



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'**Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace**  
Spécialité : Systèmes embarqués et automatique

---

Présentée et soutenue par **Julie PENAUD**  
le **12 décembre 2011**

**Développement d'un système de surveillance  
de la chaîne de transmission d'un rotor d'hélicoptères**

---

### JURY

M. Gilles Roux, président  
M. Daniel Alazard, directeur de thèse  
M. Jérôme Antoni, rapporteur  
M. Didier Rémond, rapporteur

---

École doctorale : **Systèmes**

Unité de recherche : **Equipe d'accueil ISAE-ONERA CSDV**

Directeur de thèse : **M. Daniel Alazard**



## Remerciements

La thèse est une aventure de trois ans pleine de rebondissements. La première année a été synonyme de recherche hasardeuse, la deuxième année de travail personnel et plutôt gratifiant, la troisième d'angoisse de la rédaction. Enfin, est venue le temps de la soutenance le 12 décembre dernier. Après quelques semaines d'un répit bien mérité, de dernières corrections de mon manuscrit, je reprends la plume (et mon ordinateur) pour ce qui me semble être une excellente conclusion à cette grande aventure d'un peu plus de trois ans : les remerciements. Je souhaiterais donc commencer par remercier Jérôme Antoni et Didier Remond, tous deux professeurs des Universités et enseignants à l'INSA Lyon pour leur engagement et leur aide en tant que rapporteurs. Un grand merci également à Gilles Roux, professeurs des Universités et enseignant à l'Université Paul Sabatier de Toulouse, d'avoir accepté de présider mon jury de soutenance. Trois années de thèse ne pourraient aboutir à quelque chose d'aussi structuré qu'un manuscrit sans la présence d'un directeur de thèse. Je remercie donc Daniel Alazard qui m'a fait confiance dès le premier jour et accepté la tâche difficile de me guider à travers les méandres d'un sujet aussi complexe et ouvert. Je souhaite également remercier l'ONERA pour son accueil dans ses locaux ainsi que Patrick Fabiani pour sa gentillesse et son égard envers moi pendant ces trois ans. Sur un plan plus personnel, j'aimerais remercier toutes les personnes, doctorants ou chercheurs avec qui j'ai eu l'occasion d'interagir, qui ont rendu ces trois années joyeuses et dont le souvenir m'accompagne aujourd'hui. En particulier :

- Merci Pauline pour ta compagnie, ton amitié, ton rire et cette super année passée dans le même bureau,
- Merci Jack pour ton sourire, ta bonne humeur, ta façon d'accepter chacun tel qu'il est,
- Merci Thib's d'avoir partagé tes aventures dans les PTP (Pays Tropicaux Pourris) et d'avoir animé les pauses café d'une joie vivante et bruyante,
- Merci Pascal pour ton humour et tes jeux de mots qu'il faut avouer, un peu capilotractés
- Merci Alex pour ton irrévérence, ton vocabulaire et l'étrange amitié qui nous lie depuis trois ans
- Merci Caro de ramener du Soleil dans la vie des gens, Merci Laure pour ta gentillesse, ta bonne humeur et ta capacité à apprécier la beauté d'une paire d'escarpins (dans un monde d'homme cette qualité m'a été précieuse !)

Enfin, il y a les gens que l'on rencontre au fil de cette aventure et qui la rende riche, mais il y a aussi ceux qui étaient déjà là, qui ont déjà suivi bien d'autres péripéties et sans lesquels on n'aurait même pas envisagé de se lancer :

- Merci Papa et Maman, vous qui m'avez soutenus dans ce choix et guidés dans toutes les étapes qui y ont mené. Merci pour toute la confiance, l'amour et la fierté que vous me portez. Merci aussi d'avoir été de formidables voisins pendant trois ans,

- Merci Matthieu, d'avoir réussi l'exploit incroyable d'être toujours là tout en vivant à des centaines de kilomètres. Merci pour tout ce qu'on a pu vivre et la promesse de tout ce qui est devant nous.



# Table des matières

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1      | La maintenance de nos jours . . . . .   | 1         |
| 1.2      | Les HUMS : outils de la maintenance en développement . . . . .                      | 4         |
| 1.3      | Signaux vibratoires de machines tournantes . . . . .                                | 4         |
| 1.4      | Comment lire la thèse . . . . .   | 6         |
| <b>2</b> | <b>Modélisation cinématique</b>   | <b>9</b>  |
| 2.1      | Etat de l'art . . . . .   | 10        |
| 2.1.1    | La méthode d'analyse vectorielle . . . . .  | 10        |
| 2.1.2    | La théorie des graphes . . . . .  | 11        |
| 2.1.3    | La méthode de Nelson et Cipra . . . . .   | 14        |
| 2.2      | Description de la méthode . . . . .   | 16        |
| 2.2.1    | Le tableau des liaisons . . . . .   | 17        |
| 2.2.2    | Corps de référence . . . . .  | 18        |
| 2.2.3    | Construction de la matrice adjacente . . . . .                                      | 20        |
| 2.2.4    | Calcul du vecteur des rapports de vitesse . . . . .                                 | 21        |
| 2.2.5    | Calcul des fréquences de contact . . . . .  | 23        |
| 2.3      | Exemples plus complexes . . . . .   | 26        |
| 2.3.1    | Exemple 1 : le différentiel de voiture . . . . .                                    | 26        |
| 2.3.2    | Exemple 2 : La Boite de Transmission Principale (BTP) d'un<br>hélicoptère . . . . . | 31        |
| 2.4      | Algorithme disponible . . . . .   | 33        |
| <b>3</b> | <b>Méthodes de traitement des signaux vibratoires</b>                               | <b>37</b> |
| 3.1      | Stationnarité, Non-Stationnarité et Cyclostationnarité . . . . .                    | 37        |
| 3.2      | Echantillonnage angulaire . . . . .   | 40        |
| 3.3      | Signaux stationnaires et transformée de Fourier . . . . .                           | 41        |
| 3.4      | Méthodes temps-fréquence . . . . .  | 44        |
| 3.4.1    | Méthodes linéaires (ou atomiques) . . . . .   | 44        |
| 3.4.2    | Les méthodes quadratiques . . . . .   | 48        |
| 3.5      | Méthodes statistiques . . . . .   | 51        |
| 3.6      | Analyse cepstrale . . . . .   | 53        |
| 3.7      | Méthode cyclostationnaire . . . . .   | 54        |
| 3.8      | De l'analyse spectrale aux filtres de Kalman . . . . .                              | 55        |
| <b>4</b> | <b>Filtres de Kalman</b>  | <b>61</b> |
| 4.1      | Théorie des filtres de Kalman . . . . .   | 62        |
| 4.1.1    | Objectif des filtres de Kalman . . . . .  | 62        |
| 4.1.2    | Modèle mathématique du système . . . . .  | 62        |
| 4.1.3    | Filtres de Kalman Continus . . . . .  | 63        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 4.1.4    | Filtres de Kalman discrets . . . . .                                     | 63         |
| 4.2      | Filtres de Kalman choisis . . . . .                                      | 65         |
| 4.2.1    | Cas simple (linéaire, un seul capteur) . . . . .                         | 65         |
| 4.2.2    | Cas non linéaire . . . . .   | 70         |
| 4.2.3    | Cas du multi-capteur . . . . .   | 73         |
| 4.2.4    | Filtres de Kalman échantillonnés angulairement . . . . .                 | 77         |
| 4.2.5    | Remarque . . . . .   | 81         |
| 4.3      | Conclusion . . . . .   | 82         |
| <b>5</b> | <b>Expérimentation et Résultats</b>                                      | <b>85</b>  |
| 5.1      | Présentation du banc d'essais . . . . .                                  | 85         |
| 5.1.1    | Réalisation mécanique . . . . .  | 85         |
| 5.1.2    | Réalisation électronique . . . . .                                       | 87         |
| 5.1.3    | Campagne d'essais . . . . .  | 87         |
| 5.2      | Résultats des signaux à vitesse constante . . . . .                      | 90         |
| 5.2.1    | Signature vibratoire de la BTP . . . . .                                 | 90         |
| 5.2.2    | Signaux vibratoires après endommagement . . . . .                        | 92         |
| 5.2.3    | Résultats . . . . .  | 92         |
| 5.2.4    | Filtres à modèle non-linéaire . . . . .                                  | 100        |
| 5.3      | Résultats des signaux "montée en vitesse" . . . . .                      | 101        |
| 5.3.1    | Signature de BTP . . . . .   | 101        |
| 5.3.2    | Détection d'un défaut . . . . .  | 101        |
| 5.3.3    | Saturation des capteurs . . . . .  | 103        |
| 5.4      | Résultats de superviseur . . . . .                                       | 103        |
| 5.4.1    | Résultats sur signaux à vitesse constante . . . . .                      | 105        |
| 5.4.2    | Résultats sur signaux "montée en vitesse" . . . . .                      | 106        |
| 5.4.3    | Amélioration des résultats par la méthode multi-capteur . . . . .        | 109        |
| <b>6</b> | <b>Conclusion et Perspectives</b>  | <b>111</b> |
| <b>A</b> | <b>Algorithme d'analyse cinématique de systèmes mécaniques complexes</b> | <b>115</b> |
| A.1      | Description des fonctions . . . . .                                      | 115        |
| A.2      | Structure de données <i>data</i> . . . . .                               | 115        |
| A.3      | Exemples . . . . .   | 116        |
|          | <b>Bibliographie</b>   | <b>123</b> |

# Introduction

---

L'hélicoptère est un moyen de transport et de secours en plein développement. En tant qu'outil de secours, il est souvent le seul accès possible à des lieux reculés ou inhospitaliers (notamment en haute montagne) dans des délais très courts. Il permet l'évacuation rapide de blessés ou la recherche et la localisation de personnes disparues. Il ne nécessite pas de lourdes installations aéroportuaires pour se poser : un héliport n'est pas très gourmand en surface et même un simple champ plat peut suffire en cas d'urgence. C'est ce dernier argument qui permet son développement actuel en tant que moyen de transport au delà d'un moyen de secours. En effet, il peut permettre de compléter les offres de transports régionaux par sa rapidité et sa simplicité d'utilisation (à Sao Paulo par exemple, il est possible d'utiliser l'hélicoptère pour se déplacer d'immeuble en immeuble, en évitant les problèmes de circulation et d'insécurité des rues).

Cependant, cette utilisation de l'hélicoptère présente pour l'instant des coûts trop élevés pour s'approcher des autres moyens de transports. Le coût d'un voyage en hélicoptère (même pour une faible distance) reste encore important, notamment à cause du coût de possession que représente un hélicoptère pour un propriétaire de flotte. Au coût d'achat important que l'engin lui-même représente, s'ajoutent des coûts d'exploitation (assurance et carburant notamment) et d'entretien très élevés. La maintenance d'un hélicoptère est une étape inévitable et extrêmement onéreuse dans l'entretien d'un tel engin. La réduction des coûts de maintenance est donc indispensable à un développement de l'hélicoptère en tant que moyen de transport.

Au delà de la restriction des coûts de maintenance en réduisant le nombre d'interventions inutiles ou mal programmées, la sécurité des passagers ou des secouristes à bord est en jeu. En effet, malgré de réels efforts menés dans la prévention d'accidents, certaines pannes imprévisibles apparaissent encore parfois, entraînant très souvent des conséquences catastrophiques et des pertes humaines. Une amélioration de la maintenance et du diagnostic de l'hélicoptère en général semble donc capitale pour son développement en toute sécurité.

## 1.1 La maintenance de nos jours

La stratégie de maintenance la plus primaire consiste à réparer un engin (par exemple un hélicoptère) après constat d'un défaut ou d'une panne. Le problème trivial de cette stratégie (ou de cette absence de stratégie) est que la panne peut

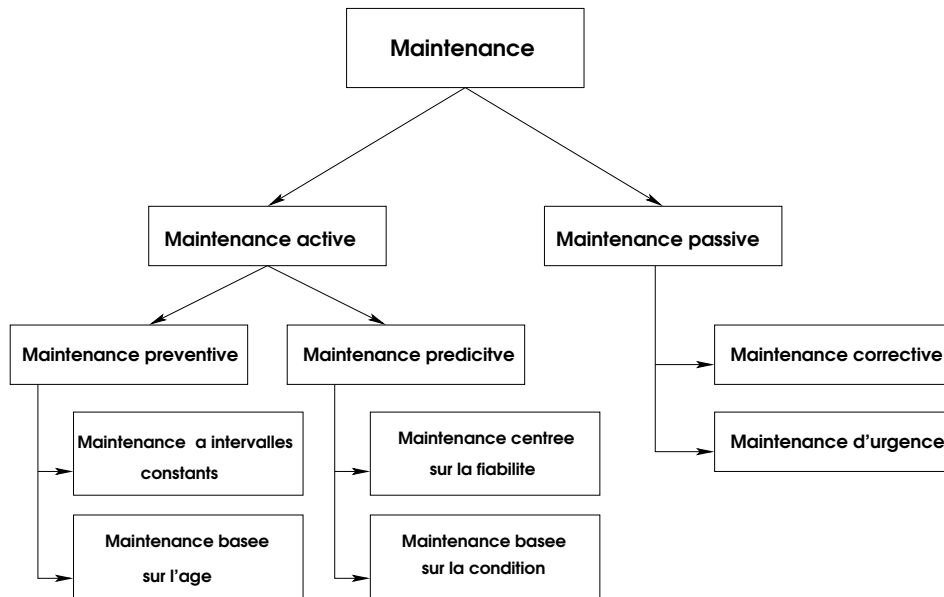


FIGURE 1.1 – Stratégies de maintenance actuelle

entraîner des accidents plus ou moins dramatiques, mais également immobiliser l'appareil à un moment inopportun. Il semble donc logique de s'intéresser à l'état de santé d'un système afin de planifier au mieux sa maintenance.

La surveillance de l'état de santé d'un système (System Health Monitoring) est donc un des moyens en plein essor permettant l'amélioration de la maintenance. La première étape de ce travail est l'enregistrement de certains paramètres de l'hélicoptère en temps réel (vitesse, niveau vibratoire général, température, nombre de décollages et d'atterrissages, nombre de mises en vitesse...). Cependant, ces techniques de monitoring peuvent gagner à être améliorées par des fonctions de prédiction de l'état futur du système et de diagnostic prédictif de pannes potentielles. Les objectifs principaux de ces techniques sont d'optimiser les performances du système, de réduire les coûts de maintenance et de diminuer l'indisponibilité d'une machine.

Les différentes philosophies de maintenance peuvent être présentées selon une hiérarchie exposée dans la figure 1.1. Les deux principales catégories de cette maintenance sont :

- La maintenance passive : appelée également “unplanned maintenance”, elle consiste à n'intervenir qu'après l'apparition d'un défaut, d'une panne ou d'un arrêt forcé. Bien sûr, il a été mentionné que cette stratégie est la plus simple, et qu'elle peut être suffisante dans le cas où l'on est assez indépendant de la disponibilité des machines. On peut la séparer en deux sous-catégories :
  - La maintenance corrective : comme son nom l'indique, ce type de mainte-

nance consiste à venir réparer une partie du système, après une panne, afin de lui rendre sa pleine fonctionnalité

- La maintenance d'urgence : c'est une activité de maintenance qu'il est nécessaire d'accomplir pour éviter de sérieuses conséquences sur le système dans sa globalité.
- La maintenance active : on n'attend pas que le système tombe en panne pour réaliser des opérations de maintenance.

La maintenance active peut être décrite par deux qualifications : prédictive et préventive. La différence entre les deux repose sur le temps séparant deux opérations de maintenance. La maintenance préventive impose des interventions à des intervalles prédéfinis pour réduire la probabilité de diminution de performance ou de panne. La maintenance prédictive détermine de façon adaptative ces intervalles.

Au sein de la maintenance préventive, plusieurs catégories peuvent être mises en évidence :

- la maintenance à intervalle constant : comme son nom l'indique, on fixe un intervalle de temps au bout duquel on réalise une analyse du système. Bien sûr, le système peut tout de même tomber en panne entre deux visites.
- la maintenance basée sur l'âge : dans cette stratégie, au lieu de fixer l'intervalle de temps de manière arbitraire et à priori, on fixe un âge à partir duquel on commencera à faire des opérations de maintenance, à intervalle constant. Si un problème survient avant l'âge initialement prévu, à un temps  $t$ , l'intervalle entre deux interventions sera alors fixé à  $t$ , mais à postériori,

Enfin, les deux stratégies de maintenance composant la maintenance prédictive sont :

- la maintenance conditionnelle (condition based maintenance) : la décision de faire une intervention est basée sur l'observation de la condition du système ou de ses composantes. L'état de santé du système est donnée par le monitoring des paramètres.
- la maintenance basée sur la fiabilité (reliability centered maintenance) : le but est de réaliser une maintenance rentable économiquement, sans perdre de vue la sécurité et la fiabilité du système. Elle se résume en deux tâches principales. La première est d'analyser et de classer les modes de pannes selon leurs effets sur l'appareil. La deuxième est de mesurer l'impact d'une planification de maintenance sur la fiabilité du système.

## 1.2 Les HUMS : outils de la maintenance en développement

Les HUMS (Health and Usage Monitoring Systems) arborent deux facettes : *health monitoring* et *usage monitoring* [Samuel 2005]. La première fait référence à une surveillance de l'état de santé global de l'appareil. En effet, cela consiste à déterminer son état mécanique et fonctionnel, ainsi qu'à détecter et diagnostiquer des défauts pouvant mener à une défaillance du système. Le *usage monitoring* quant à lui consiste à enregistrer les conditions et l'historique d'utilisation de l'appareil. Un HUMS se doit donc de fournir une mesure exacte de l'usure de certains composants critiques afin d'estimer au mieux la nécessité d'une intervention ou les risques de défaillances inopinées du système.

Le principe même de surveillance d'appareil existe depuis toujours, que ce soit sous l'aspect de simples formulaires remplis par le pilote après une sortie ou de systèmes automatiques complets. La demande augmentant pour ces derniers, certaines méthodes sont déjà mises en place sur certains appareils comme :

- Le contrôle de la présence de limaille de fer grâce à un bouchon aimanté,
- La surveillance de la température de différents composants critiques,
- La surveillance du niveau de vibration globale du système.

Il faut cependant noter que ces diverses interventions ne permettent la détection d'un problème que lorsqu'il est déjà fort avancé. De plus, elles ne donnent aucune indication quant à la localisation du défaut, ce qui peut rendre la tâche des mécaniciens maintenanciers fort difficile.

Il semble donc très logique que de nombreuses entreprises et de nombreux laboratoires de recherche se soient mis en quête d'un système de détection des défauts précoces, permettant de localiser ces derniers avec la plus grande précision possible [Choy 2003], [Dalpiaz 1996], [Randall 2004], [Kothamasu 2006], [Zacksenhouse 2000]. Une partie de ces travaux se concentre sur le système de transmission des appareils qui est souvent la source de pannes et d'accidents très graves. C'est dans ce contexte que se place l'étude menée au cours de ces travaux de thèse.

## 1.3 Signaux vibratoires de machines tournantes

Le signal vibratoire d'une machine tournante est un signal très complexe composé de perturbations apportées par chaque pièce du système, les différents balourds introduits, les défauts de contact, la simple rotation des axes, etc...

C'est un signal qui peut, au premier abord, sembler totalement aléatoire. Cependant, en y regardant de plus près, nombre des composantes mentionnées peuvent être périodiques en fonction de la rotation des corps du système.

**Cyclostationnarité** Depuis quelques années, il est fréquent d'associer ces signaux aux caractéristiques bien particulières au phénomène de cyclostationnarité. D'après [Antoni 2004], *tout signal vibratoire de machine tournante peut être considéré comme cyclostationnaire, du moment qu'on adopte le bon point de vue.*

La définition générale d'un signal cyclostationnaire est qu'il est caractérisé par des propriétés statistiques variant périodiquement par rapport à une variable générique choisie (qui n'est pas forcément le temps). Mathématiquement, cela donne :

**Définition :**

Un processus stochastique  $\{x(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  est dit cyclostationnaire au sens strict, de cycle  $T$  si sa densité de probabilité  $p_x(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$  est périodique en  $t$  de période  $T$ , c'est à dire :

$$p_x(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = p_x(x_1, \dots, x_n; t_1 + T, \dots, t_n + T) \quad (1.1)$$

**Poly et Quasi-Cyclostationnarité :**

Dans la plupart des cas, il n'est pas possible de trouver un seul et unique cycle pour lequel le système présente une cyclostationnarité. En effet, tous les composants du système global étudié introduisent des composantes à différentes périodicités : on parle alors de signal *poly-cyclostationnaire*.

Un signal poly-cyclostationnaire peut être réduit à un signal cyclostationnaire pur décrit précédemment en trouvant le cycle commun à toutes ces périodicités. Cependant, ce cycle commun peut être beaucoup trop long pour être observé. Dans ce cas, le signal étudié est dit *quasi-cyclostationnaire*.

Il faut noter que d'après [Antoni 2004], les signaux quasi-cyclostationnaires ont pour caractéristiques fréquentielles l'ensemble des caractéristiques fréquentielles de tous les signaux cyclostationnaires basiques qui les composent.

Les signaux vibratoires de machines tournantes sont en grande partie dus aux vibrations produites par les éléments composant le système mécanique, tels que les engrenages et les roulements. Ces derniers représentent les systèmes de transmission au sein d'un mécanisme. Il est donc normal qu'un défaut de contact sur une de ces pièces engendre une modification de leur signal vibratoire et ainsi, comme mentionné précédemment, de l'ensemble du signal vibratoire du mécanisme. Le défaut, qu'il soit localisé ou plus général, crée une perturbation dans le signal à chaque contact avec une autre surface. La perturbation apparaît à une fréquence propre qu'il est possible de calculer. On peut ainsi établir une liste de toutes ces fréquences propres de défauts de contacts possibles dans le système mécanique et de l'utiliser comme modèle pour retrouver les défauts réellement présents.

En raison des caractéristiques des signaux vibratoires de machines tournantes mentionnées dans le paragraphe précédent, on peut avancer qu'ils peuvent être consi-

dérés comme cyclostationnaires. Cependant, vu que l'ensemble des fréquences cinématiques mentionnées ne dépendent que de la rotation de l'arbre choisi comme arbre de référence (souvent l'arbre d'entrée), le signal est plus angle-cyclostationnaire que temps-cyclostationnaire. Ceci signifie que la variable prise comme référence pour définir la cyclostationnarité du signal est l'angle de l'arbre référent et non le temps. C'est pour cette raison qu'on s'intéresse à l'échantillonnage angulaire [Remond 2005]. Comme son nom le suggère, cela consiste à échantillonner le signal en fonction de l'angle et non du temps (comme cela se fait habituellement). Lorsque cela est possible, on échantillonne le signal directement en angle, grâce à des codeurs optiques. Sinon, on peut toujours ré-échantillonner un signal échantillonné temporellement. Cela demande certaines précautions pour éviter le sous-échantillonnage.

## 1.4 Comment lire la thèse

On veut utiliser la structure des signaux vibratoires exposée précédemment afin de détecter des éventuels défauts. Comme il a été précisé, les perturbations introduites par une avarie dans le signal vibratoire d'une machine tournante apparaissent à une fréquence propre.

Pour ce faire, on souhaite connaître les différentes fréquences propres d'apparition de défaut de contact. C'est pour cette raison que l'on se propose de faire une analyse cinématique du système. Cela consiste à calculer les vitesses de rotation des différents corps d'un mécanisme.

Dans le Chapitre 2 nous présenterons des méthodes existant déjà pour réaliser l'analyse cinématique d'un système mécanique complexe. Nous verrons qu'aucune d'entre elles ne présente les caractéristiques nécessaires à une analyse simple, rapide et automatisée de la chaîne de transmission d'un rotor d'hélicoptère. Nous introduirons donc une méthode de modélisation et d'analyse cinématique de systèmes mécaniques complexes, permettant le calcul de toutes les vitesses de rotation des corps composant le mécanisme et ainsi, de la liste de toutes les fréquences de défauts de contact pouvant apparaître dans le système.

Dans le Chapitre 3, nous présenterons différentes techniques de traitement pouvant être appliquées à des signaux, qu'ils soient stationnaires ou non, et en particulier à des signaux vibratoires de machines tournantes. Ainsi nous aborderons l'analyse spectrale (par transformée de Fourier), les méthodes temps-fréquence, l'analyse cepstrale. Nous nous intéresserons également à des méthodes statistiques ainsi qu'à une méthode spécifique aux signaux cyclostationnaires. Enfin, nous montrerons qu'une simple analyse spectrale classique ne permet pas une lecture aisée des signaux vibratoires utilisés lors de cette étude. Nous nous intéresserons donc à une méthode supplémentaire pouvant apporter des résultats plus lisibles. Nous aborderons également l'échantillonnage angulaire et le concept de cyclostationnarité angulaire.

L'idée de cette méthode supplémentaire est d'utiliser la liste des fréquences d'ap-



---

parition possibles de défauts comme modèle pour la mise en place de filtres de Kalman. Ces derniers peuvent permettre une bonne estimation de l'amplitude et de la phase des différentes composantes d'un signal vibratoire lorsqu'on dispose d'une "bonne" connaissance de leurs fréquences.

Dans le Chapitre 4, nous présenterons les filtres de Kalman et les concepts mathématiques impliqués. Puis, nous exposerons les modèles choisis dans le cas de cette étude ainsi que les équations du filtre associé.

Enfin, dans le Chapitre 5, nous exposerons le banc d'essai mis en place au cours de cette thèse. Il a permis l'obtention de signaux vibratoires d'une Boite de Transmission Principale d'Alouette III. Ces signaux ont été utilisés afin de tester la méthode à base de filtres de Kalman présentée dans le Chapitre 4. Les résultats de ces tests sont également détaillés dans ce chapitre.



# Modélisation cinématique

---

## Sommaire

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>2.1</b> | <b>Etat de l'art</b> . . . . .  | <b>10</b> |
| 2.1.1      | La méthode d'analyse vectorielle . . . . .  | 10        |
| 2.1.2      | La théorie des graphes . . . . .  | 11        |
| 2.1.3      | La méthode de Nelson et Cipra . . . . .   | 14        |
| <b>2.2</b> | <b>Description de la méthode</b> . . . . .  | <b>16</b> |
| 2.2.1      | Le tableau des liaisons . . . . .   | 17        |
| 2.2.2      | Corps de référence . . . . .  | 18        |
| 2.2.3      | Construction de la matrice adjacente . . . . .                                      | 20        |
| 2.2.4      | Calcul du vecteur des rapports de vitesse . . . . .                                 | 21        |
| 2.2.5      | Calcul des fréquences de contact . . . . .  | 23        |
| <b>2.3</b> | <b>Exemples plus complexes</b> . . . . .  | <b>26</b> |
| 2.3.1      | Exemple 1 : le différentiel de voiture . . . . .                                    | 26        |
| 2.3.2      | Exemple 2 : La Boite de Transmission Principale (BTP) d'un<br>hélicoptère . . . . . | 31        |
| <b>2.4</b> | <b>Algorithme disponible</b> . . . . .  | <b>33</b> |

---

L'objectif est d'obtenir la liste des fréquences d'apparition possibles des défauts de contact sur le système mécanique à diagnostiquer.

Comme nous allons le voir dans la suite, il existe des formules mathématiques permettant de les calculer. Elles nécessitent en revanche une connaissance précise des vitesses de rotation de tous les corps constituant le mécanisme.

Plusieurs méthodes existent pour résoudre ce problème et réaliser une analyse cinématique complète d'un système. Certaines d'entre elles seront résumées dans la première section de ce chapitre. La seconde section servira à l'explication de la méthode mise au point au cours de cette étude. Elle a pour objectifs de calculer l'ensemble des vitesses de rotation de tous les corps d'un système mécanique, puis de lister les différentes fréquences de défauts de contact pouvant intervenir dans le mécanisme. Nous procéderons ensuite à sa démonstration sur une série d'exemples notamment sur un différentiel de voiture qui est un système complexe intéressant car il présente plusieurs degrés de liberté et une Boite de Transmission Principale (BTP) d'hélicoptère. Enfin, nous présenterons le programme informatique développé sous Matlab pour la réalisation de toutes ces fonctions.

## 2.1 Etat de l'art

Depuis les années soixante-dix, de nombreuses recherches ont été menées afin de développer des méthodes efficaces de modélisation ou d'analyse cinématique de systèmes mécaniques complexes, tels que les trains épicycloïdaux (la Figure 2.1 introduit un train épicycloïdal simple et le vocabulaire associé). L'objectif premier de ces méthodes est de calculer les vitesses de rotation des corps d'entrée et de sortie du mécanisme, voire de l'ensemble des éléments du système, ou plus exactement les ratios de ces vitesses par rapport à la vitesse de l'élément d'entrée. Les plus célèbres d'entre elles sont l'analyse vectorielle exposée par Yang et Freudenstein dans [Yang 1973], la méthode tabulaire présentée par Cleghorn et Tyc dans [Cleghorn 1987] ainsi que la méthode de Nelson et Cipra [Nelson 2005]. Cette dernière possède les mêmes fondations que la méthode que nous proposons, à savoir la théorie des graphes. Ce domaine est un sujet de recherche d'actualité notamment pour l'analyse cinématique de trains épicycloïdaux [Kahraman 2004], [Tsai 2010].

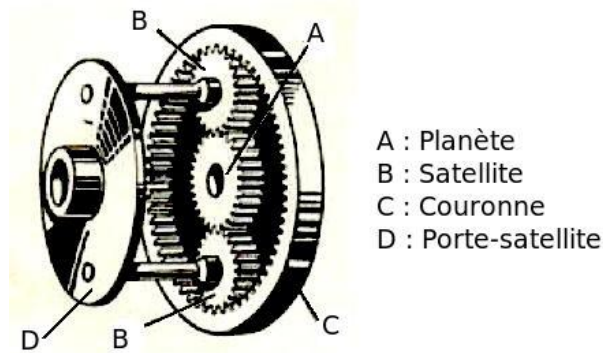


FIGURE 2.1 – Schema d'un train épicycloïdal simple et vocabulaire associé

Nous proposerons ainsi une présentation plus détaillée de cette théorie, ainsi que de la méthode de Nelson et Cipra.

### 2.1.1 La méthode d'analyse vectorielle

Cette méthode a été introduite par Yang et Freudenstein afin de réaliser l'analyse des trains épicycliques coniques [Yang 1973]. Elle utilise l'algèbre duale. On résume ici les différentes étapes de la méthode :

- Tout d'abord, il est nécessaire de définir un référentiel adapté à chaque corps du système. Dans le cas d'un train épicycloïdal, il en faut trois,
- Puis, il faut exprimer les vitesses relatives des corps dans les différents référentiels choisis,

- La partie la plus délicate est de regrouper les expressions de ces vitesses relatives et de trouver leur expression sous un seul référentiel,
- L'étape précédente a permis l'obtention d'un ensemble d'équations qu'il faut résoudre pour obtenir les vitesses de rotation de tous les corps du système.

Cette méthode donne de bons résultats pour les trains épicycloïdaux coniques. Cependant, ces notions de travail sont difficiles d'accès, demandent beaucoup de calculs à la main (ce qui ne remplit pas les conditions d'automatisation recherchées dans le cas présent), pouvant entraîner des erreurs de calcul fréquentes. Ces difficultés se renforcent lorsqu'il s'agit de systèmes complexes comportant un plus grand nombre de corps, comme la chaîne de transmission d'un hélicoptère.

### 2.1.2 La théorie des graphes

La méthode de théorie des graphes mise en place par Buchsbaum et Feudenstein dans [Buchsbaum 1970] représente les corps par des sommets, les engrenages par des traits pointillés et les liaisons pivot par des traits pleins. Les engrenages doivent également être caractérisés par leur niveau, qui décrit leur localisation dans l'espace. Deux engrenages du même niveau devront porter la même lettre. La figure 2.2 donne la représentation fonctionnelle d'un train épicycloïdal à six corps introduit par Hsu et Lam dans [Hsu 1992].

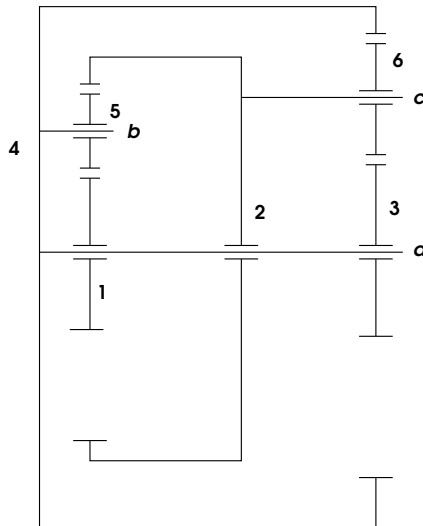


FIGURE 2.2 – Schéma cinématique d'un train épicycloïdal à six corps (General Motors Corp., 1983) présenté dans [Hsu 1992]

La figure 2.3a donne une représentation des graphes obtenue avec la méthode de Buchsbaum et Feudenstein. Comme on peut le voir, les liaisons (1,5), (2,5), (3,6) et (4,6), qui sont des liaisons engrenages sont représentées par des traits pointillés. Les liaisons (1,4), (2,4) et (3,4) sont représentées par des traits pleins, symbolisant

les liaisons pivot. Elles sont également marquées d'une lettre commune  $a$ , car elles sont sur un même niveau. Les liaisons (4,5) et (2,6), quant à elles, n'ont pas de niveau commun entre elles ou avec celles marquées de la lettre  $a$ . Elles portent donc respectivement les lettres  $b$  et  $c$  et sont symbolisées par des traits pleins.

La méthode proposée par Buchsbaum et Freudenstein peut donner plusieurs résultats différents. En effet 2.3b est une autre représentation des graphes possibles pour le mécanisme de la Figure 2.2. Bien sûr, cette représentation mène aux mêmes conclusions que la précédente.

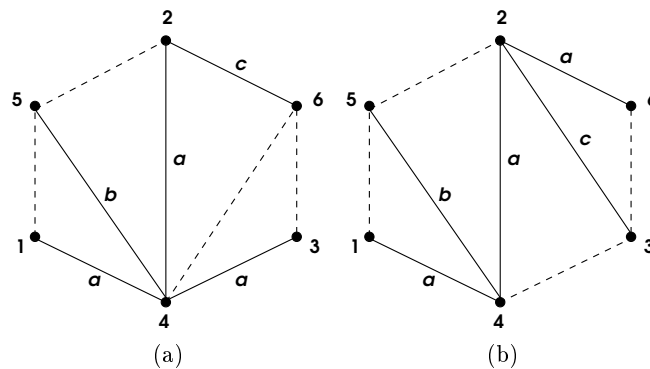


FIGURE 2.3 – Graphes possibles de représentation du mécanisme de la Figure 2.2

Une fois cette représentation établie, Buchsbaum et Freudenstein nous donnent les indications suivantes :

- le sous-graphe obtenu en retirant toutes les arêtes représentant un engrenage forme un arbre de répartition,
- un circuit fondamental (ou f-circuit) est créé en ajoutant un engrenage à cet arbre,
- les arêtes représentant les liaisons pivot qui partagent un niveau commun se croisent en un point.

A partir de cette représentation, Hsu et Lam proposent une variante [Hsu 1992]. L'avantage de cette version de la théorie des graphes est qu'elle ne peut mener à plusieurs représentations pour un système mécanique (contrairement à la représentation de Buchsbaum et Freudenstein). Ils utilisent le même principe de représentation avec des points pour les corps, des arêtes pointillées pour les liaisons engrenantes et des arêtes pleines pour les liaisons pivot. La différence principale réside dans le fait qu'au lieu de noter les niveaux des liaisons pivot, ils regroupent toutes celles partageant un niveau en une liaison pivot multiple représentée par un polygone plein. Appliqué à l'exemple de la Figure 2.2 on obtient la représentation des graphes présentée sur

la Figure 2.4.

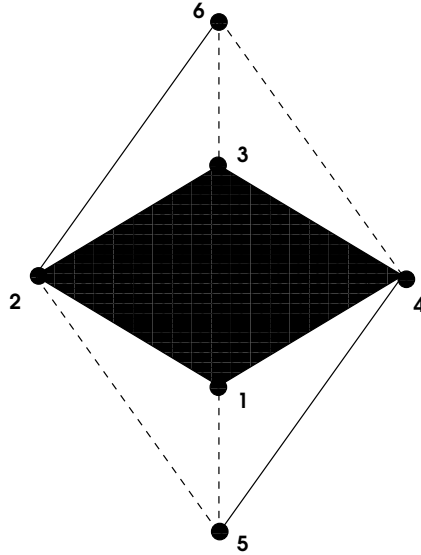


FIGURE 2.4 – Représentation des graphes de l'exemple de la Figure 2.2 selon la méthode de Hsu et Lam

Cette nouvelle représentation permet d'établir une matrice adjacente point à point. C'est une représentation abstraite et mathématique du graphe. Pour un système à  $N$  corps, la matrice adjacente  $A$  est de taille  $N \times N$ . Pour les corps représentés par les points d'indice  $i$  et  $j$ ,  $A$  se construit comme suit :

- $a_{ij} = 1$  si les points  $i$  et  $j$  sont reliés par une liaison pivot,
- $a_{ij} = 2$  si les points  $i$  et  $j$  sont reliés par une liaison engrenage,
- $a_{ij} = m$  si  $i$  et  $j$  sont adjacents par un polygone plein de  $m$  points,
- $a_{ij} = 0$  ailleurs (notamment si  $i = j$ ).

En reprenant l'exemple présenté dans la Figure 2.2 on obtient la matrice adjacente point à point suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

L'étape suivante consiste à retrouver l'ensemble des  $f$  circuits fondamentaux du système. En effet, chaque circuit fondamental composé d'un engrenage  $(i, j)$  et d'un

point de transfert  $k$  respecte la formule de Willis suivante :

$$\omega_i - \omega_j \left( s \frac{N_j}{N_i} \right) + \omega_k \left( s \frac{N_j}{N_i} - 1 \right) = 0 \quad (2.2)$$

avec  $\omega_i$ ,  $\omega_j$  et  $\omega_k$  les vitesses angulaires des corps  $i$ ,  $j$  et  $k$ , et  $N_i$  et  $N_j$  les nombres de dents des corps  $i$  et  $j$ .  $s = \pm 1$  selon que la rotation du corps  $i$  produise une rotation du corps  $j$  dans le même sens ou pas. De façon plus générique,  $s = 1$  pour les engrenages internes et  $s = -1$  pour les engrenages externes. Cette formule ne s'applique qu'à des engrenages dits *droits*, c'est à dire ne présentant pas d'angles non nuls, entre les deux corps (contrairement aux engrenages coniques).

Il est donc possible de regrouper les  $f$  équations linéaires ainsi obtenues en une équation matricielle qu'il suffit de résoudre pour obtenir le vecteur des vitesses angulaires de tous les corps du système.

$$[C] \{\Omega\} = \{0\} \quad (2.3)$$

avec  $C$  une matrice  $f \times N$  nommée la matrice des coefficients et  $\Omega$  le vecteur des vitesses de rotation des  $N$  corps.

Hsu et Lam ont mis au point un algorithme permettant la recherche des  $f$  circuits fondamentaux et de la matrice des coefficients associée au système. Cet algorithme est exposé dans la Figure 2.5.

La connaissance des circuits fondamentaux et de la matrice des coefficients associée au système permet le calcul de l'ensemble des vitesses de rotation des corps du mécanisme, par la résolution de l'équation 2.3. La méthode de Hsu et Lam n'est cependant utilisable que sur des systèmes ne présentant pas d'engrenages coniques, car la version de la formule de Willis utilisée est limitée aux engrenages droits.

### 2.1.3 La méthode de Nelson et Cipra

L'objectif de Nelson et Cipra est de créer une technique d'analyse des trains épicycloïdaux, en particulier ceux avec des satellites coniques (c'est-à-dire de déterminer les vitesses angulaires de tous les corps du mécanisme). Cette méthode ne prend cependant en compte que des systèmes dont les axes d'entrée et de sortie sont colinéaires. On nomme  $z$  l'axe commun des entrée et sortie.  $r$  est l'axe perpendiculaire à  $z$ . La théorie des graphes, exposée ci dessus, est à la base de cette méthode d'analyse.

En effet, la première étape décrite par Nelson et Cipra consiste à établir le graphe du mécanisme en suivant les méthodes de Buchsbaum et Freudenstein et de Hsu et Lam exposées précédemment. Ce premier travail permet la création de la matrice adjacente  $A$  ainsi que la mise en évidence des  $f$  circuits fondamentaux constituant le système.



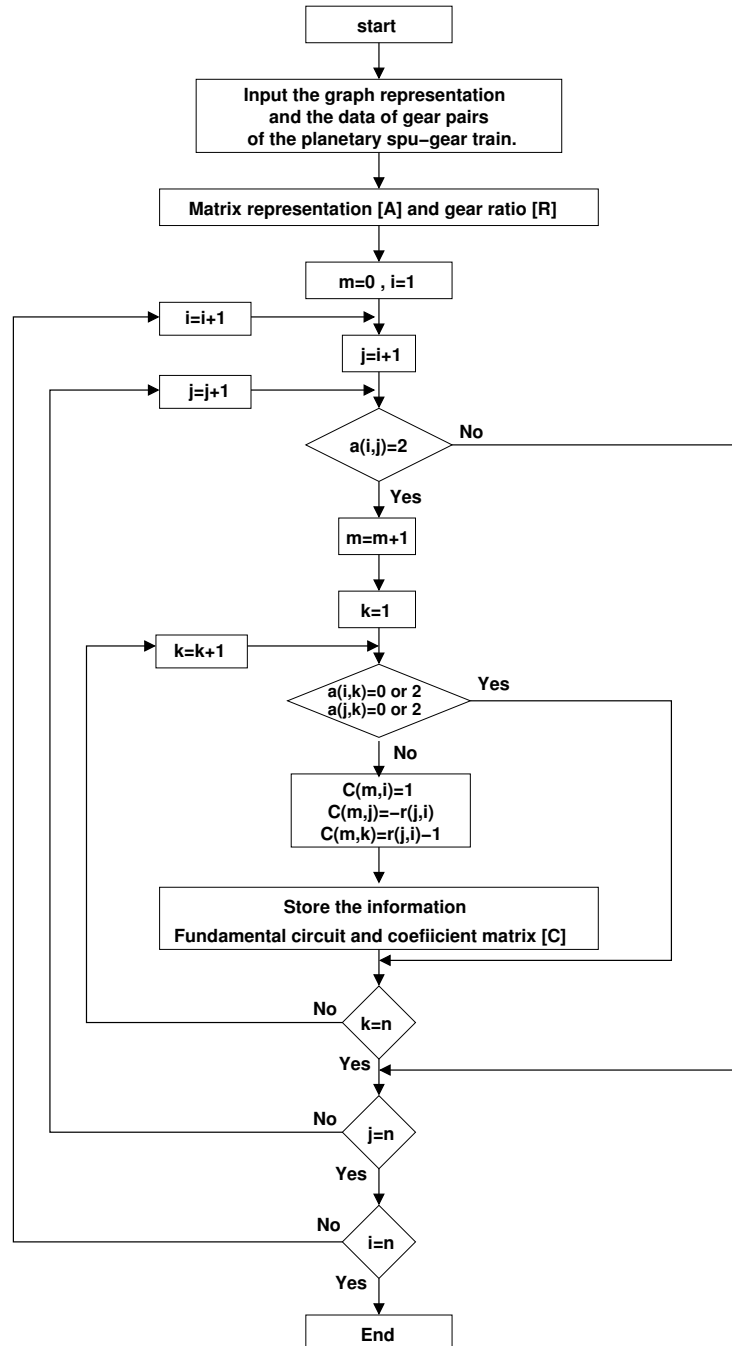


FIGURE 2.5 – Algorithme permettant de déterminer tous les circuits fondamentaux possibles ainsi que la matrice des coefficients [Hsu 1992]

Ces  $f$  circuits fondamentaux répondent à  $f$  équations utilisant la formule de Willis exposée dans l'Equation (2.2).

Une série de manipulations des  $f$  équations précédentes, ainsi que la disposition des vitesses angulaires en deux catégories (celles connues, corps d'entrée par exemple, et les autres) mène à la création d'une matrice  $R$  qui permet à Nelson de résumer le problème en une équation matricielle à résoudre :

$$[\omega_{unknowns}]^T = [R][\omega_{inputs}]^T \quad (2.4)$$

Cependant, cette vision scalaire des vitesses angulaires ne permet la résolution de l'analyse que pour un train épicycloïdal droit. Pour un train conique, il faut transformer cette équation en vecteur. Pour cela Nelson propose trois étapes :

- Obtenir la vitesse relative du satellite en faisant la différence entre la vitesse du satellite et celle du porte-satellite,
- Projeter cette vitesse relative sur les axes  $r$  et  $z$ ,
- Convertir le vecteur vitesse en vitesse absolue en ajoutant la vitesse du porte satellite.

Cette méthode de Nelson et Cipra permet donc, contrairement à celle de Hsu et Lam, de faire une analyse cinématique complète d'un système comprenant des engrenages coniques. Cependant, elle ne permet pas de traiter des systèmes plus complexes, notamment dont les axes d'entrée et de sortie ne sont pas colinéaires. Or, de nombreux mécanismes, tels qu'un différentiel de voiture ou une BTP d'hélicoptère, présentent des corps d'entrée et de sortie non colinéaires. C'est pour cette raison, que nous avons développé une méthode basée sur les mêmes principes que celles de Nelson et Cipra et Hsu et Lam, mais faisant intervenir des nombres complexes, afin de prendre en compte cette caractéristique.

## 2.2 Description de la méthode

L'objectif de la méthode proposée est de réaliser l'analyse cinématique complète du système, c'est à dire de calculer l'ensemble des vitesses de rotation des corps composant le mécanisme. Cette information est ensuite utilisée afin d'obtenir la liste des fréquences propres de défauts de contact.

Cette méthode se déroule selon les différentes étapes suivantes :

- Construire le tableau des liaisons. Ce tableau décrit l'ensemble des interactions entre les différents corps du système.

- Déterminer le corps de référence (voir Section 2.2.2) associé à chaque couple engrenant.
- Créer la matrice adjacente du système, à partir de la formule de Willis étendue aux coefficients complexes. Cette matrice est ensuite utilisée pour calculer les vecteurs des taux de vitesse angulaires répondant à toutes les contraintes cinématiques. Il suffit pour cela de calculer le noyau de cette matrice.
- Lister tous les contacts dans le mécanisme et leurs fréquences angulaires.

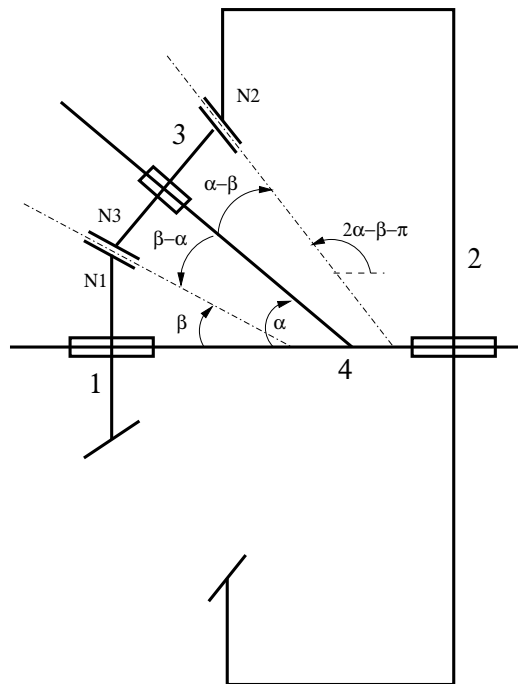


FIGURE 2.6 – Exemple simple de train épicycloïdal avec engrenage conique

Ces différentes étapes sont détaillées par la suite. Un exemple simple, dont le schéma cinématique est présenté dans la figure 2.6 servira d'exemple d'application à chaque étape. Il s'agit d'un train épicycloïdal comprenant des engrenages coniques. Ce système a été introduit dans l'article de Nelson et Cipra [Nelson 2005].

### 2.2.1 Le tableau des liaisons

La méthode proposée ne s'intéresse qu'aux systèmes comportant des roulements et des engrenages. Le rôle du tableau des liaisons est de décrire l'ensemble des interactions entre les différents corps du système, afin de résumer l'information pour faciliter la construction de la matrice adjacente. Il est important de noter que les éléments du tableau des liaisons peuvent être complexes, pour pouvoir décrire les engrenages coniques. C'est la raison pour laquelle cette méthode peut être utilisée sur des systèmes dont les axes d'entrée et de sortie ne sont pas colinéaires, contrairement

à la méthode de Nelson et Cipra, qui ne prend en compte les engrenages coniques que lorsqu'ils font partie d'un train épicycloïdal.

Pour un système à  $N$  corps, le tableau des liaisons  $T$  est une matrice de taille  $N \times N$ . L'élément  $(i, j)$  de la matrice  $T$  décrit l'interaction du corps  $i$  sur le corps  $j$ . Le tableau  $T$  est construit comme suit :

- Pour un pivot (un roulement par exemple), on remplit les cases  $T(i, j)$  et  $T(j, i)$  par la lettre  $(p)$  pour *pivot*,
- Pour un engrenage :  $T(i, j) = N_i e^{\theta_i \sqrt{-1}}$  et  $T(j, i) = N_j e^{\theta_j \sqrt{-1}}$ , avec  $N_i$  (resp.  $N_j$ ) le nombre de dents du corps  $i$  (resp.  $j$ ),  $\theta_i$  (resp.  $\theta_j$ ) l'angle d'attaque de la denture du corps  $i$  (resp.  $j$ ) entre l'axe de rotation de ce corps et l'axe du contact entre les dents des deux corps.  $\theta$  est positif dans le sens anti-trigonométrique et tel que  $|\theta| < \pi/2$  pour un engrenage externe et  $\pi > |\theta| > \pi/2$  pour un engrenage interne.
- Les autres éléments de  $T$  restent vides.

|   | 1                                 | 2                                 | 3                                      | 4     |
|---|-----------------------------------|-----------------------------------|--|-------|
| 1 |                                   |                                   | $N_1 e^{\sqrt{-1}\beta}$               | $(p)$ |
| 2 |                                   |                                   | $N_2 e^{\sqrt{-1}(2\alpha-\beta-\pi)}$ | $(p)$ |
| 3 | $N_3 e^{\sqrt{-1}(\beta-\alpha)}$ | $N_4 e^{\sqrt{-1}(\alpha-\beta)}$ |  | $(p)$ |
| 4 | $(p)$                             | $(p)$                             | $(p)$                                  |       |

TABLE 2.1 – Tableau des liaisons du train épicycloïdal simple

Dans l'exemple de Nelson, il existe deux liaisons engrenantes (pour les paires (1,3) et (1,2)) et trois liaisons pivot ((1,4), (2,4) et (3,4)). En appliquant les formules citées plus haut, on obtient le tableau des liaisons présentés dans la table 2.1.

### 2.2.2 Corps de référence

L'étape suivante dans la description du système est la détermination du corps de référence de chaque paire engrenante. La description la plus simple est : dans le référentiel du corps de référence, le point de contact de la paire engrenante est immobile.

Afin de le déterminer de façon automatique, il est possible d'utiliser la représentation des graphes (comme exposée par Hsu et Lam [Hsu 1992]). Cette représentation n'est bien sûr pas la seule existante. Pour symboliser des chaînes cinématiques, Ding propose une représentation topologique unifiée [Ding 2009].

On réalise la représentation en graphe de l'exemple du train épicycloïdal simple

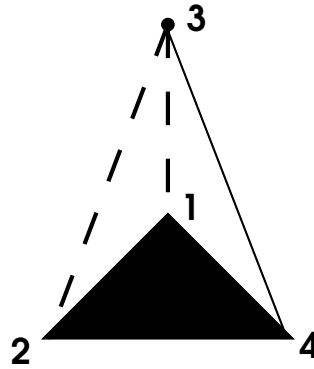


FIGURE 2.7 – Représentation des graphes du train épicycloïdal simple

présenté dans la figure 2.6. La figure 2.7 montre le résultat de cette représentation des graphes.

A partir de cette représentation, le corps de référence  $k$  associé à une paire engrenante  $(i, j)$  peut être déterminé. On peut également le déterminer comme suit :

Soit  $S_i$  (resp.  $S_j$ ) l'ensemble des corps reliés au corps  $i$  (resp.  $j$ ) par un pivot ou une liaison pivot multiple, alors

$$\{k\} = S_i \cap S_j \quad (2.5)$$

où  $\cap$  représente l'intersection des ensembles  $S_i$  et  $S_j$ .

En utilisant la représentation des graphes, cela revient à dire qu'en suivant sur le graphe le chemin qui mène de  $i$  à  $j$  en n'empruntant que des liaisons pivot, le corps de référence  $k$  est celui où on change de niveau [Hsu 1992].

En reprenant l'exemple selon les deux méthodes abordées, celle des ensembles et celle du chemin sur le graphe, on montre que le corps 4 est le corps de référence de la paire engrenante (2,3) :

- méthode des ensembles :
  - le corps 2 appartient à la liaison pivot multiple (1,2,4) :  $S_2 = \{1, 2, 4\}$
  - le corps 3 appartient à la liaison pivot simple (3,4) :  $S_3 = \{3, 4\}$
  - l'intersection entre  $S_2$  et  $S_3$  est  $\{1, 2, 4\} \cap \{3, 4\} = \{4\}$
- méthode du chemin sur le graphe : en partant du corps 2, il est possible de se diriger vers le corps 1 ou le corps 4 sans emprunter de ligne pointillée. Par le corps 4, on peut aller directement au corps 3 mais par le corps 1, on est obligé de revenir vers le corps 4. Dans tous les cas, au passage du corps 4, on quitte

un polygone plein pour une ligne continue : on change de niveau. Le corps de référence est donc le corps 4.

De la même manière, il est possible de montrer que le corps de référence de la paire engrenante (1,3) est le corps 4.

**Remarque :** Il est important de noter que l'ensemble contenant le corps de référence  $k$  est :

- non vide car il est impossible de trouver un chemin dans le graphe impliquant un engrenage et des pivots de trois niveaux différents (auquel cas il existerait des configurations angulaires où les engrenages ne seraient plus en contact),
- réduit à un singleton. Sans cela, on pourrait déduire qu'il existe une liaison pivot multiple entre  $S_i$  et  $S_j$ .

### 2.2.3 Construction de la matrice adjacente

Le tableau des liaisons et les corps de référence des engrenages sont des outils de description du système utiles à la construction d'une nouvelle version de la matrice adjacente, qui sera notée  $M$ . C'est cette matrice qui est au coeur de la méthode présentée. Elle permet la transcription sous forme compacte de l'application des formules de Willis à chaque couple engrenant du système. Elle peut être complexe afin de prendre en compte des engrenages coniques.

Si on considère  $\Omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N]^T$  le vecteur des vitesses angulaires des  $N$  corps du mécanisme, la matrice adjacente  $M$  est la matrice des contraintes cinématiques imposées au système. On a donc :

$$M\Omega = 0 \quad (2.6)$$

Pour un système à  $N$  corps, la matrice adjacente  $M$  est une matrice complexe de taille  $(L + 1) \times N$  où  $L$  est le nombre de paires engrenantes du mécanisme.

La première ligne de la matrice  $M$  traduit l'immobilité du carter du système. Elle doit donc être égale à :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & f-1 & f & f+1 & \dots & N \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

avec  $f$  l'indice associé au carter du système.

Puis chaque paire engrenante  $(i, j)$ , de corps de référence  $k$  ajoute une ligne à la matrice  $M$  en utilisant le tableau des liaisons  $T$  et la formule de Willis ré-exprimée

sous la forme :

$$T(i, j)(\omega_i - \omega_k) + T(j, i)(\omega_j - \omega_k) = 0 \quad (2.8)$$

Algorithmiquement, il suffit de parcourir la partie triangulaire supérieure de  $T$  et pour chaque paire engrenante  $(i, j)$  de corps de référence  $k$  rencontrée d'ajouter une nouvelle ligne  $l$  à la matrice  $M$  comme suit :

- $M(l, i) = T(i, j)$ ,
- $M(l, j) = T(j, i)$ ,
- $M(l, k) = -T(i, j) - T(j, i)$ ,
- 0 ailleurs.

Dans l'exemple simple de Nelson, il y a quatre corps et deux engrenages. Le carter correspond au corps 2. La matrice adjacente  $M$  associée est donc de taille :  $(2 + 1) \times 4$ . En construisant  $M$  selon les critères cités précédemment, on obtient :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ N_1 e^{\sqrt{-1}(\alpha-\beta)} & 0 & N_3 e^{\sqrt{-1}(\beta-\alpha)} & -N_1 e^{\sqrt{-1}(\alpha-\beta)} - N_3 e^{\sqrt{-1}(\beta-\alpha)} \\ 0 & N_2 e^{\sqrt{-1}(2\alpha-\beta-\pi)} & N_3 e^{\sqrt{-1}(\alpha-\beta)} & -N_2 e^{\sqrt{-1}(2\alpha-\beta-\pi)} - N_3 e^{\sqrt{-1}(\alpha-\beta)} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

On utilise les valeurs numériques suivantes :  $N_1 = 15$ ,  $N_2 = 25$ ,  $N_3 = 10$  et  $\alpha = \pi/3$ ,  $\beta = \pi/6$ . On obtient alors :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 15e^{\sqrt{-1}\pi/6} & 0 & 10e^{-\sqrt{-1}\pi/6} & -15e^{\sqrt{-1}\pi/6} - 10e^{-\sqrt{-1}\pi/6} \\ 0 & 25e^{-\sqrt{-1}\pi/2} & 10e^{\sqrt{-1}\pi/6} & -25e^{-\sqrt{-1}\pi/2} - 10e^{\sqrt{-1}\pi/6} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

#### 2.2.4 Calcul du vecteur des rapports de vitesse

Ce vecteur permet de connaître les vitesses relatives des corps du système par rapport à la vitesse d'un corps référant. On peut prendre le corps d'entrée du mécanisme comme référence. L'élément du vecteur des rapports de vitesse  $\Omega$  le représentant vaut alors 1 et il suffit de multiplier ce vecteur  $\Omega$  par la vitesse de rotation effective de l'arbre d'entrée pour obtenir le vecteur des vitesses de rotation effectives de tous les corps du système.

Comme il a été mentionné précédemment, la seule possibilité existante pour que tous les corps respectent les contraintes cinématiques résumées par la formule de Willis, est :  $M\Omega = 0$ . Dit autrement :

$$\Omega \in \ker(M) \quad (2.11)$$

Quelques remarques :

- Il est très simple de déterminer le nombre de degrés de liberté du système. Il suffit de retirer au nombre de corps  $N$  du système, le nombre de contraintes cinématiques laissées indépendantes :

$$N_{ddl} = N - \text{rank}(M) \quad (2.12)$$

- $\Omega_0 = \ker(M)$  est une matrice  $N \times N_{ddl}$  composée des  $N_{ddl}$  vecteurs décrivant les rapports entre les vitesses angulaires des corps du système pour chaque degré de liberté.
- Dans le cas d'un système à un seul degré de liberté (ce qui est la grande majorité des systèmes),  $\Omega_0$  est un vecteur simple. On peut le normaliser par rapport à l'arbre d'entrée du système :  $\Omega_0(r) = 1$  où  $r$  est l'indice associé à l'arbre d'entrée du mécanisme. De cette manière,  $\Omega_0(i)$  correspond au rapport de vitesse du corps  $i$  par rapport au corps  $r$ .
- Dans le cas d'un système à plusieurs degrés de liberté,  $\Omega_0$  peut être normalisé par rapport aux  $N_{ddl}$  arbres d'entrée.
- Il est important de noter que puisque le tableau des liaisons  $T$  est une matrice complexe,  $\Omega_0(i)$  peut être complexe. Il peut alors être exprimé comme suit :

$$\Omega_0(i) = |\omega_i| e^{\phi_i \sqrt{-1}} \quad (2.13)$$

où  $\omega_i$  représente le ratio de vitesse de rotation de l'axe du corps  $i$  alors que  $\phi_i$  représente l'attitude relative du vecteur vitesse angulaire du corps  $i$  par rapport au vecteur vitesse angulaire de l'axe d'entrée du système. Cette représentation suppose qu'il est possible de décrire le mécanisme dans un plan.

Pour résumer, on appelle  $\Omega_0$  le vecteur (ou matrice dans le cas multi-degrés de liberté) des rapports de vitesse,  $\Omega$  le vecteur des vitesses angulaires, et  $\Lambda$  le vecteur des vitesses angulaires des  $N_{ddl}$  corps d'entrée du système. On a alors la relation suivante :

$$\Omega = \Omega_0 \Lambda \quad (2.14)$$

Dans le cas de l'exemple simple de Nelson, on cherche le noyau de la matrice  $M$  donnée par l'équation 2.9. Le corps 1 est le corps d'entrée du système. On normalise donc  $\Omega_0$  par rapport à ce corps. On obtient :

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.0937 - 0.8119\sqrt{-1} & 0.375 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.8173e^{1.6858\sqrt{-1}} & 0.375 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.15)$$

En inspectant  $\Omega_0$ , il est possible d'interpréter que le rapport de vitesse entre le corps de sortie 4 et le corps d'entrée 1 est réel et vaut 0.375. Le fait qu'il soit réel indique que les axes des corps 1 et 4 sont colinéaires.



En ce qui concerne le rapport entre les corps 1 et 3, on peut en déduire que la vitesse de rotation du corps 3 est de 0.8173 fois celle du corps 1 et que l'angle entre leurs deux vecteurs vitesse angulaire est  $-1.6858 \text{ rad}$ .

Le corps 2 est quant à lui immobile par rapport au corps 1 (il s'agit du carter).

### 2.2.5 Calcul des fréquences de contact

Les défauts de contact peuvent apparaître dans les engrenages et dans les roulements. Il existe des formules adaptées à chacun d'entre eux. On les retrouve dans la littérature, notamment [Renaudin 2010], [Breneur 2002].

#### Défaut de contact d'un engrenage :

Pour une paire engrenante  $(i, j)$  de corps de référence  $k$ , trois défauts différents peuvent apparaître à trois fréquences propres différentes :

- la fréquence d'engrènement  $\omega_{ij}^g$  s'obtient en calculant :

$$\omega_{ij}^g = |T(i, j)| |\omega_i - \omega_k| = |T(j, i)| |\omega_j - \omega_k|, \quad (2.16)$$

- la fréquence de défaut de contact sur une seule dent du corps  $i$  (resp.  $j$ ) notée  $\omega_i^g$  (resp.  $\omega_j^g$ ) :

$$\omega_i^g = |\omega_i - \omega_k| \quad (\text{resp. } \omega_j^g = |\omega_j - \omega_k|) \quad (2.17)$$

**Remarque :** Dans le cas d'un défaut sur une dent, il y a  $N_i = |T(i, j)|$  (resp.  $N_j = |T(j, i)|$ ) sources différentes et indépendantes car il y a  $N_i$  (resp.  $N_j$ ) dents sur le corps  $i$  (resp.  $j$ ). et qu'un défaut peut survenir sur chacune d'entre elles. Si toutes les dents devenaient défectueuses, la fréquence de défaut serait égale à la fréquence d'engrènement. En effet :

$$\omega_{ij}^g = N_i \omega_i^g = N_j \omega_j^g \quad (2.18)$$

#### Défauts de contact d'un roulement

Dans le cas d'une liaison pivot assurée par un roulement, des défauts peuvent apparaître en trois points différents : sur la bague intérieure, sur la bague extérieure ou sur une bille ou un rouleau du roulement.

La Figure 2.8 donne un exemple de roulement à bille simple avec les notations suivantes :

- $D_m$  le diamètre moyen de la cage
- $d_b$  le diamètre d'une bille
- $Z$  le nombre de billes

On donne aussi les indices  $e, c, i, b$  aux grandeurs qualifiant respectivement la bague extérieure, la cage, la bague intérieure et les billes.

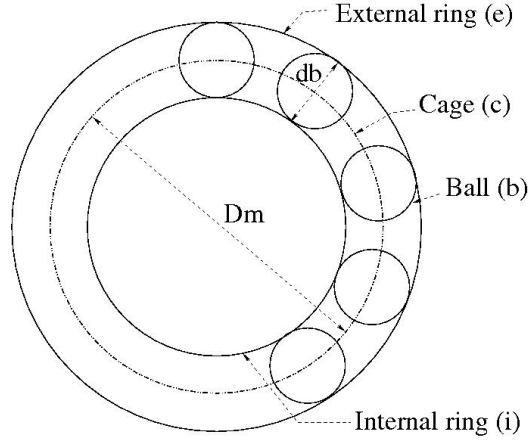


FIGURE 2.8 – Exemple d'un roulement à billes

Les trois types de défauts cités précédemment donnent trois fréquences de défaut de contact différentes pouvant être calculées par les formules suivantes [Renaudin 2010] :

– Fréquence de défaut sur la bague extérieure  $\omega_{de}$  :

$$\omega_{de} = Z|\omega_e - \omega_c| = \frac{Z}{2} \left(1 - \frac{d_b}{D_m} |\omega_i - \omega_e|\right) \quad (2.19)$$

– Fréquence de défaut sur la bague intérieure  $\omega_{di}$  :

$$\omega_{di} = Z|\omega_i - \omega_c| = \frac{Z}{2} \left(1 + \frac{d_b}{D_m} |\omega_i - \omega_e|\right) \quad (2.20)$$

– Fréquence de défaut sur une bille  $\omega_{db}$  :

$$\omega_{db} = 2|\omega_b - \omega_c| = \frac{D_m}{d_b} \left(1 - \frac{d_b^2}{D_m^2} |\omega_i - \omega_e|\right) \quad (2.21)$$

Dans le cas où le roulement n'est pas droit, mais conique, les formules précédentes peuvent être adaptées. Il faut alors remplacer  $d_b$  par  $d_b \cos \alpha$  où  $\alpha$  est l'angle de contact (voir Figure 2.9).

Nelson ne donne pas de renseignement sur les roulements des liaisons pivot du train épicycloïdal simple. Toutefois, il est possible de calculer les fréquences d'apparition de défaut de contact concernant les engrenages, c'est à dire en appliquant les Equations (2.16) et (2.17). Le Tableau 2.2 donne les résultats.

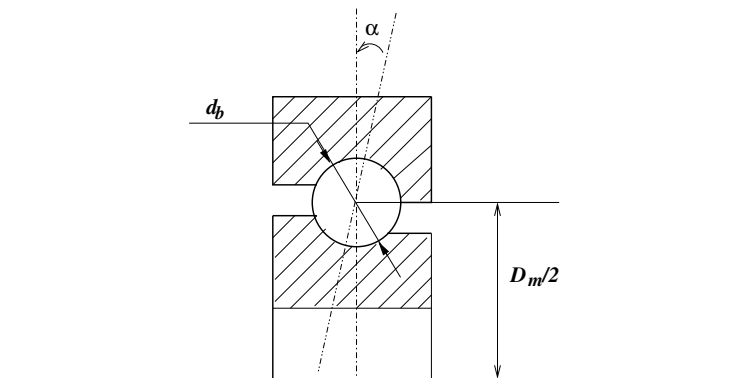


FIGURE 2.9 – Roulement à billes avec contact oblique

| Fréquence ( $rad/s$ ) | Paire | Description                    | Nb de sources |
|-----------------------|-------|--------------------------------|---------------|
| 15                    | (1,3) | Fréquence d'engrènement        | 1             |
| 1                     | (1,3) | Défaut sur une dent du corps 1 | 15            |
| 1.5                   | (1,3) | Défaut sur une dent du corps 3 | 10            |
| 15                    | (2,3) | Fréquence d'engrènement        | 1             |
| 0.6                   | (2,3) | Défaut sur une dent du corps 2 | 25            |
| 1.5                   | (2,3) | Défaut sur une dent du corps 3 | 10            |

TABLE 2.2 – Liste de toutes les fréquences d'apparition de défaut pour l'exemple simple de Nelson

## 2.3 Exemples plus complexes

### 2.3.1 Exemple 1 : le différentiel de voiture

Le différentiel de voiture est un des systèmes mécaniques les plus complexes et instructifs qui existent. Il a la caractéristique de posséder plusieurs degrés de liberté et d'avoir des axes d'entrée et de sortie non colinéaires. Cela fait de ce mécanisme un excellent choix pour un exemple d'application de la méthode présentée.



FIGURE 2.10 – Photographie du différentiel de voiture

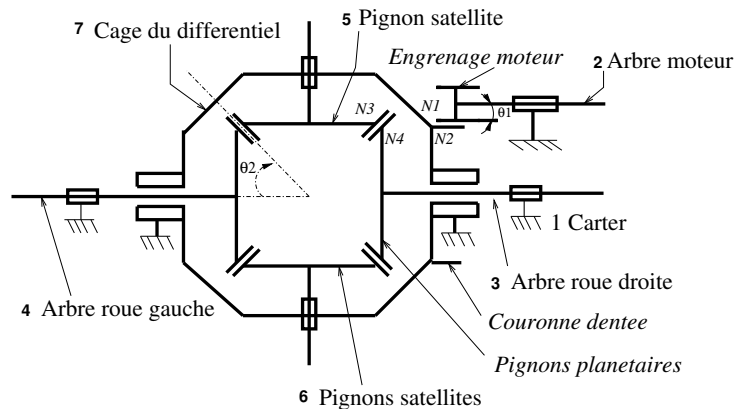


FIGURE 2.11 – Schéma cinématique du différentiel de voiture

La Figure 2.10 présente une photographie du différentiel de voiture choisi pour cette étude. La Figure 2.11, quant à elle, donne son schéma cinématique.

La première étape est de construire le tableau des liaisons. Le différentiel a sept corps ( $N = 7$ ), cinq engrenages ( $L = 5$ ) et six liaisons pivot. En suivant les consignes données dans la section précédente, on obtient la Table 2.3, où  $N_1 = 13$ ,  $N_2 = 65$ ,  $N_3 = 10$ ,  $N_4 = 14$ ,  $\theta_1 = 0$  et  $\theta_2 = \pi/4$

|   | 1   | 2                             | 3                             | 4                             | 5                             | 6                             | 7                            |
|---|-----|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| 1 |     | (p)                           | (p)                           | (p)                           |                               |                               | (p)                          |
| 2 | (p) |                               |                               |                               |                               |                               | $N_1 e^{\theta_1 \sqrt{-1}}$ |
| 3 | (p) |                               |                               |                               | $N_4 e^{-\theta_2 \sqrt{-1}}$ | $N_4 e^{\theta_2 \sqrt{-1}}$  | (p)                          |
| 4 | (p) |                               |                               |                               | $N_4 e^{\theta_2 \sqrt{-1}}$  | $N_4 e^{-\theta_2 \sqrt{-1}}$ | (p)                          |
| 5 |     |                               | $N_3 e^{\theta_2 \sqrt{-1}}$  | $N_3 e^{-\theta_2 \sqrt{-1}}$ |                               |                               | (p)                          |
| 6 |     |                               | $N_3 e^{-\theta_2 \sqrt{-1}}$ | $N_3 e^{\theta_2 \sqrt{-1}}$  |                               |                               | (p)                          |
| 7 | (p) | $N_2 e^{-\theta_1 \sqrt{-1}}$ | (p)                           | (p)                           | (p)                           | (p)                           |                              |

TABLE 2.3 – Tableau des liaisons du différentiel de voiture

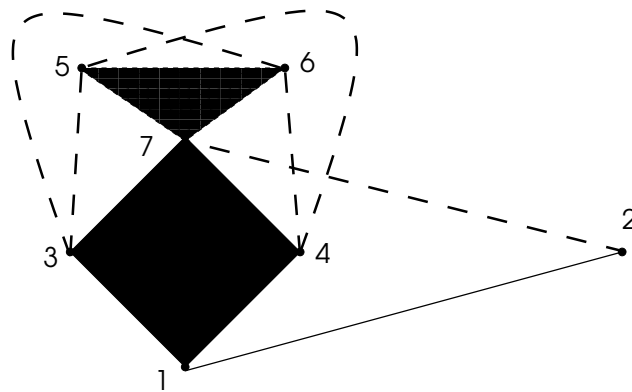


FIGURE 2.12 – Graphe de représentation du différentiel de voiture

| Engrenage | Corps de référence |
|-----------|--------------------|
| 2-7       | 1                  |
| 3-5       | 7                  |
| 3-6       | 7                  |
| 4-5       | 7                  |
| 4-6       | 7                  |

TABLE 2.4 – Engrenages et corps de référence associés pour le différentiel de voiture

La deuxième étape consiste à rechercher les corps de référence des engrenages du mécanisme. Comme mentionné précédemment, il y a cinq engrenages (donc cinq corps de référence à trouver), et six liaisons pivot. Les liaisons engrenages sont les paires : (2,7), (3,5), (3,6), (4,5), et (4,6). Les liaisons pivot sont : (1,2), (1,3), (1,4), (1,7), (3,7), (4,7), (5,7) et (6,7). On constate que les liaisons pivot (1,3), (1,4) et (1,7) sont sur le même niveau. De même, (3,7), (4,7), (5,7) et (6,7) partagent un niveau différent des paires précédemment citées. Le graphe de ce système comporte ainsi deux polygones pleins (liaisons pivot multiples) qui partagent un sommet : le corps 7. La Figure 2.12 donne le graphe de représentation du système.

On déduit de ce graphe les corps de référence de chaque engrenage. La Table 2.4 présente les résultats.

Avec les informations sur les engrenages et les corps de référence, il est possible de construire la matrice adjacente  $M$  :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -78 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 65 \\ 0 & 0 & 14e^{-\pi/4\sqrt{-1}} & 0 & 10e^{\pi/4\sqrt{-1}} & 0 & -14e^{-\pi/4\sqrt{-1}} - 10e^{\pi/4\sqrt{-1}} & \\ 0 & 0 & 14e^{\pi/4\sqrt{-1}} & 0 & 0 & 10e^{-\pi/4\sqrt{-1}} & -14e^{\pi/4\sqrt{-1}} - 10e^{-\pi/4\sqrt{-1}} & \\ 0 & 0 & 0 & 14e^{\pi/4\sqrt{-1}} & 10e^{-\pi/4\sqrt{-1}} & 0 & -14e^{\pi/4\sqrt{-1}} - 10e^{-\pi/4\sqrt{-1}} & \\ 0 & 0 & 0 & 14e^{-\pi/4\sqrt{-1}} & 0 & 10e^{\pi/4\sqrt{-1}} & -14e^{-\pi/4\sqrt{-1}} - 10e^{\pi/4\sqrt{-1}} & \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Comme il a été vu dans l'équation 2.12, il est possible de connaître le nombre de degrés de liberté du différentiel de voiture. Comme ici  $rank(M) = 5$ , on obtient  $N_{ddl} = 2$ . Il y a donc 2 degrés de liberté pour ce système, ce qui correspond bien à sa fonction : le but d'un différentiel de voiture est de faire en sorte que les deux roues de la voiture qui y sont rattachées puissent tourner à des vitesses différentes.  $\Omega_0$  est donc une matrice dont chaque vecteur colonne peut être normalisé par rapport aux corps 3 et 4 : les deux roues de la voiture reliées au différentiel. On obtient alors :

$$\Omega_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2.5 & -2.5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.86e^{0.95\sqrt{-1}} & 0.86e^{-0.95\sqrt{-1}} \\ 0.86e^{-0.95\sqrt{-1}} & 0.86e^{0.95\sqrt{-1}} \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2.5 & -2.5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.5 + 0.7\sqrt{-1} & 0.5 - 0.7\sqrt{-1} \\ 0.5 - 0.7\sqrt{-1} & 0.5 + 0.7\sqrt{-1} \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

On peut donc interpréter ces deux colonnes de  $\Omega_0$  comme étant les rapports de vitesse dans les deux cas où une roue est bloquée est que l'autre peut tourner librement.

Sur cette base, il est possible d'étudier plus en avant certains comportements possibles du mécanisme : cela revient à ajouter des contraintes supplémentaires au système.

- **Rouler tout droit** : Dans ce cas, il est évident que les deux roues tournent à la même vitesse. Dans ce cas, la contrainte supplémentaire est  $\omega_3 = \omega_4 = \omega$ . La matrice  $M$  est alors de rang 6 et il ne reste plus qu'un seul degré de liberté. Dans ce cas,  $\Omega_0$  est le vecteur de rapport des vitesses. On a alors :

$$\Omega = \Omega_0 \begin{bmatrix} \omega \\ \omega \end{bmatrix} = [0 \quad -5 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T \omega \quad (2.24)$$

Dans cette situation, à part le carter qui reste immobile, le mouvement de rotation apporté par le corps 2 (la transmission) se répartit de façon égale entre tous les autres corps du mécanisme.

- **La voiture est sur cric** : Dans ce cas, la contrainte supplémentaire est qu'aucun mouvement ne peut être apporté par la transmission du moteur (le corps 2). Cela se traduit par :  $\omega_2 = 0$ . Alors, les deux roues tournent en sens inverse. En effet, on obtient le vecteur des rapports de vitesse suivant :

$$\Omega_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1.4\sqrt{-1} \\ -1.4\sqrt{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Il est donc évident que  $\omega_3 = -\omega_4 = \omega$ .

- **Un virage** : Une voiture tourne à  $V = 30 \text{ km/h} = 8.33 \text{ m/s}$  dans un virage à droite, d'un rayon  $R = 15 \text{ m}$ . Les roues ont pour diamètre  $D = 0.60 \text{ m}$  et sont espacées de  $L = 2 \text{ m}$ .

Dans ce cas, on obtient les vitesses angulaires des deux roues  $\omega_3$  et  $\omega_4$  par les équations :

$$\omega_3 = V \frac{R - L/2}{R} \frac{2}{D} \quad (2.26)$$

$$\omega_4 = V \frac{R + L/2}{R} \frac{2}{D} \quad (2.27)$$

En utilisant les valeurs numériques mentionnées précédemment, on obtient :  $\omega_3 = 25.9 \text{ rad/s}$  et  $\omega_4 = 29.6 \text{ rad/s}$ . On utilise donc la matrice des rapports de vitesse  $\Omega_0$  en imposant les vitesses des corps d'entrée 3 et 4 comme suit :

$$\Omega = \Omega_0 \begin{bmatrix} 26 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -140 \\ 26 \\ 30 \\ 28.14e^{-0.10\sqrt{-1}} \\ 28.14e^{0.10\sqrt{-1}} \\ 28 \end{bmatrix} \quad (\text{rad/s}) . \quad (2.28)$$

| Fréquence | Paire        | Description                                   | Nb de sources |
|-----------|--------------|---|---------------|
| 381.3     | (1,7)        | Défaut sur la bague intérieure du roulement 1 | 1             |
| 318.7     |              | Défaut sur la bague extérieure du roulement 1 | 1             |
| 310.6     |              | Défaut sur une bille du roulement 1           | 25            |
| 381.3     |              | Défaut sur la bague intérieure du roulement 2 | 1             |
| 318.7     |              | Défaut sur la bague extérieure du roulement 2 | 1             |
| 310.6     |              | Défaut sur une bille du roulement 2           | 25            |
| 1820      | (2,7)        | Fréquence d'engrènement                       | 1             |
| 140       |              | Défaut sur une dent du corps 2                | 13            |
| 28        |              | Défaut sur une dent du corps 7                | 65            |
| 28        | (3,5), (3,6) | Fréquence d'engrènement                       | 1             |
| 2         | (4,5), (4,6) | Défaut sur une dent du corps 3 et 4           | 14            |
| 2.8       |              | Défaut sur une dent du corps 5 et 6           | 10            |

TABLE 2.5 – Liste de toutes les fréquences de défaut possibles pour le différentiel de voiture

Enfin, pour chacune de ces situations, il est possible de calculer l'ensemble des fréquences de défaut de contact. Il suffit pour cela, dans chaque cas, d'utiliser le vecteur  $\Omega$  calculé et les Equations (2.16), (2.17) et (2.19), (2.20), (2.21). Seul le cas du "virage" est proposé en application numérique. Ces résultats sont donnés dans la Table 2.5. Pour le roulement (1, 7), les caractéristiques sont :  $D_m = 54 \text{ mm}$ ,  $d_b = 5 \text{ mm}$ ,  $Z = 25$  et  $\alpha = 15^\circ$ .

Cet exemple du différentiel de voiture a donc permis la démonstration de la méthode sur un système présentant un double intérêt : il possède des axes d'entrée et de sortie non colinéaires et présente plusieurs degrés de liberté, et donc plusieurs modes de fonctionnement possibles.



### 2.3.2 Exemple 2 : La Boite de Transmission Principale (BTP) d'un hélicoptère

La Boite de Transmission Principale (BTP) permet la transmission du couple moteur depuis les turbines, jusqu'au rotor principal et au rotor de queue. C'est un système qui a une entrée (l'arrivée moteur) et deux sorties : l'une colinéaire à l'entrée (vers le rotor de queue), l'autre non colinéaire (vers le rotor principal). On s'intéresse à ce mécanisme car il est au centre des études de cette thèse. En particulier, la BTP d'une Alouette III est étudiée car c'est ce modèle qui a été utilisé pour la mise en place d'un banc d'essai. Il est donc indispensable de connaître la liste des fréquences propres de défauts de contact, afin de pouvoir faire l'analyse des signaux fournis par ce banc.

La BTP d'Alouette III est composée de deux engrenages coniques, de deux trains épicycloïdaux et de nombreuses liaisons pivot.

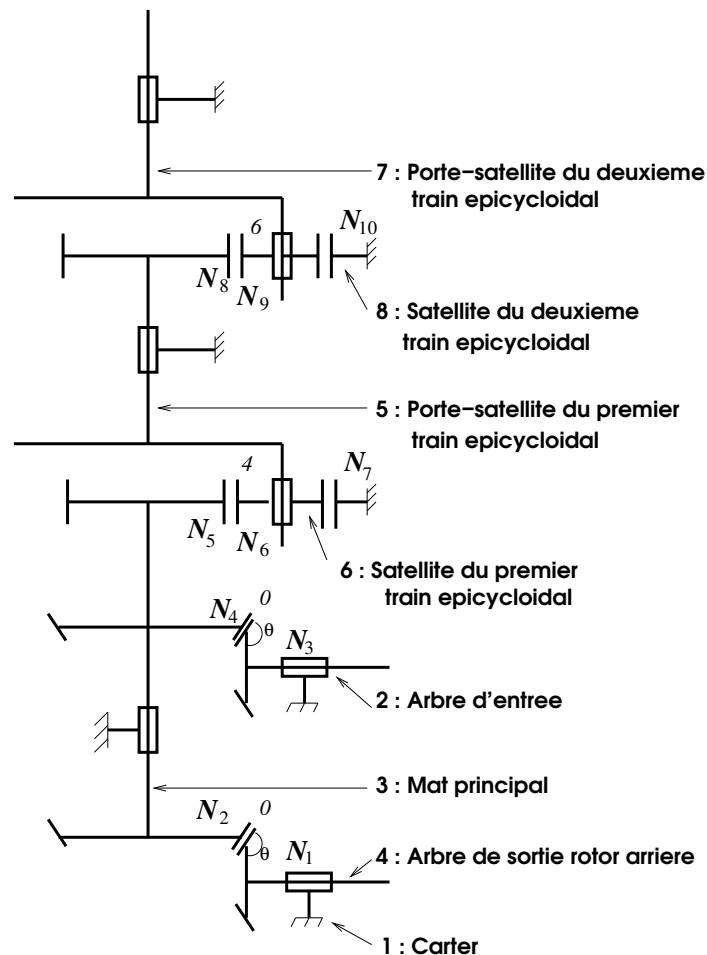


FIGURE 2.13 – Schéma cinématique de la BTP d'Alouette III

La Figure 2.13 donne le plan cinématique d'un BTP d'Alouette III, avec  $N_1 = 20$ ,

$N_2 = 17$ ,  $N_3 = 20$ ,  $N_4 = 41$ ,  $N_5 = 51$ ,  $N_6 = 21$ ,  $N_7 = 93$ ,  $N_8 = 51$ ,  $N_9 = 21$ ,  $N_{10} = 93$  et  $\theta = \pi/4$ .

|   |       |                          |                           |                           |       |        |     |           |
|---|-------|--------------------------|---------------------------|---------------------------|-------|--------|-----|-----------|
|   | 1     | 2                        | 3                         | 4                         | 5     | 6      | 7   | 8         |
| 1 |       | (p)                      | (p)                       | (p)                       | (p)   | $-N_7$ | (p) | $-N_{10}$ |
| 2 | (p)   |                          | $N_3 e^{-\pi/4\sqrt{-1}}$ |                           |       |        |     |           |
| 3 | (p)   | $N_4 e^{\pi/4\sqrt{-1}}$ |                           | $N_2 e^{-\pi/4\sqrt{-1}}$ |       | $N_5$  |     |           |
| 4 | (p)   |                          | $N_1 e^{\pi/4\sqrt{-1}}$  |                           |       |        |     |           |
| 5 | (p)   |                          |                           |                           |       | (p)    |     | $N_8$     |
| 6 | $N_6$ |                          | $N_6$                     |                           | (p)   |        |     |           |
| 7 | (p)   |                          |                           |                           |       |        |     | (p)       |
| 8 | $N_9$ |                          |                           |                           | $N_9$ |        | (p) |           |

TABLE 2.6 – Tableau des liaisons de la BTP d'Alouette III

Ce plan cinématique permet l'obtention du tableau des liaisons  $T$ , donné dans la Table 2.6.

L'étape suivante consiste à rechercher les corps de référence du système. La BTP est un système à huit corps ( $N = 8$ ), six engrenages ( $L = 6$ ) et sept liaisons pivot. Sur le plan cinématique, on se rend compte que les liaisons pivot (1,3), (1,5) et (1,7) sont sur le même niveau. Les autres liaisons pivot ((1,2),(1,4),(5,6) et (7,8)) sont toutes sur des niveaux différents. Il n'y a donc qu'une seule liaison pivot multiple dans ce système, et un seul polygone plein reliant les points 1,3,5 et 7. Les corps de référence sont obtenus en suivant la procédure proposée dans le paragraphe 2.2.2. La Table 2.7 donne les corps de référence obtenus pour chacun des six engrenages du système.

| Paire engrenante | Corps de référence |
|------------------|--------------------|
| 1-6              | 5                  |
| 1-8              | 7                  |
| 2-3              | 1                  |
| 3-4              | 1                  |
| 3-6              | 5                  |
| 5-8              | 7                  |

TABLE 2.7 – Engrenages et corps de référence de la BTP d'Alouette III

Avec le tableau des liaisons et les corps de référence, la matrice adjacente  $M$

peut être calculée :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -93 & 0 & 0 & 0 & 0 & 72 & 21 & 0 & 0 \\ -93 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 72 & 21 \\ -20e^{-\pi/4\sqrt{-1}} - 41e^{\pi/4\sqrt{-1}} & 20e^{-\pi/4\sqrt{-1}} & -41e^{\pi/4\sqrt{-1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -17e^{-\pi/4\sqrt{-1}} - 20e^{\pi/4\sqrt{-1}} & 0 & 17e^{-\pi/4\sqrt{-1}} & 20e^{\pi/4\sqrt{-1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 51 & 0 & -72 & 21 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 51 & 0 & -72 & 21 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

La matrice  $M$  est de rang 7. Il y a donc confirmation que le système n'a qu'un seul degré de liberté (voir Equation (2.12)). Le corps d'entrée de la BTP est l'arbre de transmission issu du moteur, c'est à dire le corps 2. On peut donc calculer le vecteur des rapports de vitesse  $\Omega_0$  en exécutant le noyau de la matrice adjacente  $M$  et le normaliser par rapport au corps 2. On obtient :

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.488e^{\pi/2\sqrt{-1}} \\ -0.415 \\ 0.173e^{\pi/2\sqrt{-1}} \\ -0.592e^{\pi/2\sqrt{-1}} \\ 0.061e^{\pi/2\sqrt{-1}} \\ -0.210e^{\pi/2\sqrt{-1}} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

A partir de ce vecteur des rapports de vitesse, il est possible de trouver toutes les fréquences de défaut de contact. Les données sur les roulements n'étant pas disponibles, seuls les défauts de contact dans les engrenages sont présentés ici. Ces résultats sont donc présentés dans la Table 2.8, en supposant que la vitesse d'entrée du système est  $\omega_2 = 1 \text{ rad/s}$ . L'avantage de cette présentation est que pour toute autre vitesse de l'arbre d'entrée, il suffit de multiplier l'ensemble des valeurs du tableau par  $\omega_2$ .

## 2.4 Algorithme disponible

La méthode décrite dans ce chapitre a été implémentée sous Matlab. L'algorithme suit les différentes étapes précédemment décrites :

- Création du tableau des liaisons  $T$ ,
- Recherche des corps de référence de chaque engrenage,

| Fréquence<br>(rad/s)    | Paire | Description   | Nbr de<br>sources |
|-------------------------|-------|---|-------------------|
| 16.07<br>0.173<br>0.803 | (1,6) | Fréquence d'engrènement<br>Défaut sur une dent du corps 1<br>Défaut sur une dent du corps 6 | 93<br>20          |
| 5.69<br>0.061<br>0.285  | (1,8) | Fréquence d'engrènement<br>Défaut sur une dent du corps 1<br>Défaut sur une dent du corps 8 | 93<br>20          |
| 20<br>1<br>0.488        | (2,3) | Fréquence d'engrènement<br>Défaut sur une dent du corps 2<br>Défaut sur une dent du corps 3 | 20<br>41          |
| 8.29<br>0.488<br>0.415  | (3,4) | Fréquence d'engrènement<br>Défaut sur une dent du corps 3<br>Défaut sur une dent du corps 4 | 17<br>20          |
| 16.07<br>0.315<br>0.803 | (3,6) | Fréquence d'engrènement<br>Défaut sur une dent du corps 3<br>Défaut sur une dent du corps 6 | 51<br>20          |
| 5.69<br>0.112<br>0.285  | (5,8) | Fréquence d'engrènement<br>Défaut sur une dent du corps 5<br>Défaut sur une dent du corps 8 | 51<br>20          |

TABLE 2.8 – Liste des fréquences de défauts possibles pour la BTP d'Alouette III

- Création de la matrice adjacente  $M$ ,
- Calcul de la matrice des rapports de vitesse (ou du vecteur si le système n'a qu'un seul degré de liberté),
- Calcul de la liste de toutes les fréquences de défauts de contact du mécanisme.

L'Annexe A donne une description des différentes fonctions intervenant dans cet algorithme, et une explication sur la construction du fichier de données ainsi que une application aux exemples déjà exposés.

Les fichiers nécessaires au fonctionnement de cet algorithme ainsi que le manuel d'utilisation peuvent être téléchargés sur la page web : <http://julie.penaud.chez.com/index.html>



# Méthodes de traitement des signaux vibratoires

---

## Sommaire

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>3.1</b> | <b>Stationnarité, Non-Stationnarité et Cyclostationnarité . . .</b> | <b>37</b> |
| <b>3.2</b> | <b>Echantillonnage angulaire . . . . .</b>                          | <b>40</b> |
| <b>3.3</b> | <b>Signaux stationnaires et transformée de Fourier . . . . .</b>    | <b>41</b> |
| <b>3.4</b> | <b>Méthodes temps-fréquence . . . . .</b>                           | <b>44</b> |
| 3.4.1      | Méthodes linéaires (ou atomiques) . . . . .                         | 44        |
| 3.4.2      | Les méthodes quadratiques . . . . .                                 | 48        |
| <b>3.5</b> | <b>Méthodes statistiques . . . . .</b>                              | <b>51</b> |
| <b>3.6</b> | <b>Analyse cepstrale . . . . .</b>                                  | <b>53</b> |
| <b>3.7</b> | <b>Méthode cyclostationnaire . . . . .</b>                          | <b>54</b> |
| <b>3.8</b> | <b>De l'analyse spectrale aux filtres de Kalman . . . . .</b>       | <b>55</b> |

---

Dans le Chapitre 2, nous avons développé un outil de modélisation cinématique de mécanismes complexes. L'objectif de cet outil était de récupérer une liste des différentes fréquences de défauts de contact possibles dans le mécanisme. Dans ce Chapitre, on s'intéresse aux différentes méthodes existant pour traiter les signaux vibratoires de machines tournantes. Pour commencer, on exposera les concepts de stationnarité, non-stationnarité et cyclostationnarité, utiles à l'analyse de signaux vibratoires. Puis nous aborderons la méthode d'échantillonnage angulaire, qui, comme nous l'avons présenté dans l'introduction, permet de s'abstraire des problèmes de fluctuations de la rotation de l'arbre d'entrée du système.

Enfin, après avoir présenté quelques méthodes efficaces en matière de traitement des signaux vibratoires, nous présenterons une rapide analyse spectrale des signaux vibratoires issus du banc d'essai mis en place pendant cette thèse. Nous verrons ainsi les raisons qui ont poussé à la recherche d'une méthode supplémentaire basée sur les filtres de Kalman.

## 3.1 Stationnarité, Non-Stationnarité et Cyclostationnarité

Une des caractéristiques intéressantes d'une série temporelle est la stationnarité. Elle informe sur la variabilité de la série dans le temps. En clair, elle nous indique

s'il est possible d'étudier notre système indépendamment de l'instant  $t$  auquel on l'observe.

#### Définition forte

Soit un processus temporel à valeurs réelles et à temps discret  $Z_1, Z_2, \dots, Z_t$ . Il est dit **stationnaire** si

$$f(Z_1, Z_2, \dots, Z_t) = f(Z_{1+k}, Z_{2+k}, \dots, Z_{t+k}) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

où  $f$  est la fonction de densité de probabilité du processus.

On peut interpréter cette définition comme suit : si le processus est stationnaire, alors ses propriétés ne sont pas affectées par un changement de repère temporel.

Cependant, il est difficile de connaître la loi de probabilité d'un processus. Un autre moyen de connaître la stationnarité d'une série temporelle a donc été développé.

#### Définition faible

Soit un processus temporel à valeurs réelles et en temps discret  $Z_1, Z_2, \dots, Z_t$ . Il est dit stationnaire au sens faible (ou de second ordre) si

$$\begin{aligned} E[Z_i] &= \mu, \forall i = 1 \dots t \\ \text{Var}[Z_i] &= \sigma^2 \neq \infty, \forall i = 1 \dots t \\ \text{Cov}[Z_i, Z_{i-k}] &= f(k) = \rho_k \forall i = 1 \dots t, \forall k = 1 \dots t \end{aligned} \quad (3.2)$$

On peut traduire cette expression comme suit :

- la première condition stipule que l'espérance est constante au cours du temps,
- la seconde que la variance est constante au cours du temps et non infinie,
- la troisième proposition indique que la fonction d'autocorrélation du signal avec lui même ne dépend que de  $k$ .

Si une ou plus de ces conditions n'est pas remplie, la série est dite **non-stationnaire**.

Un signal non stationnaire peut cependant présenter un autre type de caractéristique : la **cyclostationnarité**. Cette propriété a déjà été mentionnée dans le Chapitre 1, mais doit être un peu plus détaillée. Il est donc utile de rappeler que la définition au sens large est qu'un signal cyclostationnaire est caractérisé par des propriétés statistiques variant périodiquement par rapport à une variable générique choisie (qui n'est pas forcément le temps). De façon plus formelle, un processus stochastique  $\{x(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  est dit cyclostationnaire au sens strict, de cycle  $T$  si sa densité de probabilité  $p_x(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$  est périodique en  $t$  de période  $T$ , c'est à dire :

$$p_x(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = p_x(x_1, \dots, x_n; t_1 + T, \dots, t_n + T) \quad (3.3)$$



Il est possible de rentrer un peu plus dans le détail [Antoni 2002a], [Antoni 2002b]. Dans ce cas, on distingue plusieurs degrés de cyclostationnarités :

- **Cyclostationnarité d'ordre 1 (CS1)** : Cela caractérise des processus dont la moyenne est périodique. Pour un processus stochastique  $\{x(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ , cela signifie :

$$m_X(t) = E[X(t)] = m_X(t + T) \quad (3.4)$$

- **Cyclostationnarité d'ordre 2 (CS2)** : Dans ce cas, c'est la fonction d'autocovariance qui présente une périodicité :

$$A_{XX}(t, \tau) = E[X(t-\tau/2)X(t+\tau/2)] - m_X(t-\tau/2)m_X(t+\tau/2) = A_{XX}(t+T, \tau) \quad (3.5)$$

- **Cyclostationnarité d'ordre  $n$**  : pour qu'un signal soit cyclostationnaire à l'ordre  $n$ , il faut que tous ses cumulants d'ordre  $n$  soient périodiques. Si tous les cumulants sont périodiques (et ce, jusqu'à l'infini), alors le signal est cyclostationnaire au sens strict, comme décrit précédemment. Si le signal est cyclostationnaire à l'ordre 1 ou 2 (CS1 ou CS2), alors il est dit *cyclostationnaire au sens large*.

**Remarque :**

Dans la littérature, il est possible de trouver deux définitions différentes d'un processus cyclostationnaire d'ordre  $n$ . En effet, certains articles font référence à une périodicité présente dans les **moments** d'ordre  $n$  et non dans les **cumulants**.

Cette difficulté peut s'expliquer par la différenciation entre les cyclostationnarités d'ordre purs et impurs. En effet, avec la définition à base de moments, un signal cyclostationnaire à l'ordre 1 (CS1), est CS $_n$  à tous les ordres. Ceci est justifié par le fait que tous les moments d'ordre supérieur à 1 sont périodiques, à cause de la périodicité du moment d'ordre 1 [Antoni 2004]. Dans ce cas, la cyclostationnarité à l'ordre 1 est dite *pure* alors que celle des ordres supérieurs (qui ne dépend que de la périodicité de l'ordre 1) est dite *impure*. Par exemple, une sinusoïde simple présente une cyclostationnarité pure au premier ordre et impure à tous les autres ordres.

Pour éviter ce type de confusion, Gardner et Spooner ont introduit l'idée de l'utilisation des cumulants au lieu des moments dans [Gardner 1994]. Le  $n$ -ième cumulant soustrait tous les termes *impurs* induits par les ordres inférieurs. Il est donc possible de savoir si le processus est un *pur cyclostationnaire à l'ordre  $n$*

**Signaux vibratoires de machines tournantes et stationnarité**

Comme il a été mentionné précédemment (dans le Chapitre 1), les signaux vibratoires de machines tournantes peuvent être classés dans la famille des signaux

cyclostationnaires. Ils peuvent donc être traités par des méthodes de traitement adaptées à cette classe de signaux.

De plus, il existe un cas particulier pour lequel un signal vibratoire de machine tournante peut être assimilé en première approximation à un signal stationnaire. En effet, tous les défauts présents dans le système apparaissent à une fréquence donnée qu'il est possible de calculer et qui dépend de la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée du système (ou éventuellement d'un autre corps pris comme référence). Ainsi, si cet arbre d'entrée a une vitesse angulaire constante au cours du temps, toutes les composantes fréquentielles du signal restent constantes au cours du temps. Le signal pourra donc être assimilé à un signal stationnaire.

Enfin, même si le signal est cyclostationnaire, rien n'empêche son traitement par des techniques développées pour des signaux non-stationnaires.

Par la suite, nous présentons des méthodes de traitement du signal pouvant être appliquées à des signaux d'une ou plusieurs de ces catégories.

### 3.2 Echantillonnage angulaire

Comme il a été mentionné dans l'introduction, dans le cadre de signaux cyclostationnaires (provenant de machines tournantes par exemple), il peut être utile de s'intéresser à des signaux échantillonnés angulairement et non pas temporellement. En effet, dans ces signaux vibratoires, les composantes fréquentielles sont directement dépendantes de la rotation d'un axe référent (le plus souvent l'arbre d'entrée du mécanisme). Si cette dernière n'est pas parfaitement régulière, la cyclostationnarité du signal par rapport à la variable temporelle n'existe pas. En revanche, grâce à un échantillonnage angulaire, on peut conserver la cyclostationnarité du signal puisque la cyclostationnarité angulaire est intrinsèque à ce type de signaux.

Ainsi, dans le cas des signaux vibratoires de la BTP d'Alouette III placée au cœur de notre banc d'essais (voir Chapitre 5), nous nous sommes intéressés à l'échantillonnage angulaire. Il aurait été possible de réaliser cet échantillonnage directement sur le banc à l'aide de codeurs optiques. Cependant la mise en place d'un tel système étant complexe d'un point de vue technique, il a été choisi de faire un échantillonnage temporel sur le banc d'essai et de réaliser un ré-échantillonnage angulaire informatiquement, a posteriori.

Pour ce faire, nous avons utilisé la connaissance de la vitesse angulaire de l'arbre d'entrée, signal enregistré avec une grande précision sur le banc d'essai. En intégrant ce signal vitesse exprimé en degré, on obtient un signal que nous appellerons *signal position* exprimé en degré. Le ré-échantillonnage angulaire consiste à choisir un pas  $p$  exprimé en degré et de prélever un point du signal vibratoire tous les  $p$  degrés du

signal position.

Le concept de ré-échantillonnage est donc assez simple ; il faut cependant faire attention à un écueil : le risque de sous-échantillonnage. En effet, comme pour l'échantillonnage temporel, il faut respecter la règle de Shannon. Celle-ci édicte que, pour ne pas perdre d'information dans le signal au cours de l'échantillonnage, il faut que la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  respecte l'inégalité suivante :

$$f_e \geq 2f_{max} \quad (3.6)$$

où  $f_{max}$  est la fréquence la plus haute présente dans le signal.

Dans le cadre d'un échantillonnage angulaire, il faut veiller à ce que cette règle soit respectée. C'est à dire que le ré-échantillonnage angulaire à la cadence  $p^\circ$  de l'arbre d'entrée ne permettra pas l'analyse de défauts dont la fréquence angulaire est supérieure à  $180/p$ .

### 3.3 Signaux stationnaires et transformée de Fourier

Le traitement d'un signal par Transformée de Fourier est la méthode la plus répandue et la plus simple pour accéder au contenu fréquentiel d'un signal. Elle repose sur un concept de fréquence universel. De plus, ses avantages ont mené au développement de nombreux algorithmes et logiciels (dont le célèbre algorithme Fast Fourier Transform FFT) facilitant le travail avec cette méthode.

La transformée de Fourier  $X(f)$  d'un signal à temps continu  $x(t)$  se définit comme suit :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.7)$$

Il est possible de reconstruire  $x(t)$  à partir de  $X(f)$ , sans perte d'information (voir [Castanié 2003] pour démonstration) grâce à la transformée de Fourier inverse :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad (3.8)$$

Dans la plupart des cas, le cadre de travail fait qu'on transforme le signal continu  $x(t)$  en un signal échantillonné à la période  $T_e$ . Ce signal  $x_e(k)$  est alors un signal à temps discret défini pour tout  $k$  tel que :

$$x_e(k) = x(kT_e) \quad (3.9)$$

Il existe alors une définition de la transformée de Fourier d'un signal à temps discret ainsi que sa transformée inverse :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-j2\pi fk} \quad (3.10)$$

$$x(k) = \sum_{f=-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi fk} \quad (3.11)$$

Dans la pratique, on ne possède pas de signaux pour un temps infini. On ne l'enregistre que pour un nombre fini  $N$  de points  $k$ . On a alors le signal  $x_d(k) = (x_e(k))_{0 \leq k \leq N-1}$ . Il est usuellement proposé d'approcher la transformée de Fourier  $X(f)$  donnée dans l'Equation(3.10) par la somme finie suivante :

$$X_N(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j2\pi fk} \quad (3.12)$$

Cette approximation n'est pas sans poser de problème. En effet, le signal  $x(t)$  ne peut plus être reconstruit sans perte d'informations. De plus, cela revient à multiplier le signal  $x_e(k)$  par une porte  $1_{0,N-1}$  (valant 1 pour tout  $k \in [0, N-1]$  et 0 ailleurs). Or le contenu fréquentiel de cette porte est non nul et introduit des perturbations dans la lecture de la transformée de Fourier du signal  $x_e(k)$ .

A partir de la Transformée de Fourier, on peut définir la densité spectrale de puissance du signal, plus généralement appelée *spectre* du signal comme suit :

$$S_{xx}(f) = \frac{1}{Fe} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E[|X_N(f)|^2] \quad (3.13)$$

D'après le théorème de Wiener-Kintchine, il est possible d'exprimer cette densité spectrale de puissance comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du signal  $x$ , notée  $R_x(\tau)$ .

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (3.14)$$

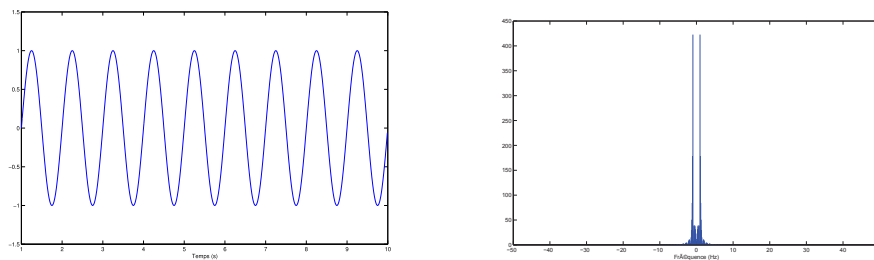
avec la fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  définie comme suit :

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] \quad (3.15)$$

Les avantages cités au début de ce paragraphe, comme l'universalité du concept de fréquence et le développement d'algorithmes rapides, ainsi que la facilité d'expression du spectre du signal contrebalancent l'inconvénient de la multiplication du

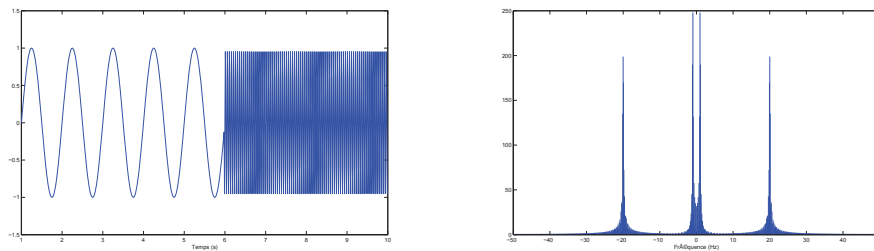
signal par une porte. Cette méthode est donc très largement utilisée pour les signaux stationnaires. Nous allons voir que dans le cadre de signaux non-stationnaires, les résultats sont à prendre avec beaucoup plus de précautions.

Dans le cas où le signal n'est pas stationnaire, la Transformée de Fourier ne donne pas de résultats lisibles car les différents contenus fréquentiels se superposent. Prenons l'exemple d'un signal sinusoïdal simple  $s$ , de fréquence  $f_1 = 1Hz$ . La figure 3.1 donne la représentation temporelle et la transformée de Fourier de  $s$ . Elle a été obtenue avec une fréquence d'échantillonnage  $f_e = 100Hz$  et une durée totale d'acquisition de  $horizon = 10s$



(a) Représentation temporelle du signal  $s$       (b) Transformée de Fourier du signal  $s$

FIGURE 3.1 – Représentation temporelle et transformée de Fourier d'une sinusoïde simple de fréquence  $f_1 = 1Hz$

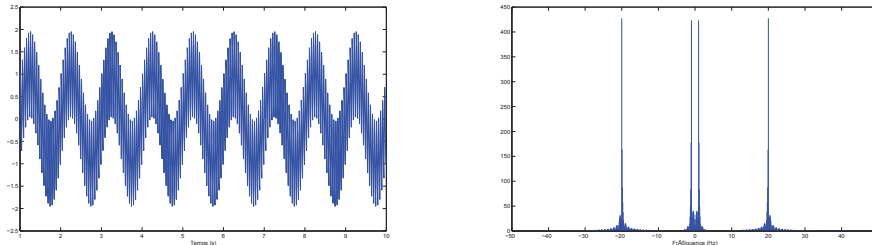


(a) Représentation temporelle du signal  $s_{12}$       (b) Transformée de Fourier du signal  $s_{12}$

FIGURE 3.2 – Représentation temporelle et transformée de Fourier du signal  $s_{12}$  composé de deux sinusoïdes simples de fréquence  $f_1 = 1Hz$  et  $f_2 = 20Hz$  mises bout à bout

En revanche pour un signal non-stationnaire tel que celui présenté dans la figure 3.2, il peut y avoir certaines confusions. En effet, ce signal  $s_{12}$  est composé d'une sinusoïde de fréquence  $f_1 = 1Hz$  sur sa première moitié et de fréquence  $f_2 = 20Hz$  sur sa deuxième moitié. La figure 3.3 présente quant à elle, un signal  $s_2$  composé de la somme de deux sinusoïdes de fréquences  $f_1$  et  $f_2$ . Les figures 3.2b et 3.3b montrent que ces deux signaux partagent la même transformée de Fourier.

La transformée de Fourier peut ainsi entraîner des confusions quant au contenu fréquentiel d'un signal lorsqu'il n'est pas stationnaire. Pour cette raison, on réserve cette méthode d'analyse à des signaux stationnaires.



(a) Représentation temporelle du signal  $s_2$       (b) Transformée de Fourier du signal  $s_2$

FIGURE 3.3 – Représentation temporelle et transformée de Fourier du signal  $s_2$  composé de la somme deux sinusoïdes simples de fréquence  $f_1 = 1Hz$  et  $f_2 = 20Hz$

### 3.4 Méthodes temps-fréquence

Dans de nombreux cas de signaux non-stationnaires, il peut être instructif de connaître la façon dont se répartit le contenu fréquentiel dans le temps. C'est pour cette raison que se sont développées des méthodes dites *Temps-Fréquence* qui permettent de mettre en relation ces deux notions et leurs interactions dans un signal non-stationnaire [Hammond 1996].

Ces méthodes peuvent être classées en deux grandes familles :

- les méthodes linéaires (ou atomiques) : le principe suit celui de l'analyse de Fourier, c'est à dire que le but est de considérer le signal comme une superposition linéaire de signaux élémentaires (qui n'ont d'ailleurs pas forcément d'existence physique),
- les méthodes quadratiques : par opposition aux représentations linéaires, l'objet d'une distribution quadratique est de répartir l'énergie du signal sur les deux variables de description (temps et fréquence).

#### 3.4.1 Méthodes linéaires (ou atomiques)

Comme mentionné ci-dessus, le principe des méthodes dites linéaires ou atomiques est de considérer le signal comme superposition linéaire de signaux élémentaires ("atomes"). Dans le cadre de la représentation temps fréquence, il est nécessaire que ces signaux élémentaires soient localisés en temps et en fréquence et que l'on puisse passer de l'un à l'autre par des transformations.

Il faut tout de même préciser que, comme dans la représentation de Fourier pour les signaux stationnaires, ces "atomes" n'ont pas d'existence physique ; ils ne sont qu'un outil de représentation.

#### Fourier à court terme

C'est l'idée première que l'on peut avoir lorsque l'on cherche à passer du stationnaire au non stationnaire, à savoir réaliser un spectre de Fourier sur une petite fenêtre temporelle et la faire glisser sur le signal. On tente donc de calculer le spectre d'une petite portion du signal, centrée en un instant particulier et de le faire pour chaque instant [W.Koenig 1946]. De façon plus formelle, cela revient à décomposer le signal sur des paquets d'ondes localisés de la forme :

$$h_{t\nu}(s) = h(s - t)e^{2i\pi\nu s} \quad (3.16)$$

On projette donc le signal sur des "atomes temps-fréquence" obtenus à partir d'une fenêtre unique  $h(t)$ , en effectuant une translation en temps et une modulation. On a donc bien une représentation mixte en temps et en fréquence qui peut être exprimée plus formellement comme suit :

$$F_x(t, \nu) = \int x(s)h(s - t)e^{-i2\pi\nu s} ds \quad (3.17)$$

Cependant, cette méthode présente les mêmes inconvénients que celle de Fourier pour les signaux stationnaires.

#### Les ondelettes

Un des derniers développements dans ce domaine concerne la possible utilisation des ondelettes pour l'analyse temps-fréquence de signaux non stationnaires [Daubechies 1990]. En effet, nous verrons que cette méthode permet de s'affranchir des limitations de la dualité temps-fréquence. Il faut toutefois noter que l'analyse à partir d'ondelettes est une analyse temps-échelle. En effet, on utilise un facteur  $a$  appelé "facteur d'échelle". Cependant, on peut faire un lien entre échelle et fréquence si cela est nécessaire. Il suffit pour cela d'admettre que la variation du paramètre d'échelle permet d'explorer l'axe des fréquences.

Le principe de la transformation en ondelettes est de décomposer le signal sur une famille de fonctions qui sont obtenues par dilatation et translation d'une unique fonction ("l'ondelette mère")  $\psi(t)$  [Meyer 1992, Mallat 1989]. On peut donc définir la transformée en ondelettes d'un signal comme suit :

$$WT_x(t, a) = \int x(\tau)\sqrt{a}\psi(a(\tau - t))d\tau \quad (3.18)$$

où  $a$  est donc le paramètre d'échelle qui produit la dilatation,  $t$  le temps et  $\psi(t)$ , l'ondelette mère. La famille d'ondelette correspondant à cette ondelette mère est :

$$(\sqrt{a}\psi(s(\tau - t)))_{(t,a)\in\mathbb{R}^2} \quad (3.19)$$

Pour toute fonction appartenant à  $\mathfrak{L}_2(\mathbb{R})$  (l'ensemble des fonctions à une dimension, de carré intégrable), on peut établir une famille d'ondelettes en utilisant la formule citée précédemment.

La reconstruction du signal à partir de sa décomposition en ondelettes se fait selon l'équation :

$$x(\tau) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} WT_x(t, a) \sqrt{a} \psi(a(\tau - t)) da dt \quad (3.20)$$

où

$$C_\psi = \int_0^{\infty} \frac{|\Psi(f)|^2}{f} df \quad (3.21)$$

et  $\Psi(f)$  est la transformée de Fourier de  $\psi(\tau)$ . Afin que la reconstruction du signal  $x(\tau)$  puisse se faire, il suffit que  $C_\psi$  satisfasse :

$$C_\psi < +\infty \quad (3.22)$$

Il faut noter que le pavage du plan temps-échelle engendré par la transformée en ondelettes n'est pas régulier (contrairement à celui de la transformée de Fourier). Ainsi plus le facteur de dilatation  $a$  est élevé, plus l'ondelette est étendue selon l'axe du temps et plus elle est concentrée selon l'axe des fréquences. Par conséquent, la précision en temps et en fréquence est variable en fonction du facteur d'échelle  $a$ . La résolution temporelle est donc plus importante pour les hautes fréquences que pour les basses fréquences. Inversement, la résolution fréquentielle est plus importante pour les basses fréquences que pour les hautes fréquences.

Dans la suite de ce paragraphe, on donne quelques exemples de fonctions célèbres d'ondelettes.

#### *Chapeau mexicain*

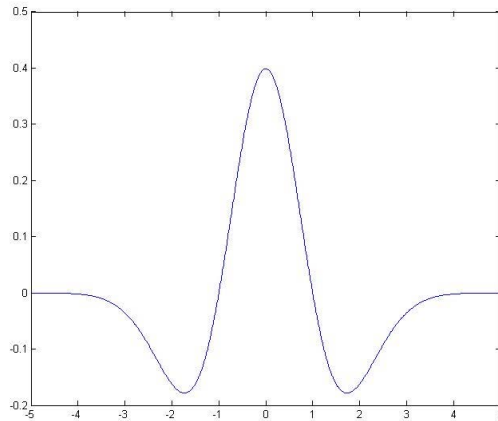
Cette fonction est en fait une dérivée seconde de gaussienne. Elle tient son nom de son aspect, comme on peut le voir sur la figure 3.4. L'ondelette mère est définie comme suit :

$$\psi(t) = \frac{1 - (\frac{t}{\sigma})^2}{\sqrt{(2\pi\sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{\sigma})^2} \quad (3.23)$$

#### *Ondelette de Haar*

C'est là aussi une des familles d'ondelettes les plus simples. Elle est présentée dans la Figure 3.5. Elle se définit selon l'ondelette mère :



FIGURE 3.4 – Chapeau mexicain, un exemple simple d'ondelette (ici  $\sigma = 1$ )

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & \text{pour } 1/2 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.24)$$

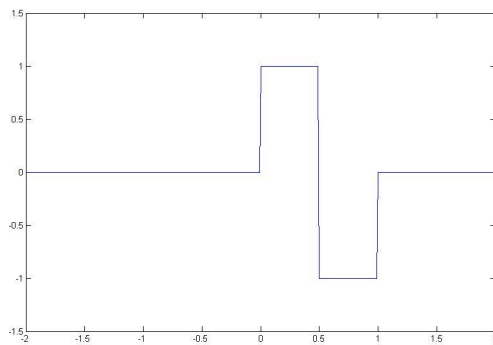


FIGURE 3.5 – Ondelette de Haar (ondelette mère)

Il faut savoir que de nombreuses familles d'ondelettes existent et couvrent un large spectre de caractéristiques mathématiques.

Les difficultés de cette méthode résident principalement dans le choix de la famille d'ondelettes utilisée pour un signal donné, ainsi que dans les théories mathématiques qui la supportent. Des applications de cette méthode aux signaux vibratoires peuvent être trouvées dans la littérature [Wang 1996].

### 3.4.2 Les méthodes quadratiques

Dans le cadre des méthodes quadratiques, on s'intéresse à la densité spectrale de puissance d'un signal afin d'observer le comportement fréquentiel d'un signal en fonction du temps. Comme il a été vu précédemment, une autre façon d'aborder l'analyse spectrale est en voyant un spectre comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation.

Pour un signal non-stationnaire, on peut développer le concept d'une fonction d'autocorrélation locale : c'est une fonction qui quantifie le comportement du produit  $x(t_1)x(t_2)$  quand  $t_1$  et  $t_2$  sont au voisinage de l'instant  $t$ .

Une façon possible d'exprimer la fonction d'autocorrélation locale est :

$$R(t, \tau) = \int g(u - t, \tau) x^*(u - \frac{\tau}{2}) x(u + \frac{\tau}{2}) du \quad (3.25)$$

où  $g(t, \tau)$  est une fonction à définir selon les situations. Observons maintenant le cas très particulier où la fonction  $g$  vaut un dirac :  $g(t, \tau) = \delta(t - \tau)$ . On obtient alors

$$R(t, \tau) = x^*(t - \frac{\tau}{2}) x(t + \frac{\tau}{2}) \quad (3.26)$$

Dans ce cas, on a donc :

$$S_w(t, \omega) = x^*(u - \frac{\tau}{2}) x(u + \frac{\tau}{2}) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3.27)$$

Cette méthode temps-fréquence est connue sous le nom de *distribution de Wigner-Ville* [Wigner 1932], [Ville 1948]. Elle prend ses origines dans la mécanique quantique dans les années 30 et a joué un rôle central dans la problématique temps-fréquence.

Plusieurs autres méthodes ont été développées, en partant du même principe et en changeant la fonction  $g$ . Ces méthodes ont été développées par des scientifiques tels que Page [Page 1952], Rihaczek [W.Rihaczek 1968], Margenau et Hill [Margenau 1961], Choi et Williams [Choi 1989]. Cependant c'est le physicien américain Léon Cohen qui a marqué l'histoire de l'analyse temps fréquence en proposant une méthode relativement simple regroupant toutes ces méthodes sous la forme d'une généralisation [Cohen 1989], [Cohen 1995].

#### La classe des distributions de Cohen

Dans une série de papiers, Cohen a généralisé la définition de distributions temps-fréquence de telle manière qu'il a permis l'inclusion, au sein de cette méthode globale, de différentes contributions. Avoir une méthode simple de générer différentes distributions a l'avantage de permettre la démonstration de résultats généraux, et d'étudier quels aspects d'une distribution particulière sont uniques et lesquels sont communs à toutes.

C'est en suivant ces motivations que de nombreuses recherches ont été menées notamment par Claasen et Mecklenbrauker. Ils proposent un modèle de distribution temps-fréquence sous la forme :

$$P(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int \int e^{-j\theta t - j\tau\omega + j\theta u} \phi(\theta, \tau) s^*(u - \frac{1}{2}\tau) s(u + \frac{1}{2}\tau) du d\tau d\theta \quad (3.28)$$

où  $\phi(\theta, \tau)$  est une fonction arbitraire qu'ils ont nommée le noyau (kernel). Ce noyau part du même principe que la fonction  $g$  mentionnée au paragraphe précédent.

La Figure 3.1 est un tableau présentant quelques méthodes célèbres pouvant être rattachées à la classe des distributions de Cohen. On peut y trouver, pour chaque distribution, le noyau ainsi que la valeur finale de la distribution.

L'autre propriété intéressante de cette généralisation (additionnelle au fait qu'il est plus simple d'exprimer les différentes distributions), est que certaines propriétés physiques des distributions sont reliées aux propriétés du noyau. Il est donc temps de s'intéresser aux propriétés des distributions et du noyau.

#### *Propriétés des distributions et des noyaux*

Dans cette partie, on s'intéresse à différentes propriétés des distributions. En effet, elles ne présentent pas toutes les mêmes caractéristiques ; il paraît donc évident que trouver une façon simple d'étudier les diverses propriétés des distributions est intéressant. La théorie des classes de Cohen nous aide encore sur ce point. En effet, dans ce cadre, il peut être montré que les propriétés physiques des distributions sont reliées aux propriétés du noyau. Ainsi, il suffirait d'étudier le noyau pour faire le point sur les caractéristiques de la distribution.

La suite de ce paragraphe concerne plusieurs propriétés des distributions.

#### *Spectre et énergie instantannée*

Une des premières caractéristiques à laquelle il convient de s'intéresser, concerne les intensités temporelle et fréquentielle. Pour faire simple, cela revient à s'assurer que lorsqu'on intègre la distribution sur les fréquences, on obtient la puissance instantannée  $|s(t)|^2$  du signal. Si on intègre sur le temps, on obtient le spectre de densité en énergie  $|S(\omega)|^2$ .

Il est possible de montrer que ces deux propriétés combinées, peuvent être déterminées en observant le comportement du noyau. En effet, si on intègre la distribution  $P(t, \omega)$  sur les fréquences, on a :

$$\int P(t, \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int \int e^{j\theta(u-t)} \phi(\theta, \tau) |s(u)|^2 d\theta du \quad (3.29)$$

Ainsi, pour obtenir  $\int P(t, \omega) d\omega$  il faut  $\phi(\theta, 0) = 1$ .

De façon analogique, on peut montrer que pour obtenir  $\int P(t, \omega) dt = |S(\omega)|^2$ , il faut avoir  $\phi(0, \tau) = 1$ .

| Méthode                 | Noyau  | Distribution $P(t, \omega)$  |
|-------------------------|--|--|
| <i>Wigner-Ville</i>     | 1  | $\frac{1}{2\pi} \int e^{-j\tau\omega} s^*(t - \frac{1}{2}\tau) s(t + \frac{1}{2}\tau) d\tau$   |
| <i>Margenau-Hill</i>    | $\cos \frac{1}{2}\theta\tau$   | $\operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} s(t) e^{-j\tau\omega} S^*(\omega)$  |
| <i>Kirkwood-Rhaczek</i> | $e^{j\theta\tau/2}$  | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} s(t) e^{-j\tau\omega} S^*(\omega)$  |
| <i>Page</i>             | $e^{j\theta \tau /2}$  | $\frac{\partial}{\partial t} \left  \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t s(t) e^{-j\omega t'} dt' \right ^2$   |
| <i>Choi-Williams</i>    | $e^{-\theta^2\tau^2/\sigma}$   | $\frac{1}{4\pi^{3/2}} \int \int \sqrt{\frac{\sigma}{2}} e^{-\sigma(u-t)^2/4\tau^2 - j\tau\omega} s^*(u - \frac{1}{2}\tau) s(u + \frac{1}{2}\tau) du d\tau$ |
| <i>Spectrogramme</i>    | $\int h^*(u - \frac{1}{2}\tau) e^{-j\theta u} h(u + \frac{1}{2}\tau) du$ | $\left  \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-j\omega\tau} s(\tau) h(\tau - t) d\tau \right ^2$   |

TABLE 3.1 – Principales distributions et leurs noyaux

On voit donc ici qu'il est bien plus aisé de vérifier ces propriétés en observant le noyau plutôt que la distribution en elle-même.

#### *Réalité*

La plupart des distributions ne sont pas définies positives, ce qui peut poser des problèmes d'interprétation. Dans la littérature, on prone souvent le fait que la distribution doit être réelle pour limiter ces problèmes. Si on compare  $P(t, \omega)$  avec  $P^*(t, \omega)$ , il apparait une condition nécessaire et suffisante sur le noyau pour que la distribution soit réelle. Cette condition est :

$$\phi(\theta, \tau) = \phi(-\theta, -\tau) \quad (3.30)$$

#### *Décalage en temps ou en fréquence*

Si l'on translate le signal d'un temps fixé  $t_0$ , il serait judicieux que toute la distribution soit translatée de ce même  $t_0$ . Pour faire la démonstration, on choisit de noter  $s_{t_0}$  le signal une fois décalé de  $t_0$ .

$$\begin{aligned} P_{t_0} &= \frac{1}{4\pi^2} \int \int \int e^{-j\theta t - j\tau\omega + j\theta u} \phi(\theta, \tau) s^*(u - \frac{1}{2}\tau + t_0) s(u + \frac{1}{2}\tau + t_0) d\theta d\tau du \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int \int \int e^{-j\theta(t+t_0) - j\tau\omega + j\theta u} \phi(\theta, \tau) s^*(u - \frac{1}{2}\tau) s(u + \frac{1}{2}\tau) d\theta d\tau du \\ &= P(t + t_0, \omega) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Si on fait un raisonnement analogue, on peut obtenir un résultat similaire pour une translation en fréquence :

$$P(t, \omega) \longrightarrow P(t, \omega + \omega_0) \quad (3.32)$$

Il est important de noter que la démonstration nécessite que le noyau ne dépende ni du temps, ni des fréquences.

Les différentes propriétés exposées ont permis de mettre en avant la formalisation des méthodes selon la classe de Cohen. L'existence d'un noyau permet de simplifier la démonstration de certaines propriétés.

## 3.5 Méthodes statistiques

Ces méthodes sont valables pour tous les signaux, qu'ils soient stationnaires, cyclostationnaires ou non-stationnaires, car elles s'intéressent aux propriétés statistiques de l'énergie du signal. Elles sont basées sur les travaux successifs de Stewart et McFadden ([Stewart 1977], [McFadden 1986] et [McFadden 1987]) et sont constituées d'un ensemble de facteurs traduisant les propriétés statistiques du signal vibratoire. L'observation de ces différents facteurs peut mener à des conclusions quant à la santé du mécanisme.

Le développement de ces méthodes repose sur le constat de Stewart que des changements apparaissent dans le signal vibratoire lorsqu'il y a un défaut d'engrenage. En particulier, ces changements se retrouvent dans l'énergie moyenne quadratique. A partir de ces remarques, McFadden propose un modèle mathématique du signal vibratoire d'une transmission (à engrenages) parfaite :

$$x_{parfait}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos(n\omega t + \phi_n) + w(t) \quad (3.33)$$

où  $P_n$  est l'amplitude du  $n$ ème harmonique,  $\omega$  est la fréquence d'engrènement de l'engrenage,  $\phi_n$  l'angle de phase du  $n$ ème harmonique et  $w(t)$  un bruit blanc gaussien.

McFadden montre également que les modulations d'amplitude et de phase  $a_n(t)$  et  $b_n(t)$  introduites par un défaut sont périodiques de pulsation  $\omega_r$ , la pulsation de l'engrenage. On obtient alors un modèle plus complet :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n [1 + \cos(n\omega t + \phi_n + b_n(t))] + w(t) \quad (3.34)$$

avec  $a_n$  et  $b_n$  tels que :

$$a_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \cos(m\omega_r t + \alpha_{nm}) \quad b_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{nm} \cos(m\omega_r t + \beta_{nm}) \quad (3.35)$$

Dans le cadre de l'étude des caractéristiques statistiques d'un signal vibratoire, on s'intéresse au signal résiduel  $r$  défini comme suit :

$$r = x(t) - y_r(t) \quad (3.36)$$

où  $y_r(t)$  est le signal composé uniquement des fréquences d'engrènements et leurs harmoniques. C'est grâce à ce signal résiduel que l'on peut aborder le diagnostic de défauts présents dans le mécanisme. Pour cela, on utilise différents indicateurs dont voici une liste non-exhaustive :

- **L'énergie quadratique moyenne** : en anglais Root Mean Square (RMS) change quand un défaut apparaît dans un mécanisme. Pour un signal temporel  $x(t)$  échantillonné, avec  $N$  le nombre total d'échantillons et  $i$  l'indice d'un échantillon, il est défini comme suit :

$$RMS_x = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^N (x_i)^2} \quad (3.37)$$

Au delà de donner des informations générales sur l'état de santé du système, le RMS est utilisé dans la définition d'autres facteurs.

- **Facteur de crêtes** : Le facteur de crête CF (pour Crest Factor en anglais) est défini comme la valeur maximale du signal  $x(t)$  divisé par  $RMS_x$ .

$$CF = \frac{x_{0pk}}{RMS_x} \quad (3.38)$$

avec  $pk$  l'indice du maximum positif du signal  $x(t)$  et  $x_{0pk}$  la valeur du signal en ce point.

Cet indice est utile dans la détection de dommages localisés sur une dent.

- **FM0** : Afin d'observer les changements majeurs dans l'engrènement d'un système, Stewart propose de comparer le maximum d'amplitude crête à crête du signal  $x$ , noté  $PP_x$  à la somme des amplitudes des fréquences d'engrènement et leurs harmoniques. Il définit alors le facteur  $FM0$  comme suit :

$$FM0 = \frac{PP_x}{\sum_{n=0}^H P_n} \quad (3.39)$$

avec  $P_n$  l'amplitude du  $n$ ième harmonique et  $H$  le nombre total d'harmoniques.

Il existe d'autres facteurs permettant d'analyser les propriétés statistiques d'un signal un peu plus en détail. Samuel et Pines en donnent un résumé [Samuel 2005].

On a donc pu voir que les méthodes d'analyse statistique du contenu énergétique d'un signal vibratoire peuvent donner des informations quant à son état de santé. De plus, leur mise en place n'est pas très coûteuse en calculs. En revanche, il faut noter quelques remarques :

- les informations obtenues sont qualitatives et ne permettent pas de connaître l'avancement des dégâts,
- bien souvent, des défauts de toute petite taille, peu avancés ne peuvent pas être repérés par ces méthodes,
- on n'a accès qu'à l'information de présence d'un défaut et non pas à sa localisation dans le système.

Il semble donc que ces méthodes peuvent être de bonnes alliées dans le diagnostic d'un système mécanique, mais doivent être complétées par des méthodes plus exhaustives.

## 3.6 Analyse cepstrale

L'analyse cepstrale est liée à l'analyse spectrale dont nous avons parlé précédemment. Le cepstre permet de mettre en évidence des périodicités dans le spectre

original. Pour ce faire, il utilise une sorte de spectre de spectre de Fourier. La définition donnée par Randall [Randall 1982] est la suivante :

$$C(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(\log(S_{xx}(f))) \quad (3.40)$$

avec  $S(f)$  le spectre du signal temporel  $x(t)$  et  $\mathcal{F}^{-1}$  l'opération de transformée de Fourier inverse.

Le terme cepstre a été obtenu à partir de *spectre* en inversant les deux premières syllabes. De même, tout un vocabulaire a été créé. La variable  $\tau$  est homogène à un temps et est appelée quéfrence en référence à la *fréquence*. On peut aussi trouver rhamonique à la place de *harmonique*.

Comme il a été mentionné précédemment, le but premier de l'analyse cepstrale est de rechercher des périodicités dans le spectre de Fourier d'un signal. En effet, toute périodicité contenue dans le spectre de Fourier donnera de fortes composantes dans le cepstre [Randall 1982]. Ainsi les harmoniques et les bandes de modulation fréquemment introduites par des défauts de contact dans les machines tournantes peuvent apparaître dans le cepstre.

Le cepstre peut donc être un bon outil pour détecter et surveiller des défauts dans un système mécanique [?]. Cependant, Randall précise que le cepstre contient des informations différentes du spectre. Ces informations sont utiles mais non suffisantes pour une analyse exhaustive de l'état de santé du système. C'est pourquoi le cepstre ne peut être qu'un complément à l'analyse spectrale. De plus, il faut préciser que cette méthode requiert les compétences d'un spécialiste pour faire le choix de certains paramètres (comme le nombre de points de l'échantillon, le rééchantillonnage nécessaire, etc...) ainsi que pour la lecture et l'interprétation des résultats.

### 3.7 Méthode cyclostationnaire

Cette méthode, proposée par Raad [Raad 2008] propose d'utiliser la modélisation cyclostationnaire des signaux vibratoires de machines tournantes, proposée par Antoni [Antoni 2002a] pour faire de la surveillance de défauts sur des engrenages.

Le principe de cette méthode repose sur le suivi d'indicateurs de cyclostationnarité. Raad les définit à partir des cumulants (outils déjà mentionnés à la Section (3.1)). Ces derniers ont la propriété, dans le cadre de signaux cyclostationnaires, de pouvoir être développés en série de Fourier. Ainsi, pour  $C_{1x}(t)$ ,  $C_{2x}(t, \tau)$ ,  $C_{3x}(t, \tau_1, \tau_2)$ ,  $C_{4x}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ , les cumulants d'ordre 1, 2, 3 et 4 du signal  $x$  :

$$\begin{aligned} C_{1x}(t) &= \sum_{\alpha \in \Omega} C_{1x}^{\alpha} e^{2j\pi\alpha t} \\ C_{2x}(t, \tau) &= \sum_{\alpha \in \Omega} C_{2x}^{\alpha}(\tau) e^{2j\pi\alpha t} \\ C_{3x}(t, \tau_1, \tau_2) &= \sum_{\alpha \in \Omega} C_{3x}^{\alpha}(\tau_1, \tau_2) e^{2j\pi\alpha t} \\ C_{4x}(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \sum_{\alpha \in \Omega} C_{4x}^{\alpha}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) e^{2j\pi\alpha t} \end{aligned} \quad (3.41)$$



où  $\Omega$  est l'ensemble des fréquences pour lesquelles les cumulants  $C_{nx}^\alpha$  dits cycliques, définis comme suit, sont non nuls :

$$C_{nx}^\alpha(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T C_{nx}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) e^{-j2\pi\alpha t} dt \quad (3.42)$$

A partir de ces définitions, Raad propose les indicateurs suivants :

$$ICS_{nx} = \sum_{\alpha \in \Omega} \frac{|C_{nx}^\alpha(0)|^2}{|C_{2x}^0(0)|^2} \quad (3.43)$$

où  $C_{nx}^\alpha(0)$  symbolise  $C_{2x}^\alpha(0)$ ,  $C_{3x}^\alpha(0,0)$  et  $C_{4x}^\alpha(0,0,0)$  pour  $n = 2, 3, 4$ .

Ces indicateurs de cyclostationnarité augmentent lorsqu'un défaut apparaît dans un engrenage d'un mécanisme. En fixant un seuil maximum, on peut alors détecter, lorsque ce seuil est franchi, un éventuel défaut dans le système. Cette méthode présente l'avantage de pouvoir être étendue à des systèmes complexes. Cependant, elle ne permet pas de localiser avec précision le défaut (notamment sur quelle roue dentée impliquée dans l'engrenage). Enfin, seuls les défauts d'engrenages sont pris en compte.

### 3.8 De l'analyse spectrale aux filtres de Kalman

Comme il a été mentionné précédemment, il est possible d'utiliser l'analyse spectrale pour faire de la détection de défauts à partir de signaux vibratoires. Il faut pour cela que les signaux soient stationnaires. En première approche, on peut admettre que si la vitesse angulaire de l'arbre d'entrée d'un mécanisme est constante, alors le signal est stationnaire. On peut alors utiliser l'analyse spectrale par Transformée de Fourier.

Dans le cadre de cette étude, un banc d'essai a été mis en place grâce à l'acquisition d'une BTP d'Alouette III. Celui-ci a permis l'acquisition de signaux vibratoires. Nous décrirons complètement ce banc d'essai ainsi que les conditions d'acquisition des signaux vibratoires dans le Chapitre 5. Nous utilisons ici un signal provenant d'un capteur accélérométrique, pour une vitesse moteur de  $1000t/min$ . Dans ce cas, la Table 3.2 présente les valeurs des différentes fréquences remarquables de ce mécanisme. Elles ont été obtenues en appliquant la méthode proposée au Chapitre 2

Les fréquences nous intéressant se situent entre 0 et  $624Hz$ . En effet, la liste présentée dans la Table 3.2 est une liste de fréquences d'apparition possible de défauts. Cela signifie que l'on ne sait pas à l'avance à quelle fréquence s'attendre, ni à combien de fréquences, ni à combien d'harmoniques on va avoir affaire. On réalise sur le signal  $s(t)$  issu des capteurs d'accélération, échantillonné à  $F_e = 50000Hz$ ,

| Indice de la fréquence | Fréquence en Hz |
|------------------------|-----------------|
| 1                      | 1.7             |
| 2                      | 3.5             |
| 3                      | 5.4             |
| 4                      | 7.6             |
| 5                      | 8.5             |
| 6                      | 9.8             |
| 7                      | 12.9            |
| 8                      | 14.0            |
| 9                      | 15.2            |
| 10                     | 16.9            |
| 11                     | 21.6            |
| 12                     | 23.9            |
| 13                     | 28.0            |
| 14                     | 31.2            |
| 15                     | 39.3            |
| 16                     | 47.7            |
| 17                     | 177.5           |
| 18                     | 258.6           |
| 19                     | 501.3           |
| 20                     | 623.9           |

TABLE 3.2 – Liste des différentes fréquences de défauts

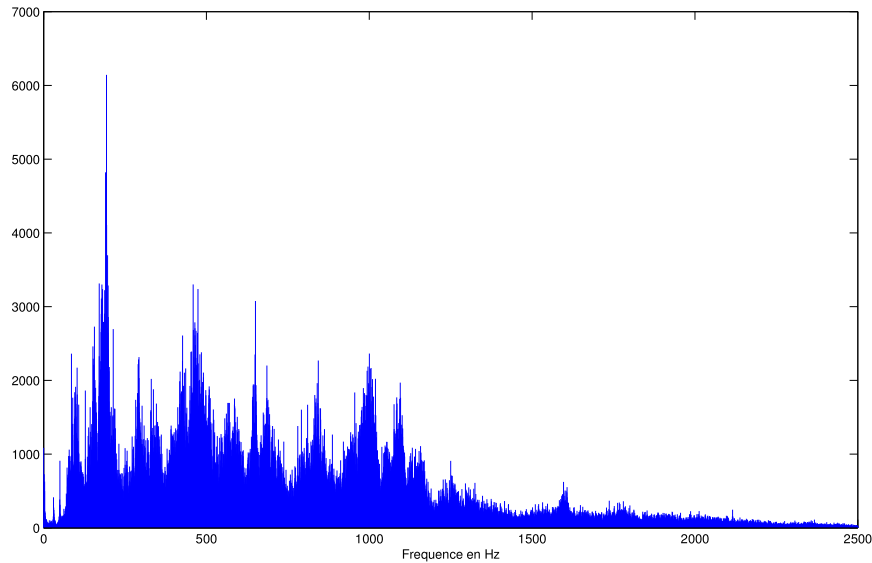


FIGURE 3.6 – Spectre de Fourier du signal  $s_e(t)$  pour  $f_e=5000$ ,  $NFFT=25000$

un filtrage passe-bas, afin de ne conserver que les basses fréquences. Ceci permet d'améliorer la définition du spectre, tout en évitant le repliement (grâce au filtrage passe bas). On sous-échantillonne donc le signal pour plus de confort dans la lecture des spectres. On appelle ce signal sous-échantillonné  $s_e(t)$ . La figure 3.6 présente le spectre de Fourier du signal  $s_e(t)$  réalisé avec un nombre de points sur le spectre  $NFFT = 25000$ . On peut constater qu'il est difficile de repérer des fréquences d'intérêt, car elles sont toutes en basses fréquences. C'est pourquoi on présente dans la Figure 3.7 la partie du spectre du signal  $s_e(t)$  comprise entre 0 et  $700Hz$ . On voit sur ce spectre qu'un pic correspondant à la fréquence numéro 14 (en particulier) peut être repéré. Cependant, l'amplitude ce pic est très réduite par rapport à l'amplitude moyenne du spectre. D'autres pics sont peut-être dissimulés dans l'amplitude moyenne du spectre. L'analyse spectrale ne permet donc pas d'être sûr que l'on a repéré toutes les fréquences réellement présentes dans le signal.

Un autre problème doit être abordé : la définition du spectre. Celle-ci est donnée par le nombre de points choisis pour la Transformée de Fourier, souvent appelé  $NFFT$ . Dans les figures précédentes,  $NFFT = 25000$ . La figure 3.8 donne le résultat sur le même signal  $s_e(t)$  mais avec  $NFFT = 5000$ . On voit alors que le pic ne peut plus être retrouvé. Le choix d'un paramètre comme  $NFFT$  influence donc fortement les résultats. C'est pour cette raison que seuls des experts peuvent calibrer et analyser de tels spectres.

L'analyse spectrale par Transformée de Fourier donne donc des résultats concluants lorsque l'ensemble des réglages et la lecture du spectre se font conve-

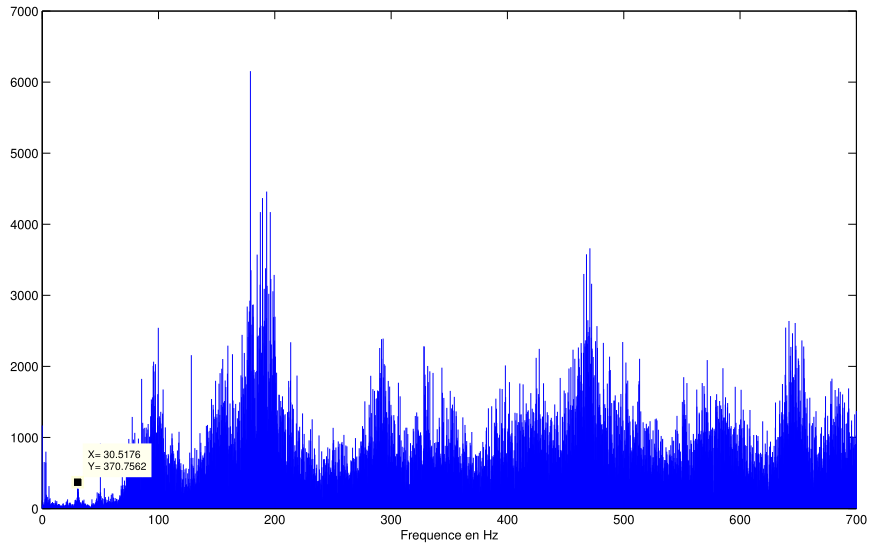


FIGURE 3.7 – Spectre de Fourier du signal  $s_e(t)$  zoomé entre 0 et 700Hz, pour  $f_e=5000$ , pour  $NFFT=25000$

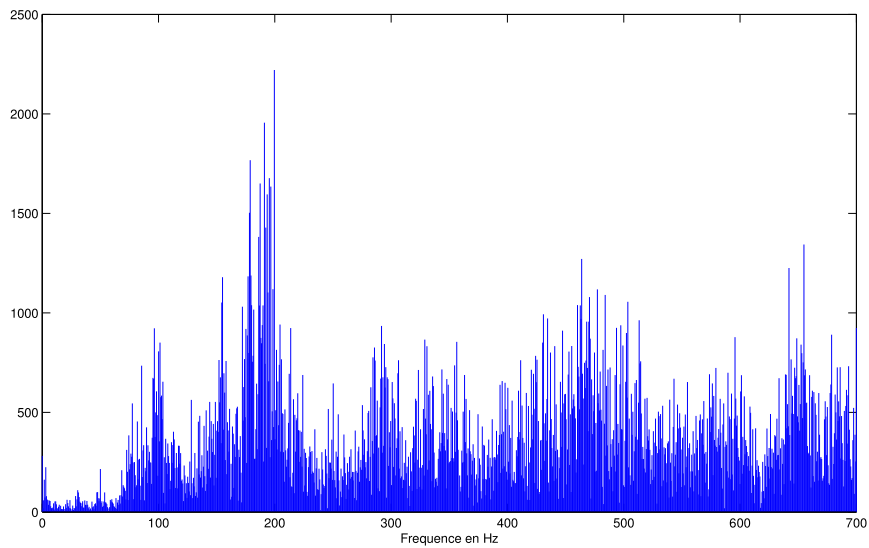


FIGURE 3.8 – Spectre de Fourier du signal  $s_e(t)$  zoomé entre 0 et 700Hz, pour  $f_e=5000$ , pour  $NFFT=5000$

nablement. Cependant, elle nécessite la surveillance d'un expert pour valider les résultats. C'est le cas de nombreuses autres méthodes (notamment celles décrites dans les sections précédentes) qui ont toutes prouvé leur efficacité.

Or, dans le cadre de l'étude des signaux vibratoires de la transmission d'un hélicoptère, nous souhaitons développer une méthode présentant un minimum de réglages, qui localise avec précision le défaut dans le mécanisme et dont la lecture des résultats peut être automatisée. Une méthode complémentaire utilisant la liste des fréquences de défaut de contact dans un mécanisme et les filtres de Kalman semble pouvoir répondre à ces contraintes.



# Filtres de Kalman

---

## Sommaire

---

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>4.1</b> | <b>Théorie des filtres de Kalman</b>           | <b>62</b> |
| 4.1.1      | Objectif des filtres de Kalman                 | 62        |
| 4.1.2      | Modèle mathématique du système                 | 62        |
| 4.1.3      | Filtres de Kalman Continus                     | 63        |
| 4.1.4      | Filtres de Kalman discrets                     | 63        |
| <b>4.2</b> | <b>Filtres de Kalman choisis</b>               | <b>65</b> |
| 4.2.1      | Cas simple (linéaire, un seul capteur)         | 65        |
| 4.2.2      | Cas non linéaire                               | 70        |
| 4.2.3      | Cas du multi-capteur                           | 73        |
| 4.2.4      | Filtres de Kalman échantillonnés angulairement | 77        |
| 4.2.5      | Remarque                                       | 81        |
| <b>4.3</b> | <b>Conclusion</b>                              | <b>82</b> |

---

Dans les chapitres précédents, nous avons vu que les signaux vibratoires de machines tournantes sont composés des diverses contributions provenant des différents corps en rotation et de défauts de contact que l'on souhaite détecter. La première étape a donc été de calculer les fréquences propres des composantes à surveiller (Chapitre 2). Puis, plusieurs méthodes de traitement de signaux vibratoires ont été présentées. Elles possèdent toutes des avantages mais ne donnent pas toutes des résultats permettant de détecter et localiser précisément un défaut, dans un système mécanique aussi complexe que la BTP d'un hélicoptère.

Les filtres de Kalman peuvent être utilisés afin d'estimer l'amplitude et la phase de composantes fréquentielles d'un signal dont on connaît un modèle [Brown 1997]. C'est pour cette raison que l'idée d'utiliser les filtres de Kalman afin de détecter les perturbations introduites par un défaut de contact dans le signal vibratoire d'une machine tournante a été envisagée.

Dans ce chapitre, on se propose donc d'étudier les filtres de Kalman. Dans la première section, nous exposerons la théorie des filtres de Kalman. Puis, nous verrons comment les fréquences propres calculées dans le chapitre 2 peuvent être utilisées afin de mettre au point un modèle.

## 4.1 Théorie des filtres de Kalman

### 4.1.1 Objectif des filtres de Kalman

L'objectif premier des filtres de Kalman est de faire l'estimation de l'état  $x(t)$  d'un système dynamique soumis à des entrées déterministes et aléatoires à partir de mesures  $y(t)$  bruitées et d'un modèle d'évolution de cet état.

On peut donc utiliser cette méthode pour estimer l'amplitude et la phase des composantes sinusoïdales d'un signal si l'on connaît les pulsations de chacune [Labarrere 1988].

### 4.1.2 Modèle mathématique du système

L'évolution de l'état  $x(t)$  du système suit le modèle de Kalman présenté sous la forme de deux équations liées l'une à l'autre :

- **L'équation d'état :**

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Mw(t) \quad (4.1)$$

avec

- $x(t)$  le vecteur d'état de dimension  $n$ , et  $\dot{x}(t)$  sa dérivée par rapport au temps,
- $u(t)$  l'ensemble des données d'entrées connues et des commandes,
- $Mw(t)$  le bruit d'état,

- **L'équation de mesure :**

$$y(t) = Cx(t) + v(t) \quad (4.2)$$

avec  $v(t)$  le bruit de mesure.

De plus, il faut préciser que les bruits  $w(t)$  et  $v(t)$  sont des bruits blancs gaussiens centrés de Densité Spectrale de Puissance (DSP)  $W$  et  $V$  respectivement, indépendants entre eux. Cela se traduit mathématiquement par :

- $E[w(t)w(t + \tau)^T] = W\delta(\tau)$ ,
- $E[v(t)v(t + \tau)^T] = V\delta(\tau)$ ,
- $E[w(t)v(t + \tau)^T] = 0$

L'estimation d'un signal par filtre de Kalman se fait selon trois étapes. La première est d'établir une prédiction à partir du modèle déterministe choisi pour représenter l'état du système. Ensuite, il faut calculer la différence entre la mesure et la



sortie prédite : l'innovation. Enfin, les filtres de Kalman utilisent l'innovation pour mettre en place un recalage entre la prédiction et les mesures.

### 4.1.3 Filtres de Kalman Continus

Un filtre de Kalman est un système dynamique avec deux entrées vectorielles : la mesure  $y$  et la commande déterministe  $u$ . En sortie, il donne  $\hat{x}$  l'estimé de l'état  $x$  du système.

On peut trouver dans la littérature, l'équation du filtre de Kalman associée aux équations d'état et de mesure de la section précédente :

$$\dot{\hat{x}} = (A\hat{x} + Bu) + K_f(y - C\hat{x}) \quad (4.3)$$

Dans cette équation, on retrouve bel et bien la prédiction basée sur l'équation d'état du système :  $A\hat{x} + Bu$ . Puis, le terme  $y - C\hat{x}$  représente l'innovation : la différence entre la mesure et la valeur attendue de l'estimée  $\hat{x}$ . De plus,  $K_f$  est le gain du filtre de Kalman. On le calcule à partir de la formule suivante :

$$K_f(t) = P(t)C^T V^{-1} \quad (4.4)$$

où  $P(t)$  est la covariance de l'erreur d'estimation, calculée selon :

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T - P(t)C^T V^{-1} C P(t) + M W M^T \quad (4.5)$$

Grâce aux équations décrites ci-dessus, on peut appliquer un filtre de Kalman à un processus continu. Cependant, dans la plupart des applications, on a affaire à un phénomène continu mais à des signaux échantillonnés. Dans ce cas, il est nécessaire d'utiliser des filtres de Kalman discrets.

### 4.1.4 Filtres de Kalman discrets

Le filtre de Kalman discret est similaire au continu : même principe, mêmes étapes. En notant  $x(k)$  l'échantillon numéro  $k$  du processus  $x$ , le modèle discret s'obtient facilement par analogie avec le modèle du filtre continu :

$$\begin{cases} x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) + M_d w_d(k) \\ y(k) = C_d x(k) + v_d(k) \end{cases} \quad (4.6)$$

avec  $A_d, B_d, C_d, M_d, W_d$  et  $V_d$  les versions discrètes de  $A, B, C, M, W$  et  $V$ .

Dans le cas d'un système continu dont les entrées déterministes ( $u$ ) sont échantillonnées bloquées et les mesures échantillonnées à la cadence  $dt$ , on peut exprimer le lien entre ces différentes matrices :

$$\begin{aligned} A_d &= e^{A dt} & B_d &= \int_0^{dt} e^{A\nu} d\nu & M_d &= I_n \\ C_d &= C & V_d &= \frac{V}{dt} & W_d &= \int_0^{dt} e^{A\nu} M W M^T e^{A^T \nu} d\nu \end{aligned} \quad (4.7)$$

La différence la plus marquante entre le filtre de Kalman discret et le filtre de Kalman continu, se situe au niveau de sa mise en pratique. En effet, dans le cadre discret, on distingue l'état prédit de l'état estimé :

- **Etat prédit** : c'est l'état prédit à l'instant  $k+1$  connaissant les mesures jusqu'à l'instant  $k$ . On le note  $\hat{x}(k+1|k)$ . On lui associe la **matrice de covariance de l'erreur de prédiction** :

$$P(k+1|k) = E[(x(k+1) - \hat{x}(k+1|k))(x(k+1) - \hat{x}(k+1|k))^T] \quad (4.8)$$

- **Etat estimé** : après le recalage, on connaît la mesure à l'instant  $k+1$ . On a alors l'état estimé noté :  $x(k+1|k+1)$ . Dans ce cas là, on associe la **matrice de covariance de l'erreur d'estimation** :

$$P(k+1|k+1) = E[(x(k+1) - \hat{x}(k+1|k+1))(x(k+1) - \hat{x}(k+1|k+1))^T] \quad (4.9)$$

A partir de là, on peut décomposer les différentes étapes de réalisation d'un filtre de Kalman discret :

**Prédiction** : On utilise la connaissance de  $\hat{x}(k|k)$  pour prédire  $\hat{x}(k+1|k)$  grâce à l'équation d'état :

$$\hat{x}(k+1|k) = A_d \hat{x}(k|k) + B_d u(k) \quad (4.10)$$

De plus, en utilisant  $P(k|k)$  établi au tour précédent, on calcule  $P(k+1|k)$  :

$$P(k+1|k) = A_d P(k|k) A_d^T + M_d W_d M_d^T \quad (4.11)$$

**Recalage** : C'est la deuxième étape qui doit calculer l'innovation et recalculer par rapport à la prédiction pour obtenir un état estimé  $x(k+1|k+1)$ . A ce moment là, on est au coeur de l'application du filtre de Kalman au système.

$$\hat{x}(k+1|k+1) = \hat{x}(k+1|k) + K_f(k+1)(y(k+1) - C_d \hat{x}(k+1|k) - D u(k+1)) \quad (4.12)$$

avec  $K_f$  le gain du filtre. Il doit être ré-évalué à chaque itération grâce à l'équation :

$$K_f(k+1) = P(k+1|k) C_d^T (C_d P(k+1|k) C_d^T + V_d)^{-1} \quad (4.13)$$

Enfin on ré-évalue la covariance de l'erreur d'estimation  $P(k+1|k+1)$  :

$$P(k+1|k+1) = (I_n - K_f(k+1) C_d) P(k+1|k) \quad (4.14)$$

Ces équations récurrentes doivent être initialisées avec  $\hat{x}(0|0)$ , l'estimé à un instant initial et  $P(0|0)$  la covariance de l'erreur d'initialisation.

Ainsi, grâce au modèle de Kalman représentant l'état du système, le filtre de Kalman permet de formuler une estimation de l'état de la sortie de ce système. Nous souhaitons donc les utiliser afin de faire une estimation du signal vibratoire émis par une BTP d'hélicoptère. En effet, grâce aux connaissances que nous possédons sur les signaux vibratoires, et aux résultats de l'analyse cinématique présentés dans le Chapitre 2, il est possible d'établir un modèle d'état du signal vibratoire émis par une BTP d'hélicoptère. Il sera alors possible de réaliser une estimation de ce signal.

Dans la suite de ce chapitre, nous exposerons donc les modèles de Kalman choisis pour représenter le système étudié.

## 4.2 Filtres de Kalman choisis

Dans cette section, on présente les filtres de Kalman choisis pour traiter les signaux obtenus grâce au banc d'essai. En utilisant la liste des fréquences de défauts établie au Chapitre 2, on simplifie le modèle admis (voir la Section 3.5) pour les signaux vibratoires de machines tournantes selon le modèle suivant :

$$s(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t + \phi_i) + v(t) \quad (4.15)$$

avec  $N$  le nombre de fréquences présentes dans la liste des fréquences de défauts de contact possibles du mécanisme,  $\omega_i$  la  $i$ ème pulsation de cette liste. En effet, le Chapitre 2 donne les fréquences mais la forme sur une période est inconnue. Le modèle de Kalman que nous avons étudié la suppose sinusoïdale c'est à dire que nous ne tenons compte que de la première harmonique.

Avec l'utilisation des filtres de Kalman, on cherche à faire l'estimation des amplitudes  $A_i$  et des phases  $\phi_i$ . On rappelle que  $v(t)$  est un bruit blanc gaussien de DSP  $V$ .

### 4.2.1 Cas simple (linéaire, un seul capteur)

La première étape dans la réalisation d'un filtre de Kalman est de déterminer le vecteur d'état. Ici, on choisit le vecteur d'état  $x(t)$  tel que :

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1^1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \\ x_1^2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ x_2^1 = A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2^2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ \vdots \\ x_N^1 = A_N \sin(\omega_N t + \phi_N) \\ x_N^2 = A_N \cos(\omega_N t + \phi_N) \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Dans le cas de l'exemple présenté, il n'y a pas de contraintes ou de commandes extérieures, donc  $u(t) = 0$ .

L'équation d'état des filtres de Kalman s'écrit dans notre cas :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (4.17)$$

Pour obtenir la matrice  $A$ , on calcule alors  $\dot{x}(t)$  :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1\omega_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ -A_1\omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \\ A_2\omega_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ -A_2\omega_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \\ \vdots \\ A_N\omega_N \cos(\omega_N t + \phi_N) \\ -A_N\omega_N \sin(\omega_N t + \phi_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 x_1^2(t) \\ -\omega_1 x_1^1(t) \\ \omega_2 x_2^2(t) \\ -\omega_2 x_2^1(t) \\ \vdots \\ \omega_N x_N^2(t) \\ \omega_N x_N^1(t) \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Cette équation permet de trouver  $A$  :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & & & & \\ -\omega_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & \omega_2 & & \\ & & -\omega_2 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & \omega_N \\ & & & & & -\omega_N & 0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

L'équation d'état 4.17 ne fait pas apparaître de bruit d'état. Donc le gain du filtre tend vers 0 en régime permanent et ne permettrait pas de détecter une variation dans la fréquence, l'amplitude ou la phase du signal. Il est alors obligatoire de se tourner vers une formulation non linéaire des filtres de Kalman en cas de méconnaissance des fréquences, amplitudes ou phases des différentes composantes du signal (voir Section 4.2.2).

Cependant en pratique, sur l'horizon temporel des signaux étudiés, la condition initiale sur la matrice de covariance de l'erreur d'estimation  $P$  permet de garantir que la variance de l'erreur d'estimation est non nulle et suffit à rattraper d'éventuelles légères variations dans la fréquence, l'amplitude ou la phase des différentes composantes.

Intéressons nous maintenant à l'équation de mesure. Puisqu'on a émis l'hypothèse que le signal mesuré vaut  $s(t)$ , on peut obtenir la valeur de  $C$  :

$$C = ( 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 1 \ 0 ) \quad (4.20)$$

On a alors le modèle d'état de Kalman :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) + v(t) \end{cases} \quad (4.21)$$

Une fois ce modèle établi, les filtres de Kalman se réalisent comme démontré à la section précédente. L'initialisation se fait sur deux plans :

– l'initialisation du vecteur d'état :

$$x(t_0) = \begin{pmatrix} x_1^1(t_0) = 1 \\ x_1^2(t_0) = 0 \\ x_2^1(t_0) = 1 \\ x_2^2(t_0) = 0 \\ \vdots \\ x_N^1(t_0) = 1 \\ x_N^2(t_0) = 0 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

On émet donc l'hypothèse qu'à  $t = 0$ , tous les  $A_i = 1$  et  $\phi_i = 0$ . Cette initialisation peut sembler très grossière. Son seul objectif est de respecter la condition  $x_k^{1^2}(0) + x_k^{2^2}(0) = A_k^2$ . Divers essais avec d'autres initialisations n'ont pas permis d'améliorer de façon significative le temps de convergence du filtre. De plus, dans l'intégration du filtre, on ne tient pas compte de la relation  $x_k^{1^2}(t) + x_k^{2^2}(t) = A_k^2$ .

– l'initialisation de la matrice de covariance  $P$ . On utilise pour cela la DSP du bruit  $v(t) : V$ . On initialise donc  $P$  comme suit :

$$P(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{V}{dt} & 0 & & & \\ 0 & \frac{V}{dt} & & & \\ \hline & \frac{V}{dt} & 0 & & \\ & 0 & \frac{V}{dt} & & \\ \hline & & & \ddots & \\ \hline & & & & \frac{V}{dt} & 0 \\ & & & & 0 & \frac{V}{dt} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

*Exemple académique :*

On traite ici l'exemple d'un hypothétique système dont l'analyse cinématique a donné une liste de trois modes d'apparition de défauts possibles. Les pulsations de chacun de ces modes sont  $\omega_1 = 2\pi f_1$ ,  $\omega_2 = 2\pi f_2$  et  $\omega_3 = 2\pi f_3$ , avec  $f_1 = 10Hz$ ,  $f_2 =$

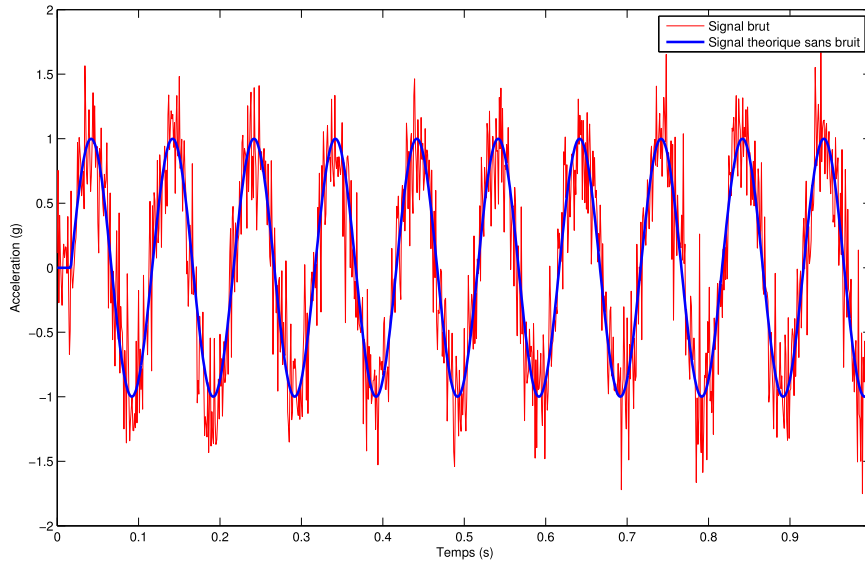


FIGURE 4.1 – Signal simulé  $s(t)$  avec et sans bruit additif

$20Hz$  et  $f_3 = 30Hz$ . Dans cet hypothétique système, le défaut présent correspond au mode  $\#1$ . On simule donc un signal vibratoire pouvant être issu de ce mécanisme  $s(t) = x_0(t) + w(t)$  où  $w(t)$  est un bruit blanc gaussien de DSP  $W$  et  $x_0(t)$ , le signal théorique sans bruit est tel que :

$$x_0(t) = \sin(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{3}) \quad (4.24)$$

avec  $f_0 = 10Hz$ . La fréquence d'échantillonnage est de  $f_e = 1000Hz$  et l'horizon est de  $horizon = 2s$ . La Figure 4.1 montre le signal simulé (avec et sans bruit).

On souhaite donc utiliser un filtre de Kalman pour réaliser une estimation du signal théorique sans bruit  $x_0(t)$ . On choisit le filtre de Kalman linéaire à trois modes. La Figure 4.3 montre le signal théorique sans bruit  $x_0(t)$  et le signal estimé  $\hat{y}(t)$ . On peut constater qu'il y a une très bonne correspondance entre les deux en régime permanent et que le régime transitoire (recalage de l'erreur d'initialisation) est court. La Figure 4.2 qui présente la réponse des trois composantes  $x_k^1(t)$  met donc en évidence que seul le premier mode a une amplitude non nulle.

Cet exemple académique permet de montrer que dans le cas d'un modèle à plusieurs modes le filtre de Kalman permet de retrouver la fréquence présente dans le signal vibratoire.

Comme il a été mentionné précédemment, on peut supporter une légère méconnaissance de la fréquence d'un mode du modèle de Kalman. La Figure 4.4 a été obtenue en réalisant l'estimation du signal par un filtre de Kalman similaire au précédent mais où  $f_1 = 10.1Hz$  (soit une erreur de 1% par rapport à la fréquence

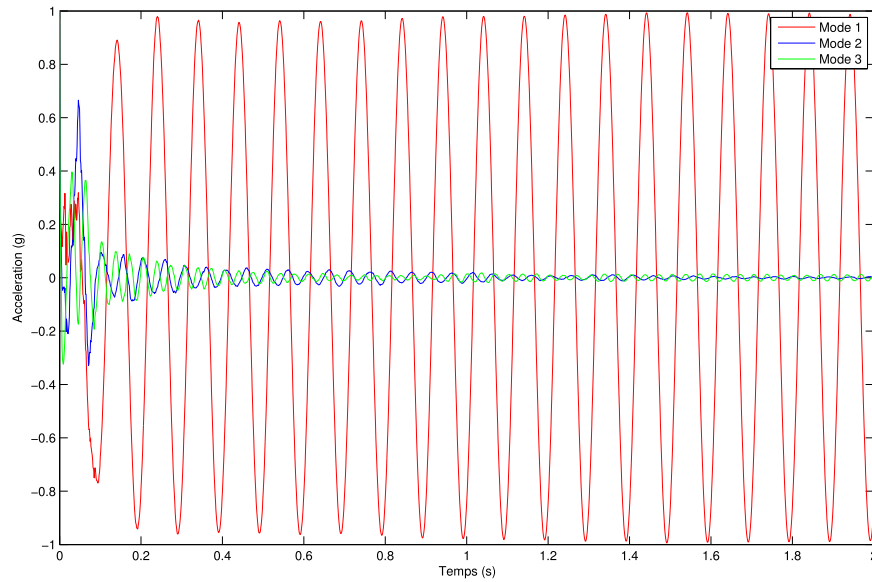


FIGURE 4.2 – Réponses du filtre de Kalman pour les trois modes  $f_1 = 10Hz$ ,  $f_2 = 20Hz$  et  $f_3 = 30Hz$ , pour signal simulé avec  $f_0 = 10Hz$

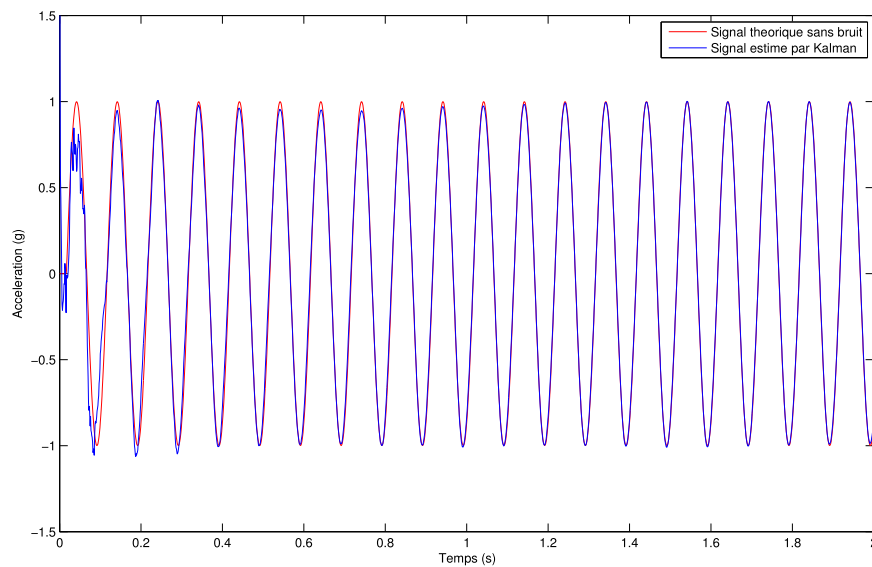


FIGURE 4.3 – Signal simulé  $x_0(t)$  sans bruit additif et signal simulé  $\hat{x}(t)$  pour  $f_0 = 10Hz$ ,  $f_1 = 10Hz$ ,  $f_2 = 20Hz$  et  $f_3 = 30Hz$

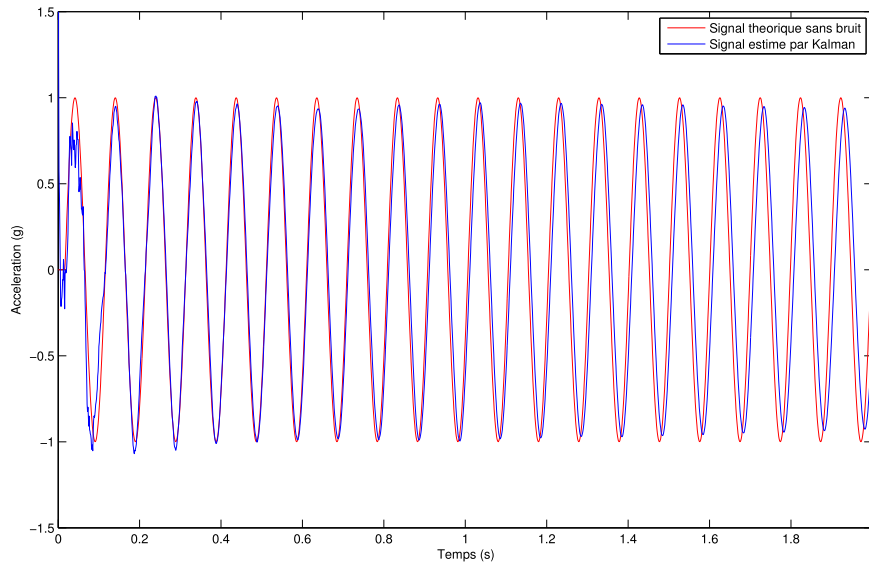


FIGURE 4.4 – Signal simulé  $x_0(t)$  sans bruit additif et signal simulé  $\hat{y}(t)$  pour  $f_0 = 10Hz$ ,  $f_1 = 10.1Hz$ ,  $f_2 = 20Hz$  et  $f_3 = 30Hz$

vraiment présente dans le signal  $f_0$ ). On peut y voir que les résultats ne sont pas aussi concluants que dans le cas précédent, mais qu'ils sont encore acceptables.

La Figure 4.5 quant à elle montre le résultat pour  $f_1 = 11Hz$  (soit une erreur de 10%). On peut ici voir que le filtre de Kaman linéaire ne permet plus l'estimation correcte du signal simulé.

Les résultats des tests de ce modèle sur les signaux obtenus grâce au banc d'essai seront présentés dans le chapitre suivant.

#### 4.2.2 Cas non linéaire

Une autre possibilité de filtres a été prise en compte. En effet, il est possible que les  $\omega_i$  réellement présents dans le signal  $s(t)$  mesuré ne soient pas exactement les mêmes que ceux du modèle.

Pour prendre en compte cette difficulté, on a décidé d'intégrer l'estimation des  $\omega_i$  aux filtres de Kalman. Ceci complique un peu la situation, étant donné que le modèle de Kalman devient non linéaire.

Le vecteur d'état choisi devient donc :



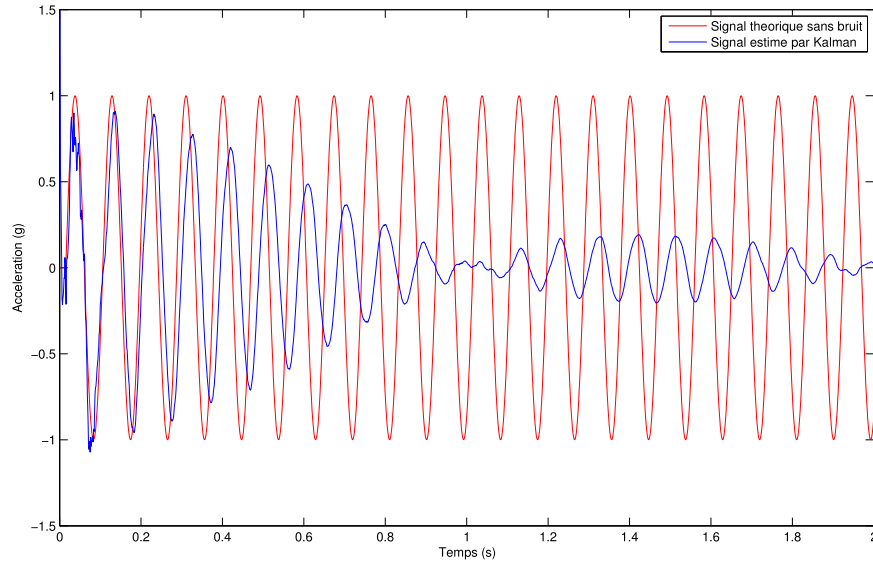


FIGURE 4.5 – Signal simulé  $x_0(t)$  sans bruit additif et signal simulé  $\hat{y}(t)$  pour  $f_0 = 10Hz$ ,  $f_1 = 11Hz$ ,  $f_2 = 20Hz$  et  $f_3 = 30Hz$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1^1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \\ x_1^2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ x_1^3(t) = \omega_1 \\ x_2^1(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2^2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2^3(t) = \omega_2 \\ \vdots \\ x_N^1(t) = A_N \sin(\omega_N t + \phi_N) \\ x_N^2(t) = A_N \cos(\omega_N t + \phi_N) \\ x_N^3(t) = \omega_N \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

où les  $\omega_i$  correspondent aux valeurs nominales. L'introduction d'un bruit d'état  $w_i(t)$  non nul sur les composantes  $x_i^3(t)$  permet au filtre de prendre en compte des variations autour des valeurs nominales  $\omega_i$ .

Dans ce cas, le calcul de  $\dot{x}(t)$  permet d'obtenir la nouvelle matrice  $A$  :

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1\omega_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ -A_1\omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \\ 0 \\ A_2\omega_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ -A_2\omega_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \\ 0 \\ \vdots \\ A_N\omega_N \cos(\omega_N t + \phi_N) \\ -A_N\omega_N \sin(\omega_N t + \phi_N) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_3(t) \\ 0 \\ 0 \\ w_3(t) \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ w_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 x_1^2(t) \\ -\omega_1 x_1^1(t) \\ 0 \\ \omega_2 x_2^2(t) \\ -\omega_2 x_2^1(t) \\ 0 \\ \vdots \\ \omega_N x_N^2(t) \\ -\omega_N x_N^1(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_3(t) \\ 0 \\ 0 \\ w_3(t) \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ w_3(t) \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

On obtient ainsi la matrice  $A$  :

$$A = \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & \omega_1 & 0 & & & & & & & & & \\ -\omega_1 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\ \hline & & & 0 & \omega_2 & 0 & & & & & & \\ & & & -\omega_2 & 0 & 0 & & & & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ \hline & & & & & & \ddots & & & & & \\ \hline & & & & & & & & 0 & \omega_N & 0 & \\ & & & & & & & & -\omega_N & 0 & 0 & \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right) \quad (4.27)$$

L'initialisation se produit comme dans le cas linéaire sur deux plans :

- initialisation de l'état : les  $x_k^1(t)$  et  $x_k^2(t)$  s'initialisent comme dans le cas linéaire. Les  $x_k^3$  quant à eux sont initialisés avec les valeurs théoriques de  $\omega_k$  obtenues grâce à la méthode du Chapitre 2. On a alors :

$$x(t_0) = \begin{pmatrix} x_1^1(t_0) = 1 \\ x_1^2(t_0) = 0 \\ x_1^3(t_0) = \omega_1 \\ x_2^1(t_0) = 1 \\ x_2^2(t_0) = 0 \\ x_2^3(t_0) = \omega_2 \\ \vdots \\ x_N^1(t_0) = 1 \\ x_N^2(t_0) = 0 \\ x_N^3(t_0) = \omega_N \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

- initialisation de la matrice de covariance  $P$  : la seule différence avec le cas linéaire est que l'on initialise les termes de  $P$  s'appliquant aux  $x_k^3$  avec un plus grand poids (typiquement  $p_{max} = 100$ ). Le but est d'augmenter la capacité des filtres de Kalman à supporter des variations importantes de fréquences

$$P = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \frac{V}{dt} & 0 & 0 & & & \\ 0 & \frac{V}{dt} & 0 & & & \\ 0 & 0 & p_{max} & & & \\ \hline & & & \ddots & & \\ \hline & & & & \frac{V}{dt} & 0 & 0 \\ & & & & 0 & \frac{V}{dt} & 0 \\ & & & & 0 & 0 & p_{max} \end{array} \right) \quad (4.29)$$

#### *Tests sur simulation*

Reprenons l'exemple de simulation présenté dans le paragraphe précédent. Le signal simulé reste le même. On réalise son estimation par filtre de Kalman pour un modèle non linéaire dont les modes ont pour fréquences :  $f_1 = 11Hz$ ,  $f_2 = 20Hz$  et  $f_3 = 30Hz$ . On initialise les filtres de Kalman comme présentés précédemment.

La Figure 4.6 montre les résultats obtenus. On peut voir que malgré les 10% d'erreur entre  $f_1$  et  $f_0$ , les signaux théoriques et estimés sont très proches. La méthode des filtres de Kalman non linéaires a donc permis une bonne estimation du signal malgré une méconnaissance de la fréquence des modes.

#### 4.2.3 Cas du multi-capteur

Les filtres de Kalman présentés dans les paragraphes précédents ont pour but de faire une estimation du signal issu d'un capteur. Cependant, sur le banc d'essai, quatre capteurs ont été mis en place. Il semble donc intéressant de regrouper les informations en provenance de chacun de ces quatre capteurs pour obtenir une estimation plus exacte du signal vibratoire. C'est l'objectif de l'algorithme que nous appellerons "superviseur".

Pour ce faire, on réalise tout d'abord une analyse simple de chaque signal par un des deux filtres de Kalman présentés précédemment. Puis on utilise cette connaissance des différentes amplitudes et phases estimées pour créer un "superviseur". Celui-ci a pour objectif d'identifier la matrice de mesure du filtre de Kalman regroupant l'ensemble des mesures. Il n'y a alors qu'un seul vecteur d'état. Il décrit l'état vibratoire de la machine. Mais les vibrations se projettent différemment sur les différents capteurs. Le rôle direct du superviseur est alors de calculer la matrice de sortie  $C$ , c'est à dire comment se projettent les différentes composantes vibratoires sur les capteurs.

Pour la démonstration, on choisit le filtre de Kalman simple, mais il est aussi pos-

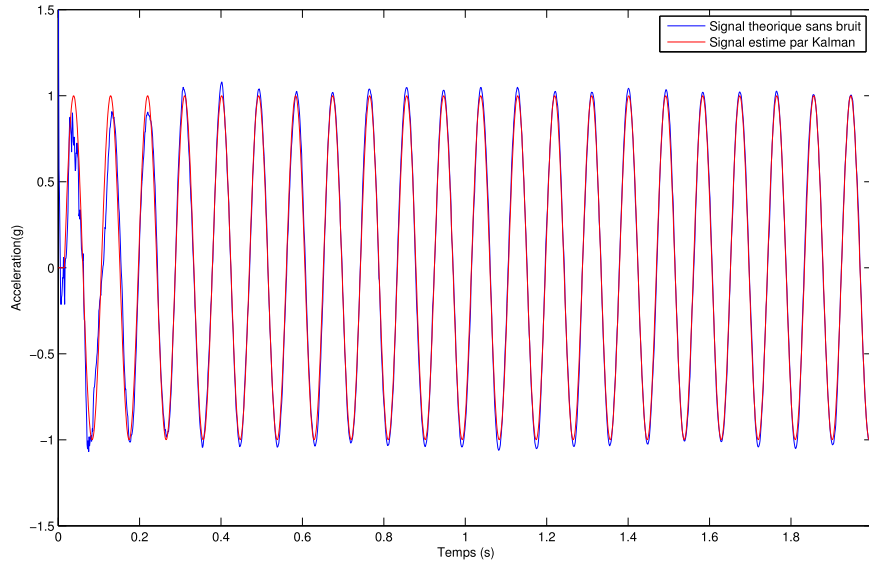


FIGURE 4.6 – Signal simulé  $x_0(t)$  sans bruit additif et signal simulé  $\hat{x}(t)$  pour  $f_0 = 10Hz$ ,  $f_1 = 11Hz$ ,  $f_2 = 20Hz$  et  $f_3 = 30Hz$

sible de réaliser le superviseur avec le filtre non linéaire. Les équations s'obtiennent alors directement par analogie avec celles que nous allons présenter.

Dans ce cas, on pose

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

où les  $y_i(t)$ , pour  $i = 1, 2, 3, 4$  sont les mesures de chaque capteur. Puis, on choisit un capteur de référence :  $y_1(t)$ . Le vecteur d'état du filtre de Kalman est alors :

$$x(t) = \begin{pmatrix} A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \\ A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \\ A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ \vdots \\ A_N \sin(\omega_N t + \phi_N) \\ A_N \cos(\omega_N t + \phi_N) \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

et l'équation de la première mesure s'écrit :

$$y_1(t) = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 1 \ 0) x_1(t) \quad (4.32)$$

En revanche, il faut calculer le lien entre  $y_2(t)$  et  $x(t)$  si l'on souhaite obtenir la partie de la matrice  $C$  s'appliquant à  $y_2(t)$ . On note  $A_i^k$  et  $\phi_i^k$  l'amplitude et la phase du  $i$ ème mode du  $k$ ème capteur, pour  $k = 2, 3, 4$ . On pose également  $\delta\phi_i^2 = \phi_i^2 - \phi_i$ .

On a alors :

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= \begin{pmatrix} A_1^2 \sin(\omega_1 t + \phi_1^2) \\ + A_2^2 \sin(\omega_2 t + \phi_2^2) \\ \vdots \\ + A_N^2 \sin(\omega_N t + \phi_N^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_1^2}{A_1} A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1 + \delta\phi_1^2) \\ + \frac{A_2^2}{A_2} A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2 + \delta\phi_2^2) \\ \vdots \\ + \frac{A_N^2}{A_N} A_N \sin(\omega_N t + \phi_N + \delta\phi_N^2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{A_1^2}{A_1} A_1 (\sin(\omega_1 t + \phi_1) \cos(\delta\phi_1^2) + \cos(\omega_1 t + \phi_1) \sin(\delta\phi_1^2)) \\ + \frac{A_2^2}{A_2} A_2 (\sin(\omega_2 t + \phi_2) \cos(\delta\phi_2^2) + \cos(\omega_2 t + \phi_2) \sin(\delta\phi_2^2)) \\ \vdots \\ + \frac{A_N^2}{A_N} A_N (\sin(\omega_N t + \phi_N) \cos(\delta\phi_N^2) + \cos(\omega_N t + \phi_N) \sin(\delta\phi_N^2)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{A_1^2}{A_1} \cos(\delta\phi_1^2) (A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1)) + \frac{A_1^2}{A_1} \sin(\delta\phi_1^2) (A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)) \\ + \frac{A_2^2}{A_2} \cos(\delta\phi_2^2) (A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)) + \frac{A_2^2}{A_2} \sin(\delta\phi_2^2) (A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)) \\ \vdots \\ + \frac{A_N^2}{A_N} \cos(\delta\phi_N^2) (A_N \sin(\omega_N t + \phi_N)) + \frac{A_N^2}{A_N} \sin(\delta\phi_N^2) (A_N \cos(\omega_N t + \phi_N)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{A_1^2}{A_1} \cos(\delta\phi_1^2) & \frac{A_1^2}{A_1} \sin(\delta\phi_1^2) & \cdots & \frac{A_N^2}{A_N} \cos(\delta\phi_N^2) & \frac{A_N^2}{A_N} \sin(\delta\phi_N^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \\ A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ \vdots \\ A_N \sin(\omega_N t + \phi_N) \\ A_N \cos(\omega_N t + \phi_N) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{A_1^2}{A_1} \cos(\delta\phi_1^2) & \frac{A_1^2}{A_1} \sin(\delta\phi_1^2) & \cdots & \frac{A_N^2}{A_N} \cos(\delta\phi_N^2) & \frac{A_N^2}{A_N} \sin(\delta\phi_N^2) \end{pmatrix} x(t)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

On retrouve les relations entre  $y_3(t)$ ,  $y_4(t)$  et  $x(t)$  par analogie avec la démonstration précédente. Enfin, on obtient la matrice  $C$  suivante :

$$C = \left( \begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & & & \\ \frac{A_1^2}{A_1} \cos(\delta\phi_1^2) & \frac{A_1^2}{A_1} \sin(\delta\phi_1^2) & & & \\ \frac{A_1^3}{A_1} \cos(\delta\phi_1^3) & \frac{A_1^3}{A_1} \sin(\delta\phi_1^3) & \cdots & & \\ \frac{A_1^4}{A_1} \cos(\delta\phi_1^4) & \frac{A_1^4}{A_1} \sin(\delta\phi_1^4) & & & \\ \hline & & & 1 & 0 \\ \frac{A_N^2}{A_N} \cos(\delta\phi_N^2) & \frac{A_N^2}{A_N} \sin(\delta\phi_N^2) & & & \\ \frac{A_N^3}{A_N} \cos(\delta\phi_N^3) & \frac{A_N^3}{A_N} \sin(\delta\phi_N^3) & & & \\ \frac{A_N^4}{A_N} \cos(\delta\phi_N^4) & \frac{A_N^4}{A_N} \sin(\delta\phi_N^4) & & & \end{array} \right) \tag{4.34}$$

L'ensemble de ces équations permet la mise en place du superviseur, qui regroupe l'ensemble des informations apportées par les différents capteurs utilisés. Après une

phase d'identification où le filtre de Kalman mono-capteur est successivement utilisé sur les quatre capteurs indépendamment, le superviseur permet d'établir le modèle de Kalman multi-capteur. Il est alors possible d'utiliser les filtres de Kalman comme présentés dans la section 4.1. On a pu constater que c'est la modification de la matrice  $C$  qui permet de remplir cet objectif. Une fois les nouvelles équations d'état et de mesure établies, il est possible d'utiliser les filtres de Kalman comme présenté dans la section 4.1.

*Fonctionnement du superviseur :*

Le rôle du superviseur est de calculer la matrice  $C$  de la méthode multi-capteurs. Le superviseur peut également permettre de se concentrer sur les modes prédominants du signal. Le superviseur suit alors les étapes suivantes :

- Récupérer les résultats des différents capteurs : le superviseur doit accéder aux réponses des filtres de Kalman pour chaque capteur,
- Repérer les modes d'intérêts : pour chaque capteur, le superviseur calcule les amplitudes de l'ensemble des modes du signal estimé. Il sélectionne les modes dont l'amplitude moyenne est supérieure à un seuil. Ce seuil est fixé en fonction de la valeur de l'amplitude maximale est d'un rapport choisi par l'utilisateur au préalable. L'ensemble des modes d'intérêt est composé de la réunion des modes d'intérêt de chaque capteur,
- Récupérer les amplitudes et les phases des modes d'intérêt : pour chaque capteur et chaque mode d'intérêt, le superviseur relève l'amplitude moyenne ainsi que le déphasage entre le signal estimé étudié et celui du capteur choisi comme référence. Le calcul des amplitudes  $A_i$  et  $A_i^k$  ainsi que les déphasages  $\delta\phi_i^k$  durant la phase d'identification se fait de la façon suivante :
  - Amplitudes  $A_i$  et  $A_i^k$  : elles sont calculées à partir des vecteurs d'état estimés en sortie du filtre de Kalman  $\hat{x}_c$  selon la formule :  $A_i^k = \sqrt{x_i^1(t)^2 + x_i^2(t)^2}$
  - Phases  $\delta\phi_i^k$  : elles sont déterminées en recherchant les maximums des  $\hat{x}_i^1(t)$  et en les recalant avec ceux de la première composante de chaque mode du vecteur d'état estimé issue du capteur de référence.
- Calculer la matrice  $C$  : de l'étape précédente, le superviseur a collecté l'ensemble des  $A_k^c$  et  $\delta\phi_k^c$ . Il ne reste plus qu'à compiler les matrice  $C$ .

Une fois la matrice  $C$  fournie par le superviseur, il ne reste plus qu'à utiliser les filtres de Kalman comme démontré précédemment.

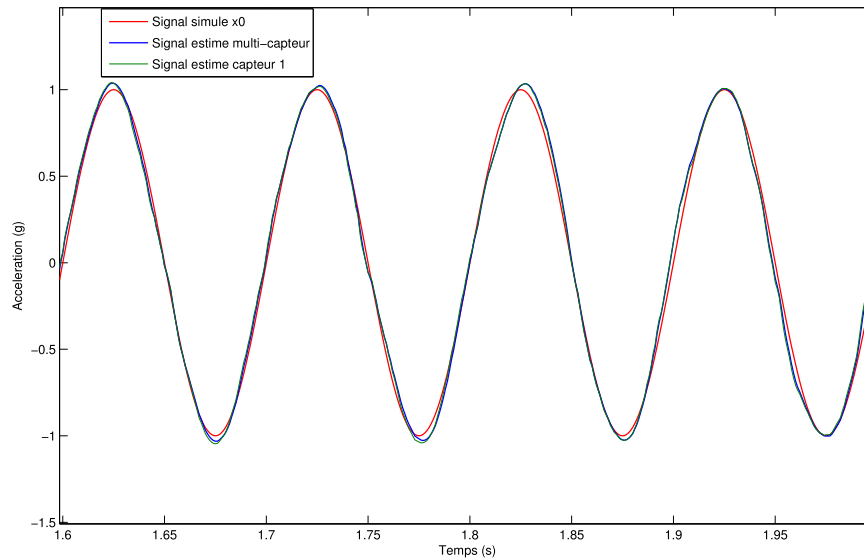


FIGURE 4.7 – Signal simulé  $x_0(t)$  sans bruit additif et signaux simulés  $\hat{x}_1(t)$  et  $\hat{x}_{multi}(t)$  par méthode simple et multi-capteur pour  $f_0 = 10Hz$ ,  $f_1 = 10Hz$ ,  $f_2 = 20Hz$  et  $f_3 = 30Hz$

#### *Exemple académique*

Reprenons l'exemple de simulation utilisé dans les sections précédentes. Afin de simuler les différences d'acquisition entre deux capteurs, on simule le signal  $s(t)$  que l'on suppose issu du capteur 1, choisi comme référence. On simule également un signal  $s_2(t)$ , supposé issu du capteur 2, qui possède la même fréquence, mais une amplitude et une phase différentes.

La Figure 4.7 montre le signal simulé  $x_0(t)$ , le signal estimé par le filtre de Kalman simple et le signal estimé par la méthode multi-capteur. On peut voir que les résultats sont assez proches (pour un seul capteur et pour plusieurs). Cependant, si on trace la courbe de variance de l'erreur d'estimation dans les deux cas (simple capteur et multi-capteur), on peut voir que celle du multi-capteur est plus faible. Cela signifie que l'on peut avoir plus confiance en l'estimé que dans le cas simple capteur. La Figure 4.8 montre ce résultat.

#### 4.2.4 Filtres de Kalman échantillonnés angulairement

L'objectif de cette section est de montrer comment transformer un modèle de Kalman temporel en un modèle de Kalman angulaire afin de filtrer des signaux échantillonnés angulairement. En effet, dans le cas qui nous intéresse, si la vitesse d'entrée varie en fonction du temps la pulsation  $\omega_i$  du mode varie également et le modèle de Kalman devient non-stationnaire alors que la fréquence angulaire du

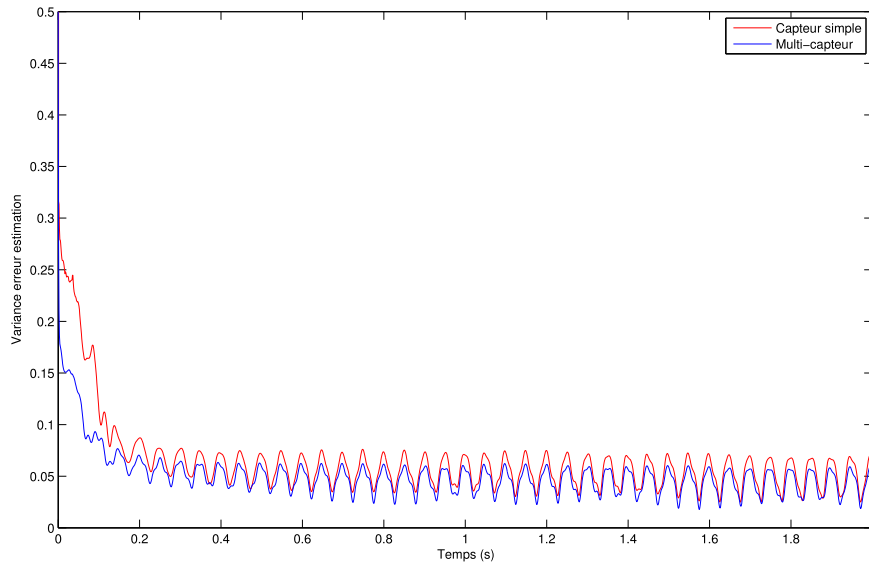


FIGURE 4.8 – Variance des erreurs d'estimation pour les cas simple capteur et multi-capteur

mode est stationnaire (angulairement). Le ré-échantillonnage angulaire permet de transformer un signal non-stationnaire avec des bruits stationnaires en un signal stationnaire additionné de bruits non-stationnaires.

#### 4.2.4.1 Facteur d'échelle sur un modèle dynamique

Soit le modèle dynamique d'un processus aléatoire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) + w(t) \\ y(t) = g(x(t)) + v(t) \end{cases} \quad (4.35)$$

Avec  $v(t)$  et  $w(t)$  des bruits blancs gaussiens tels que :

$$\begin{aligned} \Phi_{ww}(\tau) &= E[w(t)w^T(t + \tau)] = W\delta(\tau) \\ \Phi_{vv}(\tau) &= E[v(t)v^T(t + \tau)] = V\delta(\tau) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Rappelons que si  $x(t)$  et  $y(t)$  sont exprimés en unité  $[u]$ , alors  $\dot{x}(t)$  est exprimé en  $[u.s^{-1}]$ ,  $w(t)$  en  $[u.s^{-1}]$  et  $v(t)$  en  $[u]$ .

On pose maintenant le facteur d'échelle sur le temps :

$$t = a\theta \quad (4.37)$$

avec  $t$  en  $[s]$ ,  $a$  en  $[s.tour^{-1}]$  et  $\theta$  en  $[tour]$ .  $a$  est supposé positif.



On recherche la nouvelle expression du modèle :

- Equation d'état

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{a} \frac{dx(t)}{d\theta} = \frac{1}{a} \frac{dx(a\theta)}{d\theta} = \frac{1}{a} \frac{dx_a(\theta)}{d\theta} \quad (4.38)$$

avec  $x_a(\theta)$  l'expression angulaire du vecteur d'état.

De plus,  $f(x(t)) + w(t)$  devient  $f(x(a\theta)) + w(a\theta)$  On alors :

$$\frac{dx_a(\theta)}{d\theta} = af(x(a\theta)) + aw(a\theta) = af(x_a(\theta)) + \overline{w_a}(\theta) \quad (4.39)$$

avec  $\overline{w_a}(\theta) = aw(a\theta)$ . On peut caractériser le signal aléatoire  $\overline{w_a}(\theta)$  par sa fonction d'autocorrélation angulaire :

$$\Phi_{\overline{w_a}\overline{w_a}}(\alpha) = E[\overline{w_a}(\theta)\overline{w_a}^T(\theta+\alpha)] = a^2 E[\overline{w}(a\theta)\overline{w}^T(a\theta+a\alpha)] = a^2 E[\overline{w}(t)\overline{w}^T(t+a\alpha)] = a^2 W\delta(a\alpha) \quad (4.40)$$

Or  $\delta(a\alpha) = \frac{1}{|a|}\delta(\alpha)$ . On a donc finalement :

$$\Phi_{\overline{w_a}\overline{w_a}}(\alpha) = aW\delta(\alpha) \quad (4.41)$$

On a donc la nouvelle expression de l'équation d'état :

$$\frac{dx_a(\theta)}{d\theta} = af(x_a(\theta)) + \overline{w_a}(\theta) \quad (4.42)$$

- Equation de Mesure :

$$\begin{aligned} y(a\theta) &= g(x(a\theta)) + v(a\theta) \\ y_a(\theta) &= g(x_a(\theta)) + v_a(\theta) \end{aligned} \quad (4.43)$$

avec  $y_a$  l'expression angulaire du vecteur de mesure et  $\Phi_{v_a v_a}(\alpha) = \frac{V}{a}\delta(\alpha)$

Le modèle dynamique devient donc en angulaire :

$$\begin{cases} \frac{dx_a(\theta)}{d\theta} = af(x_a(\theta)) + \overline{w_a}(\theta) \\ y_a(\theta) = g(x_a(\theta)) + \overline{v_a}(\theta) \end{cases} \quad (4.44)$$

avec  $E[\overline{w_a}(\theta)\overline{w_a}^T(\theta+\alpha)] = aW\delta(\alpha)$  et  $E[\overline{v_a}(\theta)\overline{v_a}^T(\theta+\alpha)] = \frac{V}{a}\delta(\alpha)$ . Enfin, la qualité des estimés sera caractérisée par la matrice de covariance angulaire de l'erreur d'estimation :  $P_a(\theta) = E[x_a(\theta)x_a^T(\theta+\alpha)]$ .

## 4.2.4.2 Application aux modèles de Kalman de signaux vibratoires

- Vecteur d'état temporel :

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) = A \sin(\omega t + \phi) \\ x_2(t) = A \cos(\omega t + \phi) \\ x_3(t) = \omega \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

- Equation d'état temporelle

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} x_3(t)x_2(t) + w_1(t) \\ -x_3(t)x_1(t) + w_2(t) \\ 0 + w_3(t) \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

avec :

$$W = \begin{pmatrix} W_1 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

- Vecteur d'état angulaire :

$$x_a(\theta) = \begin{pmatrix} x_{1a}(\theta) = A \sin(\omega_a \theta + \phi) \\ x_{2a}(\theta) = -A \cos(\omega_a \theta + \phi) \\ x_{3a}(\theta) = \omega_a \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

L'équation d'état devrait donc être :

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_{1a}(\theta)}{d\theta} = ax_{3a}(\theta)x_{2a}(\theta) + aw_{1a}(\theta) \\ \frac{dx_{2a}(\theta)}{d\theta} = -ax_{3a}(\theta)x_{1a}(\theta) + aw_{2a}(\theta) \\ \frac{dx_{3a}(\theta)}{d\theta} = 0 + aw_{3a}(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

Observons maintenant l'implémentation discrète du filtre :

- Echantillonnage temporel :

$$\begin{cases} x(n+1) = \int_t^{t+dt} f(x(\tau))d\tau + w^d(n) \\ y(n) = g(x(n)) + v^d(n) \end{cases} \quad (4.50)$$

avec :

$$\begin{cases} E[w^d(n)w^{dT}(n+e)] = dtW\delta(e) = Q_d\delta(e) \\ E[v^d(n)v^{dT}(n+e)] = \frac{V}{dt}\delta(e) = R_d\delta(e) \end{cases} \quad (4.51)$$

– Echantillonnage angulaire :

$$\begin{cases} x_a(n+1) = \int_{\theta}^{\theta+d\theta} af(x_a(\theta))d\theta + \overline{w}_a^d(n) \\ y_a(n+1) = g(x_a(n)) + v_a^d(n) \end{cases} \quad (4.52)$$

avec :

$$\begin{cases} E[\overline{w}_a^d(n)\overline{w}_a^d(n+e)^T] = aWd\theta\delta(e) = Wdt\delta(e) = Q_d\delta(e) \\ E[v_a^d(n)v_a^d(n+e)^T] = \frac{V}{a} \frac{1}{d\theta}\delta(e) = \frac{V}{dt}\delta(e) = R_d\delta(e) \end{cases} \quad (4.53)$$

Les pondérations  $Q_d$  et  $R_d$  sont les mêmes en échantillonnage temporel ou angulaire. Cependant, dans le filtre de Kalman, on fait un changement de variable supplémentaire. L'équation d'état angulaire est en fait :

$$\begin{cases} \frac{dx_{1a}(\theta)}{d\theta} = \overline{x}_{3a}(\theta)x_2(\theta) + aw_{1a}(\theta) \\ \frac{dx_{2a}(\theta)}{d\theta} = -\overline{x}_{3a}(\theta)x_1(\theta) + aw_{2a}(\theta) \\ \frac{dx_{3a}(\theta)}{d\theta} = \overline{w}_{3a}(\theta) \end{cases} \quad (4.54)$$

avec  $\overline{x}_{3a}(\theta) = ax_{3a}(\theta)$  et  $\overline{w}_{3a}(\theta) = aw_{3a}(\theta)$

L'intérêt du changement de variable est double. D'une part, le modèle angulaire (la partie déterministe) a la même expression que le modèle temporel en changeant  $t$  par  $\theta$  donc la fonction à intégrer dans l'implémentation discrète du filtre de Kalman sera la même en version temporelle ou angulaire. D'autre part, si l'on considère le modèle linéaire (pulsation  $\omega$  connue) alors, lorsque la vitesse d'entrée n'est pas constante, le facteur d'échelle devient fonction du temps :  $a$  devient  $a(t)$  et  $\omega$  devient  $\omega(t)$ . Le modèle de Kalman temporel est linéaire et non stationnaire avec des bruits stationnaires, alors que le modèle de Kalman angulaire est stationnaire avec des bruits non stationnaires. Par contre, il faut penser à multiplier  $Q_d$  et  $P$  par la matrice de changement de variable  $K$  :

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

#### 4.2.5 Remarque

La capacité des filtres de Kalman à supporter les variations de fréquences, d'amplitude ou de phase du signal ( plus ou moins fortement selon les cas linéaires ou non linéaires) peut cependant mener à un écueil que nous nous devons de faire remarquer. En effet, si deux modes ont des fréquences trop proches, le filtre de Kalman

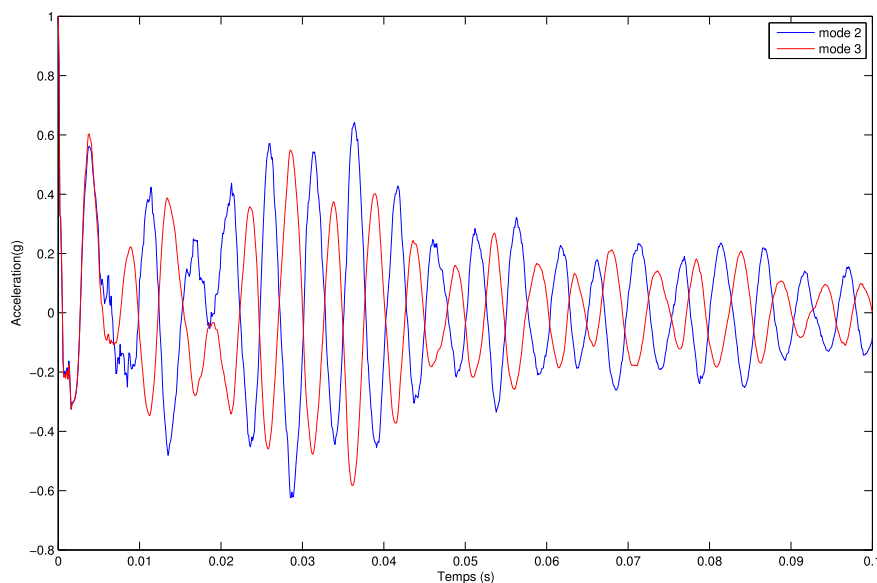


FIGURE 4.9 – Etats des modes #2 et #3

peut donner en sortie deux composantes de même amplitude (non nulle) et en opposition de phase alors qu'aucun des deux modes correspondant n'est réellement présent dans le signal.

Prenons l'exemple d'un modèle de Kalman à trois modes :  $f_1 = 100 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 200 \text{ Hz}$  et  $f_3 = 202 \text{ Hz}$ . Nous l'utilisons pour faire l'estimation d'un signal sinusoïdal simulé, composé uniquement du mode #1. La Figure 4.9 donne les états estimés des modes #2 et #3. On voit donc bien ici que l'on pourrait commettre l'erreur de conclure à la présence de ces deux modes dans le signal, à tort, alors qu'ils sont visiblement en opposition de phase et donc, ils s'annulent.

Il faut donc veiller à ne pas introduire de modes dont les fréquences sont trop proches mais les regrouper sur un seul. Cela signifie que si deux modes sont proches, il ne sera pas possible de déterminer lequel des deux est présent et donc de localiser le défaut.

### 4.3 Conclusion

Dans ce Chapitre nous avons tout d'abord présenté la théorie des filtres de Kalman. Puis nous avons exposé les modèles des filtres de Kalman choisis pour s'adapter au problème de diagnostic vibratoire de la BTP d'hélicoptère. Nous avons également présenté le fonctionnement du superviseur, permettant de calculer le modèle de Kalman dans le cas à plusieurs capteurs. Cette capacité des filtres de kalman à s'adapter

aux situations où plusieurs capteurs traduisent le même état vibratoire en fait une méthode particulièrement intéressante.



# Expérimentation et Résultats

---

## Sommaire

|            |   |            |
|------------|---|------------|
| <b>5.1</b> | <b>Présentation du banc d'essais</b>                    | <b>85</b>  |
| 5.1.1      | Réalisation mécanique                                   | 85         |
| 5.1.2      | Réalisation électronique                                | 87         |
| 5.1.3      | Campagne d'essais                                       | 87         |
| <b>5.2</b> | <b>Résultats des signaux à vitesse constante</b>        | <b>90</b>  |
| 5.2.1      | Signature vibratoire de la BTP                          | 90         |
| 5.2.2      | Signaux vibratoires après endommagement                 | 92         |
| 5.2.3      | Résultats   | 92         |
| 5.2.4      | Filtres à modèle non-linéaire                           | 100        |
| <b>5.3</b> | <b>Résultats des signaux "montée en vitesse"</b>        | <b>101</b> |
| 5.3.1      | Signature de BTP  | 101        |
| 5.3.2      | Détection d'un défaut                                   | 101        |
| 5.3.3      | Saturation des capteurs                                 | 103        |
| <b>5.4</b> | <b>Résultats de superviseur</b>                         | <b>103</b> |
| 5.4.1      | Résultats sur signaux à vitesse constante               | 105        |
| 5.4.2      | Résultats sur signaux "montée en vitesse"               | 106        |
| 5.4.3      | Amélioration des résultats par la méthode multi-capteur | 109        |

---

## 5.1 Présentation du banc d'essais

Au cours de cette thèse, l'accès à des données de type signaux vibratoires de machines tournantes a été primordial. L'étude s'étant concentrée sur la Boîte de Transmission Principale (BTP) de l'hélicoptère et l'accès à un hélicoptère étant le plus souvent complexe et coûteux, le choix a été fait de se procurer une BTP pour créer un banc d'essai. La création de ce banc a donc permis une grande flexibilité et indépendance dans l'acquisition de signaux vibratoires de BTP d'hélicoptère.

### 5.1.1 Réalisation mécanique

La BTP obtenue pour ce banc d'essai provient d'une Alouette III. La figure 5.1 (déjà présentée dans le Chapitre 2) en donne le plan cinématique.

En ce qui concerne la motorisation, il semble évident qu'elle ne peut pas être similaire à celle présente sur une Alouette III. Un moteur électrique peut en effet

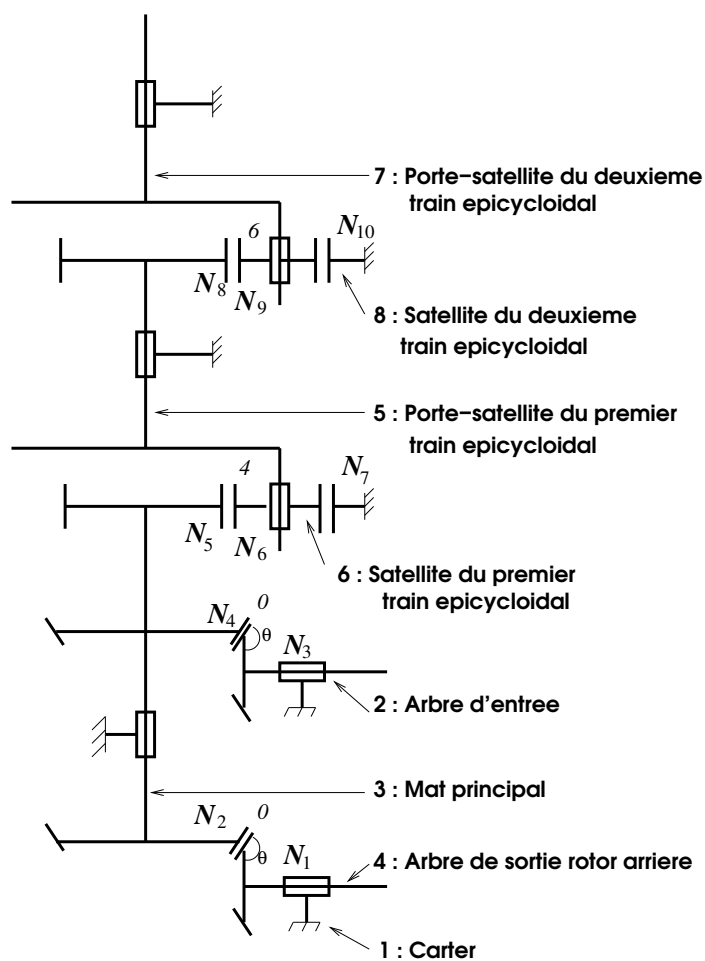


FIGURE 5.1 – Schéma cinématique de la BTP d'Alouette III



suffire à entraîner la BTP, car celle-ci n'est pas chargée. Les rotors étant absents, elle n'entraîne aucune masse. En fonctionnement nominal, la vitesse en entrée de BTP peut atteindre les  $6000\text{t}/\text{min}$ . Pour permettre cela, on utilise un réducteur et un moteur électrique pouvant tourner jusqu'à  $3000\text{t}/\text{min}$ . On a donc choisi un moteur dont les caractéristiques sont les suivantes :

| Puissance (kW) | Couple (Nm) à $3000\text{t}/\text{min}$ | Couple (Nm) à $3300\text{t}/\text{min}$ |
|----------------|---|---|
| 5.5            | 19.5                                    | 17.5                                    |

Pour transmettre le mouvement de rotation du moteur à la BTP, une courroie à dents trapézoïdales a été utilisée. De ce fait, il a fallu fixer le moteur et la BTP sur une plaque d'aluminium, afin d'assurer une bonne rigidité de l'ensemble.

### 5.1.2 Réalisation électronique

Les capteurs choisis pour ce banc d'essais sont des accéléromètres piézoélectriques. Ils sont à électronique intégrée et voici leurs caractéristiques :

|                           |                        |
|---------------------------|------------------------|
| Sensibilité               | $10\text{mV}/\text{g}$ |
| Fréquence de résonance    | $70\text{kHz}$         |
| Déviaton à $25\text{kHz}$ | $< 3\text{dB}$         |

Au delà du choix des accéléromètres, la difficulté réside dans la mise en place de ces capteurs et dans leur fixation à la BTP. L'option de les visser sur des petits blocs de céramiques, eux mêmes collés à la BTP permet de les déplacer à volonté sans risque d'endommagement. Il suffit pour cela de coller un nouveau morceau de céramique sur le nouvel emplacement souhaité et de venir y visser le capteur. De plus, la céramique permet l'isolation électrique entre l'accéléromètre et la BTP.

La Figure 5.2 présente deux photographies du banc d'essais prêt pour une acquisition de signaux vibratoires de la BTP d'Alouette III.

### 5.1.3 Campagne d'essais

Afin de tester les algorithmes présentés dans le Chapitre 4, une campagne d'essais a été mise en oeuvre selon la procédure suivante :

- acquisition de signaux à l'arrivée de la BTP,
- endommagement de la BTP,



(a)



(b)

FIGURE 5.2 – Photos du banc d'essais avec la BTP d'Alouette III

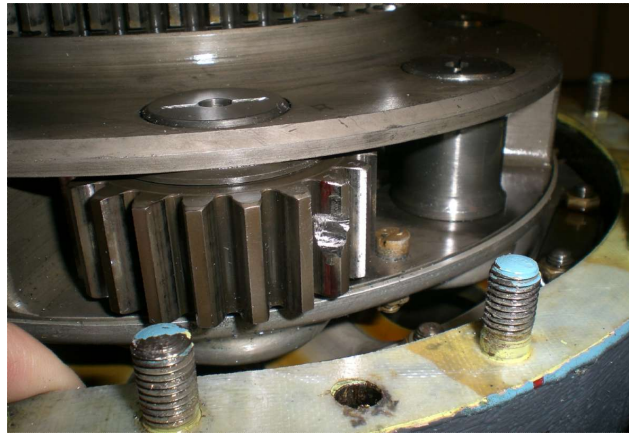


FIGURE 5.3 – Photographie du premier endommagement provoqué sur la BTP

- acquisition de signaux après endommagement.

Les signaux acquis sont de deux types :

- Signaux à vitesse constante : nous avons souhaité tester les algorithmes sur des signaux stationnaires en première approche. En effet, en maintenant la vitesse du moteur constante (grâce à un asservissement), on peut accepter l'hypothèse que la vitesse de rotation de l'arbre d'entrée de la BTP est constante. La durée de ces signaux est de 5 secondes.
- Signaux "montée en vitesse" : ces signaux sont enregistrés afin de tester l'efficacité de notre algorithme sur des signaux non stationnaires. Une phase de ré-échantillonnage angulaire permet de se ramener à des signaux stationnaires. La durée de ces signaux est de 10 secondes.

Un premier défaut a été créé sur la BTP. Il s'agissait d'un écaillage sur une dent d'un satellite du premier train épicycloïdal (corps 6 sur la Figure 5.1). Une photographie de ce défaut est présentée sur la Figure 5.3.

Les essais sur ce défaut n'ont malheureusement donné aucun résultat. Cela peut s'expliquer par le fait que la BTP n'est pas chargée et que le défaut est compensé par l'ensemble des autres contacts (le défaut se trouve sur un satellite à 20 dents pris dans un train épicycloïdal de 8 satellites engrénant une couronne de 93 dents : il y a beaucoup de redondance).

Nous avons donc décidé de produire un défaut plus marqué : un relief. Certes, ce défaut a peu de chances d'apparaître dans un cas réel, mais pour les besoins de l'étude, il peut permettre une bonne mise en pratique des algorithmes. La Figure 5.4 en présente une photographie. Pour des raisons pratiques, ce défaut a quant à

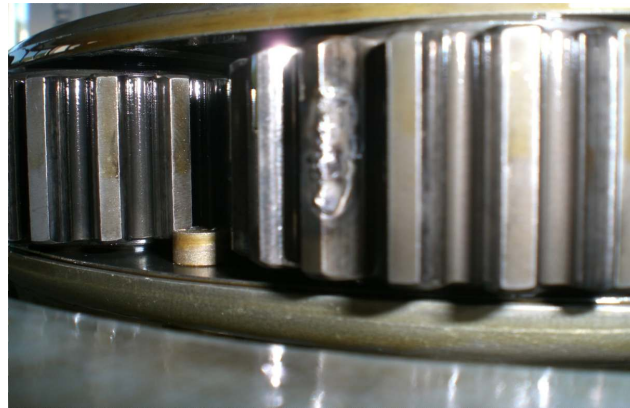


FIGURE 5.4 – Photographie du deuxième endommagement provoqué sur la BTP

lui été créé sur un satellite du deuxième train épicycloïdal (corps 8 sur la Figure 5.1).

La modélisation cinématique de la BTP donne 20 modes à détecter. La Table 5.1 en donne tous les détails.

## 5.2 Résultats des signaux à vitesse constante

Pour ces signaux à vitesse constante, il a été choisi de faire des acquisitions pour des vitesses de rotation du moteur allant de  $500\text{ t/min}$  à  $3250\text{ t/min}$  par sauts de  $250\text{ t/min}$ . Pour chacune de ces vitesses, 10 échantillons sont acquis afin de vérifier la reproductibilité des résultats.

Dans cette section, nous présentons les résultats du filtre de Kalman linéaire introduit dans le Chapitre 4. Nous verrons par la suite que le filtre de Kalman non linéaire offre des résultats moins concluants.

Les figures de résultats présentées sont les variations d’amplitude de chaque mode du signal estimé par filtre de Kalman. Elles sont ainsi constituées de 20 courbes représentant l’amplitude des 20 modes du signal de sortie des filtres de Kalman.

### 5.2.1 Signature vibratoire de la BTP

La BTP étant arrivée dans nos locaux en état de fonctionnement, les acquisitions ont pour but de capturer sa signature vibratoire. Il est cependant déjà possible de détecter certains modes. En effet, les modes  $\#14$  et  $\#20$  reviennent fréquemment sur les signaux estimés par les filtres de Kalman. Ces deux modes correspondent à un défaut sur le corps 2 (corps d’entrée de la BTP) ainsi qu’à la fréquence d’engrènement de l’engrenage associé. Il est possible qu’un défaut minime soit déjà présent sur cet

| Mode | Rapport fréquentiel | Défaut  | Engrenage      |
|------|---------------------|---|----------------|
| #1   | 0.061               | Défaut Corps 1                                  | (1,8)          |
| #2   | 0.112               | Défaut Corps 5                                  | (5,8)          |
| #3   | 0.173               | Défaut Corps 1                                  | (1,6)          |
| #4   | 0.245               | Défaut Corps 1 [ $\times 4$ ]                   | (1,8)          |
| #5   | 0.271               | Défaut Corps 8                                  | (1,8)          |
| #6   | 0.315               | Défaut Corps 3                                  | (3,6)          |
| #7   | 0.415               | Défaut Corps 4                                  | (3,4)          |
| #8   | 0.448               | Défaut Corps 5 [ $\times 4$ ]                   | (5,8)          |
| #9   | 0.488               | Défaut Corps 3<br>Défaut Corps 1 [ $\times 8$ ] | (3,4)<br>(1,8) |
| #10  | 0.542               | Défaut Corps 8 [ $\times 2$ ]                   | (1,8) et (5,8) |
| #11  | 0.691               | Défaut Corps 1 [ $\times 4$ ]                   | (1,6)          |
| #12  | 0.765               | Défaut Corps 6                                  | (1,6)          |
| #13  | 0.896               | Défaut Corps 5 [ $\times 8$ ]                   | (5,8)          |
| #14  | 1                   | Défaut Corps 2                                  | (2,3)          |
| #15  | 1.26                | Défaut Corps 3                                  | (3,6)          |
| #16  | 1.53                | Défaut Corps 6 [ $\times 2$ ]                   | (1,6) et (3,6) |
| #17  | 5.69                | Fréquence d'engrènement                         | (1,8) et (5,8) |
| #18  | 8.29                | Fréquence d'engrènement                         | (3,4)          |
| #19  | 16.07               | Fréquence d'engrènement                         | (1,6) et (3,6) |
| #20  | 20                  | Fréquence d'engrènement                         | (2,3)          |

TABLE 5.1 – Liste des différents modes de défauts possibles des signaux vibratoires de la BTP d'Alouette III

engrenage. Cela peut également représenter un défaut d'alignement. Cet engrenage est à l'entrée de la BTP, il porte donc la charge complète de la BTP. Il n'a pas été possible de démonter la BTP jusqu'à ce niveau sans risquer de compromettre son intégrité. Nous choisissons donc de considérer ces résultats comme étant la signature vibratoire de la BTP.

Il est important de noter que ces modes correspondent à des fréquences repérables sur un spectre de Fourier. Cependant, ces résultats sont plus simples à lire que ceux présentés dans la section 3.8. Dans ce cadre là, l'analyse des signaux par filtres de Kalman présente donc l'avantage d'une lecture facilitée et accessible au plus grand nombre.

### 5.2.2 Signaux vibratoires après endommagement

L'endommagement par ajout de relief produit un défaut de contact majeur. En effet, une différence sonore a été constatée après endommagement. En fonctionnement, la BTP produit donc un niveau sonore et vibratoire plus élevé. Cela se retrouve dans les signaux vibratoires. De façon générale, le fond vibratoire a augmenté. De plus, cette augmentation est très importante pour les capteurs placés les plus près du défaut, soient les capteurs 1 et 2. Ceux-ci présentent donc un effet de saturation qui ne permet pas l'utilisation des signaux qu'ils enregistrent. En effet, la Figure 5.5 présente le signal brut issu du capteur 1 pour une vitesse de rotation du moteur  $V_{moteur} = 2000 t/min$ . On peut aisément voir sur cette figure que la saturation du capteur provoque un "décrochement" du signal vibratoire qui le rend inutilisable. Ce défaut n'a pas pu être corrigé dans les temps pour la fin de cette étude. Nous nous contenterons donc des capteurs 3 et 4, qui, placés plus loin du défaut sur la BTP, enregistrent eux aussi une légère saturation ne portant pas préjudice à l'utilisation des signaux vibratoires enregistrés.

### 5.2.3 Résultats

Dans les signaux après endommagement, on peut donc espérer que le mode #10 se distingue des autres nous allons représenter l'amplitude de chaque composante harmonique calculée par le superviseur. Afin de démontrer la capacité des algorithmes à isoler le défaut on doit s'attendre à ce que l'amplitude du mode #10 se distingue des autres. La réponse au cours du temps des amplitudes des différentes composantes vibratoires sont représentées sur les Figures 5.6 à 5.12, pour différentes vitesses de rotation du moteur et différents types d'essais. On peut constater un régime transitoire d'environ 1 s qui correspond au temps de réponse du filtre de Kalman (recalage des erreurs d'initialisation). Pour isoler la fréquence du défaut pertinent, on s'intéresse plus particulièrement au régime permanent pour détecter l'amplitude du mode critique.

- Il faut tout d'abord constater que la détection du mode #10 sur les courbes de

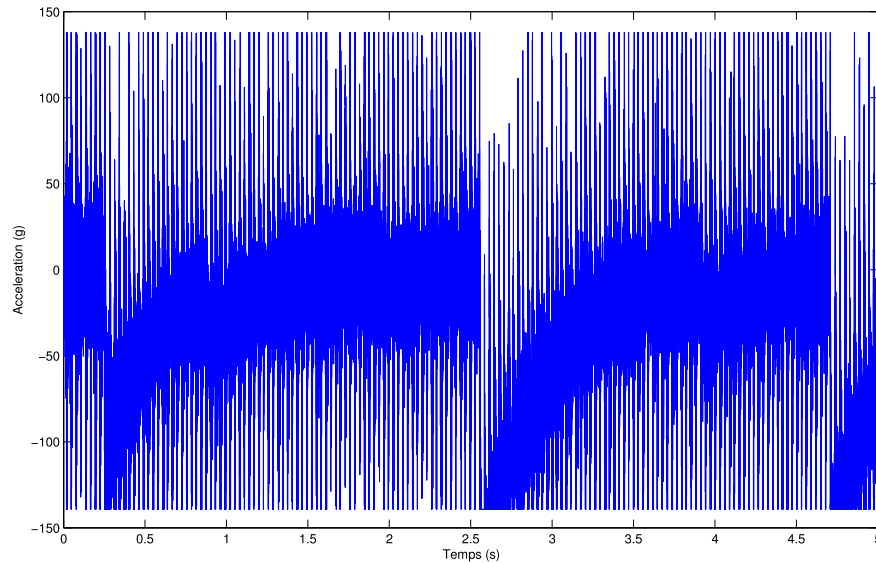
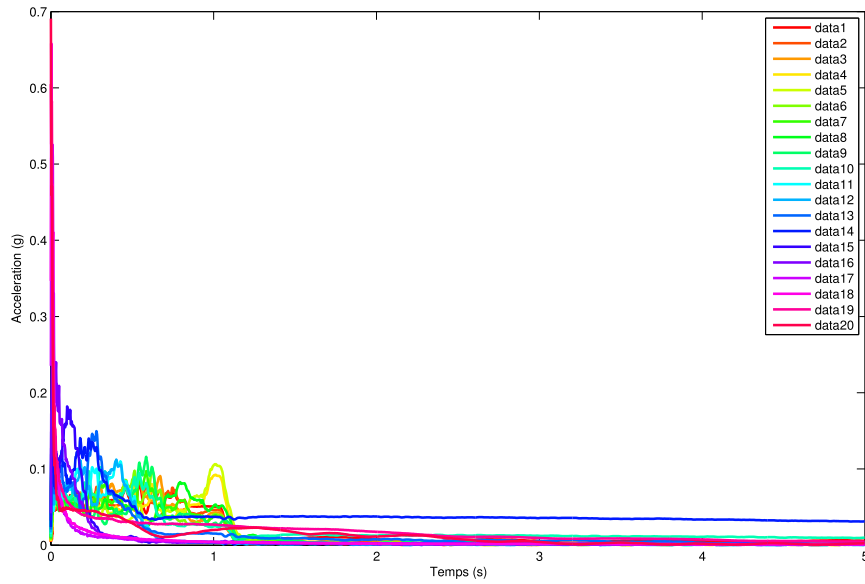


FIGURE 5.5 – Signal brut saturé du capteur 1 pour  $V_{moteur} = 2000t/min$

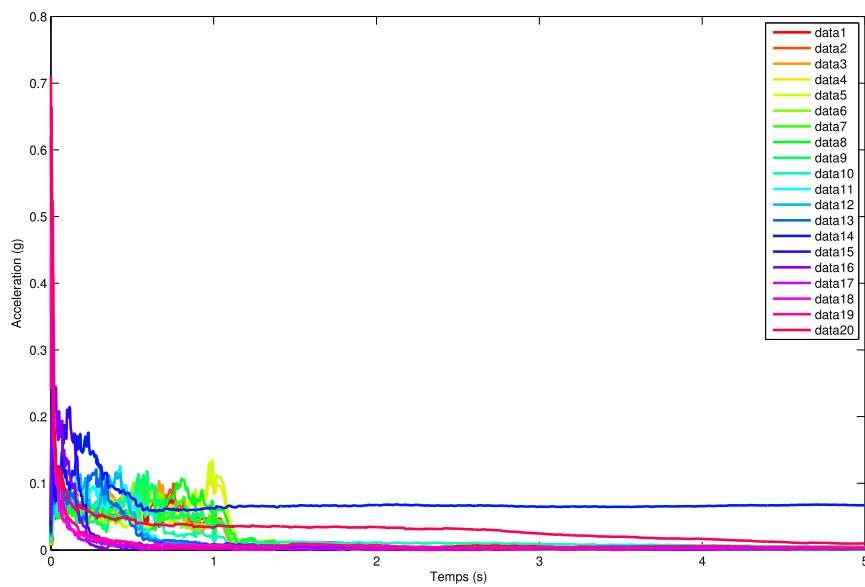
résultats après endommagement dépend de la vitesse de rotation du moteur. En effet, pour des petites vitesses ( $V_{moteur} = 500t/min$  par exemple) il n'est pas possible de détecter le mode #10. La Figure 5.6 présente les courbes de résultats d'un essai avant et après endommagement pour  $V_{moteur} = 500t/min$ . On peut retrouver sur ces figures les modes #14 et #20 mentionnés précédemment. Cependant, il n'y a pas de différence majeure entre les deux courbes de résultats (notamment pas d'augmentation de l'amplitude du mode #10).

- Pour des vitesses de rotation du moteur plus élevées (à partir de  $1500t/min$ ), il est en revanche possible de détecter la présence du mode #10. La Figure 5.7 donne les courbes de résultats d'essais enregistrés sur le capteur 3, avant et après endommagement pour  $V_{moteur} = 1500t/min$ . On peut tirer plusieurs conclusions de ces courbes :
  - l'augmentation globale du fond vibratoire mentionnée peut être ici aperçue,
  - cette augmentation “rattrape” la valeur des modes déjà présents dans la signature vibratoire (#14 et #20). En effet, la fréquence #14 n'a pas vraiment changé de valeur entre les deux courbes. Cependant, elle reste mélangée au fond vibratoire dans la courbe après endommagement.
  - le mode #10 (courbe verte) apparaît nettement au dessus du fond vibratoire dans la courbe après endommagement.

Ceci ne représente qu'un seul essai à  $1500t/min$ . Il est donc intéressant de présenter des courbes de résultats moyens sur l'ensemble des essais d'une même vitesse de rotation du moteur. On trace alors les courbes moyennes d'amplitudes des modes de signaux estimés par filtre de Kalman sur l'ensemble des dix essais de chaque



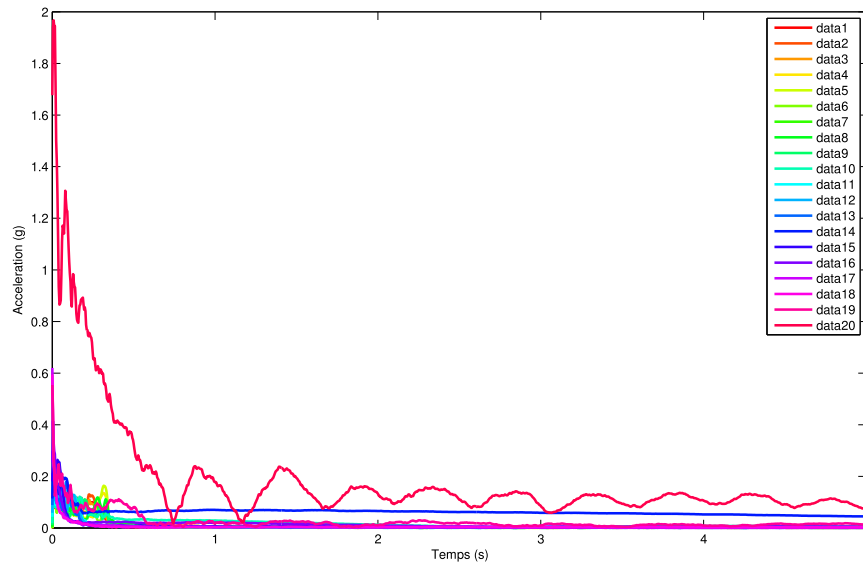
(a) Avant endommagement



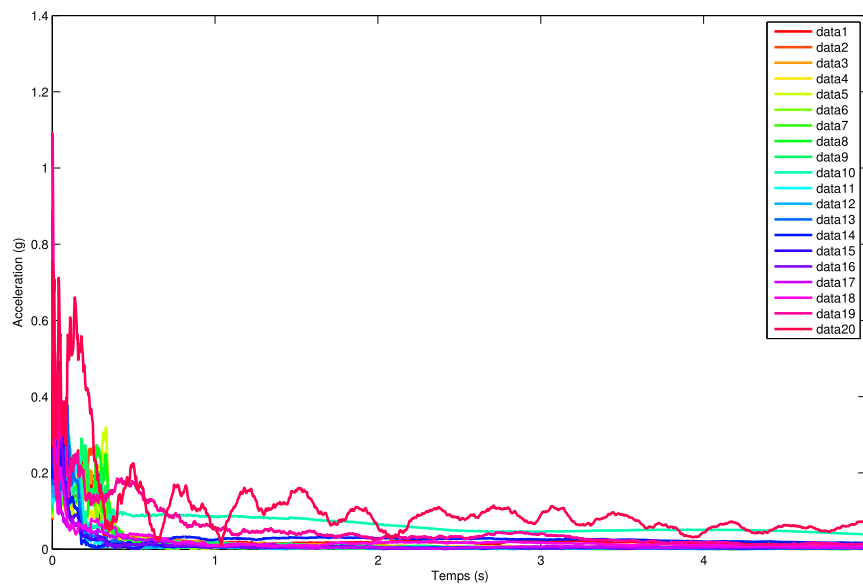
(b) Après endommagement

FIGURE 5.6 – Courbes d'amplitude des modes d'un essai pour  $V_{moteur} = 500 t/min$ , Capteur 1 avant et après endommagement



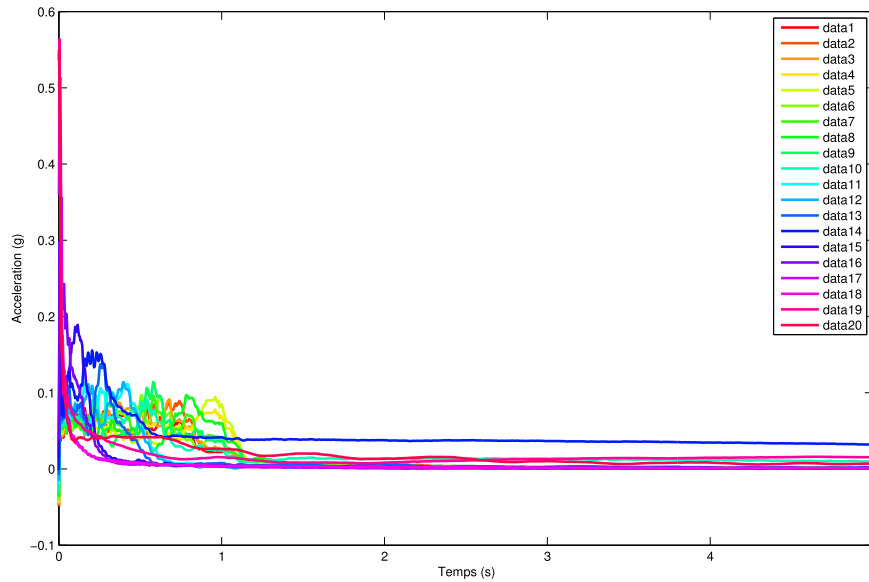


(a) Avant endommagement

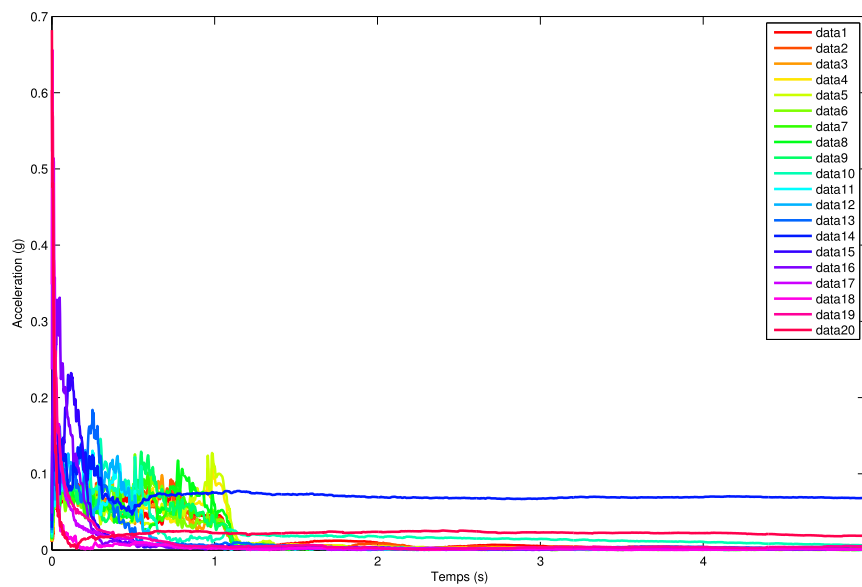


(b) Après endommagement

FIGURE 5.7 – Courbes d'amplitude des modes d'un essai pour  $V_{moteur} = 1500 t/min$ , Capteur 3 avant et après endommagement

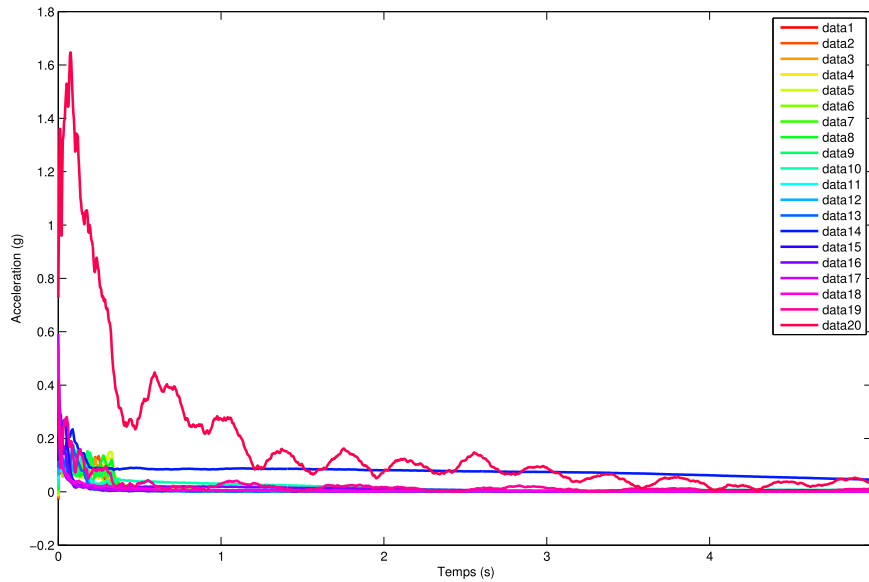


(a) Avant endommagement

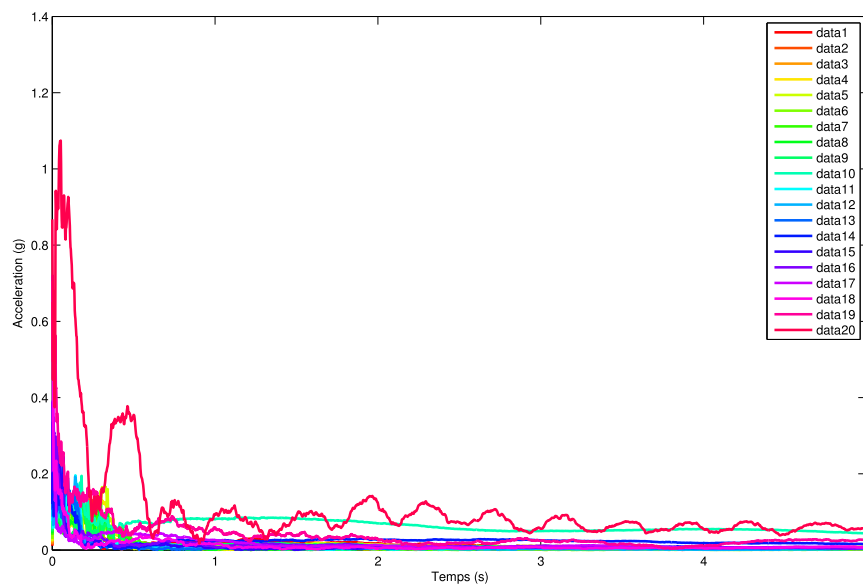


(b) Après endommagement

FIGURE 5.8 – Courbes d'amplitude des modes d'un essai pour  $V_{moteur} = 500 t/min$ , Capteur 1 avant et après endommagement

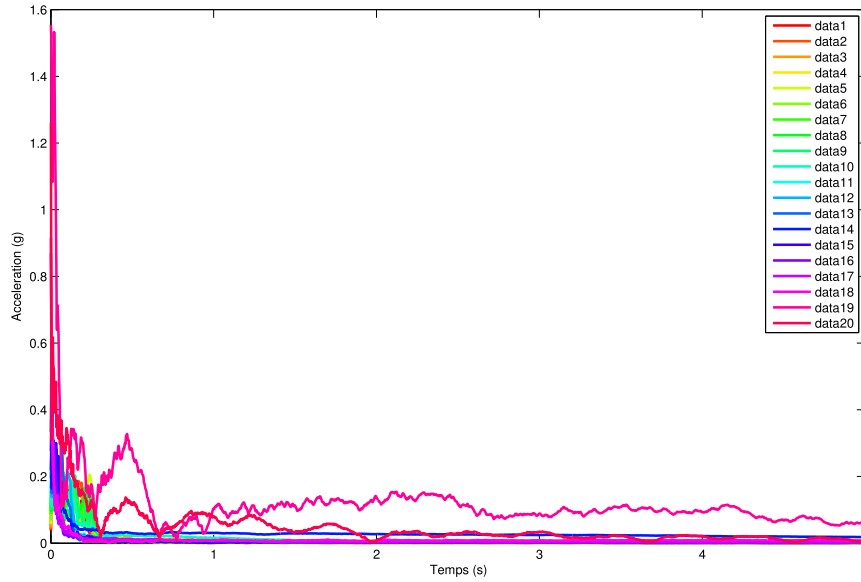


(a) Avant endommagement

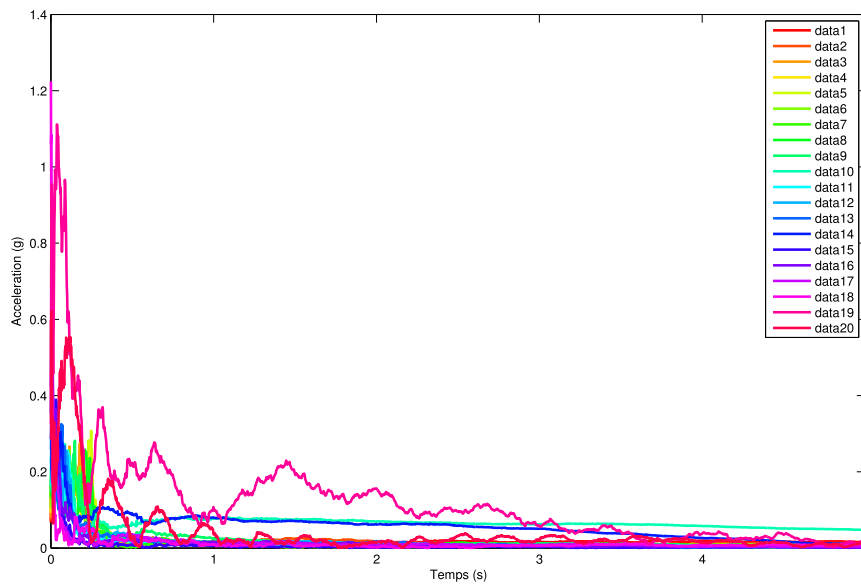


(b) Après endommagement

FIGURE 5.9 – Courbes d'amplitude des modes d'un essai pour  $V_{moteur} = 1500 t/min$ , Capteur 3 avant et après endommagement

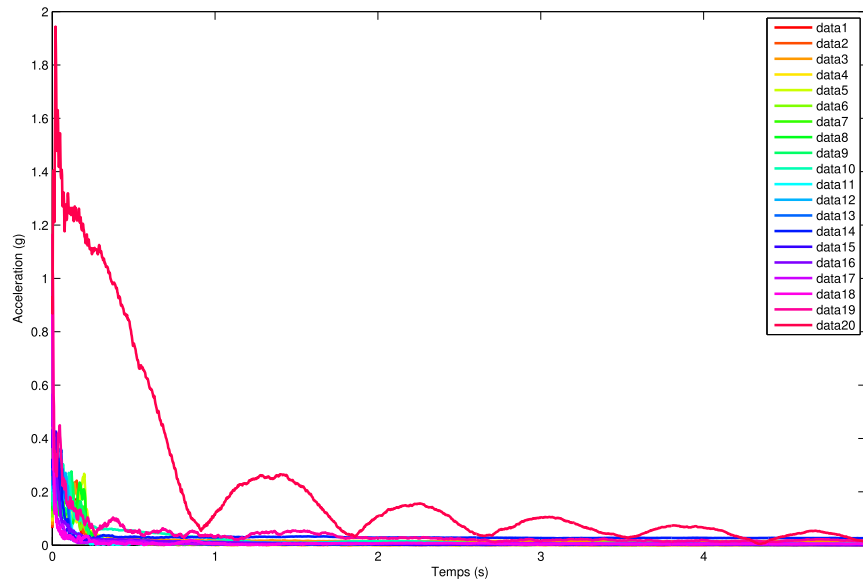


(a) Avant endommagement

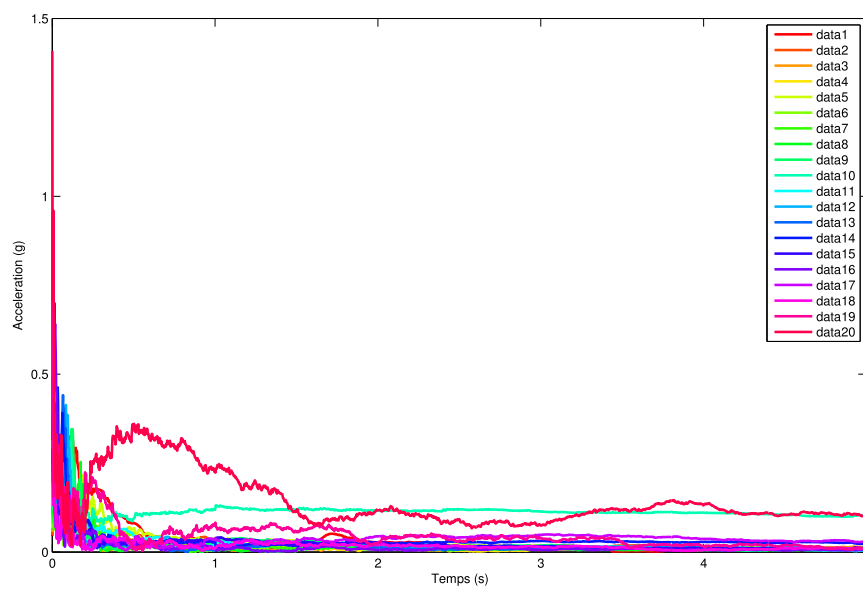


(b) Après endommagement

FIGURE 5.10 – Courbes d'amplitude des modes d'un essai pour  $V_{moteur} = 2000 t/min$ , Capteur 3 avant et après endommagement



(a) Avant endommagement



(b) Après endommagement

FIGURE 5.11 – Courbes d'amplitude des modes d'un essai pour  $V_{moteur} = 2500 t/min$ , Capteur 3 avant et après endommagement

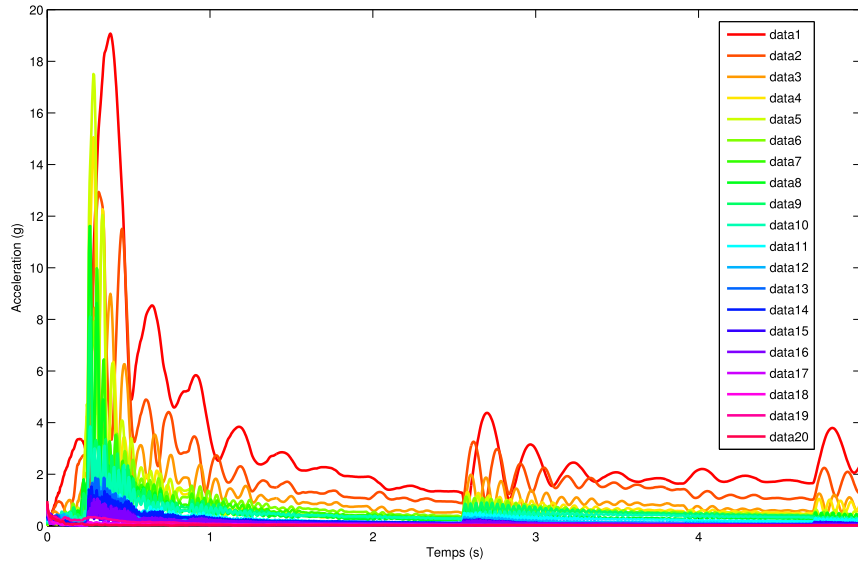


FIGURE 5.12 – Courbes de résultats pour un signal saturé  $V_{moteur} = 2000t/min$  et Capteur 1

vitesse moteur. Les figures 5.8, 5.9, 5.10 et 5.11 montrent respectivement les courbes obtenues pour  $V_{moteur} = 500t/min$ ,  $V_{moteur} = 1500t/min$ ,  $V_{moteur} = 2500t/min$  et  $V_{moteur} = 2000t/min$  pour le capteur 3.

On retrouve sur ces moyennes les résultats présentés ci-dessus. A  $500t/min$ , il n'y a pas de différence majeure entre les courbes avant et après endommagement. Pour  $1500t/min$ ,  $2000t/min$  et  $2500t/min$  en revanche, on voit clairement ressortir la courbe du mode #10 dans les graphes de résultats après endommagement. Sur la Figure 5.12 on peut également voir les effets de la saturation sur une courbe de résultats. Le signal brut présenté sur la Figure 5.5 met en évidence un décrochage du signal brut vers 2.6 s. On retrouve ce décrochage sur le résultat du filtre de Kalman.

#### 5.2.4 Filtres à modèle non-linéaire

Cette méthode a été introduite afin de palier une méconnaissance (ou une erreur) sur les fréquences d'apparition possible de défauts (fréquences des différents modes). Cette méthode est plus coûteuse en temps de calcul car demande des opérations supplémentaires d'estimation de la fréquence de chaque mode.

Or, dans notre étude, il s'est avéré que la connaissance que nous avons de ces fréquences est précise et correcte. En effet, dans le cas non-linéaire, les fréquences estimées ne varient que de façon infime de leur valeur théorique d'initialisation.

Ainsi, les avantages théoriquement apportés par l’introduction d’une non-linéarité dans le modèle des filtres de Kalman ne sont pas ici suffisamment importants pour contrebalancer les inconvénients de calculs plus coûteux. Nous avons donc choisi de n’utiliser que les filtres à modèle linéaire. Dans la suite, les résultats présentés sont donc toujours obtenus grâce aux filtres de Kalman simple, à modèle linéaire.

### 5.3 Résultats des signaux “montée en vitesse”

Le but de cette partie du travail est d’appliquer les algorithmes décrits précédemment à des cas où la vitesse de rotation de l’arbre d’entrée n’est pas constante. Pour cela, on procède à un ré-échantillonnage angulaire. Les variables temporelles deviennent alors des variables angulaires exprimées en degrés. La fréquence angulaire maximale étant de  $f_{ang_{max}} = 20\text{tour}^{-1}$ , soit  $f_{ang_{max}} = 0.05\text{degrés}^{-1}$  (soit un défaut tous les 20 degrés de l’arbre d’entrée), on choisit un pas de ré-échantillonnage tel que :  $pas = 2\text{degrés}$ . Ainsi on respecte bien la loi de Shannon :  $freq_{ang} \geq 2f_{ang_{max}}$ .

#### 5.3.1 Signature de BTP

Pour tester le ré-échantillonnage angulaire, il a été choisi de travailler sur des signaux vibratoires issus d’essais dits “montée en vitesse” pendant lesquels la vitesse de rotation de l’arbre d’entrée de la BTP décrit en 10 secondes une montée en vitesse allant de  $500t/min$  à  $3200t/min$  environ. La Figure 5.13 montre un signal vitesse typique de ces essais. Sur les signaux avant endommagement, il est possible de dégager la même signature vibratoire de BTP que sur les signaux enregistrés à vitesse constante. Les Figures 5.14 et 5.15 montrent ces signatures. On retrouve en effet l’apparition du mode #14 sur les signaux.

Grâce aux filtres de Kalman et à un ré-échantillonnage angulaire, il est donc possible de retrouver la signature de la BTP et ce, quelle que soit la variation de vitesse de l’arbre d’entrée du moteur.

#### 5.3.2 Détection d’un défaut

Les mêmes enregistrements “montée en vitesse” ont été effectués après l’endommagement décrit dans la section 5.1. Malheureusement, les résultats ne sont pas aussi concluants que dans le cas de signaux stationnaires (voir section 5.2). Deux raisons peuvent expliquer ce phénomène :

- l’augmentation du bruit de fond est vraiment présente et peut peut-être dissimuler une augmentation du mode #10 (mode concerné par le défaut introduit)
- dans le cas des signaux à vitesse constante, seules certaines vitesses de rotation de l’arbre d’entrée de la BTP faisaient apparaître le mode #10 et permettaient

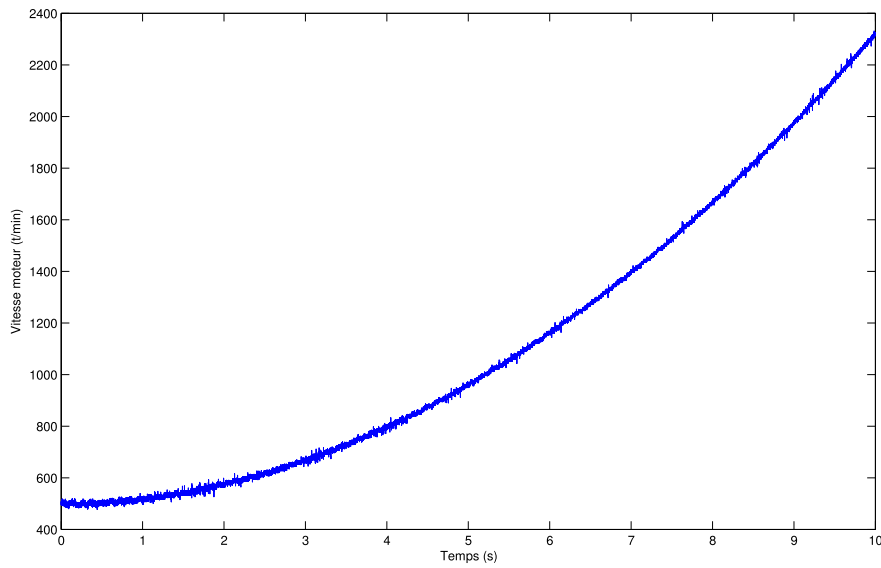


FIGURE 5.13 – Exemple de variation de vitesse moteur pour un signal “montée en vitesse”

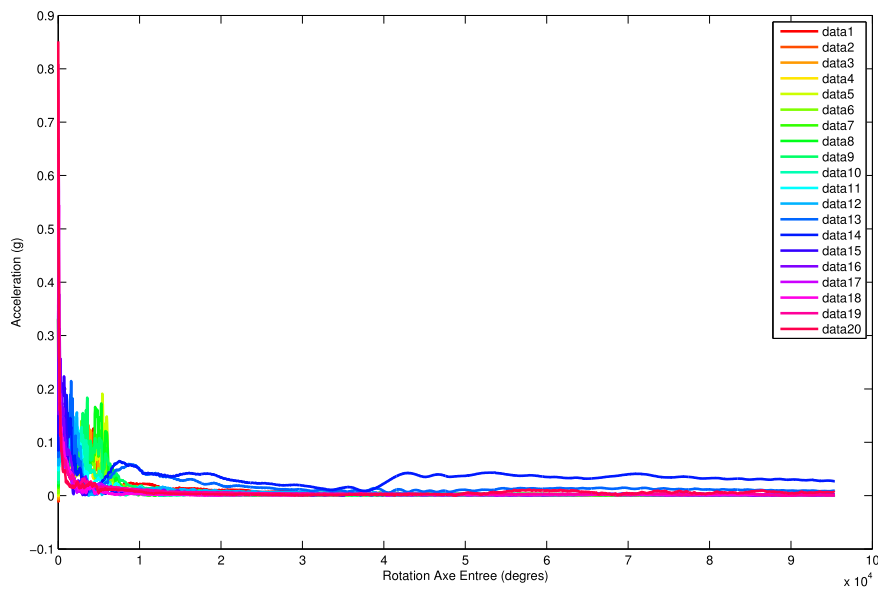


FIGURE 5.14 – Courbe de résultats d’un signal montée en vitesse avant endommagement, capteur 1



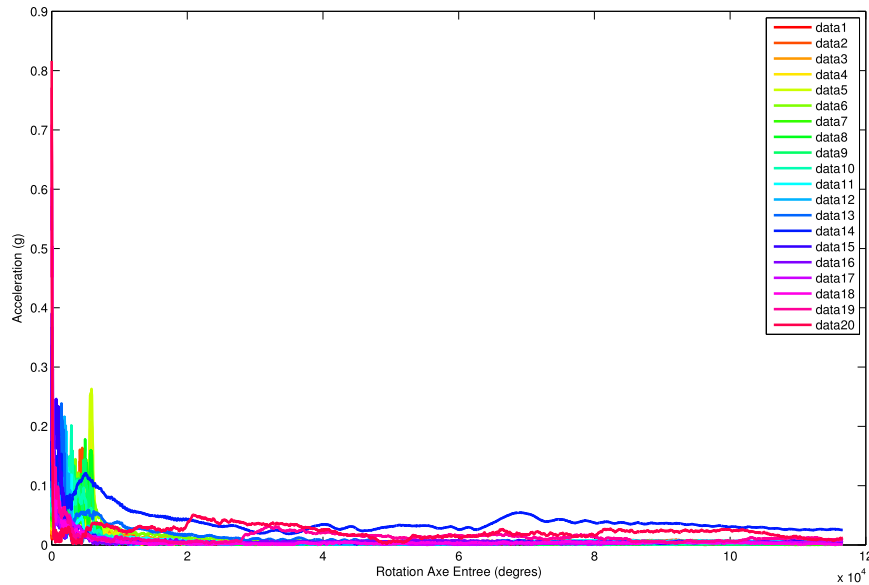


FIGURE 5.15 – Courbe de résultats d’un signal montée en vitesse avant endommagement, capteur 4

ainsi la détection du défaut. Dans le cas des signaux “montée en vitesse”, l’ensemble des vitesses est représenté. Le poids de ces vitesses “révélatrices” n’est peut être pas assez grand par rapport aux autres vitesses. Il pourrait être utile de réaliser des essais sur des signaux pour lesquels le moteur ne varie qu’entre  $1500t/min$  et  $2500t/min$ , là où se situent l’ensemble des vitesses “révélatrices”.

La Figure 5.16 montre les résultats obtenus.

### 5.3.3 Saturation des capteurs

Les signaux “montée en vitesse” sont sujets au problème de saturation des capteurs. Il est possible de voir à partir de quelle valeur de la vitesse de rotation du moteur la saturation intervient. Les Figures 5.17 et 5.18 montrent ce phénomène.

## 5.4 Résultats de superviseur

Dans la section 5.4 le concept du superviseur des filtres de Kalman a été introduit. Dans le cadre des tests sur banc d’essais, nous avons développé l’idée d’augmenter la rapidité et l’efficacité de ce superviseur en ne concentrant son travail que sur certains modes.

En effet, la connaissance acquise lors du filtrage du signal de chaque capteur par

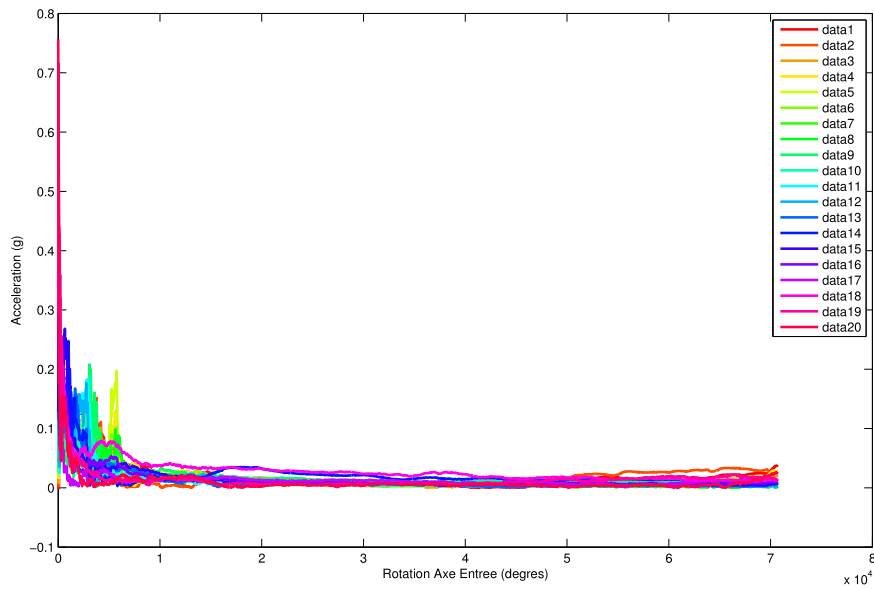


FIGURE 5.16 – Courbe de résultats d'un signal montée en vitesse après endommagement, capteur 3

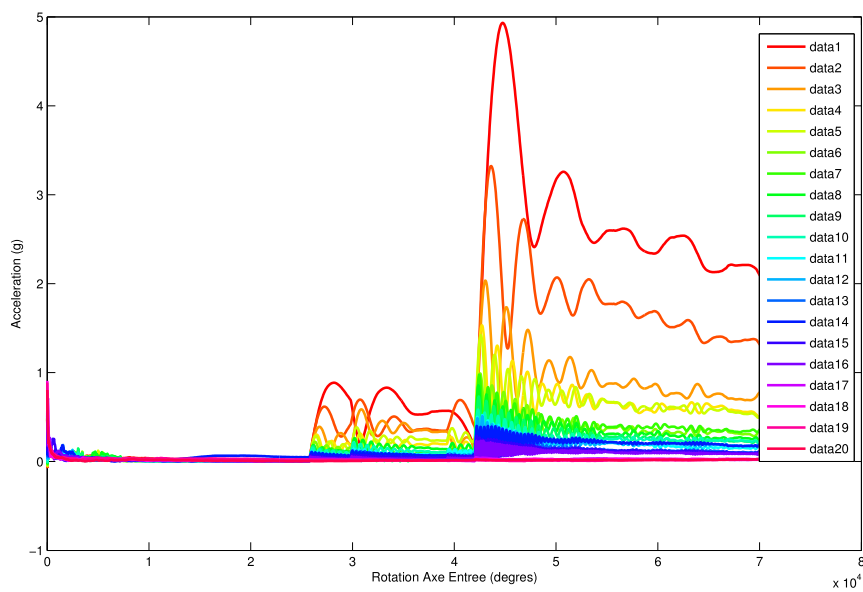


FIGURE 5.17 – Exemple de saturation d'un signal montée en vitesse après endommagement, capteur 1

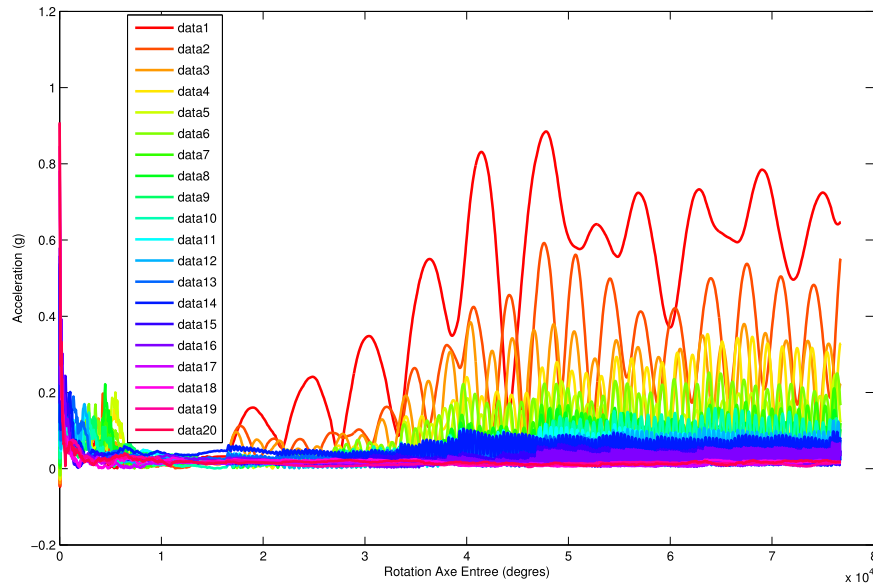


FIGURE 5.18 – Exemple de saturation d'un signal montée en vitesse après endommagement, capteur 2

filtre de Kalman nous donne les modes les plus remarquables pour chaque capteur. En créant un superviseur qui ne prend comme mode que les plus remarquables de chaque capteur, on peut réduire le nombre de modes pris en compte dans le modèle de Kalman de 20 à seulement 4 ou 5 selon les cas : ceci améliore grandement la rapidité d'exécution des algorithmes.

Pour ce faire, le superviseur doit être capable d'analyser les résultats de chaque filtrage sur les quatre capteurs, de détecter le mode le plus élevé et de ne retenir que ceux au delà d'un certain seuil. Il a été choisi de fixer le seuil en fonction du mode maximum. Ici les résultats sont présentés pour un seuil choisi de :

$$S = \frac{A_{max}}{5} \quad (5.1)$$

où  $A_{max}$  est l'amplitude moyenne du mode le plus élevé.

#### 5.4.1 Résultats sur signaux à vitesse constante

Le premier avantage du superviseur est qu'il facilite encore plus la lecture des résultats. En effet, dans les signaux avant endommagement, seuls les modes remarquables de la signature vibratoire de la BTP apparaissent : il s'agit des modes #14 et #20 mentionnés précédemment. Occasionnellement apparaît également le mode #19. Le superviseur nous permet donc de considérer le mode #19 comme pouvant faire partie de la signature vibratoire de la BTP. La simple analyse par filtre de Kalman

sur chaque capteur ne le permettait pas. Or, ce type d'omission peut mener à des ambiguïtés lors de l'analyse des résultats.

La comparaison des courbes de résultats avant et après endommagement (dont on présente deux exemples sur les figures 5.19 et 5.20) permet de dégager les remarques suivantes :

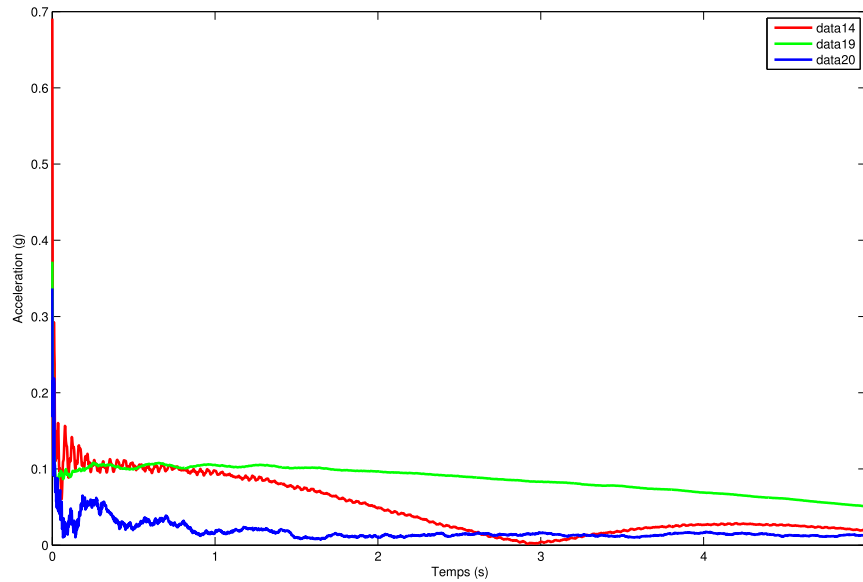
- seuls les modes remarquables de la signature vibratoire apparaissent dans la courbe de résultats avant endommagement. Les modes apparaissant en plus de ceux-ci dans les courbes après endommagement sont des modes d'intérêt,
- l'augmentation du fond vibratoire peut ici se percevoir car certains modes apparaissent dans les courbes après endommagement mais leurs amplitudes ont le même ordre de grandeur que les modes de la signature vibratoire,
- seul le mode #10 apparaît dans les courbes de résultats après endommagement et voit son amplitude augmenter fortement. Il n'y a pas de doute possible quant au fait que le mode #10, représentant le défaut provoqué, soit clairement identifié,
- Comme dans le cas de l'analyse des signaux de chaque capteur la détection du mode #10 n'apparaît que pour les vitesses précédemment nommées "révélatrices" (de  $1500t/min$  à  $2500t/min$  environ),
- en revanche, pour des vitesses réduites ( $500t/min$  jusqu'à  $1250t/min$ ), on ne peut pas mettre en avant de différence majeure entre les résultats avant et après endommagement. Le superviseur n'apporte donc pas d'amélioration dans ce domaine.

#### 5.4.2 Résultats sur signaux "montée en vitesse"

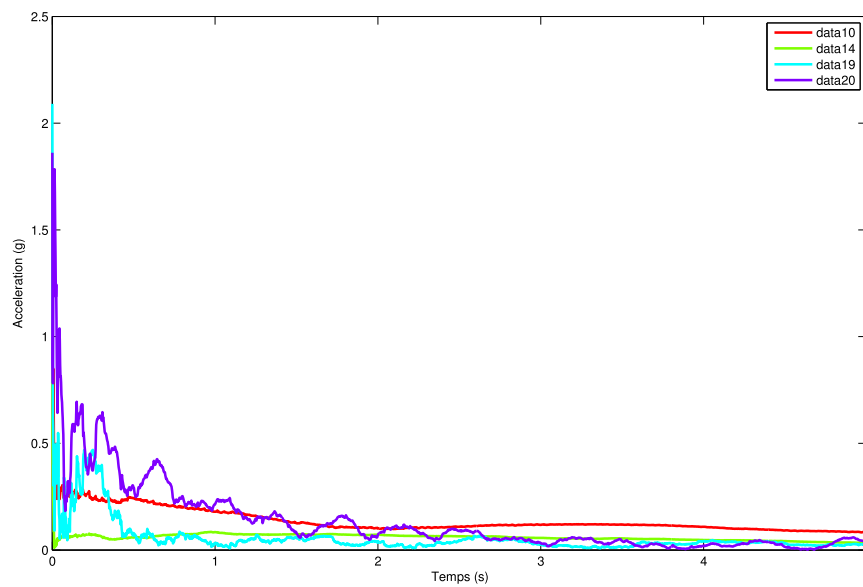
Puisque les signaux acquis par les capteurs 1 et 2 présentent des saturations, ils doivent être éliminés. Nous n'avons donc programmé le superviseur que pour traiter les signaux des capteurs 3 et 4.

Comme il a été vu précédemment, il n'a pas été possible de détecter autre chose que la signature vibratoire sur les signaux "montée en vitesse" en simple capteur.

La méthode multi-capteur ne permet pas d'améliorer ces résultats. En effet, on obtient des résultats très similaires à ceux présentés dans la Section 5.3. Cependant, les avantages de facilité de lecture des résultats et notamment de la signature vibratoire (mentionnés à la Section 5.4) restent valables.

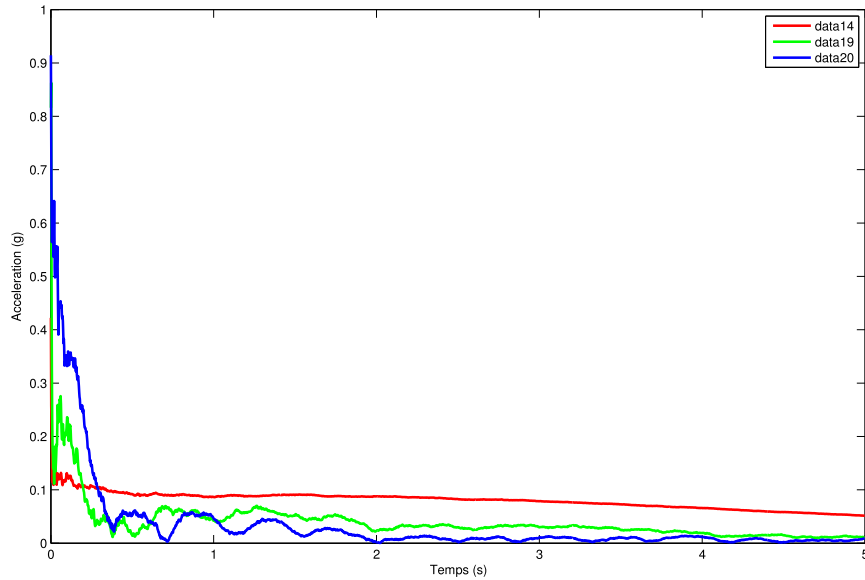


(a) Avant endommagement

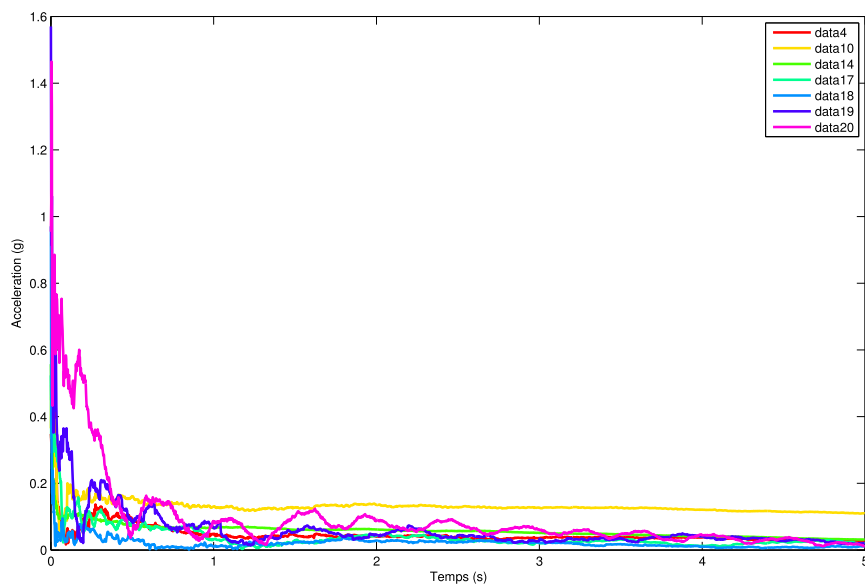


(b) Après endommagement

FIGURE 5.19 – Courbes d'amplitude des modes d'un essai superviseur (4 capteurs) pour  $V_{moteur} = 1500t/min$ , avant et après endommagement



(a) Avant endommagement



(b) Après endommagement

FIGURE 5.20 – Courbes d'amplitude des modes d'un essai superviseur (4 capteurs) pour  $V_{moteur} = 1750t/min$ , avant et après endommagement

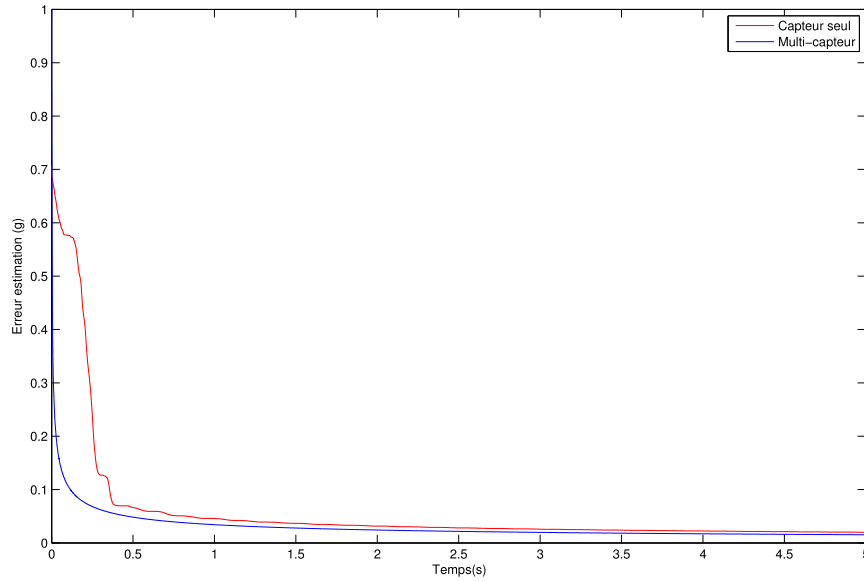


FIGURE 5.21 – Erreur d'estimation dans le cas simple et le cas multi-capteur, pour le signal  $V_{moteur} = 1500t/min$ , Capteur 3, avant endommagement

### 5.4.3 Amélioration des résultats par la méthode multi-capteur

Il est possible de montrer que la méthode multi-capteur (et l'utilisation du superviseur associé) permet une meilleure estimation du signal vibratoire. En effet, il est possible d'obtenir  $P$ , la matrice de covariance de l'erreur d'estimation des filtres de Kalman.

Dans notre cas, la Figure 5.21 montre les courbes de l'erreur d'estimation dans le cas avec un seul capteur et dans le cas multi-capteur pour un même signal vibratoire acquis (présenté ici pour  $V_{moteur} = 1500$ , capteur 3, avant endommagement). On peut en effet constater que la courbe de l'erreur d'estimation de la méthode multi-capteur reste inférieure à celle de la méthode avec un seul capteur.

Dans ce Chapitre, nous avons partiellement testé les algorithmes à base de filtres de Kalman. Ces algorithmes sont encourageants car ils ont permis la détection du défaut. Des améliorations sont cependant à réfléchir. En effet, la détection du défaut n'est intervenue que pour certaines vitesses de rotation du moteur. Les algorithmes peuvent donc être améliorés afin de palier cette lacune.





# Conclusion et Perspectives

---

L'hélicoptère est un moyen de transport et de secours en plein développement. En tant qu'outil de secours, il est souvent le seul accès possible à des lieux reculés ou inhospitaliers (notamment en haute montagne) dans des délais très courts. Il permet l'évacuation rapide de blessés ou la recherche et la localisation de personnes disparues.

Cette thèse avait pour objectif le développement d'un système de diagnostic de la chaîne de transmission d'un rotor d'hélicoptère. Le premier choix réalisé a été de concentrer l'étude sur la Boîte de Transmission Principale. Celle-ci ne présente en effet aucune redondance dans l'hélicoptère et entraîne, en cas de panne, des accidents dramatiques.

Afin d'utiliser au mieux les connaissances disponibles sur la BTP d'hélicoptère, la première partie de l'étude s'est tournée vers l'analyse cinématique. En effet, l'analyse cinématique d'un système mécanique consiste à calculer les vitesses de rotation et les fréquences de contact de tous les corps du système. Après avoir étudié les méthodes déjà existantes, nous avons jugé nécessaire d'en développer une pouvant s'appliquer à n'importe quel système mécanique complexe comprenant éventuellement des engrenages coniques.

Parallèlement à ce travail, une étude des méthodes de traitement des signaux vibratoires de machines tournantes a été menée. Nous avons abordé l'analyse spectrale, l'analyse cepstrale, les approches statistiques, les approches cyclostationnaires ainsi que les méthodes temps-fréquence. L'ensemble de ces études nous a amené à développer un algorithme basé sur l'estimation des différentes composantes du signal vibratoire par filtres de Kalman. En effet, l'analyse cinématique donne les fréquences d'apparition possible de défaut et donc les fréquences des différents modes pouvant constituer le signal vibratoire. Les filtres de Kalman peuvent permettre d'estimer l'amplitude et la phase de ces modes.

Afin de tester les algorithmes développés sous Matlab, un banc d'essais a été développé. Muni d'une BTP d'Alouette III, il fournit des signaux vibratoires, qui, une fois traités par les algorithmes à base de filtres de Kalman donnent les résultats suivants :

- la signature vibratoire de la BTP est aisée à interpréter grâce à ces algorithmes,

- sur les signaux vibratoires à vitesse constante, il est possible de détecter le défaut introduit lors des essais,
- l'échantillonnage angulaire permet une bonne lecture de la signature vibratoire de la BTP pour des signaux dont les vitesses moteurs varient fortement. Cependant, il n'a pas été possible de détecter le défaut créé,
- enfin, on a montré que le superviseur permet d'améliorer l'erreur d'estimation, et les résultats de manière générale.

Par comparaison avec les outils d'analyse temps-fréquence et plus généralement les techniques de traitement des signaux, l'approche proposée se distingue par son côté "système", c'est à dire qu'elle s'appuie sur un modèle de l'état vibratoire du mécanisme (qui a fait l'objet d'un développement particulier en première partie). Un des intérêts de cette approche est de s'adapter directement au cas où plusieurs mesures sont disponibles en permettant d'exploiter au mieux la complémentarité des différentes sources de mesures.

Pour cela, un superviseur a été développé avec deux objectifs :

- identifier lors d'une phase préalable l'équation de mesure, c'est à dire comment se projette l'état vibratoire sur les différents capteurs,
- adapter et simplifier le modèle de Kalman en supprimant les modes les plus significatifs.

Un des inconvénients est que les résultats de cette méthode dépendent de la qualité du modèle, ici la connaissance de la liste des fréquences des défauts de contact. Elle reste sensible aux erreurs de méconnaissance de ces fréquences. Pour réduire cette sensibilité, divers aménagements ont été testés notamment le filtre de Kalman échantillonné angulairement, afin d'exploiter au mieux la stationnarité angulaire des fréquences de défaut.

L'objectif initial d'isoler un défaut dans une BTP d'hélicoptère, qui est un système mécanique très complexe, était très ambitieux. La revue bibliographique fait état d'expérimentations beaucoup plus académiques (engrenages simples et droits). Il serait donc judicieux d'évaluer notre approche sur de tels exemples afin de mieux cerner ses possibilités et ses limites.

Le banc d'essais n'ayant été disponible que la dernière année, plusieurs autres expériences n'ont pas pu être menées faute de temps. Il serait donc utile d'exploiter de façon encore plus approfondie cet outil. Il serait notamment intéressant de réaliser des essais "montée en vitesse" sur des vitesses moteurs allant de 1500 à 2500t/min afin de déterminer s'il est possible dans ce cas de détecter le défaut

introduit. Un autre développement possible serait de prendre en compte les harmoniques des modes les plus significatifs afin de restituer la forme d'un défaut sur une période. Pour cela, il faudrait introduire certaines modifications sur le superviseur.

De plus, cette méthode présente l'avantage de pouvoir être implémentée en ligne, pour une utilisation en temps réel. Nous n'avons pas essayé dans l'objectif de cette thèse d'optimiser les temps de calcul afin de se ramener à des applications en temps réel. Cependant, cette optimisation reste possible et est une piste sérieuse de développement futur.

De manière plus globale, le développement futur de cette étude est soumis à l'obtention de signaux vibratoires réels issus de l'hélicoptère. En effet, les signaux vibratoires obtenus sur le banc d'essais sont issus d'une BTP non chargée et hors de son environnement. Ils sont certes une bonne piste d'étude et ont eu une grande utilité dans le développement des algorithmes à base de filtres de Kalman. Ces derniers devront être testés et validés avec de vrais signaux vibratoires enregistrés sur un hélicoptère.



# Algorithme d'analyse cinématique de systèmes mécaniques complexes

---

## A.1 Description des fonctions

Cet algorithme utilise en entrée une structure *data*, contenant toutes les données du système. La section suivante donnera les indications pour la construction de cette structure.

Les différentes fonctions utilisées dans cet algorithme sont :

- `jointtable.m` : cette fonction récupère la structure *data*, et construit le tableau des liaisons *T* du système.
- `kinemod.m` : avec *data* comme donnée d'entrée, cette fonction calcule la matrice adjacente *M*. Pour ce faire, cette fonction en appelle deux autres :
  - `multiturning.m` : c'est une première étape dans la détermination du corps de référence de chaque paire engrenante. Cette fonction crée une liste de toutes les liaisons pivot simples ou multiples et de tous les corps leur appartenant.
  - `bodyref.m` : à partir de la structure *data* et des indices de deux corps d'un engrenage, cette fonction donne le corps de référence de la paire engrenante choisie.
- `default.m` : cette fonction prend en entrée la structure *data* et le vecteur des vitesses angulaires  $\Omega$ . Elle renvoie une seconde structure décrivant tous les défauts de contacts pouvant apparaître dans le mécanisme ainsi que leur fréquence d'apparition. Chaque cellule de la structure représente un défaut de contact et contient cinq champs :
  - `rate` : la fréquence d'apparition du défaut,
  - `N` : le nombre de sources pouvant créer ce défaut,
  - `joint` : les indices des corps de la paire concernée,
  - `type` : le type de la paire portant le défaut (engrenage ou liaison pivot),
  - `doc` : une brève description du défaut.

## A.2 Structure de données *data*

La structure de données *data* doit contenir toutes les informations disponibles sur le mécanisme, c'est à dire sur les engrenages et les liaisons pivot. La création de cette structure suit un protocole précis. L'élément  $(i, j)$  de *data* rassemble les informations

à propos de la paire  $(i, j)$  du mécanisme. Il semble logique de ne s'intéresser qu'aux cas où  $j > i$ , au vu de la symétrie de cette structure.

Il est important de comprendre que les informations nécessaires à la construction de *data* ne sont pas les mêmes pour les engrenages et les roulements. Le protocole de construction sera donc différent pour les engrenages que pour les roulements.

**Liaison pivot** : Tout d'abord, il faut décrire le roulement impliqué dans la liaison pivot. Cela prend la forme d'une structure *bearing* créée comme suit :

- `bearing.Dm` : diamètre moyen du roulement
- `bearing.db` : diamètre des billes ou des rouleaux du roulement
- `bearing.Z` : nombre de billes ou de rouleaux
- `bearing.angle` : angle de contact entre les billes et la bague du roulement

Puis, cette structure *bearing* est utilisée pour décrire la liaison pivot *data*( $i, j$ ), l'élément  $(i, j)$  de la structure *data* comme suit :

- `data(i, j).type` : le type de la paire, ici 'p' pour pivot,
- `data(i, j).N` : le nombre de roulements engagés dans cette liaison pivot,
- `data(i, j).B` : le nom de chacune des structures *bearing* associées aux roulements,
- `data(i, j).level` : le niveau de chaque liaison pivot (voir Section 2.2.2). Le niveau d'une liaison pivot est un entier. Les liaisons pivot coaxiales portent le même niveau.

Si les informations sur les roulements ne sont pas disponibles, il est toujours possible d'utiliser le programme, en changeant le type de la paire en 'l'. Dans ce cas il suffit de rentrer :

- `data(i, j).type` : 'l',
- `data(i, j).level` : niveau de la liaison pivot.

**Engrenage** : Dans ce cas, il n'y a que trois champs à remplir dans l'élément  $(i, j)$  de la structure *data* :

- `data(i, j).type` : le type de la paire, ici 'e' pour engrenage,
- `data(i, j).Z1 =  $N_i e^{\theta_i \sqrt{-1}}$`  : nombre de dents complexe du corps  $i$ , avec  $N_i$  le nombre de dent réel du corps  $i$ , et  $\theta_i$  l'angle entre l'axe de rotation et l'axe des dents du corps  $i$ .
- `data(i, j).Z2 =  $N_j e^{\theta_j \sqrt{-1}}$`  : nombre de dents complexe du corps  $j$ , avec  $N_j$  le nombre de dent réel du corps  $j$ , et  $\theta_j$  l'angle entre l'axe de rotation et l'axe des dents du corps  $j$ .

### A.3 Exemples

Dans cette section, on reprend les trois exemples exposés précédemment (l'exemple simple de Nelson, le différentiel de voiture et la BTP d'Alouette III), pour faire une démonstration du fonctionnement de l'algorithme. Des exemples de fonctions Matlab seront donnés ainsi que des vues sur le "command window".

**Exemple 1 : le train épicycloïdal de Nelson** Le schéma cinématique de ce système a été présenté dans la Figure 2.6. Il n'y a pas d'information sur les roulements de ce système, donc le champ *type* des liaisons pivot est : 'l'. Pour les engrenages, les données suivantes sont utilisables :  $N_1 = 15$ ,  $N_2 = 25$  et  $N_3 = 10$ , avec  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  les nombres de dents des corps 1, 2, et 3, et  $\alpha = \pi/3$ ,  $\beta = \pi/4$ .

The file `dataexemple.m` gives an example of how to build the data file :

```
clear all

%% Roll or Ball bearings
data(1,4).type='l';
data(1,4).level=1;

data(2,4).type='l';
data(2,4).level=1;

data(3,4).type='l';
data(3,4).level=2;

%% Description of the gear pairs of the mechanism
beta=pi/4;
alpha=pi/3;

data(1,3).type='e';
data(1,3).Z1=15*exp(j*beta);
data(1,3).Z2=10*exp(j*(beta-alpha));

data(2,3).type='e';
data(2,3).Z1=25*exp(j*(2*alpha-beta-pi));
data(2,3).Z2=10*exp(j*(alpha-beta));
```

Here is given MATLAB session to analyse this mechanism.

```
>> %% Collecting the data
data_exemple

>> %% Computing the adjacency matrix
M=kinemod(data)

M =

    10.6066 +10.6066i         0          9.6593 - 2.5882i  -20.2659 - 8.0184i
         0          -6.4705 -24.1481i   9.6593 + 2.5882i  -3.1888 +21.5600i
```

```
>> % Number of degree of freedom
size(M,2)-rank(M)

ans =

    2

>> % Computing the speed ratio matrix
Rep=null(M)

Rep =

   -0.1944 + 0.2990i    0.7267 - 0.0512i
    0.3186 - 0.2606i    0.3580 + 0.2626i
    0.8211 + 0.1035i    0.0687 - 0.0073i
    0.1262 - 0.0508i    0.4963 + 0.1449i

>> % Computing the Speed Ratio Matrix and imposing the link cart speed to 0
>> null([M;0 0 0 1])

ans =

    0.4700 - 0.2370i
   -0.2820 + 0.1422i
   -0.6603 - 0.4328i
    0

>> % Normalizing with respect to link 1 Speed
>> W=null([M;0 0 0 1])/ans(1)

W =

    1.0000
   -0.6000 + 0.0000i
   -0.7500 - 1.2990i
    0

>> % Computing all the contact defaults of the mechanism
>> def=default(data,W)

def =

6x1 struct array with fields:
```



```
rate
N
joint
type
doc

>> % Displaying the second default
>> def(2)

ans =

rate: 0.5263
N: 15.0000
joint: [1 3]
type: 'e'
doc: 'default on a tooth of body # 1'
```

### Exemple 2 : le différentiel de voiture

Dans cette partie, on reprend l'exemple du différentiel de voiture étudié dans le paragraphe 2.3.1. Les données correspondant à ce système peuvent être trouvées dans le fichier `data_différentiel.m`. Le fichier principal `main.m` résume les différents comportements mentionnés précédemment.

```
%% Collecting the data
data_différentiel

%% Kinematic analysis
% Computing the table of links and joints of the system
T=jointtable(différentiel);

% Computing the adjacency matrix
M=kinemod(différentiel);

% Number of degree of freedom
Ndof=size(M,2)-rank(M);

% Computing the speed ratio matrix
Rep=null(M);

%% Imposing the car frame speed to 0 and normalizing with respect to two
% wheels.
aux=null(M(:,2:end));
```

```

W=aux*inv(aux(2:3,1:2));

%% Nominal behaviour : driving straight ahead
% The carter is fixed to 0 and the two wheels turn at the same speed
% The speed ratio vector is normalized with respect to the transmission
aux=null([M(:,2:end);0 1 -1 0 0 0]);
W=aux*inv(aux(1,1));
W=[0;aux];
% Inventaire des  $d\ddot{i}_j$ ;  $\frac{1}{2}$ fautes:
def=default(differentiel,W);

%% The car is jacked up
% It means the transmission speed is set to 0. Then the Speed ratio vector
% is normalized with respect to the wheels.
aux=null(M(:,3:end));
W=[0 ; 0 ; aux*inv(aux(1,1))];

%% Numerical application
aux=null(M(:,2:end));
aux=aux*inv(aux(2:3,1:2));
W=aux*[26;30];
W=[0;W];
def=default(differentiel,W);

```

### Exemple 3 : la BTP d'Alouette III

Dans cette partie, l'exemple de la BTP d'Alouette III présentée au paragraphe 2.3.2 est repris. Il n'y a pas de données concernant les roulements du système, donc les liaisons pivot doivent être de type 'l' dans le fichier de données.

Une version du fichier principal `main.m` peut être :

```

%% Collecting the data
data_alouette

%% Kinematic analysis
% Computing the table of links and joints of the system
T=jointtable(data);

% Computing the adjacency matrix
M=kinemod(data);

% Number of degree of freedom
size(M,2)-rank(M)

```

---

```
% Computing the speed ratio matrix
Rep=null(M);

%% Nominal behaviour :
% The MGB frame (link 1) speed is set to 0 and the speed ratio
% vector is normalized with respect to the link 2

aux=null(M(:,2:end));
W=[0;aux*inv(aux(1,1))];

def=default(data,W);
```



# Bibliographie

- [Antoni 2002a] J. Antoni, J. Daniere et F. Guillet. *Effective Vibration Analysis of IC Engines using Cyclostationarity. Part I - A methodology for condition monitoring*. Journal of sound and vibration, vol. 257, no. 5, pages 815–837, 2002. (Cité en pages 39 et 54.)
- [Antoni 2002b] J. Antoni, J. Daniere et F. Guillet. *Effective Vibration Analysis of IC Engines using Cyclostationarity. Part II - New Results on the Reconstruction of the Cylinder Pressures*. Journal of sound and vibration, vol. 257, no. 5, pages 839–856, 2002. (Cité en page 39.)
- [Antoni 2004] J. Antoni, F. Bonnardot, A. Raad et M. El Badaoui. *Cyclostationary modelling of rotating machine vibration signals*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 18, pages 1285–1314, 2004. (Cité en pages 5 et 39.)
- [Breneur 2002] C. Breneur. *Eléments de maintenance préventive de machines tournantes dans le cas de défauts combinés d'engrenages et de roulements*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de LYON, December 2002. (Cité en page 23.)
- [Brown 1997] R. G. Brown et P. Y. C. Hwang. Introduction to random signals and applied kalman filtering. John Wiley and Sons, 1997. (Cité en page 61.)
- [Buchsbaum 1970] F. Buchsbaum et F. Freudenstein. *Synthesis of Kinematic Structure of Geared Kinematic Chains and Other Mechanisms*. Journal of Mechanical Design, vol. 5, pages 357–392, 1970. (Cité en page 11.)
- [Castanié 2003] F. Castanié. Analyse spectrale. Lavoisier, 2003. (Cité en page 41.)
- [Choi 1989] H.I. Choi et W.J. Williams. *Improved Time-Frequency Representation of Multicomponent Signals using Exponential Kernels*. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, Signal Processing, vol. ASSP-37, 1989. (Cité en page 48.)
- [Choy 2003] F. K. Choy, D. H. Mugler et J. Zhou. *Damage identification of a gear transmission using vibration signatures*. Transactions of the ASME, vol. 125, pages 394–403, june 2003. (Cité en page 4.)
- [Cleghorn 1987] W. L. Cleghorn et G. Tyc. *Kinematic analysis of planetary gear trains using a microcomputer*. Int. J. Mech. Eng. Educa, vol. 15, pages 57–69, 1987. (Cité en page 10.)
- [Cohen 1989] L. Cohen. *Time-Frequency Distributions - A review*. In Proceedings of the IEEE, volume 77, pages 941–981. IEEE, July 1989. (Cité en page 48.)
- [Cohen 1995] L. Cohen. Time-frequency analysis. Prentice-Hall, 1995. (Cité en page 48.)
- [Dalpiaz 1996] G. Dalpiaz, A. Rivola et R. Rubini. *Dynamic modelling of gear systems for condition monitoring and diagnostics*. Congress on Technical Diagnostics, 1996. (Cité en page 4.)

- [Daubechies 1990] I. Daubechies. *The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis*. IEEE Transactions on Information Theory, vol. 36, no. 5, pages 961–1005, 1990. (Cité en page 45.)
- [Ding 2009] H. Ding, J. Zhao et Z. Huang. *Unified Topological Representation Models of Planar Kinematic Chains*. Journal of Mechanical Design, vol. 131, no. 11, page 114503, 2009. (Cité en page 18.)
- [Gardner 1994] W.A. Gardner et C.M. Spooner. *The Cumulant Theory of Cyclostationary Time-Series, Part 1 : Foundations*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 42, no. 12, pages 3387–3408, 1994. (Cité en page 39.)
- [Hammond 1996] J. K. Hammond et P. R. White. *The analysis of non-stationary signals using time-frequency methods*. Journal of sound and vibration, vol. 190, no. 3, pages 419–447, 1996. (Cité en page 44.)
- [Hsu 1992] C. H. Hsu et K. T. Lam. *A New Graph Representation for the Automatic Kinematic Analysis of Planetary Spur-Gear Trains*. Journal of Mechanical Design, vol. 114, pages 196–200, 1992. (Cité en pages 11, 12, 15, 18 et 19.)
- [Kahraman 2004] A. Kahraman et H. Ligata. *A kinematics and power flow analysis methodology for automatic transmission planetary gear trains*. Journal of Mechanical Design, vol. 126, pages 1071–1081, November 2004. (Cité en page 10.)
- [Kothamasu 2006] R. Kothamasu, S. Huang et W. VerDuin. *System Health monitoring and prognostics - a review of current paradigms and practices*. Journal of advanced manufactured technologies, vol. 28, pages 1012–1024, 2006. (Cité en page 4.)
- [Labarrere 1988] M. Labarrere, J. P. Krief et B. Gimonet. *Le filtrage et ses applications*. Cepadues-Edition, 1988. (Cité en page 62.)
- [Mallat 1989] S.G. Mallat. *A Theory for Multiresolution Signal Decomposition : the Wavelet Representation*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 11, no. 7, pages 674–693, 1989. (Cité en page 45.)
- [Margenau 1961] H. Margenau et R.N. Hill. *Correlation Between Measurements in Quantum Theory*. Prog. Theor. Phys., vol. 26, pages 722–738, 1961. (Cité en page 48.)
- [McFadden 1986] P. D. McFadden. *Detection fatigue cracks in gears by amplitude and phase demodulation of the meshing vibration*. Journal of vibration, acoustics, stress and reliability in design, April 1986. (Cité en page 51.)
- [McFadden 1987] P. D. McFadden. *Examination of a technique for the early detection of failure in gears by signal processing of the time domain average of the meshing vibration*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 1, no. 2, pages 173–183, 1987. (Cité en page 51.)
- [Meyer 1992] Y. Meyer. *Wavelets and operators*. Cambridge University Press, 1992. (Cité en page 45.)

- [Nelson 2005] A. Nelson et R. J. Cipra. *Simplified kinematic analysis of bevel epicyclic gear trains with application to power-flow and efficiency analyses*. Transactions of the ASME, vol. 127, pages 278–286, 2005. (Cité en pages 10 et 17.)
- [Page 1952] C.H. Page. *Instantaneous power spectra*. Journal of Applied Physics, vol. 23, pages 103–106, 1952. (Cité en page 48.)
- [Raad 2008] A. Raad, J. Antoni et M. Sidahmed. *Indicators of cyclostationarity : Theory and application to gear fault monitoring*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 22, pages 574–587, 2008. (Cité en page 54.)
- [Randall 1982] R.B. Randall. *The Application of Cepstrum Analysis to Machine Diagnostics*. In Mechanical Failures Prevention Group, La Posada Hotel, Scottsdale, December 1982. 36th Meeting. (Cité en page 54.)
- [Randall 2004] R. B. Randall. *Detection and diagnosis of incipient bearing failure in helicopter gearboxes*. Engineering failure analysis, vol. 11, pages 177–190, 2004. (Cité en page 4.)
- [Remond 2005] D. Remond et J. Mahfoudh. *From transmission error measurements to angular sampling in rotating machines with discrete geometry*. Shock and Vibration, vol. 9, pages 1–13, 2005. (Cité en page 6.)
- [Renaudin 2010] L. Renaudin, F. Bonnardot, O. Musy, J.B. Doray et D. Remond. *Natural roller bearing fault detection by angular measurement of true instantaneous angular speed*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 24, pages 1998–2011, 2010. (Cité en pages 23 et 24.)
- [Samuel 2005] Paul D. Samuel et Darryll J. Pines. *A review of vibration-based techniques for helicopter transmission diagnostics*. Journal of sound and vibration, vol. 282, pages 475–508, 2005. (Cité en pages 4 et 53.)
- [Stewart 1977] R.M. Stewart. *Some Useful Analysis Techniques for Gearbox Diagnostics*. Rapport technique MHM/R/10/77, Machine Health Monitoring Group, Institute of Sound and Vibration Research, University of Southampton, July 1977. (Cité en page 51.)
- [Tsai 2010] M.C. Tsai et C.C. Huang. *Kinematic Analysis of Planetary Gear Systems Using Block Diagram*. Journal of Mechanical Design, vol. 132, no. 6, 2010. (Cité en page 10.)
- [Ville 1948] J. Ville. *Théorie et Application de la Notion de Signal Analytique*. Cables et Transmissions, vol. 2A, no. 1, pages 61–74, 1948. (Cité en page 48.)
- [Wang 1996] W. J. Wang et P. D. McFadden. *Application of wavelets to gearbox vibration signals for fault detection*. Journal of sound and vibration, vol. 192, no. 5, pages 927–939, 1996. (Cité en page 47.)
- [Wigner 1932] E.P Wigner. *On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium*. Physics Review, vol. 40, pages 749–759, 1932. (Cité en page 48.)
- [W.Koenig 1946] W.Koenig et H.K. Dunn. *The Sound Spectrograph*. J. Acoust. Soc. Am., vol. 18, no. 1, pages 19–49, 1946. (Cité en page 45.)

- 
- [W.Rihaczek 1968] W.Rihaczek. *Signal Energy Distribution in Time and Frequency*. IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-14, pages 369–374, 1968. (Cité en page 48.)
- [Yang 1973] A. T. Yang et F.Freudenstein. *Mechanics of Epicyclic Bevel-Gear Trains*. ASME J. Eng. Ind, vol. 95, pages 497–502, 1973. (Cité en page 10.)
- [Zacksenhouse 2000] M. Zacksenhouse, S. Braun, M. Feldman et M. Sidahmed. *Toward Helicopter Gearbox diagnostics from a small number of examples*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 14, no. 4, pages 523–543, 2000. (Cité en page 4.)





## **Développement d'un système de surveillance de la chaîne de transmission d'un rotor d'hélicoptère**

L'hélicoptère est un moyen de transport et de secours en plein développement. Cependant, les coûts d'entretien et de maintenance de ces appareils freinent à l'heure actuelle son développement. Au-delà de la restriction des coûts de maintenance, la sécurité des passagers ou des secouristes à bord est en jeu. Dans ce contexte, cette thèse a pour objectif de développer une méthode de diagnostic de la chaîne de transmission d'un hélicoptère. Il a été choisi de concentrer les travaux de cette thèse sur la Boîte de Transmission Principale (BTP). En effet, ne présentant aucune redondance dans l'appareil et étant fréquemment une source d'accidents, elle représente le point faible de la transmission d'un hélicoptère. Pour développer cette méthode, une étude des méthodes de traitement des signaux vibratoires a été réalisée. Elle a mené au développement d'une approche à base de modèle cinématique et de filtres de Kalman pour le diagnostic de la BTP d'un hélicoptère. Un banc d'essai a été mis en place afin de tester expérimentalement cette approche.

Mots clés : automatique, traitement du signal, cinématique

## **Vibration diagnosis of an helicopter gear box**

The helicopter is a mean of transportation and of rescue constantly developing. However, the costs of maintenance of those crafts are currently limiting its development. Moreover, the safety of the passengers and rescuers on board is at stake. In that context, the aim of this PhD study is to develop a method of diagnosis of the transmission of the helicopter. We have chosen to focus on the Main Gear Box (MGB). Actually, this part is not redundant in the craft and is quite often responsible for crashes: it represents the weakest link of the helicopter transmission. So as to develop this method, different methods of signal processing have been studied. It led to the development of an approach based on kinematic modeling and Kalman filtering for the diagnosis of the MGB. A test bench has been created so as to test this approach.

Keywords : automatism, signal processing, kinematic