. Les perturbations orbitales ne sont pas prises en compte. Les équations sont linéarisées autour du leader qui prescrit le mouvement de la formation. Un point important est que la dynamique relative dans le plan orbital du leader est découplée de la dynamique relative orthogonale à ce plan.

CLOHESSY et WILTSHIRE ont également donné la solution temporelle de leurs équations dans le cas d'un mouvement non forcé. Cette solution temporelle permet notamment d'analyser le problème plus précisément et de trouver des conditions initiales pour un mouvement périodique et borné.

Depuis la publication originale en 1960, de nombreux auteurs ont cité ces équations et leur solution temporelle, par exemple HABLANI et al. [66], YANG et al. [202], YAMANAKA [198].

YEDAVALLI et SPARKS [203] ont montré la dérivation des modèles non-linéaire et linéaire en orbite circulaire. Ensuite, ils ont mis le modèle linéaire sous forme d'état, en respectant le découplage dynamique. STARIN et al. [166, 165], D'SOUZA [49] et CAMPBELL [31] ont suivi la même approche.

YEDAVALLI et SPARKS [204], ainsi que YAN et al. [200] et ROBERTSON et al. [146] ont repris les équations de CLOHESSY-WILTSHIRE, les ont mises sous forme d'état et les ont discrétisées grâce à un bloqueur d'ordre zéro. Cependant, KAPILA et al. [85, 86] les ont discrétisées avec un échantillonnage

6. George William HILL, (1838 – 1914), astronome et mathématicien américain

impulsionnel. La solution temporelle des équations de CLOHESSY-WILTSHIRE est très utile pour la discrétisation.

NELSON et al. [130] et NAASZ et al. [129] ont donné la forme normalisée des équations de CLOHESSY-WILTSHIRE, c'est-à-dire que la dynamique est normalisée avec la période orbitale. Cette méthode permet de rendre l'analyse des équations indépendante du rayon de l'orbite.

KARLGAARD [87] a développé un modèle du second ordre du vol en formation non perturbé en orbite circulaire grâce à un développement de TAYLOR⁷. Il a également trouvé une solution approximative en utilisant des techniques de perturbation pour résoudre les équations différentielles non-linéaires.

HASHIMOTO et al. [68, 82] ont donné une expression pour le module d'accélération nécessaire pour maintenir une distance entre deux satellites en orbite circulaire.

MORI et MATUNAGA [126] ont modélisé la dynamique de translation d'abord dans un repère inertiel dont l'origine est le centre de la Terre. Ils ont exprimé ensuite les vecteurs de distance par rapport au centre de masse de la formation. Un fait marquant est que la formation utilise des tendeurs.

Enfin, LEONARD et al. [103], ainsi que IRVIN et JACQUES [77], ont établi des expressions pour décrire une orbite relative paramétrisée en fonction des conditions initiales. Dans ce contexte, orbite relative fait référence à l'évolution du vecteur reliant les deux satellites.

2.2.2 Vol en formation en orbite terrestre elliptique

Il existe également de nombreuses publications qui traitent du vol en formation en orbite terrestre elliptique.

Le premier papier présentant un modèle pour les cas elliptique a été celui de LAW DEN+[97] en 1954 (avant le papier de CLOHESSY et WILTSHIRE). Les Allemands TSCHAUNER et HEMPEL ont présenté le même modèle en 1967 [175]. Ces modèles donnent la dynamique de translation linéarisée autour du satellite leader qui suit une orbite elliptique keplerienne. Le repère utilisé est le repère local déjà utilisé par CLOHESSY et WILTSHIRE.

Par ailleurs, des modèles non-linéaires exprimés dans le repère local ont été utilisés à des fins diverses par de nombreux auteurs, par exemple par YAN et al. [201], par WONG et al. [195, 194], par ALONSO et al. [10, 9] ou par KANG et al. [84].

KARLGAARD [88] a utilisé la dynamique non-linéaire en orbite elliptique. Il a introduit une transformation de variables adaptée à un système de navigation pour rendez-vous basé sur des mesures radar et en a déduit une nouvelle expression pour la dynamique.

KIM et al. [90] ont considéré à la fois la dynamique non-linéaire et linéaire. MELTON [122] a donné une comparaison de différents modèles approchés en orbite elliptique.

TILLERSON et al. [173] ont repris les équations de LAW DEN. Puis ils ont effectué un changement de variables et les ont écrites en fonction de l'anomalie vraie et non plus en fonction du temps. Enfin, ils ont discrétisé leur modèle numériquement.

Comme dans le cas des équations de CLOHESSY-WILTSHIRE, quelques auteurs ont tenté d'obtenir la solution temporelle des équations de LAW DEN.

INALHAN et al. [76] par exemple ont présenté les équations de LAW DEN en fonction de l'anomalie vraie. Ensuite, ils ont donné la solution explicite et en ont déduit une condition pour éviter la dérive, c'est-à-dire une condition que doit remplir l'état initial pour garantir un mouvement périodique.

7. Brook TAYLOR (1685 – 1731), mathématicien et philosophe anglais

TILLERSON et al. [171] suivent la même approche.

YAMANAKA et ANKERSEN [199] ont proposé une matrice de transition entre un état initial et un état final pour la dynamique de translation en orbite terrestre elliptique.

BROUCKE [26, 27] a donné un aperçu de l'histoire du développement des équations dynamiques en orbite elliptique. Il a proposé une solution analytique de l'équation différentielle et a fourni une matrice de transition.

CAMPBELL [31] a donné la solution temporelle pour des orbites circulaire et elliptique.

ZHANG et SUN [207] ont donné une solution temporelle qu'ils ont ensuite simplifiée pour de petites distances et qu'ils ont analysée en fonction de différents paramètres orbitaux.

En plus de l'approche suivi par CLOHESSY, WILTSHIRE et tous les autres auteurs mentionnés ci-dessus, il existe une deuxième grande catégorie de modèles pour le vol en formation. Elle utilise les éléments orbitaux relatifs.

Par exemple, LENNOX [102] a donné un modèle du mouvement en translation en fonction des éléments orbitaux relatifs.

VADDI et al. [179] ont utilisé les éléments orbitaux et les ont reportés dans la solution explicite des équations de CLOHESSY-WILTSHIRE. Ils ont appliqué cette formulation au contrôle impulsif pour établir une formation.

ALFRIEND et SCHAUB [5] ont proposé un modèle hybride qui utilise à la fois le repère LVLH pour une orbite elliptique et les éléments orbitaux relatifs.

La méthode des éléments orbitaux différentiels a également été utilisée par MEYSSIGNAC et FOURCADE [124] et par BREGER et HOW [25].

2.2.3 Perturbations orbitales

De nombreux auteurs se sont intéressés aux perturbations orbitales que nous avons mentionnées précédemment.

ALFRIEND et SCHAUB [4] ont donné des conditions, en termes de différences d'éléments orbitaux, pour que la dérive due à l'aplatissement de la Terre disparaisse.

ALFRIEND et al. [6] ont évalué l'erreur commise en prenant les équations de CLOHESSY-WILTSHIRE pour décrire une orbite faiblement excentrique, la perturbation du deuxième harmonique zonal et les non-linéarités.

ALFRIEND et YAN [7] ont modélisé le mouvement en orbite elliptique avec la prise en compte des effets non-linéaires et du deuxième harmonique zonal en utilisant les éléments orbitaux différentiels.

VADALI et al. [177] ont donné un modèle non-linéaire prenant en compte l'aplatissement de la Terre et l'ont ensuite linéarisé autour d'une orbite circulaire. Le mouvement du point de référence tient également compte du deuxième harmonique zonal.

VADALI et al. [178] ont utilisé les équations de CLOHESSY-WILTSHIRE et les éléments différentiels pour donner des conditions initiales.

CARPENTER [33] a donné un modèle non-linéaire générique prenant en compte les harmoniques du champ de gravitation terrestre, la traînée atmosphérique, la pression solaire et les gravitations lunaire et solaire. Cependant, il n'a pas précisé les expressions mais s'est contenté d'écrire les équations dans leur généralité. En outre, il a utilisé les positions par rapport à la Terre comme états et non pas l'écart

entre les satellites.

NAASZ [128] a utilisé les éléments orbitaux en deux formulations, avec les éléments orbitaux classiques et avec les éléments orbitaux équinoxiaux, pour simuler des manœuvres de vol en formation. Il a pris en compte la variation des éléments orbitaux due à l'aplatissement de la Terre. Il a également fait la distinction entre l'orbite du leader et l'orbite de référence qui peuvent être distinctes en présence du deuxième harmonique zonal.

GILL et RUNGE [60] ont donné un modèle de la traînée atmosphérique différentielle.

YAMAMOTO [197] a trouvé la solution analytique de la dynamique relative en orbite quasi-circulaire prenant en compte la traînée atmosphérique de deux satellites dont les coefficients balistiques sont différents.

ALFRIEND et YAN [8] ont comparé différents modèles pour le vol en formation en orbite terrestre avec ou sans prise en compte de perturbations.

PAN et KAPILA [135] ont inclus un couplage entre les mouvements en translation et en attitude. En effet, outre la perturbation du mouvement d'attitude par le gradient de gravité, les auteurs ont affirmé qu'il existe aussi une perturbation de la translation relative due à la distribution de masse des satellites qui dépend de l'attitude.

MILAM et al. [125] ont conçu un modèle non-linéaire prenant en compte le deuxième harmonique zonal. Les coordonnées utilisées sont les coordonnées absolues. Le passage aux coordonnées locales est mentionné mais pas explicité.

GIM et ALFRIEND [61] ont utilisé les éléments orbitaux différentiels pour obtenir une matrice de transition en orbite elliptique avec prise en compte de l'aplatissement de la Terre. Ils ont affirmé que leur matrice de transition donnait des précisions supérieures à la matrice de transition issue des équations de CLOHESSY-WILTSHIRE.

THÉRON et al. [170] ont développé la dynamique relative linéarisée pour le vol en formation en orbite elliptique et ont tenté de prendre en compte l'effet du deuxième harmonique zonal.

TILLERSON et HOW [174] ont comparé trois versions de la dynamique relative linéarisée : les équations de CLOHESSY-WILTSHIRE, une version des équations de CLOHESSY-WILTSHIRE en orbite circulaire prenant en compte l'aplatissement de la Terre et dans laquelle le mouvement du point de référence tient compte du deuxième harmonique zonal et finalement les équations de LAW DEN. Ils ont indiqué les conditions initiales nécessaires pour obtenir un mouvement périodique pour les trois cas.

LEONARD et al. [103] ont considéré le problème de la traînée différentielle. Ils ont considéré les équations de CLOHESSY-WILTSHIRE et ont rajouté une traînée différentielle à valeur constante. Ils ont proposé l'expression de l'orbite relative modifiée par rapport à la solution des équations de CLOHESSY-WILTSHIRE.

BREGER et al. [24] ont présenté des équations dynamiques du second ordre prenant en compte la non-linéarité. Il ont trouvé la solution temporelle et des conditions initiales pour obtenir un mouvement périodique.

SCHWEIGHART et al. [157, 158] ont développé un modèle linéaire prenant en compte l'aplatissement de la Terre pour une orbite circulaire. Ils ont modélisé le gradient du champ du deuxième harmonique zonal et ont accéléré l'orbite de référence pour tenir compte de la perturbation. ROSS [149] a suivi la même approche.

PLUYM et DAMAREN [143] ont conçu un modèle pour la dynamique relative en orbite terrestre circulaire dans lequel le gradient de gravité et la perturbation due à l'aplatissement de la Terre sont

développés au troisième et deuxième ordre, respectivement.

2.2.4 Autres orbites

En outre des orbites terrestres circulaires ou elliptiques, perturbées ou non perturbées, il existe beaucoup de littérature sur d'autres types d'orbites.

HADAEGH et al. [67] ont proposé un modèle de la dynamique relative entre les vaisseaux spatiaux de la mission *Terrestrial Planet Finder* (TPF). La formation est située sur l'orbite de la Terre autour du Soleil, mais derrière la Terre.

BEARD et al. [18, 16, 17] ont présenté un modèle prenant en compte à la fois attitude et translation. La translation a été modélisée comme double intégrateur selon les trois directions de l'espace. Les perturbations ont été mentionnées, mais pas détaillées.

BASTANTE et al. [14] ont donné un modèle linéarisé du vol en formation en orbite non planétaire (problème à trois corps). Leur modèle est linéaire à temps variant (LTV) et peut être utilisé pour des orbites autour d'un point de LAGRANGE.

JUNGE et al. [81], MCQUADE et al. [121] et WIE [185] ont également donné des équations dynamiques valables au voisinage d'un point de LAGRANGE (problème à trois corps).

WONG et KAPILA [193] ont proposé un modèle de la dynamique de translation au voisinage du point de LAGRANGE.

WANG et al. [184] ont utilisé un double intégrateur pour la dynamique de translation. Leur modèle prend en compte à la fois translation et rotation.

GURFIL et KASDIN [65, 64] ont proposé un modèle de la dynamique relative en orbite non planétaire. Le modèle a été linéarisé autour d'une trajectoire de référence. Il est linéaire à temps variant (LTV). Le centre du repère est la Terre. Les auteurs ont également pris en compte les perturbations dues à l'attraction de la Lune et à la pression solaire.

2.3 Le mouvement relatif en orbite terrestre

Dans cette section, nous décrivons le mouvement relatif de deux satellites en orbite terrestre. Comparé aux dérivations de modèles pour le mouvement relatif existant dans la littérature, le cadre méthodologique que nous présenterons a l'avantage d'être très générique. Comme nous le verrons dans la suite, notre contribution majeure est la prise en compte d'une orbite perturbée moyenne pour décrire l'évolution du point de référence autour duquel la linéarisation est effectuée. Cette approche n'a pas encore été suivie dans le cas d'une orbite elliptique.

2.3.1 Dynamique d'un seul satellite de la formation

Nous appellerons les deux satellites *leader* (*angl.* pour meneur, guide) et *follower* (*fr.* suiveur) avec les indices L et F , respectivement. Cette nomenclature a pour but d'illustrer qu'il existe un satellite qui mène la formation (le leader) et que l'autre satellite le suit (le follower).

Bien entendu, une dynamique relative *telle quelle* n'existe pas, mais les deux satellites obéissent chacun au *théorème de la quantité de mouvement* décrit dans l'Annexe C. Nous pouvons alors écrire

la dynamique suivante pour le satellite i , $i \in \{L; F\}$:

$$\ddot{\vec{R}}_i = \vec{a}_i \quad (2.26)$$

Le vecteur d'accélération \vec{a}_i est composé de l'accélération due au champ (non nécessairement sphérique) de gravitation terrestre $\vec{f}_{\oplus, \text{total}}(\vec{R}_i)$, celle due aux perturbations non gravitationnelles $\vec{f}_{\text{non-grav}, i}$ et celle due à l'action des tuyères \vec{u}_i :

$$\vec{a}_i = \underbrace{\vec{f}_{\oplus, \text{sph}}(\vec{R}_i) + \vec{f}_{\oplus, J_2}(\vec{R}_i) + \vec{f}_{\oplus, \text{autres}, i}(\vec{R}_i)}_{=\vec{f}_{\oplus, \text{total}}(\vec{R}_i)} + \vec{f}_{\text{non-grav}, i} + \vec{u}_i \quad (2.27)$$

L'accélération due au champ de gravitation terrestre $\vec{f}_{\oplus, \text{total}}(\vec{R}_i)$ ne dépend que de la position \vec{R}_i du satellite. Or, l'accélération due aux perturbations non gravitationnelles $\vec{f}_{\text{non-grav}, i}$ (comme la traînée atmosphérique) peut dépendre d'autres quantités, en particulier du vecteur de vitesse ou de l'orientation du satellite vis-à-vis de la direction du Soleil.

Un modèle utilisable à des fins de synthèse de correcteurs doit être d'une complexité limitée. En d'autres termes, nous chercherons à n'inclure dans le modèle de la dynamique relative en translation que les perturbations majeures et facilement traitables analytiquement. Ces perturbations feront partie intégrante du modèle dynamique.

À titre d'exemple, il est très difficile d'inclure la traînée atmosphérique dans un modèle de la dynamique de translation car elle dépend de beaucoup de grandeurs autre que les états de translation (position et vitesse relatives).

Les perturbations ne pouvant pas être intégrées facilement sont prises en compte sous forme d'entrées externes \vec{v}_i dans les équations dynamiques.

Comme nous l'avons annoncé dans la section précédente, nous retiendrons dans la suite uniquement la perturbation majeure en orbite terrestre dans l'intervalle entre 150 km et 40000 km d'altitude, celle due à l'aplatissement de la Terre (deuxième harmonique zonal). Dans ce cas, l'Éq. (2.27) peut être réécrite de la façon suivante :

$$\vec{a}_i = \vec{f}_{\oplus, \text{sph}}(\vec{R}_i) + \vec{f}_{\oplus, J_2}(\vec{R}_i) + \vec{v}_i + \vec{u}_i \quad (2.28)$$

Le vecteur \vec{v}_i contient les perturbations restantes (par exemple la traînée atmosphérique ou les harmoniques terrestres tesseraux et zonaux d'ordre supérieur). La dynamique donnée par l'Éq. (2.26) devient maintenant :

$$\ddot{\vec{R}}_i = \vec{f}_{\oplus, \text{sph}}(\vec{R}_i) + \vec{f}_{\oplus, J_2}(\vec{R}_i) + \vec{v}_i + \vec{u}_i \quad (2.29)$$

Le terme \vec{v}_i étant plus faible que les autres termes, nous choisissons de le négliger dans la suite. Cependant, il peut être pris en compte dans des simulations non-linéaires. Le modèle utilisé dans le reste de ce chapitre est le suivant :

$$\ddot{\vec{R}}_i = \vec{f}_{\oplus, \text{sph}}(\vec{R}_i) + \vec{f}_{\oplus, J_2}(\vec{R}_i) + \vec{u}_i \quad (2.30)$$

Maintenant, il faut savoir comment les accélérations $\vec{f}_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_i)$ et $\vec{f}_{\oplus,J_2}(\vec{R}_i)$ peuvent être déterminées. Dans la section précédente, nous avons déjà supposé connue l'accélération due au champ sphérique.

Le point de départ est toujours donné par les potentiels de gravitation terrestre $U_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_i)$ et $U_{\oplus,J_2}(\vec{R}_i)$ qui sont connus. Les accélérations $\vec{f}_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_i)$ et $\vec{f}_{\oplus,J_2}(\vec{R}_i)$ sont alors obtenues en calculant les gradients des potentiels $U_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_i)$ et $U_{\oplus,J_2}(\vec{R}_i)$, respectivement :

$$\begin{aligned}\vec{f}_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_i) &= \vec{\nabla}_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_i) \\ \vec{f}_{\oplus,J_2}(\vec{R}_i) &= \vec{\nabla}_{\oplus,J_2}(\vec{R}_i)\end{aligned}\quad (2.31)$$

Les règles de calcul ainsi que les calculs détaillés des gradients sont donnés dans l'Annexe D. Nous ne citons ici que les résultats :

$$\vec{f}_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_i) = -\frac{\mu_{\oplus}\vec{R}_i}{(\vec{R}_i \cdot \vec{R}_i)^{3/2}} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned}\vec{f}_{\oplus,J_2}(\vec{R}_i) &= \frac{3\mu_{\oplus}J_2R_{\oplus}^2}{2(\vec{R}_i \cdot \vec{R}_i)^{7/2}} \\ &\quad \cdot \left\{ -(\vec{R}_i \cdot \vec{R}_i)\vec{R}_i - 2(\vec{R}_i \cdot \vec{e}_K)(\vec{R}_i \cdot \vec{R}_i)\vec{e}_K + 5(\vec{R}_i \cdot \vec{e}_K)^2\vec{R}_i \right\}\end{aligned}\quad (2.33)$$

L'Éq. (2.30) permet d'écrire les dynamiques de translation des deux satellites (satellites leader et follower), simplement en remplaçant l'indice i par les indices L et F , respectivement. La dynamique du leader L s'écrit :

$$\ddot{\vec{R}}_L = \vec{f}_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_L) + \vec{f}_{\oplus,J_2}(\vec{R}_L) + \vec{u}_L \quad (2.34)$$

La dynamique du follower F obéit à l'expression suivante :

$$\ddot{\vec{R}}_F = \vec{f}_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_F) + \vec{f}_{\oplus,J_2}(\vec{R}_F) + \vec{u}_F \quad (2.35)$$

2.3.2 Dynamique relative entre les satellites de la formation

Pour établir la dynamique relative, nous devons d'abord introduire le vecteur de la position relative $\Delta\vec{R}$ qui correspond à la distance entre le satellite leader et le satellite follower :

$$\Delta\vec{R} = \vec{R}_F - \vec{R}_L \quad (2.36)$$

La dérivée $\dot{\Delta\vec{R}}$ de $\Delta\vec{R}$ et sa dérivée seconde $\ddot{\Delta\vec{R}}$ s'écrivent comme suit :

$$\dot{\Delta\vec{R}} = \dot{\vec{R}}_F - \dot{\vec{R}}_L \quad (2.37)$$

$$\ddot{\Delta\vec{R}} = \ddot{\vec{R}}_F - \ddot{\vec{R}}_L \quad (2.38)$$

Les Éqs. (2.34) et (2.35) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\vec{R}} &= \ddot{\vec{R}}_F - \ddot{\vec{R}}_L \\ &= \vec{f}_{\oplus, \text{sph}}(\vec{R}_F) + \vec{f}_{\oplus, J_2}(\vec{R}_F) + \vec{u}_F - \vec{f}_{\oplus, \text{sph}}(\vec{R}_L) - \vec{f}_{\oplus, J_2}(\vec{R}_L) - \vec{u}_L \\ &= \vec{f}_{\oplus, \text{sph}}(\vec{R}_F) - \vec{f}_{\oplus, \text{sph}}(\vec{R}_L) + \vec{f}_{\oplus, J_2}(\vec{R}_F) - \vec{f}_{\oplus, J_2}(\vec{R}_L) + \vec{u}_F - \vec{u}_L \end{aligned} \quad (2.39)$$

L'Éq. (2.39) est la dynamique relative entre les deux satellites, avec pour seule hypothèse le fait que certaines perturbations orbitales (par exemple la traînée atmosphérique) sont négligeables. Cette représentation a néanmoins quelques inconvénients :

- elle décrit l'évolution de la position relative $\Delta \vec{R}$, mais elle dépend des positions absolues des deux satellites, \vec{R}_L et \vec{R}_F ;
- elle est non-linéaire et donc difficilement utilisable à des fins de synthèse de correcteurs.

Nous verrons dans la suite qu'une linéarisation de l'Éq. (2.39) permet de résoudre les deux problèmes à la fois.

2.3.3 Linéarisation de la dynamique relative

Le point \vec{R}_{ref} sert de point de référence pour la linéarisation. La FIG. 2.14 illustre la géométrie utilisée.

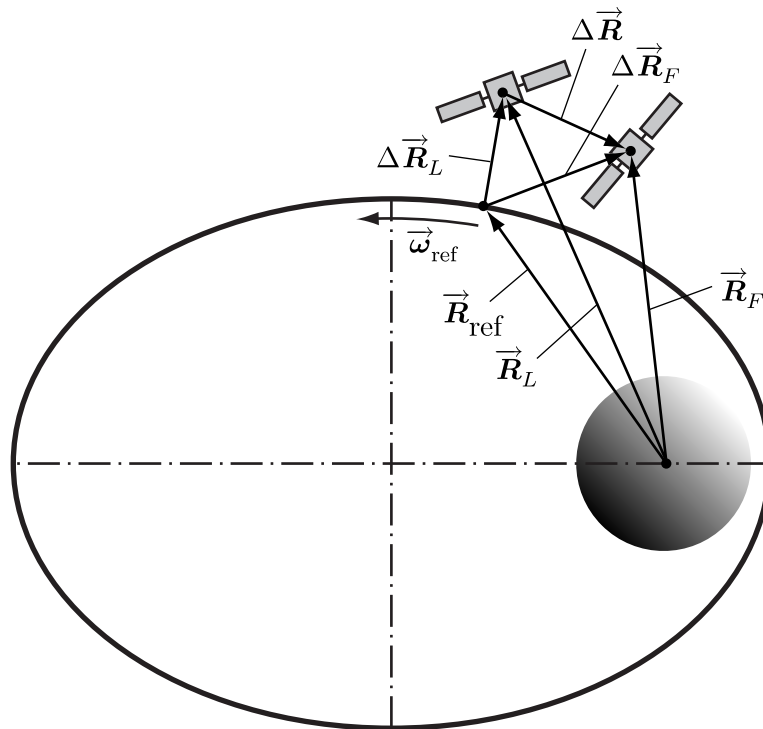


FIGURE 2.14 – Géométrie utilisée pour la linéarisation

Nous ne linéarisons pas la dynamique relative, mais d'abord la dynamique absolue des deux satellites. À cette fin, les accélérations $\vec{f}_{\oplus, \text{sph}}(\vec{R}_L)$ et $\vec{f}_{\oplus, J_2}(\vec{R}_L)$ doivent être développées au premier

ordre :

$$\vec{f}_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_L) = \vec{f}_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_{\text{ref}}) + \vec{J}_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_{\text{ref}}) \cdot \Delta\vec{R}_L + O(\|\Delta\vec{R}_L\|^2) \quad (2.40)$$

$$\vec{f}_{\oplus,J_2}(\vec{R}_L) = \vec{f}_{\oplus,J_2}(\vec{R}_{\text{ref}}) + \vec{J}_{\oplus,J_2}(\vec{R}_{\text{ref}}) \cdot \Delta\vec{R}_L + O(\|\Delta\vec{R}_L\|^2) \quad (2.41)$$

$\vec{f}_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_{\text{ref}})$ et $\vec{f}_{\oplus,J_2}(\vec{R}_{\text{ref}})$ sont les accélérations du champ de gravitation terrestre sphérique et du deuxième harmonique zonal qu'un satellite subirait au point \vec{R}_{ref} .

$\vec{J}_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_{\text{ref}})$ et $\vec{J}_{\oplus,J_2}(\vec{R}_{\text{ref}})$ sont les *jacobiennes*⁸ des accélérations $\vec{f}_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_{\text{ref}})$ et $\vec{f}_{\oplus,J_2}(\vec{R}_{\text{ref}})$ ou bien les *hessiens*⁹, en d'autres termes les dérivées secondes, des potentiels $U_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_{\text{ref}})$ et $U_{\oplus,J_2}(\vec{R}_{\text{ref}})$. Comme précédemment, les calculs sont détaillés dans l'Annexe D. Les jacobiennes s'écrivent comme suit :

$$\vec{J}_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_{\text{ref}}) = \mu_{\oplus} \frac{-(\vec{R}_{\text{ref}} \cdot \vec{R}_{\text{ref}}) \vec{1}_{\vec{y}} + 3\vec{R}_{\text{ref}} \otimes \vec{R}_{\text{ref}}}{(\vec{R}_{\text{ref}} \cdot \vec{R}_{\text{ref}})^{5/2}} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \vec{J}_{\oplus,J_2}(\vec{R}_{\text{ref}}) &= \frac{3\mu_{\oplus}J_2R_{\oplus}^2}{2(\vec{R}_{\text{ref}} \cdot \vec{R}_{\text{ref}})^{9/2}} \left\{ (\vec{R}_{\text{ref}} \cdot \vec{R}_{\text{ref}}) \left[5(\vec{R}_{\text{ref}} \cdot \vec{e}_K)^2 - (\vec{R}_{\text{ref}} \cdot \vec{R}_{\text{ref}}) \right] \vec{1}_{\vec{y}} \right. \\ &\quad + 5 \left[(\vec{R}_{\text{ref}} \cdot \vec{R}_{\text{ref}}) - 7(\vec{R}_{\text{ref}} \cdot \vec{e}_K)^2 \right] \vec{R}_{\text{ref}} \otimes \vec{R}_{\text{ref}} \\ &\quad + 10(\vec{R}_{\text{ref}} \cdot \vec{R}_{\text{ref}})(\vec{R}_{\text{ref}} \cdot \vec{e}_K) \left[\vec{R}_{\text{ref}} \otimes \vec{e}_K + \vec{e}_K \otimes \vec{R}_{\text{ref}} \right] \\ &\quad \left. - 2(\vec{R}_{\text{ref}} \cdot \vec{R}_{\text{ref}})^2 \vec{e}_K \otimes \vec{e}_K \right\} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Maintenant, la dynamique du leader donnée par l'Éq. (2.34) peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{R}}_L &= \ddot{\vec{R}}_{\text{ref}} + \Delta\ddot{\vec{R}}_L \\ &= \vec{f}_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_{\text{ref}}) + \vec{J}_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_{\text{ref}}) \cdot \Delta\vec{R}_L \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$+ \vec{f}_{\oplus,J_2}(\vec{R}_{\text{ref}}) + \vec{J}_{\oplus,J_2}(\vec{R}_{\text{ref}}) \cdot \Delta\vec{R}_L + \vec{u}_L + O(\|\Delta\vec{R}_L\|^2) \quad (2.45)$$

La définition du vecteur $\Delta\vec{R}_L$ est la suivante :

$$\Delta\vec{R}_L = \vec{R}_L - \vec{R}_{\text{ref}} \quad (2.46)$$

De même, la dynamique du follower donnée par l'Éq. (2.35) devient :

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{R}}_F &= \ddot{\vec{R}}_{\text{ref}} + \Delta\ddot{\vec{R}}_F \\ &= \vec{f}_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_{\text{ref}}) + \vec{J}_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_{\text{ref}}) \cdot \Delta\vec{R}_F \\ &\quad + \vec{f}_{\oplus,J_2}(\vec{R}_{\text{ref}}) + \vec{J}_{\oplus,J_2}(\vec{R}_{\text{ref}}) \cdot \Delta\vec{R}_F + \vec{u}_F + O(\|\Delta\vec{R}_F\|^2) \end{aligned} \quad (2.47)$$

8. nommé après Carl Gustav Jacob JACOBI (1804 – 1851), mathématicien allemand

9. nommé après Ludwig Otto HESSE (1811 – 1874), mathématicien allemand

$\Delta \vec{\mathbf{R}}_F$ obéit à l'expression suivante :

$$\Delta \vec{\mathbf{R}}_F = \vec{\mathbf{R}}_F - \vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}} \quad (2.48)$$

La dynamique relative peut être obtenue comme précédemment, c'est-à-dire en posant :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{\mathbf{R}} &= \vec{\mathbf{R}}_F - \vec{\mathbf{R}}_L \\ &= \vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}} + \Delta \vec{\mathbf{R}}_F - \vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}} - \Delta \vec{\mathbf{R}}_L \\ &= \Delta \vec{\mathbf{R}}_F - \Delta \vec{\mathbf{R}}_L \end{aligned} \quad (2.49)$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\vec{\mathbf{R}}} &= \Delta \ddot{\vec{\mathbf{R}}}_F - \Delta \ddot{\vec{\mathbf{R}}}_L \\ &= \vec{\mathbf{f}}_{\oplus, \text{sph}}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}) + \vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow \oplus, \text{sph}}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}) \cdot \Delta \vec{\mathbf{R}}_L \\ &\quad + \vec{\mathbf{f}}_{\oplus, \text{J}_2}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}) + \vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow \oplus, \text{J}_2}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}) \cdot \Delta \vec{\mathbf{R}}_L + \vec{\mathbf{u}}_L + O(\|\Delta \vec{\mathbf{R}}_L\|^2) \\ &\quad - \vec{\mathbf{f}}_{\oplus, \text{sph}}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}) - \vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow \oplus, \text{sph}}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}) \cdot \Delta \vec{\mathbf{R}}_F \\ &\quad - \vec{\mathbf{f}}_{\oplus, \text{J}_2}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}) - \vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow \oplus, \text{J}_2}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}) \cdot \Delta \vec{\mathbf{R}}_F - \vec{\mathbf{u}}_F + O(\|\Delta \vec{\mathbf{R}}_F\|^2) \\ &= \vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow \oplus, \text{sph}}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}) \cdot (\Delta \vec{\mathbf{R}}_L - \Delta \vec{\mathbf{R}}_F) + \vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow \oplus, \text{J}_2}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}) \cdot (\Delta \vec{\mathbf{R}}_L - \Delta \vec{\mathbf{R}}_F) \\ &\quad + \Delta \vec{\mathbf{u}} + O(\|\Delta \vec{\mathbf{R}}_L\|^2) + O(\|\Delta \vec{\mathbf{R}}_F\|^2) \\ &= \left[\vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow \oplus, \text{sph}}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}) + \vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow \oplus, \text{J}_2}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}) \right] \cdot \Delta \vec{\mathbf{R}} \\ &\quad + \Delta \vec{\mathbf{u}} + O(\|\Delta \vec{\mathbf{R}}_L\|^2) + O(\|\Delta \vec{\mathbf{R}}_F\|^2) \\ &\approx \left[\vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow \oplus, \text{sph}}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}) + \vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow \oplus, \text{J}_2}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}) \right] \cdot \Delta \vec{\mathbf{R}} + \Delta \vec{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (2.50)$$

$\Delta \vec{\mathbf{u}}$ est la différence entre les actions des tuyères du follower et du leader :

$$\Delta \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}_L - \vec{\mathbf{u}}_F \quad (2.51)$$

Une analyse plus détaillée révèle une expression plus pertinente des termes d'ordre supérieur :

$$O(\|\Delta \vec{\mathbf{R}}_L\|^2) + O(\|\Delta \vec{\mathbf{R}}_F\|^2) = O(\|\Delta \vec{\mathbf{R}}\| \cdot \|\Delta \vec{\mathbf{R}}_L\|, \|\Delta \vec{\mathbf{R}}\| \cdot \|\Delta \vec{\mathbf{R}}_F\|) \quad (2.52)$$

En d'autres termes, l'erreur commise lors de la linéarisation est (malheureusement) linéaire en $\|\Delta \vec{\mathbf{R}}\|$ et donc du même ordre que les termes principaux de la dynamique. Cependant, il faut également considérer que $\|\Delta \vec{\mathbf{R}}\|$ est multiplié par $\|\Delta \vec{\mathbf{R}}_L\|$ et $\|\Delta \vec{\mathbf{R}}_F\|$, respectivement. De ce fait, il faut veiller à ce que $\|\Delta \vec{\mathbf{R}}_L\|$ et $\|\Delta \vec{\mathbf{R}}_F\|$ restent petits pour que l'erreur reste du second ordre.

2.3.4 Repère mobile

Jusqu'ici, la dérivée seconde $\Delta \ddot{\vec{\mathbf{R}}}$ apparaissant dans la dynamique relative a été calculée par rapport à un repère inertiel.

Une manière plus adaptée d'exprimer la dynamique relative serait d'utiliser un repère mobile qui suit le mouvement du point de référence \vec{R}_{ref} . Pour établir ce repère mobile, il suffit pour l'instant d'introduire sa vitesse de rotation $\vec{\omega}_{\text{ref}}$ et son accélération angulaire $\dot{\vec{\omega}}_{\text{ref}}$, cf. FIG. 2.14. La dérivée inertielle $\Delta\ddot{\vec{R}}$ doit alors être remplacée par l'expression suivante :

$$\Delta\ddot{\vec{R}} = \Delta\overset{\circ}{\ddot{\vec{R}}} + 2\vec{\omega}_{\text{ref}} \wedge \Delta\overset{\circ}{\dot{\vec{R}}} + \dot{\vec{\omega}}_{\text{ref}} \wedge \Delta\vec{R} + \vec{\omega}_{\text{ref}} \wedge (\vec{\omega}_{\text{ref}} \wedge \Delta\vec{R}) \quad (2.53)$$

$\Delta\overset{\circ}{\dot{\vec{R}}}$ et $\Delta\overset{\circ}{\ddot{\vec{R}}}$ sont la dérivée et la dérivée seconde de la position relative $\Delta\vec{R}$, respectivement.

Maintenant, la dynamique relative dans le repère mobile devient :

$$\begin{aligned} \Delta\overset{\circ}{\ddot{\vec{R}}} &= \Delta\ddot{\vec{R}} - 2\vec{\omega}_{\text{ref}} \wedge \Delta\overset{\circ}{\dot{\vec{R}}} - \dot{\vec{\omega}}_{\text{ref}} \wedge \Delta\vec{R} - \vec{\omega}_{\text{ref}} \wedge (\vec{\omega}_{\text{ref}} \wedge \Delta\vec{R}) \\ &= \left[\vec{J}_{\oplus, \text{sph}}(\vec{R}_{\text{ref}}) + \vec{J}_{\oplus, J_2}(\vec{R}_{\text{ref}}) \right] \cdot \Delta\vec{R} + \Delta\vec{u} - 2\vec{\omega}_{\text{ref}} \wedge \Delta\overset{\circ}{\dot{\vec{R}}} \\ &\quad - \dot{\vec{\omega}}_{\text{ref}} \wedge \Delta\vec{R} - \vec{\omega}_{\text{ref}} \wedge (\vec{\omega}_{\text{ref}} \wedge \Delta\vec{R}) \\ &= \left[\vec{J}_{\oplus, \text{sph}}(\vec{R}_{\text{ref}}) + \vec{J}_{\oplus, J_2}(\vec{R}_{\text{ref}}) - \vec{\omega}_{\text{ref}}^{\rightarrow} - \vec{\omega}_{\text{ref}}^{\rightarrow} \cdot \vec{\omega}_{\text{ref}}^{\rightarrow} \right] \cdot \Delta\vec{R} \\ &\quad - 2\vec{\omega}_{\text{ref}}^{\rightarrow} \cdot \Delta\overset{\circ}{\dot{\vec{R}}} + \Delta\vec{u} + O(\|\Delta\vec{R}_L\|^2) + O(\|\Delta\vec{R}_F\|^2) \\ &\approx \left[\vec{J}_{\oplus, \text{sph}}(\vec{R}_{\text{ref}}) + \vec{J}_{\oplus, J_2}(\vec{R}_{\text{ref}}) - \vec{\omega}_{\text{ref}}^{\rightarrow} - \vec{\omega}_{\text{ref}}^{\rightarrow} \cdot \vec{\omega}_{\text{ref}}^{\rightarrow} \right] \cdot \Delta\vec{R} \\ &\quad - 2\vec{\omega}_{\text{ref}}^{\rightarrow} \cdot \Delta\overset{\circ}{\dot{\vec{R}}} + \Delta\vec{u} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Ici, $\vec{\omega}_{\text{ref}}^{\rightarrow}$ et $\vec{\omega}_{\text{ref}}^{\leftarrow}$ sont les *dyades antisymétriques* associées aux vecteurs $\vec{\omega}_{\text{ref}}$ et $\vec{\omega}_{\text{ref}}$, respectivement.

Il existe plusieurs possibilités pour le choix des vecteurs \vec{R}_{ref} et $\vec{\omega}_{\text{ref}}$:

1. on peut choisir d'identifier le vecteur \vec{R}_{ref} avec le rayon vecteur d'un point fictif suivant une orbite keplerienne. Le vecteur $\vec{\omega}_{\text{ref}}$ est alors la vitesse angulaire de ce point fictif. L'inconvénient de cette option est que ce point a tendance à s'éloigner des satellites de la formation car ceux-ci suivent une orbite perturbée. Or, plus la distance entre le point de référence et les satellites est élevée, plus l'erreur commise lors de la linéarisation est grande ;
2. \vec{R}_{ref} et $\vec{\omega}_{\text{ref}}$ peuvent être choisis tels qu'ils expriment le mouvement précis d'un point suivant une orbite perturbée. L'avantage de cette alternative est que l'erreur de linéarisation commise est minimale car les satellites restent à proximité du point de référence. Cependant, il n'existe pas d'expressions analytiques pour l'évolution exacte des vecteurs \vec{R}_{ref} et $\vec{\omega}_{\text{ref}}$. Il faudrait dans ce cas propager tous les six éléments orbitaux numériquement, ce qui créerait un modèle difficilement utilisable à des fins de synthèse de correcteurs ;
3. la troisième possibilité est de se baser sur la variation séculaire des paramètres orbitaux pour choisir les vecteurs \vec{R}_{ref} et $\vec{\omega}_{\text{ref}}$. Même si le point de référence ne représente pas l'orbite perturbée exacte, il reste proche de l'orbite exacte à long terme. Comme le montrent les Figs. 2.12 et 2.13, les variations autour du mouvement moyenné sont d'une faible amplitude. Le fait que les éléments

orbitaux a , e et i restent constants à long terme et que les éléments orbitaux Ω et ω suivent une évolution linéaire permet de créer un modèle assez simple. En outre, les variations $\dot{\Omega}$, $\dot{\omega}$ et Δn sont connues analytiquement (cf. Éq. (2.24)).

Dans la suite, nous retiendrons uniquement la première et la troisième option.

2.3.5 Dynamique en notation matricielle

Après avoir expliqué les grandes lignes de notre approche, nous devons maintenant établir la dynamique en notation matricielle. En d'autres termes, il faut exprimer l'Éq. (2.54) en utilisant les repères définis au début de ce chapitre.

Le vecteur $\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}$ décrivant le point de référence est exprimé dans le repère LVLH \mathcal{F}_{rco} :

$$\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}} = \mathcal{F}_{rco}^T \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

R est la distance courante entre le point de référence et le centre de la Terre, cf. Éq. (2.1).

Le vecteur $\Delta\vec{\mathbf{R}}$ qui décrit la position relative, ainsi que ses dérivées $\overset{\circ}{\Delta\vec{\mathbf{R}}}$ et $\overset{\circ\circ}{\Delta\vec{\mathbf{R}}}$, sont également exprimés dans le repère \mathcal{F}_{rco} :

$$\begin{aligned} \Delta\vec{\mathbf{R}} &= \mathcal{F}_{rco}^T \begin{pmatrix} r \\ c \\ o \end{pmatrix} = \mathcal{F}_{rco}^T \Delta R \\ \overset{\circ}{\Delta\vec{\mathbf{R}}} &= \mathcal{F}_{rco}^T \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{c} \\ \dot{o} \end{pmatrix} = \mathcal{F}_{rco}^T \Delta \dot{R} \\ \overset{\circ\circ}{\Delta\vec{\mathbf{R}}} &= \mathcal{F}_{rco}^T \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{c} \\ \ddot{o} \end{pmatrix} = \mathcal{F}_{rco}^T \Delta \ddot{R} \end{aligned} \quad (2.56)$$

r , c et o sont les composantes du vecteur $\Delta\vec{\mathbf{R}}$ dans le repère \mathcal{F}_{rco} .

Le vecteur de commande $\Delta\vec{\mathbf{u}}$ devient :

$$\Delta\vec{\mathbf{u}} = \mathcal{F}_{rco}^T \begin{pmatrix} u_r \\ u_c \\ u_o \end{pmatrix} = \mathcal{F}_{rco}^T \Delta u \quad (2.57)$$

Un autre vecteur dont nous avons besoin, le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{e}}_K$ indiquant l'axe de la Terre, est exprimé dans le repère \mathcal{F}_{IJK} comme suit :

$$\vec{\mathbf{e}}_K = \mathcal{F}_{IJK}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

Grâce aux matrices de passage introduites plus tôt, nous pouvons exprimer le vecteur $\vec{\mathbf{e}}_K$ dans le

repère \mathcal{F}_{rco} :

$$\begin{aligned}
\vec{e}_K &= \mathcal{F}_{rco}^T C_{rco}^{IJK} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{F}_{rco}^T C_{III}(\omega + \nu) C_I(i) C_{III}(\Omega) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{F}_{rco}^T \begin{pmatrix} s_{\tilde{\nu}} s_i \\ c_{\tilde{\nu}} s_i \\ c_i \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Finalement, nous devons exprimer les vecteurs de vitesse angulaire $\vec{\omega}_{\text{ref}}$ et d'accélération angulaire $\dot{\vec{\omega}}_{\text{ref}}$. L'expression suivante donne la vitesse angulaire si l'on suppose que les quatre éléments orbitaux Ω , i , ω et ν varient :

$$\begin{aligned}
\vec{\omega}_{\text{ref}} &= \vec{\omega}_{\Omega} + \vec{\omega}_i + \vec{\omega}_{\tilde{\nu}} \\
&= \mathcal{F}_{IJK}^T \dot{\Omega} i_3 + \mathcal{F}_{I'J'K'}^T \dot{i} i_1 + \mathcal{F}_{I''J''K''}^T \dot{\tilde{\nu}} i_3 \\
&= \mathcal{F}_{IJK}^T \left[\dot{\Omega} i_3 + C_{IJK}^{I'J'K'} \dot{i} i_1 + C_{IJK}^{I''J''K''} \dot{\tilde{\nu}} i_3 \right] \\
&= \mathcal{F}_{IJK}^T \left[\dot{\Omega} i_3 + C_{III}^T(\Omega) \dot{i} i_1 + C_{III}^T(\Omega) C_I^T(i) \dot{\tilde{\nu}} i_3 \right] \\
&= \mathcal{F}_{rco}^T C_{rco}^{IJK} \left[\dot{\Omega} i_3 + C_{III}^T(\Omega) \dot{i} i_1 + C_{III}^T(\Omega) C_I^T(i) \dot{\tilde{\nu}} i_3 \right] \\
&= \mathcal{F}_{rco}^T \left[C_{III}(\tilde{\nu}) C_I(i) C_{III}(\Omega) \dot{\Omega} i_3 + C_{III}(\tilde{\nu}) C_I(i) \dot{i} i_1 + C_{III}(\tilde{\nu}) \dot{\tilde{\nu}} i_3 \right] \\
&= \mathcal{F}_{rco}^T \left[C_{III}(\tilde{\nu}) C_I(i) \dot{\Omega} i_3 + C_{III}(\tilde{\nu}) \dot{i} i_1 + \dot{\tilde{\nu}} i_3 \right] \\
&= \mathcal{F}_{rco}^T \omega_{\text{ref}}
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Cette expression est la plus générale possible. Nous montrerons plus tard comment elle peut être adaptée aux différentes possibilités mentionnées ci-dessus.

i_1 et i_3 sont des matrices colonnes élémentaires dont les définitions sont données dans l'Annexe B. Il est important de noter qu'une matrice de rotation autour d'un axe ne change pas la matrice colonne élémentaire correspondante, par exemple $C_I(i) i_1 = i_1$.

Pour calculer la vitesse angulaire, nous partons de la représentation du vecteur $\vec{\omega}_{\text{ref}}$ dans le repère inertiel \mathcal{F}_{IJK} car dans ce cas, il suffit de dériver les composantes du vecteur :

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{\omega}}_{\text{ref}} &= \mathcal{F}_{IJK}^T \frac{d}{dt} \left[\dot{\Omega} i_3 + C_{III}^T(\Omega) \dot{i} i_1 + C_{III}^T(\Omega) C_I^T(i) \dot{\tilde{\nu}} i_3 \right] \\
&= \mathcal{F}_{IJK}^T \left\{ \ddot{\Omega} i_3 + C_{III}^T(\Omega) \ddot{i} i_1 + C_{III}^T(\Omega) C_I^T(i) \ddot{\tilde{\nu}} i_3 \right. \\
&\quad \left. + C_{III}^T(\Omega) \dot{\Omega} i_3^\times [i i_1 + C_I^T(i) \dot{\tilde{\nu}} i_3] + C_{III}^T(\Omega) C_I^T(i) \dot{i} i_1^\times \dot{\tilde{\nu}} i_3 \right\} \\
&= \mathcal{F}_{rco}^T C_{rco}^{IJK} \left\{ \ddot{\Omega} i_3 + C_{III}^T(\Omega) \ddot{i} i_1 + C_{III}^T(\Omega) C_I^T(i) \ddot{\tilde{\nu}} i_3 \right. \\
&\quad \left. + C_{III}^T(\Omega) \dot{\Omega} [i i_2 + i_3^\times C_I^T(i) \dot{\tilde{\nu}} i_3] - C_{III}^T(\Omega) C_I^T(i) \dot{i} \dot{\tilde{\nu}} i_2 \right\}
\end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{F}_{rco}^T C_{III}(\tilde{\nu}) \left\{ C_I(i) C_{III}(\Omega) \ddot{\Omega} i_3 + C_I(i) \ddot{i} i_1 + \ddot{\nu} i_3 \right. \\
&\quad \left. + C_I(i) \dot{\Omega} [\dot{i} i_2 + i_3^\times C_I^T(i) \dot{\nu} i_3] - \dot{i} \dot{\nu} i_2 \right\} \\
&= \mathcal{F}_{rco}^T C_{III}(\tilde{\nu}) \left\{ C_I(i) \ddot{\Omega} i_3 + \ddot{i} i_1 + \ddot{\nu} i_3 + C_I(i) \dot{\Omega} [\dot{i} i_2 + i_3^\times C_I^T(i) \dot{\nu} i_3] - \dot{i} \dot{\nu} i_2 \right\} \\
&= \mathcal{F}_{rco}^T \dot{\omega}_{\text{ref}}
\end{aligned}$$

Ici, nous avons utilisé le fait que $i_3^\times i_1 = i_2$ et que $i_1^\times i_3 = -i_2$.

Maintenant, il est nécessaire d'écrire les dyades $\vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow\oplus,\text{sph}}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}})$ et $\vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow\oplus,\text{J}_2}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}})$ en notation matricielle. Dans la dyade $\vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow\oplus,\text{sph}}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}})$, cf. Éq. (2.42), la seule variable est $\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}$. Il suffit de la remplacer :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow\oplus,\text{sph}}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}) &= \mu_{\oplus} \frac{-R^2 \mathcal{F}_{rco}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{F}_{rco} + R^2 \mathcal{F}_{rco}^T \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{F}_{rco}}{R^5} \quad (2.62) \\
&= \frac{\mu_{\oplus}}{R^3} \mathcal{F}_{rco}^T \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathcal{F}_{rco} \\
&= \mathcal{F}_{rco}^T J_{\oplus,\text{sph}}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}) \mathcal{F}_{rco}
\end{aligned}$$

Les calculs intermédiaires $\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}} \cdot \vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}} = R^2$ et $\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}} \otimes \vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}} = \mathcal{F}_{rco}^T \begin{pmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{F}_{rco}$ ont été faits.

En outre, nous avons utilisé l'identité $\vec{\mathbf{1}} = \mathcal{F}_{rco}^T \mathcal{F}_{rco}$.

Quant à la dyade $\vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow\oplus,\text{J}_2}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}})$, les calculs sont nettement plus longs. D'abord, il est nécessaire de calculer les identités suivantes :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_K &= \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} s_{\tilde{\nu}} s_i \\ c_{\tilde{\nu}} s_i \\ c_i \end{pmatrix} = R s_{\tilde{\nu}} s_i \quad (2.63) \\
\vec{\mathbf{e}}_K \otimes \vec{\mathbf{e}}_K &= \mathcal{F}_{rco}^T \begin{pmatrix} s_{\tilde{\nu}}^2 s_i^2 & s_{\tilde{\nu}} c_{\tilde{\nu}} s_i^2 & s_{\tilde{\nu}} s_i c_i \\ s_{\tilde{\nu}} c_{\tilde{\nu}} s_i^2 & c_{\tilde{\nu}}^2 s_i^2 & c_{\tilde{\nu}} s_i c_i \\ s_{\tilde{\nu}} s_i c_i & c_{\tilde{\nu}} s_i c_i & c_i^2 \end{pmatrix} \mathcal{F}_{rco} \\
\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}} \otimes \vec{\mathbf{e}}_K &= \mathcal{F}_{rco}^T \begin{pmatrix} s_{\tilde{\nu}} s_i & c_{\tilde{\nu}} s_i & c_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{F}_{rco} \\
\vec{\mathbf{e}}_K \otimes \vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}} &= \mathcal{F}_{rco}^T \begin{pmatrix} s_{\tilde{\nu}} s_i & 0 & 0 \\ c_{\tilde{\nu}} s_i & 0 & 0 \\ c_i & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{F}_{rco}
\end{aligned}$$

Grâce à ces calculs, nous pouvons remplacer les occurrences correspondantes dans l'Éq. (2.43) :

$$\begin{aligned}
\vec{J}_{\oplus, J_2}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}) &= \frac{3\mu_{\oplus} J_2 R_{\oplus}^2}{2R^9} \mathcal{F}_{rco}^T \left\{ R^2 (5R^2 s_{\bar{\nu}}^2 s_i^2 - R^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad + 5(R^2 - 7R^2 s_{\bar{\nu}}^2 s_i^2) R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + 10R^3 s_{\bar{\nu}} s_i \left[R \begin{pmatrix} s_{\bar{\nu}} s_i & c_{\bar{\nu}} s_i & c_i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} s_{\bar{\nu}} s_i & 0 & 0 \\ c_{\bar{\nu}} s_i & 0 & 0 \\ c_i & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&\quad \left. - 2R^4 \begin{pmatrix} s_{\bar{\nu}}^2 s_i^2 & s_{\bar{\nu}} c_{\bar{\nu}} s_i^2 & s_{\bar{\nu}} s_i c_i \\ s_{\bar{\nu}} c_{\bar{\nu}} s_i^2 & c_{\bar{\nu}}^2 s_i^2 & c_{\bar{\nu}} s_i c_i \\ s_{\bar{\nu}} s_i c_i & c_{\bar{\nu}} s_i c_i & c_i^2 \end{pmatrix} \right\} \mathcal{F}_{rco} \\
&= \frac{3\mu_{\oplus} J_2 R_{\oplus}^2}{2R^5} \mathcal{F}_{rco}^T \begin{pmatrix} 4 - 12s_{\bar{\nu}}^2 s_i^2 & 8s_{\bar{\nu}} c_{\bar{\nu}} s_i^2 & 8s_{\bar{\nu}} s_i c_i \\ 8s_{\bar{\nu}} c_{\bar{\nu}} s_i^2 & 5s_{\bar{\nu}}^2 s_i^2 - 1 - 2c_{\bar{\nu}}^2 s_i^2 & -2c_{\bar{\nu}} s_i c_i \\ 8s_{\bar{\nu}} s_i c_i & -2c_{\bar{\nu}} s_i c_i & 5s_{\bar{\nu}}^2 s_i^2 - 1 - 2c_i^2 \end{pmatrix} \mathcal{F}_{rco} \\
&= \mathcal{F}_{rco}^T J_{\oplus, J_2}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}) \mathcal{F}_{rco}
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Nous avons ensuite cherché une expression plus simple de $J_{\oplus, J_2}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}})$, c'est-à-dire avec moins d'occurrences de fonctions trigonométriques. À cette fin, nous avons d'abord isolé les termes constants :

$$\begin{aligned}
J_{\oplus, J_2}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}) &= \frac{3\mu_{\oplus} J_2 R_{\oplus}^2}{2R^5} \left[\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{pmatrix} -12s_{\bar{\nu}}^2 s_i^2 & 8s_{\bar{\nu}} c_{\bar{\nu}} s_i^2 & 8s_{\bar{\nu}} s_i c_i \\ 8s_{\bar{\nu}} c_{\bar{\nu}} s_i^2 & 5s_{\bar{\nu}}^2 s_i^2 - 2c_{\bar{\nu}}^2 s_i^2 & -2c_{\bar{\nu}} s_i c_i \\ 8s_{\bar{\nu}} s_i c_i & -2c_{\bar{\nu}} s_i c_i & 5s_{\bar{\nu}}^2 s_i^2 - 2c_i^2 \end{pmatrix} \right]
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Ensuite, $5s_{\bar{\nu}}^2 s_i^2$ peut être remplacé par $5 - 5c_i^2 - 5c_{\bar{\nu}}^2 s_i^2$. Nous isolons de nouveau les termes constants :

$$\begin{aligned}
J_{\oplus, J_2}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}) &= \frac{3\mu_{\oplus} J_2 R_{\oplus}^2}{2R^5} \left[\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{pmatrix} -12s_{\bar{\nu}}^2 s_i^2 & 8s_{\bar{\nu}} c_{\bar{\nu}} s_i^2 & 8s_{\bar{\nu}} s_i c_i \\ 8s_{\bar{\nu}} c_{\bar{\nu}} s_i^2 & -5c_i^2 - 7c_{\bar{\nu}}^2 s_i^2 & -2c_{\bar{\nu}} s_i c_i \\ 8s_{\bar{\nu}} s_i c_i & -2c_{\bar{\nu}} s_i c_i & -5c_{\bar{\nu}}^2 s_i^2 - 7c_i^2 \end{pmatrix} \right]
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Une observation plus attentive révèle la symétrie de $J_{\oplus, J_2}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}})$. Cette symétrie s'explique par le fait que $J_{\oplus, J_2}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}})$ est le hessien du champ de gravitation $U_{\oplus, J_2}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}})$. Par conséquent, il doit exister une représentation symétrique MNM^T pour la matrice contenant les fonctions trigonométriques :

$$J_{\oplus, J_2}(\vec{\mathbf{R}}_0) = \frac{3\mu_{\oplus} J_2 R_{\oplus}^2}{2R^5} (4I_3 + MNM^T) \tag{2.67}$$

Une observation supplémentaire est que c_i n'apparaît que dans les lignes et colonnes deux et trois. Ceci nous a permis de trouver des expressions pour les matrices M et N :

$$M = \begin{pmatrix} s_{\tilde{\nu}}s_i & 0 & 0 \\ 0 & c_{\tilde{\nu}}s_i & -c_i \\ 0 & c_i & c_{\tilde{\nu}}s_i \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -12 & 8 & 0 \\ 8 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

Cette version n'est pas la seule possibilité pour les matrices M et N , mais nous n'avons pas trouvé de version avec moins d'occurrences des fonctions trigonométriques. En effet, cette représentation a six occurrences de $s_{\tilde{\nu}}$ (deux occurrences) et $c_{\tilde{\nu}}$ (quatre occurrences), comparé à quatorze au départ. Le nombre d'occurrences des fonctions trigonométriques de l'angle $\tilde{\nu}$ est important pour l'établissement d'un modèle linéaire-fractionnaire, cf. Chapitre 4.

Nous possédons maintenant toutes les informations nécessaires pour écrire le modèle dynamique de translation sous forme matricielle. Nous partons de l'Éq. (2.54) et la projetons dans le repère \mathcal{F}_{rco} :

$$\Delta\ddot{R} = \left[J_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_{\text{ref}}) + J_{\oplus,J_2}(\vec{R}_{\text{ref}}) - \dot{\omega}_{\text{ref}}^\times - \omega_{\text{ref}}^\times \omega_{\text{ref}}^\times \right] \Delta R - 2\omega_{\text{ref}}^\times \Delta\dot{R} + \Delta u \quad (2.69)$$

Ensuite, il suffit de remplacer $J_{\oplus,\text{sph}}(\vec{R}_{\text{ref}})$, $J_{\oplus,J_2}(\vec{R}_{\text{ref}})$, ω_{ref} et $\dot{\omega}_{\text{ref}}$ par les expressions précédemment obtenues. Nous ferons ces calculs dans les sections suivantes pour trois cas particuliers.

2.3.6 Dynamique de translation en orbite elliptique keplerienne

Dans cette section, nous traitons le cas *keplerien*, c'est-à-dire le cas sans perturbations. Ce cas est particulièrement simple comme nous le verrons.

Nous répétons d'abord quelques définitions déjà connues :

$$\begin{aligned} R &= \frac{a(1-e^2)}{1+ec_\nu} \\ n &= \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{a^3}} \\ \dot{\nu} &= \frac{n(1+ec_\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \\ \ddot{\nu} &= -\frac{2n^2es_\nu(1+ec_\nu)^3}{(1-e^2)^3} \end{aligned} \quad (2.70)$$

En outre, nous savons que tous les éléments orbitaux sauf ν sont constants, en particulier les angles Ω , i et ω :

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} &= \dot{i} = \dot{\omega} = 0 \\ \ddot{\Omega} &= \ddot{i} = \ddot{\omega} = 0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

Avec ces informations et grâce aux Éqs. (2.60) et (2.61), nous pouvons maintenant écrire la vitesse

angulaire ω_{ref} et l'accélération angulaire $\dot{\omega}_{\text{ref}}$:

$$\begin{aligned}\omega_{\text{ref}} &= \dot{\nu}e_3 = \frac{n(1+ec_\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \dot{\omega}_{\text{ref}} &= \ddot{\nu}e_3 = -\frac{2n^2es_\nu(1+ec_\nu)^3}{(1-e^2)^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.72)$$

Les deux jacobienues $J_{\oplus,\text{sph}}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}})$ et $J_{\oplus,\text{sph}}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}})$ deviennent :

$$\begin{aligned}J_{\oplus,\text{sph}}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}) &= \frac{\mu_\oplus}{R^3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{n^2(1+ec_\nu)^3}{(1-e^2)^3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ J_{\oplus,\text{J}_2}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}) &= O_3\end{aligned}\quad (2.73)$$

Finalement, nous pouvons écrire la dynamique de translation en orbite terrestre elliptique non perturbée :

$$\begin{aligned}\Delta\ddot{\mathbf{R}} &= \frac{n^2(1+ec_\nu)^3}{(1-e^2)^3} \begin{pmatrix} 3+ec_\nu & -2es_\nu & 0 \\ 2es_\nu & ec_\nu & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Delta\dot{\mathbf{R}} \\ &\quad + 2n \frac{(1+ec_\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta\dot{\mathbf{R}} + \Delta\mathbf{u}\end{aligned}\quad (2.74)$$

Ces équations ne sont pas nouvelles car elles existent dans la littérature sous le nom des *équations de LAWDEN* [97] ou de *TSCHAUNER-HEMPEL* [175]. Néanmoins, nous avons pu les retrouver avec notre formulation.

Il est important de noter que, pour une excentricité nulle ($e = 0$), ces équations se réduisent aux équations de CLOHESSY-WILTSHIRE qui décrivent la dynamique relative en orbite circulaire non perturbée :

$$\Delta\ddot{\mathbf{R}} = n^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Delta\dot{\mathbf{R}} + 2n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta\dot{\mathbf{R}} + \Delta\mathbf{u}\quad (2.75)$$

Un constat important concernant ce modèle simplifié est le découplage entre les axes r et c qui se trouvent dans le plan orbital et l'axe o qui est orthogonal au plan orbital.

2.3.7 Dynamique de translation en orbite elliptique perturbée – première version

Maintenant, nous présentons une première extension au modèle précédent qui prend en compte le potentiel du deuxième harmonique zonal. L'orbite de référence donnée par les vecteurs \vec{R}_{ref} et $\vec{\omega}_{\text{ref}}$ est toujours une orbite elliptique keplerienne.

Par conséquent, la seule modification à prendre en compte est la valeur non nulle de la jacobienne $J_{\oplus, J_2}(\vec{R}_{\text{ref}})$:

$$J_{\oplus, J_2}(\vec{R}_{\text{ref}}) = \frac{3\mu_{\oplus} J_2 R_{\oplus}^2}{2R^5} [4I_3 + MNM^T] \quad (2.76)$$

La dynamique relative en translation devient :

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{R} = & \frac{n^2(1+ec_{\nu})^3}{(1-e^2)^3} \left\{ \begin{pmatrix} 3+ec_{\nu} & -2es_{\nu} & 0 \\ 2es_{\nu} & ec_{\nu} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right. \\ & + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{a} \right)^2 \frac{(1+ec_{\nu})^2}{(1-e^2)^2} \left[4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \\ & + \left. \begin{pmatrix} s_{\bar{\nu}}s_i & 0 & 0 \\ 0 & c_{\bar{\nu}}s_i & -c_i \\ 0 & c_i & c_{\bar{\nu}}s_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 & 8 & 0 \\ 8 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{\bar{\nu}}s_i & 0 & 0 \\ 0 & c_{\bar{\nu}}s_i & c_i \\ 0 & -c_i & c_{\bar{\nu}}s_i \end{pmatrix} \right] \left. \right\} \Delta R \\ & + 2n \frac{(1+ec_{\nu})^2}{(1-e^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta \dot{R} + \Delta u \end{aligned} \quad (2.77)$$

Ce modèle correspond à la première alternative mentionnée dans la Section 2.3.4. Nous rappelons que son inconvénient majeur était la dérive du point de linéarisation \vec{R}_{ref} . Dans la section suivante, nous traiterons ce problème.

Un fait remarquable est que l'ascension droite du nœud ascendant n'apparaît pas dans le modèle. Ceci s'explique par le fait que le deuxième harmonique zonal est axisymétrique.

Par contre, le découplage entre les axes r et c d'une part et l'axe o d'autre part disparaît.

Dans le cas d'une orbite circulaire ($e = 0$), on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{R} = & n^2 \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{a} \right)^2 \left[4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \right. \\ & + \left. \begin{pmatrix} s_{\bar{\nu}}s_i & 0 & 0 \\ 0 & c_{\bar{\nu}}s_i & -c_i \\ 0 & c_i & c_{\bar{\nu}}s_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 & 8 & 0 \\ 8 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{\bar{\nu}}s_i & 0 & 0 \\ 0 & c_{\bar{\nu}}s_i & c_i \\ 0 & -c_i & c_{\bar{\nu}}s_i \end{pmatrix} \right] \left. \right\} \Delta R \\ & + 2n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta \dot{R} + \Delta u \end{aligned} \quad (2.78)$$

2.3.8 Dynamique de translation en orbite elliptique perturbée – deuxième version

Nous présenterons maintenant le modèle pour lequel nous avons parcouru tout le chemin jusqu'ici. Ce modèle ne prend pas seulement en compte la jacobienne $J_{\oplus, J_2}(\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}})$ qui traduit la perturbation due à l'aplatissement de la Terre, mais il propage également le point de linéarisation donné par les vecteurs $\vec{\mathbf{R}}_{\text{ref}}$ et $\vec{\omega}_{\text{ref}}$ avec le mouvement moyenné d'un point fictif suivant une orbite perturbée.

Les variations séculaires des paramètres orbitaux ont déjà été indiquées dans l'Éq. (2.24). En outre, nous savons que les dérivées d' a , e et i ainsi que les dérivées secondes d' a , e , i , Ω et ω sont nulles.

La dérivée $\dot{\nu}$ de l'anomalie vraie est donnée par l'Éq. (2.25). Sa dérivée seconde obéit à l'expression suivante :

$$\ddot{\nu} = \frac{2e(n + \Delta n)^2 \sin \nu (1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} \quad (2.79)$$

Nous utiliserons toutes ces informations maintenant pour établir la vitesse angulaire ω_{ref} et l'accélération angulaire $\dot{\omega}_{\text{ref}}$ à partir des Éqs. (2.60) et (2.61) :

$$\begin{aligned} \omega_{\text{ref}} &= C_{III}(\tilde{\nu})C_I(i)\dot{\Omega}e_3 + C_{III}(\tilde{\nu})\dot{i}e_1 + \dot{\nu}e_3 = \begin{pmatrix} \dot{\Omega}s_{\tilde{\nu}}s_i \\ \dot{\Omega}c_{\tilde{\nu}}s_i \\ \dot{\Omega}c_i + \dot{\nu} \end{pmatrix} \\ \dot{\omega}_{\text{ref}} &= C_{III}(\tilde{\nu})C_I(i)\ddot{\Omega}e_3 + C_{III}(\tilde{\nu})\ddot{i}e_1 + \ddot{\nu}e_3 \\ &\quad + C_{III}(\tilde{\nu})C_I(i)\dot{\Omega} [ie_2 + e_3^{\times} C_I^T(i)\dot{\nu}e_3] - C_{III}(\tilde{\nu})\dot{i}\dot{\nu}e_2 \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\Omega}\dot{\nu}s_i c_{\tilde{\nu}} \\ -\dot{\Omega}\dot{\nu}s_i s_{\tilde{\nu}} \\ \ddot{\nu} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.80)$$

Grâce aux expressions de ω_{ref} et de $\dot{\omega}_{\text{ref}}$, nous pouvons écrire les termes $\omega_{\text{ref}}^{\times}$ et $\omega_{\text{ref}}^{\times}\omega_{\text{ref}}^{\times} + \dot{\omega}_{\text{ref}}^{\times}$ utilisés dans l'Éq. (2.69). La matrice antisymétrique associée à la vitesse angulaire ω_{ref} s'écrit :

$$\begin{aligned} \omega_{\text{ref}}^{\times} &= \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\Omega}c_i - \dot{\nu} & \dot{\Omega}c_{\tilde{\nu}}s_i \\ \dot{\Omega}c_i + \dot{\nu} & 0 & -\dot{\Omega}s_{\tilde{\nu}}s_i \\ -\dot{\Omega}c_{\tilde{\nu}}s_i & \dot{\Omega}s_{\tilde{\nu}}s_i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\Omega}c_i - \dot{\omega} & \dot{\Omega}c_{\tilde{\nu}}s_i \\ \dot{\Omega}c_i + \dot{\omega} & 0 & -\dot{\Omega}s_{\tilde{\nu}}s_i \\ -\dot{\Omega}c_{\tilde{\nu}}s_i & \dot{\Omega}s_{\tilde{\nu}}s_i & 0 \end{pmatrix} + \dot{\nu} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.81)$$

Le carré de la matrice antisymétrique $\omega_{\text{ref}}^{\times}$ vaut :

$$\begin{aligned} \omega_{\text{ref}}^{\times} \omega_{\text{ref}}^{\times} &= \begin{pmatrix} -\dot{\Omega}^2(1 - s_{\bar{\nu}}^2 s_i^2) - 2\dot{\Omega}\dot{\nu}c_i - \dot{\nu}^2 & \dot{\Omega}^2 s_{\bar{\nu}} c_{\bar{\nu}} s_i^2 & \dot{\Omega}^2 s_{\bar{\nu}} s_i c_i + \dot{\Omega}\dot{\nu} s_{\bar{\nu}} s_i \\ \dot{\Omega}^2 s_{\bar{\nu}} c_{\bar{\nu}} s_i^2 & -\dot{\Omega}^2(1 - c_{\bar{\nu}}^2 s_i^2) - 2\dot{\Omega}\dot{\nu}c_i - \dot{\nu}^2 & \dot{\Omega}^2 c_{\bar{\nu}} s_i c_i + \dot{\Omega}\dot{\nu} c_{\bar{\nu}} s_i \\ \dot{\Omega}^2 s_{\bar{\nu}} s_i c_i + \dot{\Omega}\dot{\nu} s_{\bar{\nu}} s_i & \dot{\Omega}^2 c_{\bar{\nu}} s_i c_i + \dot{\Omega}\dot{\nu} c_{\bar{\nu}} s_i & -\dot{\Omega}^2 s_i^2 \end{pmatrix} \\ &= \dot{\Omega}^2 \begin{pmatrix} s_{\bar{\nu}}^2 s_i^2 - 1 & s_{\bar{\nu}} c_{\bar{\nu}} s_i^2 & s_{\bar{\nu}} s_i c_i \\ s_{\bar{\nu}} c_{\bar{\nu}} s_i^2 & c_{\bar{\nu}}^2 s_i^2 - 1 & c_{\bar{\nu}} s_i c_i \\ s_{\bar{\nu}} s_i c_i & c_{\bar{\nu}} s_i c_i & -s_i^2 \end{pmatrix} + \dot{\Omega}(\dot{\omega} + \dot{\nu}) \begin{pmatrix} -2c_i & 0 & s_{\bar{\nu}} s_i \\ 0 & -2c_i & c_{\bar{\nu}} s_i \\ s_{\bar{\nu}} s_i & c_{\bar{\nu}} s_i & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \dot{\omega}(\dot{\omega} + 2\dot{\nu}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \dot{\nu}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.82)$$

La matrice antisymétrique associée à l'accélération angulaire $\dot{\omega}_{\text{ref}}^{\times}$ obéit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{\text{ref}}^{\times} &= \begin{pmatrix} 0 & -\ddot{\nu} & -\dot{\Omega}\dot{\nu} s_i s_{\bar{\nu}} \\ \ddot{\nu} & 0 & -\dot{\Omega}\dot{\nu} s_i c_{\bar{\nu}} \\ \dot{\Omega}\dot{\nu} s_i s_{\bar{\nu}} & \dot{\Omega}\dot{\nu} s_i c_{\bar{\nu}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \dot{\Omega}(\dot{\omega} + \dot{\nu}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -s_i s_{\bar{\nu}} \\ 0 & 0 & -s_i c_{\bar{\nu}} \\ s_i s_{\bar{\nu}} & s_i c_{\bar{\nu}} & 0 \end{pmatrix} + \ddot{\nu} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.83)$$

Finalement, le terme $\omega_{\text{ref}}^{\times} \omega_{\text{ref}}^{\times} + \dot{\omega}_{\text{ref}}^{\times}$ peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \omega_{\text{ref}}^{\times} \omega_{\text{ref}}^{\times} + \dot{\omega}_{\text{ref}}^{\times} &= \dot{\Omega}^2 \begin{pmatrix} s_{\bar{\nu}}^2 s_i^2 - 1 & s_{\bar{\nu}} c_{\bar{\nu}} s_i^2 & s_{\bar{\nu}} s_i c_i \\ s_{\bar{\nu}} c_{\bar{\nu}} s_i^2 & c_{\bar{\nu}}^2 s_i^2 - 1 & c_{\bar{\nu}} s_i c_i \\ s_{\bar{\nu}} s_i c_i & c_{\bar{\nu}} s_i c_i & -s_i^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \dot{\Omega}(\dot{\omega} + \dot{\nu}) \begin{pmatrix} -2c_i & 0 & s_{\bar{\nu}} s_i \\ 0 & -2c_i & c_{\bar{\nu}} s_i \\ s_{\bar{\nu}} s_i & c_{\bar{\nu}} s_i & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \dot{\omega}(\dot{\omega} + 2\dot{\nu}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \dot{\nu}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \dot{\Omega}(\dot{\omega} + \dot{\nu}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -s_i s_{\bar{\nu}} \\ 0 & 0 & -s_i c_{\bar{\nu}} \\ s_i s_{\bar{\nu}} & s_i c_{\bar{\nu}} & 0 \end{pmatrix} + \ddot{\nu} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Ces termes étant d'une complexité excessive, nous sommes obligés de trouver le moyen de les simplifier. Un premier moyen est d'éliminer les termes d'ordre supérieur, c'est-à-dire les termes dans lesquels apparaît le carré de la constante J_2 . Selon l'Éq. (2.24), cette constante apparaît de façon multiplicative dans les termes $\dot{\Omega}$ et $\dot{\omega}$, mais aussi dans les expressions de $\dot{\nu}$ et de $\ddot{\nu}$, cf. Éqs. (2.25) et (2.79). Nous avons le droit de négliger J_2^2 à cause de la faible valeur de J_2 (cf. Annexe A).

Dans l'expression de $\omega_{\text{ref}}^{\times}$, il n'y a aucune occurrence de J_2^2 . Or, dans l'expression de $\omega_{\text{ref}}^{\times} \omega_{\text{ref}}^{\times} + \dot{\omega}_{\text{ref}}^{\times}$, il existe de multiples occurrences de J_2^2 de par la présence de termes comme $\dot{\Omega}^2$ et $\dot{\Omega}\dot{\omega}$. Ceci nous

permet de simplifier de façon considérable l'Éq. (2.84) :

$$\begin{aligned} \omega_{\text{ref}}^{\times} \omega_{\text{ref}}^{\times} + \dot{\omega}_{\text{ref}}^{\times} &= 2\dot{\nu} \begin{pmatrix} -\dot{\Omega}c_i - \dot{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\Omega}c_i - \dot{\omega} & 0 \\ \dot{\Omega}s_{\bar{\nu}}s_i & \dot{\Omega}c_{\bar{\nu}}s_i & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \dot{\nu}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ddot{\nu} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.85)$$

Les expressions $\dot{\nu}$, $\dot{\nu}^2$ et $\ddot{\nu}$ peuvent également être simplifiées car elles créent des occurrences de J_2^2 . Dans ce cas, il suffit de supprimer une occurrence de Δn .

Finalement, nous pouvons remplacer $\dot{\Omega}$ et $\dot{\omega}$ par les expressions données dans l'Éq. (2.24). Ceci nous permet d'écrire les expressions $\omega_{\text{ref}}^{\times}$ et $\omega_{\text{ref}}^{\times} \omega_{\text{ref}}^{\times} + \dot{\omega}_{\text{ref}}^{\times}$ dans la façon la plus synthétique :

$$\begin{aligned} \omega_{\text{ref}}^{\times} &= Cn \begin{pmatrix} 0 & 1 - 3c_i^2 & -s_{2i}c_{\bar{\nu}} \\ -(1 - 3c_i^2) & 0 & s_{2i}s_{\bar{\nu}} \\ s_{2i}c_{\bar{\nu}} & -s_{2i}s_{\bar{\nu}} & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + (1 + C') \frac{n(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} \omega_{\text{ref}}^{\times} \omega_{\text{ref}}^{\times} + \dot{\omega}_{\text{ref}}^{\times} &= 2C \frac{n^2(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 - 3c_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 3c_i^2 & 0 \\ -s_{2i}s_{\bar{\nu}} & -s_{2i}c_{\bar{\nu}} & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - (1 + 2C') \frac{n^2(1 + e \cos \nu)^4}{(1 - e^2)^3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + (1 + 2C') \frac{2n^2 e \sin \nu (1 + e \cos \nu)^3}{(1 - e^2)^3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Finalement, nous sommes en mesure d'écrire la dynamique relative en orbite terrestre elliptique

perturbée :

$$\begin{aligned}
\Delta \ddot{R} = & \frac{n^2(1+ec_\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \left\{ \frac{1+ec_\nu}{(1-e^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 3+ec_\nu & -2es_\nu & 0 \\ 2es_\nu & ec_\nu & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right. \\
& + 2C' \frac{1+ec_\nu}{(1-e^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1+ec_\nu & 2es_\nu & 0 \\ -2es_\nu & 1+ec_\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2C \begin{pmatrix} 1-3c_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3c_i^2 & 0 \\ -s_{2i}s_{\bar{\nu}} & -s_{2i}c_{\bar{\nu}} & 0 \end{pmatrix} \\
& + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_\oplus}{a} \right)^2 \frac{(1+ec_\nu)^3}{(1-e^2)^{7/2}} \left[4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \\
& \left. + \begin{pmatrix} s_{\bar{\nu}}s_i & 0 & 0 \\ 0 & c_{\bar{\nu}}s_i & -c_i \\ 0 & c_i & c_{\bar{\nu}}s_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 & 8 & 0 \\ 8 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{\bar{\nu}}s_i & 0 & 0 \\ 0 & c_{\bar{\nu}}s_i & c_i \\ 0 & -c_i & c_{\bar{\nu}}s_i \end{pmatrix} \right] \left. \right\} \Delta R \\
& + \left\{ 2(1+C')n \frac{(1+ec_\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
& \left. - Cn \begin{pmatrix} 0 & 1-3c_i^2 & -s_{2i}c_{\bar{\nu}} \\ -(1-3c_i^2) & 0 & s_{2i}s_{\bar{\nu}} \\ s_{2i}c_{\bar{\nu}} & -s_{2i}s_{\bar{\nu}} & 0 \end{pmatrix} \right\} \Delta \dot{R} + \Delta u
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Ce modèle correspond à la troisième alternative mentionnée dans la Section 2.3.4. Tout en étant plus encombrant que le modèle donnée par l'Éq. (2.77), il possède tout à fait la même structure et donc une complexité comparable. Les termes rajoutés sont les termes contenant C ou C' .

Les mêmes remarques que pour le modèle précédent peuvent être faites, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de découplage et que l'ascension droite du nœud ascendant n'apparaît pas dans les équations.

Comme pour la première version, il existe la possibilité de simplifier les équations dynamiques au cas circulaire en posant $e = 0$:

$$\begin{aligned}
\Delta \ddot{R} = & n^2 \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 2C \begin{pmatrix} 1-3c_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3c_i^2 & 0 \\ -s_{2i}s_{\bar{\nu}} & -s_{2i}c_{\bar{\nu}} & 0 \end{pmatrix} \right. \\
& + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_\oplus}{a} \right)^2 \left[4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \\
& \left. + \begin{pmatrix} s_{\bar{\nu}}s_i & 0 & 0 \\ 0 & c_{\bar{\nu}}s_i & -c_i \\ 0 & c_i & c_{\bar{\nu}}s_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 & 8 & 0 \\ 8 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{\bar{\nu}}s_i & 0 & 0 \\ 0 & c_{\bar{\nu}}s_i & c_i \\ 0 & -c_i & c_{\bar{\nu}}s_i \end{pmatrix} \right] \left. \right\} \Delta R \\
& + \left\{ 2n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - Cn \begin{pmatrix} 0 & 2(1-3c_i^2) & -s_{2i}c_{\bar{\nu}} \\ -2(1-3c_i^2) & 0 & s_{2i}s_{\bar{\nu}} \\ s_{2i}c_{\bar{\nu}} & -s_{2i}s_{\bar{\nu}} & 0 \end{pmatrix} \right\} \Delta \dot{R} + \Delta u
\end{aligned} \tag{2.89}$$

La constante C s'écrit maintenant comme suit :

$$C = \frac{3}{4} J_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{a} \right)^2 \quad (2.90)$$

Plus exactement, a n'est plus le demi-grand axe de l'orbite de référence, mais son rayon.

2.4 Bilan

Au début de ce chapitre, nous avons récapitulé le mouvement d'un seul satellite en orbite terrestre non perturbée (mouvement keplerien) et perturbée et présenté les nombreux modèles pour la dynamique de translation relative d'une formation bi-satellite en orbite terrestre qui existent dans la littérature.

Ensuite, nous avons présenté un cadre méthodologique susceptible de prendre en compte, dans un modèle de la dynamique translationnelle relative, le champ de gravitation terrestre sphérique ainsi que le champ de gravitation dû au deuxième harmonique zonal. Ce cadre permet également de décrire un mouvement de référence autour duquel les champs de gravitation sont linéarisés. En présence de la perturbation due à l'aplatissement de la Terre, cette technique permet notamment au point de référence de suivre le mouvement moyenné d'une orbite perturbée et de rester proche de la formation de satellites. L'avantage par rapport aux modèles existants est que la linéarisation reste valable, ce qui rend inutile des développements d'ordre supérieur.

Les modèles générés peuvent être utilisés à des fins très diverses, par exemple simulation, synthèse et analyse de correcteurs ou optimisation de trajectoires.

Chapitre 3

Modèle couplé en translation et en rotation

Sommaire

3.1	Revue bibliographique	60
3.2	Points de Lagrange	62
3.3	Modèle cinématique	64
3.4	Modèle dynamique en notation intrinsèque	70
3.5	Modèle dynamique en notation extrinsèque	72
3.6	Modèles des perturbations	75
3.6.1	Gradient de gravité	75
3.6.2	Pression de radiation solaire	77
3.7	Simplifications	79
3.7.1	Dynamique de translation en orbite terrestre	79
3.7.2	Mode d'observation	80
3.7.3	Linéarisation autour du mode d'observation	81
3.7.4	Linéarisation autour du mode de changement de la distance inter-vaisseau	85
3.7.5	Linéarisation autour du mode de rotation de la formation autour d'un axe	86
3.8	Structure hiérarchique	88
3.8.1	Complétion de la dynamique	90
3.8.2	Hiérarchies	92
3.9	Modèle métrologique	96
3.9.1	Différence de marche optique	97
3.9.2	Dépointages	103
3.9.3	Senseur stellaire	107
3.9.4	Capteur d'incidence du faisceau optique	107
3.9.5	Capteur latéral fin	113
3.9.6	Capteur latéral grossier	116
3.9.7	Capteur longitudinal	120
3.9.8	Capteur radiofréquence	121
3.9.9	Sorties mesurées supplémentaires	123
3.10	Modèle des actionneurs	123
3.11	Bilan	124

Ce chapitre est dédié à la synthèse d'un modèle générique pour le vol en formation. En particulier,

nous allons prendre en compte à la fois les mouvements en translation et en rotation, contrairement au modèle en orbite terrestre que nous avons vu dans le chapitre précédent et qui a traité les satellites comme masses ponctuelles. L'approche utilisée pour aboutir à ce modèle est similaire à celle du chapitre précédent.

D'abord, il est nécessaire de décrire la *cinématique* de la formation. Ceci dit, chaque vaisseau sera traité séparément avant que nous puissions établir la cinématique relative. La cinématique consiste en deux grandes parties – le mouvement du point de référence de la formation, en d'autres termes l'orbite de la formation, et le mouvement des éléments de la formation par rapport à ce point de référence. Nous définirons de différents repères pour prendre en compte ces mouvements. Les passages entre les repères peuvent être des translations ou des rotations.

Comme plusieurs missions de vol en formation seront situées au voisinage d'un point de LAGRANGE, nous décrirons ces points et les orbites au voisinage de ces points plus en détail.

Après la cinématique, nous établirons la *dynamique* de chacun des éléments de la formation. Ceci sera fait grâce au principe fondamental de la mécanique, en particulier en utilisant la seconde loi de NEWTON pour la dynamique de translation et le théorème du moment cinétique pour la dynamique d'attitude.

Nous verrons que des *modèles métrologiques*, c'est-à-dire des modèles décrivant différents capteurs, peuvent être obtenus grâce au modèle cinématique établi au préalable. Nous décrirons en détail comment les capteurs spécifiques au vol en formation, ainsi que les capteurs couramment utilisés pour les missions mono-satellite, peuvent être décrits.

Un point crucial dans toutes les missions de vol en formation est l'existence de *perturbations orbitales*. Nous dériverons des modèles pour les perturbations prépondérantes lorsqu'une formation de vaisseaux spatiaux se trouve proche d'un point de LAGRANGE. Ces perturbations sont la pression de radiation solaire et le gradient de gravité.

En ce qui concerne les modèles cinématique, dynamique, métrologique et perturbateur, nous utiliserons d'abord la *notation vectorielle* (ou intrinsèque) pour établir les expressions plus facilement. Ensuite, nous utiliserons la *notation matricielle* (ou extrinsèque) pour pouvoir exploiter les résultats numériquement.

La dernière étape dans l'établissement d'un modèle global est la *linéarisation*. Comme nous souhaitons contrôler une formation proche d'une configuration nominale associée à un mode opérationnel, nous pouvons linéariser le modèle non-linéaire autour de cette configuration nominale. L'existence d'un modèle linéaire, en particulier dans sa représentation d'état, nous permettra plus tard de synthétiser des correcteurs linéaires.

Un point d'une très grande importance, surtout pour la commande, est le fait du *couplage entre translation et rotation*. Nous verrons que ces deux mouvements ne peuvent jamais être séparés et que l'un influe sur l'autre et vice versa. Ceci est vrai pour toutes les parties du modèle (cinématique, dynamique, métrologie et perturbations).

3.1 Revue bibliographique

La littérature sur la dynamique couplée en translation et en attitude n'est pas aussi abondante que celle sur la dynamique uniquement en translation.

ALONSO et al. [9, 10] développent un modèle qui prend en compte à la fois l'attitude et la translation en orbite circulaire terrestre. Leur but est de modéliser un capteur visuel qui consiste en une diode sur

un satellite et un capteur photographique sur l'autre et de l'exploiter pour la navigation sous forme d'un observateur non-linéaire. La dynamique translationnelle correspond aux équations de CLOHESSEY-WILTSHIRE sans linéarisation. Les deux dynamiques sont formulées séparément et les auteurs les considèrent découplées. Au niveau de l'attitude, des vitesses de rotation relatives, c'est-à-dire entre le deuxième et le premier satellite, sont utilisées pour la modélisation. En outre, la notion de dépointage, c'est-à-dire d'erreur entre les attitudes actuelle et désirée, est introduite.

PLOEN et al. [141] proposent un modèle en notation vectorielle pour décrire la dynamique et la cinématique à la fois translationnelles et en rotation de plusieurs vaisseaux d'une formation. Pour la dérivation, les auteurs utilisent une formulation qui généralise les deux dynamiques et qui est capable de les traiter simultanément. La dynamique est calculée pour différents cas (en utilisant des dérivées inertielles ou locales, en prenant comme point de référence le centre de masse ou un point arbitraire). Ce papier est très intéressant d'un point de vue conceptuel car il s'appuie sur une formulation très générique. Cependant, les modèles présentés ont le désavantage de ne pas utiliser des grandeurs relatives, mais des grandeurs absolues pour décrire la dynamique. En outre, la notation vectorielle n'est pas directement exploitable pour l'application numérique.

Dans un autre papier, PLOEN et al. [142] décrivent un modèle en notation vectorielle pour les dynamiques d'attitude et de translation en orbite terrestre circulaire. Ce modèle est exprimé en fonction de positions et d'orientations relatives. La paramétrisation de l'attitude est discutée et les auteurs esquissent comment un modèle linéarisé peut être obtenu. Malheureusement, la dérivation des équations est erronée. Une idée intéressante est de modéliser un satellite *drag-free*, c'est-à-dire un satellite avec une masse d'épreuve interne qui ne subit que les forces gravitationnelles, comme formation de deux corps.

WONG et al. [196] décrivent un modèle qui prend en compte à la fois attitude et translation. Ils utilisent la notation de HUGHES [74] pour formuler d'abord les dynamiques et cinématiques de deux satellites (leader et follower) en absolu. Ensuite, ils introduisent des grandeurs relatives (vitesse angulaire relative et position relative) pour en déduire la dynamique et la cinématique relatives. En outre, la dynamique de l'erreur entre mouvements réel et désiré est montrée. Des expressions en notation vectorielle ainsi qu'en notation matricielle sont données. Le modèle est utilisé pour synthétiser un retour de sortie non-linéaire. Un fait marquant est que les auteurs isolent la « perturbation » du mouvement en translation dû au fait que le centre de masse et le point de référence ne coïncident pas. Ce modèle est très riche et peut représenter un bon point de départ, mais il reste incomplet car le problème de la modélisation des capteurs n'est pas considéré.

Nous concluons, sur la base de la littérature existante concernant la modélisation couplée en attitude et en translation, que ces modèles sont suffisants pour les besoins précis des auteurs (navigation, retour de sortie non-linéaire, etc.). Mais ils sont peu génériques et négligent souvent complètement des aspects importants, comme les perturbations, les capteurs ou la structure hiérarchique.

Le but de ce chapitre est donc de créer un cadre méthodologique qui soit à la fois le plus *générique* possible pour couvrir une multitude de cas, mais qui puisse aussi être *adapté* et *simplifié* en fonction des besoins de la mission en question.

Nous aimerions aussi disposer de modèles des capteurs couramment utilisés dans les missions de vol en formation. Ce sont d'un côté les capteurs relatifs (par exemple un capteur de position relative) qui sont spécifiques au vol en formation, mais de l'autre côté aussi les capteurs absolus (par exemple un senseur stellaire) qui sont utilisés dans toutes sortes de missions spatiales et non pas seulement pour le vol en formation.

En outre, nous voudrions posséder un modèle *linéarisé* pour les modes opérationnels où une

linéarisation paraît justifiée, par exemple le mode nulling dans une mission d'interférométrie. Un modèle linéaire permettrait notamment d'avoir recours à des méthodes linéaires de synthèse de correcteurs dites *modernes*, par exemple les méthodes \mathcal{H}_∞ , \mathcal{H}_2 , le LQG ou encore la commande modale.

3.2 Points de Lagrange

Définition 3.1 *Les points de LAGRANGE sont les points dans le système Soleil-Terre auxquels les accélérations suivantes se compensent :*

- accélération due à la gravitation solaire ;
- accélération due à la gravitation terrestre ;
- accélérations inertielles dues au repère mobile qui tourne avec la Terre autour du Soleil, par exemple accélération centripète.

En effet, les points de LAGRANGE sont des points fixes dans le *problème à trois corps circulaire restreint* (CR3BP, *angl.* circular-restricted three-body problem), cf. l'ouvrage de MARCHAL [120].

Il existe cinq points de LAGRANGE dont trois points colinéaires (L_1 , L_2 et L_3) qui se trouvent sur la droite qui relie le Soleil et la Terre. Les deux autres sont situés sur l'orbite de la Terre, mais à soixante degrés de celle-ci. La configuration des points de LAGRANGE est illustré dans la FIG. 3.1.

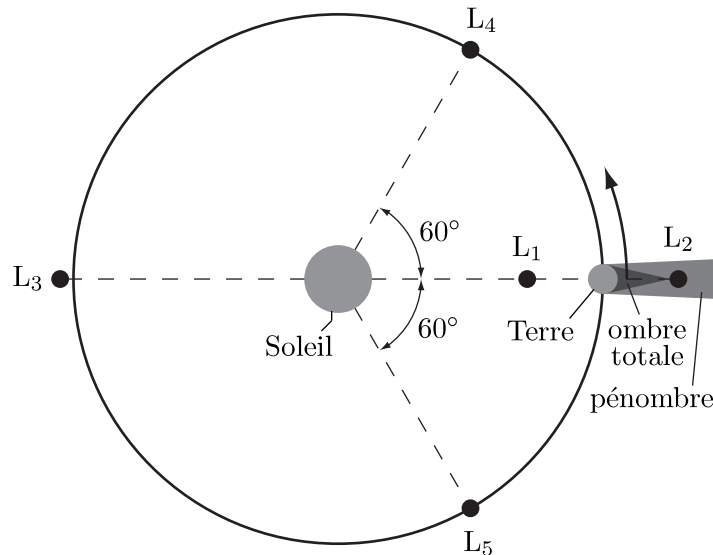


FIGURE 3.1 – Points de LAGRANGE du système Soleil-Terre

Dans le système Soleil-Terre, les points colinéaires L_1 et L_2 sont situés à une distance d'environ 1,5 millions de km du centre de la Terre. Le point colinéaire L_3 est proche de la position opposée à la position de la Terre par rapport au Soleil.

Les points de LAGRANGE se prêtent très bien aux missions spatiales qui requièrent un environnement orbital tranquille car les perturbations dues à la traînée atmosphérique, à l'imperfection de la forme de la Terre (J_2 etc.) et à la gravitation lunaire sont très faibles voir inexistantes. Les perturbations orbitales majeures sont la pression de radiation solaire et le gradient de gravité.

Une analyse linéaire, c'est-à-dire une linéarisation des champs de gravitation autour des points de LAGRANGE, montre que les points colinéaires sont instables tandis que les deux autres sont stables.

En d'autres termes, une masse d'épreuve placée à proximité d'un point colinéaire aura tendance à s'en éloigner lentement. En revanche, les points L_4 et L_5 vont attirer la masse d'épreuve.

De nombreuses missions spatiales ayant recours au vol en formation (par exemple *Darwin*, *Pegase* et *Terrestrial Planet Finder*) ou n'y ayant pas recours (par exemple *WMAP* (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), *Herschel*, *James Webb Space Telescope* et *Planck*) sont ou seront situés près du point de LAGRANGE L_2 qui est situé derrière la Terre vu du Soleil. On préfère en effet le point L_2 au point L_1 du fait que les vaisseaux se trouvent dans la direction opposée au Soleil et que la communication et la visibilité sont simplifiées. Les missions *Soho* et *Genesis*, ayant pour but d'observer le Soleil, sont deux des rares exemples du choix du point L_1 .

En ce qui concerne le point L_2 , il faut trouver un moyen de sortir les vaisseaux de la pénombre (cf. FIG. 3.1). C'est pour cette raison qu'ils suivent généralement une des deux types d'orbites suivants autour du point L_2 :

- les *orbites halo* sont des orbites périodiques. Ils portent ce nom à cause de leur allure qui est, vu de la Terre, similaire au phénomène optique portant le même nom ;
- les *orbites Lissajous*¹ sont des orbites quasi-périodiques : elles sont bornées, mais elles ne possèdent pas de périodicité proprement dite.

En dépit de la non-stabilité du point L_2 , il existe en effet des orbites périodiques ou quasi-périodiques *naturelles* ou *non forcées*, c'est-à-dire qui ne requièrent pas de poussée pour les maintenir.

Contrairement aux orbites keplériennes, les susdites orbites ne possèdent pas de description analytique et sont donc normalement obtenues par optimisation en tenant compte de différents critères, par exemple la consommation d'ergols pour d'éventuelles corrections d'orbite ou la période orbitale.

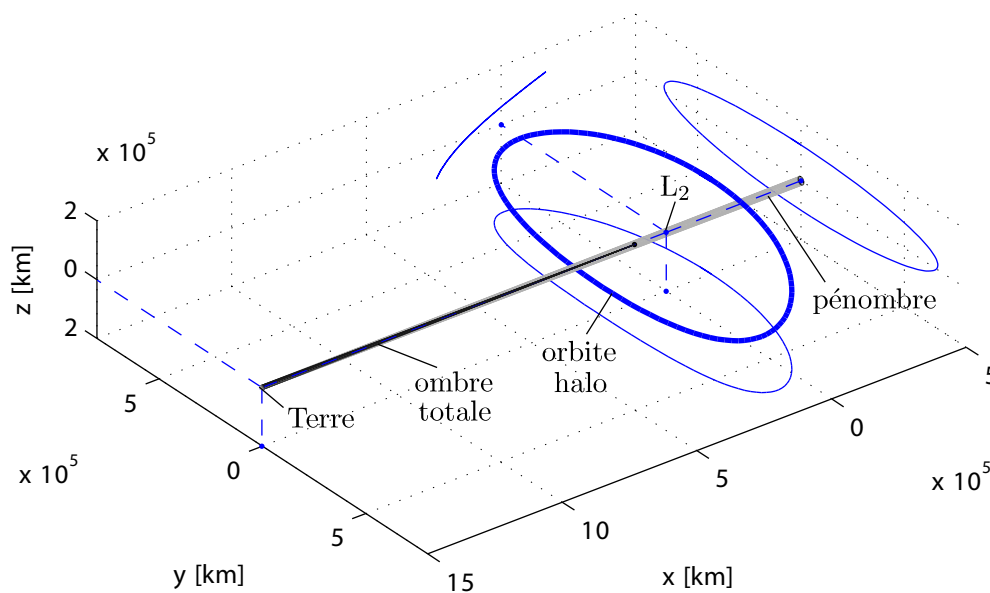


FIGURE 3.2 – Orbite halo autour du point de LAGRANGE L_2 du système Soleil-Terre. L_2 se trouve à l'origine du repère.

La FIG. 3.2 montre une orbite halo dont les données sont disponibles dans la Réf. [185]. Le point L_2 est à l'origine du repère. Les axes x , y et z sont dirigés le long du vecteur Soleil-Terre, le long de la vitesse orbitale de la Terre et le long du moment cinétique du mouvement orbital terrestre,

1. Jules Antoine LISSAJOUS (1822 – 1880), physicien français

respectivement. Les amplitudes de cette orbite sont 206000 km (direction x), 665000 km (direction y) et 110000 km (direction z) et la période orbitale est de 180 jours environ. L'ouvrage [185] donne également des éléments de compréhension sur les orbites halo et LISSAJOUS et sur les calculs d'optimisation nécessaires pour les obtenir. De plus, [42] traite le sujet des orbites halo plus en détail.

3.3 Modèle cinématique

La FIG. 3.3 montre la géométrie du mouvement de deux vaisseaux spatiaux i et j appartenant à une formation qui suit une orbite halo autour du point de LAGRANGE L_2 .

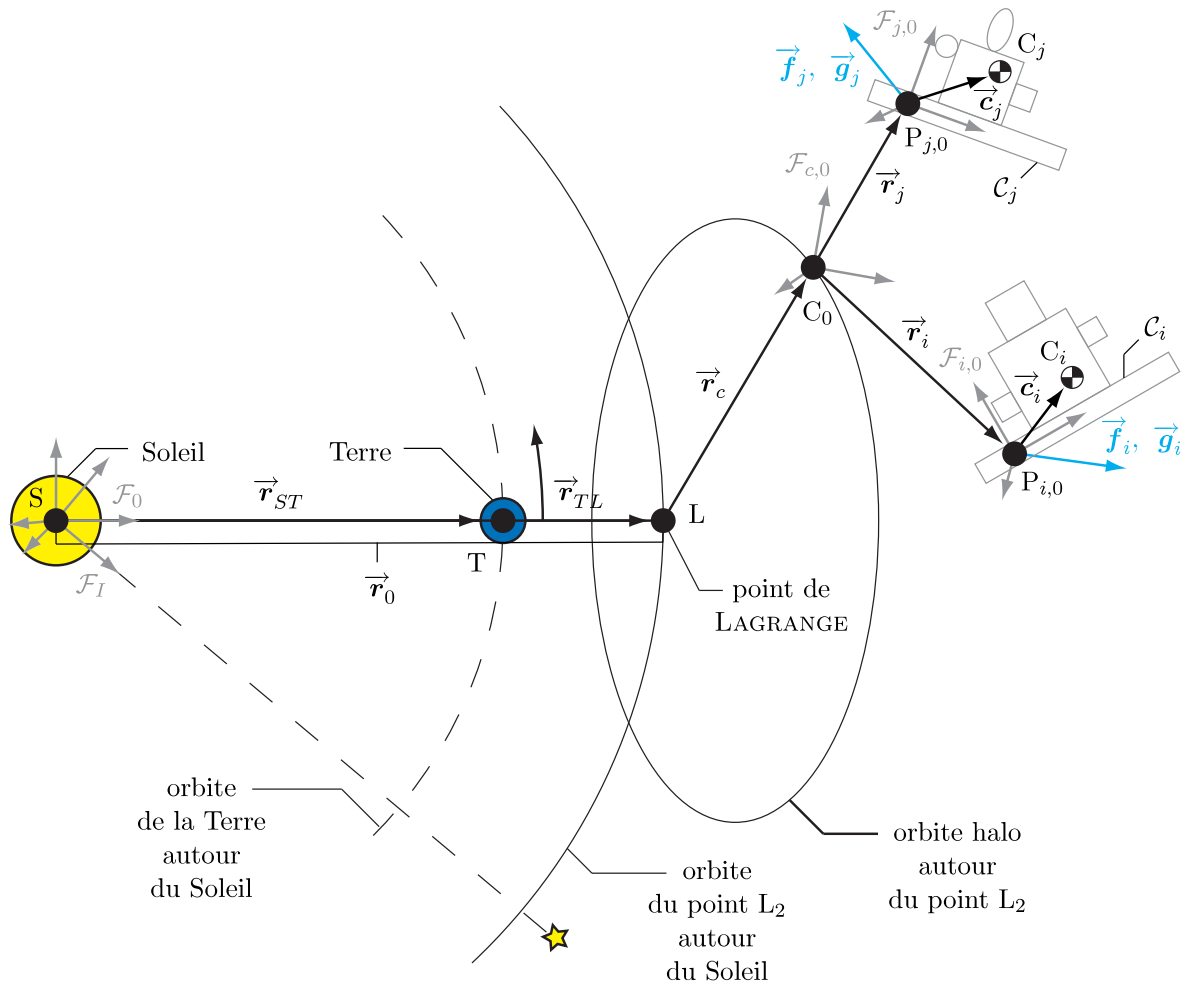


FIGURE 3.3 – Géométrie du mouvement de deux vaisseaux d'une formation suivant une orbite halo autour du point de LAGRANGE L_2

Le point S indique la position du Soleil, le point T celle de la Terre. L est le point de LAGRANGE L_2 . C_0 correspond au point de référence de la formation et suit une orbite halo. C_i et C_j sont les positions des centres de masse des vaisseaux i et j , respectivement.

\mathcal{C}_i et \mathcal{C}_j sont les ensembles qui comprennent toutes les masses ponctuelles formant le vaisseau i et j , respectivement.

$P_{i,0}$ et $P_{j,0}$ sont des points de référence associés à chacun des vaisseaux i et j et peuvent être choisis arbitrairement. Les modèles cinématique, dynamique, métrologique et perturbateur dépendront de ce choix. Une possibilité serait de faire coïncider ces points avec les centres de masse C_i et C_j . Or, une stratégie plus pertinente est de choisir des points liés aux plateformes des vaisseaux. Ceci permet d'exprimer les points de montage des capteurs et des actionneurs relativement à la plateforme à laquelle ils sont rigidement attachés.

\vec{f}_i et \vec{g}_i sont les forces et les couples appliqués au point de référence P_i du vaisseau i , respectivement. Ces forces et ces couples peuvent avoir leur origine soit dans les actionneurs, soit dans les perturbations orbitales.

Les vecteurs reliant les différents points sont \vec{r}_0 (entre S et L), \vec{r}_{ST} (entre S et T), \vec{r}_{TL} (entre T et L), \vec{r}_c (entre L et C_0), \vec{r}_i (entre C_0 et $P_{i,0}$), \vec{r}_j (entre C_0 et $P_{j,0}$), \vec{c}_i (entre $P_{i,0}$ et C_i) et \vec{c}_j (entre $P_{j,0}$ et C_j). En particulier, le vecteur \vec{r}_0 est la somme des vecteurs \vec{r}_{ST} et \vec{r}_{TL} : $\vec{r}_0 = \vec{r}_{ST} + \vec{r}_{TL}$.

Des repères sont définis partout où intervient une rotation. Le repère \mathcal{F}_I est le repère inertiel, c'est-à-dire qu'il est fixe par rapport aux étoiles. Son origine coïncide avec le Soleil. \mathcal{F}_0 est également centré au Soleil, mais il est fixe par rapport au mouvement de la Terre autour du Soleil. Le repère \mathcal{F}_c a son origine au centre C de la formation. Il indique l'orientation de la formation dans sa globalité. Les repères \mathcal{F}_i et \mathcal{F}_j ont leurs origines aux points de référence P_i et P_j des vaisseaux i et j , respectivement. Ils sont rigidement liés aux plateformes de ces vaisseaux.

Chacun des repères possède une vitesse angulaire par rapport au repère précédent. Le repère \mathcal{F}_0 tourne avec la vitesse angulaire $\vec{\omega}_0$ par rapport à \mathcal{F}_I , \mathcal{F}_c avec $\vec{\omega}_c$ par rapport à \mathcal{F}_0 , \mathcal{F}_i avec $\vec{\omega}_i$ par rapport à \mathcal{F}_c et \mathcal{F}_j avec $\vec{\omega}_j$ par rapport à \mathcal{F}_c .

Les différents déplacements donnés par les vecteurs \vec{r}_0 , \vec{r}_c , \vec{r}_i et \vec{r}_j constituent une chaîne cinématique allant du mouvement le plus général (celui du point de LAGRANGE L_2 autour du Soleil) au mouvement des vaisseaux individuels par rapport à la formation. Il en est de même pour les rotations successives définies par les vitesses angulaires $\vec{\omega}_0$, $\vec{\omega}_c$, $\vec{\omega}_i$ et $\vec{\omega}_j$. La seule différence est qu'il n'est pas possible de décrire les différents changements d'attitude en notation vectorielle. Ceci est seulement possible en notation matricielle, en utilisant les matrices de rotation.

Il est important de noter que ce modèle géométrique est à la fois générique et extensible. D'un côté, il est *générique* parce que d'autres types d'orbites peuvent être décrits en utilisant la même séquence de translations et de rotations. Par exemple, on peut également placer la Terre au point S. Dans ce cas, le point L est un point sur une orbite terrestre. Le centre de la formation C suit une trajectoire prédéfinie autour du point L. De l'autre côté, il est *extensible* car il est toujours possible d'insérer des mouvements intermédiaires. Par exemple, on peut insérer, entre le centre de la formation C et le point de référence du vaisseau i , P_i , un point de référence et un repère intermédiaires. Ainsi, il est possible de diviser la formation en plusieurs sous-formations.

Grâce aux vecteurs et repères définis, nous pouvons décrire la position du point de référence $P_{i,0}$ du vaisseau i , $\vec{R}_{P_{i,0}}$, compté à partir du Soleil :

$$\vec{R}_{P_{i,0}} = \vec{r}_0 + \vec{r}_c + \vec{r}_i \quad (3.1)$$

Au niveau de l'orientation, la vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{i,0}$ du vaisseau i est donnée par la relation suivante :

$$\vec{\Omega}_{i,0} = \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c + \vec{\omega}_i \quad (3.2)$$

Dans les calculs qui suivront, nous aurons également besoin des dérivées des expressions (3.1) et (3.2).

La dérivée $\dot{\vec{R}}_{P_{i,0}}$ de $\vec{R}_{P_{i,0}}$ s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{R}}_{P_{i,0}} &= \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}_c + \dot{\vec{r}}_i \\ &= \overset{\circ}{\vec{r}}_0 + \overset{\circ}{\vec{r}}_c + \vec{\omega}_0 \wedge (\vec{r}_0 + \vec{r}_c) \\ &\quad + \overset{\circ}{\vec{r}}_i + (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c) \wedge \vec{r}_i\end{aligned}\tag{3.3}$$

Sa dérivée seconde $\ddot{\vec{R}}_{P_{i,0}}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{R}}_{P_{i,0}} &= \ddot{\vec{r}}_0 + \ddot{\vec{r}}_c + \ddot{\vec{r}}_i \\ &= \overset{\circ\circ}{\vec{r}}_0 + \overset{\circ\circ}{\vec{r}}_c + 2\vec{\omega}_0 \wedge \left(\overset{\circ}{\vec{r}}_0 + \overset{\circ}{\vec{r}}_c \right) + \overset{\circ}{\omega}_0 \wedge (\vec{r}_0 + \vec{r}_c) \\ &\quad + \vec{\omega}_0 \wedge [\vec{\omega}_0 \wedge (\vec{r}_0 + \vec{r}_c)] + \overset{\circ\circ}{\vec{r}}_i + 2(\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c) \wedge \overset{\circ}{\vec{r}}_i \\ &\quad + \left(\overset{\circ}{\omega}_0 + \overset{\circ}{\omega}_c + \vec{\omega}_0 \wedge \vec{\omega}_c \right) \wedge \vec{r}_i + (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c) \wedge [(\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c) \wedge \vec{r}_i]\end{aligned}\tag{3.4}$$

La dérivée $\dot{\vec{\Omega}}_{i,0}$ de la vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{i,0}$ devient :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{\Omega}}_{i,0} &= \dot{\vec{\omega}}_0 + \dot{\vec{\omega}}_c + \dot{\vec{\omega}}_i \\ &= \overset{\circ}{\omega}_0 + \overset{\circ}{\omega}_c + \vec{\omega}_0 \wedge \vec{\omega}_c + \overset{\circ}{\omega}_i + (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c) \wedge \vec{\omega}_i\end{aligned}\tag{3.5}$$

Les expressions décrivant l'état du vaisseau j sont strictement identiques. Il suffit de remplacer l'indice i par l'indice j .

Lors de la dérivation, nous avons utilisé le fait que tous les vecteurs peuvent être exprimés dans un repère mobile. Par exemple, le vecteur \vec{r}_i a été exprimé dans le repère \mathcal{F}_c . Par conséquent, sa dérivée est

$$\dot{\vec{r}}_i = \overset{\circ}{\vec{r}}_i + (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c) \wedge \vec{r}_i,$$

avec

$$\overset{\circ}{\vec{r}}_i = \left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{F}_c} \vec{r}_i.$$

Le TAB. 3.1 donne les repères associés à tous les vecteurs utilisés.

TABLE 3.1 – Repères associés aux vecteurs utilisés

Repère	Vecteurs	Dérivées
\mathcal{F}_I	$\vec{\omega}_0$	$\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 = \frac{d}{dt} \Big _{\mathcal{F}_I} \vec{\omega}_0$
\mathcal{F}_o	\vec{r}_0	$\overset{\circ}{\vec{r}}_0 = \frac{d}{dt} \Big _{\mathcal{F}_o} \vec{r}_0$
	\vec{r}_c	$\overset{\circ}{\vec{r}}_c = \frac{d}{dt} \Big _{\mathcal{F}_o} \vec{r}_c$
	$\vec{\omega}_c$	$\overset{\circ}{\vec{\omega}}_c = \frac{d}{dt} \Big _{\mathcal{F}_o} \vec{\omega}_c$
\mathcal{F}_c	\vec{r}_i	$\overset{\circ}{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} \Big _{\mathcal{F}_c} \vec{r}_i$
	\vec{r}_j	$\overset{\circ}{\vec{r}}_j = \frac{d}{dt} \Big _{\mathcal{F}_c} \vec{r}_j$
\mathcal{F}_i	\vec{c}_i	–
\mathcal{F}_j	\vec{c}_j	–

La FIG. 3.4 résume la séquence de translations et de rotations.

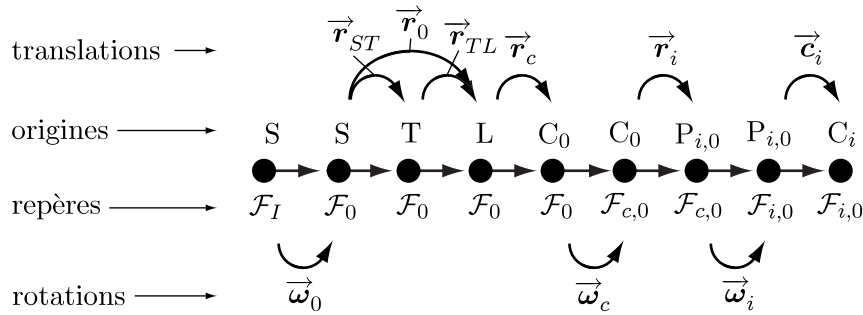


FIGURE 3.4 – Succession de translations et de rotations

La cinématique décrite jusqu'ici couvre seulement le mouvement *nominal* de la formation. En d'autres termes, le vecteur \vec{r}_c décrit seulement la position nominale du point de référence C_0 de la formation.

En réalité, le point de référence réel C se trouve à l'écart de C_0 pour des raisons diverses, par exemple des perturbations ou une injection d'orbite imprécise, cf. FIG. 3.5. Cet écart est donné par le vecteur $\Delta \vec{r}_c$. Il en est de même pour les points de référence réels des vaisseaux, P_i et P_j , par rapport aux points $P_{i,0}$ et $P_{j,0}$. Les écarts entre les positions actuelles et les positions nominales sont donnés par les vecteurs $\Delta \vec{r}_i$ et $\Delta \vec{r}_j$.

De la même manière, le repère lié à la formation, \mathcal{F}_c , n'est pas toujours en configuration nominale qui est donnée par $\mathcal{F}_{c,0}$. Les repères liés aux satellites, \mathcal{F}_i et \mathcal{F}_j sont mésalignés par rapport à leurs orientations nominales, $\mathcal{F}_{i,0}$ et $\mathcal{F}_{j,0}$.

Dans la suite, nous utiliserons ces écarts pour linéariser les modèles cinématique, dynamique, métrologique et perturbateur autour de la configuration nominale. Or, il faut d'abord établir les mêmes expressions cinématiques que précédemment, mais cette fois-ci en tenant compte des écarts en translation et en rotation, c'est-à-dire de toutes les variables commençant par Δ . Ceci peut être fait en remplaçant simplement \vec{r}_c par $\vec{r}_c + \Delta \vec{r}_c$, $\vec{\omega}_c$ par $\vec{\omega}_c + \Delta \vec{\omega}_c$, \vec{r}_i par $\vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i$, $\vec{\omega}_i$ par $\vec{\omega}_i + \Delta \vec{\omega}_i$, \vec{r}_j par $\vec{r}_j + \Delta \vec{r}_j$ et $\vec{\omega}_j$ par $\vec{\omega}_j + \Delta \vec{\omega}_j$.

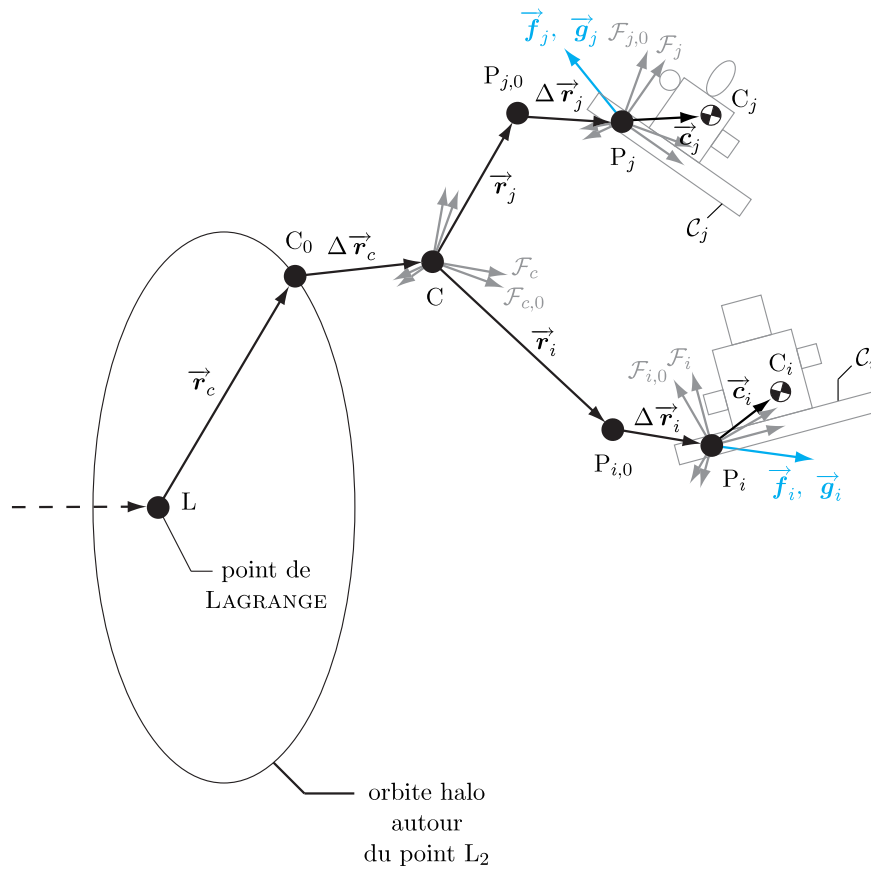


FIGURE 3.5 – Géométrie du mouvement de deux vaisseaux d'une formation suivant une orbite halo autour du point de LAGRANGE L_2 : cas perturbé

Maintenant, la position du point de référence P_i du vaisseau i est donnée par l'expression suivante :

$$\vec{R}_{P_i} = \vec{r}_0 + \vec{r}_c + \Delta \vec{r}_c + \vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i \quad (3.6)$$

La vitesse angulaire $\vec{\Omega}_i$ s'écrit comme suit :

$$\vec{\Omega}_i = \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c + \Delta \vec{\omega}_c + \vec{\omega}_i + \Delta \vec{\omega}_i \quad (3.7)$$

Ici, $\Delta \vec{\omega}_c$ est la vitesse angulaire du repère \mathcal{F}_c par rapport au repère $\mathcal{F}_{c,0}$. $\Delta \vec{\omega}_i$ est celle de \mathcal{F}_i par rapport à $\mathcal{F}_{i,0}$

La dérivée de \vec{R}_{P_i} est l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{R}}_{P_i} &= \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}_c + \Delta \dot{\vec{r}}_c + \dot{\vec{r}}_i + \Delta \dot{\vec{r}}_i \\ &= \overset{\circ}{\vec{r}}_0 + \overset{\circ}{\vec{r}}_c + \overset{\circ}{\Delta \vec{r}}_c + \vec{\omega}_0 \wedge (\vec{r}_0 + \vec{r}_c + \Delta \vec{r}_c) \\ &\quad + \overset{\circ}{\vec{r}}_i + \overset{\circ}{\Delta \vec{r}}_i + (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c + \Delta \vec{\omega}_c) \wedge (\vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Sa dérivée seconde s'écrit :

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{R}}_{P_i} &= \ddot{\vec{r}}_0 + \ddot{\vec{r}}_c + \Delta \ddot{\vec{r}}_c + \ddot{\vec{r}}_i + \Delta \ddot{\vec{r}}_i \\
&= \overset{\circ}{\ddot{\vec{r}}}_0 + \overset{\circ}{\ddot{\vec{r}}}_c + \Delta \overset{\circ}{\ddot{\vec{r}}}_c + 2\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge \left(\overset{\circ}{\vec{r}}_0 + \overset{\circ}{\vec{r}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_c \right) \\
&\quad + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge (\overset{\circ}{\vec{r}}_0 + \overset{\circ}{\vec{r}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_c) + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge [\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge (\overset{\circ}{\vec{r}}_0 + \overset{\circ}{\vec{r}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_c)] \\
&\quad + \overset{\circ}{\ddot{\vec{r}}}_i + \Delta \overset{\circ}{\ddot{\vec{r}}}_i + 2(\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c) \wedge \left(\overset{\circ}{\vec{r}}_i + \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_i \right) \\
&\quad + \left(\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + (\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c) \wedge \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c \right) \wedge (\overset{\circ}{\vec{r}}_i + \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_i) \\
&\quad + (\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c) \wedge [(\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c) \wedge (\overset{\circ}{\vec{r}}_i + \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_i)]
\end{aligned} \tag{3.9}$$

La dérivée de la vitesse angulaire $\overset{\circ}{\vec{\Omega}}_i$ est :

$$\begin{aligned}
\dot{\overset{\circ}{\vec{\Omega}}}_i &= \dot{\overset{\circ}{\vec{\omega}}}_0 + \dot{\overset{\circ}{\vec{\omega}}}_c + \Delta \dot{\overset{\circ}{\vec{\omega}}}_c + \dot{\overset{\circ}{\vec{\omega}}}_i + \Delta \dot{\overset{\circ}{\vec{\omega}}}_i \\
&= \overset{\circ}{\dot{\vec{\omega}}}_0 + \overset{\circ}{\dot{\vec{\omega}}}_c + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \Delta \overset{\circ}{\dot{\vec{\omega}}}_c + (\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c) \wedge \Delta \overset{\circ}{\dot{\vec{\omega}}}_c + \overset{\circ}{\dot{\vec{\omega}}}_i \\
&\quad + (\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \Delta \overset{\circ}{\dot{\vec{\omega}}}_c) \wedge \overset{\circ}{\vec{\omega}}_i + \Delta \overset{\circ}{\dot{\vec{\omega}}}_i + (\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \Delta \overset{\circ}{\dot{\vec{\omega}}}_c + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_i) \wedge \Delta \overset{\circ}{\dot{\vec{\omega}}}_i
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Le TAB. 3.2 donne les repères mobiles associés aux différents vecteurs.

TABLE 3.2 – Repères associés aux vecteurs utilisés

Repère	Vecteurs	Dérivées
\mathcal{F}_I	$\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0$	$\overset{\circ}{\dot{\vec{\omega}}}_0 = \frac{d}{dt} \Big _{\mathcal{F}_I} \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0$
\mathcal{F}_0	$\overset{\circ}{\vec{r}}_0$	$\overset{\circ}{\dot{\vec{r}}}_0 = \frac{d}{dt} \Big _{\mathcal{F}_0} \overset{\circ}{\vec{r}}_0$
	$\overset{\circ}{\vec{r}}_c$	$\overset{\circ}{\dot{\vec{r}}}_c = \frac{d}{dt} \Big _{\mathcal{F}_0} \overset{\circ}{\vec{r}}_c$
	$\Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_c$	$\overset{\circ}{\dot{\vec{r}}}_c = \frac{d}{dt} \Big _{\mathcal{F}_0} \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_c$
	$\overset{\circ}{\vec{\omega}}_c$	$\overset{\circ}{\dot{\vec{\omega}}}_c = \frac{d}{dt} \Big _{\mathcal{F}_0} \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c$
$\mathcal{F}_{c,0}$	$\Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c$	$\overset{\circ}{\dot{\vec{\omega}}}_c = \frac{d}{dt} \Big _{\mathcal{F}_{c,0}} \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c$
\mathcal{F}_c	$\overset{\circ}{\vec{r}}_i$	$\overset{\circ}{\dot{\vec{r}}}_i = \frac{d}{dt} \Big _{\mathcal{F}_c} \overset{\circ}{\vec{r}}_i$
	$\Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_i$	$\Delta \overset{\circ}{\dot{\vec{r}}}_i = \frac{d}{dt} \Big _{\mathcal{F}_c} \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_i$
	$\overset{\circ}{\vec{r}}_j$	$\overset{\circ}{\dot{\vec{r}}}_j = \frac{d}{dt} \Big _{\mathcal{F}_c} \overset{\circ}{\vec{r}}_j$
	$\Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_j$	$\Delta \overset{\circ}{\dot{\vec{r}}}_j = \frac{d}{dt} \Big _{\mathcal{F}_c} \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_j$
$\mathcal{F}_{i,0}$	$\Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_i$	$\overset{\circ}{\dot{\vec{\omega}}}_c = \frac{d}{dt} \Big _{\mathcal{F}_{i,0}} \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_i$
\mathcal{F}_i	$\overset{\circ}{\vec{c}}_i$	–
$\mathcal{F}_{j,0}$	$\Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_j$	$\overset{\circ}{\dot{\vec{\omega}}}_c = \frac{d}{dt} \Big _{\mathcal{F}_{j,0}} \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_j$
\mathcal{F}_j	$\overset{\circ}{\vec{c}}_j$	–

La FIG. 3.6 résume la séquence de translations et de rotations.

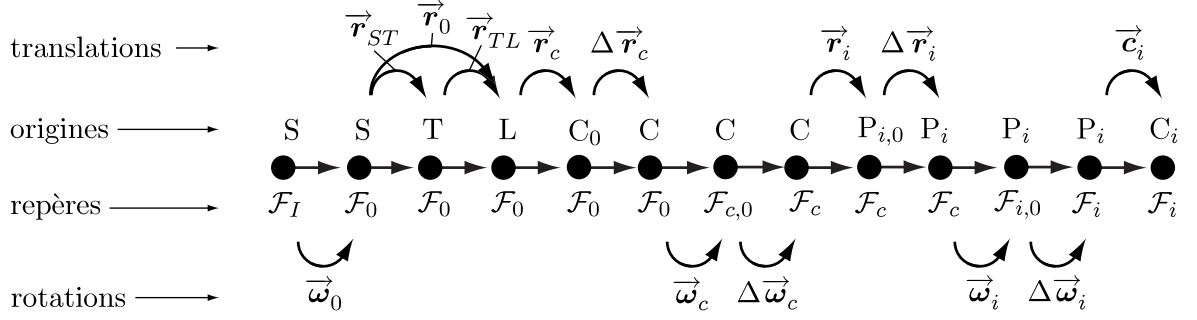


FIGURE 3.6 – Succession de translations et de rotations

3.4 Modèle dynamique en notation intrinsèque

Grâce au modèle cinématique obtenu dans la section précédente, nous sommes en mesure de formuler la dynamique d'une formation de vaisseaux spatiaux.

De façon analogue à la dérivation de la dynamique d'un corps étendu dans la Section C.2.2, nous établirons d'abord les propriétés inertielles (masse, centrage et inertie) du vaisseau i .

La masse m_i peut être écrite comme suit :

$$m_i = \int_{C_i} dm \quad (3.11)$$

Le vecteur \vec{c}_i décrivant la position du centre de masse est le suivant :

$$\vec{c}_i = \frac{1}{m_i} \int_{C_i} \vec{r} dm \quad (3.12)$$

La dyade d'inertie $\vec{J}_{\vec{r}, P_i}$ autour du point P_i est définie comme suit :

$$\vec{J}_{\vec{r}, P_i} = \int_{C_i} [(\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{1} - \vec{r} \otimes \vec{r}] dm - m_i [(\vec{c}_i \cdot \vec{c}_i) \vec{1} - \vec{c}_i \otimes \vec{c}_i] \quad (3.13)$$

Il est important à noter que nous négligerons les variations de la masse ($\dot{m}_i = 0$), du centrage ($\overset{\circ}{\vec{c}}_i = \overset{\circ\circ}{\vec{c}}_i = \vec{0}$) et de l'inertie ($\overset{\circ}{\vec{J}}_{i, J_i} = \vec{0}$) dans la suite. Ceci suppose que les vaisseaux sont complètement rigides. Il ne doit pas y avoir de corps mobile par rapport à la plateforme d'un vaisseau, comme par exemple des panneaux solaires pivotants. En outre, il faut veiller à ce que l'effet propulsif dû à l'éjection d'ergols soit pris en compte dans le modèle des actionneurs.

Nous utilisons les Éqs. (C.67) et (C.66), développées dans l'Annexe C grâce aux lois de NEWTON et d'EULER², pour formuler la dynamique :

$$\dot{\vec{\Omega}}_i = \vec{J}_{\vec{r}, P_i}^{-1} \cdot (\vec{g}_i - \vec{c}_i \wedge \vec{f}_i) - \vec{J}_{\vec{r}, P_i}^{-1} \cdot [\vec{\Omega}_i \wedge (\vec{J}_{\vec{r}, P_i} \cdot \vec{\Omega}_i)] \quad (3.14)$$

2. Leonhard EULER (1707 – 1783), mathématicien et physicien suisse

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{R}}_{P_i} &= \frac{1}{m_i} \vec{f}_i + \vec{c}_i \wedge \left[\vec{J}_{\rightarrow i, P_i}^{-1} \cdot \left(\vec{g}_i - \vec{c}_i \wedge \vec{f}_i \right) \right] \\ &\quad - \vec{\Omega}_i \wedge \left(\vec{\Omega}_i \wedge \vec{c}_i \right) - \vec{c}_i \wedge \left\{ \vec{J}_{\rightarrow i, P_i}^{-1} \cdot \left[\vec{\Omega}_i \wedge \left(\vec{J}_{\rightarrow i, P_i} \cdot \vec{\Omega}_i \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Nous profitons des Éqs. (3.7), (3.10) et (3.9) pour remplacer $\vec{\Omega}_i$, $\dot{\vec{\Omega}}_i$ et $\ddot{\vec{R}}_{P_i}$:

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{\vec{r}}_0 + \overset{\circ}{\vec{r}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_c + 2\vec{\omega}_0 \wedge \left(\overset{\circ}{\vec{r}}_0 + \overset{\circ}{\vec{r}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_c \right) + \vec{\omega}_0 \wedge \left(\vec{r}_0 + \vec{r}_c + \Delta \vec{r}_c \right) \\ &+ \vec{\omega}_0 \wedge \left[\vec{\omega}_0 \wedge \left(\vec{r}_0 + \vec{r}_c + \Delta \vec{r}_c \right) \right] + \overset{\circ}{\vec{r}}_i + \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_i + 2 \left(\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c + \Delta \vec{\omega}_c \right) \wedge \left(\overset{\circ}{\vec{r}}_i + \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_i \right) \\ &+ \left(\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c + \vec{\omega}_0 \wedge \vec{\omega}_c + \Delta \vec{\omega}_c + \left(\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c \right) \wedge \Delta \vec{\omega}_c \right) \wedge \left(\vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i \right) \\ &+ \left(\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c + \Delta \vec{\omega}_c \right) \wedge \left[\left(\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c + \Delta \vec{\omega}_c \right) \wedge \left(\vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i \right) \right] \\ = &\frac{1}{m_i} \vec{f}_i + \vec{c}_i \wedge \left[\vec{J}_{\rightarrow i, P_i}^{-1} \cdot \left(\vec{g}_i - \vec{c}_i \wedge \vec{f}_i \right) \right] \\ &- \left(\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c + \Delta \vec{\omega}_c + \vec{\omega}_i + \Delta \vec{\omega}_i \right) \wedge \left[\left(\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c + \Delta \vec{\omega}_c + \vec{\omega}_i + \Delta \vec{\omega}_i \right) \wedge \vec{c}_i \right] \\ &- \vec{c}_i \wedge \left[\vec{J}_{\rightarrow i, P_i}^{-1} \cdot \left\{ \left(\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c + \Delta \vec{\omega}_c + \vec{\omega}_i + \Delta \vec{\omega}_i \right) \wedge \left[\vec{J}_{\rightarrow i, P_i} \cdot \left(\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c + \Delta \vec{\omega}_c + \vec{\omega}_i + \Delta \vec{\omega}_i \right) \right] \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} &\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c + \vec{\omega}_0 \wedge \vec{\omega}_c + \Delta \vec{\omega}_c + \left(\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c \right) \wedge \Delta \vec{\omega}_c + \vec{\omega}_i \\ &+ \left(\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c + \Delta \vec{\omega}_c \right) \wedge \vec{\omega}_i + \Delta \vec{\omega}_i + \left(\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c + \Delta \vec{\omega}_c + \vec{\omega}_i \right) \wedge \Delta \vec{\omega}_i \\ = &\vec{J}_{\rightarrow i, P_i}^{-1} \cdot \left(\vec{g}_i - \vec{c}_i \wedge \vec{f}_i \right) \\ &- \vec{J}_{\rightarrow i, P_i}^{-1} \cdot \left\{ \left(\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c + \Delta \vec{\omega}_c + \vec{\omega}_i + \Delta \vec{\omega}_i \right) \wedge \left[\vec{J}_{\rightarrow i, P_i} \cdot \left(\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_c + \Delta \vec{\omega}_c + \vec{\omega}_i + \Delta \vec{\omega}_i \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Finalement, nous laissons uniquement les variables $\Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c$, $\Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_i$, $\Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_c$ et $\Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_i$ dans le membre de gauche des équations pour montrer qu'il s'agit d'une dynamique impliquant les variables commençant par Δ :

$$\begin{aligned}
\Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_i - (\overset{\circ}{\vec{r}}_i + \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_i) \wedge \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c &= \frac{1}{m_i} \overset{\circ}{\vec{f}}_i + \overset{\circ}{\vec{c}}_i \wedge \left[\overset{\circ}{\vec{J}}_{\rightarrow i, P_i}^{-1} \cdot (\overset{\circ}{\vec{g}}_i - \overset{\circ}{\vec{c}}_i \wedge \overset{\circ}{\vec{f}}_i) \right] \\
- \overset{\circ}{\vec{r}}_0 - \overset{\circ}{\vec{r}}_c - 2 \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge (\overset{\circ}{\vec{r}}_0 + \overset{\circ}{\vec{r}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_c) - \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge (\overset{\circ}{\vec{r}}_0 + \overset{\circ}{\vec{r}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_c) \\
- \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge [\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge (\overset{\circ}{\vec{r}}_0 + \overset{\circ}{\vec{r}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_c)] - \overset{\circ}{\vec{r}}_i - 2 (\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c) \wedge (\overset{\circ}{\vec{r}}_i + \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_i) \\
- \left(\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + (\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c) \wedge \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c \right) \wedge (\overset{\circ}{\vec{r}}_i + \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_i) \\
- (\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c) \wedge [(\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c) \wedge (\overset{\circ}{\vec{r}}_i + \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_i)] \\
- (\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_i + \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_i) \wedge [(\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_i + \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_i) \wedge \overset{\circ}{\vec{c}}_i] \\
- \overset{\circ}{\vec{c}}_i \wedge \left[\overset{\circ}{\vec{J}}_{\rightarrow i, P_i}^{-1} \cdot \{ (\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_i + \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_i) \wedge \right. \\
\left. \left[\overset{\circ}{\vec{J}}_{\rightarrow i, P_i} \cdot (\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_i + \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_i) \right] \right]
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_i &= \overset{\circ}{\vec{J}}_{\rightarrow i, P_i}^{-1} \cdot (\overset{\circ}{\vec{g}}_i - \overset{\circ}{\vec{c}}_i \wedge \overset{\circ}{\vec{f}}_i) \\
- \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 - \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c - \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c - (\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c) \wedge \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c - \overset{\circ}{\vec{\omega}}_i \\
- (\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c) \wedge \overset{\circ}{\vec{\omega}}_i - (\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_i) \wedge \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_i \\
- \overset{\circ}{\vec{J}}_{\rightarrow i, P_i}^{-1} \cdot \{ (\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_i + \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_i) \wedge \\
\left[\overset{\circ}{\vec{J}}_{\rightarrow i, P_i} \cdot (\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_i + \Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_i) \right] \}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Il est bien visible dans l'Éq. (3.18) qu'il existe un couplage entre translation et rotation. D'un côté, la vitesse angulaire $\Delta \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c$ apparaît dans le membre de gauche. De l'autre côté, toutes les vitesses angulaires apparaissent dans le membre de droite de l'équation. Ceci est dû aux accélérations inertielles telles que l'accélération de CORIOLIS³. Il n'est pas possible de disposer d'équations dynamiques avec un découplage total entre rotation et translation.

3.5 Modèle dynamique en notation extrinsèque

Comme le but est de trouver des expressions adaptées au traitement numérique, par exemple pour synthétiser des correcteurs, il faut passer en notation extrinsèque, c'est-à-dire projeter les vecteurs et dyades dans des repères concrets pour obtenir des expressions matricielles.

3. Gaspard-Gustave CORIOLIS (1792 – 1843), mathématicien et ingénieur français

Le TAB. 3.3 indique les repères associés à chaque vecteur ou dyade utilisés. Les dyades deviennent des matrices carrées après projection et les vecteurs deviennent des matrices colonnes. Par exemple, $\Delta\omega_c = \mathcal{F}_{c,0}\Delta\vec{\omega}_c$ et $J_i = \mathcal{F}_i \vec{J}_{\rightarrow i, P_i} \mathcal{F}_i^T$.

TABLE 3.3 – Repères associés aux vecteurs et dyades utilisés

Repère	Vecteurs, Dyades	Matrices
\mathcal{F}_I	$\vec{\omega}_0, \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0$	$\omega_0, \dot{\omega}_0$
\mathcal{F}_0	$\vec{r}_0, \overset{\circ}{\vec{r}}_0$	r_0, \dot{r}_0
	$\vec{r}_{ST}, \vec{r}_{TL}$	r_{ST}, r_{TL}
	$\vec{r}_c, \overset{\circ}{\vec{r}}_c, \Delta\vec{r}_c, \Delta\overset{\circ}{\vec{r}}_c$	$r_c, \dot{r}_c, \Delta r_c, \Delta\dot{r}_c$
	$\vec{\omega}_c, \overset{\circ}{\vec{\omega}}_c$	$\omega_c, \dot{\omega}_c$
$\mathcal{F}_{c,0}$	$\Delta\vec{\omega}_c, \Delta\overset{\circ}{\vec{\omega}}_c$	$\Delta\omega_c, \Delta\dot{\omega}_c$
\mathcal{F}_c	$\vec{r}_i, \overset{\circ}{\vec{r}}_i, \Delta\vec{r}_i, \Delta\overset{\circ}{\vec{r}}_i$	$r_i, \dot{r}_i, \Delta r_i, \Delta\dot{r}_i$
	$\vec{r}_j, \overset{\circ}{\vec{r}}_j, \Delta\vec{r}_j, \Delta\overset{\circ}{\vec{r}}_j$	$r_j, \dot{r}_j, \Delta r_j, \Delta\dot{r}_j$
$\mathcal{F}_{i,0}$	$\Delta\vec{\omega}_i, \Delta\overset{\circ}{\vec{\omega}}_i$	$\Delta\omega_i, \Delta\dot{\omega}_i$
\mathcal{F}_i	$\vec{c}_i, \vec{J}_{\rightarrow i, P_i}$	c_i, J_i
	\vec{f}_i, \vec{g}_i	f_i, g_i
$\mathcal{F}_{j,0}$	$\Delta\vec{\omega}_j, \Delta\overset{\circ}{\vec{\omega}}_j$	$\Delta\omega_j, \Delta\dot{\omega}_j$
\mathcal{F}_j	$\vec{c}_j, \vec{J}_{\rightarrow j, P_j}$	c_j, J_j
	\vec{f}_j, \vec{g}_j	f_j, g_j

Le TAB. 3.4 donne les matrices de passage entre les différents repères utilisés.

TABLE 3.4 – Matrices de passage entre les différents repères

Repère 1	Repère 2	Matrice de passage
\mathcal{F}_I	\mathcal{F}_0	$C_0 = \mathcal{F}_I \cdot \mathcal{F}_0^T$
\mathcal{F}_0	$\mathcal{F}_{c,0}$	$C_c = \mathcal{F}_0 \cdot \mathcal{F}_{c,0}^T$
$\mathcal{F}_{c,0}$	\mathcal{F}_c	$\Delta C_c = \mathcal{F}_{c,0} \cdot \mathcal{F}_c^T$
\mathcal{F}_c	$\mathcal{F}_{i,0}$	$C_i = \mathcal{F}_c \cdot \mathcal{F}_{i,0}^T$
$\mathcal{F}_{i,0}$	\mathcal{F}_i	$\Delta C_i = \mathcal{F}_{i,0} \cdot \mathcal{F}_i^T$
\mathcal{F}_c	$\mathcal{F}_{j,0}$	$C_j = \mathcal{F}_c \cdot \mathcal{F}_{j,0}^T$
$\mathcal{F}_{j,0}$	\mathcal{F}_j	$\Delta C_j = \mathcal{F}_{j,0} \cdot \mathcal{F}_j^T$

En remplaçant tous les vecteurs et dyades dans les Éqs. (3.18) et (3.19) et en profitant des matrices de passage du TAB. 3.2, on peut donc établir les expressions matricielles des dynamiques de translation et de rotation du vaisseau i . Nous avons choisi le repère \mathcal{F}_0 pour écrire ces expressions. En d'autres

termes, les Éqs. (3.18) et (3.19) doivent être prémultipliées par \mathcal{F}_0 :

$$\begin{aligned}
& \Delta \ddot{r}_c + C_c \Delta C_c \Delta \ddot{r}_i - C_c [\Delta C_c (r_i + \Delta r_i)]^\times \Delta \dot{\omega}_c \\
&= \frac{1}{m_i} C_c \Delta C_c C_i \Delta C_i f_i + C_c \Delta C_c C_i \Delta C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} (g_i - c_i^\times f_i) - \ddot{r}_0 - \ddot{r}_c \\
&\quad - 2 (C_0^T \omega_0)^\times (\dot{r}_0 + \dot{r}_c + \Delta \dot{r}_c) - \left[(C_0^T \dot{\omega}_0)^\times + (C_0^T \omega_0)^{\times 2} \right] (r_0 + r_c + \Delta r_c) \\
&\quad - C_c \Delta C_c \ddot{r}_i - 2 (C_0^T \omega_0 + \omega_c + C_c \Delta \omega_c)^\times C_c \Delta C_c (\dot{r}_i + \Delta \dot{r}_i) \\
&\quad - \left[C_0^T \dot{\omega}_0 + \dot{\omega}_c + (C_0^T \omega_0)^\times \omega_c + (C_0^T \omega_0 + \omega_c)^\times C_c \Delta \omega_c \right]^\times C_c \Delta C_c (r_i + \Delta r_i) \\
&\quad - (C_0^T \omega_0 + \omega_c + C_c \Delta \omega_c)^{\times 2} C_c \Delta C_c (r_i + \Delta r_i) \\
&\quad - \left[C_0^T \omega_0 + \omega_c + C_c \Delta \omega_c + C_c \Delta C_c (\omega_i + C_i \Delta \omega_i) \right]^{\times 2} C_c \Delta C_c C_i \Delta C_i c_i \\
&\quad - C_c \Delta C_c C_i \Delta C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} \Delta C_i^T C_i^T \\
&\quad \cdot \left[\Delta C_c^T C_c^T C_0^T \omega_0 + \Delta C_c^T C_c^T (\omega_c + C_c \Delta \omega_c) + \omega_i + C_i \Delta \omega_i \right]^\times \\
&\quad \cdot C_i \Delta C_i J_{i,P_i} \Delta C_i^T C_i^T \\
&\quad \cdot \left[\Delta C_c^T C_c^T C_0^T \omega_0 + \Delta C_c^T C_c^T (\omega_c + C_c \Delta \omega_c) + \omega_i + C_i \Delta \omega_i \right]
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
& C_c \Delta \dot{\omega}_c + C_c \Delta C_c C_i \Delta \dot{\omega}_i \\
&= C_c \Delta C_c C_i \Delta C_i J_{i,P_i}^{-1} (g_i - c_i^\times f_i) - C_0^T \dot{\omega}_0 - \dot{\omega}_c - (C_0^T \omega_0)^\times \omega_c \\
&\quad - (C_0^T \omega_0 + \omega_c)^\times C_c \Delta \omega_c - C_c \Delta C_c \dot{\omega}_i - (C_0^T \omega_0 + \omega_c + C_c \Delta \omega_c)^\times C_c \Delta C_c \omega_i \\
&\quad - (C_0^T \omega_0 + \omega_c + C_c \Delta \omega_c + C_c \Delta C_c \omega_i)^\times C_c \Delta C_c C_i \Delta \omega_i \\
&\quad - C_c \Delta C_c C_i \Delta C_i J_{i,P_i}^{-1} \Delta C_i^T C_i^T \\
&\quad \cdot \left[\Delta C_c^T C_c^T C_0^T \omega_0 + \Delta C_c^T C_c^T (\omega_c + C_c \Delta \omega_c) + \omega_i + C_i \Delta \omega_i \right]^\times \\
&\quad \cdot C_i \Delta C_i J_{i,P_i} \Delta C_i^T C_i^T \\
&\quad \cdot \left[\Delta C_c^T C_c^T C_0^T \omega_0 + \Delta C_c^T C_c^T (\omega_c + C_c \Delta \omega_c) + \omega_i + C_i \Delta \omega_i \right]
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Dans l'Éq. (3.21), la notation $v^{\times 2}$ est utilisée au lieu de $v^\times v^\times$ pour raccourcir les expressions, cf. aussi Annexe B.

Les Éqs. (3.20) et (3.21) sont les expressions matricielles des dynamiques de translation et de rotation du vaisseau i , respectivement. Comme précédemment, les expressions pour le vaisseau j peuvent être obtenues simplement en changeant l'indice.

Il est important de noter que ces expressions sont non-linéaires en les variables commençant par Δ , c'est-à-dire les termes décrivant les écarts en position et en attitude par rapport à la configuration nominale de la formation. En outre, elles sont évidemment encore trop compliquées pour être exploitables par des méthodes numériques. Pour remédier à ces problèmes, nous effectuerons une linéarisation et de nombreuses simplifications dans les sections suivantes.

Pour l'instant, nous n'avons pas écrit les dynamiques de translation et de rotations *nominales* en notation matricielle. Or, elles peuvent facilement être écrites en supprimant toutes les matrices colonnes commençant par Δ (Δr_c , $\Delta \dot{r}_c$, $\Delta \omega_c$, etc.) et en remplaçant les matrices carrées commençant par Δ par des matrices d'identité.

3.6 Modèles des perturbations

Le modèle dynamique établi jusqu'ici ne tient pas compte des perturbations orbitales. Nous avons seulement mentionné que les forces f_i et les couples g_i contenaient à la fois les effets des actionneurs et des perturbations sans donner plus de détails.

Nous montrerons dans la suite comment inclure dans le modèle dynamique les deux perturbations orbitales prépondérantes, la *pression de radiation solaire* et le *gradient de gravité*. À cette fin, nous exprimerons d'abord les forces et les couples engendrés par les perturbations en notation intrinsèque avant d'obtenir les expressions extrinsèques.

3.6.1 Gradient de gravité

La force créée par la combinaison des attractions terrestre et solaire agit au centre de masse C_i du vaisseau i . Elle peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned}\vec{f}_{i,grav} &= -m_i \left[\mu_{\odot} \vec{h}(\vec{R}_{P_i}) + \mu_{\oplus} \vec{h}(\vec{R}_{P_i} - \vec{r}_{ST}) \right] \\ &= -m_i \left[\mu_{\odot} \vec{h}(\vec{r}_0 + \vec{r}_c + \Delta \vec{r}_c + \vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{c}_i) \right. \\ &\quad \left. + \mu_{\oplus} \vec{h}(\vec{r}_{TL} + \vec{r}_c + \Delta \vec{r}_c + \vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{c}_i) \right]\end{aligned}\quad (3.22)$$

La fonction vectorielle $\vec{h}(\vec{x})$ est définie comme suit :

$$\vec{h}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{(\vec{x} \cdot \vec{x})^{3/2}} \quad (3.23)$$

μ_{\odot} et μ_{\oplus} sont les constantes gravitationnelles héliocentrique et géocentrique, respectivement. Elles sont le produit de la constante universelle de gravitation G et la masse du Soleil et de la Terre, respectivement (par exemple $\mu_{\odot} = Gm_{\odot}$). Toutes les valeurs sont données dans l'Annexe A.

Si nous supposons, de façon similaire que dans le Chapitre 2, que la formation reste proche de son orbite halo nominale, nous avons la possibilité de développer le champ de gravitation au premier ordre autour de l'orbite nominale décrite par le vecteur \vec{r}_c :

$$\begin{aligned}\vec{f}_{i,grav} &\approx \vec{f}_{i,grav,nom} + \Delta \vec{f}_{i,grav} \\ \text{avec} \\ \vec{f}_{i,grav,nom} &= -m_i \left[\mu_{\odot} \vec{h}(\vec{r}_0 + \vec{r}_c) + \mu_{\oplus} \vec{h}(\vec{r}_{TL} + \vec{r}_c) \right] \\ \Delta \vec{f}_{i,grav} &= -m_i \left[\mu_{\odot} \vec{\nabla} \vec{h}(\vec{r}_0 + \vec{r}_c) + \mu_{\oplus} \vec{\nabla} \vec{h}(\vec{r}_{TL} + \vec{r}_c) \right] \\ &\quad \cdot (\Delta \vec{r}_c + \vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{c}_i)\end{aligned}\quad (3.24)$$

La fonction dyadique $\vec{\nabla} \vec{h}(\vec{x})$ est définie comme suit :

$$\vec{\nabla} \vec{h}(\vec{x}) = \frac{(\vec{x} \cdot \vec{x}) \vec{\mathbf{1}} - 3 \vec{x} \otimes \vec{x}}{(\vec{x} \cdot \vec{x})^{5/2}} \quad (3.25)$$

La dérivation des fonctions $\vec{h}(\vec{x})$ et $\vec{\nabla} \vec{h}(\vec{x})$ a déjà été faite dans le Chapitre 2 dans le même

but de développer un champ de gravitation autour d'une orbite de référence.

L'erreur commise par ce développement est certainement négligeable car la longueur du vecteur $\Delta \vec{r}_c + \vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{c}_i$ (qui correspond à la taille de la formation) est faible devant les vecteurs $\vec{r}_0 + \vec{r}_c$ et $\vec{r}_{TL} + \vec{r}_c$, cf. TAB. 3.5. En revanche, nous n'aurions pas eu le droit de linéariser autour \vec{r}_0 et \vec{r}_{TL} à cause de l'étendue de l'orbite halo (\vec{r}_c n'est pas négligeable devant \vec{r}_0 et \vec{r}_{TL}).

TABLE 3.5 – Ordres de grandeur des différentes distances importantes

Vecteur	Ordre de grandeur
$\vec{r}_0 + \vec{r}_c$	151 millions de km
$\vec{r}_{TL} + \vec{r}_c$	1,3 – 1,7 millions de km
\vec{r}_c	0,2 – 0,7 millions de km
$\Delta \vec{r}_c + \vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{c}_i$	qqs. 100 m

Rq. : Les valeurs relatives à l'orbite halo correspondent à l'orbite montrée dans la FIG. 3.2 et sont prises de [185].

Une autre chose importante à garder à l'esprit est la variation temporelle du vecteur \vec{r}_c car il décrit une orbite halo. Ceci le distingue des vecteurs $\vec{\omega}_0$ et \vec{r}_0 qui, avec l'approximation que la Terre suit une orbite circulaire autour du Soleil, sont constants ($\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 = \vec{r}_0 = \vec{0}$).

Le couple généré par le gradient de gravité obéit à l'expression suivante :

$$\vec{g}_{i,grav} = \vec{c}_i \wedge \vec{f}_{i,grav} \quad (3.26)$$

Or, si nous reportons l'Éq. (3.26) dans l'Éq. (3.19), l'expression $\vec{g}_i - \vec{c}_i \wedge \vec{f}_i$ s'annule :

$$\begin{aligned} \vec{g}_{i,grav} - \vec{c}_i \wedge \vec{f}_{i,grav} &= \vec{c}_i \wedge \vec{f}_{i,grav} - \vec{c}_i \wedge \vec{f}_{i,grav} \\ &= \vec{0} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Logiquement, il n'y a pas de couple autour du centre de masse C_i du vaisseau i car la force de gravitation agit toujours au centre de masse.

Un constat important est celui de l'annulation de certains termes dans la dynamique. En effet, si nous supposons que l'orbite halo est une orbite naturelle, au moins entre deux corrections d'orbite impulsives et sans corrections d'orbite continues, l'équation suivante est vraie :

$$\begin{aligned} \vec{f}_{i,grav,nom} &= m_i \left[\overset{\circ\circ}{\vec{r}}_0 + 2\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge \overset{\circ}{\vec{r}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge \vec{r}_0 + \vec{\omega}_0 \wedge (\vec{\omega}_0 \wedge \vec{r}_0) \right. \\ &\quad \left. + \overset{\circ\circ}{\vec{r}}_c + 2\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge \overset{\circ}{\vec{r}}_c + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge \vec{r}_c + \vec{\omega}_0 \wedge (\vec{\omega}_0 + \vec{r}_c) \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

Nous utiliserons cette propriété dans la suite pour simplifier le modèle dynamique.

En notation extrinsèque, exprimé dans le repère \mathcal{F}_i pour être cohérent avec f_i , il vient :

$$\begin{aligned} f_{i,grav,nom} &= -m_i \Delta C_i^T C_i^T \Delta C_c^T C_c^T C_0^T \\ &\quad \cdot [\mu_\odot h(C_0 r_0 + C_0 r_c) + \mu_\odot h(C_0 r_{TL} + C_0 r_c)] \\ &= -m_i \Delta C_i^T C_i^T \Delta C_c^T C_c^T [\mu_\odot h(r_0 + r_c) + \mu_\odot h(r_{TL} + r_c)] \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \Delta f_{i,grav} &= -m_i \Delta C_i^T C_i^T \Delta C_c^T C_c^T C_0^T \\ &\quad \cdot [\mu_\odot \nabla h(C_0 r_0 + C_0 r_c) + \mu_\oplus \nabla h(C_0 r_{TL} + C_0 r_c)] \\ &\quad \cdot (C_0 \Delta r_c + C_0 C_c \Delta C_c r_i + C_0 C_c \Delta C_c \Delta r_i + C_0 C_c \Delta C_c C_i \Delta C_i c_i) \\ &= -m_i \Delta C_i^T C_i^T \Delta C_c^T C_c^T [\mu_\odot \nabla h(r_0 + r_c) + \mu_\oplus \nabla h(r_{TL} + r_c)] \\ &\quad \cdot (\Delta r_c + C_c \Delta C_c r_i + C_c \Delta C_c \Delta r_i + C_c \Delta C_c C_i \Delta C_i c_i) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Les expressions matricielles des fonctions $h(x)$ et $\nabla h(x)$ sont

$$h(x) = \frac{x}{(x^T x)^{3/2}}$$

et

$$\nabla h(x) = \frac{(x^T x)I_3 - 3xx^T}{(x^T x)^{5/2}}.$$

3.6.2 Pression de radiation solaire

La deuxième perturbation orbitale majeure est la pression de radiation solaire. Elle est composée de trois parties dues à la réflexion spéculaire, la réflexion diffuse et l'absorption de la radiation solaire par les surfaces du vaisseau i , cf. FIG. 3.7. En général, les surfaces importantes sont les générateurs solaires et les pare-Soleil. Ceci est particulièrement vrai pour la mission *Pegase* à cause de son pointage anti-Soleil. Ici, les pare-Soleil sont les seules surfaces illuminées par le Soleil.

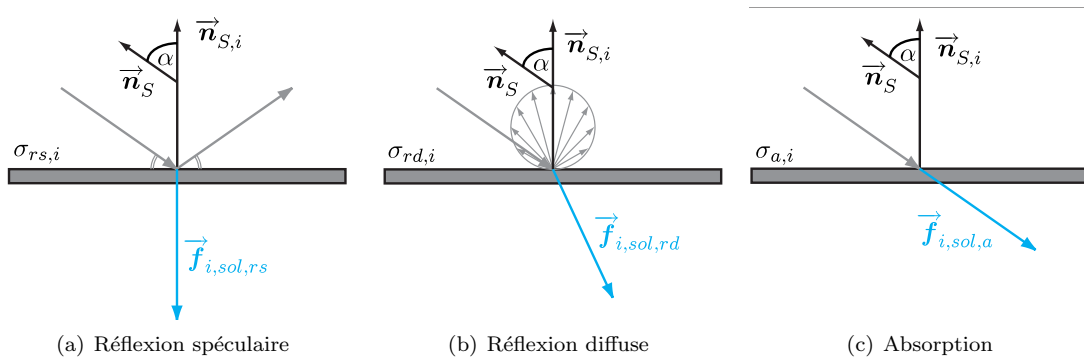


FIGURE 3.7 – Les trois types de forces générées par la pression solaire

La force totale générée à cause de la pression de radiation solaire agissant sur une seule surface exposée (plusieurs surfaces peuvent être modélisées par sommation) est donnée par l'expression suivante

en notation vectorielle :

$$\begin{aligned}\vec{f}_{i,sol} &= \vec{f}_{i,sol,rs} + \vec{f}_{i,sol,rd} + \vec{f}_{i,sol,a} \\ \text{avec} \\ \vec{f}_{i,sol,rs} &= 2p_{sol}A_i\sigma_{rs,i}H(\cos\alpha)\cos^2\alpha\vec{n}_{S,i} \\ \vec{f}_{i,sol,rd} &= p_{sol}A_i\sigma_{rd,i}H(\cos\alpha)\cos\alpha\left(\vec{n}_S + \frac{2}{3}\vec{n}_{S,i}\right) \\ \vec{f}_{i,sol,a} &= p_{sol}A_i\sigma_{a,i}H(\cos\alpha)\cos\alpha\vec{n}_S\end{aligned}\quad (3.31)$$

Ici, p_{sol} est la pression solaire dont la valeur est donnée dans l'Annexe A. $\vec{f}_{i,sol,rs}$, $\vec{f}_{i,sol,rd}$ et $\vec{f}_{i,sol,a}$ sont les forces dues à la réflexion spéculaire, la réflexion diffuse et l'absorption, respectivement. $\sigma_{rs,i}$, $\sigma_{rd,i}$ et $\sigma_{a,i}$ sont les coefficients de réflexion spéculaire, de réflexion diffuse et d'absorption, respectivement. A_i est la superficie de la surface (plane) illuminée et $\vec{n}_{S,i}$ son vecteur normal. \vec{n}_S est la direction du Soleil. Ces deux derniers vecteurs sont des vecteurs unitaires. α est l'angle entre la direction du Soleil et le vecteur normal de la surface. Finalement, $H(x)$ est la fonction de HEAVISIDE⁴ qui est définie comme suit :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ 1 & \text{pour } x \geq 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

Cette fonction est utile pour prendre en compte si, en fonction de son orientation, la surface est illuminée, c'est-à-dire $\cos\alpha > 0$ ou bien $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$.

Le terme $\cos\alpha$ peut être écrit en fonction des vecteurs \vec{n}_S et $\vec{n}_{S,i}$ grâce au produit scalaire :

$$\cos\alpha = \vec{n}_S \cdot \vec{n}_{S,i} \quad (3.33)$$

Les vecteurs \vec{n}_S et $\vec{n}_{S,i}$ sont exprimés dans les repères \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_i et donnent les matrices colonnes n_S et $n_{S,i}$ en notation extrinsèque, respectivement.

Le couple généré par la pression de radiation solaire peut être écrit de la façon suivante :

$$\vec{g}_{i,sol} = \vec{d}_{sol,i} \wedge \vec{f}_{i,sol} \quad (3.34)$$

Ici, $\vec{d}_{sol,i}$ est le vecteur indiquant la position du foyer de la surface illuminée par rapport au point de référence P_i du vaisseau i . Son expression matricielle dans le repère \mathcal{F}_i est $d_{sol,i}$.

L'expression de la force totale due à la pression solaire et de ses trois composantes s'écrit comme

4. Oliver HEAVISIDE (1850 – 1925), physicien britannique

suit :

$$\begin{aligned}
f_{i,sol} &= f_{i,sol,rs} + f_{i,sol,rd} + f_{i,sol,a} \\
f_{i,sol,rs} &= 2p_{sol}A_i\sigma_{rs,i}H(\cos\alpha)\cos^2\alpha n_{S,i} \\
f_{i,sol,rd} &= p_{sol}A_i\sigma_{rd,i}H(\cos\alpha)\cos\alpha\left(\Delta C_i^T C_i^T \Delta C_c^T C_c^T n_S + \frac{2}{3}n_{S,i}\right) \\
f_{i,sol,a} &= p_{sol}A_i\sigma_{a,i}H(\cos\alpha)\cos\alpha\Delta C_i^T C_i^T \Delta C_c^T C_c^T n_S \\
&\text{avec} \\
\cos\alpha &= n_{S,i}^T \Delta C_i^T C_i^T \Delta C_c^T C_c^T n_S
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Pour être cohérent avec f_i , toutes ces forces sont exprimées dans le repère \mathcal{F}_i .

Le couple total obéit à l'expression suivante :

$$g_{i,sol} = d_{sol,i}^\times f_{i,sol} \tag{3.36}$$

3.7 Simplifications

Comme nous l'avons déjà évoqué, il existe différentes possibilités de simplifier le modèle dynamique obtenu dans les sections précédentes.

3.7.1 Dynamique de translation en orbite terrestre

Tout d'abord, il est envisageable de réduire le modèle à la dynamique en translation décrite dans le Chapitre 2. Il devrait être possible de retrouver les équations de CLOHESSY-WILTSHIRE ou de LAWDEN, par exemple.

Nous avons déjà mentionné, lors du constat de la généralité du modèle, que les différentes translations et rotations peuvent être interprétées différemment. Pour une application en orbite terrestre, nous considérons que le point S est la Terre et T le point courant sur l'orbite de référence. Le point T n'a plus d'importance maintenant.

La notion du point de référence C de la formation n'a pas été utilisée dans le développement du modèle pour l'orbite terrestre. Nous pouvons également renoncer aux vecteurs décrivant la position nominale des éléments de la formation, r_i et r_j , car le champ de gravitation est linéarisé autour de l'orbite de référence. En d'autres termes, les points L, $P_{i,0}$ et $P_{j,0}$ coïncident. Enfin, les positions des centres de masse, C_i et C_j , sont identiques aux points de référence P_i et P_j car nous faisons l'hypothèse de masses ponctuelles.

En outre, la dynamique d'attitude peut être négligée car elle n'est pas traitée dans les modèles dynamiques en orbite terrestre.

Toutes ces modifications se traduisent en une suppression des vecteurs \vec{r}_c , $\Delta\vec{r}_c$, \vec{r}_i , \vec{c}_i , $\vec{\omega}_c$, $\Delta\vec{\omega}_c$, $\vec{\omega}_i$ et $\Delta\vec{\omega}_i$ et de leurs dérivées.

En prenant en compte ce qui vient d'être dit, la dynamique translationnelle donnée par l'Éq. (3.18)

(page 72) devient :

$$\begin{aligned} \Delta \overset{\circ\circ}{\vec{r}}_i &= \frac{1}{m_i} \vec{f}_i - \overset{\circ\circ}{\vec{r}}_0 - 2\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge \overset{\circ}{\vec{r}}_0 - \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge \overset{\circ}{\vec{r}}_0 \\ &\quad - \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge (\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge \overset{\circ}{\vec{r}}_0) - 2\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_i - \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_i \end{aligned} \quad (3.37)$$

Le vecteur de force \vec{f}_i doit être divisé en trois composantes, la force due à l'actuation $\vec{f}_{i,act}$, la force de gravitation $\vec{f}_{i,grav}$ et la force perturbatrice $\vec{f}_{i,pert}$. $\vec{f}_{i,grav}$ est similaire à l'Éq. (3.24) (page 75) :

$$\begin{aligned} \vec{f}_{i,grav} &\approx \vec{f}_{i,grav,nom} + \Delta \vec{f}_{i,grav} \\ &\text{avec} \\ \vec{f}_{i,grav,nom} &= -m_i \mu_{\oplus} \vec{h}(\vec{r}_0) \\ \Delta \vec{f}_{i,grav} &= -m_i \mu_{\oplus} \vec{\nabla} \vec{h}(\vec{r}_0) \cdot \Delta \vec{r}_i \end{aligned} \quad (3.38)$$

En considérant que l'équation

$$\vec{f}_{i,grav,nom} = m_i \left[\overset{\circ\circ}{\vec{r}}_0 + 2\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge \overset{\circ}{\vec{r}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge \overset{\circ}{\vec{r}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge (\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge \overset{\circ}{\vec{r}}_0) \right]$$

est vraie dans le cas d'une orbite naturelle, il vient :

$$\begin{aligned} \Delta \overset{\circ\circ}{\vec{r}}_i &= \frac{1}{m_i} \left(\vec{f}_{i,act} + \vec{f}_{i,pert} \right) - 2\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_i \\ &\quad - \left[\mu_{\oplus} \vec{\nabla} \vec{h}(\vec{r}_0) \cdot \Delta \vec{r}_i + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge \Delta \vec{r}_i + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge (\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge \Delta \vec{r}_i) \right] \\ &= \frac{1}{m_i} \left(\vec{f}_{i,act} + \vec{f}_{i,pert} \right) - 2\overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \wedge \Delta \overset{\circ}{\vec{r}}_i \\ &\quad - \left[\mu_{\oplus} \vec{\nabla} \vec{h}(\vec{r}_0) + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \cdot \overset{\circ}{\vec{\omega}}_0 \right] \cdot \Delta \vec{r}_i \end{aligned} \quad (3.39)$$

Cette équation est, sauf en ce qui concerne la notation, identique à l'Éq. (2.54) du Chapitre 2 (page 46). Il est encore possible de rajouter la perturbation due à l'aplatissement de la Terre grâce au terme $\vec{f}_{i,pert}$. Nous avons donc montré que le modèle dynamique générique peut être réduit aux équations de CLOHESSY-WILTSHIRE ou de LAW DEN en faisant des hypothèses adaptées.

Nous ne donnerons pas l'expression extrinsèque ici car elle a déjà été obtenue dans le Chapitre 2.

3.7.2 Mode d'observation

L'objectif principal de la plupart des missions de vol en formation est de rester le plus proche possible d'une configuration nominale pour pouvoir faire des observations, par exemple pendant la *mode nulling* dans le cas de la mission *Pegase*.

Cette configuration nominale est généralement une formation rigide, c'est-à-dire sans mouvements à l'intérieur de la formation, ni en translation, ni en rotation. Au niveau du modèle, ceci se traduit par une suppression des variables \dot{r}_i , \ddot{r}_i , ω_i et $\dot{\omega}_i$. Les variables $\Delta \dot{r}_i$, $\Delta \ddot{r}_i$, $\Delta \omega_i$ et $\Delta \dot{\omega}_i$ restent inchangés

car elles ne décrivent pas la formation nominale, mais les écarts entre les formations réelle et nominale.

En outre, le mode d'observation requiert généralement un pointage inertiel. En d'autres termes, l'orientation de la formation par rapport au repère inertiel est toujours constante. Il peut y avoir des applications dans lesquelles ce n'est pas le cas, par exemple quand un pointage terrestre est exigé, mais nous ne traiterons pas ce cas ici. Le pointage inertiel est pris en compte dans notre modèle en posant :

$$\begin{aligned} C_0 C_c &= C_t & (3.40) \\ \omega_0 + C_0 \omega_c &= 0 \\ \dot{\omega}_0 + C_0 \dot{\omega}_c &= 0 \\ \omega_0^\times C_0 \omega_c &= 0 \end{aligned}$$

La matrice de passage stationnaire C_t décrit l'orientation du repère lié à la formation, \mathcal{F}_c , par rapport au repère inertiel, \mathcal{F}_I .

En prenant en compte les modifications dues à une formation rigide et à un pointage inertiel, ainsi que l'annulation entre la force de gravitation nominale et les termes inertiels décrite dans l'Éq. (3.28) (page 76), nous pouvons écrire la dynamique en notation matricielle (projection dans le repère $\mathcal{F}_{c,0}$) comme suit :

$$\begin{aligned} & C_t^T C_0 \Delta \ddot{r}_c + \Delta C_c \Delta \ddot{r}_i - [\Delta C_c (r_i + \Delta r_i)]^\times \Delta \dot{\omega}_c & (3.41) \\ &= \frac{1}{m_i} \Delta C_c C_i \Delta C_i f_i + \Delta C_c C_i \Delta C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} (g_i - c_i^\times f_i) \\ &\quad - 2C_t^T \omega_0^\times C_0 \Delta \dot{r}_c - C_t^T [\dot{\omega}_0^\times + \omega_0^{\times 2}] C_0 \Delta r_c \\ &\quad - 2C_t^T C_0 \Delta \omega_c^\times \Delta C_c \Delta \dot{r}_i - \Delta \omega_c^{\times 2} \Delta C_c (r_i + \Delta r_i) \\ &\quad - [\Delta \omega_c + \Delta C_c C_i \Delta \omega_i]^{\times 2} \Delta C_c C_i \Delta C_i c_i \\ &\quad - \Delta C_c C_i \Delta C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} \Delta C_i^T C_i^T [\Delta C_c^T \Delta \omega_c + C_i \Delta \omega_i]^\times \\ &\quad \cdot C_i \Delta C_i J_{i,P_i} \Delta C_i^T C_i^T [\Delta C_c^T \Delta \omega_c + C_i \Delta \omega_i] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Delta \dot{\omega}_c + \Delta C_c C_i \Delta \dot{\omega}_i & (3.42) \\ &= \Delta C_c C_i \Delta C_i J_{i,P_i}^{-1} (g_i - c_i^\times f_i) - \Delta \omega_c^\times [\Delta C_c C_i \Delta \omega_i] \\ &\quad - \Delta C_c C_i \Delta C_i J_{i,P_i}^{-1} \Delta C_i^T C_i^T [\Delta C_c^T \Delta \omega_c + C_i \Delta \omega_i]^\times \\ &\quad \cdot C_i \Delta C_i J_{i,P_i} \Delta C_i^T C_i^T [\Delta C_c^T \Delta \omega_c + C_i \Delta \omega_i] \end{aligned}$$

Ce modèle est le plus simple que l'on puisse obtenir sans linéarisation. Nous reviendrons plus tard sur ce modèle pour le linéariser et pour introduire la notion de structure hiérarchique.

3.7.3 Linéarisation autour du mode d'observation

Nous décrirons d'abord quelques notions de base en termes de linéarisation avant d'aborder la linéarisation des Éqs. (3.41) et (3.42) qui décrivent le mode d'observation.

Un système non-linéaire peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

Ici, la première équation est l'équation différentielle décrivant la dynamique, tandis que la deuxième équation est l'équation de mesure ou de sortie.

Une linéarisation sera toujours effectuée autour d'une trajectoire de référence comprenant des états et des entrées de référence (x_0, u_0) . Cette trajectoire de référence est donnée par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= f(x_0, u_0) \\ y_0 &= h(x_0)\end{aligned}$$

Un cas particulier est le choix $\dot{x}_0 = 0$.

Grâce aux définitions données dans les Éqs. (3.43) et (3.43), nous pouvons effectuer la linéarisation de la dynamique :

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x} &= \dot{x} - \dot{x}_0 \\ &= f(x, u) - f(x_0, u_0) \\ &\approx f(x_0, u_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0, u_0} (u - u_0) - f(x_0, u_0) \\ &= \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, u_0}}_A \underbrace{(x - x_0)}_{\Delta x} + \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_0, u_0}}_B \underbrace{(u - u_0)}_{\Delta u} \\ &= A\Delta x + B\Delta u\end{aligned}$$

De façon similaire, il vient pour l'équation de mesure :

$$\begin{aligned}\Delta y &= y - y_0 \\ &= h(x) - h(x_0) \\ &\approx h(x_0, u_0) + \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x_0, u_0} (x - x_0) \\ &= \underbrace{\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x_0, u_0}}_C \underbrace{(x - x_0)}_{\Delta x} \\ &= C\Delta x\end{aligned}$$

Finalement, nous avons obtenu un système linéarisé dans sa représentation d'état. Δx , Δu et Δy sont les écarts entre les états, entrées et sorties réels et les états, entrées et sorties de référence, respectivement.

La FIG. 3.8 résume cette procédure.

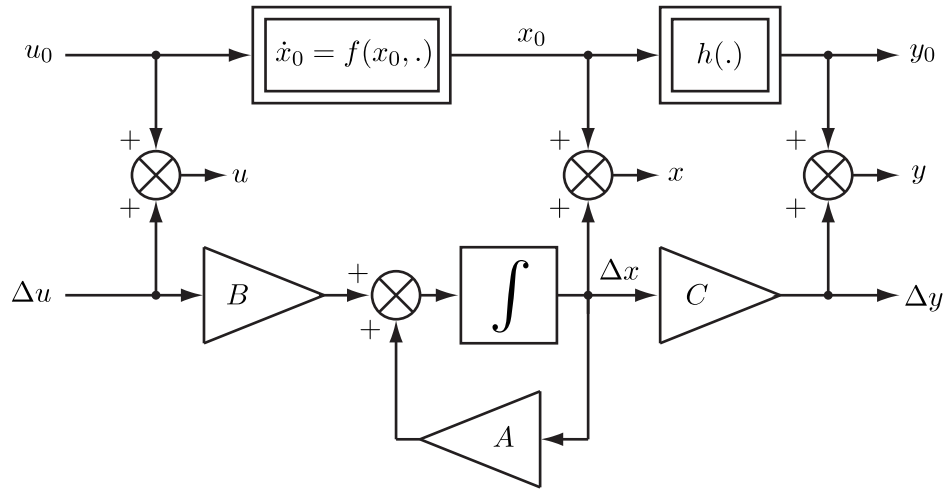


FIGURE 3.8 – Linéarisation autour d’une trajectoire de référence

Un point important à retenir est que les entrées u_0 pour maintenir la trajectoire de référence ne sont généralement pas nulles. En d’autres termes, nous supposons que ces entrées sont injectées en boucle ouverte.

Quant au mode d’observation, la trajectoire de référence peut être obtenue en supprimant toutes les variables commençant par Δ dans les Éqs. (3.41) et (3.42) :

$$0 = \frac{1}{m_i} C_i f_{i,bo} + C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} (g_{i,bo} - c_i^\times f_{i,bo}) \quad (3.43)$$

$$0 = C_i J_{i,P_i}^{-1} (g_{i,bo} - c_i^\times f_{i,bo}) \quad (3.44)$$

Il en découle que les forces $f_{i,bo}$ et les couples $g_{i,bo}$ injectés en boucle ouverte pour maintenir la trajectoire de référence sont nulles.

La linéarisation pose quelques problèmes quand il y a des matrices de passage qui interviennent. Ces matrices doivent d’abord être transcrites. En effet, comme nous l’avons déjà mentionné dans l’Annexe C, les matrices de passage peuvent être écrites, en faisant une approximation aux petits angles, comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta C_c &\approx I_3 + \Delta\theta_c^\times \\ \Delta C_i &\approx I_3 + \Delta\theta_i^\times \end{aligned} \quad (3.45)$$

La différence de signe ($I_3 + \Delta\theta_c^\times$ ici au lieu de $I_3 - \Delta\theta_c^\times$ selon l’Annexe C) peut être justifiée comme suit. $\Delta C_c = \mathcal{F}_c \cdot \mathcal{F}_{\bar{c}}$ est la matrice de rotation qui donne l’orientation du repère \mathcal{F}_c en fonction du repère $\mathcal{F}_{\bar{c}}$. Or la vitesse de rotation utilisée ($\Delta\omega_c$) donne la vitesse du repère $\mathcal{F}_{\bar{c}}$ par rapport au repère \mathcal{F}_c , donc dans le sens inverse. Nous avons introduit ces définitions opposées entre matrices de passage et vitesses de rotation uniquement pour alléger la notation. Physiquement, cela ne change rien car nous pouvons écrire $\Delta C_c^T = I_3 - \Delta\theta_c^\times$.

L’approximation aux petits angles n’est rien d’autre que la première étape de la linéarisation. En

outre, elle représente une séquence de CARDAN⁵ de rotations élémentaires, cf. Annexe C. Grâce à cette approximation, les matrices de passage ΔC_c et ΔC_i deviennent maniables.

Si nous tenons compte du fait que les vitesses et accélérations angulaires, $\Delta\omega_c$ et $\Delta\dot{\omega}_c$, sont simplement les dérivées première et seconde des angles $\Delta\theta_c$ dans le cas des petits angles, nous pouvons les écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\Delta\omega_c &= \Delta\dot{\theta}_c \\ \Delta\dot{\omega}_c &= \Delta\ddot{\theta}_c\end{aligned}\quad (3.46)$$

La même opération peut être faite pour les vitesses et accélérations angulaires $\Delta\omega_i$ et $\Delta\dot{\omega}_i$:

$$\begin{aligned}\Delta\omega_i &= \Delta\dot{\theta}_i \\ \Delta\dot{\omega}_i &= \Delta\ddot{\theta}_i\end{aligned}\quad (3.47)$$

Après les remplacements des termes ΔC_c , ΔC_i , $\Delta\omega_c$, $\Delta\omega_i$, $\Delta\dot{\omega}_c$ et $\Delta\dot{\omega}_i$ dans les Éqs. (3.41) et (3.42), tous les produits mutuels des variables commençant par Δ sont supprimés. Cette opération complète la linéarisation.

En effet, nous supposons ici des petits angles, des petites vitesses et accélérations angulaires, ainsi que des petits déplacements Δr_i , vitesses $\Delta\dot{r}_i$ et accélérations $\Delta\ddot{r}_i$. En d'autres termes, Δr_i , $\Delta\dot{r}_i$ et $\Delta\ddot{r}_i$ doivent rester faibles devant les valeurs nominales r_i , \dot{r}_i et \ddot{r}_i , respectivement.

Quant à Δr_c , $\Delta\dot{r}_c$ et $\Delta\ddot{r}_c$, le cas est légèrement différent. Comme ces trois variables apparaissent toujours seules, c'est-à-dire sans être multipliés par une autre variable commençant par Δ , nous n'avons pas besoin de supposer que leurs valeurs sont faibles.

Les forces et les couples nominaux (nécessaires pour maintenir la formation nominale dans le cas sans perturbations orbitales) étant nuls, nous pouvons supposer que les forces f_i et les couples g_i sont petits. Par conséquent, nous pouvons les traiter comme les variables commençant par Δ dans la suite et écrire Δf_i et Δg_i .

La suppression de tous les termes quadratiques ou d'ordre supérieur à deux donne l'expression suivante de la dynamique en notation matricielle :

$$\begin{aligned}C_t^T C_0 \Delta\ddot{r}_c + \Delta\ddot{r}_i - r_i^\times \Delta\ddot{\theta}_c &= \frac{1}{m_i} C_i \Delta f_i + C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i) \\ &\quad - 2C_t^T \omega_0^\times C_0 \Delta\dot{r}_c - C_t^T [\dot{\omega}_0^\times + \omega_0^{\times 2}] C_0 \Delta r_c\end{aligned}\quad (3.48)$$

$$\Delta\ddot{\theta}_c + C_i \Delta\ddot{\theta}_i = C_i J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i)\quad (3.49)$$

Nous notons que seules les dérivées secondes des angles $\Delta\ddot{\theta}_c$ et $\Delta\ddot{\theta}_i$ apparaissent, les angles $\Delta\theta_c$ et $\Delta\theta_i$ et les vitesses angulaires $\Delta\dot{\theta}_c$ et $\Delta\dot{\theta}_i$ ont disparu. La dynamique d'attitude (plus précisément la dynamique de $\Delta\theta_c + C_i \Delta\theta_i$) est celle d'un double intégrateur.

5. Gerolamo CARDANO (1501 – 1576), médecin et mathématicien italien

3.7.4 Linéarisation autour du mode de changement de la distance inter-vaisseau

Le mode de changement de la distance entre les éléments de la formation fait les mêmes hypothèses que le mode d'observation, à une exception près. Les positions r_i , les vitesses \dot{r}_i et les accélérations \ddot{r}_i des vaisseaux à l'intérieur de la formation sont assujetties à des variations. Ceci peut être utilisé par exemple pour changer la base d'un interféromètre spatial. La FIG. 3.9 montre une évolution possible de r_i et ses dérivées.

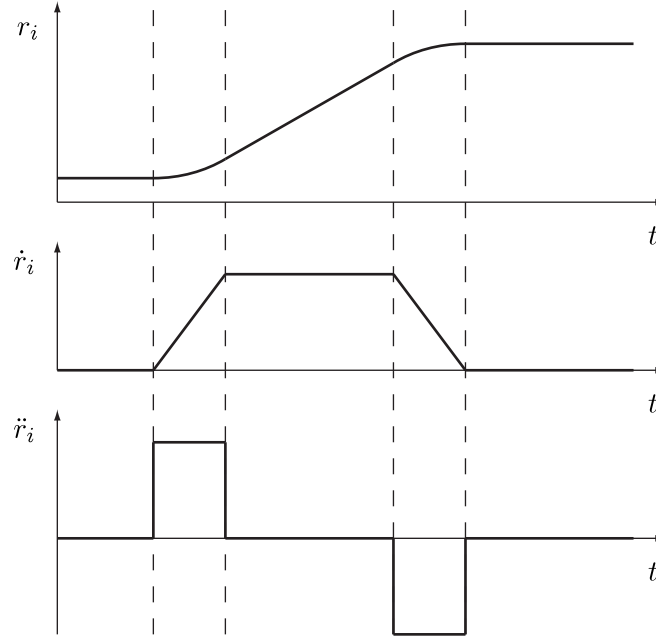


FIGURE 3.9 – Évolution possible de r_i , \dot{r}_i et \ddot{r}_i pour un changement de distance inter-vaisseau. La figure montre seulement une composante de r_i , \dot{r}_i et \ddot{r}_i .

La prise en compte des simplifications donne les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\Delta \ddot{r}_c + C_c \Delta C_c \Delta \ddot{r}_i - C_c [\Delta C_c (r_i + \Delta r_i)]^\times \Delta \dot{\omega}_c &= \frac{1}{m_i} C_c \Delta C_c C_i \Delta C_i f_i \\
&+ C_c \Delta C_c C_i \Delta C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} (g_i - c_i^\times f_i) \\
&- 2 (C_0^T \omega_0)^\times \Delta \dot{r}_c - [(C_0^T \dot{\omega}_0)^\times + (C_0^T \omega_0)^{\times 2}] \Delta r_c \\
&- C_c \Delta C_c \ddot{r}_i - 2 C_c \Delta \omega_c^\times \Delta C_c (\dot{r}_i + \Delta \dot{r}_i) \\
&- C_c \Delta \omega_c^\times \Delta \omega_c^\times \Delta C_c (r_i + \Delta r_i) \\
&- C_c [\Delta \omega_c + \Delta C_c C_i \Delta \omega_i]^{\times 2} \Delta C_c C_i \Delta C_i c_i \\
&- C_c \Delta C_c C_i \Delta C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} \Delta C_i^T C_i^T [\Delta C_c^T \Delta \omega_c + C_i \Delta \omega_i]^\times C_i \Delta C_i \\
&\quad \cdot J_{i,P_i} \Delta C_i^T C_i^T [\Delta C_c^T \Delta \omega_c + C_i \Delta \omega_i]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_c \Delta \dot{\omega}_c + C_c \Delta C_c C_i \Delta \dot{\omega}_i &= C_c \Delta C_c C_i \Delta C_i J_{i,P_i}^{-1} (g_i - c_i^\times f_i) \\
&- C_c \Delta \omega_c^\times \Delta C_c C_i \Delta \omega_i \\
&- C_c \Delta C_c C_i \Delta C_i J_{i,P_i}^{-1} \Delta C_i^T C_i^T [\Delta C_c^T \Delta \omega_c + C_i \Delta \omega_i]^\times C_i \Delta C_i \\
&\cdot J_{i,P_i} \Delta C_i^T C_i^T [\Delta C_c^T \Delta \omega_c + C_i \Delta \omega_i]
\end{aligned}$$

La trajectoire de référence est alors définie de la façon suivante :

$$0 = C_c C_i J_{i,P_i}^{-1} (g_{i,bo} - c_i^\times f_{i,bo})$$

$$C_c \ddot{r}_i = \frac{1}{m_i} C_c C_i f_{i,bo} + C_c C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} (g_{i,bo} - c_i^\times f_{i,bo})$$

Les forces $f_{i,bo}$ et les couples $g_{i,bo}$ injectés en boucle ouverte s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}
f_{i,bo} &= m_i C_i^T \ddot{r}_i \\
g_{i,bo} &= m_i c_i^\times C_i^T \ddot{r}_i
\end{aligned}$$

Contrairement au mode d'observation, $f_{i,bo}$ et $g_{i,bo}$ ne sont pas nuls. Nous devons effectuer les remplacements $f_i = f_{i,bo} + \Delta f_i$ et $g_i = g_{i,bo} + \Delta g_i$. Après la linéarisation, il vient :

$$\begin{aligned}
C_c^T \Delta \ddot{r}_c + \Delta \ddot{r}_i - r_i^\times \Delta \ddot{\theta}_c &= \frac{1}{m_i} C_i \Delta f_i + C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i) \\
&- 2C_c^T (C_0^T \omega_0)^\times \Delta \dot{r}_c - C_c^T \left[(C_0^T \dot{\omega}_0)^\times + C_c^T (C_0^T \omega_0)^{\times 2} \right] \Delta r_c \\
&- \ddot{r}_i^\times C_i \Delta \theta_i + 2\dot{r}_i^\times \Delta \dot{\theta}_c
\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\Delta \ddot{\theta}_c + C_i \Delta \ddot{\theta}_i = C_i J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i) \tag{3.51}$$

La dernière ligne ($-\ddot{r}_i^\times C_i \Delta \theta_i + 2\dot{r}_i^\times \Delta \dot{\theta}_c$) a été rajoutée à la dynamique en translation par rapport aux Éqs. (3.48) et (3.49).

Un fait marquant de cette dynamique est l'existence des paramètres variants r_i , \dot{r}_i et \ddot{r}_i . Le système est donc *linéaire à paramètre variant* (LPV).

En outre, l'angle $\Delta \theta_i$ et la vitesse angulaire $\Delta \dot{\theta}_c$ apparaissent : la dynamique ne correspond plus à un double intégrateur.

3.7.5 Linéarisation autour du mode de rotation de la formation autour d'un axe

Outre le mode d'observation, un mode peut consister à faire pivoter la formation entière comme un seul corps rigide. Dans ce cas, quelques simplifications introduites pour le mode d'observation restent applicables, plus précisément l'annulation des vecteurs \dot{r}_i , \ddot{r}_i , ω_i et $\dot{\omega}_i$. En outre, nous constatons toujours la simplification entre la force de gravitation nominale et quelques accélérations inertielles,

cf. Éq. (3.28).

En revanche, les expressions concernant le pointage inertiel de la formation (voir Éq. (3.40)) ne sont plus valables, mais doivent être remplacées par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
C_0 C_c &= C_t & (3.52) \\
\omega_0 + C_0 \omega_c &= \omega_t \\
\dot{\omega}_0 + C_0 \dot{\omega}_c &= \dot{\omega}_t \\
\omega_0^\times C_0 \omega_c &= \omega_0^\times \omega_t
\end{aligned}$$

Les variables C_t , ω_t et $\dot{\omega}_t$ peuvent avoir une évolution similaire à celle illustrée dans la FIG. 3.9 (page 85).

La prise en compte de toutes ces hypothèses mène aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
C_c^T \Delta \ddot{r}_c + \Delta C_c \Delta \ddot{r}_i - [\Delta C_c (r_i + \Delta r_i)]^\times \Delta \dot{\omega}_c &= \frac{1}{m_i} \Delta C_c C_i \Delta C_i f_i \\
&+ \Delta C_c C_i \Delta C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} (g_i - c_i^\times f_i) \\
&- 2 C_c^T (C_0^T \omega_0)^\times \Delta \dot{r}_c - C_c^T [(C_0^T \dot{\omega}_0)^\times + (C_0^T \omega_0)^\times{}^2] \Delta r_c \\
&- 2 (C_t^T \omega_t + \Delta \omega_c)^\times \Delta C_c \Delta \dot{r}_i - [C_t^T \dot{\omega}_t + (C_t^T \omega_t)^\times \Delta \omega_c]^\times \Delta C_c (r_i + \Delta r_i) \\
&- (C_t^T \omega_t + C_c \Delta \omega_c)^\times{}^2 \Delta C_c (r_i + \Delta r_i) \\
&- [C_t^T \omega_t + \Delta \omega_c + \Delta C_c C_i \Delta \omega_i]^\times{}^2 \Delta C_c C_i \Delta C_i c_i \\
&- \Delta C_c C_i \Delta C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} \Delta C_i^T C_i^T [\Delta C_c^T C_t^T \omega_t + \Delta C_c^T \Delta \omega_c + C_i \Delta \omega_i]^\times C_i \Delta C_i \\
&\quad \cdot J_{i,P_i} \Delta C_i^T C_i^T [\Delta C_c^T C_t^T \omega_t + \Delta C_c^T \Delta \omega_c + C_i \Delta \omega_i] \\
\Delta \dot{\omega}_c + \Delta C_c C_i \Delta \dot{\omega}_i &= \Delta C_c C_i \Delta C_i J_{i,P_i}^{-1} (g_i - c_i^\times f_i) \\
&- C_t^T \dot{\omega}_t - (C_t^T \omega_t)^\times (\Delta \omega_c + \Delta C_c C_i \Delta \omega_i) - \Delta \omega_c^\times \Delta C_c C_i \Delta \omega_i \\
&- \Delta C_c C_i \Delta C_i J_{i,P_i}^{-1} \Delta C_i^T C_i^T (\Delta C_c^T C_t^T \omega_t + \Delta C_c^T \Delta \omega_c + C_i \Delta \omega_i)^\times C_i \Delta C_i \\
&\quad \cdot J_{i,P_i} \Delta C_i^T C_i^T (\Delta C_c^T C_t^T \omega_t + \Delta C_c^T \Delta \omega_c + C_i \Delta \omega_i)
\end{aligned}$$

La trajectoire de référence est définie comme suit :

$$\begin{aligned}
0 &= C_i J_{i,P_i}^{-1} (g_{i,bo} - c_i^\times f_{i,bo}) - C_t^T \dot{\omega}_t \\
&\quad - C_i J_{i,P_i}^{-1} C_i^T (C_t^T \omega_t)^\times C_i J_{i,P_i} C_i^T C_t^T \omega_t \\
0 &= \frac{1}{m_i} C_i f_{i,bo} + C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} (g_{i,bo} - c_i^\times f_{i,bo}) \\
&\quad - (C_t^T \dot{\omega}_t)^\times r_i - (C_t^T \omega_t)^\times{}^2 (r_i + C_i c_i) \\
&\quad - C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} C_i^T (C_t^T \omega_t)^\times C_i J_{i,P_i} C_i^T (C_t^T \omega_t)
\end{aligned}$$

Les forces $f_{i,bo}$ et les couples $g_{i,bo}$ injectés en boucle ouverte sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} f_{i,bo} &= m_i C_i^T [(C_t^T \dot{\omega}_t)^\times + (C_t^T \omega_t)^\times (C_t^T \omega_t)^\times] (r_i + C_i c_i) \\ g_{i,bo} &= J_{i,P_i} C_i^T C_t^T \dot{\omega}_t + (C_i^T C_t^T \omega_t)^\times J_{i,P_i} C_i^T C_t^T \omega_t \\ &\quad + m_i c_i^\times C_i^T [(C_t^T \dot{\omega}_t)^\times + (C_t^T \omega_t)^\times (C_t^T \omega_t)^\times] (r_i + C_i c_i) \end{aligned}$$

Après la linéarisation, il vient :

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\theta}_c + C_i \Delta \ddot{\theta}_i &= C_i J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i) - (C_t^T \omega_t)^\times (\Delta \dot{\theta}_c + C_i \Delta \dot{\theta}_i) \\ &\quad - (C_t^T \dot{\omega}_t)^\times (\Delta \theta_c + C_i \Delta \theta_i) \\ &\quad + C_i J_{i,P_i}^{-1} (J_{i,P_i} C_i^T C_t^T \omega_t)^\times C_i^T [(C_t^T \omega_t)^\times (\Delta \theta_c + C_i \Delta \theta_i) + \Delta \dot{\theta}_c + C_i \Delta \dot{\theta}_i] \\ &\quad - C_i J_{i,P_i}^{-1} C_i^T (C_t^T \omega_t)^\times C_i J_{i,P_i} C_i^T [(C_t^T \omega_t)^\times (\Delta \theta_c + C_i \Delta \theta_i) + \Delta \dot{\theta}_c + C_i \Delta \dot{\theta}_i] \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} C_c^T \Delta \ddot{r}_c + \Delta \ddot{r}_i - r_i^\times \Delta \ddot{\theta}_c &= \frac{1}{m_i} C_i \Delta f_i + C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i) \\ &\quad - 2C_c^T (C_0^T \omega_0)^\times \Delta \dot{r}_c - C_c^T [(C_0^T \dot{\omega}_0)^\times + (C_0^T \omega_0)^\times]^2 \Delta r_c \\ &\quad - 2(C_t^T \omega_t)^\times \Delta \dot{r}_i - [(C_t^T \dot{\omega}_t)^\times + (C_t^T \omega_t)^\times]^2 (\Delta r_i - r_i^\times \Delta \theta_c) \\ &\quad - \{[(C_t^T \dot{\omega}_t)^\times + (C_t^T \omega_t)^\times]^2 (r_i + C_i c_i)\}^\times (\Delta \theta_c + C_i \Delta \theta_i) \\ &\quad - (C_i c_i^\times C_i^T C_t^T \dot{\omega}_t)^\times (\Delta \theta_c + C_i \Delta \theta_i) + (C_t^T \omega_t)^\times (C_i c_i)^\times (\Delta \theta_c + C_i \Delta \theta_i) \\ &\quad + r_i^\times (C_t^T \omega_t)^\times \Delta \dot{\theta}_c + (C_t^T \omega_t)^\times r_i^\times C_c \Delta \dot{\theta}_c + [(C_t^T \omega_t)^\times r_i]^\times C_c \Delta \dot{\theta}_c \\ &\quad + (C_t^T \omega_t)^\times (C_i c_i)^\times (\Delta \dot{\theta}_c + C_i \Delta \dot{\theta}_i) + [(C_t^T \omega_t)^\times C_i c_i]^\times (\Delta \dot{\theta}_c + C_i \Delta \dot{\theta}_i) \\ &\quad + C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} (J_{i,P_i} C_i^T C_t^T \omega_t)^\times C_i^T [(C_t^T \omega_t)^\times (\Delta \theta_c + C_i \Delta \theta_i) + \Delta \dot{\theta}_c + C_i \Delta \dot{\theta}_i] \\ &\quad - C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} (C_i^T C_t^T \omega_t)^\times J_{i,P_i} C_i^T [(C_t^T \omega_t)^\times (\Delta \theta_c + C_i \Delta \theta_i) + \Delta \dot{\theta}_c + C_i \Delta \dot{\theta}_i] \end{aligned} \quad (3.54)$$

Nous observons que ces expressions sont linéaires, mais qu'elles contiennent les paramètres variants C_t , ω_t et $\dot{\omega}_t$.

3.8 Structure hiérarchique

Les expressions linéaires données dans les Éqs. (3.48) et (3.49) (page 84) correspondant au mode d'observation ont un problème inhérent, celui de la *redondance dynamique*. En effet, nous avons modélisé le mouvement d'un corps par rapport à une configuration nominale en utilisant deux rotations (ΔC_c et ΔC_i ou bien $\Delta \theta_c$ et $\Delta \theta_i$ pour la dynamique linéarisée) et deux translations (Δr_c et Δr_i). De ce fait, il existe cette redondance à la fois dans les dynamiques d'attitude et de translation. Or, une seule force Δf_i ne peut pas causer deux accélérations $\Delta \ddot{r}_c$ et $\Delta \ddot{r}_i$ sans créer d'ambiguïté. Il en est de même pour le couple Δg_i vis-à-vis des accélérations angulaires $\Delta \dot{\omega}_c$ et $\Delta \dot{\omega}_i$.

À l'origine, cette redondance avait été introduite pour décrire les états de la formation et des éléments de la formation séparément. C'est dans cet esprit que nous procéderons à la solution du problème de la redondance dynamique.

À cause de cette redondance, la seule manière de mettre les Éqs. (3.48) et (3.49) sous forme d'état

est la *forme d'état généralisée* ou *forme descripteur* :

$$E\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.55)$$

Les vecteur d'état x et de commande u du système sont définis comme suit :

$$x = \begin{bmatrix} \Delta\dot{\theta}_c \\ \Delta\dot{\theta}_i \\ \Delta\dot{r}_c \\ \Delta\dot{r}_i \\ \Delta\theta_c \\ \Delta\theta_i \\ \Delta r_c \\ \Delta r_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{24}, \quad u = \begin{bmatrix} \Delta g_i \\ \Delta f_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (3.56)$$

Avec ces définitions, les matrices E , A et B deviennent :

$$E = \left(\begin{array}{cccc|c} -r_i^\times & O_3 & C_t^T C_0 & I_3 & O_{3 \times 12} \\ I_3 & C_i & O_3 & O_3 & O_{3 \times 12} \\ O_{12 \times 3} & O_{12 \times 3} & O_{12 \times 3} & O_{12 \times 3} & I_{12} \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{18 \times 24} \quad (3.57)$$

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} O_3 & O_3 & A_{13} & O_3 & O_3 & O_3 & A_{17} & O_3 \\ O_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 \\ \hline & & I_{12} & & & & O_{12} & \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{18 \times 24} \quad (3.58)$$

avec

$$A_{13} = -2C_t^T \omega_0^\times C_0 \Delta\dot{r}_c$$

$$A_{17} = -C_t^T [\dot{\omega}_0^\times + \omega_0^\times{}^2] C_0$$

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} & \frac{1}{m_i} C_i - C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} c_i^\times & \\ C_i J_{i,P_i}^{-1} & -C_i J_{i,P_i}^{-1} c_i^\times & \\ \hline O_{12 \times 3} & O_{12 \times 3} & \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{18 \times 6} \quad (3.59)$$

Ici, O_3 est une matrice nulle de dimensions 3×3 , I_3 une matrice d'identité de dimensions 3×3 et $O_{12 \times 3}$ et $O_{3 \times 12}$ des matrices de dimensions 12×3 (12 lignes, 3 colonnes) et 3×12 (3 lignes, 12 colonnes), respectivement, cf. Annexe B.

Un constat intéressant est qu'il est possible d'effectuer un changement du point de référence P_i simplement en prémultipliant l'Éq. (3.55) par une matrice M :

$$ME\dot{x} = MAx + MBu \quad (3.60)$$

La matrice M est définie comme suit :

$$M = \left(\begin{array}{cc|c} I_3 & v^\times & O_{6 \times 12} \\ O_3 & I_3 & \\ \hline O_{12 \times 6} & & I_{12} \end{array} \right) \quad (3.61)$$

$$\text{avec } v = r_{i,\text{nouveau}} - r_{i,\text{actuel}}$$

Dans la nouvelle représentation, les forces et les couples, ainsi que la position du centre de masse, sont exprimés par rapport au nouveau point de référence $P_{i,\text{nouveau}}$.

En particulier, pour le choix $v = C_i c_i$, le point de référence $P_{i,\text{nouveau}}$ coïncide avec le centre de masse du véhicule.

Dans le cas d'un changement de l'orientation du repère $\mathcal{F}_{i,0}$ lié au vaisseau i en configuration nominale, le cas est encore plus simple :

$$M = \left(\begin{array}{cc|c} I_3 & O_3 & O_{6 \times 12} \\ O_3 & I_3 & \\ \hline O_{12 \times 6} & & I_{12} \end{array} \right) \quad (3.62)$$

$$\text{avec } R = C_{i,\text{actuel}} C_{i,\text{nouveau}}^T$$

Du fait que la matrice de passage R n'apparaît pas dans la matrice M et que M est une matrice d'identité, les matrices E , A et B ne subissent pas de changement (à part le pur et simple remplacement des valeurs de C_i , c_i , J_{i,P_i} , $\Delta\dot{\theta}_i$, Δf_i et Δg_i par leurs nouvelles valeurs) quand on change le repère $\mathcal{F}_{i,0}$.

Clairement, la forme d'état généralisée n'est pas bien posée pour l'instant car la matrice d'état A n'est pas carrée. En outre, E n'est ni carré ni inversible. La dynamique est singulière.

3.8.1 Complétion de la dynamique

La solution à ce problème est une complétion des matrices E , A et B qui peut être interprétée comme une structure hiérarchique. Il existe quatre possibilités différentes pour cette complétion.

Première possibilité de complétion

Nous pouvons imposer par exemple

$$\Delta\ddot{\theta}_i = o_3 \text{ et } \Delta\ddot{r}_i = o_3,$$

ou bien

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} O_3 & I_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 \\ O_3 & O_3 & O_3 & I_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 \end{array} \right) \dot{x} = (O_{6 \times 24}) x + (O_{6 \times 6}) u, \quad (3.63)$$

où o_3 est une matrice colonne nulle de dimension 3. Dans ce cas, la dynamique perd sa singularité car les deux lignes supplémentaires rendent E et A carrées et E inversible. La dynamique peut

maintenant être écrite sous forme d'état :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= E^{-1}Ax + E^{-1}Bu \\ &= \tilde{A}x + \tilde{B}u\end{aligned}\quad (3.64)$$

$\Delta\ddot{\theta}_i = \Delta\ddot{r}_i = o_3$ signifie que cette dynamique disparaît. Si nous supposons en plus que les conditions initiales sont nulles ($\Delta\dot{\theta}_i(0) = \Delta\dot{r}_i(0) = \Delta\dot{r}_c(0) = \Delta r_c(0) = o_3$), nous pouvons omettre entièrement tous les états concernés. Il vient :

$$\begin{aligned}\Delta\ddot{r}_c &= \frac{1}{m_i}C_0^T C_t C_i \Delta f_i + C_0^T C_t (r_i + C_i c_i)^\times C_i J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i) \\ &\quad - 2(C_0^T \omega_0)^\times \Delta\dot{r}_c - [(C_0^T \dot{\omega}_0)^\times + (C_0^T \omega_0)^\times{}^2] \Delta r_c\end{aligned}\quad (3.65)$$

$$\Delta\ddot{\theta}_c = C_i J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i)\quad (3.66)$$

Le choix arbitraire des conditions initiales est parfaitement légitime. En effet, il existe la même redondance au niveau des conditions initiales qu'au niveau de la dynamique.

Deuxième possibilité de complétion

Une autre complétion possible est

$$\Delta\ddot{\theta}_c = o_3 \text{ et } \Delta\ddot{r}_c = o_3,$$

ou bien

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} I_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 \\ O_3 & O_3 & I_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 \end{array} \right) \dot{x} = (O_{6 \times 24})x + (O_{6 \times 6})u, \quad (3.67)$$

avec $\Delta\dot{\theta}_c(0) = \Delta\dot{r}_c(0) = \Delta\dot{r}_c(0) = \Delta r_c(0) = o_3$.

Il vient :

$$\Delta\ddot{r}_i = \frac{1}{m_i}C_i \Delta f_i + C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i)\quad (3.68)$$

$$\Delta\ddot{\theta}_i = J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i)\quad (3.69)$$

Troisième possibilité de complétion

En plus des deux complétions que nous avons vues, il existe également deux complétions mixtes. La première est

$$\Delta\ddot{\theta}_c = o_3 \text{ et } \Delta\ddot{r}_i = o_3,$$

ou bien

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} I_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 \\ O_3 & O_3 & O_3 & I_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 \end{array} \right) \dot{x} = (O_{6 \times 24})x + (O_{6 \times 6})u, \quad (3.70)$$

avec $\Delta\dot{\theta}_c(0) = \Delta\theta_c(0) = \Delta\dot{r}_i(0) = \Delta r_i(0) = o_3$.

Elle mène aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{r}_c &= \frac{1}{m_i} C_0^T C_t C_i \Delta f_i + C_0^T C_t C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i) \\ &\quad - 2C_0^T \omega_0^\times C_0 \Delta\dot{r}_c - C_0^T [\dot{\omega}_0^\times + \omega_0^{\times 2}] C_0 \Delta r_c \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\Delta\ddot{\theta}_i = J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i) \quad (3.72)$$

Quatrième possibilité de complétion

La deuxième complétion mixte peut être obtenue en posant

$$\Delta\ddot{\theta}_i = o_3 \text{ et } \Delta\ddot{r}_c = o_3,$$

ou bien

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} O_3 & I_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 \\ O_3 & O_3 & I_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 \end{array} \right) \dot{x} = (O_{6 \times 24}) x + (O_{6 \times 6}) u, \quad (3.73)$$

avec $\Delta\dot{\theta}_i(0) = \Delta\theta_i(0) = \Delta\dot{r}_c(0) = \Delta r_c(0) = o_3$.

La dynamique s'écrit alors :

$$\Delta\ddot{r}_i = \frac{1}{m_i} C_i \Delta f_i + (r_i + C_i c_i)^\times C_i J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i) \quad (3.74)$$

$$\Delta\ddot{\theta}_c = C_i J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i) \quad (3.75)$$

3.8.2 Hiérarchies

Le fait d'avoir modélisé les écarts en translation et en rotation de façon redondante n'a pas apporté une valeur ajoutée pour l'instant. Or, lorsque nous appliquons les méthodes pour lever la singularité à plusieurs vaisseaux, nous pouvons obtenir la structure hiérarchique mentionnée précédemment. Dans la suite, nous traitons le cas de deux vaisseaux i et j .

Hiérarchie leader-follower

Si nous choisissons la première possibilité de complétion pour le vaisseau i , nous obtenons, comme nous l'avons déjà vu, les équations Éqs. (3.65) et (3.66).

Concernant le deuxième vaisseau j , nous prenons la dynamique redondante donnée par les Éqs. (3.48) et (3.49) et nous remplaçons $\Delta\dot{r}_c$ et $\Delta\ddot{\theta}_c$ par les Éqs. (3.65) et (3.66).

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
\Delta \ddot{r}_c &= \frac{1}{m_i} C_0^T C_t C_i \Delta f_i + C_0^T C_t (r_i + C_i c_i)^\times C_i J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i) \\
&\quad - 2(C_0^T \omega_0)^\times \Delta \dot{r}_c - [(C_0^T \dot{\omega}_0)^\times + (C_0^T \omega_0)^\times{}^2] \Delta r_c \\
\Delta \ddot{\theta}_c &= C_i J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i) \\
\Delta \ddot{r}_j &= \frac{1}{m_j} C_j \Delta f_j + C_j c_j^\times J_{j,P_j}^{-1} (\Delta g_j - c_j^\times \Delta f_j) \\
&\quad - \frac{1}{m_i} C_i \Delta f_i - (r_i + C_i c_i - r_j)^\times C_i J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i) \\
\Delta \ddot{\theta}_j &= J_{j,P_j}^{-1} (\Delta g_j - c_j^\times \Delta f_j) - C_j^T C_i J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i)
\end{aligned} \tag{3.76}$$

En d'autres termes, les dynamiques en translation et en rotation de la formation ($\Delta \ddot{r}_c$ et $\Delta \ddot{\theta}_c$) sont influencées par les forces Δf_i et couples Δg_i du vaisseau i . Comme les écarts Δr_i et $\Delta \theta_i$ et leurs dérivées ont disparu, le vaisseau est rigidement lié à la formation. Quant au vaisseau j , ses dynamiques ($\Delta \ddot{r}_j$ et $\Delta \ddot{\theta}_j$) sont influencées à la fois par les forces et couples du vaisseau j (Δf_j et Δg_j) et ceux du vaisseau i (Δf_i et Δg_i).

En outre, nous notons que ces dynamiques sont sous forme d'une différence, par exemple $\frac{1}{m_j} C_j \Delta f_j - \frac{1}{m_i} C_i \Delta f_i$. Concernant les dynamiques du vaisseau j , tout est relatif vis-à-vis des actions des vaisseaux i et j .

Nous appelons cette structure hiérarchique *architecture leader-follower* (*fr.* meneur-suiveur) avec le vaisseau i comme leader et le vaisseau j comme follower. i définit les états de la formations et n'a pas de mouvement propre supplémentaire. j décrit les états du vaisseau j relatif à la formation ou au leader i .

Hiérarchie paritaire

En retenant la deuxième possibilité de complétion pour les deux vaisseaux i et j (Éqs. (3.68) et (3.69), page 91), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\Delta \ddot{r}_i &= \frac{1}{m_i} C_i \Delta f_i + C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i) \\
\Delta \ddot{\theta}_i &= J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i) \\
\Delta \ddot{r}_j &= \frac{1}{m_j} C_j \Delta f_j + C_j c_j^\times J_{j,P_j}^{-1} (\Delta g_j - c_j^\times \Delta f_j) \\
\Delta \ddot{\theta}_j &= J_{j,P_j}^{-1} (\Delta g_j - c_j^\times \Delta f_j)
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Nous appelons cette structure hiérarchique *architecture paritaire* car les dynamiques des deux vaisseaux sont strictement égales. En revanche, les écarts au niveau de la formation, Δr_c et $\Delta \theta_c$ disparaissent.

Hierarchie mixte - première possibilité

Il existe deux structures hiérarchiques mixtes. La première peut être obtenue de la façon suivante. Nous appliquons la troisième possibilité de complétion au vaisseau i et remplaçons $\Delta\ddot{r}_c$ dans la dynamique du vaisseau j par l'expression obtenue. En outre, nous posons $\Delta\ddot{\theta}_c = o_3$ et $\Delta\theta_c(0) = \Delta\dot{\theta}_c(0) = o_3$. Il vient :

$$\begin{aligned}
\Delta\ddot{r}_c &= \frac{1}{m_i} C_0^T C_t C_i \Delta f_i + C_0^T C_t C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i) \\
&\quad - 2C_0^T \omega_0^\times C_0 \Delta\dot{r}_c - C_0^T [\dot{\omega}_0^\times + \omega_0^{\times 2}] C_0 \Delta r_c \\
\Delta\ddot{\theta}_i &= J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i) \\
\Delta\ddot{r}_j &= \frac{1}{m_j} C_j \Delta f_j + C_j c_j^\times J_{j,P_j}^{-1} (\Delta g_j - c_j^\times \Delta f_j) \\
&\quad - \frac{1}{m_i} C_i \Delta f_i - C_i c_i^\times J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i) \\
\Delta\ddot{\theta}_j &= J_{j,P_j}^{-1} (\Delta g_j - c_j^\times \Delta f_j)
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Ici, le vaisseau i est le leader en ce qui concerne la translation. La dynamique en translation du follower j est exprimée relativement au leader (voir les différences des forces et couples, par exemple $\frac{1}{m_j} C_j \Delta f_j - \frac{1}{m_i} C_i \Delta f_i$). Or, concernant l'attitude, les deux vaisseaux jouent le même rôle. La notion d'attitude au niveau de la formation n'existe pas.

Hierarchie mixte - deuxième possibilité

La deuxième possibilité pour une hiérarchie mixte est de prendre la quatrième possibilité de complétion pour le vaisseau i et de remplacer $\Delta\ddot{\theta}_c$ dans la dynamique du vaisseau j par l'expression obtenue. En plus, nous posons $\Delta\ddot{r}_c = o_3$ et $\Delta r_c(0) = \Delta\dot{r}_c(0) = o_3$. Il vient :

$$\begin{aligned}
\Delta\ddot{r}_i &= \frac{1}{m_i} C_i \Delta f_i + (r_i + C_i c_i)^\times C_i J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i) \\
\Delta\ddot{\theta}_c &= C_i J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i) \\
\Delta\ddot{r}_j &= \frac{1}{m_j} C_j \Delta f_j + C_j c_j^\times J_{j,P_j}^{-1} (\Delta g_j - c_j^\times \Delta f_j) + r_j^\times C_i J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i) \\
\Delta\ddot{\theta}_j &= J_{j,P_j}^{-1} (\Delta g_j - c_j^\times \Delta f_j) - C_j^T C_i J_{i,P_i}^{-1} (\Delta g_i - c_i^\times \Delta f_i)
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Au niveau de l'attitude, le vaisseau i est le leader et le vaisseau j le follower. Or, concernant la translation, les expressions sont difficiles à interpréter. Ici, on ne peut observer ni une architecture paritaire, ni une architecture leader-follower.

Synthèse

Le TAB. 3.6 résume les différentes architectures présentées.

Un constat important concernant les différentes architectures est que, physiquement, elles sont toutes identiques car elles proviennent de la même dynamique redondante. La seule différence entre elles est le choix des degrés de liberté. En d'autres termes, un simple changement de base à partir de la dynamique redondante a été effectué.

TABLE 3.6 – Les structures hiérarchiques possibles

Hiérarchie	Leader en translation	Leader en attitude
Architecture leader-follower	vaisseau i	vaisseau i
Architecture paritaire	–	–
Architecture mixte 1	vaisseau i	–
Architecture mixte 2	–	vaisseau i

Dans certaines hiérarchies, tous les termes Δr_c , $\Delta \dot{r}_c$ et $\Delta \ddot{r}_c$ disparaissent et avec eux les accélérations inertielles $-2C_0^T \omega_0^\times C_0 \Delta \dot{r}_c$ et $-C_0^T [\dot{\omega}_0^\times + \omega_0^{\times 2}] C_0 \Delta r_c$. Ceci n'a rien d'inquiétant car nous avons le droit de fixer les trois termes à zéro.

Il s'avère que, parmi les quatre architectures présentées, il y en a seulement deux qui sont adaptées au vol en formation, l'architecture leader-follower et la première architecture mixte.

L'architecture leader-follower exprime les dynamiques en translation et en attitude. Le vaisseau i fixe l'état de la formation, il ne possède pas d'états propres. Les états du vaisseau j sont exprimés relatifs à la formation ou au vaisseau i . Cette architecture est particulièrement pratique car un objectif récurrent dans le vol en formation est que les vaisseaux de la formation suivent le mouvement d'un leader.

La deuxième architecture adaptée au vol en formation est la première architecture mixte car elle conserve l'architecture leader-follower en translation. Ceci est primordial car on ne se préoccupe généralement pas des translations absolues individuelles des vaisseaux, mais des translations relatives entre les vaisseaux. Or, au niveau de l'attitude, ceci peut être différent. On souhaite souvent de contrôler l'attitude inertielle de chaque vaisseau indépendamment.

Une remarque nécessaire est que le contrôle d'orbite ne fait pas objet de nos travaux. En plus, le contrôle d'orbite n'est normalement pas effectué de façon continue, mais en intervalles réguliers qui peuvent être assez longs, par exemple de l'ordre de semaines ou de mois dans le cas d'une orbite halo autour du point de LAGRANGE L_2 . C'est pour cette raison que dans la première équation des deux architectures retenues, $\Delta \ddot{r}_c$ n'a pas d'importance car cette équation décrit la translation de la formation entière et ne pas celle de ses éléments à l'intérieur de la formation.

Un dernier constat concerne la linéarisation du modèle. En fait, tous les problèmes de redondance décrits et les architectures conçues pour y remédier peuvent être retrouvés dans la dynamique non-linéaire. Or, du fait des matrices de rotation ΔC_c et ΔC_i , les expressions sont nettement plus compliquées et ne sont pas présentées ici.

3.9 Modèle métrologique

Le modèle métrologique comprend à la fois les sorties contrôlées et les sorties mesurées. Les sorties contrôlées (ou sorties de performance) servent à établir le critère pour la recherche d'un correcteur optimal, tandis que les sorties mesurées sont des modèles pour les différents capteurs.

Dans la littérature sur le vol en formation, il existe relativement peu de papiers qui traitent la modélisation de capteurs. Les travaux d'ALONSO et al. que nous avons déjà mentionnés [9, 10] sont un exemple de modélisation métrologique. Or, la façon dont le capteur optique considéré est modélisé est peu générique.

Un autre exemple est l'approche adoptée au *CNES*. Pour la modélisation de toutes les sorties contrôlées qui font intervenir des appareils optiques (tel que des miroirs, des lentilles, etc.), des logiciels de modélisation optique sont utilisés. Basé sur un modèle optique, des études de sensibilité peuvent être menées pour déterminer les équations de mesure. Cette procédure fournit des expressions linéaires de la différence de marche, par exemple. Or, l'approche est restreinte aux sorties qui utilisent des faisceaux lumineux. Dans le cadre de la mission *Pegase*, c'est seulement le cas pour la *différence de marche optique* et pour le *capteur d'incidence du faisceau optique*. La modélisation de tous les autres capteurs et sorties contrôlées reste un problème ouvert. Des modèles analytiques non-linéaires ne peuvent pas être obtenus avec cette méthode et la validité de la linéarisation ne peut pas être évaluée. En outre, un changement de configuration, par exemple un déplacement d'un instrument optique, est très fastidieux car toute l'étude de sensibilité doit être menée de nouveau.

Une approche plus puissante est celle présentée par LLIBRE et al. [39]. Les auteurs utilisent d'abord la notation vectorielle pour modéliser la géométrie d'un certain principe de métrologie, comme par exemple le chemin optique avec ses miroirs et lentilles. En passant à la notation matricielle, les valeurs exactes de la mission peuvent être utilisées. Grâce à cette approche, des modèles pour la *différence de marche optique* et pour le *capteur d'incidence du faisceau optique* sont obtenus, à la fois en linéaire et en non-linéaire, ce qui rend possible d'évaluer l'erreur commise lors de la linéarisation. L'avantage de cette méthode est qu'elle est très générique car elle est basée sur des considérations géométriques. Contrairement à la première méthode présentée, elle ne nécessite pas de logiciel spécifique. Or, elle n'est pas aussi générique qu'elle pourrait être. Il est par exemple nécessaire de se fixer une structure hiérarchique dès le départ.

L'approche que nous présenterons dans cette section est similaire à celle de LLIBRE et al. Nous profitons du modèle cinématique précédemment obtenu pour y ajouter une couche métrologique. La géométrie utilisée correspond alors à celle utilisée pour le modèle dynamique. Or, notre méthode a l'avantage de rester le plus générique possible. Il n'est pas nécessaire de faire le choix de la hiérarchie pour obtenir le modèle métrologique. Ce choix peut être fait, de façon similaire à ce qui a été dit sur la dynamique, à la fin de l'étape de modélisation. Comme le modèle de LLIBRE et al., notre modèle est non-linéaire et peut être linéarisé ensuite.

De manière générale, notre approche peut être décrite comme suit. Il faut d'abord établir les principales relations géométriques en notation vectorielle ou, dans quelques cas, directement en notation matricielle. Un exemple est la modélisation d'un chemin optique qui passe par des miroirs et des lentilles. Ces relations sont obtenues à la fois pour les configurations nominale et réelle de la formation. L'équation de mesure correspond généralement à la différence entre les expressions géométriques pour les configurations réelle et nominale. Ensuite, l'équation de mesure est projetée dans un repère adapté pour obtenir une expression en notation matricielle exploitable numériquement.

Le TAB. 3.7 résume les différentes sorties mesurées et contrôlées pour lesquelles nous établirons des modèles dans la suite.

TABLE 3.7 – Sorties mesurées et contrôlées modélisées

Type de sortie	Nom de la sortie
Sortie contrôlée	Différence de marche optique
	Dépointage inertiel d'un vaisseau
	Dépointage inertiel de la formation
	Dépointage relatif d'un vaisseau par rapport à la formation
	Dépointage relatif d'un vaisseau par rapport à un autre vaisseau
Sortie mesurée	Senseur stellaire
	Capteur d'incidence du faisceau optique
	Capteur latéral fin
	Capteur latéral grossier
	Capteur longitudinal
	Capteur radiofréquence

3.9.1 Différence de marche optique

La différence de marche optique suppose qu'il existe deux chemins optiques différents, correspondant à deux faisceaux lumineux. Ils partent de l'objet ciblé, passent par les vaisseaux sidérostats et finissent à l'endroit où se trouve le recombineur optique, cf. FIG. 3.10.

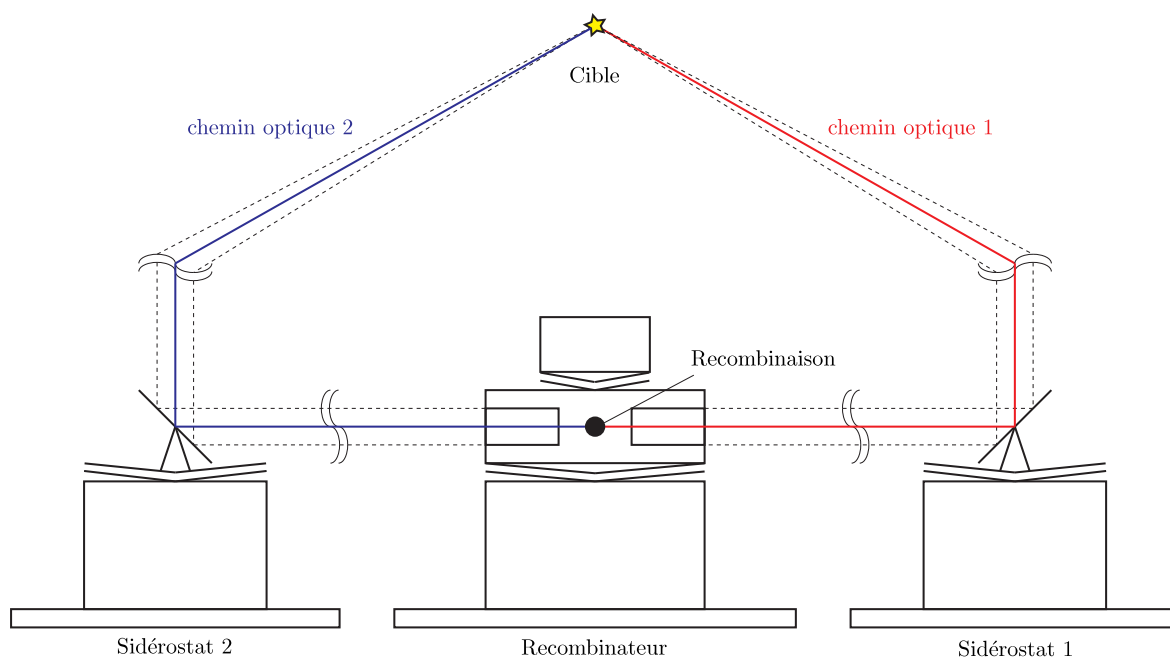


FIGURE 3.10 – Les deux chemins optiques différents (rouge et bleu)

La lumière traverse plusieurs dispositifs optiques tel que les miroirs, qui représentent les charges utiles des deux vaisseaux sidérostats, ou les télescopes qui font partie de la charge utile du vaisseau

recombinateur et qui réduisent les diamètres des faisceaux lumineux, par exemple de 40 cm à 2 cm dans le cas de la mission *Pegase*.

Le schéma géométrique utilisé pour établir l'équation de mesure pour la différence de marche optique est indiqué dans la FIG. 3.11. Ici, seulement un des deux chemins optiques est tracé, impliquant un vaisseau sidérostatis (indice i) et le vaisseau recombinateur (indice j). Nous modéliserons d'abord la différence de marche optique de ce premier chemin en configuration réelle de la formation par rapport à la configuration nominale. La même opération pour le deuxième chemin optique nous permettra ensuite de calculer la différence de marche optique entre les deux chemins.

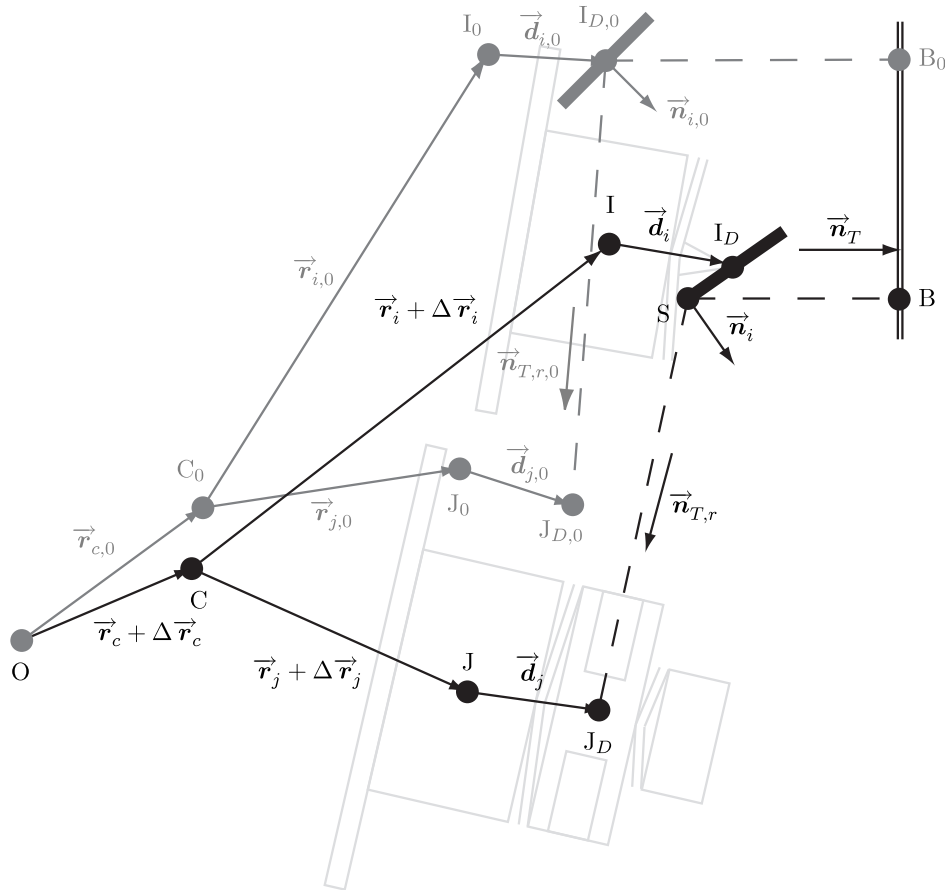


FIGURE 3.11 – Principe de la différence de marche optique

Grâce à la grande distance de l'objet ciblé, nous pouvons sans problème faire l'hypothèse d'un front d'onde incident parallèle comme l'indique la FIG. 3.11. La direction du front d'onde est donnée par le vecteur unitaire $-\vec{n}_T$, ou, en d'autres termes, la direction de la cible est \vec{n}_T . Ceci correspond également à la direction d'un rayon individuel.

Pour déterminer la différence de marche optique entre les configurations réelle et nominale, nous calculerons maintenant les longueurs des deux rayons qui correspondent aux deux configurations et qui appartiennent tous les deux au même front d'onde. Chacun des deux rayons est d'abord réfléchi par le miroir du vaisseau sidérostatis. Ensuite, les rayons réfléchis sont interceptés par le recombinateur.

Nous écrirons d'abord les identités géométriques nécessaires pour obtenir la différence de marche optique en notation vectorielle avant d'utiliser des repères. Les vecteurs dans la configuration nominale

apparaîtront alors tels quels (par exemple \vec{r}_i) alors que les vecteurs dans la configuration réelle portent l'indice supplémentaire 0 (par exemple $\vec{r}_{i,0}$). Il en est de même pour tous les points.

Le point de référence de la formation nominale est C_0 et sa position par rapport au point O est donnée par le vecteur \vec{r}_c .

Parmi les différents rayons du front d'onde, nous choisirons celui qui atteint le miroir en *configuration nominale* dans son centre $I_{D,0}$. Le rayon réfléti est alors intercepté par le recombineur au point $J_{D,0}$. La longueur totale $l_{ij,0}$ de ce rayon est :

$$\begin{aligned} l_{ij,0} &= \overline{B_0 I_{D,0}} + \overline{I_{D,0} J_{D,0}} \\ &= \left\| \overrightarrow{B_0 I_{D,0}} \right\| + \left\| \overrightarrow{I_{D,0} J_{D,0}} \right\| \end{aligned} \quad (3.80)$$

Nous nous concentrerons d'abord sur la longueur de $\overrightarrow{I_{D,0} J_{D,0}}$ dont la direction est la direction de la cible \vec{n}_T réfléchi.

L'image \vec{v}_r d'un vecteur \vec{v} peut être calculée grâce à la FIG. 3.12. Il est nécessaire de décomposer le vecteur \vec{v} en ses composantes orthogonale au miroir, \vec{v}_\perp , et parallèle au miroir, \vec{v}_\parallel . Après réflexion, la composante orthogonale n'a pas changé ($\vec{v}_{r,\perp} = \vec{v}_\perp$), mais le sens de la composante parallèle a été inversée ($\vec{v}_{r,\parallel} = -\vec{v}_\parallel$). Nous supposons que le vecteur \vec{n}_i orthogonal au miroir est un vecteur unitaire. En effet, cette réflexion correspond à une rotation du vecteur \vec{v} autour du vecteur \vec{n}_i avec un angle de π .

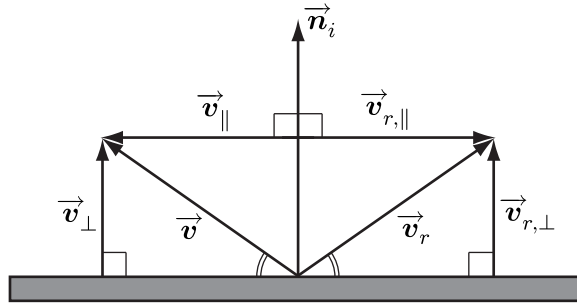


FIGURE 3.12 – Réflexion du vecteur incident \vec{v} sur le miroir défini par le vecteur normal \vec{n}_i

Les composantes du vecteur \vec{v} se calculent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \vec{v}_\perp &= (\vec{v} \cdot \vec{n}_i) \vec{n}_i = (\vec{n}_i \otimes \vec{n}_i) \cdot \vec{v} \\ \vec{v}_\parallel &= \vec{v} - \vec{v}_\perp = \left(\vec{1} - \vec{n}_i \otimes \vec{n}_i \right) \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Lors du calcul de la composante orthogonale \vec{v}_\perp , nous avons eu recours à l'identité suivante :

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = (\vec{c} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{a} \quad (3.82)$$

Le vecteur réfléchi se calcule alors comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{v}_r &= \vec{v}_{r,\perp} + \vec{v}_{r,\parallel} = \vec{v}_r - \vec{v}_\parallel \\ &= \left(2\vec{n}_i \otimes \vec{n}_i - \vec{1} \right) \cdot \vec{v} \vec{M}_i \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad (3.83)$$

\overrightarrow{M}_i est une dyade représentant l'opérateur de rotation autour du vecteur \vec{n}_i avec l'angle π ou l'opérateur de réflexion au miroir défini par le vecteur normal \vec{n}_i . Dans notre cas précis, l'image $\vec{n}_{T,r,0}$ du vecteur \vec{n}_T est :

$$\vec{n}_{T,r,0} = \left(2\vec{n}_{i,0} \otimes \vec{n}_{i,0} - \underline{\mathbf{1}}\right) \cdot \vec{n}_T = \overrightarrow{M}_{i,0} \cdot \vec{n}_T \quad (3.84)$$

Le vecteur $\overrightarrow{I_{D,0}J_{D,0}}$ peut être calculé de la façon suivante :

$$\overrightarrow{I_{D,0}J_{D,0}} = \vec{r}_{j,0} + \vec{d}_{j,0} - \vec{r}_{i,0} - \vec{d}_{i,0} \quad (3.85)$$

Il existe deux manières de déterminer sa longueur $\|\overrightarrow{I_{D,0}J_{D,0}}\|$.

– la première est de calculer la racine carrée du produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{I_{D,0}J_{D,0}}$ avec lui-même :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{I_{D,0}J_{D,0}}\| &= \left(\overrightarrow{I_{D,0}J_{D,0}} \cdot \overrightarrow{I_{D,0}J_{D,0}}\right)^{1/2} \\ &= \left[\left(\vec{r}_{j,0} + \vec{d}_{j,0} - \vec{r}_{i,0} - \vec{d}_{i,0}\right) \cdot \left(\vec{r}_{j,0} + \vec{d}_{j,0} - \vec{r}_{i,0} - \vec{d}_{i,0}\right)\right]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.86)$$

– la longueur $\|\overrightarrow{I_{D,0}J_{D,0}}\|$ du vecteur $\overrightarrow{I_{D,0}J_{D,0}}$ peut être déterminée en calculant le produit scalaire entre $\overrightarrow{I_{D,0}J_{D,0}}$ et son vecteur unitaire qui est donné par l'image $\vec{n}_{T,r,0}$ de \vec{n}_T :

$$\|\overrightarrow{I_{D,0}J_{D,0}}\| = \overrightarrow{I_{D,0}J_{D,0}} \cdot \overrightarrow{M}_{i,0} \cdot \vec{n}_T = \left(\vec{r}_{j,0} + \vec{d}_{j,0} - \vec{r}_{i,0} - \vec{d}_{i,0}\right) \cdot \overrightarrow{M}_{i,0} \cdot \vec{n}_T \quad (3.87)$$

Or, la racine carrée représente un sérieux désavantage pour les calculs qui suivront (par exemple la linéarisation). C'est pour cela que nous procéderons de la deuxième manière.

Comme le montre la FIG. 3.11 (page 98), les points de référence de la formation et des vaisseaux recombinateur et sidérostas en *configuration réelle* sont dénommés C, J et I, respectivement. Les positions des charges utiles (centres du miroir et du recombinateur) sont I_D et J_D .

Quant à la longueur du rayon, nous sommes obligés de choisir un autre rayon parmi les rayons dont le front d'onde est composé. De fait, le rayon commençant au point B est situé tel que, après réflexion, il est intercepté par le recombinateur en configuration réelle. Le point où le rayon est reflété n'est plus le centre du miroir, mais le point S, cf. FIG. 3.11.

La longueur l_{ij} du rayon en configuration réelle s'écrit alors comme suit :

$$l_{ij} = \overline{BS} + \overline{SJ_D} = \|\overrightarrow{BS}\| + \|\overrightarrow{SJ_D}\| \quad (3.88)$$

Le vecteur $\overrightarrow{SJ_D}$ peut être écrit comme suit :

$$\overrightarrow{SJ_D} = \vec{r}_j + \Delta \vec{r}_j + \vec{d}_j - \vec{r}_i - \Delta \vec{r}_i - \vec{d}_i - \overrightarrow{I_D S} \quad (3.89)$$

Le vecteur $\overrightarrow{I_D S}$ correspond au déplacement du point de réflexion S sur le miroir, cf. FIG. 3.11.

La longueur $\|\overrightarrow{SJD}\|$ du vecteur \overrightarrow{SJD} peut être calculée de la même façon que $\|\overrightarrow{IDJD}\|$:

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{SJD}\| &= \overrightarrow{SJD} \cdot \vec{n}_{T,r} = \overrightarrow{SJD} \cdot \vec{M}_i \cdot \vec{n}_T \\ &= \left(\vec{r}_j + \Delta \vec{r}_j + \vec{d}_j - \vec{r}_i - \Delta \vec{r}_i - \vec{d}_i - \overrightarrow{ID\dot{S}} \right) \cdot \vec{M}_i \cdot \vec{n}_T\end{aligned}\quad (3.90)$$

En configuration réelle, \vec{M}_i est défini comme suit :

$$\vec{M}_i = \left(2\vec{n}_i \otimes \vec{n}_i - \vec{1} \right) \quad (3.91)$$

Nous pouvons modifier cette expression car l'image $\overrightarrow{ID\dot{S}} \cdot \vec{M}_i$ du vecteur $\overrightarrow{ID\dot{S}}$, est égale à son opposé ($-\overrightarrow{ID\dot{S}} = \overrightarrow{SI\dot{D}}$) puisqu'elle se trouve dans le plan du miroir. Il vient :

$$\|\overrightarrow{SJD}\| = \left(\vec{r}_j + \Delta \vec{r}_j + \vec{d}_j - \vec{r}_i - \Delta \vec{r}_i - \vec{d}_i \right) \cdot \vec{M}_i \cdot \vec{n}_T + \overrightarrow{ID\dot{S}} \cdot \vec{n}_T \quad (3.92)$$

Pour l'instant, nous ne nous occupons pas du dernier terme $\vec{n}_T \cdot \overrightarrow{ID\dot{S}}$ et du vecteur $\overrightarrow{ID\dot{S}}$ que nous ignorons encore. Nous calculons maintenant la longueur du vecteur \overrightarrow{BS} . En effet, comme les vecteurs \overrightarrow{BS} et $\overrightarrow{B_0I_{D,0}}$ sont parallèles, la longueur de \overrightarrow{BS} est égale à la longueur de $\overrightarrow{B_0I_{D,0}}$, diminuée de la projection de $\overrightarrow{ID,0\dot{S}}$ sur \vec{n}_T :

$$\|\overrightarrow{BS}\| = \|\overrightarrow{B_0I_{D,0}}\| - \overrightarrow{ID,0\dot{S}} \cdot \vec{n}_T \quad (3.93)$$

Le vecteur $\overrightarrow{ID,0\dot{S}}$ peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ID,0\dot{S}} &= \vec{r}_c + \Delta \vec{r}_c + \vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{d}_i + \overrightarrow{ID\dot{S}} - \left(\vec{r}_c + \vec{r}_{i,0} + \vec{d}_{i,0} \right) \\ &= \Delta \vec{r}_c + \vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{d}_i + \overrightarrow{ID\dot{S}} - \vec{d}_{i,0} - \vec{r}_{i,0}\end{aligned}\quad (3.94)$$

Il vient :

$$\|\overrightarrow{BS}\| = \|\overrightarrow{B_0I_{D,0}}\| - \left(\Delta \vec{r}_c + \vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{d}_i - \vec{d}_{i,0} - \vec{r}_{i,0} \right) \cdot \vec{n}_T - \overrightarrow{ID\dot{S}} \cdot \vec{n}_T \quad (3.95)$$

Les longueurs totales des rayons dans les configurations nominale ($l_{ij,0}$) et réelle (l_{ij}) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}l_{ij,0} &= \|\overrightarrow{B_0I_{D,0}}\| + \left(\vec{r}_{j,0} + \vec{d}_{j,0} - \vec{r}_{i,0} - \vec{d}_{i,0} \right) \cdot \vec{M}_{r_{i,0}} \cdot \vec{n}_T \\ l_{ij} &= \|\overrightarrow{B_0I_{D,0}}\| - \left(\Delta \vec{r}_c + \vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{d}_i - \vec{d}_{i,0} - \vec{r}_{i,0} \right) \cdot \vec{n}_T - \overrightarrow{ID\dot{S}} \cdot \vec{n}_T \\ &\quad + \left(\vec{r}_j + \Delta \vec{r}_j + \vec{d}_j - \vec{r}_i - \Delta \vec{r}_i - \vec{d}_i \right) \cdot \vec{M}_i \cdot \vec{n}_T + \overrightarrow{ID\dot{S}} \cdot \vec{n}_T\end{aligned}\quad (3.96)$$

La différence de marche Δl_{ij} est la différence entre les chemins optiques réel et nominal :

$$\begin{aligned}\Delta l_{ij} &= l_{ij} - l_{ij,0} \\ &= -\vec{n}_T \cdot \left(\Delta \vec{r}_c + \vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{d}_i - \vec{d}_{i,0} - \vec{r}_{i,0} \right) \\ &\quad + \vec{n}_T \cdot \vec{M}_{\vec{r}_i} \cdot \left(\vec{r}_j + \Delta \vec{r}_j + \vec{d}_j - \vec{r}_i - \Delta \vec{r}_i - \vec{d}_i \right) \\ &\quad - \vec{n}_T \cdot \vec{M}_{\vec{r}_{i,0}} \cdot \left(\vec{r}_{j,0} + \vec{d}_{j,0} - \vec{r}_{i,0} - \vec{d}_{i,0} \right)\end{aligned}\quad (3.97)$$

Cette expression de Δl_{ij} ne fait intervenir que des variables connues, c'est-à-dire les propriétés géométriques de la formation nominale et les déplacements et dépointages de la formation réelle par rapport à la formation nominale.

Maintenant, il faut encore traduire l'Éq. (3.97) en notation matricielle pour pouvoir l'utiliser plus tard. Nous projetons alors tous les vecteurs dans le repère inertiel \mathcal{F}_I , par exemple $\vec{d}_j = \mathcal{F}_I^T C_0 C_c \Delta C_c C_j \Delta C_j d_j$:

$$\begin{aligned}\Delta l_{ij} &= -n_T^T C_0 (\Delta r_c + C_c \Delta C_c r_i + C_c \Delta C_c \Delta r_i + C_c \Delta C_c C_i \Delta C_i d_i - C_c C_i d_i - C_c r_i) \\ &\quad + n_T^T C_0 C_c \Delta C_c C_i \Delta C_i M_i \Delta C_i^T C_i^T (r_j + \Delta r_j + C_j \Delta C_j d_j - r_i - \Delta r_i - C_i \Delta C_i d_i) \\ &\quad - n_T^T C_0 C_c C_i M_i C_i^T (r_j + C_j d_j - r_i - C_i d_i)\end{aligned}\quad (3.98)$$

La linéarisation s'effectue, comme celle de la dynamique, en remplaçant les matrices de passage commençant par Δ par leurs expressions linéarisées, comme par exemple :

$$\Delta C_i \approx I_3 + \Delta \theta_i^\times \quad (3.99)$$

En outre, tous les termes d'ordre supérieur en Δ sont négligés.

L'expression linéaire de Δl_{ij} devient maintenant :

$$\begin{aligned}\Delta l_{ij} &= -n_T^T C_0 [\Delta r_c - C_c (r_i + C_i d_i)^\times \Delta \theta_c + C_c \Delta r_i - C_c C_i d_i^\times \Delta \theta_i] \\ &\quad + n_T^T C_0 C_c C_i M_i C_i^T (\Delta r_j - C_j d_j^\times \Delta \theta_j - \Delta r_i + C_i d_i^\times \Delta \theta_i) \\ &\quad + n_T^T C_0 C_c C_i M_i C_i^T (r_j + C_j d_j - r_i - C_i d_i)^\times C_i [(I_3 - M_i) \Delta \theta_i - M_i C_i^T \Delta \theta_c] \\ &= -n_T^T C_0 [\Delta r_c - C_c (r_i + C_i d_i)^\times \Delta \theta_c + C_c \Delta r_i - C_c C_i d_i^\times \Delta \theta_i] \\ &\quad + n_T^T C_0 C_c C_i M_i C_i^T (\Delta r_j - C_j d_j^\times \Delta \theta_j - \Delta r_i + C_i d_i^\times \Delta \theta_i)\end{aligned}\quad (3.100)$$

L'expression $n_T^T C_0 C_c C_i M_i C_i^T (r_j + C_j d_j - r_i - C_i d_i)^\times$ s'annule car $n_T^T C_0 C_c C_i M_i C_i^T$ et $r_j + C_j d_j - r_i - C_i d_i$ sont linéairement dépendants. L'Éq. (3.100) ne dépend donc que des déplacements Δr_c , Δr_i et Δr_j et des dépointages $\Delta \theta_c$, $\Delta \theta_i$ et $\Delta \theta_j$.

Comme le but initial était de déterminer la différence de marche entre les deux faisceaux lumineux reflétés par les deux miroirs sur les vaisseaux sidérostas, nous devons encore écrire la différence de marche par rapport à la configuration nominale du sidérostas k :

$$\begin{aligned}\Delta l_{kj} &= -n_T^T C_0 [\Delta r_c - C_c (r_k + C_k d_k)^\times \Delta \theta_c + C_c \Delta r_k - C_c C_k d_k^\times \Delta \theta_k] \\ &\quad + n_T^T C_0 C_c C_k M_k C_k^T (\Delta r_j - C_j d_j^\times \Delta \theta_j - \Delta r_k + C_k d_k^\times \Delta \theta_k)\end{aligned}\quad (3.101)$$

La différence des deux différences de marche Δl_{kj} et Δl_{ij} nous donne l'expression pour la différence

de marche totale z_{DDM} :

$$\begin{aligned}
 z_{\text{DDM}} &= \Delta l_{kj} - \Delta l_{ij} & (3.102) \\
 &= -n_T^T C_0 C_c \left[-(r_k + C_k d_k)^\times \Delta \theta_c + \Delta r_k - C_k d_k^\times \Delta \theta_k \right] \\
 &\quad + n_T^T C_0 C_c C_k M_k C_k^T (\Delta r_j - C_j d_j^\times \Delta \theta_j - \Delta r_k + C_k d_k^\times \Delta \theta_k) \\
 &\quad + n_T^T C_0 C_c \left[-(r_i + C_i d_i)^\times \Delta \theta_c + \Delta r_i - C_i d_i^\times \Delta \theta_i \right] \\
 &\quad - n_T^T C_0 C_c C_i M_i C_i^T (\Delta r_j - C_j d_j^\times \Delta \theta_j - \Delta r_i + C_i d_i^\times \Delta \theta_i)
 \end{aligned}$$

Nous constatons que Δr_c a disparu, c'est-à-dire qu'un déplacement de la formation entière n'a pas d'effet sur la différence de marche. Ce fait reflète la réalité car un déplacement de la formation entière correspondrait à un déplacement du front d'onde. Or, nous avons jamais fixé la position exacte du front d'onde.

3.9.2 Dépointages

Dépointage inertiel d'un vaisseau

Le dépointage inertiel du vaisseau i est la différence entre les attitudes réelle \mathcal{F}_i et nominale $\mathcal{F}_{i,0}$, comme le montre la FIG. 3.13.

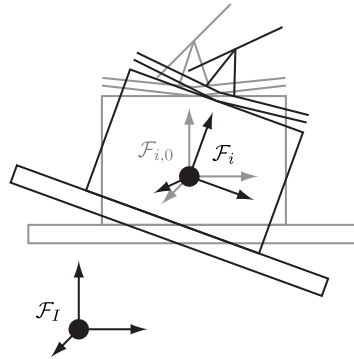


FIGURE 3.13 – Principe du dépointage inertiel d'un vaisseau

Comme la paramétrisation de l'attitude n'existe qu'en notation matricielle, nous utiliserons cette notation directement, sans passer par la notation vectorielle. Les attitudes réelle \mathcal{F}_i et nominale $\mathcal{F}_{i,0}$ du vaisseau i sont toujours exprimées par rapport au repère inertiel \mathcal{F}_I et donc par un enchaînement des matrices de passage à partir du repère \mathcal{F}_I jusqu'au repère \mathcal{F}_i et $\mathcal{F}_{i,0}$, respectivement. En configuration nominale, il vient :

$$\mathcal{F}_I = C_0 C_c C_i \mathcal{F}_{i,0} \quad (3.103)$$

En configuration réelle, l'enchaînement de matrices de passage est le suivant :

$$\mathcal{F}_I = C_0 C_c \Delta C_c C_i \Delta C_i \mathcal{F}_i \quad (3.104)$$

Le dépointage entre les attitudes nominale et réelle peut être exprimé sous forme de matrice de

passage comme suit :

$$\begin{aligned}
Z_{\text{dép, in, } i} &= \mathcal{F}_{i,0} \cdot \mathcal{F}_i^T & (3.105) \\
&= (C_0 C_c C_i)^T \mathcal{F}_I \cdot \mathcal{F}_I^T (C_0 C_c \Delta C_c C_i \Delta C_i) \\
&= (C_0 C_c C_i)^T (C_0 C_c \Delta C_c C_i \Delta C_i) \\
&= C_i^T \Delta C_c C_i \Delta C_i
\end{aligned}$$

En configuration nominale, c'est-à-dire sans dépointage, la matrice de passage qui indique le dépointage est la matrice d'identité :

$$Z_{\text{dép, in, } i, 0} = I_3 \quad (3.106)$$

Pour linéariser l'Éq. (3.105), nous remplaçons les matrices de passage ΔC_c et ΔC_i par leurs représentations aux petits angles $I_3 + \Delta\theta_c^\times$ et $I_3 + \Delta\theta_i^\times$ et la diminuons de la matrice d'identité :

$$\begin{aligned}
Z_{\text{dép, in, } i} &= C_i^T (I_3 + \Delta\theta_c^\times) C_i (I_3 + \Delta\theta_i^\times) - I_3 & (3.107) \\
&= C_i^T \Delta\theta_c^\times C_i + \Delta\theta_i^\times \\
&= (C_i^T \Delta\theta_c + \Delta\theta_i)^\times
\end{aligned}$$

Pour des rotations finies, il est impossible d'exprimer le dépointage sous forme d'une matrice colonne. Or, nous avons la possibilité dans le cas de rotations infinitésimales. Nous remplaçons simplement la matrice antisymétrique $(C_i^T \Delta\theta_c + \Delta\theta_i)^\times$ par la matrice colonne associée :

$$z_{\text{dép, in, } i} = C_i^T \Delta\theta_c + \Delta\theta_i \quad (3.108)$$

Cette expression est linéaire en les états $\Delta\theta_c$ et $\Delta\theta_i$. Elle est exprimée dans le repère nominal $\mathcal{F}_{i,0}$ du vaisseau i . Nous observons que les angles interviennent à deux niveaux, au niveau de la formation ($\Delta\theta_c$) et au niveau du vaisseau i ($\Delta\theta_i$). Cette redondance est supprimée de la même manière que celle de la dynamique, notamment en choisissant une structure hiérarchique.

Dépointage inertiel de la formation

Le dépointage inertiel de la formation entière est illustré dans la FIG. 3.14. Ici, on ne s'occupe pas du dépointage des vaisseaux individuels, mais uniquement du dépointage du repère \mathcal{F}_c lié à la formation réelle par rapport au repère $\mathcal{F}_{c,0}$ lié à la formation nominale.

La dérivation de l'expression du dépointage est similaire à celle dans la section précédente. La matrice de passage entre le repère inertiel \mathcal{F}_I et celui de la formation en configuration nominale $\mathcal{F}_{c,0}$ s'écrit comme suit :

$$\mathcal{F}_I = C_0 C_c \mathcal{F}_{c,0} \quad (3.109)$$

La matrice de passage entre le repère inertiel \mathcal{F}_I et celui de la formation en configuration réelle \mathcal{F}_c est la suivante :

$$\mathcal{F}_I = C_0 C_c \Delta C_c \mathcal{F}_c \quad (3.110)$$

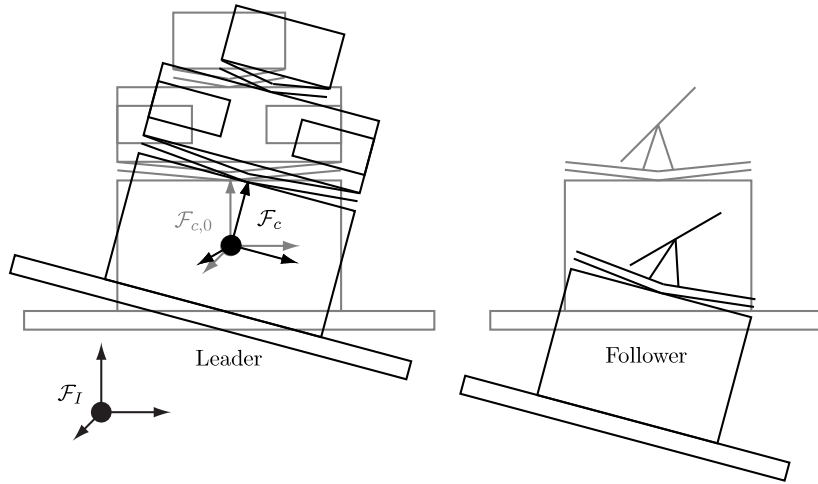


FIGURE 3.14 – Principe du dépointage du leader/de la formation entière

La matrice de passage décrivant le dépointage peut être écrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{dép, in, c}} &= \mathcal{F}_{c,0} \cdot \mathcal{F}_c^T & (3.111) \\
 &= (C_0 C_c)^T \mathcal{F}_I \cdot \mathcal{F}_I^T (C_0 C_c \Delta C_c) \\
 &= (C_0 C_c)^T (C_0 C_c \Delta C_c) \\
 &= \Delta C_c
 \end{aligned}$$

L'expression linéarisée devient :

$$z_{\text{dép, in, c}} = \Delta \theta_c \quad (3.112)$$

Les deux dernières équations sont exprimées dans le repère nominal $\mathcal{F}_{c,0}$ de la formation. Dans l'expression linéaire, seulement l'état $\Delta \theta_c$ apparaît.

Dépointage relatif d'un vaisseau par rapport à la formation

La FIG. 3.15 illustre le dépointage relatif d'un vaisseau i par rapport à la formation, qui correspond à la matrice de passage entre le repère nominal $\mathcal{F}_{i,0}$ du vaisseau i et son repère réel \mathcal{F}_i .

Comme les calculs sont similaires à ceux des sections précédentes, nous citerons seulement les résultats (exprimés dans le repère $\mathcal{F}_{i,0}$ nominal du vaisseau i) :

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{dép, rel, i}} &= \Delta C_i & (3.113) \\
 z_{\text{dép, rel, i}} &= \Delta \theta_i
 \end{aligned}$$

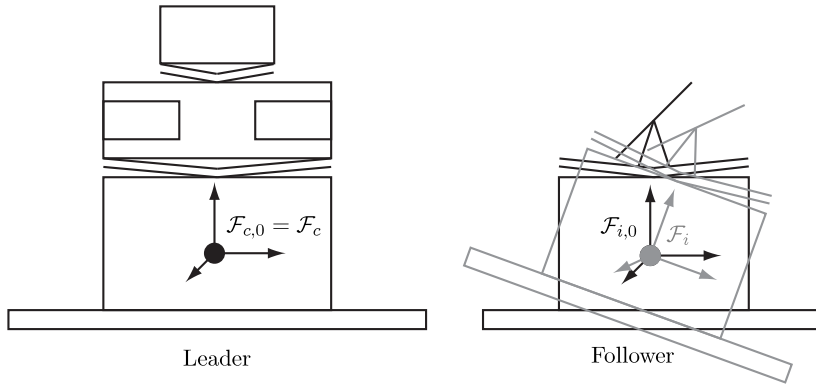


FIGURE 3.15 – Principe du dépointage du follower vis-à-vis du leader

Dépointage relatif d'un vaisseau par rapport à un autre vaisseau

Le dépointage relatif d'un vaisseau j par rapport à un autre vaisseau i est illustré dans la FIG. 3.16.

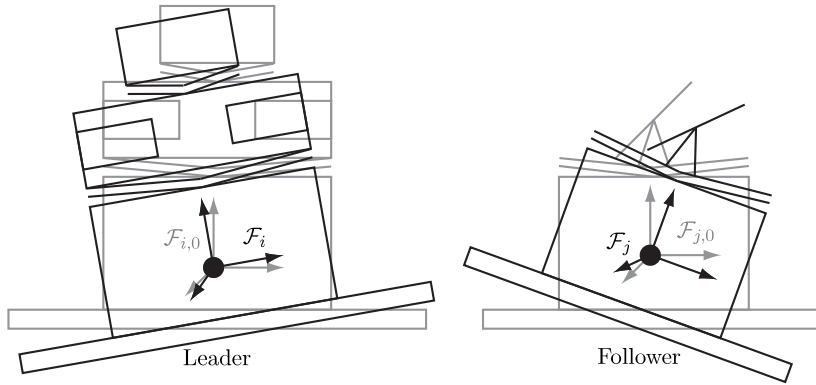


FIGURE 3.16 – Principe du dépointage relatif d'un vaisseau par rapport à un autre vaisseau

Ce dépointage peut être décrit par la matrice de passage entre le repère \mathcal{F}_i et le repère \mathcal{F}_j :

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{dép,rel},ji} &= \mathcal{F}_i \cdot \mathcal{F}_j^T & (3.114) \\
 &= (C_i \Delta C_i)^T \mathcal{F}_c \cdot \mathcal{F}_c^T (C_j \Delta C_j) \\
 &= (C_i \Delta C_i)^T (C_j \Delta C_j) \\
 &= \Delta C_i^T C_i^T C_j \Delta C_j
 \end{aligned}$$

Après la linéarisation, il vient :

$$z_{\text{dép},ji} = C_i^T C_j (\Delta \theta_j - C_j^T C_i \Delta \theta_i) \quad (3.115)$$

Cette relation est exprimée dans le repère \mathcal{F}_i .

3.9.3 Senseur stellaire

La mesure d'un senseur stellaire (SST) est similaire au dépointage inertiel d'un vaisseau. La seule différence est l'expression de la mesure dans un repère $\mathcal{F}_{i,SST}$ lié au senseur stellaire, comme le montre la FIG. 3.17.

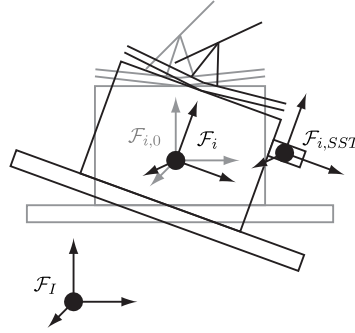


FIGURE 3.17 – Principe d'un senseur stellaire

Le passage entre le repère \mathcal{F}_i lié au vaisseau et le repère $\mathcal{F}_{i,SST}$ lié au senseur stellaire est défini comme suit :

$$\mathcal{F}_i \cdot \mathcal{F}_{i,SST}^T = C_{i,SST} \quad (3.116)$$

Par conséquent, il suffit de prémultiplier les expressions obtenues pour le dépointage inertiel d'un vaisseau (Éqs. (3.107) et (3.108)) avec la matrice de passage $C_{i,SST}^T$ pour obtenir les équations de mesure d'un senseur stellaire en non-linéaire

$$Y_{i,SST} = [C_{i,SST}^T (C_i^T \Delta\theta_c + \Delta\theta_i)]^x \quad (3.117)$$

et en linéaire

$$y_{i,SST} = C_{i,SST}^T (C_i^T \Delta\theta_c + \Delta\theta_i), \quad (3.118)$$

respectivement.

3.9.4 Capteur d'incidence du faisceau optique

Ce capteur est en général appelé *field relative angle sensor* ou *fine relative angle sensor* (FRAS), cependant la littérature est floue sur le terme exact. Il mesure l'angle d'incidence du faisceau optique émanant de l'objet observé, réfléchi par le miroir du sidérostatis et intercepté par la charge utile du recombineur. Le faisceau passe d'abord par le télescope du recombineur qui réduit son diamètre. Puis, le faisceau réduit est, grâce à une lentille convexe, focalisé sur un capteur photographique qui se trouve dans le plan focal de la lentille.

La FIG. 3.18 montre le principe de fonctionnement de ce capteur. Nous utilisons pour la modélisation un télescope de KEPLER qui consiste en deux lentilles minces, convexes et parallèles avec le même point focal Q.

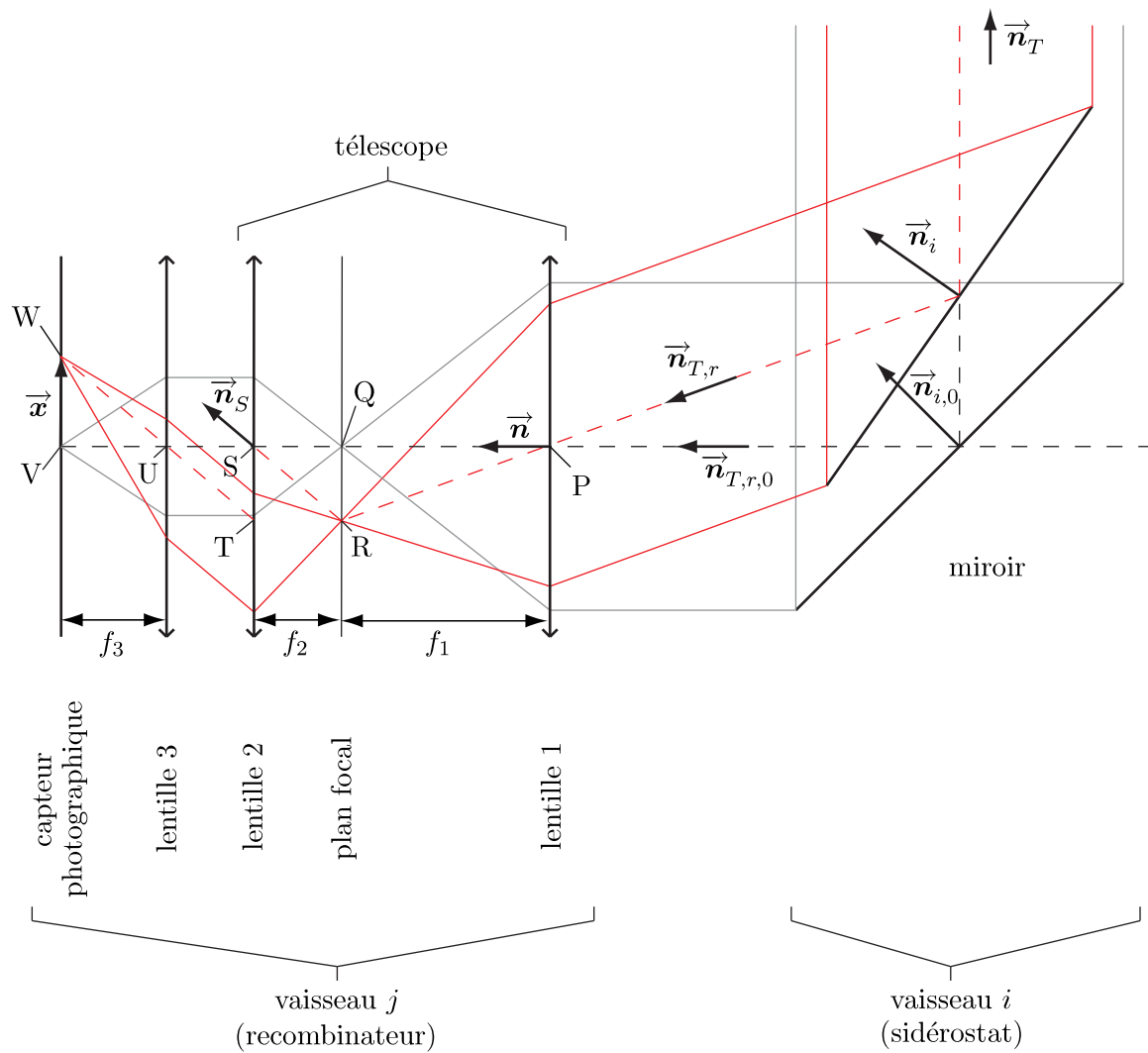


FIGURE 3.18 – Principe du capteur d'incidence du faisceau optique (FRAS)

En réalité, un télescope de CASSEGRAIN⁶ avec deux miroirs est utilisé pour des raisons d'encombrement et de poids. Nous montrerons à la fin de cette section l'analogie entre les deux types de télescope.

Nous établirons d'abord, comme nous l'avons fait pour la différence de marche optique, les expressions en notation vectorielle avant de les projeter dans des repères concrets.

La direction $\vec{n}_{T,r}$ du faisceau lumineux en configuration réelle peut être obtenue grâce au vecteur normal \vec{n}_i du miroir et à la direction \vec{n}_T de la cible :

$$\vec{n}_{T,r} = (2\vec{n}_i \otimes \vec{n}_i - \vec{\mathbf{1}}) \cdot \vec{n}_T = \vec{M}_i \cdot \vec{n}_T \quad (3.119)$$

Nous rappelons qu'un faisceau parallèle traversant une lentille convexe est concentré dans un point dans le plan focal. Nous appelons R ce point de concentration. Sa position par rapport au centre P de la lentille 1 peut être déterminée comme suit. Le rayon central, c'est-à-dire le rayon du faisceau passant par le centre P de la lentille 1, intersecte le plan focal au point R. Le vecteur \vec{PR} est alors parallèle au vecteur $\vec{n}_{T,r}$:

$$\vec{PR} = \|\vec{PR}\| \vec{n}_{T,r} \quad (3.120)$$

La longueur $\|\vec{PR}\|$ s'écrit, à l'aide du triangle rectangle PQR, comme suit :

$$\|\vec{PR}\| = \frac{\|\vec{PQ}\|}{\vec{n}_{T,r} \cdot \vec{n}} = \frac{f_1}{\vec{n}_{T,r} \cdot \vec{n}} \quad (3.121)$$

Ici, \vec{n} est le vecteur indiquant la direction de l'axe optique des lentilles. Il vient pour le vecteur \vec{PR} :

$$\vec{PR} = \frac{f_1}{\vec{n}_{T,r} \cdot \vec{n}} \vec{n}_{T,r} \quad (3.122)$$

Le vecteur \vec{RS} est d'une grande importance car il représente le rayon central, c'est-à-dire le rayon passant par le centre de la lentille 2 :

$$\vec{RS} = \vec{PQ} + \vec{QS} - \vec{PR} \quad (3.123)$$

$$= \|\vec{PQ}\| \vec{n} + \|\vec{QS}\| \vec{n} - \vec{PR} \quad (3.124)$$

$$= (f_1 + f_2) \vec{n} - \frac{f_1}{\vec{n}_{T,r} \cdot \vec{n}} \vec{n}_{T,r} \quad (3.125)$$

La direction \vec{n}_S du rayon central peut maintenant être établie :

$$\vec{n}_S = \frac{\vec{RS}}{\|\vec{RS}\|} \quad (3.126)$$

Entre les deux lentilles 2 et 3, les rayons sont parallèles et suivent la direction \vec{n}_S . Nous savons

6. Laurent CASSEGRAIN (1629 – 1693), prêtre et scientifique français

que le rayon central donné par le vecteur \overrightarrow{UW} a la même direction \vec{n}_S . Il vient alors pour \overrightarrow{UW} :

$$\overrightarrow{UW} = \|\overrightarrow{UW}\| \vec{n}_S \quad (3.127)$$

Le triangle rectangle UVW nous permet de trouver la longueur $\|\overrightarrow{UW}\|$ du vecteur \overrightarrow{UW} :

$$\|\overrightarrow{UW}\| = \frac{\|\overrightarrow{UV}\|}{\vec{n}_S \cdot \vec{n}} = \frac{f_3}{\vec{n}_S \cdot \vec{n}} \quad (3.128)$$

Le vecteur \overrightarrow{UW} peut alors être écrit :

$$\overrightarrow{UW} = \frac{f_3 \vec{n}_S}{\vec{n}_S \cdot \vec{n}} \quad (3.129)$$

Le vecteur \overrightarrow{UV} est défini comme suit :

$$\overrightarrow{UV} = f_3 \vec{n} \quad (3.130)$$

Nous nous intéressons essentiellement au déplacement $\vec{x} = \overrightarrow{VW}$ dans le plan du capteur photographique du point W dans lequel est concentré le faisceau optique par rapport au centre C. Nous pouvons écrire :

$$\vec{x} = \overrightarrow{VW} = \overrightarrow{UW} - \overrightarrow{UV} \quad (3.131)$$

Grâce aux relations précédemment obtenues, nous pouvons formuler le vecteur \vec{x} en fonction des grandeurs connues :

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \frac{f_3 \vec{n}_S}{\vec{n}_S \cdot \vec{n}} - f_3 \vec{n} = f_3 \left(\frac{\vec{n}_S}{\vec{n}_S \cdot \vec{n}} - \vec{n} \right) \quad (3.132) \\ &= f_3 \left(\frac{\overrightarrow{RS}}{\overrightarrow{RS} \cdot \vec{n}} - \vec{n} \right) \\ &= f_3 \left(\frac{(f_1 + f_2) \vec{n} - \frac{f_1}{\vec{n}_{T,r} \cdot \vec{n}} \vec{n}_{T,r}}{\left[(f_1 + f_2) \vec{n} - \frac{f_1}{\vec{n}_{T,r} \cdot \vec{n}} \vec{n}_{T,r} \right] \cdot \vec{n}} - \vec{n} \right) \\ &= f_3 \left(\frac{(f_1 + f_2) \vec{n} - \frac{f_1}{\vec{n}_{T,r} \cdot \vec{n}} \vec{n}_{T,r}}{\left[f_1 + f_2 - \frac{f_1 \vec{n}_{T,r} \cdot \vec{n}}{\vec{n}_{T,r} \cdot \vec{n}} \right]} - \vec{n} \right) \\ &= f_3 \left(\frac{f_1 + f_2}{f_2} \vec{n} - \frac{f_1}{f_2} \frac{1}{\vec{n}_{T,r} \cdot \vec{n}} \vec{n}_{T,r} - \vec{n} \right) \\ &= \frac{f_1 f_3}{f_2} \left(\vec{n} - \frac{1}{\vec{n}_{T,r} \cdot \vec{n}} \vec{n}_{T,r} \right) \\ &= \frac{f_1 f_3}{f_2} \left(\vec{n} - \frac{1}{\vec{n}_T \cdot \vec{M}_i \cdot \vec{n}} \vec{M}_i \vec{n}_T \right) \end{aligned}$$

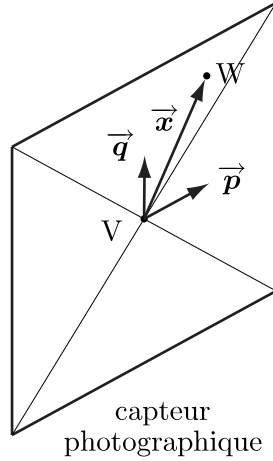


FIGURE 3.19 – Capteur photographique

Le vecteur \vec{x} étant compris dans le plan du capteur photographique, nous mesurons en réalité deux distances dans ce plan. La FIG. 3.19 montre le principe. Les vecteurs unitaires \vec{p} et \vec{q} indiquent les deux axes du capteur. Il vient pour les deux distances x_p et x_q :

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{f_1 f_3}{f_2} \vec{p} \cdot \left(\vec{n} - \frac{1}{\vec{n}_T \cdot \vec{M}_{\rightarrow i} \cdot \vec{n}} \vec{M}_{\rightarrow i} \vec{n}_T \right) \\ x_q &= \frac{f_1 f_3}{f_2} \vec{q} \cdot \left(\vec{n} - \frac{1}{\vec{n}_T \cdot \vec{M}_{\rightarrow i} \cdot \vec{n}} \vec{M}_{\rightarrow i} \vec{n}_T \right) \end{aligned} \quad (3.133)$$

Nous supposons que le plan du capteur photographique est orthogonal à l'axe optique, c'est-à-dire :

$$\vec{p} \cdot \vec{n} = \vec{q} \cdot \vec{n} = 0 \quad (3.134)$$

Les nouvelles expressions pour x_p et x_q s'écrivent :

$$\begin{aligned} x_p &= -\frac{f_1 f_3}{f_2} \frac{\vec{p} \cdot \vec{M}_{\rightarrow i} \vec{n}_T}{\vec{n} \cdot \vec{M}_{\rightarrow i} \cdot \vec{n}_T} \\ x_q &= -\frac{f_1 f_3}{f_2} \frac{\vec{q} \cdot \vec{M}_{\rightarrow i} \vec{n}_T}{\vec{n} \cdot \vec{M}_{\rightarrow i} \cdot \vec{n}_T} \end{aligned} \quad (3.135)$$

Les vecteurs \vec{n} , \vec{p} et \vec{q} étant liés au satellite recombineur j , ils sont exprimés simplement dans le repère \mathcal{F}_j . Le vecteur \vec{n}_i et la dyade $\vec{M}_{\rightarrow i}$ sont exprimés dans le repère \mathcal{F}_i et le vecteur \vec{n}_T dans le repère inertiel \mathcal{F}_I . En notation matricielle, il vient :

$$\begin{aligned} x_p &= -\frac{f_1 f_3}{f_2} \frac{p^T \Delta C_j^T C_j^T C_i \Delta C_i M_i \Delta C_i^T C_i^T \Delta C_c^T C_c^T C_0^T n_T}{n^T \Delta C_j^T C_j^T C_i \Delta C_i M_i \Delta C_i^T C_i^T \Delta C_c^T C_c^T C_0^T n_T} \\ x_q &= -\frac{f_1 f_3}{f_2} \frac{q^T \Delta C_j^T C_j^T C_i \Delta C_i M_i \Delta C_i^T C_i^T \Delta C_c^T C_c^T C_0^T n_T}{n^T \Delta C_j^T C_j^T C_i \Delta C_i M_i \Delta C_i^T C_i^T \Delta C_c^T C_c^T C_0^T n_T} \end{aligned} \quad (3.136)$$

En combinant ces deux expressions, nous pouvons écrire la mesure non-linéaire Y_{FRAS} du capteur d'incidence du faisceau optique comme suit :

$$Y_{FRAS} = -\frac{f_1 f_3}{f_2} (p \ q)^T \frac{\Delta C_j^T C_j^T C_i \Delta C_i M_i \Delta C_i^T C_i^T \Delta C_c^T C_c^T C_0^T n_T}{n^T \Delta C_j^T C_j^T C_i \Delta C_i M_i \Delta C_i^T C_i^T \Delta C_c^T C_c^T C_0^T n_T} \quad (3.137)$$

En linéaire, Y_{FRAS} est petit, c'est-à-dire du même ordre de grandeur que les variables commençant par Δ , et nous pouvons donc négliger ces dernières apparaissant dans le dénominateur :

$$Y_{FRAS} \approx -\frac{f_1 f_3}{f_2} (p \ q)^T \frac{\Delta C_j^T C_j^T C_i \Delta C_i M_i \Delta C_i^T C_i^T \Delta C_c^T C_c^T C_0^T n_T}{n^T C_j^T C_i M_i C_i^T C_c^T C_0^T n_T} \quad (3.138)$$

En outre, les vecteurs \vec{n} et $\vec{n}_{T,r}$ sont identiques en configuration nominale ($C_j^T C_i M_i C_i^T C_c^T C_0^T n_T = n$). Il vient :

$$Y_{FRAS} = -\frac{f_1 f_3}{f_2} (p \ q)^T \Delta C_j^T C_j^T C_i \Delta C_i M_i \Delta C_i^T C_i^T \Delta C_c^T C_c^T C_0^T n_T \quad (3.139)$$

La linéarisation autour de la configuration nominale fournit :

$$\begin{aligned} y_{FRAS} &= -\frac{f_1 f_3}{f_2} (p \ q)^T (-\Delta \theta_j^\times C_j^T C_i M_i C_i^T + C_j^T C_i \Delta \theta_i^\times M_i C_i^T \\ &\quad - C_j^T C_i M_i \Delta \theta_i^\times C_i^T - C_j^T C_i M_i C_i^T) C_c^T C_0^T n_T \\ &= -\frac{f_1 f_3}{f_2} (p \ q)^T (C_j^T C_i M_i C_i^T C_c^T C_0^T n_T)^\times \\ &\quad \cdot [\Delta \theta_j + C_j^T C_i (M_i - I_3) \Delta \theta_i + C_j^T C_i M_i C_i^T \Delta \theta_c] \\ &= -\frac{f_1 f_3}{f_2} (p \ q)^T n^\times [\Delta \theta_j + C_j^T C_i (M_i - I_3) \Delta \theta_i + C_j^T C_i M_i C_i^T \Delta \theta_c] \end{aligned} \quad (3.140)$$

Pour conclure cette section, nous montrons l'analogie entre les télescopes de KEPLER (deux lentilles convergentes) et de CASSEGRAIN, cf. FIG. 3.20. Il est important de noter que la déviation du faisceau lumineux par un télescope de CASSEGRAIN va dans le sens opposée de celle d'un télescope de KEPLER.

Au niveau des équations développées, les distances focales f_1 et f_2 du télescope de KEPLER ont leur correspondance dans les distances focales f'_1 et f'_2 du télescope de CASSEGRAIN :

$$\begin{aligned} f'_1 &= -f_1 \\ f'_2 &= f_2 \end{aligned} \quad (3.141)$$

La différence de signe entre f_1 et f'_1 traduit à la fois le fait de la déviation inverse par rapport au télescope de KEPLER et le fait que le petit miroir se comporte comme une lentille convexe (le faisceau divergent venant du foyer virtuel devient un faisceau parallèle), tandis que le grand miroir a le comportement d'une lentille convexe plus un miroir plan (concentration d'un faisceau parallèle dans un foyer du même côté du miroir).

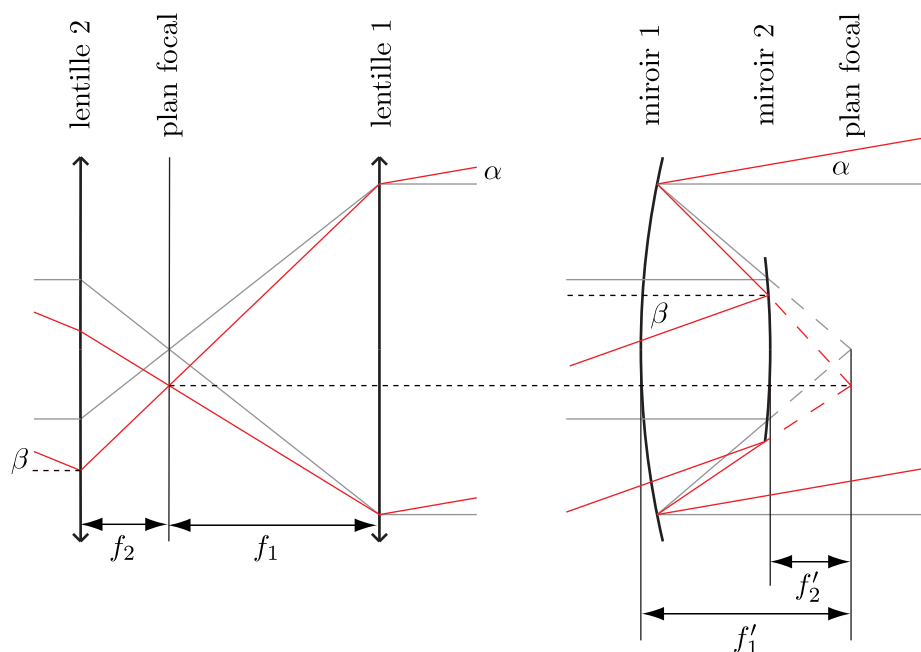


FIGURE 3.20 – Analogie entre les télescopes de KEPLER (à gauche) et de CASSEGRAIN (à droite)

3.9.5 Capteur latéral fin

Le capteur latéral fin consiste en deux parties. Une source laser sur le vaisseau j envoie un faisceau laser cohérent vers un capteur photographique, par exemple un CCD (*angl.* charged coupled device, *fr.* détecteur à couplage de charge). Ce capteur est capable de mesurer la position du point d'interception du faisceau laser comme l'indique la FIG. 3.21 (page 114). Plus de détails sont disponibles dans le papier de CALVEL et al. [30].

L'établissement de l'équation de mesure est similaire à celle de la différence de marche optique. Nous considérerons d'abord la formation en configuration nominale avant de traiter le cas de la configuration réelle.

En configuration nominale, le vecteur $\overrightarrow{J_{D,0}I_{D,0}}$ qui relie la position $J_{D,0}$ de la source laser avec le centre $I_{D,0}$ du capteur photographique s'écrit :

$$\overrightarrow{J_{D,0}I_{D,0}} = \vec{r}_{i,0} + \vec{d}_{i,0} - \vec{r}_{j,0} - \vec{d}_{j,0} \quad (3.142)$$

En configuration réelle, le vecteur $\overrightarrow{J_D\vec{S}}$, qui relie la source laser J_D avec le point S où le laser rencontre le capteur photographique, peut être calculé comme suit :

$$\overrightarrow{J_D\vec{S}} = \vec{r}_i + \Delta\vec{r}_i + \vec{d}_i - \vec{r}_j - \Delta\vec{r}_j - \vec{d}_j + \overrightarrow{I_D\vec{S}} \quad (3.143)$$

Les direction du faisceau laser en configurations nominale et réelle sont données par les vecteurs unitaires $\vec{n}_{j,0}$ et \vec{n}_j , respectivement. Les plans du capteur photographique en configurations nominale et réelle sont donnés par les vecteurs normaux et unitaires $\vec{n}_{i,0}$ et \vec{n}_i , respectivement. Le vecteur $\overrightarrow{J_{D,0}I_{D,0}}$ est aligné avec les vecteurs $\vec{n}_{i,0}$ et $\vec{n}_{j,0}$.

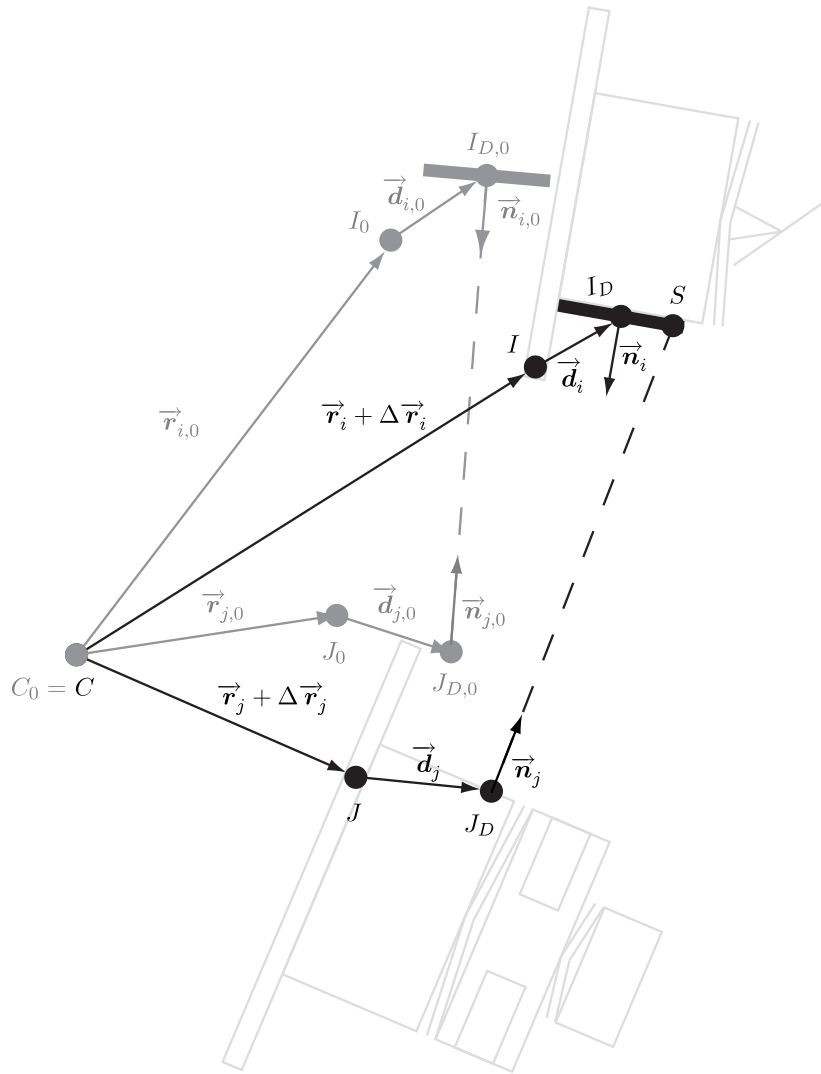


FIGURE 3.21 – Principe du capteur latéral fin

Le but est maintenant de déterminer le déplacement du point d'interception du laser par rapport au centre du capteur photographique, $\overrightarrow{I_D S}$. Comme le vecteur unitaire $\overrightarrow{n_j}$ est aligné avec le vecteur $\overrightarrow{J_D S}$, nous pouvons écrire l'équation suivante :

$$\overrightarrow{J_D S} = \|\overrightarrow{J_D S}\| \overrightarrow{n_j} \quad (3.144)$$

La combinaison des deux dernières équations nous permet d'obtenir une expression pour le vecteur $\overrightarrow{I_D S}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{I_D S} &= \overrightarrow{J_D S} - \overrightarrow{r_i} - \Delta \overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{d_i} + \overrightarrow{r_j} + \Delta \overrightarrow{r_j} + \overrightarrow{d_j} \\ &= \|\overrightarrow{J_D S}\| \overrightarrow{n_j} - \overrightarrow{r_i} - \Delta \overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{d_i} + \overrightarrow{r_j} + \Delta \overrightarrow{r_j} + \overrightarrow{d_j} \end{aligned} \quad (3.145)$$

$\overrightarrow{I_D \hat{S}}$ se trouve dans le plan du capteur photographique. Par conséquent, le produit scalaire entre $\overrightarrow{I_D \hat{S}}$ et \vec{n}_i s'annule :

$$0 = \vec{n}_i \cdot \overrightarrow{I_D \hat{S}} = \vec{n}_i \cdot \left(\|\overrightarrow{J_D \hat{S}}\| \vec{n}_i - \vec{r}_i - \Delta \vec{r}_i - \vec{d}_i + \vec{r}_j + \Delta \vec{r}_j + \vec{d}_j \right) \quad (3.146)$$

Ceci nous permet d'obtenir la longueur du vecteur $\overrightarrow{J_D \hat{S}}$:

$$\|\overrightarrow{J_D \hat{S}}\| = \frac{\vec{n}_i \cdot \left(\vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{d}_i - \vec{r}_j - \Delta \vec{r}_j - \vec{d}_j \right)}{\vec{n}_j \cdot \vec{n}_i} \quad (3.147)$$

Le vecteur $\overrightarrow{J_D \hat{S}}$ devient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{J_D \hat{S}} &= \frac{\vec{n}_i \cdot \left(\vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{d}_i - \vec{r}_j - \Delta \vec{r}_j - \vec{d}_j \right)}{\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j} \vec{n}_j \\ &= \frac{\vec{n}_j \otimes \vec{n}_i}{\vec{n}_j \cdot \vec{n}_i} \cdot \left(\vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{d}_i - \vec{r}_j - \Delta \vec{r}_j - \vec{d}_j \right) \end{aligned} \quad (3.148)$$

Finalement, nous avons toutes les informations nécessaires pour écrire le vecteur $\vec{x} = \overrightarrow{I_D \hat{S}}$:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \overrightarrow{I_D \hat{S}} = \left(\frac{\vec{n}_j \otimes \vec{n}_i}{\vec{n}_j \cdot \vec{n}_i} - \vec{1} \right) \cdot \left(\vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{d}_i - \vec{r}_j - \Delta \vec{r}_j - \vec{d}_j \right) \\ &= \left(\frac{\vec{n}_j \otimes \vec{n}_i - (\vec{n}_j \cdot \vec{n}_i) \vec{1}}{\vec{n}_j \cdot \vec{n}_i} \right) \cdot \left(\vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{d}_i - \vec{r}_j - \Delta \vec{r}_j - \vec{d}_j \right) \\ &= \frac{\vec{n}_i \wedge \left[\vec{n}_j \wedge \left(\vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{d}_i - \vec{r}_j - \Delta \vec{r}_j - \vec{d}_j \right) \right]}{\vec{n}_j \cdot \vec{n}_i} \end{aligned} \quad (3.149)$$

La mesure proprement dite n'est pas le vecteur \vec{x} , mais les deux distances dans le plan du capteur photographique. Pour cela, nous utilisons la même approche (c'est-à-dire des vecteurs \vec{p} et \vec{q} définissant les deux directions) que pour le capteur d'incidence du faisceau optique, cf. FIG. 3.19 (page 111) :

$$\begin{aligned} x_p &= \vec{p} \cdot \vec{x} = \vec{p} \cdot \frac{\vec{n}_i \wedge \left[\vec{n}_j \wedge \left(\vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{d}_i - \vec{r}_j - \Delta \vec{r}_j - \vec{d}_j \right) \right]}{\vec{n}_j \cdot \vec{n}_i} \\ x_q &= \vec{q} \cdot \vec{x} = \vec{q} \cdot \frac{\vec{n}_i \wedge \left[\vec{n}_j \wedge \left(\vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{d}_i - \vec{r}_j - \Delta \vec{r}_j - \vec{d}_j \right) \right]}{\vec{n}_j \cdot \vec{n}_i} \end{aligned} \quad (3.150)$$

Si nous réécrivons ces expressions en notation matricielle, nous obtenons :

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{p^T n_i^\times \Delta C_i^T C_i^T (C_j \Delta C_j n_j)^\times}{n_j^T \Delta C_j^T C_j^T C_i \Delta C_i n_i} (r_i + \Delta r_i + C_i \Delta C_i d_i - r_j - \Delta r_j - C_j \Delta C_j d_j) \\ x_q &= \frac{q^T n_i^\times \Delta C_i^T C_i^T (C_j \Delta C_j n_j)^\times}{n_j^T \Delta C_j^T C_j^T C_i \Delta C_i n_i} (r_i + \Delta r_i + C_i \Delta C_i d_i - r_j - \Delta r_j - C_j \Delta C_j d_j) \end{aligned} \quad (3.151)$$

L'équation de mesure non-linéaire du capteur latéral peut être écrite en combinant les deux expressions précédentes :

$$Y_{lat,fin} = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}^T \frac{n_i^\times \Delta C_i^T C_i^T (C_j \Delta C_j n_j)^\times}{n_j^T \Delta C_j^T C_j^T C_i \Delta C_i n_i} \cdot (r_i + \Delta r_i + C_i \Delta C_i d_i - r_j - \Delta r_j - C_j \Delta C_j d_j) \quad (3.152)$$

Lors de la linéarisation, nous pouvons ignorer les variables en Δ dans le dénominateur, c'est-à-dire remplacer les occurrences de ΔC_i et ΔC_j par I_3 car nous supposons que les sorties $y_{lat,p}$ et $y_{lat,q}$ sont petites. En outre, comme les vecteurs $\vec{n}_{i,0}$ et $\vec{n}_{j,0}$ en configuration nominale sont opposés, l'identité $n_j^T C_j^T C_i n_i = -1$ est vraie. La prise en compte de ces simplifications donne :

$$Y_{lat,fin} \approx - \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}^T n_i^\times \Delta C_i^T C_i^T (C_j \Delta C_j n_j)^\times \cdot (r_i + \Delta r_i + C_i \Delta C_i d_i - r_j - \Delta r_j - C_j \Delta C_j d_j) \quad (3.153)$$

Pour la linéarisation, nous notons que l'expression $(C_j n_j)^\times (r_i + C_i d_i - r_j - C_j d_j)$ est nulle car en configuration nominale, le rayon laser vise le centre du capteur photographique. L'équation de mesure linéarisée peut donc être écrite sous la forme suivante :

$$y_{lat,fin} = - \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}^T n_i^\times C_i^T \left[(C_j n_j)^\times (\Delta r_i - C_i d_i^\times \Delta \theta_i - \Delta r_j + C_j d_j^\times \Delta \theta_j) + (r_i + C_i d_i - r_j - C_j d_j)^\times (C_j n_j)^\times C_j \Delta \theta_j \right] \quad (3.154)$$

Cette équation révèle que le capteur latéral fin ne mesure pas seulement les déplacements latéraux, comme l'indique son nom, mais également les dépointages des deux vaisseaux i et j , multipliés par des bras de levier. En particulier, l'amplification du dépointage $\Delta \theta_j$ du vaisseau j par le facteur $(r_i + C_i d_i - r_j - C_j d_j)$ peut être considérable.

3.9.6 Capteur latéral grossier

Le capteur latéral grossier consiste, comme le capteur latéral fin, en deux parties. Il existe deux versions de ce capteur qui mènent toutes les deux à la même équation de mesure.

La première possibilité est d'embarquer sur le vaisseau i une source laser qui envoie un faisceau de lumière divergente vers le vaisseau j . Là, un rétro-réflécteur (normalement un coin de cube réfléchissant) reflète la lumière dans sa direction d'origine. Ainsi, le rayon réfléchi au sommet du coin de cube est intercepté à l'endroit de la source laser et le sommet agit lui-même comme une source ponctuelle de lumière. L'incidence de ce rayon peut être mesurée sur le vaisseau i grâce à une lentille convexe dans le plan focal de laquelle se trouve un capteur photographique.

La deuxième possibilité est de mettre une source laser ponctuelle sur le vaisseau j , par exemple une diode laser. Celle-ci correspond exactement au sommet du rétro-réflécteur. Les autres dispositifs sont équivalents à la première possibilité mentionnée.

La FIG. 3.22 montre le principe du capteur latéral grossier. Nous n'avons pas répété tous les vecteurs indiquant les positions des points I_D , J_D , etc., car ils sont visibles dans la FIG. 3.21 (page 114).

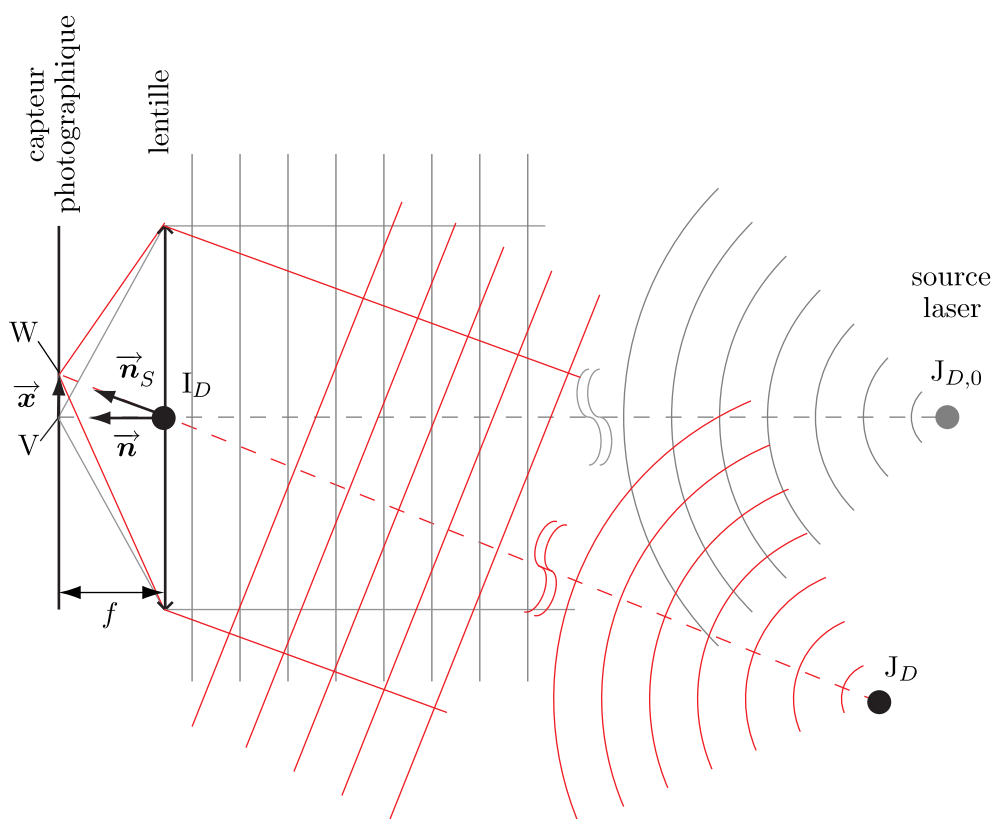


FIGURE 3.22 – Principe du capteur latéral grossier

Nous décrivons la deuxième possibilité car elle est plus facilement compréhensible. La position J_D de la source laser par rapport au point de référence J du vaisseau j est donnée par le vecteur \vec{d}_j , celle du centre I_D de la lentille convergente par rapport au point de référence J du vaisseau j par le vecteur \vec{d}_i .

La FIG. 3.22 montre une onde sphérique émanant des points $J_{D,0}$ et J_D en configurations nominale et réelle, respectivement. Compte tenu de la grande distance entre les deux vaisseaux de l'ordre de plusieurs dizaines de mètres, l'onde sphérique peut être approximée avec un front d'onde parallèle à l'endroit de la lentille.

Nous considérons le rayon du front d'onde qui traverse la lentille au point I_D , c'est-à-dire le rayon central, car il n'est pas réfracté. Ce rayon intersecte le plan du capteur photographique au point W . Ce point est le point dans lequel le faisceau lumineux est concentré.

Le vecteur $\overrightarrow{J_D I_D}$ reliant les points J_D et I_D en configuration réelle s'écrit comme suit :

$$\overrightarrow{J_D I_D} = \vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{d}_i - \vec{r}_j - \Delta \vec{r}_j - \vec{d}_j \quad (3.155)$$

Comme le vecteur unitaire \vec{n}_s a la même direction que le vecteur $\overrightarrow{J_D I_D}$, il peut être écrit de la

manière suivante :

$$\vec{n}_S = \frac{\overrightarrow{J_D I_D}}{\|\overrightarrow{J_D I_D}\|} \quad (3.156)$$

Grâce au triangle $I_D V W$, nous pouvons obtenir la longueur $\|\overrightarrow{I_D W}\|$ du vecteur $\overrightarrow{I_D W}$:

$$\|\overrightarrow{I_D W}\| = \frac{\|\overrightarrow{I_D V}\|}{\vec{n} \cdot \vec{n}_S} = \frac{f}{\vec{n} \cdot \vec{n}_S} \quad (3.157)$$

Le vecteur $\overrightarrow{I_D W}$ devient :

$$\overrightarrow{I_D W} = \|\overrightarrow{I_D W}\| \vec{n}_S = \frac{f}{\vec{n} \cdot \vec{n}_S} \vec{n}_S \quad (3.158)$$

Avec toutes ces informations, nous pouvons écrire le vecteur \vec{x} :

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \overrightarrow{VW} = \overrightarrow{I_D W} - \overrightarrow{I_D V} \\ &= \frac{f}{\vec{n} \cdot \vec{n}_S} \vec{n}_S - f \vec{n} = f \left(\frac{1}{\vec{n} \cdot \vec{n}_S} \vec{n}_S - \vec{n} \right) \\ &= f \frac{(\vec{n} \cdot \vec{n}) \vec{1} - \vec{n} \otimes \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}_S} \cdot \vec{n}_S \\ &= -f \frac{\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{n}_S)}{\vec{n} \cdot \vec{n}_S} = -f \frac{\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \overrightarrow{J_D I_D})}{\vec{n} \cdot \overrightarrow{J_D I_D}} \\ &= -f \frac{\vec{n} \wedge [\vec{n} \wedge (\vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{d}_i - \vec{r}_j - \Delta \vec{r}_j - \vec{d}_j)]}{\vec{n} \cdot (\vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{d}_i - \vec{r}_j - \Delta \vec{r}_j - \vec{d}_j)} \end{aligned} \quad (3.159)$$

Comme dans les cas du capteur d'incidence du faisceau optique et du capteur latéral fin, nous ne mesurons pas le vecteur \vec{x} , mais ses composantes dans le plan du capteur photographique :

$$\begin{aligned} x_p &= \vec{p} \cdot \vec{x} = -f \vec{p} \cdot \frac{\vec{n} \wedge [\vec{n} \wedge (\vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{d}_i - \vec{r}_j - \Delta \vec{r}_j - \vec{d}_j)]}{\vec{n} \cdot (\vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{d}_i - \vec{r}_j - \Delta \vec{r}_j - \vec{d}_j)} \\ x_q &= \vec{q} \cdot \vec{x} = -f \vec{q} \cdot \frac{\vec{n} \wedge [\vec{n} \wedge (\vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{d}_i - \vec{r}_j - \Delta \vec{r}_j - \vec{d}_j)]}{\vec{n} \cdot (\vec{r}_i + \Delta \vec{r}_i + \vec{d}_i - \vec{r}_j - \Delta \vec{r}_j - \vec{d}_j)} \end{aligned} \quad (3.160)$$

En notation extrinsèque, il vient :

$$\begin{aligned} x_p &= -f p^T n^{\times 2} \frac{\Delta C_i^T C_i^T (r_i + \Delta r_i + C_i \Delta C_i d_i - r_j - \Delta r_j - C_j \Delta C_j d_j)}{n^T \Delta C_i^T C_i^T (r_i + \Delta r_i + C_i \Delta C_i d_i - r_j - \Delta r_j - C_j \Delta C_j d_j)} \\ x_q &= -f q^T n^{\times 2} \frac{\Delta C_i^T C_i^T (r_i + \Delta r_i + C_i \Delta C_i d_i - r_j - \Delta r_j - C_j \Delta C_j d_j)}{n^T \Delta C_i^T C_i^T (r_i + \Delta r_i + C_i \Delta C_i d_i - r_j - \Delta r_j - C_j \Delta C_j d_j)} \end{aligned} \quad (3.161)$$

La mesure non-linéaire $Y_{lat,gro}$ s'écrit en combinant les deux expressions précédentes :

$$Y_{lat,gro} = -f(p \ q)^T n^{\times 2} \frac{\Delta C_i^T C_i^T (r_i + \Delta r_i + C_i \Delta C_i d_i - r_j - \Delta r_j - C_j \Delta C_j d_j)}{n^T \Delta C_i^T C_i^T (r_i + \Delta r_i + C_i \Delta C_i d_i - r_j - \Delta r_j - C_j \Delta C_j d_j)} \quad (3.162)$$

Nous faisons les simplifications habituelles (suppression des termes commençant par Δ dans le dénominateur et $n^{\times} C_i^T (r_i + C_i d_i - r_j - C_j d_j) = 0$) pour obtenir l'équation de mesure linéarisée :

$$y_{lat,gro} = -f(p \ q)^T n^{\times 2} C_i^T \frac{(r_i - r_j - C_j d_j)^{\times} C_i \Delta \theta_i + \Delta r_i - \Delta r_j + C_j d_j^{\times} \Delta \theta_j}{n^T C_i^T (r_i + C_i d_i - r_j - C_j d_j)} \quad (3.163)$$

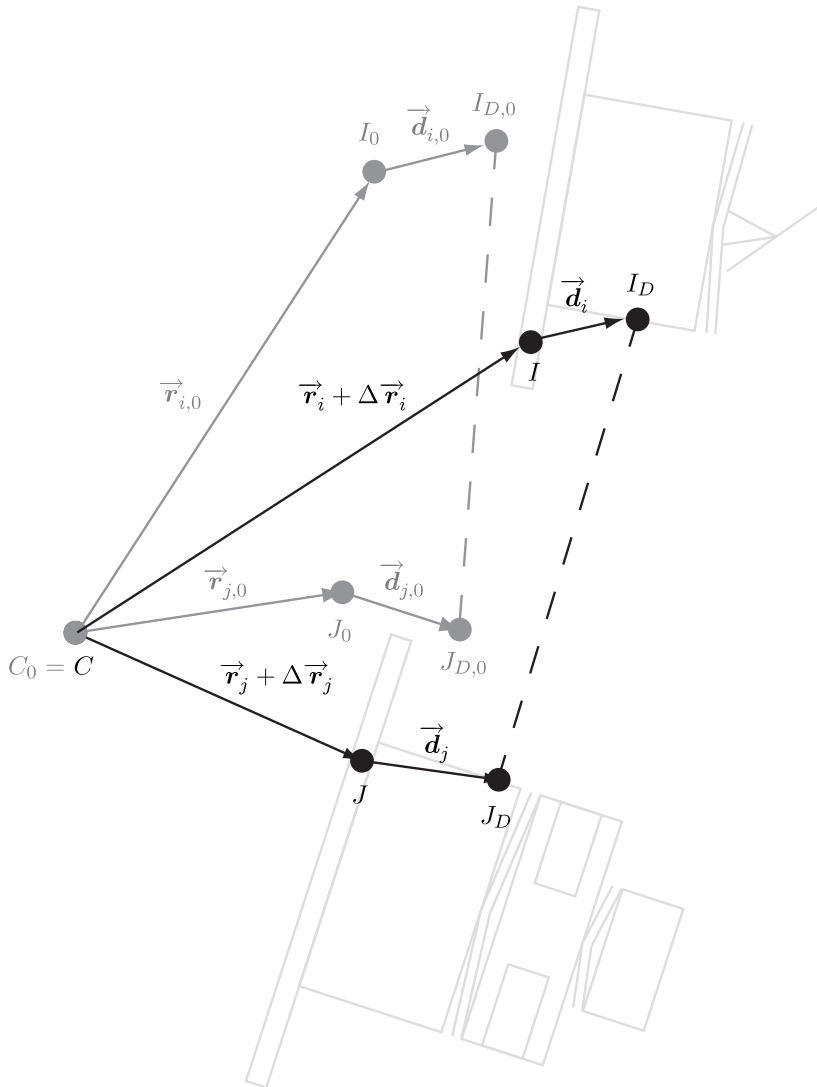


FIGURE 3.23 – Principe du capteur longitudinal

3.9.7 Capteur longitudinal

Le capteur longitudinal permet de mesurer la distance entre une source laser embarquée au point I_D sur le vaisseau i et un rétro-réflécteur au point J_D sur le vaisseau j . Un rayon laser est envoyé vers le rétro-réflécteur qui le reflète vers la direction d'origine. À bord du vaisseau i , le rayon est intercepté et combiné avec un rayon de la même source laser ayant parcouru une distance à l'intérieur du vaisseau i .

En comptant les franges d'interférence, on peut calculer la différence de marche optique entre les deux rayons. En fait, pour déterminer la distance exacte et non pas seulement la différence de marche, il est nécessaire d'utiliser deux sources laser avec des longueurs d'onde différentes. Une autre possibilité, avec une seule source laser, est de mesurer la stabilité du chemin optique, c'est-à-dire la dérivée temporelle de la distance. La FIG. 3.23 montre la géométrie de ce capteur.

La position de la source laser par rapport au vaisseau i est donnée par le vecteur \vec{d}_i , celle du récepteur sur le vaisseau j par le vecteur \vec{d}_j . Le vecteur reliant la source et le récepteur en configuration nominale est le suivant :

$$\overrightarrow{I_{D,0}J_{D,0}} = \vec{r}_{j,0} + \vec{d}_{j,0} - \vec{r}_{i,0} - \vec{d}_{i,0} \quad (3.164)$$

En configuration réelle, il vient :

$$\overrightarrow{I_D J_D} = \vec{r}_j + \Delta \vec{r}_i + \vec{d}_j - \vec{r}_i - \Delta \vec{r}_i - \vec{d}_i \quad (3.165)$$

La longueur du vecteur $\overrightarrow{I_{D,0}J_{D,0}}$ est donnée par la racine carrée du produit scalaire entre $\overrightarrow{I_D J_D}$ et lui-même :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{I_{D,0}J_{D,0}}\| &= \left(\overrightarrow{I_{D,0}J_{D,0}} \cdot \overrightarrow{I_{D,0}J_{D,0}} \right)^{1/2} \\ &= \left[\left(\vec{r}_{j,0} + \vec{d}_{j,0} - \vec{r}_{i,0} - \vec{d}_{i,0} \right) \cdot \left(\vec{r}_{j,0} + \vec{d}_{j,0} - \vec{r}_{i,0} - \vec{d}_{i,0} \right) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.166)$$

La longueur du vecteur $\overrightarrow{I_D J_D}$ est alors comme suit :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{I_D J_D}\| &= \left(\overrightarrow{I_D J_D} \cdot \overrightarrow{I_D J_D} \right)^{1/2} \\ &= \left[\left(\vec{r}_j + \Delta \vec{r}_j + \vec{d}_j - \vec{r}_i - \Delta \vec{r}_i - \vec{d}_i \right) \cdot \left(\vec{r}_j + \Delta \vec{r}_j + \vec{d}_j - \vec{r}_i - \Delta \vec{r}_i - \vec{d}_i \right) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.167)$$

En notation matricielle, les deux longueurs $\|\overrightarrow{I_{D,0}J_{D,0}}\|$ et $\|\overrightarrow{I_D J_D}\|$ deviennent :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{I_{D,0}J_{D,0}}\| &= \left[(r_j + C_j d_j - r_i - C_i d_i)^T (r_j + C_j d_j - r_i - C_i d_i) \right]^{1/2} \\ \|\overrightarrow{I_D J_D}\| &= \left[(r_j + \Delta r_j + C_j \Delta C_j d_j - r_i - \Delta r_i - C_i \Delta C_i d_i)^T \cdot (r_j + \Delta r_j + C_j \Delta C_j d_j - r_i - \Delta r_i - C_i \Delta C_i d_i) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.168)$$

Nous pouvons d'ores et déjà linéariser l'expression $v = r_j + \Delta r_j + C_j \Delta C_j d_j - r_i - \Delta r_i - C_i \Delta C_i d_i$:

$$\begin{aligned}
v &= r_j + \Delta r_j + C_j \Delta C_j d_j - r_i - \Delta r_i - C_i \Delta C_i d_i & (3.169) \\
&\approx r_j + C_j d_j - r_i - C_i d_i + \Delta r_j - C_j d_j^\times \Delta \theta_j - \Delta r_i + C_i d_i^\times \Delta \theta_i \\
&= v_0 + \Delta v \\
\text{avec} \quad v_0 &= r_j + C_j d_j - r_i - C_i d_i \\
\text{et} \quad \Delta v &= \Delta r_j - C_j d_j^\times \Delta \theta_j - \Delta r_i + C_i d_i^\times \Delta \theta_i
\end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
\left\| \overrightarrow{\mathbf{I}_{D,0} \mathbf{J}_{D,0}} \right\| &= (v_0^T v_0)^{1/2} & (3.170) \\
\left\| \overrightarrow{\mathbf{I}_D \mathbf{J}_D} \right\| &= [(v_0 + \Delta v)^T (v_0 + \Delta v)]^{1/2} \\
&\approx (v_0^T v_0)^{1/2} + \frac{v_0^T \Delta v}{(v_0^T v_0)^{1/2}}
\end{aligned}$$

La sortie mesurée y_{lon} linéarisée autour de la configuration de référence est la différence entre les deux longueurs $\left\| \overrightarrow{\mathbf{I}_D \mathbf{J}_D} \right\|$ et $\left\| \overrightarrow{\mathbf{I}_{D,0} \mathbf{J}_{D,0}} \right\|$:

$$\begin{aligned}
y_{\text{lon}} &= \left\| \overrightarrow{\mathbf{I}_D \mathbf{J}_D} \right\| - \left\| \overrightarrow{\mathbf{I}_{D,0} \mathbf{J}_{D,0}} \right\| & (3.171) \\
&\approx (v_0^T v_0)^{1/2} + \frac{v_0^T \Delta v}{(v_0^T v_0)^{1/2}} - (v_0^T v_0)^{1/2} = \frac{v_0^T \Delta v}{(v_0^T v_0)^{1/2}} \\
&= \frac{(r_j + C_j d_j - r_i - C_i d_i)^T}{[(r_j + C_j d_j - r_i - C_i d_i)^T (r_j + C_j d_j - r_i - C_i d_i)]^{1/2}} \\
&\quad \cdot (\Delta r_j - C_j d_j^\times \Delta \theta_j - \Delta r_i + C_i d_i^\times \Delta \theta_i)
\end{aligned}$$

3.9.8 Capteur radiofréquence

Le capteur radiofréquence est distribué sur deux vaisseaux. Un vaisseau porte une antenne émettrice et l'autre vaisseau plusieurs antennes réceptrices. Les antennes réceptrices sont capables de repérer l'antenne émettrice. Ceci dit, il est possible d'obtenir une information de distance et deux angles, l'azimut et l'élévation, décrivant la direction dans laquelle se trouve l'antenne émettrice. La FIG. 3.24 montre la géométrie du capteur radiofréquence.

Il existe plusieurs obstacles pour obtenir ces informations, par exemple la réflexion des ondes radiofréquence par les vaisseaux de la formation (appelé le *problème des chemins multiples*) ou le problème de lever l'ambiguïté causée par le fait que seulement la phase de l'onde incidente est mesurée (cf. [147]). Le but étant d'obtenir un modèle analytique pour le capteur radiofréquence, nous n'aborderons pas ces problèmes ici.

La mesure de distance est parfaitement identique à celle que fournit le capteur longitudinal. Par

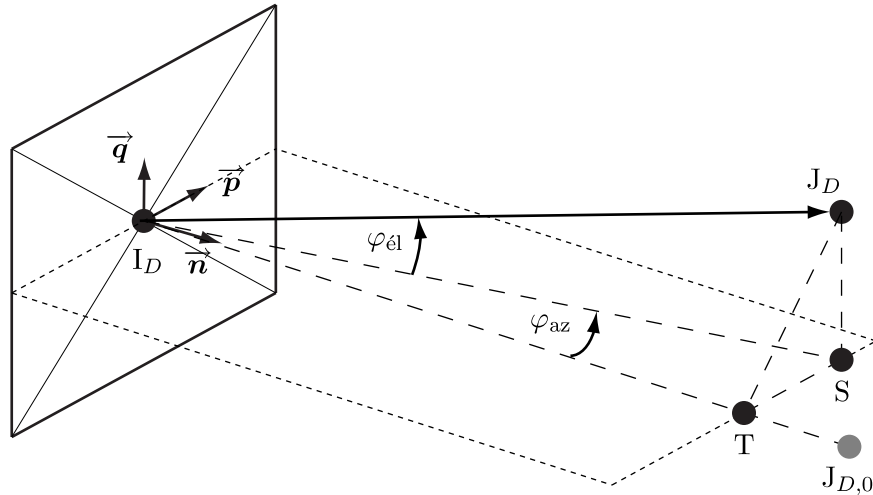


FIGURE 3.24 – Le principe du capteur radiofréquence

conséquent, les mêmes équations de mesure peuvent être utilisées :

$$y_{\text{lon}} = \frac{(r_j - r_i + C_j d_j - C_i d_i)^T}{\left[(r_j - r_i + C_j d_j - C_i d_i)^T (r_j - r_i + C_j d_j - C_i d_i) \right]^{1/2}} \cdot (\Delta r_j - \Delta r_i - C_j d_j^\times \Delta \theta_j + C_i d_i^\times \Delta \theta_i) \quad (3.172)$$

Quant à la partie latérale, c'est-à-dire les angles d'azimut et d'élévation, nous pouvons les obtenir grâce aux triangles rectangles $I_D T S$ et $I_D S J_D$, respectivement :

$$\begin{aligned} \tan \varphi_{\text{az}} &= \frac{\|\overrightarrow{TS}\|}{\|\overrightarrow{I_D T}\|} = \frac{\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{I_D J_D}}{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{I_D J_D}} \\ \sin \varphi_{\text{él}} &= \frac{\|\overrightarrow{S J_D}\|}{\|\overrightarrow{I_D J_D}\|} = \frac{\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{I_D J_D}}{\|\overrightarrow{I_D J_D}\|} \\ \text{avec} \quad \overrightarrow{I_D J_D} &= \overrightarrow{r_j} + \Delta \overrightarrow{r_j} + \overrightarrow{d_j} - \overrightarrow{r_i} - \Delta \overrightarrow{r_i} - \overrightarrow{d_i} \end{aligned} \quad (3.173)$$

Les vecteurs \overrightarrow{n} , \overrightarrow{p} et \overrightarrow{q} forment un trièdre orthonormal. \overrightarrow{n} pointe vers la position $J_{D,0}$ de l'antenne émettrice en configuration nominale.

En notation matricielle, les expressions deviennent :

$$\begin{aligned} \tan \varphi_{\text{az}} &= \frac{p^T \Delta C_i^T C_i^T v}{n^T \Delta C_i^T C_i^T v} \\ \sin \varphi_{\text{él}} &= \frac{q^T \Delta C_i^T C_i^T v}{(v^T v)^{1/2}} \\ \text{avec} \quad v &= r_j + \Delta r_j + C_j \Delta C_j d_j - r_i - \Delta r_i - C_i \Delta C_i d_i \end{aligned} \quad (3.174)$$

Lors de la linéarisation, nous supposons $\tan \varphi_{\text{az}} \approx \varphi_{\text{az}} = y_{\text{az}}$ et $\sin \varphi_{\text{él}} \approx \varphi_{\text{él}} = y_{\text{él}}$. En outre, les

variables commençant par Δ dans le dénominateur disparaissent :

$$\begin{aligned}
 y_{az} &= p^T C_i^T \frac{\Delta r_j - C_j d_j^\times \Delta \theta_j - \Delta r_i + (r_j + C_j d_j - r_i)^\times C_i \Delta \theta_i}{n^T C_i^T (r_j + C_j d_j - r_i - C_i d_i)} \\
 y_{\acute{e}l} &= q^T C_i^T \frac{\Delta r_j - C_j d_j^\times \Delta \theta_j - \Delta r_i + (r_j + C_j d_j - r_i)^\times C_i \Delta \theta_i}{[(r_j + C_j d_j - r_i - C_i d_i)^T (r_j + C_j d_j - r_i - C_i d_i)]^{1/2}}
 \end{aligned} \tag{3.175}$$

3.9.9 Sorties mesurées supplémentaires

Outre les capteurs décrits jusqu'ici, il existe bien sûr une multitude d'autres capteurs utilisés dans les systèmes spatiaux, comme par exemple des gyromètres pour obtenir la vitesse de rotation, des magnétomètres pour mesurer le champ magnétique terrestre et des accéléromètres pour déterminer l'accélération.

Il existe également des capteurs supplémentaires au niveau de la charge utile, en particulier le *senseur de franges d'interférence*.

Nous n'avons pas modélisé ces capteurs car nous n'y aurons pas recours dans la suite. Or, il est important de savoir que la modélisation d'autres capteurs se déroule tout à fait dans la manière que nous avons vue.

3.10 Modèle des actionneurs

Quant aux actionneurs, il existe également une séparation entre la plateforme du vaisseau et sa charge utile.

La plateforme d'un vaisseau spatial est généralement équipée de roues de réaction, d'actionneurs gyroscopiques et/ou de tuyères.

Comme nous visons une application de notre modèle à la mission *Pegase* qui n'utilise que des tuyères à gaz froid proportionnelles, nous nous concentrons sur ce cas précis. La FIG. 3.25 montre une possible configuration de tuyères à bord d'un vaisseau.

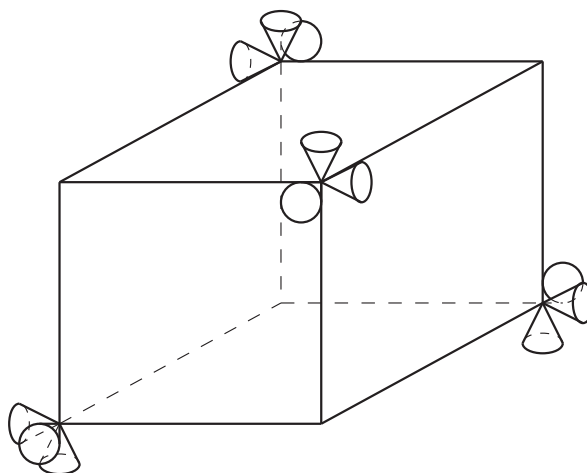


FIGURE 3.25 – Exemple d'implantation des tuyères sur un vaisseau

Une fois que les points de montage des tuyères et leurs directions de poussée sont connus, il est facile de trouver des expressions

$$f_i = M_{f_i} \begin{pmatrix} p_{i,1} \\ \vdots \\ p_{i,N} \end{pmatrix} \text{ et } g_i = M_{g_i} \begin{pmatrix} p_{i,1} \\ \vdots \\ p_{i,N} \end{pmatrix} \quad (3.176)$$

décrivant les forces f_i et les couples g_i en fonction des poussées $p_{i,k}$, $k \in \{1, \dots, N\}$. Pour établir les matrices M_{f_i} et M_{g_i} , seules les positions et les orientations des tuyères par rapport à la plateforme sont nécessaires.

Nous considérerons dans la suite que le nombre et la configuration des tuyères sont suffisants pour toujours pouvoir générer une force f_i ou un couple g_i quelconque, compte tenu d'une borne supérieure sur les forces et les couples, bien entendu. C'est le cas de la configuration montrée dans la FIG. 3.25.

Au niveau de la charge utile, il existe également des actionneurs. À titre d'exemple, dans les missions d'interférométrie, en particulier dans la mission *Pegase*, des *miroirs mobiles piézo-électriques* sont utilisés qui servent à contrôler plus précisément la direction du faisceau lumineux qu'à l'aide de l'asservissement des plateformes. En outre, la *ligne à retard* est un actionneur faisant partie du recombineur qui permette d'asservir la différence de marche de façon extrêmement précise grâce au senseur de franges. Ces actionneurs peuvent être modélisés avec le cadre méthodologique utilisé tout au long de ce chapitre.

3.11 Bilan

Dans ce chapitre, des modèles pour la dynamique relative couplée en translation et en attitude d'une formation de vaisseaux spatiaux ont été développés. Ces modèles tiennent également compte des principales perturbations existant au voisinage d'un point de LAGRANGE.

À partir du modèle dynamique non-linéaire, nous avons montré que des simplifications considérables peuvent être obtenues en considérant des régimes opérationnels particuliers, par exemple le mode d'observation. Ces régimes permettent également de linéariser le modèle dynamique, ce qui est avantageux en vue d'une synthèse de correcteurs.

Le modèle linéarisé nous a permis de choisir une structure hiérarchique parmi plusieurs possibilités afin d'exprimer la répartition des rôles entre les différents éléments de la formation.

Enfin, nous avons proposé un grand nombre de modèles métrologiques, c'est-à-dire des modèles décrivant soit des capteurs, soit des sorties contrôlées. L'existence de ces modèles est indispensable pour la synthèse de correcteurs.

Comme c'était le cas pour les modèles présentés dans le Chapitre 2, tous les modèles peuvent être utilisés à des fins très diverses, par exemple simulation ou synthèse et analyse de correcteurs.

Troisième partie

Contrôle du vol en formation

Chapitre 4

Méthodologie pour le pilotage relatif en translation

Sommaire

4.1	Revue bibliographique	128
4.1.1	Nouveaux actionneurs	128
4.1.2	Trajectoires optimales, initialisation de la formation, manœuvres	128
4.1.3	Guidage, anti-collision	129
4.1.4	Coordination des éléments de la formation	129
4.1.5	Navigation, estimation et capteurs	129
4.1.6	Contrôle en boucle fermée	130
4.2	Objectifs	131
4.3	Analyse de la dynamique	132
4.4	Modèle linéaire fractionnaire	136
4.4.1	Généralités sur la représentation linéaire fractionnaire	136
4.4.2	Modélisation linéaire fractionnaire des fonctions trigonométriques	138
4.4.3	Modélisation linéaire fractionnaire de la dynamique en translation	146
4.5	Contrôle modal auto-séquenté	147
4.5.1	Commande modale stationnaire	148
4.5.2	Commande modale linéaire fractionnaire	150
4.5.3	Application à la dynamique relative	152
4.5.4	Problème de l'existence et de l'unicité de la solution	155
4.5.5	Décomposition en une série de FOURIER	162
4.5.6	Analyse de stabilité	165
4.5.7	Simulations	167
4.5.8	Bilan	170
4.6	Contrôle séquenté \mathcal{H}_2-optimal avec modèle de référence	170
4.6.1	Synthèse d'un correcteur pour un seul point sur l'orbite	170
4.6.2	Interpolation des correcteurs	175
4.6.3	Analyse de stabilité	179
4.6.4	Analyse de performance	179
4.6.5	Bilan	181
4.7	Perspectives	182

Ce chapitre est dédié à la synthèse de correcteurs pour contrôler le mouvement relatif de translation en orbite terrestre dans le cas d'une formation bi-satellite. La modélisation de la dynamique translationnelle a déjà été décrite dans le Chapitre 2.

Nous mentionnerons d'abord les principales approches suivies dans la littérature. Puis, nous présenterons la problématique et les objectifs concernant le contrôle du mouvement relatif. La dynamique en orbite terrestre elliptique est analysée et un modèle utilisant la représentation linéaire fractionnaire est conçu. Ce modèle est ensuite utilisé pour synthétiser, grâce à une technique de commande modale, des correcteurs statiques séquencés qui seront sous forme linéaire fractionnaire également. Finalement, nous présenterons une approche plus classique ayant recours à la commande \mathcal{H}_2 pour synthétiser des correcteurs séquencés par interpolation.

4.1 Revue bibliographique

La littérature sur le contrôle en translation du vol en formation de satellites est abondante. Pour cette raison, nous sommes obligés de nous restreindre à donner un aperçu des principales pistes suivies.

4.1.1 Nouveaux actionneurs

Il existe un certain nombre de nouvelles idées concernant l'actuation des éléments d'une formation. La *voile solaire*, par exemple, comme le décrivent LARDIÈRE et al. [95], est une idée empruntée existant également dans des missions mono-satellite.

En revanche, plusieurs idées profitent de la faible distance inter-satellite et ne sont pas applicables aux missions mono-satellite. MORI et MATUNAGA [126] présentent comment des câbles (*angl.* tethers) reliant les satellites peuvent être utilisés afin de contrôler la position relative. ROMANELLI et al. [148] conçoivent une formation dont les éléments portent une charge électrique. Le contrôle peut alors être effectué avec les forces de COULOMB¹. Enfin, l'idée d'embarquer des aimants sur les différents satellites et d'influencer leurs positions à l'aide de la force magnétique est présentée par plusieurs auteurs, par exemple HASHIMOTO et al. [68], KANEDA et al. [82] et KWON et MILLER [93].

Bien entendu, les actionneurs habituels tels que des roues de réaction et des tuyères sont couramment prévus pour les missions de vol en formation.

4.1.2 Trajectoires optimales, initialisation de la formation, manœuvres

Une grande partie de la littérature sur le vol en formation est dédiée à la recherche de trajectoires optimales pour certains scénarios de missions. Ces trajectoires optimales peuvent concerner différentes phases du vol en formation, par exemple l'initialisation d'une formation ou des manœuvres afin d'accomplir les objectifs de la mission.

JUNGE et al. [81] calculent des trajectoires optimales pour une mission dans le voisinage d'un point de LAGRANGE, c'est-à-dire des trajectoires avec le minimum de poussée nécessaire afin de préserver une forme géométrique désirée de la formation (tétraèdre).

BASTANTE et al. [15] suivent une approche similaire dans le cas d'une mission en orbite GTO. Ils cherchent une trajectoire optimale vis-à-vis de la consommation d'ergols et de spécifications de géométrie et de distance à différents endroits de l'orbite.

1. Charles DE COULOMB (1736 – 1806), ingénieur et physicien français

HUSSEIN et al. [75] présentent des trajectoires pour pouvoir effectuer des mesures optiques pendant une mission d'interférométrie. Ces trajectoires tiennent compte à la fois de la qualité des mesures optiques et de la consommation d'ergols.

MAILHÉ et GUZMÁN [115] utilisent des techniques d'optimisation globales et locales afin d'obtenir un transfert à consommation d'ergols minimale pour initialiser une formation tétraédrale.

GUIBOUT et SCHEERES [63] présentent une méthode afin de générer des trajectoires optimales pour plusieurs reconfigurations d'une formation de satellites.

ZHANG et SUN [207] analysent différentes trajectoires relatives en orbite elliptique pouvant servir comme modèles de mouvement relatif. Ils proposent des relations simples entre les paramètres orbitaux qui paramétrisent ces trajectoires relatives.

4.1.3 Guidage, anti-collision

Plusieurs auteurs soulignent que le guidage des éléments d'une formation, en particulier pour éviter des collisions, est un point à ne pas négliger.

RICHARDS et al. [145], par exemple, conçoivent un planificateur de trajectoires fondé sur la programmation linéaire. Leur algorithme est capable d'éviter des obstacles. Les auteurs l'appliquent à la reconfiguration d'une formation en orbite terrestre circulaire.

BREGER et al. [24] utilisent un planificateur basé sur la programmation linéaire afin de maintenir la forme d'une formation et pour satisfaire des contraintes, par exemple les contraintes des actionneurs.

SINGH et HADAEGH [162] présentent également un planificateur de trajectoires pour la reconfiguration d'une formation sans collisions. Or, ils optimisent les paramètres d'une trajectoire paramétrisée.

MUELLER et THOMAS [127] proposent une architecture de logiciel de vol qui comprend également un algorithme de guidage distribué. Dans ce contexte, les auteurs font la distinction entre le repère de la formation et les repères des éléments de la formation. Ils évoquent également l'évitement de collisions.

HABLANI et al. [66] utilisent la solution des équations de CLOHESY-WILTSHIRE pour concevoir des algorithmes de guidage pour les différentes manœuvres nécessaires lors d'un rendez-vous spatial. Ils modélisent également les capteurs et les bruits de mesure.

4.1.4 Coordination des éléments de la formation

MANDUTIANU et al. [118] voient les éléments d'une formation comme agents autonomes. L'architecture de contrôle est hiérarchique et comprend un niveau pour la formation et un niveau pour les éléments de la formation. Elle peut comporter des aspects centralisés et décentralisés. Les modes opérationnels sont pris en compte en utilisant un automate.

SANNER et PROFFEN [153] modélisent une formation de satellites comme un corps rigide virtuel. Cette approche permet notamment de synchroniser et de coordonner les mouvements des éléments de la formation.

4.1.5 Navigation, estimation et capteurs

Au niveau de la navigation d'une formation de satellites, deux aspects sont très importants : l'estimation des états de la formation, c'est-à-dire des positions relatives, et les propriétés des capteurs

utilisés pour alimenter les estimateurs.

BAMFORD et al. [13] donnent un modèle élaboré d'un capteur GPS (système de positionnement global, *angl.* global positioning system). Ils utilisent un filtre de KALMAN² étendu pour chaque satellite.

LAU et al. [96], ainsi que PURCELL et al. [144] conçoivent un senseur pour le vol en formation qui s'appuie sur un GPS relatif.

SWINKELS [168] présente des méthodes différentes afin de mesurer la distance relative entre deux satellites volant en formation.

HOW et TILLERSON [73] étudient l'effet de bruits de mesure sur leur algorithme de planification et sur la consommation d'ergols.

FERGUSON et HOW [54] proposent des algorithmes d'estimation centralisés, décentralisés, hiérarchiques, d'ordre plein et d'ordre réduit afin de déterminer les états de la formation à partir de mesures GPS.

CARPENTER et ALFRIEND [34] proposent des règles simples concernant la précision de navigation relative sur une orbite elliptique. Ces règles tiennent compte de la dérive due à un écart entre les demi-grands axes des orbites des satellites.

4.1.6 Contrôle en boucle fermée

En plus des domaines présentés précédemment, il existe de nombreuses publications sur le contrôle en boucle fermée avec une très grande variété de méthodes utilisées.

DELPECH et FOURCADE [45], par exemple, utilisent une approche *deadband* (*fr.* hystérésis) afin de contrôler la position relative, c'est-à-dire que les tuyères sont utilisées de façon impulsionnelle à chaque fois qu'un satellite traverse une borne qui représente la précision de positionnement requise.

CHRÉTIEN [38] raisonne dans le plan de phase et considère des actionneurs du type *on/off*. En d'autres termes, les tuyères sont soit fermées, soit complètement ouvertes. Deux stratégies non-linéaires, une pour le cas sans perturbations et une pour une perturbation constante, sont proposées.

SPARKS [164] obtient un correcteur impulsionnel en minimisant un critère linéaire-quadratique discret pour une formation en orbite terrestre circulaire.

IRVIN et JACQUES [77] calculent d'abord un correcteur de retour d'état basé sur un critère linéaire-quadratique pour les équations de CLOHESSY-WILTSHIRE linéarisées. Ensuite, ils proposent la même approche, mais ils linéarisent d'abord les équations de CLOHESSY-WILTSHIRE non-linéaires par retour (*angl.* linearizing feedback). Enfin, ils prennent la dynamique non-linéaire pour obtenir un retour d'état en résolvant les équations de RICCATI³ (dépendant de l'état de la formation) en ligne. WON et AHN [192] proposent la même approche, mais en orbite elliptique.

NELSON et al. [130] utilisent la commande à modes glissants (*angl.* sliding mode control), une méthode de commande non-linéaire, afin de maintenir la formation en orbite terrestre circulaire.

GURFIL et KASDIN [65] considèrent une formation en orbite autour d'un point de LAGRANGE. Ils linéarisent la dynamique relative et obtiennent une dynamique linéaire, mais à temps variant. Basé sur un critère linéaire-quadratique, ils synthétisent un retour d'état à temps variant.

ZHANG et KRISHNAPRASAD [206] synthétisent un correcteur non-linéaire et démontrent la stabilité

2. Rudolf Emil KALMAN (1930 –), mathématicien et automaticien hongrois

3. Jacopo Francesco RICCATI (1676 – 1754), physicien et mathématicien italien

du système en boucle fermée grâce à la théorie de LYAPUNOV⁴.

NAASZ et al. [129] utilisent les méthodes \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ discrètes dans des versions très simplifiées (retour d'état) pour synthétiser un correcteur impulsif. Ensuite, ils conçoivent des correcteurs non-linéaires dont ils montrent la stabilité avec LYAPUNOV.

KULKARNI et CAMPBELL [92] trouvent un correcteur pour stabiliser la dynamique linéarisée à paramètre variant dans le cas d'une orbite halo autour d'un point de LAGRANGE. Ils utilisent la dynamique discrétisée et une version de la commande \mathcal{H}_∞ adaptée à la synthèse de correcteurs LPV.

BREGER et HOW [25] proposent la commande prédictive avec modèle interne (MPC, *angl.* model-predictive control) et une formulation de la dynamique basée sur les éléments orbitaux afin de garantir le maintien d'une formation.

SCHEERES et VINH [156] obtiennent un correcteur à temps variant pour la dynamique relative en orbite halo autour d'un point de LAGRANGE. Ils montrent que le correcteur ne stabilise pas seulement la dynamique à court terme, mais également la dynamique à long terme.

KANG et al. [84] linéarisent les équations de CLOHESSY-WILTSHIRE et synthétisent un correcteur basé sur un critère linéaire-quadratique.

STARIN et al. [166, 165] utilisent un retour d'état basé sur un critère linéaire quadratique pour la dynamique relative en orbite terrestre circulaire. Or, contrairement aux autres publications qui utilisent la commande linéaire-quadratique, ils montrent que l'actuation dans la direction radiale peut être supprimée.

LURIE [108] propose des correcteurs PID (proportionnel-intégral-dérivé) et PD (proportionnel-dérivé) pour stabiliser une formation dans différents modes opérationnels. Les commandes des correcteurs sont transformées en poussées des tuyères à l'aide de la *modulation de largeur*.

CARPENTER [32] synthétise un correcteur linéaire-quadratique-gaussien⁵ discret pour la dynamique relative en orbite terrestre.

TILLERSON et HOW [171, 172] et TILLERSON et al. [173] utilisent un planificateur qui calcule une séquence de commandes nécessaires afin de suivre une trajectoire donnée, tout en minimisant la consommation d'ergols et en satisfaisant certaines contraintes, par exemple une borne sur l'erreur entre les trajectoires réelle et nominale.

PIPER et al. [139] évaluent l'effet de retards de communication entre les éléments d'une formation sur la stabilité en boucle fermée. Le correcteur utilisé est un correcteur PID.

YEDAVALLI et SPARKS [204] synthétisent un correcteur linéaire quadratique discret, mais effectuent une analyse de stabilité sur le système continu en ayant recours à la théorie des systèmes hybrides.

KAPILA et al. [86, 85] et YAN et al. [200] conçoivent un retour d'état discret pour la dynamique relative en orbite terrestre circulaire à l'aide d'un critère linéaire-quadratique. Cependant, le correcteur n'est actif que sur une partie de l'orbite. Les auteurs montrent que le système en boucle fermée est stable.

4.2 Objectifs

Nous nous concentrerons dans la suite sur le cas d'une orbite elliptique terrestre. Cette orbite représente une option considérée dans de nombreuses missions spatiales comme par exemple *ASPICS*,

4. Aleksandr LYAPUNOV (1857 – 1918), mathématicien russe

5. Carl-Friedrich GAUSS (1777 – 1855), mathématicien, astronome et physicien allemand

MAX, *Pegase* et *SIMBOL-X*, cf. TAB. 1.1 (page 8). L'avantage d'une orbite elliptique est l'existence d'une partie dynamiquement tranquille : la partie de l'orbite proche de l'apogée et donc loin de la Terre et des perturbations orbitales principales.

BASTANTE et al. [15] décrivent un scénario de mission utilisant une orbite de transfert géostationnaire (GTO). Une orbite GTO est une orbite très intéressante et peu coûteuse car les lancements de satellites géostationnaires, par exemple de satellites de télécommunication, ciblent cette orbite. Ainsi, un satellite scientifique léger faisant partie d'une formation peut être lancé en même temps qu'un satellite géostationnaire.

Dans le reste de ce chapitre, nous prendrons une orbite de transfert géostationnaire comme exemple d'application. Les éléments orbitaux demi-grand axe a et excentricité e d'une orbite GTO sont indiqués dans le TAB. 4.1.

TABLE 4.1 – Demi-grand axe a et excentricité e d'une orbite de transfert géostationnaire (GTO)

Paramètre orbital	Symbole	Valeur	Unité
Demi-grand axe	a	24200	km
Excentricité	e	0,72	–

Les modèles décrits dans le Chapitre 2 pour le mouvement relatif en orbite terrestre sont tous linéaires et donc bien adaptés à l'utilisation de méthodes linéaires de synthèse de correcteurs.

Cependant, dans le cas d'une orbite elliptique, une formation de satellites parcourt des zones très variées en termes d'amplitude de l'attraction terrestre. Ceci se traduit par l'existence d'au moins un paramètre variant dans les équations dynamiques. Dans le cas d'une orbite elliptique non perturbée, le seul paramètre variant est l'anomalie vraie ν . En présence de la perturbation due au deuxième harmonique zonal, l'argument du périégée ω se rajoute comme deuxième paramètre variant. Par conséquent, nous appelons la dynamique linéaire à paramètre variant (LPV, *angl.* linear parameter-varying).

4.3 Analyse de la dynamique

Pour effectuer une analyse, nous reprenons l'Éq. (2.74) (page 52) décrivant la dynamique relative en translation en orbite terrestre elliptique non perturbée :

$$\Delta\ddot{R} = \underbrace{\frac{n^2(1+ec_\nu)^3}{(1-e^2)^3} \begin{pmatrix} 3+ec_\nu & -2es_\nu & 0 \\ 2es_\nu & ec_\nu & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A_2} \Delta R \quad (4.1)$$

$$+ \underbrace{2n \frac{(1+ec_\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A_1} \Delta\dot{R} + \Delta u$$

En posant $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ I_3 & O_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} I_3 \\ O_3 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} \Delta\dot{R} \\ \Delta R \end{pmatrix}$ et $u = \Delta u$, cette équation différentielle

d'ordre deux peut être écrite sous forme d'une représentation d'état :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.2)$$

A est appelé matrice d'état, B matrice d'entrée, x vecteur d'état et u vecteur d'entrée⁶. Il est important de rappeler que les matrices A_1 et A_2 , et donc la matrice A également, dépendent d'un paramètre variant, l'anomalie vraie ν :

$$A_1 = A_1(\nu), A_2 = A_2(\nu) \text{ et } A = A(\nu) \quad (4.3)$$

Il vient :

$$\dot{x} = A(\nu)x + Bu \quad (4.4)$$

Selon l'Éq. (2.6) (page 24), le paramètre ν a la dynamique suivante :

$$\dot{\nu} = \frac{n(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \quad (4.5)$$

Concernant les deux modèles dynamiques prenant en compte l'effet du deuxième harmonique zonal, données par les Éqs. (2.77) et (2.88) (pages 57 et 57), il existe deux paramètres variants, l'anomalie vraie ν et l'argument du périégée ω :

$$\dot{x} = A(\nu, \omega)x + Bu \quad (4.6)$$

Les paramètres ν et ω obéissent aux dynamiques suivantes (cf. les Éqs. (2.24) et (2.25), page 34) :

$$\begin{aligned} \dot{\nu} &= \frac{(n + \Delta n)(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} \\ \dot{\omega} &= -\frac{3nJ_2R_\oplus^2}{2p^2} \left(\frac{5}{2}s_i^2 - 2 \right) = C(5c_i^2 - 1)n \end{aligned} \quad (4.7)$$

L'analyse de systèmes à paramètres variants est nettement plus difficile que celle d'un système stationnaire car, en principe, les méthodes fréquentielles (par exemple lieu de BODE, lieu des pôles, valeurs singulières, etc.) ne sont applicables qu'à des systèmes stationnaires.

Cependant, nous utiliserons ces méthodes dans la suite pour avoir un sentiment de l'impact des paramètres variants sur la dynamique. À cette fin, nous gèlerons les paramètres à une valeur fixée et appliquerons les méthodes d'analyse des systèmes stationnaires, notamment la carte des pôles et le tracé des valeurs singulières.

La FIG. 4.1 montre quatre lieux des pôles différentes. Le premier lieu des pôles (croix noires) est celui des équations de CLOHESSY-WILTSHIRE, c'est-à-dire en orbite circulaire sans perturbations orbitales. Cette dynamique est stationnaire, ce qui se traduit par le fait que les six pôles tracés ne se déplacent pas le long de l'orbite. Le deuxième lieu des pôles (tracée en noir) est celui de la dynamique translationnelle en orbite elliptique non perturbée, correspondant aux équations de LAWDEN. Le déplacement des pôles le long de l'orbite est évidente. De par l'amplitude du champ de gravitation terrestre, les pôles sont beaucoup plus rapides en proximité du périégée qu'en proximité de l'apogée.

6. Nous utilisons dorénavant le terme *vecteur* au lieu de *matrice colonne* car il n'existe plus de risque d'ambiguïté.

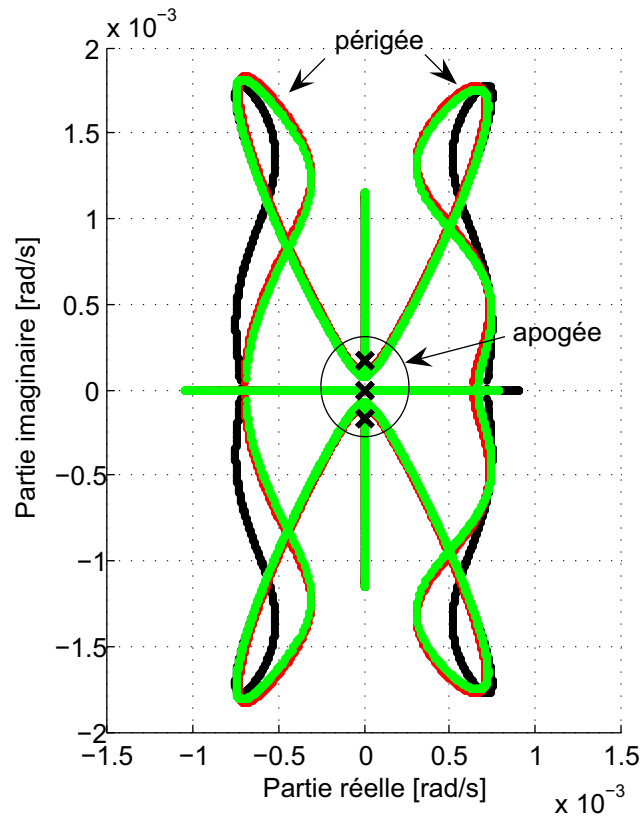


FIGURE 4.1 – Lieu des pôles de la dynamique relative en translation. Croix noires : dynamique pour une excentricité nulle, noir : dynamique non perturbée, rouge : dynamique perturbée, premier modèle, vert : dynamique perturbée, deuxième modèle. Pour une meilleure visibilité, la constante J_2 est 100 fois exagérée.

Les pôles du premier modèle (Éq. (2.77), page 53) prenant en compte la perturbation orbitale due à l'aplatissement de la Terre sont tracés en rouge. Ceux du deuxième modèle plus précis (Éq. (2.88), page 57), en vert. Dans les deux cas, la constante J_2 a été multipliée par le facteur 100 pour mieux distinguer les tracés. Visiblement, l'effet du deuxième harmonique zonal sur l'emplacement des pôles est très faible. La différence entre le premier et le deuxième modèle est minime.

Ces constats ne mettent pas en cause la pertinence des modèles dynamiques prenant en compte l'aplatissement de la Terre car les pôles ne sont pas le seul critère. Quand il s'agit de trouver des trajectoires optimales, par exemple en termes de consommation d'ergols, les modèles à haute fidélité ont leur raison d'être. Cependant, lorsqu'il s'agit de synthétiser des correcteurs, la dynamique en orbite elliptique non perturbée devrait être tout à fait suffisante.

La FIG. 4.2 contient les tracés des valeurs singulières de la dynamique relative non perturbée pour cinq différentes valeurs de l'anomalie vraie ν . Elle illustre l'impact du paramètre variant ν sur la dynamique du mouvement relatif. Les résonances sont dues aux pôles sur l'axe imaginaire de la dynamique hors-plan. On constate que les tracés ne changent pas seulement leurs positions (ce qui correspond à un changement de la pulsation et du gain), mais aussi leur aspect (ce qui correspond à un changement de l'amortissement et du couplage entre les axes dans le plan orbital r et c).

Pour la suite de ce chapitre, il est d'une très grande importance de conclure que la variation du

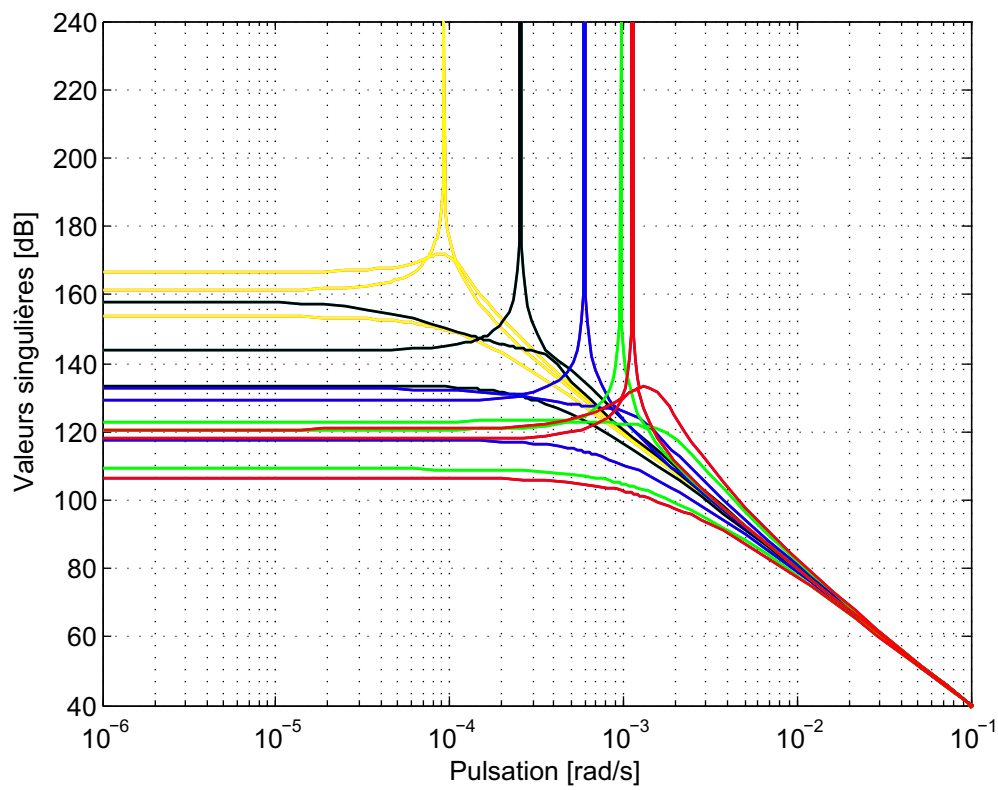


FIGURE 4.2 – Valeurs singulières de la dynamique relative non perturbée pour des valeurs différentes de ν

paramètre ν le long de l'orbite est un facteur décisif pour la dynamique. Par conséquent, une méthode de synthèse de correcteurs doit absolument tenir compte de cette variation.

4.4 Modèle linéaire fractionnaire

Dans cette section, nous introduirons un cadre méthodologique très puissant et générique pour modéliser des paramètres d'un système dynamique : la transformation linéaire fractionnaire (LFT, *angl.* linear-fractional transformation).

Ce modèle nous servira plus tard à utiliser une méthode de synthèse de correcteurs qui y aura recours.

4.4.1 Généralités sur la représentation linéaire fractionnaire

La représentation linéaire fractionnaire est une technique de modélisation permettant d'extraire des variations paramétriques d'un modèle linéaire. Le modèle peut être un modèle dynamique comme les Éqs. (4.4) et (4.6) ou simplement une matrice dépendant de paramètres. Les paramètres mentionnés peuvent être constants ou bien assujettis à des variations temporelles.

La FIG. 4.3 montre le schéma bloc d'une représentation linéaire fractionnaire.

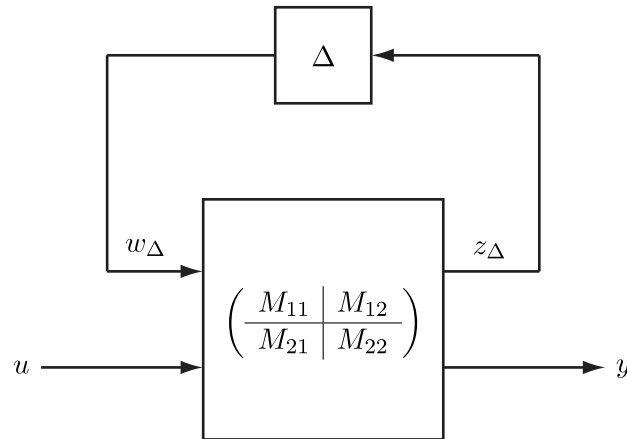


FIGURE 4.3 – La représentation linéaire fractionnaire

Une telle représentation consiste en une matrice statique M qui peut être décomposée en quatre sous-matrices $M_{11} \in \mathbb{R}^{n_\Delta \times n_\Delta}$, $M_{12} \in \mathbb{R}^{n_\Delta \times m}$, $M_{21} \in \mathbb{R}^{p \times n_\Delta}$ et $M_{22} \in \mathbb{R}^{p \times m}$. Il existe une entrée $u \in \mathbb{R}^m$ et une sortie $y \in \mathbb{R}^p$. La matrice M est partiellement bouclée à travers la matrice Δ , appelée matrice des paramètres. L'Éq. (4.8) donne les expressions mathématiques d'une représentation linéaire fractionnaire :

$$\begin{aligned} z_\Delta &= M_{11}w_\Delta + M_{12}u \\ y &= M_{21}w_\Delta + M_{22}u \\ w_\Delta &= \Delta z_\Delta \end{aligned} \tag{4.8}$$

La combinaison des trois expressions précédentes fournit :

$$y = \left[M_{21}\Delta (I_{n_\Delta} - M_{11}\Delta)^{-1} M_{12} + M_{22} \right] u \quad (4.9)$$

Dans le cas $\Delta = 0$, il ne reste que la partie nominale $y = M_{22}u$.

La matrice des paramètres est généralement composée de plusieurs blocs diagonaux représentant plusieurs paramètres différents :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 I_{n_{\delta_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_N I_{n_{\delta_N}} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Nous appelons N le nombre de blocs. Comme nous l'avons déjà dit, les paramètres δ_i peuvent être des paramètres constants ou variants. Ils peuvent également être des intégrateurs $1/s$. Ainsi, il est possible de modéliser un système sous forme d'état comme l'Éq. (4.4) en utilisant la représentation linéaire fractionnaire.

Une représentation linéaire fractionnaire fournit l'ensemble des modèles possibles lorsque l'on ignore la valeur exacte de paramètres δ_i .

En dehors de la représentation linéaire fractionnaire, il existe d'autres méthodes de modélisation pour des systèmes qui dépendent de paramètres, par exemple la modélisation sous forme de polytope. Or, le cadre linéaire fractionnaire permet d'extraire les paramètres du modèle, qui correspondent souvent à des paramètres physiques.

Comme son nom l'indique, il est possible de modéliser des fonctions rationnelles en utilisant la représentation linéaire fractionnaire. Cependant, il faut veiller à ce que le dénominateur d'une telle fonction rationnelle ne disparaisse pas dans le cas où Δ est nul. En d'autres termes, la partie nominale M_{22} du modèle doit être finie.

Quant à d'autres fonctions, par exemple les fonctions trigonométriques $\sin \nu$ et $\cos \nu$ qui apparaissent plusieurs fois dans les différents modèles pour la dynamique relative en orbite terrestre elliptique, il existe parfois des astuces qui permettent de les modéliser sous forme de représentation linéaire fractionnaire également. Le cas précis des fonction trigonométriques sera détaillé sous peu.

Souvent, on préfère normaliser les paramètres δ_i à l'intervalle $[-1, 1]$ car certaines méthodes ayant recours à la représentation linéaire fractionnaire le requièrent. Ceci ne pose pas de problème particulier parce qu'il existe toujours la possibilité de normaliser la plage de variation d'un paramètre.

Les applications de la représentation linéaire fractionnaire en automatique sont légion. Un domaine applicatif très important est l'analyse de robustesse en stabilité ou en performance lorsque l'on est confronté à des paramètres mal connus ou variants. Ce type d'analyse peut être effectué grâce à des méthodes modernes comme la μ -analyse [55, 44] ou les contraintes quadratiques intégrales (IQC, *angl.* integral quadratic constraints) [78, 21]. Une application voisine est la synthèse de correcteurs robustes vis-à-vis de paramètres incertains en utilisant la μ -synthèse [29]. Les thèses de MANCEAUX-CUMER [116] et DÖLL [46] présentent un grand nombre de techniques concernant l'analyse de robustesse et la synthèse robuste. Enfin, il existe de multiples méthodes de synthèse qui utilisent un modèle linéaire fractionnaire et qui fournissent un correcteur sous forme linéaire fractionnaire qui est séquencé en fonction des paramètres δ_i . À titre de références, nous citons la commande modale [110], la commande multimodèle [101], la commande \mathcal{H}_∞ [134] et la commande mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ [137].

Un facteur important à ne pas oublier est qu'il existe des outils numériques pour établir des modèles linéaires fractionnaires. MAGNI [110, 111] a conçu une boîte à outils capable de manipuler des représentations linéaires fractionnaires. En particulier, de nombreuses opérations matricielles (par exemple addition, multiplication, inversion, calcul d'un noyau, etc.) peuvent être effectuées facilement. Il est important de noter que le résultat d'une telle opération est toujours une nouvelle représentation linéaire fractionnaire. L'équation suivante, qui montre comment l'addition de deux représentations linéaires fractionnaires M et N est effectuée, sert d'exemple illustratif pour cette approche :

$$\left(\begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} N_{11} & N_{12} \\ \hline N_{21} & N_{22} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} M_{11} & 0 & M_{12} \\ 0 & N_{11} & N_{12} \\ \hline M_{21} & N_{21} & M_{22} + N_{22} \end{array} \right) \quad (4.11)$$

Ainsi, il est possible d'assembler un modèle très complexe à partir d'expressions élémentaires qui sont sous forme linéaire fractionnaire. Nous suivrons exactement cette approche lors de la mise sous forme linéaire fractionnaire de la dynamique relative en orbite terrestre.

4.4.2 Modélisation linéaire fractionnaire des fonctions trigonométriques

Le problème majeur lors de la mise sous forme linéaire fractionnaire dans la cas de la dynamique relative en orbite terrestre est l'établissement des expressions élémentaires, notamment des fonctions trigonométriques $\sin \nu$ et $\cos \nu$. Ces fonctions ne sont pas des fonctions rationnelles et, par conséquent, elles ne se prêtent pas naturellement à une mise sous forme linéaire fractionnaire.

Dans la suite, nous montrerons quatre possibilités différentes pour mettre sous forme linéaire fractionnaire les fonctions trigonométriques $\sin \nu$ et $\cos \nu$. Nous n'oublierons pas de mentionner les avantages et les inconvénients associés à chacune de ces alternatives.

Modélisation indépendante

La première possibilité est de modéliser les deux fonctions trigonométriques $\sin x$ et $\cos x$ séparément, c'est-à-dire que le sinus est modélisé en utilisant un premier paramètre δ_1 et le cosinus avec un deuxième paramètre δ_2 . Les deux paramètres sont déjà normalisés à l'intervalle $[-1, 1]$ car les images des fonctions $\sin x$ et $\cos x$ sont $[-1, 1]$. En notation matricielle, les deux représentations linéaires fractionnaires s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} M_{\sin} &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right), \quad n_{\delta_1} = 1 \\ M_{\cos} &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right), \quad n_{\delta_2} = 1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Hélas, cette méthode a l'inconvénient de ne pas prendre en compte la dépendance entre les deux fonctions, c'est-à-dire $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (théorème de Pythagore⁷). En fonction de l'application de la forme linéaire fractionnaire, ce fait est plus ou moins grave. Dans le cas d'une synthèse d'un correcteur séquencé, la non-dépendance entre les deux fonctions trigonométriques n'est pas toujours gênante. Cependant, si l'on veut utiliser le modèle linéaire fractionnaire pour une μ -analyse, on risque d'obtenir des résultats conservatifs car on n'utilise pas la totalité des informations disponibles.

7. Pythagore (580 av. J.-C. – 490 av. J.-C.), mathématicien, philosophe et astronome grec

Développement de Taylor

Le développement de TAYLOR des deux fonctions trigonométriques représente une deuxième possibilité. Les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots\end{aligned}$$

En arrêtant le développement à l'ordre N , nous obtenons des polynômes d'ordre N et $N-1$ pour les deux fonctions, respectivement. Les polynômes se mettent facilement sous forme linéaire fractionnaire dont les ordres sont également N et $N-1$. Pour $N=3$, il vient $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ et $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$. En notation matricielle, nous obtenons :

$$\begin{aligned}M_{\sin} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/6 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad n_{\delta} = 3 \\ M_{\cos} &= \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad n_{\delta} = 2\end{aligned}\tag{4.13}$$

L'avantage de cette représentation est qu'il ne faut qu'un seul δ pour modéliser à la fois les deux fonctions trigonométriques. L'inconvénient est que le modèle n'est jamais exact, en particulier pour de grands angles, dû à l'interruption du développement de TAYLOR. Plus on demande de précision, plus il faut augmenter l'ordre du développement.

Cette méthode est utilisée quelques fois en pratique, par exemple dans les travaux de DÖLL sur la modélisation d'avions (cf. [47]). Des développements d'ordre 4 ou 5 peuvent être utilisés parce que l'on peut souvent se restreindre à des angles relativement petits, par exemple $[-10^\circ, 10^\circ]$, dans les applications aéronautiques. La Fig. 4.4 montre des modèles issus de développements de TAYLOR d'ordres différents.

Approximation de Padé

L'approximation de PADÉ⁸ est plus puissante que le développement de TAYLOR. Une approximation de PADÉ est un développement dans une fonction rationnelle $f(x)$ dont les premières dérivées sont identiques à celles de la fonction exacte :

$$f(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n_p} p_k x^k}{1 + \sum_{k=1}^{n_q} q_k x^k}\tag{4.14}$$

8. Henri Eugène PADÉ (1863 – 1953), mathématicien français

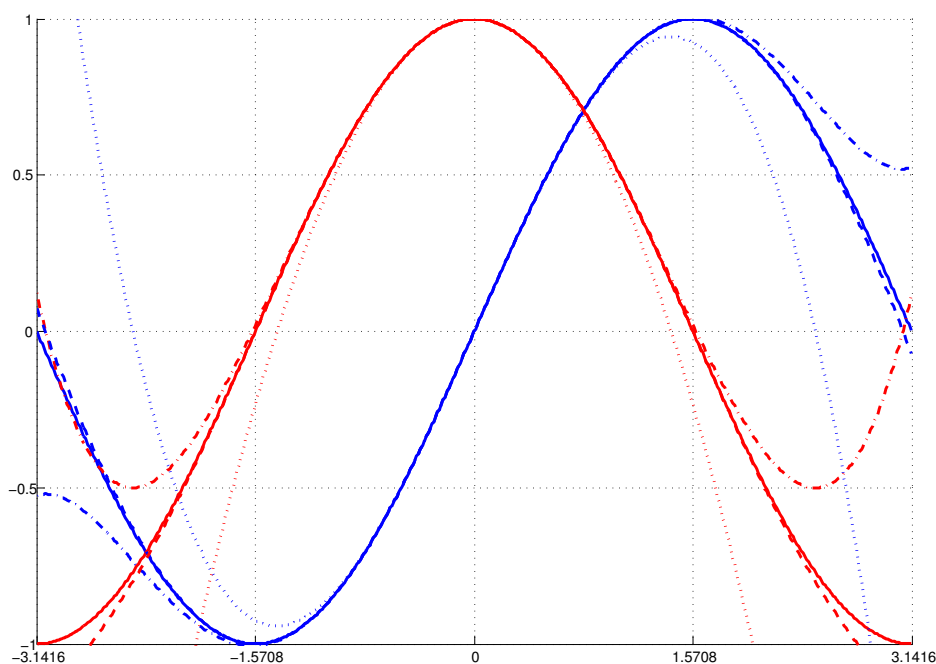


FIGURE 4.4 – Modèles de TAYLOR d'ordres différents. Rouge : $\cos x$; bleu : $\sin x$; lignes continues : fonctions exactes ; lignes pointillées : développement d'ordre 3 ; lignes pointillées-tirées : développement d'ordre 5 ; lignes tirées : développement d'ordre 7

Ainsi, la fonction trigonométrique $\sin x$ peut être approximée comme suit :

$$\begin{aligned}
 f_{\sin,2}(x) &= x & (4.15) \\
 f_{\sin,4}(x) &= \frac{x}{1 + \frac{1}{6}x^2} \\
 f_{\sin,6}(x) &= \frac{x - \frac{7}{60}x^3}{1 + \frac{1}{20}x^2} \\
 f_{\sin,8}(x) &= \frac{x - \frac{31}{294}x^3}{1 + \frac{3}{49}x^2 + \frac{11}{5880}x^4}
 \end{aligned}$$

Ces quatre approximations sont exactes au deuxième, quatrième, sixième et huitième ordre près, respectivement. La fonction $\cos x$ peut être approximée comme suit :

$$\begin{aligned}
 f_{\cos,1}(x) &= 1 & (4.16) \\
 f_{\cos,5}(x) &= \frac{1 - \frac{5}{12}x^2}{1 + \frac{1}{12}x^2} \\
 f_{\cos,9}(x) &= \frac{1 - \frac{115}{252}x^2 + \frac{313}{15120}x^4}{1 + \frac{11}{252}x^2 + \frac{13}{15120}x^4}
 \end{aligned}$$

Ces représentations sont exactes au premier, cinquième et neuvième ordre près, respectivement.

L'avantage évident de cette représentation est qu'elle peut être traduite sans problème en une représentation linéaire fractionnaire. Le paramètre δ correspond à la variable x . La taille de la

représentation linéaire fractionnaire n_δ , c'est-à-dire la répétition du paramètre δ , est identique au maximum des ordres du numérateur et du dénominateur.

L'approximation de PADÉ est plus économique que la série de TAYLOR parce que, avec la même taille de la représentation linéaire fractionnaire, elle fournit une approximation beaucoup plus précise.

La FIG. 4.5 montre la qualité des approximations mentionnées ci-dessus.

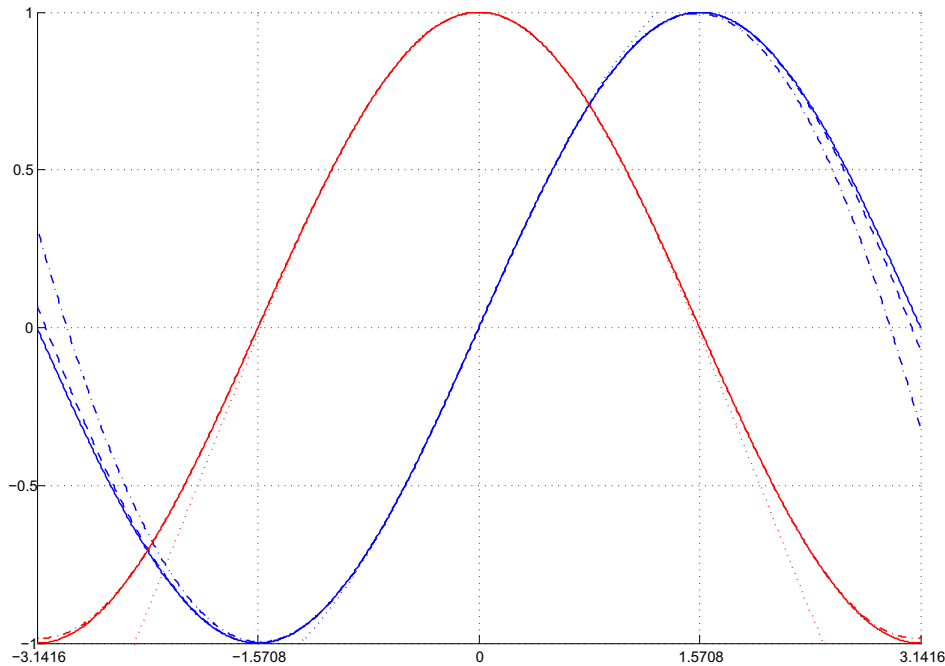


FIGURE 4.5 – Approximations de PADÉ d'ordres différents. Rouge : $\cos x$; bleu : $\sin x$; lignes continues : fonctions exactes ; lignes pointillées : développement d'ordre 4 ($\sin x$) et 5 ($\cos x$) ; lignes pointillées-tiretées : développement d'ordre 6 ($\sin x$) et 9 ($\cos x$) ; ligne tiretée : développement d'ordre 8 ($\sin x$)

Représentation d'ordre deux des fonction trigonométriques

Selon une idée de MANCEAUX-CUMER et CHRÉTIEN (cf. [117]), il est possible de traduire les fonctions trigonométriques $\sin x$ et $\cos x$ en ayant recours aux *formules d'angle moitié*.

En effet, il est possible d'établir les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \text{ et} & (4.17) \\ \cos x &= \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Maintenant, nous pouvons poser $\delta = \tan \frac{x}{2}$, ce qui fournit les représentations suivantes :

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2\delta}{1 + \delta^2} \text{ et} & (4.18) \\ \cos x &= \frac{1 - \delta^2}{1 + \delta^2} \end{aligned}$$

En notation matricielle, il vient :

$$M_{\sin} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad n_{\delta} = 2 \quad (4.19)$$

$$M_{\cos} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{array} \right), \quad n_{\delta} = 2$$

La Fig. 4.6 montre l'évolution des fonctions trigonométriques $\sin x$ et $\cos x$ en fonction du paramètre δ . En outre, il est bien visible que la somme des carrés des deux vaut toujours un.

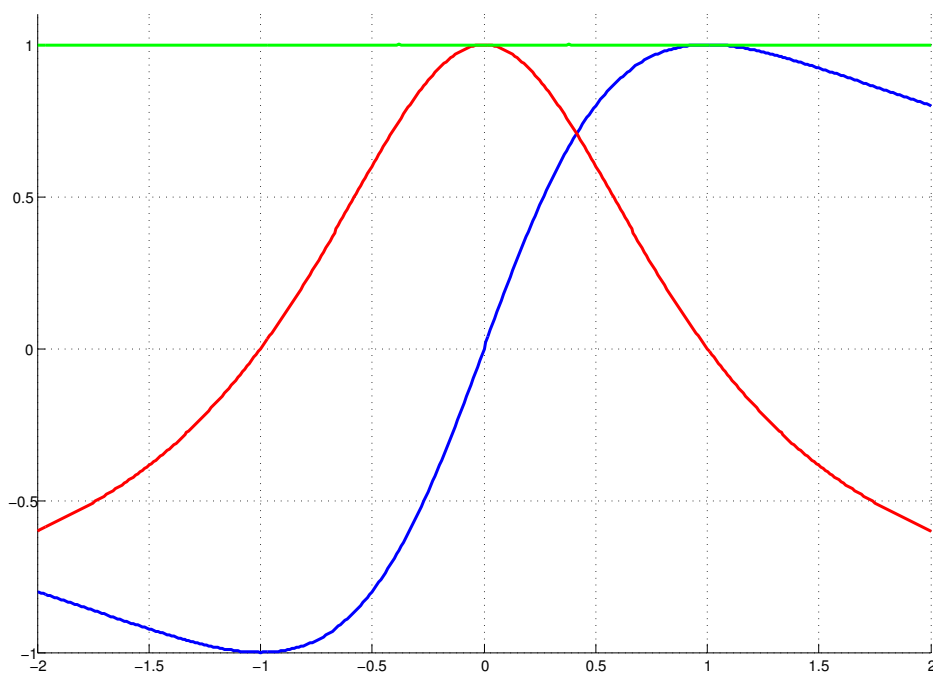


FIGURE 4.6 – Modèles d'ordre deux. $\sin x$ et $\cos x$ sont tracés en bleu et rouge, respectivement. La somme des carrés des deux fonctions est tracée en vert.

L'avantage de cette représentation est qu'elle est exacte. Son inconvénient est qu'elle ne couvre que la moitié de l'évolution des fonctions $\sin x$ et $\cos x$, plus précisément l'intervalle $x \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$. Il est possible d'y remédier en complétant par la deuxième moitié, c'est-à-dire $x \in [\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ en utilisant les fonctions de signe opposé suivantes :

$$\sin x = -\frac{2\delta}{1 + \delta^2} \quad \text{et} \quad (4.20)$$

$$\cos x = \frac{\delta^2 - 1}{1 + \delta^2} \quad (4.21)$$

Les expressions matricielles correspondantes sont les suivantes :

$$M_{\sin} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{array} \right), n_{\delta} = 2 \quad (4.22)$$

$$M_{\cos} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{array} \right), n_{\delta} = 2$$

La Fig. 4.7 montre l'évolution des fonctions trigonométriques en fonction du δ pour les deux parties.

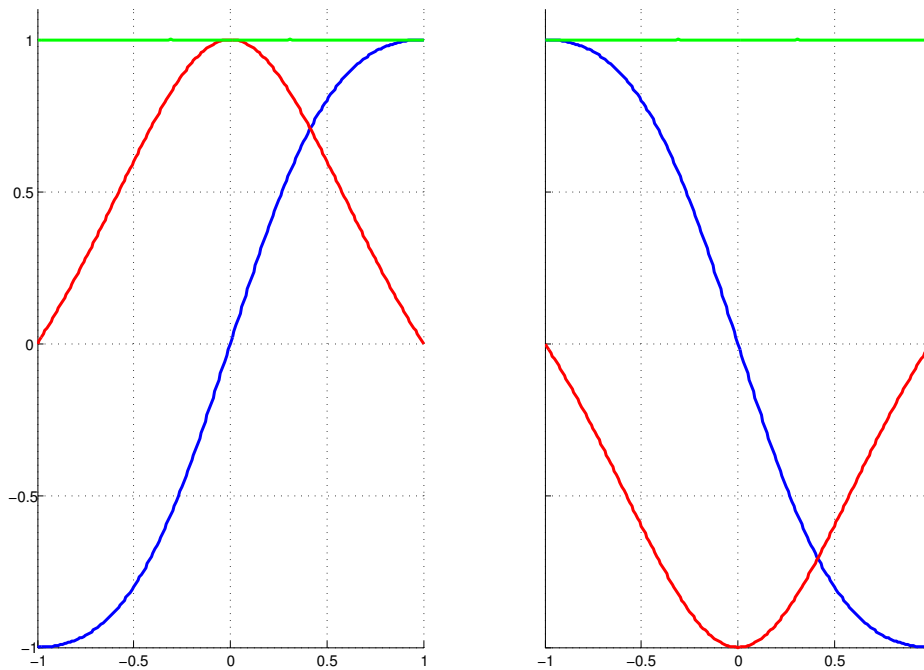


FIGURE 4.7 – Modèles d'ordre deux. $\sin x$ et $\cos x$ sont tracés en bleu et rouge, respectivement. La somme des carrés des deux fonctions est tracée en vert.

Il est donc possible de suivre toute l'évolution de ces deux fonctions trigonométriques, mais avec le désavantage de devoir commuter entre deux modèles. Avec un paramètre variant δ , cela ne représente pas un grand obstacle. Or, s'il est nécessaire de modéliser plusieurs angles, le nombre de cas s'accroît de façon exponentielle. Par exemple, avec quatre angles, il faut distinguer entre $2^4 = 16$ combinaisons possibles. Dans le cas de l'embarquement d'un correcteur sous forme de transformation linéaire fractionnaire, ceci peut facilement poser un problème de stockage.

Représentation d'ordre quatre des fonction trigonométriques

Pour résoudre le problème précédemment mentionné, il est souhaitable de disposer d'une représentation qui couvre toute la plage de variation des fonctions $\sin x$ et $\cos x$. Ceci est possible en

utilisant la *formule d'angle moitié* une seconde fois, c'est-à-dire en écrivant les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\sin \frac{x}{2} &= \frac{2 \tan \frac{x}{4}}{1 + \tan^2 \frac{x}{4}} \\ \cos \frac{x}{2} &= \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{4}}{1 + \tan^2 \frac{x}{4}} \\ \tan \frac{x}{2} &= \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{4} (1 + \tan^2 \frac{x}{4})}{(1 + \tan^2 \frac{x}{4}) (1 - \tan^2 \frac{x}{4})} = \frac{2 \tan \frac{x}{4}}{1 - \tan^2 \frac{x}{4}}\end{aligned}$$

Maintenant, $\sin x$ et $\cos x$ peuvent être écrits comme suit :

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{4 \tan \frac{x}{4}}{(1 - \tan^2 \frac{x}{4}) \left[1 + \frac{4 \tan^2 \frac{x}{4}}{(1 - \tan^2 \frac{x}{4})^2} \right]} = \frac{4 \tan \frac{x}{4} (1 - \tan^2 \frac{x}{4})^2}{(1 - \tan^2 \frac{x}{4}) (1 + \tan^2 \frac{x}{4})^2} \quad (4.23)$$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \frac{4 \tan^2 \frac{x}{4}}{(1 - \tan^2 \frac{x}{4})^2}}{1 + \frac{4 \tan^2 \frac{x}{4}}{(1 - \tan^2 \frac{x}{4})^2}} = \frac{(1 + \tan^2 \frac{x}{4})^2 - 8 \tan^2 \frac{x}{4}}{(1 + \tan^2 \frac{x}{4})^2} \quad (4.24)$$

En notation matricielle, il vient :

$$\begin{aligned}M_{\sin} &= \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad n_{\delta} = 4 \\ M_{\cos} &= \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad n_{\delta} = 4\end{aligned} \quad (4.25)$$

Finalement, nous pouvons poser $\delta = \tan \frac{x}{4}$. La Fig. 4.8 montre le sinus et le cosinus en fonction du paramètre δ . L'avantage par rapport à la représentation d'ordre deux est la couverture de la totalité de l'évolution des fonctions trigonométriques ($x \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$). L'inconvénient est la taille accrue.

Représentation d'ordre un des fonction trigonométriques

Bien qu'une représentation d'ordre un en fonction d'un seul paramètre δ soit souhaitable, nous avons pu montrer qu'il n'existe

- ni de représentation d'ordre un à la fois pour les deux fonctions trigonométriques $\sin x$ et $\cos x$;
- ni de représentation d'ordre un pour une des deux fonctions trigonométriques $\sin x$ et $\cos x$ et une représentation d'ordre deux pour l'autre.

Les détails de la démonstration de cette non-existence se trouvent dans l'Annexe E.

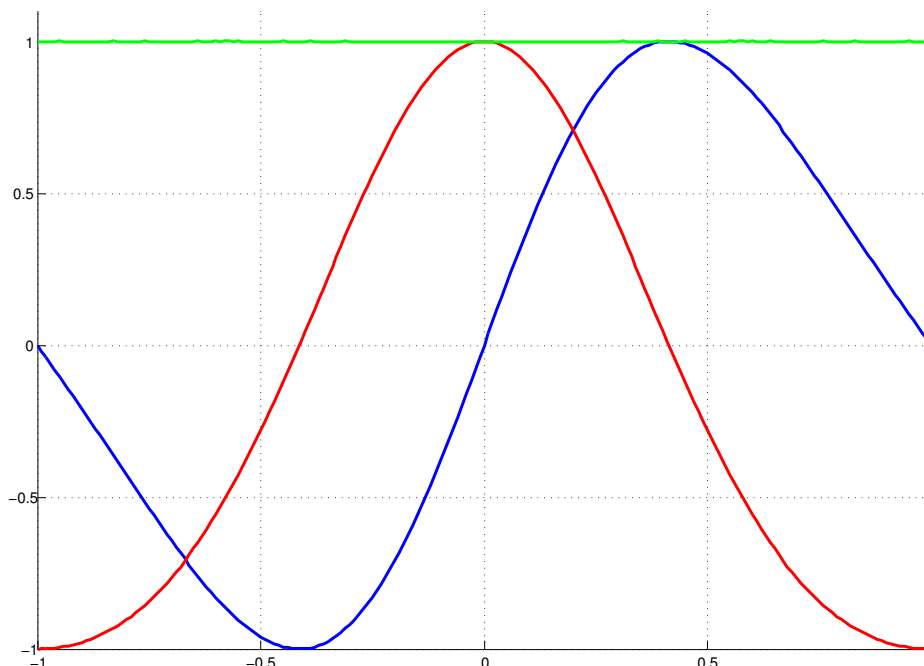


FIGURE 4.8 – Modèles d’ordre quatre. $\sin x$ et $\cos x$ sont tracés en bleu et rouge, respectivement. La somme des carrés des deux fonctions est tracée en vert.

En résumé

Le TAB. 4.2 présente de façon synthétique encore une fois les avantages et inconvénients des différentes représentations linéaires fractionnaires. Les seules variantes à rejeter sont le développement de TAYLOR et l’approximation de PADÉ car elles sont inexactes. Or, nous avons besoin de toute la plage de variation de l’angle ν dans la dynamique relative en orbite elliptique.

TABLE 4.2 – Avantages et inconvénients des différentes représentations LFT

Représentation	Avantages	Inconvénients
Représentation indépendante	Petite taille	Analyse conservative, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ n’est pas satisfait
Développement de TAYLOR, approximation de PADÉ	–	Grande taille pour avoir une précision raisonnable, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ n’est pas satisfait
Représentation d’ordre deux	Petite taille, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ est satisfait	Couvre seulement la moitié de la plage de variations
Représentation d’ordre quatre	Couvre toute la plage de variations, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ est satisfait	Taille moyenne

4.4.3 Modélisation linéaire fractionnaire de la dynamique en translation

Les équations de CLOHESSY-WILTSHIRE ne comportent pas de paramètre variant. Par conséquent, une mise sous forme linéaire fractionnaire n'est ni possible ni utile.

Les équations de LAW DEN, c'est-à-dire la dynamique relative en orbite elliptique non perturbée, dépendent d'un seul paramètre variant, l'anomalie vraie ν qui varie entre 0 et 2π . Le TAB. 4.3 illustre les tailles des modèles linéaires fractionnaires en fonction de la façon dont les fonctions trigonométriques sont modélisées.

TABLE 4.3 – Modèles linéaires fractionnaires des équations de LAW DEN

Représentation choisie pour $\sin \nu$ et $\cos \nu$	Taille du modèle à trois axes ($r-c-o$)	Taille du modèle à deux axes ($r-c$)	Taille du modèle mono-axe (o)
$\delta_1 = \cos \nu$	$n_{\delta_1} = 11$	$n_{\delta_1} = 8$	$n_{\delta_1} = 3$
$\delta_2 = \sin \nu$	$n_{\delta_2} = 2$	$n_{\delta_2} = 2$	$n_{\delta_2} = 0$
	$n_{\Delta} = 13$	$n_{\Delta} = 10$	$n_{\Delta} = 3$
$\delta = \tan \frac{\nu}{2}$	$n_{\delta} = n_{\Delta} = 22$	$n_{\delta} = n_{\Delta} = 16$	$n_{\delta} = n_{\Delta} = 6$
$\delta = \tan \frac{\nu}{4}$	$n_{\delta} = n_{\Delta} = 44$	$n_{\delta} = n_{\Delta} = 32$	$n_{\delta} = n_{\Delta} = 12$

La boîte à outil de MAGNI offre des moyens puissants pour trouver la réalisation minimale d'une représentation linéaire fractionnaire, c'est-à-dire la réalisation avec la plus petite taille de la matrice des paramètres Δ possible. Les tailles indiquées dans le TAB. 4.3 sont les tailles minimales.

Bien entendu, il est également possible de mettre sous forme linéaire fractionnaire les deux modèles dynamiques prenant en compte le deuxième harmonique zonal. Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, ces modèles comportent deux paramètres variants, l'anomalie vraie ν et l'argument du périégée ω . Les deux paramètres peuvent être pris en compte dans la représentation linéaire fractionnaire. Le TAB. 4.4 montre les tailles du premier modèle.

TABLE 4.4 – Modèles linéaires fractionnaires pour le premier modèle tenant compte du deuxième harmonique zonal

Modèle choisi pour $\sin \nu$ et $\cos \nu$	Taille du modèle à trois axes ($r-c-o$)
$\delta_1 = \cos \nu$	$n_{\delta_1} = 21$
$\delta_2 = \sin \nu$	$n_{\delta_2} = 6$
$\delta_3 = \cos \omega$	$n_{\delta_3} = 6$
$\delta_4 = \sin \omega$	$n_{\delta_4} = 6$
	$n_{\Delta} = 39$
$\delta_1 = \tan \frac{\nu}{2}$	$n_{\delta_1} = 42$
$\delta_2 = \tan \frac{\omega}{2}$	$n_{\delta_2} = 12$
	$n_{\Delta} = 54$
$\delta_1 = \tan \frac{\nu}{4}$	$n_{\delta_1} = 84$
$\delta_2 = \tan \frac{\omega}{4}$	$n_{\delta_2} = 24$
	$n_{\Delta} = 108$

Le TAB. 4.5 contient les tailles du deuxième modèle. Pour l'angle ω , la même représentation a été choisie que pour l'angle ν , mais il est également possible de mélanger les représentations, en prenant

$\delta_1 = \tan \frac{\nu}{4}$ et $\delta_2 = \tan \frac{\omega}{2}$, par exemple. Du fait que l'aplatissement de la Terre crée un couplage entre les dynamiques dans le plan orbital et hors plan, il n'est pas possible d'établir un modèle séparé d'une de ces dynamiques.

TABLE 4.5 – Modèles linéaires fractionnaires pour le deuxième modèle tenant compte du deuxième harmonique zonal

Modèle choisi pour $\sin \nu$ et $\cos \nu$	Taille du modèle à trois axes (<i>r-c-o</i>)
$\delta_1 = \cos \nu$	$n_{\delta_1} = 21$
$\delta_2 = \sin \nu$	$n_{\delta_2} = 9$
$\delta_3 = \cos \omega$	$n_{\delta_3} = 9$
$\delta_4 = \sin \omega$	$n_{\delta_4} = 9$
	$n_{\Delta} = 48$
$\delta_1 = \tan \frac{\nu}{2}$	$n_{\delta_1} = 42$
$\delta_2 = \tan \frac{\omega}{2}$	$n_{\delta_2} = 18$
	$n_{\Delta} = 60$
$\delta_1 = \tan \frac{\nu}{4}$	$n_{\delta_1} = 84$
$\delta_2 = \tan \frac{\omega}{4}$	$n_{\delta_2} = 36$
	$n_{\Delta} = 120$

4.5 Contrôle modal auto-séquéncé

Le première méthode de commande pour asservir la dynamique à paramètre variant que nous présenterons est la commande modale auto-séquéncée. Cette technique correspond tout à fait à la commande modale, mais elle permet de synthétiser des correcteurs sous forme linéaire fractionnaire, pourvu que l'on dispose d'un modèle dynamique sous forme linéaire fractionnaire.

L'objectif principal de la commande en translation relative est d'imposer un même comportement sur toute l'orbite ou bien sur une partie de l'orbite. Vu la variation de la dynamique en boucle ouverte (cf. FIG. 4.1, page 134), cette tâche n'est pas facile à réaliser.

Le contrôle peut être utilisé à des fins assez diverses :

- le maintien d'une position relative désirée pour une durée déterminée est une perspective d'utilisation. Un tel maintien peut s'avérer très coûteux en termes de consommation d'ergols, mais il peut également être indispensable pour effectuer des observations, par exemple ;
- l'autre possibilité est le suivi d'une trajectoire déterminée. En général, il s'agira d'une trajectoire optimale en fonction d'un critère donné, par exemple la minimisation des dépenses d'ergol. Le suivi d'une trajectoire naturelle, c'est-à-dire une trajectoire sans poussée, est aussi concevable. Un correcteur aurait deux rôles. Le premier serait de suivre la trajectoire désirée le plus près possible et de ramener la formation à la trajectoire en cas d'éloignement. Le deuxième serait de contrôler le changement entre deux trajectoires pré-calculées.

La commande modale est bien adaptée à notre problème de synthèse de correcteurs car elle permet d'exprimer des spécifications (modales) identiques et bien compréhensibles sur toute l'orbite. Comme nous verrons plus tard, le cas est plus difficile lorsque l'on utilise d'autres techniques de commande, par exemple des techniques ayant recours à la *forme standard*.

4.5.1 Commande modale stationnaire

MAGNI a décrit les principes de la commande modale en détail dans [113] pour des systèmes stationnaires. Nous les rappelons ici brièvement pour une meilleure compréhension.

On part d'un système sous forme d'état comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ \text{avec } & A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, x \in \mathbb{R}^{n \times 1}, u \in \mathbb{R}^{m \times 1}, y \in \mathbb{R}^{p \times 1} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Le correcteur est sous forme de *retour d'état*, autrement dit nous supposons que le vecteur d'état x est connu :

$$\begin{aligned} u &= Kx \\ \text{avec } & K \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Cette idéalisation n'est pas aussi restrictive qu'elle apparaît. D'un côté, il existe des capteurs pour le vol en formation mesurant la position et la vitesse relatives, par exemple le capteur radiofréquence. Un fait marquant est que la mesure de vitesse peut, sous certaines conditions, être plus précise que celle de la position. Par ailleurs, un observateur, par exemple un observateur de LUENBERGER [107] peut être utilisé afin d'estimer les états du système.

Il vient pour la dynamique en boucle fermée :

$$\dot{x} = (A + BK)x \quad (4.28)$$

Le but de la commande modale est de placer les valeurs propres $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ de la matrice d'état en boucle fermée $A + BK$. Contrairement au retour de sortie, il est possible dans le cas d'un retour d'état de placer toutes les valeurs propres. Les positions des pôles en boucle fermée déterminent son comportement temporel.

Outre les valeurs propres, il est également concevable d'influencer les vecteurs propres de la matrice $A + BK$. Grâce à cela, des contraintes de découplage, par exemple entre certaines entrées et certains modes, peuvent être imposées.

La procédure de synthèse modale se déroule comme suit. Les valeurs propres λ_i (qui sont soit complexes conjuguées, soit réelles) et les vecteurs propres (à droite) $v_i \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ de la matrice $A + BK$ peuvent être calculés avec la relation suivante :

$$(A + BK)v_i = \lambda_i v_i \quad (4.29)$$

On appelle $w_i \in \mathbb{C}^{m \times 1}$ la direction d'entrées associée au vecteur propre v_i :

$$w_i = Kv_i \quad (4.30)$$

Nous introduisons la notation suivante pour raccourcir les équations :

$$\begin{aligned}\Lambda &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ V &= (v_1 \dots v_n) \\ W &= (w_1 \dots w_n) \\ \text{avec } \Lambda &\in \mathbb{C}^{n \times n}, V \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ et } W \in \mathbb{C}^{m \times n},\end{aligned}\tag{4.31}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}(A + BK)V &= \Lambda V \\ W &= KV\end{aligned}\tag{4.32}$$

L'Éq. (4.29) peut être écrite de manière différente :

$$(A - \lambda_i I_n)v_i + BKv_i = 0\tag{4.33}$$

Le terme Kv_i peut être remplacé grâce à l'Éq. (4.30) :

$$(A - \lambda_i I_n)v_i + Bw_i = 0\tag{4.34}$$

Cette équation peut être transformée de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} A - \lambda_i I_n & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ w_i \end{pmatrix} = 0\tag{4.35}$$

L'Éq. (4.35) a toujours au moins une solution car il s'agit d'un système d'équations linéaires sous-déterminé. Cependant, elle n'a pas de solution unique. (Ici, nous ne parlons pas du fait que v_i et w_i ne sont jamais uniques car ils peuvent être multipliés avec un même scalaire et rester solution de l'Éq. (4.35).)

Pour remédier à ce problème, il existe deux possibilités.

- premièrement, nous pouvons calculer le noyau de la matrice $\begin{pmatrix} A - \lambda_i I_n & B \end{pmatrix}$ et choisir le vecteur $\begin{pmatrix} v_i \\ w_i \end{pmatrix}$ à partir de ce noyau.

$$\begin{pmatrix} v_i \\ w_i \end{pmatrix} \in \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} A - \lambda_i I_n & B \end{pmatrix} \right)\tag{4.36}$$

- deuxièmement, le fait que l'Éq. (4.35) est sous-déterminée introduit m degrés de liberté pour imposer des spécifications de découplage. Ces spécifications peuvent être écrites sous la forme

suivante :

$$\begin{pmatrix} E_i & F_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ w_i \end{pmatrix} = g_i \quad (4.37)$$

avec $E_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $F_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $g_i \in \mathbb{R}^{m \times 1}$

Il vient :

$$\begin{pmatrix} A - \lambda_i I_n & B \\ E_i & F_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ w_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g_i \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

Maintenant, la matrice $\begin{pmatrix} A - \lambda_i I_n & B \\ E_i & F_i \end{pmatrix}$ peut être inversée, à condition qu'elle ne soit pas singulière. Les vecteurs v_i et w_i s'obtiennent alors comme suit :

$$\begin{pmatrix} v_i \\ w_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - \lambda_i I_n & B \\ E_i & F_i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ g_i \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

Dans la suite, nous utiliserons la deuxième manière afin de calculer les vecteurs v_i et w_i , avec le choix suivant pour les matrices E_i et F_i et le vecteur g_i :

$$E_i = O_{m \times n}, F_i = I_m \text{ et } g_i = O_{m \times 1} \quad (4.40)$$

Finalement, le correcteur peut être calculé de la façon suivante, cf. Éq. (4.32) :

$$K = WV^{-1} \quad (4.41)$$

4.5.2 Commande modale linéaire fractionnaire

Il existe différentes extensions ou généralisations de la commande modale, par exemple la commande modale robuste [101] ou la commande modale linéaire fractionnaire [110]. Vu l'existence d'un modèle linéaire fractionnaire pour la dynamique relative en orbite terrestre elliptique, nous nous servons de la commande modale linéaire fractionnaire dans la suite.

Cette technique est, en principe, identique à la commande modale standard précédemment décrite. La principale différence entre commande modale standard et commande modale linéaire fractionnaire est que le problème et les spécifications (valeurs propres et contraintes de découplage) sont sous forme d'une représentation linéaire fractionnaire.

Or, toutes les opérations matricielles nécessaires, comme l'addition, la multiplication, l'inversion ou la concaténation, s'appliquent également à des représentations linéaires fractionnaires. La boîte à outils linéaire fractionnaire permet d'effectuer ces opérations. Il est important à noter que le calcul du noyau d'une matrice est une opération qui peut également être effectuée sur des représentations linéaires fractionnaires [109].

Il n'est pas étonnant que cette méthode de synthèse fournisse un correcteur K sous forme linéaire fractionnaire :

$$K = K(\Delta) = K_{22} + K_{21}\Delta(I_{n_\Delta} - K_{11}\Delta)^{-1}K_{12} \quad (4.42)$$

Cette forme de correcteur a l'avantage, contrairement à des correcteurs interpolés par exemple,

d'être auto-séquencée, c'est-à-dire qu'il suffit d'adapter la matrice des paramètres Δ aux conditions d'opération actuelles et d'évaluer l'Éq. (4.42).

La FIG. 4.9 montre le système et le correcteur en boucle fermée.

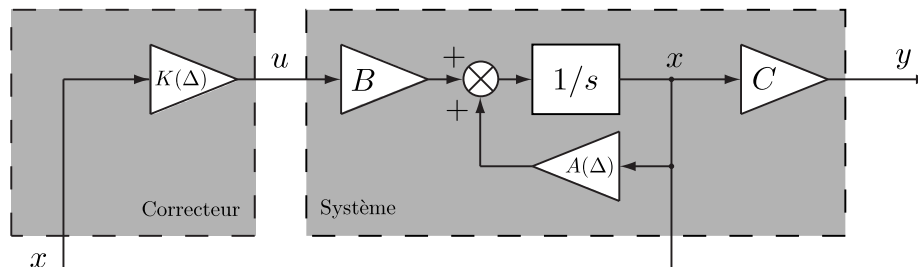


FIGURE 4.9 – Schéma-bloc du système et du correcteur sans consignes

Pour mettre en œuvre une boucle de suivi de consigne et non pas seulement une boucle de stabilisation, il faut choisir un endroit pour injecter la consigne. Pour cela, il existe deux manières différentes.

- la première façon d'injecter la consigne est au niveau des entrées comme l'illustre la FIG. 4.10, une technique appelée *feed-forward*. Ce type de commande est souvent utilisé pour réaliser des manœuvres en boucle ouverte sur un système mono-satellite. En général, la dimension du vecteur des consignes r n'est pas égale à celle du vecteur des entrées u . En outre, la différence entre consignes r et entrées u n'a pas de sens immédiat. Pour cette raison, il faut insérer une matrice de précommande H qui multiplie le vecteur des consignes r . Cette matrice est généralement obtenue en calculant l'inverse (ou la pseudo-inverse) du gain statique de la boucle fermée afin d'obtenir un gain statique unitaire entre consignes r et sorties y ;

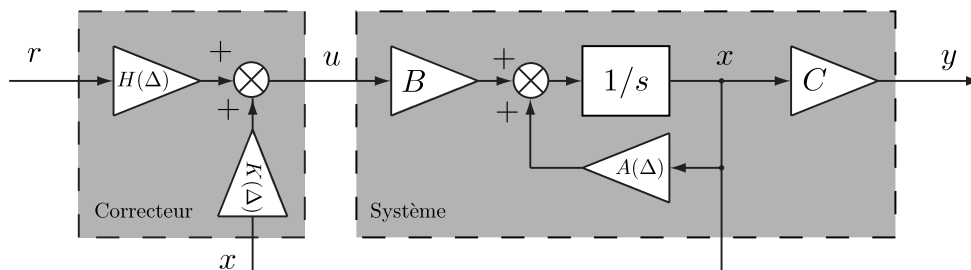


FIGURE 4.10 – Schéma-bloc du système et du correcteur. Injection des consignes au niveau des entrées

- la deuxième façon d'injecter les consignes r est au niveau des états x (cf. FIG. 4.11). Le correcteur K reçoit comme entrée la différence entre états et consignes, $x - r$. Dans ce cas, il faut absolument que le vecteur des consignes r soit de la même taille que le vecteur des états x . En d'autres termes, il faut spécifier une valeur désirée pour tous les états. Ici, on n'a pas besoin d'une matrice de précommande H .

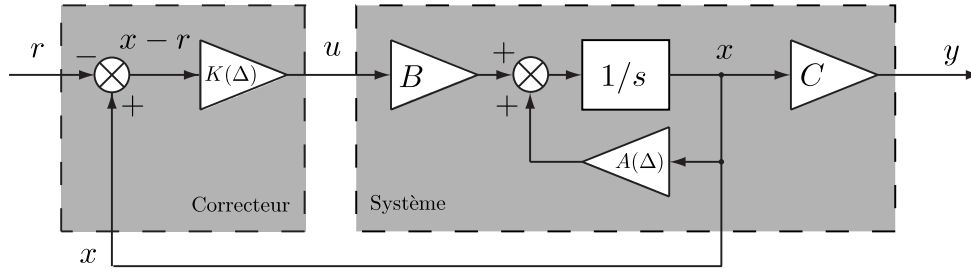


FIGURE 4.11 – Schéma-bloc du système et du correcteur. Injection des consignes au niveau des états

4.5.3 Application à la dynamique relative

Nous avons déjà mentionné le principal inconvénient de la commande modale, celui d'avoir besoin du vecteur d'état x complet. Nous avons également mentionné les solutions possibles : introduire un filtre pour estimer les états ou utiliser des capteurs mesurant tous les états.

Le but étant d'imposer une dynamique à la boucle fermée sur toute l'orbite, c'est-à-dire pour tout l'intervalle $\nu \in [0, 2\pi]$, il faut d'abord choisir des spécifications. Un choix qui est souvent fait en pratique est de prendre comme spécification un comportement du second ordre bien amorti avec un gain statique unitaire. Sa fonction de transfert s'écrit de la manière suivante :

$$G_{\text{réf},1 \text{ axe}} = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi_0\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (4.43)$$

Au niveau de l'amortissement ξ_0 , il est souhaitable qu'il soit proche de $\xi_0 = \sqrt{2}/2 \approx 0,707$ pour avoir un bon compromis entre dépassement de la consigne et temps de réponse. Nous retenons la valeur $\xi_0 = \sqrt{2}/2$ pour la suite.

Concernant la pulsation ω_0 , elle peut être choisie afin d'obtenir un temps de réponse $T_{\text{rép}}$ désiré. Le temps de réponse est le temps dont le système a besoin pour atteindre une valeur de 95 % de la consigne si celle-ci est un échelon. Si nous choisissons $T_{\text{rép}} = 3000$ s, une valeur raisonnable devant la période orbitale d'une orbite de transfert géostationnaire ($T = 37462$ s), nous pouvons calculer la pulsation ω_0 grâce à la relation suivante qui est valable pour les systèmes du second ordre ayant un amortissement de $\xi_0 = \sqrt{2}/2$, ainsi que pour les systèmes du premier ordre :

$$\omega_0 T_{\text{rép}} = 3 \quad (4.44)$$

Il vient donc :

$$\omega_0 = 3/T_{\text{rép}} = 10^{-3} \text{ rad/s} \quad (4.45)$$

Les pôles choisis pour la dynamique en boucle fermée sont les suivants :

$$p_{1/2} = (-\sqrt{2}/2 \pm \sqrt{2}/2j) \cdot 10^{-3} \text{ rad/s} \quad (4.46)$$

avec $j = \sqrt{-1}$ (unité imaginaire)

Comme nous voulons imposer une dynamique en boucle fermée aux trois axes de la dynamique

relative en translation, nous prenons le modèle de référence suivant :

$$G_{\text{réf}} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi_0\omega_0 s + \omega_0^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi_0\omega_0 s + \omega_0^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi_0\omega_0 s + \omega_0^2} \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

La structure diagonale de $G_{\text{réf}}$ implique que nous désirons que les dynamiques selon les différents axes soient entièrement découplées en boucle fermée, ce qui n'est pas le cas en boucle ouverte (couplage entre les axes r et c).

La FIG. 4.12 illustre la position des pôles choisis pour la boucle fermée (croix rouges) par rapport à l'évolution des pôles en boucle ouverte (points noirs).

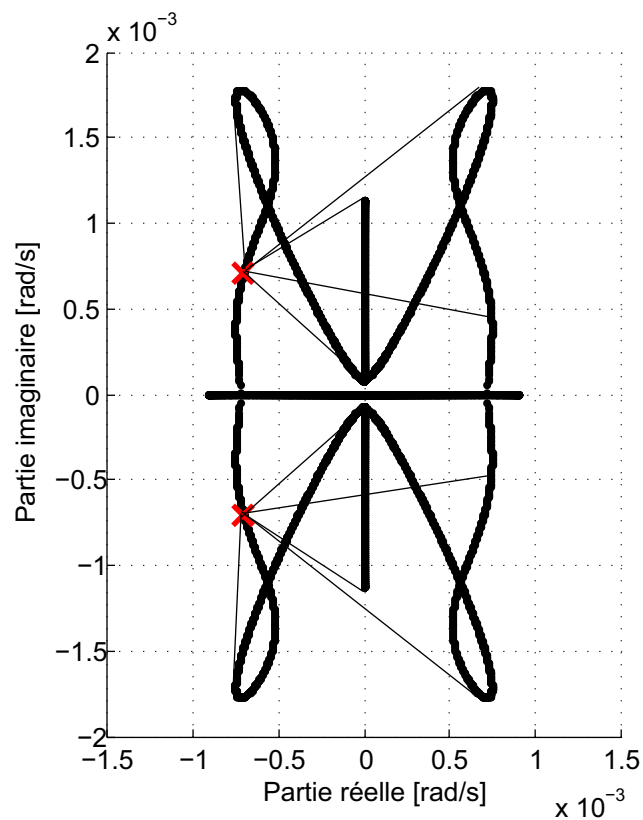


FIGURE 4.12 – Pôles choisis pour la boucle fermée (croix rouges) par rapport à l'évolution des pôles en boucle ouverte (points noirs)

La FIG. 4.13 montre le lieu de BODE (à gauche) et la réponse indicielle du modèle de référence choisi pour un seul axe.

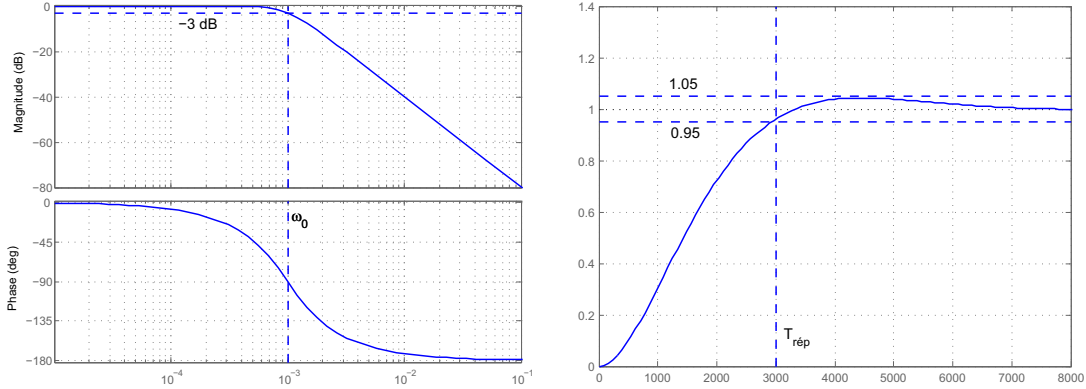


FIGURE 4.13 – Modèle de référence pour un seul axe – lieu de BODE (à gauche) et réponse indicielle (à droite)

L'application de la synthèse modale linéaire fractionnaire sur les différents modèles linéaires fractionnaires de la dynamique relative en translation précédemment décrits avec les spécifications mentionnées fournit des correcteurs dont les tailles sont détaillées dans le TAB. 4.6.

TABLE 4.6 – Taille des correcteurs modaux auto-séquencés

Représentation choisie pour $\sin \nu$ et $\cos \nu$	Taille du correcteur à trois axes (r - c - o)	Taille du correcteur à deux axes (r - c)	Taille du correcteur mono-axe (o)
$\delta_1 = \cos \nu$	$n_{\delta_1} = 66$	$n_{\delta_1} = 16$	$n_{\delta_1} = 6$
$\delta_2 = \sin \nu$	$n_{\delta_2} = 12$	$n_{\delta_2} = 4$	$n_{\delta_2} = 0$
	$n_{\Delta} = 78$	$n_{\Delta} = 20$	$n_{\Delta} = 6$
$\delta = \tan \frac{\nu}{2}$	$n_{\delta} = n_{\Delta} = 132$	$n_{\delta} = n_{\Delta} = 64$	$n_{\delta} = n_{\Delta} = 4$
$\delta = \tan \frac{\nu}{4}$	$n_{\delta} = n_{\Delta} = 572$	$n_{\delta} = n_{\Delta} = 160$	$n_{\delta} = n_{\Delta} = 24$

Comme nous l'avons dit, la perturbation due au deuxième harmonique zonal n'est pas prise en compte pour la synthèse de correcteurs. Il est donc possible de séparer la dynamique selon les axes r et c de celle selon l'axe o . La tailles des matrices des paramètres Δ des correcteurs obtenues ainsi sont nettement inférieures à celles obtenues lorsque l'on effectue la synthèse une seule fois pour les trois axes.

En outre, il est visible que la modélisation utilisant $\tan \frac{\nu}{4}$ comme paramètre a une taille excessive par rapport à ce qu'elle apporte comme avantage, notamment la validité du modèle (et par conséquent du correcteur) sur toute l'orbite et non pas seulement sur une moitié de l'orbite.

Nous avons déjà mentionné que la modélisation qui utilise deux paramètres $\delta_1 = \cos \nu$ et $\delta_2 = \sin \nu$ a comme seul inconvénient qu'elle n'est pas adaptée à l'analyse de robustesse car l'interdépendance entre $\sin \nu$ et $\cos \nu$ n'est pas prise en compte. Or, elle est une alternative tout à fait valable dans le cas de la synthèse modale. De par sa faible taille, c'est cette modélisation que nous retenons.

Pour illustrer la puissance de la commande modale linéaire fractionnaire, la FIG. 4.14 montre l'erreur commise lors du placement des pôles, c'est-à-dire l'écart entre les pôles spécifiés (cf. ci-dessus)

et les pôles réellement obtenus. Cette erreur, qui est d'une très faible valeur, est principalement due à des imprécisions numériques. Les courbes rouge, bleue et verte montrent les erreurs concernant la dynamique complète (axes r , c et o), la dynamique dans le plan orbital (axes r et c) et la dynamique hors plan (axe o), respectivement. Visiblement, plus le modèle est grand, plus l'erreur augmente, ce qui soutient l'hypothèse de l'existence d'imprécisions numériques. La constance des pôles, c'est-à-dire le respect des spécifications modales, rend inutile toute analyse de stabilité. En effet, le correcteur variant appliqué au système variant rend la boucle fermée stationnaire. On peut dire que les variations du correcteur compensent celles du système.

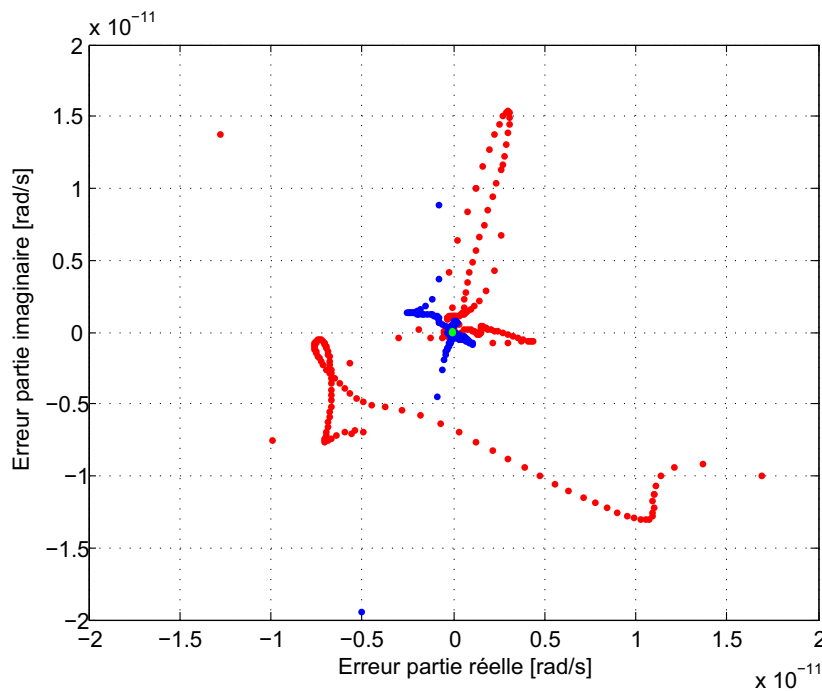


FIGURE 4.14 – Erreur commise lors du placement des pôles. Tracées sont la dynamique complète (axes r , c et o) en rouge, la dynamique dans le plan orbital (axes r et c) en bleu et la dynamique hors plan (axe o) en vert

Les FIGS. 4.15 et 4.16 illustrent la variation des gains du correcteur le long de l'orbite en fonction de l'anomalie vraie ν et du temps t , respectivement. Les gains du correcteur pour la dynamique dans le plan orbital (axes r et c) sont tracés en bleu tandis que les gains pour la dynamique hors plan (axe o) sont tracés en vert.

4.5.4 Problème de l'existence et de l'unicité de la solution

Nous avons déjà vu que le calcul du vecteur de commande u nécessite l'évaluation de l'expression suivante :

$$u = \left[K_{22} + K_{21}\Delta (I_{n_\Delta} - K_{11}\Delta)^{-1} K_{12} \right] x \quad (4.48)$$

La particularité de cette expression est qu'elle contient l'inversion de la matrice $I_{n_\Delta} - K_{11}\Delta$. Du fait de la présence de la matrice des paramètres Δ , la matrice $I_{n_\Delta} - K_{11}\Delta$ n'est pas constante, mais

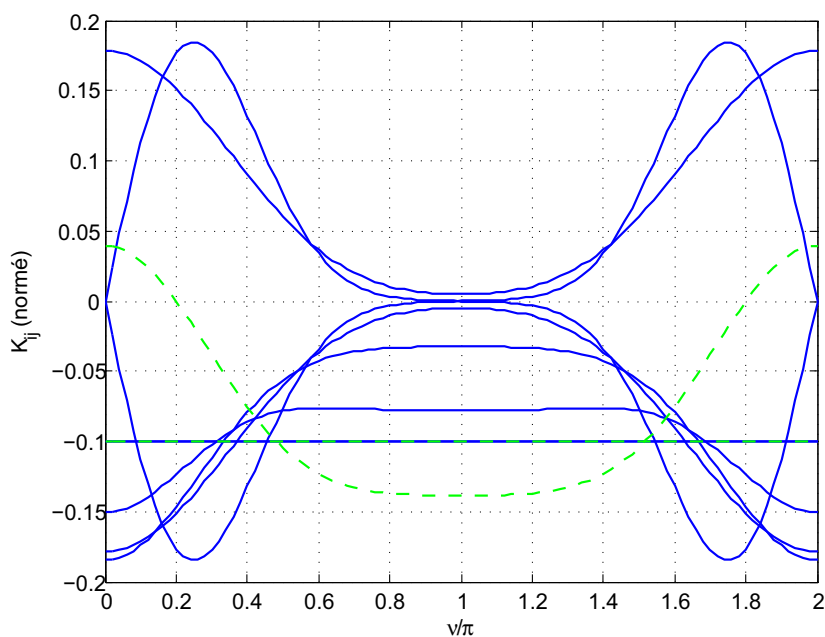


FIGURE 4.15 – Variations des gains du correcteur en fonction de l'anomalie vraie. Les gains du correcteur pour la dynamique dans le plan orbital (axes r et c) sont tracés en bleu tandis que les gains pour la dynamique hors plan (axe o) sont tracés en vert.

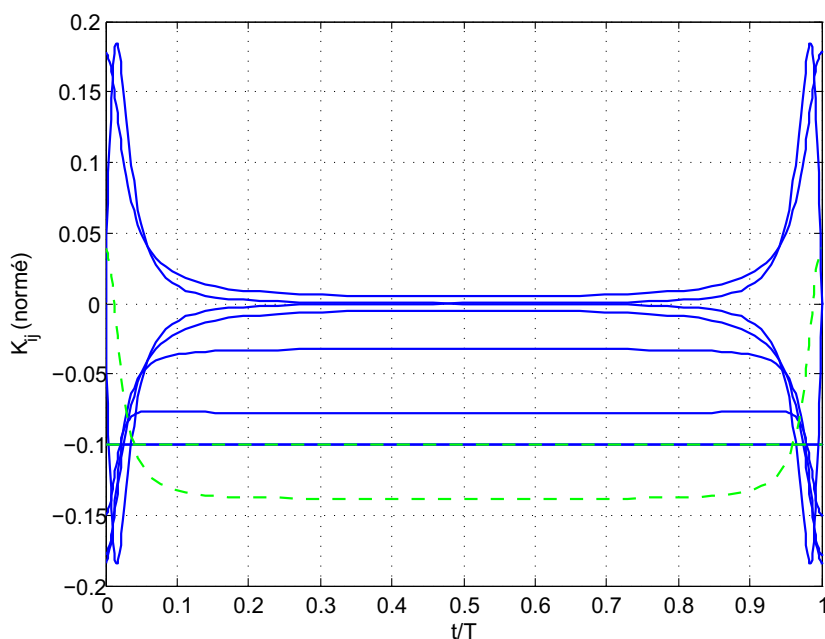


FIGURE 4.16 – Variations des gains du correcteur en fonction du temps. Les gains du correcteur pour la dynamique dans le plan orbital (axes r et c) sont tracés en bleu tandis que les gains pour la dynamique hors plan (axe o) sont tracés en vert.

à paramètre variant. En d'autres termes, l'inversion ne peut pas être effectuée au sol, mais doit être calculée par l'ordinateur de bord en temps réel. Dans cette section, nous décrivons le problème de l'existence et de l'unicité de la solution (*angl.* well-posedness) plus en détail afin de proposer une solution ensuite.

Inversion directe

Une possibilité pour évaluer l'Éq. (4.48) est d'effectuer une inversion directe en utilisant l'élimination de GAUSS-JORDAN⁹, par exemple. Il se pose alors la question : sous quelles conditions la matrice $I_{n_\Delta} - K_{11}\Delta$ est-elle inversible? MAGNI [110] donne la condition nécessaire et suffisante suivante :

$$\mu(K_{11}) < 1 \quad (4.49)$$

En d'autres termes, la valeur singulière structurée (SSV, *angl.* structured singular value) de la matrice K_{11} doit être inférieure à 1. Le fait d'utiliser la valeur singulière structurée peut être expliqué par la structure particulière de la matrice Δ . Plus d'informations sur la valeur singulière structurée peuvent être trouvées dans l'ouvrage [3].

Le rayon de l'existence et de l'unicité de la solution (*angl.* well-posedness radius) est l'inverse de la valeur singulière structurée :

$$r_{\text{WP}} = \frac{1}{\mu(K_{11})} \quad (4.50)$$

Si r_{WP} est supérieur à 1, alors la matrice $I_{n_\Delta} - K_{11}\Delta$ n'est jamais singulière, pourvu que la norme infinie de la matrice Δ soit inférieure à 1 ($\|\Delta\|_\infty < 1$).

Le TAB. 4.7 montre les rayons de l'existence et de l'unicité de la solution pour des correcteurs K différents.

TABLE 4.7 – Rayons de l'existence et de l'unicité de la solution

Représentation choisie pour $\sin \nu$ et $\cos \nu$	Rayon du correcteur à trois axes ($r-c-o$)	Rayon du correcteur à deux axes ($r-c$)	Rayon du correcteur mono-axe (o)
$\delta_1 = \sin \nu$ $\delta_2 = \cos \nu$	0,5996	148,0372	4798,7
$\delta = \tan \frac{\nu}{2}$	0,2016	0,2022	∞
$\delta = \tan \frac{\nu}{4}$	– #	0,0875	∞

La boîte à outil a refusé de calculer le rayon de well-posedness car $n_{\Delta} > 500$.

Comme on peut le constater dans le TAB. 4.7, le calcul de la valeur singulière structurée μ et par conséquent du rayon de l'existence et de l'unicité de la solution est lourd et souvent conservatif. En effet, il n'est pas possible avec les outils numériques disponibles de calculer le rayon de l'existence et de l'unicité du correcteur à trois axes dans le cas d'une paramétrisation avec $\tan \frac{\nu}{4}$.

En revanche, dans le cas d'une paramétrisation avec $\sin \nu$ et $\cos \nu$ et de correcteurs distincts pour les dynamiques dans le plan orbital et hors-plan, nous avons la garantie que les correcteurs sont bien posés car les rayons de l'existence et de l'unicité de la solution sont largement supérieurs à 1. À cause

9. Wilhelm JORDAN (1842 – 1899), mathématicien et géomètre allemand

du conservatisme concernant les calculs de $\mu(K_{11})$, il n'existe pas de garantie qu'un seul correcteur pour les trois axes est possible.

Il existe une autre possibilité afin de vérifier l'existence de l'inverse de $I_{n_\Delta} - K_{11}\Delta$. En fait, il faut que la matrice $I_{n_\Delta} - K_{11}\Delta$ soit bien *conditionnée* pour pouvoir être inversée. Le *conditionnement* d'une matrice M est défini comme rapport entre les valeurs singulières maximale et minimale :

$$\text{cond}(P) = \frac{\bar{\sigma}(M)}{\underline{\sigma}(M)} \quad (4.51)$$

Un conditionnement très important signifie que la matrice M est difficile à inverser numériquement. Un conditionnement faible, c'est-à-dire faiblement supérieur à 1, signifie une inversion facile de la matrice M .

La partie gauche de la FIG. 4.17 montre le conditionnement du correcteur à trois axes avec la paramétrisation $\delta_1 = \sin \nu$ et $\delta_2 = \cos \nu$ pour toutes les valeurs de δ_1 et δ_2 entre -1 et $+1$. Le petit cercle correspond au rayon de l'existence et de l'unicité de la solution. Le grand cercle est le cercle unité et correspond aux valeurs intéressantes à cause de la dépendance entre δ_1 et δ_2 ($\sin^2 \nu + \cos^2 \nu = 1$).

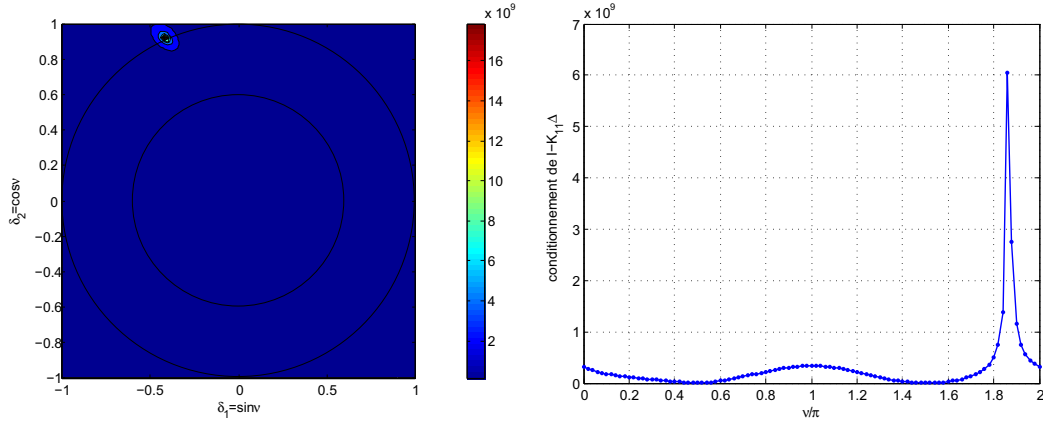


FIGURE 4.17 – Conditionnement de la matrice $I_{n_\Delta} - K_{11}\Delta$ du correcteur à trois axes avec la paramétrisation $\delta_1 = \sin \nu$ et $\delta_2 = \cos \nu$. À gauche : conditionnement pour toutes les valeurs de δ_1 et δ_2 entre -1 et $+1$. À droite : conditionnement pour toutes les anomalies vraies entre 0 et 2π .

La partie droite de la FIG. 4.17 montre le conditionnement de la matrice $I_{n_\Delta} - K_{11}\Delta$ pour toutes les anomalies vraies entre 0 et 2π . Elle tient compte de la dépendance entre δ_1 et δ_2 . En d'autres termes, elle trace le conditionnement si l'on parcourt le cercle unité de la partie gauche dans le sens des aiguilles d'une montre.

Dans les deux parties, il est bien visible que le conditionnement est généralement très élevé, de l'ordre de $0.2 \cdot 10^9$ en moyenne. En outre, il existe un pic à environ $\nu = 1,85\pi$. Ces faits rendent la matrice $I_{n_\Delta} - K_{11}\Delta$ très difficile à inverser.

Dans la suite, nous montrerons le conditionnement dans le cas de correcteurs distincts pour les dynamiques dans le plan orbital et hors-plan. La FIG. 4.18 montre le correcteur à 2 axes pour le plan orbital. Ici, le conditionnement a des valeurs entre 1 et 1,1 environ. La matrice $I_{n_\Delta} - K_{11}\Delta$ est très facilement inversible.

Quant au correcteur à 1 axe pour la dynamique hors-plan, le conditionnement est entre 1 et 1,03, cf. FIG. 4.19.

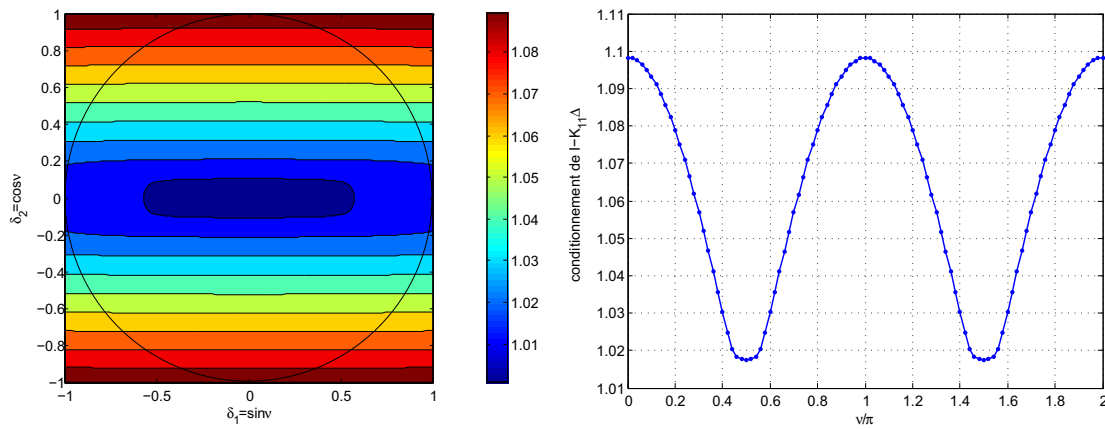


FIGURE 4.18 – Conditionnement de la matrice $I_{n_{\Delta}} - K_{11}\Delta$ du correcteur à deux axes avec la paramétrisation $\delta_1 = \sin \nu$ et $\delta_2 = \cos \nu$. À gauche : conditionnement pour toutes les valeurs de δ_1 et δ_2 entre -1 et $+1$. À droite : conditionnement pour toutes les anomalies vraies entre 0 et 2π .

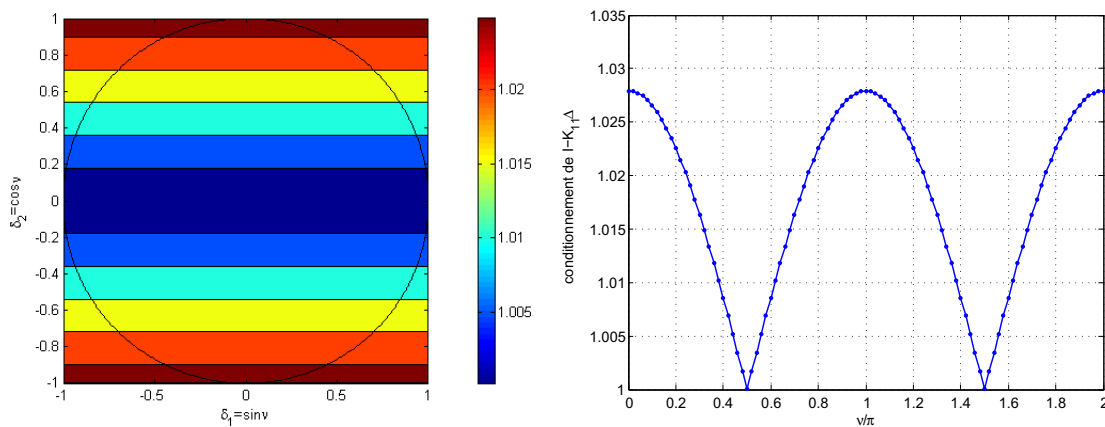


FIGURE 4.19 – Conditionnement de la matrice $I_{n_{\Delta}} - K_{11}\Delta$ du correcteur mono-axe avec la paramétrisation $\delta_1 = \sin \nu$ et $\delta_2 = \cos \nu$. À gauche : conditionnement pour toutes les valeurs de δ_1 et δ_2 entre -1 et $+1$. À droite : conditionnement pour toutes les anomalies vraies entre 0 et 2π .

En conclusion, nous pouvons dire que la matrice $I_{n_\Delta} - K_{11}\Delta$ est inversible pour toutes les valeurs admissibles de δ_1 et δ_2 si deux correcteurs distincts sont utilisés. Il semble que l'inversion pose un problème lorsque l'on synthétise un seul correcteur pour les trois axes. Ceci dit, un seul correcteur peut également être obtenu par assemblage des deux correcteurs séparés.

Inversion itérative

Même si l'inversion directe de la matrice $I_{n_\Delta} - K_{11}\Delta$ est possible en principe, elle est lourde à faire sur un ordinateur de bord. Pour cette raison, une solution itérative a été proposée par MAGNI et al. [110, 114].

Cette solution itérative est connue sous le nom d'*itération de RICHARDSON*. Elle est couramment utilisée afin de résoudre des systèmes d'équations linéaires. Nous faisons d'abord les deux définitions suivantes :

$$\begin{aligned} Q &= K_{11}\Delta \\ b &= K_{12}x \end{aligned} \quad (4.52)$$

Basé sur ces définitions, nous effectuons l'itération suivante :

$$z_{k+1} = Qz_k + b \quad (4.53)$$

Bien entendu, il faut choisir une valeur initiale z_0 . Une possibilité est de choisir le vecteur nul. Une alternative est l'utilisation de la valeur finale de z qui a été obtenue lors du dernier calcul du correcteur.

L'itération définie dans l'Éq. (4.53) est répétée jusqu'à convergence. Le critère d'interruption pourrait être le suivant :

$$\|z_{k+1} - z_k\|_2 < \varepsilon \quad (4.54)$$

ε est une constante positive de faible taille, par exemple $\varepsilon = 10^{-6}$.

Enfin, la commande u peut être calculée grâce à l'équation suivante :

$$u = K_{22}x + K_{21}\Delta z \quad (4.55)$$

En régime convergé, les équations suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned} z &= Qz + b \\ z &= (I_{n_\Delta} - Q)^{-1}b \\ &= (I_{n_\Delta} - K_{11}\Delta)^{-1}K_{12}x \\ u &= [K_{22} + K_{21}\Delta(I_{n_\Delta} - K_{11}\Delta)^{-1}K_{12}]x \end{aligned} \quad (4.56)$$

Or, nous observons l'équivalence entre cette dernière équation et l'expression initiale du correcteur, cf. Éq. (4.48).

Néanmoins, il se pose la question si et sous quelles conditions l'itération (4.53) converge. Une

conditions nécessaire et suffisante, cf. [72], s'écrit comme suit :

$$\rho(Q) < 1 \quad (4.57)$$

Ici, $\rho(Q)$ est le rayon spectral de la matrice Q , c'est-à-dire le maximum des modules des valeurs propres de la matrice Q :

$$\rho(Q) = \max_i |\lambda_i(Q)| \quad (4.58)$$

Il existe d'autres critères, en particulier des critères basés sur la valeur singulière structurée, cf. [110]. Or, nous ne développerons pas les autres critères à cause des difficultés liées au calcul de la valeur singulière structurée évoquées ci-dessus.

Dans notre cas, il faut que le rayon spectral $\rho(K_{11}\Delta)$ soit inférieur à 1. Comme pour le conditionnement de la matrice $I_{n_\Delta} - K_{11}\Delta$, il est possible de calculer le rayon spectral pour les valeurs possibles de $\delta_1 = \sin \nu$ et $\delta_2 = \cos \nu$.

La FIG. 4.20 montre le rayon spectral $\rho(K_{11}\Delta)$ du correcteur à trois axes pour une anomalie vraie ν dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Le rayon spectral est supérieur à 1 sur la plupart de l'orbite. En d'autres termes, l'algorithme d'itération de RICHARDSON ne converge pas à ces endroits-là.

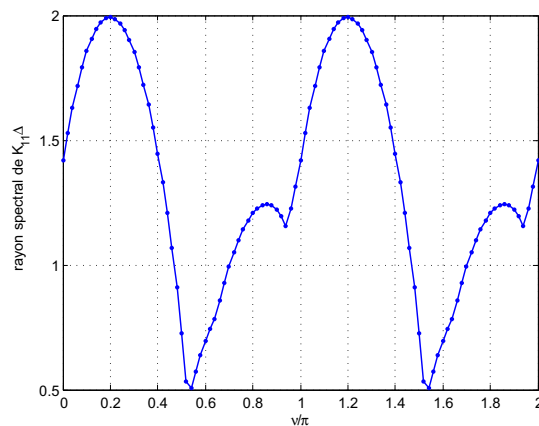
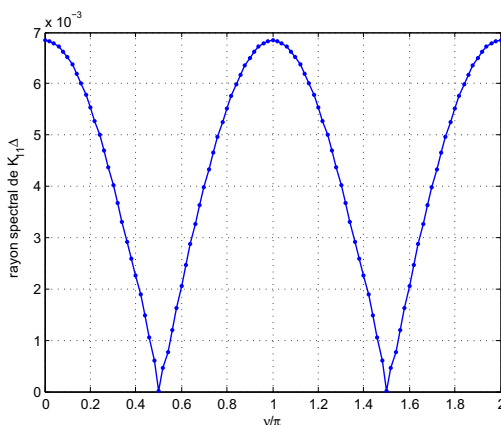
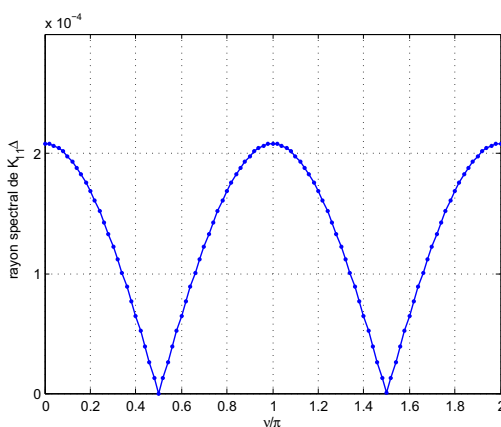


FIGURE 4.20 – Rayon spectral $\rho(K_{11}\Delta)$ du correcteur à trois axes

Les FIGS. 4.21 et 4.22 montrent les rayons spectraux $\rho(K_{11}\Delta)$ des correcteurs dans le plan orbital et hors-plan, respectivement. Ici, les pires cas, c'est-à-dire les rayons spectraux les plus grands, sont environ $0,7 \cdot 10^{-3}$ pour le correcteur dans le plan orbital et $2 \cdot 10^{-4}$ pour le correcteur hors-plan. Clairement, l'itération de RICHARDSON ne pose aucun problème de convergence.

FIGURE 4.21 – Rayon spectral $\rho(K_{11}\Delta)$ du correcteur à deux axesFIGURE 4.22 – Rayon spectral $\rho(K_{11}\Delta)$ du correcteur mono-axe

4.5.5 Décomposition en une série de Fourier

Au lieu de stocker les matrices K_{11} , K_{12} , K_{21} et K_{22} et d'évaluer l'Éq. (4.48) (page 155), il existe une autre manière de stocker et de calculer le correcteur. Cette méthode tire profit du caractère périodique du système et par conséquent du correcteur et utilise le développement en une série de FOURIER¹⁰ du correcteur. L'analyse de FOURIER est expliquée en détail dans l'Annexe F.

Nous partons des gains du correcteur tels qu'ils sont illustrés dans la FIG. 4.15 (page 156). Ces gains sont échantillonnés de façon équidistante en fonction de l'anomalie vraie ν , en d'autres termes nous disposons d'une expression $K_n = K(\nu_n)$ avec $n = 0, \dots, N - 1$ et $\nu_n = 2\pi n/N$. Dans la suite, nous utiliserons un nombre impair pour N .

En utilisant K_n , nous calculerons la série de FOURIER :

$$\mathcal{K}_k = \sum_{n=0}^{N-1} K_n e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \quad (4.59)$$

avec $k = 0, \dots, N - 1$

10. Jean Baptiste Joseph FOURIER (1768 – 1830), mathématicien et physicien français

\mathcal{K}_k est une matrice complexe avec les mêmes dimensions de K_n .

Avec un nombre d'échantillons N impair, nous pouvons obtenir K_n à partir de \mathcal{K}_k de la façon suivante, cf. Annexe F :

$$K_n = \frac{1}{N} \left[\mathcal{K}_0 + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \left(2\Re(\mathcal{K}_k) \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - 2\Im(\mathcal{K}_k) \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) \right) \right] \quad (4.60)$$

$\Re(\mathcal{K}_k)$ et $\Im(\mathcal{K}_k)$ sont les parties réelle et imaginaire de la matrice complexe \mathcal{K}_k .

Cependant, le but n'est pas de recalculer les échantillons K_n , mais de calculer $K(\nu)$. Le n correspondant à un ν particulier peut être obtenu comme suit :

$$n = \frac{N}{2\pi}\nu \quad (4.61)$$

Il vient :

$$K(\nu) = \frac{1}{N} \left[\mathcal{K}_0 + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} (2\Re(\mathcal{K}_k) \cos(k\nu) - 2\Im(\mathcal{K}_k) \sin(k\nu)) \right] \quad (4.62)$$

Pour l'instant, l'avantage d'une décomposition en une série de FOURIER n'est pas encore visible. Or, il est possible de tronquer cette série après $N' < N/2$ éléments :

$$K(\nu) = \frac{1}{N} \left[\mathcal{K}_0 + \sum_{k=1}^{N'} (2\Re(\mathcal{K}_k) \cos(k\nu) - 2\Im(\mathcal{K}_k) \sin(k\nu)) \right] \quad (4.63)$$

Bien entendu, une série de FOURIER tronquée n'est plus une représentation exacte de l'évolution du correcteur $K(\nu)$ en fonction de l'anomalie vraie ν . Par ailleurs, la série de FOURIER complète n'est pas exacte car nous n'avons utilisé qu'un nombre fini d'échantillons pour la calculer.

La question se pose de savoir combien d'information est perdue lors de la troncature. La FIG. 4.23 illustre l'évolution d'un gain particulier du correcteur $K(\nu)$ en fonction de l'anomalie vraie pour des longueurs différentes de la série de FOURIER. Il est bien visible que les résultats ne sont pas satisfaisants, c'est-à-dire que l'écart entre l'évolution exacte et l'évolution approximée du gain est important, jusqu'à $N' = 2$ environ. À partir de $N' = 4$, l'écart est presque invisible.

L'approximation des gains du correcteur par une série de FOURIER tronquée peut servir à simplifier la représentation du correcteur. En particulier, il n'est plus nécessaire d'inverser une matrice, ni directement, ni par itération. Les calculs se réduisent à des évaluations des fonctions trigonométriques $\sin(k\nu)$ et $\cos(k\nu)$ et des multiplications et additions.

Quant aux besoins de mémoire, la représentation linéaire fractionnaire est contenue dans les quatre matrices suivantes :

$$\begin{aligned} K_{11} &\in \mathbb{R}^{n_\Delta \times n_\Delta} \\ K_{12} &\in \mathbb{R}^{n_\Delta \times n} \\ K_{21} &\in \mathbb{R}^{m \times n_\Delta} \\ K_{22} &\in \mathbb{R}^{m \times n} \end{aligned} \quad (4.64)$$

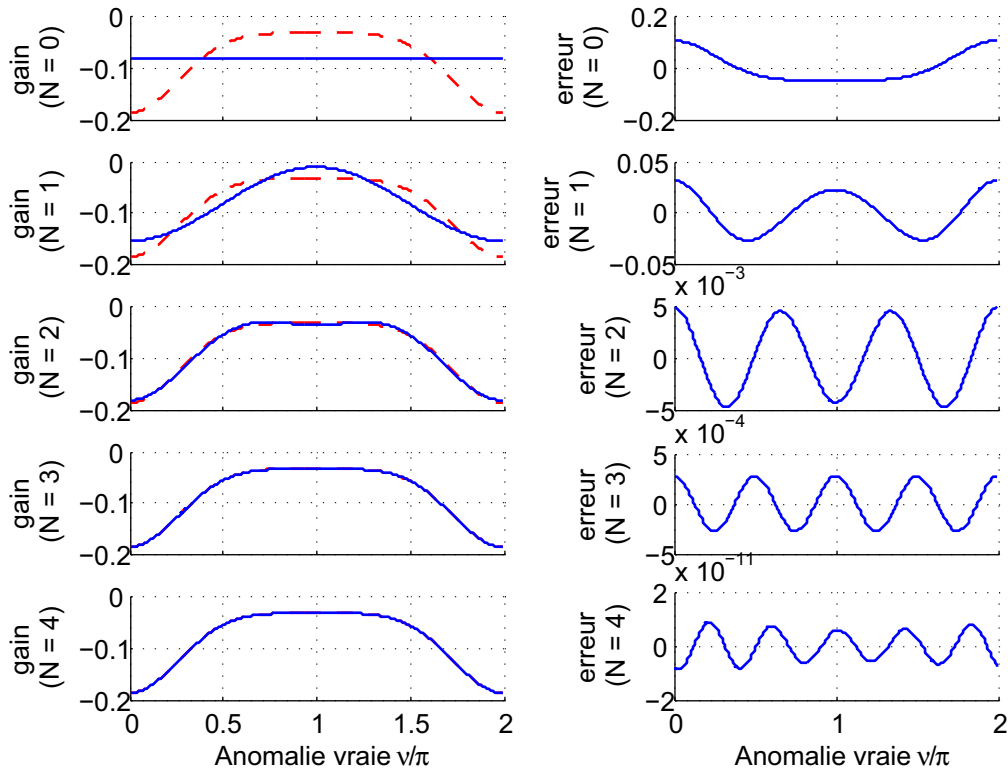


FIGURE 4.23 – Approximation d'un gain scalaire du correcteur à l'aide d'une série de FOURIER tronquée. À gauche : comparaison de l'évolution exacte du gain (ligne rouge tiretée) avec l'approximation (ligne bleue continue) pour des longueurs différentes de la série de FOURIER. À droite : erreur commise par l'approximation

Au total, $n_{\Delta}^2 + n_{\Delta}(n + m) + mn$ nombres réels sont nécessaires.

La série de FOURIER tronquée demande de stocker les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0 &\in \mathbb{R}^{m \times n} \\ \mathcal{K}_k &\in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad k = 1, \dots, N' \end{aligned} \quad (4.65)$$

Au total, $mn(2N' + 1)$ nombres réels sont à stocker.

Le TAB. 4.8 montre les besoins de mémoire pour stocker les correcteurs sous forme de représentation linéaire fractionnaire (en utilisant $\delta_1 = \sin \nu$ et $\delta_2 = \cos \nu$) et sous forme de série de FOURIER (avec $N' = 4$ et $N' = 8$). Les nombres indiquent le nombre de scalaires à stocker pour les différentes alternatives.

Clairement, la représentation avec une série de FOURIER est plus avantageuse en termes de consommation de mémoire si l'on a le droit de tronquer la série après $N' = 8$ ou même $N' = 4$ harmoniques comme le suggère la FIG. 4.23.

TABLE 4.8 – Comparaison des besoins de mémoire (nombre de scalaires à stocker) d'un correcteur LFT avec un correcteur sous forme d'une série de FOURIER avec différents nombres d'harmoniques ($N' = 4$ et $N' = 8$)

Type de correcteur	m	n	n_{Δ}	LFT	FOURIER ($N' = 4$)	FOURIER ($N' = 8$)
Complet (3 axes)	3	6	78	6804	162	306
Dans le plan orbital (2 axes)	2	4	20	528	72	136
Hors-plan (1 axe)	1	2	6	56	18	34

4.5.6 Analyse de stabilité

Même si la stabilité du système en boucle fermée semble garantie par le fait que l'on place des pôles dont l'endroit ne varie pas le long de l'orbite, il peut se présenter le cas contraire. En effet, il peut être avantageux de vouloir imposer une dynamique à paramètre variant en boucle fermée, par exemple pour imposer des spécifications différentes pour l'apogée et le périégée. Le système en boucle fermée devient alors un système à paramètre variant dont la stabilité n'est pas garantie.

En outre, les techniques que nous avons proposées afin d'implanter le correcteur plus facilement, c'est-à-dire l'inversion par itération et les séries de FOURIER, font que la dynamique réelle ne correspond plus exactement à la dynamique spécifiée.

Par conséquent, il faut disposer d'une méthode pour vérifier la stabilité de la boucle fermée. Comme il s'agit d'un système à paramètre variant, mais également *périodique*, l'*analyse de FLOQUET*¹¹ est un outil puissant pour réaliser l'objectif d'analyser la stabilité. Cet outil a démontré ses capacités dans des applications réelles, par exemple le contrôle des hélicoptères [119]. Il existe même une extension de la méthode afin d'effectuer des analyses de robustesse vis-à-vis d'incertitudes structurées de systèmes périodiques, cf. [89].

L'analyse de FLOQUET est décrite en détail dans l'Annexe G. Elle exige une dynamique linéaire de la forme suivante :

$$\frac{d}{dt}x = A(t)x \quad (4.66)$$

La matrice de transition $R = \Phi(t_0 + T, t_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ entre un instant initial t_0 et un deuxième instant avec un décalage d'une période (orbite) $t_0 + T$ peut facilement être obtenue par intégration du système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0) \quad (4.67)$$

La condition initiale est $\Phi(t_0, t_0) = I_n$. Le choix de l'instant t_0 est sans importance pour l'analyse de la stabilité de la boucle fermée.

Les valeurs propres μ_k , $k = 1, \dots, n$, de la matrice R que l'on appelle *multiplicateurs caractéristiques* permettent de conclure la stabilité ou non-stabilité du système. En fait, le système est stable si et seulement si les multiplicateurs caractéristiques μ_k se trouvent sans exception à l'intérieur du cercle unité. En d'autres termes, il faut que leurs modules $|\mu_k|$ soient inférieurs à 1.

11. Achille Marie Gaston FLOQUET (1847 – 1920), mathématicien français

Le TAB. 4.9 indique les multiplicateurs caractéristiques pour des cas différents. Le premier cas est le calcul du correcteur par inversion directe qui représente le cas de référence. Clairement, les multiplicateurs caractéristiques se trouvent à l'intérieur du cercle unité et le système en boucle fermée est stable. On constate des marges de stabilité très importantes, ce qui peut être expliqué avec l'amortissement choisi ($\xi_0 = \sqrt{2}/2$) et le rapport important entre le temps de réponse en boucle fermée ($T_{\text{rép}} = 3000$ s) et la période orbitale ($T = 37462$ s).

TABLE 4.9 – Analyse de FLOQUET. Multiplicateurs caractéristiques μ_k pour différents types de calcul du correcteur

Type de calcul	Multiplicateurs caractéristiques μ_k	$ \mu_k $
LFT, inversion directe	$8.9532 \cdot 10^{-13} \pm 3.8393 \cdot 10^{-12}i$ $8.9443 \cdot 10^{-13} \pm 3.8390 \cdot 10^{-12}i$	$3.9423 \cdot 10^{-12}$ $3.9423 \cdot 10^{-12}$
LFT, inversion itérative, $N = 0$ (0 itérations)	$-8.2916 \cdot 10^{-8}$ $-2.3898 \cdot 10^{-8}$ $-1.6960 \cdot 10^{-16} + 1.5114 \cdot 10^{-16}i$	$8.2916 \cdot 10^{-8}$ $2.3898 \cdot 10^{-8}$ $2.2717 \cdot 10^{-16}$
LFT, inversion itérative, $N = 1$ (1 itération)	$1.2085 \cdot 10^{-4}$ $2.9358 \cdot 10^{-13}$ $7.1363 \cdot 10^{-16}$ $3.7933 \cdot 10^{-15}$	$1.2085 \cdot 10^{-4}$ $2.9358 \cdot 10^{-13}$ $7.1363 \cdot 10^{-16}$ $3.7933 \cdot 10^{-15}$
LFT, inversion itérative, $N = 2$ (2 itérations)	$-9.4718 \cdot 10^{-12}$ $5.4757 \cdot 10^{-12}$ $2.3505 \cdot 10^{-12}$ $-1.3580 \cdot 10^{-12}$	$9.4718 \cdot 10^{-12}$ $5.4757 \cdot 10^{-12}$ $2.3505 \cdot 10^{-12}$ $1.3580 \cdot 10^{-12}$
LFT, inversion itérative, $N = 3$ (3 itérations)	$3.6523 \cdot 10^{-12} + 1.1858 \cdot 10^{-12}i$ $3.4996 \cdot 10^{-12} + 9.2213 \cdot 10^{-13}i$	$3.8400 \cdot 10^{-12}$ $3.6190 \cdot 10^{-12}$
LFT, inversion itérative, $N = 4$ (4 itérations)	$8.9532 \cdot 10^{-13} + 3.8393 \cdot 10^{-12}i$ $8.9443 \cdot 10^{-13} + 3.8390 \cdot 10^{-12}i$	$3.9423 \cdot 10^{-12}$ $3.9418 \cdot 10^{-12}$
FOURIER, $N' = 0$	$3.8840 \cdot 10^{-8}$ $1.8869 \cdot 10^{-8}$ $1.3846 \cdot 10^{-16} \pm 1.5577 \cdot 10^{-16}i$	$3.8840 \cdot 10^{-8}$ $1.8869 \cdot 10^{-8}$ $2.0841 \cdot 10^{-16}$
FOURIER, $N' = 1$	$-1.9481 \cdot 10^{-8}$ $-2.2242 \cdot 10^{-12}$ $1.1715 \cdot 10^{-13}$ $1.8862 \cdot 10^{-14}$	$1.9481 \cdot 10^{-8}$ $2.2242 \cdot 10^{-12}$ $1.1715 \cdot 10^{-13}$ $1.8862 \cdot 10^{-14}$
FOURIER, $N' = 2$	$-2.2206 \cdot 10^{-12} \pm 4.4706 \cdot 10^{-12}i$ $-1.1968 \cdot 10^{-12} \pm 2.3523 \cdot 10^{-12}i$	$4.9917 \cdot 10^{-12}$ $2.6393 \cdot 10^{-12}$
FOURIER, $N' = 3$	$8.2880 \cdot 10^{-13} \pm 3.6723 \cdot 10^{-12}i$ $8.6689 \cdot 10^{-13} \pm 3.5844 \cdot 10^{-12}i$	$3.7647 \cdot 10^{-12}$ $3.6877 \cdot 10^{-12}$
FOURIER, $N' = 4$	$8.9532 \cdot 10^{-13} \pm 3.8393 \cdot 10^{-12}i$ $8.9443 \cdot 10^{-13} \pm 3.8390 \cdot 10^{-12}i$	$3.9423 \cdot 10^{-12}$ $3.9418 \cdot 10^{-12}$

Ensuite, le TAB. 4.9 montre 5 cas utilisant l'inversion itérative. Dans le cas de l'inversion itérative, il faut absolument que le nombre d'itérations soit prédéterminé. Un critère d'interruption comme celui donné par l'Éq. (4.54) n'est pas admissible parce que le système en boucle fermée serait non-linéaire. En effet, le nombre d'itérations et par conséquent l'expression du correcteur dépendraient des états du système. En revanche, un nombre fixe N d'itérations donne l'expression suivante du correcteur :

$$u = \left[K_{22} + K_{21} \Delta \sum_{k=0}^N Q^k K_{12} \right] x \quad (4.68)$$

Cette expression est linéaire et permet une analyse de FLOQUET. Le TAB. 4.9 révèle que même sans une seule itération, le correcteur stabilise le système. Néanmoins, les valeurs des multiplicateurs caractéristiques sont très loin des valeurs correspondant à l'inversion directe. À partir de 4 itérations, l'écart entre l'inversion directe et l'inversion par itération n'est plus visible.

Le TAB. 4.9 montre également les multiplicateurs caractéristiques pour une implantation du correcteur sous forme de séries de FOURIER. Ici, il n'est plus possible de distinguer les valeurs des valeurs obtenues avec l'inversion directe à partir d'une inclusion de $N' = 4$ harmoniques.

L'analyse de FLOQUET nous a permis de tester la stabilité de la boucle fermée synthétisée en utilisant des méthodes avancées d'implantation du correcteur. Les valeurs des multiplicateurs caractéristiques de la matrice R ne donnent pas seulement une garantie de stabilité, mais peuvent également aider à étudier l'écart entre les performance des différentes méthodes.

4.5.7 Simulations

Pour les simulations, nous avons choisi l'injection des consignes r au niveau des états x , cf. FIG. 4.11 (page 152) car c'est la structure qui gère le mieux le cas du suivi d'une orbite naturelle. Cependant, comme nous l'avons déjà évoqué, il ne suffit pas de spécifier les positions relatives désirées, mais également les vitesses relatives désirées.

La trajectoire de référence est composée de trois parties, dure trois périodes orbitales et est illustrée dans la FIG. 4.24 comme courbe verte tiretée.

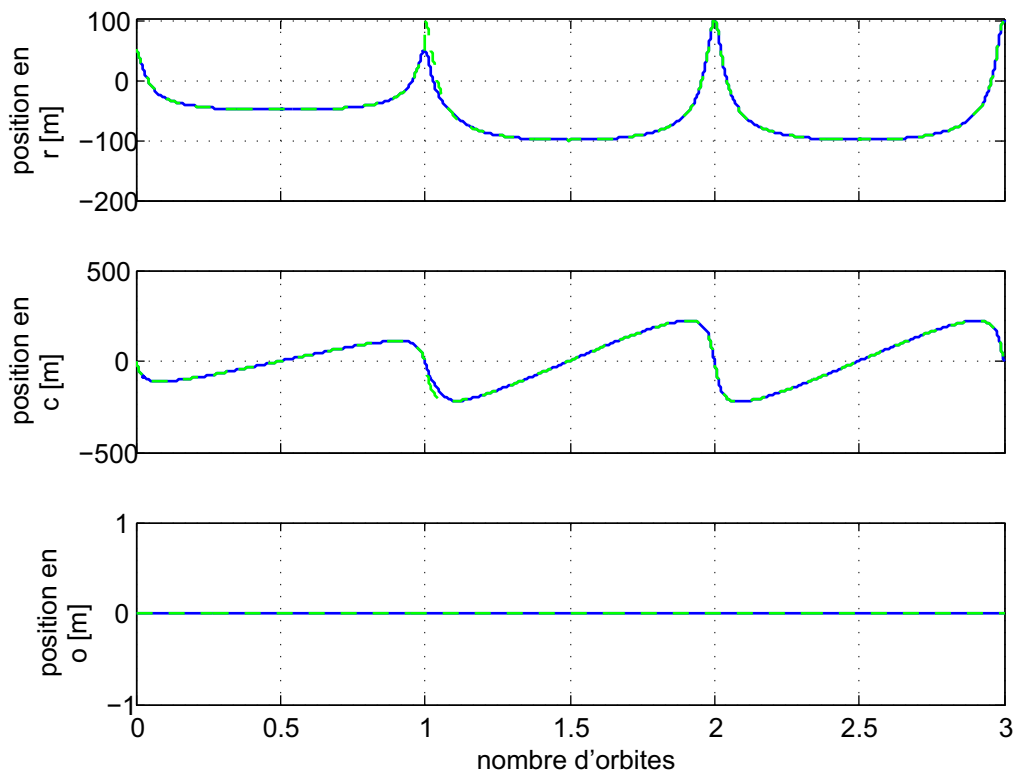


FIGURE 4.24 – Suivi d'une trajectoire de référence. La référence est montrée en vert tireté et la trajectoire contrôlée comme courbe bleue continue.

Pendant la première orbite qui commence au périégée, il s'agit de suivre une trajectoire naturelle qui commence à un écart entre les deux satellites de 50 m selon l'axe r ($r(0) = 50$ m). Les satellites possèdent une vitesse relative non nulle selon l'axe c ($\dot{c}(0) \neq 0$). Nous avons utilisé la relation suivante présentée par TILLERSON et HOW [171] pour obtenir un mouvement périodique naturel :

$$\frac{\dot{c}(0)}{r(0)} = -\frac{n(2+e)}{(1+e)^{1/2}(1-e)^{3/2}} \quad (4.69)$$

Au début de la deuxième orbite, la consigne change, et il s'agit de suivre une trajectoire naturelle dont les valeurs initiales sont doublées par rapport à la trajectoire précédente. La troisième orbite comporte la même consigne que la deuxième.

Le suivi de trajectoires naturelles est très courant dans le vol en formation car il permet de minimiser les dépenses d'ergols. Le but principal du correcteur est donc d'effectuer le changement entre la première trajectoire naturelle et la deuxième. La FIG. 4.24 illustre comment ce changement se déroule.

La FIG. 4.25 montre la trajectoire contrôlée en deux dimensions. Les deux trajectoires naturelles périodiques sont bien visibles, ainsi que le changement entre les deux au début de la deuxième orbite.

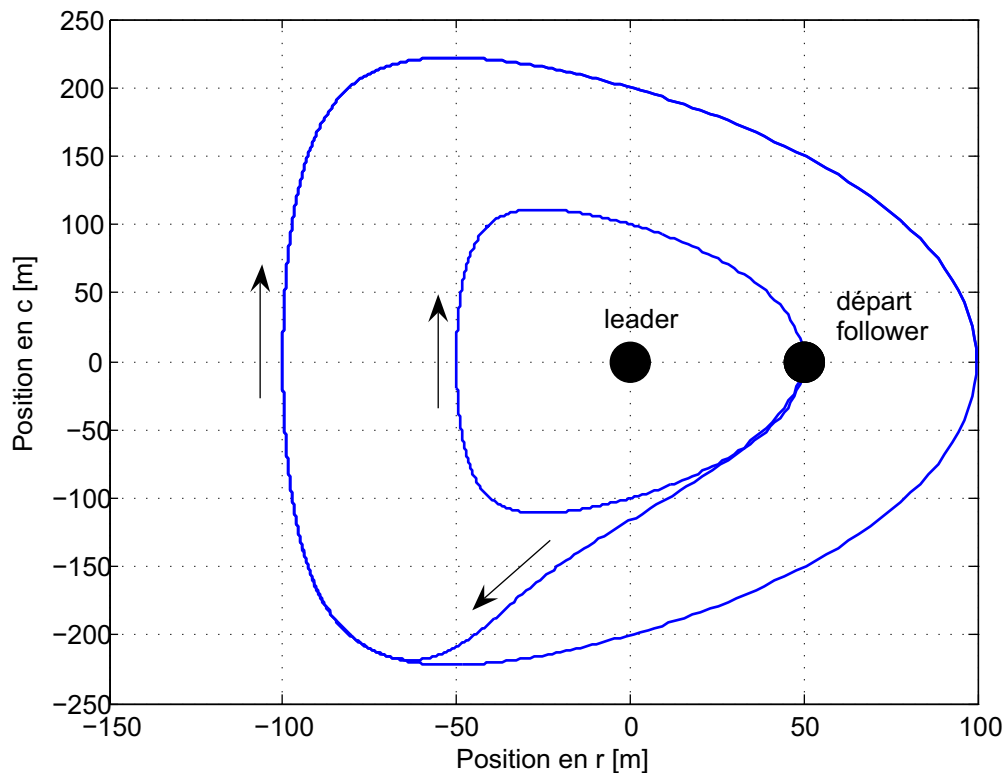


FIGURE 4.25 – Suivi d'une trajectoire de référence, illustration en deux dimensions.

La FIG. 4.26 montre les commandes utilisées pour effectuer la manœuvre.

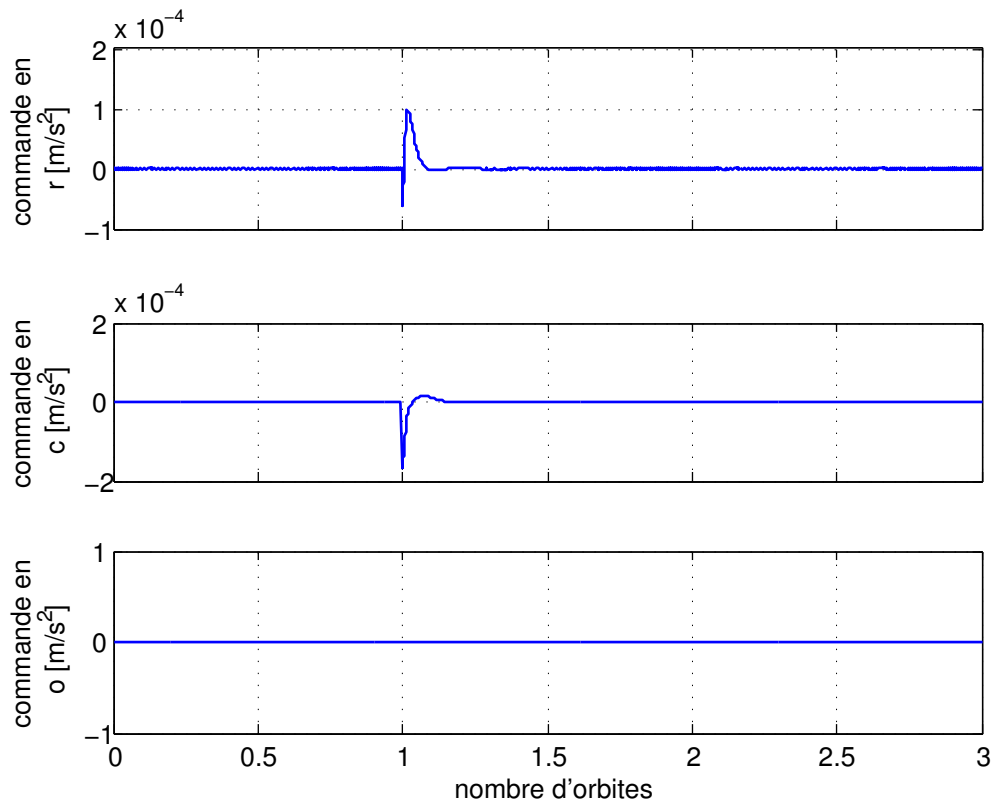


FIGURE 4.26 – Commandes utilisées pour suivre une trajectoire de référence

Enfin, la FIG. 4.27 montre l'erreur entre la trajectoire de référence et la trajectoire contrôlée. La version agrandie (à droite) illustre la faible déviation de la trajectoire de référence après l'accomplissement de la manœuvre de changement de trajectoire naturelle. L'erreur, qui est inférieure à un millimètre, est minuscule devant les amplitudes des consignes.

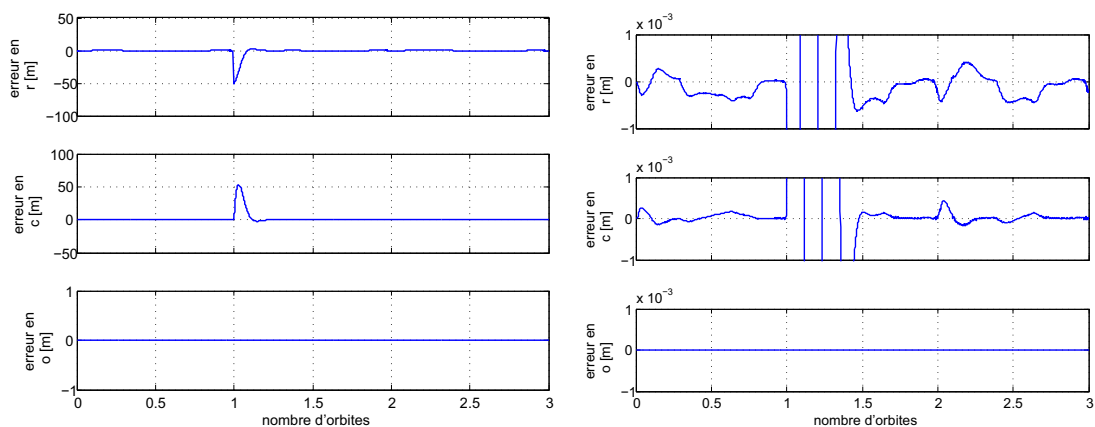


FIGURE 4.27 – Erreur entre la trajectoire de référence et la trajectoire contrôlée. À gauche : version normale, à droite : version agrandie

Des simulations ont également été faites qui prennent en compte l'effet du deuxième harmonique zonal. Cependant, nous n'avons pas tracé les courbes car il n'est pas possible de les distinguer du cas sans perturbation.

4.5.8 Bilan

Dans cette section, nous avons présenté l'application de la synthèse modale linéaire fractionnaire au problème du contrôle de la position relative en orbite terrestre elliptique. Le correcteur varie en fonction de l'anomalie vraie ν . Nous avons montré comment des problèmes d'implantation peuvent être surmontés. La pertinence de cette méthode de synthèse a été montrée grâce à des simulations.

4.6 Contrôle séquencé \mathcal{H}_2 -optimal avec modèle de référence

Dans cette section, nous présenterons une deuxième méthode afin de contrôler la dynamique relative en translation. Cette méthode n'a pas recours au modèle linéaire fractionnaire de la dynamique.

Un souci très important dans la synthèse d'un correcteur pour un système à paramètre variant est de garantir un comportement en boucle fermée qui remplisse les spécifications, comme par exemple la dynamique constante correspondant à un deuxième ordre bien amorti que nous avons vue dans la section relative à la commande modale.

L'idée principale dans cette deuxième approche est d'utiliser un modèle de référence décrivant le comportement souhaité en boucle fermée. La synthèse \mathcal{H}_2 sera utilisée afin d'obtenir les correcteurs.

La synthèse \mathcal{H}_2 est une méthode de commande optimale. En fait, elle minimise la norme \mathcal{H}_2 du transfert en boucle fermée entre les entrées exogènes (bruits, consignes, etc.) et les sorties contrôlées. Plus de détails sur la signification de la norme \mathcal{H}_2 , ainsi que sur la synthèse \mathcal{H}_2 , sont disponibles dans l'Annexe H.

4.6.1 Synthèse d'un correcteur pour un seul point sur l'orbite

Nous considérerons pour l'instant un seul point sur l'orbite, c'est-à-dire que la dynamique est supposée constante, correspondant à une anomalie vraie ν fixée. L'extension de l'approche à un système à paramètre variant sera présentée ensuite. L'anomalie vraie ν choisie pour l'illustration de la synthèse d'un correcteur pour un seul point sur l'orbite sera $\nu = 0$, en d'autres termes le périhélie de l'orbite.

La FIG. 4.28 illustre le schéma bloc utilisé pour la synthèse \mathcal{H}_2 . Il existe plusieurs particularités qui distinguent ce schéma d'un schéma de sensibilité mixte.

Tout d'abord, le correcteur $K(s)$ est un correcteur à deux degrés de liberté, cf. [112]. En d'autres termes, le correcteur possède deux entrées, le vecteur des consignes r et le vecteur des sorties du système y . L'approche habituelle est d'avoir la différence $r - y$ entre les consignes r et les sorties y à l'entrée du correcteur. Or, l'approche à deux degrés de liberté est plus générale et nous permettra notamment de remplir nos objectifs.

Nous avons pris les positions relatives des satellites comme sorties car les positions relatives sont facilement mesurables grâce à des capteurs GPS, par exemple. Nous supposons que les vitesses ne sont pas mesurées. Bien entendu, notre approche est généralisable afin de tenir compte d'un autre ensemble de sorties.

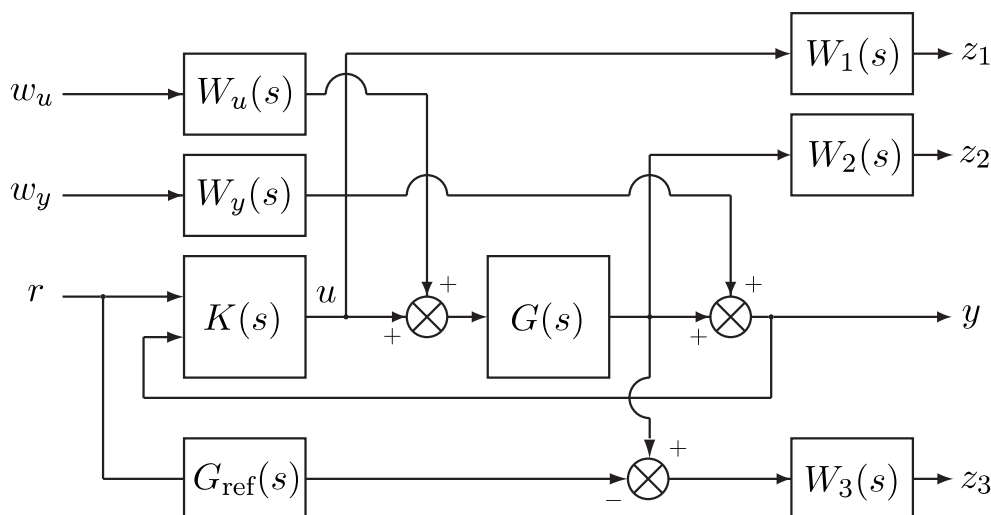


FIGURE 4.28 – Schéma bloc de synthèse

En outre, le schéma de synthèse contient un modèle de référence $G_{\text{réf}}(s)$. Ce modèle correspond à la dynamique souhaitée en boucle fermée :

$$G_{\text{réf}}(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi_0\omega_0 s + \omega_0^2} \cdot I_3 \quad (4.70)$$

Comme dans le cas de la commande modale de la section précédente, nous avons choisi une dynamique du second ordre avec une pulsation $\omega_0 = 10^{-3}$ rad/s et un amortissement $\xi_0 = \sqrt{2}/2$.

La représentation d'état s'écrit comme suit :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{\text{réf}} & B_{\text{réf}} \\ \hline C_{\text{réf}} & D_{\text{réf}} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} -2\xi\omega \cdot I_p & -\omega^2 \cdot I_p & \omega^2 \cdot I_p \\ I_p & O_p & O_p \\ \hline O_p & I_p & O_p \end{array} \right] \quad (4.71)$$

Ici, O_p et I_p sont les matrices nulle et d'identité de dimension p , respectivement.

La sortie du modèle de référence est soustraite de la sortie y du système asservi. Cette différence est pondérée par la fonction de transfert $W_3(s)$ dont la valeur est la suivante :

$$W_3(s) = 10^3 \cdot I_3 \quad (4.72)$$

La forte valeur de $W_3(s)$ garantit un bon suivi du modèle de référence. En effet, si la sortie contrôlée z_3 était nulle, le système en boucle fermée serait identique au modèle de référence.

En réalité, ce n'est pas le cas parce qu'il faut d'autres sorties contrôlées que z_3 et d'autres entrées exogènes que r afin de pouvoir appliquer la synthèse \mathcal{H}_2 , cf. les hypothèses mentionnées dans l'Annexe H.

Nous introduirons deux entrées exogènes supplémentaires, w_u et w_y , qui correspondent à des bruits d'entrée et de mesure, respectivement. Dans notre cas et à défaut de valeurs précises pour les densités

spectrales des bruits, les pondérations $W_u(s)$ et $W_y(s)$ sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} W_u(s) &= 10^{-3} \cdot I_3 \\ W_y(s) &= 10^{-3} \cdot I_3 \end{aligned} \quad (4.73)$$

Enfin, nous pénalisons les entrées u et les sorties y avec les pondérations $W_1(s)$ et $W_2(s)$ comme dans un schéma de sensibilité mixte :

$$\begin{aligned} W_1(s) &= 10^6 \cdot I_3 \\ W_2(s) &= 10^{-3} \cdot I_3 \end{aligned} \quad (4.74)$$

La pondération sur u est très forte afin de limiter la pulsation des pôles du correcteur. La pondération sur y est faible et sert principalement à obtenir un problème d'optimisation \mathcal{H}_2 bien posé.

Basé sur ce schéma de synthèse, un correcteur est synthétisé. Nous raisonnerons dans la suite avec les valeurs singulières des principales fonctions de transfert.

La partie haute de la FIG. 4.29, par exemple, montre les valeurs singulières du transfert entre la consigne r et la sortie y . La courbe bleue continue correspond au système en boucle fermée, tandis que la courbe verte tiretée appartient au modèle de référence choisi.

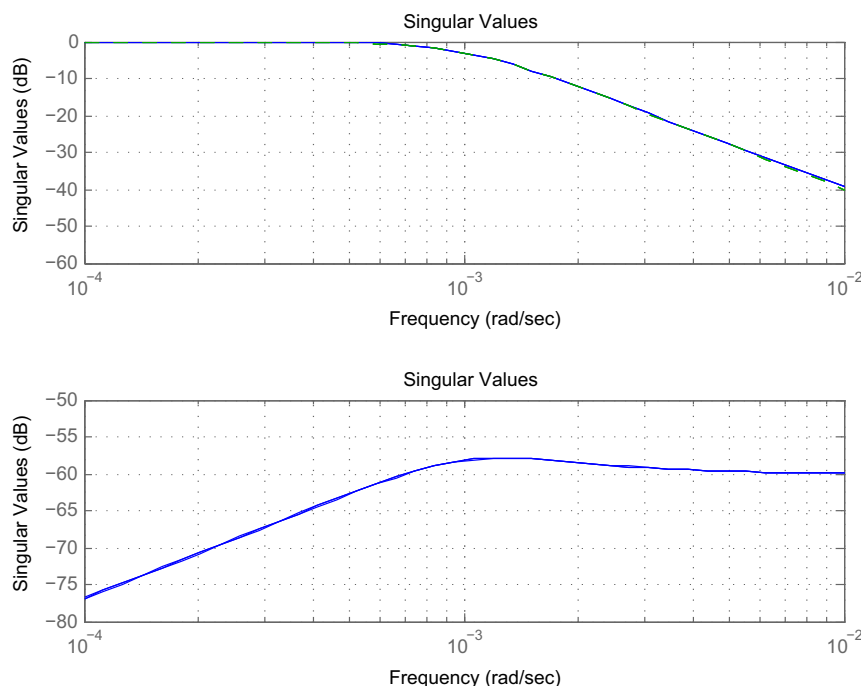


FIGURE 4.29 – Valeurs singulières du transfert entre la consigne r et la sortie y . En haut : système en boucle fermée en bleu continu, modèle de référence en vert tireté. En bas : erreur entre les deux transferts

Nous pouvons observer que la différence entre les deux cas en termes des valeurs singulières est très faible, c'est-à-dire que le système en boucle fermée est très proche du comportement désiré. Ceci est illustré de façon plus impressionnante dans la partie basse de la FIG. 4.29 qui montre les valeurs

singulières de l'erreur entre les deux transferts, celui en boucle fermée et celui du modèle de référence. L'erreur maximale est située à proximité de -60 dB, c'est-à-dire à environ 0,1 %.

Par conséquent, la norme \mathcal{H}_2 optimale a une valeur d'environ $9,76 \cdot 10^{-1}$. Les contributions les plus importantes viennent des sorties contrôlées z_1 et z_3 . z_2 est négligeable devant les autres.

La partie haute de la FIG. 4.30 montre les valeurs singulières du correcteur $K(s)$, c'est-à-dire du transfert entre le vecteur $\begin{pmatrix} r \\ y \end{pmatrix}$ et le vecteur u . Dans les parties du milieu et en bas de la FIG. 4.30, les valeurs singulières des parties gauche et droite du correcteur sont représentées séparément, c'est-à-dire les transferts entre r et u et entre y et u , respectivement. Un fait marquant est que le transfert entre r et u est très proche d'un deuxième ordre pour les fréquences basses.

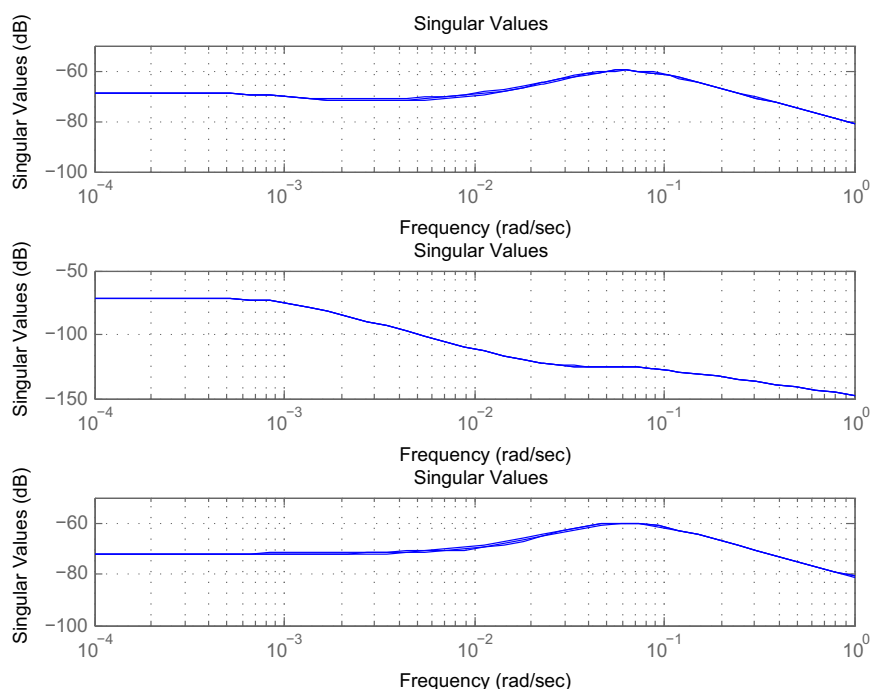


FIGURE 4.30 – Valeurs singulières du correcteur $K(s)$. En haut : correcteur complet – transfert entre $\begin{pmatrix} r \\ y \end{pmatrix}$ et u . Au milieu : partie gauche du correcteur – transfert entre r et u . En bas : partie droite du correcteur – transfert entre y et u .

Un autre aspect important est la valeur du *gain statique* (DC, *angl.* DC gain ou direct-currect gain), en d'autres termes la valeur du transfert entre r et y à fréquence nulle. Le gain statique d'un système $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ s'obtient grâce à l'équation suivante :

$$\text{DC} = D - CA^{-1}B \quad (4.75)$$

Le gain statique a une grande importance pour le suivi d'une référence car nous n'avons pas prévu d'action intégrale afin d'annuler l'erreur en régime permanent. Nous obtenons les matrices suivantes

pour le gain statique et l'erreur entre la matrice d'identité et le gain statique :

$$\begin{aligned} \text{DC} &= \begin{pmatrix} 9,9896 \cdot 10^{-1} & -5,7551 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 5,7551 \cdot 10^{-5} & 9,9899 \cdot 10^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 9,990 \cdot 10^{-1} \end{pmatrix} \\ I_3 - \text{DC} &= \begin{pmatrix} 1,0367 \cdot 10^{-3} & 5,7551 \cdot 10^{-5} & 0 \\ -5,7551 \cdot 10^{-5} & 1,0076 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 9,9824 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.76)$$

L'erreur commise en régime permanent entre les références r et les sorties y est de l'ordre de 10^{-3} . Le couplage entre les axes r et c est presque négligeable.

Afin de mieux comprendre les répercussions du schéma de synthèse inhabituel sur la structure du correcteur, il faut regarder attentivement les matrices du correcteur. Comme l'indique l'Annexe H, un correcteur issu d'une synthèse \mathcal{H}_2 est toujours sous forme d'un filtre de KALMAN.

Or, il s'avère que les deux matrices définissant le correcteur, le gain de KALMAN K_f et le gain de retour d'état K_c , possèdent une structure particulière. La matrice K_f par exemple est strictement diagonale par blocs. Ceci nous permet d'écrire le correcteur différemment afin de pouvoir comprendre son fonctionnement.

La FIG. 4.31 montre la structure du correcteur. A_G , B_G et C_G sont les matrices du système en boucle ouverte $G(s)$, tandis que A_{ref} et B_{ref} sont les matrices du modèle de référence $G_{\text{ref}}(s)$. Il est visible dans la FIG. 4.31 que le correcteur se décompose en deux parties. En effet, les transferts entre r et u (appelé « partie gauche » précédemment) et entre y et u (appelé « partie droite ») sont entièrement découplés. Le transfert entre r et u représente un *feed-forward*, tandis que le transfert entre y et u est un *feedback* (retour).

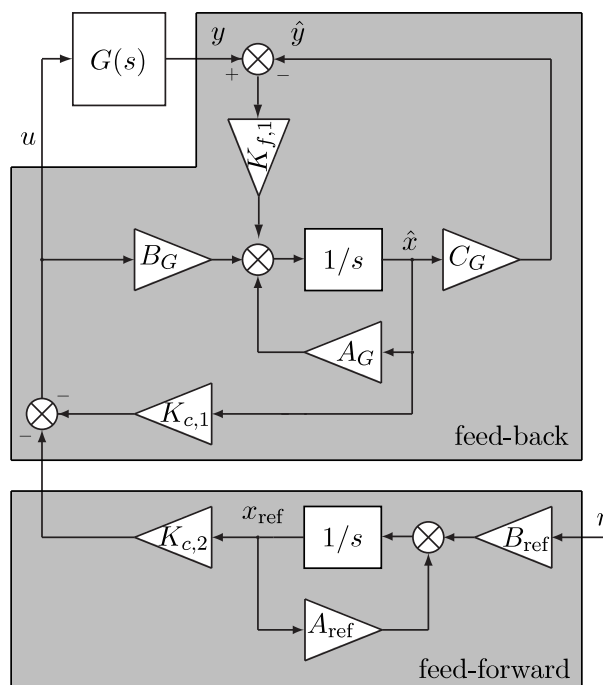


FIGURE 4.31 – Structure du correcteur

Cette analyse a révélé le principe de ce correcteur et du schéma de synthèse associé. La partie feedback stabilise le système et impose une dynamique rapide, mais ne garantit pas encore un comportement favorable comme celui du modèle de référence. Le rôle du feed-forward est alors de conditionner la consigne r et d'imposer un comportement proche du modèle de référence.

Le TAB. 4.10 montre les positions des pôles du correcteur et souligne encore une fois ce qui vient d'être dit sur la structure du correcteur. En fait, les trois paires de pôles lents (1-6) appartiennent au feed-forward et correspondent par conséquent aux pôles du modèle de référence. Les trois paires de pôles rapides (7-12) représentent la dynamique du feedback. Ceci peut également se justifier par le fait que les pôles du modèle de référence sont ingouvernables par u et inobservables par y dans la forme standard associée à ce problème de commande et par les propriétés générales de la forme standard (cf. Chapitre 6 dans la Réf. [3]).

TABLE 4.10 – Pôles du correcteur $K(s)$

No.	position du pôle
1- 2	$-7,0711 \cdot 10^{-4} \pm 7,0711 \cdot 10^{-4}i$
3- 4	$-7,0711 \cdot 10^{-4} \pm 7,0711 \cdot 10^{-4}i$
5- 6	$-7,0711 \cdot 10^{-4} \pm 7,0711 \cdot 10^{-4}i$
7- 8	$-4,4736 \cdot 10^{-2} \pm 4,6213 \cdot 10^{-2}i$
9-10	$-4,4735 \cdot 10^{-2} \pm 4,3244 \cdot 10^{-2}i$
11-12	$-4,4693 \cdot 10^{-2} \pm 4,4707 \cdot 10^{-2}i$

Un fait intéressant supplémentaire concerne les matrices $K_{c,1}$ et $K_{c,2}$, qui constituent ensemble le gain de retour d'état K_c . Ces matrices sont, au signe près, presque identiques. Ceci signifie que la commande u est en effet très proche de l'expression $u = K_{c,1}(\hat{x} - x_{réf})$.

Nous avons également observé que le problème du gain statique peut facilement être résolu en modifiant la matrice $K_{c,2}$ de la manière suivante :

$$K'_{c,2} = K_{c,2} \cdot \begin{bmatrix} I_3 & O_3 \\ O_3 & DC^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Un autre moyen serait de post-multiplier $B_{réf}$ par DC^{-1} , mais cette opération nous ferait perdre la signification physique des états $x_{réf}$.

Un souci très récurrent dans la synthèse de correcteurs pour des applications spatiales est de retrouver une signification physique derrière les états du correcteur. C'était une des motivations les plus fortes pour avoir recours à la synthèse \mathcal{H}_2 . Or, du fait de la structure d'un filtre de KALMAN, les états \hat{x} du correcteur sont des estimations des états du système. Les états $x_{réf}$ sont toujours très proches des états du système, du fait de la dynamique rapide de la partie feedback. Leur signification est facilement compréhensible parce qu'ils correspondent au comportement désiré en boucle fermée. Nous verrons dans la suite les avantages liés à une signification physique des états du correcteur.

4.6.2 Interpolation des correcteurs

Grâce au schéma de synthèse présenté, nous avons les moyens de synthétiser des correcteurs pour un ensemble fini de points le long de l'orbite. Le schéma de synthèse avec un modèle de référence garantit un comportement en boucle fermée qui est identique sur toute l'orbite. Une autre possibilité est d'imposer un comportement en boucle fermée qui varie de façon continue le long de l'orbite. En

tous cas, pour pouvoir appliquer l'approche d'interpolation que nous décrivons dans la suite, une évolution continue est très souhaitable.

Maintenant, la question se pose : comment ces correcteurs individuels peuvent-ils être assemblés afin d'obtenir un seul correcteur qui varie en fonction de l'anomalie vraie ν ? Il existe plusieurs manières pour réaliser cet objectif, entre autres une approche que nous avons déjà vue dans le contexte du séquençement du correcteur modal dans la section précédente.

Séquençement par interpolation linéaire

La première possibilité, qui est en même temps l'approche la plus naturelle et la plus simple, est d'effectuer une interpolation linéaire entre deux correcteurs voisins. Une telle interpolation exige que les états de ces deux correcteurs aient la même signification. Dans le cas d'une synthèse \mathcal{H}_2 , cette exigence est immédiatement satisfaite du fait de la structure estimation-commande du correcteur.

Si la synthèse des correcteurs individuels avait été effectuée avec la synthèse \mathcal{H}_∞ , ce qui est possible simplement en utilisant le même schéma de synthèse et avec un résultat similaire, l'interpolation entre deux correcteurs voisins ne serait pas aussi évidente. Il aurait fallu transformer les correcteurs dans une forme estimation-commande, une approche décrite en détail par ALAZARD et APKARIAN [2].

Nous nous concentrerons dans la suite sur l'interpolation linéaire entre deux correcteurs voisins. Bien entendu, une interpolation quadratique (cubique, etc.) pourrait être faite en utilisant les trois (quatre, etc.) correcteurs les plus proches.

Néanmoins, il reste un degré de liberté très important qui résulte en deux différents types d'interpolation. Comme nous l'avons vu, la dynamique est paramétrisée en fonction de l'anomalie vraie. Or, l'anomalie vraie est, elle-même, une fonction du temps passé depuis le passage du périégée, comme le montre la FIG. 4.32.

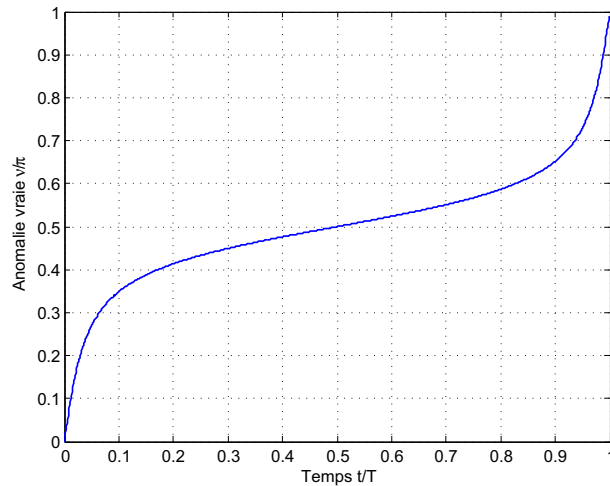


FIGURE 4.32 – Variation de l'anomalie vraie ν en fonction du temps t pour une orbite de transfert géostationnaire ($e = 0,72$, $a = 24200 \text{ km}$)

Ce fait nous donne la possibilité d'interpoler entre deux correcteurs en fonction de l'anomalie vraie ou bien en fonction du temps. L'interpolation en fonction du temps t , appliquée à la matrice A_K par

exemple, s'écrit alors comme suit :

$$\begin{aligned}
 A_K(t) &= \frac{t_{k+1} - t}{t_{k+1} - t_k} \cdot A_{K,k} + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \cdot A_{K,k+1} \\
 &= (1 - \theta_t) \cdot A_{K,k} + \theta_t \cdot A_{K,k+1} \\
 \text{avec} \quad \theta_t &= \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}, \\
 &t_k \leq t < t_{k+1} \\
 \text{et} \quad &0 \leq \theta_t < 1
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

Nous appelons θ_t la variable d'interpolation. Concernant l'interpolation en fonction de l'anomalie vraie ν , il vient :

$$\begin{aligned}
 A_K(\nu) &= \frac{\nu_{k+1} - \nu}{\nu_{k+1} - \nu_k} \cdot A_{K,k} + \frac{\nu - \nu_k}{\nu_{k+1} - \nu_k} \cdot A_{K,k+1} \\
 &= (1 - \theta_\nu) \cdot A_{K,k} + \theta_\nu \cdot A_{K,k+1} \\
 \text{avec} \quad \theta_\nu &= \frac{\nu - \nu_k}{\nu_{k+1} - \nu_k}, \\
 &\nu_k \leq \nu < \nu_{k+1} \\
 \text{et} \quad &0 \leq \theta_\nu < 1
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

Une question importante est la répartition des points d'interpolation le long de l'orbite, qui est arbitraire. Nous choisirons une répartition équidistante, c'est-à-dire à intervalles constants, en fonction du temps t et de l'anomalie vraie ν pour les cas d'une interpolation en fonction du temps t et de l'anomalie vraie ν , respectivement.

La FIG. 4.33 illustre la répartition des points de synthèse pour les deux types d'interpolation en utilisant un nombre total de correcteurs individuels de $N = 10$. Il est bien visible que le maillage autour du périhélie est beaucoup plus fin en utilisant une répartition équidistante en fonction de l'anomalie vraie ν .

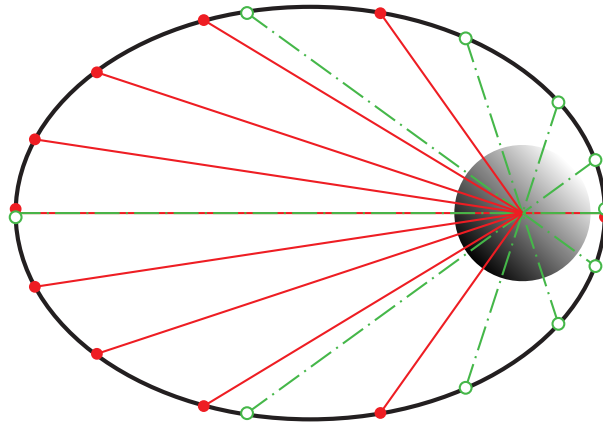


FIGURE 4.33 – Répartition des points de synthèse le long de l'orbite. $N = 10$ correcteurs individuels ont été synthétisés. En rouge continu : répartition équidistante en fonction du temps t . En vert tireté : répartition équidistante en fonction de l'anomalie vraie ν .

Du fait de la structure estimation-commande du correcteur, cf. la FIG. 4.31, une grande partie

du correcteur est connue de façon explicite. En effet, les matrices $A_{\text{réf}}$ et $B_{\text{réf}}$ du modèle de référence sont constantes. Les matrices A_G , B_G et C_G sont les matrices variantes de la dynamique dont nous connaissons l'expression analytique. Ceci nous permet de seulement effectuer une interpolation des matrices $K_{f,1}$, $K_{c,1}$ et $K_{c,2}$ et d'utiliser les expressions exactes pour les matrices $A_{\text{réf}}$ et $B_{\text{réf}}$, A_G , B_G et C_G . Grâce à cette approche, il est possible d'économiser beaucoup de mémoire sur le calculateur de bord.

Il est important à noter que, même si l'évolution des matrices du correcteur est continue, elle n'est pas différentiable partout. Les points auxquels la dérivée de l'évolution (soit en fonction du temps t , soit en fonction de l'anomalie vraie ν) des matrices du correcteur est discontinue sont les points de synthèse. Ce fait est susceptible de détériorer la qualité de l'asservissement en boucle fermée.

Séquencement avec une série de Fourier

Une deuxième possibilité afin de séquencer le correcteur en fonction de l'anomalie vraie ν est d'avoir recours à une série de FOURIER. Cette approche a déjà été présentée dans le contexte du séquencement des correcteurs modaux. Les seules différences sont le nombre et la taille des matrices à développer en une série de FOURIER. Ainsi, la série de FOURIER concernant la matrice A_K peut être calculée à partir des matrices $A_{K,n}$ comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{K,k} &= \sum_{n=0}^{N-1} A_{K,n} e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \\ \text{avec} \quad &k = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (4.80)$$

N est le nombre de points de synthèse.

L'expression de la matrice $A_K(\nu)$ est alors la suivante :

$$A_K(\nu) = \frac{1}{N} \left[\mathcal{A}_{K,0} + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} (2\Re(\mathcal{A}_{K,k}) \cos(k\nu) - 2\Im(\mathcal{A}_{K,k}) \sin(k\nu)) \right] \quad (4.81)$$

Il peut s'avérer suffisant d'utiliser une série de FOURIER tronquée. La restriction de la série de FOURIER à la moyenne et N' harmoniques donne :

$$A_K(\nu) = \frac{1}{N} \left[\mathcal{A}_{K,0} + \sum_{k=1}^{N'} (2\Re(\mathcal{A}_{K,k}) \cos(k\nu) - 2\Im(\mathcal{A}_{K,k}) \sin(k\nu)) \right] \quad (4.82)$$

Un fait marquant concernant le séquencement en utilisant une séquence de FOURIER est que l'évolution des matrices, par exemple celle de $A_K(\nu)$, est continue et différentiable. Par conséquent, le correcteur est susceptible d'être plus lisse que le correcteur obtenu par interpolation linéaire.

Comme dans le cas de l'interpolation linéaire, il est possible d'utiliser l'expression analytique des matrices connues, c'est-à-dire des matrices $A_{\text{réf}}$ et $B_{\text{réf}}$, A_G , B_G et C_G , et d'avoir recours à la série de FOURIER uniquement pour les matrices $K_{f,1}$, $K_{c,1}$ et $K_{c,2}$.

4.6.3 Analyse de stabilité

Même s'il existe des méthodes dans la littérature afin d'analyser la stabilité de correcteurs interpolés, par exemple dans le papier de STILWELL et RUGH [167], nous aurons encore une fois recours à l'analyse de FLOQUET grâce à la périodicité de la dynamique et du correcteur.

Le TAB. 4.11 montre les multiplicateurs caractéristiques μ_k de la dynamique en boucle fermée ainsi que leurs modules. Le correcteur utilisé est représenté par une série de FOURIER avec $N' = 4$ harmoniques. Les multiplicateurs caractéristiques se trouvent clairement dans le cercle unité. Par conséquent, le système en boucle fermée est stable. En outre, nous observons que les premières paires de multiplicateurs caractéristiques sont proches des multiplicateurs caractéristiques de l'asservissement avec le correcteur modal, cf. TAB. 4.9 (page 166). Ces multiplicateurs correspondent à la dynamique du modèle de référence. Les autres multiplicateurs représentent la dynamique de feedback et sont encore beaucoup plus faibles.

TABLE 4.11 – Multiplicateurs caractéristiques μ_k pour le système en boucle fermée. Le correcteur est représenté par une série de FOURIER avec $N' = 4$ harmoniques.

Type de calcul	Multiplicateurs caractéristiques μ_k	Module $ \mu_k $
FOURIER, $N' = 4$	$6,66 \cdot 10^{-13} \pm 3,06 \cdot 10^{-12}i$	$3,13 \cdot 10^{-12}$
	$6,66 \cdot 10^{-13} \pm 3,06 \cdot 10^{-12}i$	$3,13 \cdot 10^{-12}$
	$6,66 \cdot 10^{-13} \pm 3,06 \cdot 10^{-12}i$	$3,13 \cdot 10^{-12}$
	$3,56 \cdot 10^{-67} \pm 2,73 \cdot 10^{-67}i$	$4,48 \cdot 10^{-67}$
	$3,56 \cdot 10^{-67} \pm 2,72 \cdot 10^{-67}i$	$4,48 \cdot 10^{-67}$
	$7,10 \cdot 10^{-70} \pm 4,31 \cdot 10^{-69}i$	$4,36 \cdot 10^{-69}$
	$6,25 \cdot 10^{-70} \pm 4,24 \cdot 10^{-69}i$	$4,29 \cdot 10^{-69}$
	$-4,24 \cdot 10^{-65} \pm 2,07 \cdot 10^{-65}i$	$4,72 \cdot 10^{-65}$
	$-4,25 \cdot 10^{-65} \pm 2,07 \cdot 10^{-65}i$	$4,73 \cdot 10^{-65}$

Nous pourrions montrer les multiplicateurs pour d'autres types d'interpolation, mais il n'y aurait pas de grande différence. Même dans le cas d'un seul correcteur pour toute l'orbite, les multiplicateurs sont très proches de ceux montrés dans le TAB. 4.11.

4.6.4 Analyse de performance

Outre l'analyse de stabilité, il est souhaitable de pouvoir comparer les différents types de séquençement en termes de performance. Comme l'objectif était d'imposer une même dynamique en boucle fermée pour toute l'orbite, un critère de performance doit mesurer l'écart entre le comportement du modèle de référence et le comportement obtenu avec le correcteur séquençé.

Nous avons choisi de regarder les réponses indicielles des différents correcteurs. Cette analyse est effectuée séparément pour les axes r , c et o . La FIG. 4.34 montre la différence entre les sorties du modèle de référence et celles du correcteur séquençé sur deux orbites. La courbe noire pointillée-tirée, qui n'est visible que partiellement, représente l'erreur commise en prenant un seul correcteur, donc sans séquençement. En l'occurrence, il s'agit du correcteur synthétisé au périgée de l'orbite. La ligne bleue continue représente l'interpolation en fonction du temps t avec $N = 10$ correcteurs répartis de façon équidistante (en fonction du temps t) le long de l'orbite. La courbe verte tiretée correspond au correcteur interpolé en fonction de l'anomalie vraie ν avec $N = 10$ également. Visiblement, l'interpolation en fonction de l'anomalie vraie ν reflète beaucoup mieux la physique du système et fournit

un meilleur asservissement. Enfin, la courbe rouge pointillée montre l'erreur commise en utilisant une série de FOURIER tronquée avec $N' = 4$ harmoniques. Parmi les correcteurs analysés dans la FIG. 4.34, ce dernier correcteur fournit la meilleure performance.

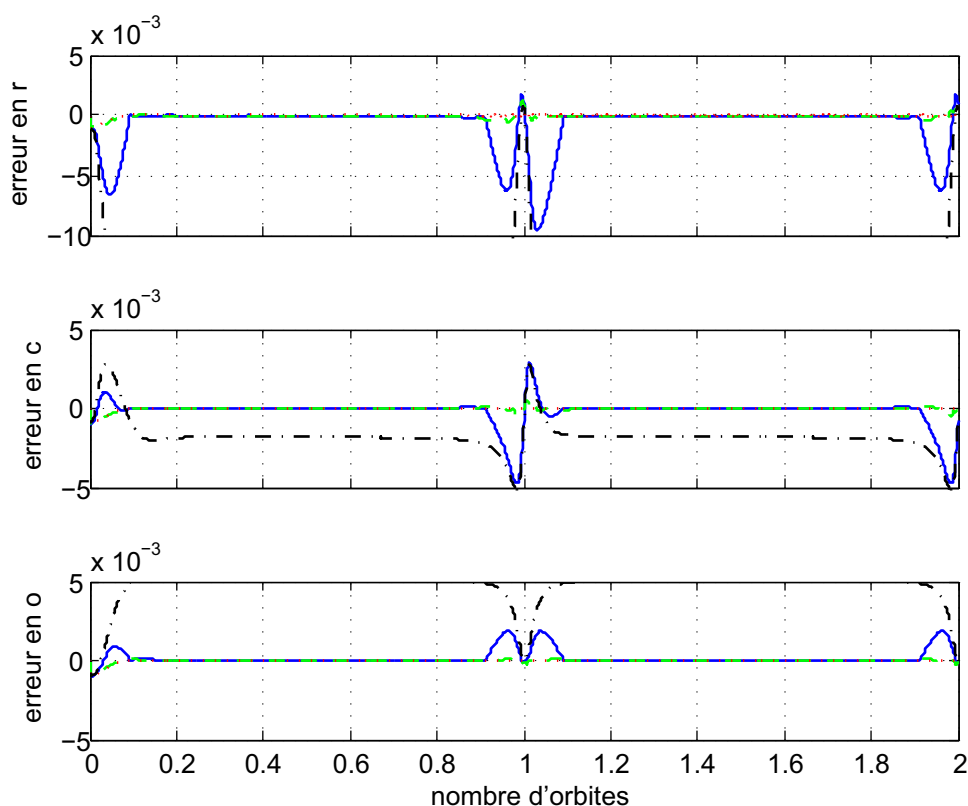


FIGURE 4.34 – Erreurs entre la réponse indicielle du modèle de référence et celle du correcteur séquencé sur deux orbites. En noir pointillé-tiré : aucun séquençage, correcteur du périhélie. En bleu continu : correcteur interpolé en fonction du temps avec $N = 10$ points. En vert tiré : correcteur interpolé en fonction de l'anomalie vraie avec $N = 10$ points. En rouge pointillé : correcteur sous forme d'une série de FOURIER tronquée avec $N' = 4$ harmoniques.

Une comparaison numérique des réponses indicielles consiste à calculer la moyenne du module de l'erreur sur une orbite :

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon(t) dt \\ q_2 &= \frac{1}{T} \int_T^{2T} \varepsilon(t) dt \end{aligned} \quad (4.83)$$

Ici, $\varepsilon(t)$ est le vecteur des erreurs entre le modèle de référence et le système bouclé avec le correcteur séquencé, tel qu'elles sont montrées dans la FIG. 4.34. q_1 et q_2 sont les critères de performance pour la première et la deuxième orbite, respectivement.

Le TAB. 4.12 montre les valeurs de q_1 et de q_2 pour différents types de séquençement, entre autres les types montrés dans la FIG. 4.34.

TABLE 4.12 – Critère de performance pour différents types de séquençement

Type de séquençement	Critère de performance q_1 (première orbite)	Critère de performance q_2 (deuxième orbite)
Aucun (correcteur du périégée)	$[1, 77 0, 17 0, 46] \cdot 10^{-2}$	$[1, 78 0, 22 0, 48] \cdot 10^{-2}$
Aucun (correcteur de l'apogée)	$[3, 55 2, 71 1, 74] \cdot 10^{-4}$	$[1, 28 0, 26 0, 29] \cdot 10^{-3}$
Interpolation, Δt , $N = 10$	$[7, 14 0, 91 1, 25] \cdot 10^{-4}$	$[6, 62 4, 42 2, 02] \cdot 10^{-4}$
Interpolation, Δt , $N = 100$	$[9, 38 8, 28 8, 51] \cdot 10^{-5}$	$[2, 38 0, 98 0, 44] \cdot 10^{-5}$
Interpolation, Δt , $N = 200$	$[9, 08 8, 28 8, 58] \cdot 10^{-5}$	$[5, 73 2, 48 1, 08] \cdot 10^{-6}$
Interpolation, $\Delta \nu$, $N = 1000$	$[8, 98 8, 28 8, 60] \cdot 10^{-5}$	$[2, 70 1, 31 4, 96] \cdot 10^{-7}$
Interpolation, $\Delta \nu$, $N = 10$	$[1, 20 0, 97 0, 93] \cdot 10^{-4}$	$[1, 14 0, 40 0, 24] \cdot 10^{-4}$
Interpolation, $\Delta \nu$, $N = 100$	$[8, 99 8, 28 8, 60] \cdot 10^{-5}$	$[1, 29 0, 47 0, 28] \cdot 10^{-6}$
Interpolation, $\Delta \nu$, $N = 200$	$[8, 98 8, 28 8, 60] \cdot 10^{-5}$	$[3, 41 1, 28 0, 73] \cdot 10^{-7}$
Interpolation, $\Delta \nu$, $N = 1000$	$[8, 97 8, 28 8, 60] \cdot 10^{-5}$	$[6, 67 2, 57 1, 45] \cdot 10^{-8}$
FOURIER, $N' = 0$	$[5, 67 0, 63 1, 59] \cdot 10^{-3}$	$[5, 92 0, 92 1, 66] \cdot 10^{-3}$
FOURIER, $N' = 1$	$[2, 36 0, 60 0, 47] \cdot 10^{-3}$	$[1, 88 1, 16 0, 49] \cdot 10^{-3}$
FOURIER, $N' = 2$	$[5, 52 3, 50 1, 29] \cdot 10^{-4}$	$[4, 01 4, 21 6, 11] \cdot 10^{-4}$
FOURIER, $N' = 3$	$[1, 29 1, 07 0, 86] \cdot 10^{-4}$	$[4, 24 5, 37 1, 50] \cdot 10^{-5}$
FOURIER, $N' = 4$	$[8, 97 8, 28 8, 60] \cdot 10^{-5}$	$[1, 50 1, 49 1, 50] \cdot 10^{-10}$
FOURIER, $N' = 20$	$[8, 97 8, 28 8, 60] \cdot 10^{-5}$	$[1, 50 1, 49 1, 50] \cdot 10^{-10}$

Comme nous l'avons déjà vu dans la FIG. 4.34, les correcteurs sans séquençement possèdent une performance médiocre. D'une manière générale, l'interpolation en fonction de l'anomalie vraie ν fournit une meilleure performance que l'interpolation en fonction du temps t pour le même nombre de points N . Pour un nombre de points N très élevé, le critère q_2 tend vers zéro, c'est-à-dire que l'on rejoint de plus en plus le comportement du modèle de référence.

Or, il est également évident que les correcteurs sous forme d'une série de FOURIER tronquée donnent une performance nettement supérieure, et ce avec un nombre d'harmoniques N' très faible. La différence entre $N' = 4$ et $N' = 20$, par exemple, n'est plus mesurable. L'explication de la supériorité de la série de FOURIER peut être la discontinuité de la dérivée des matrices d'un correcteur interpolé.

Nous pouvons conclure que le correcteur basé sur la série de FOURIER est préférable pour trois raisons. Premièrement, la meilleure performance peut être obtenue en utilisant ce type de séquençement. Deuxièmement, il demande très peu de mémoire. La série avec $N' = 4$ harmoniques, par exemple, a un besoin de mémoire égal à celui d'un correcteur interpolé avec $N = 9$ points. Troisièmement, il est, comme le correcteur interpolé, simple à calculer. Les opérations nécessaires sur l'ordinateur de bord sont des additions, des multiplications et le calcul des fonction trigonométriques sin et cos. Ces dernières peuvent éventuellement être tabulées.

4.6.5 Bilan

Une deuxième approche a été présentée afin de synthétiser un correcteur à paramètre variant. L'objectif était d'obtenir un comportement en boucle fermée correspondant à un modèle de référence.

Grâce à la synthèse \mathcal{H}_2 et à un schéma de synthèse minimisant l'écart entre le comportement en boucle fermée et celui du modèle de référence, des correcteurs pour différents points le long de l'orbite ont été synthétisés. La structure de ces correcteurs a été identifiée. Le schéma de synthèse

représente un cadre très général de synthèse. Il est extensible à volonté, par exemple afin de modéliser des capteurs ou pour imposer des spécifications supplémentaires.

En termes de réjection de perturbations, on peut prédire que le correcteur \mathcal{H}_2 sera beaucoup plus performant que le correcteur modal car la partie feedback de sa dynamique est beaucoup plus rapide que celle du correcteur modal.

En ce qui concerne le passage entre cet ensemble de correcteurs individuels et un seul correcteur séquencé, deux approches ont été introduites. La première utilise une interpolation linéaire en fonction du temps ou de l'anomalie vraie. La deuxième approche a recours à une série de FOURIER tronquée.

La stabilité du système bouclé avec le correcteur séquencé a été démontrée grâce à l'analyse de FLOQUET. Un critère de performance a été présenté qui permet de comparer les performances des différentes approches de séquençement. Le séquençement par une série de FOURIER a montré les meilleurs performances.

4.7 Perspectives

En conclusion, nous pouvons dire que les deux méthodes présentées, la synthèse modale et la synthèse \mathcal{H}_2 , ont fourni un comportement satisfaisant en boucle fermée.

Néanmoins, il ne faut pas oublier que le cadre présenté est basé sur un certain nombre d'hypothèses.

Tout d'abord, les perturbations orbitales telles que l'aplatissement de la Terre ou la traînée atmosphérique ont été ignorées. Nous ne pensons pas qu'il vaille la peine de tenir compte de ces perturbations pour la synthèse de correcteurs.

Cependant, une analyse de stabilité basée sur un modèle plus complet est souhaitable afin de valider les approches de synthèse de correcteurs dans un cadre plus réaliste. Malheureusement, la théorie de FLOQUET permet seulement de traiter des systèmes périodiques. Dans le cas de l'aplatissement de la Terre, par exemple, la périodicité de la dynamique est perdue à cause du changement de l'argument du périhélie ω .

En ce qui concerne la traînée atmosphérique et la pression de radiation solaire, il est indispensable d'inclure l'attitude des satellites dans le problème parce que ces deux perturbations en dépendent fortement (angles des panneaux solaires par rapport à la direction du Soleil, par exemple).

Une deuxième hypothèse était d'utiliser un correcteur en temps continu. Il existe deux problématiques liées à cette hypothèse :

- premièrement, une implantation sur un ordinateur de bord exige un correcteur à temps discret. Ceci ne pose pas un problème. Dans le cadre du correcteur modal, le correcteur est utilisable tel quel. Concernant le correcteur \mathcal{H}_2 , il est facilement concevable de le discrétiser ou bien de déjà formuler un problème d'optimisation en discret ;
- la deuxième problématique concerne les actionneurs. En général, nous ne disposons pas d'actionneurs à poussée continue dans le cadre du vol en formation en orbite terrestre (il existe des exceptions, cf. [15]). Les actionneurs utilisés sont des tuyères dont l'action est soit impulsionnelle, soit restreinte à un seul niveau de poussée. Par conséquent, il faut traduire les commandes en sollicitations des tuyères. Il existe des méthodes dont la performance a été démontrée dans de nombreux cas, comme la *modulation de largeur* [108, 185], mais ceci reste certainement un point à approfondir. En outre, la répartition des commandes sur les différentes tuyères est un problème dont l'importance ne doit pas être sous-estimée [79]. Enfin, il peut y avoir des contraintes d'application des poussées (par exemple des dates ou des manœuvres d'attitude nécessaires).

Chapitre 5

Méthodologie pour le pilotage en attitude et en translation

Sommaire

5.1	Revue bibliographique	184
5.2	Objectifs	186
5.3	Modélisation de la mission <i>Pegase</i>	187
5.3.1	Hiérarchie et dynamique	189
5.3.2	Définition des repères	190
5.3.3	Perturbations orbitales	192
5.3.4	Actionneurs	192
5.3.5	Métrologie	194
5.3.6	Représentation d'état	202
5.3.7	Bilan	206
5.4	Synthèse d'un correcteur pour un seul mode opérationnel	206
5.4.1	Correcteur de base	206
5.4.2	Correcteur avec réjection de biais	218
5.4.3	Bilan	222
5.5	Commutation entre correcteurs	223
5.5.1	Motivation	223
5.5.2	Revue bibliographique	225
5.5.3	Mise en œuvre	226
5.5.4	Prise en compte du bruit	240
5.5.5	Bilan	253
5.6	Synthèse d'un correcteur décentralisé	255
5.6.1	Motivation	256
5.6.2	Revue bibliographique	257
5.6.3	Description de la méthode	259
5.6.4	Application au vol en formation et résultats	267
5.6.5	Bilan	277
5.7	Bilan global	278

Le cadre présenté dans le chapitre précédent était restreint à la commande en translation. Il existe des cas dans lesquels les dynamiques de translation et de rotation peuvent réellement être séparées à cause de bandes passantes très différentes. Par exemple, la bande passante choisie pour la dynamique

de translation dans le chapitre précédent était environ 10^{-3} rad/s, tandis que celle de la dynamique en attitude serait plutôt entre 10^{-1} rad/s et 10^0 rad/s.

Or, de nombreuses missions requièrent un asservissement au même temps en attitude et en translation dans la même bande spectrale. Nous verrons cette exigence dans le cas de la mission *Pegase*. De manière générale, il est toujours important de disposer d'un asservissement combiné en translation et en attitude lorsqu'il existe un couplage important entre les deux dynamiques. En principe, ce couplage est toujours existant à cause du fait que l'emplacement des capteurs et actionneurs ne coïncide jamais avec le centre de masse du vaisseau.

5.1 Revue bibliographique

Quelques chercheurs se sont consacrés à la commande en attitude et en translation simultanée, mais les publications dans ce domaine sont beaucoup moins nombreuses que celles sur la commande en translation.

ALONSO et al. [9] considèrent deux satellites volant en formation en orbite terrestre. La position relative est mesurée grâce à un capteur similaire au capteur latéral fin présenté dans le Chapitre 3. Des estimateurs sont conçus séparément pour les dynamiques en attitude et en translation. Une analyse de stabilité ayant recours à la théorie de LYAPUNOV est présentée. Par ailleurs, la dynamique en attitude est formulée avec des quaternions. Les auteurs n'abordent pas le problème de la commande.

DUBOVITSKY et al. [50] présentent le système de métrologie pour la mission d'interférométrie *Starlight*. La formation consiste en deux vaisseaux, un collecteur et un recombineur. La métrologie est composée d'une partie longitudinale d'une part et d'une métrologie angulaire d'autre part.

PIRSON et al. [140] décrivent la mission d'interférométrie *ICC2* qui est un précurseur de la mission *Darwin*. La formation consiste en trois vaisseaux, dans une configuration identique à celle de *Pegase*. Les auteurs mentionnent les spécifications imposées par l'optique embarquée, l'ensemble des capteurs et les actionneurs. En outre, les différents modes opérationnels avec leurs capteurs spécifiques sont détaillés. Un outil de simulation est présenté et le comportement en temps réel est validé. Malheureusement, ce papier ne détaille pas la synthèse des correcteurs et la dynamique utilisée.

KIM et al. [90] modélisent les dynamiques non-linéaires en attitude et en translation de plusieurs satellites volant en formation sur une orbite terrestre elliptique. Ensuite, ils utilisent un *filtre de KALMAN étendu* (*angl.* extended Kalman filter, EKF) afin d'estimer les positions et orientations relatives ainsi que l'anomalie vraie et le rayon de l'orbite du leader de la formation. Un point remarquable est l'utilisation de capteurs relatifs multiples dont chacun consiste en une source lumineuse sur un vaisseau et un capteur photographique combiné avec une lentille sur un autre vaisseau.

CHEN et al. [36] proposent une autre méthode de filtrage afin d'estimer les orientations relatives de la mission *Terrestrial Planet Finder*, le *filtre de KALMAN unscented* (*angl.* unscented Kalman filter, UKF). Les auteurs comparent les deux méthodes EKF et UKF et jugent que le UKF est le meilleur choix en ce qui concerne le vol en formation grâce à une robustesse accrue.

LEE et al. [99] considèrent la mission *SIM* (*angl.* space interferometry mission). Bien que cette mission consiste en un seul satellite, le principe de l'interféromètre est similaire à celui de la mission *Pegase* que nous considérerons dans la suite de ce chapitre. Les auteurs montrent les besoins en termes de précision de pointage de la mission, identifient les principales sources d'erreur (par exemple calibration imparfaite, vibrations et biais) et en dérivent des budgets d'erreurs de pointage.

LOBOSCO [105] décrit un modèle conçu pour une version mono-vaisseau de la mission *Terrestrial*

Planet Finder. Ce modèle comprend la dynamique de la structure flexible, des modèles des bruits d'actuation et de mesure, ainsi qu'un modèle de l'optique (qui est établi en ayant recours à un logiciel de modélisation optique et en effectuant une analyse de sensibilité). Une analyse détaillée des performances stochastiques en boucle fermée est effectuée.

PAN et KAPILA [135] présentent un modèle non-linéaire qui décrit à la fois les orientations et les translations relatives d'une formation bi-satellite. Ensuite, les auteurs proposent une loi de commande adaptative dont la stabilité est démontrée grâce à une fonction de LYAPUNOV. Des paramètres inconnus tels que les masses et les inerties des deux vaisseaux sont estimés.

WONG et al. [196] conçoivent un correcteur de retour de sortie qui utilise seulement les positions et orientations relatives, mais pas les vitesses. Celles-ci sont estimées grâce à un filtre passe-haut. Le correcteur est capable de suivre une consigne variante. Sa stabilité est montrée avec une fonction de LYAPUNOV.

AUNG et al. [11] donnent une vue globale de la mission *Terrestrial Planet Finder*. Les principaux défis technologiques sont mentionnés, par exemple évitement de collisions ou contrôle à haute précision pendant le mode d'observation. Un point intéressant que les auteurs présentent est la séquence temporelle opérationnelle de la formation, c'est-à-dire l'enchaînement des différents modes opérationnels et le temps prévu pour chacun d'entre eux. En outre, les précisions requises en termes de position relative pour les différents modes opérationnels sont montrées.

BROWN et al. [28] effectuent une analyse très globale des besoins pour la mission *StarLight* qui est composée de deux vaisseaux, un collecteur et un recombineur. Les points étudiés sont l'architecture du système de vol, c'est-à-dire la charge utile, les moyens de communication et les senseurs, ainsi que les modes opérationnels avec les performances associées.

LEE et LI [100] modélisent les dynamiques en translation et en orientation dans des repères inertiels avant d'introduire des translations et des orientations relatives. Les auteurs proposent une décomposition de la dynamique en une dynamique *moyenne* et des dynamiques dites *de forme*, c'est-à-dire relatives à la moyenne. Afin d'obtenir la dynamique moyenne, les moyennes de la quantité de mouvement et du moment cinétique sont calculées pour la dynamique de translation et d'orientation, respectivement. Les auteurs montrent l'effet d'une telle décomposition sur la synthèse de correcteurs. En outre, ils proposent une extension hiérarchique sur plusieurs niveaux de leur approche.

BOURGA et al. [22] décrivent le sous-système radiofréquence pour les missions *Darwin* et *Smart-2*. Ce système est composé de plusieurs antennes réceptrices et émettrices à bord des différents vaisseaux (six à sept antennes en fonction du vaisseau considéré). Les auteurs abordent également deux points cruciaux de ce système, le problème de synchronisation des signaux transmis et la question de la précision atteignable. En outre, ils discutent différentes architectures d'estimation (estimation centralisée, distribuée et décentralisée).

CHABOT et UDREA [35] considèrent la mission *XEUS* (*angl.* X-ray Evolving Universe Spectroscopy) qui consiste en deux vaisseaux spatiaux situés sur une orbite halo autour du point de LAGRANGE L_2 . Dans la phase de modélisation, les auteurs se sont inspirés de nos travaux, en particulier du modèle linéarisé présenté dans le Chapitre 3 et dans [57, 58]. Deux correcteurs sont synthétisés, un correcteur \mathcal{H}_2 pour le mode d'observation et un correcteur PD (proportionnel-dérivé) axe-par-axe pour le mode de changement d'orientation.

YAMANAKA [198] considère un contrôle simultané des dynamiques de translation en orbite terrestre et d'attitude. Cependant, les synthèses des correcteurs de translation et d'attitude sont effectuées séparément. Cette approche est justifiée par le fait que l'asservissement sert à changer l'orientation et la forme d'une formation de satellites. Il ne sert pas à satisfaire des spécifications exigeantes comme

dans une mission d'interférométrie.

WANG et al. [184] conçoivent des correcteurs pour effectuer l'acquisition et une rotation synchronisée d'une formation de vaisseaux spatiaux. Ils utilisent un modèle dynamique non-linéaire décrivant à la fois translation et orientation. La stabilité des correcteurs est démontrée grâce à une analyse de LYAPUNOV. Des modèles de capteurs, d'actionneurs ou de perturbations ne sont pas pris en compte.

LAWTON et BEARD [98] développent des correcteurs pour synchroniser les orientations des vaisseaux spatiaux à l'intérieur d'une formation. Comme WANG et al. [184], ils utilisent un modèle non-linéaire relativement simple. Deux correcteurs différents sont présentés, un premier qui nécessite la connaissance de vitesses angulaires et un deuxième qui n'en a pas besoin. La stabilité est démontrée grâce à des fonctions de LYAPUNOV.

Cette revue bibliographique montre qu'il existe déjà quelques approches prenant en compte translation et attitude. Ces approches sont souvent capables d'effectuer des changements de la configuration de la formation. Cependant, le contrôle linéaire multivariable et simultané des dynamiques de translation et d'attitude n'a pas encore été traité suffisamment pour pouvoir asservir une formation dans un mode qui requiert un haut niveau de précision comme le mode nulling.

5.2 Objectifs

Dans ce chapitre, nous aurons recours aux modèles développés dans le Chapitre 3 afin de synthétiser des correcteurs multivariables pour la mission *Pegase*. Quelques détails de cette mission ont déjà été présentés dans le Chapitre 1.

- Dans le cadre de la mission *Pegase*, une approche multivariable s'impose pour plusieurs raisons :
- les dynamiques en translation et en attitude possèdent plusieurs degrés de liberté (trois axes de translation et trois axes de rotation pour chaque vaisseau de la formation) ;
 - il existe un couplage important entre les dynamiques de translation et de rotation. Il paraît difficile de séparer les deux dynamiques. Par conséquent, la façon la plus naturelle est de les traiter simultanément ;
 - enfin, une formation consiste toujours en plusieurs vaisseaux qui contribuent tous à un objectif commun. Le fait de disposer d'un nombre de vaisseaux supérieur à un génère un problème multivariable ;

Bien entendu, les modèles du Chapitre 3 ne sont pas utilisables directement. Il faut les adapter aux besoins de la mission *Pegase*, par exemple en choisissant une hiérarchie appropriée. En outre, les réalités de la mission doivent être traduites en valeurs numériques, par exemple la géométrie de la formation peut être retrouvée dans les repères et vecteurs choisis. La modélisation de la mission *Pegase* sera traitée dans la Section 5.3.

Tout au long de ce chapitre, nous serons face à des spécifications stochastiques. Plus précisément, il s'agira de garantir que les écarts-type des sorties contrôlées restent au-dessous d'une limite spécifiée, et ceci en présence de bruits d'actuation et de mesure.

Du fait de ce caractère stochastique, nous utiliserons la commande \mathcal{H}_2 , une méthode de synthèse de correcteurs particulièrement bien adaptée à satisfaire des spécifications stochastiques. Plus de détails sur la commande \mathcal{H}_2 sont disponibles dans l'Annexe H.

Tout d'abord, nous aimerions synthétiser un correcteur de base pour un seul mode opérationnel, en particulier pour le mode nulling, cf. FIG. 1.10 (page 12). Ce correcteur devra satisfaire les spécifications mentionnées ci-dessus en utilisant les capteurs et actionneurs disponibles. Il sera appelé *correcteur de*

base. Les détails, par exemple la forme standard utilisée pour la synthèse, seront développés dans la Section 5.4.

Ensuite, il est important de tenir compte des biais, par exemple des biais de mesure et d'actuation et des biais dus aux perturbations orbitales, car ces biais sont susceptibles de consommer une grande partie du budget alloué à chaque sortie contrôlée. Pour cela, la forme standard utilisée pour le correcteur de base doit être enrichie afin de comporter des estimateurs de biais. Les détails de cette approche se trouvent toujours dans la Section 5.4.

Le mode d'observation est celui dans lequel la performance ultime est atteinte, c'est-à-dire la performance nécessaire afin d'effectuer les mesures d'interférométrie. L'importance de ce mode est tout à fait justifiée. Cependant, il faut d'abord trouver un moyen pour y arriver. La problématique est liée au fait de disposer de capteurs à haute précision, mais à champ de vue restreint d'un côté et de capteurs à champ de vue large, mais grossiers. Nous présenterons dans la Section 5.5 une approche qui permet de commuter entre les modes (et correcteurs associés) précédant le mode d'observation et d'effectuer un asservissement de plus en plus précis jusqu'au mode d'observation. Nous tiendrons également compte des bruits et proposeront un critère de commutation garantissant la stabilité.

Un autre objectif très important est la synthèse de correcteurs décentralisés, c'est-à-dire de correcteurs locaux embarqués sur chacun des vaisseaux. Les différents correcteurs locaux ne communiquent pas entre eux. Par conséquent, ils ne connaissent que les mesures localement disponibles et ne commandent que les actionneurs sur le même vaisseau. Plusieurs avantages sont associés à un correcteur décentralisé, par exemple la distribution des calculs sur plusieurs vaisseaux ou la possibilité de réduire les moyens de communication et de faire ainsi des économies en termes de masse. Comme nous le verrons dans la Section 5.6, la synthèse de correcteurs décentralisés est un problème dont la solution est difficile à obtenir. Il est donc indispensable de concevoir une méthode adaptée au problème en question.

5.3 Modélisation de la mission *Pegase*

Beaucoup de détails ont déjà été donnés sur la mission *Pegase* dans l'introduction, cf. page 10, et nous en donnerons plus au fur et à mesure que cette section est parcourue. Par ailleurs, ABSIL [1] donne une description détaillée des objectifs scientifiques et du fonctionnement de la mission *Pegase*.

Un point important à savoir est que, dans le cadre de la mission *Pegase*, le contrôle est séparé en deux étages. Le premier étage correspond au contrôle des vaisseaux (ou plateformes), tandis que le deuxième étage est le contrôle de la charge utile à l'intérieur des vaisseaux.

Pour une meilleure compréhension, nous mentionnons deux exemples de boucles de commande à l'intérieur des vaisseaux (deuxième étage) :

1. pilotage de la différence de marche grâce à une ligne de retard (actionneur) et un capteur de franges (capteur)
2. pilotage de la direction du faisceau optique à l'intérieur du vaisseau avec des miroirs mobiles (actionneurs) et des capteurs d'incidence des faisceaux optiques (FRAS, capteurs)

Les boucles internes fournissent la performance ultime, c'est-à-dire celle nécessaire pour effectuer les mesures dans le mode nulling.

Or, les boucles internes demandent une certaine précision en termes d'asservissements des vaisseaux afin de fonctionner. Par exemple, la ligne à retard a un débattement de quelques centimètres. Les vaisseaux doivent être positionnés suffisamment précisément pour que la ligne à retard puisse

accrocher. Un deuxième exemple est la vitesse de défilement des franges qui doit être inférieure à une certaine limite afin que le senseur de franges puisse suivre. En d'autres termes, c'est le domaine opérationnel de la charge utile qui impose les spécifications pour l'asservissement des vaisseaux.

La structure du système global est illustrée dans la FIG. 5.1. La dynamique est composée de la dynamique des vaisseaux et de la dynamique interne. La dynamique des vaisseaux influe sur la dynamique interne, mais pas à l'inverse. Il existe des sources de perturbations pour les deux dynamiques (bruits de mesure, bruits des actionneurs et perturbations orbitales) dont le rejet est l'objectif le plus important. Un correcteur pilote la dynamique interne en utilisant les capteurs (« C ») et les actionneurs (« A ») de la charge utile, tandis qu'un autre correcteur pilote les vaisseaux en utilisant les capteurs et les actionneurs des vaisseaux. Il est également concevable que le correcteur des vaisseaux utilise des mesures émanant de la charge utile, ce qui est montré par la flèche tiretée. Nous verrons cette configuration plus tard dans le cas du capteur d'incidence du faisceau optique (FRAS). En termes de performances, il existe également une séparation entre vaisseaux et charge utile. Or, nous avons déjà vu que les performances des vaisseaux sont dictées par le domaine opérationnel de la charge utile.

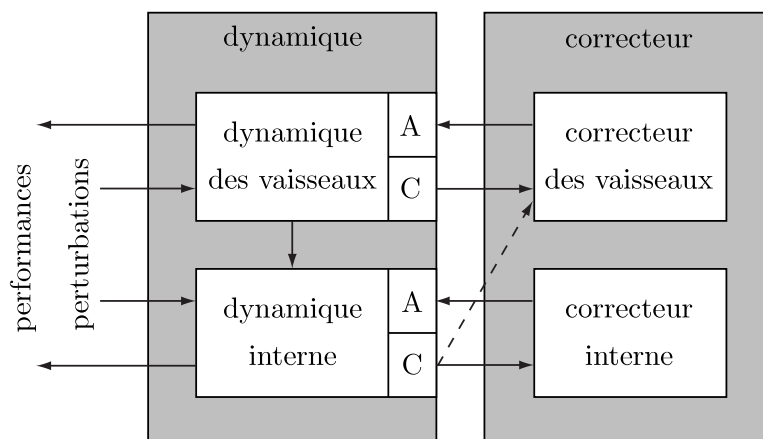


FIGURE 5.1 – Séparation du système et des correcteurs en deux étages

Dans la suite, nous nous consacrerons exclusivement au contrôle des vaisseaux. Nous supposons que le problème de l'asservissement de la charge utile a déjà été résolu. Le domaine opérationnel de la charge utile nous servira comme paramètre d'entrée.

Nous avons déjà vu dans le Chapitre 3 un modèle générique qui peut servir à modéliser la dynamique de plusieurs vaisseaux spatiaux volant en formation. Outre la dynamique, des perturbations orbitales, des capteurs et des sorties contrôlées ont été pris en compte.

Dans ce chapitre, nous reprendrons ce modèle afin de modéliser la mission *Pegase*. Plus précisément, nous reprendrons le modèle linéarisé du mode d'observation d'une formation. En outre, afin de permettre des manipulations numériques, nous ne nous intéressons plus au modèle en notation intrinsèque, mais à celui en notation extrinsèque ou matricielle.

La FIG. 5.2 donne une illustration de l'emplacement de la plupart des capteurs à bord des membres de la formation *Pegase* et montre bien la complexité qui doit être gérée lors de la phase de modélisation.

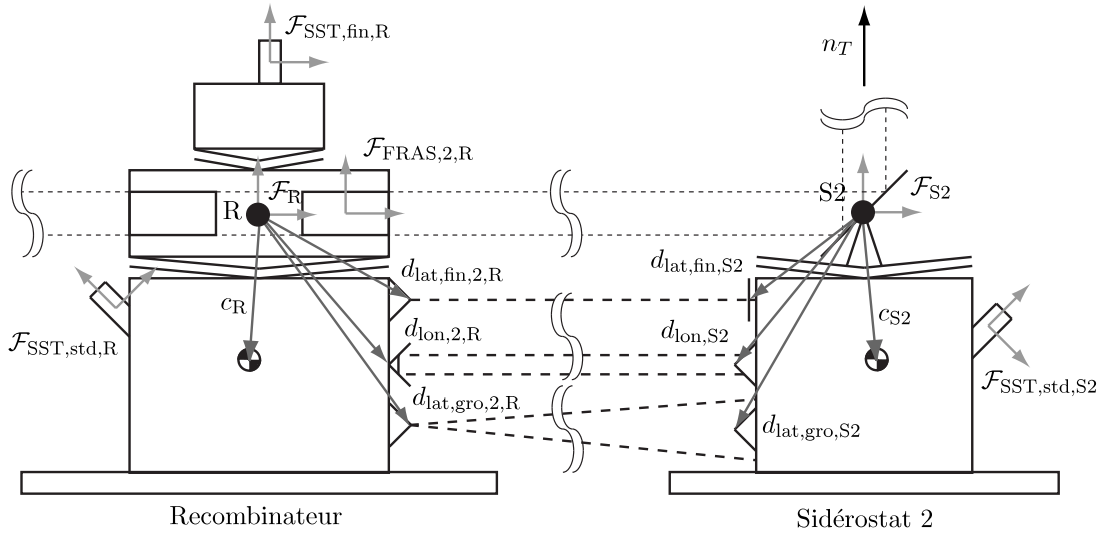


FIGURE 5.2 – Emplacement de plusieurs capteurs sur le recombineur et le sidérostas 2

5.3.1 Hiérarchie et dynamique

Parmi les différentes structures hiérarchiques présentées dans le Chapitre 3, la *hiérarchie leader-follower* est la structure la mieux adaptée à la mission *Pegase*. Ceci s'explique par le fait qu'il existe un vaisseau avec un rôle dominant, le recombineur. Le recombineur sera donc le leader de la formation, tandis que les deux sidérostas agiront en tant que followers.

Nous pouvons alors reprendre l'Éq. (3.76) du Chapitre 3 (page 93) afin d'établir un modèle dynamique de la mission *Pegase*.

Le fait d'avoir choisi une hiérarchie *leader-follower* avec le recombineur comme leader fait que l'on peut identifier le vecteur de dépointage $\Delta\theta_c$ avec celui du recombineur, $\Delta\theta_R$. Il en va de même pour le vecteur de déplacement Δr_c qui devient Δr_R . Les dépointages des sidérostas 1 et 2 s'écrivent maintenant $\Delta\theta_{S1}$ et $\Delta\theta_{S2}$, respectivement. Leurs déplacements sont Δr_{S1} et Δr_{S2} . Après ces substitutions, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\Delta\ddot{r}_R &= \frac{1}{m_R} C_0^T C_t C_R \Delta f_R + C_0^T C_t (r_R + C_R c_R)^\times C_R J_R^{-1} (\Delta g_R - c_R^\times \Delta f_R) \\
&\quad - 2(C_0^T \omega_0)^\times \Delta \dot{r}_R - [(C_0^T \dot{\omega}_0)^\times + (C_0^T \omega_0)^\times{}^2] \Delta r_R \\
\Delta\ddot{\theta}_R &= C_R J_R^{-1} (\Delta g_R - c_R^\times \Delta f_R) \\
\Delta\ddot{r}_{S1} &= \frac{1}{m_{S1}} C_{S1} \Delta f_{S1} + C_{S1} c_{S1}^\times J_{S1}^{-1} (\Delta g_{S1} - c_{S1}^\times \Delta f_{S1}) \\
&\quad - \frac{1}{m_R} C_R \Delta f_R - (r_R + C_R c_R - r_{S1})^\times C_R J_R^{-1} (\Delta g_R - c_R^\times \Delta f_R) \\
\Delta\ddot{\theta}_{S1} &= J_{S1}^{-1} (\Delta g_{S1} - c_{S1}^\times \Delta f_{S1}) - C_{S1}^T C_R J_R^{-1} (\Delta g_R - c_R^\times \Delta f_R) \\
\Delta\ddot{r}_{S2} &= \frac{1}{m_{S2}} C_{S2} \Delta f_{S2} + C_{S2} c_{S2}^\times J_{S2}^{-1} (\Delta g_{S2} - c_{S2}^\times \Delta f_{S2}) \\
&\quad - \frac{1}{m_R} C_R \Delta f_R - (r_R + C_R c_R - r_{S2})^\times C_R J_R^{-1} (\Delta g_R - c_R^\times \Delta f_R) \\
\Delta\ddot{\theta}_{S2} &= J_{S2}^{-1} (\Delta g_{S2} - c_{S2}^\times \Delta f_{S2}) - C_{S2}^T C_R J_R^{-1} (\Delta g_R - c_R^\times \Delta f_R)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Le TAB. 5.1 résume les données numériques utilisées pour établir la dynamique, plus précisément les masses, centrages et inerties.

TABLE 5.1 – Données numériques pour la dynamique

Catégorie	Description	Variable	Valeur	Unité
Recombina- teur	Masse	m_R	300	kg
	Position du centre de masse	c_R	$[0, 0, -0, 30]^T$	m
	Matrice d'inertie	J_R	$\text{diag}([80, 80, 60])$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
Sidérostat 1	Masse	m_{S1}	200	kg
	Position du centre de masse	c_{S1}	$[0, 0, -0, 25]^T$	m
	Matrice d'inertie	J_{S1}	$\text{diag}([70, 70, 40])$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
Sidérostat 2	Masse	m_{S2}	200	kg
	Position du centre de masse	c_{S2}	$[0, 0, -0, 25]^T$	m
	Matrice d'inertie	J_{S2}	$\text{diag}([70, 70, 40])$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$

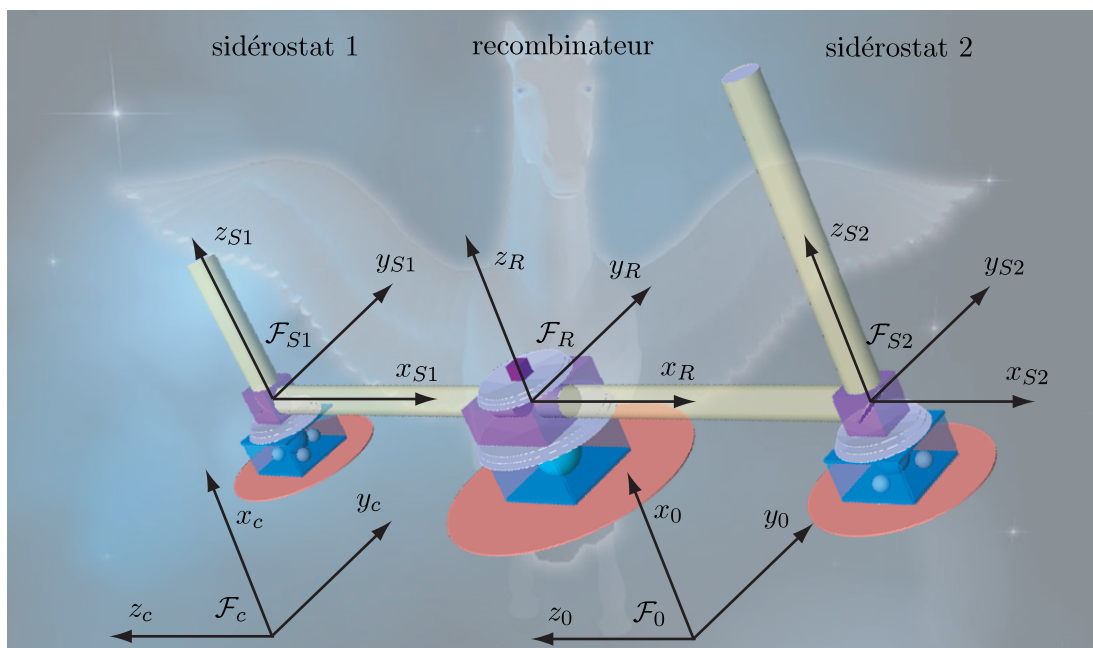
Pour la suite, nous supprimerons la première équation dynamique, celle qui décrit l'évolution de la translation Δr_R du recombineur. Nous ignorons cette partie de la dynamique parce que, de par la hiérarchie leader-follower, elle correspond à la translation de la formation entière. Or, ce mouvement n'est pas un mouvement relatif et appartient au contrôle d'orbite qui sera effectué en intervalles réguliers, mais longs (de l'ordre de quelques mois) par rapport à la bande passante du contrôle relatif de la formation. Une autre raison est que nous ne disposons pas de capteur capable de mesurer la translation de la formation entière, ce qui rend cette dynamique inobservable.

En outre, nous supprimerons les forces exercées par les actionneurs du recombineur. En effet, nous considérerons que les seules forces qui importent sont les forces relatives entre les vaisseaux. En supprimant les forces du recombineur, nous transformons les forces créées par les sidérostats en forces relatives entre sidérostats et recombineur.

Nous rappelons ici que toutes les forces et tous les couples sont exprimés autour du point de référence de chaque vaisseau et non pas autour de son centre de masse. Cette hypothèse peut être faite sans restriction de la généralité. Or, elle s'avère plus adaptée à la réalité car les actionneurs sont toujours fixes relativement au point de référence. Cependant, ils ne sont pas fixes par rapport au centre de masse qui est assujéti à des variations.

5.3.2 Définition des repères

La FIG. 5.3 montre, dans une vue d'artiste de la mission *Pegase*, les principaux repères utilisés afin de définir la configuration de la formation. Le repère \mathcal{F}_0 tourne avec la vitesse angulaire constante ω_0 ($\dot{\omega}_0 = 0$), correspondant au mouvement de la Terre autour du Soleil. En configuration nominale, tous les repères sont rigidement liés. Les axes x des repères des vaisseaux (\mathcal{F}_R , \mathcal{F}_{S1} et \mathcal{F}_{S2}) relient les trois vaisseaux, tandis que les axes z sont dirigés vers l'objet ciblé.

FIGURE 5.3 – Positions et orientations des repères définissant la formation *Pegase*

Le TAB. 5.2 indique les matrices de rotation et les vecteurs utilisés afin de traduire les rotations et translations entre les repères.

TABLE 5.2 – Données numériques pour les repères

Vaisseau	Description	Variable	Valeur	Unité
Orbite	Matrice de rotation	C_0	I_3	–
	Vitesse angulaire	ω_0	$[0, 0, 2, 0 \cdot 10^{-7}]^T$	rad/s
	Accélération angulaire	$\dot{\omega}_0$	$[0, 0, 0]^T$	rad/s ²
Formation	Matrice de rotation, repère nominal de la formation	C_c	$C_2(-\pi/2)$	–
Recombineur	Distance nominale du centre de la formation	r_R	$[0, 0, 0]^T$	m
	Matrice de rotation, repère nominal vaisseau	C_R	I_3	–
Sidérostas 1	Distance nominale du centre de la formation	r_{S1}	$[-250, 0, 0]^T$	m
	Matrice de rotation, repère nominal vaisseau	C_{S1}	I_3	–
Sidérostas 2	Distance nominale du centre de la formation	r_{S2}	$[250, 0, 0]^T$	m
	Matrice de rotation, repère nominal vaisseau	C_{S2}	I_3	–

5.3.3 Perturbations orbitales

Au niveau des perturbations orbitales, nous ne regarderons que la partie nominale, c'est-à-dire la partie existant en configuration nominale. Les équations décrivant les forces et les couples agissant sur les vaisseaux de la formation sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 f_{i,sol} &= f_{i,sol,rs} + f_{i,sol,rd} + f_{i,sol,a} & (5.2) \\
 f_{i,sol,rs} &= 2p_{sol}A_i\sigma_{rs,i} \cos^2 \alpha n_{S,i} \\
 f_{i,sol,rd} &= p_{sol}A_i\sigma_{rd,i} \cos \alpha \left(C_i^T C_c^T n_S + \frac{2}{3}n_{S,i} \right) \\
 f_{i,sol,a} &= p_{sol}A_i\sigma_{a,i} \cos \alpha C_i^T C_R^T n_S \\
 &\text{avec} & (5.3) \\
 \cos \alpha &= n_{S,i}^T C_i^T C_R^T n_S \\
 \text{et } i &\in \{R, S1, S2\}
 \end{aligned}$$

Les couples solaires sont

$$g_{i,sol} = d_{sol,i}^\times f_{i,sol}. \quad (5.4)$$

Les forces causées par le gradient de gravité s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}
 f_{i,grav} &= -m_i C_i^T C_c^T [\mu_\ominus \nabla h(r_{S,L2} + r_c) + \mu_\oplus \nabla h(r_{T,L2} + r_c)] C_c(r_i + C_i c_i) & (5.5) \\
 \text{avec } i &= \{R, S1, S2\}
 \end{aligned}$$

Nous rappelons que la définition de la fonction ∇h est

$$\nabla h(x) = \frac{(x^T x)I_3 - 3xx^T}{(x^T x)^{5/2}}. \quad (5.6)$$

Le TAB. 5.3 contient toutes les données nécessaires pour les modèles des perturbations.

5.3.4 Actionneurs

Au niveau des actionneurs, il est envisagé d'équiper la mission *Pegase* de deux types de tuyères :

- des tuyères qui consomment de l'*hydrazine* comme ergol. Ces tuyères sont utilisées pour effectuer le transfert orbital au point L_2 et pour faire des corrections d'orbite pendant toute la durée de vie de la mission ;
- des tuyères à *gaz froid* servent à contrôler la formation, c'est-à-dire pour changer la configuration, pour effectuer des manœuvres et pour maintenir la formation.

En outre, il est envisageable d'avoir recours à des *roues de réaction* pour contrôler les attitudes des vaisseaux. L'inconvénient de ce type d'actionneur est la génération de vibrations qui sont susceptibles de dégrader les performances.

Dans la suite, nous ne considérerons que les tuyères à gaz froid. Une de ces tuyères est capable de fournir une poussée continue (contrairement à une poussée impulsionnelle) entre 0 et 1000 μN , avec une quantification de 1 μN au maximum [51] et un temps de réponse inférieur à 20 ms. On estime que le bruit d'actuation, y compris le bruit de quantification, est inférieur 1 μNs .

TABLE 5.3 – Données numériques pour les perturbations orbitales

Catégorie	Description	Variable	Valeur	Unité
Gravité	Position du point L ₂ par rapport au Soleil	$r_{S,L2}$	$[151, 1 \cdot 10^9, 0, 0]^T$	m
	Position du point L ₂ par rapport à la Terre	$r_{T,L2}$	$[1, 5 \cdot 10^9, 0, 0]^T$	m
	Position courante sur l'orbite halo	r_c	$[-300 \cdot 10^6, 0, 0]^T$	m
	Constante de gravité du Soleil	μ_\odot	$1, 33 \cdot 10^{20}$	m ³ /s ²
	Constante de gravité de la Terre	μ_\oplus	$3, 99 \cdot 10^{14}$	m ³ /s ²
Pression solaire	Pression solaire	p_{sol}	$4, 50 \cdot 10^{-6}$	N/m ²
	Direction du Soleil	n_S	$[-1, 0, 0]^T$	–
Recombina- teur	Surface du pare-soleil	A_R	7, 07	m ²
	Coefficients de réflexion et d'absorption	$[\sigma_{rs,R}, \sigma_{rd,R}, \sigma_{a,R}]$	$[0, 7, 0, 2, 0, 1]$	–
	Vecteur normal au pare-soleil	$n_{S,R}$	$[0, 0, 1]^T$	–
Sidérostat 1	Position du foyer du pare-soleil	$d_{sol,R}$	$[0, 0, -0, 6]^T$	m
	Surface du pare-soleil	A_{S1}	3, 14	m ²
	Coefficients de réflexion et d'absorption	$[\sigma_{rs,S1}, \sigma_{rd,S1}, \sigma_{a,S1}]$	$[0, 7, 0, 2, 0, 1]$	–
Sidérostat 2	Vecteur normal au pare-soleil	$n_{S,S2}$	$[0, 0, 1]^T$	–
	Position du foyer du pare-soleil	$d_{sol,S1}$	$[0, 0, -0, 5]^T$	m
	Surface du pare-soleil	A_{S2}	3, 14	m ²
	Coefficients de réflexion et d'absorption	$[\sigma_{rs,S2}, \sigma_{rd,S2}, \sigma_{a,S2}]$	$[0, 7, 0, 2, 0, 1]$	–
	Vecteur normal au pare-soleil	$n_{S,S2}$	$[0, 0, 1]^T$	–
	Position du foyer du pare-soleil	$d_{sol,S2}$	$[0, 0, -0, 5]^T$	m

Nous ne disposons pas d'informations plus amples ni sur l'emplacement des tuyères ni sur leur nombre. Par conséquent, nous faisons l'hypothèse que nous pouvons directement commander des forces et des couples pour chacun des vaisseaux dans toutes les directions. En outre, nous retiendrons les valeurs suivantes pour le niveau de bruit d'actuation en termes de densités spectrales de puissance :

$$\Phi_{act,f} = \left(1 \frac{\mu N}{\sqrt{Hz}}\right)^2 \text{ (forces)} \quad (5.7)$$

$$\Phi_{act,g} = \left(1 \frac{\mu Nm}{\sqrt{Hz}}\right)^2 \text{ (couples)} \quad (5.8)$$

Cette approximation nous paraît justifiée parce que, d'une part, seulement une à deux tuyères seront utilisées pour générer une force ou un couple dans une direction, et d'autre part, les bras de levier des tuyères sont tous de l'ordre d'un demi mètre.

5.3.5 Métrologie

Comme nous l'avons déjà mentionné dans le Chapitre 3, le modèle métrologique consiste en un ensemble de *sorties contrôlées* (les sorties servant à traduire les spécifications pour la synthèse de correcteurs) et de *sorties mesurées* utilisées par le correcteur.

Il est important de savoir que les expressions doivent d'abord être adaptées à la hiérarchie leader-follower. En d'autres termes, toutes les occurrences des quantités $\Delta\theta_i$ et Δr_i où l'indice i correspond au recombinateur doivent être supprimées. Ceci s'explique par le simple fait que les états du recombinateur sont identiques à ceux de la formation et que ceux-là sont déjà exprimés avec les quantités $\Delta\theta_R$ et Δr_R .

Dans la suite, nous utiliserons des données numériques afin d'adapter les modèles généraux disponibles et ainsi projeter les réalités de la mission *Pegase* dans notre cadre de modélisation. Les données numériques choisies seront indiquées dans des tableaux.

Outre les données géométriques définissant les sorties contrôlées et mesurées, nous donnerons des *écarts type* σ pour chaque sortie contrôlée qui reflètent les performances stochastiques demandées. Une *densité spectrale de puissance* Φ est associée à chaque sortie mesurée. Cette donnée définit le niveau de bruit de mesure.

Généralement, les densités spectrales de puissance Φ ne sont pas connues parce que les capteurs fournissent une mesure échantillonnée, c'est-à-dire à intervalles réguliers. Les données disponibles sont alors la *fréquence d'échantillonnage* f (ou bien la période de cadencement $T = 1/f$) et l'écart type σ (ou bien la variance σ^2) de la mesure. La densité spectrale de puissance Φ peut alors être calculée grâce à la formule suivante (cf. [37]) :

$$\Phi = \frac{2\sigma^2}{\omega} = \frac{\sigma^2}{\pi f} \quad (5.9)$$

Attitude inertielle du recombinateur

La première sortie contrôlée modélisée est l'attitude inertielle du recombinateur dont l'expression est la suivante :

$$s_{\text{att,R}} = \Delta\theta_R \quad (5.10)$$

La performance requise est un dixième d'une seconde d'arc :

$$\sigma_{\text{att,R}} = 0,1 \text{ as} = 4,85 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \quad (5.11)$$

Attitudes relatives des sidérostats par rapport au recombinateur

Nous ne nous intéressons pas aux attitudes inertielles des sidérostats, mais à leurs attitudes relatives par rapport au recombinateur. Il vient pour le sidérost 1

$$s_{\text{att,rel,S1}} = \Delta\theta_{S1} \quad (5.12)$$

et pour le sidérost 2

$$s_{\text{att,rel,S2}} = \Delta\theta_{S2}. \quad (5.13)$$

L'écart type maximum pour cette sortie contrôlée est également un dixième d'une seconde d'arc :

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{att,rel,S1}} &= \sigma_{\text{att,rel,S2}} \\ &= 0,1 \text{ as} \\ &= 4,85 \cdot 10^{-7} \text{ rad}\end{aligned}\quad (5.14)$$

Différence de marche optique

La différence de marche optique est une sortie contrôlée qui reflète directement les besoins de la charge utile optique :

$$\begin{aligned}s_{\text{DDM}} &= -n_T^T C_0 C_c \left[-(r_{S2} + C_{S2} d_{\text{CU,S2}})^\times \Delta\theta_R + \Delta r_{S2} - C_{S2} d_{\text{CU,S2}}^\times \Delta\theta_{S2} \right] \\ &\quad + n_T^T C_0 C_c C_{S2} M_{S2} C_{S2}^T \left(-\Delta r_{S2} + C_{S2} d_{\text{CU,S2}}^\times \Delta\theta_{S2} \right) \\ &\quad + n_T^T C_0 C_c \left[-(r_{S1} + C_{S1} d_{\text{CU,S1}})^\times \Delta\theta_R + \Delta r_{S1} - C_{S1} d_{\text{CU,S1}}^\times \Delta\theta_{S1} \right] \\ &\quad - n_T^T C_0 C_c C_{S1} M_{S1} C_{S1}^T \left(-\Delta r_{S1} + C_{S1} d_{\text{CU,S1}}^\times \Delta\theta_{S1} \right)\end{aligned}\quad (5.15)$$

Nous avons recours aux valeurs numériques données dans le TAB. 5.4 pour traduire la différence de marche de l'interféromètre dans la mission *Pegase*. Ce tableau révèle que nous faisons coïncider les points de référence des vaisseaux avec les positions de leurs charges utiles.

TABLE 5.4 – Données numériques pour l'optique

Catégorie	Description	Variable	Valeur	Unité
Cible	Direction de l'objet ciblé	n_T	$[1, 0, 0]^T$	–
Recombina- teur	Position de montage de la charge utile (optique)	$d_{\text{CU,R}}$	$[0, 0, 0]^T$	m
Sidérostas 1	Vecteur normal au miroir	$n_{\text{CU,S1}}$	$[1, 0, 1]/\sqrt{2}$	–
	Position de montage du miroir	$d_{\text{CU,S1}}$	$[0, 0, 0]^T$	m
Sidérostas 2	Vecteur normal au miroir	$n_{\text{CU,S2}}$	$[-1, 0, 1]/\sqrt{2}$	–
	Position de montage du miroir	$d_{\text{CU,S2}}$	$[0, 0, 0]^T$	m

La performance requise sur cette sortie contrôlée est un écart type d'un centimètre :

$$\sigma_{\text{DDM}} = 1 \text{ cm}\quad (5.16)$$

Déplacements des sidérostats selon les axes x , y et z

Enfin, nous modélisons comme sorties contrôlées les déplacements des sidérostats selon les trois axes de l'espace euclidien¹.

1. Euclide (325 av. J.-C. – 265 av. J.-C.), mathématicien de la Grèce antique

Nous obtenons pour le sidérostas 1

$$\begin{aligned} s_{\text{trans,rel,x,S1}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Delta r_{S1} \\ s_{\text{trans,rel,y,S1}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Delta r_{S1} \\ s_{\text{trans,rel,z,S1}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \Delta r_{S1} \end{aligned} \quad (5.17)$$

et pour le sidérostas 2

$$\begin{aligned} s_{\text{trans,rel,x,S2}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Delta r_{S2} \\ s_{\text{trans,rel,y,S2}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \Delta r_{S2} \\ s_{\text{trans,rel,z,S2}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \Delta r_{S2}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ces sorties contrôlées ne traduisent pas une spécification de la mission *Pegase*. Nous en aurons néanmoins besoin plus tard pour obtenir un schéma de synthèse de correcteurs bien posé. Les performances demandées sont alors moins contraignantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{trans,rel,x,S1}} &= \sigma_{\text{trans,rel,y,S1}} \\ &= \sigma_{\text{trans,rel,z,S1}} = \sigma_{\text{trans,rel,x,S2}} \\ &= \sigma_{\text{trans,rel,y,S2}} = \sigma_{\text{trans,rel,z,S2}} \\ &= 10 \text{ cm} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Senseurs stellaires standard et fin

Le recombineur porte deux senseurs stellaires, un senseur stellaire standard et un senseur stellaire fin dont les expressions sont identiques :

$$\begin{aligned} y_{\text{SST,fin,R}} &= C_{\text{SST,fin,R}}^T C_R^T \Delta \theta_R \\ y_{\text{SST,std,R}} &= C_{\text{SST,std,R}}^T C_R^T \Delta \theta_R \end{aligned} \quad (5.20)$$

Les deux sidérostats portent chacun un senseur stellaire standard :

$$\begin{aligned} y_{\text{SST,std,S1}} &= C_{\text{SST,std,S1}}^T (C_{S1}^T \Delta \theta_R + \Delta \theta_{S1}) \\ y_{\text{SST,std,S2}} &= C_{\text{SST,std,S2}}^T (C_{S2}^T \Delta \theta_R + \Delta \theta_{S2}) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Les niveaux de bruits sont les suivants :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{SST,fin,R}} &= \left(100 \frac{\text{mas}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right)^2 = \left(4,85 \cdot 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right)^2 \\ \Phi_{\text{SST,std,R}} &= \Phi_{\text{SST,std,S1}} = \Phi_{\text{SST,std,S2}} \\ &= \left(1 \frac{\text{as}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right)^2 = \left(4,85 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.22)$$

En réalité, un senseur stellaire possède deux axes transverses avec une précision supérieure à celle de l'axe de visée. Cependant, nous avons renoncé à faire cette distinction.

Le TAB. 5.5 montre les orientations de montage des différents senseurs stellaires.

TABLE 5.5 – Données numériques pour les senseurs stellaires

Vaisseau	Description	Variable	Valeur	Unité
Recombina- teur	Orientation de montage du sen- seur stellaire standard	$C_{SST, std, R}$	I_3	–
	Orientation de montage du sen- seur stellaire fin	$C_{SST, fin, R}$	I_3	–
Sidérostat 1	Orientation de montage du sen- seur stellaire standard	$C_{SST, std, S1}$	I_3	–
Sidérostat 2	Orientation de montage du sen- seur stellaire standard	$C_{SST, std, S2}$	I_3	–

Capteurs d'incidence du faisceau optique

Les capteurs d'incidence du faisceau optique obéissent aux deux équations suivantes :

$$y_{FRAS,1,R} = -\frac{f_{1,1,R}f_{3,1,R}}{f_{2,1,R}} \left(p_{FRAS,1,R} \quad q_{FRAS,1,R} \right)^T n_{FRAS,1,R}^\times \cdot [C_R^T C_{S1} (M_{S1} - I_3) \Delta\theta_{S1} + C_R^T C_{S1} M_{S1} C_{S1}^T \Delta\theta_R] \quad (5.23)$$

$$y_{FRAS,2,R} = -\frac{f_{1,2,R}f_{3,2,R}}{f_{2,2,R}} \left(p_{FRAS,2,R} \quad q_{FRAS,2,R} \right)^T n_{FRAS,2,R}^\times \cdot [C_R^T C_{S2} (M_{S2} - I_3) \Delta\theta_{S2} + C_R^T C_{S2} M_{S2} C_{S2}^T \Delta\theta_R] \quad (5.24)$$

Nous avons fait les deux choix suivants :

$$\frac{f_{1,1,R}f_{3,1,R}}{f_{2,1,R}} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{f_{1,2,R}f_{3,2,R}}{f_{2,2,R}} = 1 \quad (5.25)$$

Par conséquent, les relations $y_{FRAS,1,R}$ et $y_{FRAS,2,R}$ donnent directement l'angle sur le ciel et ne prennent donc pas en compte l'amplification par les télescopes de CASSEGRAIN. Ce fait n'est pas une restriction de la généralité, mais il doit se retrouver dans les niveaux de bruit :

$$\begin{aligned} \Phi_{FRAS,1,R} &= \Phi_{FRAS,2,R} \\ &= \left(30 \frac{\text{mas}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right)^2 = \left(1,45 \cdot 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Le TAB. 5.6 indique les valeurs numériques nécessaires.

TABLE 5.6 – Données numériques pour les capteurs d'incidence du faisceau optique (FRAS)

Vaisseau	Description	Variable	Valeur	Unité
Recombina- teur	Direction du FRAS, voie droite	$n_{\text{FRAS},2,\text{R}}$	$[1, 0, 0]^T$	–
	Axe 1 du FRAS, voie droite	$p_{\text{FRAS},2,\text{R}}$	$[0, 1, 0]^T$	–
	Axe 2 du FRAS, voie droite	$q_{\text{FRAS},2,\text{R}}$	$[0, 0, 1]^T$	–
	Direction du FRAS, voie gauche	$n_{\text{FRAS},1,\text{R}}$	$[-1, 0, 0]^T$	–
	Axe 1 du FRAS, voie gauche	$p_{\text{FRAS},1,\text{R}}$	$[0, 1, 0]^T$	–
	Axe 2 du FRAS, voie gauche	$q_{\text{FRAS},1,\text{R}}$	$[0, 0, 1]^T$	–

Capteur latéral fin

Chacun des sidérostats porte un capteur latéral fin qui mesure sa position relativement au recombineur. Il vient pour le sidérost 1

$$y_{\text{lat},\text{fin},S1} = - \begin{bmatrix} p_{\text{lat},\text{fin},S1} & q_{\text{lat},\text{fin},S1} \end{bmatrix}^T n_{\text{lat},\text{fin},S1}^{\times} \cdot C_{S1}^T (C_{\text{R}} n_{\text{lat},\text{fin},1,\text{R}})^{\times} \left(\Delta r_{S1} - C_{S1} d_{\text{lat},\text{fin},S1}^{\times} \Delta \theta_{S1} \right) \quad (5.27)$$

et pour le sidérost 2

$$y_{\text{lat},\text{fin},S2} = - \begin{bmatrix} p_{\text{lat},\text{fin},S2} & q_{\text{lat},\text{fin},S2} \end{bmatrix}^T n_{\text{lat},\text{fin},S2}^{\times} \cdot C_{S2}^T (C_{\text{R}} n_{\text{lat},\text{fin},2,\text{R}})^{\times} \left(\Delta r_{S2} - C_{S2} d_{\text{lat},\text{fin},S2}^{\times} \Delta \theta_{S2} \right). \quad (5.28)$$

La densité spectrale de puissance du bruit de mesure est la suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{lat},\text{fin},S1} &= \Phi_{\text{lat},\text{fin},S2} \\ &= \left(0, 1 \frac{\mu\text{m}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.29)$$

Les données numériques choisies pour les capteurs latéraux fins sont disponibles dans le TAB. 5.7.

TABLE 5.7 – Données numériques pour les capteurs latéraux fins

Vaisseau	Description	Variable	Valeur	Unité
Recombina- teur	Direction du laser, voie droite	$n_{\text{lat,fin,2,R}}$	$[1, 0, 0]^T$	–
	Position de montage du laser, voie droite	$d_{\text{lat,fin,2,R}}$	$[0, 4, 0, -0, 3]^T$	m
	Direction du laser, voie gauche	$n_{\text{lat,fin,1,R}}$	$[-1, 0, 0]^T$	–
	Position de montage du laser, voie gauche	$d_{\text{lat,fin,1,R}}$	$[-0, 4, 0, -0, 3]^T$	m
Sidérostat 1	Vecteur normal du capteur latéral fin	$n_{\text{lat,fin,S1}}$	$[1, 0, 0]^T$	–
	Axe 1 du capteur latéral fin	$p_{\text{lat,fin,S1}}$	$[0, 1, 0]^T$	–
	Axe 2 du capteur latéral fin	$q_{\text{lat,fin,S1}}$	$[0, 0, 1]^T$	–
	Position de montage du capteur latéral fin	$d_{\text{lat,fin,S1}}$	$[0, 3, 0, -0, 3]^T$	m
Sidérostat 2	Vecteur normal du capteur latéral fin	$n_{\text{lat,fin,S2}}$	$[-1, 0, 0]^T$	–
	Axe 1 du capteur latéral fin	$p_{\text{lat,fin,S2}}$	$[0, 1, 0]^T$	–
	Axe 2 du capteur latéral fin	$q_{\text{lat,fin,S2}}$	$[0, 0, 1]^T$	–
	Position de montage du capteur latéral fin	$d_{\text{lat,fin,S2}}$	$[-0, 3, 0, -0, 3]^T$	m

Capteur longitudinal

Les capteurs longitudinaux, embarqués sur les deux sidérostats, obéissent aux deux expressions suivantes :

$$y_{\text{lon,S1}} = \frac{(r_{\text{S1}} + C_{\text{S1}}d_{\text{lon,S1}} - r_{\text{R}} - C_{\text{R}}d_{\text{lon,1,R}})^T (\Delta r_{\text{S1}} - C_{\text{S1}}d_{\text{lon,S1}}^{\times} \Delta \theta_{\text{S1}})}{[(r_{\text{S1}} + C_{\text{S1}}d_{\text{lon,S1}} - r_{\text{R}} - C_{\text{R}}d_{\text{lon,1,R}})^T (r_{\text{S1}} + C_{\text{S1}}d_{\text{lon,S1}} - r_{\text{R}} - C_{\text{R}}d_{\text{lon,1,R}})]^{1/2}} \quad (5.30)$$

$$y_{\text{lon,S2}} = \frac{(\Delta r_{\text{S2}} - C_{\text{S2}}d_{\text{lon,S2}}^{\times} \Delta \theta_{\text{S2}})(r_{\text{S2}} + C_{\text{S2}}d_{\text{lon,S2}} - r_{\text{R}} - C_{\text{R}}d_{\text{lon,2,R}})^T}{[(r_{\text{S2}} + C_{\text{S2}}d_{\text{lon,S2}} - r_{\text{R}} - C_{\text{R}}d_{\text{lon,2,R}})^T (r_{\text{S2}} + C_{\text{S2}}d_{\text{lon,S2}} - r_{\text{R}} - C_{\text{R}}d_{\text{lon,2,R}})]^{1/2}} \quad (5.31)$$

Leurs niveaux de bruits sont définis comme suit :

$$\Phi_{\text{lon,S1}} = \Phi_{\text{lon,S2}} = \left(0, 1 \frac{\mu\text{m}}{\sqrt{\text{Hz}}}\right)^2 \quad (5.32)$$

Les données numériques concernant les capteurs longitudinaux fins sont montrées dans le TAB. 5.8.

TABLE 5.8 – Données numériques pour les capteurs longitudinaux fins

Vaisseau	Description	Variable	Valeur	Unité
Recombina- teur	Position de montage du rétro- réflecteur, voie gauche	$d_{lon,fin,1,R}$	$[-0, 4, 0, -0, 4]^T$	m
	Position de montage du rétro- réflecteur, voie droite	$d_{lon,fin,2,R}$	$[0, 4, 0, -0, 4]^T$	m
Sidérostat 1	Position de montage du capteur longitudinal fin	$d_{lon,fin,S1}$	$[0, 3, 0, -0, 4]^T$	m
Sidérostat 2	Position de montage du capteur longitudinal fin	$d_{lon,fin,S2}$	$[-0, 3, 0, -0, 4]^T$	m

Capteur latéral grossier

Un autre capteur latéral, embarqué sur chacun des sidérostats, est le capteur latéral grossier. Son équation de mesure se lit pour le sidérostat 1

$$y_{lat,gro,S1} = -f_{S1} \begin{pmatrix} p_{lat,gro,S1} & q_{lat,gro,S1} \end{pmatrix}^T n_{lat,gro,S1}^{\times 2} \cdot C_{S1}^T \frac{(r_{S1} - r_R - C_R d_{lat,gro,R})^\times C_{S1} \Delta \theta_{S1} + \Delta r_{S1}}{n^T C_i^T (r_{S1} + C_{S1} d_{lat,gro,S1} - r_R - C_R d_{lat,gro,R})} \quad (5.33)$$

et pour le sidérostat 2 :

$$y_{lat,gro,S2} = -f_{S2} \begin{pmatrix} p_{lat,gro,S2} & q_{lat,gro,S2} \end{pmatrix}^T n_{lat,gro,S2}^{\times 2} \cdot C_{S2}^T \frac{(r_{S2} - r_R - C_R d_{lat,gro,R})^\times C_{S2} \Delta \theta_{S2} + \Delta r_{S2}}{n^T C_i^T (r_{S2} + C_{S2} d_{lat,gro,S2} - r_R - C_R d_{lat,gro,R})} \quad (5.34)$$

La densité spectrale de puissance du bruit de ce capteur est

$$\Phi_{lat,gro,S1} = \Phi_{lat,gro,S2} = \left(1 \frac{\text{as}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right)^2 = \left(4,85 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right)^2. \quad (5.35)$$

Toutes les données numériques nécessaires sont indiquées dans le TAB. 5.9.

Capteur radiofréquence

Enfin, il existe le capteur radiofréquence qui comporte trois volets. En effet, il mesure une distance et deux angles, l'azimut et l'élévation. Ce capteur est distribué sur deux vaisseaux (recombinateur

TABLE 5.9 – Données numériques pour les capteurs latéraux grossiers

Vaisseau	Description	Variable	Valeur	Unité
Recombina- teur Sidérostat 1	Position de montage de la source laser	$d_{\text{lat,coa,R}}$	$[0, 4, 0, -0, 5]^T$	m
	Position de montage du capteur latéral grossier	$d_{\text{lat,coa,S1}}$	$[-0, 3, 0, -0, 5]^T$	m
Sidérostat 2	Vecteur normal du capteur latéral grossier	$n_{\text{lat,gro,S1}}$	$[1, 0, 0]^T$	–
	Axe 1 du capteur latéral grossier	$p_{\text{lat,gro,S1}}$	$[0, 1, 0]^T$	–
	Axe 2 du capteur latéral grossier	$q_{\text{lat,gro,S1}}$	$[0, 0, 1]^T$	–
	Position de montage du capteur latéral grossier	$d_{\text{lat,coa,S2}}$	$[-0, 3, 0, -0, 5]^T$	m
	Vecteur normal du capteur latéral grossier	$n_{\text{lat,gro,S2}}$	$[1, 0, 0]^T$	–
	Axe 1 du capteur latéral grossier	$p_{\text{lat,gro,S2}}$	$[0, 1, 0]^T$	–
	Axe 2 du capteur latéral grossier	$q_{\text{lat,gro,S2}}$	$[0, 0, 1]^T$	–

et un sidérostat), mais la mesure est toujours prise sur un sidérostat. Il vient pour le sidérostat 1

$$\begin{aligned}
y_{RF,dist,S1} &= \frac{(r_{S1} + C_{S1}d_{RF,S1} - r_R - C_Rd_{RF,1,R})^T (\Delta r_{S1} - C_{S1}d_{RF,S1}^\times \Delta \theta_{S1})}{[(r_{S1} + C_{S1}d_{RF,S1} - r_R - C_Rd_{RF,1,R})^T (r_{S1} + C_{S1}d_{RF,S1} - r_R - C_Rd_{RF,1,R})]^{1/2}} \\
y_{RF,az,S1} &= \frac{p_{RF,S1}^T C_R^T (\Delta r_{S1} - C_{S1}d_{RF,S1}^\times \Delta \theta_{S1})}{n_{RF,1}^T C_R^T (r_{S1} + C_{S1}d_{RF,S1} - r_R - C_Rd_{RF,1,R})} \\
y_{RF,el,S1} &= \frac{q_{RF,S2}^T C_R^T (\Delta r_{S1} - C_{S1}d_{RF,S1}^\times \Delta \theta_{S1})}{[(r_{S1} + C_{S1}d_{RF,S1} - r_R - C_Rd_{RF,1,R})^T (r_{S1} + C_{S1}d_{RF,S1} - r_R - C_Rd_{RF,1,R})]^{1/2}}
\end{aligned} \tag{5.36}$$

et pour le sidérostat 2

$$\begin{aligned}
y_{RF,dist,S2} &= \frac{(r_{S2} + C_{S2}d_{RF,S2} - r_R - C_Rd_{RF,2,R})^T (\Delta r_{S2} - C_{S2}d_{RF,S2}^\times \Delta \theta_{S2})}{[(r_{S2} + C_{S2}d_{RF,S2} - r_R - C_Rd_{RF,2,R})^T (r_{S2} + C_{S2}d_{RF,S2} - r_R - C_Rd_{RF,2,R})]^{1/2}} \\
y_{RF,az,S2} &= \frac{p_{RF,S2}^T C_R^T (\Delta r_{S2} - C_{S2}d_{RF,S2}^\times \Delta \theta_{S2})}{n_{RF}^T C_R^T (r_{S2} + C_{S2}d_{RF,S2} - r_R - C_Rd_{RF,2,R})} \\
y_{RF,el,S2} &= \frac{q_{RF,S2}^T C_R^T (\Delta r_{S2} - C_{S2}d_{RF,S2}^\times \Delta \theta_{S2})}{[(r_{S2} + C_{S2}d_{RF,S2} - r_R - C_Rd_{RF,2,R})^T (r_{S2} + C_{S2}d_{RF,S2} - r_R - C_Rd_{RF,2,R})]^{1/2}}.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Les niveaux de bruit sont les suivants :

$$\begin{aligned}
\Phi_{RF,az,S1} &= \Phi_{RF,az,S2} = \Phi_{RF,el,S1} = \Phi_{RF,el,S2} \\
&= \left(3600 \frac{\text{as}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right)^2 = \left(1,75 \cdot 10^{-2} \frac{\text{rad}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right)^2 \\
\Phi_{RF,dist,S1} &= \Phi_{RF,dist,S2} = \left(1 \frac{\text{cm}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right)^2
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Le TAB. 5.10 résume les principales données numériques du capteur radiofréquence.

TABLE 5.10 – Données numériques pour les capteurs radiofréquence

Vaisseau	Description	Variable	Valeur	Unité
Recombina- teur	Position de montage de l'émetteur (voie droite)	$d_{RF,2,R}$	$[0, 6, 0, -0, 6]^T$	m
	Position de montage de l'émetteur (voie gauche)	$d_{RF,1,R}$	$[-0, 6, 0, -0, 6]^T$	m
Sidérost 1	Position de montage du capteur radiofréquence	$d_{RF,S1}$	$[0, 5, 0, -0, 5]^T$	m
	Direction du capteur radiofréquence	$n_{RF,S1}$	$[1, 0, 0]^T$	–
	Axe 1 du capteur radiofréquence	$p_{RF,S1}$	$[0, 1, 0]^T$	–
Sidérost 2	Axe 2 du capteur radiofréquence	$q_{RF,S1}$	$[0, 0, 1]^T$	–
	Position de montage du capteur radiofréquence	$d_{RF,S2}$	$[-0, 5, 0, -0, 5]^T$	m
	Direction du capteur radiofréquence	$n_{RF,S2}$	$[-1, 0, 0]^T$	–
	Axe 1 du capteur radiofréquence	$p_{RF,S2}$	$[0, 1, 0]^T$	–
	Axe 2 du capteur radiofréquence	$q_{RF,S2}$	$[0, 0, 1]^T$	–

Un point important à ne pas oublier est que nous ne prenons pas en compte la redondance au niveau des capteurs. En d'autres termes, nous ne profitons pas du fait que tous les capteurs sont redondés une fois pour garantir un bon fonctionnement en cas de panne d'un capteur.

Il est intéressant de noter que certains capteurs, plus précisément le FRAS et les senseurs stellaires, mesurent des dépointages ou des combinaisons linéaires de dépointages. En revanche, tous les autres capteurs (capteur latéral fin et grossier, capteur longitudinal et capteur radiofréquence) mesurent des combinaisons de déplacements et de dépointages. Ceci s'explique par les bras de levier qui existent forcément quand un capteur n'est pas situé au point de référence d'un vaisseau.

Même si les expressions des différents capteurs paraissent assez compliquées, elles se simplifient nettement quand on utilise les valeurs numériques indiquées dans les tableaux mentionnés. Par exemple, la sortie contrôlée s_{DDM} décrivant la différence de marche optique s'écrit comme suit :

$$s_{DDM} = [0 \quad 500 \text{ m} \quad 0] \cdot \Delta\theta_R + [1 \quad 0 \quad -1] \cdot \Delta r_{S1} + [1 \quad 0 \quad 1] \cdot \Delta r_{S2} \quad (5.39)$$

5.3.6 Représentation d'état

L'existence de modèles pour la dynamique, et la métrologie, tous basés sur le cadre donné par la hiérarchie leader-follower, permet de créer un modèle global sous forme de représentation d'état. Le vecteur d'état $x \in \mathbb{R}^n$ est assemblé en utilisant les dépointages des trois vaisseaux ($\Delta\theta_R$, $\Delta\theta_{S1}$ et $\Delta\theta_{S2}$) et les déplacements des sidérostats (Δr_{S1} et Δr_{S2}). Les dérivées de ces quantités ($\Delta\dot{\theta}_R$, $\Delta\dot{\theta}_{S1}$,

$\Delta\dot{\theta}_{S2}$, $\Delta\dot{r}_{S1}$ et $\Delta\dot{r}_{S2}$) en font aussi partie :

$$x = \begin{bmatrix} \Delta\dot{\theta}_R \\ \Delta\theta_R \\ \Delta\dot{r}_{S1} \\ \Delta\dot{\theta}_{S1} \\ \Delta r_{S1} \\ \Delta\theta_{S1} \\ \Delta\dot{r}_{S2} \\ \Delta\dot{\theta}_{S2} \\ \Delta r_{S2} \\ \Delta\theta_{S2} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Le vecteur des entrées d'actuation $u \in \mathbb{R}^{m2}$ est composé des couples des trois vaisseaux (Δg_R , Δg_{S1} et Δg_{S2}) et des forces exercées par les actionneurs des sidérostats (Δf_{S1} et Δf_{S2}) :

$$u = \begin{bmatrix} \Delta g_R \\ \Delta f_{S1} \\ \Delta g_{S1} \\ \Delta f_{S2} \\ \Delta g_{S2} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Nous pouvons réordonner puis partitionner le vecteur u de la manière suivante afin de faire apparaître l'appartenance des entrées d'actuation :

$$u = \begin{bmatrix} u_R \\ u_{S1} \\ u_{S2} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

avec $u_R = [\Delta g_R]$, $u_{S1} = \begin{bmatrix} \Delta f_{S1} \\ \Delta g_{S1} \end{bmatrix}$ et $u_{S2} = \begin{bmatrix} \Delta f_{S2} \\ \Delta g_{S2} \end{bmatrix}$

L'assemblage de toutes les sorties mesurées fournit le vecteur des sorties mesurées $y \in \mathbb{R}^{p2}$ et peut être écrit comme produit d'une matrice des sorties mesurées $C \in \mathbb{R}^{p2 \times n}$ et du vecteur des états x :

$$y = \begin{bmatrix} y_{SST,fin,R} \\ y_{SST,std,R} \\ y_{FRAS,1,R} \\ y_{FRAS,2,R} \\ y_{SST,std,S1} \\ y_{lat,fin,S1} \\ y_{lon,S1} \\ y_{RF,S1} \\ y_{lat,gro,S1} \\ y_{SST,std,S2} \\ y_{lat,fin,S2} \\ y_{lon,S2} \\ y_{RF,S2} \\ y_{lat,gro,S2} \end{bmatrix} = Cx \quad (5.43)$$

Comme pour le vecteur u , nous pouvons réordonner puis partitionner le vecteur des sorties mesurées y :

$$y = \begin{bmatrix} y_R \\ y_{S1} \\ y_{S2} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

avec $y_R = \begin{bmatrix} y_{SST,fin,R} \\ y_{SST,std,R} \\ y_{FRAS,1,R} \\ y_{FRAS,2,R} \end{bmatrix}$, $y_{S1} = \begin{bmatrix} y_{SST,std,S1} \\ y_{lat,fin,S1} \\ y_{lon,S1} \\ y_{RF,S1} \\ y_{lat,gro,S1} \end{bmatrix}$ et $y_{S2} = \begin{bmatrix} y_{SST,std,S2} \\ y_{lat,fin,S2} \\ y_{lon,S2} \\ y_{RF,S2} \\ y_{lat,gro,S2} \end{bmatrix}$

Le cas est similaire concernant les sorties contrôlées. La matrice des sorties contrôlées s'appelle $N \in \mathbb{R}^{p_z \times n}$:

$$s = \begin{bmatrix} s_{att,R} \\ s_{DDM} \\ s_{att,rel,S1} \\ s_{att,rel,S2} \\ s_{trans,x,S1} \\ s_{trans,y,S1} \\ s_{trans,z,S1} \\ s_{trans,x,S2} \\ s_{trans,y,S2} \\ s_{trans,z,S2} \end{bmatrix} = Nx \quad (5.45)$$

Enfin, nous disposons de toutes les informations nécessaires afin de créer une représentation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ s &= Nx \end{aligned} \quad (5.46)$$

Les matrices A et B peuvent être obtenues par identification à partir de l'Éq. (5.1) (page 189). La FIG. 5.4 montre la forme des matrices de la représentation d'état.

Quant aux perturbations orbitales, nous ne nous intéressons en principe qu'aux accélérations angulaires subies par les trois vaisseaux et aux *accélérations différentielles* subies par les sidérostats, c'est-à-dire les différences entre les accélérations subies par les sidérostats et celles subies par le recombineur :

$$\begin{aligned} \Delta a_{S1,sol} &= a_{S1,sol} - a_{R,sol} \\ \Delta a_{S2,sol} &= a_{S2,sol} - a_{R,sol} \\ \Delta a_{S1,grav} &= a_{S1,grav} - a_{R,grav} \\ \Delta a_{S2,grav} &= a_{S2,grav} - a_{R,grav} \end{aligned} \quad (5.47)$$

L'accélération subie par le recombineur, et donc par la formation entière, ne nous intéresse pas car elle n'est pas une quantité relative.

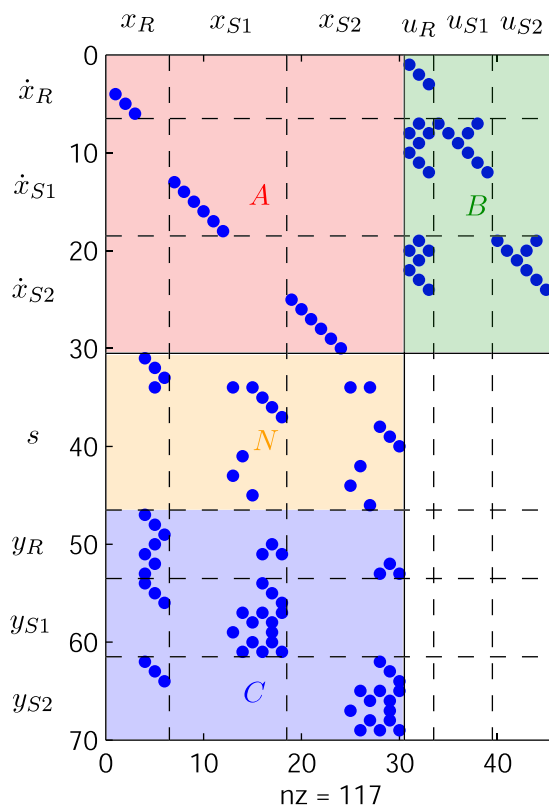


FIGURE 5.4 – Forme des matrices de la représentation d'état

Si nous traduisons l'Éq. (5.47) en forces (par exemple $f_{S1,sol} = m_{S1}a_{S1,sol}$), nous obtenons les *forces différentielles* subies par les sidérostats 1 et 2 :

$$\begin{aligned}
 \Delta f_{S1,sol} &= f_{S1,sol} - \frac{m_{S1}}{m_R} f_{R,sol} \\
 \Delta f_{S2,sol} &= f_{S2,sol} - \frac{m_{S2}}{m_R} f_{R,sol} \\
 \Delta f_{S1,grav} &= f_{S1,grav} - \frac{m_{S1}}{m_R} f_{R,grav} \\
 \Delta f_{S2,grav} &= f_{S2,grav} - \frac{m_{S2}}{m_R} f_{R,grav}
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

TABLE 5.11 – Forces causées par la pression solaire

Vaisseau	Recombineur	Sidérostat 1	Sidérostat 2
Force [N]	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4,98 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,21 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,21 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$
Force différentielle [N]	–	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1,11 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1,11 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$

Le TAB. 5.11 résume les forces exercées sur les trois vaisseaux par la pression solaire. Nous ne traiterons pas les couples solaires ici, mais nos résultats sont généralisables à ce cas-là. Il faut aussi être conscient que les forces possèdent d'autres magnitudes et d'autres directions si le pointage de la formation par rapport au Soleil est différent, c'est-à-dire si une autre cible est visée.

Les forces exercées sur les vaisseaux par le gradient de gravité sont montrées dans le TAB. 5.12. Il n'existe pas de couples dûs à la gravitation car les forces agissent toujours au centre de masse des vaisseaux. Le rapports entre ces forces et les forces solaires est aux alentours de 1000. Par conséquent, nous pourrions négliger les forces gravitationnelles devant les forces solaires dans la suite.

TABLE 5.12 – Forces causées par le gradient de gravité

Vaisseau	Recombineur	Sidérostat 1	Sidérostat 2
Force [N]	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4,85 \cdot 10^{-11} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,35 \cdot 10^{-8} \\ 0 \\ -2,69 \cdot 10^{-11} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1,35 \cdot 10^{-8} \\ 0 \\ -2,69 \cdot 10^{-11} \end{pmatrix}$
Force différentielle [N]	–	$\begin{pmatrix} 1,35 \cdot 10^{-8} \\ 0 \\ 5,39 \cdot 10^{-12} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1,35 \cdot 10^{-8} \\ 0 \\ 5,39 \cdot 10^{-12} \end{pmatrix}$

De manière similaire au vecteur des entrées d'actuation, nous pouvons écrire un vecteur des entrées de perturbation :

$$u_{\text{pert}} = u_{\text{sol}} + u_{\text{grav}} = \begin{bmatrix} g_{\text{sol,R}} \\ \Delta f_{\text{sol,S1}} \\ g_{\text{sol,S1}} \\ \Delta f_{\text{sol,S2}} \\ g_{\text{sol,S2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{\text{grav,R}} \\ \Delta f_{\text{grav,S1}} \\ g_{\text{grav,S1}} \\ \Delta f_{\text{grav,S2}} \\ g_{\text{grav,S2}} \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

5.3.7 Bilan

Nous avons montré dans cette section comment, à partir du modèle générique présenté dans le Chapitre 3 et en choisissant la structure hiérarchique leader-follower, un modèle numérique peut être établi.

Ce modèle prend en compte la dynamique et la métrologie (sorties mesures et contrôlées) de la formation *Pegase*. Un modèle des forces et couples perturbateurs agissant sur la formation en état nominal a également été obtenu. Enfin, des valeurs numériques ont été introduites afin de traduire les spécifications de la mission et les niveaux des bruits d'actuation et de mesure.

Nous avons vu que le modèle générique du Chapitre 3 se simplifie nettement si l'on choisit des valeurs numériques dans des repères bien choisis.

5.4 Synthèse d'un correcteur pour un seul mode opérationnel

5.4.1 Correcteur de base

Afin de pouvoir appliquer la synthèse \mathcal{H}_2 comme nous l'avons annoncé dans l'introduction de ce chapitre, il est d'abord indispensable de disposer d'une forme standard de synthèse, cf. FIG. H.1 dans

l'Annexe H.

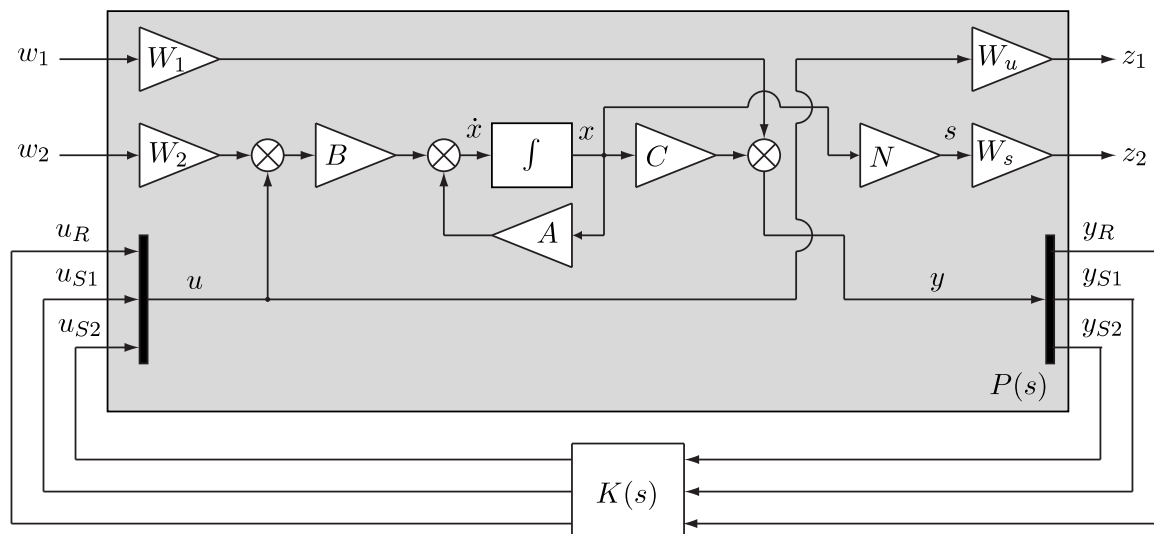


FIGURE 5.5 – Forme standard de synthèse utilisée. Les matrices A , B , C et N traduisent la dynamique, l'actuation, les sorties mesurées et les sorties contrôlées, respectivement. Les pondérations W_1 et W_2 normalisent les bruits de mesure et d'actuation, respectivement. La pondération W_s sert à normaliser les spécifications et W_u rend le schéma de synthèse bien posé.

La FIG. 5.5 montre la structure choisie dans le but de traduire les spécifications de la mission *Pegase*. Nous avons précédemment décrit comment les matrices A , B , C et N peuvent être déterminées. Ces quatre matrices expriment la dynamique (A), l'actuation (B), les sorties mesurées (C) et les sorties contrôlées (N).

Or, le schéma de synthèse n'est pas encore complet. Il sera enrichi des quatre éléments suivants :

- d'abord, le schéma doit tenir compte des bruits d'actuation Φ_{act} ;
- ensuite, le schéma doit tenir compte des bruits de mesure Φ_{mes} ;
- en outre, les spécifications en termes d'écart-type σ doivent trouver leur place dans le schéma ;
- enfin, le schéma doit respecter les hypothèses décrites dans l'Annexe H afin que le problème d'optimisation soit bien posé.

Ces modifications de la forme standard se traduisent dans la FIG. 5.5 sous forme de quatre pondérations, W_1 , W_2 , W_u et W_s . Nous décrirons dans la suite comment les valeurs numériques de ces pondérations peuvent être déterminées.

La pondération W_1 multiplie le vecteur des entrées exogènes w_1 et fournit le vecteur des bruits de mesure. La synthèse \mathcal{H}_2 (au moins dans son interprétation stochastique) suppose que toutes les entrées exogènes soient des bruits blancs de densité spectrale unitaire. Afin d'obtenir la densité spectrale spécifiée d'un bruit de mesure, il faut multiplier chaque signal du vecteur w_1 par la racine carrée de la densité spectrale du bruit correspondant. Ainsi, la matrice W_1 est diagonale et composée des racines carrées des bruits de mesure :

$$W_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{\Phi_{\text{SST,fin,R}}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\Phi_{\text{lat,gro,S2}}} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

En choisissant une structure non-diagonale pour la matrice W_1 , nous pouvons créer des bruits de mesure corrélés.

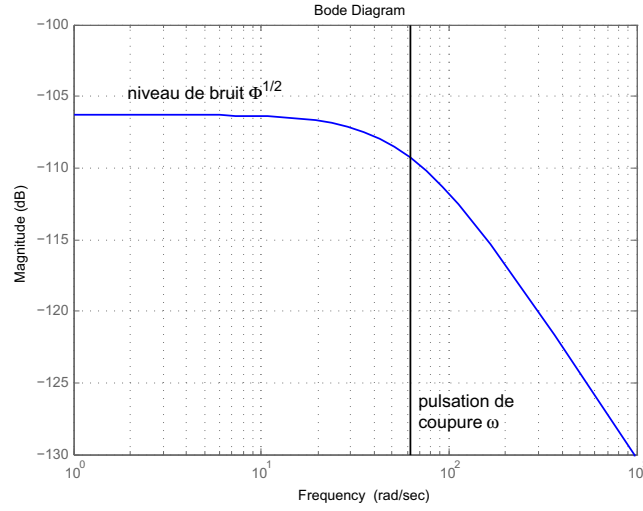


FIGURE 5.6 – Filtre de pondération

Pour l'instant, nous avons supposé des bruits uniformes, c'est-à-dire avec la même amplitude à toutes les fréquences, jusqu'à l'infini. En réalité, chaque capteur a une bande passante ω qui est déterminée par la cadence de mesure ($\omega = 2\pi/T$). Ce fait est illustré dans la FIG. 5.6. Afin de traduire cette propriété dans le schéma de synthèse, nous avons la possibilité d'utiliser une pondération dynamique $W_1(s)$ dont les éléments diagonaux sont de la forme $\sqrt{\Phi}/(s/\omega + 1)$. Cependant, nous n'utiliserons pas cette formulation pour ne pas faire augmenter le nombre d'états du schéma de synthèse.

Concernant les bruits d'actuation, les mêmes remarques faites pour les bruits de mesure sont vraies. Nous obtenons la pondération W_2 comme suit :

$$W_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{\Phi_{\text{act},g}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\Phi_{\text{act},f}} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

Concernant les spécifications stochastiques σ de la mission, nous les retrouvons dans la pondération W_s du schéma de synthèse. Comme les sorties contrôlées sont à des échelles très variées, il est nécessaire de les rendre comparables pour la synthèse. Ceci est possible en prenant comme éléments diagonaux de W_s les inverses des spécifications σ :

$$W_s = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sigma_{\text{att},R}}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\sqrt{\sigma_{\text{trans},z,S2}}} \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

Bien entendu, W_s peut aussi être une pondération dynamique afin de traduire des spécifications dépendant de la fréquence.

En principe, la synthèse \mathcal{H}_2 n'est pas adaptée à garantir une certaine performance, c'est-à-dire le respect des spécifications mentionnées ci-dessus. La synthèse \mathcal{H}_2 minimise la somme des variances des

différentes sorties contrôlées en boucle fermée :

$$\min_{K(s)} \sum_i \sigma_i^2 \quad (5.53)$$

Or, en réalité, notre problème de synthèse est un problème multi-objectif car il faut satisfaire la spécification de chacune des sorties contrôlées :

$$\text{choisir } K(s) \text{ t.q. } \max_i \sigma_i^2 \leq 1 \quad (5.54)$$

Ceci n'est même pas un problème d'optimisation, mais purement un problème de satisfaction de contraintes. Nous devons être conscients de cette distinction. Or, rien ne nous empêche de chercher, parmi les correcteurs qui satisfont le problème ci-dessus, celui qui minimise le maximum des variances des différentes sorties contrôlées (problème min-max) :

$$\min_{K(s)} \max_i \sigma_i^2 \quad (5.55)$$

En outre, BOYD et al. [23] proposent une méthode de synthèse LQG multi-critère basée sur des inégalités matricielles linéaires et minimisant la norme \mathcal{H}_2 d'un certain transfert, tout en satisfaisant des bornes supérieures sur les normes \mathcal{H}_2 d'autres transferts.

Les problèmes donnés dans les Éqs. (5.53) et (5.55) sont essentiellement différents. En pratique, cela ne nous gêne pas car, qualitativement, la sortie contrôlée dont la variance est la plus élevée a le plus d'influence sur la norme \mathcal{H}_2 . Par conséquent, cette sortie-là est minimisée en priorité dans la plupart des cas. Au cas où la variance d'une certaine sortie contrôlée dépasse la limite spécifiée, il est envisageable de la pondérer plus fortement afin qu'elle soit prise en compte en priorité. Or, cette idée n'est pertinente que si l'on peut se permettre de dégrader les performances des autres sorties contrôlées.

Enfin, la matrice W_u sert à faire apparaître toutes les composantes du vecteur des entrées d'actionnement u dans la formulation du problème d'optimisation. Ceci nous permet d'obtenir un schéma de synthèse bien posé, notamment en garantissant que la matrice D_{12} soit de rang plein (hypothèse (H2) dans l'Annexe H). Nous choisissons une structure diagonale pour W_u , avec la valeur suivante :

$$W_u = 10^3 \cdot I_{m_2} \quad (5.56)$$

Il s'avérera que cette valeur n'influe pas beaucoup sur le correcteur et le système en boucle fermée. Or, il est possible de choisir des valeurs plus importantes et notamment différentes pour chaque actionneur. Grâce à cela, il est possible de pénaliser la sollicitation des actionneurs ou de certains actionneurs seulement.

Un point important est que les forces et les couples perturbateurs ne sont pas considérés pour l'instant dans le schéma de synthèse.

La forme standard montrée dans la FIG. 5.5 peut être écrite sous forme de représentation d'état

de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z_1 \\ z_2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & BW_2 & B \\ 0 & 0 & 0 & W_u \\ W_z N & 0 & 0 & 0 \\ C & W_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ w_1 \\ w_2 \\ u \end{pmatrix} \quad (5.57)$$

Les matrices utilisées dans la synthèse \mathcal{H}_2 , cf. Annexe H, peuvent être obtenues par identification :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix} \quad (5.58)$$

La FIG. 5.7 montre la forme des matrices de la représentation d'état de la forme standard.

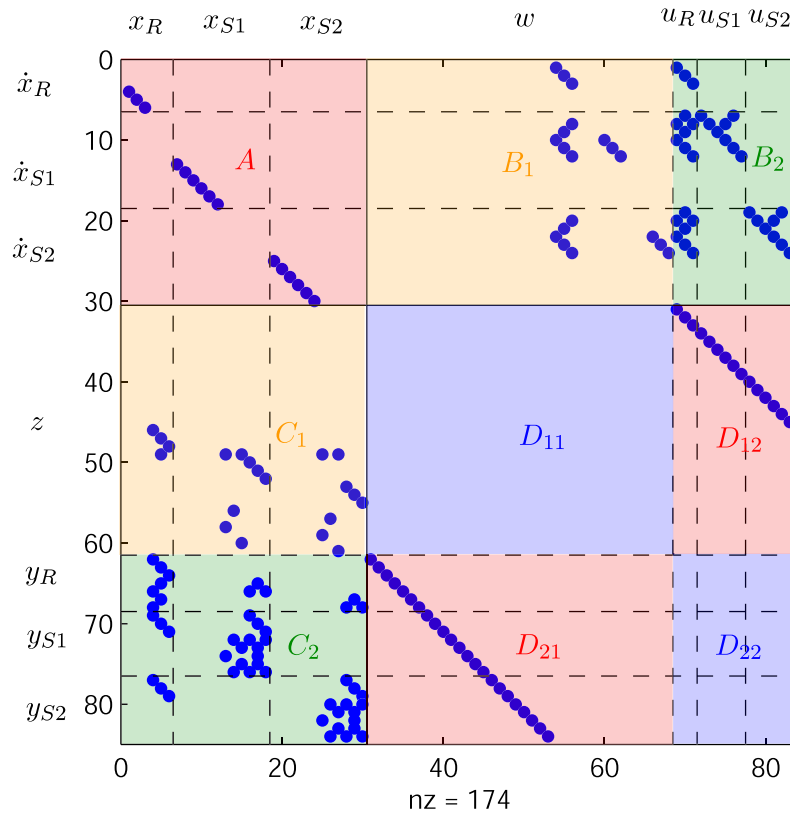


FIGURE 5.7 – Forme des matrices de la représentation d'état de la forme standard

Il est évident que les matrices D_{12} et D_{21} sont de rang plein et remplissent donc l'hypothèse (H2) de l'Annexe H si les matrices W_u et W_1 sont choisies correctement, par exemple de structure diagonale. D_{11} et D_{22} sont nulles comme il faut (hypothèse (H5)). Les relations $D_{12}^T C_1 = 0$ et $B_1 D_{21}^T = 0$ sont également vraies (hypothèse (H6)). Enfin, les triples (A, B_2, C_2) et (A, B_1, C_1) s'avèrent stabilisables et détectables (hypothèses (H1) et (H7)). Ainsi, les hypothèses nécessaires sont satisfaites et rien ne s'oppose à la synthèse d'un correcteur \mathcal{H}_2 -optimal.

Les opérations nécessaires pour effectuer la synthèse sont décrites dans l'Annexe H. Rappelons

que le correcteur est sous forme d'un filtre de KALMAN, cf. FIG. 5.8. Ceci signifie que le correcteur a autant d'états que la forme standard et que les états du correcteur sont des estimées des états du système. Cette signification physique est une propriété extrêmement appréciable dans une application spatiale.

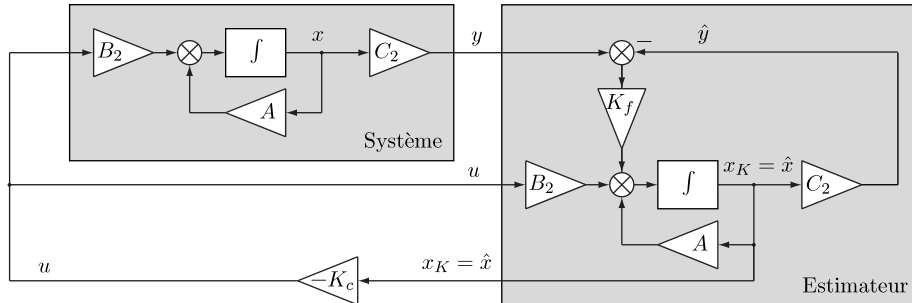


FIGURE 5.8 – Correcteur sous forme d'un filtre de KALMAN

La performance totale \mathcal{H}_2 ainsi que les performances atteintes en boucle fermée pour les différentes sorties contrôlées sont résumées dans le TAB. 5.13. Elles ont été calculées grâce aux Éqs. (H.13) et (H.14) (page 345). Nous observons que la sortie z_2 consomme la plus grande part de la performance totale et que la contribution de la sortie z_1 est faible.

TABLE 5.13 – Performances atteintes en boucle fermée. Performance globale : 0,922179, dont 0,012756 pour z_1 et 0,83766 pour z_2

No.	Sortie contrôlée	Performance normalisée	Performance réelle	Unité
1	Attitude inertielle recombineur, axe x	$4,86 \cdot 10^{-1}$	$4,86 \cdot 10^{-2}$	as
2	Attitude inertielle recombineur, axe y	$6,71 \cdot 10^{-2}$	$6,71 \cdot 10^{-3}$	as
3	Attitude inertielle recombineur, axe z	$1,08 \cdot 10^{-1}$	$1,08 \cdot 10^{-2}$	as
4	Différence de marche optique	$3,04 \cdot 10^{-3}$	$3,04 \cdot 10^{-5}$	m
5	Attitude relative sidérostas 1, axe x	$5,28 \cdot 10^{-1}$	$5,28 \cdot 10^{-2}$	as
6	Attitude relative sidérostas 1, axe y	$7,54 \cdot 10^{-2}$	$7,53 \cdot 10^{-3}$	as
7	Attitude relative sidérostas 1, axe z	$8,55 \cdot 10^{-2}$	$8,55 \cdot 10^{-3}$	as
8	Attitude relative sidérostas 2, axe x	$5,28 \cdot 10^{-1}$	$5,28 \cdot 10^{-2}$	as
9	Attitude relative sidérostas 2, axe y	$7,54 \cdot 10^{-2}$	$7,54 \cdot 10^{-3}$	as
10	Attitude relative sidérostas 2, axe z	$8,55 \cdot 10^{-2}$	$8,55 \cdot 10^{-3}$	as
11	Position relative sidérostas 1, direction y	$8,81 \cdot 10^{-3}$	$8,81 \cdot 10^{-6}$	m
12	Position relative sidérostas 2, direction y	$8,81 \cdot 10^{-3}$	$8,81 \cdot 10^{-6}$	m
13	Position relative sidérostas 1, direction x	$1,92 \cdot 10^{-2}$	$1,92 \cdot 10^{-6}$	m
14	Position relative sidérostas 2, direction x	$1,92 \cdot 10^{-2}$	$1,92 \cdot 10^{-6}$	m
15	Position relative sidérostas 1, direction z	$7,61 \cdot 10^{-3}$	$7,61 \cdot 10^{-6}$	m
16	Position relative sidérostas 2, direction z	$7,61 \cdot 10^{-3}$	$7,61 \cdot 10^{-6}$	m

On constate également que le système en boucle fermée satisfait toutes les spécifications car toutes les performances normalisées sont inférieures à 1. La symétrie de la formation est visible au niveau des performances. Les spécifications les plus difficiles à remplir sont l'attitude inertielle du recombineur selon l'axe x (celui qui relie les trois vaisseaux) et les attitudes relatives des sidérostas, également selon l'axe x . En revanche, toutes les spécifications translationnelles (différence de marche optique et positions relatives) sont facilement faisables.

Une question intéressante est l'incidence du bruit de mesure ou du bruit d'actuation sur la performance atteignable. En d'autres termes, est-ce qu'une réduction du bruit de mesure d'un facteur donné est plus efficace qu'une réduction du bruit d'actuation du même facteur ou est-ce que l'inverse est vrai ? La FIG. 5.9 montre la performance globale atteignable pour différents facteurs. La pente de la courbe montrant l'effet d'une variation des bruits de mesure (courbe verte tiretée) est plus importante que celle de la courbe montrant l'effet d'une variation des bruits d'actuation (courbe bleue continue). Par conséquent, nous pouvons conclure qu'une réduction des bruits de mesure serait le moyen le plus efficace pour améliorer la performance.

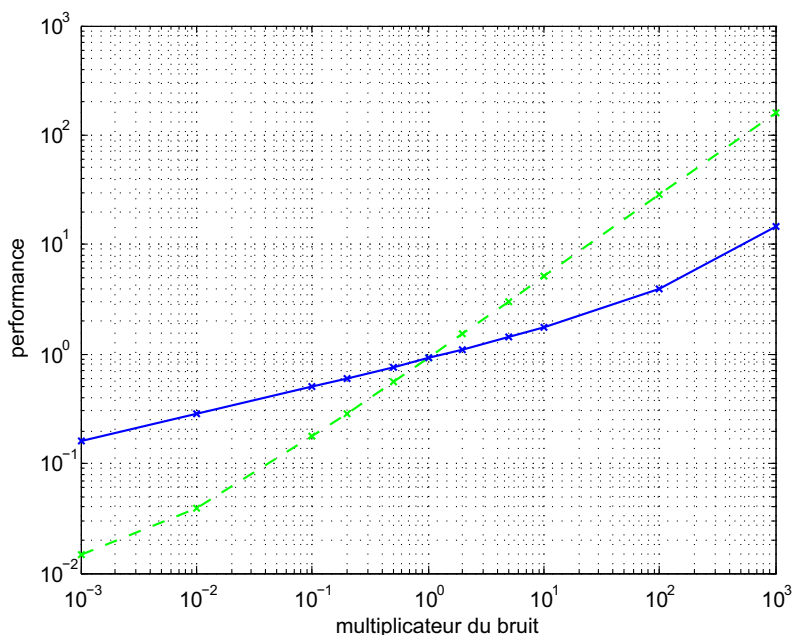
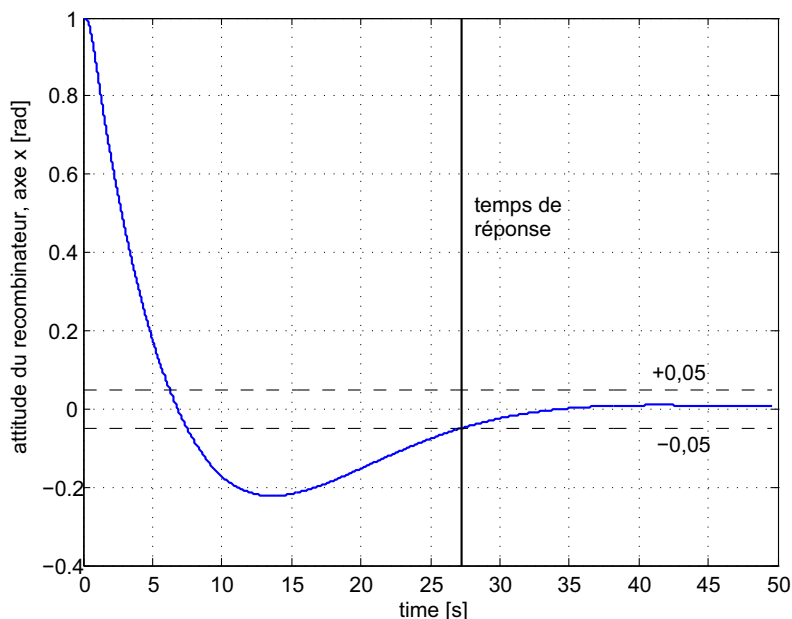


FIGURE 5.9 – Effet d'une multiplication des bruits de mesure (courbe verte tiretée) et des bruits d'actuation (courbe bleue continue) sur la performance stochastique

D'autres éléments d'analyse sont les temps de réponse concernant les différents états. Afin de les déterminer, nous avons initialisé tous les états du système à zéro, sauf l'état concerné. Les états du correcteur ont été initialisés avec les états du système. Le temps de réponse est alors le temps nécessaire pour atteindre un tuyau d'une amplitude de 0,05 autour de zéro. La FIG. 5.10 en donne une illustration.

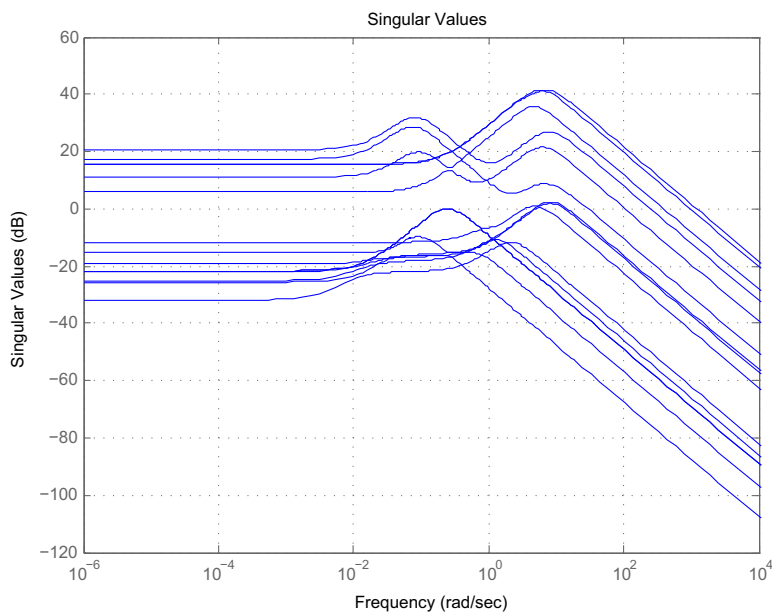
FIGURE 5.10 – Temps de réponse de l’attitude inertielle du recombinateur (axe x)

Les différents temps de réponse sont résumés dans le TAB. 5.14. Les dynamiques d’attitude des sidérostats selon tous les axes, ainsi que la dynamique d’attitude du recombinateur selon l’axe x sont plutôt rapides (entre 4 et 27 secondes), tandis que la dynamique d’attitude du recombinateur selon les axes y et z et toutes les dynamiques de translation sont lentes (entre 190 et 800 secondes). Cette variété au niveau des bandes passantes se reflète aussi dans les valeurs singulières du correcteur, cf. FIG. 5.11, qui montrent deux maximums bien distincts.

TABLE 5.14 – Temps de réponse des différents états suite à une valeur initiale de 1 sur l’état concerné

État	Temps de réponse	Unité
Attitude inertielle du recombinateur, axe x	27,3	s
Attitude inertielle du recombinateur, axe y	382	s
Attitude inertielle du recombinateur, axe z	800	s
Position relative du sidéroat 1, axe x	200	s
Position relative du sidéroat 1, axe y	190	s
Position relative du sidéroat 1, axe z	207	s
Attitude relative du sidéroat 1, axe x	19,4	s
Attitude relative du sidéroat 1, axe y	5,18	s
Attitude relative du sidéroat 1, axe z	3,99	s
Position relative du sidéroat 2, axe x	200	s
Position relative du sidéroat 2, axe y	190	s
Position relative du sidéroat 2, axe z	207	s
Attitude relative du sidéroat 2, axe x	14,3	s
Attitude relative du sidéroat 2, axe y	5,18	s
Attitude relative du sidéroat 2, axe z	3,99	s

La traduction des temps de réponse indiqués dans le TAB. 5.14 en bandes passantes grâce à la

FIGURE 5.11 – Valeurs singulières σ du correcteur $K(s)$

relation $\omega = 3/T_{\text{rep}}$ (en principe valable pour des fonctions de transfert au premier ordre et pour les fonctions de transfert au second ordre bien amorties) permet d'arriver à la FIG. 5.12. Dans cette illustration, les différentes bandes passantes sont clairement visibles.

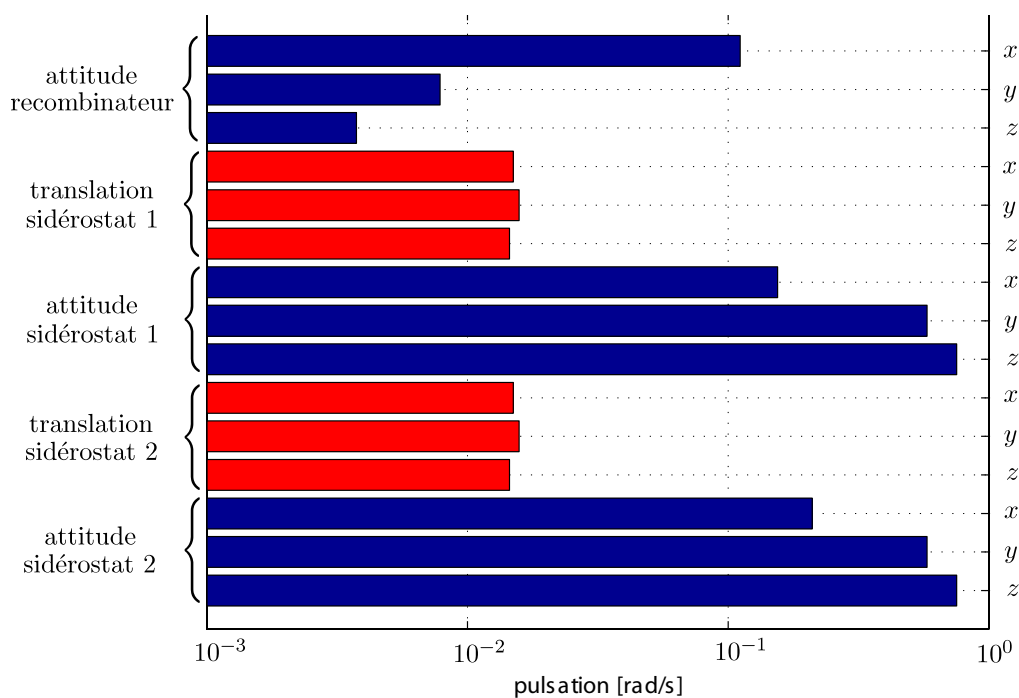


FIGURE 5.12 – Bandes passantes des différentes dynamiques

Grâce à la fonction de transfert en boucle fermée, nous pouvons calculer les biais en régime perma-

TABLE 5.15 – Biais normalisés en régime permanent des sorties contrôlées

No.	Sortie contrôlée	Biais dû à la pression solaire (normalisé)	Biais dû à la pression solaire (absolu)	Unité
1	Attitude inertielle recombineur, axe x	$-2,26 \cdot 10^{-12}$	$-2,26 \cdot 10^{-13}$	as
2	Attitude inertielle recombineur, axe y	$1,01 \cdot 10^{-10}$	$1,01 \cdot 10^{-11}$	as
3	Attitude inertielle recombineur, axe z	$-1,84 \cdot 10^{-9}$	$-1,84 \cdot 10^{-10}$	as
4	Différence de marche optique	$2,26 \cdot 10^{-12}$	$2,26 \cdot 10^{-14}$	m
5	Attitude relative sidérostat 1, axe x	$-6,01 \cdot 10^{-13}$	$-6,01 \cdot 10^{-14}$	as
6	Attitude relative sidérostat 1, axe y	$-7,61 \cdot 10^{-1}$	$-7,61 \cdot 10^{-2}$	as
7	Attitude relative sidérostat 1, axe z	$-3,20 \cdot 10^{-12}$	$-3,20 \cdot 10^{-13}$	as
8	Attitude relative sidérostat 2, axe x	$1,19 \cdot 10^{-11}$	$1,19 \cdot 10^{-12}$	as
9	Attitude relative sidérostat 2, axe y	$7,61 \cdot 10^{-1}$	$7,61 \cdot 10^{-2}$	as
10	Attitude relative sidérostat 2, axe z	$-9,99 \cdot 10^{-12}$	$-9,99 \cdot 10^{-13}$	as
11	Position relative sidérostat 1, direction y	$-1,83 \cdot 10^{-11}$	$-1,83 \cdot 10^{-14}$	m
12	Position relative sidérostat 2, direction y	$1,44 \cdot 10^{-11}$	$1,44 \cdot 10^{-14}$	m
13	Position relative sidérostat 1, direction x	$-1,21 \cdot 10^{-3}$	$-1,21 \cdot 10^{-7}$	m
14	Position relative sidérostat 2, direction x	$1,21 \cdot 10^{-3}$	$1,21 \cdot 10^{-7}$	m
15	Position relative sidérostat 1, direction z	$-1,75 \cdot 10^{-1}$	$-1,75 \cdot 10^{-4}$	m
16	Position relative sidérostat 2, direction z	$-1,75 \cdot 10^{-1}$	$-1,75 \cdot 10^{-4}$	m

ment dûs à la pression solaire. En effet, le vecteur des perturbations u_{pert} , multiplié par le gain statique de la fonction de transfert en boucle fermée, représente le vecteur des biais en régime permanent des sorties contrôlées. Ces biais sont montrés dans le TAB. 5.15. Nous notons que les biais normalisés les plus importants sont ceux sur les attitudes relatives des sidérostats selon l'axe y et les positions relatives des sidérostats selon l'axe z . En regardant la FIG. 5.3 (page 191) et en considérant que la force due à la pression solaire agit selon l'axe z des repères liés aux vaisseaux, ces biais paraissent logiques. En effet, les sidérostats sont déplacés un peu (de $-1,75 \cdot 10^{-4}$ m) dans la direction z en régime permanent. En même temps, ils sont tournés un peu (de $7,61 \cdot 10^{-2}$ as) autour de l'axe y afin de viser le recombineur avec les miroirs.

La quantité importante n'est ni le biais tel quel, ni l'écart type des sorties contrôlées, mais la somme du module du biais et de l'écart type. La FIG. 5.13 montre les modules des biais, les écarts-type et la somme des deux pour toutes les sorties contrôlées. La ligne horizontale d'ordonnée unité montre le budget d'erreur disponible pour chaque sortie contrôlée.

Il est bien visible que sur certaines sorties contrôlées, plus précisément sur les quatre sorties précédemment mentionnées, les biais consomment une grande partie du budget alloué. Sur d'autres sorties contrôlées, c'est l'écart type, donc la performance stochastique, qui consomme une grande partie du budget.

Afin de vérifier ces performances, des simulations ont été effectuées. Dans ces simulations, la perturbation constante due à la pression solaire a été prise en compte (cf. TAB. 5.11, page 205). Les états initiaux du système ont été choisis au hasard. Les états du correcteur ont été initialisés avec les états initiaux du système.

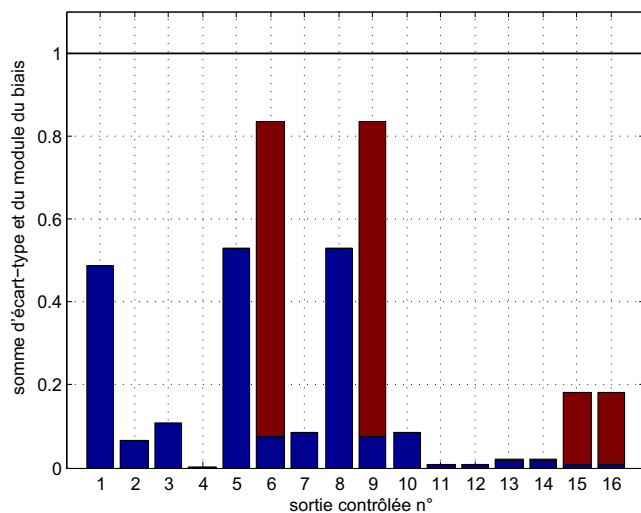


FIGURE 5.13 – Biais (en rouge) et écarts-type (en bleu) des différentes sorties contrôlées. La ligne noire horizontale d'ordonnée unité montre le budget d'erreur disponible.

Les FIGS. 5.14, 5.15 et 5.16 montrent les évolutions de trois sorties contrôlées, l'attitude inertielle du recombineur selon l'axe x et selon l'axe y et l'attitude relative du sidérost 1 selon l'axe y , respectivement.

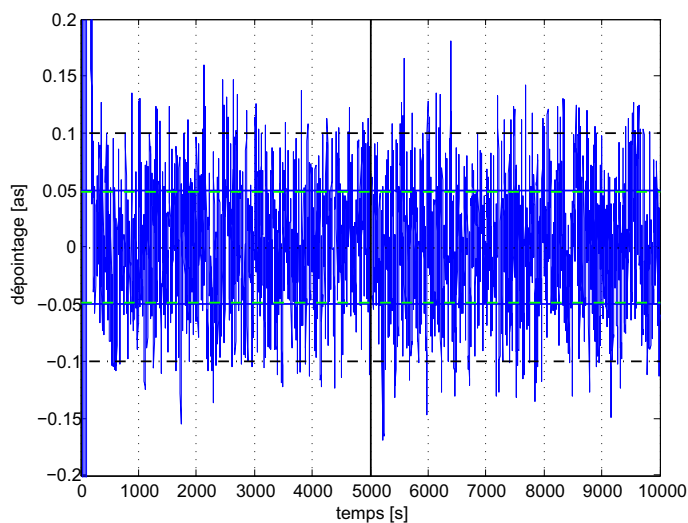


FIGURE 5.14 – Simulation de la sortie contrôlée 1 (attitude inertielle recombineur, axe x) avec l'effet de la pression solaire. La ligne noire tiretée-pointillée montre le budget d'erreur disponible, la ligne verte tiretée la performance stochastique (écart-type) prédite et la ligne bleue continue la performance stochastique réelle.

L'effet du biais est presque invisible dans les FIGS. 5.14 et 5.15, tandis qu'il est dominant dans la FIG. 5.16. L'accord entre les performances stochastiques prédites et réelles est excellente. La différence entre les FIGS. 5.14 et 5.16 montre que c'est parfois la performance stochastique qui consomme le budget d'erreur et parfois le biais en régime permanent. La simulation confirme les valeurs montrées dans les TABS. 5.13 et 5.15 et dans la FIG. 5.13.

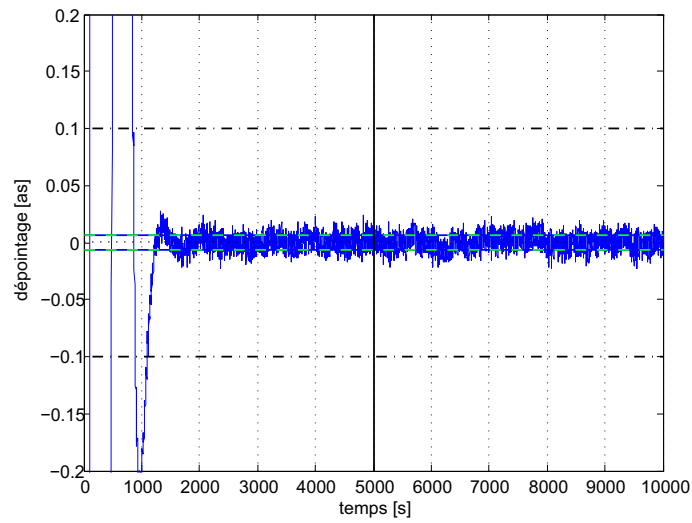


FIGURE 5.15 – Simulation de la sortie contrôlée 2 (attitude inertielle recombineur, axe y) avec l'effet de la pression solaire. La ligne noire tiretée-pointillée montre le budget d'erreur disponible, la ligne verte tiretée la performance stochastique (écart-type) prédite et la ligne bleue continue la performance stochastique réelle.

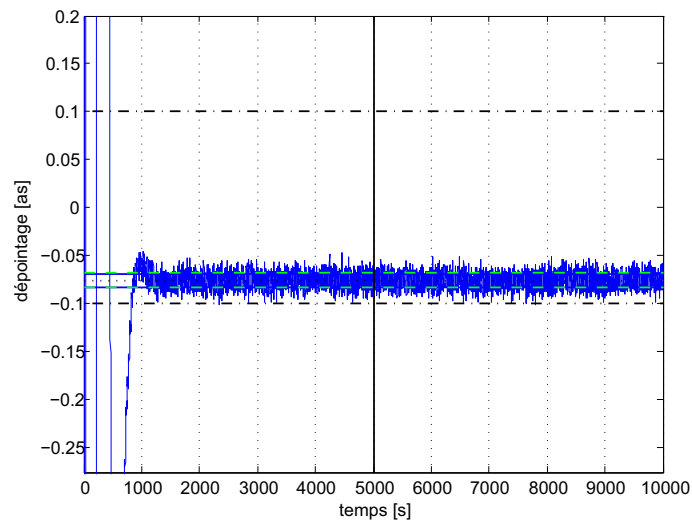


FIGURE 5.16 – Simulation de la sortie contrôlée 6 (attitude relative sidérost 1, axe y) avec l'effet de la pression solaire. La ligne noire tiretée-pointillée montre le budget d'erreur disponible, la ligne verte tiretée la performance stochastique (écart-type) prédite et la ligne bleue continue la performance stochastique réelle.

Nous rappelons que les biais dûs à la pression solaire ne représentent qu'une des sources de biais : les capteurs et les actionneurs en sont aussi affectés, mais ces biais peuvent être modélisés de la même manière et ils ont un effet similaire sur la performance et les budgets d'erreur.

5.4.2 Correcteur avec réjection de biais

Dans la suite, nous chercherons un moyen afin de réduire la sensibilité du système en boucle fermée aux biais, par exemple ceux engendrés par la pression solaire. Le TAB. 5.15 et la FIG. 5.13 sont une bonne motivation pour cela. En effet, la synthèse \mathcal{H}_2 , basée sur le schéma de synthèse montré dans la FIG. 5.5, minimise les écarts-type des sorties contrôlées en boucle fermée. Cependant, nous ne pouvons que vérifier l'effet des biais a posteriori. Pour l'instant, le correcteur synthétisé ne rejette pas suffisamment les biais.

La solution à ce problème est le nouveau schéma de synthèse illustré dans la FIG. 5.17. Par rapport à la forme standard précédente, celle-ci est enrichie avec des intégrateurs supplémentaires correspondant aux états $x_b \in \mathbb{R}^{n_b}$ (« b » pour biais), avec les matrices A_b , B_b et C_b et avec la pondération W_b .

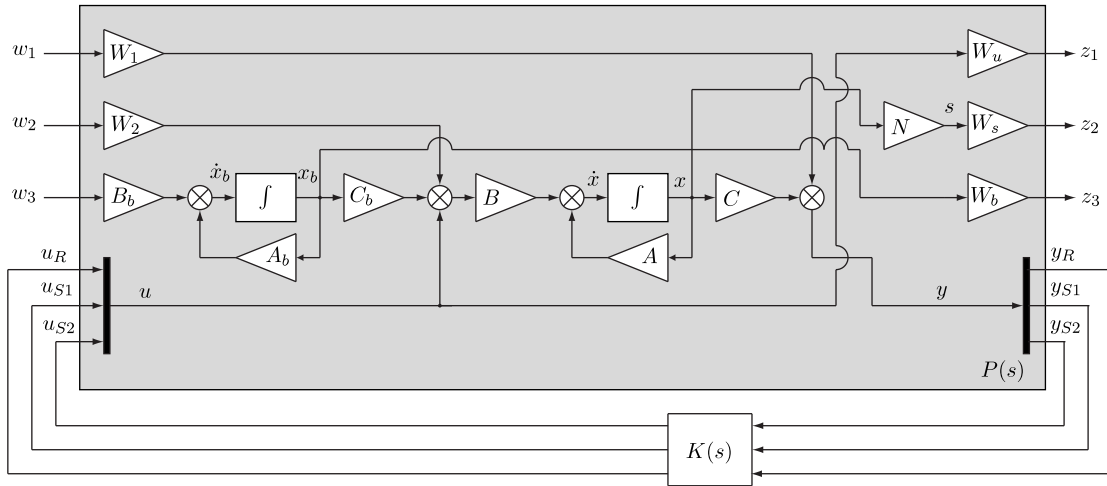


FIGURE 5.17 – Forme standard avec biais

La représentation d'état de cette forme standard s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_b \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BC_b & 0 & BW_2 & 0 & B \\ 0 & A_b & 0 & 0 & B_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_u \\ W_s N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & W_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ u \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

Encore une fois, toutes les hypothèses peuvent être satisfaites en choisissant les pondérations et matrices de manière adaptée.

Le but est maintenant de choisir une matrice A_b afin d'obtenir un comportement proche d'un intégrateur. Un intégrateur pur ($A_b = 0$), combiné avec une entrée nulle ($B_b = 0$), correspondrait à un biais stationnaire.

Or, nous ne pouvons pas choisir $A_b = 0$ car cela créerait un pôle ingouvernable et à la limite de stabilité. Nous choisissons donc une dynamique très lente mais stable, par exemple $A_b = -10^{-4} \cdot I_{n_b}$. En outre, les matrices B_b , W_b et C_b ont été choisies comme suit :

$$\begin{aligned} B_b &= 10^{-6} \cdot I_{n_b} \\ W_b &= 10^{-3} \cdot I_{n_b} \\ C_b &= \begin{bmatrix} O_{5 \times 1} & O_{5 \times 1} \\ 1 & 0 \\ O_{5 \times 1} & O_{5 \times 1} \\ 0 & 1 \\ O_{3 \times 1} & O_{3 \times 1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.60)$$

L'intérêt de la matrice B_b est de générer une entrée exogène supplémentaire dont la source, selon l'interprétation stochastique de la norme \mathcal{H}_2 , est un bruit blanc gaussien. Cette approche reflète le fait que le biais peut être assujéti à des variations. W_b sert comme matrice de pondération dont la valeur est relativement faible pour ne pas trop dégrader les autres sorties contrôlées lors de la synthèse \mathcal{H}_2 . Enfin, C_b a une structure particulière. Les seules composantes non nulles sont celles correspondant aux translations relatives selon les axes z des sidérostats. La raison pour cela est que nous voudrions prendre en compte uniquement les forces différentielles agissant dans cette direction.

Le TAB. 5.16 montre les performances stochastiques atteintes avec le correcteur synthétisé avec la nouvelle forme standard montrée dans la FIG. 5.17. Un fait remarquable est que ces performances sont presque identiques avec les performances atteintes avec la forme standard initiale, cf. TAB. 5.13. Ceci signifie que la pondération W_b était suffisamment faible pour ne pas trop dégrader les performances stochastiques.

TABLE 5.16 – Performances (1σ) atteintes en boucle fermée avec réjection des biais. Performance globale : 0,922179, dont 0,012756 pour z_1 et 0,83766 pour z_2

No.	Sortie contrôlée	Performance normalisée	Performance réelle	Unité
1	Attitude inertielle recombineur, axe x	$4,86 \cdot 10^{-1}$	$4,86 \cdot 10^{-2}$	as
2	Attitude inertielle recombineur, axe y	$9,65 \cdot 10^{-2}$	$9,65 \cdot 10^{-3}$	as
3	Attitude inertielle recombineur, axe z	$1,09 \cdot 10^{-1}$	$1,09 \cdot 10^{-2}$	as
4	Différence de marche optique	$4,40 \cdot 10^{-3}$	$4,40 \cdot 10^{-5}$	m
5	Attitude relative sidérostat 1, axe x	$5,28 \cdot 10^{-1}$	$5,28 \cdot 10^{-2}$	as
6	Attitude relative sidérostat 1, axe y	$7,77 \cdot 10^{-2}$	$7,77 \cdot 10^{-3}$	as
7	Attitude relative sidérostat 1, axe z	$8,56 \cdot 10^{-2}$	$8,56 \cdot 10^{-3}$	as
8	Attitude relative sidérostat 2, axe x	$5,28 \cdot 10^{-1}$	$5,28 \cdot 10^{-2}$	as
9	Attitude relative sidérostat 2, axe y	$7,77 \cdot 10^{-2}$	$7,77 \cdot 10^{-3}$	as
10	Attitude relative sidérostat 2, axe z	$8,56 \cdot 10^{-2}$	$8,56 \cdot 10^{-3}$	as
11	Position relative sidérostat 1, direction y	$8,86 \cdot 10^{-3}$	$8,86 \cdot 10^{-6}$	m
12	Position relative sidérostat 2, direction y	$8,86 \cdot 10^{-3}$	$8,86 \cdot 10^{-6}$	m
13	Position relative sidérostat 1, direction x	$1,92 \cdot 10^{-2}$	$1,92 \cdot 10^{-6}$	m
14	Position relative sidérostat 2, direction x	$1,92 \cdot 10^{-2}$	$1,92 \cdot 10^{-6}$	m
15	Position relative sidérostat 1, direction z	$1,71 \cdot 10^{-3}$	$1,71 \cdot 10^{-5}$	m
16	Position relative sidérostat 2, direction z	$1,71 \cdot 10^{-3}$	$1,71 \cdot 10^{-5}$	m

Les données vraiment intéressantes sont les biais normalisés lorsque la forme standard enrichie est utilisée. Le TAB. 5.17 montre les biais normalisés améliorés des sorties contrôlées en régime permanent. Clairement, toutes les valeurs sont plus faibles que précédemment, cf. TAB. 5.15.

TABLE 5.17 – Biais normalisés améliorés en régime permanent des sorties contrôlées

No.	Sortie contrôlée	Biais dû à la pression solaire (normalisé)	Biais dû à la pression solaire (absolu)	Unité
1	Attitude inertielle recombineur, axe 1	$-5,00 \cdot 10^{-13}$	$-5,00 \cdot 10^{-14}$	as
2	Attitude inertielle recombineur, axe 2	$8,82 \cdot 10^{-12}$	$8,82 \cdot 10^{-13}$	as
3	Attitude inertielle recombineur, axe 3	$1,05 \cdot 10^{-11}$	$1,05 \cdot 10^{-12}$	as
4	Différence de marche optique	$-5,42 \cdot 10^{-13}$	$-5,42 \cdot 10^{-15}$	m
5	Attitude relative sidérostat 1, axe 1	$-3,89 \cdot 10^{-13}$	$-3,89 \cdot 10^{-14}$	as
6	Attitude relative sidérostat 1, axe 2	$-7,70 \cdot 10^{-5}$	$-7,70 \cdot 10^{-6}$	as
7	Attitude relative sidérostat 1, axe 3	$3,17 \cdot 10^{-13}$	$3,17 \cdot 10^{-14}$	as
8	Attitude relative sidérostat 2, axe 1	$-7,06 \cdot 10^{-13}$	$-7,06 \cdot 10^{-14}$	as
9	Attitude relative sidérostat 2, axe 2	$7,70 \cdot 10^{-5}$	$-7,70 \cdot 10^{-6}$	as
10	Attitude relative sidérostat 2, axe 3	$-5,17 \cdot 10^{-13}$	$-5,17 \cdot 10^{-14}$	as
11	Position relative sidérostat 1, direction y	$-3,46 \cdot 10^{-11}$	$-3,46 \cdot 10^{-14}$	m
12	Position relative sidérostat 2, direction y	$4,88 \cdot 10^{-11}$	$4,88 \cdot 10^{-14}$	m
13	Position relative sidérostat 1, direction x	$-5,70 \cdot 10^{-8}$	$-5,57 \cdot 10^{-12}$	m
14	Position relative sidérostat 2, direction x	$5,57 \cdot 10^{-8}$	$5,57 \cdot 10^{-12}$	m
15	Position relative sidérostat 1, direction z	$-6,89 \cdot 10^{-5}$	$-6,89 \cdot 10^{-8}$	m
16	Position relative sidérostat 2, direction z	$-6,89 \cdot 10^{-5}$	$-6,89 \cdot 10^{-8}$	m

En particulier, les biais sur les attitudes relatives selon les axes y des sidérostats, ainsi que ceux sur les position relatives selon les axes z des sidérostats, ont été divisés par un facteur supérieur à 10^3 . Ces biais sont maintenant pratiquement négligeables devant les performances stochastiques des mêmes sorties contrôlées comme le montre la FIG. 5.18.

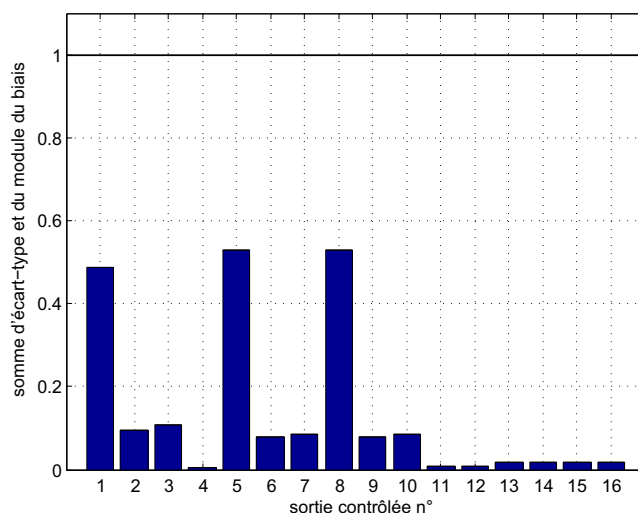


FIGURE 5.18 – Biais (en rouge, trop faibles pour être visibles) et écarts-type (en bleu) des différentes sorties contrôlées. La ligne noire horizontale d'ordonnée unité montre le budget d'erreur disponible.

La FIG. 5.19 reprend la sortie contrôlée 6 (attitude relative du sidérost 1 selon l'axe y). La comparaison avec la FIG. 5.16 (même sortie contrôlée, mais sans réjection de biais) montre un comportement nettement meilleur. En fait, le comportement transitoire dû à la pression solaire a entièrement disparu et le biais n'est plus visible. Le budget d'erreur peut être respecté beaucoup plus facilement que précédemment.

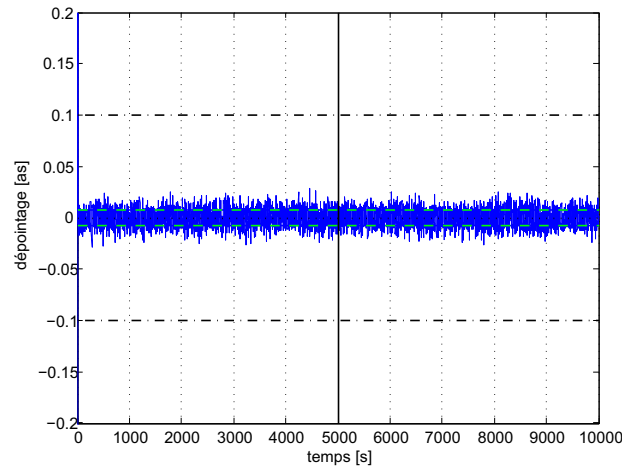


FIGURE 5.19 – Simulation de la sortie contrôlée 6 (attitude relative sidérost 1, axe y) avec l'effet de la pression solaire et avec réjection de biais. La ligne noire tiretée-pointillée montre le budget d'erreur disponible, la ligne verte tiretée la performance stochastique (écart-type) prédite et la ligne bleue continue la performance stochastique réelle.

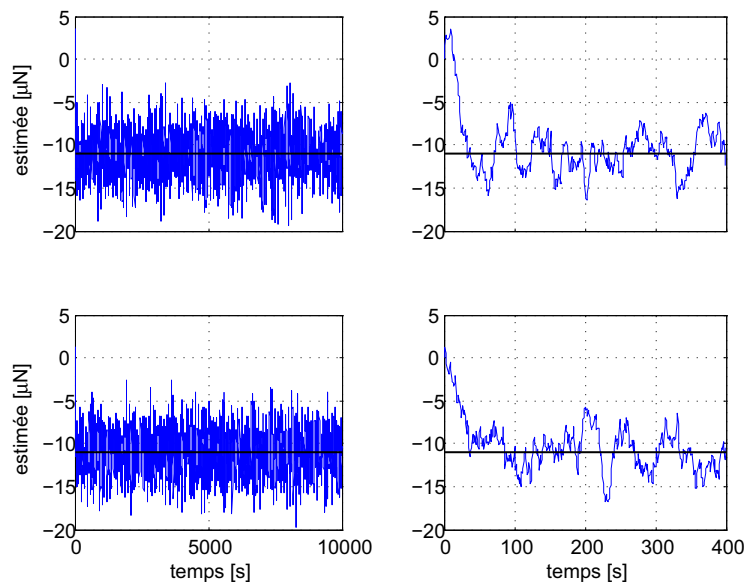


FIGURE 5.20 – Estimée de la force différentielle selon l'axe z agissant sur les sidérostats 1 (en haut) et 2 (en bas). À gauche, l'horizon complet de la simulation est montré. À droite, seulement le régime transitoire est montré. Les lignes noires continues indiquent la valeur réelle de la force différentielle.

La FIG. 5.20 montre ce qui se passe dans les états du correcteur qui ont été rajoutés afin d'estimer les biais dus aux forces différentielles selon les axes z des sidérostats. Il semble que, après un transitoire,

les états concernés du correcteurs tendent vers la vraie valeur de la perturbation constante (indiquée par la ligne noire). Bien que ces états soient très bruités, cela suffit pour effectuer une réjection des biais très efficace.

Enfin, la FIG. 5.21 compare les valeurs singulières des correcteurs sans et avec réjection de biais. Clairement, celui avec réjection de biais montre une activité beaucoup plus forte en basse fréquence. Cependant, les comportements en haute fréquence sont très similaires.

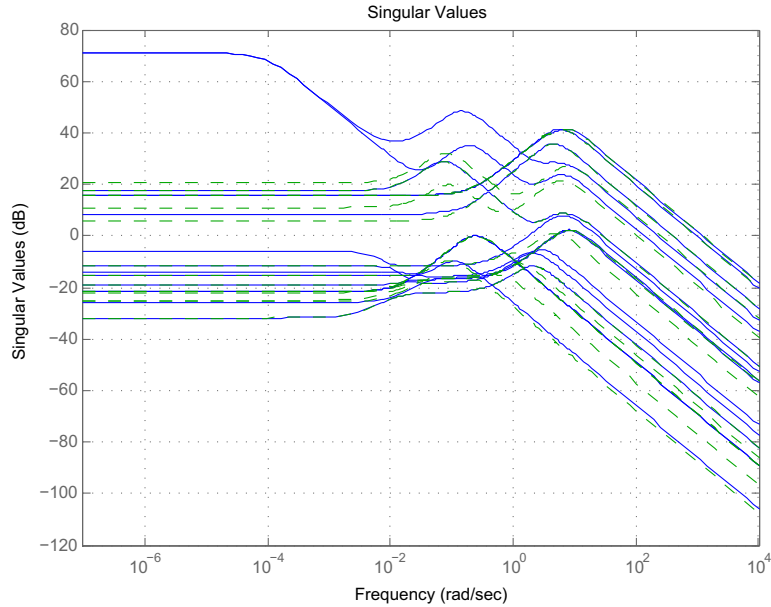


FIGURE 5.21 – Valeurs singulières σ du correcteur $K(s)$ avec (en bleu continu) et sans (en vert tireté) réjection de biais

5.4.3 Bilan

Dans cette section, nous avons présenté deux formes standard différentes afin de synthétiser des correcteurs sans et avec réjection de biais. Dans les deux cas, le but était de satisfaire les spécifications de la mission en garantissant certaines performances stochastiques concernant l'asservissement des trois vaisseaux.

Nous avons montré comment les bruits de mesure et d'actuation, ainsi que les spécifications stochastiques trouvent leurs places dans la forme standard. En outre, les hypothèses de l'existence et de l'unicité de la solution concernant la synthèse \mathcal{H}_2 peuvent toujours être satisfaites.

Les correcteurs synthétisés sont capables de satisfaire les spécifications exigées pour la mission *Pe-gase*, dans les cas sans et avec réjection de biais. Cependant, la réjection de biais permet de consommer une partie moins grande du budget d'erreur disponible.

Bien que nous ayons seulement montré comment les biais dus à la force différentielle selon les axes z des sidérostats peuvent être estimés et rejetés, notre approche est facilement généralisable à d'autres types de biais. L'inconvénient est la nécessité de rajouter plus d'états dans la forme standard, ce qui mène à un correcteur dont le nombre d'états est plus élevé.

5.5 Commutation entre correcteurs pour différents modes opérationnels

Dans cette section, nous montrerons comment des commutations entre différents modes opérationnels peuvent être effectuées tout en garantissant la stabilité de la boucle fermée.

5.5.1 Motivation

Dans le cadre de la mission *Pegase*, un objectif très important, outre l'asservissement des éléments de la formation dans le mode d'observation, est de permettre à la formation d'arriver au mode d'observation.

La problématique majeure dans ce contexte réside dans le fait que le mode d'observation a recours à des capteurs très fins, tels que les capteurs latéraux fins précédemment décrits. Or, ces capteurs disposent généralement d'un champ de vue très restreint. Dans le cas du capteur latéral fin par exemple, le champ de vue est déterminé par l'étendue du capteur photographique qui est aux alentours d'un centimètre. De l'autre côté, les capteurs qui ont un champ de vue très large, tels que le capteur radiofréquence, ont une résolution relativement faible.

La seule manière de faire face à ce dilemme est de concevoir une succession de modes opérationnels auxiliaires qui débute avec les capteurs grossiers mais à champ de vue large, passe par les capteurs de résolutions et champs de vue intermédiaires et se termine en utilisant les capteurs fins à champs de vue très restreints.

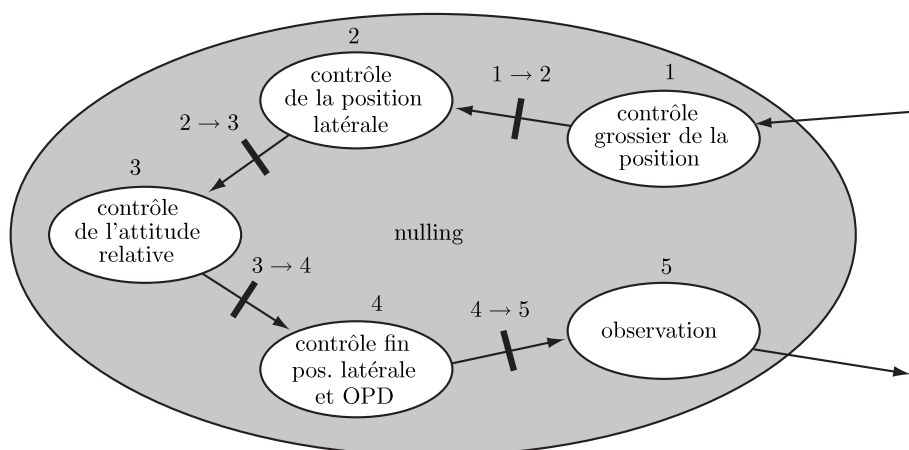


FIGURE 5.22 – Modes opérationnels auxiliaires du mode nulling

La FIG. 5.22 montre la succession de modes opérationnels auxiliaires choisie pour la mission *Pegase*. Ainsi, le mode opérationnel *nulling* montré dans la FIG. 1.10 est formé par l'ensemble des cinq modes suivants :

1. contrôle grossier de la position
2. contrôle de la position latérale
3. contrôle de l'attitude relative
4. contrôle fin de la position latérale et de la différence de marche (OPD)
5. observation

Les capteurs utilisés dans chacun des modes opérationnels sont résumés dans le TAB. 5.18.

TABLE 5.18 – Capteurs utilisés dans les différents modes opérationnels auxiliaires

No.	Mode opérationnel auxiliaire	Vaisseau	Capteurs
1	Contrôle grossier de la position	Recombineur Sidérostats	Senseur stellaire standard Senseur stellaire standard Capteur radiofréquence
2	Contrôle de la position latérale	Recombineur Sidérostats	Senseur stellaire standard Senseur stellaire standard Capteur radiofréquence Capteur latéral grossier
3	Contrôle de l'attitude relative	Recombineur Sidérostats	Senseur stellaire standard Capteur d'incidence du faisceau optique Senseur stellaire standard Capteur radiofréquence Capteur latéral grossier
4	Contrôle fin de la position latérale et de la différence de marche	Recombineur Sidérostats	Senseur stellaire standard Capteur d'incidence du faisceau optique Senseur stellaire standard Capteur radiofréquence Capteur latéral grossier Capteur latéral fin Capteur longitudinal fin
5	Observation	Recombineur Sidérostats	Senseur stellaire standard Capteur d'incidence du faisceau optique Senseur stellaire standard Capteur radiofréquence Capteur latéral grossier Capteur latéral fin Capteur longitudinal fin

Les transitions entre les différents modes opérationnels auxiliaires, nommées $1 \rightarrow 2$ jusqu'à $4 \rightarrow 5$ dans la FIG. 5.22, ne peuvent avoir lieu avant que les capteurs utilisés dans le mode suivant ont accroché. Le mot *accrochage* signifie dans ce contexte que les capteurs concernés commencent à prendre des mesures grâce à un positionnement relatif des vaisseaux qui est suffisamment favorable.

La transition $4 \rightarrow 5$ est une exception car les ensembles des capteurs utilisés dans les modes opérationnels auxiliaires 4 et 5 sont identiques. Par conséquent, les modes 4 et 5 utilisent le même correcteur. Le mode d'observation commence dès que la charge utile est opérationnelle, c'est-à-dire que le mouvement relatif est suffisamment amorti.

Dans le reste de cette section, nous traiterons principalement deux problématiques.

Premièrement, il faut trouver une façon d'initialiser le correcteur suivant après avoir effectué une commutation. Nous verrons que le fait d'avoir utilisé la synthèse \mathcal{H}_2 permet d'y arriver de façon très simple.

Deuxièmement, il est important de ne pas commuter à un moment précoce. Si tel est le cas, il peut arriver que le comportement transitoire dû au correcteur du mode suivant pousse la formation en dehors du champ de vue d'un ou de plusieurs des capteurs utilisés. Dans ce cas, il est nécessaire de commuter dans le sens inverse. Ceci peut se reproduire et éventuellement conduire à un cycle limite de

commutations dans les deux sens, ce qui est un comportement fortement indésirable et à éviter à tout prix. La manière la plus naturelle afin d'éviter ce phénomène est de trouver une garantie qu'aucune commutation dans le sens inverse sera nécessaire, sauf dans un cas exceptionnel (par exemple une perturbation imprévue et temporaire).

5.5.2 Revue bibliographique

De nombreux chercheurs dans le domaine du vol en formation ont reconnu la problématique de l'accrochage des capteurs.

Par exemple, AUNG et al. [11] décrivent une succession de quatre modes dans le cadre de la mission *Terrestrial Planet Finder* afin d'arriver au mode d'observation à partir du mode d'acquisition de la formation.

PHILIPPE [138] propose une répartition en différents modes successifs utilisant différents capteurs pour la mission *Darwin*.

PIRSON et al. [140] conçoivent un enchaînement de plusieurs boucles d'asservissement avec différents capteurs pour l'étude *ICC2*. Un simulateur permet de valider cette approche.

La réalisation pratique de la commutation entre les différents correcteurs, en particulier l'instant de la commutation et l'initialisation du correcteur suivant, reste floue dans les trois références précédemment citées. On peut supposer que les auteurs prévoient une commutation dès que l'état du système est tel que les capteurs concernés fournissent une mesure. Cependant, nous avons déjà mentionné les risques liés à une telle approche. Les problèmes liés aux champs de vue limités de certains capteurs ne sont pas abordés.

LURIE [108] propose un algorithme de commutation pour la dynamique mono-axe qui est basé sur des considérations dans le plan de phase. Deux régions sont attribuées aux modes de suivi et de pivotage. Ces régions ne sont pas disjointes et ne couvrent pas le plan de phase entier. Cette approche semble fonctionner dans une simulation présentée par l'auteur, mais aucune justification théorique n'est donnée. Une extension proposée pour le cas multivariable reste très floue.

En dehors du vol en formation de satellites, il existe une littérature abondante sur la commutation entre différents correcteurs ou différents systèmes. Dans tous les cas, le fait important est que la dynamique en boucle fermée change.

KANEV et VERHAEGEN [83] traitent le problème de la reconfiguration de correcteurs dans le cas d'une panne d'un actionneur, d'un capteur ou d'un autre élément du système. Un ensemble de correcteurs LQG est synthétisé dont chacun est prévu pour un certain cas de panne. Grâce à une optimisation ayant recours à des inégalités matricielles linéaires, la stabilité du système en boucle fermée peut être garantie et le comportement du système dégradé reste le plus proche possible du comportement nominal. Les correcteurs sont sous forme d'estimateurs et permettent donc de renoncer à une initialisation après une commutation. Ce papier est intéressant du point de vue des méthodes utilisées. Cependant, il ne traite pas le cas d'un champ de vue limité d'un capteur.

PAXMAN et VINNICOMBE [136] utilisent une fonction de LYAPUNOV et des inégalités matricielles linéaires pour analyser et concevoir des schémas de commutation en présence de commutations arbitraires. Ici, un schéma de commutation consiste en une matrice qui multiplie les états finaux du système et du correcteur afin de fournir l'état initial du correcteur après la commutation. Les auteurs donnent des garanties de stabilité et abordent également la question du choix de la structure du correcteur.

TURNER et al. [176] conçoivent un protocole de commutation appliqué au vol d'un avion. Les auteurs proposent des critères différents de commutation, basés sur le temps, l'état ou sur des événements externes, et n'oublient pas de mentionner les soucis de stabilité associés à chacune des approches. Pour leur application, ils ont recours à un critère qui est formulé en fonction d'un ou de plusieurs états, par exemple la vitesse de vol. Quant à la réalisation pratique, les correcteurs pour les différents modes fonctionnent simultanément, mais seulement un parmi eux est actif et fournit la commande. Plusieurs astuces permettent d'obtenir une transition douce après la commutation à un autre correcteur.

GÖKCEK [62] effectue une analyse de stabilité d'un ensemble de systèmes entre lesquels des commutations périodiques ont lieu. Du fait de la périodicité, la théorie de FLOQUET est suffisante pour obtenir une garantie de stabilité.

Bien que nous ne puissions pas couvrir la totalité des publications sur les systèmes commutés, ces exemples montrent bien l'importance de synthétiser des correcteurs, d'analyser leur stabilité et surtout le besoin de critères de commutation. En outre, il nous semble que les problématiques liées à l'enchaînement de correcteurs utilisant différents senseur afin d'arriver au mode d'observation n'ont pas été considérées dans la littérature jusqu'à maintenant.

Dans les sections suivantes, nous montrerons comment notre propre approche, adaptée au vol en formation mais également générique et donc applicable à d'autres types d'application, aborde et résout les problèmes suivants :

1. initialisation des états du correcteur après une commutation en choisissant une représentation adaptée du correcteur ;
2. détermination de l'instant de commutation en fonction des champs de vue des senseurs ;
3. garantie de stabilité par évitement de commutation en arrière en choisissant le bon moment pour la commutation.

5.5.3 Mise en œuvre

Synthèse des correcteurs pour les différents modes

La synthèse des correcteurs individuels est en principe identique à celle décrite dans la Section 5.4.1 (« correcteur de base »).

Même si nous ne traitons pas la réjection des biais en combinaison avec l'enchaînement de modes, rien ne s'oppose à une telle approche. Une autre idée est de supposer que les biais (perturbations orbitales, biais de mesure et d'actuation) sont estimés suffisamment précisément dans le premier mode et les estimées restent inchangées après. Il n'y aurait donc plus de dynamique liée à la réjection des biais.

Sans rentrer dans les détails, il est évident que des spécifications différentes sont prévues pour les différents modes afin de traduire l'augmentation successive de la précision d'asservissement en parcourant les modes et en utilisant des capteurs de plus en plus précis. Les noms des modes donnent une indication concernant la précision exigée pour les différentes dynamiques (attitude, position latérale, etc.).

Une aide pour la synthèse des correcteurs pour les différents modes est d'inclure des sorties contrôlées supplémentaires qui sont identiques aux sorties mesurées associées aux capteurs qui vont être utilisés dans le mode opérationnel suivant. La spécification pour ces sorties contrôlées est simplement la limite du champ de vue du correcteur correspondant.

À titre de référence, le TAB. 5.19 montre les valeurs des limites des différents champs de vue.

TABLE 5.19 – Limites des champs de vue des différents capteurs

Capteur	Limite du champ de vue	Unité
Capteur latéral grossier	1	m
Capteurs d'incidence du faisceau optique	10	as
Capteur latéral fin	1	cm

Nous supposons que les capteurs qui ne sont pas mentionnés dans le TAB. 5.19 disposent d'un champ de vue illimité. Par exemple, le capteur radiofréquence a un champ de vue de 4π sr (stéradian). Il en va de même pour les senseurs stellaires.

Initialisation et représentation du correcteur

Une condition nécessaire afin de pouvoir effectuer des commutations entre différents correcteurs est de disposer d'une représentation adaptée de l'ensemble des correcteurs utilisés. Dans notre contexte, une représentation est considérée adaptée si elle permet d'initialiser le correcteur suivant après une commutation. En d'autres termes, il faut pouvoir attribuer aux états du nouveau correcteur des valeurs raisonnables. Si cette condition n'est pas remplie, on risque de créer un comportement transitoire indésirable.

Une méthode afin de résoudre ce problème est de faire tourner plusieurs correcteurs simultanément comme dans la Réf. [176]. Cette approche est prohibitive du fait de l'intensité de calcul nécessaire. Le chemin que nous prenons est donc un autre. Le fait d'utiliser la synthèse \mathcal{H}_2 (ou la synthèse LQG, bien entendu) nous munit d'un correcteur dont les états sont des estimés des états du système, cf. FIG. 5.8 (page 211). En outre, de par le choix des états dans la modélisation, ils possèdent une signification physique. Par conséquent, une initialisation du correcteur suivant proprement dite devient inutile. En effet, les états finaux du correcteur précédent peuvent servir afin d'initialiser le correcteur suivant.

Un deuxième problème est le nombre de mesures qui change en fonction du mode opérationnel. En parcourant les modes, nous utilisons de plus en plus de capteurs, cf. TAB. 5.18. Même si ceci n'est pas forcément le cas dans d'autres applications, nous risquons tout de même un changement du nombre de sorties. Il en est de même pour le nombre d'entrées. Ici, nous ne changeons en rien les actionneurs utilisés, mais ceci peut être le cas ailleurs.

Le problème lié au changement du nombre d'entrées ou de sorties est le changement des dimensions des gains de retour d'état K_c et de KALMAN K_f . Un changement de leurs dimensions est indésirable du point de vue de l'implantation sur un ordinateur de bord. En effet, il est souhaitable de pouvoir garder une taille identique de ces matrices.

Nous avons résolu ce problème grâce à une astuce relativement simple. Les matrices concernées possèdent toujours la dimension maximale, c'est-à-dire celle nécessaire pour l'ensemble de tous les actionneurs et capteurs envisageables. Dans la synthèse des correcteurs pour les différents modes, tous les actionneurs et capteurs sont pris en compte. Il suffit de mettre une valeur excessivement élevée pour le bruit de mesure d'un capteur qui ne doit pas être utilisé, par exemple 10^6 , pour que la colonne correspondante dans le gain de KALMAN K_f devienne pratiquement nulle. Il en va de même pour les actionneurs et les lignes du gain de retour d'état K_c . Pour l'implantation à bord, les composantes des matrices concernées, qui sont déjà proches de zéro, sont forcées à zéro.

Garantie de la stabilité lors de commutations

Un problème majeur concernant la commutation entre les correcteurs est de connaître le bon moment pour la commutation. Une condition nécessaire est donnée par les champs de vue des capteurs utilisés par le prochain correcteur. En effet, le correcteur suivant ne peut être activé qu'à partir du moment que l'état se trouve dans le champs de vue de tous les capteurs. Grâce à ce constat, nous pouvons établir une première stratégie de commutation.

Stratégie 1a : La commutation vers le mode suivant a lieu dès que toutes les mesures sont disponibles. Dans le cas d'une indisponibilité ultérieure d'une mesure, des commutations inverses sont effectuées jusqu'à ce que toutes les mesures nécessaires pour le mode concerné soient disponibles.

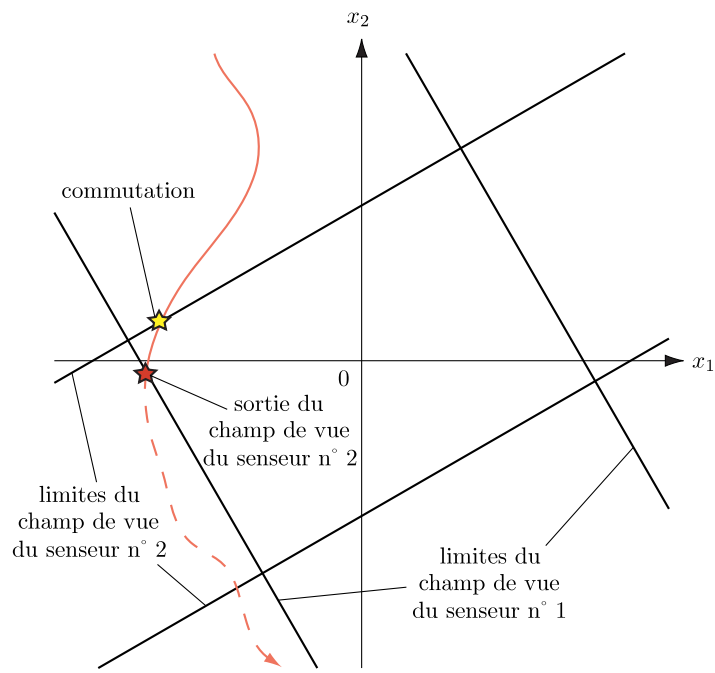
Une stratégie plus prudente est d'attendre pendant une période Δt après la disponibilité de toutes les mesures et avant de commuter.

Stratégie 1b : La commutation vers le mode suivant a lieu avec un retard de Δt après que les mesures sont disponibles. Dans le cas d'une indisponibilité ultérieure d'une mesure, des commutations inverses sont effectuées jusqu'à ce que toutes les mesures nécessaires pour le mode concerné soient disponibles.

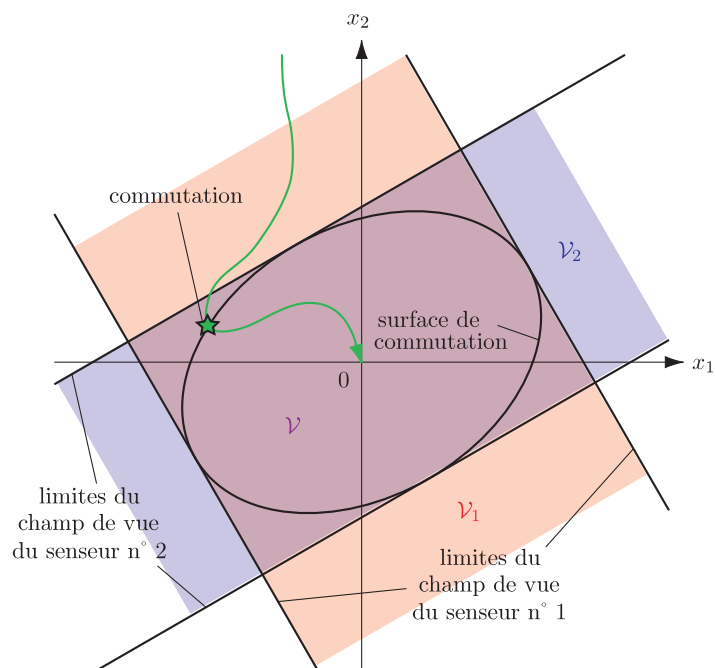
À la première vue, les stratégies 1a et 1b semblent être raisonnables. Cependant, nous montrerons tout de suite qu'elles peuvent créer des problèmes de stabilité. En particulier, le choix de Δt dans la stratégie 1b doit être judicieux. Si Δt est trop long, on perd du temps précieux qui peut servir à effectuer la mission.

En revanche, si la commutation est effectuée trop tôt, il peut arriver que le transitoire, généré par la dynamique en boucle fermée modifiée, pousse l'état du système en dehors d'un champ de vue d'un capteur voire des champs de vue de plusieurs capteurs. La FIG. 5.23(a) illustre ce phénomène. Ici, x_1 et x_2 sont les états d'un système simplifié. Les lignes droites indiquent les limites des champs de vue de deux capteurs. La trajectoire des états (ligne rouge) montre ce qui peut se passer si la commutation a lieu dès que les états sont dans les champs de vue des deux capteurs (étoile jaune). Peu de temps après la commutation, la trajectoire quitte le champ de vue du capteur 1 (étoile rouge). Il est donc nécessaire de re-commuter (en arrière) afin d'utiliser un correcteur qui ne nécessite pas la mesure du capteur 1.

Bien que, à un certain moment, la trajectoire rentre de nouveau dans les champs de vue de tous les capteurs nécessaires, des commutations et re-commutations successives peuvent éventuellement créer un *cycle infini* et donc mener à un comportement instable hautement indésirable.



(a) La trajectoire des états (ligne rouge) sort du champ de vue d'un capteur (étoile rouge) peu après la commutation a eu lieu (étoile jaune)



(b) La trajectoire des états (ligne verte) reste dans les champs de vue de tous les capteurs après la commutation a eu lieu (étoile verte)

FIGURE 5.23 – Champs de vue de deux capteurs et trajectoire des états sans (en haut) et avec (en bas) garantie de stabilité

La FIG. 5.24 montre les résultats d'une simulation dans laquelle la commutation a été faite directement $\Delta t = 10$ s après la disponibilité de tous les capteurs concernés. Les positions et angles initiaux du système ont été choisis au hasard, avec une variance de $(10^{-2} \text{ rad})^2$ pour les angles et 1 m pour les positions. Les vitesses et vitesses angulaires ont été mises à zéro. Les états du correcteur ont été initialisés avec les états initiaux du système, correspondant ainsi à un observateur convergé.

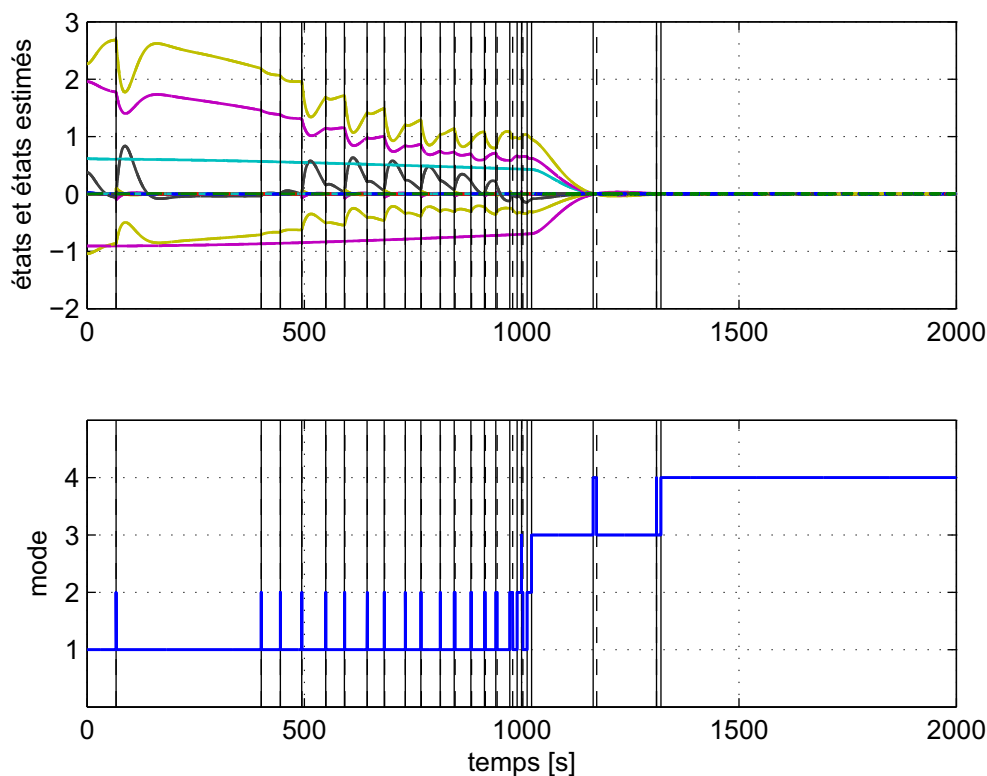


FIGURE 5.24 – Simulation dans laquelle la commutation est effectuée selon la stratégie 1b, c'est-à-dire Δt après la disponibilité de la mesure, avec $\Delta t = 10$ s. La partie supérieure trace l'évolution des états du système (lignes continues) et du correcteur (lignes tiretées, à peine visibles). La partie inférieure indique le mode actif en fonction du temps. Les lignes verticales noires sont les instants de commutation.

Il est bien visible que cette stratégie crée un comportement oscillatoire. Évidemment, le transitoire ayant lieu après la commutation pousse l'état en dehors d'un champ de vue peu après la commutation. Ceci nécessite un retour dans le mode précédent. Un fait marquant est que la commutation la plus délicate semble être celle entre les modes 1 et 2, avec une vingtaine d'essais avant le succès. Les autres commutations paraissent plus simples et aboutissent après un ou deux essais.

Dans ce cas concret, le comportement global est encore stable, mais il n'existe aucune garantie pour la stabilité indépendamment des conditions initiales. Il est même fort probable que d'autres conditions initiales déstabilisent le système.

La FIG. 5.25 donne une vue complémentaire de la même simulation. Elle montre deux mesures dont les champs de vue sont limités, plus précisément les capteurs latéraux grossiers des deux sidérostats. En fait, les mesures sont celles des deux capteurs latéraux grossiers. Les limites ainsi que les mesures sont normalisées à l'intervalle $[-1, 1]$. Bien entendu, une grande partie de ces courbes est purement fictive car aucune mesure ne peut exister en dehors du champ de vue. D'abord, seulement un des deux

capteurs, celui correspondant à la courbe verte, semble poser des problèmes parce que l'autre (courbe bleue) est déjà bien à l'intérieur de son champ de vue du fait de conditions initiales plus favorables. La trajectoire du capteur concerné entre le champ de vue pour la quitter très peu de temps après. Au bout d'une vingtaine de ces allers-retours, la trajectoire entre finalement le champ de vue pour y rester définitivement.

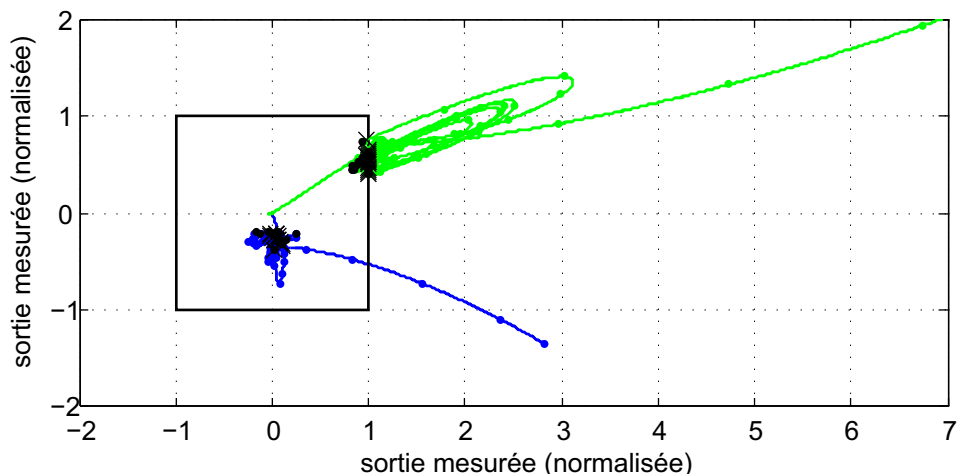


FIGURE 5.25 – Simulation dans laquelle la commutation est effectuée selon la stratégie 1b, c'est-à-dire Δt après la disponibilité de la mesure, avec $\Delta t = 10$ s. Illustration des mesures (partiellement fictives) des capteurs latéraux grossiers avec un champ de vue normalisé. Les points noirs indiquent les instants de commutation, les croix noires les instants de commutation inverse.

Dans la suite, nous développerons une stratégie de commutation plus élaborée. En particulier, nous exigeons qu'elle ne crée pas de comportement chaotique (cf. FIG. 5.24) voire instable.

Pour y arriver, nous restreignons les commutations aux commutations vers un mode suivant. Les commutations vers un mode précédent ne sont donc pas prévues, sauf dans des cas exceptionnels (par exemple une perturbation très brusque ou une panne). Cette restriction est pertinente pour plusieurs raisons :

- une commutation vers un mode précédent $k - 1$ ne paraît pas raisonnable car à un instant ultérieur, il faut revenir de toute façon au mode présent k . Il paraît plus raisonnable d'activer le mode k dès que l'on peut être certain d'y rester ;
- comme nous le verrons dans la suite, un critère simple peut être établi avec la restriction ci-dessus ;
- si l'on permet des commutations dans les deux sens, le système devient essentiellement un *système hybride*, c'est-à-dire comportant des variables réelles (états, mesures, etc.) et entières (nombre du mode actif). Une garantie de stabilité prenant en compte les deux aspects deviendrait très lourde et potentiellement conservatrice.

L'idée de base est donc de garantir, grâce à un critère adapté, qu'il ne deviendra jamais (sauf cas exceptionnel) nécessaire de commuter vers un mode précédent. Une fonction de LYAPUNOV quadratique nous servira comme point de départ pour établir ce critère.

Le principe est décrit dans la FIG. 5.23(b). Contrairement aux stratégies 1a et 1b, cf. FIG. 5.23(a), le mode suivant n'est pas activé dès que (ou Δt après que) toutes les mesures sont disponibles. Il n'est activé qu'au moment où la trajectoire traverse une surface de commutation. Évidemment, cette surface de commutation est entièrement à l'intérieur des champs de vue des capteurs concernés. Dans le

développement de ce critère de commutation, nous nous sommes inspirés des travaux de BIANNIC [20] et de JOHANSSON [80].

Pour dériver l'expression mathématique de la surface de commutation, seulement la dynamique de retour d'état $A - B_2K_c$ est considérée pour l'instant. Nous supposons que la dynamique d'estimation $A - K_fC_2$ soit assez rapide pour que les erreurs d'estimation soient négligeables. En outre, nous supposons qu'il n'existe pas de bruit. Nous montrerons plus tard comment le bruit peut être pris en compte. La dynamique de retour d'état peut être écrite comme suit :

$$\dot{x} = (A - B_2K_c)x \quad (5.61)$$

$x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état de la dynamique de retour d'état. Il est indispensable de savoir que $A - B_2K_c$ est la dynamique du système en boucle fermée *après* la commutation.

Les champs de vue de tous les capteurs (dont les champs de vue sont limités) sont donnés par la relation suivante :

$$C_i x \leq l_i, \quad i \in \{1, \dots, n_{\text{vue}}\} \quad (5.62)$$

$C_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ est une seule ligne de la matrice de sortie. $l_i \in \mathbb{R}$ est positif et représente la limite du champ de vue. Le cas $C_i x \geq l_i$ avec un l_i négatif peut simplement être traduit dans la même forme en multipliant par -1 .

Des matrices normalisées $C_{\text{vue},i}$ peuvent être obtenues en divisant les matrices de sortie C_i des capteurs par les limites des champs de vue l_i correspondants :

$$C_{\text{vue},i} = \frac{1}{l_i} C_i \quad (5.63)$$

Il vient :

$$C_{\text{vue},i} x \leq 1, \quad i \in \{1, \dots, n_{\text{vue}}\} \quad (5.64)$$

Une inégalité quadratique peut être obtenue en élevant l'Éq. (5.64) au carré :

$$x^T C_{\text{vue},i}^T C_{\text{vue},i} x \leq 1, \quad i \in \{1, \dots, n_{\text{vue}}\} \quad (5.65)$$

Cette forme quadratique est suffisante pour exprimer des champs de vue symétriques en une seule fois, c'est-à-dire qu'il devient inutile d'exprimer la limite positive l_i et la limite négative $-l_i$ séparément.

Nous appelons $\mathcal{V}_i \subseteq \mathbb{R}^n$ l'ensemble décrit par la contrainte associée à l'indice i :

$$\mathcal{V}_i : \{x | x^T C_{\text{vue},i}^T C_{\text{vue},i} x \leq 1\} \quad (5.66)$$

L'ensemble \mathcal{V} est l'intersection de tous les ensembles \mathcal{V}_i :

$$\mathcal{V} = \bigcap_i \mathcal{V}_i, \quad i \in \{1, \dots, n_{\text{vue}}\} \quad (5.67)$$

Cette nomenclature devient plus claire dans la FIG. 5.23(b).

Un constat important qui peut être intéressant pour d'autres applications est que des champs de vue circulaires ou elliptiques peuvent également être pris en compte. Dans ce cas, la matrice $C_{\text{vue},i}^T C_{\text{vue},i}$ dans l'Éq. (5.65) doit être remplacée par la matrice $M_{\text{vue},i}$. $x^T M_{\text{vue},i} x = 1$ décrit alors la limite du champ de vue circulaire ou elliptique. $M_{\text{vue},i}$ est une matrice symétrique et semi-définie positive.

En principe, des champs de vue très variés peuvent être pris en compte en les approximant avec des droites, des cercles et des ellipses.

La seule restriction et source de conservatisme en même temps est que les champs de vue doivent être symétriques par rapport à l'origine. Un champ de vue asymétrique permet toujours une solution, mais seulement la limite la plus proche de l'origine sera pris en compte. La raison est que la surface de commutation que nous utiliserons dans la suite est par définition symétrique par rapport à l'origine. Ce fait est illustré dans la FIG. 5.26.

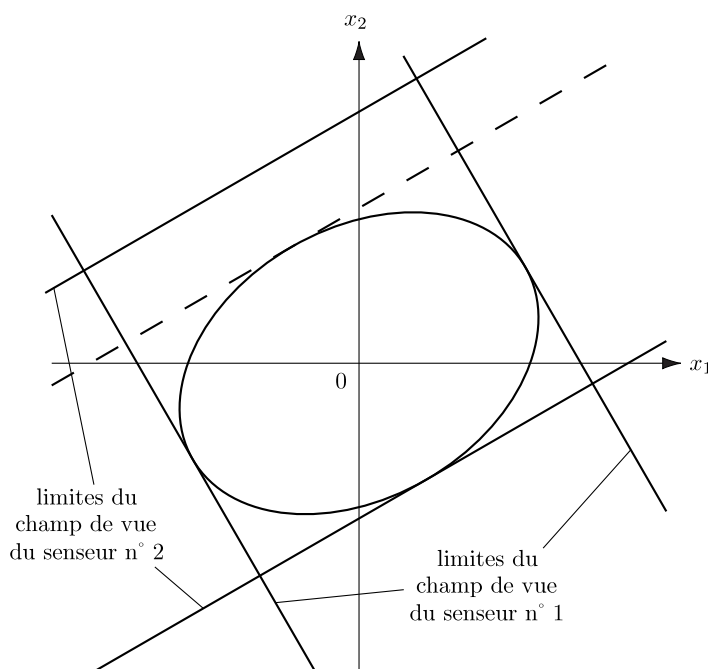


FIGURE 5.26 – Conservatisme dû au champ de vue asymétrique du capteur 2. Du fait de sa symétrie par rapport à l'origine, la surface de commutation ne change pas par rapport au cas symétrique (ligne tiretée).

Si seulement des champs de vue linéaires (contrairement à circulaire ou elliptique) sont utilisés, les \mathcal{V}_i sont des *polyèdres* dans l'espace \mathbb{R}^n . L'intersection \mathcal{V} de tous les ensembles \mathcal{V}_i n'est pas un *polytope* en général car nous n'avons pas de garantie que l'ensemble des champs de vue est borné. Par exemple, les champs de vue que nous utilisons ne concernent pas les vitesses et les vitesses angulaires. Par conséquent, les directions associées aux vitesses et vitesses angulaires ne sont pas bornées. Pour la même raison, il ne s'agit pas d'un *parallélotope* non plus, même si les limites positives et négatives des champs de vue sont parallèles.

Après avoir trouvé une représentation mathématique pour les champs de vue des capteurs individuels, nous cherchons une surface de commutation. Cette surface doit remplir plusieurs conditions :

- la surface de commutation doit être située entièrement à l'intérieur des limites des champs de vue ;

- une fois la surface de commutation est traversée, la trajectoire doit rester pour toujours (sauf cas exceptionnels) à l'intérieur d'elle et, par conséquent, à l'intérieur des limites des champs de vue ;
- elle doit être facilement évaluable sur un ordinateur de bord.

Un candidat idéal pour une surface de commutation remplissant les conditions ci-dessus et une fonction de LYAPUNOV quadratique $V(x)$. Sa définition est la suivante :

$$V(x) = x^T P x \quad (5.68)$$

$x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique. La dérivée temporelle de $V(x)$ peut être calculée grâce à la définition de la dynamique de retour d'état, cf. l'Éq. (5.61) :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= x^T (A - B_2 K_c)^T P x + x^T P (A - B_2 K_c) x \\ &= x^T [(A - B_2 K_c)^T P + P (A - B_2 K_c)] x \end{aligned} \quad (5.69)$$

Traditionnellement, une fonction de LYAPUNOV est utilisée pour analyser la stabilité d'un système. Dans le cas d'un système linéaire, cf. l'Éq. (5.61), la dynamique est stable au sens de LYAPUNOV si et seulement si la fonction de LYAPUNOV $V(x)$ est positive et sa dérivée temporelle $\dot{V}(x)$ est négative :

$$\begin{aligned} V(x) &= x^T P x > 0 \\ \dot{V}(x) &= x^T [(A - B_2 K_c)^T P + P (A - B_2 K_c)] x < 0 \end{aligned} \quad (5.70)$$

Ces deux conditions peuvent être traduites ($P > 0 \Leftrightarrow x^T P x > 0 \forall x \neq 0$) dans les inégalités matricielles linéaires (LMI, *angl.* linear matrix inequalities) suivantes :

$$\begin{aligned} P = P^T &> 0 \\ (A - B_2 K_c)^T P + P (A - B_2 K_c) &< 0 \end{aligned} \quad (5.71)$$

$P = P^T > 0$ signifie que P doit être une matrice symétrique et définie positive, c'est-à-dire qu'elle doit posséder uniquement des valeurs propres réelles et strictement positives.

La dérivée temporelle négative $\dot{V}(x)$ fait décroître la valeur de $V(x)$. Géométriquement, l'Éq. (5.68) décrit l'hyper-ellipsoïde $\varepsilon_{P,V(x)}$ sur le bord duquel se trouve l'état courant x :

$$\varepsilon_{P,V(x)} : \{x | x^T P x \leq V(x)\} \quad (5.72)$$

Un fait important est qu'une valeur $V(x_2)$ qui est inférieure à une valeur $V(x_1)$ ($V(x_2) < V(x_1)$) signifie que l'hyper-ellipsoïde $\varepsilon_{P,V_2(x)}$ associé à la valeur $V_2(x)$ se trouve entièrement à l'intérieur de l'hyper-ellipsoïde $\varepsilon_{P,V_1(x)}$ associé à la valeur $V_1(x)$, ou $\varepsilon_{P,V_2(x)} \subset \varepsilon_{P,V_1(x)}$. Cependant, les deux hyper-ellipsoïdes possèdent les mêmes proportions et la même orientation.

Par conséquent, une valeur $V(x)$ décroissante conduit à un hyper-ellipsoïde $\varepsilon_{P,V(x)}$ qui devient de plus en plus petit, tout en conservant ses proportions initiales.

Nous n'utilisons pas la fonction de LYAPUNOV pour une analyse de stabilité proprement dite, mais nous exploitons son interprétation graphique. En effet, le fait que l'hyper-ellipsoïde initial « se dégonfle » permet de conclure que l'état x , qui se trouve sur le bord de l'hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV $\varepsilon_{P,V(x)}$, restera pour toujours à l'intérieur de cet hyper-ellipsoïde.

Jusqu'ici, une multiplication de la matrice de LYAPUNOV P avec une nombre positif n'a aucun effet. La satisfaction des inégalités dans l'Éq. (5.71) reste inchangée. Nous avons donc le droit de normaliser l'hyper-ellipsoïde comme suit :

$$\varepsilon_P = \varepsilon_{P,1} : \{x | x^T P x \leq 1\} \quad (5.73)$$

Notre objectif est maintenant de trouver un hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV ε_P qui tient à l'intérieur des champs de vue de tous les capteurs utilisés, c'est-à-dire qui est inclus dans l'ensemble \mathcal{V} :

$$\begin{aligned} \forall x, x^T P x < 1 &\Rightarrow x^T C_{\text{vue},i}^T C_{\text{vue},i} x < 1, i \in \{1, \dots, n_{\text{vue}}\} \\ \varepsilon_P &\subseteq \mathcal{V} \end{aligned} \quad (5.74)$$

Cette inclusion peut être réécrite grâce à la \mathcal{S} -procédure, une astuce souvent utilisée pour des inégalités matricielles linéaires, cf. [20] :

$$P > C_{\text{vue},i}^T C_{\text{vue},i}, i \in \{1, \dots, n_{\text{vue}}\} \quad (5.75)$$

Cette transformation se passe sans conservatisme grâce à l'hypothèse que $C_{\text{vue},i} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ (vecteur ligne). Dans le cas où $C_{\text{vue},i}$ n'est pas un vecteur ligne, la \mathcal{S} -procédure introduit du conservatisme. C'est pour cette raison que nous traitons toutes les composantes du vecteur de mesure d'un capteur séparément.

Jusqu'à présent, les inégalités matricielles linéaires suivantes imposant des contraintes sur la matrice de LYAPUNOV P ont été formulées :

$$\begin{aligned} P &> 0 \\ (A - B_2 K_c)^T P + P(A - B_2 K_c) &< 0 \\ P &> C_{\text{vue},i}^T C_{\text{vue},i}, i \in \{1, \dots, n_{\text{vue}}\} \end{aligned} \quad (5.76)$$

Ces contraintes linéaires définissent un ensemble convexe.

Parmi les hyper-ellipsoïdes ε_P inclus dans l'ensemble \mathcal{V} , nous cherchons celui qui couvre le plus d'espace possible à l'intérieur des champs de vue. Le terme « le plus d'espace possible » admet plusieurs interprétations. Une possibilité est de maximiser le volume de l'hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV ε_P . Le volume de l'hyper-ellipsoïde ε_P est défini comme suit :

$$\text{Vol} = \frac{\nu_n}{\sqrt{\det P}} \quad (5.77)$$

Ici, ν_n est le volume d'une *hyper-sphère unité* de dimension n :

$$\nu_n = \begin{cases} \frac{\pi^k}{k!} & \text{pour } n = 2k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{2^n k! \pi^k}{n!} & \text{pour } n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (5.78)$$

En particulier, le volume d'une hyper-sphère unité de dimension $n = 30$ est $\nu_{30} \approx 2,1915 \cdot 10^{-5}$.

En principe, ν_n est une constante pour un n donné. Par conséquent, il suffit de maximiser

$1/\sqrt{\det P}$:

$$\max_P J(P) = \frac{1}{\sqrt{\det P}} \quad (5.79)$$

Cependant, la fonction objective $J(P)$ est difficile à intégrer dans le cadre matriciel linéaire. Une façon alternative de formuler le problème de maximisation du volume est :

$$\min_P J'(P) = \log \det P \quad (5.80)$$

Ce problème est équivalent au premier problème d'origine parce que $-\log x$ et $x^{-1/2}$ sont des fonctions décroissantes pour $x > 0$ et parce que $\det P > 0$. Malheureusement, la fonction objective $J'(P)$ n'est pas *convexe*. Un tel problème d'optimisation est dur à résoudre car il comporte des minima locaux, voire ne possède pas de minimum du tout.

Il existe une manière de transformer ce problème en un problème équivalent, basé sur une fonction objective convexe et des contraintes convexes.

À cette fin, nous définissons l'inverse de la matrice de LYAPUNOV :

$$Q = P^{-1} > 0 \quad (5.81)$$

Le déterminant de P est l'inverse du déterminant de Q :

$$\det P = \det (Q^{-1}) = \frac{1}{\det Q} \quad (5.82)$$

Un problème d'optimisation équivalent au problème donné par l'Éq. (5.80) peut alors être écrit :

$$\min_Q J''(Q) = \log \left(\frac{1}{\det Q} \right) = -\log \det Q \quad (5.83)$$

Comme $\log(x)$ est une fonction croissante et comme le déterminant de Q est positif ($Q > 0$), ce problème d'optimisation est équivalent à :

$$\min_Q J'''(Q) = -\det Q \quad (5.84)$$

Les problèmes d'optimisation dans les Éqs. (5.83) et (5.84) sont convexes, cf. [23]. Nous retiendrons la deuxième version ($\min_Q J'''(Q) = -\det Q$) dans la suite. Maintenant, nous remplacerons toutes les occurrences de la matrice de LYAPUNOV P par la matrice Q dans les contraintes d'inégalité.

Les inégalités matricielles s'écrivent comme suit en fonction de la nouvelle variable Q :

$$\begin{aligned} Q &> 0 \\ Q(A - B_2 K_c)^T + (A - B_2 K_c)Q &< 0 \\ Q &> QC_{\text{vue},i}^T C_{\text{vue},i} Q, \quad i \in \{1, \dots, n_{\text{vue}}\} \end{aligned} \quad (5.85)$$

Les inégalités ont simplement été pré-multipliées par la matrice définie positive Q et post-multipliées par $Q^T = Q$, ce qui représente une transformation congruente. L'égalité $PQ = I_n$ a

été utilisée à plusieurs reprises.

La dernière inégalité de l'Éq. (5.85) est devenue non-linéaire à cause de la transformation. Or, nous pouvons trouver une représentation équivalente grâce au *complément de SCHUR*^{2 3}. Les inégalités non-linéaires

$$Q > QC_{\text{vue},i}^T C_{\text{vue},i} Q, \quad i \in \{1, \dots, n_{\text{vue}}\} \quad (5.86)$$

peuvent être transformées en les inégalités linéaires suivantes ($R = Q$, $S = 1$ et $M = QC_{\text{vue},i}^T$) :

$$\begin{bmatrix} Q & QC_{\text{vue},i}^T \\ C_{\text{vue},i} Q & 1 \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \{1, \dots, n_{\text{vue}}\} \quad (5.87)$$

Nous sommes alors face au problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_Q J'''(Q) &= -\det Q & (5.88) \\ Q &> 0 \\ Q(A - B_2 K_c)^T + (A - B_2 K_c)Q &< 0 \\ \begin{bmatrix} Q & QC_{\text{vue},i}^T \\ C_{\text{vue},i} Q & 1 \end{bmatrix} &> 0, \quad i \in \{1, \dots, n_{\text{vue}}\} \end{aligned}$$

Ce problème peut maintenant être résolu (en temps polynômial) grâce aux outils standard de programmation convexe [23].

BIANNIC [20] propose, selon une idée de [131], une transformation basée sur la décomposition de CHOLESKY⁴ qui rend la fonction objective linéaire et exploitable par des outils comme le solveur *mincx* de la *LMI Control Toolbox* [56]. D'un autre côté, il existe des solveurs capables de traiter le problème d'optimisation de l'Éq. (5.83) directement. C'est la première approche que nous avons choisie, mais nous renonçons à la décrire en détail car elle ne sert qu'à résoudre un problème d'optimisation donné. Un point important est que l'algorithme d'optimisation peut être initialisé avec une valeur pour Q qui satisfait toutes les inégalités. Nous avons profité de cette possibilité afin de réduire le temps de calcul. Notamment, nous avons pris l'inverse d'une matrice de LYAPUNOV P quelconque dont les dimensions ont été réduites jusqu'à ce que l'hyper-ellipsoïde ε_P associé soit inclus dans l'ensemble \mathcal{V} .

À partir de la solution Q du problème de minimisation, la matrice de LYAPUNOV P peut être obtenue par inversion, cf. Éq. (5.81).

2. Issai SCHUR (1875 – 1941), mathématicien russe

3. Le *complément de SCHUR* affirme qu'il existe une équivalence entre les trois relations suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \begin{pmatrix} R & M \\ M^T & S \end{pmatrix} > 0 \\ \text{(ii)} \quad & \begin{cases} R > 0 \\ S - M^T R^{-1} M > 0 \end{cases} \\ \text{(iii)} \quad & \begin{cases} S > 0 \\ R - M S^{-1} M^T > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Les dimensions des matrices M , R et S sont $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Les matrices R et S sont symétriques.

4. André-Louis CHOLESKY (1875 – 1918), mathématicien français

Il nous semble important de mentionner quelques valeurs numériques pour illustrer la taille de ce problème d'optimisation. En effet, le nombre de variables est $n_{\text{var}} = \frac{n(n+1)}{2}$. Pour $n = 30$ états de la dynamique de retour d'état, il vient $n_{\text{var}} = 465$. Le temps de calcul était compris entre 5 et 33 minutes sur un processeur Pentium M avec 1600 MHz. Ceci signifie que ce calcul ne peut pas être effectué de façon interactive, mais, après tout, nous cherchons à obtenir un critère de commutation qui puisse être embarqué ou utilisé dans des simulations. La partie interactive du problème de commande se passe lors de la synthèse \mathcal{H}_2 dans laquelle des pondérations peuvent être choisies et on dispose du correcteur presque instantanément. Le calcul de la matrice de LYAPUNOV est supposé être effectué après que les correcteurs pour les différents modes opérationnels sont satisfaisants.

Une technique efficace afin de réduire davantage le temps de calcul est de rajouter des contraintes artificielles qui rendent l'ensemble \mathcal{V} borné. Par exemple, nous avons obtenu de bons résultats en contraignant tous les états x à un hyper-cube dont la demi-longueur était 10. Cependant, en utilisant cette approche, il faut être sûr que si au moins un état est en dehors de cet hyper-cube, il est encore trop tôt pour commuter.

Ayant trouvé la solution Q du problème d'optimisation décrit précédemment, nous sommes en mesure de formuler une nouvelle stratégie de commutation.

Stratégie 2a : La commutation vers le mode suivant a lieu dès que la fonction de LYAPUNOV $x^T P x$ est inférieure à 1. Ceci implique que tous les capteurs concernés fournissent une mesure. Une commutation vers un mode précédent n'est pas nécessaire (sauf cas exceptionnel). Comme nous ne disposons pas du vrai état x , nous utilisons l'état du correcteur x_K .

Il est très important de savoir que la fonction de LYAPUNOV $V(x)$ est forcément décroissante ($\dot{V}(x) < 0$) seulement après la commutation a eu lieu. La raison pour cela est que $V(x)$ n'est pas une fonction de LYAPUNOV pour la dynamique du mode qui précède la commutation, mais seulement pour celle du mode après la commutation.

Les FIGS. 5.27 et 5.28 montrent une simulation faite en utilisant la stratégie 2a. L'initialisation est la même que celle de la première simulation.

Grâce à la nouvelle stratégie de commutation, l'enchaînement des modes se passe plutôt doucement. En particulier, aucune commutation inverse est nécessaire. La FIG. 5.28 illustre ce qui se passe concrètement lors de la commutation entre les modes 3 et 4. La mesure représentée par la ligne rouge traverse le champ de vue une fois pour rester à son intérieur après la deuxième entrée. La commutation (point noir) n'est pas effectuée directement à l'entrée, mais un peu après. Le comportement des deux autres mesures est similaire.

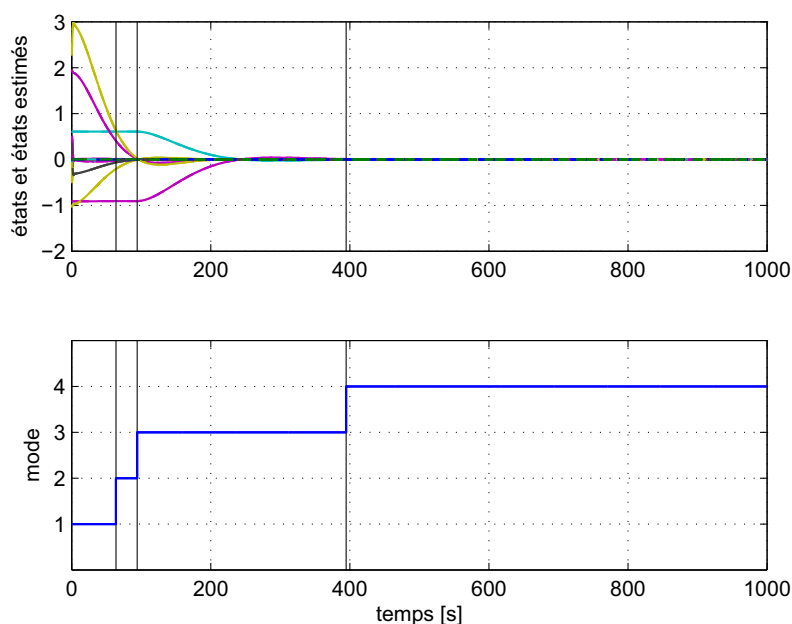


FIGURE 5.27 – Simulation dans laquelle la commutation est effectuée selon la stratégie 2a, c'est-à-dire dès que la fonction de LYAPUNOV $x_K^T P x_K$ devient plus petite que 1. La partie supérieure trace l'évolution des états du système (lignes continues) et du correcteur (lignes tiretées, à peine visibles). La partie inférieure indique le mode actif en fonction du temps. Les lignes verticales noires sont les instants de commutation.

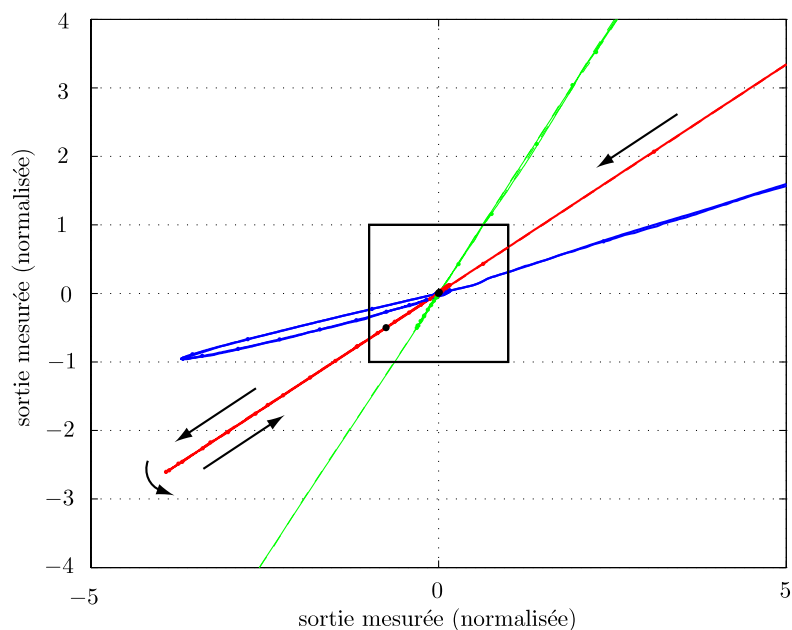


FIGURE 5.28 – Simulation dans laquelle la commutation est effectuée selon la stratégie 2a, c'est-à-dire dès que la fonction de LYAPUNOV $x_K^T P x_K$ devient plus petite que 1. Illustration des mesures (partiellement fictives) des capteurs latéraux grossiers avec un champ de vue normalisé. Les points noirs indiquent les instants de commutation.

La FIG. 5.29 montre la valeur de la fonction de LYAPUNOV associée au mode suivant. Comme le prévoit la stratégie 2a, la commutation a lieu dès que cette fonction devient plus petite que 1. Après la commutation, la matrice de LYAPUNOV change, d'où les sauts dans l'évolution de la fonction de LYAPUNOV. Il est également visible que la fonction ne décroît pas toujours avec la même vitesse (cf. mode 3, entre 200 et 300 s), ce qui reflète le fait qu'il ne s'agit pas d'une fonction de LYAPUNOV pour le mode courant, mais pour le mode suivant.

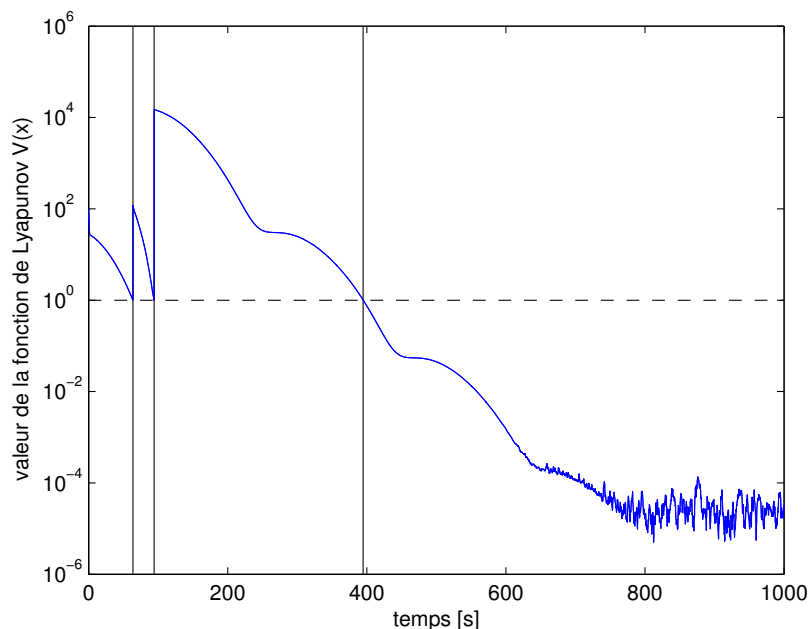


FIGURE 5.29 – Simulation dans laquelle la commutation est effectuée selon la stratégie 2a, c'est-à-dire dès que la fonction de LYAPUNOV $x_K^T P x_K$ devient plus petite que 1 (ligne horizontale noire tiretée). Illustration de la fonction de LYAPUNOV $V(x_K)$ pour chaque mode (ligne bleue continue). Les lignes verticales noires sont les instants de commutation.

Enfin, le TAB. 5.20 indique les temps de commutation pour la stratégie 2a.

TABLE 5.20 – Temps de commutation pour la stratégie 2a

Stratégie	Modes 1-2	Modes 2-3	Modes 3-4
2a	63,8 s	94,2 s	394,8 s

5.5.4 Prise en compte du bruit

Jusqu'à présent, nous sommes partis de l'hypothèse qu'il s'agissait d'une dynamique de retour d'état $A - B_2 K_c$. En outre, nous avons supposé une absence totale de bruits. L'état x du système a été utilisé dans le critère de commutation.

En réalité, nous ne disposons pas de l'état courant x , et la dynamique du système en boucle fermée ne consiste pas seulement en la dynamique de retour d'état $A - B_2 K_c$, mais également de la dynamique d'estimation $A - K_f C$. En outre, il existe des bruits d'actuation et de mesure.

Dans les paragraphes qui suivent, nous décrirons comment cette problématique peut être résolue, c'est-à-dire comment notre critère de commutation peut être adapté aux réalités du contrôle du vol en formation.

Rappelons-nous que dans des applications spatiales, les capacités de calcul de l'ordinateur de bord sont généralement très restreintes. Par conséquent, il est très important de disposer d'expressions que l'on peut calculer facilement. Par exemple, l'inversion d'une matrice de grande taille est une opération numérique prohibitive de par la complexité de calcul associée.

En présence d'un observateur, l'état du système peut être exprimé en fonction de l'état x_K du correcteur et de l'erreur d'estimation ε_x comme suit :

$$\begin{aligned} x &= x_K - (x_K - x) \\ &= x_K - \varepsilon_x \end{aligned} \quad (5.89)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation ε_x est donnée par l'équation suivante, cf. Annexe H :

$$\dot{\varepsilon}_x = (A - K_f C_2)\varepsilon_x + (K_f D_{21} - B_1)w \quad (5.90)$$

Dans la suite, nous supposons que les états x_K du filtre de KALMAN soient convergés vers les états x du système, c'est-à-dire que $E\{\varepsilon_x\} = E\{x_K - x\} = 0$. $E\{\varepsilon_x\}$ est l'espérance statistique de l'erreur d'estimation ε_x .

L'évolution temporelle de l'espérance de ε_x s'écrit comme suit :

$$E\{\varepsilon_x(t)\} = e^{(A - K_f C)t} E\{\varepsilon_{x(0)}\} \quad (5.91)$$

Les valeurs propres de la dynamique d'estimation $A - K_f C_2$ déterminent la vitesse de convergence de l'espérance de l'erreur d'estimation ε_x . Il faut donc veiller à ce que les pulsations des valeurs propres soient assez élevées par rapport à la dynamique de retour d'état $A - B_2 K_c$.

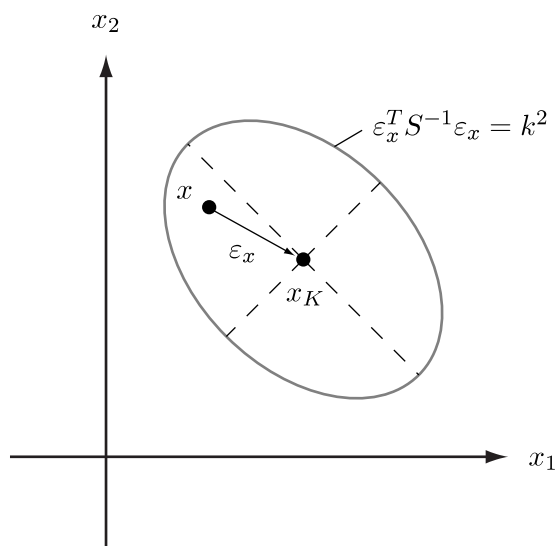


FIGURE 5.30 – Région de confiance (hyper-ellipsoïde autour de l'état de l'estimateur x_K dans laquelle se trouve le vrai état x).

En absence de bruit w , l'état x du système coïnciderait donc avec l'état x_K du correcteur. En réalité, il ne faut pas oublier l'effet du bruit. Le bruit w fait que l'état x_K du correcteur se trouve dans une région de confiance autour de l'état x du système avec une certaine probabilité. La région de confiance est un hyper-ellipsoïde ε_R dont la taille et la forme dépendent de la *matrice de covariance* S et d'un facteur d'échelle k (cf. FIG. 5.30) :

$$\varepsilon_S : \{\varepsilon_x | \varepsilon_x^T S^{-1} \varepsilon_x < k^2\} \quad (5.92)$$

La matrice de covariance S obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\dot{S} = (A - K_f C_2)S + S(A - K_f C_2)^T + (K_f D_{21} - B_1)W(K_f D_{21} - B_1)^T \quad (5.93)$$

Ici, W est la matrice de covariance du bruit w qui est une matrice d'identité dans notre cas. En régime permanent ($\dot{S}_\infty = 0$), S_∞ est la solution d'une équation de LYAPUNOV :

$$0 = (A - K_f C_2)S_\infty + S_\infty(A - K_f C_2)^T + (K_f D_{21} - B_1)W(K_f D_{21} - B_1)^T \quad (5.94)$$

Nous appelons ΔS la différence entre la matrice de covariance actuelle S et la matrice de covariance en régime permanent S_∞ :

$$\Delta S = S - S_\infty \quad (5.95)$$

La différence entre l'Éq. (5.93) et l'Éq. (5.94) donne l'évolution de la matrice ΔS :

$$\Delta \dot{S} = (A - K_f C_2)\Delta S + \Delta S(A - K_f C_2)^T \quad (5.96)$$

La solution temporelle de l'Éq. (5.96) est la suivante :

$$\begin{aligned} \Delta S(t) &= e^{(A - K_f C_2)t} \Delta S(0) e^{(A - K_f C_2)^T t} \\ S(t) &= S_\infty + e^{(A - K_f C_2)t} (S(0) - S_\infty) e^{(A - K_f C_2)^T t} \end{aligned} \quad (5.97)$$

Visiblement, l'évolution de l'écart entre la matrice de covariance $S(t)$ et celle en régime permanent, S_∞ dépend des valeurs propres de la dynamique d'estimation $A - K_f C_2$, tout comme l'évolution de l'espérance de l'erreur d'estimation ε_x . Dans la suite, nous travaillerons avec la matrice de covariance S_∞ en régime permanent, mais il faut néanmoins être conscient que le temps écoulé doit être suffisant pour se trouver en régime permanent.

Le facteur d'échelle k introduit dans l'Éq. (5.92) peut être calculé en fonction d'une probabilité p_n spécifiée, n étant la dimension du problème (le nombre d'états du système). TANYGIN et WOODBURN [169] présentent la relation suivante entre le facteur d'échelle k et la probabilité p_n :

$$p_n(k) = \begin{cases} \operatorname{erf}\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{k^2}{2}} \sum_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{k^{2i-1}}{\prod_{j=1}^i (2j-1)} & \text{pour } n \text{ impair} \\ 1 - e^{-\frac{k^2}{2}} \left[1 + \sum_{i=1}^{(n-2)/2} \frac{k^{2i}}{\prod_{j=1}^i 2j} \right] & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases} \quad (5.98)$$

erf est la fonction d'erreur de GAUSS :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt \quad (5.99)$$

Pour $n = 1$, nous obtenons tout simplement $p_1(k) = \operatorname{erf}\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$.

Les ingénieurs travaillant dans le contrôle de satellites ont l'habitude de raisonner avec des facteurs d'échelle $k = 1$ (1σ) et $k = 3$ (3σ) lorsqu'il s'agit de spécifications mono-variable de missions, de capteurs ou d'actionneurs. À titre d'exemple, 1σ et 3σ indiquent les intervalles dans lesquels se trouvent 67 %, 25 % et 99,74 % d'une distribution gaussienne, respectivement.

TABLE 5.21 – Facteur d'échelle k pour différentes probabilités dans les cas $n = 1$ et $n = 30$

Probabilité p	Facteur k ($n = 1$)	Facteur k ($n = 30$)
68,27 %	1	5,7551
95,45 %	2	6,6502
99,73 %	3	7,4861

Dans notre cas ($n = 30$), la relation entre k et p_n est différente, ce qui est illustré dans le TAB. 5.21 et dans la FIG. 5.31.

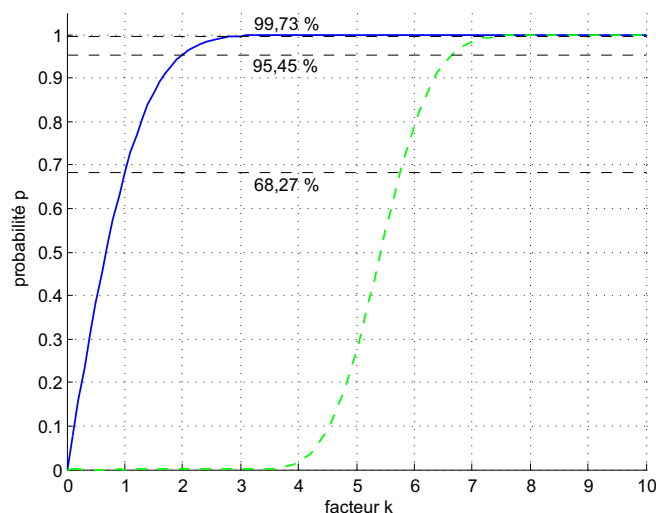


FIGURE 5.31 – Probabilité p en fonction du facteur d'échelle k pour $n = 1$ ($p_1(k)$, ligne bleue continue) et $n = 30$ ($p_{30}(k)$, ligne verte tiretée). $p_1(k)$ est identique à la fonction d'erreur de GAUSS $\operatorname{erf}(k)$.

Comme 3σ est une spécification plutôt courante, nous retenons la valeur 7,4861 pour le facteur d'échelle k . En d'autres termes, la probabilité que le vrai état x du système est dans l'hyper-ellipsoïde ε_S est de 99,73 %.

Notre approche afin de prendre en compte le bruit est la suivante. Au lieu d'effectuer une commutation au moment où l'état du correcteur traverse la surface de commutation $x^T P x = 1$ (stratégie 2a), nous attendons jusqu'à ce que l'hyper-ellipsoïde ε_S soit entièrement à l'intérieur de la surface de commutation.

Comme nous l'avons vu ci-dessus, le choix du facteur d'échelle k dépend du niveau de confiance souhaité. Par conséquent, il ne peut jamais y avoir de certitude que l'état du système est également à l'intérieur de la surface de commutation. Tout est une question de probabilité.

Pour savoir si ε_S est à l'intérieur de la surface de commutation $x^T P x = 1$, il faut tester s'il existe une intersection de ces deux hyper-ellipsoïdes. Selon EBERLY [52], ceci est déjà un problème difficile

à résoudre en trois dimensions ($n = 3$). Nous ne pouvons donc pas espérer de trouver une méthode directe pour $n = 30$.

Dans les paragraphes qui suivent, nous montrerons une méthode qui transforme ce problème en un calcul de la distance entre un point et un hyper-ellipsoïde, un problème qui peut être résolu de façon itérative. Nous nous sommes partiellement inspirés des travaux de NÜRNBERG [133]. Cependant, contrairement à NÜRNBERG, nous sommes en mesure de démontrer que les algorithmes proposés convergent.

Afin d'alléger la notation, nous réécrivons l'hyper-ellipsoïde ε_S en termes d'une matrice définie positive R qui est une fonction de la matrice de covariance S et du facteur d'échelle k :

$$\varepsilon_S : \{\varepsilon_x | \varepsilon_x^T R \varepsilon_x < 1\} \quad (5.100)$$

$$\text{avec } R = \frac{1}{k^2} S^{-1}$$

Le problème de déterminer si l'hyper-ellipsoïde de covariance se trouve entièrement à l'intérieur de la surface de commutation peut alors être formulé comme suit :

$$\varepsilon_S \subseteq \varepsilon_P \quad (5.101)$$

Le fait d'effectuer des transformations affines ne change rien au fait que ε_S se trouve entièrement à l'intérieur de ε_P . En d'autres termes, si $\varepsilon_S \subseteq \varepsilon_P$, alors le même constat est vrai pour des hyper-ellipsoïdes $\varepsilon_{S'}$ et $\varepsilon_{P'}$, images des hyper-ellipsoïdes ε_S et ε_P après une même transformation affine : $\varepsilon_{S'} \subseteq \varepsilon_{P'}$.

Ce constat nous permet de transformer le problème initial en un problème simplifié en passant par une séquence de transformations. Les transformations sont appliquées aux deux hyper-ellipsoïdes ε_P et ε_S de la même façon.

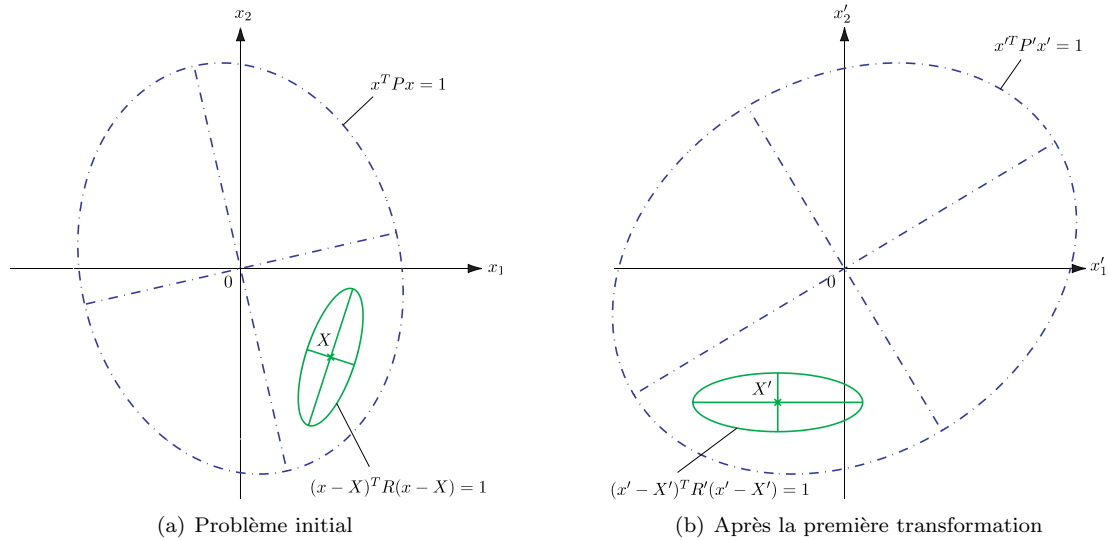


FIGURE 5.32 – Hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV (bleu tireté-pointillé) et de covariance (vert continu) initiaux et après la première transformation pour le cas d'une ellipse ($n = 2$)

Nous partons des hyper-ellipsoïdes $x^T P x = 1$ (ε_P) et $(x - X)^T R (x - X) = 1$ (ε_S), cf. FIG. 5.32(a),

où X est le vecteur des états du correcteur.

À partir de là, les trois transformation suivantes ont lieu :

1. une première transformation M_1 est effectuée afin d'aligner l'hyper-ellipsoïde $(x-X)^T R(x-X) = 1$ avec les axes du repère :

$$\begin{aligned} R' &= M_1^T R M_1 \\ P' &= M_1^T P M_1 \\ x' &= M_1^T x \\ X' &= M_1^T X \end{aligned} \quad (5.102)$$

M_1 est la matrice des vecteurs propres de R . R' est maintenant une matrice diagonale avec comme composantes les valeurs propres de R . Les hyper-ellipsoïdes deviennent $x'^T P' x' = 1$ et $(x' - X')^T R' (x' - X') = 1$, cf. FIG. 5.32(b) ;

2. une deuxième transformation M_2 transforme l'hyper-ellipsoïde $(x' - X')^T R' (x' - X') = 1$ en une hyper-sphère unité :

$$\begin{aligned} R'' &= M_2^T R' M_2 = M_2^T M_1^T R M_1 M_2 = I_n \\ P'' &= M_2^T P' M_2 = M_2^T M_1^T P M_1 M_2 \\ x'' &= M_2^T x' = M_2^T M_1^T x \\ X'' &= M_2^T X' = M_2^T M_1^T X \end{aligned} \quad (5.103)$$

M_2 est une matrice diagonale. Ses composantes sont les inverses des racines carrées des valeurs propres de la matrice R' , en d'autres termes les demi-grands axes de l'hyper-ellipsoïde $(x' - X')^T R' (x' - X') = 1$. Les nouvelles expressions deviennent $x''^T P'' x'' = 1$ et $(x'' - X'')^T (x'' - X'') = 1$, cf. FIG. 5.33(a) ;

3. enfin, une troisième transformation M_3 aligne les axes de l'ellipsoïde $x''^T P'' x'' = 1$ avec les axes du repère :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= M_3^T R'' M_3 = M_3^T M_2^T R' M_2 M_3 = M_3^T M_2^T M_1^T R M_1 M_2 M_3 = I_n \\ \mathcal{P} &= M_3^T P'' M_3 = M_3^T M_2^T P' M_2 M_3 = M_3^T M_2^T M_1^T P M_1 M_2 M_3 \\ \xi &= M_3^T x'' = M_3^T M_2^T x' = M_3^T M_2^T M_1^T x \\ \Xi &= M_3^T X'' = M_3^T M_2^T X' = M_3^T M_2^T M_1^T X \end{aligned} \quad (5.104)$$

M_3 est la matrice des vecteurs propres de la matrice P'' . Il vient $\xi^T \mathcal{P} \xi = 1$ et $(\xi - \Xi)^T (\xi - \Xi) = 1$, cf. FIG. 5.33(b). La matrice \mathcal{P} est diagonale avec les valeurs propres de la matrice P'' comme composantes.

Comme la FIG. 5.33(b) l'illustre, nous avons obtenu, grâce aux trois transformations affines décrites, un hyper-ellipsoïde $\xi^T \mathcal{P} \xi = 1$ sous forme normale, c'est-à-dire que les axes sont alignés avec les axes du repère, et une hyper-sphère $(\xi - \Xi)^T (\xi - \Xi) = 1$. Le caractère du problème initial a été conservé. En d'autres termes, nous cherchons toujours à déterminer si l'un des deux $((\xi - \Xi)^T (\xi - \Xi) = 1)$ est entièrement à l'intérieur de l'autre $(\xi^T \mathcal{P} \xi = 1)$. De ce point de vue, le problème initial et le problème transformé sont équivalents.

Or, la FIG. 5.33(b) montre également qu'il existe une manière plus simple afin de déterminer si l'hyper-sphère $(\xi - \Xi)^T (\xi - \Xi) = 1$ est comprise dans l'hyper-ellipsoïde $\xi^T \mathcal{P} \xi = 1$. En effet, un critère équivalent est de déterminer si le point Ξ se trouve à l'intérieur de l'hyper-ellipsoïde $\xi^T \mathcal{P} \xi = 1$ et si la

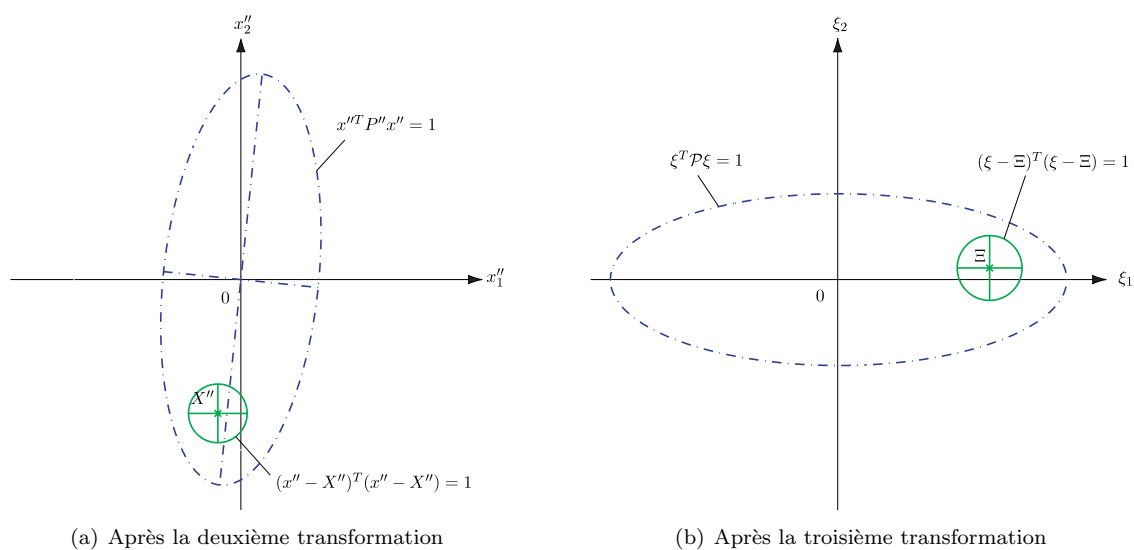


FIGURE 5.33 – Hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV (bleu tireté-pointillé) et de covariance (vert continu) après la deuxième et troisième transformation pour le cas d'une ellipse ($n = 2$)

distance entre le point Ξ (le centre de l'hyper-sphère $(\xi - \Xi)^T (\xi - \Xi) = 1$) et l'hyper-ellipsoïde $\xi^T \mathcal{P} \xi = 1$ est plus grande que 1. D'ailleurs, nous entendons par distance entre un point et un hyper-ellipsoïde la distance entre un point et le point le plus proche sur l'hyper-ellipsoïde.

Un problème fondamental lié à la prise en compte du bruit est que les calculs doivent être suffisamment simples pour pouvoir les effectuer sur un ordinateur de bord. À titre d'exemple, les transformations affines que nous venons de présenter sont d'une complexité prohibitive et doivent donc être calculées au sol. Ceci est exactement notre intention.

Dans la suite, nous montrerons comment l'hyper-ellipsoïde $\xi^T \mathcal{P} \xi = 1$ et l'hyper-sphère $(\xi - \Xi)^T (\xi - \Xi) = 1$ (dont les expressions peuvent être calculées au sol) peuvent être exploités avec des moyens relativement simples afin de déterminer si l'hyper-ellipsoïde de covariance ε_S est situé entièrement dans l'hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV.

En principe, la surface de commutation prenant en compte le bruit est l'ensemble des points dont la distance du point le plus proche sur l'hyper-ellipsoïde est 1 (soi-disant surface parallèle). Cependant, cette surface n'est pas un hyper-ellipsoïde. En général, elle possède des sommets non-différentiables, comme le montre la FIG. 5.34. Tous ces faits font présumer qu'il n'existe pas d'expression analytique pour la surface parallèle d'un hyper-ellipsoïde. En effet, nous n'avons pas trouvé d'expression dans la littérature.

Faute d'expression analytique de la surface parallèle, nous sommes obligés de dériver un critère simple à calculer, mais conservatif. Ensuite, un critère exact pour déterminer si l'hyper-ellipsoïde de covariance est situé à l'intérieur de l'hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV sera développé.

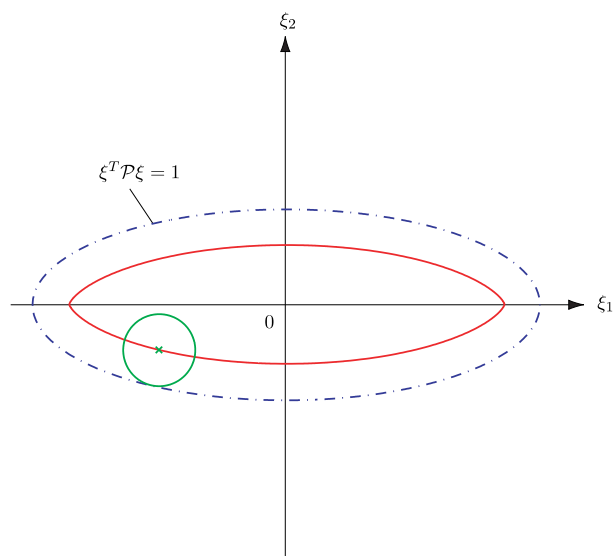


FIGURE 5.34 – Surface parallèle (en rouge continu) de distance 1 à l’hyper-ellipsoïde $\xi^T \mathcal{P} \xi = 1$ (en bleu tireté-pointillé). L’hyper-cercle unité (en vert continu), dont le centre se trouve sur la surface parallèle, illustre que tous les points à son intérieur sont compris dans l’hyper-ellipsoïde $\xi^T \mathcal{P} \xi = 1$. Ici, la surface parallèle possède deux non-différentiabilités situées aux extrémités horizontales.

Stratégie simple mais conservative

Considérons la FIG. 5.35. Elle illustre les hyper-ellipsoïdes de LYAPUNOV ($\xi^T \mathcal{P} \xi = 1$) et l’hyper-sphère de covariance ($(\xi - \Xi)^T (\xi - \Xi) = 1$) après la succession de transformations mentionnée ci-dessus.

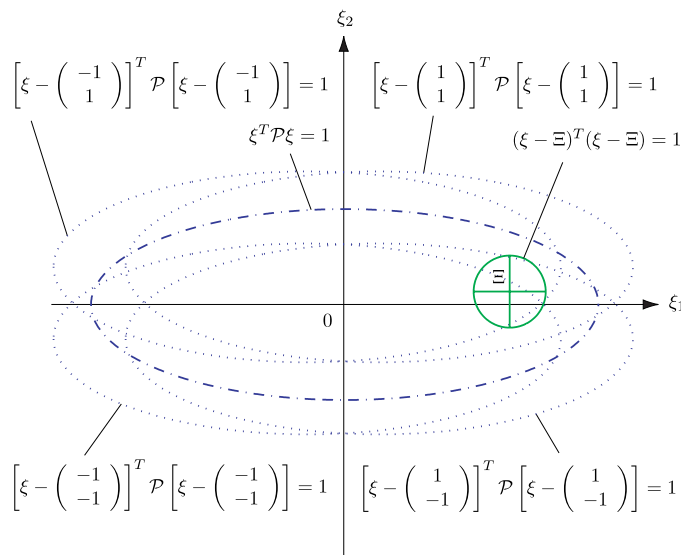


FIGURE 5.35 – Hyper-ellipsoïdes de LYAPUNOV (bleu tireté-pointillé) et de covariance (vert continu) dans le cas $n = 2$. Les lignes bleues pointillées correspondes à l’hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV, décalé de +1 et -1 selon tous les axes de coordonnées.

L’hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV transformé ($\xi^T \mathcal{P} \xi = 1$) peut être décalé de +1 et de -1 selon

tous les axes ξ_k . Par exemple, l'hyper-ellipsoïde de la FIG. 5.35, décalé de -1 selon l'axe ξ_1 et de $+1$ selon l'axe ξ_2 , s'écrit :

$$\left[\xi - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^T \mathcal{P} \left[\xi - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 1 \quad (5.105)$$

En total, il existe 2^n de ces hyper-ellipsoïdes décalés ($n = 30$ étant le nombre d'états du système), ce qui peut être un nombre considérable si n est élevé. Vu les symétries multiples des hyper-ellipsoïdes, la solution est de se restreindre au premier orthant. Les points ξ qui appartiennent à tous les hyper-ellipsoïdes décalés obéissent donc à l'équation suivante :

$$\left[|\xi| - \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \right]^T \mathcal{P} \left[|\xi| - \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \right] \leq 1 \quad (5.106)$$

Ici, $|\xi|$ est la projection du vecteur ξ dans le premier orthant, c'est-à-dire que le module de toutes les composantes de ξ est pris.

La FIG. 5.36 illustre le sens derrière le décalage de l'hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV. En fait, la distance de chaque point ξ de l'ensemble décrit par l'Éq. (5.106) du point le plus proche de l'hyper-ellipsoïde $\xi^T \mathcal{P} \xi = 1$ est supérieure à 1.

Ce fait est souligné par les petits carrés (hyper-cubes) dans la FIG. 5.36. Le décalage unitaire de l'hyper-ellipsoïde selon tous les axes, ainsi que sa convexité, font que tout hyper-cube de longueur 1 dont un sommet obéit à l'Éq. (5.106) n'intersecte pas l'hyper-ellipsoïde $\xi^T \mathcal{P} \xi = 1$.

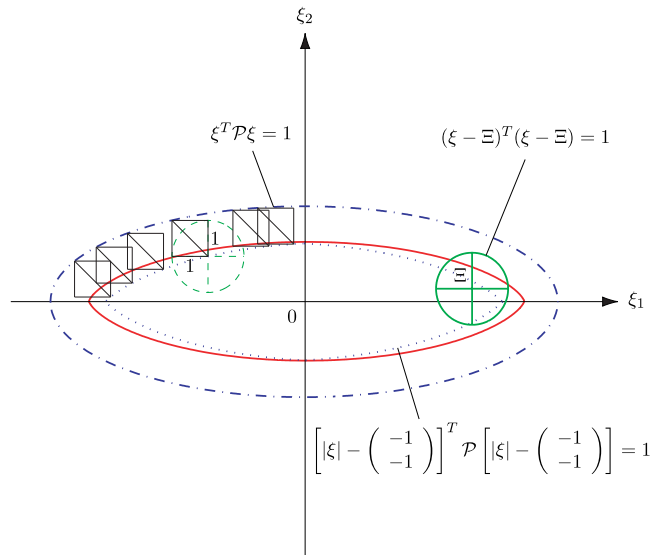


FIGURE 5.36 – Hyper-ellipsoïdes de LYAPUNOV (bleu tireté-pointillé) et de covariance (vert continu) avec limite de l'intersection des hyper-ellipsoïdes de LYAPUNOV décalés (bleu pointillé) et la surface parallèle (rouge continu). Visiblement, des hyper-cubes de longueur 1 dont un sommet se trouve sur la limite et des hyper-sphères de rayon 1 dont le centre se trouve sur la limite n'intersectent pas l'hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV.

Par conséquent, si le point Ξ appartient à l'ensemble décrit par l'Éq. (5.106), l'hyper-cube de longueur 1 dont un sommet est au point Ξ , ainsi que l'hyper-sphère de rayon 1 centrée au point Ξ , tiennent dans l'hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV.

Ceci nous donne un critère suffisant très simple. En effet, si

$$\underbrace{\left[|\Xi| - \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \right]^T}_{\tilde{\Xi}} \mathcal{P} \underbrace{\left[|\Xi| - \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \right]}_{\tilde{\Xi}} \leq 1, \quad (5.107)$$

alors la distance entre le point Ξ et le point le plus proche de l'hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV $\xi^T \mathcal{P} \xi = 1$ est supérieure à 1. Dans le cas contraire, aucun constat ne peut être fait.

La FIG. 5.36 souligne également le conservatisme introduit en utilisant l'hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV décalé. L'espace entre la ligne bleue pointillée (hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV décalé) et la ligne rouge continue (surface parallèle) n'est pas couvert par ce critère. Selon les proportions de l'hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV et de l'hyper-ellipsoïde de covariance, ceci peut avoir des effets plus ou moins prononcés. De manière générale, plus grand le rapport entre les tailles de l'hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV et l'hyper-ellipsoïde de covariance est important, moins de conservatisme est introduit.

La stratégie suivante peut alors être formulée :

Stratégie 2b : La commutation vers le mode suivant a lieu dès que la fonction $\tilde{\Xi}^T \mathcal{P} \tilde{\Xi}$ est inférieure à 1. Ceci implique que la probabilité que le vrai état x se trouve à l'intérieur de l'hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV et que tous les capteurs concernés fournissent une mesure est supérieure à la probabilité p choisie. Comme nous ne disposons pas du vrai état x , nous utilisons l'état du correcteur x_K .

Les détails de cette stratégie peuvent être décrits comme suit. X est l'état courant du correcteur x_K ($X = x_K$), c'est-à-dire l'estimée de l'état du système x . P est la matrice de LYAPUNOV obtenue dans l'optimisation LMI. $\tilde{\Xi}$ est le vecteur X transformé, puis projeté dans le premier orthant (module de toutes les composantes) et décalé de +1 selon tous les axes :

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi} &= |\Xi| + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= |M_3^T M_2^T M_1^T X| + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.108)$$

Enfin, \mathcal{P} est l'hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV transformé :

$$\mathcal{P} = M_3^T M_2^T M_1^T P M_1 M_2 M_3 \quad (5.109)$$

Il est important à noter que la matrice de transformation $M_3^T M_2^T M_1^T$ peut être calculée au sol si les matrices de LYAPUNOV P et de covariance R sont connues. Les calculs restants sont seulement des multiplications et des additions et donc très simples à effectuer sur un ordinateur de bord.

Les FIGS. 5.37 et 5.38 montrent les résultats d'une simulation utilisant la stratégie 2b. Ces résultats ne sont pas fondamentalement différents des résultats obtenus avec la stratégie 2a. Cependant, il est bien visible que le temps passé dans le mode 2 est beaucoup plus élevé en utilisant la stratégie 2b. Les chiffres exactes sont indiquées dans le TAB. 5.23 (page 254).

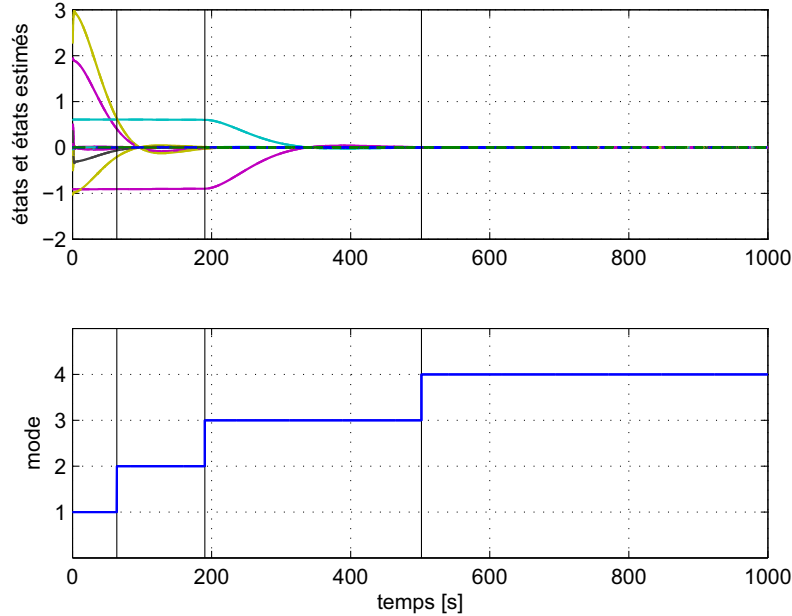


FIGURE 5.37 – Simulation dans laquelle la commutation est effectuée selon la stratégie 2b, c'est-à-dire dès que dès que la fonction $\tilde{\Xi}^T \mathcal{P} \tilde{\Xi}$ devient plus petite que 1. La partie supérieure trace l'évolution des états du système (lignes continues) et du correcteur (lignes tiretées, à peine visibles). La partie inférieure indique le mode actif en fonction du temps. Les lignes verticales noires sont les instants de commutation.

La FIG. 5.38 montre la fonction $\tilde{\Xi}^T \mathcal{P} \tilde{\Xi}$ pour les différents modes parcourus et la compare avec la fonction de LYAPUNOV $X^T P X$ utilisée dans la stratégie 2a. D'abord, il est bien visible que la fonction de LYAPUNOV est toujours inférieure. Ceci s'explique par le fait que la surface $\tilde{\Xi}^T \mathcal{P} \tilde{\Xi} = 1$ se trouve toujours à l'intérieur de la surface $X^T P X = 1$, cf. FIG. 5.36.

L'augmentation du temps passé dans le mode 2 s'explique par le fait que la fonction de LYAPUNOV devient plus petite que 1 rapidement, tandis que $\tilde{\Xi}^T \mathcal{P} \tilde{\Xi}$ arrête de décroître et recommence à s'accroître pour devenir plus petit que 1 quelque temps après. Ce phénomène est lié au fait que la fonction de LYAPUNOV n'est pas une fonction de LYAPUNOV du mode courant, mais du mode suivant.

Stratégie itérative et exacte

Nous avons déjà mentionné que le critère $\tilde{\Xi}^T \mathcal{P} \tilde{\Xi} \leq 1$ est seulement suffisant, mais pas nécessaire. Le critère nécessaire et suffisant est si la distance d entre le point $\Xi = M_3^T M_2^T M_1^T X$ et le point le plus proche de l'hyper-ellipsoïde $\xi^T \mathcal{P} \xi = 1$ est supérieure à 1.

Le point le plus proche d'un hyper-ellipsoïde n'est pas trivial à calculer. En effet, nous n'avons pas trouvé de méthode directe dans la littérature. Cependant, nous avons pu développer deux algorithmes itératifs capables de déterminer si la distance d est supérieure ou inférieure à 1. Les détails sont donnés dans l'Annexe I. Notamment, nous avons montré que ces algorithmes convergent et qu'ils n'ont besoin

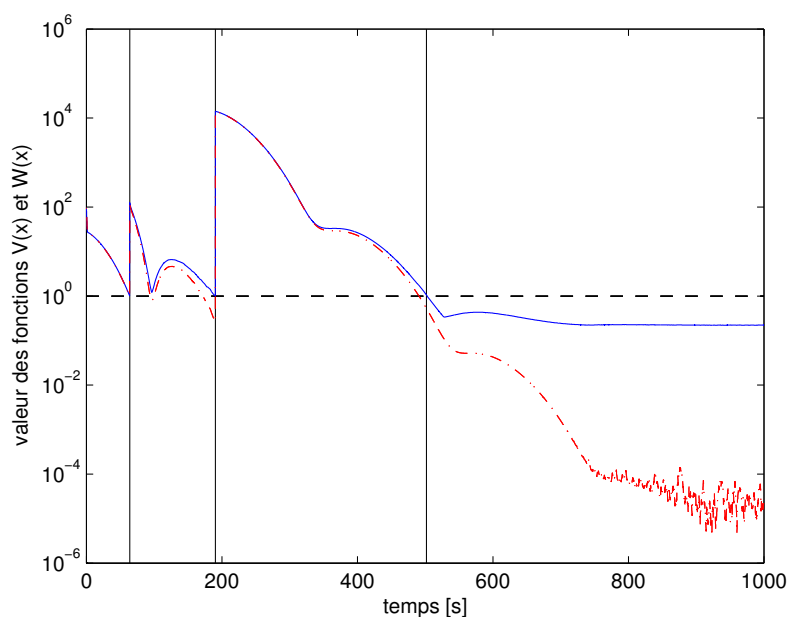


FIGURE 5.38 – Simulation dans laquelle la commutation est effectuée selon la stratégie 2b, c’est-à-dire dès que la fonction $\tilde{\Xi}^T \mathcal{P} \tilde{\Xi}$ devient plus petite que 1 (ligne horizontale noire tiretée). Illustration de la fonction $\tilde{\Xi}^T \mathcal{P} \tilde{\Xi}$ (ligne bleue continue) pour chaque mode. À titre de comparaison, la ligne rouge tiretée-pointillée indique la fonction de LYAPUNOV $X^T P X$. Les lignes verticales noires sont les instants de commutation.

que de moyens de calcul relativement modestes.

En ayant recours à un des deux algorithmes (n’importe lequel), nous pouvons proposer la stratégie de commutation suivante :

Stratégie 2c : La commutation vers le mode suivant a lieu dès que la fonction de LYAPUNOV $X^T P X$ est inférieure à 1 et que le calcul de distance d entre le point Ξ et l’hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV transformé $\xi^T \mathcal{P} \xi = 1$ fournit une valeur supérieure à 1. Ceci implique que la probabilité que le vrai état x se trouve à l’intérieur de l’hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV et que tous les capteurs concernés fournissent une mesure est supérieure à la probabilité p choisie. Comme nous ne disposons pas du vrai état x , nous utilisons l’état du correcteur x_K .

La FIG. 5.39 montre une simulation dans laquelle la stratégie 2c est utilisée.

Bien entendu, la stratégie 2c est plus coûteuse en termes de puissance de calcul requise, mais contrairement à la stratégie 2b, elle n’est pas conservatrice. Plus précisément, il n’y a pas de retard non nécessaire lié au conservatisme de la surface de commutation utilisée dans la stratégie 2b.

Un problème qui mérite d’être mentionné sont les soucis créés par l’utilisation de méthodes itératives. En fait, des méthodes qui viennent sans garantie d’obtenir la solution après un nombre prédéterminé d’itérations sont généralement inacceptables pour des applications spatiales. Cependant, le résultat fourni par un de nos algorithmes itératifs est restreint aux deux possibilités *oui* (la distance d est supérieure à 1) ou *non* (la distance d est inférieure à 1). Pour cette raison, si l’algorithme utilisé n’arrive pas à fournir une réponse avant l’expiration du temps alloué, il est toujours possible

de prendre la réponse (conservative) *non* par défaut et espérer que l'algorithme se termine lors du prochain appel.

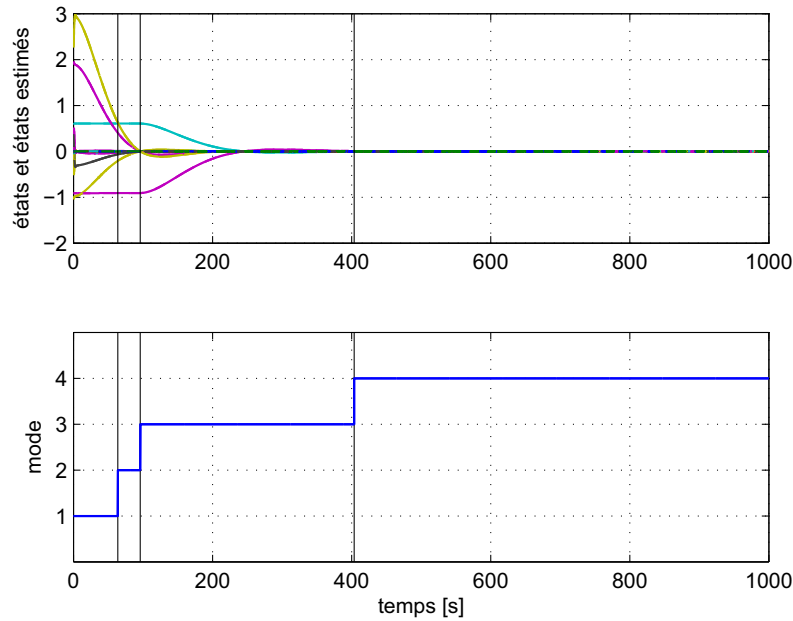


FIGURE 5.39 – Simulation dans laquelle la commutation est effectuée selon la stratégie 2c, c'est-à-dire dès que la distance d entre le point Ξ et l'hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV $\xi^T \mathcal{P} \xi = 1$ devient plus grande que 1. La partie supérieure trace l'évolution des états du système (lignes continues) et du correcteur (lignes tiretées, à peine visibles). La partie inférieure indique le mode actif en fonction du temps. Les lignes verticales noires sont les instants de commutation.

Stratégie combinée

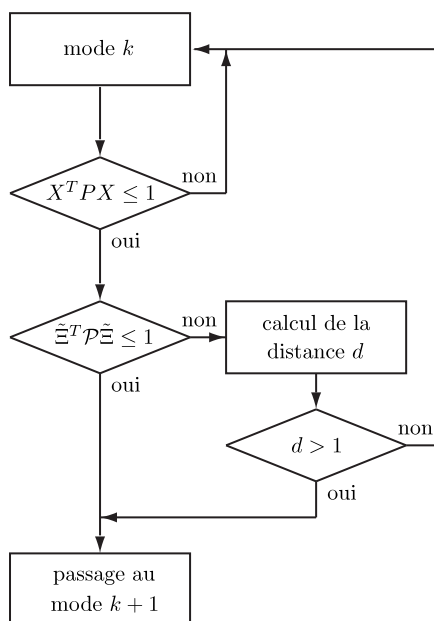
Une alternative plus intelligente réunit les avantages des stratégies 2a, 2b et 2c, tout en évitant leurs inconvénients :

Stratégie 2d : Afin que la commutation vers le mode suivant puisse avoir lieu, la fonction de LYAPUNOV $X^T P X$ doit être inférieure à 1. En outre, la condition $\tilde{\Xi}^T \tilde{\mathcal{P}} \tilde{\Xi} \leq 1$ doit être satisfaite. Si $\tilde{\Xi}^T \tilde{\mathcal{P}} \tilde{\Xi} > 1$, le calcul de distance d entre le point Ξ et l'hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV transformé $\xi^T \mathcal{P} \xi = 1$ doit fournir une valeur supérieure à 1. Ceci implique que la probabilité que le vrai état x se trouve à l'intérieur de l'hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV et que tous les capteurs concernés fournissent une mesure est supérieure à la probabilité p choisie. Comme nous ne disposons pas du vrai état x , nous utilisons l'état du correcteur x_K .

La stratégie est illustrée sous forme de schéma de flux dans la FIG. 5.40.

L'idée principale est de commencer par les calculs simples $X^T P X$ et de faire les calculs plus compliqués ($\tilde{\Xi}^T \tilde{\mathcal{P}} \tilde{\Xi}$, calcul de la distance d) seulement s'ils sont nécessaires pour obtenir une décision. Dans la plupart des cas, il suffira en pratique de calculer $X^T P X$.

Dans une implantation réelle, il est envisageable de raccourcir les calculs nécessaires afin de

FIGURE 5.40 – Algorithme de commutation entre le mode k et le mode $k + 1$

déterminer de façon itérative la distance d . Plus précisément, il est possible d’initialiser les algorithmes avec la valeur finale obtenue lors du dernier appel.

Nous ne montrons pas de simulation pour la stratégie 2d car les résultats d’une telle simulation sont identiques avec ceux de la stratégie 2c. Le seul changement est un temps de calcul potentiellement réduit.

5.5.5 Bilan

Le TAB. 5.22 résume les avantages et les inconvénients des trois stratégies 2a, 2b et 2c.

TABLE 5.22 – Avantages et inconvénients des trois stratégies de commutation 2a, 2b et 2c

Stratégie	Avantages	Inconvénients
2a	Simplicité de calcul	Pas de prise en compte du bruit
2b	Simplicité de calcul Prise en compte du bruit	Conservatisme
2c	Prise en compte du bruit Pas de conservatisme	Calcul itératif nécessaire
2d	Prise en compte du bruit Pas de conservatisme Simplicité de calcul dans la plupart de cas	Calcul itératif (parfois) nécessaire

Le TAB. 5.23 montre les temps de commutation pour les stratégies 2a, 2b, 2c et 2d. Pour la raison mentionnée ci-dessus, les résultats des stratégies 2c et 2d sont identiques.

TABLE 5.23 – Temps de commutation pour les stratégies 2a, 2b, 2c et 2d

Stratégie	Modes 1-2	Temps mode 2	Modes 2-3	Temps mode 3	Modes 3-4
2a	63,8 s	30,4 s	94,2 s	300,6 s	394,8 s
2b	64,0 s	126,5 s	190,5 s	311,4 s	501,9 s
2c/2d	63,9 s	32,2 s	96,1 s	307,5 s	403,6 s

Il est visible que l'utilisation de la stratégie 2b mène à des temps de commutation augmentés par rapport à la stratégie 2a, ce qui s'explique par la prudence accrue en prenant en compte le bruit.

Les stratégies 2c et 2d rattrapent la plus grande partie de la différence entre les stratégies 2a et 2b parce qu'elles n'introduisent pas de conservatisme lié à la détermination si l'hyper-ellipsoïde de covariance est compris dans l'hyper-ellipsoïde de LYAPUNOV. Ceci est particulièrement bien visible en regardant le temps passé dans le mode 2.

Nous pouvons également conclure à partir du TAB. 5.23 que l'impact du bruit n'est pas particulièrement important car les différences entre les stratégies 2a et 2c/2d sont assez limitées. Ceci explique pourquoi la stratégie 2a a bien fonctionné dès le départ. Cependant, ce constat concerne uniquement les correcteurs que nous avons synthétisés. Dans d'autres cas, par exemple avec d'autres spécifications, le bruit peut jouer un rôle déterminant et une commutation stable peut s'avérer impossible en utilisant la stratégie 2a.

Dans cette section, nous avons attaché beaucoup d'importance à développer des méthodes qui soient faciles à implanter sur un ordinateur de bord. Les calculs les plus lourds (en particulier la résolution de problèmes LMI et les transformations de coordonnées) peuvent être effectués au sol, tandis que les calculs nécessaires sur l'ordinateur de bord sont d'une complexité réduite.

Il est important de rappeler que l'estimateur doit avoir convergé, c'est-à-dire que l'espérance de l'erreur d'estimation est nulle et que la matrice de covariance a atteint sa valeur stationnaire. Pour cela, la dynamique de l'estimateur $A - K_f C_2$ doit être suffisamment rapide par rapport à la dynamique de retour d'état $A - B_2 K_c$.

La méthode que nous avons présentée offre de nombreuses perspectives dont nous aimerions mentionner quelques unes.

Par exemple, il est envisageable d'utiliser une fonction de LYAPUNOV commune pour deux modes successifs afin de garantir qu'elle décroît constamment, même avant la commutation. Ceci éviterait des phénomènes comme celui montré dans la FIG. 5.38 (temps excessif passé dans le mode 2).

En outre, nous pouvons utiliser plusieurs fonctions de LYAPUNOV $x^T P_i x$ afin de mieux remplir l'ensemble \mathcal{V} . Cette approche est illustrée dans la FIG. 5.41. La commutation peut alors être effectuée dès qu'au moins une des fonctions de LYAPUNOV $x^T P_i x$ devient plus petite que 1. Cependant, il n'est pas clair comment obtenir des hyper-ellipsoïdes complémentaires, c'est-à-dire comment donner priorité aux régions dans l'ensemble \mathcal{V} qui ne sont pas encore incluses dans les hyper-ellipsoïdes précédents.

Enfin, une perspective possible est d'appliquer notre méthode ou une variante de notre méthode à d'autres cas où des commutations sont nécessaires. Dans le cadre du vol en formation de vaisseaux spatiaux, le cas d'un capteur défaillant serait particulièrement intéressant.

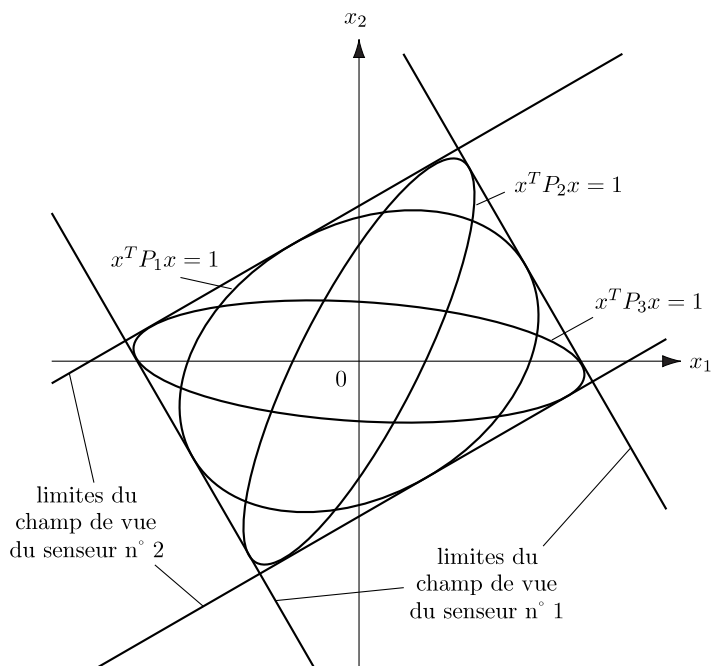


FIGURE 5.41 – Utilisation de plusieurs fonctions de LYAPUNOV $x^T P_i x$ pour mieux remplir l'ensemble \mathcal{V} .

5.6 Synthèse d'un correcteur décentralisé

Dans cette section, nous présenterons une approche afin de synthétiser des correcteurs décentralisés. Le critère d'optimisation reste la norme \mathcal{H}_2 du transfert en boucle fermée.

La matrice de transfert d'un correcteur centralisé comme nous l'avons vu dans les sections précédentes consiste en un seul bloc plein. Ceci signifie qu'il existe des transferts entre toutes les entrées du correcteur (les mesures y) et toutes les sorties du correcteur (les commandes u). Par conséquent, un correcteur centralisé doit disposer de la totalité des mesures et avoir le contrôle de tous les actionneurs utilisés.

En revanche, nous définissons un correcteur décentralisé de la manière suivante.

Définition 5.1 *Un correcteur décentralisé est un correcteur dont la matrice de transfert est diagonale par blocs. La même structure peut être retrouvée dans sa représentation d'état.*

La définition précédente implique que les ensembles des mesures $y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ et des commandes $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ sont divisées en N sous-ensembles y^k , $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ et u^k , $k \in \{1, 2, \dots, N\}$. Les N sous-ensembles y^k et u^k forment les ensembles y et u :

$$\begin{aligned} y &= \bigcup_k y^k \\ u &= \bigcup_k u^k \end{aligned} \tag{5.110}$$

En outre, nous supposons que les différents sous-ensembles y^k et u^k sont disjoints :

$$\begin{aligned} y^k \cap y^l &= \{\} \text{ pour } k \neq l \\ u^k \cap u^l &= \{\} \text{ pour } k \neq l \end{aligned} \quad (5.111)$$

Un correcteur local $K_k(s)$ ferme la boucle locale entre la mesure y^k et la commande u^k :

$$u^k = K^k(s)y^k \quad (5.112)$$

La FIG. 5.42 illustre la différence entre des correcteurs centralisé et décentralisé.

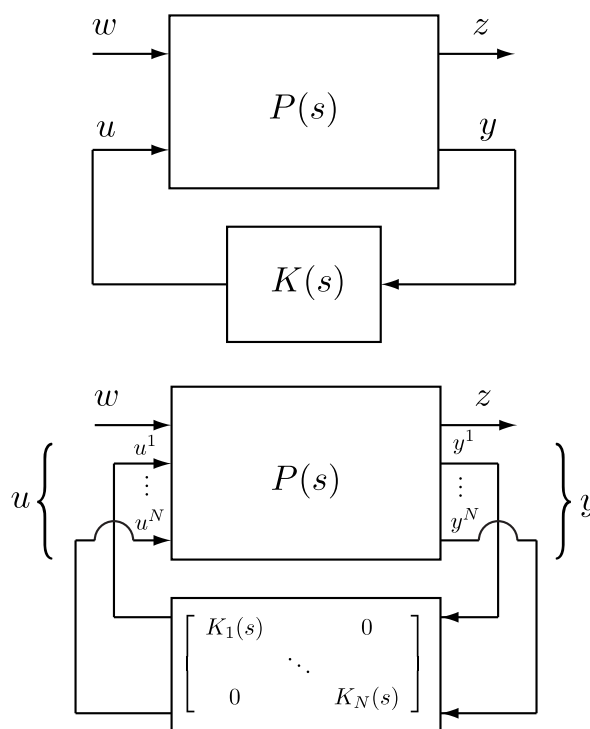


FIGURE 5.42 – Correcteur centralisé (en haut) et correcteur décentralisé (en bas)

Bien entendu, la commande décentralisée peut être définie différemment et de manière généralisée. Cependant, c'est la Définition 5.1 que nous retiendrons pour la suite de nos développements. Il est important à savoir que la commande décentralisée constitue un cas particulier de la *commande structurée*. Dans le cadre de la commande structurée, on essaie d'imposer une certaine structure au correcteur, par exemple un correcteur statique ou un correcteur à ordre fixe.

5.6.1 Motivation

La *commande décentralisée* a plusieurs avantages par rapport à la *commande centralisée*.

Tout d'abord, un correcteur centralisé implique que toutes les mesures y doivent être disponibles à un seul endroit, plus précisément l'endroit où le correcteur est embarqué. Or, si les capteurs fournissant ces mesures sont répartis dans l'espace, comme c'est le cas du vol en formation, il est indispensable

de transmettre les mesures avec des moyens de communication souvent coûteux. Concernant les commandes u , il en va de même. Le correcteur centralisé doit transmettre les commandes calculées à l'endroit où sont situés les actionneurs.

Typiquement, la communication de mesures engendre un retard dû au traitement des données avant et après la communication. Si ce retard est important, il doit être pris en compte lors de la synthèse du correcteur.

La fiabilité du lien de communication est une problématique à considérer également. Dans le cas d'une communication sans fil, la bonne et correcte réception n'est pas garantie car il peut y avoir des sources de perturbation, en particulier dans l'espace.

La commande décentralisée n'est pas assujettie aux contraintes dues à la communication. En outre, le fait que les correcteurs locaux $K^k(s)$ stabilisent seulement un sous-ensemble du système complet laisse espérer que les correcteurs locaux sont d'une complexité réduite et plus faciles à embarquer sur un calculateur de bord à puissance de calcul limitée.

La robustesse vis-à-vis de défaillances est un point supplémentaire en faveur de la commande décentralisée. Si un élément du système est défaillant, un correcteur centralisé n'arrivera plus, en général, à stabiliser le système complet. Dans le cas d'un correcteur décentralisé, le système peut rester opérationnel, pourvu que l'élément défaillant n'ait pas un rôle décisif.

Outre ces avantages, il faut également mentionner l'inconvénient de la commande décentralisée. Comme toutes les méthodes de synthèse de correcteurs structurés, la synthèse de correcteurs décentralisés est plutôt difficile à mettre en œuvre, comme le révélera la revue bibliographique.

5.6.2 Revue bibliographique

La synthèse de correcteurs décentralisés est un domaine de recherche actif avec de nombreuses publications chaque année. Pour cette raison, il est impossible de décrire toutes les méthodes existantes. Par conséquent, nous nous restreindrons à citer quelques publications susceptibles de donner une idée de la variété et de la complexité de ce sujet.

Un papier de SANDELL et al. [152] contient une revue d'un nombre important de publications sur la commande décentralisée et hiérarchisée. En particulier, les auteurs donnent une analyse détaillée de quelques propriétés de correcteurs LQG décentralisés :

- la loi de commande optimale centralisée au sens du critère LQG est linéaire, tandis que la loi optimale décentralisée peut être non-linéaire⁵ ;
- la loi de commande optimale centralisée au sens du critère LQG a un nombre d'états fini (c'est-à-dire une mémoire finie), tandis que la loi optimale décentralisée peut nécessiter un nombre d'états infini (c'est-à-dire une mémoire infiniment longue).

SANDELL et al. supposent que, à défaut d'une communication de mesures, d'entrées ou d'estimations d'états entre les correcteurs, la dynamique du système à asservir est utilisée afin de transmettre ces informations, comparable à une modulation. Cependant, la distinction entre la partie des signaux d'entrée dédiée à l'asservissement et celle dédiée à la transmission d'informations reste vague.

Un autre constat important est un phénomène que les auteurs appellent *second guessing* (fr. pronostiquer, prédire). Dans le cadre du LQG centralisé, le *théorème de séparation* (cf. l'Annexe H) fait que les états du correcteur sont des estimées des états du système. Or, dans le cadre décentralisé, le théorème de séparation n'est plus applicable, ce qui devient clair grâce au raisonnement suivant.

5. *Peut* veut dire que pour certains cas spéciaux, des correcteurs non-linéaires ont été trouvés qui étaient plus performants que le meilleur correcteur linéaire.

Soit un système avec deux correcteurs locaux et le premier correcteur est composé d'un estimateur des états du système et d'un retour de ces états. Les deuxième correcteur devrait alors consister en un estimateur et d'un retour des états du système et des états du premier correcteur. La répétition de ce constat montre alors qu'aucun des deux correcteurs ne peut avoir un nombre fini d'états.

Selon SKOGESTAD et POSTLETHWAITE [163], il existe trois catégories fondamentales pour la synthèse d'un correcteur décentralisé :

- *synthèse entièrement coordonnée* : Dans cette approche, tous les correcteurs $K_k(s)$ sont synthétisés à la fois, ce qui, théoriquement, représente l'approche optimale. Cependant, du fait de la complexité de la tâche, des correcteurs décentralisés sont rarement synthétisés de façon coordonnée ;
- *synthèse indépendante* : Dans cette approche, on considère la partie diagonale par blocs du système en boucle ouverte afin de synthétiser les correcteurs locaux $K_k(s)$. Il faut être très prudent lors de la synthèse du fait des couplages à l'intérieur du système en boucle ouverte. Il existe des règles permettant de stabiliser le système et d'obtenir de bonnes performances en boucle fermée ;
- *synthèse séquentielle* : Dans cette approche, les correcteurs locaux $K_k(s)$ sont synthétisés un par un. Les correcteurs déjà synthétisés sont pris en compte lors de la synthèse d'un nouveau correcteur. Cette approche permet d'obtenir un correcteur dans le cas où la synthèse indépendante échoue à cause de forts couplages.

La synthèse entièrement coordonnée demande souvent la résolution d'un problème d'optimisation non-convexe. Par exemple, SAFONOV et al. [151] proposent une approche utilisant le cadre méthodologique des *inégalités matricielles bilinéaires* (*angl.* bilinear matrix inequalities, BMI) afin d'effectuer une synthèse μ/k_m décentralisée.

GEROMEL et al. [59] conçoivent une méthode pour synthétiser des correcteurs décentralisés sous-optimaux au sens de la norme \mathcal{H}_2 . Il résolvent un problème d'optimisation basé sur des *inégalités matricielles non-linéaires* (*angl.* nonlinear matrix inequalities, NMI). Les faibles dimensions choisies pour les exemples pratiques font sentir que cette méthode est restreinte à des problèmes de petite taille.

SCORLETTI et DUC [159] développent une méthode de synthèse \mathcal{H}_∞ décentralisée. Le problème est formulé sous forme de NMI et peut être réduit à des LMI si les sous-systèmes sont mono-entrée mono-sortie. Les auteurs mentionnent la complexité de calcul liée à la résolution du problème d'optimisation.

LANGBORT et al. [94] considèrent un système complet composé de plusieurs sous-systèmes interconnectés. Le correcteur est supposé avoir le même graphe d'interconnexion que le système. Par conséquent, il en va de même pour le système en boucle fermée. Cette structure permet de trouver un correcteur \mathcal{H}_∞ en résolvant un problème LMI.

SEATZU et al. [160] synthétisent un correcteur à retour d'état décentralisé (c'est-à-dire diagonal) minimisant la norme \mathcal{H}_2 du transfert en boucle fermée. L'optimisation est effectuée directement sur les gains de la matrice de retour d'état. L'exemple présenté est de très faible taille (deux états) et ne permet pas de conclure que cette méthode est applicable à des problème de plus grande taille.

ZUO et NAYFEH [208] considèrent le problème d'optimiser le paramètres d'une suspension passive d'une voiture, c'est-à-dire les raideurs et les amortissements. Ceci correspond à un problème de retour statique de sortie décentralisé. Le critère d'optimisation est une norme \mathcal{H}_2 afin d'augmenter le confort des passagers. Les auteurs résolvent ce problème grâce à des multiplicateurs de LAGRANGE et une méthode d'optimisation utilisant le gradient du critère.

SEBE [161] synthétise des correcteurs \mathcal{H}_∞ décentralisés en utilisant la paramétrisation de YOULA.

À partir d'un correcteur stabilisant existant, une procédure itérative améliore la norme \mathcal{H}_∞ et fournit un correcteur sous-optimal. L'approche proposée généralise des approches de synthèse coordonnée et séquentielle présentées dans d'autres publications de l'auteur. Cependant, nous avons constaté que cette méthode est difficile à mettre en œuvre en pratique.

ERWIN et al. [53] trouvent un correcteur sous-optimal au sens de la norme \mathcal{H}_2 en changeant directement les gains des correcteurs locaux. Les auteurs présentent cette approche dans le cadre de la synthèse de correcteurs structurés, par exemple de correcteurs à ordre fixe. Leur méthode est basée sur des multiplicateurs de LAGRANGE et utilise le gradient de la fonction objective afin de la minimiser. La méthode est illustrée grâce à un exemple non-trivial. La méthode a besoin d'un correcteur initial, ce qui pose un problème si le système est naturellement instable.

CLAVEAU et CHEVREL [40] considèrent les systèmes triangulaires par blocs, comme des formations de véhicules se déplaçant sous forme de chaîne. Les auteurs présentent deux méthodes de synthèse \mathcal{H}_2 décentralisée, une méthode séquentielle simple et une méthode séquentielle itérative. Chaque synthèse individuelle est basée sur le système partiellement bouclé, c'est-à-dire avec tous les correcteurs locaux sauf celui qui est en cours de synthèse. La deuxième méthode requiert un correcteur initial. La convergence du critère \mathcal{H}_2 vers un minimum local est démontré et un exemple souligne la pertinence de la méthode.

L'importance de la commande décentralisée dans le cadre du vol en formation de vaisseaux spatiaux a été soulignée par plusieurs auteurs.

CARPENTER [32] conçoit un correcteur décentralisé LQG pour une formation de satellites en orbite terrestre. Cependant, comme les dynamiques des membres de la formation sont exprimées par rapport à un point de référence fictif, les mesures ne dépendent que des états locaux et les entrées n'influent que sur les états locaux. Le problème de la synthèse LQG décentralisée est donc largement simplifié.

FERGUSON et HOW [54] comparent différentes méthodes d'estimation centralisée et décentralisée, d'ordre plein et d'ordre réduit. En outre, la formation de vaisseaux spatiaux est subdivisée en plusieurs niveaux hiérarchiques.

VANDYKE [181] considère le contrôle décentralisé des attitudes des membres d'une formation de vaisseaux spatiaux. La loi de commande utilise un retour de vitesses angulaires et de quaternions. Elle utilise à la fois des angles absolus et relatifs et suppose une architecture de coordination prédéfinie. La stabilité de la loi de commande est démontrée grâce à l'analyse de LYAPUNOV.

MANDUTIANI et al. [118] proposent un système multi-agent afin de répartir l'intelligence embarquée à travers une formation de vaisseaux spatiaux. Bien que les auteurs ne traitent pas les détails concernant la synthèse de correcteurs, ils identifient beaucoup de problèmes liés à la coordination et au contrôle décentralisé d'une formation.

5.6.3 Description de la méthode

La méthode que nous proposons dans cette section est un mélange entre une synthèse entièrement coordonnée et une synthèse séquentielle. Chaque itération de notre méthode, mais aussi l'étape d'initialisation, correspond à une synthèse séquentielle. Les synthèses sont néanmoins coordonnées grâce à une approche itérative.

La méthode que nous avons développée ressemble à celle présentée par CLAVEAU et CHEVREL [40] pour des systèmes triangulaires par blocs. Bien que nous ne puissions pas réclamer d'avoir publié cette approche pour la première fois, nous l'avons néanmoins perfectionnée et généralisée afin qu'elle puisse

synthétiser des correcteurs pour des systèmes de taille réaliste.

Forme standard

Le point de départ de notre algorithme de synthèse est une forme standard $P(s)$ comme celle montrée dans la FIG. 5.5. Au lieu de synthétiser un correcteur plein reliant toutes les sorties y et toutes les entrées u , nous aimerions disposer d'un correcteur diagonal par blocs. La différence est illustrée dans la FIG. 5.42.

La revue bibliographique a révélé qu'une synthèse entièrement coordonnée, par exemple en utilisant une formulation à l'aide de BMI ou de NMI, est très difficile à mettre en œuvre et fournit tout de même un correcteur sous-optimal. Ce fait nous a menés à considérer optimiser seulement un des N blocs du correcteur $K(s)$, $K_k(s)$, à la fois.

Supposons qu'il existe un correcteur $K^i(s) = \text{diag}(K_1^i(s), K_2^i(s), \dots, K_N^i(s))$ qui possède la structure désirée, qui stabilise la forme standard $P(s)$ et qui fournit une certaine performance \mathcal{H}_2 :

$$J^i = \|\mathcal{F}_l(P(s), K^i(s))\|_2 \quad (5.113)$$

Ici, i fait référence à la i -ième itération de l'algorithme. \mathcal{F}_l est la transformation linéaire fractionnaire (LFT) inférieure (*angl.* lower linear fractional transformation) :

$$\mathcal{F}_l(P(s), K(s)) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s) \quad (5.114)$$

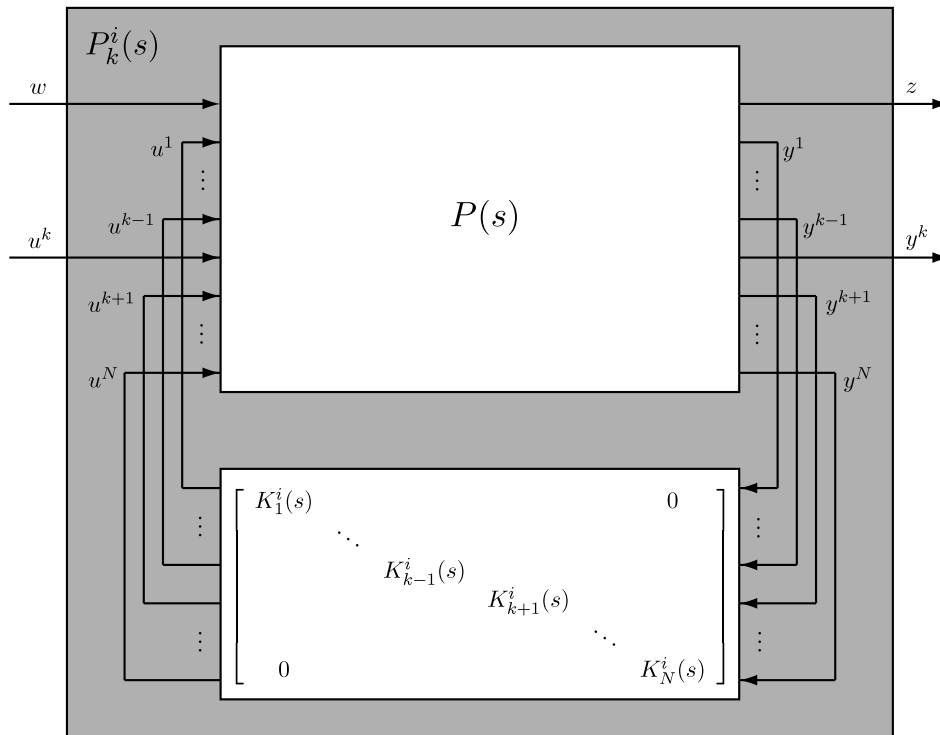


FIGURE 5.43 – Nouvelle forme standard $P_k^i(s)$ après bouclage de tous les correcteurs sauf $K_k^i(s)$

Vu que le correcteur $K^i(s)$ est disponible sous forme diagonale par blocs, il est facile d'isoler un

des blocs du correcteur, de l'extraire du schéma et de couper ses connexions avec le reste du schéma. La nouvelle forme standard $P_k^i(s)$ qui résulte de ces opérations est illustrée dans la FIG. 5.43.

En utilisant la forme standard $P_k^i(s)$ et grâce à la synthèse \mathcal{H}_2 , cf. l'Annexe H, un correcteur K_k^{i+1} peut être synthétisé. Le nouveau correcteur $K^{i+1}(s)$ peut être assemblé à partir de l'ancien correcteur $K^i(s)$ de la manière suivante :

$$K^{i+1}(s) = \text{diag}(K_1^i(s), \dots, K_{k-1}^i, K_k^{i+1}, K_{k+1}^i, \dots, K_N^i) \quad (5.115)$$

Quel est maintenant la valeur ajoutée du nouveau correcteur $K^{i+1}(s)$ par rapport à l'ancien correcteur $K^i(s)$? En effet, l'ancien correcteur local $K_k^i(s)$, appliqué à la forme standard $P_k^i(s)$, donnait la performance J^i . En le remplaçant par le nouveau correcteur $K_k^{i+1}(s)$, on observe la relation suivante entre les performances J^i et J^{i+1} :

$$J^{i+1} \leq J^i \quad (5.116)$$

En d'autres termes, la synthèse d'un nouveau correcteur local pour la boucle k mène à la non-croissance de la performance J . Ce fait est le résultat immédiat de l'optimalité de la synthèse \mathcal{H}_2 . Le correcteur $K_k^{i+1}(s)$ est par définition optimal au sens de la norme \mathcal{H}_2 , l'ancien correcteur $K_k^i(s)$ ne l'était pas nécessairement. Par conséquent, J^{i+1} est inférieur ou égal à J^i .

Cette procédure peut être répétée pour d'autres boucles \tilde{k} du système autant de fois que l'on le souhaite. Il y a pourtant une exception évidente. Dans le cas de deux synthèses successives sur la même boucle, ni le correcteur, ni la performance change. Pour cette raison, nous interdisons deux synthèses successives sur la même boucle :

$$k(i+1) \neq k(i) \quad (5.117)$$

Algorithme de synthèse décentralisée

Toutes ces observations nous permettent d'établir un algorithme de synthèse d'un correcteur décentralisé, cf. FIG. 5.44.

La suite des performances $\{J^i\}$ est une suite non-croissante. En outre, il est possible de donner deux bornes inférieures pour la suite $\{J^i\}$:

- J^i est toujours non-négatif ($J^i \geq 0$) car il s'agit d'une norme (la norme \mathcal{H}_2) dont une propriété essentielle est la non-négativité;
- J^i est toujours plus grand que ou au moins égal à la valeur de la performance dans le cas centralisé ($J^i > J_C$) car le correcteur centralisé fournit la performance optimale et n'est pas assujéti à des contraintes de structure.

À cause de la non-croissance de la suite $\{J^i\}$ et l'existence d'une borne inférieure, nous pouvons conclure que la série est convergente.

La valeur J^∞ vers laquelle elle converge représente un minimum local du problème de synthèse d'un correcteur décentralisé. Malheureusement, il n'existe aucune garantie pour que l'on trouve le correcteur globalement optimal. Ce fait a souvent été mentionné dans la littérature et ne constitue pas un inconvénient de notre méthode vis-à-vis d'autres méthodes. En général, le problème de synthèse d'un correcteur décentralisé est non-convexe et possède donc souvent plusieurs optima locaux.

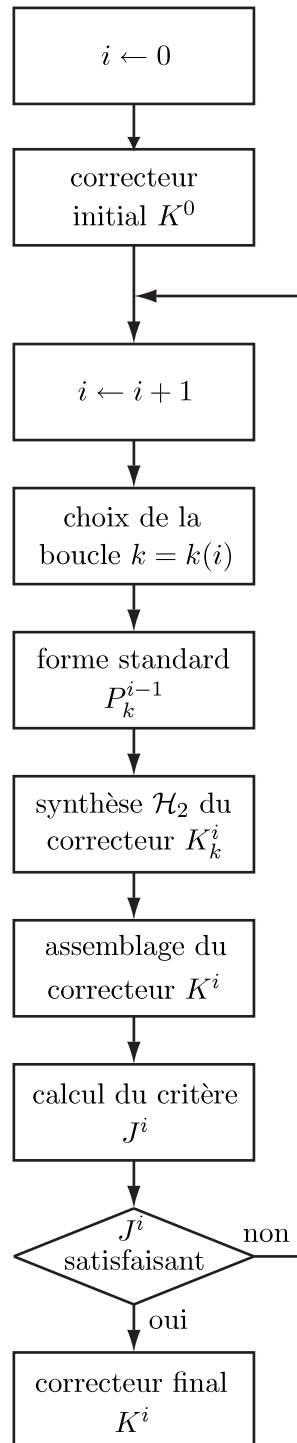


FIGURE 5.44 – Algorithme de synthèse décentralisée

Croissance de l'ordre du correcteur

Un problème qui est important à noter est la croissance de l'ordre du correcteur. En effet, le nombre d'états du correcteur $K_{k(i)}^i$, $n(K_{k(i)}^i)$, vaut

$$\begin{aligned} n(K_{k(i)}^i) &= n(P_{k(i)}^{i-1}) \\ &= n(P) + \sum_{l=1}^N n(K_l^{i-1}) - n(K_{k(i)}^{i-1}) \end{aligned} \quad (5.118)$$

Ici, la boucle k pour laquelle un correcteur doit être synthétisé est une fonction de l'itération i :

$$k = k(i) \quad (5.119)$$

Après $M \geq 2$ synthèses, le correcteur pour la boucle initiale est synthétisé de nouveau :

$$k(i+M) = k(i) \quad (5.120)$$

Nous supposons que chaque correcteur est synthétisée au maximum une fois entre les itérations i et $i+M$. Par conséquent, $M \leq N$. Il vient :

$$\begin{aligned} n(K_{k(i+1)}^{i+1}) &= n(P_{k(i+1)}^i) \\ &= n(P) + \sum_{l=1}^N n(K_l^i) - n(K_{k(i+1)}^i) \\ &= n(P) + \sum_{l=1}^N n(K_l^{i-1}) - n(K_{k(i)}^{i-1}) + n(K_{k(i)}^i) - n(K_{k(i+1)}^i) \\ &= 2n(K_{k(i)}^i) - n(K_{k(i+1)}^i) \end{aligned} \quad (5.121)$$

Ceci nous fournit une équation récurrente pour calculer le changement de l'ordre du correcteur :

$$n(K_{k(i+l)}^{i+l}) = 2n(K_{k(i+l-1)}^{i+l-1}) - n(K_{k(i+l)}^{i+l-1}) \quad (5.122)$$

Comme la boucle $k(i+l)$, $0 < l \leq M$, n'est synthétisée qu'une seule fois entre $l=1$ et $l=M$, nous pouvons remplacer $K_{k(i+l)}^{i+l-1}$ par $K_{k(i+l)}^i$:

$$n(K_{k(i+l)}^{i+l}) = 2n(K_{k(i+l-1)}^{i+l-1}) - n(K_{k(i+l)}^i) \text{ pour } 0 < l \leq M \quad (5.123)$$

L'application répétée de l'Éq. (5.123) nous permet d'écrire le nombre d'états du correcteur $K_{k(i)}^{i+M}$:

$$n(K_{k(i)}^{i+M}) = 2^M \left[n(K_{k(i)}^i) - \sum_{l=1}^M 2^{-l} n(K_{k(i+l)}^i) \right] \quad (5.124)$$

La différence entre le nombre d'états du correcteur $K_{k(i)}^{i+M}$ et celui du correcteur $K_{k(i)}^i$ s'écrit

maintenant comme suit :

$$\begin{aligned} n(K_{k(i)}^{i+M}) - n(K_{k(i)}^i) &= 2^M \left[(1 - 2^{-M})n(K_{k(i)}^i) - \sum_{l=1}^M 2^{-l}n(K_{k(i+l)}^i) \right] \\ &= 2^M \left[(1 - 2^{1-M})n(K_{k(i)}^i) - \sum_{l=1}^{M-1} 2^{-l}n(K_{k(i+l)}^i) \right] \end{aligned} \quad (5.125)$$

Du fait de la forme standard (qui comprend tous les correcteurs actuellement disponibles sauf celui qui doit être synthétisé), le nombre d'états du correcteur $K_{k(i)}^i$ est certainement supérieur à la somme des nombres d'états des $M - 1$ autres correcteurs lors de la première itération :

$$n(K_{k(i)}^i) > \sum_{l=1}^{M-1} n(K_{k(i+l)}^{i-1}) = \sum_{l=1}^{M-1} n(K_{k(i+l)}^i) \quad (5.126)$$

Comme $1 - 2^{1-M} \geq 2^{-1}$, le terme $\sum_{l=1}^{M-1} 2^{-l}n(K_{k(i+l)}^i)$ dans l'Éq. (5.125) est inférieur au terme $(1 - 2^{1-M})n(K_{k(i)}^i)$. Par conséquent, le nombre d'états du correcteur local $K_{k(i)}^{i+M}$ est supérieur à celui du correcteur local $K_{k(i)}^i$:

$$n(K_{k(i)}^{i+M}) > n(K_{k(i)}^i) \quad (5.127)$$

Ces développements montrent la croissance de l'ordre d'un correcteur pour une boucle $k(i)$ donnée entre deux synthèses. La démonstration générale, c'est-à-dire si l'on permet des synthèses répétées d'autres boucles entre i et $i + M$, est plus difficile, mais il est clair que cela ne peut qu'aggraver l'explosion des nombres d'états des correcteurs concernés.

Hypothèses de l'existence et de l'unicité de la solution

Comme nous l'avons décrit dans l'Annexe H, il est indispensable de vérifier les hypothèses de l'existence et de l'unicité de la solution pour faire fonctionner la synthèse \mathcal{H}_2 .

Les hypothèses (H2), (H5) et (H6) n'ont aucun rapport avec le fait que la synthèse est centralisée ou décentralisée. En d'autres termes, si la forme standard $P(s)$ utilisée pour la synthèse centralisée vérifie ces hypothèses, la forme standard $P_k^i(s)$ les vérifie également. Ceci paraît évident parce que le correcteur ne possède pas de transmission directe.

L'hypothèses (H1) n'est pas difficile à satisfaire non plus. En effet, supposons que nous disposons de correcteurs locaux initiaux $K_k^0(s)$. L'ensemble de ces correcteurs stabilise la forme standard $P(s)$. Maintenant, nous coupons un des correcteurs locaux pour en synthétiser un nouveau. Le fait que ce correcteur coupé stabilisait (avec les autres correcteurs toujours bouclés) la forme standard $P(s)$ démontre alors que les mesures et les entrées concernées suffisent pour stabiliser le système et qu'elles le rendent stabilisable et détectable.

L'hypothèse (H7) est certainement la moins évidente à satisfaire. Cependant, une astuce simple permet de rendre la forme standard $P_k^i(s)$ stabilisable et détectable par les entrées de bruit w et les sorties contrôlées z . Il suffit de copier les entrées de commande u^k , de les multiplier par un gain très faible et de les inclure parmi les entrées de bruit w . Concernant les sorties mesurées y^k , elles sont copiées, multipliées par un gain très faible et incluses parmi les sorties contrôlées z . Souvent, la forme standard comprend déjà assez d'entrées de bruit et de sorties contrôlées pour rendre inutile ce genre

d'astuce.

Le fait de satisfaire les hypothèses (H6) et (H7) permet d'ignorer les hypothèses (H3) et (H4), cf. l'Annexe H.

Outre ces hypothèses de régularité, le problème d'optimisation doit être numériquement bien conditionné. Cependant, nous avons constaté que la croissance du nombre d'états des correcteurs mène à un mauvais conditionnement après seulement quelques itérations de l'algorithme. Ceci s'explique par la croissance en taille des équations de RICCATI.

Initialisation

Concernant l'initialisation de l'algorithme, il n'existe pas de recette miracle. Cependant, il est important de noter que le correcteur décentralisé initial n'a pas besoin de fournir une très bonne performance. En principe, il suffit qu'il stabilise le système et qu'il possède la structure décentralisée souhaitée.

Dans le cas d'un système naturellement stable, on peut utiliser des matrices nulles comme correcteurs locaux initiaux.

Si le système se trouve à la limite de stabilité, il est souvent possible de trouver un correcteur décentralisé à bande passante très faible.

Un système naturellement instable permet éventuellement d'avoir recours à une des méthodes présentées dans la revue bibliographique pour initialiser notre algorithme. Une modification conservative du système, par exemple une dégradation ou une suppression de capteurs, peut permettre une synthèse séquentielle.

Algorithme amélioré de synthèse décentralisée

Afin de résoudre le problème de la croissance du nombre d'états des correcteurs, nous proposons une version améliorée de notre algorithme de synthèse décentralisée qui est illustrée dans la FIG. 5.45.

Le seul changement par rapport à l'algorithme initial est l'insertion d'une étape de réduction du correcteur synthétisé $K_k^i(s)$ (rectangle gris). L'approche principale de l'algorithme reste inchangée.

Nous avons considéré plusieurs endroits dans l'algorithme de synthèse afin d'insérer une réduction. Par exemple, il paraît aussi intéressant de réduire la forme standard $P_k^{i-1}(s)$ directement avant la synthèse du correcteur $K_k^i(s)$. Cependant, nous avons constaté que la réduction du correcteur directement après la synthèse fournit les meilleurs résultats.

La méthode de réduction que nous avons choisie, après en avoir considéré plusieurs, profite de la forme estimation-commande des correcteurs \mathcal{H}_2 en utilisant la décomposition en facteurs premiers. Il s'agit d'une *troncature balancée avec pondération fréquentielle*. Elle est décrite en détail dans l'Annexe J.

Chaque réduction d'un correcteur local prend en compte la dynamique en boucle fermée et peut ainsi garantir la stabilité du système en boucle fermée. De ce point de vue, cette méthode de réduction est supérieure à une simple réduction de modèles.

La méthode de réduction choisie permet deux degrés de liberté afin d'influencer le résultat, c'est-à-dire la taille et la qualité du correcteur réduit. En effet, il existe les deux possibilités suivantes :

- indication de la précision relative de la réduction ;
- indication du nombre d'états souhaité pour le correcteur réduit.

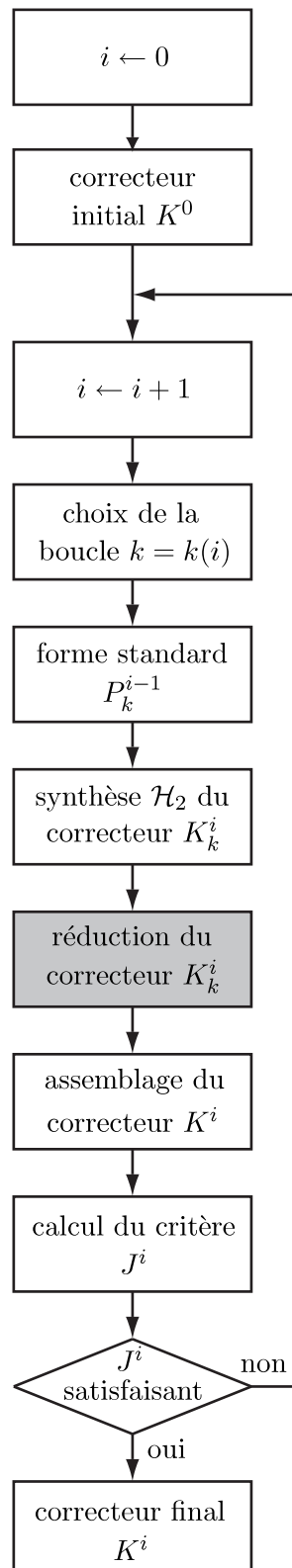


FIGURE 5.45 – Algorithme amélioré de synthèse décentralisée

La deuxième approche signifie qu'il faut déterminer à la main le nombre minimum d'états que l'on peut atteindre. Nous verrons dans la suite que les deux approches fournissent des résultats comparables. Une décision en faveur d'une des deux approches est donc une question de goût et doit être faite au cas par cas.

5.6.4 Application au vol en formation et résultats

Dans cette section, nous appliquerons l'approche de commande décentralisée que nous venons de présenter au vol en formation, plus précisément au mode d'observation de la mission *Pegase*, cf. FIG. 5.22.

Tout d'abord, nous rappelons l'existence de couplages entre les trois vaisseaux de la mission *Pegase*. S'il n'existait aucun couplage, la synthèse décentralisée serait simple. Dans ce cas, il est possible d'effectuer une synthèse indépendante tout en atteignant la performance optimale.

Cependant, vu les couplages qui existent, une synthèse indépendante ne peut pas aboutir à un correcteur optimal au sens de la norme \mathcal{H}_2 . Pour cette raison, nous avons préconisé la méthode de synthèse décentralisée que nous avons décrite précédemment.

La FIG. 5.46 illustre les couplages au sein de la formation *Pegase*. Dans cette figure, tous les états dynamiques (en d'autres termes les translations et les orientations des vaisseaux) sont compris dans les bulles portant les noms des différents vaisseaux.

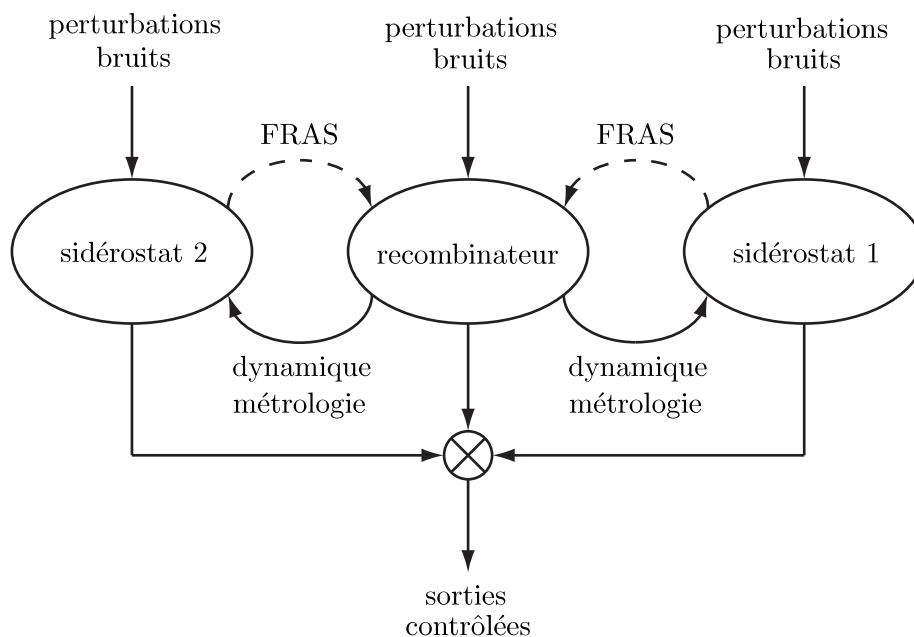


FIGURE 5.46 – Couplages entre les trois vaisseaux spatiaux de la mission *Pegase*. Tous les états dynamiques sont compris dans les bulles portant les noms des différents vaisseaux.

Les flèches verticales en haut de la figure indiquent les entrées exogènes telles que les perturbations orbitales et les bruits de mesure et d'actuation.

Les flèches commençant au recombineur et allant vers les deux sidérostas illustrent les couplages dûs à la dynamique et à la métrologie. En effet, si le recombineur se déplace en attitude ou en translation, les attitudes et translations relatives des deux sidérostas changent également immédiatement.

Par conséquent, les états et les mesures locales des sidérostats sont affectés.

Plus particulièrement, les flèches tirtées intitulées *FRAS* représentent les couplages entre les sidérostats et le recombineur dûs aux capteurs d'incidence du faisceau optique. Ce senseur est, dans le cadre de l'instrumentation que nous avons décrite, la seule source de couplage des sidérostats vers le recombineur. Par conséquent, ils ferment une sorte de boucle dynamique entre le recombineur et les sidérostats. Si les *FRAS* n'existaient pas, il serait possible de stabiliser chacun des vaisseaux indépendamment. Cependant, la présence des *FRAS* peut mener à l'instabilité lors d'une synthèse indépendante. Nous verrons dans la suite comment nous pouvons profiter de cette connaissance et du fait que la formation est observable en l'absence des *FRAS* afin d'obtenir un correcteur initial.

Enfin, les flèches en bas de la FIG. 5.46 soulignent qu'il existe également un couplage au niveau des sorties contrôlées. En fait, les vaisseaux de la formation tentent de remplir un objectif commun, par exemple de garantir une certaine performance au niveau de la différence de marche.

Initialisation

La recherche d'un correcteur initial se présente relativement simple, bien que nous ne disposions pas d'un système naturellement stable. En effet, nous avons choisi d'effectuer des synthèses indépendantes pour les trois vaisseaux.

Comme nous venons de mentionner, l'existence du *FRAS* complique cette tâche. Pour cette raison, nous le supprimerons pendant l'étape de la synthèse du correcteur initial. Ceci n'a aucun effet sur l'observabilité et donc la stabilité du système, mais nous risquons de dégrader la performance en boucle fermée. Ce fait n'est pas très grave car l'initialisation n'est que la première parmi de multiples itérations pendant lesquelles nous avons l'occasion d'améliorer la performance en prenant en compte le *FRAS*.

La suppression du *FRAS* coupe les boucles entre les états dynamiques des différents vaisseaux. Par conséquent, nous pouvons synthétiser des correcteurs indépendamment pour chaque vaisseau sans devoir nous préoccuper de la stabilité de la formation. Plus précisément, le comportement en boucle fermée du recombineur a un effet sur les sidérostats, mais pas à l'inverse.

TABLE 5.24 – Croissance de l'ordre du correcteur sans réduction

Itération	Ordre Rec.	Ordre Sid. 1	Ordre Sid. 2
0	6	12	12
1	54	12	12
2	54	96	12
3	54	96	180
4	306	96	180
5	306	516	180
6	306	516	852
7	1398	516	852
8	1398	2280	852
9	1398	2280	3708

Plus tôt dans ce chapitre, nous avons vu que les dynamiques du recombineur et des sidérostats comportent 6 et 12 états dynamiques, respectivement. Pour cela, les correcteurs initiaux \mathcal{H}_2 pour le recombineur et les sidérostats ont 6 et 12 états, respectivement, voir la première ligne du TAB. 5.24.

La performance atteinte par le correcteur initial n'est pas très satisfaisante par rapport au correcteur centralisé. La norme \mathcal{H}_2 est 4,7 (comparé à 0,92).

Grâce à l'existence du correcteur initial, nous pouvons maintenant appliquer la commande décentralisée itérative telle que nous l'avons décrite dans la section précédente. Un fait qui ne doit pas être oublié est que désormais, le FRAS fera de nouveau partie de l'ensemble des capteurs. En fait, l'omission du FRAS était pratique afin d'obtenir le correcteur initial en effectuant des synthèses indépendantes. Cependant, afin d'obtenir une performance acceptable, il faut avoir recours au FRAS.

D'abord, nous montrerons les résultats en utilisant l'approche de synthèse décentralisée itérative sans réduction. Ensuite, les améliorations obtenues grâce à la réduction du correcteur sont illustrées.

Algorithme de synthèse décentralisée itératif sans réduction

Comme nous l'avons déjà mentionné, la synthèse décentralisée itérative a le désavantage très sérieux de faire exploser le nombre d'états du correcteur, ce qui s'explique par l'utilisation de la forme standard comportant les correcteurs déjà existants des autres boucles.

Le TAB. 5.24 et la FIG. 5.47 illustrent très bien cette problématique. L'itération 1 correspond au correcteur initial. Ensuite, l'ordre de synthèse est *recombineur – sidérostas 1 – sidérostas 2 – recombineur* et ainsi de suite.

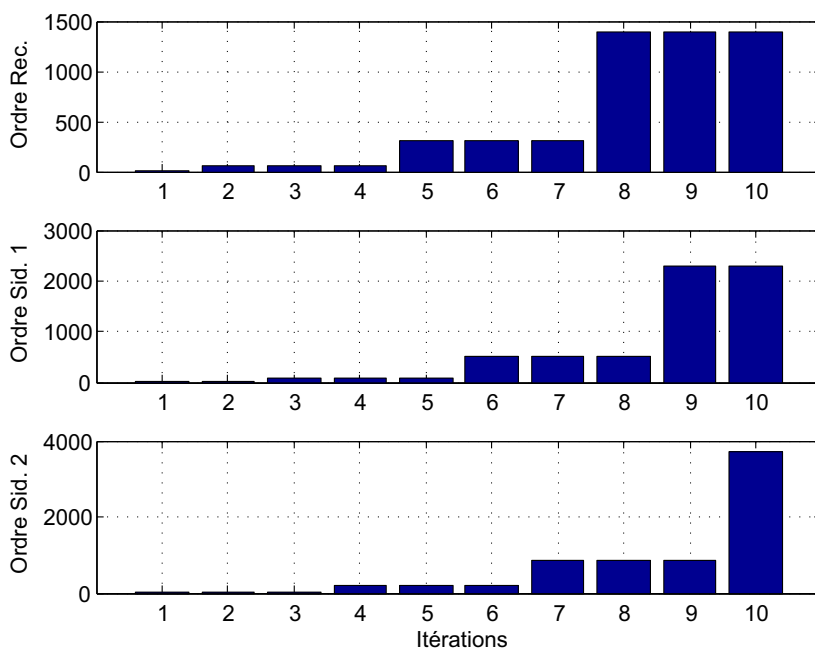


FIGURE 5.47 – Croissance de l'ordre du correcteur sans réduction

En effet, au bout d'une dizaine d'itérations, les nombres d'états des correcteurs locaux sont déjà des milliers, ce qui rend toute implantation à bord impossible.

Un autre problème très important est la faisabilité des synthèses itératives. Les chiffres présentés sont purement théoriques. En pratique, l'algorithme de synthèse \mathcal{H}_2 -optimale (en d'autres mots la résolution des équations algébriques de RICCATI) échoue déjà dans la cinquième itération à cause du mauvais conditionnement numérique. Pour cette raison, nous renonçons à une analyse détaillée des performances atteintes.

Nous pouvons donc conclure que l'algorithme de synthèse décentralisée itérative n'est pas envisageable pour des problèmes dont la taille (c'est-à-dire un nombre d'états dynamiques) est comparable à celle du problème que nous traitons.

Algorithme de synthèse décentralisée itératif avec réduction

L'espoir lié à l'algorithme de synthèse avec une réduction régulière, c'est-à-dire dans chaque itération, des correcteurs était de limiter l'explosion du nombre d'états du correcteur. Nous avons mentionné qu'il existaient deux possibilités afin d'effectuer la réduction,

- en indiquant une tolérance et
- en indiquant un nombre d'états maximal.

Les FIGS. 5.48 et 5.49 montrent les résultats des deux approches.

Lorsqu'une tolérance de réduction est spécifiée (FIG. 5.48), les ordres des correcteurs locaux augmentent au début à environ 1,5 à 2 fois l'ordre initial, puis commencent à diminuer jusqu'aux valeurs finales de 7 (recombineur) et 13 (sidérost 1 et 2).

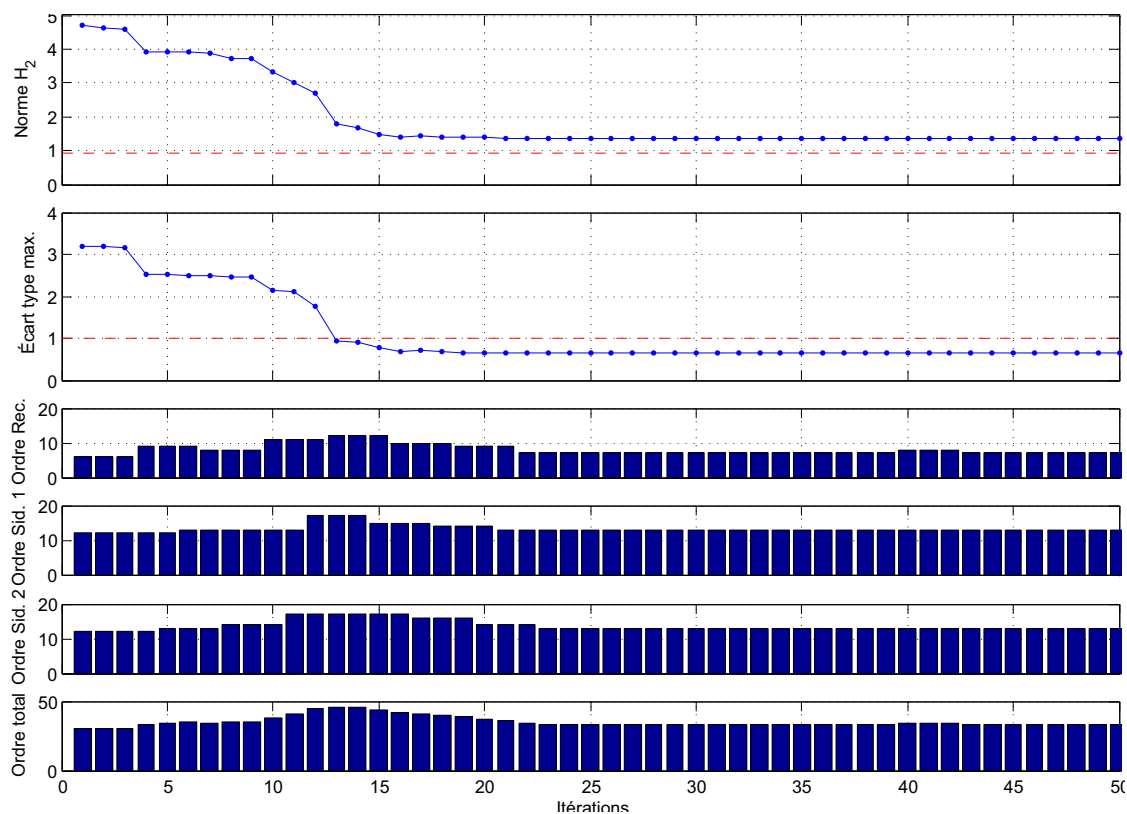


FIGURE 5.48 – Norme \mathcal{H}_2 (première ligne), écart-type maximal (deuxième ligne) et ordres des correcteurs locaux (troisième à cinquième ligne) et du correcteur complet (sixième ligne) pour la synthèse décentralisée. Lors de la réduction des correcteurs, une tolérance est spécifiée. La ligne rouge tiretée dans la première ligne indique la norme \mathcal{H}_2 du correcteur centralisé, celle dans la deuxième ligne indique l'écart-type maximal admissible (unité).

Ces valeurs sont remarquablement faibles, surtout si on les compare au nombre d'états du correcteur centralisé (30). En fait, il semble que la distribution du correcteur sur les trois vaisseaux

permet d'alléger les calculs embarqués de façon considérable. Bien entendu, ceci nécessite de disposer d'ordinateurs de bord capables de calculer les commandes sur les trois vaisseaux.

Nous avons essayé de varier la tolérance spécifiée pour la réduction des correcteurs. Bien entendu, avec une tolérance très faible, les nombres d'états obtenus sont clairement supérieurs. En revanche, les nombres d'états spécifiés sont les plus petits que l'on puisse atteindre. Si la tolérance est augmentée encore davantage, la réduction des correcteurs devient excessive et mène à l'instabilité.

Un fait marquant est que les nombres d'états obtenus valent les nombres d'états des vaisseaux en boucle ouverte plus un. Sans que nous puissions donner de justification analytique, il nous semble que l'état rajouté est utilisé afin de coordonner le mouvement des trois vaisseaux.

Au niveau de l'évolution de la performance au cours des itérations, il est évident que la norme \mathcal{H}_2 est presque toujours décroissante. Une exception est l'itération 17, par exemple. Ceci illustre bien que l'on perd la garantie de la décroissance et de la convergence de la performance quand on réduit les correcteurs. Néanmoins, avec l'algorithme de réduction utilisé et avec une tolérance judicieusement choisie, l'algorithme de synthèse décentralisée itérative converge tout de même.

La FIG. 5.49 montre les résultats de l'algorithme itératif lorsque le nombre d'états est spécifié pour la réduction.

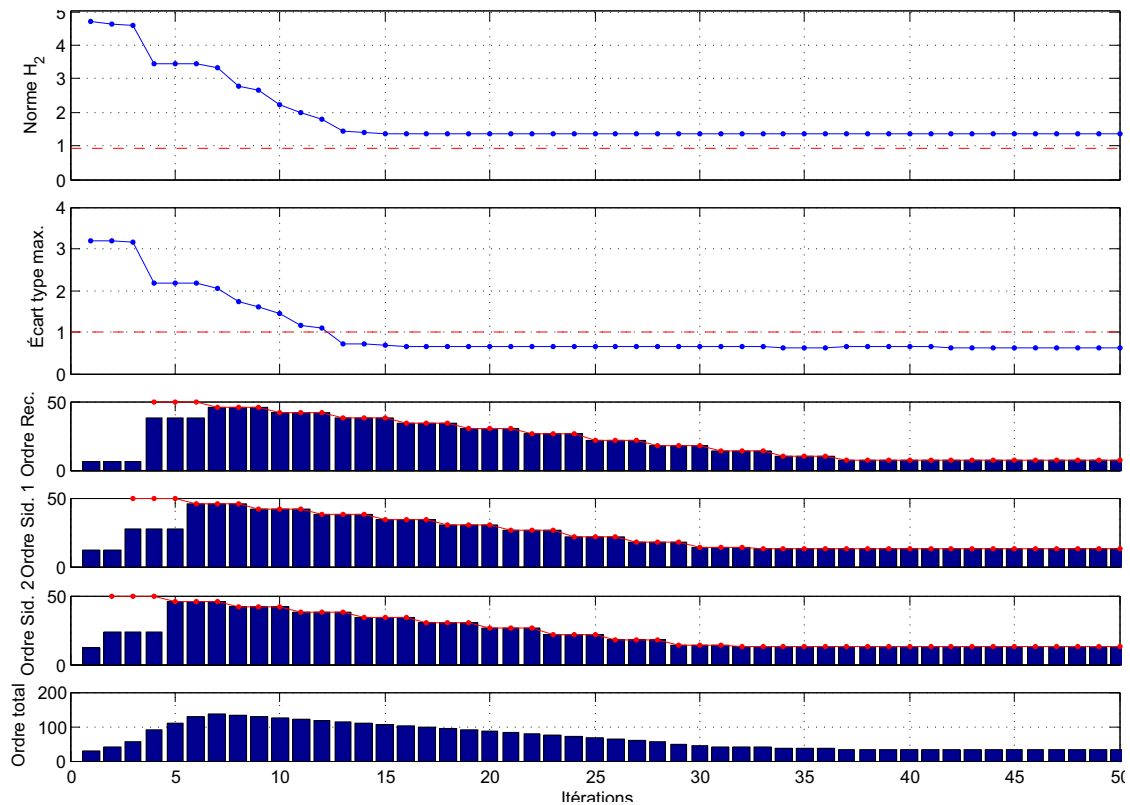


FIGURE 5.49 – Norme \mathcal{H}_2 (première ligne), écart-type maximal (deuxième ligne) et ordres des correcteurs locaux (troisième à cinquième ligne) et du correcteur complet (sixième ligne) pour la synthèse décentralisée. Lors de la réduction des correcteurs, l'ordre est spécifié (ordres maximaux indiqués par les lignes rouges) et décroît de plus en plus. La ligne rouge tiretée dans la première ligne indique la norme \mathcal{H}_2 du correcteur centralisé, celle dans la deuxième ligne indique l'écart-type maximal admissible (unité).

Bien entendu, les nombres d'états minimaux obtenus en spécifiant une tolérance peuvent être utilisés. Alternativement, un nombre d'états acceptable peut être trouvé tout simplement en essayant de différentes valeurs.

Nous avons constaté qu'une réduction précoce avec un nombre d'états trop faible peut empêcher l'algorithme de converger. Pour cette raison, nous avons commencé avec des valeurs très importantes qui sont réduites au fur et à mesure que l'algorithme itère. Dans chaque itération de la synthèse montrée dans la FIG. 5.49, par exemple, le nombre d'états spécifié pour la réduction est réduit de 4, jusqu'à atteindre les valeurs minimales spécifiées. Le nombre d'états spécifié pour chaque itération est montré comme ligne rouge.

Il est visible que les deux approches convergent différemment, mais vers la même valeur finale (1,34). Nous avons observé que, dans la plupart des cas que nous avons analysés (par exemple en utilisant différents correcteurs initiaux ou différentes tolérances de réduction), les synthèses convergeaient vers cette même valeur. Ce fait nous a amené à penser que le problème de synthèse décentralisé, au moins dans notre cas précis, n'est pas aussi non-convexe que nous le craignons.

Un fait qui nous paraît important est la possibilité de la réduction du correcteur centralisé. En fait, nous avons essayé de réduire le nombre d'états du correcteur centralisé avec les mêmes outils, mais sans succès. Toutes nos tentatives n'ont mené qu'à l'instabilité.

Performances atteintes

Le TAB. 5.25 montre les performances atteintes en boucle fermée. Comme nous venons de mentionner, la norme \mathcal{H}_2 vaut 1,34. Par conséquent, elle est environ 45 % plus élevée que la norme \mathcal{H}_2 obtenue avec le correcteur centralisé.

TABLE 5.25 – Performances (1σ) atteintes en boucle fermée avec le correcteur décentralisé. Performance globale (norme \mathcal{H}_2) : 1,342050

No.	Sortie contrôlée	Performance normalisée	Performance réelle	Unité
1	Attitude inertielle recombinateur, axe x	$5,99 \cdot 10^{-1}$	$5,99 \cdot 10^{-2}$	as
2	Attitude inertielle recombinateur, axe y	$4,45 \cdot 10^{-1}$	$4,45 \cdot 10^{-2}$	as
3	Attitude inertielle recombinateur, axe z	$5,72 \cdot 10^{-1}$	$5,72 \cdot 10^{-2}$	as
4	Différence de marche optique	$1,49 \cdot 10^{-2}$	$1,49 \cdot 10^{-4}$	m
5	Attitude relative sidérostat 1, axe x	$6,04 \cdot 10^{-1}$	$6,04 \cdot 10^{-2}$	as
6	Attitude relative sidérostat 1, axe y	$2,00 \cdot 10^{-1}$	$2,00 \cdot 10^{-2}$	as
7	Attitude relative sidérostat 1, axe z	$1,96 \cdot 10^{-1}$	$1,96 \cdot 10^{-2}$	as
8	Attitude relative sidérostat 2, axe x	$6,03 \cdot 10^{-1}$	$6,03 \cdot 10^{-2}$	as
9	Attitude relative sidérostat 2, axe y	$1,83 \cdot 10^{-1}$	$1,83 \cdot 10^{-2}$	as
10	Attitude relative sidérostat 2, axe z	$1,97 \cdot 10^{-1}$	$1,97 \cdot 10^{-2}$	as
11	Position relative sidérostat 1, direction y	$3,08 \cdot 10^{-2}$	$3,08 \cdot 10^{-5}$	m
12	Position relative sidérostat 2, direction y	$3,00 \cdot 10^{-2}$	$3,00 \cdot 10^{-5}$	m
13	Position relative sidérostat 1, direction x	$1,92 \cdot 10^{-2}$	$1,92 \cdot 10^{-5}$	m
14	Position relative sidérostat 2, direction x	$1,92 \cdot 10^{-2}$	$1,92 \cdot 10^{-5}$	m
15	Position relative sidérostat 1, direction z	$3,32 \cdot 10^{-2}$	$3,32 \cdot 10^{-5}$	m
16	Position relative sidérostat 2, direction z	$3,21 \cdot 10^{-2}$	$3,21 \cdot 10^{-5}$	m

Malgré l'augmentation de la norme \mathcal{H}_2 , le TAB. 5.25 montre que toutes les spécifications concernant les différentes sorties contrôlées peuvent être satisfaites. La performance normalisée la plus élevée est

0,604 pour le correcteur décentralisé, comparé à 0,528 pour le correcteur centralisé. Cette dégradation très modérée souligne que le contrôle décentralisé du vol en formation est une alternative qui mérite d'être considérée.

Analyse des valeurs singulières

Afin de mettre en évidence différents phénomènes, nous avons eu recours à l'analyse des valeurs singulières. Tout d'abord, nous avons comparé les valeurs singulières des correcteurs locaux initiaux et finaux. La première ligne de la FIG. 5.50 montre les trois correcteurs initiaux, tandis que la deuxième ligne montre les trois correcteurs finaux.

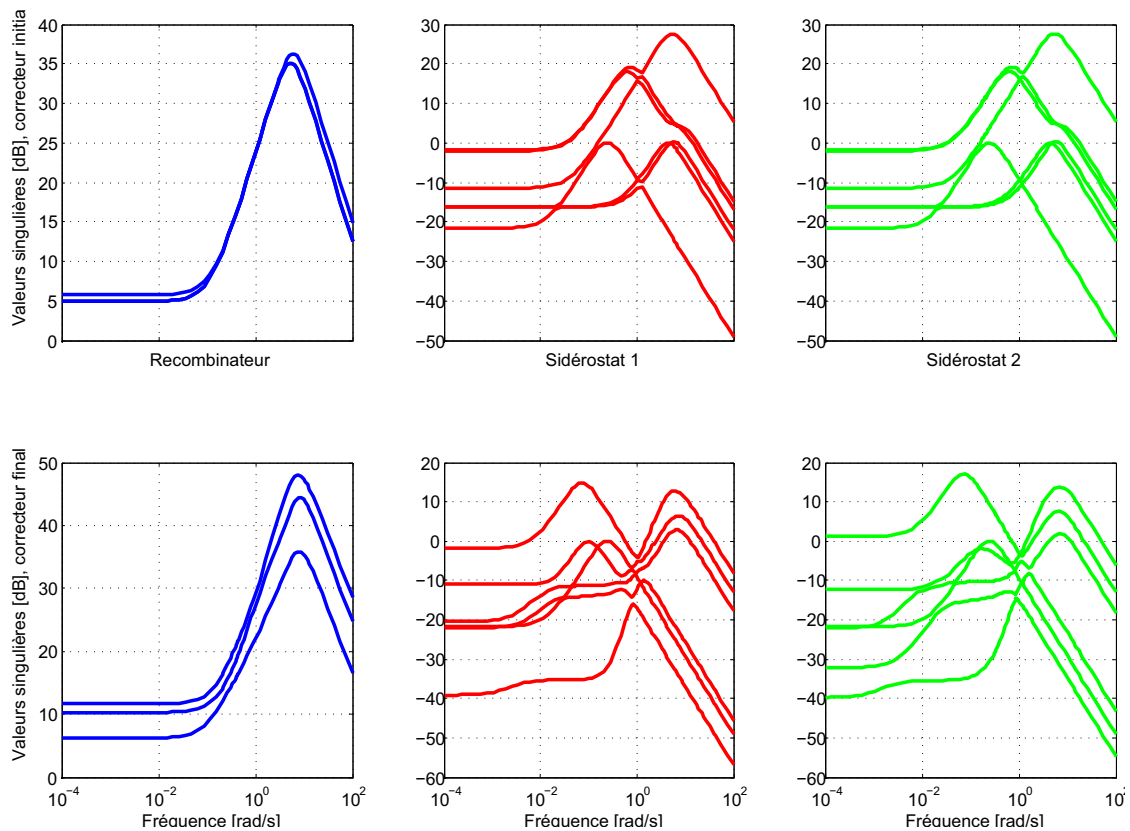


FIGURE 5.50 – Comparaison des valeurs singulières entre les correcteurs locaux initiaux (en haut) et finaux (en bas). Les correcteurs du recombineur sont montrés à gauche (lignes bleues), ceux du sidérost 1 au milieu (lignes rouges) et ceux du sidérost à droite (lignes vertes).

Bien que cela ne paraisse pas surprenant vu l'évolution de la performance au cours des itérations, le changement des valeurs singulières des correcteurs est remarquable. Le plus grand écart peut être observé dans les correcteurs des sidérostats. En fait, dans le correcteur initial, il existe deux maxima dont l'écart fréquentiel est relativement faible. En revanche, dans le correcteur final, ces maxima se sont écartés et leurs amplitudes sont nettement inférieures. En d'autres termes, l'action du correcteur ne se concentre plus tellement sur un seul endroit dans la plage de fréquences.

Il semble que les bandes passantes des correcteurs locaux ne changent pas de façon dramatique au cours des itérations. Le gain statique du correcteur du recombineur a augmenté un petit peu, mais il n'y a pas beaucoup de changement au niveau des correcteurs des sidérostats.

Un autre constat très important est celui de la symétrie. En effet, les correcteurs finaux des sidérostats se ressemblent beaucoup, ce qui nous paraît tout à fait raisonnable vu la symétrie de la formation *Pegase*. Les quelques asymétries qui restent peuvent s'expliquer par l'approche itérative. Notamment, cette approche ne peut jamais être parfaitement symétrique car il faut choisir un ordre dans lequel les synthèses des deux sidérostats sont effectuées. Elle ne peuvent pas avoir lieu simultanément.

Une autre analyse intéressante est celle des valeurs singulières du système en boucle fermée. La FIG. 5.51 montre les valeurs singulières en boucle fermée avec les correcteurs décentralisés initial (en haut) et final (au milieu) et avec le correcteur centralisé (en bas).

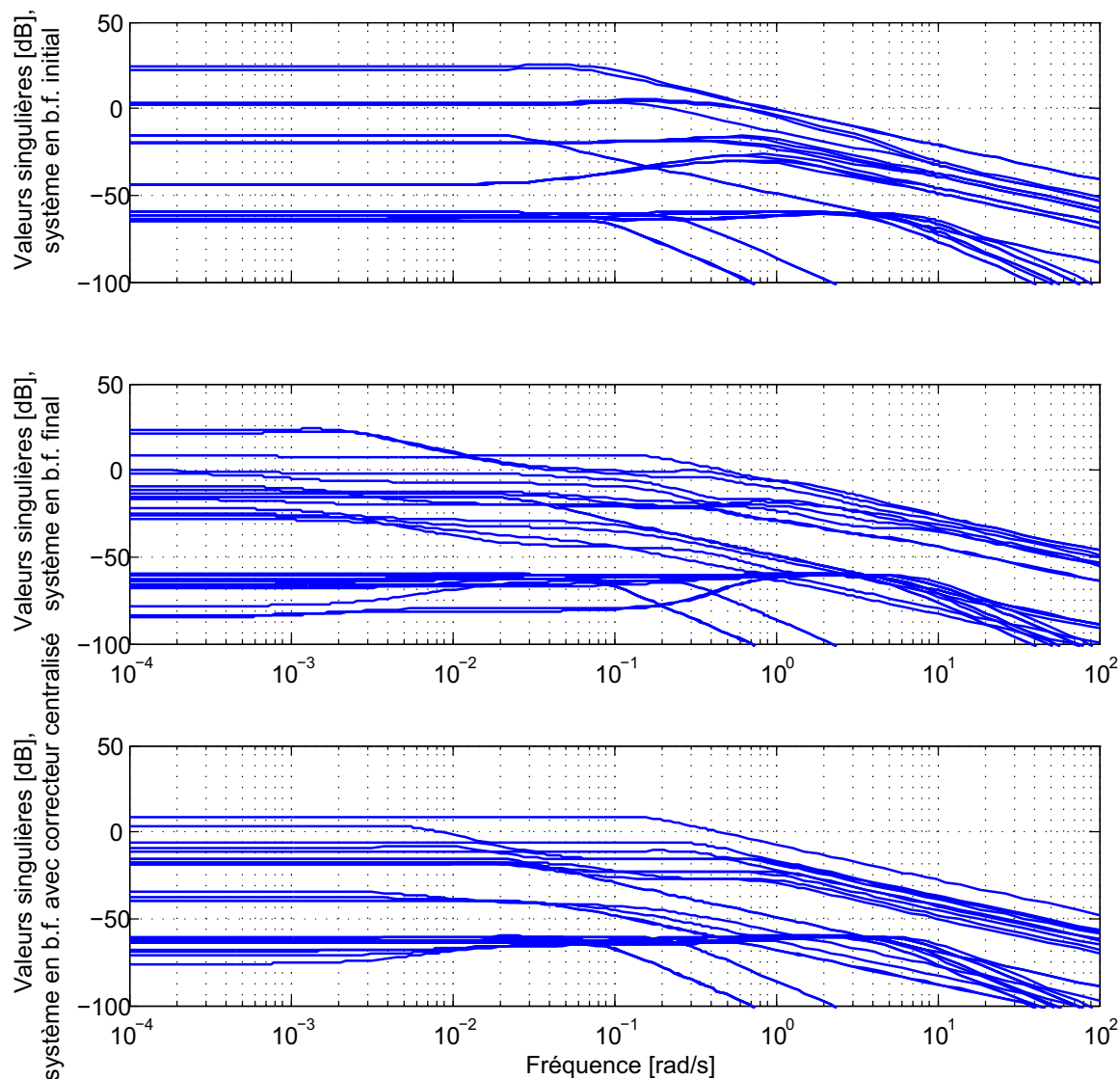


FIGURE 5.51 – Comparaison des valeurs singulières en boucle fermée avec les correcteurs décentralisés initial (en haut) et final (au milieu) et avec le correcteur centralisé (en bas)

Les amplitudes en utilisant le correcteur décentralisé final sont plus faibles que celles du correcteur décentralisé initial. Ceci est logique car la minimisation de la norme \mathcal{H}_2 en boucle fermée correspond à la minimisation de la surface sous la réponse fréquentielle. Les valeurs singulières en utilisant le

correcteur centralisé sont, bien entendu, encore plus faibles. Un fait marquant est que les valeurs singulières obtenues avec le correcteur décentralisé final et le correcteur centralisé sont très similaires pour des fréquences supérieures à 10^{-1} rad/s.

La FIG. 5.52 montre les valeurs singulières des différents transferts du correcteur centralisé (en bleu continu) et du correcteur décentralisé (en rouge tireté).

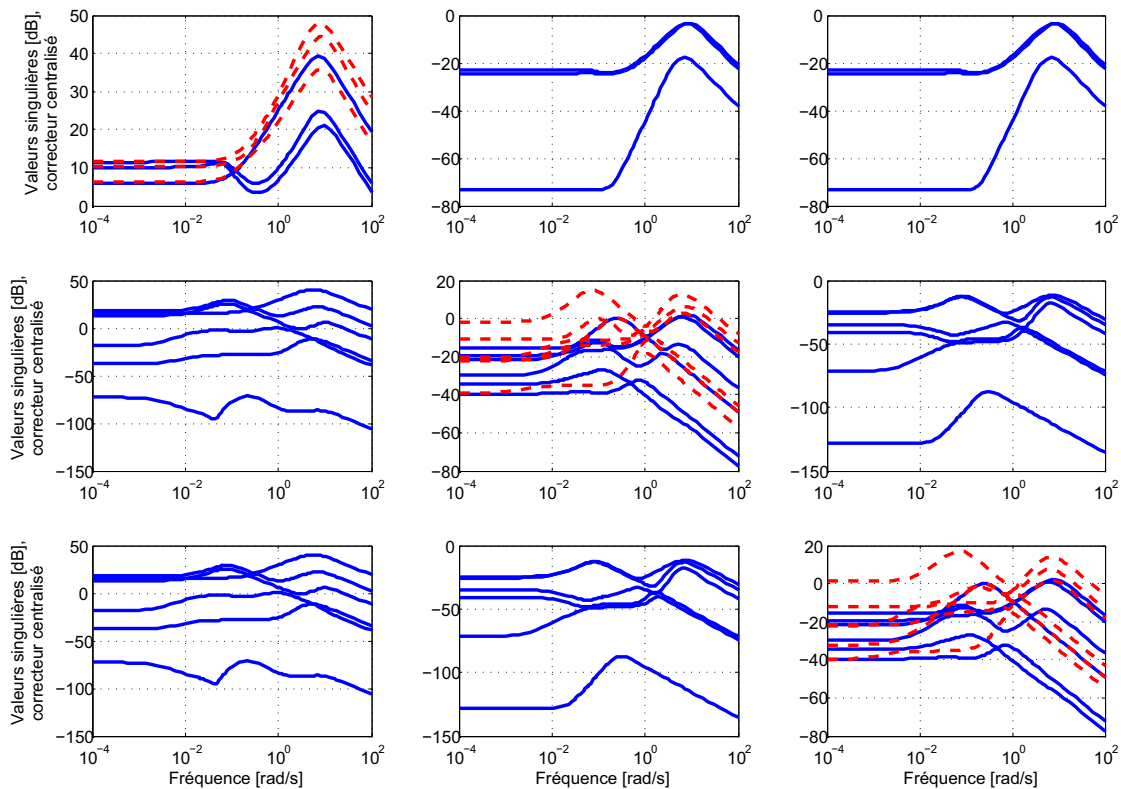


FIGURE 5.52 – Valeurs singulières des différents transferts des correcteurs centralisé (en bleu continu) et décentralisé (en rouge tireté). Les lignes indiquent les entrées de commande (en haut, au milieu et en bas celles du recombinauteur, du sidérost 1 et du sidérost 2, respectivement) et les colonnes les sorties mesurées (à gauche, au milieu et à droite celles du recombinauteur, du sidérost 1 et du sidérost 2, respectivement).

Encore une fois, les différences entre les correcteurs décentralisé (final) et centralisé sont bien visibles. La différence majeure est certainement la disparition des transferts hors-diagonaux, c'est-à-dire des transferts inter-vaisseaux, car le but de la commande décentralisé était de ne pas utiliser des moyens de communication inter-vaisseau.

Impact de l'omission d'un capteur sur la performance atteignable

Nous concluons cette partie en soulignant l'effet que peut avoir la panne ou l'omission d'un seul capteur tout en gardant tous les autres senseurs.

Le TAB. 5.26 montre la dégradation de la performance \mathcal{H}_2 lorsqu'on effectue une synthèse centralisée. Visiblement, le capteur longitudinal et le senseur stellaire fin sont absolument nécessaires afin d'obtenir une performance dans le même ordre de grandeur qu'en utilisant tous les capteurs. En effet, l'omission du capteur longitudinal rend le système inobservable.

TABLE 5.26 – Performance \mathcal{H}_2 centralisée atteignable avec un correcteur centralisé lors de l'omission d'un seul capteur

Capteur omis	Emplacement	Performance \mathcal{H}_2 atteignable
Aucun	–	0,92
FRAS	Recombineur	4,05
Senseur stellaire fin	Recombineur	579,30
Capteur latéral grossier	Sidérostats	4,26
Senseur stellaire standard	Sidérostats	0,92
Capteur latéral fin	Sidérostats	1,60
Capteur longitudinal	Sidérostats	∞

L'omission soit du FRAS, soit du capteur latéral grossier, nuit gravement à la performance atteignable. En outre, il semble que l'on puisse renoncer aux senseurs stellaires standard s'il s'agit uniquement de garantir la performance ultime en mode d'observation. Bien entendu, les senseurs stellaires standard restent indispensables de par leur grand champ de vue, nécessaire pour l'enchaînement des modes opérationnels.

Le TAB. 5.27 montre les performances atteignables lorsqu'un capteur est en panne ou omis dans le cas de la synthèse décentralisée. Ici, le cas est clairement différent. Maintenant, trois capteurs sont absolument nécessaires afin de stabiliser le système, le senseur stellaire fin, le senseur stellaire standard et le capteur longitudinal. La nécessité du senseur stellaire standard s'explique par le fait qu'il est embarqué sur les sidérostats et donc physiquement séparé du senseur stellaire fin qui se trouve à bord du recombineur. Ce fait n'avait aucune importance en utilisant un correcteur centralisé.

TABLE 5.27 – Performance \mathcal{H}_2 décentralisée atteignable avec un correcteur décentralisé lors de l'omission d'un seul capteur

Capteur omis	Emplacement	Performance \mathcal{H}_2 atteignable
Aucun	–	1,34
FRAS	Recombineur	4,13
Senseur stellaire fin	Recombineur	∞
Capteur latéral grossier	Sidérostats	5,99
Senseur stellaire standard	Sidérostats	∞
Capteur latéral fin	Sidérostats	4,08
Capteur longitudinal	Sidérostats	∞

Enfin, si on veut obtenir des performances raisonnables et satisfaire toutes les spécifications, on ne peut pas renoncer au FRAS, au capteur latéral grossier et au capteur latéral fin. En effet, tous les capteurs sont indispensables dans le cas d'un correcteur décentralisé.

5.6.5 Bilan

Dans cette section, nous avons présenté une méthode servant à synthétiser des correcteurs décentralisés \mathcal{H}_2 pour le vol en formation. Nous avons abordé plusieurs problèmes importants liés à une telle synthèse comme le recherche d'un correcteur initial, la convergence de l'algorithme itératif, ainsi que la maîtrise de la croissance du nombre d'états du correcteur.

La méthode a été appliquée à la mission *Pegase* grâce au modèle et aux spécifications décrits au début de ce chapitre. Dans ce contexte, nous avons constaté que les pertes en termes de la performance \mathcal{H}_2 par rapport au correcteur centralisé sont acceptables. Plus particulièrement, les performances exigées pour toutes les sorties contrôlées peuvent toujours être atteintes.

Même si le nombre total d'états du correcteur décentralisé est peu supérieur à celui du correcteur centralisé (33 états comparé à 30 états), le correcteur décentralisé est implanté de façon distribuée sur les trois vaisseaux de la formation *Pegase*. De ce fait, les calculs embarqués nécessaires sont nettement moins exigeants.

La méthode que nous avons présentée montre un certain nombre de perspectives que nous aimerions mentionner. D'abord, il est envisageable de restreindre le nombre d'états des correcteurs locaux *a priori* en synthétisant des correcteurs à ordre fixe, contrairement à l'approche actuelle qui consiste à réduire les correcteurs après la synthèse, c'est-à-dire *a posteriori*.

Un problème fondamental de la méthode présentée est le fait que les états du correcteur n'ont plus de signification physique, contrairement au correcteur de base et au correcteur avec réjection de biais précédemment synthétisés. Ceci est un obstacle considérable pour une implantation sur un ordinateur de bord. Notamment, il n'est pas évident d'initialiser les états du correcteur. Une solution potentielle de ce problème est de transformer le correcteur en une forme d'estimation-commande équivalente, cf. les travaux d'ALAZARD et APKARIAN [2]. Cependant, il nous semble que leur théorie doit être adaptée au cas de correcteurs décentralisés.

Une autre perspective intéressante est d'obtenir un correcteur décentralisé par optimisation directe des matrices du correcteur, cf. aussi les travaux de LOSSER [106] ou de ERWIN et al. [53]. En utilisant cette approche, nous avons synthétisé des correcteurs décentralisés pour la mission *Pegase*. Cependant, les performances atteintes n'étaient pas satisfaisantes. Néanmoins, l'optimisation directe nous paraît prometteuse.

Du côté des applications de la synthèse décentralisée, nous voyons deux pistes qui méritent d'être poursuivies.

Premièrement, il est envisageable de séparer le contrôle de l'attitude et de la translation grâce à une synthèse décentralisée. Plus précisément, dans le cadre de la mission *Pegase*, cette approche fournirait un correcteur décentralisé avec cinq correcteurs locaux (attitude pour les trois vaisseaux, translation seulement pour les deux sidérostats). Cependant, une première investigation a montré que les pertes en termes de performance sont importantes.

Deuxièmement, pourvu que l'on dispose d'un modèle global de la dynamique des plateformes des vaisseaux (comme nous l'avons décrit dans ce mémoire) et de la charge utile (senseur de franges, ligne à retard, etc.), il est possible de synthétiser un correcteur décentralisé dont une partie est dédiée à l'asservissement de la charge utile et l'autre à l'asservissement des plateformes.

5.7 Bilan global

Ce chapitre était consacré à la mise en œuvre d'une méthodologie pour le pilotage simultané en attitude et en translation d'une formation de vaisseaux spatiaux.

Nous avons montré comment le modèle générique développé dans le Chapitre 3 peut être utilisé et adapté à une mission concrète de vol en formation. La mission *Pegase*, qui est actuellement en cours de préparation au CNES et qui fait objet d'une collaboration entre CNES et ONERA, a servi comme exemple applicatif.

D'abord, nous avons traduit la géométrie de la mission *Pegase* en introduisant des repères et en définissant les translations et les rotations associées aux passages entre ces repères. Dans ce contexte, la hiérarchie *leader-follower* a été choisie parce qu'elle nous semblait la structure hiérarchique la plus adaptée. Ensuite, les perturbations orbitales dominantes au point de LAGRANGE L_2 (pression solaire et gradient de gravité), ainsi qu'un modèle des actionneurs ont été rajoutés. Enfin, tous les capteurs et sorties contrôlés nécessaires ont été modélisés. Basé sur tous ces composants, un modèle linéarisé sous forme de représentation d'état a pu être proposé.

Dans le reste de ce chapitre, nous avons présenté des méthodes afin de résoudre les quatre problématiques suivantes :

- synthèse d'un correcteur de base centralisé pour le mode d'observation satisfaisant des spécifications stochastiques associées aux différentes sorties contrôlés, plus précisément la satisfaction de bornes supérieures des variances ou écarts-type des sorties contrôlés ;
- synthèse d'un correcteur centralisé pour le mode d'observation qui, en plus des besoins mentionnés ci-dessus, prend en compte les biais générés par les perturbations statiques (par exemple les forces et les couples induits par la pression solaire) et respecte les spécifications associées aux sorties contrôlés malgré ces biais ;
- synthèse de correcteurs centralisés pour différents modes opérationnels, respect des champs de vue des capteurs utilisés après commutation entre modes opérationnels et préservation de la stabilité à travers une séquence de commutations entre modes opérationnels en présence de bruits de mesure et d'actuation ;
- synthèse d'un correcteur décentralisé pour le mode d'observation satisfaisant toujours les spécifications stochastiques mentionnées ci-dessus et possédant une complexité raisonnable (c'est-à-dire un nombre d'états limité) en vue d'une éventuelle implantation sur un ordinateur de bord.

Dans les quatre étapes, nous avons utilisé la commande \mathcal{H}_2 du fait de sa capacité de satisfaire les spécifications stochastiques présentes dans la mission *Pegase*. Nous avons souligné les principaux atouts de la commande \mathcal{H}_2 , par exemple le fait de disposer d'un correcteur sous forme estimation-commande, ainsi que sa polyvalence, par exemple le fait de pouvoir effectuer des synthèses itératives afin d'obtenir des correcteurs décentralisés.

Outre la commande \mathcal{H}_2 , nous avons eu recours à plusieurs autres techniques de commande puissantes comme la stabilité au sens de LYAPUNOV (pour le respect des champs de vue des différents capteurs et pour la préservation de la stabilité lors de commutations entre modes opérationnels) ou les inégalités matricielles linéaires (LMI) (pour le calcul de fonctions de LYAPUNOV optimales).

Nous avons pu développer des méthodologies novatrices afin de traiter les quatre problématiques mentionnées ci-dessus. Nous les avons appliquées avec succès à la mission de vol en formation *Pegase* et avons ainsi montré leur capacité à traiter des problèmes de taille importante. En outre, nous considérons que ces méthodologies sont suffisamment génériques pour les appliquer à de nouvelles situations, soit dans le cadre de missions de vol en formation, soit dans des domaines applicatifs

complètement différents.

La question de l'intégration de ces méthodes ne doit pas être négligée. À titre d'exemple, nous n'avons pas détaillé comment la commutation entre correcteurs centralisés avec réjection de biais peut être mise en œuvre. Comme toutes les approches présentées sont basées sur la commande \mathcal{H}_2 , leur intégration devrait en principe être possible.

L'exemple mentionné ci-dessus ne pose aucun problème insurmontable parce que les biais peuvent (si la précision des capteurs disponibles le permet) être estimés avant la première commutation et les états du correcteur associés à l'estimation des biais peuvent être gelés à partir de là.

Cependant, le fait que le correcteur décentralisé n'est pas disponible sous forme estimation-commande rend difficile, voir impossible, une commutation entre plusieurs correcteurs décentralisés. Premièrement, l'initialisation du nouveau correcteur après une commutation ne peut pas simplement consister à utiliser les états du correcteur précédent. Deuxièmement, la fonction de LYAPUNOV requiert une représentation estimation-commande du correcteur.

De manière générale, on peut dire que les deux approches *correcteur décentralisé* et *commutation entre correcteurs* ne sont pas compatibles actuellement. Comme nous l'avons déjà mentionné, une solution potentielle pourrait être de transformer le correcteur décentralisé en une forme estimation-commande grâce à la théorie développée par ALAZARD et APKARIAN [2].

Quatrième partie

Conclusion

Récapitulation et contributions

Dans cette thèse, nous avons développé un cadre méthodologique afin de contrôler le vol en formation de vaisseaux spatiaux avec des méthodes de commande multivariable.

Du fait de la variété des missions de vol en formation, ce mémoire comporte deux volets. Nous avons d'abord traité le mouvement relatif en translation d'une formation de satellites en orbite terrestre elliptique. Dans le deuxième volet, nous nous sommes intéressés au vol en formation de vaisseaux spatiaux en orbite proche d'un point de LAGRANGE en prenant en compte à la fois les translations et les orientations des vaisseaux.

Dans les deux cas, l'approche globale était de développer des modèles ou d'améliorer des modèles existants dans la littérature d'abord. Ensuite, nous avons identifié des problèmes de commande apparaissant dans le vol en formation pour développer des stratégies de commande basées sur les méthodes de commande multivariable.

Quant au *vol en formation en orbite terrestre en translation*, nous avons pu nous appuyer sur les équations de LAW DEN. Nous avons néanmoins contribué un modèle plus sophistiqué de la perturbation orbitale causée par l'aplatissement de la Terre (J_2). Même si les équations de ce nouveau modèle paraissent compliquées à première vue, leur structure n'est pas plus lourde que celle des équations de LAW DEN.

Nous avons observé que la problématique principale liée à l'asservissement de la position relative en orbite terrestre elliptique était le caractère linéaire à paramètre variant (LPV, *angl.* linear parameter-varying) de la dynamique. La perturbation due à l'aplatissement de la Terre nous paraissait suffisamment faible pour être négligée dans le modèle de synthèse. Par conséquent, nous nous sommes concentrés sur la synthèse de correcteurs séquencés. Dans ce cadre, nous avons présenté deux méthodes différentes.

La première méthode était basée sur une représentation linéaire fractionnaire (LFT, *angl.* linear-fractional transformation) de la dynamique relative et consistait à trouver un correcteur statique de retour d'état plaçant les pôles en boucle fermée à des endroits spécifiés. L'avantage principal était que le correcteur pouvait être synthétisé d'un seul coup. Cependant, nous avons constaté que l'implantation sur un ordinateur de bord de ce correcteur n'était pas possible à cause de la nécessité d'inverser une matrice mal conditionnée. Nous avons résolu ce problème en choisissant une autre représentation pour le même correcteur, un développement en une série de FOURIER.

La deuxième méthode avait recours à la synthèse \mathcal{H}_2 -optimale. Un schéma de synthèse particulier a été conçu afin d'intégrer un modèle de référence pour la dynamique en boucle fermée. Cette approche permettait d'obtenir un comportement identique pour la dynamique relative à travers toute l'orbite. L'effet du schéma de synthèse sur la structure du correcteur a été montré. Des correcteurs pour un nombre de points le long de l'orbite ont été synthétisés. Nous avons ensuite proposé deux méthodes

d'interpolation de ces correcteurs, une interpolation linéaire en fonction du temps ou de l'anomalie vraie et un développement en une série de FOURIER comme précédemment.

La stabilité des deux correcteurs a pu être démontrée grâce à l'analyse de FLOQUET, une technique qui permet de profiter de la périodicité du système et du correcteur. En outre, un critère de qualité a été développé afin de comparer les différents correcteurs en termes de leur fidélité au modèle de référence imposé.

Dans le volet dédié au *vol en formation en orbite proche d'un point de LAGRANGE en translation et en orientation*, nous avons commencé en proposant un cadre de modélisation très générique. En effet, il est concevable de modéliser beaucoup de missions de vol en formation différentes basé sur ce cadre.

La cinématique et la dynamique représentent le noyau du modèle. En outre, il est possible de choisir entre plusieurs hiérarchies, en fonction des rôles prévus des vaisseaux dans la mission modélisée. Nous avons proposé des modèles pour les principales perturbations orbitales en orbite autour d'un point de LAGRANGE, notamment la pression solaire et le gradient de gravité. En faisant des simplifications, nous avons pu retrouver la dynamique translationnelle en orbite terrestre circulaire ou elliptique, ainsi faisant le lien avec le premier volet et illustrant la généralité du cadre méthodologique.

Un modèle dynamique tout seul ne permet pas encore de synthétiser des correcteurs. Pour cette raison, nous avons rajouté une couche supplémentaire au modèle, la couche métrologique, qui est basée sur le même cadre de modélisation. Elle est composée de modèles pour les différents capteurs mesurant des grandeurs relatives et absolues utilisés dans le cadre du vol en formation. La modélisation des actionneurs a également été abordée.

Le modèle étant essentiellement non-linéaire et par conséquent difficile à exploiter par des techniques de commande multivariable linéaires, nous avons montré comment les modèles de la dynamique, des perturbations et de la métrologie peuvent être linéarisés. Un point particulièrement important était la linéarisation des matrices de passage apparaissant partout dans le modèle.

Ce modèle linéarisé a ensuite été utilisé et adapté pour synthétiser des correcteurs pour la mission *Pegase*. Nous avons eu recours à la synthèse \mathcal{H}_2 car cette méthode était particulièrement adaptée à la satisfaction des spécifications stochastiques, c'est-à-dire la garantie que les écarts-types des sorties contrôlées restent au-dessous des limites spécifiées dans le cahier des charges en présence de bruits d'actionnement et de mesure ainsi que de perturbations orbitales. Un correcteur de base pour le mode d'observation de la mission *Pegase* a été synthétisé après avoir exprimé le modèle, les spécifications et les bruits dans une forme standard. Outre la synthèse de ce correcteur de base, nous avons proposé des solutions à trois problèmes que nous avons identifiés et jugés importants.

Le premier problème était la réjection des biais qui peuvent consommer une grande partie du budget alloué à chaque sortie contrôlée. Dans ce contexte, nous nous sommes concentrés sur les biais dus aux forces engendrées par la pression solaire, mais l'approche peut s'étendre à la réjection de biais d'actionneurs ou de certains senseurs. Des correcteurs capables d'estimer des biais et de les rejeter ont été synthétisés grâce à une forme standard enrichie.

Le deuxième problème est le passage entre différents modes opérationnels. En effet, dans le cadre de la mission *Pegase*, ainsi que dans une multitude d'autres missions de vol en formation, il est indispensable de parcourir un nombre de modes opérationnels avant d'arriver au mode d'observation. Cette approche est nécessaire afin de résoudre le dilemme entre capteurs de haute précision, mais à champ de vue restreint (par exemple le capteur latéral fin) et capteurs à champ de vue large, mais grossiers (par exemple le capteur radiofréquence). Par conséquent, nous avons montré comment des correcteurs pour les différents modes opérationnels parcourus peuvent être obtenus et comment la

structure estimation-commande de ces correcteurs \mathcal{H}_2 peut être exploitée afin d'initialiser le correcteur suivant. Cependant, nous avons observé que le point crucial lors de la commutation entre deux modes opérationnels est la détermination de la bonne date. Il est important d'éviter une commutation précoce qui peut éventuellement mener à un cycle limite de commutations en avant et en arrière. Grâce à une fonction de LYAPUNOV quadratique dont les paramètres ont été obtenus en résolvant un problème d'optimisation contraint par des inégalités matricielles linéaires (LMI, *angl.* linear matrix inequalities), un critère facile à implanter sur un ordinateur de bord a pu être formulé. Une version plus sophistiquée de ce critère a également permis de tenir compte de bruits.

Enfin, le troisième problème, la synthèse \mathcal{H}_2 de correcteurs décentralisés (c'est-à-dire de correcteurs qui n'utilisent que les mesures et les entrées de commande disponibles sur le même vaisseau), nous a paru particulièrement naturel vu la distribution de la charge utile de la mission *Pegase* sur plusieurs vaisseaux. Comme les méthodes existant dans la littérature ne nous paraissaient pas prometteuses pour résoudre un problème d'une telle taille, nous avons conçu une méthode de synthèse adaptée au problème en question. À partir d'un correcteur initial que nous avons obtenu grâce à une synthèse indépendante pour les vaisseaux de la formation, nous avons proposé une approche itérative qui garantit la non-croissance de la norme \mathcal{H}_2 à chaque itération et converge vers un minimum local. L'inconvénient principal de cette approche est la croissance du nombre d'états du correcteur et l'interruption au bout de quelques itérations à cause de difficultés numériques. Nous avons résolu ce problème en effectuant une réduction du correcteur dans chaque itération. Bien entendu, le correcteur décentralisé ne montre pas de performances aussi bonnes que celles du correcteur de base, mais la dégradation est tout à fait acceptable vu la réduction de la complexité du correcteur et la possibilité de réduire les moyens de communication.

Perspectives

Comme il se doit, les modèles et méthodes de synthèse que nous avons proposés dans ce mémoire ouvrent beaucoup de perspectives pour des études approfondies. Or, une thèse de doctorat ne peut opérer que dans un périmètre limité et ne permet pas d’approfondir toutes les directions imaginables.

Dans les paragraphes qui suivent, nous décrirons quelques pistes de recherche qui, à nos yeux, méritent être explorées plus en détail.

Méthodologie pour le pilotage relatif en translation

Il est souhaitable de prendre en compte les caractéristiques des tuyères utilisées pour l’asservissement en position. Les tuyères envisageables sont soit des tuyères impulsives (qui fournissent une poussée de très courte durée mais d’amplitude variable), soit des tuyères avec une poussée constante et un temps d’ouverture variable. Il existe la possibilité de discrétiser le correcteur et d’obtenir des commandes impulsives directement. Quant au deuxième type de tuyères, on peut ensuite avoir recours à la *modulation de largeur* afin de traduire des impulsions en temps d’ouverture. L’analyse de stabilité de cette approche est possible dans le cas mono-variable, cf. la thèse de VALENTIN LUANGRAJ [180], mais elle reste un sujet très difficile dans le cas multivariable.

Au lieu de discrétiser un correcteur continu, il est envisageable d’effectuer les synthèses modale et \mathcal{H}_2 directement sur un modèle discrétisé, ce qui ne pose pas de problème fondamental. Cependant, dans cette thèse, nous nous sommes restreints au cadre continu pour ne pas perdre de vue les problématiques essentielles du vol en formation.

Des simulations à haute fidélité, c’est-à-dire tenant compte des perturbations orbitales négligées jusqu’à présent (comme la traînée atmosphérique, les attractions de la Lune et du Soleil et la pression solaire), peuvent être effectuées afin de valider notre approche sur des modèles plus détaillés. Ainsi, des simulations non-linéaires dans un repère absolu et non pas relatif seraient souhaitables. Des simulateurs de ce type sont actuellement en cours de réalisation au CNES.

Enfin, nos méthodes pourraient être appliquées à une mission réelle ou au moins en utilisant les spécifications d’une mission réelle.

Méthodologie pour le pilotage en attitude et en translation

Au niveau du pilotage simultané en attitude et en translation, une analyse de robustesse (de la stabilité ainsi que de la performance) vis-à-vis d’incertitudes de paramètres (surtout masse, centrage et inertie) serait intéressante. Une μ -analyse (qui n’est pas comprise dans ce mémoire) du correcteur

de base pour le mode d'observation a révélé que le correcteur semble assez robuste vis-à-vis d'une variation du centrage et de la masse, ce qui fait espérer que la robustesse n'est pas un problème primordial. Il n'en irait pas de même en présence de dynamiques flexibles.

Nous avons brièvement parlé des modes de transition, en particulier les modes de changement de cible et de changement de base de l'interféromètre, avec la conclusion que les dynamiques associées sont linéaires à paramètre variant. Une méthodologie envisageable pour le contrôle de la formation pendant ces modes est de synthétiser plusieurs correcteurs le long de ces changements et d'effectuer une interpolation comme dans la partie relative à l'asservissement en translation.

Une perspective que nous avons déjà mentionnée est le raffinement de la synthèse décentralisée itérative en utilisant une méthode de synthèse \mathcal{H}_2 à ordre fixe afin de limiter l'ordre du correcteur décentralisé a priori. En outre, il est souhaitable de combiner et d'intégrer les différentes techniques proposées (réjection des biais, commutation entre différents modes opérationnels et contrôle décentralisé). La problématique principale étant la représentation du correcteur décentralisé, la piste la plus prometteuse devrait être la transformation du correcteur en une représentation équivalente sous forme de structure estimation-retour d'état.

Comme, parallèlement à nos travaux, des correcteurs ont été synthétisés en utilisant une approche axe-par-axe, il nous semble important de comparer les performances du correcteur de base et du correcteur avec réjection de biais avec des résultats obtenus avec cette approche. Des premiers pas dans cette direction ont déjà été faits.

Enfin, tout comme pour l'approche visant à asservir les vaisseaux en translation uniquement, des simulations non-linéaires pourraient être effectuées en partant de la seconde loi de NEWTON et la loi d'EULER.

Méthodologie unifiée

Dans cette thèse, nous avons traité les deux problématiques suivantes en détail :

- pilotage relatif en translation en orbite terrestre elliptique ;
- pilotage en attitude et en translation en orbite autour d'un point de LAGRANGE.

Or, d'un côté, la première problématique ne tenait pas compte des attitudes des éléments de la formation et du couplage entre les dynamiques en attitude et en translation (par exemple du fait de l'écart entre les capteurs et les centres de masse). De l'autre côté, la deuxième problématique négligeait la question de l'orbite relative (ce qui était tout à fait justifié par l'application à la mission de vol en formation *Pegase*).

Nous avons montré dans le Chapitre 3 que le modèle proposé est suffisamment générique pour pouvoir prendre en compte tous ces aspects à la fois.

Par conséquent, un point ouvert qui devrait être approfondi est l'impact de la dynamique d'attitude sur l'asservissement en translation en orbite terrestre elliptique. La dynamique d'attitude compliquera sans doute l'étude de ce problème de façon considérable, mais nous sommes confiants que les méthodes développées dans le Chapitre 4 peuvent être généralisées afin de considérer les six degrés de liberté de chaque vaisseau.

Suivant la mission concrète considérée, il peut s'avérer ou non que les bandes passantes des dynamiques en attitude et en translation sont suffisamment écartées pour pouvoir les traiter séparément.

Bibliographie

- [1] ABSIL, O. Science with Pegase. In *2nd TPF/Darwin Int. Conference* (San Diego, CA, July 26-29 2004).
- [2] ALAZARD, D., AND APKARIAN, P. Exact observer-based structures for arbitrary compensators. *International Journal on Robust and Nonlinear Control* 9 (1999), 101–118.
- [3] ALAZARD, D., CUMER, C., APKARIAN, P., GAUVRIT, M., AND FERRÈRES, G. *Robustesse et Commande Optimale*. Cépaduès Editions, 1999.
- [4] ALFRIEND, K. T., AND SCHAUB, H. Dynamics and control of spacecraft formations : Challenges and some solutions. In *Richard H. Battin Symposium* (March 20-21 2000).
- [5] ALFRIEND, K. T., AND SCHAUB, H. Hybrid cartesian and orbit element feedback law for formation flying spacecraft. In *AIAA Astrodynamics Specialist Conference* (Denver, CO, August 14-17 2000).
- [6] ALFRIEND, K. T., SCHAUB, H., AND GIM, D.-W. Gravitational perturbations, nonlinearity and circular orbit assumption effects on formation flying control strategies. In *AAS Rocky Mountain Guidance & Control Conference* (Breckenridge, CO, February 3-7 2000).
- [7] ALFRIEND, K. T., AND YAN, H. An orbital elements approach to the nonlinear formation flying problem. In *International Formation Flying Symposium* (Toulouse, France, October 29-31 2002).
- [8] ALFRIEND, K. T., AND YAN, H. Evaluation and comparison of relative motion theories. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 28, 2 (March-April 2005), 254–261.
- [9] ALONSO, R., CRASSIDIS, J. L., AND JUNKINS, J. L. Vision-based relative navigation for formation flying of spacecraft. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Denver, Colorado, August 14-17 2000).
- [10] ALONSO, R., DU, J.-Y., HUGHES, D., JUNKINS, J. L., AND CRASSIDIS, J. L. Relative navigation for formation flying of spacecraft. In *Flight Mechanics Symposium* (Greenbelt, Maryland, June 19-21 2001), NASA-Goddard Space Flight Center, pp. 115–129.
- [11] AUNG, M., AHMED, A., WETTE, M., SCHARF, D., TIEN, J., PURCELL, G., REGEHR, M., AND LANDIN, B. An overview of formation flying technology development for the Terrestrial Planet Finder mission. In *2004 IEEE Aerospace Conference* (Big Sky, MT, March 6-13 2004), pp. 2667–2679.
- [12] BALMINO, G. Champ de pesanteur terrestre et géoïde. Principes, progrès et connaissance actuelle. <http://bgi.cnes.fr:8110/tutorial/t2/tutorial2.html>. [En ligne ; Page disponible le 29-juin-2006].

- [13] BAMFORD, W. A., EBINUMA, T., AND LIGHTSEY, E. G. Navigation of large autonomously controlled formations. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Austin, TX, August 11-14 2003).
- [14] BASTANTE, J., MORA, M., AND CANABAL, J. Satellites formation transfer to libration points. In *Libration Point Orbits and Applications* (Parador d'Aiguablava, Girona, Spain, June 10-14 2002).
- [15] BASTANTE, J. C., CARAMAGNO, A., PENIN, L. F., ARAÚJO, J., AND UDREA, B. GNC design of a formation flying demonstration mission in GTO. In *6th International ESA Conference on Guidance, Navigation and Control Systems* (Loutraki, Greece, October 17-20 2005).
- [16] BEARD, R. Architecture and algorithms for constellation control. Tech. rep., Electrical and Computer Engineering, Brigham Young University, Provo, Utah, March 16 1998.
- [17] BEARD, R. W., AND HADAEGH, F. Y. Constellation templates : An approach to autonomous formation flying. In *1998 World Automation Congress* (Anchorage, Alaska, 1998).
- [18] BEARD, R. W., LAWTON, J., AND HADAEGH, F. Y. A coordination architecture for spacecraft formation control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 9, 6 (November 2001), 777–790.
- [19] BELLET, D. *Cours de mécanique générale*. Cépaduès Éditions, 1988.
- [20] BIANNIC, J.-M. Analyse en stabilité et performances des systèmes linéaires saturés. développement d'outils et application à l'analyse des lois de pilotage d'un avion combat. Tech. Rep. RT 2/09796 DCSD, ONERA, Toulouse, France, September 2005.
- [21] BIANNIC, J.-M., ROOS, C., AND KNAUF, A. Design and robustness analysis of fighter aircraft flight control laws. *European Journal of Control* (2006), 1–15.
- [22] BOURGA, C., MEHLEN, C., LÓPEZ-ALMANSA, J.-M., AND GARCÍA-RODRÍGUEZ, A. A formation flying RF subsystem for Darwin and SMART-2. In *International Symposium on Formation Flying Missions and Technologies* (Toulouse, France, October 29-31 2002).
- [23] BOYD, S., GHAOUI, L. E., FERON, E., AND BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, vol. 15 of *Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, PA, June 1994.
- [24] BREGER, L., FERGUSON, P., HOW, J. P., THOMAS, S., MCLOUGHLIN, T., AND CAMPBELL, M. Distributed control of formation flying spacecraft built on OA. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Austin, TX, August 11-14 2003).
- [25] BREGER, L., AND HOW, J. P. J_2 -modified GVE-based MPC for formation flying spacecraft. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (San Francisco, CA, August 15-18 2005).
- [26] BROUCKE, R. A. A solution of the elliptic rendezvous problem with the time as independent variable. In *AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting* (San Antonio, Texas, January 27-30 2002).
- [27] BROUCKE, R. A. Solution of the elliptic rendezvous problem with the time as independent variable. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 26, 4 (July-August 2003), 615–621.

- [28] BROWN, G. M., O'QUINN, C. F., AND PORTER, B. S. Requirements analysis for a multi-spacecraft flight system. In *2002 IEEE Aerospace Conference* (Big Sky, MT, March 9-16 2002), pp. 767–782.
- [29] BUSCHEK, H. *Synthesis of Fixed Order Controllers with Robustness to Mixed Real/Complex Uncertainties*. PhD thesis, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA, February 1995.
- [30] CALVEL, B., CABEZA, I., CABRAL, A., MANSKE, E., REBORDAO, J., SESSELMANN, R., SODNIK, Z., AND VERLAAN, A. High precision optical metrology for Darwin : Design and performance. In *5th International Conference on Space Optics* (Toulouse, France, April 2004).
- [31] CAMPBELL, M. E. Planning algorithm for multiple satellite clusters. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 26, 5 (September-October 2003), 770–780.
- [32] CARPENTER, J. R. A preliminary investigation of decentralized control for satellite formations. In *IEEE Aerospace Conference* (Big Sky, MT, March 2000), pp. 63–74.
- [33] CARPENTER, J. R. Decentralized control of satellite formations. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 12 (2002), 141–161.
- [34] CARPENTER, J. R., AND ALFRIEND, K. T. Navigation accuracy guidelines for orbital formation flying. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Austin, TX, August 11-14 2003).
- [35] CHABOT, T., AND UDREA, B. XEUS mission guidance navigation and control. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Keystone, CO, August 21-24 2006).
- [36] CHEN, L., SEEREERAM, S., AND MEHRA, R. K. Unscented Kalman Filter for multiple spacecraft formation flying. In *2003 American Control Conference* (Denver, CO, June 4-6 2003), pp. 1752–1757.
- [37] CHRÉTIEN, J.-P. GNC pour l'interférométrie : évolution de l'atelier. synthèse de lois de pilotage axe par axe et multivariables. Tech. Rep. RF 3/11898 DCSD, ONERA, Toulouse, France, December 2006.
- [38] CHRÉTIEN, J.-P., LAMBERT, C., AND LLIBRE, M. Étude du GNC pour une mission d'astronomie/interférométrie - interface de synthèse et de validation. Tech. rep., ONERA-DCSD, Toulouse, France, December 2005.
- [39] CHRÉTIEN, J.-P., AND LLIBRE, M. Étude du GNC pour une mission d'astronomie/interférométrie. Tech. Rep. RI 1/09988 DCSD, ONERA, Toulouse, France, May 2005.
- [40] CLAVEAU, F., AND CHEVREL, P. A sequential design methodology for large-scale LBT systems. In *2005 American Control Conference* (Portland, OR, June 8-10 2005).
- [41] CLOHESSY, W., AND WILTSHIRE, R. Terminal guidance system for satellite rendezvous. *Journal of the Aerospace Sciences* 27, 9 (1960), 653–658,674.
- [42] COLLANGE, G. Missions aux points de Lagrange. analyse et design. Master's thesis, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, France, 2004.
- [43] COOLEY, J. W., AND TUKEY, J. W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comput.* 19 (1965), 297–301.

- [44] DAILEY, R. L. Lecture notes for the workshop on \mathcal{H}_∞ and μ methods for robust control, May 21-22 1990.
- [45] DELPECH, M., AND FOURCADE, J. Design of the GNC system for a new concept of X-ray distributed telescope. In *2nd International Symposium on Formation Flying Missions and Technologies* (Washington, D.C., September 14-16 2004).
- [46] DÖLL, C. *La robustesse de lois de commande pour des structures flexibles en aéronautique et espace*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, France, July 2001.
- [47] DÖLL, C., AND KNAUF, A. Comparison in terms of size of several LFT models for the lateral motion of a generic fighter aircraft. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (San Francisco, CA, August 15-18 2005).
- [48] DOYLE, J. C., GLOVER, K., KHARGONEKAR, P. P., AND FRANCIS, B. A. State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 34, 8 (August 1989), 831-847.
- [49] D'SOUZA, C. N. An optimal guidance law for formation flying and stationkeeping. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Monterey, CA, August 5-8 2002).
- [50] DUBOVITSKY, S., LAY, O. P., ABRAMOVICI, A., HAWLEY, J. G., KUHNERT, A. C., MULDER, J. L., AND ASBURY, C. G. The StarLight metrology subsystem. In *2002 IEEE Aerospace Conference* (Big Sky, MT, March 2002), pp. 1721-1736.
- [51] EADS ASTRIUM. Étude du GNC pour une mission d'astronomie/interférométrie (volet système). EAA.PS.96772.ASTR, May 2005.
- [52] EBERLY, D. Intersection of ellipsoids. <http://www.geometrictools.com/Documentation/IntersectionOfEllipsoids.pdf>, October 11 2000. [En ligne ; Page disponible le 29-juin-2006].
- [53] ERWIN, R. S., SPARKS, A. G., AND BERNSTEIN, D. S. Fixed-structure robust controller synthesis via decentralized static output feedback. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 8 (1998), 499-522.
- [54] FERGUSON, P., AND HOW, J. Decentralized estimation algorithms for formation flying spacecraft. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Austin, TX, August 11-14 2003).
- [55] FERRERES, G. *A Practical Approach to Robustness Analysis with Aeronautical Applications*. Springer, 1999.
- [56] GAHINET, P., NEMIROVSKI, A., LAUB, A. J., AND CHILALI, M. LMI Control Toolbox - for use with MATLAB. User's guide Version 1, May 1995.
- [57] GAULOCHER, S., CHRÉTIEN, J.-P., AND PITTET, C. Six-axis control design and controller switching for spacecraft formation flying. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Keystone, CO, August 2006).
- [58] GAULOCHER, S., CHRÉTIEN, J.-P., PITTET, C., AND ALAZARD, D. Six-axis decentralized control design for spacecraft formation flying. In *IEEE International Conference on Control Applications* (Munich, Germany, October 4-6 2006).

- [59] GEROMEL, J. C., BERNUSSOU, J., AND DE OLIVEIRA, M. C. \mathcal{H}_2 -norm optimization with constrained dynamic output feedback controllers : Decentralized and reliable control. *IEEE Transactions on Automatic Control* 44, 7 (July 1999), 1449–1454.
- [60] GILL, E., AND RUNGE, H. Tight formation flying for an along-track SAR interferometer. In *54th International Astronautical Congress (IAF)* (Bremen, Germany, September 29-October 3 2003).
- [61] GIM, D.-W., AND ALFRIEND, K. T. The state transition matrix of relative motion for the perturbed non-circular reference orbit. In *AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting* (Santa Barbara, CA, February 11-15 2001).
- [62] GÖKCEK, C. Stability analysis of periodically switched linear systems using Floquet theory. *Mathematical Problems in Engineering* 2004, 1 (2004), 1–10.
- [63] GUIBOUT, V. M., AND SCHEERES, D. J. Spacecraft formation dynamics and design. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 1, 1 (January-February 2006), 121–133.
- [64] GURFIL, P., IDAN, M., AND KASDIN, N. J. Adaptive neural control of deep-space formation flying. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 26, 3 (May-June 2003), 491–501.
- [65] GURFIL, P., AND KASDIN, N. J. Dynamics and control of spacecraft formation flying in three-body trajectories. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Montreal, Canada, August 6-9 2001).
- [66] HABLANI, H. B., TAPPER, M., AND DANA-BASHIAN, D. Guidance algorithms for autonomous rendezvous of spacecraft with a target vehicle in circular orbit. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Montreal, Canada, August 6-9 2001).
- [67] HADAEGH, F. Y., GHAVIMI, A. R., SINGH, G., AND QUADRELLI, M. A centralized optimal controller for formation flying spacecraft. In *International Conference on Intelligent Technologies* (Bangkok, Thailand, September 2000).
- [68] HASHIMOTO, T., SAKAI, S., NINOMIYA, K., MAEDA, K., AND SAITO, T. Formation flight control using superconducting magnets. In *International Symposium Formation Flying Missions and Technologies* (Toulouse, France, October 29-31 2002).
- [69] HILL, G. W. Researches in the lunar theory. *American Journal of Mathematics* 1, 1 (1878), 5–26.
- [70] HILL, G. W. Researches in the lunar theory. *American Journal of Mathematics* 1, 2 (1878), 129–147.
- [71] HILL, G. W. Researches in the lunar theory. *American Journal of Mathematics* 3, 3 (1878), 245–260.
- [72] HÖLLIG, K. *Grundlagen der Numerik*. MathText, Zavelstein, Germany, 1998.
- [73] HOW, J. P., AND TILLERSON, M. Analysis of the impact of sensor noise on formation flying control. In *2001 American Control Conference* (Arlington, VA, June 25-27 2001), pp. 3986–3991.
- [74] HUGHES, P. C. *Spacecraft Attitude Dynamics*. John Wiley & Sons, 1986.

- [75] HUSSEIN, I. I., SCHEERES, D. J., AND HYLAND, D. C. Control of a satellite formation for imaging applications. In *2003 American Control Conference* (Denver, CO, June 4-6 2003).
- [76] INALHAN, G., TILLERSON, M., AND HOW, J. P. Relative dynamics and control of spacecraft formations in eccentric orbits. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 25, 1 (January-February 2002), 48–59.
- [77] IRVIN, D. J., AND JACQUES, D. R. Linear vs. nonlinear control techniques for the reconfiguration of satellite formations. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Montreal, Canada, August 6-9 2001).
- [78] JÖNSSON, U. Lecture notes on integral quadratic constraints. Department of Mathematics, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, May 24 2001.
- [79] JOHANSSON, H. Optimal thruster actuation in high precision attitude and orbit control systems. Master's thesis, Lulea University of Technology, Department of Space Science, Kiruna, Sweden, 2005.
- [80] JOHANSSON, M. *Piecewise Linear Control Systems*. Springer, 2003.
- [81] JUNGE, O., LEVENHAGEN, J., SEIFRIED, A., AND DELLNITZ, M. Identification of halo orbits for energy efficient formation flying. In *International Symposium on Formation Flying* (Toulouse, France, 2002).
- [82] KANEDA, R., YAZAKI, F., SAKAI, S., HASHIMOTO, T., AND SAITO, H. The relative position control in formation flying satellites using super-conducting magnets. In *2nd International Symposium on Formation Flying Missions and Technologies* (Washington, D.C., September 14-16 2004).
- [83] KANEV, S., AND VERHAEGEN, M. A bank of reconfigurable LQG controllers for linear systems subjected to failures. In *39th IEEE Conference on Decision and Control* (Sydney, Australia, December 2000), pp. 3684–3689.
- [84] KANG, W., SPARKS, A., AND BANDA, S. Coordinated control of multisatellite systems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 24, 2 (March-April 2001), 360–368.
- [85] KAPILA, V., SPARKS, A. G., AND BUFFINGTON, J. M. Spacecraft formation flying : Dynamics and control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 23, 3 (2000), 561–564.
- [86] KAPILA, V., SPARKS, A. G., BUFFINGTON, J. M., AND YAN, Q. Spacecraft formation flying : Dynamics and control. In *1999 American Control Conference* (San Diego, CA, June 1999).
- [87] KARLGAARD, C. D. Second-order relative motion equations. Master's thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, July 2001.
- [88] KARLGAARD, C. D. Robust rendezvous navigation in elliptical orbit. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 29, 2 (March-April 2006), 495–499.
- [89] KIM, J., BATES, D. G., AND POSTLETHWAITE, I. Robustness analysis of linear periodic time-varying systems subject to structured uncertainty. *Systems & Control Letters* (2006).
- [90] KIM, S.-G., CRASSIDIS, J. L., CHENG, Y., FOSBURY, A. M., AND JUNKINS, J. L. Kalman filtering for relative spacecraft attitude and position estimation. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (San Francisco, California, August 15-18 2005).

- [91] KOZAI, Y. The motion of a close earth satellite. *The Astron. J.* 64, 1274 (1959).
- [92] KULKARNI, J., AND CAMPBELL, M. Asymptotic stabilization of motion about an unstable orbit : Application to spacecraft flight in halo orbit. In *2004 American Control Conference* (Boston, MA, December 2004).
- [93] KWON, D. W., AND MILLER, D. W. Electromagnetic formation flight of satellite arrays. Master's thesis, Department of Aeronautical and Astronautical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, February 2005.
- [94] LANGBORT, C., CHANDRA, R. S., AND D'ANDREA, R. Distributed control design for systems interconnected over an arbitrary graph. *IEEE Transactions on Automatic Control* 49, 9 (2004), 1502–1519.
- [95] LARDIÈRE, O., LABEYRIE, A., GILLET, S., AND RIAUD, P. Spaceborne hypertelescope : A spacecraft formation flying controlled by solar sails. In *2nd International Workshop on Satellite Constellations and Formation Flying* (Haifa, Israel, February 19-20 2001), pp. 181–186.
- [96] LAU, K., LICHTEN, S., YOUNG, L., AND HAINES, B. An innovative deep space application of GPS technology for formation flying spacecraft. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference* (San Diego, CA, July 29-31 1996).
- [97] LAWDEN, D. Fundamentals of space navigation. *Journal of the British Interplanetary Society* 13, 2 (1954), 87–101.
- [98] LAWTON, J. R., AND BEARD, R. W. Synchronized multiple spacecraft rotations. *Automatica* 38 (2002), 1359–1364.
- [99] LEE, A. Y., YU, J. W., KAHN, P. B., AND STOLLER, R. L. Preliminary spacecraft pointing requirements error budgets for the space interferometry mission. In *1999 IEEE Aerospace Conference* (Aspen, CO, March 6-13 1999), pp. 35–47.
- [100] LEE, D., AND LI, P. Y. Formation and maneuver control of multiple spacecraft. In *2003 American Control Conference* (Denver, CO, June 4-6 2003), pp. 278–283.
- [101] LEGORREC, Y. *Commande modale robuste et synthèse de gains autoséquentés. Approche multimodèle*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, France, December 1998.
- [102] LENNOX, S. E. Coupled orbital and attitude control simulations for spacecraft formation flying. In *2004 AIAA Region I-MA Student Conference* (Blacksburg, Virginia, April 16-18 2004).
- [103] LEONARD, C. L., HOLLISTER, W. M., AND BERGMANN, E. V. Orbital formationkeeping with differential drag. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 12, 1 (January-February 1989), 108–113.
- [104] LLIBRE, M. Modélisation des systèmes mécaniques articulés. Tech. rep., ONERA, Toulouse, France, June 2002.
- [105] LOBOSCO, D. M. Integrated modeling of optical performance for the Terrestrial Planet Finder structurally connected interferometer. Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, June 2004.

- [106] LOSSER, Y. *Ajustement de lois de commande et application en aéronautique*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, France, March 24 2006.
- [107] LUENBERGER, D. G. An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control AC-16*, 6 (December 1971), 596–602.
- [108] LURIE, B. J. Multi-mode synchronized control for formation flying interferometer. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Austin, TX, August 11-14 2003).
- [109] MAGNI, J.-F. Computation of the kernel of linear fractional representations. In *IEEE Conference on Control Applications* (Istanbul, Turkey, June 23-25 2003).
- [110] MAGNI, J.-F. Linear fractional representation toolbox. modelling, order reduction, gain scheduling. Tech. Rep. TR 6/08162, ONERA, Toulouse, France, July 2004.
- [111] MAGNI, J.-F. User manual of the linear fractional representation toolbox version 2.0. Tech. Rep. TR 5/10403.01 F DCSD, ONERA, 2006.
- [112] MAGNI, J.-F., BENNANI, S., AND TERLOUW, J., Eds. *Robust Flight Control : A Design Challenge*. Springer, 1997.
- [113] MAGNI, J.-F., AND CHAMPETIER, C. Lecture notes analyse et synthèse de lois de commande modales. Supaéro, Toulouse, France, 1990.
- [114] MAGNI, J.-F., KNAUF, A., AND DÖLL, C. Practical implementation of LFT-scheduled feedback gains. In *6th Asian Control Conference* (Bali, Indonesia, July 18-21 2006).
- [115] MAILHÉ, L. M., AND GUZMÁN, J. J. Initialization and resizing of formation flying using global and local optimization methods. In *2004 IEEE Aerospace Conference* (Big Sky, MT, March 6-13 2004), pp. 547–556.
- [116] MANCEAUX-CUMER, C. *Techniques de commande robuste : approche par multiplicateurs et approche stochastique*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, France, December 1998.
- [117] MANCEAUX-CUMER, C., AND CHRÉTIEN, J.-P. Minimal LFT form of a spacecraft built up from two bodies. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Montreal, Canada, August 6-9 2001).
- [118] MANDUTIANU, S., HADAEGH, F., AND ELLIOT, P. Multi-agent system for formation flying missions. In *2001 IEEE Aerospace Conference* (Big Sky, MT, March 10-17 2001), pp. 2793–2802.
- [119] MANNCHEN, T. *Helicopter Vibration Reduction Using Robust Control*. PhD thesis, Institut für Flugmechanik und Flugregelung, Universität Stuttgart, Stuttgart, Germany, January 10 2003.
- [120] MARCHAL, C. *The Three-Body Problem*. Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 1990.
- [121] MCQUADE, F., WARD, R., AND MCINNES, C. R. The autonomous configuration of satellite formation using a generic potential function. In *5th International Symposium on Spaceflight Dynamics* (Biarritz, France, June 26-30 2000).
- [122] MELTON, R. G. Comparison of relative-motion models for elliptical orbits. In *3rd International Workshop on Satellite Constellations and Formation Flying* (Pisa, Italy, 2003).

- [123] MEYBERG, K., AND VACHENAUER, P. *Höhere Mathematik*, 4th ed., vol. 1. Differential- und Integralrechnung, Vektor- und Matrizenrechnung. Springer-Verlag, 1997.
- [124] MEYSSIGNAC, B., AND FOURCADE, J. Analytical expression of the relative orbit geometry through differential orbit elements. In *4th International Workshop on Satellite Constellations and Formation Flying* (São José dos Campos, Brazil, February 14-16 2005).
- [125] MILAM, M. B., PETIT, N., AND MURRAY, R. M. Constrained trajectory generation for micro-satellite formation flying. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Montreal, Canada, August 6-9 2001).
- [126] MORI, O., AND MATUNAGA, S. Coordinated control of tethered satellite cluster systems. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Montreal, Canada, August 6-9 2001).
- [127] MUELLER, J. B., AND THOMAS, S. J. A scalable system for formation flying guidance and control. In *6th International ESA Conference on Guidance, Navigation and Control Systems* (Loutraki, Greece, October 17-20, 2005).
- [128] NAASZ, B. J. Classical element feedback control for spacecraft orbital maneuvers. Master's thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, May 28 2002.
- [129] NAASZ, B. J., KARLGAARD, C. D., AND HALL, C. D. Application of several control techniques for the ionospheric observation nanosatellite formation. In *AAS/AIAA Space Flight Mechanics Conference* (San Antonio, TX, January 27-30 2002).
- [130] NELSON, E., SPARKS, A., AND KANG, W. Coordinated nonlinear tracking control for satellite formations. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Montreal, Canada, August 6-9 2001).
- [131] NESTEROV, Y., AND NEMIROVSKII, A. *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [132] NIWA, H.-S. Newtonian dynamical approach to fish schooling. *Journal of Theoretical Biology* 181, 1 (1996), 47–63.
- [133] NÜRNBERG, R. Distance from a point to an ellipse. <http://www.ma.ic.ac.uk/~rn/distance2ellipse.pdf>, 2006. [En ligne; Page disponible le 29-juin-2006].
- [134] PACKARD, A., BECKER, G., PHILBRICK, D., AND BALAS, G. Control of parameter-dependent systems : Applications to \mathcal{H}_∞ gain-scheduling. In *First IEEE Regional Conference on Aerospace Control Systems* (Westlake Village, CA, May 25-27 1993), pp. 329–333.
- [135] PAN, H., AND KAPILA, V. Adaptive nonlinear control for spacecraft formation flying with coupled translational and attitude dynamics. In *40th IEEE Conference on Decision and Control* (Orlando, FL, December 2001).
- [136] PAXMAN, J. P., AND VINNICOMBE, G. Stability of switching systems : Initialization and realization. Tech. Rep. CUED/F-INFENG/TR.460, Department of Engineering, University of Cambridge, Cambridge, UK, October 25 2003.
- [137] PELLANDA, P. C. *Commande de systèmes instationnaires. Séquencement de compensateurs et commande LPV*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, France, September 2001.

- [138] PHILIPPE, C. ESA perspectives on advances control technology for complex space systems. Keynote lecture. IEEE Conference on Control Applications. Munich, Germany, October 4-6 2006.
- [139] PIPER, G. E., WATKINS, J. M., AND LEITNER, J. A. On the impact of cross-link delays on spacecraft formation control. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Austin, TX, August 11-14 2003).
- [140] PIRSON, L., CHARBONNEL, C., UDREA, B., RENNIE, M., MCGUINNESS, P., AND PALOMO, P. Darwin precursor demonstration mission : The ICC2 study, from GNC design to real-time test bench validation. In *6th International ESA Conference on Guidance, Navigation and Control Systems* (Loutraki, Greece, October 17-20, 2005).
- [141] PLOEN, S. R., HADAEGH, F. Y., AND SCHARF, D. P. Rigid body equations of motion for modeling and control of spacecraft formations - part 1 : Absolute equations of motion. In *2004 American Control Conference* (Boston, MA, USA, June 30-July 2 2004).
- [142] PLOEN, S. R., QUADRELLI, M. B., SCHARF, D. P., AND HADAEGH, F. Y. Dynamics of drag-free formations for earth imaging applications. In *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit* (Keystone, CO, USA, August 21-24 2006).
- [143] PLUYM, J. P., AND DAMAREN, C. J. Second order relative motion model for spacecraft under J_2 perturbations. In *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit* (Keystone, CO, USA, August 21-24 2006).
- [144] PURCELL, G., KUANG, D., LICHTEN, S., WU, S.-C., AND YOUNG, L. Autonomous formation flyer (aff) sensor technology development. Tech. Rep. TMO PR 42-134, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, April-June 1998.
- [145] RICHARDS, A., HOW, J., SCHOUWENAARS, T., AND FERON, E. Plume avoidance maneuver planning using mixed integer linear programming. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Montreal, Canada, August 6-9 2001).
- [146] ROBERTSON, A., INALHAN, G., AND HOW, J. P. Spacecraft formation flying control design for the Orion mission. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Portland, OR, August 1999).
- [147] ROBERTSON, A. D. *Control System Design for Spacecraft Formation Flying : Theory and Experiment*. PhD thesis, Stanford University, Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford, CA, June 2001.
- [148] ROMANELLI, C. C., NATARAJAN, A., SCHAUB, H., PARKER, G. G., AND KING, L. B. Coulomb spacecraft voltage study due to differential orbital perturbation. In *2006 AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting* (Tampa, FL, January 22-26 2006).
- [149] ROSS, I. M. Linearized dynamic equations for spacecraft subject to J_2 perturbations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 26, 4 (2003), 657–659.
- [150] RUGH, W. J. *Linear System Theory*. Prentice Hall, 1996.
- [151] SAFONOV, M. G., GOH, K. C., AND LY, J. H. Control system synthesis via bilinear matrix inequalities. In *American Control Conference* (Baltimore, Maryland, June 1994), pp. 45–49.

- [152] SANDELL, N. R., VARAIYA, P., ATHANS, M., AND SAFONOV, M. G. Survey of decentralized control methods for large scale systems. *IEEE Transactions on Automatic Control AC-23*, 2 (April 1978), 108–128.
- [153] SANNER, R. M., AND PROFFEN, D. K. Virtual rigid body (VRB) satellite control with formation preserving cross-coupling. In *2nd International Symposium on Formation Flying Missions and Technologies* (Washington, D.C., September 14-16 2004).
- [154] SCHARF, D. P., HADAEGH, F. Y., AND PLOEN, S. R. A survey of spacecraft formation flying guidance and control (part I) : Guidance. In *2003 American Control Conference* (Denver, CO, June 4-6 2003).
- [155] SCHARF, D. P., HADAEGH, F. Y., AND PLOEN, S. R. A survey of spacecraft formation flying guidance and control (part II) : Control. In *2004 American Control Conference* (Boston, MA, June 30-July 2 2004).
- [156] SCHEERES, D. J., AND VINH, N. X. Dynamics and control of relative motion in an unstable orbit. In *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Meeting* (Denver, CO, August 14-17 2000).
- [157] SCHWEIGHART, S., AND SEDWICK, R. A perturbative analysis of geopotential disturbances for satellite cluster formation flying. In *IEEE Aerospace Conference* (Big Sky, MT, 2001).
- [158] SCHWEIGHART, S. A., AND SEDWICK, R. J. High-fidelity linearized J_2 model for satellite formation flight. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 25, 6 (November-December 2002), 1073–1080.
- [159] SCORLETTI, G., AND DUC, G. A convex approach to decentralized \mathcal{H}_∞ control. In *1997 American Control Conference* (Albuquerque, NM, June 1997).
- [160] SEATZU, C., GIUA, A., AND USAI, G. Decentralized volume control of open-channels using \mathcal{H}_2 norm minimization. In *IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics* (San Diego, CA, October 11-14 1998), pp. 3891–3896.
- [161] SEBE, N. A unified approach to decentralized controller design. In *42nd IEEE Conference on Decision and Control* (Maui, Hawaii, December 2003), pp. 1086–1091.
- [162] SINGH, G., AND HADAEGH, F. Y. Collision avoidance guidance for formation-flying applications. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Montreal, Canada, August 6-9 2001).
- [163] SKOGESTAD, S., AND POSTLETHWAITE, I. *Multivariable Feedback Control : Analysis and Design*, second edition ed. John Wiley & Sons, 2005.
- [164] SPARKS, A. Satellite formationkeeping control in the presence of gravity perturbations. In *2000 American Control Conference* (Chicago, IL, June 28-30 2000).
- [165] STARIN, S. R., YEDAVALLI, R. K., AND SPARKS, A. G. Design of a LQR controller of reduced inputs for multiple spacecraft formation flying. In *American Control Conference* (Arlington, VA, June 25-27 2001).
- [166] STARIN, S. R., YEDAVALLI, R. K., AND SPARKS, A. G. Spacecraft formation flying maneuvers using linear-quadratic regulation with no radial axis inputs. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Montreal, Canada, August 6-9 2001).

- [167] STILWELL, D. J., AND RUGH, W. J. Interpolation of observer state feedback controllers for gain scheduling. *IEEE Transactions on Automatic Control* 44, 6 (June 1999), 1225–1229.
- [168] SWINKELS, B. L. *High-accuracy absolute distance metrology*. PhD thesis, TU Delft, Delft, The Netherlands, September 2006.
- [169] TANYGIN, S., AND WOODBURN, J. Attitude covariance visualization. In *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit* (Monterey, CA, August 5-8 2002).
- [170] THÉRON, A., JOUHAUD, F., AND CHRÉTIEN, J.-P. Modélisation du mouvement orbital relatif entre deux satellites. Tech. Rep. NI 1/08282 DCSD, ONERA-DCSD, Toulouse, France, January 2004.
- [171] TILLERSON, M., AND HOW, J. P. Formation flying control in eccentric orbits. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Montreal, Canada, August 6-9 2001).
- [172] TILLERSON, M., AND HOW, J. P. Advanced guidance algorithms for spacecraft formation-keeping. In *American Control Conference* (2002).
- [173] TILLERSON, M., INALHAN, G., AND HOW, J. P. Co-ordination and control of distributed spacecraft systems using convex optimization techniques. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 12 (2002), 207–242.
- [174] TILLERSON, M. J. Coordination and control of multiple spacecraft using convex optimization techniques. Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, June 2002.
- [175] TSCHAUNER, J. Elliptic orbit rendezvous. *AIAA Journal* 5, 6 (1967), 1110–1113.
- [176] TURNER, M. C., AOUF, N., BATES, D. G., POSTLETHWAITE, I., AND BOULET, B. Switched control of a vertical/short take-off land aircraft : an application of linear quadratic bumpless transfer. *Proceedings of The Institution of Mechanical Engineers Part I, Journal of Systems and Control Engineering* 220 (2006), 157–170.
- [177] VADALI, S. R., VADDI, S. S., AND ALFRIEND, K. T. An intelligent control concept for formation flying satellite constellations. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 12, 2-3 (2000), 97–115.
- [178] VADALI, S. R., VADDI, S. S., NAIK, K., AND ALFRIEND, K. T. Control of satellite formations. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Montreal, Canada, August 6-9 2001).
- [179] VADDI, S. S., ALFRIEND, K. T., VADALI, S. R., AND SENGUPTA, P. Formation establishment and reconfiguration using impulsive control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 28, 2 (March-April 2005), 262–268.
- [180] VALENTIN LUANGRAJ, S. *Vers une approche non-linéaire de la commande d'attitude de satellites par jets de gaz*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, France, December 16 2004.
- [181] VANDYKE, M. C. Decentralized attitude control of a formation of spacecraft. In *2004 AIAA Region I-MA Student Conference* (Blacksburg, VA, April 16-18 2004).

- [182] VARGA, A. New numerical software for model and controller reduction. Tech. rep., SLICOT Working Note SLWN2002-5, 2002. http://elib.dlr.de/11855/01/varga_SLWN2002-5.pdf.
- [183] VESELY, F. J. Shortest distance between two ellipses or ellipsoids. http://homepage.univie.ac.at/franz.vesely/texte/hard_ellipse/hell/, July 2002. [En ligne ; Page disponible le 29-juin-2006].
- [184] WANG, P. K. C., HADAEGH, F. Y., AND LAU, K. Synchronized formation rotation and attitude control of multiple free-flying spacecraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 22, 1 (January-February 1999), 28–35.
- [185] WIE, B. *Space Vehicle Dynamics and Control*, 1 ed. AIAA Education Series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA, USA, 1998.
- [186] WIKIPÉDIA. Gravitation — Wikipédia, l'encyclopédie libre. <http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Gravitation&oldid=8010201>, 2006. [En ligne ; Page disponible le 29-juin-2006].
- [187] WIKIPÉDIA. Harmonique sphérique — Wikipédia, l'encyclopédie libre. http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Harmonique_sph%C3%A9rique&oldid=6902888, 2006. [En ligne ; Page disponible le 29-juin-2006].
- [188] WIKIPÉDIA. Lois de kepler — Wikipédia, l'encyclopédie libre. http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Lois_de_Kepler&oldid=9582526, 2006. [En ligne ; Page disponible le 29-juin-2006].
- [189] WIKIPÉDIA. Soleil — Wikipédia, l'encyclopédie libre. <http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Soleil&oldid=8268548>, 2006. [En ligne ; Page disponible le 29-juin-2006].
- [190] WIKIPÉDIA. Terre — Wikipédia, l'encyclopédie libre. <http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Terre&oldid=8191160>, 2006. [En ligne ; Page disponible le 29-juin-2006].
- [191] WIKIPÉDIA. Unité astronomique — Wikipédia, l'encyclopédie libre. http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Unit%C3%A9_astronomique&oldid=10221382, 2006. [En ligne ; Page disponible le 29-juin-2006].
- [192] WON, C.-H., AND AHN, H.-S. Nonlinear orbital dynamic equations and state-dependent riccati equation control of formation flying satellites. *Journal of the Astronautical Sciences* 51, 4 (October-December 2003).
- [193] WONG, H., AND KAPILA, V. Spacecraft formation flying near sun-earth L_2 lagrange point : Trajectory generation and adaptive output feedback control. In *2005 American Control Conference* (Portland, OR, June 8-10 2005).
- [194] WONG, H., KAPILA, V., AND SPARKS, A. Adaptive output feedback tracking control of multiple spacecraft. In *American Control Conference* (Arlington, VA, June 25-27 2001).
- [195] WONG, H., PAN, H., DE QUEIROZ, M. S., AND KAPILA, V. Adaptive learning control for spacecraft formation flying. In *40th IEEE Conference on Decision and Control* (Orlando, FL, December 2001).
- [196] WONG, H., PAN, H., AND KAPILA, V. Output feedback control for spacecraft formation flying with coupled translation and attitude dynamics. In *2005 American Control Conference* (Portland, OR, USA, June 8-10 2005).

- [197] YAMAMOTO, T. Practical analytic solution of relative motion between formation flying satellites with different ballistic coefficients in the near-circular reference orbit. In *6th International ESA Conference on Guidance, Navigation and Control Systems* (Loutraki, Greece, October 17-20 2005).
- [198] YAMANAKA, K. Simultaneous translation and rotation control law for formation flying satellites. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Denver, CO, August 14-17 2000).
- [199] YAMANAKA, K., AND ANKERSEN, F. New state transition matrix for relative motion on an arbitrary elliptical orbit. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 25, 1 (2002), 60–66.
- [200] YAN, Q., KAPILA, V., AND SPARKS, A. G. Pulse-based periodic control for spacecraft formation flying. In *2000 American Control Conference* (Chicago, IL, June 2000).
- [201] YAN, Q., YANG, G., KAPILA, V., AND DE QUEIROZ, M. S. Nonlinear dynamics and output feedback control of multiple spacecraft in elliptical orbits. In *2000 American Control Conference* (Chicago, IL, June 2000).
- [202] YANG, G., YANG, Q., KAPILA, V., PALMER, D., AND VAIDYANATHAN, R. Fuel optimal maneuvers for multiple spacecraft formation reconfiguration using multi-agent optimization. In *40th IEEE Conference on Decision and Control* (Orlando, FL, December 2001).
- [203] YEDAVALLI, R. K., AND SPARKS, A. Satellite formation keeping control design based on ultimate bounded analysis of switched systems. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Montreal, Canada, August 6-9 2001).
- [204] YEDAVALLI, R. K., AND SPARKS, A. G. Satellite formation flying control design based on hybrid control system stability analysis. In *2000 American Control Conference* (Chicago, IL, June 2000).
- [205] ZARROUATI, O. *Trajectoires spatiales*. Cépaduès-Éditions, Toulouse, France, 1987.
- [206] ZHANG, F., AND KRISHNAPRASAD, P. S. Formation dynamics under a class of control laws. Tech. rep., Institute of for Systems Research, University of Maryland at College Park, College Park, MD, 2002.
- [207] ZHANG, H., AND SUN, L. Spacecraft formation-flying in eccentric orbits. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (Austin, TX, August 11-14 2003).
- [208] ZUO, L., AND NAYFEH, S. A. Structured \mathcal{H}_2 optimization of vehicle suspensions based on multi-wheel models. *Vehicle System Dynamics* 40, 5 (2003), 351–371.

Annexes

Annexe A

Constantes et unités

Constante	Symbole	Valeur	Unité (SI)	Source
Rayon de la Terre (équatorial)	R_{\oplus}	$6,37814 \cdot 10^6$	m	[190]
Rayon moyen du Soleil	R_{\odot}	$6,96 \cdot 10^8$	m	[189]
Harmonique J_2 de la gravitation terrestre	J_2	$1,08263 \cdot 10^{-3}$	–	[12]
Constante universelle de gravitation	G	$6,6742 \cdot 10^{-11}$	$\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$	[186]
Masse de la Terre	m_{\oplus}	$5,9736 \cdot 10^{24}$	kg	[190]
Masse du Soleil	m_{\odot}	$1,9891 \cdot 10^{30}$	kg	[189]
Constante gravitationnelle géocentrique	$\mu_{\oplus} = Gm_{\oplus}$	$3,9869 \cdot 10^{14}$	$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$	–
Constante gravitationnelle héliocentrique	$\mu_{\odot} = Gm_{\odot}$	$1,3276 \cdot 10^{20}$	$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$	–
Unité astronomique	ua	$149,59 \cdot 10^9$	m	[191]
Position du point de LAGRANGE par rapport à la Terre	x_{L_2}	$1,5015 \cdot 10^9$	m	–
Pression solaire proche de la Terre	p_{sol}	$\approx 4,5 \cdot 10^{-6}$	Nm^{-2}	–
Nombre exponentiel	e	$\approx 2,71828$	–	–
Constante d'Archimède ¹	$\pi,$	$\approx 3,14159$	–	–
Unité imaginaire	i	$\sqrt{-1}$	–	–
Seconde d'arc	as	$4,85 \cdot 10^{-6}$	rad	–

Annexe B

Notations

Sommaire

B.1 Raccourcis	307
B.2 Matrice antisymétrique	307
B.3 Matrices d'identité et nulle	308
B.4 Matrices colonnes nulle et élémentaires	309
B.5 Matrices de rotation élémentaires	309
B.6 Matrice diagonale	311

B.1 Raccourcis

Pour raccourcir la notation des fonctions trigonométriques sin et cos, nous utilisons souvent (mais pas systématiquement) les raccourcis suivants qui sont courants dans la littérature :

$$\begin{aligned}\sin \theta_1 &= s_1 \\ \cos \theta_1 &= c_1\end{aligned}$$

B.2 Matrice antisymétrique

La *matrice antisymétrique* est définie comme suit :

$$v^\times = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}^\times = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le carré d'une matrice antisymétrique peut être calculé de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 v^{2 \times} &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}^{2 \times} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}^{\times} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}^{\times} \\
 &= \begin{pmatrix} -(v_2^2 + v_3^2) & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_1 v_2 & -(v_1^2 + v_3^2) & v_2 v_3 \\ v_1 v_3 & v_2 v_3 & -(v_1^2 + v_2^2) \end{pmatrix} \\
 &= -(v^T v) I_3 + v v^T
 \end{aligned}$$

B.3 Matrices d'identité et nulle

Les *matrices nulles* s'écrivent :

$$O_{p \times m} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_m \Bigg\} p$$

En particulier, la matrice nulle carrée est définie comme suit :

$$\begin{aligned}
 O_3 &= O_{3 \times 3} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

La *matrice d'identité* s'écrit :

$$I_n = \left. \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} n$$

En particulier, il vient :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B.4 Matrices colonnes nulle et élémentaires

La *matrice colonne nulle* s'écrit :

$$o_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les *matrices colonnes élémentaires* s'écrivent :

$$i_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B.5 Matrices de rotation élémentaires

La *matrice de rotation autour du premier axe* avec un angle θ s'écrit :

$$C_I(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

La *matrice de rotation autour du second axe* avec un angle θ s'écrit :

$$C_{II}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

La *matrice de rotation autour du troisième axe* avec un angle θ s'écrit :

$$C_{III}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'enchaînement des trois matrices de rotation précédemment mentionnées sous forme d'angles de CARDAN s'écrit comme suit :

$$C_I(\theta_1)C_{II}(\theta_2)C_{III}(\theta_3) = \begin{pmatrix} c_2c_3 & c_2s_3 & -s_2 \\ s_1s_2c_3 - c_1s_3 & s_1s_2s_3 + c_1c_3 & s_1c_2 \\ c_1s_2c_3 + s_1s_3 & c_1s_2s_3 - s_1c_3 & c_1c_2 \end{pmatrix}$$

La dérivée temporelle de la matrice de rotation autour du premier axe avec un angle θ s'écrit :

$$\dot{C}_I(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{\theta} \sin \theta & \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 & -\dot{\theta} \cos \theta & -\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^\times C_I(\theta)$$

La dérivée temporelle de la matrice de rotation autour du deuxième axe avec un angle θ s'écrit :

$$\dot{C}_{II}(\theta) = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta & 0 & -\dot{\theta} \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\theta} \cos \theta & 0 & -\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}^{\times} C_{II}(\theta)$$

La dérivée temporelle de la matrice de rotation autour du troisième axe avec un angle θ s'écrit :

$$\dot{C}_{III}(\theta) = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta & \dot{\theta} \cos \theta & 0 \\ -\dot{\theta} \cos \theta & -\dot{\theta} \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}^{\times} C_{III}(\theta)$$

La dérivée de l'enchaînement des trois matrices de rotation précédemment mentionnées sous forme d'angles de CARDAN s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [C_I(\theta_1)C_{II}(\theta_2)C_{III}(\theta_3)] &= \dot{C}_I(\theta_1)C_{II}(\theta_2)C_{III}(\theta_3) + C_I(\theta_1)\dot{C}_{II}(\theta_2)C_{III}(\theta_3) \\ &\quad + C_I(\theta_1)C_{II}(\theta_2)\dot{C}_{III}(\theta_3) \\ &= - \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^{\times} C_I(\theta_1)C_{II}(\theta_2)C_{III}(\theta_3) \\ &\quad - C_I(\theta_1) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_2 \\ 0 \end{pmatrix}^{\times} C_{II}(\theta_2)C_{III}(\theta_3) \\ &\quad - C_I(\theta_1)C_{II}(\theta_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_3 \end{pmatrix}^{\times} C_{III}(\theta_3) \end{aligned}$$

Les matrices de rotation aux petits angles autour du premier, du deuxième et du troisième axe sont :

$$\Delta C_I(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta\theta \\ 0 & -\Delta\theta & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta C_{II}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\Delta\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta\theta & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta C_{III}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \Delta\theta & 0 \\ -\Delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'enchaînement des trois matrices de rotation aux petits angles s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta C_I(\Delta\theta_1)\Delta C_{II}(\Delta\theta_2)\Delta C_{III}(\Delta\theta_3) &\approx \begin{pmatrix} 1 & \Delta\theta_3 & -\Delta\theta_2 \\ -\Delta\theta_3 & 1 & \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 & -\Delta\theta_1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I_3 - \begin{pmatrix} \Delta\theta_1 \\ \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \end{pmatrix}^\times \end{aligned}$$

Les dérivées temporelles des matrices de rotation aux petits angles autour du premier, du deuxième et du troisième axe s'écrivent :

$$\Delta \dot{C}_I(\Delta\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta\dot{\theta} \\ 0 & -\Delta\dot{\theta} & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \Delta\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^\times \Delta C_I(\Delta\theta)$$

$$\Delta \dot{C}_{II}(\Delta\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\Delta\dot{\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta\dot{\theta} & 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}^\times \Delta C_{II}(\Delta\theta)$$

$$\Delta \dot{C}_{III}(\Delta\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta\dot{\theta} & 0 \\ -\Delta\dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}^\times \Delta C_{III}(\Delta\theta)$$

La dérivée temporelle de l'enchaînement des trois matrices de rotation aux petits angles s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\Delta C_I(\Delta\theta_1)\Delta C_{II}(\Delta\theta_2)\Delta C_{III}(\Delta\theta_3)] &\approx \begin{pmatrix} 0 & \Delta\dot{\theta}_3 & -\Delta\dot{\theta}_2 \\ -\Delta\dot{\theta}_3 & 0 & \Delta\dot{\theta}_1 \\ \Delta\dot{\theta}_2 & -\Delta\dot{\theta}_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \Delta\dot{\theta}_1 \\ \Delta\dot{\theta}_2 \\ \Delta\dot{\theta}_3 \end{pmatrix}^\times \Delta C_I(\Delta\theta_1)\Delta C_{II}(\Delta\theta_2)\Delta C_{III}(\Delta\theta_3) \end{aligned}$$

L'existence du signe \approx signifie que les expressions concernées sont exactes au premier ordre. Elles sont valables pour des petits angles $\Delta\theta_i$ et vitesses angulaires $\Delta\dot{\theta}_i$, ce qui est souligné par la notation (Δ) .

B.6 Matrice diagonale

La *matrice diagonale* est définie comme suit :

$$\text{diag}(v) = \text{diag}([v_1, v_2, v_3]^T) = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 \end{pmatrix}$$

Annexe C

Notions de base en cinématique et en dynamique

Sommaire

C.1 Cinématique	313
C.1.1 Repères	314
C.1.2 Produits	317
C.1.3 Dérivées	318
C.1.4 Paramétrisation de l'attitude	321
C.2 Dynamique	323
C.2.1 Masse ponctuelle	323
C.2.2 Corps rigide	324

Dans ce chapitre annexe, nous reprendrons les fondements de la cinématique et de la dynamique. Nous aurons besoin de ces deux disciplines pour établir des modèles cinématiques et dynamiques pour le vol en formation. Nous y aurons également recours pour les modèles des perturbations orbitales et pour les modèles météorologiques.

En plus, ce chapitre annexe nous sert à établir quelques termes couramment utilisés dans ce mémoire, comme *vecteur*.

Les explications suivront, dans les grandes lignes, l'approche proposée dans l'excellent livre de HUGHES, cf. Réf. [74]. Il existe aussi des œuvres en langue française traitant ce sujet, par exemple [19] ou [104].

C.1 Cinématique

La cinématique est la discipline de la mécanique qui décrit le mouvement de points et de corps dans l'espace. Les causes de ces mouvements ne sont pas considérées pour l'instant, ce rôle revient à la dynamique.

Si nous considérons une masse ponctuelle, c'est surtout sa position dans l'espace qui nous intéresse. Celle-ci peut être décrite par un *vecteur* :

Définition C.1 *Un vecteur est un objet géométrique dans un espace euclidien qui possède une direction et une magnitude. Il appartient à un espace vectoriel.*

Définition C.2 *Un scalaire est un objet géométrique dans un espace euclidien qui possède une magnitude, mais pas de direction. Il appartient aux nombres réels.*

Nous aurons plus tard également besoin de *dyades* :

Définition C.3 *Une dyade est un opérateur linéaire dans un espace euclidien. Son application à un vecteur fournit un vecteur.*

Les trois objets, scalaires, vecteurs et dyades, sont des tenseurs dans un espace euclidien, d'ordre zéro, un et deux, respectivement. Nous supposons un espace euclidien de dimension trois dans la suite. Exemples pour scalaires, vecteurs et dyades sont la masse, la force et la dyade d'inertie, respectivement.

Dorénavant, les scalaires seront écrits en lettres italiques (m), tandis que les vecteurs et dyades seront écrites en lettres italiques grasses et avec une seule flèche pour les vecteurs (\vec{f}) ou deux flèches pour les dyades ($\vec{\mathcal{J}}$).

C.1.1 Repères

Les Défs. C.1 et C.3 soulèvent un problème. Ces quantités abstraites sont idéales pour le traitement symbolique. Or, ils restent trop abstraits pour les utiliser dans une application numérique. Dans le cas d'un scalaire, ce problème n'existe pas.

La solution est de définir des repères dans lesquels on exprime les vecteurs et les dyades :

Définition C.4 *Un repère \mathcal{F} est défini par un trièdre de trois vecteurs qui sont orthonormaux et directs.*

Ici, *orthonormal* veut dire que les trois vecteurs sont des vecteurs unitaires et qu'ils sont mutuellement orthogonaux. *Direct* signifie qu'ils obéissent à la règle de la main droite, cf. FIG. C.1.

Il existe d'autres possibilités de définir des repères, mais la Déf. C.4 est la plus pratique et la plus couramment utilisée.

En utilisant un repère \mathcal{F}_A , un vecteur peut être écrit en fonction de ses composantes dans ce repère :

$$\vec{v} = v_{A,1} \vec{e}_{A,1} + v_{A,2} \vec{e}_{A,2} + v_{A,3} \vec{e}_{A,3} \quad (\text{C.1})$$

Les vecteurs unitaires, orthonormaux et directs $\vec{e}_{A,1}$, $\vec{e}_{A,2}$ et $\vec{e}_{A,3}$ définissent le repère \mathcal{F}_A . Connaissant le repère \mathcal{F}_A , il suffit maintenant d'indiquer les composantes $v_{A,1}$, $v_{A,2}$ et $v_{A,3}$ du vecteur \vec{v} dans ce repère.

Il est aussi possible d'écrire la même chose comme produit scalaire :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_{A,1} & v_{A,2} & v_{A,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_{A,1} \\ \vec{e}_{A,2} \\ \vec{e}_{A,3} \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

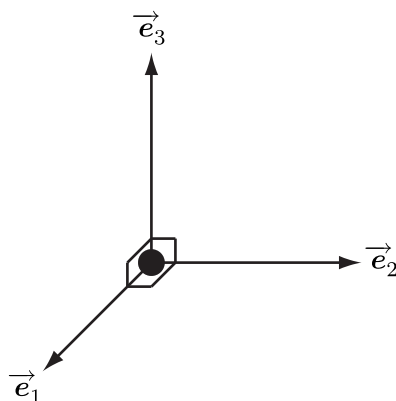


FIGURE C.1 – Un système direct de vecteurs orthonormaux

Pour raccourcir la notation, nous introduisons une nouvelle notation, la *vectrice* (court pour « matrice de vecteurs », *angl.* vector matrix, selon [74]) :

$$\mathcal{F}_A = \begin{pmatrix} \vec{e}_{A,1} \\ \vec{e}_{A,2} \\ \vec{e}_{A,3} \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Les composantes du vecteur v dans le repère \mathcal{F}_A peuvent être écrites comme matrice colonne également :

$$v_A = \begin{pmatrix} v_{A,1} \\ v_{A,2} \\ v_{A,3} \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

Nous pouvons maintenant écrire :

$$\vec{v} = \mathcal{F}_A^T v_A = v_A^T \mathcal{F}_A \quad (\text{C.5})$$

Il se pose également la question comment obtenir les composantes v_A du vecteur \vec{v} dans le repère \mathcal{F}_A . Ceci se fait en calculant le produit scalaire (ou produit intérieur) entre le vecteur \vec{v} et chacun des vecteurs $\vec{e}_{A,1}$, $\vec{e}_{A,2}$ et $\vec{e}_{A,3}$ définissant le repère \mathcal{F}_A :

$$\begin{aligned} v_{A,1} &= \vec{e}_{A,1} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{e}_{A,1} \\ v_{A,2} &= \vec{e}_{A,2} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{e}_{A,2} \\ v_{A,3} &= \vec{e}_{A,3} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{e}_{A,3} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Ou, dans une notation plus courte :

$$v_A = \mathcal{F}_A \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \mathcal{F}_A \quad (\text{C.7})$$

Nous aborderons maintenant les opérations nécessaires pour effectuer un changement de repères. Un changement de repères est généralement nécessaire quand plusieurs repères sont utilisés dans un

problème. Supposons que les repères

$$\mathcal{F}_A = \begin{pmatrix} \vec{e}_{A,1} \\ \vec{e}_{A,2} \\ \vec{e}_{A,3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_B = \begin{pmatrix} \vec{e}_{B,1} \\ \vec{e}_{B,2} \\ \vec{e}_{B,3} \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

soient définis. Nous connaissons uniquement v_A , les composantes du vecteur v dans le repère \mathcal{F}_A . Nous aimerions déterminer v_B , ses composantes dans le repère \mathcal{F}_B :

$$v_B = \mathcal{F}_B \cdot \vec{v} \quad (\text{C.9})$$

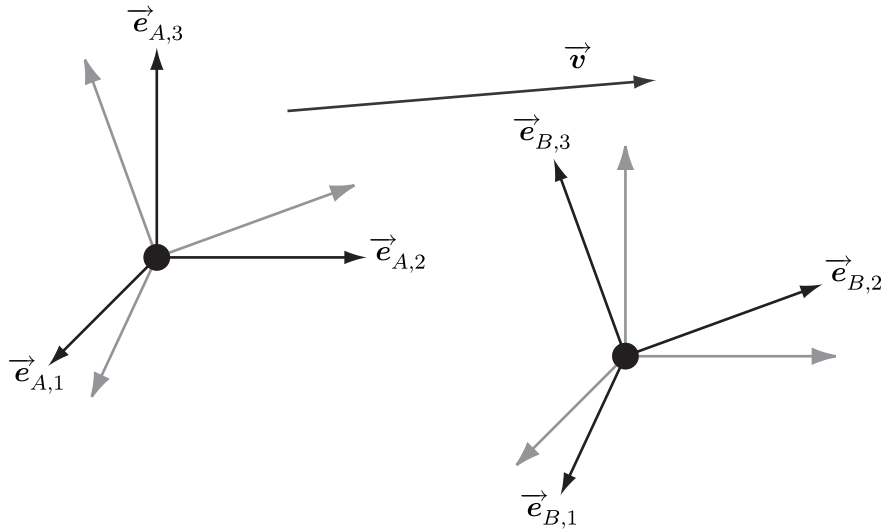


FIGURE C.2 – Passage du repère \mathcal{F}_A au repère \mathcal{F}_B . Les repères sont définis par un trièdre de trois vecteurs, par exemple $\vec{e}_{A,1}$, $\vec{e}_{A,2}$ et $\vec{e}_{A,3}$ pour le repère \mathcal{F}_A . Le vecteur \vec{v} reste le même, indépendamment du repère. Ce qui diffère, ce sont les composantes du vecteur \vec{v} dans le repère \mathcal{F}_A , v_A , et celles dans le repère \mathcal{F}_B , v_B .

En remplaçant \vec{v} par $\mathcal{F}_A^T v_A$, nous obtenons l'équation suivante :

$$v_B = \mathcal{F}_B \cdot \mathcal{F}_A^T v_A \quad (\text{C.10})$$

Il suffit alors de calculer l'expression

$$C_{BA} = \mathcal{F}_B \cdot \mathcal{F}_A^T \quad (\text{C.11})$$

pour calculer v_B , les composantes du vecteur \vec{v} dans le repère \mathcal{F}_B . Nous appelons C_{BA} la *matrice de passage* entre les repères \mathcal{F}_B et \mathcal{F}_A . Ses composantes peuvent être déterminées comme suit :

$$C_{BA} = \begin{pmatrix} \vec{e}_{B,1} \cdot \vec{e}_{A,1} & \vec{e}_{B,1} \cdot \vec{e}_{A,2} & \vec{e}_{B,1} \cdot \vec{e}_{A,3} \\ \vec{e}_{B,2} \cdot \vec{e}_{A,1} & \vec{e}_{B,2} \cdot \vec{e}_{A,2} & \vec{e}_{B,2} \cdot \vec{e}_{A,3} \\ \vec{e}_{B,3} \cdot \vec{e}_{A,1} & \vec{e}_{B,3} \cdot \vec{e}_{A,2} & \vec{e}_{B,3} \cdot \vec{e}_{A,3} \end{pmatrix} \quad (\text{C.12})$$

Cette matrice est parfois appelée *matrice des cosinus directeurs* car le produit $\vec{e}_{B,1} \cdot \vec{e}_{A,1}$ est égale au cosinus de l'angle entre les vecteurs $\vec{e}_{B,1}$ et $\vec{e}_{A,1}$. Elle est orthonormale, c'est-à-dire que chacune de ses colonnes a un module unitaire et que ses colonnes sont mutuellement orthogonales. Son déterminant est $\det C_{BA} = +1$, d'où $C_{BA}^{-1} = C_{BA}^T$ et $C_{BA}C_{BA}^T = C_{BA}^T C_{BA} = I_3$.

Nous citons maintenant quelques identités utiles concernant les matrices de rotation. D'abord, la matrice C_{AB} décrivant le passage inverse peut être obtenue à partir de la matrice C_{BA} par une simple transposition :

$$C_{AB} = C_{BA}^T \quad (\text{C.13})$$

La matrice décrivant la rotation entre un repère \mathcal{F}_A et lui-même est la matrice d'identité I_3 (cf. Annexe B) :

$$C_{AA} = I_3 \quad (\text{C.14})$$

La séquence de rotations entre les repères \mathcal{F}_A et \mathcal{F}_C , en passant par le repère \mathcal{F}_B , peut être écrite comme suit :

$$C_{CA} = C_{CB}C_{BA} \quad (\text{C.15})$$

Les dyades peuvent, de façon similaire aux vecteurs, être projetées dans un repère particulier. Les composantes d'une dyade \vec{D} , projetée dans le repère \mathcal{F}_A , peuvent être écrites sous forme d'une matrice carrée D_A :

$$D_A = \mathcal{F}_A \vec{D} \mathcal{F}_A^T \quad (\text{C.16})$$

C.1.2 Produits

Dans la suite, nous expliciterons encore quelques opérations utilisées dans ce mémoire.

Produit scalaire

D'abord, le produit scalaire (ou produit intérieur) associe un scalaire à deux vecteurs. Ce scalaire est le produit des modules des vecteurs et du cosinus de l'angle entre les deux vecteurs :

$$s_3 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|v_1\| \|v_2\| \cos \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \quad (\text{C.17})$$

En exprimant le vecteur \vec{v}_1 dans le repère \mathcal{F}_1 et le vecteur \vec{v}_2 dans le repère \mathcal{F}_2 , on obtient l'expression suivante pour le scalaire s_3 :

$$s_3 = (v_1^T \mathcal{F}_1) \cdot (v_2^T \mathcal{F}_2) = (v_1^T \mathcal{F}_1) \cdot (\mathcal{F}_2^T v_2) = v_1^T (\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2^T) v_2 = v_1^T C_{12} v_2 \quad (\text{C.18})$$

Le scalaire s_3 est indépendant du choix du repère.

Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est 0. Le produit scalaire d'un vecteur avec lui-même égale son module élevé au carré.

Produit vectoriel

Le produit vectoriel associe un vecteur à deux vecteurs. Le module du vecteur résultant de ce produit est la surface du parallélogramme formé par les deux vecteurs :

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 &= \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \|v_1\| \|v_2\| \sin \angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \vec{e} \\ &\text{avec } \vec{e} \cdot \vec{v}_1 = 0 \text{ et } \vec{e} \cdot \vec{v}_2 = 0\end{aligned}\quad (\text{C.19})$$

Les vecteurs \vec{v}_1 , \vec{v}_2 et \vec{v}_3 obéissent à la règle de la main droite.

En utilisant les repères \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 et \mathcal{F}_3 pour exprimer les vecteurs \vec{v}_1 , \vec{v}_2 et \vec{v}_3 , respectivement, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\vec{v}_3 &= \mathcal{F}_3^T v_3 = (v_1^T \mathcal{F}_1) \wedge (v_2^T \mathcal{F}_2) = (v_1^T \mathcal{F}_1) \wedge (\mathcal{F}_2^T v_2) = (v_1^T \mathcal{F}_1) \wedge (\mathcal{F}_1^T C_{12} v_2) \\ &= v_1^T \mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_1^T C_{12} v_2 = \mathcal{F}_1^T v_1^\times C_{12} v_2 \\ v_3 &= \mathcal{F}_3 \mathcal{F}_1^T v_1^\times C_{12} v_2 = C_{31} v_1^\times C_{12} v_2\end{aligned}\quad (\text{C.20})$$

Ici, v_1^\times signifie la matrice anti-symétrique associée à la matrice colonne v_1 , cf. Annexe B.

Le produit vectoriel a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 &= -\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 \\ \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_1 &= \vec{0}\end{aligned}\quad (\text{C.21})$$

Le produit dyadique (ou produit extérieur) de deux vecteurs donne une dyade :

$$\vec{\underline{D}}_3 = \vec{v}_1 \otimes \vec{v}_2 \quad (\text{C.22})$$

La projection de la dyade $\vec{\underline{D}}_3$ dans le repère \mathcal{F}_3 et des vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 dans les repères \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 , respectivement, fournit :

$$\begin{aligned}\vec{\underline{D}}_3 &= \mathcal{F}_3^T D_3 \mathcal{F}_3 = (v_1^T \mathcal{F}_1) \otimes (v_2^T \mathcal{F}_2) = (v_1^T \mathcal{F}_1) \otimes (\mathcal{F}_1^T C_{12} v_2) \\ &= \mathcal{F}_1^T v_1 v_2^T C_{21} \mathcal{F}_1 \\ D_3 &= \mathcal{F}_3 \vec{\underline{D}}_3 \mathcal{F}_3^T C_{31} v_1 v_2^T C_{21} C_{13} = C_{31} v_1 v_2^T C_{23}\end{aligned}\quad (\text{C.23})$$

C.1.3 Dérivées

Outre le vecteur de position, que nous appellerons \vec{s} dans la suite, nous nous intéresserons au vecteur de vitesse \vec{v} qui est la dérivée première du vecteur de position et au vecteur d'accélération \vec{a} qui est la dérivée seconde du vecteur de position ou la dérivée première du vecteur de vitesse. Ici, il est important de calculer les dérivées dans un repère inertiel, ce qui est représenté par l'indice i :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \left. \frac{d}{dt} \right|_i \vec{s} \\ \vec{a} &= \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_i \vec{s} = \left. \frac{d}{dt} \right|_i \vec{v}\end{aligned}\quad (\text{C.24})$$

Nous utiliserons la notation suivante pour écrire la dérivée d'un vecteur ou d'une dyade dans un repère inertiel :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big|_i \vec{s} &= \dot{\vec{s}} \text{ (vecteur)} \\ \frac{d}{dt}\Big|_i \vec{J} &= \dot{\vec{J}} \text{ (dyade)}\end{aligned}\tag{C.25}$$

Comme un scalaire ne dépend pas du choix du repère, on n'a pas besoin d'indiquer le repère dans lequel la dérivée d'un scalaire est calculée. Nous utiliserons la notation suivante :

$$\frac{d}{dt}m = \dot{m}\tag{C.26}$$

Lorsque des repères non inertiels interviennent, les dérivées de vecteurs ou de dyades sont plus difficiles à écrire.

Les dérivées d'un vecteur ou d'une dyade dépendent de l'état de mouvement du repère dans lequel elles sont observées. Si l'observateur se trouve dans un repère \mathcal{F}_f fixe dans l'espace, les composantes de la dérivée d'un vecteur \vec{v} , par exemple, s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{v}} &= \frac{d}{dt}\Big|_i (\mathcal{F}_f^T v_f) = \frac{d}{dt}\Big|_i \mathcal{F}_f^T v + \mathcal{F}_f^T \dot{v} = \mathcal{F}_f^T \dot{v}_f \\ \text{car } \frac{d}{dt}\Big|_i \mathcal{F}_f &= 0\end{aligned}\tag{C.27}$$

Il est tout à fait légitime d'écrire \dot{v}_f car il n'existe pas d'ambiguïté concernant la dérivée d'une matrice colonne.

Par contre, si nous supposons un repère mobile \mathcal{F}_m , les calculs commencent à être plus compliqués que précédemment :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{v}} &= \frac{d}{dt}\Big|_i (\mathcal{F}_m^T v_m) \\ &= \mathcal{F}_m^T \dot{v}_m + \frac{d}{dt}\Big|_i \mathcal{F}_m^T v_m \\ &= \overset{\circ}{\vec{v}} + \frac{d}{dt}\Big|_i \mathcal{F}_m^T v_m\end{aligned}\tag{C.28}$$

Ici, $\overset{\circ}{\vec{v}}$ est la dérivée du vecteur \vec{v} vue d'un observateur dans le repère mobile \mathcal{F}_m . Si le vecteur \vec{v} est fixe par rapport à ce repère mobile, $\overset{\circ}{\vec{v}}$ s'annule.

Le problème est de connaître la dérivée $\frac{d}{dt}\Big|_i \mathcal{F}_m$ de la vectrice \mathcal{F}_m . Comme le repère \mathcal{F}_m est en rotation par rapport au repère dit *inertiel*, \mathcal{F}_i , on peut lui associer une quantité vectorielle appelée *vitesse angulaire* $\vec{\omega}_{mi}$. À l'inverse, on peut considérer que le repère \mathcal{F}_i est en rotation par rapport au repère \mathcal{F}_m , avec la vitesse angulaire $\vec{\omega}_{im}$. La relation entre ces vitesses angulaire est la suivante :

$$\vec{\omega}_{mi} + \vec{\omega}_{im} = \vec{0}\tag{C.29}$$

Grâce à la vitesse angulaire $\vec{\omega}_{mi}$, il est possible d'écrire les dérivées des vecteurs unitaires définissant le repère \mathcal{F}_m :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{e}}_{m,1} &= \vec{\omega}_{mi} \wedge \vec{e}_{m,1} \\ \dot{\vec{e}}_{m,2} &= \vec{\omega}_{mi} \wedge \vec{e}_{m,2} \\ \dot{\vec{e}}_{m,3} &= \vec{\omega}_{mi} \wedge \vec{e}_{m,3}\end{aligned}\tag{C.30}$$

En utilisant des vectrices, la notation devient la suivante :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big|_i \mathcal{F}_m^T &= \vec{\omega}_{mi} \wedge \mathcal{F}_m^T \\ \frac{d}{dt}\Big|_i \mathcal{F}_m &= -\mathcal{F}_m \wedge \vec{\omega}_{mi}\end{aligned}\tag{C.31}$$

L'expression des composantes du vecteur de vitesse angulaire $\vec{\omega}_{mi}$ dans le repère \mathcal{F}_m donne :

$$\vec{\omega}_{mi} = \mathcal{F}_m^T \omega_{mi,m}\tag{C.32}$$

Si nous reportons maintenant ces dernières relations dans la dérivée d'un vecteur, cf. Éq. (C.28), nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{v}} &= \mathcal{F}_m^T \dot{v}_m + \dot{\mathcal{F}}_m^T v_m \\ &= \mathcal{F}_m^T \dot{v}_m + (\vec{\omega}_{mi} \wedge \mathcal{F}_m^T) v_m \\ &= \mathcal{F}_m^T \dot{v}_m + (\omega_{mi,m}^T \mathcal{F}_m \wedge \mathcal{F}_m^T) v_m \\ &= \mathcal{F}_m^T (\dot{v}_m + \omega_{mi,m}^\times v_m)\end{aligned}\tag{C.33}$$

Ici, $\omega_{mi,m}^\times$ est la matrice antisymétrique associée à la matrice colonne $\omega_{mi,m}$. Elle est définie dans la Section B.2.

L'expression (C.33) nous permet d'écrire les composantes de la dérivée d'un vecteur exprimée dans un repère mobile \mathcal{F}_m .

Si nous reprenons maintenant l'Éq. (C.28) et l'écrivons complètement en notation vectorielle, il vient :

$$\dot{\vec{v}} = \overset{\circ}{\vec{v}} + \vec{\omega}_{mi} \wedge \vec{v}\tag{C.34}$$

Un fait intéressant est que la dérivée de la vitesse angulaire $\vec{\omega}_{mi}$ est invariante :

$$\dot{\vec{\omega}}_{mi} = \overset{\circ}{\vec{\omega}}_{mi} + \vec{\omega}_{mi} \wedge \vec{\omega}_{mi} = \overset{\circ}{\vec{\omega}}_{mi}\tag{C.35}$$

Il est possible de faire la même opération pour la dérivée seconde :

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{v}} &= \left(\overset{\circ}{\dot{\vec{v}}} \right) + \vec{\omega}_{mi} \wedge \dot{\vec{v}} \\
&= \left(\overset{\circ}{\vec{v}} + \vec{\omega}_{mi} \wedge \vec{v} \right) + \vec{\omega}_{mi} \wedge \left(\overset{\circ}{\vec{v}} + \vec{\omega}_{mi} \wedge \vec{v} \right) \\
&= \overset{\circ\circ}{\vec{v}} + \overset{\circ}{\vec{\omega}}_{mi} \wedge \vec{v} + 2\vec{\omega}_{mi} \wedge \overset{\circ}{\vec{v}} + \vec{\omega}_{mi} \wedge (\vec{\omega}_{mi} \wedge \vec{v})
\end{aligned} \tag{C.36}$$

Ici, $\vec{\omega}_{mi} \wedge (\vec{\omega}_{mi} \wedge \vec{v})$ est appelé *accélération d'entraînement* et $2\vec{\omega}_{mi} \wedge \overset{\circ}{\vec{v}}$ *accélération de CORIOLIS*.

Ces pseudo-accélération viennent uniquement du fait de la rotation du repère \mathcal{F}_m par rapport au repère inertiel. Le terme $\overset{\circ}{\vec{\omega}}_{mi} \wedge \vec{v}$ existe seulement si le repère \mathcal{F}_m se trouve en rotation accélérée, c'est-à-dire que son vecteur de vitesse angulaire change ($\overset{\circ}{\vec{\omega}}_{mi} \neq \vec{0}$).

C.1.4 Paramétrisation de l'attitude

Après les commentaires faits jusqu'ici, il est évident que l'orientation d'un repère par rapport à un autre n'est pas une quantité vectorielle. Nous avons utilisé les matrices de rotation, qui ont certains attributs comme l'orthonormalité, pour décrire l'orientation.

Les matrices de rotation sont l'approche la plus directe pour cette tâche. Or, elles posent un problème de redondance car les neuf composantes ne sont pas indépendantes, il faut par exemple que $\det C_{BA} = +1$ soit satisfait. En outre, les matrices de rotation sont difficilement lisibles.

Pour remédier à ce problème, il est concevable d'enchaîner plusieurs rotations élémentaires pour représenter une matrice de rotation quelconque.

Ces rotations élémentaires sont des rotations autour des axes qui définissent un repère. Par exemple, une rotation avec un angle θ autour du premier axe d'un repère peut être écrite en utilisant la matrice de rotation élémentaire $C_I(\theta)$:

$$C_I(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \tag{C.37}$$

Il en est de même pour les rotations autour les axes deux (C_{II}) et trois (C_{III}) d'un repère, cf. Annexe B.

Il existe deux approches principales pour enchaîner les matrices de rotation élémentaires, les angles d'EULER ou de CARDAN.

La première façon, les angles d'EULER, est une séquence 1-2-1, c'est-à-dire qu'un axe est utilisé deux fois dans la séquence. Par exemple, une matrice de rotation C_{BA} peut être représentée comme suit :

$$C_{BA} = C_I(\theta_1)C_{II}(\theta_2)C_I(\theta_3) \tag{C.38}$$

Les angles d'EULER sont les angles θ_1 , θ_2 et θ_3 . Bien entendu, il existe de nombreuses autres versions d'angles d'EULER, par exemple 1-3-1, 3-2-3, etc.

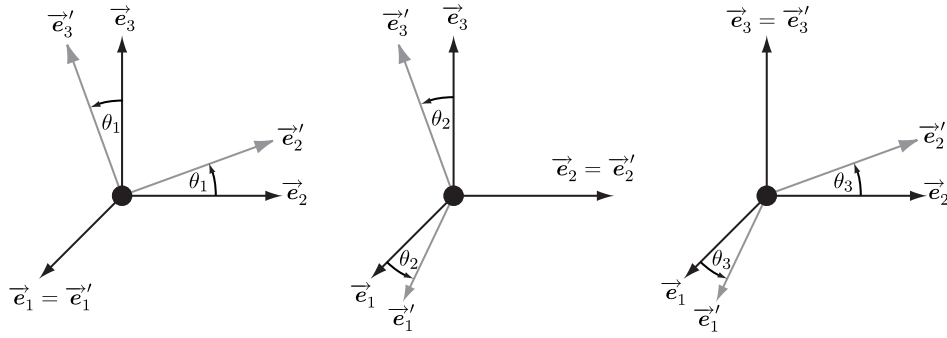


FIGURE C.3 – Rotations élémentaires autour des axes 1 (à gauche), 2 (au centre) et 3 (à droite)

La deuxième catégorie est donnée par les angles de CARDAN. Ici, la séquence consiste en une séquence de rotations dans laquelle apparaissent tous les axes :

$$C_{BA} = C_I(\theta_1)C_{II}(\theta_2)C_{III}(\theta_3) = \begin{pmatrix} c_2c_3 & c_2s_3 & -s_2 \\ s_1s_2c_3 - c_1s_3 & s_1s_2s_3 + c_1c_3 & s_1c_2 \\ c_1s_2c_3 + s_1s_3 & c_1s_2s_3 - s_1c_3 & c_1c_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.39})$$

avec $s_1 = \cos \theta_1$, $s_2 = \sin \theta_2$, etc.

Les angles de CARDAN θ_1 , θ_2 et θ_3 sont utilisés dans les mondes aéronautique et spatial et connus comme angles de *roulis*, *tangage* et *lacet*. Là, ils sont curieusement souvent appelés angles d'EULER.

Il existe beaucoup d'autres représentations d'attitude, comme les *paramètres d'EULER* ou les *quaternions unité*, qui servent surtout à surmonter des singularités apparaissant dans les angles d'EULER et de CARDAN. Néanmoins, nous raisonnerons avec les matrices de rotation lors de la phase de modélisation du vol en formation pour des raisons de compréhensibilité.

Nous dirons encore quelques mots sur les simplifications envisageables lorsqu'il s'agit de petites rotations, c'est-à-dire des rotations avec des angles très petits. Dans ce cas, la matrice de rotation C_{BA} peut être approximée au premier ordre avec l'expression suivante :

$$C_{BA} \approx I_3 - \theta^\times = \begin{pmatrix} 1 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 1 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.40})$$

La relation suivante est également vraie :

$$C_{AB} \approx I_3 + \theta^\times = \begin{pmatrix} 1 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 1 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.41})$$

Ici, θ est la matrice colonne contenant les trois (petits) angles de CARDAN. Il est important de savoir que, dans le cas des petites rotations, l'ordre des trois rotations est sans importance, le produit de matrices de rotations aux petits angles est commutatif. L'expression (C.40) peut être déduite de

l'expression (C.39) en linéarisant, c'est-à-dire en faisant les remplacement suivants :

$$\begin{aligned}\sin \theta_1 &= \theta_1 + \mathcal{O}(\theta_1^3) \approx \theta_1 \\ \cos \theta_1 &= 1 + \mathcal{O}(\theta_1^2) \approx 1 \\ &\dots\end{aligned}\tag{C.42}$$

Un autre argument en faveur des angles de CARDAN est que les angles d'EULER ne peuvent pas fonctionner car cela signifierait d'effectuer deux petites rotations en suite autour du même axe.

C.2 Dynamique

La dynamique repose sur deux lois fondamentales, la seconde loi de NEWTON (ou théorème de la quantité de mouvement) et la loi d'EULER (ou théorème du moment cinétique).

C.2.1 Masse ponctuelle

La loi de NEWTON affirme que la force \vec{f} appliquée à une masse ponctuelle m , cf. FIG. C.4, est égale à la dérivée de sa *quantité de mouvement* dans un repère inertiel :

$$\dot{\vec{p}} = \vec{f}\tag{C.43}$$

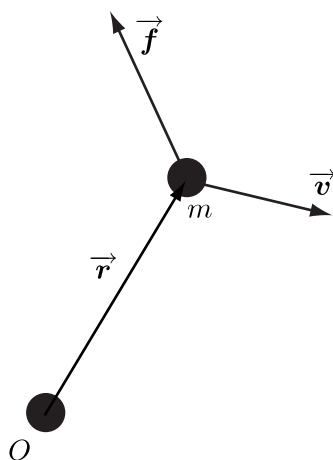


FIGURE C.4 – Dynamique d'une masse ponctuelle m

La *quantité de mouvement* est le produit de la masse m et la vitesse $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$:

$$\vec{p} = m \dot{\vec{r}}\tag{C.44}$$

Ici, la force \vec{F} , la quantité de mouvement \vec{p} et la vitesse $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ sont des quantités vectorielles, tandis que la masse m est un scalaire.

Si la masse m est constante ($\dot{m} = 0$), la combinaison des Éqs. (C.43) et (C.44) donne :

$$\vec{f} = \dot{\vec{p}} = m \ddot{\vec{r}} \quad (\text{C.45})$$

Ici, $\ddot{\vec{r}}$ est l'accélération de la masse ponctuelle.

La loi d'EULER affirme que la variation du *moment cinétique* \vec{h}_O d'une masse ponctuelle par rapport au point fixe O est égale au couple \vec{g}_O exercé sur la masse et calculé par rapport au point O également :

$$\dot{\vec{h}}_O = \vec{g}_O \quad (\text{C.46})$$

Le *moment cinétique* \vec{h}_O par rapport au point O est défini comme suit :

$$\vec{h}_O = \vec{r} \wedge \vec{p} \quad (\text{C.47})$$

Le couple \vec{g}_O autour du point O est le suivant :

$$\vec{g}_O = \vec{r} \wedge \vec{f} \quad (\text{C.48})$$

La combinaison des Éqs. (C.46), (C.47) et (C.48) donne :

$$\begin{aligned} \vec{r} \wedge \vec{f} &= \vec{g}_O = \dot{\vec{h}}_O \\ &= \dot{\vec{r}} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \dot{\vec{p}} \\ &= m \dot{\vec{r}} \wedge \dot{\vec{r}} + m \vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} \\ &= m \vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$

Il est important de noter que l'Éq. (C.49) correspond au produit vectoriel entre \vec{r} et l'Éq. (C.45). En d'autres termes, ces deux lois sont identiques dans le cas d'une masse ponctuelle. La notion de rotation n'existe pas.

C.2.2 Corps rigide

Maintenant, nous généraliserons les lois de NEWTON et d'EULER à des corps rigides, cf. FIG. C.5. Le corps a une masse m . Un repère \mathcal{F}_P dont l'origine est au point P est lié au corps de façon rigide. Le corps est assujéti à une force \vec{f} et à un couple \vec{g} . Son centre de masse se trouve au point C , à une distance \vec{c} de P . Nous souhaitons décrire le mouvement du corps \mathcal{C} par rapport à un point O supposé fixe.

Dans le cas d'un corps rigide, c'est-à-dire un corps qui possède un volume fini, l'expression de la dynamique est plus compliquée. Outre la dynamique de translation que nous venons de voir, il existe une dynamique de rotation du corps.

Le principe sur lequel se basent les dérivations qui suivent est la division du corps rigide \mathcal{C} en une infinité de masses ponctuelles dm , comme le montre la FIG. C.5. La position de chaque masse ponctuelle dm est \vec{r} (exprimée par rapport au point de référence P) ou $\vec{R} = \vec{R}_P + \vec{r}$ (exprimée par

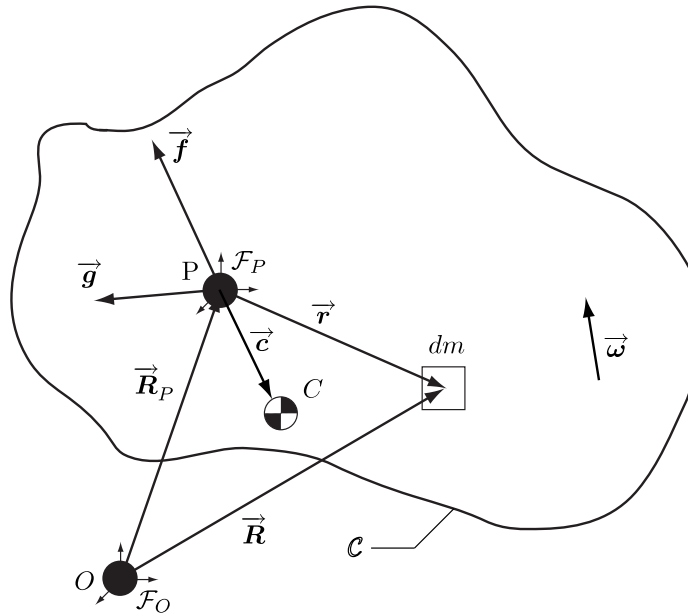


FIGURE C.5 – Corps rigide

rapport au point fixe O).

La masse totale m et la position du centre de masse \vec{c} du corps rigide \mathcal{C} sont obtenus par intégration :

$$\begin{aligned} m &= \int_{\mathcal{C}} dm \\ \vec{c} &= \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} \vec{r} dm \end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

La loi de NEWTON est applicable à toutes ces masses ponctuelles dm . Chacune d'entre elles possède une quantité de mouvement infinitésimale $d\vec{p}$:

$$d\vec{p} = \dot{\vec{R}} dm = (\dot{\vec{R}}_P + \dot{\vec{r}}) dm \quad (\text{C.51})$$

La quantité de mouvement du corps rigide \mathcal{C} peut être déterminée de nouveau par intégration :

$$\vec{p} = \int_{\mathcal{C}} d\vec{p} = \int_{\mathcal{C}} \dot{\vec{R}} dm = \int_{\mathcal{C}} (\dot{\vec{R}}_P + \dot{\vec{r}}) dm \quad (\text{C.52})$$

Or, il est beaucoup plus pratique d'exprimer la dérivée $\dot{\vec{r}}$ du vecteur \vec{r} dans le repère \mathcal{F}_P lié au corps \mathcal{C} , étant donné que les masses ponctuelles dm ont une position fixe par rapport aux autres masses ponctuelles qui forment le corps \mathcal{C} . Nous utilisons l'Éq. (C.34) (page 320) pour exprimer $\dot{\vec{r}}$ de façon plus adaptée :

$$\dot{\vec{r}} = \overset{\circ}{\vec{r}} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (\text{C.53})$$

Ici, $\vec{\omega}$ est la vitesse de rotation du repère \mathcal{F}_P par rapport au repère \mathcal{F}_O . $\overset{\circ}{\vec{r}}$ est la dérivée locale (par rapport au repère \mathcal{F}_P) du vecteur \vec{r} . Dans le cas d'un corps rigide, $\overset{\circ}{\vec{r}}$ s'annule :

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (\text{C.54})$$

En combinant les Éqs. (C.52) et (C.54), il vient :

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \int_{\mathcal{C}} (\dot{\vec{R}}_P + \vec{\omega} \wedge \vec{r}) dm \\ &= \dot{\vec{R}}_P \int_{\mathcal{C}} dm + \vec{\omega} \wedge \int_{\mathcal{C}} \vec{r} dm \\ &= m \dot{\vec{R}}_P + m \vec{\omega} \wedge \vec{c} \end{aligned} \quad (\text{C.55})$$

La loi de NEWTON, ($\vec{f} = m \ddot{\vec{r}}$) appliquée à l'Éq. (C.55), donne l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \dot{\vec{p}} \\ &= m \ddot{\vec{R}}_P + m \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{c} + m \vec{\omega} \wedge \dot{\vec{c}} \\ &= m \ddot{\vec{R}}_P + m \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{c} + m \vec{\omega} \wedge \left(\overset{\circ}{\vec{c}} + \vec{\omega} \wedge \vec{c} \right) \\ &= m \ddot{\vec{R}}_P + m \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{c} + m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{c}) \end{aligned} \quad (\text{C.56})$$

\vec{f} est la résultante des forces externes appliquées au corps \mathcal{C} .

Concernant la loi d'EULER, nous procéderons de la même façon. Le moment cinétique $d\vec{h}_O$ par rapport au point O d'un élément de masse dm s'écrit :

$$\begin{aligned} d\vec{h}_O &= \vec{R} \wedge d\vec{p} \\ &= \vec{R} \wedge \dot{\vec{R}} dm \\ &= (\vec{R}_P + \vec{r}) \wedge (\dot{\vec{R}}_P + \dot{\vec{r}}) dm \\ &= (\vec{R}_P + \vec{r}) \wedge \left(\dot{\vec{R}}_P + \overset{\circ}{\vec{r}} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \right) dm \\ &= (\vec{R}_P + \vec{r}) \wedge (\dot{\vec{R}}_P + \vec{\omega} \wedge \vec{r}) dm \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

Le moment cinétique \vec{h}_O du corps rigide \mathcal{C} par rapport au point O s'obtient de nouveau par intégration :

$$\begin{aligned} \vec{h}_O &= \int_{\mathcal{C}} d\vec{h}_O \\ &= \int_{\mathcal{C}} \left[(\vec{R}_P + \vec{r}) \wedge \left(\dot{\vec{R}}_P + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \right) \right] dm \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$

$$\begin{aligned}
&= m\vec{\mathbf{R}}_P \wedge \dot{\vec{\mathbf{R}}}_P + m\vec{\mathbf{c}} \wedge \dot{\vec{\mathbf{R}}}_P \\
&\quad + m\vec{\mathbf{R}}_P \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{\mathbf{c}}) + \int_C [\vec{\mathbf{r}} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{\mathbf{r}})] dm \\
&= m\vec{\mathbf{R}}_P \wedge \dot{\vec{\mathbf{R}}}_P + m\vec{\mathbf{c}} \wedge \dot{\vec{\mathbf{R}}}_P \\
&\quad + m\vec{\mathbf{R}}_P \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{\mathbf{c}}) + \vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow P} \cdot \vec{\omega}
\end{aligned}$$

Nous avons introduit une nouvelle quantité, la dyade d'inertie $\vec{\mathbf{J}}$, grâce à la relation suivante :

$$\vec{\mathbf{a}} \wedge (\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) = \left[\vec{\mathbf{b}} \otimes \vec{\mathbf{a}} - (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) \vec{\mathbf{1}} \right] \vec{\mathbf{c}} \quad (\text{C.59})$$

Adapté à notre problème', il vient :

$$\int_C [\vec{\mathbf{r}} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{\mathbf{r}})] dm = \int_C [(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}) \vec{\mathbf{1}} - \vec{\mathbf{r}} \otimes \vec{\mathbf{r}}] dm \cdot \vec{\omega} \quad (\text{C.60})$$

La dyade d'inertie $\vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow P}$, calculée par rapport au point P , s'écrit donc comme suit :

$$\vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow P} = \int_C [(\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{r}}) \vec{\mathbf{1}} - \vec{\mathbf{r}} \otimes \vec{\mathbf{r}}] dm \quad (\text{C.61})$$

L'application de la loi d'EULER ($\dot{\vec{\mathbf{h}}}_O = \vec{\mathbf{g}}_O$) nous permet de procéder comme suit :

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{R}}_P \wedge \vec{\mathbf{f}} &= \dot{\vec{\mathbf{h}}}_O & (\text{C.62}) \\
&= m\vec{\mathbf{R}}_P \wedge \ddot{\vec{\mathbf{R}}}_P + m\dot{\vec{\mathbf{R}}}_P \wedge \dot{\vec{\mathbf{R}}}_P + m\vec{\mathbf{c}} \wedge \ddot{\vec{\mathbf{R}}}_P + m\dot{\vec{\mathbf{c}}} \wedge \dot{\vec{\mathbf{R}}}_P \\
&\quad + m\dot{\vec{\mathbf{R}}}_P \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{\mathbf{c}}) + m\vec{\mathbf{R}}_P \wedge (\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) + m\vec{\mathbf{R}}_P \wedge (\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{\mathbf{c}}}) \\
&\quad + (\vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow P} \cdot \dot{\vec{\omega}}) \\
&= m\vec{\mathbf{R}}_P \wedge \ddot{\vec{\mathbf{R}}}_P + m\vec{\mathbf{c}} \wedge \ddot{\vec{\mathbf{R}}}_P + m \left(\dot{\vec{\mathbf{c}}} + \vec{\omega} \wedge \vec{\mathbf{c}} \right) \wedge \dot{\vec{\mathbf{R}}}_P \\
&\quad + m\dot{\vec{\mathbf{R}}}_P \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{\mathbf{c}}) + m\vec{\mathbf{R}}_P \wedge (\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) \\
&\quad + \vec{\mathbf{R}}_P \wedge \left[\vec{\omega} \wedge \left(\dot{\vec{\mathbf{c}}} + \vec{\omega} \wedge \vec{\mathbf{c}} \right) \right] + \vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow P} \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow P} \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow P} \cdot \dot{\vec{\omega}}) \\
&= m\vec{\mathbf{R}}_P \wedge \ddot{\vec{\mathbf{R}}}_P + m\vec{\mathbf{c}} \wedge \ddot{\vec{\mathbf{R}}}_P + m(\vec{\omega} \wedge \vec{\mathbf{c}}) \wedge \dot{\vec{\mathbf{R}}}_P \\
&\quad + m\dot{\vec{\mathbf{R}}}_P \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{\mathbf{c}}) + m\vec{\mathbf{R}}_P \wedge (\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) + \vec{\mathbf{R}}_P \wedge [\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{\mathbf{c}})] \\
&\quad + \vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow P} \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\mathbf{J}}_{\rightarrow P} \cdot \dot{\vec{\omega}})
\end{aligned}$$

Il est possible de combiner les Éqs. (C.56) et (C.62) en calculant (C.62)– $\vec{R}_P \wedge$ (C.56) :

$$\begin{aligned}\vec{g} &= m \vec{c} \wedge \ddot{\vec{R}}_P + m (\vec{\omega} \wedge \vec{c}) \wedge \dot{\vec{R}}_P + m \dot{\vec{R}}_P \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{c}) \\ &\quad + \vec{J}_{\rightarrow P} \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{J}_{\rightarrow P} \cdot \vec{\omega}) \\ &= m \vec{c} \wedge \ddot{\vec{R}}_P + \vec{J}_{\rightarrow P} \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{J}_{\rightarrow P} \cdot \vec{\omega})\end{aligned}\quad (\text{C.63})$$

Une expression encore plus simple peut être obtenue en calculant (C.63)– $\vec{c} \wedge$ (C.56) :

$$\begin{aligned}\vec{g} - \vec{c} \wedge \vec{f} &= \vec{J}_{\rightarrow P} \cdot \dot{\vec{\omega}} - m \vec{c} \wedge (\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{c}) \\ &\quad + \vec{\omega} \wedge (\vec{J}_{\rightarrow P} \cdot \vec{\omega}) - m \vec{c} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{c})] \\ &= \vec{J}_{\rightarrow C} \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{J}_{\rightarrow C} \cdot \vec{\omega})\end{aligned}\quad (\text{C.64})$$

Maintenant, la dyade d'inertie est calculée par rapport au centre de masse C . Elle s'écrit grâce au *théorème de HUYGENS*¹ comme suit :

$$\vec{J}_{\rightarrow C} = \vec{J}_{\rightarrow P} - m [(\vec{c} \cdot \vec{c}) \vec{1} - \vec{c} \otimes \vec{c}]\quad (\text{C.65})$$

On peut reformuler l'Éq. (C.64) de la manière suivante :

$$\dot{\vec{\omega}} = \vec{J}_{\rightarrow C}^{-1} \cdot (\vec{g} - \vec{c} \wedge \vec{f}) - \vec{J}_{\rightarrow C}^{-1} \cdot [\vec{\omega} \wedge (\vec{J}_{\rightarrow C} \cdot \vec{\omega})]\quad (\text{C.66})$$

L'inverse $\vec{J}_{\rightarrow C}^{-1}$ de la dyade d'inertie $\vec{J}_{\rightarrow C}$ peut toujours être calculée car la matrice d'inertie J_C obtenue par projection dans un repère arbitraire est toujours inversible.

En reportant l'Éq. (C.66) dans l'Éq. (C.56), nous pouvons obtenir l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{R}}_P &= \frac{1}{m} \vec{f} + \vec{c} \wedge \left[\vec{J}_{\rightarrow C}^{-1} \cdot (\vec{g} - \vec{c} \wedge \vec{f}) \right] \\ &\quad - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{c}) - \vec{c} \wedge \left\{ \vec{J}_{\rightarrow C}^{-1} \cdot [\vec{\omega} \wedge (\vec{J}_{\rightarrow C} \cdot \vec{\omega})] \right\}\end{aligned}\quad (\text{C.67})$$

Cette dernière manipulation a eu pour but de supprimer $\dot{\vec{\omega}}$ de l'Éq. (C.56) afin de découpler les dynamiques de rotation et de translation le plus possible.

Ce sont les Éqs. (C.66) et (C.67) que nous retenons pour formuler la dynamique d'une formation de vaisseaux spatiaux.

1. Christiaan HUYGENS (1629 – 1695), mathématicien, astronome et physicien néerlandais

Annexe D

Calcul des gradients et hessiens d'un champ de gravitation

Sommaire

D.1 Potentiel terrestre sphérique	330
D.2 Deuxième harmonique zonal (J_2)	331

Soit une fonction vectorielle $\vec{f}(\vec{x})$. Elle peut être approchée au premier ordre par l'expression suivante :

$$\vec{f}(\vec{x}) \approx \vec{f}(\vec{x}_0) + \vec{J}_{\vec{f}}(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (D.1)$$

$\vec{J}_{\vec{f}}(\vec{x}_0)$ est la *dyade jacobienne*¹ ou simplement *jacobienne* évaluée à l'endroit \vec{x}_0 . Quelques règles pour calculer la jacobienne sont données dans l'ouvrage [123]. Nous avons traduit les deux règles dont nous aurons besoin dans la suite en notation vectorielle :

$$\vec{J}_{\vec{f} \cdot \vec{g}}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{J}_{\vec{g}}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x}) \cdot \vec{J}_{\vec{f}}(\vec{x}) \quad (D.2)$$

$$\vec{J}_{f\vec{g}}(\vec{x}) = f(\vec{x})\vec{J}_{\vec{g}}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x}) \otimes \vec{\nabla}_f(\vec{x}) \quad (D.3)$$

La première règle donne la jacobienne d'un produit scalaire de deux fonctions vectorielles $\vec{f}(\vec{x})$ et $\vec{g}(\vec{x})$, tandis que la deuxième donne celle d'un produit entre une fonction scalaire $f(\vec{x})$ et une fonction vectorielle $\vec{g}(\vec{x})$. $\vec{\nabla}_f(\vec{x})$ est le gradient de la fonction scalaire $f(\vec{x})$.

Il est important de noter que les règles de base pour calculer des dérivées, comme la règle de dérivation en chaîne, sont toujours valables. En outre, l'identité suivante nous sera utile :

$$\vec{J}_{\vec{x}}(\vec{x}) = \vec{1} \quad (D.4)$$

Il faut noter également que toutes ces relations sont également applicables aux fonctions scalaires $f(\vec{x})$. Les règles peuvent être interprétées de façon analogue.

1. Nous ne l'appelons pas *matrice jacobienne* ici car les calculs sont effectués en notation vectorielle.

D.1 Potentiel terrestre sphérique

Nous utiliserons les règles de calcul afin de déterminer le gradient du potentiel de gravitation terrestre sphérique $U_{\oplus,\text{sph}}(\vec{\mathbf{R}})$. En plus, nous nous en servons pour obtenir la dérivée seconde de $U_{\oplus,\text{sph}}(\vec{\mathbf{R}})$. Cette grandeur est d'une grande importance pour le vol en formation car elle nous permet de calculer de façon linéaire la force différentielle entre deux satellites volant en formation.

Comme nous venons de dire, nous partons du potentiel de gravitation terrestre $U_{\oplus,\text{sph}}(\vec{\mathbf{R}})$:

$$U_{\oplus,\text{sph}}(\vec{\mathbf{R}}) = \mu_{\oplus} \frac{1}{(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{1/2}} = \mu_{\oplus} (\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{-1/2} \quad (\text{D.5})$$

$\vec{\mathbf{f}}_{\oplus,\text{sph}}(\vec{\mathbf{R}})$ est le gradient de $U_{\oplus,\text{sph}}(\vec{\mathbf{R}})$ et peut être calculé comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{f}}_{\oplus,\text{sph}}(\vec{\mathbf{R}}) &= \vec{\nabla}_{U_{\oplus,\text{sph}}}(\vec{\mathbf{R}}) \\ &= -\mu_{\oplus} \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{-3/2} \vec{\nabla}_{\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}}}(\vec{\mathbf{R}}) \\ &= -\mu_{\oplus} \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{-3/2} (2\vec{\mathbf{R}}) \\ &= -\frac{\mu_{\oplus} \vec{\mathbf{R}}}{(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{3/2}} \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Nous avons déjà rencontré cette expression. Elle est bien connue dans la littérature et donne l'accélération subie par un corps dans le champ de gravitation $U_{\oplus,\text{sph}}(\vec{\mathbf{R}})$. Nous avons utilisé la règle de dérivation en chaîne et l'Éq. (D.2).

La dérivée seconde de $U_{\oplus,\text{sph}}(\vec{\mathbf{R}})$ est à la fois la *dyade hessienne* ou simplement le *hessien* de $U_{\oplus,\text{sph}}(\vec{\mathbf{R}})$ et la jacobienne de $\vec{\mathbf{f}}_{\oplus,\text{sph}}(\vec{\mathbf{R}})$. En posant

$$\vec{\mathbf{f}}_{\oplus,\text{sph}}(\vec{\mathbf{R}}) = g(\vec{\mathbf{R}}) \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{R}}) \quad (\text{D.7})$$

$$\text{avec} \quad g(\vec{\mathbf{R}}) = -\frac{\mu_{\oplus}}{(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{3/2}} \text{ et } \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{R}}) = \vec{\mathbf{R}},$$

nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{J}}_{\vec{\mathbf{f}}}(\vec{\mathbf{R}}) &= g(\vec{\mathbf{R}}) \vec{\mathbf{J}}_{\vec{\mathbf{v}}}(\vec{\mathbf{R}}) + \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{R}}) \otimes \vec{\nabla}_g(\vec{\mathbf{R}}) \\ &= -\frac{\mu_{\oplus} \vec{\mathbf{1}}}{(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{3/2}} + \vec{\mathbf{R}} \otimes \frac{3\mu_{\oplus} \vec{\mathbf{R}}}{(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{5/2}} \\ &= \frac{-(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}}) \vec{\mathbf{1}} + 3\vec{\mathbf{R}} \otimes \vec{\mathbf{R}}}{\mu_{\oplus} (\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{5/2}} \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Ici, nous avons utilisé $\vec{\mathbf{J}}_{\vec{\mathbf{v}}}(\vec{\mathbf{R}}) = \vec{\mathbf{1}}$ et $\vec{\nabla}_g(\vec{\mathbf{R}}) = \frac{3\mu_{\oplus} \vec{\mathbf{R}}}{(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{5/2}}$.

D.2 Deuxième harmonique zonal (J_2)

Le même calcul peut être fait concernant le potentiel dû à l'aplatissement de la Terre U_{\oplus, J_2} . Il est donné par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} U_{\oplus, J_2} &= \frac{\mu_{\oplus} J_2 R_{\oplus}^2}{2R^3} (1 - 3 \sin^2 \varphi) \\ &= \frac{\mu_{\oplus} J_2 R_{\oplus}^2}{2(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{3/2}} \cdot \frac{\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}} - 3(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_K)^2}{\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}}} \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Nous avons utilisé la relation suivante (cf. la définition du produit scalaire dans l'Éq. (C.17) et la définition de l'angle φ dans la FIG. 2.9, page 32) :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_K &= \cos(\pi/2 - \varphi) \cdot \|\vec{\mathbf{R}}\| \cdot \|\vec{\mathbf{e}}_K\| \\ &= \sin \varphi \cdot (\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Comme dans le cas du champ sphérique, nous pouvons obtenir le gradient $\vec{\mathbf{f}}_{\oplus, J_2}(\vec{\mathbf{R}})$ par dérivation. Il faut d'abord décomposer $U_{\oplus, J_2}(\vec{\mathbf{R}})$ en posant $g(\vec{\mathbf{R}}) = \frac{1}{(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{5/2}}$ et $h(\vec{\mathbf{R}}) = (\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}}) - 3(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_K)^2$ et calculer les gradients de $g(\vec{\mathbf{R}})$ et de $h(\vec{\mathbf{R}})$:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_g(\vec{\mathbf{R}}) &= -5/2 \frac{1}{(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{7/2}} (2\vec{\mathbf{R}}) \\ &= \frac{-5\vec{\mathbf{R}}}{(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{7/2}} \\ \vec{\nabla}_h(\vec{\mathbf{R}}) &= 2\vec{\mathbf{R}} - 3 \cdot 2(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_K) \vec{\nabla}_{\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_K}(\vec{\mathbf{R}}) \\ &= 2\vec{\mathbf{R}} - 3 \cdot 2(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_K) \vec{\mathbf{e}}_K \\ &= 2\vec{\mathbf{R}} - 6(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_K) \vec{\mathbf{e}}_K \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Le gradient $\vec{\mathbf{f}}_{\oplus, J_2}(\vec{\mathbf{R}})$ se calcule alors comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{f}}_{\oplus, J_2}(\vec{\mathbf{R}}) &= \frac{\mu_{\oplus} J_2 R_{\oplus}^2}{2} \left[g(\vec{\mathbf{R}}) \vec{\nabla}_h(\vec{\mathbf{R}}) + h(\vec{\mathbf{R}}) \vec{\nabla}_g(\vec{\mathbf{R}}) \right] \\ &= \frac{\mu_{\oplus} J_2 R_{\oplus}^2}{2} \left\{ \frac{1}{(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{5/2}} \left[2\vec{\mathbf{R}} - 6(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_K) \vec{\mathbf{e}}_K \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}}) - 3(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_K)^2 \right] \frac{-5\vec{\mathbf{R}}}{(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{7/2}} \right\} \\ &= \frac{\mu_{\oplus} J_2 R_{\oplus}^2}{2(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{7/2}} \cdot \left\{ 2(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}}) \vec{\mathbf{R}} - 6(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_K) (\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}}) \vec{\mathbf{e}}_K \right. \\ &\quad \left. - 5(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}}) \vec{\mathbf{R}} + 15(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_K)^2 \vec{\mathbf{R}} \right\} \\ &= \frac{3\mu_{\oplus} J_2 R_{\oplus}^2}{2(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}})^{7/2}} \cdot \left\{ -(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}}) \vec{\mathbf{R}} - 2(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_K) (\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{R}}) \vec{\mathbf{e}}_K + 5(\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_K)^2 \vec{\mathbf{R}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Pour calculer la jacobienne $\vec{J}_{\vec{\oplus}, \vec{J}_2}(\vec{R})$ de $\vec{f}_{\vec{\oplus}, \vec{J}_2}(\vec{R})$, nous procédons de la même manière. D'abord, nous posons $g(\vec{R}) = \frac{1}{(\vec{R} \cdot \vec{R})^{7/2}}$ et $\vec{h}(\vec{R}) = -(\vec{R} \cdot \vec{R})\vec{R} - 2(\vec{R} \cdot \vec{e}_K)(\vec{R} \cdot \vec{R})\vec{e}_K + 5(\vec{R} \cdot \vec{e}_K)^2\vec{R}$. Le gradient de $g(\vec{R})$ et la jacobienne de $\vec{h}(\vec{R})$ s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_g(\vec{R}) &= -7/2 \frac{1}{(\vec{R} \cdot \vec{R})^{9/2}} (2\vec{R}) = \frac{-7\vec{R}}{(\vec{R} \cdot \vec{R})^{9/2}} & (D.13) \\ \vec{J}_{\vec{h}}(\vec{R}) &= -(\vec{R} \cdot \vec{R})\vec{1} - \vec{R} \otimes 2\vec{R} - 2(\vec{R} \cdot \vec{e}_K)(\vec{R} \cdot \vec{R})\vec{0} \\ &\quad - \vec{e}_K \otimes 2[(\vec{R} \cdot \vec{e}_K)2\vec{R} + (\vec{R} \cdot \vec{R})\vec{e}_K] + 5(\vec{R} \cdot \vec{e}_K)^2\vec{1} \\ &\quad + 5\vec{R} \otimes 2(\vec{R} \cdot \vec{e}_K)\vec{e}_K \\ &= -(\vec{R} \cdot \vec{R})\vec{1} - 2\vec{R} \otimes \vec{R} - 2\vec{e}_K \otimes [2(\vec{R} \cdot \vec{e}_K)\vec{R} + (\vec{R} \cdot \vec{R})\vec{e}_K] \\ &\quad + 5(\vec{R} \cdot \vec{e}_K)^2\vec{1} + 10\vec{R} \otimes (\vec{R} \cdot \vec{e}_K)\vec{e}_K \end{aligned}$$

Par conséquent, $\vec{J}_{\vec{\oplus}, \vec{J}_2}(\vec{R})$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{J}_{\vec{\oplus}, \vec{J}_2}(\vec{R}) &= \frac{3\mu_{\oplus} J_2 R_{\oplus}^2}{2} [g(\vec{R})\vec{J}_{\vec{h}}(\vec{R}) + \vec{h}(\vec{R}) \otimes \vec{\nabla}_g(\vec{R})] & (D.14) \\ &= \frac{3\mu_{\oplus} J_2 R_{\oplus}^2}{2(\vec{R} \cdot \vec{R})^{7/2}} \left\{ -(\vec{R} \cdot \vec{R})\vec{1} - 2\vec{R} \otimes \vec{R} \right. \\ &\quad \left. - 2\vec{e}_K \otimes [2(\vec{R} \cdot \vec{e}_K)\vec{R} + (\vec{R} \cdot \vec{R})\vec{e}_K] + 5(\vec{R} \cdot \vec{e}_K)^2\vec{1} \right. \\ &\quad \left. + 10\vec{R} \otimes (\vec{R} \cdot \vec{e}_K)\vec{e}_K \right\} \\ &\quad + \frac{3\mu_{\oplus} J_2 R_{\oplus}^2}{2(\vec{R} \cdot \vec{R})^{9/2}} \left\{ [-(\vec{R} \cdot \vec{R})\vec{R} - 2(\vec{R} \cdot \vec{e}_K)(\vec{R} \cdot \vec{R})\vec{e}_K \right. \\ &\quad \left. + 5(\vec{R} \cdot \vec{e}_K)^2\vec{R}] \otimes (-7\vec{R}) \right\} \\ &= \frac{3\mu_{\oplus} J_2 R_{\oplus}^2}{2(\vec{R} \cdot \vec{R})^{9/2}} \left\{ (\vec{R} \cdot \vec{R}) [5(\vec{R} \cdot \vec{e}_K)^2 - (\vec{R} \cdot \vec{R})] \vec{1} \right. \\ &\quad \left. + 5 [(\vec{R} \cdot \vec{R}) - 7(\vec{R} \cdot \vec{e}_K)^2] \vec{R} \otimes \vec{R} \right. \\ &\quad \left. + 10(\vec{R} \cdot \vec{R})(\vec{R} \cdot \vec{e}_K) [\vec{R} \otimes \vec{e}_K + \vec{e}_K \otimes \vec{R}] \right. \\ &\quad \left. - 2(\vec{R} \cdot \vec{R})^2 \vec{e}_K \otimes \vec{e}_K \right\} \end{aligned}$$

Annexe E

Non-existence d'une représentation LFT d'ordre un des fonctions trigonométriques

Nous montrerons dans ce chapitre annexe qu'il ne peut pas y avoir de représentation LFT d'ordre un pour les fonctions trigonométriques $\cos x$ et $\sin x$ qui utilise le même paramètre δ . Nous montrerons également que l'existence d'une représentation d'ordre un pour une des deux fonctions trigonométriques et d'une représentation d'ordre deux pour l'autre fonction trigonométrique est impossible si l'on veut que les deux dépendent du même paramètre δ .

Prenons le modèle général suivant :

$$f_{\sin}(\delta) = \frac{s_1 + s_2\delta + s_3\delta^2}{1 + s_4\delta + s_5\delta^2} \text{ et } f_{\cos}(\delta) = \frac{c_1 + c_2\delta + c_3\delta^2}{1 + c_4\delta + c_5\delta^2}$$

Le coefficient 1 dans les dénominateurs est obligatoire car il faut que la fonction ait une valeur finie pour $\delta = 0$. Sinon, la fonction rationnelle n'est pas propre en $\frac{1}{\delta}$ et ne peut pas être mise sous forme d'une LFT.

Nous effectuons ensuite un développement de TAYLOR d'ordre N autour de δ_0 :

$$f_{\sin}(\delta_0 + \delta) \approx \sum_{k=0}^N \frac{\delta}{k!} f_{\sin}^{(k)}(\delta_0)$$

$$f_{\cos}(\delta_0 + \delta) \approx \sum_{k=0}^N \frac{\delta}{k!} f_{\cos}^{(k)}(\delta_0)$$

avec $f^{(k)}$ la k -ième dérivée de la fonction f

Les expressions pour les dérivées $f_{\sin}^{(k)}$ et $f_{\cos}^{(k)}$ peuvent être obtenues avec un logiciel de calcul symbolique comme la *Symbolic Toolbox* de *MATLAB* et nous ne les détaillerons pas dans la suite.

Nous choisissons $\delta_0 = 0$ et définissons que $\delta = 0$ correspond à $x = 0$, c'est-à-dire $f_{\sin}(0) = 0$ car $\sin(0) = 0$ et $f_{\cos}(0) = 1$ car $\cos(0) = 1$. Ceci ne restreint pas la généralité car nous pouvons toujours effectuer un changement de variables $\delta = \tilde{\delta} + \Delta\delta$ sans augmenter l'ordre pour nous ramener au cas

plus général. Le seul changement qui est interdit est celui qui crée un pôle à $\tilde{\delta} = 0$, un cas qui n'a pas d'importance en pratique (cf. remarques ci-dessus sur le coefficient 1 obligatoire).

Dans la suite, nous vérifierons sous quelles conditions le développement de TAYLOR d'ordre N respecte l'identité connue $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Si les fonctions $f_{\sin}(\delta)$ et $f_{\cos}(\delta)$ représentent les fonctions trigonométriques $\sin x$ et $\cos x$, cette identité doit être respectée au N -ième ordre près pour un développement de TAYLOR d'ordre N . Plus l'ordre du développement est élevé, plus les coefficients des deux fonctions $f_{\sin}(\delta)$ et $f_{\cos}(\delta)$ seront contraints. Finalement, nous espérons trouver une contradiction lorsqu'une des deux fonctions est contrainte au premier ordre.

– **Condition d'ordre zéro ($N = 0$) :**

$$\left[\sum_{k=0}^0 \frac{\delta^k}{k!} f_{\sin}^{(k)}(\delta_0) \right]^2 + \left[\sum_{k=0}^0 \frac{\delta^k}{k!} f_{\cos}^{(k)}(\delta_0) \right]^2 = 1$$

$$\iff s_1^2 + c_1^2 = 1$$

Nous choisissons $s_1 = 0$ et $c_1 = 1$ (parce que $\sin(0) = 0$ et $\cos(0) = 1$) et obtenons les fonctions suivantes :

$$f_{\sin}(\delta) = \frac{s_2\delta + s_3\delta^2}{1 + s_4\delta + s_5\delta^2} \text{ et } f_{\cos}(\delta) = \frac{1 + c_2\delta + c_3\delta^2}{1 + c_4\delta + c_5\delta^2}$$

– **Condition d'ordre un ($N = 1$) :**

$$\left[\sum_{k=0}^1 \frac{\delta^k}{k!} f_{\sin}^{(k)}(\delta_0) \right]^2 + \left[\sum_{k=0}^1 \frac{\delta^k}{k!} f_{\cos}^{(k)}(\delta_0) \right]^2 = 1$$

$$\iff c_4 = c_2$$

Ceci fournit les nouvelles fonctions :

$$f_{\sin}(\delta) = \frac{s_2\delta + s_3\delta^2}{1 + s_4\delta + s_5\delta^2} \text{ et } f_{\cos}(\delta) = \frac{1 + c_2\delta + c_3\delta^2}{1 + c_2\delta + c_5\delta^2}$$

– **Condition d'ordre deux ($N = 2$) :**

$$\left[\sum_{k=0}^2 \frac{\delta^k}{k!} f_{\sin}^{(k)}(\delta_0) \right]^2 + \left[\sum_{k=0}^2 \frac{\delta^k}{k!} f_{\cos}^{(k)}(\delta_0) \right]^2 = 1$$

$$\iff c_5 = c_3 + \frac{s_2^2}{2}$$

Ceci fournit les nouvelles fonctions :

$$f_{\sin}(\delta) = \frac{s_2\delta + s_3\delta^2}{1 + s_4\delta + s_5\delta^2} \text{ et } f_{\cos}(\delta) = \frac{1 + c_2\delta + c_3\delta^2}{1 + c_2\delta + (c_3 + \frac{s_2^2}{2})\delta^2}$$

– **Condition d'ordre trois** ($N = 3$) :

$$\left[\sum_{k=0}^3 \frac{\delta^k}{k!} f_{\sin}^{(k)}(\delta_0) \right]^2 + \left[\sum_{k=0}^3 \frac{\delta^k}{k!} f_{\cos}^{(k)}(\delta_0) \right]^2 = 1$$

$$\iff s_3 = \left(s_4 - \frac{c_2}{2} \right) \cdot s_2 \text{ ou } s_2 = 0$$

Nous excluons le deuxième cas pour éviter que $f_{\cos}(\delta) = 1 \forall \delta$.

Ceci fournit les nouvelles fonctions :

$$f_{\sin}(\delta) = \frac{s_2\delta + \left(s_4 - \frac{c_2}{2} \right) \delta^2}{1 + s_4\delta + s_5\delta^2} \text{ et } f_{\cos}(\delta) = \frac{1 + c_2\delta + c_3\delta^2}{1 + c_2\delta + \left(c_3 + \frac{s_2^2}{2} \right) \delta^2}$$

– **Condition d'ordre quatre** ($N = 4$) :

$$\left[\sum_{k=0}^4 \frac{\delta^k}{k!} f_{\sin}^{(k)}(\delta_0) \right]^2 + \left[\sum_{k=0}^4 \frac{\delta^k}{k!} f_{\cos}^{(k)}(\delta_0) \right]^2 = 1$$

$$\iff s_5 = \frac{1}{8} (4c_3 - 3c_2^2 + 3s_2^2 + 4s_4c_2) \text{ ou } s_2 = 0$$

Nous excluons le deuxième cas pour éviter que $f_{\cos}(\delta) = 1 \forall \delta$.

Ceci fournit les nouvelles fonctions :

$$f_{\sin}(\delta) = \frac{s_2\delta + \left(s_4 - \frac{c_2}{2} \right) \delta^2}{1 + s_4\delta + \frac{1}{8} (4c_3 - 3c_2^2 + 3s_2^2 + 4s_4c_2) \delta^2} \text{ et } f_{\cos}(\delta) = \frac{1 + c_2\delta + c_3\delta^2}{1 + c_2\delta + \left(c_3 + \frac{s_2^2}{2} \right) \delta^2}$$

– **Condition d'ordre cinq** ($N = 5$) :

$$\left[\sum_{k=0}^5 \frac{\delta^k}{k!} f_{\sin}^{(k)}(\delta_0) \right]^2 + \left[\sum_{k=0}^5 \frac{\delta^k}{k!} f_{\cos}^{(k)}(\delta_0) \right]^2 = 1$$

$$\iff c_2 = s_4 \text{ ou } c_3 = -\frac{3s_2^2}{4} + \frac{c_2^2}{4} \text{ ou } s_2 = 0$$

Nous excluons le troisième cas pour éviter que $f_{\cos}(\delta) = 1 \forall \delta$. Le deuxième cas est aussi exclu car il mène automatiquement à $s_2 = 0$ dans la condition d'ordre six. Il ne reste alors que le premier cas.

Ceci fournit les nouvelles fonctions :

$$f_{\sin}(\delta) = \frac{s_2\delta + \frac{s_4}{2}\delta^2}{1 + s_4\delta + \frac{1}{8} (4c_3 + 3s_2^2 + s_4^2) \delta^2} \text{ et } f_{\cos}(\delta) = \frac{1 + s_4\delta + c_3\delta^2}{1 + s_4\delta + \left(c_3 + \frac{s_2^2}{2} \right) \delta^2}$$

– **Condition d'ordre six** ($N = 6$) :

$$\left[\sum_{k=0}^6 \frac{\delta^k}{k!} f_{\sin}^{(k)}(\delta_0) \right]^2 + \left[\sum_{k=0}^6 \frac{\delta^k}{k!} f_{\cos}^{(k)}(\delta_0) \right]^2 = 1$$

$$\iff s_4^4 - 6s_4^2s_2^2 + 16c_3^2 + 24c_3s_2^2 + 5s_2^4 - 8c_3s_4^2 = 0 \text{ ou } s_2 = 0$$

Nous excluons le deuxième cas pour éviter que $f_{\cos}(\delta) = 1 \forall \delta$. Le premier cas, hélas, n'est pas trivial à résoudre.

Cependant, nous pouvons déjà montrer qu'il n'est pas possible de trouver une représentation d'ordre un, c'est-à-dire avec des polynômes d'ordre un dans le numérateur ainsi que dans le dénominateur, pour une des deux fonction trigonométriques à partir des conditions établies jusqu'à présent.

Pour restreindre le cosinus à une représentation d'ordre un, nous devons poser $c_3 = 0$ et $s_2 = 0$. Ceci donne la fonction suivante :

$$f_{\cos}(\delta) = \frac{1 + s_4\delta}{1 + s_4\delta} = 1 \forall \delta$$

Évidemment, cette représentation ne convient pas car elle ne couvre pas les variations du cosinus.

Maintenant, nous essayons de restreindre le sinus à une représentation d'ordre un. Il faut alors poser $s_4 = 0$ et $c_3 = -\frac{3}{4}s_2^2$. Si nous reportons ces résultats dans la condition d'ordre six, nous obtenons $s_2 = 0$ comme seule solution. Donc, il vient $s_4 = c_3 = s_2 = 0$ et

$$f_{\sin}(\delta) = 0 \forall \delta.$$

Cette représentation n'est pas utilisable non plus pour la même raison que précédemment.

Nous avons donc montré qu'il ne peut pas y avoir de représentation d'ordre un pour au moins une des deux fonctions trigonométriques $\sin x$ et $\cos x$.

Par ailleurs, les représentations d'ordre deux données dans l'Éq. (4.17) (page 141) correspondent au modèle issu de la condition d'ordre cinq et satisfont également la condition d'ordre six.

Annexe F

Transformée de Fourier discrète

La *transformée de FOURIER* discrète (TFD) est un outil puissant du *traitement numérique du signal* qui sert à analyser le contenu fréquentiel d'un signal discret (*analyse spectrale*).

La transformée de FOURIER discrète est particulièrement adaptée lorsqu'il s'agit d'effectuer une analyse spectrale sur un signal périodique.

Nous partons d'une séquence de N nombres complexes $x_0, \dots, x_{N-1} \in \mathbb{C}$.

Cette séquence est transformée en une séquence de N nombres complexes $\mathcal{X}_0, \dots, \mathcal{X}_{N-1} \in \mathbb{C}$ à l'aide de la transformée de FOURIER discrète :

$$\mathcal{X}_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N} kn}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (\text{F.1})$$

À partir de la séquence fréquentielle $\mathcal{X}_0, \dots, \mathcal{X}_{N-1}$, la séquence temporelle x_0, \dots, x_{N-1} peut être obtenue grâce à la transformée de FOURIER discrète inverse :

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{X}_k e^{\frac{2\pi i}{N} kn}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (\text{F.2})$$

Pour un signal réel $x_0, \dots, x_{N-1} \in \mathbb{R}$, la relation suivante est vraie :

$$\mathcal{X}_k = \overline{\mathcal{X}_{N-k}}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (\text{F.3})$$

Ici, le nombre complexe $\overline{\mathcal{X}_{N-k}}$ est le conjugué du nombre complexe \mathcal{X}_{N-k} .

En d'autres termes, la transformée de FOURIER discrète est redondante pour un signal réel. Par conséquent, il suffit de stocker la séquence $\mathcal{X}_0, \dots, \mathcal{X}_{N/2}$. Par ailleurs, \mathcal{X}_0 est un nombre réel, $\mathcal{X}_{N/2}$ est réel si N est un nombre pair. La séquence $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_{N/2-1}$ est généralement complexe.

Cette remarque nous permet d'écrire la transformée de FOURIER discrète inverse de la manière

suivante :

$$\begin{aligned}
 & N \text{ pair :} \tag{F.4} \\
 x_n &= \frac{1}{N} \left[\mathcal{X}_0 + (-1)^n \mathcal{X}_{N/2} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \mathcal{X}_k e^{\frac{2\pi i}{N} kn} + \sum_{k=N/2+1}^{N-1} \mathcal{X}_k e^{\frac{2\pi i}{N} kn} \right] \\
 &= \frac{1}{N} \left[\mathcal{X}_0 + (-1)^n \mathcal{X}_{N/2} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \left(\mathcal{X}_k e^{\frac{2\pi i}{N} kn} + \bar{\mathcal{X}}_k e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \right) \right] \\
 & N \text{ impair :} \\
 x_n &= \frac{1}{N} \left[\mathcal{X}_0 + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \mathcal{X}_k e^{\frac{2\pi i}{N} kn} + \sum_{k=(N+1)/2}^{N-1} \mathcal{X}_k e^{\frac{2\pi i}{N} kn} \right] \\
 &= \frac{1}{N} \left[\mathcal{X}_0 + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \left(\mathcal{X}_k e^{\frac{2\pi i}{N} kn} + \bar{\mathcal{X}}_k e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Grâce à la *formule d'EULER* ($e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$), l'expression $\mathcal{X}_k e^{\frac{2\pi i}{N} kn} + \bar{\mathcal{X}}_k e^{-\frac{2\pi i}{N} kn}$ dans la transformée de FOURIER discrète inverse peut être reformulée comme suit :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{X}_k e^{\frac{2\pi i}{N} kn} + \bar{\mathcal{X}}_k e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} &= [\Re(\mathcal{X}_k) + i\Im(\mathcal{X}_k)] \left[\cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \right] \\
 &\quad + [\Re(\mathcal{X}_k) - i\Im(\mathcal{X}_k)] \left[\cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \right] \\
 &= 2\Re(\mathcal{X}_k) \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) - 2\Im(\mathcal{X}_k) \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right)
 \end{aligned} \tag{F.5}$$

Ici, $\Re(\mathcal{X}_k)$ et $\Im(\mathcal{X}_k)$ sont les parties réelle et imaginaire du nombre complexe \mathcal{X}_k .

Il vient :

$$\begin{aligned}
 & N \text{ pair :} \tag{F.6} \\
 x_n &= \frac{1}{N} \left[\mathcal{X}_0 + (-1)^n \mathcal{X}_{N/2} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \left(2\Re(\mathcal{X}_k) \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) - 2\Im(\mathcal{X}_k) \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \right) \right] \\
 & N \text{ impair :} \\
 x_n &= \frac{1}{N} \left[\mathcal{X}_0 + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \left(2\Re(\mathcal{X}_k) \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) - 2\Im(\mathcal{X}_k) \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \right) \right]
 \end{aligned}$$

En pratique, la transformée de FOURIER discrète est calculée à l'aide de la *transformée de FOURIER rapide* (FFT, *angl.* fast FOURIER transform) qui a une complexité de $\mathcal{O}(N \log N)$ avec N le nombre de points du signal. Le calcul direct donné par l'Éq. (F.1) a une complexité de $\mathcal{O}(N^2)$. Cet algorithme a été découvert pour la première fois par GAUSS, plus tard redécouvert par COOLEY et TUKEY [43]. Du fait du caractère récursif de l'algorithme (approche « diviser pour régner », *angl.* divide and conquer), il est préférable de choisir une puissance de 2 pour le nombre N : $N = 2^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Annexe G

Théorème de Floquet et transformée de Floquet-Lyapunov

Le *théorème de FLOQUET* permet d'analyser la stabilité d'un système linéaire périodique à temps variant (LPTV, *angl.* linear periodic time-varying).

Considérons la dynamique donnée par l'équation différentielle linéaire suivante.

$$\dot{x} = A(t)x \quad (\text{G.1})$$

Cette dynamique peut représenter soit une dynamique en boucle ouverte, soit une dynamique en boucle fermée. Dans les deux cas, les entrées exogènes (par exemple bruits et consignes) sont négligées du fait qu'elles n'ont pas d'importance pour l'analyse de stabilité.

t représente le temps et \dot{x} la dérivée temporelle du vecteur d'état $x \in \mathbb{R}^n$. Il s'agit d'une dynamique périodique, c'est-à-dire que la fonction de la matrice d'état $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est périodique avec une période $T > 0$:

$$A(t+T) = A(t) \quad (\text{G.2})$$

La *matrice de transition* $\Phi(t_2, t_1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est définie comme suit :

$$x(t_2) = \Phi(t_2, t_1)x(t_1) \quad (\text{G.3})$$

Dans le cas particulier $t_1 = t_0$ et $t_2 = t$, il vient :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) \quad (\text{G.4})$$

En outre, on obtient la relation suivante pour $t_1 = t_2 = t_0$:

$$\Phi(t_0, t_0) = I_n \quad (\text{G.5})$$

Ici, I_n est la matrice d'identité de dimension n , cf. Annexe B. $\Phi(t_0, t_0)$ peut être considéré comme condition initiale de la matrice de transition $\Phi(t, t_0)$.

La périodicité de la dynamique mène à la périodicité de la matrice de transition Φ :

$$\Phi(t+T, t_0+T) = \Phi(t, t_0) \quad (\text{G.6})$$

Du fait de la linéarité de la dynamique (G.1), l'évolution de la matrice de transition obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0) \quad (\text{G.7})$$

C'est grâce à l'équation différentielle (G.7) que nous pouvons calculer des matrices de transition $\Phi(t, t_0)$. Plus précisément, à partir de la condition initiale $\Phi(t_0, t_0) = I_n$, nous pouvons intégrer l'Éq. (G.7) sur l'intervalle $[t_0, t]$ et obtenir $\Phi(t, t_0)$.

Le *théorème de FLOQUET* [150] affirme qu'il existe deux matrices $P(t, t_0)$ et Q ayant les propriétés suivantes :

- $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante ;
- $P(t, t_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice non-singulière et périodique avec la même période T que la dynamique, c'est-à-dire que $P(t, t_0)$ obéit à la relation $P(t+T, t_0) = P(t, t_0)$;
- le changement de coordonnées à temps variant $\xi = P(t, t_0)^{-1}x$ avec $\xi \in \mathbb{R}^n$ transforme le système périodique (G.1) en le système stationnaire suivant :

$$\dot{\xi} = Q\xi \quad (\text{G.8})$$

Ce changement de coordonnées s'appelle *transformée de FLOQUET-LYAPUNOV*. Elle transforme la dynamique linéaire périodique en une dynamique linéaire stationnaire (LTI, *angl.* linear time-invariant).

Dans la suite, nous montrerons comment la matrice Q peut être obtenue à partir de la dynamique (G.1) et quel rôle Q joue dans l'analyse de stabilité d'une dynamique linéaire périodique. Nous ne nous occuperons pas de la matrice $P(t, t_0)$ dont l'évolution temporelle peut être obtenue grâce à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt}P(t, t_0) = A(t)P(t, t_0) - P(t, t_0)Q \quad (\text{G.9})$$

La relation entre la matrice Q et la matrice de transition Φ est la suivante :

$$\begin{aligned} R &= e^{QT} \\ \text{avec } R &= \Phi(t_0+T, t_0) \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

On appelle les valeurs propres λ_k , $k = 1, \dots, n$ de la matrice Q les *exposants caractéristiques* et les valeurs propres μ_k , $k = 1, \dots, n$ de la matrice R les *multiplieurs caractéristiques*. Il existe les relations suivantes entre λ_k et μ_k :

$$\begin{aligned} \mu_k &= \exp(\lambda_k T), \quad k = 1, \dots, n \\ \lambda_k &= \frac{1}{T} \log \mu_k, \quad k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{G.11})$$

Le logarithme naturel $\log z$ d'un nombre complexe z peut être calculé grâce à la formule suivante :

$$\begin{aligned} \log z &= \log |z| + i \arg(z) + i2\pi m \\ \text{avec} \quad & m \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{G.12}$$

La constante m est un nombre entier et peut être choisie librement. En d'autres termes, il n'existe pas de solution unique, mais un nombre infini de solutions.

Il existe maintenant deux manières équivalentes de vérifier la stabilité de la dynamique (G.1) :

- la dynamique (G.1) est stable si et seulement si la matrice Q est HURWITZ¹, c'est-à-dire que les parties réelles de tous les exposants caractéristiques λ_k , $k = 1, \dots, n$ sont négatives ;
- la dynamique (G.1) est stable si et seulement si la matrice R est SCHUR², c'est-à-dire que les modules de tous les multiplicateurs caractéristiques sont inférieurs à un.

En quelque sorte, la matrice R définit une dynamique linéaire discrète dont l'expression est la suivante :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Rx_k \\ \text{avec } x_k &= x(t_0 + kT) \end{aligned} \tag{G.13}$$

Or, la stabilité de ce système discret est garantie si et seulement si la matrice R est SCHUR.

En conclusion, le théorème de FLOQUET nous permet d'effectuer une analyse de stabilité simplement en intégrant la matrice de transition sur une période T de la dynamique. Les valeurs propres de la matrice de transition sur une période $R = \Phi(t_0 + T, t_0)$ décident de la stabilité ou non-stabilité de la dynamique (G.1). Le choix du temps initial t_0 est arbitraire et sans importance.

1. Adolf HURWITZ (1859 – 1919), mathématicien allemand
 2. Issai SCHUR (1875 – 1941), mathématicien russe

Annexe H

La synthèse \mathcal{H}_2

La *synthèse \mathcal{H}_2* est une méthode de synthèse multivariable qui est particulièrement bien adaptée à satisfaire des spécifications stochastiques [163].

La synthèse \mathcal{H}_2 repose sur la forme standard illustrée dans la FIG. H.1.

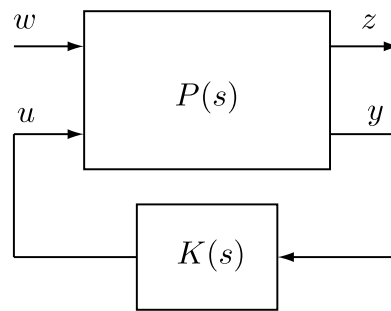


FIGURE H.1 – La forme standard

Ici, P est le *système généralisé* (angl. generalized plant), c'est-à-dire qu'il comprend à la fois le système physique à contrôler et des filtres de pondération afin d'exprimer les spécifications.

w est le vecteur des *entrées exogènes* (par exemple perturbations et consignes) et z le vecteur des *sorties contrôlées*. w et z sont de dimensions m_1 et p_1 , respectivement. K est le *correcteur* qui ferme la boucle entre le vecteur des *sorties mesurées* y et le vecteur des *entrées de commande* u . Les dimensions de u et y sont m_2 et p_2 , respectivement.

Le système généralisé P peut être exprimé sous *forme d'état* :

$$P : \begin{aligned} \dot{x} &= A_K x + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{aligned} \quad (\text{H.1})$$

La structure désirée du correcteur K est la suivante :

$$K : \begin{aligned} \dot{x}_K &= A_K x_K + B_K y \\ u &= C_K x_K \end{aligned} \quad (\text{H.2})$$

Les dimensions des matrices d'état A et A_K (nombre d'états) sont n et n_K , respectivement. Les dimensions des autres matrices $B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}, B_K$ et C_K peuvent être déterminées à partir des nombres m_1, m_2, p_1, p_2, n et n_K .

Dans une notation plus condensée, mais toujours dans la représentation d'état, le système généralisé P et le correcteur K s'écrivent :

$$P : \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right], \quad K : \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & 0 \end{array} \right] \quad (\text{H.3})$$

La notation sous forme de matrice de transfert est la suivante :

$$P : \left[\begin{array}{c|c} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ \hline P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{array} \right], \quad K : [K(s)] \quad (\text{H.4})$$

L'objectif de la synthèse \mathcal{H}_2 est de minimiser la norme \mathcal{H}_2 du transfert entre w et z . La norme \mathcal{H}_2 d'une matrice de transfert $F(s)$ est définie comme suit :

$$\|F(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [F(i\omega)F(i\omega)^H] d\omega} \quad (\text{H.5})$$

$F(i\omega)^H$ est la *matrice hermitienne* de $F(i\omega)$, c'est-à-dire la matrice transposée et conjuguée de $F(i\omega)$. $\text{tr}(M)$ est la trace d'une matrice carrée M , c'est-à-dire la somme des éléments diagonaux de M . La trace de $F(i\omega)F(i\omega)^H$ est toujours réelle et non-négative. Par conséquent, la norme \mathcal{H}_2 est également réelle et non-négative.

En fait, la norme \mathcal{H}_2 du transfert $\mathcal{F}_l(P(s), K(s))$ permet deux interprétations différentes, une interprétation déterministe et une interprétation stochastique :

1. le signal $w(t)$ est une fonction δ de DIRAC¹ (ou impulsion de DIRAC) dont la définition est la suivante :

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{pour } t = 0 \\ 0 & \text{pour } t \neq 0 \end{cases} \quad (\text{H.6})$$

avec $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

La norme \mathcal{H}_2 représente alors l'énergie de la sortie contrôlée $z(t)$ qui est, comme l'entrée exogène $w(t) = \delta(t)$, un signal déterministe :

$$\|F(s)\|_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{\int_0^T \text{tr} [z(t)z(t)^T] dt} ; \quad (\text{H.7})$$

2. la deuxième possibilité est un bruit blanc gaussien stationnaire d'intensité unitaire à l'entrée exogène $w(t)$:

$$E\{w(t)w(\tau)^T\} = I_{m_1} \delta(t - \tau) \quad (\text{H.8})$$

1. Paul Adrien Maurice DIRAC (1902 – 1984), physicien et mathématicien britannique

$E\{w(t)w(\tau)^T\}$ est la *fonction d'auto-corrélation* du signal $w(t)$. I_{m_1} est une matrice d'identité de dimension m_1 , cf. Annexe B. $\delta(t - \tau)$ est la fonction δ de DIRAC précédemment décrite.

La matrice d'identité représente la *densité spectrale de puissance* (PSD, *angl.* power spectral density) qui est unitaire. La fonction de DIRAC signifie qu'il n'existe pas de corrélation entre le signal w à différents instants.

Dans ce cas, la norme \mathcal{H}_2 représente l'espérance de la puissance de la sortie contrôlée $z(t)$:

$$\|F(s)\|_2 = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sqrt{\int_0^T \text{tr} [z(t)z(t)^T] dt} \right\}. \quad (\text{H.9})$$

Pour nos objectifs, l'interprétation stochastique est l'interprétation la plus simple.

Dans le cas de la forme standard montrée dans la FIG. H.1, nous pouvons poser $F(s) = \mathcal{F}_l(P(s), K(s))$ où $F(s)$ est le transfert entre w et z et $\mathcal{F}_l(P(s), K(s))$ est la transformation linéaire fractionnaire (LFT) inférieure de P et K :

$$\begin{aligned} Z(s) &= F(s)W(s) \\ F(s) &= \mathcal{F}_l(P(s), K(s)) \\ &= P_{11}(s) + P_{12}(s) [I_{p_2} - P_{22}(s)K(s)]^{-1} P_{21}(s) \end{aligned} \quad (\text{H.10})$$

Le correcteur optimal, en d'autres termes celui qui minimise le transfert entre w et z , s'écrit :

$$K_{\text{opt}}(s) = \arg \min_{K(s)} \|\mathcal{F}_l(P(s), K(s))\|_2 \quad (\text{H.11})$$

La norme \mathcal{H}_2 d'un transfert $F(s)$ donné par la représentation d'état

$$F : \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A_F x + B_F w \\ z &= C_F x \end{aligned} \quad (\text{H.12})$$

peut être calculée à l'aide du gramien² de gouvernabilité L_c ou du gramien d'observabilité L_o :

$$\begin{aligned} \|F(s)\|_2^2 &= \text{tr} (C_F L_c C_F^T) \\ &= \text{tr} (B_F^T L_o B_F) \end{aligned} \quad (\text{H.13})$$

Les gramien peuvent être obtenus en résolvant une des deux *équations de LYAPUNOV* suivantes :

$$\begin{aligned} A_F L_c + L_c A_F^T + B_F B_F^T &= 0 \quad (\text{gramien de gouvernabilité}) \\ A_F^T L_o + L_o A_F + C_F^T C_F &= 0 \quad (\text{gramien d'observabilité}) \end{aligned} \quad (\text{H.14})$$

Il existe des outils numériques puissants pour résoudre des équations de LYAPUNOV.

Dans la suite, nous décrirons comment le problème d'optimisation (H.11) peut être résolu.

2. Jørgen Pedersen GRAM (1850 – 1916), mathématicien danois

Tout d'abord, le problème d'optimisation (H.11) doit être *bien posé*, c'est-à-dire que l'existence et l'unicité de la solution doivent être garanties. Pour cette raison, les cinq hypothèses suivantes doivent être satisfaites :

- (H1) (A, B_2, C_2) est stabilisable et détectable
(H2) D_{12} et D_{21} sont de rang plein
(H3) $\begin{bmatrix} A - i\omega I_n & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ est de rang colonne plein $\forall \omega$
(H4) $\begin{bmatrix} A - i\omega I_n & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ est de rang ligne plein $\forall \omega$
(H5) $D_{11} = 0$ et $D_{22} = 0$

Certaines de ces hypothèses, par exemple l'hypothèse (H5) semblent être évidentes (si $D_{11} \neq 0$, alors la norme \mathcal{H}_2 du transfert $F(s)$ ne peut être qu'infinie). Les autres hypothèses peuvent être satisfaites en choisissant les pondérations dans le système généralisé $P(s)$ de façon adaptée.

L'hypothèse $D_{22} = 0$ n'est pas indispensable car les matrices du correcteur peuvent être adaptées afin de prendre en compte un $D_{22} \neq 0$. Cependant, nous y renonçons parce que nous n'en avons pas besoin dans ce mémoire.

Il est important de savoir que les hypothèses (H3) et (H4) peuvent être remplacées par les deux hypothèses suivantes :

- (H6) $D_{12}^T C_1 = 0$ et $B_1 D_{21}^T = 0$
(H7) (A, B_1, C_1) est stabilisable et détectable

La résolution du problème d'optimisation (H.11) se fait à l'aide de deux équations de RICCATI algébriques (ARE, *angl.* algebraic RICCATI equation), cf. Réf. [48] :

$$\begin{aligned} A^T X + X A - (X B_2 + C_1^T D_{12})(D_{12}^T D_{12})^{-1}(B_2^T X + D_{12}^T C_1) + C_1^T C_1 &= 0 & \text{(H.15)} \\ A Y + Y A^T - (Y C_2^T + B_1 D_{21}^T)(D_{21} D_{21}^T)^{-1}(C_2 Y + D_{21} B_1^T) + B_1 B_1^T &= 0 \end{aligned}$$

Les matrices définies positives $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont les solutions des deux équations de RICCATI. Comme pour les équations de LYAPUNOV, il existe des outils numériques puissants afin de résoudre les équations de RICCATI.

Grâce aux matrices X et Y , les deux gains K_c (gain de retour d'état) et K_f (gain d'estimation) peuvent être déterminés :

$$\begin{aligned} K_c &= (D_{12}^T D_{12})^{-1}(B_2^T X + D_{12}^T C_1) & \text{(H.16)} \\ K_f &= (Y C_2^T + B_1 D_{21}^T)(D_{21} D_{21}^T)^{-1} \end{aligned}$$

Enfin, le correcteur optimal K_{opt} au le sens de la norme \mathcal{H}_2 peut être construit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A_K &= A - B_2 K_c - K_f C_2 & \text{(H.17)} \\ B_K &= K_f \\ C_K &= -K_c \\ K_{\text{opt}} : & \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A - B_2 K_c - K_f C_2 & K_f \\ \hline -K_c & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Une remarque importante est qu'il existe un lien entre la synthèse \mathcal{H}_2 et la commande LQG (*angl.* linear quadratic gaussian). En effet, la commande LQG est un cas particulier de la commande \mathcal{H}_2 , cf. Réf. [163].

Comme un correcteur LQG, un correcteur \mathcal{H}_2 est sous forme d'un *filtre de KALMAN*, cf. FIG. H.2, et obéit au *principe de séparation* (séparation des dynamiques d'estimation et de commande). Les états du correcteur x_K sont des estimations \hat{x} des états du système x .

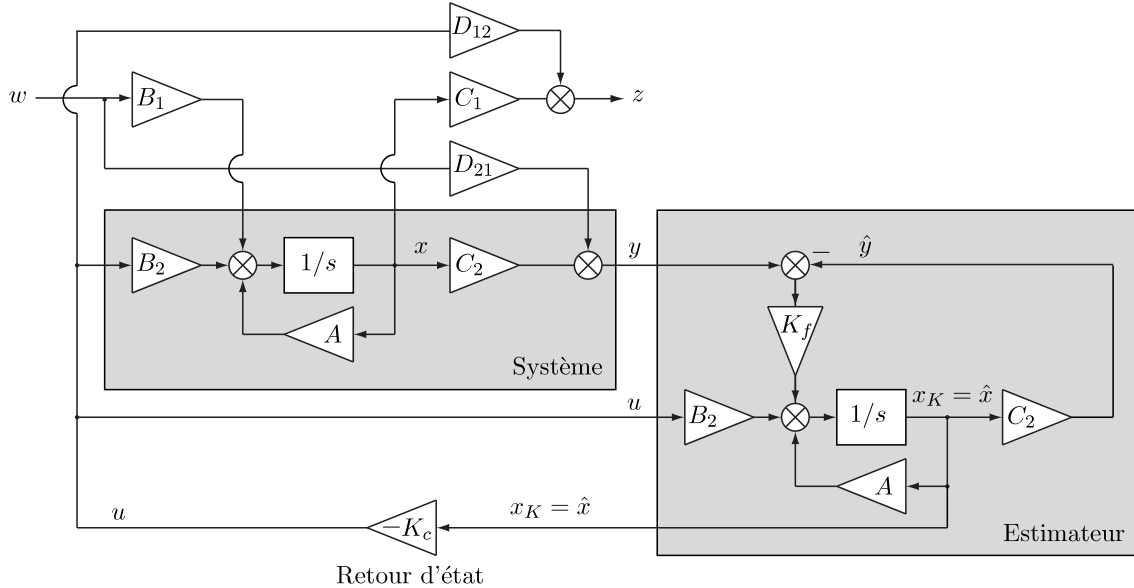


FIGURE H.2 – Le système en boucle fermée

La représentation d'état du système en boucle fermée s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 F : \quad \begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax & -B_2K_c x_K & +B_1w \\
 \dot{x}_K &= K_f C_2 x & +(A - K_f C_2 - B_2 K_c)x_K & +K_f D_{21}w \\
 z &= C_1 x & -D_{12}K_c x_K & \\
 y &= C_2 x & & +D_{21}w \\
 u &= & -K_c x_K &
 \end{aligned}
 \end{aligned} \tag{H.18}$$

Si l'erreur d'estimation $\varepsilon_x = x_K - x$ est utilisé au lieu de x_K dans la représentation d'état, elle s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 F : \quad \begin{aligned}
 \dot{x} &= (A - B_2K_c)x & -B_2K_c\varepsilon_x & +B_1w \\
 \dot{\varepsilon}_x &= & (A - K_f C_2)\varepsilon_x & +(K_f D_{21} - B_1)w \\
 z &= (C_1 - D_{12}K_c)x & -D_{12}K_c\varepsilon_x & \\
 y &= C_2 x & & +D_{21}w \\
 u &= -K_c x & -K_c\varepsilon_x &
 \end{aligned}
 \end{aligned} \tag{H.19}$$

Cette formulation souligne le principe de séparation par la structure diagonale par bloc de la matrice d'état. Les dynamiques de retour d'état $A - B_2K_c$ et d'estimation $A - K_f C_2$ sont bien visibles.

Annexe I

Distance entre un hyper-ellipsoïde et un point à son intérieur

Sommaire

I.1 Premier algorithme	351
I.2 Deuxième algorithme	353

Dans ce chapitre annexe, nous décrirons comment on peut déterminer si la distance d'un point à l'intérieur d'un hyper-ellipsoïde du point le plus proche de l'hyper-ellipsoïde est inférieure à 1 ou non. Il est important de savoir que la notation utilisée est différente de la notation dans le Chapitre 5.

Soit un hyper-ellipsoïde ε_P de dimension n centré à l'origine et défini comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_P & : \{x | x^T P x = 1\} & \text{(I.1)} \\ \text{avec} \quad x & \in \mathbb{R}^n, \\ & P \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ et} \\ & P = P^T > 0 \end{aligned}$$

Les points à l'extérieur obéissent à l'inégalité $x^T P x > 1$, tandis que l'inégalité $x^T P x < 1$ est vraie pour les points à l'intérieur.

Nous supposons que cet hyper-ellipsoïde soit dans sa forme normale, c'est-à-dire que les axes sont alignés avec les axes du repère :

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{pmatrix} \quad \text{(I.2)}$$

De ce fait, l'expression $x^T P x$ peut être écrite de façon simplifiée :

$$x^T P x = \sum_{k=1}^n p_k x_k^2 \quad \text{(I.3)}$$

Ici, x_k est le k -ième élément du vecteur x .

Les longueurs de ses demi-axes sont alors données par

$$L_k = \frac{1}{\sqrt{p_k}}. \quad (\text{I.4})$$

En outre, il existe un point $X \in \mathbb{R}^n$ dans le premier orthant à l'intérieur de l'hyper-ellipsoïde, c'est-à-dire qu'il faut que

$$\begin{aligned} X^T P X &< 1 \\ X_k &> 0, \quad k \in 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

La FIG. I.1 donne une illustration des faits mentionnés pour le cas d'une ellipse ($n = 2$).

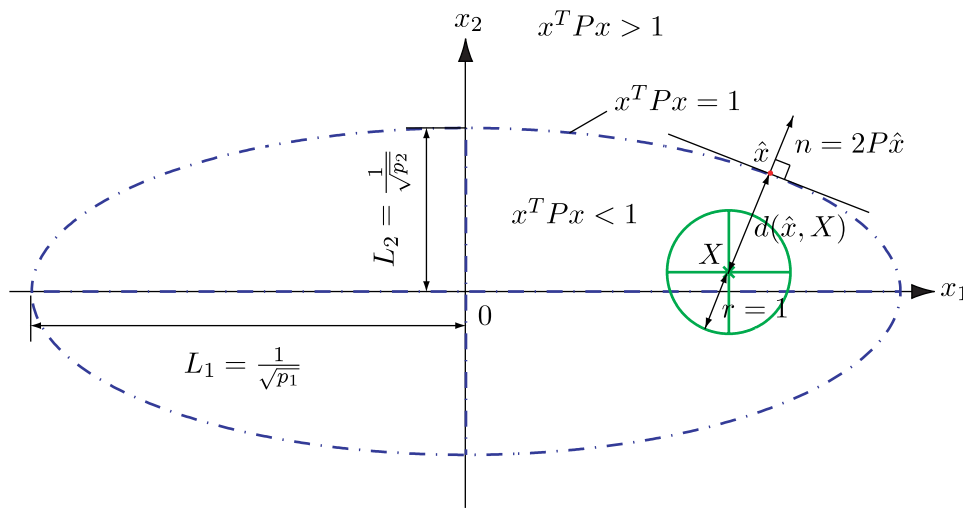


FIGURE I.1 – Ellipse $\varepsilon_P : \{x | x^T P x = 1\}$ et point X à l'intérieur

Le point \hat{x} le plus proche du point X sur l'hyper-ellipsoïde ε_P est la solution du problème de minimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_x (x - X)^T (x - X) \\ \text{s.t. } x^T P x = 1 \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

La fonction objective $(x - X)^T (x - X)$ est une fonction convexe car sa dérivée seconde selon x vaut $2I > 0$. Cependant, la contrainte $x^T P x = 1$ n'est pas convexe. De ce fait, il peut y avoir des minima locaux.

Comme notre objectif est de déterminer si la distance minimale $d(\hat{x}, X)$ est supérieure ou inférieure à 1, il est très important de connaître le minimum global. Nous montrerons dans la suite deux algorithmes itératifs capables de fournir ce minimum global en restreignant la recherche au premier orthant.

Par ailleurs, une condition nécessaire pour que la distance $d(\hat{x}, X)$ soit supérieure à 1 est que les

longueurs des demi-axes de l'hyper-ellipsoïde ε_P soient toutes supérieures à 1 :

$$L_i = \frac{1}{\sqrt{p_k}} > 1, \quad k \in 1, \dots, n \quad (\text{I.7})$$

I.1 Premier algorithme

Le premier algorithme est basé sur une idée de VESELY [183]. Cependant, notre interprétation est géométrique plutôt que mécanique, ce qui nous permet de démontrer la convergence de l'approche itérative.

Dans cet algorithme, nous obtenons le point \hat{x} le plus proche du point X grâce à une approche itérative. $x^{(k)}$ est l'approximation du point \hat{x} dans l'itération k . Le point initial $x^{(0)}$ est l'intersection entre l'hyper-ellipsoïde ε_P et la droite passant par l'origine 0 et le point X :

$$x^{(0)} = \frac{X}{\sqrt{X^T P X}} \quad (\text{I.8})$$

Une itération k de l'algorithme consiste en plusieurs étapes :

1. nous supposons que le point $x^{(k-1)}$ soit donné ;
2. d'abord, le gradient $n^{(k-1)}$ (qui définit l'hyper-plan tangent à l'hyper-ellipsoïde) de la fonction $x^T P x$ au point $x^{(k-1)}$ est calculé :

$$n^{(k-1)} = 2P x^{(k-1)} \quad (\text{I.9})$$

3. ensuite, le vecteur reliant les points X et $x^{(k-1)}$ est déterminé :

$$f^{(k-1)} = X - x^{(k-1)} \quad (\text{I.10})$$

4. la projection $f_n^{(k-1)}$ du vecteur $f^{(k-1)}$ sur le vecteur $n^{(k-1)}$ peut être obtenue comme suit :

$$f_n^{(k-1)} = \left(I_n - \frac{n^{(k-1)} n^{(k-1)T}}{n^{(k-1)T} n^{(k-1)}} \right) f^{(k-1)} \quad (\text{I.11})$$

5. le point $\tilde{x}^{(k)}$ est le point sur l'hyper-plan tangent au point $x^{(k-1)}$ qui est le plus proche du point X :

$$\tilde{x}^{(k)} = x^{(k-1)} + f_n^{(k-1)} \quad (\text{I.12})$$

6. enfin, le nouveau point $x^{(k)}$ est l'intersection entre l'hyper-ellipsoïde ε_P et la ligne droite reliant le point X et le point $\tilde{x}^{(k)}$:

$$x^{(k)} = X + f \underbrace{(\tilde{x}^{(k)} - X)}_{\Delta} \quad (\text{I.13})$$

Pour que $x^{(k)}$ se trouve sur l'hyper-ellipsoïde ε_P , il faut que $(X + f\Delta)^T P (X + f\Delta) = 1$. Par conséquent, f est la solution positive (celle qui donne l'intersection dans le premier orthant) de

l'équation quadratique suivante :

$$(\Delta^T P \Delta) f^2 + (2\Delta^T P X) f + (X^T P X - 1) = 0 \quad (\text{I.14})$$

Il vient :

$$f = \frac{-\Delta^T P X + \sqrt{(\Delta^T P X)^2 - (\Delta^T P \Delta)(X^T P X - 1)}}{\Delta^T P \Delta} \quad (\text{I.15})$$

Il est possible de montrer que le terme sous la racine est toujours positif ($X^T P X < 1$ et $\Delta^T P \Delta > 0$).

7. la distance entre les points $x^{(k)}$ et X est la suivante :

$$d^{(k)} = \|x^{(k)} - X\|_2 \quad (\text{I.16})$$

8. k est augmenté de 1 et la prochaine itération peut commencer (point 1).

La FIG. I.2 illustre quelques itérations de cet algorithme itératif, en particulier l'initialisation et la première itération.

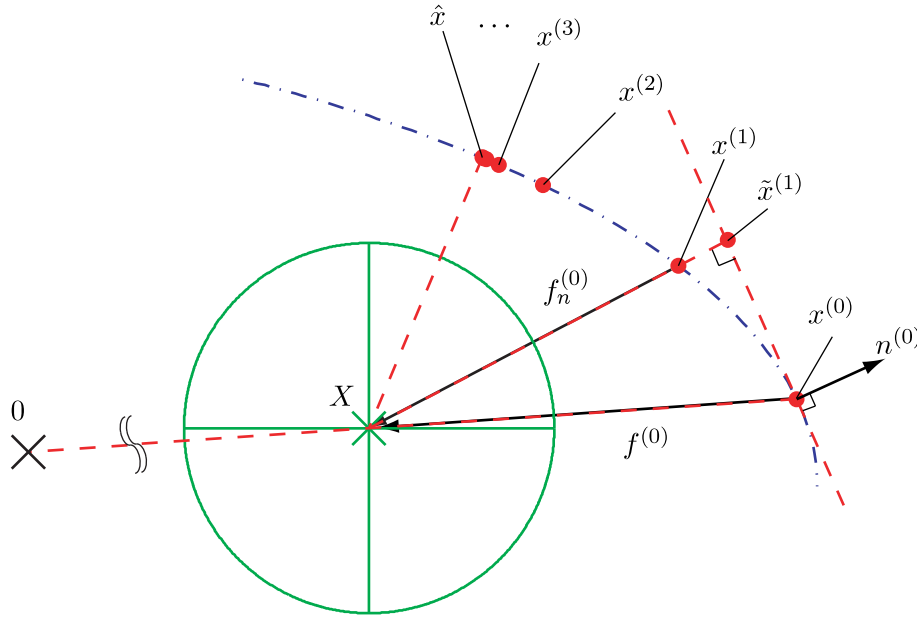


FIGURE I.2 – Quelques itérations du premier algorithme

La convergence de l'algorithme devient aussitôt évidente. En effet, sur le plan tangent à l'ellipsoïde, $n^{(k-1)T}(x - x^{(k-1)}) = 0$, il existe toujours un seul point qui est le point le plus proche du point X : $\tilde{x}^{(k)}$. Par conséquent, il vient :

$$\|\tilde{x}^{(k)} - X\|_2 \leq \|x^{(k-1)} - X\|_2 \quad (\text{I.17})$$

Vu la convexité de l'ellipsoïde, le plan tangent se trouve toujours entièrement à l'extérieur de celui-ci. Ceci signifie que la projection $x^{(k)}$ de $\tilde{x}^{(k)}$ sur l'ellipsoïde (le long de la ligne droite reliant X et

$\tilde{x}^{(k)}$) est encore plus proche de X que $\tilde{x}^{(k)}$:

$$\|x^{(k)} - X\|_2 \leq \|\tilde{x}^{(k)} - X\|_2 \leq \|x^{(k-1)} - X\|_2 \quad (\text{I.18})$$

L'algorithme converge alors vers \hat{x} qui est le point le plus proche du point X sur l'hyper-ellipsoïde.

En réalité, l'algorithme est répété jusqu'à ce que l'écart entre $x^{(k)}$ et $x^{(k-1)}$ soit suffisamment faible :

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_2 < \varepsilon \quad (\text{I.19})$$

Nous avons constaté qu'il converge rapidement même dans le cas d'un hyper-ellipsoïde de dimension élevée ($n = 30$). En outre, beaucoup de temps de calcul peut être économisé en utilisant le point final du dernier lancement comme point initial si le point X n'a pas beaucoup changé.

S'il suffit de savoir si la distance entre les points \hat{x} et X est inférieure à 1 ou non, l'algorithme peut être interrompu dès que $d^{(k)} < 1$. Le cas contraire n'est malheureusement pas possible parce que $d^{(k)}$ est toujours une sur-estimation de la distance entre les points \hat{x} et X . Dans le cas $d^{(k)} > 1$, il faut donc attendre la convergence de l'algorithme.

I.2 Deuxième algorithme

L'idée principale du deuxième algorithme est que, au point \hat{x} de l'hyper-ellipsoïde qui est le plus proche du point X , le vecteur normal n à l'hyper-ellipsoïde est parallèle au vecteur $\hat{x} - X$. D'ailleurs, une optimisation basée sur la méthode de LAGRANGE mène au même résultat. Le vecteur normal au point \hat{x} est égal au gradient de la fonction $x^T P x$ évalué au point \hat{x} :

$$n = \nabla(x^T P x)|_{\hat{x}} = 2P\hat{x} \quad (\text{I.20})$$

La relation suivante entre les vecteurs $2P\hat{x}$ et $\hat{x} - X$ est donc vraie :

$$\begin{aligned} 2P\hat{x} &= c(\hat{x} - X) \text{ ou} \\ 2p_k \hat{x}_k &= c(\hat{x}_k - X_k), \quad k \in \{1, \dots, n\} \\ \text{avec} \quad &c > 0, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

Le scalaire c est forcément positif car X se trouve à l'intérieur de l'hyper-ellipsoïde et le vecteur normal est toujours dirigé vers l'extérieur de l'hyper-ellipsoïde.

Nous pouvons réarranger l'Éq. (I.21) comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= -\left(\frac{2}{c}P - I_n\right)^{-1} X \text{ ou} \\ \hat{x}_k &= \frac{c}{c - 2p_k} X_k, \quad k \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

Visiblement, cette inversion n'est possible que pour $c \neq 2p_k$. Nous considérerons ce problème un peu plus tard. Dans la suite, nous utiliserons uniquement la version scalaire de l'Éq. (I.22).

Le calcul du point \hat{x} (ou de ses éléments \hat{x}_k) suppose que l'on connaisse le scalaire c . Or, nous ne

le connaissons pas pour l'instant. Une information que nous n'avons pas encore prise en compte est le fait que \hat{x} se trouve sur l'hyper-ellipsoïde ε_P :

$$\hat{x}^T P \hat{x} = \sum_{k=1}^n p_k \hat{x}_k^2 = 1 \quad (\text{I.23})$$

En remplaçant \hat{x}_k par l'expression donnée dans l'Éq. (I.22), nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^n p_k \hat{x}_k^2 = \underbrace{\sum_{k=1}^n p_k \left(\frac{c}{c - 2p_k} \right)^2 X_k^2}_{f(c)} = 1 \quad (\text{I.24})$$

La fonction $f(c)$ est une fonction fractionnelle en c . Les valeurs de p_k et de X_k sont connues. Il suffit donc en principe de rechercher un scalaire c qui satisfasse l'Éq. (I.24). Cependant, $f(c)$ possède des pôles à $c = 2p_k$. Il est simple de montrer que $f(c)$ est strictement décroissante sur $[2 \max_k p_k, +\infty[$. Si nous arrivons à montrer que la recherche de c peut être restreinte à $c > 2 \max_k p_k$, nous aurons résolu le problème de l'inversibilité (cf. ci-dessus) et celui de la monotonie en même temps. Si nous pouvons en plus trouver une borne supérieure pour c , rien n'interdit plus de chercher c par dichotomie.

En effet, il existe encore plus d'informations à exploiter. Nous savons que \hat{x} doit se trouver comme X dans le premier orthant de l'hyper-ellipsoïde ε_P :

$$\hat{x}_k = \frac{c}{c - 2p_k} X_k > 0, \quad k \in \{1, \dots, n\} \quad (\text{I.25})$$

Comme $X_k > 0$ et $c > 0$, il faut que

$$c > \underline{c} = 2 \max_k p_k. \quad (\text{I.26})$$

Nous avons donc trouvé la borne inférieure désirée. En revanche, une borne supérieure n'est pas facile à trouver. c peut, en principe, devenir très grand si X est proche de l'hyper-ellipsoïde ε_P .

Or, si nous ne nous intéressons qu'à une réponse oui/non à la question si la distance entre les points \hat{x} et X est supérieure ou égale à 1, nous pouvons simplement demander que $d(\hat{x}, X)^2 \geq 1$ pour borner c :

$$\begin{aligned} d(\hat{x}, X)^2 &= \|\hat{x} - X\|_2^2 & (\text{I.27}) \\ &= \sum_{k=1}^n (\hat{x}_k - X_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{c}{c - 2p_k} - 1 \right)^2 X_k^2 \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^n \left(\frac{2p_k}{c - 2p_k} \right)^2 X_k^2}_{g(c)} \geq 1 \end{aligned}$$

La fonction $g(c)$ est strictement décroissante sur $[2 \max_k p_k, +\infty[$.

Maintenant, nous pouvons trouver une borne supérieure pour l'expression $\sum_{k=1}^n \left(\frac{2p_k}{c-2p_k}\right)^2 X_k^2$:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{2p_k}{c-2p_k}\right)^2 X_k^2 \leq n \left(\frac{2 \max_k p_k}{c-2 \max_k p_k}\right)^2 \left(\max_k X_k\right)^2 \quad (\text{I.28})$$

Une condition nécessaire est donc que

$$n \left(\frac{2 \max_k p_k}{c-2 \max_k p_k}\right)^2 \left(\max_k X_k\right)^2 \geq 1. \quad (\text{I.29})$$

Il vient :

$$c \leq \bar{c} = 2 \max_k p_k \left(1 + \sqrt{n} \max_k X_k\right) \quad (\text{I.30})$$

Il est même possible de trouver une meilleure borne inférieure en considérant que chaque élément de la somme de l'Éq. (I.24) doit être inférieur ou égal à un (tous les éléments sont positifs) :

$$p_k \left(\frac{c}{c-2p_k}\right)^2 X_k^2 \leq 1, \quad k \in \{1, \dots, n\} \quad (\text{I.31})$$

Par conséquent, nous obtenons une nouvelle borne inférieure pour c :

$$c \geq \underline{c} = \max_k \frac{2p_k}{1 - X_k \sqrt{p_k}} \quad (\text{I.32})$$

Par ailleurs, l'expression $X_k \sqrt{p_k}$ est inférieure à 1 du fait que $X^T P X < 1$.

Nous avons donc restreint le problème de recherche de c à l'intervalle $[\underline{c}, \bar{c}]$ dans lequel $f(c)$ est strictement décroissante. Une dichotomie fournit la valeur de c . Pour cela, les méthodes de regula falsi et de NEWTON sont des alternatives pensables. Avec la dichotomie et à l'aide de l'Éq. (I.22), nous pouvons enfin calculer le point \hat{x} ou bien la distance $d(\hat{x}, X)$ avec l'Éq. (I.27).

Vu que le calcul de la distance $d(\hat{x}, X)$ n'est pas nécessaire (il suffit de savoir si $d(\hat{x}, X) > 1$ ou $d(\hat{x}, X) < 1$), la dichotomie peut être interrompue dès que $g(\underline{c}), g(\bar{c}) > 1$ ou $g(\underline{c}), g(\bar{c}) < 1$ pour les deux limites \underline{c} et \bar{c} de l'intervalle courant. Dans le cas $g(\underline{c}), g(\bar{c}) > 1$, la distance $d(\hat{x}, X)$ est certainement supérieure à 1. Dans le cas contraire, elle est inférieure à 1. Cette décision est justifiée grâce à la monotonie de la fonction $g(c)$ sur $[2 \max_k p_k, +\infty[$.

La FIG. I.3 illustre les fonctions $f(c)$ et $g(c)$ pour l'ellipse ($n = 2$) montrée dans la FIG. I.1. La monotonie des deux fonctions sur $[2 \max_k p_k, +\infty[$ est bien visible. Les quatre points où $f(c) = 1$ est vrai correspondent aux quatre quadrants de l'ellipse. La distance entre les points \hat{x} et X est $d(\hat{x}, X) = g(c^*) > 1$.

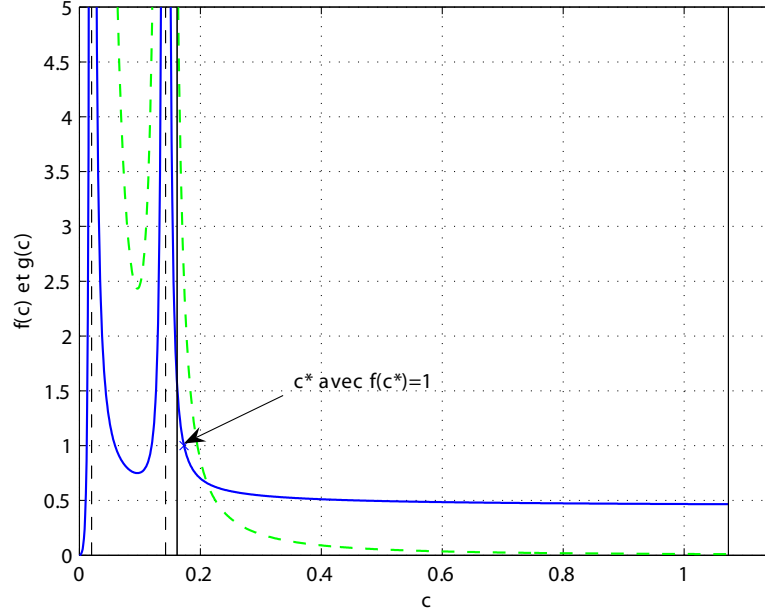


FIGURE I.3 – Les fonctions $f(c)$ (bleu continu) et $g(c)$ (vert tireté) pour l'ellipse montrée dans les figures précédentes. Les lignes verticales tiretées indiquent les positions des pôles $c = 2p_k$. L'intervalle initial pour la dichotomie $[c, \bar{c}]$ est illustré par les lignes verticales continues.

Annexe J

Réduction de correcteurs

L'objectif de la réduction d'un correcteur est de minimiser le nombre d'états de ce correcteur, tout en gardant le mieux possible son comportement entrée-sortie. En particulier, on souhaite préserver la stabilité et les performances du système en boucle fermée.

Selon SKOGESTAD et POSTLETHWAITE [163], les méthodes de réduction de systèmes linéaires les plus couramment utilisées sont les suivantes :

- la *troncature* dans la base modale. Ici, les modes les plus rapides sont supprimés dans la base modale ;
- la *résidualisation*. Ici, les modes les plus rapides sont résidualisés, c'est-à-dire mis à zéro, et remplacés par leurs valeurs statiques ;
- la troncature et la résidualisation dans la *réalisation balancée*. Ici, les modes les moins gouvernables et observables sont supprimés ou résidualisés ;
- l'*approximation optimale de HANKEL*. Cette méthode minimise la norme de HANKEL¹ de l'erreur d'approximation.

Du fait de leur utilisation fréquente, les méthodes précédemment mentionnées sont disponibles dans des boîtes à outils comme la *Robust Control Toolbox* de *Matlab*.

Bien que toutes ces méthodes marchent assez bien en pratique, nous aimerions décrire une autre méthode plus en détail, celle qui nous a permis d'obtenir les meilleurs résultats. Cette méthode appartient aux méthodes de *réduction de modèle avec pondération fréquentielle* (FWMR, *angl.* frequency-weighted model reduction). Elle est décrite en détail dans la Réf. [182]. En outre, elle est disponible dans la boîte à outils SLICOT qui est interfacée à *Matlab*. La pondération fréquentielle fait qu'elle est particulièrement bien adaptée à la réduction de correcteurs.

L'approche fondamentale est de minimiser la norme \mathcal{H}_∞ de l'écart entre le correcteur initial et le correcteur réduit, $K(s) - K_r(s)$, en prenant en compte des pondérations fréquentielles présentes sous forme de multiplicateurs de gauche, $W_o(s)$, et de droite, $W_i(s)$:

$$\|W_o(s)(K(s) - K_r(s))W_i(s)\|_\infty \tag{J.1}$$

1. La norme de HANKEL d'une fonction de transfert stable $G(s)$ est définie comme suit : $\|G(s)\|_H = \sqrt{\rho(PQ)}$ où P et Q sont les gramiens de gouvernabilité et d'observabilité de $G(s)$, respectivement

VARGA [182] propose plusieurs pondérations possibles :

- $W_i(s) = I$ et $W_o(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}G(s)$
- $W_i(s) = G(s)(I + K(s)G(s))^{-1}$ et $W_o(s) = I$
- $W_o(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}G(s)$ et $W_i(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}$

Les deux premières possibilités assurent la stabilité en boucle fermée, tandis que la troisième possibilité essaie de préserver la performance en boucle fermée.

Il existe plusieurs algorithmes de réduction prenant en compte des pondérations fréquentielles, par exemple la *troncature balancée avec pondération fréquentielle* (FWBT, *angl.* frequency-weighted balanced truncation) ou l'*approximation à perturbation singulière avec pondération fréquentielle* (FWSPA, *angl.* frequency-weighted singular perturbation approximation).

L'atout de la réduction d'un correcteur avec pondération fréquentielle est que la dynamique du système $G(s)$ est présente dans les pondérations, au moins si une des trois possibilités ci-dessus est choisie. Ainsi, la stabilité en boucle fermée est préservée et on peut se permettre d'être moins prudent et de réduire le correcteur davantage.

Comme nous l'avons mentionné à plusieurs reprises dans ce mémoire, la synthèse \mathcal{H}_2 que nous utilisons pour la synthèse de nos correcteurs fournit une représentation particulière du correcteur, la forme estimation commande. Il serait dommage de ne pas profiter de ce fait pendant la phase de réduction.

En effet, il est possible d'effectuer une décomposition en facteurs premiers (*angl.* coprime factorization) d'un correcteur sous forme estimation-commande $K(s)$ de la façon suivante [182] :

$$\begin{aligned} K(s) &= M(s)^{-1}N(s) \quad (\text{décomposition en facteurs premiers de gauche}) & (J.2) \\ &\text{ou} \\ K(s) &= N(s)M(s)^{-1} \quad (\text{décomposition en facteurs premiers de droite}) \end{aligned}$$

Les deux facteurs $M(s)$ et $N(s)$ sont toujours stables, c'est-à-dire que $M(s)$ contient tous les pôles instables et $N(s)$ tous les zéros instables du correcteur $K(s)$. La stabilité des deux facteurs simplifie la réduction de façon considérable.

Maintenant, au lieu d'approximer le correcteur $K(s)$, les facteurs $M(s)$ et $N(s)$, issus d'une décomposition en facteurs premiers de gauche, peuvent être approximatés grâce à une réduction de modèle avec pondération fréquentielle. Afin de garantir la stabilité en boucle fermée, nous choisissons la deuxième des pondérations précédemment mentionnées, appliqué à un système et un correcteur augmentés $\tilde{G}(s) = \begin{bmatrix} I \\ G(s)^T \end{bmatrix}$ et $\tilde{K}(s) = [M(s) - I \quad N(s)]$. Il vient :

$$\begin{aligned} W_i(s) &= \tilde{G}(s)(I + \tilde{K}(s)\tilde{G}(s))^{-1} \\ W_o(s) &= I \end{aligned} \quad (J.3)$$

Le critère pour la réduction du correcteur s'écrit maintenant comme suit :

$$\begin{aligned}
& \left\| W_o(s)(\tilde{K}(s) - \tilde{K}_r(s))W_i(s) \right\|_{\infty} \tag{J.4} \\
&= \left\| I([M(s) - I \quad N(s)] - [M_r(s) - I \quad N_r(s)]) \tilde{G}(s)(I + \tilde{K}(s)\tilde{G}(s))^{-1} \right\|_{\infty} \\
&= \left\| [M(s) - M_r(s) \quad N(s) - N_r(s)] \begin{bmatrix} (M(s) + N(s)G(s))^{-1} \\ G(s)(M(s) + N(s)G(s))^{-1} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \\
&= \left\| [M(s) - M_r(s) \quad N(s) - N_r(s)] \begin{bmatrix} Y(s) \\ X(s) \end{bmatrix} \right\|_{\infty}
\end{aligned}$$

$X(s)$ et $Y(s)$ sont les facteurs premiers de droite du système en boucle ouverte :

$$G(s) = X(s)Y(s)^{-1} \tag{J.5}$$

Dans le cas d'un correcteur sous forme estimation-commande

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A - B_2K_c - K_fC_2 & K_f \\ \hline -K_c & 0 \end{array} \right], \tag{J.6}$$

les facteurs premiers de gauche $M(s)$ et $N(s)$ peuvent être calculés avec simplicité car il existe une expression analytique :

$$[N(s) \quad M(s)] = \left[\begin{array}{cc|cc} A - K_fC_2 & K_f & -B_2 & \\ \hline -K_c & O & & I \end{array} \right] \tag{J.7}$$

Il existe également une expression simple pour la décomposition en facteurs premiers de droite du système en boucle ouverte.

Après le calcul des facteurs premiers réduits $M_r(s)$ et $N_r(s)$, le correcteur réduit peut être construit de la manière suivante :

$$K_r(s) = M_r(s)^{-1}N_r(s) \tag{J.8}$$

Commande boucle fermée multivariable pour le vol en formation de vaisseaux spatiaux

Cette thèse traite du contrôle du vol en formation de vaisseaux spatiaux. Le vol en formation permet de réaliser de nouveaux scénarios de missions. De par la diversité des applications envisageables, les travaux sont divisés en deux parties.

Dans la première partie, restreinte au contrôle des centres de masse des vaisseaux, une approche est proposée pour modéliser les orbites relatives entre deux satellites en orbite terrestre, tenant compte de l'aplatissement de la Terre. Fondée sur le scénario d'une mission en orbite de transfert géostationnaire, la problématique d'une dynamique à paramètre variant est illustrée. Deux manières différentes d'asservir la position relative sont présentées : la première a recours à la représentation linéaire fractionnaire pour obtenir un correcteur auto-séquenté ; la seconde utilise la synthèse H2 et un modèle de référence pour synthétiser un correcteur interpolé.

Dans la deuxième partie, traitant des 6 degrés de liberté de chaque vaisseau, des modèles génériques pour la cinématique, la dynamique et la métrologie d'une formation de vaisseaux spatiaux en orbite non planétaire sont proposés. La mission exemplaire Pegase est composée de trois vaisseaux. Dans son mode d'observation, qui requiert un maintien précis des positions et des attitudes des vaisseaux, il est possible d'utiliser des techniques de commande multivariable. La commande H2 est utilisée pour satisfaire les spécifications de la mission Pegase. Ensuite, deux problématiques particulières sont traitées. Premièrement, la commutation entre correcteurs conçus pour différents modes est considérée. Deuxièmement, un correcteur H2 décentralisé est synthétisé grâce à un algorithme itératif.

Mots clés :

vol en formation - vaisseaux spatiaux - modélisation cinématique et dynamique - modélisation métrologique - synthèse de correcteurs multivariables - correcteurs à gain séquenté - commutation entre correcteurs - correcteurs décentralisés

Closed-loop multivariable control of formation flying spacecraft

This thesis deals with the control of formation flying spacecraft. Formation flying enables novel space mission scenarios. Because of the diversity of potential applications, the developments are subdivided into two parts.

In the first part, which is restricted to the control of center of mass relative motion, a framework for modeling relative orbits between two formation flying satellites in Earth orbits is proposed, accounting for Earth oblateness. Based upon the scenario of a mission in geostationary transfer orbit, the challenges associated with parameter-varying dynamics are illustrated. Two different techniques for relative position control are presented: the first one makes use of the linear-fractional representation in order to obtain a self-scheduled controller; the second one resorts to H2 control and a reference model for synthesizing a gain-scheduled controller.

In the second part, which deals with the 6 degrees of freedom of each spacecraft, generic models describing kinematics, dynamics, and metrology of a spacecraft formation in a non-planetary orbit are developed. The exemplary mission Pegase consists of three vessels. For its observation mode, which requires a precise position and attitude control, use of multivariable control techniques is possible. In order to satisfy the specifications of the mission Pegase, H2 control is used. Then, two particular challenges are treated. Firstly, switching between controllers designed for different operating modes is considered. Secondly, a decentralized H2 controller is designed using an iterative algorithm.

Key words:

formation flying - spacecraft - kinematic and dynamic modeling - metrological modeling - design of multivariable controllers - gain-scheduled controllers - switching between controllers - decentralized controllers