



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par **l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace**
Spécialité : Systèmes automatiques

Présentée et soutenue par **Alberto Mota SIMÕES**
le 24 juin 2009

Synthèse de compensateurs structurés par l'optimisation non lisse

JURY

M. Paulo César Pellanda, président du jury
M. Pierre Apkarian, directeur de thèse
M. Jean-François Lafay, rapporteur
M. Mohammed M'Saad, rapporteur
M. Dominikus Noll
M. Michel Zazadzinski

École doctorale : **Systèmes**

Unité de recherche : **Équipe d'accueil ISAE-ONERA CSDV**

Directeur de thèse : **M. Pierre Apkarian**

à *Cláudia*,
ma chère « complice »

Remerciements

Je tiens tout d’abord à exprimer ma profonde gratitude à Pierre Apkarian pour son inestimable direction tout au long de cette thèse. J’ai pu constater personnellement combien sa notoriété parmi la communauté scientifique en Automatique est justifiée. Ce fut un grand plaisir et un grand honneur pour moi de pouvoir travailler avec lui.

Je remercie aussi Cláudia, mon épouse, qui a accepté de m’accompagner en France pour cette entreprise. À cette fin, elle n’a pas hésité non seulement à faire une parenthèse dans sa brillante carrière professionnelle, mais également à s’éloigner de sa famille tant aimée. Il est incontestable que la réussite de cette thèse est due en grande partie à son précieux appui.

Mes remerciements vont également à mon père et à ma mère. Cette victoire est le fruit de votre investissement désintéressé. Considérez-la comme la vôtre aussi. Je remercie également toute notre famille qui nous a tant encouragé pendant notre séjour à Toulouse.

Je suis particulièrement reconnaissant envers le Professeur Paulo César Pellanda, de l’IME. Ce fut grâce à son investissement personnel que j’ai pu avoir cette magnifique opportunité. Je le remercie pour sa confiance.

Je tiens à remercier le Professeur Mohammed M’Saad, du GREYC, et le Professeur Jean-François Lafay, de L’IRCCyN, d’avoir accepté d’être rapporteurs de cette thèse. Je remercie également le Professeur Michel Zasadzinski, de l’IUT de Longwy, d’avoir participé au jury de thèse. Leurs commentaires ont été particulièrement édifiants. Mes remerciements s’adressent aussi au Professeur Dominikus Noll, de l’UPS, grand spécialiste dans le domaine de l’Optimisation, pour son important concours tout au long de la thèse.

Je remercie l’Armée de Terre Brésilienne, qui a pourvu à tous nos besoins, nous assurant ainsi un séjour irréprochable en France. Je remercie particulièrement le Colonel Lourival Carvalho Silva, attaché Militaire à Paris, son prédécesseur, le Colonel Celso Bächtold, et toute son équipe.

Je tiens à remercier la Délégation Générale pour l’Armement (DGA) pour m’avoir accueilli dans l’Office National d’Études et de Recherches Aérospatiales (ONERA) – Centre de Toulouse, dans le cadre de la formation doctorale de l’Institut Supérieur de l’Aéronautique et de l’Espace (ISAE). Je remercie en particulier le directeur de l’ONERA-CERT, M. Jean-Pierre Jung, et le directeur de l’ISAE, M. Olivier Fourure, de m’avoir reçu dans leurs établissements.

Je ne saurais oublier toute l'équipe de l'ISAE, en particulier Mme Annie Carles-Bailhé et Mme Maryse Herbillon-Talairach, de la formation doctorale, et Mme Eliane Feutren. Je remercie très chaleureusement le Professeur Daniel Alazard. Je dois remercier aussi toute l'équipe de l'École Doctorale Systèmes (EDSYS), en particulier la Professeur Caroline Bérard, directrice de l'École, et Mme Sophie Achte.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous les membres du DCSD-Toulouse, pour m'avoir si bien accueilli. En particulier, je tiens à remercier le directeur du DCSD-Toulouse, Patrick Fabianni, et tous mes voisins de bureau du «Couloir de la Science». Je ne pourrais non plus oublier tous les stagiaires et doctorants que j'ai pu rencontrer au long de cette thèse. Mes remerciements très chaleureux vont notamment à Vincent Bompard, aux doctorants de ma «génération» Patrice Antoinette, Julien Guitton, Stéphane Mercier et José Torralba, à mes partenaires de la pause café Yoko Watanabe et Caroline Carvalho, et finalement à Mario Hernandez, celui avec qui j'ai eu le grand plaisir de partager le bureau. Merci beaucoup.

Sommaire

Résumé	xii
Abstract	xii
1 Introduction générale	1
1.1 Contexte et motivations	2
1.2 Objectifs de la thèse	7
1.3 Travaux réalisés – Organisation du mémoire	8
I Notions fondamentales et cadre de travail	13
2 Éléments fondamentaux de la synthèse de compensateurs	15
2.1 Analyse des systèmes	16
2.1.1 Analyse de la stabilité	16
2.1.2 Calcul de la norme H_∞	18
2.1.3 Analyse de la réponse temporelle transitoire	20
2.2 Synthèse de compensateurs	22
2.2.1 Forme standard pour la commande	22
2.2.2 Synthèse de compensateurs stabilisants	26
2.2.3 Synthèse H_∞	29
2.2.4 Synthèse dans le domaine temporel à partir de la réponse à une entrée fixée	38
2.2.5 Synthèse multiobjectif	42
2.3 Conclusion	46

3	Optimisation non lisse	47
3.1	Analyse non lisse	48
3.1.1	Introduction	48
3.1.2	Sous-différentiel d'une fonction convexe	49
3.1.3	Sous-différentiel de CLARKE	51
3.1.4	Règles de calcul du sous-différentiel de CLARKE	52
3.2	Optimisation avec contraintes	54
3.2.1	Conditions d'optimalité	56
3.2.2	Technique d'optimisation non lisse	61
3.3	Sous-différentiel des critères de synthèse	66
3.3.1	Sous-différentiel de la plus grande valeur singulière d'un transfert	66
3.3.2	Sous-différentiel de la violation de l'enveloppe temporelle	71
3.3.3	Sous-différentiel de l'abscisse spectrale	73
3.4	Conclusion	75
II	Algorithmes développés et applications	77
4	Synthèse non lisse fréquentielle multibande	79
4.1	Introduction	81
4.2	Multi-band frequency domain design	84
4.3	Nonsmooth minimization technique	86
4.3.1	Computing jet information	86
4.3.2	Optimality function	87
4.3.3	Algorithm	91
4.4	Numerical experiments	91
4.4.1	Power system oscillation damping	91
4.4.2	Line-of-Sight regulation of a flexible structure	96
4.5	Conclusion	103
5	Synthèse non lisse dans le domaine temporel	105

5.1	Introduction	107
5.2	Structured controllers synthesis in time-domain	109
5.3	Nonsmooth minimization technique	111
5.4	Applications	114
5.4.1	Step following with input amplitude and rate constraints	114
5.4.2	Power system oscillation damping	116
5.4.3	Model-free design for a process with large dead time	119
5.5	Conclusion	121
6	Synthèse non lisse temporelle multiscénario	123
6.1	Introduction	125
6.2	Control and Disturbance Models	128
6.3	Computation of Modal Equivalents	130
6.4	Nonsmooth Time-Domain Design Method	134
6.5	Conventional POD Controllers	136
6.6	Results	137
6.6.1	POD Synthesis by NSTD Method for 4 Scenarios	138
6.6.2	Synthesis by NSTD Method with Additional Scenarios	141
6.6.3	Linear Analysis for Multiple Scenarios	141
6.7	Concluding Remarks	145
7	Synthèse non lisse multiobjectif	149
7.1	Introduction	153
7.2	Multi-objective synthesis set-up	155
7.3	Key ingredients in Nonsmooth optimization	158
7.3.1	Search directions from the tangent program	159
7.3.2	Implementation details	163
7.4	Applications	164
7.4.1	Tracking and decoupling control for a satellite launcher	164
7.4.2	Reliable flight controller	169

7.5	Conclusion	172
7.6	Synthèse de la commande de vol latéral pour un avion flexible	175
7.6.1	Description du problème	175
7.6.2	Synthèse non lisse	176
7.6.3	Conclusion	181
8	Conclusion Générale	183

Résumé

BIEN que la problématique de la synthèse de compensateurs soumis à des contraintes structurelles fasse l'objet d'une demande récurrente de la part des industriels, les techniques existantes ne sont pas satisfaisantes en raison des difficultés inhérentes à cette classe de problèmes. Les formulations de type Riccati ou LMI sont de plus inopérantes dans ce contexte.

En général, la présence de contraintes structurelles sur la loi de commande ne peut être traduit en une formulation convexe pour le problème de synthèse et la recherche de solutions globales est certainement irréaliste. Dans cette thèse, on s'intéresse donc au développement d'algorithmes spécifiques de l'optimisation non lisse afin de fournir des techniques efficaces permettant de calculer des solutions locales à la problématique de synthèse. Des solutions locales sont tout à fait satisfaisantes en pratique comme corroboré par les diverses applications présentées.

Les approches non lisses développées permettent d'optimiser aisément de multiples contraintes définies dans les domaines temporel ou fréquentiel, ainsi que des contraintes structurelles sur la loi de commande. La possibilité d'intégrer des spécifications directement telles qu'elles apparaissent dans le cahier des charges est l'un des atouts principaux des techniques proposées.

Mot-clés : compensateur structuré, optimisation non lisse, commande robuste, synthèse dans le domaine temporel, synthèse dans le domaine fréquentiel, synthèse multiobjectif.

Abstract

ALTHOUGH the problem of structured controllers design subject to structural constraints consists in a recurring demand from the industry, currently available techniques are unsatisfactory due to the difficulties related to that class of problems. Riccati or LMI formulations are completely ineffective in such a context.

In general, structural constraints on the control law cannot be translated into a convex formulation for the synthesis problem and looking for global solutions is certainly unrealistic. This thesis focuses on the development of nonsmooth optimization algorithms so as to provide efficient techniques allowing to compute local solutions to the synthesis problem. Local solutions are perfectly satisfactory in practice as corroborated by the various applications presented.

The developed nonsmooth approaches allow to easily optimize multiple constraints defined simultaneously in both time and frequency domains, as well as structural constraints on the control law. The possibility of integrating specifications directly as they appear in the design specifications is the main asset of the proposed techniques.

Keywords : structured control, nonsmooth optimization, robust control, time-domain synthesis, frequency-domain synthesis, multi-objective synthesis

Notations

\mathbb{R}, \mathbb{C}	Corps des nombres réels, des nombres complexes
$\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$	Partie réelle, partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$
j	Index ou $j = \sqrt{-1}$
$ x , z $	Valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$, module de $z \in \mathbb{C}$
x_+	Partie positive de $x \in \mathbb{C}$ $x_+ \triangleq \max\{x, 0\}$
$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$	Espace des vecteurs réels, complexes à n composantes
$\mathbb{R}^{p \times m}$	Espace vectoriel des matrices réelles de taille $p \times m$, soit à p lignes et m colonnes
\mathbb{H}^m	Espace vectoriel des matrices Hermitiennes de taille m
$\mathbb{S}^n(\mathbb{R})$	Sous-espace vectoriel des matrices symétriques réelles de taille $n \times n$
I_n, I	Matrice identité (de taille n , de taille fonction du contexte)
$X \succ 0, X \prec 0$	$X \in \mathbb{S}^n(\mathbb{R})$ est définie positive, définie négative
$X \succeq 0, X \preceq 0$	$X \in \mathbb{S}^n(\mathbb{R})$ est semi-définie positive, semi-définie négative
$\operatorname{Tr} X$	Trace de la matrice $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$
$\operatorname{rang} X$	Dimension de l'espace image de $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\operatorname{vec} X$	Vectorisé (par colonnes) de $X \in \mathbb{R}^{p \times m}$
X^T	Matrice transposée de $X \in \mathbb{R}^{p \times m}$
X^H	Matrice adjointe de $X \in \mathbb{C}^{p \times m}$
X^{-1}	Matrice inverse de $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$
$\operatorname{diag}(m_1, \dots, m_n)$	matrice diagonale $n \times n$ ayant $m_{ii} = m_i$ comme i -ème élément de sa diagonale
$\operatorname{diag}(M_1, \dots, M_n)$	matrice bloc-diagonale ayant M_i comme i -ème bloc
$\langle x, y \rangle$	Produit scalaire euclidien (hermitien) sur \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n) $\langle x, y \rangle \triangleq x^H y$
$\langle X, Y \rangle$ ou $X \bullet Y$	Produit scalaire euclidien (hermitien) sur $\mathbb{R}^{p \times m}$ ($\mathbb{C}^{p \times m}$) $\langle X, Y \rangle = X \bullet Y \triangleq \operatorname{Tr}(X^H Y)$
$\ x\ _\infty$	Norme infinie du vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ ($x \in \mathbb{C}^n$) $\ x\ _\infty \triangleq \max_{1 \leq i \leq n} x_i $
$\ x\ _2$ ou $\ x\ $	Norme euclidienne (hermitienne) du vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ ($x \in \mathbb{C}^n$)

$B(x, r)$	$\ x\ _2 \triangleq \sqrt{x^H x}$ Boule de centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$ pour la norme euclidienne $B(X, r) \triangleq \{y \in \mathbb{R}^n : \ y - x\ < r\}$
\triangleq	Egal à, par définition
■	Fin de démonstration
$\lambda_i(X), 1 \leq i \leq n$	Valeurs propres de la matrice $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$
$\lambda_1(X)$	Plus grande valeur propre de la matrice $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$
$\rho(X)$	Rayon spectral de la matrice $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $\rho(X) \triangleq \max_i \lambda_i(M) $
$\sigma_i(X), 1 \leq i \leq \min(m, p)$	Valeurs singulières (en ordre décroissant) de la matrice $X \in \mathbb{C}^{p \times m}$
$\bar{\sigma}(X)$	Plus grande valeur singulière de la matrice $X \in \mathbb{C}^{p \times m}$
$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	Fonction f définie sur \mathbb{R}^n , à valeurs réelles
T^*	adjoint de l'opérateur T
$[a, b]$	Segment d'extrémités $a, b \in \mathbb{R}^n$ $[a, b] \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : \text{il existe } t, 0 \leq t \leq 1 \text{ et } x = ta + (1 - t)b\}$
co S	Enveloppe convexe de $S \subset \mathbb{R}^n$
$\min S, \max S$	Minimum (plus petit élément), maximum (plus grand élément) d'un ensemble non vide $S \subset \mathbb{R}$ (s'ils existent)
$\min_{x \in E} f(x), \max_{x \in E} f(x)$	Valeur minimum, maximum de f sur E (si elle en admet), ou, suivant le contexte, problème de minimisation, de maximisation (locale ou globale) de f sur E
$\arg \min_{x \in E} f(x),$ $\arg \max_{x \in E} f(x)$	Un minimum, un maximum $x \in E$ de f (s'il en existe)
$f'(x, d)$	Dérivée directionnelle de f en $x \in \mathbb{R}^n$, dans la direction $d \in \mathbb{R}^n$
$f^\circ(x, d)$	Dérivée directionnelle généralisée de f en $x \in \mathbb{R}^n$, dans la direction $d \in \mathbb{R}^n$
$\partial_c f(x)$	Sous-différentiel de f en $x \in \mathbb{R}^n$, en analyse convexe
$\partial f(x)$	Sous-différentiel de Clarke de f en $x \in \mathbb{R}^n$
$u(t)$	Signal causal réel à temps continu $u : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^m$
$U(s)$ ou $u(s)$	Transformée de Laplace du signal $u(t)$
$\ u\ _\infty$	Norme L_∞ (valeur de crête) du signal $u(t)$
$\ u\ _2$	Norme L_2 (énergie) du signal $u \in L_2(\mathbb{R}_+)$
$\sup(u(t))$	Borne supérieure du signal $u(t)$
ω	Fréquence (ou pulsation) en rad/s

$T_{zw}(s)$	Fonction de transfert entre les signaux d'entrée $w(s)$ et de sortie $z(s)$
$\ T_{zw}\ _\infty$	Norme H_∞ du transfert T_{zw}
$\ T_{zw}\ _2$	Norme H_2 du transfert T_{zw}
\mathcal{RH}_∞	Ensemble des matrices rationnelles qui ont des coefficients réels et qui sont analytiques en $\operatorname{Re} s \geq 0$
$\mathcal{F}_u(M, K)$	Transformation Linéaire Fractionnaire (LFT) supérieure pour des matrices réelles ou complexes, K et $M = [M_{11}, M_{12}; M_{21}, M_{22}]$, de dimensions compatibles (en supposant que l'inverse existe) : $M_{22} + M_{21}K(I - M_{11}K)^{-1}M_{12}$
$\mathcal{F}_l(M, K)$	Idem, pour une LFT inférieure : $M_{11} + M_{12}K(I - M_{22}K)^{-1}M_{21}$
$M \star K$	produit de Redheffer

Chapitre 1

Introduction générale

CETTE thèse s'inscrit dans le domaine de la commande de systèmes, avec une orientation particulière vers la synthèse multiobjectif de compensateurs structurés à temps continu. La problématique de la synthèse de compensateurs structurés fait l'objet d'une demande récurrente de la part des industriels puisque, actuellement, aucune technique satisfaisante ne peut être proposée en raison des difficultés inhérentes à cette classe de problèmes.

Ce chapitre introductif donne une brève description des problèmes considérés dans ce mémoire, du travail réalisé, des résultats et contributions principaux et de l'enchaînement des différentes parties de ce manuscrit.

1.1 Contexte et motivations

Les problèmes de synthèse de compensateurs figurant dans des applications industrielles réelles sont intrinsèquement multiobjectif, dans la mesure où une famille de spécifications de différentes natures sont imposées à la fois sur le système en boucle fermée et sur la loi de commande proprement dite. En pratique, le cahier de charges d'une application doit être traduit en termes d'une variété de critères de synthèse et une technique de synthèse satisfaisante doit être capable d'intégrer et de manipuler directement les diverses spécifications. Des spécifications de performance, par exemple, sont souvent liées à des objectifs tels que le suivi de consigne ou le découplage. Ces derniers sont exprimés naturellement sous la forme de contraintes dans le domaine temporel : un dépassement limité, un temps de réponse ou de montée petits, une erreur petite en régime stationnaire ou encore des limitations d'amplitude. En revanche, lorsqu'on cherche de la robustesse vis-à-vis d'incertitudes non structurées ou de perturbations exogènes d'énergie finie, il faut inévitablement exploiter des informations fréquentielles afin de ne pas dégrader la performance. Enfin, la loi de commande est souvent tenue de présenter des propriétés structurelles particulières, comme la décentralisation, l'ordre réduit, une loi du type proportionnelle intégrale dérivée (PID), etc. Un compensateur satisfaisant des contraintes structurelles est dit structuré. Le problème de la synthèse multiobjectif de compensateurs structurés est une demande récurrente de la part des industriels, car aucune technique satisfaisante n'est actuellement disponible en raison des difficultés inhérentes associées à cette classe de problèmes.

Bien que les systèmes physiques réels soient en général mieux décrits par des équations différentielles non linéaires, les méthodes de synthèse de compensateurs linéaires et invariants dans le temps (ou LTI, de l'anglais *Linear Time Invariant*) restent d'un grand intérêt pratique. Malheureusement, la théorie de la commande non linéaire manque encore d'outils de synthèse suffisamment généraux. Par conséquent, elle reste souvent limitée à l'univers académique. Les systèmes linéaires, en revanche, bénéficient d'un corps théorique beaucoup plus mûr. C'est pourquoi plusieurs techniques de commande de systèmes non linéaires sont, en vérité, basées sur des techniques linéaires. Des compensateurs LTI sont habituellement utilisés pour contrôler des systèmes non linéaires opérant autour d'un point d'équilibre stationnaire. Dans ce cas, le compensateur est synthétisé avec pour base un modèle LTI approximatif obtenu par la linéarisation des équations du modèle non linéaire autour du point d'équilibre. Le vrai système en boucle avec le compensateur est censé opérer de manière satisfaisante dès lors que les trajectoires du système restent suffisamment proches du point d'équilibre, de sorte que l'approximation linéaire soit valide.

Les techniques classiques de séquençement de compensateurs [103, 139] pour des systèmes non linéaires, fréquemment utilisées dans des applications aérospatiales, représentent une généralisation de l'idée indiquée ci-dessus. Dans cette approche, une famille de points d'équilibre du système non linéaire est initialement sélectionnée, et un modèle linéarisé est construit pour chacun des ces points. Ensuite, un compensateur LTI est synthétisé pour chacun des modèles. La loi de commande finale est obtenue comme l'interpolation des différents compensateurs LTI selon l'évolution (a priori suffisamment

lente) du point d'opération du système non linéaire. Un autre exemple de commande non linéaire basée sur des techniques LTI est la linéarisation par bouclage [97]. Le modèle non linéaire original est transformé algébriquement en un modèle linéaire à partir d'une transformation d'états exacte et du bouclage, de sorte qu'une technique LTI puisse être ensuite utilisée.

Dans la mesure où les spécifications imposées sur la loi de commande deviennent de plus en plus nombreuses et complexes, les méthodes de synthèse de compensateurs actuelles ne sont plus satisfaisantes. Ainsi, des techniques plus sophistiquées seront nécessaires. Il existe une demande importante pour des techniques de synthèse capables de gérer simultanément un nombre croissant de spécifications de performance, de robustesse et, en particulier, structurelles sur le compensateur. La possibilité d'imposer des contraintes structurelles sur la loi de commande est souvent inexistante dans les techniques modernes, même si des telles contraintes apparaissent naturellement dans la plupart des applications.

Des contraintes structurelles sur la loi de commande apparaissent pour diverses raisons. Un premier aspect touche à la complexité du compensateur. L'un des principaux facteurs de complexité d'une loi LTI est son l'ordre (la dimension de l'état). Bien que l'augmentation de la puissance calculatoire des dispositifs embarqués puisse, en principe, permettre l'implémentation de lois de commande plus complexes, des compensateurs de faible complexité restent souhaitables. Un compensateur moins complexe est à la fois plus fiable sur le plan numérique et de plus facile compréhension, permettant une plus grande maîtrise de sa réalisation embarquée. Par ailleurs, un compensateur plus simple autorise l'utilisation d'une fréquence d'horloge moins élevée. Ceci implique soit la réduction des coûts, soit la libération des ressources de calcul pour les autres tâches prises en charge par le dispositif embarqué. C'est pourquoi il n'est en général pas intéressant d'obtenir une performance plus élevée au détriment d'une plus grande complexité du compensateur. Cela explique l'importante dichotomie existante entre la théorie moderne de la commande et la pratique des industriels : les techniques de synthèse modernes produisent des compensateurs performants mais d'une complexité élevée, tandis que les industriels préfèrent utiliser des compensateurs moins performants mais plus simples. Le développement de techniques permettant l'élaboration des compensateurs simples et cependant performants est donc au coeur des problématiques pratiques.

Certaines applications exigent une structure particulière pour la loi de commande. Considérons, par exemple, des systèmes complexes à grande échelle qui s'étendent sur de grandes distances tels que des interconnexions de systèmes de puissance ou des formations de satellites. Dans ce cas, l'utilisation d'une loi centrale pour commander tous les composants du systèmes n'est généralement pas réaliste. Au contraire, la loi de commande globale est composée d'une série de compensateurs individuels qui sont connectés au grand système et entre eux selon une certaine structure [148]. Idéalement, les divers éléments de commande doivent être synthétisés simultanément, tout en prenant en compte, lors de la synthèse, la façon (structure) dont les divers éléments sont connectés entre eux et au système. Encore une fois, une technique de synthèse permettant de prendre en compte des telles contraintes structurelles est essentiel. Mais il existe encore d'autres structures particulières qui sont parfois imposées par l'application. Les structures du type

estimation/commande, par exemple, présentent des caractéristiques particulièrement intéressantes pour le séquençement des compensateurs [126]. Une technique de synthèse multiobjectif permettant de synthétiser directement des compensateurs du type estimation/commande est, par conséquent, d'une grande utilité pratique.

Les méthodes traditionnelles de la commande ne permettent pas d'intégrer d'une façon satisfaisante même la plus élémentaire des contraintes structurelles sur le compensateur : celle de l'ordre fixé ou réduit. Il faut savoir que dans les applications comprenant des modèles d'ordre élevé, un compensateur d'ordre plein, c'est-à-dire du même ordre que le système commandé, n'est pas une solution acceptable. C'est pourquoi la spécification d'ordre réduit/fixé constitue une contrainte structurelle fréquemment imposée sur le compensateur final. Considérons, par exemple, des méthodes de synthèse telles que les techniques H_2 /LQG ou H_∞ basées sur des équations algébriques de Riccati (ou ARE, de l'anglais *Algebraic Riccati Equations*) [48, 174] ou des inégalités matricielles linéaires (ou LMI, encore de l'anglais *Linear Matrix Inequalities*) [63, 92, 145]. Ces méthodes ne permettent pas d'imposer des contraintes structurelles sur la loi de commande, puisqu'elles ne produisent que des compensateurs d'ordre plein.

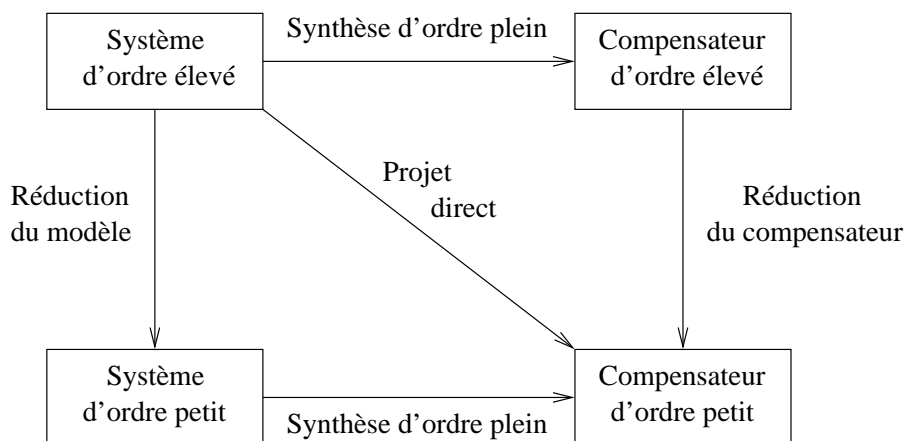


FIG. 1.1 – Stratégies actuelles pour le projet de compensateurs d'ordre réduit [4]

Dans la pratique actuelle, on utilise le plus souvent des techniques de réduction d'ordre pour étendre la portée des méthodes d'ordre plein à une classe plus grande de problèmes. Différentes stratégies ont été proposées dans cette direction. Dans l'approche dite de réduction en boucle ouverte, représentée par le chemin le plus à gauche sur la Figure 1.1, l'ordre du système est d'abord réduit (le plus possible) en utilisant une technique standard de réduction de modèles [120, 76]. Ensuite, le compensateur final est obtenu par une technique de synthèse d'ordre plein. Cette approche présente, toutefois, des inconvénients importants. En premier lieu, étant donné que la réduction d'ordre est exécutée tout au début de la procédure, des effets de propagation d'erreur peuvent devenir critiques. Mais surtout, cette approche ne prend pas en compte des paramètres primordiaux en boucle fermée tels que la performance ou la stabilité, lesquels doivent être vérifiés a posteriori. En conséquence, il n'existe aucune garantie que le compensateur réduit stabilisera le système original en boucle fermée.

Une autre approche pour la synthèse des compensateurs d'ordre réduit consiste à synthétiser initialement un compensateur d'ordre plein pour le système d'ordre élevé, pour ensuite réduire l'ordre du compensateur. En principe, la réduction a posteriori de l'ordre du compensateur pourrait être réalisée par le biais de techniques standard de réduction de modèles. Cependant, cela représenterait encore une fois une réduction en boucle ouverte et présenterait, ainsi, les mêmes inconvénients. Dans les techniques dites de réduction en boucle fermée, l'objectif est de réduire l'ordre du compensateur tout en préservant des propriétés de la boucle fermée comme la stabilité ou la performance. Ces techniques peuvent être divisées en deux groupes. Dans le premier groupe, l'idée centrale est de minimiser l'erreur entre le système en boucle fermée avec le compensateur d'ordre plein et le système en boucle fermée avec le compensateur d'ordre réduit par le biais de méthodes de réduction de modèles avec des pondérations fréquentielles [4, 159, 67]. Dans l'autre groupe, le but est de trouver un compensateur d'ordre réduit tel que la norme (H_2 ou H_∞) du système en boucle fermée ne soit pas plus grande que la norme du système en boucle fermée avec le compensateur d'ordre plein original [71, 66]. Pourtant, toutes ces méthodes ne fournissent que des conditions suffisantes. En outre, ces approches ne visent que le problème d'ordre réduit, et sont inexploitable si un autre type de contrainte structurelle est imposée au compensateur.

De nombreux problèmes de synthèse de compensateurs peuvent être formulés comme un programme d'optimisation non convexe comprenant des inégalités matricielles bilinéaires (ou BMI, de l'anglais *Bilinear Matrix Inequalities*) ou, alternativement, des LMI avec des contraintes de rang ou du type égalité matricielles. C'est pourquoi des techniques d'optimisation capables de résoudre ces classes de problèmes ont reçu beaucoup d'attention ces dernières années [75, 50, 74, 116, 157, 54, 53, 154, 124, 155]. Quelques exemples représentatifs de problèmes sont la synthèse μ avec des *scalings* dynamiques et les synthèses H_2 ou H_∞ d'ordre fixé. Un aspect intéressant des BMI est qu'elles apparaissent naturellement à partir des contraintes quadratiques intégrales par le biais du lemme de KALMAN-YAKUBOVICH-POPOV [114]. Dans le cas général, des contraintes structurelles sur le compensateur peuvent être intégrées dans le formalisme BMI pourvu que le système soit strictement propre et la structure désirée pour le compensateur puisse être paramétrée d'une façon affine dans les matrices de sa représentation en espace d'état. L'inconvénient majeur des approches du type LMI ou BMI est la présence des variables de Lyapunov dont le nombre augmente de façon quadratique avec l'ordre du système. De ce fait, ces méthodes sont limitées à des problèmes de petite taille.

Un désavantage des méthodes de synthèse purement fréquentielles telles que les techniques de *loop shaping* [47, 140, 113] ou encore des synthèses H_2 , H_∞ ou μ traditionnelles [174], est que des spécifications temporelles telles qu'un dépassement limité ou encore un temps de montée ou de réponse petits ne peuvent pas être traitées d'une façon directe et transparente. Dans la pratique, le concepteur expérimenté saura comment manipuler ces spécifications d'une façon heuristique en introduisant des canaux de performance convenables dans le domaine fréquentiel, avec des filtres de pondération appropriés. Quelques travaux ont cherché à incorporer des contraintes temporelles aux synthèses H_∞ [138, 52, 89], μ [153] ou H_2 [151]. Cependant, ces approches s'appuient sur le paramétrage de YOULA de tous les compensateurs stabilisants [170, 45]. Il est vrai que le paramé-

trage de YOULA offre deux avantages principaux. D'une part, il résout automatiquement une difficulté récurrente dans les approches basées sur des techniques d'optimisation : comment traiter efficacement la spécification de stabilité interne. D'autre part, puisque les transferts en boucle fermée constituent des fonctions affines dans le paramètre libre, plusieurs spécifications peuvent être traduites sous la forme de critères convexes dans les variables de synthèse [25, 131]. En effet, des formulations convexes sont attrayantes grâce à la propriété "local égal à global" des points critiques. L'inconvénient de ces techniques est qu'elles produisent des compensateurs d'ordre élevé dépourvus d'une structure physique particulière. Ainsi, ces dernières ne sont plus appropriées lorsque des contraintes structurelles générales doivent être satisfaites par le compensateur.

Nous avons déjà signalé que les problèmes réalistes de synthèse des lois de commande comprennent habituellement plusieurs objectifs concurrents auxquels le système en boucle fermée final est censé satisfaire. Dans la pratique, ces différentes spécifications sont traduites sous la forme de contraintes fonctionnelles, et la synthèse constitue un problème d'optimisation multiobjectif. Puisqu'il n'existe pas généralement de solution qui minimise tous les critères à la fois, l'ingénieur doit donc sélectionner la solution correspondant au meilleur compromis. Les diverses approches de l'optimisation multiobjectif existantes diffèrent essentiellement sur deux critères. Premièrement, si la technique d'optimisation utilise des dérivés ou non. Deuxièmement, la façon dont la préférence de l'ingénieur parmi les différents objectifs est prise en compte [5]. La Méthode des Inégalités [172] par exemple, est une approche multiobjectif de synthèse de compensateurs qui combine une stratégie de décision du type satisfaction de contraintes [56] avec une technique d'optimisation d'ordre zéro. Récemment, cette approche est redevenue populaire grâce à l'utilisation des techniques d'optimisation multiobjectif du type évolutionnaires [164, 165, 171]. Des algorithmes évolutionnaires sont des techniques d'optimisation d'ordre zéro assez répandues. Ces techniques n'exigent pas d'information différentielle et sont donc applicables à une grande classe de problèmes. De plus, les points initiaux ont moins d'impact sur le résultat final de l'optimisation. Ces algorithmes ont été déjà utilisés pour résoudre le problème H_2/H_∞ structuré [39, 86]. Cependant, comme indiqué en [55], ces techniques présentent quelques inconvénients importants. En effet, elles manquent d'une base théorique solide et s'appuient fortement sur des heuristiques. Mais également, l'effort calculatoire explose avec la dimension de l'espace de recherche de sorte que ces algorithmes semblent limités à des problèmes de petite taille.

Une approche classique au problème de l'optimisation multiobjectif consiste à utiliser une technique de *scalarization* de manière à assembler les différents critères dans une seule fonction objectif. Une fonction objectif assez utilisée est la somme linéairement pondérée, qui a l'avantage d'être lisse. Cependant, la seule technique de *scalarization* qui préserve toutes les solutions du type PARETO pour n'importe quelle structure de problème est celle du type norme de CHEBYSHEV [121]. Une difficulté liée à la norme infinie est que, contrairement à la somme linéairement pondérée, la fonction MAX est non lisse, exigeant ainsi une technique d'optimisation spécialisée.

Pour une riche classe de spécifications, le problème de synthèse multiobjectif peut être formulé comme un programme du type MINIMAX convexe lorsque la *scalarization* du type

infini et le paramétrage de YOULA sont utilisés. BOYD et BARRATT [25] ont proposé d'utiliser des techniques standard de l'optimisation convexe pour résoudre le problème MINIMAX de synthèse, tandis que POLAK et SALCUDEAN [131] ont utilisé une technique d'optimisation non lisse semi-infinie générale. Nous avons déjà souligné, toutefois, que le paramétrage de YOULA n'est pas approprié à la synthèse de compensateurs structurés.

Plus récemment, des techniques d'optimisation non lisse et non convexe ont été utilisées afin de résoudre des problèmes du type MINIMAX non convexe qui apparaissent dans une série de problèmes de synthèse de compensateurs structurés [100, 101, 102, 9, 11, 10, 12, 13, 8, 20, 19, 21, 30, 79, 78, 77]. Un point commun à toutes ces approches est de court-circuiter le paramétrage de YOULA. Ainsi, la structure du compensateur est paramétrée directement dans les matrices de la représentation en espace d'états, ou encore dans les coefficients de la fonction de transfert pour les cas SISO par exemple. Le prix à payer pour l'adoption de tels paramétrages est l'absence de convexité du problème MINIMAX de synthèse. Par conséquent, ces techniques ne peuvent offrir que des certificats de convergence locale. En effet, la recherche de solutions globales est en général impossible. L'expérience depuis plusieurs années sur ce thème tend à démontrer que des solutions locales sont tout à fait satisfaisantes en pratique. Sans qu'il soit possible de l'établir de manière générale, il a été observé qu'un algorithme non lisse avec certificat local fournit des solutions de meilleure qualité que les méthodes fondées sur des relaxations convexes souvent très conservatives [14]. Abandonner la convexité et accepter les contingences d'un algorithme local est un peu la devise des techniques non lisses. Dans de nombreuses applications, il a été observé que :

- l'initialisation d'un algorithme non lisse n'est pas critique et peut être complétée par une stratégie de *multistart* le cas échéant.
- un compensateur très simple assure souvent des performances comparables aux compensateurs complets obtenus par la synthèse H_∞ par exemple. Ceci constitue une véritable surprise en particulier pour les experts de ce domaine.

Une limitation des techniques d'optimisation non lisse du dernier paragraphe est qu'elles ne permettent de traiter que des problèmes sans contraintes. À l'exception de l'approche très récente dans [77], où une technique du type pénalisation est adoptée. Malgré sa séduisante simplicité, les stratégies de pénalisation et de barrière soulèvent des questions importantes telles que : comment initialiser et mettre à jour le paramètre de pénalisation ? comment éviter le mauvais conditionnement inhérent à ces techniques pour des valeurs asymptotiques du paramètre de pénalisation ? En outre, ces stratégies peuvent conduire à un temps d'exécution prohibitif car un problème sans contraintes doit être résolu complètement pour chaque valeur du paramètre de pénalisation. Par ailleurs, aucun des ces travaux ne prennent en compte des problèmes de synthèse de compensateurs avec contraintes à la fois temporelles et fréquentielles sur le système en boucle fermée.

1.2 Objectifs de la thèse

Le deux principaux objectifs définis de notre travail sont :

- le développement d'algorithmes spécifiques de l'optimisation numérique pour la syn-

thèse de compensateurs structurés. L'objectif est de fournir des techniques efficaces permettant de produire des solutions locales, intéressantes sur le plan pratique à la problématique de synthèse.

- l'évaluation des techniques proposées à partir de problèmes réalistes de synthèse de compensateurs structurés. Nous nous intéressons, notamment, aux problèmes de grande dimension, comprenant une diversité de spécifications de performance et de robustesse, à la fois temporelles et fréquentielles sur le système en boucle fermée.

1.3 Travaux réalisés – Organisation du mémoire

Le présent mémoire inclut, outre ce chapitre introductif, sept chapitres organisés en deux parties :

- La Première Partie, constituée des Chapitres 2 et 3, introduit les notions fondamentales et délimite le cadre de travail. Dans le Chapitre 2, nous présentons un état de l'art des techniques modernes de synthèse de compensateurs LTI multivariable à temps continu. D'une part, cette discussion permet de souligner les lacunes des techniques actuelles pour gérer non seulement des contraintes structurelles sur la loi de commande mais également l'aspect multiobjectif inhérent aux problèmes réalistes de synthèse. D'autre part, elle sert à rappeler les notions fondamentales de l'automatique utilisées par la suite.

Dans le Chapitre 3, nous commençons par présenter quelques concepts fondamentaux de l'analyse non lisse qui nous permettront de déterminer des conditions d'optimalité pour la classe de problèmes d'optimisation avec contrainte considérée dans notre travail. Les ingrédients clés de l'approche non lisse utilisée au long de cette thèse sont ensuite présentés.

- La Deuxième Partie englobe notre contribution principale (Chapitres 4 à 7), ainsi que la Conclusion Générale (Chapitre 8). Dans les Chapitres 4 à 7, nous considérons différents problèmes de synthèse de compensateurs structurés pour lesquels aucune solution satisfaisante n'est actuellement disponible. Pour chaque classe de problèmes, nous adaptons la technique non lisse introduite dans le Chapitre 3 afin d'obtenir un algorithme approprié au problème de synthèse en question. Les algorithmes développés sont validés à partir d'applications réalistes.

Dans la Conclusion Générale (Chapitre 8), nous faisons un bilan des approches développées, mettant en évidence les apports de notre travail. Nous considérons également des possibilités de recherches futures.

Les Chapitres 4 à 7 rassemblent donc notre contribution. Chacun de ces quatre chapitres est composé d'une publication précédée par une discussion introductive de la problématique traitée. Le Chapitre 7 en particulier inclut une section supplémentaire qui décrit une application aéronautique additionnelle. Les résumés de chaque contribution dans ces chapitres sont répertoriés comme suit :

- Dans le Chapitre 4, le problème de synthèse est posé comme le façonnement dans le domaine fréquentiel des diverses fonctions de sensibilité sur des bandes fréquentielles restreintes, comme visualisé sur la Figure 1.2. Des spécifications en boucle fermée

sous la forme de contraintes sur des bandes restreintes de fréquences apparaissent naturellement dans la synthèse classique de compensateurs. Néanmoins, de telles contraintes rendent le problème de synthèse difficile. Actuellement, on doit faire appel à des techniques heuristiques pour contourner cette difficulté. Au lieu d'avoir recours à de tels artifices, nous développons un algorithme non lisse permettant de calculer une solution localement optimale pour le problème de synthèse multibande. Notre algorithme non lisse présente des propriétés similaires à celles des stratégies du type pénalisation exacte. L'algorithme permet ainsi de surmonter les complications inhérentes aux approches du type pénalité classique en termes de temps d'exécution et de conditionnement numérique. Deux applications réalistes sont présentées afin d'illustrer les avantages de notre approche multibande non lisse.

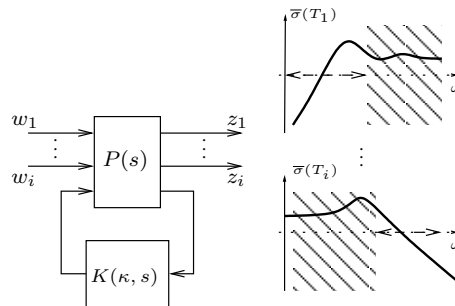


FIG. 1.2 – Visualisation de la synthèse non lisse fréquentielle multibande du Chapitre 4

- Dans le Chapitre 5, nous présentons une méthode permettant de calculer des compensateurs localement optimaux pour un problème de synthèse formulé dans le domaine temporel. Dans ce problème, visualisé sur la Figure 1.3, nous minimisons un objectif temporel de performance tout en prenant en compte des contraintes imposées sur les trajectoires de la commande ou de l'état. La possibilité d'inclure de telles contraintes est très intéressante d'un point de vue pratique, particulièrement pour des systèmes soumis à des limites opérationnelles telles que la saturation des actionneurs. Notre méthode non lisse permet de traiter ces contraintes temporelles comme des contraintes de programmation dures. L'efficacité de l'approche non lisse est démontrée par trois applications, où nous comparons notre méthode avec la technique la plus efficace de l'optimisation sous contraintes.

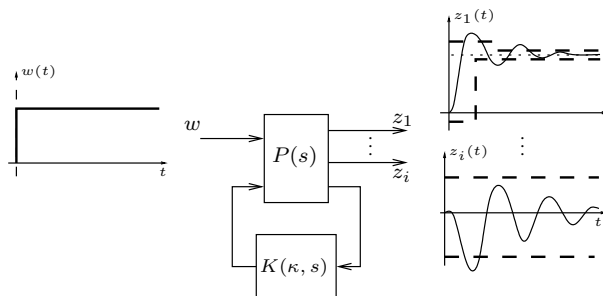


FIG. 1.3 – Visualisation de la synthèse non lisse dans le domaine temporel du Chapitre 5

- Dans le Chapitre 6, nous étendons la technique temporelle du Chapitre 5 au problème de synthèse dit multiscénario. Dans la synthèse multiscénario, visualisée sur la Figure 1.4, un système ou une famille de systèmes est soumis à une série d'entrées test, et chaque réponse en boucle fermée ainsi générée représente un scénario. La méthode proposée calcule alors un compensateur avec une structure prescrite de sorte que les spécifications de performance soient satisfaites pour tous les scénarios. Il est question d'un problème difficile de synthèse pour lequel seules des solutions locales peuvent être calculées. En dépit des difficultés, l'algorithme non lisse s'avère un outil de valeur pratique. L'efficacité de la méthode est corroborée par l'application présentée qui comprend un système de puissance réel d'ordre élevé (nombre d'états) avec de multiples points d'opération.

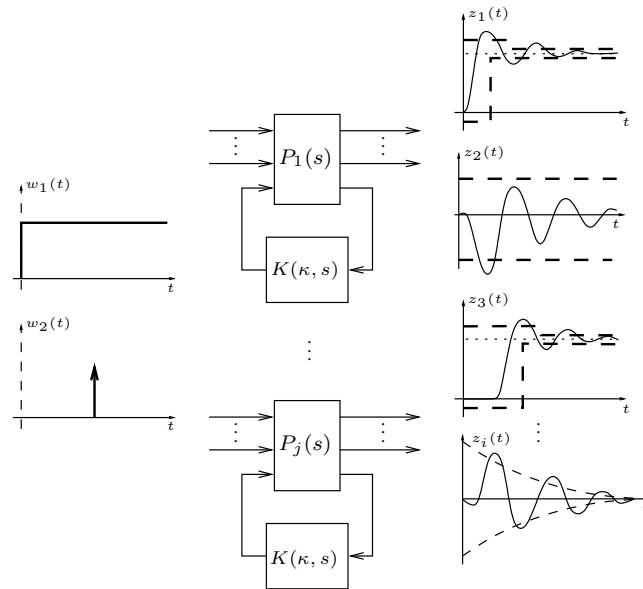


FIG. 1.4 – Visualisation de la synthèse non lisse temporelle multiscénario du Chapitre 6

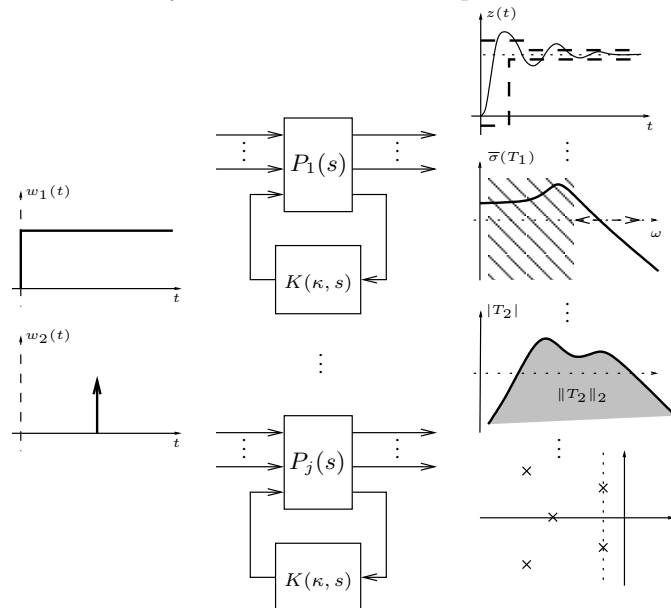


FIG. 1.5 – Visualisation de la synthèse non lisse multiobjectif du Chapitre 7

- Dans le Chapitre 7, nous proposons un algorithme non lisse qui permet de synthétiser un compensateur structuré satisfaisant des spécifications en boucle fermée définies simultanément dans les domaines temporel et fréquentiel, comme visualisé sur la Figure 1.5. Dans le domaine temporel, un système non linéaire est soumis à un ensemble de signaux d’entrée test, et les réponses ainsi générées sont à nouveau appelées scénarios. La méthode de synthèse proposée calcule alors un compensateur avec une structure prescrite qui satisfait à la fois des spécifications de performance pour un certain ensemble de scénarios et des contraintes de robustesse dans le domaine fréquentiel. Le compensateur synthétisé est localement optimal parmi les autres compensateurs avec ces propriétés. Pour illustrer l’intérêt pratique de la méthode, nous considérons trois applications aéronautiques particulièrement difficiles.

Les publications et communications découlant de nos travaux de thèse sont répertoriées ci-dessous.

PUBLICATIONS JOURNAUX :

1. A. M. SIMÕES, P. APKARIAN and D. NOLL, A nonsmooth progress function algorithm for frequency shaping control design, *IET Control Theory & Applications*, vol. 2, 4, pp. 323-336, April, 2008.
2. A. M. SIMÕES, D. C. SAVELLI, P. C. PELLANDA, N. MARTINS and P. APKARIAN, Robust Design of a TCSC Oscillation Damping Controller in a Weak 500-kV Interconnection Considering Multiple Power Flow Scenarios and External Disturbances, *IEEE Trans. on Power Systems*, v. 24, p. 226-236, 2009.
3. P. APKARIAN, D. NOLL and A. M. SIMÕES, Time-Domain Control Design : a Nonsmooth Approach, à paraître dans *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 2009.
4. A. M. SIMÕES, P. APKARIAN and D. NOLL, Nonsmooth multiobjective synthesis with applications, à paraître dans *Control Engineering Practice*, 2009.

COMMUNICATIONS CONFÉRENCES :

1. A. M. SIMÕES, P. APKARIAN and D. NOLL, Nonsmooth frequency shaping control design with an application, In *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, Seoul, 2008.
2. P. APKARIAN, A. M. SIMÕES and D. NOLL, Multi-scenario time-domain control design using a nonsmooth approach, In *Proceedings of the VIII Int. Conference, Identification & Control Problems, SICPRO*, Moscou, 2009.
3. A. M. SIMÕES, D. ALAZARD, H. D. TUAN and P. APKARIAN, Lateral flight control design for a highly flexible aircraft using a nonsmooth method, *accepté pour la CDC 2009*.

Première partie

Notions fondamentales et cadre de travail

Chapitre 2

Éléments fondamentaux de la synthèse de compensateurs

DANS ce chapitre, nous présentons un état de l'art des principales techniques de synthèse de compensateurs LTI multivariable à temps continu. Tout d'abord, nous introduisons quelques outils indispensables de l'analyse de systèmes. Ensuite, nous considérons certains problèmes clés de synthèse. En particulier, nous nous concentrons sur les problèmes fondamentaux de la stabilisation, de la synthèse H_∞ et de la synthèse en présence de contraintes sur la réponse temporelle du système en boucle fermée. En dernier lieu, nous reprenons ces différents éléments simultanément dans le cadre des problèmes multiobjectif. Notre objectif central est d'indiquer les lacunes des techniques actuelles pour gérer non seulement des contraintes structurelles sur la loi de commande mais également l'aspect multiobjectif inhérent aux problèmes réalistes de synthèse.

2.1 Analyse des systèmes

De nombreux systèmes physiques admettent une caractérisation mathématique constitué d'un ensemble d'équations différentielles à temps continu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}, \quad (2.1)$$

où $u \in \mathbb{R}^m$ représente le vecteur d'entrées du système, $y \in \mathbb{R}^p$ représente le vecteur de sorties et $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état. Pour la classe particulière de systèmes LTI, les fonctions $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ et $g(\cdot, \cdot, \cdot)$ sont linéaires en u et x et ne dépendent pas directement du temps t . Dans ce cas, la représentation (2.1) devient

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \quad (2.2)$$

où les matrices d'état $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, de commande $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, d'observation $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et de transmission directe $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ sont invariantes.

L'expression de l'évolution de l'état x en fonction du temps peut être obtenue à partir de la résolution du système d'équations (2.2). On a alors

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad t \geq 0, \quad (2.3)$$

et, de ce fait,

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t), \quad t \geq 0. \quad (2.4)$$

L'analyse des systèmes LTI bénéficie particulièrement de l'isomorphisme temps/fréquence lié à la Transformée de LAPLACE. Par exemple, la transformée de la sortie $y(t)$ est donnée par

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s). \quad (2.5)$$

Si l'on admet que la condition initiale est nulle ($x(0) = 0$), il est possible d'explicitier en (2.5) la relation entre sortie et entrée :

$$G(s) \triangleq \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (2.6)$$

Le système admet, ainsi, une représentation fréquentielle du type entrée-sortie donnée par le transfert $G(s)$.

2.1.1 Analyse de la stabilité

Revenons au système non linéaire (2.1). Considérons qu'il est non forcé ($u(t) \equiv 0$) ou soumis à une entrée dont nous connaissons la dépendance dans la variable t . L'équation de transition d'état devient alors

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t). \quad (2.7)$$

Nous précisons, en premier lieu, la notion de point d'équilibre d'un système.

Définition 2.1. $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est dit un point d'équilibre à l'instant t_0 du système (2.7) si

$$f(x_0, t) \equiv 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

Nous admettons sans perte de généralité que $0 \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre du système à l'instant t_0 .

Définition 2.2. Le point d'équilibre $0 \in \mathbb{R}^n$ à l'instant t_0 est dit stable à l'instant t_0 si, pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $\delta(t_0, \epsilon) > 0$ tel que

$$\|x(t_0)\| < \delta(t_0, \epsilon) \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Il est dit instable s'il n'est pas stable à l'instant t_0 .

Il est dit globalement asymptotiquement stable si $x(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

L'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires est en général basée sur des conditions suffisantes. En revanche, le cas particulier des systèmes LTI est beaucoup plus favorable puisque différents critères représentant des conditions nécessaires et suffisantes sont disponibles.

Pour un système LTI donné

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (2.8)$$

il est évident que $0 \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre pour n'importe quel instant $t_0 \geq 0$. Le théorème suivant est fondamental.

Théorème 2.3. [160, p.171] *Le point d'équilibre 0 du système (2.8) est globalement asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A ont des parties réelles strictement négatives.*

Le point d'équilibre 0 du système (2.8) est stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A ont des parties réelles nulles et toute valeur propre de A avec partie réelle nulle est un zéro simple du polynôme minimal de A .

Pour la classe des systèmes LTI, la théorie de LYAPUNOV est assez complète et fournit des conditions nécessaires et suffisantes permettant de caractériser la stabilité du système. Ces conditions sont obtenues à partir d'une fonction quadratique candidate

$$V(x) \triangleq x(t)^T X x(t), \quad X \in \mathbb{S}^n \succ 0. \quad (2.9)$$

Le théorème suivant réunit les résultats du Théorème 2.3 avec ceux de la théorie de LYAPUNOV et il indique trois différentes façons de caractériser la stabilité d'un système LTI.

Théorème 2.4. [160, 26] *Les trois conditions suivantes sont équivalentes et elles permettent d'inférer que le point d'équilibre 0 du système (2.8) est globalement asymptotiquement stable :*

1. toutes les valeurs propres de A ont des parties réelles strictement négatives.
2. il existe une matrice $X \in \mathbb{S}^n \succ 0$ qui satisfait l'inégalité matricielle

$$A^T X + X A \prec 0. \quad (2.10)$$

3. pour toute matrice $Q \in \mathbb{S}^n \succ 0$, l'équation matricielle

$$A^T X + X A + Q = 0 \quad (2.11)$$

a une solution unique pour $X \in \mathbb{S}^n$, et cette solution est définie positive.

Concernant l'effort calculatoire, l'analyse des valeurs propres de la matrice A est l'approche la plus efficace pour caractériser la stabilité d'un système LTI.

2.1.2 Calcul de la norme H_∞

La norme H_∞ d'une matrice de transfert $G(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ est définie par

$$\|G(s)\|_\infty \triangleq \sup_{\operatorname{Re}(s) > 0} \bar{\sigma}(G(s)) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)). \quad (2.12)$$

La norme H_∞ présente l'importante propriété d'être égale au gain L_2 du système [174, p.104] :

$$\|G\|_\infty = \sup_{\|u\|_2 \neq 0} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}. \quad (2.13)$$

Ainsi, $\|G\|_\infty$ fournit une borne supérieure pour l'énergie du signal de sortie lorsqu'un signal d'énergie finie est appliqué à l'entrée du système.

Auparavant, la valeur de la norme H_∞ était calculée directement à partir de l'expression (2.12) par le biais d'un maillage fréquentiel. L'inconvénient d'une telle approche est due à la difficulté de sélectionner la maille : si d'une part une maille plus dense permet plus de précision, d'autre part l'effort calculatoire devient plus important. Malheureusement, il n'y a pas une stratégie claire pour sa construction.

Le Lemme Réel Borné présenté ci-dessous indique comment calculer la valeur de la norme infinie du transfert $G(s)$ à partir d'une représentation en espace d'état du système. Il joue un rôle fondamental dans le développement des algorithmes d'analyse et de synthèse H_∞ .

Lemme 2.5. [173, p.238] Soit $\gamma \in \mathbb{R} > 0$, et un transfert $G(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ avec une représentation en espace d'état (A, B, C, D) correspondante. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\|G(s)\|_\infty < \gamma$.
2. $\bar{\sigma}(D) < \gamma$ et il existe une matrice $X \in \mathbb{S}^n \succeq 0$ telle que

$$X(A + BR^{-1}D^T C) + (A + BR^{-1}D^T C)^T X + XBR^{-1}B^T X + C^T(I + DR^{-1}D^T)C = 0, \quad (2.14)$$

où $R \triangleq \gamma^2 I - D^T D$, et $A + BR^{-1}D^T C + BR^{-1}B^T X$ n'a pas des valeurs propres sur l'axe imaginaire.

3. $\bar{\sigma}(D) < \gamma$ et la matrice Hamiltonienne associée à l'ARE (2.14)

$$H \triangleq \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^TC & BR^{-1}B^T \\ -C^T(I + DR^{-1}D^T)C & -(A + BR^{-1}D^TC)^T \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

n'a pas des valeurs propres sur l'axe imaginaire.

4. $\bar{\sigma}(D) < \gamma$ et il existe $X \in \mathbb{S}^n \succ 0$ telle que

$$X(A + BR^{-1}D^TC) + (A + BR^{-1}D^TC)^T X + XBR^{-1}B^T X + C^T(I + DR^{-1}D^T)C \prec 0. \quad (2.16)$$

5. Il existe $X \in \mathbb{S}^n \succ 0$ telle que

$$\begin{bmatrix} XA + A^T X & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.17)$$

L'inégalité matricielle (2.17) est étroitement liée au fait que la fonction de LYAPUNOV quadratique (2.9) associée au système (2.2) est telle que

$$\dot{V}(x(t)) < \gamma^2 u(t)^T u(t) - y(t)^T y(t). \quad (2.18)$$

On en conclut que

$$V(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} s(u(t), y(t)) dt > V(x(t_1)), \quad \forall t_0 \leq t_1, \quad (2.19)$$

où $s(u(t), y(t))$ dénote la fonction

$$s(u(t), y(t)) \triangleq \gamma^2 u(t)^T u(t) - y(t)^T y(t). \quad (2.20)$$

En supposant que $x(0) = 0$, il est évident que

$$\int_0^{t_1} s(u(t), y(t)) dt > 0. \quad (2.21)$$

Le terme intégral en (2.21) représente une borne supérieure pour l'énergie nette fournie au système. La fonction de LYAPUNOV $V(x)$ indique l'énergie stockée par le système dans un instant de temps donné. Ainsi, l'inégalité (2.19) traduit l'idée intuitive que la variation de l'énergie stockée par le système dans un intervalle de temps donné ne peut pas excéder l'énergie nette qui lui a été fournie, où la différence représente l'énergie dissipée [166, 167].

Les propriétés des valeurs propres de la matrice Hamiltonienne (2.15) ont été explorées originellement en [24, 134] pour la construction d'un algorithme du type bisection permettant de calculer la norme H_∞ à partir d'une représentation en espace d'état. Un autre algorithme, toujours basé sur les valeurs propres de la Hamiltonienne mais convergeant plus rapidement, a été proposé par la suite [28, 23].

Selon le Lemme 2.5, la norme H_∞ peut être aussi calculée à partir de la contrainte matricielle (2.17) : il suffit de trouver le plus petit γ et la matrice de LYAPUNOV $X \in \mathbb{S}^n$ définie positive qui satisfont cette contrainte. Cela peut être traduit sous la forme du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{array}{ll} \underset{\gamma \in \mathbb{R}, X \in \mathbb{S}^n}{\text{minimiser}} & \gamma \\ \text{sous} & X \succ 0 \\ & \begin{bmatrix} XA + A^T X & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0 \end{array} \quad (2.22)$$

Le programme (2.22) est convexe car il présente un objectif linéaire et des contraintes matricielles affines. Il s'agit ainsi d'un programme semi-défini (où SDP, de l'anglais *Semi Definite Programming*) qui peut être résolu en temps polynomial par des techniques de points intérieurs [158, 27]. L'algorithme de BRUINSMA et STEINBUCH [23] basé sur l'Hamiltonienne reste, néanmoins, la façon la plus efficace de calculer la norme H_∞ , même s'il peut rencontrer des difficultés numériques dans certains cas. Plus précisément, ces difficultés apparaissent lorsque le problème de valeurs propres associé est mal conditionné, ou lorsque la réponse du système est du type passe-tout ou passe-haut, ou encore lorsque la représentation en espace d'état est mal équilibrée. Quelques modifications permettant de rendre l'algorithme plus robuste dans ces situations ont été suggérées dans [62].

2.1.3 Analyse de la réponse temporelle transitoire

La réponse temporelle du système à une entrée donnée se compose normalement d'une phase initiale, dite transitoire, et d'une phase finale stationnaire. En pratique, la réponse complète ne peut être obtenue que par l'intégration numérique du système d'équations différentielles ordinaires (2.1) dans le cas non linéaire, ou (2.2) dans le cas linéaire. En effet, on ne connaît pas des formules explicites permettant de déterminer directement des paramètres de la réponse transitoire comme le dépassement, le temps de montée ou de réponse, etc. La même difficulté est présentée pour la norme L_∞ de la réponse complète $y(t)$ scalaire, définie par

$$\|y\|_\infty \triangleq \max_{t \in \mathbb{R}} |y(t)|. \quad (2.23)$$

Ainsi, de tels paramètres doivent être déterminés à partir de l'analyse de la réponse complète $y(t)$ obtenue par l'intégration numérique des équations différentielles.

En ce qui concerne les techniques d'intégration numérique, il existe en général un compromis entre la qualité de l'approximation de la dérivée et la complexité calculatoire associée [36]. D'une part, l'utilisation des techniques élémentaires de différentiation par différences finies permet un calcul plus rapide, mais cela peut entraîner de graves problèmes de convergence. D'autre part, les méthodes d'ordre plus élevé [46] fournissent de meilleurs résultats, mais elles sont généralement plus coûteuses.

Dans le cas particulier des systèmes LTI, l'approche par propagation d'états discrets s'avère la méthode la plus efficace car elle permet d'exploiter la structure des équations

de la représentation d'état (2.2). Considérons une forme plus générale de l'équation d'état (2.3), où l'instant initial t_0 n'est pas forcément nul :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0. \quad (2.24)$$

Après avoir défini un pas d'échantillonnage T , l'équation (2.24) est évaluée dans l'intervalle entre les instants $t_0 = kT$ et $t = kT + T$

$$x(kT + T) = e^{AT}x(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad (2.25)$$

où k est un entier non négatif. Si l'on admet que l'entrée u passe par un Bloqueur d'Ordre Zéro avant d'entrer dans le système, c'est-à-dire,

$$u(\tau) = u(kT), \quad kT \leq \tau \leq kT + T,$$

alors l'entrée devient constante dans l'intervalle $[kT, kT+T]$, comme montré sur la Figure 2.1. Dans ces conditions, l'expression (2.25) se réduit à

$$x(kT + T) = e^{AT}x(kT) + \int_0^T e^{A\nu}d\nu Bu(kT). \quad (2.26)$$

Par conséquent, la valeur de la sortie y à l'instant kT est calculée par

$$\begin{cases} x(kT + T) = \Phi x(kT) + \Gamma u(kT), \\ y(kT) = Cx(kT) + Du(kT) \end{cases}, \quad (2.27)$$

où

$$\Phi = e^{AT}, \quad \Gamma = \int_0^T e^{A\nu}d\nu B.$$

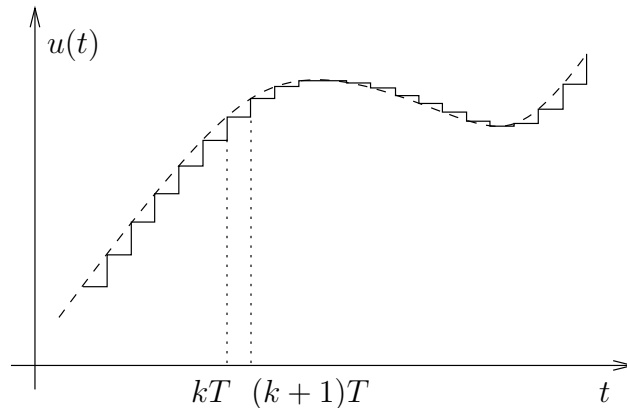


FIG. 2.1 – Discrétisation par un Bloqueur d'Ordre Zéro

Le système d'équations discrètes (2.27) représente un modèle discret équivalent du système originel. Une fois les matrices Φ et Γ calculées [60, 119], la réponse du système peut

être déterminée d'une façon récursive via (2.27). L'approximation par un Bloqueur d'Ordre Zéro est inappropriée lorsque le signal d'entrée présente des variations trop rapides. Dans ce cas, une approximation d'ordre plus élevé comme un Bloqueur du Premier Ordre est nécessaire. Le pas T peut être choisi d'une façon efficace à partir de l'analyse de la réponse fréquentielle du système.

En général, le rapport entre la réponse temporelle transitoire et la réponse fréquentielle est indirect, à l'exception du cas élémentaire des systèmes du deuxième ordre [57]. Dans le cas du régime stationnaire, cependant, des informations temporelles peuvent être obtenues à partir de la réponse fréquentielle du système via le Théorème de la Valeur Finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)U(s). \quad (2.28)$$

2.2 Synthèse de compensateurs

2.2.1 Forme standard pour la commande

La forme standard pour la commande, représentée sur la Figure 2.2, offre un cadre de travail unifié pour de nombreux problèmes de synthèse de compensateurs. On considère que le problème de synthèse est décrit par une matrice de transfert $P(s)$

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

avec la représentation en espace d'état

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t) \end{cases}, \quad (2.30)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état, $u \in \mathbb{R}^{m_2}$ est le vecteur de commandes, $w \in \mathbb{R}^{m_1}$ est le vecteur d'entrées exogènes, $y \in \mathbb{R}^{p_2}$ le vecteur de sorties mesurées et $z \in \mathbb{R}^{p_1}$ le vecteur de sorties régulées.

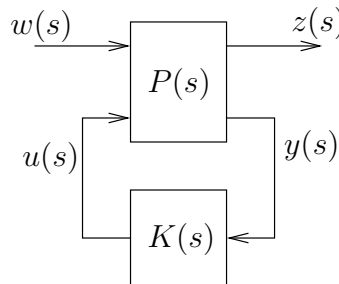


FIG. 2.2 – Forme standard pour la commande

La matrice de transfert $P(s)$ admet la partition

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

et peut être calculée à partir de la représentation en espace d'état par

$$P(s) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} (sI - A)^{-1} (B_1 \ B_2) + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Les notations

$$P(s) : \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

et

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right], \quad (2.34)$$

font référence simultanément à la représentation en espace d'état (2.30) et au transfert (2.29).

Lorsqu'un compensateur de retour dynamique de sortie d'ordre k

$$K(s) : \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_K \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_K \\ y \end{bmatrix}, \quad x_K \in \mathbb{R}^k, \quad (2.35)$$

est mis en boucle avec le système, conformément à la Figure 2.2, la matrice de transfert de w à z résultante est donnée par une transformation linéaire fractionnaire :

$$T_{zw}(s) = \mathcal{F}_l(P(s), K(s)) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s). \quad (2.36)$$

Dans le cas particulier d'un compensateur de retour de sortie statique ($k = 0$)

$$u = Ky, \quad K \in \mathbb{R}^{m \times p}, \quad (2.37)$$

nous pouvons déterminer une représentation en espace d'état pour le système en boucle fermée à partir d'une simple élimination des variables u et y dans les équations (2.30) et (2.37). On obtient alors :

$$T_{zw}(s) : \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= A + B_2K(I - D_{22}K)^{-1}C_2, \\ \mathcal{B} &= B_1 + B_2K(I - D_{22}K)^{-1}D_{21}, \\ \mathcal{C} &= C_1 + D_{12}K(I - D_{22}K)^{-1}C_2, \\ \mathcal{D} &= D_{11} + D_{12}K(I - D_{22}K)^{-1}D_{21}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Dans le cas plus général d'un compensateur de retour dynamique de sortie en (2.35), les matrices de la représentation en espace d'état du système en boucle fermée (2.38) deviennent

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \begin{bmatrix} A + B_2 D_K (I - D_{22} D_K)^{-1} C_2 & B_2 (I - D_K D_{22})^{-1} C_K \\ B_K (I - D_{22} D_K)^{-1} C_2 & A_K + B_K (I - D_{22} D_K)^{-1} D_{22} C_K \end{bmatrix} \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_K (I - D_{22} D_K)^{-1} D_{21} \\ B_K (I - D_{22} D_K)^{-1} D_{21} \end{bmatrix} \\ \mathcal{C} &= [C_1 + D_{12} D_K (I - D_{22} D_K)^{-1} C_2 \quad D_{12} (I - D_K D_{22})^{-1} C_K] \\ \mathcal{D} &= D_{11} + D_{12} D_K (I - D_{22} D_K)^{-1} D_{21},\end{aligned}\tag{2.40}$$

où $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(n+k) \times (n+k)}$. On peut facilement vérifier que les matrices en (2.40) peuvent être réécrites selon

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \hat{A} + \hat{B}_2 \mathcal{K} (I - \hat{D}_{22} \mathcal{K})^{-1} \hat{C}_2, \\ \mathcal{B} &= \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \mathcal{K} (I - \hat{D}_{22} \mathcal{K})^{-1} \hat{D}_{21}, \\ \mathcal{C} &= \hat{C}_1 + \hat{D}_{12} \mathcal{K} (I - \hat{D}_{22} \mathcal{K})^{-1} \hat{C}_2, \\ \mathcal{D} &= D_{11} + \hat{D}_{12} \mathcal{K} (I - \hat{D}_{22} \mathcal{K})^{-1} \hat{D}_{21},\end{aligned}\tag{2.41}$$

où la matrice $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+p)}$ regroupe les matrices du compensateur

$$\mathcal{K} \triangleq \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix},\tag{2.42}$$

et où

$$\begin{aligned}\hat{A} &\triangleq \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_k \end{bmatrix}; & \hat{B}_1 &\triangleq \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}; & \hat{B}_2 &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ I_k & 0 \end{bmatrix}; & \hat{C}_1 &\triangleq [C_1 \quad 0]; \\ \hat{C}_2 &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & I_k \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}; & \hat{D}_{21} &\triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ D_{21} \end{bmatrix}; & \hat{D}_{22} &\triangleq \begin{bmatrix} 0_k & 0 \\ 0 & D_{22} \end{bmatrix}; & \hat{D}_{12} &\triangleq [0 \quad D_{12}].\end{aligned}\tag{2.43}$$

La similarité entre les expressions du cas dynamique (2.41) avec celles du cas statique (2.39) suggère l'équivalence

$$T_{zw}(s) = \mathcal{F}_l(P(s), K(s)) = \mathcal{F}_l(\hat{P}(s), \mathcal{K}),\tag{2.44}$$

où $\hat{P}(s)$ représente un système auxiliaire construit à partir de l'augmentation du système originel selon les expressions en (2.43) :

$$\hat{P}(s) : \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ z \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 & D_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ w \\ \hat{u} \end{bmatrix}.\tag{2.45}$$

En résumé, le système en boucle fermée sur la Figure 2.3, constitué du système augmenté $\hat{P}(s)$ et du compensateur statique \mathcal{K} , est équivalent du point de vue du transfert de w vers z au système en boucle fermée originel avec le compensateur dynamique $K(s)$ sur la

Figure 2.2. Cette équivalence est d'un grand intérêt pratique : les problèmes de synthèse d'un compensateur dynamique peuvent être ramenés, via l'augmentation induite par la transformation (2.42)-(2.43), à un problème équivalent de synthèse d'un compensateur statique. L'état, les commandes et les mesures du système équivalent sur la Figure 2.3 sont liés à ceux du système originel par

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_k \end{bmatrix}, \quad \hat{y} = \begin{bmatrix} x_k \\ y \end{bmatrix}, \quad \hat{u} = \begin{bmatrix} \dot{x}_k \\ u \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

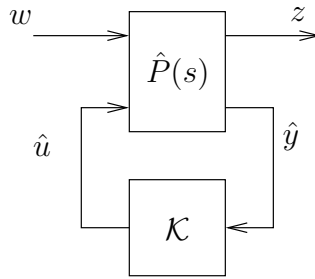


FIG. 2.3 – Système en boucle fermée équivalent avec un compensateur statique

Puisque la plupart des problèmes de synthèse prescrivent des contraintes structurelles sur la loi de commande, il est convenable d'introduire un paramétrage dans les matrices de l'espace d'état du compensateur

$$\kappa \in \mathbb{R}^q \rightarrow \mathcal{K}(\kappa) \triangleq \begin{bmatrix} A_K(\kappa) & B_K(\kappa) \\ C_K(\kappa) & D_K(\kappa) \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

avec la représentation fréquentielle correspondante

$$K(s) = C_K(\kappa)(sI - A_K(\kappa))^{-1}B_K(\kappa) + D_K(\kappa).$$

En (2.47), κ désigne les variables de synthèse et le cas d'un compensateur statique ($k = 0$) est inclus. Il n'est pas restrictif de supposer que le paramétrage $\kappa \in \mathbb{R}^q \rightarrow \mathcal{K}(\cdot)$ est continûment différentiable, sinon arbitraire. Considérons le cas illustratif d'un compensateur proportionnel intégral (PI) monovarié

$$K(s) = K_P + \frac{K_I}{s}.$$

Le vecteur de variables de synthèse est alors $\kappa^T = [K_P \quad K_I]^T$, et un paramétrage possible est

$$\mathcal{K} \left(\begin{bmatrix} K_P \\ K_I \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K_I & K_P \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

2.2.2 Synthèse de compensateurs stabilisants

Il convient, d'abord, d'énoncer le problème de synthèse considéré.

Problème de synthèse d'un compensateur stabilisant
 Trouver un compensateur structuré (2.47) qui stabilise le système (2.30) en boucle fermée.

L'hypothèse suivante est nécessaire et suffisante pour que le système soit stabilisable par un retour de sortie dynamique. Elle est supposée satisfaite tout au long de notre travail.

Hypothèse 2.1. (A, B_2) est stabilisable et (C_2, A) est détectable.

Approches du type LYAPUNOV

Selon le Théorème 2.4, le système en boucle fermée sera stable si et seulement s'il existe une matrice $X \in \mathbb{S}^{(n+k)}$ qui satisfait les inégalités matricielles suivantes

$$\begin{aligned} X &\succ 0, \\ \mathcal{A}(\kappa)^T X + X \mathcal{A}(\kappa) &\prec 0, \end{aligned} \quad (2.49)$$

où \mathcal{A} représente la matrice d'état du système en boucle fermée calculée par (2.40) ou (2.41). Considérons l'hypothèse simplificatrice suivante.

Hypothèse 2.2. La matrice de transmission directe D_{22} du système est nulle.

Lorsque l'hypothèse 2.2 est satisfaite, la fonction matricielle $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+p)} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{K})$ devient affine en \mathcal{K} :

$$\mathcal{A}(\mathcal{K}) = \hat{A} + \hat{B}_2 \mathcal{K} \hat{C}_2. \quad (2.50)$$

De sorte que le problème de synthèse d'un compensateur stabilisant peut être traduit sous la forme du problème de faisabilité suivant :

$$\begin{aligned} \text{trouver } & \kappa \in \mathbb{R}^q, X \in \mathbb{S}^{(n+k)} \\ \text{tels que } & X \succ 0, \\ & X(\hat{A} + \hat{B}_2 \mathcal{K}(\kappa) \hat{C}_2) + (\hat{A} + \hat{B}_2 \mathcal{K}(\kappa) \hat{C}_2)^T X \prec 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Si, de plus, le paramétrage $\kappa \in \mathbb{R}^q \rightarrow \mathcal{K}(\kappa)$ est affiné, alors la fonction matricielle composée $\kappa \in \mathbb{R}^q \rightarrow (\mathcal{A} \circ \mathcal{K})(\kappa)$ devient à son tour affine en κ . Par conséquent, l'inégalité (2.49) devient une inégalité matricielle biaffine dans les variables X et κ . Le programme de faisabilité (2.51) est composé dans ce cas d'une contrainte LMI et d'une contrainte BMI¹.

Pour le cas particulier où la contrainte structurelle est du type ordre fixé, il est possible de trouver une formulation alternative à ce problème de synthèse à partir du théorème suivant.

¹Une inégalité matricielle biaffine peut être représentée d'une façon équivalente par une BMI [141].

Théorème 2.6. [26, 68] *On suppose que l'Hypothèse 2.2 est satisfaite. Alors le système (2.30) est stabilisable par un compensateur de retour de sortie d'ordre k si et seulement s'il existe des matrices $X \in \mathbb{S}^{(n+k)}$ et $Y \in \mathbb{S}^{(n+k)}$ qui satisfont les LMI*

$$\mathcal{N}_X^T(\hat{A}X + X\hat{A}^T)\mathcal{N}_X \prec 0, \quad (2.52)$$

$$\mathcal{N}_Y^T(Y\hat{A} + \hat{A}^TY)\mathcal{N}_Y \prec 0, \quad (2.53)$$

et l'équation matricielle non linéaire

$$XY = I, \quad (2.54)$$

où \mathcal{N}_X et \mathcal{N}_Y représentent des bases des noyaux de \hat{B}_2^T et de \hat{C}_2 , respectivement.

La synthèse d'un compensateur stabilisant d'ordre fixé k peut donc être réalisée, à la lumière du Théorème 2.6, à partir de la solution du programme de faisabilité suivant :

$$\begin{aligned} \text{trouver } & X \in \mathbb{S}^{(n+k)}, Y \in \mathbb{S}^{(n+k)} \\ \text{tels que } & X \succ 0, Y \succ 0, \\ & \mathcal{N}_X^T(\hat{A}X + X\hat{A}^T)\mathcal{N}_X \prec 0, \\ & \mathcal{N}_Y^T(Y\hat{A} + \hat{A}^TY)\mathcal{N}_Y \prec 0, \\ & XY = I. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Le programme (2.55) ne permet pas de déterminer directement les paramètres \mathcal{K} du compensateur car il ne comprend que les variables de LYAPUNOV X et Y . La matrice \mathcal{K} peut être déterminée, en revanche, via l'inégalité (2.49) en utilisant la solution X de (2.55). Pour une matrice X fixée, l'inégalité (2.49) est affine en \mathcal{K} , de sorte que le compensateur peut être finalement déterminé via le problème LMI :

$$\begin{aligned} \text{trouver } & \mathcal{K} \in \mathbb{R}^{(m_2+k) \times (p_2+k)} \\ \text{tels que } & X(\hat{A} + \hat{B}_2\mathcal{K}\hat{C}_2) + (\hat{A} + \hat{B}_2\mathcal{K}\hat{C}_2)^T X \prec 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Une approche alternative au programme (2.56) consiste à résoudre les équations indiquées en [61].

Le théorème suivant présente des conditions d'existence d'un compensateur stabilisant d'ordre k qui sont équivalentes à celles du Théorème 2.6, mais comprenant un nombre plus petit de variables inconnues.

Théorème 2.7. [68] *On suppose que l'hypothèse 2.2 est satisfaite. Alors le système (2.30) est stabilisable par un compensateur de retour de sortie d'ordre k si et seulement s'il existe un scalaire $\gamma > 0$ et des matrices $R \in \mathbb{S}^n$ et $S \in \mathbb{S}^n$ qui satisfont les inégalités*

$$AR + RA^T - B_2B_2^T \prec 0, \quad (2.57)$$

$$A^T S + SA - C_2^T C_2 \prec 0, \quad (2.58)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma R & I \\ I & \gamma S \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (2.59)$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \gamma R & I \\ I & \gamma S \end{bmatrix} \leq n + k. \quad (2.60)$$

La formulation du problème de synthèse comme le programme de faisabilité suivant découle directement des résultats du Théorème 2.7 :

$$\begin{aligned}
& \text{trouver } R \in \mathbb{S}^n, S \in \mathbb{S}^n, \gamma \in \mathbb{R} \\
& \text{tels que} \\
& AR + RA^T - B_2 B_2^T \prec 0, \\
& A^T S + SA - C_2^T C_2 \prec 0, \\
& \begin{bmatrix} \gamma R & I \\ I & \gamma S \end{bmatrix} \succeq 0, \\
& \text{rang} \begin{bmatrix} \gamma R & I \\ I & \gamma S \end{bmatrix} \leq n + k.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Les matrices R et S solution du programme (2.61) permettent de reconstruire la matrice de LYAPUNOV X qui apparaît dans l'inégalité (2.49). Le compensateur \mathcal{K} peut être déterminé alors identiquement par la résolution du SDP (2.56).

La synthèse d'un compensateur stabilisant d'ordre plein ($k = n$) est particulièrement favorable : la condition de rang (2.60) est alors automatiquement satisfaite et le programme (2.61) devient un SDP. Ainsi, la synthèse d'un compensateur stabilisant d'ordre plein ne comprend que deux contraintes LMI.

De nombreux algorithmes ont été proposés dans le but de résoudre des programmes tels que (2.51), (2.55) ou (2.61) [68, 141, 75, 50, 74, 116, 157, 54, 53, 154, 124, 155]. Un grand inconvénient de toutes ces approches est que le nombre des variables de synthèse associées aux matrices de LYAPUNOV augmente de façon quadratique avec l'ordre du système. Par exemple, le programme (2.51) comprend $q + (n + k)(n + k + 1)/2$ variables de synthèse, tandis que le programme (2.61) comprend $n(n + 1)$ variables. En conclusion ces techniques ne sont pas adaptées à des systèmes d'ordre élevé.

Minimisation de l'abscisse spectrale

Nous dénotons par $\lambda_1(M), \dots, \lambda_n(M)$ les valeurs propres d'une matrice $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$. L'abscisse spectrale de M est alors définie par

$$\alpha(M) \triangleq \max_j \operatorname{Re}(\lambda_j(M)). \tag{2.62}$$

L'importance de l'abscisse spectrale dans le contexte des systèmes LTI découle directement du Théorème 2.4 : le système en boucle fermée est globalement asymptotiquement stable si et seulement si l'abscisse spectrale de la matrice d'état \mathcal{A} est négative. Ainsi, une approche alternative au problème de la stabilisation consiste à résoudre le programme

$$\underset{\kappa \in \mathbb{R}^q}{\text{minimiser}} \alpha(\mathcal{A}(\kappa)). \tag{2.63}$$

L'idée est donc d'effectuer la minimisation de la fonction composée $\kappa \in \mathbb{R}^q \rightarrow (\alpha \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{K})(\kappa)$ jusqu'à ce qu'une valeur strictement négative soit trouvée. Si la solution converge éventuellement vers un minimum local de valeur positive, alors le programme (2.63) doit être

redémarré avec un point de départ différent. Le programme (2.63) est du type MINIMAX fini et, par conséquent, il s'agit d'un problème d'optimisation non lisse. Il existe, toutefois, une difficulté additionnelle due au fait que la fonction abscisse spectrale (2.62) n'est pas localement Lipschitzienne partout.

BURKE *et al.* [32, 31, 33] ont proposé un algorithme destiné à la minimisation d'une classe de fonctions non Lipschitziennes pour laquelle le gradient est défini, continu et calculable presque partout. C'est le cas de l'abscisse spectrale. Leur algorithme, dit d'échantillonnage de gradients, comprend des aspects non déterministes et vise des programmes comme (2.63) [30].

Les propriétés variationnelles de la fonction abscisse spectrale ont été discutées dans [34, 35]. Plus précisément, on montre que l'abscisse spectrale $\alpha(M)$ est différentiable directionnellement par rapport à M et admet un sous-différentiel de CLARKE $\partial\alpha(M)$ lorsque toutes les valeurs propres actives de M sont semi-simples. La valeur propre $\lambda_j(M)$ d'une matrice M est dite active si $\text{Re}(\lambda_j(M)) = \alpha(M)$, et elle est dite semi-simple si tous les blocs de JORDAN correspondants sont de taille un.

Même si les points de non différentiabilité de l'abscisse spectral sont rares dans une certaine mesure, il est vrai que les minima sont souvent atteints en un point où la différentiabilité est perdue. En particulier, on observe parfois que les valeurs propres actives devient défectives en un minimum de l'abscisse spectral. Dans le problème de la stabilisation, cependant, l'objectif est de déterminer une solution stabilisante et pas nécessairement de trouver un minimum local. Dans ce contexte, l'occurrence d'une valeur propre active défective est peu probable du point de vue pratique. C'est pourquoi le problème de la stabilisation est résolu en [19, 20] par le programme (2.63) en utilisant un algorithme d'optimisation non lisse basé sur le sous-différentiel de CLARKE.

2.2.3 Synthèse H_∞

Nous énonçons ci-dessous le problème de synthèse H_∞ considéré.

Problème de synthèse H_∞

Trouver un compensateur structuré (2.47) qui stabilise le système (2.30) en boucle fermée et qui minimise la norme $\|T_{zw}\|_\infty$ du transfert (2.36).

Comme dans le problème de la stabilisation, on peut développer des outils de synthèse H_∞ à partir de l'application du Lemme 2.5 au transfert en boucle fermée T_{zw} en (2.36) et à la représentation en espace d'état correspondante $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ en (2.41) .

Approches du type LYAPUNOV

À la lumière du Lemme 2.5, plus précisément à partir de l'inégalité matricielle (2.17), nous pouvons poser le problème de synthèse H_∞ comme le programme de minimisation

suivant :

$$\begin{array}{l}
\text{minimiser} \\
\kappa \in \mathbb{R}^q, X \in \mathbb{S}^{(n+k)}, \gamma \in \mathbb{R}
\end{array}
\begin{array}{l}
\gamma \\
X \succ 0, \\
\text{sous}
\end{array}
\begin{array}{l}
\left[\begin{array}{ccc}
X\mathcal{A}(\kappa) + \mathcal{A}(\kappa)^T X & X\mathcal{B}(\kappa) & \mathcal{C}(\kappa)^T \\
\mathcal{B}(\kappa)^T X & -\gamma I & \mathcal{D}(\kappa)^T \\
\mathcal{C}(\kappa) & \mathcal{D}(\kappa) & -\gamma I
\end{array} \right] \prec 0.
\end{array}
\quad (2.64)$$

Il s'agit, néanmoins, d'un programme difficile à résoudre à cause de la deuxième contrainte matricielle. Dans le cas général, cette contrainte est non linéaire et non convexe du fait de la dépendance des matrices $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ du système en boucle fermée par rapport aux paramètres κ du compensateur, en plus des produits croisés avec la variable de LYAPUNOV X . En revanche, cette inégalité matricielle devient biaffine lorsque la condition $D_{22} = 0$ est satisfaite et le paramétrage $\kappa \in \mathbb{R}^q \rightarrow \mathcal{K}(\cdot)$ est affín. Le programme (2.64) devient, ainsi, un problème de minimisation du type BMI.

Dans le cas particulier où la contrainte structurelle sur le compensateur est du type ordre fixé ($k \leq n$), des conditions de solvabilité alternatives peuvent être également déterminées à partir du Lemme de Projection appliqué à la BMI (2.64), de manière à éliminer les paramètres du compensateur. Le résultat est énoncé dans le théorème suivant, lequel généralise le Théorème 2.7.

Théorème 2.8. [63] *On suppose que l'Hypothèse 2.2 est satisfaite. Alors il existe un compensateur tel que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ si et seulement s'il existe des matrices $R \in \mathbb{S}^n$ et $S \in \mathbb{S}^n$ qui satisfont les LMI*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_R^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AR + RA^T & RC_1^T & B_1 \\ C_1 R & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.65)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_S^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SA + A^T S & SB_1 & C_1^T \\ B_1^T S & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.66)$$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (2.67)$$

où \mathcal{N}_R et \mathcal{N}_S représentent des bases des noyaux de $[B_2^T \ D_{12}^T]$ et de $[C_2 \ D_{21}]$, respectivement. Par ailleurs, il existe un compensateur d'ordre $k < n$ si et seulement si les conditions (2.65)-(2.67) sont satisfaites par un doublet R, S qui satisfait aussi à

$$\text{rang}(I - RS) \leq k. \quad (2.68)$$

Les conditions de solvabilité du Théorème 2.8 permettent de construire une méthode de synthèse H_∞ de compensateurs d'ordre fixé. D'abord, on doit déterminer les variables de LYAPUNOV $R, S \in \mathbb{S}^n$ et le plus petit $\gamma \in \mathbb{R}$ satisfaisant de telles conditions par le biais du programme (2.65)-(2.68).

Après avoir reconstruit la matrice de LYAPUNOV X en (2.17) à partir des matrices R et S , le compensateur \mathcal{K} est finalement déterminé via le programme

$$\begin{array}{l} \text{trouver } \mathcal{K} \in \mathbb{R}^{(k+p_2) \times (k+m_2)} \\ \text{tels que } \begin{bmatrix} X\mathcal{A}(\mathcal{K}) + \mathcal{A}(\mathcal{K})^T X & X\mathcal{B}(\mathcal{K}) & \mathcal{C}(\mathcal{K})^T \\ \mathcal{B}(\mathcal{K})^T X & -\gamma I & \mathcal{D}(\mathcal{K})^T \\ \mathcal{C}(\mathcal{K}) & \mathcal{D}(\mathcal{K}) & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0. \end{array} \quad (2.69)$$

Le programme (2.69) est un problème LMI, puisque la contrainte est affine en \mathcal{K} pour X et γ fixés.

Dans le cas d'un compensateur statique ($k = 0$), la condition de rang (2.68) se réduit à l'équation matricielle non linéaire $I - RS = 0$. Ainsi, si l'on applique les conditions de solvabilité du Théorème 2.8 au système augmenté équivalent sur la Figure 2.3, on obtient une façon alternative de déterminer la variable de LYAPUNOV X :

$$\begin{array}{l} \text{minimiser } \gamma \\ X, Y \in \mathbb{S}^{(n+k)}, \gamma \in \mathbb{R} \\ \text{sous } X \succ 0, Y \succ 0 \\ \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{N}}_X^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}X + X\hat{A}^T & X\hat{C}_1^T & \hat{B}_1 \\ \hat{C}_1 X & -\gamma I & D_{11} \\ \hat{B}_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{N}}_X & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0 \\ \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{N}}_Y^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y\hat{A} + \hat{A}^T Y & Y\hat{B}_1 & \hat{C}_1^T \\ \hat{B}_1^T Y & -\gamma I & D_{11}^T \\ \hat{C}_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{N}}_Y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \prec 0 \\ XY = I \end{array} \quad (2.70)$$

où $\hat{\mathcal{N}}_X$ et $\hat{\mathcal{N}}_Y$ désignent des bases des noyaux de $[\hat{B}_2^T \ \hat{D}_{12}^T]$ et de $[\hat{C}_2 \ \hat{D}_{21}]$, respectivement. Le programme (2.70) possède une structure similaire à celle du programme (2.51) dans le problème de la stabilisation.

Le cas d'un compensateur d'ordre plein, correspondant à l'hypothèse suivante, est encore une fois particulièrement favorable.

Hypothèse 2.3. $K(s)$ est un compensateur d'ordre plein ($k = n$).

Dans ce cas particulier, la condition de rang (2.68) est automatiquement satisfaite. Il en découle que la synthèse H_∞ d'un compensateur d'ordre plein peut être réalisée par une approche qui ne comprend que des LMI.

Sous certaines hypothèses additionnelles, il est possible d'établir des conditions de solvabilité semblables à celles du Théorème 2.8, mais à partir d'ARE. Nous faisons momentanément les hypothèses suivantes [48] :

Hypothèse 2.4. On pose :

1. (A, B_1) est stabilisable, (C_1, A) est détectable.
2. $D_{12}^T [C_1 \ D_{12}] = [0 \ I]$.

$$3. \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

$$4. D_{11} = 0 .$$

Ces hypothèses sont, en vérité, plus restrictives qu'il ne faut, mais elles permettent d'alléger la présentation. Elles peuvent être remplacées par des hypothèses moins fortes.

En vertu des items 2 et 3 de l'Hypothèse 2.4, il est possible de construire des matrices $D_{21\perp}$ et $D_{12\perp}$ telles que

$$\begin{bmatrix} D_{12\perp} \\ D_{12}^T \end{bmatrix} [D_{12\perp}^T \quad D_{12}] = I, \quad \begin{bmatrix} D_{21\perp}^T \\ D_{21} \end{bmatrix} [D_{21\perp} \quad D_{21}^T] = I .$$

Par conséquent, si les bases \mathcal{N}_R et \mathcal{N}_S dans le Théorème 2.8 sont choisies selon [107]

$$\mathcal{N}_R = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D_{12}B_2^T & D_{12\perp}^T \end{bmatrix}, \quad \mathcal{N}_S = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D_{21}^T C_2 & D_{21\perp} \end{bmatrix},$$

alors l'inégalité (2.65) se réduit à

$$\begin{bmatrix} AR + RA^T - \gamma B_2 B_2^T & RC_1^T D_{12\perp}^T & B_1 \\ D_{12\perp} C_1 R & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (2.71)$$

Ensuite, si l'on applique le complément de Schur à l'inégalité (2.71), et puisque $D_{11} = 0$ par hypothèse, alors on trouve l'inégalité algébrique de Riccati (ou ARI, de l'anglais *Algebraic Riccati Inequality*) équivalente

$$\begin{aligned} & AR + RA^T + \gamma^{-1} B_1 B_1^T - \gamma B_2 B_2^T + \gamma^{-1} RC_1^T C_1 R \prec 0 \\ \Leftrightarrow & (\gamma R^{-1})A + A^T(\gamma R^{-1}) + (\gamma R^{-1})(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T)(\gamma R^{-1}) + C_1^T C_1 \prec 0. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Lemme 2.9. [107] Soit (A, B) contrôlable dans l'axe imaginaire et $Q = Q^T$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une matrice $\hat{X} \succ 0$ qui satisfait l'ARI

$$\hat{X}A + A^T \hat{X} + \hat{X}Q\hat{X} + BB^T \prec 0.$$

2. Il existe une matrice $X \succeq 0$ qui satisfait l'ARE

$$XA + A^T X + XQX + BB^T = 0,$$

telle que $A + XQ$ est stable.

En outre, les matrices X et \hat{X} satisfont la relation

$$0 \preceq X \prec \hat{X}.$$

Lorsqu'on considère l'inégalité (2.72) à la lumière de l'item 1 de l'Hypothèse 2.4 et du Lemme 2.9, on constate qu'une condition de solvabilité équivalente à celle en (2.65) consiste alors à vérifier si l'ARE

$$X_\infty A + A^T X_\infty + X_\infty (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty + C_1^T C_1 = 0 \quad (2.73)$$

a une solution stabilisante X_∞ et telle que

$$0 \preceq X_\infty \prec \gamma R^{-1}. \quad (2.74)$$

Par un raisonnement similaire, une condition de solvabilité équivalente à (2.66) consiste à vérifier si l'ARE

$$A Y_\infty + Y_\infty A^T + Y_\infty (\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y_\infty + B_1 B_1^T = 0 \quad (2.75)$$

a une solution stabilisante Y_∞ et telle que

$$0 \preceq Y_\infty \prec \gamma S^{-1}. \quad (2.76)$$

En outre, à partir de l'inégalité (2.67) et des relations (2.74) et (2.76), on a que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \succeq 0 &\Leftrightarrow R \succeq S^{-1} \Leftrightarrow \rho(R^{-1} S^{-1}) \leq 1 \Leftrightarrow \rho((\gamma^{-1} X_\infty)(\gamma^{-1} Y_\infty)) < 1 \\ &\Leftrightarrow \rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2, \end{aligned} \quad (2.77)$$

où $\rho(M)$ dénote le rayon spectral d'une matrice M , c'est-à-dire, le module maximal de ses valeurs propres. Le théorème suivant rassemble les conditions de solvabilité présentées ci-dessus. Il indique aussi comment construire le compensateur final.

Théorème 2.10. [173, p.271] *On suppose que les Hypothèses 2.2-2.4 sont satisfaites. Alors il existe un compensateur tel que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

1. L'ARE (2.73) a une solution stabilisante $X_\infty \succ 0$.
2. L'ARE (2.75) a une solution stabilisante $Y_\infty \succ 0$.
3. $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$.

En outre, l'ensemble de tous les compensateurs admissibles tels que $\|T_{zw}\| < \gamma$ est égal à l'ensemble de matrices de transfert de la forme

$$K(s) = \mathcal{F}_l(M_\infty, Q), \quad (2.78)$$

où $Q \in \mathcal{RH}_\infty$, $\|Q\|_\infty < \gamma$, et

$$M_\infty(s) = \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_2 \\ \hline F_\infty & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{array} \right],$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{A}_\infty &\triangleq A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 \\ F_\infty &\triangleq -B_2^T X_\infty, \quad L_\infty \triangleq -Y_\infty C_2^T, \quad Z_\infty \triangleq (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}. \end{aligned}$$

Les résultats du Théorème 2.10 permettent la construction d'une technique de synthèse H_∞ d'ordre plein basée exclusivement sur des ARE [48] : à partir d'une procédure de bisection, on approxime le plus petit γ tel que les ARE (2.73) et (2.75) ont des solutions $X_\infty \succ 0$ et $Y_\infty \succ 0$ qui, de plus, satisfont (2.77). Le compensateur est construit ensuite à partir de γ , X_∞ et Y_∞ déterminés et pour une sélection particulière du paramètre $Q(s)$ en (2.78). Le compensateur central correspond à la sélection $Q(s) \equiv 0$. Les ARE peuvent être aisément résolues par l'algorithme de [17].

Nous avons dit que les conditions dans l'hypothèse 2.4 peuvent être remplacées par des conditions moins strictes [70, 174]. Les conditions de solvabilité résultantes restent, néanmoins, du type ARE. Pour la classe de systèmes satisfaisant de telles conditions, l'approche Riccati est plus efficace que l'approche LMI. En contrepartie, pour des problèmes où ces conditions ne sont pas vérifiées, dits singuliers, l'approche Riccati n'est plus valable, et la seule option reste l'approche LMI. Même s'il y a eu quelques efforts essayant d'étendre la portée de l'approche Riccati au cas singulier [168]. Toutefois, toutes ces approches restent limitées au cas très particulier d'un compensateur d'ordre plein.

Ces deux formulations, LMI et Riccati, sont devenues très populaires car ces méthodes permettent d'approcher la solution optimale globale du problème H_∞ d'ordre plein avec une tolérance prescrite. Cependant, l'hypothèse d'ordre plein étant trop contraignante, ces méthodes doivent être utilisées généralement conjointement avec des techniques de réduction d'ordre. Dans [105, 41], le paramètre libre $Q(s)$ de la formulation Riccati est choisi de façon à rendre le compensateur non minimal, pour ensuite pouvoir réduire son ordre. Après avoir éliminé les états non observables, on obtient un compensateur d'ordre $k = n - p_2$. Cependant, p_2 est beaucoup plus petit que n pour des systèmes d'ordre élevé, et une telle réduction s'avère inefficace. En général, on ne connaît pas la façon dont $Q(s)$ affecte la structure du compensateur final. Des conditions suffisantes de solvabilité du problème H_∞ d'ordre réduit ont été présentées dans [80]. Au lieu des deux ARE désaccouplées (2.73) et (2.75), on y trouve quatre équations de Riccati couplées, et donc difficile à résoudre.

Les techniques de synthèse H_∞ discutées jusqu'à présent exigent que la matrice de transmission directe D_{22} soit nulle, afin que les expressions des matrices de la représentation en espace d'état du système en boucle fermée soient affines dans les matrices de la représentation en espace d'état du compensateur. Si le système ne satisfait pas cette hypothèse, il existe, toutefois, une procédure permettant de créer la condition $D_{22} = 0$ artificiellement. Avant de la présenter, définissons $\hat{P}_{22}(s)$ comme la portion strictement propre du transfert $P_{22}(s)$. Ensuite, remarquons que les deux systèmes en boucle fermée sur la Figure 2.4 sont équivalents, du point de vue du transfert $T_{zw}(s)$, au système en boucle fermée originel sur la Figure 2.2. Le système auxiliaire $\hat{P}(s)$ à droite de la Figure 2.4 correspond à $P(s)$ avec la matrice D_{22} anulée, tandis que le compensateur auxiliaire $\hat{K}(s)$ est donnée par

$$\hat{K}(s) \triangleq (I - K(s)D_{22})^{-1} K(s) = K(s) (I - D_{22}K(s))^{-1}. \quad (2.79)$$

Autrement dit, on a l'équivalence

$$T_{zw}(s) = \mathcal{F}_l(P(s), K(s)) = \mathcal{F}_l(\hat{P}(s), \hat{K}(s)).$$

Notons que $\hat{P}(s)$ a la matrice de transmission directe de u à y nulle. Par conséquent, nous avons maintenant un système auxiliaire satisfaisant à l'Hypothèse 2.2.

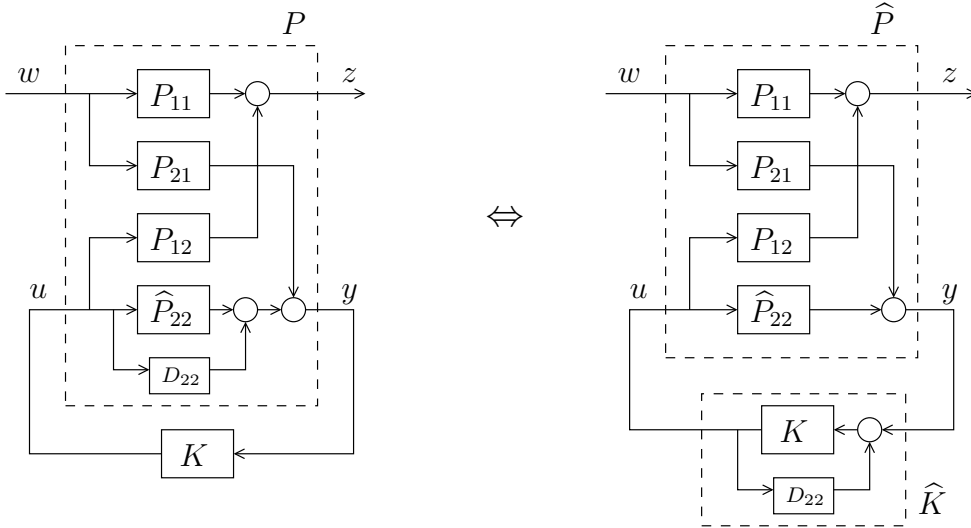


FIG. 2.4 – Formes standards équivalentes pour des systèmes dont $D_{22} \neq 0$.

La synthèse H_∞ pour des systèmes ayant la matrice de transmission D_{22} non nulle peut être exécutée, ainsi, en deux étapes :

1. un compensateur $\hat{K}(s)$ est synthétisé pour le système auxiliaire $\hat{P}(s)$ par une des techniques présentées précédemment,
2. le compensateur final $K(s)$ pour le système originel $P(s)$ est déterminé à partir de la transformation inverse de (2.79) :

$$K(s) = \left(I + \hat{K}(s)D_{22} \right)^{-1} \hat{K}(s) = \hat{K}(s) \left(I + D_{22}\hat{K}(s) \right)^{-1} = \mathcal{F}_l \left(\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & -D_{22} \end{bmatrix}, \hat{K} \right). \quad (2.80)$$

La méthode ci-dessus est utilisée généralement dans les problèmes de synthèse H_∞ avec des contraintes structurelles du type ordre réduit, parce que dans ce cas la transformation (2.80) peut être appliquée sans perte de généralité. En effet, le compensateur final $K(s)$ possédera l'ordre égal ou plus petit que celui du compensateur $\hat{K}(s)$ initialement synthétisé. Malheureusement, il existe des contraintes structurelles qui ne sont pas préservées par la transformation (2.80). Considérons, par exemple, le cas élémentaire d'un compensateur PI monovarié :

$$\hat{K}(s) = K_P + \frac{K_I}{s}.$$

On peut facilement vérifier que l'expression du compensateur final après la transformation (2.80) sera

$$K(s) = \frac{K_P s + K_I}{(D_{22}K_P + 1)s + D_{22}K_I}. \quad (2.81)$$

Ainsi, la loi de commande finale n'est plus du type PI. Comme deuxième exemple, considérons le cas d'un compensateur décentralisé. Inspiré par le concept d'invariance quadratique [137], on sait que la structure diagonale du compensateur décentralisé n'est en général pas préservée par la LFT (2.80), sauf dans le cas très particulier où la matrice D_{22} admet elle aussi une structure diagonale.

En conclusion, les méthodes H_∞ du type LYAPUNOV ont deux limitations majeures. Premièrement, la classe de contraintes structurelles qu'elles sont capables de gérer n'est pas assez générale. En outre, ces méthodes ne sont pas appropriées aux systèmes d'ordre élevé à cause de la présence des variables de LYAPUNOV.

Approches du type optimisation non lisse

Une autre approche fondamentalement différente au problème de synthèse H_∞ part directement de la définition de la norme H_∞ d'un transfert. On cherche alors à résoudre le problème de minimisation

$$\underset{\kappa \in \mathbb{R}^q}{\text{minimiser}} \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(T_{zw}(j\omega, \kappa)). \quad (2.82)$$

Cette approche présente deux grands avantages. D'abord, le programme (2.82) ne comprend que les variables libres du compensateur. Deuxièmement, une plus grande classe de structures de compensateurs peut être manipulée via le paramétrage \mathcal{K} en (2.47). Malheureusement, le programme (2.82) est un problème d'optimisation difficile à résoudre. En premier lieu, il est question d'un problème doublement non lisse, à cause de la plus grande valeur singulière et de l'opérateur SUP. Par ailleurs, il s'agit d'un problème de la Programmation Semi-Infinie. Cette expression fait référence à des problèmes d'optimisation où un nombre fini de variables apparaît dans un nombre infini de contraintes. Exactement comme dans le cas du programme (2.82), où la borne supérieure est calculée sur tout le continuum de fréquences $\omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Enfin, c'est un programme non convexe à cause de la dépendance du type LFT en (2.36) de T_{zw} en les variables du compensateur.

Le programme (2.82) n'est pas à la portée de la programmation non linéaire conventionnelle, et il exige des algorithmes spécialisés. Des techniques d'optimisation non lisse pour ce problème ont été proposées par APKARIAN et NOLL [11]. La méthode de OVERTON *et al.* [79, 78] s'appuie sur l'algorithme de échantillonnage de gradients de BURKE *et al.* [32, 31, 33]. Tous ces algorithmes offrent un certificat de convergence vers un point critique qui est le plus souvent un minimum local.

Un inconvénient de la formulation (2.82) est lié à la stabilité du système en boucle fermée, car c'est la norme \mathcal{L}_∞ que l'on minimise, en réalité. Pour remédier à ce problème, une alternative consiste à ajouter une contrainte sur l'abscisse spectrale de la matrice d'état du système en boucle fermée. Une autre option est l'utilisation du paramétrage de YOULA [170, 45], ce qui permet à la fois d'assurer la stabilité du système en boucle fermée et de rendre le programme (2.82) convexe. Le paramétrage de YOULA est basé sur la factorisation doublement coprime de $P_{22}(s)$, indiquée dans le lemme ci-dessous.

Lemme 2.11. [58, p.23] *Pour chaque matrice $P_{22}(s)$ propre, réelle et rationnelle, il existe huit matrices dans \mathcal{RH}_∞ satisfaisant les équations*

$$P_{22}(s) = N(s)M(s)^{-1} = \tilde{M}(s)^{-1}\tilde{N}(s), \quad (2.83)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}(s) & -\tilde{Y}(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & Y(s) \\ N(s) & X(s) \end{bmatrix} = I. \quad (2.84)$$

À partir de la factorisation de $P_{22}(s)$, on peut paramétrer tous les compensateurs stabilisant $P_{22}(s)$ en boucle fermée, conformément au théorème suivant.

Théorème 2.12. [58, p.38] *L'ensemble de tous les compensateurs propres, réels et rationnels $K(s)$ qui stabilisent $P_{22}(s)$ est paramétré par*

$$K = (Y - MQ)(X - NQ)^{-1} = (\tilde{X} - Q\tilde{N})^{-1}(\tilde{Y} - Q\tilde{M}), \quad (2.85)$$

où $Q \in \mathcal{RH}_\infty$.

Enfin, le théorème suivant indique l'impact du paramétrage (2.85) sur l'expression du transfert $T_{zw}(s)$.

Théorème 2.13. [58, p.43] *Les trois matrices de transfert suivantes appartiennent à \mathcal{RH}_∞ .*

$$T_1(s) \triangleq P_{11}(s) + P_{12}(s)M(s)\tilde{Y}(s)P_{21}(s) \quad (2.86)$$

$$T_2(s) \triangleq P_{12}(s)M(s) \quad (2.87)$$

$$T_3(s) \triangleq \tilde{M}(s)P_{21}(s) \quad (2.88)$$

Si $K(s)$ est paramétré par (2.85), alors la matrice de transfert de w à z est donnée par

$$T_{zw}(s) = T_1(s) - T_2(s)Q(s)T_3(s). \quad (2.89)$$

En somme, le transfert T_{zw} est affine par rapport au paramètre de YOULA $Q(s)$. De plus, la fonction composée $\|\cdot\|_\infty \circ T_{zw}$ est elle aussi affine en $Q(s)$. Cependant, ce résultat ne permet pas encore de construire une approche réaliste, car le paramètre $Q(s)$ est défini dans l'espace de dimension infinie \mathcal{RH}_∞ . Pour éliminer ce problème, une option consiste à contraindre $Q(s)$ dans un espace de dimension finie de toutes les matrices de transfert qui ont la forme particulière [147]

$$Q(s) = X_1Q_1(s) + \cdots + X_NQ_N(s), \quad (2.90)$$

où $Q_1, \dots, Q_N \in \mathcal{RH}_\infty$ et X_1, \dots, X_N sont des coefficients matriciels statiques. Les éléments $Q_i(s)$ ont été choisis en [25], par exemple, comme

$$Q_i(s) = \left(\frac{p}{s+p} \right)^i, \quad p > 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.91)$$

tandis qu'en [131] on trouve

$$Q_i(s) = \left(\frac{s+p}{s+p} \right)^{i-1}, \quad p > 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.92)$$

Avec le paramétrage de YOULA (2.85) et l'approximation (2.90), le programme (2.82) devient

$$\underset{X_1, \dots, X_N \in \mathbb{R}^{m_2 \times p_2}}{\text{minimiser}} \quad \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(T_1(s) - T_2(s)(X_1 Q_1(s) + \dots + X_N Q_N(s))T_3(s)) \quad (2.93)$$

Si l'approximation (2.90) est suffisamment riche, alors la solution de (2.93) s'approche de la solution du programme originel (2.82).

L'intérêt d'une telle approche est double : non seulement le programme (2.93) est un problème d'optimisation convexe, mais également la stabilité interne du système en boucle fermée est garantie automatiquement grâce au seul paramétrage (2.85) du compensateur. BOYD et BARRATT [25] proposent d'utiliser des algorithmes d'optimisation convexe comme la méthode de plans sécants afin de résoudre le programme (2.93), tandis que POLAK et SALCUDEAN [131] utilisent une technique d'optimisation non lisse générale. Cette approche a, néanmoins, quelques désavantages importants. D'abord, on ne sait pas comment choisir les pôles des éléments Q_i de façon à garantir que l'approximation (2.90) de $Q(s)$ soit suffisamment riche sans que le nombre N d'éléments dans la base n'explose. Il faut remarquer que la dimension de la base se reflétera dans l'ordre du compensateur. Par ailleurs, on ne sait pas non plus comment des contraintes structurelles sur le compensateur final $K(s)$ se traduisent sur le paramètre libre $Q(s)$, et vice-versa. Par conséquent, le compensateur final produit par ces méthodes est normalement dépourvu d'une structure d'intérêt pratique.

Enfin, nous notons que la synthèse H_∞ basée sur la résolution du programme d'optimisation non lisse (2.82) a l'avantage de pouvoir être facilement généralisée au problème de minimiser la plus grande valeur singulière d'un transfert dans un intervalle particulier de fréquences. Pour cela, il suffit de limiter le calcul de la fonction à l'intervalle en question, au lieu de la calculer pour toutes les fréquences sur l'axe imaginaire. On a alors le programme

$$\underset{\kappa \in \mathbb{R}^q}{\text{minimiser}} \quad \sup_{\omega \in \Omega} \bar{\sigma}(T_{zw}(j\omega, \kappa)), \quad (2.94)$$

où Ω représente l'intervalle de fréquence. Une telle généralisation dans le contexte de l'approche LYAPUNOV est beaucoup plus complexe, puisque cela exige l'extension du lemme de KALMAN-YAKUBOVICH-POPOV [91, 87].

2.2.4 Synthèse dans le domaine temporel à partir de la réponse à une entrée fixée

Un certain nombre de techniques de synthèse de compensateurs sont basées sur la réponse temporelle du système en boucle fermée à une entrée test particulière. En général,

l'entrée test représente un signal déterministe fondamental comme l'échelon, la rampe, un signal sinusoïdal, etc.

Dans les approches du type modèle de référence, par exemple, on cherche un compensateur stabilisant tel que la réponse $z(t)$ du système en boucle fermée soit la plus proche possible d'une certaine réponse de référence $\bar{z}(t)$. Le problème est alors posé comme la minimisation de la norme de l'erreur $e(t) \triangleq \bar{z} - z(t)$ entre la réponse de référence et la réponse du système. Une première façon de résoudre ce problème consiste à résoudre le problème H_2 pour le système de synthèse sur la Figure 2.5. Considérons que le système n'a qu'une seule entrée ($m_1 = 1$). Le transfert $W(s)$ représente la transformée de LAPLACE du signal test, tandis que $M(s)$ est la transformée de LAPLACE de la réponse temporelle de référence. Dans ce cas, minimiser la norme H_2 du transfert de δ à e est équivalent à minimiser la norme L_2 de l'erreur : $\|\bar{z}(t) - z(t)\|_2$. Dans cette formulation de modèle de référence, des paramètres temporels transitoires comme le dépassement, le temps de montée ou de réponse doivent être mis au point indirectement par le biais du modèle $M(s)$. Dans les approches du type moindre carré, en général, la synthèse à partir de la réponse à une entrée fixée comprend un problème d'optimisation lisse. C'est le cas, par exemple, des techniques du type *Iterative Feedback Tuning* [85].

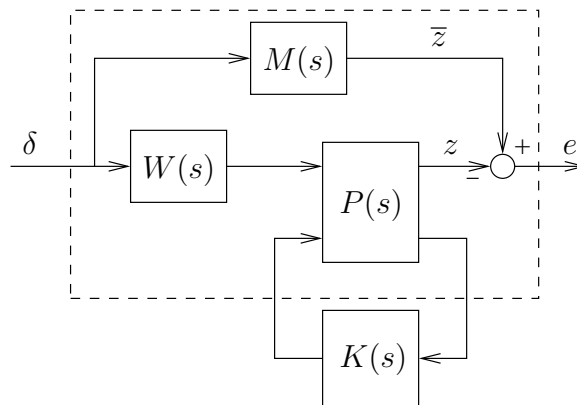


FIG. 2.5 – Forme standard pour le problème de modèle de référence

Au lieu de la norme L_2 , on peut aussi considérer la norme L_∞ de l'erreur dans le problème de modèle de référence. D'une part, la norme L_∞ présente l'inconvénient de ne pas pouvoir être calculée directement à partir d'une formule explicite. De plus, elle ne possède pas d'expression dans le domaine fréquentiel. D'autre part, la norme L_∞ a un rapport naturel avec des paramètres temporels transitoires comme le dépassement, par exemple. Dénotons par $\phi(t)$ la réponse du système sur la Figure 2.5 lorsqu'une entrée impulsionnelle est appliquée à l'entrée $\delta(t)$, et supposons que nous connaissons cette réponse. Le problème de modèle de référence L_∞ peut être formulé alors comme le programme de minimisation non lisse et semi-infini

$$\underset{\kappa \in \mathbb{R}^q}{\text{minimiser}} \quad \max_{t \in \mathbb{R}} |\phi(t, \kappa)|. \quad (2.95)$$

Dans les références [44, 38, 52], ce problème L_∞ est considéré dans le contexte des systèmes à temps discret (donc l_∞) en utilisant le paramétrage de YOULA. Dans le cas de systèmes SISO à temps continu, il a été démontré par WANG et SZNAIER [162] que la trajectoire ϕ^* , solution optimale du problème L_∞ pour l'ensemble de compensateurs stabilisant², présente dans le cas général des termes avec des retards. Par conséquent, le système en boucle fermée et le compensateur optimaux sont des transferts non-rationnels. L'approche dans les travaux [117, 163, 81] consiste à approximer la solution optimale de dimension infinie par une approximation rationnelle finie. Malheureusement, ces approches sont limitées à des systèmes SISO et conduisent à des compensateurs d'ordre très élevé.

Si le système n'a qu'une seule entrée ($m_1 = 1$), alors le problème de synthèse L_∞ pour une entrée impulsionnelle admet une caractérisation du type inégalités matricielles [26, 146] :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & \xi \\ \kappa \in \mathbb{R}^q, X \in \mathbb{S}^{(n+k)}, \xi \in \mathbb{R} & \\ \text{sous} & \begin{array}{l} X \succ 0, \\ X\mathcal{A}(\kappa) + \mathcal{A}(\kappa)^T X \prec 0 \\ \begin{bmatrix} X & X\mathcal{B}(\kappa) \\ \mathcal{B}(\kappa)^T X & \xi I \end{bmatrix} \succ 0 \\ \begin{bmatrix} X & \mathcal{C}(\kappa)^T \\ \mathcal{C}(\kappa) & \xi I \end{bmatrix} \succ 0. \end{array} \end{array} \quad (2.96)$$

Le programme (2.96) est un problème BMI lorsque $D_{22} = 0$ et le paramétrage $\kappa \mapsto \mathcal{K}(\cdot)$ est affiné. Pour un compensateur d'ordre plein, on peut le récrire comme un SDP à partir d'un changement de variables. Cependant, les conditions matricielles en (2.96), obtenues via le concept d'ensembles atteignables, ne sont que suffisantes et peuvent être assez "conservatrices".

Nous nous intéressons, plus précisément, au problème de synthèse dans le domaine temporel énoncé ci-dessous.

Problème de synthèse dans le domaine temporel

Trouver un compensateur structuré (2.47) qui stabilise le système (2.30) en boucle fermée, et tel que la réponse $z(t)$ du système en boucle fermée à une entrée fixée satisfasse l'enveloppe de contraintes

$$l(t) \leq z(t) \leq u(t).$$

Au moyen de l'enveloppe de contraintes représenté par $l(t)$ et $u(t)$, il est possible de prendre en compte des contraintes temporelles sur les trajectoires de l'état, la commande, ou encore d'autres contraintes opérationnelles, comme dans l'exemple sur la Figure 2.6 pour un problème de suivi de consigne.

²WANG et SZNAIER [162] introduisent la notion de L_∞ -stabilisation au lieu de la stabilisation asymptotique. En effet, il faut observer que les pôles du transfert $M(s)$, et surtout de $W(s)$, ne sont pas commandables.

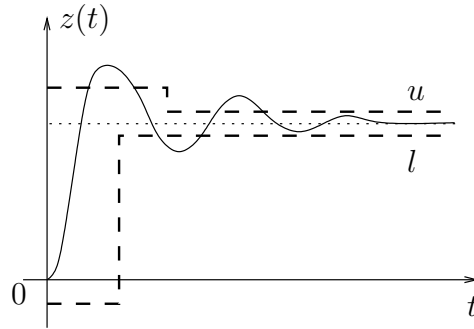


FIG. 2.6 – Gabarit temporel pour un problème de suivi de consigne

Ce problème de synthèse dans le domaine temporel avec une enveloppe de contraintes peut être résolu à partir du programme suivant :

$$\underset{\kappa \in \mathbb{R}^q}{\text{minimiser}} \quad f(\kappa) \triangleq \max_{t \in \mathbb{R}} \max(z(t, \kappa) - u(t), l(t) - z(t, \kappa)). \quad (2.97)$$

Une solution au problème de synthèse original aura été déterminée dès que la valeur de la fonction objectif en (2.97) sera devenue non positive. La généralisation au cas comprenant plusieurs sorties est triviale, il suffit d'ajouter une fonction MAX calculée parmi toutes les composantes du vecteur z . En vérité, ce problème de synthèse peut être conçu comme une généralisation du problème de synthèse L_∞ : il suffit de considérer $u(t), l(t) \equiv 0$ et d'observer que

$$\max(z, -z) = |z|.$$

En pratique, la réponse $z(t)$ doit être obtenue par une simulation réalisée sur un horizon de temps fini. Par conséquent, le MAX en (2.97) sera calculé pour un intervalle de temps fini.

Afin de résoudre (2.97), LASSAMI et FONT [100, 101, 102] utilisent l'algorithme de BURKE *et al.* [32, 31, 33], tandis que BOMPART *et al.* [21] utilisent une technique d'optimisation non lisse inspirée par les travaux de POLAK [129, 130]. BOYD et BARRATT [25] et POLAK et SALCUDEAN [131] ont adopté le paramétrage de YOULA, afin de rendre programme (2.97) convexe. On souligne, encore une fois, que le paramétrage de YOULA n'est plus approprié lorsqu'on impose des contraintes structurelles au compensateur.

Sous certaines conditions additionnelles, le programme (2.97) admet une formulation lisse équivalente. On admet, d'abord, que la réponse temporelle $\kappa \mapsto z(t, \cdot)$ est continûment différentiable en κ . Ensuite, on échantillonne la réponse $z(t, \kappa)$ avec un pas de discrétisation T_s fixé. Si le même pas est utilisé pour toutes les itérations, on a alors le programme équivalent

$$\begin{aligned} & \underset{\kappa \in \mathbb{R}^q, \zeta \in \mathbb{R}}{\text{minimiser}} \quad \zeta \\ & \text{sous} \quad z(kT_s, \kappa) - u(kT_s) < \zeta, \quad k = 1, \dots, N \\ & \quad \quad l(kT_s) - z(kT_s, \kappa) < \zeta, \quad k = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.98)$$

Programme (2.98) est un problème d'optimisation lisse, dans le champ d'application des techniques standards de la programmation non linéaire. Un inconvénient majeur de cette approche est que le nombre de contraintes en (2.98) est inversement proportionnel au pas T_s . Ainsi, un pas d'échantillonnage plus petit permet une description plus précise de z , mais implique, en revanche, un nombre trop élevé de contraintes.

2.2.5 Synthèse multiobjectif

Nous avons déjà souligné que les problèmes réalistes de synthèse sont intrinsèquement multiobjectifs, puisqu'ils comprennent une famille de différentes spécifications à la fois dans le domaine temporel et fréquentiel qui sont imposées au système en bouclée fermée et au compensateur proprement dit. Une technique de synthèse satisfaisante doit, alors, être capable de gérer diverses spécifications dans les deux domaines d'une façon directe, flexible et intuitive.

Une façon assez répandue d'aborder le problème multiobjectif de synthèse est basée sur une technique purement fréquentielle. Il est notoire que différentes propriétés du système en boucle fermée vis-à-vis de la performance et de la robustesse sont étroitement liées aux propriétés des diverses fonctions de sensibilité dans des bandes fréquentielles particulières [174]. On peut, ainsi, poser le problème de synthèse comme le façonnement dans le domaine fréquentiel des diverses fonctions de sensibilité de sorte que les différentes spécifications de performance et de robustesses soient satisfaites. Malheureusement, il n'existe pas actuellement une technique de synthèse fréquentielle permettant de prendre en compte efficacement des contraintes sur différents transferts simultanément.

L'approche sensibilité mixte pondérée, par exemple, est une manière indirecte de traiter le problème fréquentiel multiobjectif à partir d'une technique monocritère comme les synthèses H_∞ ou H_2 . Pour le système de synthèse particulier de la Figure 2.7, par exemple, l'idée est de minimiser la norme (2 ou ∞) du transfert de w à z

$$T_{zw} = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 R \\ W_3 T \end{bmatrix}, \quad (2.99)$$

où S , R et T représentent les fonctions de sensibilité

$$S = (I + GK)^{-1}, \quad (2.100)$$

$$R = K(I + GK)^{-1}, \quad (2.101)$$

$$T = GK(I + GK)^{-1}. \quad (2.102)$$

Par la sélection appropriée de pondérations fréquentielles (W_1, W_2, W_3), on cherche alors à façonner les fonctions de sensibilité de manière à satisfaire les différentes spécifications. Un premier inconvénient de cette approche est que les normes pondérées sont minimisées sur tout le spectre de fréquences, tandis que les contraintes sur les différentes sensibilités n'interviennent que sur des bandes particulières de fréquences, ce qui rend la sélection des fonctions de pondérations difficile. En outre, la présence des fonctions de pondérations

augmente l'ordre du compensateur lorsqu'une technique d'ordre plein est utilisée. Enfin, le concepteur doit traiter des spécifications temporelles indirectement via les pondérations fréquentielles par une démarche qui n'est pas intuitive. Cette dernière limitation s'applique à toutes les techniques purement fréquentielles, comme celles du type *loop-shaping* [47, 140, 113], par exemple.

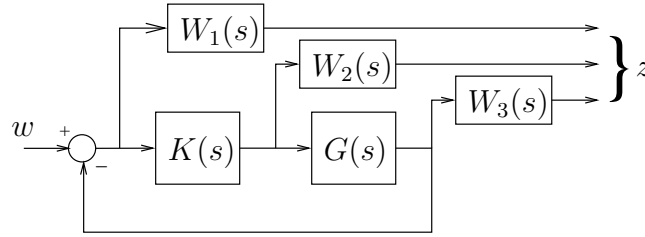


FIG. 2.7 – Système de synthèse pour le problème de sensibilité mixte

Dans le cadre des approches BMI ou LMI, des caractérisations multiobjectif peuvent être obtenues à partir du groupement des contraintes relatives aux différentes spécifications. Considérons, à titre illustratif, que nous cherchons à résoudre le problème de synthèse L_∞/H_∞ suivant : trouver un compensateur structuré (2.47) qui stabilise le système (2.30) en boucle fermée, et tel que à la fois la norme L_∞ de la réponse du système à une entrée impulsionnelle et la norme H_∞ du transfert de w à z soient minimisées. Sous l'hypothèse que $D_{22} = 0$, $m_1 = 1$ et le paramétrage $\kappa \mapsto \mathcal{K}(\cdot)$ est affiné, ce problème de synthèse peut être résolu par le programme BMI suivant :

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimiser} & c_1\xi + c_2\gamma \\
 \kappa \in \mathbb{R}^q, \xi, \gamma \in \mathbb{R} & \\
 X_1, X_2 \in \mathbb{S}^{(n+k)} & \\
 \text{sous} & X_1 \succ 0, X_2 \succ 0, \\
 & X_1\mathcal{A}(\kappa) + \mathcal{A}(\kappa)^T X_1 \prec 0 \\
 & \begin{bmatrix} X_1 & X_1\mathcal{B}(\kappa) \\ \mathcal{B}(\kappa)^T X_1 & \xi I \end{bmatrix} \succ 0 \\
 & \begin{bmatrix} X_1 & \mathcal{C}(\kappa)^T \\ \mathcal{C}(\kappa) & \xi I \end{bmatrix} \succ 0 \\
 & \begin{bmatrix} X_2\mathcal{A}(\kappa) + \mathcal{A}(\kappa)^T X_2 & X_2\mathcal{B}(\kappa) & \mathcal{C}(\kappa)^T \\ \mathcal{B}(\kappa)^T X_2 & -\gamma I & \mathcal{D}(\kappa)^T \\ \mathcal{C}(\kappa) & \mathcal{D}(\kappa) & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0,
 \end{array} \tag{2.103}$$

où les scalaires c_1 et c_2 servent à pondérer l'importance relative entre les critères L_∞ et H_∞ . Dans le cas très particulier d'un compensateur d'ordre plein et lorsqu'on adopte une même variable de LYAPUNOV pour tous les critères ($X = X_1 = X_2$), le programme (2.103) admet une formulation SDP équivalente à partir d'un changement des variables [146]. Toutefois, on sait que l'adoption d'une variable de LYAPUNOV unique introduit du conservatisme. Même si des artifices ont été proposés afin de réduire ce conservatisme, leur efficacité reste à prouver [49]. Dans le cas plus général des BMI, l'utilisation de variables

différentes de LYAPUNOV limite encore plus la portée des ces techniques, car le nombre de variables de synthèse augmente non seulement d'une façon quadratique avec l'ordre du système, mais aussi linéairement avec le nombre de spécifications.

Une approche générale et naturelle consiste à traduire le problème de synthèse sous la forme d'un problème d'optimisation multiobjectif

$$\underset{\kappa \in \mathcal{D}}{\text{minimiser}} \quad (\psi_1(\kappa), \dots, \psi_N(\kappa)), \quad (2.104)$$

où \mathcal{D} représente l'espace de faisabilité défini par les spécifications dures du problème. Nous rappelons ci-dessous les quelques critères de synthèse discutés jusqu'à présent qui peuvent être intégrés au programme (2.104) :

- norme plus grande valeur singulière pour un intervalle de fréquences

$$\psi_{\bar{\sigma}}(\kappa) = \sup_{\omega \in \Omega} \bar{\sigma}(T_{zw}(j\omega, \kappa)), \quad (2.105)$$

avec la norme H_∞ comme un cas particulier

$$\psi_\infty(\kappa) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(T_{zw}(j\omega, \kappa)); \quad (2.106)$$

- violation de l'enveloppe temporelle

$$\psi_t(\kappa) = \max_{t \in \mathbb{R}} \max(z(t, \kappa) - u(t), l(t) - z(t, \kappa)), \quad (2.107)$$

avec la norme L_∞ comme un cas particulier

$$\psi_{L_\infty}(\kappa) = \max_{t \in \mathbb{R}} |z(t, \kappa)|; \quad (2.108)$$

- abscisse spectrale :

$$\psi_\alpha(\kappa) = \max_j \text{Re}(\lambda_j(\mathcal{A}(\kappa))). \quad (2.109)$$

En effet, une grande variété de critères admettent une caractérisation similaire [25].

L'espace \mathcal{D} est fréquemment caractérisé par un ensemble d'inégalités

$$\mathcal{D} = \{\kappa \in \mathbb{R}^q \mid g_i(\kappa) \leq 0, i = 1, \dots, M\}, \quad (2.110)$$

où les différentes fonction $g_i(\kappa)$ peuvent aussi représenter des critères tels que (2.105)-(2.109). Par exemple, la contrainte dure de stabilisation peut être formulée comme $g_\alpha(\kappa) \triangleq \psi_\alpha(\kappa) < 0$.

Il existe différentes approches essayant de résoudre des problèmes d'optimisation multiobjectif tels que (2.104). L'approche la plus traditionnelle consiste à combiner les différents critères de l'objectif vectoriel dans une unique fonction objectif scalaire $f(\kappa) : \mathbb{R}^q \mapsto \mathbb{R}$. Le problème d'optimisation devient alors

$$\underset{\kappa \in \mathcal{D}}{\text{minimiser}} \quad f(\kappa). \quad (2.111)$$

Dans un problème réaliste, les différents critères sont inévitablement concurrents, de sorte qu'il est rarement possible de trouver une solution minimisant tous les objectifs à la fois. Par conséquent, le concepteur doit choisir la solution qui représente le meilleur compromis vis-à-vis des différentes spécifications. La fonction objectif doit alors, non seulement bien prendre en compte les préférences du concepteur, mais elle doit également préserver toutes les solutions dans la frontière d'optimalité de PARETO [5].

La fonction objectif la plus populaire est celle du type somme linéairement pondérée

$$f(\kappa) = \sum_{i=1}^N c_i \psi_i(\kappa), \quad (2.112)$$

où $c_i \in \mathbb{R}$. La fonction (2.112) a l'avantage d'être lisse si les ψ_i le sont. Par contre, la seule technique de *scalarization* qui produit toutes les solutions du type PARETO malgré la structure du problème est celle du type norme de CHEBYSHEV [121] :

$$f(\kappa) = \max_{1 \leq i \leq N} c_i (\psi_i(\kappa) - \chi_i), \quad (2.113)$$

où $c_i, \chi_i \in \mathbb{R}$. Contrairement à la somme linéairement pondérée, la fonction MAX en (2.113) est non lisse.

En somme, une grande classe de problèmes réalistes de synthèse de compensateurs peut être formulée comme un programme de minimisation sous contraintes du type inégalités :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & \max_{1 \leq i \leq N} c_i (\psi_i(\kappa) - \chi_i) \\ \text{sous} & g_j(\kappa) \leq 0, \quad 1 \leq j \leq M. \end{array} \quad (2.114)$$

Afin de récrire le programme (2.114) sous une forme plus conventionnelle, nous définissons la fonction de violation de contraintes par

$$g(\kappa) \triangleq \max_{1 \leq j \leq M} g_j(\kappa). \quad (2.115)$$

Remarquons que les contraintes en (2.114) sont satisfaites lorsque $g(\kappa) \leq 0$.

Nous avons, finalement, le programme de minimisation

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & f(\kappa) = \max_{1 \leq i \leq N} c_i (\psi_i(\kappa) - \chi_i) \\ \text{sous} & g(\kappa) = \max_{1 \leq j \leq M} g_j(\kappa) \leq 0. \end{array} \quad (2.116)$$

Le programme (2.116) constitue un cadre de travail général et flexible permettant de résoudre une grande classe de problèmes de synthèse d'importance pratique. En revanche, il est question d'un programme non lisse, non convexe et, dans le cas général, semi-infini à cause des critères tels que (2.105) ou (2.107). En conséquence, il exige une technique d'optimisation spécialisée.

Afin de résoudre (2.116), BOYD et BARRATT [25] ont utilisé des techniques de l'optimisation convexe, tandis que POLAK et SALCUDEAN [131] ont adopté une technique

d'optimisation non lisse semi-infinie générale. Cependant, ces travaux s'appuient sur le paramétrage de YOULA, lequel n'est malheureusement pas approprié à la synthèse de compensateurs structurés.

Nous adoptons le cadre de travail représenté par le programme (2.116). De plus, nous utilisons le paramétrage (2.47) pour la structure du compensateur, au lieu de le paramétrage de YOULA. Enfin, nous utilisons une technique d'optimisation non lisse semi-infinie en vue de résoudre le problème MINIMAX (2.116) résultant, laquelle sera présentée dans le prochain chapitre.

2.3 Conclusion

Nous avons présenté des notions fondamentales de l'analyse de systèmes et de la synthèse de compensateurs dont nous aurons besoin par la suite. Simultanément, nous avons indiqué l'inadéquation des techniques de synthèse actuelles à résoudre des problèmes réalistes comprenant des contraintes structurelles sur la loi de commande.

Les techniques de synthèse BMI ou LMI, devenues assez populaires ces dernières années, sont limitées à des problèmes de petite taille à cause des variables de LYAPUNOV. Par ailleurs, la classe de structures de compensateur que ces techniques sont capables de gérer n'est pas suffisamment générale, surtout lorsqu'on cherche une formulation qui ne comprend que des SDP. En outre, l'expérience semble montrer que les algorithmes destinés à la résolution des problèmes BMI sont confrontés dans la pratique à des importantes difficultés numériques telles que la différence d'ordre de grandeur entre les variables de LYAPUNOV et les paramètres du compensateur.

On peut alternativement poser le problème de synthèse comme un problème d'optimisation multiobjectif. Néanmoins, une série de critères de synthèse d'une grande valeur pratique sont non convexes, non lisses et même semi-infinis, de sorte que le problème de minimisation associé n'est pas à la portée de la programmation non linéaire conventionnelle. Les approches basées sur le paramétrage de YOULA cherchent à rendre le problème de minimisation convexe. Cependant, le paramétrage de YOULA n'est pas approprié à la synthèse de compensateurs structurés, car le compensateur final produit par ces méthodes est normalement dépourvu d'une structure d'intérêt pratique. Dans notre travail, nous résolvons directement le problème de minimisation non lisse, non convexe, éventuellement semi-infini, et sous contraintes. Nous développerons dans le chapitre suivant une technique d'optimisation adaptée à la classe de problèmes discutés précédemment.

Chapitre 3

Optimisation non lisse

DANS le chapitre précédent, nous avons montré que de nombreux problèmes multiobjectif de synthèse pratiques peuvent être formulés comme un certain programme d'optimisation du type MINIMAX, non convexe, semi-infini et avec contraintes. Dans le présent chapitre, nous introduisons une technique d'optimisation non lisse qui permet de résoudre de tels programmes.

Nous commençons par rappeler quelques concepts fondamentaux de l'analyse non lisse. Nous nous intéressons particulièrement à la classe des fonctions localement Lipschitziennes. Pour l'analyse des propriétés variationnelles des fonctions localement Lipschitziennes, nous faisons appel à la notion de sous-différentiel de CLARKE [43].

À partir des outils d'analyse non lisse introduits, nous obtenons ensuite des conditions d'optimalité pour le problème d'optimisation en discussion. Puis, nous présentons la technique d'optimisation non lisse utilisée dans notre travail. Enfin, nous déterminons le sous-différentiel de quelques fonctions associées aux principaux critères de synthèse considérés dans cette thèse.

3.1 Analyse non lisse

Les notions présentées dans cette section sont discutées en profondeur dans la référence [43]. Nous citons également [129, 83, 130, 69, 19] comme des références additionnelles.

3.1.1 Introduction

Nous dénotons par $B(x, r)$ la boule ouverte de centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$, définie par

$$B(x, r) \triangleq \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}.$$

Commençons par la définition des fonctions Lipschitziennes.

Définition 3.1. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est dite Lipschitzienne sur $S \subset \mathbb{R}^n$ s'il existe une constante $L > 0$ telle que, pour tout $y, z \in S$,

$$|f(y) - f(z)| \leq L\|y - z\|. \quad (3.1)$$

La fonction f est dite localement Lipschitzienne en $x \in \mathbb{R}^n$ s'il existe un réel positif $\epsilon > 0$ tel que f est Lipschitzienne sur $B(x, \epsilon)$.

Une fonction localement Lipschitzienne en x présente, ainsi, un taux d'accroissement qui est borné dans un voisinage de x . D'autre part, une fonction localement Lipschitzienne en x n'est pas forcément différentiable en x .

Définition 3.2. La fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ admet une dérivée directionnelle en $x \in \mathbb{R}^n$ dans la direction $d \in \mathbb{R}^n$ si la limite

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{f(x + td) - f(x)}{t} \quad (3.2)$$

existe et est finie. On la note alors $f'(x, d)$.

Une fonction f différentiable en x admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions d , et on a $f'(x, d) = \nabla f(x)^T d$. La réciproque n'est pas vraie en général, sauf si les dérivées directionnelles sont continues.

La propriété de sous-linéarité définie ci-dessous est importante pour la notion de sous-différentiel d'une fonction.

Définition 3.3. Une fonction $\sigma : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est dite sous-linéaire lorsqu'elle présente les propriétés suivantes :

1. sous-additivité :

$$\sigma(x + y) \leq \sigma(x) + \sigma(y), \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n \quad (3.3)$$

2. *homogénéité positive :*

$$\sigma(tx) = t\sigma(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t > 0. \quad (3.4)$$

Toute fonction sous-linéaire présente la propriété de majorer au moins une fonction linéaire. On a alors, le théorème suivant :

Théorème 3.4. *Si $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction sous-linéaire, alors l'ensemble*

$$S_\sigma \triangleq \{s \in \mathbb{R}^n : \langle s, x \rangle \leq \sigma(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n\} \quad (3.5)$$

est non vide, compact et convexe. De plus, on a la relation

$$\sigma(x) = \sup \{\langle s, x \rangle : s \in S_\sigma\}. \quad (3.6)$$

Réciproquement, étant donné un ensemble S non vide, compact et convexe, la fonction $\sigma_S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de S , définie par

$$\sigma_S(x) \triangleq \sup \{\langle s, x \rangle : s \in S\}, \quad (3.7)$$

est sous-linéaire, et elle est dite fonction support de S .

3.1.2 Sous-différentiel d'une fonction convexe

Avant de présenter la notion de sous-différentiel de CLARKE, il convient rappeler la définition du sous-différentiel d'une fonction convexe [83]. En effet, le sous-différentiel de CLARKE, défini pour la classe plus générale des fonctions localement Lipschitziennes, constitue une généralisation de l'idée de sous-différentiel d'une fonction convexe.

Définition 3.5. *Une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est dite convexe si, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ et pour tout réel $\lambda \in [0, 1]$, on a*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \quad (3.8)$$

Alternativement, f est dite strictement convexe si l'inégalité (3.8) est stricte pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $x \neq y$ et pour tout réel $\lambda \in]0, 1[$.

On montre que toute fonction convexe $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est localement Lipschitzienne en tout point de \mathbb{R}^n .

Théorème 3.6. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, une fonction convexe $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions $d \in \mathbb{R}^n$. De plus, pour tout x fixé, l'application $d \in \mathbb{R}^n \mapsto f'(x, d)$ est sous-linéaire.*

D'après les Théorèmes 3.4 et 3.6, on conclut que l'application $d \in \mathbb{R}^n \mapsto f'(x, d)$ est la fonction support d'un ensemble non vide, compact et convexe de \mathbb{R}^n , que l'on désigne par *sous-différentiel*.

Définition 3.7. *Le sous-différentiel en x d'une fonction convexe f , noté $\partial_c f(x)$, est l'ensemble non vide, compact et convexe de \mathbb{R}^n dont la fonction support est $d \in \mathbb{R}^n \mapsto f'(x, d)$, c'est-à-dire,*

$$\partial_c f(x) \triangleq \{s \in \mathbb{R}^n : \langle s, d \rangle \leq f'(x, d) \text{ pour tout } d \in \mathbb{R}^n\}. \quad (3.9)$$

Les éléments de $\partial_c f(x)$ sont appelés les sous-gradients de f en x .

Réciproquement, les dérivées directionnelles de f peuvent être déterminées à partir du sous-différentiel par

$$f'(x, d) = \max \{\langle s, d \rangle : s \in \partial_c f(x)\}. \quad (3.10)$$

Pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ convexe et différentiable en x , $\partial_c f(x)$ correspond au singleton $\{\nabla f(x)\}$.

Le sous-différentiel admet une interprétation géométrique. Pour cela, on a besoin des définitions suivantes.

Définition 3.8. *L'épigraphe d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est définie par*

$$\text{Epi}(f) \triangleq \left\{ \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} : s \geq f(x) \right\}.$$

Définition 3.9. *La direction $s \in \mathbb{R}^m$ est dite normale en x à un ensemble convexe fermé $C \subset \mathbb{R}^m$ lorsque*

$$\langle s, y - x \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C.$$

L'ensemble de toutes ces directions est appelé cône normal à C en x , dénoté $N_C(x)$.

On a alors, le résultat suivant :

Proposition 3.10. *Soit une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ convexe. Un vecteur $s \in \mathbb{R}^n$ est un sous-gradient de f en x si et seulement si $(s, -1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est normal à $\text{Epi}(f)$ en $(x, f(x))$.*

On en conclut que l'intersection du cône normal $N_{\text{Epi}(f)}(x)$ avec l'espace \mathbb{R}^n au niveau -1 représente $\partial_c f(x) \times \{-1\}$, comme montré sur la Figure 3.1.

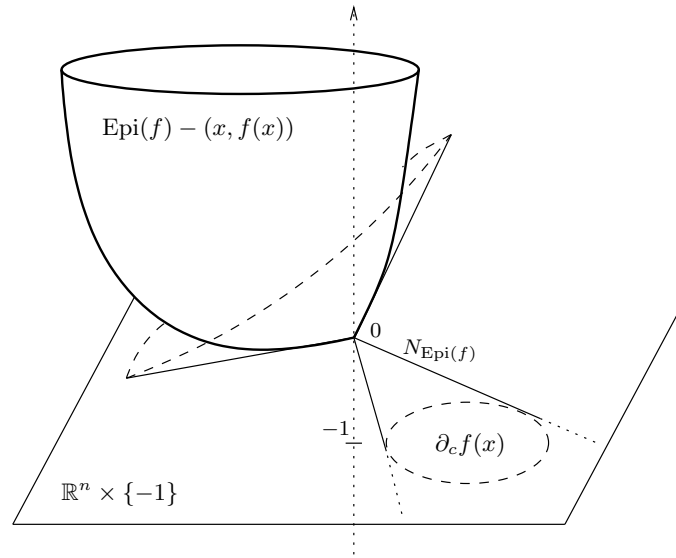


FIG. 3.1 – Interprétation géométrique du sous-différentiel d’une fonction convexe [83]

3.1.3 Sous-différentiel de CLARKE

Contrairement au cas convexe, l’hypothèse que la fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est localement Lipschitzienne en $x \in \mathbb{R}^n$ n’est pas suffisante pour l’existence des dérivées directionnelles de f . C’est pourquoi on doit généraliser le concept de dérivée directionnelle.

Définition 3.11. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ admet une dérivée directionnelle généralisée en $x \in \mathbb{R}^n$ dans la direction $d \in \mathbb{R}^n$ si la limite

$$\limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{f(y + td) - f(y)}{t} \quad (3.11)$$

existe et est finie. On la note alors $f^\circ(x, d)$.

Théorème 3.12. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ localement Lipschitzienne en $x \in \mathbb{R}^n$ admet des dérivées directionnelles généralisées dans toutes les directions $d \in \mathbb{R}^n$. De plus, l’application $d \mapsto f^\circ(x, d)$ est sous-linéaire.

On peut, ainsi, définir un sous-différentiel pour les fonctions localement Lipschitziennes d’une façon analogue au cas convexe :

Définition 3.13. Pour une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ localement Lipschitzienne en $x \in \mathbb{R}^n$, le sous-différentiel de CLARKE de f en x , noté $\partial f(x)$, est l’ensemble non vide, compact et convexe de \mathbb{R}^n dont la fonction support est $d \in \mathbb{R}^n \mapsto f^\circ(x, d)$, c’est-à-dire

$$\partial f(x) \triangleq \{s \in \mathbb{R}^n : \langle s, d \rangle \leq f^\circ(x, d) \text{ pour tout } d \in \mathbb{R}^n\} . \quad (3.12)$$

Les éléments de $\partial f(x)$ sont appelés sous-gradients de CLARKE (ou gradients généralisés) de f en x .

Les dérivées directionnelles généralisées peuvent être déterminées à partir de $\partial f(x)$ pour toute direction $d \in \mathbb{R}^n$:

$$f^\circ(x, d) = \max \{ \langle s, d \rangle : s \in \partial f(x) \}. \quad (3.13)$$

Le sous-différentiel de CLARKE généralise les notions de sous-différentiel d'une fonction convexe et de gradient d'une fonction différentiable :

1. Si une fonction f est convexe, on a $f^\circ(x, d) = f'(x, d)$ pour tout $d \in \mathbb{R}^n$, et ainsi $\partial f(x) = \partial_c f(x)$.
2. Si une fonction f localement Lipschitzienne en $x \in \mathbb{R}^n$ est différentiable en x , alors on a $f'(x, d) = \langle \nabla f(x), d \rangle \leq f^\circ(x, d)$ pour tout $d \in \mathbb{R}^n$, et donc $\nabla f(x) \in \partial f(x)$.
3. Si une fonction f est continûment différentiable en x , on a l'égalité $\langle \nabla f(x), d \rangle = f^\circ(x, d)$ pour tout $d \in \mathbb{R}^n$, de sorte que $\partial f(x) = \{ \nabla f(x) \}$.

Si d'une part une fonction localement Lipschitzienne n'est pas nécessairement différentiable, d'autre part l'ensemble de points pour lesquels elle est non différentiable est de mesure nulle, comme indiqué dans le théorème ci-dessous.

Théorème 3.14. (Théorème de RADEMACHER)

On suppose que la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est localement Lipschitzienne. Alors $\nabla f(x)$ existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$.

À la lumière du Théorème 3.14, on pourrait penser que les techniques d'optimisation lisse peuvent être utilisées également pour une fonction localement Lipschitzienne, puisque les points où la fonction est non différentiable sont "rares" dans une certaine mesure. Néanmoins, cette idée s'avère fautive, car la pratique montre que le minimum de la fonction est généralement atteint exactement en les points où elle est non lisse.

Le sous-différentiel de CLARKE admet une interprétation géométrique dans \mathbb{R}^{n+1} analogue à celle du cas convexe, à condition de généraliser la notion de cône normal à une partie quelconque $C \neq \emptyset$ pas nécessairement convexe. Ainsi, $\partial f(x)$ est à nouveau l'ensemble des vecteurs $s \in \mathbb{R}^n$ tels que $\begin{bmatrix} s \\ -1 \end{bmatrix}$ est dans le cône normal à l'épigraphe de f en $\begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix}$, comme représenté sur la Figure 3.2.

3.1.4 Règles de calcul du sous-différentiel de CLARKE

En général, les règles de calcul du sous-différentiel de CLARKE ne comprennent que des inclusions. On peut, toutefois, obtenir des égalités sous une condition suffisante plus forte que la continuité Lipschitzienne locale :

Définition 3.15. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ localement Lipschitzienne est dite régulière si la dérivée directionnelle $f'(x, d)$ existe pour tout $x, d \in \mathbb{R}^n$ et si, de plus, on a $f'(x, d) = f^\circ(x, d)$.

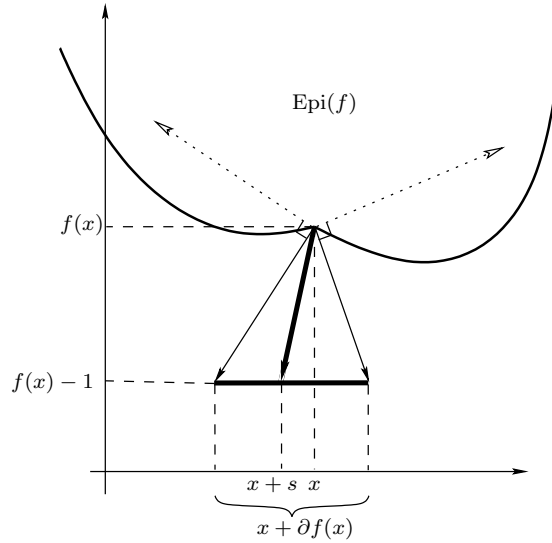


FIG. 3.2 – Interprétation géométrique du sous-différentiel de CLARKE [19]

En particulier, toute fonction convexe et toute fonction continûment différentiable en $x \in \mathbb{R}^n$ sont alors régulières. D'autre part, si f est régulière et différentiable en x , alors $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

Étudions la règle de différentiation en chaîne, ou de composition.

Lemme 3.16. *Soit $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction continûment différentiable et $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitzienne. On a alors*

$$\partial(g \circ H)(x) \subset \text{co} \left\{ \eta : \eta = \frac{\partial H(x)^T}{\partial x} \xi, \xi \in \partial g(H(x)) \right\}. \quad (3.14)$$

On a égalité en (3.14) lorsque g est régulière.

Considérons $H'(x) \triangleq \partial H(x)/\partial x$. On peut aussi noter par $[H'(x)]^* \partial g(H(x))$ le second membre de (3.14), comme action de l'application linéaire adjointe $[H'(x)]^*$ sur le sous-différentiel.

Puisque les problèmes MINIMAX jouent un rôle central dans notre travail, nous nous intéressons particulièrement aux propriétés différentielles des fonctions MAX. Considérons d'abord le sous-différentiel de CLARKE d'un maximum fini de fonctions.

Lemme 3.17. *Soit $f^1, f^2, \dots, f^m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions localement Lipschitziennes et*

$$\psi(x) \triangleq \max_{j \in \mathbf{m}} f^j(x),$$

avec $\mathbf{m} \triangleq \{1, 2, \dots, m\}$. Alors,

$$\partial \psi(x) \subset \text{co}_{j \in \hat{\mathbf{m}}(x)} \{ \partial f^j(x) \}, \quad (3.15)$$

où $\hat{\mathbf{m}}(x)$ désigne l'ensemble des indices j actifs en x :

$$\hat{\mathbf{m}}(x) \triangleq \{j \in \mathbf{m} : f^j(x) = \psi(x)\}.$$

On a égalité en (3.15) si les fonctions f^j , $j \in \hat{\mathbf{m}}(x)$ sont régulières en x .

À partir des Lemmes 3.16 et 3.17, l'importance de la condition de régularité devient évidente, car elle permet un calcul aisé de tout le sous-différentiel de CLARKE. Cette condition concerne, heureusement, une grande classe de fonctions associées à des critères de synthèse de l'automatique. C'est pourquoi nous nous concentrons dorénavant sur cette classe de fonctions.

Le théorème suivant est fondamental car il caractérise le sous-différentiel d'une fonction MAX calculée sur un continuum d'indices. Nous dénotons par $\nabla_x \phi(\cdot, \cdot)$ le gradient de $\phi(\cdot, \cdot)$ par rapport au premier argument.

Théorème 3.18. *On considère la fonction*

$$\psi(x) \triangleq \max_{y \in Y} \phi(x, y). \quad (3.16)$$

Supposons que

1. $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ est continue,
2. $\nabla_x \phi(\cdot, \cdot)$ existe et est continu, et
3. $Y \in \mathbb{R}^m$ est compact.

Alors le sous-différentiel de $\psi(\cdot)$ en x est

$$\partial\psi(x) = \text{co}_{y \in \hat{Y}(x)} \{\nabla_x \phi(x, y)\} \quad (3.17)$$

où $\hat{Y}(x)$ désigne l'ensemble des indices actifs

$$\hat{Y}(x) \triangleq \{y \in Y : \psi(x) = \phi(x, y)\}. \quad (3.18)$$

3.2 Optimisation avec contraintes

Considérons le problème de minimisation avec contraintes du type inégalité suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & \psi_0(x) \\ x \in \mathbb{R}^n & \\ \text{sous} & \psi_1(x) \leq 0, \end{array} \quad (3.19)$$

où les fonctions $\psi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $j \in \{0, 1\}$, sont données par

$$\psi_j(x) = \max_{y \in Y_j} \phi_j(x, y), \quad (3.20)$$

avec $\phi_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_j} \rightarrow \mathbb{R}$ et $Y_j \subset \mathbb{R}^{m_j}$ compacts. Il est alors question d'un problème d'optimisation non lisse, semi-infini et en principe non convexe. Le programme (3.19) comprend, par exemple, des problèmes où la fonction objectif est le maximum d'un nombre fini de fonctions MAX semi-infinies :

$$\psi_0(x) = \max_{i \in \{0,1,\dots,M\}} \max_{y \in Y_i} \phi_i(x, y).$$

En effet, il suffit de récrire $\psi_0(x)$ comme

$$\psi_0(x) = \max_{\bar{y} \in \bar{Y}} \phi(x, \bar{y}),$$

où

$$\bar{y} \triangleq (i, y), \quad \bar{Y} \triangleq \{0, 1, \dots, M\} \times Y_i, \quad \phi(x, \bar{y}) \triangleq \phi_i(x, y),$$

avec \bar{Y} compact si Y_i est compact.

Précisons les notions de minimum d'une fonction et de minimisation locale pour le programme (3.19).

Définition 3.19. *Un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ est un minimum global d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sur \mathbb{R}^n si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x^*) \leq f(x)$.*

Un point $x^ \in \mathbb{R}^n$ est un minimum local de f s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in B(x^*, \varepsilon)$, $f(x^*) \leq f(x)$.*

Définition 3.20. *Considérons le problème (3.19). Soit l'ensemble faisable*

$$X_I \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : \psi_1(x) \leq 0\}.$$

On dit que x^ est un minimum local de (3.19) si $x^* \in X_I$ et il existe un $\rho^* > 0$ tel que $\psi_0(x^*) \leq \psi_0(x)$ pour tout $x \in X_I \cap B(x^*, \rho^*)$.*

On dit que x^ est un minimum local strict de (3.19) si $\psi_0(x^*) < \psi_0(x)$ pour tout $x \in X_I \cap B(x^*, \rho^*)$ tel que $x \neq x^*$.*

Notons que tout minimum local de (3.19) est faisable par définition. La notion de point critique pour une fonction f Lipschitzienne est déterminée par la proposition suivante :

Proposition 3.21. *x est point critique de f si $0 \in \partial f(x)$. En particulier, un minimum local de f est un point critique de f .*

3.2.1 Conditions d'optimalité

On peut obtenir des conditions d'optimalité pour le problème (3.19) si l'on le traduit sous la forme d'un problème MINIMAX sans contrainte équivalent. Considérons la fonction

$$F^*(x) \triangleq \max\{\psi_0(x) - \psi_0(x^*), \psi_1(x)\}, \quad (3.21)$$

où x^* représente momentanément un paramètre. Il est possible d'établir une condition nécessaire d'optimalité pour le problème (3.19) à partir de la fonction $F^*(\cdot)$:

Proposition 3.22. *Si l'on suppose que les fonctions $\psi_j(\cdot)$, $j \in \{0, 1\}$, sont continues et que x^* est un minimum local de (3.19), alors x^* est un minimum local de F^* .*

Considérons l'hypothèse suivante.

Hypothèse 3.1. *Pour tout $j \in \{0, 1\}$, les fonctions $\phi_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_j} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues et leurs gradients $\nabla_x \phi_j(\cdot, \cdot)$ existent et sont continus. De plus, les ensembles $Y_j \subset \mathbb{R}^{m_j}$ sont supposés compacts.*

Dans ce cas, nous pouvons exprimer la condition nécessaire de la Proposition 3.22 à partir du sous-différentiel de F^* , comme le montre le théorème ci-dessous.

Théorème 3.23. *On suppose que l'hypothèse 3.1 est satisfaite. Si x^* est un minimum local de (3.19), alors $0 \in \partial F^*(x^*)$. Par conséquent, il existe un scalaire $\tau \in \mathbb{R}$ tel que*

$$0 \in \tau \partial \psi_0(x^*) + (1 - \tau) \partial \psi_1(x^*), \quad (3.22)$$

$$(1 - \tau) \psi_1(x^*) = 0, \quad (3.23)$$

$$0 \leq \tau \leq 1. \quad (3.24)$$

Démonstration : On a $F^*(x^*) = 0$, puisque un minimum local de (3.19) doit être faisable. Soit x dans un voisinage de x^* . Si x est faisable ($\psi_1(x) \leq 0$), on a

$$F^*(x) = \max\{\psi_0(x) - \psi_0(x^*), \psi_1(x)\} \geq \psi_0(x) - \psi_0(x^*) \geq 0.$$

La dernière inégalité découle du fait que x^* est un minimum local par hypothèse. Si x est infaisable, on a

$$F^*(x) = \max\{\psi_0(x) - \psi_0(x^*), \psi_1(x)\} \geq \psi_1(x) \geq 0.$$

D'où l'on tire que x^* est un minimum local de $F^*(\cdot)$ et, par conséquent, $0 \in \partial F^*(x^*)$.

À partir de la simple application du Lemme 3.17 à la fonction $F^*(\cdot)$, on a

$$\partial F^*(x) = \underset{j \in \mathbf{m}(x)}{\text{co}} \{\partial \psi_j(x)\}, \quad (3.25)$$

où $\hat{\mathbf{m}}(x) \subseteq \{0, 1\}$ avec

$$\begin{cases} 0 \in \hat{\mathbf{m}}(x) & \text{si } \psi_0(x) - \psi_0(x^*) = F^*(x), \\ 1 \in \hat{\mathbf{m}}(x) & \text{si } \psi_1(x) = F^*(x). \end{cases} \quad (3.26)$$

Pour montrer que les conditions (3.22)-(3.24) sont équivalentes à la condition $0 \in \partial F^*(x^*)$, il ne reste qu'à vérifier la condition de complémentarité (3.23), car (3.22) et (3.24) découlent directement de (3.25). Supposons d'abord que $\psi_1(x^*) = 0$. Alors, il est évident que (3.23) est vérifiée. Contrairement, supposons que $\psi_1(x^*) < 0$. Dans ce cas, la branche droite de $F^*(x^*)$ est négative et, par conséquent, elle ne peut pas être active puisque $F^*(x^*) = 0$. Donc, il faut que $(1 - \tau)$ soit nul à cause de (3.22), de sorte que l'équation (3.23) est vérifiée encore une fois. ■

Définition 3.24. *Les conditions (3.22)-(3.24) sont dites conditions nécessaires d'optimalité de F. JOHN lorsqu'elles sont satisfaites avec $\tau \geq 0$.*

Les conditions (3.22)-(3.24) sont dites conditions de KARUSH-KUHN-TUCKER (KKT) lorsqu'elles sont satisfaites avec $\tau > 0$.

Un minimum local x^* satisfait les conditions nécessaires d'optimalité de F. JOHN mais pas les conditions KKT si et seulement si on a $\tau = 0$ en (3.22)-(3.24), et cela signifie qu'aucune information sur la fonction objectif $\psi_0(\cdot)$ n'intervient. Dans ce cas, x^* est forcément un minimum local de $\psi_1(\cdot)$ situé sur la frontière de faisabilité, c'est-à-dire, $\psi_1(x^*) = 0$ et $0 \in \partial\psi_1(x^*)$.

En pratique, on ne peut pas utiliser la fonction $F^*(\cdot)$ en (3.21) car elle requiert la connaissance *a priori* du minimum local x^* . Aussi, nous approximations $F^*(\cdot)$ par une fonction paramétrée $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ proposée par POLAK [130], dite *fonction de progrès*, et définie par

$$F(x, z) \triangleq \max\{\psi_0(x) - \psi_0(z) - \mu\psi_1(z)_+, \psi_1(x) - \psi_1(z)_+\}, \quad (3.27)$$

où $z \in \mathbb{R}^n$ représente un paramètre, $\mu > 0$ et $\psi_1(z)_+ \triangleq \max\{0, \psi_1(z)\}$. Pour x^* minimum local de (3.19), on a $F(x, x^*) = F^*(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, car $\psi_1(x^*) \leq 0$ par définition. Le lemme suivant montre que nous pouvons aussi obtenir des conditions nécessaires d'optimalité pour (3.19) à partir de la fonction de progrès (3.27). Nous dénotons par $\partial_1 F(\cdot, \cdot)$ le sous-différentiel de $F(\cdot, \cdot)$ par rapport au premier argument.

Lemme 3.25.

1. Si $x^* \in \mathbb{R}^n$ est un minimum local de (3.19), alors x^* est aussi un minimum local de $F(\cdot, x^*)$. En particulier, cela implique que $0 \in \partial_1 F(x^*, x^*)$.
2. Si x^* satisfait les conditions nécessaires d'optimalité de F. JOHN pour (3.19), alors $0 \in \partial_1 F(x^*, x^*)$.

Démonstration : 1) On vérifie facilement que $F(x^*, x^*) = 0$. Il nous reste à montrer que $F(x, x^*) \geq 0$ pour x dans un voisinage de x^* . Si x est faisable, on a

$$F(x, x^*) = \max\{\psi_0(x) - \psi_0(x^*), \psi_1(x)\} \geq \psi_0(x) - \psi_0(x^*) \geq 0.$$

Contrairement, si x est infaisable, on a

$$F(x, x^*) = \max\{\psi_0(x) - \psi_0(x^*) - \mu\psi_1(x^*)_+, \psi_1(x) - \psi_1(x^*)_+\} \geq \psi_1(x) - \psi_1(x^*)_+ \geq 0.$$

On en déduit que x^* est un minimum local de $F(\cdot, x^*)$ et donc $0 \in \partial_1 F(x^*, x^*)$.

2) Désignons par $\Psi_0(x, x^*)$ et $\Psi_1(x, x^*)$ les deux branches de $F(x, x^*)$:

$$\Psi_0(x, x^*) \triangleq \psi_0(x) - \psi_0(x^*) - \mu\psi_1(x^*)_+; \quad \Psi_1(x, x^*) \triangleq \psi_1(x) - \psi_1(x^*)_+. \quad (3.28)$$

Par la simple application du Lemme 3.17 à la fonction $F(\cdot, x^*)$, on a

$$\partial_1 F(x, x^*) = \underset{j \in \hat{\mathbf{m}}(x)}{\text{co}} \{\partial\psi_j(x)\}, \quad (3.29)$$

avec

$$\hat{\mathbf{m}}(x) \triangleq \{j \in \{0, 1\} : \Psi_j(x, x^*) = F(x, x^*)\}. \quad (3.30)$$

La condition $0 \in \partial_1 F(x^*, x^*)$ est, donc, équivalente à l'énoncé : il existe un réel τ tel que

$$0 = \tau\chi + (1 - \tau)\nu, \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad (3.31)$$

où $\chi \in \partial\psi_0(x^*)$ et $\nu \in \partial\psi_1(x^*)$. Les conditions en (3.31) représentent exactement les conditions nécessaires de F. JOHN en (3.22) et (3.24). En conséquence, (3.31) est satisfaite lorsque x^* satisfait les conditions nécessaires d'optimalité de F. JOHN. ■

Encore une fois pour une raison pratique, nous devons utiliser une approximation pour la fonction de progrès $F(\cdot, \cdot)$. D'abord, pour tout $j \in \{0, 1\}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, nous construisons une approximation quadratique convexe du premier ordre pour $\psi_j(x + h)$:

$$\tilde{\psi}_j(x + h, x) \triangleq \max_{y \in Y_j} \left\{ \phi_j(x, y) + \langle \nabla_x \phi_j(x, y), h \rangle + \frac{\delta}{2} \|h\|^2 \right\}, \quad (3.32)$$

avec $\delta > 0$ pour la convexité. Nous construisons, ensuite, un modèle local quadratique du premier ordre par morceaux de $F(x + h, x)$:

$$\tilde{F}(x + h, x) \triangleq \max\{\tilde{\psi}_0(x + h, x) - \psi_0(x) - \mu\psi_1(x)_+, \tilde{\psi}_1(x + h, x) - \psi_1(x)_+\}. \quad (3.33)$$

À partir de cette approximation convexe $\tilde{F}(\cdot, x)$, nous définissons la fonction $\theta : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, dite *fonction d'optimalité*, par

$$\theta(x) \triangleq \min_{h \in \mathbb{R}^n} \tilde{F}(x + h, x). \quad (3.34)$$

Comme son nom le révèle, on peut établir une condition d'optimalité pour le programme (3.19) à partir de la fonction $\theta(\cdot)$:

Théorème 3.26. *On considère la fonction de optimalité $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en (3.34), et la fonction de progrès $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ en (3.27). On suppose que l'hypothèse 3.1 est satisfaite. Ainsi,*

1. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\theta(x) \leq 0 ; \quad (3.35)$$

2. si $x^* \in \mathbb{R}^n$ est un minimum local de (3.19), alors

$$0 \in \partial_1 F(x^*, x^*) \quad \Leftrightarrow \quad \theta(x^*) = 0 . \quad (3.36)$$

Démonstration : 1) En développant (3.34), on obtient

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \min_{h \in \mathbb{R}^n} \max \{ \tilde{\psi}_0(x+h, x) - \psi_0(x) - \mu \psi_1(x)_+ , \tilde{\psi}_1(x+h, x) - \psi_1(x)_+ \} , \\ &= \min_{h \in \mathbb{R}^n} \max \left\{ \max_{y \in Y_0} \left\{ \phi_0(x, y) + \langle \nabla_x \phi_0(x, y), h \rangle + \frac{\delta}{2} \|h\|^2 \right\} - \psi_0(x) - \mu \psi_1(x)_+ , \right. \\ &\quad \left. \max_{y \in Y_1} \left\{ \phi_1(x, y) + \langle \nabla_x \phi_1(x, y), h \rangle + \frac{\delta}{2} \|h\|^2 \right\} - \psi_1(x)_+ \right\} , \\ &= \min_{h \in \mathbb{R}^n} \max \left\{ \max_{y \in Y_0} \left\{ \underbrace{\phi_0(x, y) - \psi_0(x) - \mu \psi_1(x)_+}_{\Lambda_0(x, y)} + \underbrace{\langle \nabla_x \phi_0(x, y), h \rangle}_{\Phi_0(x, y)} \right\} , \right. \\ &\quad \left. \max_{y \in Y_1} \left\{ \underbrace{\phi_1(x, y) - \psi_1(x)_+}_{\Lambda_1(x, y)} + \underbrace{\langle \nabla_x \phi_1(x, y), h \rangle}_{\Phi_1(x, y)} \right\} \right\} + \frac{\delta}{2} \|h\|^2 . \end{aligned}$$

Nous définissons

$$\Lambda_0(x, y) \triangleq \phi_0(x, y) - \psi_0(x) - \mu \psi_1(x)_+ , \quad (3.37)$$

$$\Lambda_1(x, y) \triangleq \phi_1(x, y) - \psi_1(x)_+ , \quad (3.38)$$

$$\Phi_j(x, y) \triangleq \nabla_x \phi_j(x, y), \quad j = 0, 1, \quad (3.39)$$

et

$$\mathcal{G}_0(x) \triangleq \{(\Lambda_0, \Phi_0) : y \in Y_0\} , \quad \mathcal{G}_1(x) \triangleq \{(\Lambda_1, \Phi_1) : y \in Y_1\} . \quad (3.40)$$

La fonction d'optimalité θ peut être alors réécrite comme

$$\theta(x) = \min_{h \in \mathbb{R}^n} \max \left\{ \max_{(\Lambda, \Phi) \in \mathcal{G}_0} \Lambda + \langle \Phi, h \rangle , \max_{(\Lambda, \Phi) \in \mathcal{G}_1} \Lambda + \langle \Phi, h \rangle \right\} + \frac{\delta}{2} \|h\|^2 . \quad (3.41)$$

Puisque le maximum calculé sur un ensemble de scalaires est égal au maximum calculé sur l'enveloppe convexe de ces scalaires, on déduit

$$\theta(x) = \min_{h \in \mathbb{R}^n} \max_{(\Lambda, \Phi) \in \mathcal{G}} \Lambda + \langle \Phi, h \rangle + \frac{\delta}{2} \|h\|^2 , \quad (3.42)$$

où

$$\mathcal{G}(x) \triangleq \text{co} \{ \mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1 \} = \text{co}_{j=0,1} \{ (\Lambda_j(x, y), \Phi_j(x, y)) : y \in Y_j \} . \quad (3.43)$$

Définissons, à partir du maximum intérieur en (3.42),

$$\epsilon(h) \triangleq \max_{(\Lambda, \Phi) \in \mathcal{G}} \Lambda + \langle \Phi, h \rangle + \frac{\delta}{2} \|h\|^2.$$

On a $\epsilon(0) = 0$, puisque $\Lambda \leq 0$ par construction et la valeur $\Lambda = 0$ est forcement atteinte. D'où l'on tire que

$$\theta(x) = \min_{h \in \mathbb{R}^n} \epsilon(h) \leq 0.$$

2) En premier lieu, nous montrons que, pour un minimum local x^* , $0 \in \partial_1 F(x^*, x^*)$ si et seulement si $0 \in \mathcal{G}(x^*)$. Le sous-différentiel de $F(\cdot, x^*)$ en x^* est

$$\partial_1 F(x^*, x^*) = \underset{j \in \hat{\mathbf{m}}(x^*)}{\text{co}} \left\{ \underset{y \in \hat{Y}_j(x^*)}{\text{co}} \{ \nabla_x \phi_j(x^*, y) \} \right\}, \quad (3.44)$$

avec $\hat{\mathbf{m}}(x^*)$ défini en (3.30) et

$$\hat{Y}_j(x^*) \triangleq \{y \in Y_j : \psi_j(x^*) = \phi_j(x^*, y)\}. \quad (3.45)$$

(\Rightarrow) Il est clair que $\Lambda_j(x^*, y) = 0$ pour tout $j \in \hat{\mathbf{m}}(x^*)$ et $y \in \hat{Y}_j(x^*)$. Par conséquent, la partie

$$\hat{G} \triangleq \{(\Lambda, \Phi) \in \mathbb{R}^{n+1} : \Lambda = 0, \Phi \in \partial_1 F(x^*, x^*)\} \quad (3.46)$$

est un sous-ensemble de \mathcal{G} . Mais $0 \in \hat{G}$, puisque $0 \in \partial_1 F(x^*, x^*)$ par hypothèse. Ainsi, $0 \in \mathcal{G}$.

(\Leftarrow) Supposons que $0 \in \mathcal{G}$. Puisque $\Lambda_j(x^*, y) \leq 0$ par construction, le vecteur nul de \mathbb{R}^{n+1} ne peut être qu'une combinaison convexe des vecteurs (Λ, Φ) tels que $\Lambda = 0$. Étant donné que $\Lambda_j(x^*, y) = 0$ si et seulement si $j \in \hat{\mathbf{m}}(x^*)$ et $y \in \hat{Y}_j(x^*)$, on a

$$0 \in \underset{j \in \hat{\mathbf{m}}(x^*)}{\text{co}} \left\{ \underset{y \in \hat{Y}_j(x^*)}{\text{co}} \{(\Lambda_j(x^*, y), \Phi_j(x^*, y))\} \right\}, \quad (3.47)$$

À partir de la définition de $\Phi_j(x^*, y)$ en (3.39), on conclut que $0 \in \partial_1 F(x^*, x^*)$.

Après avoir montré que $0 \in \partial_1 F(x^*, x^*)$ si et seulement si $0 \in \mathcal{G}$, nous montrons que $0 \in \mathcal{G}$ si et seulement si $\theta(x) = 0$. Selon la dualité de FENCHEL, nous pouvons échanger MIN et MAX en (3.42) :

$$\theta(x) = \max_{(\Lambda, \Phi) \in \mathcal{G}} \min_{h \in \mathbb{R}^n} \Lambda + \langle \Phi, h \rangle + \frac{\delta}{2} \|h\|^2. \quad (3.48)$$

Le minimum intérieur est à présent sans contraintes, et il peut être calculé d'une façon explicite comme

$$h = -\frac{1}{\delta} \Phi. \quad (3.49)$$

En remplaçant ce résultat dans l'expression originelle (3.48), nous avons

$$\begin{aligned}\theta(x) &= \max_{(\Lambda, \Phi) \in \mathcal{G}} \min_{h \in \mathbb{R}^n} \Lambda + \left\langle \Phi, -\frac{1}{\delta} \Phi \right\rangle + \frac{\delta}{2} \left\| -\frac{1}{\delta} \Phi \right\|^2 \\ &= \max_{(\Lambda, \Phi) \in \mathcal{G}} \Lambda - \frac{1}{2\delta} \|\Phi\|^2.\end{aligned}\quad (3.50)$$

Étant donné que $\Lambda \leq 0$, nous avons de (3.50) que $\theta(x) = 0$ si et seulement si $(\Lambda, \Phi) = 0$, ou autrement dit, si et seulement si $0 \in \mathcal{G}$. On a, alors,

$$0 \in \partial_1 F(x^*, x^*) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \in \mathcal{G}(x^*) \quad \Leftrightarrow \quad \theta(x^*) = 0.$$

■

3.2.2 Technique d'optimisation non lisse

À la lumière du Lemme 3.25 et du Théorème 3.26, on doit chercher des points x^* tels que $0 \in \partial_1 F(x^*, x^*)$, car celle-ci est une condition nécessaire d'optimalité. Le lemme suivant montre que si l'on exclut les cas rares pratiques où x^* est un point critique tel que les contraintes sont violées ($\psi(x^*) > 0$), alors les points critiques x^* de $F(\cdot, x^*)$ seront aussi des points critiques du programme originel (3.19).

Lemme 3.27. *Admettons que $0 \in \partial_1 F(x^*, x^*)$ pour $x^* \in \mathbb{R}^n$. Alors, on a les possibilités suivantes :*

1. *soit $\psi_1(x^*) > 0$, et donc x^* est un point critique de ψ_1 ,*
2. *soit $\psi_1(x^*) \leq 0$, et alors x^* satisfait les conditions nécessaires d'optimalité de F. JOHN pour (3.19). Dans ce cas, on a encore deux possibilités :*
 - (a) *ou bien x^* satisfait les conditions de KKT pour (3.19),*
 - (b) *ou bien x^* est un minimum local de $\psi_1(\cdot)$ situé sur la frontière de faisabilité : $\psi_1(x^*) = 0$ et $0 \in \partial\psi_1(x^*)$.*

Démonstration : Nous reprenons la notation $\Psi_0(x, x^*)$, $\Psi_1(x, x^*)$ en (3.28) pour les deux branches de $F(x, x^*)$. De (3.29), on conclut que

$$\partial_1 F(x, x^*) = \tau \partial\psi_0(x) + (1 - \tau) \partial\psi_1(x), \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad (3.51)$$

avec $\tau = 1$ lorsque $\Psi_0(x, x^*)$ est active, $\tau = 0$ lorsque $\Psi_1(x, x^*)$ est active, et $0 < \tau < 1$ lorsque les deux branches sont actives.

1) $\Psi_0(x^*, x^*)$ est strictement négative lorsque $\psi_1(x^*) > 0$. Vu que $F(x^*, x^*) = 0$, cette branche peut pas être active, et ainsi on a $\tau = 0$. Ce qui implique que $0 \in \partial\psi_1$.

2) Vu que $0 \in \partial_1 F(x^*, x^*)$ par hypothèse, et compte tenu de (3.51), il reste à vérifier la condition de complémentarité (3.23). Le cas $\psi_1(x^*) = 0$ est trivial. Si $\psi_1(x^*) < 0$, alors $\Psi_1(x^*, x^*)$ est strictement négative, et cette branche ne peut pas être active. Donc, on

a $(1 - \tau) = 0$, qui est le multiplicateur de LAGRANGE de la contrainte en (3.23). Par conséquent, $\tau = 1$ et x^* satisfait les conditions nécessaires d'optimalité de F. JOHN pour (3.19).

Selon la Définition (3.24), x^* satisfait les conditions nécessaires d'optimalité de F. JOHN mais pas les conditions de KKT lorsque $\tau = 0$, pour $\psi_1(x^*) \leq 0$. Le cas $\tau = 0$ et $\psi_1(x^*) < 0$ n'est pas possible, car $\Psi_1(x^*, x^*)$ doit être active en vertu du fait que le multiplicateur de LAGRANGE de la contrainte est non nul. En conséquence, le cas $\psi_1(x^*) = 0$ et $0 \in \partial\psi_1(x^*)$ est la seule situation où les conditions de KKT ne sont pas observées. ■

Dans la fonction de progrès

$$F(z, x) = \max\{\psi_0(z) - \psi_0(x) - \mu\psi_1(x)_+, \psi_1(z) - \psi_1(x)_+\},$$

nous considérons x comme l'itéré courant, tandis que z représente le prochain itéré ou un candidat pour devenir le prochain itéré. Afin d'approximer un point x^* tel que $0 \in \partial_1 F(x^*, x^*)$, nous utilisons une procédure itérative. Supposons que l'itéré courant x est tel que $0 \notin \partial_1 F(x, x)$. Il est alors possible de réduire la fonction $F(\cdot, x)$ dans un voisinage de x , c'est-à-dire, trouver un x^+ tel que $F(x^+, x) < F(x, x)$. Après avoir remplacé x par x^+ , nous répétons la procédure. À moins que $0 \in \partial_1 F(x^+, x^+)$, ce qui indiquerait la fin, il est possible de trouver x^{++} tel que $F(x^{++}, x^+) < F(x^+, x^+)$, etc. La séquence x, x^+, x^{++}, \dots ainsi générée doit converger vers le minimum local recherché x^* de (3.19).

Pour réduire $F(\cdot, x)$, nous utilisons la direction de descente caractérisée par le lemme suivant.

Lemme 3.28. *Si*

$$\hat{h}(x) \triangleq \arg \min \theta(x) \tag{3.52}$$

est non nul, alors $\hat{h}(x)$ est une direction de descente de $F(\cdot, x)$ en x . Si, en revanche, $\hat{h}(x) = 0$, alors $0 \in \partial_1 F(x, x)$.

Démonstration : Dénotons par $F^\circ(x, d)$ la dérivée directionnelle de $F(\cdot, x)$ en x dans la direction d . De (3.13), on a

$$F^\circ(x, d) = \max \{ \langle s, d \rangle : s \in \partial_1 F(x, x) \}. \tag{3.53}$$

De (3.44), nous savons que

$$\partial_1 F(x, x) = \text{co}_{j \in \hat{\mathbf{m}}(x)} \left\{ \text{co}_{y \in \hat{Y}_j(x)} \{ \Phi_j(x, y) \} \right\}. \tag{3.54}$$

Ainsi, nous pouvons récrire $F^\circ(x, d)$ comme

$$F^\circ(x, d) = \max_{\substack{j \in \hat{\mathbf{m}}(x), \\ y \in \hat{Y}_j(x)}} \langle \Phi_j(x, y), d \rangle. \tag{3.55}$$

De (3.48), on a

$$\theta(x) = \max_{(\Lambda, \Phi) \in \mathcal{G}(x)} \min_{h \in \mathbb{R}^n} \Lambda(x) + \langle \Phi(x), h \rangle + \frac{\delta}{2} \|h\|^2.$$

De (3.52), on a

$$\theta(x) = \max_{(\Lambda, \Phi) \in \mathcal{G}(x)} \Lambda(x) + \left\langle \Phi(x), \hat{h} \right\rangle + \frac{\delta}{2} \|\hat{h}\|^2. \quad (3.56)$$

Étant donné que $\Lambda_j(x, y) = 0$ pour tout $j \in \hat{\mathbf{m}}(x)$ et $y \in \hat{Y}_j(x)$, on a de (3.56) que

$$\theta(x) \geq \max_{\substack{j \in \hat{\mathbf{m}}(x), \\ y \in \hat{Y}_j(x)}} \underbrace{\left\langle \Phi_j(x, y), \hat{h} \right\rangle}_{F^\circ(x, \hat{h})} + \frac{\delta}{2} \|\hat{h}\|^2. \quad (3.57)$$

Ainsi,

$$F^\circ(x, \hat{h}) \leq \theta(x) - \frac{\delta}{2} \|\hat{h}\|^2 \leq \theta(x). \quad (3.58)$$

Cependant, on sait que $\theta \leq 0$, selon le Théorème 3.26. Par conséquent, on conclut de (3.57) que $\theta = 0$ lorsque $\hat{h} = 0$. À la lumière du Théorème 3.26, cela implique que $0 \in \partial_1 F(x, x)$ si $\hat{h} = 0$. De plus, on conclut de (3.57) que $F^\circ(x, \hat{h}) < 0$ lorsque $\|\hat{h}\| \neq 0$, de sorte que $\hat{h}(x)$ solution du programme (3.34) est une direction de descente pour $F(\cdot, x)$ en x . ■

L'adoption de la fonction de progrès mène à un algorithme de minimisation du type phase I - phase II. La phase I correspond aux itérations pendant lesquelles la contrainte n'est pas encore satisfaite, c'est-à-dire, $\psi_1(x^j) > 0$. Pendant cette phase, le terme à droite dans la fonction de progrès reste dominant. En effet, on a

$$\begin{aligned} F(x, x) &= \max\{\psi_0(x) - \psi_0(x) - \mu\psi_1(x)_+, \psi_1(x) - \psi_1(x)_+\} \\ &= \max\{-\mu\psi_1(x)_+, 0\}, \end{aligned}$$

de sorte que le terme à droite est actif en x . De plus,

$$\begin{aligned} \psi_1^\circ(x, \hat{h}) &= \max \left\{ \langle s, \hat{h} \rangle : s \in \partial\psi_1(x) \right\} \\ &= \max_{y \in \hat{Y}_1(x)} \left\langle \nabla_x \phi_1(x, y), \hat{h} \right\rangle, \end{aligned} \quad (3.59)$$

et on conclut de la démonstration du Lemme 3.28 que $\psi_1^\circ(x, \hat{h}) < 0$ lorsque $\|\hat{h}\| \neq 0$. Donc, $\hat{h}(x)$ est également une direction de descente pour $\psi_1(\cdot)$ en x . La Figure 3.3 illustre une situation typique de la phase I. Puisqu'on cherche un nouveau itéré $x^+ \triangleq x + \alpha\hat{h}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $F(x^+, x) < F(x, x) = 0$, réduire F signifie alors, réduire la contrainte. Même si la fonction objectif peut éventuellement augmenter, cette augmentation reste, néanmoins, bornée. La phase I termine avec réussite dès qu'un itéré faisable est déterminé.

La phase I étant finie, la phase II est activée. À partir de ce moment, les itérés restent faisables et l'objectif est minimisé à chaque étape, comme représenté sur la Figure 3.4. L'algorithme converge alors vers un point critique de (3.19).

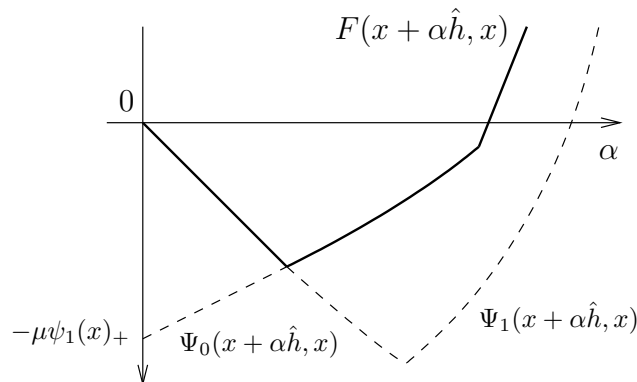


FIG. 3.3 – Recherche linéaire pendant la phase I

Si $\psi_1(x^j) > 0$ pour tout j , alors l'algorithme converge vers un point critique dit *de violation de contrainte* : cette situation correspond à la condition de l'item 1 du Lemme 3.27. Dans ce cas, qui se produit rarement en pratique lorsque les contraintes sont faisables, un redémarrage de l'algorithme devient nécessaire.

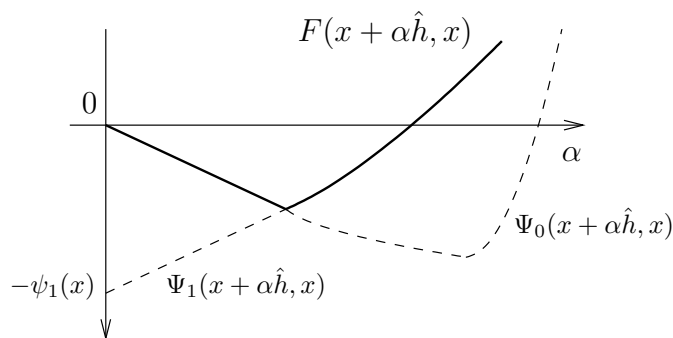


FIG. 3.4 – Recherche linéaire pendant la phase II

La constante $\mu > 0$ dans la fonction de progrès influence le comportement de la méthode pendant la phase I, comme on peut le constater en observant la Figure 3.3. Plus μ est grand, plus la courbe $\Psi_0(x + \alpha \hat{h}, x)$ est déplacée vers le bas, et moins rapidement F devient positive. En pratique, un μ plus grand permet généralement une plus grande diminution de la contrainte à chaque itération, de sorte que l'algorithme converge plus rapidement vers un point faisable. En revanche, la dégradation de la fonction objectif ψ_0 sera probablement plus importante. Dans notre implémentation, nous avons fixé $\mu = 1$.

La détermination de l'itéré suivant x^+ est donc basée sur la direction de descente donnée par \hat{h} , solution du problème (3.34). Ce programme de minimisation (3.34) est désigné *programme tangent*, puisqu'il est question de minimiser l'approximation de premier ordre $\tilde{F}(x + h, x)$ de la fonction de progrès. Une première façon de résoudre le programme

tangent consiste à reformuler (3.41) sous la forme

$$\begin{aligned} & \underset{t \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}^n}{\text{minimiser}} && t + \frac{\delta}{2} \|h\|^2 \\ & \text{sous} && \Lambda + \langle \Phi, h \rangle \leq t, \quad \forall (\Lambda, \Phi) \in \mathcal{G}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

On peut, alternativement, partir de la formulation duale en (3.50) et résoudre le programme

$$\begin{aligned} & \text{maximiser} && \Lambda - \frac{1}{2\delta} \|\Phi\|^2 \\ & \text{sous} && (\Lambda, \Phi) \in \mathcal{G}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

En pratique, l'ensemble \mathcal{G} sera remplacé par une représentation permettant de rendre les programmes (3.60) ou (3.61) traitables. Postérieurement, nous verrons que, pour les critères de synthèse considérés dans notre travail, le programme (3.60) ou sa forme duale (3.61) se réduisent à un SDP ou à un programme quadratique convexe standard. Le choix parmi les deux formes (3.60) ou (3.61) dépend essentiellement du rapport entre le nombre de contraintes nécessaires pour caractériser \mathcal{G} et la dimension de x .

La valeur $x + \hat{h}(x)$ est le minimum de $\tilde{F}(\cdot, x)$ et représente une *estimation* de premier ordre d'un minimum local de $F(\cdot, x)$. La valeur $\hat{h}(x)$ peut être utilisée dans une recherche linéaire du type ARMIJO [95], caractérisée par un pas α dans la direction \hat{h} tel que

$$F(x + \alpha \hat{h}, x) - F(x, x) < \gamma \alpha F^o(x, \hat{h}), \quad (3.62)$$

où $0 < \gamma < 1$ et $F^o(x, d)$ dénote encore une fois la dérivée directionnelle de $F(\cdot, x)$ en x dans la direction d . La recherche linéaire se termine après un nombre fini d'essais de longueur de pas $\alpha \in (0, 1]$ [130, 14]. Après avoir discuté les principales caractéristiques de notre algorithme, nous le présentons sous la forme du pseudo-code ci-dessous.

Algorithm 1 Algorithme non lisse pour le programme (3.19)

Paramètres: $\delta > 0, 0 < \beta, \gamma < 1$.

- 1: **Initialiser.** Sélectionner un point initial x^1 . Assigner le compteur $j = 1$.
- 2: **Test d'arrêt.** Pour le compteur j , terminer si $0 \in \partial_1 F(x^j, x^j)$ et retourner x^j . Sinon continuer.
- 3: **Calculer la direction de descente.** Au compteur j résoudre le programme tangent

$$\min_{h \in \mathbb{R}^n} \tilde{F}(x^j + h, x^j).$$

La solution est la direction de recherche \hat{h} .

- 4: **Recherche linéaire.** Trouver $\alpha = \beta^\nu, \nu \in \mathbb{N}$, satisfaisant la condition d'ARMIJO

$$F(x^j + \alpha \hat{h}, x^j) - F(x^j, x^j) \leq \gamma \alpha F^o(x^j, \hat{h}) < 0.$$

- 5: **Actualiser.** Faire $x^{j+1} = x^j + \alpha \hat{h}$, incrémenter le compteur j de 1 et boucler sur l'étape 2.
-

Notons finalement que la condition d'ARMIJO permet d'établir la convergence globale de l'algorithme vers un point de type F. JOHN qui est le plus souvent un minimum local.

3.3 Sous-différentiel des critères de synthèse

Nous calculons dans cette section le sous-différentiel des fonctions associées aux principaux critères de synthèse considérés dans notre travail. Ainsi, nous revenons au contexte du Chapitre 2, où les paramètres libres du compensateur $\kappa \in \mathbb{R}^q$ en (2.47) constituent les variables de synthèse.

3.3.1 Sous-différentiel de la plus grande valeur singulière d'un transfert

La plus grande valeur singulière du transfert en boucle fermée de w vers z , calculée dans un intervalle de fréquences Ω , est donnée par

$$\psi_{\bar{\sigma}}(\kappa) = \max_{\omega \in \Omega} \bar{\sigma}(T_{zw}(\kappa, j\omega)). \quad (3.63)$$

Le corollaire suivant découle directement du Théorème 3.18.

Corollaire 3.29. *Soit la fonction $\chi : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*

$$\chi(\kappa) \triangleq \max_{\omega \in \Omega} \bar{\sigma}(T_{zw}(\kappa, j\omega))^2, \quad (3.64)$$

où :

- $T_{zw}(\kappa, j\omega)$ est une matrice de valeur complexe, continue, de dimension $p_1 \times m_1$ et différentiable en κ ,
- les dérivées partielles $\partial T_{zw}(\kappa, j\omega) / \partial \kappa_i$, $i \in \{1, \dots, q\}$, sont continues, et
- l'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}$ est compact.

Soit

$$S(\kappa, j\omega) \triangleq T_{zw}(\kappa, j\omega) T_{zw}(\kappa, j\omega)^H. \quad (3.65)$$

On définit $Q(\kappa, j\omega)$ comme une matrice dont les colonnes forment une base orthonormale de l'espace propre de $S(\kappa, j\omega)$ associée à la plus grande valeur propre $\lambda_1(S(\kappa, j\omega))$ de multiplicité m_i . On a alors

$$\begin{aligned} \partial \chi(\kappa) = \text{co}\{v \in \mathbb{C}^q : v_i = \left\langle Q(\kappa, j\omega) Y_w Q(\kappa, j\omega)^H, \frac{\partial S(\kappa, j\omega)}{\partial \kappa_i} \right\rangle, \\ i \in \{1, \dots, q\}, Y_w \in \mathbb{H}^{m_i}, \text{Tr } Y_w = 1, Y_w \geq 0, \omega \in \hat{\Omega}(\kappa)\}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

où $\hat{\Omega}(\kappa)$ désigne l'ensemble des fréquences actives en κ :

$$\hat{\Omega}(\kappa) \triangleq \{\omega \in \Omega : \chi(\kappa) = \bar{\sigma}(T_{zw}(\kappa, j\omega))^2\}. \quad (3.67)$$

Démonstration : D'abord, nous récrivons $\chi(\kappa)$ comme

$$\chi(\kappa) = \max_{\omega \in \Omega} \bar{\sigma}(T_{zw}(\kappa, j\omega))^2 = \max_{\omega \in \Omega} \lambda_1(S(x, j\omega)). \quad (3.68)$$

Selon la caractérisation par le quotient de RAYLEIGH, on a

$$\chi(\kappa) = \max_{\omega \in \Omega} \max_{\|q\|=1} \langle q, S(\kappa, j\omega)q \rangle, \quad (3.69)$$

où $q \in \mathbb{C}^{p_1}$. On a ainsi

$$\chi(\kappa) = \max_{\omega \in \Omega} \max_{\|q\|=1} q^H S(\kappa, j\omega)q \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} &= \max_{\omega \in \Omega} \max_{\|q\|=1} \text{Tr} (q^H S(\kappa, j\omega)q) \\ &= \max_{\omega \in \Omega} \max_{\|q\|=1} \text{Tr} (qq^H S(\kappa, j\omega)) \\ &= \max_{\omega \in \Omega} \max_{\|q\|=1} \langle qq^H, S(\kappa, j\omega) \rangle. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Notons que l'enveloppe convexe de l'ensemble

$$\{qq^H : q \in \mathbb{C}^{p_1}, \|q\| = 1\}$$

est l'ensemble [125]

$$\mathbb{B} \triangleq \{Z : Z \in \mathbb{H}^{p_1}, \text{Tr} Z = 1, Z \geq 0\}. \quad (3.72)$$

Nous revenons à (3.71), et nous utilisons le fait que maximiser une fonction linéaire sur un ensemble produit le même résultat que la maximiser sur l'enveloppe convexe de cet ensemble, d'où l'on a

$$\chi(\kappa) = \max_{\omega \in \Omega} \max_{Z \in \mathbb{B}} \langle Z, S(\kappa, j\omega) \rangle. \quad (3.73)$$

Puisque $Q(\kappa, j\omega)$ est une base orthonormale de l'espace propre associé à $\lambda_1(S(\kappa, j\omega))$, on a que le MAX intérieur en (3.70) est atteint pour tout vecteur q dans l'ensemble

$$\{q : q = Q(\kappa, j\omega)p, p \in \mathbb{C}^{m_i}, \|p\| = 1\}.$$

Ou également, en vu de (3.73), pour toute matrice Z dans l'ensemble

$$\{Z : Z = Q(\kappa, j\omega)Y_w Q(\kappa, j\omega)^H, Y_w \in \mathbb{H}^{m_i}, \text{Tr} Y_w = 1, Y_w \geq 0\}. \quad (3.74)$$

On retrouve, finalement, le résultat du Corollaire 3.29 à partir de la simple application du Théorème 3.18 à la fonction

$$\chi(\kappa) = \max_{y \in Y} \phi(\kappa, \omega), \quad (3.75)$$

où

$$\phi(\kappa, \omega) \triangleq \langle Z, S(\kappa, j\omega) \rangle, \quad y \triangleq (w, Z), \quad Y \triangleq \Omega \times \mathbb{B}. \quad (3.76)$$

■

La dérivée $\partial S(\kappa, j\omega)/\partial \kappa_i$ en (3.66) est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \kappa_i} &= \frac{\partial (T_{zw} T_{zw}^H)}{\partial \kappa_i} = \left(\frac{\partial T_{zw}}{\partial \kappa_i} \right) T_{zw}^H + T_{zw} \frac{\partial (T_{zw}^H)}{\partial \kappa_i} = \left(\frac{\partial T_{zw}}{\partial \kappa_i} \right) T_{zw}^H + T_{zw} \left(\frac{\partial T_{zw}}{\partial \kappa_i} \right)^H \\ &= \left(\frac{\partial T_{zw}}{\partial \kappa_i} \right) T_{zw}^H + \left(\left(\frac{\partial T_{zw}}{\partial \kappa_i} \right) T_{zw}^H \right)^H. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Nous considérons que l'augmentation (2.43) du système a été réalisée, de sorte que le compensateur constitue, à présent, un gain statique \mathcal{K} . Dans ce cas, le transfert de w vers z en boucle fermée est

$$T_{zw}(s) = \mathcal{F}_l(P(s), K(s)) = \mathcal{F}_l(\hat{P}(s), \mathcal{K}) = \hat{P}_{11}(s) + \hat{P}_{12}(s)\mathcal{K}(I - \hat{P}_{22}(s)\mathcal{K})^{-1}\hat{P}_{21}(s). \quad (3.78)$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{zw}}{\partial \kappa_i} &= \hat{P}_{12} \frac{\partial}{\partial \kappa_i} \left(\mathcal{K}(I - \hat{P}_{22}\mathcal{K})^{-1} \right) \hat{P}_{21} \\ &= \hat{P}_{12} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \kappa_i} (I - \hat{P}_{22}\mathcal{K})^{-1} + \mathcal{K} \left(-(I - \hat{P}_{22}\mathcal{K})^{-1} \left(-\hat{P}_{22} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \kappa_i} \right) (I - \hat{P}_{22}\mathcal{K})^{-1} \right) \right) \hat{P}_{21} \\ &= \hat{P}_{12} \left(I + (I - \mathcal{K}\hat{P}_{22})^{-1} \mathcal{K} \hat{P}_{22} \right) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \kappa_i} (I - \hat{P}_{22}\mathcal{K})^{-1} \hat{P}_{21} \\ &= \hat{P}_{12} (I - \mathcal{K}\hat{P}_{22})^{-1} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \kappa_i} (I - \hat{P}_{22}\mathcal{K})^{-1} \hat{P}_{21} \\ &= G_{12}(\kappa, j\omega) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \kappa_i} G_{21}(\kappa, j\omega), \end{aligned} \quad (3.79)$$

avec

$$G_{12}(\kappa, j\omega) \triangleq \hat{P}_{12}(j\omega)(I - \mathcal{K}(\kappa)\hat{P}_{22}(j\omega))^{-1}, \quad (3.80)$$

$$G_{21}(\kappa, j\omega) \triangleq (I - \hat{P}_{22}(j\omega)\mathcal{K}(\kappa))^{-1}\hat{P}_{21}(j\omega). \quad (3.81)$$

À partir des expressions (3.77) et (3.79), nous pouvons calculer explicitement le produit scalaire en (3.66) :

$$\begin{aligned} \left\langle Q(\kappa, j\omega)Y_w Q(\kappa, j\omega)^H, \frac{\partial S(\kappa, j\omega)}{\partial \kappa_i} \right\rangle &= \left\langle QY_w Q^H, \left(\frac{\partial T}{\partial \kappa_i} \right) T_{zw}^H + \left(\left(\frac{\partial T_{zw}}{\partial \kappa_i} \right) T_{zw}^H \right)^H \right\rangle \\ &= \text{Tr} \left(QY_w Q^H \left(\left(\frac{\partial T_{zw}}{\partial \kappa_i} \right) T_{zw}^H + \left(\left(\frac{\partial T_{zw}}{\partial \kappa_i} \right) T_{zw}^H \right)^H \right) \right) \\ &= 2\text{ReTr} \left(QY_w Q^H \left(\frac{\partial T_{zw}}{\partial \kappa_i} \right) T_{zw}^H \right) \\ &= 2\text{ReTr} \left(QY_w Q^H G_{12}(\kappa, j\omega) \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \kappa_i} G_{21}(\kappa, j\omega) T_{zw}^H \right) \\ &= 2\text{ReTr} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \kappa_i} G_{21} T_{zw}^H QY_w Q^H G_{12} \right) \\ &= \text{vec} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \kappa_i} \right)^T \text{vec} (2\text{Re} (G_{21} T_{zw}^H QY_w Q^H G_{12})). \end{aligned} \quad (3.82)$$

Soit

$$J(\kappa) \triangleq [\text{vec} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \kappa^1} \right) \dots \text{vec} \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \kappa^q} \right)]^T. \quad (3.83)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \partial\chi(\kappa) = \text{co}\{J(\kappa) \text{ vec} (2\text{Re} (G_{21}(\kappa, j\omega)T_{zw}(\kappa, j\omega)^H Q(\kappa, j\omega)Y_w Q(\kappa, j\omega)^H G_{12}(\kappa, j\omega))) , \\ Y_w \in \mathbb{H}^{m_i}, \text{Tr} Y_w = 1, Y_w \geq 0, \omega \in \hat{\Omega}(\kappa)\}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

En vérité, $\partial\chi(\kappa)$ en (3.84) représente le sous-différentiel du carré de la plus grande valeur singulière. Le sous-différentiel du vrai critère en (3.63) peut être facilement déterminé à partir de (3.84) par une simple différentiation en chaîne selon le Lemme 3.16 :

$$\begin{aligned} \partial\psi_{\bar{\sigma}}(\kappa) = \\ \text{co}\{J(\kappa) \text{ vec} (\bar{\sigma}(T_{zw}(\kappa, j\omega))^{-1} \text{Re} (G_{21}(\kappa, j\omega)T_{zw}(\kappa, j\omega)^H Q(\kappa, j\omega)Y_w Q(\kappa, j\omega)^H G_{12}(\kappa, j\omega))) , \\ Y_w \in \mathbb{H}^{m_i}, \text{Tr} Y_w = 1, Y_w \geq 0, \omega \in \hat{\Omega}(\kappa)\}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Notons que la partie $\{Y_w \in \mathbb{H}^{m_i} : \text{Tr} Y_w = 1, Y_w \geq 0\}$ en (3.85) se réduit au singleton $\{1\}$ lorsque la multiplicité de la plus grande valeur singulière vaut 1.

La présence de l'inverse de la plus grande valeur singulière dans la caractérisation (3.85) peut poser des problèmes numériques. Soit

$$T_{zw}(\kappa, j\omega) = U(\kappa, j\omega)\Sigma(\kappa, j\omega)V(\kappa, j\omega)^H \quad (3.86)$$

une décomposition en valeurs singulières de $T_{zw}(\kappa, j\omega)$. Considérons $Q_u(\kappa, j\omega)$ comme la sous-matrice de $U(\kappa, j\omega)$ constituée des vecteurs singuliers à gauche associés à $\bar{\sigma}(T_{zw}(\kappa, j\omega))$, et $Q_v(\kappa, j\omega)$ comme la sous-matrice de $V(\kappa, j\omega)$ constituée des vecteurs singuliers à droite correspondant à $\bar{\sigma}(T_{zw}(\kappa, j\omega))$. D'abord, on sait que les vecteurs singuliers à gauche associés à $\bar{\sigma}(T_{zw}(\kappa, j\omega))$ sont des vecteurs propres de $S(\kappa, j\omega)$ associés à $\lambda_1(S(\kappa, j\omega))$. Autrement dit, $Q_u(\kappa, j\omega) \equiv Q(\kappa, j\omega)$. De plus, on montre facilement que

$$T_{zw}(\kappa, j\omega)^H Q_u(\kappa, j\omega) = \bar{\sigma}(T_{zw}(\kappa, j\omega))Q_v(\kappa, j\omega).$$

Ainsi, nous pouvons finalement récrire (3.85) comme

$$\begin{aligned} \partial\psi_{\bar{\sigma}}(\kappa) = \text{co}\{J(\kappa) \text{ vec} (\text{Re} (G_{21}(\kappa, j\omega)Q_v(\kappa, j\omega)Y_w Q_u(\kappa, j\omega)^H G_{12}(\kappa, j\omega))) , \\ Y_w \in \mathbb{H}^{m_i}, \text{Tr} Y_w = 1, Y_w \geq 0, \omega \in \hat{\Omega}(\kappa)\}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

On peut aussi obtenir l'expression (3.87) par un raisonnement différent. En effet, on montre facilement à partir du quotient de RAYLEIGH que

$$\bar{\sigma}(T_{zw}(\kappa, j\omega)) = \max_{\|q\|=1} \|T_{zw}(\kappa, j\omega)q\|. \quad (3.88)$$

Étant donné que la norme d'un vecteur peut être aussi déterminée par

$$\|b\| = \max_{\|a\|=1} \langle a, b \rangle,$$

nous pouvons alors récrire (3.88) comme

$$\bar{\sigma}(T_{zw}(\kappa, j\omega)) = \max_{\|p\|=1} \max_{\|q\|=1} \langle p, T_{zw}(\kappa, j\omega)q \rangle. \quad (3.89)$$

Le MAX est atteint en (3.88) lorsque q et p sont des vecteurs singuliers unitaires, respectivement à droite et à gauche, associés à $\bar{\sigma}(T_{zw}(\kappa, j\omega))$. On retrouve alors le résultat du Corollaire 3.29 ou l'expression (3.87) à partir de l'application du Théorème 3.18 à la fonction :

$$\psi_{\bar{\sigma}}(\kappa) = \max_{y \in Y} \phi(\kappa, y),$$

où

$$y \triangleq (\omega, p, q), \quad \phi(\kappa, y) \triangleq \langle p, T_{zw}(\kappa, j\omega)q \rangle, \\ Y \triangleq \Omega \times \{p \in \mathbb{C}^{p_1} \mid \|p\| = 1\} \times \{q \in \mathbb{C}^{m_1} \mid \|q\| = 1\}.$$

En dernier lieu, nous remarquons que, par un souci de stabilité numérique, les transferts $G_{12}(\kappa, j\omega)$ et $G_{21}(\kappa, j\omega)$ en (3.85) ou en (3.87) sont calculés par le biais de réalisations en espace d'état. Dans ce qui suit, nous déterminons des réalisations pour $G_{12}(\kappa, j\omega)$ et $G_{21}(\kappa, j\omega)$.

À partir de (2.38) et les notations du Chapitre 2, on a

$$T_{zw}(\kappa, s) = \mathcal{C}(\kappa)(sI - \mathcal{A}(\kappa))^{-1}\mathcal{B}(\kappa) + \mathcal{D}(\kappa)$$

D'où l'on tire que

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{zw}}{\partial \kappa_i} &= \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \kappa_i} (sI - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} + \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \kappa_i} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \kappa_i} (sI - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \kappa_i} \\ &= [\mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1} \quad I] \frac{\partial}{\partial \kappa_i} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} \\ I \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Nous avons aussi de (2.41) que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 \\ \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_2 \\ \hat{D}_{12} \end{bmatrix} \mathcal{K} (I - \hat{D}_{22} \mathcal{K})^{-1} \begin{bmatrix} \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} \end{bmatrix}$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial}{\partial \kappa_i} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{B}_2 \\ \hat{D}_{12} \end{bmatrix} \hat{S}_K^{-1} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \kappa_i} \hat{S}_D^{-1} \begin{bmatrix} \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

où

$$\hat{S}_K^{-1} \triangleq (I - \mathcal{K} \hat{D}_{22})^{-1}, \quad \hat{S}_D^{-1} \triangleq (I - \hat{D}_{22} \mathcal{K})^{-1}. \quad (3.92)$$

En remplaçant (3.91) dans (3.90), on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{zw}}{\partial \kappa_i} &= [\mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1} \quad I] \begin{bmatrix} \hat{B}_2 \\ \hat{D}_{12} \end{bmatrix} \hat{S}_K^{-1} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \kappa_i} \hat{S}_D^{-1} \begin{bmatrix} \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (sI - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} \\ I \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\left(\mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1} \hat{B}_2 \hat{S}_K^{-1} + \hat{D}_{12} \hat{S}_K^{-1} \right)}_{G_{12}(\kappa, j\omega)} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \kappa_i} \underbrace{\left(\hat{S}_D^{-1} \hat{C}_2 (sI - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} + \hat{S}_D^{-1} \hat{D}_{21} \right)}_{G_{21}(\kappa, j\omega)} \end{aligned} \quad (3.93)$$

Nous avons, ainsi, déterminé les réalisations

$$G_{12}(\kappa, j\omega) = \left[\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{C}} \middle| \frac{\hat{B}_2 \hat{S}_K^{-1}}{\hat{D}_{21} \hat{S}_K^{-1}} \right], \quad G_{21}(\kappa, j\omega) = \left[\frac{\mathcal{A}}{\hat{S}_D^{-1} \hat{C}_2} \middle| \frac{\mathcal{B}}{\hat{S}_D^{-1} \hat{D}_{21}} \right]. \quad (3.94)$$

3.3.2 Sous-différentiel de la violation de l'enveloppe temporelle

La violation de l'enveloppe de contraintes temporelles a été définie en (2.107) par

$$\begin{aligned} \psi_t(\kappa) &= \max_{t \in \mathbb{R}} \max([z(\kappa, t) - u(t)]_+, [l(t) - z(\kappa, t)]_+) \\ &= \max_{t \in \mathbb{R}} \max(z(\kappa, t) - u(t), l(t) - z(\kappa, t), 0). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Soit

$$\begin{aligned} \phi_1(\kappa, t) &\triangleq z(\kappa, t) - u(t), \\ \phi_2(\kappa, t) &\triangleq l(t) - z(\kappa, t), \\ \phi_3(\kappa, t) &\triangleq 0. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Nous récrivons $\psi_t(\kappa)$ par

$$\psi_t(\kappa) = \max_{t \in \mathbb{R}} \max_{j \in \{1,2,3\}} \phi_j(\kappa, t). \quad (3.97)$$

Ou, encore,

$$\psi_t(\kappa) = \max_{y \in Y} \phi(\kappa, y), \quad (3.98)$$

avec

$$\begin{aligned} Y &\triangleq \mathbb{R} \times \{1, 2, 3\}, \\ y &\triangleq (t, j(t)), \\ \phi(\kappa, y) &\triangleq \phi_j(\kappa, t). \end{aligned} \quad (3.99)$$

Supposons que la réponse temporelle $\kappa \rightarrow z(\cdot, t)$ est continûment différentiable. Alors on obtient le sous-différentiel de $\psi_t(\cdot)$ en κ directement à partir du Théorème (3.18) :

$$\partial \psi_t(\kappa) = \text{co}_{y \in \hat{Y}(\kappa)} \{ \nabla_{\kappa} \phi(\kappa, y) \} \quad (3.100)$$

où $\hat{Y}(\kappa)$ désigne l'ensemble des indices actifs :

$$\hat{Y}(\kappa) \triangleq \{ y \in Y : \psi_t(\kappa) = \phi(\kappa, y) \}. \quad (3.101)$$

Récrivons (3.100) dans une forme moins abstraite :

$$\partial \psi_t(\kappa) = \text{co}_{t \in \mathbb{T}(\kappa)} \left\{ \text{co}_{j \in \hat{J}(\kappa, t)} \nabla_{\kappa} \phi_j(\kappa, t) \right\}, \quad (3.102)$$

où $\hat{J}(\kappa, t)$ indique les termes de (3.95) qui sont actifs à l'instant t

$$\hat{J}(\kappa, t) \triangleq \left\{ j \in \{1, 2, 3\} : \max_{j \in \{1, 2, 3\}} \phi_j(\kappa, t) = \phi_j(\kappa, t) \right\}, \quad (3.103)$$

et $\mathbb{T}(\kappa)$ désigne l'ensemble des instants actifs

$$\mathbb{T}(\kappa) \triangleq \left\{ t \in \mathbb{R} : \psi_t(\kappa) = \max_{j \in \{1, 2, 3\}} \phi_j(\kappa, t) \right\}. \quad (3.104)$$

Les gradients des trois branches de $\psi_t(\cdot)$ sont facilement calculés comme

$$\begin{aligned} \nabla_{\kappa} \phi_1(\kappa, t) &= \nabla_{\kappa} z(\kappa, t), \\ \nabla_{\kappa} \phi_2(\kappa, t) &= -\nabla_{\kappa} z(\kappa, t), \\ \nabla_{\kappa} \phi_3(\kappa, t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Il nous reste à calculer $\nabla_{\kappa} z(\kappa, t)$ en (3.105) pour pouvoir caractériser complètement le sous-différentiel de $\psi_t(\cdot)$ en (3.102). D'abord, nous réalisons l'augmentation (2.43) du système, de sorte que

$$\begin{bmatrix} z(\kappa, s) \\ \hat{y}(\kappa, s) \end{bmatrix} = \hat{P}(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ \hat{u}(\kappa, s) \end{bmatrix}. \quad (3.106)$$

Nous notons que l'entrée exogène w ne dépend pas des paramètres κ du compensateur. Si l'on dérive (3.106) par rapport à l' i -ième paramètre du compensateur, on a

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z(\kappa, s)}{\partial \kappa_i} \\ \frac{\partial \hat{y}(\kappa, s)}{\partial \kappa_i} \end{bmatrix} = \hat{P}(s) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial \hat{u}(\kappa, s)}{\partial \kappa_i} \end{bmatrix}. \quad (3.107)$$

De même, si l'on dérive l'équation du compensateur, on a

$$\frac{\partial \hat{u}(\kappa, s)}{\partial \kappa_i} = \mathcal{K}(\kappa) \frac{\partial \hat{y}(\kappa, s)}{\partial \kappa_i} + \frac{\partial \mathcal{K}(\kappa)}{\partial \kappa_i} \hat{y}(\kappa, s) \quad (3.108)$$

Ainsi, $\frac{\partial z(\kappa, s)}{\partial \kappa_i}$ peut être déterminée par la résolution du système d'équations (3.107)-(3.108). Or, il s'avère que l'on peut résoudre ce système d'équations à partir de la simulation numérique du système en boucle fermée sur la Figure 3.5(b).

Afin de réaliser les simulations pour l'obtention des dérivés partielles, on a besoin du signal $\hat{y}(\kappa, t)$, qui est utilisé pour déterminer l'excitation

$$\zeta_i(\kappa, t) \triangleq \frac{\partial \mathcal{K}(\kappa)}{\partial \kappa_i} \hat{y}(\kappa, t).$$

Le signal $\hat{y}(\kappa, t)$ est obtenu précédemment comme un sous-produit de la simulation déterminant $z(\kappa, t)$, sur la Figure 3.5(a). En résumé, on doit stocker la réponse $\hat{y}(\kappa, t)$ afin de construire le signal $\zeta_i(\kappa, t)$ qui sera injecté dans la simulation pour le calcul de $\frac{\partial z(\kappa, t)}{\partial \kappa_i}$.

Les systèmes linéaires sont particulièrement favorables dans ce contexte, parce que les simulations pour le calcul des dérivées partielles peuvent être réalisées avec le système en boucle fermée originel, comme montré sur la Figure 3.5.

Considérons, à présent, l'abscisse spectrale de la matrice d'état du système en boucle fermée en (2.109) :

$$\psi_\alpha(\mathcal{K}) = \alpha(\mathcal{A}(\mathcal{K})) = \max_j \operatorname{Re}(\lambda_j(\hat{A} + \hat{B}_2\mathcal{K}(I - \hat{D}_{22}\mathcal{K})^{-1}\hat{C}_2)).$$

De (3.91), on sait que

$$\mathcal{A}'(\mathcal{K})\delta\mathcal{K} = \hat{B}_2\hat{S}_K^{-1}(\mathcal{K})\delta\mathcal{K}\hat{S}_D^{-1}(\mathcal{K})\hat{C}_2, \quad (3.111)$$

où $\hat{S}_K^{-1}(\mathcal{K})$ et $\hat{S}_D^{-1}(\mathcal{K})$ ont été définis en (3.92). À la lumière de la règle de différentiation en chaîne du Lemme 3.16, les sous-gradients de $(\alpha \circ \mathcal{A})$ en \mathcal{K} ont la forme $\Phi \triangleq \mathcal{A}'(\mathcal{K})^*\phi_j$, où l'adjointe $\mathcal{A}'(\mathcal{K})^*$ agit sur ϕ_j selon

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}'(\mathcal{K})^*\phi_j, \delta\mathcal{K} \rangle &= \langle \mathcal{A}'(\mathcal{K})\delta\mathcal{K}, \phi_j \rangle \\ &= \operatorname{Tr} \left(\left(\hat{B}_2\hat{S}_K^{-1}\delta\mathcal{K}\hat{S}_D^{-1}\hat{C}_2 \right)^T \operatorname{Re}(U_j Y_j V_j^H) \right) \\ &= \operatorname{Tr} \left(\hat{S}_K^{-T} \hat{B}_2^T \operatorname{Re}(U_j Y_j V_j^H) \hat{C}_2^T \hat{S}_D^{-T} \delta\mathcal{K}^T \right) \\ &= \operatorname{Tr} \left(\operatorname{Re} \left(\hat{S}_K^{-T} \hat{B}_2^T U_j Y_j V_j^H \hat{C}_2^T \hat{S}_D^{-T} \right) \delta\mathcal{K}^T \right) \\ &= \operatorname{vec} \left(\operatorname{Re} \left(\hat{S}_K^{-T} \hat{B}_2^T U_j Y_j V_j^H \hat{C}_2^T \hat{S}_D^{-T} \right) \right)^T \operatorname{vec}(\delta\mathcal{K}). \end{aligned} \quad (3.112)$$

Pour $J(\kappa)$ défini en (3.83), on a

$$\langle \mathcal{A}'(\kappa)^*\phi_j, \delta\kappa \rangle = \operatorname{vec} \left(\operatorname{Re} \left(\hat{S}_K^{-T} \hat{B}_2^T U_j Y_j V_j^H \hat{C}_2^T \hat{S}_D^{-T} \right) \right)^T J(\kappa)^T \operatorname{vec}(\delta\kappa). \quad (3.113)$$

Ainsi, le sous-différentiel de la fonction composée $\partial(\alpha \circ \mathcal{A})(\cdot)$ en κ est donné par

$$\begin{aligned} \partial\psi_\alpha(\kappa) &= \operatorname{co}\{J(\kappa) \operatorname{vec} \left(\operatorname{Re} \left(\hat{S}_K^{-T}(\kappa) \hat{B}_2^T U_j(\kappa) Y_j V_j^H(\kappa) \hat{C}_2^T \hat{S}_D^{-T}(\kappa) \right) \right) \\ &\quad : Y_j \in \mathbb{H}^{m_j}, \operatorname{Tr} Y_j = 1, Y_j \geq 0, j \in \mathbf{m}(\kappa)\}, \end{aligned} \quad (3.114)$$

où $\mathbf{m}(\kappa)$ est l'ensemble des indices actifs en κ :

$$\mathbf{m}(\kappa) \triangleq \{j \in 1, \dots, q : \nu_j(\mathcal{A}(\kappa)) = \alpha(\mathcal{A}(\kappa))\}. \quad (3.115)$$

Observons que le sous-différentiel de la plus grande valeur singulière d'un transfert en (3.87) et le sous-différentiel de l'abscisse spectrale de la matrice d'état en boucle fermée en (3.114) présentent des structures similaires.

Comme souligné dans la Section 2.2.2, l'hypothèse que les valeurs propres distinctes actives de $\mathcal{A}(\kappa)$ sont semi-simples n'est pas restrictive dans le contexte du problème de la stabilisation. Nous considérons ainsi cette hypothèse satisfaite tout au long de notre travail.

3.4 Conclusion

Dans les chapitres qui suivent, nous utilisons la technique d'optimisation non lisse présentée dans la Section 3.2.2 afin de résoudre divers problèmes difficiles de synthèse de compensateurs structurés. Comme indiqué dans le Chapitre 2, nous faisons appel à une approche du type norme de CHEBYSHEV pondérée pour accommoder les différents critères de synthèse. Il en résulte un programme d'optimisation du type MINIMAX semi-infini, non convexe et avec contraintes :

$$\begin{aligned} & \underset{\kappa \in \mathbb{R}^q}{\text{minimiser}} && \max_{1 \leq i \leq N} && c_i(\hat{\psi}_i(\kappa) - \chi_i) \\ & \text{sous} && \max_{N+1 \leq i \leq M} && c_i(\hat{\psi}_i(\kappa) - \chi_i) \leq 0, \end{aligned} \tag{3.116}$$

où $c_i, \chi_i \in \mathbb{R}$ et les fonctions $\hat{\psi}_i(\kappa)$ ont la forme générale introduite dans le Théorème 3.18

$$\hat{\psi}_i(\kappa) = \max_{\hat{y} \in \hat{Y}_i} \hat{\phi}_i(\kappa, \hat{y}),$$

telles que celles considérées dans la Section 3.3. En effet, il n'est pas difficile de voir que ce programme de synthèse multiobjectif (3.116) appartient à la classe de problèmes représenté par le programme modèle (3.19) de la Section 3.2 : il suffit de définir, pour $j \in \{0, 1\}$,

$$\psi_j(\kappa) \triangleq \max_{y \in Y_j} \phi_j(\kappa, y),$$

avec

$$\begin{aligned} y & \triangleq (i, \hat{y}), \\ Y_0 & \triangleq \{1, \dots, N\} \times \hat{Y}_i, \\ Y_1 & \triangleq \{N+1, \dots, M\} \times \hat{Y}_i, \\ \phi_j(\kappa, y) & \triangleq c_i(\hat{\phi}_i(\kappa, \hat{y}) - \chi_i). \end{aligned}$$

Deuxième partie

Algorithmes développés et applications

Chapitre 4

Synthèse non lisse fréquentielle multibande

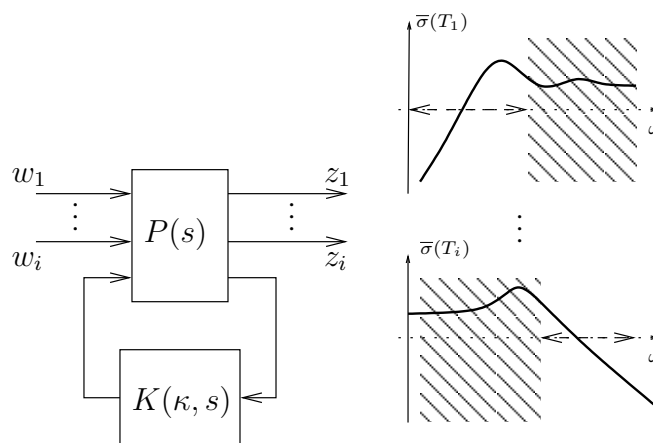


FIG. 4.1 – Visualisation de la synthèse non lisse fréquentielle multibande

NOUS avons noté précédemment que plusieurs propriétés du système en boucle fermée concernant la performance et la robustesse sont étroitement liées aux propriétés de différentes fonctions de sensibilité dans des bandes fréquentielles particulières. Dans le problème de synthèse multibande visualisé sur la Figure 4.1 et considéré dans l'article qui suit, on cherche ainsi à satisfaire les différentes spécifications de performance et de robustesses par le façonnement dans des bandes fréquentielles restreintes des diverses fonctions de sensibilité.

Bien que cette approche multibande soit d'une grande utilité pratique, il s'agit d'un problème difficile de synthèse. C'est pourquoi peu de méthodes pour la synthèse multibande ont été proposées dans la littérature. De fait, aucune technique satisfaisante n'est actuellement disponible lorsqu'il s'agit de compensateurs structurés et de systèmes multivariable. L'approche conventionnelle, par exemple, consiste à utiliser une technique fréquentielle monocanal avec l'introduction de fonctions de pondération intervenant sur la totalité de l'axe fréquentiel. Cette méthode n'est pourtant pas satisfaisante car rechercher de telles fonctions est un problème difficile. Par ailleurs, ces fonctions augmentent sub-

stantiellement l'ordre du système et par conséquent l'ordre du compensateur si l'on utilise une technique classique. Dans notre approche non lisse, on peut se passer des fonctions de pondération, évitant ainsi les difficultés indiquées.

Le problème de synthèse multibande est posé dans l'article qui suit comme la réduction simultanée d'une famille finie de fonctions de performance, où chaque fonction de performance est définie par la valeur pic de la plus grande valeur singulière d'une fonction de transfert en boucle fermée sur un intervalle prescrit de fréquences. Lorsque les bandes de fréquences utilisées pour les performances ne couvrent pas entièrement l'axe de fréquence, nous traitons la stabilité en boucle fermée comme une contrainte de programmation dure. Le problème de synthèse est alors reformulé sous la forme d'un programme d'optimisation MINIMAX, non convexe, semi-infini avec contraintes. Ce dernier est résolu en utilisant la technique d'optimisation non lisse du Chapitre 3. Notre technique non lisse basée sur l'idée de fonction de progrès offre l'avantage de surmonter les complications inhérents aux approches du type pénalité [13] en termes de temps d'exécution et de conditionnement numérique.

Afin de démontrer la valeur pratique de notre méthode non lisse multibande, nous considérons deux applications. Dans le premier exemple, nous synthétisons un compensateur d'ordre réduit avec un filtre de *washout* pour un système de puissance d'ordre élevé. La synthèse d'un compensateur pour des systèmes de grande dimension pose souvent d'importantes difficultés numériques et on est généralement obligé d'utiliser une technique de réduction de modèle. Or, la recherche d'un modèle réduit pour un système de grande taille est encore une fois un problème difficile. Notre approche est flexible dans ce contexte car elle permet de synthétiser un compensateur structuré pour ce problème sans avoir recours à de tels artifices.

La deuxième application comprend un système télescopique flexible, où des contraintes fréquentielles apparaissent naturellement du fait des modes flexibles. Il s'agit d'un problème multibande typique, puisque la performance est dictée essentiellement par la gamme des basses fréquences tandis que la robustesse doit être assurée pour la gamme des hautes fréquences où se trouvent les modes flexibles. Contrairement à l'approche traditionnelle où le système et les fonctions de pondération sont réunis dans une unique interconnexion de synthèse, notre méthode permet de garder explicitement chaque contrainte sur différentes bandes fréquentielles. Le problème de synthèse peut ainsi être abordé de façon explicite et directe.

Non-smooth progress function algorithm for frequency-shaping control design

A. M. Simões, P. Apkarian and D. Noll

*Article publié dans IET Control Theory & Applications,
vol.2, no.4, pp.323-336, April 2008.*

Abstract

In classical controller design, closed-loop performance specifications arise naturally as constraints on restricted frequency bands. This leads to a difficult design problem, which is currently circumvented by heuristic techniques. In this paper, we develop a nonsmooth progress function algorithm which enjoys features similar to exact penalization strategies to solve the problem. This allows us to compute locally optimal solutions to the frequency shaping control design problem. The new technique is highly efficient, as we demonstrate by way of two case studies, a large dimension power system, and a flexible telescope.

4.1 Introduction

Frequency shaping control design consists in the simultaneous minimization of a finite family of closed-loop performance functions

$$f(K) = \max_{i=1,\dots,N} \|T_{w^i \rightarrow z^i}(K)\|_{I_i}, \quad (4.1)$$

where K stands for the feedback controller, $s \mapsto [T_{w^i \rightarrow z^i}(K)](s)$ is the i th closed-loop performance channel, and $\|T_{w^i \rightarrow z^i}(K)\|_{I_i}$ denotes the peak value of the transfer function maximum singular value norm on a prescribed frequency interval I_i :

$$\|T_{w^i \rightarrow z^i}(K)\|_{I_i} = \sup_{\omega \in I_i} \bar{\sigma}([T_{w^i \rightarrow z^i}(K)](j\omega)).$$

The frequency band I_i is typically a closed interval $I_i = [\omega_1^i, \omega_2^i]$, or more generally, a finite union of intervals $I_i = [\omega_1^i, \omega_2^i] \cup \dots \cup [\omega_{q_i}^i, \omega_{q_i+1}^i]$, where right interval tips may take infinite values.

Multi-band control design is of great practical interest since performance criteria are often expressed as constraints on specific frequency bands. Currently these bands are handled indirectly by introducing weighting functions. This is inconvenient since finding appropriate weighting functions is time-consuming and always prone to failure, and also because this increases the plant order and thereby the controller order. Our approach dispenses with weighting functions and avoids the indicated difficulties.

Despite its importance, only very few methods for multi-band synthesis are reported in the literature. In [91], an extension of the Kalman-Yakubovich-Popov Lemma [133] is developed for band restricted frequency domain constraints, but a fairly conservative convexifying procedure is adopted. The QFT method [88] may be used to solve band limited synthesis problems, but it is no longer suited if additional structural constraints on the controller have to be satisfied. Similar comments could be made about synthesis based on the Youla parametrization, which generally leads to high-order controllers [25]. Other tools, as the classical Bode, Nyquist and Nichols plots [59, 18], and more recently [156], are suited for this type of application, but are essentially limited to single-input single-output systems, even though some multivariable generalizations have been attempted over the years [109].

Our new multi-band synthesis algorithm is based on a nonsmooth optimization technique. One of its principal features is that a substantial part of the computations is carried out in the frequency domain. This allows efficient function and gradient calculations and avoids Lyapunov variables, whose number grows quadratically with the system size. The latter is one of the principal difficulties of approaches based on linear or bilinear matrix inequalities.

The algorithm proposed here expands on the nonsmooth H_∞ synthesis method of [11]. It does not require the management of penalty or homotopy parameters, as was still necessary in [13]. The technique in reference [13] is based on a penalization strategy, which essentially constructs a modified objective function augmented by a penalty term of the constraint violation. Despite its simplicity and intuitive appeal penalization and barrier strategies raise important and critical questions as: how to initialize and update the penalty parameter? how to avoid the inherent ill-conditioning of these techniques for asymptotic values of the penalty parameter? These issues make the implementation of these techniques a rather difficult task. Moreover, these strategies may lead to unsatisfactory execution times since an unconstrained nonlinear problem must be solved to completion for each value of the penalty (barrier or homotopy) parameter.

The strategy proposed in the present work is more in line with exact penalization techniques where solutions to the original problem are obtained with a single execution with fixed value of the penalty parameter. In the paper, a progress function is introduced which plays the role of an exact penalty function and computing local solutions reduces to minimizing the progress function.

It is also important to notice that in contrast with H_∞ -synthesis [11], in multi-band synthesis closed-loop stability has to be modelled as a mathematical programming constraint, if the frequency bands used for performance do not fully cover the frequency axis

in a sense that will be clarified in the application section.

In order to demonstrate the efficiency of our nonsmooth design technique in practically difficult cases, two benchmark studies are presented. The first example is a power system, which is challenging because of the large dimension. For such large-scale systems, model reduction is typically used, but bears the risk of having to work with overly simplified reduced models. Our new approach is versatile in this situation, because it allows to synthesize structured controllers such as reduced-order or decentralized controllers, or controllers including washout filters.

The second case study is a flexible telescope system, where frequency-domain constraints arise naturally due to the presence of flexible modes. In general, performance is dominant in the low frequency range, while stability and robustness have to be guaranteed in the high frequency range. In contrast with the traditional approach, where the plant and weighting functions are assembled into an unique synthesis interconnection $w \rightarrow z$, our approach allows to keep each frequency band constraint $w^i \rightarrow z^i$ explicitly, and to address the problem in a direct and natural way.

The structure of the paper is as follows. Section 4.2 provides a precise statement of the multi-band frequency domain design problem. Our resolution technique based on a nonsmooth algorithm is discussed in section 4.3. Two realistic case studies are presented in section 4.4.

Notation

Let $\mathbb{R}^{n \times m}$ be the space of $n \times m$ matrices, equipped with the corresponding scalar product $\langle X, Y \rangle = X \bullet Y := \text{Tr}(X^T Y)$, where X^T is the transpose of the matrix X , $\text{Tr}X$ its trace. For complex matrices, X^H denotes the conjugate transpose. For Hermitian or symmetric matrices, $X \succ Y$ means that $X - Y$ is positive definite, $X \succeq Y$ that $X - Y$ is positive semi-definite. The symbol \mathbb{H}^m stands for the set of Hermitian matrices of size m . We let λ_1 denote the maximum eigenvalue of a symmetric or Hermitian matrix. The notation $\text{co}(S)$ refers to the convex hull of the set S . The notation $\|\cdot\|$ stands for the max singular value norm $\bar{\sigma}$, unless stated otherwise. We shall use concepts from nonsmooth analysis covered by [43]. In particular, for a locally Lipschitz function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f'(x, d)$ denotes the Clarke directional derivative of f at x in the direction d defined as

$$f'(x, d) := \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{f(y + td) - f(y)}{t}.$$

The notation $\partial f(x)$ denotes the Clarke subdifferential of f at x defined as

$$\partial f(x) := \{s \in \mathbb{R}^n : \langle s, d \rangle \leq f'(x, d), \forall d \in \mathbb{R}^n\}.$$

For functions of two variables $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, the notation $\partial_1 f(x, y)$ is used to denote its Clarke subdifferential with respect to x at (x, y) . In the sequel of the paper, each

$T_{w^i \rightarrow z^i}$ is a smooth operator defined on the open domain $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{(m_2+k) \times (p_2+k)}$ of k th order stabilizing feedback controllers

$$K := \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix}, \quad A_K \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

with values in the infinite dimensional space \mathcal{RH}_∞ of rational stable transfer function matrices.

4.2 Multi-band frequency domain design

We consider a plant P in state-space form

$$P(s) : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

together with N concurring performance specifications, represented as a family of plants $P^i(s)$ described in state-space form as

$$P^i(s) : \begin{bmatrix} \dot{x}^i \\ z^i \\ y^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^i & B_1^i & B_2^i \\ C_1^i & D_{11}^i & D_{12}^i \\ C_2^i & D_{21}^i & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^i \\ w^i \\ u^i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.2)$$

where $x^i \in \mathbb{R}^{n^i}$ is the state vector of P^i , $u^i \in \mathbb{R}^{m^i}$ the vector of control inputs, $w^i \in \mathbb{R}^{m^i}$ the vector of exogenous inputs, $y^i \in \mathbb{R}^{p^i}$ the vector of measurements and $z^i \in \mathbb{R}^{p^i}$ the controlled or performance vector associated with the i th input w^i . The performance channels typically incorporate frequency filters which create new states x^i containing the state x of P , so that the matrices A^i contain the original system matrices A , etc. The difference with the usual multi-channel synthesis is that each $T_{w^i \rightarrow z^i}$ is only tested on a specific frequency band I_i . For simplicity of the presentation, we have assumed throughout that $D = 0$. When this does not hold, we tacitly assume either a standard loop transformation of the controller is performed afterwards [174, p.317] or subgradient formulas are suitably extended to a non-zero feedthrough plant matrix.

The multi-band synthesis problem consists of designing a dynamic output feedback controller $u^i = K(s)y^i$ for the plant family (4.2) that stabilizes the original plant P in closed-loop and that minimizes, among all internally stabilizing controllers, the worst case performance function (4.1). In formulas:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(K) = \max_{i=1, \dots, N} \|T_{w^i \rightarrow z^i}(K)\|_{I_i} \\ & \text{subject to} && K \text{ stabilizes } (A, B, C) \end{aligned} \quad (4.3)$$

where the case $k = 0$ of a static controller $K(s) = D_K$ is included. Often practical considerations require additional structural constraints on the controller K . Structures as low-order controllers ($0 \leq k \ll n_i$), decentralized or fixed pattern controllers, PID control, and much else are easily incorporated into program (4.3) as nonlinear programming constraints, see [8] for details.

A difficulty in (4.3) is that stability is not a constraint in the usual sense of mathematical programming, because the set \mathcal{D} of closed loop stabilizing K is open, and an element K on the boundary $\partial\mathcal{D}$ is *not* a valid solution of the control problem. Since an optimization algorithm for (4.3) eventually converges to a solution on the boundary of \mathcal{D} , we have to modify this constraint in order to avoid numerical failure. One way to do this is to replace program (4.3) by

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(K) = \max_{i=1,\dots,N} \|T_{w^i \rightarrow z^i}(K)\|_{I_i} \\ \text{subject to} \quad & g(K) = \|(sI - \mathcal{A}(K))^{-1}\|_{\infty} - \beta^{-1} \leq 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

where $\mathcal{A}(K)$ is the closed-loop system matrix, and β is a small parameter. Note that the constraint $g(K) \leq 0$ in (4.4) will force the controller iterates to remain in the stabilizing region in the course of the algorithm. The value of $\beta > 0$ is the smallest distance to instability we allow the closed-loop system [37]. In our experiments we usually choose $\beta \approx 10^{-9}$.

Another practically interesting cast is the following

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f_1(K) = \|T_{w^1 \rightarrow z^1}(K)\|_{I_1} \\ \text{subject to} \quad & f_i(K) = \|T_{w^i \rightarrow z^i}(K)\|_{I_i} - \gamma_i \leq 0, \quad i = 2, \dots, N \\ & g(K) = \|(sI - \mathcal{A}(K))^{-1}\|_{\infty} - \beta^{-1} \leq 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

where one performance channel is minimized subject to performance constraints on the other channels. Both formulation (4.4) and (4.5) are equivalent as soon as appropriate scalars α_i are introduced to weigh the relative importance of the channels in (4.4). In the numerical experiments of section 4.4 we have chosen to work with (4.4), although our algorithm is open to the option (4.5).

We note that (4.4) and (4.5) are nonconvex programs, and finding a global solution is difficult as a rule. In response, the technique we propose here is a local optimization method, which is less ambitious than global methods, providing solutions with a local optimality certificate. If the computed locally optimal controller turns out to be unsatisfactory, we have to restart our method at a different initial controller or to re-tune the weights between the various performance objectives. Our numerical experiments in Section 4.4 show that the slight inconvenience of a local method is largely compensated by its practical benefits in terms of controller structure, flexibility to manage a set of conflicting specifications, and of cpu time.

The strategy we adopt to select the individual weights in (4.4) for the benchmark studies of Section 4.4 is analogous to the aspiration levels approach for multi-objective optimization, see [25, p.64]. We first normalize $f(K)$ in (4.4) by setting

$$f(K) = \max_{i=1,\dots,N} \|T_{w^i \rightarrow z^i}(K)\|_{I_i} / \gamma_i,$$

where each γ_i represents the aspiration level for the i th channel. The goal then becomes to find a solution with $f(K) \leq 1$, which indicates whether our specifications have been met. We then perform a few trial-and-error designs where satisfied constraints can be strengthened while violated constraints can be relaxed.

4.3 Nonsmooth minimization technique

In this section we give a concise presentation of our optimization method. For a more detailed introduction to the salient features we refer the reader to [11, 130], and to [15] for variations of the present technique. Our goal is to minimize a function of the form

$$f(K) = \max_{i=1,\dots,N} f_i(K),$$

where each $f_i(K)$ is a nonsmooth and nonconvex function of the form

$$f_i(K) = \sup_{\omega \in [\omega_{i1}, \omega_{i2}]} \lambda_1([T_{w^i \rightarrow z^i}(K)](j\omega)[T_{w^i \rightarrow z^i}(K)](j\omega)^H).$$

Notice that for convenience we have replaced f, f_i, g in (4.4) and (4.5) by their squares. In order to alleviate notation, we will henceforth write

$$\begin{aligned} f_i(K, \omega) &= \lambda_1([T_{w^i \rightarrow z^i}(K)](j\omega)[T_{w^i \rightarrow z^i}(K)](j\omega)^H), \\ T_i &:= T_{w^i \rightarrow z^i}, \\ [S_i(K)](j\omega) &= [T_{w^i \rightarrow z^i}(K)](j\omega)[T_{w^i \rightarrow z^i}(K)](j\omega)^H. \end{aligned}$$

The remainder of this section is now dedicated to the following three issues. How to compute function values and subgradients of $f(K)$ and $g(K)$, how to use this information to generate steps which reduce the value of f and render the constraint $g(K) \leq 0$ feasible, and finally, how to assemble this into a numerically successful first-order algorithm.

4.3.1 Computing jet information

Computing function values of each $f_i(K)$ can be based on the Hamiltonian algorithm of [24], originally designed to compute the H_∞ norm of a stable transfer function. The original technique can be applied with minor changes to the case where the search for imaginary-axis Hamiltonian eigenvalues is restricted to the frequency band of interest. A numerical issue may arise when the dichotomy search hits function values at infinity, $f_i(K, \infty)$. We can get around this difficulty by mapping the i th frequency band $[\omega_{i1}, \omega_{i2}]$ conformably onto $[0, \infty]$ via

$$\omega' = \frac{\omega_{i1} - \omega}{\omega - \omega_{i2}} \iff \omega = \frac{\omega' \omega_{i2} + \omega_{i1}}{\omega' + 1}, \quad (4.6)$$

where $\omega' \in [0, \infty]$ and $\omega \in [\omega_{i1}, \omega_{i2}]$. The Hamiltonian algorithm has to be applied to each $f_i(K), g(K)$ separately. It computes the function value, and the finite set of active frequencies or peaks in each window $[\omega_{i1}, \omega_{i2}]$.

Subgradient information for each of the branches $f_i(K)$ is now obtained by the formulae first developed in [11] for a transfer function on the interval $[0, \infty]$. Indeed, using the

change of variables (4.6), the i th performance channel T_i in the variable ω is transformed into a transfer function \tilde{T}_i in $\omega' \in [0, \infty]$ via

$$\tilde{T}_i(j\omega') = \frac{1}{j\omega} \star \begin{bmatrix} \frac{\omega_{i1}}{j\omega_{i2}} & \alpha_i \\ \alpha_i & \frac{1}{j\omega_{i2}} \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} \mathcal{A}_i(K) & \mathcal{B}_i(K) \\ \mathcal{C}_i(K) & \mathcal{D}_i(K) \end{bmatrix} =: \frac{1}{j\omega'} \star \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{A}}_i(K) & \tilde{\mathcal{B}}_i(K) \\ \tilde{\mathcal{C}}_i(K) & \tilde{\mathcal{D}}_i(K) \end{bmatrix},$$

where $\alpha_i = \sqrt{\omega_{i2} - \omega_{i1}}/\omega_{i2}$, and where $\mathcal{A}_i(K)$ etc. are the system matrices of T_i , $\tilde{\mathcal{A}}_i(K)$, etc. those of \tilde{T}_i . Writing

$$\begin{bmatrix} [\tilde{T}_i(K)](s') & [\tilde{G}_{12}^i(K)](s') \\ [\tilde{G}_{21}^i(K)](s') & \star \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{C}}_i(K) \\ \tilde{\mathcal{C}}_2^i \end{bmatrix} (sI - \tilde{\mathcal{A}}_i(K))^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{B}}_i(K) & \tilde{B}_2^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{D}}_i(K) & \tilde{D}_{12}^i \\ \tilde{D}_{21}^i & \star \end{bmatrix},$$

the subgradients of $f_i(K)$ are of the form [11]

$$\Phi_Y^i = 2 \sum_{\omega' \in \Omega'_i(K)} \operatorname{Re} \left\{ [\tilde{G}_{21}^i(K)](j\omega') [\tilde{T}_i(K)](j\omega')^H Q_{\omega'} Y_{\omega'} Q_{\omega'}^H [\tilde{G}_{12}^i(K)](j\omega') \right\}^T, \quad (4.7)$$

where $\Omega'_i(K) \subset [0, \infty]$ is the finite set of active frequencies of the i th channel \tilde{T}_i in the transformed variable ω' . Here $Q_{\omega'}$ is a matrix whose columns form an orthonormal basis of the eigenspace of $[\tilde{T}_i(K)](j\omega') [\tilde{T}_i(K)](j\omega')^H$ associated with its maximum eigenvalue, and $Y_{\omega'} \succeq 0$, $\sum_{\omega' \in \Omega'_i(K)} \operatorname{Tr}(Y_{\omega'}) = 1$. The subgradient is for convenience indexed by $Y = (Y_{\omega'} : \omega' \in \Omega'_i(K))$.

In order to compute subgradients of f , we now have to take into account which of the indices $i = 1, \dots, N$ are active in the sense that $f_i(K) = f(K)$. Writing this set as $I(K)$, we obtain the subgradients $\Phi_{Y,\tau} \in \partial f(K)$ as

$$\Phi_{Y,\tau} = \sum_{i \in I(K)} \tau_i \Phi_Y^i, \quad \sum_{i \in I(K)} \tau_i = 1, \tau_i \geq 0, \quad \sum_{\omega' \in \Omega'_i(K)} \operatorname{Tr}(Y_{\omega'}^i) = 1, Y_{\omega'}^i \succeq 0. \quad (4.8)$$

4.3.2 Optimality function

Having explained in which way subgradients of the objective and constraint functions $f(K) = \max_{i=1,\dots,N} f_i(K)$ and $g(K)$ are computed, let us now consider the program

$$\min\{f(K) : g(K) \leq 0\} \quad (4.9)$$

and investigate the generation of search steps. Following an idea in [130], we introduce the so-called progress function for (4.9):

$$F(K^+, K) = \max\{f(K^+) - f(K) - \mu g(K)_+; g(K^+) - g(K)_+\},$$

where $\mu > 0$ is some fixed parameter, and where g_+ stands for the positive part $g_+ = \max\{g, 0\}$. We think of K as the current iterate, K^+ as the next iterate or as a candidate to become the next iterate. A key advantage of the progress function formulation is to overcome the complications inherent to pure penalty approaches as developed in [13]. There is no penalty update and re-solving which reduces execution times and avoids artificial ill-conditioning. The following properties of the progress function are crucial for the understanding of our method. For a proof we refer to [14].

Lemma 1. *a) Suppose \bar{K} is a local minimum of program (4.9), then \bar{K} is also a local minimum of $F(\cdot, \bar{K})$. In particular, this implies $0 \in \partial_1 F(\bar{K}, \bar{K})$.*

b) If \bar{K} satisfies the F. John necessary optimality conditions for (4.9), then $0 \in \partial_1 F(\bar{K}, \bar{K})$.

c) Conversely, if $0 \in \partial_1 F(\bar{K}, \bar{K})$, then \bar{K} is either a F. John critical point of (4.9), or it is a critical point of constraint violation.

We have used ∂_1 to denote the Clarke subdifferential with respect to the first variable. Notice here that \bar{K} is called a critical point of constraint violation of (4.9) if $g(\bar{K}) \geq 0$ and $0 \in \partial g(\bar{K})$. The interpretation of this is as follows. If $g(\bar{K}) > 0$, the constraint is violated. Moreover, $0 \in \partial g(\bar{K})$ says that \bar{K} is a local minimum (a critical point), so no progress toward the constraint can be made by moving from \bar{K} to some nearby point $\bar{K} + dK$. In other words, a point with these characteristics means failure to solve program (4.9). The case $g(\bar{K}) = 0$, $0 \in \partial g(\bar{K})$ is of course the limiting case of the above. Here the point \bar{K} is feasible, but we cannot further optimize $f(K)$ in the neighbourhood of \bar{K} , because the constraint will not let us move, as it becomes infeasible as soon as we try.

A consequence of Lemma 1 is that we should look for points \bar{K} satisfying $0 \in \partial_1 F(\bar{K}, \bar{K})$. For this we apply some sort of linearization procedure to the functions f and g . Writing $f_i(K)$ in the form

$$f_i(K^+) = \max_{\omega \in I_i} \lambda_1([S_i(K^+)](j\omega))$$

we introduce a first-order approximation of f in the neighbourhood of K :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(K^+, K) &= \sup_{\omega \in I_i} \lambda_1([S_i(K)](j\omega) + [S'_i(K)](j\omega)(K^+ - K)) \\ &= \sup_{\omega \in I_i} \sup_{Z_{\omega,i} \in \mathbb{B}_i} Z_{\omega,i} \bullet ([S_i(K)](j\omega) + [S'_i(K)](j\omega)(K^+ - K)), \end{aligned}$$

where $[S'_i(K)](j\omega)$ is the Fréchet derivative of $[S_i(\cdot)](j\omega)$ at K , $\mathbb{B}_i = \{Z \in \mathbb{H}^{m_i} : Z \succeq 0, \text{Tr}(Z) = 1\}$, and where m_i is the size of $S_i = T_i T_i^H$. Associating \tilde{g} with g in a similar fashion, we obtain a first-order approximation or linearization of $F(K^+, K)$:

$$\tilde{F}(K^+, K) = \max \left\{ \max_{i=1, \dots, N} \tilde{f}_i(K^+, K) - f(K) - \mu g(K)_+; \tilde{g}(K^+, K) - g(K)_+ \right\}.$$

Notice that $\tilde{F}(K, K) = F(K, K)$, and that $\tilde{F}(K^+, K)$ is close to $F(K^+, K)$ for K^+ in a neighborhood of K . Moreover, $\partial_1 \tilde{F}(K, K) = \partial_1 F(K, K)$, so we keep looking for points \bar{K}

with $0 \in \partial_1 \widetilde{F}(\bar{K}, \bar{K})$. It is convenient to write \widetilde{F} somewhat differently. We put

$$\begin{aligned}\alpha_i(Z_{\omega,i}, \omega) &= Z_{\omega,i} \bullet [S_i(K)](j\omega) - f(K) - \mu g(K)_+, \\ \Phi(Z_{\omega,i}, \omega) &= [S'_i(K)](j\omega)^* Z_i\end{aligned}\tag{4.10}$$

for $i = 1, \dots, N$, and

$$\begin{aligned}\alpha_{N+1}(Z_{\omega,N+1}, \omega) &= Z_{\omega,N+1} \bullet [S_{N+1}(K)](j\omega) - g(K)_+, \\ \Phi_{N+1}(Z_{\omega,N+1}, \omega) &= [S'_{N+1}(K)](j\omega)^* Z_{\omega,N+1}.\end{aligned}$$

Then, putting $\mathcal{G} = \text{co}\{(\alpha_i(Z_{\omega,i}, \omega), \Phi_i(Z_{\omega,i}, \omega)) : \omega \in I_i, Z_{\omega,i} \in \mathbb{B}_i, i = 1, \dots, N+1\}$, we have

$$\widetilde{F}(K^+, K) = \max\{\alpha + \langle \Phi, K^+ - K \rangle : (\alpha, \Phi) \in \mathcal{G}\}.$$

Since \mathcal{G} is an infinite set, our last step is now to replace it by a finitely representable (and therefore computable) approximation $\widehat{\mathcal{G}}$. This corresponds to replacing $\widetilde{F}(K^+, K)$ by the approximation $\widehat{F}(K^+, K)$ defined as

$$\widehat{F}(K^+, K) = \max\{\alpha + \langle \Phi, K^+ - K \rangle : (\alpha, \Phi) \in \widehat{\mathcal{G}}\}.$$

The role of $\widehat{\mathcal{G}}$ is to render the tangent program numerically tractable. It consists in choosing a finite set of frequencies, $\omega \in \Omega_e^i(K) \subset I_i$, and letting the $Z_{\omega,i} \in \mathbb{B}_i$ take a specific form.

We construct $\widehat{\mathcal{G}}$ as follows. Define $f_{N+1}(K) := g(K)$ and for every $i = 1, \dots, N+1$ take the finite set $\Omega^i(K)$ of active frequencies of $f_i(K)$ at K . In other words, $f_i(K) = f_i(K, \omega)$ for $\omega \in \Omega^i(K)$. Now for every i add finitely many nearly active frequencies to those in $\Omega^i(K)$ to obtain an extended set of $\omega \in \Omega_e^i(K)$. Notice that $f_i(K, \omega) < f_i(K)$ for $\omega \in \Omega_e^i(K) \setminus \Omega^i(K)$. Now pick for each i and for every $\omega \in \Omega_e^i(K)$ an orthonormal basis $Q_{\omega,i}$ of the eigenspace of $f_i(K, \omega) = \lambda_1([S_i(K)](j\omega))$ at K , so that

$$\partial f_i(K, \omega) = \{[S'_i(K)](j\omega)^*[Q_{\omega,i} Y_{\omega,i} Q_{\omega,i}^H] : Y_{\omega,i} \succeq 0, \text{Tr}(Y_{\omega,i}) = 1\}.$$

In other words, $Z_{\omega,i} = Q_{\omega,i} Y_{\omega,i} Q_{\omega,i}^H$ reduces the degrees of freedom from $m_i(m_i + 1)/2$ in the class of all $Z_{\omega,i}$ to the smaller size of $Y_{\omega,i}$. Include all these elements $\Phi = [S'_i(K)](j\omega)^*[Q_{\omega,i} Y_{\omega,i} Q_{\omega,i}^H]$ with their corresponding terms $\alpha_i(Z_{\omega,i}, \omega)$ as in (4.10) among $\widehat{\mathcal{G}}$. As the matrix $Q_{\omega,i}$ is fixed, it is convenient to index these terms as $\Phi_i(Y_{\omega,i}, \omega)$ and $\alpha_i(Y_{\omega,i}, \omega)$, where $\omega \in \Omega_e^i(K)$ and $Y_{\omega,i} \succeq 0$, $\text{Tr}(Y_{\omega,i}) = 1$ has the appropriate size, and $i = 1, \dots, N+1$. The index $i = N+1$ adds the corresponding elements for the constraint g .

Having defined the approximation $\widehat{\mathcal{G}}$ and therefore $\widehat{F}(K^+, K)$, we solve the tangent program

$$\min_{dK} \widehat{F}(K + dK, K) + \frac{\delta}{2} \|dK\|^2.\tag{4.11}$$

The solution being dK , we check whether $K^+ = K + dK$ is acceptable. If this is not the case, we perform a backtracking linesearch until $K^+ = K + tdK$ satisfies the Armijo condition

$$F(K + tdK, K) - F(K, K) < \gamma t F'(\cdot, K)(K; dK)$$

for some fixed $0 < \gamma < 1$. The crucial facts about (4.11) have been established in [11], and we state them here without proof:

- As soon as the solution dK of (4.11) is nonzero, dK is a descent direction of $F(\cdot; K)$ at K . On the other hand, if the solution is $dK = 0$, then $0 \in \partial_1 F(K, K)$.
- The Armijo line search can be arranged to find a successful step after finitely many trials.

Notice that computing the Fréchet derivatives $[S'_i(K)](j\omega)$ and their adjoints leads exactly to the formulae (4.7) and (4.8) for the subgradients.

We end this section by explaining how (4.11) is solved. This program is of the form

$$\min_{dK} \max_{(\alpha, \Phi) \in \widehat{\mathcal{G}}} \alpha + \langle \Phi, dK \rangle + \frac{\delta}{2} \|dK\|^2.$$

Passing to the convex hull over $\widehat{\mathcal{G}}$ does not change the inner supremum, but allows us to interchange min and max using Fenchel duality. The then inner infimum over dK is unconstrained and can therefore be computed explicitly, yielding

$$dK = -(1/\delta)\Phi.$$

Substituting this back leads to the dual form of (4.9), which is

$$\max_{(\alpha, \Phi) \in \text{co}(\widehat{\mathcal{G}})} \alpha - \frac{1}{2\delta} \|\Phi\|^2.$$

This may now be written more explicitly as

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{\omega \in \Omega_e^i(K)} \tau_{\omega,i} \alpha_i(Y_{\omega,i}, \omega) - \frac{1}{2\delta} \left\| \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{\omega \in \Omega_e^i(K)} \tau_{\omega,i} \Phi_i(Y_{\omega,i}, \omega) \right\|^2 \\ & \text{subject to} && Y_{\omega,i} \succeq 0, \text{Tr}(Y_{\omega,i}) = 1 \\ & && \tau_{\omega,i} \geq 0, \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{\omega \in \Omega_e^i(K)} \tau_{\omega,i} = 1. \end{aligned}$$

Using a standard trick converting the quadratic expression into a linear matrix inequality, this may be turned into a (linear) semidefinite program.

A case of special interest is when the eigenvalue multiplicity of all the maximum eigenvalue functions equals 1. Then the program has the more convenient form

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{\omega \in \Omega_e^i(K)} \tau_{i,\omega} \alpha_i(\omega) - \frac{1}{2\delta} \left\| \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{\omega \in \Omega_e^i(K)} \tau_{i,\omega} \Phi_i(\omega) \right\|^2 \\ & \text{subject to} && \tau_{i\omega} \geq 0, \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{\omega \in \Omega_e^i(K)} \tau_{i,\omega} = 1. \end{aligned}$$

which is the dual (concave) form of a convex quadratic program.

4.3.3 Algorithm

Algorithm 2 Nonsmooth algorithm for program (4.9)

Paramètres: $\delta > 0$, $0 < \beta, \gamma < 1$.

- 1: **Initialize.** Choose closed-loop stabilizing K^1 .
- 2: **Stopping test.** If $0 \in \partial_1 \widehat{F}(K^j, K^j)$ then stop. Otherwise continue.
- 3: **Compute descent direction.** At counter j solve tangent program (4.11)

$$\min_{dK} \widehat{F}(K^j + dK, K^j) + \frac{\delta}{2} \|dK\|^2.$$

Solution is the search direction dK .

- 4: **Line search.** Find $t = \beta^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, satisfying the Armijo condition

$$F(K^j + tdK, K^j) - F(K^j, K^j) \leq \gamma t F'(\cdot, K^j)(K^j, dK) < 0.$$

- 5: **Update.** Put $K^{j+1} = K^j + tdK$, increase counter j by 1 and loop back to step 2.
-

Notice that this algorithm is in the class of so-called phase-I-phase-II methods. As long as the constraint $g(K) \leq 0$ is not satisfied, the right hand term in \widehat{F} is dominant and reducing \widehat{F} amounts to reducing constraint violation. This is phase I, which ends successfully as soon as a feasible iterate $g(K^j) \leq 0$ has been found. Now phase II begins, and from now on iterates stay (strictly) feasible, and the objective function is minimized at each step. In that case the algorithm converges towards a critical point of (4.9). If $g(K^j) > 0$ for all j , then the algorithm converges to a critical point of constraint violation. In that case which occurs rarely in practice when constraints are feasible, a restart becomes necessary. Finally, we mention that if the controller is required to match a specific structure, PID, observer-based, decentralized, etc the proposed algorithm is easily adapted by applying a suitable chain rule to the subgradients [12].

Our code has been developed using Matlab. Fortran has been used for the QP code to minimize the main performance bottlenecks. Algorithm parameters which have been used in our applications are $\delta = 0.1$ for the QP subproblem, and $\beta=0.5$ and $\gamma=1e-4$ for the linesearch.

4.4 Numerical experiments

4.4.1 Power system oscillation damping

In this chapter we apply our new design technique to control the Brazilian North and South power subsystems interconnection described in [144]. The objective is to design a Power Oscillation Damping (POD) controller equipping the Thyristor Controlled Series Compensator (TCSC), which is installed at the south end of the interconnection. Its purpose is to minimize the system oscillation caused by external disturbances. This oscillation

is due to a poorly-damped low-frequency swing mode, which is a characteristic of the interconnection: the so called North-South (NS) mode. The designed controller, however, must not produce large control output so as to avoid saturating TCSC components.

The block diagram representation of the interconnected NS system together with the closed-loop control configuration are shown in Figure 4.2. The controlled and measured output y represents the total active power deviation through the series capacitor. The external disturbance w represents the mechanical power deviation at a power plant located at the north end of the interconnection, while the TCSC control output u is the susceptance deviation.

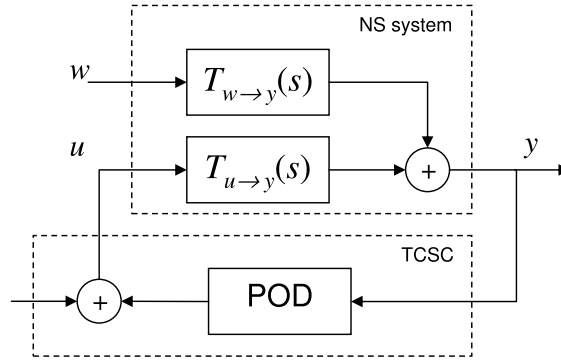


Figure 4.2: Closed-loop block diagram

Power system control is difficult due to the usually large dimension of the plant. Very often in practice, a low performance controller is synthesized heuristically. If a more systematic synthesis technique is to be used, model reduction has to be considered. Unfortunately, reduction schemes become critical or may fail when the system is large.

In our experiment we consider a medium-size approximation of the NS system with 90 states, corresponding to the least-damped scenario in [144]. In that scenario, the NS mode has damping ratio of 3.1% and a natural frequency of about 1.08 rad./s. The magnitudes of the two open-loop transfer functions $T_{w \to y}$ and $T_{u \to y}$ are shown in Figure 4.3. The open-loop power system state-space representation is given by:

$$P(s) : \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_2 & 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix},$$

where the state vector $x \in \mathbb{R}^{90}$ and $w, u, y \in \mathbb{R}$. Note that the controller is computed with the assumption $D = 0$ and a loop transformation is applied afterwards since the power plant has a non-zero feedthrough term. See Figure 4.3.

A possible approach to damp the NS mode is to synthesize a controller minimizing the H_∞ norm of the disturbance channel $w \rightarrow y$, which is dominated by the NS mode resonance. However, the resulting controller is characterized by a pole-zero cancellation of the plant dynamics, which is clearly not acceptable when model variations are to be expected. Instead, we shall take advantage of the fact that our linear model has been

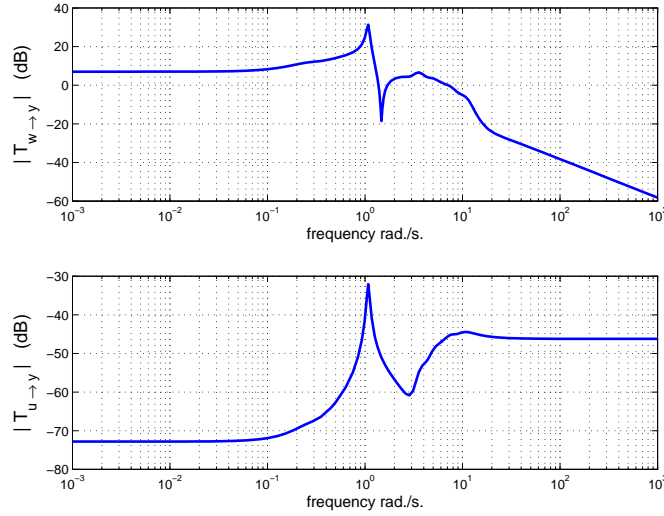


Figure 4.3: Magnitudes of open-loop transfer functions

obtained by modal truncation and thus has a diagonal state-space representation. In this representation, the NS mode is associated with the first two states, so the chosen approach is to minimize the H_∞ norm of a newly defined performance channel $w \rightarrow z^p$ from the disturbance to the first two states, described as:

$$P^p(s) : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z^p \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ [I_{2 \times 2} & 0] & 0 & 0 \\ C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}.$$

Unfortunately, controller synthesis based solely on such a criterion will lead to very large control effort saturating the TCSC. To counterbalance this effect we penalize the control effort through the channel $w \rightarrow z^u$

$$P^u(s) : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z^u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & I \\ C_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix},$$

so that in closed-loop the transfer function $T_{w \rightarrow z^u}$ equals the transfer function $T_{w \rightarrow u}$ from the disturbance to the controller output.

Based on the synthesis models P^p and P^u , we define the set of multi-band constraints as follows:

- NS mode damping

$$\bar{\sigma}(\alpha_1 T_{w \rightarrow z^p}) \leq 1, \text{ for } \omega \in I_1 := [0.1, 10] \text{ rad./s},$$

- control effort limitation in the neighbourhood of the NS mode

$$|\alpha_2 T_{w \rightarrow z^u}| \leq 1, \text{ for } \omega \in I_2 := [0.1, 2] \text{ rad./s},$$

- control effort limitation in the very low frequency range

$$|\alpha_3 T_{w \rightarrow z^u}| \leq 1, \text{ for } \omega \in I_3 := [1e-4, 1e-3] \text{ rad./s,}$$

Trade-off between these constraints is made through the scalar positive weights α_1, α_2 and α_3 . Notice that both models P^p and P^u have the same transfer function $T_{u \rightarrow y}$, but are measured on different frequency bands.

We impose three structural constraints on the controller. Firstly, the controller must be of reduced order, which is an important requirement given the dimension of the system. Here we have specified a 6th-order controller. Secondly, the controller is chosen strictly proper to reduce the effect of the external disturbance w . Finally, the controller must provide a washout effect in order to eliminate bias. Our final synthesized controller will then take the form

$$K(s) = \frac{s}{s+p} \hat{K}(s),$$

where $\hat{K}(s)$ is a strictly proper transfer function of order 5, and the position of the real washout pole $-p$ is also a decision variable of the nonsmooth program. We note that the frequency-domain constraint on interval I_3 is introduced in order to guarantee washout filtering level or bandwidth. In practice, it prevents the variable p from being too small, and consequently the real washout pole from canceling the washout zero at the origin. The initial controller is selected as

$$K_0(s) = \frac{s}{(s+0.1)} \frac{10^4 s^2}{(s+3)^3 (s^2+2s+2)}.$$

The system is open-loop stable and the stability channel norm for K_0 is $\|(sI - \mathcal{A}(K))^{-1}\|_\infty = 7.4e-3$. We have observed that the stability channel has little impact in this application as the constraint becomes never active. The initial stability constraint was set to a large value $\beta^{-1} = 10^9$. The weights $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ were chosen as $\{92, 1155, 4e-2\}$.

Taken together, the three performance constraints and the stability channel can be thought of as a synthesis plant counting 360 states. Despite that size, our nonsmooth algorithm finds a locally optimal solution for this problem after 20 iterations within 184 seconds cputime on a 2.8GHz Pentium processor with 1Gb RAM. The initial and final values of the band-restricted norms γ_i for each performance channel are given in Table 4.1, while Figure 4.4 traces their evolution along the iterations. We observe that the performance levels coalesce at the end of the optimization process near the achieved local minimum, a phenomenon that is typical for nonsmooth max functions. The final controller $K(s)$ is obtained as:

$$K(s) = \frac{s}{(s+0.0745)} \frac{0.4978s^4 + 32.98s^3 + 1.041e4s^2 + 562.8s + 148.8}{s^5 + 10.75s^4 + 45.04s^3 + 145s^2 + 138.5s + 113.5}.$$

	$ T_{w \rightarrow z^p} _{I_1}$	$ T_{w \rightarrow z^u} _{I_2}$	$ T_{w \rightarrow z^u} _{I_3}$	$\ (sI - \mathcal{A}(K))^{-1}\ _\infty$
$K_0(s)$	1.4946	1.2628	0.0001	7.40e-3
$K(s)$	0.9884	0.9889	0.9887	8.5206e-3

Table 4.1: Multi-band performance

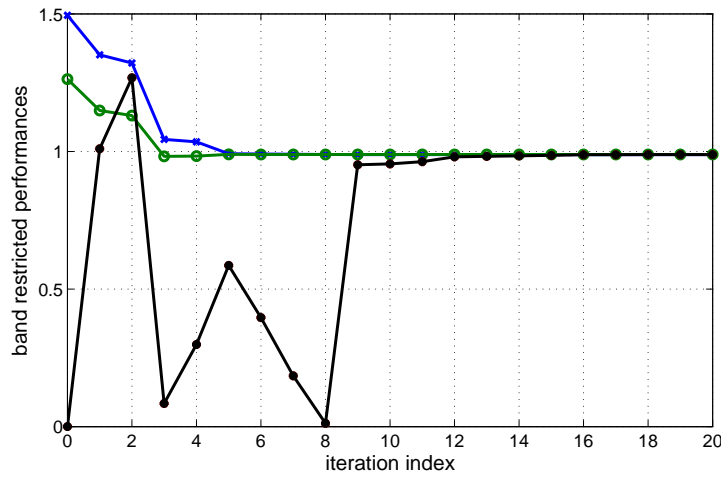


Figure 4.4: Evolution of band restricted performances vs. iteration index

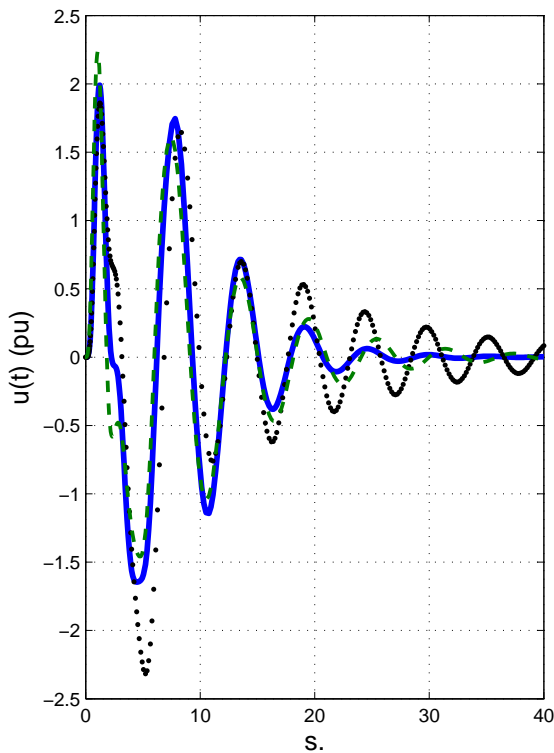


Figure 4.5: Control output step responses to disturbance

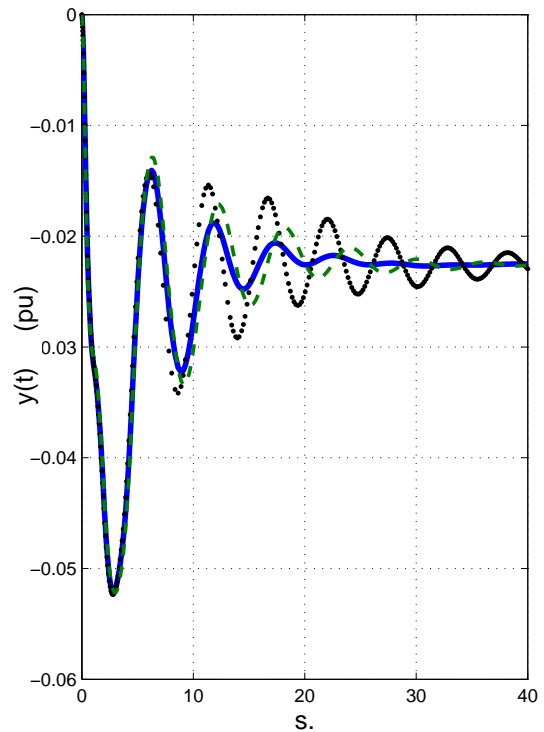


Figure 4.6: Output step responses to disturbance

dotted: $K_0(s)$, dashed:[144], solid: $K(s)$

The closed-loop system response to a disturbance step is shown in Figures 4.5 and 4.6, together with the same responses with the initial controller K_0 , and with the controller from [144]. The NS mode has now 17.5% damping, without increasing control or system response overshoot. Figure 4.7 shows how the multi-band specifications shaped the closed-loop system in the frequency domain.

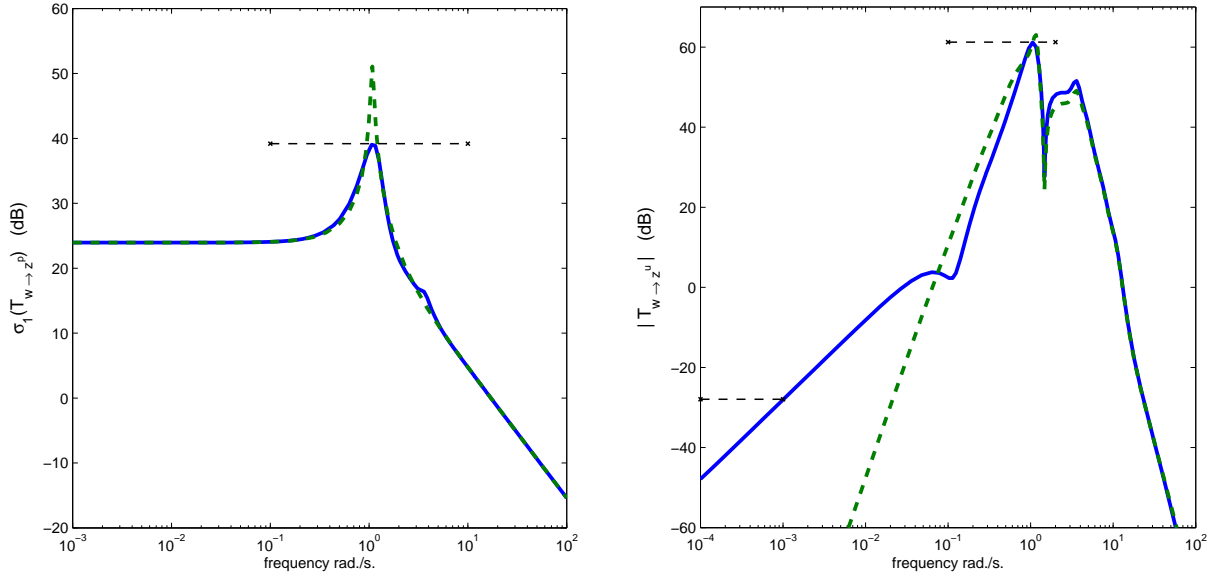


Figure 4.7: Frequency domain shaping of closed-loop system (dashed: $K_0(s)$, solid: $K(s)$)

4.4.2 Line-of-Sight regulation of a flexible structure

We now consider the continuous control of the elevation axis of the telescope mock-up described in [3], consisting of a gimbal system mounted on flexural pivots. The primary objective is Line-of-Sight(LOS) regulation in an inertial reference coordinate system against motions of the supporting base.

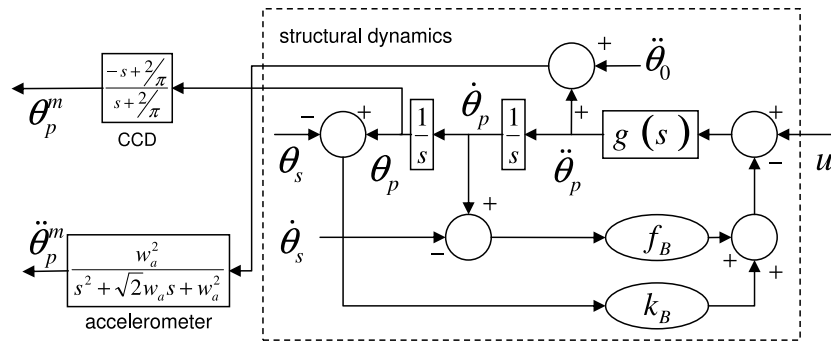


Figure 4.8: Block-diagram representation of the telescope system

The block diagram representation of the set-up is shown in Figure 4.8, where θ_s and $\dot{\theta}_s$ are the inertial position and velocity of the supporting base, θ_p , $\dot{\theta}_p$ and $\ddot{\theta}_p$ are the inertial

position, velocity and acceleration of the telescope, u is the control torque, θ_p^m and $\ddot{\theta}_p^m$ are the measured inertial position and acceleration of the telescope, and $\ddot{\theta}_0$ represents the accelerometer bias. In the structural dynamic model, $g(s)$ is an identified transfer function of order 40, comprising the flexible modes of the telescope. The stiffness and friction feedbacks, k_b and f_b , model the flexible bearings. Magnitudes of the open-loop transfer functions $u \rightarrow \ddot{\theta}_p^m$ and $u \rightarrow \theta_p^m$ are shown in Figure 4.9.

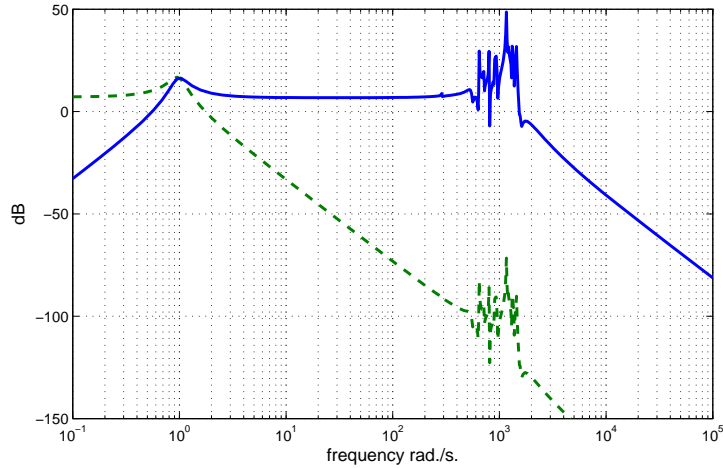


Figure 4.9: Open-loop magnitude of transfer functions $T_{u \rightarrow \ddot{\theta}_p^m}$ (solid) and $T_{u \rightarrow \theta_p^m}$ (dashed)

Design specifications for this application are very demanding. In order to assure high quality LOS stabilization, the controller must achieve good disturbance rejection over a wide frequency range. Secondly, the closed-loop system must be robust to uncertainties due to the identification phase and to variations of the mechanical impedance of the supporting base. Also, accelerometer bias should be rejected. Finally, a simple low-order controller is sought to facilitate on-board implementation.

In traditional H_2 or H_∞ syntheses, performance and robustness specifications have to be gathered into a single criterion, which requires appending inputs and outputs of all channels. This introduces artificial crossed channels that do not reflect useful specifications. Since these cross channels are optimized along with the genuine interconnections, this approach increases conservatism. Also, traditional synthesis methods yield only full-order controllers, so that whenever simplicity is of prior importance, either a reduced plant model must be constructed or the controller has to be reduced afterwards. A further weakness of the classical approach is that weighting functions must be knitted to achieve flexible modes attenuation and reject the accelerometer bias.

With our proposed multi-band technique, each of the design specifications can be addressed individually. Since the controller order and structure can be specified explicitly and are independent of the system dimension, there is no need to reduce plant or controller. The performance and robustness specifications are simply expressed through band-restricted performance constraints:

- **LOS regulation:** decoupling with respect to motions of the supporting base can

be achieved by forcing the magnitude of the disturbance transfer function $T_{\theta_s \rightarrow \theta_p} = \theta_p(s)/\theta_s(s)$ to be very small on the frequency range of interest:

$$|T_{\theta_s \rightarrow \theta_p}| \leq -70 \text{ dB, for } \omega \in I_1 := [0, 2e3] \text{ rad./s.}$$

- **Robustness:** robustness to unstructured uncertainties in the intermediate frequency range is achieved by frequency shaping of the sensitivity function $\tilde{S} = (I + KP)^{-1}$, where P is the plant in Figure 4.8. As is well known, the magnitude of the sensitivity function

$$|\tilde{S}| = |(I + KP)^{-1}| = \frac{1}{|1 + KP|}$$

represents the inverse of the distance to the critical point, so that minimizing $|\tilde{S}|$ turns out to be equivalent to maximizing the stability margin. The associated restricted-band constraint is given as

$$|\tilde{S}| \leq 1.5, \text{ for } \omega \in I_2 := [10, 400] \text{ rad./s.}$$

- **Attenuation of flexible modes:** by a similar reasoning, the magnitude of the sensitivity function is limited in the frequency range of the flexible modes:

$$|\tilde{S}| \leq 1.3, \text{ for } \omega \in I_3 := [400, 2e4] \text{ rad./s.}$$

However, this constraint alone is not enough to guarantee robustness with respect to variation of the flexible modes, because sensitivity reduction often induces pole-zero cancellation. This is clearly unacceptable since identified flexible modes are subject to uncertainties and also since the mechanical impedance of the supporting base may undergo large deviations. This is taken into account by prescribing a maximum roll-off in the frequency range of interest: a channel $w \rightarrow z^u$ is defined as:

$$P^u(s) : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z^u \\ \begin{bmatrix} \theta_p^m \\ \dot{\theta}_p^m \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ C_2 & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix},$$

where $A \in \mathbb{R}^{45 \times 45}$, in such a way that in closed-loop the channel $w \rightarrow z^u$ will be equivalent to the transfer function $\ddot{\theta}_p^m \rightarrow u$ of the controller. This is motivated by the fact that the flexible modes are relevant only through the accelerometer channel $u \rightarrow \ddot{\theta}_p^m$, as can be seen in Figure 4.9. Thus, robustness with regard to flexible modes can be achieved by forcing the transfer function $\ddot{\theta}_p^m \rightarrow u$ of the controller to be very small in the flexible modes frequency range:

$$|T_{w \rightarrow z^u}| \leq -50 \text{ dB, for } \omega \in I_4 := [5e2, 2e3] \text{ rad./s.}$$

We note that the above specification is equivalent to imposing a constraint directly on the controller gain, a thing which is not possible with more traditional Riccati or LMI H_∞ techniques. Such highly practical constraints are easy to handle with our nonsmooth optimization technique.

The first structural constraint imposed on the controller is its reduced order. A controller of order 14 is chosen. Secondly, the controller is forced to have a washout effect in the channel $\ddot{\theta}_p^m \rightarrow u$ in order to reject the accelerometer bias. Finally, the controller is chosen strictly proper for better disturbance attenuation.

	$ T_{\theta_s \rightarrow \theta_p} _{I_1}$	$ \tilde{S} _{I_2}$	$ \tilde{S} _{I_3}$	$ T_{w \rightarrow z^u} _{I_4}$	$\ (sI - \mathcal{A}(K))^{-1}\ _\infty$
Initial	8.39	1.0863	24.533	51.65	548
Final	0.97966	0.98543	0.97776	0.98756	262

Table 4.2: Final multi-band performances for the telescope

The telescope system shown in Figure 4.8 has 45 states, structural and sensor dynamics included. Thus, the set comprising the 4 performance channels and the stability constraint correspond to a synthesis plant counting 225 states. The closed-loop transfer function $T_{\theta_s \rightarrow \theta_p}$ for the initial controller is depicted in Figure 4.11, while Figure 4.12 depicts the Nichols diagram for this initial controller. Notice that it produces an almost unstable closed-loop flexible mode, although it presents good low-frequency properties. The initial and final values of the band-restricted norms γ_i for each performance channel are given in Table 4.2, while their evolution along the first 150 iterations is shown in Figure 4.10. The algorithm takes 355 iterations in 26 minutes cpu to reach a local minimum within the allowed tolerance. However, a feasible solution meeting all design constraints is already available after 175 iterations.

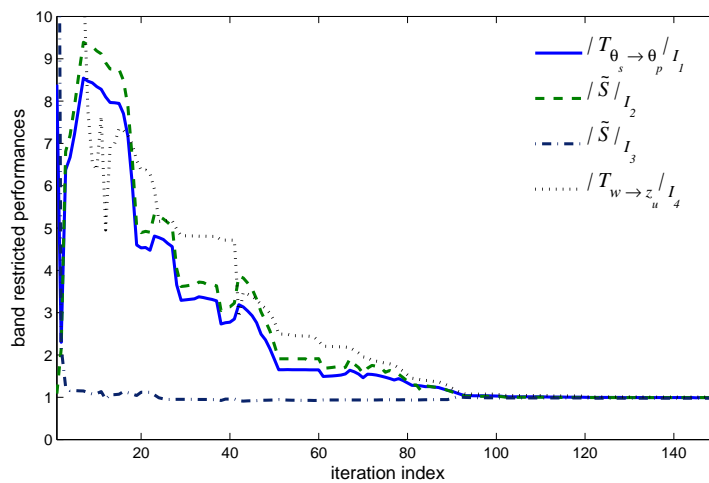


Figure 4.10: Evolution of band restricted performances vs. iteration index

We observe again that the performance levels coalesce at the end of the iteration sequence, a strong indication that local optimality is reached. We also notice that the

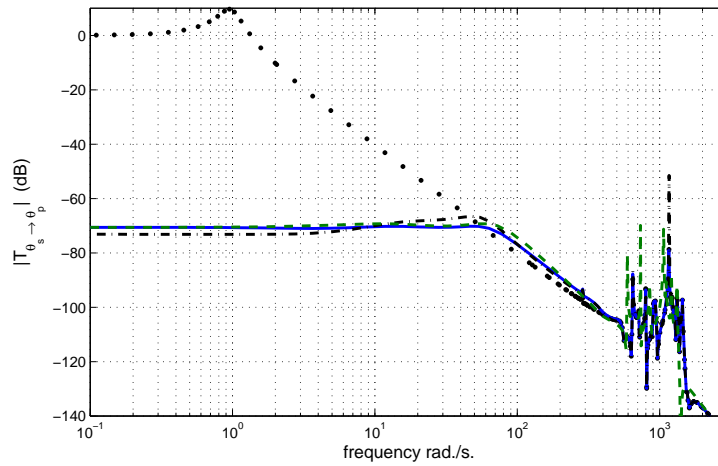


Figure 4.11: Magnitude of the transfer function $T_{\theta_s \rightarrow \theta_p}$ (solid: nominal closed-loop, dashed: perturbed closed-loop, dotted: nominal open-loop, dash-dotted: nominal with initial controller)

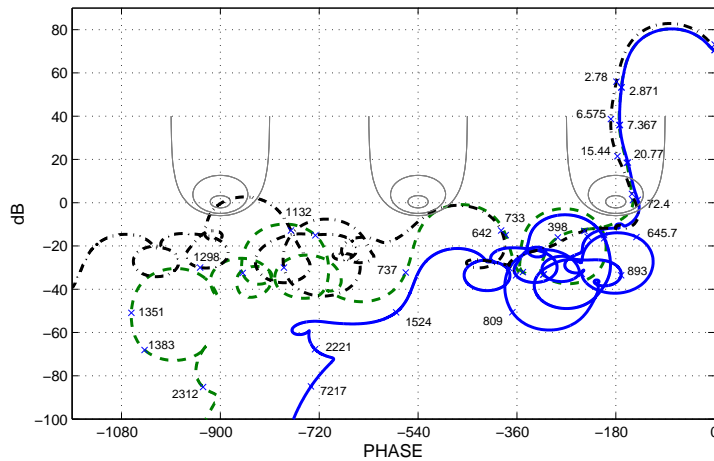


Figure 4.12: Nichols diagram (solid: final controller with nominal system, dashed: final controller with perturbed system, dash-dotted: initial controller with nominal system)

stability constraint $\|(sI - \mathcal{A}(K))^{-1}\|_{\infty} \leq 10^9$ is not active and can probably be removed without much harm, which if done from scratch leads to significant speed-up. Numerical experience reveals that the stability constraint is only useful for problems involving few band constraints. It can usually be discarded when a sufficiently rich set of simultaneous specifications is considered.

The final closed-loop transfer function $T_{\theta_s \rightarrow \theta_p}$ is shown in Figure 4.11. We observe an attenuation of 70 dB as specified. Figure 4.12 shows the Nichols diagram for the closed-loop system. These figures also show the closed-loop responses of a reduced 21-order model obtained by identification. The nominal and perturbed models differ significantly in the flexible modes range, Figure 4.13. However, since the magnitude of the transfer function $\ddot{\theta}_p^m \rightarrow u$ has been forced below -50 dB on the critical interval, and since the

contribution of flexible modes through the channel $u \rightarrow \theta_p^m$ is negligible, the open-loop transfer function has magnitude always lower than unity, and the closed-loop system remains stable in both cases. See the Nichols plot in Figure 4.12. Figure 4.15 shows the gain plots of each performance channel. The vertical lines materialize the restricted frequency bands and the symbols \times correspond to gridded frequencies which have been selected to construct the bundle of subgradients. Again as expected all band restricted performances were achieved in the sense that $f(K) \leq 1$, see Figure 4.15.

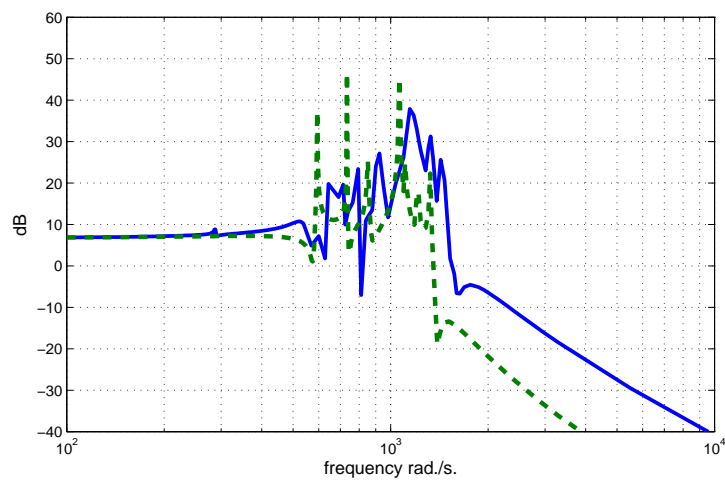


Figure 4.13: Magnitude of the open-loop transfer function $T_{u \rightarrow \ddot{\theta}_p^m}$ (solid: nominal system, dashed: perturbed system)

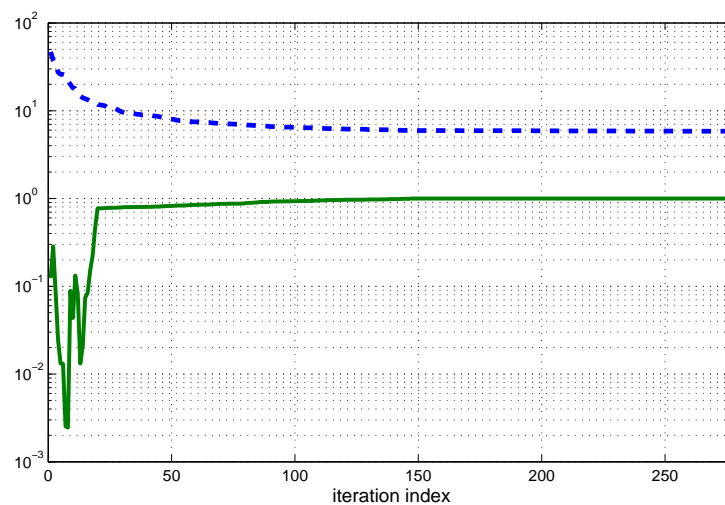


Figure 4.14: Evolution of normalized objective (dashed) and stability constraint (solid) for a simpler problem

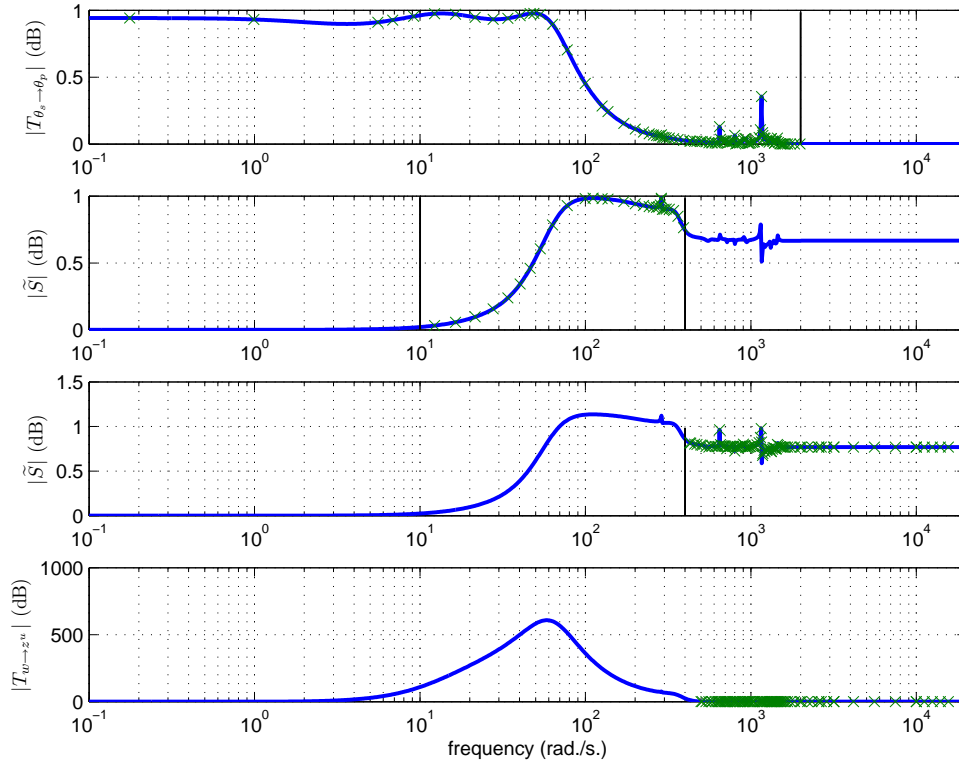


Figure 4.15: Normalized singular values of each specifications vs. frequency

× - frequency gridding

Remark. We refer the reader to a specific advantage of our optimization method. The fact that some performance constraints become active at the local minimum, while others may remain inactive, conveys valuable information to the designer, which is not readily available if weighing filters are used. Moreover, even when all constraints are active, there is useful information available from the different weights of the subgradients of each constraint, which can be understood as Lagrange multipliers. They allow the designer to understand the relative importance of each constraint.

For further illustration of our method, we consider a simpler problem with a single band-restricted objective

$$f(K) := \|T_{\theta_s \rightarrow \theta_p}(K)\|_{I_1} \leq -100 \text{ dB, where } I_1 = [0, 100] \text{ rad/s.}$$

The evolution of the objective together with the normalized stability constraints $\beta \cdot \|(sI - \mathcal{A}(K))^{-1}\|_\infty$ is displayed in Figure 4.14. We observe that the stability constraint becomes active after 100 iterations, which justifies the proposed approach to maintain stability.

4.5 Conclusion

We have discussed a new nonsmooth algorithm for design problems subject to several band-restricted frequency domain constraints. It computes local solutions via the minimization of a progress function. A central strength of our formulation is to overcome the complications of pure penalty approaches in terms of running times and problem conditioning. Indeed, solutions of the original problem are obtained through a single minimization of the progress function.

Our approach is flexible because it bypasses the difficult phase of selecting weighting function, and because it allows to handle a large variety of controller structures of practical interest. Applications to a power system damping problem and to line-of-sight stabilization of a telescope system, both large scale, demonstrate that the approach is an efficient practical design tool in challenging situations.

Acknowledgement

This research was supported by grants from Agence Nationale de Recherche (ANR) under contract *Guidage*, by Fondation d'entreprise EADS under contract *Solving challenging problems in feedback control*, and by Agence Nationale de Recherche (ANR) under contract *Controvert*. The authors would like to thank Professors Paulo C. Pellanda (IME) and Nelson Martins (CEPEL) for providing the power system models and for their valuable suggestions. We also thank Professor Daniel Alazard (SUPAERO) for providing the telescope design problem.

Chapitre 5

Synthèse non lisse dans le domaine temporel

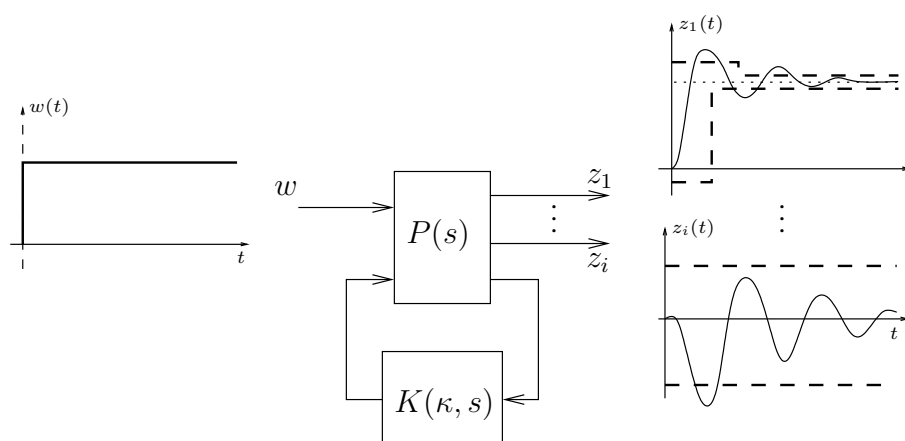


FIG. 5.1 – Visualisation de la synthèse non lisse dans le domaine temporel

POUR pouvoir utiliser efficacement une technique de synthèse dans le domaine fréquentiel, l'ingénieur expérimenté doit savoir comment traduire des spécifications de performance dans le domaine temporel, telles qu'un dépassement limité, un temps de montée ou de réponse petits, d'une façon heuristique via l'introduction de critères de performance fréquentiels.

Dans une autre approche alternative aux méthodes fréquentielles, on cherche à traiter de telles spécifications plus directement en utilisant la réponse temporelle du système en boucle fermée à des signaux test particuliers tels qu'un échelon, une rampe, etc. La technique de synthèse qui en résulte est dans une certaine mesure plus proche des méthodes de la commande optimale que des méthodes fréquentielles traditionnelles. Dans l'article qui suit, nous adoptons l'approche dans le domaine temporel visualisée sur la Figure 5.1. Nous considérons alors des contraintes sur les trajectoires du système en boucle fermée, y compris états et commandes, afin de maîtriser non seulement des caractéristiques telles que le dépassement ou les temps de montée et de réponse, mais également la saturation des actionneurs ou encore d'autres limites opérationnelles sur le système.

La possibilité d'imposer des contraintes sur les trajectoires temporelles du système di-

rectement telles qu'elles apparaissent dans le cahier de charges est évidemment d'un grand intérêt. Par exemple, des contraintes sur la valeur de pic de l'amplitude ou de la vitesse des signaux de commande apparaissent inévitablement dans des applications pratiques dès que l'on considère un modèle réaliste pour les actionneurs. Cette problématique fut l'objet d'une recherche très riche dans les années récentes. En l'occurrence, notre approche permet de contraindre les trajectoires des signaux de commande afin de les maintenir à l'intérieur de l'intervalle où les actionneurs ne risquent pas la saturation, de façon que la dynamique du système reste linéaire.

L'idée de minimiser la réponse du système en boucle fermée à une entrée test fixée n'est pas nouvelle [44]. Plus récemment, cette même idée a été reprise par les techniques du type *Iterative Feedback Tuning* (IFT) [85]. Nous avons indiqué précédemment que dans les approches du type moindres carrés, tel que l'IFT, on essaie de satisfaire les contraintes temporelles via la minimisation de la norme L_2 de l'erreur entre la réponse du système et une certaine réponse de référence. Cette approche a l'avantage de mener à un problème de minimisation théoriquement résolu par la programmation non linéaire traditionnelle. En revanche, la sélection d'un modèle de référence réaliste constitue une tâche complexe. Contrairement aux approches moindres carrés, nous minimisons la norme L_∞ de la violation de l'enveloppe des contraintes temporelles présentée initialement dans la Section 2.2.4. L'enveloppe des contraintes est en quelque sorte plus générale qu'une spécification du type modèle de référence puisque, d'une part, une réponse de référence peut être facilement construite à partir de l'enveloppe des contraintes et, d'autre part, une enveloppe de contraintes autorise une plus grande variété de solutions pratiques.

Le problème de synthèse dans le domaine temporel est alors formulé comme un programme d'optimisation du type MINIMAX non convexe. Bien que sous certaines conditions ce programme MINIMAX puisse être reformulé comme un problème d'optimisation lisse, notre technique non lisse permet d'exploiter la structure du problème de manière à obtenir des temps d'exécution plus faibles.

Afin d'illustrer la flexibilité et l'efficacité de notre méthode, nous présentons trois applications. D'abord, nous considérons un problème de suivi de consigne comprenant des contraintes sur l'amplitude et la vitesse de la commande. Dans la seconde application, nous synthétisons un compensateur structuré pour un système de puissance de grande dimension introduit dans le chapitre précédent. Le compensateur structuré doit notamment diminuer l'amplitude des oscillations dues à un mode très mal amorti. De plus, la commande est soumise à une limitation d'amplitude afin d'éviter la saturation des composants physiques du compensateur. En dernier lieu, nous considérons le problème de la synthèse en ligne sans modèle pour un procédé avec retard. Un compensateur du type PID doit assurer un suivi de consigne adéquat en boucle fermée en dépit d'une contrainte sur l'effort de commande.

Time-Domain Control Design : a Nonsmooth Approach

P. Apkarian, D. Noll and A. M. Simões

Article à paraître dans IEEE Transactions on Control Systems Technology

Abstract

We present a method to efficiently compute locally optimal feedback controllers for synthesis problems formulated in the time-domain. We minimize a time-domain performance objective subject to state or input time-domain constraints. The possibility to include state or input constraints in the design is very appealing from a practical point of view, in particular for plants subject to operational limits as input saturations. Our method is based on a nonsmooth minimization technique, which can handle time-domain constraints as hard constraints. For model-based designs, a stability constraint can also be handled as a hard constraint. The validity and efficiency of the approach are demonstrated through a variety of numerical tests with comparisons with a state-of-the-art technique in constrained optimization.

5.1 Introduction

In traditional frequency based feedback control design for linear time-invariant systems, closed-loop performance specifications like limited overshoot, short settling- or rise-times cannot be addressed directly. Instead, experienced designers know how to handle these specifications heuristically by introducing suitable frequency-domain performance channels, which are then optimized using classical loop-shaping design techniques or more recent H_∞ or H_2 synthesis methods.

Another approach allowing to handle time-domain constraints more directly uses closed-loop system responses $z(t)$ to fixed test input signals $w(t)$ such as steps, ramps or other inputs. The idea is then to find a controller that minimizes the discrepancy between system responses and a given expected behavior. We follow this line here, and discuss state and control constraints for system response trajectories $z(t)$ and $u(t)$ to con-

trol not only overshoot, settling- and rise-time, but also actuator saturation and other operational limits on the system.

A substantial body of work addressing the fixed input design problem uses the Youla parametrization, see [169, 25]. This method solves a recurring difficulty with optimization-based methods: how to efficiently handle the internal stability specification. Unfortunately, it is no longer suited if general structural constraints on the controller have to be satisfied.

A difficulty with the above l_∞ - or L_∞ -norm formulations is the nonsmoothness of the resulting optimization problem. A recent trend in feedback control - referred to as *iterative feedback tuning* (IFT) [85] - follows the least squares approach. IFT techniques handle time-domain specifications as soft constraints by penalizing L_2 integrals of the constraint violation [104] and use penalization when constraints are present. Penalization strategies raise important and critical questions like how to initialize and update the penalty parameter and how to avoid the inherent ill-conditioning of these techniques for asymptotic values of the penalty parameter. Also, it may lead to unsatisfactory execution times since an unconstrained nonlinear problem must be solved to completion for each value of the parameter.

Our design method computes *locally* optimal structured controllers using a nonsmooth optimization technique. Despite their local nature, these solutions prove to be very useful in practice as demonstrated on a variety of examples. The present work is an extension of our previous work on time-domain synthesis [21] to the considerably more difficult problem where explicit time-domain constraints are present. The paper is organized as follows. Section 5.2 discusses the time-domain shaping design problem. Our nonsmooth optimization technique is briefly presented in Section 5.3. Section 5.4 covers several challenging applications.

Notation

We use concepts from nonsmooth analysis covered by [43]. For a locally Lipschitz function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\partial f(x)$ denotes its Clarke subdifferential at x while $f'(x; h)$ stand for its directional derivative at x in the direction h . For functions of two variables $f(x, y)$, $\partial_1 f(x, y)$ will denote the Clarke subdifferential with respect to the first variable. For differentiable functions f of two variables x and y the notation $\nabla_x f(x, y)$ stands for the gradient with respect to the first variable. The symbol $[\cdot]_+$ denotes the threshold function $[x]_+ = \max\{0, x\}$.

5.2 Structured controllers synthesis in time-domain

Consider a plant P in state-space form

$$P(s) : \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is the state vector of P , $u \in \mathbb{R}^{m_2}$ the vector of control inputs, $w \in \mathbb{R}^{m_1}$ is a test signal, $y \in \mathbb{R}^{p_2}$ the vector of measurements and $z \in \mathbb{R}^{p_1}$ the controlled or performance vector.

We consider control laws of the form $u = K(s)y$ with state-space realization

$$K(s) = C_K(sI - A_K)^{-1}B_K + D_K, \quad A_K \in \mathbb{R}^{k \times k}, \quad (5.2)$$

where the case $k = 0$ of a static controller $K(s) = D_K$ is included. We develop the formulas for static controllers, which allows to unify the setup notationally and facilitates implementation. Formulas for dynamic controllers are then obtained by a prior standard dynamic augmentation of the plant $P(s)$, so that dynamic controller for $P(s)$ becomes static

$$\mathcal{K} := \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+m_2) \times (k+p_2)}. \quad (5.3)$$

for the augmented system [11]. Structural constraints on the controller may now be defined by a matrix-valued mapping $\mathcal{K}(\cdot)$ from a parameter space \mathbb{R}^q to $\mathbb{R}^{(k+m_2) \times (k+p_2)}$. That is $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\kappa)$, where $\kappa \in \mathbb{R}^q$ denotes the independent variables in the controller parameter space \mathbb{R}^q . For the time being we will consider free variation $\kappa \in \mathbb{R}^q$, but the reader will be easily convinced that parameter restrictions under the form of mathematical programming constraints $g_I(\kappa) \leq 0, g_E(\kappa) = 0$ could be added if needed. We will assume throughout that the mapping $\mathcal{K}(\cdot)$ is continuously differentiable, but otherwise arbitrary.

The focus is on time-domain synthesis with structured controllers $\mathcal{K}(\kappa)$ for the plant in (5.1). We are seeking $\kappa \in \mathbb{R}^q$ achieving the following:

- **Internal stability:** $\mathcal{K}(\kappa)$ stabilizes the original plant $P(s)$ in closed-loop.
- **Performance:** For all stabilizing $\mathcal{K}(\kappa)$ with that structure, the closed-loop time response $z(\kappa, t)$ to an input test signal $w(t)$ with controller $\mathcal{K}(\kappa)$ satisfies the envelope constraints

$$z_{i,\min}(t) \leq z_i(\kappa, t) \leq z_{i,\max}(t), \quad \forall t \geq 0, \quad i \in I := \{1, \dots, p_1\}. \quad (5.4)$$

The constraints in (5.4) with upper and lower envelopes define in some sense templates for shaping the closed-loop responses $z(t)$. Typical cases will be illustrated in Section 5.4, where envelope or shape constraints on overshoot, damping, rise-time, settling-time and

steady-state accuracy are imposed on closed-loop responses. Yet, the approach offers the flexibility to incorporate any deterministic input of practical interest such as ramps, sinusoids, stair sequences, etc.

It is also possible and useful to formulate amplitude and rate constraints for the control signal $u(t)$. A standard technique to handle these constraints amounts to augmenting the plant with inputs as new states, as shown schematically in Figure 5.2. The original sought control law is then easily recovered afterward. The order and structure of the controller are slightly altered in this formulation. Control signal constraints arise regularly in practical designs, and this has generated intensive research in the past decade. Our approach differs from anti-windup schemes and is closer in spirit to the saturation avoidance philosophy. Admittedly with some sacrifice of performance, we try to keep signals at levels where the system dynamics remain linear.

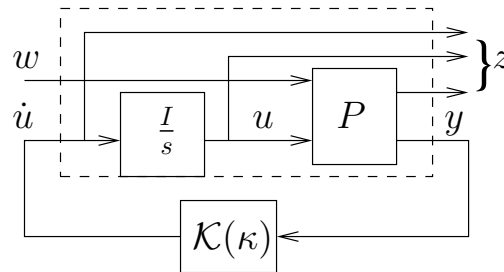


Figure 5.2: Augmentation of standard form

There exist various optimization strategies to handle the specifications in (5.4). Consider for instance a partition of I into disjoint subsets S and H , i.e., $I = S \cup H$, $S \cap H = \emptyset$, where we think of S as the soft constraints, H the hard constraints. With

$$e_i(\kappa, t) := \max \{z_i(\kappa, t) - z_{i,max}(t), z_{i,min}(t) - z_i(\kappa, t)\} \quad (5.5)$$

a possible form of the program is now

$$\begin{aligned} & \underset{\kappa \in \mathbb{R}^q}{\text{minimize}} && f(\kappa) := \max_{i \in S} \max_{t \geq 0} [e_i(\kappa, t)]_+ \\ & \text{subject to} && g(\kappa) := \max_{i \in H} \max_{t \geq 0} e_i(\kappa, t) \leq 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Notice that program (5.6) has nonsmooth semi-infinite objective and constraints, which do not admit closed-form expressions via space-state representations. For that reason, the max operations involving the closed-loop system responses have to be performed explicitly. In a *model-based* design, time responses are generated from the state-space model (1) through numerical *simulation*, which can be performed using the classical discrete state-propagation approach or a general-purpose ordinary differential equation solver. Yet, they can also be obtained from *experiments* carried out online with the real system. The latter approach is often referred to as the *model-free* approach and forms the basis of the IFT method. In both cases, and also from a practical point of view, a finite horizon for simulation or data acquisition has to be selected, so only a limited number of samples

$t \in T = \{t_0, \dots, t_k\}$ are considered at each iteration, where the set T may in principle differ at each iteration.

An equivalent more classical formulation for (5.6) is the following cast:

$$\begin{aligned} & \underset{\gamma \in \mathbb{R}, \kappa \in \mathbb{R}^q}{\text{minimize}} && \gamma \\ & \text{subject to} && \begin{cases} z_i(\kappa, t) - z_{i,max}(t) - \gamma \leq 0 \\ z_{i,min}(t) - z_i(\kappa, t) - \gamma \leq 0 \end{cases}, \forall i \in S, t \in T \\ & && \begin{cases} z_i(\kappa, t) - z_{i,max}(t) \leq 0 \\ z_{i,min}(t) - z_i(\kappa, t) \leq 0 \end{cases}, \forall i \in H, t \in T. \end{aligned} \quad (5.7)$$

When a fixed sampling time is used to generate the set T throughout the iterations sequence, then program (5.7) becomes a smooth constrained nonlinear program, since for each fixed time $t \in T$ the constraints are differentiable with respect to the parameters κ of the controller.

Even though state-of-the-art smooth constrained optimization techniques are available for program (5.7) or the least squares formulation [104], we privilege a nonsmooth semi-infinite optimization algorithm that solves program (5.6) directly for the following reasons:

- First of all, time-domain specifications can be handled as hard constraints hence dispensing with the often critical management of barrier or penalty parameters. The nonsmooth algorithm is more in line with exact penalization techniques where solutions to the original problem are obtained with a single minimization of an appropriate progress function.
- Classical approaches including the state-of-the-art sequential quadratic programming (SQP) of Matlab (function FGOALATTAIN in the Optimization Toolbox) and the least square approach require sampling every trajectory in (5.7) hence leading to a discretized problem with so many constraints that it might reveal impractical for currently available codes. An illustration of this difficulty is discussed in Applications 5.4.1 and 5.4.2.

In sharp contrast, the nonsmooth technique relies solely on active times to generate descent steps. Active times are those times where the max of f and g in (5.6) are attained. Using only active times leads to a reduced size discretized problem and therefore enhances efficiency. The proposed technique also offers the flexibility to update the simulation or experiment horizon as well as the sampling time along the iterations to further reduce execution times.

5.3 Nonsmooth minimization technique

We give now a brief presentation of our optimization method and emphasize the main ingredients. For a more detailed discussion we refer the reader to [11, 130, 14]. Following

an idea in [130, 14], we introduce the so-called progress function for (5.6):

$$F(\kappa^+, \kappa) = \max\{f(\kappa^+) - f(\kappa) - \mu g(\kappa)_+; g(\kappa^+) - g(\kappa)_+\}, \quad (5.8)$$

where $\mu > 0$ is some fixed parameter. We think of κ as the current iterate, κ^+ as the next iterate or as a candidate to become the next iterate. We must search for points $\bar{\kappa}$ satisfying $0 \in \partial_1 F(\bar{\kappa}, \bar{\kappa})$, because this is a necessary condition for a local minimum of (5.6), see [14] for the proof. Excluding practically rare cases where $\bar{\kappa}$ is a critical point of constraint violation $g(\bar{\kappa}) \geq 0$, critical points $\bar{\kappa}$ of $F(\cdot, \bar{\kappa})$ will also be critical points of the original program (5.6).

Approximating a point $\bar{\kappa}$ with $0 \in \partial_1 F(\bar{\kappa}, \bar{\kappa})$ is based on an iterative procedure. Suppose the current iterate κ is such that $0 \notin \partial_1 F(\kappa, \kappa)$. Then it is possible to reduce the function $F(\cdot, \kappa)$ in a neighborhood of κ , that is, to find κ^+ such that $F(\kappa^+, \kappa) < F(\kappa, \kappa)$. Replacing κ by κ^+ , we repeat the procedure. Unless $0 \in \partial_1 F(\kappa^+, \kappa^+)$, in which case we are done, it is possible to find κ^{++} such that $F(\kappa^{++}, \kappa^+) < F(\kappa^+, \kappa^+)$, etc. The sequence $\kappa, \kappa^+, \kappa^{++}, \dots$ so generated is expected to converge to the sought local minimum $\bar{\kappa}$ of (5.6).

Finding the descent step κ^+ away from the current κ is based on solving the tangent program at κ . Its name is derived from the fact that a first-order approximation $\widehat{F}(\cdot, \kappa)$ of $F(\cdot, \kappa)$ is built, which provides a descent direction $d\kappa$ at κ , that is, $d_1 F(\kappa, \kappa; d\kappa) < 0$, where $d_1 F$ denotes the directional derivative of $F(\cdot, \kappa)$ at κ in direction $d\kappa$. The next iterate is then $\kappa^+ = \kappa + d\kappa$, or possibly $\kappa^+ = \kappa + \alpha d\kappa$ for a suitable stepsize $\alpha \in (0, 1)$ found by a backtracking line search.

The choice of the progress function in (5.8) leads to a so-called phase I/phase II method. As long as the constraint $g(\kappa) > 0$ is not satisfied, the right hand term in F is dominant and reducing F amounts to reducing constraint violation. This is phase I, which ends successfully as soon as a feasible iterate has been found. Now phase II begins, and from now on iterates stay (strictly) feasible, and the objective function is minimized at each step. In that case the algorithm converges towards a critical point of (5.6). The choice of the constant $\mu > 0$ may have an influence on the behavior of the method in phase I, but has been fixed to $\mu = 1$ in our implementation.

In order to define the initial iterate, a stabilizing controller is computed from scratch using the nonsmooth technique in [20]. For model-based designs, a spectral abscissa constraint is added to the original hard constraints g in (5.6) whenever the solution of the nonsmooth algorithm (5.6) is not internally stabilizing. The spectral abscissa α is defined as the maximum real part of closed-loop eigenvalues. The constraint in program (5.6) then becomes $\max\{\alpha - \hat{\alpha}, g(\kappa)\} \leq 0$, where $\hat{\alpha} < 0$ represents a prescribed largest acceptable spectral abscissa.

In order to generate a first-order approximation $\widehat{F}(\cdot, \kappa)$ of $F(\cdot, \kappa)$ around κ , we need the set of active times for f : $T_f(\kappa) := \{t \geq 0 : \exists i \in S, [e_i(\kappa, t)]_+ = f(\kappa)\}$. $T_g(\kappa)$ is defined analogously for g . Let us consider the case where $f(\kappa) > 0$, because for $f(\kappa) = 0$ there is nothing to optimize. As the active sets may be small, we consider finite extensions T_f^e and T_g^e of the sets T_f and T_g , respectively. The idea here is that enriched sets capture more

information on the closed-loop responses which results in a better tangent model. The proposed technique offers great flexibility to build such extensions, while guaranteeing convergence [14]. A general characterization is $\forall t \in T_f^e, \exists i \in S, [e_i(\kappa, t)]_+ > 0$. For all such t , the functions $[e_i(\kappa, t)]_+$ are differentiable in a neighborhood of κ . Indeed, $[e_i(\kappa, t)]_+ = \max\{z_i(\kappa, t) - z_{i,max}(t), z_{i,min}(t) - z_i(\kappa, t), 0\}$, and only one component is active in this expression. We have

$$\nabla_{\kappa}[e_i(\kappa, t)]_+ = \begin{cases} \nabla_{\kappa}z_i(\kappa, t) & \text{if } z_i(\kappa, t) > z_{i,max}(t) \\ -\nabla_{\kappa}z_i(\kappa, t) & \text{if } z_{i,min}(t) > z_i(\kappa, t) \end{cases}$$

For all $t \in T_f^e$, we collect all pairs $(\phi_f, \Phi_f) := ([e_i(\kappa, t)]_+, \nabla_{\kappa}e_i(\kappa, t))$ and denote this finite set as \mathcal{W}_f . The set \mathcal{W}_g is constructed analogously.

All signals in (5.1) are differentiable with respect to controller entries, so $\nabla_{\kappa}z_i(\kappa, t)$ can be obtained by differentiating the state-space equations with respect to κ_j . It follows that the partial derivative of the output signal $\frac{\partial z}{\partial \kappa_j}(\kappa, t)$ corresponds to the output of the interconnection in Figure 5.3, where the exogenous input w is held at 0, and the vector $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \kappa_j}y$ is added to the controller output signal. One readily infers that q experiments or simulations are required to form the sought gradients.

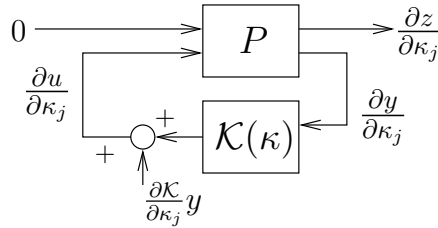


Figure 5.3: Interconnection for gradient computation

For SISO controllers, however, the linear operators $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \kappa_j}$ and the closed-loop transfer on Figure 5.3 commute, so instead of filtering y with $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \kappa_j}$ and then injecting the result in the closed-loop system, one may alternatively inject y only and then filter the system output with $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \kappa_j}$. Consequently, only one experiment or simulation involving the plant is required for gradient computation no matter the order and structure of the controller. This allows to reduce the experimental overhead in model-free designs and to speed-up computations for the model-based case. We refer the reader to [94] and references therein for a discussion on how to reduce the number of experiments in the MIMO case.

With this preparation, a first-order (tangent) approximation is obtained as

$$\widehat{F}(\kappa + h, \kappa) := \max \left\{ \max_{(\phi_f, \Phi_f) \in \mathcal{W}_f} \phi_f - f(\kappa) - \mu g(\kappa)_+ + \Phi_f^T h, \max_{(\phi_g, \Phi_g) \in \mathcal{W}_g} \phi_g - g(\kappa)_+ + \Phi_g^T h \right\},$$

where h is the displacement in the controller parameter space \mathbb{R}^q . This gives the tangent program

$$\underset{h \in \mathbb{R}^q}{\text{minimize}} \widehat{F}(\kappa + h, \kappa) + \frac{\delta}{2} \|h\|^2. \quad (5.9)$$

Program (5.9) can be turned into a standard convex quadratic program (CQP), and can be efficiently solved using currently available codes. Current state-of-the-art CQP codes solve problems involving several hundreds of variables and constraints in less than a second.

5.4 Applications

5.4.1 Step following with input amplitude and rate constraints

We start our experiments with a simple step following problem borrowed from [82]. Consider the standard negative feedback interconnection of the plant

$$G(s) = \frac{s + 0.5}{s(s - 2)}$$

and controller $K(s)$ in Figure 5.4. As in the original problem, we do not use a prefilter in this preliminary study, i.e. $F(s) = I$. The closed-loop system must follow a step reference command with minimum overshoot.

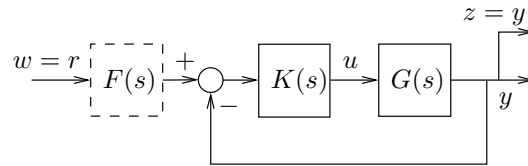


Figure 5.4: Standard interconnection

The specified time-domain constraints define a settling-time of 4 seconds with worst-case overshoot of 10% and steady-state error of $\pm 2\%$. The corresponding envelope constraints are drawn as dashed lines in Figure 5.5. We seek a second-order controller meeting the above constraints.

An initial stabilizing controller is computed as

$$K_0(s) = \frac{7.93s^2 + 79.78s + 805}{s^2 + 9.972s + 99.55}.$$

The corresponding closed-loop response $y(t)$ is depicted in Figure 5.5. Simulation step and sample time are selected according to the closed-loop system bandwidth using standard Matlab routines. We also display times ('+' symbols) where envelope constraints are violated. These samples are selected to build the tangent subproblem (5.9) for computation of the descent direction with the nonsmooth technique. In the present case, a globally optimal solution meeting all template constraints has been obtained for problem (5.6) with zero value of the cost function, and the associated second-order controller is described as

$$K_{ns}(s) = \frac{39.02s^2 + 928s + 6408}{s^2 + 24.49s + 157.9}.$$

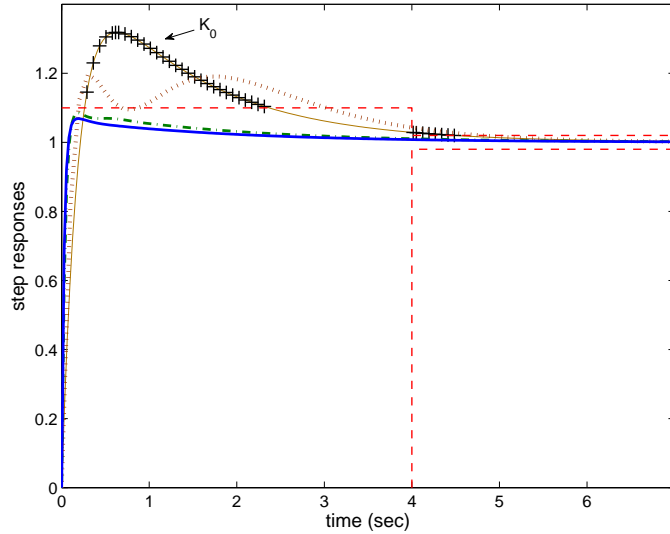


Figure 5.5: Comparison of step-responses: K_{ns} (solid), K_s (dash-dot), [82] (dot)

The nonsmooth algorithm takes 3.2 seconds cputime on a 2.8GHz Pentium D processor with 1Gb RAM, performing 15 evaluations of (5.8) and requiring a total of 87 simulations, including those for subgradients computation.

For the sake of comparison, a controller is also designed using the smooth approach. Program (5.7) is solved using the FGOALATTAIN routine from the Optimization Toolbox from Matlab, which implements a SQP method. The same simulation routines were used, as well as the initial controller K_0 . The smooth program needs 15.5 seconds to find a feasible controller

$$K_s(s) = \frac{28.92s^2 + 293.1s + 3364}{s^2 + 9.339s + 111.6},$$

performing 119 function evaluations (5.8) and a total of 1111 simulations. Figure 5.5 depicts the corresponding closed-loop response together with the results for the third-order controller in [82].

With the same example, we now consider a more realistic set-up, where the step following problem is combined with hard constraints on both control input amplitude and rate. This is easily formulated via (5.6) and the scheme in Figure 5.2. The additional constraints are $|u(t)| \leq 5$ and $|\dot{u}(t)| \leq 15$. Constraints on the closed-loop step response $y(t)$ are considered as soft constraints. In order to avoid injecting pure step commands, which may result in unduly conservative designs when rate restrictions are present, we use the prefilter $F(s) = \frac{1}{0.3s+1}$ in Figure 5.4.

The proposed nonsmooth method finds a locally optimal solution in 22 seconds cputime, performing 132 function evaluations and 618 simulations. The associated controller is described as

$$K_{15}(s) = \frac{90.31s^2 + 6114s + 1079}{s(s^2 + 64.9s + 626.6)}.$$

The corresponding time-domain simulations including step responses, control signal $u(t)$ and control input derivative $\dot{u}(t)$ are presented in Figure 5.6.

The input rate constraint turns out to be severe, and the computed controllers do *not* meet the shape constraints. The rate constraint is in some sense exhausted in the transient part of the output response, and we have exactly $\max_{t \geq 0} |\dot{u}| = 15$. Relaxing the rate constraint to 20 allows to satisfy all time-domain specifications, as shown in Figure 5.6. The associated controller is then

$$K_{20}(s) = \frac{114.2s^2 + 9402s + 2270}{s(s^2 + 81.52s + 691.4)}.$$

5.4.2 Power system oscillation damping

We discuss now the control of a large dimension system, the oscillation damping of the power system presented in [144]. The system response oscillation is due mainly to a lightly-damped resonant mode, known as the NS (north-south) mode, which resulted from the interconnection of the Brazilian north and south sub-systems. In the closed-loop block diagram shown in Figure 5.7, the measured and also the controlled output $y \in \mathbb{R}$ corresponds to the active power deviation, the control input $u \in \mathbb{R}$ represents the susceptance deviation, and the disturbance $w \in \mathbb{R}$ stands for the deviation in the mechanical power of a plant located at the north side of the interconnection.

We have used a model with 90 states corresponding to the worst-damped scenario in [144]. The NS mode presents a natural frequency of 1.08 rad/s and 3% damping, dominating the transient phase of the open-loop step response. This is confirmed by the magnitude of the frequency response for the open-loop transfer function $T_{w \rightarrow y}$ as displayed in Figure 5.8.

This problem imposes some challenging design specifications. Firstly, from a performance perspective, the primary control objective is to guarantee oscillation damping with the lowest possible overshoot in the presence of disturbance. This must be achieved with a limited control effort deviation to avoid saturation of the Thyristor Controlled Series Compensator (TCSC) components. Secondly, a reduced-order controller must be sought, given the large dimension of the system. It is also desirable that the controller possesses washout filtering properties to eliminate bias. Therefore, the controller structure was chosen of the form $K(s) = \frac{s}{s+p} \hat{K}(s)$, where $\hat{K}(s)$ is a 5th-order strictly proper transfer function, and the position of the real washout pole $-p$ is also a decision variable of the optimization program. Altogether, this gives a controller parametrization $\mathcal{K}(\kappa)$ with free parameters $\kappa \in \mathbb{R}^{36}$.

The closed-loop step response and control input with the computed initial controller $K_0(s)$ are shown in Figure 5.9. In order to achieve the desired level of oscillation damping, time-domain constraints were constructed as a piecewise constant approximation of a decaying exponential corresponding to 20% damping for the NS mode frequency. These shape constraints appear as stair functions in Figure 5.9. The exponential envelope has

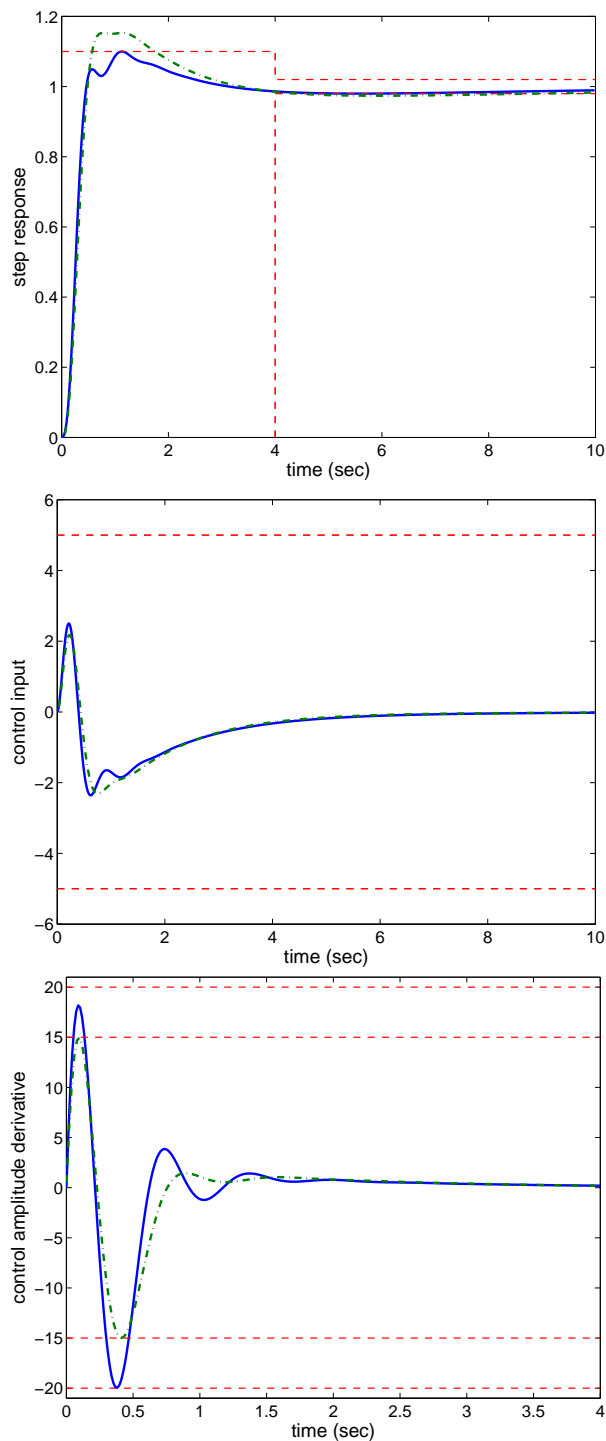


Figure 5.6: Responses with control amplitude and rate constraints: K_{15} (dash-dot), K_{20} (solid)

an offset equal to the asymptotic value of the open-loop step response, since the controller incorporates a washout filter. Regarding the control effort, constraints were introduced

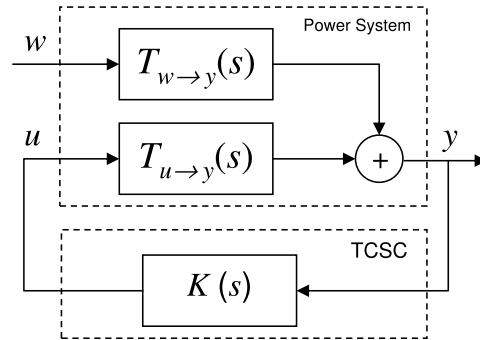
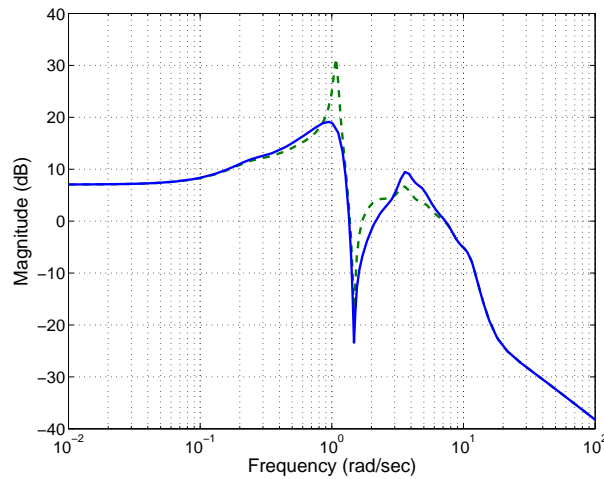


Figure 5.7: Closed-loop system block diagram representation

Figure 5.8: Frequency response for $T_{w \rightarrow y}$ (dashed: open-loop, solid: final closed-loop)

to limit the peak value, which avoids saturating TCSC components. The nonsmooth algorithm needs 31 seconds, 64 function evaluations and 964 simulations to find a feasible controller

$$K(s) = \frac{s(22.02s^4 + 652.4s^3 + 6440s^2 + 6920s + 392.2)}{s^6 + 12.43s^5 + 60.57s^4 + 144.8s^3 + 195.5s^2 + 168.5s + 64.21}$$

By feasible we mean that the closed-loop step response satisfies both response and control input constraints, see Figure 5.9. The closed-loop transfer function $T_{w \rightarrow y}$ is drawn in Figure 5.8. A feasible controller has also been found using the smooth SQP approach of Matlab based on (5.7). Contrasting with the nonsmooth approach, it required 445 seconds, 623 function evaluations and 22497 simulations.

Figure 5.9 reveals that the envelope constraints for the output response has been chosen to accommodate a low frequency oscillatory component, which is caused by an almost uncontrollable mode with natural frequency of 0.26 rad/s (dotted line in the figure 5.9). By definition such a phenomenon cannot and should not be compensated by feedback.

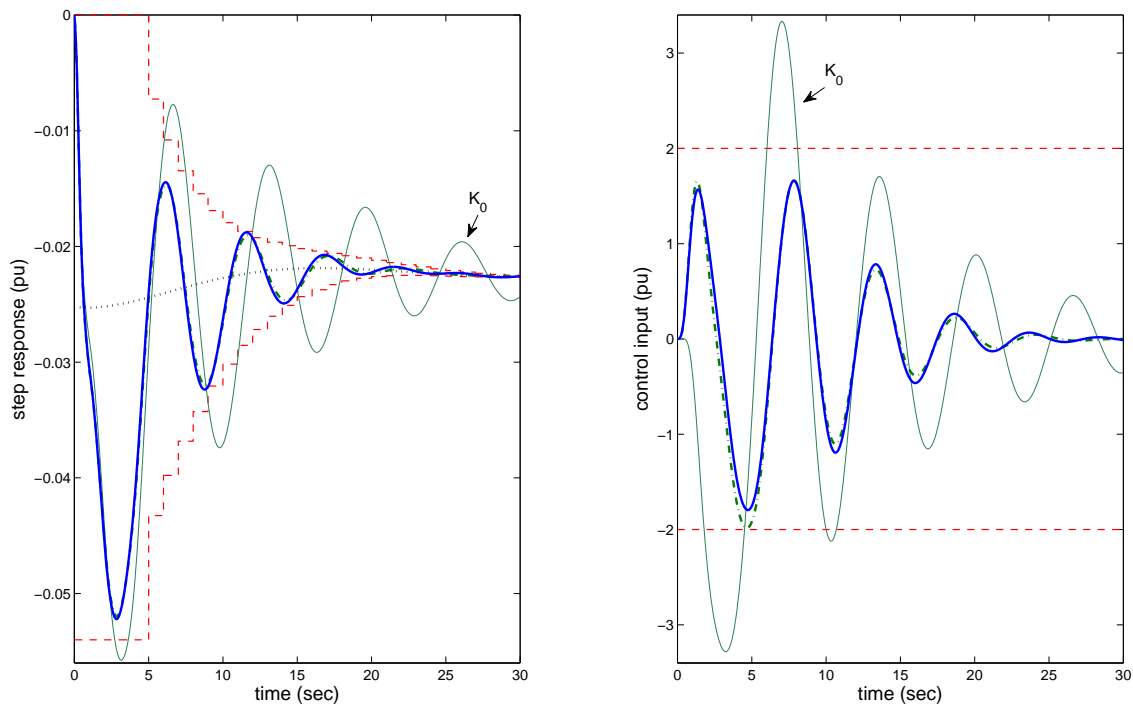


Figure 5.9: Step and control input responses (dark solid: nonsmooth, dash-dot: smooth)

As it is very flexible, the proposed design technique can take such plant characteristics into account to avoid unrealistic solutions.

5.4.3 Model-free design for a process with large dead time

Most design methods are model-based and may perform poorly when confronted with the actual plant. An appealing feature of model-free approaches is that they rely only on experimental data and consequently inaccuracies in the mathematical model are no longer harmful. Moreover, the fact that there is no need to open the control loop is another attractive feature of IFT. A reasonable strategy appears to combine both model-based and model-free strategies. A first controller is computed using an identified model of the plant. If matching the result with experimental data turns out unacceptable, a model-free design is performed to further improve the controller. With this procedure, a complex accurate model is no longer needed and initializing the model-free design with a sensible controller should reduce the number of iterations in the tuning phase.

The process we consider to emulate experimental data is taken from [29] and is described by

$$y(s) = \frac{3}{3s+1} \frac{7}{s+7} e^{-6s} u(s) + v, \quad (5.10)$$

where v is white Gaussian noise with zero mean and variance $\sigma^2 = 0.01$. The true dynamics (5.10) of the process are supposed unknown, and will be used solely as a black-

box to generate experimental data of the real system during the re-tuning phase. For the model-based synthesis, a simple model of the process is constructed as a first-order transfer function in series with a 2nd-order Padé approximation for the dead time. The steady-state gain and bandwidth of the system are accurately modeled, but the dead-time has been underestimated to 5 seconds:

$$y(s) = \frac{3}{3s + 1} \left(\frac{s^2 - 1.2s + 0.48}{s^2 + 1.2s + 0.48} \right) u(s). \quad (5.11)$$

We are seeking a PID controller

$$K(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{1 + \epsilon s}$$

with the classical feedback interconnection shown in Figure 5.4 (with $F(s) = I$). Parameters for the initial controller $K_0(s)$ are chosen as $K_p = 0.09$, $K_i = 0.02$, $K_d = 0.01$ and $\epsilon = 1$. Figure 5.10 shows the closed-loop system responses and control signal for model (5.11) with controller $K_0(s)$.

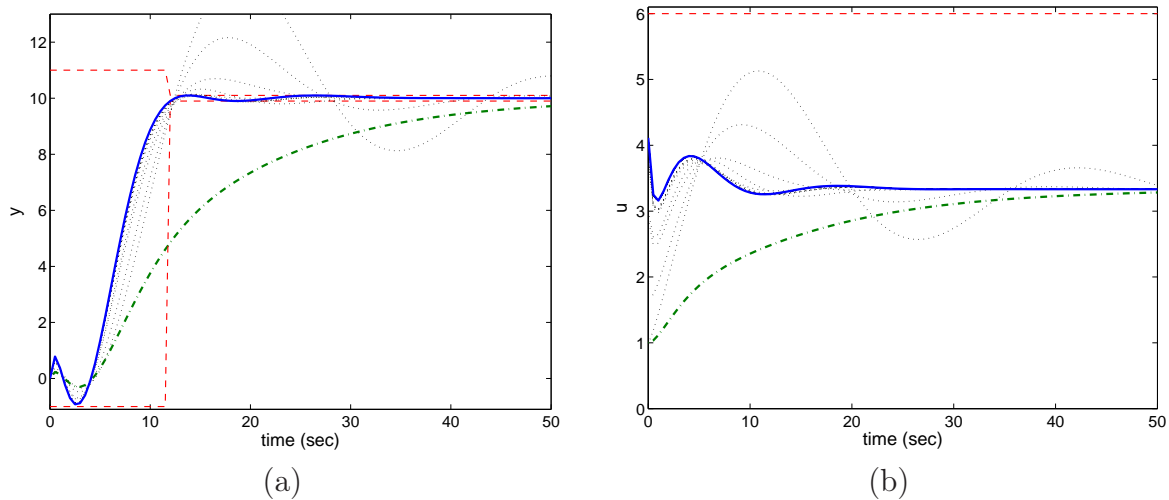


Figure 5.10: Closed-loop responses with model (5.11) (dash-dot: K_0 , solid: K_1)

Notice in Figure 5.10 that the process dead time is easily captured by defining appropriate templates. A control effort constraint is also introduced, although it remains initially inactive. Evolution of the step responses along a few final algorithm iterations are shown as dotted-lines in Figure 5.10. Also shown are the closed-loop responses for a model-based controller $K_1(s)$ computed using the nonsmooth technique. This controller meets all time-domain constraints, and is described by $K_p = 0.199$, $K_i = 0.045468$, $K_d = 0.22304$ and $\epsilon = 1.0507$.

In the next step, controller $K_1(s)$ is tested with the true noisy process (5.10). The corresponding responses are shown in Figure 5.11. Due to the discrepancy between model (5.11) and the true process (5.10), $K_1(s)$ performs poorly. Compare with Figure 5.10.(a).

This leads us to re-tune the controller using experimental data and identical time constraints. The model-free synthesis automatically adjusts to the true time-delay and

no further information is required. The (model-free) PID parameters are obtained as $K_p = 0.1994$, $K_i = 0.0395$, $K_d = 0.2872$ and $\epsilon = 0.7274$. The initial overshoot has been significantly reduced, see Figure 5.11.(a). The specified control effort constraint becomes active, as can be seen from Figure 5.11.(b). The final constraints violation falls below $\gamma = 0.27495$, that is 2.7% and hence becomes acceptable.

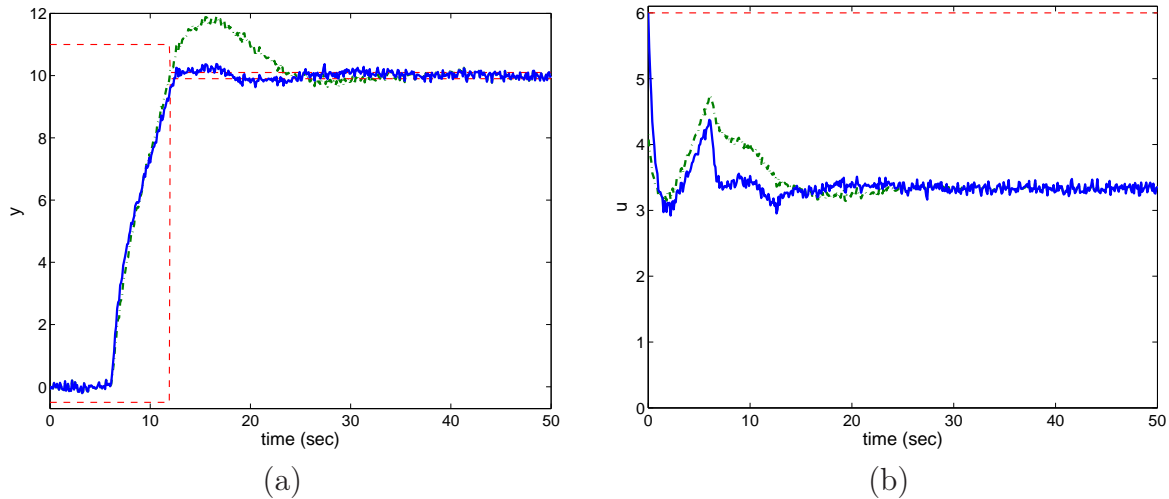


Figure 5.11: Closed-loop responses with true process (dash-dot: K_1 , solid: K_2)

5.5 Conclusion

We have described a nonsmooth algorithm to compute locally optimal solutions to time-domain synthesis problems. The approach is flexible as it applies to many different scenarios and can capture any controller structure of practical interest. The proposed technique expands on our previous results which were restricted to the minimization of a single cost function without trajectory (hard) constraints [21]. In terms of execution times, our technique outperforms the standard SQP approach as illustrated on a variety of examples.

Chapitre 6

Synthèse non lisse temporelle multiscénario

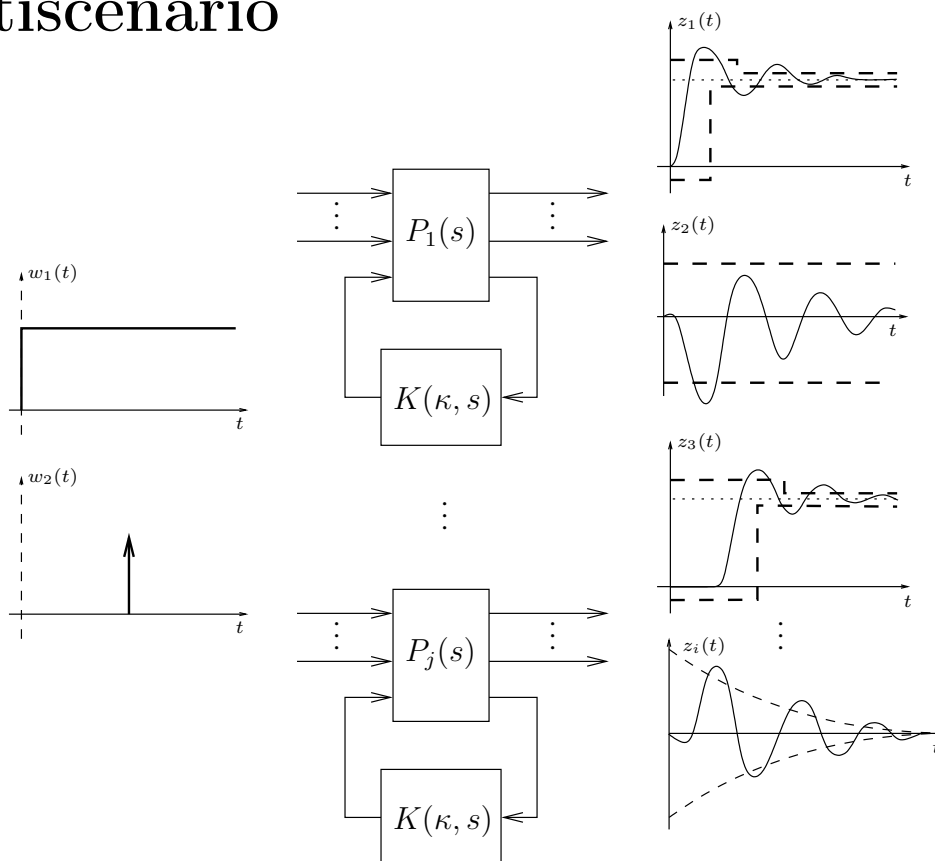


FIG. 6.1 – Visualisation de la synthèse non lisse temporelle multiscénario

DANS les applications réalistes de l'automatique, l'ingénieur cherche un compensateur qui soit performant non seulement pour une condition nominale ou pour un signal d'entrée particulier, mais également pour une famille de conditions de fonctionnement ou pour une collection de signaux d'entrée. Dans le problème de synthèse visualisé sur la Figure 6.1 et considéré dans l'article qui suit, un système ou éventuellement une famille de systèmes est soumise à une collection d'entrées test, et les réponses ainsi générées sont désignées scénarios. L'expression synthèse multiscénario fait donc référence au problème

de synthèse où les scénarios sont réunis de façon à former l'ensemble de spécifications. La technique de synthèse multiscénario proposée calcule alors un compensateur structuré tel que les spécifications de performance dans le domaine temporel soient satisfaites pour tous les scénarios. Le problème multiscénario représente en effet une généralisation naturelle du problème de la synthèse dans le domaine temporel discuté dans le chapitre précédent. Bien qu'il soit question d'un problème encore plus difficile de synthèse pour lequel seulement des solutions locales peuvent être calculées, la technique proposée se montre une fois encore particulièrement utile pour la construction d'une solution pratique.

La formulation multiscénario est suffisamment flexible pour intégrer divers problèmes de synthèse. On peut considérer, par exemple, un seul système soumis à différents signaux test, comme lorsque les propriétés de découplage d'un système doivent être examinées. Mais on peut avoir aussi la situation où le système originel est décrit par plusieurs modes de fonctionnement, comme dans la commande multimodèle [118, 127], ou par plusieurs modes défectueux, comme dans les approches du type *reliable control* [106, 132].

La formulation multiscénario peut couvrir également la situation plus compliquée où chaque système dans la famille est testé vis-à-vis de plusieurs entrées. C'est le cas de l'exemple considéré par la suite pour illustrer l'efficacité de notre méthode multiscénario. L'application est basée sur une version encore plus réaliste et complexe du problème de la synthèse d'un compensateur structuré pour un système de puissance d'ordre élevé considéré précédemment. Le modèle du système compte à présent 1664 états et deux perturbations exogènes. De plus, 11 points d'opération différents du système sont considérés. Le système présente un mode très mal amorti qui provoque d'importantes oscillations sous l'effet d'une perturbation exogène. L'objectif est alors de synthétiser un compensateur structuré d'ordre réduit qui garantisse non seulement un amortissement suffisant des oscillations, mais également une réponse transitoire modérée sous l'effet d'une perturbation. De plus, la commande est limitée en amplitude afin d'éviter la saturation des composants physiques du compensateur. Enfin, le compensateur doit satisfaire les spécifications pour tous les points d'opération du système. Il s'agit par conséquent d'un problème de synthèse extrêmement difficile, pour lequel aucune approche systématique n'est actuellement disponible. En particulier, les approches conventionnelles combinant réduction de modèle et synthèse d'ordre plein sont particulièrement inopérantes dans ce cas du fait de l'écart entre l'ordre du système (1664) et l'ordre prescrit pour le compensateur (6). Notre approche non lisse offre une grande flexibilité dans ce contexte puisque l'ordre du modèle de travail et celui du compensateur sont indépendantes.

Robust Design of a TCSC Oscillation Damping Controller in a Weak 500-kV Interconnection Considering Multiple Power Flow Scenarios and External Disturbances

A. M. Simões, D. C. Savelli, P. C. Pellanda, N. Martins and P. Apkarian

*Article publié dans IEEE Transactions on Power Systems,
vol.24, no.1, pp.226-236, April 2008.*

Abstract

The Power Oscillation Damping (POD) controllers implemented in the two thyristor controlled series compensators of the Brazilian North-South (NS) interconnection, in the year 1999, were solely intended to damp the low-frequency NS oscillation mode. These controllers are still under operation and are derived from the modulus of the active power flow in the NS line that is phase-lagged at the frequency of the NS mode and may experience relatively large excursions generated by exogenous disturbances. This paper utilizes the same 1999 data to compare the performance of a proposed robust POD controller design with those of two conventional designs. A recent robust control synthesis algorithm here utilized is based on a nonsmooth optimization technique and has the capability to handle various controller structures, including reduced-order, and to deal with time-domain constraints on both controlled and measured outputs. Moreover, the nonsmooth design technique encompasses multiple operating conditions subject to various test signals hence building a truly time-domain multi-scenarios approach. According to the results discussed hereafter this is a key advantage in the industrial context of increasing demand for performance and robustness. The described results relate to a large-scale system model used in the feasibility studies for that interconnection.

6.1 Introduction

The interconnection of the North-Northeast and the South-Southeast Brazilian subsystems (called North and South subsystems in this paper) in 1999, caused the emer-

gence of a new poorly-damped, low-frequency (0.17 – 0.25 Hz) swing mode: the North-South (NS) mode [111, 64, 65, 108]. Thyristor Controlled Series Compensators (TCSCs) [40, 96, 128, 90] equipped with Power Oscillation Damping (POD) controllers were installed at the North and South ends of the NS intertie, with the sole objective of damping the NS mode. A cost-effective POD design should yield not only good oscillation damping but also moderate transients in the POD output signal, following exogenous disturbances. Due to the finite equipment ratings, a large POD output signal may cause the TCSC to hit its limits. If the TCSC hits limits at every half cycle of the NS mode, the effective magnitude and phase compensation will differ from the intended values, drastically reducing the POD damping control action. Checking equipment performance for exogenous disturbances, such as generating-unit rejections and the ensuing active power surges, is therefore an integral part of POD controller design.

The single machine-infinite bus example in Fig. 6.2 is used to demonstrate the impact of TCSC limits in reducing the intended damping of the critical mode. This example relates to a 1,275 MVA power plant supplying 560 MW through a 500 km long transmission line whose parameters are identical to those of the NS intertie. The generator is equipped with fast exciter but no PSS. The electromechanical oscillation damping control is exerted by a POD-equipped TCSC in this line. A single-phase to ground fault is applied to the transmission line for 100 ms, and then removed without line opening. The ensuing transients are simulated considering three different MVar capacities for the TCSC. It is clear from the nonlinear simulated results that a reduction in the TCSC MVar capacity causes it to hit limits more severely and for a longer period with detrimental impact to its damping control capability.

Publications from several sources focused on the stabilization of the NS mode either through retuning of the existing Power System Stabilizers (PSSs) at the three major Northeast power plants [111, 110] or installation of TCSCs equipped with PODs at the two ends of the NS line [111, 64, 110, 65, 42, 108]. These two damping control options are currently implemented in the actual system, providing a comfortable level of redundancy of damping sources, but this paper focuses only on the TCSC solution. Previous valuable work on POD modulated by TCSCs is vast, including [6, 122, 99, 152, 142].

The TCSC at the North end (Imperatriz substation, IZ) was supplied by ABB while the other at the South end (Serra da Mesa substation, SMA) was supplied by Siemens, their PODs being designed according to distinct control philosophies [65, 108]. This paper utilizes the SMA POD for the studies of the proposed POD signal, since it presents slightly greater challenges in its design due to the close proximity of the SMA power station. The existing POD at the Imperatriz substation (IZ POD) is based on an innovative concept that ensures good performance under exogenous disturbances, requiring, however, the online estimation of the frequency to be damped. The IZ POD requires more complex modeling for the correct assessment of its dynamic performance, under a linear analysis perspective, and will be the object of a future publication. The IZ POD was considered to be disconnected in the studies since this does not impact the focus of this paper.

The objectives of the paper are the following:

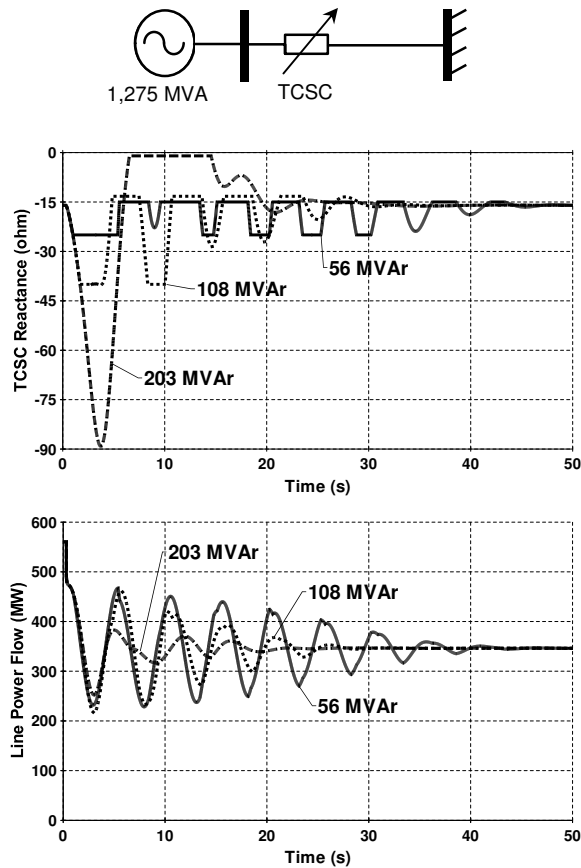


Figure 6.2: Impact of TCSC limits on the power flow oscillation damping of a single machine-infinite bus example.

- test the effectiveness of a recent nonsmooth design technique [16, 21] in a realistic multi-scenarios large system;
- synthesis of robust POD controllers to stabilize the interarea mode without destabilizing other modes, considering multiple power flow scenarios;
- analysis of adverse transients that lead the POD-equipped TCSC to hit its limits, following exogenous disturbances, comparing the performance of the robust POD design against those of conventional designs.

This paper is of an exploratory nature and does not reflect the viewpoints of the manufacturers, Brazilian utilities or system operator. Also, the Brazilian Interconnected Power System (BIPS) has greatly evolved since 1999, currently existing three circuits interconnecting the NS regions, besides a Southeast-Northeast interconnection whose combined effect has raised the NS mode frequency to over 0.3 Hz and eliminated the originally critical damping problem.

The apparent simplicity of the POD design objectives (single mode damping) is actually very deceptive, since a series of issues impose very challenging design constraints: different levels of power transfer and system configuration, power flow reversal, level of POD induced adverse transients that lead the TCSC to hit limits, adverse interactions among nearby high-performance controllers, etc.

This paper is organized as follows. Section 6.2 describes the problem of adverse transients in the POD control loop. The Modal Dominance Index (MDI) used for the computation of reduced equivalents is defined in Section 6.3. Section 6.4 proposes a robust control synthesis based on a nonsmooth optimization technique for solving the POD controller design problem. Conventional POD controllers are discussed in Section 6.5 while Section 6.6 describes the results that support the proposed robust POD synthesis. Section 6.7 concludes.

6.2 Control and Disturbance Models

The test system data correspond to a year 1999 planning model, having 2,370 buses, 3,401 lines, 123 synchronous machines plus field excitation and speed-governor controls, 46 power system stabilizers, 4 static var compensators, two TCSCs equipped with POD controllers (one of which is the object of design in this paper), and one large HVDC link. Each generator and associated controls, with a few exceptions, is the aggregate model of a whole power plant. The schematic diagram of BIPS, highlighting the SMA TCSC, is shown in Fig. 6.3. The seventeen base case scenarios, utilized in one of the several planning studies of the NS interconnection [51], were considered to ensure controller robustness. All control analysis and conventional design studies were carried out using the large BIPS model rather than reduced equivalents. Reduced equivalents with 200 states were used only for the design of robust controllers using the nonsmooth time domain technique [16, 21], but the performance verification tests used the large model. Modal equivalencing [1, 112] was used because the high system order precluded the use of other well proven techniques, such as Balanced Truncation [73, 142].

The scenario in which the NS mode is the least-damped (scenario I in Table 6.1) was used as the reference scenario. This scenario has a total load of 46,000 MW, with the North exporting 1,000 MW to the South, through the planned 500 kV, 1,000 Km long, series compensated NS intertie. The state space realization of the BIPS model has 1,664 states and the sparse, unreduced Jacobian has dimension 13,251. The sparse Jacobian structure and the full eigenvalue spectrum, for this 1,664-state BIPS model, are pictured in [72]. This model correctly reproduces the low-frequency and poor-damping characteristics of the NS mode.

The BIPS variable from which the POD feedback is derived is the module of the active power in the NS line. This signal is immune to power flow reversal in the NS line [99, 64, 65, 108] and leads to minimum levels of adverse interactions among the IZ POD and SMA POD controllers.

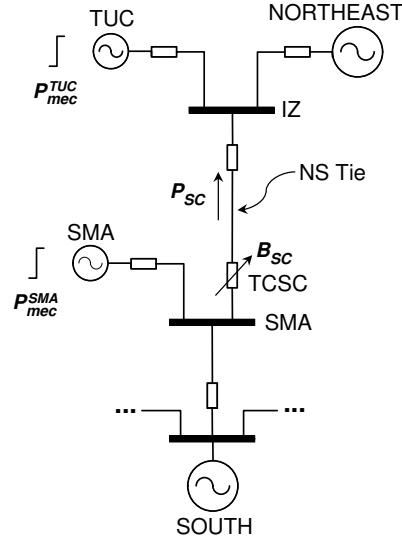


Figure 6.3: Schematic diagram of Brazilian Interconnected Power System (BIPS) in year 1999. Acronyms SMA, TUC, IZ denote Serra da Mesa, Tucuruí and Imperatriz power plants or substations.

Other important practical aspects of POD design, such as the need for a variable POD gain with the level of power transfer, are not dealt with in this paper since practically all POD relevant scenarios relate to maximum transfer levels (see Table 6.1).

The block diagrams for the power system transfer function $G_{23}(s)$ and the POD controller employed in its feedback stabilization are shown in Fig. 6.4 together with $G_{21}(s)$ and $G_{22}(s)$, which model two exogenous disturbances. Symbols B_{SC} and P_{SC} denote the effective susceptance and the active power deviations through the TCSC, respectively. Hence, the open-loop model under analysis, $G(s)$, is a (2×3) transfer matrix:

$$\begin{bmatrix} B_{SC} \\ P_{SC} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \end{bmatrix}}_{G(s)} \begin{bmatrix} P_{mec}^{TUC} \\ P_{mec}^{SMA} \\ B_{SC} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

where the Laplace variable s has been dropped for the sake of simplicity and $G_{11}(s) = B_{SC}(s)/P_{mec}^{TUC}(s)$ and $G_{12}(s) = B_{SC}(s)/P_{mec}^{SMA}(s)$ are the disturbance channels, whereas $G_{23}(s)$ is the control channel. The TCSC output B_{SC} (controlled output) is sensitive to disturbances in P_{mec}^{TUC} and P_{mec}^{SMA} only in closed loop, since $G_{11}(s) = G_{12}(s) = 0$ (cf. equations (6.1) and (6.2)).

The transfer function chosen for damping the NS mode is $G_{23}(s) = P_{SC}^{POD}(s)/B_{SC}(s)$, P_{SC}^{POD} being the associated active power deviations through the TCSC. The state-space realization of this transfer function has a direct transmission term ($d = 4.88 \times 10^{-3}$).

The inputs to the transfer functions $G_{21}(s)$ and $G_{22}(s)$ are the mechanical powers at the Tucuruí power plant, located at the North part of BIPS, and at the Serra da Mesa

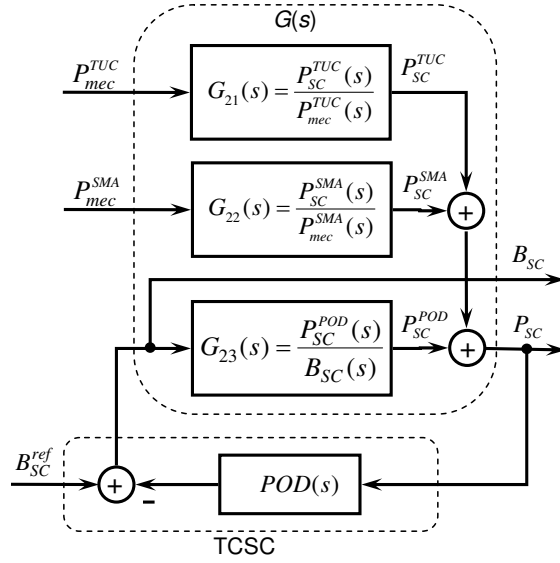


Figure 6.4: BIPS model used for robust POD controller analysis and design.

power plant, located close to the SMA TCSC. The output variables are the resulting active power deviations through the TCSC, P_{SC}^{TUC} and P_{SC}^{SMA} , respectively (refer to Fig. 6.3 and Fig. 6.4).

The total active power deviations through the TCSC (measured output) is given by: $P_{SC} = P_{SC}^{TUC} + P_{SC}^{SMA} + P_{SC}^{POD}$. The closed-loop multivariable system is then described by the following transfer matrix:

$$\begin{bmatrix} B_{SC} \\ P_{SC} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \underbrace{\begin{bmatrix} -G_{21}POD & -G_{22}POD & 1 \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \end{bmatrix}}_{G_{cl}(G,POD)} \begin{bmatrix} P_{mec}^{TUC} \\ P_{mec}^{SMA} \\ B_{SC}^{ref} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

with $\Delta(s) = 1 + G_{23}(s)POD(s)$.

6.3 Computation of Modal Equivalents

Let $G(s) = [\mathbf{c}^T(sI - A)^{-1}\mathbf{b} + d]$ be a generic scalar transfer function, with dynamical and identity matrices A , $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$, input and output vectors \mathbf{b} , $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ and the direct transmission term $d \in \mathbb{R}$. Computation of a reduced modal approximation $G_r(s)$ can be interpreted as performing a similarity transformation T on the original system $G(s)$ yielding:

$$\left[\begin{array}{c|c} T^{-1}AT & T^{-1}\mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}^T T & d \end{array} \right] \triangleq \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_1 & 0 \\ 0 & \hat{A}_2 \\ \hline \hat{\mathbf{c}}_1^T & \hat{\mathbf{c}}_2^T \\ \hline & d \end{array} \right], \quad (6.3)$$

where $\{spec(\widehat{A}_1)\}$ and $\{spec(\widehat{A}_2)\}$ are the set of the r dominant and the $n - r$ non-dominant modes of A , respectively, and then defining the reduced model as $G_r(s) \triangleq \widehat{\mathbf{c}}_1^T (sI - \widehat{A}_1)^{-1} \widehat{\mathbf{b}}_1 + d$. Without loss of generality, we assume $d = 0$ in the following.

Matrix A is assumed to be block-diagonal. That is, the original model is already additively decomposed, which can be easily obtained for large scale systems by using the algorithm described in [136, 135]. Equation (6.4) describes the state-space realization $(A, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ of $G(s)$, where $\{spec(A_i), i = 1, \dots, k\}$ contains the set of poles of $G(s)$ and $k = n_c + n_r < n$. Integers n_r and n_c are respectively the number of real and complex modes, with $n_r + 2n_c = n$. Block matrices A_i are of dimensions (1×1) or (2×2) , for real or complex modes, respectively, and $\mathbf{b}_i, \mathbf{c}_i^T$ are vectors of compatible dimensions.

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}^T & d \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} A_1 & \dots & 0 & \mathbf{b}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & A_k & \mathbf{b}_k \\ \hline \mathbf{c}_1 & \dots & \mathbf{c}_k & 0 \end{array} \right] \quad (6.4)$$

The parallel realization (6.4) can be described by the partial fraction decomposition (6.5):

$$G(s) = \sum_{i=1}^k G_i(s) = \sum_{i=1}^k \mathbf{c}_i^T (sI - A_i)^{-1} \mathbf{b}_i, \quad (6.5)$$

where $G_i(s)$, $i = 1, \dots, k$, are 1st- or 2nd-order rational functions, according to the dimension of A_i .

Let the n eigenvalues of A and the corresponding right and left eigenvectors be given by the eigentriplets $(\lambda_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$, $i = 1, \dots, n$, and let the right and left eigenvectors be scaled so that $\mathbf{y}_i^* \mathbf{x}_i = 1$, where \mathbf{y}_i^* denotes the Hermitian of $\mathbf{y}_i \in \mathbb{C}^n$. Note that $\mathbf{y}_i^* \mathbf{x}_j = 0$ for $i \neq j$. Then the transfer function $G(s)$ can also be expressed as a sum of residues R_i over first-order polynomials:

$$G(s) = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{s - \lambda_i}, \quad (6.6)$$

where $R_i = (\mathbf{c}^T \mathbf{x}_i)(\mathbf{y}_i^* \mathbf{b})$, with $\mathbf{c}^T \mathbf{x}_i$ and $\mathbf{y}_i^* \mathbf{b}$ being, respectively, the observability and the controllability factors of λ_i . It is worth mentioning that all k fractions in decomposition (6.5) have real coefficients while some of n fractions in (6.6) may have complex coefficients.

If the eigenvalues λ_i are sorted in descending order (with increasing i) of dominance, according to some chosen MDI, and the first r dominant modes are retained in the reduced-model $G_r(s)$, the error incurred in modal truncation depends on the $n - r$ omitted modes, i.e., the modes labeled $r + 1$ to n :

$$\widetilde{G}(s) \triangleq G(s) - G_r(s) = \sum_{i=r+1}^n G_i(s), \quad (6.7)$$

where $G_i(s)$, $i = r + 1, \dots, n$, are the $n - r$ non-dominant modal components of $G(s)$ in (6.5). Assuming that $G(s) \in \mathcal{L}_\infty$, i.e., $G(s)$ is bounded on the imaginary axis, one can define an upper bound on the \mathcal{L}_∞ norm [173] of the error:

$$\begin{aligned} \|\tilde{G}(s)\|_\infty &\triangleq \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \mathbb{R}} \{\bar{\sigma}[\tilde{G}(j\omega)]\} = \|G(s) - G_r(s)\|_\infty \\ &= \left\| \sum_{i=r+1}^n G_i(s) \right\|_\infty \leq \sum_{i=r+1}^n \|G_i(s)\|_\infty, \end{aligned} \quad (6.8)$$

where $\bar{\sigma}[\tilde{G}(j\omega)]$ is the largest singular value of $\tilde{G}(j\omega)$ and $\operatorname{ess\,sup}[\bar{\sigma}(\omega)]$ is the essential supremum of $\bar{\sigma}(\omega)$ [173].

Although there are different MDIs [1, 73, 112], this paper utilizes the MDI defined in [149] as the \mathcal{L}_∞ -norm of each modal component $G_i(s)$ in (6.5) (contrarily to [73], for example, which considers the infinite norm of each component in (6.6)), which naturally results in minimum upper bounds on the error (6.8) while preserving the dominant poles and associated residues defined in (6.6). This MDI is referred here as \mathcal{L}_∞ -MDI and showed a slightly better performance than the MDI recommended in [73], which requires 220 states to produce Bode plot approximations of equivalent accuracy (see Fig. 6.5–6.7). These definitions also apply to a MIMO $G(s)$ in (6.1) since $G_i(s)$ in (6.5) can be defined as MIMO transfer functions and R_i in (6.6) as residue matrices.

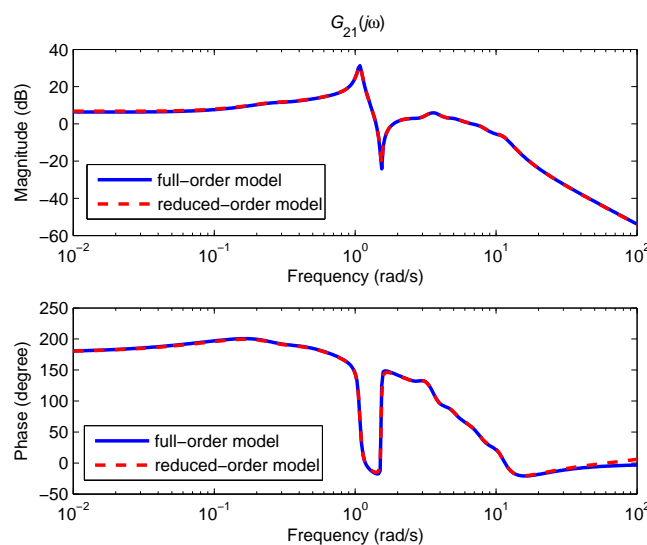


Figure 6.5: Bode plots for $G_{21}(s)$ considering the full BIPS model (1,664 states) and the reduced 200-state model (Scenario I).

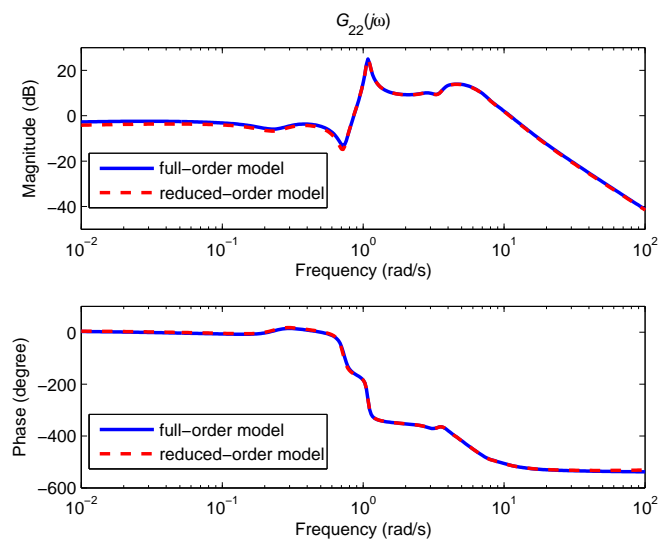


Figure 6.6: Bode plots for $G_{22}(s)$ considering the full BIPS model (1,664 states) and the reduced 200-state model (Scenario I).

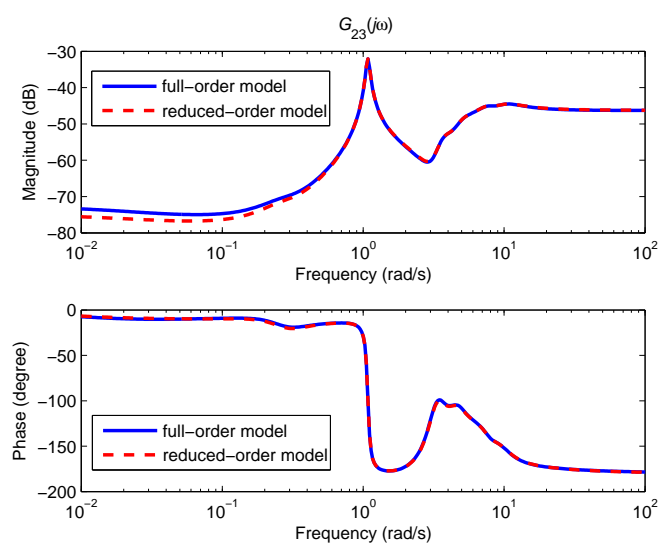


Figure 6.7: Bode plots for $G_{23}(s)$ considering the full BIPS model (1,664 states) and the reduced 200-state model (Scenario I).

6.4 Nonsmooth Time-Domain Design Method

Large scale power system oscillation damping control is a typical example of how realistic design problems frequently impose structure constraints on the controller. This is indeed the situation here inasmuch as a full-order controller design is not a feasible solution from an implementation as well as a computational point of view and reduced controller order becomes mandatory. The classical approach in the robust control literature to handle reduced-order constraints consists in combining a full-order synthesis technique with some model reduction scheme (see [22], for instance). In this case, either the plant is reduced a priori to the maximal acceptable controller order, or the synthesized full-order controller is reduced a posteriori. Unfortunately, these approaches are in general prone to failure whenever the difference between model and controller orders is sizable, as happens here.

The NonSmooth Time-Domain (NSTD) controller design technique presented in [16, 21] has the capability to handle a vast array of controller structures and architectures, including reduced-order, so it may dispense with the above reduction schemes. Another interesting feature is that it avoids Lyapunov variables, whose space dimension grows quadratically with the system order and represents a major impediment to the practical use of approaches based on linear or bilinear matrix inequalities. Consequently, it is better suited to high-order power systems applications.

The correlation between the transient and frequency responses is indirect, except for the simple case of second-order systems. Robust controller design methods that may directly impose time-domain constraints are therefore highly attractive. The NSTD technique can naturally handle such constraints since it is based on the time-domain shaping of closed-loop system responses to fixed inputs. More specifically, the design objective is to find a stabilizing controller such that the closed-loop response $z(t)$ to a given test input $w(t)$ satisfies the envelope constraints

$$l_z(t) \leq z(t) \leq u_z(t), \forall t \geq 0, \quad (6.9)$$

where l_z and u_z are lower and upper bounds on the closed-loop responses, as illustrated in Fig. 6.8.

The general framework of the NSTD design technique is represented by the standard form description ($u \in \mathbb{R}^{m_2}$ and $y \in \mathbb{R}^{p_2}$) indicated in Fig. 6.9, where the multivalued plant $G(s)$ is considered to take values in a finite family of linear plants $\mathcal{G} := \{G^1, \dots, G^p\}$. Each plant G in the family \mathcal{G} in feedback loop with a single controller $K(s)$ is subject to one or several input signals w selected in a finite signal generator set $\mathcal{W} := \{w^1, \dots, w^d\}$. Those signals are in general deterministic test inputs such as steps, ramps, sinusoids, etc. The closed-loop response of $G \in \mathcal{G}$ to a signal $w \in \mathcal{W}$ gives rise to a finite family of closed-loop responses $z \in \mathcal{Z}$, where $\mathcal{Z} := \{z^1, \dots, z^r\}$. The synthesis procedure consists in the search of a fixed-structure controller $K(s)$ such that appropriate time-domain specifications in (6.9) are achieved for all instances $z \in \mathcal{Z}$.

The POD design problem considered here is among the various practical situations that can be handled by the above set-up: the original system is described by multiple

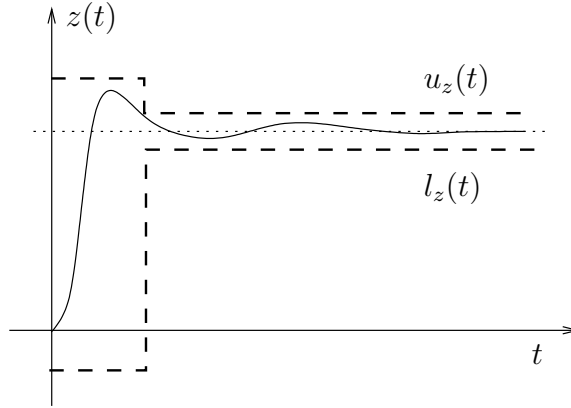


Figure 6.8: Shape-constraints on the step response

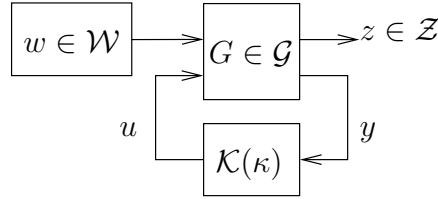


Figure 6.9: General framework for the nonsmooth time-domain design

operating conditions, each constituting a linear plant in the family \mathcal{G} that will be tested against inputs $w \in \mathcal{W}$ on the exogenous disturbance channels.

In order to address different controller structures, it is convenient to introduce the controller parametrization in state-space

$$\mathcal{K}(\kappa) := \begin{bmatrix} A_K(\kappa) & B_K(\kappa) \\ C_K(\kappa) & D_K(\kappa) \end{bmatrix}, \quad (6.10)$$

where κ designates the design variables, and the mapping $\mathcal{K} : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{(m_2+k) \times (p_2+k)}$ is assumed continuously differentiable but otherwise arbitrary. As a result, other structures of interest including PID, decentralized, static controller, etc. are easily captured.

Amplitude and rate constraints can be formulated for the control signals. Amplitude constraints can be used to keep signals at levels where they do not saturate, thus preserving linearity in controller response, as much as possible.

In practical applications, it is useful to distinguish between hard and soft constraints in (6.9). Consider a partition of $J := \{1, \dots, r\}$, indexing \mathcal{Z} , into disjoint subsets S and H , i.e., $J = S \cup H$, $S \cap H = \emptyset$, where S should be seen as the index set for soft constraints and H the one for hard constraints. The set \mathcal{Z} of closed-loop responses is partitioned correspondingly in the form $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_S \cup \mathcal{Z}_H$. Noting that the envelope constraints in (6.9) can be alternatively described by

$$f_z(\kappa) := \max_{t \geq 0} \{ [z(\kappa, t) - u_z(t)]_+, [l_z(t) - z(\kappa, t)]_+ \} \leq 0,$$

where $[g]_+ := \max\{g, 0\}$, the notion of hard and soft constraints becomes clear through the following program translating the overall design problem:

$$\begin{aligned} & \underset{\kappa \in \mathbb{R}^q}{\text{minimize}} && \max_{z \in \mathcal{Z}_S} f_z(\kappa) \\ & \text{subject to} && \max_{z \in \mathcal{Z}_H} f_z(\kappa) \leq 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

A solution to program (6.11) necessarily meets the constraints $z \in \mathcal{Z}_H$ while constraints related to $z \in \mathcal{Z}_S$ will be achieved only when the objective function falls below 0.

Program (6.11) is a difficult mathematical programming problem due to its nonconvex and nonsmooth nature. A specialized nonsmooth optimization technique developed in [14, 16, 11] is used here to obtain, in a single run, a POD design (POD_3) that is of the same order but more robust than the two POD conventional designs (POD_1 and POD_2).

6.5 Conventional POD Controllers

A major problem in the POD design of the SMA TCSC lies in the potential risk of equipment hitting limits following exogenous disturbances, as described in Section 6.2.

The original SMA POD controller (POD_1) is derived from the modulus of the line active power that is phase-lagged by 90 degrees at the frequency of the NS mode [111, 64, 65, 108]:

$$\begin{aligned} POD_1(s) &= KF_1(s)F_2(s), \\ K &= -1370, \\ F_2(s) &= \left(\frac{1}{0.8s+1}\right)^2 \left(\frac{0.3s+1}{2.2s+1}\right)^2, \\ F_1(s) &= \left(\frac{0.8s}{0.02s+1}\right) \left(\frac{2.5s}{2.5s+1}\right). \end{aligned} \quad (6.12)$$

The phase-lag solution (POD_1), currently implemented in the SMA POD, does not intrinsically attenuate dynamic activity in the low-frequency range (Fig. 6.10), and the high-gain closed-loop instability emerges through a low-frequency mode, as will be shown in Fig. 6.15.

The alternative phase-lead solution (POD_2) is described in [144] and comprises a gain K , a washout $W(s)$, a derivative block in association with a 3rd-order Butterworth ($B(s)$)

and a notch filter $N(s)$:

$$\begin{aligned} POD_2(s) &= KW(s)B(s)N(s), \\ K &= 125, \\ W(s) &= \left(\frac{2s}{2s+1} \right), \\ B(s) &= \left(\frac{15.63s}{s^3 + 5s^2 + 12.5s + 15.63} \right), \\ N(s) &= \left(\frac{s^2 + 0.09s + 0.09}{s^2 + 0.6s + 0.09} \right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

The notch filter, $N(s)$, with a damping ratio $\zeta = 0.15$, heavily attenuates modal components around $\omega_z = 0.3$ rad/s while having reduced impact on the NS mode frequency (1.1 rad/s).

The phase-lead solution (POD_2) increases dynamic activity in a high-frequency range with the high-gain closed-loop instability emerging through a higher frequency mode (5 rad/s), as will also be shown in Fig. 6.15.

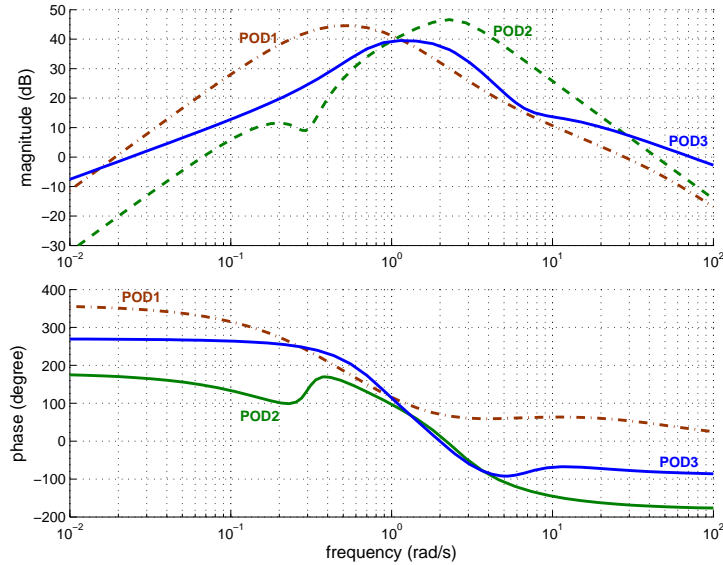


Figure 6.10: Bode plots for the phase-lag (POD_1 , dash-dot), phase-lead (POD_2 , dashed) and nonsmooth (POD_3 , solid) PODs.

6.6 Results

Time and frequency simulation results for POD_1 and POD_2 solutions are repeated in this paper, but only to allow comparing their dynamic performances with that of the proposed POD_3 design by the NSTD method.

Table 6.1: BIPS power flow scenarios and associated NS mode [51]

Scenario identification	Scenario Description				NS mode	
	System Load (GW)	Generation at Tucuruí (MW)	NS Power flow (MW)	Flow direction	ω_d (Hz)	ζ (%)
A- L00GMAXE	30.9	3355	0	—	0.24	15.03
B- L00GMINE	30.8	1300	7	N → S	0.23	7.64
C- LNSGMAXE	31.0	3520	968	N → S	0.24	10.05
D- LNSGMINE	31.0	2280	962	N → S	0.21	5.69
E- LNSGMAXE	30.9	2352	1015	S → N	0.24	15.75
F- LNSGMINE	30.8	1300	1029	S → N	0.25	12.80
G- M00GMAXE	47.4	3520	4	N → S	0.22	12.99
H- M00GMINE	47.4	1626	3	N → S	0.19	4.47
I- MNSGMINE	47.6	2684	974	N → S	0.17	3.11
J- MSNGMAXE	47.4	2508	1032	S → N	0.21	12.55
K- MSNGMINE	47.4	1300	1043	S → N	0.21	9.27
L- P00GMAXE	52.9	3267	3	N → S	0.21	13.50
M- P00GMINE	52.8	2674	5	N → S	0.20	11.27
N- PNS1000E	52.7	3520	966	N → S	0.19	8.62
O- PNSGUNIE	52.9	3520	703	N → S	0.20	10.74
P- PSNGMAXE	52.9	2265	1041	S → N	0.20	12.50
Q- PSNGMINE	52.9	1764	1033	S → N	0.20	11.06

6.6.1 POD Synthesis by NSTD Method for 4 Scenarios

Two structural constraints are imposed on the POD: reduced order and washout filtering. The controller structure is chosen accordingly as

$$POD_3(s) = \frac{s}{s+p} \widehat{K}(s), \quad (6.14)$$

where $\widehat{K}(s)$ is a 5th-order strictly proper transfer function, and the position of the real washout pole $-p$ is also a decision variable of the optimization program.

Note that controller order is a user-defined parameter and is not affected by the order of the models in \mathcal{G} , that may be selected as desired and may even differ from one another. Unfortunately, there is normally a trade-off between reduced computational effort and satisfactory system dynamics description. Similar comments apply to the number of scenarios considered for synthesis.

Four representative power flow scenarios are chosen for synthesis: scenarios C, D, I and Q in Table 6.1. The associated synthesis models $G(s)$ in (1) are selected as 200th-order transfer function modal equivalents obtained with the use of \mathcal{L}_∞ -MDI (section 6.3). These reduced models adequately describe the system dynamics (see Bode plots in Figs. 6.5–6.7) while permitting a considerable reduction in the computation time of the NSTD method.

Test signals are selected as steps, which are applied to the exogenous disturbances.

More precisely, each instance $w \in \mathcal{W}$ corresponds to a step being applied to one of the disturbances while the other one is kept to zero.

The time envelope constraints that have been defined for the line power flow deviation P_{SC} and for the TCSC susceptance deviation B_{SC} are depicted in Fig. 6.11 and 6.12.

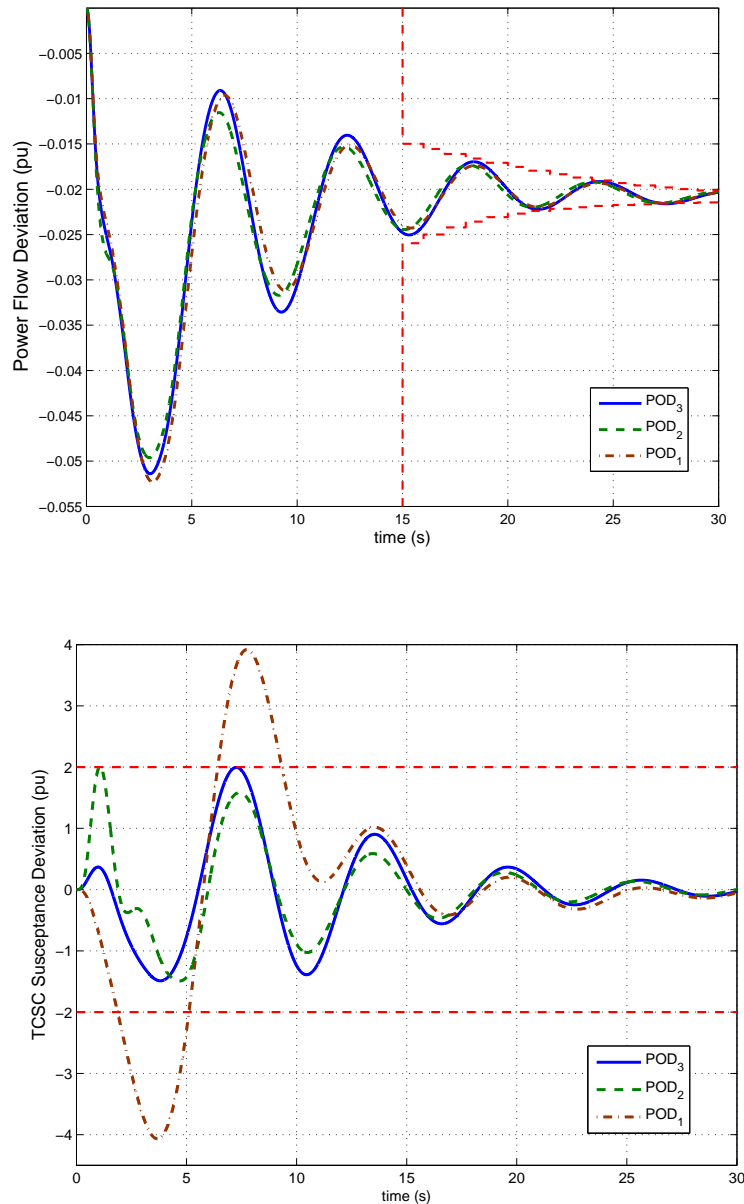


Figure 6.11: Linear simulations for disturbance at Tucuruí (Scenario I).

Maximum amplitude constraints for the linear response of B_{SC} were defined in such a way that the susceptance transient peaks produced by POD_3 are smaller than, or at least equivalent to, the largest linear transient peaks produced by POD_1 or POD_2 for test signals applied to both disturbance channels. Since reducing large transient peaks

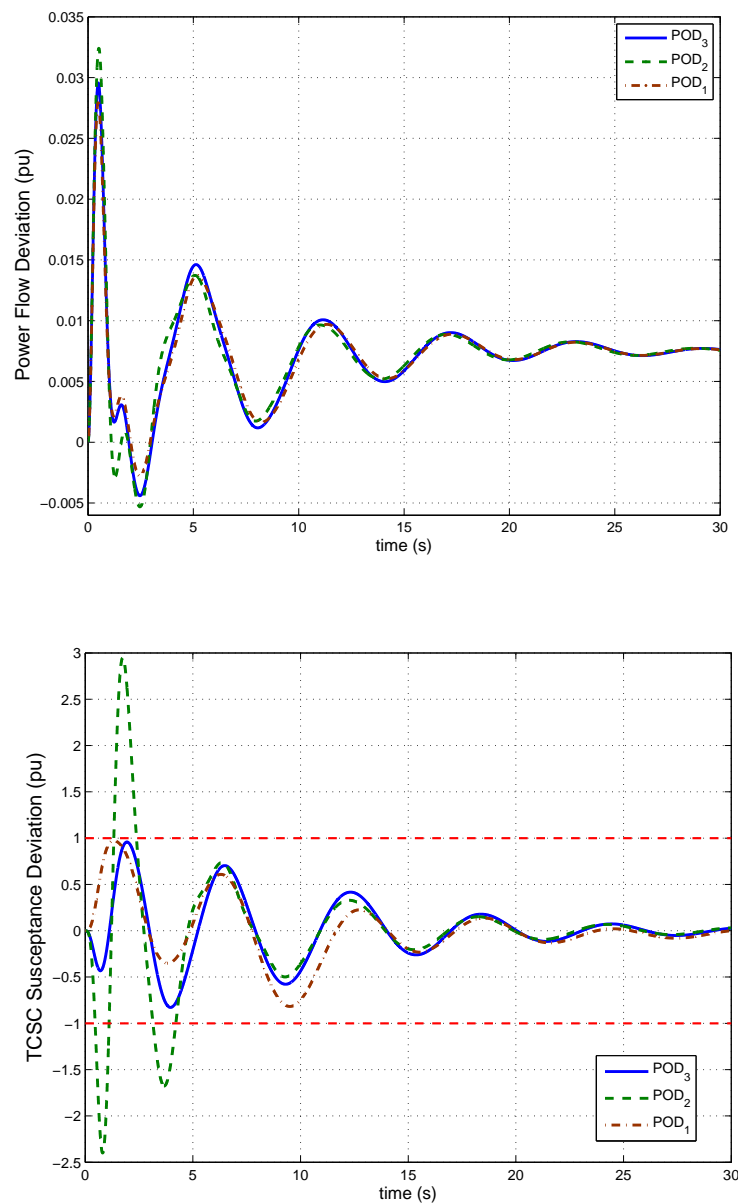


Figure 6.12: Linear simulations for disturbance at Serra da Mesa (Scenario I).

following exogenous disturbances represents a priority, B_{SC} linear transient peak values are defined as hard constraints in program (6.11).

The required NS mode damping is achieved by shaping the power flow deviation response P_{SC} . Its transient is forced to lie inside an exponentially decaying envelope, as depicted in Fig. 6.11. Note that this envelope was drawn with focus on the lowest frequency oscillatory component at the tail end of the oscillation. The design procedure can take such characteristics of the plant into account thus avoiding unrealistic solutions. The decay rate of the exponential envelopes are determined to provide 15% damping at the corresponding open-loop NS mode frequencies. Power oscillation damping ratios are

defined as soft constraints in program (6.11).

Susceptance deviation (B_{SC}) levels are imposed through tests in both disturbance channels. On the other hand, one single power flow deviation response per scenario is enough to ensure the required NS mode damping so P_{SC} constraints have been considered solely for the case of Tucuruí disturbances.

The NSTD design algorithm solves program (6.11) in 199 iterations, requiring 106 minutes CPU time on a 2.8GHz Pentium D processor with 1GB RAM. The POD controller parameters in (6.14) have been obtained as $p = 1.4382$ and

$$\widehat{K}(s) = \frac{73.21s^4 + 381.9s^3 + 3001s^2 - 2391s - 1409}{s^5 + 10.75s^4 + 33.45s^3 + 62.68s^2 + 46.42s + 23.39}.$$

6.6.2 Synthesis by NSTD Method with Additional Scenarios

As will be seen below, the POD_3 controller performs well for all scenarios, although only 4 scenarios have been considered during the synthesis. Unfortunately, this is not always true, and the final closed-loop system performance may turn out to be unsatisfactory for scenarios that have not been dealt with. In that case, a natural alternative is to perform a new design with an enriched synthesis models family \mathcal{G} that also takes those previously missing critical scenarios into account.

In order to examine whether the consequent increase in the computational effort would render the design problem intractable, a series of POD syntheses have been performed where additional scenarios were progressively incorporated. Table 6.2 relates the number of scenarios taken into consideration to the resulting average computation time in minutes per iteration. The 4 scenarios case represents the basic minimum POD_3 design, the 5 scenarios case consists in envelope time constraints relative to another scenario being added to the specifications of the previous case, and so forth. Note that the running time per iteration increases linearly with the number of scenarios and that the NSTD method is computationally efficient even when all scenarios are considered. This is a remarkable result owing to the fact that 2 test signals are applied for each one of the 11 scenarios. This means that each function evaluation in program (6.11) comprises 22 time-domain simulations involving 200th-order models. Actually, the execution time could still be improved since these simulations are independent from one another and thus may be performed simultaneously in a parallel computer implementation.

6.6.3 Linear Analysis for Multiple Scenarios

Seventeen power flow scenarios, identified by single capital letters and listed in Table 6.1, were analyzed in [51], but only 11 scenarios having relevant NS power transfers are considered here. Fig. 6.13 displays the locations in the complex plane of the poles

Table 6.2: Evolution of the synthesis computational effort

# of scenarios	average min/iter	# of scenarios	average min/iter
4	0.54	8	1.59
5	0.72	9	1.81
6	0.86	10	2.00
7	1.42	11	2.21

(eigenvalues) associated with the NS mode for the various scenarios. These poles may be efficiently computed when using selective eigenanalysis [136, 135]. Similarly to the POD original design POD_1 , both phase-lead POD_2 and nonsmooth POD_3 solutions show robust stabilization. Note that the POD controllers are disconnected when the line active power flow is smaller than 200 MW (Scenarios A, B, G, H, L, M), for it is a known fact that TCSC controllability is much reduced for small line loadings and becomes identical to zero for zero flow conditions. It is worth mentioning that the alternative PSS-based damping solution, reported in [110, 51] and involving changes in the PSS structure of three large Northeast power plants, does not turn ineffective for reduced NS power transfer levels and was actually commissioned as a complementary damping source since late 2005.

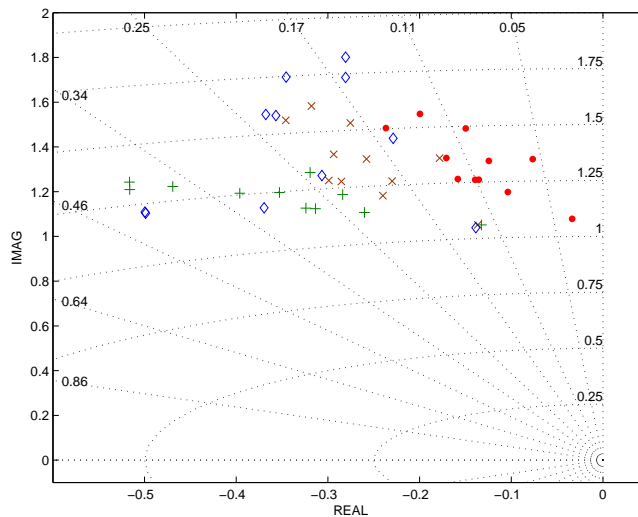


Figure 6.13: Locus of NS pole for the eleven nonzero power flow scenarios: open-loop (dot-mark), closed-loop for POD_1 (x-mark), closed-loop for POD_2 (plus-mark) and closed-loop for POD_3 (diamond-mark).

The Bode plots for the phase-lag (POD_1), phase-lead (POD_2) and NSTD (POD_3) designs for the POD controller are compared in Fig. 6.10. Note that the three PODs are 6th-order controllers. These three controllers have about the same gain and phase at the frequency of the NS mode (1.1 rad/s) but show quite different levels of activity in the low- and high-frequency ranges, as expected. The parameter values for POD_1 and POD_2

were given in Section 6.6.1.

Bode magnitude plots of the two closed-loop disturbance channels, in Scenario I, when employing $POD_1(s)$, $POD_2(s)$ or $POD_3(s)$ controllers are pictured in Fig. 6.14. Note that the zero of the notch filter is visible in the Bode plot of the closed-loop disturbance channel (Fig. 6.14) for $POD_2(s)$, a fact that is readily understood from the analysis of Eq. (6.2). More importantly, $POD_3(s)$ controller is the only one to show reduced dynamic activity in both lower and higher frequency ranges, anticipating better transient performances for the two disturbance channels. The time response plots in Fig. 6.11 are for a mechanical power step disturbance at the Tucuruí (TUC) generating plant, in scenario I. The results indicate that both POD_2 and POD_3 have adequate performances, while POD_1 shows large transients in B_{SC} .

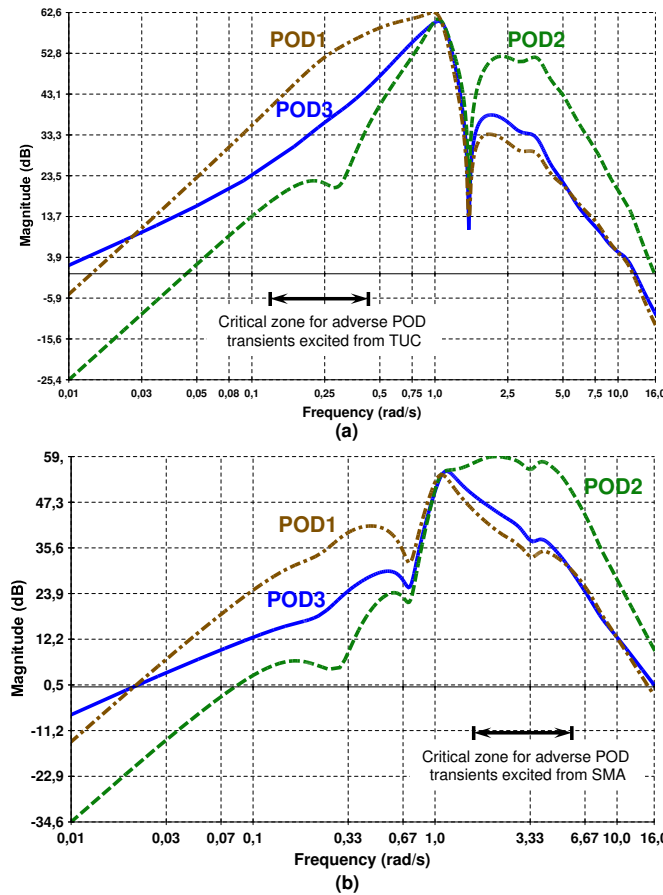


Figure 6.14: Bode magnitude plots of the closed-loop disturbance channel for Scenario I: POD_1 , dash-dot; POD_2 , dashed; and POD_3 , solid; (a) $B_{SC}(j\omega)/P_{mec}^{TUC}(j\omega)$; (b) $B_{SC}(j\omega)/P_{mec}^{SMA}(j\omega)$.

Fig. 6.15 shows the critical root-locus branches, in scenario I, for each POD controller,

as the gains for the 3 PODs are raised. All POD controllers are seen to cause system oscillatory instability for high values of gain. They have, however, a comfortably large gain range for which the system is adequately stabilized (except for POD_2 , which has a smaller gain margin). High gain instabilities for POD_1 , POD_2 , and POD_3 designs appear in the form of sustained oscillations at 0.45 rad/s, 3.7 rad/s and 1.8 rad/s, respectively, as seen in Fig. 6.15.

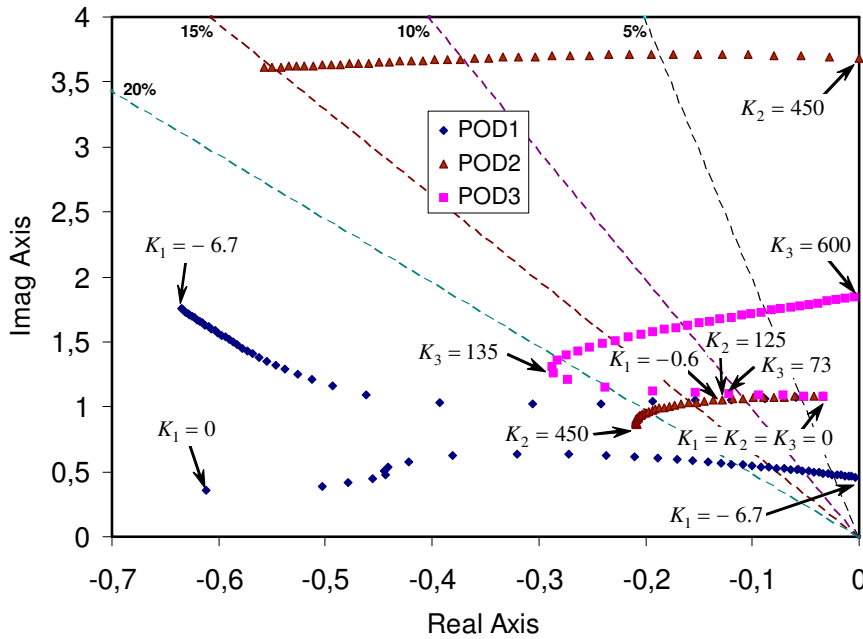


Figure 6.15: Critical root-locus branches for the 3 PODs (Scenario I).

The time response plots in Fig. 6.12 are for a mechanical power step disturbance at the Serra da Mesa (SMA) generating plant for the same scenario. Note that, in this case, both POD_1 and POD_3 have adequate performances, while POD_2 shows large transients in B_{SC} .

Fig. 6.16 and Fig. 6.17 show the NS line power (P_{SC}) transients and the TCSC effective susceptance (B_{SC}) transients, induced by step disturbances P_{mec}^{TUC} , applied at 3s, and P_{mec}^{SMA} , applied at 40s. Variables P_{SC} , B_{SC} , P_{mec}^{TUC} , P_{mec}^{SMA} are depicted in Fig. 6.3. Fig. 6.16 shows the 3 POD controllers confer approximately the same damping to the NS mode (results relate to Scenario I). Fig. 6.17 shows the B_{SC} transients for POD_1 and POD_2 are larger than those of POD_3 , confirming the more robust dynamic performance of the latter.

Similar simulations were carried out for all scenarios, and the peaks for the B_{SC} transients determined for the two disturbances. The obtained results are summarized in the bar-charts of Fig. 6.18, confirming the superior performance of POD_3 in all 11 scenarios.

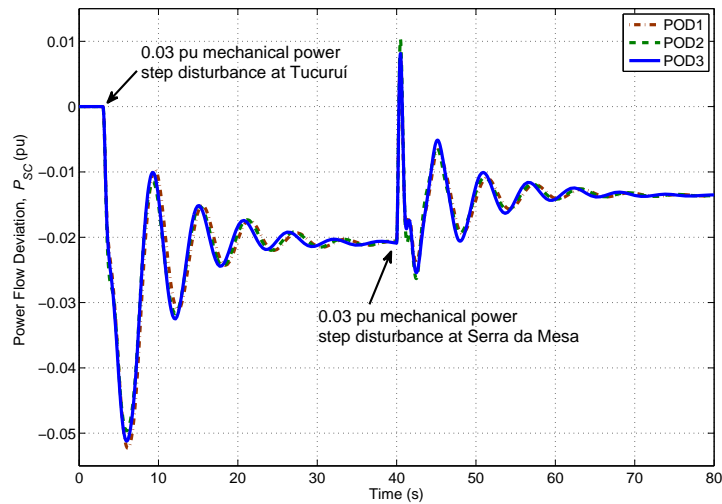


Figure 6.16: Line power transients (P_{SC}) following step disturbances P_{mec}^{TUC} (at 3s) and P_{mec}^{SMA} (at 40s) for Scenario I, refer to Fig. 6.3.

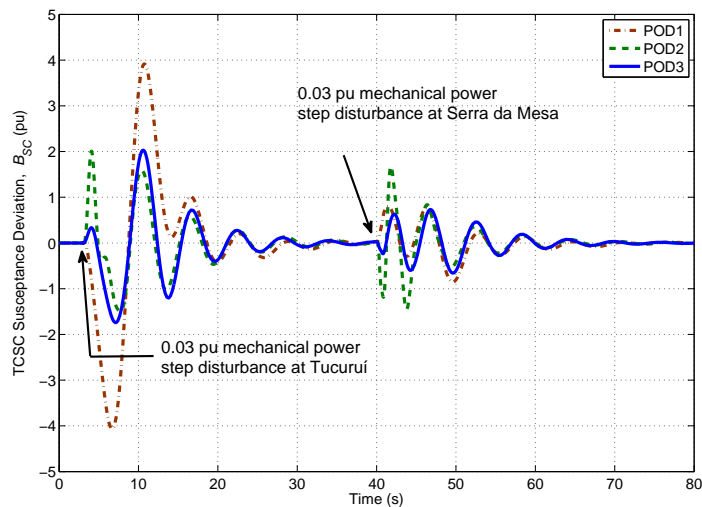


Figure 6.17: Transients in B_{SC} , the TCSC effective susceptance, following step disturbances P_{mec}^{TUC} (at 3s) and P_{mec}^{SMA} (at 40s) for Scenario I, refer to Fig. 6.3.

6.7 Concluding Remarks

Critical power system controllers, like the PODs in the North-South Brazilian Interconnection for the year 1999 configuration, deserve special attention and require the use of sophisticated design methods. The authors attempted designing PODs derived from other signals, local or remote. The difference between North and South average angles (remote

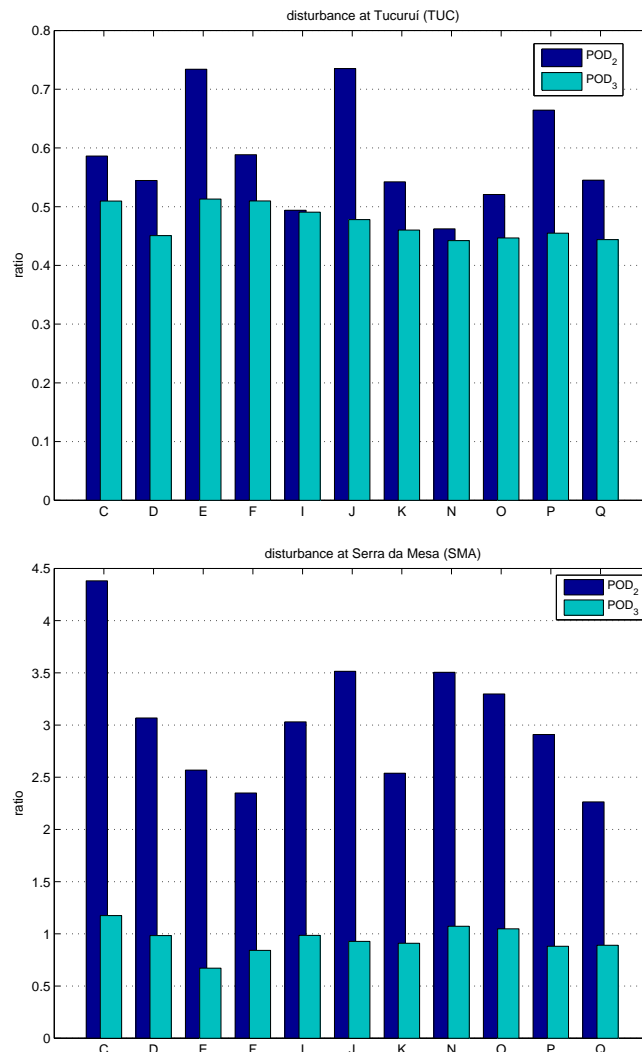


Figure 6.18: Ratios between B_{SC} transient peaks ($POD_{2,3}/POD_1$) following an applied step in the disturbance channels.

measurements), as an alternative POD signal, produced very similar results to the local-based line power signal (P_{sc}), the latter being therefore rated the best in these studies, as well as in practice and also used throughout this paper. The use of local signals such as bus frequency led to higher adverse interaction with other modes, which could also become critical.

The nonsmooth time-domain design method proposed in this paper reveals to be a valuable addition to the power system dynamics and control engineer's toolkit. Multiple scenarios specifications are easily incorporated in the synthesis procedure as well as the specific structure of POD controllers. Extensive numerical experiments on simultaneous design of up to 11 scenarios involving 200th-order models suggest that the nonsmooth approach is a practical and efficient technique in challenging applications such as the one discussed in this paper.

Acknowledgments

The authors would like to thank CEPEL and ELETROBRAS for providing the Brazilian interconnected power system model, and Nilo José Pereira de Macedo (FURNAS) and Guilherme Sarcinelli Luz (FURNAS) for their valuable suggestions.

Chapitre 7

Synthèse non lisse multiobjectif

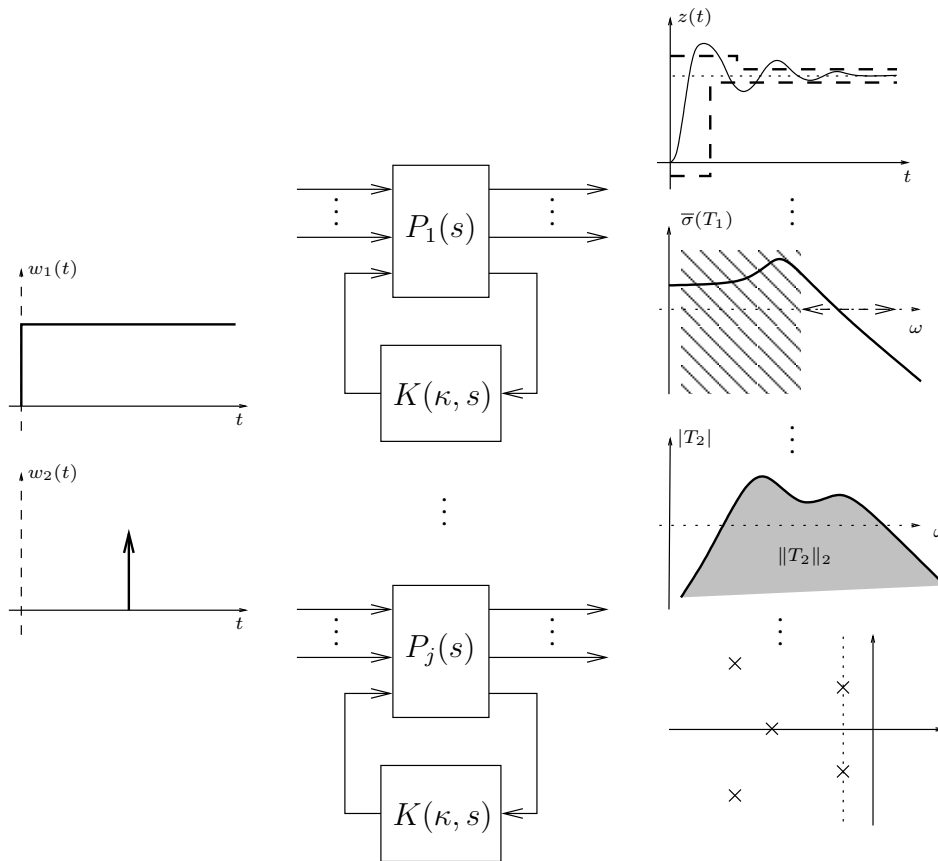


FIG. 7.1 – Visualisation de la synthèse non lisse multiobjectif

La capacité de gérer simultanément plusieurs objectifs de performance et de robustesse ainsi que des contraintes structurales sur la loi de commande est essentielle pour une technique de synthèse de compensateurs à vocation pratique avec mise en oeuvre industrielle. Le problème de synthèse est alors inévitablement multiobjectif, du fait qu'une série de spécifications de différentes natures sont imposées à la fois sur le système en boucle fermée et sur le compensateur proprement dit.

Des spécifications de performance, par exemple, sont exprimées le plus souvent par des objectifs tels que le suivi de consigne ou le découplage et sont naturellement traduites en termes de contraintes temporelles comme un dépassement limité, un temps de montée ou de réponse faibles, un erreur stationnaire réduite ou encore une limitation d'amplitude. Des contraintes véritablement fréquentielles apparaissent aussi fréquemment dans les problèmes de synthèse, comme lorsqu'on cherche à assurer la robustesse vis-à-vis d'incertitudes de modèle ou l'atténuation de perturbations exogènes. La possibilité de résoudre des problèmes multiobjectif de synthèse où diverses contraintes à la fois dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel sont traitées directement telles qu'elles apparaissent en pratique est alors crucial car on évite ainsi un certain "conservatisme" méthodologique qui est souvent le fait des relaxations de la littérature. Il en résulte cependant un problème difficile d'optimisation non lisse et non convexe qui requiert un algorithme spécialisé.

La synthèse d'un compensateur structuré avec contraintes multiples à la fois temporelles et fréquentielles est en quelque sorte la généralisation ultime des méthodes proposées par rapport aux chapitres précédents. Nous sommes en présence ici d'un problème plus complexe car les deux types de critères temporels et fréquentiels diffèrent significativement quant à leur nature et du point de vue de leur caractérisation théorique. Cette disparité rend naturellement encore plus laborieux le développement et la mise en oeuvre d'un algorithme non lisse efficace. La contrepartie est un traitement plus réaliste des applications comme démontré dans la suite.

Ce chapitre est composé d'un article de revue suivi d'une dernière section contenant une application aéronautique. En premier lieu, nous précisons le problème de synthèse multiobjectif considéré, visualisé sur la Figure 7.1. Le nouveau problème généralise les formulations antérieures notamment suivant 2 axes. Premièrement, le cadre de travail est étendu de manière à pouvoir prendre en compte de multiples contraintes temporelles et fréquentielles. En particulier, il est désormais possible de considérer des contraintes fréquentielles pour chaque élément d'une famille de systèmes, d'une façon analogue au cas temporel multiscénario. Deuxièmement, nous examinons la possibilité d'inclure des contraintes temporelles directement pour des modèles non linéaires, afin d'obtenir des résultats au plus proche de la réalité.

Pour démontrer la flexibilité et l'efficacité de la méthode proposée, nous considérons trois applications. Dans la première application, nous synthétisons un compensateur pour un modèle non linéaire d'un lanceur de satellites. L'objectif primordial est d'assurer le contrôle d'attitude en présence de contraintes sur l'amplitude et la vitesse de la commande. Étant donné que le lanceur présente des réponses fortement couplées en manoeuvre, le compensateur doit également garantir le découplage entre les 3 axes d'attitude. De plus, on doit assurer une certaine robustesse vis-à-vis des modes flexibles non modélisés.

Dans une deuxième application, l'objectif est de synthétiser un compensateur tolérant aux pannes du type *reliable control* pour un avion de combat réalisant des manoeuvres avec un angle d'incidence élevé et sujet à des rafales de vent. Encore une fois, l'engin présente des réponses couplées lorsqu'il réalise de telles manoeuvres. Par conséquent, le compensateur doit assurer à la fois un bon suivi de consigne et un découplage adéquat. De

plus, le compensateur doit garantir la stabilité et une performance satisfaisante en boucle fermée aussi bien en fonctionnement nominal que pour différents modes défectueux de fonctionnement.

Dans la dernière section, nous utilisons notre méthode pour synthétiser la commande de vol pour le mouvement latéral d'un avion gros avion pour lequel la flexibilité a été intentionnellement dégradée à un niveau critique. Cette application a été conçue dans le but de mettre en évidence un problème difficile permettant de tester l'efficacité de différentes techniques de synthèse. Le cahier des charges pour cette application est particulièrement exigeant : il comprend des contraintes temporelles et fréquentielles qui doivent être respectées pour différentes conditions d'opération. De plus, la loi de commande est structurée, composée d'un compensateur dynamique de rétroaction (*feedback*) d'ordre réduit et d'un préfiltre statique (*feedforward*). Notre technique non lisse se montre particulièrement intéressante dans ce contexte, puisqu'elle permet de synthétiser les deux compensateurs simultanément.

Rappelant ici encore que pour ces 3 problèmes, il n'est pas possible de calculer une solution globale. La méthode non lisse ne fournit que des solutions locales comme expliqué dans le Chapitre 3. On obtient cependant pour chacun de ces problèmes des solutions tout à fait satisfaisantes sur le plan pratique confirmant ainsi concrètement la valeur des techniques non lisses pour synthétiser un compensateur.

Nonsmooth multi-objective synthesis with applications

A. M. Simões, P. Apkarian and D. Noll

Article à paraître dans Control Engineering Practice.

Abstract

Nonsmooth optimization is used to design feedback controllers subject to closed-loop performance specifications both in time and frequency domains. In time-domain the nonlinear plant is submitted to a set of test input signals and the closed-loop responses so generated are called scenarios. A design technique is proposed which computes a controller with a prescribed structure that satisfies performance specifications for a given set of scenarios in tandem with robustness constraints in the frequency domain, and is locally optimal among other controllers with these properties.

7.1 Introduction

Nonsmooth optimization has been used recently to solve with success a variety of difficult problems in structured linear controller design [11, 21, 14, 150]. These design methods avoid using Lyapunov variables whose number grows quadratically with the plant state dimension. This explains why nonsmooth techniques perform satisfactorily even for sizable systems, where standard BMI or LMI methods succumb due to the curse of dimension. Yet another appealing feature of nonsmooth optimization is the ease with which controller structures and architectures favoured by practitioners may be addressed directly.

An application of specific interest is synthesis of structured controllers satisfying explicit time-domain specifications. Time domain constraints may involve rise and settling times, overshoot or undershoot, steady-state error, input amplitude and rate constraints or other operational limits on plant trajectories, but also control constraints like saturation. It is therefore deplorable that most existing linear controller synthesis methods do not allow to address these criteria directly. Frequency-domain methods like H_∞ or H_2 synthesis [174] only allow the designer to address time-domain specifications indirectly by setting up suitable frequency weighing filters. This leads to trial-and-error and remains prone to failure. Similar comments apply to optimal control or eigenstructure assignment

techniques, see [123]. Finally, all these methods use linear plant models, even though most physical systems are nonlinear. This is clearly regrettable if a non-linear plant model is available for synthesis.

On the other hand, genuine frequency-domain constraints also arise quite regularly in control design, for instance when robustness with regard to model uncertainty or exogenous disturbances is needed. In consequence, controller synthesis techniques working simultaneously in time and frequency domains are of great practical interest, and probably even more if it is allowed to compute control laws with predefined structure. The method presented here does in fact combine these three aspects in a single optimization framework.

Multi-objective controller synthesis has been discussed before. For instance, [131, 25] set forth similar ideas. The main difference with the present technique is that these approaches rely on the Youla parametrization, which leads to high-order controllers devoid of any particular practically relevant structure.

In practical applications controllers should not only perform well in the nominal situation, but exhibit some form of robustness e.g. with respect to parameter uncertainties, perturbations, and possibly in situations where the plant operates under conditions which differ significantly from the nominal behavior. Multi-scenario design addresses this situation by grouping various time and frequency-domain specifications for several scenarios of the same system into the design. The present work expands on [11, 21, 14, 150] in two main aspects. Time-domain responses to input test signals are those of the non-linear plant if nonlinear dynamics are available. At the same time frequency domain criteria like the H_∞ norm continue to be based on the linearized model, and both aspects are unified in a single optimization program.

The structure of the paper is as follows. The multi-objective synthesis problem is formalized in section 7.2. The main ingredients of the proposed nonsmooth minimization technique are reviewed in section 7.3. Two realistic applications are discussed in section 7.4. In the first application, a robust tracking and decoupling controller under control amplitude and rate constraints is designed for the nonlinear model of a satellite launcher. As a second example, a fault-tolerant flight controller is designed for a combat aircraft in challenging flight conditions subject to wind gusts.

Notation

Let $\mathbb{R}^{n \times m}$ denote the space of $n \times m$ matrices equipped with the corresponding scalar product $\langle X, Y \rangle = X \bullet Y$. Concepts from nonsmooth analysis covered by [43] are used. For a locally Lipschitz function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\partial f(x)$ denotes its Clarke subdifferential at x while $f'(x; h)$ stands for the Clarke directional derivative at x in the direction h . For functions of two variables $f(x, y)$, $\partial_1 f(x, y)$ denotes the Clarke subdifferential with respect to the first variable. For differentiable functions f of two variables x and y the notation $\nabla_x f(x, y)$ stands for the gradient with respect to the first variable. The max operator applied to

a vector $v \in \mathbb{R}^n$ is defined as $\max v = \max_{i=1,\dots,n} v_i$. The notation $[\cdot]_+$ applied to a scalar ρ denotes the threshold function $[\rho]_+ = \max\{0, \rho\}$. Its generalization to a vector $v \in \mathbb{R}^n$ is defined as $[v]_+ = \max\{0, \max v\} = \max_{i=1,\dots,n} [v_i]_+$. The symbol $\mathcal{F}_l(\cdot, \cdot)$ denotes the traditional lower Linear Fractional Transformation. The symbol $\alpha(M)$ represents the spectral abscissa of a matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ defined as $\alpha(M) := \max \{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \text{ eigenvalue of } M\}$. The notation $\operatorname{conv}(S)$ refers to the convex hull of the set S .

7.2 Multi-objective synthesis set-up

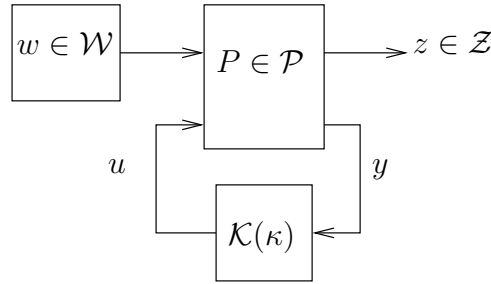


Figure 7.2: Multi-scenario interconnection

The set-up for multi-objective synthesis as investigated in this paper is as follows. A structured feedback controller $\mathcal{K}(\kappa)$ is sought which simultaneously stabilizes a finite family of plants $\mathcal{P} = \{P^1, \dots, P^p\}$ internally in closed loop, as represented in Figure 7.2. Moreover, this controller optimizes closed-loop performances of the plants. The set \mathcal{W} consists of test input signals (steps, ramps, sinusoidals) which can be injected into the different plants $P \in \mathcal{P}$, generating closed-loop responses $z = z(w, P, \kappa)$. Each plant $P^i \in \mathcal{P}$ is described by a system of nonlinear ordinary differential equations

$$(P^i) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= f_i(x, u, w^i, t) \\ z^i(t) &= g_{i1}(x, u, w^i, t) \\ y(t) &= g_{i2}(x, u, w^i, t) \end{cases}, \quad (7.1)$$

which reduces to the familiar state-space description in the particular case of linear time invariant (LTI) systems if linearized:

$$(P_{\text{lin}}^i) \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ z^i \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^i & B_1^i & B_2^i \\ C_1^i & D_{11}^i & D_{12}^i \\ C_2^i & D_{21}^i & D_{22}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w^i \\ u \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

The dimensions of the input and output vectors y and u must agree for all plants P^i , because a single controller is used for all P^i , but it is not required that the P^i have the same state dimension or that the (w^i, z^i) have concordant dimensions. Yet, typically all P^i derive from a single system to be controlled. It may also happen that several test

signals w^{ij} with responses z^{ij} are used for the same P^i . The set of all these (w^{ij}, z^{ij}) are called scenarios. During the following the index notation is not used, as it does not contribute to readability. Instead, it will be written $z \in \mathcal{Z}$ for the responses arising in the different scenarios, assuming that the corresponding input and plant are then known.

The above somewhat abstract description is flexible enough to include situations where a single plant is submitted to various test signals, as is the case when decoupling properties must be guaranteed, but also in the case where the original system P is split into several operating conditions or faulty modes P^i , which have to be controlled simultaneously. The latter is often referred to as multi-model control [118, 127] or reliable control [106, 132].

Most practical design problems require structured controllers such as PID, decentralized, fixed-order, observer-based etc. It is therefore convenient to introduce a controller parametrization in state-space

$$\kappa \in \mathbb{R}^q \rightarrow \mathcal{K}(\kappa) := \begin{bmatrix} A_K(\kappa) & B_K(\kappa) \\ C_K(\kappa) & D_K(\kappa) \end{bmatrix}, \quad (7.3)$$

with corresponding frequency-domain representation

$$K(s) = C_K(\kappa)(sI - A_K(\kappa))^{-1}B_K(\kappa) + D_K(\kappa).$$

It is not restrictive to assume that the mapping $\mathcal{K} : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{(m_2+k) \times (p_2+k)}$ is continuously differentiable, while otherwise arbitrary. See [21] and [150] for examples. In (7.3), κ denotes the design variables and k stands for the order of the controller, where the case $k = 0$ of a static controller is included.

The goal of multi-scenario design in the time-domain is now the following. Compute $\kappa \in \mathbb{R}^q$ such that the closed-loop time responses $z = z(w, \kappa, \cdot) \in \mathcal{Z}$ obtained with controller $\mathcal{K}(\kappa)$ satisfy shape constraints of the form

$$l_z(t) \leq z(t) \leq u_z(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall z \in \mathcal{Z}, \quad (7.4)$$

where the lower and upper bounds l_z and u_z for each scenario $z \in \mathcal{Z}$ are usually chosen as piecewise constant. These bounds are illustrated as dashed lines in Figure 7.3 for a step following specification. The strategy used here is to force these constraints (7.4) by minimizing the constraint violation function

$$\psi(\kappa) := \max_{z \in \mathcal{Z}} \max_{t \geq 0} \{ [z(\kappa, t) - u_z(t)]_+, [l_z(t) - z(\kappa, t)]_+ \}. \quad (7.5)$$

Note that the constraints (7.4) are satisfied as soon as $\psi(\kappa) \leq 0$, while $\psi(\kappa) > 0$ indicates constraint violation.

The LTI models P_{lin}^i obtained by linearizing the $P^i \in \mathcal{P}$ about steady state allow us to address closed-loop frequency domain specifications. Those arise naturally in synthesis due to robustness issues. Unstructured model uncertainty, for instance, or energy-bounded disturbances require that the controller satisfies specific bounds on the largest singular value norm of certain closed-loop transfers

$$\sup_{\omega \in I_P} \bar{\sigma}(T_P(\kappa, j\omega)) \leq \gamma_P, \quad \forall P \in \mathcal{P}_{\text{lin}}, \quad (7.6)$$

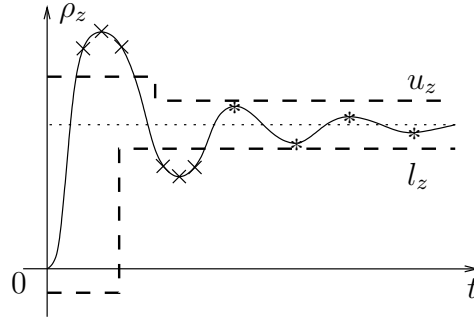


Figure 7.3: Shape constraints on time-domain system response

where $T_P(\kappa, s) := \mathcal{F}_l(P(s), K(\kappa, s))$, and where \mathcal{P}_{lin} denotes the set of linearized plants $\{P_{\text{lin}} : P \in \mathcal{P}\}$. For each P specific frequency bands $I_P = [\omega_1^P, \omega_2^P]$, or more generally, $I_P = [\omega_1^P, \omega_2^P] \cup \dots \cup [\omega_q^P, \omega_{q+1}^P]$, can be specified, where right interval tips may take infinite values. Dynamic weights $W_\infty^P(s)$ may also be used in (7.6), in which event the constraint take the normalized form

$$\sup_{\omega \in I_P} \bar{\sigma}(W_\infty^P(j\omega)T_P(\kappa, j\omega)) \leq 1, \quad P \in \mathcal{P}_{\text{lin}}. \quad (7.7)$$

Transfers $T_P(\kappa, j\omega)$ may represent, for example, traditional closed-loop sensitivity functions. Constraints (7.7) will be satisfied as soon as the constraint violation function

$$\sigma(\kappa) := \max_{P \in \mathcal{P}_{\text{lin}}} \sup_{\omega \in I_P} \bar{\sigma}(W_\infty^P(j\omega)T_P(\kappa, j\omega)) - 1 \quad (7.8)$$

becomes ≤ 0 . For disturbances of finite average power, the H_2 norm may be more appropriate:

$$\|W_2^P(s)T_P(\kappa, s)\|_2 \leq 1, \quad P \in \mathcal{P}_{\text{lin}}. \quad (7.9)$$

The corresponding constraint violation function is

$$\theta(\kappa) := \max_{P \in \mathcal{P}_{\text{lin}}} \|W_2^P(s)T_P(\kappa, s)\|_2 - 1. \quad (7.10)$$

Finally, the most fundamental closed-loop specification is internal stability. If this is difficult to achieve based on the performance criteria alone, it may become necessary to include constraints on $\mathcal{K}(\kappa)$ using the closed-loop spectral abscissa

$$\alpha(\mathcal{A}_P(\kappa)) \leq \alpha_P, \quad P \in \mathcal{P}_{\text{lin}}, \quad (7.11)$$

where $\alpha_P < 0$ and $\mathcal{A}_P(\kappa)$ is the state matrix of the closed-loop system $T_P(\kappa, s)$. The constraint violation function for the spectral abscissa is

$$\alpha(\kappa) := \max_{P \in \mathcal{P}_{\text{lin}}} \alpha(\mathcal{A}_P(\kappa)) - \alpha_P. \quad (7.12)$$

Notice that the original controller synthesis problem has been cast as a multi-objective optimization program

$$\underset{\kappa \in \mathbb{R}^q}{\text{minimize}} \quad (\psi(\kappa), \sigma(\kappa), \theta(\kappa), \alpha(\kappa)), \quad (7.13)$$

to be optimized until all entries of the objective vector (7.13) become non-positive.

For practical reasons it may be useful to distinguish between hard and soft constraints in (7.13). For the time-domain constraints the scenario set \mathcal{Z} is partitioned into disjoint subsets \mathcal{S} and \mathcal{H} , i.e., $\mathcal{Z} = \mathcal{S} \cup \mathcal{H}$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{H} = \emptyset$, where \mathcal{S} are soft constraints and \mathcal{H} hard constraints. This gives rise to the constraint violation functions $\psi_{\mathcal{S}}$ and $\psi_{\mathcal{H}}$. A similar partition may be applied to the frequency domain constraints.

The constrained multi-objective optimization problem could then be solved as

$$\begin{aligned} & \underset{\kappa \in \mathbb{R}^q}{\text{minimize}} && f(\kappa) := \max\{\psi_{\mathcal{S}}(\kappa), \sigma_{\mathcal{S}}(\kappa), \theta_{\mathcal{S}}(\kappa), \alpha_{\mathcal{S}}(\kappa)\} \\ & \text{subject to} && g(\kappa) := \max\{\psi_{\mathcal{H}}(\kappa), \sigma_{\mathcal{H}}(\kappa), \theta_{\mathcal{H}}(\kappa), \alpha_{\mathcal{H}}(\kappa)\} \leq 0, \end{aligned} \quad (7.14)$$

where objective and constraint now regroup constraint violation functions from (7.5), (7.8), (7.10) or (7.12). A solution to program (7.14), being feasible, necessarily meets the hard constraints, while soft constraints will be achieved only when the objective function falls below 0. In program (7.14), the role of individual weights for the various specifications is played by tuning parameters l_z , u_z , W_{∞}^P , W_2^P and α_P . The strategy adopted here is to select these weights in close spirit with the aspiration levels approach for multi-objective optimization [25, p.64]. Tuning parameters are adjusted iteratively based on a few trial-and-error designs. For instance, hard constraints which are easy to satisfy in one run can be tightened in a next stage, while violated constraints which continue to resist may have to be relaxed. One of the appealing features of this approach is that tuning parameters are closely related to engineering specifications, so such parameters can be adjusted based on intuition or engineering insight.

The synthesis framework (7.14) gives the designer the flexibility to handle design specifications directly as posed in practice. Program (7.14) is, however, a difficult nonconvex and nonsmooth mathematical program with semi-infinite constraints (7.5) or (7.8). Specific nonsmooth optimization techniques have been developed in [14] to address these problems, and the key ingredients are recalled in section 7.3. Standard smooth optimization packages could be used to solve programs like (7.14), but this bears the risk of failure if algorithms encounter so-called *dead points* [9]. Even when used to produce good starting values, smooth optimization should in the end always be completed by a nonsmooth optimization phase, to avoid missing a local optimum. There is a longstanding experience in using classical smooth methods for solving nonsmooth problems. Smooth methods invariably encounter breakdowns at points that are not local optimum (kinks, multiple active functions, etc) because local optima are typically nonsmooths points in practice.

7.3 Key ingredients in Nonsmooth optimization

In this section, the key ingredients of the nonsmooth optimization method used in the experimental section 7.4 are recalled. The reader is referred to [14] for details.

For the sake of clarity, program (7.14) is represented in the more abstract form

$$\begin{aligned} & \underset{\kappa}{\text{minimize}} && f(\kappa) \\ & \text{subject to} && g(\kappa) \leq 0. \end{aligned} \tag{7.15}$$

where both objective and constraints can contain a mix of frequency and time domain elements as in (7.14). To solve the constrained program (7.15), the following progress function is introduced, following an idea in [130]:

$$F(\kappa^+, \kappa) = \max\{f(\kappa^+) - f(\kappa) - \mu g(\kappa)_+; g(\kappa^+) - g(\kappa)_+\}, \tag{7.16}$$

where $\mu > 0$ is some fixed parameter (with $\mu = 1$ a typical value). Here κ represents the current iterate, κ^+ is the next iterate or a candidate for the next iterate. Except the case where $\bar{\kappa}$ is a local minimum of the constraint violation $g(\bar{\kappa}) > 0$, it is shown in [130] that critical points $\bar{\kappa}$ of $F(\cdot, \bar{\kappa})$ will also be critical points of the original program (7.15). Refer to [130] and [14] for an in-depth discussion of this property.

Minimizing the progress function in (7.16) leads to a so-called phase I/phase II method. As long as the constraint $g(\kappa) \leq 0$ is not satisfied, the right hand term in (7.16) is dominant and reducing it means reducing constraint violation. This is phase I, which ends successfully as soon as a feasible iterate $g(\kappa^k) \leq 0$ has been found. Now phase II begins, and from now on iterates stay (strictly) feasible, while the objective function is minimized at each step. Notice that the choice of the constant $\mu > 0$ may have an influence on the behavior of the method in phase I [14], but has been fixed as $\mu = 1$ in the numerical implementation.

The search for a point $\bar{\kappa}$ with $0 \in \partial_1 F(\bar{\kappa}, \bar{\kappa})$ is based on an iterative descent procedure. Suppose the current iterate κ has $0 \notin \partial_1 F(\kappa, \kappa)$. Then it is possible to further reduce the function $F(\cdot, \kappa)$ in a neighborhood of κ , that is, one can find κ^+ such that $F(\kappa^+, \kappa) < F(\kappa, \kappa)$. Replacing κ by κ^+ , the procedure is repeated. Unless $0 \in \partial_1 F(\kappa^+, \kappa^+)$, in which case the search is over, it is possible to find κ^{++} such that $F(\kappa^{++}, \kappa^+) < F(\kappa^+, \kappa^+)$, etc. The sequence $\kappa, \kappa^+, \kappa^{++}, \dots$ so generated is expected to converge to the sought local minimum $\bar{\kappa}$ of (7.15) if the reduction is substantial in a sense made precise in the above references.

Descent steps κ^+ away from the current κ are found by solving a tangent program at κ . Its name derives from the fact that a first-order approximation $\widehat{F}(\cdot, \kappa)$ of $F(\cdot, \kappa)$ is built, which provides a descent direction $d\kappa$ at κ , that is, $d_1 F(\kappa, \kappa; d\kappa) < 0$, where $d_1 F$ denotes the directional derivative of $F(\cdot, \kappa)$ at κ in direction $d\kappa$. The next iterate is then $\kappa^+ = \kappa + d\kappa$, or possibly $\kappa^+ = \kappa + \xi d\kappa$ for a suitable stepsize $\xi \in (0, 1)$ found by backtracking.

7.3.1 Search directions from the tangent program

In order to generate a first-order approximation $\widehat{F}(\cdot, \kappa)$ of $F(\cdot, \kappa)$ around κ , the specific structure of the criteria is exploited, and the concept of active times and active frequencies

is needed. For time domain constraints this is explained for the function $\psi_{\mathcal{S}} = \max_{z \in \mathcal{S}} \psi_z$. Consider a scalar-valued scenario $z \in \mathcal{S}$. Then the violation function is of the form $\psi_z(\kappa) = \max_{t \geq 0} \psi_z(\kappa, t)$, where

$$\begin{aligned} \psi_z(\kappa, t) &:= \max\{[z(\kappa, t) - u_z(\kappa, t)]_+, [l_z(t) - z(\kappa, t)]_+\} \\ &= \max\{z(\kappa, t) - u_z(t), l_z(t) - z(\kappa, t), 0\}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Thus, the set of active times for this entry $z \in \mathcal{S}$ at κ is given as

$$A_z(\kappa) := \{t \geq 0 : \psi_z(\kappa, t) = \psi_{\mathcal{S}}(\kappa)\}.$$

For vector-valued scenarios $z \in \mathcal{S}$ the definition is applied to each coordinate of z . Finally the set $A_{\psi_{\mathcal{S}}}(\kappa)$ of active times for $\psi_{\mathcal{S}}$ is simply the union of the $A_z(\kappa)$, $z \in \mathcal{S}$. Of course an analogous definition holds for $A_{\psi_{\mathcal{H}}}$.

The concept of active frequencies is now defined. Consider a function of the form

$$\sigma_{\mathcal{S}}(\kappa) = \max_{P \in \mathcal{S}} \max_{\omega \geq 0} \sigma_P(\kappa, \omega),$$

where

$$\sigma_P(\kappa, \omega) := \bar{\sigma}(W_{\infty}^P(j\omega)T_P(\kappa, j\omega)) - 1, \quad (7.18)$$

for $\omega \geq 0$, $P \in \mathcal{P}_{\text{lin}}$. Clearly \mathcal{S} now denotes the subset of \mathcal{P}_{lin} chosen for soft constraints. The set of active frequencies for $P \in \mathcal{S}$ is given as

$$\Omega_P(\kappa) := \{\omega \geq 0 : \sigma_P(\kappa, \omega) = \sigma_{\mathcal{S}}(\kappa)\},$$

while the set $\Omega_{\sigma_{\mathcal{S}}}(\kappa)$ of active frequencies of $\sigma_{\mathcal{S}}$ at κ is the union of the $\Omega_P(\kappa)$, $P \in \mathcal{S}$.

As a rule, the sets $A_{\psi_{\mathcal{S}}}(\kappa)$ and $\Omega_{\sigma_{\mathcal{S}}}(\kappa)$ are finite or can at least be finitely generated, and similarly for subscripts \mathcal{H} . In order to increase the efficiency of the method, finite extensions $A_{\psi_{\mathcal{S}}}^e(\kappa)$ of $A_{\psi_{\mathcal{S}}}(\kappa)$ and $\Omega_{\sigma_{\mathcal{S}}}^e(\kappa)$ of $\Omega_{\sigma_{\mathcal{S}}}(\kappa)$ are used, where typically near-active times or frequencies are added. For every $t \in A_{\psi_{\mathcal{S}}}^e(\kappa)$ and $\omega \in \Omega_{\sigma_{\mathcal{S}}}^e(\kappa)$ certain subgradients will be picked for the tangent program and will be stored in a subgradient set \mathcal{G} . It will now be explained how to pick these subgradients for the model functions $\psi_{\mathcal{S}}$ and $\sigma_{\mathcal{S}}$.

To begin with, consider a time domain function $\psi_{\mathcal{S}} = \max_{z \in \mathcal{S}} \psi_z$. Closed-loop time responses $\kappa \rightarrow z(\cdot, t)$ are assumed to be continuously differentiable. Clarke's formula for the subdifferential of a max-function applies and gives the representation

$$\partial\psi_{\mathcal{S}}(\kappa) = \text{conv} \cup \{\partial\psi_z(\kappa, t) : t \in A_z(\kappa), z \in \mathcal{S}\},$$

where the specific structure of the ψ_z for a scalar $z \in \mathcal{S}$ gives

$$\partial\psi_z(\kappa, t) = \begin{cases} \{\nabla z(\kappa, t)\}, & \text{if } z(\kappa, t) > u_z(t) \\ \text{conv}\{\nabla z(\kappa, t)\}, 0\} & \text{if } z(\kappa, t) = u_z(t) \\ \{0\} & \text{if } l_z(\kappa) < z(\kappa, t) < u_z(\kappa) \\ \text{conv}\{-\nabla z(\kappa, t)\}, 0\} & \text{if } z(\kappa, t) = l_z(t) \\ \{-\nabla z(\kappa, t)\} & \text{if } z(\kappa, t) < l_z(t). \end{cases}$$

Therefore, for every active $t \in A_z(\kappa)$ a pair (ϕ_t, Φ_t) with $\phi_t := \psi_z(\kappa, t) = \psi_S(\kappa)$ and $\Phi_t \in \partial\psi_z(\kappa, t)$ is stored in the set $\mathcal{G}_{\psi_S}(\kappa)$. For $t \in A_z^e(\kappa) \setminus A_z(\kappa)$ the same pair (ϕ_t, Φ_t) is stored in $\mathcal{G}_{\psi_S}(\kappa)$, even though $\phi_t = \psi_z(\kappa, t) < \psi_S(\kappa)$ in this case. In this way first-order approximations of $\psi_z(\kappa + d\kappa, t)$ in the neighborhood of κ are obtained: $\psi_z(\kappa + d\kappa, t) \approx \alpha_t + \Phi_t^T d\kappa$ if $(\phi_t, \Phi_t) \in \mathcal{G}_{\psi_S}$. Consequently, the desired first-order approximation for ψ_S around κ is

$$\psi_S(\kappa + d\kappa) \approx \max_{(\phi_t, \Phi_t) \in \mathcal{G}_{\psi_S}(\kappa)} \phi_t + \Phi_t^T d\kappa. \quad (7.19)$$

Notice that the term on the right is the upper envelope of affine functions and is therefore convex as a function of $d\kappa$. If only the sets $A_z(\kappa)$ were used to build this model, then all these affine lines would be generalized tangents to the graph of ψ_S at κ . Having enlarged $A_z(\kappa)$ into $A_z^e(\kappa)$ makes that some of the lines in the model pass strictly below $\psi_S(\kappa)$, so do not contribute at κ . However, these lines can quickly become active as one moves from κ to a nearby $\kappa + d\kappa$, hence the significance of the extension $A_z^e(\kappa)$ for the local model (7.19).

Building a first-order approximation of $\sigma_S(\kappa + d\kappa)$ around κ is slightly more involved, because the largest singular value functions $\sigma_P(\kappa, \omega)$ are nonsmooth in κ even for fixed ω and P . Instead of working with the maximum singular value $\bar{\sigma}(WT)$ as in (7.6), it will be convenient to work with the maximum eigenvalue $\lambda_1(WTT^H W^H)$. Therefore, the symmetrization $S_P(\kappa, s) := (W_\infty^P(s)T_P(\kappa, s))(W_\infty^P(s)T_P(\kappa, s))^H$ is introduced, as well as $\lambda_S(\kappa) := \bar{\sigma}_S(\kappa)^2 = \max_{P \in \mathcal{S}} \max_{\omega \geq 0} \lambda_1(S_P(\kappa, j\omega))$.

A first-order approximation of $\lambda_P(\kappa + d\kappa, j\omega)$ in the neighborhood of κ is given by [11, 150]

$$\lambda_P(\kappa + d\kappa, j\omega) \approx \sup_{\substack{Y_\omega \geq 0, \\ \text{Tr}(Y_\omega)=1}} Q_\omega Y_\omega Q_\omega^H \bullet (S_P(\kappa, j\omega) + S'_P(\kappa, j\omega)d\kappa) - 1 \quad (7.20)$$

where $S'_P(\kappa, j\omega)$ is the Fréchet derivative of $S_P(\cdot, j\omega)$ at κ , and Q_ω is an orthonormal basis of the eigenspace of $\lambda_1(S_P(\kappa, j\omega))$ at κ . Define

$$\phi_g := Q_\omega Y_\omega Q_\omega^H \bullet S_P(\kappa, j\omega) - 1, \quad \Phi_g := S'_P(\kappa, j\omega)^* Q_\omega Y_\omega Q_\omega^H$$

and store the pairs $(\phi_\omega, \Phi_\omega)$ in the set $\mathcal{G}_{\sigma_S}(\kappa)$ for all $\omega \in \Omega_{\sigma_S}^e(\kappa)$. As previously observed, enlarging Ω into Ω^e gives the model some robustness. Notice, however, a difference with the model building of ψ . The pairs in \mathcal{G}_{σ_S} are indexed by Y_ω ranging over the set of matrices $\{Y_\omega : Y_\omega \succeq 0, \text{Tr}(Y_\omega) = 1\}$, which is infinite if $\dim(Y_\omega) > 1$. If all these subgradients are kept, the tangent program will be a small size semidefinite program. However, it has been shown in [14] that one can get by with a finite set of subgradients, so tangent programs will turn out to be small to medium size convex quadratic programs, which can be solved very efficiently.

The function $\theta(\kappa)$ being smooth, one can keep the choice of $(\phi_\theta(\kappa), \Phi_\theta(\kappa))$ simple by taking $(\theta(\kappa), \nabla\theta(\kappa))$. Enlarging is possible, but not mandatory due to smoothness. Similarly, for the spectral abscissa the function value and a single subgradient suffice, which can be computed as outlined in [20].

The tangent model of $F(., \kappa)$ at κ is now constructed by assembling the first-order approximations of all the branches of the max-function in (7.16). With the above preparation, suppose finitely many pairs $(\phi_f, \Phi_f) \in \mathcal{G}_f(\kappa)$ and $(\phi_g, \Phi_g) \in \mathcal{G}_g(\kappa)$ have been constructed for objective and constraint. Then a first-order approximation of the progress function is

$$\widehat{F}(\kappa + h, \kappa) := \max \left\{ \begin{array}{l} \max_{(\phi_f, \Phi_f) \in \mathcal{G}_f(\kappa)} \phi_f - f(\kappa) - \mu g(\kappa)_+ + \Phi_f^T h, \\ \max_{(\phi_g, \Phi_g) \in \mathcal{G}_g(\kappa)} \phi_g - g(\kappa)_+ + \Phi_g^T h \end{array} \right\}, \quad (7.21)$$

where h is the displacement in the controller parameter space \mathbb{R}^q . This gives the tangent program

$$\underset{h \in \mathbb{R}^q}{\text{minimize}} \quad \widehat{F}(\kappa + h, \kappa) + \frac{\delta}{2} \|h\|^2, \quad (7.22)$$

with $\delta > 0$ a fixed parameter. It is worth noting that an equivalent formulation for (7.22) is the following

$$\begin{array}{ll} \underset{t, h \in \mathbb{R}^q}{\text{minimize}} & t + \frac{\delta}{2} \|h\|^2 \\ \text{subject to} & \phi_f - f(\kappa) - \mu g(\kappa)_+ + \Phi_f^T h \leq t, \quad \forall (\phi_f, \Phi_f) \in \mathcal{G}_f(\kappa), \\ & \phi_g - g(\kappa)_+ + \Phi_g^T h \leq t, \quad \forall (\phi_g, \Phi_g) \in \mathcal{G}_g(\kappa). \end{array} \quad (7.23)$$

When the eigenvalue multiplicity of all maximum eigenvalue functions equals 1, one can select $Y_w = 1$ in (7.20). Then (7.23) is a standard convex quadratic program (CQP), and can be efficiently solved using currently available codes. Current state-of-the-art CQP codes solve problems involving several hundreds of variables and constraints in less than a second. Note that the quadratic term in (7.22) can be used to capture second-order information, or it may be interpreted as a trust region radius management parameter. The reader is referred to [11], [14] and [150] for more elaborate variations of the present technique, and to [130] for a general view on phase I/phase II methods. The key facts about (7.22) or (7.23) have been established in [11] and are stated here without proof:

- The fact that the extended sets contain the active sets ensures that the solution to (7.22) is a descent direction of $F(., \kappa)$ at κ . If $h = 0$ then $0 \in \partial_1 F(\kappa, \kappa)$, and the search is over. Clearly, a stopping test may be based on the smallness of the solution h to the tangent program.
- The direction h can be used in an Armijo line search [95] defined by a step ξ in direction h with:

$$F(\kappa + \xi h, \kappa) - F(\kappa, \kappa) < \gamma \xi F'(\cdot, \kappa)(\kappa; h),$$

where $0 < \gamma < 1$, which terminates after finitely many steplength trials $\xi \in (0, 1]$.

Both items use the fact that $\partial_1 \widehat{F}(\kappa, \kappa) = \partial_1 F(\kappa, \kappa)$. Having described the main features of the algorithm, its pseudo-code is as follows:

Algorithm 3 Nonsmooth algorithm for program (7.15)**Paramètres:** $\delta > 0$, $0 < \beta < 1$, $0 < \gamma < 1$.

- 1: **initialize.** Select initial κ^1 . Put counter $j = 1$.
- 2: **stopping test.** At counter j , stop if $0 \in \partial_1 \widehat{F}(\kappa^j, \kappa^j)$ and return κ^j . Otherwise continue.
- 3: **compute descent direction.** At counter j solve tangent programs (7.22) or (7.23)

$$\min_{h \in \mathbb{R}^q} \widehat{F}(\kappa^j + h, \kappa^j) + \frac{\delta}{2} \|h\|^2.$$

Solution is the search direction h^j .

- 4: **line search.** Find $\xi = \beta^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, satisfying the Armijo condition

$$F(\kappa^j + \xi h^j, \kappa^j) - F(\kappa^j, \kappa^j) \leq \gamma \xi F'(\cdot, \kappa^j)(\kappa^j, h^j) < 0.$$

- 5: **update.** Put $\kappa^{j+1} = \kappa^j + \xi h^j$, increase counter j by 1 and loop back to step 2.

7.3.2 Implementation details

Similarly to *iterative feedback tuning* (IFT), the proposed technique relies on simulations to compute function values as well as trajectory gradients for time-domain constraints. A comprehensive discussion on how this can be done is presented in [84], [85] and [21]. This is generally the costly part of the technique since $\dim \kappa = q$ simulations for each scenario may be required in order to form the trajectories gradients. Simulations serving to compute trajectory gradients for nonlinear plants require the auxiliary nonlinear system

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \kappa_j}(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, u, w, t) \frac{\partial x}{\partial \kappa_j}(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, u, w, t) \frac{\partial u}{\partial \kappa_j}(t) \\ \frac{\partial z}{\partial \kappa_j}(t) &= \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, u, w, t) \frac{\partial x}{\partial \kappa_j}(t) + \frac{\partial g_1}{\partial u}(x, u, w, t) \frac{\partial u}{\partial \kappa_j}(t) \\ \frac{\partial y}{\partial \kappa_j}(t) &= \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, u, w, t) \frac{\partial x}{\partial \kappa_j}(t) + \frac{\partial g_2}{\partial u}(x, u, w, t) \frac{\partial u}{\partial \kappa_j}(t) \end{cases}, \quad (7.24)$$

where κ_j is the j -th free design variable. As in practice the plant trajectories are only inspected on a finite horizon, the half-line $t \geq 0$ should be replaced with $t \in [0, T]$ everywhere in the text.

Nonlinear simulations can be performed using a general-purpose ordinary differential equation solver, like in the MATLAB function `SIM`. For LTI systems, however, it is computationally more efficient to use the classical discrete state-propagation approach as in the MATLAB function `LSIM`. This method is particularly appealing here because the simulation scenarios for a given plant in the family only differ by input signals and, consequently, the dynamic equation

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u$$

needs only be discretized once to get the simulation dynamics

$$x_{k+1} = A^d x_k + B_1^d w_k + B_2^d u_k.$$

A reduction in execution time is then achieved since the data A^d , B_1^d and B_2^d can be recycled for each scenario and the rest of the computation amounts to simple matrix vector products. Notice further that the outlined procedure is amenable to parallel computing because scenarios are typically independent.

Another important question is how to build the extension sets A_z^e and Ω_P^e which determine the tangent program (7.22) and thereby the behavior of the nonsmooth algorithm. To construct A_z^e , different strategies are used for soft and hard constraints, see Figure 7.3. In the soft constraints case, A_z^e contains the set of active times plus some extra samples for which constraints are violated, represented in the figure by ‘×’ symbols. This is easily obtained by decimating samples provided by the numerical integrator. In the hard constraint case, A_z^e is built similarly, but includes also extrema satisfying the constraint envelope, represented by ‘*’ symbols. The idea is to feed the tangent program with first-order information about ψ even during phase II. In return this helps preventing iterates getting stuck on the feasibility boundary. The set $\Omega_P^e(\kappa)$ includes active frequencies plus some extra nearly active frequencies, see Figure 7.4.

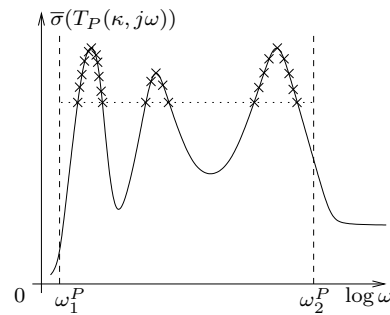


Figure 7.4: Extended set $\Omega_P^e(\kappa)$ of active frequencies

7.4 Applications

The simulations and computations for the case studies presented in this section have been performed with the Matlab environment running on a 2.4GHz Core 2 Quad processor with 4Gb RAM. The code has been developed essentially using Matlab, with Fortran being used for the CQP tangent problem (7.22) to minimize the main performance bottlenecks.

7.4.1 Tracking and decoupling control for a satellite launcher

In this first example, a tracking and decoupling controller is designed for the Brazilian satellite launcher vehicle VLS during the atmospheric flight phase. This case study has been initially investigated in [123]. For the sake of completeness, the nonlinear equations

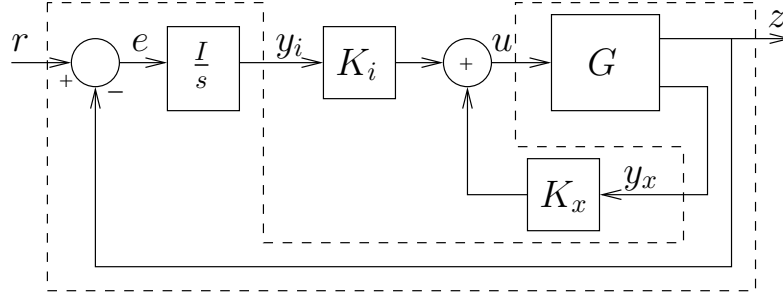


Figure 7.5: closed-loop system block diagram representation

for the vehicle are reproduced below:

$$\begin{aligned}
 \dot{v} &= Y_v v - g \sin(\theta) \sin(\phi) + g \cos(\theta) \sin(\psi) \cos(\phi) + Y_r r + p w + Y_{\beta_y} \beta_y \\
 \dot{w} &= Z_w w - g \sin(\theta) \cos(\phi) - g \cos(\theta) \sin(\psi) \sin(\phi) + Z_q q - p v + Z_{\beta_z} \beta_z \\
 \dot{p} &= L_p p + L_{qr} q r + L_{\beta_r} \beta_r \\
 \dot{q} &= M_w w + M_q q + M_{pr} p r + M_{\beta_z} \beta_z \\
 \dot{r} &= N_v v + N_r r + N_{pq} p q + N_{\beta_y} \beta_y \\
 \dot{\theta} &= \cos(\phi) \sec(\psi) q - \sin(\phi) \sec(\psi) r, \\
 \dot{\psi} &= \sin(\phi) q + \cos(\phi) r \\
 \dot{\phi} &= p - \tan(\psi) \cos(\psi) q + \tan(\psi) \sin(\phi) r
 \end{aligned}$$

where v is the sideslip velocity, w is the z -body axis vehicle velocity, p , q , r are respectively the roll, pitch and yaw rates, and θ , ψ , ϕ are the attitude angles in pitch, yaw and roll, respectively. Variations of the x -body velocity need not be considered since there is no thrust control on the vehicle. The motion is controlled by deflections β_z , β_y and β_r of pitch, yaw and roll nozzle actuators, respectively. Coefficients of the nonlinear equations vary with flight time, but are supposed to be fixed here: $Y_v = -0.0162$, $Y_r = -87.9$, $Y_{\beta_y} = -10.87$, $Z_w = -0.0162$, $Z_q = 87.9$, $Z_{\beta_z} = 10.87$, $L_p = -0.0289$, $L_{qr} = 0$, $L_{\beta_r} = 25.89$, $M_w = 0.0022$, $M_q = 0.0148$, $M_{pr} = 0.8333$, $M_{\beta_z} = 4.08$, $N_v = -0.0022$, $N_r = 0.0151$, $N_{pr} = -0.9231$, $N_{\beta_y} = 4.08$.

The design objective is to synthesize a stabilizing controller where each attitude angle in the nonlinear model must track as closely as possible a step reference signal. The control law is a standard feedback with integral action in order to eliminate the steady-state tracking error, and is depicted in Figure 7.5, where

$$z = \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \\ \phi \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} \theta_{ref} \\ \psi_{ref} \\ \phi_{ref} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} \beta_z \\ \beta_y \\ \beta_r \end{bmatrix}, \quad y_x^T = [q \quad \theta \quad r \quad \psi \quad p \quad \phi]^T.$$

States w and v are not available for feedback. The controller variables to be determined are the static gains $K_x \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ and $K_i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ in Figure 7.5.

A difficulty of the problem is that the launcher has strongly coupled responses when performing angular maneuvers, and consequently the tracking controller must also achieve

decoupling between the tracking channels. Available techniques to solve such tracking and decoupling problems include for instance the Linear Quadratic Regulator (LQR) and eigenstructure assignment techniques for linear systems investigated in [123]. Nonetheless, this kind of problem fits nicely into the multi-scenario framework with appealing advantages. First, realistic time-domain performance criteria such as rise-time and overshoot, coupling amplitude limitations, as well as control amplitude and rate constraints are easily handled using the proposed nonsmooth method. This is in contrast with the existing approaches, where such performance specifications must be addressed indirectly by an iterative trial-and-error adjustment of auxiliary design variables such as modes and eigenvector structures for the eigenstructure assignment method or such as the quadratic weights Q and R with the LQR method. Moreover, the nonsmooth design technique does not assume full state measurement as is the case for the latter methods. [123] assume full state measurement and cancel out gains corresponding to unmeasured states afterwards which bears the risk of performance deterioration or even of a loss of stability. And last but not least, time-domain criteria can be imposed on the actual nonlinear model, thus leading to more realistic results.

The present tracking and decoupling problem is easily described by three distinct test scenarios being applied to the single model defined by the dashed box in Figure 7.5. Each test scenario consists in a unit step command applied to one of the reference inputs, while the other two are kept to zero. Altogether, one has 3 test inputs $w = r^1, r^2$ or r^3 described as follows:

$$r^1(t) = \begin{bmatrix} \sigma(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r^2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r^3(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma(t) \end{bmatrix}, \quad (7.25)$$

where $\sigma(t)$ stands for the unit step. Design specifications for each scenario are good tracking performance for the corresponding attitude angle, limited couplings with the other two angles, and control effort and rate limitations. All these performance criteria translate into time-domain envelope constraints as illustrated by dashed lines in Figures 7.6 to 7.8.

Exploiting the particular structure of the feedback configuration, it is readily established that control rate constraints can be turned into simple bounds on the integral gains. To see this, consider, for instance, a unit pitch step represented by the case $r(t) = r^1(t)$. With zero initial condition for the plant states and integrators, the pitch control rate $\dot{\beta}_z(t)$ attains its largest amplitude at the initial instant $t = 0^+$:

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 0} |\dot{\beta}_z(t)| = |\dot{\beta}_z(0^+)| &= |K_x \dot{y}_x(0^+) + K_i \dot{y}_i(0^+)| \\ &= |K_i(r(0^+) - z(0^+))| = |K_i r(0^+)| = |K_i^{1,1}|, \end{aligned}$$

where $K_i^{1,1}$ is the (1,1) entry of K_i in Figure 7.5. Hence, the pitch control rate will be bounded by directly limiting the gain $K_i^{1,1}$ of the controller, since gains $K_i^{1,2}$ and $K_i^{1,3}$ are usually smaller. A similar reasoning applies to $K_i^{2,2}$ and $K_i^{3,3}$ for yaw and roll control rate limitations, respectively.

Additionally, internal stability and robustness specifications are captured by considering the linear closed-loop system obtained by the linearization of the original nonlinear equations. Firstly, the largest singular value of the complementary sensibility function $T := GK(I+GK)^{-1}$ is bounded in the high-frequency range in order to achieve robustness against unmodeled flexible modes. Secondly, the linear closed-loop system is enforced to be internally stable through the spectral abscissa criterion (7.11). The idea here is that achieving closed-loop stability with the linearized model is likely to increase the stability domain of the actual nonlinear closed-loop system, though it must be admitted that this can only be checked *a posteriori*.

Design specifications may be summarized as:

- good tracking performance: piecewise constant envelopes in the left column of Figure 7.6;
- coupled response limitation: upper and lower bounds in the right column of Figure 7.6;
- control effort limitation: see Figure 7.7, where only the controls presenting the largest amplitudes are depicted;
- control rate limitation: the constraints $|K_i^{1,1}| < 4$, $|K_i^{2,2}| < 4$ and $|K_i^{3,3}| < 1$ are enforced. See Figure 7.8, where only the controls with the largest rates have been depicted.
- robustness against high-frequency unmodeled dynamics: see Figure 7.9, $\bar{\sigma}(GK(I + GK)^{-1}) \leq 0.4$, for $\omega \geq 100$ rad/s.
- internal stability for the linear closed-loop system.

In this study the spectral abscissa constraint was considered as a hard constraint while all other constraints were viewed as soft. Since nonlinear simulations are computationally more expensive than using LSIM, it seems to be a good strategy to perform an initial synthesis considering the linearized model also for time-domain constraints, and then to use that designed controller as the seed for a final synthesis with the nonlinear model. The nonsmooth algorithm finds a locally optimal solution for the initial linear problem after 493 iterations within 4.7 minutes of cputime. The locally optimal solution for the final nonlinear problem is found after 62 iterations within 261 minutes of cputime. The final constraints violation falls below 2×10^{-4} , so all design specifications are achieved.

The final controller is given as

$$[K_i \quad K_x] = \left[\begin{array}{ccc|cccccc} \mathbf{4.0002} & 0.62315 & -0.2718 & -1.3421 & -3.6319 & -0.23305 & -0.52236 & 0.14273 & 0.19974 \\ -0.60671 & \mathbf{3.8959} & -0.2111 & 0.23207 & 0.50359 & -1.3144 & -3.553 & 0.077188 & 0.22132 \\ 0.01865 & -0.044744 & \mathbf{1.0002} & -0.02392 & -0.011085 & -0.0008793 & 0.046795 & -0.41614 & -0.96903 \end{array} \right]. \quad (7.26)$$

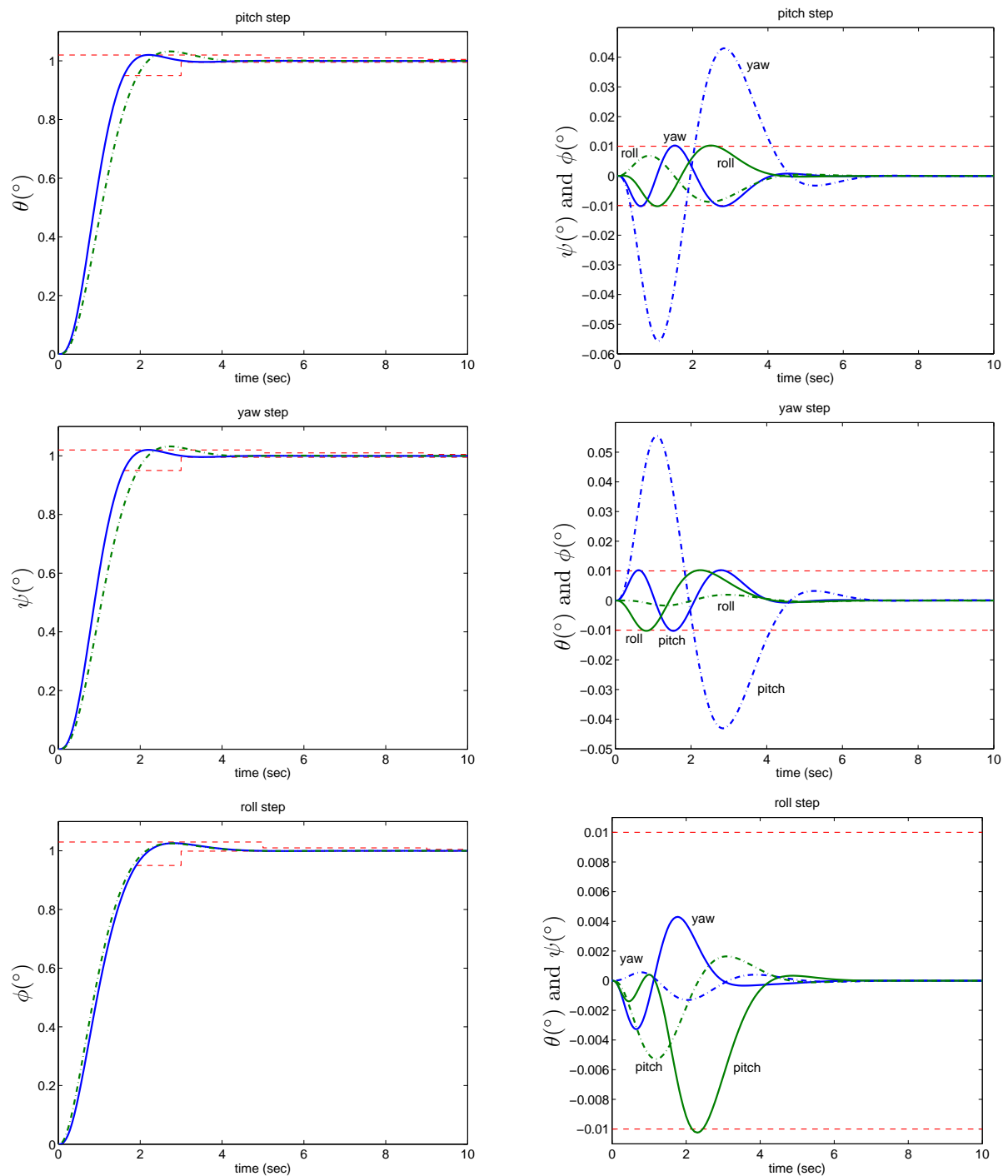


Figure 7.6: Nonlinear step responses: nonsmooth (solid) and LQ (dash-dot) controllers

The time-domain closed-loop responses with the nonsmooth controller (7.26) and the nonlinear model are shown in Figures 7.6 to 7.8, while Figure 7.9 gives the closed-loop frequency-domain response. Also depicted are the closed-loop responses for the LQR controller in [123]. In the design fast tracking responses are sought for pitch and yaw steps, leading to an increase of both control effort and rate. The LQR controller in

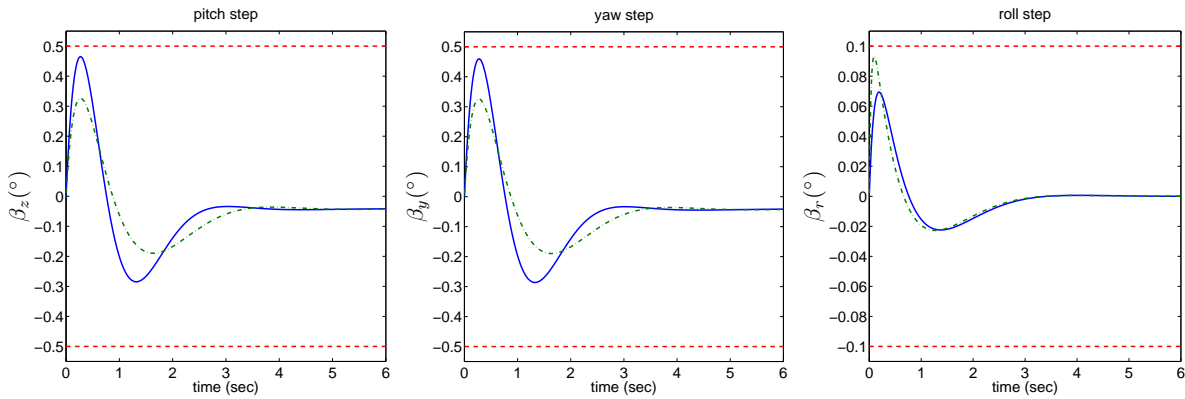


Figure 7.7: Pitch, yaw and roll controls for a pitch, yaw and roll steps, respectively: nonsmooth (solid) and LQ (dash-dot) controllers

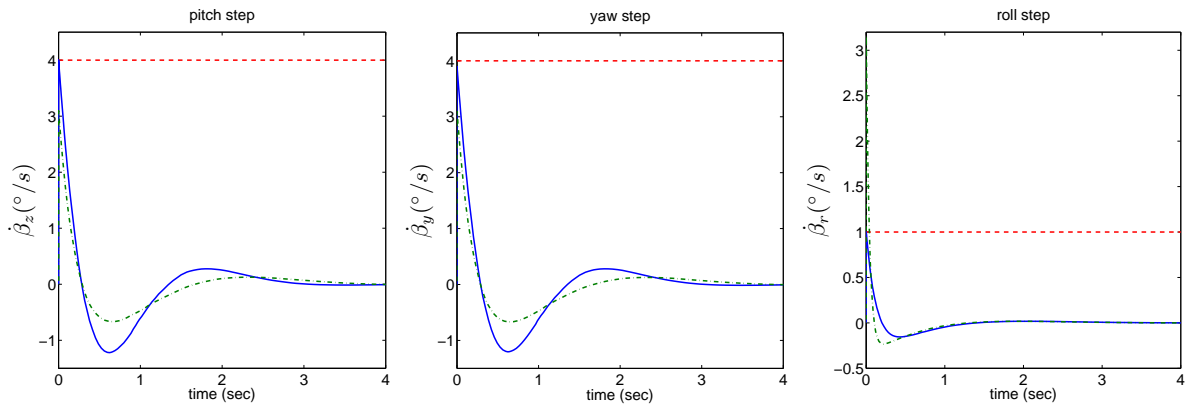


Figure 7.8: Pitch, yaw and roll control rates for a pitch, yaw and roll steps, respectively: nonsmooth (solid) and LQ (dash-dot) controllers

contrast exhibits unsatisfactory decoupling of nonlinear system responses. In conclusion it may be emphasized that the proposed technique solves the design specifications as posed in practice, without taking recourse to delicate tuning of auxiliary design parameters.

7.4.2 Reliable flight controller

In the next example, a reliable flight control system is designed for an F-16 aircraft performing high angle-of-attack maneuvers subject to wind gusts. This problem has been studied in [106] from where the model data are borrowed. The primary design goal is to synthesize a stabilizing controller achieving tracking performances for the stability axis roll rate $\dot{\mu}_{rat}$, the angle-of-attack α and the sideslip angle β of the aircraft. The control system configuration is again that of Figure 7.5, with $z^T = [\dot{\mu}_{rat} \ \alpha \ \beta]$. All the aircraft states are assumed available for feedback:

$$x^T = y_x^T = [u \ w \ q \ v \ p \ r], \quad (7.27)$$

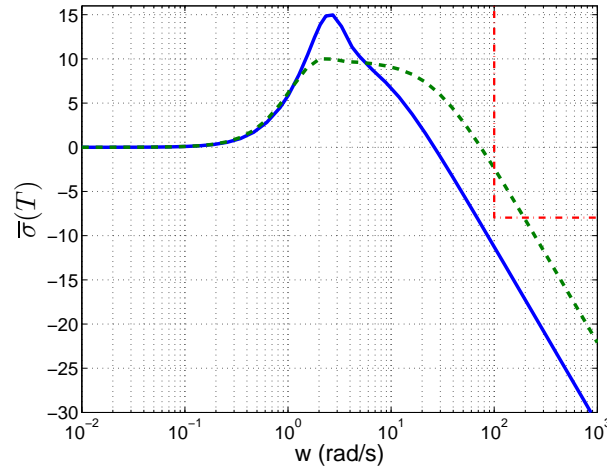


Figure 7.9: Closed-loop complementary sensibility: nonsmooth (solid) and LQ (dash-dot) controllers

where p , q , r are respectively the roll, pitch and yaw rates, and v , w and u are the y , z and x -body axis velocities. The aircraft model also includes an exogenous disturbance w_g which represents vertical wind gusts. The control vector is given as

$$u^T = [\delta_{hr} \quad \delta_{hl} \quad \delta_{ar} \quad \delta_{al} \quad \delta_r], \quad (7.28)$$

where δ_{hr} , δ_{hl} , δ_{ar} , δ_{al} and δ_r are the deflections of the right and left stabilators, the right and left ailerons and the rudder, respectively, which yields $K_x \in \mathbb{R}^{5 \times 6}$ and $K_i \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$.

Given that the combat aircraft evolves in critical high angle-of-attack flight conditions, kinematics and inertial coupling phenomena become important and the control law must achieve substantial decoupling of the various channels. Additionally, the solution must guarantee closed-loop stability and satisfactory performance for any of the operational modes in table 7.1 in order to be a reliable controller. The linearized models P_{lin}^0 and P_{lin}^3 are given in [106].

Table 7.1: Nominal and failure modes for the F-16 aircraft

mode type	description
nominal operation:	$P(s) = P_{\text{lin}}^0(s)$,
failure of the right stabilator:	$P(s) = P_{\text{lin}}^0(s) \times \text{diag}(0, 1, 1, 1, 1)$,
failure of the left stabilator:	$P(s) = P_{\text{lin}}^0(s) \times \text{diag}(1, 0, 1, 1, 1)$,
failure of the right aileron:	$P(s) = P_{\text{lin}}^0(s) \times \text{diag}(1, 1, 0, 1, 1)$,
failure of the left aileron:	$P(s) = P_{\text{lin}}^0(s) \times \text{diag}(1, 1, 1, 0, 1)$,
75% impairment of the stabilators:	$P(s) = P_{\text{lin}}^3(s)$.

Note that the controller must achieve adequate performance not only in the nominal mode, but also when any of the failures in Table 7.1 occurs. This leads to 3 scenarios for

each mode in order to assess tracking and decoupling properties for $\dot{\mu}_{rat}$, α and β , leading to a total of 18 scenarios. Clearly this a complicated problem involving multiple plant modes as well as multiple test inputs. It is readily incorporated in the general framework of section 7.2. In order to guarantee stability and robustness against the possible failures, a spectral abscissa constraint (7.11) is introduced for each closed-loop system associated with the various operational modes in table 7.1.

Another design specification is satisfactory vertical wind gust load alleviation in the nominal mode. Wind gusts are modeled as the output of a Dryden filter [7]

$$G_w(s) = 2.5046 \frac{s + 0.1517}{(s + 0.2628)^2},$$

driven by a unit-intensity zero-mean gaussian white-noise \hat{n} , so that $w_g = G_w \hat{n}$. The RMS vertical gust velocity is 5 m/s. Having connected the filter $G_w(s)$ to the disturbance input w_g of the aircraft model, a bound constraint is imposed on the H_2 norm of the nominal transfer from \hat{n} to the regulated output z .

Control rates are limited to $15^\circ/s$ for a unit step, using once again the strategy of limiting the integral gains K_i . In this application all entries of K_i have been constraint to $|K_i^{k,l}| \leq 15$, $k = 1 \dots 5, l = 1 \dots 3$.

The nonsmooth technique finds a locally optimal solution after 621 iterations corresponding to 23 minutes of cputime. The final controller found by the nonsmooth algorithm is

$$\begin{bmatrix} K_i & K_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5983 & -3.63 & -0.126 & 0.2544 & 0.8396 & 20.9 & -0.01052 & 2.692 & -2.703 \\ -0.5983 & -3.63 & -0.126 & 0.2544 & 0.8396 & 20.9 & -0.01052 & 2.692 & -2.703 \\ -\mathbf{15} & -0.2078 & 1.916 & 0.5747 & 0.008635 & 1.167 & -0.7743 & 58.95 & 6.538 \\ \mathbf{15} & 0.2078 & -1.916 & -0.5747 & -0.008635 & -1.167 & 0.7743 & -58.95 & -6.538 \\ -5.461 & -0.08635 & \mathbf{15} & 0.7486 & 0.04805 & 0.6288 & -2.577 & 14.59 & 99.34 \end{bmatrix}. \quad (7.29)$$

Figures 7.10 to 7.12 show the closed-loop responses with the designed controller (7.29) for each of the six operational modes, together with the closed-loop responses under 25% and 50% impairment of the stabilators. The synthesized controller guarantees good closed-loop nominal behavior, but also closed-loop stability with contained performance deterioration in the event of extreme failures, indicating that a reliable design has been obtained. The worst performance degradation corresponds to the angle-of-attack tracking response under 75% impairment of the stabilators, a rather critical situation, see the central plot in Figure 7.11. As expected, closed-loop responses remain satisfactory under 25% and 50% impairment of the stabilators, even though these scenarios have not been explicitly included in the synthesis requirements. As can be seen in Figure 7.13, the nonsmooth control also attains acceptable wind gust load alleviation despite the severe gain constraint. Finally, all spectral abscissa constraints were formulated as hard constraints and consequently are met at the optimum, which means that the closed-loop system remains stable in all operational modes.

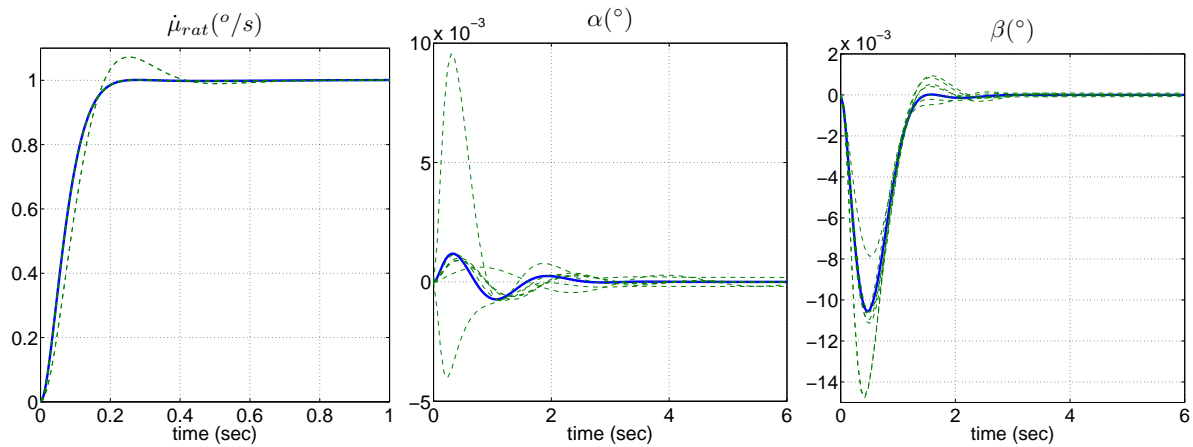


Figure 7.10: Closed-loop responses for a stability-axis roll rate step command (nominal: solid)

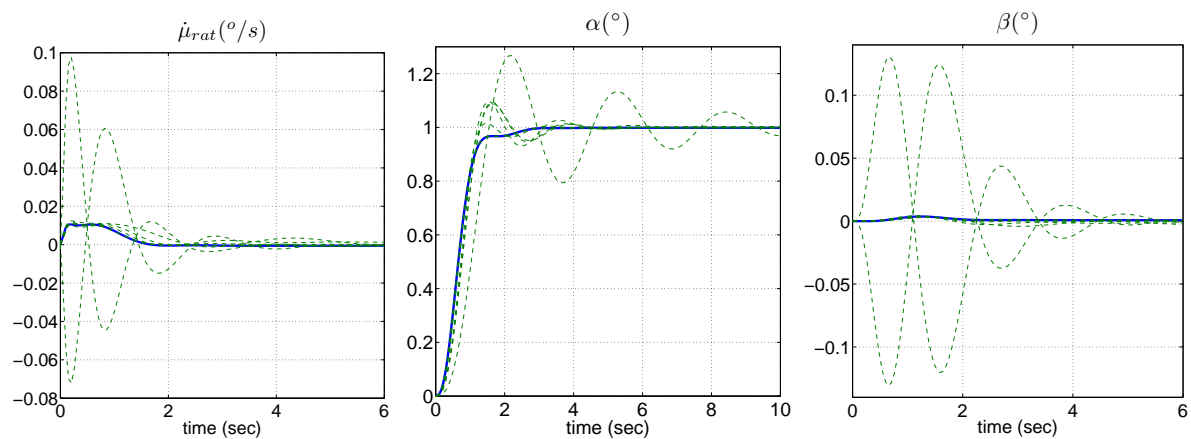


Figure 7.11: Closed-loop responses for an angle-of-attack step command (nominal: solid)

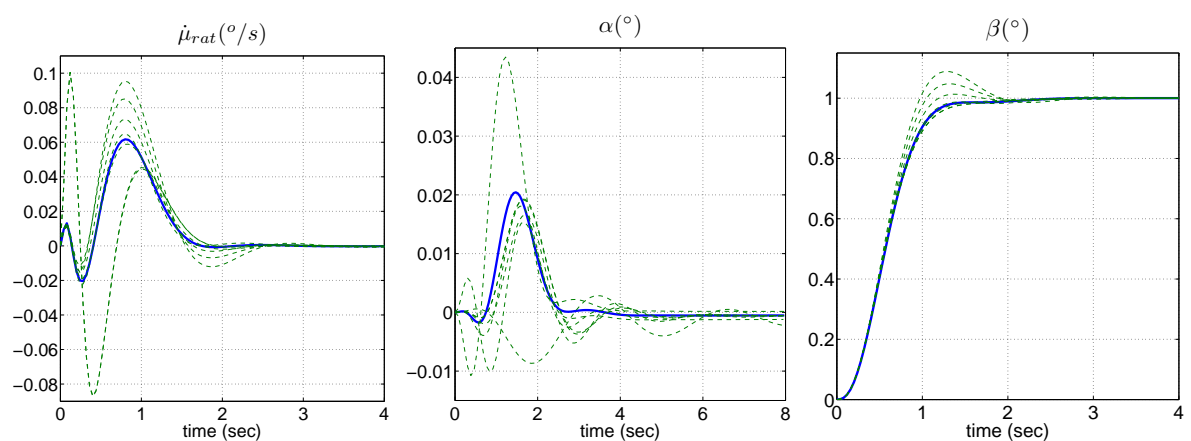


Figure 7.12: Closed-loop responses for a sideslip angle step command (nominal: solid)

7.5 Conclusion

In practical applications designers prefer feedback controllers that perform well not only in the nominal operational mode, but possibly for a collection of scenarios represent-

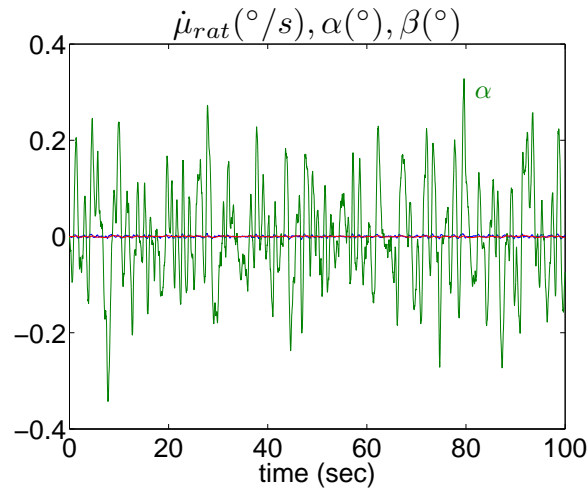


Figure 7.13: Closed-loop system responses under vertical wind gusts

ing performance specifications in time-domain. Moreover, the controller should also meet frequency-domain specifications which are routinely required in closed-loop. A nonsmooth optimization technique have been presented and discussed which allows to address this challenging class of synthesis problems quite successfully. This leads to a highly flexible design tool which allows to go beyond what can be achieved with BMI- and LMI-techniques or with simple tuning heuristics. As a by-product, the proposed approach also furnishes a detailed analysis of each closed-loop performance specification, revealing possible design difficulties. Multi-scenario time-domain design under frequency-domain constraints is a very challenging problem for which only locally optimal solutions can be computed. Despite this principled obstacle, it is shown by the case studies that the local convergence theory on which the proposed method is based produces good results in practice and can with some right be considered an efficient design tool.

Acknowledgement

This research was supported by grants from Fondation de Recherche pour l'Aéronautique et l'Espace (FNRAE) under contract *Survola*, and by Agence Nationale de la Recherche (ANR) under contract *Controvert*.

7.6 Synthèse de la commande de vol latéral pour un avion flexible

Dans cette section, nous utilisons la méthode non lisse multiobjectif pour synthétiser la commande de vol pour le mouvement latéral d'un avion gros porteur pour lequel la flexibilité a été intentionnellement dégradée à un niveau critique. Ce problème, discuté initialement dans [2], a été construit dans le but de tester l'efficacité des différentes techniques modernes de synthèse.

Dans des applications aéronautiques et spatiales modernes présentant des phénomènes aéro-servo-élastiques significatifs, la présence de modes flexibles à l'intérieur de la bande passante du compensateur est de plus en plus fréquente. Par conséquent, l'approche traditionnelle selon laquelle une loi de commande est d'abord synthétisée pour la dynamique rigide et complétée par un filtre passe-bas afin d'éviter ou de réduire les effets de *spillover* n'est plus appropriée. La synthèse d'une commande de vol devient alors particulièrement complexe.

Ce type de phénomène s'avère particulièrement difficile à traiter lorsque des spécifications sévères de performance et de robustesse de différentes natures doivent être satisfaites en même temps. En général, des spécifications de performance sont exprimées en termes de contraintes temporelles, tandis que les modes flexibles sont souvent gérés par le biais de critères fréquentiels ou des spécifications modales du type d'amortissement. Une contrainte de structure sur la loi de commande est une complication supplémentaire.

Nous avons indiqué précédemment que les techniques de synthèse H_2 ou H_∞ traditionnelles [174] ne fournissent pas une réponse adéquate aux difficultés associées à ce type de problème. D'abord, parce que les spécifications temporelles doivent être abordées indirectement par le choix de fonctions de pondérations. De plus, ces méthodes produisent des compensateurs d'ordre plein et l'ingénieur doit faire appel à des techniques de réduction si un compensateur simple est recherché. Les méthodes basées sur le paramétrage de YOULA [25] sont théoriquement capables de gérer simultanément des contraintes fréquentielles et temporelles, le compensateur résultant atteint le plus souvent un ordre inacceptable du point de vue embarquement.

Certaines approches proposées dans la littérature utilisent des techniques de placement de pôles pour résoudre des problèmes comprenant des modes flexibles très mal amortis [98, 115, 143]. La gestion de spécifications temporelles via le façonnement modal semble plus favorable que dans le cas fréquentiel. Cependant, comme noté en [98], la détermination d'un espace propre approprié pour les modes flexibles reste délicat.

7.6.1 Description du problème

Nous considérons six modèles linéarisés du mouvement latéral de l'avion. Les points d'équilibre autour desquels les modèles linéarisés ont été obtenus correspondent à 6 distributions de masse différentes à l'intérieur de l'appareil, pour une même condition de vol. Chacun des modèles est décrit par une représentation en espace d'état d'ordre 68 dont le vecteur d'état contient 4 états rigides (l'angle de lacet β , la vitesse de roulis p , la

vitesse de lacet r et l'angle de roulis ϕ), 36 états correspondant aux 18 modes flexibles, 2 états secondaires représentant les dynamiques des surfaces de commande et des retards aérodynamiques, et 8 états modelant la turbulence comme une perturbation exogène.

Le système possède deux commandes, représentées par la déflexion δ_l de l'aileron et la déflexion δ_n de la gouverne de direction, et une perturbation exogène v représentant des rafales de vent. À des fins de comparaison, les mêmes six mesures utilisées en [2] sont également utilisées ici, à savoir la vitesse p_6 et l'angle ϕ_6 de roulis mesurés au milieu de l'avion, les vitesses de lacet r_1 et r_{11} respectivement devant et à l'arrière de l'avion, et les accélérations latérales n_{y7} et n_{y9} mesurées en deux points différents du fuselage. Cet ensemble de mesures a été sélectionné selon les propriétés d'observabilité du modèle rigide et des premiers modes flexibles (dans un ordre croissant de fréquence) par rapport à la localisation des capteurs le long du fuselage.

Les spécifications définies pour ce problème sont les suivantes :

S1 : des exigences de qualité de vol représentées par des gabarits imposés sur les réponses à l'échelon par rapport à β et ϕ ,

S2 : un taux d'amortissement élevé pour le roulis hollandais,

S3 : aucune dégradation, ou de préférence une amélioration du taux d'amortissement des modes flexibles,

S4 : une amélioration du confort en phase de turbulence. L'indice de performance de confort est mesuré par la réponse fréquentielle du transfert entre la perturbation v et les accélérations latérales devant, au milieu et à l'arrière du fuselage,

S5 : une robustesse vis-à-vis des différents chargements,

S6 : afin de faciliter l'embarquement, un compensateur d'ordre réduit est souhaitable.

7.6.2 Synthèse non lisse

La configuration de commande adoptée avec l'interconnexion de synthèse sont indiquées sur la Figure 7.14, où $G(s)$ représente la matrice de transfert de l'avion pour un chargement donné, $u = [\delta_l \ \delta_n]^T$ sont les commandes, $y = [n_{y7} \ n_{y9} \ p_6 \ r_1 \ r_{11} \ \phi_6]^T$ sont les mesures et $r \triangleq [\beta_r \ \phi_r]^T$ constitue le vecteur des signaux de référence. Selon le critère, différentes sorties sont sélectionnées pour former le vecteur z des sorties régulées.

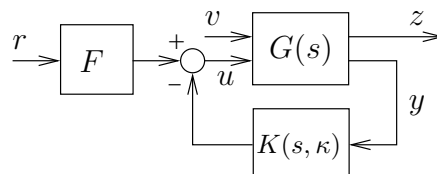


FIG. 7.14 – L'interconnexion en boucle fermée pour l'avion flexible

Grâce à la flexibilité offerte par le paramétrage (7.3), le compensateur de rétroaction $K(s, \kappa)$ est sélectionné comme un système du type espace d'état d'ordre 10, de sorte que

la spécification (S6) d'un compensateur d'ordre réduit est directement satisfaite. À titre comparatif, nous notons que le compensateur obtenu en [2] en utilisant des techniques de réduction de modèle est d'ordre 20. Par ailleurs, le compensateur de rétroaction est choisi strictement propre ($D_K(\kappa) \equiv 0$ en (7.3)) afin d'améliorer la robustesse vis-à-vis des modes flexibles en haute fréquence et pour garantir une meilleure atténuation des bruits. Par simplicité, le compensateur d'action directe $F \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ est sélectionné comme un gain matriciel statique.

La première des spécifications temporelles en (S1) imposée au système en boucle fermée est la contrainte en régime stationnaire

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \beta(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \beta_r(t) \\ \phi_r(t) \end{bmatrix}. \quad (7.30)$$

Cette contrainte peut être abordée via la sélection appropriée du gain direct F . En effet, nous notons que (7.30) est automatiquement satisfaite lorsque F est obtenu selon

$$F = \mathcal{F}_l(G_{\beta\phi}(0), -K(0, \kappa))^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.31)$$

où $G_{\beta\phi}(s)$ est la matrice de transfert en boucle ouverte de $[u^T \ u^T]^T$ vers $[[\beta \ \phi] \ y^T]^T$, en supposant que la matrice inverse existe. En pratique, on peut récrire (7.31) d'une façon équivalente comme

$$F = \mathcal{F}_l(M, K(0, \kappa)) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.32)$$

où la matrice M est telle que

$$\mathcal{F}_l(M, K(0, \kappa)) = \mathcal{F}_l(G_{\beta\phi}(0), -K(0, \kappa))^{-1}.$$

L'existence de la matrice M est garantie par le fait que la matrice de transfert en boucle ouverte de u vers $[\beta \ \phi]$ est non singulière [174, p.242]. Le gain direct F est alors uniquement déterminé par le vecteur des variables de synthèse κ via le paramétrage continûment différentiable (7.32). Cette contrainte structurelle peut être facilement traitée dans le cadre de travail de notre méthode non lisse. En conséquence, les deux compensateurs de rétroaction et d'action directe sont synthétisés simultanément.

Conformément à la discussion de Section 7.2, les gabarits temporels en (S1) traduisant les exigences de qualité de vol peuvent être manipulés directement. Deux scénarios de base sont considérés initialement. Dans le premier scénario, un échelon unitaire est appliqué à la référence β_r tandis que les entrées v et ϕ_r sont maintenues à zéro. Des enveloppes appropriées de contraintes sont ensuite imposées aux sorties significatives. La Figure 7.15 montre les enveloppes de contraintes imposées à β et ϕ rigides pour ce scénario, ainsi que l'évolution des réponses du système tout au long de l'optimisation, en commençant par le compensateur stabilisant initial. Nous notons que des contraintes telles qu'une réponse de phase minimale pour ϕ peuvent être facilement abordées via l'enveloppe de contraintes temporelles. Dans le deuxième scénario, un échelon unitaire est appliqué à ϕ_r tandis que les deux autres entrées sont maintenues à zéro. Les enveloppes des contraintes correspondantes imposées à β et ϕ rigides sont montrées sur la Figure 7.16.

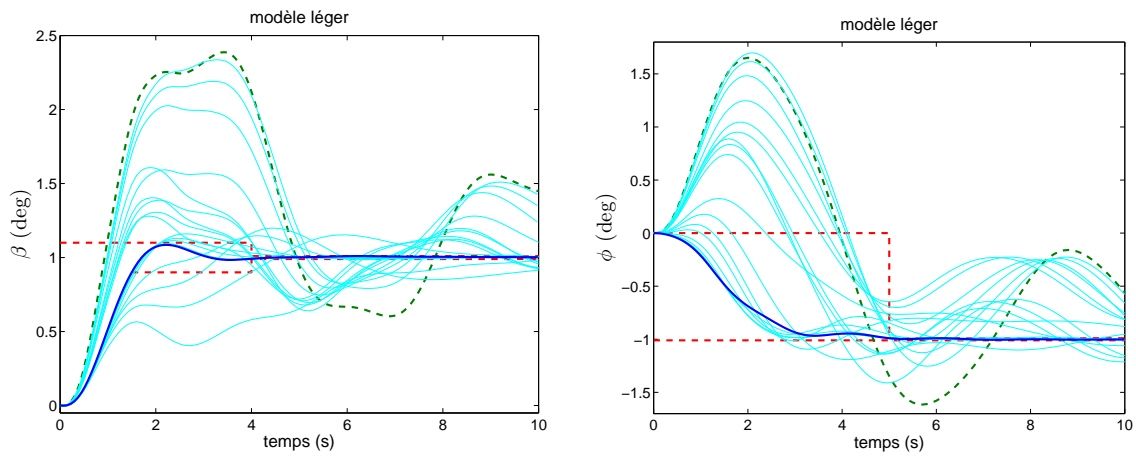


FIG. 7.15 – Évolution des réponses en boucle fermée par rapport à un échelon en β_r (tiret : compensateur stabilisant initial, solide foncé : compensateur final)

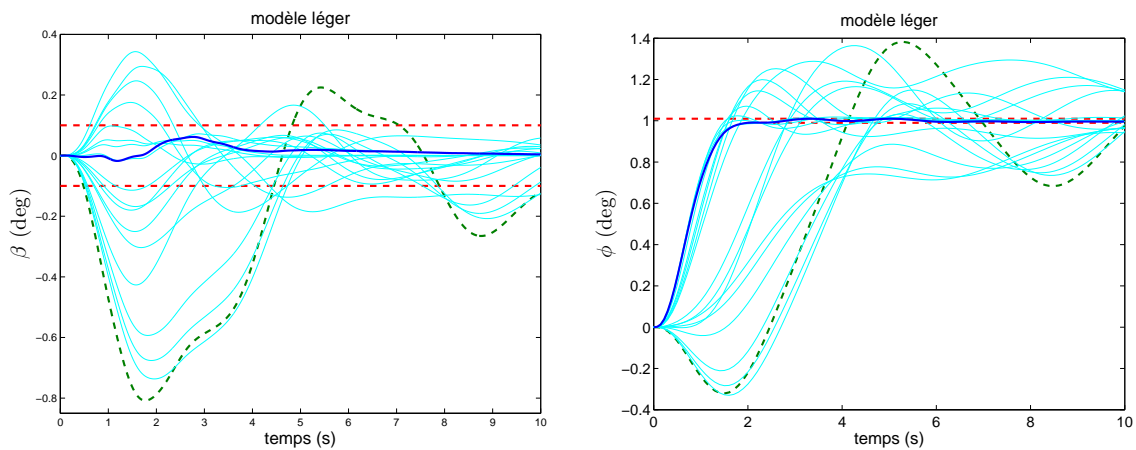


FIG. 7.16 – Évolution des réponses en boucle fermée par rapport à un échelon en ϕ_r (tiret : compensateur stabilisant initial, solide foncé : compensateur final)

Afin d'améliorer la robustesse en performance vis-à-vis des variations de chargement, comme exigé par (S5), les scénarios ci-dessus sont considérés pour les deux conditions extrêmes de chargement : le modèle le plus léger et le plus lourd. Dans le cadre de travail de la Section 7.2, cela signifie que la famille de modèles \mathcal{P} est composée de ces deux modèles, qui nous appelons léger et lourd. Ainsi, les deux configurations d'entrées test discutées antérieurement seront appliquées aux deux modèles. Il en résulte un problème comportant 4 scénarios. L'idée sous-jacente est que si l'on garantit des réponses similaires du système même pour une variation extrême de chargement, alors on peut espérer que la réponse du système sera également satisfaisante pour des chargements intermédiaires. Si la réponse du système s'avère mauvaise pour une certaine condition de chargement, alors on peut réitérer la synthèse en prenant en compte le scénario intermédiaire via une famille de modèles \mathcal{P} enrichie. Des contraintes sont également imposées sur l'abscisse spectrale en

boucle fermée via (7.12) pour les deux modèles léger et lourd afin de garantir un certaine robustesse en stabilité.

Le gain direct F ne varie pas avec la condition de chargement, de sorte que l'on doit choisir un modèle nominal en (7.31) : le modèle léger a été sélectionné. Notons, toutefois, que le cas d'un gain adaptatif pourrait être facilement traité, puisque le seul changement nécessaire serait de considérer en (7.31) les transferts $G_{\beta\phi}$ associés à chaque point d'opération.

L'amélioration du confort pendant la turbulence est obtenue par la minimisation, dans la bande de fréquences des modes flexibles, de l'amplitude des fonctions de transfert de la perturbation exogène v vers les accélérations latérales mesurées en trois points distincts du fuselage : devant (n_{y1}), au milieu (n_{y6}) et à l'arrière (n_{y11}). La Figure 7.17 montre les amplitudes des fonctions de transfert pour le système en boucle ouverte et les réponses fréquentielles obtenues en boucle fermée. Les lignes horizontales avec des tirets sur la Figure 7.17 matérialisent les limites prescrites via γ_P in (7.6).

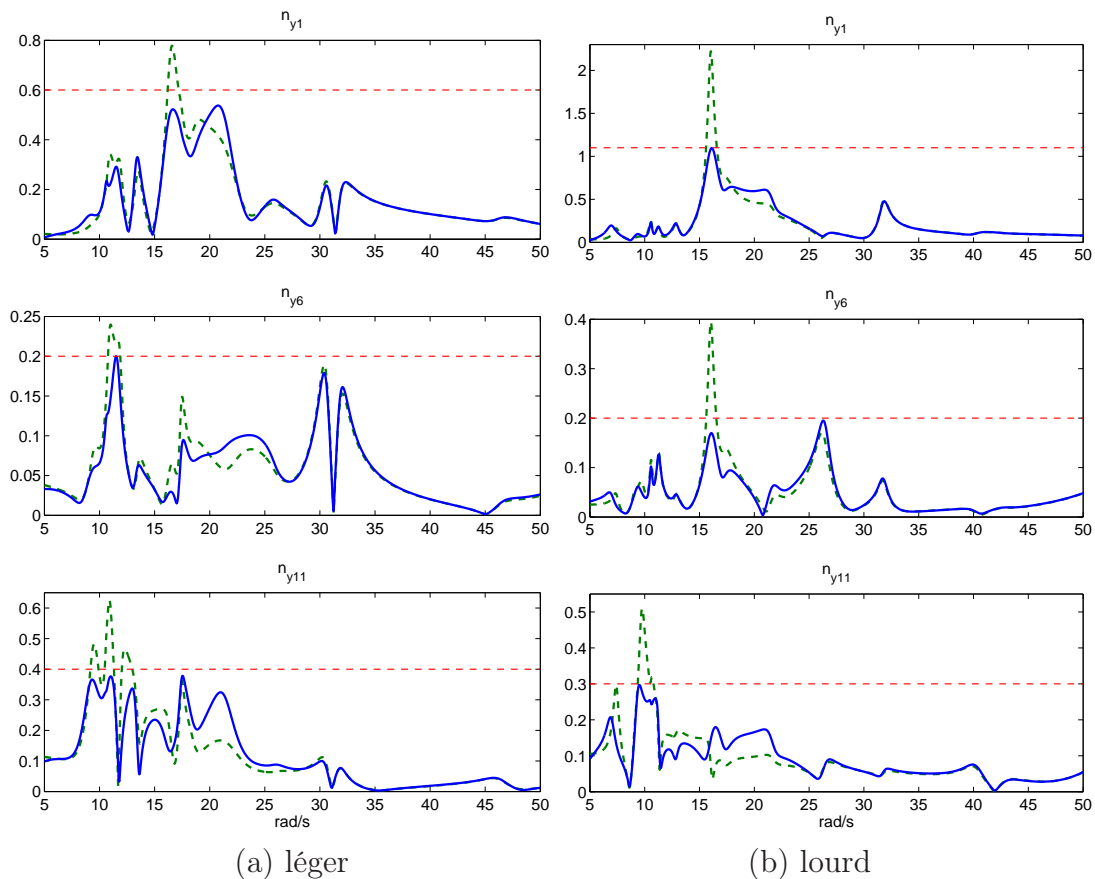


FIG. 7.17 – Amplitudes des transferts de v vers les accélérations latérales (tiret : système en boucle ouverte, solide : boucle fermée finale)

Enfin, des contraintes (7.7) sont imposées à la norme de la fonction de sensibilité $S = (I + G_y K)^{-1}$, où $G_y(s)$ dénote le transfert en boucle ouverte de u vers y , pour les

deux modèles léger et lourd. En plus d'augmenter la marge de stabilité, ces contraintes permettent d'augmenter le taux d'amortissement du roulis hollandais et des modes flexibles. La plus grande valeur singulière de S est montrée sur la Figure 7.18 pour les deux modèles léger et lourd. Les lignes en pointillés sur la Figure 7.18 représentent les limites prescrites pour les normes à travers les pondérations dynamiques W_P en (7.7).

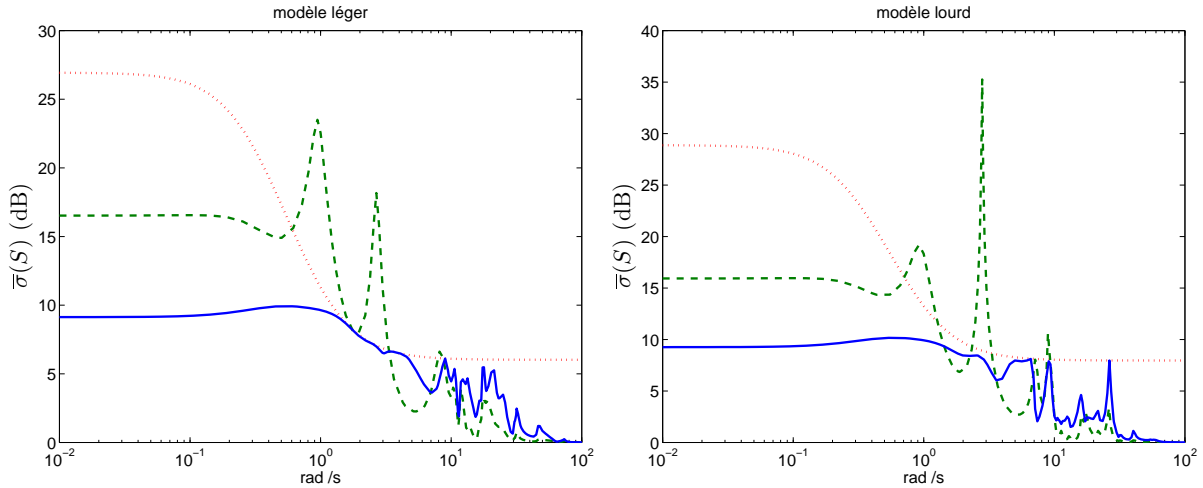


FIG. 7.18 – Plus grande valeur singulière de la fonction de sensibilité (tiret : compensateur stabilisant initial, solide : compensateur final)

Il est notoire que des simplifications pôle/zéro peuvent s'avérer critiques lorsqu'on utilise une technique fréquentielle afin de synthétiser un compensateur pour un système avec des modes flexibles. La considération de diverses conditions de chargement pendant la synthèse est un mécanisme simple pour éviter la simplification des modes flexibles. La possibilité de travailler avec un compensateur d'ordre réduit (d'ordre 10 comparé avec l'ordre 68 du système) constitue un deuxième dispositif aidant à prévenir des simplifications pôle/zéro.

Le critère H_2 /PRLQG utilisé en [2] est une option alternative permettant d'augmenter le taux d'amortissement de modes flexibles. Cette approche requiert la construction d'une représentation linéaire fractionnaire (RLF) modelant les incertitudes paramétriques sur les modes flexibles. Nous n'avons pas adopté cette solution car un modèle du type RLF suggère l'utilisation de la synthèse μ comme outil, avec toutes les difficultés indiquées précédemment par rapport à l'ordre et à la structure du compensateur.

La Figure 7.19 montre l'évolution de la position des pôles en boucle fermée dans le plan complexe en fonction de la variation de gain du compensateur de 0 à 100%. Comme exigé, le taux d'amortissement du roulis hollandais a été significativement augmenté ainsi que celui des premiers modes flexibles. De plus, aucune dégradation critique des taux d'amortissement n'est observée.

Les réponses du système en boucle fermée pour les six différentes conditions de chargement sont montrées sur la Figure 7.20, plus précisément l'angle de lacet rigide β , ainsi

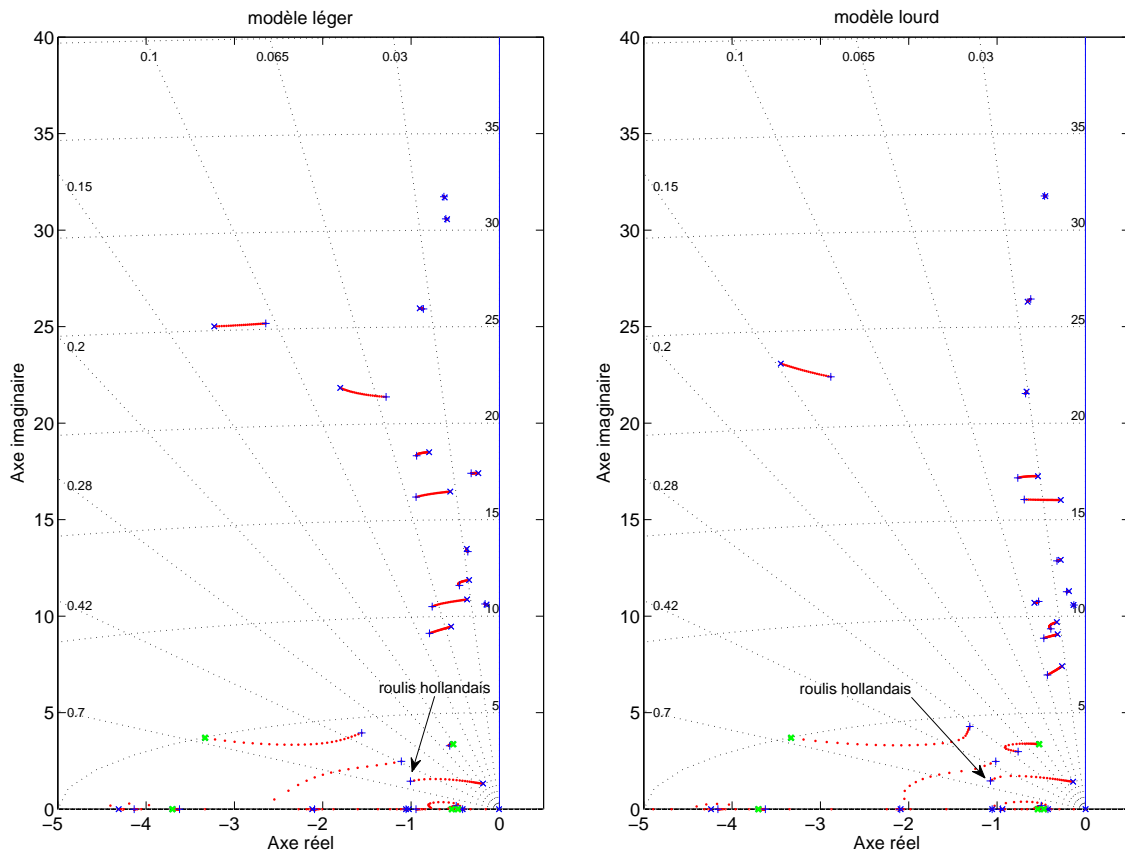


FIG. 7.19 – Analyse du lieu de racines ('x' : boucle ouverte, '+' :boucle fermée)

que la vitesse de roulis p_6 , la vitesse de lacet r_6 et l'angle de roulis ϕ_6 mesurés au milieu du fuselage. Les réponses du système satisfont les contraintes de qualité de vol et la robustesse en performance et en stabilité. En résumé, le système en boucle fermée satisfait clairement les exigences de confort et de taux d'amortissement pour toutes les conditions de chargement.

7.6.3 Conclusion

Nous avons synthétisé une commande de vol pour le mouvement latéral d'un avion fortement flexible sujet à des perturbations exogènes et à différentes conditions de chargement. Un compensateur de rétroaction d'ordre réduit ainsi qu'un compensateur d'action directe statique ont été synthétisés simultanément sans avoir recours à aucun mécanisme de réduction d'ordre. Il s'agit d'une application difficile qui comprend un modèle d'ordre élevé, plusieurs conditions d'opération, des spécifications temporelles et fréquentielles strictes, ainsi que des contraintes structurelles sur la loi de commande. La technique d'optimisation non lisse proposée a permis encore une fois de déterminer une solution satisfaisant un ensemble de contraintes conflictuelles.

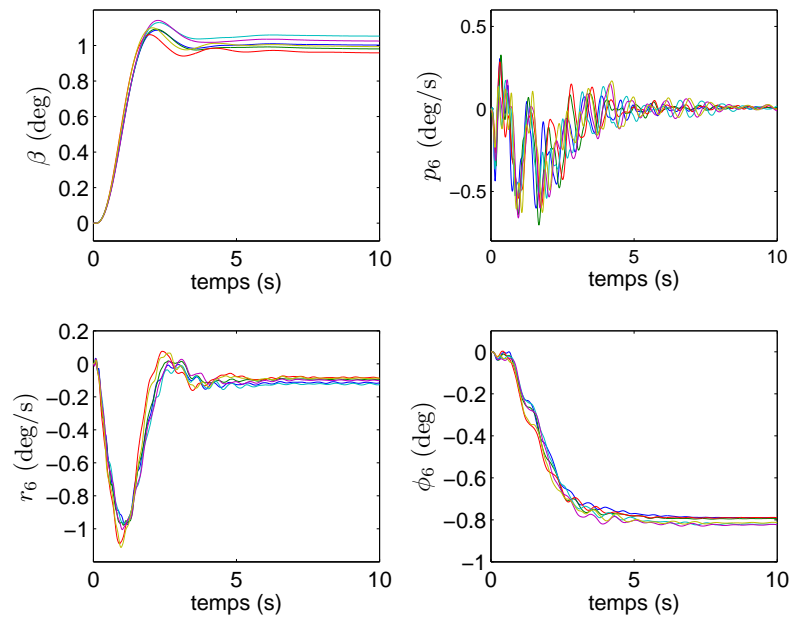
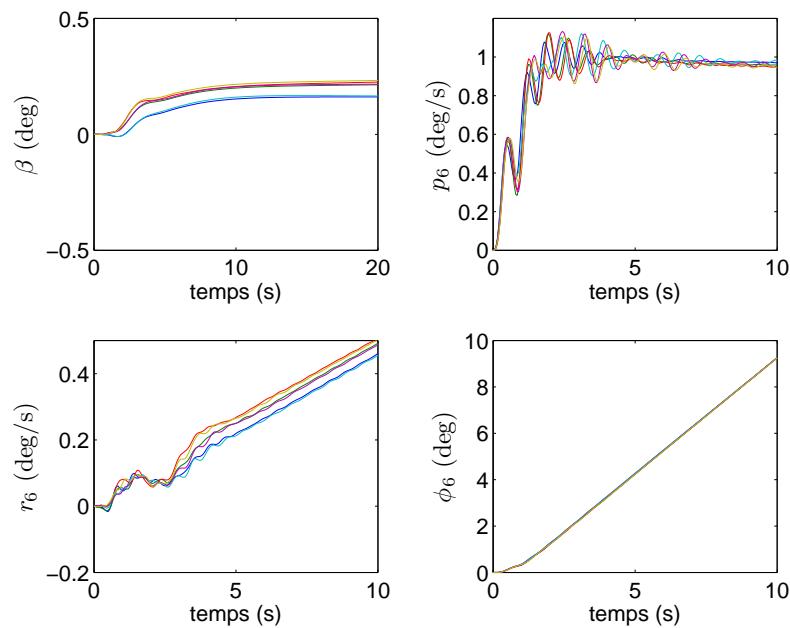
(a) réponse à un échelon en β_r .(b) réponse à une rampe en ϕ_r .

FIG. 7.20 – Réponses du système en boucle fermée pour différentes configurations de chargement

La méthode non lisse est de nature locale. Comme nous l'avons démontré dans de nombreuses applications, il s'agit d'un inconvénient mineur largement compensé par la possibilité de prendre en compte un ensemble riche de contraintes pratiques dans un cadre réaliste.

Chapitre 8

Conclusion Générale

DANS ce chapitre, nous faisons un bilan des approches développées afin de mettre en lumière les apports de notre travail. Nous indiquons également quelques possibilités de recherches futures. Commençons par un résumé de notre contribution d'un point de vue méthodologique :

- Contrairement à l'approche classique où des contraintes fréquentielles sont traitées par des filtres de pondération intervenant sur la totalité de l'axe fréquentiel, la méthode non lisse fréquentielle multibande introduite au Chapitre 4 permet de façonner les différentes fonctions de sensibilité sur des bandes choisies de fréquences. La sélection d'éventuelles fonctions de pondération est facilitée dans la méthode non lisse car chaque fonction n'est considérée que sur un intervalle limité de fréquences. Par ailleurs, la méthode non lisse multibande peut faire appel à différentes formes standard de synthèse, évitant ainsi le conservatisme associé aux transferts croisés entre les spécifications comme c'est le cas en synthèse H_∞ classique.
- La méthode non lisse dans le domaine temporel du Chapitre 5 permet d'imposer des contraintes sur les trajectoires du système en boucle fermée, y compris états et commandes. Des spécifications de performance telles qu'un dépassement limité, un temps de montée ou de réponse faibles sont alors facilement prises en compte en définissant une enveloppe de contraintes. L'enveloppe de contraintes s'avère plus appropriée que l'approche modèle de référence. De plus, la méthode non lisse permet de traiter les contraintes temporelles comme des contraintes de programmation dures. Par conséquent, des limites opérationnelles sur le système comme la saturation des actionneurs peuvent être facilement abordées.
- La méthode non lisse temporelle multiscénario du Chapitre 6 généralise le concept de contrainte temporelle usuelle. Par exemple, elle offre la possibilité de combiner différentes entrées test et enveloppes de contraintes et est donc particulièrement adaptée pour obtenir un découplage des réponses sous l'effet de sollicitations de diverses natures. De la même façon, la possibilité de considérer différentes entrées appliquées à une famille de modèles facilite la détermination d'un compensateur du type *reliable control*. La méthode permet également la synthèse d'un compensateur structuré satisfaisant des contraintes temporelles pour un ensemble fini de conditions

de fonctionnement du système. Cette approche multimodèle est particulièrement intéressante car les techniques de synthèse robuste avec incertitudes paramétriques sont encore immatures tant sur le plan théorique que numérique.

- La méthode non lisse multiobjectif du Chapitre 7 constitue une généralisation des méthodes antérieures et de ce fait elle hérite de toutes les améliorations méthodologiques notées précédemment. De plus, la méthode permet de gérer simultanément de multiples contraintes définies à la fois dans les domaines temporel et fréquentiel, ainsi que des contraintes structurelles sur la loi de commande. Les spécifications ici encore peuvent être traitées directement telles qu'elles apparaissent dans le cahier des charges ingénieur.

D'un point de vue applicatif, une préoccupation constante dans notre travail a été la validation et l'évaluation des méthodes non lisses proposées à partir de problèmes réalistes de synthèse de compensateurs structurés. Lorsque des méthodes déterministes alternatives étaient disponibles, nous avons cherché à les comparer avec notre méthode non lisse. Un travail important de codage a été mené pour la construction d'un ensemble de programmes MATLAB, avec une attention spéciale aux problèmes numériques. L'implémentation adéquate d'un algorithme d'optimisation est toujours une tâche délicate. De nombreux tests et réglages sont nécessaires pour obtenir un algorithme fiable numériquement avec une convergence satisfaisante.

Au vu des résultats numériques obtenus dans ce travail, nous tirons quelques conclusions concernant les avantages et inconvénients des techniques non lisses proposées :

- La méthode non lisse multiobjectif du Chapitre 7 en particulier permet de manipuler aisément de multiples contraintes définies simultanément dans les domaines temporel et fréquentiel, ainsi que des contraintes structurelles sur la loi de commande. La possibilité d'intégrer des spécifications directement telles qu'elles apparaissent dans le cahier des charges est l'atout principal de ces techniques. La famille de critères de synthèse qui peuvent être incorporés au cadre de travail est particulièrement riche.
- La possibilité de gérer plusieurs modèles correspondant par exemple à différents modes de fonctionnement du système est également intéressante sur le plan pratique pour aborder les problèmes d'incertitudes paramétriques de manière non conservative.
- De par sa construction la technique non lisse travaille dans un espace réduit de variables, celles du compensateur. Elle évite ainsi l'explosion en dimension caractéristique des méthodes de type LMI du fait du recours à des variables auxiliaires (variables de Lyapunov, *scalings*, multiplicateurs, etc). On peut ainsi traiter des systèmes de plus grande dimension que par ces dernières approches.
- L'approche non lisse offre une grande flexibilité pour la sélection de l'ordre du modèle de travail, du fait que ce dernier est indépendant de celui du compensateur.
- Le problème tangent qui est au coeur du code est résolu par un algorithme de programmation quadratique convexe très performant. Il s'ensuit que le temps processeur associé au problème tangent est négligeable. Le temps de calcul global est dominé principalement par le temps de calcul des critères et l'assemblage des sous-gradients. Nous avons pu observer que le temps de calcul croît linéairement avec le nombre de critères (scénarios, contraintes sur des bandes fréquentielles, contraintes

H_2 , etc) ce qui est une caractéristique favorable. Du point de vue algorithmique, la technique non lisse est complètement parallélisable car les critères et contraintes sont déterminés indépendamment. Cette option est une voie future pour l'amélioration de code.

- Le temps processeur dans la méthode non lisse est impacté plus significativement par le nombre de variables de synthèse représentées par les paramètres libres du compensateur. Dans le cas des spécifications temporelles par exemple, le nombre de simulations requises pour le calcul des gradients est directement proportionnel au nombre de paramètres du compensateur. En conséquence, la méthode n'est pas appropriée pour la synthèse de compensateurs complexes. Le contexte idéal est celui d'un système limité à quelques centaines d'états avec un compensateur simple.
- La technique d'optimisation non lisse basée sur le concept de fonction de progrès permet d'éviter les complications inhérentes aux approches du type pénalité classique en termes de conditionnement numérique et de temps d'exécution. En revanche, la technique peut avoir une convergence excessivement lente en phase II lorsque la contrainte est proche de la saturation. Il existe différentes possibilités pour améliorer la convergence locale. En particulier en prenant en compte des éléments du second ordre comme dans les approches quasi-Newton mais ceci dépasse le cadre de notre travail.
- Comme indiqué précédemment lors de l'Introduction Générale dans le Chapitre 1, on constate que l'initialisation de l'algorithme non lisse n'est pas critique en pratique. Ce qui d'une certaine manière constitue une surprise. Ceci a pu être vérifié à travers de nombreux tests tant avec les méthodes originelles plus simples qu'avec les méthodes discutées ici. Le caractère local des méthodes non lisse est un handicap mineur qui est largement compensé par les facilités pratiques que nous avons exposées tout au long de notre travail. Les méthodes non lisses abandonnent la convexité certes, mais pour le bien et le confort de la pratique de l'ingénieur.

Des possibilités futures de recherche découlent naturellement de la réflexion sur les limitations de notre approche non lisse. D'abord d'un point de vue applicatif, il existe encore d'autres classes de problèmes importants pour lesquels l'approche non lisse peut fournir des solutions nouvelles. Nous pensons par exemple au problème de synthèse simultanée de la loi de commande et des filtres pour la détection et isolation de pannes. Ce problème peut être facilement couvert par notre cadre de travail. Le critère H_- , particulièrement populaire dans la littérature traitant de la détection de pannes [161, 93], peut être facilement incorporé à notre approche car il possède des propriétés similaires à celles de la norme H_∞ .

La possibilité d'inclure dans le cadre de travail de la technique multiobjectif du Chapitre 7 des spécifications de robustesse concernant des incertitudes paramétriques structurées est une extension possible. Par exemple, l'optimisation non lisse a été utilisée récemment pour résoudre des problèmes de synthèse avec des contraintes du type IQC (de l'anglais *integral quadratic constraints*) [10]. Le formalisme IQC permet d'aborder divers problèmes de synthèse, y compris la robustesse paramétrique. Ce domaine qui pose des difficultés sérieuses sur le plan numérique doit être poursuivi.

Enfin, il est essentiel d'améliorer la convergence locale des algorithmes en incorporant des éléments du second ordre. Il s'agit d'une voie de recherche peu explorée qui doit permettre en phase terminale d'accélérer la localisation des solutions et de réduire le nombre d'itérations.

Bibliographie

- [1] L. A. AGUIRRE. « Quantitative Measure of Modal Dominance for Continuous Systems ». *Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control*, pages 2405–2410, December 1993.
- [2] D. ALAZARD. « Robust H_2 design for lateral flight control of highly flexible aircraft ». *AIAA J. of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(3), 2002.
- [3] D. ALAZARD, J.P. CHRÉTIEN et M. Le DU. « Attitude control of a telescope with flexible modes ». Dans *Dynamic and Control of Large Structures in Space*, pages 15–19, London, UK, June 1996.
- [4] B. D. O. ANDERSON et Y. LIU. « Controller reduction : concepts and approaches ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 34(8) :802–812, Aug 1989.
- [5] J. ANDERSSON. « A Survey of Multiobjective Optimization in Engineering Design ». Rapport Technique LiTH-IKP-R-1097, Department of Mechanical Engineering, Linköping University, 2000.
- [6] L. ANGQUIST, B. LUNDIN et J. SAMUELSSON. « Power Oscillation Damping Using Controlled Reactive Power Compensation - A Comparison Between Series and Shunt Approaches ». *IEEE Trans. Power Syst.*, 8(2) :687–700, May 1993.
- [7] N. AOUF, B. BOULET et R. BOTEZ. « H_2 and H_∞ -optimal gust load alleviation for a flexible aircraft ». *American Control Conference, 2000. Proceedings of the 2000*, 3 :1872–1876 vol.3, 2000.
- [8] P. APKARIAN, V. BOMPART et D. NOLL. « Nonsmooth Structured Control Design with Application to PID Loop-Shaping of a Process ». *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 17(14) :1320–1342, 2007.
- [9] P. APKARIAN et D. NOLL. « Controller Design via Nonsmooth Multidirectional Search ». *SIAM J. Control Optim.*, 44(6) :1923–1949, 2006.
- [10] P. APKARIAN et D. NOLL. « IQC analysis and synthesis via nonsmooth optimization ». *Systems & Control Letters*, 55(12) :971 – 981, 2006.
- [11] P. APKARIAN et D. NOLL. « Nonsmooth H_∞ synthesis ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 51(1) :71–86, Jan. 2006.
- [12] P. APKARIAN et D. NOLL. « Nonsmooth Optimization for Multidisk H_∞ Synthesis ». *European J. of Control*, 12(3) :229–244, 2006.
- [13] P. APKARIAN et D. NOLL. « Nonsmooth optimization for multiband frequency domain control design ». *Automatica*, 43(4) :724 – 731, 2007.

- [14] P. APKARIAN, D. NOLL et A. RONDEPIERRE. « Mixed H_2/H_∞ Control via Nonsmooth Optimization ». *SIAM J. Control Optim.*, 47(3) :1516–1546, 2008.
- [15] P. APKARIAN, O. PROT et D. NOLL. « A proximity control algorithm to minimize nonsmooth and nonconvex semi-infinite maximum eigenvalue functions ». *Journal of Convex Analysis*, 16(4), 2009.
- [16] P. APKARIAN, A. M. SIMÕES et D. NOLL. « Multi-scenario time-domain control design using a nonsmooth approach ». Dans *Proceedings of the 8th International Conference on System Identification and Control Problems (SICPRO 09)*, Moscow, Jan 2009.
- [17] W. F. ARNOLD et A. J. LAUB. « Generalized eigenproblem algorithms and software for algebraic Riccati equations ». *Proceedings of the IEEE*, 72(12) :1746–1754, Dec. 1984.
- [18] H. W. BODE. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. Van Nostrand, New York, 1945.
- [19] V. BOMPART. « *Optimisation non lisse pour la commande des systemes de l'Aéronautique* ». PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2007.
- [20] V. BOMPART, P. APKARIAN et D. NOLL. « Non-smooth techniques for stabilizing linear systems ». *American Control Conference, 2007. ACC '07*, pages 1245–1250, July 2007.
- [21] V. BOMPART, P. APKARIAN et D. NOLL. « Control design in the time and frequency domain using nonsmooth techniques ». *Systems & Control Letters*, 57(3) :271 – 282, 2008.
- [22] G. E. BOUKARIM, S. WANG, J. H. CHOW, G. N. TARANTO et N. MARTINS. « A comparison of classical, robust, and decentralized control designs for multiple power system stabilizers ». *IEEE Trans. Power Syst.*, 15(4) :1287–1292, Nov 2000.
- [23] S. BOYD et V. BALAKRISHNAN. « A regularity result for the singular values of a transfer matrix and a quadratically convergent algorithm for computing its L_∞ -norm ». *Syst. Control Lett.*, 15(1) :1–7, 1990.
- [24] S. BOYD, V. BALAKRISHNAN et P. KABAMBA. « A bisection method for computing the H_∞ norm of a transfer matrix and related problems ». *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2(3) :207–219, September 1989.
- [25] S. BOYD et C. BARRATT. *Linear Controller Design : Limits of Performance*. Prentice-Hall, 1991.
- [26] S. BOYD, L. EL GHAOUI, E. FERON et V. BALAKRISHNAN. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15 de *Studies in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, PA, juin 1994.
- [27] S. BOYD et L. VANDENBERGHE. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [28] N. A. BRUINSMA et M. STEINBUCH. « A fast algorithm to computer the H_∞ -norm of a transfer function matrix ». *Syst. Control Lett.*, 14(4) :287–293, 1990.

- [29] F. De BRUYNE. « Iterative feedback tuning for internal model controllers ». *Control Engineering Practice*, 11(9) :1043 – 1048, 2003. Special Section on Algorithms and Applications of Iterative Feedback Tuning.
- [30] J. V. BURKE, D. HENRION, A. S. LEWIS et M. L. OVERTON. « Stabilization via Nonsmooth, Nonconvex Optimization ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 51(11) :1760–1769, Nov. 2006.
- [31] J. V. BURKE, A. S. LEWIS et M. L. OVERTON. « Approximating Subdifferentials by Random Sampling of Gradients ». *Math. Oper. Res.*, 27(3) :567–584, 2002.
- [32] J. V. BURKE, A. S. LEWIS et M. L. OVERTON. « Two numerical methods for optimizing matrix stability ». *Linear Algebra and its Applications*, 351-352 :117 – 145, 2002.
- [33] J. V. BURKE, A. S. LEWIS et M. L. OVERTON. « A Robust Gradient Sampling Algorithm for Nonsmooth, Nonconvex Optimization ». *SIAM J. on Optimization*, 15(3) :751–779, 2005.
- [34] J. V. BURKE et M. L. OVERTON. « Differential properties of the spectral abscissa and the spectral radius for analytic matrix-valued mappings ». *Nonlinear Anal.*, 23(4) :467–488, 1994.
- [35] J. V. BURKE et M. L. OVERTON. « Variational analysis of non-Lipschitz spectral functions ». *Mathematical Programming*, 90(2) :317–351, 2001.
- [36] J. C. BUTCHER. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Wiley, England, 2008.
- [37] R. BYERS. « A Bisection Method for Measuring the Distance of a Stable Matrix to the Unstable Matrices ». *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 9(5) :875–881, 1988.
- [38] A. CASAVOLA et E. MOSCA. « Minimization of a closed-loop response to a fixed input for SISO systems ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 42(11) :1581–1587, Nov 1997.
- [39] B.-S. CHEN et Y.-M. CHENG. « A structure-specified H_∞ optimal control design for practical applications : a genetic approach ». *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 6(6) :707–718, Nov 1998.
- [40] N. CHISTL, R. HEDIN, K. SADEK, P. LUTZELHERGER, P. E. KRAUSE, S. M. MCKENNA, A. H. MONLOYA et D. TORGERSON. « Advanced Series Compensation with Thyristor Controlled Impedance ». *CIGRE paper 14/37/38-05*, 1992.
- [41] B. W. CHOI, D.-W. GU et I. POSTLETHWAITE. « Low-order H_∞ suboptimal controllers ». *Control Theory and Applications, IEE Proceedings -*, 141(4) :243–248, Jul 1994.
- [42] CIGRE TF 38.02.16. « Impact of the Interactions among Power System Controls ». Rapport Technique 166, CIGRE, Paris, Jul 2000.
- [43] F. H. CLARKE. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Canadian Math. Soc. Series. John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [44] M. A. DAHLEH et J. B. PEARSON. « Minimization of a regulated response to a fixed input ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 33(10) :924–930, Oct 1988.

- [45] C. DESOER, R.-W. LIU, J. MURRAY et R. SAEKS. « Feedback system design : the fractional representation approach to analysis and synthesis ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 25(3) :399–412, Jun 1980.
- [46] J. R. DORMAND et P. J. PRINCE. « A family of embedded Runge-Kutta formulae ». *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 6(1) :19 – 26, 1980.
- [47] J. DOYLE et G. STEIN. « Multivariable feedback design : Concepts for a classical/modern synthesis ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 26(1) :4–16, Feb 1981.
- [48] J. C. DOYLE, K. GLOVER, P. P. KHARGONEKAR et B. A. FRANCIS. « State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 34(8) :831–847, Aug 1989.
- [49] Y. EBIHARA et T. HAGIWARA. « New dilated LMI characterizations for continuous-time multiobjective controller synthesis ». *Automatica*, 40(11) :2003 – 2009, 2004.
- [50] L. EL GHAOU, F. OUSTRY et M. AITRAMI. « A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 42(8) :1171–1176, Aug 1997.
- [51] ELETROBRAS GCOI/SCEL TASK FORCE FT-NSPRE/R. « FT-NSPRE/R final report - Retuning Stabilizers for the North-South Brazilian Interconnection ». Rapport Technique, Rio de Janeiro, Brazil, 1998 (in Portuguese).
- [52] N. ELIA et M. A. DAHLEH. « Controller design with multiple objectives ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 42(5) :596–613, May 1997.
- [53] B. FARES, P. APKARIAN et D. NOLL. « An augmented Lagrangian method for a class of LMI-constrained problems in robust control theory ». *International Journal of Control*, 74 :348–360(13), 10 March 2001.
- [54] B. FARES, D. NOLL et P. APKARIAN. « Robust Control via Sequential Semidefinite Programming ». *SIAM J. Control Optim.*, 40(6) :1791–1820, 2001.
- [55] P. J. FLEMING et R. C. PURSHOUSE. « Evolutionary algorithms in control systems engineering : a survey ». *Control Engineering Practice*, 10(11) :1223 – 1241, 2002.
- [56] C. M. FONSECA et P. J. FLEMING. « Multiobjective optimization and multiple constraint handling with evolutionary algorithms. I. A unified formulation ». *Systems, Man and Cybernetics, Part A, IEEE Transactions on*, 28(1) :26–37, Jan 1998.
- [57] M. A. FRANCKEK et P. A. HERMAN. « Direct connection between time-domain performance and frequency-domain characteristics ». *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8(12) :1021–1042, 1998.
- [58] B. A. FRANCIS. *A course in H_∞ control theory*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1986.
- [59] G. F. FRANKLIN, J. D. POWELL et A. EMAMI-NAENI. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Prentice Hall, 2006.
- [60] G. F. FRANKLIN, M. L. WORKMAN et D. POWELL. *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1997.

- [61] P. GAHINET. « A convex parametrization of H_∞ suboptimal controllers ». *Decision and Control, 1992., Proceedings of the 31st IEEE Conference on*, pages 937–942 vol.1, 1992.
- [62] P. GAHINET et P. APKARIAN. « Numerical computation of the L_∞ norm revisited ». *Decision and Control, 1992., Proceedings of the 31st IEEE Conference on*, pages 2257–2258 vol.2, 1992.
- [63] P. GAHINET et P. APKARIAN. « A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Control ». *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 4 :421–448, 1994.
- [64] C. GAMA, R. L. LEONI, J. C. SALOMÃO, J. B. GRIBEL, R. FRAGA, M. J. X. EIRAS, W. PING, A. RICARDO et J. CAVALCANTI. « Brazilian North-South Interconnection - Application of Thyristor Controlled Series Compensation to Damp Inter-Area Oscillation Mode ». Dans *Proc. Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning - SEPOPE*, Brazil, 1998.
- [65] C. GAMA, L. ÄNGQUIST, G. INGESTRÖM et M. NOROOZIAN. « Commissioning and operative experience of TCSC for damping power oscillation in the Brazilian North-South interconnection ». Dans *Proc. CIGRE Session 2000*, Paper 14-104, Paris, France, 2000.
- [66] H. GAO, J. LAM et C. WANG. « Controller reduction with H_∞ error performance : continuous- and discrete-time cases ». *International Journal of Control*, 79(6) :604–616, Jun 2006.
- [67] A. GHAFOR et V. SREERAM. « Frequency Weighted Balanced Model Reduction : A Survey ». *Control, Automation, Robotics and Vision, 2006. ICARCV '06. 9th International Conference on*, pages 1–6, Dec 2006.
- [68] L. EL GHAOUI et P. GAHINET. « Rank Minimization under LMI Constraints : A Framework for Output Feedback Problems ». *European Control Conference, 1993. Proceedings of the*, 1993.
- [69] G. GIORGI, A. GUERRAGGIO et J. THIERFELDER. *Mathematics of Optimization : Smooth and Nonsmooth Case*. Elsevier Science, 2004.
- [70] K. GLOVER et J. C. DOYLE. « State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ -norm bound and relations to risk sensitivity ». *Syst. Control Lett.*, 11(3) :167–172, September 1988.
- [71] P. J. GODDARD et K. GLOVER. « Controller approximation : approaches for preserving H_∞ performance ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 43(7) :858–871, Jul 1998.
- [72] S. GOMES JR., N. MARTINS et C. M. J. PORTELA. « Computing small-signal stability boundaries for large-scale power systems ». *IEEE Trans. Power Syst.*, 18 :747–752, May 2003.
- [73] M. GREEN et D. J. N. LIMEBEER. *Linear Robust Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.
- [74] K. M. GRIGORIADIS et E. B. BERAN. « *Advances in linear matrix inequality methods in control : advances in design and control* », Chapitre «Alternating projection algorithms for linear matrix inequalities problems with rank constraints», pages

- 251–267. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1999.
- [75] K. M. GRIGORIADIS et R. E. SKELTON. « Low-order control design for LMI problems using alternating projection methods ». *Automatica*, 32(9) :1117–1125, 1996.
- [76] S. GUGERCIN et A. C. ANTOULAS. « A survey of model reduction by balanced truncation and some new results ». *International Journal of Control*, 77(8) :748–766, May 2004.
- [77] S. GUMUSSOY, D. HENRION, M. MILLSTONE et M. L. OVERTON. « Multiobjective Robust Control with HIFOO 2.0 ». *ROCOND 2009*, 2009.
- [78] S. GUMUSSOY, M. MILLSTONE et M. L. OVERTON. « H_∞ strong stabilization via HIFOO, a package for fixed-order controller design ». *Decision and Control, CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, pages 4135–4140, Dec. 2008.
- [79] S. GUMUSSOY et M. L. OVERTON. « Fixed-order H_∞ controller design via HIFOO, a specialized nonsmooth optimization package ». *American Control Conference, 2008*, pages 2750–2754, June 2008.
- [80] W. M. HADDAD et D. S. BERNSTEIN. « Generalized Riccati equations for the full- and reduced-order mixed-norm H_2/H_∞ standard problem ». *Decision and Control, 1989., Proceedings of the 28th IEEE Conference on*, pages 397–402 vol.1, 13-15 Dec 1989.
- [81] M. E. HALPERN. « Rational suboptimal continuous-time controller design ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 45(9) :1731–1734, Sep 2000.
- [82] D. HENRION, S. TARBOURIECH et V. KUCERA. « Control of linear systems subject to time-domain constraints with polynomial pole placement and LMIs ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 50(9) :1360–1364, Sept. 2005.
- [83] J.-B. HIRIART-URRUTY et C. LEMARECHAL. *Convex Analysis and Minimization Algorithms I : Fundamentals (Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften)*. Springer, October 1993.
- [84] H. HJALMARSSON. « Iterative feedback tuning - an overview ». *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 16(5) :373–395, 2002.
- [85] H. HJALMARSSON, M. GEVERS, S. GUNNARSSON et O. LEQUIN. « Iterative Feedback Tuning : theory and applications ». *Control Systems Magazine, IEEE*, 18(4) :26–41, Aug 1998.
- [86] S.-J. HO, S.-Y. HO, M.-H. HUNG, L.-S. SHU et H.-L. HUANG. « Designing structure-specified mixed H_2/H_∞ optimal controllers using an intelligent genetic algorithm IGA ». *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 13(6) :1119–1124, Nov. 2005.
- [87] H. G. HOANG, H. D. TUAN et P. APKARIAN. « A Lyapunov Variable-Free KYP Lemma for SISO Continuous Systems ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 53(11) :2669–2673, Dec. 2008.
- [88] I. HOROWITZ. « Quantitative feedback theory ». *Control Theory and Applications, IEE Proceedings D*, 129(6) :215–226, November 1982.

- [89] S. HOSOE. « LMI approach to an H_∞ -control problem with time-domain constraints over a finite horizon ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 43(8) :1128–1132, Aug 1998.
- [90] IEEE FACTS WORKING GROUP 15.05.15 IN COOPERATION WITH CIGRE. *FACTS Overview*. IEEE Special Publication 96-TP-108, 1996.
- [91] T. IWASAKI et S. HARA. « Generalized KYP lemma : unified frequency domain inequalities with design applications ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 50(1) :41–59, Jan. 2005.
- [92] T. IWASAKI et R. E. SKELTON. « All controllers for the general H_∞ control problem : LMI existence conditions and state space formulas ». *Automatica*, 30(8) :1307–1317, 1994.
- [93] I. M. JAIMOUKHA, Z. LI et V. PAPAKOS. « A matrix factorization solution to the H_-/H_∞ fault detection problem ». *Automatica*, 42(11) :1907 – 1912, 2006.
- [94] H. JANSSON et H. HJALMARSSON. « Gradient approximations in iterative feedback tuning for multivariable processes ». *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 18(8) :665–681, 2004.
- [95] Jr. J.E. DENNIS et R.SCHNABEL. *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. SIAM's Classics in Applied Mathematics. SIAM, 1996.
- [96] A. J. F. KERI, B. J. WARE, R. A. BYRON, M. CHAMIA, P. HALVARSSON et L. ÄNGQUIST. « Improving Transmission System Performance Using Controlled Series Capacitors ». *CIGRE paper 14/37/38-07*, 1992.
- [97] H. K. KHALIL. *Nonlinear systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 2002.
- [98] F. KUBICA, T. LIVET, X. Le TRON et A. BUCHARLES. « Parameter-robust flight control system for a flexible aircraft ». *Control Engineering Practice*, 3(9) :1209 – 1215, 1995.
- [99] E. V. LARSEN, J. J. SANCHEZ-GASCA et J. H. CHOW. « Concepts for Design of FACTS Controllers to Damp Power Swings ». *IEEE Trans. Power Syst.*, 10(2) :948–956, May 1995.
- [100] B. LASSAMI et S. FONT. « Backstepping Controller Retuning using ϵ Subdifferential Optimization ». *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05. 44th IEEE Conference on*, pages 5119–5125, Dec. 2005.
- [101] B. LASSAMI et S. FONT. « Linear Controller Retuning Approach Based on Non-convex Nonsmooth Optimization ». *Computer-Aided Control Systems Design, 2006 IEEE International Symposium on*, pages 1522–1527, Oct. 2006.
- [102] B. LASSAMI, S. FONT et H. SIGUERDIDJANE. « Nonsmooth Optimization for Nonlinear Missile Autopilot : Improvement under Time Domain Constraints ». *Intelligent Control, 2006. IEEE International Symposium on*, pages 2559–2564, Oct. 2006.
- [103] D. J. LEITH et W. E. LEITHEAD. « Survey of gain-scheduling analysis and design ». *International Journal of Control*, 73(11) :1001–1025, Jul 2000.

- [104] O. LEQUIN, M. GEVERS, M. MOSSBERG, E. BOSMANS et L. TRIEST. « Iterative feedback tuning of PID parameters : comparison with classical tuning rules ». *Control Engineering Practice*, 11(9) :1023 – 1033, 2003. Special Section on Algorithms and Applications of Iterative Feedback Tuning.
- [105] X. P. LI et B. C. CHANG. « A parametrization approach to reduced-order H_∞ controller design ». *Decision and Control, 1993., Proceedings of the 32nd IEEE Conference on*, pages 2909–2912 vol.3, 15-17 Dec 1993.
- [106] F. LIAO, J. L. WANG et G.-H. YANG. « Reliable robust flight tracking control : an LMI approach ». *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 10(1) :76–89, Jan 2002.
- [107] K.-Z. LIU et R. HE. « A simple derivation of ARE solutions to the standard H_∞ control problem based on LMI solution ». *Syst. Control Lett.*, 55(6) :487–493, June 2006.
- [108] G. S. LUZ, N. J. P. MACEDO et V. R. OLIVEIRA. « Furnas TCSC - An example of using different simulation tools for performance analysis ». Dans *Proc. International Conference on Power System Transients*, Rio de Janeiro, Brazil, 2001.
- [109] A. G. J. MACFARLANE et I. POSTLETHWAITE. « The generalized Nyquist stability criterion and multivariable root loci ». *International Journal of Control*, 25 :81–127, 1977.
- [110] N. MARTINS, A. A. BARBOSA, J. C. R. FERRAZ, M. G. SANTOS, A. L. B. BERGAMO, C. S. YUNG, V. R. OLIVEIRA et N. J. P. MACEDO. « Retuning Stabilizers for the North-South Brazilian Interconnection ». Dans *Proc. IEEE Power Engineering Society Summer Meeting*, volume 1, pages 58–67, Edmonton, Alberta, Canada, Jul 1999.
- [111] N. MARTINS, H. J. C. P. PINTO, C. GAMA, J. A. CAVALCANTI, R. L. LEONI, R. V. SOUTO, N. J. P. NILO et M. J. X. EIRAS. « Oscillation Damping Analysis and Control Studies of the Future Interconnection between the North-Northeast and South-Southeast Systems ». Dans *Proc. V Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning - SEPOPE*, Recife, Brazil, 1996.
- [112] N. MARTINS, F. G. SILVA, P. C. PELLANDA, A. CASTRO et P. E. M. QUINTÃO. « Utilizing Transfer Function Modal Equivalents of Low-Order for the Design of Power Oscillation Damping Controllers in Large Power Systems ». Dans *Proc. of the IEEE/PES General Meeting*, pages 1720–1726, San Francisco, California, USA, Jun 2005.
- [113] D. MCFARLANE et K. GLOVER. « A loop-shaping design procedure using H_∞ synthesis ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 37(6) :759–769, Jun 1992.
- [114] A. MEGRETSKI et A. RANTZER. « System analysis via integral quadratic constraints ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 42(6) :819–830, Jun 1997.
- [115] M. MERKEL, M. H. GOJNY et U. B. CARL. « Enhanced eigenstructure assignment for aeroelastic control application ». *Aerospace Science and Technology*, 8(6) :533 – 543, 2004.

- [116] M. MESBAHI, M. G. SAFONOV et G. P. PAPAVALASSILOPOULOS. « *Advances in linear matrix inequality methods in control : advances in design and control* », Chapitre «Bilinearity and complementarity in robust control», pages 269–292. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1999.
- [117] D. E. MILLER. « Minimizing the maximum value of the regulated output to a fixed input ». *Decision and Control, 1992., Proceedings of the 31st IEEE Conference on*, pages 3571–3576 vol.4, 1992.
- [118] P. M. MÄKILÄ. « Multiple models, multiplicative noise and linear quadratic control - algorithmic aspects ». *International Journal of Control*, 54(4) :921–941, 1991.
- [119] C. MOLER et C. Van LOAN. « Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later ». *SIAM Review*, 45(1) :3–49, 2003.
- [120] B. MOORE. « Principal component analysis in linear systems : Controllability, observability, and model reduction ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 26(1) :17–32, Feb 1981.
- [121] H. NAKAYAMA. « Multi-objective Optimization and its Engineering Applications ». Dans Jürgen BRANKE, Kalyanmoy DEB, Kaisa MIETTINEN et Ralph E. STEUER, éditeurs, *Practical Approaches to Multi-Objective Optimization*, numéro 04461 dans Dagstuhl Seminar Proceedings. Internationales Begegnungs- und Forschungszentrum fuer Informatik (IBFI), Schloss Dagstuhl, Germany, 2005.
- [122] M. NOROOSIAN et G. ANDERSSON. « Damping of Power System Oscillations by Use of Controllable Components ». *IEEE Trans. Power Delivery*, 9(4) :2046–2054, Oct 1994.
- [123] A. P. OLIVA et W. C. Leite FILHO. « Eigenstructure versus optimal control for decoupling ». *Control Engineering Practice*, 10(10) :1059 – 1079, 2002.
- [124] R. ORSI, U. HELMKE et J. B. MOORE. « A Newton-like method for solving rank constrained linear matrix inequalities ». *Automatica*, 42(11) :1875 – 1882, 2006.
- [125] M. L. OVERTON. « Large-Scale Optimization of Eigenvalues ». *SIAM Journal on Optimization*, 2(1) :88–120, 1992.
- [126] P. C. PELLANDA. « *Commande de systèmes instationnaires : séquençement de compensateurs et commande LPV* ». PhD thesis, ENSAE, Toulouse, 2001.
- [127] Y. PIGUET, U. HOLMBERG et R. LONGCHAMP. « A minimax approach for multi-objective controller design using multiple models ». *International Journal of Control*, 72(7) :716–726, 1999.
- [128] R. J. PIWKO, C. A. WEGNER, Damsky B. L, B. C. FURUMASU et J. D. EDEN. « The Slatt Thyristor Controlled Series Capacitor Project-Design, Installation, Commissioning, and System Testing ». *CIGRE paper 14-104*, 1994.
- [129] E. POLAK. « On the mathematical foundations of nondifferentiable optimization in engineering design ». *SIAM Rev.*, 29(1) :21–89, 1987.
- [130] E. POLAK. *Optimization : algorithms and consistent approximations*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1997.

- [131] E. POLAK et S. E. SALCUDEAN. « On the design of linear multivariable feedback systems via constrained nondifferentiable optimization in H_∞ spaces ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 34(3) :268–276, Mar 1989.
- [132] G. PUJOL, J. RODELLAR, J.M. ROSSELL et F. POZO. « Decentralised reliable guaranteed cost control of uncertain systems : an LMI design ». *Control Theory & Applications, IET*, 1(3) :779–785, May 2007.
- [133] A. RANTZER. « On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma ». *Syst. Control Lett.*, 28(1) :7–10, 1996.
- [134] G. ROBEL. « On computing the infinity norm ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 34(8) :882–884, Aug 1989.
- [135] J. ROMMES et N. MARTINS. « Efficient computation of multivariable transfer function dominant poles using subspace acceleration ». *IEEE Trans. Power Syst.*, 21(4) :1471–1483, Nov 2006.
- [136] J. ROMMES et N. MARTINS. « Efficient computation of transfer function dominant poles using subspace acceleration ». *IEEE Trans. Power Syst.*, 21(3) :1218–1226, Aug 2006.
- [137] M. ROTKOWITZ et S. LALL. « A characterization of convex problems in decentralized Control ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 51(2) :274–286, Feb. 2006.
- [138] H. ROTSTEIN et A. SIDERIS. « H_∞ optimization with time-domain constraints ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 39(4) :762–779, Apr 1994.
- [139] W. J. RUGH et J. S. SHAMMA. « Research on gain scheduling ». *Automatica*, 36(10) :1401 – 1425, 2000.
- [140] M. SAFONOV, A. LAUB et G. HARTMANN. « Feedback properties of multivariable systems : The role and use of the return difference matrix ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 26(1) :47–65, Feb 1981.
- [141] M. G. SAFONOV, K. C. GOH et J. H. LY. « Control system synthesis via bilinear matrix inequalities ». *American Control Conference, 1994*, 1 :45–49 vol.1, June-1 July 1994.
- [142] J. J. SANCHEZ-GASCA et J. H. CHOW. « Power System Reduction to Simplify the Design of Damping Controllers for Interarea Oscillations ». *IEEE Trans. Power Syst.*, 11(3) :1342–1349, Aug 1996.
- [143] M. SATO et M. SUZUKI. « Vibration control of flexible structures using a combined H_∞ filter approach ». *AIAA J. of Guidance, Control, and Dynamics*, 19(5) :1000–1006, 1996.
- [144] D.C. SAVELLI, P.C. PELLANDA, N. MARTINS, N.J.P. MACEDO, A.A. BARBOSA et G.S. LUZ. « Robust Signals for the TCSC Oscillation Damping Controllers of the Brazilian North-South Interconnection Considering Multiple Power Flow Scenarios and External Disturbances ». Dans *Proceedings of the Power Engineering Society General Meeting, 2007. IEEE*, pages 1–7, June 2007.
- [145] C. SCHERER. *Mixed H_2/H_∞ Control*. Trends in Control : A European Perspective. volume of the Special Contribution to the ECC 95 édition, 1995.

- [146] C. SCHERER, P. GAHINET et M. CHILALI. « Multiobjective output-feedback control via LMI optimization ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 42(7) :896–911, Jul 1997.
- [147] C. W. SCHERER. « Structured finite-dimensional controller design by convex optimization ». *Linear Algebra and its Applications*, 351-352 :639 – 669, 2002.
- [148] D. D. SILJAK. *Decentralized control of complex systems*. Academic Press, Boston, Boston, MA, USA, 1991.
- [149] F. G. SILVA. « Modal Equivalents of Large Scale Power System Models for Oscillation Damping Controller Design ». Master’s thesis, Military Institute of Engineering, Rio de Janeiro, Brazil, 2005 (in Portuguese).
- [150] A. M. SIMÕES, P. APKARIAN et D. NOLL. « Non-smooth progress function algorithm for frequency-shaping control design ». *Control Theory & Applications, IET*, 2(4) :323–336, April 2008.
- [151] M. SZNAIER, T. AMISHIMA et T. INANC. « H_2 control with time-domain constraints : theory and an application ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 48(3) :355–368, Mar 2003.
- [152] G. N. TARANTO et J. H. CHOW. « A Robust Frequency Domain Optimization Technique for Tuning Series Compensation Damping Controllers ». *IEEE Trans. Power Syst.*, 10(3) :1219–1225, Aug 1995.
- [153] A. TCHERNYCHEV et A. SIDERIS. « μ /km-design with time-domain constraints ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 43(11) :1622–1627, Nov 1998.
- [154] J.-B. THEVENET. « *Techniques d’optimisation avancées pour la synthèse de lois de commande* ». PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2005.
- [155] J.-B. THEVENET, D. NOLL et P. APKARIAN. Nonlinear spectral SDP method for BMI-constrained problems : applications to control design. Dans J. BRAZ, H. ARAÚJO, A. VIEIRA et B. ENCARNACÃO, éditeurs, *Informatics in Control, Automation and Robotics I*, pages 61–72. Springer, 2006.
- [156] H. T. TOIVONEN et S. TOTTERMAN. « Design of fixed-structure controllers with frequency-domain criteria : a multiobjective optimisation approach ». *Control Theory and Applications, IEE Proceedings -*, 153(1) :46–52, Jan. 2006.
- [157] H. D. TUAN et P. APKARIAN. « Low nonconvexity-rank bilinear matrix inequalities : algorithms and applications in robust controller and structure designs ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 45(11) :2111–2117, Nov 2000.
- [158] L. VANDENBERGHE et S. BOYD. « Semidefinite programming ». *SIAM Rev.*, 38(1) :49–95, 1996.
- [159] A. VARGA et B. D. O. ANDERSON. « Accuracy-enhancing methods for balancing-related frequency-weighted model and controller reduction ». *Automatica*, 39(5) :919–927, 2003.
- [160] M. VIDYASAGAR. *Nonlinear system analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1978.
- [161] J. L. WANG, G.-H. YANG et J. LIU. « An LMI approach to H_- index and mixed H_-/H_∞ fault detection observer design ». *Automatica*, 43(9) :1656 – 1665, 2007.

- [162] Z.-Q. WANG et M. SZNAIER. « L_∞ -optimal control of SISO continuous time systems and its rational approximations ». *Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on*, 1 :34–39 vol.1, Dec 1994.
- [163] Z.-Q. WANG et M. SZNAIER. « Rational L_∞ -suboptimal controllers for SISO continuous-time systems ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 41(9) :1358–1363, Sep 1996.
- [164] J. F. WHIDBORNE, D.-W. GU et I. POSTLETHWAITE. « Algorithms for the method of inequalities - a comparative study ». *American Control Conference, 1995. Proceedings of the*, 5 :3393–3397 vol.5, Jun 1995.
- [165] J. F. WHIDBORNE, D.-W. GU et I. POSTLETHWAITE. « Simulated annealing for multiobjective control system design ». *Control Theory and Applications, IEE Proceedings* -, 144(6) :582–588, Nov 1997.
- [166] J. C. WILLEMS. « Dissipative Dynamical Systems, part I : General Theory ». *Arch. Rational Mech. Anal.*, (45) :321–351, 1972.
- [167] J. C. WILLEMS. « Dissipative Dynamical Systems, part II : Linear Systems with Quadratic Supply Rates ». *Arch. Rational Mech. Anal.*, (45) :352–393, 1972.
- [168] X. XIN, B. D. O. ANDERSON et T. MITA. « Complete solution of the 4-block H_∞ control problem with infinite and finite $j\omega$ -axis zeros ». *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 10 :59–81, 2000.
- [169] M.-G. YOON. « Sign-weighted peak minimization problem for feedback systems ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 46(6) :943–948, Jun 2001.
- [170] D. YOULA, H. JABR et Jr. BONGIORNO, J. « Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers—Part II : The multivariable case ». *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 21(3) :319–338, Jun 1976.
- [171] V. ZAKIAN, éditeur. *Control Systems Design : A New Framework*. Springer, 2005.
- [172] V. ZAKIAN et U. AL-NAIB. « Design of dynamical and control systems by the method of inequalities ». *Proc. IEE*, 120(11) :1421–1427, 1973.
- [173] K. ZHOU et J. C. DOYLE. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, 1998.
- [174] K. ZHOU, J. C. DOYLE et K. GLOVER. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1996.