



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par **l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace**  
Spécialité : Mathématiques appliquées et dynamique des fluides

---

Présentée et soutenue par **Marc BOUTOUNET**  
le **17 novembre 2011**

**Modèles asymptotiques pour la dynamique d'un film liquide mince**

---

### JURY

M. François Charru, président  
M. Didier Bresch, rapporteur  
M. Pascal Noble  
M. Christian Ruyer-Quil, rapporteur  
M. Jean-Paul Vila, directeur de thèse  
M. Philippe Villedieu, co-directeur de thèse

---

École doctorale : **Aéronautique - Astronautique**

Unité de recherche : **Équipe d'accueil ISAE-ONERA EDyF**

Directeur de thèse : **M. Jean-Paul Vila**

Co-directeur de thèse : **M. Philippe Villedieu**



*A quantitative description of the properties of the single waves of a thin fluid flow layer in the presence of viscosity and surface tension will obviously be associated with such serious mathematical difficulties that one can scarcely expect to overcome them.*

— Kapitza et Kapitza [25]



## **Modèles asymptotiques pour la dynamique d'un film liquide mince**

Dans cette thèse, nous proposons de décrire la dynamique d'un film liquide mince entraîné par un écoulement gazeux.

Dans une première partie, nous montrons comment écrire des modèles à une équation, sur la hauteur, ou à deux équations, sur la hauteur et le débit, à partir des équations de Navier-Stokes en utilisant la méthode des développements asymptotiques. Nous étudions alors les propriétés des systèmes ainsi obtenus.

Dans la deuxième partie, nous utilisons la même méthode pour étendre les modèles aux cas des écoulements sur une topographie quelconque mais aussi aux écoulements bi-couches à surface libre et les écoulements de deux fluides entre deux plaques.

La dernière partie consiste en une étude numérique d'un écoulement cisailé à l'aide du code SLOSH et d'une application d'un des modèles trouvé dans le cas de deux fluides superposés à surfaces libres.

Mots clés : film mince, asymptotique onde longue, équation de Benney, équations de Saint-Venant, surface libre, topographie quelconque, écoulement cisailé, écoulement bicouche

## **Asymptotic models describing the dynamic of a thin liquid film**

In this study, we focus on describing the dynamic of a thin liquid film when a stream of air flows over its surface.

The first part is devoted to the formal derivation of one and two equation models (height or flow rate) from the complete Navier-Stokes system, using asymptotic expansion method. Then we study the properties of those models.

In the second part, we use the same way to obtain models in case of flow over an arbitrary topography, bi-layer flows with free surface and bi-layer flows in a pipe.

The third part is devoted to a numerical study of an air blown flow using SLOSH and the application of our model for bi-layer flows with free surface.

Keywords: thin film, long wave asymptotic, Benney equation, Shallow water equations, free surface, arbitrary topography, shear flow, bilayer flow



## REMERCIEMENTS

---

*À Marthe*





## TABLE DES MATIÈRES

---

0	INTRODUCTION	1
I	MODÉLISATION	5
1	ÉTABLISSEMENT DES ÉQUATIONS	9
1.1	Équations décrivant la dynamique du film	9
1.1.1	Équations de Navier-Stokes-Coriolis	9
1.1.2	Conditions aux limites	11
1.2	Système complet	12
1.3	Mise à l'échelle	13
1.3.1	Choix des échelles	13
1.3.2	Traitement du terme de force de Coriolis	14
1.3.3	Nombre de paramètres indépendants	15
1.3.4	Récapitulatif de quelques adimensionnements dans le domaine des films minces	15
1.4	Système final	22
2	OBTENTION DU MODÈLE DE SAINT-VENANT 2D	23
2.1	Équations de Navier-Stokes	23
2.2	Conditions aux limites	24
2.3	Système complet	26
2.4	Solution uniforme stationnaire	26
2.5	Mise à l'échelle	27
2.5.1	Nombre adimensionnels	28
2.5.2	Paramètres adimensionnels	28
2.6	Équations adimensionnées	29
2.6.1	Équations moyennées	29
2.7	Asymptotique onde longue	29
2.8	Développements asymptotiques	30
2.8.1	Ordre 0	30
2.8.2	Ordre 1	31
2.8.3	Le modèle à deux équations	32
3	PROPRIÉTÉS DES MODÈLES	35
3.1	Du modèle de Saint-Venant à l'équation de Benney	36
3.2	Hyperbolicité	37
3.3	Entropie	37
3.4	Stabilité linéaire (et lien avec Orr-Sommerfeld)	40
3.5	Formations de roll-waves	44
II	ÉCOULEMENTS SUR UNE TOPOGRAPHIE QUELCONQUE	47
4	ÉTABLISSEMENT DES MODÈLES SUR UNE TOPOGRAPHIE QUELCONQUE	51
4.1	Équations de Navier-Stokes en coordonnées curvilignes	56

4.1.1	Systèmes de coordonnées	57
4.1.2	Tenseur de courbure	63
4.1.3	Équations de l'écoulement	64
4.1.4	Vitesse covariante	66
4.1.5	Changement de coordonnées	66
4.1.6	Système d'équations de la dynamique	72
4.2	Équations intégrées	72
4.3	Mise à l'échelle	75
4.3.1	Facteurs d'échelle et adimensionnement	75
4.3.2	Solution uniforme	77
4.3.3	Développements asymptotiques	78
4.3.4	Équations adimensionnées	81
4.3.5	Hypothèses sur l'écoulement	82
4.3.6	Équations intégrées	84
4.4	Asymptotique onde longue	85
4.4.1	Asymptotique à l'ordre zéro	85
4.4.2	Premier modèle	86
4.4.3	Modèle à deux équations au premier ordre	86
4.4.4	Asymptotique à l'ordre 1	91
4.5	Modèles à une et deux équations	101
4.5.1	Modèle à une équation à l'ordre 1	101
4.6	Système Saint-Venant	103
4.6.1	Première formulation	103
4.6.2	Formulation conservative	104
4.7	Quelques modèles particuliers	111
4.7.1	Équation de Benney dans le cas plan	111
4.7.2	Modèle Saint-Venant dans le cas plan	111
4.7.3	Modèle de plus grande pente	112
III ÉCOULEMENTS MULTICOUCHES 115		
5	ÉCOULEMENT DE TYPE SHALLOW-WATER DE DEUX FLUIDES À SURFACE LIBRE	119
5.1	Description d'écoulements bi-fluides dans le régime Shallow-Water	119
5.1.1	Mise à l'échelle des équations de Navier-Stokes	120
5.1.2	Développement asymptotique des solutions des équations de Navier-Stokes	123
5.2	Théorie de la lubrification	125
5.2.1	Lois de conservation avec et sans diffusion	126
5.2.2	Analyse de stabilité linéaire	129
5.3	Modèles de type Saint-Venant	137
5.3.1	Modèle de glissement	142
6	APPLICATION NUMÉRIQUE : BICOUCHE À SURFACE LIBRE	145
6.1	Modèle	145
6.2	Simulations numériques	147
6.2.1	Couches internes et externes instables	149

6.2.2	Couche interne instable et couche externe stable	151
7	ÉCOULEMENT DE DEUX FLUIDES ENTRE DEUX PLAQUES	155
7.1	Équations de l'écoulement	156
7.2	Équations adimensionnées	157
7.2.1	Dimensions caractéristiques	157
7.2.2	Équations de volume	158
7.2.3	Conditions aux limites	159
7.2.4	Lien avec Charru & Fabre	160
7.3	Équations moyennées	161
7.3.1	Conservation de la masse	162
7.3.2	Modèle à deux équations	162
7.4	Asymptotique onde longue	163
7.4.1	Validité du développement	165
7.4.2	Pression	166
7.4.3	Développement de la vitesse et de la pression	166
7.4.4	Solution uniforme	167
7.4.5	Solution à l'ordre 0	169
7.5	Modèle de pression et contrainte à l'interface	174
7.6	Stabilité linéaire	175
7.7	Solution à l'ordre 1	177
7.8	Équations moyennées	183
7.8.1	Modèle à une équation	183
7.8.2	Modèle à deux équations	185
8	APPLICATIONS NUMÉRIQUES : ÉCOULEMENT CISAILLÉ	191
8.1	Application aux expériences de Gilles Heid	191
8.1.1	Modèle à une équation à l'ordre 1	191
8.1.2	Application	192
8.2	Moyens et résultats expérimentaux de Marie Lalo	192
8.2.1	Dispositif expérimental de mesure de la phase liquide	193
8.2.2	Régimes de comportement d'un film liquide mince soumis à un cisaillement aérodynamique	195
8.2.3	Code de calcul	195
8.2.4	Tests numériques	196
9	CONCLUSION	207
	IV ANNEXES	209
	A DÉMONSTRATIONS DES LEMMES	211
	BIBLIOGRAPHIE	227

## TABLE DES FIGURES

---

FIGURE 1	Repère du film liquide mince en 3D	10
FIGURE 2	Repère du film liquide mince en 2D	24
FIGURE 3	un exemple de roll-wave (FIG. 3. de l'article de Liu et Gollub [33])	44
FIGURE 4	Film mince s'écoulant sur un fond variable	52
FIGURE 5	Changement de coordonnées	57
FIGURE 6	Courbures	63
FIGURE 7	Deux fluides s'écoulant sur un plan incliné.	120
FIGURE 8	$b_1$ et $b_2$ pour $\nu = 0,3$	132
FIGURE 9	Courbes critiques $f_i(\rho) = \frac{R_e}{\cotan\theta}$ pour $\nu = 0,3$ .	132
FIGURE 10	Pour $\nu = 0,7$ et $i = 1,2$ , valeurs des $b_i$ .	133
FIGURE 11	Pour $\nu = 0,7$ et $i = 1,2$ , courbes critiques $f_i(\rho) = \frac{R_e}{\cotan\theta}$ .	133
FIGURE 12	$b_1$ et $b_2$ pour $\nu = 0,9$ .	134
FIGURE 13	Courbes critiques $f_i(\rho) = \frac{R_e}{\cotan\theta}$ pour $\nu = 0,9$ .	134
FIGURE 14	$b_1$ et $b_2$ pour $\nu = 1$ .	135
FIGURE 15	Courbes critiques $f_i(\rho) = \frac{R_e}{\cotan\theta}$ pour $\nu = 1$ .	135
FIGURE 16	$b_1$ et $b_2$ pour $\nu = 1,1$ .	136
FIGURE 17	Courbes critiques $f_i(\rho) = \frac{R_e}{\cotan\theta}$ pour $\nu = 1,1$ .	136
FIGURE 18	$b_1$ et $b_2$ pour $\nu = 1,5$ .	137
FIGURE 19	Courbes critiques $f_i(\rho) = \frac{R_e}{\cotan\theta}$ pour $\nu = 1,5$ .	137
FIGURE 20	Courbes critiques $f_i(\rho) = \frac{R_e}{\cotan\theta}$ pour $\rho = 0,5$ et $\nu = 0,9$	148
FIGURE 21	Hauteurs à $t = 0$	149
FIGURE 22	Hauteurs à $t = 10$	150
FIGURE 23	Évolution en temps de l'amplitude des deux premiers modes	150
FIGURE 24	Hauteurs à $t = 0$	152
FIGURE 25	Hauteurs à $t = 10$	152
FIGURE 26	Évolution en temps de l'amplitude des deux premiers modes	153
FIGURE 27	Écoulement de deux fluides entre deux plaques	156
FIGURE 28	Écoulement en variables adimensionnées	158
FIGURE 29	Comparaison entre la hauteur moyenne calculée et les hauteurs mesurées	193
FIGURE 30	Schémas de principe et photographies de la maquette d'injection, vues de face et de profil	193
FIGURE 31	Localisation des points de mesure LDA	194
FIGURE 32	Régimes de comportement du film liquide en fonction des vitesses liquide et gaz pour $h_l = 300\mu m$ – Vues de face.	195
FIGURE 33	Schéma de l'écoulement	199
FIGURE 34	Profils des vitesses de l'écoulement gazeux (en pointillés : résultat théoriques)	200
FIGURE 35	Hauteur de l'écoulement stationnaire	201

FIGURE 36	Épaisseur de couche limite et profil de vitesses	202
FIGURE 37	Contrainte tangentielle	203
FIGURE 38	Hauteurs stationnaires	203
FIGURE 39	Hauteurs pour $f = 500H_z$	204
FIGURE 40	Hauteurs pour $f = 750H_z$	204
FIGURE 41	Courbes de croissance	205
FIGURE 42	Résultats pour $f = 500H_z$ , $C_1 = 1.06$ et $C_2 = 3$	205

## LISTE DES TABLEAUX

---

TABLE 1	Système complet 3D	12
TABLE 2	Dimensions caractéristiques	14
TABLE 3	Système final 3D	22
TABLE 4	Système complet 2D	26
TABLE 5	Dimensions caractéristiques	27
TABLE 6	Équations adimensionnées 2D	29
TABLE 7	Conditions de stabilité	131
TABLE 8	Paramètres des expériences de M.Lalo	194
TABLE 9	Paramètres des simulations numériques	198
TABLE 10	Longueurs d'ondes les plus amplifiées	204

## LISTE DES SYMBOLES

---

### NOTATIONS GÉNÉRALES

$\vec{U} = (u, v, w)^T$	Vitesse dans le repère en mouvement	10
$\vec{\Omega}$	Vitesse angulaire du repère	10
$\vec{r}$	Vecteur position de l'élément de fluide dans le repère fixe par rapport à l'axe de rotation	10
$-2\vec{\Omega} \wedge \vec{U}$	Force de Coriolis	10
$-\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$	La force centrifuge	10

$v\nabla^2\vec{U}$	Tenseur des contraintes visqueuses	10
$\nu$	La viscosité cinématique du fluide	10
$p$	Pression	10
$\rho$	Masse volumique du fluide	10
$\vec{I} = (i_1, i_2, i_3)^T$	Forces volumiques d'inerties	10
$\vec{g}$	La gravité	10
$\vec{R} = (r_1, r_2, r_3)^T$	Vecteur orienté de l'axe de rotation vers l'origine du repère	10
$\vec{n}$	La normale à la surface au point $(x, y)$	11
$\vec{t}_x$ et $\vec{t}_y$	Les tangentes selon $\vec{x}$ et $\vec{y}$ à la surface	11
$\mathcal{H}$	Somme des courbures de la surface libre	11
$\vec{\Sigma}$	Tenseur des contraintes visqueuses	11
$\sigma$	Tension de surface du fluide	11
$\vec{\tau}_n(x, y, t)$	Contrainte normale de la phase gazeuse	11
$\vec{\tau}_{t_x}(x, y, t)$	Contrainte tangentielle du gaz selon $\vec{x}$	11
$\vec{\tau}_{t_y}(x, y, t)$	Contrainte tangentielle du gaz selon $\vec{y}$	11
$p_g(x, y, t)$	Pression du gaz sur la surface libre	11
$\vec{t}_\xi$	Un vecteur tangent à la surface libre dirigé dans la direction $\xi$	11
$\mu$	La viscosité dynamique du fluide	12
$L_1$	Longueur caractéristique suivant $\vec{x}$	13
$L_2$	Longueur caractéristique suivant $\vec{y}$	13
$H$	Hauteur moyenne de la solution uniforme	13
$U_0$	Vitesse moyenne en de la solution uniforme	13
$\bar{\omega}$	Vitesse de rotation moyenne	13
$\frac{L_2 U_0}{L_1}$	Vitesse caractéristique suivant $\vec{y}$	13
$\frac{H U_0}{L_1}$	Vitesse caractéristique suivant $\vec{z}$	13
$E(h, q)$	L'entropie mathématique du système Saint-Venant	37
$\frac{L_1}{U_0}$	Grandeur caractéristique du temps	13
$\rho_g, \mu_g$	Masse volumique et viscosité dynamique du gaz dans la sous-couche laminaire	13
$V_g$ et $H_g$	Les dimensions caractéristiques du gaz dans la sous-couche laminaire	13

$R_{e_g}$	Le nombre de Reynolds du gaz	13
$R_e$	Le nombre de Reynolds du fluide	13
$F^2$	Le nombre de Froude du fluide	13
$R_o$	Le nombre de Rossby du fluide	13
$W_e$	Le nombre de Weber du fluide	13
$\varepsilon_1 = \frac{H}{L_1}$	Paramètre onde longue dans la direction $\vec{x}$ de l'écoulement	14
$\varepsilon_2 = \frac{H}{L_2}$	Paramètre onde longue dans la direction $\vec{y}$ de l'écoulement	14
$(\alpha, \beta, \delta)$	Paramètres adimensionnels	16
$\varepsilon = \frac{H}{L}$	Le paramètre onde longue dans le cas plan	28
$(\kappa, \lambda, \varpi)$	Paramètres adimensionnels	16

## NOTATIONS SPÉCIFIQUES À LA TOPOGRAPHIE QUELCONQUE

$\xi$	Coordonnées curvilignes d'un vecteur	52
$\eta$	Hauteur normale du fluide	52
$\bar{J}$	Jacobien	52
$\mathcal{H}_0$	Tenseur de courbure du fond	52
$\tilde{h}$	Hauteur moyenne du fluide	52
$\tilde{v}$	Vitesse moyenne du fluide	52
$P_o$	Nombre de Poiseuille	52
$F_r$	Nombre de Froude généralisé	52
$\Gamma$	Terme regroupant les forces volumiques prépondérantes	53
$\mathcal{M}$	Termes représentant l'évolution des vecteurs de la base curviligne	54
$U = \begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{h}\tilde{v} \end{pmatrix}$	Vecteur permettant de mettre le système sous forme conservative	54
$G(U)$	Terme de flux	54
$K(\tilde{h})$	Effets de tension de surface	55
$T(U)$	Second membre	55
$\vec{U}$	Notation pour les vecteurs de $\mathbb{R}^d$	56
$\mathbf{U}$	Notation pour les vecteurs de $\mathbb{R}^{d-1}$	56
$d$	Dimension de l'espace	56

$\vec{X}$	Position d'une particule du fluide	57
$\vec{P}$	Projection orthogonale de la position d'une particule sur le fond	57
$z = b(\mathbf{x})$	Topographie du fond	57
$\vec{n}$	Normale au fond	57
$c$	Cosinus de l'angle entre la normale $\vec{n}$ et la verticale	57
$\xi \mapsto \mathbf{x}(\xi)$	Paramétrisation du fond	58
$\vec{X} \mapsto \vec{\xi}$	Changement de variables : $\vec{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ Z \end{pmatrix} \mapsto \vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$	58
$\vec{E}_i$	Vecteurs de la base tangente au fond	59
$m_i$	Coefficients de la métrique d	59
$k_i$	Les courbures principales	60
$\{\vec{e}_i\}_{i=1,\dots,d}$	La famille de vecteurs de la base curviligne orthogonale	60
$\tilde{G}$	La métrique de Riemann	61
$Q$	La matrice de rotation avec $= (\vec{E}_1, \dots, \vec{E}_d)$	61
$\mathcal{H}$	La courbure du plan tangent au fond, translaté à une hauteur normale $\eta$	63
$\vec{X}$	Un point du plan.	63
$\mathcal{H}_0$	Le tenseur de courbure du fond pris en $\eta = 0$	64
$\tilde{\Omega}$	La matrice antisymétrique représentant les forces de Coriolis et centrifuge	65
$\sigma$	Le tenseur visqueux des déformations	65
$\vec{V}$	La vitesse covariante	66
$\sigma'$	Le nouveau tenseur des contraintes dans le repère curviligne	68
$T$	Matrice dont les colonnes sont une famille de vecteurs génératrice de la surface libre	71
$\vec{N}$	La normale unitaire à la surface libre d'équation $\eta = h(\xi, \eta)$	71
$\kappa$	La tension de surface	75
$\tau_0$	Valeur moyenne de la contrainte de cisaillement qu'exerce le gaz à l'interface avec le liquide	75
$\Delta p_{ext}$	Variation de la pression extérieure	75
$\gamma_0 = \ \vec{\gamma}\ $	Dimension de la gravité et des forces d'inertie dues au mouvement (rotation et translation) de la paroi	75
$\alpha, \beta, \delta, \lambda, \zeta, \bar{\kappa}$	Les paramètres adimensionnels	82
$\mathcal{V}(\vec{h})$	Vitesse de transport	101



$\nu(\tilde{h})$  Coefficient de diffusion ou viscosité du modèle 101

#### NOTATIONS SPÉCIFIQUES AUX ÉCOULEMENTS MULTICOUCHES

$(\rho_i, \nu_i, \sigma_i)$	Masses volumiques, viscosités et capillarités de deux fluides	120
$\theta$	Pente du plan sur lequel s'écoulent les fluides	120
$W_i$	Nombre de Weber du fluide $i$	120
$U$	Vitesse caractéristique	120
$\rho$	Rapport des deux masses volumiques	120
$\nu$	Rapport des deux viscosités cinématiques	120
$q_1 = h_1 \bar{u}_1$	Débit du premier fluide dans la direction de l'écoulement	122
$q_2 = h_2 \bar{u}_2$	Débit du deuxième fluide dans la direction de l'écoulement	122
$\alpha, \beta, \delta$	Trois nombres adimensionnels	124
$\Lambda_1 > \Lambda_2$	Respectivement la vitesse caractéristique à la surface libre et à l'interface	126
$d_{i,j}$	Coefficients de viscosité	127
$J(\tilde{h})$	Matrice du système linéarisé au voisinage d'une solution constante $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$	130
$\bar{\Lambda}_i = \Lambda_i(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$	Les valeurs propre de $J(\tilde{h})$	130
$\tilde{\mathcal{X}}_i, i = 1, 2$	Fonctions ne dépendant que de $h_i$ et de leurs dérivées spatiales	140
$W = (h_1, h_2, q_1, q_2)^T$	Le vecteur des inconnues	141
$\mathcal{D}(W)$	Matrice de diffusion numérique	146
$\bar{W}$	État d'équilibre donné pour les simulations	148
$\vec{U}_i$ et $p_i$	La vitesse et la pression dans le fluide $i, i = 1, 2$	156
$\Sigma$	Tenseur des contraintes	157
$\mathcal{H}$	La courbure de l'interface	157
$L$	La longueur d'onde	157
$U_0$	La vitesse caractéristique choisie	157
$d, m, r$	Les rapports des hauteurs, des viscosités et des masses volumiques	158
$\vec{n}, \vec{t}, \mathcal{H}$	La normale, la tangente et la courbure	159
$\alpha, \beta, \delta, \kappa, \lambda$	Nouveaux nombres adimensionnels	164
$Q$	Le débit volumique total	170
$\Psi$	les variations de la solution uniforme autour de $\eta$	172

$k_c$  Fréquence critique 177



## INTRODUCTION

---

L'étude d'écoulements de films minces sous l'influence de la gravité a de larges implications dans les phénomènes naturels tels que la modélisation du mouvement des océans, des zones côtières, l'écoulement des rivières et de débris lors d'avalanches.

Dans l'industrie, les films minces interviennent dans la limitation de flux ou le transfert de chaleur et de masse, ou pour protéger des surfaces. Ils peuvent être utilisés pour la conception de peintures, d'adhésifs ou lors de dépôt de plusieurs couches de pellicules pour des films photographiques.

De plus dans l'aéronautique, l'ingestion d'eau par les moteurs conduit à la formation d'une fine couche de liquide sur les parois. De la même manière, l'injection du carburant dans la chambre de combustion peut créer des films liquides ou dans une tuyère de fusée, une accumulation de carburant forme un film (voir l'article de Oron *et al.* [40] sur la dynamique des films minces ainsi que leur bibliographie).

L'objectif de ce travail est de développer des modèles de films minces pouvant modéliser l'écoulement d'un film sur, par exemple, l'aube d'un moteur d'avion. Ce qui permettra ainsi de fournir des modèles à implémenter dans le code CEDRE de l'Onera.

Comme la surface de l'aube d'un moteur est courbe, nous avons développé des modèles pour fond quelconque (cf Partie II page 49). Ceci a fait l'objet d'un article Boutounet *et al.* [6].

De plus l'air cisaille le film, une première manière de voir ce terme a alors été de l'intégrer au modèle comme un terme de cisaillement extérieur sur la surface du film (cf Partie I chapitre 3 page 35). Il existe beaucoup de travaux sur le cisaillement au fond (cf Partie III page 117).

Une deuxième optique a été de considérer en plus du film, la sous couche limite laminaire du gaz. Pour ne pas alourdir les notations, nous avons supposé qu'il n'y avait pas d'effets de turbulence et donc que la sous couche limite laminaire était suffisamment épaisse par rapport au film. Cela nous a amené à des modèles multicouches. Peuvent être cités ici les travaux de Kliakhandler [27], qui a écrit de tels modèles, ainsi que les résultats du chapitre 5 (page 119).

Comme ici nous ne nous intéressons pas à la hauteur du gaz, une simplification est de considérer que la hauteur totale est constante : ce qui revient à faire un modèle où le film (avec le gaz) est situé entre deux plaques. On peut citer à ce sujet les travaux de Charru et Fabre [13] et le chapitre 7 de ce manuscrit (page 155).

Historiquement, le premier modèle applicable aux écoulements de type films minces ruisselants est celui de Barré De Saint-Venant [2]. Il s'agit en fait d'un modèle d'hydraulique composé de deux équations donnant la hauteur et le débit d'un canal.

Les premiers à avoir vraiment étudié des films liquides ruisselants le long d'un plan incliné, sont Kapitza et Kapitza [25] alors que Pyotr Leonidovich Kapitza était en résidence surveillée en URSS. Ils ont montré qu'il existe une valeur critique du nombre de Reynolds à partir de

laquelle se développent les instabilités de la surface libre (valeur toutefois erronée dans leur configuration verticale - toujours instable).

Puis Benjamin [3] et Yih [58] ont résolu le problème de la stabilité linéaire et donné la valeur du Reynolds critique.

Par la suite Benney [4] a trouvé une équation donnant la hauteur du film qui permet de retrouver formellement le critère de stabilité de Benjamin [3] et Yih [58]. Mais cette équation est fortement non-linéaire et ne décrit pas le comportement du film au-delà du seuil de stabilité.

Suite à cela, de nombreuses personnes ont proposé des modèles issus des équations de Navier-Stokes et basés sur la généralisation de la méthode intégrale de Karmann-Polhausen introduite par Shkadov [51] (modèles à deux équations, mais non consistants), Ruyer-Quil et Manneville [48, 50, 49] (modèles à deux équations consistants), Kuramoto et Tsuzuki [28], et Sivashinsky [52] (modèles à une équation). En première approximation, on peut supposer en effet que la vitesse est constante sur la hauteur du fluide, cette approche est justifiée dans le cas d'écoulements de type Saint-Venant pour des fluides Newtoniens incompressibles où la viscosité est négligeable. Dans leur article, Gerbeau et Perthame [20] ont ainsi fait une dérivation formelle des équations de Navier-Stokes ainsi que des simulations numériques sur le système de Saint-Venant résultant, mais avec des hypothèse de glissement au fond.

Ces méthodes permettent de retrouver les équations de Saint-Venant, à un coefficient correcteur près Vila [53] et Chang et Demekhin [11]. De nombreux modèles ont été établis pour diverses situations (films en rotation, film vertical...) qu'Oron *et al.* [40] ont parfaitement synthétisé. Néanmoins il ne s'agit que de modèles d'écoulements sur fond plat.

Bouchut et Westdickenberg [5] ont alors introduit un système de coordonnées curvilignes quelconque (non-forcément orthogonal) apte à décrire un écoulement sur une topographie quelconque. Toutefois ils se sont limités au cas non-visqueux.

Il existe donc de nombreux modèles intégraux à une ou deux équations, mais limités à des cas simples comme le ruissellement sur un plan incliné, et souvent peu justifiés. Il existe un modèle intéressant dans le cas d'un fond variable, mais il ne traite pas la viscosité. De plus il n'existe pas d'étude rigoureuse pour un film entraîné par un écoulement gazeux.

Il reste à trouver des modèles incluant l'entraînement du film par le gaz et incluant un fond variable en se basant sur une analyse mathématique rigoureuse afin de connaître la validité de ces modèles. Il s'agit donc de décrire le comportement dynamique d'un film liquide mince sur une paroi quelconque, mû par inertie et par cisaillement du gaz en utilisant la méthode des développements asymptotiques pour trouver des solutions approchées des équations de Navier-Stokes afin d'écrire des modèles intégraux.

Cette thèse se décompose en trois parties. Dans la première partie, nous modéliserons l'écoulement laminaire d'un film liquide incompressible newtonien soumis à une contrainte de cisaillement à l'interface. Pour cela, nous écrivons le système d'équations nous permettant d'étudier l'écoulement d'un film mince à surface libre, dans un repère 3D en mouvement.

Nous voulons alors expliquer comment obtenir un système de type Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes à surface libre en étudiant le cas 2D (plus de simple à écrire que le cas 3D). Le système d'équations ainsi trouvé sera mis à l'échelle pour faire apparaître les nombres adimensionnels définissant l'écoulement. Puisque le film est par définition mince, et en faisant certaines hypothèses, il est possible de résoudre asymptotiquement les équations

de Navier-Stokes autour de la solution d'équilibre. Ce développement sera fait par rapport à un petit paramètre  $\varepsilon$ , appelé paramètre onde longue, qui est le rapport entre la hauteur et la longueur caractéristiques du film. La solution ainsi obtenue sera injectée dans les équations de Navier-Stokes moyennées sur la hauteur pour obtenir des modèles à une équation sur la hauteur et deux équations sur la hauteur et le débit.

Pour finir cette partie, nous étudierons les propriétés des différents modèles pour mieux les distinguer entre eux. Ainsi il faudra réaliser une analyse de stabilité linéaire qui permettra de retrouver le seuil à partir duquel se développent les instabilités. On imposera au système d'être hyperbolique, puis on cherchera une entropie convexe. On montrera alors que ces modèles sont linéairement stables. Pour finir nous nous intéresserons aux formations de roll-waves et aux travaux déjà effectués sur leur étude.

Dans la deuxième partie, nous considérerons un écoulement sur une topographie quelconque. En effet, les films qui nous intéressent ne s'écouleront pas, en générale, sur des surfaces planes, mais sur des surfaces courbes. Le film étant mince, il restera donc en contact avec la paroi. On supposera alors qu'il ne se décroche pas. Il faudra alors définir un système de coordonnées curvilignes adapté pour y réécrire les équations de Navier-Stokes ainsi que les conditions limites.

Les résultats de cette partie ont été publiés Boutounet *et al.* [6], mais la version présentée ici inclut deux termes modélisant l'influence du gaz sur le film : un gradient de pression extérieure et une contrainte de cisaillement.

Dans la troisième et dernière partie, nous voulons nous assurer que les modèles d'équations intégraux peuvent reproduire des résultats expérimentaux donnés. Les seuils d'instabilité et les profils de hauteur seront comparés aux résultats de la littérature Liu et Gollub [33] ainsi qu'aux résultats expérimentaux réalisés à l'Onera par G. Heid. Or l'hypothèse de modélisation en une seule couche s'est avérée insuffisante. Pour affiner les prédictions des modèles, les méthodes précédentes ont été réutilisées pour développer un modèle à deux couches, une pour le film et une pour le gaz. Pour ce faire, le modèle de Charru et Fabre [13] a pu être réutilisé et étendu.

Dans un premier chapitre, nous montrerons comment développer les solutions des équations de Navier-Stokes dans le régime Shallow-Water. En utilisant ce développement, nous obtiendrons une hiérarchie de modèles pour des écoulements bi-fluides de type Shallow-Water.

Tout d'abord, nous écrirons des modèles de lubrification : en utilisant le premier (resp. deuxième) ordre du développement du champ de vitesse, nous obtiendrons un modèle non visqueux (resp. visqueux) de lois de conservations sur les hauteurs des fluides ou couplé aux équations de Kuramoto-Sivashinsky si l'on prend en compte les forces de capillarité. Puis, avec le deuxième (resp. troisième) ordre du champ de vitesse, nous trouverons un modèle Shallow-Water non-visqueux (resp. visqueux).

Kliakhandler [27] a déjà fait des modèles à  $n$  couches (une équation par couche), donc  $n$  équations couplées et a réalisé une étude par morceaux. Il a aussi montré le caractère bien posé de ces systèmes dans certaines situations. Nous généralisons ici cette étude, en construisant un système à  $2n$  ( $n = 2$ ) équations ainsi qu'une analyse de stabilité complète.

De plus grâce à ces modèles bi-couches, nous pourrions construire des modèles de glissement en considérant que les deux couches sont constituées d'un même fluide et que la couche du dessous est de très faible épaisseur.

Dans un deuxième chapitre, nous appliquerons le modèle développé dans l'article Boutounet *et al.* [7] soumis, pour un écoulement à surface libre de deux fluides superposés coulant le long d'un plan incliné, toujours sous l'hypothèse film mince.

Nous souhaitons ici simuler un écoulement bicouche conforme aux prédictions avec une analyse de stabilité (pour l'existence de roll-waves dans le domaine instable avec asymptotique pour petites longueurs d'onde, se référer à l'article Noble [38]).

Puis dans un troisième chapitre, nous étudierons un écoulement bicouche 2D contenu entre deux plaques, il n'y a donc pas de surface libre dans ce cas, ce qui ajoute une contrainte à notre problème. On réalisera un développement asymptotique comme dans le chapitre 2. Mais ici la condition de continuité des contraintes ne pourra pas être vérifiée car le saut de la vitesse tangentielle est non nul à l'interface ( $[w] \neq 0$ ). Nous utiliserons l'article de Charru et Fabre [13], où ils font une étude d'écoulement bi-fluides entre deux plaques mais ils n'ont pas considéré ce problème de continuité à l'interface, il y a donc une incompatibilité de leurs conditions limites avec cette étude. Néanmoins ce point ne pose pas de problème dans le cas d'ondes de petites amplitudes. Ici nous réglerons ce problème en ajoutant un degré de liberté à nos équations, c'est-à-dire en faisant intervenir la pression un ordre plus tôt que normalement en posant  $\delta \approx \mathcal{O}(1)$ . Nous réaliserons aussi un modèle de pression et contrainte à l'interface où nous justifierons les corrélations utilisées par Jurman et McCready [24], bien que dans notre cas le gaz n'est pas turbulent. En effet ils ont proposé un modèle Saint-Venant pour un film liquide entraîné par un écoulement turbulent. Il s'agit d'un modèle qualitatif basé sur les résultats expérimentaux de Abrams et Hanratty [1] sur le cisaillement d'un gaz au-dessus d'une surface solide rugueuse (de forme sinusoidale).

Dans un dernier chapitre, nous allons utiliser les résultats des expériences réalisées à l'Onera par Gilles Heid et dans le travail de thèse de Marie Lalo [29], même si tous deux ne s'intéressent pas exactement aux mêmes phénomènes que nous. Nous testerons nos modèles sur des écoulements cisailés : films liquides plans et verticaux avec écoulement de gaz pour tenter de retrouver ces résultats expérimentaux.

Première partie

**MODÉLISATION**





**D**ANS cette partie, nous montrons comment écrire un système de Navier-Stokes en 3D dans un repère en mouvement. Puis nous faisons une simplification de ce cas en passant au système en 2D, où nous construirons des modèles à une ou deux équations, de type Saint-Venant en utilisant la méthode des développements asymptotiques. Les propriétés des systèmes ainsi obtenus sont alors étudiées.





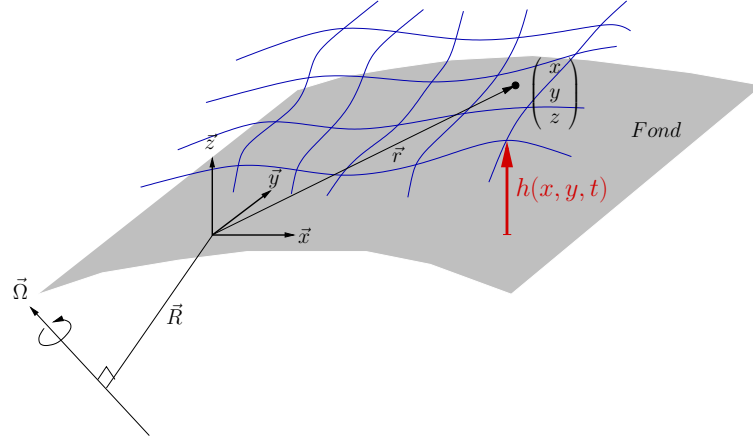


FIGURE 1: Repère du film liquide mince en 3D

- $\vec{U} = (u, v, w)^T$ , la vitesse dans le repère en mouvement ;
- $\vec{\Omega}$ , le vecteur vitesse angulaire ;
- $\vec{r}$ , le vecteur position de l'élément de fluide dans le repère fixe par rapport à l'axe de rotation ;
- $-2\vec{\Omega} \wedge \vec{U}$  et  $-\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$  sont respectivement la force de Coriolis et la force centrifuge ;
- $\nu \nabla^2 \vec{U}$ , le tenseur des contraintes visqueuses ( $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide) ;
- $p$ , la pression ( $\rho$  est la masse volumique du fluide) ;
- $\vec{I} = (i_1, i_2, i_3)^T$ , les forces volumiques d'inertie qui, si le repère n'est pas soumis à un mouvement de translation accéléré, se réduisent à une constante, la gravité  $\vec{g}$ .

#### Développement des forces

On se donne  $\vec{\Omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$  et  $\vec{R} = (r_1, r_2, r_3)^T$ , vecteur orienté de l'axe de rotation vers l'origine du repère  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ . On suppose que  $\vec{\Omega}$  et  $\vec{R}$  sont constants au cours du temps.

- Accélération centrifuge :

$$-\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) = -\vec{\Omega} \wedge \begin{pmatrix} r_1 + x \\ r_2 + y \\ r_3 + z \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

- Accélération de Coriolis :

$$-2\vec{\Omega} \wedge \vec{U} = 2 \begin{pmatrix} \omega_3 v - \omega_2 w \\ \omega_1 w - \omega_3 u \\ \omega_2 u - \omega_1 v \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Elle correspond à l'accélération du repère or contrairement au cas général où il s'agit de la rotation de la Terre, on considère ici la rotation d'une aube d'un avion.

- Inertie  $\vec{I}(t)$ .

### 1.1.2 Conditions aux limites

- **Condition de non-glissement sur le fond :**

$$U(x, y, 0, t) = 0 \quad (1.4)$$

- **Conditions à la surface libre :**

À la surface libre  $z = h(x, y, t)$ ,  $\vec{n}$  la normale à la surface au point  $(x, y)$  est donnée

par  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla h|^2}} \begin{pmatrix} -h_x \\ -h_y \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{t}_x$  et  $\vec{t}_y$  les tangentes par  $\vec{t}_x = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ h_x \end{pmatrix}$  et  $\vec{t}_y = \frac{1}{\sqrt{1+h_y^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ h_y \end{pmatrix}$ , et la courbure  $\mathcal{H}$  par  $\mathcal{H} = \frac{(1+h_y^2)h_{xx} - 2h_x h_y h_{xy} + (1+h_x^2)h_{yy}}{(1+h_x^2+h_y^2)^{\frac{3}{2}}}$ .

- Condition d'imperméabilité :

$$h_t + u|_{z=h}h_x + v|_{z=h}h_y - w|_{z=h} = 0 \quad (1.5)$$

- Continuité de la contrainte :

$$\vec{\Sigma}(\vec{U}|_{z=h}) \cdot \vec{n} - (p|_{z=h} + \sigma \mathcal{H}) \vec{n} = -p_g \vec{n} + \tau_n \vec{n} + \tau_{t_x} \vec{t}_x + \tau_{t_y} \vec{t}_y \quad (1.6)$$

- ▷  $\vec{\Sigma}$ , tenseur des contraintes visqueuses ;
- ▷  $\sigma$  est la tension de surface du fluide ;
- ▷  $\vec{\tau}_n(x, y, t)$ , la contrainte normale de la phase gazeuse ;
- ▷  $\vec{\tau}_{t_x}(x, y, t)$ , la contrainte tangentielle du gaz selon  $\vec{x}$  ;
- ▷  $\vec{\tau}_{t_y}(x, y, t)$ , la contrainte tangentielle du gaz selon  $\vec{y}$  ;
- ▷  $p_g(x, y, t)$ , la pression du gaz sur la surface libre.

Soit  $\vec{t}_\xi$ , un vecteur tangent à la surface libre, alors (1.6) se réduit à :

$$\vec{\Sigma}(\vec{U}|_{z=h}) \cdot \vec{n} \cdot \vec{t}_\xi = \tau_{t_\xi} \quad (1.7)$$

En utilisant  $\vec{t}_x$  et  $\vec{t}_y$ , on obtient :

$$(1 - h_x^2)(u_z + w_x) - h_x h_y (v_z + w_x) - 2h_x (v_y + 2u_x) - h_y (u_y + v_x) = \frac{1}{\mu} \tau_{t_x} \quad (1.8)$$

$$(1 - h_y^2)(v_z + w_y) - h_y h_x (u_z + w_x) - 2h_y (u_x + 2v_y) - h_x (v_x + u_y) = \frac{1}{\mu} \tau_{t_y} \quad (1.9)$$

où  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide. La composante en  $\vec{z}$  de (1.6), avec les résultats (1.8) et (1.9) donne :

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu}{1 - h_x^2} \left( 2u_x (1 + h_x^2) + h_x^2 (2v_y + h_y (v_z + w_x)) + h_x h_y (u_y + v_x) \right) \\ & -\frac{\mu}{1 - h_y^2} \left( 2v_y (1 + h_y^2) + h_y^2 (2u_x + h_x (u_z + w_x)) + h_y h_x (u_y + v_x) \right) \\ & = p|_h - p_g + \sigma \mathcal{H} + \tau_n \end{aligned} \quad (1.10)$$

## 1.2 SYSTÈME COMPLET

Récapitulons toutes les équations que l'on a obtenu :

<p><b>Équations de volume :</b></p> $\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{U} = 0 \\ \partial_t \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -2\vec{\Omega} \wedge \vec{U} - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \\ \quad \quad \quad + \nu \nabla^2 \vec{U} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{I} \end{array} \right.$
<p><b>Condition de non glissement :</b></p> $U(x, y, 0, t) = 0$
<p><b>Imperméabilité :</b></p> $h_t + u _{z=h} h_x + v _{z=h} h_y - w _{z=h} = 0$
<p><b>Continuité des contraintes tangentielles en <math>\vec{x}</math> :</b></p> $(1 - h_x^2)(u_z + w_x) - h_x h_y (v_z + w_x) - 2h_x (v_y + 2u_x) - h_y (u_y + v_x) = \frac{1}{\mu} \tau_{t_x}$
<p><b>Continuité des contraintes tangentielles en <math>\vec{y}</math> :</b></p> $(1 - h_y^2)(v_z + w_y) - h_y h_x (u_z + w_x) - 2h_y (u_x + 2v_y) - h_x (v_x + u_y) = \frac{1}{\mu} \tau_{t_y}$
<p><b>Continuité des contraintes tangentielles en <math>\vec{z}</math> :</b></p> $\begin{aligned} & -\frac{\mu}{1 - h_x^2} \left( 2u_x (1 + h_x^2) + h_x^2 (2v_y + h_y (v_z + w_x)) + h_x h_y (u_y + v_x) \right) \\ & -\frac{\mu}{1 - h_y^2} \left( 2v_y (1 + h_y^2) + h_y^2 (2u_x + h_x (u_z + w_x)) + h_y h_x (u_y + v_x) \right) \\ & = p _h - p_g + \sigma \mathcal{H} + \tau_n \end{aligned}$

TABLE 1: Système complet 3D

## 1.3 MISE À L'ÉCHELLE

## 1.3.1 Choix des échelles

On se fixe comme longueurs caractéristiques horizontales  $L_1$  suivant  $\vec{x}$  et  $L_2$  suivant  $\vec{y}$ . On se donne aussi  $H$  et  $U_0$ , respectivement la hauteur et la vitesse moyenne en  $\vec{x}$  de la solution uniforme. On utilisera aussi  $i_0 = |\vec{I}|$  le module des forces d'inertie d'accélération,  $r = |\vec{R}|$  la distance à l'axe et  $\bar{\omega}$  la vitesse de rotation moyenne.

À partir de ces valeurs, on définit d'autres grandeurs caractéristiques :  $\frac{L_2 U_0}{L_1}$  et  $\frac{H U_0}{L_1}$  vitesses suivant  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ ;  $\frac{L_1}{U_0}$  grandeur de temps.

On adimensionne les forces d'inertie par la combinaison des contributions des forces d'inerties d'accélération et des forces d'inerties centrifuges, c'est à dire par  $i_0 + r\bar{\omega}^2$ , ce qui donne comme adimensionnement pour les forces de pression  $\rho H (i_0 + r\bar{\omega}^2)$ .

La pression et les contraintes extérieures sont adimensionnées par :

$$\underbrace{\rho_g V_g^2}_{\text{pression inertielle}} + \underbrace{\frac{\mu_g V_g}{H_g}}_{\text{pression visqueuse}} = \rho_g V_g^2 \left( 1 + \frac{1}{R_{e_g}} \right) \quad (1.11)$$

où  $\rho_g, \mu_g, V_g$  et  $H_g$  sont les dimensions caractéristiques du gaz dans la sous-couche laminaire (masse volumique, vitesse, viscosité dynamique, et hauteur caractéristique) qui définissent  $R_{e_g}$ , le nombre de Reynolds du gaz par  $R_{e_g} = \frac{\rho_g V_g H_g}{\mu_g}$ .

Les équations adimensionnées font apparaître les nombres adimensionnels suivants :

$$\triangleright \text{Nombre de Reynolds : } R_e = \frac{U_0 H}{\nu}$$

$$\triangleright \text{Nombre de Froude : } F^2 = \frac{U_0^2}{H (i_0 + r\bar{\omega}^2)}$$

$$\triangleright \text{Nombre de Rossby : } R_o = \frac{U_0}{2\bar{\omega}H}$$

$$\triangleright \text{Nombre de Weber : } W_e = \frac{\rho U_0^2 H}{\sigma}$$

*Remarque.* Cette définition des nombres adimensionnels correspond à l'écriture classique de ces nombres, telle que l'on peut le voir en mécanique des fluides. Néanmoins, les articles traitant des films minces n'utilisent pas toujours ces formes, certains définissent  $\frac{\sigma}{\rho U_0^2 H}$  comme

nombre de Weber et  $\frac{H (i_0 + r\bar{\omega}^2)}{U_0^2}$  comme nombre de Froude ( Cf Chang et Demekhin [11] pour

plus de détails ). Les lecteurs doivent donc prêter attention à la définition de ces nombres lors de l'utilisation des différents modèles adimensionnels.

Voici un tableau récapitulatif des différentes dimensions :

$x$	$L_1$	$u$	$U_0$
$y$	$L_2$	$v$	$U_0 \frac{L_2}{L_1}$
$z$	$H$	$w$	$U_0 \frac{H}{L_1}$
$\vec{R}$	$r$	$t$	$\frac{L_1}{U_0}$
$\vec{\Omega}$	$\bar{\omega}$	$p$	$\rho H (i_0 + r\bar{\omega}^2)$
$\vec{I}$	$i_0 + r\bar{\omega}^2$	$\tau, p_g$	$\rho_g V_g^2 \left(1 + \frac{1}{Re_g}\right)$

TABLE 2: Dimensions caractéristiques

On définit alors deux paramètres onde longue dans chacune des directions de l'écoulement :  $\varepsilon_1 = \frac{H}{L_1}$  et  $\varepsilon_2 = \frac{H}{L_2}$ . Ces deux paramètres seront petits dans le cas de l'étude de films minces où la hauteur caractéristique de l'écoulement  $H$  sera plus petite que les longueurs caractéristiques horizontales :  $L_1$  suivant  $\vec{x}$  et  $L_2$  suivant  $\vec{y}$ .

### 1.3.2 Traitement du terme de force de Coriolis

Comme vu précédemment, la force de Coriolis est prise en compte dans le système (1.1), or cette force vaut  $(-2\vec{\Omega} \wedge \vec{U})$  et fait intervenir la vitesse du fluide. Il serait souhaitable de simplifier cette écriture.

Étudions l'influence du nombre de Rossby  $R_o$ , qui représente le rapport entre les forces d'inerties et les forces dues à la rotation :

- Si  $R_o \gg 1$ , alors les forces de Coriolis, dues par exemple à la rotation terrestre, sont négligeables devant l'inertie de l'écoulement.
- Dans le cas contraire,  $R_o \ll 1$ , les forces de Coriolis dominant le mouvement du fluide.

Le fait que le nombre de Rossby soit grand devant l'unité signifie que la vitesse de rotation moyenne doit être faible devant le rapport  $\frac{U_0}{2H} = R_o$ , c'est à dire  $\bar{\omega} \ll \frac{U_0}{2H}$ . Or la hauteur moyenne de l'écoulement,  $H$ , est de l'ordre de  $100\mu m = 10^{-4}m$  ainsi :

$$\left[ \frac{U_0}{H} \right] \sim 10^4 s^{-1}$$

et donc  $R_o \gg 1$  équivaut à dire que  $\bar{\omega} \ll 5.10^3 \text{ tours/s}$ . Il faut donc que la vitesse de rotation moyenne soit inférieure à  $3.10^5 \text{ tours/min}$ . Cette limite est tout à fait envisageable dans le cas de la rotation des aubes d'un moteur d'avion.



Pour notre étude, on peut donc conclure que le nombre de Rossby sera élevé ainsi les effets de la force de Coriolis seront négligeables devant la force centrifuge.

### 1.3.3 Nombre de paramètres indépendants

L'écoulement est défini à partir de cinq paramètres :  $R_e$  le nombre de Reynolds,  $F$  le nombre de Froude,  $W_e$  le Weber,  $\varepsilon = \varepsilon_1$  le paramètre onde longue suivant  $x$  pour le cas 2D et  $\theta$  la pente de la surface d'écoulement du fluide (en 2D et l'inertie  $i_0$  dans le cas général).

Physiquement l'état de référence est un régime permanent décrit par sa vitesse moyenne débitante  $U_0$  et sa hauteur d'équilibre  $H$ . L'écoulement physique de référence est alors déterminé par les grandeurs suivantes :  $R_e$ ,  $F$ ,  $\rho$ ,  $\nu$  et  $\theta$ . Ainsi si on prend un écoulement permanent comme échelle pour représenter l'état de référence, on trouve une relation entre le nombre de Froude et le Reynolds grâce au paramètre  $\lambda = \frac{R_e}{F^2}$ . Le système est alors entièrement défini avec 3 paramètres sans perte de généralité.

### 1.3.4 Récapitulatif de quelques adimensionnements dans le domaine des films minces

Nous allons présenter dans un premier temps un adimensionnement classique puis nous analyserons quelques variantes trouvées dans la littérature. Nous présenterons alors comment retrouver les adimensionnements de la littérature à partir de notre adimensionnement.

- **Introduction aux équations de Navier-Stokes avec surface libre et film de Nusselt**

Le concept de film mince avec étude asymptotique de type onde longue mène à des conditions de flux de type Poiseuille à surface libre uniforme. Si l'on ne considère que les forces de gravité comme dans les forces extérieures, les champs de vitesse et de pression pour  $z \leq H$  ( $H$  la hauteur de l'écoulement uniforme) sont donnés par :

$$(i) \quad u(z) = \left(H - \frac{z}{2}\right) z \frac{g \sin \theta}{\nu}, \quad (1.12)$$

$$(ii) \quad p(x, z) = \rho g (H - z) \cos \theta$$

La vitesse à l'interface est alors  $v_0 = u(H) = \frac{H^2 g \sin \theta}{2\nu}$  et la vitesse moyenne dans le fluide est :

$$U_0 = \frac{H^2 g \sin \theta}{3\nu} \quad (1.13)$$

On peut voir que si l'on prend en compte la pression hydrostatique donnée par (1.12), la pression caractéristique  $p_0$  est telle que :

$$p_0 = \rho g H \quad (1.14)$$

Si ce flux uniforme est pris comme flux de référence, les nombre adimensionnels utilisés doivent vérifier :

$$3 = \frac{R_e}{F_{cl}^2} \sin \theta \quad (1.15)$$

On pose :

$$G^2 = \frac{\rho U_0^2}{p_0} \quad (1.16)$$

On définit le nombre de Froude classique (où l'on ne considère que les forces de gravité) et le nombre de Weber :

$$F_{cl}^2 = \frac{U_0^2}{gH}, \quad W_e = \frac{\rho U_0^2 H}{\sigma} \quad (1.17)$$

On a alors deux listes de paramètres  $(\alpha, \beta, \delta)$  et  $(\kappa, \lambda, \varpi)$  :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\varepsilon G^2}{R_e}, & \beta &= \varepsilon R_e, & \delta &= \frac{\varepsilon R_e}{G^2} \\ \kappa &= \frac{\varepsilon^2 G^2}{W_e}, & \lambda &= \frac{R_e}{F_{cl}^2} \sin \theta, & \varpi &= \frac{G^2}{F_{cl}^2} \cos \theta \end{aligned} \quad (1.18)$$

On peut voir que :

$$\varepsilon^2 = \alpha \delta, \quad \varepsilon^2 G^2 = \alpha \beta \quad (1.19)$$

Le poids relatif des différents paramètres est libre et on a :

$$\varpi = \sqrt{1 - \lambda \frac{\delta}{\alpha}} \quad (1.20)$$

De plus avec  $F_{cl}^2, R_e, W_e$ , on peut trouver un nouveau nombre adimensionnel qui ne dépend que des grandeurs caractéristiques du fluide et de la gravité, le nombre de Kapitza :

$$K_a = \frac{\sigma}{\rho} v^{-\frac{4}{3}} g^{-\frac{1}{3}} \quad (1.21)$$

- **Adimensionnement de Vila**

Dans la méthode développée par Vila [53, 54] pour un film ruisselant sur un plan incliné, on pose :

$$p_0 = \rho g H \quad (1.22)$$

De ce fait  $G^2 = F_{cl}^2$ , ce qui simplifie les écritures des différents paramètres, tel que :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\varepsilon F_{cl}^2}{R_e}, & \beta &= \varepsilon R_e, & \delta &= \frac{\varepsilon R_e}{F_{cl}^2} \\ \kappa &= \frac{\varepsilon^2 F_{cl}^2}{W_e}, & \lambda &= \frac{R_e}{F_{cl}^2} \sin \theta, & \varpi &= \cos \theta \end{aligned} \quad (1.23)$$

En première approche, on considère  $(\alpha, \beta, \delta)$  petits alors que  $(\kappa, \lambda, \varpi)$  seront en  $\mathcal{O}(1)$ . Si l'on choisit comme référence la vitesse moyenne du flux uniforme (1.13), on peut alors choisir  $\lambda = 3$ . Il n'est cependant pas nécessaire de faire cette hypothèse lors du développement asymptotique.

Le fait de supposer que  $\kappa \sim \mathcal{O}(1)$  au lieu d'être un petit paramètre (à cause du fait que  $\varepsilon^2 = \alpha\delta$ ) peut se justifier par l'utilisation de grand nombre de Kapitza (1.21) dans les tests d'adimensionnement puisque :

$$K_a = \frac{R_e^{\frac{4}{3}}}{W_e}, \quad \kappa = \frac{\varepsilon^2 F_{cl}^2}{W_e} = \varepsilon^2 K_a R_e^{-\frac{4}{3}} F_{cl}^{\frac{4}{3}} = \left( \frac{\alpha\delta}{\sqrt{\beta}} \right)^{\frac{4}{3}} K_a \left( \frac{\sin \theta}{\lambda} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (1.24)$$

Cet adimensionnement est utilisé dans le livre de Chang et Demekhin [11]. Dans ce cas, la stabilité d'un flux uniforme est restreinte au domaine où :

$$R_e = \frac{H^3 g \sin \theta}{3\nu^2} \leq R_c = \frac{5}{6} \cot \theta \quad (1.25)$$

avec  $R_c$  définissant un nombre de Reynolds critique.

- **Adimensionnement de Roskes & Nakaya**

L'adimensionnement de Roskes [45] et de Nakaya [36] est basé sur :

$$U_0 = \frac{H^2 g \sin \theta}{2\nu} \quad (1.26)$$

$$p_0 = \rho g H \sin \theta$$

La vitesse du flux uniforme à l'interface  $u(H)$  est alors prise comme référence, ce qui implique que les nombres adimensionnels ne doivent plus vérifier (1.15) mais :

$$2 = \frac{R}{F_{cl}^2} \sin \theta \quad (1.27)$$

où  $R$  correspond à leur définition du nombre de Reynolds. Ainsi le domaine de stabilité est restreint à :

$$R = \frac{H^3 g \sin \theta}{2\nu^2} \leq R_c = \frac{5}{4} \cot \theta \quad (1.28)$$

ce qui donne à la place de (1.18) :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\varepsilon F_{cl}^2}{R_e}, & \beta &= \varepsilon R_e, & \delta &= \frac{\varepsilon R_e}{F_{cl}^2} \\ \kappa &= \frac{\varepsilon^2 F_{cl}^2}{W_e}, & \lambda &= \frac{R_e}{F_{cl}^2}, & \omega &= \cot \theta \end{aligned} \quad (1.29)$$

On peut aussi noter que Roskes et Nakaya définissent leur nombre de Weber  $W$  tel que :

$$W = \frac{\sigma}{\rho g H^2} = \frac{\sigma}{2\nu \rho U_0} = \frac{\sigma}{\rho H U_0^2} \frac{U_0 H}{2\nu} = \frac{R}{2W_e} \quad (1.30)$$

Roskes réalise un développement jusqu'à l'ordre 3 en  $\varepsilon$  (les effets de tension de surface doivent donc apparaître) cependant il suppose que  $W$  et  $R$  sont de l'ordre de  $\mathcal{O}(1)$ . De plus il fait une étude petite amplitude d'ondes monochromatiques jusqu'au troisième ordre. Nakaya a aussi étudié (partiellement) le cas  $\varepsilon^2 W \sim \mathcal{O}(1)$ .

- **Adimensionnement de Liu & Gollub**

Ils utilisent :

$$U_0 = \frac{H^2 g \sin \theta}{2\nu}, \quad (1.31)$$

$$p_0 = \rho g H \sin \theta$$

et leur nombre de Reynolds est tel que :

$$R = \frac{H^3 g \sin \theta}{2\nu^2} \quad (1.32)$$

Et ils introduisent :

$$W = \frac{\sigma}{\rho g H^2 \sin \theta} = \frac{\sigma}{2\rho\nu U_0} = \frac{\sigma}{\rho H U_0^2} \frac{u_0 H}{2\nu} = \frac{R}{2W_e} \quad (1.33)$$

Dans le premier article de Liu et Gollub [32], ils étudient la stabilité du modèle ; dans le deuxième article Liu et Gollub [33], ils s'intéressent au comportement non-linéaire. Ils présentent un grand nombre de résultat d'expériences très documentées, ce qui constitue une base intéressante pour la validation de modèles.

- **Adimensionnement de Ruyer-Quil & Maneville**

Dans leur analyse, Ruyer-Quil et Manneville [48] prennent :

$$L = H = \nu^{\frac{2}{3}} (g \sin \theta)^{-\frac{1}{3}}, \quad (1.34)$$

$$p_0 = \rho U_0^2 = \rho (g \nu \sin \theta)^{\frac{2}{3}}$$

Ce qui correspond à :

$$\varepsilon = 1, \quad F_{cl}^2 = \sin \theta, \quad R_e = 1 \quad (1.35)$$

Ils ne disposent que de deux degrés de liberté :  $\cot \theta$  et  $\Gamma$ , définis tels que :

$$\Gamma = \frac{\sigma}{\rho H U_0^2} = \frac{\sigma}{\rho \nu^{\frac{4}{3}} (g \nu \sin \theta)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{W_e} = \frac{K_a}{\sin \theta} \quad (1.36)$$

Ils utilisent partiellement une asymptotique onde longue, des petites perturbations  $\left(\frac{h_x}{h} \ll 1\right)$  et un développement petite amplitude. À notre connaissance, c'est le premier article présentant des modèles de type Shallow Water à deux moments. Pour faire une

comparaison avec leur travail, il faut poser  $L \neq H$  et garder  $\varepsilon$  pour que l'asymptotique onde longue soit plus simple. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \alpha &= \varepsilon, & \beta &= \varepsilon, & \delta &= \varepsilon \\ \kappa &= \frac{\varepsilon^2}{W_e}, & \lambda &= 1, & \omega &= \cot\theta \end{aligned} \quad (1.37)$$

• **Adimensionnement de Panga, Mudunuri & Balakotaiah**

Panga *et al.* [41] utilisent :

$$U_0 = \frac{gH^2 \sin\theta}{3\nu}, \quad (1.38)$$

$$p_0 = \frac{1}{12} \rho g H \sin\theta$$

De plus ils imposent  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et n'ont que deux paramètres  $K_a$  et  $\Gamma = W_e^{-1}$ . Leurs nombres de Reynolds et Weber sont définis tels que :

$$R_{em} = 4 \frac{\rho H U_0}{\mu} = 4R_e \quad (1.39)$$

$$\Gamma = W_e^{-1}$$

La solution uniforme vérifie alors :

$$3 = \frac{R_e}{F_{cl}^2} \sin\theta = \frac{R_e}{F_{cl}^2} = \frac{R_{em}}{4F_{cl}^2} \quad (1.40)$$

Ils supposent que  $K_a = \frac{\sigma}{\rho} v^{-\frac{4}{3}} g^{-\frac{1}{3}} = \Gamma R_e^{\frac{5}{3}} 2^{-\frac{1}{3}} = \mathcal{O}(1)$  et que  $K_a$  est grand tel que  $\Gamma \varepsilon^2 = \mathcal{O}(1)$  et  $\lambda = \mathcal{O}(1)$  ainsi :

$$\begin{aligned} \alpha &= 4\varepsilon, & \beta &= \frac{\varepsilon R_{em}}{4}, & \delta &= \frac{\varepsilon}{4} \\ \kappa &= R_{em} \Gamma, & \lambda &= 3, & \omega &= 0 \end{aligned} \quad (1.41)$$

Donc  $R_e = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{6}{5}}\right)$  et :

$$\alpha = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \beta = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{11}{5}}\right), \quad \delta = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \kappa = \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{6}{5}}\right) \quad (1.42)$$

Ils réalisent alors un développement jusqu'à l'ordre  $\varepsilon^{\frac{11}{5}}$  et étudient différents modèles à une équation en gardant des dérivées temporelles (à la place de dérivées spatiales) pour corriger certains termes dans le calcul des moyennes des moments.

## 1.4 SYSTÈME FINAL

En négligeant la force de Coriolis, on obtient le système suivant :

<b>Équations de volume :</b>
$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{U} = 0 \\ \partial_t \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) + \nu \nabla^2 \vec{U} \\ \quad \quad \quad - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{I} \end{array} \right.$
<b>Condition de non glissement :</b>
$U(x, y, 0, t) = 0$
<b>Condition cinématique :</b>
$h_t + u _{z=h} h_x + v _{z=h} h_y - w _{z=h} = 0$
<b>Continuité des contraintes tangentielles en <math>\vec{x}</math> :</b>
$(1 - h_x^2)(u_z + w_x) - h_x h_y (v_z + w_x) - 2h_x (v_y + 2u_x) - h_y (u_y + v_x) = \frac{1}{\mu} \tau_{tx}$
<b>Continuité des contraintes tangentielles en <math>\vec{y}</math> :</b>
$(1 - h_y^2)(v_z + w_y) - h_y h_x (u_z + w_x) - 2h_y (u_x + 2v_y) - h_x (v_x + u_y) = \frac{1}{\mu} \tau_{ty}$
<b>Continuité des contraintes tangentielles en <math>\vec{z}</math> :</b>
$\begin{aligned} & -\frac{\mu}{1 - h_x^2} \left( 2u_x (1 + h_x^2) + h_x^2 (2v_y + h_y (v_z + w_x)) + h_x h_y (u_y + v_x) \right) \\ & -\frac{\mu}{1 - h_y^2} \left( 2v_y (1 + h_y^2) + h_y^2 (2u_x + h_x (u_z + w_x)) + h_y h_x (u_y + v_x) \right) \\ & = p _h - p_g + \sigma \mathcal{H} + \tau_n \end{aligned}$

TABLE 3: Système final 3D

Le système adimensionné sera écrit dans le chapitre suivant où les équations seront moins compliquées.



## OBTENTION DU MODÈLE DE SAINT-VENANT 2D

**L**e but de ce chapitre est d'expliquer comment obtenir un système de type Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes à surface libre en étudiant le cas 2D, qui sera plus simple au niveau de l'écriture des équations que le cas général.

## SOMMAIRE

---

2.1	Équations de Navier-Stokes	<b>23</b>
2.2	Conditions aux limites	<b>24</b>
2.3	Système complet	<b>26</b>
2.4	Solution uniforme stationnaire	<b>26</b>
2.5	Mise à l'échelle	<b>27</b>
2.5.1	Nombre adimensionnels	28
2.5.2	Paramètres adimensionnels	28
2.6	Équations adimensionnées	<b>29</b>
2.6.1	Équations moyennées	29
2.7	Asymptotique onde longue	<b>29</b>
2.8	Développements asymptotiques	<b>30</b>
2.8.1	Ordre 0	30
2.8.2	Ordre 1	31
2.8.3	Le modèle à deux équations	32

---

## 2.1 ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

On considère le cas  $2D$  suivant : un film liquide se déplaçant sur une surface solide non rugueuse supposée plane, de longueur caractéristique  $L$  très grande, formant un angle  $\theta$  avec l'horizontale et uniquement soumis aux effets de la gravité.

On part des équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible s'écoulant dans un sous-domaine de  $\mathbb{R}^2$  (cf figure 2).

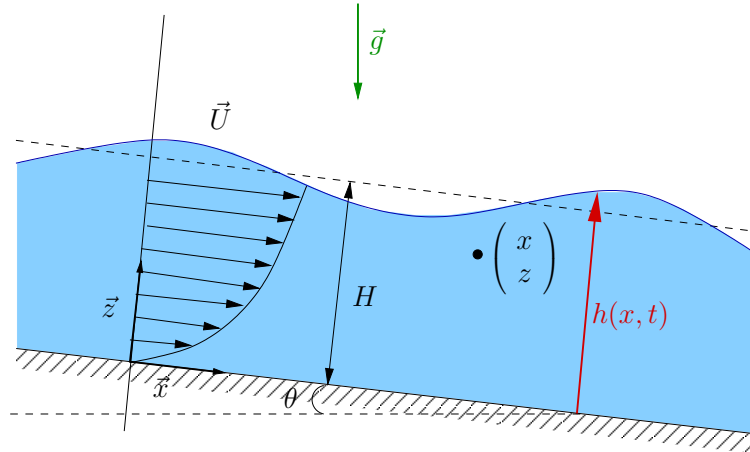


FIGURE 2: Repère du film liquide mince en 2D

Comme la masse volumique est considérée constante, l'équation de conservation de la masse se réduit à la divergence nulle de la vitesse. En utilisant le fait que le repère est fixe, on obtient le système d'équations simplifié suivant :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{U} = 0 \\ \partial_t \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = \nu \nabla^2 \vec{U} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} \end{cases} \quad (2.1)$$

avec comme notations :

- $\vec{U} = (u, w)^T$ , la vitesse dans le repère en mouvement ;
- $\nu \nabla^2 \vec{U}$ , le tenseur des contraintes visqueuses ( $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide) ;
- $p$ , la pression ;
- $\vec{g} = (g \sin \theta, -g \cos \theta)^T$ , la gravité.

## 2.2 CONDITIONS AUX LIMITES

- **Condition de non-glissement au fond :**

$$U(x, y, 0, t) = 0 \quad (2.2)$$

La vitesse du fluide est nulle sur le fond.

- **Condition à la surface libre :**

Au niveau de la surface libre  $z = h(x, t)$ , la normale à la surface en chaque point est donnée par  $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \begin{pmatrix} -h_x \\ 1 \end{pmatrix}$ , la tangente par  $\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ h_x \end{pmatrix}$ , et la courbure par

$$\mathcal{H} = \frac{h_{xx}}{(1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

- Condition cinématique :

$$h_t + u|_{z=h} h_x - w|_{z=h} = 0 \quad (2.3)$$

Cette condition exprime le fait que le fluide ne traverse pas la surface libre.

- Continuité de la contrainte (en l'absence de gaz sur le fluide) :

$$\vec{\Sigma}(\vec{U}|_{z=h}) \cdot \vec{n} - (p|_{z=h} + \sigma \mathcal{H}) \vec{n} = 0 \quad (2.4)$$

où  $\vec{\Sigma}$  est le tenseur des contraintes visqueuses.

- ▷ En réalisant le produit scalaire de l'équation (2.4) avec  $\vec{t}$ , et en utilisant l'équation de conservation de la masse, on peut écrire :

$$(1 - h_x^2)(u_z + w_x) - 4h_x u_x = 0 \quad (2.5)$$

- ▷ La composante en  $\vec{z}$  de (2.4), avec le résultat (2.5) donne :

$$-2\mu \frac{1+h_x^2}{1-h_x^2} u_x = p|_h + \sigma \mathcal{H} \quad (2.6)$$

## 2.3 SYSTÈME COMPLET

Récapitulons le système d'équations obtenu :

<b>Équations de volume :</b>
$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{U} = 0 \\ \partial_t \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = \nu \nabla^2 \vec{U} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} \end{array} \right.$
<b>Condition de non glissement :</b>
$U(x, y, 0, t) = 0$
<b>Condition cinématique :</b>
$h_t + u _{z=h} h_x - w _{z=h} = 0$
<b>Continuité des contraintes tangentielles en <math>\vec{x}</math> :</b>
$(1 - h_x^2)(u_z + w_x) - 4h_x u_x = 0$
<b>Continuité des contraintes tangentielles en <math>\vec{z}</math> :</b>
$-2\mu \frac{1 + h_x^2}{1 - h_x^2} u_x = p _h + \sigma \mathcal{H}$

TABLE 4: Système complet 2D

## 2.4 SOLUTION UNIFORME STATIONNAIRE

Dire que l'écoulement est stationnaire signifie qu'il n'y a ni variation longitudinale, ni variation en temps des caractéristiques du fluide :

$$\varphi_t = \varphi_x = 0$$

où  $\varphi$  représente une caractéristique de l'écoulement, par exemple le débit ou la hauteur.

Donc la hauteur moyenne du fluide est une constante :  $h(x, z) = H$ . De plus l'écoulement que l'on veut considérer est uniforme en  $z$ , ce qui veut dire que pour  $z$  fixé, la vitesse ne varie pas ainsi  $w = 0$ .

Les équations (2.1)-(2.5) deviennent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{zz} = -\frac{g \sin \theta}{\nu} \\ p_z = -\rho g \cos \theta \\ u(x, 0) = u_z(x, H) = 0 \\ p(x, H) = 0 \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Après intégration, on trouve :

$$\begin{cases} u(x, z) = \frac{g \sin \theta}{\nu} \left( H - \frac{z}{2} \right) z \\ p(x, z) = \rho g (H - z) \cos \theta \end{cases} \quad (2.8)$$

On obtient bien un film de Nusselt qui a un profil de vitesse de type Poiseuille. La vitesse à l'interface est donnée par :

$$v_0 = u(H) = \frac{H^2 g \sin \theta}{2\nu} \quad (2.9)$$

et la vitesse moyenne du film de Nusselt est :

$$U_0 = \frac{H^2 g \sin \theta}{3\nu}. \quad (2.10)$$

On peut voir que si l'on prend en compte la pression hydrostatique donnée par (2.8), la pression caractéristique  $p_0$  est telle que :

$$p_0 = \rho g H \quad (2.11)$$

## 2.5 MISE À L'ÉCHELLE

### Choix des échelles

On se fixe comme longueur caractéristique horizontale  $L$  suivant  $\vec{x}$ . On se donne aussi  $H$  et  $U_0$ , respectivement la hauteur et la vitesse moyenne en  $\vec{x}$  de la solution uniforme.

À partir de ces valeurs, on définit d'autres grandeurs caractéristiques :  $\frac{HU_0}{L}$  vitesse suivant  $\vec{z}$  et  $\frac{L}{U_0}$  grandeur de temps.

On adimensionne les forces de gravité par  $g$ , ce qui donne comme adimensionnement pour les forces de pression  $\rho g H$ . C'est à dire :

$t$	$\frac{L}{U_0}$	$u$	$U_0$
$x$	$L$	$w$	$U_0 \frac{H}{L}$
$z$	$H$	$\vec{g}$	$g$
		$p, \tau$	$\rho g H$

TABLE 5: Dimensions caractéristiques

On définit un petit paramètre, appelé paramètre onde longue  $\varepsilon = \frac{H}{L}$ , dans la direction de l'écoulement.

### 2.5.1 Nombre adimensionnels

Les équations adimensionnées feront apparaître les nombres adimensionnels suivants :

$$\triangleright \text{Nombre de Reynolds : } R_e = \frac{U_0 H}{\nu},$$

$$\triangleright \text{Nombre de Froude : } F^2 = \frac{U_0^2}{Hg},$$

$$\triangleright \text{Nombre de Weber : } W_e = \frac{\rho U_0^2 H}{\sigma}.$$

### 2.5.2 Paramètres adimensionnels

On a alors deux listes de paramètres  $(\alpha, \beta, \delta)$  et  $(\kappa, \lambda, \varpi)$  :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\varepsilon F^2}{R_e}, & \beta &= \varepsilon R_e, & \delta &= \frac{\varepsilon R_e}{F^2} \\ \kappa &= \frac{\varepsilon^2 F^2}{W_e}, & \lambda &= \frac{R_e}{F^2} \end{aligned} \tag{2.12}$$

En première approche, on considère  $(\alpha, \beta, \delta)$  petits alors que  $(\kappa, \lambda)$  seront en  $\mathcal{O}(1)$ . Si l'on choisit comme référence la vitesse moyenne du flux uniforme (2.10), on peut alors choisir  $\lambda \sin \theta = \frac{R_e}{F^2} \sin \theta = 3$  (si on fait le choix de prendre la vitesse à l'interface, on aura alors  $\lambda \sin \theta = 2$ ). Il n'est cependant pas nécessaire de faire cette hypothèse lors du développement asymptotique.

On retrouve ce qui a été présenté dans la partie 1.3.3, l'écoulement est défini par quatre paramètres :  $R_e$ ,  $W_e$ ,  $\theta$  et  $\varepsilon$  où le paramètre  $\lambda$  relie le nombre de Froude et le Weber par la relation définie ci-dessus.

Pour plus de clarté, on pose ici  $\alpha = \beta = \delta = \varepsilon$ , c'est à dire  $F^2 = R_e = \mathcal{O}(1)$ .

## 2.6 ÉQUATIONS ADIMENSIONNÉES

Le système adimensionné à résoudre s'écrit alors tel que :

<b>Équation de conservation de la masse :</b>
(i) $u_x + w_z = 0$
<b>Équation de bilan de quantité de mouvement selon <math>\vec{x}</math> :</b>
(ii) $u_t + uu_x + wu_z = \frac{1}{\varepsilon R_e} (\varepsilon^2 u_{xx} + u_{zz}) + \frac{1}{F^2} \left( \frac{\sin \theta}{\varepsilon} - p_x \right)$
<b>Équation de bilan de quantité de mouvement selon <math>\vec{z}</math> :</b>
(iii) $w_t + uw_x + ww_z = \frac{1}{\varepsilon R_e} (\varepsilon^2 w_{xx} + w_{zz}) - \frac{1}{\varepsilon^2 F^2} (\cos \theta + p_z)$
<b>Condition de non glissement :</b>
(iv) $u(x, 0) = w(x, 0) = 0$
<b>Condition cinématique :</b>
(iv) $h_t + u(x, h)h_x - w(x, h) = 0$
<b>Continuité des contraintes tangentielles en <math>\vec{x}</math> :</b>
(vi) $(1 - \varepsilon^2 (h_x)^2) (u_z + \varepsilon^2 w_x) - 4\varepsilon^2 h_x u_x = 0$
<b>Continuité des contraintes tangentielles en <math>\vec{z}</math> :</b>
(vii) $-\frac{2\varepsilon u_x (1 + \varepsilon^2 h_x^2)}{1 - \varepsilon^2 h_x^2} = \frac{R_e}{F^2} p _h + \frac{R_e}{W_e} \frac{\varepsilon^2 h_{xx}}{(1 + \varepsilon^2 h_x^2)^{\frac{3}{2}}}$

TABLE 6: Équations adimensionnées 2D

## 2.6.1 Équations moyennées

En intégrant l'équation de continuité (2.1) sur la hauteur du fluide, on obtient une première équation qui nous permet de développer des modèles à une équation :

$$h_t + \left( \int_0^h u \right)_x = 0 \quad (2.13)$$

De même, en intégrant l'équation (2.19), on a :

$$\left( \int_0^h u \right)_t + \left( \int_0^h u^2 \right)_x = \frac{\lambda h}{\varepsilon} \sin \theta + h_x p|_{z=h} - \left( \int_0^h p \right)_x - \frac{u_z|_{z=0}}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (2.14)$$

## 2.7 ASYMPTOTIQUE ONDE LONGUE

On suppose que  $\varepsilon$  est petit :

$$\varepsilon \ll 1$$

On réécrit les équations du tableau 6, en développant par rapport à  $\varepsilon$ .

$$u_{zz} = \varepsilon^0 \left[ -\frac{\sin\theta}{F^2} \right] + \varepsilon \left[ uu_x + u_t + wu_z + \frac{p_x}{F^2} \right] - \varepsilon^2 u_{xx} \quad (2.15)$$

$$p_z = -\varepsilon^0 \cos\theta + \varepsilon w_{zz} - \varepsilon^2 [uw_x + w_t + ww_z] + \varepsilon^3 w_{xx} \quad (2.16)$$

L'équation (vi) du tableau 6 nous donne la valeur de la dérivée normale de la vitesse tangentielle en  $h$  :

$$(u_z)_{|h} = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.17)$$

Ce qui donne pour l'équation (vii) :

$$p_{|h} = -\kappa h_{xx} - 2\varepsilon u_x + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.18)$$

et pour les équations de volume :

$$u_{zz} = \varepsilon(u_t + uu_x + wu_z) - \varepsilon^2 u_{xx} + \varepsilon p_x - \lambda \sin\theta \quad (2.19)$$

$$p_z = -\cos\theta - \varepsilon w_{zz} + \varepsilon^2(w_t + uw_x + ww_z) + \varepsilon^3 w_{xx} \quad (2.20)$$

## 2.8 DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

On développe la vitesse et la pression en séries entières en  $\varepsilon$  :

$$u = \sum_{n \geq 0} u_n \varepsilon^n = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 \dots$$

$$w = w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 \dots$$

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 \dots$$

### 2.8.1 Ordre 0

Lorsqu'on prend le premier ordre du développement asymptotique, le système (2.19) se réduit à :

$$u_{zz} = -\lambda \sin\theta + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (2.21)$$



Avec les conditions aux limites (2.2) et (2.17), on obtient une première approximation de la vitesse :

$$u^{(0)} = z \left( h - \frac{z}{2} \right) \lambda \sin \theta + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (2.22)$$

En intégrant l'équation de continuité sur la hauteur du fluide, on obtient un premier modèle à une équation du type équation de Burgers :

$$h_t + h_x h^2 \lambda \sin \theta = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (2.23)$$

Si  $U_0$  est la vitesse moyenne du fluide, alors on a la condition suivante sur  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} \int_0^1 u|_{h(x,t)=1} &= 1 \\ \Rightarrow \lambda \sin \theta &= 3 + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Le modèle (2.23) s'écrit en variables dimensionnées :

$$\boxed{\mu h_t + h_x h^2 \rho \sin \theta = \mathcal{O}(\varepsilon)} \quad (2.25)$$

On obtient un modèle dans lequel seules sont prises en compte les forces centrifuges et d'inertie.

En utilisant la dernière équation (2.20) avec la condition limite (2.18), il vient :

$$p^{(0)} = -\kappa h_{xx} + (h - z) \cos \theta + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (2.26)$$

On déduit  $w^{(0)}$  de  $u^{(0)}$  :

$$\begin{aligned} w^{(0)} &= -\int_0^z u_x^{(0)} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= -\frac{z^2}{2} \lambda \sin \theta h_x + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.27)$$

### 2.8.2 Ordre 1

À l'aide des valeurs calculées à l'ordre 0, on peut apporter des corrections pour augmenter la précision.

$$u^{(1)} = \int_0^z \left[ -\int_z^h \left( u_t^{(0)} + u^{(0)} u_x^{(0)} + w^{(0)} u_z^{(0)} + p_x^{(0)} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (2.28)$$

On utilise la relation (2.23) pour remplacer  $h_t$  par une fonction de la dérivée spatiale dans l'écriture de  $u_t^{(0)}$ .

$$u^{(1)} = z \left( h - \frac{z}{2} \right) \left( (\lambda \sin(\theta))^2 \frac{h h_x}{12} (4h^2 + 2hz - z^2) + \kappa h_{xxx} - \cos(\theta) h_x \right)$$

Le modèle à une équation (2.13) s'écrit maintenant plus précisément avec les termes correctifs.

$$h_t + \left( \frac{h^3}{3} \left( \lambda \sin(\theta) + \varepsilon \left( (\lambda \sin(\theta))^2 \frac{2}{5} h^3 h_x + \kappa h_{xxx} - \cos(\theta) h_x \right) \right) \right)_x = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.29)$$

On peut utiliser la relation  $\lambda \sin \theta = 3$  (qui correspond au choix de la vitesse moyenne comme vitesse de référence) pour simplifier et obtenir le modèle suivant (dérivé pour la première fois par Benney [4]) :

$$h_t + \left( h^3 + \varepsilon h^3 \left( \frac{6}{5} h^3 h_x + \frac{\kappa}{3} h_{xxx} - \frac{\cos(\theta)}{3} h_x \right) \right)_x = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

En variables dimensionnées :

$$\mu h_t + \left( \frac{h^3}{3} \left( \rho g \sin(\theta) \left( 1 + \frac{\rho g \sin(\theta)}{v^2} \frac{2}{5} h^3 h_x \right) + \sigma h_{xxx} - \rho g \cos(\theta) h_x \right) \right)_x = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

### 2.8.3 Le modèle à deux équations

Le but est de développer des modèles basés sur l'intégration exacte des équations de Navier-Stokes. Comme on l'a déjà vu, on trouve facilement une famille de modèles à une équation en intégrant l'équation de conservation de la masse. Un inconvénient important de cette approche est que le modèle s'effondre dès que l'on regarde une situation physique qui n'est plus assez proche de la limite d'équilibre. Ceci est bien connu pour l'équation du premier ordre ( $\varepsilon^0$ ), les singularités arrivent en temps fini même si la solution initiale est régulière, notons que cette discontinuité reste bornée et l'unicité de la solution faible est garantie dans un certain sens (solution entropique).

Pour le schéma à l'ordre deux, la situation n'est pas claire. Supposons que la tension de surface est négligeable, l'existence d'une solution bornée impose d'avoir un Reynolds inférieur à une valeur limite, une instabilité de Hadamard apparaît si cette condition n'est pas satisfaite. Il est connu que la capillarité stabilise les hautes fréquences, et on attend plus de stabilité dans ce cas, les expériences et les résultats mathématiques (même partiel) (cf Pumir *et al.* [43], Roskes [45], Ruyer-Quil et Manneville [48, 50, 49], Roy *et al.* [47], etc...) montrent que des singularités en temps fini sont possibles, sauf dans le cas du régime de petite amplitude.

Le comportement de systèmes de type Saint-Venant est plus robuste. En partant d'une solution uniforme avec des perturbations à longueur d'onde donnée, la solution semble converger vers la roll-wave associée (cf Yu et Kevorkian [60]). Ce fait n'est pas complètement démontré d'un point de vue mathématique, néanmoins tous les résultats expérimentaux le prouvent, même pour une tension de surface nulle. Nous nous référons à Noble [38] pour quelques résultats préliminaires sur la stabilité des roll-waves visqueuses.

Pour construire des modèles de type Shallow Water à deux équations en 2D (3 équations en 3D), on se donne une seconde inconnue en plus de la hauteur  $h$ , le débit  $q = \int_0^h u$ . La première équation est déjà connue, il s'agit de la conservation de la masse intégrée sur la hauteur (2.13) :

$$h_t + q_x = 0$$

Cette équation est exacte, il n'y a pas d'approximation.

Pour fermer les modèles à deux équations, il faut une équation qui nous donne le débit. On l'obtient à l'aide de l'équation moyennée de bilan de quantité de mouvement tangentielle (2.14) et en utilisant les développements de la vitesse et de la pression. Mais pour obtenir un modèle d'ordre  $\varepsilon^1$ , il faut utiliser les développements en  $\varepsilon^2$  de la vitesse. En effet dans cette équation, les contraintes à l'interface et au fond apparaissent dans le terme  $\frac{1}{\varepsilon} (\lambda \sin \theta h - u_{z|z=0})$ . Si on ne prend que les premiers termes du développement ( $u^{(0)}$  et  $p^{(0)}$ ) qui sont d'ordre  $\varepsilon^1$  alors les termes de contraintes sont de l'ordre de 1 ( $\varepsilon^0$ ). La seconde équation s'écrit, à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  :

$$q_t + \left( \int_0^h (u^{(0)})^2 \right)_x = \frac{1}{\varepsilon} (\lambda \sin \theta h - u_{z|z=0}^{(1)}) + h_x p_{|z=h}^{(0)} - \left( \int_0^h p^{(0)} \right)_x + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Avec la première estimation de la vitesse, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^h (u^{(0)})^2 &= \frac{2}{15} (\lambda \sin(\theta))^2 h^5 \\ h_x p_{|z=h}^{(0)} - \left( \int_0^h p^{(0)} \right)_x &= \kappa h h_{xxx} - h h_x \cos(\theta) \\ u_{z|z=0}^{(0)} &= \lambda \sin \theta h \end{aligned}$$

En utilisant l'expression du débit :

$$q = \frac{1}{3} \lambda \sin(\theta) h^3 + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

on peut réécrire l'intégrale du carré de la vitesse et la contrainte au fond en faisant intervenir le débit :

$$\int_0^h (u^{(0)})^2 = \frac{6}{5} \frac{q^2}{h}$$

Néanmoins l'expression des équations de Saint-Venant classique ne fait intervenir que du  $\frac{q^2}{h}$ , et il reste alors un terme correctif en  $h^5$  qui est souvent omis :

$$\int_0^h (u^{(0)})^2 = \frac{q^2}{h} + \frac{h^5}{45} (\lambda \sin(\theta))^2$$

Comme il n'y a pas de raison de privilégier une des deux formes, on choisit l'écrire sous forme paramétrée :

$$\int_0^h (u^{(0)})^2 = C_1 \frac{q^2}{h} + \frac{1}{45} (\lambda \sin(\theta))^2 h^5 (6 - 5C_1), \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

Il y a donc une infinité de combinaisons possibles, et donc de modèles à deux équations. De la même manière, la contrainte au fond peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u_{z|z=0}^{(0)} &= 3 \frac{q}{h^2} \\ &= C_2 \frac{q}{h^2} + \lambda \sin \theta \frac{h}{3} (3 - C_2), \quad C_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où  $C_2$  est un deuxième paramètre. Le choix des constantes  $C_1$  et  $C_2$  sera discuté dans le chapitre suivant.

Avec l'ordre suivant, on détermine la contrainte au fond :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \left( \lambda \sin \theta h - u_{z|z=0}^{(1)} \right) \\ &= \frac{C_2}{\varepsilon} \left( \lambda \sin \theta \frac{h}{3} - \frac{q}{h^2} \right) \\ &= \frac{C_2}{\varepsilon} \left( \lambda \sin \theta \frac{h}{3} - \frac{q}{h^2} \right) + \left( \frac{2}{15} C_2 - \frac{1}{3} \right) (\lambda \sin(\theta))^2 h^4 h_x \\ & \quad + \left( 1 - \frac{C_2}{3} \right) (h h_x \cos(\theta) - \kappa h h_{xxx}) \\ &= \frac{C_2}{\varepsilon} \left( \lambda \sin \theta \frac{h}{3} - \frac{q}{h^2} \right) + \left( \left( \frac{2}{15} C_2 - \frac{1}{3} \right) (\lambda \sin(\theta))^2 \frac{h^5}{5} \right)_x \\ & \quad + \left( 1 - \frac{C_2}{3} \right) \left( \left( \frac{h^2}{2} \cos(\theta) \right)_x - \kappa h h_{xxx} \right) \end{aligned}$$

En utilisant ces estimations des différents termes, on a un système de type Saint-Venant sous forme conservative :

$$\begin{cases} h_t + q_x = 0 \\ q_t + \left( C_1 \frac{q^2}{h} + (\lambda \sin(\theta))^2 h^5 \left( \frac{1}{5} - \frac{C_1}{9} - \frac{2C_2}{75} \right) + C_2 \frac{h^2}{6} \cos(\theta) \right)_x \\ \quad = \frac{C_2}{\varepsilon} \left( \lambda \sin \theta \frac{h}{3} - \frac{q}{h^2} \right) + \frac{C_2}{3} \kappa h h_{xxx} + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{cases} \quad (2.30)$$

Notons qu'en prenant  $C_1 = \frac{6}{5}$  et  $C_2 = 3$ , on retrouve un modèle de type couche limite intégral de Shkadov (cf Vila [53]) :

$$\begin{cases} h_t + q_x = 0 \\ q_t + \left( \frac{6}{5} \frac{q^2}{h} - (\lambda \sin(\theta))^2 \frac{h^5}{75} + \frac{h^2}{2} \cos(\theta) \right)_x \\ \quad = \frac{1}{\varepsilon} \left( \lambda \sin \theta h - 3 \frac{q}{h^2} \right) + \kappa h h_{xxx} + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{cases}$$

---

 PROPRIÉTÉS DES MODÈLES
 

---

**D**ans ce chapitre nous allons essayer de déterminer des valeurs pour les constantes qui paramètrent les modèles, afin que le problème soit mathématiquement bien posé. On impose au système d'être hyperbolique, puis on cherche une entropie convexe. On montre alors que ces modèles sont linéairement stables. Pour finir nous nous intéressons aux formations de roll-waves et aux travaux déjà effectués sur leur étude.

En posant  $U = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}$ , on peut réécrire le système à deux équations (2.30) sous forme matricielle :

$$U_t + F_x = \frac{1}{\varepsilon} S + K + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.1)$$

où :

$$\begin{cases} F = \begin{pmatrix} q \\ f(h, q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \frac{q^2}{h} + (\lambda \sin \theta)^2 h^5 \left( \frac{1}{5} - \frac{C_1}{9} - \frac{2C_2}{75} \right) + C_2 \frac{h^2}{6} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \\ S = \begin{pmatrix} 0 \\ s(h, q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_2 \left( \lambda \sin \theta \frac{h}{3} - \frac{q}{h^2} \right) \end{pmatrix} \\ K = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{C_2}{3} \kappa h h_{xxx} \end{pmatrix} \end{cases}$$

On restreint l'étude au cas où  $K = 0$ , c'est à dire sans tension de surface.

 SOMMAIRE
 

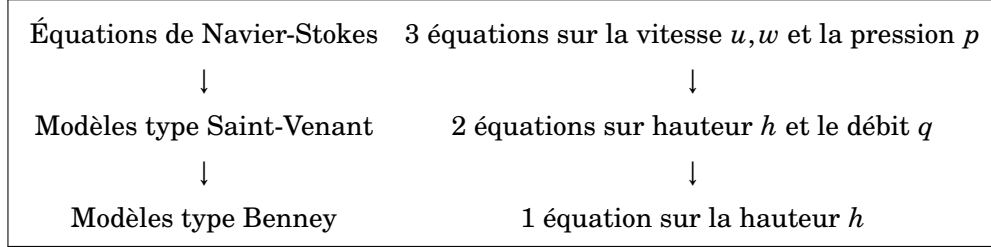
---

3.1	Du modèle de Saint-Venant à l'équation de Benney	36
3.2	Hyperbolicité	37
3.3	Entropie	37
3.4	Stabilité linéaire (et lien avec Orr-Sommerfeld)	40
3.5	Formations de roll-waves	44

---

## 3.1 DU MODÈLE DE SAINT-VENANT À L'ÉQUATION DE BENNEY

Montrons d'abord que les différents modèles peuvent se classer suivant le schéma :



En effet, à partir du modèle à deux équations, on peut retrouver le modèle à une équation. Intéressons nous à la deuxième équation du modèle (3.1). Réalisons une asymptotique de Chapman-Enskog, c'est à dire supposons que l'on est proche de l'état d'équilibre. Nous avons donc  $s(h, q) = 0$  (l'écoulement uniforme stationnaire défini en 2.4 page 26) état autour duquel on a réalisé l'asymptotique. Grâce au théorème des fonctions implicites, on peut écrire le débit  $q$  sous la forme :

$$q = \varphi(h) = \lambda \sin \theta \frac{h^3}{3}$$

où  $\varphi(h)$  est la valeur de  $q$  qui annule  $s(h, q)$  et  $\varphi'(h) = \lambda \sin \theta h^2 = -\frac{s_h(h, q)}{s_q(h, q)}$ .

Faisons un développement de Taylor au voisinage de  $q = \varphi(h)$ , on a alors :

$$s(h, q) = \underbrace{s(h, \varphi(h))}_{=0} + (q - \varphi) \frac{\partial s}{\partial q}(h, \varphi(h)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

On peut alors réécrire la deuxième équation du modèle (3.1) sous la forme :

$$s(h, q) = \varepsilon (q_t + f_h h_x + f_q q_x)$$

Donc on a :

$$q = \varphi + \varepsilon \left( \frac{\partial s}{\partial q}(h, \varphi(h)) \right)^{-1} (q_t + f_h h_x + f_q q_x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

où si  $q = \varphi(h)$  alors  $q_x = \varphi'(h) h_x$  et  $q_t = \varphi'(h) h_t = -\varphi'(h) q_x = -\varphi'^2(h) h_x$  en utilisant la première équation du modèle (3.1), le modèle se réécrit tel que :

$$\begin{cases} h_t + q_x = 0 \\ q = \varphi(h) - \varepsilon \frac{h^2}{C_2} \left( f_h(h, \varphi(h)) + f_q(h, \varphi(h)) \varphi'(h) - (\varphi'(h))^2 \right) h_x + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $\left(\frac{\partial s}{\partial q}(h, \varphi(h))\right)^{-1} = -\frac{h^2}{C_2}$ . C'est à dire le modèle (2.29). On a donc un problème de Cauchy bien posé si :

$$\left(\frac{\partial s}{\partial q}(h, \varphi(h))\right)^{-1} \left(f_h(h, \varphi(h)) + f_q(h, \varphi(h))\varphi'(h) - (\varphi'(h))^2\right) < 0 \quad (3.3)$$

On peut trouver des preuves rigoureuses et des justifications de cette asymptotique, valide dès que l'on considère un flux uniforme linéairement stable caractérisé par la condition (3.3), par exemple dans l'article Chen *et al.* [14] et Yong [59].

### 3.2 HYPERBOLICITÉ

Le système est strictement hyperbolique si les vitesses caractéristiques, données par la relation suivante :

$$\Lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left( \partial_q f \pm \sqrt{\partial_q f^2 + 4\partial_h f} \right)$$

sont réelles et distinctes. On peut les développer sous la forme suivante :

$$\Lambda_{\pm} = C_1 \frac{q}{h} \pm \sqrt{(C_1 - 1)C_1 \frac{q^2}{h^2} + (\lambda \sin \theta)^2 h^4 \left(1 - \frac{5C_1}{9} - \frac{2C_2}{15}\right) + C_2 \frac{h}{3} \cos \theta}$$

La condition d'hyperbolicité est donc :

$$(C_1 - 1)C_1 \frac{q^2}{h^2} + (\lambda \sin \theta)^2 h^4 \left(1 - \frac{5C_1}{9} - \frac{2C_2}{15}\right) + C_2 \frac{h}{3} \cos \theta > 0$$

On a donc démontré la propriété suivante :

**Proposition.** *Si on veut que le flux  $F$  soit hyperbolique sur tout le domaine physique  $\mathcal{P} = \{h \geq 0 \text{ et } q \in \mathbb{R}\}$ , la condition d'hyperbolicité conduit alors à l'ensemble des conditions suivantes :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (C_1 - 1)C_1 \geq 0 \\ 1 - \frac{5C_1}{9} - \frac{2C_2}{15} \geq 0 \\ C_2 > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1 \geq 1 \text{ ou } C_1 \leq 0 \\ 45 \geq 25C_1 + 6C_2 \\ C_2 > 0 \end{array} \right. \quad (3.4)$$

### 3.3 ENTROPIE

On cherche une entropie  $E(h, q)$  associée au flux d'entropie  $\mathcal{F}(h, q)$  qui vérifie la relation :

$$(E_U F_U)_U = \mathcal{F}_U$$

soit :

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_U \mathbf{F}_U)_U &= \begin{pmatrix} (\mathbf{E}_q f_h)_h & (\mathbf{E}_q f_h)_q \\ \mathbf{E}_{hh} + (\mathbf{E}_q f_q)_h & \mathbf{E}_{hq} + (\mathbf{E}_q f_q)_q \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{F}_U \end{aligned}$$

De plus  $\mathcal{F}$  doit être symétrique, on a alors obligatoirement que :

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_q f_h)_q &= \mathbf{E}_{hh} + (\mathbf{E}_q f_q)_h \\ \Rightarrow \mathbf{E}_{hh} + \mathbf{E}_{hq} f_q - \mathbf{E}_{qq} f_h &= 0 \end{aligned}$$

Si on se restreint à la recherche d'une entropie quadratique en  $q$  (ce qui semble raisonnable en regardant le bilan de l'énergie cinétique) :

$$E = \frac{1}{2} h^r q^2 + e(h)$$

alors l'équation sur l'entropie devient :

$$\frac{r(r-1)}{2} h^{r-2} q^2 + e'' + r h^{r-1} q f_q - h^r f_h = 0$$

soit :

$$e'' = -\frac{r(r-1)}{2} h^{r-2} q^2 - r h^{r-1} q f_q + h^r f_h$$

Après avoir remplacé  $f$  par sa valeur, on trouve :

$$\begin{aligned} e'' &= -\left(r^2 + (4C_1 - 1)r + 2C_1\right) \frac{h^{r-2} q^2}{2} \\ &\quad + h^r \left( (\lambda \sin \theta)^2 h^4 \left(1 - \frac{5C_1}{9} - \frac{2C_2}{15}\right) + C_2 \frac{h}{3} \cos \theta \right) \end{aligned}$$

$e$  ne dépend que de  $h$ , donc la partie en  $q$  doit s'annuler :

$$0 = r^2 + (4C_1 - 1)r + 2C_1$$

ce qui impose la relation suivante entre  $r$  et  $C_1$  :

$$C_1 = \frac{r(1-r)}{2(2r+1)} \tag{3.5}$$

La condition (3.4) sur  $C_1$  impose que :

$$r \in ]-\infty, -2] \cup \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup [1, +\infty[$$



De plus on veut que l'entropie soit convexe, et donc que la hessienne de l'entropie soit semi-définie positive, ce qui s'écrit  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} (a, b) \begin{pmatrix} E_{hh} & E_{hq} \\ E_{hq} & E_{qq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow a^2 E_{hh} + 2ab E_{hq} + b^2 E_{qq} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow E_{hh} \left( a + b \frac{E_{hq}}{E_{hh}} \right)^2 + b^2 \left( E_{qq} - \frac{E_{hq}^2}{E_{hh}} \right) &\geq 0 \end{aligned}$$

Les conditions suffisantes pour que  $E$  soit convexe sont donc :

$$\begin{cases} E_{hh} \geq 0 \\ E_{hh} E_{qq} - E_{hq}^2 \geq 0 \end{cases}$$

La première condition donne :

$$E_{hh} = \frac{r(r-1)}{2} h^{r-2} q^2 + h^r \left( (\lambda \sin \theta)^2 h^4 \left( 1 - \frac{5C_1}{9} - \frac{2C_2}{15} \right) + C_2 \frac{h}{3} \cos \theta \right) \geq 0$$

On veut que cette condition soit vérifiée sur tout le domaine physique  $\mathcal{D} = \{h \geq 0 \text{ et } q \in \mathbb{R}\}$ , et puisque le flux est hyperbolique on sait déjà que  $e'' = h^r \left( (\lambda \sin \theta)^2 h^4 \left( 1 - \frac{5C_1}{9} - \frac{2C_2}{15} \right) + C_2 \frac{h}{3} \cos \theta \right) \geq 0$ . La condition se réduit donc à :

$$r(r-1) \geq 0 \Rightarrow r \in ]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$$

La seconde condition donne :

$$E_{hh} E_{qq} - E_{hq}^2 = h^r e'' - \frac{r(r+1)}{2} h^{2(r-1)} q^2 \geq 0$$

or  $e''$  est positive, donc la condition se réduit à :

$$r(r+1) \leq 0 \Rightarrow r \in [-1, 0]$$

Et donc il faut que :

$$r \in \left[ -1, -\frac{1}{2} \right] \cup \left[ -\frac{1}{2}, 0 \right]$$

Si on fait le choix de prendre  $r = -1$ , l'entropie s'écrit alors :

$$E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{h} + h (\ln h - 1) \left( (\lambda \sin \theta)^2 h^4 \left( 1 - \frac{5C_1}{9} - \frac{2C_2}{15} \right) + C_2 \frac{h}{3} \cos \theta \right)$$

On retrouve la forme de l'énergie cinétique  $\frac{1}{2} \frac{q^2}{h}$ .

En conclusion :

**Proposition.** *Si on veut que le flux  $F$  soit hyperbolique sur tout le domaine physique  $\mathcal{P} = \{h \geq 0 \text{ et } q \in \mathbb{R}\}$ , et si on veut avoir en plus une entropie quadratique en  $q$ , alors les paramètres  $C_1$  et  $C_2$  doivent vérifier (d'après les relations (3.5) et (3.4)) :*

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ 0 < C_2 \leq \frac{10}{3} \end{cases} \quad (3.6)$$

Remarquons que la valeur  $C_1 = 1$  est la forme classique de Saint-Venant :  $q_t + \left(\frac{q^2}{h} + g\frac{h^2}{2}\right)_x = 0$ .

### 3.4 STABILITÉ LINÉAIRE (ET LIEN AVEC ORR-SOMMERFELD)

On linéarise le système (3.1) (sans tension de surface) autour de l'état d'équilibre  $U_0 = \begin{pmatrix} h_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$  en posant  $U = U_0 + \bar{\varepsilon}\bar{U}$  et on obtient le système linéarisé suivant :

$$\bar{\varepsilon} [\bar{U}_t + A(U_0)\bar{U}_x] = \frac{1}{\varepsilon} [S(U_0) + \bar{\varepsilon}S_U(U_0)\bar{U}]$$

où  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f_h & f_q \end{bmatrix}$ . Au premier ordre en  $\bar{\varepsilon}$ , on retrouve l'état d'équilibre :  $S(U_0) = 0 \Leftrightarrow s(h_0, q_0) = 0$ . Au deuxième ordre en  $\bar{\varepsilon}$ , on a :

$$\bar{U}_t + A(U_0)\bar{U}_x = \frac{1}{\varepsilon} S_U(U_0)\bar{U}$$

On réalise alors une transformée de Fourier en  $x$  sur ce système :

$$\begin{aligned} \hat{U}_t + ikA(U_0)\hat{U} &= \frac{1}{\varepsilon} S_U(U_0)\hat{U} \\ \Leftrightarrow \hat{U}_t &= \left[ \frac{1}{\varepsilon} S_U(U_0) - ikA(U_0) \right] \hat{U} \end{aligned}$$

en intégrant on trouve :

$$\hat{U}(t, k) = \exp \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} S_U(U_0) - ikA(U_0) \right) t \right] \cdot \hat{U}(0, k).$$

La solution est stable si la partie réelle des valeurs propres de  $\frac{1}{\varepsilon} S_U(U_0) - ikA(U_0)$  est négative pour tout  $k \in \mathbb{R}$ . Notons  $s$  ces valeurs propres, elles sont solutions de l'équation :

$$\det\left(s\mathbb{1} - \frac{1}{\varepsilon}S_U(U_0) + ikA(U_0)\right) = 0$$

On trouve alors<sup>1</sup> :

$$\begin{cases} s_1 = -\frac{1}{2}ikf_q - \frac{1}{2\varepsilon} \left[ -s_q + \sqrt{s_q^2 - (f_q^2 + 4f_h)k^2\varepsilon^2 - 2ik(f_qs_q + 2s_h)\varepsilon} \right] \\ s_2 = -\frac{1}{2}ikf_q - \frac{1}{2\varepsilon} \left[ -s_q - \sqrt{s_q^2 - (f_q^2 + 4f_h)k^2\varepsilon^2 - 2ik(f_qs_q + 2s_h)\varepsilon} \right] \end{cases}$$

où  $s_1 < s_2$ . On s'intéresse donc au signe de  $s_2$ . Le terme sous la racine carrée de la valeur propre  $s_2$  peut se développer. On pose :

$$s_2 = \frac{1}{2\varepsilon}s_q - \frac{1}{2}ikf_q + \frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{\Re_\Delta + \Im_\Delta}$$

$$\sqrt{\Re_\Delta + \Im_\Delta} = p + iq$$

alors on a  $(p + iq)^2 = \Re_\Delta + \Im_\Delta$  d'où

$$\begin{cases} \Re_\Delta = p^2 - q^2 \\ \Im_\Delta = 2pq \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} p = \frac{1}{2}\sqrt{2(\Re_\Delta + \sqrt{\Re_\Delta^2 + \Im_\Delta^2})} \\ q = \frac{\Im_\Delta}{\sqrt{2(\Re_\Delta + \sqrt{\Re_\Delta^2 + \Im_\Delta^2})}} \end{cases}$$

et donc

$$s_2 = \frac{1}{2\varepsilon}s_q - \frac{1}{2}ikf_q + \frac{1}{2\varepsilon} \left( \frac{1}{2}\sqrt{2(\Re_\Delta + \sqrt{\Re_\Delta^2 + \Im_\Delta^2})} + i \frac{\Im_\Delta}{\sqrt{2(\Re_\Delta + \sqrt{\Re_\Delta^2 + \Im_\Delta^2})}} \right)$$

avec

$$\begin{cases} \Re_\Delta = s_q^2 - \varepsilon^2k^2(f_q^2 + 4f_h) \\ \Im_\Delta = -2k\varepsilon(f_qs_q + 2s_h) \end{cases}$$

Un développement onde longue de cette valeur propre (i.e. quand  $k \rightarrow 0$ ) donne :

---

1. Remarque :  $s_q$  est négatif, en effet  $s_q = -C_2$ , et l'hyperbolicité requiert  $C_2 > 0$

$$s_2 = \frac{s_h}{s_q} ik - \frac{\varepsilon}{(s_q)^3} \left( (s_h)^2 + s_h s_q f_q - (s_q)^2 f_h \right) k^2 + \mathcal{O}(k^3).$$

La condition de stabilité s'écrit donc :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{(s_q)^3} \left( (s_h)^2 + s_h s_q f_q - (s_q)^2 f_h \right) < 0 \\ \Leftrightarrow & s_q^{-1} \left( f_h - \frac{s_h}{s_q} f_q - \left( \frac{s_h}{s_q} \right)^2 \right) < 0 \\ \Leftrightarrow & s_q^{-1} \left( f_h + \varphi'(h) f_q - (\varphi'(h))^2 \right) < 0 \end{aligned}$$

Sachant que  $\varphi'(h) = -\frac{s_h(h,q)}{s_q(h,q)}$ , on retrouve alors la condition de stabilité (3.3). Ce qui correspond au même critère (dans le cas asymptotique onde longue) que l'analyse complète de stabilité du flux uniforme.

Notons que la stabilité linéaire du flux uniforme implique l'hyperbolicité du système homogène linéarisé associé.

On peut aussi remarquer que même si le système  $2 \times 2$  dépend de cinq paramètres, l'équation d'évolution à l'ordre 1 ou 2 ne dépend pas des cinq paramètres.

Les premiers termes du développement onde longue de la valeur propre s'écrivent :

$$s_2 = s_{10} ik + s_{20} k^2 + s_{30} ik^3 + s_{40} k^4 + \dots$$

avec :

$$\begin{aligned} s_{10} &= -3 \\ s_{20} &= \varepsilon \left( \frac{6}{5} R_e - \cot \theta \right) \\ s_{30} &= \varepsilon^2 2R_e \left( \frac{3 - C_1}{C_2} \right) \left( \frac{6}{5} R_e - \cot \theta \right) \\ s_{40} &= \varepsilon^3 \left( \left( -\frac{24}{5} \frac{C_1^2}{C_2} - \frac{216}{5C_2} + \frac{144}{5} \frac{C_1}{C_2} - \frac{36}{25} \right) \frac{R_e^3}{C_2 \sin^2 \theta} + \left( \frac{36}{C_2} + \frac{12}{5} + 4 \frac{C_1^2}{C_2} - 24 \frac{C_1}{C_2} \right) \frac{\cot(\theta) R_e^2}{C_2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(\cot(\theta))^2 R_e}{C_2} \left( -1 + R_e^2 \left( \frac{36}{25} + \frac{216}{5C_2} + \frac{24}{5} \frac{C_1^2}{C_2} - \frac{144}{5} \frac{C_1}{C_2} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

à comparer avec le développement donné par la théorie d'Orr-Sommerfeld pour le système de Navier-Stokes (donné dans Chang et Demekhin [11]<sup>2</sup>)

$$s^{NS} = s_{10}^{NS} ik + s_{20}^{NS} k^2 + s_{30}^{NS} ik^3 + s_{40}^{NS} k^4 + \dots$$

---

2. Dans Chang et Demekhin [11] le développement est donné en fonction de  $\omega = is$ .

$$\begin{aligned}
s_{10}^{NS} &= -3 \\
s_{20}^{NS} &= \varepsilon \left( \frac{6}{5} R_e - \cot(\theta) \right) \\
s_{30}^{NS} &= \varepsilon^2 \left( 3 + \frac{12}{7} R_e^2 - \frac{10}{7} R_e \cot(\theta) \right) \\
s_{40}^{NS} &= \varepsilon^3 \left( \frac{9}{5} \cot(\theta) - \frac{1413}{224} R_e - \frac{75872}{25025} R_e^3 + \frac{17363}{5775} \cot(\theta) R_e^2 - \frac{2}{5} (\cot(\theta))^2 R_e - \frac{R_e}{3W_e} \right)
\end{aligned}$$

Le premier coefficient donne la vitesse des vagues à l'interface qui est le triple de la vitesse moyenne. Le deuxième permet de retrouver le nombre de Reynolds critique (le résultat classique de Benjamin [3]) :

$$R_{critique} = \frac{5}{6} \cot \theta$$

Le coefficient  $s_{30}$  caractérise la dispersion des vagues, et le dernier coefficient, avec  $s_{20}$ , donne le taux de croissance sous la forme :

$$c = k^2 s_{20} + k^4 s_{40}$$

Donc pour  $R_e > R_{critique}$  et  $s_{40} < 0$ , il existe un nombre d'onde de croissance nulle donné par :

$$k_0 = \sqrt{-\frac{s_{20}}{s_{40}}}$$

et un nombre d'onde de croissance maximale :

$$k_m = \frac{\sqrt{2}}{2} k_0 \tag{3.7}$$

Alors que la vitesse des ondes et le Reynolds critique sont identiques dans les deux cas, on voit bien qu'en jouant sur les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  (dans la limite des conditions 3.6) on peut fixer le taux de croissance et la fréquence la plus amplifiée (voir aussi les expériences numériques 8.2.4 page 205). Toutefois le développement d'Orr-Sommerfeld est un développement limité au cas  $k$  petit, choisir les constantes  $C_1$  et  $C_2$  à partir de ces résultats ne serait pas forcément le meilleur choix possible pour  $k$  quelconque.

Par ailleurs si on poursuit le développement asymptotique à l'ordre suivant en  $\varepsilon$  on retrouve le terme suivant  $s_{30}^{NS}$  du développement d'Orr-Sommerfeld.

## 3.5 FORMATIONS DE ROLL-WAVES

Lorsque le nombre de Reynolds  $R_e$  est au-dessus de la valeur critique  $R_{critique}$ , il y a croissance des instabilités. Dans le cas des modèles à une équation au delà de ce seuil toute simulation va être numériquement instable. Mais dans le cas des modèles de type Saint-Venant des instabilités non-linéaires particulières appelées roll-waves peuvent être observées. Ce sont des ondes périodiques continues par morceaux dont on peut voir des exemples dans les expériences de Liu et Gollub [33] (figure 3).

Dans les chapitres 6 page 145 et 8 page 191 des simulations numériques ont été réalisées et ont mis en évidence l'existence de roll-waves pour des écoulements bicouches et des écoulements cisailés.

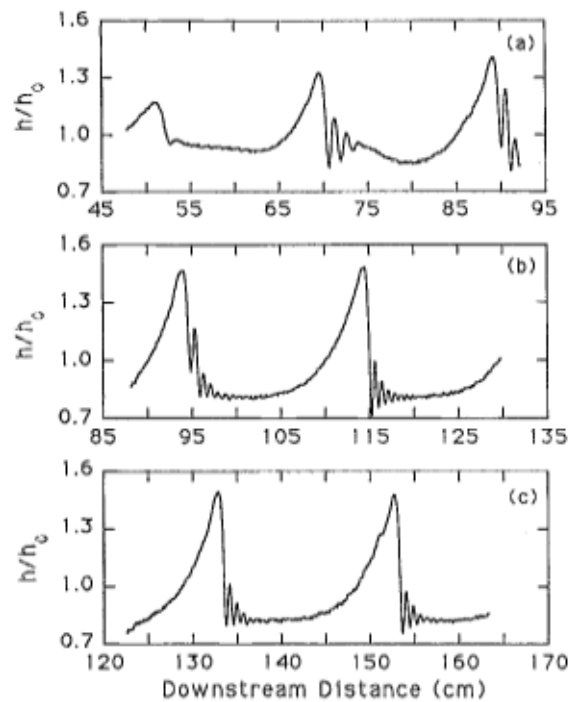


FIGURE 3: un exemple de roll-wave (FIG. 3. de l'article de Liu et Gollub [33])

Le mécanisme qui permet d'obtenir des roll-waves a été modélisé par Dressler [16] comme des solutions des équations de Saint-Venant sans viscosité ni tension de surface. Ce sont des solutions périodiques non-linéaires composées de morceaux continus séparés par des chocs qui vérifient les conditions de Rankine-Hugoniot et de Lax.

Dans le cas visqueux Novik [39] a proposé un modèle pour obtenir des profils continus. À l'aide d'une analyse utilisant les bifurcations de Hopf pour un système Saint-Venant avec viscosité, Merkin et Needham [34] ont montré qu'il existe des roll-waves continues et de petite amplitude. L'analyse de stabilité linéaire et non-linéaire des roll-waves a été étudiée par Noble [37], Johnson *et al.* [23] pour le cas visqueux et non-visqueux.

Lorsqu'on est en présence de tension de surface il y a encore peu de résultats, principalement en utilisant l'équation de Kuramoto-Sivashinsky pour un nombre de Froude proche de 1 (Chang et Demekhin [11]). Pumir *et al.* [43] ont montré que même si la tension de surface stabilise les hautes fréquences, l'existence de roll-waves est possible pour un nombre de Reynolds petit.





Deuxième partie

ÉCOULEMENTS SUR UNE TOPOGRAPHIE QUELCONQUE



**D**ANS cette partie, nous utilisons la méthode des développements asymptotiques pour étendre les modèles aux cas des écoulements sur une topographie quelconque mais aussi aux écoulements bi-couches à surface libre et les écoulements de deux fluides entre deux plaques.



## ÉTABLISSEMENT DES MODÈLES SUR UNE TOPOGRAPHIE QUELCONQUE

---

On s'intéresse maintenant à un écoulement d'un seul fluide mais sur un fond variable. En effet, les films qui nous intéressent ne s'écouleront pas, en générale, sur des surfaces planes, mais sur des surfaces courbes. Le film étant mince, il restera donc en contact avec la paroi. On suppose alors qu'il ne se décroche pas. En conséquence, il convient d'utiliser les coordonnées curvilignes liées à la paroi. On cherche alors des modèles caractérisants ce type d'écoulement.

*Remarque.* Les résultats de ce chapitre ont été publiés Boutounet *et al.* [6], mais la version présentée ici inclut deux termes modélisant l'influence du gaz sur le film : un gradient de pression extérieure et une contrainte de cisaillement.

### SOMMAIRE

---

4.1	Équations de Navier-Stokes en coordonnées curvilignes	<b>56</b>
4.1.1	Systèmes de coordonnées	57
4.1.2	Tenseur de courbure	63
4.1.3	Équations de l'écoulement	64
4.1.4	Vitesse covariante	66
4.1.5	Changement de coordonnées	66
4.1.6	Système d'équations de la dynamique	72
4.2	Équations intégrées	<b>72</b>
4.3	Mise à l'échelle	<b>75</b>
4.3.1	Facteurs d'échelle et adimensionnement	75
4.3.2	Solution uniforme	77
4.3.3	Développements asymptotiques	78
4.3.4	Équations adimensionnées	81
4.3.5	Hypothèses sur l'écoulement	82
4.3.6	Équations intégrées	84
4.4	Asymptotique onde longue	<b>85</b>
4.4.1	Asymptotique à l'ordre zéro	85
4.4.2	Premier modèle	86
4.4.3	Modèle à deux équations au premier ordre	86
4.4.4	Asymptotique à l'ordre 1	91
4.5	Modèles à une et deux équations	<b>101</b>
4.5.1	Modèle à une équation à l'ordre 1	101
4.6	Système Saint-Venant	<b>103</b>
4.6.1	Première formulation	103
4.6.2	Formulation conservative	104
4.7	Quelques modèles particuliers	<b>111</b>

4.7.1	Équation de Benney dans le cas plan	111
4.7.2	Modèle Saint-Venant dans le cas plan	111
4.7.3	Modèle de plus grande pente	112

Les principaux résultats trouvés sont résumés ici, les détails de la méthode et des calculs sont donnés ensuite.

Dans un premier temps, on définit le système de coordonnées curvilignes adapté à la géométrie du problème à partir du vecteur de coordonnées curvilignes  $\xi$  paramétrant le fond et de la hauteur normale  $\eta$ .

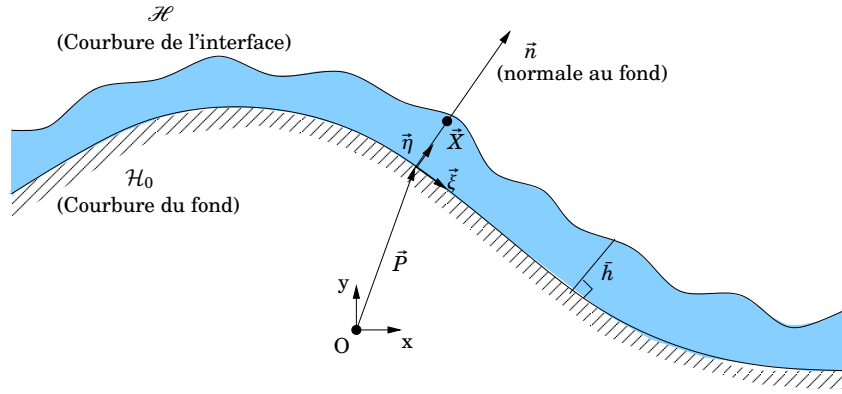


FIGURE 4: Film mince s'écoulant sur un fond variable

La position d'une particule du fluide ( $\vec{X} = (\mathbf{X}, Z)^t$ ) se décompose par projection sur le fond (voir la figure 4) :

$$\vec{X}(\xi, \eta) = \vec{P}(\xi) + \eta \vec{n} \quad (4.1)$$

La réécriture des équations de Navier-Stokes dans ce système fait intervenir le jacobien  $\mathcal{J}$  et le tenseur de courbure du fond  $\mathcal{H}_0$ .

L'intégration sur la hauteur du film, selon la généralisation de la méthode intégrale de Karman-Polhausen introduite par Shkadov [11], fait apparaître comme variables une hauteur  $\tilde{h}$  et une vitesse moyenne  $\tilde{v}$  définies par :

$$\tilde{h} = \int_0^h \mathcal{J} d\eta, \quad \tilde{v} = \frac{1}{\tilde{h}} \int_0^h \mathcal{J} \mathbf{V} d\eta$$

L'adimensionnement des équations fait intervenir quatre nombres adimensionnels qui sont le Reynolds  $R_e$ , le Weber  $W_e$ , le Poiseuille  $P_o$  et le Froude  $F_r$  dont les définitions sont les suivantes :

$$R_e = \frac{U_0 H}{\nu}, \quad W_e = \frac{\rho U_0^2 H}{\kappa}, \quad P_o = \frac{H^2 \Delta p_{ext}}{\mu U_0 L}, \quad F_r = \sqrt{\frac{\rho U_0^2}{\rho H \gamma_0 + \Delta p_{ext} + \tau_0}}. \quad (4.2)$$

*Remarque.* Ici l'écriture du nombre de Froude est une écriture généralisée où sont pris en compte les effets de gravité  $\rho H \gamma_0$ , de pression  $\Delta_{p_{ext}}$  et de forçage par le gaz  $\tau_0$ .

En faisant les hypothèses  $\varepsilon R_e$ ,  $\varepsilon \frac{F_r^2}{R_e}$  et  $\varepsilon \frac{R_e}{F_r^2}$  petits devant l'unité, et  $\frac{R_e}{F_r^2}$ ,  $\frac{P_o F_r^2}{R_e}$ ,  $\frac{\varepsilon F_r^2}{W_e}$  de l'ordre de l'unité, on peut résoudre les équations de Navier-Stokes.

À l'ordre 0 en  $\varepsilon$ , on trouve le premier modèle, le plus simple possible, qui traduit la conservation de la masse et qui s'écrit :

$$\mu \partial_t \tilde{h} + \left( \nabla_\xi + \frac{1}{\tilde{J}} \nabla_\xi \tilde{J} \right) \cdot \left( \frac{h^2}{2} \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{h^3}{3} (\rho \boldsymbol{\gamma}_0 - M_0 \nabla_\xi p_{ext}) \right) = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (4.3)$$

Ce modèle est cohérent avec le modèle trouvé par Fabignon *et al.* [17] (en coordonnées polaires) et généralise le modèle trouvé au chapitre précédent. Si on pousse les développements à l'ordre suivant, le modèle intègre des effets de courbure et de tension de surface. Il se met sous la forme d'une équation d'advection-diffusion non linéaire avec un terme de tension de surface :

$$\mu \partial_t \tilde{h} + \nabla_\xi \cdot (\tilde{h} \mathcal{V}(\tilde{h})) - \nabla_\xi \cdot (\mu \nu(\tilde{h}) \nabla_\xi \tilde{h}) + \nabla_\xi \cdot \left( \kappa \frac{\tilde{h}^3}{3 \tilde{J}^2} M_0 \nabla_\xi \mathcal{H} \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.4)$$

avec comme notations :

- $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = (\boldsymbol{\gamma}_0, \gamma_0)^T$  vecteur des forces d'inerties
- $\boldsymbol{\tau}_0$  la contrainte de cisaillement qu'exerce le gaz à l'interface avec le liquide
- $p_{ext}$  la pression exercée par le gaz
- $M_0$  métrique du changement de coordonnées
- $\tilde{J}$  jacobien de la transformation
- $\mathcal{H}$  courbure de l'interface

Le coefficient de diffusion de l'équation vaut :

$$\nu(\tilde{h}) = -\frac{\tilde{h}^3}{3 \tilde{J}^3} \rho \gamma_0 M_0 - \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^5}{\tilde{J}^5} \left( \frac{3}{40} \Gamma \boldsymbol{\tau}_0^t + \frac{7}{120} \boldsymbol{\tau}_0 \Gamma^t \right) - \frac{\rho}{\mu^2} \frac{2 \tilde{h}^6}{15 \tilde{J}^6} \Gamma \Gamma^t \quad (4.5)$$

où  $\Gamma$  regroupe les forces volumiques prépondérantes :

$$\Gamma = \rho \boldsymbol{\gamma}_0 - M_0 \nabla_\xi p_{ext} \quad (4.6)$$

Comme  $\gamma_0$  est une accélération, négative (en général la gravité dirigée vers le bas), le coefficient de diffusion  $-\frac{\tilde{h}^3}{3 \tilde{J}^3} \rho \gamma_0 M_0$  est positif (le signe donne le critère bien posé et donc de stabilité pour le système hyperbolique).

et la vitesse de transport vaut :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\tilde{h}) = & \frac{\tilde{h}}{2\bar{J}}\boldsymbol{\tau}_0 + \frac{\tilde{h}^2}{3\bar{J}^2}\Gamma + \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}^2}\boldsymbol{\tau}_1 + \frac{\tilde{h}^2}{3\bar{J}^2}\left(\frac{1}{2}\text{tr}\mathcal{H}_0\mathbb{1} - 2\mathcal{H}_0\right)\boldsymbol{\tau}_0 \\
& + \frac{\tilde{h}^3}{3\bar{J}^4}\rho M_0\gamma_0\nabla_\xi\bar{J} + \frac{\tilde{h}^3}{\bar{J}^3}\left(\frac{1}{6}\text{tr}\mathcal{H}_0 - \frac{1}{24}\mathcal{H}_0\right)\Gamma - \frac{5\tilde{h}^3}{24\bar{J}^3}\mathcal{H}_0M_0\nabla_\xi p_{ext} + \rho\frac{\tilde{h}^3}{8\bar{J}^3}M_0\nabla_\xi\gamma_0 \\
& + \frac{\rho}{\mu^2}\frac{5\tilde{h}^3}{24\bar{J}^2}\left(\left(\frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}}\nabla_\xi\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\tau}_0}{\bar{J}}\right) + \frac{\tilde{h}^3}{3\bar{J}}\nabla_\xi\cdot\left(\frac{\Gamma}{\bar{J}^2}\right)\right)\Gamma - \partial_t\boldsymbol{\tau}_0\right) \\
& + \frac{\rho}{\mu^2}\frac{3\tilde{h}^4}{20\bar{J}^4}\left(\nabla_\xi\cdot(\bar{J}\boldsymbol{\tau}_0)\frac{\boldsymbol{\tau}_0}{2\bar{J}} - \mathcal{M}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} - (\boldsymbol{\tau}_0\cdot\nabla_\xi)\boldsymbol{\tau}_0\right) - \frac{\rho}{\mu^2}\frac{2\tilde{h}^4}{15\bar{J}^4}\partial_t\Gamma \\
& + \frac{\rho}{\mu^2}\frac{\tilde{h}^5}{60\bar{J}^6}\nabla_\xi\cdot(\bar{J}\boldsymbol{\tau}_0)\Gamma - \frac{\rho}{\mu^2}\frac{11\tilde{h}^5}{120\bar{J}^5}\left(2\mathcal{M}_{\Gamma\boldsymbol{\tau}} + (\Gamma\cdot\nabla_\xi)\boldsymbol{\tau}_0 + \bar{J}(\boldsymbol{\tau}_0\cdot\nabla_\xi)\left(\frac{1}{\bar{J}}\Gamma\right)\right) \\
& + \frac{\rho}{\mu^2}\frac{11\tilde{h}^6}{180\bar{J}^6}(\nabla_\xi\cdot\Gamma)\Gamma + \frac{\rho}{\mu^2}\frac{\tilde{h}^5}{18\bar{J}^5}(\nabla_\xi\cdot\Gamma)\boldsymbol{\tau}_0 - \frac{\rho}{\mu^2}\frac{2\tilde{h}^6}{35\bar{J}^6}\left(\mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} + \bar{J}(\Gamma\cdot\nabla_\xi)\left(\frac{1}{\bar{J}}\Gamma\right)\right)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

avec les termes en  $\mathcal{M}$  qui représentent l'évolution des vecteurs de la base curviligne :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} &= (\partial_\xi\mathbf{x})^{-1}\left(\partial_{\xi\xi}^2\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\tau}_0\cdot\boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_0^t M_0^{-1}\mathcal{H}_0\boldsymbol{\tau}_0\mathbf{s}\right) \\
\mathcal{M}_{\Gamma\boldsymbol{\tau}} &= (\partial_\xi\mathbf{x})^{-1}\left(\partial_{\xi\xi}^2\mathbf{x}\cdot\Gamma\cdot\boldsymbol{\tau}_0 + \Gamma^t M_0^{-1}\mathcal{H}_0\boldsymbol{\tau}_0\mathbf{s}\right) \\
\mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} &= (\partial_\xi\mathbf{x})^{-1}\left(\partial_{\xi\xi}^2\mathbf{x}\cdot\Gamma\cdot\Gamma + \Gamma^t M_0^{-1}\mathcal{H}_0\Gamma\mathbf{s}\right)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

À cet ordre d'approximation, on peut aussi écrire un modèle à deux équations. En posant  $U = \begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{h}\tilde{\mathbf{v}} \end{pmatrix}$ , le système s'écrit sous la forme conservative suivante :

$$\partial_t U + \nabla_\xi \cdot (G(U)) = T(U) + K(\tilde{h}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{4.9}$$

avec  $G(U)$  le terme de flux donné par :

$$G(U) = \begin{pmatrix} \tilde{h}\tilde{\mathbf{v}} \\ f(U) \end{pmatrix} \tag{4.10}$$



où :

$$\begin{aligned}
f(U) &= C_1 \tilde{h} \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{1}{3} - \frac{C_1}{4} \right) \frac{\tilde{h}^3}{\bar{J}^2} \boldsymbol{\tau}_0 \otimes \boldsymbol{\tau}_0 \\
&+ \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{5}{24} - \frac{C_1}{6} \right) \frac{\tilde{h}^4}{\bar{J}^3} (\Gamma \otimes \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_0 \otimes \Gamma) + \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{2}{15} - \frac{C_1}{9} \right) \frac{\tilde{h}^5}{\bar{J}^4} \Gamma \otimes \Gamma \\
&- \gamma_0 C_2 \frac{\tilde{h}^2}{6\bar{J}} M_0 + \frac{1}{\mu^2} \left( 1 - \frac{7C_2}{20} \right) \frac{\tilde{h}^4}{24\bar{J}^3} \Gamma \boldsymbol{\tau}_0^t \\
&+ \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{1}{3} - \frac{3C_2}{20} \right) \frac{\tilde{h}^4}{8\bar{J}^3} \boldsymbol{\tau}_0 \Gamma^t + \frac{1}{\mu^2} \left( 1 - \frac{2C_2}{5} \right) \frac{\tilde{h}^5}{15\bar{J}^4} \Gamma \Gamma^t
\end{aligned} \tag{4.11}$$

avec  $C_1$  et  $C_2$  deux constantes pouvant être choisies arbitrairement (cf Chapitre 3). Les effets de tension de surface  $K(\tilde{h})$  valent :

$$K(\tilde{h}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\kappa C_2}{\rho} \frac{\tilde{h}}{3} M_0 \nabla_{\xi} \mathcal{H} \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

et  $T(U)$  le second membre :

$$T(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{C_2}{\rho} \left( \frac{\bar{J}}{2} \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{\tilde{h}}{3} \Gamma - \mu \frac{\bar{J}^2}{\tilde{h}} \tilde{\mathbf{v}} \right) + \frac{1}{\rho} \bar{\Phi}(\tilde{h}) \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

où :

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}(\tilde{h}) = & \frac{C_2}{2} \tilde{h} \boldsymbol{\tau}_1 - \tilde{h} \left( 2\mathcal{H}_0 + \frac{1}{2} \text{tr} \mathcal{H}_0 \mathbb{1} \right) \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{\tilde{h}^2}{6\bar{J}} (5 - C_2) \text{tr} \mathcal{H}_0 \Gamma - \rho \mathcal{H}_0 \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}} \boldsymbol{\gamma}_0 \\
& + \tilde{h} \left( 1 - \frac{C_2}{3} \right) (2\mathcal{H}_0 + \text{tr} \mathcal{H}_0 \mathbb{1}) \boldsymbol{\tau}_0 + \rho M_0 \left( \bar{J} \frac{\tilde{h}^2}{2} \nabla_{\xi} \left( \frac{\gamma_0}{\bar{J}^2} \right) - \left( 1 - \frac{C_2}{3} \right) \gamma_0 \frac{\tilde{h}^2}{\bar{J}^2} \nabla_{\xi} \bar{J} \right) \\
& - \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}} \left( 1 - \frac{5C_2}{12} \right) \left( \mathcal{H}_0 (\Gamma - M_0 \nabla_{\xi} p_{ext}) - \frac{1}{v} \partial_t \boldsymbol{\tau}_0 \right) - \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}} \left( 1 - \frac{C_2}{4} \right) (\rho M_0 \nabla_{\xi} \gamma_0 - (2\mathcal{H}_0 + \text{tr} \mathcal{H}_0) \Gamma) \\
& - \frac{\rho}{\mu^2} C_2 \left( \frac{3}{20} \frac{\tilde{h}^3}{\bar{J}^2} \mathcal{M}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} + \frac{11}{5} \frac{\tilde{h}^4}{12\bar{J}^3} \mathcal{M}_{\Gamma\boldsymbol{\tau}} + \frac{2}{35} \frac{\tilde{h}^5}{\bar{J}^4} \mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} \right) - \rho C_2 \frac{\tilde{h}^2}{6\bar{J}} \nabla_{\xi} \cdot (\gamma_0 M_0) + \frac{1}{v} \frac{\tilde{h}^3}{3\bar{J}^2} \left( 1 - \frac{2C_2}{5} \right) \partial_t \Gamma \\
& - \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^3}{\bar{J}^2} \left( \frac{1}{3} - \frac{3C_2}{20} \right) \left( \frac{1}{2\bar{J}} \nabla_{\xi} \cdot (\bar{J} \boldsymbol{\tau}_0) \boldsymbol{\tau}_0 - (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_{\xi}) \boldsymbol{\tau}_0 \right) \\
& + \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^4}{12\bar{J}^3} \left( \frac{53C_2}{120} - 1 \right) (\nabla_{\xi} \cdot \Gamma) \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^4}{4\bar{J}^3} \left( \frac{1}{4} - \frac{53C_2}{120} \right) (\Gamma \cdot \nabla_{\xi}) \boldsymbol{\tau}_0 \\
& + \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^4}{24\bar{J}^3} \left( 6 - \frac{51C_2}{20} \right) (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_{\xi}) \Gamma + \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^4}{4\bar{J}^3} \left( \frac{17C_2}{40} - 1 \right) (\nabla_{\xi} \cdot \boldsymbol{\tau}_0) \Gamma \\
& - \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^4}{\bar{J}^4} \frac{7C_2}{240} (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_{\xi} \bar{J}) \Gamma + \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^5}{5\bar{J}^5} \left( 1 - \frac{103C_2}{252} \right) (\Gamma \cdot \nabla_{\xi} \bar{J}) \Gamma \\
& + \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^5}{\bar{J}^4} \left( \frac{1}{5} - \frac{44C_2}{525} \right) (\Gamma \cdot \nabla_{\xi}) \Gamma + \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^5}{15\bar{J}^4} \left( \frac{187C_2}{120} - 2 \right) (\nabla_{\xi} \cdot \Gamma) \Gamma
\end{aligned} \tag{4.14}$$

L'interprétation des coefficients est difficile, c'est pourquoi on étudie des cas particuliers en utilisant des jeux de coordonnées plus simples dans la section [Quelques modèles particuliers](#) (4.7 page 111).

#### 4.1 ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES EN COORDONNÉES CURVILIGNES

On notera les vecteurs de  $\mathbb{R}^d$  sous la forme  $\vec{U}$ , et  $\mathbf{U}$  les vecteurs de  $\mathbb{R}^{d-1}$ ,  $d$  étant la dimension de l'espace, ici  $d = 2, 3$ .

### 4.1.1 Systèmes de coordonnées

Dans cette partie, on cherche un système de coordonnées adapté à la géométrie du problème. La première formulation, très générale, proposée par Bouchut et al. [5], ne fait pas d'hypothèse sur la forme du fond ; la seconde suppose qu'il n'existe pas de point de la surface localement sphérique, c'est à dire que les courbures principales ne coïncident pas et donc qu'il existe une base orthogonale curviligne (cf Roy *et al.* [47], Roberts et Li [44]).

On peut voir le système de coordonnées utilisé sur la figure suivante :

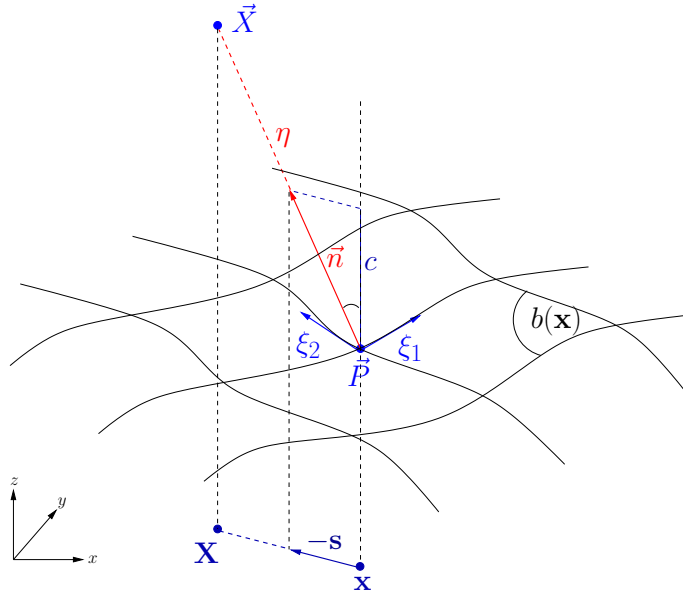


FIGURE 5: Changement de coordonnées

avec  $\vec{X}$  la position d'une particule du fluide et  $\vec{P}$  sa projection orthogonale sur le fond.

#### Système de coordonnées curvilignes quelconques

Soit  $z = b(\mathbf{x})$  la topographie du fond. La normale au fond  $\vec{n}$  est donnée par :

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_{\mathbf{x}} b|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla_{\mathbf{x}} b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{s} \\ c \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Où  $c$  est le cosinus de l'angle entre la normale  $\vec{n}$  et la verticale. Avec ces notations, on a immédiatement la relation suivante :

$$\|\mathbf{s}\|^2 + c^2 = 1 \quad (4.16)$$

En dérivant cette relation, on obtient :

$$\partial_{\mathbf{x}}c = -\frac{1}{c}\mathbf{s}^t\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{s} \quad (4.17)$$

En divisant par  $c^2$ , puis en multipliant à gauche par  $\mathbf{s}$  et à droite par  $\mathbf{s}^t$ , on remarque que :

$$(\mathbb{1} - \mathbf{ss}^t)\left(\mathbb{1} + \frac{\mathbf{ss}^t}{c^2}\right) = \mathbb{1} \quad (4.18)$$

Ce qui permet d'exprimer la dérivée de  $\mathbf{s}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= c\nabla_{\mathbf{x}}b \\ \Rightarrow \left(\mathbb{1} + \frac{\mathbf{ss}^t}{c^2}\right)\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{s} &= c\partial_{\mathbf{xx}}b \\ \Rightarrow \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{s} &= c(\mathbb{1} - \mathbf{ss}^t)\partial_{\mathbf{xx}}b \end{aligned}$$

Supposons que l'on connaisse une paramétrisation du fond donnée par  $\xi \mapsto \mathbf{x}(\xi)$ , on peut définir localement un changement de variables  $\vec{X} \mapsto \vec{\xi}$  où  $\vec{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ Z \end{pmatrix} \mapsto \vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$  avec  $\xi$  est le vecteur de coordonnées curvilignes paramétrant le fond, et  $\eta$  la distance signée dans la direction de la normale  $\vec{n}$ . La position d'une particule du fluide ( $\vec{X} = (\mathbf{X}, Z)^t$ ) se décompose par projection sur le fond (voir la figure 5) :

$$\begin{aligned} \vec{X}(\xi, \eta) &= \vec{P}(\xi) + \eta\vec{n} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{x}(\xi) \\ b(\mathbf{x}(\xi)) \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} -\mathbf{s}(\mathbf{x}(\xi)) \\ c(\mathbf{x}(\xi)) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \eta \leq h(\xi, t) \end{aligned} \quad (4.19)$$

En observant que  $\mathbf{X} = \mathbf{x} - \eta\mathbf{s}$ , on peut écrire :

$$\partial_{\xi}\mathbf{X} = (\text{Id} - \eta\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{s})\partial_{\xi}\mathbf{x} \quad (4.20)$$

La matrice jacobienne de la transformation et son inverse s'expriment facilement :

$$A^{-1} = \partial_{\vec{\xi}}\vec{X} = \begin{pmatrix} \partial_{\xi}\mathbf{X} & -\mathbf{s} \\ \frac{1}{c}\mathbf{s}^t\partial_{\xi}\mathbf{X} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Id} & -\mathbf{s} \\ \frac{1}{c}\mathbf{s}^t & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\xi}\mathbf{X} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} A = \partial_{\vec{X}}\vec{\xi} &= \begin{pmatrix} (\partial_{\xi}\mathbf{X})^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} - \mathbf{ss}^t & c\mathbf{s} \\ -\mathbf{s}^t & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\partial_{\xi}\mathbf{X})^{-1}(\mathbb{1} - \mathbf{ss}^t) & c(\partial_{\xi}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{s} \\ -\mathbf{s}^t & c \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.22)$$

ainsi que le jacobien :

$$J = \det(\partial_{\vec{\xi}} \vec{X}) = \frac{1}{c} \det(\partial_{\xi} \mathbf{X}) \quad (4.23)$$

La métrique de Riemann est donnée par la relation :

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= (\partial_{\vec{\xi}} \vec{X})^t \partial_{\vec{\xi}} \vec{X} = A^{-t} A^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (\partial_{\xi} \mathbf{X})^t & \frac{1}{c} (\partial_{\xi} \mathbf{X})^t \mathbf{s} \\ -\mathbf{s}^t & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\xi} \mathbf{X} & -\mathbf{s} \\ \frac{1}{c} \mathbf{s}^t \partial_{\xi} \mathbf{X} & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\partial_{\xi} \mathbf{X})^t \left( \mathbb{1} + \frac{\mathbf{s}\mathbf{s}^t}{c^2} \right) \partial_{\xi} \mathbf{X} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.24)$$

dont la partie bloc est inversible :

$$\begin{aligned} M^{-1} &= (\partial_{\xi} \mathbf{X})^t \left( \mathbb{1} + \frac{\mathbf{s}\mathbf{s}^t}{c^2} \right) \partial_{\xi} \mathbf{X} \\ M &= (\partial_{\xi} \mathbf{X})^{-1} (\mathbb{1} - \mathbf{s}\mathbf{s}^t) (\partial_{\xi} \mathbf{X})^{-t} \end{aligned} \quad (4.25)$$

### Système de coordonnées curvilignes orthogonales

Une autre manière de définir un système de coordonnées curvilignes est de définir une paramétrisation particulière du fond ( $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{d-1})^t$ ) telle que les vecteurs de base  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial \xi_i}$ ,  $i = 1, \dots, d-1$ , parcourent les lignes de courbures principales de la topographie (voir Roberts et Li [44], Roy *et al.* [47]). Il faut pour cela supposer que les courbures principales ne coïncident pas. Les vecteurs de la base tangente au fond  $\vec{E}_i$  s'écrivent :

$$\vec{E}_i = \frac{1}{m_i} \frac{\partial \vec{P}}{\partial \xi_i} \quad i = 1, \dots, d-1 \quad (4.26)$$

La normale au fond ne change pas de forme.

$$\vec{n} = \vec{e}_d = \vec{E}_d = \begin{pmatrix} -\mathbf{s} \\ c \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

La famille de vecteurs  $\{\vec{E}_i\}_{i=1, \dots, d}$  forme une base orthonormée. Les coefficients  $m_i$  e la métrique sont donnés par  $m_i = \left| \frac{\partial \vec{P}}{\partial \xi_i} \right|$ .

On peut maintenant expliciter la matrice jacobienne de  $\xi \mapsto \mathbf{x}$

$$\begin{aligned} (\partial_{\xi \mathbf{x}})_{i,j=1,\dots,d-1} &= m_j \vec{E}_j^i \\ \left( (\partial_{\xi \mathbf{x}})^{-1} \right)_{i,j=1,\dots,d-1} &= \frac{1}{m_i} \vec{E}_i^j \end{aligned} \quad (4.28)$$

D'après les formules de Frenet<sup>1</sup>, puisque les vecteurs  $\vec{E}_i$  parcourent les lignes de courbures principales, la variation du vecteur normal le long des lignes de courbure vaut :

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial \xi_i} = -k_i \frac{\partial \vec{P}}{\partial \xi_i} = -m_i k_i \vec{E}_i, \quad i = 1, \dots, d-1 \quad (4.29)$$

où les  $k_i$  sont les courbures principales. On en déduit que :

$$(\partial_{\xi \mathbf{s}})_{i,j=1,\dots,d-1} = m_j k_j \vec{E}_j^i \quad (4.30)$$

Retournons au changement de coordonnées au voisinage du fond  $\vec{X} \mapsto \vec{\xi}$  défini précédemment pour lequel on a :

$$\vec{X} = \vec{P}(\xi) + \eta \vec{n} \quad (4.31)$$

La famille de vecteurs  $\{\vec{e}_i\}_{i=1,\dots,d}$  de la base curviligne orthogonale est donnée par :

$$\begin{aligned} \vec{e}_i &= \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi_i} \\ &= m_i (1 - \eta k_i) \vec{E}_i \quad i = 1, \dots, d-1 \\ &= \hbar_i \vec{E}_i \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\vec{e}_i = \hbar_i \vec{E}_i, \quad \hbar_d = 1, \quad i = 1, \dots, d \quad (4.33)$$

donc la jacobienne de la transformation et son inverse s'expriment simplement :

$$\begin{aligned} (\partial_{\xi \mathbf{X}})_{i,j=1,\dots,d-1} &= \hbar_j \vec{E}_j^i \\ \left( (\partial_{\xi \mathbf{X}})^{-1} \right)_{i,j=1,\dots,d-1} &= \frac{1}{\hbar_i} \vec{E}_i^j \end{aligned} \quad (4.34)$$

---

1. Les formules de Frenet pour un arc paramétré plan s'écrivent :  $\frac{dT}{ds} = \gamma N$   $\frac{dN}{ds} = -\gamma T$ , avec  $N$  le vecteur unitaire normal,  $T$  le vecteur unitaire tangent et  $\gamma$  la courbure

Ce qui implique le résultat utile suivant :

$$\sum_{p=1}^{d-1} \vec{E}_i^p \vec{E}_j^p = \sum_{p=1}^{d-1} \bar{h}_i (\partial_{\xi} \mathbf{X})_{ip}^{-1} \frac{1}{\bar{h}_j} (\partial_{\xi} \mathbf{X})_{pj} = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, d-1 \quad (4.35)$$

auquel on peut rajouter :

$$\sum_{p=1}^{d-1} \vec{E}_i^p \vec{E}_d^p = \sum_{p=1}^{d-1} \partial_{\eta} \mathbf{X}_p \partial_{\mathbf{X}_p} \xi_i = \bar{h}_i \partial_{\eta} \xi_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, d-1 \quad (4.36)$$

La métrique de Riemann s'écrit sous la forme d'une matrice diagonale  $\tilde{G}$  :

$$\tilde{G} = \left( \partial_{\vec{\xi}} \vec{X} \right)^t \left( \partial_{\vec{\xi}} \vec{X} \right) \quad (4.37)$$

$$\tilde{G}_{i,j=1,\dots,d} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} |\vec{e}_i|^2 = \delta_{ij} \bar{h}_i^2 \left| \vec{E}_i \right|^2 = \delta_{ij} \bar{h}_i^2$$

On note  $\sqrt{\tilde{G}}$  la matrice diagonale de valeurs  $\left( \sqrt{\tilde{G}} \right)_{i,j=1,\dots,d} = \delta_{ij} \bar{h}_i$ . De plus le changement de coordonnées peut être vu comme la composition d'une rotation et d'un changement d'échelles.

Repère curviligne orthogonal	→	Repère de Darboux-Ribaucour	→	Repère cartésien
$(\vec{E}_i)_{i=1,\dots,d}$	→	$(\vec{E}_i = \frac{1}{\bar{h}_i} \vec{e}_i)_{i=1,\dots,d}$	→	$(\vec{e}_i)_{i=1,\dots,d}$
$\vec{\phi}$	→	$\sqrt{\tilde{G}} \vec{\phi}$	→	$Q \sqrt{\tilde{G}} \vec{\phi}$

(4.38)

avec  $Q = (\vec{E}_1, \dots, \vec{E}_d)$  matrice de rotation. La jacobienne de la transformation s'exprime telle que :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d) \\ &= (\bar{h}_1 \vec{E}_1, \dots, \bar{h}_d \vec{E}_d) \\ &= Q \sqrt{\tilde{G}} \end{aligned} \quad \begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}} Q^t \\ &= \left( \frac{1}{\bar{h}_1} \vec{E}_1, \dots, \frac{1}{\bar{h}_d} \vec{E}_d \right)^t \\ &= \left( \frac{1}{\bar{h}_1^2} \vec{e}_1, \dots, \frac{1}{\bar{h}_d^2} \vec{e}_d \right)^t \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$(A^{-1})_{ij} = \vec{e}_j^i \quad A_{ij} = \frac{1}{\bar{h}_i^2} \vec{e}_i^j$$

On retrouve bien la métrique de Riemann :

$$(AA^t)_{i,j=1,\dots,d} = \sum_k \frac{1}{\bar{h}_i} \vec{E}_i^k \frac{1}{\bar{h}_j} \vec{E}_j^k = \frac{\delta_{ij}}{\bar{h}_i \bar{h}_j} = (\tilde{G}^{-1})_{i,j=1,\dots,d} \quad (4.40)$$

Pour retourner aux notations du paragraphe précédent,  $\tilde{G}$  est bien une matrice diagonale par blocs de la forme  $\begin{pmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  avec :

$$(M^{-1})_{i,j=1,\dots,d-1} = \tilde{h}_i^2 \delta_{ij} \quad (4.41)$$

$$M_{i,j=1,\dots,d-1} = \frac{\delta_{ij}}{\tilde{h}_i^2}$$

Le jacobien de la transformation vaut :

$$J = \det(A^{-1}) = \det(\sqrt{\tilde{G}}) = \prod_{i=1}^{d-1} \tilde{h}_i \quad (4.42)$$

**Lemme 1.** *La variation des vecteurs de base est déterminée par l'expression de la variation de la matrice de rotation dont la valeur est donnée par :*

$$(Q^t \partial_{\tilde{\xi}} Q)_{n,j,i=1,\dots,d} = \frac{\tilde{h}_{i,j}}{\tilde{h}_j} \delta_{in} - \frac{\tilde{h}_{i,n}}{\tilde{h}_n} \delta_{ij} \quad (4.43)$$

où la notation  $\tilde{h}_{i,j}$  représente  $\partial_{\tilde{\xi}_j} \tilde{h}_i$ , et on a de plus :

$$\sum_{p=1}^{d-1} \tilde{E}_n^p \partial_{\tilde{\xi}_i} \tilde{E}_j^p = \frac{\tilde{h}_{n,j}}{\tilde{h}_j} \delta_{in} - \frac{\tilde{h}_{i,n}}{\tilde{h}_n} \delta_{ij}, \quad n, j, i = 1, \dots, d-1 \quad (4.44)$$

**Preuve du lemme 1.** Cf. page 211

On retrouve en particulier les formules de Frenet pour  $j = d$  et  $i = 1, \dots, d-1$ ,

$$\partial_{\tilde{\xi}_i} \vec{E}_d = -m_i k_i \vec{E}_i \quad (4.45)$$

Dans le cas  $d = 3$ , les formules développées donnent :

$$\begin{aligned} \partial_{\xi_1} \vec{E}_1 &= m_1 k_1 \vec{E}_3 - \frac{\tilde{h}_{1,2}}{\tilde{h}_2} \vec{E}_2 & \partial_{\xi_2} \vec{E}_2 &= m_2 k_2 \vec{E}_3 - \frac{\tilde{h}_{2,1}}{\tilde{h}_1} \vec{E}_1 \\ \partial_{\xi_2} \vec{E}_1 &= \frac{\tilde{h}_{2,1}}{\tilde{h}_1} \vec{E}_2 & \partial_{\xi_1} \vec{E}_2 &= \frac{\tilde{h}_{1,2}}{\tilde{h}_2} \vec{E}_1 \\ \partial_{\xi_1} \vec{E}_3 &= -m_1 k_1 \vec{E}_1 \\ \partial_{\xi_2} \vec{E}_3 &= -m_2 k_2 \vec{E}_2 & \partial_{\eta} \vec{E}_1 &= \partial_{\eta} \vec{E}_2 = \partial_{\eta} \vec{E}_3 = 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$



## 4.1.2 Tenseur de courbure

Endomorphisme de Weingarten

Calculons d'abord  $\mathcal{H}$  la courbure du plan tangent au fond, translaté à une hauteur normale  $\eta$  à celui-ci.

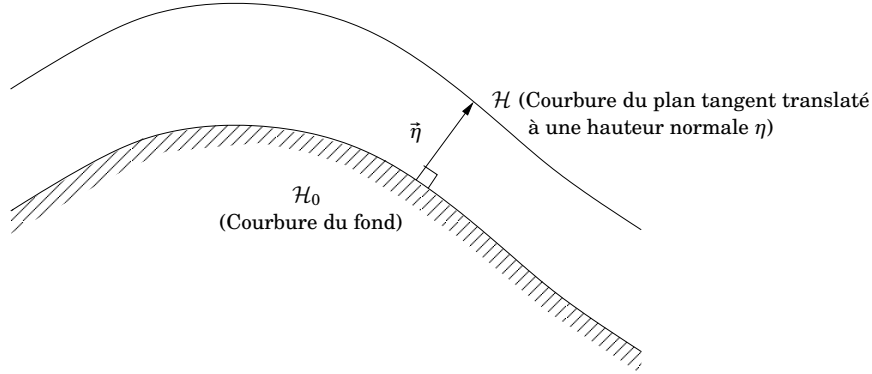


FIGURE 6: Courbures

Ce plan contient le point  $\vec{X}$ . La première forme fondamentale de cette surface est donnée par :

$$\left(\partial_{\xi}\vec{X}\right)^t \partial_{\xi}\vec{X} = M^{-1} \quad (4.47)$$

et la seconde par :

$$\begin{aligned} \partial_{\xi\xi}^2 \vec{X} \cdot \vec{n} &= \left( \partial_{\xi} \left( \begin{array}{c} \partial_{\xi}\mathbf{X} \\ \frac{1}{c}\mathbf{s}^t \partial_{\xi}\mathbf{X} \end{array} \right) \right) \cdot \begin{pmatrix} -\mathbf{s} \\ c \end{pmatrix} \\ &= \left( \begin{array}{c} \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{X} \\ \frac{1}{c}(\partial_{\xi}\mathbf{X})^t \left( \mathbb{1} + \frac{\mathbf{ss}^t}{c^2} \right) \partial_{\xi}\mathbf{s} + \frac{\mathbf{s}^t}{c} \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{X} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} -\mathbf{s} \\ c \end{pmatrix} \\ &= -\partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{X} \cdot \mathbf{s} + (\partial_{\xi}\mathbf{X})^t \left( \mathbb{1} + \frac{\mathbf{ss}^t}{c^2} \right) \partial_{\xi}\mathbf{s} + \mathbf{s}^t \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{X} \\ &= (\partial_{\xi}\mathbf{X})^t \left( \mathbb{1} + \frac{\mathbf{ss}^t}{c^2} \right) \partial_{\xi}\mathbf{s} \end{aligned} \quad (4.48)$$

L'endomorphisme de Weingarten dans la base curviligne s'exprime en fonction des deux formes fondamentales :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= (M^{-1})^{-1} \partial_{\xi\xi}^2 \vec{X} \cdot \vec{n} \\ &= (\partial_{\xi\mathbf{X}})^{-1} (\mathbb{1} - \mathbf{ss}^t) (\partial_{\xi\mathbf{X}})^{-t} (\partial_{\xi\mathbf{X}})^t \left( \mathbb{1} + \frac{\mathbf{ss}^t}{c^2} \right) \partial_{\xi\mathbf{s}} \\ &= (\partial_{\xi\mathbf{X}})^{-1} \partial_{\xi\mathbf{s}}\end{aligned}\quad (4.49)$$

Le tenseur de courbure du fond pris en  $\eta = 0$  est donc donné par  $\mathcal{H}_0$  :

$$\mathcal{H}_0 = (\partial_{\xi\mathbf{X}})^{-1} \partial_{\xi\mathbf{s}} \quad (4.50)$$

Les courbures principales ( $k_1, k_2$ ) sont les valeurs propres de  $\mathcal{H}_0$ , la courbure de Gauss est son déterminant, et la courbure totale sa trace.

$$\begin{aligned}\det \mathcal{H}_0 &= k_1 k_2 \\ \text{tr} \mathcal{H}_0 &= k_1 + k_2\end{aligned}\quad (4.51)$$

On a par ailleurs les relations suivantes

$$\begin{aligned}\partial_{\mathbf{x}\mathbf{s}} &= (\partial_{\xi\mathbf{X}}) \mathcal{H} (\partial_{\xi\mathbf{x}})^{-1} \\ \partial_{\mathbf{xx}} b &= \frac{1}{c} \left( \mathbb{1} + \frac{\mathbf{ss}^t}{c^2} \right) (\partial_{\xi\mathbf{X}}) \mathcal{H} (\partial_{\xi\mathbf{x}})^{-1}\end{aligned}\quad (4.52)$$

#### Tenseur de courbure en coordonnées curvilignes orthogonales

L'endomorphisme de Weingarten s'exprime :

$$(\mathcal{H})_{i,j=1,\dots,d-1} = \sum_{k=1}^{d-1} (\partial_{\xi\mathbf{X}})^{-1}_{ik} (\partial_{\xi\mathbf{s}})_{kj} = \sum_{k=1}^{d-1} \frac{m_j k_j}{\bar{h}_i} \vec{E}_i^k \vec{E}_j^k = \frac{m_i k_i}{\bar{h}_i} \delta_{ij} \quad (4.53)$$

et le tenseur de courbure :

$$(\mathcal{H}_0)_{i,j=1,\dots,d-1} = k_i \delta_{ij} \quad (4.54)$$

Le tenseur de courbure est naturellement diagonal dans le système de coordonnées des courbures principales.

#### 4.1.3 Équations de l'écoulement

On considère les équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible soumis à une pression  $p$  et une particule de fluide à la position  $\vec{X}$ , se déplaçant à une vitesse  $\vec{U}$ .

De plus l'écoulement est laminaire, le fluide s'écoule donc en couches parallèles, sans mélange entre les couches, le nombre de Reynolds est petit et il n'y a aucun effet de turbulence.

Conservation de la masse et de la quantité de mouvement

Les équations de conservation de la masse et de quantité de mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{X}} \cdot \vec{U} &= 0 \\ \partial_t \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla_{\vec{X}}) \vec{U} &= -\frac{1}{\rho} \nabla_{\vec{X}} p + \nu \nabla_{\vec{X}} \cdot \sigma + \vec{\gamma} - 2\vec{\Omega} \wedge \vec{U} - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{R}) \end{aligned} \quad (4.55)$$

où  $\sigma$  est le tenseur visqueux des déformations donné par :

$$\sigma = \partial_{\vec{X}} \vec{U} + (\partial_{\vec{X}} \vec{U})^t \quad (4.56)$$

et  $\vec{\Omega}$ ,  $\vec{R}$  sont respectivement le vecteur vitesse angulaire du repère en rotation et le vecteur position de la particule de fluide par rapport à l'axe de rotation dans le repère fixe.

On peut remarquer que le tenseur des contraintes visqueuses s'écrit  $(\mu\sigma - \mathbb{1}p)$ .

Les forces de Coriolis et centrifuge peuvent s'écrire sous forme matricielle en introduisant la matrice antisymétrique  $\tilde{\Omega}$  définie par :

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ -\Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

La force de Coriolis devient :

$$-2\vec{\Omega} \wedge \vec{U} = -2\tilde{\Omega} \vec{U} \quad (4.58)$$

et la force centrifuge :

$$-\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{R}) = -\tilde{\Omega}^2 \vec{R} \quad (4.59)$$

Conditions aux limites

On ajoute des conditions aux bords aux équations de Navier-Stokes :

- une condition de non-glissement au fond :

$$\vec{U}|_{\eta=0} = 0 \quad (4.60)$$

- une équation de continuité des contraintes à l'interface :

$$\mu\sigma \vec{N} = (\kappa \mathcal{H} + p|_{\eta=h} - p_{ext}) \vec{N} + T \vec{\tau} \quad (4.61)$$

avec  $\vec{N}$  le vecteur normal à la surface libre,  $\kappa$  la tension de surface,  $\mathcal{H}$  la courbure de l'interface,  $\vec{\tau}$  le vecteur des contraintes tangentielles liées à l'entraînement du fluide par le gaz dans les directions des vecteurs colonnes de la matrice  $T$  tangents à la surface libre ;

- une condition d'imperméabilité (nécessaire pour l'écriture des équations moyennées) :

$$\partial_t h = U - \mathbf{U} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} h \quad (4.62)$$

#### 4.1.4 Vitesse covariante

Afin de simplifier l'écriture des équations dans le système curviligne, on utilise la vitesse covariante  $\vec{V}$ , reliée à la vitesse physique par la relation :

$$\vec{V} = A\vec{U} \quad (4.63)$$

ainsi :

$$\vec{U} = A^{-1}\vec{V} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{U} = \partial_{\xi} \mathbf{XV} - V \mathbf{s} \\ U = \frac{1}{c} \mathbf{s}^t \partial_{\xi} \mathbf{XV} + cV \end{cases} \quad (4.64)$$

ce qui donne notamment  $V = \vec{U} \cdot \vec{n}$ , qui est donc la composante normale de la vitesse au fond. Notons que la partie tangentielle de la vitesse est donnée par :

$$\vec{U} - (\vec{U} \cdot \vec{n}) \vec{n} = \begin{pmatrix} \partial_{\xi} \mathbf{XV} \\ \frac{1}{c} \mathbf{s}^t \partial_{\xi} \mathbf{XV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \frac{1}{c} \mathbf{s}^t \end{pmatrix} \partial_{\xi} \mathbf{XV} \quad (4.65)$$

Les règles de dérivations en coordonnées curvilignes nous donnent les relations utiles suivantes :

$$\begin{aligned} J \nabla_{\vec{X}} \cdot \vec{\phi} &= \nabla_{\vec{\xi}} \cdot (JA \vec{\phi}) \\ \nabla_{\vec{X}} &= A^t \nabla_{\vec{\xi}} \\ \vec{U} \cdot \nabla_{\vec{X}} &= (A\vec{U}) \cdot \nabla_{\vec{\xi}} \\ &= \vec{V} \cdot \nabla_{\vec{\xi}} \end{aligned} \quad (4.66)$$

#### 4.1.5 Changement de coordonnées

On multiplie les équations de Navier-Stokes par la matrice  $A$ , et on réécrit chaque terme dans le nouveau système de coordonnées.

##### Divergence

L'équation de divergence nulle de la vitesse conserve sa forme dans le repère curviligne, cependant elle fait apparaître la vitesse curviligne  $\vec{V}$  multipliée par le jacobien, c'est à dire

une nouvelle vitesse qui fait intervenir, en plus des composantes de la vitesse dans le nouveau repère, la déformation de ce repère (cf chapitre 4.2).

$$J\nabla_{\vec{X}} \cdot \vec{U} = \nabla_{\vec{\xi}} \cdot (J\vec{V}) \quad (4.67)$$

Terme convectif non linéaire

On définit les symboles de Christoffel par la relation suivante :

$$\vec{\mathcal{M}} = A(\vec{U} \cdot \nabla_{\vec{X}})\vec{U} - (\vec{V} \cdot \nabla_{\vec{\xi}})\vec{V} \quad (4.68)$$

**Lemme 2.** Les symboles de Christoffel représentant l'évolution des vecteurs de base s'écrivent dans la base curviligne quelconque sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{M}_0(\mathbf{V}) - 2V\mathcal{H}\mathbf{V} \\ \mathcal{M} &= \mathbf{V}^t \mathcal{H}^t M^{-1} \mathbf{V} \\ \mathcal{M}_0(\mathbf{V}) &= (\partial_{\xi} \mathbf{X})^{-1} \left( \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{X} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mathcal{M} \mathbf{s} \right) \end{aligned} \quad (4.69)$$

**Preuve du lemme 2.** En utilisant les relations de dérivation (4.66), l'expression se simplifie à :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}} &= A(\vec{V} \cdot \nabla_{\vec{\xi}}) (A^{-1} \vec{V}) - (\vec{V} \cdot \nabla_{\vec{\xi}}) \vec{V} \\ &= A \partial_{\vec{\xi}} A^{-1} \cdot \vec{V} \cdot \vec{V} \\ &= A \partial_{\vec{\xi}\vec{\xi}}^2 \vec{X} \cdot \vec{V} \cdot \vec{V} \end{aligned} \quad (4.70)$$

Le calcul de  $\partial_{\vec{\xi}\vec{\xi}}^2 \vec{X}$  est donné dans l'annexe A.

□

**Lemme 3.** Les symboles de Christoffel du changement de coordonnées curviligne orthogonal se réduisent à :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i=1,\dots,d-1} &= \frac{1}{\tilde{h}_i} \sum_{p=1}^{d-1} \left( 2\tilde{h}_{i,p} \mathbf{V}_i - \frac{\tilde{h}_p}{\tilde{h}_i} \tilde{h}_{p,i} \mathbf{V}_p \right) \mathbf{V}_p - 2V \frac{m_i k_i}{\tilde{h}_i} \mathbf{V}_i \\ \mathcal{M} &= \sum_{p=1}^{d-1} \mathbf{V}_p^2 m_p k_p \tilde{h}_p \end{aligned} \quad (4.71)$$

Ou encore en trois dimensions d'espace :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= \frac{1}{\hbar_1} \left( \hbar_{1,1} \mathbf{V}_1^2 + 2\hbar_{1,2} \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 - \frac{\hbar_2}{\hbar_1} \hbar_{2,1} \mathbf{V}_2^2 - 2m_1 k_1 V \mathbf{V}_1 \right) \\
\mathcal{M}_2 &= \frac{1}{\hbar_2} \left( \hbar_{2,2} \mathbf{V}_2^2 + 2\hbar_{2,1} \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_1 - \frac{\hbar_1}{\hbar_2} \hbar_{1,2} \mathbf{V}_1^2 - 2m_2 k_2 V \mathbf{V}_2 \right) \\
\mathcal{M} &= \mathbf{V}_1^2 m_1 k_1 \hbar_1 + \mathbf{V}_2^2 m_2 k_2 \hbar_2
\end{aligned} \tag{4.72}$$

**Preuve du lemme 3.** Cf. page 214

Tenseur des contraintes

On définit  $\sigma'$  le nouveau tenseur des contraintes dans le repère curviligne par :

$$\sigma' = A \sigma A^t = \begin{pmatrix} S & \mathbf{r} \\ \mathbf{r}^t & f \end{pmatrix} \tag{4.73}$$

**Lemme 4.** Les composantes  $S \in \mathcal{M}_{d-1}(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{d-1}$ , et  $f \in \mathbb{R}$  du tenseur des contraintes  $\sigma'$  sont données par

$$\begin{aligned}
S &= (\partial_\xi \mathbf{X})^{-1} \partial_\xi (\partial_\xi \mathbf{XV}) M + M (\partial_\xi (\partial_\xi \mathbf{XV}))^t (\partial_\xi \mathbf{X})^{-t} \\
&\quad + (\partial_\xi \mathbf{X})^{-1} \mathbf{s} (\mathcal{H}\mathbf{V})^t + \mathcal{H}\mathbf{V}\mathbf{s}^t (\partial_\xi \mathbf{X})^{-t} - 2V\mathcal{H}M \\
\mathbf{r} &= \partial_\eta \mathbf{V} + M \nabla_\xi V
\end{aligned} \tag{4.74}$$

$$f = 2\partial_\eta V$$

**Preuve du lemme 4.** Cf. page 215

**Lemme 5.** Dans un système de coordonnées curviligne orthogonal, les composantes du tenseur des contraintes  $\sigma'$  sont données par :

$$\begin{aligned}
S_{i,j=1,\dots,d-1} &= \frac{1}{\hbar_j^2} \partial_{\xi_j} \mathbf{V}_i + \frac{1}{\hbar_i^2} \partial_{\xi_i} \mathbf{V}_j + \frac{2}{\hbar_i^3} \left( \sum_{q=1}^{d-1} \mathbf{V}_q \hbar_{i,q} - V m_i k_i \right) \delta_{ij} \\
\mathbf{r}_{i=1,\dots,d-1} &= \partial_\eta \mathbf{V}_i + \frac{1}{\hbar_i^2} \partial_{\xi_i} V \\
f &= 2\partial_\eta V
\end{aligned} \tag{4.75}$$

**Preuve du lemme 5.** Cf. page 216

Le tenseur des contraintes prend la forme suivante pour  $d = 3$  :

$$\sigma' = \begin{pmatrix} \sigma'_{11} & \frac{1}{\hbar_2^2} \partial_{\xi_2} \mathbf{V}_1 + \frac{1}{\hbar_1^2} \partial_{\xi_1} \mathbf{V}_2 & \partial_\eta \mathbf{V}_1 + \frac{1}{\hbar_1^2} \partial_{\xi_1} V \\ \cdot & \sigma'_{22} & \partial_\eta \mathbf{V}_2 + \frac{1}{\hbar_2^2} \partial_{\xi_2} V \\ \cdot & \cdot & 2\partial_\eta V \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

où :

$$\sigma'_{11} = \frac{2}{\hbar_1^3} (\partial_{\xi_1} (\hbar_1 \mathbf{V}_1) + \mathbf{V}_2 \hbar_{1,2} - V m_1 k_1)$$

$$\sigma'_{22} = \frac{2}{\hbar_2^3} (\partial_{\xi_2} (\hbar_2 \mathbf{V}_2) + \mathbf{V}_1 \hbar_{2,1} - V m_2 k_2)$$

### Terme visqueux

**Lemme 6.** *La divergence du tenseur des contraintes visqueuses se transforme suivant la règle :*

$$JA \nabla_{\vec{X}} \cdot \sigma = \begin{pmatrix} \nabla_\xi \cdot (JS) + \partial_\eta (\mathbf{J}\mathbf{r}) \\ \nabla_\xi \cdot (\mathbf{J}\mathbf{r}) + \partial_\eta (Jf) \end{pmatrix} + J \vec{B} \quad (4.77)$$

où :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 - 2\mathcal{H}\mathbf{r} \\ B \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

avec :

$$\begin{aligned} B &= (\partial_\xi \mathbf{s})^t \left( \mathbb{1} + \frac{\mathbf{s}\mathbf{s}^t}{c^2} \right) \partial_\xi \mathbf{X} S \\ \mathbf{B}_0 &= (\partial_\xi \mathbf{X})^{-1} \left( \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{X} S + \mathbf{s}B \right) \end{aligned} \quad (4.79)$$

**Preuve du lemme 6.** Cf. page 217

**Lemme 7.** *En coordonnées curvilignes orthogonales, la divergence du tenseur des contraintes visqueuses se met sous la forme :*

$$JA \nabla_{\vec{X}} \cdot \sigma = \begin{pmatrix} \nabla_\xi \cdot (JS) + \partial_\eta (\mathbf{J}\mathbf{r}) \\ \nabla_\xi \cdot (\mathbf{J}\mathbf{r}) + \partial_\eta (Jf) \end{pmatrix} + J \vec{B} \quad (4.80)$$

où :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{i=1,\dots,d-1} &= \frac{1}{\hbar_i} \sum_{j=1}^{d-1} \left( 2\hbar_{i,j} \mathbf{S}_{ij} - \frac{\hbar_j}{\hbar_i} \hbar_{j,i} \mathbf{S}_{jj} \right) - 2 \frac{m_i k_i}{\hbar_i} \mathbf{r}_i \\ \mathbf{B} &= \sum_{p=1}^{d-1} m_p k_p \hbar_p \mathbf{S}_{pp} \end{aligned} \quad (4.81)$$

**Preuve du lemme 7.** Cf. page 218

Pour  $d = 3$ , on obtient :

$$\vec{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\hbar_1} \left( \hbar_{1,1} \mathbf{S}_{11} - \frac{\hbar_2}{\hbar_1} \hbar_{2,1} \mathbf{S}_{22} + 2(\hbar_{1,2} \mathbf{S}_{12} - m_1 k_1 \mathbf{r}_1) \right) \\ \frac{1}{\hbar_2} \left( \hbar_{2,2} \mathbf{S}_{22} - \frac{\hbar_1}{\hbar_2} \hbar_{1,2} \mathbf{S}_{11} + 2(\hbar_{2,1} \mathbf{S}_{21} - m_2 k_2 \mathbf{r}_2) \right) \\ m_1 k_1 \hbar_1 \mathbf{S}_{11} + m_2 k_2 \hbar_2 \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \quad (4.82)$$

### Navier-Stokes

Reprenons maintenant tous les éléments du paragraphe 4.1.5 qui nous permettent d'écrire les équations de Navier-Stokes dans le repère curviligne.

Les équations de Navier-Stokes se réécrivent donc en coordonnées curvilignes :

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{\xi}} \cdot (J \vec{\mathbf{V}}) &= 0 \\ \partial_t \vec{\mathbf{V}} + (\vec{\mathbf{V}} \cdot \nabla_{\vec{\xi}}) \vec{\mathbf{V}} + \vec{\mathcal{M}} &= -\frac{1}{\rho} \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \nabla_{\vec{\xi}} p + \frac{\nu}{J} \left( \nabla_{\vec{\xi}} \cdot (J \sigma') + J \vec{\mathbf{B}} \right) + A \vec{\gamma} \\ &\quad - 2A \tilde{\Omega} A^{-1} \vec{\mathbf{V}} - A \tilde{\Omega}^2 \vec{\mathbf{R}} \end{aligned} \quad (4.83)$$

On néglige la force de Coriolis et on définit l'inertie totale dans le repère curviligne comme une fonction de l'espace :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_{tot} &= \vec{\gamma} - \tilde{\Omega}^2 \vec{\mathbf{R}} \\ \vec{\gamma}(\xi, \eta) &= A \vec{\gamma}_{tot} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.84)$$

L'équation de la conservation de quantité du mouvement peut être réécrite en séparant la composante normale (la composante suivant  $\eta$ ) :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{V} + (\vec{\mathbf{V}} \cdot \nabla_{\vec{\xi}}) \mathbf{V} + \mathcal{M} &= -\frac{1}{\rho} M \nabla_{\xi} p + \frac{\nu}{J} \left( \nabla_{\xi} \cdot (J \mathbf{S}) + \partial_{\eta} (J \mathbf{r}) + J \mathbf{B} \right) + \gamma \\ \partial_t V + (\vec{\mathbf{V}} \cdot \nabla_{\vec{\xi}}) V + \mathcal{M} &= -\frac{1}{\rho} \partial_{\eta} p + \frac{\nu}{J} \left( \nabla_{\xi} \cdot (J \mathbf{r}) + \partial_{\eta} (J f) + J B \right) + \gamma \end{aligned} \quad (4.85)$$



Normale et tangentes à la surface libre

**Lemme 8.**  $\vec{N}$  la normale unitaire à la surface libre d'équation  $\eta = h(\xi, \eta)$  est donnée par :

$$\vec{N} = \left(1 + \partial_\xi h M_{|\eta=h} \nabla_\xi h\right)^{-\frac{1}{2}} A^t_{|\eta=h} \begin{pmatrix} -\nabla_\xi h \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.86)$$

et une famille de vecteurs génératrice de la surface libre est donnée par les vecteurs colonnes de la matrice  $T$  :

$$T = A^{-1}_{|\eta=h} \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \partial_\xi h \end{pmatrix} C \quad (4.87)$$

avec :

$$C = \left(\text{ddiag}\left(M_{|\eta=h}^{-1} + \nabla_\xi h \partial_\xi h\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.88)$$

où  $\text{ddiag}(\varphi)$  est une matrice diagonale, de diagonale la diagonale de  $\varphi$ .

**Preuve du lemme 8.** Cf. page 219

Continuité des contraintes à l'interface

L'expression de la normale et des tangentes permet d'écrire la continuité des contraintes (4.61) sous la forme du système suivant :

$$\begin{aligned} \mu \sigma'_{|\eta=h} \begin{pmatrix} -\nabla_\xi h \\ 1 \end{pmatrix} &= (\kappa \mathcal{H} + p_{|\eta=h} - p_{ext}) \tilde{G}_{|\eta=h}^{-1} \begin{pmatrix} -\nabla_\xi h \\ 1 \end{pmatrix} \\ &+ \left(1 + \partial_\xi h M_{|\eta=h} \nabla_\xi h\right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \partial_\xi h \end{pmatrix} C \tilde{\tau} \end{aligned} \quad (4.89)$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} \mu \left(\mathbf{r}_{|\eta=h} - S_{|\eta=h} \nabla_\xi h\right) = -(\kappa \mathcal{H} + p_{|\eta=h} - p_{ext}) M_{|\eta=h} \nabla_\xi h + \boldsymbol{\tau} \\ \mu \left(f_{|\eta=h} - \mathbf{r}_{|\eta=h}^t \nabla_\xi h\right) = (\kappa \mathcal{H} + p_{|\eta=h} - p_{ext}) + \partial_\xi h \boldsymbol{\tau} \end{cases} \quad (4.90)$$

où  $\boldsymbol{\tau} = \sqrt{1 + \partial_\xi h M_{|\eta=h} \nabla_\xi h} C \tilde{\tau}$  est la contrainte de cisaillement mise à l'échelle avec le rapport des facteurs de normalisation de la normale et des vecteurs tangents. Après réarrangement des termes, on obtient la forme finale :

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{|\eta=h} + \left(f_{|\eta=h} M_{|\eta=h} - S_{|\eta=h}\right) \nabla_\xi h = \left(\mathbf{r}_{|\eta=h}^t \nabla_\xi h + \frac{1}{\mu} \partial_\xi h \boldsymbol{\tau}\right) M_{|\eta=h} \nabla_\xi h + \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\tau} \\ \mu \left(f_{|\eta=h} - \mathbf{r}_{|\eta=h}^t \nabla_\xi h\right) = (\kappa \mathcal{H} + p_{|\eta=h} - p_{ext}) + \partial_\xi h \boldsymbol{\tau} \end{cases} \quad (4.91)$$

4.1.6 *Système d'équations de la dynamique*

Résumons les résultats obtenus jusqu'ici. La dynamique du film est soumise aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{\xi}} \cdot (J\vec{V}) &= 0 \\ \partial_t \mathbf{V} + (\vec{V} \cdot \nabla_{\vec{\xi}}) \mathbf{V} + \mathcal{M} &= -\frac{1}{\rho} M \nabla_{\xi} p + \frac{\nu}{J} (\nabla_{\xi} \cdot (J\mathbf{S}) + \partial_{\eta} (J\mathbf{r}) + J\mathbf{B}) + \gamma \\ \partial_t V + (\vec{V} \cdot \nabla_{\vec{\xi}}) V + \mathcal{M} &= -\frac{1}{\rho} \partial_{\eta} p + \frac{\nu}{J} (\nabla_{\xi} \cdot (J\mathbf{r}) + \partial_{\eta} (Jf) + JB) + \gamma \end{aligned} \quad (4.92)$$

avec les conditions au fond et à la surface libre :

$$\begin{aligned} \vec{V}|_{\eta=0} &= 0 \\ \mathbf{r}_h + (f_h M_h - S_h) \nabla_{\xi} h &= \left( \mathbf{r}_h^t \nabla_{\xi} h + \frac{1}{\mu} \partial_{\xi} h \boldsymbol{\tau} \right) M_h \nabla_{\xi} h + \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\tau} \\ \mu (f_h - \mathbf{r}_h^t \nabla_{\xi} h) &= (\kappa \mathcal{H} + p|_{\eta=h} - p_{ext}) + \partial_{\xi} h \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (4.93)$$

où on utilise la notation  $\varphi_h$  pour représenter  $\varphi|_{\eta=h}$ .

## 4.2 ÉQUATIONS INTÉGRÉES

Pour obtenir une équation d'évolution sur la hauteur de fluide ( $h$ ) et sur une vitesse moyennée  $\left( \int_0^h \mathbf{V} d\eta \right)$ , on intègre l'équation de conservation de la masse et la composante en  $\xi$  de l'équation de conservation de quantité de mouvement sur la hauteur normale du film.

*Remarque.*  $\mathbf{V}$  n'est pas la vitesse tangentielle à l'écoulement, voir 4.1.4.

Pour écrire les équations intégrées, nous avons besoin de la condition d'imperméabilité (ou condition de conservation de la masse) :

$$\partial_t h = (V - \mathbf{V} \cdot \nabla_{\xi} h)|_{\eta=h} \quad (4.94)$$

et de rappeler la formule liant la dérivée de l'intégrale à l'intégrale de la dérivée :

$$\nabla_{\theta} \cdot \left( \int_0^{a(\theta)} \varphi(\theta, z) dz \right) = \left( \int_0^{a(\theta)} \nabla_{\theta} \cdot \varphi(\theta, z) dz \right) + \varphi(\theta, a(\theta)) \cdot \nabla_{\theta} a(\theta) \quad (4.95)$$

En intégrant l'équation de continuité sur toute la hauteur du film, il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^h \nabla_{\vec{\xi}} \cdot (J\vec{V}) d\eta &= \nabla_{\xi} \cdot \left( \int_0^h J\mathbf{V} d\eta \right) - J_h \mathbf{V}_h \cdot \nabla_{\xi} h + J_h V_h \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.96)$$

en utilisant la relation (4.94) on obtient :

$$\nabla_{\xi} \cdot \left( \int_0^h \mathbf{J} \mathbf{V} d\eta \right) - J_h \partial_t h = 0 \quad (4.97)$$

Puisque le jacobien ne dépend pas du temps,

$$J_h \partial_t h = \partial_t \left( \int_0^h J d\eta \right) - \int_0^h \partial_t J d\eta = \partial_t \left( \int_0^h J d\eta \right) \quad (4.98)$$

Et donc l'équation de continuité intégrée s'écrit :

$$\partial_t \left( \int_0^h J d\eta \right) + \nabla_{\xi} \cdot \left( \int_0^h \mathbf{J} \mathbf{V} d\eta \right) = 0 \quad (4.99)$$

Or, l'équation intégrale classique (en repère cartésien) s'écrit :

$$\partial_t h + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (h \mathbf{v}) = 0, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{h} \int_0^h \mathbf{U} dz \quad (4.100)$$

Pour retrouver cette notation usuelle, on pose :

$$\tilde{h} = \int_0^h J d\eta, \quad \tilde{\mathbf{v}} = \frac{1}{\tilde{h}} \int_0^h \mathbf{J} \mathbf{V} d\eta$$

qui sont respectivement la hauteur et la vitesse moyenne dans le repère curviligne corrigées de la variation du volume élémentaire ( $J$ ). On utilisera comme inconnues le vecteur  $\begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{\mathbf{v}} \end{pmatrix}$  au lieu

de  $\begin{pmatrix} h \\ \frac{1}{h} \int_0^h \mathbf{V} d\eta \end{pmatrix}$ . L'équation (4.99) devient :

$$\partial_t \tilde{h} + \nabla_{\xi} \cdot (\tilde{h} \tilde{\mathbf{v}}) = 0 \quad (4.101)$$

On procède de la même manière en intégrant l'équation de bilan de quantité de mouvement en  $\xi$  multipliée par le jacobien :

$$\begin{aligned} & \int_0^h J \left( \partial_t \mathbf{V} + (\tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla_{\xi}) \mathbf{V} + \mathcal{M} \right) d\eta \\ &= \int_0^h J \left( -\frac{1}{\rho} \mathbf{M} \nabla_{\xi} p + \frac{\nu}{J} (\nabla_{\xi} \cdot (\mathbf{J} \mathbf{S}) + \partial_{\eta} (\mathbf{J} \mathbf{r}) + \mathbf{J} \mathbf{B}) + \boldsymbol{\gamma} \right) d\eta \end{aligned} \quad (4.102)$$

Étudions chaque terme séparément. La dérivée temporelle se transforme facilement :

$$\int_0^h J \partial_t \mathbf{V} d\eta = \partial_t \left( \int_0^h \mathbf{J} \mathbf{V} d\eta \right) - J_h \partial_t h \mathbf{V}_h = \partial_t (\tilde{h} \tilde{\mathbf{v}}) - J_h \partial_t h \mathbf{V}_h \quad (4.103)$$

Pour le terme de transport advectif, on utilise la conservation de la masse (4.92) et l'imperméabilité (4.94) :

$$\begin{aligned}
& \int_0^h J(\vec{V} \cdot \nabla_{\xi}) \mathbf{V} d\eta \\
&= \int_0^h J(\mathbf{V} \cdot \nabla_{\xi}) \mathbf{V} d\eta + \int_0^h J V \partial_{\eta} \mathbf{V} d\eta \\
&= \int_0^h \nabla_{\xi} \cdot (J \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) d\eta - \int_0^h \nabla_{\xi} \cdot (J \mathbf{V}) \mathbf{V} d\eta + \int_0^h J V \partial_{\eta} \mathbf{V} d\eta \\
&= \int_0^h \nabla_{\xi} \cdot (J \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) d\eta - \int_0^h \nabla_{\xi} \cdot (J \mathbf{V}) \mathbf{V} d\eta - \int_0^h \partial_{\eta} (J V) \mathbf{V} d\eta + J_h V_h \mathbf{V}_h \\
&= \nabla_{\xi} \cdot \int_0^h J \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} d\eta - J_h (\mathbf{V}_h \cdot \nabla_{\xi} h) \mathbf{V}_h - \int_0^h \nabla_{\xi} \cdot (J \vec{V}) \mathbf{V} d\eta + J_h V_h \mathbf{V}_h \\
&= \nabla_{\xi} \cdot \int_0^h J \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} d\eta + J_h (V_h - \mathbf{V} \cdot \nabla_{\xi} h) \mathbf{V}_h \\
&= \nabla_{\xi} \cdot \int_0^h J \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} d\eta + J_h \partial_t h \mathbf{V}_h
\end{aligned} \tag{4.104}$$

Le membre de gauche se simplifie pour donner :

$$\int_0^h J \left( \partial_t \mathbf{V} + (\vec{V} \cdot \nabla_{\xi}) \mathbf{V} + \mathcal{M} \right) d\eta = \partial_t (\tilde{h} \tilde{\mathbf{v}}) + \nabla_{\xi} \cdot \int_0^h J \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} d\eta + \int_0^h J \mathcal{M} d\eta \tag{4.105}$$

Le gradient de pression s'intègre grâce à (4.95) :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho} \int_0^h J M \nabla_{\xi} p d\eta &= -\frac{1}{\rho} \int_0^h \nabla_{\xi} \cdot (J M p) d\eta + \frac{1}{\rho} \int_0^h p \nabla_{\xi} \cdot (J M) d\eta \\
&= -\frac{1}{\rho} \nabla_{\xi} \cdot \left( \int_0^h J M p d\eta \right) + \frac{1}{\rho} p_h J_h M_h \nabla_{\xi} h \\
&\quad + \frac{1}{\rho} \int_0^h p \nabla_{\xi} \cdot (J M) d\eta
\end{aligned} \tag{4.106}$$

De même que le terme visqueux :

$$v \int_0^h (\nabla_{\xi} \cdot (J S) + \partial_{\eta} (J \mathbf{r})) d\eta = v \nabla_{\xi} \cdot \left( \int_0^h J S d\eta \right) + v J_h (\mathbf{r}_h - S_h \nabla_{\xi} h) - v J_0 \mathbf{r}_0 \tag{4.107}$$

Avec (4.93), on élimine le terme de pression à l'interface pour le remplacer par la pression extérieure connue :

$$\frac{1}{\rho} p_h J_h M_h \nabla_{\xi} h + v J_h (\mathbf{r}_h - S_h \nabla_{\xi} h) = -\frac{J_h}{\rho} [\kappa \mathcal{H} - p_{ext}] M_h \nabla_{\xi} h + \frac{J_h}{\rho} \boldsymbol{\tau} \tag{4.108}$$

On obtient finalement le système d'équations d'évolution sur les variables  $\tilde{h}$  et  $\tilde{\mathbf{v}}$  caractérisant la dynamique du film liquide :

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{h} + \nabla_\xi \cdot (\tilde{h} \tilde{\mathbf{v}}) &= 0 \\ \partial_t (\tilde{h} \tilde{\mathbf{v}}) + \nabla_\xi \cdot \int_0^h \mathbf{J} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} d\eta + \frac{1}{\rho} \nabla_\xi \cdot \left( \int_0^h \mathbf{J} M p d\eta \right) + \int_0^h \mathbf{J} \mathcal{M} d\eta \\ &= \frac{1}{\rho} \int_0^h p \nabla_\xi \cdot (\mathbf{J} M) d\eta + \nu \nabla_\xi \cdot \left( \int_0^h \mathbf{J} S d\eta \right) + \nu \int_0^h \mathbf{J} \mathbf{B} d\eta \\ &\quad + \int_0^h \mathbf{J} \mathcal{Y} d\eta - \nu \mathbf{J}_0 \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{J}_h}{\rho} [\boldsymbol{\tau} - (\kappa \mathcal{H} - p_{ext}) M_h \nabla_\xi h] \end{aligned} \quad (4.109)$$

Ce système est exact, mais il n'est pas complet ; il faut exprimer les intégrales faisant apparaître la vitesse et la pression en fonction de  $\tilde{h}$  et  $\tilde{\mathbf{v}}$  pour le fermer.

### 4.3 MISE À L'ÉCHELLE

Dans cette partie, les équations de Navier-Stokes (4.92) et les conditions aux bords (4.93) sont adimensionnées. Sous certaines hypothèses sur l'écoulement, on peut calculer un développement asymptotique de la vitesse et de la pression, qui permettent de fermer le système d'équations moyennées (4.157).

#### 4.3.1 Facteurs d'échelle et adimensionnement

Il y a trois groupes de dimensions caractéristiques qui définissent la dynamique du film :

- le fluide est défini par ses propriétés physiques :
  - la masse volumique  $\rho$ ,
  - la viscosité dynamique  $\mu$  ou cinématique  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ,
  - la tension de surface  $\kappa$  ;
- l'écoulement se caractérise par :
  - ses dimensions, la hauteur moyenne  $H$  et la longueur d'onde des solutions  $L$ , qui définissent un facteur d'échelle  $\varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1$ ,
  - et une vitesse de référence  $U_0$  qui peut aussi bien être la vitesse à l'interface ou la vitesse moyenne ;
- le film est mû par des forces extérieures dont les grandeurs sont données par :
  - $\tau_0$ , la valeur moyenne de la contrainte de cisaillement qu'exerce le gaz à l'interface avec le liquide,
  - $\Delta p_{ext}$ , la variation de la pression extérieure,
  - $\gamma_0 = \|\tilde{\gamma}\|$ , dimension de la gravité et des forces d'inertie dues au mouvement (rotation et translation) de la paroi.

À ces grandeurs de l'écoulement, il faut rajouter la dimension caractéristique de la courbure de la paroi,  $R$  le rayon de courbure moyen et le paramètre adimensionnel  $\Theta_R = \frac{L}{R}$ .

Cela permet de définir des nombres adimensionnels usuels comme le nombre de Reynolds, le nombre de Weber, le nombre de Poiseuille, et un « nombre de Froude généralisé » pour tenir compte de tous les effets moteurs :

$$R_e = \frac{U_0 H}{\nu}, \quad W_e = \frac{\rho U_0^2 H}{\kappa}, \quad P_o = \frac{H^2 \Delta p_{ext}}{\mu U_0 L}, \quad F_r = \sqrt{\frac{\rho U_0^2}{\rho H \gamma_0 + \Delta p_{ext} + \tau_0}}. \quad (4.110)$$

Les dimensions caractéristiques de l'écoulement sont des grandeurs représentées dans le repère naturel de l'écoulement : si le fluide s'écoule sur une sphère, la hauteur moyenne est portée par le vecteur radial et ne correspond pas à la hauteur cartésienne. C'est pourquoi il faut adimensionner les équations écrites dans le système de coordonnées curvilignes. Ce qui donne, en notant avec un astérisque les variables adimensionnées :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} &= L \begin{pmatrix} \xi^* \\ \varepsilon \eta^* \end{pmatrix}, & t &= \frac{L}{U_0} t^*, \\ \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ V \end{pmatrix} &= U_0 \begin{pmatrix} \mathbf{V}^* \\ \varepsilon V^* \end{pmatrix}, & h &= H h^*, \end{aligned} \quad (4.111)$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ p \end{pmatrix} = (\rho H \gamma_0 + \Delta p_{ext} + \tau_0) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}^* \\ p^* \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma} = \left( \gamma_0 + \frac{\Delta p_{ext} + \tau_0}{\rho H} \right) \tilde{\gamma}^*,$$

$$p_{ext} = \Delta p_{ext} p_{ext}^*$$

La dérivée de  $\mathbf{s}$  et le tenseur  $\mathcal{H}$  représentent la courbure, et sont donc de dimension  $\frac{1}{R}$  :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}^* \\ c^* \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \partial_\xi \mathbf{s} \\ \mathcal{H} \end{pmatrix} = \frac{\Theta_R}{L} \begin{pmatrix} \partial_\xi \mathbf{s}^* \\ \mathcal{H}^* \end{pmatrix}. \quad (4.112)$$

La courbure est adimensionnée par :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{L} \mathcal{H}^* \quad (4.113)$$

La mise à l'échelle des symboles de Christoffel et des contraintes visqueuses découle de (4.111) et (4.112) :

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{U_0^2}{L} \vec{\mathcal{M}}^*, \quad \sigma = \frac{U_0}{H} \begin{pmatrix} \varepsilon \mathcal{S}^* & \mathbf{r}^* \\ (\mathbf{r}^*)^t & \varepsilon f^* \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \frac{U_0}{HL} \vec{B}^* \quad (4.114)$$

4.3.2 *Solution uniforme*

Selon le choix des dimensions caractéristiques, des relations entre les nombres adimensionnels apparaissent.

Dans le cas d'un film liquide s'écoulant le long d'un plan incliné d'un angle  $\theta$ , le problème stationnaire et uniforme est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{zz} = -\frac{g \sin \theta}{\nu} \\ u_z(H) = u(0) = 0 \end{array} \right. \quad (4.115)$$

où  $u$  est la composante tangentielle de la vitesse du fluide. La solution, connue sous le nom de film de Nusselt, est un film d'épaisseur constante et de profil de vitesse semi-parabolique :

$$u = \frac{g \sin \theta}{\nu} z \left( H - \frac{z}{2} \right) \quad (4.116)$$

On connaît donc la vitesse moyenne et la vitesse à l'interface :

$$v_1 = \frac{1}{H} \int_{z=0}^H u dz = \frac{H^2 g \sin \theta}{3\nu} \quad (4.117)$$

$$v_2 = u(H) = \frac{H^2 g \sin \theta}{2\nu}$$

En choisissant l'épaisseur  $H$  du film comme hauteur de référence, chacune de ces vitesses permet de calculer un nombre de Reynolds :

$$R_1 = \frac{H^3 g \sin \theta}{3\nu^2}, \quad R_2 = \frac{H^3 g \sin \theta}{2\nu^2} \quad (4.118)$$

Les deux valeurs du Reynolds ne diffèrent que d'un rapport  $\frac{3}{2}$ . De la même manière le nombre de Froude, définit en l'absence de pression extérieure et de contrainte de cisaillement par :

$$F_r = \sqrt{\frac{U_0^2}{Hg}} \quad (4.119)$$

est déterminé par la vitesse de référence :

$$F_1^2 = \frac{H^3 g \sin^2 \theta}{9\nu^2}, \quad F_2^2 = \frac{H^3 g \sin^2 \theta}{4\nu^2} \quad (4.120)$$

On a alors une relation explicite entre les nombres de Reynolds et de Froude :

$$F_1^2 = \frac{R_1 \sin \theta}{3} \quad (4.121)$$

$$F_2^2 = \frac{R_2 \sin \theta}{2}$$

### 4.3.3 Développements asymptotiques

Développons à présent tous les termes intervenant dans les équations du film (les équations de Navier-Stokes et les équations intégrées), en omettant volontairement les astérisques pour ne pas alourdir les notations.

#### Termes liés à la géométrie

La matrice jacobienne du changement de coordonnées  $\xi \mapsto \mathbf{X}$  apparaît comme la jacobienne de  $\xi \mapsto \mathbf{x}$  avec une correction d'ordre  $\varepsilon$  (donc petite par définition) liée à la courbure de la paroi.

$$\partial_\xi \mathbf{X} = \partial_\xi \mathbf{x} (\mathbb{1} - \varepsilon \eta \Theta_R \mathcal{H}_0) \quad (4.122)$$

Ce qui permet de trouver les termes dominants du développement de son inverse :

$$(\partial_\xi \mathbf{X})^{-1} = (\mathbb{1} + \varepsilon \eta \Theta_R \mathcal{H}_0) (\partial_\xi \mathbf{x})^{-1} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.123)$$

et donne immédiatement le développement du tenseur de courbure  $\mathcal{H}$  :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 (\mathbb{1} + \varepsilon \eta \Theta_R \mathcal{H}_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.124)$$

En utilisant le développement limité à l'ordre un du déterminant, on obtient le jacobien :

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{c} \det(\partial_\xi \mathbf{X}) \\ &= \frac{1}{c} \det(\partial_\xi \mathbf{x}) \det(\mathbb{1} - \varepsilon \eta \Theta_R \mathcal{H}_0) \\ &= \frac{1}{c} \det(\partial_\xi \mathbf{x}) (1 - \varepsilon \eta \Theta_R \operatorname{tr}(\mathcal{H}_0)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (4.125)$$

On pose  $\bar{J} = \frac{1}{c} \det(\partial_\xi \mathbf{x})$  et on obtient le résultat final :

$$J = \bar{J} (1 - \varepsilon \eta \Theta_R \operatorname{tr}(\mathcal{H}_0)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.126)$$

En appelant  $M_0$  la restriction au point  $\eta = 0$  du bloc de la métrique  $M$  :

$$M_0 = (\partial_\xi \mathbf{x})^{-1} (\mathbb{1} - \mathbf{s} \mathbf{s}^t) (\partial_\xi \mathbf{x})^{-t} \quad (4.127)$$

on calcule aisément  $M$  :

$$M = M_0 + \varepsilon \eta \Theta_R (\mathcal{H}_0 M_0 + M_0 \mathcal{H}_0^t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.128)$$

Comme il est démontré dans l'annexe A (équation (A.35)),  $\mathcal{H}_0 M_0 = M_0 \mathcal{H}_0^t$ , et finalement :

$$M = M_0 + 2\varepsilon \eta \Theta_R \mathcal{H}_0 M_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.129)$$



Le même résultat permet d'écrire son inverse (sans approximation) :

$$\begin{aligned} M^{-1} &= M_0^{-1} - \varepsilon \eta \Theta_R (M_0^{-1} \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_0^t M_0^{-1}) + \varepsilon^2 \eta^2 \Theta_R^2 \mathcal{H}_0^t M_0^{-1} \mathcal{H}_0 \\ &= M_0^{-1} - 2\varepsilon \eta \Theta_R M_0^{-1} \mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 \eta^2 \Theta_R^2 \mathcal{H}_0^t M_0^{-1} \mathcal{H}_0 \end{aligned} \quad (4.130)$$

### Termes dans Navier-Stokes

Les coefficients du tenseur des contraintes visqueuses s'écrivent :

$$\begin{aligned} S &= (\partial_\xi \mathbf{X})^{-1} \partial_\xi (\partial_\xi \mathbf{XV}) M + M (\partial_\xi (\partial_\xi \mathbf{XV}))^t (\partial_\xi \mathbf{X})^{-t} \\ &\quad + \Theta_R (\partial_\xi \mathbf{X})^{-1} \mathbf{s} (\mathcal{H}\mathbf{V})^t + \Theta_R \mathcal{H}\mathbf{V}\mathbf{s}^t (\partial_\xi \mathbf{X})^{-t} - 2\varepsilon \Theta_R V \mathcal{H}M \\ \mathbf{r} &= \partial_\eta \mathbf{V} + \varepsilon^2 M \nabla_\xi V \end{aligned} \quad (4.131)$$

$$f = 2\partial_\eta V$$

et les termes liés aux dérivations dans le nouveau système de coordonnées :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{M}_0 - 2\varepsilon \Theta_R V \mathcal{H}\mathbf{V} \\ \mathcal{M} &= \Theta_R \mathbf{V}^t \mathcal{H}^t M^{-1} \mathbf{V} \\ \mathcal{M}_0 &= (\partial_\xi \mathbf{X})^{-1} \left( \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{X} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mathcal{M}\mathbf{s} \right) \end{aligned} \quad (4.132)$$

On peut utiliser le résultat page 216, pour réécrire  $\mathcal{M}$  sous la forme :

$$\mathcal{M} = \Theta_R \mathbf{V}^t M^{-1} \mathcal{H}\mathbf{V}$$

Appelons  $\mathcal{M}_1$  le terme dominant de  $\mathcal{M}_0$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 &= \mathcal{M}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \mathcal{M}_1 &= (\partial_\xi \mathbf{X})^{-1} \left( \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{X} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \Theta_R \mathbf{V}^t M_0^{-1} \mathcal{H}_0 \mathbf{V}\mathbf{s} \right) \end{aligned} \quad (4.133)$$

et :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \varepsilon \mathbf{B}_0 - 2\Theta_R \mathcal{H}\mathbf{r} \\ B \end{pmatrix} \quad (4.134)$$

où :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0 &= (\partial_\xi \mathbf{X})^{-1} \left( \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{X} S + \mathbf{s}B \right) \\ B &= \Theta_R (\partial_\xi \mathbf{s})^t \left( \mathbb{1} + \frac{\mathbf{s}\mathbf{s}^t}{c^2} \right) \partial_\xi \mathbf{X} S \end{aligned} \quad (4.135)$$

Le terme d'inertie est défini par :

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(\xi, \eta) &= A\tilde{\tilde{\gamma}}_{tot} \\ &= \begin{pmatrix} (\partial_{\xi}\mathbf{X})^{-1}(\mathbb{1} - \mathbf{ss}^t)\tilde{\tilde{\gamma}}_{tot} + c(\partial_{\xi}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{s}\tilde{\tilde{\gamma}}_{tot} \\ c\tilde{\tilde{\gamma}}_{tot} - \mathbf{s}^t\tilde{\tilde{\gamma}}_{tot} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (4.136)$$

En écrivant le terme principal  $\gamma_0$  :

$$\gamma_0 = (\partial_{\xi}\mathbf{X})^{-1}((\mathbb{1} - \mathbf{ss}^t)\tilde{\tilde{\gamma}}_{tot} + c\mathbf{s}\tilde{\tilde{\gamma}}_{tot})\quad (4.137)$$

La dépendance normale de la composante tangentielle s'explique :

$$\gamma = (\mathbb{1} + \varepsilon\eta\Theta_R\mathcal{H}_0)\gamma_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\quad (4.138)$$

Comme de plus l'inertie totale  $\tilde{\tilde{\gamma}}_{tot}$  dépend de la distance de la paroi à l'axe de rotation, c'est à dire de la position  $\xi$  sur la paroi et de la hauteur normale  $\eta$ , qui est plutôt petite, on peut écrire que l'inertie dépend principalement de  $\xi$ , les termes en  $\eta$  sont des corrections d'ordre  $\varepsilon$ . On peut finalement écrire :

$$\begin{cases} \gamma(\xi, \eta) = (\mathbb{1} + \varepsilon\eta\Theta_R\mathcal{H}_0)\gamma_0(\xi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \gamma(\xi, \eta) = \gamma_0(\xi) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{cases}\quad (4.139)$$

En posant :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_0 &= \text{ddiag}(M_0^{-1})^{-\frac{1}{2}}\tilde{\boldsymbol{\tau}} \\ \boldsymbol{\tau}_1 &= \text{ddiag}(M_0^{-1}\mathcal{H}_0)\text{ddiag}(M_0^{-1})^{-\frac{3}{2}}\tilde{\boldsymbol{\tau}}\end{aligned}\quad (4.140)$$

La contrainte de cisaillement s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 + \varepsilon h\Theta_R\boldsymbol{\tau}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\quad (4.141)$$

Enfin, il reste à exprimer la nouvelle variable de hauteur définie lors de l'intégration des équations de Navier-Stokes à la partie 4.2 :

$$\tilde{h} = \int_0^h J d\eta = \bar{J}h \left(1 - \varepsilon \frac{h}{2}\Theta_R \text{tr}\mathcal{H}_0\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\quad (4.142)$$

En notant qu'à l'ordre 1 en  $\varepsilon$ ,  $\tilde{h}$  vaut  $\bar{J}h$ , on peut inverser la relation précédente pour exprimer  $h$  en fonction de  $\tilde{h}$  :

$$h = \frac{\tilde{h}}{\bar{J}} + \varepsilon \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}^2}\Theta_R \text{tr}\mathcal{H}_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\quad (4.143)$$

#### 4.3.4 Équations adimensionnées

À l'aide des paragraphes précédent, on développe maintenant les équations du film par rapport au petit paramètre  $\varepsilon = \frac{H}{L}$ .

##### Conservation de la masse et de la quantité de mouvement

Les équations de Navier-Stokes (4.92) sont adimensionnées en faisant apparaître les nombres de Reynolds, de Froude et le petit paramètre  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \nabla_{\xi} \cdot (J\mathbf{V}) + \partial_{\eta}(JV) &= 0 \\ \partial_t \mathbf{V} + (\vec{V} \cdot \nabla_{\vec{\xi}}) \mathbf{V} + \mathcal{M}_0 - 2\varepsilon \Theta_R V \mathcal{H} \mathbf{V} &= -\frac{1}{F_r^2} M \nabla_{\xi} p + \frac{1}{\varepsilon J R_e} (\varepsilon^2 \nabla_{\xi} \cdot (JS) + \partial_{\eta}(J\mathbf{r})) \\ &+ \frac{1}{R_e} (\varepsilon \mathbf{B}_0 - 2\Theta_R \mathcal{H} \mathbf{r}) + \frac{1}{\varepsilon F_r^2} \gamma \end{aligned} \quad (4.144)$$

$$\partial_t V + (\vec{V} \cdot \nabla_{\vec{\xi}}) V + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{M} = -\frac{1}{\varepsilon^2 F_r^2} \partial_{\eta} p + \frac{1}{\varepsilon J R_e} (\nabla_{\xi} \cdot (J\mathbf{r}) + \partial_{\eta}(Jf)) + \frac{\varepsilon}{R_e} B + \frac{1}{\varepsilon^2 F_r^2} \gamma$$

On en extrait les équations sur les dérivées normales de la pression et de la vitesse (contenue dans le vecteur  $\mathbf{r}$  du tenseur des contraintes) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \partial_{\eta}(J\mathbf{r}) &= -\frac{R_e}{F_r^2} \gamma + \varepsilon R_e \left( \partial_t \mathbf{V} + (\vec{V} \cdot \nabla_{\vec{\xi}}) \mathbf{V} + \mathcal{M}_0 \right) + \frac{\varepsilon R_e}{F_r^2} M \nabla_{\xi} p + 2\varepsilon \Theta_R \mathcal{H} \mathbf{r} \\ &- 2\varepsilon^2 R_e \Theta_R V \mathcal{H} \mathbf{V} - \frac{\varepsilon^2}{J} \nabla_{\xi} \cdot (JS) - \varepsilon^2 \mathbf{B}_0 \end{aligned} \quad (4.145)$$

$$\partial_{\eta} p = \gamma - \varepsilon F_r^2 \mathcal{M} + \frac{\varepsilon F_r^2}{J R_e} (\nabla_{\xi} \cdot (J\mathbf{r}) + \partial_{\eta}(Jf)) - \varepsilon^2 F_r^2 \left( \partial_t V + (\vec{V} \cdot \nabla_{\vec{\xi}}) V \right) + \frac{\varepsilon^3 F_r^2}{R_e} B$$

La dérivée du jacobien se calcule en utilisant la formule de Jacobi :

$$\begin{aligned} \partial_{\eta} J &= \frac{1}{c} \partial_{\eta} (\det(\partial_{\xi} \mathbf{X})) \\ &= \frac{1}{c} \text{tr} (\text{Adj}(\partial_{\xi} \mathbf{X}) \partial_{\eta} (\partial_{\xi} \mathbf{X})) \end{aligned} \quad (4.146)$$

où  $\text{Adj}(\cdot)$  est l'« adjugate matrix », c'est à dire la transposée de la comatrice. Et puisque le jacobien n'est pas nul, on peut exprimer cette matrice sous la forme :

$$\begin{aligned} \text{Adj}(\partial_{\xi} \mathbf{X}) &= \det(\partial_{\xi} \mathbf{X}) (\partial_{\xi} \mathbf{X})^{-1} \\ &= cJ (\partial_{\xi} \mathbf{X})^{-1} \end{aligned} \quad (4.147)$$

et donc la dérivée du jacobien fait juste intervenir le tenseur de courbure :

$$\begin{aligned}
\partial_\eta J &= \text{tr} \left( J (\partial_\xi \mathbf{X})^{-1} \partial_\eta (\partial_\xi \mathbf{X}) \right) \\
&= -\varepsilon J \Theta_R \text{tr} \left( (\partial_\xi \mathbf{X})^{-1} \partial_\xi \mathbf{s} \right) \\
&= -\varepsilon J \Theta_R \text{tr} \mathcal{H} \\
&= -\varepsilon J \Theta_R (\text{tr} \mathcal{H}_0 + \varepsilon \eta \Theta_R \text{tr} (\mathcal{H}_0^2))
\end{aligned} \tag{4.148}$$

Il ne manque plus qu'à utiliser la définition de  $\mathbf{r}$  pour trouver l'expression de la dérivée seconde de la vitesse :

$$\begin{aligned}
\partial_{\eta\eta}^2 \mathbf{V} &= -\frac{R_e}{F_r^2} \boldsymbol{\gamma} + \frac{\varepsilon R_e}{F_r^2} M \nabla_\xi p + \varepsilon R_e \left( \partial_t \mathbf{V} + (\vec{V} \cdot \nabla_{\vec{x}}) \mathbf{V} + \mathcal{M}_0 \right) \\
&\quad + \varepsilon \Theta_R (2\mathcal{H} + \text{tr} \mathcal{H}_0 + \varepsilon \eta \Theta_R \text{tr} (\mathcal{H}_0^2)) \mathbf{r} \\
&\quad - 2\varepsilon^2 R_e \Theta_R V \mathcal{H} \mathbf{V} - \frac{\varepsilon^2}{J} \nabla_\xi \cdot (J \mathbf{S}) - \varepsilon^2 \mathbf{B}_0 - \varepsilon^2 \partial_\eta (M \nabla_\xi V)
\end{aligned} \tag{4.149}$$

#### Conditions aux limites

Les équations (4.93), une fois mises à l'échelle, donnent des conditions aux bords de la vitesse et de la pression :

$$\vec{V}|_{\eta=0} = 0$$

$$\begin{aligned}
(\partial_\eta \mathbf{V})|_{\eta=h} &= \frac{R_e}{F_r^2} \boldsymbol{\tau} - \varepsilon^2 M_h (\nabla_\xi V)|_{\eta=h} - \varepsilon^2 (f_h M_h - S_h) \nabla_\xi h \\
&\quad + \varepsilon^2 \left( \mathbf{r}_h^t \nabla_\xi h + \frac{R_e}{F_r^2} \partial_\xi h \boldsymbol{\tau} \right) M_h \nabla_\xi h
\end{aligned} \tag{4.150}$$

$$p|_{\eta=h} = \frac{P_o F_r^2}{\varepsilon R_e} p_{ext} - \frac{\varepsilon F_r^2}{W_e} \mathcal{H} - \varepsilon \partial_\xi h \boldsymbol{\tau} + \varepsilon \frac{F_r^2}{R_e} (f_h - \mathbf{r}_h^t \nabla_\xi h)$$

#### 4.3.5 Hypothèses sur l'écoulement

Soient  $\alpha, \beta, \delta, \lambda, \zeta, \bar{\kappa}$  les paramètres adimensionnels suivant :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \varepsilon \frac{F_r^2}{R_e}; & \beta &= \varepsilon R_e; & \delta &= \varepsilon \frac{R_e}{F_r^2}; \\
\lambda &= \frac{R_e}{F_r^2}; & \zeta &= \frac{P_o F_r^2}{R_e}; & \bar{\kappa} &= \frac{\varepsilon F_r^2}{W_e}
\end{aligned} \tag{4.151}$$

Les équations de la vitesse et de la pression s'écrivent avec ces nouveaux paramètres :

$$\begin{aligned} \partial_{\eta\eta}^2 \mathbf{V} &= -\lambda \boldsymbol{\gamma} + \delta M \nabla_{\xi} p + \beta \left( \partial_t \mathbf{V} + (\vec{V} \cdot \nabla_{\vec{\xi}}) \mathbf{V} + \mathcal{M}_0 \right) \\ &\quad + \varepsilon \Theta_R (2\mathcal{H} + \text{tr} \mathcal{H}_0 + \varepsilon \eta \Theta_R \text{tr} (\mathcal{H}_0^2)) \mathbf{r} \\ &\quad - 2\varepsilon^2 R_e \Theta_R V \mathcal{H} \mathbf{V} - \frac{\varepsilon^2}{J} \nabla_{\xi} \cdot (J \mathbf{S}) - \varepsilon^2 \mathbf{B}_0 - \varepsilon^2 \partial_{\eta} (M \nabla_{\xi} V) \end{aligned} \quad (4.152)$$

$$\partial_{\eta} p = \gamma - \frac{\beta}{\lambda} \mathcal{M} + \frac{\alpha}{J} (\nabla_{\xi} \cdot (J \mathbf{r}) + \partial_{\eta} (J f)) - \alpha \beta \left( \partial_t V + (\vec{V} \cdot \nabla_{\vec{\xi}}) V \right) + \alpha \varepsilon^2 B$$

auxquelles s'ajoutent les conditions aux bords :

$$\vec{V}|_{\eta=0} = 0$$

$$\begin{aligned} (\partial_{\eta} \mathbf{V})|_{\eta=h} &= \lambda \boldsymbol{\tau} - \varepsilon^2 M_h (\nabla_{\xi} V)|_{\eta=h} - \varepsilon^2 (f_h M_h - S_h) \nabla_{\xi} h \\ &\quad + \varepsilon^2 (\mathbf{r}_h^t \nabla_{\xi} h + \lambda \partial_{\xi} h \boldsymbol{\tau}) M_h \nabla_{\xi} h \end{aligned} \quad (4.153)$$

$$p|_{\eta=h} = \frac{\zeta}{\varepsilon} p_{ext} - \bar{\kappa} \mathcal{H} - \varepsilon \partial_{\xi} h \boldsymbol{\tau} + \alpha (f_h - \mathbf{r}_h^t \nabla_{\xi} h)$$

On sait déjà que le paramètre onde longue  $\varepsilon$  est petit devant l'unité. Il faut évaluer les paramètres  $\alpha, \beta, \delta, \lambda, \zeta, \bar{\kappa}$  par rapport à  $\varepsilon$  pour pouvoir résoudre les équations (4.152-4.153). Les hypothèses suivantes donnent ces relations :

- *profil parabolique* : l'inertie et la contrainte de cisaillement sont les effets dominants générant le profil de vitesse, et donc  $\beta$  et  $\delta$  sont au plus du même ordre que  $\varepsilon$ , et  $\lambda$  est de l'ordre de l'unité ;
- *pression hydrostatique* : de même la distribution de pression est générée par l'inertie et la pression extérieure, et donc  $\alpha < \mathcal{O}(\varepsilon)$  et  $\zeta \simeq \mathcal{O}(1)$  ;
- *effets capillaires apparents* : arbitrairement, on choisit de faire apparaître les effets de la tension de surface en posant  $\kappa \simeq \mathcal{O}(1)$ .

En résumé, on a :

$$\begin{cases} \alpha, \beta, \delta < \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \lambda, \zeta, \bar{\kappa} \simeq \mathcal{O}(1) \end{cases} \quad (4.154)$$

En développant par rapport à  $\varepsilon$ , on obtient les systèmes d'équations sur la pression et la vitesse :

$$\begin{cases} \partial_{\eta\eta}^2 \mathbf{V} = -\lambda (\mathbb{1} + \varepsilon \eta \Theta_R \mathcal{H}_0) \boldsymbol{\gamma}_0 + \delta M \nabla_{\xi} p + \beta \left( \partial_t \mathbf{V} + (\vec{V} \cdot \nabla_{\vec{\xi}}) \mathbf{V} + \mathcal{M}_1 \right) \\ \quad + \varepsilon \Theta_R (2\mathcal{H}_0 + \text{tr} \mathcal{H}_0) \partial_{\eta} \mathbf{V} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ (\partial_{\eta} \mathbf{V})|_{\eta=h} = \lambda (\boldsymbol{\tau}_0 + \varepsilon h \Theta_R \boldsymbol{\tau}_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \mathbf{V}|_{\eta=0} = 0 \end{cases} \quad (4.155)$$

$$\begin{cases} \partial_\eta p = \gamma_0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ p|_{\eta=h} = \frac{\zeta}{\varepsilon} p_{ext} - \bar{\kappa} \mathcal{H} + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{cases} \quad (4.156)$$

#### 4.3.6 Équations intégrées

Le système (4.157) une fois mis à l'échelle s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{h} + \nabla_\xi \cdot (\tilde{h} \tilde{\mathbf{v}}) &= 0 \\ \partial_t (\tilde{h} \tilde{\mathbf{v}}) + \nabla_\xi \cdot \int_0^h \mathbf{J} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} d\eta + \frac{\delta}{\beta} \nabla_\xi \cdot \left( \int_0^h \mathbf{J} M p d\eta \right) + \int_0^h \mathbf{J} \mathcal{M} d\eta \\ &= \frac{\delta}{\beta} \int_0^h p \nabla_\xi \cdot (\mathbf{J} M) d\eta + \frac{\alpha \delta}{\beta} \nabla_\xi \cdot \left( \int_0^h \mathbf{J} S d\eta \right) + \frac{\delta}{\lambda \beta} \int_0^h \mathbf{J} \mathbf{B} d\eta \\ &\quad + \frac{\lambda}{\beta} \int_0^h \mathbf{J} \boldsymbol{\gamma} d\eta - \frac{1}{\beta} \mathbf{J}_0 \mathbf{r}_0 + \frac{\lambda}{\beta} \mathbf{J}_h (\tau - (\bar{\kappa} \varepsilon \mathcal{H} - \zeta p_{ext}) M_h \nabla_\xi h) \end{aligned} \quad (4.157)$$

En ne retenant que les termes jusqu'à l'ordre zéro en  $\varepsilon$  et en intégrant le terme  $\mathbf{B}$  :

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{h} + \nabla_\xi \cdot (\tilde{h} \tilde{\mathbf{v}}) &= 0 \\ \partial_t (\tilde{h} \tilde{\mathbf{v}}) + \nabla_\xi \cdot \int_0^h \mathbf{J} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} d\eta + \frac{\delta}{\beta} \nabla_\xi \cdot \left( \int_0^h \mathbf{J} M p d\eta \right) + \int_0^h \bar{\mathbf{J}} \mathcal{M}_1 d\eta \\ &= \frac{\delta}{\beta} \int_0^h p \nabla_\xi \cdot (\mathbf{J} M) d\eta - 2\Theta_R \frac{\delta}{\lambda \beta} \bar{\mathbf{J}} \mathcal{H}_0 \mathbf{V}_h - \frac{1}{\beta} \mathbf{J}_0 \mathbf{r}_0 \\ &\quad + \frac{\lambda}{\beta} \left( \int_0^h \mathbf{J} \boldsymbol{\gamma} d\eta + \mathbf{J}_h \boldsymbol{\tau} \right) + \frac{\delta}{\beta} \mathbf{J}_h \left( \frac{\zeta}{\varepsilon} p_{ext} - \bar{\kappa} \mathcal{H} \right) M_h \nabla_\xi h + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.158)$$

Pour obtenir le système de Saint-Venant, il reste plusieurs termes à exprimer en fonction de  $\tilde{h}$  et  $\tilde{\mathbf{v}}$ , notamment les termes faisant intervenir la vitesse et la pression. Il suffit pour cela de résoudre les systèmes (4.155) et (4.156) à l'ordre zéro. Par contre, on voit apparaître des termes en  $\beta^{-1}$ , donc très grand : un terme qui fait intervenir les forces extérieures, et qui ne pose pas de problèmes, et le terme  $\mathbf{r}_0$ , la dérivée de la vitesse. Pour que le système soit au final d'ordre total  $\varepsilon$ , il faut aller à l'ordre suivant pour la vitesse. C'est ce qui est fait au chapitre suivant.

## 4.4 ASYMPTOTIQUE ONDE LONGUE

Dans cette partie, nous résolvons les équations de Navier-Stokes adimensionnées. La vitesse et la pression sont développées en série asymptotique de  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \vec{V}_0 + \varepsilon \vec{V}_1 + \varepsilon^2 \vec{V}_2 + \dots \\ p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots\end{aligned}\tag{4.159}$$

Ces expressions sont injectées dans les équations (4.155) et (4.156), et en collectant les termes de même ordre en  $\varepsilon$  on obtient des équations pour chaque ordre.

## 4.4.1 Asymptotique à l'ordre zéro

Pression

L'équation d'ordre zéro sur la pression ne contient que le terme d'inertie, et à la surface libre la pression extérieure.

$$\begin{cases} \partial_\eta p_0 = \gamma_0 \\ p_0|_{\eta=h} = \frac{\zeta}{\varepsilon} p_{ext} - \bar{\kappa} \mathcal{H} \end{cases}\tag{4.160}$$

Une simple intégration donne directement la pression en tout point du film :

$$p(\xi, \eta, t) = \frac{\zeta}{\varepsilon} p_{ext}(\xi, t) - \bar{\kappa} \mathcal{H} - (h - \eta) \gamma_0(\xi, t) + \mathcal{O}(\varepsilon)\tag{4.161}$$

Comme le terme de pression extérieure est très grand, la pression dans l'équation de la vitesse qui était d'ordre 1 en  $\varepsilon$  va apparaître dans l'équation à l'ordre zéro.

$$\nabla_\xi p = \frac{\zeta}{\varepsilon} \nabla_\xi p_{ext} + \mathcal{O}(\varepsilon^0)\tag{4.162}$$

Vitesse

À l'ordre zéro, seuls les termes d'inertie et de pression extérieure apparaissent. Pour simplifier l'écriture, appelons  $\Gamma$  le terme dominant dans l'équation (4.155) :

$$\Gamma = \gamma_0 - \zeta M_0 \nabla_\xi p_{ext}\tag{4.163}$$

Le système (4.155) à l'ordre zéro est une simple équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \partial_{\eta\eta}^2 \mathbf{V}_0 = -\lambda \Gamma \\ (\partial_\eta \mathbf{V}_0)|_{\eta=h} = \lambda \boldsymbol{\tau}_0 \\ \mathbf{V}_0|_{\eta=0} = 0 \end{cases}\tag{4.164}$$

qui se résout par une double intégration :

$$\mathbf{V}_0 = \int_{v=0}^{\eta} \left( \lambda \boldsymbol{\tau}_0 + \int_{u=v}^h \lambda \Gamma du \right) dv = \lambda \eta \left( \boldsymbol{\tau}_0 + \left( h - \frac{\eta}{2} \right) \Gamma \right) \quad (4.165)$$

#### Variables moyennées

En première approximation, la variable de hauteur dans le système curviligne est la hauteur physique au déterminant jacobien près :

$$\tilde{h} = \int_0^h J d\eta = \bar{J} h + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (4.166)$$

La variable de débit  $\tilde{h} \tilde{\mathbf{v}}$  s'exprime grâce à l'expression de  $\mathbf{V}_0$  :

$$\tilde{h} \tilde{\mathbf{v}} = \int_0^h J \mathbf{V} d\eta = \bar{J} \lambda \left( \frac{h^2}{2} \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{h^3}{3} \Gamma \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (4.167)$$

#### 4.4.2 Premier modèle

À partir de l'approximation en  $\varepsilon$ , le seul modèle que l'on puisse écrire est celui de l'équation de conservation de la masse intégrée (4.99) :

$$\bar{J} \partial_t h + \nabla_{\xi} \cdot \left( \bar{J} \lambda \left( \frac{h^2}{2} \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{h^3}{3} \Gamma \right) \right) = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (4.168)$$

en variables dimensionnées, après avoir divisé par le jacobien :

$$\mu \partial_t h + \left( \nabla_{\xi} + \frac{1}{\bar{J}} \nabla_{\xi} \bar{J} \right) \cdot \left( \frac{h^2}{2} \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{h^3}{3} (\rho \gamma_0 - M_0 \nabla_{\xi} p_{ext}) \right) = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (4.169)$$

si on se restreint au cas mono-dimensionnel orthogonal, on retrouve le modèle de Fabignon *et al.* [17].

#### 4.4.3 Modèle à deux équations au premier ordre

##### Terme convectif

$$\begin{aligned} \int_0^h J \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} d\eta &= \bar{J} \lambda^2 \int_0^h \eta^2 \left( \boldsymbol{\tau}_0 + \left( h - \frac{\eta}{2} \right) \Gamma \right) \otimes \left( \boldsymbol{\tau}_0 + \left( h - \frac{\eta}{2} \right) \Gamma \right) d\eta + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= \bar{J} \lambda^2 \left( \frac{h^3}{3} \boldsymbol{\tau}_0 \otimes \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{5h^4}{24} (\Gamma \otimes \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_0 \otimes \Gamma) + \frac{2h^5}{15} \Gamma \otimes \Gamma \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.170)$$



$$\begin{aligned}
\tilde{h}\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} &= \bar{J}\lambda^2 \left( \frac{h^2}{2} \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{h^3}{3} \Gamma \right) \otimes \left( \frac{h}{2} \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{h^2}{3} \Gamma \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
&= \bar{J}\lambda^2 \left( \frac{h^3}{4} \boldsymbol{\tau}_0 \otimes \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{h^4}{6} (\Gamma \otimes \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_0 \otimes \Gamma) + \frac{h^5}{9} \Gamma \otimes \Gamma \right) + \mathcal{O}(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{4.171}$$

On peut exprimer le terme intégral du carré de la vitesse 4.170 en fonction des variables moyennées et de termes de couplage inertie–forçage (4.171)

$$\begin{aligned}
\int_0^h \mathbf{J}\mathbf{V} \otimes \mathbf{V} d\eta &= C\tilde{h}\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} + \lambda^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{C}{4} \right) \frac{\tilde{h}^3}{\bar{J}^2} \boldsymbol{\tau}_0 \otimes \boldsymbol{\tau}_0 \\
&+ \lambda^2 \left( \frac{5}{24} - \frac{C}{6} \right) \frac{\tilde{h}^4}{\bar{J}^3} (\Gamma \otimes \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_0 \otimes \Gamma) \\
&+ \lambda^2 \left( \frac{2}{15} - \frac{C}{9} \right) \frac{\tilde{h}^5}{\bar{J}^4} \Gamma \otimes \Gamma + \mathcal{O}(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{4.172}$$

Que l'on veuille privilégier l'inertie (qui comprend la force centrifuge) ou la contrainte tangentielle, plusieurs choix sont possibles pour la constante  $C$ , dont les trois principaux sont ceux qui font disparaître un des termes :

$$\begin{aligned}
\int_0^h \mathbf{J}\mathbf{V} \otimes \mathbf{V} d\eta &= \frac{4}{3} \tilde{h}\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} + \lambda^2 \frac{\tilde{h}^4}{72\bar{J}^3} (\Gamma \otimes \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_0 \otimes \Gamma) + \lambda^2 \frac{2\tilde{h}^5}{135\bar{J}^4} \Gamma \otimes \Gamma + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
&= \frac{6}{5} \tilde{h}\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} + \lambda^2 \frac{\tilde{h}^3}{30\bar{J}^2} \boldsymbol{\tau}_0 \otimes \boldsymbol{\tau}_0 + \lambda^2 \frac{\tilde{h}^4}{120\bar{J}^3} (\Gamma \otimes \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_0 \otimes \Gamma) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
&= \frac{5}{4} \tilde{h}\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} + \lambda^2 \frac{\tilde{h}^3}{48\bar{J}^2} \boldsymbol{\tau}_0 \otimes \boldsymbol{\tau}_0 + \lambda^2 \frac{\tilde{h}^5}{180\bar{J}^4} \Gamma \otimes \Gamma + \mathcal{O}(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{4.173}$$

#### Termes liés à la pression

Les termes de pression font intervenir le produit du jacobien  $J$  et de la métrique  $M$ , qui s'exprime sous la forme :

$$\begin{aligned}
JM &= \bar{J}(1 - \varepsilon\eta\Theta_R \text{tr}\mathcal{H}_0)(M_0 + 2\varepsilon\eta\Theta_R \mathcal{H}_0 M_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= \bar{J}(M_0 + \varepsilon\eta\Theta_R (2\mathcal{H}_0 - \text{tr}\mathcal{H}_0 \mathbb{1}) M_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{4.174}$$

$$JM p = \bar{J}M_0 \left( \frac{\zeta}{\varepsilon} p_{ext} - \bar{\kappa} \mathcal{H} - (h - \eta)\gamma_0 \right) + \bar{J}\zeta\eta\Theta_R (2\mathcal{H}_0 - \text{tr}\mathcal{H}_0 \mathbb{1}) M_0 p_{ext} + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{4.175}$$

En intégrant sur la hauteur, puis en dérivant suivant la coordonnée curviligne, on trouve le premier terme de pression du système 4.157 :

$$\int_0^h JMpd\eta = \bar{J}hM_0\left(\frac{\zeta}{\varepsilon}p_{ext} - \bar{\kappa}\mathcal{H}\right) + \bar{J}\frac{h^2}{2}\left(\zeta\Theta_R(2\mathcal{H}_0 - \text{tr}\mathcal{H}_0\mathbb{1})p_{ext} - \gamma_0\mathbb{1}\right)M_0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (4.176)$$

La deuxième intégrale de pression est liée aux variations du produit  $JM$  :

$$\nabla_\xi \cdot (JM) = \nabla_\xi \cdot (\bar{J}M_0) + \varepsilon\eta\Theta_R\nabla_\xi \cdot (\bar{J}(2\mathcal{H}_0 - \text{tr}\mathcal{H}_0\mathbb{1})M_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.177)$$

$$\int_0^h p\nabla_\xi \cdot (JM)d\eta = h\left(\frac{\zeta}{\varepsilon}p_{ext} - \bar{\kappa}\mathcal{H} - \frac{h}{2}\gamma_0\right)\nabla_\xi \cdot (\bar{J}M_0) + \zeta p_{ext}\frac{h^2}{2}\Theta_R\nabla_\xi \cdot (\bar{J}(2\mathcal{H}_0 - \text{tr}\mathcal{H}_0\mathbb{1})M_0) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (4.178)$$

Ce qui donne au final :

$$\begin{aligned} & \nabla_\xi \cdot \left(\int_0^h JMpd\eta\right) - \int_0^h p\nabla_\xi \cdot (JM)d\eta \\ &= \bar{J}M_0\nabla_\xi \left(h\left(\frac{\zeta}{\varepsilon}p_{ext} - \bar{\kappa}\mathcal{H}\right)\right) - \bar{J}M_0\nabla_\xi \left(\gamma_0\frac{h^2}{2}\right) \\ & \quad + \zeta\Theta_R\bar{J}(2\mathcal{H}_0 - \text{tr}\mathcal{H}_0\mathbb{1})M_0\nabla_\xi \left(p_{ext}\frac{h^2}{2}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.179)$$

On peut remarquer que les deux intégrales de pression comprennent des termes redondants avec les termes issus de la continuité des contraintes à la surface libre :

$$\begin{aligned} & J_h\left(\frac{\zeta}{\varepsilon}p_{ext} - \bar{\kappa}\mathcal{H}\right)M_h \\ &= \bar{J}\left(\frac{\zeta}{\varepsilon}p_{ext} - \bar{\kappa}\mathcal{H}\right)(1 - \varepsilon h\Theta_R\text{tr}\mathcal{H}_0)(\mathbb{1} + 2\varepsilon h\Theta_R\mathcal{H}_0)M_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \bar{J}\left(\frac{\zeta}{\varepsilon}p_{ext} - \bar{\kappa}\mathcal{H}\right)M_0 + h\Theta_R\bar{J}\zeta p_{ext}(2\mathcal{H}_0 - \text{tr}\mathcal{H}_0\mathbb{1})M_0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.180)$$

Ce qui permet de simplifier les termes de pression :

$$\begin{aligned}
\nabla_{\xi} \cdot \left( \int_0^h JM p d\eta \right) &= \int_0^h p \nabla_{\xi} \cdot (JM) d\eta - J_h \left( \frac{\zeta}{\varepsilon} p_{ext} - \bar{\kappa} \mathcal{H} \right) M_h \nabla_{\xi} h \\
&= \zeta \bar{J} h \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{1} + \Theta_R \frac{h}{2} (2\mathcal{H}_0 - \text{tr} \mathcal{H}_0 \mathbb{1}) \right) M_0 \nabla_{\xi} p_{ext} \\
&\quad - \bar{\kappa} \bar{J} h M_0 \nabla_{\xi} \mathcal{H} - \bar{J} M_0 \nabla_{\xi} \left( \gamma_0 \frac{h^2}{2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
&= \zeta \left( \frac{\tilde{h}}{\varepsilon} \mathbb{1} + \Theta_R \frac{\tilde{h}^2}{\bar{J}} \mathcal{H}_0 \right) M_0 \nabla_{\xi} p_{ext} - \bar{\kappa} \tilde{h} M_0 \nabla_{\xi} \mathcal{H} \\
&\quad - \bar{J} M_0 \nabla_{\xi} \left( \gamma_0 \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}^2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{4.181}$$

### Symboles de Christoffel

En remarquant que la matrice  $M_0^{-1} \mathcal{H}_0$  est symétrique (cf page 216), on peut exprimer simplement les symboles de Christoffel :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= (\partial_{\xi \mathbf{x}})^{-1} \left( \partial_{\xi \xi}^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{V}_0 + \Theta_R \mathbf{V}^t M_0^{-1} \mathcal{H}_0 \mathbf{V} \mathbf{s} \right) \\
&= \lambda^2 \eta^2 (\partial_{\xi \mathbf{x}})^{-1} \left( \partial_{\xi \xi}^2 \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}_0 + \Theta_R \boldsymbol{\tau}_0^t M_0^{-1} \mathcal{H}_0 \boldsymbol{\tau}_0 \mathbf{s} \right) \\
&\quad + 2\lambda^2 \eta^2 \left( h - \frac{\eta}{2} \right) (\partial_{\xi \mathbf{x}})^{-1} \left( \partial_{\xi \xi}^2 \mathbf{x} \cdot \Gamma \cdot \boldsymbol{\tau}_0 + \Theta_R \Gamma^t M_0^{-1} \mathcal{H}_0 \boldsymbol{\tau}_0 \mathbf{s} \right) \\
&\quad + \lambda^2 \eta^2 \left( h - \frac{\eta}{2} \right)^2 (\partial_{\xi \mathbf{x}})^{-1} \left( \partial_{\xi \xi}^2 \mathbf{x} \cdot \Gamma \cdot \Gamma + \Theta_R \Gamma^t M_0^{-1} \mathcal{H}_0 \Gamma \mathbf{s} \right)
\end{aligned} \tag{4.182}$$

Pour simplifier l'écriture par la suite, introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} &= (\partial_{\xi \mathbf{x}})^{-1} \left( \partial_{\xi \xi}^2 \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}_0 + \Theta_R \boldsymbol{\tau}_0^t M_0^{-1} \mathcal{H}_0 \boldsymbol{\tau}_0 \mathbf{s} \right) \\
\mathcal{M}_{\Gamma\boldsymbol{\tau}} &= (\partial_{\xi \mathbf{x}})^{-1} \left( \partial_{\xi \xi}^2 \mathbf{x} \cdot \Gamma \cdot \boldsymbol{\tau}_0 + \Theta_R \Gamma^t M_0^{-1} \mathcal{H}_0 \boldsymbol{\tau}_0 \mathbf{s} \right) \\
\mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} &= (\partial_{\xi \mathbf{x}})^{-1} \left( \partial_{\xi \xi}^2 \mathbf{x} \cdot \Gamma \cdot \Gamma + \Theta_R \Gamma^t M_0^{-1} \mathcal{H}_0 \Gamma \mathbf{s} \right)
\end{aligned} \tag{4.183}$$

$$\mathcal{M}_1 = \lambda^2 \eta^2 \mathcal{M}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} + 2\lambda^2 \eta^2 \left( h - \frac{\eta}{2} \right) \mathcal{M}_{\Gamma\boldsymbol{\tau}} + \lambda^2 \eta^2 \left( h - \frac{\eta}{2} \right)^2 \mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} \tag{4.184}$$

L'intégration sur la hauteur est alors immédiate :

$$\begin{aligned}
\int_0^h \bar{J} \mathcal{M}_1 d\eta &= \bar{J} \lambda^2 \left( \frac{h^3}{3} \mathcal{M}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} + \frac{5h^4}{12} \mathcal{M}_{\Gamma\boldsymbol{\tau}} + \frac{2h^5}{15} \mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} \right) \\
&= \lambda^2 \left( \frac{\tilde{h}^3}{3\bar{J}^2} \mathcal{M}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} + \frac{5\tilde{h}^4}{12\bar{J}^3} \mathcal{M}_{\Gamma\boldsymbol{\tau}} + \frac{2\tilde{h}^5}{15\bar{J}^4} \mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{4.185}$$

Inertie et contrainte tangentielle

Le terme d'inertie et de contrainte tangentielle apparaît avec un facteur  $\beta^{-1}$  ; il faut donc le développer jusqu'à l'ordre deux en  $\varepsilon$ .

$$\begin{aligned}
 \int_0^h J \boldsymbol{\gamma} d\eta &= \int_0^h \bar{J} (1 - \varepsilon \eta \Theta_R \operatorname{tr}(\mathcal{H}_0)) (\mathbb{1} + \varepsilon \eta \Theta_R \mathcal{H}_0) \boldsymbol{\gamma}_0 d\eta + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= \bar{J} \left( h \mathbb{1} + \varepsilon \frac{h^2}{2} \Theta_R (\mathcal{H}_0 - \operatorname{tr}(\mathcal{H}_0) \mathbb{1}) \right) \boldsymbol{\gamma}_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= \tilde{h} \left( \mathbb{1} + \varepsilon \Theta_R \frac{\tilde{h}}{2\bar{J}} \mathcal{H}_0 \right) \boldsymbol{\gamma}_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
 \end{aligned} \tag{4.186}$$

$$\begin{aligned}
 J_h \boldsymbol{\tau} &= \bar{J} (1 - \varepsilon h \Theta_R \operatorname{tr}(\mathcal{H}_0)) (\boldsymbol{\tau}_0 + \varepsilon h \Theta_R \boldsymbol{\tau}_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= \bar{J} \boldsymbol{\tau}_0 + \varepsilon \tilde{h} \Theta_R (\boldsymbol{\tau}_1 - \operatorname{tr}(\mathcal{H}_0) \boldsymbol{\tau}_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
 \end{aligned} \tag{4.187}$$

Système à deux équations

En compilant tous les résultats obtenus jusqu'ici, on peut écrire le système d'évolution sur  $(\tilde{h}, \tilde{h}\tilde{\mathbf{v}})$  suivant :

$$\begin{aligned}
 \partial_t \tilde{h} + \nabla_\xi \cdot (\tilde{h}\tilde{\mathbf{v}}) &= 0 \\
 \partial_t (\tilde{h}\tilde{\mathbf{v}}) + \nabla_\xi \cdot &\left[ C \tilde{h}\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} + \lambda^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{C}{4} \right) \frac{\tilde{h}^3}{\bar{J}^2} \boldsymbol{\tau}_0 \otimes \boldsymbol{\tau}_0 + \lambda^2 \left( \frac{5}{24} - \frac{C}{6} \right) \frac{\tilde{h}^4}{\bar{J}^3} (\Gamma \otimes \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_0 \otimes \Gamma) \right. \\
 &+ \lambda^2 \left( \frac{2}{15} - \frac{C}{9} \right) \frac{\tilde{h}^5}{\bar{J}^4} \Gamma \otimes \Gamma \left. \right] + \frac{\delta}{\beta} \Theta_R \tilde{h} \left( \mathcal{H}_0 \frac{\tilde{h}}{2\bar{J}} \boldsymbol{\gamma}_0 + (2\mathcal{H}_0 + \operatorname{tr}(\mathcal{H}_0) \mathbb{1}) \boldsymbol{\tau}_0 - \boldsymbol{\tau}_1 \right) \\
 &- \frac{\delta}{\beta} \left( \bar{\kappa} \tilde{h} M_0 \nabla_\xi \mathcal{H} + \bar{J} M_0 \nabla_\xi \left( \gamma_0 \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}^2} \right) \right) + \lambda^2 \left( \frac{\tilde{h}^3}{3\bar{J}^2} \mathcal{M}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} + \frac{5\tilde{h}^4}{12\bar{J}^3} \mathcal{M}_{\Gamma\boldsymbol{\tau}} + \frac{2\tilde{h}^5}{15\bar{J}^4} \mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} \right) \\
 = &-\frac{1}{\beta} J_0 \mathbf{r}_0 + \frac{\lambda}{\beta} (\tilde{h}\Gamma + \bar{J}\boldsymbol{\tau}_0) + \mathcal{O}(\varepsilon)
 \end{aligned} \tag{4.188}$$

Pour fermer le modèle, il reste encore à exprimer le terme de frottement au fond  $\frac{1}{\beta} J_0 \mathbf{r}_0 = \frac{\bar{J}}{\beta} (\partial_\eta \mathbf{V})|_{\eta=0}$ . Si on utilise l'approximation d'ordre un en  $\varepsilon$  sur la vitesse, on commet une erreur d'ordre  $\mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)$ . Or on a fait l'hypothèse (4.154) que  $\beta$  est au plus en  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , ce qui fait une erreur sur le frottement au fond qui est au mieux d'ordre un. Alors globalement le système aura une erreur du même ordre que les inconnues adimensionnées. Donc il faut évaluer la vitesse à l'ordre un pour obtenir le système à l'ordre  $\varepsilon$ .

## 4.4.4 Asymptotique à l'ordre 1

En substituant dans l'équation de la vitesse 4.155 les approximations des gradients de la vitesse et de la pression déjà trouvées, on a :

$$\begin{cases} \delta \nabla_{\xi} p &= \zeta \lambda \nabla_{\xi} p_{ext} - \bar{\kappa} \delta \nabla_{\xi} \mathcal{H} - (h - \eta) \delta \nabla_{\xi} \gamma_0 - \gamma_0 \delta \nabla_{\xi} h + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ M &= (M_0 + 2\varepsilon \eta \Theta_R \mathcal{H}_0 M_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \delta M \nabla_{\xi} p = \zeta \lambda (M_0 + 2\varepsilon \eta \Theta_R \mathcal{H}_0 M_0) \nabla_{\xi} p_{ext} - \bar{\kappa} \delta M_0 \nabla_{\xi} \mathcal{H} - (h - \eta) \delta M_0 \nabla_{\xi} \gamma_0 - \gamma_0 \delta M_0 \nabla_{\xi} h + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\mathcal{M}_1 = \lambda^2 \eta^2 \mathcal{M}_{\tau\tau} + 2\lambda^2 \eta^2 \left(h - \frac{\eta}{2}\right) \mathcal{M}_{\Gamma\tau} + \lambda^2 \eta^2 \left(h - \frac{\eta}{2}\right)^2 \mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} \quad (4.189)$$

pour obtenir l'équation différentielle de la vitesse à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} \partial_{\eta\eta}^2 \mathbf{V} = & -\lambda \Gamma - \delta \eta \Theta_R \mathcal{H}_0 (\Gamma - \zeta M_0 \nabla_{\xi} p_{ext}) + \beta (\partial_t \mathbf{V}_0 + (\vec{V} \cdot \nabla_{\xi}) \mathbf{V}_0) \\ & + \beta \lambda^2 \eta^2 \left( \mathcal{M}_{\tau\tau} + 2 \left(h - \frac{\eta}{2}\right) \mathcal{M}_{\Gamma\tau} + \left(h - \frac{\eta}{2}\right)^2 \mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} \right) \\ & - \delta M_0 ((h - \eta) \nabla_{\xi} \gamma_0 + \gamma_0 \nabla_{\xi} h + \bar{\kappa} \nabla_{\xi} \mathcal{H}) \\ & + \delta \Theta_R (2\mathcal{H}_0 + \text{tr} \mathcal{H}_0) (\boldsymbol{\tau}_0 + (h - \eta) \Gamma) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ (\partial_{\eta} \mathbf{V})|_{\eta=h} = & \lambda (\boldsymbol{\tau}_0 + \varepsilon h \Theta_R \boldsymbol{\tau}_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \mathbf{V}|_{\eta=0} = & 0 \end{cases} \quad (4.190)$$

dans laquelle il reste à exprimer la dérivée lagrangienne de la vitesse  $\mathbf{V}_0$ . De plus on va voir apparaître dans la dérivée temporelle la dérivée en temps de la hauteur, que l'on peut ramener à des dérivées spatiales en utilisant le premier modèle que nous avons trouvé (4.168) :

$$\begin{aligned} \partial_t h &= -\frac{1}{\bar{J}} \nabla_{\xi} \cdot \left( \bar{J} \lambda \left( \frac{h^2}{2} \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{h^3}{3} \Gamma \right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= -\lambda \left( \frac{\bar{J} h^2}{2} \nabla_{\xi} \cdot \left( \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{\bar{J}} \right) + \frac{\bar{J}^2 h^3}{3} \nabla_{\xi} \cdot \left( \frac{\Gamma}{\bar{J}^2} \right) + \frac{1}{\bar{J}} (h \boldsymbol{\tau}_0 + h^2 \Gamma) \cdot \nabla_{\xi} \tilde{h} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.191)$$

D'où l'expression de  $\partial_t \mathbf{V}_0$  :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{V}_0 &= \lambda \eta \left( \partial_t \boldsymbol{\tau}_0 + \left(h - \frac{\eta}{2}\right) \partial_t \Gamma \right) \\ &\quad - \lambda^2 \eta \left( \frac{\bar{J} h^2}{2} \nabla_{\xi} \cdot \left( \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{\bar{J}} \right) + \frac{\bar{J}^2 h^3}{3} \nabla_{\xi} \cdot \left( \frac{\Gamma}{\bar{J}^2} \right) + \frac{1}{\bar{J}} (h \boldsymbol{\tau}_0 + h^2 \Gamma) \cdot \nabla_{\xi} \tilde{h} \right) \Gamma + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.192)$$

Par ailleurs, il faut aussi connaître la vitesse normale, que l'on extrait de l'équation de divergence nulle :

$$\begin{cases} \partial_\eta(\bar{J}V) &= -\nabla_\xi \cdot (\bar{J}\mathbf{V}_0) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= -\lambda\eta \left( \nabla_\xi \cdot (\bar{J}\boldsymbol{\tau}_0) + \Gamma \cdot \nabla_\xi \tilde{h} + \bar{J} \left( h - \frac{\eta}{2} \right) \nabla_\xi \cdot \Gamma \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ V|_{\eta=0} &= 0 \end{cases} \quad (4.193)$$

$$\Rightarrow V = -\frac{\lambda}{\bar{J}} \frac{\eta^2}{2} \left( \nabla_\xi \cdot (\bar{J}\boldsymbol{\tau}_0) + \Gamma \cdot \nabla_\xi \tilde{h} + \bar{J} \left( h - \frac{\eta}{3} \right) \nabla_\xi \cdot \Gamma \right) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Les dérivées de la vitesse se mettent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \partial_t \mathbf{V}_0 + V \partial_\eta \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_0 \cdot \nabla_\xi \mathbf{V}_0 \\ &= \lambda\eta \left( \partial_t \boldsymbol{\tau}_0 + \left( h - \frac{\eta}{2} \right) \partial_t \Gamma \right) - \frac{\lambda^2 \eta}{\bar{J}} \left( \left( (h - \eta) \boldsymbol{\tau}_0 + h \left( h - \frac{\eta}{2} \right) \Gamma \right) \cdot \nabla_\xi \tilde{h} \right) \Gamma \\ & \quad - \frac{\lambda^2 \eta^2}{\bar{J}} \frac{\eta^2}{2} \left( \nabla_\xi \cdot (\bar{J}\boldsymbol{\tau}_0) + \Gamma \cdot \nabla_\xi \tilde{h} + \bar{J} \left( h - \frac{\eta}{3} \right) \nabla_\xi \cdot \Gamma \right) \boldsymbol{\tau}_0 \\ & \quad - \lambda^2 \eta \left( \frac{\bar{J} h^2}{2} \nabla_\xi \cdot \left( \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{\bar{J}} \right) + \frac{\bar{J}^2 h^3}{3} \nabla_\xi \cdot \left( \frac{\Gamma}{\bar{J}^2} \right) \right) \Gamma \\ & \quad - \frac{\lambda^2 \eta^2 (h - \eta)}{\bar{J}} \frac{\eta^2}{2} \left( \nabla_\xi \cdot (\bar{J}\boldsymbol{\tau}_0) + \bar{J} \left( h - \frac{\eta}{3} \right) \nabla_\xi \cdot \Gamma \right) \Gamma \\ & \quad + \lambda^2 \eta^2 \boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi \boldsymbol{\tau}_0 + \lambda^2 \eta^2 \left( h - \frac{\eta}{2} \right) \left( \Gamma \cdot \nabla_\xi \boldsymbol{\tau}_0 + \bar{J} (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi) \left( \frac{1}{\bar{J}} \Gamma \right) \right) \\ & \quad + \lambda^2 \eta^2 \left( h - \frac{\eta}{2} \right)^2 \bar{J} \Gamma \cdot \nabla_\xi \left( \frac{1}{\bar{J}} \Gamma \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.194)$$

En injectant cette expression dans l'équation à résoudre, et en réarrangeant pour faciliter les intégrations successives, on obtient :

$$\begin{aligned}
\partial_{\eta\eta}^2 \mathbf{V} = & -\lambda\Gamma - \delta(M_0(\gamma_0\nabla_{\xi}h + \bar{\kappa}\nabla_{\xi}\mathcal{H}) - \Theta_R(2\mathcal{H}_0 + \text{tr}\mathcal{H}_0\mathbb{1})\boldsymbol{\tau}_0) \\
& -\eta(\delta\Theta_R\mathcal{H}_0(\Gamma - \zeta M_0\nabla_{\xi}p_{ext}) - \beta\lambda\partial_t\boldsymbol{\tau}_0) - \eta\left(\beta\lambda^2\left(\frac{\bar{J}h^2}{2}\nabla_{\xi}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\tau}_0}{\bar{J}}\right) + \frac{\bar{J}^2h^3}{3}\nabla_{\xi}\cdot\left(\frac{\Gamma}{\bar{J}^2}\right)\right)\Gamma\right) \\
& -\delta(h-\eta)(M_0\nabla_{\xi}\gamma_0 - \Theta_R(2\mathcal{H}_0 + \text{tr}\mathcal{H}_0)\Gamma) - \beta\lambda^2\eta^2\left((\nabla_{\xi}\cdot(\bar{J}\boldsymbol{\tau}_0) + \Gamma\cdot\nabla_{\xi}\tilde{h})\frac{\boldsymbol{\tau}_0}{2\bar{J}} - \mathcal{M}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} - (\boldsymbol{\tau}_0\cdot\nabla_{\xi})\boldsymbol{\tau}_0\right) \\
& -\beta\lambda\eta\left(h - \frac{\eta}{2}\right)\left(\frac{\lambda}{\bar{J}}h(\Gamma\cdot\nabla_{\xi}\tilde{h})\Gamma - \partial_t\Gamma\right) - \frac{\beta\lambda^2\eta}{\bar{J}}(h-\eta)(\boldsymbol{\tau}_0\cdot\nabla_{\xi}\tilde{h})\Gamma - \frac{\beta\lambda^2\eta^2(h-\eta)}{\bar{J}}\frac{1}{2}\nabla_{\xi}\cdot(\bar{J}\boldsymbol{\tau}_0)\Gamma \\
& +\beta\lambda^2\eta^2\left(h - \frac{\eta}{2}\right)\left(2\mathcal{M}_{\Gamma\boldsymbol{\tau}} + (\Gamma\cdot\nabla_{\xi})\boldsymbol{\tau}_0 + \bar{J}(\boldsymbol{\tau}_0\cdot\nabla_{\xi})\left(\frac{1}{\bar{J}}\Gamma\right)\right) - \beta\lambda^2\frac{\eta^2}{2}(h-\eta)\left(h - \frac{\eta}{3}\right)(\nabla_{\xi}\cdot\Gamma)\Gamma \\
& -\beta\lambda^2\frac{\eta^2}{2}\left(h - \frac{\eta}{3}\right)(\nabla_{\xi}\cdot\Gamma)\boldsymbol{\tau}_0 + \beta\lambda^2\eta^2\left(h - \frac{\eta}{2}\right)^2\left(\mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} + \bar{J}(\Gamma\cdot\nabla_{\xi})\left(\frac{1}{\bar{J}}\Gamma\right)\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{4.195}$$

Une première intégration entre  $\eta$  et  $h$  donne :

$$\begin{aligned}
 \partial_\eta \mathbf{V} = & \lambda \boldsymbol{\tau}_0 + \delta h \Theta_R \boldsymbol{\tau}_1 + (h - \eta) (\lambda \Gamma + \delta (M_0 (\gamma_0 \nabla_\xi h + \bar{\kappa} \nabla_\xi \mathcal{H}) - \Theta_R (2\mathcal{H}_0 + \text{tr} \mathcal{H}_0 \mathbb{1}) \boldsymbol{\tau}_0)) \\
 & + \frac{h^2 - \eta^2}{2} (\delta \Theta_R \mathcal{H}_0 (\Gamma - \zeta M_0 \nabla_\xi p_{ext}) - \beta \lambda \partial_t \boldsymbol{\tau}_0) \\
 & + \frac{h^2 - \eta^2}{2} \left( \beta \lambda^2 \left( \frac{\bar{J} h^2}{2} \nabla_\xi \cdot \left( \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{\bar{J}} \right) + \frac{\bar{J}^2 h^3}{3} \nabla_\xi \cdot \left( \frac{\Gamma}{\bar{J}^2} \right) \right) \Gamma \right) \\
 & + \delta \frac{(h - \eta)^2}{2} (M_0 \nabla_\xi \gamma_0 - \Theta_R (2\mathcal{H}_0 + \text{tr} \mathcal{H}_0) \Gamma) \\
 & + \beta \lambda^2 \frac{h^3 - \eta^3}{3} \left( (\nabla_\xi \cdot (\bar{J} \boldsymbol{\tau}_0) + \Gamma \cdot \nabla_\xi \tilde{h}) \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{2\bar{J}} - \mathcal{M}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} - (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi) \boldsymbol{\tau}_0 \right) \\
 & + \beta \lambda \left( \frac{h^3}{3} + \frac{\eta^3}{6} - \frac{h\eta^2}{2} \right) \left( \frac{\lambda}{\bar{J}} h (\Gamma \cdot \nabla_\xi \tilde{h}) \Gamma - \partial_t \Gamma \right) \\
 & + \frac{\beta \lambda^2}{\bar{J}} (h - \eta)^2 \left( \frac{h}{6} + \frac{\eta}{3} \right) (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi \tilde{h}) \Gamma + \frac{\beta \lambda^2}{\bar{J}} \left( \frac{h^4}{24} + \frac{\eta^4}{8} - \frac{h\eta^3}{6} \right) \nabla_\xi \cdot (\bar{J} \boldsymbol{\tau}_0) \Gamma \\
 & - \beta \lambda^2 \left( \frac{5h^4}{24} + \frac{\eta^4}{8} - \frac{h\eta^3}{3} \right) \left( 2\mathcal{M}_{\Gamma\boldsymbol{\tau}} + (\Gamma \cdot \nabla_\xi) \boldsymbol{\tau}_0 + \bar{J} (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi) \left( \frac{1}{\bar{J}} \Gamma \right) \right) \\
 & + \beta \lambda^2 \left( \frac{h^4}{8} + \frac{\eta^4}{24} - \frac{h\eta^3}{6} \right) (\nabla_\xi \cdot \Gamma) \boldsymbol{\tau}_0 + \beta \lambda^2 \left( \frac{h^5}{30} - \frac{\eta^5}{30} + \frac{h\eta^4}{6} - \frac{h^2\eta^3}{6} \right) (\nabla_\xi \cdot \Gamma) \Gamma \\
 & - \beta \lambda^2 \left( \frac{2h^5}{15} - \frac{\eta^5}{20} + \frac{h\eta^4}{4} - \frac{h^2\eta^3}{3} \right) \left( \mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} + \bar{J} (\Gamma \cdot \nabla_\xi) \left( \frac{1}{\bar{J}} \Gamma \right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
 \end{aligned} \tag{4.196}$$

À ce niveau, on peut fermer le système (4.188) puisque le terme  $\mathbf{r}_0$  de frottement ne dépend que de la dérivée de la vitesse :

$$\mathbf{r}_0 = (\partial_\eta \mathbf{V})|_{\eta=0} = \lambda (\boldsymbol{\tau}_0 + h\Gamma) + \varepsilon R_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{4.197}$$



avec :

$$\begin{aligned}
\varepsilon R_1 = & \delta h \Theta_R \boldsymbol{\tau}_1 + h \delta (M_0 (\gamma_0 \nabla_\xi h + \bar{\kappa} \nabla_\xi \mathcal{H}) - \Theta_R (2\mathcal{H}_0 + \text{tr} \mathcal{H}_0 \mathbb{1}) \boldsymbol{\tau}_0) \\
& + \frac{h^2}{2} (\delta \Theta_R \mathcal{H}_0 (\Gamma - \zeta M_0 \nabla_\xi p_{ext}) - \beta \lambda \partial_t \boldsymbol{\tau}_0) + \frac{h^2}{2} \beta \lambda^2 \left( \frac{\bar{J} h^2}{2} \nabla_\xi \cdot \left( \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{\bar{J}} \right) + \frac{\bar{J}^2 h^3}{3} \nabla_\xi \cdot \left( \frac{\Gamma}{\bar{J}} \right) \right) \Gamma \\
& + \delta \frac{h^2}{2} (M_0 \nabla_\xi \gamma_0 - \Theta_R (2\mathcal{H}_0 + \text{tr} \mathcal{H}_0) \Gamma) + \beta \lambda^2 \frac{h^3}{3} \left( (\nabla_\xi \cdot (\bar{J} \boldsymbol{\tau}_0) + \Gamma \cdot \nabla_\xi \tilde{h}) \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{2\bar{J}} - \mathcal{M}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} - (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi) \boldsymbol{\tau}_0 \right) \\
& + \beta \lambda \frac{h^3}{3} \left( \frac{\lambda}{\bar{J}} h (\Gamma \cdot \nabla_\xi \tilde{h}) \Gamma - \partial_t \Gamma \right) + \frac{\beta \lambda^2 h^3}{\bar{J} 6} (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi \tilde{h}) \Gamma + \frac{\beta \lambda^2 h^4}{\bar{J} 24} \nabla_\xi \cdot (\bar{J} \boldsymbol{\tau}_0) \Gamma + \beta \lambda^2 \frac{h^4}{8} (\nabla_\xi \cdot \Gamma) \boldsymbol{\tau}_0 \\
& - \beta \lambda^2 \frac{5h^4}{24} \left( 2\mathcal{M}_{\Gamma\boldsymbol{\tau}} + (\Gamma \cdot \nabla_\xi) \boldsymbol{\tau}_0 + \bar{J} (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi) \left( \frac{1}{\bar{J}} \Gamma \right) \right) + \beta \lambda^2 \frac{h^5}{30} (\nabla_\xi \cdot \Gamma) \Gamma \\
& - \beta \lambda^2 \frac{2h^5}{15} \left( \mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} + \bar{J} (\Gamma \cdot \nabla_\xi) \left( \frac{1}{\bar{J}} \Gamma \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.198}$$

Une seconde intégration entre 0 et  $\eta$  donne la vitesse :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V} = & \eta(\lambda \boldsymbol{\tau}_0 + \delta h \Theta_R \boldsymbol{\tau}_1) \\
 & + \eta \left( h - \frac{\eta}{2} \right) (\lambda \Gamma + \delta (M_0 (\gamma_0 \nabla_\xi h + \bar{\kappa} \nabla_\xi \mathcal{H}) - \Theta_R (2\mathcal{H}_0 + \text{tr} \mathcal{H}_0 \mathbb{1}) \boldsymbol{\tau}_0)) \\
 & + \frac{\eta}{2} \left( h^2 - \frac{\eta^2}{3} \right) (\delta \Theta_R \mathcal{H}_0 (\Gamma - \zeta M_0 \nabla_\xi p_{ext}) - \beta \lambda \partial_t \boldsymbol{\tau}_0) \\
 & + \frac{\eta}{2} \left( h^2 - \frac{\eta^2}{3} \right) \beta \lambda^2 \left( \frac{\bar{J} h^2}{2} \nabla_\xi \cdot \left( \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{\bar{J}} \right) + \frac{\bar{J}^2 h^3}{3} \nabla_\xi \cdot \left( \frac{\Gamma}{\bar{J}^2} \right) \right) \Gamma \\
 & + \delta \frac{\eta}{2} \left( \frac{\eta^2}{3} - h \eta + h^2 \right) (M_0 \nabla_\xi \gamma_0 - \Theta_R (2\mathcal{H}_0 + \text{tr} \mathcal{H}_0) \Gamma) \\
 & + \beta \lambda^2 \frac{\eta}{3} \left( h^3 - \frac{\eta^3}{4} \right) \left( (\nabla_\xi \cdot (\bar{J} \boldsymbol{\tau}_0) + \Gamma \cdot \nabla_\xi \tilde{h}) \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{2\bar{J}} - \mathcal{M}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} - (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi) \boldsymbol{\tau}_0 \right) \\
 & + \beta \lambda \frac{\eta}{3} \left( h^3 + \frac{\eta^3}{8} - \frac{h \eta^2}{2} \right) \left( \frac{\lambda}{\bar{J}} h (\Gamma \cdot \nabla_\xi \tilde{h}) \Gamma - \partial_t \Gamma \right) \\
 & + \frac{\beta \lambda^2}{\bar{J}} \frac{\eta}{6} \left( h^3 + \frac{\eta^3}{2} - h \eta^2 \right) (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi \tilde{h}) \Gamma + \frac{\beta \lambda^2}{\bar{J}} \frac{\eta}{8} \left( \frac{h^4}{3} + \frac{\eta^4}{5} - \frac{h \eta^3}{3} \right) \nabla_\xi \cdot (\bar{J} \boldsymbol{\tau}_0) \Gamma \\
 & - \beta \lambda^2 \frac{\eta}{4} \left( \frac{5h^4}{6} + \frac{\eta^4}{10} - \frac{h \eta^3}{3} \right) \left( 2 \mathcal{M}_{\Gamma \boldsymbol{\tau}} + (\Gamma \cdot \nabla_\xi) \boldsymbol{\tau}_0 + \bar{J} (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi) \left( \frac{1}{\bar{J}} \Gamma \right) \right) \\
 & + \beta \lambda^2 \frac{\eta}{8} \left( h^4 + \frac{\eta^4}{15} - \frac{h \eta^3}{3} \right) (\nabla_\xi \cdot \Gamma) \boldsymbol{\tau}_0 + \beta \lambda^2 \eta \left( \frac{h^5}{30} - \frac{\eta^5}{180} + \frac{h \eta^4}{30} - \frac{h^2 \eta^3}{24} \right) (\nabla_\xi \cdot \Gamma) \Gamma \\
 & - \beta \lambda^2 \eta \left( \frac{2h^5}{15} - \frac{\eta^5}{120} + \frac{h \eta^4}{20} - \frac{h^2 \eta^3}{12} \right) \left( \mathcal{M}_{\Gamma \Gamma} + \bar{J} (\Gamma \cdot \nabla_\xi) \left( \frac{1}{\bar{J}} \Gamma \right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
 \end{aligned} \tag{4.199}$$

Et enfin une dernière intégration sur la hauteur du film va permettre d'écrire le débit moyen :

$$\begin{aligned}
\int_0^h \mathbf{V} d\eta &= \frac{h^2}{2} (\lambda \boldsymbol{\tau}_0 + \delta h \Theta_R \boldsymbol{\tau}_1) \\
&+ \frac{h^3}{3} (\lambda \Gamma + \delta (M_0 (\gamma_0 \nabla_\xi h + \bar{\kappa} \nabla_\xi \mathcal{A}) - \Theta_R (2\mathcal{H}_0 + \text{tr} \mathcal{H}_0 \mathbb{1}) \boldsymbol{\tau}_0)) \\
&+ \frac{5h^4}{24} (\delta \Theta_R \mathcal{H}_0 (\Gamma - \zeta M_0 \nabla_\xi p_{ext}) - \beta \lambda \partial_t \boldsymbol{\tau}_0) \\
&+ \frac{5h^4}{24} + \beta \lambda^2 \left( \frac{\bar{J} h^2}{2} \nabla_\xi \cdot \left( \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{\bar{J}} \right) + \frac{\bar{J}^2 h^3}{3} \nabla_\xi \cdot \left( \frac{\Gamma}{\bar{J}^2} \right) \right) \Gamma \\
&+ \delta \frac{h^4}{8} (M_0 \nabla_\xi \gamma_0 - \Theta_R (2\mathcal{H}_0 + \text{tr} \mathcal{H}_0) \Gamma) \\
&+ \beta \lambda^2 \frac{3h^5}{20} \left( (\nabla_\xi \cdot (\bar{J} \boldsymbol{\tau}_0) + \Gamma \cdot \nabla_\xi \tilde{h}) \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{2\bar{J}} - \mathcal{M}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} - (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi) \boldsymbol{\tau}_0 \right) \\
&+ \beta \lambda \frac{2h^5}{15} \left( \frac{\lambda}{\bar{J}} h (\Gamma \cdot \nabla_\xi \tilde{h}) \Gamma - \partial_t \Gamma \right) + \frac{\beta \lambda^2}{\bar{J}} \frac{7h^5}{120} (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi \tilde{h}) \Gamma \\
&- \beta \lambda^2 \frac{11h^6}{120} \left( 2\mathcal{M}_{\Gamma\boldsymbol{\tau}} + (\Gamma \cdot \nabla_\xi) \boldsymbol{\tau}_0 + \bar{J} (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi) \left( \frac{1}{\bar{J}} \Gamma \right) \right) \\
&+ \frac{\beta \lambda^2}{\bar{J}} \frac{h^6}{60} \nabla_\xi \cdot (\bar{J} \boldsymbol{\tau}_0) \Gamma + \beta \lambda^2 \frac{h^6}{18} (\nabla_\xi \cdot \Gamma) \boldsymbol{\tau}_0 + \beta \lambda^2 \frac{11h^7}{180} (\nabla_\xi \cdot \Gamma) \Gamma \\
&- \beta \lambda^2 \frac{2h^7}{35} \left( \mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} + \bar{J} (\Gamma \cdot \nabla_\xi) \left( \frac{1}{\bar{J}} \Gamma \right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{4.200}$$

Le débit moyen curviligne vaut :

$$\begin{aligned}
\tilde{h} \tilde{\mathbf{v}} &= \int_0^h \mathcal{J} \mathbf{V} d\eta = \bar{J} \left( \int_0^h \mathbf{V} d\eta - \varepsilon \Theta_R \text{tr} \mathcal{H}_0 \int_0^h \eta \mathbf{V}_0 d\eta \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= \bar{J} \int_0^h \mathbf{V} d\eta - \delta \bar{J} \Theta_R \text{tr} \mathcal{H}_0 \left( \frac{h^3}{3} \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{5h^4}{24} \Gamma \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
\end{aligned} \tag{4.201}$$

Ce qu'on écrit sous la forme :

$$\tilde{h} \tilde{\mathbf{v}} = \bar{J} \left( \lambda \left( \frac{h^2}{2} \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{h^3}{3} \Gamma \right) + \varepsilon R_2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{4.202}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon R_2 = & \frac{h^3}{2} \delta \Theta_R \boldsymbol{\tau}_1 + \frac{h^3}{3} \delta (M_0 (\gamma_0 \nabla_\xi h + \bar{\kappa} \nabla_\xi \mathcal{H}) - 2 \Theta_R (\mathcal{H}_0 + \text{tr} \mathcal{H}_0 \mathbb{1}) \boldsymbol{\tau}_0) \\
 & + \frac{5h^4}{24} \delta \Theta_R ((\mathcal{H}_0 - \text{tr} \mathcal{H}_0) \Gamma - \zeta \mathcal{H}_0 M_0 \nabla_\xi p_{ext}) \\
 & + \frac{5h^4}{24} \beta \lambda \bar{J} \left( \lambda \left( \frac{\bar{J} h^2}{2} \nabla_\xi \cdot \left( \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{\bar{J}} \right) + \frac{\bar{J}^2 h^3}{3} \nabla_\xi \cdot \left( \frac{\Gamma}{\bar{J}^2} \right) \right) \Gamma - \partial_t \boldsymbol{\tau}_0 \right) \\
 & + \delta \frac{h^4}{8} (M_0 \nabla_\xi \gamma_0 - \Theta_R (2 \mathcal{H}_0 + \text{tr} \mathcal{H}_0) \Gamma) \\
 & + \beta \lambda^2 \frac{3h^5}{20} \left( (\nabla_\xi \cdot (\bar{J} \boldsymbol{\tau}_0) + \Gamma \cdot \nabla_\xi \tilde{h}) \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{2\bar{J}} - \mathcal{M}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} - (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi) \boldsymbol{\tau}_0 \right) \\
 & + \beta \lambda \frac{2h^5}{15} \left( \frac{\lambda}{\bar{J}} h (\Gamma \cdot \nabla_\xi \tilde{h}) \Gamma - \partial_t \Gamma \right) + \frac{\beta \lambda^2}{\bar{J}} \frac{7h^5}{120} (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi \tilde{h}) \Gamma \\
 & + \frac{\beta \lambda^2}{\bar{J}} \frac{h^6}{60} \nabla_\xi \cdot (\bar{J} \boldsymbol{\tau}_0) \Gamma + \beta \lambda^2 \frac{11h^7}{180} (\nabla_\xi \cdot \Gamma) \Gamma \\
 & - \beta \lambda^2 \frac{11h^6}{120} \left( 2 \mathcal{M}_{\Gamma\boldsymbol{\tau}} + (\Gamma \cdot \nabla_\xi) \boldsymbol{\tau}_0 + \bar{J} (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi) \left( \frac{1}{\bar{J}} \Gamma \right) \right) \\
 & + \beta \lambda^2 \frac{h^6}{18} (\nabla_\xi \cdot \Gamma) \boldsymbol{\tau}_0 - \beta \lambda^2 \frac{2h^7}{35} \left( \mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} + \bar{J} (\Gamma \cdot \nabla_\xi) \left( \frac{1}{\bar{J}} \Gamma \right) \right)
 \end{aligned} \tag{4.203}$$

On peut alors exprimer la contrainte au fond en fonction du débit de deux manières différentes, selon qu'on élimine la contrainte tangentielle ou les termes d'inertie :

$$\begin{aligned}
 J_0 \mathbf{r}_0 &= \frac{2\bar{J}^2}{h^2} \tilde{h} \tilde{\mathbf{v}} + \bar{J} \left( \frac{\lambda h}{3} \Gamma + \varepsilon R \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= \frac{3\bar{J}^2}{h^2} \tilde{h} \tilde{\mathbf{v}} + \bar{J} \left( -\frac{\lambda}{2} \boldsymbol{\tau}_0 + \varepsilon R' \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
 \end{aligned} \tag{4.204}$$

Où de manière plus générale :

$$\begin{aligned}
 J_0 \mathbf{r}_0 = & \frac{C}{h^2} \tilde{h} \tilde{\mathbf{v}} + \bar{J} \left( \lambda \left( \left( 1 - \frac{C}{2} \right) \boldsymbol{\tau}_0 + \left( 1 - \frac{C}{3} \right) \frac{\tilde{h}}{\bar{J}} \Gamma \right) + \delta \left( 1 - \frac{C}{3} \right) \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}^2} \Theta_R \text{tr} \mathcal{H}_0 \Gamma \right) \\
 & + \bar{J} \varepsilon \left( R_1 - \frac{C}{h^2} R_2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
 \end{aligned} \tag{4.205}$$

$$h = \frac{\tilde{h}}{\bar{J}} + \varepsilon \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}^2} \Theta_R \text{tr} \mathcal{H}_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.206)$$

avec  $C$  une constante que l'on peut choisir arbitrairement. En utilisant la relation qui lie les hauteurs  $h$  et  $\tilde{h}$ , on a :

$$\frac{1}{h^2} = \frac{\bar{J}^2}{\tilde{h}^2} - \frac{\varepsilon \Theta_R \text{tr} \mathcal{H}_0}{h} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.207)$$

$$\begin{aligned} J_0 \mathbf{r}_0 &= \frac{C\bar{J}^2}{\tilde{h}} \tilde{\mathbf{v}} - \bar{J} \delta \Theta_R \text{tr} \mathcal{H}_0 \left( \frac{h}{2} \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{h^2}{3} \Gamma \right) + \lambda \left( \left( 1 - \frac{C}{2} \right) \bar{J} \boldsymbol{\tau}_0 + \left( 1 - \frac{C}{3} \right) \tilde{h} \Gamma \right) \\ &\quad + \bar{J} \left( \delta \left( 1 - \frac{C}{3} \right) \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}^2} \Theta_R \text{tr} \mathcal{H}_0 \Gamma + \varepsilon R_1 - \frac{C}{h^2} \varepsilon R_2 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \frac{C\bar{J}^2}{\tilde{h}} \tilde{\mathbf{v}} + \lambda \left( 1 - \frac{C}{2} \right) \bar{J} \boldsymbol{\tau}_0 + \lambda \left( 1 - \frac{C}{3} \right) \tilde{h} \Gamma + \bar{J} \varepsilon R_3(C) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (4.208)$$

On retrouve les deux formes principales pour  $C = 2$  ou  $3$  :

$$\begin{aligned} J_0 r_0 &= \frac{2\bar{J}^2}{\tilde{h}^2} \tilde{h} \tilde{\mathbf{v}} + \bar{J} \left( \frac{\lambda h}{3} \Gamma + \varepsilon R_3(2) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \frac{3\bar{J}^2}{\tilde{h}^2} \tilde{h} \tilde{\mathbf{v}} + \bar{J} \left( -\frac{\lambda}{2} \boldsymbol{\tau}_0 + \varepsilon R_3(3) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (4.209)$$

Avec les termes d'ordre  $\varepsilon$  qui sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon R_3(C) = & \delta \left(1 - \frac{C}{2}\right) h \Theta_R \boldsymbol{\tau}_1 - \delta \Theta_R \operatorname{tr} \mathcal{H}_0 \left(\frac{h}{2} \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{h^2}{6} (5-C) \Gamma\right) \\
 & + h \left(1 - \frac{C}{3}\right) \delta (M_0 (\gamma_0 \nabla_\xi h + \bar{\kappa} \nabla_\xi \mathcal{H}) - \Theta_R (2\mathcal{H}_0 + \operatorname{tr} \mathcal{H}_0 \mathbb{1}) \boldsymbol{\tau}_0) \\
 & + \frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{5C}{12}\right) (\delta \Theta_R \mathcal{H}_0 (\Gamma - \zeta M_0 \nabla_\xi p_{ext}) - \beta \lambda \partial_t \boldsymbol{\tau}_0) \\
 & + \frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{5C}{12}\right) \beta \lambda^2 \left(\frac{\bar{J} h^2}{2} \nabla_\xi \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}_0}{\bar{J}}\right) + \frac{\bar{J}^2 h^3}{3} \nabla_\xi \cdot \left(\frac{\Gamma}{\bar{J}^2}\right)\right) \Gamma \\
 & + \delta \frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{C}{4}\right) (M_0 \nabla_\xi \gamma_0 - \Theta_R (2\mathcal{H}_0 + \operatorname{tr} \mathcal{H}_0) \Gamma) \\
 & + \beta \lambda^2 h^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{3C}{20}\right) \left((\nabla_\xi \cdot (\bar{J} \boldsymbol{\tau}_0) + \Gamma \cdot \nabla_\xi \tilde{h}) \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{2\bar{J}} - \mathcal{M}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} - (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi) \boldsymbol{\tau}_0\right) \quad (4.210) \\
 & + \beta \lambda \frac{h^3}{3} \left(1 - \frac{2C}{5}\right) \left(\frac{\lambda}{\bar{J}} h (\Gamma \cdot \nabla_\xi \tilde{h}) \Gamma - \partial_t \Gamma\right) \\
 & + \frac{\beta \lambda^2 h^3}{\bar{J} 6} \left(1 - \frac{7C}{20}\right) (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi \tilde{h}) \Gamma + \frac{\beta \lambda^2 h^4}{\bar{J} 6} \left(\frac{1}{4} - \frac{C}{10}\right) \nabla_\xi \cdot (\bar{J} \boldsymbol{\tau}_0) \Gamma \\
 & - \beta \lambda^2 \frac{h^4}{24} \left(5 - \frac{11C}{5}\right) \left(2\mathcal{M}_{\Gamma\boldsymbol{\tau}} + (\Gamma \cdot \nabla_\xi) \boldsymbol{\tau}_0 + \bar{J} (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi) \left(\frac{1}{\bar{J}} \Gamma\right)\right) \\
 & + \beta \lambda^2 \frac{h^4}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{C}{9}\right) (\nabla_\xi \cdot \Gamma) \boldsymbol{\tau}_0 + \beta \lambda^2 \frac{h^5}{30} \left(1 - \frac{11C}{6}\right) (\nabla_\xi \cdot \Gamma) \Gamma \\
 & - \beta \lambda^2 \frac{2h^5}{5} \left(\frac{1}{3} - \frac{C}{7}\right) \left(\mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} + \bar{J} (\Gamma \cdot \nabla_\xi) \left(\frac{1}{\bar{J}} \Gamma\right)\right)
 \end{aligned}$$

## 4.5 MODÈLES À UNE ET DEUX ÉQUATIONS

4.5.1 *Modèle à une équation à l'ordre 1*

Avec l'expression de  $\tilde{h}\tilde{\mathbf{v}}$  calculée jusqu'à l'ordre un en  $\varepsilon$ , on peut affiner le modèle à une équation, qui s'écrit sous la forme d'un problème d'advection-diffusion non-linéaire avec un terme de tension de surface supplémentaire :

$$\partial_t \tilde{h} + \nabla_{\xi} \cdot (\tilde{h} \mathcal{V}(\tilde{h})) - \nabla_{\xi} \cdot (v(\tilde{h}) \nabla_{\xi} \tilde{h}) + \nabla_{\xi} \cdot \left( \bar{\kappa} \frac{\tilde{h}^3}{3\bar{J}^2} \delta M_0 \nabla_{\xi} \mathcal{H} \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.211)$$

avec la vitesse de transport  $\mathcal{V}(\tilde{h})$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\tilde{h}) = & \lambda \frac{\tilde{h}}{2\bar{J}} \boldsymbol{\tau}_0 + \lambda \frac{\tilde{h}^2}{3\bar{J}^2} \Gamma + \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}^2} \delta \Theta_R \boldsymbol{\tau}_1 + \frac{\tilde{h}^2}{3\bar{J}^2} \delta \Theta_R \left( \frac{1}{2} \text{tr} \mathcal{H}_0 \mathbb{1} - 2\mathcal{H}_0 \right) \boldsymbol{\tau}_0 \\ & + \frac{\tilde{h}^3}{3\bar{J}^4} \delta M_0 \gamma_0 \nabla_{\xi} \bar{J} + \frac{\tilde{h}^3}{\bar{J}^3} \delta \Theta_R \left( \frac{1}{6} \text{tr} \mathcal{H}_0 - \frac{1}{24} \mathcal{H}_0 \right) \Gamma \\ & - \frac{5\tilde{h}^3}{24\bar{J}^3} \delta \Theta_R \zeta \mathcal{H}_0 M_0 \nabla_{\xi} p_{ext} + \delta \frac{\tilde{h}^3}{8\bar{J}^3} M_0 \nabla_{\xi} \gamma_0 \\ & + \frac{5\tilde{h}^3}{24\bar{J}^2} \beta \lambda \left( \lambda \left( \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}} \nabla_{\xi} \cdot \left( \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{\bar{J}} \right) + \frac{\tilde{h}^3}{3\bar{J}} \nabla_{\xi} \cdot \left( \frac{\Gamma}{\bar{J}^2} \right) \right) \Gamma - \partial_t \boldsymbol{\tau}_0 \right) \\ & + \beta \lambda^2 \frac{3\tilde{h}^4}{20\bar{J}^4} \left( \nabla_{\xi} \cdot (\bar{J} \boldsymbol{\tau}_0) \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{2\bar{J}} - \mathcal{M}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} - (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_{\xi}) \boldsymbol{\tau}_0 \right) - \beta \lambda \frac{2\tilde{h}^4}{15\bar{J}^4} \partial_t \Gamma \\ & + \beta \lambda^2 \frac{\tilde{h}^5}{60\bar{J}^6} \nabla_{\xi} \cdot (\bar{J} \boldsymbol{\tau}_0) \Gamma + \beta \lambda^2 \frac{11\tilde{h}^6}{180\bar{J}^6} (\nabla_{\xi} \cdot \Gamma) \Gamma \\ & - \beta \lambda^2 \frac{11\tilde{h}^5}{120\bar{J}^5} \left( 2\mathcal{M}_{\Gamma\boldsymbol{\tau}} + (\Gamma \cdot \nabla_{\xi}) \boldsymbol{\tau}_0 + \bar{J} (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_{\xi}) \left( \frac{1}{\bar{J}} \Gamma \right) \right) \\ & + \beta \lambda^2 \frac{\tilde{h}^5}{18\bar{J}^5} (\nabla_{\xi} \cdot \Gamma) \boldsymbol{\tau}_0 - \beta \lambda^2 \frac{2\tilde{h}^6}{35\bar{J}^6} \left( \mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} + \bar{J} (\Gamma \cdot \nabla_{\xi}) \left( \frac{1}{\bar{J}} \Gamma \right) \right) \end{aligned} \quad (4.212)$$

et le coefficient de diffusion ou viscosité du modèle  $v(\tilde{h})$  :

$$v(\tilde{h}) = -\frac{\tilde{h}^3}{3\bar{J}^3} \delta \gamma_0 M_0 - \beta \lambda^2 \frac{\tilde{h}^5}{\bar{J}^5} \left( \frac{3}{40} \Gamma \boldsymbol{\tau}_0^t + \frac{7}{120} \boldsymbol{\tau}_0 \Gamma^t \right) - \beta \lambda^2 \frac{2\tilde{h}^6}{15\bar{J}^6} \Gamma \Gamma^t \quad (4.213)$$

Ce modèle peut se réécrire en variables dimensionnées :

$$\mu \partial_t \tilde{h} + \nabla_{\xi} \cdot (\tilde{h} \mathcal{V}(\tilde{h})) - \nabla_{\xi} \cdot (v(\tilde{h}) \nabla_{\xi} \tilde{h}) + \nabla_{\xi} \cdot \left( \kappa \frac{\tilde{h}^3}{3\bar{J}^2} M_0 \nabla_{\xi} \mathcal{H} \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.214)$$

où le coefficient de viscosité  $v$  est donné par :

$$v(\tilde{h}) = -\frac{\tilde{h}^3}{3\bar{J}^3} \rho \gamma_0 M_0 - \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^5}{\bar{J}^5} \left( \frac{3}{40} \Gamma \tau_0^t + \frac{7}{120} \tau_0 \Gamma^t \right) - \frac{\rho}{\mu^2} \frac{2\tilde{h}^6}{15\bar{J}^6} \Gamma \Gamma^t \quad (4.215)$$

et la vitesse  $\mathcal{V}$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\tilde{h}) = & \frac{\tilde{h}}{2\bar{J}} \tau_0 + \frac{\tilde{h}^2}{3\bar{J}^2} \Gamma + \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}^2} \tau_1 + \frac{\tilde{h}^2}{3\bar{J}^2} \left( \frac{1}{2} \text{tr} \mathcal{H}_0 \mathbb{1} - 2\mathcal{H}_0 \right) \tau_0 + \frac{\tilde{h}^3}{3\bar{J}^4} \rho M_0 \gamma_0 \nabla_{\xi} \bar{J} \\ & + \frac{\tilde{h}^3}{\bar{J}^3} \left( \frac{1}{6} \text{tr} \mathcal{H}_0 - \frac{1}{24} \mathcal{H}_0 \right) \Gamma - \frac{5\tilde{h}^3}{24\bar{J}^3} \mathcal{H}_0 M_0 \nabla_{\xi} p_{ext} + \rho \frac{\tilde{h}^3}{8\bar{J}^3} M_0 \nabla_{\xi} \gamma_0 \\ & + \frac{\rho}{\mu^2} \frac{5\tilde{h}^3}{24\bar{J}^2} \left( \left( \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}} \nabla_{\xi} \cdot \left( \frac{\tau_0}{\bar{J}} \right) + \frac{\tilde{h}^3}{3\bar{J}} \nabla_{\xi} \cdot \left( \frac{\Gamma}{\bar{J}^2} \right) \right) \Gamma - \partial_t \tau_0 \right) \\ & + \frac{\rho}{\mu^2} \frac{3\tilde{h}^4}{20\bar{J}^4} \left( \nabla_{\xi} \cdot (\bar{J} \tau_0) \frac{\tau_0}{2\bar{J}} - \mathcal{M}_{\tau\tau} - (\tau_0 \cdot \nabla_{\xi}) \tau_0 \right) - \frac{\rho}{\mu^2} \frac{2\tilde{h}^4}{15\bar{J}^4} \partial_t \Gamma \\ & + \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^5}{60\bar{J}^6} \nabla_{\xi} \cdot (\bar{J} \tau_0) \Gamma + \frac{\rho}{\mu^2} \frac{11\tilde{h}^6}{180\bar{J}^6} (\nabla_{\xi} \cdot \Gamma) \Gamma \\ & - \frac{\rho}{\mu^2} \frac{11\tilde{h}^5}{120\bar{J}^5} \left( 2\mathcal{M}_{\Gamma\tau} + (\Gamma \cdot \nabla_{\xi}) \tau_0 + \bar{J} (\tau_0 \cdot \nabla_{\xi}) \left( \frac{1}{\bar{J}} \Gamma \right) \right) \\ & + \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^5}{18\bar{J}^5} (\nabla_{\xi} \cdot \Gamma) \tau_0 - \frac{\rho}{\mu^2} \frac{2\tilde{h}^6}{35\bar{J}^6} \left( \mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} + \bar{J} (\Gamma \cdot \nabla_{\xi}) \left( \frac{1}{\bar{J}} \Gamma \right) \right) \end{aligned} \quad (4.216)$$

avec :

$$\Gamma = \rho \gamma_0 - M_0 \nabla_{\xi} p_{ext} \quad (4.217)$$

et :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\tau\tau} &= (\partial_{\xi} \mathbf{x})^{-1} \left( \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{x} \cdot \tau_0 \cdot \tau_0 + \tau_0^t M_0^{-1} \mathcal{H}_0 \tau_0 \mathbf{s} \right) \\ \mathcal{M}_{\Gamma\tau} &= (\partial_{\xi} \mathbf{x})^{-1} \left( \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{x} \cdot \Gamma \cdot \tau_0 + \Gamma^t M_0^{-1} \mathcal{H}_0 \tau_0 \mathbf{s} \right) \\ \mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} &= (\partial_{\xi} \mathbf{x})^{-1} \left( \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{x} \cdot \Gamma \cdot \Gamma + \Gamma^t M_0^{-1} \mathcal{H}_0 \Gamma \mathbf{s} \right) \end{aligned} \quad (4.218)$$



## 4.6 SYSTÈME SAINT-VENANT

## 4.6.1 Première formulation

On a tous les éléments pour écrire le système final, ou plutôt une classe de modèles paramétrés par le couple  $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned}
& \partial_t \tilde{h} + \nabla_{\xi} \cdot (\tilde{h} \tilde{\mathbf{v}}) = 0 \\
& \partial_t (\tilde{h} \tilde{\mathbf{v}}) + \nabla_{\xi} \cdot \left[ C_1 \tilde{h} \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} + \lambda^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{C_1}{4} \right) \frac{\tilde{h}^3}{\bar{J}^2} \boldsymbol{\tau}_0 \otimes \boldsymbol{\tau}_0 + \lambda^2 \left( \frac{5}{24} - \frac{C_1}{6} \right) \frac{\tilde{h}^4}{\bar{J}^3} (\Gamma \otimes \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_0 \otimes \Gamma) \right. \\
& \quad \left. + \lambda^2 \left( \frac{2}{15} - \frac{C_1}{9} \right) \frac{\tilde{h}^5}{\bar{J}^4} \Gamma \otimes \Gamma \right] - \frac{\delta}{\beta} \left( \bar{\kappa} \tilde{h} M_0 \nabla_{\xi} \mathcal{H} + \bar{J} M_0 \nabla_{\xi} \left( \gamma_0 \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}^2} \right) \right) \\
& = \frac{C_2}{\beta} \left( \frac{\lambda}{2} \bar{J} \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{\lambda}{3} \tilde{h} \Gamma - \frac{\bar{J}^2}{\tilde{h}} \tilde{\mathbf{v}} \right) + \Phi + \mathcal{O}(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{4.219}$$

où  $\Phi$  est un terme correctif donné par :

$$\begin{aligned}
\Phi = & -\frac{\bar{J} \varepsilon R_3(C_2)}{\beta} - \frac{\delta}{\beta} \Theta_R \tilde{h} \left( \mathcal{H}_0 \frac{\tilde{h}}{2\bar{J}} \gamma_0 + (2\mathcal{H}_0 + \text{tr}(\mathcal{H}_0) \mathbb{1}) \boldsymbol{\tau}_0 - \boldsymbol{\tau}_1 \right) \\
& - \lambda^2 \left( \frac{\tilde{h}^3}{3\bar{J}^2} \mathcal{M}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} + \frac{5\tilde{h}^4}{12\bar{J}^3} \mathcal{M}_{\Gamma\boldsymbol{\tau}} + \frac{2\tilde{h}^5}{15\bar{J}^4} \mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} \right)
\end{aligned} \tag{4.220}$$

et qui se développe tel que :

$$\begin{aligned}
 \Phi = & \frac{\delta}{\beta} \frac{C_2}{2} \Theta_R \tilde{h} \boldsymbol{\tau}_1 + \frac{\delta}{\beta} \Theta_R \left( -\tilde{h} \left( 2\mathcal{H}_0 + \frac{1}{2} \text{tr} \mathcal{H}_0 \mathbb{1} \right) \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{\tilde{h}^2}{6\bar{J}} (5 - C_2) \text{tr} \mathcal{H}_0 \Gamma - \mathcal{H}_0 \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}} \boldsymbol{\gamma}_0 \right) \\
 & - \frac{\delta}{\beta} \tilde{h} \left( 1 - \frac{C_2}{3} \right) \left( M_0 \left( \boldsymbol{\gamma}_0 \nabla_{\xi} \left( \frac{\tilde{h}}{\bar{J}} \right) + \bar{\kappa} \nabla_{\xi} \mathcal{H} \right) - \Theta_R (2\mathcal{H}_0 + \text{tr} \mathcal{H}_0 \mathbb{1}) \boldsymbol{\tau}_0 \right) \\
 & - \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}} \left( 1 - \frac{5C_2}{12} \right) \left( \frac{\delta}{\beta} \Theta_R \mathcal{H}_0 (\Gamma - \zeta M_0 \nabla_{\xi} p_{ext}) - \lambda \partial_t \boldsymbol{\tau}_0 \right) \\
 & - \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}} \left( 1 - \frac{5C_2}{12} \right) \lambda^2 \left( \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}} \nabla_{\xi} \cdot \left( \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{\bar{J}} \right) + \frac{\tilde{h}^3}{3\bar{J}} \nabla_{\xi} \cdot \left( \frac{\Gamma}{\bar{J}^2} \right) \right) \Gamma \\
 & - \frac{\delta}{\beta} \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}} \left( 1 - \frac{C_2}{4} \right) (M_0 \nabla_{\xi} \boldsymbol{\gamma}_0 - \Theta_R (2\mathcal{H}_0 + \text{tr} \mathcal{H}_0 \mathbb{1}) \Gamma) \\
 & - \lambda^2 \left( \frac{3C_2}{20} \frac{\tilde{h}^3}{\bar{J}^2} \mathcal{M}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} + \frac{11C_2}{5} \frac{\tilde{h}^4}{12\bar{J}^3} \mathcal{M}_{\Gamma\boldsymbol{\tau}} + \frac{2C_2}{35} \frac{\tilde{h}^5}{\bar{J}^4} \mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} \right) \\
 & - \lambda \frac{\tilde{h}^3}{3\bar{J}^2} \left( 1 - \frac{2C_2}{5} \right) \left( \lambda \frac{\tilde{h}}{\bar{J}^2} (\Gamma \cdot \nabla_{\xi} \tilde{h}) \Gamma - \partial_t \Gamma \right) - \frac{\lambda^2}{\bar{J}} \frac{\tilde{h}^3}{6\bar{J}^2} \left( 1 - \frac{7C_2}{20} \right) (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_{\xi} \tilde{h}) \Gamma \\
 & - \frac{\lambda^2}{\bar{J}} \frac{\tilde{h}^4}{6\bar{J}^3} \left( \frac{1}{4} - \frac{C_2}{10} \right) \nabla_{\xi} \cdot (\bar{J} \boldsymbol{\tau}_0) \Gamma + \lambda^2 \frac{\tilde{h}^4}{24\bar{J}^3} \left( 5 - \frac{11C_2}{5} \right) \left( (\Gamma \cdot \nabla_{\xi}) \boldsymbol{\tau}_0 + \bar{J} (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_{\xi}) \left( \frac{1}{\bar{J}} \Gamma \right) \right) \\
 & - \lambda^2 \frac{\tilde{h}^4}{2\bar{J}^3} \left( \frac{1}{4} - \frac{C_2}{9} \right) (\nabla_{\xi} \cdot \Gamma) \boldsymbol{\tau}_0 \\
 & - \lambda^2 \frac{\tilde{h}^5}{30\bar{J}^4} \left( 1 - \frac{11C_2}{6} \right) (\nabla_{\xi} \cdot \Gamma) \Gamma + \lambda^2 \frac{2\tilde{h}^5}{5\bar{J}^3} \left( \frac{1}{3} - \frac{C_2}{7} \right) (\Gamma \cdot \nabla_{\xi}) \left( \frac{1}{\bar{J}} \Gamma \right)
 \end{aligned} \tag{4.221}$$

#### 4.6.2 Formulation conservative

##### Étape intermédiaire

On réécrit  $\Phi$  et on pose :  $U = \begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{h} \tilde{\mathbf{v}} \end{pmatrix}$ . Le système Saint-Venant s'écrit maintenant :

$$\partial_t U + A(U) \nabla_{\xi} U + \nabla_{\xi} \cdot (F(U)) = S(U) + K(\tilde{h}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{4.222}$$

avec le terme de flux  $F$  :

$$F(U) = \begin{pmatrix} \tilde{h}\tilde{\mathbf{v}} \\ C_1\tilde{h}\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} + \lambda^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{C_1}{4} \right) \frac{\tilde{h}^3}{\bar{J}^2} \boldsymbol{\tau}_0 \otimes \boldsymbol{\tau}_0 \\ + \lambda^2 \left( \frac{5}{24} - \frac{C_1}{6} \right) \frac{\tilde{h}^4}{\bar{J}^3} (\Gamma \otimes \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_0 \otimes \Gamma) + \lambda^2 \left( \frac{2}{15} - \frac{C_1}{9} \right) \frac{\tilde{h}^5}{\bar{J}^4} \Gamma \otimes \Gamma \end{pmatrix} \quad (4.223)$$

les termes de capillarité :

$$K(\tilde{h}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\delta}{\beta} \frac{C_2}{3} \bar{\kappa} \tilde{h} M_0 \nabla_{\xi} \mathcal{H} \end{pmatrix} \quad (4.224)$$

les termes de dérivées :

$$A(U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a(\tilde{h}) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.225)$$

$$a(\tilde{h}) = -\gamma_0 \frac{\delta}{\beta} \frac{\tilde{h}}{\bar{J}} \frac{C_2}{3} M_0 + \lambda^2 \frac{\tilde{h}^3}{6\bar{J}^3} \left( 1 - \frac{7C_2}{20} \right) \Gamma \boldsymbol{\tau}_0^t \\ + \lambda^2 \frac{\tilde{h}^3}{2\bar{J}^3} \left( \frac{1}{3} - \frac{3C_2}{20} \right) \boldsymbol{\tau}_0 \Gamma^t + \lambda^2 \frac{\tilde{h}^4}{3\bar{J}^4} \left( 1 - \frac{2C_2}{5} \right) \Gamma \Gamma^t \quad (4.226)$$

et le second membre :

$$S(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{C_2}{\beta} \left( \frac{\lambda}{2} \bar{J} \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{\lambda}{3} \tilde{h} \Gamma - \frac{\bar{J}^2}{\tilde{h}} \tilde{\mathbf{v}} \right) + \bar{\Phi}(\tilde{h}) \end{pmatrix} \quad (4.227)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}(\tilde{h}) = & \frac{\delta}{\beta} \frac{C_2}{2} \Theta_R \tilde{h} \boldsymbol{\tau}_1 + \frac{\delta}{\beta} \tilde{h} \left(1 - \frac{C_2}{3}\right) \Theta_R (2\mathcal{H}_0 + \text{tr}\mathcal{H}_0 \mathbb{1}) \boldsymbol{\tau}_0 \\
 & + \frac{\delta}{\beta} \Theta_R \left( -\tilde{h} \left(2\mathcal{H}_0 + \frac{1}{2} \text{tr}\mathcal{H}_0 \mathbb{1}\right) \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{\tilde{h}^2}{6\bar{J}} (5 - C_2) \text{tr}\mathcal{H}_0 \Gamma - \mathcal{H}_0 \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}} \boldsymbol{\gamma}_0 \right) \\
 & + \frac{\delta}{\beta} M_0 \left( \bar{J} \frac{\tilde{h}^2}{2} \nabla_{\xi} \left( \frac{\boldsymbol{\gamma}_0}{\bar{J}^2} \right) - \left(1 - \frac{C_2}{3}\right) \boldsymbol{\gamma}_0 \frac{\tilde{h}^2}{\bar{J}^2} \nabla_{\xi} \bar{J} \right) \\
 & - \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}} \left(1 - \frac{5C_2}{12}\right) \left( \frac{\delta}{\beta} \Theta_R \mathcal{H}_0 (\Gamma - \zeta M_0 \nabla_{\xi} p_{ext}) - \lambda \partial_t \boldsymbol{\tau}_0 \right) \\
 & - \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}} \left(1 - \frac{5C_2}{12}\right) \lambda^2 \left( \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}} \nabla_{\xi} \cdot \left( \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{\bar{J}} \right) + \frac{\tilde{h}^3}{3\bar{J}} \nabla_{\xi} \cdot \left( \frac{\Gamma}{\bar{J}^2} \right) \right) \Gamma \\
 & - \frac{\delta}{\beta} \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}} \left(1 - \frac{C_2}{4}\right) (M_0 \nabla_{\xi} \boldsymbol{\gamma}_0 - \Theta_R (2\mathcal{H}_0 + \text{tr}\mathcal{H}_0) \Gamma) \tag{4.228} \\
 & - \lambda^2 C_2 \left( \frac{3}{20} \frac{\tilde{h}^3}{\bar{J}^2} \mathcal{M}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} + \frac{11}{5} \frac{\tilde{h}^4}{12\bar{J}^3} \mathcal{M}_{\Gamma\boldsymbol{\tau}} + \frac{2}{35} \frac{\tilde{h}^5}{\bar{J}^4} \mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} \right) \\
 & - \lambda^2 \frac{\tilde{h}^3}{\bar{J}^2} \left( \frac{1}{3} - \frac{3C_2}{20} \right) \left( \nabla_{\xi} \cdot (\bar{J} \boldsymbol{\tau}_0) \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{2\bar{J}} - (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_{\xi}) \boldsymbol{\tau}_0 \right) + \lambda \frac{\tilde{h}^3}{3\bar{J}^2} \left(1 - \frac{2C_2}{5}\right) \partial_t \Gamma \\
 & - \frac{\lambda^2}{\bar{J}} \frac{\tilde{h}^4}{6\bar{J}^3} \left( \frac{1}{4} - \frac{C_2}{10} \right) \nabla_{\xi} \cdot (\bar{J} \boldsymbol{\tau}_0) \Gamma - \lambda^2 \frac{\tilde{h}^4}{2\bar{J}^3} \left( \frac{1}{4} - \frac{C_2}{9} \right) (\nabla_{\xi} \cdot \Gamma) \boldsymbol{\tau}_0 \\
 & + \lambda^2 \frac{\tilde{h}^4}{24\bar{J}^3} \left(5 - \frac{11C_2}{5}\right) \left( (\Gamma \cdot \nabla_{\xi}) \boldsymbol{\tau}_0 + \bar{J} (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_{\xi}) \left( \frac{1}{\bar{J}} \Gamma \right) \right) \\
 & - \lambda^2 \frac{\tilde{h}^5}{30\bar{J}^4} \left(1 - \frac{11C_2}{6}\right) (\nabla_{\xi} \cdot \Gamma) \Gamma + \lambda^2 \frac{2\tilde{h}^5}{5\bar{J}^3} \left( \frac{1}{3} - \frac{C_2}{7} \right) (\Gamma \cdot \nabla_{\xi}) \left( \frac{1}{\bar{J}} \Gamma \right)
 \end{aligned}$$

Calcul du flux total

On transforme le terme  $A(\tilde{h}, \boldsymbol{\xi})$  pour faire apparaître des divergences.

**Lemme 9.** On pose  $A^{(n)}(\tilde{h}, \xi) = \frac{\partial^n A}{\partial \tilde{h}^n}(\tilde{h}, \xi)$  et  $A^{(0)}(\tilde{h}, \xi) = A(\tilde{h}, \xi)$ . Alors on peut démontrer la propriété suivante pour  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} A(\tilde{h}, \xi) \nabla_\xi \tilde{h} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ (-1)^k \nabla_\xi \cdot \left( A^{(k)}(\tilde{h}, \xi) \frac{\tilde{h}^{k+1}}{(k+1)!} \right) + \frac{(-\tilde{h})^{k+1}}{(k+1)!} \nabla_\xi \cdot \left( A^{(k)}(\cdot, \xi) \right) \right] \\ &\quad + \frac{(-\tilde{h})^n}{n!} A^{(n)}(\tilde{h}, \xi) \nabla_\xi \tilde{h} \end{aligned} \quad (4.229)$$

où

$$\nabla_\xi \cdot \left( A^{(k)}(\cdot, \xi) \right) = \sum_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} A_{ij}(\tilde{h}, \xi) \Big|_{\tilde{h}=\text{constante}} \quad (4.230)$$

**Preuve du lemme 9.** Cf. page 220

Puisque la matrice  $A(\tilde{h}, \xi)$  ne comporte qu'un terme polynomial de degré 4,  $A^{(5)}(\tilde{h}, \xi) = 0$ .

$$\begin{aligned} a(\tilde{h}, \xi) \nabla_\xi \tilde{h} &= \nabla_\xi \cdot \left( \sum_{k=0}^4 (-1)^k \alpha^{(k)}(\tilde{h}, \xi) \frac{\tilde{h}^{k+1}}{(k+1)!} \right) + \sum_{k=0}^4 \frac{(-\tilde{h})^{k+1}}{(k+1)!} \nabla_\xi \cdot \left( \alpha^{(k)}(\cdot, \xi) \right) \\ &= -\frac{\delta}{\beta} C_2 \left( \nabla_\xi \cdot \left( \gamma_0 \frac{\tilde{h}^2}{6\bar{J}} M_0 \right) - \frac{\tilde{h}^2}{6} \nabla_\xi \cdot \left( \frac{\gamma_0}{\bar{J}} M_0 \right) \right) \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{24} \left( 1 - \frac{7C_2}{20} \right) \left( \nabla_\xi \cdot \left( \frac{\tilde{h}^4}{\bar{J}^3} \Gamma \boldsymbol{\tau}_0^t \right) - \tilde{h}^4 \nabla_\xi \cdot \left( \frac{\Gamma \boldsymbol{\tau}_0^t}{\bar{J}^3} \right) \right) \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{8} \left( \frac{1}{3} - \frac{3C_2}{20} \right) \left( \nabla_\xi \cdot \left( \frac{\tilde{h}^4}{\bar{J}^3} \boldsymbol{\tau}_0 \Gamma^t \right) - \tilde{h}^4 \nabla_\xi \cdot \left( \frac{\boldsymbol{\tau}_0 \Gamma^t}{\bar{J}^3} \right) \right) \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{15} \left( 1 - \frac{2C_2}{5} \right) \left( \nabla_\xi \cdot \left( \frac{\tilde{h}^5}{\bar{J}^4} \Gamma \Gamma^t \right) - \tilde{h}^5 \nabla_\xi \cdot \left( \frac{\Gamma \Gamma^t}{\bar{J}^4} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.231)$$

Modèle conservatif

$$\partial_t U + \nabla_\xi \cdot (G(U)) = T(U) + K(\tilde{h}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (4.232)$$

avec le terme de flux  $G$  :

$$G(U) = \begin{pmatrix} \tilde{h} \tilde{\mathbf{v}} \\ f(U) \end{pmatrix} \quad (4.233)$$

$$\begin{aligned}
 f(U) = & C_1 \tilde{h} \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} + \lambda^2 \left( \frac{1}{3} - \frac{C_1}{4} \right) \frac{\tilde{h}^3}{\bar{J}^2} \boldsymbol{\tau}_0 \boldsymbol{\tau}_0^t - \frac{\delta}{\beta} C_2 \gamma_0 \frac{\tilde{h}^2}{6\bar{J}} M_0 \\
 & + \lambda^2 \left[ \left( \frac{1}{4} - \frac{C_1}{6} - \frac{7C_2}{480} \right) \frac{\tilde{h}^4}{\bar{J}^3} \Gamma \boldsymbol{\tau}_0^t + \left( \frac{1}{4} - \frac{C_1}{6} - \frac{3C_2}{160} \right) \frac{\tilde{h}^4}{\bar{J}^3} \boldsymbol{\tau}_0 \Gamma^t + \left( \frac{1}{5} - \frac{C_1}{9} - \frac{2C_2}{75} \right) \frac{\tilde{h}^5}{\bar{J}^4} \Gamma \Gamma^t \right]
 \end{aligned} \tag{4.234}$$

Les termes de capillarité sont inchangés ; le second membre devient :

$$T(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{C_2}{\beta} \left( \frac{\lambda}{2} \bar{J} \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{\lambda}{3} \tilde{h} \Gamma - \frac{\bar{J}^2}{\tilde{h}} \tilde{\mathbf{v}} \right) + \bar{\Phi}(\tilde{h}) \end{pmatrix} \tag{4.235}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}(\tilde{h}) = & \frac{\delta}{\beta} \frac{C_2}{2} \Theta_R \tilde{h} \boldsymbol{\tau}_1 + \frac{\delta}{\beta} \Theta_R \left( -\tilde{h} \left( 2\mathcal{H}_0 + \frac{1}{2} \text{tr} \mathcal{H}_0 \mathbb{1} \right) \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{\tilde{h}^2}{6\bar{J}} (5 - C_2) \text{tr} \mathcal{H}_0 \Gamma - \mathcal{H}_0 \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}} \boldsymbol{\gamma}_0 \right) \\
 & + \frac{\delta}{\beta} \tilde{h} \left( 1 - \frac{C_2}{3} \right) \Theta_R (2\mathcal{H}_0 + \text{tr} \mathcal{H}_0 \mathbb{1}) \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{\delta}{\beta} M_0 \left( \bar{J} \frac{\tilde{h}^2}{2} \nabla_\xi \left( \frac{\gamma_0}{\bar{J}^2} \right) - \left( 1 - \frac{C_2}{3} \right) \gamma_0 \frac{\tilde{h}^2}{\bar{J}^2} \nabla_\xi \bar{J} \right) \\
 & - \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}} \left( 1 - \frac{5C_2}{12} \right) \left( \frac{\delta}{\beta} \Theta_R \mathcal{H}_0 (\Gamma - \zeta M_0 \nabla_\xi p_{ext}) - \lambda \partial_t \boldsymbol{\tau}_0 \right) - \frac{\delta}{\beta} \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}} \left( 1 - \frac{C_2}{4} \right) (M_0 \nabla_\xi \gamma_0 - \Theta_R (2\mathcal{H}_0 + \text{tr} \mathcal{H}_0) \Gamma) \\
 & - \frac{\delta}{\beta} C_2 \frac{\tilde{h}^2}{6} \nabla_\xi \cdot \left( \frac{\gamma_0}{\bar{J}} M_0 \right) + \lambda \frac{\tilde{h}^3}{3\bar{J}^2} \left( 1 - \frac{2C_2}{5} \right) \partial_t \Gamma - \lambda^2 C_2 \left( \frac{3}{20} \frac{\tilde{h}^3}{\bar{J}^2} \mathcal{M}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} + \frac{11}{5} \frac{\tilde{h}^4}{12\bar{J}^3} \mathcal{M}_{\Gamma\boldsymbol{\tau}} + \frac{2}{35} \frac{\tilde{h}^5}{\bar{J}^4} \mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} \right) \\
 & + \lambda^2 \frac{\tilde{h}^3}{\bar{J}^2} \left( \frac{1}{3} - \frac{3C_2}{20} \right) \left( (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi) \boldsymbol{\tau}_0 - \nabla_\xi \cdot (\bar{J} \boldsymbol{\tau}_0) \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{2\bar{J}} \right) + \lambda^2 \frac{\tilde{h}^4}{12\bar{J}^3} \left( \frac{53C_2}{240} - 1 \right) (\nabla_\xi \cdot \Gamma) \boldsymbol{\tau}_0 \\
 & + \lambda^2 \frac{\tilde{h}^4}{4\bar{J}^3} \left( 1 - \frac{53C_2}{120} \right) (\Gamma \cdot \nabla_\xi) \boldsymbol{\tau}_0 + \lambda^2 \frac{\tilde{h}^4}{8\bar{J}^4} \left( \frac{9C_2}{20} - 1 \right) (\Gamma \cdot \nabla_\xi \bar{J}) \boldsymbol{\tau}_0 \\
 & + \lambda^2 \frac{\tilde{h}^4}{4\bar{J}^3} \left( 1 - \frac{17C_2}{40} \right) (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi) \Gamma + \lambda^2 \frac{\tilde{h}^4}{4\bar{J}^3} \left( \frac{17C_2}{40} - 1 \right) (\nabla_\xi \cdot \boldsymbol{\tau}_0) \Gamma \\
 & + \lambda^2 \frac{\tilde{h}^4}{8\bar{J}^4} \left( \frac{23C_2}{60} - 1 \right) (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_\xi \bar{J}) \Gamma + \lambda^2 \frac{\tilde{h}^5}{15\bar{J}^4} \left( \frac{187C_2}{120} - 2 \right) (\nabla_\xi \cdot \Gamma) \Gamma \\
 & + \lambda^2 \frac{\tilde{h}^5}{5\bar{J}^4} \left( 1 - \frac{44C_2}{105} \right) (\Gamma \cdot \nabla_\xi) \Gamma + \lambda^2 \frac{\tilde{h}^5}{15\bar{J}^5} \left( \frac{157C_2}{420} - 1 \right) (\Gamma \cdot \nabla \bar{J}) \Gamma
 \end{aligned}$$

(4.236)

Systeme dimensionné

Le vecteur des inconnues est :  $U = \begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{h}\tilde{\mathbf{v}} \end{pmatrix}$ . Le système dimensionné s'écrit :

$$\partial_t U + \nabla_\xi \cdot (G(U)) = T(U) + K(\tilde{h}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (4.237)$$

avec le terme de flux  $G$  :

$$G(U) = \begin{pmatrix} \tilde{h}\tilde{\mathbf{v}} \\ f(U) \end{pmatrix} \quad (4.238)$$

où :

$$\begin{aligned} f(U) &= C_1 \tilde{h}\tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{1}{3} - \frac{C_1}{4} \right) \frac{\tilde{h}^3}{\bar{J}^2} \boldsymbol{\tau}_0 \otimes \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{5}{24} - \frac{C_1}{6} \right) \frac{\tilde{h}^4}{\bar{J}^3} (\Gamma \otimes \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_0 \otimes \Gamma) \\ &+ \frac{1}{\mu^2} \left( 1 - \frac{7C_2}{20} \right) \frac{\tilde{h}^4}{24\bar{J}^3} \Gamma \boldsymbol{\tau}_0^t + \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{2}{15} - \frac{C_1}{9} \right) \frac{\tilde{h}^5}{\bar{J}^4} \Gamma \otimes \Gamma - \gamma_0 C_2 \frac{\tilde{h}^2}{6\bar{J}} M_0 \\ &+ \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{1}{3} - \frac{3C_2}{20} \right) \frac{\tilde{h}^4}{8\bar{J}^3} \boldsymbol{\tau}_0 \Gamma^t + \frac{1}{\mu^2} \left( 1 - \frac{2C_2}{5} \right) \frac{\tilde{h}^5}{15\bar{J}^4} \Gamma \Gamma^t \end{aligned} \quad (4.239)$$

et le second membre :

$$K(\tilde{h}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\kappa C_2}{\rho} \frac{\tilde{h}}{3} M_0 \nabla_\xi \mathcal{H} \end{pmatrix} \quad (4.240)$$

$$T(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{C_2}{\rho} \left( \frac{\bar{J}}{2} \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{\tilde{h}}{3} \Gamma - \mu \frac{\bar{J}^2}{\tilde{h}} \tilde{\mathbf{v}} \right) + \frac{1}{\rho} \bar{\Phi}(\tilde{h}) \end{pmatrix} \quad (4.241)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi}(\tilde{h}) = & \frac{C_2}{2} \tilde{h} \boldsymbol{\tau}_1 - \tilde{h} \left( 2\mathcal{H}_0 + \frac{1}{2} \text{tr} \mathcal{H}_0 \mathbb{1} \right) \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{\tilde{h}^2}{6\bar{J}} (5 - C_2) \text{tr} \mathcal{H}_0 \Gamma \\
 & - \rho \mathcal{H}_0 \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}} \boldsymbol{\gamma}_0 + \tilde{h} \left( 1 - \frac{C_2}{3} \right) (2\mathcal{H}_0 + \text{tr} \mathcal{H}_0 \mathbb{1}) \boldsymbol{\tau}_0 + \rho M_0 \left( \bar{J} \frac{\tilde{h}^2}{2} \nabla_{\xi} \left( \frac{\boldsymbol{\gamma}_0}{\bar{J}^2} \right) - \left( 1 - \frac{C_2}{3} \right) \boldsymbol{\gamma}_0 \frac{\tilde{h}^2}{\bar{J}^2} \nabla_{\xi} \bar{J} \right) \\
 & - \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}} \left( 1 - \frac{5C_2}{12} \right) \left( \mathcal{H}_0 (\Gamma - M_0 \nabla_{\xi} p_{ext}) - \frac{1}{v} \partial_t \boldsymbol{\tau}_0 \right) - \frac{\tilde{h}^2}{2\bar{J}} \left( 1 - \frac{C_2}{4} \right) (\rho M_0 \nabla_{\xi} \boldsymbol{\gamma}_0 - (2\mathcal{H}_0 + \text{tr} \mathcal{H}_0) \Gamma) \\
 & - \rho C_2 \frac{\tilde{h}^2}{6} \nabla_{\xi} \cdot \left( \frac{\boldsymbol{\gamma}_0}{\bar{J}} M_0 \right) + \frac{1}{v} \frac{\tilde{h}^3}{3\bar{J}^2} \left( 1 - \frac{2C_2}{5} \right) \partial_t \Gamma - \frac{\rho}{\mu^2} C_2 \left( \frac{3}{20} \frac{\tilde{h}^3}{\bar{J}^2} \mathcal{M}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} + \frac{11}{5} \frac{\tilde{h}^4}{12\bar{J}^3} \mathcal{M}_{\Gamma\boldsymbol{\tau}} + \frac{2}{35} \frac{\tilde{h}^5}{\bar{J}^4} \mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} \right) \\
 & + \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^3}{\bar{J}^2} \left( \frac{1}{3} - \frac{3C_2}{20} \right) \left( (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_{\xi}) \boldsymbol{\tau}_0 - \nabla_{\xi} \cdot (\bar{J} \boldsymbol{\tau}_0) \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{2\bar{J}} \right) + \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^4}{12\bar{J}^3} \left( \frac{53C_2}{240} - 1 \right) (\nabla_{\xi} \cdot \Gamma) \boldsymbol{\tau}_0 \\
 & + \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^4}{4\bar{J}^3} \left( 1 - \frac{53C_2}{120} \right) (\Gamma \cdot \nabla_{\xi}) \boldsymbol{\tau}_0 + \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^4}{8\bar{J}^4} \left( \frac{9C_2}{20} - 1 \right) (\Gamma \cdot \nabla_{\xi} \bar{J}) \boldsymbol{\tau}_0 \\
 & + \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^4}{4\bar{J}^3} \left( 1 - \frac{17C_2}{40} \right) (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_{\xi}) \Gamma + \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^4}{4\bar{J}^3} \left( \frac{17C_2}{40} - 1 \right) (\nabla_{\xi} \cdot \boldsymbol{\tau}_0) \Gamma \\
 & + \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^4}{8\bar{J}^4} \left( \frac{23C_2}{60} - 1 \right) (\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \nabla_{\xi} \bar{J}) \Gamma + \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^5}{15\bar{J}^4} \left( \frac{187C_2}{120} - 2 \right) (\nabla_{\xi} \cdot \Gamma) \Gamma \\
 & + \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^5}{5\bar{J}^4} \left( 1 - \frac{44C_2}{105} \right) (\Gamma \cdot \nabla_{\xi}) \Gamma + \frac{\rho}{\mu^2} \frac{\tilde{h}^5}{15\bar{J}^5} \left( \frac{157C_2}{420} - 1 \right) (\Gamma \cdot \nabla \bar{J}) \Gamma
 \end{aligned} \tag{4.242}$$

et :

$$\Gamma = \rho \boldsymbol{\gamma}_0 - M_0 \nabla_{\xi} p_{ext} \tag{4.243}$$

$$\mathcal{M}_{\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}} = (\partial_{\xi} \mathbf{x})^{-1} \left( \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau}_0 \cdot \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\tau}_0^t M_0^{-1} \mathcal{H}_0 \boldsymbol{\tau}_0 \mathbf{s} \right)$$

$$\mathcal{M}_{\Gamma\boldsymbol{\tau}} = (\partial_{\xi} \mathbf{x})^{-1} \left( \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{x} \cdot \Gamma \cdot \boldsymbol{\tau}_0 + \Gamma^t M_0^{-1} \mathcal{H}_0 \boldsymbol{\tau}_0 \mathbf{s} \right) \tag{4.244}$$

$$\mathcal{M}_{\Gamma\Gamma} = (\partial_{\xi} \mathbf{x})^{-1} \left( \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{x} \cdot \Gamma \cdot \Gamma + \Gamma^t M_0^{-1} \mathcal{H}_0 \Gamma \mathbf{s} \right)$$



## 4.7 QUELQUES MODÈLES PARTICULIERS

## 4.7.1 Équation de Benney dans le cas plan

On pose :

$$\begin{aligned} M &= 1, & \Theta_R &= 1, & J &= 1, \\ H &= 0, & \mathcal{H} &= \partial_{xx}^2 h, & \tau &= 0, \\ \gamma^\xi &= \sin \theta, & \gamma^\eta &= -\cos \theta \end{aligned}$$

Le système s'écrit :

$$\partial_t h + \partial_x \left( \lambda \frac{h^3}{3} \sin \theta - \left( \frac{h^3}{3} \delta \cos \theta - \beta \lambda^2 \frac{2h^6}{15} \sin^2 \theta \right) h_x + \bar{\kappa} \frac{h^3}{3} \delta \partial_{xxx}^3 h \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.245)$$

Avec la relation  $\lambda \sin \theta = 3$ , on retrouve l'équation de Benney [4] :

$$\partial_t h + \partial_x \left( h^3 + \varepsilon \left( \frac{6}{5} R_e h^6 - \cot \theta h^3 \right) h_x + \frac{\varepsilon^2 R_e}{3 W_e} h^3 h_{xxx} \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4.246)$$

## 4.7.2 Modèle Saint-Venant dans le cas plan

On se ramène au modèle plan connu en posant :

$$\begin{aligned} M &= 1, & \Theta_R &= 1, & J &= 1, \\ H &= 0, & \mathcal{H} &= \partial_{xx}^2 h, & \tau &= 0, \\ \gamma^\xi &= \sin \theta, & \gamma^\eta &= -\cos \theta \end{aligned}$$

Le système s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_x(hv) &= \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \partial_t(hv) + \partial_x \left( C_1 h v^2 + \lambda^2 \left( \frac{1}{5} - \frac{C_1}{9} - \frac{2C_2}{75} \right) h^5 \sin^2 \theta + \cos \theta \frac{\delta}{\beta} C_2 \frac{h^2}{6} \right) & \\ = \frac{C_2}{\beta} \left( \frac{\lambda}{3} h \sin \theta - \frac{\bar{v}}{\bar{h}} \right) + h \frac{\delta}{\beta} \frac{C_2}{3} \bar{\kappa} h_{xxx} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) & \end{aligned} \quad (4.247)$$

En posant le changement de variable suivant sur les paramètres du modèle :  $C_1 = \frac{6}{5} + A$  ,  $C_2 = 3B$

$$\partial_t h + \partial_x(hv) = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t(hv) + \partial_x \left( \left( \frac{6}{5} + A \right) hv^2 + \lambda^2 \left( \frac{1}{15} - \frac{A}{9} - \frac{2B}{25} \right) h^5 \sin^2 \theta + B \cos \theta \frac{\delta h^2}{\beta} \right) \\ &= \frac{B}{\beta} \left( \lambda h \sin \theta - \frac{3v}{h} \right) + Bh \frac{\delta}{\beta} \bar{\kappa} h_{xxx} + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.248)$$

On retombe exactement sur les modèles paramétrés par  $(A, B)$  de J.P. Vila [53].

#### 4.7.3 Modèle de plus grande pente

Dans ce qui suit, nous décrivons le modèle de plus grande pente en coordonnées curvilignes et nous écrivons les équations Shallow-water dans cette configuration. En premier, définissons  $\theta$  et  $\phi$  tels que la normale  $n$  à la surface  $\mathcal{S}$  soit donnée par :

$$n = \begin{pmatrix} -\frac{\nabla_x z}{\sqrt{1 + \|\nabla_x z\|^2}} \\ \frac{\nabla_x z}{\sqrt{1 + \|\nabla_x z\|^2}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow n = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.249)$$

Ici  $\theta$  représente la pente locale du fond. Nous allons utiliser les coordonnées curvilignes de plus grande pente  $\xi_1$  et  $\xi_2$  tel que nous aillons :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} = \cos \theta \cos \phi, & \frac{\partial x}{\partial \xi_2} = -\sin \phi, \\ \frac{\partial y}{\partial \xi_1} = \cos \theta \sin \phi, & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} = \cos \phi, \end{cases} \Leftrightarrow \partial_{\xi} x = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Ce système de coordonnées est défini de manière unique prouvant que la direction de plus grande pente existe ; cette condition est satisfaite si  $s \neq 0$ . Cette direction est à l'intersection du plan tangent au fond et du plan défini par la normale à la surface et le vecteur gravité ; nous verrons plus tard qu'il s'agit de la direction principale de l'écoulement. Grâce à cette définition, nous pouvons voir que ce système de coordonnées est fait pour les écoulements gravitaires mais n'est plus pertinente pour les fluides soumis à d'autres forces. Dans ce système de coordonnées, les quantités mises à l'échelle  $\bar{J}$  et  $\bar{M}$  associées au changement de référentiel sont particulièrement simples. Il est facile de montrer que :

$$\bar{J} = 1, \bar{M} = \mathbb{1}, c(\partial_{\xi} x)^{-1} s = -\sin(\theta) e_1$$

avec  $e_1 = (1, 0)^t$ . Écrivons maintenant le développement asymptotique de la courbure mise à l'échelle de la surface libre. La normale unitaire  $\vec{N}$  à la surface libre s'écrit  $\vec{N} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$  avec :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -s - \varepsilon (\mathbb{1} - ss^t) (\partial_\xi x)^{-t} \nabla_\xi h \\ c - \varepsilon (c (\partial_\xi x)^{-1} s)^t \nabla_\xi h \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^2 \theta_R). \quad (4.250)$$

La courbure mise à l'échelle est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \nabla_x \cdot \frac{(s\varepsilon (\mathbb{1} - ss^t) (\partial_\xi x)^{-t} \nabla_\xi h)}{\|\vec{n}\|}, \\ &= \theta_R \text{tr} \left( (\partial_\xi x)^{-1} \partial_\xi s \right) + \varepsilon \text{tr} \left( (\partial_\xi x)^{-1} \partial_\xi ((\partial_\xi x) \nabla_\xi h) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.251)$$

Ainsi, le développement de  $\mathcal{H}$  suivant  $\varepsilon$  est donné par :

$$\mathcal{H} = \theta_R H_b + \varepsilon (\Delta_\xi \tilde{h} + \theta_R \nabla_\xi \tilde{h} \cdot V_{\theta, \phi}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (4.252)$$

$$\text{avec } V_{\theta, \phi} = \left( \cos \theta \sin(2\phi) \partial_2 \phi - \tan \theta \partial_1 \phi, -\frac{\partial_1 \phi}{\cos \theta} \right)^t.$$

Ici,  $\theta_R H_b$  représente la courbure du fond. À ce point, deux situations se présentent. Si  $\theta_R = \mathcal{O}(1)$ , dans ce cas la courbure moyenne du fond est :

$$\mathcal{H} = - \left( \frac{\partial \theta}{\partial \xi_1} + \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Dans ce cas, les équations Shallow-water se réécrivent :

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{h} + \nabla_\xi \cdot (\tilde{h} \tilde{\mathbf{v}}) &= 0 \\ \partial_t (\tilde{h} \tilde{\mathbf{v}}) + \nabla_\xi \cdot \left[ C_1 \tilde{h} \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} + \frac{\delta}{\beta} C_2 \cos(\theta) \frac{\tilde{h}^2}{6} + \lambda^2 \left( \frac{1}{5} - \frac{C_1}{9} - \frac{2C_2}{75} \right) \tilde{h}^5 (\sin(\theta))^2 e_1 \otimes e_1 \right] \\ &= - \frac{\delta}{\beta} \frac{C_2}{3} \bar{\kappa} \tilde{h} \nabla_\xi (\theta_1 + \sin(\theta) \phi_2) + \frac{C_2}{\beta} \left( \frac{\lambda}{3} \tilde{h} \sin(\theta) e_1 - \frac{\tilde{\mathbf{v}}}{\tilde{h}} \right) + \\ &\quad + \frac{\delta}{\beta} \frac{\tilde{h}^2}{2} \sin(\theta) \left[ \begin{array}{c} \frac{C_2}{12} \theta_1 + \Theta_R \frac{1}{3} \left( \left( \frac{C_2}{2} - 2 \right) \theta_1 + \left( \frac{7C_2}{4} - 8 \right) \sin(\theta) \phi_2 \right) \\ \frac{C_2}{12} (\theta_2 + \Theta_R \sin(\theta) \phi_1) \end{array} \right] \\ &\quad + \lambda^2 \tilde{h}^5 \cos(\theta) \sin(\theta) \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{15} \left( 1 + \frac{253C_2}{840} \right) \theta_1 \\ - \frac{2C_2}{35} \sin(\theta) \phi_1 \end{array} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.253)$$

Si l'on s'intéresse au système de Navier-Stokes en 2D avec  $\theta_R = 1$ , on peut facilement voir que le modèle Shallow-water 1D associé est :

$$\begin{aligned}
& \partial_t \tilde{h} + \partial_\xi(\tilde{h}\tilde{v}) = 0 \\
& \partial_t(\tilde{h}\tilde{v}) + \partial_\xi \left[ C_1 \tilde{h}\tilde{v}^2 + \frac{\delta}{\beta} C_2 \cos(\theta) \frac{\tilde{h}^2}{6} + \lambda^2 \left( \frac{1}{5} - \frac{C_1}{9} - \frac{2C_2}{75} \right) \tilde{h}^5 (\sin(\theta))^2 \right] \\
= & -\frac{\delta}{\beta} \frac{C_2}{3} \tilde{\kappa} \tilde{h} \partial_\xi \theta + \frac{C_2}{\beta} \left( \frac{\lambda}{3} \tilde{h} \sin(\theta) - \frac{\tilde{v}}{\tilde{h}} \right) + \\
& + \frac{\delta}{\beta} \frac{\tilde{h}^2}{2} \sin(\theta) \left( \frac{C_2}{4} - \frac{2}{3} \right) \partial_\xi \theta \\
& + \lambda^2 \tilde{h}^5 \cos(\theta) \sin(\theta) \frac{1}{15} \left( 1 + \frac{253C_2}{840} \right) \partial_\xi \theta + \mathcal{O}(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{4.254}$$

Ici la variable  $\xi$  est la coordonnées curviligne classique. On peut voir qu'aucune contribution des dérivées même du troisième ordre de  $\tilde{h}$ , n'apparaissent dans le terme de capillarité. Les effets capillaires sont donc essentiellement supportés par la courbure du fond qui n'est pas petite : la capillarité n'est pas dispersive dans ce cas et agit comme un terme classique de friction ou d'amortissement  $-\kappa \tilde{h} \nabla_\xi H_b$ , dépendant du signe de la courbure moyenne du fond.

Pour retrouver le terme classique de capillarité « dispersif » incluant la dérivée du troisième ordre de  $\tilde{h}$ , supposons que la courbure du fond est petite : plus précisément nous considérons que  $\theta_R = \varepsilon \tilde{\theta}_R$ . Dans ce cas, nous trouvons :

$$\mathcal{H} = \varepsilon \tilde{\theta}_R H_b + \varepsilon \Delta_\xi \tilde{h} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{4.255}$$

La contribution au terme de capillarité est négligeable si  $\tilde{\kappa} = \mathcal{O}(1)$  : nous voyons seulement l'influence des termes de capillarité prouvant que  $\varepsilon \tilde{\kappa} = \mathcal{O}(1)$ . Notons  $\tilde{\kappa} = \varepsilon \bar{\kappa}$ , le terme de capillarité s'écrit :

$$-\tilde{\kappa} \frac{\delta}{\beta} h \nabla_\xi \mathcal{H} = -\tilde{\kappa} \frac{\delta}{\beta} \tilde{h} \nabla_\xi (\theta_R H_b + \Delta_\xi \tilde{h}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{4.256}$$

Dans le cas d'écoulement Shallow-water sur un fond plat et horizontal, nous retrouvons clairement le terme classique de capillarité  $-\tilde{\kappa} \frac{\delta}{\beta} \tilde{h} \nabla \Delta \tilde{h}$  trouvé dans la littérature (cf Bresch et Desjardins [8], Bresch *et al.* [9]) pour une analyse mathématique des modèles Shallow-water avec ce type de capillarité et plus de références.

Ces résultats sont été publiés dans l'article Boutounet *et al.* [6].

Troisième partie

ÉCOULEMENTS MULTICOUCHES



**D**ANS cette partie, nous avons voulu voir plus finement le comportement de la couche de gaz se situant au dessus du film mince. Il a donc fallu modéliser cette couche. Deux méthodes différentes ont alors été mises en oeuvre, une première consistant à voir le gaz comme un fluide à surface libre, ce qui fait l'objet d'une publication à venir (Boutounet *et al.* [7]) et une seconde méthode qui consiste à fixer la hauteur maximale des fluides, en contraignant le film et le gaz à s'écouler dans un tuyau.





## ÉCOULEMENT DE TYPE SHALLOW-WATER DE DEUX FLUIDES À SURFACE LIBRE

---

Dans cette partie, nous montrons comment développer les solutions des équations de Navier-Stokes dans le régime Shallow-Water. En utilisant ce développement, nous obtenons une hiérarchie de modèles pour des écoulements bi-fluides de type Shallow-Water.

Tout d'abord, nous écrivons des modèles de lubrification : en utilisant le premier (resp. deuxième) ordre du développement du champ de vitesse, nous obtenons un modèle non visqueux (resp. visqueux) de lois de conservations sur les hauteurs des fluides ou couplé aux équations de Kuramoto-Sivashinsky si l'on prend en compte les forces de capillarité. Puis, avec le deuxième (resp. troisième) ordre du champ de vitesse, nous trouvons un modèle Shallow-Water non-visqueux (resp. visqueux).

Kliakhandler [27] a déjà fait des modèles à  $n$  couches (une équation par couche), donc  $n$  équations couplées et a réalisé une étude par morceaux. Il a aussi montré le caractère bien posé de ces systèmes dans certaines situations. Nous généralisons ici cette étude, en construisant un système à  $2n$  ( $n = 2$ ) équations ainsi qu'une analyse de stabilité complète.

De plus grâce à ces modèles bi-couches, nous pouvons construire des modèles de glissement en considérant que les deux couches sont constituées d'un même fluide et que la couche du dessous est de très faible épaisseur.

### SOMMAIRE

---

5.1	Description d'écoulements bi-fluides dans le régime Shallow-Water	<b>119</b>
5.1.1	Mise à l'échelle des équations de Navier-Stokes	120
5.1.2	Développement asymptotique des solutions des équations de Navier-Stokes	123
5.2	Théorie de la lubrification	<b>125</b>
5.2.1	Lois de conservation avec et sans diffusion	126
5.2.2	Analyse de stabilité linéaire	129
5.3	Modèles de type Saint-Venant	<b>137</b>
5.3.1	Modèle de glissement	142

---

### 5.1 DESCRIPTION D'ÉCOULEMENTS BI-FLUIDES DANS LE RÉGIME SHALLOW-WATER

Nous écrivons ici les équations adimensionnées de Navier-Stokes pour des écoulements bi-fluides dans le régime Shallow-Water. Puis nous utilisons un développement asymptotique des solutions en respectant le rapport  $\varepsilon$  (défini plus loin) dans le voisinage de la solution stationnaire de Nusselt.

5.1.1 Mise à l'échelle des équations de Navier-Stokes

Nous considérons deux fluides incompressibles et non-miscibles superposés, de masses volumiques, viscosités et capillarités  $(\rho_i, \nu_i, \sigma_i)$ ,  $i = 1, 2$  s'écoulant sur un plan incliné de pente  $\theta$  (cf figure 7).

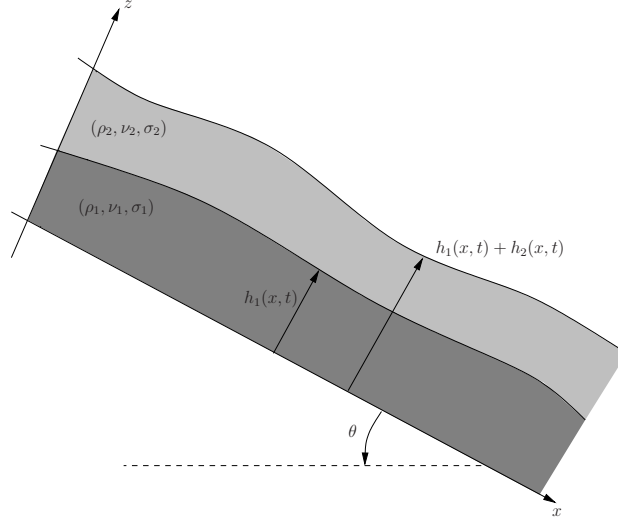


FIGURE 7: Deux fluides s'écoulant sur un plan incliné.

On peut alors étudier le nombre de paramètres dont dépend le système, comme vu dans la première partie en 1.3.3. Le système est ici défini par deux nombres de Reynolds  $R_{e,i}$ , de Froude  $F_i$  et de Weber  $W_{e,i}$  (un dans chaque fluide), les deux viscosités  $\nu_i$  et masses volumiques  $\rho_i$  ainsi que la pente  $\theta$  de la surface d'écoulement des fluides. Il y a donc au total onze paramètres régissant cet écoulement. Or comme précédemment, on dispose d'une relation reliant les nombres de Reynolds et de Froude dans chacun des fluides  $\lambda_i = \frac{R_{e,i}}{F_i^2}$ , il ne reste donc que neuf paramètres pour décrire ce système :  $R_{e,i}$ ,  $W_{e,i}$ ,  $\nu_i$ ,  $\rho_i$  et  $\theta$ .

On choisit de ne garder qu'un seul nombre de Reynolds et de Froude pour écrire notre système. On introduit alors le paramètre  $\varepsilon$  qui représente le rapport entre la hauteur  $H$  et la longueur  $L$  caractéristique de l'écoulement et les nombres adimensionnels de Reynolds  $R_e = R_{e,1}$ , de Froude  $F$  et le nombre de Weber  $W_i$  du fluide  $i$  :

$$\varepsilon = \frac{H}{L}, \quad R_e = \frac{\rho_1 H U}{\nu_1}, \quad F^2 = \frac{U^2}{gH}, \quad W_i = \frac{\sigma_i}{\rho_i H U^2}, \quad i = 1, 2,$$

où  $L$  est la longueur caractéristique prise dans le sens de l'écoulement. La vitesse caractéristique  $U$  peut être choisie comme la vitesse moyenne du fluide dans un écoulement de type Poiseuille. Nous introduisons aussi deux rapports supplémentaires  $\rho$  et  $\nu$  :

$$\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \nu = \frac{\nu_2}{\nu_1}.$$

Le mouvement des fluides (1) et (2) est décrit par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \rho_i \left( \partial_t u_i + \partial_x u_i^2 + \partial_z u_i w_i \right) + \frac{\partial_x p_i}{F^2} &= \frac{s \rho_i}{\varepsilon F^2} + \frac{\mu_i}{\varepsilon R_e} \left( \partial_{zz} u_i + \varepsilon^2 \partial_{xx} u_i \right), \\ \rho_i \left( \partial_t w_i + \partial_x u_i w_i + \partial_z w_i^2 \right) + \frac{\partial_z p_i}{\varepsilon^2 F^2} &= -\frac{\rho_i c}{\varepsilon^2 F^2} + \frac{\mu_i}{\varepsilon R_e} \left( \partial_{zz} w_i + \varepsilon^2 \partial_{xx} w_i \right), \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\partial_x u_i + \partial_z w_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Ici  $\rho_1 = 1$ ,  $\rho_2 = \rho$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = \nu$ . Ces équations s'appliquent dans le domaine :

$$\Omega_{1,t} = \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq z \leq h_1(x, t) \right\}$$

et :

$$\Omega_{2,t} = \left\{ (x, z) \in \mathbb{R}^2 / h_1(x, t) \leq z \leq h_1 + h_2(x, t) = h(x, t) \right\}.$$

Les conditions limites cinématiques au fond, à l'interface et à la surface libre sont :

$$\begin{aligned} u_1(0, x) = w_1(0, x) &= 0, & \partial_t h_1 + u_1(h_1) \partial_x h_1 &= w_1(h_1), \\ u_1(h_1) &= (h_1), & \partial_t h + u_2(h) \partial_x (h) &= w_2(h), \\ w_1(h_1) &= w_2(h_1). \end{aligned} \quad (5.2)$$

On suppose que les tenseurs des contraintes sont continus à l'interface et à la surface libre. Tout d'abord, la continuité du tenseur des contraintes normales donne :

$$\begin{aligned} p_2(h) &= -\frac{\kappa_2 F^2 \partial_{xx} h}{(1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\nu \varepsilon F^2}{R_e} \partial_x u_2(h) \frac{1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2}{1 - \varepsilon^2 (\partial_x h)^2}, \\ p_1(h_1) - p_2(h_1) &= -\frac{\kappa_1 F^2 \partial_{xx} h_1}{(1 + \varepsilon^2 (\partial_x h_1)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad - \frac{2\varepsilon F^2}{R_e} (\partial_x u_1(h_1) - \nu \partial_x u_2(h_1)) \frac{1 + \varepsilon^2 (\partial_x h_1)^2}{1 - \varepsilon^2 (\partial_x h_1)^2}, \end{aligned}$$

avec  $\kappa_i = \varepsilon^2 W_i$ .

Pour prendre en compte les termes de capillarité, nous posons que  $\kappa_i = \mathcal{O}(1)$ . Puis, le tenseur des contraintes tangentielles donne :

$$\begin{aligned} (\partial_z u_2 + \varepsilon^2 \partial_x w_2)(h) &= 4\varepsilon^2 \frac{\partial_x u_2(h)}{1 - \varepsilon^2 (\partial_x h)^2} \partial_x h, \\ \nu (\partial_z u_2 + \varepsilon^2 \partial_x w_2)(h_1) - (\partial_z u_1 + \varepsilon^2 \partial_x w_1)(h_1) &= 4\varepsilon^2 \frac{(\nu \partial_x u_2 - \partial_x u_1)(h_1)}{1 - \varepsilon^2 (\partial_x h_1)^2} \partial_x h_1. \end{aligned}$$

Décrivons maintenant la solution stationnaire du système. Le champ de vitesse ne doit pas dépendre des variables  $x$  et  $t$ . Les hauteurs de fluides sont constantes  $h_1(x, t) = \bar{h}$ ,  $h_2(x, t) = 1 - \bar{h}$  alors que la pression est hydrostatique :

$$p_1(z) = c(\bar{h} - z) + \rho c(1 - \bar{h}), \quad \forall 0 \leq z \leq \bar{h}, \quad p_2(z) = \rho c(1 - z),$$

et les vitesses des fluides ont un profil semi-parabolique :

$$u_1(z) = \lambda \left( \rho(1 - \bar{h})z + \bar{h}z - \frac{z^2}{2} \right), \quad \forall 0 \leq z \leq \bar{h},$$

$$u_2(z) = \lambda \bar{h} \left( \rho(1 - \bar{h}) + \frac{\bar{h}}{2} \right) + \frac{\lambda \rho}{\nu} \left( (1 - \bar{h})(z - \bar{h}) - \frac{(z - \bar{h})^2}{2} \right), \quad \forall \bar{h} \leq z \leq 1,$$

où  $\lambda = \frac{Re \sin \theta}{F^2}$  est une constante.

Dans ce qui suit, nous analyserons l'écoulement bicouche dans le voisinage de cette solution stationnaire, ce qui mène à une mise à l'échelle naturelle pour la vitesse caractéristique du fluide  $U$ , la constante  $\lambda$  doit alors satisfaire une relation supplémentaire. Si l'on choisit le rapport entre le débit total et la masse totale du fluide alors :

$$\int_0^{\bar{h}} u_1 + \rho \int_{\bar{h}}^1 u_2 = \bar{h} + \rho(1 - \bar{h}),$$

$$\lambda = 3 \frac{\bar{h} + \rho(1 - \bar{h})}{\bar{h}^3 + 3\rho\bar{h}^2(1 - \bar{h}) + 3\rho^2\bar{h}(1 - \bar{h})^2 + \frac{\rho^2}{\nu}(1 - \bar{h})^3}.$$

Notons que pour un seul fluide  $\rho = \nu = 1$ , on retrouve la condition  $\lambda = 3$  de Vila [54]. Un autre choix possible pour la vitesse caractéristique serait de prendre la vitesse du fluide à la surface libre, on retrouve alors la valeur classique  $\lambda = 2$ . Dans les deux cas, on peut imposer une relation entre le Reynolds et le Froude dépendant du choix de la vitesse caractéristique. Dans la suite, nous avons choisi une vitesse caractéristique de manière à ce que  $\lambda = 3$ . Il reste  $Re$ ,  $\theta$ ,  $\bar{h}$ ,  $\kappa_i$ ,  $\rho$ ,  $\nu$  comme paramètres indépendants pour décrire l'écoulement bicouche de fluides Newtoniens.

Nous calculons ensuite les moyennes des équations dans la direction de l'écoulement. D'abord nous intégrons la condition de divergence nulle dans chaque couche en utilisant les conditions cinématiques, nous trouvons alors pour la loi de conservation de la masse :

$$\partial_t h_1 + \partial_x \left( \int_0^{h_1} u_1(z) dz \right) = 0, \quad \partial_t h_2 + \partial_x \left( \int_{h_1}^h u_2(z) dz \right) = 0.$$

Notons que  $q_1 = h_1 \bar{u}_1 = \int_0^{h_1} u_1$  et  $q_2 = h_2 \bar{u}_2 = \int_{h_1}^h u_2$  sont les débits dans la direction de l'écoulement : de masse donnent alors :

$$\partial_t h_1 + \partial_x (h_1 \bar{u}_1) = 0, \quad \partial_t h_2 + \partial_x (h_2 \bar{u}_2) = 0. \quad (5.3)$$

On écrit ensuite un système d'évolution pour  $q_i = h_i \bar{u}_i$ , en intégrant les équations des quantités de mouvement sur l'épaisseur du fluide :

$$\begin{aligned}
\partial_t \left( \int_0^{h_1} u_1 \right) + \partial_x \left( \int_0^{h_1} u_1^2 + \frac{p_1}{F^2} \right) &+ \frac{\kappa_1 \partial_x h_1 \partial_{xx} h_1}{(1 + \varepsilon^2 (\partial_x h_1)^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
&- \frac{\partial_z u_1(0)}{\varepsilon R_e} + \frac{\lambda}{\varepsilon R_e} h_1 + \frac{2\varepsilon}{R_e} \partial_x \left( \int_0^{h_1} \partial_x u_1 \right) - \mathcal{F} \\
\partial_t \left( \rho \int_{h_1}^h u_2 \right) + \partial_x \left( \int_{h_1}^h \rho u_2^2 + \frac{p_2}{F^2} \right) &+ \frac{\kappa_2 \partial_x h \partial_{xx} h}{(1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
&\frac{\lambda \rho h_2}{\varepsilon R_e} + \frac{2\varepsilon}{R_e} \partial_x \left( \int_{h_1}^h \partial_x u_2 \right) + \mathcal{F},
\end{aligned} \tag{5.4}$$

avec  $\mathcal{F}$  défini tel que :

$$\mathcal{F} = -\frac{p_2(h_1) \partial_x h_1}{F^2} - \frac{\nu}{\varepsilon R_e} \partial_z u_2(h_1) + \frac{\nu \varepsilon}{R_e} (2\partial_x u_2(h_1) \partial_x h_1 - \partial_x w_2(h_1)).$$

Pour écrire le système d'évolution fermé, il faut relier la variation des moyennes des quantités, les tenseurs des contraintes tangentielles au fond et à l'interface et  $\mathcal{F}$  avec les inconnues  $h_i, q_i$ . Nous allons suivre la méthodologie introduite par Vila [54] dans le cas d'une seule couche, en développant le champ de vitesse par rapport à  $\varepsilon$ , on obtient un développement des quantités précédentes et de  $q_i$  comme des fonctions de  $h_i$  et de ses dérivées pour les différents ordres voulus. Pour un ordre donné, nous pouvons alors écrire les inconnues en un système (5.4) comme des fonctions de  $(h_i, q_i)$  et obtenir des modèles fermés.

### 5.1.2 Développement asymptotique des solutions des équations de Navier-Stokes

Dans cette partie, nous montrons comment écrire le développement de la pression dans chaque couche dans le régime Shallow-Water  $\varepsilon \approx 0$ . Dans ce régime, les inconnues  $u_i, p_i$  satisfont un système différentiel en  $z$ ;  $w_i$  est déterminé grâce à la condition de divergence nulle. Pour faire le développement asymptotique, écrivons les équations de Navier-Stokes comme un système différentiel en  $z$  pour  $u_i, p_i$ . Les équations différentielles sur  $u_i$  sont écrites pour  $i = 1, 2$  :

$$\mu_i \partial_{zz} u_i + \rho_i \lambda = \varepsilon R_e \rho_i (\partial_t u_i + u_i \partial_x u_i + w_i \partial_z u_i) + \frac{\varepsilon R_e}{F^2} \partial_x p_i - \mu_i \varepsilon^2 \partial_{xx} u_i, \tag{5.5}$$

avec les conditions limites :

$$\begin{aligned}
\partial_z u_2(h) &= 4\varepsilon^2 \frac{\partial_x u_2(h)}{1 - \varepsilon^2 (\partial_x h)^2} \partial_x h - \varepsilon^2 \partial_x w_2(h), \\
\nu \partial_z u_2(h_1) - \partial_z u_1(h_1) &= 4\varepsilon^2 \frac{(\nu \partial_x u_2 - \partial_x u_1)(h_1)}{1 - \varepsilon^2 (\partial_x h_1)^2} \partial_x h_1 \\
&\quad - \varepsilon^2 (\nu \partial_x w_2(h_1) - \partial_x w_1(h_1)),
\end{aligned}$$

et  $u_1(0) = 0$ ,  $u_1(h_1) = u_2(h_1)$ .

Ensuite écrivons le système différentiel pour la pression du fluide :

$$\partial_z p_i + \rho_i c = \mu_i \frac{\varepsilon F^2}{R_e} \partial_{zz} w_i - \varepsilon^2 F^2 \rho_i \left( \partial_t w_i + u_i \partial_x w_i + w_i \partial_z w_i \right) + \mu_i \frac{\varepsilon^3 F^2}{R_e} \partial_{xx} w_i, \quad (5.6)$$

et les conditions limites associées :

$$\begin{aligned} p_2(h) &= -\frac{\kappa_2 F^2 \partial_{xx} h}{(1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\nu \varepsilon F^2}{R_e} \partial_x u_2(h) \frac{1 + \varepsilon^2 (\partial_x h)^2}{1 - \varepsilon^2 (\partial_x h)^2}, \\ p_1(h_1) - p_2(h_1) &= -\frac{\kappa_1 F^2 \partial_{xx} h_1}{(1 + \varepsilon^2 (\partial_x h_1)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad - \frac{2\varepsilon F^2}{R_e} (\partial_x u_1(h_1) - \nu \partial_x u_2(h_1)) \frac{1 + \varepsilon^2 (\partial_x h_1)^2}{1 - \varepsilon^2 (\partial_x h_1)^2}, \end{aligned}$$

Enfin, les vitesses verticales sont déterminées par la condition de divergence nulle :

$$\partial_z w_i = -\partial_x u_i, \quad w_1(0) = 0, \quad w_1(h_1) = w_2(h_1).$$

Avec cette formulation des équations, nous voyons que l'on peut introduire  $\alpha, \beta, \delta$  trois nombres adimensionnels pour écrire le développement des solutions :

$$\alpha = \frac{\varepsilon F^2}{R_e}, \quad \beta = \varepsilon R_e, \quad \delta = \frac{\varepsilon R_e}{F^2}. \quad (5.7)$$

Le paramètre  $\alpha$  apparaît avec les termes de diffusion visqueuse,  $\beta$  adimensionne les termes de transport convectif, et  $\delta$  la pression. Le choix des paramètres  $R_e$  et  $F$  peut être fait arbitrairement à condition que  $\alpha, \beta, \delta \ll 1$ , de manière à rester proche de la solution de type Nusselt. Cela nous permet d'envisager un large éventail de paramètres pour le développement des solutions. Considérons un développement de Hilbert de la vitesse et de la pression du fluide de la forme :

$$u_i = \sum_{k=0}^{\infty} u_i^{(k)}, \quad p_i = \sum_{k=0}^{\infty} p_i^{(k)},$$

tels que (pour les ordres qui nous intéressent) :

$$u_i - u_i^{(0)} = \mathcal{O}(\beta + \delta), \quad p_i - p_i^{(0)} = \mathcal{O}\left(\alpha + \kappa_i \frac{\beta}{\delta}\right),$$

$$u_i - u_i^{(0)} - u_i^{(1)} = \mathcal{O}(\alpha\delta + \beta(\beta + \delta) + \kappa_i \beta).$$

Calculons en premier  $u_i^{(0)}, p_i^{(0)}$ . Posons  $\alpha, \beta, \delta \rightarrow 0$  dans les équations précédentes, ce qui donne un système différentiel en  $z$  similaire à celui qui permet de déterminer la solution stationnaire. On obtient alors la pression hydrostatique pour  $p_i^{(0)}, i = 1, 2$  :

$$\begin{aligned} p_1^{(0)}(z) &= c(\rho h_2 + h_1 - z) - \kappa_1 F^2 \partial_{xx} h_1 - \kappa_2 F^2 \partial_{xx} h, \\ p_2^{(0)}(z) &= \rho c(h_1 + h_2 - z) - \kappa_2 F^2 \partial_{xx} h. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Les vitesses des fluides dans la direction de l'écoulement ont un profil semi-parabolique :

$$u_1^{(0)}(z) = \lambda \left( \rho h_2 z + h_1 z - \frac{z^2}{2} \right), \quad (5.9)$$

$$u_2^{(0)}(z) = \lambda h_1 \left( \rho h_2 + \frac{h_1}{2} \right) + \frac{\lambda \rho}{\nu} \left( h_2(z - h_1) - \frac{(z - h_1)^2}{2} \right). \quad (5.10)$$

Le calcul des ordres suivants se fait alors comme il suit : supposons que l'on connaît déjà les  $u_i^{(j)}, p_i^{(j)}, j \leq k$ , alors  $u_i^{(k+1)}$  se calcule en résolvant un système différentiel de la forme :

$$\mu_i \partial_{zz} u_i^{(k+1)} = F_{i,k}(u_n^{(j)}, p_n^{(j)}), \quad j \leq k, \quad n = 1, 2 \quad (5.11)$$

avec les conditions limites :

$$\begin{aligned} \partial_z u_2^{(k+1)}(h_1 + h_2) &= g_2^{(k)}, \quad \nu \partial_z u_2^{(k+1)}(h_1) - \partial_z u_1^{(k+1)}(h_1) = g_1^{(k)}, \\ u_1^{(k+1)}(h_1) &= u_2^{(k+1)}(h_1), \quad u_1^{(k+1)}(0) = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

La solution  $u_i^{(k+1)}$  de ce système est alors écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} u_1^{(k+1)} &= z \left( \nu g_2^{(k)} - g_1^{(k)} - \int_{h_1}^h F_{2,k}(y) dy \right) - \int_0^z \int_{\bar{z}} h_1 F_{1,k}(y) dy d\bar{z}, \\ u_2^{(k+1)} &= h_1 \left( \nu g_2^{(k)} - g_1^{(k)} - \int_{h_1}^h F_{2,k}(y) dy \right) - \int_0^{h_1} \int_{\bar{z}}^{h_1} F_{1,k}(y) dy d\bar{z} \\ &\quad + g_2^{(k)}(z - h_1) - \frac{1}{\nu} \int_{h_1}^z \int_{\bar{z}} F_{2,k}(y) dy d\bar{z}. \end{aligned}$$

De la même manière, on peut déterminer le développement asymptotique de la pression dans le fluide à tous les ordres en résolvant le système différentiel associé.

## 5.2 THÉORIE DE LA LUBRIFICATION

Dans cette partie, nous allons construire des modèles de lubrification. En effet les calculs précédents montrent que la vitesse du fluide peut être développée en fonction des petits paramètres  $\alpha, \beta, \delta$ , les hauteurs des fluides  $h_i$  et leurs dérivées en temps et en espace.

Nous allons utiliser ici le premier et le deuxième ordre du développement de  $u_i$  pour calculer respectivement non visqueuses et visqueuses sur les hauteurs de fluides  $h_1, h_2$ .

Nous ferons alors une étude de stabilité linéaire des solutions stationnaires : ce qui revient à déterminer la stabilité linéaire de l'écoulement de type Nusselt dans la limite de longue longueur d'onde.

### 5.2.1 Lois de conservation avec et sans diffusion

Tout d'abord nous écrivons le système non-visqueux de lois de conservations, qui est analogue aux équations de Burgers dans le cas d'une seule couche de fluide.

En utilisant le développement asymptotique dérivé précédemment, on obtient  $u_i = u_i^{(0)} + \mathcal{O}(\beta + \delta)$ . On peut alors facilement déduire de cette estimation que :

$$\begin{aligned} \int_0^{h_1} u_1 &= \lambda h_1^2 \left( \frac{\rho h_2}{2} + \frac{h_1}{3} \right) + \mathcal{O}(\beta + \delta), \\ \int_{h_1}^h u_2 &= \lambda h_1 h_2 \left( \rho h_2 + \frac{h_1}{2} \right) + \frac{\lambda \rho}{v} \frac{h_2^3}{3} + \mathcal{O}(\beta + \delta). \end{aligned} \quad (5.13)$$

En utilisant ces développements dans les lois de conservation de la masse (5.3), on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t h_1 + \partial_x \left( \lambda h_1^2 \left( \frac{\rho h_2}{2} + \frac{h_1}{3} \right) \right) &= \mathcal{O}(\beta + \delta), \\ \partial_t h_2 + \partial_x \left( \lambda h_1 h_2 \left( \rho h_2 + \frac{h_1}{2} \right) + \frac{\lambda \rho}{v} \frac{h_2^3}{3} \right) &= \mathcal{O}(\beta + \delta). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Nous déduisons du système (5.14) un système fermé d'équations aux dérivées partielles sur  $(h_1, h_2)$  en négligeant les termes d'ordre faible.

Ce système est hyperbolique et possède des singularités en temps fini. Néanmoins il donne une information utile sur les vitesses caractéristiques perturbées par des petits nombres d'ondes. Elles sont données par  $\Lambda_1 > \Lambda_2$ , respectivement la vitesse caractéristique à la surface libre et à l'interface :

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{\lambda}{4v} (2\rho h_2^2 + 6\rho v h_1 h_2 + 3v h_1^2 + \sqrt{\Delta}) \\ \Lambda_2 &= \frac{\lambda}{4v} (2\rho h_2^2 + 6\rho v h_1 h_2 + 3v h_1^2 - \sqrt{\Delta}) \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\Delta = h_1^2 \left( (2\rho h_2 + h_1)^2 + 8\rho^2 h_2^2 \right) v^2 + 4\rho h_2^2 h_1 (2\rho h_2 - h_1) v + 4\rho^2 h_2^4.$$

Le système est strictement hyperbolique si et seulement si  $\Delta > 0$ . Comme  $\Delta$  est un polynôme de degré deux par rapport à  $v$ , son discriminant vaut  $-128\rho^3 h_1^2 h_2^5 (h_1 + \rho h_2)$ , qui est strictement négatif puisque les variables  $\rho$ ,  $h_1$  et  $h_2$  sont strictement positives. Donc la condition  $h_1 > 0$  et  $h_2 > 0$  assure l'hyperbolicité du système (5.14).

Ensuite, nous écrivons un système de lois de conservation en considérant l'ordre suivant des termes dans le développement de  $u_i = u_i^{(0)} + u_i^{(1)} + \mathcal{O}\left(\alpha\delta + \beta(\beta + \delta) + \kappa_i \frac{\beta}{\delta}\right)$ . On introduit alors le développement du débit  $q_i = q_i^{(0)} + q_i^{(1)} + h.o.t$  dans les lois de conservation de la masse, on



en déduit un système d'équations de type Benney ou Kuramoto-Sivashinsky (si l'on prend en compte les termes de capillarité) :

$$\begin{aligned} & \partial_t \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \lambda h_1^2 \left( \frac{h_1}{3} + \frac{\rho h_2}{2} \right) \\ \lambda h_1 h_2 \left( \rho h_2 + \frac{h_1}{2} \right) + \frac{\lambda \rho}{3\nu} h_2^3 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \beta \partial_x \left( d(h_i) \partial_x \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right) + \beta \partial_x \left( K(h_i) \partial_x^3 \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right), \end{aligned} \quad (5.16)$$

avec les coefficients de viscosité  $d_{i,j} = \frac{\cot \theta}{Re} d_{i,j,1} - \lambda d_{i,j,2}$  où :

$$\begin{aligned} d_{1,1,1} &= h_1^2 \left( \frac{h_1}{3} + \frac{\rho h_2}{2} \right), \\ d_{1,2,1} &= \rho h_1^2 \left( \frac{h_1}{3} + \frac{h_2}{2} \right), \\ d_{2,1,1} &= \frac{\rho h_2^3}{3\nu} + \rho h_1 h_2^2 + h_2 \frac{h_1^2}{2}, \\ d_{2,2,1} &= \frac{\rho h_2^3}{3\nu} + \rho h_1 h_2^2 + \rho h_2 \frac{h_1^2}{2}, \\ d_{1,1,2} &= \frac{h_1^2}{\nu} \left( \frac{2h_1^4}{15} + \frac{71\rho\nu}{120} h_1^3 h_2 + \frac{23\rho^2\nu}{24} h_1^2 h_2^2 + \left( \frac{\rho^2}{6} + \frac{\rho^2\nu}{2} \right) h_1 h_2^3 + \frac{\rho^3}{6} h_2^4 \right), \\ d_{1,2,2} &= \frac{\rho h_1^2}{\nu^2} \left( \frac{2\nu^2 h_1^4}{15} + \frac{71\rho\nu^2}{120} h_1^3 h_2 + \left( \frac{5\rho\nu}{24} + \frac{3\rho^2\nu^2}{4} \right) h_1^2 h_2^2 + \frac{2\rho^2\nu}{3} h_1 h_2^3 + \frac{\rho^2}{6} h_2^4 \right), \\ d_{2,1,2} &= \frac{h_2}{\nu^2} \left( \frac{5\nu^2 h_1^5}{24} + \frac{25\rho\nu^2}{24} h_1^4 h_2 + \left( \frac{11\rho^2\nu^2}{6} + \frac{\rho\nu}{6} \right) h_1^3 h_2^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \rho^3\nu^2 + \frac{5\rho^2\nu}{6} \right) h_1^2 h_2^3 + \left( \frac{2\rho^2}{15} + \frac{2\rho^3\nu}{3} \right) h_1 h_2^4 + \frac{2\rho^3}{15} h_2^5 \right), \\ d_{2,2,2} &= \frac{\rho h_2}{\nu^2} \left( \frac{5\nu^3}{24} h_1^5 + \frac{25\rho\nu^3}{24} h_1^4 h_2 + \left( \frac{3\rho^2\nu^3}{2} + \frac{\rho\nu^2}{2} \right) h_1^3 h_2^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{11\rho^2\nu^2}{6} h_1^2 h_2^3 + \frac{4\rho^2\nu h_1 h_2^4}{5} + \frac{2\rho^2}{15} h_2^5 \right). \end{aligned}$$

De plus  $d_{\dots,k}$  est une matrice  $2 \times 2$  et dépend des  $h_i$ . Elle est de la forme :

$$d_{\dots,k} = \begin{pmatrix} d_{11k} & d_{12k} \\ d_{21k} & d_{22k} \end{pmatrix}.$$

Les termes capillaires sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 K_{1,1} &= h_1^2 \left( (\kappa_1 + \kappa_2) \frac{h_1}{3} + \kappa_2 \frac{h_2}{2} \right), & K_{1,2} &= \kappa_2 h_1^2 \left( \frac{h_1}{3} + \frac{h_2}{2} \right), \\
 K_{2,1} &= \frac{\kappa_2 h_2^3}{3\nu} + \kappa_2 h_2^2 h_1 + (\kappa_1 + \kappa_2) \frac{h_2 h_1^2}{2}, & K_{2,2} &= \frac{\kappa_2 h_2^3}{3\nu} + \kappa_2 h_1 h_2^2 + \frac{\kappa_2 h_2 h_1^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Ce système est complètement en accord avec celui dérivé par Kliakhandler [27]. Comme cela est mentionné par Vila [54] dans le cas d'une seule couche de fluide, les équations de Benney donnent un critère de stabilité linéaire pour les solutions stationnaires qui est consistant avec celui donné par les équations d'Orr-Sommerfeld à l'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  (si on suppose que les nombres de Reynolds et de Froude sont en  $\mathcal{O}(1)$ ) et dans la limite de perturbations de petits nombres d'onde.

De la même manière, les équations du système de Benney permettent de faire une analyse de stabilité spectrale consistante pour des écoulements bicouches.

Ce point de vue a été particulièrement étudié par Kliakhandler [27] : même s'il considère séparément l'influence des effets capillaire, de la flottabilité (buoyancy), de l'inertie et leurs interactions avec les termes conservatifs. On retrouve exactement ses coefficients en faisant le changement de variable suivant :

$$\begin{pmatrix} h_1(x, t) \\ h_2(x, t) \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ m \\ r \\ \lambda \\ \delta \\ \beta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} H_2(x, t) \\ (H_1 - H_2)(x, t) \\ \gamma_2 \sin \theta \\ \gamma_1 \sin \theta R^{-1} \\ M^{-1} \\ R^{-1} \\ 2RM^{-1} \\ 2R(M \sin \theta)^{-1} \\ R_e(M \sin \theta)^{-1} \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

Son analyse est donc valable, sauf qu'il sépare chaque terme alors que nous faisons ici une analyse globale sans écrire de système de type Saint-Venant.

Un des objectifs ici est d'étudier la formation de roll-waves dans des écoulements bicouches. Dans le cas simple couche, elles sont le résultat de la concurrence entre la flottabilité et l'inertie. Par conséquent, nous considérons ici la compétition entre l'inertie, la flottabilité et leur interaction avec les termes convectifs.

Ici nous considérerons des roll-waves non visqueuses : selon la méthodologie de Dressler [16], les roll-waves sont des ondes progressives périodiques en espace et continues par morceaux. Les chocs doivent satisfaire des conditions admissibles et appropriées. Dans le cas de lois de conservation hyperboliques avec terme source, ces conditions sont la condition de Rankine-Hugoniot ainsi que la condition de Lax pour les chocs.

Pour obtenir un modèle Shallow water particulier, Dressler [16] a prouvé l'existence et l'unicité d'une famille de roll-waves à large amplitude paramétrée par le taux de décharge relative et la longueur d'onde. Ce résultat a été généralisé pour les lois générales hyperboliques de conservation avec terme source.

### 5.2.2 Analyse de stabilité linéaire

Dans ce qui suit, nous considérons la stabilité spectrale d'états constants pour le système sans tension de surface :

$$\begin{aligned} & \partial_t \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \lambda h_1^2 \left( \frac{h_1}{3} + \frac{\rho h_2}{2} \right) \\ \lambda h_1 h_2 \left( \rho h_2 + \frac{h_1}{2} \right) + \frac{\lambda \rho}{3\nu} h_2^3 \end{pmatrix} \\ &= \lambda \beta \partial_x \left( d(h_i) \partial_x \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right), \end{aligned} \quad (5.19)$$

Linéarisons les équations de ce système dans le voisinage d'une solution constante  $(\bar{h}_1, \bar{h}_2)$ , ce qui donne :

$$\partial_t \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + J(\bar{h}_i) \partial_x \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \lambda \beta d(\bar{h}_i) \partial_{xx} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Nous pouvons poser sans perte de généralité que  $\lambda \beta = 1$ . Notons que nous avons négligé la contribution des termes de capillarité qui ne sont observables que dans le cas de régimes à grand nombre d'onde. Une transformation Fourier/Laplace en temps/espace sur (5.20) avec  $\kappa_i = 1, i = 1, 2$  donne la relation de dispersion suivante :

$$\det(\Lambda \mathbb{1} + ikJ(h) + k^2 d(h)) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad (5.21)$$

Intéressons nous à la limite de faible nombre d'onde  $k \approx 0$ , notons  $\Lambda = ik\tilde{\Lambda}$  et développons (5.21) dans le voisinage de  $k = 0$  :

$$\det(\tilde{\Lambda} + J(\bar{h})) = ik \operatorname{tr} \left( \operatorname{com}(\tilde{\Lambda} \mathbb{1} + J(\bar{h}))^T d(\bar{h}) \right) + \mathcal{O}(k^2)$$

avec :

$$J(\bar{h}) = \begin{bmatrix} \lambda \bar{h}_1 (\rho \bar{h}_2 + \bar{h}_1) & \frac{1}{2} \rho \lambda \bar{h}_1^2 \\ \lambda \bar{h}_2 (\rho \bar{h}_2 + \bar{h}_1) & \frac{\lambda (2\rho \bar{h}_2^2 + 4\rho v \bar{h}_2 \bar{h}_1 + v \bar{h}_1^2)}{2v} \end{bmatrix}$$

Nous rappelons que le système d'équation de type Burgers est strictement hyperbolique et les valeurs propres  $\bar{\Lambda}_i = \Lambda_i(\bar{h}_1, \bar{h}_2)$  de  $J(\bar{h})$  sont réelles et  $\bar{\Lambda}_1 > 0 > \bar{\Lambda}_2$ . Le fait que les racines  $\Lambda_1(k), \Lambda_2(k)$  se développent dans le voisinage de  $k = 0$  tel que :

$$\Lambda_j(k) = -ik\bar{\Lambda}_j - k^2 \frac{\text{tr}(\text{com}(J(\bar{h}_i) - \bar{\Lambda}_j \mathbb{1})^T d(\bar{h}_i))}{\text{tr}(J(\bar{h}_i) - 2\bar{\Lambda}_j)} + \mathcal{O}(k^3) \quad (5.22)$$

est une simple conséquence du théorème des fonctions implicites. Ainsi les solutions stationnaires sont stables pour des perturbations de type longue longueur d'onde, ce qui nous donne la condition suivante :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\text{com}(J(\bar{h}) - \bar{\Lambda}_1 \mathbb{1})^T d(\bar{h})) &< 0, \\ \text{tr}(\text{com}(J(\bar{h}) - \bar{\Lambda}_2 \mathbb{1})^T d(\bar{h})) &> 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Dans ce qui suit, nous analysons deux situations particulières : densité de stratification stable et instable. Nous allons voir que dans certaines situations, les instabilités de type Rayleigh Taylor peuvent être supprimées (dans la limite de longueur d'onde longues) à cause d'interactions entre flottabilité et convection. Nous analyserons aussi ici l'influence des termes d'inertie.

Sachant que  $d(\bar{h}) = \frac{\cot\theta}{R_e} d_{\dots,1} - \lambda d_{\dots,2}$ , le système (5.23) correspondant aux conditions de stabilité à la surface libre et à l'interface, s'écrit :

$$a_1(\rho) \frac{\cot\theta}{R_e} < \lambda a_2(\rho), \quad b_1(\rho) \frac{\cot\theta}{R_e} > \lambda b_2(\rho).$$

où :

$$\begin{aligned} a_k(\rho) &= \text{tr}(\text{com}(J(\bar{h}) - \bar{\Lambda}_1 \mathbb{1})^T d_{\dots,k}(\bar{h})), \\ b_k(\rho) &= \text{tr}(\text{com}(J(\bar{h}) - \bar{\Lambda}_2 \mathbb{1})^T d_{\dots,k}(\bar{h})), \\ d_{\dots,k} &= \begin{pmatrix} d_{11k} & d_{12k} \\ d_{21k} & d_{22k} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour la stabilité de la surface libre, on peut voir que tous les  $a_i$  sont strictement négatifs ainsi la condition de stabilité s'écrit :

$$R_e < \frac{a_1(\rho)}{\lambda a_2(\rho)} \cotan\theta.$$

La situation est plus complexe pour la condition de stabilité à l'interface puisque les  $b_i$  peuvent changer de signe. Le tableau suivant fait un récapitulatif des cas possibles.

	$b_1 \frac{\cotan\theta}{R_e} > \lambda b_2$	Stabilité
$b_1, b_2 > 0$ $a_1, a_2 < 0$	$R_e < \frac{b_1}{\lambda b_2} \cotan\theta$	Interface ( $h_1$ ) stable en-dessous de $f_2$ Surface libre ( $h_1 + h_2$ ) stable en-dessous de $f_1$
$b_1, b_2 < 0$ $a_1, a_2 < 0$	$R_e > \frac{b_1}{\lambda b_2} \cotan\theta$	Interface ( $h_1$ ) stable au-dessus de $f_2$ Surface libre ( $h_1 + h_2$ ) stable en-dessous de $f_1$
$b_1 < 0, b_2 > 0$ $a_1, a_2 < 0$	$R_e < \frac{b_1}{\lambda b_2} \cotan\theta$	Interface ( $h_1$ ) stable en-dessous de $f_2$ Surface libre ( $h_1 + h_2$ ) stable en-dessous de $f_1$
$b_1 > 0, b_2 < 0$ $a_1, a_2 < 0$	$R_e > \frac{b_1}{\lambda b_2} \cotan\theta$	Interface ( $h_1$ ) stable au-dessus de $f_2$ Surface libre ( $h_1 + h_2$ ) stable en-dessous de $f_1$

TABLE 7: Conditions de stabilité

Dans ce qui suit, on pose que  $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 1$  et on différencie les trois cas suivants  $\nu < 1$ ,  $\nu = 1$  et  $\nu > 1$ . Ce qui correspond à différents types de stratification visqueuse.

Pour chaque cas, on détermine la courbe de stabilité  $R_e = f_k(\rho) \cotan\theta$  pour  $k = 1, 2$  associée aux instabilités de surface :  $f_1(\rho) = \frac{a_1(\rho)}{\lambda a_2(\rho)}$ , et au modèle d'interface :  $f_2(\rho) = \frac{b_1(\rho)}{\lambda b_2(\rho)}$ .

- **Cas 1** :  $\nu < 1$

des tests ont été réalisés pour  $\nu = 0,3$ ,  $\nu = 0,7$  et  $\nu = 0,9$ , ce qui donne une bonne représentation de ce qui se passe quand  $\rho$  varie.

- **Cas**  $\nu = 0,3$

Il existe ici une valeur  $\rho_c \approx 3,3$  telle que si  $\rho > \rho_c$  alors  $b_2 < 0$  et si  $\rho < \rho_c$  les deux  $b_i$  sont positifs. Alors si  $\rho > \rho_c$ , l'interface entre les deux fluides est stable et le système est stable si  $R_e < f_1(\rho) \cotan\theta$ .

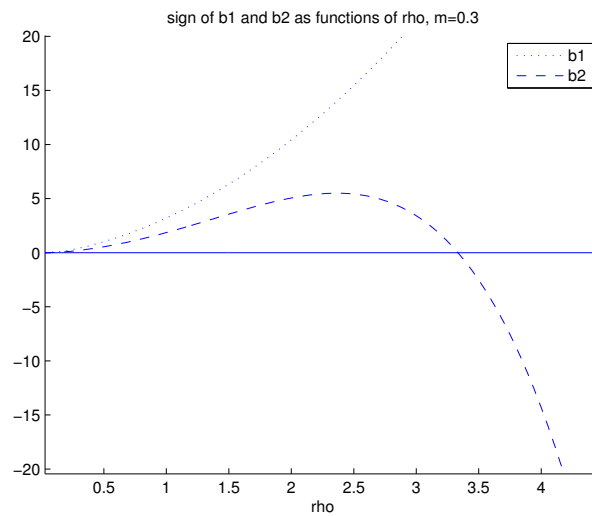


FIGURE 8:  $b_1$  et  $b_2$  pour  $\nu = 0,3$

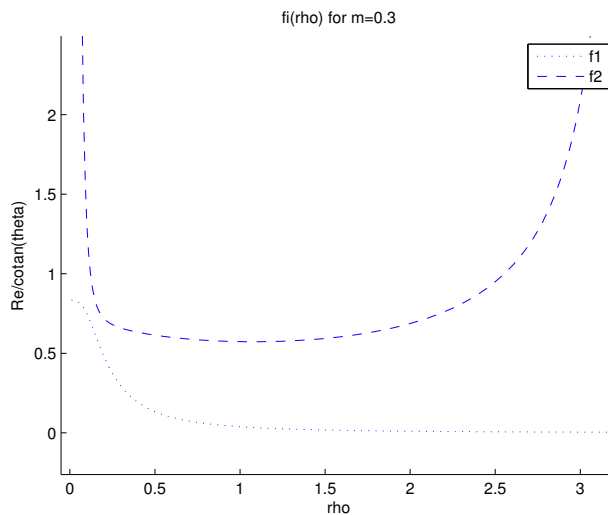


FIGURE 9: Courbes critiques  $f_i(\rho) = \frac{R_e}{\cotan\theta}$  pour  $\nu = 0,3$ .

Si  $R_e$  est suffisamment petit, on a  $\rho < \rho_c \Rightarrow f_1(\rho) < f_2(\rho)$  (avec  $\rho_c \approx 3,4$ ), le flux est stable et quand  $R_e$  augmente, la surface libre devient instable en premier suivie par l'interface.

- o **Cas**  $\nu = 0,7$

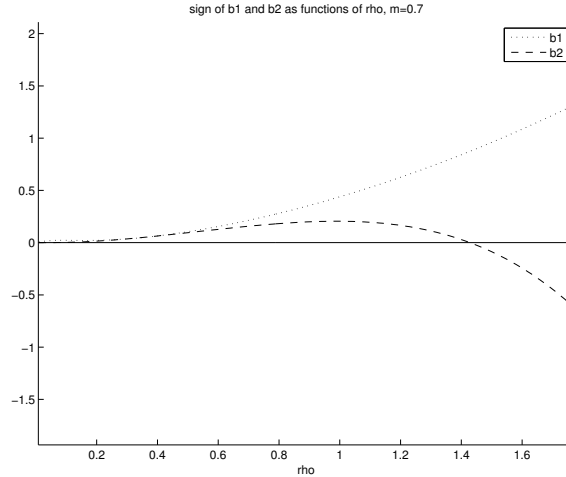


FIGURE 10: Pour  $\nu = 0,7$  et  $i = 1,2$ , valeurs des  $b_i$ .

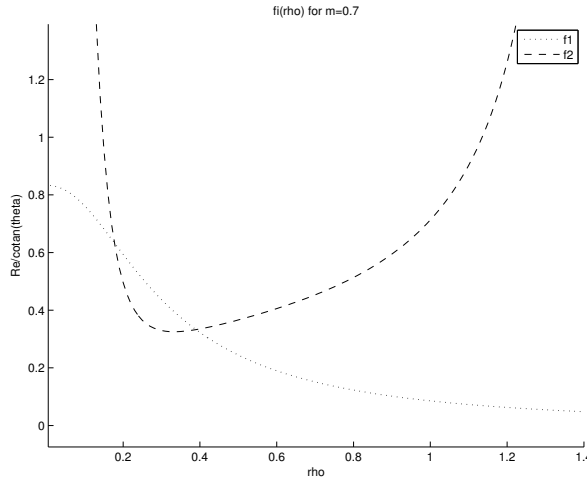


FIGURE 11: Pour  $\nu = 0,7$  et  $i = 1,2$ , courbes critiques  $f_i(\rho) = \frac{R_e}{\cotan\theta}$ .

On peut voir qu'avant  $\rho_c \approx 1,4$ , le mode interfacial est instable alors que la surface est stable pour  $R_e < f_2(\rho) \cotan\theta$ .

Quand  $\rho < \rho_c$ , il existe  $\rho_1 < \rho_2$  (avec  $\rho_1 \approx 0,2$  et  $\rho_2 \approx 0,4$ ) tels que pour tout  $\rho < \rho_1$  ou  $\rho_2 < \rho < \rho_c$ , quand  $R_e$  augmente, la surface devient instable en premier puis l'interface suit. Pour  $\rho_1 < \rho < \rho_2$ , le mode interfacial est le premier à être déstabilisé quand  $R_e$  augmente.

- o **Cas**  $\nu = 0,9$

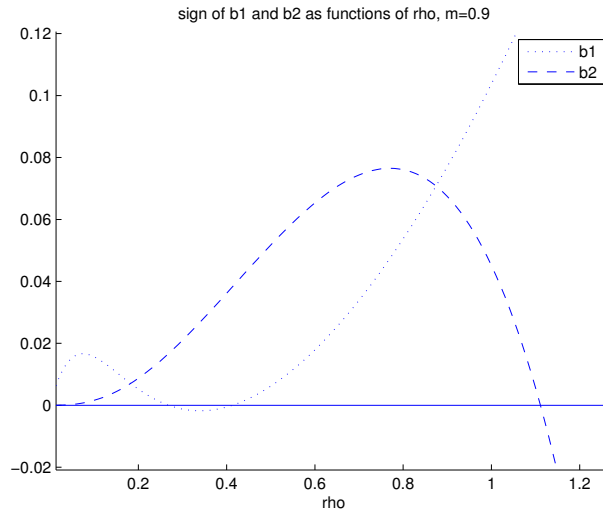


FIGURE 12:  $b_1$  et  $b_2$  pour  $\nu = 0,9$ .

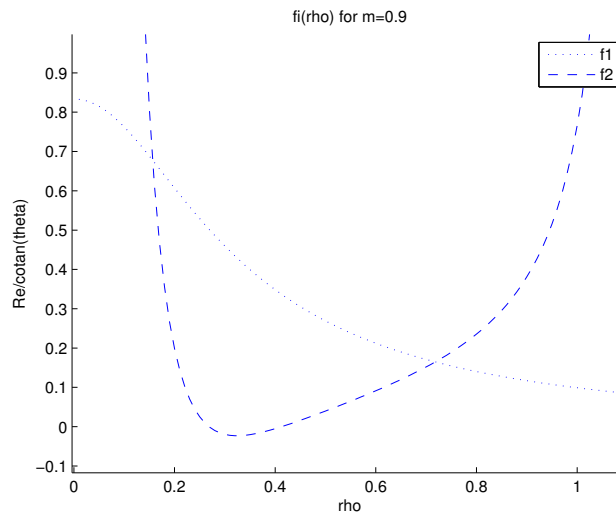


FIGURE 13: Courbes critiques  $f_i(\rho) = \frac{R_e}{\cotan\theta}$  pour  $\nu = 0,9$ .

Ce cas est similaire au cas précédent, avec ici  $\rho_c \approx 1,1$ . Mais pour  $\rho_1 < \rho < \rho_2$  (avec  $\rho_1 \approx 0,2$  et  $\rho_2 \approx 0,72$ ) et  $R_e$  suffisamment grand où le flux est toujours instable : le mode interfacial est toujours instable.

• **Cas 2 :**  $\nu = 1$

On peut observer qu'il existe une valeur  $\rho_c \approx 0,2$  avant laquelle le mode interfacial est toujours stable. Pour  $\rho < \rho_c$ , il existe  $\rho_1 < \rho_c$  pour lequel le mode interfacial est instable quand  $\rho_1 < \rho < \rho_c$ . Quand  $\rho < \rho_1$ , la surface libre est en premier instable suivie



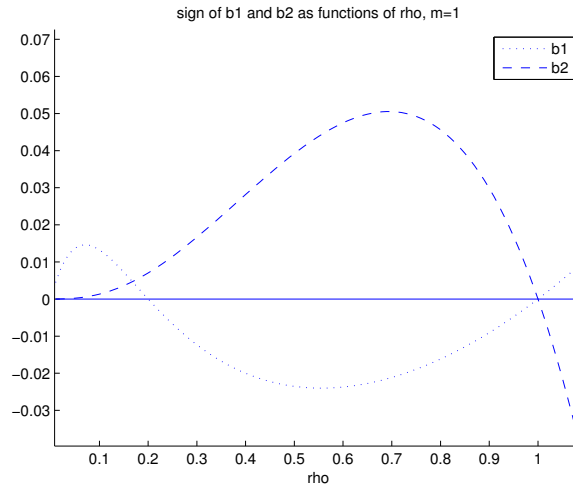


FIGURE 14:  $b_1$  et  $b_2$  pour  $\nu = 1$ .

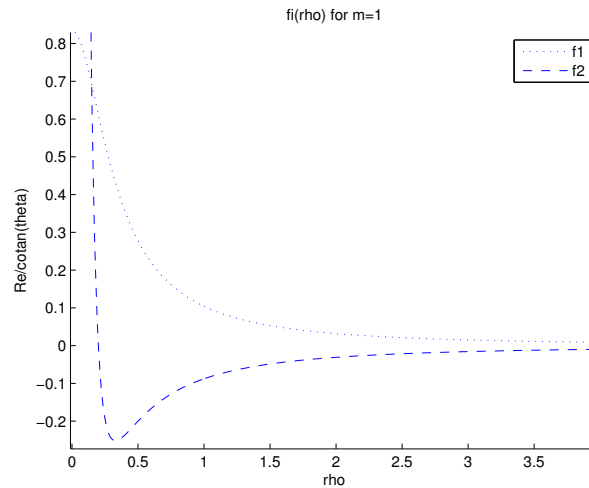


FIGURE 15: Courbes critiques  $f_i(\rho) = \frac{R_e}{\cotan\theta}$  pour  $\nu = 1$ .

par l'interface, quand  $R_e$  augmente. Pour  $\rho > \rho_c$ ,  $b_1(\rho)$  est négatif, il faut alors que  $R_e > f_1(\rho) \cotan\theta$  pour que l'interface soit stable, ce qui est toujours le cas pour  $R_e \geq 0$ .

- **Cas 3 :**  $\nu > 1$

Nous avons choisi d'étudier les cas  $\nu = 1, 1$  et  $\nu = 1, 5$ .

- **Cas  $\nu = 1, 1$**

Il existe une valeur  $\rho_c \approx 3, 5$  après laquelle le mode interfacial est stable.

Regardons de plus près le cas où  $\rho < \rho_c$ . Pour  $\rho_1 < \rho < \rho_2$  (avec  $\rho_1 \approx 0, 2$  et  $\rho_2 \approx 1$ ), le flux interfacial est stable et pour  $\rho < \rho_1$ , le comportement est le même que pour les cas précédents où  $\rho$  était petit.

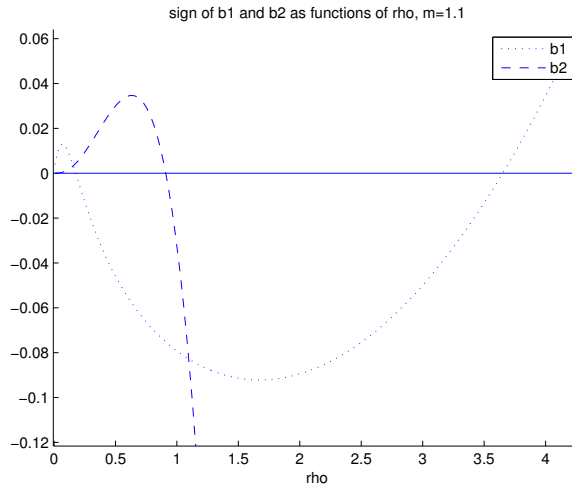


FIGURE 16:  $b_1$  et  $b_2$  pour  $\nu = 1, 1$ .

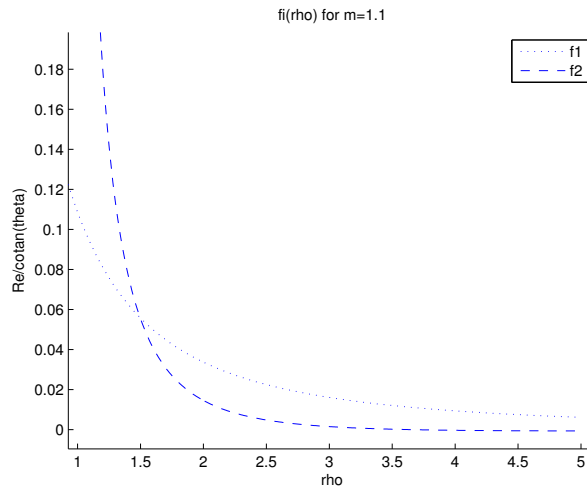
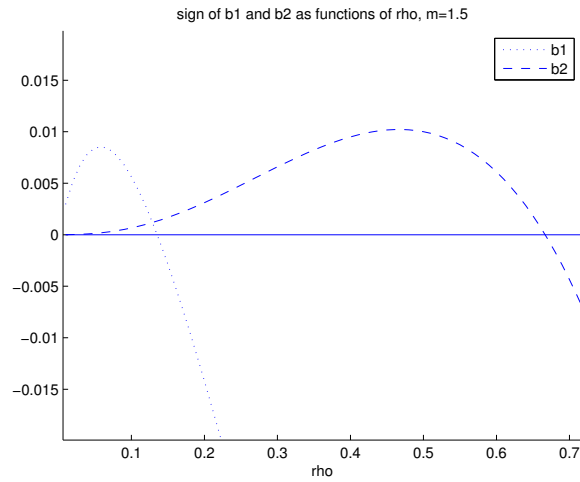
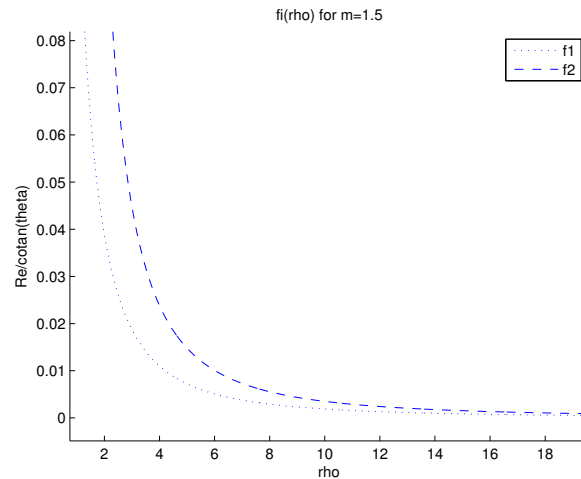


FIGURE 17: Courbes critiques  $f_i(\rho) = \frac{R_e}{\cotan\theta}$  pour  $\nu = 1, 1$ .

Le comportement est différent si  $\rho > \rho_2$  : le mode interfacial est stable si  $R_e > f_2(\rho) \cotan\theta$ . Ainsi même à faible nombre de Reynolds, le mode interfacial est instable. Il est facile de voir qu'il existe alors  $\rho_2 < \rho_3 < \rho_c$  tels que le flux est toujours instable si  $\rho_2 < \rho < \rho_3$  et stable si  $\rho_3 < \rho < \rho_c$  et  $f_2(\rho) \cotan\theta < R_e < f_1(\rho) \cotan\theta$ .

o **Cas  $\nu = 1, 5$**

Pour tout  $\rho > \rho_1$ , le flux est instable dans le cas de perturbations de type onde longue. Quand  $\rho < \rho_1$ , on observe le même type de comportement que dans les cas où  $\nu < 1$  quand  $\rho$  est stable : le flux est stable pour des petits nombres de Reynolds et le flux est instable en premier à cause de la surface puis du mode interfacial.

FIGURE 18:  $b_1$  et  $b_2$  pour  $\nu = 1,5$ .FIGURE 19: Courbes critiques  $f_i(\rho) = \frac{Re}{\cotan\theta}$  pour  $\nu = 1,5$ .

Les équations du type Benney sont donc suffisantes pour obtenir un critère de stabilité et de consistance d'états stables pour des perturbations de type onde longue. Néanmoins les solutions explosent en temps fini dans les régimes d'instabilité et peuvent mener à des imprécisions dans la description du mouvement de fluides bicouches.

### 5.3 MODÈLES DE TYPE SAINT-VENANT

Les lois de conservation visqueuses qui régissent l'évolution de  $h_i$  sont suffisantes pour obtenir un critère définissant l'état bien ou mal posé du système, ce qui est un critère de stabilité uniforme des états constants dans le régime de basse fréquence pour le système hyperbolique (Saint-Venant) (voir 3). Toutefois, les solutions de ce système explosent en temps fini

lorsque le débit est instable et peut conduire à une certaine imprécision dans la description du mouvement de flux bi-couche. Dans ce qui suit, nous considérons des modèles de type Shallow water : en effet dans le cas d'écoulement mono-couche, ils produisent des ondes non linéaires, dites "roll-waves" qui sont bien connues des instabilités hydrodynamiques (cf 3.5 page 44). Ainsi, les modèles Shallow water sont utiles pour décrire la transition à l'instable dans les écoulements de faible profondeur. À notre connaissance, il n'y a pas de modèle Shallow-Water uniforme qui décrit les flux bi-couche s'écoulant sur une rampe (le cas une seule couche n'a été traité que récemment Ruyer-Quil et Manneville [48], Vila [54]).

Gardons les termes en  $\mathcal{O}(1)$  et  $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$  dans (5.4) :

$$\partial_t \left( \int_0^{h_1} u_1 \right) + \partial_x \left( \int_0^{h_1} u_1^2 + \frac{p_1}{F^2} \right) + \kappa_1 \partial_x h_1 \partial_{xx} h_1 = \frac{1}{\varepsilon R_e} (\lambda h_1 + v \partial_z u_2(h_1) - \partial_z u_1(0)) + \frac{p_2(h_1) \partial_x h_1}{F^2} \quad (5.24)$$

$$\partial_t \left( \rho \int_{h_1}^h u_2 \right) + \partial_x \left( \rho \int_{h_1}^h u_2^2 + \frac{p_2}{F^2} \right) + \kappa_2 \partial_x h \partial_{xx} h = \frac{1}{\varepsilon R_e} (\lambda \rho h_2 - v \partial_z u_2(0)) - \frac{p_2(h_1) \partial_x h_1}{F^2}. \quad (5.25)$$

Nous calculons d'abord un développement des intégrales : les intégrales des pressions sont données par :

$$\begin{aligned} \int_{h_{i-1}}^{h_{i-1}+h_i} p_i &= \int_0^{h_1} p_i^{(0)} + \mathcal{O} \left( \alpha + \kappa_i \frac{\beta}{\delta} \right), \quad i = 1, 2, \\ \int_0^{h_1} p_1^{(0)} &= c \frac{h_1^2}{2} + \rho c h_1 h_2 - h_1 F^2 ((\kappa_2 + \kappa_1) \partial_{xx} h_1 - \kappa_2 \partial_{xx} h_2), \\ \int_{h_1}^h p_2^{(0)} &= \rho c \frac{h_2^2}{2} - \kappa_2 F^2 h_2 \partial_{xx} h_2. \end{aligned} \quad (5.26)$$

alors que les intégrales des termes de convection sont données par

$$\begin{aligned} \int_{h_{i-1}}^{h_{i-1}+h_i} u_i^2 &= \int_{h_{i-1}}^{h_{i-1}+h_i} (u_i^{(0)})^2 + \mathcal{O}(\beta + \delta), \quad i = 1, 2 \\ \int_0^{h_1} (u_1^{(0)})^2 &= \lambda^2 h_1^3 \left( \frac{2}{15} h_1^2 + \frac{5}{12} \rho h_1 h_2 + \frac{\rho^2 h_2^3}{3} \right), \\ \int_{h_1}^h (u_2^{(0)})^2 &= \lambda^2 \left( \frac{2\rho^2}{15v^2} h_2^5 + \frac{2\rho}{3v} (\rho h_1 h_2 + \frac{h_1^2}{2}) h_2^3 \right) \\ &\quad + \lambda^2 h_1^2 \left( \rho^2 h_2^3 + \rho h_2^2 h_1 + \frac{h_2 h_1^2}{4} \right). \end{aligned}$$

Dans les deux cas, nous ne conservons que les termes en  $O(1)$ . Pour écrire ces quantités en termes convectifs classiques, nous introduisons  $Q_i, i = 1, 2$  de sorte que :

$$\int_0^{h_1} (u_1^{(0)})^2 = h_1 \bar{u}_1^2 + Q_1(h_1, h_2), \quad \int_{h_1}^h (u_2^{(0)})^2 = h_2 \bar{u}_2^2 + Q_2(h_1, h_2). \quad (5.27)$$

Ici, les  $Q_i$  dépendent des  $h_i$  et sont définis tels que :

$$Q_1 = \lambda^2 h_1^3 \left( \frac{h_1^2}{45} + \frac{\rho h_2}{12} (h_1 + \rho h_2) \right), \quad Q_2 = \lambda^2 \frac{\rho^2 h_2^5}{45 v^2}.$$

En utilisant (5.26) et (5.27) dans (5.24), on trouve :

$$\begin{aligned} \partial_t(h_1 \bar{u}_1) + \partial_x(h_1 \bar{u}_1^2) + \frac{c}{F^2} \left( \rho h_1 h_2 + \frac{h_1^2}{2} \right) + Q_1 - h_1 \partial_{xxx}(\kappa_2(h_1 + h_2) + \kappa_1 h_1) \\ = \frac{\rho c}{F^2} h_2 \partial_x h_1 + \frac{s h_1}{\varepsilon F^2} + \frac{1}{\varepsilon R_e} (v \partial_z u_2(h_1) - \partial_z u_1(0)), \\ \rho \left( \partial_t(h_2 \bar{u}_2) + \partial_x(h_2 \bar{u}_2^2) + \frac{c}{F^2} \frac{h_2^2}{2} + Q_2 \right) - \kappa_2 h_2 \partial_{xxx} h \\ = -\frac{\rho c}{F^2} h_2 \partial_x h_1 + \frac{\rho s h_2}{\varepsilon F^2} - \frac{v}{\varepsilon R_e} \partial_z u_2(h_1). \end{aligned}$$

Ce système est presque sous forme fermée. Écrivons maintenant  $\partial_z u_1(0)$  et  $\partial_z u_2(h_1)$  en fonction de  $\bar{u}_i$  et  $h_i$ . Nous voyons clairement que le développement de  $u_i$  jusqu'à l'ordre  $\mathcal{O}(\alpha\delta + \beta(\beta + \delta) + \kappa_i\beta)$  est nécessaire. Nous utilisons la méthode introduite par Vila [54] dans le cas d'une seule couche de fluide pour écrire ces termes sous forme fermée. Dans cet article, la contrainte à la paroi est choisie pour être proportionnelle à la vitesse moyenne. Il faut développer à la fois la contrainte à la paroi et la vitesse moyenne jusqu'à l'ordre 1 et on obtient un développement de la contrainte de la paroi avec un terme d'ordre zéro proportionnel à la vitesse moyenne, le terme suivant dépend de la hauteur du fluide et de ses dérivées temporelles et spatiales (pour une justification mathématique de cette dérivation, voir Bresch et Noble [10]).

La situation est plus complexe pour les écoulements bi-couche et plusieurs fermetures sont possibles. Toutefois, afin de s'adapter au modèle figurant dans Vila [54], nous cherchons à lier la contrainte au fond au rapport de la vitesse moyenne sur la hauteur :

$$\partial_z u_1(0) = \gamma_1(h_1, h_2) \frac{\bar{u}_1}{h_1} + (\text{h.o.t}),$$

avec  $\gamma_1(h_1, 0) = 3$ . La contrainte au fond du fluide est donnée par :

$$\partial_z u_1(0) = \gamma_1(h_1, h_2) \frac{\bar{u}_1}{h_1} + R_1, \tag{5.28}$$

avec  $\gamma_1$  et  $R_1$  définis par  $\gamma_1 = 6 \frac{h_1 + \rho h_2}{2h_1 + 3\rho h_2}$  et

$$\begin{aligned} R_1 &= -\frac{\lambda^2 \beta}{2h_1 + 3\rho h_2} (R_{1,1} \partial_x h_1 + R_{1,2} \partial_x h_2) - \delta c (\rho^2 - \rho) \frac{h_1 h_2}{2h_1 + \rho h_2} \partial_x h_2 \\ &\quad + \frac{\delta h_1 h_2}{2h_1 + 3\rho h_2} \partial_{xxx} (\kappa_1 \rho h_1 + \kappa_2 (\rho - 1) (h_1 + h_2)), \\ R_{1,1} &= \frac{2}{15} h_1^5 + \frac{41\rho}{60} h_1^4 h_2 + \frac{13\rho^2}{10} h_1^3 h_2^2 + \left( \frac{3\rho^3}{4} + \frac{\rho^2}{3\nu} \right) h_1^2 h_2^3 + \frac{\rho^3}{3\nu} h_1 h_2^4, \\ R_{1,2} &= \frac{2\rho}{15} h_1^5 + \frac{41\rho^2}{60} h_1^4 h_2 + \left( \frac{21\rho^3}{20} + \frac{\rho^2}{4\nu} \right) h_1^3 h_2^2 + \frac{13\rho^3}{12\nu} h_1^2 h_2^3 + \frac{\rho^3}{3\nu^2} h_1 h_2^4, \end{aligned}$$

Ensuite, nous écrivons la contrainte du fluide à l'interface telle que :

$$\partial_z u_2(h_1) \approx 3 \frac{\bar{u}_2 - u_{int}}{h_2},$$

avec  $u_{int} = u_1(h_1) = u_2(h_1)$  et développons  $u_{int}$  sous la forme  $u_{int} = \gamma_2(h_1, h_2) \bar{u}_1 + (\text{h.o.t.})$ . La contrainte du fluide à l'interface s'écrit alors :

$$\partial_z u_2(h_1) = \frac{3}{h_2} (\bar{u}_2 - \gamma_2 \bar{u}_1) + R_2,$$

avec  $\gamma_2$  et  $R_2$  définis par  $\gamma_2 = 3 \frac{h_1 + 2\rho h_2}{2h_1 + 3\rho h_2}$  et

$$\begin{aligned} R_2 &= -\frac{\beta \lambda^2}{h_2 (2h_1 + 3\rho h_2)} (R_{2,1} \partial_x h_1 + R_{2,2} \partial_x h_2) - \delta c (\rho^2 - \rho) \frac{3h_1^2 \partial_x h_2}{2(2h_1 + 3\rho h_2)} \\ &\quad + \frac{3\delta h_1^2}{2(2h_1 + 3\rho h_2)} \partial_{xxx} ((\kappa_1 \rho + \kappa_2 (\rho - 1)) h_1 + \kappa_2 (\rho - 1) h_2) \\ R_{2,1} &= \frac{1}{20} h_1^6 + \frac{2\rho}{5} h_1^5 h_2 + \frac{11\rho^2}{10} h_1^4 h_2^2 + \left( \frac{\rho^2}{2\nu} + \frac{3\rho^3}{4} \right) h_1^3 h_2^3 \\ &\quad + \left( \frac{2\rho^2}{15\nu^2} + \frac{\rho^3}{2\nu} \right) h_1^2 h_2^4 + \frac{\rho^3}{3\nu^2} h_1 h_2^5 + \frac{\rho^4}{5\nu^2} h_2^6 \\ R_{2,2} &= \frac{\rho}{20} h_1^6 + \frac{2\rho^2}{5} h_1^5 h_2 + \left( \frac{\rho^2}{8\nu} + \frac{117\rho^3}{120} \right) h_1^4 h_2^2 + \frac{5\rho^3}{4\nu} h_1^3 h_2^3 \\ &\quad + \frac{19\rho^3}{30\nu^2} h_1^2 h_2^4 + \left( \frac{\rho^4}{5\nu^2} + \frac{2\rho^3}{15\nu^3} \right) h_1 h_2^5 + \frac{\rho^4}{5\nu^3} h_2^6. \end{aligned}$$

Notons que nous avons implicitement utilisé la loi de conservation de la masse :

$$\partial_t h_i = -\partial_x q_i^{(0)} + (\text{h.o.t.})$$

pour transformer les dérivées en temps en dérivées *spatiales*.

Ainsi, nous obtenons un modèle Shallow water pour les écoulements bi-couches sous forme fermée :

$$\partial_t h_1 + \partial_x(h_1 \bar{u}_1) = 0, \quad \partial_t h_2 + \partial_x(h_2 \bar{u}_2) = 0, \quad (5.29)$$

$$\partial_t(h_1 \bar{u}_1) + \partial_x\left(h_1 \bar{u}_1^2 + \frac{ch_1^2}{2F^2}\right) = \frac{1}{\varepsilon R_e} \left( \lambda h_1 + 3v \frac{\bar{u}_2 - \gamma_2 \bar{u}_1}{h_2} - 3\gamma_1 \frac{\bar{u}_1}{h_1} \right) + \mathcal{R}_1, \quad (5.30)$$

$$\partial_t(h_2 \bar{u}_2) + \partial_x\left(h_2 \bar{u}_2^2 + \frac{ch_2^2}{2F^2}\right) = \frac{1}{\varepsilon R_e} \left( \lambda h_2 - \frac{3v \bar{u}_2 - \gamma_2 \bar{u}_1}{\rho h_2} \right) + \mathcal{R}_2, \quad (5.31)$$

$$\mathcal{R}_1 = -\frac{c}{F^2} h_2 \partial_x h_1 + \tilde{\mathcal{R}}_1, \quad \mathcal{R}_2 = -\frac{c}{F^2} h_1 \partial_x h_2 + \tilde{\mathcal{R}}_2,$$

où les  $\tilde{\mathcal{R}}_i, i = 1, 2$  sont seulement fonctions des  $h_i$  et ses dérivées spatiales. Ce sont des termes correctifs de la répartition de la pression hydrostatique dans les liquides qui sont dus à la tension de surface, la flottabilité et l'inertie. Ils sont écrits comme

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}_1 &= -\partial_x Q_1 + \frac{1}{\varepsilon R_e} (v R_2 - R_1) + h_1 \partial_{xxx} (\kappa_2 (h_1 + h_2) + \kappa_1 h_1), \\ \tilde{\mathcal{R}}_2 &= -\frac{1}{\rho} \partial_x Q_2 - \frac{v}{\varepsilon R_e \rho} R_2 + \frac{\kappa_2}{\rho} h_2 \partial_{xxx} (h_1 + h_2). \end{aligned}$$

Ce système n'est pas sous forme conservative, ce qui peut conduire à une certaine indétermination en présence de chocs. On peut dépasser cette indétermination par l'utilisation de "chemins non conservatifs".

Par commodité, nous réécrivons le système sous forme matricielle. Posons  $W = (h_1, h_2, q_1, q_2)^T$  où  $q_i = h_i \bar{u}_i$ . Nous écrivons le système (5.29, 5.30, 5.31) tel que :

$$\partial_t W + \partial_x F(W) = B(W) \partial_x W + G(W), \quad (5.32)$$

où  $F$  est défini par :

$$F(W) = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \frac{q_1^2}{h_1} + \frac{ch_1^2}{2F^2} + \lambda^2 h_1^3 \left( \frac{h_1^2}{45} + \frac{\rho h_2}{12} (h_1 + \rho h_2) \right) \\ \frac{q_2^2}{h_2} + \frac{ch_2^2}{2F^2} + \frac{\lambda^2 \rho h_2^5}{45 v^2} \end{bmatrix}$$

et  $B$  est donné par :

$$B(W) \frac{\partial W}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x h_1 \\ \partial_x h_2 \\ \partial_x q_1 \\ \partial_x q_2 \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= -\frac{c}{F^2}h_2 + \frac{\lambda^2}{2h_1 + 3\rho h_2}R_{1,1} - \frac{v\lambda^2}{h_2(2h_1 + 3\rho h_2)}R_{2,1} \\
 B_{12} &= -\left[ \frac{\lambda^2}{h_2}R_{2,2} + c(\rho^2 - \rho)\frac{3h_1^2}{2F^2} \right] \frac{v}{(2h_1 + 3\rho h_2)} \\
 &\quad + \frac{\lambda^2}{2h_1 + 3\rho h_2}R_{1,2} + \frac{1}{F^2}c(\rho^2 - \rho)\frac{h_1 h_2}{2h_1 + \rho h_2} \\
 B_{21} &= \frac{v\lambda^2}{h_2\rho(2h_1 + 3\rho h_2)}R_{2,1} \\
 B_{22} &= \left[ \frac{\lambda^2}{h_2}R_{2,2} + c(\rho^2 - \rho)\frac{3h_1^2}{2F^2} \right] \frac{v}{\rho(2h_1 + 3\rho h_2)} - \frac{c}{F^2}h_1.
 \end{aligned}$$

Le terme source  $G(W)$  s'écrit :

$$G(W) = \frac{1}{\varepsilon R_e} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda h_1 + 3v \frac{\bar{u}_2 - \gamma_2 \bar{u}_1}{h_2} - 3\gamma_1 \frac{\bar{u}_1}{h_1} \\ \lambda h_2 + \frac{3v}{\rho} \frac{\bar{u}_2 - \gamma_2 \bar{u}_1}{h_2} \end{bmatrix}$$

### 5.3.1 Modèle de glissement

À partir du modèle que l'on vient d'établir, on peut écrire un modèle de glissement en posant que le premier fluide a une épaisseur très faible et connue, c'est-à-dire  $h_1 = \text{constante}$ . On peut exprimer la contrainte à l'interface  $\partial_z u_2(h_1)$  en fonction de la vitesse interfaciale  $u_{int} = u_1(h_1) = u_2(h_2)$  :

$$\partial_z u_2(h_1) = \frac{2\rho h_2}{v h_1 (2\rho h_2 + h_1)} u_{int} + R_3$$

où  $R_3$  regroupe les petits termes en  $\beta$  et  $\delta$  :

$$\begin{aligned}
 R_3 &= \beta \frac{\rho h_2 \lambda^2}{6v^2} \left( R_{3,1} \partial_x h_1 + R_{3,2} \frac{\rho}{v} \partial_x h_2 \right) + \delta \frac{h_2 \kappa_2}{v} \partial_{xxx} (h_1 + h_2) \\
 &\quad - \delta \frac{\rho h_2}{v} c \partial_x (h_1 + h_2) \\
 R_{3,1} &= 3v h_1^3 + 2\rho h_1 h_2^2 + 9\rho v h_1^2 h_2 + 6\rho^2 v h_1 h_2^2 + 2\rho^2 h_2^3 \\
 R_{3,2} &= 3v^2 h_1^3 + 8\rho v h_1 h_2^2 + 9\rho v^2 h_1^2 h_2 + 2\rho h_2^3
 \end{aligned}$$



Le coefficient  $\frac{h_1(2\rho h_2+h_1)}{2\rho h_2}$  peut être vu comme une longueur de glissement, en particulier si  $h_1 \ll h_2$ , c'est-à-dire si on considère l'écoulement d'un fluide sur un autre film beaucoup plus mince, alors la contrainte à l'interface se transforme en une condition de glissement :

$$u_{int} \approx \nu h_1 \partial_z u_2(h_1)$$

Le système des équations couplées écrit pour  $h_1 = \text{constante}$ , donne un débit constant pour la couche du bas :

$$\lambda h_1 - 3\gamma_1 \frac{q_1}{h_1^2} = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{\lambda h_1^3}{3\gamma_1}$$

Le système se réduit aux inconnues  $(h_2, q_2)$  :

$$\begin{aligned} \partial_t q_2 + \partial_x \left( \frac{q_2^2}{h_2} + \frac{c}{F^2} \left( h_1 + \frac{h_2}{2} \right) h_2 + \lambda^2 \frac{\rho h_2^5}{45\nu^2} \right) - \frac{\kappa_2}{\rho} h_2 \partial_{xxx} h_2 \\ = \frac{1}{\varepsilon R_e} \left( \lambda h_2 - \frac{\nu}{\rho} \partial_z u_2(h_1) \right) \end{aligned}$$

La contrainte liée au glissement de la couche 2 sur la couche 1 fait intervenir la longueur de glissement  $\nu h_1$  :

$$\partial_z u_2(h_1) = \frac{1}{\nu h_1} u_{int} + \frac{h_1}{2\nu} (\delta \rho c \partial_x h_2 - \delta \kappa_2 \partial_{xxx} h_2 - \lambda) + \mathcal{O}(h_1^2)$$

Et le système à deux équations avec glissement s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \partial_t h_2 + \partial_x q_2 &= 0 \\ \partial_t q_2 + \partial_x \left( \frac{q_2^2}{h_2} + \frac{c}{F^2} \left( h_1 + \frac{h_2}{2} + \frac{h_1 h_2}{2} \right) h_2 + \lambda^2 \frac{\rho h_2^5}{45\nu^2} \right) - \frac{\kappa_2}{\rho} \left( h_2 + \frac{h_1}{2} \frac{\delta}{\beta} \right) \partial_{xxx} h_2 \\ &= \frac{1}{\varepsilon R_e} \left( \lambda \left( h_2 + \frac{h_1}{2\rho} \right) - \frac{u_{int}}{\rho h_1} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{h_1^2}{\varepsilon R_e}\right) \\ \frac{u_{int}}{h_1} &= 3\nu \frac{q_2}{h_2^2} - \lambda^2 \beta \left( \frac{h_2}{\nu} + 16h_1 \right) \frac{\rho^3 h_2^3}{15\nu} \partial_x h_2 + \lambda h_1 \left( \frac{1}{2} - 3\nu\rho \right) + \left( \frac{1}{2} - 3\nu \right) (\kappa_2 \partial_{xxx} h_2 - \rho c \partial_x h_2) \delta h_1 + \mathcal{O}(h_1^2) \end{aligned}$$



Le but de cette partie est d'appliquer le modèle développé dans l'article Boutounet *et al.* [7] soumis, pour un écoulement à surface libre de deux fluides superposés coulant le long d'un plan incliné, toujours sous l'hypothèse film mince.

Nous voulons ici simuler un écoulement bicouche conforme aux prédictions avec une analyse de stabilité (pour l'existence de roll-waves dans le domaine instable avec asymptotique pour petites longueurs d'onde, se référer à l'article Noble [38]).

#### SOMMAIRE

6.1	Modèle	145
6.2	Simulations numériques	147
6.2.1	Couches internes et externes instables	149
6.2.2	Couche interne instable et couche externe stable	151

#### 6.1 MODÈLE

Nous utilisons un schéma classique décentré comme décrit dans Harten *et al.* [22]. Nous posons  $x \in [0, L]$  et nous intégrons (5.32) sur l'intervalle de temps  $[0, T]$ . Le système (5.32) est strictement hyperbolique si les valeurs propres de  $M(W) = A(W) - B(W)$  sont réelles et distinctes. Ici  $A(W)$  représente la matrice jacobienne de  $F$  :

$$A = \frac{\partial F}{\partial W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{31} & A_{32} & \frac{2q_1}{h_1} & 0 \\ 0 & A_{42} & 0 & \frac{2q_2}{h_2} \end{bmatrix}$$

avec (rappelons que les nombres adimensionnels  $\beta, \delta, \lambda$  sont définis par  $\beta = \varepsilon R_e$ ,  $\delta = \frac{\varepsilon R_e}{F^2}$  et  $\lambda = \frac{R_e}{F^2} \sin \theta$ ) :

$$\begin{aligned} A_{31} &= -\frac{q_1^2}{h_1^2} + \frac{ch_1}{F^2} + 3\lambda^2 h_1^2 \left( \frac{h_1^2}{45} + \frac{\rho h_2}{12} (h_1 + \rho h_2) \right) + \lambda^2 h_1^3 \left( \frac{2h_1}{45} + \frac{\rho h_2}{12} \right) \\ A_{32} &= \lambda^2 h_1^3 \left[ \frac{\rho}{12} (h_1 + \rho h_2) + \frac{\rho^2 h_2}{12} \right] = \rho \lambda^2 h_1^3 \left[ \frac{h_1}{12} + \frac{\rho h_2}{6} \right] \\ A_{42} &= -\frac{q_2^2}{h_2^2} + \frac{ch_2}{F^2} + \frac{5\lambda^2 \rho h_2^4}{45v_2^2}. \end{aligned}$$

La matrice  $M$  est alors donnée par :

$$M(W) = A(W) - B(W) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ M_{31} & M_{32} & \frac{2q_1}{h_1} & 0 \\ M_{41} & M_{42} & 0 & \frac{2q_2}{h_2} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

et :

$$M_{31} = -\frac{q_1^2}{h_1^2} + \frac{ch_1}{F^2} + 3\lambda^2 h_1^2 \left( \frac{h_1^2}{45} + \frac{\rho h_2}{12} (h_1 + \rho h_2) \right) + \lambda^2 h_1^3 \left( \frac{2h_1}{45} + \frac{\rho h_2}{12} \right) \\ + \frac{c}{F^2} h_2 - \frac{\lambda^2}{2h_1 + 3\rho h_2} R_{1,1} + \frac{v\lambda^2}{h_2(2h_1 + 3\rho h_2)} R_{2,1}$$

$$M_{32} = \rho\lambda^2 h_1^3 \left[ \frac{h_1}{12} + \frac{\rho h_2}{6} \right] + \left[ \frac{\lambda^2}{h_2} R_{2,2} + c(\rho^2 - \rho) \frac{3h_1^2}{2F^2} \right] \frac{v}{(2h_1 + 3\rho h_2)} \\ - \frac{\lambda^2}{2h_1 + 3\rho h_2} R_{1,2} - \frac{1}{F^2} c(\rho^2 - \rho) \frac{h_1 h_2}{2h_1 + \rho h_2}$$

$$M_{41} = -\frac{v\lambda^2}{h_2 \rho (2h_1 + 3\rho h_2)} R_{2,1}$$

$$M_{42} = -\frac{q_2^2}{h_2^2} + \frac{ch_2}{F^2} + \frac{5\lambda^2 \rho h_2^4}{45v^2} + \frac{c}{F^2} h_1 \\ - \left[ \frac{\lambda^2}{h_2} R_{2,2} + c(\rho^2 - \rho) \frac{3h_1^2}{2F^2} \right] \frac{v}{\rho(2h_1 + 3\rho h_2)}$$

Nous approximos le système (5.32) par le système régularisé :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(W) = G(W) + B(W) \frac{\partial W}{\partial x} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\Delta x}{2} \mathcal{D}(W) \frac{\partial W}{\partial x} \right). \quad (6.2)$$

où  $\frac{\Delta x}{2} \partial_x (\mathcal{D}(W) \partial_x W)$  représente la diffusion numérique introduite par le schéma. La matrice de diffusion  $\mathcal{D}(W)$  doit prendre en compte le fait que le terme de transport effectif dans (5.32) est  $M(W) \partial_x W$ , où  $M$  est donné par (6.1). Nous proposons de discrétiser le produit non-conservatif en utilisant la relation  $BW_x = (BW)_x - B_x W$ . Nous utilisons un schéma d'ordre deux en temps à deux étages.

Le schéma numérique s'écrit tel que :

$$W_i^{n+1} = W_i^n + \frac{\Delta t}{2} \left( f(W_i^n) + f\left(W_i^{n+\frac{1}{2}}\right) \right)$$

$$W_i^{n+\frac{1}{2}} = W_i^n + \Delta t f(W_i^n)$$

$$f(W_i^n) = G(W_i^n) - \frac{\phi_i^n - \phi_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{B\left(\widetilde{W}_{i+\frac{1}{2}}^n\right)\widetilde{W}_{i+\frac{1}{2}}^n - B\left(\widetilde{W}_{i-\frac{1}{2}}^n\right)\widetilde{W}_{i-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta x} - \frac{B\left(\widetilde{W}_{i+\frac{1}{2}}^n\right) - B\left(\widetilde{W}_{i-\frac{1}{2}}^n\right)}{\Delta x} W_i^n,$$

où  $\widetilde{W}_i^n$  est le second ordre MUSCL de l'état reconstruit de  $W_i^n$  en utilisant la fonction classique du limiteur *minmod* comme décrit dans Vila [55],  $\widetilde{W}_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{W_{i+1}^n + W_i^n}{2}$  est un état intermédiaire entre  $W_i^n$  et  $W_{i+1}^n$ , le flux numérique  $\phi_i^n$  est alors donné par :

$$\phi_i^n = F_C(\widetilde{W}_i^n, \widetilde{W}_{i+1}^n) - \frac{\Delta x}{2} D(\widetilde{W}_i^n, \widetilde{W}_{i+1}^n) \frac{\widetilde{W}_{i+1}^n - \widetilde{W}_i^n}{\Delta x}$$

où  $F_C$  et  $D$  sont respectivement des approximations de  $F$  et  $\mathcal{D}$  en  $x = x_{i+\frac{1}{2}}$  :

$$F_C(U, V) = \frac{F(U) + F(V)}{2}$$

$$D(U, V) = X |\Lambda| X^{-1}$$

avec  $\Lambda$  la matrice diagonale des valeurs propres de  $M\left(\frac{U+V}{2}\right)$  et  $X$  la matrice définie par les vecteurs propres associés. Notons que  $(d_i)_{i=1,\dots,4}$  sont les valeurs propres de  $fD$ , la condition CFL est alors donnée par :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i=1,\dots,4} d_i \leq 1$$

## 6.2 SIMULATIONS NUMÉRIQUES

On cherche à mettre en évidence le cas où la couche interne est instable et la couche externe est stable.

On se place dans le cas  $\nu = 0,9$ ,  $\rho = 0,5$  (cf chapitre 5). De plus on choisit  $\theta = \frac{\pi}{4}$  pour que le Reynolds soit égal au paramètre  $f$  et  $F^2 = \frac{\sqrt{2}f}{6}$ . Enfin le petit paramètre onde longue est fixé à  $\varepsilon = \frac{H}{L} = 0,01 \ll 1$ .

On utilise les résultats de stabilité linéaire du modèle Benney couplé (deux équations couplées) car il y a équivalence entre le modèle Saint-Venant (quatre équations couplées) dans le cas où  $\varepsilon$  est petit. Pour ces paramètres, différentes zones de stabilité sont identifiables :

Sur la figure 20, la zone en gris clair représente le domaine bien connu où la couche externe est instable, réciproquement, en-dessous de la courbe en pointillé se trouve la zone où la couche externe est stable.

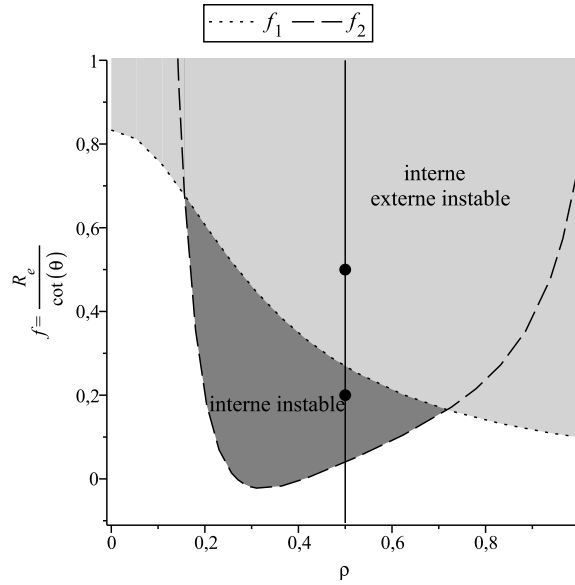


FIGURE 20: Courbes critiques  $f_i(\rho) = \frac{Re}{\cotan\theta}$  pour  $\rho = 0,5$  et  $\nu = 0,9$

Le domaine au-dessus de la courbe en tirets correspond aux cas où la couche interne est instable, en-dessous de cette courbe, nous trouvons la zone où la couche interne est stable.

Nous allons ici étudier les deux cas représentés par les ronds noirs sur la figure 20.

Ils correspondent tous les deux au cas où  $\rho = 0,5$ , le premier cas étudié est choisi pour  $f = 0,5$  dans la zone où les couches internes et externes sont instable. Le deuxième cas est pris pour  $f = 0,2$  dans le domaine où la couche interne est instable et la couche externe est stable.

Nous partons de l'état d'équilibre donné par  $\bar{W}$  :

$$\bar{W} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.75 \\ 4.56 \end{pmatrix}$$

auquel on ajoute une perturbation (de 5%) dans la direction du vecteur propre associé à la valeur propre de plus grand module de la matrice  $M$ . Les simulations sont effectuées sur une seule période du signal. Pour plus de clarté, on affiche trois périodes du signal obtenu sur le graphe.

### 6.2.1 Couches internes et externes instables

Rappelons que l'on prend  $f = 0,5$  ( $R_e = f$  et  $F^2 = \frac{\sqrt{2}f}{6}$ ). Construisons l'état initial, l'unique valeur propre instable de la matrice  $\partial_W S - 2\pi M$  est  $\lambda_2 = 13.4444 + 3.075i$  et le vecteur propre associé est :

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} 0.0436415 - 0.0321769i \\ -0.0916431 - 0.400677i \\ 0.047492 + 0.109129i \\ 0.902194 + 0i \end{bmatrix} = \Phi_2^{re} + i\Phi_2^{im} .$$

On initialise la simulation numérique avec la condition initiale :

$$W_{init} = \bar{W} + 5 \cdot 10^{-3} \left( \cos(2\pi x) \Phi_2^{re} - \sin(2\pi x) \Phi_2^{im} \right).$$

On prend 250 points de maillage sur une période en temps. Le signal est ensuite répété trois fois sur les graphes. À  $t = 0$ , l'interface et la surface libre sont périodiques de même période mais d'amplitudes différentes. Comme nous utilisons une perturbation de 5‰, les interfaces sont proches de l'état stable.

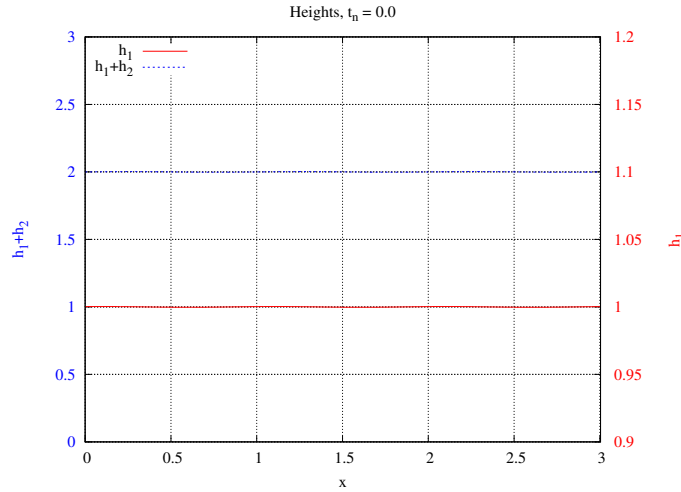


FIGURE 21: Hauteurs à  $t = 0$

Notons que l'échelle est différente pour la surface libre et l'interface : l'échelle de gauche correspond à la hauteur totale des deux fluides superposés  $h_1 + h_2$ , alors que l'échelle de droite correspond à la hauteur de la surface libre  $h_1$ . Ces échelles restent les mêmes pour l'état initial et final.

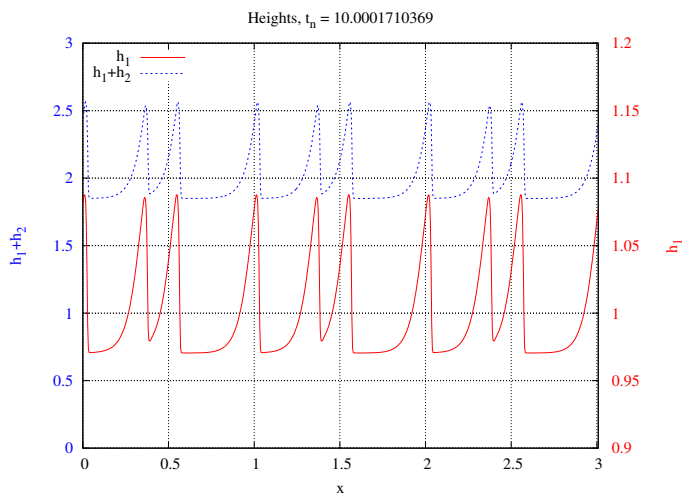


FIGURE 22: Hauteurs à  $t = 10$

On observe bien la formation de roll-waves au niveau de la surface libre mais aussi à l'interface des deux fluides. De plus ces ondes sont en phase.

On effectue alors une transformée de Fourier en espace sur le signal obtenu à chaque temps (figure 23), il est composé d'environ 60 amplitudes différentes où les vingt premières sont les plus importantes. Nous avons aussi tracé dans la figure 23 l'évolution en temps des deux premiers modes : pour  $t \in [0, 1.2]$ , les amplitudes des deux interface ne varie pas beaucoup et pour  $t \in [1.2, 2]$ , il y a création de roll-waves avant de se stabiliser.

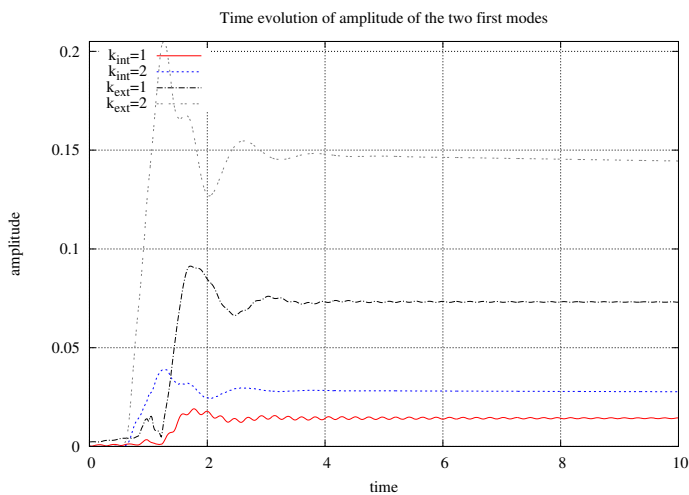


FIGURE 23: Évolution en temps de l'amplitude des deux premiers modes



### 6.2.2 Couche interne instable et couche externe stable

Comme souhaité, le modèle utilisé produit donc des roll-waves dans le premier cas étudié. On veut maintenant étudier un cas différent où la couche interne sera instable et la couche externe stable.

On prend alors  $f = 0,2$  ( $R_e = f = 0.1$  et  $F^2 = \frac{\sqrt{2}f}{6}$ ). L'unique valeur propre instable de la matrice  $\partial_W S - 2\pi M$  est  $\lambda_3 = 12.9785 + 3.07333i$  et le vecteur propre associé est :

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} 0.0307893 - 0.0100245i \\ -0.0979189 - 0.413505i \\ 0.00564626 + 0.0685013i \\ 0.902027 + 0i \end{bmatrix} = \Phi_3^{re} + i\Phi_3^{im}$$

On initialise la simulation numérique avec la condition initiale :

$$W_{init} = \bar{W} + 5.10^{-3} \left( \cos(2\pi x) \Phi_2^{re} - \sin(2\pi x) \Phi_2^{im} \right).$$

On prend 250 points de maillage sur une période en temps. Le signal est ensuite répété trois fois sur les graphes. À  $t = 0$ , l'interface et la surface libre sont périodiques de même période mais d'amplitudes différentes. Comme nous utilisons une perturbation de *0.5promille*, les interfaces sont proches de l'état stable, il s'agit ici du même état initial que celui de la partie précédente mais un zoom plus important est fait ici. Rappelons que l'échelle est différente pour la surface libre et l'interface : l'échelle de gauche correspond à la hauteur totale des deux fluides superposés  $h_1 + h_2$ , alors que l'échelle de droite correspond à la hauteur de la surface libre  $h_1$ . Ces échelles restent les mêmes pour l'état initial et final.

On peut observer la hauteur des deux couches de fluide au temps  $t = 0$  et au temps  $t = 10$  sur les figures 24 et 25.

On peut voir sur la figure 24, que la simulation débute avec une surface libre perturbée et une interface périodique. La surface libre a tendance à se stabiliser (cf figure 25) et l'interface semble plutôt être de plus en plus perturbée.

On effectue alors une transformée de Fourier en espace sur le signal obtenu à chaque temps, il est composé de moins de cinq amplitudes différentes où seulement la première porte toute l'information du signal.

Le graphe 26 montre l'évolution en temps de l'amplitude des deux premiers modes.

L'amplitude du mode externe est élevée à  $t = 0$  mais elle décroît lentement alors que l'amplitude du mode interne pourtant très faible au départ, augmente et finit à un peu plus de  $3.10^{-4}$ .

La couche interne a donc bien tendance à se stabiliser alors que la couche interne est instable.

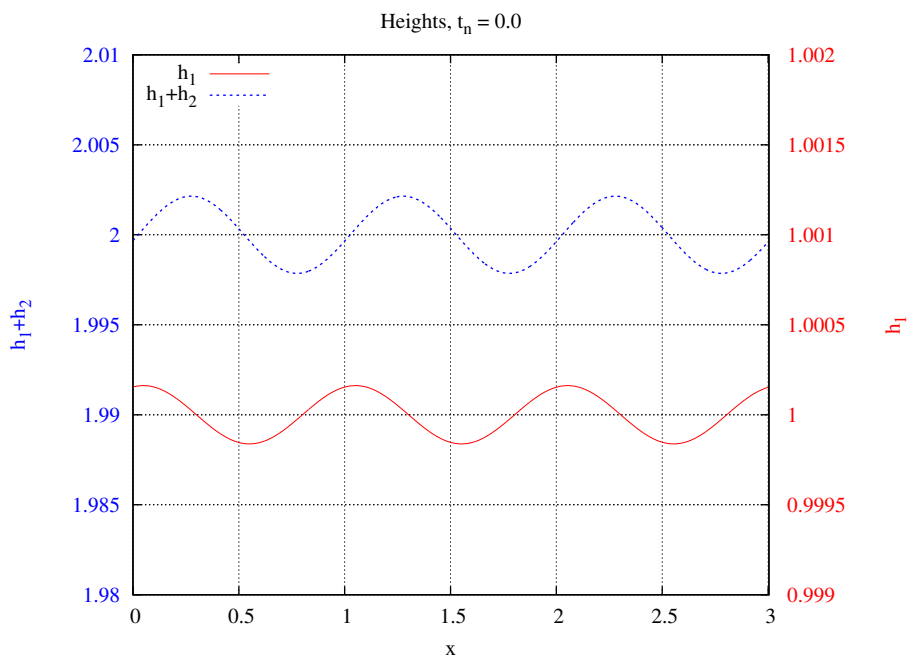


FIGURE 24: Hauteurs à  $t = 0$

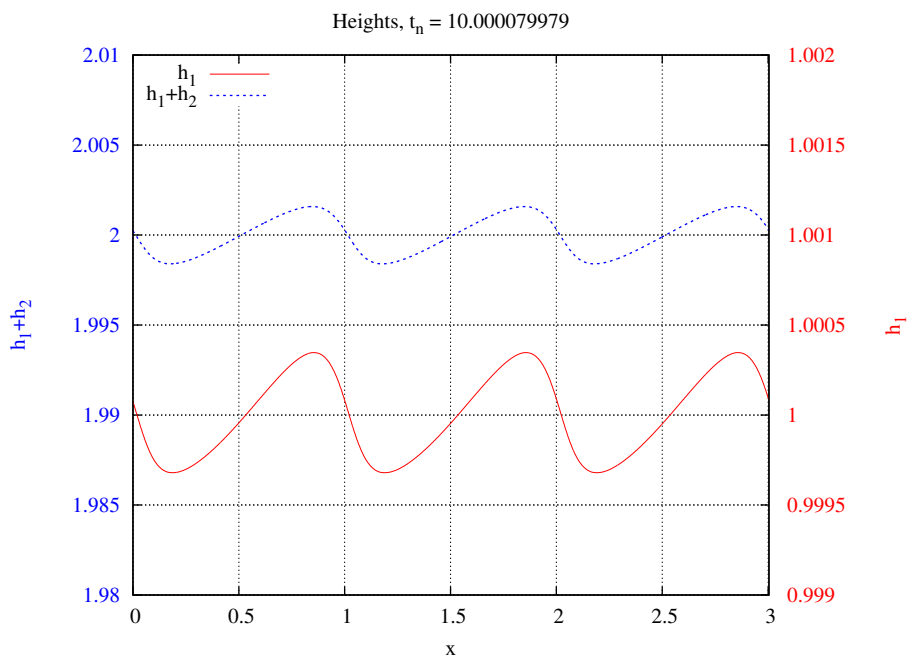


FIGURE 25: Hauteurs à  $t = 10$

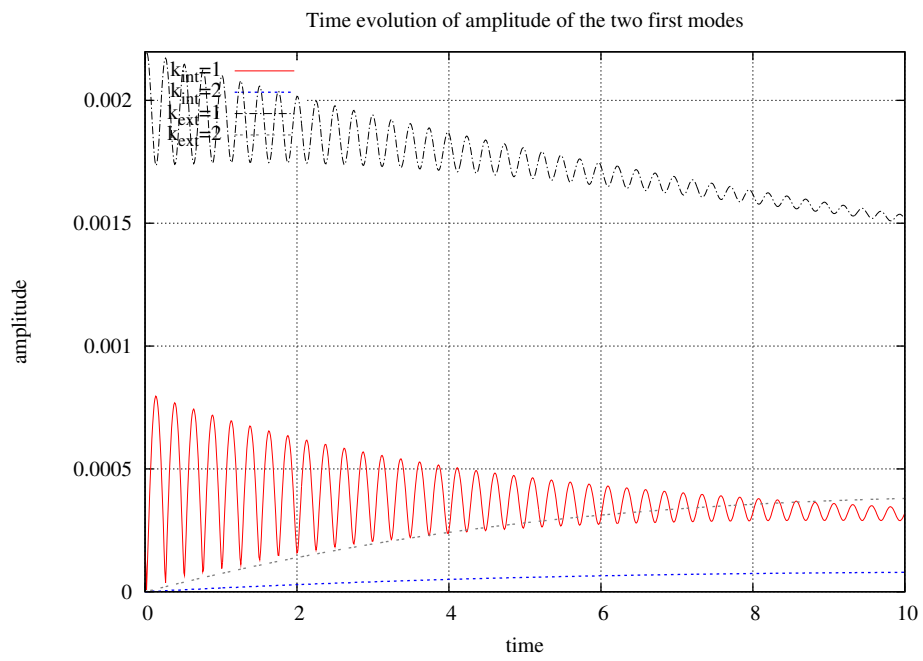


FIGURE 26: Évolution en temps de l'amplitude des deux premiers modes



## ÉCOULEMENT DE DEUX FLUIDES ENTRE DEUX PLAQUES

Nous étudions ici un écoulement bicouche 2D contenu entre deux plaques, il n'y a donc pas de surface libre dans ce cas, ce qui ajoute une contrainte à notre problème. On réalise un développement asymptotique comme dans le chapitre 2. Toutefois cette méthode conduit à un problème au niveau de la condition de continuité des contraintes qui ne peut pas être vérifiée car le saut de la vitesse tangentielle est non nul à l'interface ( $[w] \neq 0$ ). Dans ce chapitre nous avons réglé ce problème en ajoutant un degré de liberté à nos équations, c'est-à-dire en faisant intervenir la pression un ordre plus tôt que normalement en posant  $\delta \approx \mathcal{O}(1)$ . Nous avons utilisé l'article de Charru et Fabre [13], où ils font une étude d'écoulement bi-fluides entre deux plaques mais ils n'ont pas considéré ce problème de continuité à l'interface, il y a donc une incompatibilité de leurs conditions limites avec cette étude. Néanmoins ce point ne pose pas de problème dans le cas d'ondes de petites amplitudes.

Dans ce chapitre, nous avons obtenu une asymptotique onde longue pour la description des différents champs (vitesse et pression) au-delà du régime de petite amplitude qui était le seul étudié rigoureusement jusqu'alors. Nous avons aussi réalisé un modèle de pression et contrainte à l'interface où nous avons justifié les corrélations utilisées par Jurman et McCready [24], bien que dans notre cas le gaz n'est pas turbulent. En effet ils ont proposé un modèle Saint-Venant pour un film liquide entraîné par un écoulement turbulent. Il s'agit d'un modèle qualitatif basé sur les résultats expérimentaux de Abrams et Hanratty [1] sur le cisaillement d'un gaz au-dessus d'une surface solide rugueuse (de forme sinusoïdale). Nous avons également écrit des modèles réduits à une et à deux équations.

## SOMMAIRE

7.1	Équations de l'écoulement	<b>156</b>
7.2	Équations adimensionnées	<b>157</b>
7.2.1	Dimensions caractéristiques	157
7.2.2	Équations de volume	158
7.2.3	Conditions aux limites	159
7.2.4	Lien avec Charru & Fabre	160
7.3	Équations moyennées	<b>161</b>
7.3.1	Conservation de la masse	162
7.3.2	Modèle à deux équations	162
7.4	Asymptotique onde longue	<b>163</b>
7.4.1	Validité du développement	165
7.4.2	Pression	166
7.4.3	Développement de la vitesse et de la pression	166
7.4.4	Solution uniforme	167
7.4.5	Solution à l'ordre 0	169
7.5	Modèle de pression et contrainte à l'interface	<b>174</b>

7.6 Stabilité linéaire 175  
 7.7 Solution à l'ordre 1 177  
 7.8 Équations moyennées 183  
     7.8.1 Modèle à une équation 183  
     7.8.2 Modèle à deux équations 185

7.1 ÉQUATIONS DE L'ÉCOULEMENT

Soit  $\vec{U}_i$  et  $p_i$  la vitesse et la pression dans le fluide  $i$ ,  $i = 1, 2$  où  $\vec{U}_i = \begin{pmatrix} u_i \\ w_i \end{pmatrix}$  dans le repère  $\vec{X} = (x, z)$ . Les équations de Navier-Stokes pour l'écoulement donnent pour  $\vec{X} \in \Omega_i$  avec  $i = 1, 2$  :

$$\begin{cases} \nabla_{\vec{X}} \cdot \vec{U}_i = 0 \\ \partial_t \vec{U}_i + (\vec{U}_i \cdot \nabla_{\vec{X}}) \vec{U}_i = -\frac{1}{\rho_i} \nabla_{\vec{X}} p_i + \vec{g} + \nu_i \nabla_{\vec{X}}^2 \vec{U}_i \end{cases} \quad (7.1)$$

avec  $\rho_i$  et  $\nu_i$  les caractéristiques du fluide  $i$ , respectivement sa masse volumique et sa viscosité cinématique et  $\vec{g}$  la gravité.

Au fond on impose une condition de non-glissement, la paroi supérieure peut translater (vitesse tangentielle non-nulle), et du fluide peut s'en échapper (vitesse normale non-nulle) :

$$\begin{aligned} u_1|_{z=-h_1} = w_1|_{z=-h_1} = 0 \\ u_2|_{z=h_2} = U_P = U_0 u_p, \quad w_2|_{z=h_2} = W_P = U_0 w_p \end{aligned} \quad (7.2)$$

Ceci est illustré sur la figure 27 :

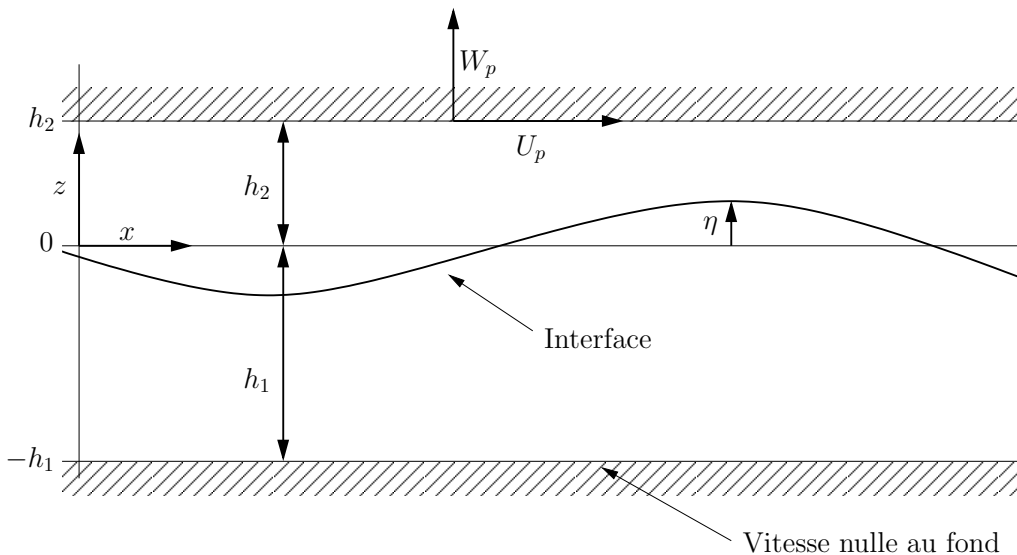


FIGURE 27: Écoulement de deux fluides entre deux plaques

On peut voir que  $h_1$  et  $h_2$  sont les hauteurs moyennes des deux fluides et  $\eta$  représente l'écart relatif à l'état d'équilibre.

À l'interface entre les deux fluides, on raccorde la vitesse et les contraintes :

$$\begin{aligned} [u] = [w] &= 0 \\ [\vec{t} \cdot \Sigma \vec{n}] &= 0, \quad [\vec{n} \cdot \Sigma \vec{n}] = -\sigma \mathcal{H} \end{aligned} \quad (7.3)$$

avec la notation  $[\varphi] = (\varphi_2 - \varphi_1)|_{z=\eta}$ ,  $\Sigma = -p \mathbb{1} + \mu \left( \nabla_{\vec{x}} \vec{U}_i + \left( \nabla_{\vec{x}} \vec{U}_i \right)^T \right)$  et  $\mathcal{H}$  qui représente la courbure de l'interface. La pression de référence est fixée comme étant la pression du fluide inférieur, à l'interface :

$$p_1|_{z=\eta} = P_0(x) = \rho_1 g h_1 p_0(x) \quad (7.4)$$

Enfin on restreint l'étude au cas où il n'y a pas de transfert de masse à l'interface entre les deux fluides :

$$\eta_t = w_i|_{z=\eta} - \eta_x u_i|_{z=\eta} \quad (7.5)$$

## 7.2 ÉQUATIONS ADIMENSIONNÉES

### 7.2.1 Dimensions caractéristiques

On note les variables adimensionnées avec une tilde, et on fait la mise à l'échelle suivante :

$$x = L\tilde{x}, \quad u_i = U_0\tilde{u}_i, \quad t = \frac{L}{U_0}\tilde{t}, \quad (7.6)$$

$$z = \varepsilon L\tilde{z}, \quad w_i = \varepsilon U_0\tilde{w}_i, \quad p = \rho_1 g h_1 \tilde{p}.$$

avec  $L$  la longueur d'onde,  $U_0$  une vitesse caractéristique (vitesse à l'interface, vitesse moyenne...). À partir de ces dimensions, on introduit les nombres adimensionnels usuels suivants :

$$\begin{aligned} \text{Nombre de Froude :} \quad F^2 &= \frac{U_0^2}{g h_1}, \\ \text{Nombre de Reynolds :} \quad R &= \frac{\rho_1 h_1 U_0}{\mu_1} = \frac{U_0 h_1}{\nu_1}, \\ \text{Nombre de Weber :} \quad W &= \frac{\rho_1 U_0^2 h_1}{\sigma} \end{aligned} \quad (7.7)$$

auxquels on rajoute  $d, m, r$  les rapports des hauteurs, des viscosités et des masses volumiques :

$$d = \frac{h_2}{h_1}, \quad m = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad r = \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{7.8}$$

On peut définir ces ratios dans chaque couche en posant :

$$d_1 = -1, \quad d_2 = d, \quad m_i = \frac{\mu_i}{\mu_1}, \quad r_i = \frac{\rho_i}{\rho_1}, \quad i = 1, 2 \tag{7.9}$$

La figure suivante correspond à la figure 27 qui a été adimensionnée. On ne travaillera plus que dans ce cadre ci.

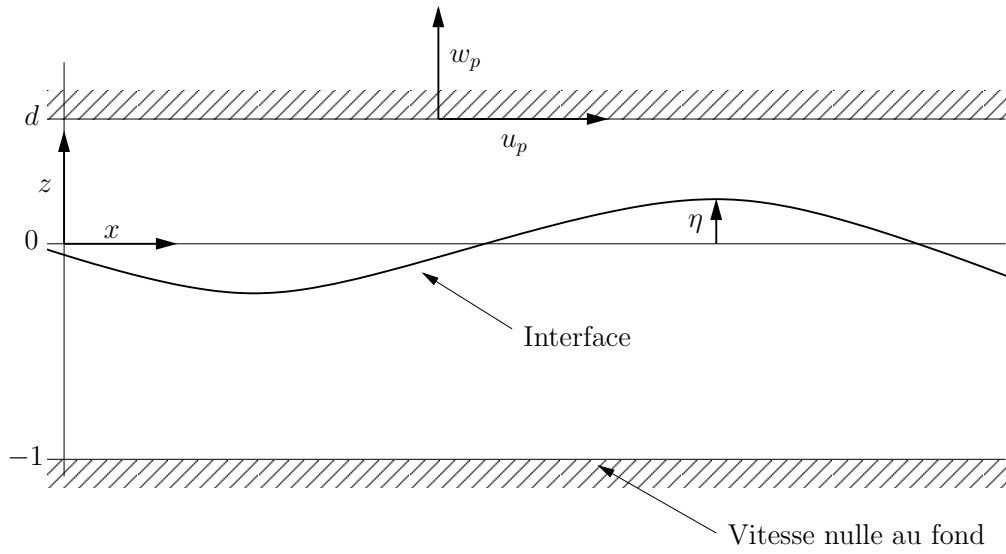


FIGURE 28: Écoulement en variables adimensionnées

### 7.2.2 Équations de volume

Les équations de Navier-Stokes se développent telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i,x} + w_{i,z} = 0 \\ \partial_t u_i + u_i u_{i,x} + w_i u_{i,z} = -\frac{1}{r_i F^2} p_{i,x} + \frac{\sin \theta}{\varepsilon F^2} + \frac{m_i}{r_i} \frac{1}{\varepsilon R} (\varepsilon^2 u_{i,xx} + u_{i,zz}) \\ \partial_t w_i + u_i w_{i,x} + w_i w_{i,z} = -\frac{1}{\varepsilon^2 r_i F^2} p_{i,z} - \frac{\cos \theta}{\varepsilon^2 F^2} + \frac{m_i}{r_i} \frac{1}{\varepsilon R} (\varepsilon^2 w_{i,xx} + w_{i,zz}) \end{array} \right. , \quad i = 1, 2$$



## 7.2.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{aligned} u_1|_{z=-1} &= w_1|_{z=-1} = 0 \\ u_2|_{z=d} &= u_p, \quad w_2|_{z=d} = w_p \\ p_1|_{z=\eta} &= p_0(x) \end{aligned} \tag{7.10}$$

avec les sauts à l'interface :

$$\begin{aligned} [u] &= [w] = 0 \\ [\vec{t} \cdot \Sigma \vec{n}] &= 0, \quad [\vec{n} \cdot \Sigma \vec{n}] = -\sigma \mathcal{H} \end{aligned} \tag{7.11}$$

où :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \begin{pmatrix} 2\mu_i u_{i,x} - p & \mu_i (u_{i,z} + w_{i,x}) \\ \mu_i (u_{i,z} + w_{i,x}) & 2\mu_i w_{i,z} - p \end{pmatrix} \\ &= \rho_1 U^2 \begin{pmatrix} 2m_i \frac{\varepsilon}{R} u_{i,x} - \frac{1}{F^2} p & \frac{m_i}{R} (u_{i,z} + \varepsilon^2 w_{i,x}) \\ \frac{m_i}{R} (u_{i,z} + \varepsilon^2 w_{i,x}) & 2m_i \frac{\varepsilon}{R} w_{i,z} - \frac{1}{F^2} p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et où  $\vec{n}, \vec{t}, \mathcal{H}$  la normale, la tangente et la courbure s'écrivent :

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \eta_x^2}} \begin{pmatrix} -\varepsilon \eta_x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \eta_x^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \eta_x \end{pmatrix} \\ \mathcal{H} &= \frac{\varepsilon^2}{h_1} \eta_{xx} (1 + \varepsilon^2 \eta_x^2)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\Sigma \vec{n} = \frac{\rho_1 U^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \eta_x^2}} \begin{pmatrix} \varepsilon \eta_x \left( \frac{1}{F^2} p - 2m_i \frac{\varepsilon}{R} u_{i,x} \right) + \frac{m_i}{R} (u_{i,z} + \varepsilon^2 w_{i,x}) \\ -\varepsilon \eta_x \frac{m_i}{R} (u_{i,z} + \varepsilon^2 w_{i,x}) + 2m_i \frac{\varepsilon}{R} w_{i,z} - \frac{1}{F^2} p \end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{aligned}\vec{t} \cdot \Sigma \vec{n} &= \frac{\rho_1 U^2}{1 + \varepsilon^2 \eta_x^2} \frac{m_i}{R} (2\eta_x \varepsilon^2 (w_{i,z} - u_{i,x}) + (1 - \varepsilon^2 \eta_x^2) (u_{i,z} + \varepsilon^2 w_{i,x})) \\ &= \frac{\rho_1 U^2}{1 + \varepsilon^2 \eta_x^2} \frac{m_i}{R} (-4\eta_x \varepsilon^2 u_{i,x} + (1 - \varepsilon^2 \eta_x^2) (u_{i,z} + \varepsilon^2 w_{i,x}))\end{aligned}$$

De plus :

$$[m_i u_{i,z}] = \frac{4\varepsilon^2 \eta_x}{1 - \varepsilon^2 \eta_x^2} [m_i u_{i,x}] - \varepsilon^2 [m_i w_{i,x}] \quad (7.12)$$

Alors :

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \Sigma \vec{n} &= \frac{\rho_1 U^2}{1 + \varepsilon^2 \eta_x^2} \left( - \left( 1 + \varepsilon^2 \eta_x^2 \right) \frac{1}{F^2} p + 2m_i \frac{\varepsilon}{R} (w_{i,z} + \varepsilon^2 \eta_x^2 u_{i,x}) - 2\varepsilon \eta_x \frac{m_i}{R} (u_{i,z} + \varepsilon^2 w_{i,x}) \right) \\ &= -\rho_1 U^2 \left( \frac{1}{F^2} p + 2 \frac{\varepsilon}{R} \frac{1 - \varepsilon^2 \eta_x^2}{1 + \varepsilon^2 \eta_x^2} m_i u_{i,x} + 2\varepsilon \eta_x \frac{m_i}{R (1 + \varepsilon^2 \eta_x^2)} (u_{i,z} + \varepsilon^2 w_{i,x}) \right)\end{aligned}$$

On obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned}[p] + \frac{\varepsilon F^2}{R} \frac{2}{1 + \varepsilon^2 \eta_x^2} \left( (1 - \varepsilon^2 \eta_x^2) [m_i u_{i,x}] + \eta_x ([m_i u_{i,z}] + \varepsilon^2 [m_i w_{i,x}]) \right) \\ = \frac{\varepsilon^2 F^2}{W} \eta_{xx} (1 + \varepsilon^2 \eta_x^2)^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Et en remplaçant  $[m_i u_{i,z}]$  par l'expression déjà trouvée :

$$[p] = \frac{\varepsilon^2 F^2}{W} \eta_{xx} (1 + \varepsilon^2 \eta_x^2)^{-\frac{3}{2}} - 2 \frac{\varepsilon F^2}{R} \frac{1 + \varepsilon^2 \eta_x^2}{1 - \varepsilon^2 \eta_x^2} [m_i u_{i,x}] \quad (7.13)$$

Et la condition d'imperméabilité à l'interface est inchangée :

$$\eta_t = w_i|_{z=\eta} - \eta_x u_i|_{z=\eta} \quad (7.14)$$

#### 7.2.4 Lien avec Charru & Fabre

Dans l'adimensionnement de Charru et Fabre [13], la pression est adimensionnée par la pression inertielle, le nombre de Weber est pris de l'ordre de  $\varepsilon$  et leur nombre de Froude ( $F_7$ ) diffère de la définition précédente :

$$\begin{aligned}
p &= \rho_1 U_0^2 \tilde{p} \\
W &= \varepsilon \\
F_r &= \frac{U_0^2}{(1-r)gh_1} = \frac{F^2}{(1-r)} \Rightarrow (1-r)F_r = F^2
\end{aligned}$$

Le système d'équations décrivant la pression s'écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l}
p_{i,z} = -\frac{r_i \cos \theta}{(1-r)F_r} + m_i \frac{\varepsilon}{R} \left( \varepsilon^2 w_{i,xx} + w_{i,zz} \right) - \varepsilon^2 r_i \left( \partial_t w_i + u_i w_{i,x} + w_i w_{i,z} \right) \\
[p] = \varepsilon \eta_{xx} \left( 1 + \varepsilon^2 \eta_x^2 \right)^{-\frac{3}{2}} - 2 \frac{\varepsilon}{R} \frac{1 + \varepsilon^2 \eta_x^2}{1 - \varepsilon^2 \eta_x^2} [m_i u_{i,x}] \\
p_1|_{z=\eta} = p_0(x)
\end{array} \right. \quad (7.15)$$

et donc l'équation sur la vitesse tangentielle est :

$$\begin{aligned}
u_{i,zz} &= -\frac{r_i}{m_i} \frac{R \sin \theta}{(1-r)F_r} + \frac{\varepsilon R}{m_i} p_{i,x} \\
&\quad + \frac{r_i}{m_i} \varepsilon R \left( \partial_t u_i + u_i u_{i,x} + w_i u_{i,z} \right) - \varepsilon^2 u_{i,xx}
\end{aligned} \quad (7.16)$$

On retrouve bien l'équation (7) de Charru et Fabre :

$$\begin{aligned}
u_{i,zzz} &= \frac{r_i}{m_i} \varepsilon R \left( \partial_t u_i + u_i u_{i,x} + w_i u_{i,z} \right)_z \\
&\quad + 2\varepsilon^2 w_{i,xzz} - \frac{\varepsilon^3 R}{m_i} r_i \left( \partial_t w_i + u_i w_{i,x} + w_i w_{i,z} \right)_x + \varepsilon^4 w_{i,xxx}
\end{aligned} \quad (7.17)$$

Problème : Si dans cette expression (7.16) on veut garder les termes de pression, il faut alors avoir  $\varepsilon R \approx \mathcal{O}(1)$  or dans la condition (8h) de Charru et Fabre, le Reynolds est explicitement donné comme étant en  $\mathcal{O}(1)$ .

### 7.3 ÉQUATIONS MOYENNÉES

Le débit dans chaque couche s'écrit :

$$q_1 = \int_{-1}^{\eta} u_1 dz \quad q_2 = \int_{\eta}^d u_2 dz$$

qu'on peut résumer par la formule suivante :

$$q_i = (-1)^i \int_{\eta}^{d_i} u_i dz \quad (7.18)$$

On utilise la formule de dérivation suivante :

$$\int_{\eta(x,t)}^{d_i} \varphi_x(x,z,t) dz = \left( \int_{\eta(x,t)}^{d_i} \varphi(x,z,t) dz \right)_x + \varphi(x,\eta(x,t),t) \eta_x(x,t) \quad (7.19)$$

### 7.3.1 Conservation de la masse

On intègre l'équation de conservation de la masse :

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^{d_i} (u_{i,x} + w_{i,z}) dz &= \int_{\eta}^{d_i} u_{i,x} dz + \int_{\eta}^{d_i} w_{i,z} dz \\ &= \left( \int_{\eta}^{d_i} u_i dz \right)_x + \eta_x u_i|_{\eta} + w_i|_{d_i} - w_i|_{\eta} \\ &= (-1)^i q_{i,x} + (i-1)w_p - \eta_t \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\eta_t + (-1)^{i+1} q_{i,x} + (1-i)w_p = 0, \quad i = 1, 2 \quad (7.20)$$

### 7.3.2 Modèle à deux équations

La conservation de la quantité de mouvement suivant  $\bar{x}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} &\int_{\eta}^{d_i} (\partial_t u_i + u_i u_{i,x} + w_i u_{i,z}) dz \\ &= \int_{\eta}^{d_i} \left( \partial_t u_i + (u_i^2)_{,x} + (w_i u_i)_{,z} - u_i (u_{i,x} + w_{i,z}) \right) dz \\ &= \int_{\eta}^{d_i} \left( \partial_t u_i + (u_i^2)_{,x} + (w_i u_i)_{,z} \right) dz \\ &= \left( \int_{\eta}^{d_i} u_i dz \right)_t + \eta_t u_i|_{\eta} + \left( \int_{\eta}^{d_i} u_i^2 dz \right)_x + \eta_x u_i^2|_{\eta} + w_i u_i|_{d_i} - w_i u_i|_{\eta} \\ &= (-1)^i q_{i,t} + \left( \int_{\eta}^{d_i} u_i^2 dz \right)_x + u_i|_{\eta} (\eta_t + \eta_x u_i|_{\eta} - w_i|_{\eta}) + w_i u_i|_{d_i} \\ &= (-1)^i q_{i,t} + \left( \int_{\eta}^{d_i} u_i^2 dz \right)_x + (i-1)w_p u_p \end{aligned}$$

or :

$$\partial_t u_i + u_i u_{i,x} + w_i u_{i,z} = -\frac{1}{r_i F^2} p_{i,x} + \frac{\sin \theta}{\varepsilon F^2} + \frac{m_i}{r_i} \frac{1}{\varepsilon R} \left( \varepsilon^2 u_{i,xx} + u_{i,zz} \right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \int_{\eta}^{d_i} \left( -\frac{\delta}{r_i \beta} p_{i,x} + \frac{\lambda \sin \theta}{\beta} + \frac{m_i}{r_i} \frac{1}{\beta} (\varepsilon^2 u_{i,xx} + u_{i,zz}) \right) dz \\ &= -\frac{\delta}{r_i \beta} \int_{\eta}^{d_i} p_{i,x} dz + \frac{\lambda \sin \theta}{\beta} (d_i - \eta) \\ &+ \frac{m_i}{r_i} \frac{1}{\beta} (u_{i,z}|_{d_i} - u_{i,z}|_{\eta}) + \frac{m_i}{r_i} \frac{\varepsilon^2}{\beta} \int_{\eta}^{d_i} u_{i,xx} dz \end{aligned}$$

En utilisant la conservation de la masse, on obtient :

$$\begin{cases} \eta_t + (-1)^{i+1} q_{i,x} = 0 \\ (-1)^{i+1} q_{i,t} + \left( \int_{d_i}^{\eta} u_i^2 dz \right)_x + \frac{\delta}{r_i \beta} \int_{d_i}^{\eta} p_{i,x} dz + (1-i) w_p u_p \\ = \frac{1}{\beta} \frac{m_i}{r_i} \left( \frac{r_i \lambda \sin \theta}{m_i} (\eta - d_i) + u_{i,z}|_{\eta} - u_{i,z}|_{d_i} \right) + \frac{m_i}{r_i} \frac{\varepsilon^2}{\beta} \int_{d_i}^{\eta} u_{i,xx} dz \end{cases}, \quad i = 1, 2 \quad (7.21)$$

On peut prendre indifféremment le système avec comme variables  $(\eta, q_1)$  ou  $(\eta, q_2)$ . Si on choisit la couche inférieure comme référence, on obtient :

$$\begin{cases} \eta_t + q_{1,x} = 0 \\ q_{1,t} + \left( \int_{-1}^{\eta} u_1^2 dz \right)_x + \frac{\delta}{\beta} \int_{-1}^{\eta} p_{1,x} dz \\ = \frac{1}{\beta} (\lambda \sin \theta (\eta + 1) + u_{1,z}|_{\eta} - u_{i,z}|_{-1}) + \frac{\varepsilon^2}{\beta} \int_{-1}^{\eta} u_{1,xx} dz \end{cases} \quad (7.22)$$

#### 7.4 ASYMPTOTIQUE ONDE LONGUE

Dans cette partie on met en place un paramétrage servant pour réaliser un développement formel des champs de pression et de vitesse.

Les systèmes d'équations différentielles à résoudre pour la pression et les deux composantes de la vitesses sont :

$$\begin{cases} p_{i,z} = -r_i \cos \theta + m_i \frac{\varepsilon F^2}{R} (\varepsilon^2 w_{i,xx} + w_{i,zz}) - \varepsilon^2 r_i F^2 (\partial_t w_i + u_i w_{i,x} + w_i w_{i,z}) \\ [p] = \frac{\varepsilon^2 F^2}{W} \eta_{xx} (1 + \varepsilon^2 \eta_x^2)^{-\frac{3}{2}} - 2 \frac{\varepsilon F^2}{R} \frac{1 + \varepsilon^2 \eta_x^2}{1 - \varepsilon^2 \eta_x^2} [m_i u_{i,x}] \\ p_1|_{z=\eta} = p_0(x) \end{cases} \quad (7.23)$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i,zz} = -\frac{r_i}{m_i} \frac{R \sin \theta}{F^2} + \frac{\varepsilon R}{m_i F^2} p_{i,x} + \frac{r_i}{m_i} \varepsilon R (\partial_t u_i + u_i u_{i,x} + w_i u_{i,z}) - \varepsilon^2 u_{i,xx} \\ [m_i u_{i,z}] = \frac{4\varepsilon^2 \eta_x}{1 - \varepsilon^2 \eta_x^2} [m_i u_{i,x}] - \varepsilon^2 [m_i w_{i,x}] \\ [u] = 0 \\ u_1|_{z=-1} = 0 \\ u_2|_{z=d} = u_p \end{array} \right. \quad (7.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_{i,z} = -u_{i,x} \\ [w] = 0 \\ w_1|_{z=-1} = 0 \\ w_2|_{z=d} = w_p \end{array} \right. \quad (7.25)$$

On introduit alors  $\alpha, \beta, \delta, \kappa, \lambda$  de nouveaux nombres adimensionnels dérivés du Reynolds, du Froude et du Weber :

$$\alpha = \frac{\varepsilon F^2}{R}, \quad \beta = \varepsilon R, \quad \delta = \frac{\varepsilon R}{F^2}, \quad \kappa = \frac{\varepsilon^2 F^2}{W}, \quad \lambda = \frac{R}{F^2}$$

Ainsi les systèmes se réécrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{i,z} = -r_i \cos \theta + \alpha m_i (\varepsilon^2 w_{i,xx} + w_{i,zz}) - \alpha \beta r_i (\partial_t w_i + u_i w_{i,x} + w_i w_{i,z}) \\ [p] = \kappa \eta_{xx} (1 + \varepsilon^2 \eta_x^2)^{-\frac{3}{2}} - 2\alpha \frac{1 + \varepsilon^2 \eta_x^2}{1 - \varepsilon^2 \eta_x^2} [m_i u_{i,x}] \\ p_1|_{z=\eta} = p_0(x) \end{array} \right. \quad (7.26)$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i,zz} = -\frac{r_i}{m_i} \lambda \sin(\theta) + \frac{\delta}{m_i} p_{i,x} + \frac{r_i}{m_i} \beta (\partial_t u_i + u_i u_{i,x} + w_i u_{i,z}) - \varepsilon^2 u_{i,xx} \\ [m_i u_{i,z}] = \frac{4\varepsilon^2 \eta_x}{1 - \varepsilon^2 \eta_x^2} [m_i u_{i,x}] - \varepsilon^2 [m_i w_{i,x}] \\ [u] = 0 \\ u_1|_{z=-1} = 0 \\ u_2|_{z=d} = u_p \end{array} \right. \quad (7.27)$$

Les équations sur  $w$  restent les mêmes.

## 7.4.1 Validité du développement

On fait les hypothèses suivantes, de manière à conserver les termes de pression dans le développement de la vitesse :

$$\alpha, \beta \ll 1, \quad \delta, \lambda, \kappa \simeq \mathcal{O}(1) \quad (7.28)$$

Si on pose  $R = \varepsilon^r$  et  $\lambda = \varepsilon^l$  alors

$$\alpha \leq \varepsilon \Rightarrow \varepsilon^{-l} \leq 1 \Rightarrow \varepsilon^l > 1 \Rightarrow l < 0$$

$$\beta \leq \varepsilon \Rightarrow r > 0$$

$$\delta \geq 1 \Rightarrow \varepsilon^{1+l} \geq 1 \Rightarrow 1+l \leq 0 \Rightarrow l \leq -1$$

donc l'asymptotique est réalisée sous les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} R &= \varepsilon^r, & r &> 0 \\ \lambda &= \varepsilon^l, & l &\leq -1 \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \alpha &\leq \varepsilon^2, & \delta &\geq 1 \\ \beta &\leq \varepsilon, & \lambda &\geq \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned} \quad \text{ou encore } \boxed{F^2 \leq \varepsilon R \leq \varepsilon} \quad (7.29)$$

Les systèmes à résoudre pour obtenir la vitesse et la pression jusqu'à l'ordre deux sont les suivants :

$$\begin{cases} p_{i,z} = -r_i \cos \theta + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ [p] = \kappa \eta_{xx} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ p_1|_{z=\eta} = p_0(x) \end{cases} \quad (7.30)$$

et :

$$\begin{cases} u_{i,zz} = -\frac{r_i}{m_i} \lambda \sin(\theta) + \frac{\delta}{m_i} p_{i,x} + \frac{r_i}{m_i} \beta (\partial_t u_i + u_i u_{i,x} + w_i u_{i,z}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ [m_i u_{i,z}] = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ [u_i] = 0 \\ u_1|_{z=-1} = 0 \\ u_2|_{z=d} = u_p \end{cases} \quad (7.31)$$

$$\begin{cases} w_{i,z} = -u_{i,x} \\ [w] = 0 \\ w_1|_{z=-1} = 0 \\ w_2|_{z=d} = w_p \end{cases} \quad (7.32)$$

#### 7.4.2 Pression

L'équation de la pression s'intègre facilement et donne :

$$p_i = p_0(x) + (\eta - z) r_i \cos \theta + (i - 1) \kappa \eta_{xx} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (7.33)$$

Le gradient de pression s'écrit :

$$p_{i,x} = p_{0,x}(x) + \eta_x r_i \cos \theta + (i - 1) \kappa \eta_{xxx} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (7.34)$$

#### 7.4.3 Développement de la vitesse et de la pression

La vitesse et la pression de référence s'écrivent comme la somme de la solution uniforme, la solution stationnaire en  $x$  (notée par une barre), une perturbation d'ordre zéro qui donne la solution non-uniforme, et une perturbation en  $\varepsilon$  et en  $\beta$  :

$$\begin{aligned} u_i(z, x, t) &= \bar{u}_i(z) + u_i^{(0)}(z, x, t) + \varepsilon u_{i,\varepsilon}^{(1)}(z, x, t) + \beta u_{i,\beta}^{(1)}(z, x, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ p_{0,x}(x, t) &= \overline{p_{0,x}} + p_{0,x}^{(0)}(x, t) + \varepsilon p_{0,x}^{(1)}(x, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (7.35)$$

Par commodité, nous utiliserons la notation suivante, ce qui permet de traiter ensemble les deux développements en  $\varepsilon$  et  $\beta$  pour la vitesse (même si mathématiquement  $u_i^{(1)}$  n'est pas bornée) :

$$\begin{aligned} u_i^{(1)} &= u_{i,\varepsilon}^{(1)} + \frac{\beta}{\varepsilon} u_{i,\beta}^{(1)} \\ u_i(z, x, t) &= \bar{u}_i(z) + u_i^{(0)}(z, x, t) + \varepsilon u_i^{(1)}(z, x, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (7.36)$$

En intégrant directement le gradient pression on obtient la pression en tous points des fluides :

$$p_{i,x} = \overline{p_{0,x}} + \eta_x r_i \cos \theta + (i - 1) \kappa \eta_{xxx} + p_{0,x}^{(0)}(x, t) + \varepsilon p_{0,x}^{(1)}(x, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (7.37)$$

De même la vitesse à la paroi se décompose en une partie constante et une partie variable en  $x$  :

$$\begin{aligned} u_p(x, t) &= \bar{u}_p + u_p^{(0)}(x, t) \\ w_p(x, t) &= 0 + w_p^{(0)}(x, t) \end{aligned} \quad (7.38)$$



## 7.4.4 Solution uniforme

On pose :

$$\bar{u}_x = 0, \quad \bar{w} = 0, \quad \bar{u}_t = 0 \quad \eta = 0$$

Les systèmes à résoudre deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_{i,zz} = -\frac{r_i}{m_i} \lambda \sin(\theta) + \frac{\delta}{m_i} \overline{p_{0,x}} \\ [m_i \bar{u}_{i,z}]_{z=0} = 0 \\ [\bar{u}_i]_{z=0} = 0 \\ \bar{u}_1|_{z=-1} = 0 \\ \bar{u}_2|_{z=d} = \bar{u}_p \end{array} \right. \quad (7.39)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_i = K_{i2} \frac{z^2}{2} + K_{i1} z + K_{i0} \\ mK_{21} - K_{11} = 0 \\ K_{20} - K_{10} = 0 \\ \frac{1}{2} K_{12} - K_{11} + K_{10} = 0 \\ \frac{d^2}{2} K_{22} + dK_{21} + K_{20} = \bar{u}_p \\ K_{22} = \frac{\delta}{m} \overline{p_{0,x}} - \frac{r}{m} \lambda \sin \theta \\ K_{12} = mK_{22} \end{array} \right. \quad (7.40)$$

Ainsi :

$$\bar{u}_i = \frac{m}{m_i} \left( K_{22} \frac{z^2}{2} + K_{21} z \right) + K_{20}$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{22} = \frac{\lambda}{m} (\varepsilon \overline{p_{0,x}} - r \sin(\theta)) \\ K_{21} = \frac{1}{d+m} \left( \bar{u}_p + \frac{m-d^2}{2} K_{22} \right) \\ K_{20} = \frac{m}{d+m} \left( \bar{u}_p - \frac{d(1+d)}{2} K_{22} \right) \end{array} \right. \quad (7.41)$$

Vitesse à l'interface

Si la vitesse de référence est la vitesse à l'interface, alors :

$$1 = u_1|_{z=0} = u_2|_{z=0} = K_{20} = K_{10}$$

$$K_{22} = \frac{2}{d(1+d)} \left( \bar{u}_p - \frac{m+d}{m} \right)$$

$$K_{21} = \frac{1}{d(1+d)} \left( \bar{u}_p + \frac{d^2-m}{m} \right)$$

La solution uniforme est donc donnée par :

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = \frac{z}{d(1+d)} (m(1+z)(\bar{u}_p - 1) + d(d-z)) + 1 \\ \bar{u}_2 = \frac{z}{d(1+d)} \left( (1+z)(\bar{u}_p - 1) + \frac{d(d-z)}{m} \right) + 1 \end{cases}$$

La constante  $K_{22}$  dimensionnée vaut :

$$mK_{22} = \delta \overline{p_{0,x}} - r\lambda = \frac{h_1^2}{\mu_1 U_0} (\overline{P_{0,x}} - \rho_2 g \sin \theta)$$

et donc :

$$U_0 = \frac{m}{m+d} U_p + \frac{h_1^2}{2\mu_1} (\rho_2 g \sin \theta - \overline{P_{0,x}}) \frac{d(1+d)}{m+d}$$

Si  $K_{22} = 0$  ( $\lambda = 0$  et  $P_0 = \text{constante}$ ) (écoulement de type Couette : uniquement le mouvement de la paroi supérieure), on a :

$$U_0 = \frac{m}{m+d} U_p$$

$$\bar{u}_1 = z + 1$$

$$\bar{u}_2 = \frac{z}{m} + 1$$

dans le cas  $U_p = 0$  (paroi immobile) et  $\theta = 0$  (fond plat) (Poiseuille)

$$U_0 = -\frac{h_1^2}{2\mu_1} \overline{P_{0,x}} \frac{d(1+d)}{m+d}$$

$$\bar{u}_1 = \frac{z}{d(1+d)} (d^2 - m - (m+d)z) + 1$$

$$\bar{u}_2 = \frac{z}{d(1+d)} \left( -(1+z) + \frac{d(d-z)}{m} \right) + 1$$

## 7.4.5 Solution à l'ordre 0

Vitesse tangentielle

Le système à résoudre est :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i,zz}^{(0)} = \frac{\delta}{m_i} \left( p_{0,x}^{(0)} + \eta_x r_i \cos \theta + (i-1) \kappa \eta_{xxx} \right) \\ \left[ m_i \left( \bar{u}_{i,z} + u_{i,z}^{(0)} \right) \right] = 0 \\ \left[ \bar{u}_i + u_i^{(0)} \right] = 0 \\ u_i^{(0)} \Big|_{z=d_i} = (i-1) u_p^{(0)} \end{array} \right. \quad (7.42)$$

Alors la perturbation de la vitesse s'écrit :

$$\begin{aligned} u_{i,z}^{(0)} &= (z-\eta) \frac{\delta}{m_i} \left( p_{0,x}^{(0)} + \eta_x r_i \cos \theta + (i-1) \kappa \eta_{xxx} \right) + u_{i,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta} \\ u_i^{(0)} &= u_i^{(0)} \Big|_{z=d_i} + \int_{d_i}^z u_{i,\zeta}^{(0)}(\zeta) d\zeta \\ &= (i-1) u_p^{(0)} \\ &\quad + (z-d_i) \left[ \left( \frac{z+d_i}{2} - \eta \right) \frac{\delta}{m_i} \left( p_{0,x}^{(0)} + \eta_x r_i \cos \theta + (i-1) \kappa \eta_{xxx} \right) + u_{i,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta} \right] \end{aligned}$$

et la valeur des contraintes à l'interface  $u_{i,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta}(x,t)$  se trouve avec le raccord de la vitesse et de la contrainte à l'interface :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ m_i \left( \bar{u}_{i,z} + u_{i,z}^{(0)} \right) \right] = \left[ m_i u_{i,z}^{(0)} \right] = 0 \\ \left[ u_i^{(0)} \right] = -[\bar{u}_i] = (m-1) \left( K_{22} \frac{\eta^2}{2} + K_{21} \eta \right) \end{array} \right. \quad (7.43)$$

le raccord des dérivées permet de ne garder que  $u_{2,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta}$  comme inconnue :

$$u_{1,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta} = m u_{2,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta}$$

et donc :

$$u_i^{(0)} = (i-1) u_p^{(0)} + \frac{z-d_i}{m_i} \left[ \left( \frac{z+d_i}{2} - \eta \right) \delta \left( p_{0,x}^{(0)} + \eta_x r_i \cos \theta + (i-1) \kappa \eta_{xxx} \right) + m u_{2,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta} \right]$$

et le raccord des vitesses permet de trouver  $u_{2,z}^{(0)}|_{z=\eta}$  :

$$(m-1)\left(K_{22}\frac{\eta^2}{2} + K_{21}\eta\right) = u_p^{(0)} - \frac{(\eta-d)^2 - m(\eta+1)^2}{2m} \delta p_{0,x}^{(0)} - \frac{r(\eta-d)^2 - m(\eta+1)^2}{2m} \delta \eta_x \cos \theta - \frac{(\eta-d)^2}{2m} \delta \kappa \eta_{xxx} + (\eta-d - (\eta+1)m) u_{2,z}^{(0)}|_{z=\eta} \quad (7.44)$$

mais  $u_{2,z}^{(0)}|_{z=\eta}$  dépend de la perturbation de la pression de référence  $p_{0,x}^{(0)}(x,t)$  qui est inconnue.

### Vitesse normale

On a :

$$\begin{aligned} w_{i,z}^{(0)} &= -u_{i,x}^{(0)} \\ &= (1-i)u_{p,x}^{(0)} + \frac{z-d_i}{m_i} \left( \delta \eta_x (p_{0,x}^{(0)} + \eta_x r_i \cos \theta + (i-1)\kappa \eta_{xxx}) - m \left( u_{2,z}^{(0)}|_{z=\eta} \right)_{,x} \right) \\ &\quad - \frac{z-d_i}{m_i} \delta \left( \frac{z+d_i}{2} - \eta \right) (p_{0,xx}^{(0)} + \eta_{xx} r_i \cos \theta + (i-1)\kappa \eta_{xxx}) \end{aligned}$$

or  $w_i^{(0)}|_{z=d_i} = (i-1)w_p^{(0)}$  donc  $w_i^{(0)} = (i-1)w_p^{(0)} + \int_{d_i}^z w_{i,\zeta}^{(0)}(\zeta) d\zeta$ , et :

$$\begin{aligned} w_i^{(0)} &= (1-i) \left( (z-d_i)u_{p,x}^{(0)} - w_p^{(0)} \right) \\ &\quad + \frac{(z-d_i)^2}{2m_i} \left( \delta \eta_x (p_{0,x}^{(0)} + \eta_x r_i \cos \theta + (i-1)\kappa \eta_{xxx}) - m \left( u_{2,z}^{(0)}|_{z=\eta} \right)_{,x} \right) \\ &\quad + \frac{(z-d_i)^2}{2m_i} \delta \left( \eta - \frac{z+2d_i}{3} \right) (p_{0,xx}^{(0)} + \eta_{xx} r_i \cos \theta + (i-1)\kappa \eta_{xxx}) \end{aligned}$$

On peut avoir une équation différentielle sur la pression  $p_x^{(0)}$  en écrivant le raccord de  $w_i^{(0)}$ , mais c'est assez lourd à résoudre.

### Débit volumique total

Considérons plutôt le débit volumique total  $Q$ .  $Q$  est la somme du débit de l'écoulement liquide et du débit de l'écoulement gazeux :

$$Q = \int_{-1}^{\eta} u_1 dz + \int_{\eta}^d u_2 dz$$

D'après la formule 7.20, la variation du débit suivant  $x$  vaut :

$$Q_x = q_{1,x} + q_{2,x} = -w_p^{(0)}$$

$$\begin{aligned}
Q_x &= \left( \int_{-1}^{\eta} u_1 dz + \int_{\eta}^d u_2 dz \right)_x \\
&= \int_{-1}^{\eta} u_{1,x} dz + \eta_x u_1|_{z=\eta} + \int_{\eta}^d u_{2,x} dz - \eta_x u_2|_{z=\eta} \\
&= - \int_{-1}^{\eta} w_{1,z} dz - \int_{\eta}^d w_{2,z} dz - \eta_x [u_i] \\
&= [w_i] - w_p^{(0)} - \eta_x [u_i]
\end{aligned}$$

Or on a déjà assuré la continuité de la vitesse  $[u_i] = 0$  donc  $Q_x + w_p^{(0)} = [w_i] = 0$ . On peut remplacer la condition de continuité de la vitesse normale par un débit total constant. Si on suppose qu'il existe une abscisse de l'écoulement pour laquelle les perturbations du débit et de la vitesse normale s'annulent, le débit est donné plus simplement à l'aide de l'écoulement uniforme :

$$Q(x, t) + \int^x w_p(\xi, t) d\xi = \bar{Q}(x, t) + \bar{w}_p(x, t) = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 \quad (7.45)$$

où :

$$\begin{cases} \bar{q}_1 &= \int_{-1}^0 \bar{u}_1 dz = m \left( K_{22} \frac{1}{6} - K_{21} \frac{1}{2} \right) + 1 \\ \bar{q}_2 &= \int_0^d \bar{u}_2 dz = K_{22} \frac{d^3}{6} + K_{21} \frac{d^2}{2} + d \end{cases}$$

et si on exprime ce débit avec l'écoulement uniforme et la perturbation, on obtient :

$$\begin{aligned}
Q &= \left[ \int_z^{d_i} \left( \bar{u}_i(\zeta) + u_i^{(0)}(\zeta, x, t) \right) d\zeta \right] + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
&= \left[ \int_0^{d_i} \bar{u}_i(\zeta) d\zeta \right] + \left[ \int_z^0 \bar{u}_i(\zeta) d\zeta \right] + \left[ \int_z^{d_i} u_i^{(0)}(\zeta, x, t) d\zeta \right] + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
&= \int_0^d \bar{u}_2(\zeta) d\zeta + \int_{-1}^0 \bar{u}_1(\zeta) d\zeta - \left[ \int_0^z \bar{u}_i(\zeta) d\zeta \right] + \left[ \int_z^{d_i} u_i^{(0)}(\zeta, x, t) d\zeta \right] + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
&= \bar{q}_2 + \bar{q}_1 - \left[ \int_0^z \bar{u}_i(\zeta) d\zeta \right] + \left[ \int_z^{d_i} u_i^{(0)}(\zeta, x, t) d\zeta \right] + \mathcal{O}(\varepsilon)
\end{aligned}$$

et :

$$\left[ \int_z^{d_i} u_i^{(0)}(\zeta, x, t) d\zeta \right] = \left[ \int_0^z \bar{u}_i(\zeta) d\zeta \right] - \int^x w_p^{(0)} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Appelons  $\Psi$  les variations de la solution uniforme autour de  $\eta$  :

$$\Psi = \left[ \int_0^z \bar{u}_i(\zeta) d\zeta \right] = (1-m) \left( K_{22} \frac{\eta^3}{6} + K_{21} \frac{\eta^2}{2} \right)$$

De plus :

$$\int_z^{d_i} u_i^{(0)}(\zeta, x, t) d\zeta = (i-1)(d_i - z) u_p^{(0)} - \frac{(z-d_i)^2}{2m_i} \left[ \left( \frac{z+2d_i}{3} - \eta \right) \delta \left( p_{0,x}^{(0)} + \eta_x r_i \cos \theta + (i-1) \kappa \eta_{xxx} \right) + m u_{2,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta} \right]$$

et :

$$\begin{aligned} \left[ \int_z^{d_i} u_i^{(0)}(\zeta, x, t) d\zeta \right] &= (d-\eta) u_p^{(0)} - \frac{(\eta-d)^2 - m(\eta+1)^2}{2} u_{2,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta} \\ &+ \left( \frac{r(\eta-d)^3 - m(\eta+1)^3}{3m} \right) \delta \eta_x \cos \theta \\ &+ \frac{(\eta-d)^3}{3m} \delta \kappa \eta_{xxx} + \frac{(\eta-d)^3 - m(\eta+1)^3}{3m} \delta p_{0,x}^{(0)} \end{aligned}$$

Introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} F(\eta) &= \frac{(\eta-d)^3 - m(\eta+1)^3}{6m} \\ G(\eta) &= \frac{r(\eta-d)^3 - m(\eta+1)^3}{6m} \end{aligned} \tag{7.46}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \left[ \int_z^{d_i} u_i^{(0)}(\zeta, x, t) d\zeta \right] &= (d-\eta) u_p^{(0)} - m F_\eta u_{2,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta} + 2G \delta \eta_x \cos \theta \\ &+ \frac{(\eta-d)^3}{3m} \delta \kappa \eta_{xxx} + 2F \delta p_{0,x}^{(0)} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\Psi - \int^x w_p^{(0)} = (d-\eta) u_p^{(0)} - m F_\eta u_{2,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta} + 2F \delta p_{0,x}^{(0)} + 2G \delta \eta_x \cos \theta + \frac{(\eta-d)^3}{3m} \delta \kappa \eta_{xxx} \tag{7.47}$$

On peut remarquer que dans l'équation de continuité de la vitesse (7.44) apparaissent les dérivées de  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , et  $\Psi$  :

$$-\Psi_\eta = u_p^{(0)} + m F_{\eta\eta} u_{2,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta} - F_\eta \delta p_{0,x}^{(0)} - G_\eta \delta \eta_x \cos \theta - \frac{(\eta-d)^2}{2m} \delta \kappa \eta_{xxx} \tag{7.48}$$

Les deux équations (7.47) et (7.48) forment un système linéaire en  $u_{2,z}^{(0)}|_{z=\eta}$  et  $p_{0,x}^{(0)}$  :

$$\begin{cases} \Psi - \int^x w_p^{(0)} &= (d - \eta) u_p^{(0)} - m F_\eta u_{2,z}^{(0)}|_{z=\eta} + 2F \delta p_{0,x}^{(0)} + 2G \delta \eta_x \cos \theta + \frac{(\eta - d)^3}{3m} \delta \kappa \eta_{xxx} \\ -\Psi_\eta &= u_p^{(0)} + m F_{\eta\eta} u_{2,z}^{(0)}|_{z=\eta} - F_\eta \delta p_{0,x}^{(0)} - G_\eta \delta \eta_x \cos \theta - \frac{(\eta - d)^2}{2m} \delta \kappa \eta_{xxx} \end{cases}$$

Comme  $2FF_{\eta\eta} - F_\eta^2 \neq 0$ , le système linéaire peut être résolu, et on trouve :

$$\begin{cases} m u_{2,z}^{(0)}|_{z=\eta} &= (2FF_{\eta\eta} - F_\eta^2)^{-1} \left[ F_\eta \left( \Psi - \int^x w_p^{(0)} \right) - 2F \Psi_\eta - (2F + (d - \eta) F_\eta) u_p^{(0)} \right. \\ &\quad \left. + 2(FG_\eta - GF_\eta) \delta \eta_x \cos \theta + \frac{(\eta - d)^2}{m} \left( F - \frac{(\eta - d)}{3} F_\eta \right) \delta \kappa \eta_{xxx} \right] \\ \delta p_{0,x}^{(0)} &= (2FF_{\eta\eta} - F_\eta^2)^{-1} \left[ F_{\eta\eta} \left( \Psi - \int^x w_p^{(0)} \right) - F_\eta \Psi_\eta - (F_\eta + (d - \eta) F_{\eta\eta}) u_p^{(0)} \right. \\ &\quad \left. + (F_\eta G_\eta - 2GF_{\eta\eta}) \delta \eta_x \cos \theta + \frac{(\eta - d)^2}{2m} \left( F_\eta - \frac{2(\eta - d)}{3} F_{\eta\eta} \right) \delta \kappa \eta_{xxx} \right] \end{cases}$$

On peut linéariser ces équations :

$$\begin{cases} m u_{2,z}^{(0)}|_{z=\eta} &= (2F(0)F_{\eta\eta}(0) - F_\eta^2(0))^{-1} \left[ - (F_\eta(0) + \eta F_{\eta\eta}(0)) \int w_p^{(0)} - 2\eta F(0) \Psi_{\eta\eta}(0) \right. \\ &\quad - (2F(0) + dF_\eta(0) + \eta(F_\eta(0) + dF_{\eta\eta}(0))) u_p^{(0)} \\ &\quad \left. + 2(F(0)G_\eta(0) - G(0)F_\eta(0)) \delta \eta_x \cos \theta + \frac{d^2}{m} \left( F(0) + \frac{d}{3} F_\eta(0) \right) \delta \kappa \eta_{xxx} \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(\eta^2) \\ \delta p_{0,x}^{(0)} &= (2F(0)F_{\eta\eta}(0) - F_\eta^2(0))^{-1} \left[ - (F_{\eta\eta}(0) + \eta F_{\eta\eta\eta}(0)) \int w_p^{(0)} - \eta F_\eta(0) \Psi_{\eta\eta}(0) \right. \\ &\quad - (F_\eta(0) + dF_{\eta\eta}(0) + \eta dF_{\eta\eta\eta}(0)) u_p^{(0)} \\ &\quad \left. + (F_\eta(0)G_\eta(0) - 2G(0)F_{\eta\eta}(0)) \delta \eta_x \cos \theta + \frac{d^2}{2m} \left( F_\eta(0) + \frac{2d}{3} F_{\eta\eta}(0) \right) \delta \kappa \eta_{xxx} \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(\eta^2) \end{cases}$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$\left\{ \begin{array}{l} m u_{2,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta} = \left( (d^2 - m)^2 + 4md(1+d)^2 \right)^{-1} \left[ 6m(2\eta(m+d) - d^2 + m) \int w_p^{(0)} \right. \\ \quad \left. + 4m\eta K_{21}(1-m)(m+d^3) + 6m(2m+3dm - d^3 + 3\eta(d^2+m+2md)) u_p^{(0)} \right. \\ \quad \left. + 2md^2(1+d)(1-r)\delta\eta_x \cos\theta - 2md^2(1+d)\delta\kappa\eta_{xxx} \right] + \mathcal{O}(\eta^2) \\ \\ \delta p_{0,x}^{(0)} = \left( (d^2 - m)^2 + 4md(1+d)^2 \right)^{-1} \left[ -12m(\eta(1-m) - (m+d)) \int w_p^{(0)} \right. \\ \quad \left. + 2m\eta K_{21}(1-m)(m+d^3) + 6m(m+2dm+d^2+2\eta d(m-1)) u_p^{(0)} \right. \\ \quad \left. - (rd^4 + 4mrd^3 + 3mrd^2 + 3md^2 + 4md + m^2)\delta\eta_x \cos\theta \right. \\ \quad \left. - d^2(d^2 + 3m + 4dm)\delta\kappa\eta_{xxx} \right] + \mathcal{O}(\eta^2) \end{array} \right.$$

Les résultats de Charru et Fabre [13] s'obtiennent en prenant  $\eta = \varepsilon\eta(\varepsilon x, t)$  (petites perturbations) et  $u_p^{(0)} = w_p^{(0)} = 0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} m u_{2,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta} = \eta \frac{-2F(0)\Psi_{\eta\eta}(0)}{(2F(0)F_{\eta\eta}(0) - F_\eta^2(0))} = -K_{21}\eta \frac{4m(m-1)(m+d^3)}{(d^2-m)^2 + 4md(1+d)^2} \\ \\ \delta p_{0,x}^{(0)} = \eta \frac{-F_\eta(0)\Psi_{\eta\eta}(0)}{(2F(0)F_{\eta\eta}(0) - F_\eta^2(0))} = K_{21}\eta \frac{6m(d^2-m)(m-1)}{(d^2-m)^2 + 4md(1+d)^2} \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} a_{23}^{(0)} = \frac{\delta}{6m} p_{0,x}^{(0)} \\ a_{22}^{(0)} = \frac{u_{2,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta}}{2} - \frac{\delta}{3m} p_{0,x}^{(0)} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

## 7.5 MODÈLE DE PRESSION ET CONTRAINTE À L'INTERFACE

Jurman et McCready [24] ont proposé un modèle Saint-Venant pour un film liquide entraîné par un écoulement turbulent. Il s'agit d'un modèle qualitatif basé sur les résultats expérimentaux de Abrams et Hanratty [1] sur le cisaillement d'un gaz au-dessus d'une surface solide rugueuse (de forme sinusoïdale). Bien que dans notre cas le gaz n'est pas turbulent, on peut justifier les corrélations utilisées.

Si on garde les dérivées de  $\eta$  en espace, c'est-à-dire en prenant  $\eta = \varepsilon\eta(x, t)$  on peut écrire la contrainte à l'interface  $\tau = m u_{2,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta}$  (ainsi que la pression) sous une forme  $\tau_{sr}\eta + \tau_{si}\eta_x$



ainsi que proposé dans l'article de Jurman et McCready [24]. On retrouve effectivement une expression analogue, mais qui contient aussi un terme correctif de tension de surface :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = \tau_{sr}\eta + \tau_{si}\eta_x + \tau_{\kappa}\eta_{xxx} \\ \tau_{sr} = -\frac{K_{21}4m(m-1)(m+d^3)}{(d^2-m)^2 + 4md(1+d)^2} \\ \tau_{si} = -\frac{2md^2\delta\cos\theta(d+1)(r-1)}{(d^2-m)^2 + 4md(1+d)^2} \\ \tau_{\kappa} = -\frac{2md^2\delta\kappa(1+d)}{(d^2-m)^2 + 4md(1+d)^2} \end{array} \right.$$

La pression s'écrit sous la même forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta p_{0,x}^{(0)} = \delta p_{0,x,sr}^{(0)}\eta + \delta p_{0,x,si}^{(0)}\eta_x + \delta p_{0,x,\kappa}^{(0)}\eta_{xxx} \\ \delta p_{0,x,sr}^{(0)} = \frac{6m(d^2-m)(m-1)}{(d^2-m)^2 + 4md(1+d)^2} \\ \delta p_{0,x,si}^{(0)} = -\frac{\delta\cos\theta(d^4r + 3d^2m + 3mrd^2 + m^2 + 4rd^3m + 4md)}{(d^2-m)^2 + 4md(1+d)^2} \\ \delta p_{0,x,\kappa}^{(0)} = -\frac{d^2\delta\kappa(d^2 + 3m + 4md)}{(d^2-m)^2 + 4md(1+d)^2} \end{array} \right.$$

## 7.6 STABILITÉ LINÉAIRE

On cherche à écrire l'équation linéarisée pour ensuite étudier la stabilité linéaire. L'équation régissant l'écoulement est :

$$\eta_t + q_{1,x} = 0$$

De plus :

$$u_i^{(0)} = (i-1)u_p^{(0)} + \frac{z-d_i}{m_i} \left[ \left( \frac{z+d_i}{2} - \eta \right) \delta \left( p_{0,x}^{(0)} + \eta_x r_i \cos\theta + (i-1)\kappa\eta_{xxx} \right) + m u_{2,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta} \right]$$

et :

$$\int_{-1}^{\eta} u_i^{(0)}(\zeta, x, t) d\zeta = \frac{(\eta+1)^2}{2} \left( \left( \frac{\eta-2}{3} - \eta \right) \delta(p_{0,x}^{(0)} + \eta_x \cos \theta) + m u_{2,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta} \right)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} q_1(\eta) &= \int_{-1}^{\eta} (\bar{u}_1 + u_1^{(0)})(\zeta, x, t) d\zeta + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= (\eta+1) \left( m \left( K_{22} \frac{\eta^2 - \eta - 1}{6} + K_{21} \frac{(\eta-1)}{2} \right) + 1 \right) \\ &\quad + \frac{(\eta+1)^2}{2} \left( m u_{2,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta} - \frac{2}{3} (\eta+1) \delta(p_{0,x}^{(0)} + \eta_x \cos \theta) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

**Proposition 10.** *Le système linéaire associé est :*

$$\left\{ \begin{array}{l} m u_{2,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta} = \left( (d^2 - m)^2 + 4md(1+d)^2 \right)^{-1} \left[ 4m\eta K_{21}(1-m)(m+d^3) \right. \\ \quad \left. + 2md^2(1+d)(1-r)\delta\eta_x \cos \theta - 2md^2(1+d)\delta\kappa\eta_{xxx} \right] + \mathcal{O}(\eta^2) \\ \delta p_{0,x}^{(0)} = \left( (d^2 - m)^2 + 4md(1+d)^2 \right)^{-1} \left[ 2m\eta K_{21}(1-m)(m+d^3) \right. \\ \quad \left. - (rd^4 + 4mrd^3 + 3mrd^2 + 3md^2 + 4md + m^2)\delta\eta_x \cos \theta \right. \\ \quad \left. - d^2(d^2 + 3m + 4dm)\delta\kappa\eta_{xxx} \right] + \mathcal{O}(\eta^2) \end{array} \right.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} q_{1,x} &= \eta_x + \left( (d^2 - m)^2 + 4md(1+d)^2 \right)^{-1} \left[ \frac{4}{3} m\eta_x K_{21}(1-m)(m+d^3) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \left( (d^2 - m)^2 + 4md(1+d)^2 \right) \delta\eta_{xx} \cos \theta + md^2(1+d)(1-r)\delta\eta_{xx} \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} (rd^4 + 4mrd^3 + 3mrd^2 + 3md^2 + 4md + m^2)\delta\eta_{xx} \cos \theta \right. \\ &\quad \left. - md^2(1+d)\delta\kappa\eta_{xxx} + \frac{1}{3} d^2(d^2 + 3m + 4dm)\delta\kappa\eta_{xxx} \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(\varepsilon + \eta^2) \end{aligned}$$

On se place dans le cas petite amplitude en prenant  $\eta = \varepsilon\eta(\varepsilon x, t)$  et  $u_p^{(0)} = w_p^{(0)} = 0$ , on retrouve les coefficients de Charru et Fabre [13] :

$$\eta_t + \eta_x \left( 1 + \frac{3m u_{2,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta} - 2\delta p_{0,x}^{(0)}}{6\eta} \right) = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

$$\eta_t + c_0^{(0)} \eta_x = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

$$\begin{aligned}
c_0^{(0)} &= 1 + \frac{3m u_{2,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta} - 2\delta p_{0,x}^{(0)}}{6} \\
&= 1 + K_{21} \frac{2md^2(1-m)(d+1)}{(d^2-m)^2 + 4md(1+d)^2}
\end{aligned}$$

En linéarisant la vitesse autour de  $\eta(t, x) = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
c_0^{(0)} &= K_{20} + 2K_{21} \frac{md^2(1+d)(1-m)}{(d^2-m)^2 + 4md(1+d)^2} \\
&\quad + \frac{\delta d^3(m+d)(\kappa\eta_{xxxx} - \eta_{xx}(1-r)\cos\theta)}{3\eta_x \left( (d^2-m)^2 + 4md(1+d)^2 \right)} \\
&= K_{20} + L(m, d) + \frac{\delta d^3(m+d)(\kappa\eta_{xxxx} - \eta_{xx}(1-r)\cos\theta)}{3\eta_x \left( (d^2-m)^2 + 4md(1+d)^2 \right)}
\end{aligned}$$

On obtient l'équation de dispersion en posant  $\eta = e^{i(kx - \omega t)}$  dans l'équation  $\eta_t + c_0^{(0)}\eta_x = 0$  :

$$\omega = k(K_{20} + L(m, d)) - ik^3 \frac{\delta d^3(m+d)((1-r)\cos\theta + \kappa k^2)}{3k \left( (d^2-m)^2 + 4md(1+d)^2 \right)}$$

la célérité des ondes est  $c_r = \Re \frac{\omega}{k} = K_{20} + L(m, d)$  et le taux de croissance temporelle est  $\omega_i = \Im \omega = -k^3 \frac{\delta d^3(m+d)((1-r)\cos\theta + \kappa k^2)}{3k \left( (d^2-m)^2 + 4md(1+d)^2 \right)}$  qui définit une fréquence critique  $k_c$  donnée par :

$$k_c^2 = \frac{(r-1)\cos\theta}{\kappa}$$

donc l'ordre zéro est linéairement instable pour les  $k \leq k_c$  seulement si le fluide le plus lourd se trouve au-dessus ( $r > 1$  ou  $\theta > \frac{\pi}{2}$ ). Sans la tension de surface, le système est instable.

## 7.7 SOLUTION À L'ORDRE 1

Maintenant que nous avons un développement complet des champs de vitesse et de pression à l'ordre 0, nous pouvons les utiliser pour développer la solution à l'ordre suivant et écrire des modèles à deux équations.

Vitesse tangentielle

La perturbation de la vitesse à l'ordre 1 est solution du système suivant :

$$\begin{cases} u_{i,zz}^{(1)} = \frac{\delta}{m_i} p_{0,x}^{(1)} + \frac{r_i}{m_i} \frac{\beta}{\varepsilon} \left( \partial_t u_i^{(0)} + (\bar{u}_i + u_i^{(0)}) u_{i,x}^{(0)} + w_i^{(0)} (\bar{u}_{i,z} + u_{i,z}^{(0)}) \right) \\ \left[ m_i u_{i,z}^{(1)} \right] = 0 \\ \left[ u_i^{(1)} \right] = 0 \\ u_i^{(1)} \Big|_{z=d_i} = 0 \end{cases} \quad (7.49)$$

où :

$$\begin{aligned} u_i^{(0)} &= f \left( z, \eta, \eta_x, \eta_{xxx}, u_p^{(0)}, p_{0,x}^{(0)}, u_{2,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta} \right) \\ w_i^{(0)} &= f \left( z, \eta, \eta_x, \eta_{xx}, \eta_{xxx}, \eta_{xxxx}, u_{p,x}^{(0)}, w_p^{(0)}, u_{2,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta}, \left( u_{2,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta} \right)_{,x}, p_{0,x}^{(0)}, p_{0,xx}^{(0)} \right) \\ u_{2,z}^{(0)} \Big|_{z=\eta} &= f \left( \eta, \eta_x, \eta_{xxx}, u_p^{(0)}, \int w_p^{(0)} \right) \\ p_{0,x}^{(0)} &= f \left( \eta, \eta_x, \eta_{xxx}, u_p^{(0)}, \int w_p^{(0)} \right) \end{aligned}$$

De plus, on peut transformer la dérivée temporelle de la surface libre en une dérivée spatiale en utilisant la relation :

$$\eta_t = -q_{1,x}^{(0)} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

et donc :

$$u_{i,zz}^{(1)} = f \left( z, \eta, \eta_x, \eta_{xx}, \eta_{xxx}, \eta_{xxxx}, u_p^{(0)}, u_{p,x}^{(0)}, \int w_p^{(0)}, w_p^{(0)} \right)$$

Ainsi les termes faisant intervenir les dérivées de la vitesse se mettent sous la forme d'un polynôme en  $z$  dont les coefficients ne dépendent que de  $\eta$ , de ses dérivées et de la vitesse de la paroi supérieure (les coefficients  $\phi_{ij}$  sont entièrement déterminés par les résultats de l'ordre 0) :

$$\begin{aligned} &\partial_t u_i^{(0)} + (\bar{u}_i + u_i^{(0)}) u_{i,x}^{(0)} + w_i^{(0)} (\bar{u}_{i,z} + u_{i,z}^{(0)}) \\ &= \sum_{j=2}^6 j(j-1) \phi_{ij} \left( \eta, \eta_x, \eta_{xx}, \eta_{xxx}, \eta_{xxxx}, u_p^{(0)}, u_{p,x}^{(0)}, \int w_p^{(0)}, w_p^{(0)} \right) z^{j-2} \end{aligned} \quad (7.50)$$

Donc la perturbation à l'ordre 1 de la vitesse s'intègre facilement :

$$u_{i,zz}^{(1)} = \frac{\delta}{m_i} p_{0,x}^{(1)} + \frac{r_i}{m_i} \frac{\beta}{\varepsilon} \sum_{j=2}^6 j(j-1) \phi_{ij} z^{j-2}$$

$$\begin{aligned} u_{i,z}^{(1)} &= u_{i,z}^{(1)} \Big|_{\eta} + \int_{\eta}^z u_{i,zz}^{(1)} \\ &= u_{i,z}^{(1)} \Big|_{\eta} + (z - \eta) \frac{\delta}{m_i} p_{0,x}^{(1)} + \frac{r_i}{m_i} \frac{\beta}{\varepsilon} \sum_{j=2}^6 j \phi_{ij} (z^{j-1} - \eta^{j-1}) \end{aligned}$$

Le raccord des contraintes à l'interface s'écrit :

$$\left[ m_i u_{i,z}^{(1)} \right] = m u_{2,z}^{(1)} \Big|_{\eta} - u_{1,z}^{(1)} \Big|_{\eta} = 0$$

où :

$$u_{i,z}^{(1)} = \frac{1}{m_i} \left( m u_{2,z}^{(1)} \Big|_{\eta} + (z - \eta) \delta p_{0,x}^{(1)} + r_i \frac{\beta}{\varepsilon} \sum_{j=2}^6 j \phi_{ij} (z^{j-1} - \eta^{j-1}) \right)$$

et :

$$\begin{aligned} u_i^{(1)} &= u_i^{(1)} \Big|_{d_i} + \int_{d_i}^z u_{i,z}^{(1)} \\ &= \frac{z-d_i}{m_i} \left( m u_{2,z}^{(1)} \Big|_{\eta} + \left( \frac{z+d_i}{2} - \eta \right) \delta p_{0,x}^{(1)} + r_i \frac{\beta}{\varepsilon} \sum_{j=2}^6 \phi_{ij} \left( \frac{z^j - d_i^j}{z-d_i} - j \eta^{j-1} \right) \right) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} (z-d_i) \sum_{k=0}^{j-1} z^k d_i^{j-1-k} &= \sum_{k=0}^{j-1} z^{k+1} d_i^{j-1-k} - \sum_{k=0}^{j-1} z^k d_i^{j-k} \\ &= \sum_{p=1}^j z^p d_i^{j-p} - \sum_{k=0}^{j-1} z^k d_i^{j-k} \\ &= \sum_{p=1}^{j-1} z^p d_i^{j-p} + z^j - \sum_{k=1}^{j-1} z^k d_i^{j-k} - d_i^j \\ &= z^j - d_i^j \end{aligned}$$

donc

$$u_i^{(1)} = \frac{z-d_i}{m_i} \left( m u_{2,z}^{(1)} \Big|_{\eta} + \left( \frac{z+d_i}{2} - \eta \right) \delta p_{0,x}^{(1)} + r_i \frac{\beta}{\varepsilon} \sum_{j=2}^6 \sum_{k=0}^{j-1} \phi_{ij} (z^k d_i^{j-1-k} - j \eta^{j-1}) \right)$$

Il reste à déterminer  $u_{2,z}^{(1)} \Big|_{\eta}$  et  $p_{0,x}^{(1)}$ . La continuité de la vitesse donne :

$$\begin{aligned} \left[ u_i^{(1)} \right] &= ((\eta-d) - m(\eta+1)) u_{2,z}^{(1)} \Big|_{\eta} - ((\eta-d)^2 - m(\eta+1)^2) \frac{\delta}{2m} p_{0,x}^{(1)} \\ &\quad + \frac{\beta}{m} \sum_{j=2}^6 \sum_{k=0}^{j-1} (r \phi_{2j} (\eta-d) (\eta^k d^{j-1-k} - j \eta^{j-1}) - m(\eta+1) \phi_{1j} (\eta^k (-1)^{j-1-k} - j \eta^{j-1})) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\left[ u_i^{(1)} \right] &= mF_{\eta\eta} u_{2,z}^{(1)} \Big|_{\eta} - F_{\eta} \delta p_{0,x}^{(1)} \\
&\quad + \frac{\beta}{\varepsilon} \sum_{j=2}^6 \left( \frac{r}{m} \phi_{2j} ((1-j)\eta^j - (d^{j-1} - j\eta^{j-1})d) - \phi_{1j} ((1-j)\eta^j + ((-1)^{j-1} - j\eta^{j-1})) \right) \\
&= mF_{\eta\eta} u_{2,z}^{(1)} \Big|_{\eta} - F_{\eta} \delta p_{0,x}^{(1)} \\
&\quad + \frac{\beta}{m} \sum_{j=2}^6 \left( (1-j)\eta^j (r\phi_{2j} - m\phi_{1j}) - (r\phi_{2j} (d^{j-1} - j\eta^{j-1})d + m\phi_{1j} ((-1)^{j-1} - j\eta^{j-1})) \right)
\end{aligned}$$

### Conservation du débit

On procède comme à l'ordre zéro, en poussant le développement du débit jusqu'à l'ordre suivant :

$$\begin{aligned}
Q &= \left[ \int_z^{d_i} \left( \bar{u}_i(\zeta) + u_i^{(0)}(\zeta, x, t) + \varepsilon u_i^{(1)}(\zeta, x, t) \right) d\zeta \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= \left[ \int_z^{d_i} \bar{u}_i(\zeta) d\zeta \right] + \left[ \int_z^{d_i} \left( u_i^{(0)}(\zeta, x, t) + \varepsilon u_i^{(1)}(\zeta, x, t) \right) d\zeta \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= \left[ \int_0^{d_i} \bar{u}_i(\zeta) d\zeta \right] + \left[ \int_z^0 \bar{u}_i(\zeta) d\zeta \right] + \left[ \int_z^{d_i} \left( u_i^{(0)}(\zeta, x, t) + \varepsilon u_i^{(1)}(\zeta, x, t) \right) d\zeta \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= \int_0^d \bar{u}_2(\zeta) d\zeta + \int_{-1}^0 \bar{u}_1(\zeta) d\zeta - \left[ \int_0^z \bar{u}_i(\zeta) d\zeta \right] + \left[ \int_z^{d_i} \left( u_i^{(0)}(\zeta, x, t) + \varepsilon u_i^{(1)}(\zeta, x, t) \right) d\zeta \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= \bar{q}_2 + \bar{q}_1 - \left[ \int_0^z \bar{u}_i(\zeta) d\zeta \right] + \left[ \int_z^{d_i} \left( u_i^{(0)}(\zeta, x, t) + \varepsilon u_i^{(1)}(\zeta, x, t) \right) d\zeta \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

avec :

$$\left[ \int_z^{d_i} \left( u_i^{(0)}(\zeta, x, t) + \varepsilon u_i^{(1)}(\zeta, x, t) \right) d\zeta \right] = \left[ \int_0^z \bar{u}_i(\zeta) d\zeta \right] - \int^x w_p^{(0)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

On obtient comme condition :

$$\left[ \int_z^{d_i} u_i^{(1)}(\zeta, x, t) d\zeta \right] = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

et :

$$\begin{aligned} \int_z^{d_i} u_i^{(1)}(\zeta, x, t) d\zeta &= -\frac{(z-d_i)^2}{2m_i} \left( m u_{2,z}^{(1)} \Big|_{\eta} + \left( \frac{z+2d_i}{3} - \eta \right) \delta p_{0,x}^{(1)} \right) \\ &\quad + \frac{r_i}{m_i} \frac{\beta}{\varepsilon} \sum_{j=2}^6 \phi_{ij} \left( \frac{j d_i^{j+1} - z^{j+1}}{j+1} + z d_i^j - j \eta^{j-1} \frac{z^2 - d_i^2}{2} \right) \\ &= -\frac{(z-d_i)^2}{2m_i} \left( m u_{2,z}^{(1)} \Big|_{\eta} + \left( \frac{z+2d_i}{3} - \eta \right) \delta p_{0,x}^{(1)} \right) \\ &\quad + \frac{r_i}{m_i} \frac{\beta}{\varepsilon} \sum_{j=2}^6 \sum_{k=0}^{j-1} \phi_{ij} (z-d_i) \left( z^k d_i^{j-1-k} - j \eta^{j-1} \right) \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} \left[ \int_z^{d_i} u_i^{(1)}(\zeta, x, t) d\zeta \right] &= 2F \delta p_{0,x}^{(1)} - m F_{\eta} u_{2,z}^{(1)} \Big|_{\eta} \\ &\quad + \frac{\beta}{m} \sum_{j=2}^6 \left( r \phi_{2j} \left( \frac{j d^{j+1} - \eta^{j+1}}{j+1} + \eta d^j - j \eta^{j-1} \frac{\eta^2 - d^2}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - m \phi_{1j} \left( \frac{j(-1)^{j+1} - \eta^{j+1}}{j+1} + \eta(-1)^j - j \eta^{j-1} \frac{\eta^2 + 1}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

Pour simplifier, posons :

$$\Phi_i(z, \eta) = \sum_{j=2}^6 \phi_{ij}(\eta) (z^j - d_i^j)$$

On a alors :

$$[\Phi_i] = \sum_{j=2}^6 \phi_{2j} (\eta^j - d^j) - \phi_{1j} (\eta^j - (-1)^j)$$

$$[r_i \Phi_{i,z}] = \sum_{j=2}^6 j \eta^{j-1} (r \phi_{2j} - \phi_{1j})$$

$$\int_z^{d_i} \Phi_i dz = \sum_{j=2}^6 \frac{\phi_{ij}}{j+1} (z(j+1) d_i^j - j d_i^{j+1} - z^{j+1}) \quad (7.51)$$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{r_i}{m_i} \int_z^{d_i} \Phi_i dz \right] &= \sum_{j=2}^6 \frac{r}{m} \frac{\phi_{2j}}{j+1} ((\eta(j+1) - j d) d^j - \eta^{j+1}) \\ &\quad - \frac{\phi_{1j}}{j+1} ((\eta(j+1) + j) (-1)^j - \eta^{j+1}) \end{aligned}$$

La vitesse tangentielle se réécrit donc :

$$u_i^1 = (z - d_i) a_i^1 + (z^2 - d_i^2) \frac{\delta}{2m_i} p_{0,x}^1 + \eta_x \frac{r_i}{m_i} \frac{\beta}{\varepsilon} \Phi_i(z, \eta)$$

avec :

$$a_1^1 = m a_2^1 + \eta_x \frac{\beta}{\varepsilon} [r_i \Phi_{i,z}]$$

et :

$$\int_z^{d_i} u_i^1 dz = -(z - d_i)^2 \left( \frac{a_i^1}{2} + (z + 2d_i) \frac{\delta}{6m_i} p_{0,x}^1 \right) + \eta_x \frac{r_i}{m_i} \frac{\beta}{\varepsilon} \int_z^{d_i} \Phi_i dz$$

$$\left[ \int_z^{d_i} u_i^1 dz \right] = F a_2^1 + G \frac{\delta}{2m} p_{0,x}^1 + (\eta + 1)^2 \frac{\eta_x \beta}{2} [r_i \Phi_{i,z}] + \eta_x \frac{\beta}{\varepsilon} \left[ \frac{r_i}{m_i} \int_z^{d_i} \Phi_i dz \right]$$

La conservation du débit total conduit à l'équation suivante :

$$F a_2^1 + G \frac{\delta}{2m} p_{0,x}^1 = -\eta_x \frac{\beta}{\varepsilon} \left( \frac{(\eta + 1)^2}{2} [r_i \Phi_{i,z}] + \left[ \frac{r_i}{m_i} \int_z^{d_i} \Phi_i dz \right] \right)$$

### Solution de l'ordre 1

Grâce à la continuité de la vitesse, on a :

$$\left[ u_i^1 \right] = -F_\eta a_2^1 - G_\eta \frac{\delta}{2m} p_{0,x}^1 + \eta_x \frac{\beta}{\varepsilon} \left( \left[ \frac{r_i}{m_i} \Phi_i \right] - (\eta + 1) [r_i \Phi_{i,z}] \right)$$

$$F_\eta a_2^1 + G_\eta \frac{\delta}{2m} p_{0,x}^1 = \eta_x \frac{\beta}{\varepsilon} \left( \left[ \frac{r_i}{m_i} \Phi_i \right] - (\eta + 1) [r_i \Phi_{i,z}] \right)$$

On obtient le système résultant :

$$\begin{cases} F a_2^1 + G \frac{\delta}{2m} p_{0,x}^1 &= -\eta_x \frac{\beta}{\varepsilon} \left( \frac{(\eta + 1)^2}{2} [r_i \Phi_{i,z}] + \left[ \frac{r_i}{m_i} \int_z^{d_i} \Phi_i dz \right] \right) \\ F_\eta a_2^1 + G_\eta \frac{\delta}{2m} p_{0,x}^1 &= \eta_x \frac{\beta}{\varepsilon} \left( \left[ \frac{r_i}{m_i} \Phi_i \right] - (\eta + 1) [r_i \Phi_{i,z}] \right) \end{cases}$$

Comme  $FG_\eta - GF_\eta \neq 0$ , le système admet une solution.

**Proposition 11.** *La perturbation à l'ordre 1 de la vitesse tangentielle s'écrit sous la forme :*

$$u_i^1 = (z - d_i) a_i^1 + (z^2 - d_i^2) \frac{\delta}{2m_i} p_{0,x}^1 + \eta_x \frac{r_i}{m_i} \frac{\beta}{\varepsilon} \Phi_i(z, \eta)$$



où les coefficients  $p_{0,x}^1$  et  $a_2^1$  sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta}{2m} p_{0,x}^1 = \frac{\eta_x \frac{\beta}{\varepsilon}}{FG_\eta - GF_\eta} \left( F \left[ \frac{r_i}{m_i} \Phi_i \right] \right. \\ \quad \left. + \left( F_\eta \frac{(\eta+1)}{2} - F \right) (\eta+1) [r_i \Phi_{i,z}] + F_\eta \left[ \frac{r_i}{m_i} \int_z^{d_i} \Phi_i dz \right] \right) \\ a_1^1 = m a_2^1 + \eta_x \frac{\beta}{\varepsilon} [r_i \Phi_{i,z}] \\ a_2^1 = \frac{\eta_x \frac{\beta}{\varepsilon}}{GF_\eta - FG_\eta} \left( G \left[ \frac{r_i}{m_i} \Phi_i \right] \right. \\ \quad \left. + \left( G_\eta \frac{(\eta+1)}{2} - G \right) (\eta+1) [r_i \Phi_{i,z}] + G_\eta \left[ \frac{r_i}{m_i} \int_z^{d_i} \Phi_i dz \right] \right) \end{array} \right.$$

et où interviennent les fonctions  $F$  et  $G$  définies par l'équation 7.46 page 172 et des coefficients  $\Phi$  définis par les relations 7.51 page 181 et 7.50 page 178.

### Vitesse normale

À partir du résultat précédent, on peut écrire la perturbation à l'ordre 1 de la vitesse normale. En effet, on a :

$$\begin{aligned} w_{i,z}^1 = -u_{i,x}^1 &= -(z-d_i) \left( \eta_x a_{i,\eta}^1 + \eta_{xx} a_{i,\eta,\eta_x}^1 + (z+d_i) \left( \eta_x \frac{\delta}{2m_i} p_{0,x,\eta}^1 + \eta_{xx} \frac{\delta}{2m_i} p_{0,x,\eta,\eta_x}^1 \right) \right) \\ &\quad - \frac{r_i}{m_i} \frac{\beta}{\varepsilon} (\eta_x^2 \Phi_{i,\eta} + \eta_{xx} \Phi_i) \\ w_i^1 &= \int_{d_i}^z w_{i,\zeta}^1(\zeta) d\zeta = -\frac{(z-d_i)^2}{2} \left( \eta_x a_{i,\eta}^1 + \eta_{xx} a_{i,\eta,\eta_x}^1 + \frac{\delta}{3m_i} (z+2d_i) (\eta_x p_{0,x,\eta}^1 + \eta_{xx} p_{0,x,\eta,\eta_x}^1) \right) \\ &\quad - \frac{r_i}{m_i} \frac{\beta}{\varepsilon} \left( \eta_x^2 \int_{d_i}^z \Phi_{i,\eta}(\zeta, \eta) d\zeta + \eta_{xx} \int_{d_i}^z \Phi_i(\zeta, \eta) d\zeta \right) \end{aligned}$$

## 7.8 ÉQUATIONS MOYENNÉES

On intègre la vitesse tangentielle de chaque fluide sur leur hauteur afin de trouver le débit correspondant, et les équations de l'écoulement pour obtenir un système d'équations hauteur-débit.

### 7.8.1 Modèle à une équation

On a :

$$\eta_t = w_i|_{z=\eta} - \eta_x u_i|_{z=\eta}$$

où :

$$q_1 = \int_{-1}^{\eta} u_1 dz, \quad q_2 = \int_{\eta}^d u_2 dz$$

et :

$$q_i = (-1)^i \int_{\eta}^{d_i} u_i dz \Rightarrow (-1)^i q_i = \int_{\eta}^{d_i} u_i dz$$

De plus :

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^{d_i} (u_{i,x} + w_{i,z}) dz &= \left( \int_{\eta}^{d_i} u_i dz \right)_x + \eta_x u_i|_{\eta} + w_i|_{d_i} - w_i|_{\eta} \\ &= (-1)^i q_{i,x} - \eta_t \end{aligned}$$

Donc :

$$\eta_t + (-1)^{i+1} q_{i,x} = 0$$

En posant :

$$\begin{aligned} A_i &= K_{20} - d_i \left( \frac{m}{m_i} a_2^0 + \frac{\delta}{m_i} \left( \frac{d_i}{2} p_{0,x}^0 + \left( \frac{d_i}{2} (r_i - 1) + \eta(r - r_i) \right) \psi \right) \right) \\ B_i &= K_{21} + a_2^0 + \frac{\eta \delta}{m} (r - r_i) \psi \\ C_i &= m K_{22} + \delta \left( p_{0,x}^0 + (r_i - 1) \psi \right) \end{aligned} \tag{7.52}$$

on trouve :

$$\begin{aligned} u_i &= A_i + z \frac{m}{m_i} B_i + \frac{z^2}{2m_i} C_i + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= K_{20} + z \frac{m}{m_i} \left( K_{21} + \frac{z}{2} K_{22} \right) \\ &\quad + \frac{1}{m_i} (z - d_i) [m a_2^0 + \eta \delta (r - r_i) \psi] \\ &\quad + \frac{\delta}{2m_i} (z^2 - d_i^2) [p_{0,x}^0 + (r_i - 1) \psi] \\ &\quad + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

et :

$$(-1)^{i+1} q_i = (\eta - d_i) \left( A_i + (\eta + d_i) \frac{m}{2m_i} B_i + \frac{\eta^2 + \eta d_i + d_i^2}{6m_i} C_i \right) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Ce qui permet d'écrire la proposition suivante :

**Proposition 12.** *Le modèle à une équation sur la hauteur s'écrit sous deux formes équivalentes :*

$$\eta_t + \left( (\eta + 1) \left( A_1 + (\eta - 1) \frac{m}{2} B_1 + \frac{\eta^2 - \eta + 1}{6} C_1 \right) \right)_x = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

$$\eta_t + \left( (\eta - d) \left( A_2 + \frac{(\eta + d)}{2} B_2 + \frac{\eta^2 + \eta d + d^2}{6m} C_2 \right) \right)_x = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

où les coefficients  $A_i, B_i, C_i$  sont définis par les relations 7.52 page précédente.

On peut également retrouver ce modèle sous la forme d'une équation de transport à la vitesse  $c(\eta)$  en partant de la condition d'imperméabilité à l'interface :

$$\begin{aligned} \eta_t &= w_i|_{z=\eta} - \eta_x u_i|_{z=\eta} \\ &= -\eta_x c(\eta) \\ &= -\eta_x (\bar{c}(\eta) + c_0(\eta) + \varepsilon c_1(\eta)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

où :

$$c(\eta) = u_1|_{\eta} - \frac{w_1|_{\eta}}{\eta_x} = c_0(\eta) + \varepsilon c_1(\eta)$$

$$\bar{c} = \frac{m}{m_i} \left( K_{22} \frac{\eta^2}{2} + K_{21}\eta \right) + K_{20}$$

$$\begin{aligned} c_0(\eta) &= \frac{m}{m_i} \left( K_{22} \frac{\eta^2}{2} + K_{21}\eta \right) + K_{20} \\ &\quad + \frac{\eta - d_i}{m_i} \left( \delta \left( \frac{\eta + d_i}{2} p_{0,x}^0 + \left( \frac{(\eta + d_i)(r_i - 1) + 2\eta(r - r_i)}{2} \right) \psi \right) + m a_2^0 \right) \\ &\quad + \frac{(\eta - d_i)^2}{2} \left( \frac{\eta + 2d_i}{3} \frac{\delta}{m_i} \left( (p_{0,x}^0)_\eta + (r_i - 1)\psi_\eta \right) + a_{i,\eta}^0 \right) \\ &= (\eta + 1) \left( \frac{\eta - 1}{2} \delta p_{0,x}^0 + \eta \delta (r - 1) \psi + \frac{\eta}{2} m K_{22} + m a_2 \right) \\ &\quad + \frac{(\eta + 1)^2}{2} \left( \frac{\eta - 2}{3} \delta p_{0,x\eta}^0 + a_{1,\eta} \right) + \eta + 1 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \eta_t &= w_1|_{\eta} - \eta_x u_1|_{\eta} \\ &= w_1^0|_{\eta} - \eta_x \left( \bar{u}_1|_{\eta} + u_1^0|_{\eta} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= -\eta_x c_0(\eta) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

### 7.8.2 Modèle à deux équations

On part des équations moyennées exactes 7.21 page 163 que l'on rappelle ici :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_t + (-1)^{i+1} q_{i,x} = 0 \\ (-1)^{i+1} q_{i,t} + \left( \int_{d_i}^{\eta} u_i^2 dz \right)_x + \frac{\delta}{r_i \beta} \int_{d_i}^{\eta} p_{i,x} dz \\ = \frac{1}{\beta} \frac{m_i}{r_i} \left( \frac{r_i \lambda \sin \theta}{m_i} (\eta - d_i) + u_{i,z}|_{\eta} - u_{i,z}|_{d_i} \right) + \frac{m_i}{r_i} \frac{\varepsilon^2}{\beta} \int_{d_i}^{\eta} u_{i,xx} dz \end{array} \right. , i = 1, 2$$

On peut prendre indifféremment le système avec comme variables  $(\eta, q_1)$  ou  $(\eta, q_2)$ . Si on choisit la couche inférieure comme référence, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_t + q_{1,x} = 0 \\ q_{1,t} + \left( \int_{-1}^{\eta} u_1^2 dz \right)_x + \frac{\delta}{\beta} \int_{-1}^{\eta} p_{1,x} dz \\ = \frac{1}{\beta} \left( \lambda \sin \theta (\eta + 1) + u_{1,z}|_{\eta} - u_{1,z}|_{-1} \right) + \frac{\varepsilon^2}{\beta} \int_{-1}^{\eta} u_{1,xx} dz \end{array} \right.$$

Et en ne retenant les termes que jusqu'à l'ordre 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_t + q_{1,x} = 0 \\ q_{1,t} + \left( \int_{-1}^{\eta} u_1^2 dz \right)_x + \frac{\delta}{\beta} \int_{-1}^{\eta} p_{1,x} dz \\ = \frac{1}{\beta} \left( \lambda \sin \theta (\eta + 1) + u_{1,z}|_{\eta} - u_{1,z}|_{-1} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{\varepsilon^2}{\beta} \right) \end{array} \right.$$

Une autre solution consiste à considérer non pas le débit d'une seule des deux couches, mais le débit massique total  $q_1 + r q_2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-r)\eta_t + (q_1 + r q_2)_x = 0 \\ (q_1 + r q_2)_t + \left( \int_{-1}^{\eta} u_1^2 dz + r \int_{\eta}^d u_2^2 dz \right)_x + \frac{\delta}{\beta} \int_{-1}^d p_x dz \\ = \frac{1}{\beta} \left( \lambda \sin \theta (\eta + 1 + r(d - \eta)) + \frac{m}{r} u_{2,z}|_d - u_{1,z}|_{-1} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{\varepsilon^2}{\beta} \right) \end{array} \right.$$

Il y a plusieurs termes à expliciter :

- l'intégrale de la pression  $\frac{\delta}{r_i \beta} \int_{d_i}^{\eta} p_{i,x} dz$  ;
- la contrainte à la paroi  $\frac{1}{\beta} \frac{m_i}{r_i} \left( u_{i,z}|_{\eta} - u_{i,z}|_{d_i} \right)$  ;
- l'intégrale du carré de la vitesse  $\int_{d_i}^{\eta} u_i^2 dz$ .

Les deux premiers termes vont être traités ensemble car ils sont tous les deux en  $\frac{1}{\beta}$  et nécessitent d'utiliser les développements à l'ordre 1.

Contrainte à la paroi et pression

La pression vérifie les équations suivantes :

$$\begin{aligned} p_{i,x} &= \overline{p_{0,x}} + (r_i - 1)\psi(\eta) + p_{0,x}^0 + \varepsilon p_{0,x}^1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \int_{\eta}^{d_i} p_x dz &= (d_i - \eta) \left( \overline{p_{0,x}} + p_{0,x}^0 + \varepsilon p_{0,x}^1 + (r_i - 1)\psi \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (7.53)$$

et la vitesse est telle que :

$$\begin{aligned} u_{i,z} &= \frac{m}{m_i} (K_{22}z + K_{21}) + z \frac{\delta}{m_i} \left( p_{0,x}^0 + (r_i - 1)\psi \right) + a_i^0 + \varepsilon a_i^1 \\ &\quad + z \frac{\varepsilon \delta}{m_i} p_{0,x}^1 + \eta_x \frac{r_i}{m_i} \beta \sum_{j=2}^6 j \phi_{ij} z^{j-1} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ u_{i,z}|_{\eta} - u_{i,z}|_{d_i} &= (\eta - d_i) \left( \frac{m}{m_i} K_{22} + \frac{\delta}{m_i} \left( p_{0,x}^0 + (r_i - 1)\psi \right) + \frac{\varepsilon \delta}{m_i} p_{0,x}^1 \right) \\ &\quad + \eta_x \frac{r_i}{m_i} \beta \sum_{j=2}^6 j \phi_{ij} \left( \eta^{j-1} - d_i^{j-1} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (7.54)$$

$$\begin{aligned} u_{i,z}|_{\eta} &= \frac{m}{m_i} (K_{22}\eta + K_{21}) + \eta \frac{\delta}{m_i} \left( p_{0,x}^0 + (r_i - 1)\psi \right) + a_i^0 + \varepsilon a_i^1 \\ &\quad + \eta \frac{\varepsilon \delta}{m_i} p_{0,x}^1 + \eta_x \frac{r_i}{m_i} \beta \sum_{j=2}^6 j \phi_{ij} \eta^{j-1} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} &\frac{m_i}{\beta} \left( u_{i,z}|_{\eta} - u_{i,z}|_{d_i} \right) + \frac{\delta}{\beta} \int_{\eta}^{d_i} p_x dz \\ &= (\eta - d_i) \left( m \frac{1}{\beta} K_{22} - \frac{\delta}{\beta} \overline{p_{0,x}} \right) + \eta_x r_i \sum_{j=2}^6 j \phi_{ij} \left( \eta^{j-1} - d_i^{j-1} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon^2}{\beta}\right) \\ &= r \frac{\lambda}{\beta} \sin \theta (d_i - \eta) + \eta_x r_i \sum_{j=2}^6 j \phi_{ij} \left( \eta^{j-1} - d_i^{j-1} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon^2}{\beta}\right) \end{aligned} \quad (7.55)$$

Le système précédent devient :

$$\begin{cases} \eta_t + (-1)^{i+1} q_{i,x} = 0 \\ (-1)^{i+1} q_{i,t} + \left( \int_{d_i}^{\eta} u_i^2 dz \right)_x = \frac{\lambda}{\beta} \sin \theta (\eta - d_i) (r_i - r) \\ \quad + \eta_x \sum_{j=2}^6 j \phi_{ij} \left( \eta^{j-1} - d_i^{j-1} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon^2}{\beta}\right) \end{cases}$$

Il ne manque que les intégrales de  $u^2$ ....

*Intégrale du carré de la vitesse*

On rappelle que la vitesse s'écrit :

$$\begin{aligned}\bar{u}_i + u_i^0 &= K_{20} - \frac{d_i^2}{2m_i} \delta(p_{0,x}^0 + (r_i - 1)\psi) - \frac{d_i}{m_i} (ma_2^0 + \eta\delta(r - r_i)\psi) \\ &+ z \left( \frac{m}{m_i} K_{21} + \frac{1}{m_i} (ma_2^0 + \eta\delta(r - r_i)\psi) \right) \\ &+ \frac{m}{m_i} K_{22} \frac{z^2}{2} + \frac{z^2}{2m_i} \delta(p_{0,x}^0 + (r_i - 1)\psi)\end{aligned}$$

et en utilisant les coefficients  $A_i, B_i, C_i$  définis 7.52 page 184 :

$$u_i = A_i + z \frac{m}{m_i} B_i + \frac{z^2}{2m_i} C_i$$

En introduisant la vitesse moyenne dans chaque couche :

$$v_i = \frac{1}{d_i - \eta} \int_{\eta}^{d_i} u_i = \frac{(-1)^i}{d_i - \eta} q_i = A_i + \frac{\eta + d_i}{2} \frac{m}{m_i} B_i + \frac{\eta^2 + \eta d_i + d_i^2}{6m_i} C_i$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{1}{d_i - \eta} \int_{\eta}^{d_i} u_i^2 &= A_i^2 + \frac{m}{m_i} A_i B_i (\eta + d_i) + \left( \frac{1}{m_i} A_i C_i + \frac{m^2}{m_i^2} B_i^2 \right) \frac{\eta^2 + \eta d_i + d_i^2}{3} \\ &+ B_i C_i \frac{m}{m_i^2} \frac{\eta^3 + \eta^2 d_i + \eta d_i^2 + d_i^3}{4} + C_i^2 \frac{1}{m_i^2} \frac{\eta^4 + \eta^3 d_i + \eta d_i^3 + \eta^2 d_i^2 + d_i^4}{20}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}u_{int}^2 &= A_i^2 + 2\eta \frac{m}{m_i} A_i B_i + \eta^2 \left( \frac{1}{m_i} A_i C_i + \frac{m^2}{m_i^2} B_i^2 \right) \\ &+ B_i C_i \frac{m}{m_i^2} \eta^3 + C_i^2 \frac{1}{m_i^2} \frac{\eta^4}{4} \\ v_i^2 &= A_i^2 + \frac{m}{m_i} A_i B_i (\eta + d_i) + \frac{1}{m_i} A_i C_i \frac{\eta^2 + \eta d_i + d_i^2}{3} + \frac{m^2}{m_i^2} B_i^2 \frac{(\eta + d_i)^2}{4} \\ &+ B_i C_i \frac{m}{m_i^2} \frac{(\eta^2 + \eta d_i + d_i^2)(\eta + d_i)}{6} + C_i^2 \frac{1}{m_i^2} \frac{(\eta^2 + \eta d_i + d_i^2)^2}{36} \\ \frac{1}{d_i - \eta} \int_{\eta}^{d_i} u_i^2 &= v_i^2 + \frac{(\eta - d_i)^2}{12} \left( \frac{m}{m_i^2} B_i (mB_i + C_i (\eta + d_i)) + C_i^2 \frac{1}{m_i^2} \frac{4\eta^2 + 7\eta d_i + 4d_i^2}{15} \right) \\ &= v_i^2 + \frac{(\eta - d_i)^2}{12} \frac{m^2}{m_i^2} R_i\end{aligned}$$

avec :

$$R_i = B_i \left( B_i + \frac{C_i}{m} (\eta + d_i) \right) + \frac{C_i^2}{m^2} \frac{4\eta^2 + 7\eta d_i + 4d_i^2}{15} \quad (7.56)$$

On a alors tous les éléments pour écrire le système réduit énoncé dans la proposition suivante :

**Proposition 13.** *Le système réduit à deux équations de l'écoulement s'écrit sous la forme :*

$$\begin{cases} \eta_t + (-1)^{i+1} q_{i,x} = 0 \\ (-1)^{i+1} q_{i,t} + \left( (d_i - \eta) \left( v_i^2 + \frac{(\eta - d_i)^2}{12} \frac{m^2}{m_i^2} R_i \right) \right)_x = \frac{\lambda}{\beta} \sin \theta (\eta - d_i) (r_i - r) \quad , i = 1, 2 \\ + \eta_x \sum_{j=2}^6 j \phi_{ij} (\eta^{j-1} - d_i^{j-1}) + \mathcal{O} \left( \frac{\varepsilon^2}{\beta} \right) \end{cases} \quad (7.57)$$

où  $i = 1$  ou  $2$  selon que l'on choisisse la couche du bas ou du haut comme référence, et les coefficients  $A_i, B_i, C_i, R_i$  et  $\phi_{ij}$  sont définis par les relations 7.52 page 184, 7.56 et 7.50 page 178.

Le système s'écrit en variables  $(\eta, q_1)$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} \eta_t + q_{1,x} = 0 \\ q_{1,t} + \left( \frac{q_1^2}{\eta + 1} + \frac{(\eta + 1)^3}{12} m^2 R_1 \right)_x = \frac{\lambda}{\beta} \sin \theta (\eta + 1) (1 - r) \\ + \eta_x \sum_{j=2}^6 j \phi_{1j} (\eta^{j-1} + (-1)^j) + \mathcal{O} \left( \frac{\varepsilon^2}{\beta} \right) \end{cases} \quad (7.58)$$

Sachant que les débits  $q_1$  et  $q_2$  sont reliés par la relation :

$$q_{1,x} + q_{2,x} = -w_p^{(0)}$$





Dans ce dernier chapitre, nous appliquons nos modèles à des écoulements cisailés : films liquides plans et verticaux avec écoulement de gaz. Les expériences utilisées ici ont été réalisées à l’Onera par Gilles Heid et dans le travail de thèse de Marie Lalo [29], mais tous deux ne s’intéressent pas exactement aux mêmes phénomènes que nous.

## SOMMAIRE

8.1	Application aux expériences de Gilles Heid	191
8.1.1	Modèle à une équation à l’ordre 1	191
8.1.2	Application	192
8.2	Moyens et résultats expérimentaux de Marie Lalo	192
8.2.1	Dispositif expérimental de mesure de la phase liquide	193
8.2.2	Régimes de comportement d’un film liquide mince soumis à un cisaillement aérodynamique	195
8.2.3	Code de calcul	195
8.2.4	Tests numériques	196

## 8.1 APPLICATION AUX EXPÉRIENCES DE GILLES HEID

On s’intéresse ici uniquement à décrire la dynamique d’un liquide incompressible newtonien soumis à une contrainte de cisaillement à l’interface avec le gaz et à des forces capillaires, et s’écoulant sur un fond plat. Deux types de modèles sont dérivés à partir des équations de Navier-Stokes. La méthode de dérivation est la suivante : après une mise à l’échelle appropriée des équations de Navier Stokes, en faisant les hypothèses de pression hydrostatique et de profil parabolique de la vitesse tangentielle, les solutions des équations sont développées asymptotiquement autour d’une solution d’équilibre. Ce développement se fait par rapport à un petit paramètre  $\varepsilon$ , appelé paramètre onde longue, rapport entre la hauteur du film et d’une longueur caractéristique.

8.1.1 *Modèle à une équation à l’ordre 1*

Avec l’expression  $h v$  calculée jusqu’à l’ordre un en  $\varepsilon$ , on peut affiner le modèle à une équation, qui s’écrit sous la forme d’un problème d’advection-diffusion non-linéaire avec un terme de tension de surface supplémentaire. Ce modèle peut se réécrire en variables dimensionnées :

$$\mu \partial_t h + \partial_x \left( \frac{h^2}{2} \tau + \frac{h^3}{3} \left( \kappa \partial_{xxx}^3 h - \rho g \partial_x h \right) \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

où  $\mu$  est la viscosité dynamique,  $\tau$  est la contrainte de cisaillement exercée par le gaz sur le liquide,  $\kappa$  la tension de surface,  $\rho$  la masse volumique et  $g$  la gravité.

### 8.1.2 Application

La rugosité qui apparaît dans le montage expérimental peut être considéré, du point de vue de la modélisation, comme un fond variable. Pour déterminer la valeur de la contrainte de cisaillement exercée par le gaz sur le film, puisque l'écoulement gazeux est donc totalement développé lorsqu'il arrive sur le film liquide, on peut utiliser l'abaque de Moody, ou la formule de Colebrook (ce qui donne sensiblement les mêmes résultats) :

$$\tau_g = \frac{\lambda \rho_g U_g^2}{8},$$

où :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0.8686 \ln \left( \frac{2.51}{\sqrt{\lambda} R_{e_g}} \right)$$

avec  $\lambda = \frac{R_g}{F_r^2}$  et où les variables indicée avec un ' $g$ ' représentent les grandeurs relatives au gaz.

Par itérations successives, on obtient  $\lambda \approx 0.014$ , et donc  $\tau_g = 1.95 [Pa]$ . Les premiers résultats obtenus par Gilles Heid de l'Onera de Toulouse, sont présentés sur la figure 29. La courbe (en rouge) représente la hauteur retrouvée à partir des modèles, et les symboles (en vert) correspondent aux trois hauteurs de mesures : hauteur minimale, hauteur moyenne et hauteur maximale du film, sont tracées pour différents débits.

Néanmoins, le modèle ne permet pas de retrouver les instabilités de surface. Différents problèmes se posent :

- le choix d'un modèle de pression du gaz sur le film (par exemple celui de la théorie des profils minces) ;
- le fait que les modèles – de par la méthode de dérivation – ne capturent que les instabilités de grande longueur d'onde, alors que les instabilités produites par la rugosité sont sûrement petites ;
- le fait que l'asymptotique soit réalisée autour d'une solution d'équilibre constante, alors que le film physique est décroissant.

## 8.2 MOYENS ET RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX DE MARIE LALO

Nous allons présenter ici les expériences réalisées dans la thèse de Lalo [29], auxquelles nous comparerons les résultats de nos modèles.

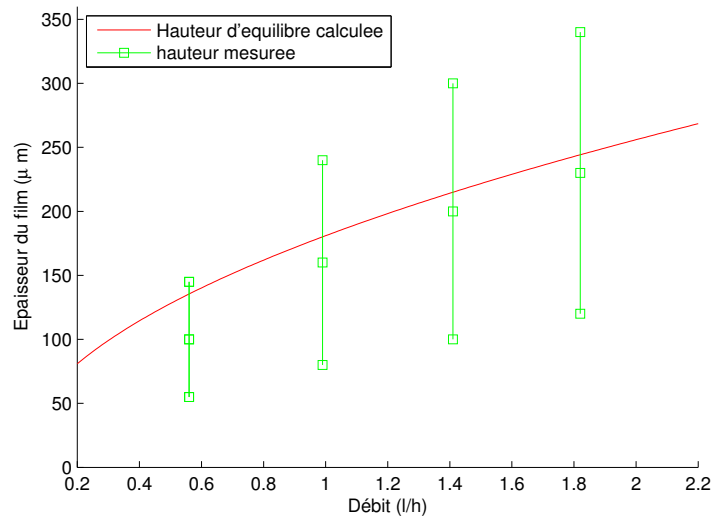


FIGURE 29: Comparaison entre la hauteur moyenne calculée et les hauteurs mesurées

### 8.2.1 Dispositif expérimental de mesure de la phase liquide

Un réservoir pressurisé relié aux réseaux d'air comprimé à 7 bars et d'eau de l'Onera assure une alimentation liquide continue de la maquette.

La maquette d'injection (figure 30) est équipée d'un réservoir alimenté suivant deux entrées opposées ce qui assure un film liquide uniformément réparti sur sa largeur. La nappe liquide a une largeur de  $40\text{mm}$  et une épaisseur variable selon la maquette d'injection utilisée :  $300\mu\text{m}$ ,  $600\mu\text{m}$  et  $1\text{mm}$ .

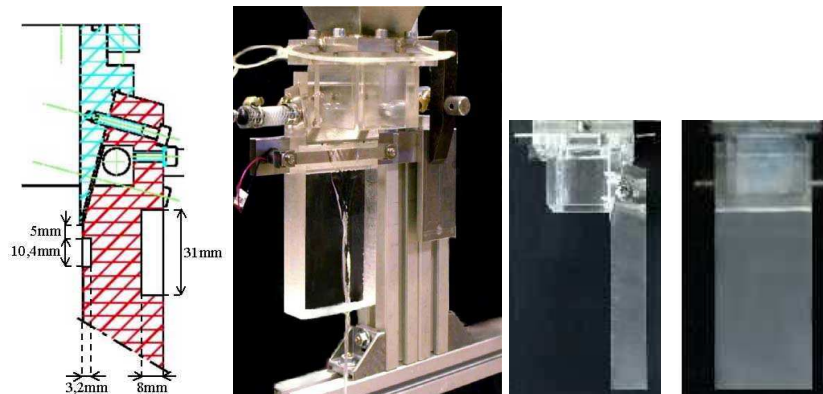


FIGURE 30: Schémas de principe et photographies de la maquette d'injection, vues de face et de profil

L'actionneur doit être monté avec une précontrainte, c'est à dire un serrage qui lui est imposé et qui évite tout risque de décollement des couches de céramiques le constituant. Le montage final est présenté sur la figure 30.

Les axes ont été choisis comme illustré sur la figure 31.

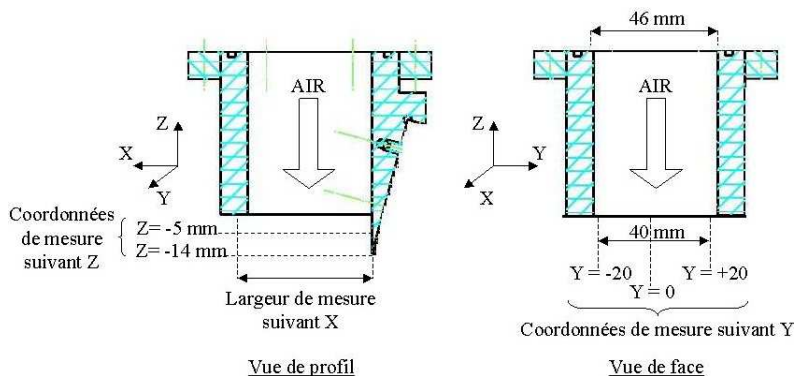


FIGURE 31: Localisation des points de mesure LDA

Pour ces expériences, M.Lalo a utilisé de l'eau et de l'air à 20°C avec les paramètres donnés dans le tableau 8.

	Eau (à 20°C)	Air (à 20°C)		Valeur min.	Valeur max.
$\rho$ ( $kg/m^3$ )	998.21	1.2	$V_g$ (m/s)	10	100
$\nu$ ( $m^2/s$ )	$1.0038 \cdot 10^{-6}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$V_l$ (m/s)	0.23	2.32
$\mu$ ( $kg/m.s$ )	$1.002 \cdot 10^{-3}$	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$h_l$ (mm)	0.3	1
$\sigma$ ( $kg/s^2$ )	0.07275	-			

TABLE 8: Paramètres des expériences de M.Lalo

### 8.2.2 Régimes de comportement d'un film liquide mince soumis à un cisaillement aérodynamique

Marie Lalo [29] a positionné les comportements du film liquide décrits ci-dessus ainsi que leurs frontières en fonction des vitesses liquide et gaz : la figure 32 présente la carte obtenue pour  $h_l = 300\mu\text{m}$ .

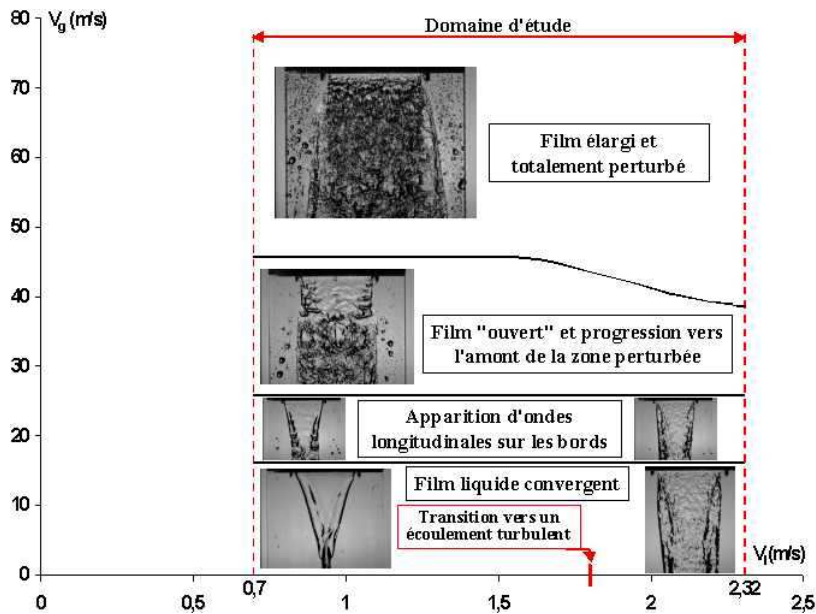


FIGURE 32: Régimes de comportement du film liquide en fonction des vitesses liquide et gaz pour  $h_l = 300\mu\text{m}$  – Vues de face.

### 8.2.3 Code de calcul

Pour simuler numériquement ces écoulements, le code SLOSH a été utilisé. Ce code, développé par Chantepedrix [12] est basé sur un modèle bi-fluide compressible pour les écoulements diphasique à surface libre, et résout les équations de Navier-Stokes. Dans ce modèle les deux fluides sont considérés comme non miscibles, et on utilise en plus des variables propres à chaque fluide (masse volumique, vitesse, pression) la fraction volumique du premier fluide  $\alpha$ . Le second fluide a alors pour fraction volumique  $1 - \alpha$ . On peut alors introduire des quantités mélangées sous la forme

$$\phi_m = \alpha\phi_1 + (1 - \alpha)\phi_2, \quad (8.1)$$

bien qu'il n'y ait pas physiquement de mélange.

Afin de représenter correctement les expériences, deux nouvelles conditions aux limites ont été introduites. D'abord au fond une condition d'adhérence partout sauf sur une zone d'injection où une vitesse est imposée pour injecter un débit fixé. Puis, après avoir rencontré

des problèmes pour réaliser un écoulement subsonique, une condition de pression imposée en sortie. Comme on ne peut pas imposer directement la pression, il faut trouver les valeurs de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  correspondantes. La pression est définie comme pour (8.1) :

$$p^* = \alpha p_1(\rho_1) + (1 - \alpha) p_2(\rho_2)$$

Autour d'un état de référence  $(\rho^{(0)}, p^{(0)})$ , et pour un faible nombre de Mach, la loi d'état des fluides peut se linéariser et détermine la pression :

$$p_i = p_i^{(0)} + c_i^2 (\rho_i - \rho_i^{(0)})$$

on a alors

$$p^* = \alpha c_1^2 \rho_1 + (1 - \alpha) c_2^2 \rho_2 + \alpha (p_1^{(0)} - \rho_1^{(0)} c_1^2) + (1 - \alpha) (p_2^{(0)} - \rho_2^{(0)} c_2^2)$$

En faisant intervenir la masse volumique « de mélange » :

$$\rho = \alpha \rho_1 + (1 - \alpha) \rho_2$$

on obtient les conditions sur  $\rho_1$  et  $\rho_2$  pour imposer une pression  $p^*$

$$\begin{cases} \rho_1 &= \frac{1}{\alpha(c_1^2 - c_2^2)} \left( p^* - c_2^2 \rho - \alpha (p_1^{(0)} - \rho_1^{(0)} c_1^2) - (1 - \alpha) (p_2^{(0)} - \rho_2^{(0)} c_2^2) \right) \\ \rho_2 &= \frac{1}{(1 - \alpha)(c_2^2 - c_1^2)} \left( p^* - \rho c_1^2 - \alpha (p_1^{(0)} - \rho_1^{(0)} c_1^2) - (1 - \alpha) (p_2^{(0)} - \rho_2^{(0)} c_2^2) \right) \end{cases}$$

#### 8.2.4 Tests numériques

##### Définition de l'écoulement de Blasius

H. Blasius a étudié, en 1908, le cas le plus simple d'écoulement à couche limite sur une plaque plane (cf Cousteix [15]). On considère une plaque plane mince infinie en aval. Le plan de la plaque est parallèle à la direction de l'écoulement à l'infini en amont de l'écoulement ; l'origine des axes est pris au bord d'attaque de l'écoulement.

On introduit la variable adimensionnelle  $\eta_B = y \left( \frac{u_e}{\nu x} \right)^{\frac{1}{2}}$  où  $u_e$  est la vitesse maximale de l'écoulement (c'est-à-dire à la surface libre), et on pose :

$$u = u_e \partial_{\eta_B} f(\eta_B)$$

où  $f$  est la fonction courant telle que :

$$f = \frac{\psi}{\sqrt{\nu x u_e}} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y \psi \\ -\partial_x \psi \end{pmatrix}.$$

L'équation de conservation de la masse est automatiquement satisfaite. On a :

$$v = -\partial_x \psi = \frac{1}{2} \left( \frac{\nu u_e}{x} \right)^{\frac{1}{2}} (\eta_B \partial_{\eta_B} f - f) \quad (8.2)$$

et l'équation de quantité de mouvement devient une EDP ordinaire du troisième ordre :

$$f \partial_{\eta_B} f + 2 \partial_{\eta_B}^3 f = 0 \quad (8.3)$$

avec les conditions limites :

$$\begin{cases} \text{en } \eta_B = 0, & f = 0 \quad \text{et} \quad \partial_{\eta_B} f = 0 \\ \text{quand } \eta_B \rightarrow \infty, & \partial_{\eta_B} f = 1 \end{cases}$$

À la paroi, les conditions limites imposent  $v = 0$  ( $f = 0$ ) et  $u = 0$  ( $\partial_{\eta_B} f = 0$ ). Malheureusement l'équation (8.3) n'est pas intégrable analytiquement. On l'intègre entre  $\eta^* = 0$  et une valeur assez grande de  $\eta^*$ , avec les conditions limites :

$$\text{en } \eta^* = 0, f^* = 0, \partial_{\eta_B} f = 0 \text{ et } \partial_{\eta_B}^2 f = 1$$

À cette frontière, on trouve une valeur de  $f^*$  à partir de laquelle on calcule  $k$  pour que  $f = 1 = k f^*$ . On a alors la fonction  $f(\eta^*)$  et donc  $f(\eta_B)$ . Cette solution fournit la distribution de la vitesse longitudinale en fonction de la distance à la paroi.

On constate que l'épaisseur de couche limite définie par  $u = 0.99u_e$  est à peu près :

$$\delta_{0.99} = 5 \frac{x}{\sqrt{\frac{u_e x}{\nu}}}$$

La solution de Blasius donne encore la distribution de la vitesse verticale (équation (8.2)). On remarque alors que lorsque  $\eta_B$  augmente, elle devient constante, mais elle n'est pas nulle. La distribution du frottement à l'intérieur de la couche limite est donnée par :

$$\tau = \mu u_e \left( \frac{u_e}{\nu x} \right)^{\frac{1}{2}} \partial_{\eta_B}^2 f$$

La contrainte pariétale est donc :

$$\tau_p = \mu u_e \left( \frac{u_e}{\nu x} \right)^{\frac{1}{2}} \partial_{\eta_B}^2 f(0) = \mu u_e \left( \frac{u_e}{\nu x} \right)^{\frac{1}{2}} \times 0.332 \quad (8.4)$$

Représentation et paramètres de l'expérience

Pour réaliser des films minces, M.Lalo injecte de l'eau dans un écoulement d'air établi suivant la figure 33.

L'écoulement gazeux (air) est initialisé avec un profil de Blasius ayant une vitesse de  $20\text{ m/s}$  à  $0.07\text{ m}$  du bord d'attaque. On injecte alors à  $0.074\text{ m}$  du début de l'écoulement gazeux (quand celui-ci est établi) un fluide, ici de l'eau, avec un débit de  $Q_0 = 8 \cdot 10^{-4}\text{ m}^2/\text{s}$ .

L'écoulement liquide est un écoulement de Poiseuille dans une conduite de  $300\text{ }\mu\text{m}$  de hauteur. Ce qui se traduit par une injection de  $\frac{300}{\sin(\pi/12)}\text{ }\mu\text{m} \approx 1.16\text{ mm}$  de largeur, avec un profil parabolique incliné de  $15^\circ$  par rapport à la verticale (c-à-d  $\frac{\pi}{12} \approx 0.262\text{ rad}$ ). Notons que cet écoulement est vertical et donc soumis à la force de pesanteur d'une intensité de  $9.81\text{ m/s}^2$ .

Les calculs sont réalisés avec 300 points de maillage selon  $x$  et 50 points selon  $y$  pour le code Navier-Stokes et 600 points pour le code Saint-Venant 1D. Le code SLOSH est utilisé comme référence pour tester le modèle à deux équations (code Saint-Venant).

Les caractéristiques de l'eau et de l'air sont les mêmes que celles prises par M.Lalo (cf tableau 8).

Les paramètres utilisés pour les simulations sont résumés dans le tableau 9.

Vitesse du gaz	$U_{gaz} = 20\text{ m/s}$
Débit du liquide	$Q_0 = 8 \cdot 10^{-4}\text{ m}^2/\text{s}$
Largeur d'injection	$1.16 \cdot 10^{-3}\text{ m}$
Début de l'injection	$7.4 \cdot 10^{-2}\text{ m}$
Fréquences des perturbations	$500\text{ Hz}$ et $750\text{ Hz}$
Maillage	300 × 50 points (Navier-Stokes) 600 points (Modèle Saint-Venant)

TABLE 9: Paramètres des simulations numériques



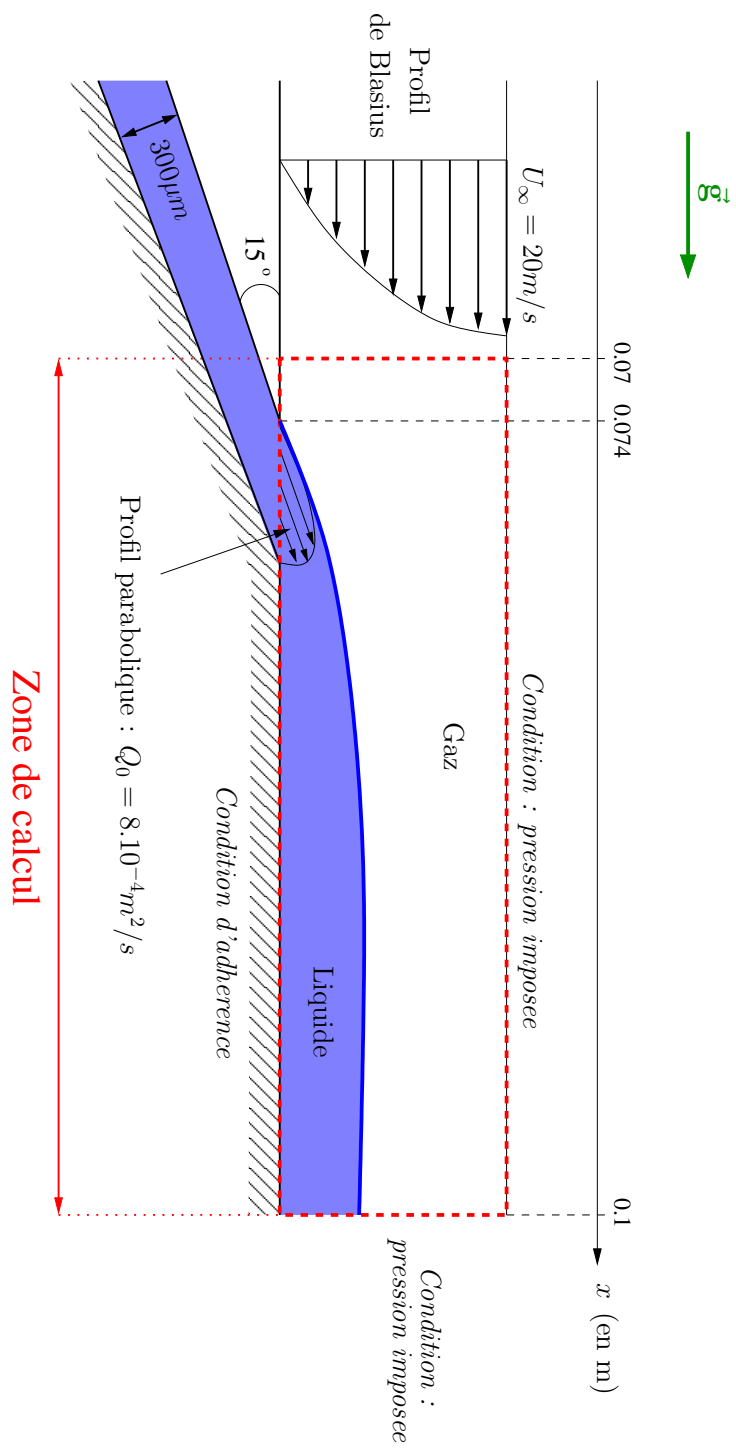


FIGURE 33: Schéma de l'écoulement

Gaz seul

On cherche d'abord à établir un écoulement gazeux pour retrouver la solution de Blasius. Pour ne pas avoir à mailler un domaine trop grand, on impose à l'entrée un profil de vitesse solution de Blasius à 7 cm du bord d'attaque.

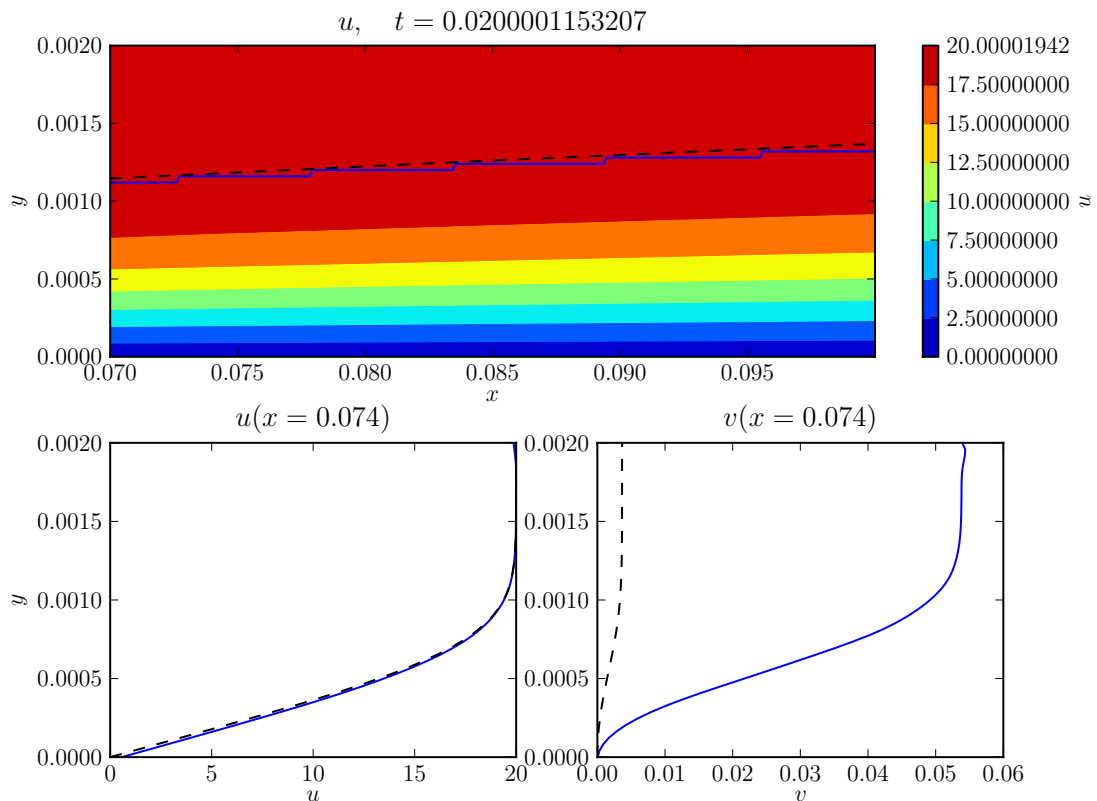


FIGURE 34: Profils des vitesses de l'écoulement gazeux (en pointillés : résultat théoriques)

Sur le graphique 34 on a représenté :

- en haut la vitesse tangentielle ainsi que l'épaisseur de la couche limite définie par  $\delta_{0.99} = \{y | u(y)/U_{gaz} = 0.99\}$  ;
- en-dessous les profils de la vitesse tangentielle et la vitesse normale en  $x = 0.074\text{ m}$ , c'est-à-dire à l'endroit où le liquide sera injecté.

Les résultats prédits par la solution de Blasius sont tracés en pointillés noirs, et les résultats numériques en traits pleins.

Les résultats numériques coïncident bien avec la théorie, même si sur le graphe de droite, la vitesse normale semble plus éloignée du profil théorique elle reste toutefois quasi-négligeable.

Ceci nous permet donc de valider l'écoulement gazeux et d'utiliser le résultat pour initialiser les calculs avec le film liquide.

Écoulement stationnaire avec film

À partir du moment où l'écoulement gazeux est établi on commence à injecter de l'eau. La figure 35 montre la fraction volumique  $\alpha$  et la hauteur du film lorsque celui-ci est établi. La hauteur est définie comme l'intégrale de la fraction volumique sur la hauteur. On peut observer qu'il y a un mélange des deux fluides à l'interface.

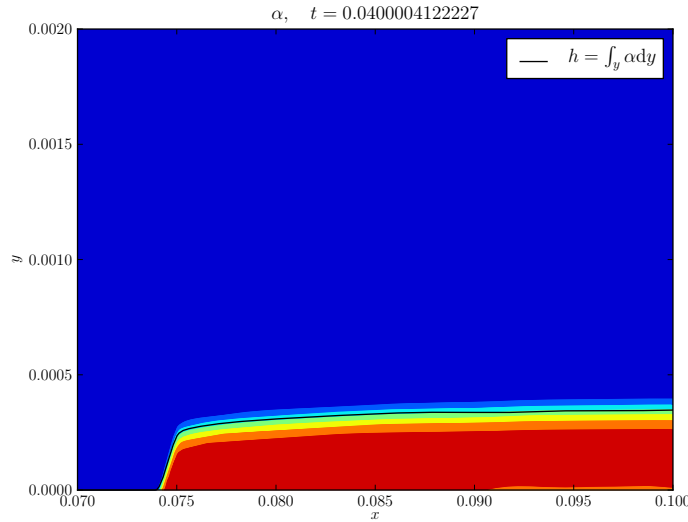


FIGURE 35: Hauteur de l'écoulement stationnaire

Les profils de vitesse sont affichés sur la figure 36. À gauche on retrouve le profil de vitesse de Blasius qui est imposé à l'entrée, et à droite le profil au milieu de la veine ( $x = 0.085 m$ ) où on voit qu'un profil en forme de Poiseuille est établi dans le film et se raccorde avec le profil de Blasius dans le gaz.

La contrainte du gaz sur le film à l'interface est tracée sur la figure 37, en trait continu la valeur calculée numériquement, en pointillés la contrainte théorique donnée par l'équation 8.4. On peut observer que la courbe reste très proche de la contrainte du Blasius, malgré la perturbation en  $x = 0.074$  due à l'injection.

Modèle de type Saint-Venant

On utilise le modèle (4.237) page 109 à deux équations sur la hauteur et le débit sous forme dimensionnée qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\partial_t \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} q \\ f(h, q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{C_2}{\rho} \left( \frac{1}{2} \tau_0 + \frac{h}{3} \rho g - \mu \frac{v}{h} \right) \end{pmatrix} \tag{8.5}$$

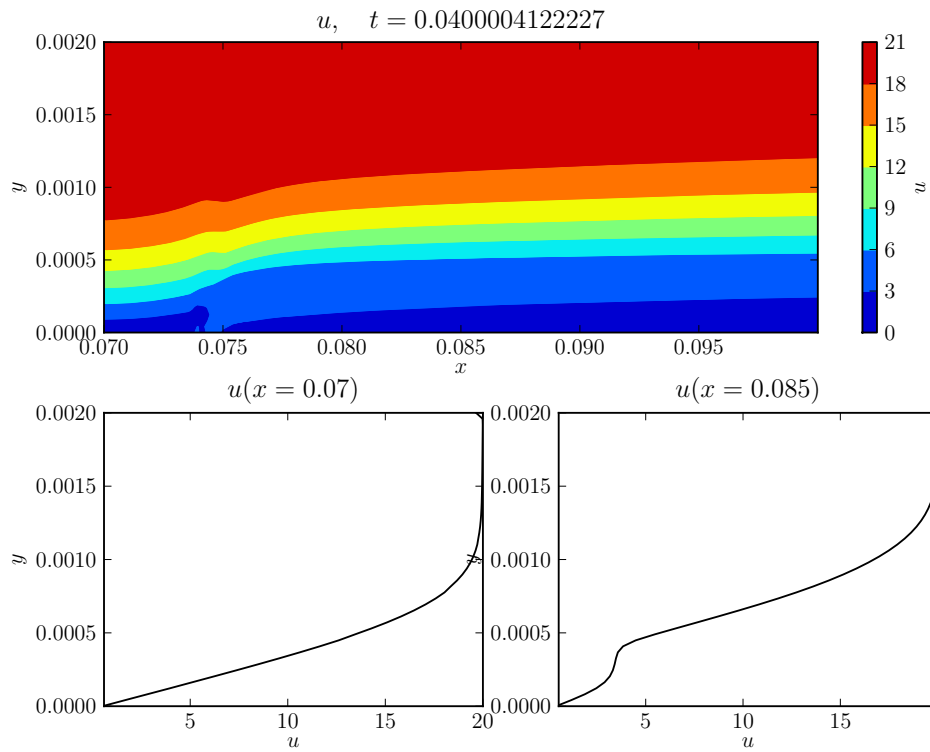


FIGURE 36: Épaisseur de couche limite et profil de vitesses

où :

$$\begin{aligned}
 f(U) = & C_1 h v^2 + \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{1}{3} - \frac{C_1}{4} \right) h^3 \tau^2 + \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{1}{2} - \frac{C_1}{3} - \frac{C_2}{30} \right) h^4 \rho g \tau \\
 & + \frac{1}{\mu^2} \left( \frac{1}{5} - \frac{C_1}{9} - \frac{2C_2}{75} \right) h^5 \rho^2 g^2 + \frac{\kappa}{\rho} \frac{C_2}{3} \left( \frac{h_x^2}{2} - h h_{xx} \right)
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

et comme on vient de le voir  $\tau$  est la contrainte de Blasius donnée par 8.4.

Enfin on fixe les paramètres  $C_1 = 1$  et  $C_2 = 3$  pour vérifier les conditions définies au chapitre 3 page 35.

Afin d'être plus proche des résultats donnés par le code SLOSH on utilise une hauteur d'injection de  $250 \mu m$  (cf figure 38).

### Écoulement perturbé

On fait alors varier la vitesse d'injection en ajoutant une perturbation de la forme :

$$U = U_0(1 + 0.05 \sin(2\pi f))$$

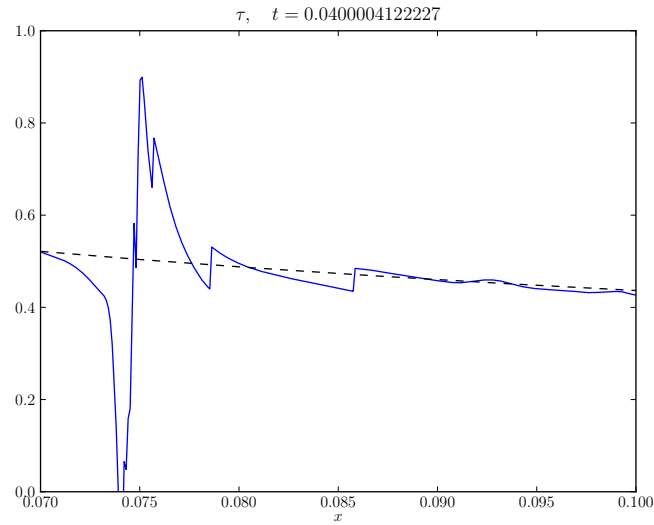


FIGURE 37: Contrainte tangentielle

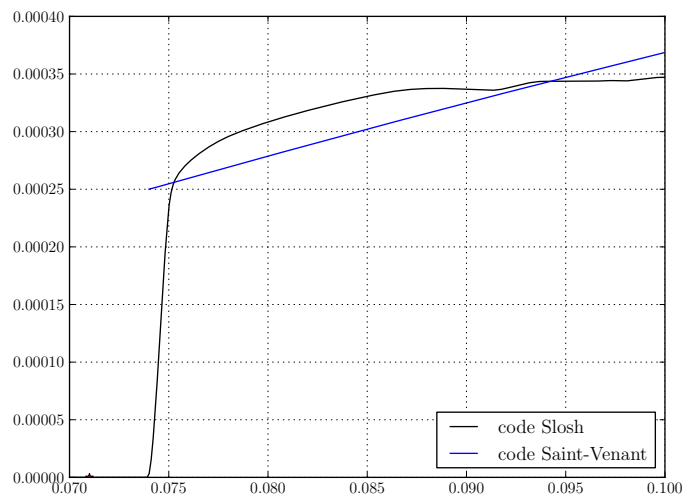


FIGURE 38: Hauteurs stationnaires

pour  $f = 500\text{Hz}$  et  $f = 750\text{Hz}$ . Les résultats sont présentés sur les figures 39 et 40. (Attention, les échelles ne sont pas les mêmes pour le calcul avec le code SLOSH et le calcul avec le code Saint-Venant).

#### Analyse par transformée de Fourier

Afin d'analyser plus en détails les résultats, on opère une transformée de Fourier en espace à chaque instant de la hauteur à laquelle on a retiré la hauteur d'équilibre pour ne garder

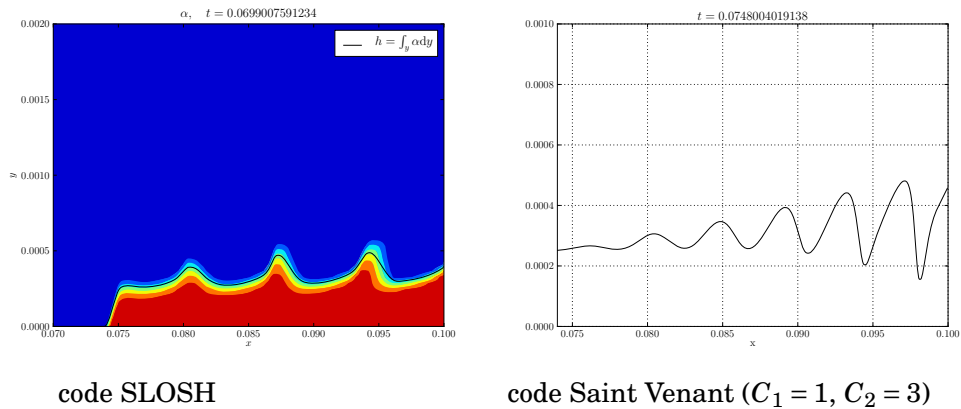


FIGURE 39: Hauteurs pour  $f = 500H_z$

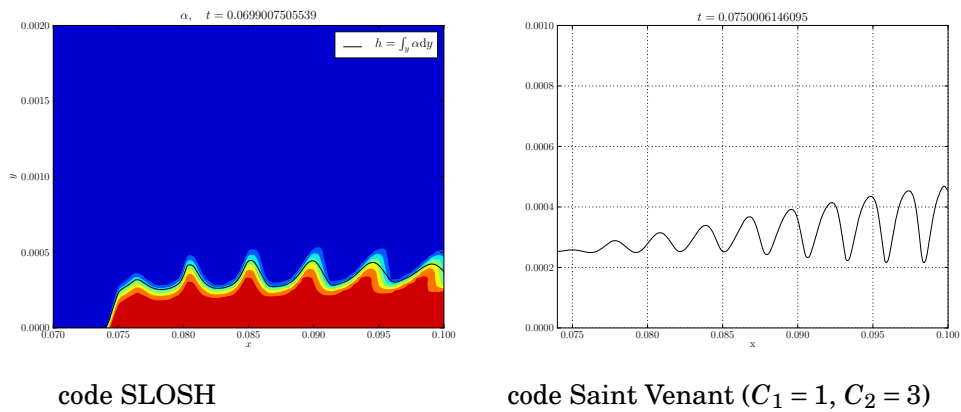


FIGURE 40: Hauteurs pour  $f = 750H_z$

que les perturbations. On peut alors suivre la fréquence la plus excitée au cours du temps. La figure 41 représente cette évolution pour le code SLOSH (pris comme référence) et le modèle à deux équations.

On trouve un bon accord entre les deux codes, la croissance suivie d’une saturation est bien capturée par le modèle pourtant beaucoup plus simple (car 1D au lieu de 2D).

Cependant les longueurs d’ondes les plus instables pour le code Navier-Stokes et le code Saint-Venant ne sont pas les mêmes. On peut voir ces valeurs dans le tableau 10.

Cette différence peut s’expliquer simplement. Dans la partie [Stabilité linéaire \(et lien avec Orr-Sommerfeld\)](#) ( 3.7 page 43), on a montré que le taux de croissance et le nombre d’onde le

	Navier-Stokes	modèle Saint-Venant
$f = 500 Hz$	6.76 mm	5.52 mm
$f = 750 Hz$	4.55 mm	3.76 mm

TABLE 10: Longueurs d’ondes les plus amplifiées

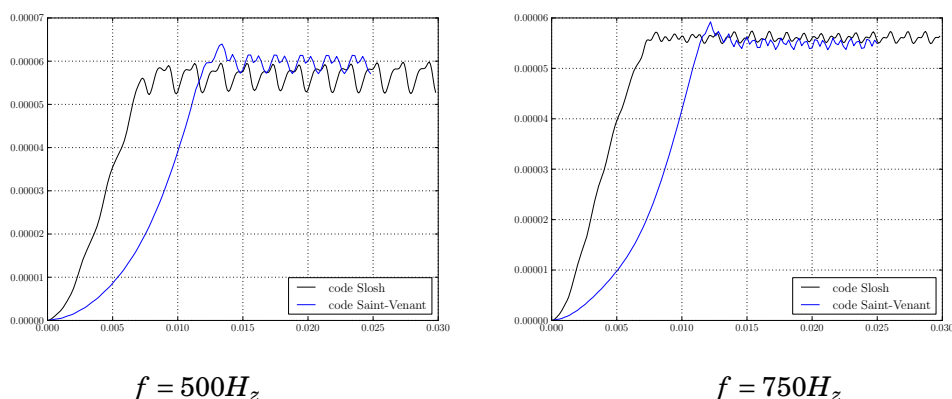
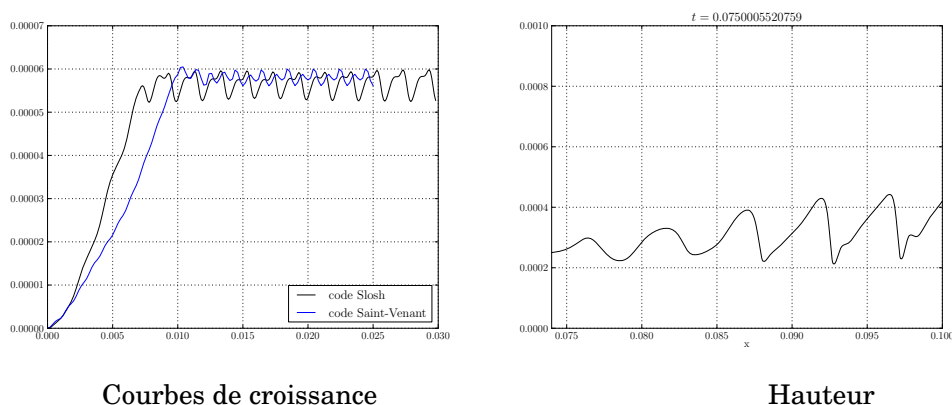


FIGURE 41: Courbes de croissance

plus excité dépendent des paramètres  $C_1$  et  $C_2$ . Ainsi si on choisit  $C_1 = 1.06$  et  $C_2 = 3$  alors on trouve que la longueur d'onde vaut  $6.72\text{ mm}$  pour le modèle Saint-Venant avec  $f = 500\text{ Hz}$ , ce qui correspond à la valeur donnée par le code SLOSH. Sur la figure 42, on voit que le modèle Saint-Venant avec  $C_1 = 1.06$  approche mieux la solution de Navier-Stokes. Par ailleurs, l'aspect des vagues est différent, comme on le voit sur la figure.

FIGURE 42: Résultats pour  $f = 500H_z$ ,  $C_1 = 1.06$  et  $C_2 = 3$ 

### Conclusion

Le modèle Saint-Venant donne qualitativement les mêmes résultats que les équations de Navier-Stokes, mais surtout permet un gain en temps de calcul énorme, puisqu'on passe d'une résolution 2D à une résolution 1D. Par contre on peut modifier la longueur d'onde la plus amplifiée et le taux de croissance  $c = k^2 s_{20}(C_1, C_2) + k^4 s_{40}(C_1, C_2)$  (voir [Stabilité linéaire \(et lien avec Orr-Sommerfeld\)](#)) en jouant sur les paramètres  $C_1$  et  $C_2$  sans avoir de moyen systématique pour trouver les valeurs les plus précises.

Pour poursuivre l'étude, il y a deux principales pistes à explorer : pour lever la dépendance en  $C_1$  et  $C_2$  il faudrait étudier écrire les modèles à l'ordre suivant en  $\varepsilon$ , comme l'ont fait (dans

le cas du film ruisselant sur un plan incliné) Ruyer-Quil et Manneville [48, 50], Vila [53]. Un autre axe serait de considérer comme écoulement de référence non pas un écoulement de Poiseuille, mais un écoulement de Blasius.



## CONCLUSION

---

**D**ans cette thèse, nous avons écrit des modèles simplifiés des équations de Navier-Stokes pour des écoulements de type films minces en passant des modèles complets en trois dimensions (resp. 2D) à des modèles en deux dimensions (resp. 1D).

Dans la première partie nous avons établi les équations de Navier-Stokes générales décrivant la dynamique d'un film liquide mince s'écoulant sur une paroi quelconque en rotation. À partir de ces équations nous avons montré comment il est possible, en intégrant les équations sur la hauteur du film et en réalisant un développement asymptotique de la solution autour d'un écoulement uniforme stationnaire d'écrire des modèles simplifiés. Nous avons étudié le cas simple d'un écoulement 2D sur un plan incliné. Deux familles de modèles sont proposées : des modèles à une équation sur la hauteur (modèles de type équation de Benney), et des modèles à deux équations sur la hauteur et le débit (modèles de type système Saint-Venant ou shallow-water). Les modèles à une équation ne sont pas stables numériquement pour les écoulements instables, mais les modèles à deux équations (qui contiennent les modèles à une équation) sont eux plus robustes. Les modèles à deux équations sont paramétrés par deux constantes. En analysant les propriétés des modèles, nous donnons des ensembles de valeurs possibles pour ces constantes afin de préserver l'hyperbolicité du système et pour avoir une entropie. Enfin, nous avons montré que les premiers termes du développement en onde longue de la stabilité linéaire du système Saint-Venant sont compatibles avec la théorie d'Orr-Sommerfeld pour le système des équations de Navier-Stokes.

Nous nous sommes ensuite intéressé à la description d'écoulements plus complexes. Dans la deuxième partie de cette thèse, nous avons établi des modèles analogues à ceux trouvés dans la première partie, mais pour des écoulements sur des surfaces quelconques caractérisés par leurs courbures. L'influence de l'écoulement gazeux est modélisé par l'introduction d'un terme de contrainte et d'un terme de pression extérieure à la surface libre du film. Ceci a fait l'objet d'un article Boutounet *et al.* [6].

Puis, pour étudier plus en détail les interactions entre le film et le gaz, nous avons considéré des écoulements multicouches : une couche de liquide recouverte par une couche de gaz. Deux possibilités ont été explorées : le cas de deux couches à surface rigide, et le cas à surface libre. Dans le cas de l'écoulement à surface libre, nous avons montré à l'aide de simulations numériques qu'il est possible d'avoir la couche externe stable alors que la couche interne est instable. Les résultats ont été soumis pour publication (Boutounet *et al.* [7]).

Enfin, dans la dernière partie de la thèse, nous avons étudié un cas réel de film liquide mince soumis à un cisaillement aérodynamique. Nous avons comparé les résultats obtenus par un code de calcul résolvant les équations de Navier-Stokes et les résultats donnés par les modèles

à deux équations (hauteur-débit). Les modèles utilisés ont permis de retrouver qualitativement les mêmes résultats que le code Navier-Stokes, tout en permettant un gain en temps de calcul (d'un facteur 100) puisqu'on passe d'un calcul 2D à un calcul 1D.

Pour avoir une description complète de l'écoulement, il manque encore un modèle pour le front du film. Cela permettrait de continuer les simulations numériques déjà réalisées afin d'observer les effets de pincement de l'écoulement (en 3D). Une étude des problèmes au niveau du front est en cours (Roux [46]) il reste à raccorder la solution au front avec la solution du film mince.

Quatrième partie

**ANNEXES**



## DÉMONSTRATIONS DES LEMMES

**Preuve du lemme 1 page 62.** La matrice de rotation est par construction une matrice orthogonale, on a donc

$$Q^t Q = \text{Id} \Rightarrow \partial_{\vec{\xi}}(Q^t Q) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Développons le membre de gauche

$$\begin{aligned} \left( \partial_{\vec{\xi}_n} (Q^t Q) \right)_{i,j,n=1,\dots,d} &= \partial_{\vec{\xi}_n} (\vec{E}_i \cdot \vec{E}_j) \\ &= \sum_{p=1}^d \partial_{\vec{\xi}_n} \vec{E}_i^p \vec{E}_j^p + \vec{E}_i^p \partial_{\vec{\xi}_n} \vec{E}_j^p \\ &= \sum_{p=1}^d \partial_{\vec{\xi}_n} \left( \frac{1}{\hbar_i} \partial_{\vec{\xi}_i} \vec{X}_p \right) \vec{E}_j^p + \vec{E}_i^p \partial_{\vec{\xi}_n} \left( \frac{1}{\hbar_j} \partial_{\vec{\xi}_j} \vec{X}_p \right) \\ &= -2 \frac{\hbar_{i,n}}{\hbar_i} \delta_{ij} + \sum_{p=1}^d \frac{1}{\hbar_i} \vec{E}_j^p \partial_{\vec{\xi}_i \vec{\xi}_n}^2 \vec{X}_p + \frac{1}{\hbar_j} \vec{E}_i^p \partial_{\vec{\xi}_j \vec{\xi}_n}^2 \vec{X}_p \\ &= -2 \frac{\hbar_{i,n}}{\hbar_i} \delta_{ij} + \frac{1}{\hbar_i} \sum_{p=1}^d \left( \partial_{\vec{\xi}_i} (\hbar_n \vec{E}_j^p \vec{E}_n^p) - \hbar_n \vec{E}_n^p \partial_{\vec{\xi}_i} \vec{E}_j^p \right) \\ &\quad + \frac{1}{\hbar_j} \sum_{p=1}^d \left( \partial_{\vec{\xi}_j} (\hbar_n \vec{E}_i^p \vec{E}_n^p) + \hbar_n \vec{E}_n^p \partial_{\vec{\xi}_j} \vec{E}_i^p \right) \\ &= -2 \frac{\hbar_{i,n}}{\hbar_i} \delta_{ij} + \frac{\hbar_{n,i}}{\hbar_i} \delta_{jn} + \frac{\hbar_{n,j}}{\hbar_j} \delta_{in} - \frac{1}{\hbar_i} \sum_{p=1}^d \hbar_n \vec{E}_n^p \partial_{\vec{\xi}_i} \vec{E}_j^p - \frac{1}{\hbar_j} \sum_{p=1}^d \hbar_n \vec{E}_n^p \partial_{\vec{\xi}_j} \vec{E}_i^p \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Il reste à exprimer  $\partial_{\vec{\xi}_j} \vec{E}_i^p$  en fonction de  $\partial_{\vec{\xi}_i} \vec{E}_j^p$  :

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{\xi}_i} \vec{E}_j^p &= \partial_{\vec{\xi}_i} \left( \frac{1}{\hbar_j} \partial_{\vec{\xi}_j} \vec{X}_p \right) \\ &= \frac{1}{\hbar_j} \partial_{\vec{\xi}_i \vec{\xi}_j}^2 \vec{X}_p - \frac{\hbar_{j,i}}{\hbar_j} \vec{E}_j^p \\ \Rightarrow \partial_{\vec{\xi}_i \vec{\xi}_j}^2 \vec{X}_p &= \hbar_j \partial_{\vec{\xi}_i} \vec{E}_j^p + \hbar_{j,i} \vec{E}_j^p \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

de la même manière, on développe  $\partial_{\vec{\xi}_j} \vec{E}_i^p$  et on remplace l'expression de  $\partial_{\vec{\xi}_i \vec{\xi}_j}^2 \vec{X}_p$  par la relation précédente :

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{\xi}_j} \vec{E}_i^p &= \frac{1}{\hbar_i} \partial_{\vec{\xi}_i \vec{\xi}_j}^2 \vec{X}_p - \frac{\hbar_{i,j}}{\hbar_i} \vec{E}_i^p \\ \partial_{\vec{\xi}_j} \vec{E}_i^p &= \frac{1}{\hbar_i} \left( \hbar_j \partial_{\vec{\xi}_i} \vec{E}_j^p + \hbar_{j,i} \vec{E}_j^p - \hbar_{i,j} \vec{E}_i^p \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Revenons à l'égalité initiale avec ces nouveaux résultats :

$$\begin{aligned}
 0_{i,j=1,\dots,d} &= -2\frac{\hbar_{i,n}}{\hbar_i}\delta_{ij} + \frac{\hbar_{n,i}}{\hbar_i}\delta_{jn} + \frac{\hbar_{n,j}}{\hbar_j}\delta_{in} - \hbar_n \sum_{p=1}^d \left( \frac{1}{\hbar_i}\vec{E}_n^p \partial_{\vec{\xi}_i} \vec{E}_j^p + \frac{1}{\hbar_j}\vec{E}_n^p \partial_{\vec{\xi}_j} \vec{E}_i^p \right) \\
 &= -2\frac{\hbar_{i,n}}{\hbar_i}\delta_{ij} + \frac{\hbar_{n,i}}{\hbar_i}\delta_{jn} + \frac{\hbar_{n,j}}{\hbar_j}\delta_{in} - \frac{\hbar_n}{\hbar_i} \sum_{p=1}^d 2\vec{E}_n^p \partial_{\vec{\xi}_i} \vec{E}_j^p - \frac{\hbar_{j,i}}{\hbar_i}\delta_{jn} + \frac{\hbar_{i,j}}{\hbar_j}\delta_{in} \\
 &= -\frac{\hbar_{i,n}}{\hbar_i}\delta_{ij} + \frac{\hbar_{n,j}}{\hbar_j}\delta_{in} - \frac{\hbar_n}{\hbar_i} \sum_{p=1}^d \vec{E}_n^p \partial_{\vec{\xi}_i} \vec{E}_j^p
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Ce qui donne après réarrangement des termes :

$$\begin{aligned}
 \left( \sum_{p=1}^d \vec{E}_n^p \partial_{\vec{\xi}_i} \vec{E}_j^p \right)_{i,j,n=1,\dots,d} &= \frac{\hbar_{n,j}}{\hbar_j}\delta_{in} - \frac{\hbar_{i,n}}{\hbar_n}\delta_{ij} \\
 &= \left( \mathbf{Q}^t \partial_{\vec{\xi}} \mathbf{Q} \right)_{n,j,i=1,\dots,d}
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

De plus, pour  $i, j, n = 1, \dots, d-1$ ,

$$\begin{aligned}
 \sum_{p=1}^{d-1} \vec{E}_n^p \partial_{\vec{\xi}_i} \vec{E}_j^p &= \sum_{p=1}^d \vec{E}_n^p \partial_{\vec{\xi}_i} \vec{E}_j^p - \vec{E}_n^d \partial_{\vec{\xi}_i} \vec{E}_j^d \\
 &= \sum_{p=1}^d \vec{E}_n^p \partial_{\vec{\xi}_i} \vec{E}_j^p - \vec{E}_n^d \partial_{\vec{\xi}_i} \vec{E}_j^d
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Le dernier terme est nul :

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_j^d &= \hbar_j \partial_Z \xi_j \\
 &= \hbar_j c \left( (\partial_{\xi} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{s} \right)_j \\
 &= -c \sum_{p=1}^{d-1} \vec{E}_j^p \vec{E}_d^p \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

et donc :

$$\sum_{p=1}^{d-1} \vec{E}_n^p \partial_{\vec{\xi}_i} \vec{E}_j^p = \frac{\hbar_{n,j}}{\hbar_j}\delta_{in} - \frac{\hbar_{i,n}}{\hbar_n}\delta_{ij} \tag{A.9}$$

□

**Preuve du lemme 2 page 67.** Les symboles de Christoffel sont donnés par la formule

$$\vec{\mathcal{M}} = A \partial_{\vec{\xi}}^2 \vec{X} \cdot \vec{V} \cdot \vec{V} \tag{A.10}$$

On rappelle l'expression de l'inverse de la matrice jacobienne du changement de coordonnées :

$$A^{-1} = \partial_{\vec{\xi}} \vec{X} = \begin{pmatrix} \partial_{\xi} \mathbf{X} & -\mathbf{s} \\ \frac{1}{c} \mathbf{s}^t \partial_{\xi} \mathbf{X} & c \end{pmatrix} \tag{A.11}$$

Chaque composante de la matrice est dérivée par rapport à  $\vec{\xi}^p$ ,  $p = 1, \dots, d$  :

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{\xi}^p} \left( \partial_{\vec{\xi}} \vec{X} \right) &= \begin{pmatrix} \partial_{\vec{\xi}^p} (\partial_{\xi} \mathbf{X}) & -\partial_{\vec{\xi}^p} \mathbf{s} \\ \partial_{\vec{\xi}^p} \left( \frac{1}{c} \mathbf{s}^t \partial_{\xi} \mathbf{X} \right) & \partial_{\vec{\xi}^p} c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_{\vec{\xi}^p} (\partial_{\xi} \mathbf{X}) & -\partial_{\vec{\xi}^p} \mathbf{s} \\ \partial_{\vec{\xi}^p} \left( \frac{\mathbf{s}^t}{c} \right) \partial_{\xi} \mathbf{X} + \frac{1}{c} \mathbf{s}^t \partial_{\vec{\xi}^p} (\partial_{\xi} \mathbf{X}) & -\frac{1}{c} \mathbf{s}^t \partial_{\vec{\xi}^p} \mathbf{s} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

En multipliant par la jacobienne

$$\begin{aligned} A \partial_{\vec{\xi}^p} \left( \partial_{\vec{\xi}} \vec{X} \right) &= \begin{pmatrix} (\partial_{\xi} \mathbf{X})^{-1} (\text{Id} - \mathbf{s} \mathbf{s}^t) & c (\partial_{\xi} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{s} \\ -\mathbf{s}^t & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\vec{\xi}^p} (\partial_{\xi} \mathbf{X}) & -\partial_{\vec{\xi}^p} \mathbf{s} \\ \partial_{\vec{\xi}^p} \left( \frac{\mathbf{s}^t}{c} \right) \partial_{\xi} \mathbf{X} + \frac{\mathbf{s}^t}{c} \partial_{\vec{\xi}^p} (\partial_{\xi} \mathbf{X}) & -\frac{\mathbf{s}^t}{c} \partial_{\vec{\xi}^p} \mathbf{s} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\partial_{\xi} \mathbf{X})^{-1} \left( \partial_{\vec{\xi}^p} (\partial_{\xi} \mathbf{X}) + c \mathbf{s} \partial_{\vec{\xi}^p} \left( \frac{\mathbf{s}^t}{c} \right) \partial_{\xi} \mathbf{X} \right) & -(\partial_{\xi} \mathbf{X})^{-1} \partial_{\vec{\xi}^p} \mathbf{s} \\ c \partial_{\vec{\xi}^p} \left( \frac{\mathbf{s}^t}{c} \right) \partial_{\xi} \mathbf{X} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Le vecteur  $\frac{\mathbf{s}}{c}$  se dérive simplement à l'aide de la relation 4.17 :

$$\partial_{\xi} \left( \frac{\mathbf{s}^t}{c} \right) = \frac{1}{c} (\partial_{\xi} \mathbf{s})^t \left( \text{Id} + \frac{\mathbf{s} \mathbf{s}^t}{c^2} \right) \quad (\text{A.14})$$

ce qui permet d'expliciter  $A \partial_{\vec{\xi}^p} \left( \partial_{\vec{\xi}} \vec{X} \right)$  :

$$\begin{aligned} A \partial_{\eta} \left( \partial_{\eta} \vec{X} \right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A \partial_{\eta} \left( \partial_{\xi} \vec{X} \right) &= A \partial_{\xi} \left( \partial_{\eta} \vec{X} \right) = \begin{pmatrix} -(\partial_{\xi} \mathbf{X})^{-1} \partial_{\xi} \mathbf{s} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -H \\ 0 \end{pmatrix} \\ A \partial_{\xi} \left( \partial_{\xi} \vec{X} \right) &= \begin{pmatrix} (\partial_{\xi} \mathbf{X})^{-1} \left( \partial_{\xi \xi}^2 \mathbf{X} + \mathbf{s} (\partial_{\xi} \mathbf{s})^t \left( \text{Id} + \frac{\mathbf{s} \mathbf{s}^t}{c^2} \right) \partial_{\xi} \mathbf{X} \right) \\ (\partial_{\xi} \mathbf{s})^t \left( \text{Id} + \frac{\mathbf{s} \mathbf{s}^t}{c^2} \right) \partial_{\xi} \mathbf{X} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Et après deux produits contractés avec le vecteur vitesse covariante, on obtient le résultat final

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{M}_0(\mathbf{V}) - 2VHV \\ \mathcal{M} &= \mathbf{V}^t H^t M^{-1} \mathbf{V} \\ \mathcal{M}_0(\mathbf{V}) &= (\partial_{\xi} \mathbf{X})^{-1} \left( \partial_{\xi \xi}^2 \mathbf{X} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \mathcal{M} \mathbf{s} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

□

**Preuve du lemme 3 page 67.** Rappelons d'abord quelques formules obtenues dans la section 4.1.1 page 59

$$\begin{aligned} (\partial_{\xi} \mathbf{X})_{i,j=1,\dots,d-1} &= \hbar_j \vec{\mathbf{E}}_j^i \\ \left( (\partial_{\xi} \mathbf{X})^{-1} \right)_{i,j=1,\dots,d-1} &= \frac{1}{\hbar_i} \vec{\mathbf{E}}_i^j \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$H_{i,j=1,\dots,d-1} = \frac{m_i k_i}{\hbar_i} \delta_{ij} \quad (\text{A.18})$$

$$M_{i,j=1,\dots,d-1}^{-1} = \hbar_i^2 \delta_{ij} \quad (\text{A.19})$$

Il suffit d'appliquer ces formules aux résultats démontrés précédemment :

$$(H^t M^{-1})_{i,j=1,\dots,d-1} = m_i k_i \hbar_i \delta_{ij} \quad (\text{A.20})$$

D'où :

$$\mathcal{M} = \sum_{p=1}^{d-1} \mathbf{V}_p^2 m_p k_p \hbar_p \quad (\text{A.21})$$

D'autre part

$$\left( (\partial_{\xi} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{s} \right)_{i=1,\dots,d-1} = \frac{1}{\hbar_i} \sum_{p=1}^{d-1} \vec{\mathbf{E}}_i^p \vec{\mathbf{E}}_d^p = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} \left( (\partial_{\xi} \mathbf{X})^{-1} \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{X} \right)_{i,j,p=1,\dots,d-1} &= \frac{1}{\hbar_i} \sum_{q=1}^{d-1} \vec{\mathbf{E}}_i^q \partial_{\xi_p} \left( \hbar_j \vec{\mathbf{E}}_j^q \right) \\ &= \frac{1}{\hbar_i} \sum_{q=1}^{d-1} \vec{\mathbf{E}}_i^q \left( \hbar_{j,p} \vec{\mathbf{E}}_j^q + \partial_{\xi_p} \vec{\mathbf{E}}_j^q \hbar_j \right) \\ &= \frac{\hbar_{i,p}}{\hbar_i} \delta_{ij} + \frac{\hbar_j}{\hbar_i} \sum_{q=1}^{d-1} \vec{\mathbf{E}}_i^q \partial_{\xi_p} \vec{\mathbf{E}}_j^q \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

D'après le lemme 1,

$$\left( \sum_{q=1}^{d-1} \vec{\mathbf{E}}_i^q \partial_{\xi_p} \vec{\mathbf{E}}_j^q \right)_{i,j,p=1,\dots,d} = \frac{\hbar_{i,j}}{\hbar_j} \delta_{ip} - \frac{\hbar_{j,i}}{\hbar_i} \delta_{jp} \quad (\text{A.24})$$

ce qui permet de conclure :

$$\left( (\partial_{\xi} \mathbf{X})^{-1} \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{X} \right)_{i,j,p=1,\dots,d-1} = \frac{\hbar_{i,p}}{\hbar_i} \delta_{ij} + \frac{\hbar_{i,j}}{\hbar_i} \delta_{ip} - \frac{\hbar_j}{\hbar_i^2} \hbar_{j,i} \delta_{jp} \quad (\text{A.25})$$



$$(\mathcal{M}_0(\mathbf{V}))_{i=1,\dots,d-1} = \frac{1}{\tilde{h}_i} \sum_{p=1}^{d-1} \left( 2\tilde{h}_{i,p} \mathbf{V}_i - \frac{\tilde{h}_p}{\tilde{h}_i} \tilde{h}_{p,i} \mathbf{V}_p \right) \mathbf{V}_p \quad (\text{A.26})$$

$$\mathcal{M}_{i=1,\dots,d-1} = \frac{1}{\tilde{h}_i} \sum_{p=1}^{d-1} \left( 2\tilde{h}_{i,p} \mathbf{V}_i - \frac{\tilde{h}_p}{\tilde{h}_i} \tilde{h}_{p,i} \mathbf{V}_p \right) \mathbf{V}_p - 2 \frac{V_{m_i k_i}}{\tilde{h}_i} \mathbf{V}_i \quad (\text{A.27})$$

□

**Preuve du lemme 4 page 68.** Le tenseur des contraintes en coordonnées cartésiennes est donné par

$$\sigma = \partial_{\vec{x}} \vec{U} + \left( \partial_{\vec{x}} \vec{U} \right)^t \quad (\text{A.28})$$

donc le tenseur des contraintes curvilignes est symétrique et s'écrit donc :

$$\sigma' = A \partial_{\vec{x}} \vec{U} A^t + \left( A \partial_{\vec{x}} \vec{U} A^t \right)^t = \begin{pmatrix} S & r \\ r^t & f \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

avec  $S$  une matrice symétrique  $\in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ . Calculons le demi-terme de  $\sigma'$  :

$$\begin{aligned} A \partial_{\vec{x}} \vec{U} A^t &= A \partial_{\vec{x}} \left( A^{-1} \vec{V} \right) A^t \\ &= A \partial_{\vec{\xi}} \left( A^{-1} \vec{V} \right) A A^t \\ &= A \partial_{\vec{\xi}} \left( \partial_{\vec{\xi}} \vec{X} \vec{V} \right) \tilde{G}^{-1} \\ &= A \left( \partial_{\vec{\xi}\vec{\xi}}^2 \vec{X} \cdot \vec{V} + A^{-1} \partial_{\vec{\xi}} \vec{V} \right) \tilde{G}^{-1} \\ &= \left( A \partial_{\vec{\xi}\vec{\xi}}^2 \vec{X} \cdot \vec{V} + \partial_{\vec{\xi}} \vec{V} \right) \tilde{G}^{-1} \\ &= \left( A \partial_{\vec{\xi}\vec{\xi}}^2 \vec{X} \cdot \mathbf{V} + V A \partial_{\vec{\xi}\eta}^2 \vec{X} + \partial_{\vec{\xi}} \vec{V} \right) \tilde{G}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Le scalaire  $f$  se calcule aisément à l'aide des formules donnant  $A \partial_{\vec{\xi}\vec{\xi}}^2 \vec{X}$  calculées page 212 :

$$f = 2\partial_{\eta} V$$

ainsi que le vecteur  $\mathbf{r}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \partial_{\eta} \mathbf{V} - H \mathbf{V} + M \left( \partial_{\xi} V \right)^t + M \left( \left( \partial_{\xi} \mathbf{s} \right)^t \left( \text{Id} + \frac{\mathbf{s}\mathbf{s}^t}{c^2} \right) \partial_{\xi} \mathbf{X} \right)^t \mathbf{V} \\ &= \partial_{\eta} \mathbf{V} + M \nabla_{\xi} V + \left( M \left( \partial_{\xi} \mathbf{X} \right)^t \left( \text{Id} + \frac{\mathbf{s}\mathbf{s}^t}{c^2} \right) \partial_{\xi} \mathbf{s} - H \right) \mathbf{V} \\ &= \partial_{\eta} \mathbf{V} + M \nabla_{\xi} V + \left( \left( \partial_{\xi} \mathbf{X} \right)^{-1} \partial_{\xi} \mathbf{s} - H \right) \mathbf{V} \\ &= \partial_{\eta} \mathbf{V} + M \nabla_{\xi} V \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

En continuant de la même manière le bloc matrice est :

$$\begin{aligned}
 S &= (\partial_\xi \mathbf{X})^{-1} \left( \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{X} \cdot \mathbf{V} \right) M + (\partial_\xi \mathbf{X})^{-1} \mathbf{s} (H\mathbf{V})^t - VHM + \partial_\xi \mathbf{V}M \\
 &\quad + M \left( \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{X} \cdot \mathbf{V} \right)^t (\partial_\xi \mathbf{X})^{-t} + H\mathbf{V}\mathbf{s}^t (\partial_\xi \mathbf{X})^{-t} - VMH^t + M (\partial_\xi \mathbf{V})^t
 \end{aligned} \tag{A.32}$$

en réordonnant les termes, il vient :

$$\begin{aligned}
 S &= \left( (\partial_\xi \mathbf{X})^{-1} \left( \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{X} \cdot \mathbf{V} \right) + \partial_\xi \mathbf{V} \right) M \\
 &\quad + M \left( \left( \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{X} \cdot \mathbf{V} \right)^t (\partial_\xi \mathbf{X})^{-t} + (\partial_\xi \mathbf{V})^t \right) \\
 &\quad + (\partial_\xi \mathbf{X})^{-1} \mathbf{s} (H\mathbf{V})^t + H\mathbf{V}\mathbf{s}^t (\partial_\xi \mathbf{X})^{-t} \\
 &\quad - V (HM + MH^t)
 \end{aligned} \tag{A.33}$$

$$\begin{aligned}
 S &= (\partial_\xi \mathbf{X})^{-1} \partial_\xi (\partial_\xi \mathbf{X}\mathbf{V}) M + M (\partial_\xi (\partial_\xi \mathbf{X}\mathbf{V}))^t (\partial_\xi \mathbf{X})^{-t} \\
 &\quad + (\partial_\xi \mathbf{X})^{-1} \mathbf{s} (H\mathbf{V})^t + H\mathbf{V}\mathbf{s}^t (\partial_\xi \mathbf{X})^{-t} \\
 &\quad - V (HM + MH^t)
 \end{aligned} \tag{A.34}$$

De plus on peut simplifier le dernier terme :

$$\begin{aligned}
 HM &= (\partial_\xi \mathbf{X})^{-1} \partial_\xi \mathbf{s}M \\
 &= cM (\partial_\xi \mathbf{X})^t \partial_{\mathbf{xx}} b \partial_\xi \mathbf{x}M \\
 &= cM (\partial_\xi \mathbf{x})^t (\text{Id} - \eta (\partial_x \mathbf{s})^t) \partial_{\mathbf{xx}} b \partial_\xi \mathbf{x}M \\
 &= cM (\partial_\xi \mathbf{x})^t (\text{Id} - \eta c \partial_{\mathbf{xx}} b (\text{Id} - \mathbf{s}\mathbf{s}^t)) \partial_{\mathbf{xx}} b \partial_\xi \mathbf{x}M \\
 &= cM (\partial_\xi \mathbf{x})^t (\partial_{\mathbf{xx}} b - \eta c \partial_{\mathbf{xx}} b (\text{Id} - \mathbf{s}\mathbf{s}^t) \partial_{\mathbf{xx}} b) \partial_\xi \mathbf{x}M \\
 &= cM (\partial_\xi \mathbf{x})^t \partial_{\mathbf{xx}} b (\text{Id} - \eta \partial_x \mathbf{s}) \partial_\xi \mathbf{x}M \\
 &= cM (\partial_\xi \mathbf{x})^t \partial_{\mathbf{xx}} b \partial_\xi \mathbf{X}M \\
 &= M (\partial_\xi \mathbf{s})^t \left( \text{Id} + \frac{\mathbf{s}\mathbf{s}^t}{c^2} \right) \partial_\xi \mathbf{X}M \\
 &= M (\partial_\xi \mathbf{s})^t (\partial_\xi \mathbf{X})^{-t} \\
 &= MH^t
 \end{aligned} \tag{A.35}$$

pour obtenir le résultat final :

$$\begin{aligned}
 S &= (\partial_\xi \mathbf{X})^{-1} \partial_\xi (\partial_\xi \mathbf{X}\mathbf{V}) M + M (\partial_\xi (\partial_\xi \mathbf{X}\mathbf{V}))^t (\partial_\xi \mathbf{X})^{-t} \\
 &\quad + (\partial_\xi \mathbf{X})^{-1} \mathbf{s} (H\mathbf{V})^t + H\mathbf{V}\mathbf{s}^t (\partial_\xi \mathbf{X})^{-t} - 2VHM
 \end{aligned} \tag{A.36}$$

□

**Preuve du lemme 5.** Puisque

$$\left( (\partial_\xi \mathbf{X})^{-1} \mathbf{s} \right)_{i=1, \dots, d-1} = \frac{1}{\hbar_i} \sum_{p=1}^{d-1} \vec{E}_i^p \vec{E}_d^p = 0 \tag{A.37}$$

on a

$$(\partial_{\xi} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{s}(H\mathbf{V})^t + H\mathbf{V}\mathbf{s}^t (\partial_{\xi} \mathbf{X})^{-t} = 0 \quad (\text{A.38})$$

$$\begin{aligned} \left( (\partial_{\xi} \mathbf{X})^{-1} \partial_{\xi} (\partial_{\xi} \mathbf{X}\mathbf{V}) \right)_{i,j=1,\dots,d-1} &= \sum_{p,q=1}^{d-1} \frac{1}{\hbar_i} \tilde{\mathbf{E}}_i^p \partial_{\xi_j} \left( \hbar_q \tilde{\mathbf{E}}_q^p \mathbf{V}_q \right) \\ &= \frac{1}{\hbar_i} \sum_{p,q=1}^{d-1} \tilde{\mathbf{E}}_i^p \left( \tilde{\mathbf{E}}_q^p \partial_{\xi_j} (\hbar_q \mathbf{V}_q) + \hbar_q \mathbf{V}_q \partial_{\xi_j} \tilde{\mathbf{E}}_q^p \right) \\ &= \frac{1}{\hbar_i} \left( \partial_{\xi_j} (\hbar_i \mathbf{V}_i) + \sum_{q=1}^{d-1} \hbar_q \mathbf{V}_q \left( \sum_{p=1}^{d-1} \tilde{\mathbf{E}}_i^p \partial_{\xi_j} \tilde{\mathbf{E}}_q^p \right) \right) \\ &= \frac{1}{\hbar_i} \left( \partial_{\xi_j} (\hbar_i \mathbf{V}_i) + \sum_{q=1}^{d-1} \hbar_q \mathbf{V}_q \left( \frac{\hbar_{i,q}}{\hbar_q} \delta_{ij} - \frac{\hbar_{j,i}}{\hbar_i} \delta_{jq} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\hbar_i} \left( \partial_{\xi_j} (\hbar_i \mathbf{V}_i) + \sum_{q=1}^{d-1} \mathbf{V}_q \hbar_{i,q} \delta_{ij} - \frac{\hbar_j}{\hbar_i} \mathbf{V}_j \hbar_{j,i} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

$$\begin{aligned} S_{i,j=1,\dots,d-1} &= \frac{1}{\hbar_i \hbar_j^2} \left( \partial_{\xi_j} (\hbar_i \mathbf{V}_i) - \frac{\hbar_j}{\hbar_i} \mathbf{V}_j \hbar_{j,i} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\hbar_j \hbar_i^2} \left( \partial_{\xi_i} (\hbar_j \mathbf{V}_j) - \frac{\hbar_i}{\hbar_j} \mathbf{V}_i \hbar_{i,j} \right) \\ &\quad + \frac{2}{\hbar_i^3} \left( \sum_{q=1}^{d-1} \mathbf{V}_q \hbar_{i,q} - V m_i k_i \right) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

$$\begin{aligned} S_{i,j=1,\dots,d-1} &= \frac{1}{\hbar_j^2} \partial_{\xi_j} \mathbf{V}_i + \frac{1}{\hbar_i^2} \partial_{\xi_i} \mathbf{V}_j \\ &\quad + \frac{2}{\hbar_i^3} \left( \sum_{q=1}^{d-1} \mathbf{V}_q \hbar_{i,q} - V m_i k_i \right) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

□

**Preuve du lemme 6 page 69.** La divergence du tenseur des contraintes visqueuses se transforme suivant la règle :

$$JA \nabla_{\vec{X}} \cdot \sigma = A \nabla_{\vec{\xi}} \cdot (J\sigma A^t) \quad (\text{A.42})$$

Le membre de droite se développe sous la forme :

$$\begin{aligned} A \nabla_{\vec{\xi}} \cdot (J\sigma A^t) &= A \nabla_{\vec{\xi}} \cdot (JA^{-1} \sigma') \\ &= AA^{-1} \nabla_{\vec{\xi}} \cdot (J\sigma') + JA \partial_{\vec{\xi}} A^{-1} \sigma' \\ &= \nabla_{\vec{\xi}} \cdot (J\sigma') + JA \partial_{\vec{\xi}\vec{\xi}} \vec{X} \sigma' \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

d'où le résultat :

$$JA \nabla_{\vec{X}} \cdot \sigma = \nabla_{\vec{\xi}} \cdot (J\sigma') + JA \partial_{\vec{\xi}\vec{\xi}} \vec{X} \sigma' \quad (\text{A.44})$$

En utilisant la structure de  $\sigma'$  et le résultat A.13, il vient :

$$\begin{aligned}
 JA\nabla_{\vec{X}} \cdot \sigma &= \nabla_{\vec{\xi}} \cdot (J\sigma') + J \left( A\partial_{\xi\xi} \vec{X} S + 2A\partial_{\xi\eta} \vec{X} \mathbf{r} + fA\partial_{\eta\eta} \vec{X} \right) \\
 &= \begin{pmatrix} \nabla_{\xi} \cdot (JS) + \partial_{\eta} (J\mathbf{r}) + J(\partial_{\xi}\mathbf{X})^{-1} \left( \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{X} S + \mathbf{s}(\partial_{\xi}\mathbf{s})^t \left( \text{Id} + \frac{\mathbf{s}\mathbf{s}^t}{c^2} \right) \partial_{\xi}\mathbf{X} \right) S - 2JH\mathbf{r} \\ \nabla_{\xi} \cdot (J\mathbf{r}) + \partial_{\eta} (Jf) + J(\partial_{\xi}\mathbf{s})^t \left( \text{Id} + \frac{\mathbf{s}\mathbf{s}^t}{c^2} \right) \partial_{\xi}\mathbf{X} S \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.45}$$

Qui se réécrit en posant :

$$\begin{aligned}
 B &= (\partial_{\xi}\mathbf{s})^t \left( \text{Id} + \frac{\mathbf{s}\mathbf{s}^t}{c^2} \right) \partial_{\xi}\mathbf{X} S \\
 \mathbf{B}_0 &= (\partial_{\xi}\mathbf{X})^{-1} \left( \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{X} S + \mathbf{s}B \right)
 \end{aligned} \tag{A.46}$$

$$JA\nabla_{\vec{X}} \cdot \sigma = \begin{pmatrix} \nabla_{\xi} \cdot (JS) + \partial_{\eta} (J\mathbf{r}) \\ \nabla_{\xi} \cdot (J\mathbf{r}) + \partial_{\eta} (Jf) \end{pmatrix} + J \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 - 2H\mathbf{r} \\ B \end{pmatrix} \tag{A.47}$$

□

**Preuve du lemme 7.** D'après le lemme 6, on sait que

$$JA\nabla_{\vec{X}} \cdot \sigma = \begin{pmatrix} \nabla_{\xi} \cdot (JS) + \partial_{\eta} (J\mathbf{r}) \\ \nabla_{\xi} \cdot (J\mathbf{r}) + \partial_{\eta} (Jf) \end{pmatrix} + J \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 - 2H\mathbf{r} \\ B \end{pmatrix} \tag{A.48}$$

avec

$$\begin{aligned}
 B &= (\partial_{\xi}\mathbf{s})^t \left( \text{Id} + \frac{\mathbf{s}\mathbf{s}^t}{c^2} \right) \partial_{\xi}\mathbf{X} S \\
 \mathbf{B}_0 &= (\partial_{\xi}\mathbf{X})^{-1} \left( \partial_{\xi\xi}^2 \mathbf{X} S + \mathbf{s}B \right)
 \end{aligned} \tag{A.49}$$

Il ne reste qu'à expliciter  $B$  et  $\mathbf{B}_0$  :

$$\begin{aligned}
 B &= (\partial_{\xi}\mathbf{s})^t \left( \text{Id} + \frac{\mathbf{s}\mathbf{s}^t}{c^2} \right) \partial_{\xi}\mathbf{X} S \\
 &= \sum_{i,j,p,q=1}^{d-1} m_i k_i \vec{E}_i^p \left( \delta_{pq} + \frac{1}{c^2} \vec{E}_d^p \vec{E}_d^q \right) \vec{h}_j \vec{E}_j^q S_{ij} \\
 &= \sum_{p=1}^{d-1} m_p k_p \vec{h}_p S_{pp}
 \end{aligned} \tag{A.50}$$

En appliquant les résultats du lemme 1,  $\mathbf{B}_0$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{B}_0)_{i=1,\dots,d-1} &= \sum_{p,q,j=1}^{d-1} \frac{1}{\hbar_i} \vec{\mathbf{E}}_i^p \partial_{\xi_q \xi_j}^2 \mathbf{X}_p \mathbf{S}_{qj} - B \hbar_i \sum_{p=1}^{d-1} \vec{\mathbf{E}}_i^p \vec{\mathbf{E}}_d^p \\
 &= \sum_{p,q,j=1}^{d-1} \frac{1}{\hbar_i} \vec{\mathbf{E}}_i^p \left( \hbar_j \partial_{\xi_q} \vec{\mathbf{E}}_j^p + \hbar_{j,q} \vec{\mathbf{E}}_j^p \right) \mathbf{S}_{qj} \\
 &= \sum_{j=1}^{d-1} \frac{1}{\hbar_i} \hbar_{i,j} \mathbf{S}_{ij} - \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\hbar_j}{\hbar_i^2} \hbar_{j,i} \mathbf{S}_{jj} + \sum_{j=1}^{d-1} \frac{\hbar_{i,j}}{\hbar_i} \mathbf{S}_{ij} \\
 &= \frac{1}{\hbar_i} \sum_{j=1}^{d-1} \left( 2\hbar_{i,j} \mathbf{S}_{ij} - \frac{\hbar_j}{\hbar_i} \hbar_{j,i} \mathbf{S}_{jj} \right)
 \end{aligned} \tag{A.51}$$

et on a immédiatement

$$\mathbf{B}_{i=1,\dots,d-1} = \frac{1}{\hbar_i} \sum_{j=1}^{d-1} \left( 2\hbar_{i,j} \mathbf{S}_{ij} - \frac{\hbar_j}{\hbar_i} \hbar_{j,i} \mathbf{S}_{jj} \right) - 2 \frac{m_i k_i}{\hbar_i} \mathbf{r}_i \tag{A.52}$$

□

**Preuve du lemme 8.** Soit  $T$  la matrice dont les colonnes sont des vecteurs tangent à la surface libre d'équation  $\eta = h(\xi, \eta)$ .  $T$  est défini, à une matrice diagonale de normalisation près, par la relation

$$T = \partial_{\xi} \left( \vec{\mathbf{X}}_{|\eta=h} \right) C, \quad C \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R}) \tag{A.53}$$

$$\begin{aligned}
 T &= \partial_{\xi} \left( \vec{\mathbf{X}}_{|\eta=h} \right) C \\
 &= \partial_{\xi} \left( \vec{\mathbf{X}} + (h - \eta) \vec{\mathbf{n}} \right) C \\
 &= \left( \partial_{\xi} \vec{\mathbf{X}} + \vec{\mathbf{n}} \partial_{\xi} h + (h - \eta) \begin{pmatrix} \text{Id} \\ \frac{\mathbf{s}^t}{c} \end{pmatrix} \partial_{\xi} \mathbf{s} \right) C \\
 &= \left( \begin{pmatrix} \text{Id} \\ \frac{\mathbf{s}^t}{c} \end{pmatrix} (\partial_{\xi} \mathbf{x} - h \partial_{\xi} \mathbf{s}) + \vec{\mathbf{n}} \partial_{\xi} h \right) C \\
 &= \left( \begin{pmatrix} \text{Id} \\ \frac{\mathbf{s}^t}{c} \end{pmatrix} (\partial_{\xi} \mathbf{X})_{|\eta=h} + \begin{pmatrix} -\mathbf{s} \\ c \end{pmatrix} \partial_{\xi} h \right) C \\
 &= A^{-1}|_{\eta=h} \begin{pmatrix} \text{Id} \\ \partial_{\xi} h \end{pmatrix} C
 \end{aligned} \tag{A.54}$$

Le produit  $(TC^{-1})^t TC^{-1}$  nous donne la norme des vecteurs tangents :

$$\begin{aligned}
 (TC^{-1})^t TC^{-1} &= \begin{pmatrix} \text{Id} & \nabla_{\xi} h \end{pmatrix} A^{-t}|_{\eta=h} A^{-1}|_{\eta=h} \begin{pmatrix} \text{Id} \\ \partial_{\xi} h \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \text{Id} & \nabla_{\xi} h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M|_{\eta=h}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Id} \\ \partial_{\xi} h \end{pmatrix} \\
 &= M|_{\eta=h}^{-1} + \nabla_{\xi} h \partial_{\xi} h
 \end{aligned} \tag{A.55}$$

et donc (avec l'opérateur diag est défini au sens de matlab)

$$C = \left( \text{diag} \left( \text{diag} \left( M|_{\eta=h}^{-1} + \nabla_{\xi} h \partial_{\xi} h \right) \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \tag{A.56}$$

Pour simplifier l'écriture, appelons  $\text{ddiag}(\cdot)$  l'opérateur  $\text{diag}(\text{diag}(\cdot))$  :

$$C = \left( \text{ddiag} \left( M|_{\eta=h}^{-1} + \nabla_{\xi} h \partial_{\xi} h \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \tag{A.57}$$

Si  $h$  est suffisamment petit pour que la matrice  $A^{-1}|_{\eta=h}$  soit de rang plein, alors les  $d-1$  vecteurs tangents sont linéairement indépendants et la normale est définie de manière unique par la condition  $\vec{N} \perp T_i, i = 1, \dots, d-1$ , c'est à dire  $\vec{N}^t T = 0$

$$\begin{aligned}
 &\vec{N}^t T = 0 \\
 \Rightarrow &\left( A^{-t}|_{\eta=h} \vec{N} \right)^t A|_{\eta=h} T = 0 \\
 \Rightarrow &\left( A^{-t}|_{\eta=h} \vec{N} \right)^t \begin{pmatrix} \text{Id} \\ \partial_{\xi} h \end{pmatrix} C = 0 \\
 \Rightarrow &A^{-t}|_{\eta=h} \vec{N} \propto \begin{pmatrix} -\nabla_{\xi} h \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.58}$$

Et donc la normale unitaire vaut

$$\vec{N} = \left( 1 + \partial_{\xi} h M|_{\eta=h} \nabla_{\xi} h \right)^{-\frac{1}{2}} A^t|_{\eta=h} \begin{pmatrix} -\nabla_{\xi} h \\ 1 \end{pmatrix} \tag{A.59}$$

□

**Preuve du lemme 9.** Soit  $P_n$  la propriété suivante :

$$\begin{aligned}
 A(\tilde{h}, \xi) \nabla_{\xi} \tilde{h} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ (-1)^k \nabla_{\xi} \cdot \left( A^{(k)}(\tilde{h}, \xi) \frac{\tilde{h}^{k+1}}{(k+1)!} \right) + \frac{(-\tilde{h})^{k+1}}{(k+1)!} \nabla_{\xi} \cdot \left( A^{(k)}(\cdot, \xi) \right) \right] \\
 &\quad + \frac{(-\tilde{h})^n}{n!} A^{(n)}(\tilde{h}, \xi) \nabla_{\xi} \tilde{h}
 \end{aligned} \tag{A.60}$$

où

$$\nabla_{\xi} \cdot \left( A^{(k)}(\cdot, \xi) \right) = \sum_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} A_{ij}(\tilde{h}, \xi) \Big|_{\tilde{h}=\text{constante}} \tag{A.61}$$

Il est immédiat de vérifier que la propriété  $P_1$  est vraie :

$$\begin{aligned} A(\tilde{h}, \xi) \nabla_{\tilde{h}} \tilde{h} &= \nabla_{\xi} \cdot (A(\tilde{h}, \xi) \tilde{h}) - \tilde{h} \nabla_{\xi} \cdot (A(\cdot, \xi)) - \tilde{h} \partial_{\tilde{h}} A(\tilde{h}, \xi) \nabla_{\xi} \tilde{h} \\ &= \nabla_{\xi} \cdot (A^{(0)}(\tilde{h}, \xi) \tilde{h}) - \tilde{h} \nabla_{\xi} \cdot (A^{(0)}(\cdot, \xi)) - \tilde{h} A^{(1)}(\tilde{h}, \xi) \nabla_{\xi} \tilde{h} \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

Supposons la propriété vraie au rang  $n$ . Le reste peut se réécrire sous la forme de deux termes de divergence, et d'un nouveau reste :

$$\begin{aligned} \frac{(-\tilde{h})^n}{n!} A^{(n)}(\tilde{h}, \xi) \nabla_{\xi} \tilde{h} &= (-1)^n A^{(n)}(\tilde{h}, \xi) \nabla_{\xi} \left( \frac{\tilde{h}^{n+1}}{(n+1)!} \right) \\ &= (-1)^n \left( \nabla_{\xi} \cdot \left( A^{(n)}(\tilde{h}, \xi) \frac{\tilde{h}^{n+1}}{(n+1)!} \right) - \frac{\tilde{h}^{n+1}}{(n+1)!} \nabla_{\xi} \cdot (A^{(n)}(\tilde{h}, \xi)) \right) \\ &= (-1)^n \nabla_{\xi} \cdot \left( A^{(n)}(\tilde{h}, \xi) \frac{\tilde{h}^{n+1}}{(n+1)!} \right) + \frac{(-\tilde{h})^{n+1}}{(n+1)!} A^{(n+1)}(\tilde{h}, \xi) \nabla_{\xi} \tilde{h} \\ &\quad + \frac{(-\tilde{h})^{n+1}}{(n+1)!} \nabla_{\xi} \cdot (A^{(n)}(\cdot, \xi)) \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

Ce qui permet de retrouver  $P_{n+1}$   $n+1$  à partir du rang  $P_n$  :

$$\begin{aligned} A(\tilde{h}, \xi) \nabla_{\xi} \tilde{h} &= \sum_{k=0}^n \left[ (-1)^k \nabla_{\xi} \cdot \left( A^{(k)}(\tilde{h}, \xi) \frac{\tilde{h}^{k+1}}{(k+1)!} \right) + \frac{(-\tilde{h})^{k+1}}{(k+1)!} \nabla_{\xi} \cdot (A^{(k)}(\cdot, \xi)) \right] \\ &\quad + \frac{(-\tilde{h})^{n+1}}{(n+1)!} A^{(n+1)}(\tilde{h}, \xi) \nabla_{\xi} \tilde{h} \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

□





## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] J. ABRAMS et T.J. HANRATTY : Relaxation effects observed for turbulent flow over a wavy surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 151(-1):443–455, 1985. (Cité pages 4, 155 et 174.)
- [2] A.-J.-C. BARRÉ DE SAINT-VENANT : Theorie du mouvement non-permanent des eaux crues des rivieres et a l'introduction des mares dans leur lit. *Acad. Sci. (Paris) Comptes rendus*, 73:147–154, 237–240, 1871. (Cité page 1.)
- [3] T. B. BENJAMIN : Wave formation in laminar flow down an inclined plane. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 2:554–573, 1957. URL <http://journals.cambridge.org/action/displayAbstract?fromPage=online&aid=367246>. (Cité pages 2 et 43.)
- [4] D. J. BENNEY : Long waves on liquid films. *J. Math. & Phys.*, 45:150–155, 1966. (Cité pages 2, 32 et 111.)
- [5] F. BOUCHUT et M. WESTDICKENBERG : Gravity driven shallow water models for arbitrary topography. *Comm. Math. Sci.*, 2(3):359–389, 2004. (Cité pages 2 et 57.)
- [6] M. BOUTOUNET, L. CHUPIN, P. NOBLE et J.-P. VILA : Shallow water viscous flows for arbitrary topography. *Commun. Math. Sci.*, 6(1):29–55, 2008. (Cité pages 1, 3, 51, 114 et 207.)
- [7] M. BOUTOUNET, P. NOBLE et J.-P. VILA : Roll-waves in bi-layer flows. URL [http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00567570/PDF/SV\\_Bilayer.pdf](http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00567570/PDF/SV_Bilayer.pdf). (Cité pages 4, 117, 145 et 207.)
- [8] D. BRESCH et B. DESJARDINS : Existence of global weak solutions for a 2D viscous shallow water equations and convergence to the quasi-geostrophic model. *Comm. Math. Phys.*, 238(1-2):211–223, 2003. (Cité page 114.)
- [9] D. BRESCH, B. DESJARDINS et C.-K. LIN : On some compressible fluid models : Korteweg, lubrication, and shallow water systems. *Comm. Partial Differential Equations*, 28(3-4):843–868, 2003. (Cité page 114.)
- [10] D. BRESCH et P. NOBLE : Mathematical justification of a shallow water model. *Methods and Applications in Analysis*, 14:87–118, 2007. (Cité page 139.)
- [11] H.-C. CHANG et E. A. DEMEKHIN : *Complex wave Dynamics on Thin Films*. ELSEVIER SCIENCE, Amsterdam, 2002. ISBN 0 444 50970 4. First edition. (Cité pages 2, 13, 17, 42, 45 et 52.)
- [12] G. CHANTEPERDRIX : *Modélisation et simulation numérique d'écoulements diphasiques à interface libre. Application à l'étude des mouvements liquides dans les réservoirs de véhicules spatiaux*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 2004. (Cité page 195.)

- [13] F. CHARRU et J. FABRE : Long Waves at the interface between two viscous fluids. *Phys. Fluids*, 6(3):1223–1235, March 1994. (Cité pages 1, 3, 4, 155, 160, 174 et 176.)
- [14] G.-Q. CHEN, C. D. LEVERMORE et T.-P. LIU : Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy. *Comm. Pure Appl. Math.*, 47:787–830, 1994. URL <http://www.math.northwestern.edu/~gqchen/preprints/cll/cll.pdf>. (Cité page 37.)
- [15] J. COUSTEIX : *Aérodynamique - Couche Limite Laminaire*. 21 juillet 1997. (Cité page 196.)
- [16] R. F. DRESSLER : *Mathematical solution of the problem of roll-waves in inclined open channels*, volume 2. Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, 1949. ISBN 1097-0312. URL <http://dx.doi.org/10.1002/cpa.3160020203>. (Cité pages 44, 128 et 129.)
- [17] Y. FABIGNON, J.F. GUÉRY, F. GODFROY, P. LE HELLEY, J. HYLKEMA, L. JACQUES, G. LAVERGNE et P. VILLEDIEU : Slag accumulation in large segmented solid motors with a submerged nozzle. *In Space Solid Propulsion*, 2000. (Cité pages 53 et 86.)
- [18] S. FERRARI et F. SALERI : A new two-dimensional Shallow Water model including pressure effects and slow varying bottom topography. *Mathematical modelling and numerical analysis*, 38(2):211–234, 2004.
- [19] H. FOUCART : *Modélisation tridimensionnelle des films liquides pariétaux dans les moteurs à combustion interne*. Thèse de doctorat, Faculté des Sciences de l'Université de Rouen, 1998.
- [20] J.-F. GERBEAU et B. PERTHAME : Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water ; numerical validation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 1(1):89–102, 2001. ISSN 1531-3492. URL <http://dx.doi.org/10.3934/dcdsb.2001.1.89>. (Cité page 2.)
- [21] S. GIROUD-GARAPON : *Étude du comportement d'un film liquide dans les chambres de combustion de statoréacteurs et/ou turboréacteurs*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 2003.
- [22] A. HARTEN, P. D. LAX, Pascal et B. V. LEER : On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25:35–61, 1983. (Cité page 145.)
- [23] M. JOHNSON, K. ZUMBRUN et P. NOBLE : Nonlinear stability of viscous roll waves. *Arxiv preprint arXiv :1002.0788*, 2010. (Cité page 44.)
- [24] L. A. JURMAN et M. J. MCCREADY : Study of waves on thin liquid films sheared by turbulent gas flows. *Physics of Fluids*, 1:522–536, avril 1989. (Cité pages 4, 155, 174 et 175.)
- [25] P. L. KAPITZA et S. P. KAPITZA : Wave flow of thin layers of a viscous fluid. *In Collected Works*, pages 690–709. Pergamon Press, Oxford, UK, 1965. (Cité pages iii et 1.)
- [26] A. C. KING, E. O. TUCK et J.-M. VANDEN-BROECK : Air-blown waves on thin viscous sheets. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics*, 5(4):973–978, 1993. URL <http://link.aip.org/link/?PFA/5/973/1>.

- [27] I. L. KLIAKHANDLER : Long interfacial waves in multilayer thin films and coupled Kuramoto-Shivashinsky equations. *J. Fluid Mech.*, 31:45–65, 1999. (Cité pages 1, 3, 119 et 128.)
- [28] T. KURAMOTO et T. TSUZUKI : Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium. *Prog. Teor. Phys.*, 55(N 2):356–369, 1976. (Cité page 2.)
- [29] M. LALO : *Atomisation d'un film liquide mince par action combinée des instabilités de Kelvin-Helmholtz et de Faraday. Application aux injecteurs aérodynamiques des turbomachines aéronautiques.* Thèse de doctorat, Onera de Toulouse, 2006. URL [http://publications.onera.fr/exl-doc/DOC353988\\_s1.pdf](http://publications.onera.fr/exl-doc/DOC353988_s1.pdf). (Cité pages 4, 191, 192 et 195.)
- [30] L. LAMPORT : *L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X : A Document Preparation System.* Addison-Wesley, 1994. ISBN 0-201-15790-X,0-201-52983-1.
- [31] J. LELONG-FERRAND : *Géométrie Différentielle.* 1963.
- [32] J. LIU et J. P. GOLLUB : Onset of spatially chaotic waves on flowing films. *Phys. Rev. Lett.*, 70(15):2289–2292, Apr 1993. (Cité page 19.)
- [33] J. LIU et J.P. GOLLUB : Solitary wave dynamics of film flows. *Phys. Fluids*, 6(5):1702–1712, 1994. (Cité pages xii, 3, 19 et 44.)
- [34] J. H. MERKIN et D. J. NEEDHAM : An infinite period bifurcation arising in roll waves down an open inclined channel. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 405(1828):pp. 103–116, 1986. ISSN 00804630. URL <http://www.jstor.org/stable/2397823>. (Cité page 44.)
- [35] P. MORSE et H. FESHBACH : *Methods of Theoretical Physics.* 1953.
- [36] C. NAKAYA : Long waves on a thin fluid layer flowing down an inclined plane. *Physics of Fluids*, 18:1407–1412, novembre 1975. (Cité page 18.)
- [37] P. NOBLE : On the spectral stability of roll-waves. *Indiana University mathematics journal*, 55(2):795–848, 2006. (Cité page 44.)
- [38] P. NOBLE : Linear stability of viscous roll waves. *Communications in Partial Differential Equations*, 32(11):1681–1713, 2007. (Cité pages 4, 32 et 145.)
- [39] O. B. NOVIK : Model description of roll-waves : Pmm vol. 35. n[<sup>o</sup>, =]6, 1971, pp. 986-999. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 35(6):938 – 951, 1971. ISSN 0021-8928. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021892871900980>. (Cité page 44.)
- [40] A. ORON, S. H. DAVIS et S. G. BANKOFF : Long-scale evolution of thin liquid films. *Rev. Mod. Phys.*, 69(3):931–980, Jul 1997. (Cité pages 1 et 2.)

- [41] M. K. R. PANGA, R. R. MUDUNURI et V. BALAKOTAIAH : Long-wavelength equation for vertically falling films. *Phys. Rev. E*, 71(3):036310(1)–(18), Mar 2005. URL <http://pre.aps.org/abstract/PRE/v71/i3/e036310>. (Cité page 20.)
- [42] P. PANSU : Géométrie différentielle, 2005.
- [43] A. PUMIR, P. MANNEVILLE et Y. POMEAU : On solitary waves running down an inclined plane. *Journal of Fluid Mechanics*, 135:27–50, 1983. (Cité pages 32 et 45.)
- [44] A. J. ROBERTS et Z. LI : An accurate and comprehensive model of thin fluid flows with inertia on curved substrates. *J. Fluid Mech.*, 553:33–73, 2006. (Cité pages 57 et 59.)
- [45] G. J. ROSKES : Three-Dimensional Long Waves on a Liquid Film. *Physics of Fluids*, 13:1440–1445, juin 1970. (Cité pages 18 et 32.)
- [46] M. ROUX : *Modèles de fronts pour fluide à surface libre s'écoulant sur un plan incliné*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier (en cours). (Cité page 208.)
- [47] R. V. ROY, A. J. ROBERTS et M. E. SIMPSON : A lubrication model of coating flows over a curved substrate in space. *J. Fluid Mech.*, 454:235–261, 2002. (Cité pages 32, 57 et 59.)
- [48] C. RUYER-QUIL et P. MANNEVILLE : Modeling film flows down inclined planes. *European Physical Journal B*, 6:277–292, 1998. (Cité pages 2, 19, 32, 138 et 206.)
- [49] C. RUYER-QUIL et P. MANNEVILLE : Improved modeling of flows down inclined planes. *European Physical Journal B*, 15:357–369, 2000. (Cité pages 2 et 32.)
- [50] C. RUYER-QUIL et P. MANNEVILLE : Further accuracy and convergence results on the modeling of flows down inclined planes by weighted-residual approximations. *Physics of Fluids*, 14(1):170–183, 2001. (Cité pages 2, 32 et 206.)
- [51] V. Ya. SHKADOV : Wave modes in the gravity flow of a thin layer of a viscous fluid. *Izv. Akad. Nauk. SSSR Mekh. Zhidk. I Gaza*, 2:20–25, 1968. (Cité page 2.)
- [52] G. I. SIVASHINSKY : Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames – I. Derivation of basic equations. *Acta Astronautica*, 4:1177–1206, 1977. (Cité page 2.)
- [53] J.-P. VILA : Thin films models and shallow water equations. Notes personnelles, . (Cité pages 2, 17, 34, 112 et 206.)
- [54] J.-P. VILA : Two moments closure equations of shallow water type for thin film laminar flow gravity driven. . (Cité pages 17, 122, 123, 128, 138 et 139.)
- [55] J.-P. VILA : An analysis of a class of second-order accurate godunov-type schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 26:830–853, 1989. (Cité page 147.)
- [56] J.-P. VILA : Shallow water equations for two layer laminar flows of Newtonian Fluids. Notes personnelles, 2005.

- [57] J. V. WEHAUSEN et E. V. LAITONE : Surface waves. In *Encyclopedia of Physics*, volume 9, pages 446–778. Springer-Verlag, 1960.
- [58] C.-S. YIH : Stability of liquid flow down an inclined plane. *Physics of Fluids*, 6:321–334, mars 1963. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1963PhFl....6..321Y>. (Cité page 2.)
- [59] W.-A. YONG : Singular perturbations of first-order hyperbolic systems with stiff source terms. *Journal of differential equations*, 155:89–132, 1999. URL <http://www.math.ntnu.no/conservation/1998/001.ps>. (Cité page 37.)
- [60] J. YU et J. KEVORKIAN : Nonlinear evolution of small disturbances into roll waves in an inclined open channel. *Journal of Fluid Mechanics*, 243:575–594, 1992. (Cité page 32.)



## COLOPHON

Cette thèse a été écrite sous Ubuntu avec l'éditeur LyX pour  $\text{\LaTeX}2_{\epsilon}$  en se basant sur le style de thèse développé par André Miede et disponible sur CTAN «[classicthesis](#)». C'est plus exactement la version [Classic Thesis for LyX](#) de Nick Mariette. La police utilisée est New Century Schoolbook pour le texte et Fourier-GUTenberg pour les expressions mathématiques et les symboles (package [fouriernc](#)). .



*Version finale* le 26 janvier 2012 à 10:02.