



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par **l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace**  
Spécialité : Génie mécanique, mécanique des matériaux

---

Présentée et soutenue par **Nicolas ROUSSOULY**  
le 16 décembre 2011

**Approche probabiliste pour la justification  
par analyse des structures spatiales**

---

### JURY

M. Christian Bes, président  
M. Jean-Marc Bourinet  
M. Scott Cogan, rapporteur  
M. Frank Petitjean, co-directeur de thèse  
M. Michel Salaün, directeur de thèse  
M. Bruno Sudret, rapporteur

---

École doctorale : **Mécanique, énergétique, génie civil et procédés**

Unité de recherche : **Institut Clément Ader**

Directeur de thèse : **M. Michel Salaün**  
Co-directeur de thèse : **M. Frank Petitjean**



*À mon Phanou.*



# Remerciements

Mes premières pensées vont vers mes encadrants, Frank Petitjean et Michel Salaün. Nos rencontres hebdomadaires me manquent déjà, elles ont été l'objet de longues discussions très agréables. Je les remercie pour leur conseils, leur soutien et leur écoute.

Ce travail n'aurait jamais eu lieu sans la présence de nos partenaires industriels Fabrice Buffé, Jérôme Buffé et Anne Carpine. Je les remercie profondément pour leur confiance, leur suivi, les échanges très enrichissants que nous avons eu ainsi que leur accueil au sein de leur établissement.

Je remercie particulièrement Jean-Noël Bricout pour avoir été à l'origine de ce travail lors de sa direction au service Structure & Mécanique du CNES et pour sa relecture minutieuse du rapport.

Je pense également à la superbe équipe des doctorants de l'ISAE-ENSICA : Gregory, Soraya, Thomas, le terrible Jean-Pal, Nathalie, Irène, Eric, Sylvain, François, Samuel, Cheng, Florent avec qui j'ai passé de bons moments au cours des divers repas, pauses café, coinches ou soirées... Je leur souhaite un bon courage pour la suite.

Enfin, je souhaite remercier Bruno Sudret et Scott Cogan pour avoir rapporté ce travail ainsi que Jean-Marc Bourinet et Christian Bes pour leur participation au jury.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
I.1	Contexte et enjeux . . . . .	2
I.2	Architecture des structures satellites . . . . .	3
I.3	Dimensionnement et critères de conception . . . . .	3
I.3.1	Environnement mécanique . . . . .	3
I.3.2	La démarche industrielle . . . . .	5
I.4	Intérêt d’une approche probabiliste pour la justification . . . . .	6
I.5	Objectif du travail . . . . .	7
<b>II</b>	<b>Méthodes pour l’analyse de fiabilité et de sensibilité</b>	<b>9</b>
II.1	Introduction . . . . .	10
II.2	Représentation des incertitudes . . . . .	11
II.2.1	Introduction . . . . .	11
II.2.2	Variable aléatoire . . . . .	11
II.2.3	Vecteur aléatoire . . . . .	12
II.2.4	Exemple de la variable et du vecteur gaussien . . . . .	13
II.3	Méthodes pour l’analyse de fiabilité . . . . .	15
II.3.1	Position du problème . . . . .	15
II.3.2	Méthode de Monte Carlo . . . . .	15
II.3.3	<i>First Order Reliability Method</i> – FORM . . . . .	18
II.3.4	Tirages d’importance . . . . .	20
II.3.5	Autres méthodes . . . . .	21
II.3.6	Transformation isoprobabiliste . . . . .	21
II.4	Méthodes de méta-modélisation . . . . .	24
II.4.1	Introduction . . . . .	24
II.4.2	Les surfaces de réponse . . . . .	26
II.4.3	Le chaos polynomial . . . . .	29
II.4.4	Le krigeage . . . . .	31
II.4.5	Autres types de méta-modèles . . . . .	33
II.5	Méthodes pour l’analyse de sensibilité . . . . .	33
II.5.1	Introduction . . . . .	33
II.5.2	Méthodes de criblage . . . . .	34
II.5.3	Analyse de sensibilité globale . . . . .	36
II.6	Conclusion . . . . .	38
<b>III</b>	<b>Méthodologie basée sur les surfaces de réponse</b>	<b>41</b>
III.1	Introduction . . . . .	42
III.2	Estimation de l’erreur d’une surface de réponse . . . . .	43
III.2.1	Position du problème . . . . .	43
III.2.2	Erreur de généralisation . . . . .	43

III.2.3	Estimations par pénalisation . . . . .	44
III.2.4	Estimations par simulation . . . . .	45
III.2.5	Bilan . . . . .	47
III.3	Construction de la surface de réponse . . . . .	47
III.3.1	Quelques outils . . . . .	47
III.3.2	Démarche de sélection . . . . .	48
III.4	Validation de la surface de réponse . . . . .	49
III.4.1	Inconvénient d'un critère d'erreur global . . . . .	49
III.4.2	Calcul des indicateurs <i>bootstrap</i> . . . . .	50
III.4.3	Détermination de la région d'intérêt . . . . .	51
III.5	Illustration sur un exemple d'application . . . . .	53
III.5.1	Sélection des termes et validation croisée . . . . .	53
III.5.2	Paramétrage du <i>bootstrap</i> . . . . .	54
III.5.3	Paramétrage de la région d'intérêt . . . . .	55
III.5.4	Conclusion . . . . .	57
III.6	Démarche générale . . . . .	57
III.6.1	Étape initiale . . . . .	57
III.6.2	Amélioration de la surface de réponse : enrichissement . . . . .	58
III.6.3	Méthode adaptative . . . . .	61
III.6.4	Exemples d'applications . . . . .	66
III.7	Application sur un modèle cube . . . . .	73
III.7.1	Description du modèle et objectif de l'étude . . . . .	73
III.7.2	Analyse initiale . . . . .	75
III.7.3	Application de la méthode adaptative aux réponses 2, 4, 5 et 6 . . . . .	76
III.7.4	Sélection des variables . . . . .	78
III.7.5	Analyse de sensibilité préliminaire, comparaison à la sélection des variables . . . . .	79
III.7.6	Autre démarche, exemple des réponses 5 et 6 . . . . .	82
III.7.7	Analyse de sensibilité globale . . . . .	85
III.7.8	Conclusion . . . . .	86
III.8	Conclusion générale . . . . .	87
<b>IV</b>	<b>Analyse statique du satellite TARANIS</b>	<b>91</b>
IV.1	Introduction . . . . .	92
IV.2	Description du modèle et de l'étude . . . . .	92
IV.3	Analyse de sensibilité préliminaire . . . . .	96
IV.4	Analyse de fiabilité initiale . . . . .	97
IV.5	Sélection des variables . . . . .	99
IV.6	Seconde analyse après réduction . . . . .	99
IV.7	Méthode adaptative sur la réponse PZ_c4 . . . . .	100
IV.8	Analyse de sensibilité globale . . . . .	102
IV.9	À propos d'une analyse avec les variables de post-traitement aléatoires . . . . .	102
IV.10	Conclusion . . . . .	104
<b>V</b>	<b>Propagation d'incertitudes en dynamique</b>	<b>105</b>
V.1	Introduction . . . . .	106
V.2	Analyse dynamique des structures industrielles . . . . .	106
V.2.1	Position du problème . . . . .	106
V.2.2	Résolution par approche modale . . . . .	107
V.3	Méthodes de propagation d'incertitudes en dynamique . . . . .	111
V.3.1	Introduction . . . . .	111
V.3.2	Méthodes de perturbation . . . . .	112

---

V.3.3	Méthodes de réanalyse . . . . .	113
V.3.4	Méthodes basées sur les méta-modèles . . . . .	114
V.3.5	Conclusion . . . . .	115
V.4	Utilisation des surfaces de réponse . . . . .	115
V.4.1	Description de la démarche . . . . .	115
V.4.2	Grandeurs d'intérêt à approcher . . . . .	115
V.4.3	Appariage des modes . . . . .	116
V.4.4	Normalisation des vecteurs propres . . . . .	118
V.4.5	Calcul numérique du système propre au cours de l'échantillonnage . . . . .	119
V.4.6	Bilan . . . . .	120
V.4.7	Illustration sur un cas simple . . . . .	121
V.5	Application sur le satellite TARANIS . . . . .	126
V.5.1	Description de l'étude . . . . .	126
V.5.2	Analyse initiale du modèle . . . . .	127
V.5.3	Première analyse de la dispersion des FRF . . . . .	127
V.5.4	Analyse après sélection des modes significatifs . . . . .	134
V.5.5	Conclusion . . . . .	138
V.6	Conclusion générale . . . . .	140
<b>VI</b>	<b>Conclusion</b>	<b>143</b>



# Chapitre I

## Introduction

### Sommaire

---

<b>I.1</b>	<b>Contexte et enjeux . . . . .</b>	<b>2</b>
<b>I.2</b>	<b>Architecture des structures satellites . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>I.3</b>	<b>Dimensionnement et critères de conception . . . . .</b>	<b>3</b>
I.3.1	Environnement mécanique . . . . .	3
I.3.2	La démarche industrielle . . . . .	5
<b>I.4</b>	<b>Intérêt d'une approche probabiliste pour la justification . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>I.5</b>	<b>Objectif du travail . . . . .</b>	<b>7</b>

---

## I.1 Contexte et enjeux

Le mode de fonctionnement de notre société actuelle oblige les industriels à concevoir et produire dans un délai toujours plus rapide tout en réduisant les coûts. Ceci pose évidemment quelques problèmes pour les activités d'ingénierie technique, dans la majorité des secteurs d'application, dans le sens où ces réductions de coût sont parfois prédominantes sur la qualité ou la sécurité des produits. Ces difficultés sont d'autant plus importantes dans le secteur spatial où la réalisation d'un produit est plus proche du prototypage que de la production en série. Cela est surtout vrai pour les satellites scientifiques même si la stratégie actuelle va vers la conception de sous-ensembles génériques, utilisables pour différents types de programmes. Dans le cas des satellites de télécommunication, la démarche repose plus sur le principe de famille et la réalisation d'un spécimen bénéficie de l'héritage acquis lors de la conception de ses prédécesseurs. Cependant, certaines spécificités leur sont propres et, compte tenu de la faible quantité produite, de la difficulté à anticiper certains phénomènes ou des aléas inhérents à la fabrication, le risque de supprimer ou réduire certaines étapes du processus de conception est important. C'est notamment le cas des essais structuraux qui sont réalisés sur chacun des satellites pour les valider.

Les impératifs économiques et la réduction des coûts amènent à se poser un certain nombre de questions sur l'optimisation d'un produit. La solution optimale doit être choisie sur la base d'un bilan technico-financier mais il est souvent difficile de prendre en compte le point de vue technique dans un conflit permanent entre qualité et coût. Cette difficulté est la conséquence d'un manque dans l'information, issue de l'analyse technique, qui est fournie au décideur.

Le dimensionnement des structures de satellite est actuellement déterministe. Cela signifie que les analyses prédictives ne sont réalisées que pour des valeurs fixes des paramètres d'entrée et les différentes sources d'incertitude sont couvertes par la prise en compte de coefficients de sécurité. Ces incertitudes sont représentatives des méconnaissances associées aux chargements imposés à la structure, aux valeurs admissibles spécifiées, mais aussi aux caractéristiques mécaniques relatives à la fabrication des composants. Dans le processus global de dimensionnement et de qualification de la structure d'un satellite, plusieurs acteurs interviennent à des échelles différentes et chacun doit tenir compte de l'incertitude liée à son environnement. Pour cette raison, la marge de sécurité finale censée couvrir les méconnaissances est en réalité le résultat de l'empilement des marges intermédiaires, introduites à chaque niveau. On se trouve donc dans une démarche où la structure est analysée selon le pire des cas et la conséquence est le risque de la surdimensionner pour sa mission. La difficulté de l'approche actuelle est qu'elle ne permet pas de fournir d'indicateur permettant d'évaluer ce risque. Un moyen de combler ce manque est de réaliser une analyse dite probabiliste.

L'enjeu de l'analyse probabiliste est de tenir compte des incertitudes directement dans l'analyse mécanique. L'objectif est clairement de limiter l'empilement des marges de sécurité. Par cette approche, l'analyse technique fournit une information beaucoup plus riche dans le sens où il est possible d'afficher les risques relatifs à des critères de conception. De cette manière, on peut mettre en place une méthodologie plus précise avec laquelle les marges de sécurité sont choisies et justifiées en fonction de l'influence des incertitudes associées aux étapes de conception et aux éléments structuraux. L'intérêt final est de maîtriser les performances de la structure de manière optimale avec une sécurité élevée. La notion de risque est traduite en partie par le calcul d'une probabilité de défaillance. Ce calcul nécessite une information supplémentaire concernant les données d'entrée d'un problème, par rapport à l'approche déterministe. En effet, pour connaître les incertitudes associées aux critères de conception, il faut connaître les incertitudes liées aux paramètres qui caractérisent la structure. Ces dernières sont prises en compte sous la forme de variables ou de champs aléatoires.

L'intérêt d'une telle approche dans le cadre des structures spatiales sera plus précisément détaillé dans la section I.4. Avant cela, quelques précisions sont apportées concernant l'application générale, c'est-à-dire la description brève des architectures de satellites et de leur mission, ainsi que la présentation de leur environnement mécanique, des critères de dimensionnement et de la démarche générale de conception et de qualification.

## I.2 Architecture des structures satellites

Un satellite est composé de deux ensembles principaux : la plate-forme et la charge utile. La plate-forme supporte la charge utile et est destinée à fournir les ressources nécessaires à son fonctionnement et au fonctionnement du satellite. Ses fonctions sont multiples : structure porteuse, gestion de l'énergie, gestion des données à bord, contrôle d'altitude et d'orbite, localisation, contrôle thermique des équipements, propulsion, etc. Un modèle CAO de la plate-forme ouverte du microsatellite Picard est présenté en figure I.2. La charge utile comprend les éléments nécessaires pour accomplir la mission et transmettre au sol les informations relevées lors de celle-ci.

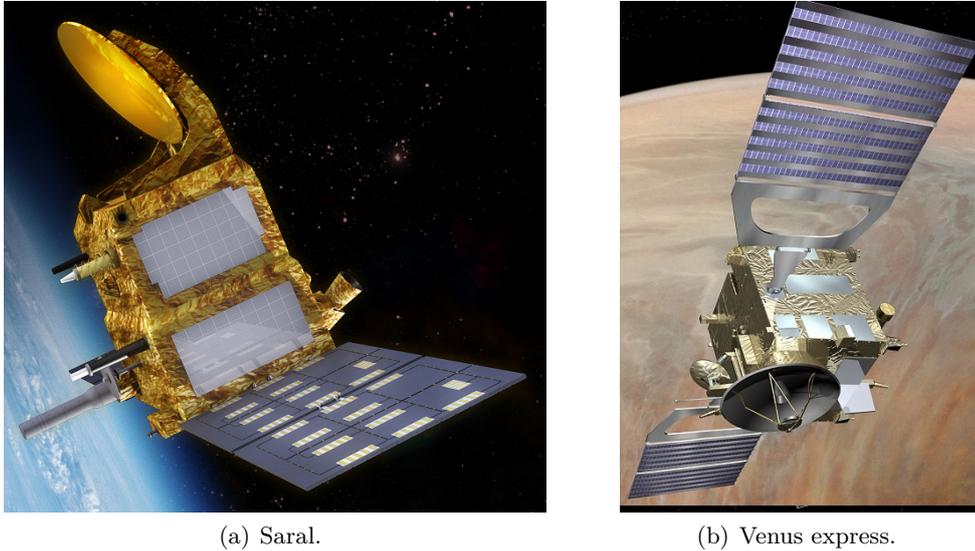


FIGURE I.1 – Exemple de satellites en mission.

La mission du satellite (cf. figure I.1) varie d'un cas à un autre et on pourra distinguer à cet effet les satellites de télécommunication des satellites scientifiques. Les satellites de télécommunication concernent plus les applications grand public et commerciales et couvrent plusieurs secteurs tels que la téléphonie, la télévision, les télécommunications mobiles, la transmission de données, la météorologie, le GPS ou l'observation de la terre pour la gestion des ressources d'un pays. Les satellites scientifiques ont pour objectif d'étudier les phénomènes physiques relatifs à l'univers proche ou lointain, ce qui correspond à l'observation de planètes, du soleil, mais aussi à l'étude de la Terre, de l'atmosphère ou du climat. L'intérêt d'un satellite scientifique par rapport à des observations menées depuis la Terre est de s'affranchir des perturbations liées à l'atmosphère terrestre ou de se rapprocher, au plus près, des éléments à observer.

## I.3 Dimensionnement et critères de conception

### I.3.1 Environnement mécanique

La structure mécanique du satellite assure les fonctions d'interface avec le lanceur ainsi que la liaison entre les différents équipements à bord. Pour cette raison, elle doit conserver son

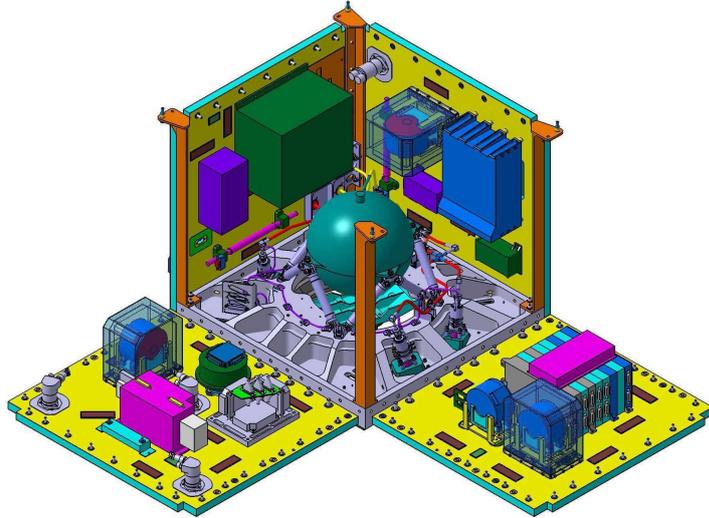
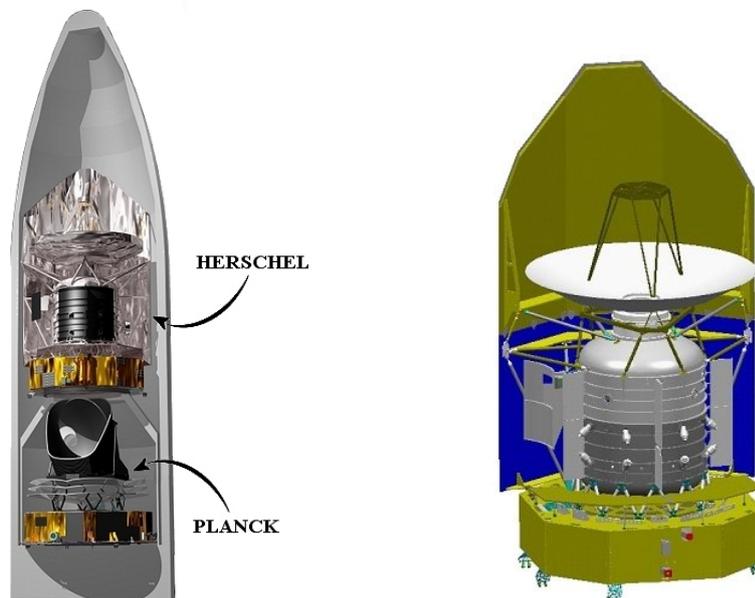


FIGURE I.2 – Modélisation de la plateforme ouverte du satellite Picard.

intégrité face aux agressions extérieures mais aussi assurer la stabilité de plusieurs composants et permettre de garantir un comportement dynamique suffisamment rigide.

Au cours de la vie du satellite, la phase la plus critique pour la structure est celle du lancement. Durant celui-ci, le satellite est fixé au lanceur par la base de la plateforme. La figure I.3 présente le satellite Herschel et son positionnement sous la coiffe du lanceur Ariane 5 (le lanceur contient un second satellite appelé Planck). Les cas dimensionnants correspondent à plusieurs



(a) Fixation de Herschel et Planck sous la coiffe de Ariane 5.

(b) Herschel.

FIGURE I.3 – Modèle du satellite Herschel et son positionnement dans Ariane 5.

étapes de vol qui sont : le décollage, les extinctions des propulseurs, la séparation des étages de la fusée et la séparation du satellite. Une fois mis en orbite, le satellite est également soumis à des variations de température très importantes qui entraînent la déformation de certains composants. Ces différentes agressions sont très complexes et la modélisation numérique ne permet

pas précisément d'en tenir compte. On se limite donc à des chargements simplifiés qui sont censés englober les chargements réels. Ces différents cas de chargement correspondent aux critères de conception de la structure et peuvent être classés suivant trois catégories : l'environnement basses fréquences, l'environnement hautes fréquences et l'environnement orbital.

L'environnement basses fréquences se limite généralement à la bande 0 – 100 Hz et permet de s'assurer de la résistance et de la rigidité du satellite. La résistance concerne essentiellement les très basses fréquences, c'est-à-dire inférieures aux premières fréquences propres du satellite, car ce sont celles pour lesquelles les efforts maximums sont générés à l'interface entre le lanceur et le satellite. Ce cas est donc quasi-statique et peut être simulé par une analyse statique en imposant des champs d'accélération uniformes lorsque le satellite est encastré à sa base. Cet encastrement représente la jonction avec le lanceur. La spécification de rigidité provient du besoin de découpler les fréquences propres du satellite de celles du lanceur. Elle nécessite l'étude des propriétés modales. L'objectif essentiel de l'analyse basses fréquences est d'étudier le transfert entre les vibrations imposées à la base du satellite, par le lanceur, et celles reçues à la base des sous-systèmes. Il s'agit de fournir une spécification pour la conception et le dimensionnement des sous-systèmes. Cette analyse est réalisée en simulant une excitation sinusoïdale à la base du satellite.

L'environnement hautes fréquences correspond à la bande 100 – 2000 Hz. Elle comprend, à la fois, l'analyse vibratoire du satellite soumis à une excitation aléatoire à sa base ainsi que l'analyse acoustique. L'environnement acoustique se traduit également par des vibrations aléatoires à la base des équipements mais aussi par un champ de pression qui peut être dimensionnant pour des composants qui présentent une surface importante (panneaux, générateur solaire, etc). Tout comme l'analyse basses fréquences, l'objectif principal est d'étudier le transfert entre les vibrations induites par l'environnement extérieur et celles reçues à la base des équipements.

L'environnement orbital dimensionne le satellite pour la stabilité de certains équipements. En effet, le différentiel de température entre la face du satellite ensoleillée et celle à l'ombre peut entraîner des déformations importantes de la structure porteuse d'équipements dont les besoins de stabilité sont très importants. C'est le cas d'équipements tels que les instruments optiques ou les réflecteurs d'antenne qui doivent pointer sur certaines zones de la Terre ou de l'univers avec une très grande précision.

### I.3.2 La démarche industrielle

Le plan de développement et de qualification d'un satellite suit une logique de vérification qui inclut, à la fois, des essais et des analyses par simulation. En fonction du type de satellite (télécommunication ou scientifique, premier de famille ou issu d'un héritage), il est décidé de réaliser soit des essais, soit des analyses, soit les deux, avec certains ou tous les cas de chargement. Les essais sont généralement des procédures longues et coûteuses et une validation par analyse peut être préférée, si cela est possible. Cependant, compte tenu des aléas liés à la fabrication et de la difficulté à modéliser tous les phénomènes, certains essais restent incontournables. C'est le cas, par exemple, de l'environnement à basses fréquences où une analyse prédictive puis des essais sont réalisés. L'analyse permet de déterminer les spécifications pour la conception des sous-systèmes et les essais permettent de s'assurer que ces spécifications sont valides.

Plus globalement, le principe de dimensionnement est un processus itératif dans lequel interviennent plusieurs acteurs à différents niveaux. Les premières spécifications sont données par le lanceur et permettent d'établir un dimensionnement préliminaire du satellite. Ces spécifications concernent des besoins de découplage et des niveaux d'accélération. En fonction de ces dernières, l'analyse globale du système permet de déterminer les spécifications pour les sous-systèmes. De cette manière, les sous-systèmes peuvent être réalisés et validés en parallèle, indépendamment les uns des autres. La structure est alors perçue comme un sous-système parmi d'autres. Des essais sont enfin réalisés sur le satellite avec tous ses équipements pour s'assurer que les spécifications

de dimensionnement des sous-systèmes sont bien conformes. Le retour d'expérience des essais est également profitable pour corrélérer le modèle mécanique en vue des analyses couplées avec le lanceur, mais aussi pour enrichir la base de connaissance et faciliter la conception des futurs satellites.

Étant donné que les chargements réels sont trop complexes pour être modélisés parfaitement, les spécifications initiales fournies par le lanceur englobent les besoins réels en prenant une certaine sécurité. Aussi, compte tenu des différentes incertitudes, une marge supplémentaire est ajoutée à chaque niveau de spécification. La structure est dimensionnée par rapport à des critères de marge de sécurité, notés MS, définis de la manière suivante :

$$MS = \frac{\text{Admissible}}{\text{Sollicitation}} - 1 \quad (\text{I.1})$$

Les marges doivent être positives pour que la structure soit qualifiée. La sollicitation induite par le chargement inclut un coefficient de sécurité pouvant aller de 10% à 50% de la charge calculée. La valeur admissible, à laquelle elle est comparée, est déterminée de manière statistique pour garantir une bonne sécurité avec une grande confiance. Il s'agit, plus précisément, d'admissibles dits de type A ou B. Ils correspondent à des valeurs qui encadrent un certain pourcentage des valeurs d'une population (respectivement 99% et 90%) avec une confiance de 95%. Cette notion de confiance est liée à la taille de l'échantillon sur lequel est calculée la valeur A ou B.

On s'aperçoit finalement que l'accumulation des marges peut mener à une procédure de dimensionnement trop conservatrice.

## I.4 Intérêt d'une approche probabiliste pour la justification

L'intérêt final d'une approche probabiliste est de mieux maîtriser les marges de sécurité en tenant compte de la notion de risque. Actuellement, on comprend bien que la valeur résultante d'une marge de sécurité, aussi éloignée de 0 soit-elle, ne permet pas de savoir quelle est la probabilité que celle-ci devienne négative compte tenu des incertitudes de fabrication de la structure réelle. Les coefficients de sécurité actuels ont pour objectif de couvrir ce risque mais comme ils sont génériques, ils ne permettent pas de s'adapter à la spécificité de chaque cas d'étude. Cependant, ils sont régis par des normes européennes et sont donc difficilement discutables sans démonstration rigoureuse. Pour cette raison, la mise en œuvre d'une approche probabiliste, en parallèle de l'approche déterministe, peut permettre de les remettre en question et éventuellement de les faire évoluer si les résultats s'avèrent intéressants. De plus, ces règles sont absentes pour décrire certains composants de la structure et le dimensionnement s'appuie, dans ce cas, sur des règles internes. Une fois de plus, l'utilisation de l'approche probabiliste peut servir à les optimiser ou en créer de nouvelles.

De manière plus générale, l'approche probabiliste a une importante application dans la prise de décision grâce aux informations qu'elle fournit. C'est notamment le cas pour comparer des solutions de design ou comparer des procédés de fabrication tout en tenant compte, à la fois, des aspects techniques et financiers. On peut, par exemple, calculer un bilan qui associe une probabilité de défaillance à un coût de défaillance et un coût de réparation, pour choisir le meilleur compromis. Elle est aussi profitable pour l'analyse de sensibilité des paramètres de la structure et la détection des éléments critiques. Dans ce cadre, un travail sur la réduction des incertitudes peut être envisagé pour améliorer la fiabilité du système.

Pour les aspects structure et dimensionnement en résistance, l'approche permet de déterminer de nouveaux coefficients de sécurité et d'optimiser la structure sur la base de critères de probabilité et de robustesse. Mais elle est également très intéressante pour les aspects systèmes, c'est-à-dire l'étude dynamique et la définition de spécifications des sous-systèmes. Dans la démarche industrielle, la connaissance dynamique du satellite avant les essais est basée sur une

simple analyse prédictive déterministe. Cette connaissance peut être largement accrue si la dispersion des grandeurs d'intérêt est étudiée. Cela permet d'aborder les essais avec une bien plus grande confiance mais aussi de relâcher, en amont, certaines spécifications ou éventuellement d'en renforcer d'autres. Par la connaissance des dispersions, les prises de décisions peuvent être très différentes dans plusieurs situations, notamment pour traiter les risques de couplage fréquentiel et les moyens mis en œuvre pour le découplage. L'intérêt est également très grand pour le retour d'expérience et la corrélation de modèles où certaines erreurs de modélisation peuvent être détectées plus simplement. Enfin, l'effet de la mauvaise connaissance de l'amortissement structural peut être mieux anticipé.

## I.5 Objectif du travail

Les points énoncés dans la section précédente ne sont, pour l'instant, que des objectifs à moyen et long termes. Bien évidemment, l'application de méthodes probabilistes dans un contexte industriel nécessite une certaine adaptation, autant au niveau du développement et de l'utilisation d'outils que de la pratique des ingénieurs. Pour cette raison, l'objectif de ce travail de thèse reste modeste dans le sens où l'on cherche à savoir comment on peut appliquer une approche probabiliste aux structures spatiales. Cette question inclut le choix de la méthode et le fait qu'elle soit relativement simple à utiliser ou qu'elle implique un temps de calcul abordable. La démarche est pour l'instant relativement prospective et on ne cherche pas à montrer, précisément, les différences avec la méthode actuelle ou ce qu'elle peut apporter sur des programmes en cours. On se limitera donc au choix d'outils et à la mise en œuvre d'une procédure pour dérouler l'approche probabiliste sur des structures spatiales dont un exemple sera choisi en particulier. Cependant, le choix de certaines méthodes pourra être fait en tenant compte des objectifs des applications futures.

L'approche probabiliste ne pourra pas être évaluée pour tous les critères de dimensionnement. L'étude sera essentiellement menée sur la partie statique et dynamique basses fréquences. Dans le cas statique, on souhaite estimer la probabilité de défaillance relative à un critère pour n'importe quel composant de la structure, ce qui doit permettre de détecter les éléments critiques. La démarche doit également permettre de rechercher les variables influentes sur les critères de défaillance, et leur probabilité d'occurrence, ainsi que mesurer leur sensibilité dans le but d'optimiser la fiabilité du système. Le cas dynamique, beaucoup plus complexe, sera moins approfondi. L'objectif sera de comparer plusieurs méthodes pour étudier la dispersion de réponses d'intérêt. Comme nous le verrons, l'enjeu de ces méthodes est principalement de réduire le temps de calcul qui est un problème majeur des approches probabilistes.

Le travail est présenté en 4 chapitres. Le chapitre II décrit les méthodes de calcul relatives à l'approche probabiliste. Il introduit brièvement les outils permettant de tenir compte des incertitudes paramétriques et présente les méthodes concernant essentiellement l'analyse de fiabilité et de sensibilité. À partir des avantages et des inconvénients de chacune et des contraintes liées à l'application, le choix est porté sur un outil en particulier : les surfaces de réponse.

Le chapitre III décrit la méthodologie mise en œuvre à partir des surfaces de réponse. Il commence par une discussion des problèmes liés à l'utilisation de ces dernières, notamment l'évaluation de l'erreur d'approximation et la prise en compte de nombreuses variables ; il décrit un certain nombre d'outils pour y faire face. La démarche générale est ensuite détaillée. Elle explique comment construire initialement les surfaces de réponses et les améliorer, si c'est nécessaire, dans un objectif d'estimation de probabilité de défaillance. L'accent est mis sur l'étape de validation des résultats qui paraît fondamentale pour une application industrielle. Les méthodes sont illustrées sur quelques modèles issus de la littérature. Enfin, la dernière section expose une application plus générale pour résoudre l'approche probabiliste dans le cas de chargement

statique.

Le chapitre IV est une application de la démarche précédente sur une vraie structure de satellite. Elle permet d'évaluer les possibilités d'appliquer une méthode de surfaces de réponse à ce type de structure. Bien que ce cas ne soit pas représentatif de tous les satellites, il permet de tirer quelques conclusions intéressantes.

Le dernier chapitre concerne l'analyse dynamique. La situation est plus complexe que dans le cas statique compte tenu du temps de calcul et du type de réponses d'intérêt à étudier. Une première section présente les méthodes existantes pour traiter ce genre de problème. Pour rester dans la continuité des outils mis en œuvre au chapitre III, la méthode des surfaces de réponse est maintenue. Les différentes possibilités d'approximation sont discutées et un exemple simple est présenté en première illustration. La dernière partie est une application sur le même satellite que le chapitre précédent, ce qui permet de comparer plusieurs approches sur un cas industriel.

## Chapitre II

# Approche probabiliste, méthodes pour l'analyse de fiabilité et de sensibilité

### Sommaire

---

<b>II.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>10</b>
<b>II.2</b>	<b>Représentation des incertitudes</b>	<b>11</b>
II.2.1	Introduction	11
II.2.2	Variable aléatoire	11
II.2.3	Vecteur aléatoire	12
II.2.4	Exemple de la variable et du vecteur gaussien	13
<b>II.3</b>	<b>Méthodes pour l'analyse de fiabilité</b>	<b>15</b>
II.3.1	Position du problème	15
II.3.2	Méthode de Monte Carlo	15
II.3.3	<i>First Order Reliability Method</i> – FORM	18
II.3.4	Tirages d'importance	20
II.3.5	Autres méthodes	21
II.3.6	Transformation isoprobabiliste	21
<b>II.4</b>	<b>Méthodes de méta-modélisation</b>	<b>24</b>
II.4.1	Introduction	24
II.4.2	Les surfaces de réponse	26
II.4.3	Le chaos polynomial	29
II.4.4	Le krigeage	31
II.4.5	Autres types de méta-modèles	33
<b>II.5</b>	<b>Méthodes pour l'analyse de sensibilité</b>	<b>33</b>
II.5.1	Introduction	33
II.5.2	Méthodes de criblage	34
II.5.3	Analyse de sensibilité globale	36
<b>II.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>38</b>

---

## II.1 Introduction

Un système physique peut être représenté par une relation mathématique  $\mathbf{y} = \mathcal{M}(\mathbf{x})$  définie de  $\mathbb{R}^M$  dans  $\mathbb{R}^P$ , c'est-à-dire qu'à plusieurs paramètres d'entrée  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M)$  est associé un certain nombre de grandeurs d'intérêt  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_P)$ . Le modèle  $\mathcal{M}$  peut être décrit analytiquement, mais il est plus souvent issu d'un système d'équations aux dérivées partielles résolues numériquement par une méthode de discrétisation comme, par exemple, celle des éléments finis. Dans une approche probabiliste, on considère que les entrées  $\mathbf{x}$  sont des réalisations du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  caractérisé par une loi de probabilité conjointe  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  dont les composantes sont les variables aléatoires  $X_m$  possédant leur propre loi. Par conséquent, les réponses sont elles-mêmes des variables aléatoires. Si le modèle  $\mathcal{M}$  est la description du comportement mécanique d'une structure, les variables d'entrée peuvent être des paramètres géométriques, des caractéristiques matériaux, des chargements extérieurs ou éventuellement des conditions aux limites. Les réponses correspondent à tout type de grandeurs mécaniques telles que par exemple des déformations, des contraintes ou des efforts. L'approche probabiliste consiste à propager l'incertitude associée aux données d'entrée dans le but de déterminer un certain nombre d'informations probabilistes ou statistiques sur les réponses. La figure II.1, largement utilisée dans la littérature (Sudret, 2007; de Rocquigny, 2006a,b), schématise la démarche de propagation des incertitudes.

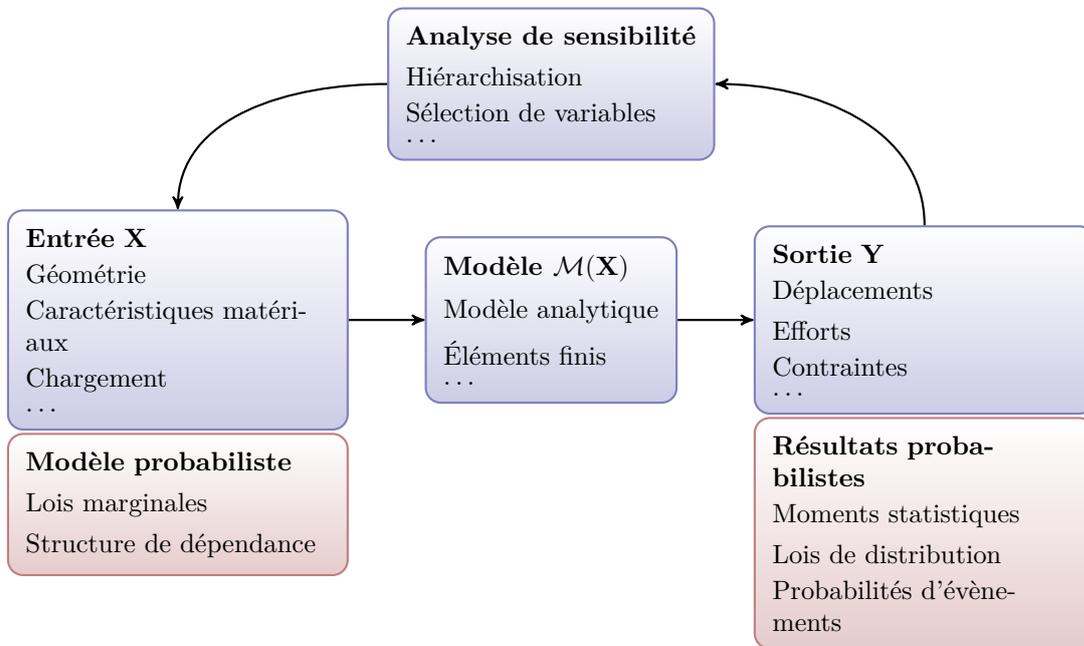


FIGURE II.1 – Schématisation de la propagation d'incertitudes.

L'approche probabiliste est un terme général employé pour regrouper plusieurs types d'analyse qui dépendent des informations recherchées. Ces analyses sont souvent classées en quatre catégories :

- *l'analyse des premiers moments* consiste à déterminer la moyenne et l'écart type d'une réponse d'intérêt ;
- *l'analyse de fiabilité* s'intéresse au calcul de la probabilité d'occurrence d'un événement ;
- *l'analyse de distribution* a pour objectif de construire la loi de probabilité complète d'une grandeur d'intérêt ;

- *l'analyse de sensibilité globale* permet d'évaluer l'influence des variables d'entrée sur une réponse ou, plus précisément, la part de variabilité d'une réponse due à chacune des variables d'entrée.

Plusieurs méthodes ont été développées pour résoudre ces problèmes. Bien que certaines d'entre elles puissent être employées dans plusieurs situations, d'autres sont plus ou moins bien adaptées selon les résultats recherchés. Nous ne détaillerons pas ici toutes les méthodes mais nous nous intéresserons à celles qui sont utilisées dans la suite du mémoire et qui concernent plus particulièrement l'analyse de fiabilité et de sensibilité. Néanmoins, certaines méthodes non utilisées dans ce travail, mais qui font l'objet de développements actuels, seront brièvement abordées car il semble intéressant d'en donner quelques principes.

Dans un premier temps, nous fixerons le cadre de l'étude en rappelant certaines notions élémentaires de théorie des probabilités, l'outil de modélisation de l'incertitude prise en compte. La partie suivante permettra de rappeler quelques méthodes de fiabilité classiques, très bien connues et largement décrites dans la littérature. La section II.4 introduira le principe de méta-modélisation, largement utilisé pour traiter les modèles complexes. Pour ce même cas d'application, la dernière partie décrira un type de méthode, appelé criblage, permettant d'effectuer une approche probabiliste en simplifiant le problème initial. Dans cette même partie, l'analyse de sensibilité globale sera brièvement décrite.

## II.2 Représentation des incertitudes

### II.2.1 Introduction

Dans l'étude que nous allons mener, les incertitudes associées au problème sont prises en compte d'un point de vue probabiliste et n'affectent que les paramètres d'entrée du modèle mécanique, c'est-à-dire que ce dernier est considéré déterministe. Néanmoins, d'autres approches sont envisageables telles que, par exemple, la théorie des intervalles (Moore, 1966), les ensembles flous (Zadeh, 1965) ou encore les approches non-paramétriques (Soize, 2000) qui consiste à considérer les incertitudes associées à la modélisation.

La théorie des probabilités permet de se munir d'un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$  où  $\Omega$  est l'espace des événements observables,  $\mathcal{T}$  la tribu des événements de  $\Omega$  et  $\mathbb{P}$  la mesure de probabilité définie par  $\mathbb{P} : \mathcal{T} \rightarrow [0, 1]$  et vérifiant :

1.  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Pour tout sous-ensemble dénombrable  $(A_i)_{i \in I}$  d'événements disjoints de  $\mathcal{T}$  :

$$\mathbb{P} \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \quad (\text{II.1})$$

### II.2.2 Variable aléatoire

À la réalisation d'un événement aléatoire  $\omega$  de l'espace  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ , on peut associer une valeur numérique dans  $\mathbb{R}$  grâce à la notion de variable aléatoire. Plus précisément, une variable aléatoire  $X$  est une fonction mesurable de  $(\Omega, \mathcal{T})$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  où  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  désigne la tribu des boréliens sur  $\mathbb{R}$  engendrée par l'ensemble des ouverts de  $\mathbb{R}$ . De ce fait, pour tout événement décrit par un borélien  $B$  de  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ , alors  $X^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ . La probabilité induite par la variable aléatoire  $X$  sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  désigne l'image de la mesure de probabilité  $\mathbb{P}$  par la variable  $X$ , c'est-à-dire que :

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega | X(\omega) \in B) \quad (\text{II.2})$$

De manière plus pragmatique, on dira que tirer aléatoirement un événement  $\omega$  et évaluer la valeur  $x = X(\omega)$  équivaut à la réalisation  $x$  de la variable aléatoire  $X$ . Aussi, mesurer la probabilité de

l'évènement  $\omega$  revient à calculer la probabilité que  $X$  réalise la valeur  $x$ , que l'on écrira  $\mathbb{P}(X = x)$ . Dans la suite, on prendra l'habitude de noter les variables aléatoires en majuscules et leurs réalisations en minuscules. Les variables aléatoires considérées dans ce mémoire sont continues, c'est-à-dire qu'il existe une fonction  $f_X$  positive ou nulle appelée densité de probabilité (ou loi de distribution) telle que :

$$\mathbb{P}_X(B) = \int_B f_X(x) dx \quad (\text{II.3})$$

et dont l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  est égale à l'unité. La fonction de répartition, notée  $F_X$ , est définie par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du = \mathbb{P}_X(X \leq x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{II.4})$$

On remarque que :

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (\text{II.5})$$

et on peut définir, de manière générale, quels que soient deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$  :

$$\mathbb{P}_X(]a, b]) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (\text{II.6})$$

L'espérance de la variable aléatoire  $X$ , souvent appelée valeur moyenne, est définie par :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (\text{II.7})$$

et est un opérateur linéaire. La variance de  $X$  est définie par :

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \quad (\text{II.8})$$

dont la racine carrée correspond à l'écart-type noté  $\sigma$ . Plus généralement, on appelle moment centré d'ordre  $r$ , de la variable aléatoire  $X$ , la quantité :

$$\mu^r = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^r] \quad (\text{II.9})$$

Les moments centrés d'ordre 3 et 4, divisés respectivement par  $\sigma^3$  et  $\sigma^4$ , sont appelés asymétrie et aplatissement.

### II.2.3 Vecteur aléatoire

Un vecteur aléatoire de dimension  $M$  est un vecteur dont les composantes sont des variables aléatoires, décrit par une application mesurable  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_M)$  définie sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $(\mathbb{R}^M, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^M})$ . La fonction de répartition conjointe est définie par :

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_M) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1 \cap \dots \cap X_M \leq x_M) \quad \forall (x_1, \dots, x_M) \in \mathbb{R}^M \quad (\text{II.10})$$

Pour tout  $\mathbf{B} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^M}$  la densité de probabilité conjointe, notée  $f_{\mathbf{X}}$ , est définie par :

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(\mathbf{B}) = \int_{\mathbf{B}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{II.11})$$

et son intégrale sur  $\mathbb{R}^M$  est égale à l'unité. Pour une variable aléatoire  $X_m$  du vecteur  $\mathbf{X}$ , on appelle densité marginale la fonction  $f_{X_m}$  telle que :

$$f_{X_m}(x_m) = \int_{\mathbb{R}^{M-1}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_{m-1} dx_{m+1} \dots dx_M \quad (\text{II.12})$$

Les composantes du vecteur  $\mathbf{X}$  sont dites indépendantes si, pour tout  $B_1, \dots, B_M$ , on a :

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(B_1 \times \dots \times B_M) = \prod_{m=1}^M \mathbb{P}_{X_m}(B_m) \quad (\text{II.13})$$

ce qui signifie que la réalisation d'un sous-ensemble n'a aucune influence sur la réalisation d'un autre. Cette indépendance équivaut à :

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{m=1}^M F_{X_m}(x_m) \quad \text{et} \quad f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{m=1}^M f_{X_m}(x_m) \quad (\text{II.14})$$

L'espérance du vecteur  $\mathbf{X}$  correspond au vecteur des espérances de ses composantes :

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}] = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_M]) \quad (\text{II.15})$$

et on appelle covariance de deux variables  $X_i, X_j$  la grandeur :

$$\text{Cov}[X_i, X_j] = \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])] = \mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] \quad (\text{II.16})$$

qui est égale à la variance si  $i = j$ . De cette manière, on peut définir la matrice de covariance relative au vecteur  $\mathbf{X}$  par :

$$\Gamma_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \text{Cov}[X_1, X_2] & \dots & \text{Cov}[X_1, X_M] \\ \vdots & \sigma_2^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}[X_M, X_1] & \dots & \dots & \sigma_M^2 \end{pmatrix} \quad (\text{II.17})$$

Le coefficient de corrélation linéaire entre deux variables, noté  $\rho_{X_i, X_j}$ , est égal à la covariance normalisée par les écarts-type et vaut :

$$\rho_{X_i, X_j} = \frac{\text{Cov}[X_i, X_j]}{\sigma_{X_i} \sigma_{X_j}} \quad (\text{II.18})$$

Il est compris entre  $-1$  et  $+1$  et est utilisé en pratique comme un indice de dépendance linéaire : plus la valeur est proche de  $\pm 1$ , plus les variables sont linéairement dépendantes. Comme pour la matrice de covariance, on peut définir la matrice de corrélation linéaire. Notons bien que l'indépendance entre deux variables aléatoires implique leur décorrélation (covariance nulle) alors que la réciproque est fautive.

#### II.2.4 Exemple de la variable et du vecteur gaussien

La variable aléatoire gaussienne, aussi appelée normale, est la plus utilisée. Elle est entièrement caractérisée par son espérance  $m$  et sa variance  $\sigma^2$ , et sa densité de probabilité est définie par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{II.19})$$

Pour indiquer qu'une variable aléatoire  $X$  est gaussienne, on écrira généralement  $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ . Si l'espérance est nulle,  $m = 0$ , et la variance unitaire,  $\sigma = 1$ , la loi est dite centrée réduite, et aussi appelée loi normale standard. On notera, dans ce cas, sa densité de probabilité  $\varphi(x)$  et sa fonction de répartition  $\Phi(x)$ .

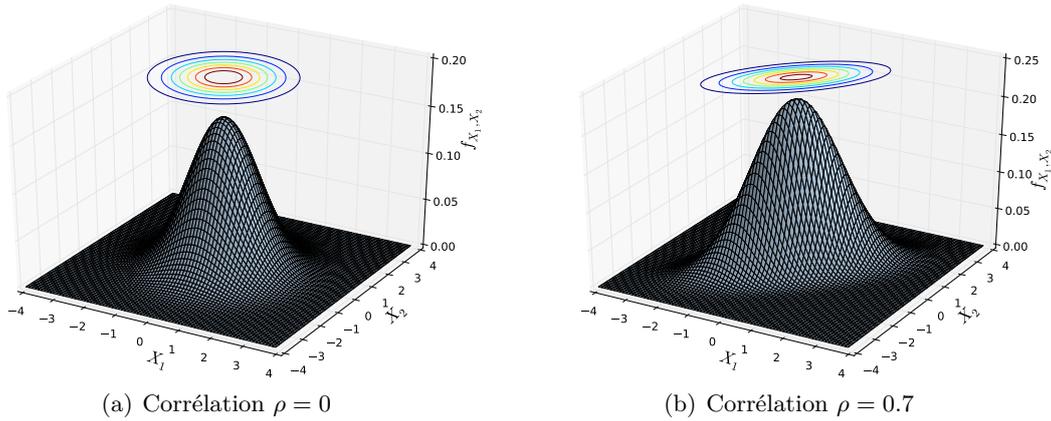


FIGURE II.2 – Représentation de la densité de probabilité normale centrée réduite bivariable.

Un vecteur aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_M)$  est dit gaussien si toute combinaison linéaire de ses composantes est une variable gaussienne. La combinaison particulière donnant 1 sur une des composantes et 0 sur les autres, implique que toutes ses composantes sont des variables gaussiennes. Sa densité de probabilité est déterminée par son vecteur espérance, noté  $m_{\mathbf{X}}$ , et sa matrice de covariance, notée  $\Gamma_{\mathbf{X}}$ . Dans le cas où la matrice de covariance est inversible, sa densité de probabilité est définie par :

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^M} \sqrt{(\det \Gamma_{\mathbf{X}})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - m_{\mathbf{X}})^T \Gamma_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathbf{x} - m_{\mathbf{X}})\right) \quad (\text{II.20})$$

et les densités marginales par l'équation (II.19). Notons que si  $\Gamma_{\mathbf{X}}$  n'est pas régulière, le vecteur prend ses valeurs dans un sous-espace de dimension inférieure, c'est-à-dire correspondant à une combinaison linéaire exacte. Comme précédemment, le vecteur particulier d'espérance  $\mathbf{0}$  et de matrice de covariance identité  $\mathbf{I}_M$ , suit la loi  $\mathcal{N}_M(\mathbf{0}, \mathbf{I}_M)$  appelée loi gaussienne multivariée centrée réduite dont la densité de probabilité conjointe sera notée dans la suite  $\varphi_M(\mathbf{x})$  et la fonction de répartition  $\Phi_M(\mathbf{x})$ . Dans ce cas, les composantes sont décorréelées et même indépendantes, ce qui est une caractéristique des variables gaussiennes (contrairement aux autres variables). De manière générale, une matrice de covariance diagonale implique la décorrélation des variables mais leur variance n'est pas unitaire. Un exemple de densité gaussienne bivariable est présenté figure II.2. Dans un cas les variables sont décorréelées  $\rho = 0$  et les isodensités sont circulaires (en 2 dimensions), dans l'autre la corrélation vaut  $\rho = 0.7$  et les isodensités sont elliptiques.

Si on considère une matrice  $\mathbf{A}$  de dimension  $P \times M$ , de rang  $P$ , et un vecteur  $\mathbf{C}$  de  $P$  composantes, le vecteur aléatoire  $\mathbf{Y}$  défini par la transformation affine  $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{C}$  est gaussien de loi  $\mathcal{N}_P(\mathbf{A}m_{\mathbf{X}} + \mathbf{C}, \mathbf{A}\Gamma_{\mathbf{X}}\mathbf{A}^T)$ . Un choix pertinent de la matrice  $\mathbf{A}$  et du vecteur  $\mathbf{C}$  permet d'obtenir un vecteur  $\mathbf{Y}$  gaussien centré réduit. On considère pour cela la factorisation de Cholesky de la matrice  $\Gamma_{\mathbf{X}}$ , inversible et symétrique, telle que  $\Gamma_{\mathbf{X}} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ . Le vecteur défini par la relation  $\mathbf{Y} = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{X} - m_{\mathbf{X}})$  possède une espérance nulle et une matrice de covariance identité ; on a en effet :

$$\text{Var}[\mathbf{Y}] = \mathbf{L}^{-1}\Gamma_{\mathbf{X}}(\mathbf{L}^{-1})^T = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{L}^T(\mathbf{L}^{-1})^T = \mathbf{I}_P \quad (\text{II.21})$$

De nombreuses autres lois existent et sont décrites dans la majorité des ouvrages traitant de calcul de probabilité ou de statistique comme par exemple (Lejeune, 2010). Signalons que dans beaucoup de cas, on se limitera à l'utilisation de la loi normale par manque de connaissance ou d'information statistique. Aussi, même en présence d'autres lois, nous nous ramènerons souvent

à l'utilisation de la loi normale standard par une transformation qui sera détaillée dans la suite (cf. section II.3.6).

## II.3 Méthodes pour l'analyse de fiabilité

Les méthodes décrites dans cette partie sont largement présentées dans la littérature. Citons entre autres deux ouvrages de référence (Ditlevsen et Madsen, 2007) et (Lemaire, 2005) qui en font une présentation claire et détaillée.

### II.3.1 Position du problème

L'analyse de fiabilité consiste à déterminer la probabilité d'occurrence d'un évènement compte tenu des incertitudes associées aux variables d'entrée du modèle. L'évènement est généralement rare étant donné qu'il correspond à une défaillance du système modélisé. De manière simple, une défaillance survient lorsqu'une réponse d'intérêt atteint un certain critère limite, c'est-à-dire lorsque l'on considère qu'une fonction de la structure n'est plus assurée. Pour des raisons de simplicité, nous considérerons dans la suite une seule réponse d'intérêt  $Y$  décrite par la relation  $Y = \phi(\mathbf{X})$ , mais ce cas n'est pas restrictif. La performance de la structure, qui traduit sa capacité à remplir une mission, est représentée par une fonction  $G(\phi(\mathbf{X}), \mathbf{X}')$  appelée fonction de performance. Elle dépend bien de la réponse d'intérêt mais aussi, éventuellement, d'autres variables aléatoires  $\mathbf{X}'$  qui peuvent ne pas intervenir dans le modèle. Par simplicité, la fonction de performance sera notée dans la suite  $G(\mathbf{X})$ , sans distinguer les variables du modèle des variables extérieures. Elle est définie, pour toutes réalisations  $\mathbf{x}$  de  $\mathbf{X}$ , par :

- $G(\mathbf{x}) \leq 0$  est le domaine de défaillance, noté  $\mathcal{D}_f$  ;
- $G(\mathbf{x}) = 0$  est l'état limite ;
- $G(\mathbf{x}) > 0$  est le domaine de sûreté.

A titre d'exemple simple, représentatif d'une structure mécanique, si on note  $S$  la variable aléatoire représentant la sollicitation subie par la structure et  $R$  la résistance de la structure, la fonction de performance vaut  $G(R, S) = R - S$ . Elle n'est rien d'autre qu'une marge de sécurité. De cette façon, si  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  est la distribution conjointe du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$ , alors la probabilité de défaillance, notée  $P_f$ , est définie par la relation :

$$P_f = \mathbb{P}(G(\mathbf{X}) \leq 0) = \int_{G(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{D}_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{II.22})$$

Notons bien qu'il ne s'agit pas de la probabilité de défaillance de manière absolue mais bien relativement au critère de défaillance fixé par la fonction  $G$ . À l'exception des cas très simples, cette intégrale ne peut pas être calculée de manière analytique. En effet, si le modèle mécanique est issu d'un code numérique, la fonction de performance n'est pas exprimée de manière explicite. Son évaluation revient à effectuer un calcul numérique. Quelques méthodes adaptées sont décrites dans la suite.

### II.3.2 Méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo est un moyen de calculer numériquement l'intégrale d'une fonction de manière efficace quelles que soient la dimension et la régularité du problème. Son inconvénient est qu'elle converge très lentement. Supposons que l'on souhaite calculer l'intégrale d'une fonction  $h(x)$  (de carré intégrable) telle que :

$$I = \int_0^1 h(x) dx \quad (\text{II.23})$$

la méthode de Monte carlo consiste à écrire que :

$$I = E[h(X)] \quad (\text{II.24})$$

où  $X$  est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Rappelons qu'une loi uniforme sur l'intervalle  $[a, b]$  est définie par la densité de probabilité :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

et par la fonction de répartition :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

On peut vérifier que son espérance et sa variance valent :

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (\text{II.27})$$

La loi des grands nombres donne une estimation de l'intégrale  $I$ , notée  $\hat{I}$ , grâce à la moyenne empirique :

$$\hat{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(x_i) \quad (\text{II.28})$$

où les  $(x_i)_{i=1 \dots n}$  sont des valeurs tirées uniformément dans  $[0, 1]$ . La précision de l'estimation est obtenue en calculant des intervalles de confiance autour de  $\hat{I}$  grâce au théorème de la limite centrale. Ainsi, l'intervalle de confiance à 95%, classiquement employé, est donné par la relation :

$$[I_{\text{inf}}, I_{\text{sup}}] = \left[ \hat{I} - 1,96 \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}, \hat{I} + 1,96 \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \right] \quad (\text{II.29})$$

où  $\hat{\sigma}_n$  est une estimation de la variance de  $h(X)$ , telle que :

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(x_i)^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(x_i) \right)^2 \quad (\text{II.30})$$

Cet intervalle signifie que :

$$\mathbb{P}(I_{\text{inf}} \leq I \leq I_{\text{sup}}) = 0,95 \quad (\text{II.31})$$

et est d'autant plus réduit que le nombre de simulations  $n$  est important.

Dans notre cas précis, l'intégrale (II.22) peut être réécrite sous la forme :

$$P_f = \int_{\mathbb{R}^M} 1_{D_f}(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{II.32})$$

où la fonction indicatrice  $1_{D_f}(\mathbf{x})$  vaut :

$$1_{D_f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } G(\mathbf{x}) \leq 0 \\ 0 & \text{si } G(\mathbf{x}) > 0 \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

Ainsi, la probabilité de défaillance est estimée par :

$$\hat{P}_f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{D_f}(\mathbf{x}^{(i)}) = \frac{n_{D_f}}{n} \quad (\text{II.34})$$

où les  $\mathbf{x}^{(i)}$  sont générés suivant la loi de distribution conjointe  $f_{\mathbf{X}}$ , et  $n_{D_f}$  correspond au nombre de simulations dont le résultat est défaillant, c'est-à-dire tel que  $G(\mathbf{x}) \leq 0$ . De manière plus pragmatique, l'estimation de la probabilité de défaillance par la méthode de Monte Carlo revient simplement à évaluer  $n$  fois la fonction de performance en tirant aléatoirement les paramètres d'entrée suivant leur loi de distribution et à comptabiliser le nombre de résultats défaillants. À partir des relations précédentes, étant donné que  $1_{D_f}(\mathbf{x})^2 = 1_{D_f}(\mathbf{x})$ , l'intervalle de confiance à 95% vaut :

$$\left[ P_{f_{\text{inf}}}, P_{f_{\text{sup}}} \right] = \left[ \hat{P}_f - 1,96 \sqrt{\frac{\hat{P}_f(1 - \hat{P}_f)}{n}}, \hat{P}_f + 1,96 \sqrt{\frac{\hat{P}_f(1 - \hat{P}_f)}{n}} \right] \quad (\text{II.35})$$

L'estimation du coefficient de variation (rapport entre l'écart-type et la moyenne), noté  $cv$ , permet d'avoir une idée du nombre de simulations nécessaire pour obtenir une bonne précision de l'estimation lorsque la probabilité de défaillance est très faible ( $\hat{P}_f \rightarrow 0$ ) :

$$cv = \frac{1}{\hat{P}_f} \sqrt{\frac{\hat{P}_f(1 - \hat{P}_f)}{n}} \approx \sqrt{\frac{1}{n\hat{P}_f}} \quad (\text{II.36})$$

On observe que pour  $cv = 10\%$ , il faut  $n = 10^{k+2}$  simulations pour une probabilité de défaillance estimée à  $10^{-k}$ . Cette approximation montre que la méthode n'est pas souvent applicable en pratique pour estimer des probabilités de défaillance faibles surtout si l'évaluation de la fonction de performance est coûteuse. Malgré cela, la méthode de Monte Carlo directe reste la méthode la plus simple et la plus robuste.

Plusieurs améliorations ont été apportées pour accélérer sa convergence. Elles consistent à réduire la variance de l'estimateur. Un exemple peut être donné en introduisant la loi de distribution conjointe  $f_{\mathbf{Z}}$  d'un vecteur aléatoire  $\mathbf{Z}$ , tel que :

$$P_f = \int_{\mathbb{R}^M} 1_{D_f}(\mathbf{x}) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x})} f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{II.37})$$

L'estimation de la probabilité de défaillance vaut cette fois :

$$\hat{P}_f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{D_f}(\mathbf{x}^{(i)}) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}^{(i)})}{f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}^{(i)})} \quad (\text{II.38})$$

où les  $\mathbf{x}^{(i)}$  sont générés suivant la loi  $f_{\mathbf{Z}}$ . Cette nouvelle estimation sera plus efficace que celle de l'équation (II.34) si :

$$\text{Var} \left[ 1_{D_f}(\mathbf{x}) \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x})} \right] \ll \text{Var} \left[ 1_{D_f}(\mathbf{x}) \right] \quad (\text{II.39})$$

Nous verrons dans la suite un exemple précis de loi vérifiant cette relation.

La méthode de Monte Carlo est une méthode très générale. Elle est décrite ici dans le but de calculer une probabilité de défaillance, mais elle peut également être utilisée pour les quatre types d'analyses citées en introduction. Pour cela, un échantillon aléatoire est généré, le modèle est évalué en chaque point et seul le post-traitement des résultats change en fonction de l'analyse souhaitée. La méthode de Monte Carlo et ses améliorations sont appelées méthodes de simulation et ne font aucune approximation de la fonction de performance pour calculer la probabilité de défaillance. D'autres méthodes ont été introduites dans le seul but d'estimer la probabilité de défaillance avec un temps de calcul largement réduit. Ce sont les méthodes FORM et SORM souvent dénommées dans la littérature méthodes fiabilistes.

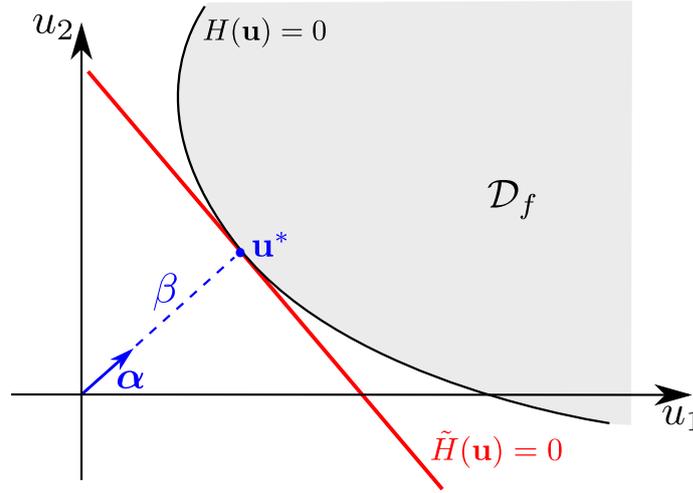


FIGURE II.3 – Approximation FORM.

### II.3.3 First Order Reliability Method – FORM

La méthode FORM consiste à approcher la fonction d'état limite par une fonction linéaire pour calculer de manière simple la probabilité de défaillance. L'approximation linéaire est un développement de Taylor au premier ordre au point de l'état limite dont la densité de probabilité est la plus élevée. Ce point est appelé point de défaillance le plus probable (PDPP) ou parfois point de conception.

Le première étape consiste à calculer les coordonnées du PDPP mais il est nécessaire pour cela de transformer l'espace des variables aléatoires d'entrée en espace normal standard, c'est-à-dire dans lequel les variables aléatoires sont normales centrées réduites et indépendantes. Cette transformation est dite isoprobabiliste car elle conserve les probabilités d'un espace à l'autre. Elle est représentée par la relation  $\mathbf{U} = T(\mathbf{X})$  où  $\mathbf{U}$  est le vecteur aléatoire des variables normales standards d'entrée caractérisé par la loi de distribution conjointe notée  $\varphi_M$  (cf. section II.2.4). La transformation est explicitées dans la section II.3.6.

Dans l'espace normal standard, les valeurs moyennes des variables sont les coordonnées de l'origine, et la nouvelle fonction de performance, notée  $H$ , est définie par la relation  $H(\mathbf{u}) = G \circ T^{-1}(\mathbf{u})$ . Le PDPP correspond donc au point appartenant à l'état limite le plus proche de l'origine et ses coordonnées, notés  $\mathbf{u}^*$ , sont déterminées par une procédure d'optimisation définie par :

$$\mathbf{u}^* = \operatorname{argmin} \|\mathbf{u}\|^2 \quad \text{s.c.} \quad H(\mathbf{u}) = 0 \quad (\text{II.40})$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne. La distance entre l'origine du repère et le PDPP est appelée indice de fiabilité et vaut  $\beta = \|\mathbf{u}^*\|$ . L'approximation FORM consiste à remplacer l'état limite par un hyper-plan tangent en  $\mathbf{u}^*$  noté  $\tilde{H}(\mathbf{u})$  (cf. figure II.3). L'estimation de la probabilité de défaillance vaut dans ce cas  $P_{f,\text{FORM}} = \mathbb{P}(\tilde{H}(\mathbf{u}) \leq 0)$  et on montre qu'elle est égale à :

$$P_{f,\text{FORM}} = \Phi(-\beta) \quad (\text{II.41})$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition normale standard (cf. section II.2.4). On remarque que l'indice de fiabilité représente simplement, dans l'espace normal standard, le nombre d'écart type qui sépare la moyenne de l'état limite linéarisé. L'idée de l'approximation FORM est que la zone qui contribue le plus à la défaillance est celle proche du PDPP. Elle est d'autant plus juste que la probabilité de défaillance est faible.

L'analyse FORM permet d'obtenir des informations complémentaires, notamment sur l'importance des variables. Étant donné que la nouvelle fonction de performance s'écrit sous la forme :

$$\tilde{H}(\mathbf{u}) = \beta - \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{u} \quad (\text{II.42})$$

avec :

$$\boldsymbol{\alpha} = - \frac{\nabla H(\mathbf{u}^*)}{\|\nabla H(\mathbf{u}^*)\|} \quad (\text{II.43})$$

la variance de la variable aléatoire associée vaut :

$$\text{Var} [\tilde{H}(\mathbf{U})] = \sum_{m=1}^M \alpha_m^2 = 1 \quad (\text{II.44})$$

car les variables aléatoires  $\mathbf{U}$  sont de variance unitaire et indépendantes. Cette relation signifie que  $\alpha_m^2$  représente la part de la variable aléatoire  $U_m$  dans la variance totale associée à la marge de sécurité linéarisée. Les  $\alpha_m^2$  sont appelés facteurs d'importance. Étant donné qu'ils correspondent également aux coordonnées du vecteur unitaire normal à l'état limite linéarisé (cf. figure II.3), ils sont définis par la relation :

$$\alpha_m^2 = \frac{(u_m^*)^2}{\beta^2} \quad (\text{II.45})$$

Bien qu'ils soient intéressants pour classer l'influence des variables, les facteurs d'importance sont dépendants de la qualité de l'approximation FORM.

Une autre mesure de sensibilité peut être fournie grâce aux facteurs d'omission (Madsen, 1988). L'idée consiste à regarder l'influence d'une variable sur la fiabilité en la fixant à une valeur déterministe, par exemple la moyenne ou la médiane. Formellement, on considère  $\beta$  l'indice de fiabilité calculé à partir des variables aléatoires  $\mathbf{X}$  et  $\beta_{X_m=x_m}$  l'indice de fiabilité dit conditionné, calculé en fixant la variable aléatoire  $X_m$  à la valeur  $x_m$ . Le facteur d'omission relatif à la variable  $X_m$ , noté  $\gamma_m$ , est le rapport entre l'indice de fiabilité conditionné et l'indice complet, c'est-à-dire défini par :

$$\gamma_m = \frac{\beta_{X_m=x_m}}{\beta} \quad (\text{II.46})$$

Plus il est proche de 1, moins la variable est influente étant donné qu'en la considérant déterministe, elle induit peu de variation de l'indice de fiabilité. Le but de ces facteurs n'est pas simplement de hiérarchiser l'influence des variables mais d'identifier, en fonction de la précision du résultat souhaité, celles qui peuvent être fixées à une valeur déterministe et donc éliminées de l'ensemble des variables aléatoires. La démarche n'est pas propre à FORM et on peut chercher à mesurer, en pratique, la variation de probabilité de défaillance induite par la suppression d'une variable aléatoire. De cette manière, il est parfois possible d'éliminer un certain nombre de variables aléatoires.

Naturellement, des améliorations ont été apportées à l'approximation FORM en considérant un développement à l'ordre 2 de la fonction de performance au point de défaillance : il s'agit de l'approche SORM (*Second Order Reliability Method*). Elle regroupe plusieurs estimations de la probabilité de défaillance qui sont différentes corrections de l'approximation FORM. Une illustration de SORM est donnée en figure II.4, elle revient à remplacer la fonction de performance par un paraboloides tangent en  $\mathbf{u}^*$ .

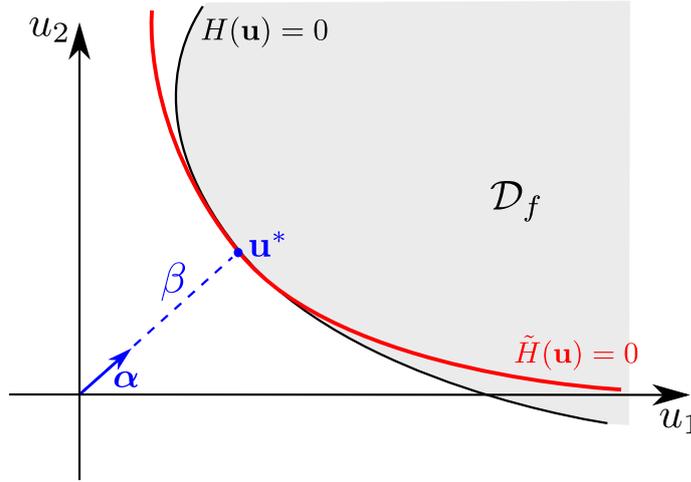


FIGURE II.4 – Approximation SORM.

Ce type de méthode peut poser des problèmes dans certaines situations. On comprend qu'étant basée sur une procédure d'optimisation, il y a un risque de ne pas converger vers un optimum global. Ce problème est d'autant plus accentué que le nombre de variables augmente et/ou que la fonction de performance est non-linéaire. Aussi, même si le PDPP est trouvé, un ou plusieurs autres points peuvent avoir des densités de probabilité élevées et contribuer de manière non négligeable à la probabilité de défaillance. Il est donc difficile de connaître la précision de l'approximation de l'état limite par un hyper-plan ou un parabolôïde. Certaines méthodes tentent d'évaluer cette précision, comme le test du maximum fort (Dutfoy et Lebrun, 2007) qui permet de vérifier les hypothèses nécessaires à la bonne utilisation de FORM. Son principe consiste à rechercher l'existence de points ayant des contributions non négligeables à la probabilité de défaillance.

La méthode FORM, et notamment la recherche du point de défaillance, peuvent être utiles pour construire une loi de distribution et accélérer la convergence de la méthode de Monte Carlo (cf. section II.3.2). Un exemple est donné dans la partie suivante : il s'agit des tirages d'importance.

### II.3.4 Tirages d'importance

La connaissance du point de défaillance permet d'introduire une nouvelle loi dans le but d'accélérer la convergence de la méthode de Monte Carlo. En reprenant l'équation (II.37) réécrite dans l'espace normal standard :

$$P_f = \int_{\mathbb{R}^M} 1_{D_f}(\mathbf{u}) \frac{\varphi_M(\mathbf{u})}{\psi_M(\mathbf{u})} \psi_M(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \quad (\text{II.47})$$

la nouvelle loi  $\psi_M(\mathbf{u})$  peut être fournie par :

$$\psi_M(\mathbf{u}) = \varphi_M(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) = \frac{1}{(2\pi)^{M/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)}{2}\right) \quad (\text{II.48})$$

Il s'agit simplement de la loi normale réduite décentrée au PDPP. Cela se traduit en pratique par le fait que les paramètres d'entrée sont tirés aléatoirement autour du PDPP contrairement à la

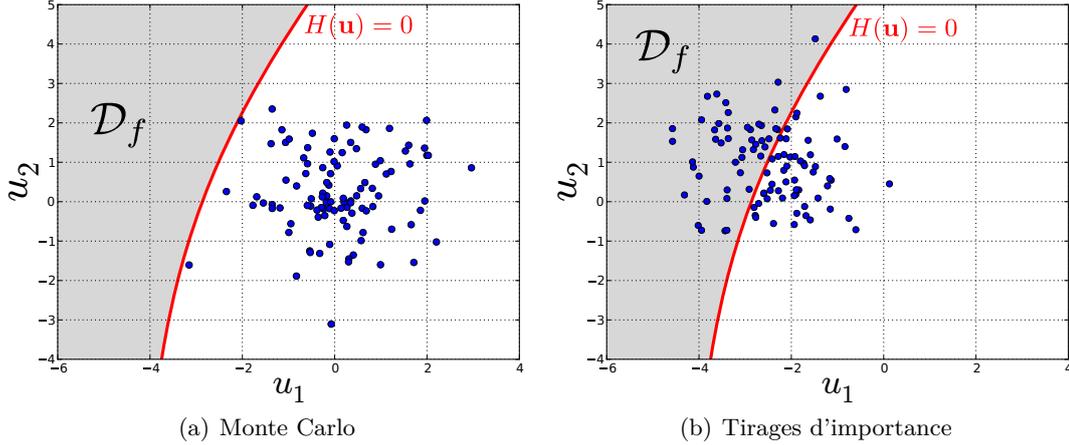


FIGURE II.5 – Comparaison des tirages aléatoires entre les méthodes de Monte Carlo et tirages d'importance.

méthode de Monte Carlo qui échantillonne autour des moyennes comme le montre la figure II.5. L'estimation de la probabilité de défaillance est donnée par :

$$\hat{P}_f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{D_f}(\mathbf{u}^{(i)}) \frac{\varphi_M(\mathbf{u}^{(i)})}{\psi_M(\mathbf{u}^{(i)})} \quad (\text{II.49})$$

et s'accompagne également d'un intervalle de confiance à 95% calculé de la même manière que l'équation (II.29).

La loi d'importance décrite ici est celle qui est généralement présentée dans la littérature mais elle n'est pas la seule possibilité. Par exemple, le test du maximum fort (Dutfoy et Lebrun, 2007), énoncé dans la section précédente, peut permettre de construire une loi multi-modale efficace si plusieurs points de densité non négligeable sont détectés.

### II.3.5 Autres méthodes

La méthode des tirages d'importance fait partie des méthodes de simulation qui améliorent les performances de la méthode de Monte Carlo. De nombreuses autres méthodes ont été développées et trouvent de plus en plus d'applications surtout avec l'augmentation permanente des puissances de calcul. Citons, par exemple, les méthodes de simulation par sous-ensembles, *subset simulation* (Au et Beck, 2001; Song *et al.*, 2009), dont le principe est de remplacer l'estimation d'une probabilité de défaillance faible par plusieurs probabilités plus élevées en introduisant des états limites intermédiaires. La probabilité de défaillance finale est ainsi évaluée grâce aux probabilités conditionnelles intermédiaires. La méthode des tirages directionnels, *line sampling*, permet également d'obtenir des résultats intéressants; elle a été appliquée sur des modèles de grande taille en tenant compte d'un nombre de paramètres important (Pellissetti *et al.*, 2006; Pradlwarter *et al.*, 2005). Elle consiste à déterminer, dans un premier temps, la direction dans laquelle se trouve le domaine de défaillance puis à échantillonner dans cette direction en partant de points choisis aléatoirement. Un exemple de comparaison de ces méthodes est présenté dans (Schuëller et Pradlwarter, 2007).

### II.3.6 Transformation isoprobabiliste

La transformation isoprobabiliste, nécessaire aux méthodes FORM et SORM, permet de transformer l'espace des variables aléatoires physiques d'entrée en espace normal standard, c'est-à-dire

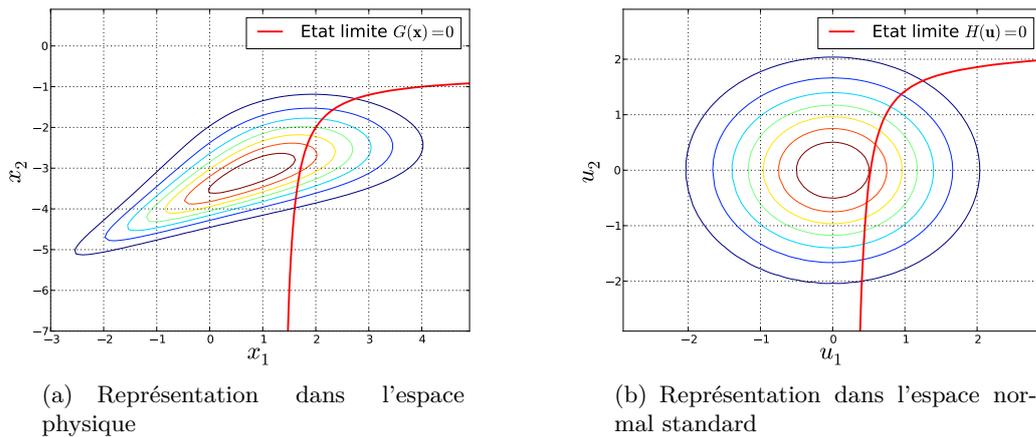


FIGURE II.6 – Représentation graphique des isovalues d'une densité de probabilité et de la fonction d'état limite avant et après transformation isoprobabiliste.

dans lequel toutes les variables sont normales centrées réduites et indépendantes. En pratique, elle est souvent utilisée avec d'autres méthodes pour normaliser les variables d'entrée.

On considère le vecteur  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_M)$  des variables aléatoires d'entrée muni de la densité conjointe  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  et de la fonction de répartition  $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ . L'intérêt de la transformation est de travailler avec le vecteur gaussien normal standard  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_M)$  de variables indépendantes, dont la densité conjointe et la fonction de répartition sont respectivement notées  $\varphi_M(\mathbf{u})$  et  $\Phi_M(\mathbf{u})$  (cf. section II.2.4). La transformation est notée  $T$  et est définie par :

$$\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{u} = T(\mathbf{x}) \quad (\text{II.50})$$

Rappelons que, géométriquement, elle ramène les valeurs médianes des variables au centre du repère et que les isovalues de la densité de probabilité obtenue sont circulaires. La fonction de performance dans l'espace standard est notée  $H$  et vaut  $H(\mathbf{u}) = G \circ T^{-1}(\mathbf{u})$ . Un exemple est illustré en figure II.6.

La transformation peut être délicate à identifier lorsque les variables aléatoires physiques sont dépendantes. Pour cela nous distinguons les cas des variables indépendantes et dépendantes.

### II.3.6.1 Cas de variables indépendantes

Lorsque les variables sont indépendantes, la transformation revient à écrire l'égalité entre les probabilités associées aux variables  $X_m$  et  $U_m$ , c'est-à-dire  $\Phi(u_m) = F_{X_m}(x_m) \forall m \in [1, \dots, M]$ . Dans ce cas, elle est définie par :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \Phi^{-1} \circ F_{X_1}(x_1) \\ \vdots \\ \Phi^{-1} \circ F_{X_M}(x_M) \end{pmatrix} \quad (\text{II.51})$$

et peut être déterminée numériquement, point par point.

### II.3.6.2 Cas de variables dépendantes

Si les variables aléatoires sont dépendantes, la transformation est plus délicate. En effet les lois des variables sont conditionnées entre elles et la seule transformation de chaque variable par les lois marginales n'est plus possible. Rappelons que pour un vecteur aléatoire

$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_M)$  de densité conjointe  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ , la loi d'un sous-vecteur  $(X_1, \dots, X_m)$  conditionné par les évènements  $\{X_{m+1} = x_{m+1}, \dots, X_M = x_M\}$  vaut :

$$f_{X_1, \dots, X_m | X_{m+1}=x_{m+1}, \dots, X_M=x_M}(x_1, \dots, x_m) = \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{f_{X_{m+1}, \dots, X_M}(x_{m+1}, \dots, x_M)} \quad (\text{II.52})$$

La fonction de répartition conditionnée peut être obtenue grâce à la relation de l'équation (II.5).

Si la loi conjointe est parfaitement connue, la transformation de Rosenblatt (Rosenblatt, 1952) permet de passer de l'espace physique à l'espace normal standard par les relations suivantes :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \Phi^{-1} \circ F_{X_1}(x_1) \\ \Phi^{-1} \circ F_{X_2 | X_1=x_1}(x_2) \\ \vdots \\ \Phi^{-1} \circ F_{X_M | X_1=x_1, \dots, X_{M-1}=x_{M-1}}(x_M) \end{pmatrix} \quad (\text{II.53})$$

L'inconvénient est qu'il est nécessaire de choisir un ordre des variables pour le conditionnement des lois. Il peut être utile de mesurer l'influence de ce choix sur la transformation et donc sur les résultats recherchés. L'ordre classique de conditionnement des variables (par exemple tel qu'il est écrit dans l'équation II.53) est appelé ordre canonique.

Si l'on connaît seulement les lois marginales des composantes du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  ainsi que sa matrice de corrélation  $\mathbf{R}$ , la transformation de Nataf permet de passer de l'espace physique à l'espace normal standard grâce aux deux transformations suivantes :

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \Phi^{-1} \circ F_{X_1}(x_1) \\ \vdots \\ \Phi^{-1} \circ F_{X_M}(x_M) \end{pmatrix} \quad (\text{II.54})$$

puis :

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}_0^{-1} \mathbf{z} \quad (\text{II.55})$$

où  $\mathbf{L}_0$  vient de la factorisation de Cholesky de la matrice  $\mathbf{R}_0$ . La première transformation produit des variables, notées  $Z_i$ , normales centrées réduites et dont la matrice de corrélation est  $\mathbf{R}_0$ . La seconde transformation permet de décorréler ces variables. Les matrices  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{R}_0$  sont généralement différentes et leur composantes, notées respectivement  $r_{ij}$  et  $r_{0ij}$ , sont liées par la relation :

$$r_{ij} = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (F_{X_i}^{-1}(\Phi(z_i)) - \mu_i) (F_{X_j}^{-1}(\Phi(z_j)) - \mu_j) \varphi_2(z_i, z_j, r_{0ij}) dz_i dz_j \quad (\text{II.56})$$

où  $\mu_i$ ,  $\mu_j$  et  $\sigma_i$ ,  $\sigma_j$  sont les moyennes et écarts-type des variables  $X_i$  et  $X_j$ , et  $\varphi_2$  est la densité de probabilité bivariée standard. En pratique, la résolution de cette intégrale peut poser plusieurs difficultés. Pour cette raison, des approximations ont été proposées pour calculer directement le rapport :

$$R = \frac{r_{0ij}}{r_{ij}} \quad (\text{II.57})$$

De nombreux résultats sont donnés dans (Ditlevsen et Madsen, 2007). Rappelons bien que l'on ne connaît ici que la corrélation entre les variables et non leur dépendance complète. Cela suppose en réalité que la fonction de répartition du vecteur  $\mathbf{X}$  est de la forme :

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_M) = \Phi_M \left( \Phi^{-1}(F_{X_1}(x_1)), \dots, \Phi^{-1}(F_{X_M}(x_M)) \right) \quad (\text{II.58})$$

Elle est appelée distribution de Nataf.

Dans (Lebrun et Dutfoy, 2009b), les auteurs donnent une interprétation de la transformation de Nataf grâce à la théorie des copules. Sans rentrer dans les détails, disons qu'une copule, notée  $C$ , est une fonction de  $[0, 1]^M$  dans  $[0, 1]$  qui définit la structure de dépendance entre une fonction de répartition conjointe  $F_{\mathbf{X}}$  d'un vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  et les fonctions de répartition marginales  $F_{X_m}$  de ses composantes  $X_m$ , telle que :

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_M) = C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_M}(x_M)) \quad (\text{II.59})$$

De ce point de vue, utiliser la transformation de Nataf suppose implicitement que le vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  a une copule gaussienne.

Dans (Lebrun et Dutfoy, 2009a), les auteurs montrent que les transformations de Rosenblatt et de Nataf sont équivalentes si la copule du vecteur aléatoire d'entrée est gaussienne. Ils montrent également, à propos de la transformation de Rosenblatt, que si la copule est gaussienne, modifier l'ordre du conditionnement des variables est équivalent à appliquer une transformation orthogonale aux variables de l'espace standard obtenues à partir de l'ordre canonique. Cela implique un changement des coordonnées du point de défaillance mais pas de l'indice de fiabilité, ce qui signifie que la probabilité de défaillance approchée par les méthodes FORM ou SORM reste inchangée puisque l'espace standard est invariant par rotation. Par contre, le changement du point de défaillance entraîne un changement des facteurs d'importance qui ne correspond pas à une simple permutation des valeurs obtenues à partir de l'ordre canonique. Ceci reste vrai tant que la copule du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  n'est pas indépendante. En d'autres termes, les facteurs d'importance fournis par FORM sont difficiles à interpréter sauf dans le cas de variables indépendantes. Malgré tout, quelle que soit la copule de départ, l'ordre du conditionnement des variables ne modifie pas la valeur de la probabilité de défaillance exacte.

La théorie des copules est très adaptée à la représentation de lois conjointes car elle permet de séparer la description des lois marginales de leur structure de dépendance. En pratique, il est très difficile de connaître la dépendance entre les lois marginales et nous supposerons au plus, dans notre travail, une dépendance linéaire en utilisant la distribution de Nataf.

## II.4 Méthodes de méta-modélisation

### II.4.1 Introduction

Avec l'augmentation des puissances de calcul, la précision des modèles numériques est en perpétuelle amélioration ce qui permet de se rapprocher des phénomènes physiques réels. Cela va de pair avec l'augmentation des temps de calcul qui peuvent devenir problématique dans le cas d'analyse répétitive, c'est-à-dire lorsque le calcul est effectué un grand nombre de fois. Le principe de la méta-modélisation consiste à substituer le modèle physique de référence par un modèle approché, appelé méta-modèle, pour réduire le coût de calcul. Bien qu'ils soient utilisés ici pour la propagation d'incertitudes dans des modèles mécaniques, les méta-modèles sont également employés dans de nombreuses applications pour des analyses de type paramétrique ou l'optimisation. La figure II.7 illustre la situation dans laquelle nous l'utiliserons.

Contrairement aux méthodes de la section II.3 précédente, pour lesquelles le couplage avec le modèle mécanique peut être qualifié de direct (Lemaire, 2005), l'utilisation d'un méta-modèle découple l'analyse mécanique de l'analyse probabiliste. La démarche générale se présente en trois étapes :

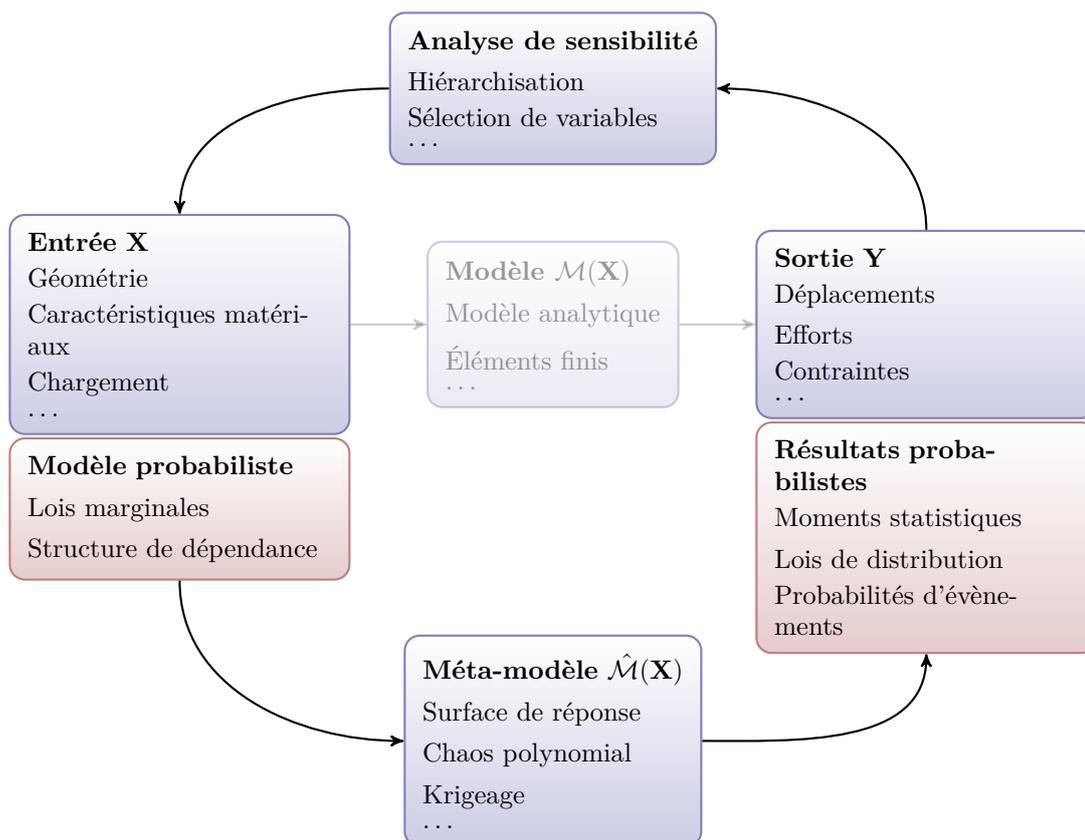


FIGURE II.7 – Schématisation de la propagation d'incertitudes par un méta-modèle.

1. *L'échantillonnage* consiste à effectuer quelques simulations du modèle de référence. Il s'agit de réaliser un plan d'expérience numérique, c'est-à-dire que pour certaines valeurs des paramètres d'entrée la réponse d'intérêt est calculée. Il permet de constituer un échantillon statistique, que l'on appellera également échantillon d'apprentissage. A la fin de cette étape, le modèle de référence n'est plus utilisé.
2. *La construction* utilise l'échantillon pour exprimer explicitement le méta-modèle. Cette étape inclut également l'évaluation de l'erreur d'approximation. Elle est fondamentale puisqu'elle doit valider les résultats fournis par le méta-modèle ou, au minimum, donner un indice de confiance.
3. *L'exploitation* est la phase d'utilisation du méta-modèle. Elle permet d'extraire les résultats statistiques ou probabilistes souhaités. Une méthode de type Monte Carlo (ou une autre méthode de simulation) peut être employée étant donné que le coût d'une simulation sur le méta-modèle est très faible.

Bien que certains méta-modèles puissent être construits en tenant compte de la connaissance du problème initial, la démarche générale est de considérer que le modèle de référence est une « boîte noire ». De nombreux types de méta-modèles existent dans la littérature et beaucoup de publications font l'objet de descriptions et de comparaisons (Barton, 1994; Jin *et al.*, 2001; Simpson *et al.*, 2001; Wang et Shan, 2007). Nous détaillerons ceux qui sont utilisés dans ce travail et nous présenterons brièvement ceux qui font l'objet de développements actuels. Notons que nous pourrions employer le mot modèle à la place de méta-modèle lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le sens.

## II.4.2 Les surfaces de réponse

Les surfaces de réponses ont permis, à l'origine, d'étudier les phénomènes physiques lors d'expérimentations. Plus précisément, lorsqu'une expérience physique est menée, on s'intéresse à caractériser la relation entre une grandeur d'intérêt  $y$  et un certain nombre de paramètres d'entrée  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ . Cette relation peut être décrite par une fonction, notée  $\phi$ , telle que  $y = \phi(\mathbf{x})$ . La forme de la fonction pouvant être *a priori* très générale, il est d'usage d'en prendre un développement limité, c'est-à-dire de rechercher une approximation polynômiale. Pour limiter le nombre de paramètres à déterminer et donc le nombre d'expérimentations, le degré du polynôme doit être le moins élevé possible. On a pu se rendre compte, en pratique, que l'ordre 2 était suffisant pour approcher une grande majorité de phénomènes, au moins dans un certain domaine d'étude. De ce point de vue, le modèle postulé est de la forme :

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = a_0 + \sum_{m=1}^M a_m x_m + \sum_{i=m}^M \sum_{n \geq m}^M a_{mn} x_m x_n \quad (\text{II.60})$$

Les coefficients  $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_M, a_{11}, a_{12}, \dots, a_{MM})$  sont déterminés à partir de résultats expérimentaux obtenus en suivant un plan d'expériences. Celui-ci consiste à choisir les valeurs des paramètres d'entrée dans le but de minimiser le nombre d'essais tout en réduisant l'influence de l'erreur expérimentale. Cette erreur, aléatoire, se traduit par le fait que l'on n'obtiendra pas exactement les mêmes résultats si plusieurs expériences sont répétées avec les mêmes valeurs des paramètres d'entrée. De ce fait, la forme générale du modèle doit être du type :

$$y = \hat{\phi}(\mathbf{x}) + \varepsilon \quad (\text{II.61})$$

où  $\varepsilon$  désigne l'erreur entre le modèle postulé et le vrai modèle. Cette erreur contient, en réalité, une part aléatoire due à l'expérience mais aussi le fait que le modèle recherché n'est qu'une approximation du modèle réel : c'est le manque d'ajustement. Des outils statistiques puissants ont été développés dans le but d'estimer les coefficients  $\mathbf{a}$ , de mesurer leur incertitude compte tenu des erreurs, de valider le modèle, etc. Il s'agit de la régression linéaire.

Considérons les données d'un échantillon statistique de taille  $N$  tel que  $N \geq P + 1$  où  $P + 1$  est le nombre de coefficients à déterminer dans le modèle de l'équation (II.60). Ces données correspondent aux valeurs de la réponse d'intérêt pour certaines valeurs des paramètres d'entrée et peuvent être représentées par :

$$\left( \begin{array}{c|c} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_M^{(1)} & y_1 \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_M^{(2)} & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, \dots, x_M^{(N)} & y_N \end{array} \right) \quad (\text{II.62})$$

La recherche du modèle de l'équation (II.60) à partir de l'échantillon consiste à écrire :

$$y_i = a_0 + a_1 z_1^{(i)} \dots + a_P z_P^{(i)} + \varepsilon_i \quad \forall i \in [1, \dots, N] \quad (\text{II.63})$$

où  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_P)$  correspond aux monômes formés par les variables  $x_i$  et  $x_i x_j$  que l'on appellera régresseurs ou simplement termes. L'hypothèse générale de la régression linéaire est que les écarts  $\varepsilon_i$ , aussi appelés résidus, sont des réalisations de variables aléatoires normales indépendantes de moyenne nulle  $E[\varepsilon_i] = 0$  et dont la variance sera notée  $\text{Var}[\varepsilon_i] = \sigma^2$ . Si l'échantillon provient de la réalisation de variables aléatoires  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_M)$ , les variables  $\varepsilon_i$  sont supposées indépendantes de la loi de  $\mathbf{X}$ . Dans ce cas, le modèle recherché correspond à l'espérance d'une variable aléatoire  $Y$  conditionné par les réalisations des variables  $\mathbf{X}$ , c'est-à-dire que :

$$E[Y|X_1 = x_1^{(i)}, \dots, X_M = x_M^{(i)}] = \hat{\phi}(\mathbf{x}^{(i)}) \quad \text{et} \quad \text{Var}[Y|X_1 = x_1^{(i)}, \dots, X_M = x_M^{(i)}] = \sigma^2 \quad (\text{II.64})$$

Si l'échantillon est issu de paramètres déterministes, c'est-à-dire de facteurs parfaitement maîtrisés, les valeurs de la réponse observée sont des réalisations de variables aléatoires  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_N)$  et le modèle recherché correspond à leur espérance :

$$E[Y_i] = \hat{\phi}(\mathbf{x}^{(i)}) \quad \text{et} \quad \text{Var}[Y_i] = \sigma^2 \quad (\text{II.65})$$

Dans la pratique, on ne fait pas la distinction à propos de la collecte des données et ces deux cas se traitent identiquement.

Notre cadre d'étude ne correspond à aucune des hypothèses précédentes. Le modèle numérique de référence est parfaitement déterministe, c'est-à-dire que deux simulations avec les mêmes valeurs des paramètres d'entrée donnent les mêmes résultats. Les valeurs des paramètres du modèle de référence sont parfaitement maîtrisées. Les termes d'erreur  $\varepsilon_i$  correspondent simplement au manque d'ajustement entre le modèle de référence et le modèle approché, et n'ont pas de caractère aléatoire. Les supposer aléatoires impliquerait de supposer la surface de réponse, donc le méta-modèle, aléatoire. Or dans la pratique, pour remplacer un modèle mécanique déterministe, la surface de réponse est considérée comme un méta-modèle déterministe. On pourrait « imaginer » qu'elle est aléatoire à cause du manque d'information introduit par l'approximation. En d'autres termes, c'est en cherchant une approximation que l'on « imagine » introduire un certain aléa. Si l'on connaît la réponse d'intérêt en tout point du domaine étudié et qu'il n'y a pas d'erreur d'approximation, alors la surface de réponse est parfaitement connue et donc déterministe. Cependant, les hypothèses de régression linéaire, qui feraient que la surface de réponse est considérée comme aléatoire, sont fortes et ne sont pas adaptées à notre cas d'étude. Nous serons amenés à utiliser certains outils, basés sur ces hypothèses, dans le chapitre suivant mais ils ne serviront jamais à prendre une décision définitive.

Le système de l'équation (II.63) s'écrit, sous forme matricielle, de la manière suivante :

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\mathbf{a} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{II.66})$$

où l'on suppose que la matrice  $\mathbf{Z}$  est de rang maximum, c'est-à-dire que ses colonnes sont linéairement indépendantes. La meilleure estimation des paramètres  $\mathbf{a}$  est calculée en minimisant l'erreur des moindres carrés entre le modèle de référence et le modèle approché :

$$\hat{\mathbf{a}} = \underset{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M}{\text{argmin}} \|\mathbf{y} - \mathbf{Z}\mathbf{b}\|^2 \quad (\text{II.67})$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne. La solution vaut :

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{y} \quad (\text{II.68})$$

La qualité de l'approximation de la surface de réponse peut être mesurée grâce à la moyenne empirique de l'erreur quadratique, c'est-à-dire :

$$\mathcal{E}_{\text{emp}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{\phi}(\mathbf{x}^{(i)}))^2 \quad (\text{II.69})$$

L'indicateur plus couramment utilisé, est le coefficient de détermination, noté  $R^2$ , valant :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{\phi}(\mathbf{x}^{(i)}))^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} \quad (\text{II.70})$$

où  $\bar{y}$  désigne la moyenne empirique des réponses sur l'échantillon, c'est-à-dire :

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (\text{II.71})$$

Il a l'avantage d'être normalisé entre 0 et 1 et indique la manière dont le modèle est capable de représenter les données. Plus il est proche de 1, meilleur est l'ajustement entre le modèle approché et le modèle de référence pour l'échantillon considéré. Nous reviendrons sur ce critère d'erreur dans la suite et nous verrons en quoi il pose problème.

Les hypothèses aléatoires des termes d'erreur permettent de tirer un certain nombre de propriétés statistiques. L'estimation  $\hat{\mathbf{a}}$  des coefficients du modèle est dite sans biais car :

$$E[\hat{\mathbf{a}}] = \mathbf{a} \quad (\text{II.72})$$

c'est-à-dire qu'en moyenne elle est égale à la valeur exacte, et sa variance vaut :

$$\text{Var}[\hat{\mathbf{a}}] = \sigma^2(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1} \quad (\text{II.73})$$

Cette dernière expression montre que la dispersion des paramètres du modèle de régression ne dépend que de la variance de l'erreur d'approximation  $\sigma^2$  et de la matrice  $\mathbf{Z}$  liée aux choix des valeurs des paramètres d'entrée. L'erreur d'approximation n'étant pas modifiable, le seul moyen de réduire la variance de l'estimation est de choisir de manière efficace les valeurs des paramètres de l'essai, d'où la théorie des plans d'expérience (Goupy, 1999). Le théorème de Gauss-Markov montre que l'estimation  $\hat{\mathbf{a}}$ , obtenue par la méthode des moindres carrés, est optimale au sens où c'est celle qui admet la plus faible variance. La variance de l'erreur  $\sigma^2$  étant inconnue, on doit également trouver une estimation ; elle est donnée par :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2}{N - (P + 1)} \equiv \frac{\text{SCR}}{N - (P + 1)} \quad (\text{II.74})$$

où SCR signifie Somme des Carrés Résiduelle. À partir de cette relation, on conclut que l'estimation de  $\text{Var}[\hat{\mathbf{a}}]$  vaut :

$$\hat{\sigma}_{\hat{\mathbf{a}}}^2 = \hat{\sigma}^2(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1} = \frac{\text{SCR}}{N - (P + 1)}(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1} \quad (\text{II.75})$$

Ces propriétés statistiques supposent en réalité que les termes d'erreur  $\varepsilon_i$  sont des réalisations de variables aléatoires centrées, de même variance et non corrélées. L'hypothèse qu'elles sont gaussiennes n'est pas utile ici. Par contre, en considérant cette hypothèse, on obtient des propriétés supplémentaires concernant des lois des estimateurs des coefficients du modèle. Cela permet de définir des intervalles de confiance et d'employer des tests d'hypothèse pour s'assurer de leur pertinence. Nous ne rentrerons pas dans les détails ici mais signalons que des intervalles de confiance peuvent également être fournis pour de nouvelles prédictions du modèle. Ainsi, si on appelle  $\mathbf{z}_n$  le vecteur des valeurs des régresseurs en un point, alors l'intervalle de confiance de niveau  $(1 - \alpha)$  de la prédiction correspondante  $\hat{y}_n$  est donné par :

$$\left[ \hat{y}_n \pm t_{N-(P+1), 1-\alpha/2} \hat{\sigma} \sqrt{\mathbf{z}_n^T (\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1} \mathbf{z}_n + 1} \right] \quad (\text{II.76})$$

où  $t_{N-(P+1), 1-\alpha/2}$  désigne le quantile de niveau  $(1 - \alpha/2)$  d'une loi de Student à  $N - (P + 1)$  degrés de liberté. L'intervalle souvent utilisé est celui à 95%, c'est-à-dire correspondant à  $\alpha = 0.05$ . Ils permettent d'accompagner chaque nouvelle prédiction d'une information de dispersion qui traduit l'incertitude associée au modèle. Cet indicateur, très intéressant pour mesurer l'influence de l'erreur d'approximation sur une prédiction, repose néanmoins sur l'hypothèse de normalité des résidus et ne sera donc pas utilisée dans la suite. Un exemple est illustré en figure II.8, où la fonction de référence  $y = 1 + x - 0.2x^2$  est utilisée pour générer un échantillon perturbé avec une loi uniforme sur  $[-1.5, 1.5]$ . La zone bleu correspond à l'intervalle de confiance à 95% des prédictions du modèle de régression linéaire estimé sur cet échantillon. Toutes les propriétés énoncées dans cette partie sont détaillées dans de nombreux ouvrages statistiques, notamment (Cornillon et Matzner-Lober, 2007) et (Lejeune, 2010) qui en font une description claire et précise.

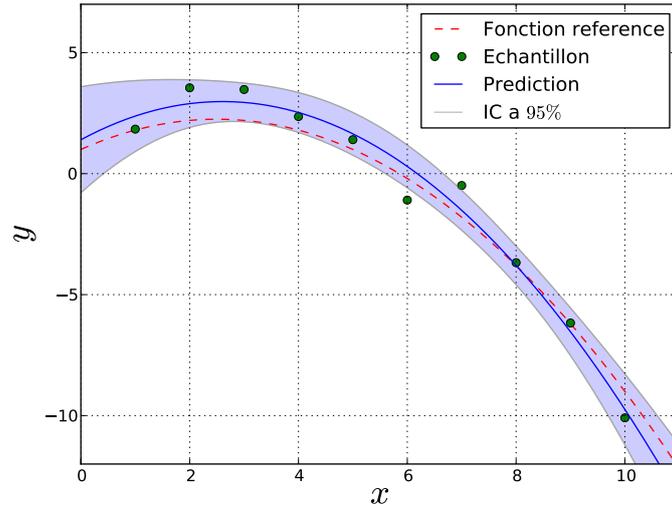


FIGURE II.8 – Illustration de la régression linéaire.

L'utilisation des surfaces de réponse en fiabilité n'est pas récente (Faravelli, 1989). Elles ont connu un certain succès car elles sont relativement simples à utiliser et souvent suffisantes pour de nombreux problèmes. Dans les ouvrages de fiabilité traitant de modèles mécaniques numériques, la méthode des surfaces de réponse est considérée comme entièrement déterministe, c'est-à-dire que le manque d'ajustement entre le modèle de référence et le modèle approché n'est pas supposé aléatoire. Une surface de réponse est simplement construite à partir de la méthode des moindres carrés sans hypothèse supplémentaire. Cette hypothèse a été introduite ici car la régression linéaire fut développée, à l'origine, dans un cadre statistique. Aussi, elle permettra d'introduire quelques outils dans le chapitre suivant. Pour limiter le nombre de calculs et améliorer la précision des résultats, les méthodes récentes s'appuient sur des démarches adaptatives : des surfaces de réponses sont construites itérativement avec un raffinement proche du domaine de défaillance (Gayton *et al.*, 2003; Kang *et al.*, 2010; Nguyen *et al.*, 2009). Nous reviendrons sur cette démarche dans la section III.6.3.

### II.4.3 Le chaos polynomial

Dans une approche probabiliste, les variables d'entrée étant aléatoires, la grandeur d'intérêt  $Y$  en sortie du modèle l'est également par définition. Dans la majorité des problèmes étudiés, elle est considérée du second ordre, c'est-à-dire qu'elle possède une variance finie :

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y) dy < +\infty \quad (\text{II.77})$$

avec  $f_Y(y)$  la loi de distribution de  $Y$ . Cette remarque permet d'introduire l'espace  $\mathcal{L}^2$  des fonctions de carré intégrable. Plus précisément, on considère l'espace des fonctions de carré intégrable sur l'ensemble mesuré  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}_{\mathbf{X}})$ , noté  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}_{\mathbf{X}})$ , où  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}$  est la probabilité induite par le vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  de densité notée  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ . Muni du produit scalaire, tel que pour  $v$  et  $w$  dans  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}_{\mathbf{X}})$  :

$$\langle v, w \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}_{\mathbf{X}})} = \int_{\Omega} v(\mathbf{x})w(\mathbf{x})d\mathbb{P}_{\mathbf{X}} = \int_{\Omega} v(\mathbf{x})w(\mathbf{x})f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (\text{II.78})$$

cet espace a la particularité d'être un espace de Hilbert et permet d'utiliser les puissants outils de la théorie de l'approximation. L'intérêt consiste alors à chercher la réponse  $Y$ , du modèle

$Y = \phi(\mathbf{X})$ , décomposée sur une base orthonormale, notée  $(\Psi_i)_{i \in I}$ , de  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}_{\mathbf{X}})$ , telle que :

$$\langle \Psi_i, \Psi_j \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}_{\mathbf{X}})} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.79})$$

De cette manière, la réponse peut être mise sous la forme :

$$Y = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \Psi_p(\mathbf{X}) \quad (\text{II.80})$$

Dans la pratique, la somme est tronquée pour limiter le nombre de termes. Cette décomposition est appelée chaos polynomial. Les composantes de la base correspondent à des polynômes orthonormaux multidimensionnels classiques de  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}_{\mathbf{X}})$ . Leur construction dépend de la dépendance des variables du vecteur  $\mathbf{X}$ . Si elles sont indépendantes (le cas de variables dépendantes n'est pas décrit ici, plus de détails sont fournis dans (Soize et Ghanem, 2004)), les polynômes sont construits par tensorisation des polynômes unidimensionnels des espaces  $\mathcal{L}^2(\Omega_m, \mathcal{T}_m, \mathbb{P}_{X_m})$  pour  $m = [1, \dots, M]$ . Cela signifie que si  $(\psi_{k_m}^{(m)})_{k_m \in \mathbb{N}}$  est une base orthonormale de  $\mathcal{L}^2(\Omega_m, \mathcal{T}_m, \mathbb{P}_{X_m})$  muni du produit scalaire :

$$\langle v, w \rangle_{\mathcal{L}^2(\Omega_m, \mathcal{T}_m, \mathbb{P}_{X_m})} = \int_{\Omega_m} v(x)w(x)d\mathbb{P}_{X_m} = \int_{\Omega_m} v(x)w(x)f_{X_m}(x)dx \quad (\text{II.81})$$

alors la base multidimensionnelle  $(\Psi_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^M}$  est égale à :

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \psi_{k_1}^{(1)}(x_1) \times \dots \times \psi_{k_M}^{(M)}(x_M) \quad (\text{II.82})$$

Le type de polynômes est généralement choisi en fonction de la densité de probabilité (polynômes d'Hermite pour une loi gaussienne, polynômes de Legendre pour une loi uniforme, ...) mais on peut toujours se ramener à des lois gaussiennes par transformation isoprobabiliste (cf. section II.3.6) et donc à l'utilisation de polynômes d'Hermite.

Cette méthode fut initialement introduite pour les éléments finis stochastiques spectraux (Ghanem et Spanos, 2003) dans laquelle les incertitudes d'entrée sont représentées par des champs aléatoires (fonctions de l'aléa et de l'espace, qui doivent être discrétisés (Sudret et Kiureghian, 2000)) et dont la réponse est décomposée sur le chaos polynomial par une méthode de Galerkin. Cette approche, dite intrusive, a donné lieu à de nombreux développements dans le but de traiter une large panoplie de problèmes dans un temps de calcul réduit. Une approche récente, appelée décomposition spectrale généralisée (Nouy, 2008), consiste à ne plus supposer une certaine base d'approximation mais à la construire en fonction d'un critère d'optimalité.

Les méthodes intrusives ont l'inconvénient de nécessiter des développements particuliers dans les codes éléments finis et une très bonne connaissance des outils mathématiques. Par opposition, l'approche non-intrusive consiste à rechercher la solution du problème sur la base du chaos polynomial en considérant que le modèle de référence est une « boîte noire », à l'image des méta-modèles (Berveiller, 2005). Les coefficients du développement sont identifiés soit par projection, grâce à la propriété d'orthogonalité des composantes de la base, soit par régression, c'est-à-dire en minimisant l'erreur des moindres carrés à partir d'un échantillon. Cette dernière méthode revient à construire une surface de réponse avec une base de fonctions polynômiales différente. Elle a donné lieu à de récents développements pour répondre à un certain nombre de questions telles que le choix de l'échantillon, l'ordre de troncature du développement, la sélection des termes les plus importants, l'évaluation de la qualité d'approximation, etc. Citons Blatman et Sudret (2011) qui s'appuient sur une méthode *least angle regression* (LAR) pour sélectionner les termes du développement et limiter le nombre de calculs du modèle de référence.

#### II.4.4 Le krigeage

Le krigeage est une méthode d'interpolation, originaire de la géostatistique, qui connaît un succès grandissant en simulation numérique et en science de l'ingénieur depuis son utilisation dans (Sacks *et al.*, 1989). Son principe consiste à supposer que la grandeur d'intérêt  $y$  que l'on observe est la réalisation d'un processus aléatoire, c'est-à-dire d'une fonction de l'aléa et de l'espace des variables d'entrée. De ce point de vue, pour des valeurs fixes des variables d'entrée, la grandeur d'intérêt correspond à une variable aléatoire. Plus formellement, si on considère les variables d'entrée  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M)$  et la grandeur d'intérêt  $y = \phi(\mathbf{x})$ , le modèle de krigeage suppose qu'elle est la réalisation du processus aléatoire noté  $Y(\mathbf{x})$ , qui est défini par :

$$Y(\mathbf{x}) = \sum_{p=1}^P a_p h_p(\mathbf{x}) + W(\mathbf{x}) \quad (\text{II.83})$$

où :

- $\sum_{p=1}^P a_p h_p(\mathbf{x})$  représente la valeur moyenne avec  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_P)$  les coefficients à déterminer et  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), \dots, h_P(\mathbf{x}))$  des fonctions des variables  $\mathbf{x}$  qui, de manière générale, sont des monômes de degrés inférieurs ou égaux à 2. Dans ce cas, cette partie est identique au modèle de régression linéaire présenté dans la section II.4.2 sans le terme d'erreur (i.e  $h_p(\mathbf{x}) = z_p$ ).
- $W(\mathbf{x})$  est un processus gaussien, c'est-à-dire dont la variable aléatoire  $W_i = W(\mathbf{x}^{(i)})$  est gaussienne quelle que soit la valeur  $\mathbf{x}^{(i)}$ . Sa valeur moyenne est nulle, sa variance est notée  $\sigma^2$  et sa fonction d'auto-corrélation est définie par :

$$C_W(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sigma^2 R(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{l}) = \sigma^2 \exp \left( \sum_{m=1}^M \left( - \left| \frac{x_m - x'_m}{l_m} \right|^2 \right) \right) \quad (\text{II.84})$$

D'autres fonctions d'auto-corrélation existent mais celle-ci est la plus utilisée. Les paramètres caractéristiques  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_M)$  sont appelés longueurs de corrélation.

La fonction d'auto-corrélation traduit le degré de corrélation entre deux variables aléatoires correspondantes aux réponses du modèle calculées aux valeurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  des paramètres d'entrée. Elle vaut naturellement 1 lorsque  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ , c'est-à-dire lorsque les deux variables aléatoires sont communes. Remarquons que ce modèle est très proche, dans sa formulation, du modèle de régression linéaire. La différence vient du fait que le terme d'erreur est supposé être un processus aléatoire alors qu'il n'est qu'une variable aléatoire en régression linéaire.

Les paramètres inconnus  $\boldsymbol{\theta} = \{\mathbf{a}, \sigma^2, \mathbf{l}\}$  sont estimés à partir d'un échantillon statistique de taille  $N$  grâce au principe du maximum de vraisemblance. Cette méthode, très classique en statistique pour l'estimation de paramètres, consiste à maximiser la fonction, dite de vraisemblance, qui est égale au produit des densités de probabilité du modèle en chaque point de l'échantillon. Si on note  $f_Y(\mathbf{x})$  la densité de probabilité du modèle de krigeage de l'équation (II.83), l'estimation des paramètres, notée  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , est donnée par :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmax}} \mathcal{L}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}, \boldsymbol{\theta}) = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmax}} \prod_{i=1}^N f_Y(\mathbf{x}^{(i)}, \boldsymbol{\theta}) \quad (\text{II.85})$$

Signalons qu'en régression linéaire, avec l'hypothèse de normalité des termes d'erreur, maximiser la fonction de vraisemblance est équivalent à minimiser l'erreur des moindres carrés. Dans le cadre du krigeage (Sacks *et al.*, 1989), pour des longueurs de corrélation  $\mathbf{l}$  fixées, les paramètres  $\mathbf{a}$  et  $\sigma^2$  sont estimés par :

$$\hat{\mathbf{a}} = \left( \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} \quad (\text{II.86})$$

et :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{a}})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{a}}) \quad (\text{II.87})$$

où  $\mathbf{H}$  désigne la matrice des fonctions  $h_p$  évaluées aux points de l'échantillon (équivalente à la matrice  $\mathbf{Z}$  en régression linéaire (cf. section II.4.2)),  $\mathbf{R}$  désigne la matrice de corrélation des points de l'échantillon ( $R_{ij} = R(|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}|, \mathbf{1})$ ) et  $\mathbf{y}$  est le vecteur contenant les valeurs de la réponse aux points de l'échantillon. À partir de ces relations, on montre que la fonction de vraisemblance ne dépend plus que des longueurs de corrélation et il suffit de la maximiser pour déterminer la totalité des coefficients. Ceci permet d'estimer la prédiction moyenne du krigeage, notée  $\mu_{\hat{Y}}$ , par :

$$\mu_{\hat{Y}}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x})^T \hat{\mathbf{a}} + \mathbf{r}(\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{a}}) \quad (\text{II.88})$$

où  $\mathbf{r}(\mathbf{x})$  correspond au vecteur de corrélation entre la position  $\mathbf{x}$  et un point d'échantillon  $\mathbf{x}^{(i)}$  ( $r_i(\mathbf{x}) = R(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(i)}|, \hat{\mathbf{1}})$ ). En supplément, on estime la variance de krigeage, notée  $s_{\hat{Y}}^2$ , qui traduit l'incertitude associée à une prédiction en fonction des points de l'échantillon d'apprentissage :

$$s_{\hat{Y}}^2(\mathbf{x}) = \hat{\sigma}^2 \left( 1 - \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x})^T & \mathbf{r}(\mathbf{x})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H} & \mathbf{R} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{r}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \right) \quad (\text{II.89})$$

De ce fait, pour une position donnée  $\mathbf{x}$ , le modèle correspond à la réalisation d'une variable aléatoire notée  $\hat{Y}$ , telle que  $\hat{Y}(\mathbf{x}) \sim \mathcal{N}(\mu_{\hat{Y}}(\mathbf{x}), s_{\hat{Y}}^2(\mathbf{x}))$ . Aussi, on montre qu'il est interpolant, c'est-à-dire que  $y_i = \mu_{\hat{Y}}(\mathbf{x}^{(i)})$  et  $s_{\hat{Y}}^2(\mathbf{x}^{(i)}) = 0$  pour tout  $i = [1, \dots, N]$ . Le modèle de krigeage est donc composé de deux parties : un modèle de régression linéaire qui donne la tendance globale et la partie stochastique qui permet d'interpoler localement chaque point de l'échantillon.

L'interprétation de l'utilisation du krigeage, dans notre situation, est proche de celle faite pour la surface de réponse si celle-ci est supposée aléatoire. En effet, le krigeage suppose que la grandeur d'intérêt est la réalisation d'un processus aléatoire gaussien alors que le modèle de référence est parfaitement déterministe. On peut donc « imaginer » qu'un aléa est introduit à cause de l'approximation. Cependant, cette fois-ci, il n'y a pas de manque d'ajustement étant donné que le krigeage est interpolant, ce qui est justifié par le fait que si l'on connaît la réponse en un point donné, on doit être capable de la prédire parfaitement en ce même point. Par contre, l'aléa introduit représente l'incertitude que l'on a d'une prédiction en dehors d'un point d'échantillon. Cette incertitude, fournie par la variance de krigeage, est d'autant plus grande que l'on s'éloigne des points connus. De cette manière, on peut associer à chaque prédiction un indicateur de la dispersion, tel qu'un intervalle de confiance, qui dépend de la position des points d'échantillon. Un exemple est illustré dans la figure II.9, où la fonction analytique  $y = \sin(3x)^2 - x$  est le modèle de référence. La zone bleu, correspondant à l'intervalle de confiance à 95%, représente l'incertitude associée aux prédictions.

Cette propriété intéressante rend le krigeage très attractif pour l'approximation de modèle numérique déterministe complexe en optimisation ou, depuis peu, en analyse fiabiliste (Kaymaz, 2005). Comme dans le cas des surfaces de réponse, la tendance actuelle pour limiter le nombre de calculs et améliorer la précision des résultats, consiste à appliquer une démarche adaptative dont le but est d'ajouter itérativement des points d'échantillon proche de l'état limite (Picheny *et al.*, 2010; Echard *et al.*, 2011). Ce type de démarche a été récemment employée pour l'optimisation sous contrainte de fiabilité, appelé *reliability based design optimization* (RBDO), et permet d'obtenir des résultats intéressants (Dubourg *et al.*, 2011).

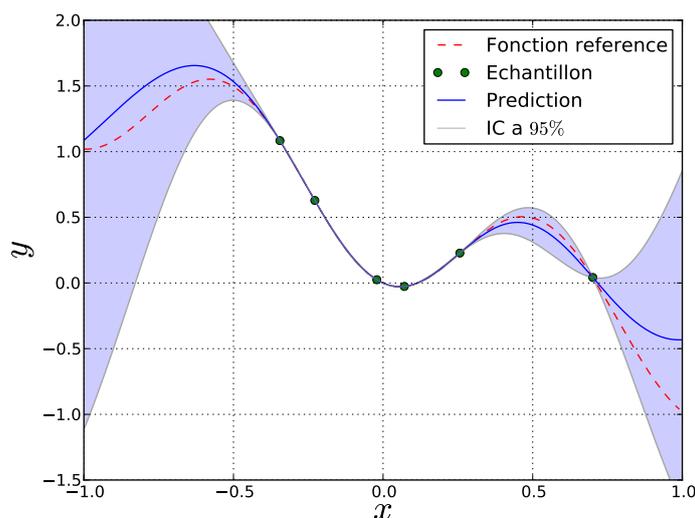


FIGURE II.9 – Illustration du krigeage sur la fonction  $y = \sin(3x)^2 - x$ .

#### II.4.5 Autres types de méta-modèles

Toutes les méthodes d'approximation de fonction permettent de construire des méta-modèles et peuvent être utilisées pour la propagation d'incertitudes. Cependant, certaines sont plus ou moins bien adaptées au problème traité. Parmi ces méthodes on trouve les réseaux de neurones (Papadrakakis et Lagaros, 2002; Deng *et al.*, 2005; Elhewy *et al.*, 2006) et les machines à vecteurs de support (Deheeger, 2008) qui ont donné lieu à des développements relativement récents pour l'analyse de fiabilité. De manière générale, les points importants relatifs à l'utilisation des méta-modèles concernent le choix de l'échantillon d'apprentissage, l'évaluation de l'erreur d'approximation et la prise en compte d'un nombre de variables important.

## II.5 Méthodes pour l'analyse de sensibilité

### II.5.1 Introduction

Lorsqu'un modèle mécanique de grande taille est traité avec une approche probabiliste, il se pose obligatoirement la question de savoir quelles variables doivent être considérées comme aléatoires. En effet, pour la grande majorité des méthodes, la dimension du problème est souvent un obstacle majeur. Sélectionner un nombre réduit de variables aléatoires est donc souvent indispensable. La première idée intuitive est de s'appuyer sur les connaissances physiques du modèle mécanique. Néanmoins, si certains aspects peuvent paraître évidents pour des modèles relativement simples, la tâche est beaucoup plus délicate en pratique. Le moyen souvent décrit dans la littérature consiste à utiliser une analyse de sensibilité pour mesurer l'importance des variables. Les plus influentes sont alors considérées comme aléatoires et les autres sont fixées à leur valeur nominale.

Dans un contexte général, l'analyse de sensibilité permet d'étudier la manière dont les paramètres d'entrée d'un modèle, ou d'un phénomène physique, engendrent des perturbations sur une grandeur d'intérêt. Les méthodes sont souvent classées en trois catégories en fonction des résultats recherchés :

1. *Les méthodes de criblage* (ou de *screening*) cherchent de manière qualitative l'importance des variables vis-à-vis de la réponse étudiée. Elles sont souvent utilisées lors d'une étude

préliminaire pour identifier et supprimer les variables qui ne sont pas influentes.

2. *L'analyse de sensibilité locale* étudie quantitativement l'effet des variables d'entrée sur la réponse d'intérêt autour d'un point de fonctionnement. Pour la réponse  $y$  issue du modèle  $y = \phi(\mathbf{x})$  où  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M)$  sont les variables d'entrée, une manière simple est de calculer la dérivée partielle en un point, noté  $\mathbf{x}^{(0)}$ , par rapport à une des variables, c'est-à-dire :

$$s_m = \frac{\partial y}{\partial x_m}(\mathbf{x}^{(0)}) \quad (\text{II.90})$$

3. *L'analyse de sensibilité globale* étudie la variabilité de la réponse dans son domaine de fonctionnement et cherche à mesurer la part due à chacune des variables. Plus précisément, si les variables du modèle sont aléatoires, on cherche la part de la variance de la réponse due à celle des variables d'entrée.

Ce dernier type d'analyse a déjà été mentionné en introduction de ce chapitre (cf. section II.1). Nous verrons qu'elle fournit des indicateurs intéressants. Nous nous intéressons également aux méthodes de criblage car elles permettent de répondre au besoin de sélection des variables.

### II.5.2 Méthodes de criblage

Les méthodes de criblage sont particulièrement adaptées pour l'étude préliminaire d'un modèle dans le but de détecter et sélectionner les variables d'entrée les plus pertinentes. Pour cette raison, elles sont capables de traiter un nombre de variables important en un temps de calcul raisonnable. En contrepartie, elles ne donnent qu'une information qualitative des mesures de sensibilité.

Dans (Saltelli *et al.*, 2000), la distinction est faite entre les méthodes *One at A Time* (OAT), qui étudient les paramètres un par un, et les méthodes par groupe, qui analysent l'influence des variables en créant des sous-ensembles. La difficulté des méthodes par groupe est que le résultat dépend des groupes formés entre les variables. Généralement, il est utile d'avoir une connaissance des plus influentes. Certaines méthodes sont dites séquentielles, c'est-à-dire qu'elles évoluent à chaque itération en fonction du résultat précédent. L'inconvénient est qu'elles ne permettent pas de traiter plusieurs réponses à la fois. D'autres nécessitent de connaître, *a priori*, la direction de l'effet des variables.

La méthode de Morris OAT (Morris, 1991) est particulièrement intéressante pour plusieurs raisons : aucune hypothèse n'est faite sur le modèle, l'étude couvre le domaine de variation des variables, elle permet de distinguer les variables ayant des effets linéaires et les variables ayant des effets non-linéaires ou avec interactions et peut traiter simultanément plusieurs réponses. L'étude menée dans (Garnier, 2009) a permis de la mettre en avant pour son compromis entre le temps de calcul et les informations qu'elle fournit. Son efficacité est également rappelée dans (Campolongo *et al.*, 2007) alors que son utilisation reste plutôt rare.

On considère le modèle caractérisé par la relation  $y = \phi(\mathbf{x})$  où  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M)$  est le vecteur des variables d'entrée qui varient sur le domaine représenté par l'hypercube  $\mathcal{H} = \prod_{i=1}^M [0, 1]^M$  (quelles que soient les bornes des variables on pourra toujours s'y ramener par une transformation). Le domaine d'étude est découpé sur une grille à  $M$  dimensions de  $p$  niveaux, c'est-à-dire que les variables peuvent prendre  $p$  valeurs dans l'ensemble  $\{0, 1/(p-1), 2/(p-1), \dots, 1\}$ . Le principe consiste à incrémenter, ou décrémenter, les valeurs des variables à tour de rôle en partant d'un point tiré aléatoirement. Plus précisément, le premier point de coordonnées  $\mathbf{x}_0$  est tiré aléatoirement. À l'itération  $i$ , pour  $i = 1, \dots, M$ , le point de coordonnées  $\mathbf{x}_i$  est défini par  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \Delta_i \mathbf{e}_i$  où  $\Delta_i$  est un coefficient multiplicateur fixé de l'intervalle  $1/(p-1)$  de la grille, et  $\mathbf{e}_i = (e_1, \dots, e_M)_i$  est le vecteur de base unitaire dans la  $i$ -ème direction, c'est-à-dire que

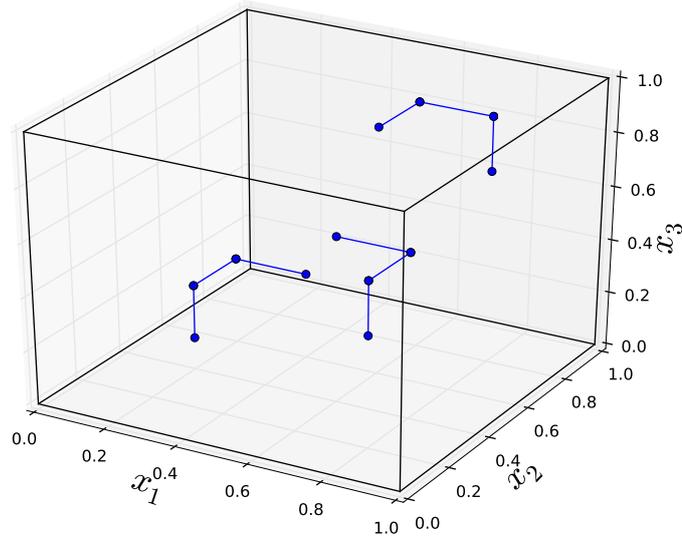


FIGURE II.10 – Illustration de la méthode de Morris OAT pour 3 variables d'entrée.

$(e_i)_i = 1$  et  $(e_j)_i = 0$  si  $i \neq j$ . La succession des points de coordonnées  $\mathbf{x}_i$  pour  $i = 1, \dots, M$  représente, dans l'espace des variables d'entrée, une trajectoire. Elle permet de définir ce que Morris appelle un effet élémentaire, qui vaut pour la  $i$ -ème variable :

$$d_i(\mathbf{x}) = \frac{\phi(\mathbf{x}_i) - \phi(\mathbf{x}_{i-1})}{\Delta_i} \quad (\text{II.91})$$

Cette relation se présente comme une approximation par différence finie de la dérivée partielle par rapport à la variable  $x_i$ , mais la valeur  $\Delta_i$  est généralement plus importante qu'un taux de variation classique. Les trajectoires sont répétées un certain nombre de fois (généralement 5 à 10 fois) dans le but de caractériser la distribution des effets élémentaires à travers leur moyenne et leur écart-type (la répétition des trajectoires est illustrée en figure II.10 pour 3 variables d'entrée). La moyenne est un indicateur de l'importance globale d'une variable alors que l'écart-type renseigne soit sur son interaction avec une autre variable, soit sur son effet non-linéaire. Plus particulièrement, il est proposé dans (Campolongo *et al.*, 2007) de ne pas utiliser la moyenne des effets élémentaires, qui peut s'avérer faible si l'effet d'un facteur change de signe d'une répétition à une autre, mais plutôt la moyenne des valeurs absolues. Il est également montré, de manière empirique, qu'il tend à être proche de l'indice de sensibilité global décrit dans la section suivante à l'équation (II.100). Cette estimation, plus robuste, est définie pour la  $i$ -ième variable, à partir de  $R$  répétitions de trajectoire, par :

$$\hat{\mu}_i^* = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R |d_i^{(r)}(\mathbf{x})| \quad (\text{II.92})$$

L'estimation de l'écart-type de la distribution des effets élémentaires est définie classiquement pour la  $i$ -ème variable par :

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{\frac{1}{R-1} \sum_{r=1}^R (d_i^{(r)}(\mathbf{x}) - \hat{\mu}_i)^2} \quad \text{avec} \quad \hat{\mu}_i = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R d_i^{(r)}(\mathbf{x}) \quad (\text{II.93})$$

Les résultats sont souvent présentés sur un graphique avec  $\hat{\sigma}$  en fonction de  $\hat{\mu}^*$ . Un exemple est illustré en figure II.11. Il permet de distinguer :

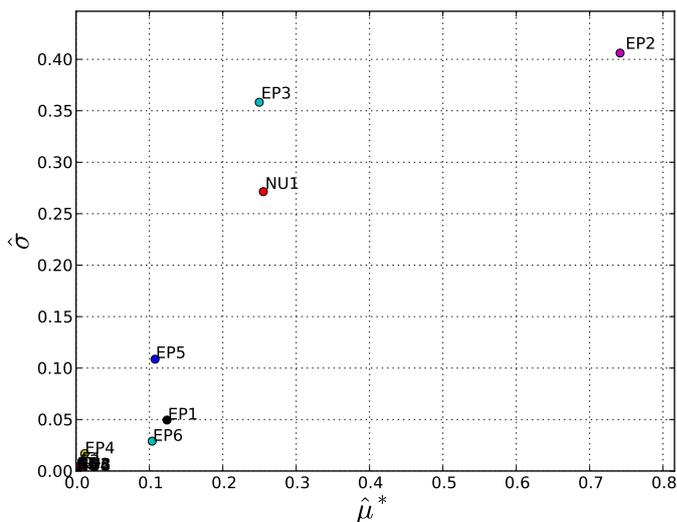


FIGURE II.11 – Exemple de résultats de sensibilité obtenus par la méthode de Morris OAT.

- les variables négligeables ( $\hat{\mu}^*$  et  $\hat{\sigma}$  faibles) ;
- les variables linéairement influentes sans effet d'interaction ( $\hat{\mu}^*$  élevé et  $\hat{\sigma}$  faible) ;
- les variables ayant un effet non-linéaire et/ou des interactions avec d'autres variables ( $\hat{\mu}^*$  et  $\hat{\sigma}$  élevés).

Signalons que la méthode ne permet pas de distinguer les effets non-linéaires des effets d'interaction, ni de savoir avec quelles variables les interactions sont importantes.

Plusieurs informations fournies par la méthode sont bénéfiques pour notre cas d'étude. La première concerne l'identification des paramètres les plus influents ou plutôt ceux qui sont négligeables. Cela permettra de ne pas en tenir compte dans l'approche probabiliste et donc de limiter le nombre de variables aléatoires. La seconde information concerne le signe de l'effet des paramètres. Celui-ci ne peut pas être observé grâce à  $\hat{\mu}^*$  seul mais il peut l'être en le comparant à  $\hat{\mu}$ , c'est-à-dire la moyenne des effets élémentaires. Si  $\hat{\mu}_i^* = \hat{\mu}_i$ , cela signifie qu'il n'y a pas de changement de signe de la variation de la réponse lorsque la  $i$ -ième variable varie. De ce fait, la réponse est monotone par rapport à cette variable et une direction pour la recherche du domaine de défaillance peut être privilégiée. Nous verrons dans la suite que ce renseignement peut être utile dans certains cas. Enfin, une dernière information concerne l'utilisation de l'importance non-linéaire et/ou de l'interaction des variables. L'idée consiste à pré-sélectionner certains termes pour la construction des surfaces de réponse. Cela permet, pour les modèles de taille importante, de réduire le temps de calcul. Le principe est détaillé dans la section IV.3.

### II.5.3 Analyse de sensibilité globale

L'analyse de sensibilité globale permet de mesurer précisément la part de variabilité d'une réponse due à chacune des variables. Il s'agit, cette fois, d'une information quantitative et non d'une simple hiérarchisation. Cette notion a déjà été abordée lors de la présentation de la méthode FORM (cf. section II.3.3) avec les facteurs d'importance  $(\alpha_m^2)_{m=1\dots M}$ . L'équation (II.44) montre bien qu'ils représentent la part de la variance de la réponse, issue de l'état limite linéarisé, due à chacune des variables aléatoires d'entrée.

De manière plus générale, à partir d'un modèle de régression linéaire, un certain nombre d'indicateurs permettent d'évaluer la sensibilité d'une grandeur d'intérêt par rapport aux vari-

ables d'entrée (Saltelli *et al.*, 2000). Le plus classique est le coefficient de régression standardisé, noté SRC (*Standardized Regression Coefficient*), valide dans le cas d'un modèle linéaire. Si la réponse est décrite par la relation :

$$Y = a_0 + \sum_{m=1}^M a_m X_m \quad (\text{II.94})$$

alors le SRC d'une variable  $X_m$  vaut :

$$\text{SRC}_m = \frac{a_m^2 \text{Var}[X_m]}{\text{Var}[Y]} \quad (\text{II.95})$$

Cet indice n'est rien d'autre que le carré du coefficient de corrélation, introduit dans la section II.2.3 à l'équation (II.18), entre la variable  $X_m$  et la réponse  $Y$ . Le coefficient de corrélation partiel, appelé PCC (*Partial Correlation Coefficient*), permet de supprimer l'effet éventuel de l'interaction avec d'autres variables. Aussi, lorsque le modèle n'est plus linéaire mais reste monotone, les indicateurs basés sur les rangs, notés SRRC (*Standardized Regression Rank Coefficient*) et PRCC (*Partial Rank Correlation Coefficient*), sont définis de la même manière (Saltelli *et al.*, 2000).

Quel que soit le modèle considéré, la sensibilité d'une grandeur  $Y$  par rapport à une variable  $X_m$  est mesurée par  $\text{Var}[\text{E}[Y|X_m]]$ , qui représente la variabilité de l'espérance de  $Y$  lorsque la variable  $X_m$  est fixée à différentes valeurs. Cette grandeur, normalisée par la variance de  $Y$ , est équivalente au SRC si le modèle est linéaire. Plus généralement, à partir d'une décomposition de la variance totale d'un modèle, notée  $V$ , sous la forme :

$$V = \sum_{m=1}^M V_m + \sum_{1 \leq m < n \leq M} V_{m,n} + \dots + V_{m,n,\dots,M} \quad (\text{II.96})$$

où :

$$\begin{aligned} V_m &= \text{Var}[\text{E}[Y|X_m]] \\ V_{m,n} &= \text{Var}[\text{E}[Y|X_m, X_n]] - V_m - V_n \\ V_{m,n,o} &= \text{Var}[\text{E}[Y|X_m, X_n, X_o]] - V_{m,n} - V_{m,o} - V_{n,o} - V_m - V_n - V_o \\ &\vdots \\ V_{1,\dots,M} &= V - \sum_{m=1}^M V_m - \sum_{1 \leq m < n \leq M} V_{m,n} - \dots - \sum_{1 \leq m < n < \dots < M} V_{m,n,\dots,M-1} \end{aligned} \quad (\text{II.97})$$

on peut définir l'indice de sensibilité du premier ordre par :

$$S_m = \frac{V_m}{V} \quad (\text{II.98})$$

qui exprime la sensibilité de la réponse  $Y$  par rapport à une variable  $X_m$ , et les indices d'ordres supérieurs :

$$S_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{V} \quad \dots \quad S_{1,\dots,M} = \frac{V_{1,\dots,M}}{V} \quad (\text{II.99})$$

qui mesurent la sensibilité par rapport aux interactions des variables. Leur interprétation est aisée car, par définition de l'équation (II.96), leur somme est égale à 1. Globalement, l'importance d'une variable  $X_m$  sous toutes ses formes, c'est-à-dire seule et en interaction avec d'autres, est traduite par l'indice de sensibilité total qui correspond à la somme de tous les indices relatifs à la variable  $X_m$  :

$$S_{T_m} = \sum_{k \in \mathcal{D}_m} S_k \quad (\text{II.100})$$

avec  $\mathcal{D}_m$  les ensembles d'indice contenant l'indice  $m$ .

Ces indices, dits de Sobol (Sobol, 1993), sont très utilisés dans la littérature pour estimer la sensibilité de variables car ils ne font aucune hypothèse de linéarité ou de monotonie du modèle. Numériquement, ils peuvent être calculés à partir de tirages de Monte Carlo, mais cette méthode devient rapidement inabordable lorsque le nombre de variables à traiter est important, surtout si l'évaluation du modèle de référence est coûteuse. En effet, pour estimer tous les indices des  $M$  variables d'entrée à partir de  $N$  simulations de Monte Carlo, le nombre d'appel à la fonction est de  $N \times 2^M$ . Plusieurs autres méthodes ont été développées pour les calculer plus efficacement (Saltelli *et al.*, 2000). Néanmoins, en pratique, on se contente des indices du premier ordre, éventuellement du second ordre, et des indices totaux (pour estimer les indices du premier ordre et les indices totaux, le nombre d'appel à la fonction n'est plus que de  $N \times (2M + 1)$ ). Une méthode de criblage comme celle de Morris OAT, présentée à la section précédente, peut également permettre de faire un premier tri des variables. Signalons que, si le modèle de référence est remplacé par un méta-modèle basé sur le chaos polynomial, les indices de Sobol peuvent être obtenus analytiquement (Blatman et Sudret, 2010b; Sudret, 2008). Plus généralement, quel que soit le type de méta-modèles employés, les indices de Sobol sont calculables par des tirages de Monte Carlo.

Dans un contexte industriel, ces indices sont très intéressants pour compléter l'analyse de fiabilité. En effet, en travaillant sur la réduction des incertitudes associées aux variables les plus influentes, on peut réduire de manière optimale les niveaux de probabilité de défaillance.

## II.6 Conclusion

Le nombre d'outils pour traiter l'analyse de fiabilité d'une structure mécanique est relativement important et il n'y a clairement pas de méthode universelle applicable dans toutes les situations. La méthode de Monte Carlo est évidemment la plus robuste car elle ne fait aucune approximation du problème mais elle est aussi extrêmement coûteuse en temps de calcul ce qui la rend inexploitable dans la grande majorité des cas. Elle pourra être utilisée pour comparer et valider d'autres méthodes. Les méthodes de simulation avancées permettent de réduire considérablement les temps de calcul de Monte Carlo mais restent souvent assez coûteuses. De plus, dans la plupart des cas, les techniques utilisées pour accélérer la convergence ne permettent de traiter qu'une seule fonction d'état limite à la fois. Leur principal avantage est qu'elles sont capables de prendre en compte un très grand nombre de variables aléatoires. Les méthodes FORM et SORM sont très intéressantes pour estimer de faibles probabilités de défaillance. Bien évidemment, leur utilisation s'appuie sur plusieurs hypothèses qui doivent être vérifiées : la contribution la plus importante à la probabilité de défaillance se situe dans le voisinage du PDPP et l'état limite doit être linéaire ou quadratique dans ce même voisinage. Il faut aussi garantir une bonne convergence vers le PDPP et dans le cas de plusieurs fonctions de performance, la procédure doit être répétée autant de fois. Les méthodes basées sur les méta-modèles imposent généralement moins de contraintes d'utilisation. Une fois construit, le méta-modèle peut être exploité très rapidement pour n'importe quel type d'analyse probabiliste et plusieurs fonctions de performance peuvent être traitées simultanément à partir d'un seul échantillon statistique. Cependant, la condition de bien maîtriser l'erreur d'approximation est nécessaire et celle-ci peut être plus ou moins acceptable en fonction du type d'analyses menées. Aussi, résoudre des problèmes avec un très grand nombre de variables aléatoires (plusieurs centaines) reste une difficulté majeure.

Pour faire un choix de l'outil le plus adapté à notre cadre d'étude, nous devons prendre en compte les contraintes liées au type de structures étudiées et à l'application au sens large. Le travail reste relativement prospectif et les besoins de l'approche concernent plus particulièrement l'analyse de fiabilité et de sensibilité. Cependant, en perspective d'une application industrielle,

le fait de pouvoir répéter l'analyse pour tester différentes lois de probabilité, optimiser certains paramètres pour de nouvelles règles de dimensionnement, ou réduire le nombre de variables aléatoires est un avantage supplémentaire. Les modèles mécaniques à traiter sont relativement simples dans le sens où le comportement est linéaire élastique isotrope ou orthotrope pour certains sous-ensembles. La méthodologie doit permettre d'étudier n'importe quel composant de la structure voire plusieurs composants ; dans ce cas, plusieurs fonctions de performance sont à prendre en compte. Le nombre de variables aléatoires peut également être relativement important : plusieurs dizaines ou avoisinant la centaine.

En tenant compte de ces remarques, nous avons opté pour l'utilisation de méta-modèles. Cette méthode est plus souple quand le nombre de réponses étudiées est important et bien plus intéressante pour la réanalyse. Compte tenu des *a priori* sur le comportement des modèles à traiter, nous pouvons penser que les surfaces de réponse seront suffisantes. Elles sont également plus simples à mettre en œuvre que les autres types de méta-modèles. La seule difficulté peut concerner le nombre de variables aléatoires prises en compte. Si celui-ci est important, le nombre de simulations du modèle de référence nécessaire pour construire les surfaces de réponse l'est d'autant plus. Cependant, nous verrons dans le chapitre suivant que plusieurs techniques permettent de limiter ce problème.



# Chapitre III

## Méthodologie basée sur les surfaces de réponse

### Sommaire

---

<b>III.1 Introduction</b>	<b>42</b>
<b>III.2 Estimation de l'erreur d'une surface de réponse</b>	<b>43</b>
III.2.1 Position du problème	43
III.2.2 Erreur de généralisation	43
III.2.3 Estimations par pénalisation	44
III.2.4 Estimations par simulation	45
III.2.5 Bilan	47
<b>III.3 Construction de la surface de réponse</b>	<b>47</b>
III.3.1 Quelques outils	47
III.3.2 Démarche de sélection	48
<b>III.4 Validation de la surface de réponse</b>	<b>49</b>
III.4.1 Inconvénient d'un critère d'erreur global	49
III.4.2 Calcul des indicateurs <i>bootstrap</i>	50
III.4.3 Détermination de la région d'intérêt	51
<b>III.5 Illustration sur un exemple d'application</b>	<b>53</b>
III.5.1 Sélection des termes et validation croisée	53
III.5.2 Paramétrage du <i>bootstrap</i>	54
III.5.3 Paramétrage de la région d'intérêt	55
III.5.4 Conclusion	57
<b>III.6 Démarche générale</b>	<b>57</b>
III.6.1 Étape initiale	57
III.6.2 Amélioration de la surface de réponse : enrichissement	58
III.6.3 Méthode adaptative	61
III.6.4 Exemples d'applications	66
<b>III.7 Application sur un modèle cube</b>	<b>73</b>
III.7.1 Description du modèle et objectif de l'étude	73
III.7.2 Analyse initiale	75
III.7.3 Application de la méthode adaptative aux réponses 2, 4, 5 et 6	76
III.7.4 Sélection des variables	78
III.7.5 Analyse de sensibilité préliminaire, comparaison à la sélection des variables	79
III.7.6 Autre démarche, exemple des réponses 5 et 6	82
III.7.7 Analyse de sensibilité globale	85
III.7.8 Conclusion	86
<b>III.8 Conclusion générale</b>	<b>87</b>

---

### III.1 Introduction

L'approche par surfaces de réponse (SR) a déjà été largement utilisée dans la littérature (Liu et Moses, 1994; Zheng et Das, 2000; Chen *et al.*, 2003; Leira *et al.*, 2005; Rguig, 2005) et a fait preuve de son efficacité pour une grande majorité de problèmes. Bien évidemment, cette méthode possède un certain nombre de limites et le problème traité doit y correspondre. La première contrainte concerne la forme de la fonction de performance étudiée : elle doit être suffisamment régulière pour pouvoir être approchée par une SR. Nous pensons *a priori* que les modèles de structures satellites restent dans ce cadre ; c'est ce que nous vérifierons dans le chapitre suivant. La seconde difficulté relève du nombre de variables aléatoires qui peuvent être prises en compte par cette approche. Pour une SR complète incluant les termes linéaires, carrés, d'interaction et une constante, le nombre total de coefficients à déterminer vaut  $1 + 2M + M(M - 1)/2$  où  $M$  est le nombre de variables. Étant donné que la taille de l'échantillon pour construire la SR doit être au moins égal au nombre de coefficients, le nombre de simulations du modèle de référence augmente rapidement en fonction du nombre de variables. Pour cette raison, les termes d'interaction ne sont souvent pas pris en compte dans la littérature. Cependant, dans certaines situations, ils permettent clairement d'améliorer la qualité de la SR et peuvent être indispensables. Nous verrons qu'il existe des méthodes, issues de la statistique, qui permettent de limiter le nombre de termes dans la SR et donc de réduire la taille de l'échantillon. En effet, de manière générale, parmi les termes potentiels d'une SR, tous ne sont pas utiles. Un dernier aspect important concerne l'estimation de l'erreur due à l'approximation. Cette dernière est primordiale étant donné que la SR a pour but de remplacer le modèle de référence. Cela semble souvent trop peu abordé dans la littérature, c'est pour cette raison que l'accent sera mis sur ce point.

En tenant compte des difficultés précédentes, ce chapitre a pour objectif de construire progressivement une démarche d'application des SR pour des modèles de structures satellites sous chargement statique. Il peut être décomposé en trois grandes parties. La première inclut les sections III.2, III.3, III.4 et III.5. La section III.2 présente la problématique liée à l'erreur d'approximation des SR et discute de plusieurs outils. Ils permettent de mettre en place une démarche de construction qui est décrite en section III.3. En plus d'évaluer l'erreur de la SR, une phase de validation est proposée en section III.4. Cette dernière a pour but de fournir des indicateurs qui semblent mieux correspondre au besoin de l'estimation de probabilité de défaillance. Enfin, la section III.5 présentera une application sur un modèle éléments finis (EF) issu de la littérature pour illustrer quelques unes des remarques et discuter du choix de certains paramètres.

La seconde partie correspond à la section III.6 et présente la démarche d'application générale des outils précédents. Elle décrit la manière dont un modèle donné peut être résolu, depuis la formation de l'échantillon statistique jusqu'à l'estimation de la probabilité de défaillance. À cet effet, il est proposé une méthode dite adaptative qui permet d'améliorer l'estimation d'une probabilité de défaillance compte tenu des informations recueillies par l'étape de validation. Son principe est d'enrichir l'échantillon proche de l'état limite dans le but d'améliorer la qualité de la SR dans cette zone. La méthode est appliquée sur des exemples issus de la littérature.

La dernière section est une application sur le modèle EF d'un cube encastré à sa base. Ce dernier reste élémentaire mais il est une représentation simplifiée d'une structure satellite. Il permet de mettre en place les principales étapes de l'application de la méthode sur un problème industriel. Lorsque le nombre de variables aléatoires est important et que plusieurs fonctions de performance sont étudiées, le problème initial doit être réduit pour limiter le temps de calcul. Pour cela, l'objectif est de simplifier progressivement le problème en limitant les critères de performance à ceux dont les probabilités de défaillance sont les plus significatives, et en détectant les variables responsables des niveaux de probabilités. La démarche sera appliquée sur une vraie

structure de satellite dans le chapitre suivant.

## III.2 Estimation de l'erreur d'une surface de réponse

### III.2.1 Position du problème

La première étape liée à la construction d'une SR concerne l'évaluation de l'erreur qui est commise en faisant l'approximation du modèle de référence. Elle est fondamentale puisqu'elle donne un renseignement sur la qualité des prédictions fournies à partir d'un nouveau jeu de données. L'objectif d'évaluer correctement l'erreur d'approximation est double :

1. on cherche à la minimiser pour sélectionner la SR la plus performante ;
2. elle doit fournir un indice de confiance pour valider les résultats obtenus à travers la SR.

Plusieurs critères pertinents ont été proposés en statistique de l'apprentissage mais la difficulté réside dans le second point, c'est-à-dire qu'il est toujours difficile de connaître, en pratique, la limite d'erreur acceptable garantissant un résultat fiable.

Nous considérons dans cette section que nous possédons un échantillon statistique de taille  $N$ , obtenu aléatoirement à partir des variables d'entrée. On cherche à construire une SR à partir des termes des variables, de degré inférieurs ou égaux 2, c'est-à-dire que le nombre de coefficients à déterminer vaut  $P + 1$  où  $P = 2M + M(M - 1)/2$  avec  $M$  le nombre de variables (l'ajout de 1 à  $P$  correspond à la constante du modèle). Pour construire une SR complète, c'est-à-dire incluant la totalité des termes, il est nécessaire que  $N \geq P + 1$ . Plus particulièrement, si  $N = P + 1$ , la SR est interpolante et un critère d'erreur tel que le coefficient de détermination  $R^2$  (cf. equation (II.70)), évalué sur l'échantillon d'apprentissage, vaut 1 : cela signifie que la SR est de très bonne qualité. Malgré cela, si elle est utilisée pour prédire les réponses d'un autre échantillon, c'est-à-dire différent de celui d'apprentissage, ces dernières peuvent être très éloignées des vraies valeurs. Ce phénomène est appelé sur-apprentissage. Il caractérise le fait qu'un modèle peut très bien s'ajuster aux données d'un échantillon et ne pas reproduire, avec une qualité suffisante, les données d'un autre. C'est toujours le cas, pour les SR, si le nombre de termes augmente. Pour garantir un modèle dit prédictif, il est nécessaire qu'il soit parcimonieux, c'est-à-dire qu'il contienne un nombre de termes limité. La figure III.1 illustre ce phénomène. La valeur  $1 - R^2$ , évaluée sur un échantillon d'apprentissage (utilisé pour construire la SR) et sur un échantillon test, y est représentée en fonction du nombre de termes inclus dans la SR. On peut voir que l'erreur basée sur l'échantillon test augmente à partir d'un certain nombre de termes alors que celle de l'échantillon d'apprentissage tend vers 0.

Un critère d'erreur pertinent, doit permettre d'évaluer la qualité de l'approximation sur le domaine étudié, quel que soit l'échantillon : il s'agit de l'erreur de généralisation. Cependant, elle ne peut être qu'estimée à partir de l'information disponible.

### III.2.2 Erreur de généralisation

L'erreur de généralisation correspond à l'espérance d'une fonction perte traduisant l'écart entre la réponse du modèle de référence et celle de la SR. Le plus souvent, la fonction perte correspond à l'écart des modèles au carré et l'erreur de généralisation est appelée, dans ce cas, erreur quadratique moyenne (EQM) (ou risque quadratique). En notant  $Y$  la variable aléatoire de la réponse exacte et  $\hat{\phi}(\mathbf{X})$  le modèle de la SR, elle est définie par :

$$\text{EQM} = \text{E}[(Y - \hat{\phi}(\mathbf{X}))^2] \quad (\text{III.1})$$

Elle peut être décomposée de la manière suivante :

$$\text{EQM} = (\text{E}[\hat{\phi}(\mathbf{X})] - Y)^2 + \text{Var}[\hat{\phi}(\mathbf{X})] \quad (\text{III.2})$$

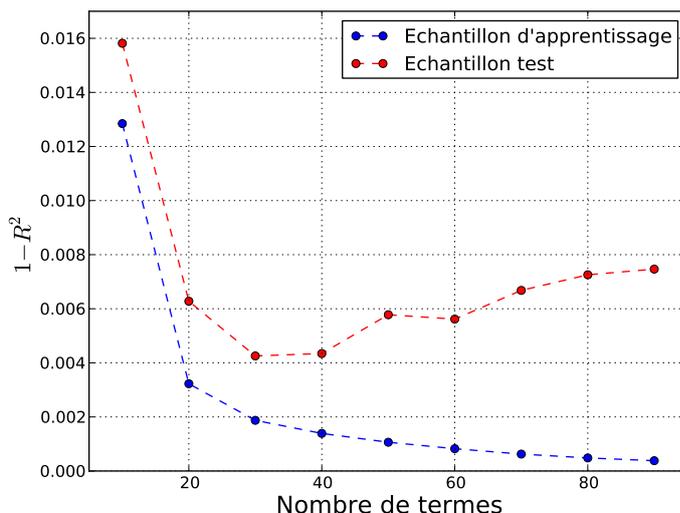


FIGURE III.1 – Évolution de l’erreur d’une SR, évaluée sur un ensemble d’apprentissage et sur ensemble test, en fonction du nombre de termes.

où  $E[\hat{\phi}(\mathbf{X})] - Y$  correspond au biais de l’estimation de la SR (puisque  $Y = \phi(\mathbf{X})$ ) et  $\text{Var}[\hat{\phi}(\mathbf{X})]$  est sa variance. Cette décomposition traduit le fait qu’un « bon » modèle doit être précis en moyenne, mais aussi stable, c’est-à-dire qu’il varie peu en fonction de l’échantillon d’apprentissage. Classiquement, plus la SR possède de termes, meilleur sera l’ajustement aux données, ce qui réduit le biais. À l’inverse, l’augmentation du nombre de termes augmente la variance. Le principe est de trouver un compromis qui minimise l’erreur de généralisation. Le fait d’utiliser le critère  $\mathcal{E}_{\text{emp}}$  (cf. équation (II.69)) (ou bien le  $R^2$ ) sur l’échantillon d’apprentissage ne tient compte que de la partie biais et non de la variance : cette estimation est trop optimiste. Une idée serait d’évaluer l’erreur sur un échantillon test comme c’est le cas sur la figure III.1. L’inconvénient est qu’il est nécessaire de former plusieurs échantillons ce qui implique un nombre plus important de simulations numériques. Pour remédier à cela, plusieurs méthodes d’estimation de l’erreur de généralisation ont été proposées. La première catégorie est basée sur des hypothèses statistiques : il s’agit des méthodes de pénalisation. Le second type d’approche consiste à former plusieurs échantillons à partir d’un seul pour, à la fois, construire et tester la SR : il s’agit des méthodes de simulation.

### III.2.3 Estimations par pénalisation

La première estimation est donnée par le Cp de Mallows (Mallows, 2000). Pour une SR construite à partir d’un échantillon de taille  $N$ , contenant un nombre de termes noté  $\xi$  parmi les  $P$  termes potentiels, le Cp de Mallows vaut :

$$\text{Cp}(\xi) = \frac{\text{SCR}(\xi)}{\hat{\sigma}^2} - N + 2\xi \quad (\text{III.3})$$

où on rappelle que SCR désigne la somme des carrés résiduelle ( $\sum_i \varepsilon_i^2$ ) et  $\hat{\sigma}^2$  est l’estimation de la variance des résidus du modèle de régression linéaire (cf. équation (II.74)), calculée sur le modèle complet. Le calcul du Cp est basé sur les hypothèses aléatoires de régression linéaire. Il traduit le fait que la SCR est pénalisée en fonction du nombre de termes introduits dans la SR. Cela implique que lorsqu’un terme est ajouté, il doit suffisamment réduire le Cp pour être avantageux. Parmi des SR de tailles différentes, celle qui minimise le Cp sera préférée.

Basées sur le même principe mais définies de manière plus générale, des pénalisations de la fonction de vraisemblance ont été proposées. Rappelons que le maximum de vraisemblance (cf. section II.4.4) est une méthode d'estimation de paramètres qui est équivalente à la minimisation de l'erreur des moindres carrés dans le cas de la régression linéaire avec l'hypothèse de normalité des résidus. Sous cette hypothèse, l'*Akaike Information Criteria* (AIC) (Akaike, 1973) est défini par :

$$\text{AIC}(\xi) = N \log \frac{\overline{\text{SCR}}(\xi)}{N} + 2\xi \quad (\text{III.4})$$

et le *Bayesian Information Criteria* (BIC) (Schwarz, 1978) par :

$$\text{BIC}(\xi) = N \log \frac{\overline{\text{SCR}}(\xi)}{N} + \xi \log N \quad (\text{III.5})$$

L'idée reste la même, c'est-à-dire compenser la diminution de la SCR avec l'ajout de nouveaux termes. La meilleure SR au sens de ces critères est celle qui les minimise.

Un dernier critère classique s'appuie sur la pénalisation du coefficient de détermination  $R^2$ . Il est appelé coefficient de détermination ajusté, noté  $R_a^2$ , et vaut :

$$R_a^2(\xi) = 1 - \frac{N-1}{N-\xi} (1 - R^2(\xi)) \quad (\text{III.6})$$

où  $R^2(\xi)$  désigne le coefficient  $R^2$  calculé sur la SR contenant  $\xi$  termes. Comme les autres critères, l'augmentation monotone du  $R^2$  est compensée avec l'ajout de nouveaux termes.

Ces critères sont pratiques à utiliser car leur coût de calcul est quasi-nul. Cependant, ils reposent sur les hypothèses aléatoires de régression linéaire (excepté le  $R_a^2$ ). D'autres critères existent et sont disponibles dans la littérature mais ceux décrits ci-dessus sont les plus classiques.

### III.2.4 Estimations par simulation

Le principe des méthodes de simulation est de tester la SR sur des ensembles de points qui ne sont pas utilisés pour la construire. Cependant, étant donné que la création d'un échantillon d'apprentissage et d'un échantillon test est trop coûteuse, l'idée est de former des sous-ensembles tests à partir d'un seul échantillon d'apprentissage.

La validation croisée, souvent notée CV pour *Cross Validation*, consiste à découper l'échantillon de référence en plusieurs sous-ensembles pour les utiliser, à tour de rôle, en tant qu'échantillons tests. Les étapes sont les suivantes :

1. découpe l'échantillon d'apprentissage en  $K$  sous-parties ;
2. pour  $k$  de 1 à  $K$  :
  - (a) écarte la  $k$ -ième sous-partie ;
  - (b) construit la SR avec l'ensemble des sous-parties restantes ;
  - (c) évalue la SR sur la  $k$ -ième sous-partie (sous-échantillon test) ;
3. calcule la moyenne de l'erreur basée sur les échantillons tests.

L'erreur estimée est appelée erreur de validation croisée, elle vaut :

$$\mathcal{E}_{\text{CV}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( y_i - \hat{\phi}^{(-\mathcal{D}_i)}(\mathbf{x}^{(i)}) \right)^2 \quad (\text{III.7})$$

où  $\hat{\phi}^{(-\mathcal{D}_i)}$  désigne la SR construite quand le sous-ensemble contenant l'indice  $i$  est écarté. Cette erreur est équivalente à  $\mathcal{E}_{\text{emp}}$  mais basée sur les réponses prédites sur des échantillons tests. On préférera utiliser l'équivalent du coefficient  $R^2$  en validation croisée, noté  $Q^2$ , qui vaut :

$$Q^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N \left( y_i - \hat{\phi}^{(-\mathcal{D}_i)}(\mathbf{x}^{(i)}) \right)^2}{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2} \quad (\text{III.8})$$

Le nombre de sous-parties  $K = 10$  est souvent utilisé dans la littérature et fournit de bonnes estimations (Molinario *et al.*, 2005). Il représente également un bon compromis avec le temps de calcul. La limite de  $K = N$  correspond à un seul point d'échantillon par sous-parties et est appelé *leave-one-out cross validation*. L'inconvénient, dans ce cas, est que les SR sont généralement proches les unes des autres. À l'inverse, si  $K$  est petit, la qualité des SR est dégradée car les sous-échantillons d'apprentissage sont de taille plus faible.

La méthode du *bootstrap* est une autre méthode de simulation plus coûteuse. Elle consiste à construire des sous-échantillons, dits *bootstrap*, par tirages avec remise dans l'échantillon d'apprentissage. Cela signifie que les sous-échantillons *bootstrap* possèdent la même taille que l'échantillon d'apprentissage, c'est-à-dire  $N$  points. Certains sont redondants et d'autres n'apparaissent pas car les tirages sont parfaitement aléatoires. Cette méthode est généralement utilisée pour déterminer des statistiques d'estimateurs, telles que le biais, la variance ou même des lois de distribution et des intervalles de confiance, sans faire d'hypothèse. Dans notre cas, les étapes sont les suivantes :

1. répète  $B$  fois :
  - (a) compose un échantillon *bootstrap* par tirages avec remise dans l'échantillon d'apprentissage ;
  - (b) construit la SR sur l'échantillon *bootstrap* ;
  - (c) évalue la SR sur l'échantillon global ;
2. calcule un critère d'erreur.

Plusieurs critères d'erreur ont été définis. Le premier consiste à évaluer l'erreur sur l'échantillon global à partir des SR construites sur les échantillons *bootstrap*, puis à moyenner parmi les  $B$  répétitions. Cet estimateur est défini classiquement par :

$$\mathcal{E}_{\text{boot}} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( y_i - \hat{\phi}_b(\mathbf{x}^{(i)}) \right)^2 \right) \quad (\text{III.9})$$

où  $\hat{\phi}_b(\mathbf{x}_i)$  désigne la SR construite sur l'échantillon *bootstrap*  $b$ . Il a l'inconvénient d'être trop optimiste car au fil des répétitions, de nombreux points d'échantillon sont utilisés pour, à la fois, construire et tester la SR. À l'image de la validation croisée, le second estimateur consiste à évaluer les SR sur les points non sélectionnés dans les échantillons *bootstrap*. Cette erreur est appelée *out-of-bag* et vaut :

$$\mathcal{E}_{\text{oob}} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \left( \frac{1}{N-b} \sum_{i \in \mathcal{D}_{-b}} \left( y_i - \hat{\phi}_b(\mathbf{x}^{(i)}) \right)^2 \right) \quad (\text{III.10})$$

où  $\mathcal{D}_{-b}$  désigne l'ensemble des points d'échantillon absents de l'échantillon *bootstrap*  $b$  et  $N-b$  leur nombre. À l'inverse du critère précédent, cet estimateur est trop pessimiste. Il a été proposé par Efron et Tibshirani (1997a) de tenir compte des deux estimateurs en faisant l'observation que la probabilité qu'un point  $\mathbf{x}^{(i)}$  soit tiré dans un échantillon *bootstrap* est égale à 0.632 (quand le nombre de points est grand). L'estimateur déduit, noté  $\mathcal{E}_{.632}$ , est défini par :

$$\mathcal{E}_{.632} = 0.368\mathcal{E}_{\text{boot}} + 0.632\mathcal{E}_{\text{oob}} \quad (\text{III.11})$$

Le nombre de répétitions *bootstrap* est généralement de quelques centaines. Il doit être plus important si des statistiques plus précises, telles que des lois de distribution ou des intervalles de confiance, doivent être estimés.

### III.2.5 Bilan

On s'aperçoit que la diversité des outils pour estimer correctement l'erreur de généralisation est relativement importante. Bien que les méthodes par pénalisation soient dépendantes d'hypothèses statistiques, leur coût de calcul est parfaitement négligeable. Les méthodes de simulation impliquent de reconstruire un certain nombre de fois la SR ce qui peut devenir relativement coûteux dans le cas du *bootstrap*, pour de nombreuses répétitions. L'objectif est de trouver un compromis entre la pertinence des critères et leur temps de calcul. Les estimations par pénalisation sont bien adaptées à la sélection des termes de la SR. La validation croisée fournit une estimation robuste de l'erreur en un temps raisonnable et ne s'appuie sur aucune hypothèse. Le *bootstrap* permet, en revanche, de fournir des statistiques plus précises d'estimateurs. Nous discutons, dans la section suivante, de la manière dont ces outils sont employés pour construire la SR.

## III.3 Construction de la surface de réponse

### III.3.1 Quelques outils

La section précédente a permis de mettre en avant qu'il était nécessaire de limiter le nombre de termes d'une SR pour garantir une bonne qualité de prédiction. En effet, l'exemple de la figure III.1 montre que l'erreur évaluée sur un échantillon test diminue puis augmente en fonction du nombre de termes. L'objectif est donc de sélectionner la SR qui minimise cette erreur. Nous avons vu précédemment la manière dont l'erreur pouvait être estimée à partir d'un seul échantillon, l'enjeu de cette section concerne le choix des meilleurs régresseurs qui permettent de la minimiser.

La démarche est courante en statistique (Miller, 2002) et consiste à tester un à un des sous-ensembles de régresseurs. Étant donné qu'il n'est pas possible de le faire pour la totalité des sous-ensembles potentiels (égale à  $2^P$  pour  $P$  termes), le principe des différentes méthodes est de tester les termes en les ajoutant ou en les enlevant de manière itérative. On considère pour cela une liste de termes potentiels, c'est-à-dire pouvant être sélectionnés dans la SR. On distingue quatre approches classiques :

1. la sélection *forward* démarre d'un modèle vide (ou contenant quelques termes pré-définis). À chaque itération, le régresseur qui améliore au mieux un critère d'erreur est sélectionné dans le modèle. L'algorithme est stoppé lorsque tous les termes ont été sélectionnés ou bien lorsqu'aucun d'entre eux ne permet d'améliorer l'erreur.
2. La sélection *backward* démarre du modèle complet et supprime, à chaque itération, le terme dont le retrait améliore au mieux un critère d'erreur. La méthode est stoppée lorsqu'aucune amélioration n'est possible, ou éventuellement, lorsqu'il n'y a plus de termes dans la SR.
3. La sélection *stepwise* est un couplage des deux précédentes. À chaque itération, les termes déjà présents dans la SR sont testés pour être éventuellement retirés et ceux qui n'y sont pas sont testés en ajout. L'avantage est qu'un terme ajouté à une étape  $i$  peut être retiré à l'étape  $i + j$  s'il s'avère être moins pertinent après l'ajout d'un certain nombre d'autres termes.
4. La sélection par *sequential replacement* consiste à remplacer un à un les termes déjà présents dans le modèle par ceux qui n'y sont pas. Si le remplacement d'un terme par un autre améliore un critère d'erreur, il est maintenu. Cette méthode est généralement

couplée à une sélection *forward*, c'est-à-dire qu'après l'ajout d'un régresseur la procédure de remplacement est lancée.

Ce type de méthodes ne garantit pas de trouver le meilleur sous-ensemble absolu parmi la totalité. À l'image de l'optimisation d'une fonction objectif avec une méthode de gradient, un sous-ensemble sélectionné par une démarche itérative est équivalent à un optimum local et rien ne permet d'assurer qu'il est global. Néanmoins, il n'y a pas de raison de le rejeter s'il s'avère performant. Des méthodes de recherche exhaustive, telle que la méthode *leaps and bound* (Furnival et R. W. Wilson, 1974), permettent de limiter le temps de calcul en exploitant certaines propriétés du problème. Par exemple si  $A$  et  $B$  sont des sous-ensembles de régresseurs tels que  $B \subset A$  alors  $\text{SRC}(A) \leq \text{SRC}(B)$ . Elle reste cependant très coûteuse lorsque le nombre de termes est important.

Les critères d'erreur par pénalisation sont très adaptés à ce type de recherche itérative car ils permettent de comparer des modèles de tailles différentes. Cependant, étant donné qu'ils sont basés sur les hypothèses de régression linéaire, ils ne peuvent pas permettre de valider la SR de manière absolue. Aussi, on ne peut pas connaître *a priori* celui qui fournit la meilleure SR. On pourrait éventuellement sélectionner les termes un à un par validation croisée mais la procédure serait plus coûteuse étant donné qu'à chaque étape il est nécessaire de construire plusieurs fois la SR. La validation croisée est plus adaptée pour comparer des modèles entre eux et c'est dans cet objectif qu'elle est souvent utilisée (Cornillon et Matzner-Lober, 2007).

### III.3.2 Démarche de sélection

Compte tenu des remarques précédentes, la procédure retenue consiste à construire quatre SR relatives à chacun des critères par pénalisation présentés, c'est-à-dire le  $C_p$ , l'AIC, le BIC et le  $R_a^2$ . La validation croisée est ensuite utilisée pour sélectionner la meilleure. Utiliser une procédure de sélection *stepwise* nécessiterait de répéter quatre fois la démarche, c'est-à-dire une fois par critère. La sélection *backward* implique, quand à elle, de démarrer d'un modèle complet, ce qui nécessite un échantillon d'apprentissage suffisamment grand. L'avantage d'une sélection *forward* est que l'échantillon peut être de plus petite taille, éventuellement inférieure au nombre de régresseurs total, si la procédure de sélection est stoppée à partir d'un certain nombre de termes retenus. Aussi, elle permet d'obtenir, en une seule fois, les quatre SR relatives aux critères par pénalisation car ils sont tous fonction de la SRC et du nombre de termes. En pratique, la démarche suivante sera appliquée :

1. la méthode *forward* est utilisée pour sélectionner les termes un à un avec le critère SRC. Cela permet de former les meilleurs sous-ensembles de régresseurs de chaque taille, c'est-à-dire les sous-ensembles contenant 1 régresseur, puis 2, puis 3, etc.
2. Les critères par pénalisation sont calculés pour chaque sous-ensemble en fonction de la SRC et du nombre de termes.
3. Les quatre SR qui minimisent respectivement chaque critère (maximise pour le  $R_a^2$ ) sont retenues.

La validation croisée est ensuite utilisée pour calculer la valeur  $Q^2$  associée à chacune des SR, celle qui la maximise est finalement sélectionnée. Au lieu de la sélection *forward*, il est possible d'utiliser la *sequential replacement* mais cela entraîne un coût de calcul plus important, surtout si le nombre de termes est important. La sélection par *sequential replacement* peut éventuellement être testée si la procédure *forward* n'est pas convaincante. La figure III.2 schématise les étapes de construction des surfaces de réponse.

L'indicateur  $Q^2$ , calculé par validation croisée et associé à la SR construite, est une estimation robuste de son erreur. Il reste néanmoins un critère de qualité global de la SR et n'est pas

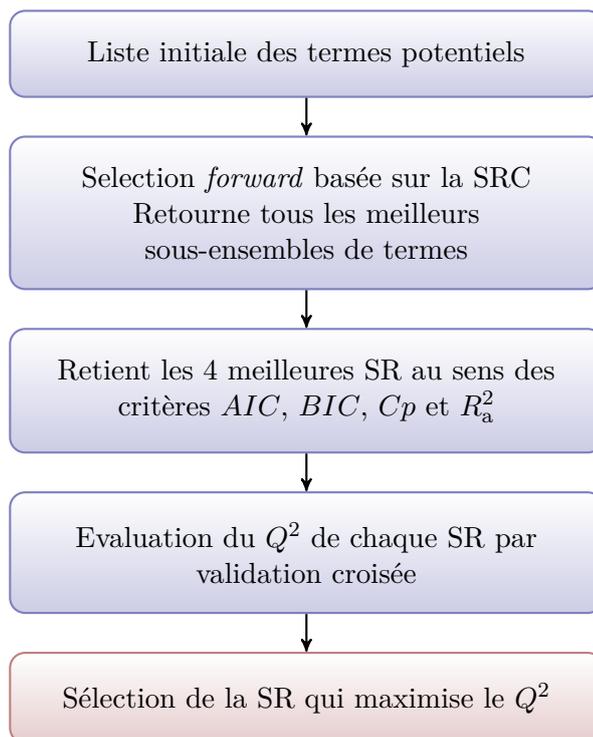


FIGURE III.2 – Schématisation de la construction des surfaces de réponse.

toujours représentatif de sa qualité dans une région localisée. La section suivante décrit plus précisément la problématique et présente un indicateur d'erreur plus adéquat pour l'estimation de la probabilité de défaillance.

## III.4 Validation de la surface de réponse

### III.4.1 Inconvénient d'un critère d'erreur global

La défaillance de la structure étudiée est généralement la conséquence d'un fonctionnement extrême, ce qui implique que sa probabilité est souvent faible. La position du domaine de défaillance dans l'espace standard des variables d'entrée est, dans ce cas, relativement éloigné de l'origine. Nous discuterons dans la section III.6 de la manière dont le modèle de référence est échantillonné pour la construction des SR mais disons simplement que, dans une première approche et sans information préalable, il est naturel d'explorer le domaine de fonctionnement moyen sur un certain nombre d'écart-types. De ce fait, la SR risque de peu couvrir la zone d'état limite qu'il est indispensable de bien représenter pour le calcul d'une probabilité de défaillance. C'est pour cette raison qu'un indice de qualité global de la SR, tel que le  $Q^2$ , n'est pas représentatif de sa qualité dans la zone d'état limite. La figure III.3, qui est un exemple, illustre cette problématique dans l'espace standard des variables d'entrée. La seconde problématique est qu'il est toujours difficile de connaître l'influence de l'erreur de la SR sur la probabilité de défaillance estimée sur celle-ci.

L'objectif de cette section est de fournir un indicateur représentatif de l'erreur locale de la SR, à l'image de l'indicateur de dispersion associé à une prédiction du modèle de régression linéaire, sous l'hypothèse de normalité des résidus (cf. section II.4.2), ou du modèle de krigeage (cf. section II.4.4). L'avantage est qu'il peut être pris en compte dans l'évaluation de la probabilité de défaillance. L'idée d'utiliser le *bootstrap* permet d'observer les variations des prédictions aux

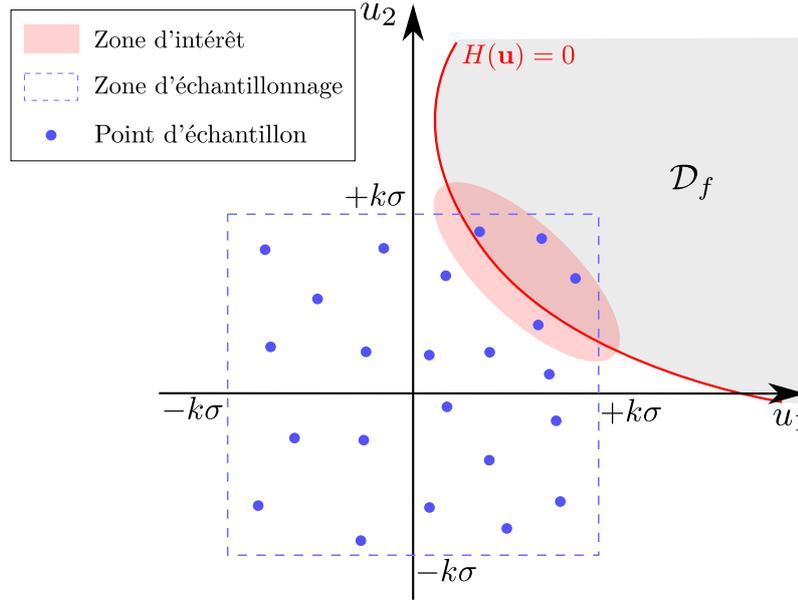


FIGURE III.3 – Exemple de problème lié à la validation de la surface de réponse.

points de l'échantillon.

### III.4.2 Calcul des indicateurs *bootstrap*

On appelle  $\mathbf{x}^{\text{ref}}$  l'échantillon d'apprentissage de taille  $N$  et  $\mathbf{x}^{*b}$  les échantillons *bootstrap* pour  $b = 1 \dots B$ . On rappelle qu'ils sont formés par tirages aléatoires avec remise dans l'échantillon d'apprentissage, ce qui implique qu'ils sont également de taille  $N$  avec certains points redondants et d'autres absents. Pour chaque échantillon *bootstrap*, la SR, dont les termes ont été sélectionnés à partir de la méthode décrite dans la section précédente, est identifiée et utilisée pour prédire les réponses de l'échantillon global. On note  $\hat{\mathbf{y}}^{*b} = (\hat{y}_1^{*b}, \dots, \hat{y}_N^{*b})$  le vecteur des réponses prédites par la SR notée  $\hat{\phi}^{*b}$ , c'est-à-dire construite sur le  $b$ -ième échantillon *bootstrap*. À partir des  $B$  répétitions, on peut déterminer les variations extrémales de la  $i$ -ième prédiction en prenant les valeurs minimales et maximales observées :  $\min_{b=1 \dots B}(\hat{y}_i^{*b})$  et  $\max_{b=1 \dots B}(\hat{y}_i^{*b})$ . Cependant, si un échantillon *bootstrap* est mal formé, les variations minimales et maximales peuvent être trop pessimistes. Pour cette raison, il est préférable de calculer des intervalles de confiance tels que ceux à 95%, classiquement utilisés en statistique. Un moyen simple et intuitif consiste à ranger dans l'ordre croissant les  $B$  prédictions d'une réponse  $i$  pour sélectionner  $[\hat{y}_{i_{\text{inf}}}^*, \hat{y}_{i_{\text{sup}}}^*]$  qui correspondent respectivement à 2.5% et 97.5% des valeurs. Ces intervalles incluent 95% des prédictions observées lors des  $B$  répétitions *bootstrap*. Définis de cette manière, les intervalles de confiance sont dits basés sur les percentiles (*percentile bootstrap confidence intervals*) (Efron et Tibshirani, 1997b). Ils peuvent être visualisés simplement sur un graphe de dispersion, c'est-à-dire en traçant les valeurs de la réponse prédites par la SR en fonction des valeurs exactes issues du modèle de référence. Un exemple est présenté en figure III.4 où les barres d'erreur, en chaque point d'échantillon, correspondent aux intervalles de confiance à 95% des prédictions. Ces valeurs permettent de déterminer des indicateurs locaux de l'erreur de la SR, que nous appellerons indicateur *bootstrap*, par :

$$\begin{cases} \hat{\varepsilon}_{\text{inf}} &= \max_{i=1 \dots N} (|\hat{y}_i - \hat{y}_{i_{\text{inf}}}^*|) \\ \hat{\varepsilon}_{\text{sup}} &= \max_{i=1 \dots N} (|\hat{y}_i - \hat{y}_{i_{\text{sup}}}^*|) \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

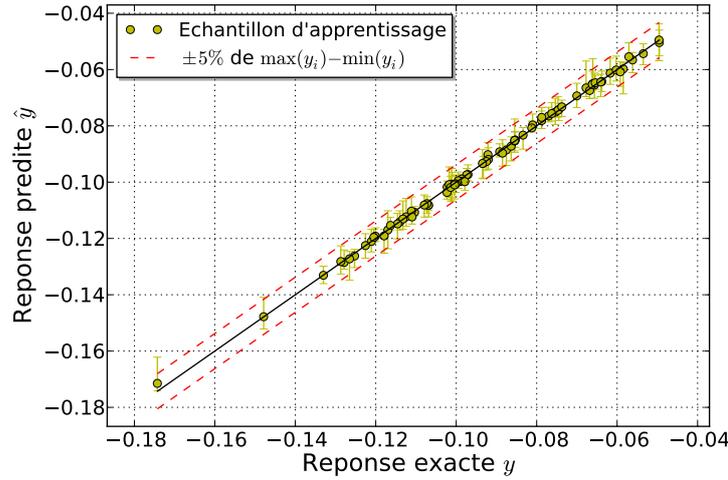


FIGURE III.4 – Exemple de graphe de dispersion avec les variations des prédictions obtenues par *bootstrap*.

L'intérêt est qu'ils peuvent être pris en compte dans le calcul de la probabilité de défaillance comme un décalage de la fonction d'état limite. En considérant le vecteur des variables aléatoires d'entrée  $\mathbf{X}$ , la SR d'équation  $\hat{\phi}(\mathbf{x})$  et la fonction de performance  $G(\hat{\phi}(\mathbf{x}))$  telle que  $G(\hat{\phi}(\mathbf{x})) \leq 0$  est le domaine de défaillance, on définit l'intervalle de probabilité par :

$$\begin{cases} \hat{P}_{f_{\text{inf}}} &= \mathbb{P}\left(G(\hat{\phi}(\mathbf{X}) - \hat{\varepsilon}_{\text{inf}}) \leq 0\right) \\ \hat{P}_{f_{\text{sup}}} &= \mathbb{P}\left(G(\hat{\phi}(\mathbf{X}) + \hat{\varepsilon}_{\text{sup}}) \leq 0\right) \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

Il sera utilisé dans la suite comme l'indicateur de précision de l'estimation de la probabilité de défaillance et permettra de valider définitivement, ou non, le résultat fourni par la SR. Bien évidemment, il n'encadre pas à coup sûr la vraie probabilité de défaillance étant donné que les variations maximales sont celles retenues en un seul point et qu'on ne peut pas garantir que les prédictions observées lors du *bootstrap* couvrent la totalité des prédictions exactes de n'importe quel échantillon. Cependant, ce critère correspond mieux au besoin de validation qu'une mesure d'erreur globale de la SR et semble fournir une information intéressante sur la manière dont la probabilité de défaillance est influencée par l'erreur de la SR. En revanche, étant donné que les indicateurs correspondent aux variations maximales observées sur tout le domaine d'échantillonnage, ils pourraient être défavorables si les écarts observés concernent un point d'échantillon distant de la zone d'état limite. Il paraît donc indispensable de privilégier une région dans laquelle les indicateurs seront déterminés : il s'agit de la région d'intérêt. Les paramètres liés à l'utilisation du *bootstrap* sont discutés dans la section III.5.2.

### III.4.3 Détermination de la région d'intérêt

La région d'intérêt correspond à la zone voisine de l'état limite dans laquelle il est plus pertinent de rechercher les indicateurs fournis par le *bootstrap*. De cette manière, si la région est notée  $\mathcal{S}$ , les indicateurs *bootstrap* de l'équation (III.12) deviennent :

$$\begin{cases} \varepsilon_{\text{inf}} &= \max_{i \in \mathcal{S}} (|\hat{y}_i - \hat{y}_{i_{\text{inf}}}^*|) \\ \varepsilon_{\text{sup}} &= \max_{i \in \mathcal{S}} (|\hat{y}_i - \hat{y}_{i_{\text{sup}}}^*|) \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

c'est-à-dire que les écarts maximums sont recherchés parmi les points d'échantillonnage inclus dans la région. On calcule ensuite, de la même manière que précédemment, les variations induites

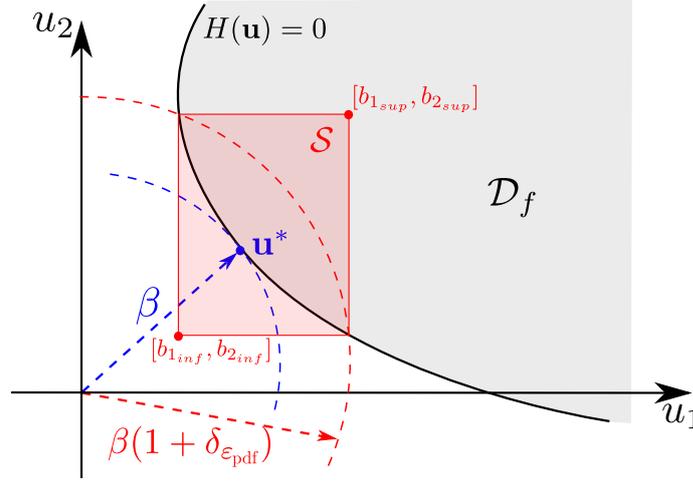


FIGURE III.5 – Illustration de la région d'intérêt.

sur la probabilité de défaillance :

$$\begin{cases} P_{f_{\text{inf}}} &= \mathbb{P}\left(G(\hat{\phi}(\mathbf{X}) - \varepsilon_{\text{inf}}) \leq 0\right) \\ P_{f_{\text{sup}}} &= \mathbb{P}\left(G(\hat{\phi}(\mathbf{X}) + \varepsilon_{\text{sup}}) \leq 0\right) \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

La région est construite en s'inspirant de la notion de voisinage du PDPP telle qu'elle est définie dans (Dutfoy et Lebrun, 2007). Pour cela, on se place dans l'espace normal standard et on considère qu'un point de coordonnées  $\mathbf{u}$  possède une densité de probabilité négligeable par rapport au PDPP de coordonnées  $\mathbf{u}^*$ , si pour un certain niveau d'importance  $\varepsilon_{\text{pdf}}$ , on a  $\varphi_n(\mathbf{u}) \leq \varepsilon_{\text{pdf}}\varphi_n(\mathbf{u}^*)$ . On rappelle que l'indice de fiabilité, noté  $\beta$ , est la distance de l'origine au PDPP, c'est-à-dire  $\beta = \|\mathbf{u}^*\|$  et on note la fonction  $\psi$  telle que  $\psi(\|\mathbf{u}\|) = \varphi_n(\mathbf{u})$ , ce qui permet de réécrire l'inégalité précédente de la manière  $\psi(\|\mathbf{u}\|) \leq \varepsilon_{\text{pdf}}\psi(\beta)$ . En écrivant  $\|\mathbf{u}\|$  en fonction de  $\beta$ , on introduit la quantité  $\delta_{\varepsilon_{\text{pdf}}}$  telle que  $\psi(\beta(1 + \delta_{\varepsilon_{\text{pdf}}})) = \varepsilon_{\text{pdf}}\psi(\beta)$  ce qui signifie que :

$$\delta_{\varepsilon_{\text{pdf}}} = \sqrt{1 - \frac{2 \ln(\varepsilon_{\text{pdf}})}{\beta^2}} - 1 \quad (\text{III.16})$$

Autrement dit, à partir de l'indice de fiabilité, en fixant  $\varepsilon_{\text{pdf}}$  suffisamment petit, on calcule le rayon de l'hypersphère, notée  $\mathcal{B}(\mathbf{0}, \beta(1 + \delta_{\varepsilon_{\text{pdf}}}))$ , au delà de laquelle on considère que la densité de probabilité est négligeable. La région d'intérêt est définie par l'intersection entre l'hypersphère  $\mathcal{B}(\mathbf{0}, \beta(1 + \delta_{\varepsilon_{\text{pdf}}}))$  et l'état limite  $H(\mathbf{u}) = 0$ . Elle est représentée par l'hypercube  $\mathcal{S} = \prod_{i=1}^M [b_{i_{\text{inf}}}, b_{i_{\text{sup}}}]$ , où  $b_{i_{\text{inf}}}$  et  $b_{i_{\text{sup}}}$  sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de chaque variable. Elles sont déterminées en cherchant les coordonnées minimum et maximum des points qui appartiennent à l'intersection de l'hypersphère et de l'état limite. Leur calcul peut être formulé par une procédure d'optimisation :

$$b_{i_{\text{inf}}} = \operatorname{argmin} u_i \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \|\mathbf{u}\| - \beta(1 + \delta_{\varepsilon_{\text{pdf}}}) = 0 \\ H(\mathbf{u}) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.17})$$

et

$$b_{i_{\text{sup}}} = \operatorname{argmax} u_i \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \|\mathbf{u}\| - \beta(1 + \delta_{\varepsilon_{\text{pdf}}}) = 0 \\ H(\mathbf{u}) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.18})$$

Une illustration de la région d'intérêt est représentée en figure III.5.

Variable	Distribution	Moyenne	Écart type
$E_1, E_2$ (Pa)	Log-normale	$2.10 \times 10^{11}$	$2.10 \times 10^{10}$
$A_1$ (m <sup>2</sup> )	Log-normale	$2.0 \times 10^{-3}$	$2.0 \times 10^{-4}$
$A_2$ (m <sup>2</sup> )	Log-normale	$1.0 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-4}$
$P_1 - P_6$ (N)	Gumbel	$5.0 \times 10^4$	$7.5 \times 10^3$

TABLE III.1 – Propriétés des variables aléatoires – Structure treillis.

La région d'intérêt permet de rechercher les indicateurs *bootstrap* de manière plus pertinente en se focalisant sur la zone proche de l'état limite. Cependant, il est nécessaire qu'elle soit couverte par la zone d'échantillonnage et qu'elle contienne elle-même des points d'échantillon. Nous discuterons de cette problématique dans la section III.6, ce qui permettra d'introduire la manière d'échantillonner le modèle de référence. Avant cela, nous présentons une application pour illustrer la mise en oeuvre des outils présentés jusqu'à maintenant, ce qui permettra également de discuter des paramètres liés à la région d'intérêt (cf. section III.5.3).

### III.5 Illustration sur un exemple d'application

L'exemple d'application est le modèle EF d'une structure treillis beaucoup utilisée dans la littérature (Blatman et Sudret, 2010a; Dubourg *et al.*, 2011). La structure est représentée figure III.6. Elle est caractérisée par 10 variables aléatoires : les modules d'Young et les sections des barres horizontales, notés  $E_1$  et  $A_1$ , ceux des barres obliques, notés  $E_2$  et  $A_2$ , ainsi que les efforts appliqués, notés  $P_1$  à  $P_6$ . Les lois de distributions avec les valeurs moyennes et écarts-type sont donnés dans le tableau III.1. Toutes les variables sont considérées indépendantes. La grandeur d'intérêt est le déplacement au centre de la partie inférieure du treillis, notée  $v$ .

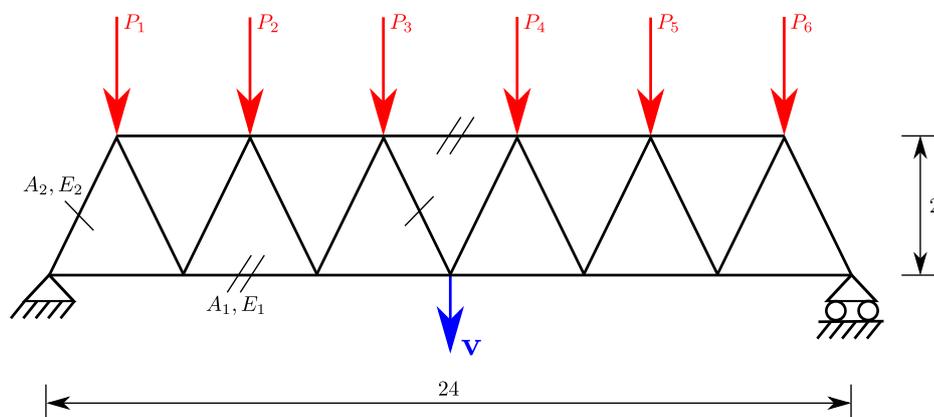


FIGURE III.6 – Structure treillis (unités m).

#### III.5.1 Sélection des termes et validation croisée

Dans un premier temps, nous avons souhaité illustrer le phénomène de surapprentissage présenté dans la section III.2. Pour cela, deux échantillons de 75 points sont formés, un d'apprentissage et l'autre de test. Les termes de la SR ont été sélectionnés par la méthode *forward* sur la base du critère SCR pour que les termes les plus influents soient sélectionnés à tour de rôle. Pour chaque taille de la SR, l'erreur est évaluée sur l'échantillon d'apprentissage, sur l'échantillon test et par validation croisée à partir de 10 groupes ( $K = 10$ , cf. section III.2.4). Les résultats sont

présentés sur la figure III.7 où le critère d'erreur en ordonnée est la valeur  $1 - R^2$  pour les échantillons d'apprentissage et test, et la valeur  $1 - Q^2$  pour la validation croisée. On remarque que

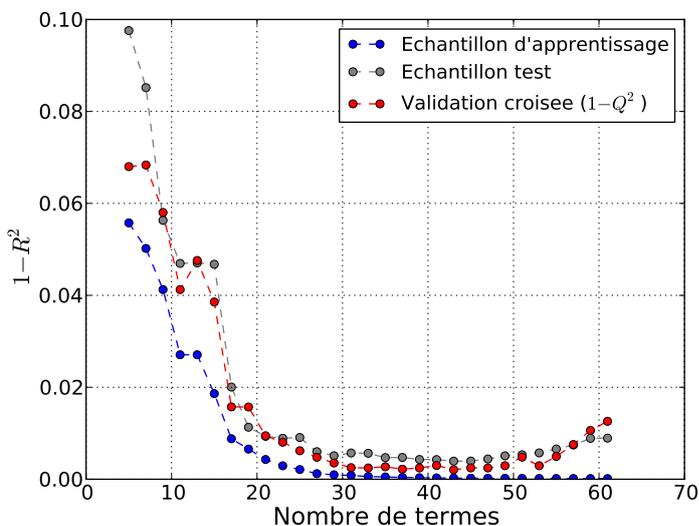


FIGURE III.7 – Évolution de l'erreur basée sur un échantillon d'apprentissage, un échantillon test et évaluée par validation croisée, en fonction du nombre de termes – Structure treillis.

l'erreur estimée par validation croisée suit la même tendance que l'erreur de l'échantillon test, c'est-à-dire qu'elle augmente à partir d'un certain nombre de termes, contrairement à l'erreur d'apprentissage qui tend vers 0. Le nombre de termes à partir duquel l'erreur augmente se situe entre 35 et 45.

La procédure de sélection des termes, décrite dans la section III.3, est utilisée pour déterminer une SR. Le modèle retenu contient exactement 39 termes, il correspond à celui du critère Cp. Remarquons que ce modèle est bien en accord avec l'allure obtenue figure III.7 étant donné qu'il correspond à peu près au modèle qui minimise l'erreur test. Signalons que le  $R_a^2$  a sélectionné un modèle de 46 termes, le BIC de 44 termes et l'AIC de 53 termes.

### III.5.2 Paramétrage du *bootstrap*

L'objectif ici est de discuter du choix des paramètres liés à l'utilisation du *bootstrap*, notamment la taille de l'échantillon et le nombre de répétitions.

Le *bootstrap* nécessite une taille d'échantillon d'apprentissage plus importante que la validation croisée car, pour chaque échantillon *bootstrap* (qui ne contient en moyenne que 60% des points), on doit être capable de construire une SR avec le bon nombre de termes. Elle doit être suffisante pour ne pas dégrader les prédictions des SR construites sur les échantillons *bootstrap*, mais pas trop importante pour limiter le temps de calcul. Son influence est illustrée en comparant l'erreur  $\mathcal{E}_{.632}$  de l'équation (III.11) (donc calculée par *bootstrap* sur l'échantillon d'apprentissage) à l'erreur  $\mathcal{E}_{\text{emp}}$  calculée sur des échantillons test, pour des tailles d'échantillon  $N = k(P + 1)$  avec  $k = [2, 3, 4, 5]$ . Pour cela, la SR contenant 39 termes, sélectionnée à la section précédente, a été utilisée. Les résultats sont présentés en figure III.8. On remarque que pour  $k = 2$ , l'erreur  $\mathcal{E}_{.632}$  est bien plus importante que l'erreur test alors qu'elles sont relativement proches pour  $k = [3, 4, 5]$ . Il a donc été décidé de dimensionner l'échantillon d'apprentissage à  $N = 3(P + 1)$ . En réalité, ce n'est pas l'échantillon qui est dimensionné par rapport au nombre de termes mais

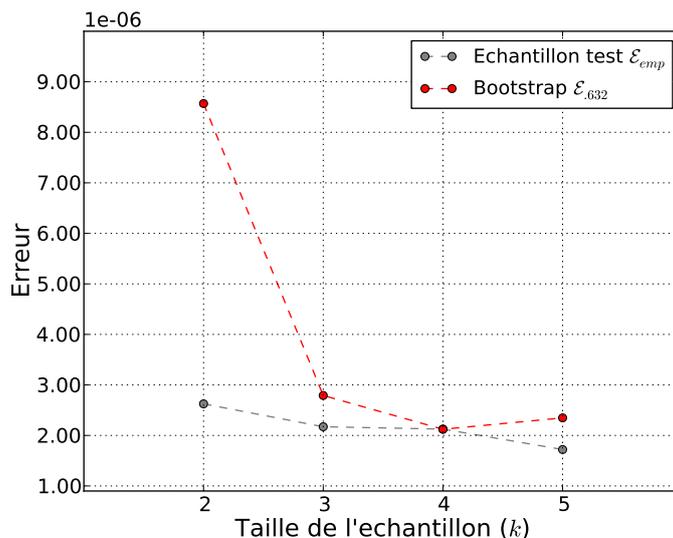


FIGURE III.8 – Comparaison de l'évolution de l'erreur *bootstrap* et de l'erreur test en fonction de la taille de l'échantillon d'apprentissage – Structure treillis.

plutôt le nombre de termes qui est limité en fonction de la taille de l'échantillon. En effet, à partir de l'échantillon de taille  $N$ , le nombre de termes sélectionnés par la procédure itérative, noté  $\xi$ , est limité selon  $N \geq 3(\xi + 1)$ . Plus de précisions sont apportées dans la section III.6.

Le nombre de répétitions *bootstrap* est généralement assez faible pour bien estimer l'erreur de généralisation. Cependant il doit être plus important pour des statistiques comme les intervalles de confiance. On ne cherche pas ici à les estimer très précisément, mais étant donné que le *bootstrap* est aléatoire, on souhaite voir comment ils varient sur plusieurs répétitions. Pour cela, nous avons utilisé le même modèle que précédemment avec un échantillon de 120 points et nous avons fait varier les répétitions *bootstrap* pour  $B = [200, 600, 1000, 1400]$  en les répliquant chacune 40 fois. Les résultats sont représentés sous la forme de boîte à moustache pour observer les dispersions des valeurs. On rappelle qu'une boîte à moustache est une représentation graphique de plusieurs valeurs quantiles : le trait rouge est la médiane, les extrémités du carré sont le premier et le troisième quartile, et les extrémités des moustaches sont les quantiles à 2.5% et 97.5% (les points supplémentaires sont marqués par des croix bleues). La figure III.9 présente les données relatives au critère  $\mathcal{E}_{\text{oob}}$  de l'équation (III.11). On remarque que la dispersion des valeurs diminue lorsque le nombre de répétitions augmente mais elle reste relativement faible même si le nombre de répétitions est faible. La figure III.10 représente les données relatives aux indicateurs *bootstrap* de l'équation (III.12), c'est-à-dire ceux observés sur tout le domaine. On remarque cette fois que les dispersions sont bien plus importantes surtout si le nombre de répétitions est faible, par exemple 200. De manière générale on préférera utiliser un nombre de répétitions au moins égal à 600.

### III.5.3 Paramétrage de la région d'intérêt

L'étape de validation de l'estimation de la probabilité de défaillance sur la SR, s'appuie sur les indicateurs *bootstrap* calculés dans la région d'intérêt. Cette région est paramétrée par le niveau d'importance  $\varepsilon_{\text{pdf}}$  qui fixe la zone à partir de laquelle on considère que la densité de probabilité est négligeable par rapport à celle du PDPP. Ce paramètre a donc une influence sur la taille de la région : plus il est faible, plus la région est grande. Il va également influencer l'intervalle

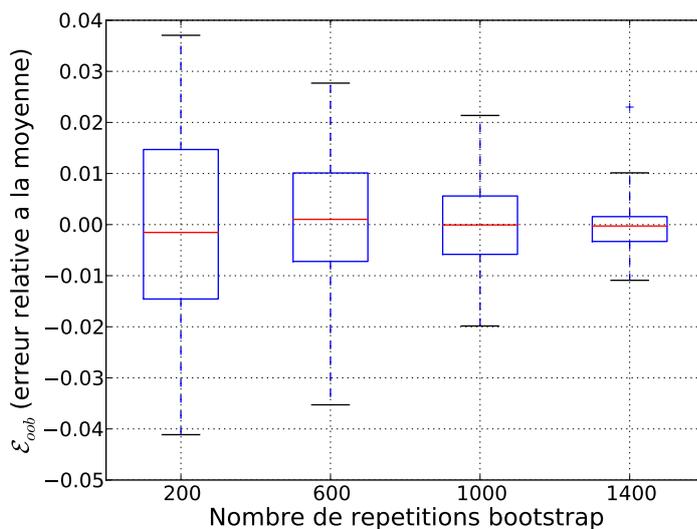


FIGURE III.9 – Dispersion du critère  $\mathcal{E}_{\text{ooB}}$  pour 40 répétitions du *bootstrap* en fonction du nombre de répétitions  $B$  – Structure treillis.

$[P_{f_{\text{inf}}}, P_{f_{\text{sup}}}]$  car, en fonction de la taille de la région, le nombre de points d'échantillon qu'elle contient sera différent et donc les indicateurs *bootstrap* le seront également. Plus la région est grande et plus les variations observées peuvent être importantes. Dans le cas opposé, peu de confiance sera accordée au résultat si de faibles variations sont observées, étant donné le sens qui est donné à  $\varepsilon_{\text{pdf}}$ . De ce fait, on aura généralement tendance à le choisir relativement faible, c'est-à-dire de l'ordre de 0.05 ou 0.1. La remarque est également valable pour le nombre de points d'échantillon inclus dans la région. S'il est très faible par rapport au nombre de points total, les variations observées peuvent être faibles et non représentatives de l'erreur commise dans la région. De manière générale, si l'intervalle  $[P_{f_{\text{inf}}}, P_{f_{\text{sup}}}]$  observé est faible et donc théoriquement suffisant pour valider la procédure, il ne faut pas pour autant accepter le résultat sans interrogations. Si, par exemple, trop peu de points sont dans la région, il paraît indispensable d'en ajouter (une procédure d'ajout de points d'échantillon sera discutée dans la section III.6.2).

Nous avons comparé certains résultats en fonction de la proportion du nombre de points d'échantillon inclus dans la région par rapport au nombre de points total, en faisant varier la taille de la région. Pour cela, nous avons considéré la fonction de performance :

$$G(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) - 0.11 \quad (\text{III.19})$$

telle que  $G(\mathbf{x}) \leq 0$  est le domaine de défaillance, où  $\mathbf{x}$  désigne le vecteur des réalisations des variables d'entrée. La valeur de référence est fournie par l'indice de fiabilité généralisé obtenu par la relation  $\beta^{\text{REF}} = -\Phi^{-1}(P_f^{\text{REF}})$  où  $P_f^{\text{REF}}$  désigne la probabilité de défaillance calculée par une méthode FORM suivie de tirages d'importance avec 500000 simulations ; il vaut  $\beta^{\text{REF}} = 2.38$ . La figure III.11 présente les résultats obtenus. Sur cette dernière,  $\beta_{\text{SR}}$  désigne l'indice de fiabilité généralisé estimé sur la SR,  $\beta_{\text{SR}_{\text{inf}}}$  et  $\beta_{\text{SR}_{\text{sup}}}$  sont les indices inférieur et supérieur calculés à partir des indicateurs *bootstrap*. Ces indices sont tous calculés, sur la SR, avec une méthode FORM suivie de tirages d'importance avec 500000 simulations. Les indicateurs  $\varepsilon_{\text{inf}}$  et  $\varepsilon_{\text{sup}}$ , utilisés pour calculer  $\beta_{\text{SR}_{\text{inf}}}$  et  $\beta_{\text{SR}_{\text{sup}}}$ , sont déterminés dans la région d'intérêt pour différentes proportions du nombre de points d'échantillon inclus à l'intérieur. Une proportion nulle correspond à des indicateurs calculés sur tous le domaine, c'est-à-dire parmi la totalité des points d'échantillon. Chacune des figures correspond à un niveau d'importance différent.

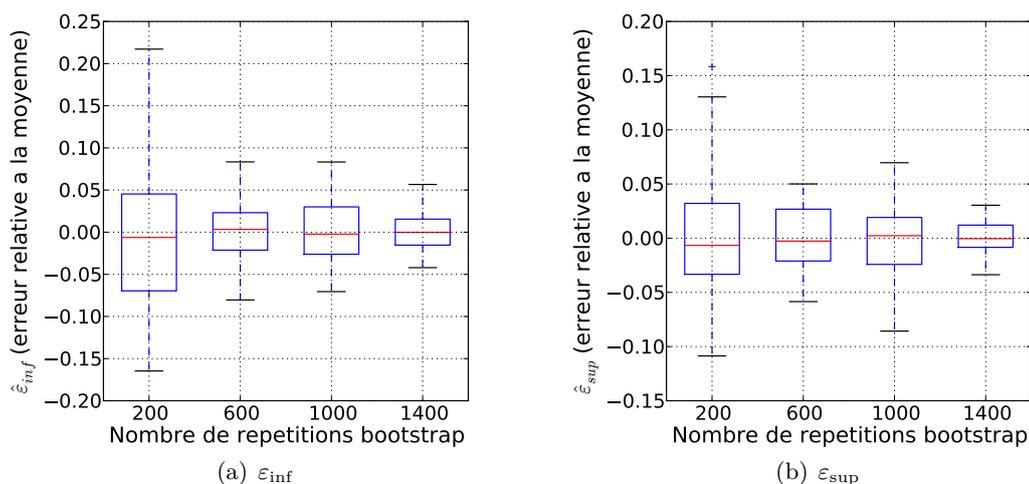


FIGURE III.10 – Dispersion des indicateurs  $\varepsilon_{\text{inf}}$  et  $\varepsilon_{\text{sup}}$  pour 40 répétitions du *bootstrap* en fonction du nombre de répétitions  $B$  – Structure treillis.

On remarque dans un premier temps que l'intervalle  $[\beta_{\text{SR}_{\text{inf}}}, \beta_{\text{SR}_{\text{sup}}}]$  se réduit quand la taille de la région d'intérêt diminue (i.e  $\varepsilon_{\text{pdf}}$  augmente). Comme annoncé précédemment, une région de taille moindre permet d'obtenir une variation plus faible. Par contre, sans résultat de référence, on aura plus confiance si  $\varepsilon_{\text{pdf}} = 0.05$  que  $\varepsilon_{\text{pdf}} = 0.4$ . On peut observer sur la figure III.11(a) que, si le nombre de points dans la région est faible (proportion de 4%), l'intervalle de l'indice de fiabilité est faible, mais n'encadre pas la valeur de référence. Il s'agrandit quand la proportion du nombre de points augmente. Cela illustre bien la remarque précédente que le nombre de points dans la région d'intérêt doit être assez important pour être plus sûr du résultat. De manière générale, on s'assurera qu'environ au moins un tiers des points sont dans la région.

### III.5.4 Conclusion

Nous avons souhaité, à travers cet exemple, illustrer quelques unes des décisions prises pour l'utilisation et le paramétrage des outils. Cependant il est souvent difficile de faire un choix parfaitement justifié des paramètres. Si les tendances observées sur cet exemple ont pu être confirmées sur d'autres cas utilisés lors du travail, elles restent basées sur des remarques empiriques.

## III.6 Démarche générale

### III.6.1 Étape initiale

Jusqu'à présent, la démarche générale consiste à construire la SR en suivant la procédure de sélection décrite dans la section III.3, à partir d'un échantillon de taille  $N$ . Cette SR est testée avec la méthode *bootstrap* pour déterminer des indicateurs d'erreur dans la région d'intérêt, notés  $\varepsilon_{\text{inf}}$  et  $\varepsilon_{\text{sup}}$ , et calculer un intervalle  $[P_{f_{\text{inf}}}, P_{f_{\text{sup}}}]$  de l'estimation de la probabilité de défaillance. L'utilisation du *bootstrap* implique que la taille de l'échantillon d'apprentissage choisie est telle que  $N = 3(\xi + 1)$  où  $\xi$  est le nombre de termes sélectionnés dans la SR. Cependant, le nombre de termes sélectionnés n'est pas connu avant de choisir la taille de l'échantillon. Un moyen serait qu'il soit suffisamment grand pour que la SR puisse contenir tous les termes potentiels, c'est-à-dire  $N = 3(P + 1)$ . L'inconvénient est, qu'en général, tous les termes ne sont pas utiles ce qui implique que la taille de l'échantillon peut être trop importante par rapport au besoin réel. Dans ce cas, et notamment si beaucoup de variables sont prises en compte, le temps de calcul

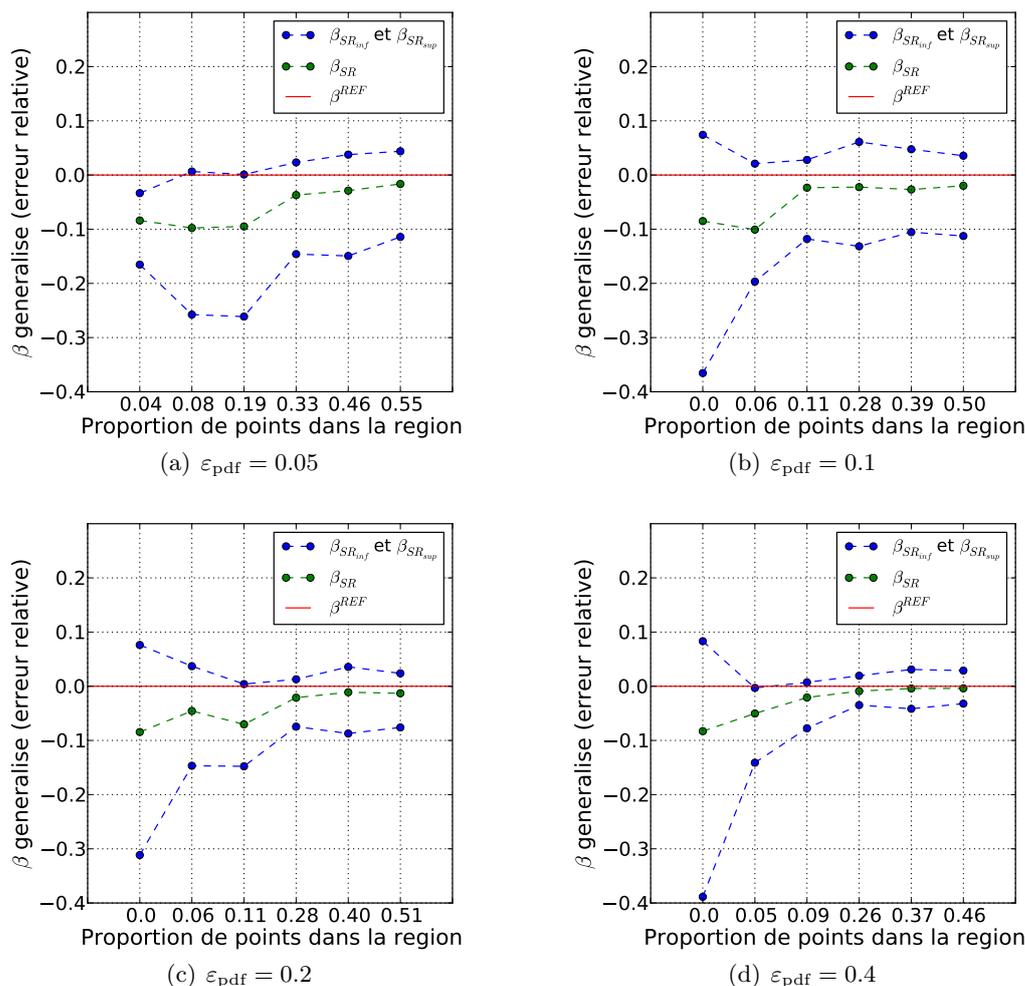


FIGURE III.11 – Évolution des indices de fiabilité généralisés en fonction de la proportion du nombre de points d'échantillon dans la région d'intérêt, pour plusieurs valeurs de niveau d'importance – Structure treillis.

peut être bien trop coûteux : il est donc préférable de commencer avec un échantillon de petite taille. Si la taille de l'échantillon est fixé, cela signifie que le nombre de termes sélectionnés dans la SR est limité de telle sorte que  $N \geq 3(\xi + 1)$ . Dans le cas où la qualité de la SR n'est pas suffisante, la taille de l'échantillon doit être augmentée pour que le nombre de termes dans la SR le soit également : il s'agit de l'enrichissement. Cette procédure implique de faire un choix précis du type d'échantillonnage, ce que nous verrons dans la section suivante. Concernant la taille de l'échantillon initial, il est difficile de faire un choix très rigoureux ; nous l'avons arbitrairement fixée à  $N_{init} = 3(M + 1)$  où  $M$  désigne le nombre de variables. Cela permet d'inclure, potentiellement, tous les termes linéaires.

### III.6.2 Amélioration de la surface de réponse : enrichissement

L'étape de validation (cf. section III.4) permet de calculer l'intervalle  $[P_{f_{inf}}, P_{f_{sup}}]$  autour de l'estimation de la probabilité de défaillance. Si ce dernier est trop important, nous considérons que le résultat n'est pas assez précis, ce qui signifie que la qualité de la SR n'est pas suffisante. Dans ce cas, il est nécessaire d'augmenter la taille de l'échantillon d'apprentissage pour augmenter le nombre de termes. L'échantillonnage est une phase importante de la construction

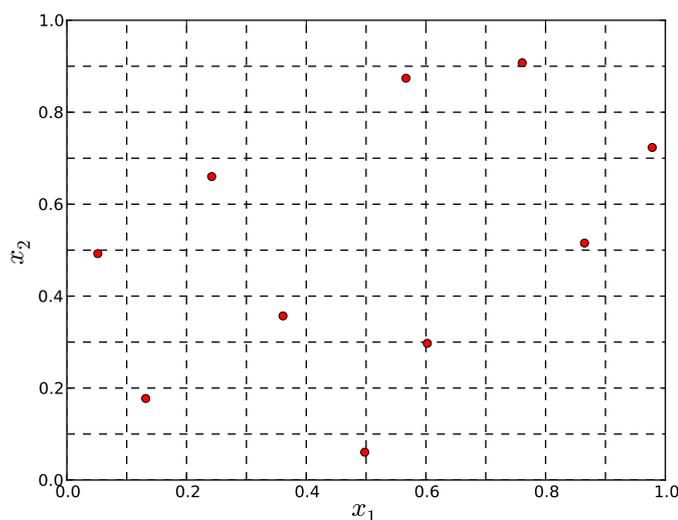


FIGURE III.12 – Exemple d'un LHS en 2 dimension.

d'une SR et a généralement une forte influence sur sa qualité. Comme nous l'avons vu dans la section III.2, une SR dépend de l'échantillon sur lequel elle est estimée et elle ne sera pas strictement la même sur un autre échantillon. Bien que les méthodes des plans d'expérience soient à l'origine des surfaces de réponse et de la régression linéaire, elles sont basées sur l'estimation de la dispersion des erreurs de mesures lors d'une expérience physique ce qui ne correspond pas au cas traité ici. De plus, ces plans d'expérience répartissent les points dans l'espace suivant un schéma déterministe ce qui n'est pas avantageux pour l'utilisation du *bootstrap*. Pour la construction de méta-modèles en simulation numérique, on préfère utiliser des méthodes dites *space filling*, c'est-à-dire qui tentent d'explorer au mieux le domaine d'étude avec un minimum de points. De nombreuses méthodes existent et font actuellement l'objet de développements (Franco, 2008). L'idée ici est de pouvoir employer un schéma simple et efficace qui puisse être enrichi en gardant de bonnes propriétés. Il est proposé dans (Wang, 2003) et (Blatman et Sudret, 2010a) une méthode intéressante basée sur le *Latin Hypercube Sampling* (LHS), appelée *inherited* LHS, pour la première, et *nested* LHS pour la seconde.

Rappelons qu'un LHS de  $N$  points sur le domaine  $\prod_{i=1}^M [0, 1]$  consiste à découper chaque axe  $[0, 1]$  en intervalles  $\{[0, 1/N], [1/N, 2/N], \dots, [(N-1)/N, 1]\}$  pour former une grille de  $N^M$  par produit cartésien. Parmi les cellules,  $N$  sont choisies aléatoirement de manière à ce que chaque intervalle sur chaque axe ne soit représenté qu'une seule fois. Un point est enfin tiré aléatoirement dans chaque cellule sélectionnée. La figure III.12 est un exemple en 2 dimensions. On remarque que les intervalles projetés sur chaque axe ne contiennent qu'un seul point.

La méthode d'enrichissement du LHS consiste à ajouter de nouveaux points tout en gardant une structure LHS. Le principe est décrit sur un exemple en 2 dimensions. Supposons que 2 points d'échantillon existent déjà et que l'on souhaite en ajouter 2. Le domaine est décomposé en une grille  $4 \times 4$  et les points existants sont recherchés dans les intervalles formés. Si, sur chaque axe, un intervalle est représenté par un point existant, aucune cellule de ce dernier ne peut être sélectionnée. L'exemple est illustré en figure III.13 où les points existants sont en bleu et les intervalles représentés par ces derniers sont grisés. Les points additionnels (triangles rouges) sont générés à partir d'un LHS indépendant de taille adéquate, ici 2, et sont placés dans les cellules disponibles, c'est-à-dire non grisées, en fonction de leur position. Par exemple, sur la figure III.13, le point du LHS indépendant dans la cellule de la première ligne et première

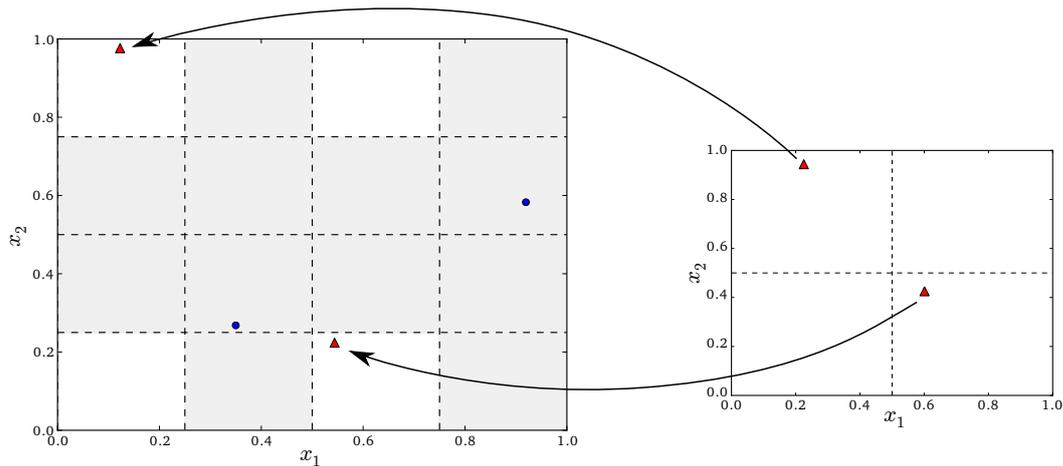


FIGURE III.13 – Exemple de l'enrichissement d'un LHS en 2 dimension avec 2 points.

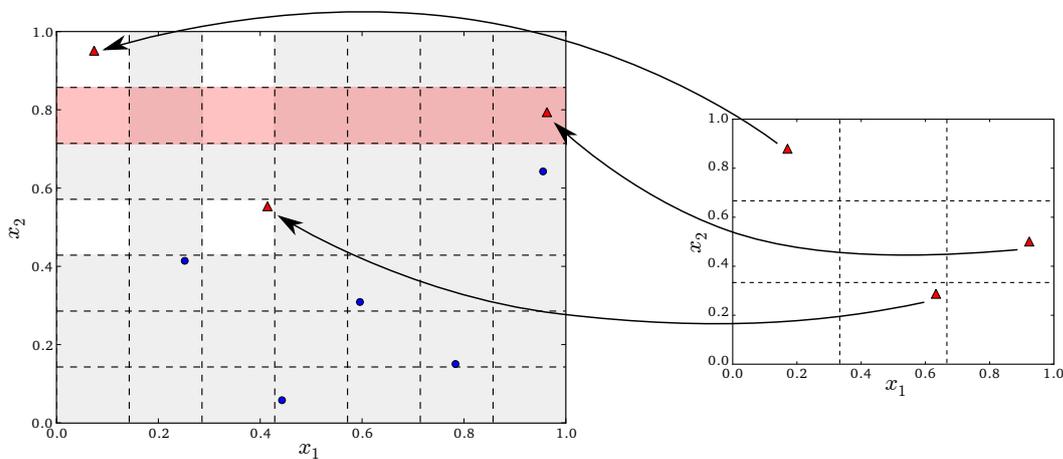


FIGURE III.14 – Exemple de l'enrichissement d'un LHS en 2 dimension dans le cas de points redondants dans un intervalle.

colonne est placé dans la cellule de la première ligne et première colonne disponible sur le LHS enrichi. De cette manière l'ensemble des points existants et des points ajoutés forment toujours un LHS.

Le cas précédent est idéal dans le sens où aucun des points existants n'est redondant dans les intervalles de la grille  $4 \times 4$ . Si le cas opposé se produit, quelques modifications doivent être apportées et la nouvelle structure du plan n'est plus exactement celle d'un LHS mais reste très proche. Un exemple est présenté figure III.14 où 5 points sont existants et 2 points doivent être ajoutés. Une grille  $7 \times 7$  est donc formée. Cependant, si seulement 2 points sont ajoutés, un des intervalles sur l'axe  $x_2$  ne sera pas représenté car un autre intervalle contient déjà 2 points. Pour éviter cela, on génère un LHS indépendant de 3 points, le troisième points permettant de combler l'intervalle manquant (en rouge sur la figure). Comme sur l'axe  $x_1$ , tous les intervalles sont représentés, la cellule sur cet axe est choisie aléatoirement, ce qui implique qu'un intervalle contiendra 2 points. La démarche générale consiste à repérer le nombre de points redondants dans les intervalles pour ajuster automatiquement la taille du LHS indépendant. De ce fait, le nombre de points ajoutés au cours de l'enrichissement peut être plus important que le nombre de points souhaités. Il est mentionné dans (Blatman et Sudret, 2010a) que ce schéma est quasi-LHS.

À partir de cette démarche d'enrichissement, on peut augmenter la taille de l'échantillon d'apprentissage et améliorer la qualité de la SR. Cependant, si la SR est améliorée de manière globale, elle peut ne pas l'être au voisinage de l'état limite, c'est-à-dire dans la région d'intérêt. Une autre situation, déjà mentionnée, est que le nombre de points dans la région d'intérêt peut ne pas être assez important pour avoir confiance dans les indicateurs *bootstrap* calculés. Dans ces deux cas, on préférera ajouter des points dans la région d'intérêt plutôt que sur le domaine global. La démarche est la suivante :

1. détermination de la région d'intérêt ;
2. recherche des points d'échantillon inclus dans la région ;
3. enrichissement dans la région à partir des points existants.

Un enrichissement de l'échantillon pose naturellement la question du nombre de points à ajouter. L'idée intuitive est de procéder progressivement en testant à chaque étape la qualité de la SR et de stopper lorsque cette dernière est suffisante. C'est ce qui est proposé dans (Blatman et Sudret, 2010a). Si, dans notre cas, l'enrichissement est effectué dans la région d'intérêt, il faut la mettre à jour à chaque itération étant donné que la SR évolue avec les points d'échantillon ajoutés. Pour cela, la section suivante décrit une méthode dite adaptative qui permet d'améliorer progressivement les résultats en localisant dans un premier temps la région d'intérêt, puis en améliorant la SR dans cette zone.

### III.6.3 Méthode adaptative

#### III.6.3.1 Principe

On appelle généralement méthodes adaptatives, les méthodes itératives qui permettent, à une étape donnée, d'évoluer en fonction des informations obtenues à l'étape précédente. Dans le cas de l'utilisation de SR pour l'analyse fiabiliste, il s'agit par exemple d'améliorer la SR pour affiner l'estimation d'une probabilité de défaillance. Cela peut se faire sur un domaine fixe à partir d'un enrichissement de l'échantillon ou bien en modifiant, à chaque étape, la zone de recherche. Ce dernier cas est souvent utilisé en fiabilité car la zone recherchée est proche de l'état limite mais n'est pas connue *a priori*. Le principe consiste donc à démarrer d'un échantillon puis à se déplacer progressivement en ajoutant de nouveaux points à partir des SR construites à chaque étape. En l'absence d'information préalable, l'échantillon de départ est formé autour des valeurs moyennes des variables sur plusieurs écarts-type. Dans certaines situations, la connaissance physique du système permet d'échantillonner les variables dans une direction préférentielle en fonction de leur effet d'action ou de résistance. Cependant, plus le modèle est complexe plus la tâche est difficile. Une analyse de sensibilité préliminaire peut éventuellement permettre de tirer quelques renseignements (cf. section II.5).

Les méthodes adaptatives en fiabilité, basées sur les SR, s'appuient généralement sur la démarche suivante :

1. formation d'un échantillon initial à partir d'un plan d'expérience numérique ;
2. construction de la SR ;
3. recherche de la zone de défaillance à partir de la SR ;
4. enrichissement de l'échantillon proche de l'état limite estimé ;
5. mise à jour de la SR ;
6. répétition des étapes 3 à 5 jusqu'à satisfaire un critère de convergence.

Dans la majorité des cas, la direction du domaine de défaillance est recherchée grâce au PDPP et l'ajout de points d'échantillon est effectué autour de ce dernier. Les méthodes se distinguent souvent en fonction du choix du plan d'expérience, de l'enrichissement, de la zone dans laquelle il

est effectué ou des termes choisis pour construire la SR. L'idée n'est pas récente et fut initialement introduite par Bucher et Bourgund (1990) qui ont proposé de construire deux SR, l'une après l'autre, pour se rapprocher du PDPP. Plusieurs améliorations ont été proposées par Rajashekhar et Ellingwood (1993), Kim et Na (1997) et Das et Zheng (2000). Dans (Gayton *et al.*, 2003), les auteurs enrichissent le plan d'expérience dans une zone définie par des intervalles de confiance de la position du PDPP obtenus par validation croisée. Nguyen *et al.* (2009) proposent, quant à eux, de dimensionner les plans d'expérience successifs à partir des sensibilités des variables par rapport à la fonction de performance.

### III.6.3.2 Description de la démarche

La méthode décrite ici est une compilation des outils présentés jusqu'à maintenant, mais elle suit le même schéma général que les méthodes actuelles dans le sens où les SR sont construites itérativement pour se rapprocher de l'état limite. Rappelons que la motivation de la démarche est d'être plus précis sur l'estimation de la probabilité de défaillance en améliorant la qualité de la SR dans la zone de l'état limite voisine du PDPP. Pour cela, nous souhaitons enrichir l'échantillon d'apprentissage de la SR dans la région d'intérêt. Cependant, chaque fois que des points d'échantillon sont ajoutés, la SR est mise à jour et la région d'intérêt, déterminée à partir de cette dernière, est modifiée. C'est pour cette raison que la méthode est composée de deux phases :

1. la première consiste à stabiliser la position de la région d'intérêt, nous l'appellerons *convergence de la région* ;
2. la seconde concerne l'amélioration de la SR, nous l'appellerons *convergence de la surface de réponse*.

Ces deux étapes se succèdent et dépendent chacune d'un critère de convergence. Une dernière phase permettra de tester la validité des résultats fournis. Elles sont décrites dans les sections suivantes.

Pour rappeler le schéma général, considérons qu'un échantillon initial est formé à partir d'un LHS de taille  $N_{\text{init}} = 3(M + 1)$ , généré autour des moyennes sur plusieurs écarts-type. Une première SR est construite avec un nombre maximum de termes  $\xi_{\text{init}}$  tel que  $N_{\text{init}} \geq 3(\xi_{\text{init}} + 1)$ , ce qui permet d'estimer une première région d'intérêt notée  $\mathcal{S}_{\text{init}}$ .

#### Convergence de la région

Cette première phase consiste à stabiliser la région d'intérêt qui évolue avec la mise à jour de la SR. Supposons qu'à une certaine itération  $i$  une SR est construite pour laquelle le nombre de termes maximum, noté  $\xi_i$ , est tel que  $N_i \geq 3(\xi_i + 1)$  où  $N_i$  est la taille de l'échantillon courant. La SR est utilisée pour estimer l'indice de fiabilité  $\beta_i$  et la région d'intérêt  $\mathcal{S}_i$ . La position de la région est considérée stable si l'écart relatif entre l'indice de fiabilité actuel et celui de l'itération précédente est suffisamment faible, c'est-à-dire si pour une certaine valeur  $\varepsilon_\beta$ , relativement faible, le critère :

$$\left| \frac{\beta_i - \beta_{i-1}}{\beta_i} \right| \leq \varepsilon_\beta \quad (\text{III.20})$$

est vérifié. Le cas échéant, la région d'intérêt retenue est notée  $\mathcal{S}_{\text{conv}}$  et on passe à la phase suivante de *convergence de la surface de réponse*. Dans le cas contraire, l'échantillon est enrichi dans la région d'intérêt  $\mathcal{S}_i$  en suivant la procédure décrite à la section précédente. Une nouvelle SR est construite pour laquelle le nombre de termes maximum autorisé est augmenté car le nombre de points dans l'échantillon l'est également, c'est-à-dire que  $N_{i+1} = N_i + N_{\text{add}}$  où  $N_{\text{add}}$  correspond au nombre de points ajoutés (celui-ci est fixé de manière arbitraire au nombre

de variables en jeu, i.e  $N_{\text{add}} = M$ ). Cette procédure est répétée jusqu'à ce que le critère de l'équation (III.20) soit satisfait. La figure III.15 schématise les différentes étapes.

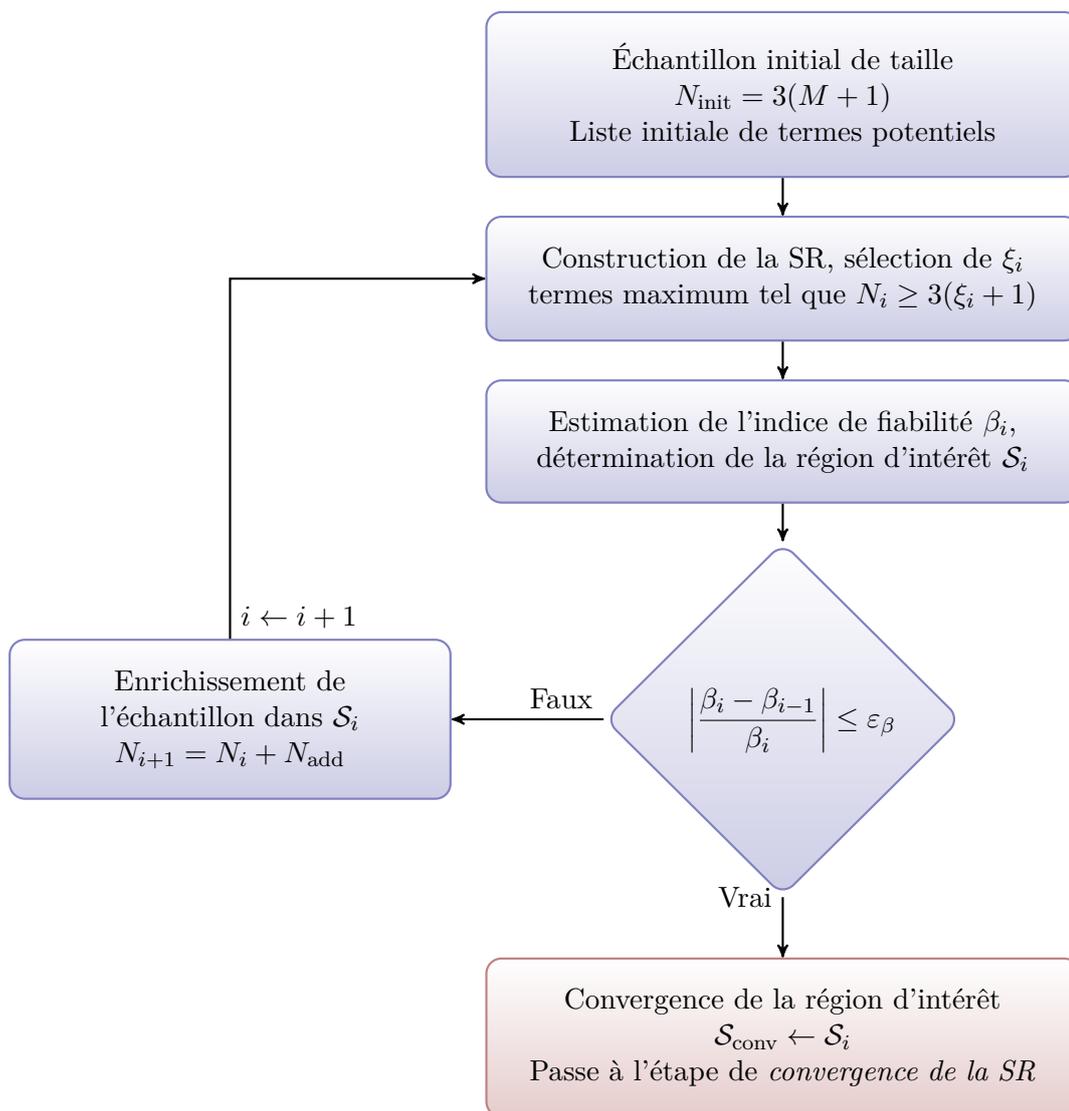


FIGURE III.15 – Phase de convergence de la région – Méthode adaptative.

### Convergence de la surface de réponse

La seconde phase de la démarche permet d'améliorer la SR en augmentant l'échantillon dans la région d'intérêt  $\mathcal{S}_{\text{conv}}$  déterminée précédemment. L'enrichissement continue de manière itérative mais le critère de convergence concerne cette fois la qualité de la SR et plus particulièrement la valeur  $Q^2$  estimée par validation croisée. Plus précisément, pour une certaine valeur  $\varepsilon_{\text{sr}}$  suffisamment proche de 1, la convergence est atteinte lorsque :

$$Q^2 \geq \varepsilon_{\text{sr}} \quad (\text{III.21})$$

Dans ce cas, l'algorithme est stoppé et la SR finale est identifiée. Dans le cas contraire, l'enrichissement continue dans  $\mathcal{S}_{\text{conv}}$  jusqu'à ce que le critère précédent soit satisfait. Ajoutons que le critère est testé immédiatement après la phase de convergence de la région, c'est-à-dire sans enrichir l'échantillon.

Dans certaines situations, l'enrichissement dans la région d'intérêt ne permet pas d'améliorer la SR. Cela peut être le cas, par exemple, si la région varie de manière importante d'une itération à l'autre au cours de la première phase. Le domaine exploré est alors relativement grand et les points d'échantillon situés en dehors de la région peuvent empêcher de converger. Pour cette raison, une étape a été rajoutée pour construire une SR dite locale, c'est-à-dire basée sur un échantillon contenant uniquement les points inclus dans la région (l'échantillon est dit local). Plus précisément, si la valeur, notée  $Q_{\text{global}}^2$ , de la SR basée sur l'échantillon global ne vérifie pas le critère de l'équation (III.21), la SR locale est construite et son indicateur  $Q_{\text{local}}^2$  est estimé. Si cette dernière est de meilleure qualité, c'est-à-dire si  $Q_{\text{local}}^2 > Q_{\text{global}}^2$ , alors les points d'échantillon situés en dehors de la région d'intérêt ne sont plus pris en compte pour la suite de la procédure. Cela implique que, lors des enrichissements suivants, seule la SR locale est évaluée jusqu'à ce qu'elle converge. Dans le cas contraire, la SR locale est toujours testée après la SR globale. Ajoutons que le nombre de termes autorisés dans la SR locale, noté  $\xi_{i_{\text{local}}}$  à l'itération  $i$ , est bien calculé en fonction de la taille de l'échantillon local  $N_{i_{\text{local}}}$ , c'est-à-dire que  $N_{i_{\text{local}}} \geq 3(\xi_{i_{\text{local}}} + 1)$ . La figure III.16 schématise ces différentes étapes.

### Validation

La validation repose sur les outils présentés en section III.4. Le *bootstrap* est appliqué sur la SR avec l'échantillon retenu (global ou local) pour déterminer les indicateurs  $\varepsilon_{\text{inf}}$  et  $\varepsilon_{\text{sup}}$  dans la région d'intérêt. Ces derniers sont utilisés pour calculer l'intervalle de probabilité  $[P_{f_{\text{inf}}}, P_{f_{\text{sup}}}]$ . Ces valeurs sont estimées par une méthode de simulation telle que des tirages d'importance (précédés d'une méthode FORM) et permettent de valider définitivement la procédure. Si l'intervalle est trop important, la méthode peut être relancée avec un critère  $\varepsilon_{\text{sr}}$  plus contraignant. Dans ce cas, la procédure démarre directement par la seconde phase en continuant l'enrichissement dans la région d'intérêt  $\mathcal{S}_{\text{conv}}$ . Les différentes phases de la méthode adaptative sont résumées sur la figure III.17.

### III.6.3.3 Discussion des paramètres

Trois paramètres essentiels contrôlent la procédure adaptative : le niveau d'importance  $\varepsilon_{\text{pdf}}$  qui définit la taille de la région d'intérêt, le critère de convergence de la région  $\varepsilon_{\beta}$  et le critère de convergence de la SR  $\varepsilon_{\text{sr}}$ . L'étape de validation a pour but, en quelque sorte, de post-valider ce dernier paramètre. En effet, il permet de s'assurer que la SR est suffisamment bonne pour estimer le résultat souhaité. Le niveau d'importance a déjà été discuté en section III.5.3 pour l'étape de validation mais il concerne ici, en plus, la zone d'enrichissement de l'échantillon. Si la région est grande, on peut penser que les points d'échantillon sont plus épars et donc que le nombre d'itérations est plus important. Le critère de convergence de la région n'est qu'un intermédiaire. Il ne doit pas être trop grand pour ne pas converger rapidement vers une fausse région d'intérêt mais une valeur faible implique probablement un nombre d'itérations plus important pour la localiser. Cependant, dans ce dernier cas, le nombre d'itérations peut être compensé par une convergence plus rapide de la qualité de la SR grâce aux enrichissements de l'échantillon. Un dernier paramètre qui n'a pas été mentionné concerne l'étendue de l'échantillon initial, c'est-à-dire le nombre d'écarts-type considéré autour des valeurs moyennes pour générer le LHS. En d'autres termes, soit on démarre sur une zone large pour se recentrer vers une région plus réduite, soit on démarre sur une zone réduite que l'on déplace au cours des itérations. Quelques tests paramétriques, présentés dans la section III.6.4.2, permettront d'observer l'influence de ces choix.

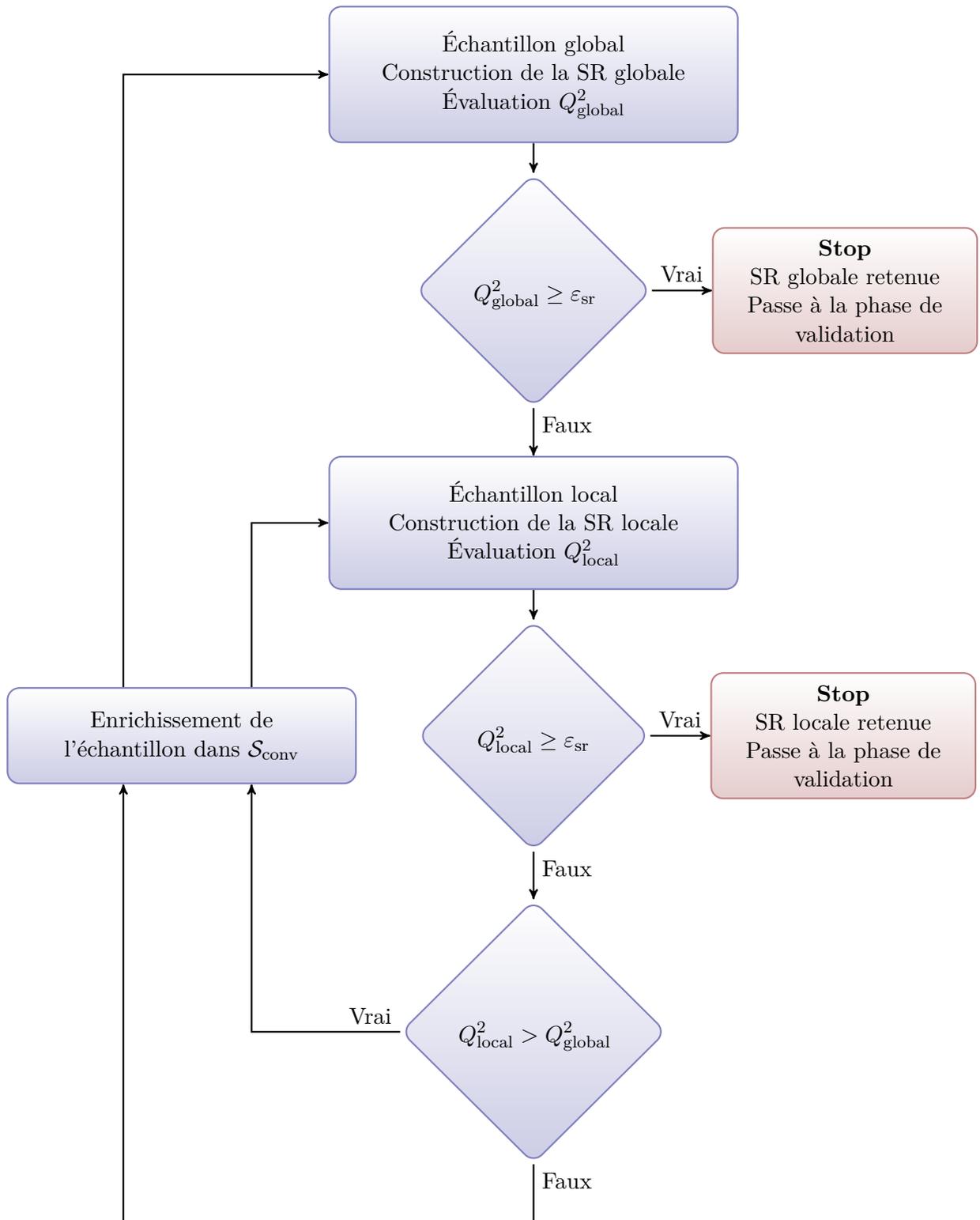


FIGURE III.16 – Phase de convergence de la surface de réponse – Méthode adaptative.

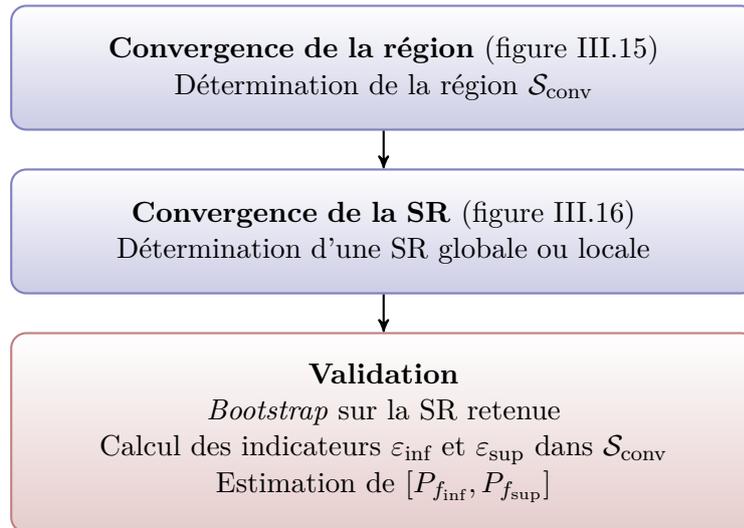


FIGURE III.17 – Phases de la méthode adaptative.

$\beta^{\text{REF}}$	$Q^2$ obtenu	$\beta_{\text{SR}}$	$\beta_{\text{SR}_{\text{inf}}}$	$\beta_{\text{SR}_{\text{sup}}}$	$N$
2.69	0.998	2.68 (0.4%) <sup>a</sup>	2.60 (3.0%) <sup>b</sup>	2.72 (1.5%) <sup>b</sup>	18

a. Erreur relative avec  $\beta^{\text{REF}}$

b. Écart relatif avec  $\beta_{\text{SR}}$

TABLE III.2 – Résultats de la méthode adaptative – Fonction analytique.

## III.6.4 Exemples d'applications

### III.6.4.1 Exemple analytique

Un exemple analytique en deux dimensions, issu de la littérature (Nguyen *et al.*, 2009; Kang *et al.*, 2010), est utilisé pour illustrer le déroulement de la méthode adaptative. Les deux variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  sont supposées normales standards et indépendantes. La fonction de performance de référence vaut :

$$G(\mathbf{x}) = \exp(0.4(x_1 + 2) + 6.2) - \exp(0.3x_2 + 5) - 200 \quad (\text{III.22})$$

et le domaine de défaillance est tel que  $G(\mathbf{x}) \leq 0$ . La valeur de référence de l'indice de fiabilité généralisé vaut  $\beta^{\text{REF}} = 2.69$  et a été obtenue par une méthode FORM suivie de tirages d'importance sur le modèle de référence avec 500000 simulations. Concernant la méthode adaptative, l'échantillon initial contient 6 points d'échantillon et l'enrichissement, à chaque itération, est au minimum de 2 points. Rappelons que la procédure d'enrichissement peut ajouter plus de points, si nécessaire, pour garder une structure quasi-LHS (cf. section III.6.2). Le niveau d'importance est fixé à  $\varepsilon_{\text{pdf}} = 0.05$ , le critère de convergence de la région est  $\varepsilon_{\beta} = 0.01$  et le critère de convergence de la SR est  $\varepsilon_{\text{sr}} = 0.995$ . Les résultats sont présentés dans le tableau III.2 où  $\beta_{\text{SR}}$  désigne l'indice de fiabilité généralisé estimé sur la SR et  $\beta_{\text{SR}_{\text{inf}}}$  et  $\beta_{\text{SR}_{\text{sup}}}$  sont les indices calculés à partir des indicateurs *bootstrap*. Ils sont tous déterminés par tirages d'importance avec 500000 simulations. La méthode converge en 4 itérations avec 18 évaluations du modèle de référence. L'évolution de la procédure au cours des itérations est représentée sur la figure III.18. L'intervalle  $[\beta_{\text{SR}_{\text{inf}}}, \beta_{\text{SR}_{\text{sup}}}]$  obtenu, inférieur à  $\pm 3\%$  autour de l'indice de fiabilité estimé, est suffisamment faible pour valider le résultat. Enfin, notons que la phase de convergence de la SR s'est terminée

directement après la première phase, c'est-à-dire une fois la région localisée. Cela signifie que la SR était de qualité suffisante pour converger sans enrichissement supplémentaire et qu'elle est globale. Aussi, 13 points d'échantillon parmi les 18 sont inclus dans la région.

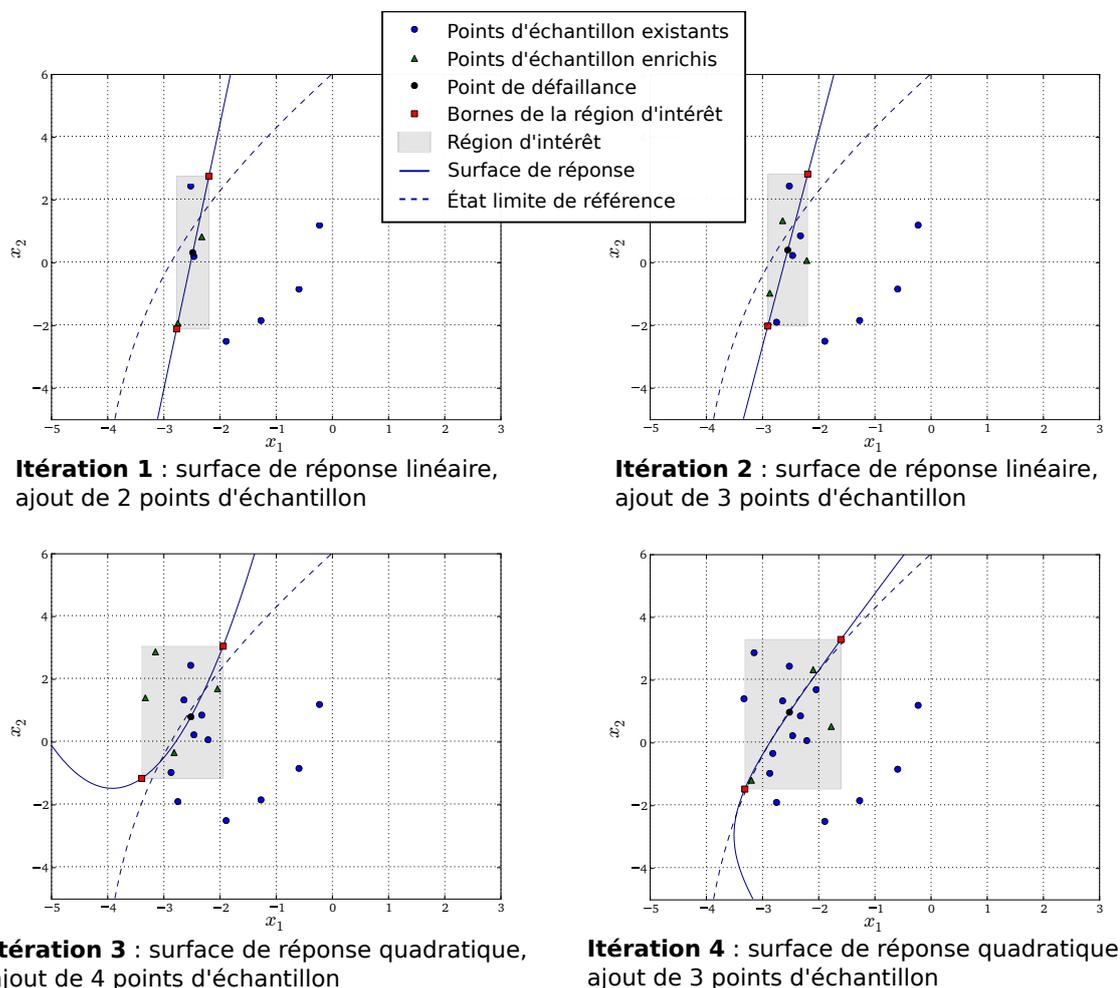


FIGURE III.18 – Evolution de la méthode adaptative au cours des itérations – Fonction analytique.

### III.6.4.2 Treillis

Cet exemple a déjà été présenté dans la section III.5. Ici, on souhaite calculer la probabilité de défaillance relative à la fonction de performance :

$$G(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) - 0.14 \quad (\text{III.23})$$

telle que  $G(\mathbf{x}) \leq 0$  est le domaine de défaillance. La valeur de référence de l'indice de fiabilité généralisé vaut  $\beta^{\text{REF}} = 3.98$  et a été obtenue par des tirages d'importance directement effectués sur le modèle de référence avec 500000 simulations. Son estimation est également calculée par tirages d'importance (500000 simulations) mais sur la SR construite avec la méthode adaptative. Les paramètres de la procédure sont les suivants :  $\varepsilon_{\text{pdf}} = 0.05$ ,  $\varepsilon_{\beta} = 0.01$  et  $\varepsilon_{\text{sr}} = 0.99$ . Ce dernier paramètre est ajusté en fonction de l'intervalle des indices de fiabilité calculé lors de la phase de validation. Les résultats sont présentés dans le tableau III.3. Ils sont obtenus en deux étapes :

1. dans un premier temps, 77 calculs EF permettent d'atteindre l'objectif fixé par les critères, notamment  $\varepsilon_{\text{SR}} = 0.99$ . La SR obtenue est globale et sa valeur  $Q^2$  vaut 0.996. L'intervalle autour de l'indice de fiabilité généralisé, déterminé grâce aux indicateurs *bootstrap*, est d'environ  $\pm 7\%$ . Pour tenter de le réduire la procédure est relancée à partir des simulations déjà effectuées avec  $\varepsilon_{\text{SR}} = 0.999$ .
2. L'objectif est atteint en 98 simulations supplémentaires. La SR retenue est locale, c'est-à-dire que parmi les 175 points dans l'échantillon, seul les 133 inclus dans la région d'intérêt sont utilisés pour la construire. Sa valeur  $Q^2$  vaut 0.9992 et permet d'obtenir un intervalle autour de l'indice de fiabilité généralisé d'environ  $\pm 3\%$ .

$\beta^{\text{REF}}$	$\varepsilon_{\text{SR}}$	$Q^2$ obtenu	$\beta_{\text{SR}}$	$\beta_{\text{SR}_{\text{inf}}}$	$\beta_{\text{SR}_{\text{sup}}}$	$N$
3.98	0.990	0.996	3.94 (1.0%) <sup>a</sup>	3.67 (6.9%) <sup>b</sup>	4.19 (6.4%) <sup>b</sup>	77
	0.999	0.9992	3.99 (0.3%) <sup>a</sup>	3.88 (2.8%) <sup>b</sup>	4.12 (3.2%) <sup>b</sup>	+ 98 = 175 <sup>c</sup>

a. Erreur relative avec  $\beta^{\text{REF}}$

b. Écart relatif avec  $\beta_{\text{SR}}$

c. La SR est construite sur l'échantillon local contenant 133 points

TABLE III.3 – Résultats de la méthode adaptative – Structure treillis.

Étant donné que la méthode possède une part d'aléa dû au LHS et à son enrichissement, des répétitions ont été réalisées pour différentes valeurs de certains paramètres. Nous avons, dans un premier temps, observé l'influence de la taille de la région d'intérêt. Pour cela la méthode a été répétée 20 fois avec les critères de convergence  $\varepsilon_{\beta} = 0.01$  et  $\varepsilon_{\text{SR}} = 0.999$  pour 4 niveaux d'importance différents. La figure III.19 représente la dispersion des indices de fiabilité généralisés obtenus, sous forme de boîte à moustache, pour les niveaux d'importance  $\varepsilon_{\text{pdf}} = [0.05, 0.1, 0.2, 0.4]$ . Les indices de fiabilité calculés à partir des indicateurs *bootstrap* sont également présentés et confirment la tendance déjà observée dans la section III.5.3, c'est-à-dire que l'intervalle  $[\beta_{\text{SR}_{\text{inf}}}, \beta_{\text{SR}_{\text{sup}}}]$  se réduit lorsque l'on diminue la taille de la région. De plus la dispersion des valeurs diminue légèrement avec l'augmentation de  $\varepsilon_{\text{pdf}}$ . Cependant, cette dispersion reste relativement faible dans tous les cas. La figure III.20 résume la dispersion du nombre de simulations effectuées pour chaque niveau d'importance. Encore une fois, le nombre de simulations diminue globalement avec l'augmentation du niveau d'importance. La dispersion observée reste acceptable sans être négligeable étant donné qu'elle s'étend sur environ 60 à 70 simulations.

Dans un second temps, nous avons observé l'influence de l'étendue du LHS initial en le faisant varier sur  $\pm k\sigma$  avec  $k = [1, 3, 5]$  dans l'espace normal standard. Les valeurs des paramètres de convergence sont les mêmes que précédemment et le niveau d'importance est fixé à  $\varepsilon_{\text{pdf}} = 0.05$ . Tous les essais sont répétés 20 fois. Les résultats sont présentés sur la figure III.21. On remarque qu'ils sont relativement proches : le nombre de simulations reste globalement constant et, donc, l'étendue du LHS initial semble avoir peu d'influence sur le nombre de simulations.

### III.6.4.3 Portique

Ce second exemple est une application sur une structure portique dont le modèle éléments finis est présenté en figure III.22. Il a déjà été traité un grand nombre de fois dans la littérature comme, par exemple, dans (Wei et Rahman, 2007) (Nguyen *et al.*, 2009) ou (Blatman et Sudret, 2010a). Le problème contient 21 variables aléatoires à savoir les efforts de chargement notés  $P_1$  à  $P_3$ , les moments d'inertie et les sections des éléments poutres notés  $A_1$  et  $I_1$  à  $A_8$  et  $I_8$  ainsi que les modules d'Young notés  $E_1$  et  $E_2$ . On notera  $\mathbf{X}$  le vecteur des variables aléatoires. Les

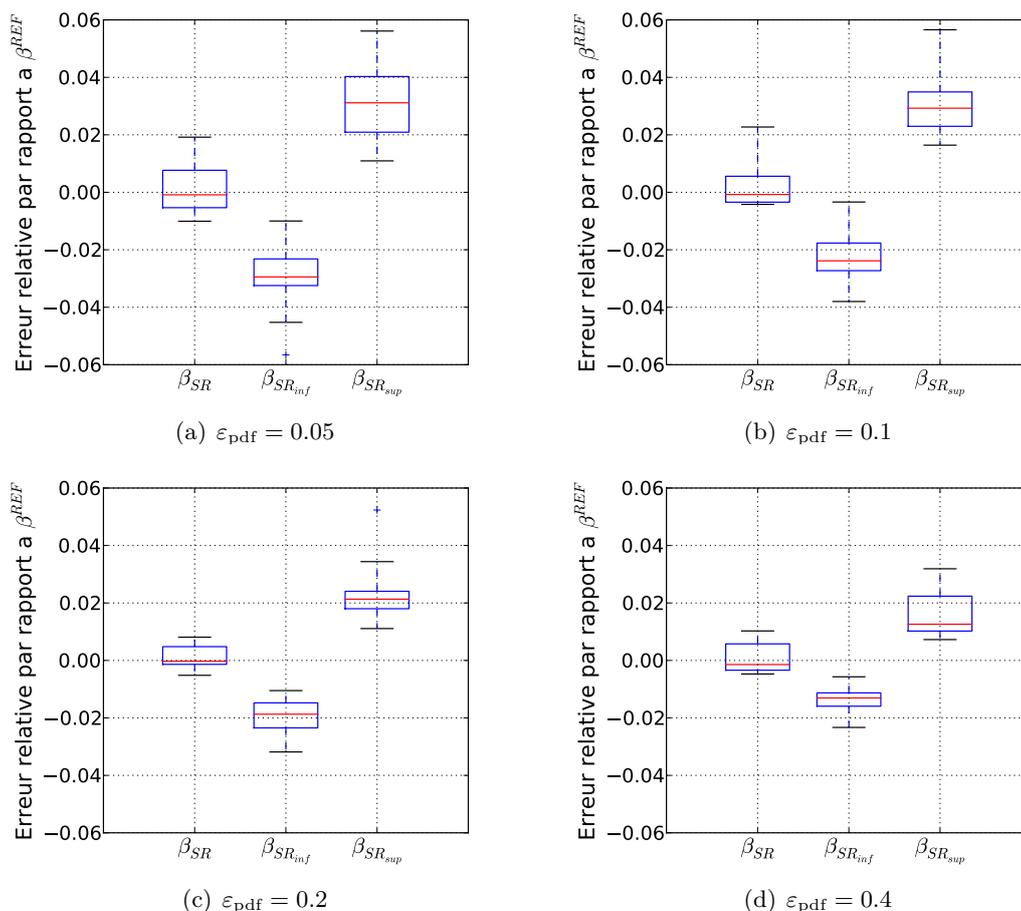


FIGURE III.19 – Dispersion des indices de fiabilité généralisés obtenus sur 20 répétitions pour plusieurs niveaux d'importance – Structure treillis.

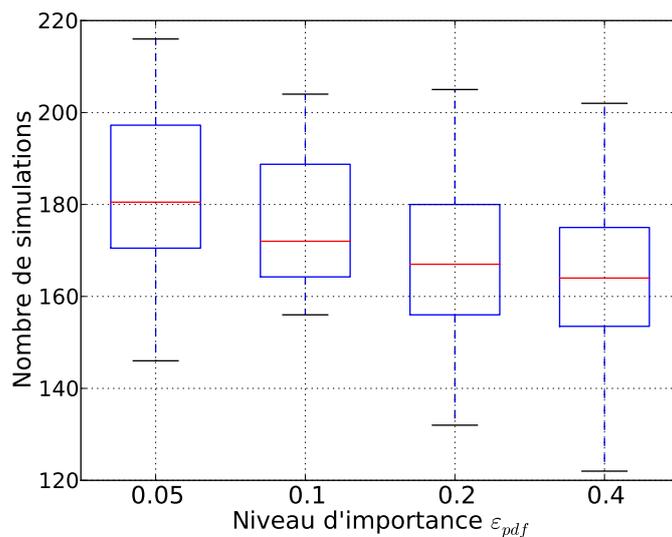


FIGURE III.20 – Dispersion du nombre de simulations effectués sur 20 répétitions avec les niveaux d'importance  $\varepsilon_{pdf} = [0.05, 0.1, 0.2, 0.4]$  – Structure treillis.

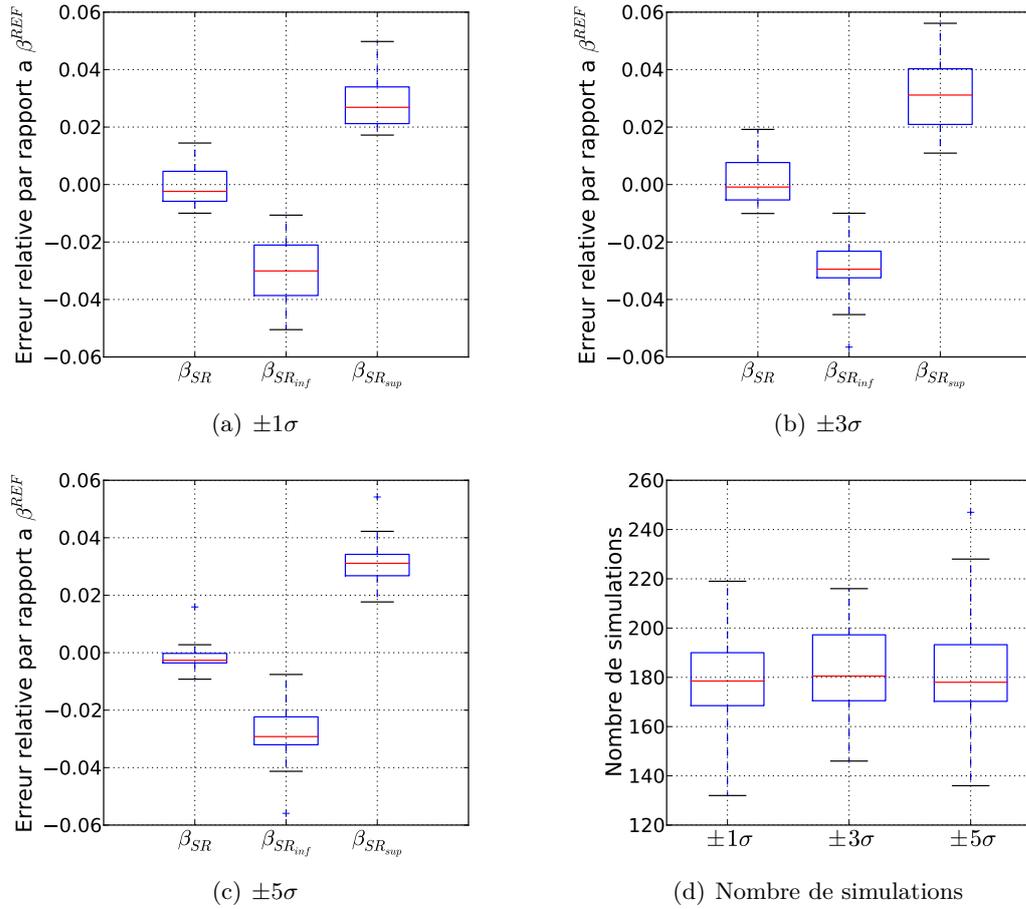


FIGURE III.21 – Dispersion des résultats (indices de fiabilité et nombre de simulations) obtenus sur 20 répétitions pour plusieurs dimensions du LHS initial – Structure treillis.

propriétés mécaniques et matériaux correspondant aux différents éléments de la structure sont présentés dans le tableau III.4. Les lois de distributions des variables ainsi que leurs paramètres sont présentés dans le tableau III.5. Certaines variables sont supposées corrélées de la manière suivante :

- les sections et moments d'inertie des mêmes éléments ont un coefficient de corrélation  $\rho_{A_i, I_i} = 0.95$  ;
- les autres propriétés géométriques ont des corrélations  $\rho_{A_i, A_j} = \rho_{I_i, I_j} = \rho_{A_i, I_j} = 0.13$  ;
- la corrélation des modules d'Young vaut  $\rho_{E_1, E_2} = 0.9$  ;
- toutes les autres variables sont décorréliées.

On s'intéresse au déplacement, noté  $\Delta$ , de l'extrémité supérieure droite du portique et on définit la fonction de performance  $G$  telle que :

$$G(\mathbf{x}) = 0.06 - \Delta(\mathbf{x}) \quad (\text{III.24})$$

où  $\mathbf{x}$  et une réalisation du vecteur  $\mathbf{X}$ . L'objectif est d'estimer la probabilité de défaillance relative au critère  $G(\mathbf{X}) \leq 0$  grâce à la méthode adaptative. On construit, pour cela, la SR sur la réponse  $\Delta$  et la probabilité est estimée par tirages d'importance sur cette dernière (500000 simulations). La valeur de référence a été estimée dans (Blatman et Sudret, 2010a), également par tirages d'importance avec 500000 simulations mais directement sur le modèle de référence. Elle est donnée par l'indice de fiabilité généralisé et vaut  $\beta^{\text{REF}} = 3.51$ .

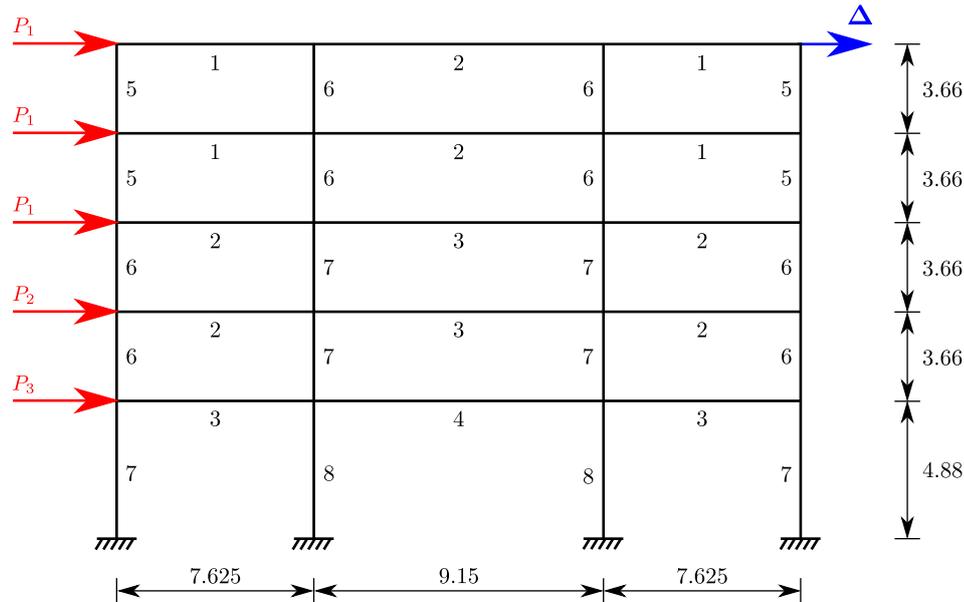


FIGURE III.22 – Structure portique (unités m).

Éléments	Modules d'Young	Moments d'inertie	Sections
1	$E_1$	$I_5$	$A_5$
2	$E_1$	$I_6$	$A_6$
3	$E_1$	$I_7$	$A_7$
4	$E_1$	$I_8$	$A_8$
5	$E_2$	$I_1$	$A_1$
6	$E_2$	$I_2$	$A_2$
7	$E_2$	$I_3$	$A_3$
8	$E_2$	$I_4$	$A_4$

TABLE III.4 – Propriétés des éléments – Portique.

Cet exemple présente, d'une certaine manière, une limite de la méthode adaptative. En effet, si cette dernière est appliquée avec les valeurs classiques des paramètres utilisés jusqu'à maintenant, c'est-à-dire  $\varepsilon_{\text{pdf}} = 0.05$ ,  $\varepsilon_{\beta} = 0.01$ ,  $\varepsilon_{\text{sr}} = 0.99$  et en générant le LHS initial sur  $\pm 3\sigma$  autour des valeurs moyennes (dans l'espace normal standard), alors la procédure ne converge pas car la SR n'atteint jamais une valeur  $Q^2$  supérieure à  $\varepsilon_{\text{sr}}$ . Un moyen d'obtenir la convergence serait de diminuer  $\varepsilon_{\text{sr}}$  mais la SR finale étant de mauvaise qualité, les variations observées autour de l'indice de fiabilité par *bootstrap* sont trop importantes pour valider le résultat. Pourtant, ce modèle est traité dans (Nguyen *et al.*, 2009) avec une méthode de SR adaptative et converge en un nombre de simulations raisonnable. Pour en comprendre la raison, bien que les deux méthodes soient différentes, quelques paramètres peuvent être comparés.

Dans un premier temps, les auteurs proposent d'utiliser un plan d'expérience adaptatif formé de plans en demi-étoile. Le plan initial comporte un point à l'origine de l'espace standard et les autres points sont distribués à une distance algébrique  $\Delta_0$  sur chaque axe, dont la direction est définie en fonction de l'effet des variables (action ou résistance). Une SR linéaire est construite et un PDPP est estimé. Le plan d'expérience suivant est construit autour d'un point, de coordonnées  $\bar{\mathbf{u}}$ , calculé par interpolation linéaire entre l'origine (valeurs moyennes) et le PDPP de l'étape initiale. Ce plan est formé en demi-étoile et les points sont distribués à une distance  $\Delta_i$

Variables	Lois de distribution	Moyennes	Écart-type
$P_1$ (kN)	Log-normale	133.454	40.04
$P_2$ (kN)	Log-normale	88.97	35.59
$P_3$ (kN)	Log-normale	71.175	28.47
$E_1$ (kN/m <sup>2</sup> )	Normale <sup>a</sup>	$2.1738 \times 10^7$	$1.9152 \times 10^6$
$E_2$ (kN/m <sup>2</sup> )	Normale	$2.3796 \times 10^7$	$1.9152 \times 10^6$
$I_1$ (m <sup>4</sup> )	Normale	$8.1344 \times 10^{-3}$	$1.0834 \times 10^{-3}$
$I_2$ (m <sup>4</sup> )	Normale	$1.1509 \times 10^{-2}$	$1.2980 \times 10^{-3}$
$I_3$ (m <sup>4</sup> )	Normale	$2.1375 \times 10^{-2}$	$2.5961 \times 10^{-3}$
$I_4$ (m <sup>4</sup> )	Normale	$2.5961 \times 10^{-2}$	$3.0288 \times 10^{-3}$
$I_5$ (m <sup>4</sup> )	Normale	$1.0812 \times 10^{-2}$	$2.5961 \times 10^{-3}$
$I_6$ (m <sup>4</sup> )	Normale	$1.4105 \times 10^{-2}$	$3.4615 \times 10^{-3}$
$I_7$ (m <sup>4</sup> )	Normale	$2.3279 \times 10^{-2}$	$5.6249 \times 10^{-3}$
$I_8$ (m <sup>4</sup> )	Normale	$2.5961 \times 10^{-2}$	$6.4902 \times 10^{-3}$
$A_1$ (m <sup>2</sup> )	Normale	$3.1256 \times 10^{-1}$	$5.5815 \times 10^{-2}$
$A_2$ (m <sup>2</sup> )	Normale	$3.7210 \times 10^{-1}$	$7.4420 \times 10^{-2}$
$A_3$ (m <sup>2</sup> )	Normale	$5.0606 \times 10^{-1}$	$9.3025 \times 10^{-2}$
$A_4$ (m <sup>2</sup> )	Normale	$5.5815 \times 10^{-1}$	$1.1163 \times 10^{-1}$
$A_5$ (m <sup>2</sup> )	Normale	$2.5302 \times 10^{-1}$	$9.3025 \times 10^{-2}$
$A_6$ (m <sup>2</sup> )	Normale	$2.9117 \times 10^{-1}$	$1.0232 \times 10^{-1}$
$A_7$ (m <sup>2</sup> )	Normale	$3.7303 \times 10^{-1}$	$1.2093 \times 10^{-1}$
$A_8$ (m <sup>2</sup> )	Normale	$4.1860 \times 10^{-1}$	$1.9537 \times 10^{-1}$

<sup>a</sup>. Les lois normales sont tronquées pour avoir des valeurs uniquement positives. Les paramètres stochastiques sont ceux de lois non tronquées.

TABLE III.5 – Propriétés des variables aléatoires – Portique.

définie par :

$$\Delta_i = \frac{-\Delta_0}{\|\nabla \hat{H}(\bar{\mathbf{u}})\|} \frac{\partial \hat{H}(\bar{\mathbf{u}})}{\partial u_i} \quad (\text{III.25})$$

où  $\hat{H}$  est la fonction de performance approchée par la SR dans l'espace normal standard et  $\|\nabla \hat{H}(\mathbf{u})\|$  la norme de son gradient. Cela signifie que la position des points du plan suivant, sur chaque axe, dépend de la taille du premier plan et de la sensibilité de la fonction de performance par rapport à la variable. Dans le cas du portique, la taille du plan initial est fixée à  $\Delta_0 = 1$ . Cela implique que les distances entre les points du plan suivant sont inférieures (ou égales) à 1, étant donné que la dérivée partielle de la fonction de performance normalisée par le gradient est obligatoirement inférieure (ou égale) à 1.

Si l'on tente de se placer dans une situation proche de cette dernière, le LHS initial doit être généré sur  $\pm 1\sigma$  (dans l'espace standard) autour des moyennes et la taille de la région d'intérêt doit être définie telle que  $\varepsilon_{\text{pdf}} = 0.6$ . La méthode adaptative est appliquée avec ces valeurs, mais aussi  $\varepsilon_\beta = 0.01$  et  $\varepsilon_{\text{sr}} = 0.99$ . La procédure converge en seulement 4 itérations, soit 159 simulations EF, et la SR finale retenue est globale avec un coefficient  $Q^2$  de 0.998. Les résultats des indices de fiabilité sont présentés dans le tableau III.6. L'intervalle  $[\beta_{\text{SR}_{\text{inf}}}, \beta_{\text{SR}_{\text{sup}}}]$  est suffisamment réduit pour valider la procédure. En observant le graphe de dispersion de la SR finale en figure III.23, on voit bien la séparation entre les points d'échantillon initiaux et ceux proches de la région d'intérêt.

Compte tenu des paramètres stochastiques des variables aléatoires, notamment des écarts-type, si l'échantillon initial est généré sur  $\pm 3\sigma$  dans l'espace standard, cela correspond dans

$\beta^{\text{REF}}$	$\beta_{\text{SR}}$	$\beta_{\text{SR}_{\text{inf}}}$	$\beta_{\text{SR}_{\text{sup}}}$	$Q^2$	N
3.51	3.52 (0.3%) <sup>a</sup>	3.42 (2.8%) <sup>b</sup>	3.60 (2.3%) <sup>b</sup>	0.998	159

a. Écart relatif avec  $\beta^{\text{REF}}$

b. Écart relatif avec  $\beta_{\text{SR}}$

TABLE III.6 – Resultats de la méthode adaptative – Portique.

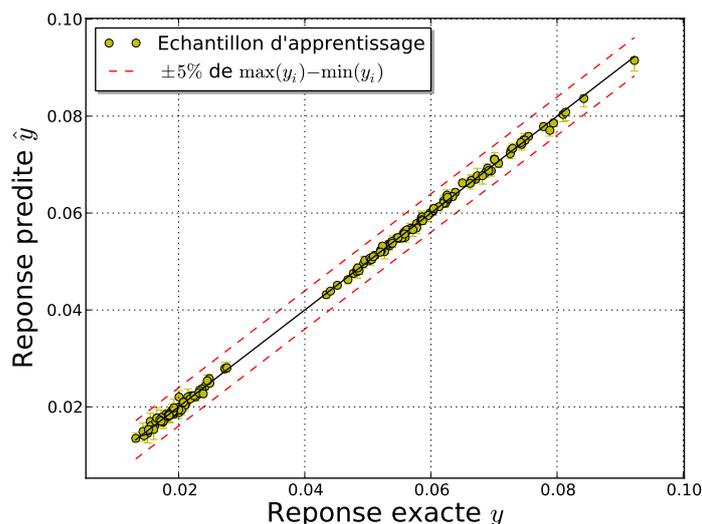


FIGURE III.23 – Graphe de dispersion de la SR finale – Portique.

l'espace physique, pour certaines variables, à des bornes inférieure et supérieure très éloignées des valeurs moyennes. De ce fait, le domaine étudié est très large et le comportement non-linéaire de la réponse par rapport aux variables d'entrée ne peut pas être approché par une simple SR. Le problème est le même si la région d'intérêt est basée sur  $\varepsilon_{\text{pdf}} = 0.05$ . Dans ce cas, les bornes de la région sont d'environ  $\pm 2.5\sigma$  dans l'espace standard autour du PDPP, ce qui correspond, dans l'espace physique, à des variations très importantes. Bien que ce cas soit particulier par les niveaux d'incertitudes qu'il prend en compte, il montre une limite de la région d'intérêt telle qu'elle est définie ici, c'est-à-dire qu'elle peut être trop grande par rapport à la non-linéarité de la réponse. L'algorithme peut converger pour certaines valeurs des paramètres mais celles-ci ne sont pas naturelles. Avec ces valeurs, et sans résultat de référence, on aurait peu confiance dans les résultats donnés par la méthode.

## III.7 Application sur un modèle cube

### III.7.1 Description du modèle et objectif de l'étude

Un cube est une représentation simplifiée d'un satellite. Bien qu'il soit élémentaire, il permet de proposer une première application plus proche du contexte industriel. Le modèle EF est présenté en figure III.24, les faces (panneaux) sont numérotés de 1 à 6. Le cube est encastré aux quatre coins de sa base (panneau 2) et est soumis à des accélérations dans les directions X, Y et Z. Il est uniquement composé d'éléments surfaciques quadrangles et le matériaux est linéaire élastique, homogène et isotrope. Le solveur EF est MSC.Nastran.

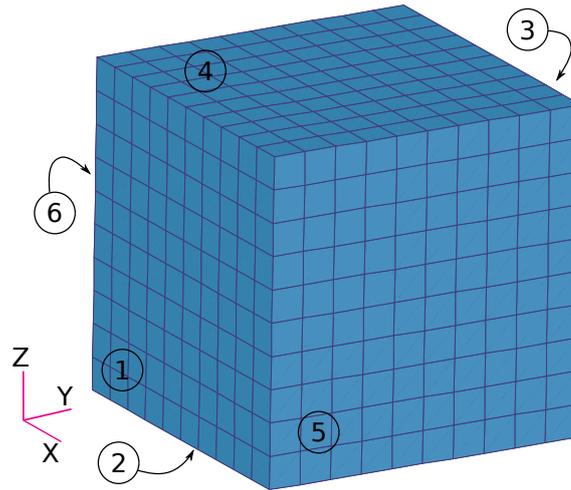


FIGURE III.24 – Modèle éléments finis du cube.

Les variables aléatoires prises en compte sont au nombre de 21 : il s'agit des modules d'Young, notés  $E_1, \dots, E_6$ , des coefficients de Poisson, notés  $\nu_1, \dots, \nu_6$ , des épaisseurs, notées  $ep_1, \dots, ep_6$  et des amplitudes des accélérations, notées  $accX$ ,  $accY$  et  $accZ$ . Le vecteur des variables aléatoires est noté  $\mathbf{X}$  dans l'espace physique et  $\mathbf{U}$  dans l'espace normal standard. Ses composantes sont toutes considérées indépendantes et leurs caractéristiques sont présentées dans le tableau III.7. Notons que les amplitudes de chargement sont artificiellement très élevées pour que les probabilités de défaillance soient significatives.

Variable	Distribution	Moyenne	Écart type
$E_1$ à $E_6$ (Pa)	Normale	$70 \times 10^9$	$70 \times 10^8$
$\nu_1$ à $\nu_6$	Normale	0.33	0.033
$ep_1$ et $ep_3$ (m)	Normale	$0.9 \times 10^{-3}$	$0.9 \times 10^{-4}$
$ep_2$ et $ep_4$ (m)	Normale	$1.0 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-4}$
$ep_5$ et $ep_6$ (m)	Normale	$0.8 \times 10^{-3}$	$0.8 \times 10^{-4}$
$accX$ (g)	Normale	-1300	130
$accY$ (g)	Normale	800	80
$accZ$ (g)	Normale	-1800	180

TABLE III.7 – Caractéristiques des variables aléatoires – Modèle cube.

On souhaite calculer, pour chaque panneau, la probabilité que la contrainte maximale de Von Mises dépasse la limite d'élasticité. Les fonctions de performance sont donc :

$$G_i(\mathbf{x}) = \sigma_{i_{VM}} - R_e \quad i = 1 \dots 6 \quad (\text{III.26})$$

où  $\sigma_{i_{VM}}$  désigne la contrainte maximale de Von Mises calculée sur le panneau  $i$  et  $R_e$  correspond à la limite d'élasticité égale à  $200 \times 10^6$  Pa. Les fonctions de performance sont définies telles que  $G_i(\mathbf{x}) \leq 0$ , pour  $i = 1 \dots 6$ , désignent les domaines de défaillance. Les probabilités de défaillance sont estimées à partir de surfaces de réponse construites sur chacune des grandeurs d'intérêt  $\sigma_{i_{VM}}$ , que l'on notera dans ce cas  $\hat{\sigma}_{i_{VM}}$ , avec  $\hat{G}_i(\mathbf{x})$  la fonction de performance associée (où  $\hat{H}_i(\mathbf{u})$  dans l'espace standard).

L'objectif de l'étude est de présenter une application plus générale de la méthodologie des surfaces de réponse. Pour cela, la résolution du problème se déroule en plusieurs étapes. La première permet simplement de vérifier que le modèle peut être traité par des SR pour donner une première estimation des probabilités de défaillance relatives à chaque critère. En fonction des résultats obtenus et grâce aux indicateurs de validation, on choisit les réponses pour lesquelles l'estimation de la probabilité de défaillance doit être améliorée.

Pour ce faire, on utilise la méthode adaptative. Une fois les SR finales construites, elles seront utilisées pour identifier les variables responsables des probabilités de défaillance. Cette information, très intéressante dans un contexte industriel, sera obtenue grâce au principe des facteurs d'omission, c'est-à-dire en remplaçant les variables aléatoires par des valeurs déterministes pour tester leur influence. Les variables sélectionnées seront comparées à celles qui seraient sélectionnées par une analyse de sensibilité préliminaire. Cette dernière méthode n'est pas utilisée ici pour une réduction préalable des variables aléatoires car leur nombre reste relativement faible ; néanmoins il est intéressant de confronter les résultats d'une sélection *a priori* grâce à une méthode de type criblage, avec une sélection *a posteriori* basée sur l'analyse fiabiliste.

Dans la partie suivante, une démarche de résolution différente est présentée pour traiter plus efficacement le problème dans certaines situations. Le principe est de s'appuyer sur les premières SR pour réduire le nombre de variables aléatoires avant d'améliorer l'estimation des probabilités de défaillance. En effet, il est toujours plus aisé d'améliorer la qualité des SR, et donc les probabilités estimées, si le nombre de variables aléatoires est plus faible. Les tests effectués montrent que les résultats obtenus sont très satisfaisants pour un nombre de calculs EF moindre. La dernière partie complète les résultats avec une analyse de sensibilité globale. Celle-ci mesure la part d'incertitude d'une réponse due à chacune des variables et permet d'identifier celles sur lesquelles il faut réduire les incertitudes pour augmenter la fiabilité du système.

### III.7.2 Analyse initiale

On cherche à calculer une première estimation des probabilités de défaillance en construisant des SR autour des valeurs moyennes. Pour cela, un échantillon est généré à partir d'un LHS sur  $\pm 3\sigma$  autour des moyennes dans l'espace normal standard. Il est dimensionné à  $N = 3(M + 1)$  points, c'est-à-dire que 66 calculs EF sont réalisés. Les SR sont construites en suivant la procédure de sélection décrite en section III.3 et sont utilisées pour estimer les probabilités de défaillance avec une méthode FORM suivie de tirages d'importance (500000 simulations). Les valeurs  $Q^2$  des SR, calculées par validation croisée, ainsi que les probabilités de défaillance, sont présentées dans le tableau III.8. Les SR sont globalement correctes et les niveaux de probabilités font porter

N° réponse	1	2	3	4	5	6
$Q^2$	0.991	0.993	0.987	0.979	0.996	0.992
$\hat{P}_f$	$< 10^{-10}$	$5.69 \times 10^{-6}$	$< 10^{-10}$	$4.64 \times 10^{-9}$	$3.54 \times 10^{-4}$	$7.45 \times 10^{-4}$

TABLE III.8 – Valeurs  $Q^2$  des surfaces de réponse de la première analyse – Modèle cube.

l'attention sur les réponses 2, 4, 5 et 6 ; les autres, ayant des probabilités inférieures à  $10^{-10}$ , ne sont plus considérées. On souhaite valider ces estimations avec la méthode *bootstrap* et le calcul des indicateurs (cf. section III.4) ; les régions d'intérêt sont définies avec un niveau d'importance  $\varepsilon_{\text{pdf}} = 0.05$ . Plusieurs observations sont à noter :

- pour les réponses 5 et 6, les PDPP appartiennent à la zone échantillonnée de  $\pm 3\sigma$ , les régions d'intérêt se situent à l'extrémité de ce domaine mais un seul point d'échantillon y est inclus ;

- pour les réponses 2 et 4, les régions d'intérêt ne contiennent aucun point, les PDPP ne sont même pas couverts par le domaine échantillonné.

Pour ces raisons, la méthode adaptative est employée dans le but d'améliorer et de valider l'estimation des probabilités de défaillance. La figure III.25 présente les graphes de dispersion des SR; on peut visualiser que les échantillons des réponses 2 et 4 ne couvrent pas le niveau d'état limite.

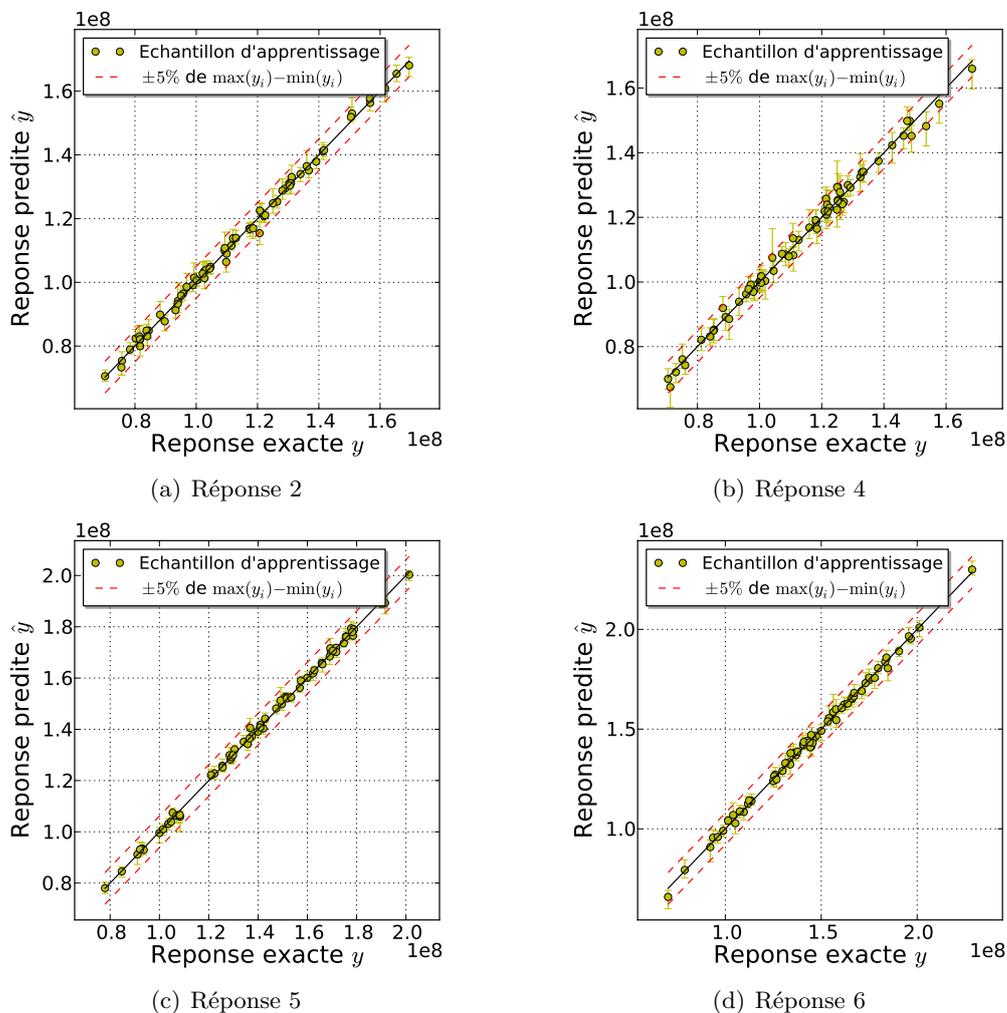


FIGURE III.25 – Graphe de dispersion des SR avec variations *bootstrap* – Modèle cube.

### III.7.3 Application de la méthode adaptative aux réponses 2, 4, 5 et 6

La méthode adaptative évolue, au cours des itérations, en fonction d'une région d'intérêt calculée sur un seul état limite. De ce fait, elle ne permet pas de prendre en compte plusieurs réponses et doit être utilisée, pour chacune d'elle, de manière consécutive. Pour toutes les réponses, la procédure est lancée à partir de l'échantillon de 66 points formé au cours de l'analyse initiale. Les différents paramètres sont fixés aux valeurs suivantes :  $\varepsilon_{\text{pdf}} = 0.05$ ,  $\varepsilon_{\beta} = 0.01$  et  $\varepsilon_{\text{SR}} = 0.995$ ; ils sont identiques pour chaque réponse. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau III.9 où  $\beta^{\text{REF}}$  correspond à l'indice de fiabilité généralisé de référence obtenu par une méthode de Monte Carlo avec 1000000 simulations, directement effectuées sur le modèle de référence. Comme dans les exemples précédents,  $\beta_{\text{SR}}$  est l'indice de fiabilité généralisé estimé sur la SR avec des tirages d'importance (500000 simulations),  $\beta_{\text{SR}_{\text{inf}}}$  et  $\beta_{\text{SR}_{\text{sup}}}$  sont les indices estimés

de la même manière à partir des indicateurs *bootstrap* déterminés dans la région d'intérêt. La dernière colonne du tableau, notée  $N$ , désigne le nombre de points dans l'échantillon final ; il comprend les 66 calculs de l'échantillon initial. Les réponses 2, 4 et 5 ont convergé en 3 itérations

N° réponse	$\beta^{\text{REF}}$	$Q^2$ obtenu	$\beta_{\text{SR}}$	$\beta_{\text{SR}_{\text{inf}}}$	$\beta_{\text{SR}_{\text{sup}}}$	$N$
2	4.22	0.9952	4.21 (0.2%) <sup>a</sup>	4.01 (4.8%) <sup>b</sup>	4.44 (5.5%) <sup>b</sup>	137
4	4.16	0.9956	4.25 (2.2%)	4.06 (4.5%)	4.45 (4.7%)	133
5	3.16	0.9985	3.11 (1.6%)	2.99 (3.9%)	3.25 (4.5%)	138
6	3.06	0.9978	3.06 (0%)	2.91 (4.9%)	3.18 (3.8%)	111

a. Erreur relative avec  $\beta^{\text{REF}}$

b. Écart relatif avec  $\beta_{\text{SR}}$

TABLE III.9 – Résultats de la méthode adaptative – Modèle cube.

et la réponse 6 en 2 itérations. Pour la totalité des réponses, la phase de convergence de la SR n'a pas nécessité de simulations supplémentaires, c'est-à-dire qu'une fois la région d'intérêt localisée (phase de convergence de la région), les SR étaient de qualité suffisante. Toutes les SR finales ont été déterminées sur les échantillons globaux. Les résultats des indices de fiabilité sont représentés en figure III.26 pour une meilleure lisibilité. Les barres d'erreurs autour des valeurs de la méthode adaptative sont les écarts obtenus grâce aux indicateurs *bootstrap*, ceux des tirages de Monte Carlo sont les intervalles de confiance à 95%. Concernant les valeurs de l'analyse initiale, les intervalles de l'indice de fiabilité ne sont pas affichés car trop peu de points sont inclus dans les régions pour les réponses 5 et 6, et aucun pour les réponses 2 et 4. Les valeurs obtenues sont satisfaisantes et les intervalles  $[\beta_{\text{SR}_{\text{inf}}}, \beta_{\text{SR}_{\text{sup}}}]$  encadrent bien les valeurs de référence ainsi que les intervalles de confiance. En l'absence des valeurs de référence, les intervalles  $[\beta_{\text{SR}_{\text{inf}}}, \beta_{\text{SR}_{\text{sup}}}]$  sont suffisamment réduits pour pouvoir valider les résultats.

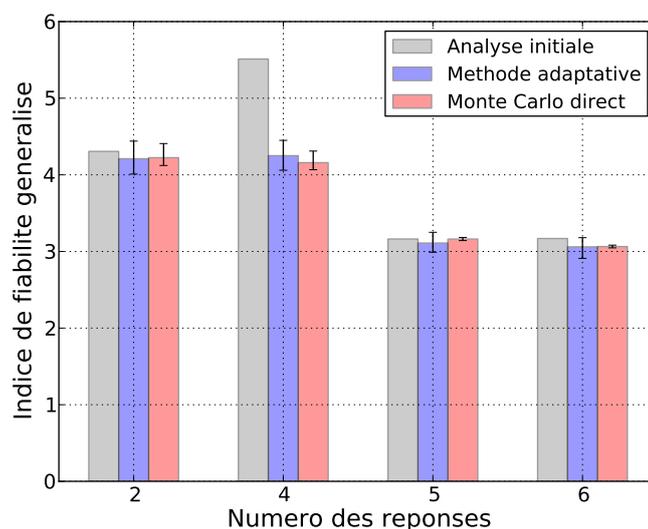


FIGURE III.26 – Comparaison des indices de fiabilité – Modèle cube.

On remarque, pour la réponse 4, que la valeur de l'indice de fiabilité estimée avec la méthode adaptative est bien différente de celle estimée lors de l'analyse initiale alors que le coefficient  $Q^2$  de la SR était relativement bon. Cette situation pourrait être analogue pour les réponses 1 et

3 qui ont été éliminées de l'étude car leur probabilité de défaillance était faible. Pour s'assurer qu'elles sont réellement négligeables, il peut être utile de faire quelques calculs supplémentaires. Dans notre cas, leur probabilité reste bien insignifiantes.

### III.7.4 Sélection des variables

Dans un contexte industriel, le processus de dimensionnement d'une structure est généralement itératif ce qui implique plusieurs réanalyses du modèle. Pour cette raison, réduire le nombre de variables aléatoires dans une phase initiale, en sélectionnant celles qui sont responsables des probabilités de défaillance, ne peut être que bénéfique pour la suite de l'analyse.

On cherche à déterminer les variables les plus influentes à partir des SR déjà construites en utilisant la notion de facteur d'omission présentée en section II.3.3. Son principe consiste à remplacer les variables aléatoires par des valeurs déterministes afin de mesurer leur influence sur la fiabilité. L'idée, ici, est de s'appuyer sur les facteurs d'importance (cf. section II.3.3) pour former des ensembles de variables, de taille croissante, que l'on va fixer à tour de rôle. On note dans la suite  $\mathcal{I}_\epsilon$ , l'ensemble contenant les indices des variables fixées à leur valeur moyenne (les valeurs déterministes choisies, pour substituer aux variables aléatoires, sont les valeurs moyennes). Cet ensemble correspond aux variables pour lesquelles le facteur d'importance est inférieur ou égal à  $\epsilon$ . La démarche adoptée est la suivante :

1. calcul des facteurs d'importance  $\boldsymbol{\alpha}^2 = (\alpha_1^2, \dots, \alpha_{21}^2)$  des variables sur la fonction de performance  $\hat{H}(\mathbf{u})$  ;
2. initialisation :  $\mathcal{I}_\epsilon = \emptyset$  ;
3. boucle sur la liste des variables :
  - (a) ajout à  $\mathcal{I}_\epsilon$  de l'indice de la variable dont le facteur d'importance est le plus faible, et qui n'est pas déjà inclus dans  $\mathcal{I}_\epsilon$  ;
  - (b) calcul de la fonction de performance conditionnée  $\hat{H}(\mathbf{U}|(U_i)_{i \in \mathcal{I}_\epsilon} = \mu_i)$  en remplaçant les variables aléatoires sélectionnées par leur valeur moyenne  $\mu_i$  ;
  - (c) estimation de la probabilité de défaillance conditionnée par les valeurs moyennes des variables fixées  $\hat{P}_{f,\epsilon} = \mathbb{P}(\hat{H}(\mathbf{U}|(U_i)_{i \in \mathcal{I}_\epsilon} = \mu_i) \leq 0)$  et de l'indice de fiabilité généralisé  $\beta_{\text{SR},\epsilon}$  correspondant ;
  - (d) STOP si l'écart relatif entre  $\beta_{\text{SR},\epsilon}$  et  $\beta_{\text{SR}}$  (indice complet) est supérieur à 1%.

Une fois la procédure terminée, les variables dont les indices sont inclus dans  $\mathcal{I}_\epsilon$  sont définitivement fixées à leur moyenne et considérées comme déterministes. La méthode est appliquée aux réponses 2, 4, 5 et 6 et la totalité des variables aléatoires retenues est la réunion des variables retenues sur chaque état limite. La figure III.27 présente les résultats obtenus. On y observe l'évolution des indices de fiabilité généralisés (écart relatif par rapport à l'indice complet) en fonction du nombre de variables aléatoires restantes. On remarque, sur la partie gauche de la courbe, que les indices de fiabilité varient très faiblement alors que le nombre de variables est divisé par 2. Finalement, les variables aléatoires retenues garantissant un écart relatif inférieur à 1% sur les indices de fiabilité sont au nombre de 8, alors qu'elles étaient 21 au départ (cette sélection correspond à  $\epsilon = 1\%$ ). La figure III.28 présente ces variables avec les coordonnées des PDPP (ordonnées des points) et les bornes des régions d'intérêt (barres d'erreur) pour chacune des réponses (les valeurs sont dans l'espace normal standard). Les points sans barre d'erreur signifient que les variables n'ont pas été retenues pour les réponses en question (valeur nulle en ordonnée). Les traits horizontaux en pointillés rouges rappellent l'étendu de  $\pm 3\sigma$  du LHS initial.

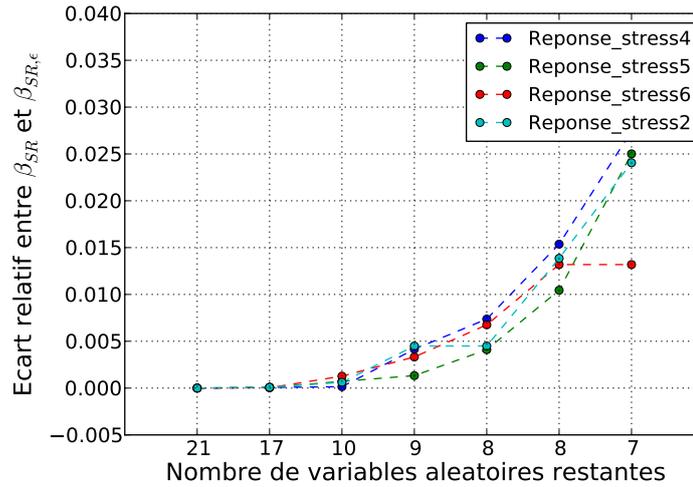


FIGURE III.27 – Sélection des variables aléatoires sur les réponses 2, 4, 5 et 6 – Modèle cube.

Cette sélection montre que le nombre de variables influentes sur les probabilités de défaillance est faible par rapport au nombre initial. Cependant son but n'est pas de classer l'importance des variables mais simplement de réduire leur nombre. Elle peut être complétée avec une analyse de sensibilité globale qui permet de mesurer la part de l'incertitude d'une réponse due à l'incertitude des variables. Cette analyse peut être très intéressante pour améliorer la fiabilité du système, elle est présentée en section III.7.7.

### III.7.5 Analyse de sensibilité préliminaire, comparaison à la sélection des variables

On souhaite comparer la sélection des variables précédentes à une analyse de sensibilité effectuée par la méthode de Morris OAT (cf. section II.5.2). Rappelons que le principe de ce type d'analyse, telle qu'elle est utilisée ici, est de détecter les variables les plus influentes, dans une étape préliminaire, pour limiter le nombre de variables aléatoires pour l'approche probabiliste. L'exemple du cube ne comprend pas un nombre de variables trop important, il n'est donc pas indispensable de mener une étude de sensibilité au préalable. Cependant, il est intéressant de comparer les variables qui seraient sélectionnées par la méthode de Morris OAT, avec celles qui sont sélectionnées par une approche fiabiliste. En effet, ces dernières doivent être incluses dans l'ensemble des variables influentes détectées par criblage.

La méthode de Morris est appliquée au modèle EF mais pas exactement comme elle est décrite en section II.5.2. En effet, pour calculer l'effet élémentaire défini dans l'équation (II.91), semblable à l'approximation par différence finie d'une dérivée partielle, le module *Design Sensitivity Analysis* (DSA) (MSC.Nastran, 2005) du solveur éléments finis MSC.Nastran a été exploité. Ce dernier permet de calculer le gradient de réponses mécaniques en une seule simulation grâce à une approximation semi-analytique. À partir de la relation d'équilibre statique  $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}$ , la dérivée partielle des déplacements  $\mathbf{u}$  par rapport à une variable  $x_m$  peut être exprimée par :

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_m} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_m} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_m} \mathbf{u} \quad (\text{III.27})$$

Son coût de calcul est alors réduit étant donné que la matrice de rigidité  $\mathbf{K}$  est disponible sous forme décomposée après résolution de l'équation d'équilibre. Seules les dérivées partielles

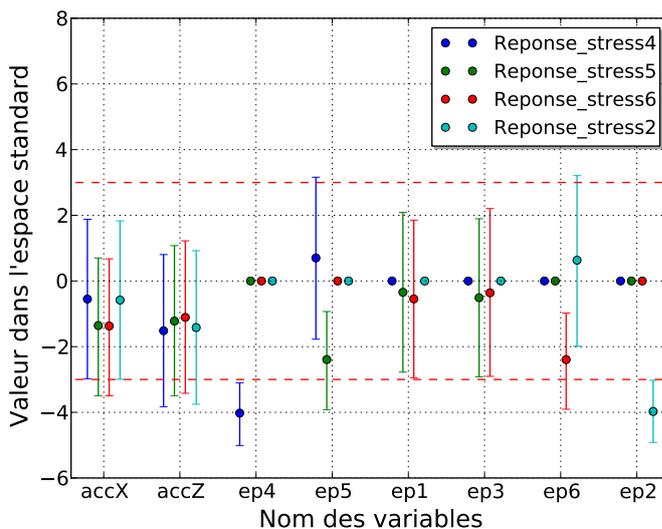


FIGURE III.28 – Bornes des régions d'intérêt des variables aléatoires restantes pour les réponses 2, 4, 5 et 6 – Modèle cube.

$\partial \mathbf{F} / \partial x_m$  et  $\partial \mathbf{K} / \partial x_m$  sont approchées par différences finies mais leur coût reste relativement faible.

En remplaçant le calcul des effets élémentaires par celui des dérivées partielles tel qu'il est décrit, le plan d'expérience de la méthode de Morris, schématisé par des trajectoires dans l'espace des paramètres d'entrée (cf. figure II.10), est modifié. En effet, le calcul du gradient, effectué en un seul point de l'espace, remplace les simulations nécessaires pour toute une trajectoire. Ces modifications impliquent simplement de choisir les valeurs des paramètres d'entrée auxquelles les gradients sont calculés ; cette procédure sera effectuée grâce à un LHS. Le post-traitement des résultats reste inchangé et revient à estimer les statistiques  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\mu}^*$  et  $\hat{\sigma}$  à partir des échantillons des dérivées partielles.

Cette méthodologie est appliquée au modèle EF pour déterminer les sensibilités des 6 réponses de départ par rapport aux 21 variables. Un LHS de 15 points est généré sur  $\pm 5\sigma$  autour des moyennes et les gradients des réponses sont calculés en chaque point. Les indicateurs  $\hat{\mu}^*$  et  $\hat{\sigma}$  sont déterminés et permettent de hiérarchiser l'importance des variables. Les résultats ne sont pas illustrés comme sur la figure II.11 mais plutôt à l'image d'un diagramme de Pareto, c'est-à-dire en représentant le cumul de l'importance des variables, classées dans l'ordre décroissant, en fonction du nombre de variables. Un exemple est donné en figure III.29 pour les réponses 5 et 6. Grâce à ce graphe, les variables peuvent être sélectionnées simplement, en fonction de l'allure de la courbe, en choisissant un seuil sur le cumul de  $\hat{\mu}^*$  (par exemple, les variables qui influencent 95% de la réponse). Toutes les réponses ne sont pas présentées mais les résultats sont analogues. En observant, par exemple, que 90% de chacune des réponses est influencée par seulement 5 variables, on remarque que seul un petit groupe de variables est important. Cependant, ces graphes traduisent les informations obtenues sur chaque réponse indépendamment les unes des autres. Les ensembles de variables influentes doivent donc être réunies au sein d'un même groupe. La figure III.30 présente le nombre de variables total, c'est-à-dire réunies parmi toutes les réponses, en fonction d'un seuil de sélection appliqué au cumul de  $\hat{\mu}^*$ . On observe qu'avec un seuil de 99%, seulement 11 variables au total sont sélectionnées. Ces variables sont  $[accX, accY, accZ, ep_1, ep_2, ep_3, ep_4, ep_5, ep_6, \nu_1, E_3]$ . Elles englobent bien les variables sélection-

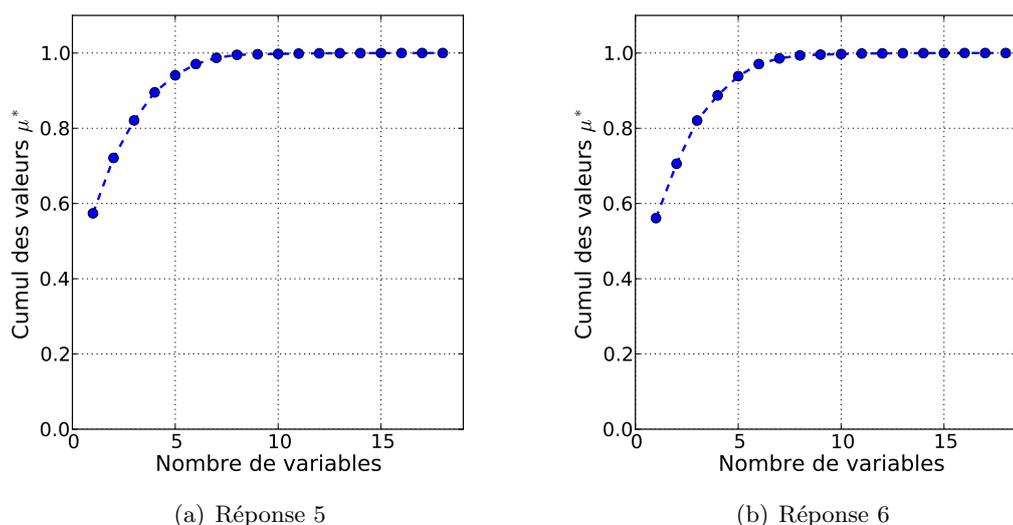


FIGURE III.29 – Diagrammes de Pareto de la sensibilité des variables (valeur  $\hat{\mu}^*$  obtenue par la méthode de Morris OAT) pour les réponses 5 et 6 – Modèle cube.

nées par l'analyse fiabiliste, effectuée *a posteriori*, à la section précédente.

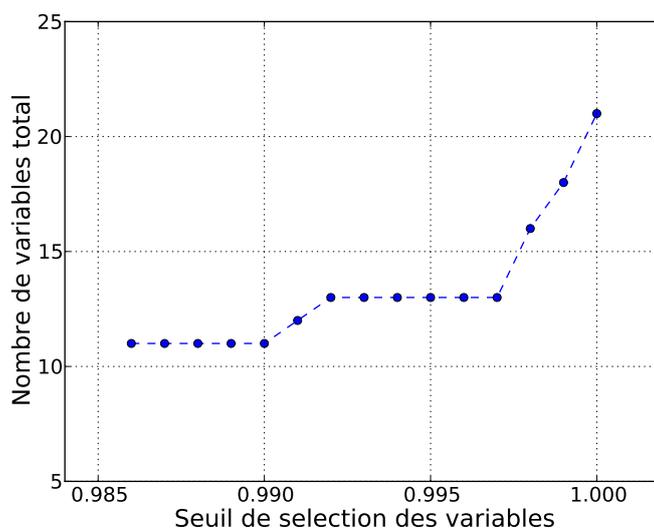


FIGURE III.30 – Évolution du nombre de variables total en fonction du seuil de sélection appliqué au cumul de  $\hat{\mu}^*$  – Modèle cube.

La méthode de Morris a l'avantage d'être globale dans le sens où elle mesure la sensibilité des variables sur un domaine de variation. Cependant, l'étendue de ce domaine est paramétrée *a priori*, et peut ne pas contenir l'essentiel de l'information utile pour l'analyse de fiabilité : c'est le cas s'il ne couvre pas une partie de l'état limite. Par exemple, une variable peut être très influente dans une zone proche de l'état limite et peu influente autour de sa valeur moyenne. Ici, l'analyse est réalisée sur  $\pm 5\sigma$  autour des moyennes mais aurait pu l'être sur  $\pm 3\sigma$ , comme l'échantillon initial pour la construction des SR. Or les régions importantes des variables  $ep_2$  et  $ep_4$ , pour les réponses 2 et 4, se situent en dehors de la zone  $\pm 3\sigma$  (cf. figure III.28), ce qui pose un problème pour l'interprétation des sensibilités. Pour cette raison, il est parfois délicat de

sélectionner certaines variables si les résultats de sensibilité recueillis ne sont pas très explicites.

L'analyse de sensibilité préliminaire est également un moyen de privilégier un domaine d'échantillonnage pour la construction des SR en fonction de l'influence des variables, l'objectif étant de se rapprocher du domaine de défaillance. Pour cela, il suffit de comparer les statistiques  $\hat{\mu}$  et  $\hat{\mu}^*$  fournies par la méthode de Morris. Si elles sont égales, l'influence de la variable est monotone sur le domaine exploré et le signe de  $\hat{\mu}$  donne la direction du domaine de défaillance. Cependant, quand plusieurs réponses sont étudiées, les informations doivent être réunies et il n'est pas toujours évident de pouvoir privilégier une direction. En effet, une variable peut avoir un effet d'action sur une réponse et un effet de résistance sur une autre. Pour notre cas, la seule conclusion concerne les amplitudes de chargement : elles ont toutes un effet d'action.

### III.7.6 Autre démarche, exemple des réponses 5 et 6

Dans les sections III.7.2, III.7.3 et III.7.4 le principe a été d'améliorer l'estimation de la fiabilité à partir de l'analyse initiale, puis de rechercher les variables les plus influentes. La méthode adaptative a été lancée de manière consécutive sur chacune des réponses en démarrant, à chaque fois, de l'échantillon initial. Cela peut être un inconvénient en terme de temps de calcul car, pour améliorer une réponse donnée, on ne profite pas de l'échantillon généré au cours des itérations lorsque la méthode a déjà été appliquée sur une autre réponse. Notons que cette démarche est possible mais n'est pas toujours avantageuse selon les réponses. En effet, si pour deux réponses, les variables influentes communes ont des effets antagonistes, c'est-à-dire d'action et de résistance, les régions d'intérêt peuvent être très différentes. Dans ce cas, démarrer de l'échantillon généré par la méthode sur la première réponse peut être défavorable par rapport à l'échantillon initial. Il est donc intéressant de regrouper, après l'analyse initiale, les réponses dont les régions d'intérêt sont relativement proches. Quoiqu'il en soit, si l'estimation de la probabilité de défaillance doit être améliorée après l'analyse initiale, cela est toujours plus facile quand le nombre de variables est faible. Pour cette raison, il est préférable de rechercher les variables les plus influentes avant l'application de la méthode adaptative. Cependant, étant donné que la sélection des variables est basée sur la SR et le calcul de la probabilité de défaillance, il est indispensable que la SR soit suffisamment précise et qu'elle couvre l'état limite autour du PDPP. C'est le cas pour les réponses 5 et 6.

#### III.7.6.1 Sélection des variables

Les variables les plus influentes sont recherchées à partir des SR de l'analyse initiale, construite sur l'échantillon de 66 points généré par LHS sur  $\pm 3\sigma$  autour des moyennes. La même démarche qu'à la section III.7.4 est appliquée sur les réponses 5 et 6. La figure III.31 présente l'évolution des indices de fiabilité généralisés (écart relatif par rapport à l'indice complet) en fonction du nombre de variables aléatoires restantes. Pour que l'écart relatif par rapport à l'indice complet soit inférieur à 1%, le nombre total de variables aléatoires retenues est de 8. Cet ensemble de variables est  $[accX, accZ, ep_1, ep_3, ep_4, ep_5, ep_6, E_5]$ , il englobe bien celles qui ont été retenues à la section III.7.4 pour les réponses 5 et 6 (cf. figure III.28).

#### III.7.6.2 Nouvelle analyse après réduction

Les variables n'étant plus les mêmes qu'au départ, un nouvel échantillon initial doit être formé ; il peut être limité à la zone voisine de l'état limite grâce à la première estimation des régions d'intérêt. Ces dernières étant très proches pour les deux réponses considérées, il est avantageux de les réunir au sein d'une même région les englobant. Un LHS de 27 points est donc généré

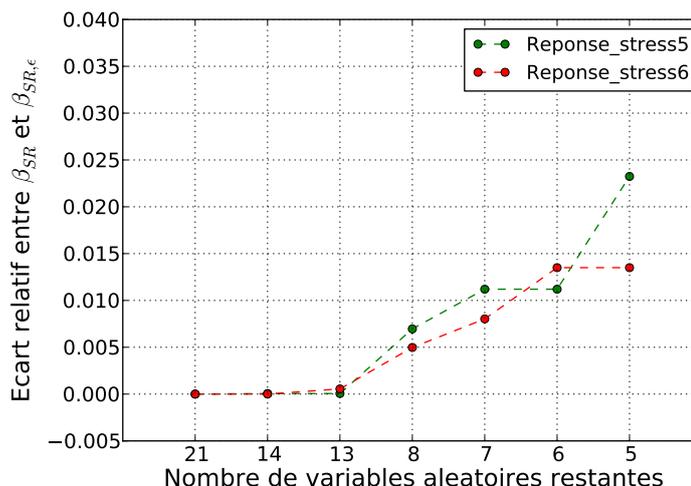


FIGURE III.31 – Sélection des variables aléatoires sur les réponses 5 et 6 après l'analyse initiale – Modèle cube.

dans l'hypercube  $\prod_{m=1}^{M_{\text{select}}} [B_{m_{\text{inf}}}, B_{m_{\text{sup}}}]$  avec :

$$B_{m_{\text{inf}}} = \min_{i=5,6} b_{m_{\text{inf}}}^{(i)} \quad \text{et} \quad B_{m_{\text{sup}}} = \max_{i=5,6} b_{m_{\text{sup}}}^{(i)} \quad m = 1, \dots, 8 \quad (\text{III.28})$$

où  $b_{m_{\text{inf}}}^{(i)}$  et  $b_{m_{\text{sup}}}^{(i)}$  sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de la région d'intérêt de la  $m$ -ième variable relative à la  $i$ -ième réponse. Les SR sont construites et les probabilités de défaillance sont estimées par tirages d'importance (500000 simulations). La méthode *bootstrap* est également utilisée pour fournir les indicateurs de validation. Les valeurs sont présentées dans le tableau III.10 avec les coefficients  $Q^2$  des SR.

N° réponse	$\beta^{\text{REF}}$	$Q^2$	$\beta_{\text{SR}}$	$\beta_{\text{SR}_{\text{inf}}}$	$\beta_{\text{SR}_{\text{sup}}}$
5	3.16	0.961	3.24 (2.5%) <sup>a</sup>	2.83 (12.7%) <sup>b</sup>	3.54 (9.3%) <sup>b</sup>
6	3.06	0.993	3.01 (1.6%)	2.59 (14.0%)	3.44 (14.3%)

a. Erreur relative avec  $\beta^{\text{REF}}$

b. Écart relatif avec  $\beta_{\text{SR}}$

TABLE III.10 – Première estimation des indices de fiabilité des réponses 5 et 6 après réduction du nombre de variables aléatoires – Modèle cube.

### III.7.6.3 Méthode adaptative

Pour réduire l'intervalle  $[\beta_{\text{SR}_{\text{inf}}}, \beta_{\text{SR}_{\text{sup}}}]$ , la méthode adaptative est appliquée à partir de l'échantillon de 27 points précédemment générés. La réponse 5 est traitée en premier car la SR possède la plus faible valeur  $Q^2$ . Pour cela, les paramètres de la méthode sont fixés à :  $\varepsilon_{\text{pdf}} = 0.05$ ,  $\varepsilon_{\beta} = 0.01$  et  $\varepsilon_{\text{sr}} = 0.99$ . Le dernier paramètre, qui concerne la convergence de la SR, peut être réajusté si les variations observées par le *bootstrap* sont trop importantes. Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau III.11. La méthode a convergé en 3 itérations avec 37 simulations supplémentaires. La SR finale est construite sur l'échantillon global et sa valeur  $Q^2$

vaut 0.9986. L'intervalle  $[\beta_{SR_{inf}}, \beta_{SR_{sup}}]$  obtenu est suffisamment réduit pour valider l'estimation de l'indice de fiabilité.

N° réponse	$\beta^{REF}$	$Q^2$	$\beta_{SR}$	$\beta_{SR_{inf}}$	$\beta_{SR_{sup}}$	$N$
5	3.16	0.9986	3.15 (0.3%) <sup>a</sup>	3.07 (2.5%) <sup>b</sup>	3.25 (3.1%) <sup>b</sup>	27 + 37 = 64
6	3.06	0.9994	3.09 (1.0%)	3.03 (2.0%)	3.15 (2.0%)	64 + 0 = 64

a. Erreur relative avec  $\beta^{REF}$

b. Écart relatif avec  $\beta_{SR}$

TABLE III.11 – Indices de fiabilité des réponses 5 et 6 obtenus avec la méthode adaptative après réduction du nombre de variables – Modèle cube.

L'échantillon généré au cours des itérations est utilisé pour traiter la réponse 6. La SR est construite sans simulation supplémentaire, la probabilité de défaillance ainsi que les indicateurs de validation sont estimés. Les résultats sont reportés dans le tableau III.11. On observe que ce nouvel échantillon permet de largement améliorer la qualité de la SR et donc de réduire l'intervalle autour l'indice de fiabilité.

Les valeurs des indices de fiabilité, calculées à chaque étape, sont illustrées en figure III.32 pour plus de lisibilité. Sur celle-ci, les barres d'erreur représentent les intervalles de confiance à 95% pour la méthode de Monte Carlo et les intervalles des indicateurs *bootstrap* pour les autres méthodes. Nous rappelons que les valeurs de référence obtenues par Monte Carlo (1000000 simulations) tiennent compte des 21 variables aléatoires de départ. Avec cette démarche, le nombre de calculs EF, pour les réponses 5 et 6, est quasiment divisé par 2 par rapport à la démarche initiale.

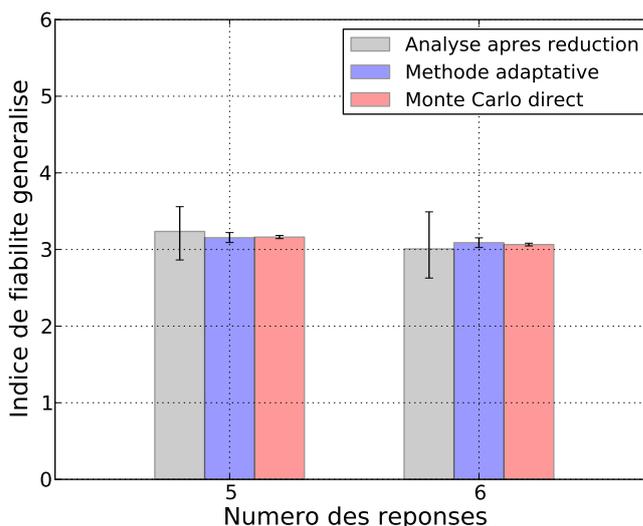


FIGURE III.32 – Indices de fiabilité des réponses 5 et 6 calculés après réduction du nombre de variables aléatoires – Modèle cube.

### III.7.7 Analyse de sensibilité globale

Une fois le nombre de variable aléatoire réduit et les probabilités de défaillance estimées, l'analyse de sensibilité globale (cf. section II.5.3) complète l'information en fournissant la part de la variabilité d'une réponse due à chacune des variables d'entrée. Cet indicateur est très intéressant dans un contexte d'amélioration de la structure puisqu'il permet d'identifier les variables sur lesquelles les efforts doivent être portés dans le but de réduire les niveaux de défaillance.

Les indices de Sobol sont estimés sur les réponses 2, 4, 5 et 6 à partir des SR obtenues avec la méthode adaptative, grâce à 2000000 tirages de Monte Carlo. Seuls les indices des variables aléatoires finalement retenues sont calculés. Les résultats des indices totaux sont présentés en figure III.33. Pour la majorité des variables, les valeurs de ces indices sont essentiellement dues aux indices du premier ordre, ce qui implique que leur effet est principalement linéaire. Rappelons que si les effets des variables sont linéaires, il est inutile de calculer les indices de Sobol et les coefficients SRC (cf. équation (II.95)) sont suffisants.

Naturellement les variables les plus influentes sont les épaisseurs des panneaux correspondant respectivement à chaque réponse, mais l'analyse montre également que l'amplitude de l'accélération dans la direction  $Z$  est très influente notamment pour les réponses 2 et 4. Ces résultats sont globalement cohérents avec ceux de la figure III.28. En effet, d'après la définition des facteurs d'importance calculés par FORM (cf. équation (II.45)), plus la valeur d'une variable dans l'espace standard est éloignée de l'origine plus la variable est influente.

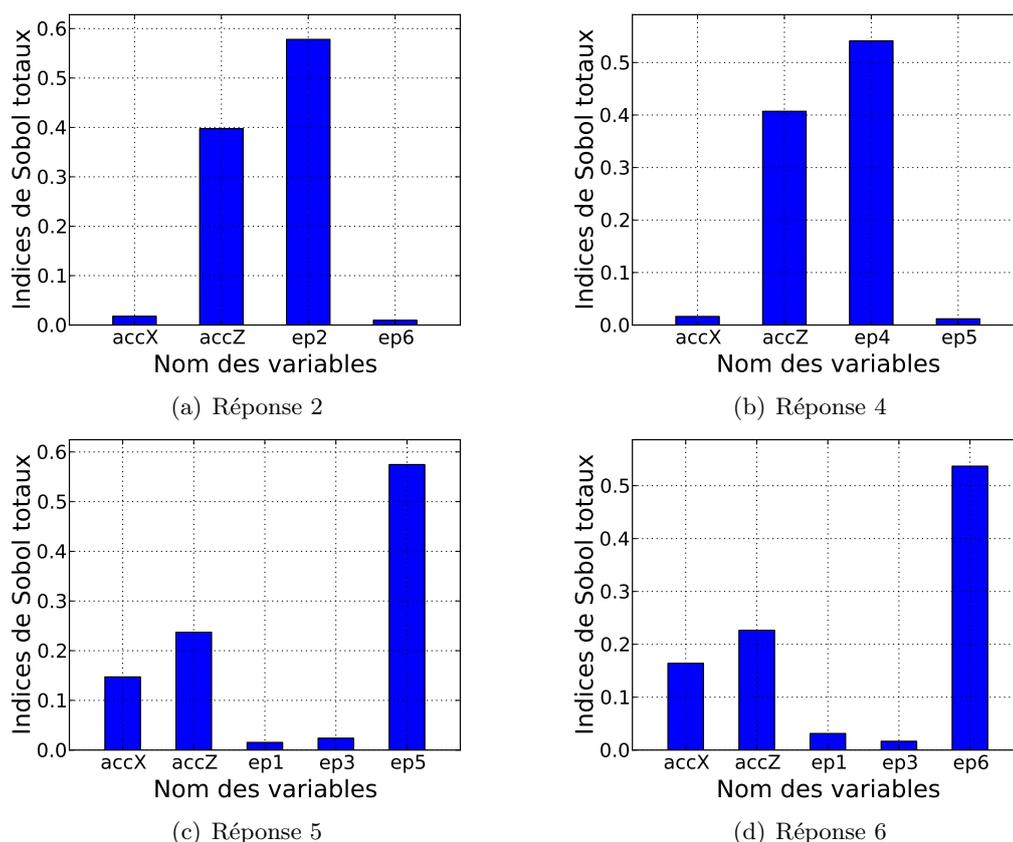


FIGURE III.33 – Indices de Sobol totaux – Modèle cube.

Notons bien que l'analyse de sensibilité globale concerne la dispersion des variables autour du point de fonctionnement moyen. Il est donc nécessaire que la SR soit bien représentée dans ce domaine. Si ce n'est pas le cas, une démarche possible est d'enrichir la SR autour des valeurs

moyennes, après une analyse initiale, puis d'utiliser la méthode adaptative pour affiner l'estimation de la probabilité de défaillance.

### III.7.8 Conclusion

Cette section propose une première application plus proche du contexte industriel. Le modèle est encore relativement simple mais plus représentatif d'une structure de satellite. Deux démarches sont présentées :

- La première est classique et consiste à commencer par une estimation des probabilités de défaillance basée sur les SR construites autour des valeurs moyennes. Les grandeurs d'intérêt les plus significatives sont identifiées et la méthode adaptative est utilisée, sur chaque réponse, pour améliorer la précision de l'estimation des probabilités. Enfin, les variables les plus influentes sont recherchées à partir d'une analyse de sensibilité fiabiliste. On observe que le nombre de variables aléatoires retenues est relativement faible par rapport au nombre initial.
- La seconde démarche est présentée sur les réponses 5 et 6. Elle revient à sélectionner les variables aléatoires les plus influentes sur la base des premières SR construites autour des valeurs moyennes, avant d'améliorer l'estimation des probabilités de défaillance. L'idée de cette démarche est simplement de réduire la complexité du problème pour mieux estimer les probabilités de défaillance avec un temps de calcul réduit. Les conclusions sont convaincantes car les résultats sont très proches de la démarche initiale et le nombre de simulations EF est quasiment divisé par 2 (pour les réponses 5 et 6). Cependant cette démarche n'est pas applicable dans toutes les situations car certaines conditions sont à respecter : les premières SR doivent être suffisamment correctes et doivent couvrir une partie de l'état limite autour du PDPP. En effet, ces dernières sont utilisées avec une procédure FORM (suivie de tirages) pour sélectionner les variables aléatoires les plus influentes. Il ne faut donc pas risquer de conclure sur de mauvaises variables. Pour les réponses 2 et 4, cette démarche n'est pas appliquée car le PDPP n'est pas couvert par les SR. Il serait donc nécessaire d'ajouter des points d'échantillon proche de l'état limite ; mieux vaut dans ce cas utiliser directement la méthode adaptative sachant que les premières estimations de SR sont d'assez bonne qualité.

Cet exemple a également permis d'appliquer la méthode de Morris OAT, utile pour une analyse de sensibilité préliminaire. Ceci permet de voir que les variables qui seraient sélectionnées par cette méthode incluent bien celles qui sont réellement influentes sur la fiabilité. Les résultats sont enfin complétés par une analyse de sensibilité globale réalisée à moindre coût à partir des SR construites dans la zone centrale (*i.e* autour des moyennes).

Les résultats ainsi que les remarques permettent de conclure sur une démarche de résolution générale qui pourra être appliquée à d'autres modèles. Cette dernière peut varier en fonction de l'application et du besoin mais les principales étapes peuvent être définies de la manière suivantes :

- **Analyse de sensibilité préliminaire.** L'objectif principal est la réduction du nombre de variables aléatoires dans le but de faciliter l'analyse de fiabilité. Cette réduction peut être délicate, il est donc nécessaire de bien distinguer les variables non influentes dans le domaine étudié. Les résultats peuvent nous renseigner également sur l'effet des variables et donc sur la direction du domaine de défaillance. Cependant, une fois que les informations de chaque réponse sont regroupées, les conclusions sont moins évidentes. Les bénéfices peuvent donc varier d'une application à une autre.
- **Analyse de fiabilité initiale.** Un échantillon est formé à partir d'un LHS pour construire les premières SR. Si des directions préférentielles sont observées avec l'analyse de

sensibilité, l'échantillonnage peut être orienté dans la direction des domaines de défaillance. Dans le cas contraire, l'échantillon est formé autour des valeurs moyennes. Les SR sont utilisées pour estimer les probabilités de défaillance et identifier les réponses dont les valeurs sont les plus significatives. Cependant, les résultats sont fortement dépendants de la qualité des SR. Si nécessaire, ces dernières peuvent être améliorées grâce à la méthode adaptative, ou éventuellement par un simple enrichissement.

- **Sélection des variables.** Dans le cas où les premières SR le permettent, cette partie tente de réduire le nombre de variables aléatoires. La sélection peut être plus efficace que pour l'étape de sensibilité préliminaire car la sensibilité est ici mesurée par rapport à la fiabilité et le nombre de réponses d'intérêt est déjà réduit.
- **Méthode adaptative.** La méthode adaptative est un outil permettant d'augmenter la confiance que l'on a dans l'estimation des probabilités de défaillance. Comme toutes méthodes de fiabilité, elle est plus performante si le nombre de variables aléatoires est réduit. Étant donné qu'elle est pilotée par la région d'intérêt d'un seul état limite, elle ne permet pas de traiter simultanément plusieurs réponses. Cependant, l'échantillon généré par la méthode, lorsqu'elle est appliquée sur une réponse, peut être employé pour la construction d'autres SR. Pour cela, il est toujours plus efficace de regrouper les réponses dont les régions d'intérêt sont voisines, lorsque c'est possible.
- **Analyse de sensibilité globale.** En cherchant la part de variabilité d'une réponse due à chacune des variables aléatoires d'entrée, on peut détecter celles dont les incertitudes associées sont les plus critiques pour la défaillance de la structure. Si ces incertitudes peuvent être réduites la fiabilité du système peut être améliorée efficacement.

### III.8 Conclusion générale

Ce chapitre présente une démarche générale de construction et d'application des SR pour notre cadre d'étude. La première section met en garde sur le problème fondamental de l'approximation de modèle : l'évaluation de l'erreur. Plusieurs outils sont présentés et permettent d'aboutir à une méthode de construction de SR. Son principe est d'estimer plusieurs SR en choisissant les termes de manière itérative en fonction de plusieurs critères d'erreur et de sélectionner la plus performante au sens du coefficient  $Q^2$  déterminé par validation croisée. Ce dernier critère donne une estimation robuste de l'erreur globale de la SR mais reste limité dans le cas de l'analyse de fiabilité. En effet, il n'est pas représentatif de l'erreur proche de l'état limite qui se situe généralement à l'extrémité du domaine étudié. Pour cela, un critère plus pertinent est proposé : il est basé sur la méthode *bootstrap*. Celle-ci est utilisée pour déterminer les variations des prédictions de la SR aux points de l'échantillon en formant plusieurs sous-échantillons aléatoires par tirages avec remise. Des indicateurs sont calculés en retenant la valeur maximale des différences entre les prédictions extrémales et les prédictions nominales, et sont reportés sur la fonction d'état limite pour déterminer un intervalle de l'estimation de la probabilité de défaillance. Cet intervalle donne une information de l'influence de l'erreur de la SR sur la probabilité de défaillance ; il est le critère de validation de la démarche. Cependant, pour être plus proche de l'état limite, les indicateurs *bootstrap* sont calculés dans une région d'intérêt définie en fonction d'un niveau d'importance de la densité de probabilité au PDPP. L'intérêt est de se limiter à la région qui contribue le plus à la probabilité de défaillance.

La section III.6 discute de l'application générale des outils précédents. Pour débiter une étude, la SR est généralement construite autour du point moyen sur un certain nombre d'écartstype, à moins que la direction du domaine de défaillance soit disponible. Naturellement, cette première phase n'est pas toujours suffisante pour estimer correctement la probabilité de défaillance. Deux situations sont envisageables : soit l'estimation de la probabilité de défaillance

n'est pas assez précise (intervalle observé par *bootstrap* trop important), soit l'information pour valider l'estimation n'est pas assez riche. Dans tous les cas il est nécessaire d'enrichir l'échantillon initial pour améliorer le résultat. Une méthode adaptative est proposée à cet effet : elle consiste à ajouter des points d'échantillon supplémentaires dans la région d'intérêt de manière itérative. La procédure possède deux critères de convergence : le premier permet de localiser la région d'intérêt qui est mise à jour à chaque enrichissement de l'échantillon ; le second concerne la qualité globale de la SR estimée par le coefficient  $Q^2$ . Ces deux critères définissent deux phases de la méthode appelées respectivement convergence de la région et convergence de la SR. La dernière phase est celle de validation basée sur la procédure *bootstrap*. Si la précision du résultat n'est pas satisfaisante, la méthode peut être relancée avec un critère  $\varepsilon_{sr}$  plus contraignant dans le but d'obtenir un intervalle de probabilité plus faible.

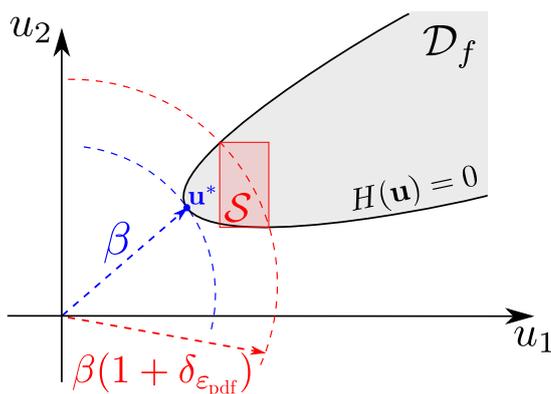


FIGURE III.34 – Exemple de problème lié à la région d'intérêt.

La procédure de validation basée sur le *bootstrap* ne garantit pas de calculer un intervalle incluant la vraie valeur de probabilité de défaillance. Cependant, elle semble fournir une information plus pertinente pour l'analyse de fiabilité étant donné qu'elle tient compte de l'erreur de la SR proche de l'état limite. La méthode adaptative est un outil complémentaire permettant d'augmenter la confiance que l'on a de l'estimation de la probabilité de défaillance. Bien évidemment, la méthode a certaines limites et ne permet pas toujours d'améliorer le résultat souhaité. L'exemple du portique de la section III.6.4.3 en est une illustration. Ce cas montre que la région d'intérêt, définie avec un faible niveau d'importance, peut être trop grande par rapport à la non-linéarité de la réponse pour qu'elle puisse être approchée par une SR. Malgré cela, l'algorithme peut converger pour certaines valeurs des paramètres mais elles ne sont pas naturelles compte tenu de la manière dont la méthode est construite. D'autres limitations sont à prendre en considération. Un exemple est présenté en figure III.34 où l'état limite est fortement convexe et la région d'intérêt ne permet pas d'encadrer le PDPP. Dans cette situation, on pourra toujours trouver le moyen de l'encadrer : soit en construisant la région dans l'axe de l'indice de fiabilité, soit en suivant les courbures de l'état limite. Cependant, il est plus délicat de regrouper plusieurs régions si plusieurs états limites entrent en jeu. Enfin, la méthode ne permet pas de considérer un domaine de défaillance non connexe.

La dernière section présente une application plus proche d'une structure satellite. Elle permet de mettre en place les principales étapes d'une démarche générale pour traiter l'analyse de fiabilité dans le cas de chargements statiques. L'objectif de cette démarche est de réduire progressivement la complexité du problème initial jusqu'à obtenir une estimation fiable des probabilités de défaillance relatives aux critères les plus significatifs. La procédure peut varier en fonction

du besoin ou des résultats obtenus mais les principales étapes sont les suivantes :

- analyse de sensibilité préliminaire pour une réduction préalable du nombre de variables ;
- analyse de fiabilité initiale, construction des premières surfaces de réponse, sélection des réponses significatives ;
- sélection des variables aléatoires basée sur l'analyse fiabiliste ;
- méthode adaptative pour améliorer l'estimation des probabilités de défaillance ;
- analyse de sensibilité globale pour déterminer l'influence des variables aléatoires sur l'incertitude des réponses.

Même si, pour ce modèle, le nombre de variables aléatoires et de réponses reste faible par rapport à un modèle industriel, on peut observer les premiers avantages d'une méthodologie basée sur les méta-modèles. L'analyse initiale de fiabilité peut permettre d'identifier les réponses les plus significatives sans simulation inutile du modèle de référence, le nombre de variables aléatoires peut être réduit sans simulation supplémentaire et l'analyse de sensibilité globale est menée à moindre coût sur les méta-modèles. De plus les SR sont suffisantes pour résoudre ce cas d'application. Cette démarche sera appliquée sur une vraie structure de satellite dans le chapitre suivant.



## Chapitre IV

# Analyse statique du satellite TARANIS

### Sommaire

---

IV.1 Introduction . . . . .	92
IV.2 Description du modèle et de l'étude . . . . .	92
IV.3 Analyse de sensibilité préliminaire . . . . .	96
IV.4 Analyse de fiabilité initiale . . . . .	97
IV.5 Sélection des variables . . . . .	99
IV.6 Seconde analyse après réduction . . . . .	99
IV.7 Méthode adaptative sur la réponse PZ_c4 . . . . .	100
IV.8 Analyse de sensibilité globale . . . . .	102
IV.9 À propos d'une analyse avec les variables de post-traitement aléatoires . . . . .	102
IV.10 Conclusion . . . . .	104

---

## IV.1 Introduction

La première exigence qui dimensionne la structure d'un satellite est sa tenue en environnement de charge statique. Dans la réalité, le cas statique correspond à des charges dont les variations sont lentes par rapport aux premières fréquences propres du satellite : il est donc plus communément appelé chargement quasi-statique. Il est simulé en imposant au modèle EF du satellite à des champs d'accélération uniformes suivant les directions X, Y et Z. Le modèle est lui-même encastré à sa base, ce qui représente la jonction avec le lanceur.

L'objectif de l'analyse statique est de vérifier la tenue en résistance de la structure primaire par laquelle les efforts transitent. Cela comprend de nombreux composants parmi lesquels on compte les panneaux, supports, cornières, etc mais aussi les éléments de jonction tels que les vis et les inserts. Le critère majeur à vérifier est la tenue en contrainte par rapport à la limite élastique et à rupture. Dans le cas des vis, les possibilités de glissement et de décollement de la jonction sont également évalués. Les critères sont calculés sous forme de marge de sécurité à la manière de l'équation (I.1) où les sollicitations sont majorées avec un coefficient de sécurité, qui dépend du chargement imposé et de la phase de conception du modèle mécanique, et les admissibles sont des valeurs à contenu statistique telles que des types A ou B.

Ce chapitre décrit une analyse de fiabilité sous chargement statique menée sur le satellite TARANIS, actuellement en cours de développement. Les critères de dimensionnement sont strictement les mêmes que pour le cas déterministe mis à part que l'on s'intéresse à estimer la probabilité que les marges de sécurité soient négatives (probabilités de défaillance). Pour cela, les coefficients de sécurité sur les sollicitations ne sont pas pris en compte. Ils sont remplacés par le fait qu'on tienne compte des incertitudes associées aux variables du modèle. Seuls les admissibles resteront des valeurs à contenu statistique ; la raison est expliquée en section IV.9. Le modèle EF, les réponses étudiées et les variables aléatoires prises en compte sont détaillés dans la section suivante.

TARANIS (cf. figure IV.1(a)) est un satellite scientifique développé par le CNES, en collaboration avec d'autres laboratoires de recherche. Il a pour mission d'étudier les échanges d'énergie au niveau des différentes couches de l'atmosphère, entre 20 et 100 km d'altitude, lors de périodes orageuses et notamment en présence d'éclairs. Ces transferts d'énergie, appelé événements lumineux transitoires (TLE pour *Transient Luminous Events*), ont été découverts il y a peu de temps et sont probablement à l'origine de phénomènes perturbateurs très importants de l'environnement terrestre. Le satellite est composé d'une plate-forme appartenant à la filière des micro-satellites MYRIADE (cf. figure IV.1(b)). Elle pèse environ 100 kg et sa structure est un cube de 60 cm de base pour 50 cm de hauteur. La charge utile, située au dessus de la plate-forme, pèse environ 85 kg et possède de nombreux instruments et capteurs ; elle est pointée en direction de la Terre lors de sa mission.

## IV.2 Description du modèle et de l'étude

Le modèle EF est présenté en figure IV.2. Il est réalisé pour le solveur MSC.Nastran. Il possède environ 380000 degrés de liberté et les éléments sont essentiellement surfaciques. Seul quelques éléments volumiques apparaissent pour représenter l'encombrement, la masse et l'inertie de certains composants. Parmi les phases de conception d'un satellite, ce modèle correspond à une phase de définition préliminaire. Celui-ci est considéré comme exact dans le sens où il n'est pas remis en cause dans la suite du travail. Il constitue donc le modèle de référence.

Pour limiter le nombre de réponses et de variables à traiter, l'analyse probabiliste est menée sur les ensembles les plus critiques identifiés lors d'une analyse déterministe classique. Il s'agit



(a) Mission TARANIS.



(b) Plate-forme MYRIADE ouverte.

FIGURE IV.1 – TARANIS.

des panneaux latéraux et supérieur et du plateau inférieur de la plateforme ainsi que des vis de liaison aux interfaces entre les panneaux latéraux et le plateau inférieur. Les modèles EF de ces composants sont présentés en figure IV.3. Les panneaux latéraux et inférieur sont réalisés en composite sandwich munis de peaux en aluminium et d'une âme nida. Ils sont modélisés par des éléments plaques équivalents traduisant le comportement membrane, flexion et cisaillement. Le plateau inférieur est réalisé en aluminium usiné dans la masse et modélisé également par des éléments plaques. Le critère de défaillance analysé sur ces composants est la marge élastique, elle est définie par :

$$MS_{\text{elas}} = \frac{R_e}{\sigma_{VM}} - 1 \quad (\text{IV.1})$$

où  $R_e$  désigne la limite élastique et  $\sigma_{VM}$  correspond à la contrainte maximale de Von Mises calculée sur le modèle EF. Les vis de liaison sont en titane et sont modélisées par des éléments ressorts permettant de récupérer les efforts transmis. Le critère de défaillance analysé est la marge de glissement de l'interface, elle est définie par :

$$MS_{\text{gliss}} = \frac{P - |F_N|}{\frac{\|F_T\|}{f_{\text{ass}}}} - 1 \quad (\text{IV.2})$$

où  $P$  correspond à l'effort de précharge dans la vis,  $|F_N|$  et  $\|F_T\|$  sont les efforts normaux et tangentiel calculé sur le modèle EF et  $f_{\text{ass}}$  désigne le coefficient de frottement de l'assemblage. Le chargement appliqué à la structure est un champ d'accélération uniforme. Plusieurs cas sont étudiés : ils correspondent à des amplitudes différentes suivant les directions latérales du satellite. Les valeurs sont présentées dans le tableau IV.1 et la figure IV.4 illustre les directions latérales résultantes des différents cas. Pour tous les composants étudiés avec les différents cas de charge imposés, les probabilités de défaillance à estimer sont définies par :

$$\mathbb{P}(MS_{\text{elas}} \leq 0) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(MS_{\text{gliss}} \leq 0) \quad (\text{IV.3})$$

Les variables aléatoires prises en compte sont toutes les caractéristiques mécaniques des composants étudiés, c'est-à-dire des panneaux latéraux, supérieur et du plateau inférieur. Il s'agit des épaisseurs des plaques, des peaux et du nida pour les composites, des modules d'Young, des coefficients de Poisson et des modules de cisaillement. Les amplitudes des accélérations de chargement sont également considérées comme aléatoires. Les variables limites intervenant dans

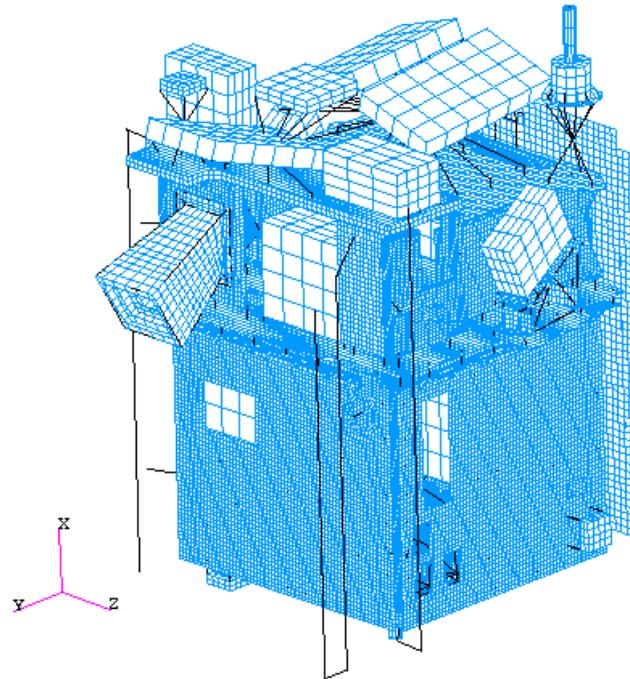


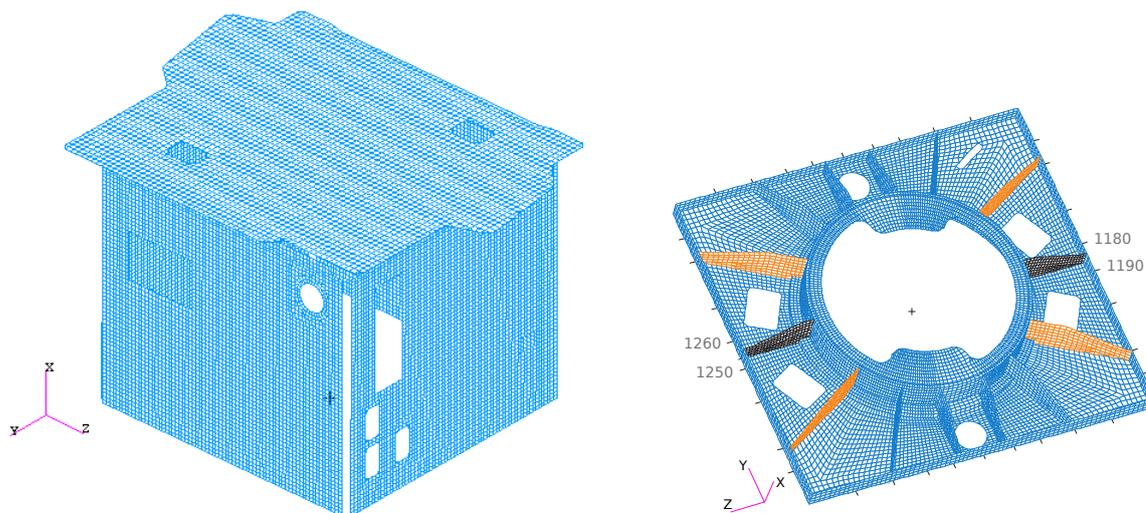
FIGURE IV.2 – Modèle éléments finis du satellite TARANIS.

N° du cas	accélération X (g)	accélération Y (g)	accélération Z (g)
1	-9.75	5.20	0.00
2	-9.75	3.68	3.68
3	-9.75	0.00	5.20
4	-9.75	-3.68	3.68
5	-9.75	-5.20	0.00
6	-9.75	-3.68	-3.68
7	-9.75	0.00	-5.20
8	-9.75	3.68	-3.68

TABLE IV.1 – Cas de chargement appliqués au modèle éléments finis – TARANIS.

le post-traitement des marges de sécurité, c'est-à-dire la limite élastique, l'effort de précharge et le coefficient de frottement, sont prises en compte comme des valeurs caractéristiques à contenu statistique. Plus précisément, il s'agit d'une valeur type A pour l'effort de précharge et de valeurs type B pour la limite élastique et le coefficient de frottement. Les variables aléatoires sont considérées normales et indépendantes, avec des coefficients de variation de 6% pour les épaisseurs et de 4% pour toutes les autres. Le nombre total de variables aléatoires en jeu est de 76.

Les surfaces de réponses sont construites sur les grandeurs directement issues du modèle EF, c'est-à-dire les contraintes et les efforts. Concernant les efforts dans les vis, une SR est définie pour chacune des directions X, Y et Z ; les efforts résultants puis la valeur de la marge de sécurité sont calculés en post-traitement. Pour les contraintes, les SR sont directement construites sur la valeur maximale des contraintes de Von Mises recherchées parmi les éléments du composant. Dans le cas du plateau inférieur, la géométrie étant plus complexe qu'une plaque (cf. figure IV.3(b)), une SR est construite pour approcher la contrainte dans chacun des sous-ensembles (raidisseurs,



(a) Panneaux latéraux et supérieur.

(b) Plateau inférieur.

FIGURE IV.3 – Composants étudiés du modèle éléments finis TARANIS.

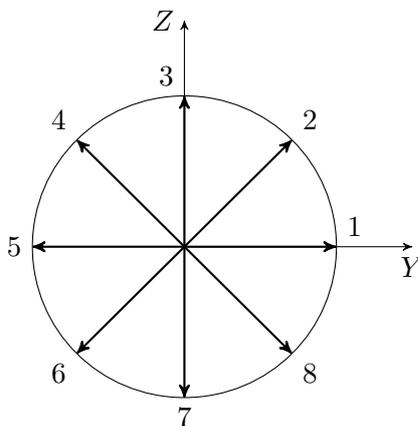


FIGURE IV.4 – Directions des cas de chargement latéraux appliqués au modèle éléments finis.

fonds, cylindre central, etc). En tenant compte des différents cas de charge, le nombre total de réponses à étudier est de 1200. Pour réduire ce nombre, on se limite aux parties dont les marges de sécurité déterministes sont les plus critiques, c'est-à-dire inférieure à 1. Cela permet, dans un premier temps, de limiter l'étude à la construction d'environ 200 SR.

L'analyse de fiabilité est mise en œuvre suivant la démarche illustrée lors de l'application du cube (cf. section III.7). Cette fois, elle est précédée d'une analyse de sensibilité préliminaire dans le but de réduire le nombre de variables aléatoires initial qui est relativement important. Dans un second temps, un échantillonnage autour des moyennes permet de construire les premières SR pour estimer l'ordre de grandeur des probabilités de défaillance et limiter l'étude aux réponses les plus significatives. Si besoin est, les estimations des probabilités peuvent être améliorées. Pour cela, on tente de sélectionner les variables aléatoires les plus influentes sur la fiabilité puis de regrouper les réponses en fonction des régions d'intérêt avant d'utiliser la méthode adaptative. Enfin, l'analyse de sensibilité globale est utilisée pour détecter les variables sur lesquelles des efforts doivent être réalisés pour augmenter les niveaux de fiabilité.

### IV.3 Analyse de sensibilité préliminaire

La méthode de Morris est appliquée de la même manière que pour l'exemple du cube (cf. section III.7.5). Un LHS, permettant de calculer les gradients en plusieurs points, est généré sur  $\pm 5\sigma$  autour des moyennes dans l'espace normal standard avec 20 simulations. Les indicateurs de sensibilité  $\hat{\mu}^*$  et  $\hat{\sigma}$  sont déterminés pour chaque variable pour rapport à toutes les réponses. Les résultats peuvent être visualisés sous la forme d'un diagramme de Pareto où les valeurs cumulées de  $\hat{\mu}^*$  ou  $\hat{\sigma}$ , dans l'ordre décroissant, sont présentées en fonction du nombre de variables correspondantes. Cette représentation a l'avantage de bien illustrer le nombre de variables possédant la plus grande influence et de faciliter leur sélection en fonction d'un seuil appliqué au cumul des valeurs. La figure IV.5 présente les résultats des indicateurs  $\hat{\mu}^*$  et  $\hat{\sigma}$  obtenus sur une réponse choisie comme exemple. L'allure des courbes est analogue pour les autres réponses

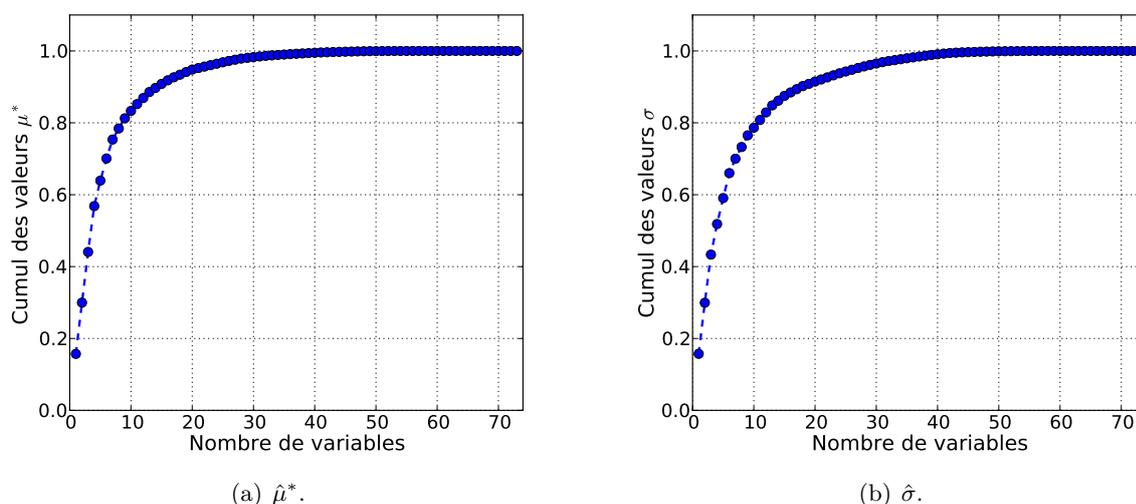


FIGURE IV.5 – Diagrammes de Pareto des indicateurs  $\hat{\mu}^*$  et  $\hat{\sigma}$  d'une réponse – TARANIS.

étudiées et montre bien que le nombre de variables influentes est relativement faible. Cependant les ensembles de variables influentes sur chaque réponse doivent être regroupés au sein d'un même ensemble. La figure IV.6 présente l'évolution du nombre de variables retenues en fonction du seuil de sélection ; elle permet de comparer l'ensemble des variables groupées (à gauche) avec les ensembles de variables séparés (à droite). À droite, les barres d'erreur sont les valeurs minimales et maximales du nombre de variables sélectionnées parmi toutes les réponses et les points sont les valeurs moyennes. Les figures montrent bien que peu de variables influencent chacune des réponses mais que ces dernières sont généralement différentes car, une fois regroupées, le nombre de variables sélectionnées est bien plus important. Sur la figure IV.6(a), il est difficile de choisir un seuil permettant clairement de distinguer les variables influentes ; l'évolution est quasi linéaire. Les seules variables réellement négligeables sont les 15 qui correspondent au saut à droite de la courbe. Ces variables sont donc supprimées de l'ensemble des variables aléatoires et remplacées par leur valeur moyenne. Le nombre de variables aléatoires pour l'approche probabiliste est réduit à 61.

Dans un second temps, les mesures  $\hat{\mu}$  et  $\hat{\mu}^*$  sont comparées pour tenter de privilégier des directions d'échantillonnage. La conclusion est la même que pour l'exemple du cube : toutes les variables ont des effets antagonistes d'une réponse à une autre et aucune direction ne peut être privilégiée.

Un dernier résultat intéressant de la méthode concerne l'exploitation de la mesure  $\hat{\sigma}$ . Quand le nombre de variables  $M$  est important, le nombre de termes d'interaction potentiels pour

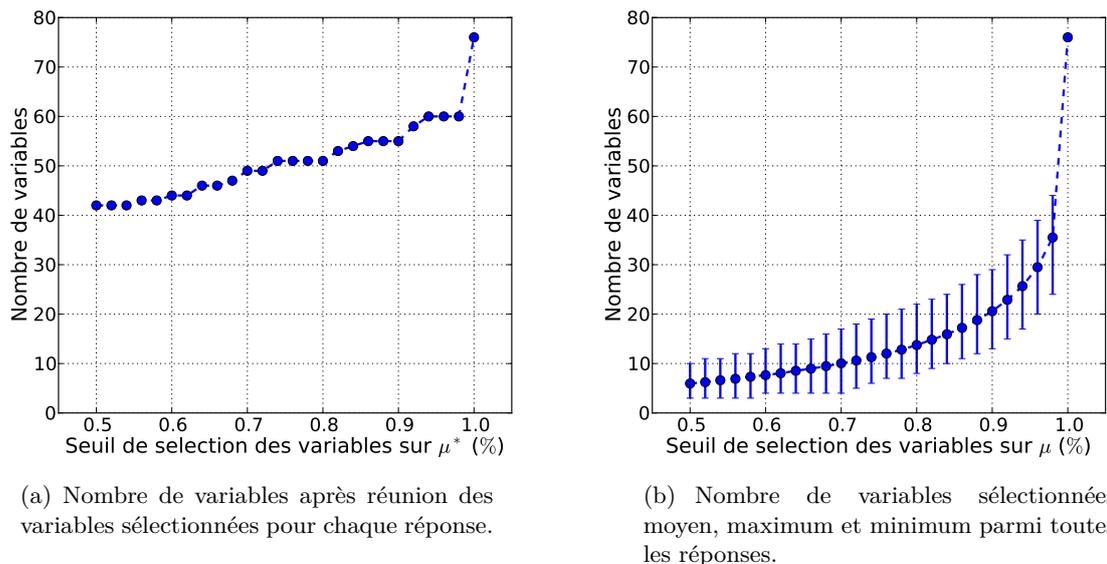
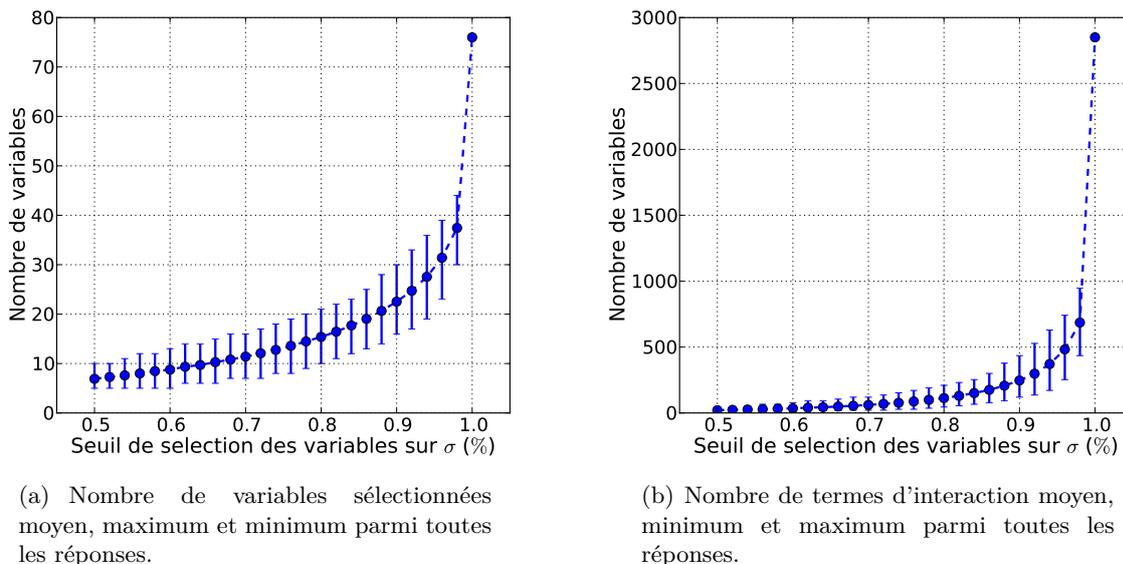


FIGURE IV.6 – Sélection des variables en fonction de  $\hat{\mu}^*$  – TARANIS.

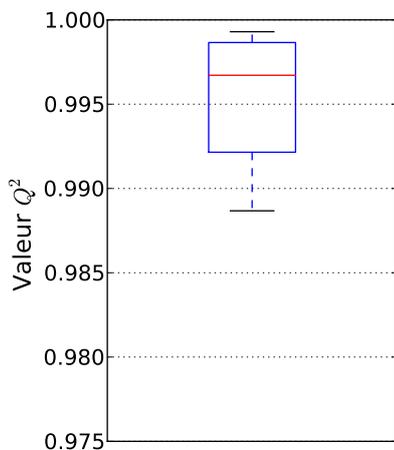
la construction des SR, valant  $M(M - 1)/2$ , l'est d'autant plus. Dans ce cas, la démarche de construction des SR consistant à tester les termes de manière itérative devient plus coûteuse. Si une information sur l'importance des termes est disponible, il paraît intéressant de ne privilégier que les plus pertinents : c'est en ce sens que peut être utilisé l'indicateur  $\hat{\sigma}$ . En effet, rappelons qu'il renseigne sur l'importance non-linéaire d'une variable et/ou de l'interaction avec une autre. Cependant, il n'est pas possible de distinguer les deux effets, ni de savoir avec quelles variables les interactions sont les plus significatives. L'idée consiste donc à sélectionner les variables dont la valeur  $\hat{\sigma}$  est importante, puis à composer tous les termes d'interaction entre elles. Ces termes seront inclus dans la liste potentielle pour la construction des SR (les termes quadratiques sont gardés en totalité car leur nombre n'est pas très important par rapport aux termes d'interaction). La sélection est faite de la même manière que pour  $\hat{\mu}^*$ , c'est-à-dire à partir d'un seuil appliqué au cumul des valeurs  $\hat{\sigma}$ , rangées dans l'ordre décroissant. Mais cette fois-ci, les variables retenues par chaque réponse n'ont pas besoin d'être regroupées au sein d'un même ensemble étant donné que le choix des termes d'interaction dans la construction des SR est indépendant d'une réponse à un autre. La figure IV.7 présente le nombre de variables sélectionnées et le nombre de termes d'interaction correspondants en fonction du seuil appliqué au cumul de  $\hat{\sigma}$ . Le nombre moyen calculé sur toutes les réponses ainsi que le nombre maximum et minimum sont représentés (barres d'erreur). L'allure des courbes montre que le nombre de termes d'interaction peut être largement diminué. La sélection est moins délicate que précédemment car elle concerne uniquement les termes d'interaction et non les variables aléatoires qui entrent en jeu. En effet, si le nombre de termes d'interaction sélectionnés ne permet pas d'obtenir des SR suffisamment précises, il pourra être augmenté sans difficulté. L'enjeu est uniquement de réduire le temps de construction des SR. Une première sélection est effectuée avec un seuil de 90%, cela correspond en moyenne à 247 termes par réponse et au maximum à 435.

#### IV.4 Analyse de fiabilité initiale

Le modèle EF est échantillonné pour les 61 variables sélectionnées à partir d'un LHS de 186 points générés sur  $\pm 5\sigma$  autour des moyennes dans l'espace normal standard. Les SR sont construites suivant la démarche sélective décrite en section III.3 et les termes d'interaction inclus

FIGURE IV.7 – Sélection des variables et termes d'interaction en fonction de  $\hat{\sigma}$  – TARANIS.

dans la liste potentielle sont, pour chaque réponse, ceux sélectionnés à la section précédente avec un seuil de 90% sur le cumul des valeurs  $\hat{\sigma}$ . Les SR sont globalement de bonne qualité au vue

FIGURE IV.8 – Dispersion des coefficients  $Q^2$  des SR – TARANIS.

des coefficients  $Q^2$  estimés. La dispersion des valeurs est représentée en figure IV.8 sous forme de boîte à moustache. Les probabilités de défaillance sont calculées par tirages d'importance avec 500000 simulations (précédés d'une méthode FORM). Les résultats obtenus permettent de sélectionner 5 critères dont les niveaux de probabilités sont significatifs ; les autres probabilités étant inférieures à  $10^{-10}$ . Les indicateurs *bootstrap* sont calculés avec une région d'intérêt dont le niveau d'importance est  $\varepsilon_{\text{pdf}} = 0.05$ . Malgré le fait que, pour chaque réponse, la zone échantillonnée couvre bien le PDPP, aucun point de l'échantillon n'est inclus dans les régions d'intérêt. Cependant les conditions d'application de la sélection des variables, décrite en section III.7.4 et s'appuyant sur les SR, sont réunies (qualité des SR et recouvrement du PDPP). On souhaite donc réduire le nombre de variables aléatoires pour estimer les probabilités de défaillance avec

une plus grande confiance. C'est ce qui est fait dans la prochaine section.

Les résultats obtenus dans cette première approche sont présentés dans le tableau IV.2 sous la forme d'indice de fiabilité généralisé, noté  $\beta_{\text{SR}}$  (l'intervalle calculé par *bootstrap* n'est pas fourni étant donné qu'aucun point n'est dans les régions d'intérêt). La colonne  $\beta_{\text{REF}}$  correspond à des valeurs de référence obtenues par des tirages de Monte Carlo direct avec 60236 simulations. Ce nombre de simulations n'est cependant pas suffisant pour estimer précisément toutes les réponses, c'est pour cette raison que certaines n'apparaissent pas. Les pourcentages à côté des valeurs de référence sont les écarts relatifs avec les valeurs de l'intervalle de confiance à 95% ; on observe que seule l'estimation de la réponse PZ\_c4 est assez précise. Cette dernière correspond

Nom des réponses	$\beta_{\text{REF}}$	$\beta_{\text{SR}}$
1260_c3	**	4.12
1250_c3	**	5.06
1190_c7	**	4.10
1180_c7	3.77 +13.1% -4.3%	3.78 (0.3%) <sup>a</sup>
PZ_c4	2.79 +2.0% -1.7%	2.78 (0.4%)

a. Écart relatif avec  $\beta_{\text{REF}}$

TABLE IV.2 – Estimation des indices de fiabilité généralisés pour l'analyse initiale – TARANIS.

à la contrainte dans le panneau dont la normale sortante est la direction +Z sous le cas de chargement numéro 4. Pour les autres réponses, les numéros 1260, 1250, 1180 et 1190 désignent les vis visibles sur la figure IV.3(b), c3 et c7 indiquent les cas de chargement numéro 3 et 7.

## IV.5 Sélection des variables

La démarche de sélection des variables aléatoires, décrite en section III.7.4, est employée sur les 5 critères étudiés à partir des SR estimées. La figure IV.9 présente les résultats obtenus avec l'évolution des indices de fiabilité généralisés conditionnés (écart relatif par rapport à l'indice complet) en fonction du nombre de variables aléatoires total retenues (*i.e* regroupées parmi toutes les réponses). Le nombre de variables est au départ de 59 car 3 variables parmi les 61 n'ont pas été sélectionnées dans la construction des SR qui interviennent dans les 5 critères. Le nombre de variables aléatoires garantissant un écart relatif inférieur à 1% pour toutes les réponses est de 14. Les autres variables sont fixées à leur valeur moyenne. Les bornes des régions d'intérêt des variables retenues sont présentées en figure IV.10 avec les limites de la zone échantillonnées ( $\pm 5\sigma$ ). La tableau IV.3 détaille leur signification physique. Une nouvelle analyse de fiabilité est menée en tenant compte uniquement de ces dernières.

## IV.6 Seconde analyse après réduction

Dans cette seconde analyse, un nouvel échantillon doit être formé car les variables aléatoires ne sont plus les mêmes qu'au départ. De la même manière que pour le modèle cube (cf. section III.7.6.2), l'échantillon peut être généré dans une région englobant toutes les régions d'in-

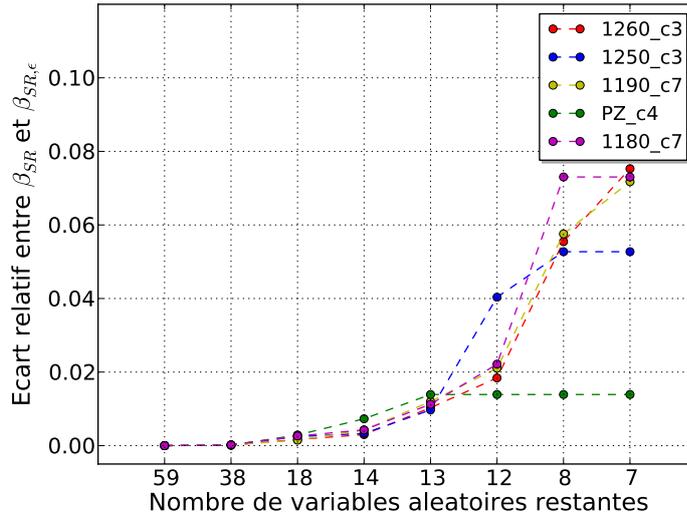


FIGURE IV.9 – Sélection des variables aléatoires à partir des SR – TARANIS.

térêt. La région globale est construite à partir des bornes minimales et maximales des régions d'intérêt de chaque réponse, comme dans l'équation (III.28). Cependant, il est indispensable de s'assurer que cette région est avantageuse (*i.e* plus petite) par rapport à la zone échantillonnée lors de l'analyse initiale. Ici, même si certaines variables ont des effets antagonistes, la zone obtenue par réunion des régions d'intérêt reste bien plus réduite que la zone initiale de  $\pm 5\sigma$  autour des moyennes, comme le montre la figure IV.10. Un LHS de 45 points est donc généré dans cette région. Les SR sont construites et utilisées pour estimer les probabilités de défaillance à partir de tirages d'importance avec 500000 simulations et les indicateurs *bootstrap* sont calculés. Les résultats sont présentés dans le tableau IV.4 sous forme d'indices de fiabilité généralisés. Les intervalles  $[\beta_{SR_{inf}}, \beta_{SR_{sup}}]$  des critères concernant les vis sont suffisamment réduits pour valider les résultats. Le critère en contrainte sur le panneau +Z nécessite une meilleure estimation, surtout que sa probabilité de défaillance est la plus élevée. La méthode adaptative est utilisée à cet effet.

## IV.7 Méthode adaptative sur la réponse PZ\_c4

L'échantillon précédent de 45 points est utilisé en tant qu'échantillon initial de la méthode. Les paramètres sont fixés aux valeurs suivantes :  $\varepsilon_{pdf} = 0.05$ ,  $\varepsilon_{\beta} = 0.01$  et  $\varepsilon_{sr} = 0.995$  dans un premier temps car la valeur  $Q^2$  de la SR précédente vaut 0.992. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau IV.5. La procédure a convergé en une seule itération, soit 15 calculs EF supplémentaires, ce qui signifie que la SR était suffisamment correcte une fois que la région d'intérêt a convergé. Les intervalles de l'indice de fiabilité  $[\beta_{SR_{inf}}, \beta_{SR_{sup}}]$  permettent de valider l'estimation.

Tous les indices de fiabilité estimés depuis l'analyse initiale sont comparés figure IV.11. Nous rappelons que les réponses pour lesquelles les résultats de Monte Carlo n'apparaissent pas, signifient que le nombre de simulations effectuées n'a pas été suffisant pour estimer précisément la valeur. Les barres d'erreur des réponses qui apparaissent donnent les intervalles de confiance à 95%. Pour les autres résultats, les barres d'erreur correspondent aux intervalles calculés par les indicateurs *bootstrap* dans les régions d'intérêt. Dans le cas de l'analyse initiale, ces intervalles sont absents car aucun point d'échantillon n'appartenait à ces régions. Enfin, rappelons que

N° variable	Description
1	amplitude de l'accélération suivant l'axe X
2	amplitude de l'accélération suivant l'axe Z
3	épaisseur de la peau supérieure du panneau -Z
4	épaisseur de la peau inférieure du panneau -Z
5	épaisseur du NIDA du panneau -Z
6	module d'Young des peaux du panneau -Z
7	module d'Young du plateau inférieur (-X)
8	épaisseur des raidisseurs orange du plateau -X (cf. section IV.3(b))
9	épaisseur des raidisseurs noir du plateau -X (cf. section IV.3(b))
10	épaisseur de la peau supérieure du panneau +Z
11	épaisseur de la peau inférieure du panneau +Z
12	épaisseur du NIDA du panneau +Z
13	module d'Young des peaux du panneau +Z
14	amplitude de l'accélération suivant l'axe Y

TABLE IV.3 – Description des variables aléatoires retenues à partir des SR – TARANIS

Nom des réponses	$\beta_{\text{REF}}$	$\beta_{\text{SR}}$	$\beta_{\text{SR}_{\text{inf}}}$	$\beta_{\text{SR}_{\text{sup}}}$
1260_c3	**	4.06	3.96 (2.5%) <sup>a</sup>	4.16 (2.5%) <sup>a</sup>
1250_c3	**	5.03	4.92 (2.2%)	5.03 (2.8%)
1190_c7	**	3.92	3.78 (3.6%)	4.04 (3.1%)
1180_c7	3.77 +13.1% -4.3%	3.71 (1.6%) <sup>b</sup>	3.59 (3.2%)	3.84 (3.5%)
PZ_c4	2.79 +2.0% -1.7%	2.76 (1.1%)	2.44 (11.6%)	3.18 (15.2%)

a. Écart relatif avec  $\beta_{\text{SR}}$

b. Écart relatif avec  $\beta_{\text{REF}}$

TABLE IV.4 – Résultat des indices de fiabilité généralisés après réduction des variables – TARANIS.

Nom des réponses	$\beta_{\text{REF}}$	$\beta_{\text{SR}}$	$\beta_{\text{SR}_{\text{inf}}}$	$\beta_{\text{SR}_{\text{sup}}}$
PZ_c4	2.79 +2.0% -1.7%	2.79 (0%) <sup>a</sup>	2.71 (2.9%) <sup>b</sup>	2.85 (2.2%) <sup>b</sup>

a. Écart relatif avec  $\beta_{\text{REF}}$

b. Écart relatif avec  $\beta_{\text{SR}}$

TABLE IV.5 – Résultat de la méthode adaptative sur la réponse PZ\_c4 – TARANIS.

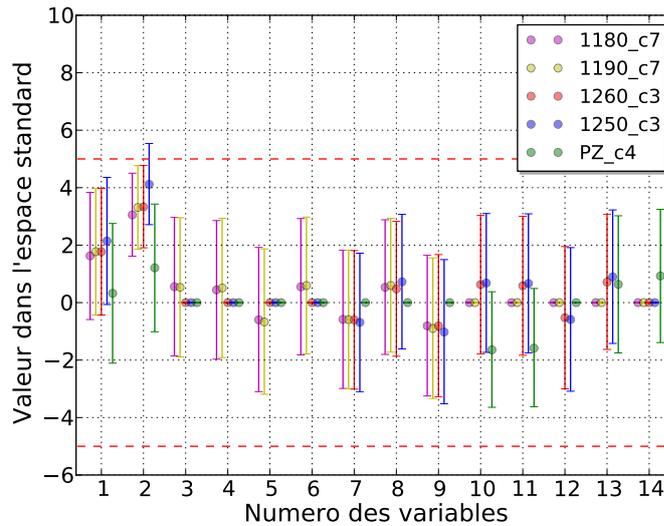


FIGURE IV.10 – Bornes des régions d'intérêt pour les variables aléatoires retenues – TARANIS

les valeurs de la seconde analyse et de la méthode adaptative n'ont été calculées qu'avec 14 variables aléatoires, alors que les autres analyses (analyse initiale et Monte Carlo) sont faites avec 61 variables aléatoires.

## IV.8 Analyse de sensibilité globale

Les indices de Sobol (cf. section II.5.3) sont estimés sur les SR de la première analyse à partir de 2000000 tirages de Monte Carlo. Les résultats des indices totaux sont présentés en figure IV.12 pour les variables aléatoires finalement retenues. Les indices du premier ordre ont une part largement majoritaire dans ces derniers. Les numéros correspondants aux variables (en abscisse) sont présentés dans le tableau IV.3. On remarque que les variables les plus influentes, pour les critères de glissement des vis, sont les amplitudes des accélérations imposées suivant les axes X et Z. Dans le cas du critère en contrainte du panneau +Z, il s'agit naturellement des épaisseurs des peaux inférieure et supérieure mais les amplitudes des accélérations suivant les axes Z et Y sont également significatives. Notons que les similarités de l'influence des variables pour les réponses 1260\_c3, 1250\_c3 et 1190\_c7, 1180\_c7 sont cohérentes compte tenu de la géométrie de la structure.

## IV.9 À propos d'une analyse avec les variables de post-traitement aléatoires

La même analyse a été menée en considérant que les variables de post-traitement, c'est-à-dire la limite élastique, l'effort de précharge et le coefficient de frottement, étaient aléatoires. Dans ce cas, les SR sont toujours construites sur les réponses issues du code éléments finis (contraintes maximales dans les panneaux et efforts dans les vis) et les marges de sécurité sont calculées en post-traitement. Cependant, ces variables ont une influence tellement importante par rapport aux autres qu'elles couvrent les erreurs d'approximation des SR. La démarche a donc peu d'intérêt à être présentée car, dès la première analyse, les estimations sont précises. C'est pour cette raison que ces variables ont été fixées à des valeurs déterministes lors de l'analyse

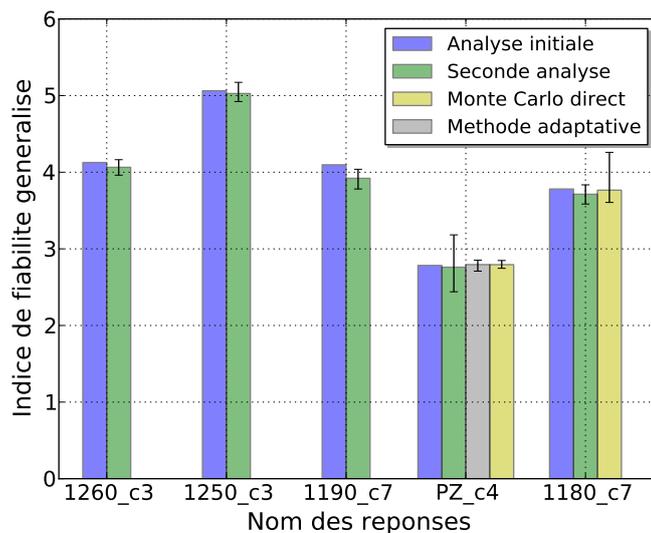


FIGURE IV.11 – Comparaison des valeurs des indices de fiabilité généralisés au cours de la démarche – TARANIS

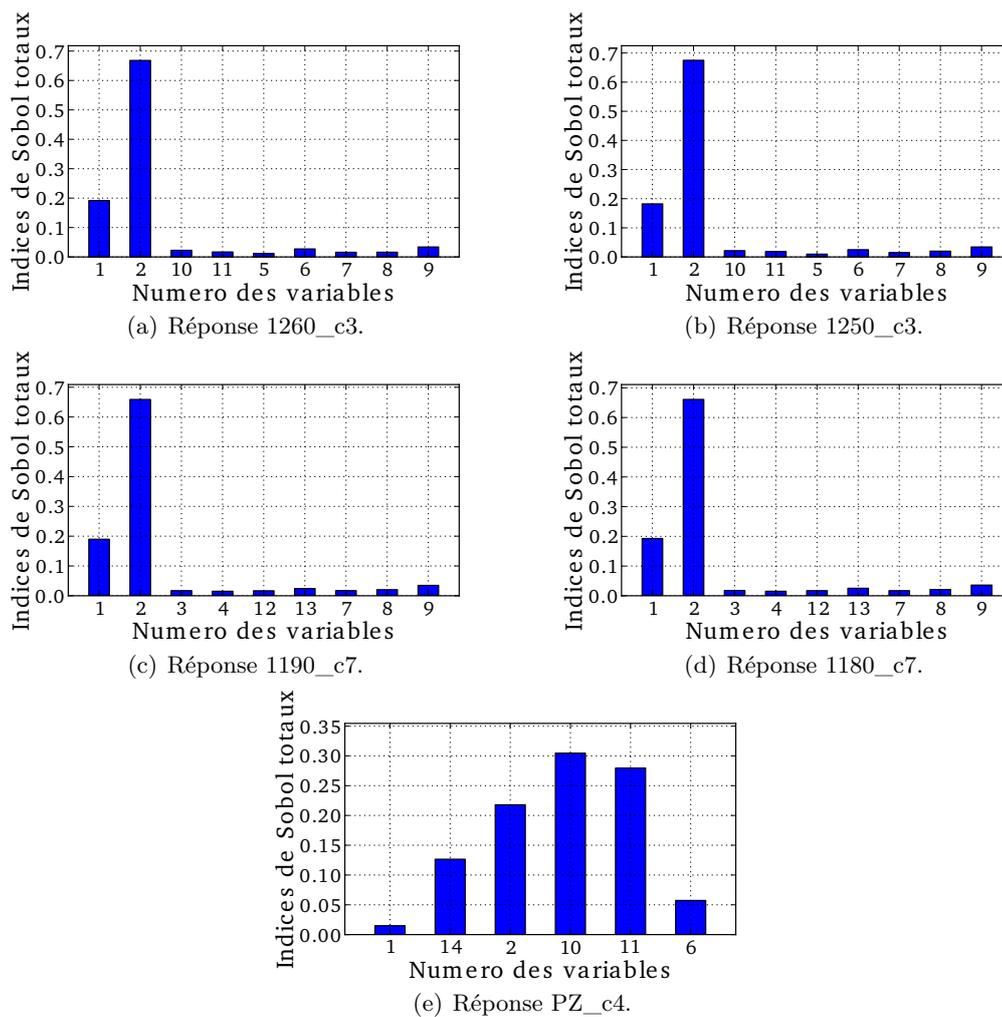


FIGURE IV.12 – Indices de Sobol totaux – TARANIS.

précédente. Aussi, des valeurs à contenu statistique de type A et B ont été utilisées pour conserver des niveaux de probabilité de défaillance proches du cas où les variables sont considérées comme aléatoires.

## IV.10 Conclusion

Le cas d'application présenté dans ce chapitre n'est pas représentatif de tous les satellites mais permet néanmoins de tirer quelques conclusions. La première observation est la possibilité de résoudre ce type de problème avec une méthodologie basée sur les surfaces de réponse. Lors de la première analyse, même en explorant un domaine initial relativement large ( $\pm 5\sigma$  dans l'espace standard autour des moyennes) la majorité des réponses peuvent être approchées avec une bonne qualité.

Concernant la méthodologie générale, elle entraîne au final 266 simulations EF ce qui est largement raisonnable compte tenu du nombre de variables aléatoires et de réponses initiales. Certaines étapes telles que le *bootstrap* et la phase de validation nécessitent certainement un nombre de simulations supplémentaires par rapport à d'autres démarches. Cependant, elles permettent de renforcer la confiance que l'on a des résultats. Cela semble fondamental dans un contexte industriel où des valeurs de référence sont difficilement accessibles.

L'exemple montre également que, parmi les données initiales du problème, peu sont importantes dans le résultat final. Cela concerne aussi bien les variables aléatoires d'entrée que les réponses d'intérêt. Ce constat justifie d'autant plus la démarche mise en œuvre : on tente progressivement de se focaliser sur les éléments influents (réponses et variables) en réduisant la complexité initiale. Cela passe par la sélection des critères dont les probabilités de défaillance sont significatives et la sélection des variables aléatoires responsables de ces défaillances. Ici, 5 critères de défaillance sont finalement retenus parmi des centaines et 14 variables aléatoires sont sélectionnées parmi les 76 initiales. Malgré cela, il est très difficile de prédire ce résultat au début de l'analyse. La réduction des variables aléatoires est *a priori* relativement délicate lorsque de nombreuses réponses sont concernées. L'analyse de sensibilité préliminaire le montre. Aussi, cette dernière étudie l'influence des variables par rapport à une grandeur mécanique et non par rapport à la probabilité relative à un critère ; il est donc nécessaire que le résultat soit très clair pour pouvoir en tirer des conclusions.

La réduction du nombre de réponses à étudier en fonction des valeurs des marges de sécurité déterministes n'est pas plus simple. On remarque, par exemple, que plusieurs critères ayant une marge déterministe très proche, voire inférieure à celle de la contrainte PZ\_c4, ont une probabilité de défaillance négligeable alors que celle de la contrainte PZ\_c4 est la plus significative. Dans cette application, si l'on compare les résultats de l'approche probabiliste avec l'approche déterministe, on observe que l'approche déterministe est plus contraignante car deux fois plus de réponses sont jugées critiques.

# Chapitre V

## Propagation d'incertitudes en dynamique

### Sommaire

---

<b>V.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>106</b>
<b>V.2</b>	<b>Analyse dynamique des structures industrielles</b>	<b>106</b>
V.2.1	Position du problème	106
V.2.2	Résolution par approche modale	107
<b>V.3</b>	<b>Méthodes de propagation d'incertitudes en dynamique</b>	<b>111</b>
V.3.1	Introduction	111
V.3.2	Méthodes de perturbation	112
V.3.3	Méthodes de réanalyse	113
V.3.4	Méthodes basées sur les méta-modèles	114
V.3.5	Conclusion	115
<b>V.4</b>	<b>Utilisation des surfaces de réponse</b>	<b>115</b>
V.4.1	Description de la démarche	115
V.4.2	Grandeurs d'intérêt à approcher	115
V.4.3	Appariage des modes	116
V.4.4	Normalisation des vecteurs propres	118
V.4.5	Calcul numérique du système propre au cours de l'échantillonnage	119
V.4.6	Bilan	120
V.4.7	Illustration sur un cas simple	121
<b>V.5</b>	<b>Application sur le satellite TARANIS</b>	<b>126</b>
V.5.1	Description de l'étude	126
V.5.2	Analyse initiale du modèle	127
V.5.3	Première analyse de la dispersion des FRF	127
V.5.4	Analyse après sélection des modes significatifs	134
V.5.5	Conclusion	138
<b>V.6</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>140</b>

---

## V.1 Introduction

L'étude de l'environnement dynamique en basses fréquences est très importante pour la conception et la qualification d'un satellite. Son objectif principal est de déterminer les excitations qui sont soumises à la base des équipements compte tenu des excitations qui sont imposées à la base du satellite lorsque celui-ci est fixé au lanceur. Il permet donc de définir les spécifications de dimensionnement pour tous les sous-systèmes. Ce chargement est simulé, lors d'une analyse prédictive réalisée sur un modèle EF, en imposant une accélération dont l'amplitude dépend du temps de manière sinusoïdale pour un balayage de fréquence allant généralement de 0 à 100 Hz. L'analyse prédictive est toujours suivie d'essais structuraux durant lesquels le satellite, muni de tous ses équipements, est placé sur un pot vibrant. Les essais permettent de valider le dimensionnement des équipements en s'assurant que le niveau des accélérations prédites par l'analyse couvre bien le niveau des accélérations mesurées. Ils sont indispensables pour la qualification de la structure compte tenu des diverses incertitudes des phases de conception et de fabrication. Le retour d'expérience permet également de corriger le modèle EF en vue des analyses couplées avec le lanceur mais aussi d'enrichir les connaissances pour la conception de futurs satellites. L'utilisation d'une approche probabiliste pour tenir compte des incertitudes liées aux paramètres du modèle mécanique et estimer la dispersion du niveau des accélérations prédites à la base des équipements est donc d'un grand intérêt. Cela ne supprimera pas les essais lors du processus de validation mais cela peut permettre de mieux les aborder et d'anticiper certains phénomènes.

C'est dans ce but que ce chapitre s'intéresse à la propagation d'incertitudes en analyse dynamique basses fréquences. La première partie permet de rappeler les méthodes de calcul dynamique déterministe sur des modèles EF. On se place, pour cela, dans le cadre classique de structures satellites permettant de faire quelques hypothèses sur le modèle et de se limiter aux seules grandeurs d'intérêt utiles. La partie suivante introduit quelques méthodes de propagation d'incertitudes. La démarche est plus complexe que pour l'analyse statique à cause du type de réponses à déterminer mais aussi du temps de calcul qui est plus important. Pour rester dans la continuité du travail réalisé en analyse statique, l'utilisation de surfaces de réponse est envisagée. La méthodologie de construction est détaillée et nous verrons que plusieurs manières d'approcher les réponses dynamiques sont possibles. Un premier exemple simple est utilisé pour illustrer l'approche et permet de tirer des premières conclusions. Enfin, une application sur le satellite TARANIS est présentée dans le but de comparer les différentes méthodes mais surtout de tester les possibilités de traiter ce type de structure.

## V.2 Analyse dynamique des structures industrielles

### V.2.1 Position du problème

Cette section présente les méthodes classiques d'analyse dynamique en basses fréquences dont l'excitation dépend du temps de manière sinusoïdale. Elles sont disponibles dans de nombreux ouvrages mais nous faisons référence ici à Girard et Roy (2003) qui font une description claire et précise. Nous nous placerons dans le cadre classique d'applications industrielles spatiales, c'est-à-dire lorsque la structure est linéaire, faiblement amortie et que seul un nombre réduit de modes propres contribuent de manière significative à son comportement. Pour cette raison, nous détaillerons uniquement le principe de résolution basé sur l'approche modale.

Le principe de l'analyse dynamique est de déterminer le rapport entre l'amplitude d'une grandeur d'intérêt et l'amplitude de l'excitation imposée à la structure en fonction de la fréquence de l'excitation. Ce rapport est appelé fonction de transfert ou fonction de réponse en fréquence (FRF) et dépend de la nature de l'excitation et de la réponse étudiée. Considérons une structure caractérisée pour les matrices de masse, d'amortissement visqueux et de raideur, notées respectivement  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$ , de taille  $N \times N$ , obtenues par une discrétisation éléments finis. Son

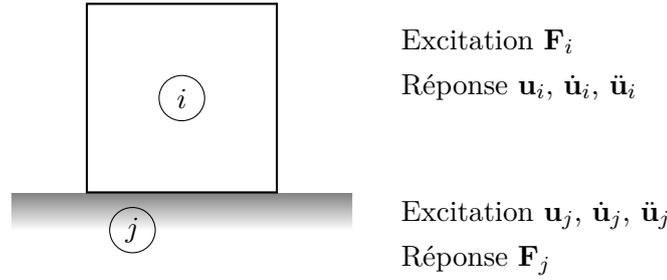


FIGURE V.1 – Représentation de la nature des ddl de la structure.

mouvement est régi par l'équation :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (\text{V.1})$$

où  $\mathbf{u}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$  et  $\ddot{\mathbf{u}}$  désignent respectivement les vecteurs des déplacements, des vitesses et des accélérations aux degrés de liberté (ddl) de la structure et  $\mathbf{F}$  correspond au vecteur des efforts. Pour préciser la nature des excitations et des réponses étudiées, nous devons dissocier les ddl du modèle discrétisé en deux catégories :

- les ddl dits de jonction, notés avec un indice  $j$ , correspondent aux ddl sur lesquels des conditions aux limites sont imposés, c'est-à-dire des ddl d'interface avec un bâti ou une autre structure ;
- les ddl dits internes, notés avec un indice  $i$ , concernent tous les autres.

Les excitations et les réponses dépendent des ddl en jeu :

- pour les excitations, on peut soit imposer des forces sur les ddl internes, notées  $\mathbf{F}_i$ , soit imposer des déplacements, des vitesses ou des accélérations sur les ddl de jonction, notés  $\mathbf{u}_j$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_j$  et  $\ddot{\mathbf{u}}_j$  ;
- pour les réponses, on observe soit des mouvements sur les ddl internes, notés  $\mathbf{u}_i$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_i$  et  $\ddot{\mathbf{u}}_i$ , soit des forces de réaction  $\mathbf{F}_j$  sur les ddl de jonction.

La figure V.1 schématise la nature des ddl de la structure. En fonction de l'excitation imposée et de la réponse observée, les fonctions de transfert sont caractérisées de manières différentes. Elles sont rappelées dans la section suivante. Pour cela, l'équation (V.1) du mouvement est réécrite en dissociant les ddl internes et de jonction :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ij} \\ \mathbf{M}_{ij}^T & \mathbf{M}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_i \\ \ddot{\mathbf{u}}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ii} & \mathbf{C}_{ij} \\ \mathbf{C}_{ji} & \mathbf{C}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_i \\ \dot{\mathbf{u}}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_j \end{bmatrix} \quad (\text{V.2})$$

avec  $\mathbf{M}_{ij}^T = \mathbf{M}_{ji}^T$ ,  $\mathbf{C}_{ji} = \mathbf{C}_{ij}^T$  et  $\mathbf{K}_{ji} = \mathbf{K}_{ij}^T$ .

## V.2.2 Résolution par approche modale

L'approche modale est une méthode très largement utilisée pour l'étude de grandes structures dont le comportement est linéaire. Le principe consiste à rechercher la solution du système d'équations (V.1) dans une base de vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{K}$  relativement à  $\mathbf{M}$ , appelée base modale. Cela revient à découpler le système pour résoudre  $N$  équations à une inconnue. La solution générale est obtenue par une combinaison linéaire des solutions dans la base modale : c'est l'étape de superposition modale. L'intérêt de l'approche est de limiter la base modale aux vecteurs les plus significatifs dans la bande de fréquence étudiée : il s'agit de la troncature modale.

Les modes propres de la structure sont calculés en ne considérant aucune excitation, c'est-à-dire que  $\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{u}_j = \mathbf{0}$ . De ce fait, le système d'équations (V.2) est scindé en deux parties, dont :

$$\mathbf{M}_{ii}\ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{C}_{ii}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{K}_{ii}\mathbf{u}_i = \mathbf{0} \quad (\text{V.3})$$

qui permet de calculer le déplacement des ddl internes, et :

$$\mathbf{M}_{ij}^T\ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{C}_{ji}\dot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{K}_{ji}\mathbf{u}_i = \mathbf{F}_j \quad (\text{V.4})$$

qui permet de restituer les efforts de réaction à la jonction connaissant les déplacements de la structure. Pour les structures faiblement amorties, la matrice d'amortissement est généralement écartée de la résolution des modes propres et n'est prise en compte que pour la superposition modale au prix de quelques approximations. Cela signifie que les modes propres sont solutions de l'équation du mouvement sans dissipation :

$$\mathbf{M}_{ii}\ddot{\mathbf{u}}_i + \mathbf{K}_{ii}\mathbf{u}_i = \mathbf{0} \quad (\text{V.5})$$

Cette approche est appelée « modes » réels car les valeurs calculées sont réelles. Dans le cas contraire, les modes propres sont des valeurs complexes et la résolution est plus lourde. Nous ne considérerons pas ce cas ici. Les solutions de l'équation (V.5) sont recherchées sous la forme  $\mathbf{u}_i = \mathbf{U}_i \exp(i\omega t)$  (le  $i$  dans l'exponentielle désigne le nombre imaginaire) ce qui permet d'aboutir au problème aux valeurs propres suivant :

$$(-\omega^2\mathbf{M}_{ii} + \mathbf{K}_{ii})\mathbf{U}_i = \mathbf{0} \quad (\text{V.6})$$

Les valeurs propres sont notées  $\lambda_k = \omega_k^2$  pour  $k = 1 \dots N$  où  $\omega_k$  est la  $k$ -ième pulsation propre de la structure. Les vecteurs propres sont notés  $\Phi_{ik}$  pour  $k = 1 \dots N$  (l'indice souligné signifie le  $k$ -ième vecteur alors que l'on note dans la suite  $\Phi_{ik}$  la matrice des vecteurs propres des ddl internes) et correspondent aux déplacements relatifs des ddl, c'est-à-dire à la forme que prend la structure lorsqu'elle est excitée à la pulsation  $\omega_k$ . Naturellement, les vecteurs propres vérifient les propriétés d'orthogonalité vis-à-vis des matrices de masse et de raideur. On prendra l'habitude de les normaliser de telle sorte que :

$$\Phi_{ik}^T \mathbf{M}_{ii} \Phi_{ik} = \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \Phi_{ik}^T \mathbf{K}_{ii} \Phi_{ik} = \Lambda \quad (\text{V.7})$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité et  $\Lambda$  la matrice diagonale des valeurs propres  $\lambda_k$ .

L'approche modale consiste à chercher les solutions de l'équation du mouvement dans la base des vecteurs propres  $\Phi_{ik}$ . Cependant, ces formes propres représentent le mouvement des ddl internes pour une jonction fixe, c'est-à-dire  $\mathbf{u}_j = \mathbf{0}$ . Si la jonction impose un mouvement, les déplacements des ddl internes sont relatifs à ceux de la jonction et la base des vecteurs propres doit être complétée pour en tenir compte. Pour cela, on utilise les déformées de la structure lorsque des déplacements unitaires sont imposés, à tour de rôle, aux ddl de jonction. Ces vecteurs sont appelés formes statiques de jonction. La matrice de ces formes statiques est notée  $\Psi_{ij}$  et vaut :

$$\Psi_{ij} = -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ij} \quad (\text{V.8})$$

en considérant que la matrice  $\mathbf{K}_{ii}$  est inversible, ce qui est le cas d'une structure dont les conditions aux limites éliminent les mouvements d'ensemble. Si la jonction est isostatique, les formes statiques sont des modes rigides.

Les déplacements de la structure sont recherchés comme une combinaison linéaire des vecteurs propres et des formes statiques de jonction :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{ik} & \Psi_{ij} \\ \mathbf{0}_{jk} & \mathbf{I}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix} \equiv \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix} \quad (\text{V.9})$$

où  $\mathbf{q}_k$  représentent les déplacements modaux. Cette relation est injectée dans l'équation (V.2), prémultipliée par la transposé de  $\mathbf{B}$ , ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{kk} & \mathbf{L}_{kj} \\ \mathbf{L}_{jk} & \overline{\mathbf{M}}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_k \\ \ddot{\mathbf{u}}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{kk} & \mathbf{0}_{kj} \\ \mathbf{0}_{jk} & \mathbf{0}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_k \\ \dot{\mathbf{u}}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{kk} & \mathbf{0}_{kj} \\ \mathbf{0}_{jk} & \overline{\mathbf{K}}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_{ki} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{\Psi}_{ji} \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_j \end{bmatrix} \quad (\text{V.10})$$

avec  $\mathbf{L}_{jk} = \mathbf{L}_{kj}^T$  (la notation  $\mathbf{L}_{kj}$  sera utilisée pour noter la ligne  $k$  de la matrice  $\mathbf{K}_{kj}$ ). La matrice  $\mathbf{L}_{kj}$  est appelée matrice des facteurs de participation et est définie par :

$$\mathbf{L}_{kj} = \mathbf{\Phi}_{ik}^T (\mathbf{M}_{ii} \mathbf{\Psi}_{ij} + \mathbf{M}_{ij}) \quad (\text{V.11})$$

Les matrices  $\overline{\mathbf{M}}_{jj}$  et  $\overline{\mathbf{K}}_{jj}$  sont respectivement les matrices de masse et de raideur condensées à la jonction. Dans le cas d'une jonction isostatique, la matrice  $\overline{\mathbf{K}}_{jj}$  est nulle et la matrice  $\overline{\mathbf{M}}_{jj}$  représente la matrice de masse de corps rigide, c'est-à-dire une matrice  $6 \times 6$  contenant les informations de masse et d'inertie. La matrice des amortissements généralisés  $\mathbf{c}_{kk}$  n'a pas de raison d'être diagonale car la matrice  $\mathbf{C}$  avait été écartée lors de la résolution modale. Cependant, dans le cas de structures faiblement amorties, l'approximation généralement admise est de ne tenir compte que des termes diagonaux de la matrice  $\mathbf{c}_{kk}$  : c'est l'hypothèse de Basile. Cela suppose que les termes extra diagonaux ont peu d'influence sur la réponse dynamique. À l'image du système à 1 ddl on considérera donc que chaque mode  $k$  possède un amortissement de type visqueux, noté  $\xi_k$ , qui vaut :

$$\xi_k = \frac{c_k}{2\omega_k} \quad (\text{V.12})$$

où  $c_k$  est le  $k$ -ième terme diagonal de la matrice  $\mathbf{c}_{kk}$ . Par cette hypothèse, la première ligne de l'équation (V.10), qui permet de calculer les déplacements modaux, est découplée en autant d'équations que de modes, c'est-à-dire que pour le  $k$ -ième mode, on a :

$$\ddot{q}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k = \mathbf{\Phi}_{ik}^T \mathbf{F}_i - \mathbf{L}_{kj} \ddot{\mathbf{u}}_j \quad (\text{V.13})$$

Cette équation est analogue à celle d'un système à 1 ddl. La solution est de la forme :

$$q_k = H_k(\omega) \frac{1}{\omega_k^2} (\mathbf{\Phi}_{ik}^T \mathbf{F}_i - \mathbf{L}_{kj} \ddot{\mathbf{u}}_j) \quad (\text{V.14})$$

où  $H_k(\omega)$  est appelé facteur d'amplification dynamique du  $k$ -ième mode et vaut :

$$H_k(\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2 + i2\xi_k \frac{\omega}{\omega_k}} \quad (\text{V.15})$$

avec  $\omega$  la pulsation d'excitation. À partir des relations (V.14) et (V.9) on peut déterminer les déplacements des ddl internes ainsi que les efforts de réaction à la jonction par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_i(\omega) \\ \mathbf{F}_j(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{ii}(\omega) & \mathbf{T}_{ij}(\omega) \\ -\mathbf{T}_{ji}(\omega) & \mathbf{K}_{jj}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i(\omega) \\ \mathbf{u}_j(\omega) \end{bmatrix} \quad (\text{V.16})$$

avec  $\mathbf{T}_{ji}(\omega) = \mathbf{T}_{ij}^T(\omega)$  et où  $\mathbf{Z}_{ii}$  est la matrice des fonctions de transfert appelées flexibilités dynamiques :

$$\mathbf{Z}_{ii}(\omega) = \sum_{k=1}^N H_k(\omega) \frac{1}{\omega_k^2} \mathbf{\Phi}_{ik} \mathbf{\Phi}_{ik}^T \quad (\text{V.17})$$

$\mathbf{T}_{ij}(\omega)$  est la matrice des fonctions de transfert appelées transmissibilités dynamiques :

$$\mathbf{T}_{ij}(\omega) = \mathbf{\Psi}_{ij} + \sum_{k=1}^N H_k(\omega) \frac{\omega^2}{\omega_k^2} \mathbf{\Phi}_{ik} \mathbf{L}_{kj} \quad (\text{V.18})$$

et  $\mathbf{K}_{jj}(\omega)$  est la matrice des fonctions de transfert appelées raideurs dynamiques :

$$\mathbf{K}_{jj}(\omega) = -\omega^2 \overline{\mathbf{M}}_{jj} + \overline{\mathbf{K}}_{jj} - \omega^2 \sum_{k=1}^N H_k(\omega) \frac{\omega^2}{\omega_k^2} \mathbf{L}_{kj}^T \mathbf{L}_{kj} \quad (\text{V.19})$$

Dans le cas d'une structure de satellite, la jonction correspond à l'interface avec le lanceur et elle peut être représentée de manière isostatique. On peut donc considérer dans les relations précédentes que  $\overline{\mathbf{K}}_{jj} = \mathbf{0}$  et que  $\overline{\mathbf{M}}_{jj}$  est la matrice de masse de corps rigide. Aussi, la nature de l'excitation correspond à un déplacement imposé au niveau de la jonction ce qui implique que  $\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ . Pour cette raison, on se limitera dans la suite aux seules fonctions de transfert  $\mathbf{T}_{ij}(\omega)$  et  $\mathbf{K}_{jj}(\omega)$ . Cette dernière matrice des raideurs dynamiques donne également la matrice, dite des masses dynamiques, par :

$$\mathbf{M}_{jj}(\omega) = \overline{\mathbf{M}}_{jj}(\omega) + \sum_{k=1}^N H_k(\omega) \frac{\omega^2}{\omega_k^2} \mathbf{L}_{kj}^T \mathbf{L}_{kj} \quad (\text{V.20})$$

En tenant compte de la relation (V.11) et de la définition de  $\overline{\mathbf{M}}_{jj}$ , on remarque que :

$$\Psi_{ij} = \sum_{k=1}^N \Phi_{ik} \mathbf{L}_{kj} - \mathbf{M}_{ii}^{-1} \mathbf{M}_{ij} \quad (\text{V.21})$$

et :

$$\overline{\mathbf{M}}_{jj} = \sum_{k=1}^N \mathbf{L}_{kj}^T \mathbf{L}_{kj} + \mathbf{M}_{jj} - \mathbf{M}_{ij}^T \mathbf{M}_{ii}^{-1} \mathbf{M}_{ij} \quad (\text{V.22})$$

ce qui permet de réécrire la relation (V.18) sous la forme :

$$\mathbf{T}_{ij}(\omega) = \sum_{k=1}^N T_k(\omega) \Phi_{ik} \mathbf{L}_{kj} - \mathbf{M}_{ii}^{-1} \mathbf{M}_{ij} \quad (\text{V.23})$$

et la relation (V.20) sous la forme :

$$\mathbf{M}_{jj}(\omega) = \sum_{k=1}^N T_k(\omega) \mathbf{L}_{kj}^T \mathbf{L}_{kj} + \mathbf{M}_{jj} - \mathbf{M}_{ij}^T \mathbf{M}_{ii}^{-1} \mathbf{M}_{ij} \quad (\text{V.24})$$

avec :

$$T_k(\omega) = 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_k} \right)^2 H_k(\omega) \quad (\text{V.25})$$

la transmissibilité dynamique d'un système à 1 ddl. De manière générale, les matrices qui multiplient  $T_k(\omega)$ , à l'intérieur de la somme, dans les relations (V.23) et (V.24) sont appelées matrices des paramètres modaux effectifs. Plus précisément, nous noterons pour le  $k$ -ième mode :

$$\tilde{\mathbf{T}}_{ij,k} = \Phi_{ik} \mathbf{L}_{kj} \quad (\text{V.26})$$

la matrice des transmissibilités effectives, et :

$$\tilde{\mathbf{M}}_{jj,k} = \mathbf{L}_{kj}^T \mathbf{L}_{kj} \quad (\text{V.27})$$

la matrice des masses effectives. Ces dernières ont un sens très important puisqu'elles représentent la contribution d'un mode à la réponse dynamique. La transmissibilité effective traduit l'importance du mode «vu» par le ddl étudié et la masse effective représente la masse que fait vibrer le mode «vu» par la jonction.

L'intérêt de l'approche modale est de ne prendre en compte qu'un nombre limité de modes dans la superposition modale : c'est le principe de troncature modale. Le nombre de modes retenus, noté  $N_t$ , est souvent faible par rapport au nombre de mode total  $N$ , surtout pour les analyses basses fréquences. Les modes sélectionnés sont généralement ceux pour lesquels la fréquence propre est inférieure à la fréquence maximale étudiée augmentée d'une certaine marge pour inclure ceux dont la fréquence propre est proche et qui peuvent être significatifs. Cependant, en limitant le nombre de modes, la solution n'est plus exacte. Pour qu'elle le soit au moins statiquement, on ajoute un terme résiduel qui permet de tenir compte de la contribution statique des modes omis. Pour cela, on utilise les propriétés de sommation des paramètres effectifs, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{T}}_{ij,k} = \Psi_{ij} + \mathbf{M}_{ii}^{-1} \mathbf{M}_{ij} \quad (\text{V.28})$$

et :

$$\sum_{k=1}^N \tilde{\mathbf{M}}_{jj,k} = \bar{\mathbf{M}}_{jj} - \left( \mathbf{M}_{jj} - \mathbf{M}_{ij}^T \mathbf{M}_{ii}^{-1} \mathbf{M}_{ij} \right) \quad (\text{V.29})$$

Avec les  $N_t$  premiers modes dans la superposition modale, les matrices des fonctions de transferts approchées, mais exact pour  $\omega = 0$  (statiquement), valent :

$$\mathbf{T}_{ij}(\omega) \approx \sum_{k=1}^{N_t} T_k(\omega) \tilde{\mathbf{T}}_{ij,k} + \mathbf{T}_{ij,\text{res}} \quad (\text{V.30})$$

et :

$$\mathbf{M}_{jj}(\omega) \approx \sum_{k=1}^{N_t} T_k(\omega) \tilde{\mathbf{M}}_{jj,k} + \mathbf{M}_{jj,\text{res}} \quad (\text{V.31})$$

où  $\mathbf{T}_{ij,\text{res}}$  et  $\mathbf{M}_{jj,\text{res}}$  sont les termes résiduels définis par :

$$\mathbf{T}_{ij,\text{res}} = \Psi_{ij} - \sum_{k=1}^{N_t} \tilde{\mathbf{T}}_{ij,k} \quad (\text{V.32})$$

et :

$$\mathbf{M}_{jj,\text{res}} = \bar{\mathbf{M}}_{jj} - \sum_{k=1}^{N_t} \tilde{\mathbf{M}}_{jj,k} \quad (\text{V.33})$$

On remarque donc que toute fonction de transfert  $Y(\omega)$  peut être écrite sous une forme générique :

$$Y(\omega) = \sum_k A_k(\omega) \tilde{Y}_k + Y_{\text{res}} \quad (\text{V.34})$$

où  $A_k(\omega)$  désigne les amplifications dynamiques,  $\tilde{Y}_k$  les paramètres effectifs et  $Y_{\text{res}}$  le résidu.

## V.3 Méthodes de propagation d'incertitudes en dynamique

### V.3.1 Introduction

Le schéma général de propagation d'incertitudes en dynamique est strictement le même que dans le cas statique. La différence vient de l'équation du mouvement à résoudre qui entraîne des difficultés supplémentaires, notamment le temps de calcul qui est bien plus important que pour l'équation d'équilibre statique  $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}$ . Dans le cas d'une approche modale, l'étape coûteuse est la résolution du système aux valeurs propres ; le temps de calcul pour la superposition modale

est relativement négligeable. Le principal enjeu est donc de calculer rapidement une approximation des valeurs propres et des vecteurs propres. Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature touchant aussi bien à la propagation d'incertitudes qu'aux méthodes paramétriques en général. La première catégorie comprend les méthodes de perturbation dont le principe est de chercher un développement de Taylor à l'ordre 1 ou éventuellement 2 autour d'un point de fonctionnement. Le coût de calcul est relativement faible mais la méthode est peu robuste si l'on s'éloigne trop du point nominal. La seconde catégorie concerne les méthodes de réanalyse dont le principe est de résoudre le système propre sur un modèle réduit. La réduction du modèle consiste à projeter le système d'équation dans une base de vecteurs qui peut être choisie et adaptée en fonction du type d'analyse paramétrique. On trouve enfin les méthodes basées sur les méta-modèles tels que le chaos polynomial ou les surfaces de réponse. La difficulté, dans ce cas, est de trouver les bonnes grandeurs d'intérêt à approcher pour obtenir une approximation correcte des FRF. Ces différentes méthodes sont brièvement présentées dans les sections suivantes. Par souci de simplicité, les indices permettant de distinguer les ddl internes des ddl de jonction sont omis et on notera  $\Phi_k$  le  $k$ -ième vecteur propre des ddl internes et  $\Phi$  la base complète.

### V.3.2 Méthodes de perturbation

Le moyen le plus simple de calculer une approximation des valeurs propres et des vecteurs propres, est de chercher un développement au premier ordre de ces derniers, défini par :

$$\hat{\lambda}_k = \lambda_k^{(0)} + \sum_{m=1}^M \frac{\partial \lambda_k}{\partial x_m} (x_m - x_m^{(0)}) \quad (\text{V.35})$$

et :

$$\hat{\Phi}_k = \Phi_k^{(0)} + \sum_{m=1}^M \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_m} (x_m - x_m^{(0)}) \quad (\text{V.36})$$

où  $\hat{\lambda}_k$  et  $\hat{\Phi}_k$  sont les valeurs approchées,  $\lambda_k^{(0)}$  et  $\Phi_k^{(0)}$  sont les valeurs exactes calculées autour du point de fonctionnement nominal  $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_M^{(0)})$ , et  $\partial \lambda_k / \partial x_m$  et  $\partial \Phi_k / \partial x_m$  sont les dérivées partielles par rapport à une variable  $x_m$ . Ces dernières peuvent être calculées de manière relativement simple en différenciant l'équation V.6 pour un mode  $k$  donnée, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial x_m} \left( (-\lambda_k \mathbf{M} + \mathbf{K}) \Phi_k \right) = 0 \quad (\text{V.37})$$

Dans un premier temps, en multipliant à gauche par  $\Phi_k^T$ , on obtient la dérivée de la  $k$ -ième valeur propre, qui vaut :

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial x_m} = \Phi_k^T \left( -\lambda_k \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_m} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_m} \right) \Phi_k \quad (\text{V.38})$$

Pour les vecteurs propres, on peut approcher les dérivées par une combinaison linéaire des vecteurs de la base nominale. Pour cela, si l'on considère une base tronquée à  $N_t$  modes, la dérivée du  $k$ -ième mode vaut :

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_m} \simeq \sum_{p=1}^{N_t} \alpha_{kp} \Phi_p \quad (\text{V.39})$$

Les coefficients  $\alpha$  sont déterminés en injectant cette relation dans l'équation V.37 puis en multipliant par  $\Phi_l^T$  quel que soit  $l = 1 \dots N_t$  et  $l \neq k$ . Grâce aux propriétés d'orthogonalité des vecteurs, si  $p \neq l$ , les produits s'annulent et il reste :

$$\alpha_{kl} = \Phi_l^T \frac{1}{\lambda_k - \lambda_l} \left( -\lambda_k \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_m} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_m} \right) \Phi_k \quad (\text{V.40})$$

Le coefficient  $\alpha_{kk}$  s'obtient en différenciant la relation de normalisation des vecteurs propres par rapport à la matrice de masse, c'est-à-dire  $\Phi_k^T \mathbf{M} \Phi_k = 1$ , ce qui permet d'aboutir à :

$$\alpha_{kk} = -\frac{1}{2} \Phi_k^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_m} \Phi_k \quad (\text{V.41})$$

Avec cette approximation, la dérivée des vecteurs propres dépend du nombre de modes pris en compte dans la troncature modale. Par contre, on peut observer que la dérivée des valeurs propres ne dépend pas de la troncature mais seulement du  $k$ -ième mode considéré.

L'évaluation des dérivées au premier ordre n'est pas très coûteuse en temps de calcul. Elle nécessite un seul calcul modal et l'évaluation des dérivées des matrices de masse et de raideur, ce qui est faible par rapport à la résolution modale. Cependant, son inconvénient majeur est que l'approximation n'est valable qu'au voisinage proche d'un point de fonctionnement. Naturellement, un développement à l'ordre supérieur peut être envisagé au prix de calculs bien plus lourds.

### V.3.3 Méthodes de réanalyse

Le principe de la réanalyse, aussi appelée analyse de Rayleigh-Ritz, est de projeter les matrices du système dans une base de  $N_b$  vecteurs que l'on notera  $\mathbf{T}$ . Cela revient à chercher une approximation des vecteurs propres par des combinaisons linéaires des vecteurs de cette base, c'est-à-dire tels que  $\Phi = \mathbf{T}\mathbf{p}$  où  $\mathbf{p}$  est la matrice dont les colonnes correspondent aux coefficients de projection des vecteurs  $\Phi_k$  dans la base  $\mathbf{T}$ . En injectant cette relation dans le système propre et en multipliant à gauche par  $\mathbf{T}^T$ , le nouveau système vaut :

$$\left( -\omega^2 \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \right) \mathbf{p} = 0 \quad (\text{V.42})$$

où  $\mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}$  et  $\mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}$  sont respectivement les matrices de masse et raideur réduites à la taille  $N_b \times N_b$ . L'intérêt de l'approche est qu'avec un nombre de vecteurs  $N_b$  dans la base  $\mathbf{T}$  plus faible que le nombre de ddl du modèle, le système précédent est résolu plus rapidement.

La première difficulté de cette méthode réside dans le choix de la base  $\mathbf{T}$ . En effet, le sous-espace engendré par cette dernière doit permettre de bien représenter les vecteurs propres. La première idée est une base nominale de vecteurs propres calculée sur le système initial, par exemple aux valeurs nominales des variables d'entrée. L'hypothèse sous-jacente est que les vecteurs propres du système modifié (*i.e* ayant subi des variations des paramètres d'entrée) peuvent être correctement approchés tant qu'il s'éloigne peu de la position initiale. La seconde question concerne le nombre de vecteurs inclus dans la base. Plus il est important et mieux seront représentés les vecteurs modifiés. Si la base est complète, la solution obtenue est exacte mais l'opération n'a plus d'intérêt. Il faut donc trouver un compromis entre la précision des résultats et le temps de calcul. Généralement, le nombre de modes  $N_b$  retenus correspond à la fréquence maximale étudiée, augmentée d'une certaine marge, mais il doit être légèrement supérieur au nombre de modes  $N_t$  de la troncature modale pour pouvoir bien tous les représenter. Cependant, avec une base nominale de vecteurs propres, le domaine de variation du système modifié reste relativement faible, ce qui peut être contraignant pour certaines applications. Pour cette raison, plusieurs méthodes ont été proposées pour la compléter par des vecteurs plus pertinents. On trouve notamment l'approche multi-modèle qui consiste à compléter la base avec des modes exacts évalués en plusieurs points de fonctionnement, l'ajout des dérivées des vecteurs propres (Balmès, 1996) ou encore de vecteurs résiduels statiques représentatifs des perturbations du système modifié (Bouazzouni *et al.*, 1997).

Pour l'analyse basses fréquences de modèle de grande taille, la réduction est souvent très avantageuse. En effet, le nombre de vecteurs dans la base de projection peut être généralement limité à quelques centaines alors que le nombre de ddl du modèle est de plusieurs centaines de milliers. Aussi, même en se limitant aux vecteurs propres du système initial, la méthode reste efficace pour des variations modérées des paramètres d'entrée et elle est plus performante qu'un développement au premier ordre.

### V.3.4 Méthodes basées sur les méta-modèles

La difficulté pour l'utilisation de méta-modèles est le choix des grandeurs d'intérêt à approcher. Les FRF sont fortement non-linéaires par rapport aux paramètres d'entrée. Il est donc indispensable de construire les méta-modèles sur des grandeurs intermédiaires et d'effectuer la superposition modale en post-traitement. On peut penser que les propriétés modales changent peu pour de faibles variations des paramètres d'entrée, elles peuvent donc constituer ces grandeurs intermédiaires. Cependant, les vecteurs propres posent problème car il n'est pas envisageable de construire un méta-modèle pour chacune de leurs composantes étant donné que leur taille est importante dans le cas de grandes structures. Plusieurs méthodes sont possibles.

La première technique s'inspire des méthodes de réanalyse en cherchant une approximation des vecteurs propres du système modifié dans une base de référence. Cette base est constituée des vecteurs propres calculés sur le système initial. Si les vecteurs propres varient peu, les coefficients de projection dans la base restent relativement stables et peuvent être approchés par un méta-modèle. De plus, comme le nombre de modes retenus dans la base est généralement faible par rapport au nombre de ddl du modèle, le nombre de méta-modèles à construire est largement réduit. Formellement, on note  $\Phi_k^{(0)}$  le  $k$ -ième vecteur propre du système initial, c'est-à-dire calculé aux valeurs nominales  $\mathbf{x}^{(0)}$  des variables d'entrée, et  $\Phi_k^{(j)}$  le  $k$ -ième vecteur propre du système modifié, calculé aux valeurs  $\mathbf{x}^{(j)}$  des variables d'entrée. En supposant que ce dernier peut être décrit par une combinaison linéaire des vecteurs initiaux, on a :

$$\Phi_k^{(j)} = \sum_{i=1}^{N_b} p_{ik}^{(j)} \Phi_i^{(0)} \quad (\text{V.43})$$

où  $N_b$  est le nombre de vecteurs retenus dans la base initiale. Le nombre de modes recherchés étant égal à  $N_t$ , la matrice des coefficients de projection  $\mathbf{p}^{(j)}$  est de taille  $N_b \times N_t$ . En approchant les projections par des méta-modèles et à partir de la base initiale, on peut reconstruire rapidement une approximation des vecteurs propres du système modifié. Les valeurs propres peuvent, quand à elles, être directement approchées par des méta-modèles. Cette méthode est utilisée dans (Pichler *et al.*, 2009) et (Pichler et Schuëller, 2011) avec des surfaces de réponse linéaire. Ces dernières sont construites à partir d'un échantillon permettant de générer un ensemble de bases de vecteurs propres modifiés  $\Phi^{(j)}$  pour  $j = 1 \dots J$  où  $J$  dépend du nombre de variables aléatoires prises en compte. Cette approche avait également été proposée dans (Dessombz, 2000) avec le chaos polynomial. Les pulsations propres sont recherchées dans la base du chaos polynomial et les vecteurs propres sont des combinaisons linéaires des vecteurs de la base déterministe nominale dont les coefficients sont également recherchés dans la base du chaos polynomial. Ces deux développements sont injectés dans le système propre à résoudre qui, lui-même, est projeté sur les polynômes de la base du chaos. Grâce à la propriété d'orthogonalité de ces derniers, cela aboutit à un système d'équations non-linéaires qui permet de calculer les coefficients.

Le seconde méthode consiste à approcher directement les paramètres effectifs et les fréquences propres pour reconstruire les FRF. L'inconvénient de cette approche est qu'on ne peut pas traiter la totalité des ddl du modèle ; leur nombre est bien trop important. Il est donc nécessaire

de se limiter à une petite quantité de ddl qui sont les « ddl d'intérêt ». C'est bien le cas pour l'application que nous considérons ici, car on s'intéresse aux ddl à l'interface entre la structure du satellite et certains équipements. Cependant, il faut retenir que cette approche pose des difficultés si l'on souhaite étudier, par exemple, des contraintes.

Quelle que soit la démarche employée, il est très important d'être capable d'associer les modes entre eux au cours de l'échantillonnage : il s'agit de l'appariage. En effet, étant donné qu'un méta-modèle est associé à une grandeur correspondant à un mode bien précis (projection dans une base, fréquence ou paramètre effectif), il ne doit pas y avoir d'inversion.

### V.3.5 Conclusion

Les méthodes présentées ci-dessus sont les plus utilisées pour l'approximation de valeurs propres et de vecteurs propres. Elles permettent, dans le cas d'une approche modale, de calculer rapidement les fonctions de transfert et d'en déterminer des statistiques par une propagation d'incertitudes. Les méthodes de perturbation sont généralement déconseillées car elles sont peu efficaces si l'on s'éloigne trop du point nominal auquel est calculé le développement. Son intérêt réside simplement dans l'exploitation du calcul des dérivées, par exemple, pour une analyse de sensibilité. Les méthodes de réanalyse basées sur la réduction de modèle sont intéressantes pour leur compromis entre la précision de l'approximation et le temps de calcul. La base initiale de vecteurs propres peut être enrichie de différentes manières pour augmenter l'étendue du domaine d'approximation. Pour l'estimation d'une probabilité de défaillance, le temps de calcul est *a priori* bien plus important que la démarche basée sur les méta-modèles car, même si le système propre à résoudre est largement réduit, les matrices modifiées doivent être recalculées. L'utilisation de méta-modèles, et notamment de surface de réponse, semble correspondre le mieux à notre besoin compte tenu que la démarche de construction a déjà été établie pour l'analyse statique. L'objectif de la section suivante est d'évaluer les capacités de cette méthode. Cependant, il faut bien noter que l'utilisation de méta-modèles est limitée par la possibilité d'associer les modes entre eux au cours de l'échantillonnage.

## V.4 Utilisation des surfaces de réponse

### V.4.1 Description de la démarche

L'objectif de la démarche est de comparer les deux approches de construction de méta-modèles décrites dans la section précédente : l'approximation des paramètres effectifs et l'approximation des projections des vecteurs propres dans une base nominale déterministe. Elles seront respectivement appelées dans la suite méthode des paramètres effectifs et méthode des projections. Les méta-modèles employés sont des SR du second ordre et la méthodologie décrite dans la section III.3 est utilisée pour les construire. On rappelle qu'elle consiste à former plusieurs SR en testant les termes potentiels de manière itérative par rapport à plusieurs critères, puis à sélectionner la plus performante au sens du coefficient  $Q^2$  calculé par validation croisée.

### V.4.2 Grandeurs d'intérêt à approcher

Les réponses mécaniques que l'on souhaite étudier, pour notre application, sont les déplacements en certains nœuds du modèles EF. Ces nœuds correspondent à des interfaces avec les équipements du satellite. Cependant, pour des questions de spécification, les efforts de réaction qui transitent à la base du satellite, à l'interface avec le lanceur, sont également utiles. D'après la relation V.16, et compte tenu des simplifications liées aux structures étudiées, ces grandeurs

sont calculées à partir des fonctions de transfert de transmissibilité dynamique et de masse dynamique. Les relations sont (en omettant les indices des ddl internes et de jonction) :

$$\mathbf{T}(\omega) \approx \sum_{k=1}^{N_t} T_k(\omega) \tilde{\mathbf{T}}_k + \mathbf{T}_{\text{res}} \quad (\text{V.44})$$

et :

$$\mathbf{M}(\omega) \approx \sum_{k=1}^{N_t} T_k(\omega) \tilde{\mathbf{M}}_k + \mathbf{M}_{\text{res}} \quad (\text{V.45})$$

où  $T_k(\omega)$  est une amplification dynamique décrite par l'équation (V.25),  $\tilde{\mathbf{T}}_k$  et  $\tilde{\mathbf{M}}_k$  sont respectivement les transmissibilités effectives et les masses effectives,  $\mathbf{T}_{\text{res}}$  et  $\mathbf{M}_{\text{res}}$  sont les termes résiduels qui permettent de compenser la troncature modale en tenant compte des contributions statiques des modes omis. Les SR ne sont pas construites directement sur ces fonctions mais sur des grandeurs intermédiaires qui permettront de les reconstruire. Les deux méthodologies discutées se distinguent par le choix des grandeurs à approcher. Les termes des fonctions de transfert sont analysés un à un :

- L'amplification dynamique  $T_k(\omega)$  est fonction de la pulsation d'excitation, qui est imposée au système, de la pulsation propre et de l'amortissement visqueux. Quelle que soit la méthode, les pulsations propres sont approchées par des SR. L'amortissement visqueux peut varier d'un mode à l'autre et peut être représenté par une variable d'entrée, aléatoire ou déterministe. Si c'est une variable aléatoire, elle ne pose pas de problèmes majeurs puisqu'elle intervient en post-traitement pour reconstruire la FRF.
- Les paramètres effectifs sont soit des transmissibilités effectives, fonctions des vecteurs propres et des facteurs de participation, soit des masses effectives, fonctions uniquement des facteurs de participation. Pour la méthode des paramètres effectifs, ces grandeurs peuvent être directement approchées par des SR. Une alternative est de construire les SR sur les composantes utiles des vecteurs propres et sur les facteurs de participation pour calculer *a posteriori* les valeurs des paramètres effectifs. Les composantes utiles des vecteurs propres sont définies en fonction des ddl étudiés. La méthode des projections permet, quand à elle, de reconstruire seulement les vecteurs propres. Il est donc indispensable d'approcher, en plus, les facteurs de participation par des SR pour recalculer les valeurs des paramètres effectifs.
- Les termes résiduels sont fonctions des propriétés statiques de la structure et des paramètres effectifs des modes retenus. Les propriétés statiques sont la matrice des formes statiques de jonction  $\Psi$  et la matrice de masse condensée à la jonction  $\bar{\mathbf{M}}$ . Avec une jonction isostatique, les formes statiques sont des modes rigides et la matrice de masse condensée est la matrice de masse rigide. Les modes rigides ne varient pas quelles que soient les valeurs des paramètres d'entrée du modèle, ils ne posent donc pas de difficultés. Seules les composantes de la matrice de masse rigide (de taille  $6 \times 6$ ), dont certaines sont nulles, doivent être approchées par des SR.

Comme dans le cas statique, les SR sont construites à partir d'un échantillon statistique dont la taille dépend du nombre de variables aléatoires prises en compte. L'échantillon est formé à partir des grandeurs d'intérêt déterminées de manière exactes par un calcul modal. Cependant, quelle que soit la démarche, il est important de bien apparier les modes au cours de l'échantillonnage ; la démarche est décrite dans la section suivante.

### V.4.3 Appariage des modes

D'un calcul à l'autre, les variations des paramètres d'entrée peuvent entraîner l'inversion de certains modes, ce qui n'est pas souhaitable pour la construction des SR. Un moyen simple pour

appairer les modes est d'utiliser les coefficients de projection des vecteurs propres modifiés dans la base initiale. On considère, pour cela, que la base initiale  $\Phi^{(0)}$  définit l'ordre de référence des modes. Étant donné que, pour le système modifié  $j$ , les vecteurs propres sont calculés tels que :

$$\Phi^{(j)} = \Phi^{(0)} \mathbf{p}^{(j)} \quad (\text{V.46})$$

la matrice  $\mathbf{p}^{(j)}$  des coefficients de projection peut être obtenue par :

$$\mathbf{p}^{(j)} = \Phi^{(0)T} \mathbf{M}^{(0)} \Phi^{(j)} \quad (\text{V.47})$$

où  $\mathbf{M}^{(0)}$  est la matrice de masse des ddl internes du système initial. Plus les modes  $\Phi_k^{(0)}$  et  $\Phi_l^{(j)}$  sont proches plus la composante  $p_{kl}^{(j)}$  de la matrice  $\mathbf{p}^{(j)}$  est proche de 1. Dans le cas inverse, la valeur est proche de 0. Pour associer les modes entre eux, il suffit donc de ranger les colonnes de  $\mathbf{p}^{(j)}$  pour que les valeurs sur la diagonale soient maximales. Cette démarche doit être appliquée pour les deux méthodes d'approximation, ce qui signifie que même pour la méthode des paramètres effectifs, les projections des vecteurs modifiés dans la base initiale sont calculées. Concernant la procédure d'échantillonnage, on s'aperçoit qu'il est intéressant de sauvegarder le produit  $\Phi^{(0)T} \mathbf{M}^{(0)}$  et de le charger au cours des calculs modifiés pour déterminer les valeurs des projections. La procédure est schématisée en figure V.2. Pour limiter les interventions dans le calcul mécanique (code EF), seule les projections sont déterminées au cours du calcul, l'ordre des modes est modifié en post-traitement.

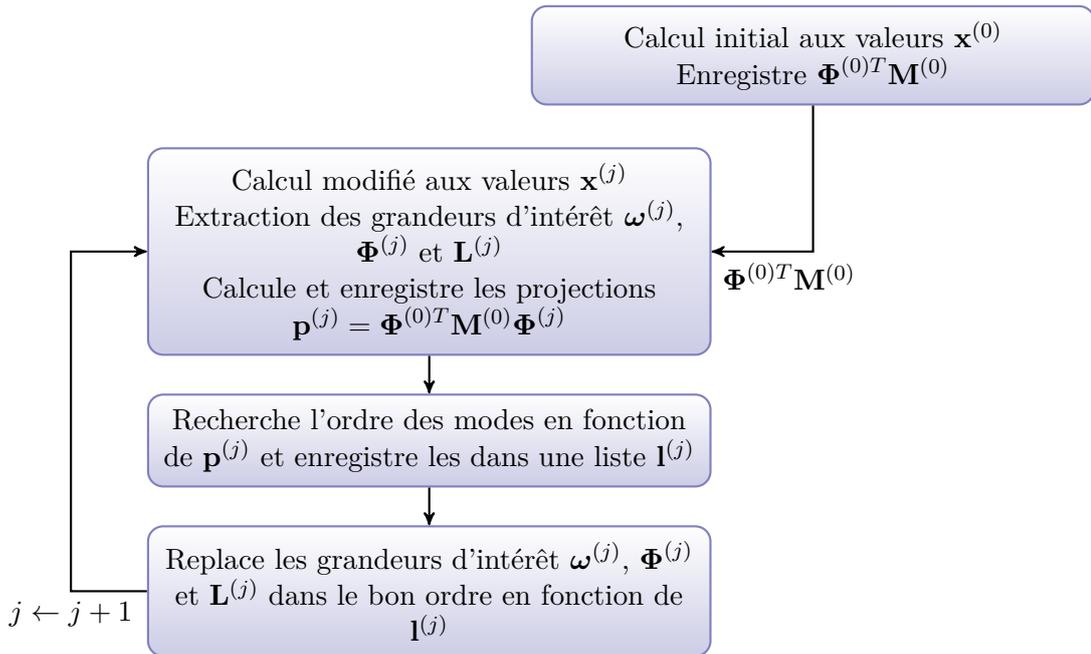


FIGURE V.2 – Procédure d'appariage des modes au cours de l'échantillonnage.

Avec cette procédure, même si les modes sont remplacés dans l'ordre en fonction de la valeur maximale des coefficients de projection, cela ne signifie pas qu'ils sont semblables d'un calcul à un autre. En effet, si la valeur maximale n'est pas proche de 1 (par exemple si elle est inférieure à 0.5), les modes n'ont plus la même forme. Dans ce cas, chercher la valeur maximale des projections revient à chercher les modes les plus « ressemblants » mais leur forme peut être très différente. Ce problème est une difficulté par la construction de SR. Nous en discuterons dans la suite.

#### V.4.4 Normalisation des vecteurs propres

Les vecteurs propres calculés à partir du système d'équations (V.6), sont définis à un facteur multiplicatif près. Nous avons adopté dans la section V.2.2 une normalisation unitaire par rapport à la matrice de masse, c'est-à-dire que pour le vecteur  $k$  on a  $\Phi_k^T \mathbf{M} \Phi_k = 1$ , ce qui implique que les fonctions de transfert sont définies par les relations V.44 et V.45. Pour reconstruire ces dernières à partir des SR lors d'un tirage aléatoire, il est nécessaire de respecter cette normalisation. De manière intuitive, si l'échantillon d'apprentissage des SR est formé de telle manière que, pour tout système modifié  $j$ , on a :

$$\Phi_k^{(j)T} \mathbf{M}^{(j)} \Phi_k^{(j)} = 1 \quad (\text{V.48})$$

alors la normalisation est prise en compte dans l'approximation et les FRF peuvent être construites directement à partir des valeurs issues des SR. Cette méthodologie ne pose pas de problèmes pour approcher les paramètres effectifs mais certaines difficultés peuvent apparaître dans le cas des projections. C'est ce que nous discutons dans la suite.

Lorsque les modes sont bien appariés, les termes diagonaux  $p_{kk}$  de la matrice des projections  $\mathbf{p}$  sont proches de 1. Cependant, au cours de l'échantillonnage, beaucoup de valeurs  $p_{kk}^{(j)}$  sont très proches de 1 alors que quelques unes peuvent s'en éloigner si un mode change légèrement de forme. Dans ce cas, l'approximation de ses composantes par des SR risque de fournir des résultats peu satisfaisants. Cette difficulté a été soulignée dans (Pichler *et al.*, 2009) et les auteurs ont proposé une alternative : il s'agit d'approcher la norme euclidienne des composantes à la place de la composante diagonale. Plus précisément, on note  $(p_{ik})_{i=1\dots N_b}$  les coefficients de projection du  $k$ -ième vecteur propre modifié sur la base initiale  $\Phi^{(0)}$  et  $p_{k,\text{norm}}$  leur norme euclidienne. On calcule les composantes normalisées par :

$$\bar{p}_{ik} = \frac{p_{ik}}{p_{k,\text{norm}}} \quad i = 1 \dots N_b \quad \text{et} \quad i \neq k \quad (\text{V.49})$$

et la valeur  $p_{kk}$  peut être exprimée par :

$$p_{kk} = p_{k,\text{norm}} \sqrt{1 - \sum_{i \neq k} \bar{p}_{ik}^2} \quad (\text{V.50})$$

De cette manière, les SR sont construites sur les termes  $\bar{p}_{ik}$ , pour  $i \neq k$ , et  $p_{k,\text{norm}}$ , et la composante  $p_{kk}$  est calculée en post-traitement des valeurs issues des SR. L'avantage de cette méthode est que la normalisation unitaire des vecteurs propres modifiés est incluse dans l'approximation. L'inconvénient est que  $p_{kk}$  dépend des SR des autres composantes, ce qui peut entraîner une accumulation d'erreur d'approximation alors qu'elle est la composante la plus importante. De plus, compte tenu de l'approximation par SR et du changement de la forme de certains modes lors de l'échantillonnage, il y a un risque que  $\sum_{i \neq k} \bar{p}_{ik}^2$  soit supérieur à 1, ce qui signifie que le terme  $p_{kk}$  ne peut pas être calculé (intérieur de la racine négatif).

Une alternative à cette méthode est de normaliser les vecteurs propres modifiés par rapport au système initial, c'est-à-dire tels que :

$$\Phi_k^{(0)T} \mathbf{M}^{(0)} \Phi_k^{(j)} = 1 \quad (\text{V.51})$$

Cela implique que, quel que soit le système modifié  $j$ , la composante  $p_{kk}^{(j)}$  vaut 1 ; il est donc inutile de construire une SR sur celle-ci. Cependant, étant donné que la normalisation du vecteur modifié  $j$  par rapport à sa propre matrice de masse est perdue, il faut renormaliser les vecteurs qui sont construits par les SR. Cela nécessite de construire la matrice de masse à chaque nouveau tirage lors de l'exploitation des SR, ce qui implique un temps de calcul supplémentaire. Le principe de cette renormalisation est schématisé en figure V.3.

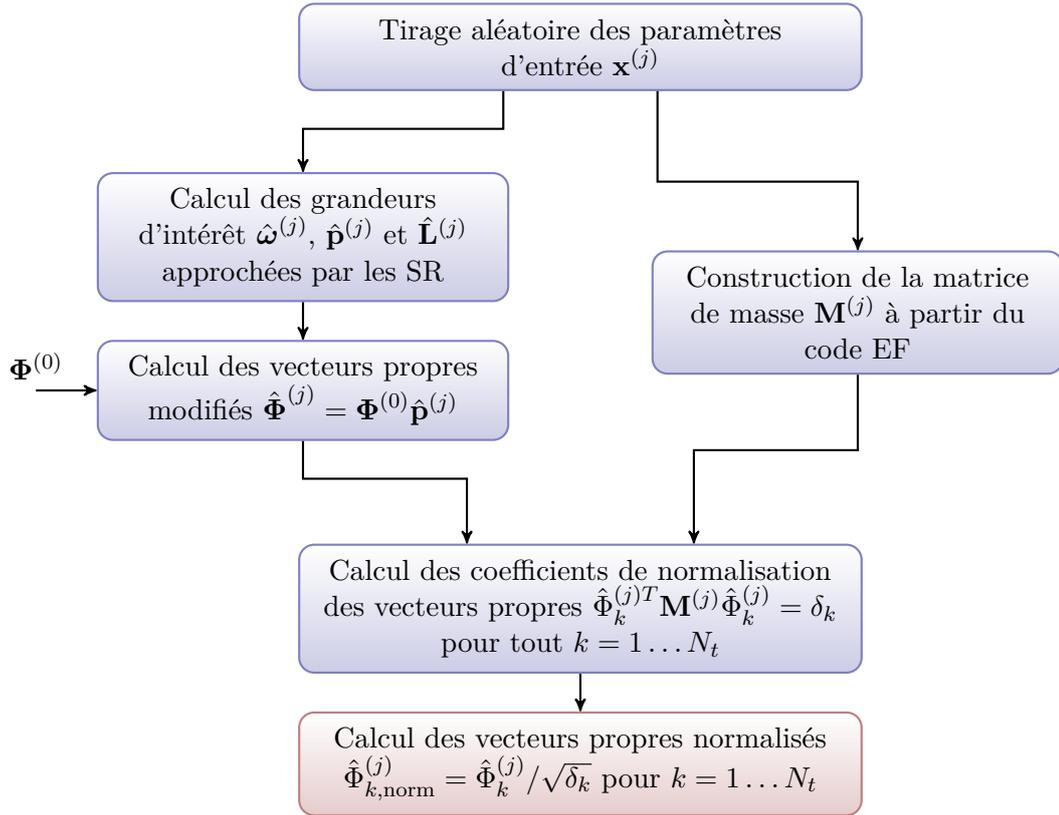


FIGURE V.3 – Renormalisation des vecteurs propres au cours d'un tirage aléatoire (méthode des projections 2).

Pour différencier ces deux approches dans les applications suivantes, nous appellerons méthode 1 celle avec la normalisation  $\Phi_k^{(j)T} \mathbf{M}^{(j)} \Phi_k^{(j)} = 1$ , et méthode 2 celle avec la normalisation  $\Phi_k^{(0)T} \mathbf{M}^{(0)} \Phi_k^{(j)} = 1$ .

#### V.4.5 Calcul numérique du système propre au cours de l'échantillonnage

La formation de l'échantillon pour la construction des SR nécessite de calculer les éléments propres issus du système  $\mathbf{K}\mathbf{U} = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{U}$ . Pour simplifier les écritures, il sera formulé dans cette partie  $\mathbf{A}\mathbf{U} = \lambda \mathbf{U}$ . Il peut être résolu numériquement par différentes méthodes qui sont regroupées selon deux catégories : les méthodes exhaustives et les méthodes sélectives.

Les méthodes exhaustives recherchent toutes les valeurs propres et vecteurs propres du système. Par exemple, la méthode Jacobi utilise des transformations du type :

$$\mathbf{A}^{(k+1)} = \mathbf{P}^T \mathbf{A}^{(k)} \mathbf{P} \quad (\text{V.52})$$

qui préservent les valeurs propres car  $\mathbf{P}$  est une matrice de rotation. De cette manière, la suite des matrices  $(\mathbf{A}^{(k)})_k$  converge vers une matrice diagonale dont les composantes sont les valeurs propres. D'autres techniques, telles que celle de Householder ou de Givens, consistent à construire une matrice tridiagonale dont les valeurs propres peuvent être calculées plus simplement.

À l'inverse, les méthodes sélectives permettent de ne calculer qu'un nombre limité de valeurs propres. Elles sont beaucoup utilisées en mécanique étant donné que le nombre de valeurs propres étudiées est très souvent faible par rapport au nombre de ddl du modèle (taille de la matrice  $\mathbf{A}$ ). On trouve parmi elles la méthode de la puissance itérée (et de la puissance itérée inverse) et les méthodes utilisant des projections dans un sous-espace, c'est-à-dire basées sur l'analyse de

Rayleigh-Ritz. Le principe est alors de remplacer les éléments propres de la matrice d'origine par ceux de la matrice réduite, obtenue par une projection dans un sous-espace. Les éléments propres de la matrice réduite sont calculés par une des méthodes exhaustives discutées précédemment. La méthode la plus couramment utilisée, disponible dans tous les logiciels éléments finis, est la méthode de Lanczos. Elle consiste à projeter la matrice  $\mathbf{A}$  dans un sous-espace pour construire une matrice tridiagonale, de taille réduite, ce qui permet de calculer les valeurs propres simplement. Le sous-espace, de dimension notée  $m$ , est engendré par les vecteurs  $\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{A}^2\mathbf{u}, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{u}$ , où  $\mathbf{u}$  est un vecteur de norme euclidienne unitaire choisi arbitrairement. Ce dernier est appelé espace de Krylov et sa dimension augmente à chaque itération jusqu'au nombre de valeurs propres  $N_b$  à calculer.

Une autre méthode appelée itération sur les sous-espaces, basée sur le même principe de projection, peut être plus intéressante à utiliser dans le cas de la construction d'un échantillon. Elle consiste à choisir un sous-espace initial  $\mathcal{H}$ , puis à projeter la matrice  $\mathbf{A}$  successivement dans les sous-espaces  $\mathcal{H}_1 = \mathbf{A}\mathcal{H}, \dots, \mathcal{H}_k = \mathbf{A}\mathcal{H}_{k-1}$ , construits de manière itérative. Cette fois-ci, la dimension  $N_b$  des sous-espaces n'augmente pas. Plus précisément, l'algorithme est le suivant :

1. Initialisation de  $N_b$  vecteurs linéairement indépendants  $\mathbf{V}_1^{(0)} \dots \mathbf{V}_{N_b}^{(0)}$ .
2. À l'itération  $k$ , les vecteurs  $\mathbf{q}_1^{(k)} \dots \mathbf{q}_{N_b}^{(k)}$  sont déterminés tels que :

$$\mathbf{A}\mathbf{q}_j^{(k)} = \mathbf{V}_j^{(k-1)} \quad 1 \leq j \leq N_b$$

à l'image de la méthode de la puissance itérée inverse.

3. En considérant la matrice  $\mathbf{Q}^{(k)}$  dont les colonnes sont les vecteurs  $\mathbf{q}_1^{(k)} \dots \mathbf{q}_{N_b}^{(k)}$ , la matrice réduite  $\mathbf{A}_{\text{red}}^{(k)}$  est déterminée telle que :

$$\mathbf{A}_{\text{red}}^{(k)} = \mathbf{Q}^{(k)T} \mathbf{A} \mathbf{Q}^{(k)}$$

Ses valeurs propres, notées  $\lambda_1^{(k)} \dots \lambda_{N_b}^{(k)}$ , et ses vecteurs propres, notés  $\mathbf{W}_1^{(k)} \dots \mathbf{W}_{N_b}^{(k)}$ , sont calculés par une méthode exhaustive. Le vecteur  $\mathbf{V}_j^{(k)}$  est calculé par :

$$\mathbf{V}_j^{(k)} = \mathbf{Q}^{(k)} \mathbf{W}_j^{(k)} \quad 1 \leq j \leq N_b$$

4. La procédure est terminée si  $|\lambda_j^{(k)} - \lambda_j^{(k-1)}| \leq \varepsilon |\lambda_j^{(k-1)}|$  pour tout  $j$  et pour une valeur  $\varepsilon$  suffisamment faible ( $10^{-3}$  par exemple). Dans le cas contraire, la procédure est répétée depuis l'étape 2, jusqu'à convergence.

De cette manière, la suite des vecteurs  $(\mathbf{V}_j^{(k)})_k$  et des valeurs  $(\lambda_j^{(k)})_k$  convergent respectivement vers des vecteurs propres et des valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$ . On remarque bien que la méthode de réanalyse décrite à la section V.3.3 correspond à une seule itération de la méthode des sous-espaces si les vecteurs initiaux de l'algorithme sont les vecteurs propres calculés sur le modèle initial. La remarque qui justifiait l'utilisation de la méthode de réanalyse (les vecteurs propres du système modifié peuvent être bien représentés dans le sous-espace engendré par les vecteurs propres du système initial si les variations des paramètres sont faibles) tient également pour l'utilisation de la méthode des sous-espaces. En effet, en utilisant les vecteurs propres du système initial comme vecteurs initiaux de l'algorithme, peu d'itérations seront nécessaires pour converger vers les vrais vecteurs du système modifié. Le temps de calcul pour construire l'échantillon peut donc être réduit.

#### V.4.6 Bilan

Pour approcher les fonctions de transfert de transmissibilité dynamique, deux méthodes sont envisageables dont chacune donne lieu à deux moyens de construire les SR. La première méthode est celle des paramètres effectifs dont les deux approches possibles sont les suivantes :

- Les SR sont construites directement sur les paramètres effectifs. Les grandeurs d'intérêt à approcher dans cette méthode sont donc : les transmissibilités effectives et les pulsations propres. Cette méthode est appelée méthode des paramètres effectifs 1.
- Les SR sont construites sur les composantes des vecteurs propres et les facteurs de participation. Dans ce cas, les paramètres effectifs sont calculés en post-traitant les valeurs issues des SR. Les composantes des vecteurs propres sont choisies en fonction des ddl à étudier. Les grandeurs d'intérêt à approcher dans cette méthode sont donc : les composantes utiles des vecteurs propres, les facteurs de participation et les pulsations propres. Cette méthode est appelée méthode des paramètres effectifs 2.

La seconde méthode est celle des projections dont les deux approches dépendent de la manière de normaliser les vecteurs propres au cours de l'échantillonnage :

- Les vecteurs modifiés sont normalisés tels que  $\Phi_k^{(j)T} \mathbf{M}^{(j)} \Phi_k^{(j)} = 1$  et les SR sont construites sur les composantes  $\bar{p}_{ik}$ , pour  $i \neq k$ , et  $p_{k,\text{norm}}$  (cf. section V.4.4). Dans ce cas les composantes  $p_{kk}$  sont déterminées en post-traitant les valeurs issues des SR. En plus des projections, les grandeurs d'intérêt à approcher dans cette méthode sont : les facteurs de participation et les pulsations propres. Cette méthode est appelée méthode des projections 1.
- Les vecteurs modifiés sont normalisés tels que  $\Phi_k^{(0)T} \mathbf{M}^{(0)} \Phi_k^{(j)} = 1$  et les SR sont construites sur les composantes  $p_{ik}$ , pour  $i \neq k$ , et la composante  $p_{kk}$  vaut toujours 1. Dans ce cas, il est nécessaire de construire la matrice de masse associée aux valeurs des paramètres tirés aléatoirement, lors de l'exploitation des SR, pour normaliser les vecteurs par rapport à leur propre matrice. Mis à part les projections, les grandeurs d'intérêt à approcher dans cette méthode sont les mêmes que pour la méthode précédente. Cette méthode est appelée méthode des projections 2.

Pour approcher les fonctions de transfert de masse dynamique, il suffit de construire les SR sur les facteurs de participation (car les masses effectives sont des produits de facteurs de participation), les pulsations propres et les composantes de la matrice de masse rigide. Les étapes pour former les échantillons des grandeurs d'intérêt sont les suivantes :

1. Calcul de la base initiale des vecteurs propres  $\Phi^{(0)}$ , aux valeurs moyennes des variables d'entrée, avec la méthode de Lanczos. Le produit  $\Phi^{(0)T} \mathbf{M}^{(0)}$  est également conservé.
2. Pour les valeurs  $\mathbf{x}^{(j)}$  des variables d'entrée :
  - (a) Calcul des éléments propres par une méthode d'itération sur les sous-espaces avec les vecteurs initiaux  $\Phi^{(0)}$ , détermination des facteurs de participation et des paramètres effectifs.
  - (b) Calcul des projections, appariage des modes et modification de l'ordre des grandeurs d'intérêt.
  - (c) Choix de la normalisation des vecteurs propres pour la méthode des projections (méthode 1 ou 2).

#### V.4.7 Illustration sur un cas simple

Une première application est présentée sur un cas très simple. Il s'agit d'un système masses-ressorts en série composé de 20 masses et 20 ressorts, il est présenté en figure V.4. Les variables sont les masses et les raideurs, respectivement notées  $m_1$  à  $m_{20}$  et  $k_1$  à  $k_{20}$ , et sont toutes considérées aléatoires de loi normale de moyenne 1 et d'écart-type 0.1. Elles sont toutes supposées indépendantes. Un amortissement modal de 2% est également pris en compte mais celui-ci est considéré comme déterministe. On souhaite évaluer la dispersion des FRF des déplacements au niveau des ddl notés  $u_1$  à  $u_{20}$ . Pour cela, on utilise les méthodes des projections 1 et des

paramètres effectifs 1. Dans la superposition modale, seuls les 8 premiers modes propres sont pris en compte. Pour la méthode des projections, on utilise comme base de référence les 10 vecteurs propres calculés sur le système initial.

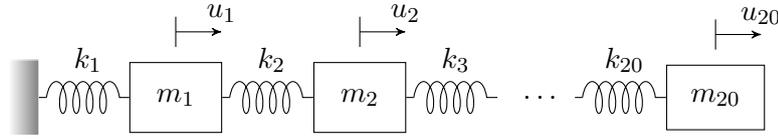


FIGURE V.4 – Système masse ressort étudié.

Les dispersions des FRF calculées par les deux méthodes d'approximation et des FRF exactes sont comparées sur la base d'un échantillon aléatoires de 10000 tirages. Les résultats sont présentés pour les 8 premiers ddl seulement (de  $u_1$  à  $u_8$ ), ils apparaissent en figure V.5. Les courbes en trait plein sont les valeurs moyennes estimées sur les 10000 tirages, la zone rouge encadre 95% des FRF exactes et les courbes en pointillés encadrent 95% des FRF évaluées par les méthodes d'approximation. On observe visuellement que les approximations sont très satisfaisantes et donc qu'aucune méthode ne se distingue réellement. Malgré cela, une analyse plus précise des résultats peut permettre de faire quelques remarques.

Dans un premier temps, on peut voir que plus la fréquence augmente, plus la dispersion des FRF est importante. Si la dispersion augmente, il peut être plus délicat d'approcher les grandeurs d'intérêt par des SR. En effet, cela peut être constaté sur la figure V.6 où l'évolution des valeurs  $Q^2$  des SR est représentée en fonction des numéro des modes, classés dans l'ordre croissant des fréquences (les SR des transmissibilités effectives sont affichées pour chaque ddl et celles des projections pour chaque mode  $k$  projeté dans la base des 10 vecteurs propres du système initial). On observe très clairement que la tendance générale est la diminution de la qualité des SR en fonction du numéro du mode. Ces numéros sont dans l'ordre croissant des fréquences propres de la structure initiale, mais ils sont surtout dans l'ordre décroissant des masses effectives des modes, comme le montre la figure V.7. Sur cette dernière, on observe que la masse effective du premier mode seul concentre plus de 80% de la masse rigide de la structure et celles des 10 premiers modes cumulées représentent plus de 99%. Si l'on observe maintenant l'appariage des modes au cours de l'échantillonnage, on remarque qu'un mode a plus tendance à changer de forme par rapport à celui de la structure initiale si ce dernier possède une faible masse effective. Cette remarque est illustrée en figure V.8 où l'appariage est traduit par le critère MAC, *Modal Assurance Criterion*, qui est défini entre un vecteur propre initial  $\Phi_k^{(0)}$  et un vecteur propre modifié  $\Phi_l^{(j)}$  par :

$$\text{MAC} = \frac{\left(\Phi_k^{(0)T} \Phi_l^{(j)}\right)^2}{\left\|\Phi_k^{(0)}\right\|^2 \left\|\Phi_l^{(j)}\right\|^2} \quad (\text{V.53})$$

Le MAC est compris entre 0 et 1, il correspond au degré de colinéarité entre deux vecteurs. Il vaut 1 si les deux vecteurs sont colinéaires, c'est-à-dire si les deux modes sont semblables.

Cet exemple conduit donc à des conclusions qui pouvaient être attendues : plus la masse effective d'un mode est faible, c'est-à-dire plus le mode a tendance à être local, plus ses propriétés modales peuvent changer en fonction des variations des paramètres de la structure et plus il est difficile de les approcher par des SR.

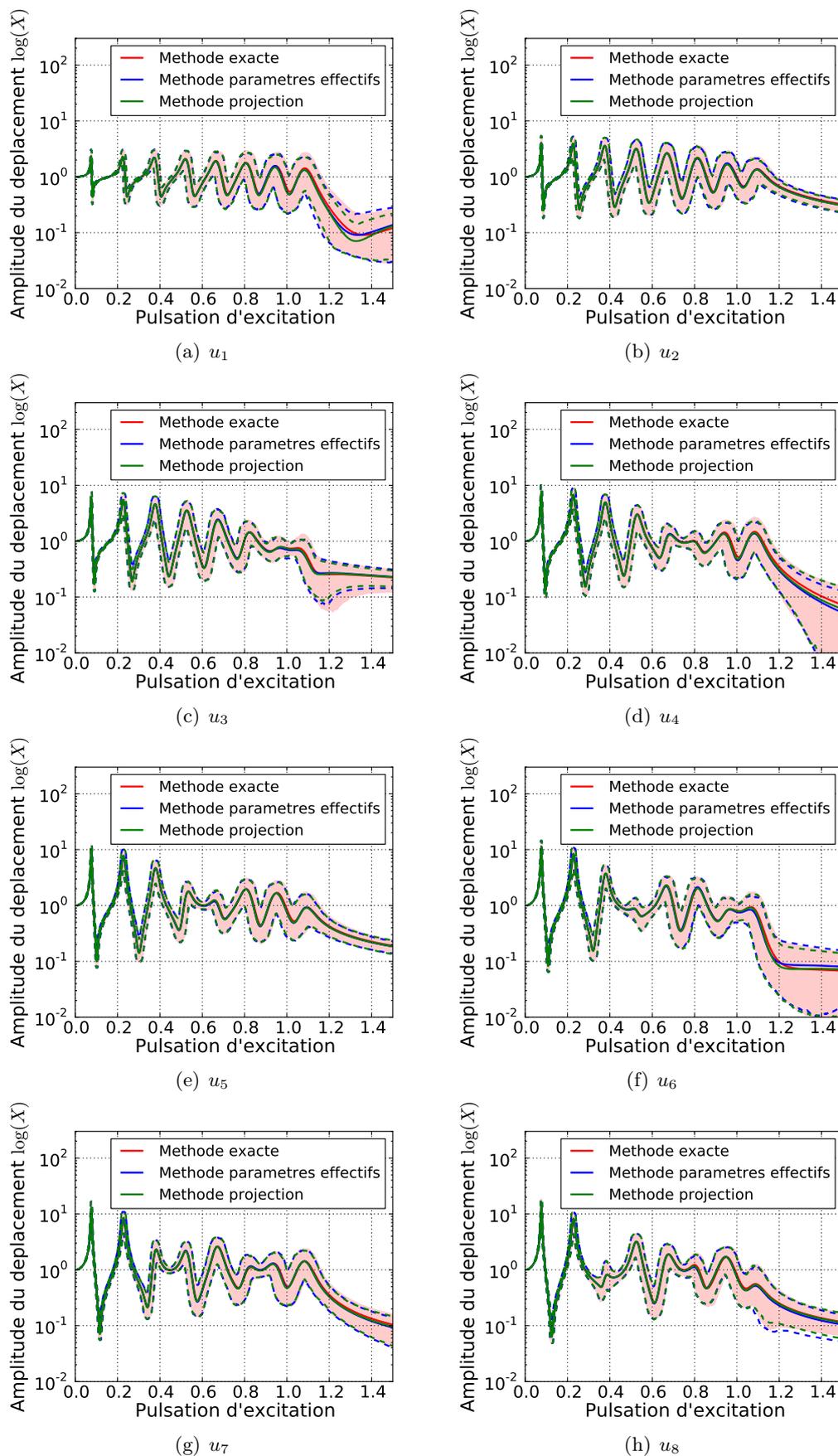


FIGURE V.5 – Dispersion des FRF – Système masses-ressorts.

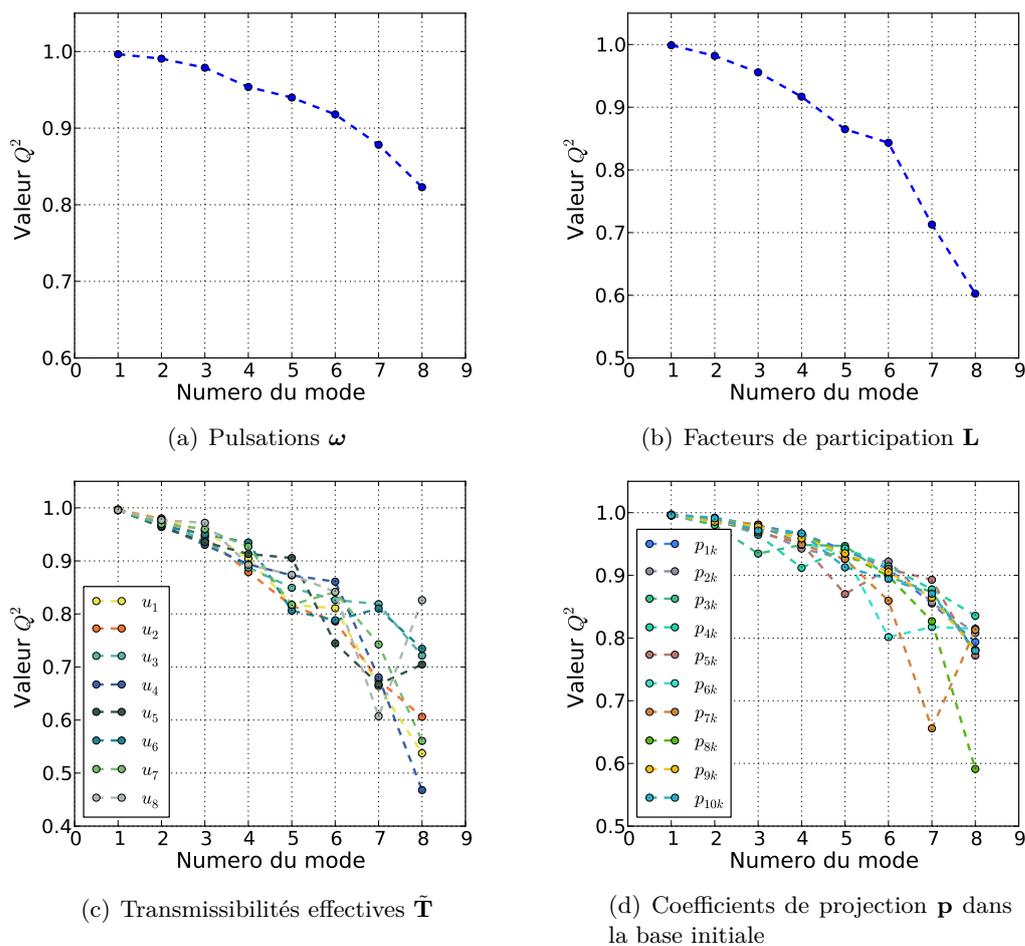


FIGURE V.6 – Qualité des surfaces de réponse – Système masses-ressorts.

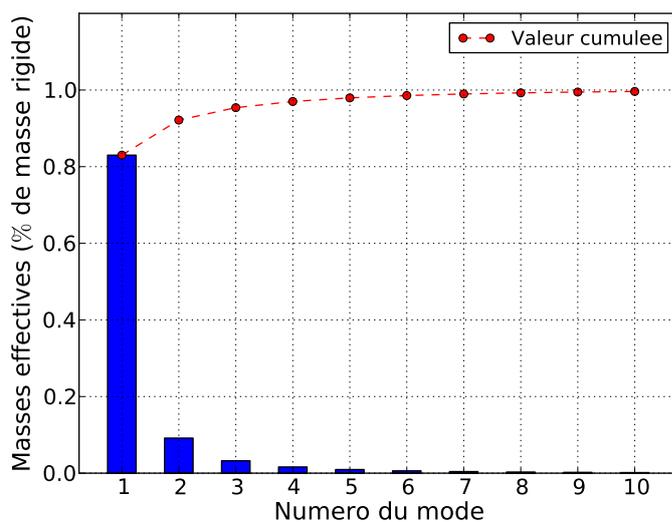


FIGURE V.7 – Masses effectives des 10 premiers modes – Système masses-ressorts.

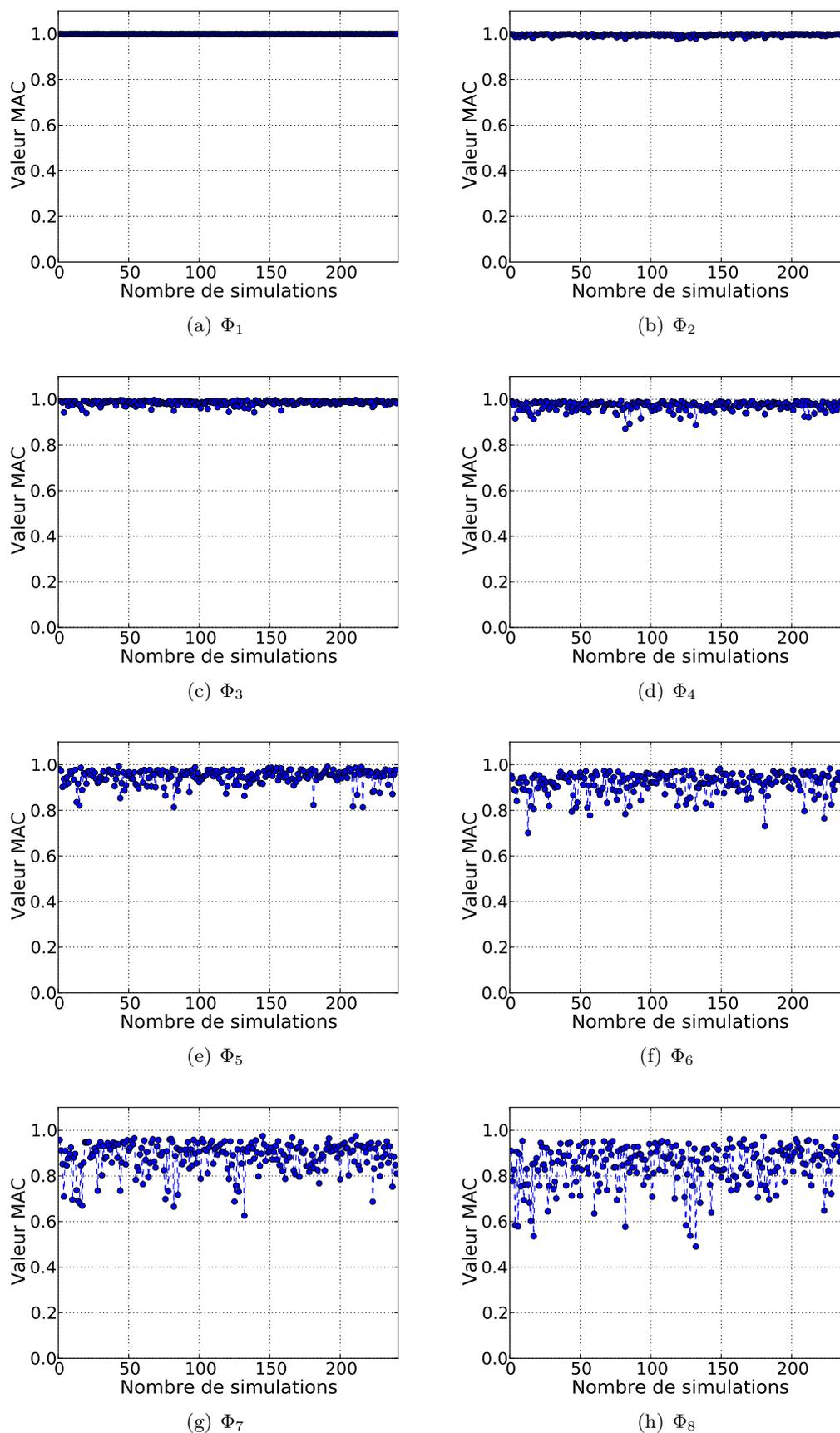


FIGURE V.8 – Évolution du MAC de chaque mode au cours de l'échantillonnage – Système masses-ressorts.

## V.5 Application sur le satellite TARANIS

### V.5.1 Description de l'étude

Le modèle EF du satellite TARANIS, déjà présenté au chapitre IV, est à nouveau exploité pour une analyse dynamique. Cette analyse consiste à estimer la dispersion des réponses en fréquence du déplacement de certains nœuds du modèle. Ces nœuds correspondent à des interfaces avec les équipements de la plate-forme, ils sont les mêmes que ceux de l'analyse déterministe classique. On s'intéressera également à la dispersion des FRF des efforts de réaction à la base du satellite.

Cette fois-ci, le nombre de variables aléatoires prises en compte est réduit par rapport à l'analyse statique. Ceci pour deux raisons : l'analyse dynamique est plus complexe que l'analyse statique et on ne souhaite pas s'encombrer avec un nombre de variables important pour une première application. De plus, compte tenu des conclusions de l'analyse statique le nombre de variables influentes est probablement faible par rapport aux nombre de variables total. Les variables aléatoires étudiées ont été choisies en fonction de la connaissance physique de la structure et de l'analyse de l'énergie de déformation. Plus précisément, étant donné que les panneaux latéraux portent les équipements pour lesquels on étudie le déplacement à la base, les variables, relatives à ces panneaux, les plus influentes sur la rigidité et la masse ont été choisies. Il s'agit des épaisseurs des peaux, de l'épaisseur du nida et du module d'Young. Le plateau inférieur est également un composant important du comportement dynamique mais il comporte un nombre de variables important. Pour réduire leur nombre, seules celles qui correspondent à des zones de forte énergie de déformation ont été sélectionnées (l'énergie de déformation a été calculée aux valeurs moyennes des variables d'entrée). Il s'agit des épaisseurs et du module d'Young des zones qui ont été colorées sur la figure V.9 (différemment du bleu). Au total, 29 variables aléatoires sont prises en compte. Les lois de distribution sont exactement les mêmes que pour l'analyse statique, c'est-à-dire des lois normales indépendantes dont les coefficients de variation valent 6% pour les épaisseurs et 4% pour les modules d'Young.

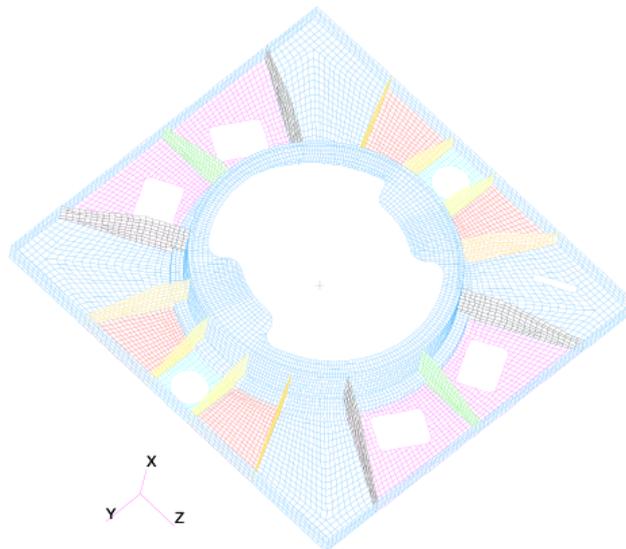


FIGURE V.9 – Sous-ensembles du plateau -X dont les épaisseurs sont des variables aléatoires – TARANIS.

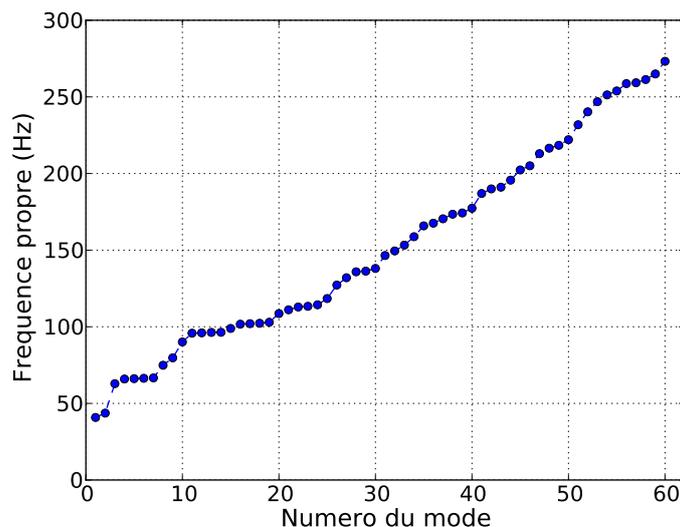


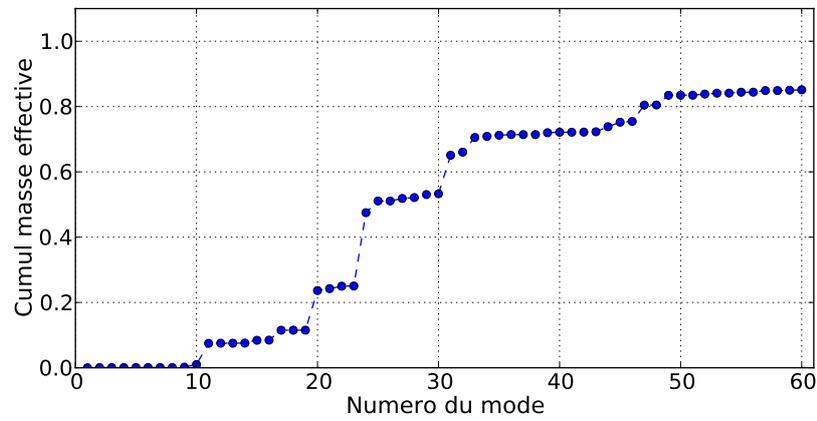
FIGURE V.10 – Fréquences propres des 60 premiers modes de la structure, calculées aux valeurs moyennes – TARANIS.

### V.5.2 Analyse initiale du modèle

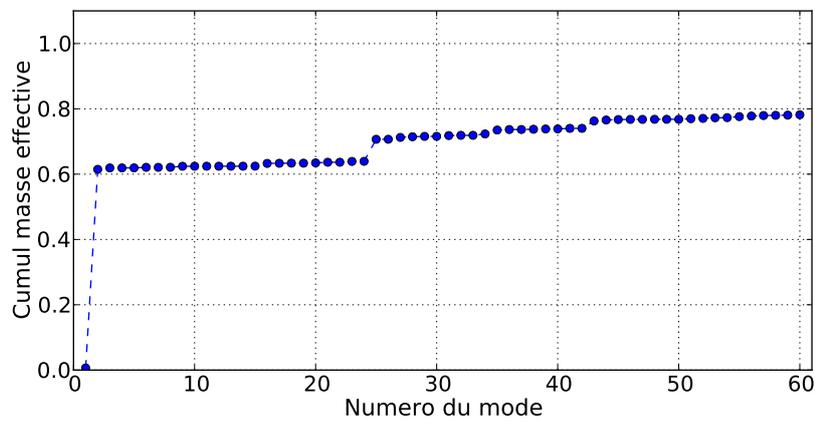
Dans une analyse dynamique basses fréquences classique, réalisée pour qualifier la structure, la bande de fréquence étudiée est limitée à 100 Hz. Cependant, dans le cas de TARANIS, cette bande de fréquence inclut peu de modes comme le montre la figure V.10. Cette dernière présente les fréquences propres des 60 premiers modes calculés aux valeurs moyennes des variables d'entrée. La figure V.11 donne le cumul des masses effectives des modes dans les directions X, Y et Z, également calculées aux valeurs moyennes. On observe, sur cette dernière, que la bande de fréquence jusqu'à 100 Hz, c'est-à-dire contenant les 15 premiers modes, n'inclut pas les modes les plus importants dans l'axe longitudinal du satellite (direction X). Pour cette raison, dans le but d'être plus général au niveau de l'approche, il a été décidé d'étudier une bande de fréquence plus large, allant au moins jusqu'à 200 Hz. Pour arrondir, l'étude est étendue aux 50 premiers modes.

### V.5.3 Première analyse de la dispersion des FRF

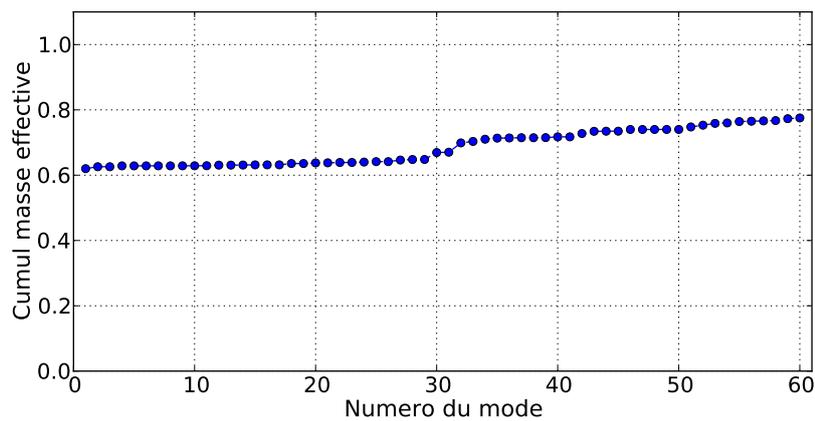
Dans cette partie, la totalité des méthodes, rappelées en section V.4.6, sont appliquées et comparées. Pour cela, les SR sont identifiées sur la totalité des grandeurs d'intérêt à partir d'un échantillon LHS de 90 points généré sur  $\pm 3\sigma$  autour des moyennes dans l'espace normal standard. La qualité des SR construites est estimée avec le coefficient  $Q^2$  déterminé par validation croisée. Les dispersions des valeurs observées sur les ensembles de chaque grandeur d'intérêt sont présentées en figure V.12. Sur cette dernière, « Vecteur » correspond aux SR construites sur les composantes utiles des vecteurs propres (en fonction des ddl d'intérêt), « Fac. part. » aux SR des facteurs de participation, « Trans. effec. » à celles des transmissibilités effectives, « Projection 1 » à celles des projections de la méthode 1 et « Projection 2 » à celles des projections de la méthode 2. On remarque, dans le cas des transmissibilités effectives et des projections, que plusieurs SR ont un coefficient  $Q^2$  faible, ce qui traduit une mauvaise qualité. Malgré cela, on peut considérer que la grande majorité des SR sont correctes car les quantiles à 2.5% des ensembles de valeurs  $Q^2$  (trait noir inférieur de la boîte à moustache) sont supérieurs à 0.8. C'est le cas pour toutes les grandeurs d'intérêt étudiées.



(a) Direction X.



(b) Direction Y.



(c) Direction Z.

FIGURE V.11 – Masses effectives dans les directions X, Y et Z, calculées aux valeurs moyennes (les valeurs sont des pourcentages de la masse totale rigide) – TARANIS.

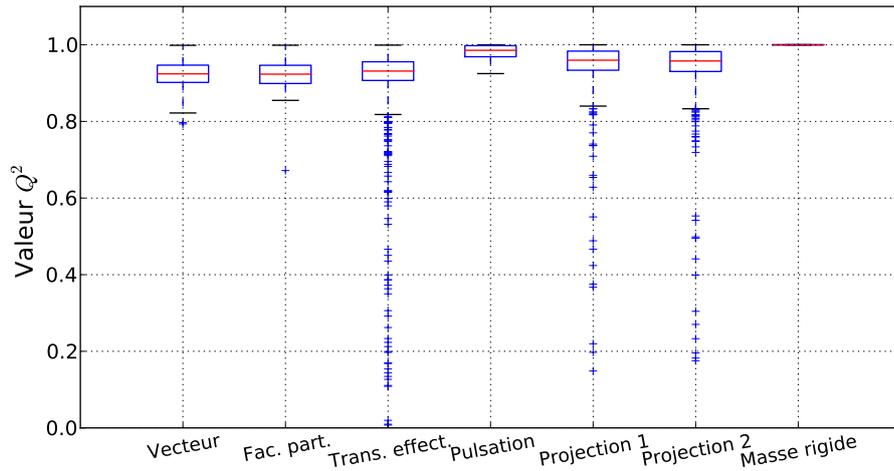


FIGURE V.12 – Dispersion des valeurs  $Q^2$  des surfaces de réponse – TARANIS.

En plus des approximations par SR, la méthode de réanalyse décrite en section V.3.3 est appliquée. On rappelle qu'elle consiste à rechercher les éléments propres dans un sous-espace de dimension largement réduite par rapport à celle du système initial. Aucune SR n'est construite et les tirages aléatoires sont directement effectués sur le modèle réduit, c'est-à-dire projeté dans le sous-espace. Le sous-espace choisi ici, est engendré par les 60 premiers vecteurs propres calculés sur le système initial; il s'agit des mêmes vecteurs utilisés pour les méthodes des projections 1 et 2. Cette méthode est testée dans le but de s'assurer qu'une base de 60 vecteurs propres est suffisante pour bien représenter les vecteurs modifiés dans les méthodes des projections, mais elle est aussi une alternative aux méthodes de SR si celles-ci ne sont pas satisfaisantes.

Un nœud du modèle EF, auquel est attaché un équipement, est pris comme exemple pour illustrer les comparaisons des dispersions des FRF exactes avec celles de certaines méthodes approchées. Ces FRF sont présentés pour les ddl en translation suivant les axes X, Y et Z lorsque le satellite est soumis à une excitation imposée à sa base dans les directions X, Y et Z. Les dispersions sont estimées sur 1000 tirages aléatoires. La figure V.14 présente les résultats de la méthode des paramètres effectifs 1, la figure V.15 ceux de la méthode de réanalyse et la figure V.16 ceux de la méthode des projections 1. Les courbes en trait plein sont les valeurs moyennes estimées sur les 1000 tirages, la zone rouge encadre 95% des FRF exactes et les courbes en pointillés encadrent 95% des FRF évaluées par les méthodes d'approximation. Un critère numérique est utilisé pour comparer plus précisément les méthodes. Il consiste à moyenniser les écarts relatifs des FRF supérieures (quantile à 97.5% de la population des 1000 FRF) sur la bande de fréquence étudiée. En notant  $y_{\text{sup}}$  la FRF supérieure exacte et  $\hat{y}_{\text{sup}}$  la FRF supérieure approchée, le critère vaut :

$$C = \frac{1}{W} \sum_{\omega} \left| \frac{y_{\text{sup}} - \hat{y}_{\text{sup}}}{y_{\text{sup}}} \right| \quad (\text{V.54})$$

où  $W$  est le nombre de pulsation d'excitation. Pour donner un ordre de grandeur de ce dernier, le tableau V.1 présente les valeurs correspondantes aux méthodes illustrées sur les figures V.14, V.15 et V.16. Ce critère est également calculé pour la totalité des ddl étudiés et pour les efforts de réaction à la base du satellite. Les dispersions des valeurs obtenues sur l'ensemble des fonctions de transfert sont présentées en figure V.13 pour chacune des méthodes. Sur cette dernière, « Param. 1 » et « Param. 2 » correspondent respectivement aux méthodes des paramètres effectifs 1 et 2, « Proj. 1 » et « Proj. 2 » sont les méthodes des projections 1 et 2, et « Reaction » désigne la

comparaison des FRF des efforts de réaction.

Ddl, excit.	Réanalyse	Param. 1	Proj. 1
Ddl X, excit X	0.029	0.223	0.656
Ddl X, excit Y	0.013	0.051	0.084
Ddl X, excit Z	0.017	0.347	0.375
Ddl Y, excit X	0.022	0.163	0.481
Ddl Y, excit Y	0.011	0.056	0.085
Ddl Y, excit Z	0.098	1.001	1.300
Ddl Z, excit X	0.025	0.729	1.200
Ddl Z, excit Y	0.015	0.328	0.230
Ddl Z, excit Z	0.004	0.019	0.032

TABLE V.1 – Résultats du critère d'erreur  $C$  (cf. équation (V.54)) calculé pour chaque méthode – TARANIS.

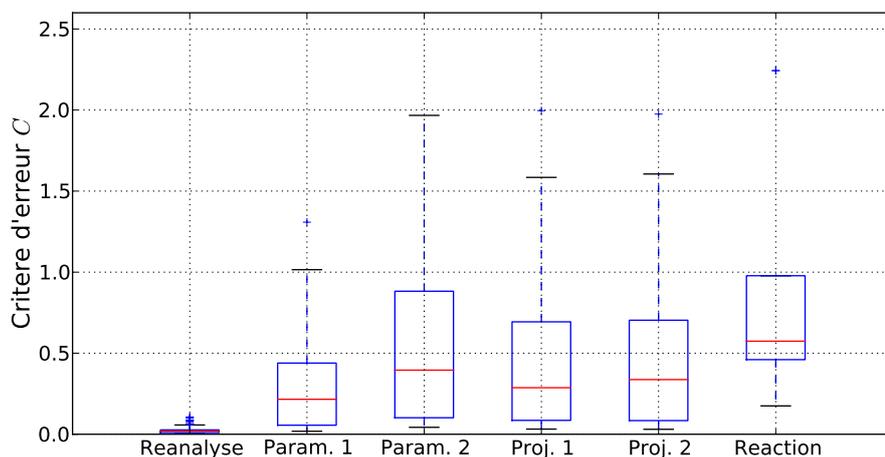


FIGURE V.13 – Dispersion des critères d'erreur  $C$  (cf. équation (V.54)) évalués pour chaque méthode – TARANIS.

La première remarque est que toutes les méthodes présentent des résultats relativement satisfaisants dans le sens où les amplitudes maximales observées sont assez bien représentées. La méthode de réanalyse donne des résultats particulièrement bons alors que seulement 60 vecteurs propres du modèle initial sont utilisés dans la base de projection. De ce fait, elle est une méthode très intéressante et une bonne alternative à l'utilisation de surfaces de réponse (ou de méta-modèles). Parmi les autres méthodes, celle qui présente les meilleurs résultats est la méthode des paramètres effectifs 1, c'est-à-dire avec les SR directement construites sur les paramètres effectifs. Les méthodes des projections sont très proches l'une de l'autre, mais la méthode 1 est plus intéressante en terme de temps de calcul car elle ne nécessite pas de construire la matrice de masse à chaque tirage. Pour le nombre de ddl étudiés ici, le nombre de SR intervenant dans chacune des méthodes est globalement équivalent. En effet, pour les méthodes des projections, le nombre de SR dépend du nombre de modes étudiés et du nombre de modes dans la base de projection ; pour les méthodes des paramètres effectifs, il dépend du nombre de modes étudiés

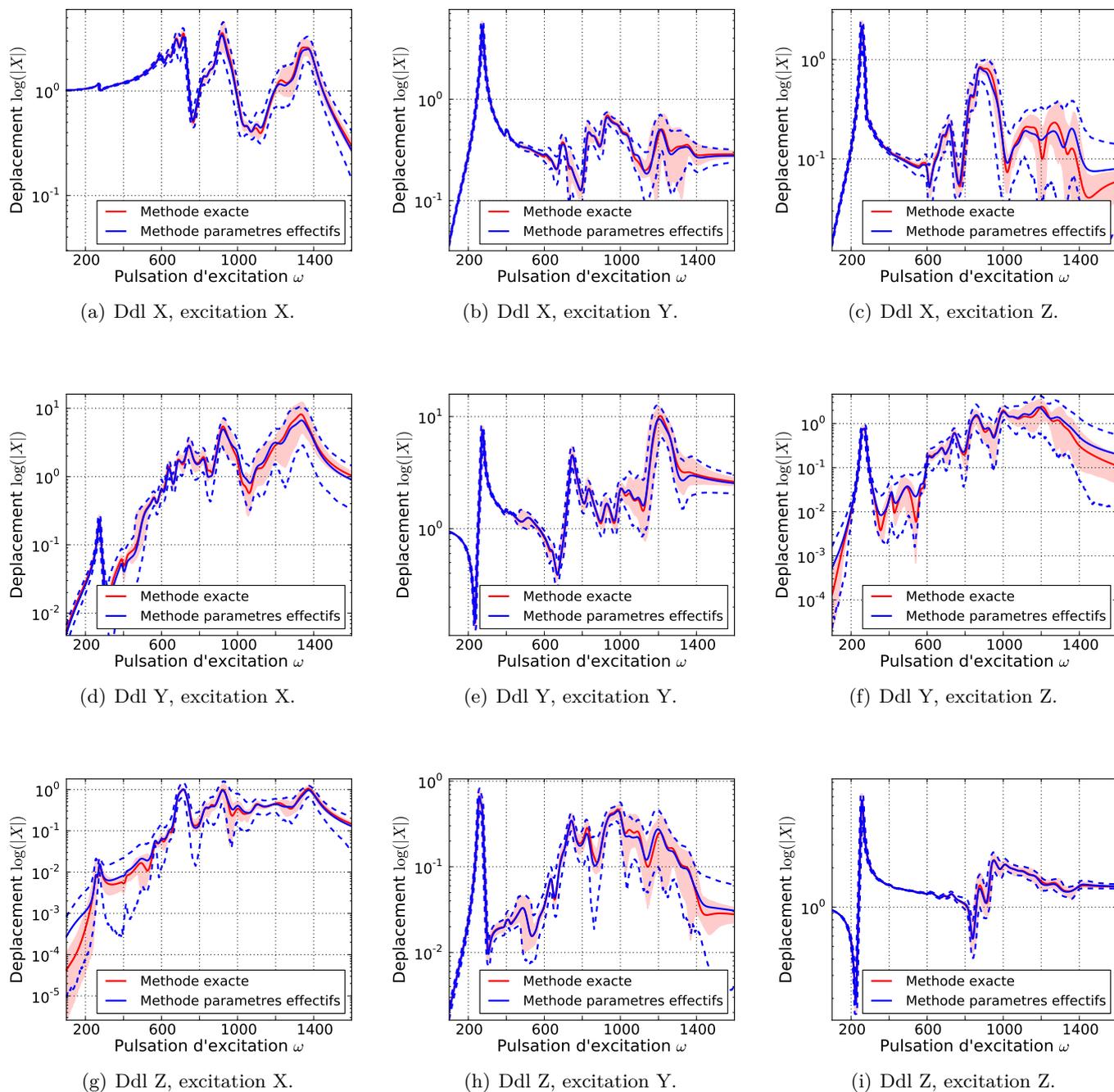
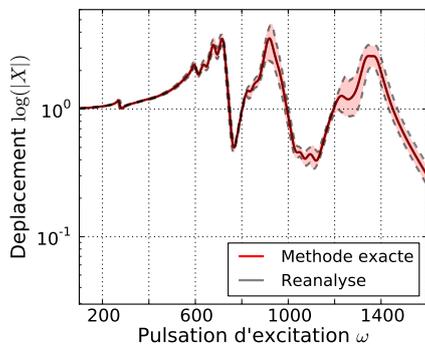
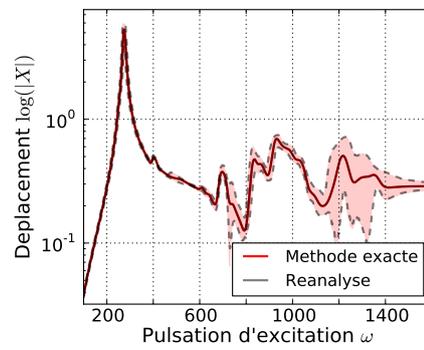


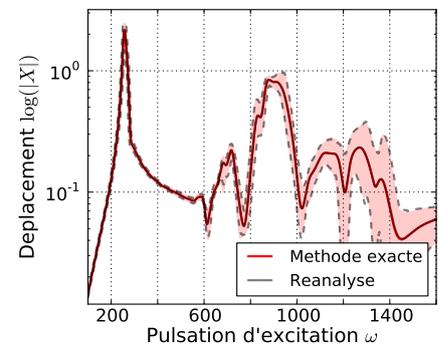
FIGURE V.14 – Dispersion des FRF obtenues par la méthode des paramètres effectifs 1 – TARANIS.



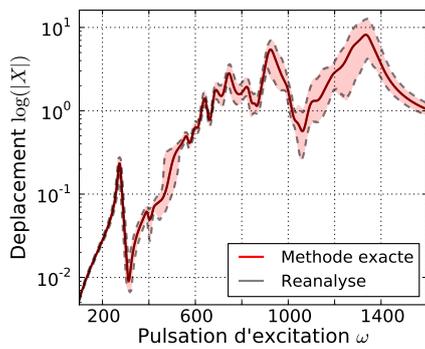
(a) Ddl X, excitation X.



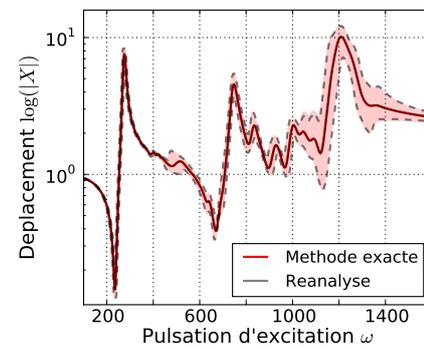
(b) Ddl X, excitation Y.



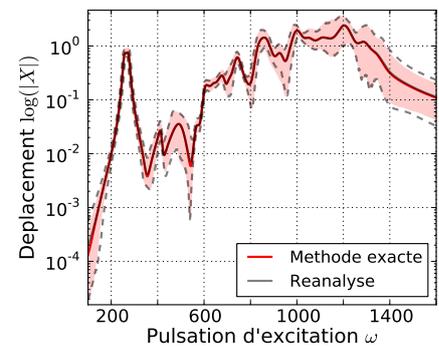
(c) Ddl X, excitation Z.



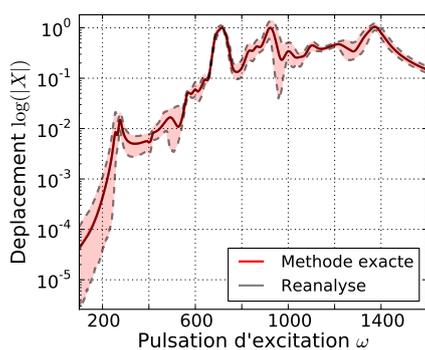
(d) Ddl Y, excitation X.



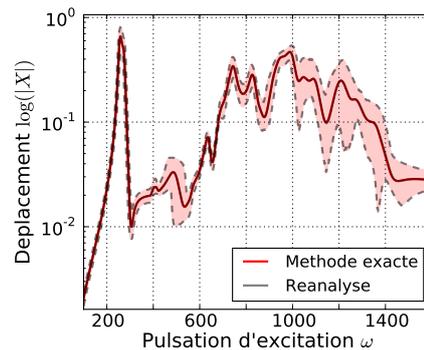
(e) Ddl Y, excitation Y.



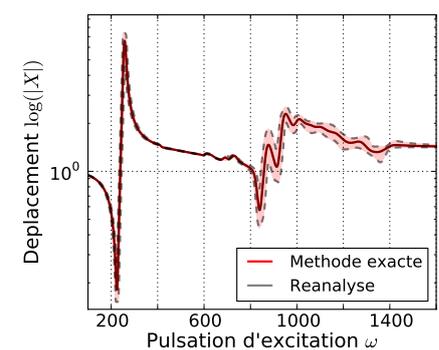
(f) Ddl Y, excitation Z.



(g) Ddl Z, excitation X.



(h) Ddl Z, excitation Y.



(i) Ddl Z, excitation Z.

FIGURE V.15 – Dispersion des FRF obtenues par la méthode de réanalyse – TARANIS.

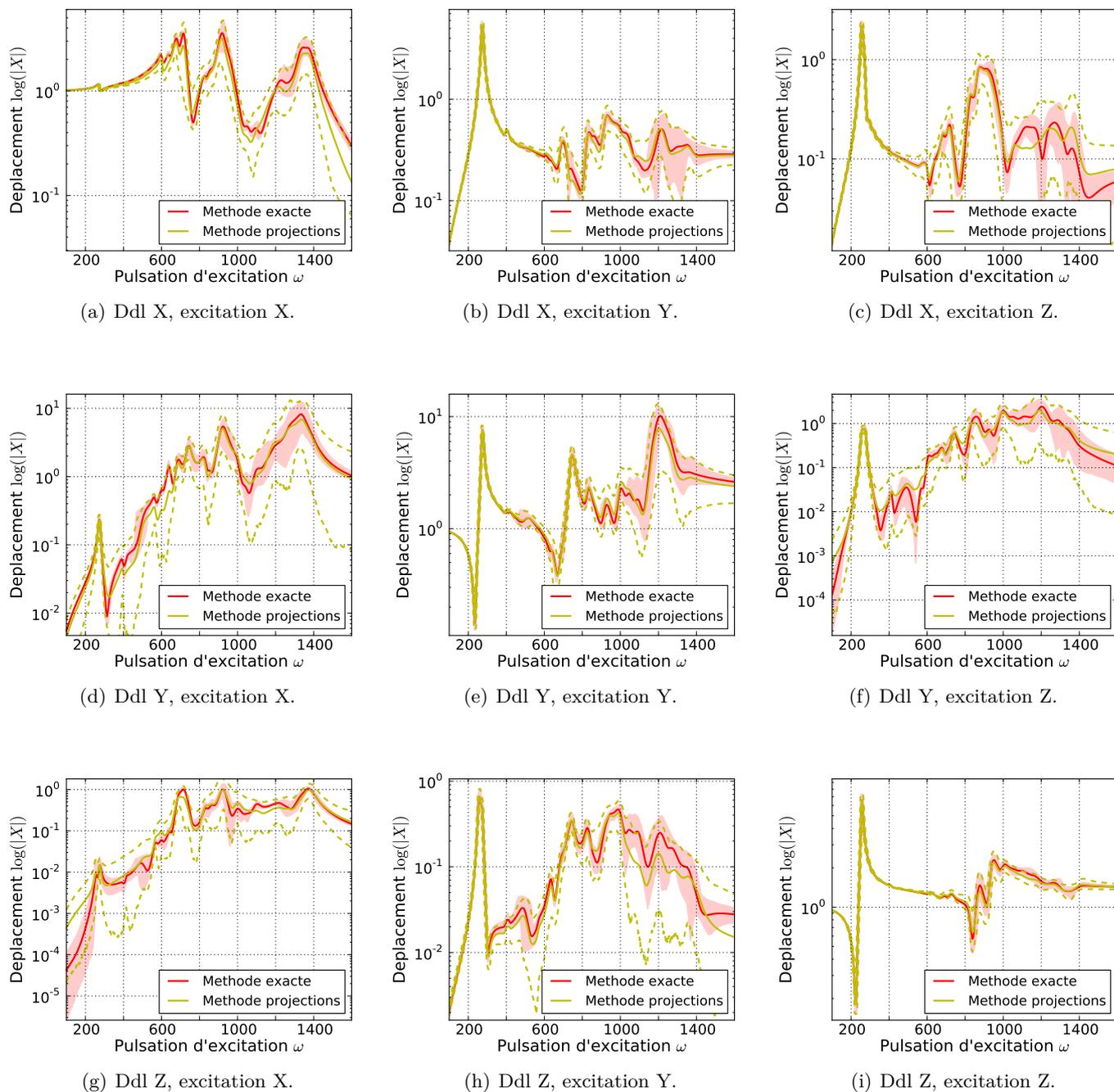


FIGURE V.16 – Dispersion des FRF obtenues par la méthode des projections 1 – TARANIS.

et du nombre de fonctions de transfert étudiées. Ainsi, comme le temps de calcul des méthodes est fonction du nombre de SR qu'elles impliquent, il est sensiblement égal. Par contre, le nombre de SR qui interviennent dans la construction d'une fonction de transfert est bien plus important pour les méthodes des projections que pour les méthodes des paramètres effectifs. Or, lorsque de nombreuses SR interviennent dans l'approximation des fonctions de transfert, l'erreur finale, due aux cumuls des erreurs, peut être plus importante. De manière générale, il est difficile de connaître l'influence du cumul de ces erreurs. Cela est d'autant plus délicat si certaines SR sont de mauvaise qualité. C'est le cas dans cette application où, comme le montre la figure V.12, les SR approchant certaines transmissibilités effectives ou certaines projections, ont un coefficient  $Q^2$  bien inférieur à 0.8. Dans cette situation, il est très difficile de faire confiance à l'approximation des FRF si aucun résultat de référence n'est disponible.

Quelques améliorations peuvent être apportées en tenant compte des remarques faites lors de l'application sur le système masses-ressorts. Nous avons observé que les modes de faible masse effective avaient tendance à être plus dispersés lors de l'échantillonnage et donc qu'il était plus difficile d'approcher les grandeurs d'intérêt relatives à ces modes par des SR. Or, si certains modes contribuent très peu à une réponse dynamique, parce qu'ils sont locaux et qu'il ne concernent pas la zone étudiée, ils peuvent être omis de la superposition modale car leur influence est faible. De ce fait, en limitant la superposition modale aux modes dont la contribution est significative, on peut réduire le nombre de SR utiles dans la construction des fonctions de transfert. De plus, il est probable que les SR relatives aux modes écartés soient celles dont la qualité est moindre, ce qui implique une meilleure confiance dans l'approximation finale.

## V.5.4 Analyse après sélection des modes significatifs

### V.5.4.1 Sélection des modes

Dans cette section, on cherche à déterminer les modes qui ont une forte contribution sur une fonction de transfert donnée. Pour cela, on procède d'une manière comparable à la sélection des variables d'entrée avec la méthode de Morris (cf. section III.7.5), c'est-à-dire en fixant un seuil sur le cumul des indicateurs d'importance rangés dans l'ordre décroissant. Dans le cas de la méthode de Morris, ces indicateurs d'importance étaient les statistiques  $\hat{\mu}^*$  ou  $\hat{\sigma}$ . Pour les fonctions de transfert en déplacement, les indicateurs utilisés sont les transmissibilités effectives. Elles donnent une bonne information de l'influence d'un mode car elles dépendent des facteurs de participation (racine carré de la masse effective) et des vecteurs propres. De ce fait, elles permettent de savoir, à la fois, si la contribution d'un mode est locale et s'il fait « vibrer » le ddl étudié. Plus précisément, les indicateurs utilisés sont les carrés des transmissibilités effectives normalisées. Ils sont définis par :

$$\tilde{\mathcal{T}}_{\underline{i},\underline{k}} = \frac{\tilde{T}_{\underline{i},\underline{k}}^2}{\|\tilde{T}_{\underline{i},\underline{j}}\|^2} \quad (\text{V.55})$$

où  $\tilde{T}_{\underline{i},\underline{k}}$  représente la transmissibilité effective relative au  $k$ -ième mode lorsque le ddl  $i$  est soumis à une excitation imposée au ddl  $j$  et  $\|\tilde{T}_{\underline{i},\underline{j}}\|$  désigne la norme euclidienne des transmissibilités effectives des modes  $k = 1 \dots 50$ . La figure V.17 présente l'évolution du cumul de ces valeurs, rangées dans l'ordre décroissant, pour un exemple de fonction de transfert étudiée. Notons que ces résultats ont été obtenus à partir des valeurs moyennes des variables d'entrée. L'allure de la courbe, qui est similaire pour les autres fonctions traitées, montre bien que peu de modes contribuent de manière significative à la fonction de transfert. Compte tenu de cette allure, on choisit de sélectionner les modes dont le cumul des valeurs vaut 99% du cumul total. Parmi la totalité des fonctions de transfert, cette sélection correspond en moyenne à 10 modes, au

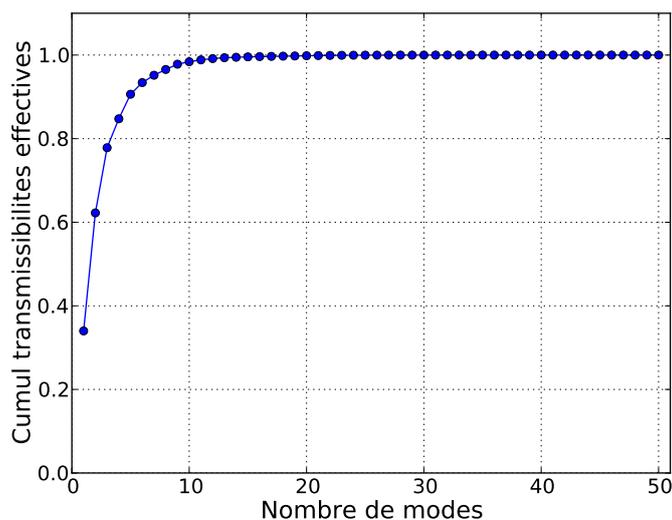


FIGURE V.17 – Cumul des transmissibilités effectives rangées dans l'ordre décroissant (normalisées, cf. équation (V.55)) en fonction du nombre de modes – TARANIS.

minimum à 1 mode et au maximum à 19 modes. En conséquence, même le nombre maximal de modes retenus est faible par rapport aux 50 modes de départ.

Pour les fonctions de transfert des efforts de réaction, la méthodologie est la même à l'exception des indicateurs d'importance qui sont les masses effectives. En effet, pour les efforts de réaction, ce sont les masses effectives qui traduisent l'importance des modes. Avec un seuil de 99%, la réduction du nombre de modes est moins sévère que pour les transmissibilités effectives mais permet, tout de même, de se limiter en moyenne à 27 modes, au minimum à 17 modes et au maximum à 32 modes.

#### V.5.4.2 Nouvelle analyse de la dispersion des FRF

Parmi la totalité des SR construites à la première étape, seules celles qui correspondent aux modes sélectionnés sont désormais utilisées. Les dispersions des valeurs  $Q^2$  de ces dernières sont présentées en figure V.18. En comparant avec les résultats de la figure V.12 on remarque bien que toutes les SR qui posaient des difficultés à cause de leur mauvaise qualité, ont été supprimées. Cela confirme bien que les grandeurs d'intérêt difficiles à approcher sont relatives à des modes de faibles paramètres effectifs, donc peu influents.

Pour tous les ddl et les efforts de réaction étudiés, les fonctions de transfert sont construites avec les modes retenus. Comme précédemment, la dispersion de ces dernières est estimée sur la base d'un échantillon de 1000 valeurs avec les quantiles à 2.5% et 97.5%. Pour chacune des méthodes d'approximation, le critère de l'équation (V.54) est calculé et les résultats sont présentés sous la forme de boîte à moustache en figure V.19. Notons que les fonctions de transfert exactes ne tiennent compte que des modes sélectionnés. Si l'on compare ces résultats avec ceux du cas précédent (cf. figure V.13), on remarque que les erreurs sont largement réduites étant donné que la dispersion observée, pour toutes les méthodes, est plus que divisée par 2. Parmi les méthodes de SR, la plus intéressante reste celle des paramètres effectifs 1 mais les résultats de la méthode des projections 2 sont très proches (mis à part quelques valeurs). La figure V.20 illustre la comparaison de la méthode des paramètres effectifs 1 avec la méthode exacte sur les mêmes fonctions de transfert que les figures précédentes (figures V.14 à V.16).

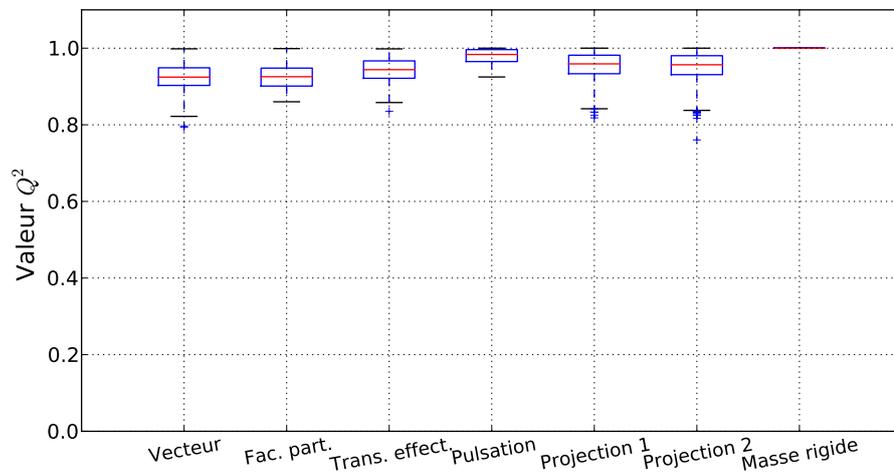


FIGURE V.18 – Dispersion des valeurs  $Q^2$  des surfaces de réponse sélectionnées parmi 99% de l'influence des paramètres effectifs – TARANIS.

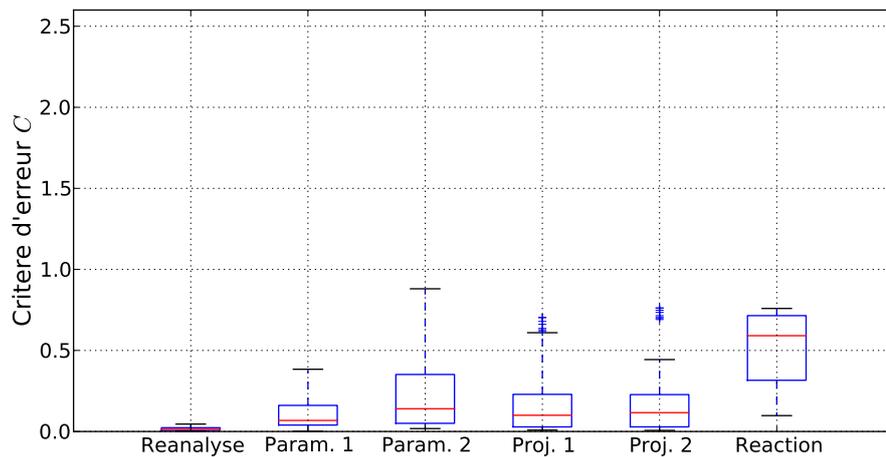
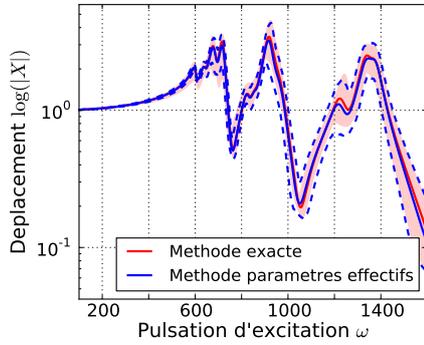
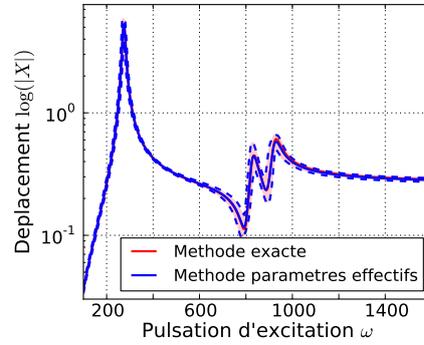


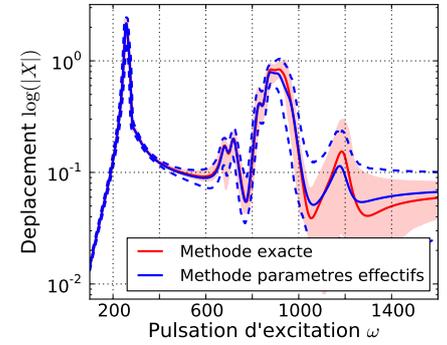
FIGURE V.19 – Dispersion des critères d'erreur  $C$  (cf. équation (V.54)) évalués pour chaque méthode avec 99% de l'influence des paramètres effectifs – TARANIS.



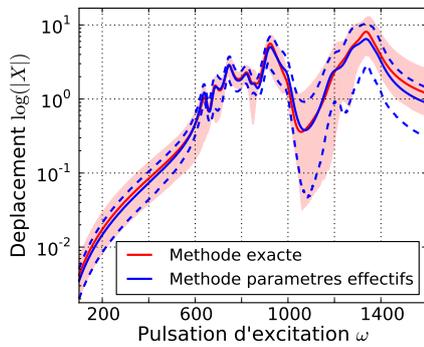
(a) Ddl X, excitation X.



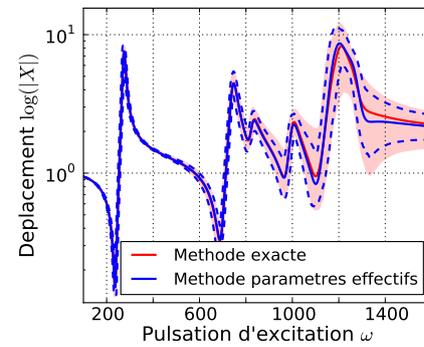
(b) Ddl X, excitation Y.



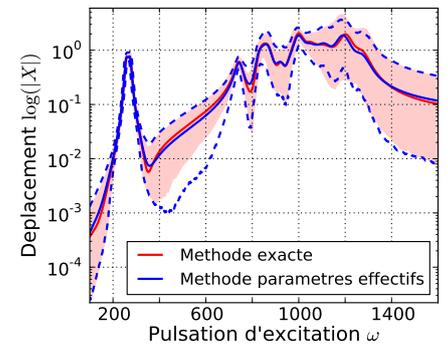
(c) Ddl X, excitation Z.



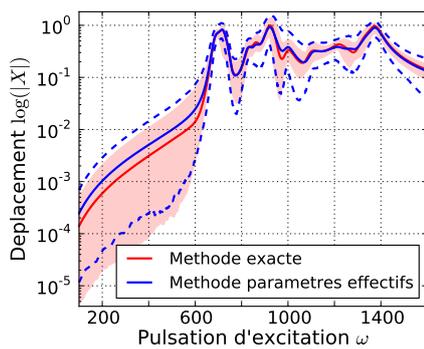
(d) Ddl Y, excitation X.



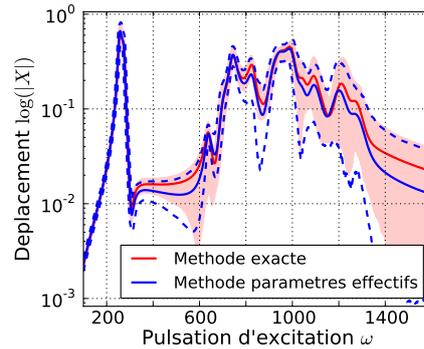
(e) Ddl Y, excitation Y.



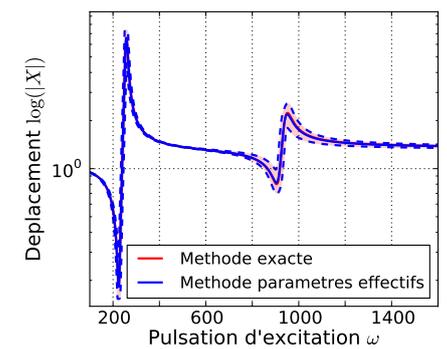
(f) Ddl Y, excitation Z.



(g) Ddl Z, excitation X.



(h) Ddl Z, excitation Y.



(i) Ddl Z, excitation Z.

FIGURE V.20 – Dispersion des FRF obtenues par la méthode des paramètres effectifs 1 avec 99% de l'influence des transmissibilités effectives– TARANIS.

### V.5.5 Conclusion

Cette partie a pour objectif de tester les possibilités d'appliquer une méthodologie de SR sur une structure de satellite. Elle compare notamment plusieurs démarches qui se distinguent selon les grandeurs d'intérêt à approcher. La première section met en œuvre les différentes méthodes pour comparer les approximations des FRF des déplacements en certains nœuds du modèle, choisis en fonction des interfaces avec les équipements, et des FRF des efforts de réaction à la base du satellite. Les modes de la structure sont alors tous pris en compte dans la bande de fréquence de 0 à 200 Hz. Les dispersions des FRF calculées par les méthodes d'approximation sont comparées à des calculs exacts sur un échantillon de 1000 tirages aléatoires. Ces premiers résultats sont relativement satisfaisants pour la totalité des méthodes mais certaines restent plus intéressantes que d'autres. C'est le cas de la méthode des paramètres effectifs 1 qui présente les meilleurs résultats. Cependant, la construction d'une fonction de transfert fait intervenir de nombreuses SR et il est difficile d'anticiper l'effet du cumul des erreurs d'approximation. Cela est d'autant plus le cas si certaines SR sont de mauvaise qualité.

Pour limiter ce problème, nous avons mis en évidence dans la section suivante que, dans la construction des fonctions de transfert, peu de modes sont réellement significatifs. On voit que, même en conservant un grand pourcentage de l'influence des modes (99%), leur nombre est largement réduit. Avec l'utilisation des méthodes d'approximation présentées, cela réduit considérablement le nombre de SR à construire et à exploiter, ce qui implique moins de cumul d'erreur au niveau de la superposition modale. De plus, on observe que les SR relatives aux modes écartés sont généralement celles qui sont de mauvaise qualité. En effet, avec les variations des paramètres d'entrée du modèle, les « petits » modes (locaux et donc peu influents) ont une plus grande dispersion. Ils ont également plus de facilité à changer de forme ce qui signifie qu'il est difficile, voire impossible, de les apparier. Cette sélection des modes permet d'améliorer significativement les résultats. La méthode des paramètres effectifs 1 reste la plus intéressante mais les méthodes des projections donnent des résultats relativement proches. Rappelons que, même si ce n'est pas considéré ici, l'intérêt des méthodes des projections est de permettre d'approcher une FRF en n'importe quel nœuds du modèle EF à partir d'un nombre raisonnable de SR (par rapport au nombre de ddl du modèle EF). Les méthodes des paramètres effectifs ne le permettent pas, il faut donc choisir les nœuds à étudier (sinon il faut construire les SR sur toutes les composantes des vecteurs propres ce qui n'est pas envisageable).

L'omission d'un certain nombre de modes dans la superposition modale pose la question des conséquences que cela entraîne sur la réponse dynamique. La comparaison peut être faite avec la troncature modale qui consiste à omettre les modes dont la fréquence propre est supérieure à la fréquence d'étude (avec une certaine marge). Cependant, dans notre cas, les modes omis ont des fréquences propres incluses dans la bande de fréquences étudiée. Leur contribution statique est toujours prise en compte dans le terme résiduel de la fonction de transfert mais la dispersion de leur contribution dynamique, due à la variation des paramètres d'entrée, est difficile à anticiper. Pour illustrer cette influence, la figure V.21 présente une comparaison entre la dispersion des FRF obtenues par la méthode des paramètres effectifs 1, lorsque seuls les modes correspondants à 99% des transmissibilités effectives sont retenus, et la dispersion des FRF exactes calculées avec tous les modes (les fonctions de transfert sont les mêmes que pour les figures précédentes). On observe que les pics prédominants sont bien représentés, ce qui est satisfaisant si le critère de spécification du comportement dynamique est basé sur ces derniers. Cependant, si certains pics de plus faible amplitude doivent être considérés dans la spécification, alors des difficultés peuvent apparaître comme, par exemple, en figure V.21(b) où les seconds pics dominants sont mal approchés. Dans ce cas, un indicateur différent de celui de l'équation (V.55) doit être utilisé pour sélectionner les modes les plus influents.

La dernière remarque concerne la méthode de réanalyse. Cette application montre qu'elle est très intéressante car les dispersions des FRF obtenues sont très proches de celles obtenues

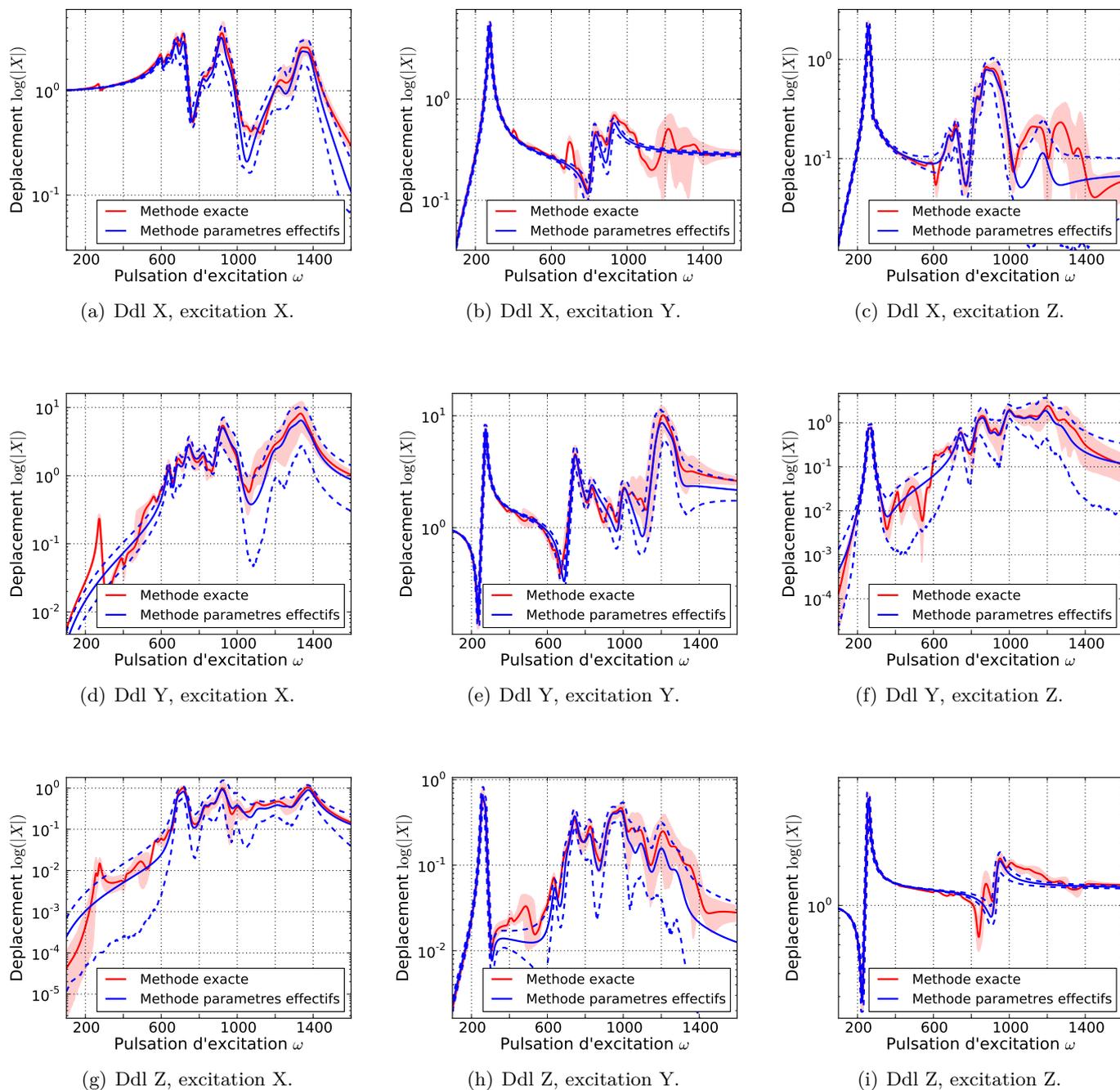


FIGURE V.21 – Comparaison des dispersions des FRF obtenues par la méthode des paramètres effectifs avec 99% de l'influence des transmissibilités effectives avec les dispersions calculées par la méthode exacte avec la totalité des modes – TARANIS.

par des calculs exacts. Ici, seul les 60 premiers modes propres du modèle initial sont nécessaires pour bien représenter les modes modifiés, ce qui est relativement faible par rapport aux 50 modes à étudier. Ceci est essentiellement dû aux faibles variations des paramètres d'entrée qui font que les déformées associées aux modes principaux changent peu d'un tirage à un autre. Pour les structures où trop de modes ne peuvent pas être appariés car leur forme change, la méthode de réanalyse est une bonne alternative à l'utilisation de SR ou plus largement de méta-modèles. Rappelons que, dans ce cas, la base de projection peut être enrichie par des vecteurs plus pertinents que des modes propres, qui sont représentatifs des perturbations du système modifié.

## V.6 Conclusion générale

Ce chapitre a permis d'aborder la propagation d'incertitudes en dynamique basses fréquences. L'analyse est plus complexe que dans le cas statique à cause des réponses à étudier : les fonctions de transfert. Pour une résolution par approche modale, ces dernières nécessitent la résolution d'un système propre dont le temps de calcul est bien plus important que celui de l'équation d'équilibre statique. L'utilisation de méthodes d'approximation pour déterminer rapidement les éléments propres, lors de tirages aléatoires, est alors indispensable. Pour cela, quelques méthodes sont discutées mais l'approche par surfaces de réponse est maintenue compte tenu du travail réalisé en statique. Cependant, les réponses dynamiques étant des fonctions fortement non-linéaires des propriétés modales, et donc des paramètres d'entrée, elles ne peuvent pas être approchées simplement par des surfaces de réponses. Le moyen d'y parvenir est de construire les surfaces de réponse sur des grandeurs d'intérêt intermédiaires qui permettent de former la fonction de transfert en post-traitement. Deux méthodes sont envisagées : la construction de surfaces de réponse sur les paramètres effectifs de la fonction de transfert ou l'approximation des projections des vecteurs propres dans un sous-espace engendrée par des vecteurs propres calculés aux valeurs moyennes des variables d'entrée. Les procédures d'échantillonnage du modèle sont alors détaillées. Les étapes importantes sont :

- le choix de la méthode du calcul des éléments propres ;
- l'appariage des modes par rapport à un ordre de référence ;
- la normalisation des modes pour la méthode des projections.

Les méthodes sont appliquées, dans un premier temps, sur un système masses-ressorts très simple et aboutissent à des résultats satisfaisants. Ce cas ne permet pas réellement de distinguer une méthode mais permet de tirer des premières conclusions.

Dans un second temps, les méthodes sont appliquées au satellite TARANIS, déjà utilisé au chapitre IV. Dans la première partie de cette application, tous les modes dans une bande de fréquence de 200 Hz sont étudiés. Les méthodes d'approximation sont comparées à des calculs exacts et les résultats obtenus sont relativement satisfaisants mais la méthode des paramètres effectifs est la plus précise. Cependant, les approximations des fonctions de transfert font intervenir de nombreuses surfaces de réponse ce qui pose la question de l'effet du cumul des erreurs dues à chacune d'elles. De plus, certaines surfaces de réponse sont de mauvaise qualité et il est difficile de quantifier leur influence dans la réponse dynamique finale. Pour limiter ce problème, nous tentons de réduire le nombre de modes étudiés dans la bande de fréquences. En effet, on peut constater que pour une fonction de transfert donnée, peu de modes ont une contribution réellement significative. On sélectionne donc les modes les plus influents à partir d'un critère basé sur les paramètres effectifs et la superposition modale est faite en omettant les modes non sélectionnés. L'avantage est que les modes omis sont ceux dont les surfaces de réponse relatives sont de mauvaise qualité car ils sont généralement locaux et ont tendance à changer de

forme au cours de l'échantillonnage. Les nouveaux résultats, après sélection des modes, sont bien améliorés. La méthode des paramètres effectifs reste la plus intéressante mais la méthode des projections permet d'obtenir des résultats assez proches.

La structure du satellite TARANIS n'est pas représentative de toutes les structures de satellite notamment des satellites de télécommunications dont le nombre de modes en basses fréquences est bien plus important. Cependant, la méthodologie des surfaces de réponse semble assez bien correspondre à ce type de structure. Les modes dominants sont généralement peu nombreux et les variations, relativement faibles, des variables d'entrée n'entraînent pas de modifications trop importantes de la réponse dynamique. Malgré cela, certaines limites sont observées. La première concerne la difficulté à connaître l'effet du cumul de l'erreur des surfaces de réponse sur l'approximation finale de la fonction de transfert. La sélection des modes les plus influents permet de réduire cet effet mais elle modifie la réponse étant donné que les modes omis ne contribuent plus dynamiquement. L'application précédente montre que l'omission des modes, basée sur le critère du cumul des paramètres effectifs, n'empêche pas de bien représenter les amplitudes dominantes des fonctions de transfert. Cependant, si le besoin de spécification doit tenir compte d'amplitudes plus faibles, le critère de sélection des modes doit être adapté. Une des perspectives de travail sur l'utilisation des surfaces de réponse dans l'approximation de fonctions de transfert serait donc de mieux maîtriser l'influence des erreurs. Cela permettrait de mieux connaître les besoins nécessaires pour une bonne approximation et d'adopter une démarche d'enrichissement, proche de ce qui a été fait en statique, pour améliorer de manière itérative la qualité des résultats.

La méthode des surfaces de réponse n'est plus applicable si les modes ne peuvent pas être appariés. Cela se produit si leur déformée modale change en fonction des variations des variables d'entrée. Dans ce cas, une méthode basée sur l'analyse de Rayleigh-Ritz peut être utilisée. Elle a été testée sur le modèle TARANIS et a fourni de très bons résultats malgré le peu de modes retenus dans la base de projection. Néanmoins, elle nécessite un temps de calcul plus important.



## Chapitre VI

# Conclusion

L'augmentation des puissances de calcul et l'amélioration des méthodes rendent l'approche probabiliste de plus en plus envisageable dans les applications industrielles. En intégrant, dans l'analyse, les incertitudes liées aux paramètres qui caractérisent une structure, cette approche enrichit les résultats prédictifs en fournissant des informations de risque et de sensibilité. Sur le plan technique, cette démarche est très utile pour mieux comprendre et anticiper certains phénomènes, mais elle l'est également pour concevoir des produits de façon optimale en tenant compte d'aspects financiers. C'est le cas pour comparer des solutions de design ou choisir des procédés de fabrication en mêlant des notions de coût et de qualité. En ce sens, cette approche permet de mieux choisir les ressources nécessaires pour répondre à un besoin donné.

Certains acteurs français de l'industrie spatiale souhaitent profiter des bénéfices de cette approche en l'intégrant, à terme, dans leur processus de dimensionnement et de qualification : ce travail de thèse est un premier pas pour y parvenir. Son objectif est relativement prospectif dans le sens où l'on ne cherche pas à étudier l'intégration de ces méthodes dans la démarche de dimensionnement actuelle mais à voir comment une approche probabiliste peut être appliquée au cas d'une structure spatiale. Cela sous-entend de choisir la méthodologie la plus judicieuse en fonction des contraintes liées à ce type de structure, de l'adapter et de la mettre en œuvre sur un cas représentatif.

Dans un premier temps, les principes de l'approche probabiliste ont été rappelés. Les outils mathématiques permettant de décrire les incertitudes liées aux paramètres d'entrée sont brièvement présentés et quelques méthodes classiques pour l'analyse de fiabilité sont détaillées. L'analyse de fiabilité, qui consiste à estimer la probabilité d'un événement, est une des motivations principales de l'utilisation de l'approche probabiliste. Cependant, son application sur des structures industrielles est délicate à cause des temps de calcul que cela implique. Les techniques de méta-modélisation sont souvent utilisées pour réduire ce temps de calcul. Leur principe est de remplacer le modèle de référence, complexe et coûteux, par un modèle simple et rapide à évaluer (méta-modèle). Trois types de méta-modèles sont brièvement décrits : les surfaces de réponse, le krigeage et le chaos polynomial. Parmi les produits d'une approche probabiliste, l'intérêt est également porté sur l'analyse de sensibilité globale. Elle permet de mesurer précisément la part d'incertitude d'une réponse due à chacune des variables d'entrée. La distinction est faite avec les méthodes dites de criblage dont le principe est de hiérarchiser qualitativement l'importance des variables d'entrée pour détecter celles qui ne sont pas influentes. Dans le cas de modèles complexes, elles peuvent être utilisées pour réduire le nombre de variables aléatoires en amont de l'approche probabiliste. La méthode de Morris a été présentée en particulier.

En tenant compte des contraintes liées aux structures de satellite, et dans l'objectif de futures applications, le choix s'est porté sur l'utilisation de surfaces de réponse. Cet outil a déjà fait ses preuves pour un certain nombre de problèmes mécaniques, et son utilisation reste relativement

simple. Cependant, le fait de substituer le modèle de référence par un modèle approché nécessite beaucoup de précautions pour maîtriser l'erreur d'approximation. De plus, l'utilisation de surfaces de réponse peut être un problème pour traiter des modèles ayant un grand nombre de variables aléatoires.

Dans le chapitre suivant (chapitre III), la procédure d'utilisation des surfaces de réponse est détaillée. L'attention est particulièrement portée à l'évaluation de l'erreur d'approximation. Plusieurs outils sont discutés et aboutissent à la mise en œuvre d'une démarche de construction. Son principe est d'identifier plusieurs surfaces de réponse dont les termes sont sélectionnés de manière itérative selon plusieurs critères. Le coefficient  $Q^2$  est ensuite estimé par validation croisée et la meilleure surface de réponse est enfin choisie. Cette dernière est généralement creuse, c'est-à-dire qu'elle n'inclut pas tous les termes potentiels parmi les termes linéaires, quadratiques et d'interaction. Pour mieux répondre au besoin de validation des résultats dans un contexte d'analyse fiabiliste, une méthode basée sur le *bootstrap* est utilisée. Elle consiste à estimer les variations des prédictions de la surface de réponse pour déterminer des indicateurs d'erreur qui, reportés sur l'état limite, permettent de calculer un intervalle autour de la probabilité de défaillance estimée. Ce dernier est représentatif de l'erreur d'approximation, c'est-à-dire que plus il est réduit, meilleure est la surface de réponse ; il a l'avantage d'affecter directement le résultat recherché. Les indicateurs d'erreur sont calculés dans une région d'intérêt définie en fonction d'un niveau d'importance sur la densité de probabilité au point de défaillance. L'avantage est que cette région est dimensionnée selon sa contribution à la probabilité de défaillance. Cette dernière est également utilisée pour enrichir le plan d'expérience ce qui permet d'améliorer la qualité de la surface de réponse à proximité de l'état limite. C'est dans cet objectif qu'une méthode adaptative est proposée. Elle est basée sur trois étapes : (a) la localisation de la région d'intérêt, (b) l'enrichissement du plan d'expérience pour améliorer la surface de réponse dans la région d'intérêt et (c) la procédure de validation qui détermine l'intervalle autour de la probabilité estimée. Cette démarche est appliquée sur des cas issus de la littérature et certaines de ces limites sont mentionnées.

La méthodologie des surfaces de réponse est appliquée sur un exemple de structure plus proche d'un satellite : le modèle cube. Ce dernier reste élémentaire, mais il permet d'illustrer une démarche plus générale qui est appliquée par la suite sur une structure plus importante. Son principe est de réduire progressivement la complexité du problème (*i.e* le nombre de variables et de réponses) pour se focaliser sur l'estimation plus précise des probabilités significatives et sur la recherche des variables les plus influentes.

La démarche illustrée sur le modèle cube est appliquée au cas d'un modèle de satellite appelé TARANIS. Celui-ci est étudié sous plusieurs chargements statiques correspondants à des champs d'accélération imposés dans les trois directions de l'espace. Les résultats montrent qu'une approche par surfaces de réponse permet de bien traiter ce type de problèmes car le comportement des réponses, par rapport aux variables d'entrée, est faiblement non-linéaire. Le nombre de simulations effectués (266) est acceptable compte tenu du nombre de variables et de réponses de départ. L'intervalle de probabilité calculé par *bootstrap* est utilisé pour valider les estimations des probabilités de défaillance. Même si le calcul de cet intervalle requiert probablement plus de simulations que d'autres approches par surfaces de réponse, il permet d'avoir une grande confiance dans les résultats. Certaines estimations de probabilité sont comparées à des résultats de Monte Carlo et les conclusions sont satisfaisantes. Cet exemple montre également que peu de variables aléatoires, parmi celles de départ, sont réellement influentes. C'est aussi valable pour le nombre de réponses ; les critères de défaillance dominants sont peu nombreux. Pour cette raison, il est préférable d'adopter une démarche progressive qui réduit la taille du problème.

Le dernier chapitre (chapitre V) traite de la propagation d'incertitudes en dynamique basses fréquences. Le problème est cette fois plus complexe à cause des réponses d'intérêt qui sont les fonctions de transfert. Dans le cas d'une approche modale, ces dernières nécessitent le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice de raideur de la structure relativement à la matrice de masse. Plusieurs méthodes d'approximation sont envisagées car le calcul exact des éléments propres est bien trop coûteux, mais l'approche par surfaces de réponse est conservée. La méthodologie consiste à approcher certaines grandeurs d'intérêt de façon à construire les fonctions de transfert en post-traitement. Plusieurs démarches sont décrites ; elles diffèrent selon le choix de ces grandeurs d'intérêt. La procédure d'échantillonnage, commune à toutes les démarches, est détaillée. Les étapes de cette dernière concernent particulièrement la méthode de calcul des éléments propres, l'appariage des modes et la normalisation des vecteurs propres. Les méthodes sont illustrées dans un premier temps sur un système masses-ressorts simple. Celui-ci permet de mettre en évidence un lien entre la qualité des surfaces de réponse et l'importance des modes. Dans un second temps, les méthodes sont appliquées au cas du satellite TARANIS pour estimer la dispersion des fonctions de transfert du déplacement de certains nœuds et des efforts de réaction à la base du modèle. Cette application a permis de mettre en avant une méthode en particulier. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par une méthode de Monte Carlo directe. Sans résultat de référence, une des difficultés de l'approche est de connaître l'effet de l'erreur d'approximation des surfaces de réponse sur l'approximation de la fonction de transfert. Cela est d'autant plus délicat que le nombre de surfaces de réponse intervenant dans la fonction de transfert est important. Pour limiter ce problème, il est envisagé d'omettre les modes les moins influents dans la superposition modale. Les modes sont sélectionnés selon les paramètres effectifs et la démarche permet d'améliorer nettement les résultats.

Parmi les autres méthodes d'approximation des éléments propres, l'analyse de Rayleigh-Ritz est également testée sur le modèle TARANIS. Celle-ci est plus coûteuse en temps de calcul que l'approche par surfaces de réponse mais, compte tenu des faibles variations des variables d'entrée, elle fournit des résultats très satisfaisants avec un faible nombre de vecteurs propres initiaux dans la base de projection. Cette méthode est une alternative intéressante aux surfaces de réponse si ces dernières ne peuvent pas être utilisées. Ajoutons également que l'amortissement n'est pas pris en compte comme une variable aléatoire pour comparer les méthodes car il ne pose pas de difficultés dans la construction des surfaces de réponse. En effet, il intervient simplement dans la superposition modale. Dans une application, il peut être intéressant d'en tenir compte pour évaluer son influence étant donné que c'est un paramètre généralement mal connu.

Les perspectives de travail sont nombreuses. Au niveau des applications, il s'agit de continuer la démarche pour analyser les structures satellites dans un environnement hautes fréquences et dans un environnement orbital dont le critère de dimensionnement est la stabilité de certains composants. Le fait d'avoir à disposition une méthode pour traiter tous les environnements n'est qu'une première étape dans l'application de l'approche probabiliste. Dans un contexte industriel, il est important de mener une réflexion sur l'intégration de ces méthodes dans un programme, l'exploitation des résultats, la présentation des bilans et savoir à quel niveau et dans quelle situation l'approche doit intervenir. Aussi, pour fournir des informations plus riches en sortie, l'approche probabiliste nécessite d'être alimentée par les bonnes données d'entrée. Cela passe par la détermination des lois de probabilité, leur corrélation mais aussi par une analyse plus fine des critères de défaillance. Par exemple, dans l'analyse statique de TARANIS, seule une approche « composant » est considérée, c'est-à-dire qu'une probabilité de défaillance est estimée pour chaque critère de défaillance. Il peut être plus intéressant de mener une approche « système » dans laquelle un scénario de défaillance est étudié.

Concernant la méthode, son application sur un seul cas de satellite ne permet clairement pas de connaître toutes ses limites. Cependant, elle est suffisamment découpées en différents niveaux

pour que des améliorations puissent être apportées de manière indépendante. Cela concerne le type de fonctions polynômiales, la procédure de sélection des termes, le plan d'expérience ou encore la construction de la région d'intérêt. La validation des résultats a requis beaucoup d'attention dans l'analyse statique mais elle a été peu abordée pour l'analyse dynamique. En effet, le nombre important de surfaces de réponse intervenant dans une fonction de transfert pose des difficultés pour anticiper l'effet de l'accumulation des erreurs. Il serait donc intéressant d'être en mesure de valider les résultats fournis dans l'analyse dynamique. Cela permettrait de mettre en œuvre une démarche d'enrichissement, de la même manière qu'en statique, pour améliorer l'estimation des résultats recherchés.

# Bibliographie

- H. AKAIKE : Information theory and an extension of the likelihood ratio principle. *In 2nd International Symposium on Information Theory, Tsahkadsor, Armenian*, pages 267–281, 1973.
- S. K. AU et J. L. BECK : Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16(4):263–277, 2001.
- E. BALMÈS : Parametric families of reduced finite element models. theory and applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 10(4):381–394, juillet 1996. ISSN 0888-3270.
- R. R. BARTON : Metamodeling : a state of the art review. *In Proceedings of the 1994 Winter Simulation Conference*, 1994.
- M. BERVEILLER : *Éléments finis stochastiques : approches intrusive et non intrusive pour des analyses de fiabilité*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal, 2005.
- G. BLATMAN et B. SUDRET : An adaptive algorithm to build up sparse polynomial chaos expansions for stochastic finite element analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 25(2):183–197, 2010a.
- G. BLATMAN et B. SUDRET : Efficient computation of global sensitivity indices using sparse polynomial chaos expansions. *Reliability Engineering & System Safety*, 95(11):1216–1229, novembre 2010b. ISSN 0951-8320.
- G. BLATMAN et B. SUDRET : Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression. *Journal of Computational Physics*, 230(6):2345–2367, mars 2011. ISSN 0021-9991.
- A. BOUZZOUNI, G. LALLEMENT et S. COGAN : Selecting a ritz basis for the selection of the frequency response functions of modified structures. *Journal of Sound and Vibration*, 199(2):309–322, janvier 1997. ISSN 0022-460X.
- C. G. BUCHER et U. BOURGUND : A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems. *Structural Safety*, 7(1):57–66, 1990. ISSN 0167-4730.
- F. CAMPOLONGO, J. CARIBONI et A. SALTELLI : An effective screening design for sensitivity analysis of large models. *Environmental Modelling & Software*, 22(10):1509–1518, octobre 2007. ISSN 1364-8152.
- N. Z. CHEN, H. H. SUN et C. Guedes SOARES : Reliability analysis of a ship hull in composite material. *Composite Structures*, 62(1):59–66, octobre 2003. ISSN 0263-8223.
- P. A. CORNILLON et E. MATZNER-LOBER : *Régression, Théorie et applications*. Springer, 2007.
- P. K. DAS et Y. ZHENG : Cumulative formation of response surface and its use in reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(4):309–315, 2000.

- E. de ROCQUIGNY : La maîtrise des incertitudes dans un contexte industriel : 1<sup>e</sup> partie – une approche méthodologique globale basée sur des exemples. *Journal de la Société française de statistique*, 147(3):33 – 71, 2006a.
- E. de ROCQUIGNY : La maîtrise des incertitudes dans un contexte industriel : 2<sup>e</sup> partie – revue des méthodes de modélisation statistique, physique et numérique. *Journal de la Société française de statistique*, 147(3):73 – 106, 2006b.
- F. DEHEEGER : *Couplage mécano-fiabiliste : <sup>2</sup>SMART - méthodologie d'apprentissage stochastique en fiabilité*. Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal - Clermont II, 2008.
- J. DENG, D. GU, X. LI et Z. Q. YUE : Structural reliability analysis for implicit performance functions using artificial neural network. *Structural Safety*, 27(1):25–48, janvier 2005. ISSN 0167-4730.
- O. DESSOMBZ : *Analyse dynamique de structures comportant des paramètres incertains*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2000.
- O. DITLEVSEN et H. O. MADSEN : Structural reliability methods. Rapport technique, Section of Coastal, Maritime and Structural Engineering, Department of Mechanical Engineering, 2007.
- V. DUBOURG, B. SUDRET, J. M. BOURINET et M. CAZUGUEL : Optimisation sous contrainte de fiabilité d'une structure en treillis. In *10e Colloque National en Calcul des Structures*, 2011.
- A. DUTFOY et R. LEBRUN : Le test du maximum fort : une façon efficace de valider la qualité d'un point de conception. In *Congrès Français de Mécanique*, 2007.
- B. ECHARD, N. GAYTON et M. LEMAIRE : AK-MCS : an active learning reliability method combining kriging and monte carlo simulation. *Structural Safety*, 33(2):145–154, mars 2011. ISSN 0167-4730.
- B. EFRON et R. TIBSHIRANI : Improvements on cross-validation : The 632+ bootstrap method. *Journal of the American Statistical Association*, 92(438):548–560, 1997a.
- B. EFRON et R.J. TIBSHIRANI : *An introduction to the bootstrap*. Chapman & Hall, 1997b.
- A. Hosni ELHEWY, E. MESBAHI et Y. PU : Reliability analysis of structures using neural network method. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 21(1):44–53, janvier 2006. ISSN 0266-8920.
- L. FARAVELLI : Response-surface approach for reliability analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 115(12):2763–2781, 1989.
- J. FRANCO : *Planification d'expériences numériques en phase exploratoire pour la simulation des phénomènes complexes*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2008.
- G. M. FURNIVAL et Jr R. W. WILSON : Regressions by leaps and bounds. *Technometrics*, 16, 1974.
- B. GARNIER : Étude des méthodes d'analyse de sensibilité, application aux structures spatiales. Mémoire de D.E.A., ENSMA, 2009.
- N. GAYTON, J. M. BOURINET et M. LEMAIRE : CQ2RS : a new statistical approach to the response surface method for reliability analysis. *Structural Safety*, 25(1):99–121, 2003.
- R. G GHANEM et P. D SPANOS : *Stochastic finite elements : a spectral approach*. Dover Pubns, 2003.

- A. GIRARD et N. ROY : *Dynamique des structures industrielles*. Hermes, 2003.
- Jacques GOUPY : *Plans d'expériences pour surfaces de réponse*. Dunod, 1999. ISBN 9782100039937.
- R. JIN, W. CHEN et T. W. SIMPSON : Comparative studies of metamodelling techniques under multiple modelling criteria. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 23(1):1–13, 2001.
- S. C. KANG, H. M. KOH et J. F. CHOO : An efficient response surface method using moving least squares approximation for structural reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 25(4):365–371, 2010.
- I. KAYMAZ : Application of kriging method to structural reliability problems. *Structural Safety*, 27(2):133–151, avril 2005. ISSN 0167-4730.
- S. H. KIM et S. W. NA : Response surface method using vector projected sampling points. *Structural Safety*, 19(1):3–19, 1997.
- R. LEBRUN et A. DUTFOY : Do rosenblatt and nataf isoprobabilistic transformations really differ ? *Probabilistic Engineering Mechanics*, 24(4):577–584, octobre 2009a. ISSN 0266-8920.
- R. LEBRUN et A. DUTFOY : An innovating analysis of the nataf transformation from the copula viewpoint. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 24(3):312–320, juillet 2009b. ISSN 0266-8920.
- B. J. LEIRA, T. HOLMAS et K. HERFJORD : Application of response surfaces for reliability analysis of marine structures. *Reliability Engineering & System Safety*, 90(2-3):131–139, novembre 2005. ISSN 0951-8320.
- M. LEJEUNE : *Statistique. La théorie et ses applications*. Springer, octobre 2010.
- M. LEMAIRE : *Fiabilité des structures*. Hermes, 2005.
- Y. W. LIU et F. MOSES : A sequential response surface method and its application in the reliability analysis of aircraft structural systems. *Structural Safety*, 16(1-2):39–46, octobre 1994. ISSN 0167-4730.
- H. O. MADSEN : Omission sensitivity factors. *Structural Safety*, 5(1):35–45, 1988.
- C. L. MALLOWS : Some comments on Cp. *Technometrics*, 42(1):87–94, 2000.
- A. J. MILLER : *Subset selection in regression*. CRC Pr I Llc, 2002.
- A. M. MOLINARO, R. SIMON et R. M. PFEIFFER : Prediction error estimation : a comparison of resampling methods. *Bioinformatics*, 21(15):3301–3307, 2005.
- R. E. MOORE : *Interval analysis*, volume 60. Prentice-Hall Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.
- M. D. MORRIS : Factorial sampling plans for preliminary computational experiments. *Technometrics*, 33:161–174, 1991.
- MSC.NASTRAN : *Design Sensitivity and Optimization, User's Guide*, 2005.
- X. S. NGUYEN, A. SELIER, F. DUPRAT et G. PONS : Adaptive response surface method based on a double weighted regression technique. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 24(2):135–143, 2009.
- A. NOUY : *Contributions à la quantification et à la propagation des incertitudes en mécanique numérique*, 2008. HDR, Ecole Centrale, Nantes, France.

- M. PAPANAKAKIS et N. D. LAGAROS : Reliability-based structural optimization using neural networks and monte carlo simulation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 191(32):3491–3507, 2002.
- M. F. PELLISSETTI, G. I. SCHUËLLER, H. J. PRADLWARTER, A. CALVI, S. FRANSEN et M. KLEIN : Reliability analysis of spacecraft structures under static and dynamic loading. *Computers and Structures*, 84(21):1313–1325, 2006.
- V. PICHENY, D. GINSBOURGER, O. ROUSTANT, R. HAFTKA et N. H. KIM : Adaptive designs of experiments for accurate approximation of a target region. *Journal of Mechanical Design*, 132(7), 2010.
- L. PICHLER, H.J. PRADLWARTER et G.I. SCHUËLLER : A mode-based meta-model for the frequency response functions of uncertain structural systems. *Computers and Structures*, 87(5):332–341, 2009.
- L. PICHLER et G.I. SCHUËLLER : On the treatment of finite element structures in stochastic linear dynamics using a mode-based meta-model. *Engineering Structures*, 33(2):391–400, février 2011. ISSN 0141-0296.
- H. J. PRADLWARTER, M. F. PELLISSETTI, C. A. SCHENK, G. I. SCHUËLLER, A. KREIS, S. FRANSEN, A. CALVI et M. KLEIN : Realistic and efficient reliability estimation for aerospace structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12-16):1597–1617, 2005.
- M. R. RAJASHEKHAR et B. R. ELLINGWOOD : A new look at the response surface approach for reliability analysis. *Structural Safety*, 12(3):205–220, 1993. ISSN 0167-4730.
- M. RGUIG : *Méthodologie des surfaces de réponse pour l'analyse en fiabilité des plates formes pétrolières offshore fissurés*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2005.
- M. ROSENBLATT : Remarks on a multivariate transformation. *The Annals of Mathematical Statistics*, 23(3):470 – 472, 1952.
- J. SACKS, W.J. WELCH, T.J. MITCHELL et H.P. WYNN : Design and analysis of computer experiments. *Statistical science*, 4(4):409–423, 1989.
- A. SALTELLI, K. CHAN et E. M. SCOTT : *Sensitivity analysis. Series in Probability and Statistics*. Wiley, 2000.
- G.I. SCHUËLLER et H.J. PRADLWARTER : Benchmark study on reliability estimation in higher dimensions of structural systems - an overview. *Structural Safety*, 29(3):167–182, 2007.
- G. SCHWARZ : Estimating the dimension of a model. *The annals of statistics*, 6(2):461–464, 1978.
- T. W. SIMPSON, J. D. POPLINSKI, P. N. KOCH et J. K. ALLEN : Metamodels for Computer-based Engineering Design : Survey and recommendations. *Engineering with Computers*, 17(2):129–150, 2001.
- I. M. SOBOL : Sensitivity analysis for non-linear mathematical models. *Mathematical Modelling and Computational Experiment*, 1(1):407–414, 1993.
- C. SOIZE : A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3):277–294, juillet 2000. ISSN 0266-8920.

- C. SOIZE et R. GHANEM : Physical systems with random uncertainties : Chaos representations with arbitrary probability measure. *SIAM J. on Scientific Computing*, 26(2):395–410, 2004. ISSN 10957197.
- S. SONG, Z. LU et H. QIAO : Subset simulation for structural reliability sensitivity analysis. *Reliability Engineering and System Safety*, 94:658–665, 2009.
- B. SUDRET : *Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models – Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods*, 2007. HDR, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France.
- B. SUDRET : Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. *Reliability Engineering & System Safety*, 93(7):964–979, juillet 2008. ISSN 0951-8320.
- B. SUDRET et A. Der KIUREGHIAN : Stochastic finite element methods and reliability. Rapport technique, University of California, Berkeley, 2000.
- G. G. WANG : Adaptive response surface method using inherited latin hypercube design points. *Journal of Mechanical Design*, 125(2):210–220, 2003.
- G. G. WANG et S. SHAN : Review of Metamodeling Techniques in Support of Engineering Design Optimization. *Journal of Mechanical Design*, 129:370, 2007.
- D. WEI et S. RAHMAN : Structural reliability analysis by univariate decomposition and numerical integration. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 22(1):27–38, 2007.
- L. A. ZADEH : Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3):338 – 353, 1965.
- Y. ZHENG et P. K. DAS : Improved response surface method and its application to stiffened plate reliability analysis. *Engineering Structures*, 22(5):544–551, mai 2000. ISSN 0141-0296.



## Approche probabiliste pour la justification par analyse des structures spatiales

La méthodologie actuelle de dimensionnement des structures spatiales est basée sur une approche déterministe. Cela signifie que, lors des analyses prédictives, les valeurs numériques des paramètres d'entrée sont fixes et des coefficients de sécurité sont pris en compte pour couvrir les incertitudes inhérentes à la conception et la fabrication des composants. La problématique de cette démarche est qu'elle tend à être trop conservatrice à cause de l'accumulation des marges de sécurité prises aux différentes étapes de la procédure de dimensionnement. C'est dans le but de limiter cette difficulté qu'une approche probabiliste est explorée. L'approche probabiliste, telle qu'elle est menée dans ce travail, consiste à considérer que les paramètres d'entrée du modèle mécanique sont des réalisations de variables aléatoires. Dans le thème général du traitement et de la propagation des incertitudes, on s'intéresse plus particulièrement à la fiabilité (calcul de la probabilité de défaillance) et à l'analyse de sensibilité. Pour cela, la méthodologie proposée s'appuie sur les surfaces de réponse polynomiale du second ordre. Le principe est de remplacer le modèle mécanique de référence (modèle éléments finis), coûteux en temps de calcul, par un modèle analytique simple et rapide à évaluer. Les outils abordés concernent la construction des surfaces de réponse (sélection des termes influents), l'estimation de l'erreur d'approximation (pénalisation, simulation) et la validation de l'estimation d'une probabilité de défaillance. Une méthode adaptative est également proposée pour augmenter la confiance que l'on a du résultat. Une application sur l'étude du comportement statique d'un satellite (TARANIS) est ensuite présentée. Le modèle, qui possède initialement un grand nombre de variables d'entrée et de réponses, est traité suivant une démarche qui consiste à rechercher progressivement les variables les plus influentes et les réponses les plus critiques. Dans un second temps, on s'intéresse au comportement dynamique en basses fréquences et au calcul des réponses en fréquence. Ces dernières étant fortement non-linéaires par rapport aux paramètres d'entrée, les surfaces de réponse sont construites sur des grandeurs intermédiaires. Plusieurs méthodes sont appliquées sur le modèle TARANIS et comparées à des calculs directs.

**Mots-Clés** : propagation d'incertitude, éléments finis, surface de réponse, regression *stepwise*, validation croisée, *bootstrap*, méthode adaptative, dynamique des structures.

### Probabilistic approach to justify structural spacecraft analysis

The current methodology in structural spacecraft sizing is based on deterministic approach. It means that, during predictive analysis, numerical values of input parameter are fixed and safety coefficient are taken into account in order to cover inherent uncertainty of manufacturing components. Due to accumulation of safety margins of each stage of sizing process, this method has the problem to be too much conservative. That is why a probabilistic approach is explored in the current thesis. The probabilistic approach, as done here, assumes that input parameters are realization of random variables. In the topic of treatment and propagation of uncertainty, one is particularly interested in reliability (calculation of the probability of failure) and sensitivity analysis. The proposed methodology is based on second order polynomial response surface. It consists in replacing the true mechanical model (finite element model), very time consuming, with a simpler model, fast to evaluate. Different used tools are related to response surface construction (selection of important terms), approximation error assessment (penalty, simulation) and results validation (probability of failure). An adaptive method is also proposed in order to augment the confidence of provided results. An application on the static behaviour of a spacecraft (TARANIS) is then presented. The model which initially has a lot of variables and responses to study, is progressively simplified in order to select the most influent variables and most critical responses. In a second part, the dynamical behaviour in low frequencies is studied and responses of interest are frequency response functions. As these latter are strongly non-linear with respect to input parameters, response surfaces are built up on intermediate responses. Several methods are applied on the model of TARANIS and are compared with direct calculation.

**Keywords** : uncertainty propagation, finite element, response surface, stepwise regression, cross validation, bootstrap, adaptive method, structural dynamics.